

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Modelo de Interfaces Coesivas aplicado à Fratura de Concretos de  
Ultra-Alto Desempenho Reforçados com Fibras**

**Kellyn Maressa Pufal**

Porto Alegre

2020



KELLYN MARESSA PUFAL

MODELO DE INTERFACES COESIVAS APLICADO À FRATURA DE  
CONCRETOS DE ULTRA-ALTO DESEMPENHO REFORÇADOS COM  
FIBRAS

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil da  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como parte dos requisitos para obtenção do  
título de mestre em Engenharia

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Bittencourt

Porto Alegre

2020

**KELLYN MARESSA PUFAL**

**MODELO DE INTERFACES COESIVAS APLICADO À FRATURA EM  
CONCRETOS DE ULTRA-ALTO DESEMPENHO REFORÇADOS COM  
FIBRAS**

Essa Dissertação de mestrado foi julgada adequada para obtenção do título de Mestre em Engenharia, Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 20 de outubro de 2020

**Prof. Eduardo Bittencourt**

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Orientador

**Prof. PhD Nilo Cesar Consoli**

PhD pela Concordia University  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Américo Campos Filho (PPGEC/UFRGS)**

Dr. em Engenharia Civil pela Universidade de São Paulo

**Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco (PPGEC/UFRGS)**

Ph.D. em Engenharia Civil pela Pennsylvania State University

**Prof. Ignacio Iturrioz (PROMEC/UFRGS)**

Dr. em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à Deus por ter me guiado até aqui e ajudado na minha vida acadêmica.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Eduardo Bittencourt, pela orientação e disponibilidade em auxiliar nas diversas dúvidas e contratemplos que surgiram no decorrer do trabalho.

Aos professores Américo Campos Filho, Alexandre Rodrigues Pacheco e Ignacio Iturrioz pelas sugestões para melhoria deste trabalho.

Aos meus colegas que se tornaram minha família em Porto Alegre.

Ao CEMACOM pelo companheirismo.

À toda minha família por me incentivar a fazer o mestrado.

Ao meu namorado Felipe R Dutra e as amigas (Neusa, Raiza e Viviane) por estarem sempre presentes nas horas difíceis e nas horas boas.

À Rosangel Rojas de Yopez por fornecer os dados para desenvolvimento dessa pesquisa, pela solicitude em tirar dúvidas e pela amizade.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro que possibilitou o desenvolvimento dessa pesquisa.

## RESUMO

PUFAL, K. M. Modelo de Interfaces Coesivas Aplicado à Fratura Em Concretos de Ultra-Alto Desempenho Reforçados com Fibras. 2020. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil-Estruturas) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil (PPGEC), UFRGS, Porto Alegre.

Esta dissertação estudou diferentes formulações para determinação da melhor relação coesiva de Concretos de Ultra Alto Desempenho Reforçados com Fibras, tendo como objetivo principal modelar computacionalmente os ensaios de flexão a três pontos. A importância desse estudo se justifica pelo fato de que este novo tipo de concreto possui um processo de fratura altamente não linear devido ao efeito de ponteamto por fibras. A não linearidade do processo de fratura nesses concretos especiais foi representada utilizando uma metodologia discreta de elementos finitos: interfaces coesivas; implementada no programa de elementos finitos METAFOR. Foram estudados dois traços de Concretos de Ultra Alto Desempenho Reforçados com Fibras, um traço com 1% (volume) de mini fibras de aço e o outro com 2%(volume); destaca-se ainda que foram utilizados rejeitos industriais com substitutos parciais do cimento. Os resultados das simulações numéricas foram comparados com dados experimentais para verificação da qualidade dos ajustes. Obteve-se uma alta tenacidade para os concretos estudados. A análise inversa revelou que os concretos em estudo não possuem pseudo endurecimento por deformação. Dentre os três modelos coesivos adotados, verificou-se que os melhores ajustes das curvas força x flecha numéricas foram obtidos com as relações da análise inversa. Fazendo um estudo da concentração de tensões encontraram-se tensões trativas superiores nas vigas com 2% em volume de fibras em diferentes estágios de flexão; e para grandes aberturas de trincas, aproximadamente 7,5mm ainda existe uma grande concentração de forças trativas na ponta da trinca.

Palavras-chave: interfaces coesivas; Concretos de Ultra-Alto Desempenho Reforçados com Fibras – CUADRF; relações coesivas.

## ABSTRACT

PUFAL, K. M. Cohesive Interface Model Applied to Fracture in Ultra-High Performance Fiber Reinforced Concretes. 2020. Thesis (Master in Civil Engineering – Structures) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil (PPGEC), UFRGS, Porto Alegre.

This thesis studied different formulations for determining the best cohesive relation for Ultra-High Performance Fiber Reinforced Concrete. The main objective was to computationally model the three point bending tests. The significance of this study is the fact that this new kind of concrete has a highly non-linear fracture process due to the fiber bridging effect. The non-linearity of the fracture process in these special concretes was represented using the discrete Finite Elements methodology: cohesive interfaces; implemented in the program METAFOR. Two mixes of Ultra-High Performance Fiber Reinforced Concrete were under study, one mix with 1%(Vol) of mini steel fibers and the other with 2%(Vol); another important fact is that in the mixes were used industrial rejects as partial substitutes of cement. The results of the numerical were compared with the experimental data to verify the quality of the adjustments. The inverse analysis showed that the concretes in study do not have the strain hardening behavior. Among the three cohesive models adopted, it was observed that the best adjust for the deflection force curves were obtained with the cohesive relations obtained from the inverse analysis. While doing a study of the tensions' concentration, there were found larger tensile tensions on the 2% beams in different stages of flexion; and for large crack mouth openings, approximately 7.5mm, there still is a large concentration of tensions on the tip of the crack.

Keywords: cohesive interfaces; Ultra High-Performance Fiber-Reinforced Concrete – UHPFRC; cohesive laws.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 - Comportamento dos materiais frágeis (a), dúcteis (b), quase-frágeis (c) e com endurecimento por deformação na tração. Fonte: Adaptado de BORGES (2017). .....	19
Figura 2.2 - Exemplos de classificação de fibras de aço quanto à forma. Fonte: Adaptado de Naaman (apud BRANDT, 2008). .....	20
Figura 2.3 – Exemplo experimental de viga com fibras de aço após falha. Fonte: Adaptado de Yoo et al. (2013). .....	21
Figura 2.4 - Comportamento típico de Carga X Deformação para CRF com amolecimento (a) e endurecimento (b) por deformação. Fonte: Prisco e outros (2009). .....	23
Figura 2.5- Comparativo de diferentes comportamentos dos CRF. Fonte: Adaptado de JSCE (2008). .....	23
Figura 2.6- Classificação por desempenho do CRF. Fonte: Adaptado de Wille et al. (2014). .....	24
Figura 2.7 -Digrama que ilustra definição simplificada do CUADRF como combinação de três concretos especiais: CRF; CAD; CAA; resultando no CUADRF. Fonte: Adaptado de Azmee e Shafiq (2018). .....	26
Figura 2.8 - Ponte em Jakway Park, Buchanan County, IA, EUA. Fonte: FHWA (2019). .....	31
Figura 2.9 - Detalhe da seção usada na ponte da figura 2.8. Fonte: FHWA (2019). .....	31
Figura 2.10 - Ponte de pedestres no Parque Seonyudo, Seul - Coreia do Sul. Fonte: Google 2019. .....	31
Figura 2.11–Ponte de Pedestres, Sherbrooke, Quebec, Canada. Fonte: FHWA (2019) .....	32
Figura 2.12 - Exemplo de estacas ensaios experimentais com estacas de CUADRF. Fonte: Iowa State University apud FHWA (2019). .....	32
Figura 2.13–Detalhe da ligação de tabuleiros pré-moldados feitas em pontes e/ou viadutos. Fonte: FHWA (2019). .....	32
Figura 2.14 – Representação do modelo de fissuras discretas. Fonte: Silva Neto 2015. ....	35
Figura 2.15– Tensões coesivas na ponta da trinca. Fonte: Machado 2007. ....	36
Figura 2.16 – Lei coesiva linear de Hillerborg et al. (1976). .....	37
Figura 2.17 – Representação do modelo de fissuras distribuída. Fonte: Silva Neto 2015. ...	38
Figura 2.18 – Lei coesiva bilinear de Bolzon et al. (1997). Fonte: Bolzon et al. (1997). .....	39
Figura 2.19 – Lei coesiva trilinear de Kang et al. (2010). Fonte: Kang et al. (2010). .....	40
Figura 2.20 – Lei coesiva bilinear de Yoo et al. (2013). Fonte: Yoo et al. (2013). .....	41
Figura 2.21 – Lei coesiva trilinear de Yoo et al. (2014). Fonte: Yoo et al.(2014). .....	41
Figura 3.1- Exemplo de Curvas Força Vertical x Flecha para Viga 5 com 2% em volume de fibras(V5F2) e para Viga 3 com 1% em volume de fibras(V3F1).Fonte: Rojas(2019). .....	43
Figura 3.2–Situação da viga de CUADRF após ruptura. Fonte: Rojas (2019). .....	45

Figura 3.3 – Esquema de ensaio de flexão a três pontos. Fonte: Denneman et al. (2011)...	46
Figura 3.4 – Exemplo de gráfico para obtenção de A. Fonte: Denneman et al. (2011).....	47
Figura 3.5 – Corpo em estudo. Fonte: Silva Neto 2015.....	47
Figura 3.6 – Esquemática do elemento de interface. Fonte: Silva Neto 2015.....	49
Figura 3.7 - Lei coesiva proposta por Denneman et al. com parte linear e exponencial. Fonte: Denemann et al. (2011). .....	52
Figura 3.8. Esquemática das forças que agem no centro da viga, enfatizando a diferença das forças que agem na parte com fissura (tendo subíndice f) e sem fissura (esforços com subíndice b). Fonte: Rojas (2019). .....	53
Figura 3.9–Curva experimental carga x abertura da trinca (w), para viga V5F2. Fonte: Rojas 2019. ....	55
Figura 3.10– Modificação da origem da curva da Figura 3.9 para $w_0$ . Fonte: Rojas 2019 ...	55
Figura 3.11 – Fluxograma resumindo o procedimento da análise inversa da AFGC para ensaios de flexão em vigas a três pontos. ....	58
Figura 4.1 – Ensaio de tração direta tipo “dog bone”. Fonte: ROJAS (2019).....	62
Figura 4.2- Dimensões das vigas para ensaio de .....	62
Figura 4.3 - Detalhe da Figura 4.2 para destacar .....	63
Figura 4.4 – Resultados Experimentais para vigas com 1% de fibras. Sendo que a nomenclatura adotada V3F1 se refere a viga número 1(V3) com 1% de fibras(F1). Fonte: Rojas (2019). .....	63
Figura 4.5 - Curva Força x Deslocamento para Vigas V1F2, V2F2, V2F3, V4F4 e V5F2. Sendo que V1F2 se refere a viga número 1(V1) com 2% de fibras(F2). Fonte: Rojas (2019). .....	64
Figura 4.6 – Malha utilizada com dimensões em milímetros. ....	65
Figura 4.7 – Detalhe da discretização no centro da viga. Dimensões em milímetros. ....	66
Figura 4.8–Comparação de resultados numéricos para vigas de 1% usando formulação de Xu e Needleman (1994).....	67
Figura 4.9–Comparação de resultados numéricos para vigas de 2% usando formulação de Xu e Needleman (1994). .....	67
Figura 4.10 – Resultados para concreto com 1% de fibra utilizando as fórmulas de Denneman et al. (2011). .....	69
Figura 4.11 – Resultados para concreto com 1% de fibras usando fórmulas modificadas de Denneman et at. (2011) com parâmetro D1.....	70
Figura 4.12 - Detalhe da Figura 4.11 mostrando início do gráfico .....	71
Figura 4.13 - Resultados para concreto com 2% de fibra utilizando.....	71
Figura 4.14 - Detalhe da Figura 4.13 mostrando início do gráfico. ....	72

Figura 4.15 – Gráficos de força (Carga) por abertura normal da trinca (w) para vigas V1F1, V2F1 e V3F1 com 1% de fibras de mini aço. ....	73
Figura 4.16 - Gráficos de força (Carga) por abertura normal da trinca (w) para vigas V1F2, V2F2, V3F2, V4F2 e V5F2 com 2% de fibras de mini aço. ....	73
Figura 4.17 – Relações coesivas, obtidas da análise inversa, para vigas com 1% de fibras de mini-aço: V1F1, V2F1 e V3F1.....	74
Figura 4.18 – Relações coesivas, obtidas da análise inversa, para vigas com 2% de fibras de mini-aço: V1F2, V2F2, V3F2, V4F2 e V5F2. ....	75
Figura 4.19 – Comparação relações coesivastrilineare da análise inversa da viga V1F1.....	76
Figura 4.20–Comparativo dos resultados numéricos para análise paramétrica variando $\sigma_p$ para viga V1F1. ....	77
Figura 4.21– Detalhe da Figura 4.20, referente ao estudo paramétrico de $\sigma_p$ para viga V1F1. ....	77
Figura 4.22–Comparativo resultados da análise paramétrica para modelo trilinear modificando valores de $w_{el}$ para $\sigma_p$ fixo em 9,07MPa para viga V1F1.....	78
Figura 4.23–Detalhe da Figura 4.19 para mostrar variação da parte linear dos gráficos, resultados referentes a viga V1F1. ....	78
Figura 4.24–Comparativo entre curvas carga (kN) por flecha(mm) experimental da viga V2F1 e resultados numéricos da variação do parâmetro $\sigma_p$ .....	79
Figura 4.25 - Detalhe Figura 4.24, referente a viga V2F1. ....	80
Figura 4.26–Comparativo resultados numéricos e experimentais das curvas carga por deformação com a variação do $\sigma_p$ para a viga V3F1. ....	81
Figura 4.27 - Detalhe da Figura 4.26, referente a viga V3F1.....	81
Figura 4.28 –Comparação entre as relações coesivas quadrilinear e da análise inversa para viga V1F1. ....	82
Figura 4.29 –Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V1F1. ....	83
Figura 4.30– Detalhe da Figura 4.29, referente a aproximação quadrilinear para viga V1F1. ....	83
Figura 4.31– Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V2F1. ....	84
Figura 4.32 – Detalhe Figura 4.31, referente a aproximação quadrilinear para viga V2F1. ...	84
Figura 4.33 – Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V3F1. ....	85
Figura 4.34 – Detalhe da Figura 4.33, referente a aproximação quadrilinear para a viga V3F1.....	85
Figura 4.35 – Comparativo entre a lei coesiva quadrilinear e o resultado da análise inversa para viga V1F2. ....	86

Figura 4.36 – Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V1F2 .....	86
Figura 4.37 - Detalhe da Figura 4.36, referente a aproximação quadrilinear para viga V1F2. .....	87
Figura 4.38 – Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V2F2 .....	88
Figura 4.39 - Detalhe da Figura 4.38, referente a aproximação quadrilinear para a viga V2F2.....	88
Figura 4.40 – Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V3F2. ....	89
Figura 4.41 - Detalhe da Figura 4.40, referente a aproximação quadrilinear para a viga V3F2.....	90
Figura 4.42 – Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V4F2. ....	91
Figura 4.43 - Detalhe da Figura 4.42, referente a aproximação quadrilinear da viga V4F2. .	91
Figura 4.44 – Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V5F2. ....	92
Figura 4.45 - Detalhe Figura 4.44, referente a aproximação quadrilinear para viga V5F2. ...	93
Figura 4.46 – Comparação entre relações coesivas polilinear e o resultado da análise inversa da viga V1F1. ....	94
Figura 4.47 – Resultado para aproximação polilinear para viga V1F1. ....	95
Figura 4.48 – Detalhe da Figura 4.47, referente a aproximação polilinear para viga V1F1. .	95
Figura 4.49 – Resultado para aproximação polilinear para viga V2F1. ....	96
Figura 4.50 - Detalhe da Figura 4.49, referente a aproximação polilinear para viga V2F1 ...	97
Figura 4.51 – Resultado para aproximação polilinear para viga V3F1. ....	98
Figura 4.52 - Detalhe da Figura 4.51, referente a aproximação polilinear para viga V3F1 ...	98
Figura 4.53 - Comparativo Lei coesiva obtida da análise inversa com a lei polilinear usada para viga V1F2. ....	99
Figura 4.54 – Resultado para aproximação polilinear para viga V1F2. ....	100
Figura 4.55 - Detalhe da Figura 4.54, referente a aproximação polilinear para viga V1F2. .	100
Figura 4.56 – Resultado para aproximação polilinear para viga V2F2. ....	101
Figura 4.57 - Detalhe da Figura 4.56, referente a aproximação polilinear para viga V2F2. .	102
Figura 4.58 – Resultado para aproximação polilinear para viga V3F2. ....	103
Figura 4.59 – Detalhe da Figura 4.58, referente a aproximação polilinear para viga V3F2. .	103
Figura 4.60 – Resultado para aproximação polilinear para viga V4F2. ....	104
Figura 4.61 – Detalhe da Figura 4.60, referente a aproximação polilinear para viga V4F2. .	105
Figura 4.62 – Resultado para aproximação polilinear para viga V5F2. ....	106
Figura 4.63 - Detalhe da Figura 4.62, referente a aproximação polilinear para viga V5F2. .	106
Figura 4.64 – Distribuição de tensões horizontais trativas $\sigma_{xx}$ em MPa, para um deslocamento prescrito de 0,2 mm. (a) caso V3F1 e (b) caso V2F2. ....	108

Figura 4.65 – Distribuição de tensões horizontais $\sigma_{xx}$ trativas em MPa, para um deslocamento prescrito de 1 mm. (a) caso V3F1 e (b) caso V2F2.....	109
Figura 4.66 – Distribuição de tensões horizontais $\sigma_{xx}$ trativas em MPa, para um deslocamento prescrito de 8,4 mm. (a) caso V3F1 e (b) caso V2F2.....	110

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2-1 - Resumo das condições de classificação apresentadas na figura 2.6.....	25
Tabela 2-2- Comparativo entre propriedades de concreto convencional e CUAD.....	27
Tabela 4-1 - Composição dos concretos com mini fibras de aço .....	61
Tabela 4-2 - Resumo das propriedades elásticas dos concretos em estudo.....	61
Tabela 4-3 – Tenacidade para vigas com 1% de fibras.....	64
Tabela 4-4 - Tenacidade para vigas com 2% de fibras .....	65
Tabela 4-5 – Comparação entre força máxima experimental e numérica.....	68
Tabela 4-6 - Comparação entre força máxima experimental e numérica. ....	68
Tabela 4-7 - Pontos utilizados para fazer relação coesiva tri linear da viga V1F1.....	76
Tabela 4-8- Pontos utilizados para fazer relação coesiva trilinear da viga V2F1.....	79
Tabela 4-9 - Pontos utilizados para fazer relação coesiva tri linear da viga V3F1.....	80
Tabela 4-10 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V1F1.....	82
Tabela 4-11 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V2F1.....	83
Tabela 4-12 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V3F1.....	84
Tabela 4-13 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V1F2.....	86
Tabela 4-14 - Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V2F2.....	87
Tabela 4-15 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V3F2.....	89
Tabela 4-16 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V4F2.....	90
Tabela 4-17 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V5F2.....	92
Tabela 4-18 – Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V1F1.....	94
Tabela 4-19 – Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V2F1.....	96
Tabela 4-20 – Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V3F1.....	97
Tabela 4-21 - Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V1F2.....	99
Tabela 4-22 - Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V2F2.....	101
Tabela 4-23 - Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V3F2.....	102
Tabela 4-24 - Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V4F2.....	104
Tabela 4-25– Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V5F2.....	105

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>17</b>
1.1	MOTIVAÇÃO.....	17
1.2	OBJETIVOS E DELIMITAÇÕES .....	17
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE CONCRETOS ESPECIAIS.....</b>	<b>19</b>
2.1	CONCRETOS REFORÇADOS COM FIBRAS.....	19
2.1.1	Influência das Fibras .....	20
2.1.2	Influência da orientação das Fibras .....	20
2.1.3	Aderência.....	21
2.1.4	Características mecânicas dos CRF .....	22
2.1.5	Classificação de CRF por aplicação.....	24
2.2	CONCRETOS DE ULTRA-ALTO DESEMPENHO REFORÇADOS COM FIBRAS – CUADRF .....	26
2.2.1	Definição de CUADRF .....	26
2.2.2	Traço Típico.....	27
2.2.3	Resistência à Compressão .....	27
2.2.4	Resistência à tração .....	28
2.2.5	Coeficiente de Poisson .....	28
2.2.6	Energia de Fratura .....	28
2.2.7	Comprimento Característico .....	29
2.3	APLICAÇÕES DO CUADRF.....	30
2.4	NORMASE RECOMENDAÇÕES para concretos COM FIBRAS .....	33
2.4.1	Projeto com CRF .....	33
2.4.2	Cálculo da Energia de Fratura de Concretos .....	33
2.5	MODELAGEM NUMÉRICA DE FRATURA EM CONCRETOS .....	35
2.5.1	Modelos de fissuras discretas .....	35
2.5.2	Modelos de fissuras distribuídas .....	37
2.5.3	Modelos de fissuras incorporadas.....	38
2.5.4	Aplicação de Modelos Discretos-Coesivos para Concretos .....	39

<b>3</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>43</b>
3.1	ENERGIA DE FRATURA.....	44
3.2	INTERFACES COESIVAS.....	47
3.3	MODELOS COESIVOS UTILIZADOS PARA CUADRF .....	49
3.2.1	Xu e Needleman(1994).....	49
3.2.2	Denneman et al. (2011) .....	51
3.2.3	Análise Inversa .....	53
<b>4</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>60</b>
4.1	CARACTERIZAÇÃO GERAL DOS EXPERIMENTOS DE ROJAS (2019).....	60
4.1.1	Caracterização do Material CUADRF.....	60
4.1.2	Ensaio de Flexão em três pontos.....	62
4.2	MODELOS NUMÉRICOS.....	65
4.2.1	Xu e Needleman (1994).....	66
4.2.2	Denneman et al. (2011) .....	68
4.2.3	Análise Inversa .....	73
4.2.4	Relação Trilinear.....	75
4.2.5	Formulação Quadrilinear.....	81
4.2.6	Relação Polilinear .....	93
4.2.7	Distribuição das Tensões.....	107
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>111</b>
5.1	CONCLUSÕES .....	111
5.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	112
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>113</b>
	<b>APÊNDICE.....</b>	<b>119</b>



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

O concreto é um material de comportamento quase-frágil. O comportamento frágil dos materiais faz com que a ruptura aconteça de forma catastrófica, o que sempre deve ser evitado, pois isso poderia causar acidentes com perdas materiais e/ou imateriais. Para contornar o problema do comportamento muito próximo da ruptura frágil do concreto convencional costuma-se usar esse concreto associado com um material de comportamento dúctil (por exemplo o aço). Essa combinação de materiais eleva a resistência à tração e cisalhamento dos elementos estruturais.

A forma mais popular de uso combinado de concreto e aço é o Concreto Armado. Porém o uso do concreto convencional com armaduras não é suficiente para obter um desempenho mecânico muito elevado. Para obtenção de altíssimas resistências à compressão foram desenvolvidos os Concretos de Ultra-Alto Desempenho. Em uma publicação de um congresso internacional específico para Concretos de Ultra-Alto Desempenho, Schmidt et al. (2012) relatam que um concreto feito com pó reativo atingiu uma resistência à compressão média de 800MPa. Concretos de Ultra-Alto Desempenho (CUAD) que já vêm sendo usados em obras de grande escala chegam a suportar entre 150 a 250 MPa de resistência à compressão característica.

Como o concreto é um material amplamente utilizado em elementos estruturais, a melhoria de seu desempenho é também benéfica ao meio ambiente, pois se pode reduzir a quantidade necessária de material que garante o bom desempenho estrutural de obras civis.

O concreto convencional é um material compósito e seu processo de fratura é um fenômeno complexo e não linear que vem sendo estudado por especialistas nas últimas décadas. Os Concretos de Ultra Alto Desempenho Reforçados com Fibras (CUADRF) são materiais mais recentes e que ainda estão sendo desenvolvidos. Por isso, existe grande necessidade de melhor compreensão dos processos de fratura que ocorrem neles para prever o desempenho de estruturas executadas com esses materiais.

## 1.2 OBJETIVOS E DELIMITAÇÕES

Neste trabalho será estudado o comportamento coesivo em concretos de Alto Desempenho Reforçados com Fibras desenvolvidos por Rojas (2019), nos quais foi feita uma substituição parcial do cimento por materiais sustentáveis (rejeitos industriais nacionais). Dentre os

concretos desenvolvidos por Rojas (2019) neste trabalho apenas são estudados os concretos com mini fibras de aço. Esses concretos têm traços semelhantes e possuem apenas diferentes percentuais de fibras (1% e 2% do volume).

Como objetivo principal busca-se simular e modelar computacionalmente o ensaio de tenacidade dos concretos estudados utilizando o METAFOR(PONTHOT,1995), que é um código de elementos finitos. É utilizado o método das interfaces coesivas para modelar a fratura, sendo que esse método foi inicialmente implementado no por Fedrigo em 2001.

Visando concluir tal objetivo foram tomados também os seguintes objetivos específicos:

- Determinação da Tenacidade nos concretos estudados;
- Proposição de modelos para a relação coesiva, para cada viga estudada;
- Estudar a influência dos teores de fibras na relação coesiva.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE CONCRETOS ESPECIAIS

O concreto convencional é um material de comportamento quase-frágil. Esse comportamento seria algo intermediário entre o comportamento dúctil e frágil. A Figura 2.1 mostra o comportamento de três classes de materiais na tração. As classes seriam: materiais frágeis (Figura 2.1(a)) que possuem ruptura brusca, dúcteis com um patamar de escoamento antes da falha (Figura 2.1(b)), e quase-frágeis (Figura 2.1(c)).

Para contornar o problema da baixa resistência à tração e corte do concreto convencional é comum se fazer o uso conjunto de concreto e barras de aço, o conhecido Concreto Armado. Nessa tecnologia o concreto é responsável por resistir a compressão; e o aço deve resistir à tração e ao cisalhamento.

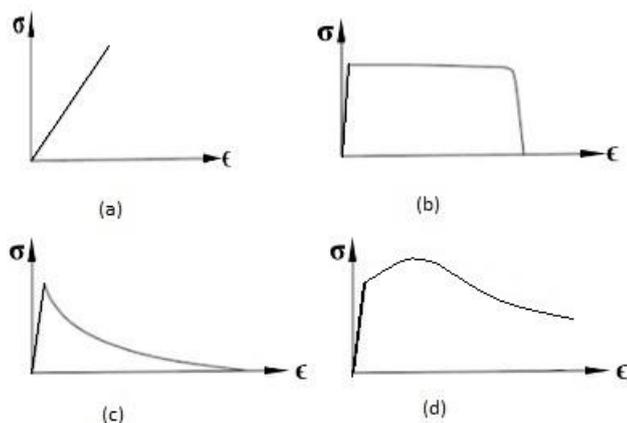


Figura 2.1 - Comportamento dos materiais frágeis (a), dúcteis (b), quase-frágeis (c) e com endurecimento por deformação na tração. Fonte: Adaptado de BORGES (2017).

Devido ao objetivo principal dessa dissertação primeiramente será abordado o comportamento dos Concretos Reforçados com Fibras (CRF) e posteriormente dos Concretos de Ultra-Alto Desempenho Reforçados com Fibras (CUADRF). Os CUADRF podem apresentar um comportamento mais dúctil que os outros concretos, apresentando uma região endurecimento por deformação, Figura 2.1(d). Esse comportamento será mais discutido na seção 2.2.

### 2.1 CONCRETOS REFORÇADOS COM FIBRAS

Com o tempo surgiram demandas que necessitavam de melhor desempenho mecânico do concreto na construção civil, algumas que o concreto armado simples não foi capaz de

atender. Então surgiram outras tecnologias no concreto como o Concreto Protendido, CRF, Concretos de Alto Desempenho (CAD), CUADRF etc. Nesta seção serão abordadas características importantes dos CRF: como a influência das fibras, da orientação das fibras, aderência, características mecânicas e classificação desses concretos.

### 2.1.1 Influência das Fibras

As fibras utilizadas nos CRF podem ser de diversos materiais, com diferentes percentuais de fibras e com combinação de diferentes fibras, influenciando na resistência a tração, diminuição de fissuras de retração, resistência ao fogo e tenacidade do concreto. Brandt (apud BRANDT, 2008) cita alguns tipos de fibras: fibras de aço, fibras de vidro, fibras sintéticas (polipropileno, PVA, etc.) e carbono. Esses exemplos se referem a uma classificação das fibras por tipo de material, mas existem outras classificações.

As fibras de aço, por exemplo, têm uma classificação por tamanho (micro fibras e macro fibras) e por forma. Os tipos de formato das fibras de aço podem ser: onduladas, com ganchos, achatadas nas pontas, entalhadas, poligonal torcida, conforme pode ser visto na Figura 2.2.

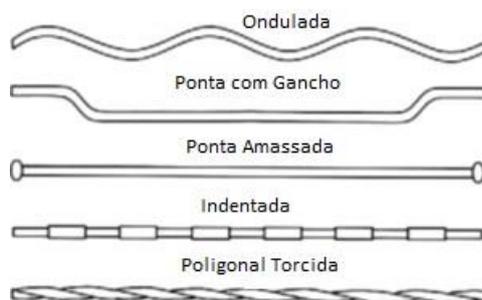


Figura 2.2 - Exemplos de classificação de fibras de aço quanto à forma. Fonte: Adaptado de Naaman (apud BRANDT, 2008).

### 2.1.2 Influência da orientação das Fibras

Outro aspecto muito estudado em CRF é a influência da orientação das fibras. A capacidade de aumento de resistência à tração e diminuição da formação de fissuras é prejudicada, caso as fibras não estiverem distribuídas homoganeamente. Outra configuração indesejada são fibras posicionadas perpendicularmente à direção de aplicação da tração, pois dessa maneira será pequeno o aumento da resistência à tração.

Por conta das problemáticas supracitadas existem normativas para os testes de caracterização desses concretos que definem a forma de lançamento de concreto e metodologia de amostragem (devido a efeitos de borda), com o intuito de obter a maior quantidade de fibras em uma direção paralela à solicitação de tração, na figura 2.3 tem-se um exemplo onde se vê as fibras com uma boa orientação.



Figura 2.3 – Exemplo experimental de viga com fibras de aço após falha. Fonte: Adaptado de Yoo et al. (2013).

### 2.1.3 Aderência

Os CRF costumam ser usados com armaduras de aço. Quando se trabalha com concreto armado é importante saber qual a aderência entre a matriz desses concretos e as barras de aço. Segundo Jucá (2020) a tensão última de aderência é influenciada por três tipos de aderências: química (adesão) resultante do processo de hidratação dos aglomerantes, atrito (dependente da rugosidade da superfície dos materiais) e mecânica (proveniente da geometria do reforço).

O arrancamento das fibras é um dos principais mecanismos que resultam na alta tenacidade dos CRF (ISLA et al. 2015). Para determinar a tensão de aderência existem muitos estudos feitos com ensaios de arrancamento *pull-out*. Alguns estudos abordam o arrancamento individual das fibras (Isla et al. (2015) e Cunha et al. (2010)) e outros que avaliam o comportamento de arrancamento de barras do concreto armado (Araújo et al. (2013); Yoo et al. (2014<sup>a</sup>) e Jucá (2020)).

Isla et al. (2015) investigaram o arrancamento individual de uma fibra, fazendo testes com diferentes fibras e diferentes traços de concreto. Eles descobriram que a inclinação da fibra afetou a resistência de arrancamento e pode até levar à quebra da fibra.

Araújo et al. (2013) estudaram a influência das fibras na aderência entre aço e concreto, por isso fizeram testes de *pull-out* com barras de aço. Com seus ensaios experimentais e

modelagem numérica evidenciaram que as fibras pouco influenciam na tensão de aderência entre a barra de aço e o concreto, comparando com um concreto do tipo auto adensável.

Yoo et al. (2014<sup>a</sup>) estudaram CUADRF com diferentes percentuais em volume de mini fibras de aço (1,2,3 e 4%) e verificaram que até 3% de fibras o incremento de fibras resulta em aumento da aderência devido à melhoria da resistência à compressão.

Jucá (2020) com seus ensaios experimentais conclui que, para corpos de prova prismáticos com moldagem na horizontal, houve aumentos de carga axial na primeira fissura de até 106,9% em relação a misturas de concreto autoadensável sem fibras.

#### 2.1.4 Características mecânicas dos CRF

O CRF é um material compósito que possui uma resistência residual na tração (após o início da propagação de fissuras) maior que o Concreto Convencional. Para aumentar a tenacidade do concreto para aplicações estruturais, fibras de alto módulo de elasticidade (**E**) podem substituir, parcialmente ou completamente, a armadura convencional. Outras fibras geralmente com menores módulos de elasticidade e menores dimensões (comprimento de poucos milímetros e diâmetro de poucos microns) podem ser usadas para reduzir trincas de retração e incrementar a resistência ao fogo. (PRISCO et al, 2009).

Outra característica peculiar dos CRFs mencionada por Prisco et al. (2009) é o efeito de ponteamto por fibras (*fiber bridging effect*). Esse mecanismo tem grande influência no comportamento de amolecimento desses concretos, e para o caso de fibras de aço é possível aumentar as resistências à tração e ao cisalhamento nos CRF, devido ao alto módulo de elasticidade de aço. A figura 2.3 ilustra o efeito de ponteamto por fibras após formação da macro trinca.

Dependendo da quantidade e do material das fibras o concreto pode apresentar amolecimento ou endurecimento por deformação na tração, conforme ilustrado na Figura 2.4. Para os concretos mais simples se tem o caso de amolecimento por deformação (Figura 2.4a), sendo que esse tem como característica a formação de uma macro trinca na falha. O segundo caso, Figura 2.4 (b), é característico de concretos de Ultra-Alto Desempenho Reforçados com Fibras, nesse caso há o surgimento de múltiplas micro-trincas antes do aparecimento da macro- trinca e ruptura.

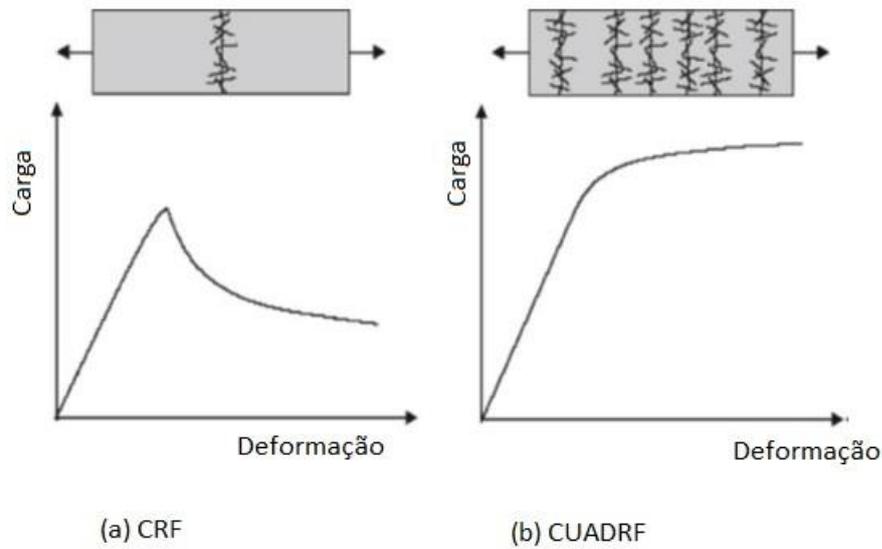


Figura 2.4 - Comportamento típico de Carga X Deformação para CRF com amolecimento (a) e endurecimento (b) por deformação. Fonte: Prisco e outros (2009).

A *Japan Society of Civil Engineers* (JSCE, 2008) em suas recomendações para CUADRF faz um comparativo geral dos possíveis comportamentos do concreto. A Figura 2.5 retirada da JSCE (2008) mostra de forma geral os possíveis comportamentos de amolecimento e endurecimento nos CRF.

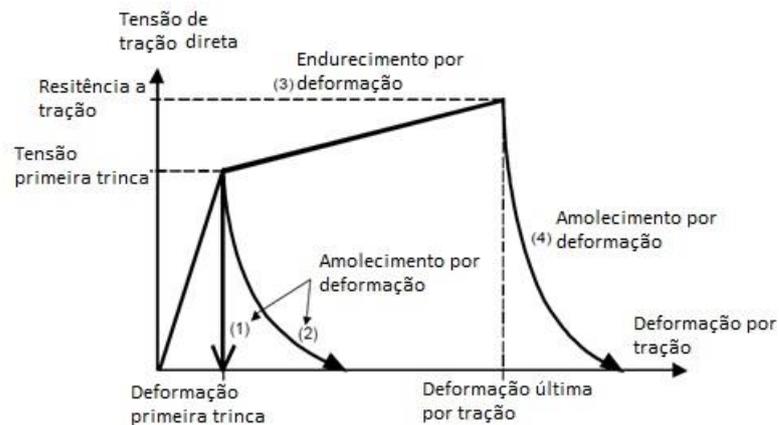


Figura 2.5- Comparativo de diferentes comportamentos dos CRF. Fonte: Adaptado de JSCE (2008).

### 2.1.5 Classificação de CRF por aplicação

Naaman et al. (2006), autores reconhecidos em pesquisas sobre CUAD, propuseram uma classificação para os CRF em quatro níveis com base em suas aplicações, sendo eles: (1) Controle de trincas; (2) Endurecimento em flexão; (3) Endurecimentos em deformação e (4) Alta absorção de energia. Os gráficos típicos do comportamento dos CRF na tração e flexão estão na Figura 2.6.

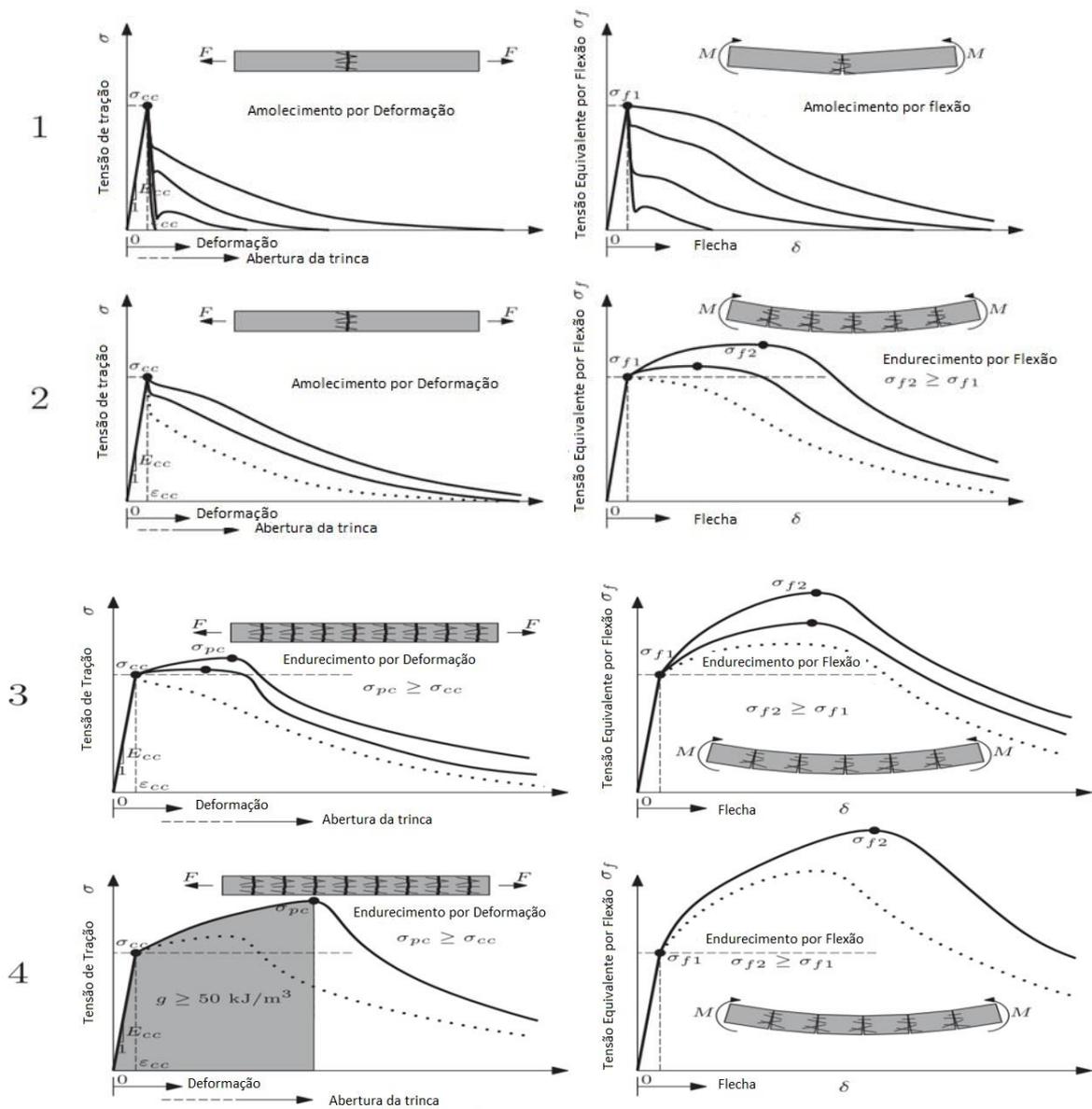


Figura 2.6- Classificação por desempenho do CRF. Fonte: Adaptado de Wille et al. (2014).

Os concretos do nível 1 tem amolecimento por deformação na tração e flexão; no nível 2 apresentam amolecimento por deformação na tração, mas endurecimento na flexão; no terceiro nível há um endurecimento tanto por deformação na tração como na flexão e, por fim, o quarto nível é semelhante ao nível 3 mas com uma nova condição: a quantidade de absorção de energia antes da fase de amolecimento deve ser maior que ou igual a 50KJ/m<sup>3</sup>.

Os parâmetros da Figura 2.6 são usados na classificação de Wille et al. (2014). O  $\sigma_{cc}$  é a tensão de início de trinca em ensaios de tração direta;  $\sigma_{pc}$  a resistência de pico (pós-fratura) na tração;  $\sigma_{f1}$  o módulo de ruptura na flexão e  $\sigma_{f2}$  é a resistência equivalente na flexão. O parâmetro **g** foi definido pelos autores como a capacidade de absorção de energia antes da fase de amolecimento. Os critérios dessa classificação para esses parâmetros estão resumidos na tabela 2.1.

Tabela 2-1 - Resumo das condições de classificação apresentadas na figura 2.6

Nível	Tensões na tração	Tensões na flexão	Energia
1	-	-	-
2	-	$\sigma_{f2} \geq \sigma_{f1}$	-
3	$\sigma_{pc} \geq \sigma_{cc}$	$\sigma_{f2} \geq \sigma_{f1}$	-
4	$\sigma_{pc} \geq \sigma_{cc}$	$\sigma_{f2} \geq \sigma_{f1}$	$g \geq 50 \text{ KJ/m}^3$

Fonte: Informações retiradas de Wille et al. (2014).

## 2.2 CONCRETOS DE ULTRA-ALTO DESEMPENHO REFORÇADOS COM FIBRAS –CUADRF

Nesse trabalho de dissertação de mestrado busca-se compreender o comportamento do CUADRF. Por isso, essa seção (2.2) do trabalho apresentará importantes conceitos para compreensão das características físicas e mecânicas desse material inovador.

### 2.2.1 Definição de CUADRF

Pode se dizer que os CUADRF são uma combinação de três concretos especiais, pois eles possuem as características dos Concretos Reforçados com Fibras (CRF), Concretos de Alto Desempenho (CAD) e Concretos Auto Adensáveis (CAA), conforme diagramado na Figura 2.7.

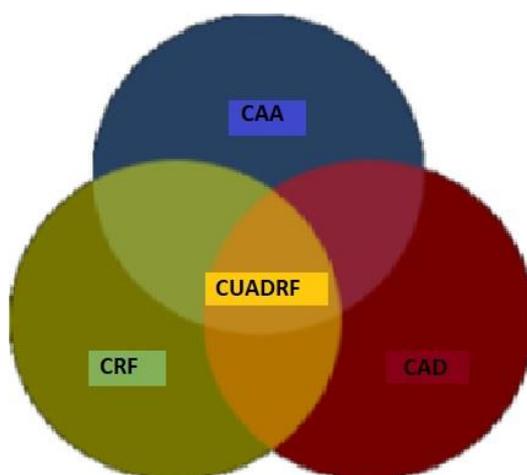


Figura 2.7 -Digrama que ilustra definição simplificada do CUADRF como combinação de três concretos especiais: CRF; CAD; CAA; resultando no CUADRF. Fonte: Adaptado de Azmee e Shafiq (2018).

Os CUADRF foram desenvolvidos com estudos de otimização de traço, tratamento térmico durante a cura, aditivos redutores de água e, como o próprio nome menciona, com adição de fibras. Devido ao custo inicial do CUADRF, seu uso somente é viável em situações em que seja necessário utilizar as suas propriedades específicas.

Pela definição da mais recente versão das recomendações da *Associação Française de Génie Civil* (AFGC, 2013) os CUADRF são concretos com resistência à compressão características superiores à 150 MPa, com um limite 250MPa. Provavelmente esse limite é colocado pelo fato de que quanto maior a resistência geralmente mais frágil é concreto.

Essa mesma recomendação também explica que esses concretos se diferenciam dos Concretos de Alto Desempenho e de Muito Alto desempenho por três características básicas.

- Alta resistência à tração após início de fissuração por ter elevado percentual de fibras de aço (superior a 2% em volume);
- A sua composição e o seu alto percentual de aglomerantes que reduzem a porosidade. Esses dois fatores também aumentam a durabilidade das fibras de aço, pois dentro de alguns limites de abertura de trinca eles são capazes de apresentar auto reparo de fissuras, garantindo a sua resistência à tração e outros esforços ao longo prazo.
- Resistência à tração direta da matriz sempre superior à 7MPa.

A norma americana ACI 239R-18 (ACI, 2018) traz um comparativo dos valores típicos de propriedades mecânicas de Concretos de Ultra Alto Desempenho (CUAD) e o Concreto Convencional. A Tabela 2.2 é a tradução da tabela original disponível na ACI 239-18(ACI, 2018).

Tabela 2-2- Comparativo entre propriedades de concreto convencional e CUAD.

<b>Propriedade</b>	<b>Concreto Convencional</b>	<b>Concreto de Ultra-Alto Desempenho</b>
<b>Resistencia à Compressão</b>	20 a 40 MPa	150 a 250 MPa
<b>Resistência à Tração Direta</b>	1 a 3 MPa	6 a 12 MPa
<b>Módulo de Elasticidade</b>	25 a 30 GPa	40 a 50 GPa

Fonte: ACI 239R-18 (ACI, 2018).

### 2.2.2 Traço Típico

De acordo com Azmee e Shafiq (2018) os CUAD tipicamente tem em seu traço os seguintes componentes: fibras, superplastificantes, cimento com adição de sílica ativa, baixíssima relação água-cimento(a/c) e areia muito fina (granulometria entre 0,15-0,6mm) usada em substituição dos agregados graúdos.

### 2.2.3 Resistência à Compressão

Se comparado um traço de concreto sem fibras com outros traços com alto percentual de fibras, percebe-se que as fibras têm pouca influência na resistência à compressão, pois

essa propriedade é majoritariamente influenciada pelos outros componentes da matriz de concreto. Pode-se citar o trabalho de Yoo et al. (2013) que corrobora essa afirmação, onde foram analisadas as resistências de concretos com quatro diferentes percentuais de fibras.

#### 2.2.4 Resistência à tração

O comportamento que muito diferencia o CUADRF do simples CRF na tração é que quando o primeiro é tracionado ele apresenta uma etapa de pseudo endurecimento por deformação. Quando sob tração o CUADRF tem um comportamento que pode ser descrito em 3 etapas, Spasojevic (2008) descreveu essas etapas em sua tese como:

Etapa 1) Comportamento elástico linear, onde a tensão cresce rapidamente para pequenas deformações até atingir o limite elástico  $f_t$ .

Etapa 2) Pseudo endurecimento (*strain-hardening*), nessa etapa a matriz (pasta de cimento) passa a apresentar microfissuras e, individualmente, essa tem uma resistência reduzida, mas devido ao efeito de ponteamto por fibras (*fiber bridging effect*), desenvolve-se uma etapa com aparente endurecimento, não é um real endurecimento pois na próxima etapa inicia-se um amolecimento. Por isso, partindo dessa explicação será usado o termo pseudo endurecimento para descrever esse comportamento.

Etapa 3) Amolecimento após esgotada a capacidade do sistema com fibras e microfissuras que temporariamente “endurecerem” o concreto e surge uma microfissura que se propaga até a tensão coesiva chegar próximo de zero.

#### 2.2.5 Coeficiente de Poisson

De acordo com as recomendações da AFGC (2013), quando não se tem o coeficiente de Poisson obtido experimentalmente, deve-se usar o valor de 0,2, sendo este um valor médio de traços de CUADRF de marcas comerciais francesas.

#### 2.2.6 Energia de Fratura

Autores brasileiros estão estudando as propriedades do CUADRF. Pode-se mencionar o trabalho de Buttignol et al.(2017) que é uma revisão bibliográfica de trabalhos experimentais desse concreto. Esses autores concluíram que a energia de fratura desse material compósito pode ser até 5 vezes maior que a do CRF. Tal fato foi justificado na pesquisa de Habelet al. (2006) como sendo devido a um diferente nível de densificação da microestrutura desse concreto. Os autores brasileiros também enfatizaram a alta capacidade de deformação (superior a 30%) e resistência à tração do CUADRF (maior que 8 MPa); e a fase de pseudo endurecimento (*strain hardening*) que acontece antes do

amolecimento, sendo esse fenômeno responsável pela alta absorção de energia (alta tenacidade) antes de fraturar.

### 2.2.7 Comprimento Característico

Para projeto e controle de qualidade de concretos, geralmente se classifica o concreto em relação a sua resistência a compressão. Um dos motivos para isso é a facilidade de execução dos testes de compressão. Outro motivo é o fato de se acreditar que muitas propriedades mecânicas são dependentes da resistência a compressão, tais como módulo de elasticidade, resistência a tração, permeabilidade. Mas para algumas propriedades não é possível utilizar a resistência a compressão para obter, por exemplo, o aumento na tenacidade observado em concretos reforçados com fibras. Por isso, nesses concretos alguma propriedade de tenacidade é necessária para caracterizar o material. Complementando o tipo de propriedade requerida depende no tipo de modelo constitutivo usada para descrever o material nas análises numéricas. Uma propriedade de interesse pode ser o comprimento característico ( $l_c$ ) que é uma indicação da fragilidade do material, quanto maior o valor de  $l_c$  menos frágil é o concreto. Segundo Hillerborg (1985) o comprimento característico é definido por  $l_c = E \cdot G_f / f_t^2$ , os valores de  $l_c$  para concretos com fibras são maiores que 1000mm (LOFGREN, 2005).

Segundo Bazant e Pijaudier-Cabot (1989) dependendo do tipo de modelo do material o comprimento característico pode ter duas diferentes interpretações:

1) Quando o dano de amolecimento é modelado como um meio de um contínuo de amolecimento por deformação, é necessário usar algum tipo limite de localização que previna a zona de dano de se concentrar em um volume nulo. Então, deve haver uma espessura mínima da região de localização que é relacionada ao comprimento característico do contínuo. Sem o comprimento característico, os modelos de amolecimento por deformação para dano apenas podem corretamente descrever situações em que o dano continua distribuído.

2) Os modelos discretos de fissura com uma zona coesiva de amolecimento na frente da trinca podem corretamente descrever fissuração ou dano concentrado, mas pode gerar resultados ambíguos onde o dano e fissuração continuar distribuído. Nesses casos, os modelos discretos devem conter um parâmetro de comprimento que indique o mínimo espaço possível entre as trincas, sendo esse o comprimento característico.

## 2.3 APLICAÇÕES DO CUADRF

As aplicações do CUADRF são as mais diversas, mas como já comentado seu alto custo inviabiliza sua utilização em obras que não há necessidade de concretos com as propriedades especiais do CUADRF. Essas propriedades são: altíssima resistência à compressão, tração, alta impermeabilidade, alta durabilidade, etc. A ACI 239R-18(ACI, 2018) traz um apanhado geral de aplicações recentes desse material, destacando o uso desse concreto para:

- a) pontes e viadutos rodoviários, Figura 2.8 e Figura 2.9 (detalhe da seção da ponte da figura 2.8);
- b) passarelas, Figuras 2.10 e 2.11;
- c) reforço sísmico, devido a maior resistência à tração e cisalhamento;
- d) reforço e reparos, devido a sua altíssima resistência;
- e) estacas e fundações, Figura 2.12;
- f) conexões de elementos pré-moldados, Figura 2.13;
- g) segurança e proteção balística, pois esse concreto tem uma maior resistência a impacto;
- h) radioproteção, essa aplicação é uma sugestão da ACI 239R-18(ACI, 2018), ainda não se tem registros dessa utilização (o que atualmente se usa em radioproteção são concretos de alta densidade).
- i) fachadas (alta durabilidade);
- j) paredes declusas de canais, pela resistência a impacto;
- k) ambientes agressivos, o UHPFRC tem baixa permeabilidade e alta resistência à abrasão. A ACI (2018) diz que a resistência, ductilidade e durabilidade desse concreto são até equiparados nesses quesitos ao aço inoxidável para aplicação em estações de tratamento de esgoto. São citados exemplos de uso em calhas, bueiros e vertedouros de barragens;
- l) coberturas.



Figura 2.8 - Ponte em Jakway Park, Buchanan County, IA, EUA. Fonte: FHWA (2019).

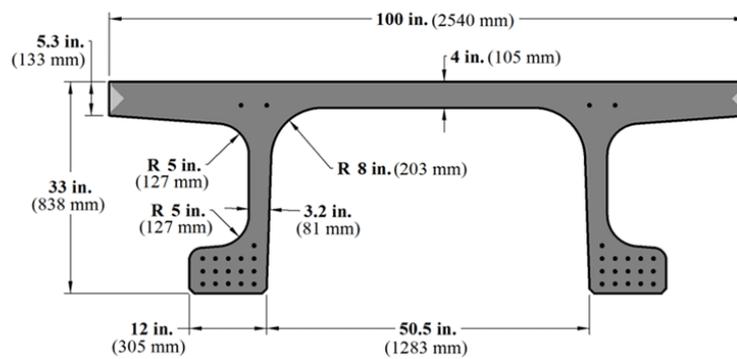


Figura 2.9 - Detalhe da seção usada na ponte da figura 2.8. Fonte: FHWA (2019).



Figura 2.10 - Ponte de pedestres no Parque Seonyudo, Seul - Coreia do Sul. Fonte: Google 2019.



Figura 2.11—Ponte de Pedestres, Sherbrooke, Quebec, Canada. Fonte: FHWA (2019)



Figura 2.12 - Exemplo de estacas ensaios experimentais com estacas de CUADRF. Fonte: Iowa State University apud FHWA (2019).

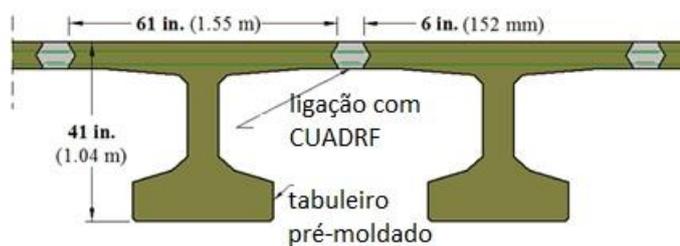


Figura 2.13—Detalhe da ligação de tabuleiros pré-moldados feitas em pontes e/ou viadutos. Fonte: FHWA (2019).

## 2.4 NORMAS E RECOMENDAÇÕES PARA CONCRETOS COM FIBRAS

### 2.4.1 Projeto com CRF

#### a) Normas para Concreto com Fibras

Atualmente existem normas e recomendações em vários países para projeto com CRF. Por exemplo, pode-se citar a versão mais recente da norma americana ACI 544.4R-18: 2018 (ACI, 2018), sendo a primeira versão desse código de 1996. Outro país que possui uma norma para projeto com CRF é o Canadá (CNR-DT 204/2006). Outros países que são referência na inovação do concreto, como Japão e França, já possuem recomendações de projeto específicas para o CUADRF, que serão mencionadas a seguir.

#### b) Recomendações de Projeto com Concretos de Ultra-Alto Desempenho Reforçados com Fibras

Os concretos de alto desempenho possuem um comportamento ainda mais peculiar que os CRF, por isso foram publicadas recomendações para essa nova classe de concretos em alguns países.

Os americanos publicaram recentemente um documento sobre o CUADRF, a ACI 239R-18:2018 (ACI, 2018), seu conteúdo é uma introdução do assunto e contém um apanhado geral de aplicações.

No Japão, um país de grande inovação na área do concreto, a JSCE (*Japan Society of Civil Engineers*) publicou em 2008 suas recomendações para projeto e construção de Compósitos de Cimento de Alto Desempenho Reforçados com Fibras.

A AFGC (*Association Française de Génie Civil*) publicou uma nova edição de suas recomendações de projeto e ensaios para o CUADRF em junho de 2013 (AFGC, 2013). Nestas recomendações já é abordado o projeto estrutural apenas com o CUADRF sem a necessidade de uso de armadura longitudinal convencional e estribos.

### 2.4.2 Cálculo da Energia de Fratura de Concretos

Uma característica importante dos concretos com fibras é sua maior energia específica de fratura, por isso a seguir serão mencionados os métodos internacionais mais difundidos para o cálculo dessa propriedade nos concretos.

#### a) Energia de Fratura do Concreto Convencional

O cálculo de energia de fratura no concreto já possui algumas normativas internacionais, sendo que as normativas do RILEM (*Reunion Internationale des Laboratoires et Experts des Matériaux, Systemes de Construction et Ouvrages*) são as mais mencionadas em trabalhos

de impacto internacional. Dentre os métodos para o cálculo de energia de fratura de concretos convencionais os mais conhecidos são: Hillerborg (RILEM 50-FMC)1985, método de Jenq e Shah (RILEM 89-FMT, 1990) e o método de Bazant (RILEM 89-FMT, 1990).

No modelo de Hillerborg (RILEM 50 - FMC) a curva de amolecimento  $\sigma_c(w)$  é dada como uma propriedade do material, sendo independente do tamanho e geometria do material. Essa curva pode ser definida se conhecidos sua forma, resistência a tração  $f_t$  e energia de fratura  $G_f$  (cujo cálculo é detalhado nessa norma).

No modelo de Jenq e Shah, modelo dos dois parâmetros, existem dois parâmetros a serem determinados:  $K_{Ic}$  (tenacidade a fratura) e o  $CTDO_c$  (deslocamento de abertura na ponta da trinca crítico); fazendo testes experimentais com vigas de diferentes tamanhos os autores concluíram que  $K_{Ic}$  e  $CTDO_c$  são independentes da geometria e são característicos de cada material.

O método de Bazant tem como parâmetros de fraturamento  $G_f$  e  $c_f$ . Essa metodologia é baseada no efeito de escala, sendo necessários no mínimo três vigas de diferentes dimensões para determinação dos parâmetros citados ( $G_f$  e  $c_f$ ).

#### b) Energia de Fratura para CRF

Já existem normativas para cálculo da energia de fratura específicas para concretos com fibras. Por exemplo, pode-se citar a norma japonesa para concretos com fibras de aço a SF-4 (JSCE, 1984), que traz as recomendações para o ensaio e formulação para determinar o trabalho de fratura. O teste consiste na flexão à quatro pontos de uma viga prismática.

Outros métodos de cálculo para Concretos Reforçados com Fibras de Aço, desenvolvidos por pesquisadores internacionais que se basearam na mecânica da fratura, foram publicados pelo RILEM TC-162 (RILEM, 2000). Os métodos mais utilizados pelos pesquisadores são o cálculo da energia da fratura pelo ensaio de tração direta e o ensaio de flexão à três pontos. Este último é o mais utilizado devido a maior facilidade de conseguir instrumentação adequada para o teste. Os ensaios de tração direta são de difícil execução devido à dificuldade de aplicar o carregamento sem que ocorra excentricidade; na prática frequentemente corpos de prova são perdidos por não falharem em modo I (tração).

#### c) Energia de Fratura para CUADRF

O cálculo da energia de fratura dos CUADRF pode ser feito baseado nas recomendações da AFGC (2013) que apresenta uma formulação simplificada que utiliza a resistência à tração do concreto e o comprimento da fibra e outra formulação mais sofisticada baseada em ensaios experimentais de flexão. Mais detalhes sobre essas formulações serão colocados no capítulo 3 (metodologia).

## 2.5 MODELAGEM NUMÉRICA DE FRATURA EM CONCRETOS

Considerando a abordagem numérica da fratura existem três grandes classes de metodologias: modelos de fissuras discretas, modelos de fissuras distribuídas (ou difusa) e modelos de fissuras incorporadas.

Foram desenvolvidos muitos trabalhos de modelagem numérica e estudos experimentais em concreto no PPGEC. Destaca-se aqui o trabalho de Lens (2009) que fez um estudo com interfaces coesivas direcionado para Concretos Simples. Posteriormente, em 2015, Silva Neto utilizou as interfaces coesivas para modelar problemas de concreto armado. Outro trabalho de 2015 foi o de Silva (2015) que utilizou um modelo de fissura com descontinuidades fortes incorporadas no estudo da fratura de materiais quase-frágeis. Por fim, se destaca um trabalho que foi imprescindível para o desenvolvimento desta dissertação, a tese de Rojas (2019) onde ela fez um estudo experimental e numérico com CUADRF; a parte numérica de seu trabalho foi desenvolvida com modelos distribuídos.

### 2.5.1 Modelos de fissuras discretas

Em 1967 Ngo e Scordelis fizeram o primeiro estudo de vigas de concreto armado usando o efeito de trincas, fazendo uma análise linear elástica de vigas com padrões de trincas pré-definidos. As trincas foram modeladas de forma discreta, separando os nós da malha de elementos finitos, conforme pode ser visto na Figura 2.14. Uma desvantagem desse modelo é a limitação da orientação da trinca, mas para problemas com poucas grandes trincas o modelo discreto consegue descrever bem o problema, devido a descontinuidades de deformação (KWAK e FILIPPOU(1990)).

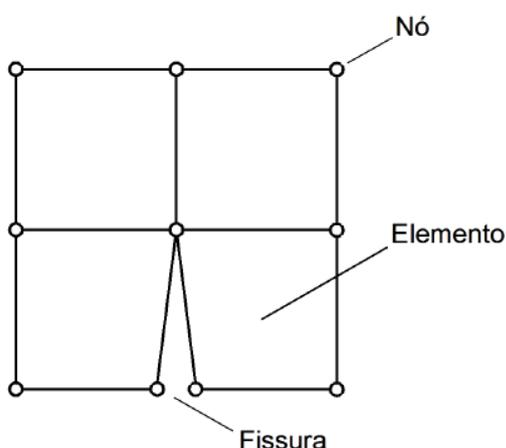


Figura 2.14 – Representação do modelo de fissuras discretas. Fonte: Silva Neto 2015.

Nesta dissertação é utilizado o modelo discreto das Interfaces Coesivas. Ele se baseia na existência de tensões coesivas, conceito desenvolvido por Dugdale (1960) e Barrenblat (1962). Esses pesquisadores faziam estudos independentes sendo que Dugdale estudava materiais com fratura dúctil e Barrenblat usou para estudar matérias frágeis. As tensões coesivas atuam nos extremos da trinca em zonas de comprimento  $d$ , como pode ser visto na Figura 2.15.

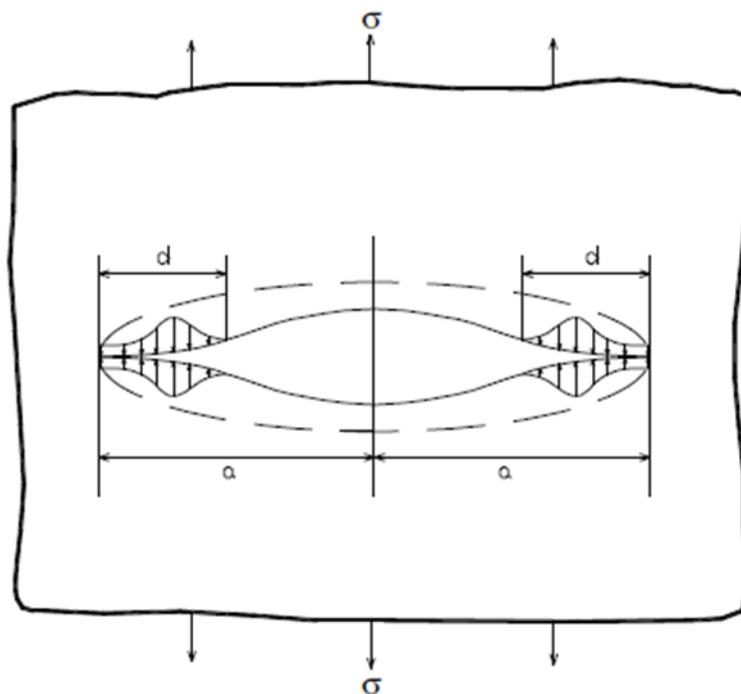


Figura 2.15– Tensões coesivas na ponta da trinca. Fonte: Machado 2007.

Posteriormente surgiu a teoria da trinca fictícia de Hillerborg et al. (1976) que deu início a utilização de modelos discretos para representação da fratura no concreto. Esse trabalho considera que a Zona de Processo de Fratura (ZPF) pode ser satisfatoriamente descrita por uma relação coesiva que é considerada uma propriedade do material (LENS, 2009). Nesse método se faz necessário conhecer, além das propriedades mecânicas ( $E$ ,  $\nu$ ,  $f_t$ ,  $f_c$ ), as propriedades de fratura do concreto. Essas propriedades são: a Energia de Fratura e a Relação Coesiva do material em estudo. Os autores sugerem uma relação linear como adequada para concretos simples, Figura 2.16; para esses concretos (sem armadura)  $w_1$  é da ordem de 0,01 – 0,02mm.

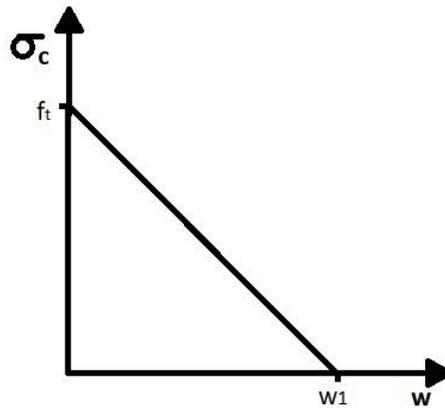


Figura 2.16 – Lei coesiva linear de Hillerborg et al. (1976).

Para fundamentação teórica do método das interfaces coesivas foi estudada a dissertação de Fedrigo (2001), onde é descrita a formulação básica para elementos finitos e a descrição das interfaces coesivas utilizadas neste trabalho. Os elementos de interface coesivas são elementos virtuais de quatro nós adjacentes às faces dos outros elementos finitos. No capítulo de metodologia será explicado mais sobre a formulação básica desses elementos.

Um modelo alternativo para o tratamento da fratura de materiais quase-frágeis é o chamado Modelo dos Elementos Discretos (DEM, em Inglês), ver por exemplo Riera e Iturrioz (1998). Neste caso o contínuo é tratado como um conjunto de barras, que dependendo de características geométricas é capaz de simular um material com um valor particular de coeficiente de poisson. O processo de ruptura é aproximado pelo rompimentos das barras. A equação constitutiva das mesmas tem um ramo descendente similar à da Fig. 2.16, o que permite incorporar a energia de fratura ao modelo. Este tipo de modelo é bastante adequado para a introdução da aleatoriedade das propriedades do material, um problema que é importante no caso de concretos. No entanto a aleatoriedade não será considerada no presente trabalho.

### 2.5.2 Modelos de fissuras distribuídas

Nesse método introduzido por Rashid (1968) a trinca é representada em função das relações tensão-deformação do contínuo. Somente é necessário atualizar a relação tensão e deformação alterando as relações constitutivas do material, sem a necessidade de alterar a topologia da malha de elementos finitos. A fissura fica dentro do elemento, Figura 2.17, sendo ele tratado como um meio contínuo.

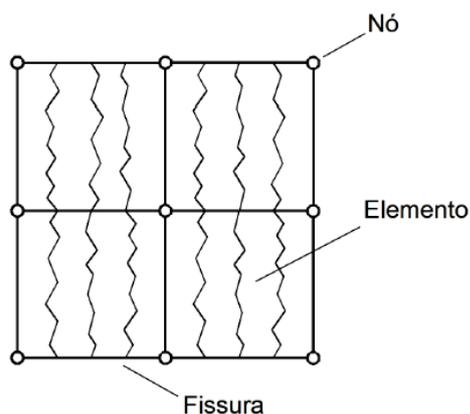


Figura 2.17 – Representação do modelo de fissuras distribuída. Fonte: Silva Neto 2015.

O problema na utilização dessa representação das fissuras é a objetividade da malha, ou seja, há limitações quanto às dimensões da malha. Ao se diminuir as dimensões dos elementos finitos da malha causa um comportamento mais frágil do material. Por isso a relação constitutiva deve ser relacionada ao tamanho da malha, neutralizando a objetividade da malha. Ainda deve ser considerado nesse método o tamanho mínimo do elemento finito, que é baseado na teoria da banda de fissurada de Bazant e Oh(1983).

### 2.5.3 Modelos de fissuras incorporadas

Esses modelos têm como base as descontinuidades características da fratura embutidas nas funções de interpolação dos elementos finitos. Esses modelos podem ser classificados em dois grupos: os que possuem descontinuidade de deslocamentos e os que possuem descontinuidade de deformações.

Nos primeiros a fissura é colocada como uma linha de descontinuidade de deslocamentos dentro do domínio do elemento. Quando surge a fissura se tem duas equações constitutivas para o material. Para a linha de descontinuidade uma relação tensão de superfície x deslocamento e para o resto do material uma relação tensão x deformação.

Para os modelos de descontinuidade de deformação, a fissura é representada através de uma banda de localização. A largura desta banda deve ser conhecida previamente e é considerada uma propriedade do material.

Esses modelos são considerados vantajosos em relação aos modelos discretos pois não precisam redefinição da topologia da malha e por não dependerem da malha utilizada (SILVA NETO (2015)). A desvantagem é não capturar o real campo de tensões que se desenvolve na ponta da trinca.

#### 2.5.4 Aplicação de Modelos Discretos-Coesivos para Concretos

Nanakorn e Horii (1996) propuseram uma análise inversa a partir de testes de flexão em vigas de concreto entalhadas. Eles determinam uma relação entre a tensão transmitida e a abertura da trinca por uma análise inversa utilizando elementos finitos. Eles utilizaram vigas de concreto com fibras de aço e testes de flexão a três e quatro pontos, resultando em uma boa concordância entre os resultados com as curvas de tensão amolecimento da análise inversa com os resultados experimentais e com os resultados de uma técnica modificada baseada na integral J.

Bolzon et al. (1997) utilizaram um método experimental para determinação dos parâmetros de uma lei coesiva do concreto. Os parâmetros (Figura 2.18) são indiretamente determinados pelas medidas óticas dos deslocamentos de pontos na superfície das vigas durante testes de flexão a três pontos. Para definição dos parâmetros se usam as medidas de deslocamentos horizontais e um modelo computacional para simulação dos testes como um problema de complementaridade linear (LCP- sigla do inglês). Busca-se então a minimização da diferença entre a simulação e os deslocamentos medidos, sendo usadas duas formas para solução da minimização de forma numérica: “sequential quadratic programming” (SQP) e por busca direta um algoritmo genético (GA- sigla em inglês).

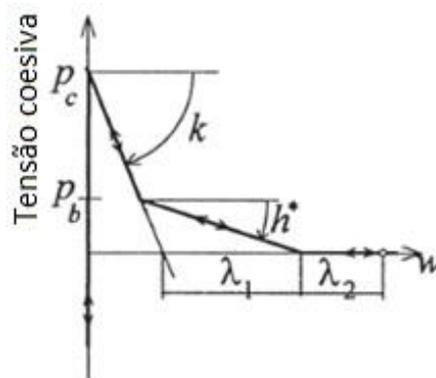


Figura 2.18 – Lei coesiva bilinear de Bolzon et al. (1997). Fonte: Bolzon et al. (1997).

Kang et al. (2010) variaram o percentual de fibras de aço em CUADRF para verificar a influência dessa variação nas propriedades de fratura por tração. Eles utilizaram análises inversas para obtenção do modelo de fratura na tração e chegaram em uma curva trilinear, qualitativamente mostrada na Figura 2.19.

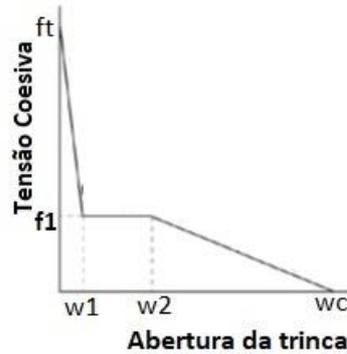


Figura 2.19 – Lei coesiva trilinear de Kang et al. (2010). Fonte: Kang et al. (2010).

Park et al. (2009) propuseram um modelo coesivo para modo misto (III) de fratura, que pode ser utilizado para o modo I puro também. O modelo deles é baseado em um potencial de energia. Através dele podem ser calculadas diferentes energias de fratura (modo I, modo II e modo III) e pode ser utilizado para materiais de diferentes comportamentos, incluindo o comportamento quase-frágil. A dificuldade de utilizar esse modelo é que existem muitos parâmetros físicos a serem determinados.

Denneman et al. (2011) tinham como objeto de estudo concretos de Alto Desempenho Reforçados com Fibras, baseado em ensaio de flexão a três pontos em vigas de diferentes tamanhos. Em seu estudo usam a energia de fratura na definição de uma lei coesiva de amolecimento com singularidade na ponta da trinca. Essa lei é parcialmente linear e exponencial e será detalhadamente explicada no capítulo de metodologia (3).

Yoo et al. (2013) investigaram as propriedades mecânicas de CUADRF com uma única mistura e com 4 diferentes percentuais de fibra de aço (1%,2%,3% e 4% em volume). Nesse estudo, para a completa caracterização do comportamento à fratura dos concretos, os autores também definem a lei de tensão amolecimento bilinear para os CUADRF. Os parâmetros (Figura 2.20) desse modelo bilinear são  $f_1$ ,  $w_1$  e  $w_c$  (abertura crítica), sendo que apenas  $f_1$  e  $w_1$  são influenciados pela quantidade de fibras no traço.

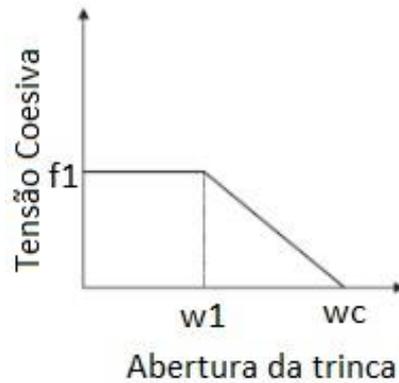


Figura 2.20 – Lei coesiva bilinear de Yoo et al. (2013). Fonte: Yoo et al. (2013).

Yoo et al. (2014) fizeram um estudo para verificar a influência do comprimento das fibras e a forma de lançamento sobre diversas características do CUADRF, dentre elas a curva de tensão amolecimento. Eles utilizaram uma análise inversa para obter uma curva trilinear (Figura 2.21). Neste caso, a análise inversa deles foi baseada no procedimento descrito por Uchida et al. (1995). Após feita a análise inversa para os diferentes comprimentos de fibras e diferentes modos de lançamento do concreto, Yoo et al. (2014) verificaram que as curvas de tensão amolecimento são influenciadas pelo comprimento das fibras e pela forma de lançamento do concreto.

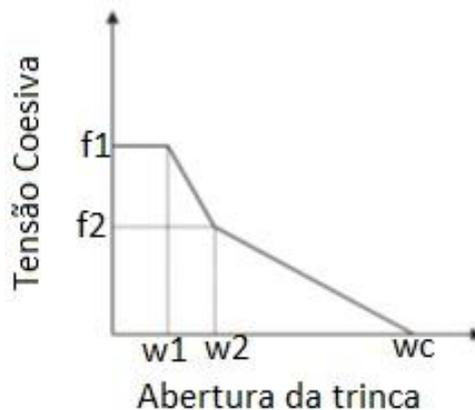


Figura 2.21 – Lei coesiva trilinear de Yoo et al. (2014). Fonte: Yoo et al.(2014).

Após estudo desses trabalhos e outras referências, percebe-se que a determinação de relações coesivas adequadas ao CUADRF é um tema ainda em aberto, havendo muitos métodos para determinação da lei coesiva desse material, sendo o objetivo principal da presente dissertação. Como também descrito, muitas destas análises são determinadas

pelo que se denomina de “análise inversa”, que consiste em recuperar a relação coesiva (tensão x abertura de trinca) a partir dos resultados de ensaios carga x abertura de trinca. A análise inversa conforme AFGC (2013) será descrita no capítulo de metodologia (3). Outro ponto estudado foi a energia dissipada na ZPF, considerada nesse modelo através do cálculo da tenacidade. Ela pode ser calculada através as normas mencionadas no item 2.4 e posteriormente explicadas no capítulo de metodologia.

### 3 METODOLOGIA

Nesta dissertação, adotou-se uma modelagem discreta de elementos finitos, utilizando elementos de interface coesiva, em um modelo bidimensional e apenas o modo I de fratura no concreto é simulado. Para modelagem numérica do CUADRF utilizando as interfaces coesivas é necessário conhecer a forma da relação tensão coesiva x abertura coesiva. Nesta dissertação foram utilizados como base os resultados experimentais da tese de ROJAS (2019); foram utilizados os ensaios de flexão a três pontos em vigas, os ensaios de determinação da resistência à tração direta ( $f_t$ ) e todos ensaios de caracterização mecânica dos concretos.

Os ensaios de flexão a três pontos foram feitos segundo o RILEM TC-162 (RILEM, 2000) e parte de seus resultados pode ser visto na Figura 3.1. Os dados experimentais utilizados dos ensaios de flexão e tração serão descritos na Seção 4.1. Entre os dados base fornecidos estão as medições da força aplicada, flecha e abertura da trinca.

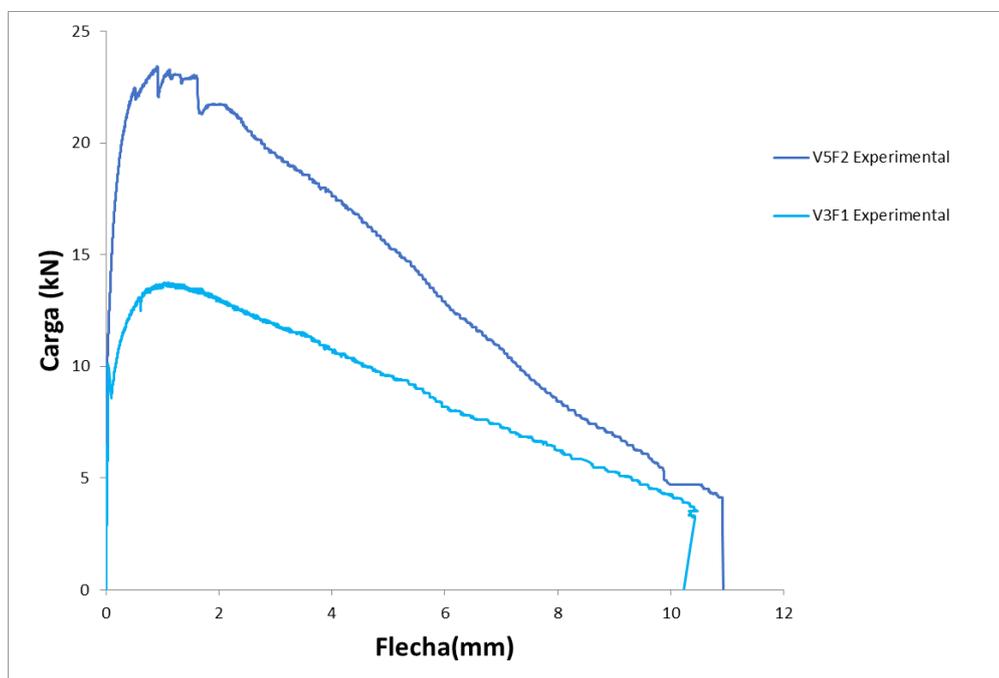


Figura 3.1- Exemplo de Curvas Força Vertical x Flecha para Viga 5 com 2% em volume de fibras(V5F2) e para Viga 3 com 1% em volume de fibras(V3F1).Fonte: Rojas(2019).

Uma das informações fundamentais para essa dissertação é a energia de fratura consumida nos ensaios durante a propagação da trinca, essa energia que definirá a tenacidade do

material (área da relação coesiva). Primeiramente, serão consideradas as metodologias específicas para o cálculo de energia de fratura para CUADRF, em seguida, serão abordadas definições importantes das interfaces coesivas e por fim são exploradas algumas formulações para a forma das relações coesivas desse novo material (CUADRF).

### 3.1 ENERGIA DE FRATURA

#### a) Energia de Fratura para CUADRF

A AFGC (2013) menciona que existe uma dificuldade em calcular o valor da energia de fratura de CUADRF pois as deformações desse material são muito grandes e propôs uma formulação simplificada, Equação(3.1), para cálculo da energia de fratura. Onde  $f_t$  é a resistência média à tração e  $l_f$  é o comprimento da fibra de aço. Essa formulação superestima  $G_f$  pois na prática o comprimento da fibra em contato com a matriz de concreto diminui durante a tração devido ao deslizamento das fibras. Essa fórmula considera que após o pico a força aplicada não está mais formando trincas, mas está puxando as fibras de aço para fora da matriz de cimento, então a energia dissipada é a energia para arrancamento das fibras.

$$G_f \approx f_t \cdot l_f \quad (3.1)$$

Os métodos mais conhecidos para determinação da energia de fratura são os ensaios de tração direta e ensaios de tração por flexão a três pontos. O segundo sendo o mais utilizado devido a facilidade de realização do teste. Ele é baseado na norma RILEM TC 50 FMC (1985), que por sua vez se baseia na teoria do trabalho de fratura de Hillerborg (1985). Nesse método se considera que o trabalho (energia) total para partir a viga em duas partes é estimada pela área abaixo da curva carga-deslocamento da viga, o chamado trabalho de fratura. A energia de fratura é calculada dividindo esse trabalho pela área inicial de ligação. Essa teoria se baseia no fato de que o comportamento de toda viga é linear elástico, exceto por uma pequena área ao redor da zona da trinca, sendo que toda energia é consumida pela zona de propagação da trinca e que todo trabalho de fratura é absorvido pelas faces da trinca.

Na Figura 3.2 pode ser visto um típico resultado experimental de flexão a três pontos obtidos por ROJAS (2019). O cálculo da energia de fratura é feito usando a Equação (3.2). Onde  $W_f$  (N.mm) é a área total da curva sob o gráfico de carga por deflexão;  $b$  é espessura da viga

(mm),  $h$  a altura da viga (mm) e “ $a$ ” é o comprimento do entalhe (mm) feito no meio do vão, na parte inferior da viga para direcionar a abertura da trinca.

$$G_f = \frac{W_f}{b(h-a)} \quad (3.2)$$

Denneman et al. (2011) propuseram uma metodologia para extrapolar a curva experimental de carga x deformação, porque na prática a curva experimental registrada não atinge o ponto de deformação máxima onde a carga teoricamente deveria ser nula, conforme pode ser visto na Figura 3.1 os últimos pontos das curvas registram forças superiores a 4 kN.



Figura 3.2–Situação da viga de CUADRF após ruptura. Fonte: Rojas (2019).

Denneman et al. (2011) propuseram uma formulação para obter o trabalho de fratura total ( $W_f$ ) somando a área sob a curva experimental Carga x Deformação ( $W_{\delta_u}$ ) e a área abaixo da curva extrapolada ( $W_{tail}$ ), Equação (3.3) .

$$W_f = W_{\delta_u} + W_{tail} \quad (3.3)$$

A notação  $\delta_u$  é usada para a máxima flecha registrada na curva experimental, na Figura 3.3 é possível ver uma viga em flexão a três pontos e alguns dos parâmetros que serão usados nas equações.

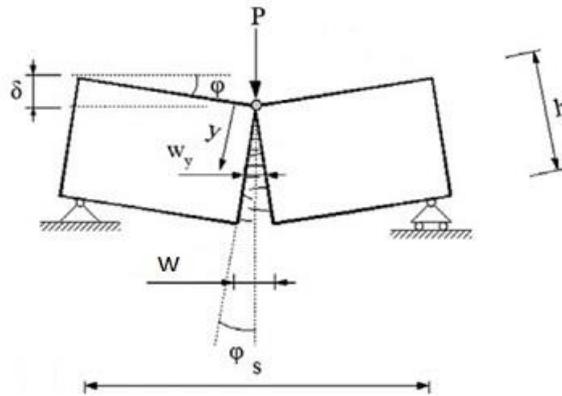


Figura 3.3 – Esquema de ensaio de flexão a três pontos. Fonte: Denneman et al. (2011).

O cálculo de  $W_{tail}$  é dado pela Equação(3.4).

$$W_{tail} = \int_{\delta_u}^{\infty} Pd(\delta) = \frac{bsA}{4\delta_u} \quad (3.4)$$

$$A = \frac{M}{b(2\varphi)^2} \quad (3.5)$$

$$M = \frac{Ps}{4} \quad (3.6)$$

$$\varphi \approx \frac{2\delta}{s} \quad (3.7)$$

Onde  $P$  é a carga aplicada no centro da viga,  $\delta$  é a flecha da viga,  $b$  é a largura da viga,  $s$  é o comprimento entre os apoios. O valor de  $A$  é obtido plotando os valores experimentais  $M/b$  sobre  $(2\varphi)^{-2}$ , sendo obtido como a inclinação desse gráfico para valores de  $(2\varphi)^{-2}$  pequenos (aproximadamente até 1000 conforme visto na Figura 3.4), conforme a Equação (3.5). Onde  $M$  é o momento no centro da viga calculado usando a Equação (3.6);  $\varphi$  é o ângulo de rotação calculado pela Equação (3.7).

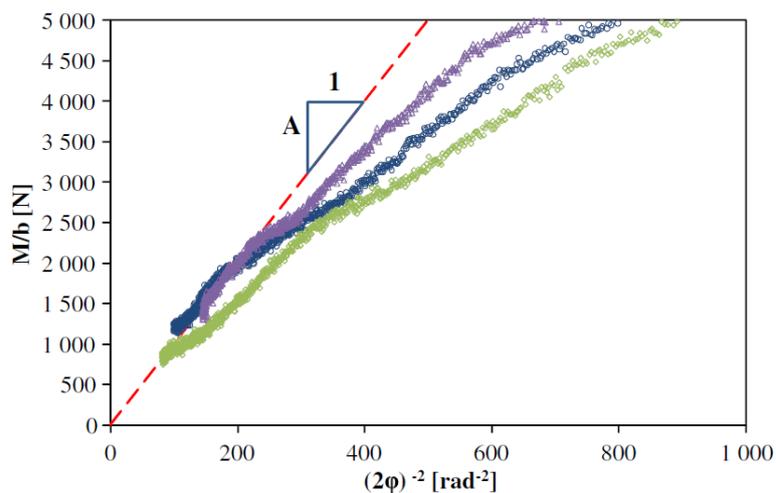


Figura 3.4 – Exemplo de gráfico para obtenção de A. Fonte: Denneman et al. (2011)

### 3.2 INTERFACES COESIVAS

Para implementação das interfaces coesivas via elementos finitos, inclui-se um termo de trabalho interno da interface no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Considerando as condições de contorno da Figura 3.5. O PTV toma a forma da Equação (3.8).

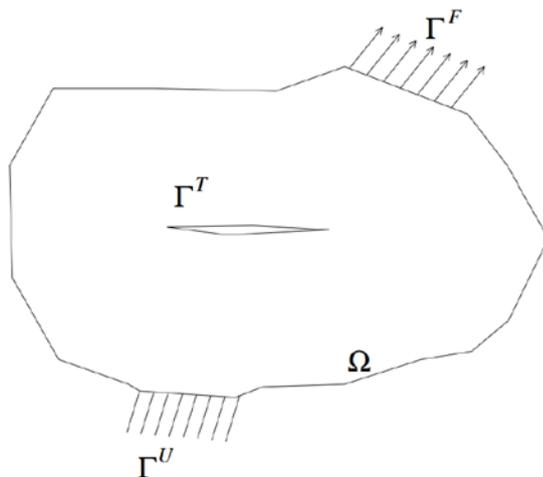


Figura 3.5 – Corpo em estudo. Fonte: Silva Neto 2015.

$$\int_{\Omega} \sigma : \left( \frac{d\delta U}{dx} \right) dV + \int_{\Gamma^T} T \delta w dS = \int_{\Omega} B \delta U dV + \int_{\Gamma^F} F \delta U dS \quad (3.8)$$

Onde:

U: deslocamento ao longo do corpo  $\Omega$  ;

F: vetor de forças aplicadas no contorno  $\Gamma^F$  ;

B: forças de volume;

$\sigma$  : tensões de Cauchy;

T: vetor de tensões coesivas nas interfaces da fissura;

$\Gamma^T$  : superfície da fissura;

$\delta$  : variação arbitrária, virtual e compatível;

$\Gamma$  : contorno externo do corpo;

$\Gamma^U$  : contorno cuja superfície onde se aplicam deslocamento e restrições;

$\Gamma^F$  : contorno onde se aplicam as forças.

Após definida a malha de elementos finitos, eliminando-se os deslocamentos virtuais, a equação de equilíbrio (3.8) pode ser reescrita como uma equação diferencial não linear abaixo(Equação(3.9)).

$$F_{int} - F_{ext} = 0 \quad (3.9)$$

$F_{int}$  e  $F_{ext}$  são as forças internas e externas atuando nos nós dos elementos. Como serão utilizadas as interfaces coesivas, uma parcela das forças internas será devido às forças coesivas. Para a solução do sistema da Equação (3.9), utilizou-se o método de Newton-Raphson.

Na Figura 3.6 pode ser visto um elemento de interface entre as faces de dois elementos finitos adjacentes, onde n e t são, respectivamente, as direções normal e tangencial da interface. Esse elemento possui 4 nós, sendo que inicialmente os nós 1 e 4 estão na mesma localização, semelhante aos nós 2 e 3.

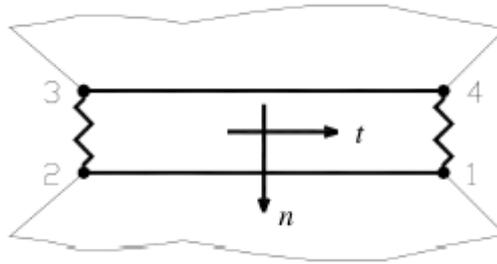


Figura 3.6 – Esquematização do elemento de interface. Fonte: Silva Neto 2015.

O trabalho de abertura desse elemento é dado pela Equação (3.10).

$$W^e = \int_{\Gamma^{T,e}} T^e \Delta^e dS \quad (3.10)$$

Onde  $T^e$  é o vetor de tensões com componentes normal e tangencial e  $\Delta^e$  é o vetor de deslocamentos da interface, ou abertura da trinca também com as componentes normal e tangencial

A implementação das interfaces coesivas aos elementos finitos pode ser consultada nos trabalhos de Fedrigo (2001), Quinino (2004) e Silva Neto (2015).

### 3.3 MODELOS COESIVOS UTILIZADOS PARA CUADRF

A seguir serão exploradas algumas possíveis propostas para a forma das relações coesivas: Xu e Needleman (1994), Denneman et al. (2011) e Análise Inversa (AFGC, 2013).

#### 3.2.1 Xu e Needleman(1994)

Em 1987 Needleman publicou em forma de artigo um modelo potencial para as tensões coesivas. Nesse modelo a relação constitutiva das interfaces coesivas são relacionadas a deslocamentos relativos entre as faces opostas de uma trinca. Para quantificar as tensões coesivas parte-se de um potencial de energia genérico, no sentido de que pode ser usado para diversos materiais e nos diferentes modos de ruptura(I, II e III).Esse potencial é genericamente definido pela Equação (3.11).

$$\Psi(\Delta_n, \Delta_t) = -\int_0^{\Delta} (\sigma_{cn} d\Delta_n + \sigma_{ct} d\Delta_t) \quad (3.11)$$

Sendo  $\sigma_{cn}$  e  $\sigma_{ct}$  as componentes normal e tangencial das tensões coesivas, que são obtidas a partir das Equações (3.12) e (3.13). De forma análoga  $\Delta_n$  e  $\Delta_t$  são as aberturas normal e tangencial.

$$\sigma_{cn} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\Delta_n} \quad (3.12)$$

$$\sigma_{ct} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\Delta_t} \quad (3.13)$$

A partir de seu modelo inicial Needleman (1987) posteriormente propôs um potencial de energia polinomial. De maneira análoga, a partir do potencial, se derivam as tensões coesivas ( $\sigma_{cn}$  e  $\sigma_{ct}$ ). Esse pesquisador ainda publicou mais formulações de potenciais de energia (exponencial/polinomial; exponencial/periódico e modelo exponencial/exponencial). Esses novos modelos foram propostos para se adequar melhor a diferentes aplicações como a fratura em modo II (cisalhamento), modo III (rasgamento) e fadiga.

Dentre os novos modelos de Needleman, destaca-se o modelo exponencial-exponencial de Xu e Needleman (1994), que tem sido muito utilizado no grupo de pesquisa do PPGEC, pois é capaz de representar problemas de cisalhamento puro (modo II) com uma fórmula contínua. Esse potencial é descrito pela Equação (3.14).

$$\Psi(\Delta_n, \Delta_t) = \Phi_n + \Phi_n \exp\left(\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left[ \left(1 - r + \frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \frac{1-q}{r-1} - \left(q + \frac{r-q}{r-1} \frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t}\right) \right] \quad (3.14)$$

$$q = \frac{\Phi_t}{\Phi_n} \quad (3.15)$$

$$r = \frac{\Delta_n^*}{\delta_n} \quad (3.16)$$

Onde  $\Phi_n$  é o trabalho da separação normal (Equação (3.17)),  $\Phi_t$  é o trabalho de separação tangencial (Equação(3.18)),  $\Delta_n^*$  é o valor de  $\Delta_n$  após a completa separação por cisalhamento (ocorre quando  $\sigma_{cn} = 0$ ).

$$\Phi_n = e \sigma_{\max} \delta_n \quad (3.17)$$

$$\Phi_t = \sqrt{\frac{e}{2}} \tau_{\max} \delta_t \quad (3.18)$$

Sendo  $\sigma_{\max}$  e  $\tau_{\max}$  (Equação(3.19)) as resistências coesivas normal e tangencial, respectivamente (não são equivalentes a  $f_t$  e  $f_{cis}$ ); e  $\delta_n$  (Equação(3.20)) e  $\delta_t$  são os comprimentos característicos normal e tangencial, respectivamente.

$$\tau_{\max} = \sqrt{2e} \sigma_{\max} \frac{\delta_n}{\delta_t} \quad (3.19)$$

$$\delta_n = \frac{\Phi_n}{e \sigma_{\max}} \quad (3.20)$$

Usando-se as fórmulas das Equações 3.9 e 3.10 encontram-se as seguintes expressões para as tensões normal e tangencial:

$$\sigma_{cn} = -\frac{\Phi_n}{\delta_n} e^{-\frac{\Delta_n}{\delta_n}} \left\{ \frac{\Delta_n}{\delta_n} e^{-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}} + \frac{1-q}{r-1} \left[ 1 - e^{-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}} \right] \left[ r - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \right\} \quad (3.21)$$

$$\sigma_{ct} = -\frac{\Phi_n}{\delta_n} \left( 2 \frac{\delta_n}{\delta_t} \right) \frac{\Delta_t}{\delta_t} \left[ q + \left( \frac{r-q}{r-1} \right) \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] e^{-\frac{\Delta_n}{\delta_n}} e^{-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}} \quad (3.22)$$

### 3.2.2 Denneman et al. (2011)

O modelo previamente descrito é bem geral e se aplica para diferentes tipos de materiais, mas é possível encontrar relações de tensão deslocamento mais específicas para CRF. Um modelo com formulação já aplicada para concreto de alto desempenho com fibras é o modelo proposto por Denneman et al. (2011).

Em seu trabalho eles introduzem uma relação coesiva parcialmente linear e exponencial, sem utilizar um potencial de energia como o outro método previamente mencionado. A singularidade na ponta da trinca é representada pela inclinação da parte linear da curva que inicia com o valor de  $f_t$  até chegar em  $\sigma_1$ , ao longo de  $w_1$ . A lei coesiva típica desse método pode ser vista na Figura 3.7.

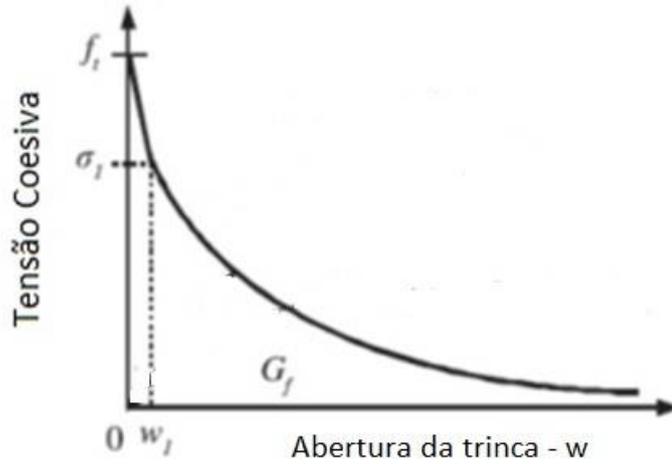


Figura 3.7 - Lei coesiva proposta por Denneman et al. com parte linear e exponencial. Fonte: Denemann et al. (2011).

A lei coesiva proposta por esses pesquisadores é descrita conforme as Equações (3.23) e(3.24).

$$\sigma_c = f_t \left( \frac{f_t - \sigma_1}{w_1} \right) w \text{ para } 0 < w < w_1 \quad (3.23)$$

$$\sigma_c = \sigma_1 e(-a_1 (w - w_1)) \text{ para } w_1 < w < \infty \quad (3.24)$$

Onde  $G_{f,1}$  é dado pela Equação(3.25), e  $a_1$  pela Equação (3.26).

$$G_{f,1} = G_f - \left( \frac{f_t + \sigma_1}{2} \right) w_1 \quad (3.25)$$

$$a_1 = \frac{\sigma_1}{G_{f,1}} \quad (3.26)$$

O valor de  $G_f$  é obtido de curvas experimentais de força-deslocamento;  $f_t$  é a resistência à tração do material; e os valores de  $w_1$  e  $\sigma_1$  são obtidos por ajustes paramétricos de acordo com as curvas experimentais. Durante seus ensaios, Denneman et al. (2011) verificaram que para o material estudado, o valor de  $w_1$  era um valor muito pequeno e que, considerando-o como zero, ainda se obtém um bom ajuste para as curvas experimentais. Teoricamente isso equivale a dizer que, quando o material atinge sua resistência à tração, a tensão coesiva diminui sem que ocorra um aumento de abertura ( $w$ ).Com essa consideração, as equações do modelo podem ser reescritas conforme as Equações (3.27) e (3.28).

$$\sigma_c = f_t \quad \text{para } w = 0 \quad (3.27)$$

$$\sigma_c = \sigma_1 e^{-a_1(w - w_1)} \quad \text{para } w_1 < w < \infty \quad (3.28)$$

### 3.2.3 Análise Inversa

A análise inversa é um método iterativo geral e tem como objetivo a determinação das relações coesivas. Seguiu-se a metodologia da AFGC (2013) para determinar as relações coesivas de 8 vigas de CUADRF previamente ensaiadas por Rojas (2019).

A AFGC (2013) apresenta três metodologias para determinação da relação coesiva dos CUADRF, que são específicas para diferentes ensaios experimentais. Como Rojas (2019) usou ensaios de flexão a três pontos, essa será a formulação explicada a seguir.

Para obtenção da lei de comportamento do material a AFGC (2013) tem um procedimento em que se obtém essa lei a partir das curvas  $F \times w$  (força vertical  $\times$  abertura normal da trinca).

Inicialmente muda-se o sistema de coordenadas para iniciar no ponto onde ocorre a primeira trinca. Tal ponto está na transição entre o comportamento elástico e inelástico do concreto. Como ainda se está no limite elástico calcula-se o valor de esforço por equilíbrio mecânico.

Na Figura 3.8 pode ser visto um corte no centro da viga onde estão diagramados os esforços presentes na viga, e os parâmetros utilizados nas equações de equilíbrio.

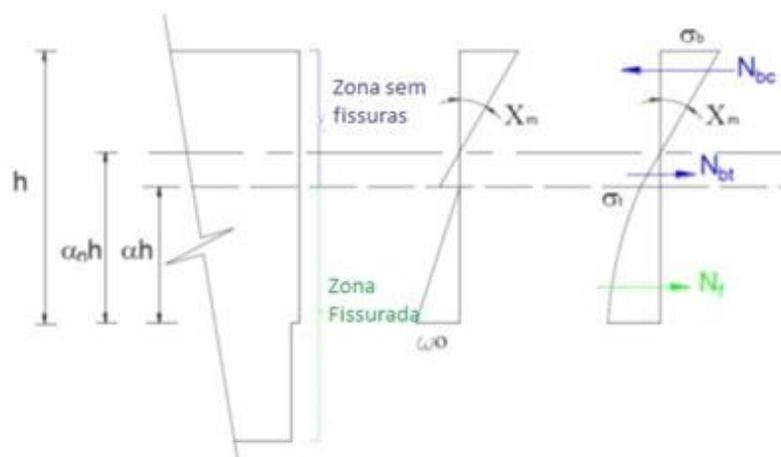


Figura 3.8. Esquemática das forças que agem no centro da viga, enfatizando a diferença das forças que agem na parte com fissura (tendo subíndice f) e sem fissura (esforços com subíndice b).  
Fonte: Rojas (2019).

Onde na Figura 3.8 temos que:

$\chi_m$  = curvatura da zona sem trinca;

$w_0$  = abertura da trinca no limite elástico;

$\alpha_n h$  = altura relativa do eixo neutro;

$\alpha h$  = altura relativa da trinca;

$N_b$  = força axial na zona sem trinca;

$N_{bc}$  = força axial elástica de compressão;

$N_{bt}$  = força axial elástica de tração;

$N_f$  = força axial na zona com trinca;

$h$  = altura da seção transversal da viga;

$\sigma_t$  = tração no limite elástico( $f_t$ );

$\sigma_b$  = esforço da fibra mais comprimida

Mudar o sistema de coordenadas é equivalente a fazer  $w_0$  ser zero para início dos cálculos, o que significa que se subtrai o valor de  $w_0$  de todos os pontos que se escolheu usar dos dados experimentais. Para exemplificar esse procedimento mostram-se as Figura 3.9 e 3.10 (na Figura 3.10 o mesmo gráfico da figura 3.9 é mostrado só que com uma escala ampliada).

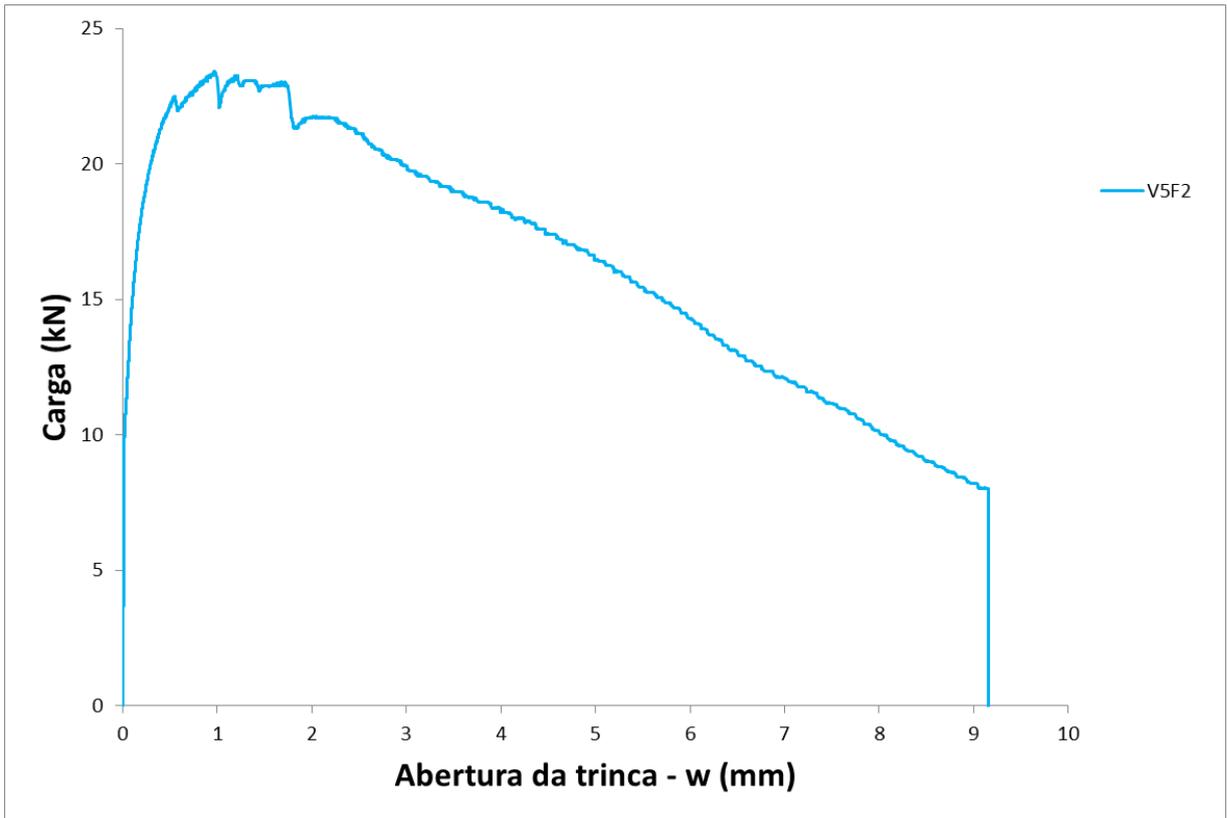


Figura 3.9–Curva experimental carga x abertura da trinca (w), para viga V5F2. Fonte: Rojas 2019.

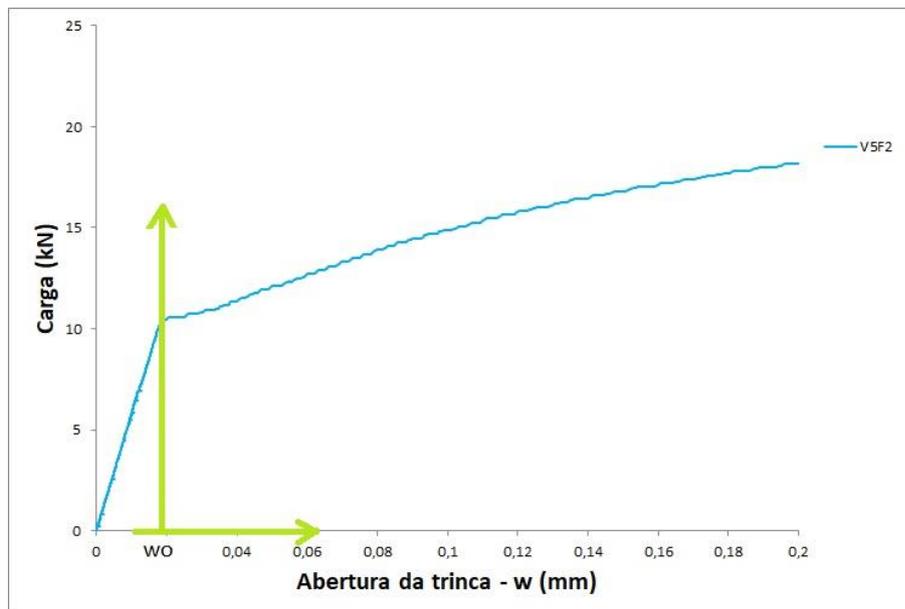


Figura 3.10– Modificação da origem da curva da Figura 3.9 para wo. Fonte: Rojas 2019

O processo consiste em inicialmente tomar 'n' pares de pontos F x w da curva carga x abertura da trinca, partindo de w<sub>0</sub> (w=0). (Para fins de notação: sub-índices 'i+1' referem-se ao ponto que se está tratando e o sub-índice 'i' refere-se ao ponto anterior.). O objetivo da análise é obter os correspondentes valores de tensão coesiva  $\sigma_c$  para cada w.

A AFGC (2013) recomenda realizar incrementos em w (abertura normal da trinca) de 0,02mm, mas no trabalho de Rojas (2019) e nesta dissertação foram usados menos pontos. Para este trabalho foram usados incrementos iniciais de 0,02mm e depois foram usados múltiplos de 0,5mm (0,5mm, 1,0mm, 1,5mm, etc.) até onde permitiam os dados experimentais.

No início do processo iterativo, tem-se o limite do regime elástico com uma abertura de trinca igual a zero e, por isso, tem-se que:

$$M_b^0 = M_{ext} = \frac{-bh^2\sigma_f}{6} \quad (3.29)$$

Em geral, no entanto, sempre valerá a relação isostática  $M=M_{ext}=FL/4$ , onde L é o comprimento entre os apoios da viga (300mm). As equações de equilíbrio que devem ser cumpridas são:

$$M = M_{ext} = Mb + Mf \quad (3.30)$$

$$N = N_{ext} = Nb + Nf = 0 \quad (3.31)$$

Também no início do processo temos:  $Mf_0=0$ ;  $Nb_0=0$  e  $Nf_0=0$  e  $\sigma_{c0} = \sigma_t$ .

As equações a serem resolvidas no passo atual (i+1) são as Equações (3.30)a(3.37), no qual a incógnitas são:  $Mf_{i+1}$ ,  $Mb_{i+1}$ ,  $Nf_{i+1}$ ,  $Nb_{i+1}$ ,  $\chi_{m\ i+1}$ ,  $\alpha_{n\ i+1}$ ,  $\alpha_{i+1}$  e  $\sigma_{ci+1}$ . Como se tem um sistema de equações não lineares em cada ponto que se calcula, a resolução desse sistema é feita usando o método de Newton-Raphson disponibilizado no software Máxima (2020).

$$Nb_{i+1} = \frac{1}{2} E \chi_{m\ i+1} b h^2 \left[ \left(1 - \alpha_{n\ i+1}\right)^2 - \left(\alpha_{i+1} - \alpha_{n\ i+1}\right)^2 \right] \quad (3.32)$$

$$Nf_{i+1} = Nf_i \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \frac{w_i}{w_{i+1}} + \alpha_{i+1} b h \left( \frac{\sigma_{c_i} + \sigma_{c_{i+1}}}{2} \right) \left( 1 - \frac{w_i}{w_{i+1}} \right) \quad (3.33)$$

$$Mb_{i+1} = \frac{1}{3} E \chi_{m\ i+1} b h^3 \left[ \left(1 - \alpha_{n\ i+1}\right)^3 - \left(\alpha_{i+1} - \alpha_{n\ i+1}\right)^3 \right] + h \alpha_{n\ i+1} Nb_{i+1} \quad (3.34)$$

$$Mf_{i+1} = Mf_i \left( \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \frac{w_i}{w_{i+1}} \right)^2 + \alpha_{i+1} h Nf_{i+1} \left( 1 - \frac{w_i}{w_{i+1}} \right) - \frac{(\alpha_{i+1} h)^2 b}{2} \left( 1 - \frac{w_i}{w_{i+1}} \right)^2 \sigma_{c_{i+1}} \quad (3.35)$$

$$\sigma t = E \chi_{m_{i+1}} h (\alpha_{n_{i+1}} - \alpha_{i+1}) \quad (3.36)$$

$$w_{i+1} = \left[ \chi_{m_{i+1}} + 2 \frac{M_{i+1}}{EI} \right] \frac{2(\alpha_{i+1} h)^2}{3} \quad (3.37)$$

Ainda na primeira etapa, obviamente  $\alpha_0=0$  e  $\alpha_{n_0}h=h/2$ , pois o tamanho da trinca é nulo.

A solução do sistema de 8 equações encontra 8 parâmetros como resposta, sendo o esforço  $\sigma_{c_{i+1}}$  o parâmetro fundamental a ser obtido, uma vez que é usado para definir a relação coesiva.

Os dados experimentais são discretos e a análise inversa usa um tipo de derivada do momento, por isso, geralmente se tem uma oscilação da relação tensão x abertura da trinca. A AFGC(2013) recomenda estabilizar os resultados utilizando uma média móvel que corrige a iteração  $i$  após o cálculo de  $i+1$ , conforme a Equação (3.38), essa correção deve ser feita no final de cada iteração. Esse procedimento completo está resumido no fluxograma da Figura 3.11, e um exemplo numérico está no apêndice A.

$$\sigma_{c_i} = \frac{(2\sigma_{c_i} + \sigma_{c_{i+1}})}{3} \quad (3.38)$$

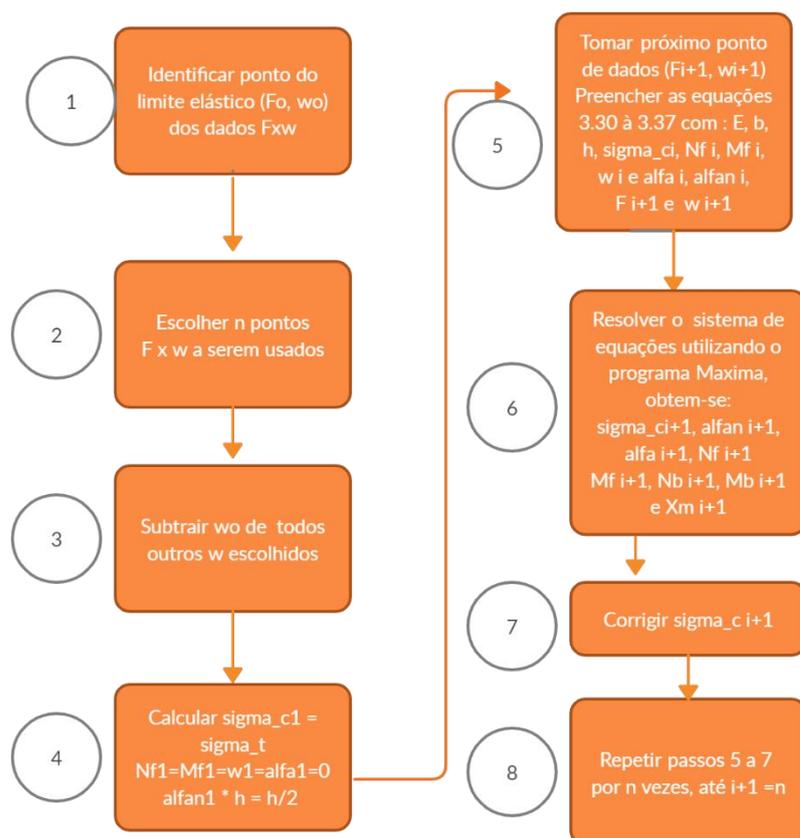


Figura 3.11 – Fluxograma resumindo o procedimento da análise inversa da AFGC para ensaios de flexão em vigas a três pontos.

Após feita análise inversa é necessário fazer a junção da lei de comportamento linear e a parte não linear obtendo-se assim a relação constitutiva do material.

Após feita a análise inversa se obtém a curva tensão coesiva x abertura de trinca. Para obter a lei constitutiva do material, A AFGC(2013) possui uma fórmula que relaciona  $w$  (abertura da trinca) e  $\varepsilon$  (deformação) Equação (3.39); então a partir da curva tensão coesiva x abertura de trinca e com a Equação (3.39) se obtém a lei constitutiva ( $\sigma_c = f(\varepsilon)$ ).

$$\varepsilon = \frac{f_{ct,el}}{E} + \frac{w}{lc} \quad (3.39)$$

Onde:

$f_{ct,el}$  = resistência a tração da matriz no limite elástico;

$E$ = módulo de elasticidade do concreto;

$lc$ = comprimento característico.

A AFGC(2013) diz que para CUADRF com amolecimento por deformação ou com pouco pseudo endurecimento por deformação o comprimento característico é dado pela Equação 3.40.

$$l_c = \frac{2}{3}(h - a) \quad (3.40)$$

Onde:

h = altura da viga;

a = altura do entalhe.

## 4 RESULTADOS

Neste capítulo inicialmente serão colocadas as informações experimentais obtidas da tese de ROJAS (2019) e na próxima seção (4.2) serão colocados os resultados da modelagem numérica, com diferentes formulações para as leis coesivas do CUADRF.

### 4.1 CARACTERIZAÇÃO GERAL DOS EXPERIMENTOS DE ROJAS (2019)

Nessa seção primeiramente será descrita a composição dos concretos que foram desenvolvidos por Rojas (2019). Posteriormente serão mostrados os resultados dos ensaios de flexão e as respectivas energias de fratura calculadas.

#### 4.1.1 Caracterização do Material CUADRF

Para validação dos modelos numéricos serão utilizados os dados experimentais do concreto de Rojas(2019). Nesta seção será definida a composição dos concretos (CUADRF) em estudo, também serão colocadas de forma resumida as características mecânicas ( $f_c$ ,  $f_t$ ,  $E$ ,  $\nu$ ), e os resultados do ensaio de flexão a três pontos obtidos por Rojas (2019).

##### a) Traço

Foi utilizado o cimento Portland CP V ARI de alta resistência inicial. Como substitutos parciais do cimento foram usados resíduos industriais: escória de alto forno, sílica ativa (ND SILMIX fabricado por Dow Corning Metais do Pará Industria e Comercio Ltda, Pará-Brasil.) e pó de quartzo. Os agregados utilizados foram: areia fina siltosa com diâmetro máximo de  $0,30 \mu m$ . O superplastificante utilizado foi uma solução de policarboxilatos em meio aquoso da marca Sika (ViscoCrete 3535). As fibras utilizadas foram mini fibras de aço importadas. Essas fibras têm 13mm de comprimento. Na tabela 4.1 pode ser visto um resumo dos traços, onde é especificado a massa de material em kg necessária para fazer  $1m^3$  de concreto. A única diferença dos traços é a quantidade de fibras 1% e 2% que é dada em volume no traço.

Tabela 4-1 - Composição dos concretos com mini fibras de aço

<b>Material (kg/m<sup>3</sup>)</b>	<b>Traço com 1% do volume em fibras</b>	<b>Traço com 2% do volume em fibras</b>
<b>Cimento</b>	955,0	955,0
<b>Escória de Alto Forno</b>	263,0	263,0
<b>Pó de Quartzo</b>	119,0	119,0
<b>Silica Ativa</b>	119,0	119,0
<b>Areia Siltosa</b>	788,0	788,0
<b>Superplastificante</b>	40,0	40,0
<b>Água</b>	185,0	185,0
<b>Mini Fibras de aço</b>	78,5	158,0

Fonte: ROJAS(2019).

#### b) Caracterização Mecânica do Concreto

Os ensaios de compressão, para determinação do  $f_c$ , foram feitos seguindo as recomendações das normas brasileiras NBR 7215 (ABNT, 1995) e NBR 5739 (ABNT, 2007).

O módulo de elasticidade ( $E$ ) foi calculado segundo as recomendações da AFGC (AFGC, 2013).

Para determinação da resistência à tração ( $f_t$ ) foram feitos ensaio de tração direta do tipo “dog bone”, seguindo as recomendações japonesas. A instrumentação desse ensaio pode ser vista na Figura 4.1.

O coeficiente de Poisson não foi obtido experimentalmente, sendo utilizado o valor médio para CUADRF de 0,2 conforme a recomendação da AFGC (2013).

Os resultados de caracterização mecânica podem ser vistos na Tabela 4.2.

Tabela 4-2 - Resumo das propriedades elásticas dos concretos em estudo

<b>Concreto</b>	<b><math>f_c</math> (MPa)</b>	<b><math>f_t</math> (MPa)</b>	<b><math>E</math> (GPa)</b>	<b><math>\nu</math></b>
<b>1% de mini fibras</b>	150,89	7,35	47,07	0,2
<b>2% de mini fibras</b>	150,89	8,09	51,77	0,2

Fonte: ROJAS (2019).



Figura 4.1 – Ensaio de tração direta tipo “dog bone”. Fonte: ROJAS (2019).

#### 4.1.2 Ensaio de Flexão em três pontos

Para os ensaios de flexão Rojas (2019) utilizou vigas prismáticas com um entalhe central. As dimensões dessas vigas estão descritas pelas Figuras 4.2 e 4.3. As vigas foram ensaiadas com aplicação de um deslocamento controlado, com velocidade de 0,5mm/min.

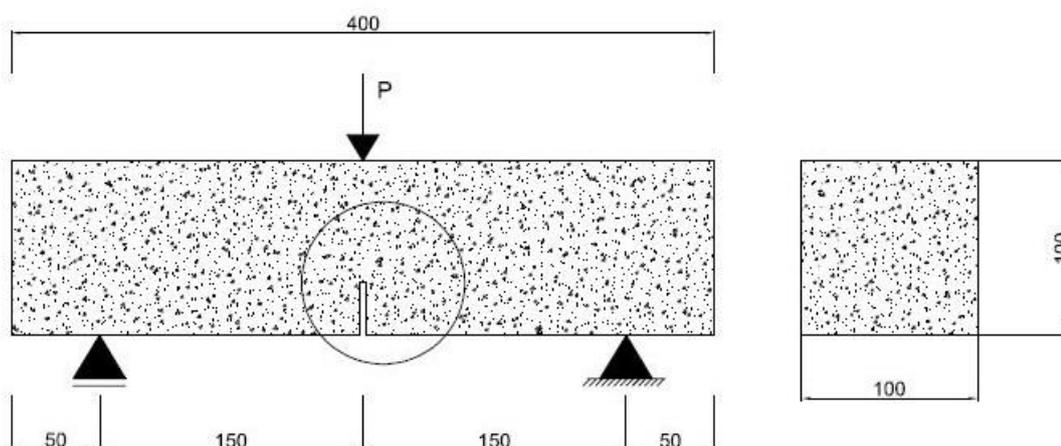


Figura 4.2- Dimensões das vigas para ensaio de flexão em três pontos, as dimensões estão em mm.

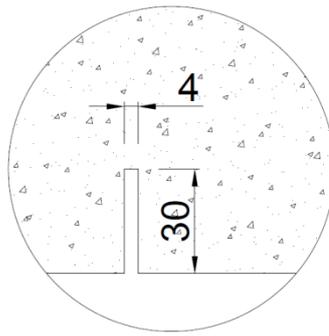


Figura 4.3 - Detalhe da Figura 4.2 para destacar dimensões do entalhe, dimensões estão em mm.

Para medição da flecha e abertura da trinca foram usados LVDT com intervalo de medição de 10mm. Por isso, os dados coletados com flecha e abertura da trinca maiores que esse valor(10mm) são considerados duvidosos. Os gráficos experimentais de carga vertical aplicada por flecha no centro do vão podem ser vistos nas Figuras 4.4 e 4.5.

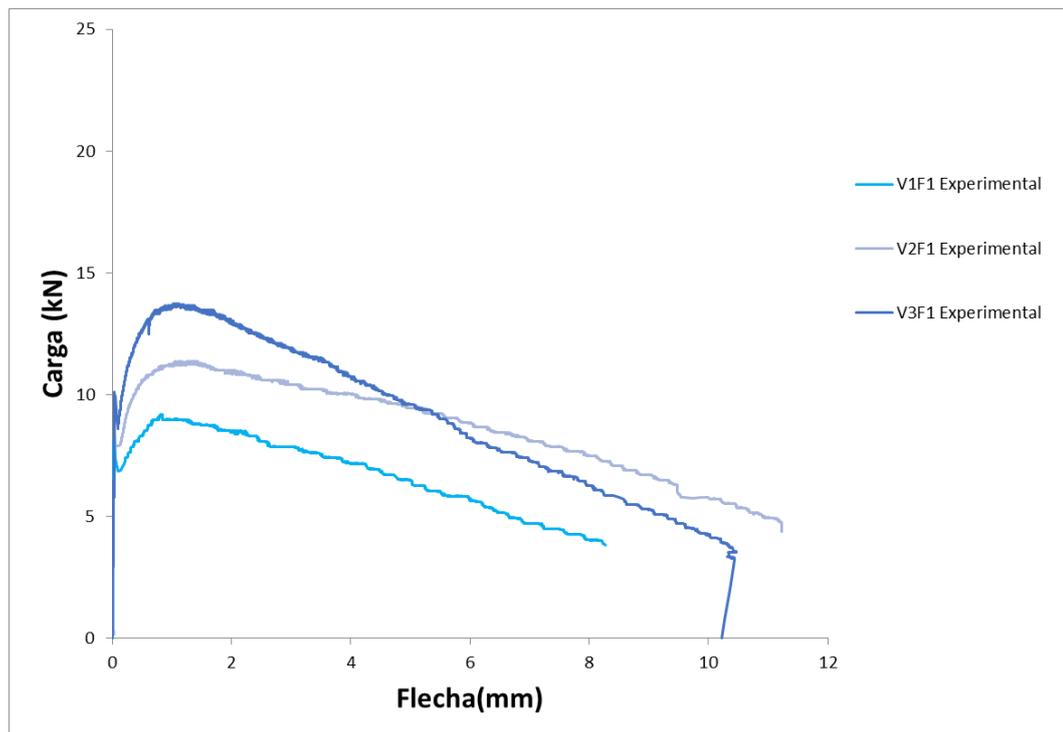


Figura 4.4 – Resultados Experimentais para vigas com 1% de fibras. Sendo que a nomenclatura adotada V3F1 se refere a viga número 1(V3) com 1% de fibras(F1). Fonte: Rojas (2019).

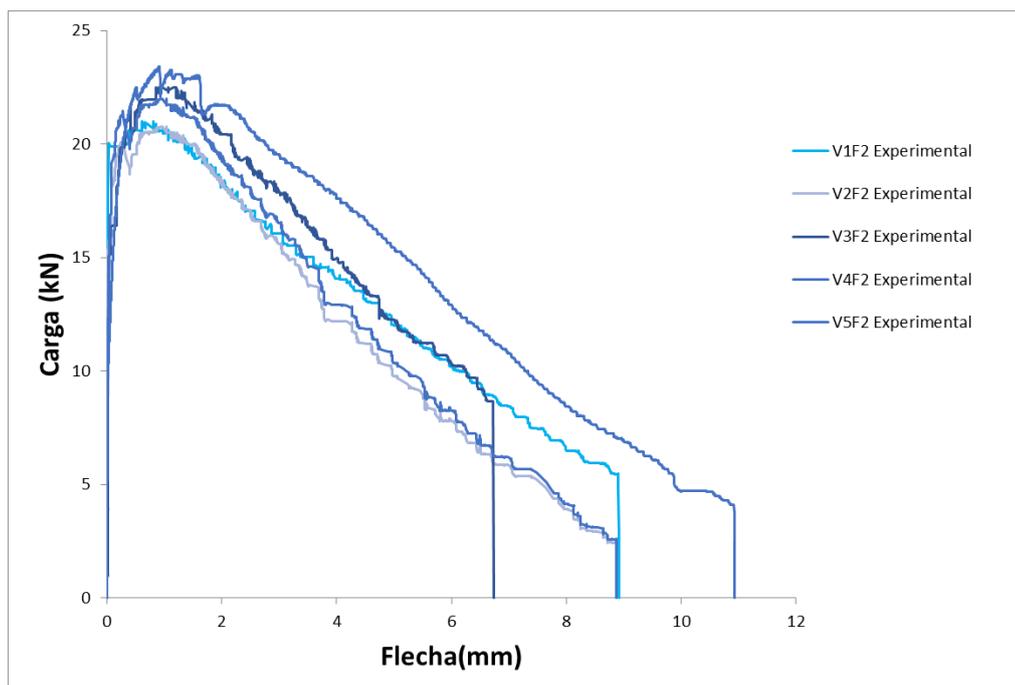


Figura 4.5 - Curva Força x Deslocamento para Vigas V1F2, V2F2, V2F3, V4F4 e V5F2. Sendo que V1F2 se refere a viga número 1(V1) com 2% de fibras(F2). Fonte: Rojas (2019).

Estes gráficos foram usados para cálculo da Energia de Fratura segundo as recomendações do RILEMTC-162 (2000). Seguindo essa normativa, os valores de energia de fratura calculados estão resumidos nas Tabelas 4.3 e 4.4. As energias de fratura foram calculadas individualmente para cada curva experimental de Rojas(2019). As três vigas com 1% de fibras vão ser de agora em diante identificadas como V1F1, V2F1, V3F1; e a as cinco vigas com 2% como V1F2, V2F2, V3F2, V4F2 e V5F2.

Ainda foi calculada a tenacidade utilizando a extrapolação da curva experimental, conforme o procedimento desenvolvido por Denneman et al. (2011), esses valores também estão nas Tabelas 4.3 e 4.4.

Tabela 4-3 – Tenacidade para vigas com 1% de fibras

<b>Vigas com 1% de fibras</b>	<b><math>G_f</math> (N/mm)</b>	<b><math>G_f</math>(N/mm) com extrapolação</b>
<b>V1F1</b>	8,01	8,40
<b>V2F1</b>	13,66	14,12
<b>V3F1</b>	13,52	13,82
<b>Média</b>	11,73	12,12

Tabela 4-4 - Tenacidade para vigas com 2% de fibras

Vigas de 2% de aço	$G_f$ (N/mm)	$G_f$ (N/mm) com extrapolação
V1F2	16,92	17,75
V2F2	14,85	15,87
V3F2	15,58	16,65
V4F2	15,71	16,71
V5F2	21,74	22,55
<b>Média</b>	16,96	17,90

## 4.2 MODELOS NUMÉRICOS

A malha de elementos finitos utilizada, para modelagem numérica no METAFOR, pode ser vista na Figura 4.6. Foram utilizados 4000 elementos quadriláteros de 4 nós (considerados como de comportamento linear elástico), sendo 56 elementos coesivos colocados no eixo vertical no centro da viga.

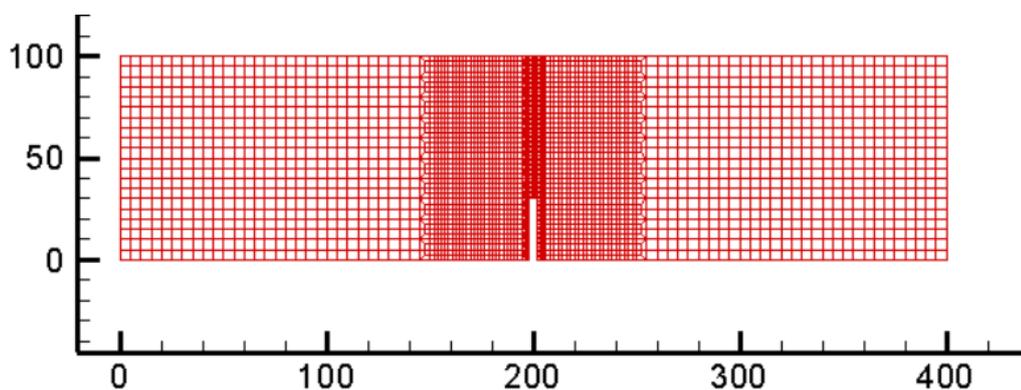


Figura 4.6 – Malha utilizada com dimensões em milímetros.

Na metodologia escolhida, com interfaces coesivas, considera-se que toda a não linearidade da ZPF está nos elementos coesivos, FEDRIGO (2001). Por isso, foi feita uma discretização mais refinada próximo da linha central da viga, onde foram inseridos os elementos coesivos (Figura 4.7). Os menores elementos da malha têm dimensões de 1mm x 1,25mm, e os maiores elementos finitos têm 5mm x 5mm.

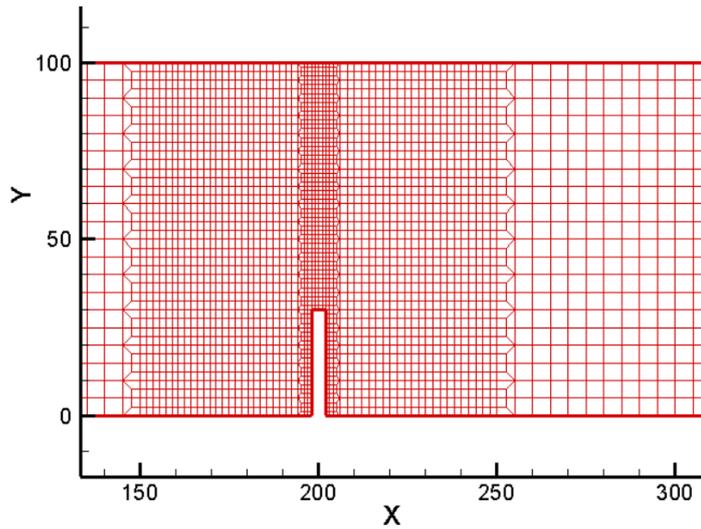


Figura 4.7 – Detalhe da discretização no centro da viga. Dimensões em milímetros.

A seguir serão apresentados os resultados obtidos utilizando as relações coesivas de Xu e Needleman (1994), Denneman et al. (2011) e Análise Inversa (AFGC, 2013).

#### 4.2.1 Xu e Needleman (1994)

Para este modelo inicialmente utilizou-se  $\sigma_{\max} = f_t$  (resistência à tração do concreto) buscando-se ajuste da força máxima experimental com o valor obtido numericamente. Porém não foi possível obter um bom ajuste para as vigas de 1%, conforme pode ser visto na Figura 4.8, onde  $f_t$  é 7,35 MPa. Na próxima Figura (4.9) é possível ver que para as vigas com maior teor de fibras se tem um ajuste razoável com  $\sigma_{\max} = f_t$ , para essas vigas  $f_t$  é 8,09 MPa.

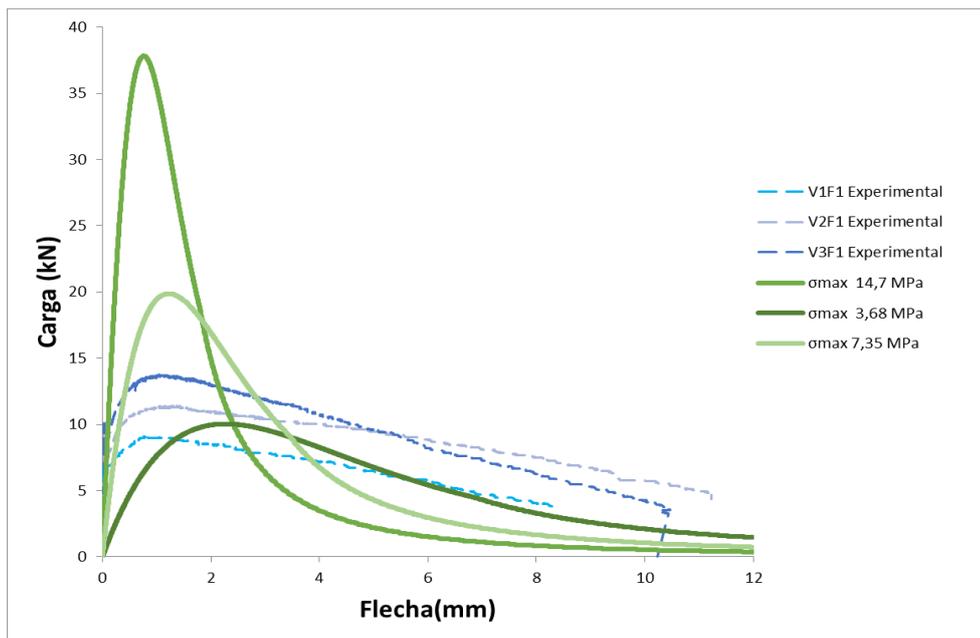


Figura 4.8—Comparação de resultados numéricos para vigas de 1% usando formulação de Xu e Needleman (1994).

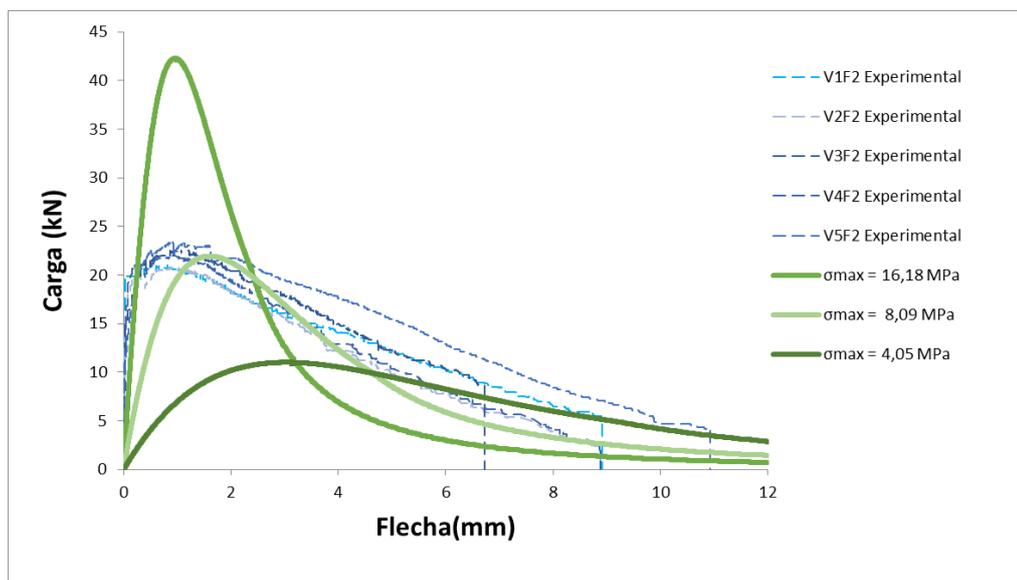


Figura 4.9—Comparação de resultados numéricos para vigas de 2% usando formulação de Xu e Needleman (1994).

Para melhor ajuste das vigas de 1%, foi feita uma análise paramétrica de  $\sigma_{\max}$ . Alguns dos resultados obtidos podem ser vistos na Figura 4.8. Também foi feita uma variação de  $\sigma_{\max}$  para as vigas de 2%, Figura 4.9.

O que se buscou foi um ajuste da força máxima média experimental da curva carga x flecha. Na formulação de Xu e Needleman (1994) o único parâmetro que pode ser variado é o  $\sigma_{\max}$  que é um valor característico para cada material. Com a análise paramétrica ficou visível que esse valor interfere no módulo da força máxima, mas tem pouca influência na forma da cauda da curva carga x flecha.

Os valores de força máxima vertical ( $F_{\max}$ ) obtidos com o modelo numérico e formulação de Xu e Needleman (1994) foram comparados com os valores experimentais, essa comparação está resumida nas Tabelas 4.5 e 4.6.

Tabela 4-5 – Comparação entre força máxima experimental e numérica.

<b>Vigas com 1% de Fibras formulação de Needleman</b>			
$\sigma_{\max}$ (MPa)	<b>14,7</b>	<b>7,35</b>	<b>3,68</b>
$\delta_n$ (mm)	0,30	0,61	1,21
<b>Carga<sub>max</sub>, Numérico(KN)</b>	37,53	19,87	10,03
<b>Diferença entre Carga<sub>max</sub>, (Numérico x Experimental)</b>	230%	74%	12%

Tabela 4-6 - Comparação entre força máxima experimental e numérica.

<b>Vigas com 2% de Fibras formulação de Needleman</b>			
$\sigma_{\max}$ (MPa)	<b>16,18</b>	<b>8,09</b>	<b>4,05</b>
$\delta_n$ (mm)	1,63	0,81	0,41
<b>Carga<sub>max</sub>, Numérico(KN)</b>	42,28	21,93	11,02
<b>Diferença entre Carga<sub>max</sub>, (Numérico x Experimental)</b>	92,71%	0,03%	49,80%

Considerou-se que os melhores ajustes foram de  $\sigma_{\max} = 3,68$  MPa para as vigas de 1% de fibras, e  $\sigma_{\max} = 8,09$  MPa para as vigas com 2%.

#### 4.2.2 Denneman et al. (2011)

Na formulação de Denneman et al. (2011)  $w_1$  e  $\sigma_1$  são, respectivamente, a abertura da trinca e tensão no limite entre a formulação linear e a exponencial. Segundo as recomendações

dos autores se considerou que  $w_1$  é igual a 0,005mm e foi feita uma análise paramétrica variando-se os valores de  $\sigma_1$ . Para o concreto com 1% de mini fibras de aço obteve-se as curvas mostradas na Figura 4.10. Foi observado que para valores de  $\sigma_1$  muito distantes do valor de  $f_t$  a curva passa a apresentar uma forma atípica (curva de  $\sigma_1$  de 4MPa da Figura 4.10).

Como esses resultados usando a formulação de Denneman et al. (2011) estão muito distantes dos resultados experimentais buscou-se modificar outros parâmetros da formulação para encontrar um melhor ajuste.

Alterando o limite entre a parte linear e exponencial ( $w_1$ ) foi possível diminuir os valores de carga máxima, mas isso também causou diminuição da inclinação da parte linear e com pequena alteração na forma da cauda (parcela influenciada pelo amolecimento exponencial).

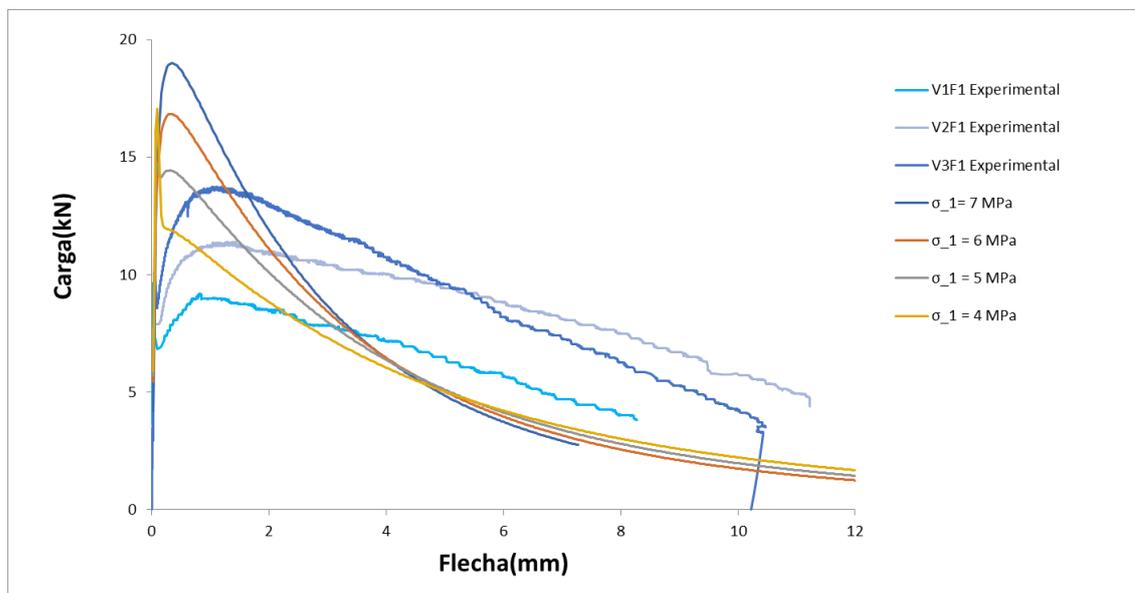


Figura 4.10 – Resultados para concreto com 1% de fibra utilizando as fórmulas de Denneman et al. (2011).

Considerando que os traços utilizados por Denneman et al.(2011) possuem energias de fratura muito inferiores aos concretos de Rojas(2019), dividiu-se o argumento da parte exponencial da Equação (3.24)(onde está  $G_f$  nesse modelo) da lei coesiva por uma constante(D1); obtendo-se a Equação(4.2). Dessa maneira foi possível ajustar a parte descendente do gráfico(cauda), conforme pode ser visto nas Figura 4.11a 4.14.

$$\sigma_c = f_t \left( \frac{f_t - \sigma_1}{w_1} \right) w \text{ para } 0 < w < w_1 \quad (4.1)$$

$$\sigma_c = \sigma_1 e^{\left( \frac{-a_1 (w-w_1)}{D1} \right)} \text{ para } w_1 < w < \infty \quad (4.2)$$

O melhor ajuste considerado para as vigas de 1% de fibras foi com  $\sigma_1$  de 4MPa e D1 de 2,5. Para as vigas de 2% embora a curva sem D1 de  $\sigma_1$  7,5 MPa está mais próxima do valor de pico médio das curvas experimentais, considera-se que a curva com  $\sigma_1$  de 7MPa e D1 igual a 1,5 representa melhor a parte da cauda das curvas experimentais.

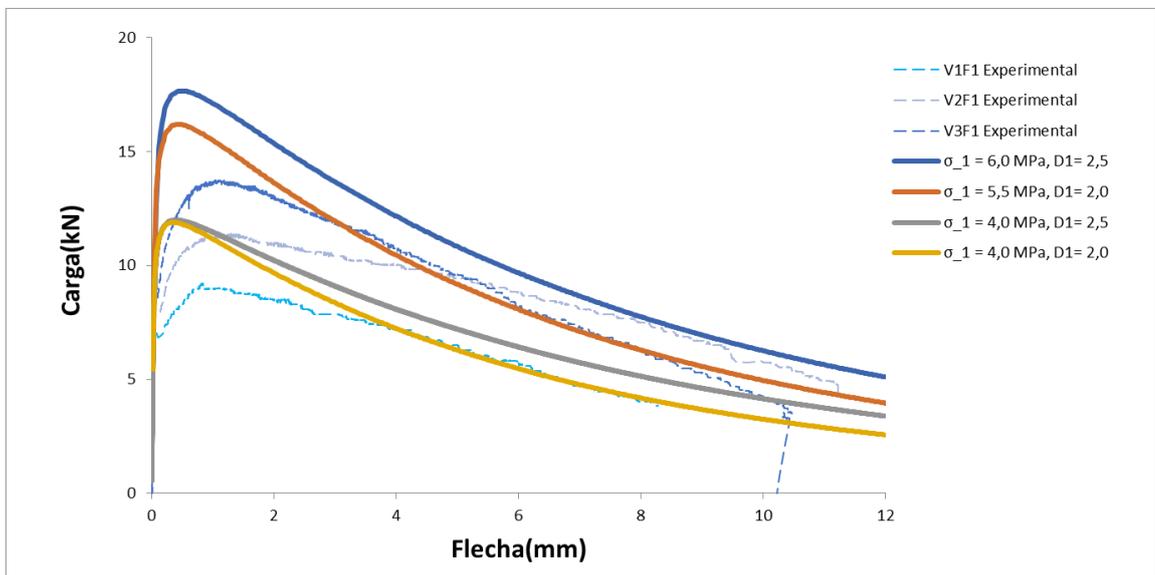


Figura 4.11 – Resultados para concreto com 1% de fibras usando fórmulas modificadas de Denneman et al. (2011) com parâmetro D1.

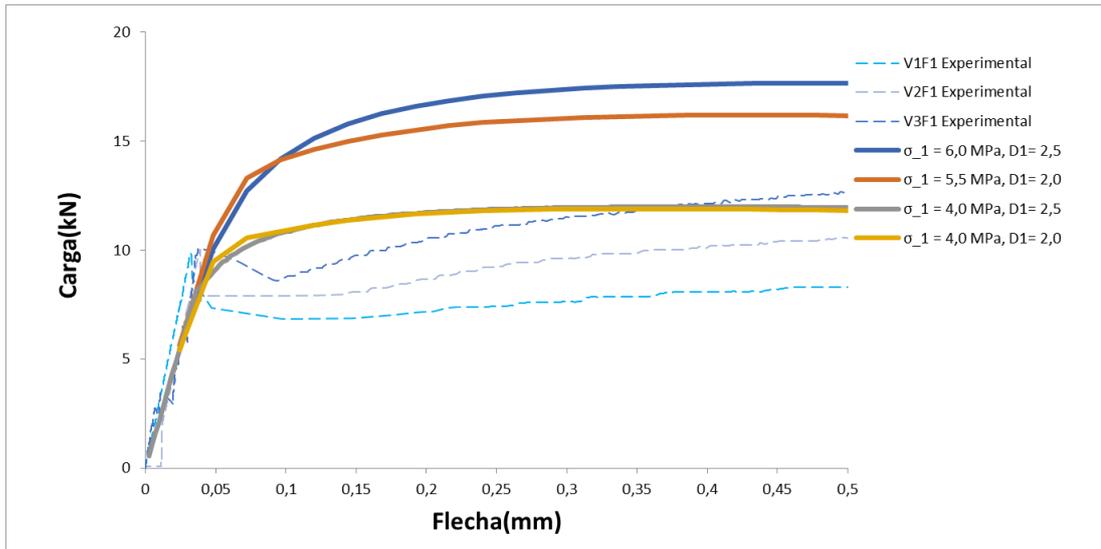


Figura 4.12 - Detalhe da Figura 4.11 mostrando início do gráfico

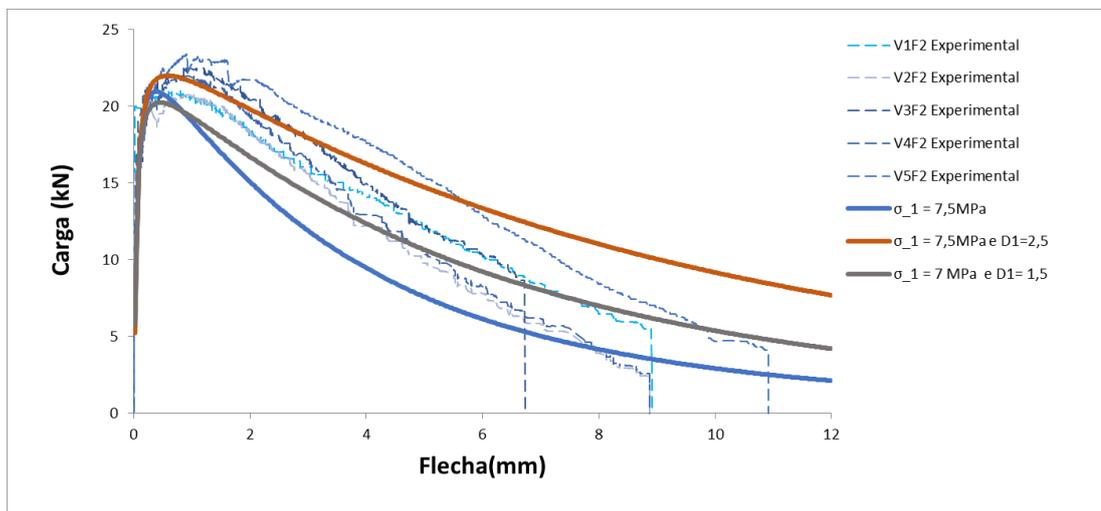


Figura 4.13 - Resultados para concreto com 2% de fibra utilizando fórmulas modificadas baseadas na formulação de Denneman et al (2011).

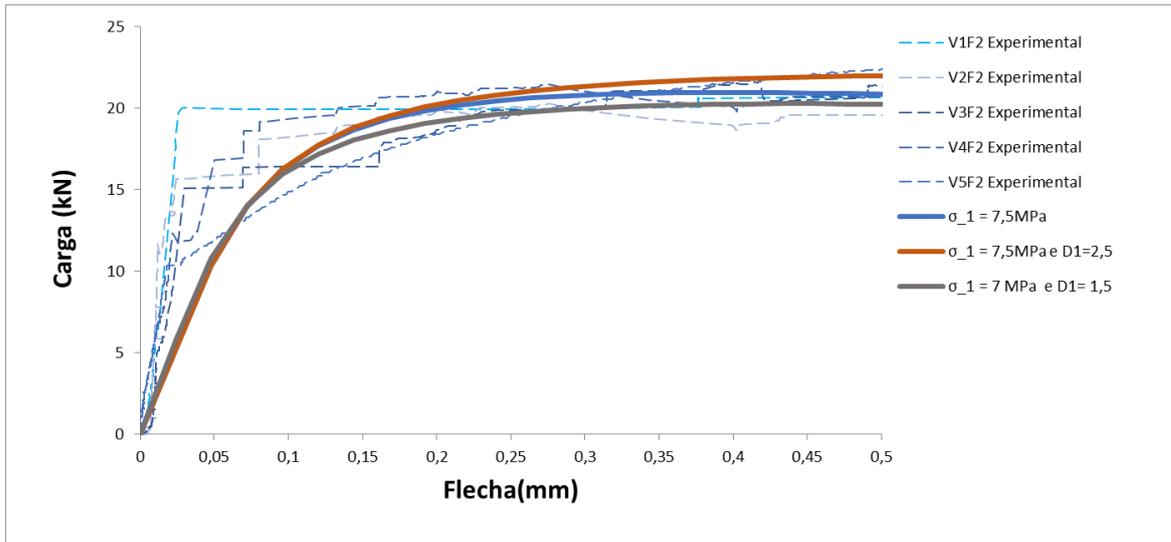


Figura 4.14 - Detalhe da Figura 4.13 mostrando início do gráfico.

### 4.2.3 Análise Inversa

Para dar início a análise inversa é necessário se ter as curvas carga X abertura de trinca. Essa informação foi obtida de Rojas (2019), e as curvas podem ser vistas nas Figuras 4.15 e 4.16, respectivamente, para as vigas com 1% e 2% de mini fibras de aço. Comparando os gráficos dos diferentes traços nota-se que para as vigas de 1% chegam a atingir no máximo cerca de 14kN e já as vigas de 2% atingem cargas ainda maiores, cerca de 23kN.

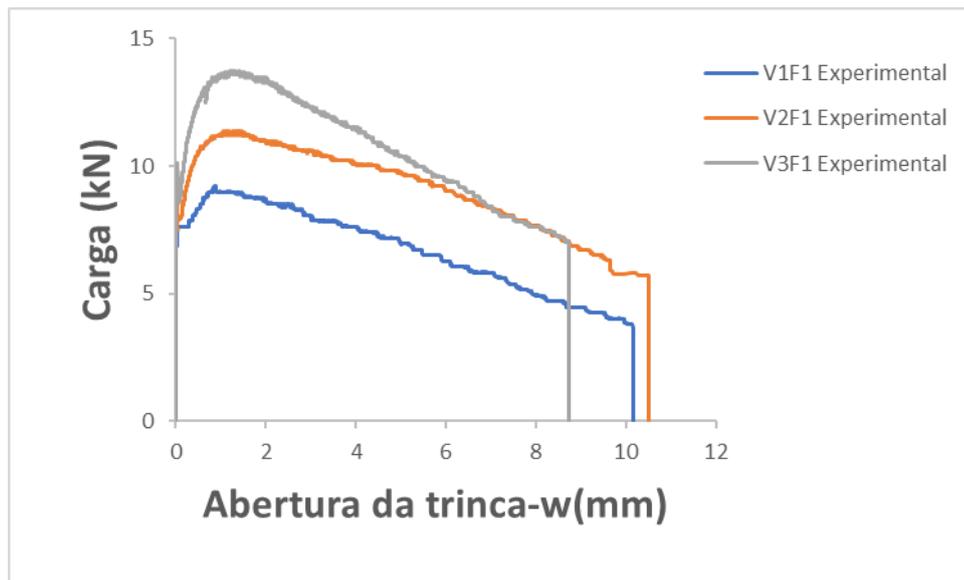


Figura 4.15 – Gráficos de força (Carga) por abertura normal da trinca (w) para vigas V1F1, V2F1 e V3F1 com 1% de fibras de mini aço.

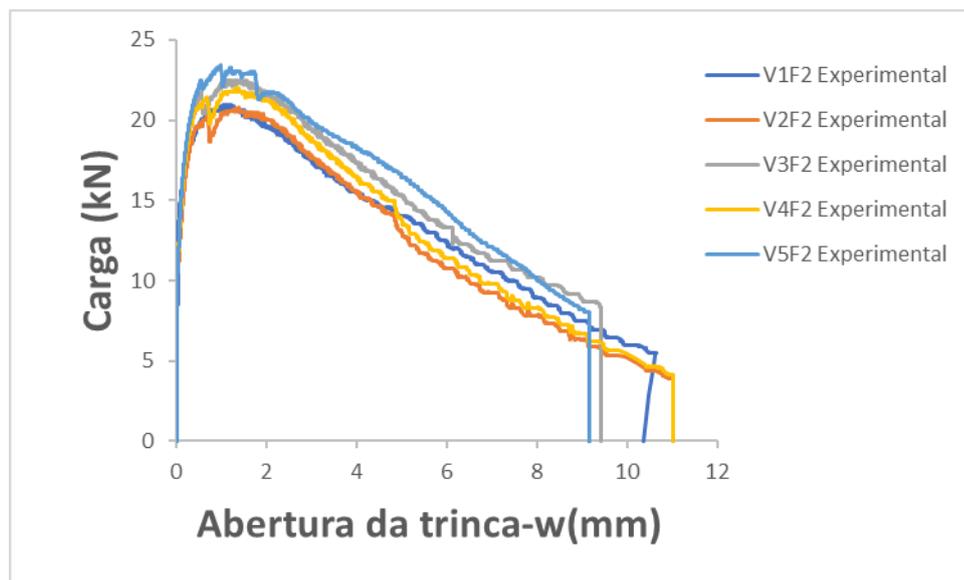


Figura 4.16 - Gráficos de força (Carga) por abertura normal da trinca (w) para vigas V1F2, V2F2, V3F2, V4F2 e V5F2 com 2% de fibras de mini aço.

Seguindo a metodologia da AFGC (2013) explicada na seção 3.2.3 foi possível encontrar a relação coesiva de cada viga. Os resultados obtidos estão nas figuras 4.17 e 4.18, respectivamente para as vigas de 1% de fibras e 2%.

As vigas com 1% de fibras apresentaram forma semelhante, com um segundo pico pequeno, aproximadamente em  $w=1,5\text{mm}$ , com valor máximo menor que 5MPa, não apresentando tendência de pseudo endurecimento na tração.

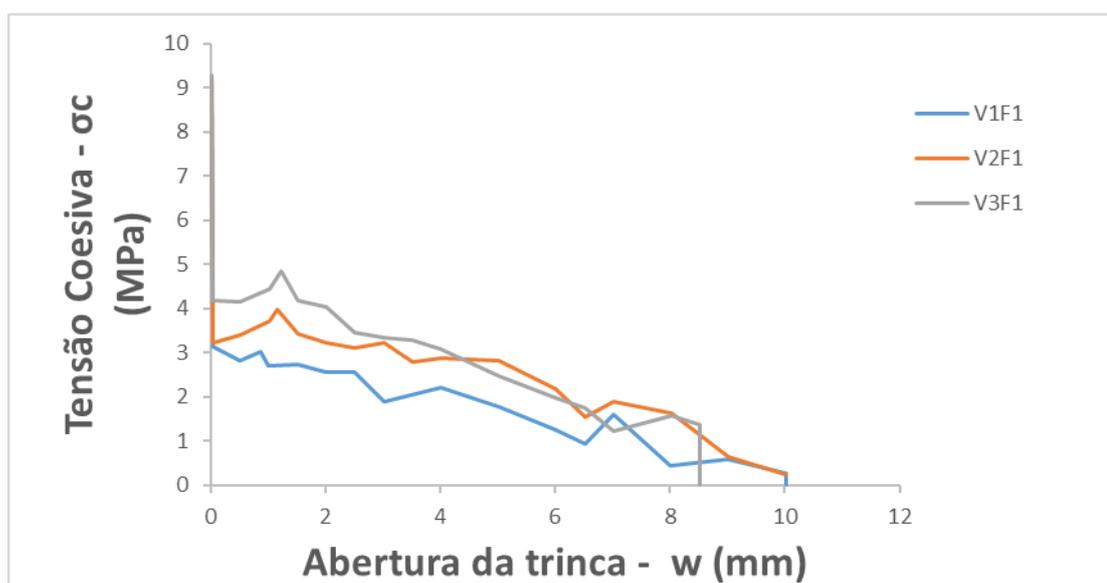


Figura 4.17 – Relações coesivas, obtidas da análise inversa, para vigas com 1% de fibras de mini-aço: V1F1, V2F1 e V3F1.

As relações coesivas encontradas para as vigas V2F2, V3F2, V4F2 e V5F2, com 2% de fibras, já apresentaram um segundo pico mais visível que nas vigas de 1%, chegando a uma tensão máxima de aproximadamente 8MPa, mas mesmo assim não se pode afirmar que as vigas com 2% de fibras têm pseudo endurecimento na tração, pois em nenhum caso esse segundo pico é maior que o primeiro.

Os dois concretos são classificados como tendo pseudo endurecimento apenas na flexão, o que pode ser verificado observando as curvas de carga x flecha (Figura 4.4 e 4.5).

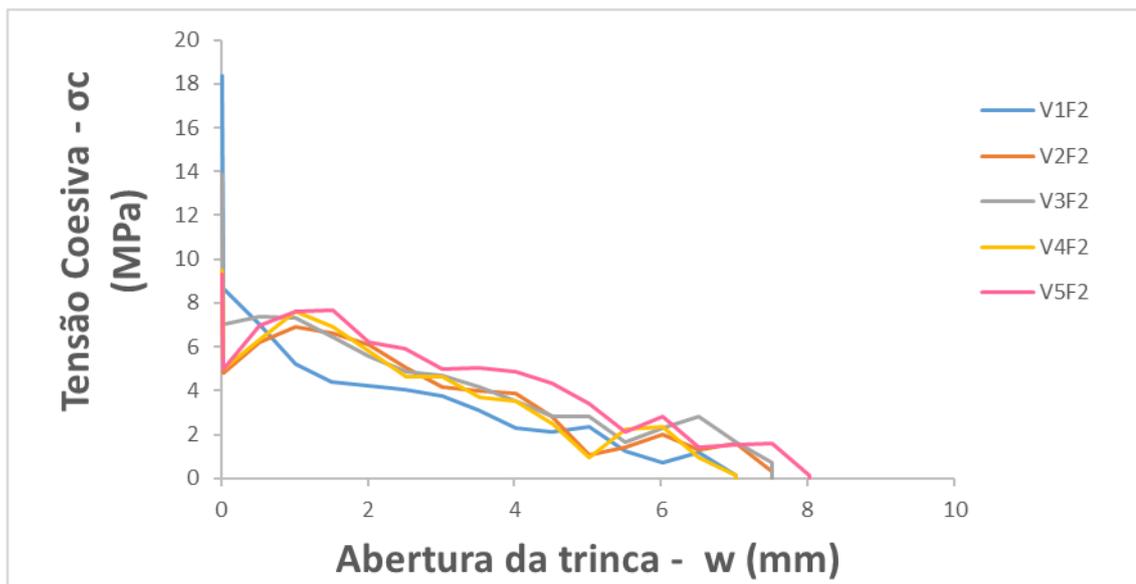


Figura 4.18 – Relações coesivas, obtidas da análise inversa, para vigas com 2% de fibras de mineração: V1F2, V2F2, V3F2, V4F2 e V5F2.

As relações coesivas acima (Figuras 4.17 e 4.18) foram implementadas seguindo diferentes níveis de detalhamento. Assim, as funções vistas na Figura 4.17 foram modeladas considerando funções trilineares, quadrilineares e polilineares. As funções vistas na Figura 4.18 foram modeladas apenas considerando funções quadrilineares e polilineares. Não se fez a formulação trilinear para as vigas com 2% de fibras pois elas apresentaram relações coesivas mais complexas que as vigas de 1% de fibras.

#### 4.2.4 Relação Trilinear

Com base nos resultados da análise inversa iniciou-se a investigação de resultados com a relação coesiva trilinear para as vigas com 1%, pois elas apresentam um segundo pico bem menor que as vigas de 2%. Foram feitos testes apenas para ajustar a curva das vigas V1F1, V2F1 e V3F1. Para essa investigação se usou  $f_t$  de 7,35 MPa; módulo de elasticidade de 47,07 MPa e coeficiente de Poisson de 0,2.

A partir da análise inversa foi feita uma simplificação da relação coesiva com os pontos da Tabela 4.7. Para estabelecer a lei trilinear da primeira viga foi limitada a abertura da trinca até 6,5155mm, que é metade do comprimento das fibras (6,5mm) somado do valor limite de abertura elástica ( $w_{el}$ ), que é de 0,0155mm para viga V1F1, e para as outras vigas (V2F1 e V3F1) foi feito um limite com esse mesmo raciocínio. O motivo de limitar a relação coesiva na metade do comprimento das fibras é porque esse seria o máximo de aproveitamento da aderência entre as fibras e a matriz do concreto, após a abertura de 6,5mm não há mais o efeito de ponteamto por fibras.

a) V1F1

As relações coesivas trilinear para viga V1F1 pode ser vista na Figura 4.19, bem como a relação obtida por análise inversa. Nessa figura fica claro o corte feito para aberturas em aproximadamente 6,5mm. Na tabela 4.7 estão os pontos utilizados para fazer a simplificação trilinear da viga V1F1.

Tabela 4-7 - Pontos utilizados para fazer relação coesiva tri linear da viga V1F1.

Pontos	$\sigma_c$ (MPa)	w(mm)
0	0,00	0,0000
1	9,07	0,0155
2	3,13	0,0355
3	0,93	6,5155

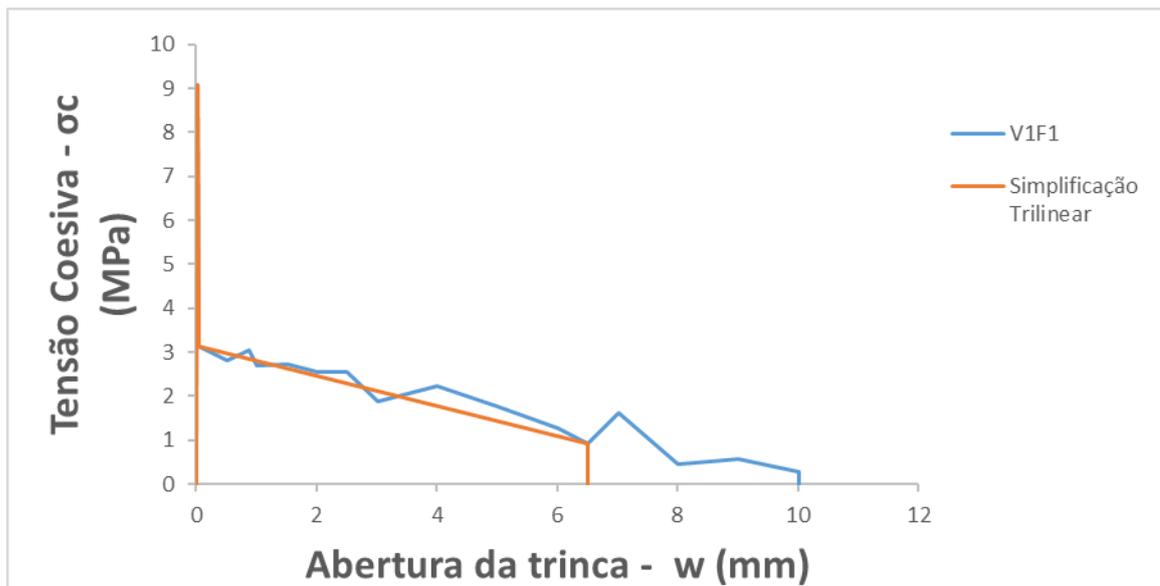


Figura 4.19 – Comparação relações coesivastrilineare da análise inversa da viga V1F1.

Considerou-se que para a simplificação trilinear, Figura 4.20, apresentou um pico que não se ajusta a curva experimental, então buscou-se fazer mudanças na relação coesiva para melhorar o ajuste. A partir de agora a tensão coesiva no ponto de  $w_{el}$ , que é abertura normal no limite elástico, será denominada  $\sigma_p$  (corresponde ao ponto 1 da Tabela 4.7). Com variações de  $\sigma_p$  é feito um estudo paramétrico cujos resultados podem ser vistos na Figura 4.20.

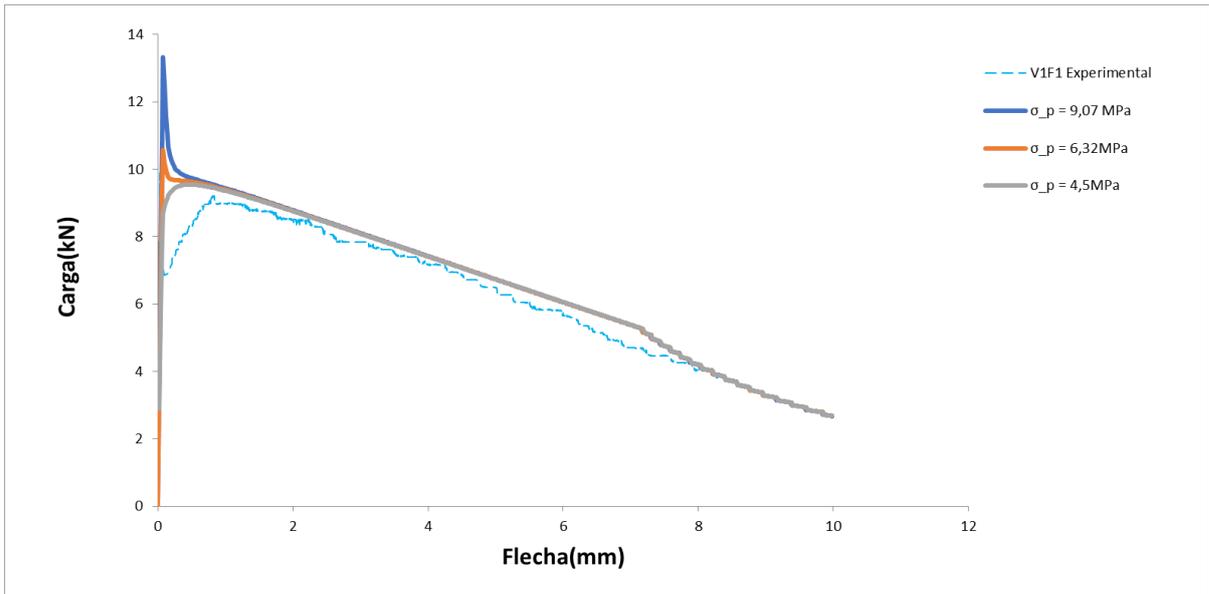


Figura 4.20–Comparativo dos resultados numéricos para análise paramétrica variando  $\sigma_p$  para viga V1F1.

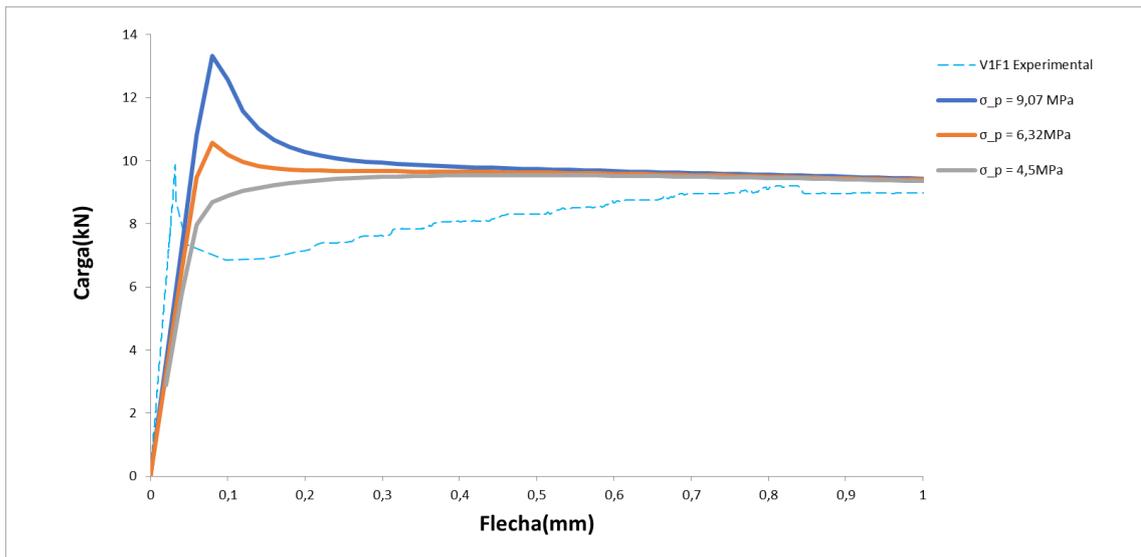


Figura 4.21– Detalhe da Figura 4.20, referente ao estudo paramétrico de  $\sigma_p$  para viga V1F1.

O melhor resultado para viga V1F1 foi com  $\sigma_p$  de 4,5 MPa. Também foi feita uma análise paramétrica sobre a influência do parâmetro da abertura elástica ( $w_{el}$ ), mas as alterações foram pequenas e apenas alteraram a inclinação da parte linear dos gráficos, conforme pode ser visto nas figuras 4.22 e 4.23.

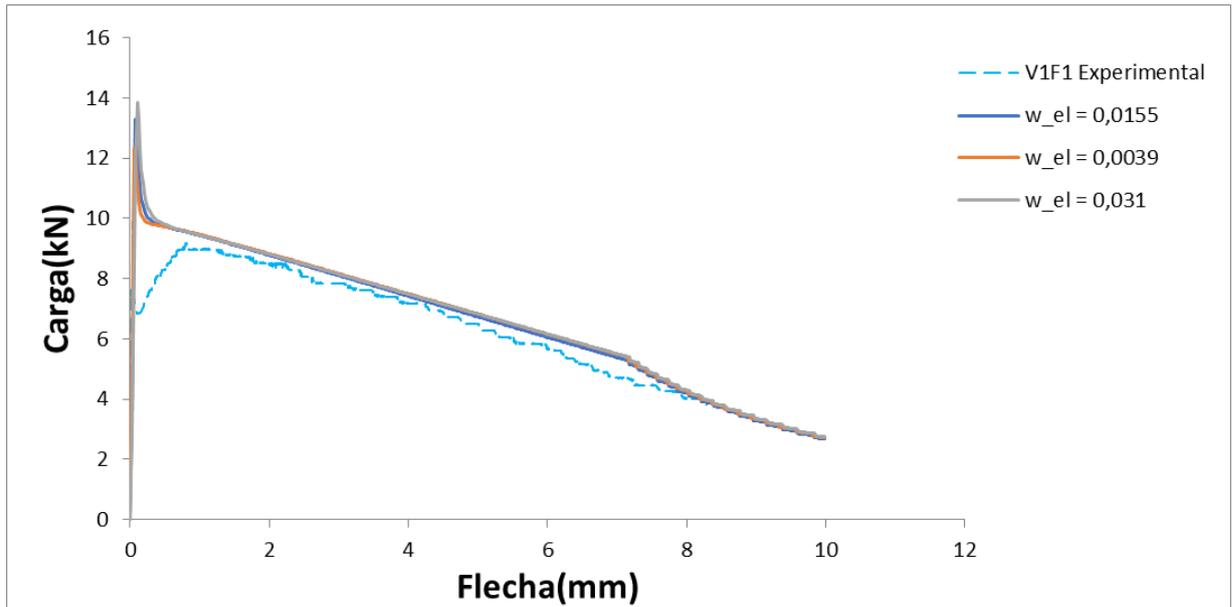


Figura 4.22–Comparativo resultados da análise paramétrica para modelo trilinear modificando valores de  $w_{el}$  para  $\sigma_p$  fixo em 9,07MPa para viga V1F1.

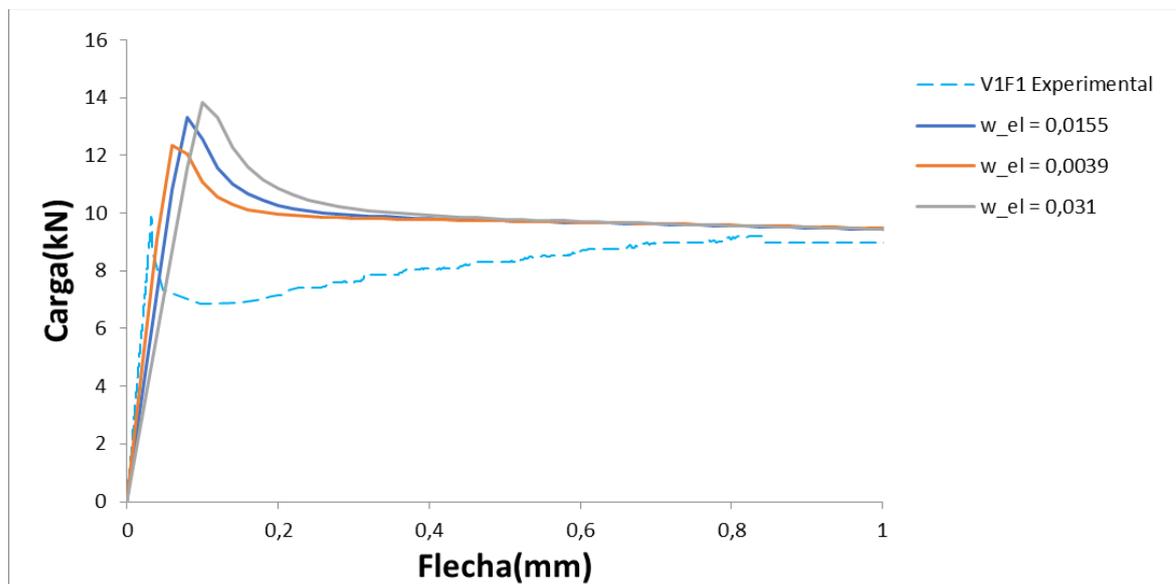


Figura 4.23–Detalhe da Figura 4.19 para mostrar variação da parte linear dos gráficos, resultados referentes a viga V1F1.

Também foi feito a variação de  $w_{el}$  para  $\sigma_p$  fixos em 6,32 MPa e 4,5 MPa, que apresentaram um melhor ajuste das curvas. Notou-se que as variações devido a modificação de  $w_{el}$  novamente foram pequenas; por isso, não será mais feita análise paramétrica de  $w_{el}$  para as outras vigas.

b) Viga V2F1

Em sequência foi feita análise da V2F1, que possui as mesmas propriedades de material que a viga V1F1, mas diferentes valores dos pontos da relação coesiva (Tabela 4.8). Os resultados da variação de  $\sigma_p$  estão na Figura 4.24. A variação de  $\sigma_p$  novamente não alterou a cauda dos gráficos mas conseguiu tirar o pico acentuado no início do gráfico.

Tabela 4-8- Pontos utilizados para fazer relação coesiva trilinear da viga V2F1.

Pontos	$\sigma_c$ (MPa)	w(mm)
0	0,00	0,0000
1	9,19	0,0193
2	3,23	0,0393
3	2,53	6,5193

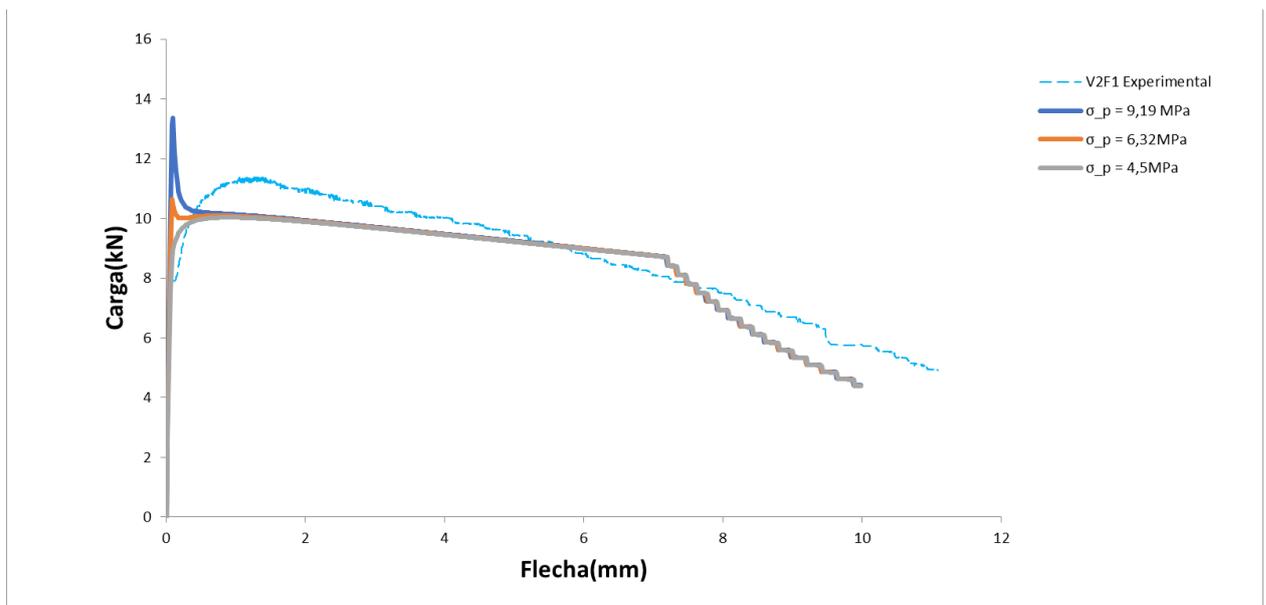


Figura 4.24—Comparativo entre curvas carga (kN) por flecha(mm) experimental da viga V2F1 e resultados numéricos da variação do parâmetro  $\sigma_p$ .

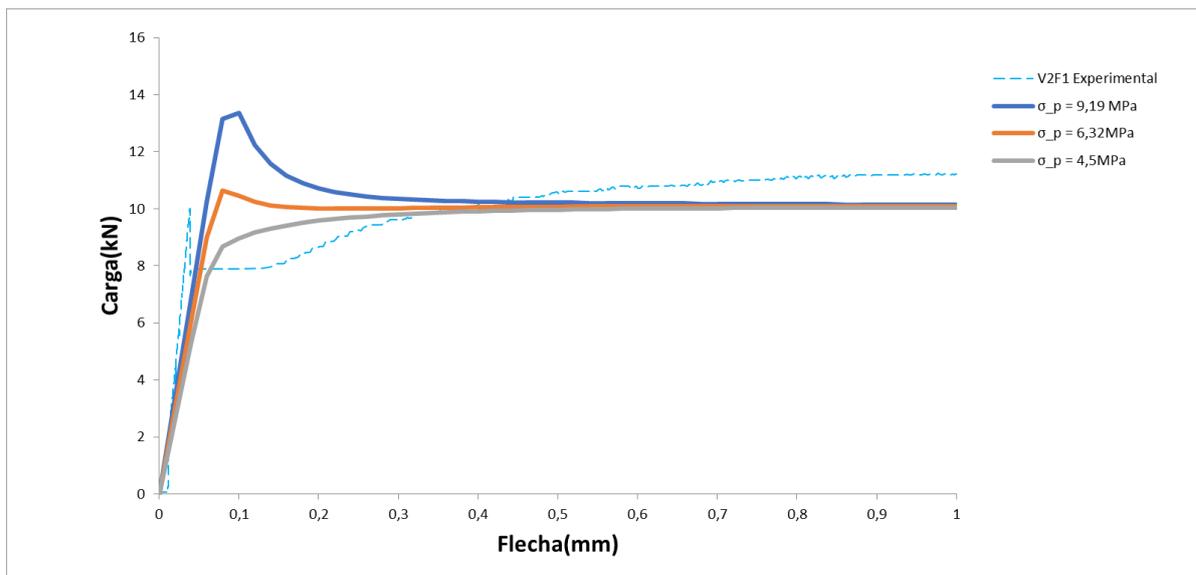


Figura 4.25 - Detalhe Figura 4.24, referente a viga V2F1.

c) Viga V3F1

A última viga estudada nesta seção foi a viga V3F1, encerrando os estudos das vigas com apenas 1% de mini-fibras de aço com relação coesiva trilinear. A relação coesiva aparece na Tabela 4.9. O resultado obtido pode ser visto na figura 4.26 e 4.27 onde foram colocados os diferentes valores de  $\sigma_p$ . Foi possível ter um bom ajuste para  $\sigma_p$  igual a 6,32 MPa.

Tabela 4-9 - Pontos utilizados para fazer relação coesiva tri linear da viga V3F1.

Pontos	$\sigma_c$ (MPa)	w(mm)
0	0,00	0,0000
1	9,28	0,0185
2	4,20	0,0385
3	1,74	6,5185

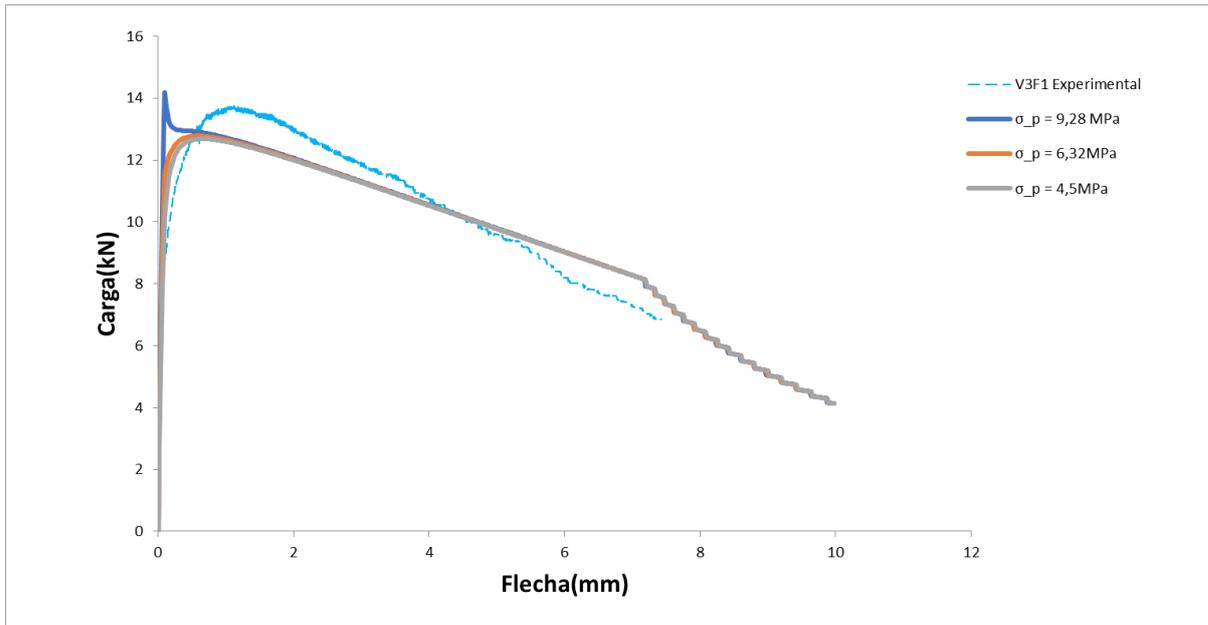


Figura 4.26–Comparativo resultados numéricos e experimentais das curvas carga por deformação com a variação do  $\sigma_p$  para a viga V3F1.

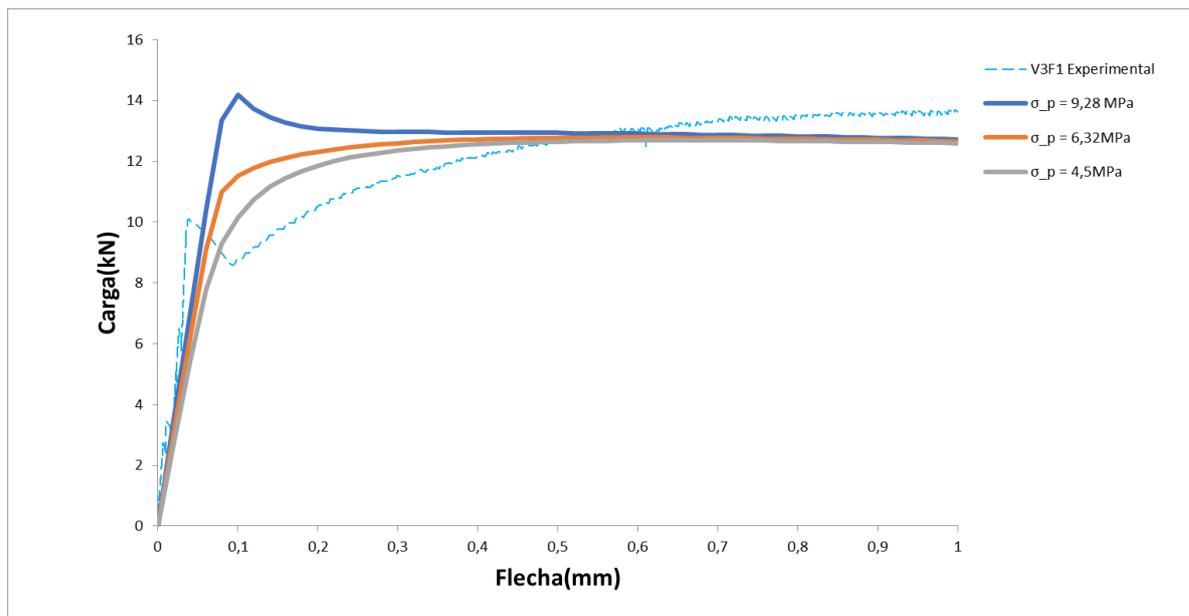


Figura 4.27 - Detalhe da Figura 4.26, referente a viga V3F1.

#### 4.2.5 Formulação Quadrilinear

Nesta seção busca-se verificar se as relações coesivas quadrilineares são suficientes para obter um bom ajuste para todas as vigas. Em especial, se investiga se a viga V2F1 pode ser bem representada com uma formulação quadrilinear já que foi a única das vigas com 1% de fibras que não obteve um ajuste razoável com a formulação trilinear.

A seguir são apresentadas as Tabelas (4.10 a 4.17) com os pontos utilizados para fazer a aproximação quadrilinear das relações coesivas das vigas com 1% e 2% de fibras.

a) Vigas com 1% de mini -fibras de aço

A Figura 4.28 exemplifica a diferença entre a relação coesiva obtida na análise inversa e a simplificação quadrilinear para a viga V1F1.

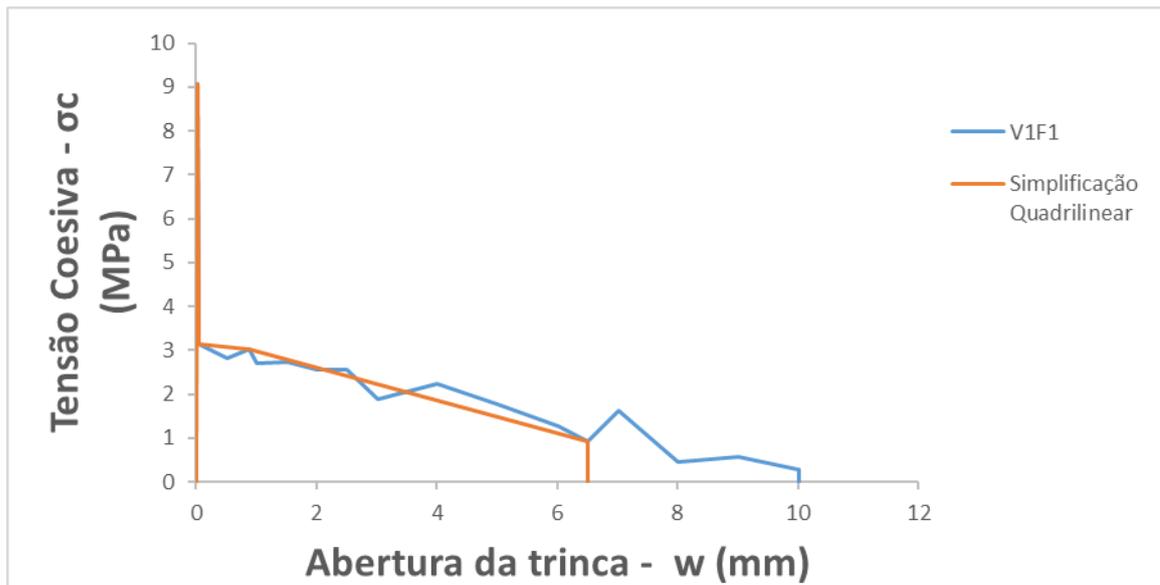


Figura 4.28 – Comparação entre as relações coesivas quadrilinear e da análise inversa para viga V1F1.

Para viga V1F1 a Figura 4.29 mostra que o modelo numérico resultou em um pico muito deslocado do valor experimental.

Tabela 4-10 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V1F1.

Pontos	w(mm)	$\sigma_c$ (MPa)
0	0,0000	0,00
1	0,0155	9,07
2	0,0355	3,13
3	0,8745	3,04
4	6,5155	0,93

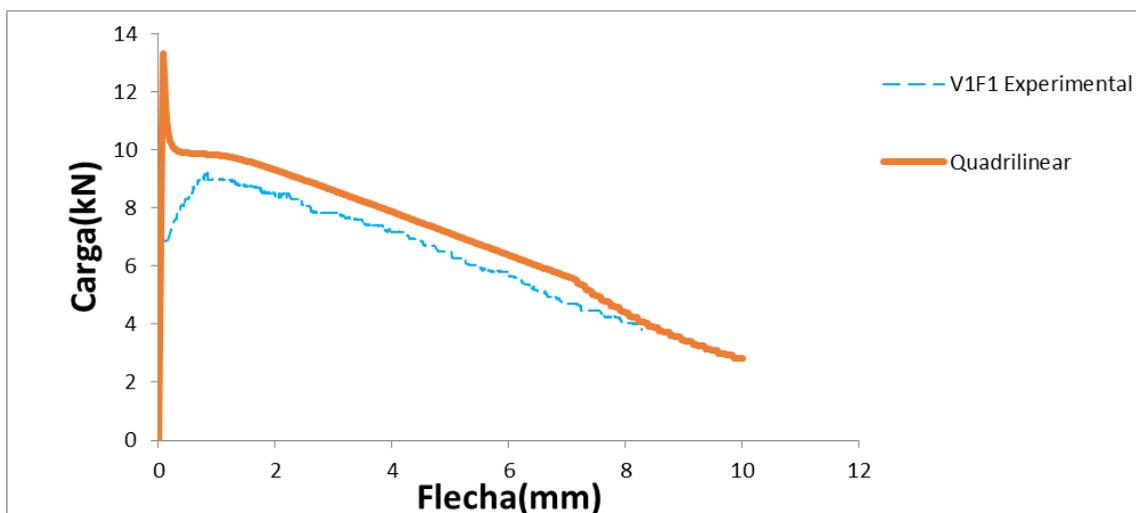


Figura 4.29 –Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V1F1.

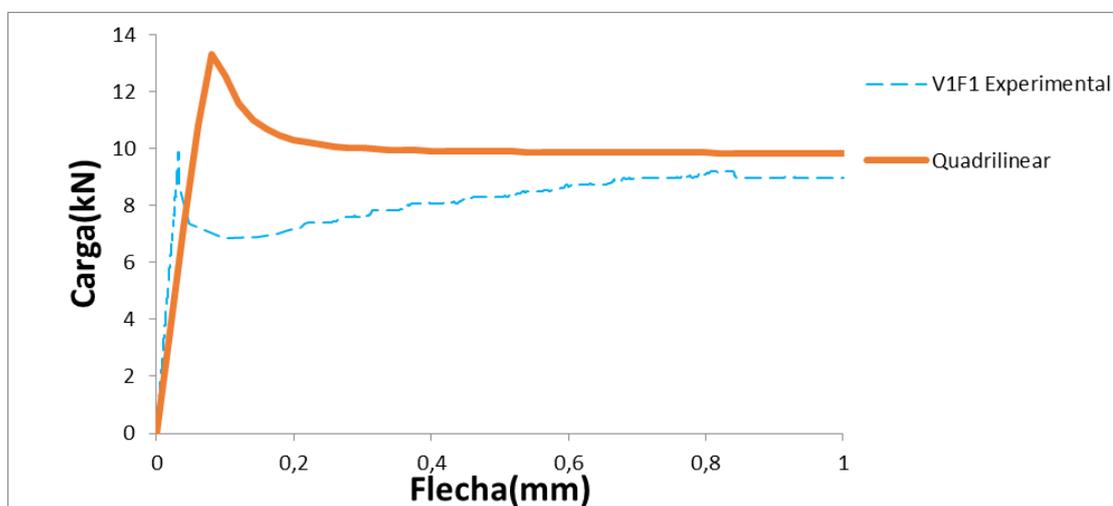


Figura 4.30– Detalhe da Figura 4.29, referente a aproximação quadrilinear para viga V1F1.

Para Viga V2F1 o modelo numérico quadrilinear (Tabela 4.11) obteve um bom ajuste, exceto pelo fato de o pico estar acima do valor experimental (Figura 4.31 e 4.32).

Tabela 4-11 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V2F1.

Pontos	w(mm)	$\sigma_c$ (MPa)
0	0,0000	0,00
1	0,0193	9,19
2	0,0393	3,23
3	1,1719	3,99
4	6,5193	2,53

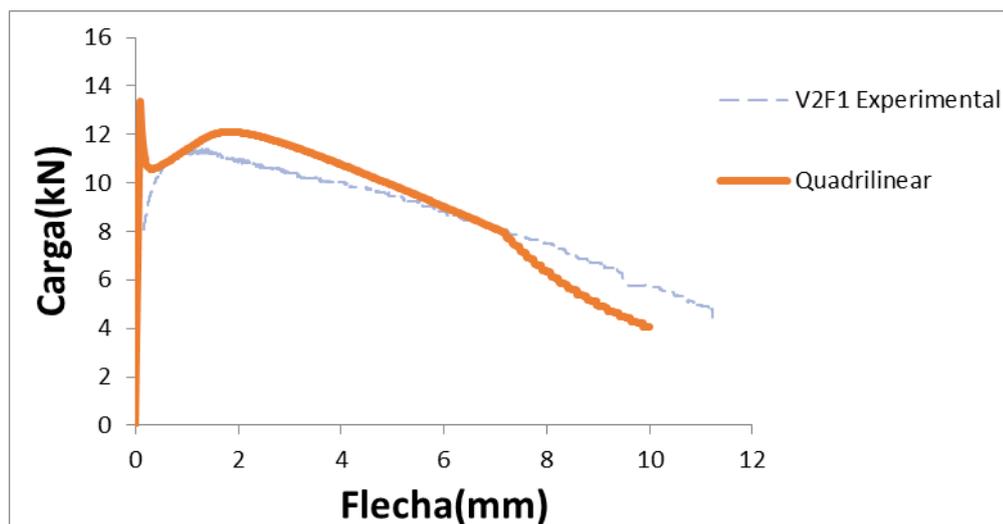


Figura 4.31– Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V2F1.

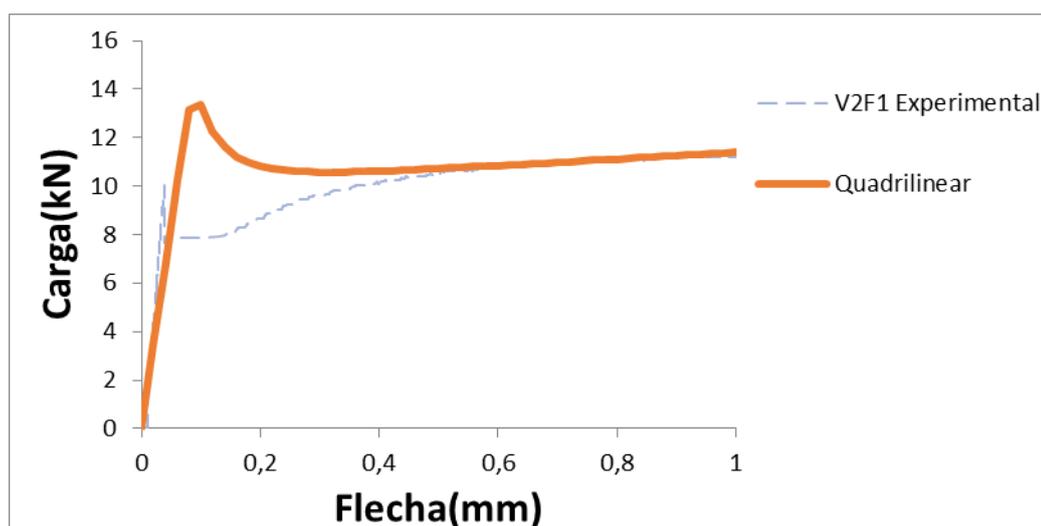


Figura 4.32 – Detalhe Figura 4.31, referente a aproximação quadrilinear para viga V2F1.

Tabela 4-12 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V3F1.

Pontos	w(mm)	$\sigma_c$ (MPa)
0	0,0000	0,00
1	0,0185	9,28
2	0,0385	4,20
3	1,2348	4,84
4	6,5185	1,74

Entre as vigas de 1% de fibras foi a Viga V3F1 (Tabela 4.12) que apresentou a cauda mais distante da curva experimental. Assim como nos casos trilineares, o ajuste quadrilinear

apresentou um ajuste razoável do comportamento das vigas (Figuras 4.33 e 4. 34). No item 4.2.6 um ajuste mais fino será tentado, através do ajuste polilinear.

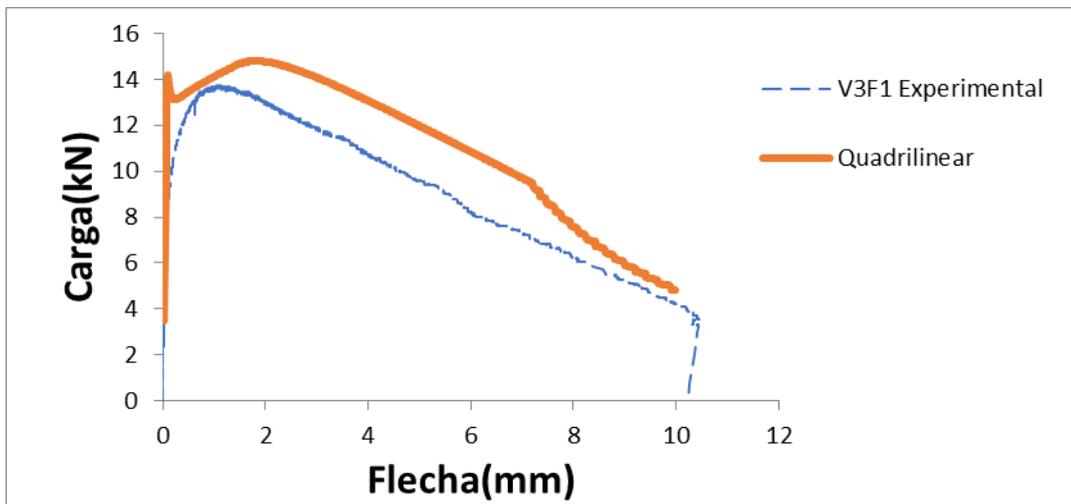


Figura 4.33 – Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V3F1.

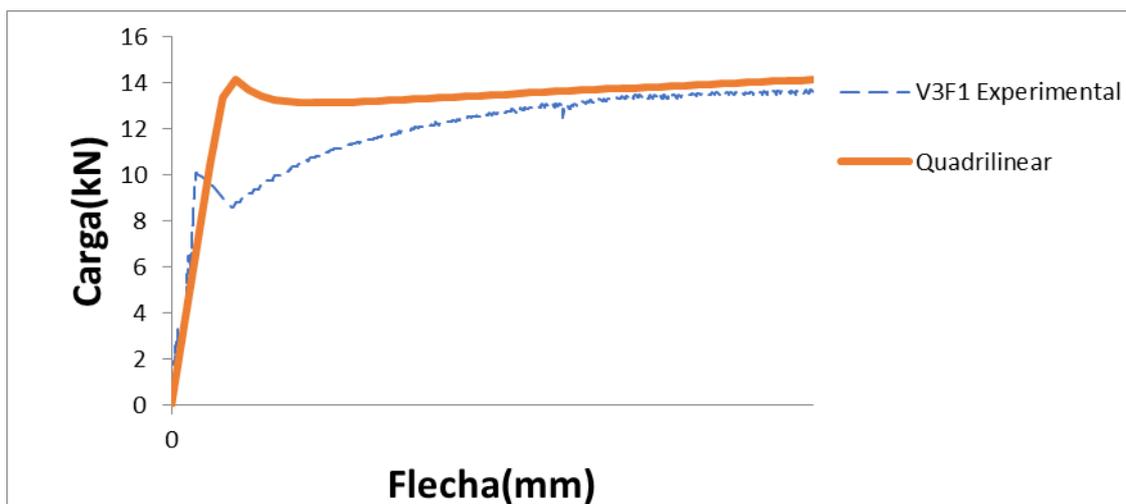


Figura 4.34 – Detalhe da Figura 4.33, referente a aproximação quadrilinear para a viga V3F1.

b) Vigas com 2% de mini -fibras de aço

Na Tabela 4.13 está o ajuste quadrilinear para a viga V1F2. A Figura 4.35 mostra a comparação da relação coesiva quadrilinear e da análise inversa para viga V1F2. A comparação com o experimental (Figuras 4.36 e 4.37) apresentou um pico muito elevado, mas a cauda está em ótima concordância com a curva experimental. O motivo desse pico tão elevado é que o valor do ponto 1 é muito grande se comparado com esse ponto das outras vigas (os valores das outras vigas são 9,38; 13,84; 9,50 e 9,33).

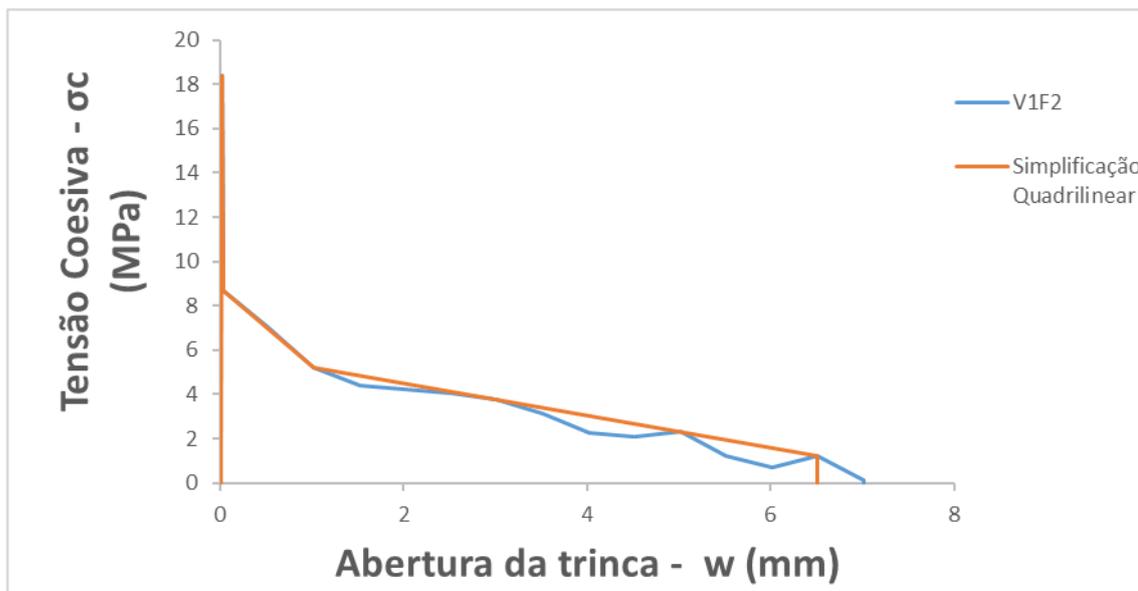


Figura 4.35 – Comparativo entre a lei coesiva quadrilinear e o resultado da análise inversa para viga V1F2.

Tabela 4-13 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V1F2.

Pontos	w(mm)	$\sigma_c$ (MPa)
0	0,0000	0,00
1	0,0165	18,39
2	0,0365	8,68
3	1,0165	5,23
4	6,5165	1,20

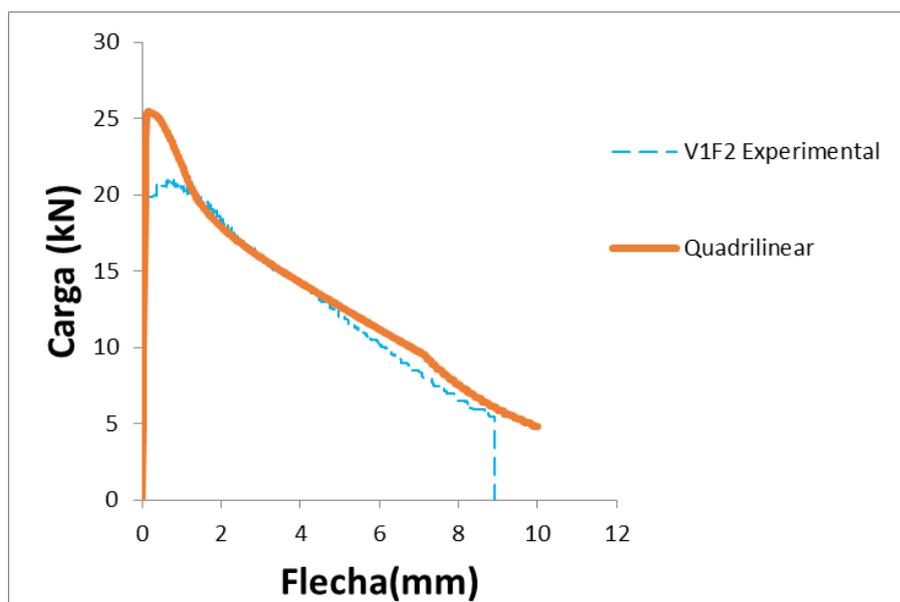


Figura 4.36 – Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V1F2

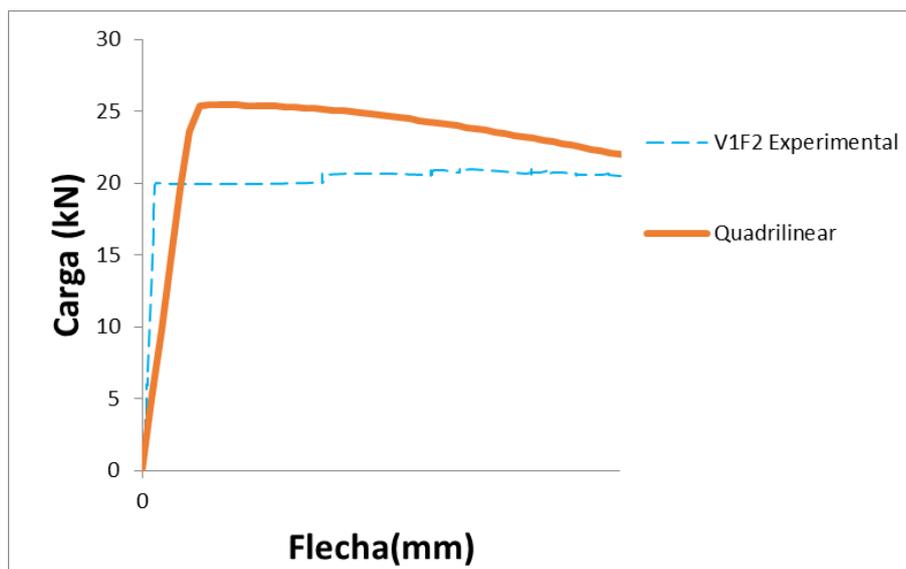


Figura 4.37 - Detalhe da Figura 4.36, referente a aproximação quadrilinear para viga V1F2.

A Tabela 4.14 mostra o ajuste quadrilinear para a viga V2F2 e as Figura 4.38 e 4.39 a comparação com experimentos. A carga máxima do modelo numérico está próxima do valor experimental, porém deslocada (em um  $w$  maior) e a cauda está mais elevada que a curva do experimento.

Tabela 4-14 - Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V2F2.

Pontos	$w(\text{mm})$	$\sigma_c(\text{MPa})$
0	0,0000	0,00
1	0,0195	9,38
2	0,0395	4,80
3	1,0195	6,94
4	6,5195	1,32

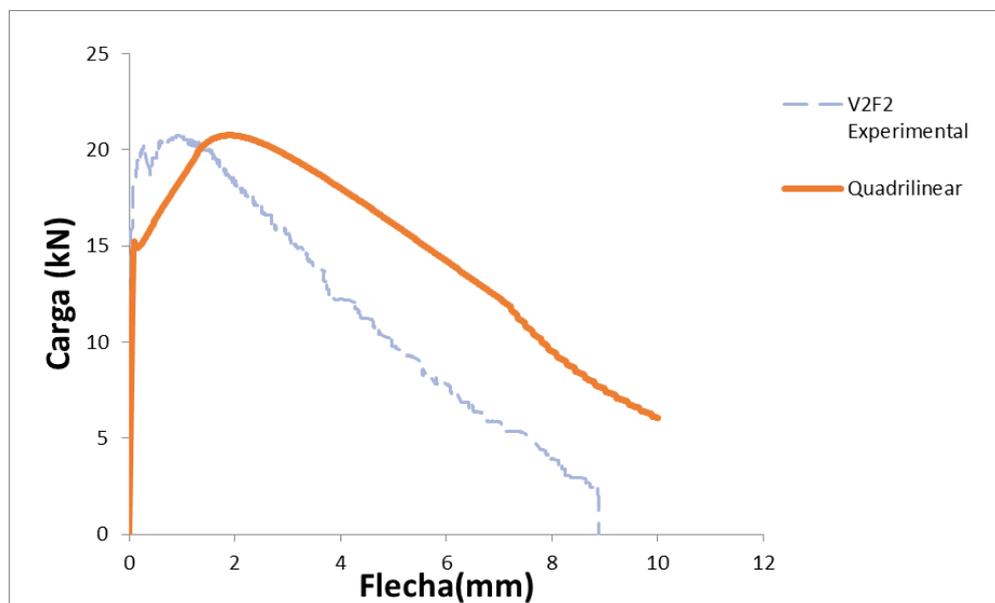


Figura 4.38 – Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V2F2

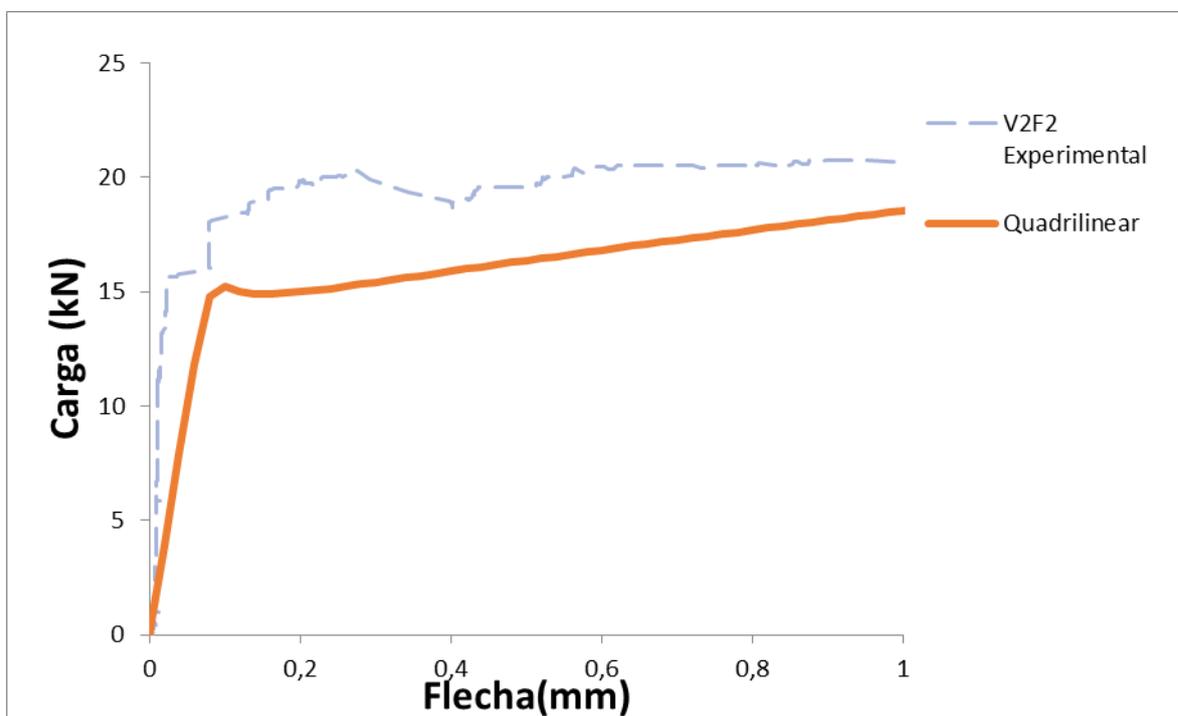


Figura 4.39 - Detalhe da Figura 4.38, referente a aproximação quadrilinear para a viga V2F2.

A Tabela 4.15 mostra o ajuste quadrilinear para a viga V3F2 e as Figuras 4.40 e 4.41 a comparação com experimentos. Existe um bom ajuste da curva experimental na parte inicial

da curva, o que inclui o comportamento linear e a carga máxima, mas a cauda está novamente deslocada para cima da curva experimental.

Tabela 4-15 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V3F2.

Pontos	w (mm)	$\sigma_c$ (MPa)
0	0,0000	0,00
1	0,0210	13,84
2	0,0410	7,02
3	1,0210	7,31
4	6,5210	2,85

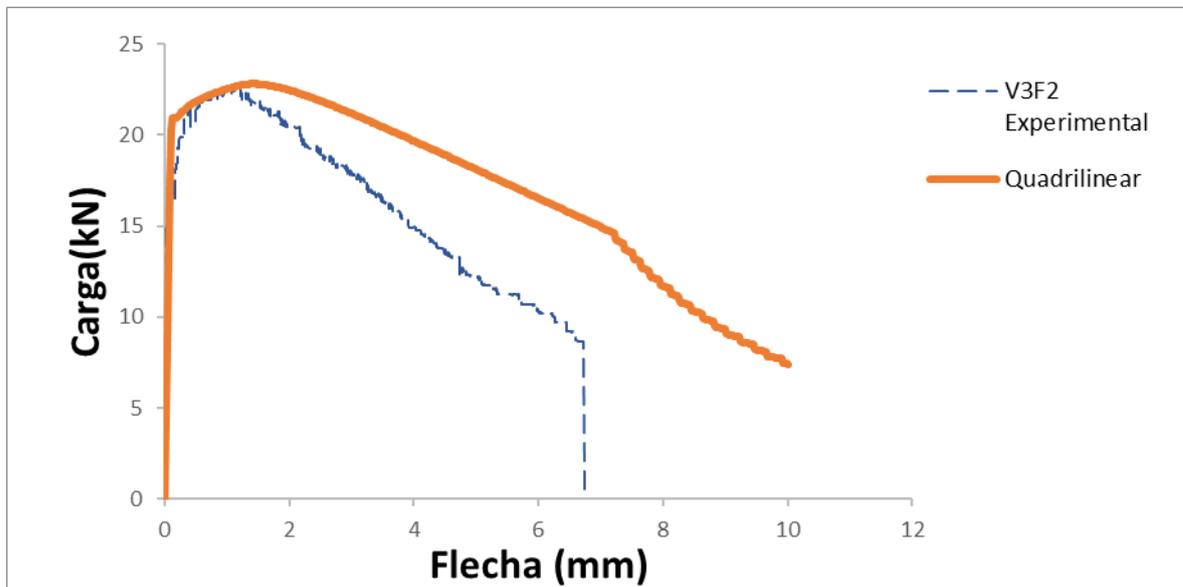


Figura 4.40 – Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V3F2.

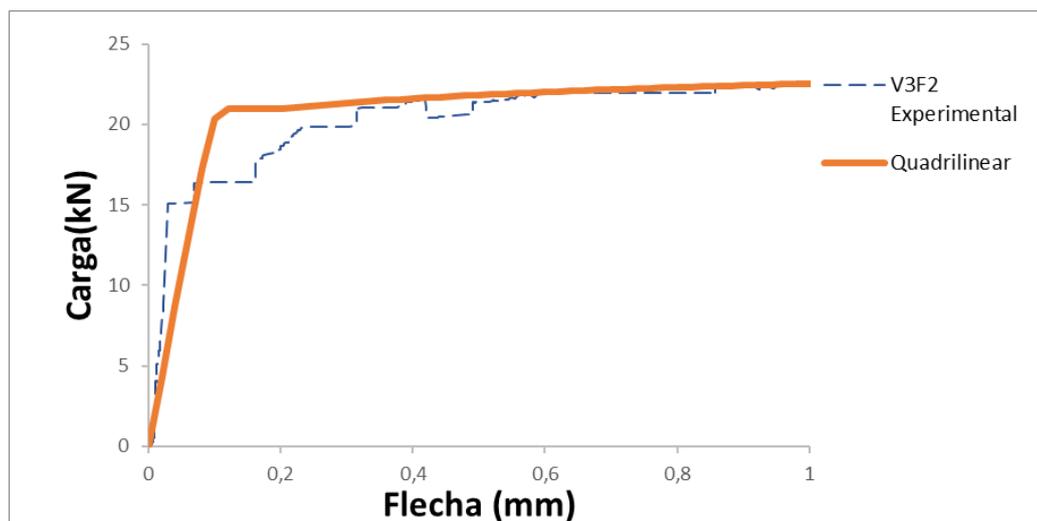


Figura 4.41 - Detalhe da Figura 4.40, referente a aproximação quadrilinear para a viga V3F2.

O modelo quadrilinear da viga V4F2 (Tabela 4.16, Figuras 4.42 e 4.43) apresentou resultados semelhantes a viga V2F2, onde a carga máxima está próxima do valor experimental, porém deslocada para uma flecha maior e a cauda está bem deslocada.

Tabela 4-16 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V4F2.

Pontos	w (mm)	$\sigma_c$ (MPa)
0	0,0000	0,00
1	0,0200	9,50
2	0,0400	4,96
3	1,0200	7,60
4	6,5200	0,93

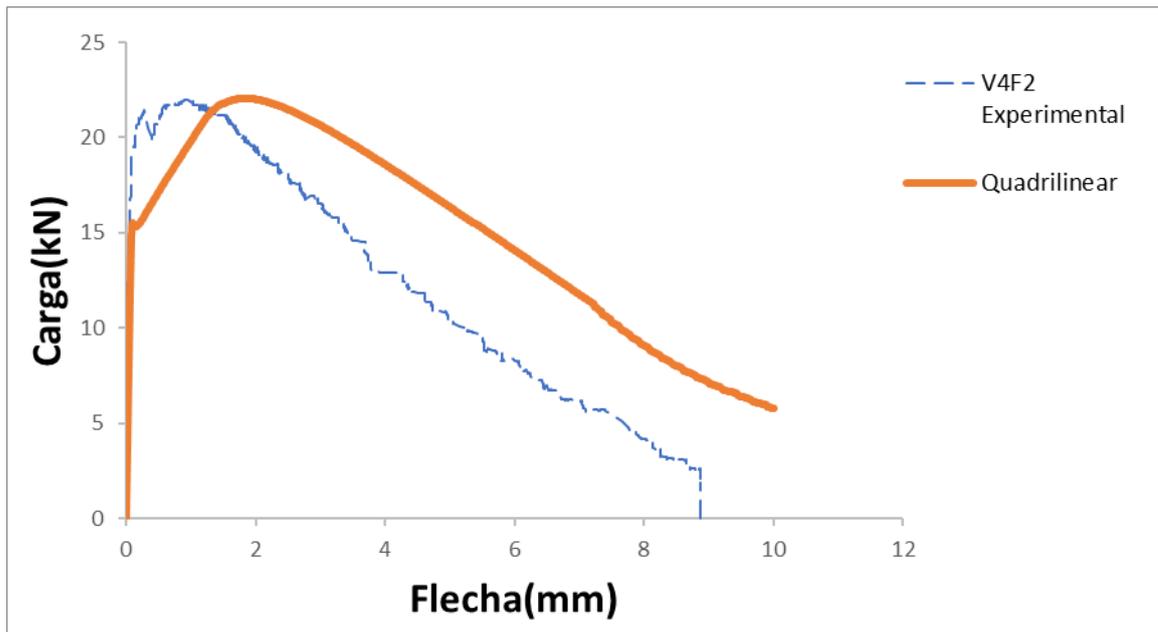


Figura 4.42 – Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V4F2.

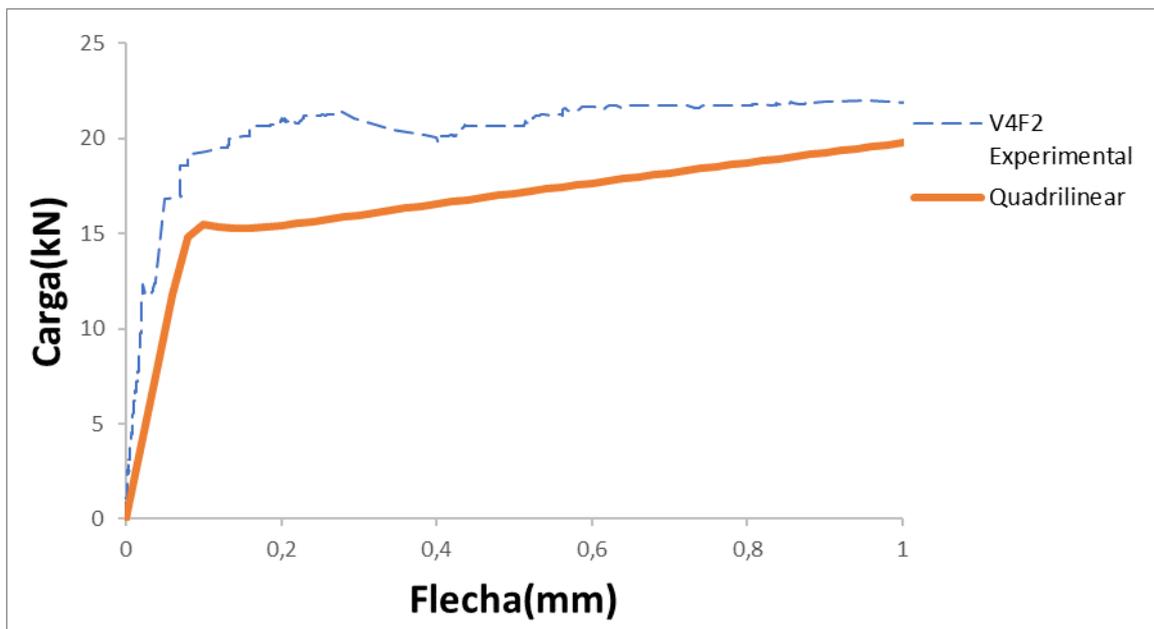


Figura 4.43 - Detalhe da Figura 4.42, referente a aproximação quadrilinear da viga V4F2.

Por fim, a viga V5F2(Tabela 4.17, Figuras 4.44 e 4.45) teve um bom ajuste com os dados experimentais em todos aspectos analisados (força máxima e alinhamento da cauda).

Tabela 4-17 – Pontos utilizados na relação coesiva quadrilinear para viga V5F2.

Pontos	w (mm)	$\sigma_c$ (MPa)
0	0,0000	0,00
1	0,0173	9,33
2	0,0373	6,00
3	1,0173	7,60
4	6,5173	1,42

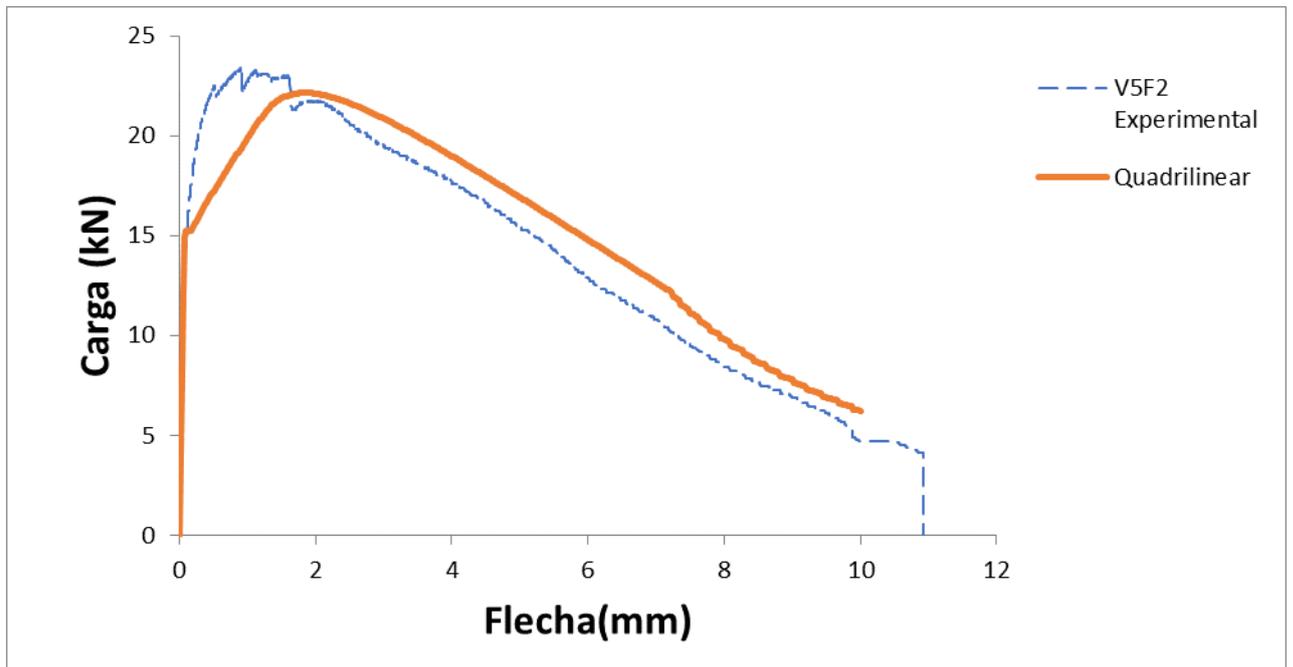


Figura 4.44 – Resultado para aproximação quadrilinear sem ajustes para viga V5F2.

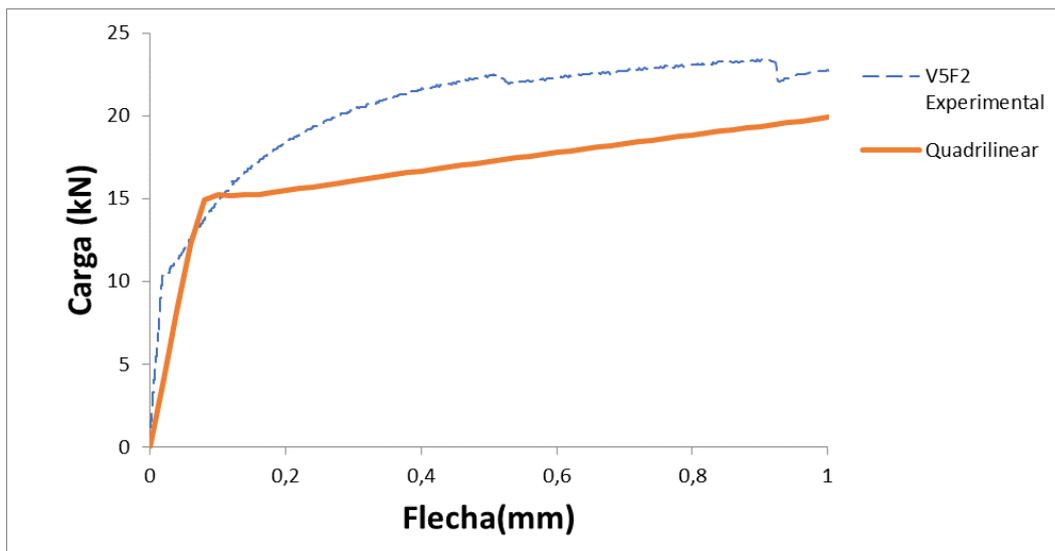


Figura 4.45 - Detalhe Figura 4.44, referente a aproximação quadrilinear para viga V5F2.

O modelo quadrilinear não foi capaz de ajustar bem todas as vigas. Em muitos casos das vigas de 2% a cauda estava deslocada para cima e, por isso, será feito mais um novo modelo com mais pontos da relação coesiva para se obter melhor ajuste da cauda e do parâmetro carga máxima.

#### 4.2.6 Relação Polilinear

A maioria das vigas com 2% de fibras não se ajustaram perfeitamente aos resultados experimentais com as leis quadrilineares. Por isso, buscou-se obter melhora dos resultados aumentando o número de pontos da análise inversa (8 pontos). Além de mais pontos, alguns destes pontos foram modificados de forma manual numa tentativa de melhor ajuste final. Um ajuste mais fino será tentado também para os casos 1%.

As Tabelas 4.18 a 4.24 mostram as relações coesivas utilizadas e estão organizadas da seguinte forma: na primeira coluna está o número de pontos, na segunda coluna, os valores de  $w$ ; na terceira coluna, valores de tensão coesiva original, sendo pontos marcados em cinza, valores modificados. Correspondentes valores originais estão na quarta coluna.

Em geral, para as vigas com 1% de fibras de mini aço foram alterados os pontos 1, 5 e 6. A alteração do ponto 1 diminui o pico das curvas numéricas. As modificações no ponto 6 modificaram a inclinação da cauda, trecho pós pico. Os melhores ajustes podem ser vistos nas Figuras 4.47a 4.52.

A Fig. 4.46 mostra a simplificação polilinear original (Tabela 4.18) comparada com a solução da análise inversa, para a viga V1F1.

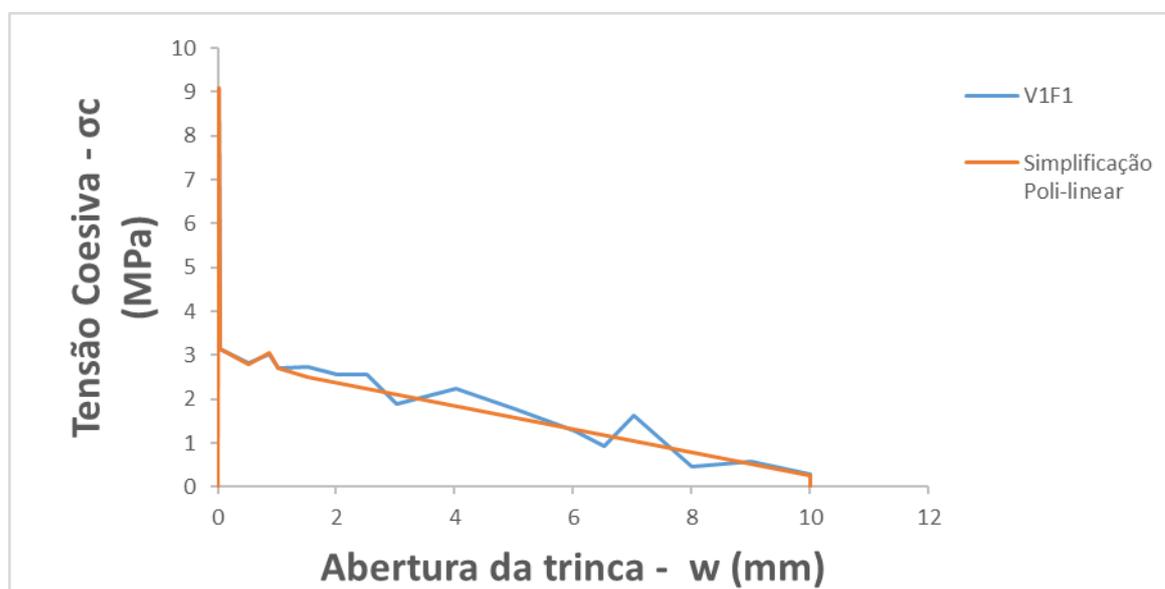


Figura 4.46 – Comparação entre relações coesivas polilinear e o resultado da análise inversa da viga V1F1.

Para viga V1F1 foram alterados os pontos 1 e 6, ambos foram diminuídos em relação ao valor original, mas em diferentes percentuais. No ponto um se reduziu 34% do valor o que melhorou o ajuste da carga máxima; já no ponto 6 se reduziu apenas 8,4% essa alteração melhorou o ajuste da cauda da curva.

Tabela 4-18 – Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V1F1.

Pontos	w(mm)	$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa) original
0	0,0000	0,00	-
1	0,0155	6,00	9,07
2	0,0355	3,13	-
3	0,5155	2,80	-
4	0,8744	3,04	-
5	1,0155	2,70	-
6	1,5155	2,50	2,73
7	10,0155	0,27	-

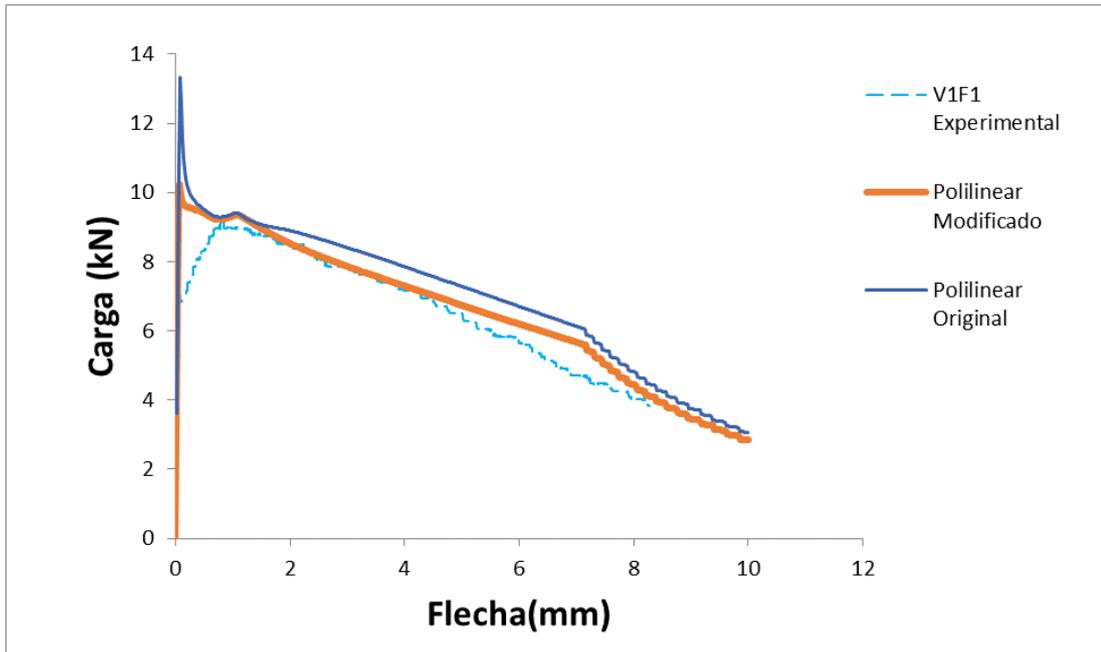


Figura 4.47 – Resultado para aproximação polilinear para viga V1F1.

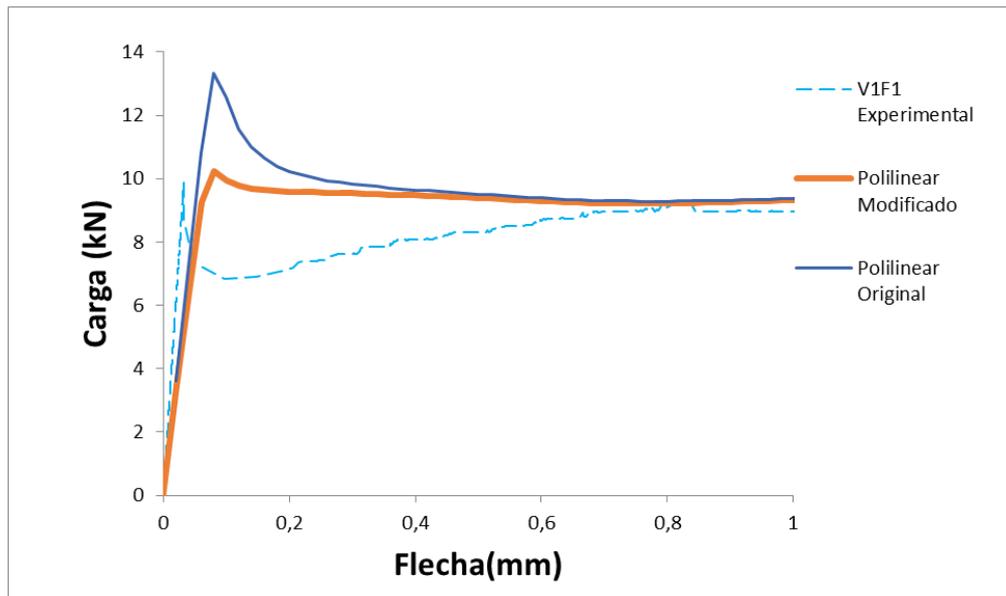


Figura 4.48 – Detalhe da Figura 4.47, referente a aproximação polilinear para viga V1F1.

A viga V2F1 teve apenas um ponto ajustado para menos, tabela 4.19, o ponto1 foi reduzido em 34,7%. Isso melhorou o ajuste da carga máxima do modelo numérico com o experimental (Figuras 4.49 e 4.50).

Tabela 4-19 – Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V2F1.

Pontos	w (mm)	$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa) original
0	0,0000	0,00	-
1	0,0193	6,00	9,19
2	0,0393	3,24	-
3	0,5193	3,42	-
4	1,0193	3,72	-
5	1,1719	3,99	-
6	1,5193	3,43	-
7	10,0193	0,24	-

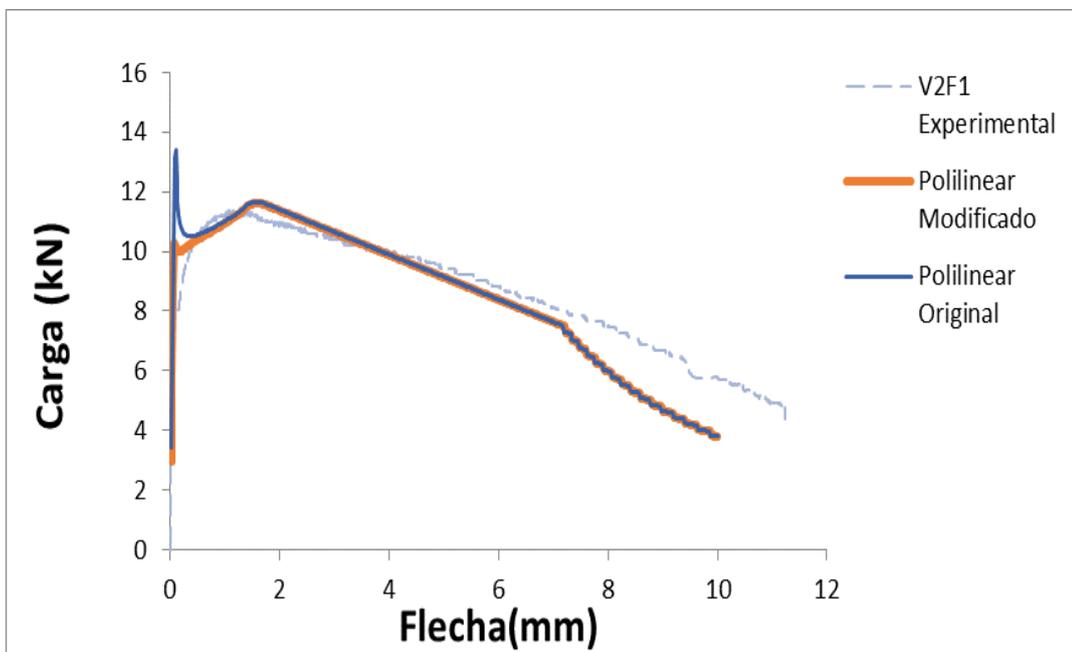


Figura 4.49 – Resultado para aproximação polilinear para viga V2F1.

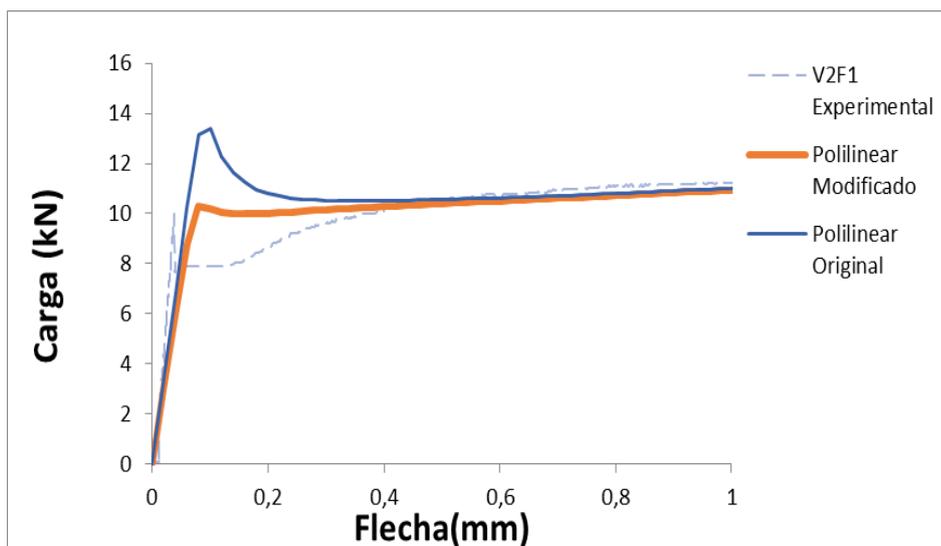


Figura 4.50 - Detalhe da Figura 4.49, referente a aproximação polilinear para viga V2F1

A tabela 4.20 mostra o caso para a viga V3F1. A mesma apresentou uma cauda muito deslocada no modelo polilinear original (Figura 4.51), retirado diretamente da análise inversa. Foi necessário alterar o ponto 1 (redução de 35,3%), 5 e 6 nesse caso; alteração dos dois últimos pontos foi feita para ajustar a cauda.

Tabela 4-20 – Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V3F1.

Pontos	w(mm)	$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa) original
0	0,0000	0,00	-
1	0,0185	6,00	9,28
2	0,0385	4,20	-
3	0,5185	4,17	-
4	1,0185	4,46	-
5	1,2348	4,50	4,84
6	1,5185	3,50	4,19
7	8,5185	1,39	-

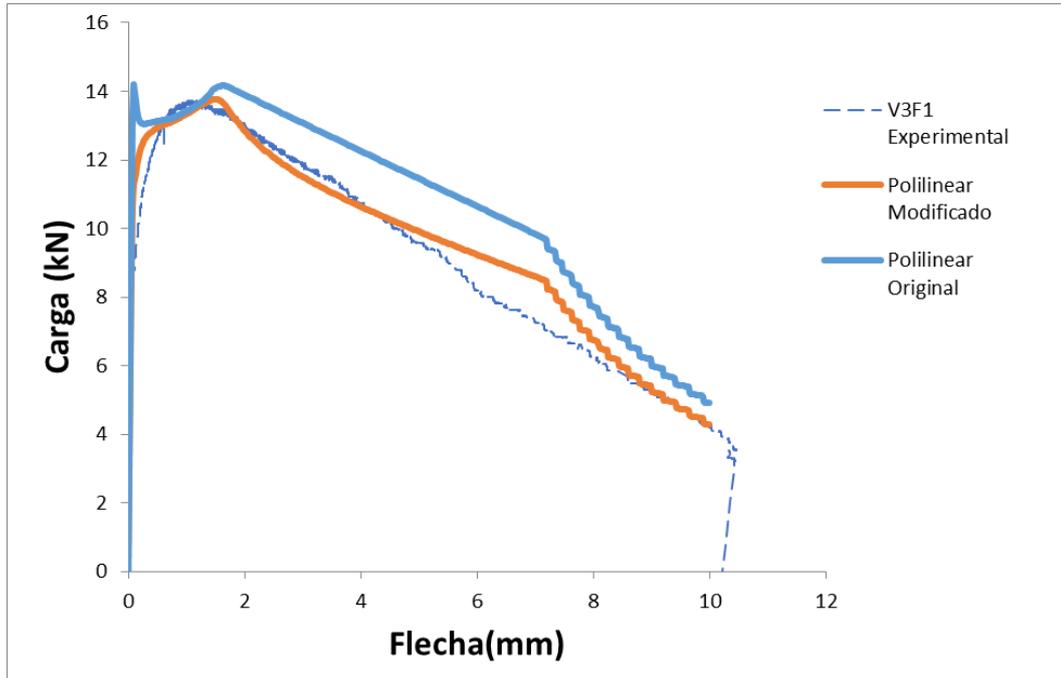


Figura 4.51 – Resultado para aproximação polilinear para viga V3F1.

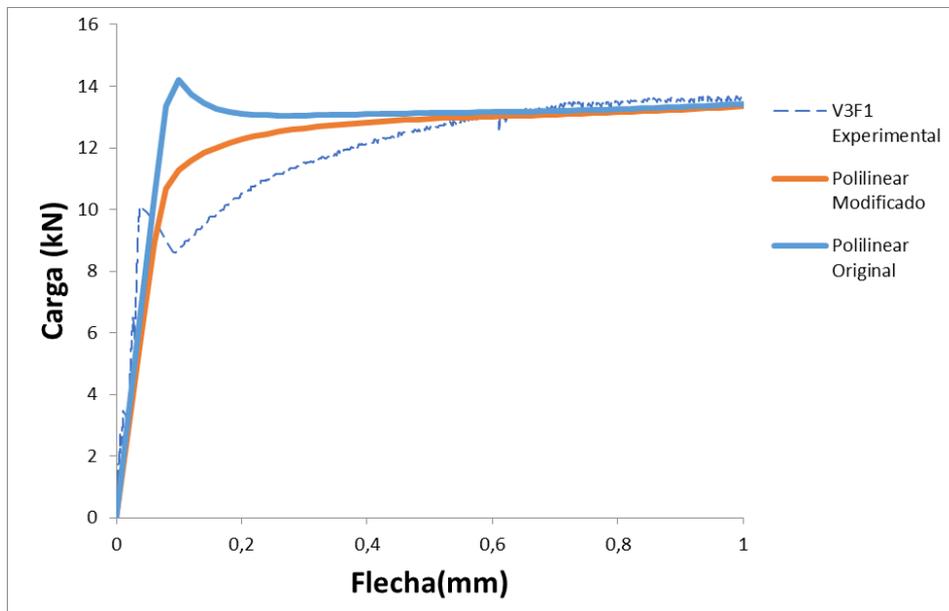


Figura 4.52 - Detalhe da Figura 4.51, referente a aproximação polilinear para viga V3F1

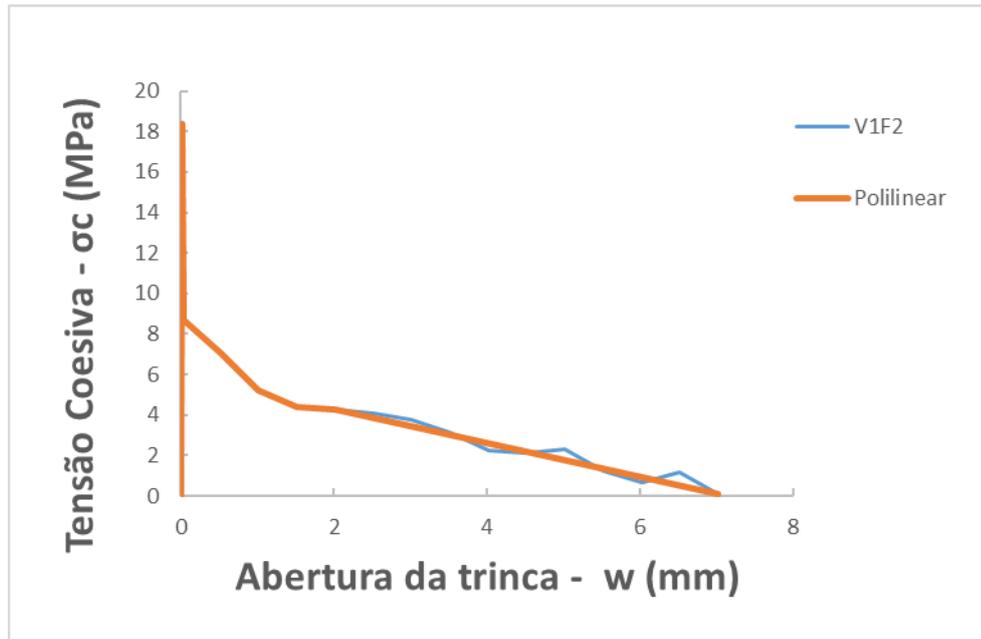


Figura 4.53 - Comparativo Lei coesiva obtida da análise inversa com a lei polilinear usada para viga V1F2.

A análise polilinear é mais importante para os casos 2%, conforme descrito abaixo, em função dos resultados relativamente pobres obtidos para este caso até aqui. Na Figura 4.53 pode-se ver o comparativo da relação polilinear e a relação obtida da análise inversa, percebe-se que as duas curvas estão bem próximas.

Para a viga V1F2 alterou-se o valor do ponto 1, tabela 4.21, que era muito maior que o de todas outras vigas, para  $\frac{1}{4}$  de seu valor da análise inversa (Figuras 4.54 e 4.55), ainda foi necessário alterar o valor do ponto 2 que também ajusta o pico da curva numérica com a experimental. O resultado desses ajustes pode ser visto nas Figuras 4.54 e 4.55.

Tabela 4-21 - Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V1F2.

Pontos	w(mm)	$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa) original
0	0,0000	0,00	-
1	0,0165	4,50	18,39
2	0,0365	7,00	8,68
3	0,5165	7,04	-
4	1,0165	5,23	-
5	1,5165	4,40	-
6	2,0165	4,25	-
7	7,0165	0,11	-

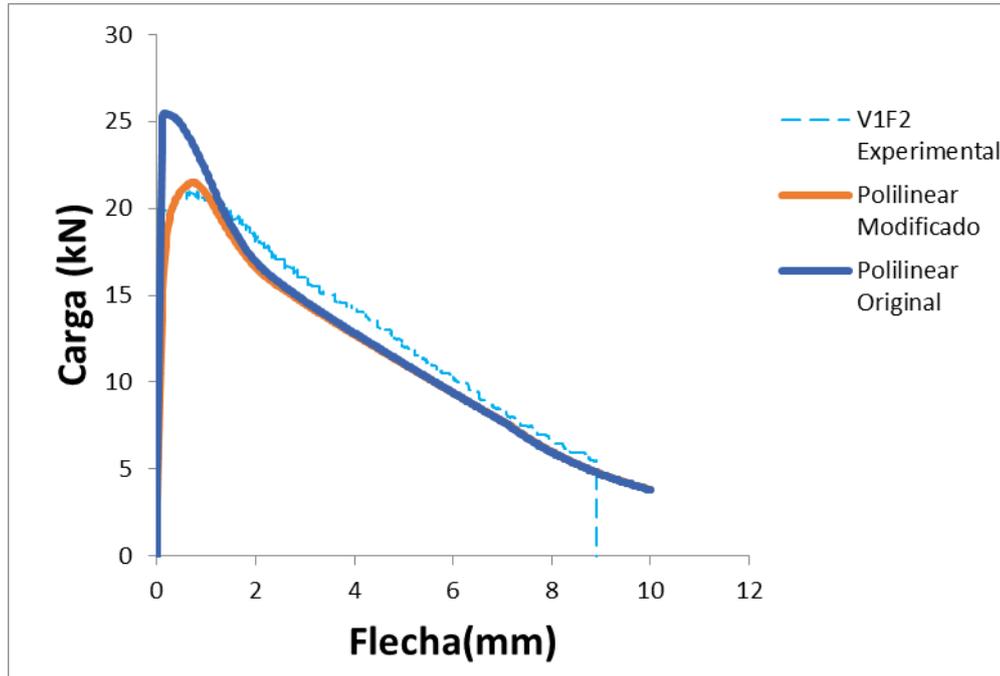


Figura 4.54 – Resultado para aproximação polilinear para viga V1F2.

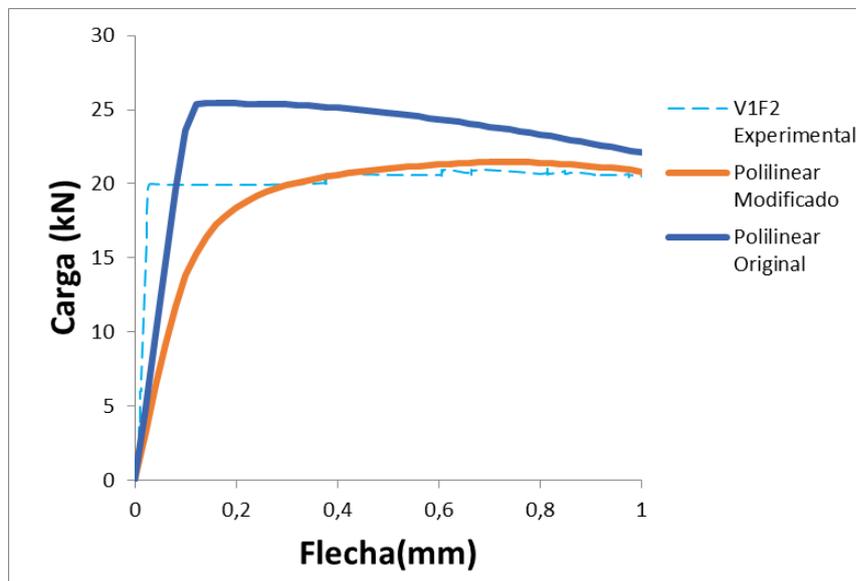


Figura 4.55 - Detalhe da Figura 4.54, referente a aproximação polilinear para viga V1F2.

Para as outras vigas manteve-se o ponto 1 da análise inversa sendo necessário alterar até 3 pontos da curva tensão coesiva( $\sigma_c$ ) x abertura da trinca ( $w$ ). De maneira geral foi necessário aumentar o valor do ponto 2 até um valor próximo da tensão do ponto 1, diminuir o valor máximo pós-pico (pontos 4 ou 3) e diminuir o valor do ponto 6, penúltimo ponto (para ajuste da cauda). A seguir podem ser visto os melhores ajustes para as vigas V2F2, V3F2, V4F2 e V5F2 nas Figuras 4.39 à 4.42.

Tabela 4-22 - Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V2F2.

Pontos	w(mm)	$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa) original
0	0,0000	0,00	-
1	0,0195	9,38	-
2	0,0395	6,50	4,8
3	0,5195	6,20	-
4	1,0195	6,50	6,94
5	1,5195	6,62	-
6	2,0195	4,00	6,11
7	7,5195	0,32	-

A viga V2F2 precisou ter três pontos ajustados: o ponto 2(aumento de 35,4%), 4(redução de 6,3%) e 6(redução de 34,5%), tabela 4.22. Os ajustes em 2 e 4 foram para subir a curva na parte inicial do gráfico, e o ajuste em 6 foi para ajustar a cauda. Resultados nas Figuras 4.56 e 4.57.

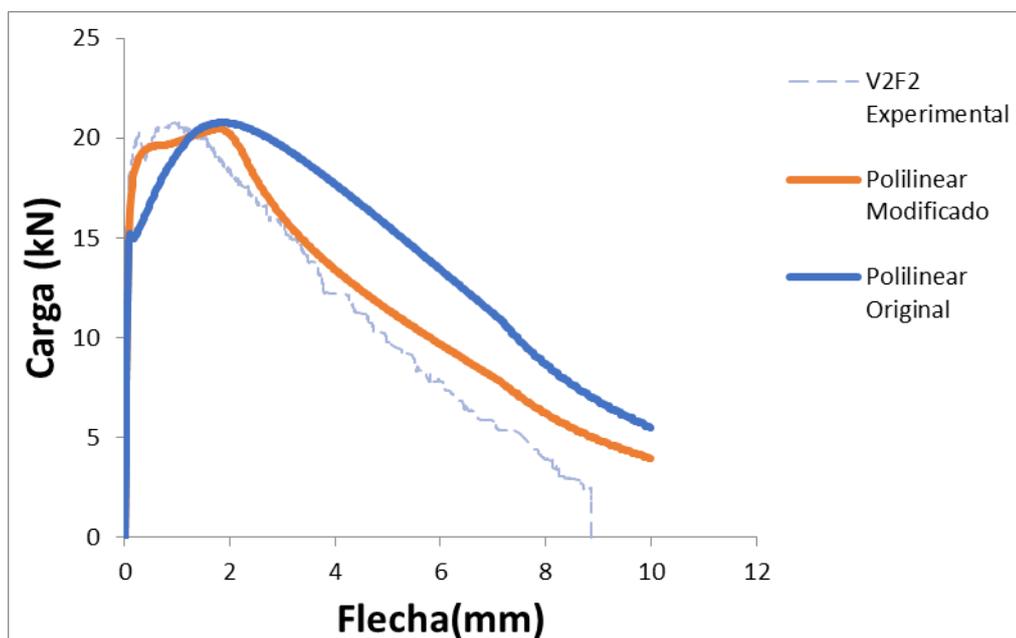


Figura 4.56 – Resultado para aproximação polilinear para viga V2F2.

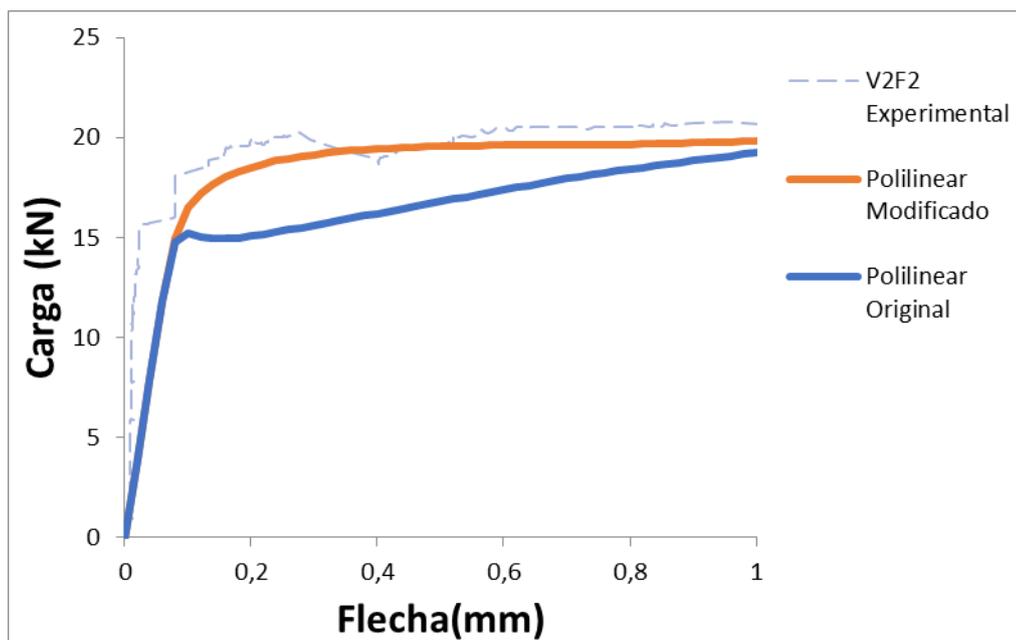


Figura 4.57 - Detalhe da Figura 4.56, referente a aproximação polilinear para viga V2F2.

Na viga V3F2 foram alterados dois pontos: 3 e 6, Tabela 4.23. O ponto 3 era na curva polilinear original o segundo maior valor e foi sutilmente reduzido para um pequeno ajuste do valor da carga máxima, reduzindo-se em 5,2%. O ponto 6 foi reduzido para ajuste da cauda (redução de 28,4%). Resultados nas Figuras 4.58 e 4.59.

Tabela 4-23 - Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V3F2.

Pontos	w(mm)	$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa) original
0	0,0000	0,00	-
1	0,0210	13,84	-
2	0,0410	7,02	-
3	0,5210	7,00	7,39
4	1,0210	7,31	-
5	1,5210	6,42	-
6	2,0210	4,00	5,59
7	7,5210	0,74	-

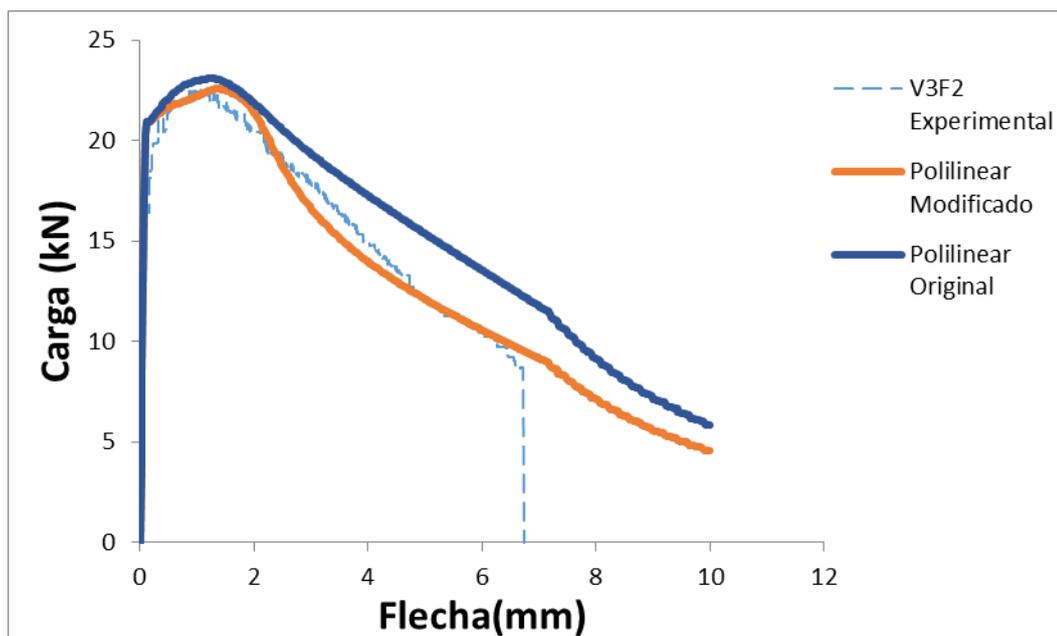


Figura 4.58 – Resultado para aproximação polilinear para viga V3F2.

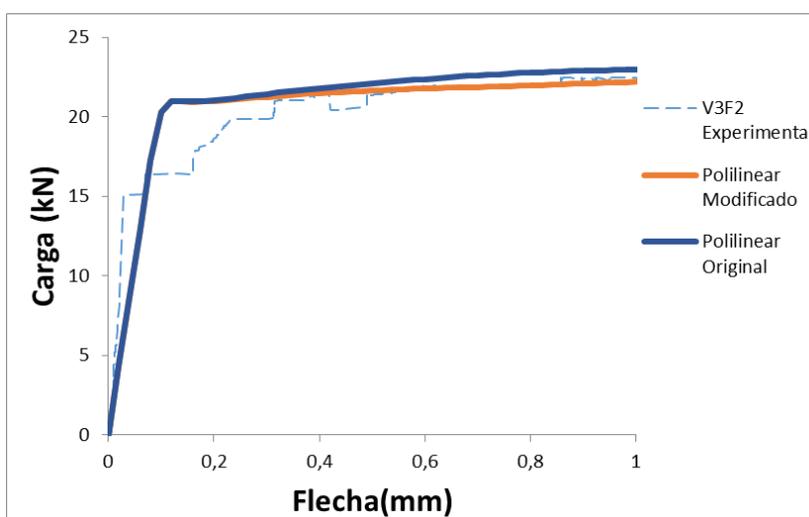


Figura 4.59 – Detalhe da Figura 4.58, referente a aproximação polilinear para viga V3F2.

A viga V4F2 apresentou no modelo numérico original uma forma semelhante a viga V2F2, sendo aqui novamente necessários alterações em 3 pontos, Tabela 4.24. Neste caso (V4F2), foram alterados os pontos 2, 4 e 6. O ponto 2 foi aumentado em 41,1%, o ponto 4 foi reduzido ligeiramente em 8,5% e o ponto 6 foi reduzido em 31,3%. Resultados nas Figuras 4.60 e 4.61.

Tabela 4-24 - Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V4F2.

Pontos	w (mm)	$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa) original
0	0,0000	0,00	-
1	0,0200	9,50	-
2	0,0400	7,00	4,96
3	0,5200	6,34	-
4	1,0200	7,00	7,60
5	1,5200	6,90	-
6	2,0200	4,00	5,82
7	7,0200	0,16	-

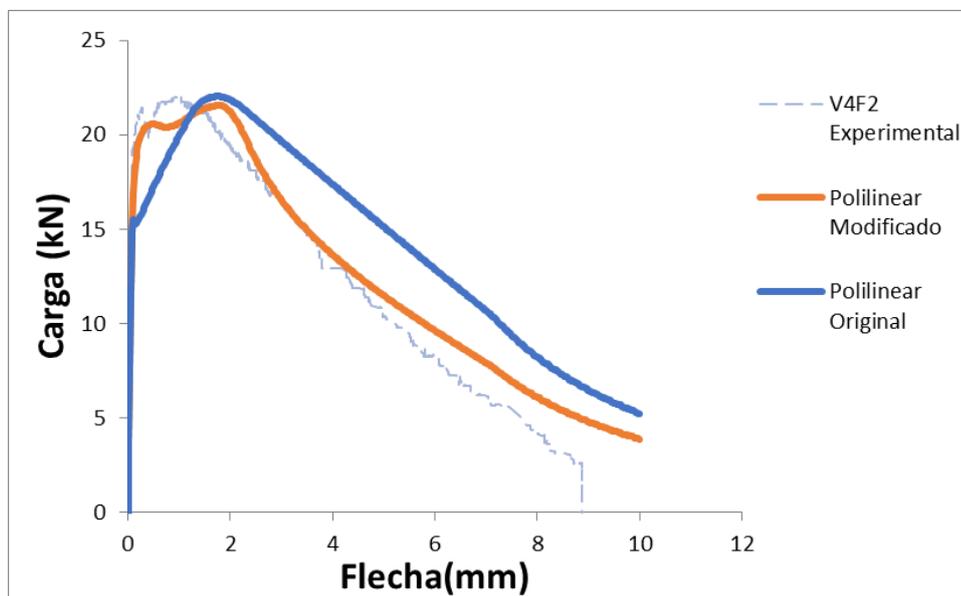


Figura 4.60 – Resultado para aproximação polilinear para viga V4F2.

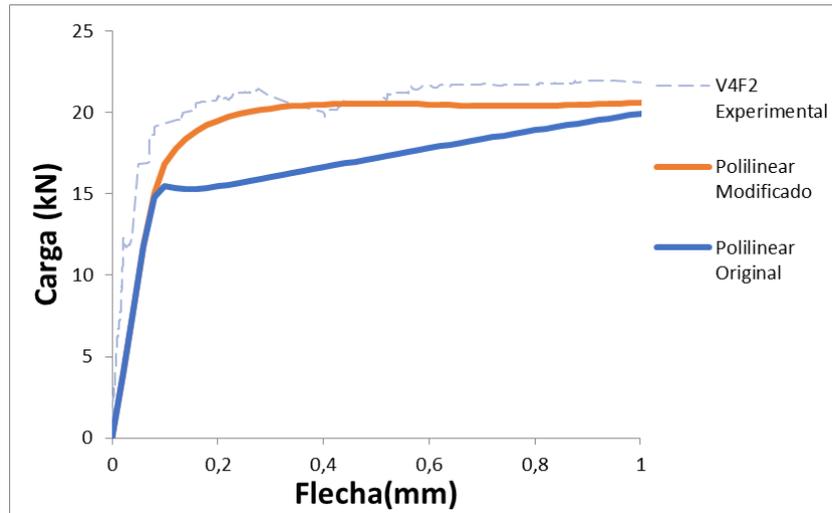


Figura 4.61– Detalhe da Figura 4.60, referente a aproximação polilinear para viga V4F2.

Por fim, a última curva V5F2 não necessitou ter seus pontos alterados porque se considerou que se obteve um bom ajuste com a relação coesiva polilinear obtida da análise inversa, conforme pode ser visto nas Figuras 4.62 e 4.63.

Tabela 4-25– Pontos utilizados para relação coesiva polilinear da viga V5F2.

Pontos	w (mm)	$\sigma_c$ (MPa)
0	0,0000	0,00
1	0,0173	9,33
2	0,0373	5,00
3	0,5173	6,95
4	1,0173	7,60
5	1,5173	7,68
6	2,0173	6,19
7	8,0173	0,15

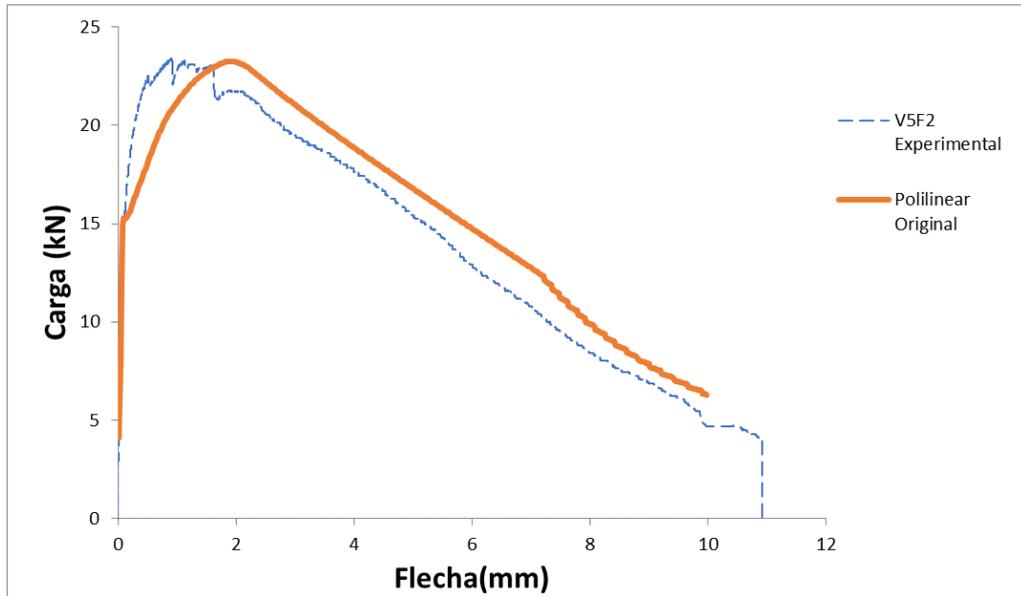


Figura 4.62 – Resultado para aproximação polilinear para viga V5F2.

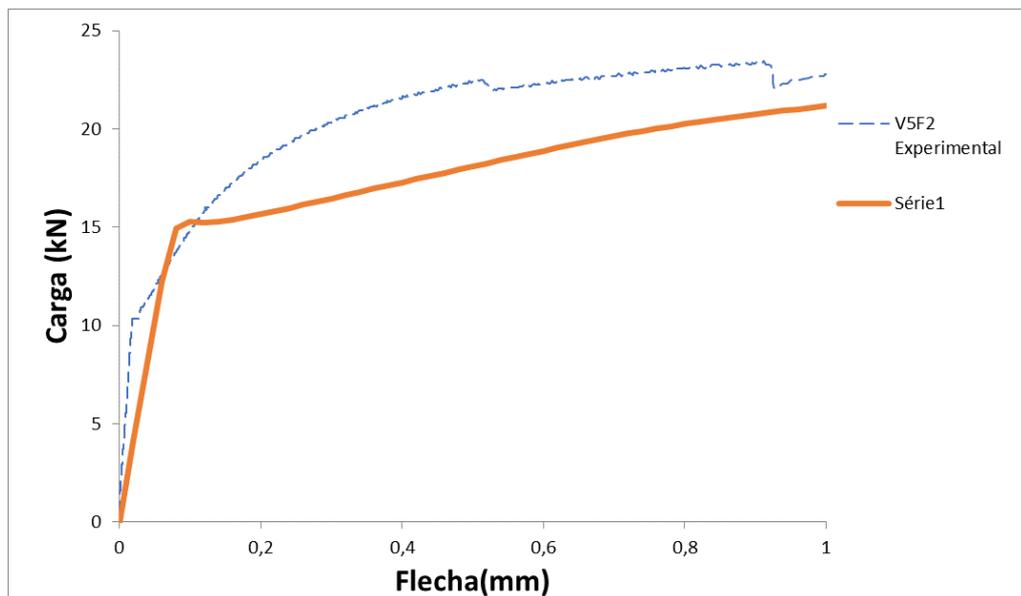


Figura 4.63 - Detalhe da Figura 4.62, referente a aproximação polilinear para viga V5F2

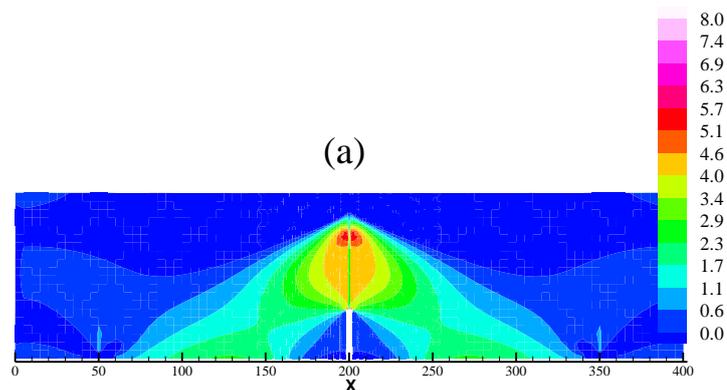
Pode-se concluir que com as curvas originais da análise inversa um bom ajuste é possível, mas o mesmo pode ser melhorado manualmente, principalmente no caso 2%. É possível que o uso de mais pontos na análise inversa permita eliminar o ajuste manual, mas esta possibilidade não foi explorada no presente trabalho.

#### 4.2.7 Distribuição das Tensões

Nesta seção é investigada a distribuição de tensões para diferentes níveis de fibras: 1% (V3F1) e 2% (V2F2) em volume. A distribuição é mostrada para o melhor modelo coesivo encontrado (polilinear modificado).

As Figuras 4.64-66 consideram diferentes deslocamentos aplicados e mostram as tensões horizontais ( $\sigma_{xx}$ ) positivas. Casos com 1% de fibras são mostrados nas figuras 'a' e casos com 2% são mostrados nas figuras 'b'. Os seguintes aspectos são observados:

- a) Estágios iniciais de propagação: caso 2% é capaz de absorver um valor bem maior de tensões trativas no entorno da região da trinca que o caso 1%, como se vê nas Figs. 4.64(a,b). Interessante que o efeito se transfere também para regiões longe da trinca. Nestes casos o deslocamento aplicado em ambos os casos é de 0,2 mm e a ponta da trinca está numa altura intermediária da viga, porém o efeito é observado para todos os estágios de propagação (ver Figuras. 4.65 e 4.66). Portanto as distribuições de tensões das figuras indicam a razão das forças aplicadas serem bem maiores no caso 2% em relação ao caso 1%, como indicam as Figs. 4.4 e 4.5. Tensões trativas são as responsáveis pela maior resistência dos casos com 2% de fibras, já que as tensões compressivas (não mostradas) são muito semelhantes nos dois casos.



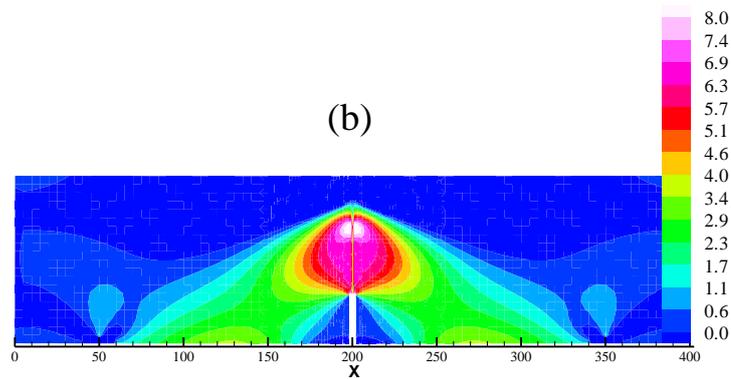


Figura 4.64 – Distribuição de tensões horizontais trativas  $\sigma_{xx}$  em MPa, para um deslocamento prescrito de 0,2 mm. (a) caso V3F1 e (b) caso V2F2.

- b) Estágios intermediários de propagação: Depois que a ponta da trinca atinge o topo da viga, um aspecto distintivo do estado de tensões, em ambos os casos, é o fato das tensões serem aproximadamente constantes ao longo do comprimento da trinca, conforme indicam as Figuras 4.65 (a,b), deslocamento prescrito 1 mm. Esta distribuição de tensões é o resultado da ação das fibras, que promovem um substancial engrenamento das faces da trinca, mesmo para trincas de grandes dimensões. As figuras também indicam que mesmo a ponta da trinca propagando totalmente, a trinca é capaz de transferir uma quantidade substancial de tensões, principalmente no caso 2% (aproximadamente 7 MPa).

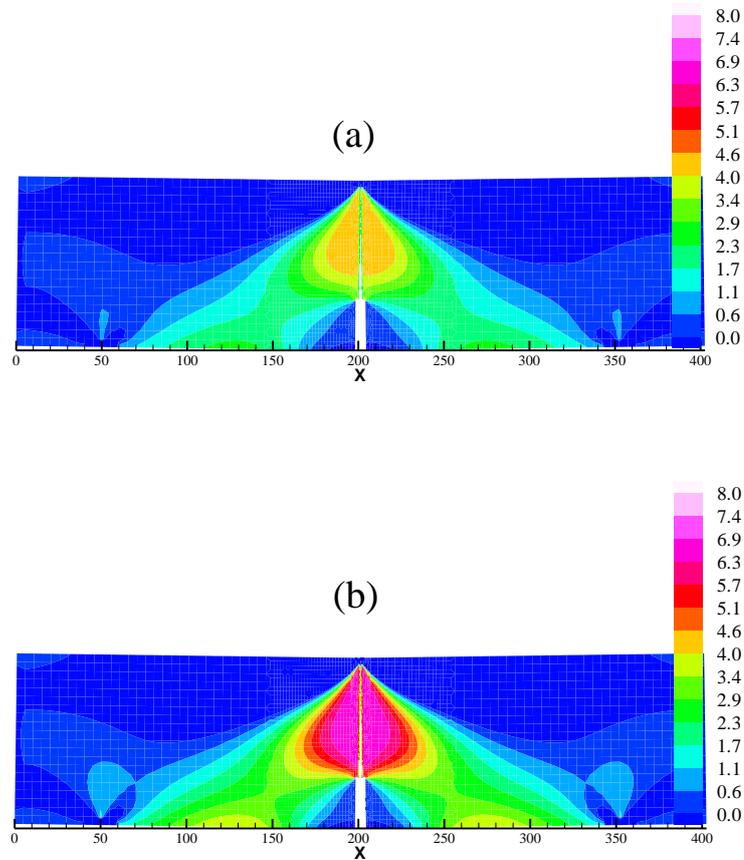


Figura 4.65 – Distribuição de tensões horizontais  $\sigma_{xx}$  trativas em MPa, para um deslocamento prescrito de 1 mm. (a) caso V3F1 e (b) caso V2F2.

- c) Estágios finais de propagação: as Figuras 4.66 (a,b) mostram os estágios finais do processo de fratura, no qual se tem um deslocamento prescrito corresponde a 8,4 mm. A distribuição de tensões deixa de ser uniforme ao longo da trinca. Porém, mesmo com uma grande abertura da trinca, aproximadamente 7,5 mm, as vigas ainda absorvem um considerável nível de tensões trativas. Experimentalmente este efeito é mostrado na Figura 2.3. O caso 2% ainda é capaz de desenvolver tensões em torno de 8 MPa, próximo da ponta da trinca. Longe das faces da trinca, entretanto, o nível de tensões é muito próximo entre os dois casos.

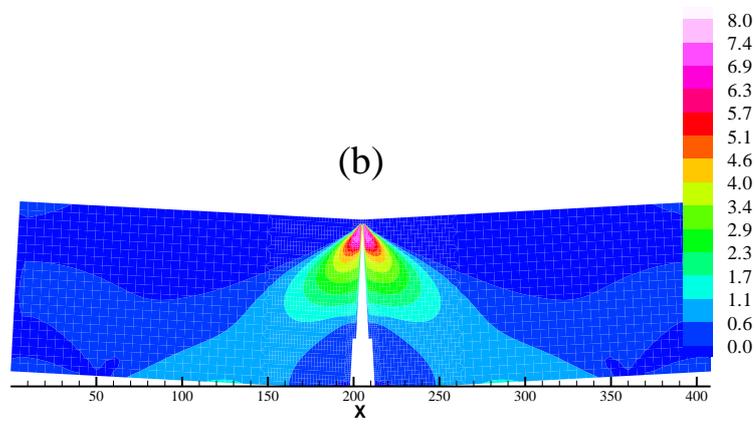
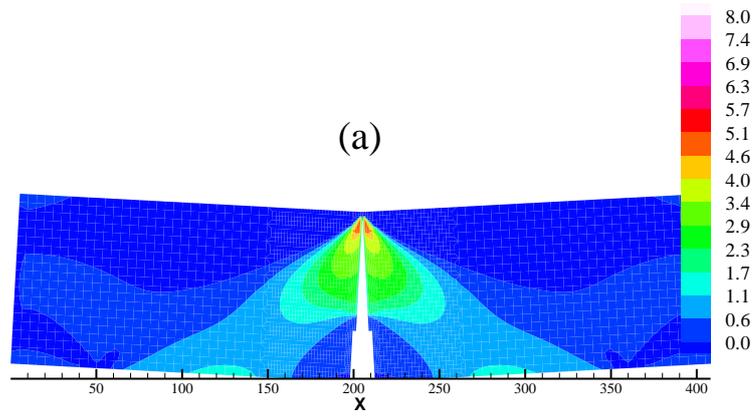


Figura 4.66 – Distribuição de tensões horizontais  $\sigma_{xx}$  trativas em MPa, para um deslocamento prescrito de 8,4 mm. (a) caso V3F1 e (b) caso V2F2.

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 5.1 CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo determinar propriedades coesivas para CUADRF e analisar seu comportamento através de um modelo de fratura discreto. Com os estudos de fundamentação teórica foi possível compreender de forma geral o comportamento dos CUADRF.

Averiguou-se a existência de várias metodologias para cálculo da Energia de Fratura para estes concretos. Os valores encontrados foram de 12,12 N/mm e 17,90 N/mm, para as vigas com 1% e 2% de fibras respectivamente; sendo estes valores bem maiores que o de Concretos Simples, mas não o suficiente para serem classificados na classe 4 de Wille et al. (2014)

Com relação aos diferentes modelos coesivos empregados, pode-se concluir que:

- 1) Verificou-se que com a formulação de Xu e Needleman(1994) pouco se pode fazer para ajustar a curva experimental e numérica. Apenas consegue-se obter o valor da força máxima de pico ajustado, sendo sua posição deslocada em relação ao pico experimental. Um fato interessante é que para as vigas com 1% de fibras obteve-se um bom ajuste para um  $\sigma_{\max}$  que é metade do valor de  $f_{tc}$ , 3,68 MPa. Já para as vigas com 2% de fibras obteve-se um bom ajuste da força do pico igual a  $f_{tc}$ , 8,09MPa. Com a variação de  $\sigma_{\max}$  não foi possível o ajuste da cauda com as curvas experimentais.
- 2) A formulação de Denneman et al. (2011) foi alterada devido ao fato de o material obtido possuir uma energia específica de fratura muito menor que os concretos de Rojas (2019). Foi introduzido um novo parâmetro para a força máxima(pico) e a cauda das curvas carga x flecha, o parâmetro D1. Com a alteração das fórmulas de Denneman et al. (2011) pode-se obter um ajuste relativamente eficaz.
- 3) Com os resultados da análise inversa foi possível obter um bom ajuste em geral, principalmente comparando com os demais modelos empregados. Contudo este ajuste pode ser melhorado mudando manualmente alguns pontos.

A distribuição de tensões mostrou um nível bem maior de tensões trativas nos casos com 2% de fibras em relação aos casos de 1%, para um mesmo deslocamento prescrito, o que justifica os maiores níveis de resistência nos primeiros casos. O estado de tensões ao longo das faces da trinca mostrou-se aproximadamente uniforme, mesmo com a ponta da trinca

avançando ao longo de toda a altura da viga. Assim, o concreto foi capaz de absorver uma quantidade considerável de tensões, mesmo completamente fissurado.

De maneira geral essa dissertação conclui que é possível simular o comportamento da fratura em CUADRF utilizando um modelo discreto de interfaces coesivas.

## 5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Observando as descobertas e novos questionamentos que surgiram neste trabalho sugere-se para novos trabalhos:

- Uso de um número maior de pontos na análise inversa para a obtenção das relações coesivas
- Consideração de efeitos de modo misto de propagação, bem como seu uso em estruturas armadas.
- Fazer o presente estudo em um modelo distribuído ou incorporado, utilizando as recomendações da AFGC para obter a lei constitutiva do material;

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, D.,L.; DANIN, A. R.; MELO, M. B.; RODRIGUES, P. F.. Influência da adição de fibras de aço na tensão de aderência de barras de aço retilíneas. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**. v. 6, n. 2, p. 307-338, Apr. 2013.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT Cimento Portland Determinação da Resistência à Compressão - NBR 7215, Rio de Janeiro, 1995.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 239R-18**: Ultra-High-Performance Concrete: An Emerging Technology Report. Farmington Hills, 2018.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 544.4R-18**: Guide to Design with Fiber-Reinforced Concrete. Farmington Hills, 2018.
- AFGC – Association Française de Génie Civil. **Documents Scientifiques et Techniques: Bétons fibrés à ultra-hautes performances - Recommandations**. Paris, Jun. 2013.
- AZMEE, Norzaireenand SHAFIQ, Nasir. 2018. Ultra-High Performance Concrete: From Fundamental to Applications. **Case Studies In Construction Materials**.9, sep.2018.
- BARREBLAT, G. I. . The mathematical Theory of Equilibrium of crack in brittle fracture. In: **Advances in Applied Mechanics**, 1962, v. 7, p. 55-129.
- BAZANT, Z. P.,Oh ,B. H. "Crack band theory for fracture of concrete." **Matériaux et Construction**, v 16, n. 3 (1983): 155-177.
- BAZANT, Z.P., TABBARA, M.R., KAZEMI, M.T., PIJAUDIER-CABOT, G. Random particle model for fracture of aggregate or fiber composites. **Journal of Engineering Mechanics**, 116(8), pp.1686-1705, 1990
- BAZANT, Z. P.,PIJAUDIER-CABOT, G. Measurement of Characteristic Length of Nonlocal Continuum. **Journal of Engineering Mechanics**, v 115, n. 4, p. 755-767. 1989.
- BOLZON, G., GHILOTTI, D., MAIER, G. Parameter identification of the cohesive crack model, in: H. Sol, C.W.J. Oomens (Eds.), *Material Identification Using Mixed Numerical and Experimental Methods*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 213–222.1997.
- BORGES, A. P. S. N. **Estudo das Propriedade de Concretos com Adição de Fibras Vegetais e de Polipropileno para Uso em Paredes Estruturais**. 2017. Dissertação de Mestrado em Engenharia - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia

BRANDT A. M. Fibre reinforced cement-based (FRC) composites after over 40 years of development in building and civil engineering. **Composite Structures**, n. 86, p. 3-9, Mar. 2008.

BUTTIGNOL, T.E.T.; SOUSA, J.L.A.O.; BITTENCOURT, T. N. Ultra High – Performance Fiber-Reinforced Concrete (UHPFRC): a review of material properties and design procedures. **IBRACON Structure and Materials Journal**, v. 10, n. 4, p. 957-971, Aug. 2017.

CUNHA, V.M.C.F., BARROS, J. A.O., SENA-CRUZ, J.M. Pullout Behaviour of Steel Fibers in Self-Compacting Concrete. **Journal of Materials in Civil Engineering**, Vol. 22, No. 1, January 1, 2010.

CNR-National Research Council. **CNR-DT 204/2006** .- Guide to the Design and Construction of Fiber Reinforced Concrete Structures. Roma, 2006.

DENNEMAN, Erik; KEARSLEY, Elsabé; T., VISSER, A. Splitting tensile test for fibre reinforced concrete. **Materials and Structures**. 44. 1441-1449. 2011.

DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 8, n. 2, p. 100-104, 1960.

ELICES, M., GUINEA, G.V. and PLANAS, J. Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part 3—influence of cutting theP- $\delta$  tail. **Materials and Structures**, 25(6), p.327-334, 1992.

ELICES, M., GUINEA, G.V., GOMES, J. and PLANAS, J. The Cohesive Zone Model: Advantages, Limitations and Challenges. **Engineering Fracture Mechanics**,v 69, p. 137-163, 2002.

FEDRIGO, F. **Aplicação de interfaces coesivas na mecânica da fratura via método dos elementos finitos**. 2001. Dissertação de Mestrado em Engenharia - Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2001.

FHWA. Disponível em: <<https://www.fhwa.dot.gov/publications/research/infrastructure/structures/hpc/13060/006.cfm>>. Acessado em 12 de agosto de 2019.

HABEL, K.; Viviani, M.; DENARIÉ, E. and BRÜHWILER, E. Development of the mechanical properties of an Ultra-High Performance Fiber Reinforced Concrete (UHPFRC). **Cement and Concrete Research**, p. 1362–1370, 2006.

HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P.-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v. 6, p. 773-781, 1976.

HILLERBORG, A. The theoretical basis of a method to determine the fracture energy  $G_{Fof}$  of concrete. **Materials and Structures**, v. 18, p.291–296, 1985.

HILLERBORG, A. 1989. Size Dependency of the Stress-Strain Curve in Compression, Analysis of Concrete Structures by Fracture Mechanics. In **Proc. of the International RILEM Workshop**, 1989. Chapman and Hall.

ISLA, F., RUANO, G., LUCCIONI, B. . Analysis of steel fibers pull-out. Experimental study. **Construction and Building Materials**. V 100, p. 183-193, sep. 2015.

JSCE - Japanese Society of Civil Engineers. **Standard SF-4**, Method of Test for Flexural Strength and Flexural Toughness of Fiber Reinforced Concrete. 1984, pp. 58-66. Japan.

JSCE – Japanese Society of Civil Engineers, Concrete Committee, 2008. **Recommendations for design and construction of high performance fiber reinforced cement composites with multiple fine cracks**. Japan Society of Civil Engineers, Tokyo, Japan.

JENQ, Y.; SHAH, S.P., 1985. Two parameter fracture model for concrete. **Journal of engineering mechanics**, 111(10), pp.1227-1241.

JUCÁ, P. H. O. **Avaliação do Mecanismo de Transferência de Tensões e Formação de Fissuras no Concreto Autoadensável com Reforço Híbrido**. 2020. Dissertação de Mestrado em Engenharia – Curso de Pós Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Pampa. Alegrete. 2020

KANG, S.-T, LEE, Y., PARK, Y.-D , KIM, J.-K. (2010). Tensile fracture properties of an Ultra High Performance Fiber Reinforced Concrete (UHPFRC) with steel fiber. **Composite Structures** . v. 92, p. 61-71. 2010.

KWAK, H. G.; FILIPPOU, F. C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads. Berkeley, CA, Estados Unidos, 1990.

LENS, L. N. **Modelos para Análise de Fratura do Concreto Simples Empregando Interfaces Coesivas**. 2009. Dissertação de Mestrado em Engenharia - Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2009.

LOFGREN, I. **Fibre-Reinforced Concrete for Industrial Construction – a fracture mechanics approach to material testing and structural analysis**. 2005. Thesis for the degree of Doctor of Philosophy. Department of Civil and Environmental Engineering-Structural Engineering, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2005.

NAAMAN, AE.(2003). Strain hardening and deflection hardening fiber reinforced cement composites. In: Reinhardt HW, Naaman AE, editors. **Proceedings of the international RILEM workshop 'High performance fiber reinforced cement composites' HPFRCC4**, Ann Arbor; 2003. p. 95–113.

NAAMAN, A.E. and REINHARDT, H.W., 2006. Proposed classification of HPFRC composites based on their tensile response. **Materials and structures**, 39(5), pp.547-555.

NANAKORN, P., HORII, H. Back Analysis of tension-softening relationship of concrete. **J. Material, Con. Struct., Pavements, JSCE**. n. 544, v.32, p. 265-275, Aug. 1996.

NEEDLEMAN, A., 1987. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. **Journal of Applied Mechanics**, v. 54, p. 525-531.

NGO, D.; SCORDELIS, A.C. .Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. **ACI Journal**, Farmington Hills: ACI, v.64, n.3, p.152-163, apr. 1967.

PARK, K., PAULINO, G., ROESLER, J. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**. V. 57 n.6, p. 891-908; 2009.

PONTHOT, J. P. **Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis**, 1995.

PRISCO, M.; PLIZZARI, G.; VANDEWALLE, L. . Fibre Reinforced Concrete: New Design Perspectives. **Materials and Structures-RILEM**, v. 42, September 2009, p. 1261-1281.

QUININO, U. C. M. **Uso do Método das Interfaces Coesivas na Análise da Simulação do Comportamento de Fratura em Materiais Frágeis**. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

RASHID, Y. R. .Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels. **Nuclear Engineering and Design**, v.7, n.4, p. 334-344, apr. 1968.

RIERA, J.D.; ITURRIOZ, I. Discrete elements model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading. **Nuclear Engineering and Design**, v.179, n.2, p. 135-145. 1998.

ROJAS, R. **Análisis experimental y numérico de vigas con Ultra High Performance Fibre Reinforced Concrete (UHPFRC)**.2019. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

RILEM -**TC-50 FMC** (Draft Recommendation), Determination Of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams, **Mater. Struct.** 18(106) (1985) 285-290.

RILEM, T., 1990. **89-FMC Fracture Mechanics of Concrete** - Test Methods, "Determination of Fracture Parameters ( $K_{Ic}$  s and  $CTOD_c$ ) of Plain Concrete Using Three-Point Bend Tests,". *Materials and Structures*, 23, pp.457-460.

RILEM, T., 1990. **89-FMC Fracture Mechanics of Concrete** - Test Methods, "Size-effect methods for determining fracture energy and process zone size of concrete", *Materials and Structure*, 1990, v.23, p.461-465.

RILEM TC 162-TDF: **Test and design methods for steel fibre reinforced concrete – Recommendations: Bending Test**. *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*, v.33, p. 3-5, jan/feb. 2000.

SILVA, C.Z. **Uso de descontinuidades fortes nasimulação de problemas de fratura**. 2015. Dissertação de Mestrado em Engenharia - Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2015.

SILVA NETO, C. P. **Modelagem da Fratura do Concreto Armado por meio de Interfaces Coesivas**. 2015. Dissertação de Mestrado em Engenharia - Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2015.

SCHMIDT, M. . **Ultra-high performance concrete and nanotechnology in construction** In: *Proceedings of Hipermat 2012, 3rd International Symposium on UHPC and Nanotechnology for High Performance Construction Materials*, Kassel, March 7-9, 2012.

SHAH, S.P.. Determination of fracture parameters ( $K_{Ic}$  s and  $CTOD_c$ ) of plain concrete using three-point bend tests. **Materials and Structures**, 23(6), pp.457-460. 1990.

SPASOJEVIC, A. **Structural Implications of Ultra-High Performance Fibre-Reinforced Concrete in Bridge Design**. PhD thesis of ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRAL DE LAUSANNE 2008.

WILLE, K., KIM, D.-J. e NAAMAN, A. E., Strain-hardening UHP-FRC with low fiber contents, In: **Materials and Structures** , vol. 44, p. 583-598, 2014.

XU, X.P., NEEDLEMAN, A. . A Numerical Simulation of Fast Crack Growth in Brittle Solids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.42, n.9, p.1397-1434, 1994.

YOO, D., LEE, J., YOON, Y.. . Effect of fiber content on mechanical and fracture properties of ultra-high performance fiber reinforced cementitious composites. **Composite Structures**, Volume 106, Pages 742-753. 2013.

YOO, D., SHIN, H., YANG, J. and YOON, Y. Material and bond properties of ultra high performance fiber reinforced concrete with micro steel fibers. **Composites Part B: Engineering**. V. 58, March, p 122-133, 2014a.

YOO, D., KANG, S., YOON, Y. Effect of fiber length and placement method on flexural behavior, tension-softening curve, and fiber distribution characteristics of UHPFRC. **Construction and Building Materials**. V 64, p 67-81, 2014b.

## APÊNDICE

Parâmetros das equações
E (MPa)= 47708
h (mm)= 70
b (mm)= 100
L (mm)= 300
I(mm <sup>4</sup> )= 2858333

Notação utilizada para simplificação das equações
x= altura relativa da trinca = $\alpha h$
y= altura relativa do eixo neutro = $\alpha_n h$
z= tensão da zona trincada (fibra)
m= curvatura
r= $w_i/w_j$

### PONTO 1

Obs:

O ponto 1 é localizado no limite elástico, por tanto ainda não têm fissura e  $Nf1 = Mf1 = \alpha h = w1 = 0$   
 O eixo neutro fica na metade da altura da viga então:  $\alpha_n h = h/2 \Rightarrow \alpha_n = 1/2$

Para o Ponto 1 conhecemos:

P1 (N)= 10090 retirado das curvas carga x abertura da trinca  
 $\sigma t$  (MPa) =  $P \cdot L / 4 \cdot y / I$  -9,27 =  $\sigma f1$  (MPa)

Resumo Ponto 1:

P1=	10090,00 N
x1=	$\alpha h = 0,00$ mm
y1=	$\alpha_n h = 35,00$ mm
z1=	$\sigma t = \sigma f1 = -9,27$ MPa
	Nf1= 0,00 N
	Mf1= 0,00 N.mm
	w1= 0,00 mm

### PONTO 2

Para o Ponto 2 conhecemos:

P2 (N)= 7600  
 M (N.mm)= 570000  
 $w2$  (mm)= 0,02  
 $r = w_i/w_j = 0$

Sistema de Equações colocado no programa Maxima

1)	$Nb = 2385398,00 \cdot m \cdot (70-y)^2 - 2385398,00 \cdot m \cdot (x-y)^2$
2)	$Nf = 100 \cdot x \cdot (-9,27 + z) \cdot 0,5$
3)	$0 = Nb + Nf$
4)	$570000 = Mb + Mf$
5)	$Mb = 1590265,3 \cdot m \cdot (70-y)^3 - 1590265,33 \cdot m \cdot (x-y)^3 + y \cdot Nb$
6)	$Mf = x \cdot Nf - 50 \cdot x^2 \cdot z$

$$7) \quad -9,27 = 47707,96 \quad m(x-y)$$

$$8) \quad 0,02 = 0,66666667 x^2 (m + 8,3599E-06 - 1E-08 x)$$

Resultados do Sistema de equações:

$$x_2 = \alpha h (\text{mm}) = 34,98092$$

$$y_2 = \alpha n h (\text{mm}) = 46,64994$$

$$z_2 = \sigma f_2 (\text{MPa}) = -0,01966$$

Correção da Tensão segundo a AFGC:

$$z_2 = \sigma f_2 (\text{MPa}) = -3,10189$$

Força normal e momento na seção trincada pro ponto 2:

$$Nf_2 (\text{N}) = -21166,8$$

$$Mf_2 (\text{N.mm}) = -550649$$

Resumo Ponto 2:

	P2 (N)=	7600
x2=	$\alpha h =$	34,980916 mm
z2=	$\sigma f_2 =$	-3,1018854 MPa
	Nf2=	-21166,7518 N
	Mf2=	-550649,019 N.mm
	w2=	0,02 mm