

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Formulação integral e simulações numéricas
para a equação do transporte
unidimensional**

por

Débora Dalmolin

Tese para a obtenção do Título
de Doutora em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Fabio Souto Azevedo
Orientador

Prof. Dr. Esequia Sauter
Co-orientador

Porto Alegre, 26 de janeiro de 2021.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Dalmolin, Débora

Formulação integral e simulações numéricas para a equação do transporte unidimensional / Débora Dalmolin.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2021.

110 p.: il.

—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2021.

Orientador: Souto Azevedo, Fabio; Co-orientador: Sauter, Esequia

Tese: Matemática Aplicada.

Equação do Transporte, Unidimensional, Teoria de Existência, Método de Nyström, Método de Nyström Produto

Formulação integral e simulações numéricas para a equação do transporte unidimensional

por

Débora Dalmolin

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Teoria de transporte de partículas

Orientador: Prof. Dr. Fabio Souto Azevedo

Co-orientador: Prof. Dr. Esequia Sauter

Banca examinadora:

Prof^a. Dr^a. Liliane Basso Barichello
PPGMAp-UFRGS

Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró Vargas
PUCRS

Prof. Dr. Leonardo Fernandes Guidi
UFRGS

Prof. Dr. Esequia Sauter
Coordenador

AGRADECIMENTOS

A Deus.

Ao orientador professor Fábio Souto de Azevedo, por apresentar o assunto dessa tese e pelo constante apoio no desenvolvimento do trabalho.

Ao professor Esequia Sauter, pela intensa cooperação e incentivo na execução desse trabalho.

As Instituições de Fomento a pesquisa CAPES e CNPq.

Aos meus colegas da UFRGS e aos meus amigos externos pelo apoio e incentivo sempre. Em especial, a Jonatas Voese.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	viii
RESUMO	xiii
ABSTRACT	xiv
1 INTRODUÇÃO	1
2 TEORIA DE EXISTÊNCIA	7
2.1 Formulação do problema	7
2.2 Formulação Integral	10
2.3 Teoria de existência para fontes limitadas	18
3 MÉTODO DE NYSTRÖM	42
3.1 Tratamento da Singularidade	42
3.2 Discretização	46
3.2.1 Autovalores para equação do transporte isotrópica no caso unidimensional	48
3.3 Resultados Numéricos	49
3.3.1 Detalhes de Implementação	49
3.3.2 Resultados numéricos para o fluxo escalar médio	50
3.3.3 Resultados numéricos para o problema de autovalores	63

4	MÉTODO DE NYSTRÖM PRODUTO	67
4.1	Discretização por interpolação segmentada	67
4.2	Resultados numéricos para fluxo escalar médio	73
4.3	Comparação entre os resultados numéricos para fluxo escalar médio entre os métodos de Nyström e Nyström Produto	87
5	RESULTADOS NOVOS PARA FLUXO ESCALAR MÉDIO	90
6	CONCLUSÕES	97
APÊNDICE A		100
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		105

LISTA DE FIGURAS

2.1	Ilustração da direção de propagação do fluxo angular onde $x \in (0, L)$ e $\mu = \cos \theta$	9
2.2	Ilustração da direção de propagação do fluxo angular onde x é um ponto da fronteira e $\mu = \cos \theta$	10
4.1	Discretização do intervalo $[0, L]$ para $N - 1$ e polinômio de ordem 2.	68

LISTA DE TABELAS

3.1	Regra de Boole. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ com os resultados publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [13].	54
3.2	Gauss-Legendre. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ com os resultados publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [13].	55
3.3	Regra de Boole. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = -x^2 + x$ com os resultados publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [13].	56
3.4	Gauss-Legendre. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = -x^2 + x$ com os resultados publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [13].	57
3.5	Regra de Boole. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 0.10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22] (ver[14]), Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [14].	58
3.6	Gauss Legendre. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 0.10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [14].	58

3.7	<p>Regra de Boole. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [14].</p>	59
3.8	<p>Gauss-Legendre. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas <i>et al.</i> [45] and Azevedo <i>et al.</i> [14].</p>	60
3.9	<p>Regra de Boole. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 100.0cm$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$ com os publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [14].</p>	61
3.10	<p>Gauss-Legendre. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 100.0cm$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$ com os publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [14].</p>	62
3.11	<p>Comparação de resultados quando $\rho_0 = \rho_L = 0.5$ e $L = 0.2cm$. Com Atalay [4], Garis e Sjöstrand [24] e Sauter <i>et al</i> [42]. . .</p>	64
3.12	<p>Comparação de resultados quando $\rho_0 = \rho_L = 0.5$ e $L = 2cm$. Com Atalay [4], Garis e Sjöstrand [24] e Sauter <i>et al</i> [42]. . . .</p>	65
3.13	<p>Comparação de resultados quando $\rho_0 = \rho_L = 0.5$ e $L = 20cm$. Com Atalay [4], Garis e Sjöstrand [24] e Sauter <i>et al</i> [42]. . . .</p>	66
4.1	<p>Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto de (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ com os resultados publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [13].</p>	76

4.2	<p>Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto de (ordem 3) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ com os resultados publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [13].</p>	77
4.3	<p>Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto de (ordem 4) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ com os resultados publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [13].</p>	78
4.4	<p>Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto de (ordem 5) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ com os resultados publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [13].</p>	79
4.5	<p>Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = -x^2 + x$ com os resultados publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [13].</p>	80
4.6	<p>Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [14].</p>	81
4.7	<p>Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 3) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [14].</p>	82

4.8	<p>Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 4) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [14].</p>	83
4.9	<p>Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 5) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [14].</p>	84
4.10	<p>Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 100.0cm$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$ com os resultados publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [14].</p>	85
4.11	<p>Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 3) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 100.0cm$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$ com os resultados publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [14].</p>	86
4.12	<p>Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 4) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 100.0cm$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$ com os resultados publicados por Vargas <i>et al.</i> [45] e Azevedo <i>et al.</i> [14].</p>	87
5.1	<p>Resultados para fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström com Gauss-Legendre onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1./8$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = 0.5$ para $x \in [0, 0.5]$ e $S(x) = 0$ para $x \in (0.5, 1.0]$</p>	91

5.2	Resultados para fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1./8$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = 0.5$ para $x \in [0, 0.5]$ e $S(x) = 0$ para $x \in (0.5, 1.0]$	92
5.3	Resultados para fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström com Gauss-Legendre onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0.5$, $B_0 = B_L = 1./8$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = 1./8$	93
5.4	Resultados para fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0.5$, $B_0 = B_L = 1./8$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = 1./8$	94
5.5	Resultados para fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0.5$, $B_0 = B_L = 1./8$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = 0.5$ para $x \in [0, 0.5]$ e $S(x) = 0$ para $x \in (0.5, 1.0]$	95
5.6	Resultados para fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0.5$, $B_0 = B_L = 1./8$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = 0.5$ para $x \in [0, 0.5]$ e $S(x) = 0$ para $x \in (0.5, 1.0]$	96

RESUMO

Neste trabalho, aplicamos técnicas para obter resultados para o modelo dado pela equação de transporte isotrópica em estado estacionário em um meio participativo com fontes internas e fronteiras semirreflexivas. Do ponto de vista analítico, generalizamos a teoria de existência para soluções no espaço C^α quando as fontes estão no espaço de funções limitadas. Para obter a solução numérica, escrevemos a equação como uma equação de Fredholm do segundo tipo e aplicamos o método de Nyström com as quadraturas de Boole e Gauss-Legendre. Técnicas analíticas e computacionais foram implementadas para tratar a singularidade do núcleo. Além disso, calculamos os autovalores do problema. Também, aplicamos uma segunda metodologia numérica baseada no método de Nyström Produto, que consiste em calcular uma quadratura numérica específica para o núcleo do transporte que é capaz de absorver a singularidade. Mostramos a eficiência dos métodos propostos através de alguns testes numéricos e comparamos nossos resultados com aqueles que podem ser encontrados na literatura. Ademais, apresentamos comparações entre as duas metodologias numéricas desenvolvidas nesse trabalho.

ABSTRACT

This work, we apply techniques to obtain results for the model given by the isotropic transport equation in steady state in a partipative medium with internal sources and semirefletive boundaries. From the analytical point of view, we generalize the existence theory of solutions in the space of Hölder continuous function C^α when the sources are in the space of limited functions. To obtain a numerical solution, we write the equation as a Fredholm equation of the second type and we apply Nyström method with Boole's and Gauss-Legendre quadrature. Analytical and computational techniques were implemented to deal with kernel singularities. In addition, we calculate the eigenvalues of the operator. We also apply a second numerical methodology based on the Nyström Product method, which consists of calculating a specific numerical square for the transport core that is capable of absorbing the singularity. We show the efficiency of the proposed method through some numerical tests and compare our results with those that can be found in the literature. Furthermore, we present comparisons between the two numerical methodologies developed in this work.

1 INTRODUÇÃO

A equação de transporte modela o balanço de partículas descrevendo quantitativamente a distribuição espacial, direcional, energética e temporal, em meios materiais [19, 11]. Essa equação é uma versão linear da equação desenvolvida inicialmente por Ludwig Boltzmann em 1872 no contexto de teoria cinética dos gases [8]. A equação de transporte tem aplicações em áreas da física, química, matemática e engenharia, tais como, resfriamento de vidro [29], transporte de nêutrons [46] e modelos para radiação em turbinas a gás [20], entre outros.

A equação de transporte vem sendo estudada na literatura tanto no contexto de teoria de existência, quanto em cálculo de soluções. Aproximações exatas para solução da equação de transporte podem ser obtidas em problemas bem particulares, por exemplo, o método de Case [10] desenvolvido nos anos de 1960, que apresenta uma solução analítica em casos específicos. Assim, devido à complexidade da equação, das condições de contorno e do número de variáveis, a abordagem numérica é necessária para calcular soluções aproximadas.

Do ponto de vista analítico, uma teoria de existência de soluções para um problema de transferência radiativa no espaço tridimensional, envolvendo condução e radiação foi estabelecida por Thompson e Vilhena [43] no espaço C^α , porém sob algumas condições restritivas nas condições de contorno e coeficientes. Em Azevedo *et al* [13] foi estabelecida a teoria de existência para esse problema em geometria $1D$, supondo fontes e condições de contornos em espaços de Hölder C^α . Ainda, no trabalho [13], uma teoria para o problema

unidimensional foi estabelecida com menores restrições sobre os coeficientes e condições de contorno, porém o problema exige que o termo fonte pertença ao espaço de funções C^α , que é uma limitação não física.

Do ponto de vista numérico, dentre os métodos determinísticos aplicáveis na solução da equação de transporte ou suas formas derivadas, citamos duas grandes famílias: os métodos de Ordenadas Discretas (S_N) e os métodos Integrais. Na aproximação de ordenadas discretas (S_N), introduzida por Chandrasekhar [11] em estudos de transferência radiativa, a equação de transporte é aproximada por um sistema de N equações diferenciais para o fluxo nas N direções discretas. As diversas técnicas usadas para resolver a variável espacial no sistema oriundo da discretização em ordenadas discretas originam vários outros métodos. Alguns deles são: LTS_N [45, 16], o método Analítico de Ordenadas Discretas (ADO) [6], o Spectral Green's Function (SGF) [15, 18], o CASN [23], o Diamond Difference (DD) e o método de Elementos Finitos [32]. Diferente do método de Ordenadas Discretas, os métodos Integrais resolvem a formulação integral da equação em vez da equação integro-diferencial. Da família de métodos Integrais, citamos três métodos que aparecem na literatura: SK_N [3], o método GFD (Green's Function Decomposition) [13] e o método de Nyström [35, 12].

Dentre os métodos citados, descreveremos sucintamente os três que serão usados para fins de comparação com os resultados obtidos nesse trabalho. São eles: o método CASN, o método LTS_N e o método GFD . O método CASN é uma variação do CSN, que foi desenvolvido por Ganapol [23]. O método LTS_N foi desenvolvido no início do ano de 1990 por Vilhena e Barichello [16]. Basicamente, esse método consiste em aplicar a transformada de Laplace na variável espacial do sistema de equações S_N , resultando em um sistema algébrico no

espaço transformado. Tem-se então que resolver esse sistema algébrico para o fluxo transformado e inverter analiticamente o fluxo angular transformado, através do operador transformada inversa. Cabe ressaltar ainda, em [37, 36] foi provada a convergência do método LTS_N garantindo assim que à medida que a ordem da quadratura cresce, o erro de truncamento da discretização decresce, o que permite obter resultados com uma precisão controlada. O método GFD desenvolvido por Azevedo e Sauter em 2011 [13] é uma discretização obtida a partir da formulação integral do problema de transporte, que consiste em aproximar os operadores projetando-os em espaços de dimensão finita e transformando-os em matrizes. O cálculo do erro de truncamento para o método GFD foi feito em [40].

Neste trabalho, nós resolvemos a equação de transporte no estado estacionário em um meio participativo com fontes internas e fronteira semirreflexivas em geometria $1D$, desenvolvendo a teoria de existência e simulações numéricas. Embora essa equação venha sendo estudada exaustivamente nas últimas décadas, ainda existem questões que não foram resolvidas. Por exemplo, o problema acoplado entre radiação e fluido ou fluxo térmico ainda é computacionalmente custoso para ser resolvido, visto que, nesse caso a metodologia precisa calcular a solução numérica da equação do transporte dezenas de milhares de vezes de maneira eficiente. Também, a teoria de existência precisa ser generalizada para cobrir os problemas com parâmetros realísticos.

Nossa proposta é abordar os aspectos teórico e numérico. Do ponto de vista da teoria, desenvolvemos novas estimativas para os operadores quando as fontes são limitadas, inclusive admitindo fontes descontínuas, estabelecendo existência de soluções no espaço Hölder C^α . Esse avanço generaliza a teoria desenvolvida em [13], pois amplia a família de possíveis fontes de C^α para L^∞ ,

abrangendo aquelas fontes comuns nos problemas realísticos. Observamos aqui que a ampliação no espaço de possíveis fontes para solução do transporte em C^α também pode ser estendida à teoria de existência do problema condutivo-radiativo proposto em [13].

Neste trabalho aplicamos duas distintas metodologias numéricas: a primeira combina o método de Nyström com técnicas de remoção de singularidade e a segunda é uma aplicação direta do método de Nyström Produto. O método de Nyström foi introduzido por Evert Johannes Nyström em 1930 [35] e foi ampliado para resolver numericamente equações integrais fracamente singulares e singulares [17, 28]. Tsai e Loyalka [31, 44] foram os primeiros a aplicarem o método Nyström à formulação integral da equação de transporte. Em trabalhos mais recentes, o método de Nyström foi usado para resolver problemas em geometrias unidimensional, bidimensional e radial [34, 27, 12, 41]. O método de Nyström Produto, por sua vez, é adequado para resolver problemas singulares, desobrigando a necessidade de remover as singularidades dos núcleos antes da discretização. Não encontramos registro da sua aplicação do método de Nyström produto em problemas de transporte, porém, ele foi usado em equações de Fredholm do segundo tipo [5, 17, 38].

O método de Nyström consiste em discretizar a formulação integral do problema de transporte e aplicar técnicas numéricas e analíticas para lidar com singularidades, produzindo um sistema de equações algébricas a serem resolvidas. O algoritmo implementado possibilitou calcularmos soluções numéricas com vários dígitos significativos corretos para o fluxo escalar médio. Já para o método de Nyström Produto, que consiste em escrever o núcleo da integral como uma função peso em uma malha uniformemente espaçada. Aproximamos a parte

não singular do integrando em cada intervalo pelo polinômio interpolador de Lagrange com diferentes ordens. Em ambas as metodologias calculamos os resultados numéricos e comparamos com os resultados encontrados na literatura, e também comparamos os resultados produzidos pelos dois métodos entre si, nos quesitos qualidade numérica e eficiência computacional.

As metodologias numéricas desenvolvidas neste trabalho permitem calcular tanto o fluxo escalar médio, o fluxo angular, a corrente e os autovalores do problema. Os autovalores desempenham um papel importante na descrição da dinâmica dos problemas de transporte, por isso muitos trabalhos na literatura se dedicaram a desenvolver métodos para calcular as condições críticas e simulá-las [4, 13, 34, 24, 42].

O trabalho encontra-se estruturado em 5 capítulos e está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, apresentamos a formulação do problema proposto e fazemos uma breve interpretação física para contextualizar o leitor. Posteriormente, deduzimos a formulação integral e, em seguida, desenvolvemos a teoria de existência de soluções.

No Capítulo 3, com base na formulação integral, a qual identificamos como uma equação de Fredholm do segundo tipo, usamos técnicas analíticas e computacionais para tratar as singularidades que aparecem no núcleo. Posteriormente, derivamos uma implementação rápida do método de Nyström para resolver a formulação integral da equação de transporte. Em seguida, analisamos esquemas de quadratura, como as regras de Boole e Gauss-Legendre. Por fim, apresentamos e analisamos os resultados obtidos e os comparamos com outros

métodos. Ainda, apresentamos e comparamos resultados para o problema de autovalor.

No Capítulo 4, implementamos o método de Nyström Produto para resolver a formulação integral da equação de transporte. Em seguida, apresentamos e analisamos os resultados obtidos e comparamo-os com os resultados presentes na literatura. Também, comparamos os métodos Nyström e Nyström Produto em termos de precisão e eficiência.

No Capítulo 5, usando as duas metodologias, método de Nyström e Nyström Produto, apresentamos resultados novos para o fluxo escalar médio com a fonte descontínua, estabelecendo assim a relação entre a teoria de existência com a numérica. E, posteriormente consideramos coeficientes de reflexão diferentes de zero.

E finalmente, no Capítulo 6 apresentamos as considerações finais obtidas do estudo realizado até o presente momento.

2 TEORIA DE EXISTÊNCIA

2.1 Formulação do problema

Nesta seção, apresentamos o problema de transporte, dado por uma equação integro-diferencial e condições de fronteira semirreflexivas. Consideramos o caso isotrópico, isto é, as partículas são uniformemente emitidas e espalhadas em todas as direções. Ainda, consideramos o problema linear unidimensional em um meio homogêneo no domínio $D = \{(x, \mu); (x, \mu) \in [0, L] \times [-1, 1]\}$, isto é:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \sigma_t \Psi(x, \mu) = \sigma_s \Phi(x) + S(x), \quad 0 < x < L \text{ e } -1 \leq \mu \leq 1. \quad (2.1)$$

Nessa equação, a função incógnita $\Psi(x, \mu)$, mensurada em $cm^{-2}sr^{-1}s^{-1}$, representa o fluxo angular na posição x e na direção de μ , onde μ é o cosseno do ângulo formado entre a direção de propagação e o eixo x . A função $S(x)$ representa a fonte interna do problema e é mensurada em $cm^{-3}s^{-1}$. A seção macroscópica total e seção de choque macroscópica de espalhamento, mensuradas em cm^{-1} , são não-negativas e denotadas por σ_t e σ_s , respectivamente. Neste trabalho, a restrição $\sigma_s < \sigma_t$ será admitida para estabelecer a teoria de existência. A função $\Phi(x)$, nomeada de fluxo escalar médio e medida em $cm^{-2}s^{-1}$, é definida como uma média do fluxo angular nas direções, isto é,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu') d\mu'. \quad (2.2)$$

Embora a equação (2.1) possua somente uma variável espacial, fisicamente o fenômeno acontece no espaço tridimensional compreendido pela faixa formada pelos dois planos $x = 0$ e $x = L$. A figura 2.1 nos ajuda a interpretar os termos da equação (2.1): dado um ponto x e uma direção μ , a variação do fluxo angular nessa direção é calculada por um balanço entre as partículas absorvidas, as espalhadas após as colisões e as emitidas pela fonte. O termo $\sigma_t \Psi(x, \mu)$, neste caso, computa a parte que é absorvida pelo meio (observe que, $\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s$, onde σ_a é a seção de choque macroscópica de absorção). A compreensão desse termo fica evidente quando colocamos $\sigma_s = 0$ e $S(x) = 0$ e observamos que a solução é uma exponencial decrescente. Na direita da equação, o termo fonte representa a emissão de partículas por uma fonte externa $S(x)$, que é isotrópica e portanto, não depende da direção μ . E, o termo $\sigma_s \Phi(x)$ é o produto da média do fluxo angular nas direções por um coeficiente σ_s e representa as partículas que são espalhadas após as colisões. O espalhamento também é isotrópico, ou seja, uniforme nas direções μ . O espalhamento isotrópico na equação (2.1) elimina a dependência angular do coeficiente de espalhamento σ_s .

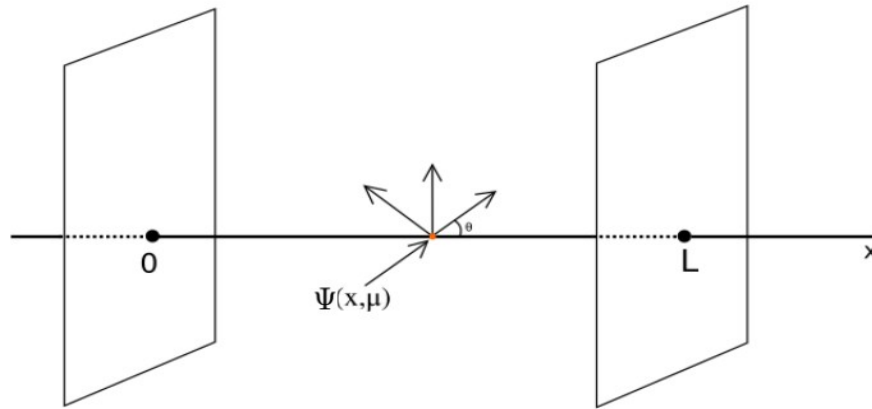


Figura 2.1 Ilustração da direção de propagação do fluxo angular onde $x \in (0, L)$ e $\mu = \cos \theta$.

A equação de transporte fica completa quando adicionamos as equações de contorno:

$$\Psi(0, \mu) = \rho_0(\mu)\Psi(0, -\mu) + f_0(\mu), \quad \mu > 0; \quad (2.3a)$$

$$\Psi(L, \mu) = \rho_L(\mu)\Psi(L, -\mu) + f_L(\mu), \quad \mu < 0, \quad (2.3b)$$

onde $0 \leq \rho_0 \leq 1$, $0 \leq \rho_L \leq 1$ são os coeficientes de reflexão e são adimensionais. No contexto de radiação os termos podem ser representados da forma $f_0(\mu) = (1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu)$ e $f_L(\mu) = (1 - \rho_L(\mu))B_L(\mu)$ onde $B_0(\mu)$ e $B_L(\mu)$ são funções integráveis que representam contribuições de fronteira. Aqui, as funções B são medidas em $cm^{-2}sr^{-1}s^{-1}$.

A figura 2.2 nos auxilia a interpretar a equação (2.3a): dada uma direção qualquer μ na fronteira esquerda, a fluxo angular é calculado em termos do fluxo incidente e uma contribuição da própria fronteira. A direção de reflexão μ

é o cosseno do ângulo θ , formado entre a direção de propagação e o eixo x , e a direção de incidência é formada pelo cosseno de $\theta' = \pi - \theta$, onde θ' é o ângulo de incidência. Assim, o fluxo angular refletido é composto pela parte refletida do fluxo angular incidente, isto é, $\rho_0 \Psi(0, -\mu)$, e por uma contribuição na fronteira dada por $(1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu)$. O termo $(1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu)$ representa uma emissão de partículas da fronteira que está relacionada com a absorção do feixe de incidência e, por isso, aparece o coeficiente $(1 - \rho_0(\mu))$. Observe que a interpretação da equação (2.3b) é análoga.

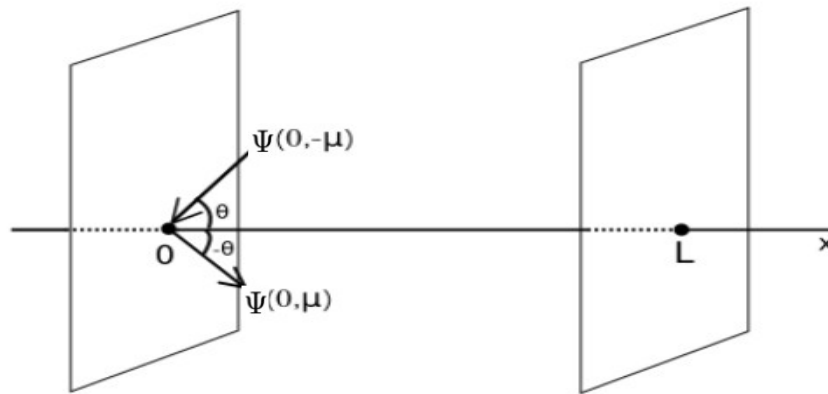


Figura 2.2 Ilustração da direção de propagação do fluxo angular onde x é um ponto da fronteira e $\mu = \cos \theta$.

2.2 Formulação Integral

Nesta primeira parte da nossa metodologia, escrevemos a formulação integral para o problema (2.1) - (2.3) e, a partir disso, desenvolvemos a

teoria de existência e unicidade. As estimativas dos operadores integrais envolvidos são calculadas com a norma C^α e a existência estabelecida nos espaços de Hölder [13, 9].

A fim de escrever a equação integral, partimos do seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \sigma_t \Psi(x, \mu) = Q(x), & 0 < x < L \text{ e } -1 \leq \mu \leq 1; \\ \Psi(0, \mu) = \rho_0(\mu) \Psi(0, -\mu) + (1 - \rho_0(\mu)) B_0(\mu), & \mu > 0; \\ \Psi(L, \mu) = \rho_L(\mu) \Psi(L, -\mu) + (1 - \rho_L(\mu)) B_L(\mu), & \mu < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ressaltamos que $Q(x)$ depende da solução, visto que:

$$Q(x) = \sigma_s \Phi(x) + S(x), \quad (2.5)$$

e, portanto, o que faremos na verdade é encontrar uma equação integral equivalente ao problema integro-diferencial (2.1)

O problema pode ser resolvido analiticamente usando o método *Ray tracing* (veja [33]). A equação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \frac{\sigma_t}{\mu} \Psi(x, \mu) = \frac{1}{\mu} Q(x),$$

pode ser reescrita mediante a inserção de um fator integrante como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{\sigma_t}{\mu} x} \Psi(x, \mu) \right) = e^{\frac{\sigma_t}{\mu} x} \frac{1}{\mu} Q(x). \quad (2.6)$$

Agora, integrando no intervalo $(0, x)$ obtemos a equação:

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{\frac{\sigma_t}{\mu} z} \Psi(z, \mu) \right) dz = \int_0^x e^{\frac{\sigma_t}{\mu} s} \frac{1}{\mu} Q(s) ds,$$

que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, pode ser escrita da forma:

$$e^{\frac{\sigma_t}{\mu}x}\Psi(x, \mu) - \Psi(0, \mu) = \int_0^x e^{\frac{\sigma_t}{\mu}s} \frac{1}{\mu} Q(s) ds.$$

Logo, obtemos a seguinte expressão para o fluxo angular:

$$\Psi(x, \mu) = \Psi(0, \mu)e^{-\frac{\sigma_t}{\mu}x} + \frac{1}{\mu} \int_0^x e^{\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} Q(s) ds. \quad (2.7)$$

A equação (2.6) também pode ser integrada no intervalo (x, L) :

$$\int_x^L \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{\frac{\sigma_t}{\mu}z} \Psi(z, \mu) \right) dz = \int_x^L e^{\frac{\sigma_t}{\mu}s} \frac{1}{\mu} Q(s) ds.$$

De maneira análoga, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos uma segunda expressão para o fluxo angular dada por:

$$\Psi(x, \mu) = \Psi(L, \mu)e^{\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}} - \frac{1}{\mu} \int_x^L e^{\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} Q(s) ds. \quad (2.8)$$

Observe que as equações (2.7) e (2.8), ambas são válidas para os valores de $\mu > 0$ como os de $\mu < 0$. Porém, os termos de fronteira $\Psi(0, \mu)$ e $\Psi(L, \mu)$ são dados pelas equações (2.3) apenas para $\mu > 0$ e $\mu < 0$, respectivamente. Assim, por questão de simplicidade das expressões e simetria, vamos considerar (2.7) para $\mu > 0$ e (2.8) para $\mu < 0$. Aplicando as condições de contorno nas equações (2.7) e (2.8), obtemos:

$$\Psi(0, \mu) = \rho_0(\mu)\Psi(L, -\mu)e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} + \frac{\rho_0(\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s)e^{-\frac{\sigma_t s}{\mu}} ds + (1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu), \quad \mu > 0,$$

$$\Psi(L, \mu) = \rho_L(\mu)\Psi(0, -\mu)e^{\frac{\sigma_t L}{\mu}} - \frac{\rho_L(\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s)e^{\frac{-\sigma_t(s-L)}{\mu}} ds + (1 - \rho_L(-\mu))B_L(-\mu), \quad \mu < 0.$$

Invertendo o sinal de μ na última equação, temos que essas equações formam um sistema linear em $\Psi(0, \mu)$ e $\Psi(L, -\mu)$, que assume a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\rho_0(\mu)e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} \\ -\rho_L(-\mu)e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(0, \mu) \\ \Psi(L, -\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_0(\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s)e^{\frac{-\sigma_t s}{\mu}} ds + (1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu) \\ \frac{\rho_L(-\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s)e^{\frac{\sigma_t(s-L)}{\mu}} ds + (1 - \rho_L(-\mu))B_L(-\mu) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

O sistema (2.9) tem uma única solução desde que a matriz não tenha determinante nulo. Dado que $\sigma_t > 0$, $L > 0$, $\mu > 0$, $0 \leq \rho_0 \leq 1$ e $0 \leq \rho_L \leq 1$, vale a desigualdade:

$$1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}} \geq 1 - e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}} > 0,$$

confirmando a unicidade da solução. Assim, sabendo que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\rho_0(\mu)e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} \\ -\rho_L(-\mu)e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_0(\mu)e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} \\ \rho_L(-\mu)e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} & 1 \end{bmatrix},$$

escrevemos a solução do sistema como:

$$\begin{bmatrix} \Psi(0, \mu) \\ \Psi(L, -\mu) \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_0(\mu)e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} \\ \rho_L(-\mu)e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\rho_0(\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s)e^{\frac{-\sigma_t s}{\mu}} ds + (1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu) \\ \frac{\rho_L(-\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s)e^{\frac{\sigma_t(s-L)}{\mu}} ds + (1 - \rho_L(-\mu))B_L(-\mu) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{\rho_0(\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s) e^{\frac{-\sigma_t s}{\mu}} ds + (1 - \rho_0(\mu)) B_0(\mu) + \frac{\rho_0(\mu) \rho_L(-\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s) e^{\frac{\sigma_t(s-2L)}{\mu}} ds + \rho_0(\mu) (1 - \rho_L(-\mu)) B_L(-\mu) e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} \\ 1 - \rho_0(\mu) \rho_L(-\mu) e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}} \\ \frac{\rho_L(-\mu) \rho_0(\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s) e^{\frac{-\sigma_t(L+s)}{\mu}} ds + \rho_L(-\mu) (1 - \rho_0(\mu)) B_0(\mu) e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} + \frac{\rho_L(-\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s) e^{\frac{\sigma_t(s-L)}{\mu}} ds + (1 - \rho_L(-\mu)) B_L(-\mu) \\ 1 - \rho_0(\mu) \rho_L(-\mu) e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}} \end{array} \right].$$

Então, a solução de (2.9) é dada por:

$$\Psi(0, \mu) = \frac{\frac{\rho_0(\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s) e^{\frac{-\sigma_t s}{\mu}} ds + \frac{\rho_0(\mu) \rho_L(-\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s) e^{\frac{\sigma_t(s-2L)}{\mu}} ds}{1 - \rho_0(\mu) \rho_L(-\mu) e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} + \frac{(1 - \rho_0(\mu)) B_0(\mu) + e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} \rho_0(\mu) (1 - \rho_L(-\mu)) B_L(-\mu)}{1 - \rho_0(\mu) \rho_L(-\mu) e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}}; \quad (2.10)$$

$$\Psi(L, -\mu) = \frac{\frac{\rho_0(\mu) \rho_L(-\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s) e^{\frac{-\sigma_t(L+s)}{\mu}} ds + \frac{\rho_L(-\mu)}{\mu} \int_0^L Q(s) e^{\frac{\sigma_t(s-L)}{\mu}} ds}{1 - \rho_0(\mu) \rho_L(-\mu) e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} + \frac{e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} \rho_L(-\mu) (1 - \rho_0(\mu)) B_0(\mu) + (1 - \rho_L(-\mu)) B_L(-\mu)}{1 - \rho_0(\mu) \rho_L(-\mu) e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}}. \quad (2.11)$$

As expressões (2.10) e (2.11) completam os termos desconhecidos nos fluxos angulares nas expressões (2.7) e (2.8). Assim, substituindo as expressões (2.10) e (2.11) nas equações (2.7) e (2.8), respectivamente, obtemos

as seguintes expressões que valem para $\mu > 0$:

$$\Psi(x, \mu) = \left(\frac{\frac{\rho_0(\mu)}{\mu} \int_0^L \left[e^{-\frac{\sigma_t s}{\mu}} + \rho_L(-\mu) e^{\frac{\sigma_t(s-2L)}{\mu}} \right] Q(s) ds}{1 - \rho_0(\mu) \rho_L(-\mu) e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + \frac{(1 - \rho_0(\mu)) B_0(\mu) + e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} \rho_0(\mu) (1 - \rho_L(-\mu)) B_L(-\mu)}{1 - \rho_0(\mu) \rho_L(-\mu) e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} \right) e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}} + \frac{1}{\mu} \int_0^x Q(s) e^{\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds; \quad (2.12)$$

$$\Psi(x, -\mu) = \left(\frac{\frac{\rho_L(-\mu)}{\mu} \int_0^L \left[\rho_0(\mu) e^{-\frac{\sigma_t(L+s)}{\mu}} + e^{\frac{\sigma_t(s-L)}{\mu}} \right] Q(s) ds}{1 - \rho_0(\mu) \rho_L(-\mu) e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + \frac{e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} \rho_L(-\mu) (1 - \rho_0(\mu)) B_0(\mu) + (1 - \rho_L(-\mu)) B_L(-\mu)}{1 - \rho_0(\mu) \rho_L(-\mu) e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} \right) e^{-\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}} + \frac{1}{\mu} \int_x^L Q(s) e^{-\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds. \quad (2.13)$$

Observe que, se $Q(x)$ fosse uma função efetivamente conhecida, o problema estaria completamente resolvido. A questão é que $Q(x) = \sigma_s \Phi(x) + S(x)$, onde $\Phi(x)$ depende da solução do problema. Ou seja, a solução do problema aparece dos dois lados da equação, o que significa que nós transformamos o problema integro-diferencial inicialmente proposto em outro problema que não envolve derivadas, mas somente integrais. Sabendo que a função Φ aparece do lado direito, vamos voltar a definição de fluxo escalar médio da equação (2.2) com o objetivo de obter a função Φ dos dois lados da equação. A definição de fluxo

escalar médio é dada por:

$$\Phi(x) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 [\Psi(x, \mu) + \Psi(x, -\mu)] d\mu, \quad (2.14)$$

Substituindo as expressões (2.12) e (2.13) na expressão do fluxo escalar médio da equação (2.14), obtemos a forma explícita da equação integral dada por:

$$\begin{aligned} \Phi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 & \left[\frac{\frac{\rho_0(\mu)}{\mu} \int_0^L \left[e^{\frac{-\sigma_t(s+x)}{\mu}} + \rho_L(-\mu) e^{\frac{-\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}} \right] Q(s) ds}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu) e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} + \frac{1}{\mu} \int_0^x Q(s) e^{\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds \right. \\ & + \frac{(1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu) e^{\frac{-\sigma_t x}{\mu}} + e^{\frac{-\sigma_t(L+x)}{\mu}} \rho_0(\mu)(1 - \rho_L(-\mu))B_L(-\mu)}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu) e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} \\ & + \frac{\frac{\rho_L(-\mu)}{\mu} \int_0^L \left[\rho_0(\mu) e^{\frac{-\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}} + e^{\frac{-\sigma_t(-s+2L-x)}{\mu}} \right] Q(s) ds}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu) e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} + \frac{1}{\mu} \int_x^L Q(s) e^{-\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds \\ & \left. + \frac{e^{\frac{-\sigma_t(2L-x)}{\mu}} \rho_L(-\mu)(1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu) + e^{\frac{-\sigma_t(L-x)}{\mu}} (1 - \rho_L(-\mu))B_L(-\mu)}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu) e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} \right] d\mu. \end{aligned} \quad (2.15)$$

A equação (2.15) pode ser sucintamente escrita em termos da fonte $Q(x)$ e do termo de fronteira $B(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu) d\mu = (L_g Q)(x) + (L_b B)(x), \quad (2.16)$$

O operador integral $L_g : L^\infty[0, L] \rightarrow C^\alpha[0, L]$ mapeia a função $Q(x)$ na função:

$$L_g Q(x) = \int_0^L k(x, s) Q(s) ds, \quad (2.17)$$

onde o núcleo $k(x, s)$ é expresso, da forma:

$$k(x, s) = \int_0^1 \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\rho_0(\mu)e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}} + \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}} + \rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + e^{-\frac{\sigma_t |s-x|}{\mu}} \right] d\mu. \quad (2.18)$$

O operador $L_b : (L^\infty[0, 1])^2 \rightarrow C^\alpha[0, L]$ mapeia a função vetorial $B(\mu) = [B_0(\mu), B_L(\mu)]$ na função:

$$(L_b B)(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\rho_L(-\mu)(1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu)e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} + (1 - \rho_L(-\mu))B_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(x-L)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\rho_0(\mu)(1 - \rho_L(-\mu))B_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} + (1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu)e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu. \quad (2.19)$$

Agora, substituímos a expressão (2.5) na representação integral (2.16) e obtemos a seguinte equação integral para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = L_g(\sigma_s \Phi(x) + S(x)) + (L_b B)(x), \quad (2.20)$$

ou seja:

$$(1 - \sigma_s L_g)\Phi(x) = (L_g S)(x) + (L_b B)(x). \quad (2.21)$$

Observe que, uma vez calculado o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ como solução da equação integral (2.21), o fluxo angular $\Psi(x, \mu)$ pode ser obtido diretamente das equações (2.12) e (2.13), visto que nesse caso a função $Q(x)$ passa a ser conhecida.

Agora que obtemos a formulação integral do problema, trabalharemos para resolver essa equação. A estratégia na próxima seção é mostrar que fluxo escalar médio é C^α sempre que a fonte estiver em L^∞ .

2.3 Teoria de existência para fontes limitadas

Iniciamos a seção com algumas definições úteis que podem ser encontradas em [13, 9].

Definição 2.1 *Definimos a norma de uma função $q(x)$ no espaço das funções contínuas $C^0[0, L]$ por*

$$\|q\|_{C^0} := \sup_{x \in [0, L]} |q(x)|$$

Definição 2.2 *Definimos a norma de uma função $q(x)$ no espaço das funções mensuráveis essencialmente limitadas $L^\infty[0, L]$ por*

$$\|q\|_{L^\infty} := \sup_{x \in [0, L]} |q(x)|$$

Definição 2.3 *Dado um α fixo, $0 < \alpha < 1$, definimos a norma que induz o espaço $C^\alpha[0, L]$ por:*

$$\|q\|_{C^\alpha} = C_1 [q]_{C^\alpha} + \|q\|_{C^0},$$

onde $C_1 > 0$ é definida convenientemente, $\|q\|_{C^0}$ é a norma de q em $C^0[0, L]$ e

$$[q]_{C^\alpha} = \sup_{0 \leq x < y \leq L} \frac{|q(y) - q(x)|}{|y - x|^\alpha},$$

é a seminorma em C^α

Definição 2.4 Definimos a norma de um operador $L : C^0[0, L] \rightarrow C^0[0, L]$ por

$$\|L\|_{C^0} = \sup \{ \|Lq\|_{C^0} : q \in C^0[0, L], \|q\|_{C^0} \leq 1 \}.$$

Definição 2.5 Definimos a norma de um operador $L : C^\alpha[0, L] \rightarrow C^\alpha[0, L]$, $0 < \alpha < 1$, por

$$\|L\|_{C^\alpha} = \sup \{ \|Lq\|_{C^\alpha} : q \in C^\alpha[0, L], \|q\|_{C^\alpha} \leq 1 \}.$$

O resultado do próximo teorema é uma adaptação do que está no artigo de Azevedo *et al.* (ver p.1117 [13]).

Teorema 2.1 O operador $L_g : L^\infty[0, L] \rightarrow L^\infty[0, L]$ é limitado e sua norma $\|L_g\|_{L^\infty}$ não excede $\frac{1}{\sigma_t}$. Em especial, o operador $L_g : C^0[0, L] \rightarrow L^\infty[0, L]$ é limitado com a mesma norma.

Demonstração: Para estimar a norma, supomos que $q(x)$ é uma função limitada em $[0, L]$. A fim de simplificar a notação, omitiremos a dependência de μ , em $\rho_0 = \rho_0(\mu)$ e $\rho_L = \rho_L(-\mu)$ e escrevemos $L_g q := \Psi_1 + \Psi_2$, onde:

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\rho_0}{\mu} \int_0^L q(s) \frac{e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}} + \rho_L e^{\frac{\sigma_t(s-2L-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} ds + \frac{1}{\mu} \int_0^x q(s) e^{\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds \right] d\mu;$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\rho_L}{\mu} \int_0^L q(s) \frac{\rho_0 e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}} + e^{-\frac{\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} ds + \frac{1}{\mu} \int_x^L q(s) e^{-\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds \right] d\mu.$$

Note que:

$$|\Psi_1| = \left| \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\rho_0}{\mu} \int_0^L q(s) \frac{e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}} + \rho_L e^{\frac{\sigma_t(s-2L-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} ds + \frac{1}{\mu} \int_0^x q(s) e^{\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds \right] d\mu \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\rho_0}{\mu} \int_0^L |q(s)| \frac{e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}} + \rho_L e^{\frac{\sigma_t(s-2L-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} ds + \frac{1}{\mu} \int_0^x |q(s)| e^{\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds \right] d\mu \\
&\leq \frac{\|q\|_{L^\infty}}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\mu} \int_0^L \frac{\rho_0 e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}} + \rho_0 \rho_L e^{\frac{\sigma_t(s-2L-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} ds + \frac{1}{\mu} \int_0^x e^{\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds \right] d\mu \\
&= \frac{\|q\|_{L^\infty}}{2} \int_0^1 \left[\frac{-\frac{\rho_0}{\sigma_t} e^{-\frac{\sigma_t(L+x)}{\mu}} + \frac{\rho_0}{\sigma_t} e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}} + \frac{\rho_0 \rho_L}{\sigma_t} e^{\frac{\sigma_t(-L-x)}{\mu}} - \frac{\rho_0 \rho_L}{\sigma_t} e^{\frac{\sigma_t(-2L-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + \frac{1}{\sigma_t} - \frac{1}{\sigma_t} e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}} \right] d\mu \\
&= \frac{\|q\|_{L^\infty}}{2\sigma_t} \int_0^1 \left[\rho_0 \frac{-e^{-\frac{\sigma_t(L+x)}{\mu}} + e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + \rho_0 \rho_L \frac{e^{-\frac{\sigma_t(L+x)}{\mu}} - e^{\frac{\sigma_t(-2L-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + 1 - e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}} \right] d\mu \\
&= \frac{\|q\|_{L^\infty}}{2\sigma_t} \left(\int_0^1 1 d\mu + \int_0^1 \left[\frac{-\rho_0 e^{-\frac{\sigma_t(L+x)}{\mu}} + \rho_0 e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}} + \rho_0 \rho_L e^{-\frac{\sigma_t(L+x)}{\mu}} - \rho_0 \rho_L e^{\frac{\sigma_t(-2L-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}) e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} \right] d\mu \right) \\
&= \frac{\|q\|_{L^\infty}}{2\sigma_t} \left(1 + \int_0^1 \frac{\rho_0(-1 + \rho_L) e^{-\frac{\sigma_t(L+x)}{\mu}} + (-1 + \rho_0) e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\Psi_1| \leq \frac{\|q\|_{L^\infty}}{2\sigma_t} (1 - f_1),$$

onde,

$$f_1 := \int_0^1 \frac{\rho_0(1 - \rho_L) e^{-\frac{\sigma_t(L+x)}{\mu}} + (1 - \rho_0) e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu.$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_2| &\leq \frac{\|q\|_{L^\infty}}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\mu} \int_0^L \frac{\rho_0 \rho_L e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}} + \rho_L e^{-\frac{\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} ds + \frac{1}{\mu} \int_x^L e^{-\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds \right] d\mu \\
&= \frac{\|q\|_{L^\infty}}{2} \int_0^1 \left[\frac{-\frac{\rho_0 \rho_L}{\sigma_t} e^{-\frac{\sigma_t(3L-x)}{\mu}} + \frac{\rho_0 \rho_L}{\sigma_t} e^{-\frac{\sigma_t(2L-x)}{\mu}} + \frac{\rho_L}{\sigma_t} e^{\frac{\sigma_t(x-L)}{\mu}} - \frac{\rho_L}{\sigma_t} e^{-\frac{\sigma_t(2L-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + \frac{1}{\sigma_t} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sigma_t} e^{\frac{\sigma_t(x-L)}{\mu}} \right] d\mu \\
&= \frac{\|q\|_{L^\infty}}{2\sigma_t} \int_0^1 \left[\rho_0 \rho_L \frac{-e^{-\frac{\sigma_t(3L-x)}{\mu}} + e^{-\frac{\sigma_t(2L-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + \rho_L \frac{e^{\frac{\sigma_t(x-L)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(2L-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + 1 - e^{\frac{\sigma_t(x-L)}{\mu}} \right] d\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|q\|_{L^\infty}}{2\sigma_t} \left(\int_0^1 1 d\mu + \int_0^1 \left[\frac{-\rho_0 \rho_L e^{-\frac{\sigma_t(3L-x)}{\mu}} + \rho_0 \rho_L e^{-\frac{\sigma_t(2L-x)}{\mu}} + \rho_L e^{\frac{\sigma_t(x-L)}{\mu}} - \rho_L e^{-\frac{\sigma_t(2L-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}) e^{\frac{\sigma_t(x-L)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} \right] d\mu \right) \\
&= \frac{\|q\|_{L^\infty}}{2\sigma_t} \left(1 + \int_0^1 \frac{\rho_L(\rho_0 - 1) e^{-\frac{\sigma_t(2L-x)}{\mu}} + (\rho_L - 1) e^{\frac{\sigma_t(x-L)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\Psi_2| \leq \frac{\|q\|_{L^\infty}}{2\sigma_t} (1 - f_2),$$

onde,

$$f_2 := \int_0^1 \frac{\rho_L(1 - \rho_0) e^{-\frac{\sigma_t(2L-x)}{\mu}} + (1 - \rho_L) e^{-\frac{\sigma_t(-x+L)}{\mu}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu.$$

Assim:

$$|L_g q| \leq |\Psi_1| + |\Psi_2| \leq \frac{\|q\|_{L^\infty}}{\sigma_t} \left(1 - \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \right).$$

Portanto:

$$\|L_g\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sigma_t} \left(1 - \frac{1}{2} \inf_{x \in [0, L]} (f_1 + f_2) \right).$$

Observe que do fato de $0 \leq \rho_0 \leq 1$ e $0 \leq \rho_L \leq 1$ temos que $f_1 \geq 0$ e $f_2 \geq 0$. Assim, $\inf_{x \in [0, L]} (f_1 + f_2) \geq 0$. ■

O próximo teorema que será enunciado e demonstrado é uma das contribuições deste trabalho.

Teorema 2.2 *A imagem do operador $L_g : L^\infty[0, L] \rightarrow L^\infty[0, L]$ está contida em $C^\alpha[0, L]$ para todo $\alpha \in (0, 1)$. Como consequência do Teorema 2.1, o operador*

$L_g : C^0[0, L] \rightarrow C^0[0, L]$ é limitado e sua norma operacional entre esses dois espaços ($\|L_g\|_{C^0}$) não excede $\frac{1}{\sigma_t}$.

Demonstração: Lembramos que a representação operacional do operador L_g é dado por:

$$L_g q(x) = \int_0^L k(x, s)q(s)ds = \int_0^L \left[\int_0^1 \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\rho_0(\mu)e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}} + \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{\sigma_t(s-2L-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}} + \rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + e^{-\frac{\sigma_t|s-x|}{\mu}} \right) d\mu q(s)ds \right].$$

Para simplificar a notação consideramos:

$$k(x, s) = \sum_{j=1}^5 k_j(x, s) \text{ e } f_j(x) = \int_0^L k_j(x, s)q(s)ds,$$

onde $\int_0^L k(x, s)q(s)ds = \sum_{j=1}^5 \int_0^L k_j(x, s)q(s)ds$ e

$$k_1(x, s) = \int_0^1 \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_0(\mu)e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu; \quad (2.22)$$

$$k_2(x, s) = \int_0^1 \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu; \quad (2.23)$$

$$k_3(x, s) = \int_0^1 \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu; \quad (2.24)$$

$$k_4(x, s) = \int_0^1 \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu; \quad (2.25)$$

$$k_5(x, s) = \int_0^1 \frac{1}{2\mu} e^{-\frac{\sigma_t|s-x|}{\mu}} d\mu. \quad (2.26)$$

Nos próximos cinco lemas, nós estabeleceremos estimativas da forma

$$|f_j(y) - f_j(x)| \leq C |x - y|^\alpha, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5,$$

onde $C = C(\alpha, L)$ ■

Lema 2.1 Para a função definida como

$$f_1(x) = \int_0^L k_1(x, s)q(s)ds = \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_0(\mu)e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu \right) q(s)ds,$$

e q limitada, vale a seguinte estimativa

$$|f_1(y) - f_1(x)| \leq C(\alpha)|y - x|^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1).$$

Demonstração:

Suponha, sem perda de generalidade, que $y > x$ e $M = \|q\|_{L^\infty}$. Note que, para $0 < \mu < 1$ temos:

$$\frac{\rho_0(\mu)}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} \leq \frac{1}{(1 - e^{-2\sigma_t L})}.$$

e $|q(s)| \leq M$, obtemos:

$$\begin{aligned} |f_1(y) - f_1(x)| &= \left| \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_0(\mu)e^{-\frac{\sigma_t(s+y)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu \right) q(s)ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_0(\mu)e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu \right) q(s)ds \right| \\ &= \left| \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{\rho_0(\mu)}{2(1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{-2\sigma_t L}{\mu}})} \frac{e^{-\frac{\sigma_t(s+y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}}}{\mu} d\mu \right) q(s)ds \right| \\ &\leq \int_0^L \int_0^1 \frac{\rho_0(\mu)}{2(1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{-2\sigma_t L}{\mu}})} \left| \frac{e^{-\frac{\sigma_t(s+y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}}}{\mu} \right| d\mu |q(s)| ds \\ &\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \int_0^L \int_0^1 \left| \frac{e^{-\frac{\sigma_t(s+y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}}}{\mu} \right| d\mu ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \int_0^L \int_0^1 \left(\frac{e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(s+y)}{\mu}}}{\mu} \right) d\mu ds \\
&= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \left[\int_0^L \left(\int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}}}{\mu} d\mu \right) ds - \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma_t(s+y)}{\mu}}}{\mu} d\mu \right) ds \right] \\
&= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \left[\int_0^L [-\ln(\sigma_t(s+x)) + \tau(\sigma_t(s+x))] ds - \int_0^L [-\ln(\sigma_t(s+y)) \right. \\
&\quad \left. + \tau(\sigma_t(s+y))] ds \right] \\
&= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \left[\int_0^L [-\ln(\sigma_t(s+x)) + \ln(\sigma_t(s+y))] ds + \int_0^L [\tau(\sigma_t(s+x)) \right. \\
&\quad \left. - \tau(\sigma_t(s+y))] ds \right], \tag{2.27}
\end{aligned}$$

onde τ vem da decomposição da exponencial integral $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{\mu}}}{\mu} d\mu = E_1(x)$ (veja maiores detalhes no Lema A.1 do Apêndice). Agora, estimaremos a primeira integral do lado direito da expressão (2.27):

$$\begin{aligned}
\int_0^L [-\ln(\sigma_t(s+x)) + \ln(\sigma_t(s+y))] ds &= \int_0^L \ln(\sigma_t(s+y)) ds - \int_0^L \ln(\sigma_t(s+x)) ds \\
&= x \ln(x) - y \ln(y) + (L+y) \ln(L+y) - (L+x) \ln(L+x) \\
&= \varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(L+y) - \varphi(L+x) \\
&\leq c_1 |x - y|^\alpha + c_2 |L+y - (L+x)|^\alpha \\
&\leq c_1 |y - x|^\alpha + c_2 |y - x|^\alpha \\
&= E |y - x|^\alpha, \tag{2.28}
\end{aligned}$$

onde $E = c_1 + c_2$ e definimos a função $\varphi(x) = x \ln(x)$ se $x > 0$ e nula se $x = 0$. (veja maiores detalhes no Lema A.2 do Apêndice). Continuando na expressão (2.27), estimaremos a segunda integral. Usando o fato de que $\tau(x)$ é Lipchitz,

temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^L |\tau(\sigma_t(s+x)) - \tau(\sigma_t(s+y))| ds &\leq \int_0^L C |\sigma_t(s+y) - \sigma_t(s+x)| ds \\
&= \int_0^L \sigma_t C |(s+x) - (s+y)| ds \\
&= \sigma_t C |x-y| \int_0^L 1 ds \\
&= \sigma_t C |x-y| L \\
&= F |x-y|, \tag{2.29}
\end{aligned}$$

onde $F = \sigma_t C L$. Para concluir a demonstração do Lema 2.1, substituímos as estimativas das equações (2.28) e (2.29), em (2.27), assim:

$$\begin{aligned}
|f_1(y) - f_1(x)| &\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E|y-x|^\alpha + F|y-x|) \\
&= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E|y-x|^\alpha + F|y-x|^\alpha |y-x|^{1-\alpha}) \\
&\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E|y-x|^\alpha + F|y-x|^\alpha L^{1-\alpha}) \\
&= C(\alpha)|y-x|^\alpha,
\end{aligned}$$

onde $C(\alpha) = \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E + FL^{1-\alpha})$. ■

Lema 2.2 *Para a função definida como*

$$f_2(x) = \int_0^L k_2(x, s)q(s)ds = \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu \right) q(s)ds,$$

e q limitada, vale a seguinte estimativa

$$|f_2(y) - f_2(x)| \leq C(\alpha)|y-x|^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1).$$

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $y > x$, $M = \|q\|_{L^\infty}$ e $|q(s)| \leq M$, assim:

$$\begin{aligned}
& |f_2(y) - f_2(x)| \\
&= \left| \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)}{2(1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}})} \frac{e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}}}{\mu} d\mu \right) q(s) ds \right| \\
&\leq \int_0^L \int_0^1 \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)}{2(1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}})} \left| \frac{e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}}}{\mu} \right| d\mu |q(s)| ds \\
&\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \int_0^L \int_0^1 \left| \frac{e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}}}{\mu} \right| d\mu ds \\
&\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \int_0^L \int_0^1 \left(\frac{e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+y)}{\mu}}}{\mu} \right) d\mu ds \\
&= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \left[\int_0^L \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}}}{\mu} d\mu ds - \int_0^L \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+y)}{\mu}}}{\mu} d\mu ds \right] \\
&= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \left[\int_0^L [\ln(\sigma_t(-s + 2L + y)) - \ln(\sigma_t(-s + 2L + x))] ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^L [\tau(\sigma_t(-s + 2L + x)) - \tau(\sigma_t(-s + 2L + y))] ds \right], \tag{2.30}
\end{aligned}$$

onde τ vem da decomposição da exponencial integral (veja maiores detalhes no Lema A.1 do Apêndice). Agora, estimaremos a primeira integral do lado direito da expressão (2.30), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L [\ln(\sigma_t(-s + 2L + y)) - \ln(\sigma_t(-s + 2L + x))] ds \\
&= \int_0^L \ln(\sigma_t(-s + 2L + y)) ds - \int_0^L \ln(\sigma_t(-s + 2L + x)) ds \\
&= (L + x) \ln(L + x) - (L + y) \ln(L + y) + (2L + y) \ln(2L + y) - (2L + x) \ln(2L + x) \\
&= \varphi(L + x) - \varphi(L + y) + \varphi(2L + y) - \varphi(2L + x) \\
&\leq c_1 |(L + x) - (L + y)|^\alpha + c_2 |(2L + y) - (2L + x)|^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_1|x - y|^\alpha + c_2|y - x|^\alpha \\
&= E|y - x|^\alpha,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

onde $E = c_1 + c_2$ e a função $\varphi(x)$ definida como no Lema 2.1. Continuando na expressão (2.30), estimaremos a segunda integral. Usando o fato de que $\tau(x)$ é Lipchitz, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^L |\tau(\sigma_t(-s + 2L + x)) - \tau(\sigma_t(-s + 2L + y))| ds \\
&\leq \int_0^L C |(\sigma_t(-s + 2L + x)) - (\sigma_t(-s + 2L + y))| ds \\
&= \sigma_t C \int_0^L |(-s + 2L + y) - (-s + 2L + x)| ds \\
&= \sigma_t C |x - y| \int_0^L 1 ds \\
&= \sigma_t C |x - y| L \\
&= F |x - y|,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

onde $F = \sigma_t CL$. Portanto, substituímos as estimativas das equações (2.31) e (2.32), em (2.30), obtemos:

$$\begin{aligned}
|f_2(y) - f_2(x)| &\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E|y - x|^\alpha + F|y - x|) \\
&= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E|y - x|^\alpha + F|y - x|^\alpha |y - x|^{1-\alpha}) \\
&\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E|y - x|^\alpha + F|y - x|^\alpha L^{1-\alpha}) \\
&= C(\alpha)|y - x|^\alpha,
\end{aligned}$$

onde $C(\alpha) = \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E + FL^{1-\alpha})$. ■

Lema 2.3 Para a função definida como

$$f_3(x) = \int_0^L k_3(x, s)q(s)ds = \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu \right) q(s)ds,$$

e q limitada, vale a seguinte estimativa

$$|f_3(y) - f_3(x)| \leq C(\alpha)|y - x|^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1).$$

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $y > x$, $M = \|q\|_{L^\infty}$ e $|q(s)| \leq M$, temos:

$$\begin{aligned} & |f_3(y) - f_3(x)| \\ &= \left| \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)}{2(1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}})} \frac{e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}}}{\mu} d\mu \right) q(s)ds \right| \\ &\leq \int_0^L \int_0^1 \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)}{2(1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}})} \left| \frac{e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}}}{\mu} \right| d\mu |q(s)| ds \\ &\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \int_0^L \int_0^1 \left| \frac{e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}}}{\mu} \right| d\mu ds \\ &\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \int_0^L \int_0^1 \left(\frac{e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}}}{\mu} \right) d\mu ds \\ &= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \left[\int_0^L \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-y)}{\mu}}}{\mu} d\mu ds - \int_0^L \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}}}{\mu} d\mu ds \right] \\ &= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \left[\int_0^L [-\ln(\sigma_t(2L + s - y)) + \ln(\sigma_t(2L + s - x))] ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^L [\tau(\sigma_t(2L + s - y)) - \tau(\sigma_t(2L + s - x))] ds \right], \tag{2.33} \end{aligned}$$

onde τ vem da decomposição da exponencial integral descrita no Lema 2.1. Novamente estimaremos cada uma das integrais da expressão (2.33), da primeira

integral obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L [-\ln(\sigma_t(2L + s - y)) + \ln(\sigma_t(2L + s - x))] ds \\
&= -\int_0^L \ln(\sigma_t(2L + s - y)) ds + \int_0^L \ln(\sigma_t(2L + s - x)) ds \\
&= -(3L - y) \ln(3L - y) + (3L - x) \ln(3L - x) - (2L - x) \ln(2L - x) \\
&\quad + (2L - y) \ln(2L - y) \\
&= -\varphi(3L - y) + \varphi(3L - x) - \varphi(2L - x) + \varphi(2L - y) \\
&\leq c_1 |(3L - x) - (3L - y)|^\alpha + c_2 |(2L - y) - (2L - x)|^\alpha \\
&\leq c_1 |y - x|^\alpha + c_2 |x - y|^\alpha \\
&= E |y - x|^\alpha, \tag{2.34}
\end{aligned}$$

onde $E = c_1 + c_2$ e a função $\varphi(x)$ definida no Lema 2.1. Agora, estimaremos a segunda integral da expressão (2.33), pelo fato de que $\tau(x)$ é Lipchitz, temos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L |\tau(\sigma_t(2L + s - y)) - \tau(\sigma_t(2L + s - x))| ds \\
&\leq \int_0^L C |(\sigma_t(2L + s - y)) - (\sigma_t(2L + s - x))| ds \\
&= \sigma_t C \int_0^L |(2L + s - y) - (2L + s - x)| ds \\
&= \sigma_t C |x - y| \int_0^L 1 ds \\
&= \sigma_t C |x - y| L \\
&= F |x - y|, \tag{2.35}
\end{aligned}$$

onde $F = \sigma_t C L$. Substituímos as estimativas das equações (2.34) e (2.35) em (2.33), obtemos:

$$|f_3(y) - f_3(x)| \leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E |y - x|^\alpha + F |x - y|)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E|y - x|^\alpha + F|x - y|^\alpha |x - y|^{1-\alpha}) \\
&\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E|y - x|^\alpha + F|x - y|^\alpha L^{1-\alpha}) \\
&= C(\alpha)|y - x|^\alpha,
\end{aligned}$$

onde $C(\alpha) = \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E + FL^{1-\alpha})$, concluindo assim a demonstração do Lema. ■

Lema 2.4 Para a função definida como

$$f_4(x) = \int_0^L k_4(x, s)q(s)ds = \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_L(-\mu)e^{\frac{-\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu \right) q(s)ds,$$

e q limitada, vale a seguinte estimativa

$$|f_4(y) - f_4(x)| \leq C(\alpha)|y - x|^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1).$$

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $y > x$ e $M = \|q\|_{L^\infty}$, temos:

$$\begin{aligned}
&|f_4(y) - f_4(x)| \\
&= \left| \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)}{2(1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}})} \frac{e^{\frac{-\sigma_t(2L-s-y)}{\mu}} - e^{\frac{-\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{\mu} d\mu \right) q(s)ds \right| \\
&\leq \int_0^L \int_0^1 \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)}{2(1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}})} \left| \frac{e^{\frac{-\sigma_t(2L-s-y)}{\mu}} - e^{\frac{-\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{\mu} \right| d\mu |q(s)| ds \\
&\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \int_0^L \int_0^1 \left| \frac{e^{\frac{-\sigma_t(2L-s-y)}{\mu}} - e^{\frac{-\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{\mu} \right| d\mu ds \\
&\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \int_0^L \int_0^1 \left(\frac{e^{\frac{-\sigma_t(2L-s-y)}{\mu}} - e^{\frac{-\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{\mu} \right) d\mu ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \left[\int_0^L \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma_t(2L-s-y)}{\mu}}}{\mu} d\mu ds - \int_0^L \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{\mu} d\mu ds \right] \\
&= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \left[\int_0^L [-\ln(\sigma_t(2L - s - y)) + \ln(\sigma_t(2L - s - x))] ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^L [\tau(\sigma_t(2L - s - y)) - \tau(\sigma_t(2L - s - x))] ds \right], \tag{2.36}
\end{aligned}$$

onde τ vem da decomposição da exponencial integral descrita no Lema 2.1. Agora, estimaremos cada uma das integrais da expressão (2.36), da primeira integral obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^L [-\ln(\sigma_t(2L - s - y)) + \ln(\sigma_t(2L - s - x))] ds \\
&= - \int_0^L \ln(\sigma_t(2L - s - y)) ds + \int_0^L \ln(\sigma_t(2L - s - x)) ds \tag{2.37} \\
&= (L - y) \ln(L - y) - (L - x) \ln(L - x) + (2L - x) \ln(2L - x) \\
&\quad - (2L - y) \ln(2L - y) \\
&= \varphi(L - y) - \varphi(L - x) + \varphi(2L - x) - \varphi(2L - y) \\
&\leq c_1 |(L - y) - (L - x)|^\alpha + c_2 |(2L - x) - (2L - y)|^\alpha \\
&\leq c_1 |x - y|^\alpha + c_2 |x - y|^\alpha \\
&= E |y - x|^\alpha, \tag{2.38}
\end{aligned}$$

onde $E = c_1 + c_2$ e a função $\varphi(x)$ definida no Lema 2.1. Agora, estimaremos a segunda integral da expressão (2.36), usando o fato de que $\tau(x)$ é Lipchitz, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^L |\tau(\sigma_t(2L - s - y)) - \tau(\sigma_t(2L - s - x))| ds \\
&\leq \int_0^L C |(\sigma_t(2L - s - y)) - (\sigma_t(2L - s - x))| ds \\
&= \sigma_t C \int_0^L |(2L - s - y) - (2L - s - x)| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_t C |x - y| \int_0^L 1 ds \\
&= \sigma_t C |x - y| L \\
&= F |x - y|, \tag{2.39}
\end{aligned}$$

onde $F = \sigma_t C L$. Substituímos as estimativas das equações (2.37) e (2.39) em (2.36), obtemos:

$$\begin{aligned}
|f_4(y) - f_4(x)| &\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E|y - x|^\alpha + F|x - y|) \\
&= \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E|y - x|^\alpha + F|x - y|^\alpha |x - y|^{1-\alpha}) \\
&\leq \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E|y - x|^\alpha + F|x - y|^\alpha L^{1-\alpha}) \\
&= C(\alpha)|y - x|^\alpha,
\end{aligned}$$

onde $C(\alpha) = \frac{M}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} (E + FL^{1-\alpha})$. ■

Lema 2.5 *Para a função definida como*

$$f_5(x) = \int_0^L k_5(x, s)q(s)ds = \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{1}{2\mu} e^{\frac{-\sigma_t |s-x|}{\mu}} d\mu \right) q(s)ds,$$

e q limitada, vale a seguinte estimativa

$$|f_5(y) - f_5(x)| \leq C(\alpha)|y - x|^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1).$$

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $y > x$ e $M = \|q\|_{L^\infty}$, temos:

$$\begin{aligned}
|f_5(y) - f_5(x)| &= \left| \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{1}{2\mu} e^{\frac{-\sigma_t |s-y|}{\mu}} d\mu \right) q(s)ds - \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{1}{2\mu} e^{\frac{-\sigma_t |s-x|}{\mu}} d\mu \right) q(s)ds \right| \\
&= \left| \int_0^L \left(\int_0^1 \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{-\sigma_t |s-y|}{\mu}} - e^{\frac{-\sigma_t |s-x|}{\mu}}}{\mu} d\mu \right) q(s)ds \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^L \int_0^1 \frac{1}{2} \left| \frac{e^{-\frac{\sigma_t |s-y|}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t |s-x|}{\mu}}}{\mu} \right| d\mu |q(s)| ds \\
&\leq \frac{M}{2} \int_0^L \int_0^1 \left| \frac{e^{-\frac{\sigma_t |s-y|}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t |s-x|}{\mu}}}{\mu} \right| d\mu ds \\
&= \frac{M}{2} \left[\int_0^x \int_0^1 \left(\frac{e^{-\frac{\sigma_t(x-s)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(y-s)}{\mu}}}{\mu} \right) d\mu ds + \int_x^{\frac{x+y}{2}} \int_0^1 \left(\frac{e^{-\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(y-s)}{\mu}}}{\mu} \right) d\mu ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{x+y}{2}}^y \int_0^1 \left(\frac{e^{-\frac{\sigma_t(y-s)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}}}{\mu} \right) d\mu ds + \int_y^L \int_0^1 \left(\frac{e^{-\frac{\sigma_t(s-y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}}}{\mu} \right) d\mu ds \right] \\
&= \frac{M}{2} \left[\int_0^x [-\ln(\sigma_t(x-s)) + \tau(\sigma_t(x-s))] ds - \int_0^x [-\ln(\sigma_t(y-s)) + \tau(\sigma_t(y-s))] ds \right. \\
&\quad + \int_x^{\frac{x+y}{2}} [-\ln(\sigma_t(s-x)) + \tau(\sigma_t(s-x))] ds - \int_x^{\frac{x+y}{2}} [-\ln(\sigma_t(y-s)) + \tau(\sigma_t(y-s))] ds \\
&\quad + \int_{\frac{x+y}{2}}^y [-\ln(\sigma_t(y-s)) + \tau(\sigma_t(y-s))] ds - \int_{\frac{x+y}{2}}^y [-\ln(\sigma_t(s-x)) + \tau(\sigma_t(s-x))] ds \\
&\quad \left. + \int_y^L [-\ln(\sigma_t(s-y)) + \tau(\sigma_t(s-y))] ds - \int_y^L [-\ln(\sigma_t(s-x)) + \tau(\sigma_t(s-x))] ds \right] \\
&= \frac{M}{2} \left[\int_0^x [-\ln(\sigma_t(x-s)) + \ln(\sigma_t(y-s))] ds + \int_0^x [\tau(\sigma_t(x-s)) - \tau(\sigma_t(y-s))] ds \right. \\
&\quad + \int_x^{\frac{x+y}{2}} [-\ln(\sigma_t(s-x)) + \ln(\sigma_t(y-s))] ds + \int_x^{\frac{x+y}{2}} [\tau(\sigma_t(s-x)) - \tau(\sigma_t(y-s))] ds \\
&\quad + \int_{\frac{x+y}{2}}^y [-\ln(\sigma_t(y-s)) + \ln(\sigma_t(s-x))] ds + \int_{\frac{x+y}{2}}^y [\tau(\sigma_t(y-s)) - \tau(\sigma_t(s-x))] ds \\
&\quad \left. + \int_y^L [-\ln(\sigma_t(s-y)) + \ln(\sigma_t(s-x))] ds + \int_y^L [\tau(\sigma_t(s-y)) - \tau(\sigma_t(s-x))] ds \right], \\
\end{aligned} \tag{2.40}$$

onde τ vem da decomposição da exponencial integral descrita no Lema 2.1. Agora, estimaremos as integrais da expressão (2.40), primeiramente estimaremos as integrais quem envolvem a função \ln , assim:

$$\int_0^x [-\ln(\sigma_t(x-s)) + \ln(\sigma_t(y-s))] ds + \int_x^{\frac{x+y}{2}} [-\ln(\sigma_t(s-x)) + \ln(\sigma_t(y-s))] ds$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{x+y}{2}}^y [-\ln(\sigma_t(y-s)) + \ln(\sigma_t(s-x))] ds + \int_y^L [-\ln(\sigma_t(s-y)) + \ln(\sigma_t(s-x))] ds \\
& = y \ln(y) - x \ln(x) - 2(y-x) \ln(y-x) + 2(y-x) \ln(2) + (L-x) \ln(L-x) \\
& \quad - (L-y) \ln(L-y) \\
& = \varphi(y) - \varphi(x) - 2(y-x) \ln(y-x) + 2 \ln(2)(y-x) + \varphi(L-x) - \varphi(L-y) \\
& \leq \varphi(y) - \varphi(x) - 4\varphi\left(\frac{y-x}{2}\right) + \varphi(L-x) - \varphi(L-y) \\
& \leq c_1 |y-x|^\alpha + c_2 |y-x|^\alpha + c_3 |L-x - (L-y)|^\alpha \\
& = E |y-x|^\alpha, \tag{2.41}
\end{aligned}$$

onde $E = c_1 + c_2 + c_3$ e a função $\varphi(x)$ definida no Lema 2.1. Agora, estimaremos a as integrais da expressão (2.36) que envolvem a função $\tau(x)$. Do fato de que $\tau(x)$ é Lipchitz, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^x [\tau(\sigma_t(x-s)) - \tau(\sigma_t(y-s))] ds + \int_x^{\frac{x+y}{2}} [\tau(\sigma_t(s-x)) - \tau(\sigma_t(y-s))] ds \\
& \quad + \int_{\frac{x+y}{2}}^y [\tau(\sigma_t(y-s)) - \tau(\sigma_t(s-x))] ds + \int_y^L [\tau(\sigma_t(s-y)) - \tau(\sigma_t(s-x))] ds \\
& \leq \int_0^x c_1 |\sigma_t(x-s) - \sigma_t(y-s)| ds + \int_x^{\frac{x+y}{2}} c_2 |\sigma_t(s-x) - \sigma_t(y-s)| ds \\
& \quad + \int_{\frac{x+y}{2}}^y c_3 |\sigma_t(y-s) - \sigma_t(s-x)| ds + \int_y^L c_4 |\sigma_t(s-y) - \sigma_t(s-x)| ds \\
& = \int_0^x \sigma_t c_1 |x-y| ds + \int_x^{\frac{x+y}{2}} \sigma_t c_2 |2s-x-y| ds + \int_{\frac{x+y}{2}}^y \sigma_t c_3 |y-2s+x| ds \\
& \quad + \int_y^L \sigma_t c_4 |-y+x| ds \\
& = \sigma_t c_1 |x-y| \int_0^x ds + \sigma_t c_2 \int_x^{\frac{x+y}{2}} (-2s+x+y) ds + \sigma_t c_3 \int_{\frac{x+y}{2}}^y (-y+2s-x) ds \\
& \quad + \sigma_t c_4 |-y+x| \int_y^L ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_t c_1 |x - y| x + \sigma_t c_2 \frac{(x - y)^2}{4} + \sigma_t c_3 \frac{(x - y)^2}{4} + \sigma_t c_4 |-y + x| (L - y) \\
&\leq \sigma_t \left(c_5 |x - y|^2 + \frac{c_2}{4} |x - y|^2 + \frac{c_3}{4} |x - y|^2 + c_4 |x - y| L \right) \\
&= \sigma_t \left(c_5 |x - y|^\alpha |x - y|^{2-\alpha} + \frac{c_2}{4} |x - y|^\alpha |x - y|^{2-\alpha} + \frac{c_3}{4} |x - y|^\alpha |x - y|^{2-\alpha} \right. \\
&\quad \left. + c_4 |x - y|^\alpha |x - y|^{1-\alpha} L \right) \\
&\leq \sigma_t \left(c_5 |x - y|^\alpha L^{2-\alpha} + \frac{c_2}{4} |x - y|^\alpha L^{2-\alpha} + \frac{c_3}{4} |x - y|^\alpha L^{2-\alpha} + c_4 |x - y|^\alpha L^{2-\alpha} \right) \\
&= F |x - y|^\alpha L^{2-\alpha}, \tag{2.42}
\end{aligned}$$

onde $F = \sigma_t \left(c_5 + \frac{c_2}{4} + \frac{c_3}{4} + c_4 \right)$. Para finalizar a demonstração do Lema, substituímos as estimativas das equações (2.41) e (2.42) em (2.40), e obtemos:

$$\begin{aligned}
|f_5(y) - f_5(x)| &\leq \frac{M}{2} (E|y - x|^\alpha + F|x - y|^\alpha L^{2-\alpha}) \\
&= C(\alpha)|y - x|^\alpha,
\end{aligned}$$

onde $C(\alpha) = \frac{M}{2} (E + FL^{2-\alpha})$. ■

Teorema 2.3 *A função $(L_b B)(x)$ é Hölder contínua em $[0, L]$ quando $B_0(\mu)$ e $B_L(-\mu)$ são funções $L^\infty[0, 1]$.*

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $y > x$, então temos que:

$$\begin{aligned}
|L_b B(y) - L_b B(x)| &\leq \\
&\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\rho_L(1 - \rho_0)|B_0|e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} + (1 - \rho_L)|B_L|}{1 - \rho_0 \rho_L e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} \left| e^{\frac{-\sigma_t(L-y)}{\mu}} - e^{\frac{-\sigma_t(L-x)}{\mu}} \right| d\mu \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\rho_0(1 - \rho_L)|B_L|e^{\frac{-\sigma_t L}{\mu}} + (1 - \rho_0)|B_0|}{1 - \rho_0 \rho_L e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} \left| e^{\frac{-\sigma_t y}{\mu}} - e^{\frac{-\sigma_t x}{\mu}} \right| d\mu.
\end{aligned}$$

Como $0 \leq \rho_0 \leq 1$, $0 \leq \rho_L \leq 1$ e $0 \leq \mu \leq 1$, obtemos:

$$|L_b B(y) - L_b B(x)| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{|B_0| + |B_L|}{1 - e^{-2\sigma_t L}} \left| e^{\frac{-\sigma_t(L-y)}{\mu}} - e^{\frac{-\sigma_t(L-x)}{\mu}} \right| d\mu \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{|B_L| + |B_0|}{1 - e^{-2\sigma_t L}} \left| e^{\frac{-\sigma_t y}{\mu}} - e^{\frac{-\sigma_t x}{\mu}} \right| d\mu,$$

isto é:

$$|L_b B(y) - L_b B(x)| \leq \frac{1}{2} \frac{|B_0| + |B_L|}{1 - e^{-2\sigma_t L}} \left(\int_0^1 \left| e^{\frac{-\sigma_t(L-y)}{\mu}} - e^{\frac{-\sigma_t(L-x)}{\mu}} \right| d\mu \right. \\ \left. + \int_0^1 \left| e^{\frac{-\sigma_t y}{\mu}} - e^{\frac{-\sigma_t x}{\mu}} \right| d\mu \right).$$

Agora como a função exponencial é uma função Hölder contínua, ou seja:

$$\int_0^1 \left| e^{\frac{-\sigma_t y}{\mu}} - e^{\frac{-\sigma_t x}{\mu}} \right| d\mu \leq C |\sigma_t|^\alpha |y - x|^\alpha \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Portanto, obtemos:

$$|L_b B(y) - L_b B(x)| \leq \frac{|B_0| + |B_L|}{1 - e^{-2\sigma_t L}} \frac{C |\sigma_t|^\alpha}{1 - \alpha} |y - x|^\alpha.$$

■

Até aqui, demonstramos que se a fonte interna $S(x)$ e as fontes das fronteiras $B_0(\mu)$ e $B_L(\mu)$ são funções limitadas, então as funções $(L_g S)(x)$ e $(L_b B)(x)$ são Hölder Contínuas. Assim, o lado direito da expressão (2.21) é uma função Hölder Contínua. Porém, os resultados ainda são insuficientes para garantir que fluxo escalar médio é uma função Hölder Contínua. Para concluir o

resultado, precisamos mostrar que o operador $(1 - \sigma_s L_g)$ é inversível e escrever a solução da forma:

$$\Phi(x) = (1 - \sigma_s L_g)^{-1}(L_g S)(x) + (1 - \sigma_s L_g)^{-1}(L_b B)(x). \quad (2.43)$$

Em qualquer espaço normado com norma $\|\cdot\|$, o operador $(1 - \sigma_s L_g)^{-1}$ está bem definido pela série de Neumann quando o raio espectral $\sigma_s \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_g^k\|^{1/k}$ é menor que 1. Essa condição é sempre satisfeita quando $\sigma_s \|L_g\| < 1$ [30] (ch. 17, pg. 195). O próximo teorema garante o operador $L_g : C^\alpha \rightarrow C^\alpha$ está bem definido e sua norma no espaço C^α é menor que $\frac{1}{\sigma_s}$. Assim, temos

$$\|\sigma_s L_g\| < 1. \quad (2.44)$$

Portanto, com o resultado do próximo teorema, a teoria fica completa. Ressaltamos que o teorema a seguir está demonstrado na literatura (ver [39]), mas introduziremos aqui por completeza dos resultados.

Teorema 2.4 *O operador $L_g : C^\alpha[0, L] \rightarrow C^\alpha[0, L]$ é limitado e sua norma $\|L_g\|_{C^\alpha}$ é menor que $\frac{1}{\sigma_s}$.*

Demonstração: Reorganizamos os termos de L_g e para simplificar a notação omitiremos a dependência de μ , em $\rho_0 = \rho_0(\mu)$ e $\rho_L = \rho_L(-\mu)$. Começamos a demonstração pela estimativa da seminorma em C^α :

$$|(L_g q)(y) - (L_g q)(x)| \leq \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left| \frac{\rho_L \left(e^{-\frac{\sigma_t(L-y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}} \right)}{\mu \left(1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}} \right)} \int_0^L \left(\rho_0 q(s) e^{-\frac{\sigma_t(s+L)}{\mu}} + q(s) e^{\frac{\sigma_t(s-L)}{\mu}} \right) ds \right| d\mu$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu} \int_y^L q(s) e^{-\frac{\sigma_t(s-y)}{\mu}} ds - \frac{1}{\mu} \int_x^L q(s) e^{-\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds \right| d\mu \\
& + \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left| \frac{\rho_0 \left(e^{-\frac{\sigma_t y}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}} \right)}{\mu \left(1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}} \right)} \int_0^L \left(q(s) \rho_L e^{\frac{\sigma_t(s-2L)}{\mu}} + q(s) e^{-\frac{\sigma_t s}{\mu}} \right) ds \right| d\mu \\
& + \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu} \int_0^y q(s) e^{\frac{\sigma_t(s-y)}{\mu}} ds - \frac{1}{\mu} \int_0^x q(s) e^{\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds \right| d\mu \\
& =: D + E + F + G. \tag{2.45}
\end{aligned}$$

As estimativas de D , E , F e G são obtidas a partir de manipulações elementares. Suponha, sem perda de generalidade, $y > x$, note que:

$$\begin{aligned}
D & = \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left| \frac{\rho_L \left(e^{-\frac{\sigma_t(L-y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}} \right)}{\mu \left(1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}} \right)} \int_0^L \left(q(s) \rho_0 e^{-\frac{\sigma_t(s+L)}{\mu}} + q(s) e^{\frac{\sigma_t(s-L)}{\mu}} \right) ds \right| d\mu \\
& \leq \frac{\sigma_s \|q\|_{C^0}}{2} \int_0^1 \left[\frac{\rho_L \left(e^{-\frac{\sigma_t(L-y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}} \right)}{\mu \left(1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}} \right)} \frac{\mu}{\sigma_t} \left(-\rho_0 e^{-\frac{\sigma_t 2L}{\mu}} + 1 + \rho_0 e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} \right) \right] d\mu \\
& = \frac{\sigma_s \|q\|_{C^0}}{2\sigma_t} \int_0^1 \frac{\rho_L \left(e^{-\frac{\sigma_t(L-y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}} \right) \left(-\rho_0 e^{-\frac{\sigma_t 2L}{\mu}} + 1 + \rho_0 e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} \right)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu \\
& \leq \frac{\sigma_s \|q\|_{C^0}}{2\sigma_t} \int_0^1 \frac{\left(e^{-\frac{\sigma_t(L-y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}} \right) \left(\rho_L - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{\sigma_t 2L}{\mu}} + (\rho_0 - 1) \rho_L e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} \right)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu \\
& \leq \frac{\sigma_s \|q\|_{C^0}}{2\sigma_t} \int_0^1 \frac{\left(e^{-\frac{\sigma_t(L-y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}} \right) \left(\rho_L - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{\sigma_t 2L}{\mu}} \right)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu \\
& \leq \frac{\sigma_s \|q\|_{C^0}}{2\sigma_t} \int_0^1 \left(e^{-\frac{\sigma_t(L-y)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}} \right) d\mu \\
& \leq \frac{\sigma_s |x-y|^\alpha}{2\sigma_t} C \|q\|_{C^0}, \tag{2.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu} \int_y^L q(s) e^{-\frac{\sigma_t(s-y)}{\mu}} ds - \frac{1}{\mu} \int_x^L q(s) e^{-\frac{\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds \right| d\mu \\
&= \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu} \int_0^{L-y} q(r+y) e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr - \frac{1}{\mu} \int_0^{L-x} q(r+x) e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr \right| d\mu \\
&= \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu} \int_0^{L-x} q(r+y) e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr + \frac{1}{\mu} \int_{L-x}^{L-y} q(r+x) e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\mu} \int_0^{L-x} q(r+x) e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr \right| d\mu \\
&\leq \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\mu} \int_0^{L-x} |q(r+y) - q(r+x)| e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\mu} \int_{L-x}^{L-y} |q(r+x)| e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr \right] d\mu \\
&\leq \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\mu} \int_0^{L-x} [q]_{C^\alpha} |(r+y) - (r+x)|^\alpha e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr + \frac{1}{\mu} \int_{L-x}^{L-y} \|q\|_{C^0} e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr \right] d\mu \\
&= \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\mu} [q]_{C^\alpha} |y-x|^\alpha \frac{\mu}{\sigma_t} \left(1 - e^{-\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}}\right) + \frac{\|q\|_{C^0}}{\mu} \frac{\mu}{\sigma_t} \left(e^{-\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(L-y)}{\mu}}\right) \right] d\mu \\
&= \frac{\sigma_s}{2\sigma_t} \left([q]_{C^\alpha} |y-x|^\alpha \int_0^1 \left(1 - e^{-\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}}\right) d\mu + \|q\|_{C^0} \int_0^1 \left(e^{-\frac{\sigma_t(L-x)}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t(L-y)}{\mu}}\right) d\mu \right) \\
&\leq \frac{\sigma_s}{2\sigma_t} ([q]_{C^\alpha} |y-x|^\alpha + \|q\|_{C^0} C |(L-y) - (L-x)|^\alpha) \\
&= \frac{\sigma_s |x-y|^\alpha}{2\sigma_t} ([q]_{C^\alpha} + C \|q\|_{C^0}). \tag{2.47}
\end{aligned}$$

Suponha, sem perda de generalidade, $y < x$ e note que:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left| \frac{\rho_0 \left(e^{-\frac{\sigma_t y}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}} \right)}{\mu \left(1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}} \right)} \int_0^L \left(q(s) \rho_L e^{\frac{\sigma_t(s-2L)}{\mu}} + q(s) e^{-\frac{\sigma_t s}{\mu}} \right) ds \right| d\mu \\
&\leq \frac{\sigma_s \|q\|_{C^0}}{2} \int_0^1 \left[\frac{\rho_0 \left(e^{-\frac{\sigma_t y}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}} \right)}{\mu \left(1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}} \right)} \frac{\mu}{\sigma_t} \left(\rho_L e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} - \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}} + 1 \right) \right] d\mu \\
&= \frac{\sigma_s \|q\|_{C^0}}{2\sigma_t} \int_0^1 \frac{\rho_0 \left(e^{-\frac{\sigma_t y}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}} \right) \left((\rho_L - 1) e^{-\frac{\sigma_t L}{\mu}} + 1 - \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}} \right)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\sigma_s \|q\|_{C^0}}{2\sigma_t} \int_0^1 \frac{\left(e^{-\frac{\sigma_t y}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}}\right) \left(\rho_0 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}\right)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} d\mu \\
&\leq \frac{\sigma_s \|q\|_{C^0}}{2\sigma_t} \int_0^1 \left(e^{-\frac{\sigma_t y}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}}\right) d\mu \\
&\leq \frac{\sigma_s |y - x|^\alpha}{2\sigma_t} C \|q\|_{C^0}, \tag{2.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu} \int_0^y q(y-r) e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr - \frac{1}{\mu} \int_0^x q(x-r) e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr \right| d\mu \\
&= \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu} \int_0^y q(y-r) e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr - \frac{1}{\mu} \int_0^y q(x-r) e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\mu} \int_y^x q(x-r) e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr \right| d\mu \\
&\leq \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\mu} \int_0^y |q(y-r) - q(x-r)| e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr + \frac{1}{\mu} \int_y^x |q(x-r)| e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr \right] d\mu \\
&\leq \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\mu} \int_0^y [q]_{C^\alpha} |(y-r) - (x-r)|^\alpha e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr + \frac{1}{\mu} \int_y^x \|q\|_{C^0} e^{-\frac{\sigma_t r}{\mu}} dr \right] d\mu \\
&= \frac{\sigma_s}{2} \int_0^1 \left[\frac{[q]_{C^\alpha} |y-x|^\alpha}{\mu} \frac{\mu}{\sigma_t} \left(1 - e^{-\frac{\sigma_t y}{\mu}}\right) + \frac{\|q\|_{C^0}}{\mu} \frac{\mu}{\sigma_t} \left(e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t y}{\mu}}\right) \right] d\mu \\
&= \frac{\sigma_s}{2\sigma_t} \left([q]_{C^\alpha} |y-x|^\alpha \int_0^1 \left(1 - e^{-\frac{\sigma_t y}{\mu}}\right) d\mu + \|q\|_{C^0} \int_0^1 \left(e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}} - e^{-\frac{\sigma_t y}{\mu}}\right) d\mu \right) \\
&\leq \frac{\sigma_s}{2\sigma_t} \left([q]_{C^\alpha} |y-x|^\alpha + \|q\|_{C^0} C |x-y|^\alpha \right) \\
&= \frac{\sigma_s |x-y|^\alpha}{2\sigma_t} \left([q]_{C^\alpha} + C \|q\|_{C^0} \right). \tag{2.49}
\end{aligned}$$

A existência da constante C nas estimativas acima é garantida pelo Lema A.2.

Das estimativas de D , E , F e G temos que:

$$|(L_g q)(y) - (L_g q)(x)| \leq \frac{\sigma_s |x-y|^\alpha}{\sigma_t} \left([q]_{C^\alpha} + 2C \|q\|_{C^0} \right) \tag{2.50}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\|L_g q\|_{C^\alpha} &= C_1 \sup \frac{|(L_g q)(y) - (L_g q)(x)|}{|y - x|^\alpha} + \|(L_g q)(y)\|_{C^0} \\
&\leq \frac{1}{\sigma_t} (C_1 [q]_{C^\alpha} + 2C_1 C \|q\|_{C^0} + \|q\|_{C^0}) \\
&\leq \frac{(2C_1 C + 1)}{\sigma_t} \left(\frac{C_1}{(2C_1 C + 1)} [q]_{C^\alpha} + \|q\|_{C^0} \right) \\
&\leq \frac{(2C_1 C + 1)}{\sigma_t} (C_1 [q]_{C^\alpha} + \|q\|_{C^0}) \\
&= \frac{(2C_1 C + 1)}{\sigma_t} \|q\|_{C^\alpha}. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Tomando $0 < C_1 < \frac{\sigma_t - \sigma_s}{2C\sigma_s}$, temos

$$\|L_g\|_{C^\alpha} \leq \frac{(2C_1 C + 1)}{\sigma_t} < \frac{1}{\sigma_s}. \tag{2.52}$$

■

Assim, findamos este capítulo desenvolvendo novas estimativas para os operadores quando as fontes são limitadas, inclusive admitindo fontes descontínuas, estabelecendo existência de soluções no espaço Hölder C^α .

3 MÉTODO DE NYSTRÖM

Neste capítulo, a metodologia proposta nesse trabalho, que emprega o método de Nyström, é aplicada para resolver a formulação integral da equação de transporte unidimensional. Na sequência, discutimos os detalhes da discretização utilizada em nossas implementações, incluindo as técnicas analíticas e numéricas para o tratamento das singularidades e otimização do código. A partir disso, obtemos aproximações para o fluxo escalar médio e comparamos os resultados com aqueles encontrados na literatura.

3.1 Tratamento da Singularidade

Relembrando que escrevemos a equação integral em (2.20) como:

$$\Phi(x) = L_g (\sigma_s \Phi(x) + S(x)) + (L_b B)(x),$$

ou seja:

$$\Phi(x) = \sigma_s \int_0^L k(x, s) \Phi(s) ds + \int_0^L k(x, s) S(s) ds + (L_b B)(x), \quad (3.1)$$

onde $k(x, s)$ é expresso em (2.18).

A equação (3.1) é uma equação integral linear de Fredholm do segundo tipo que pode ser resolvida numericamente pelo método de Nyström [17, 38, 5]. No entanto, observamos que a aplicação do método de Nyström diretamente na equação (3.1) pode produzir resultados com imprecisões, visto que o núcleo $k(x, s)$ é singular na diagonal $x = s$.

Para tratar a singularidade na diagonal $x = s$, primeiro aplicamos a técnica de subtração de singularidades [38] para o operador L_g :

$$(L_g q)(x) = \int_0^L k(x, s)[q(s) - q(x)]ds + \int_0^L k(x, s)q(x)ds. \quad (3.2)$$

Assim, a equação (3.1) assume a seguinte forma:

$$\Phi(x) = \sigma_s \int_0^L k(x, s)[\Phi(s) - \Phi(x)]ds + \sigma_s \int_0^L k(x, s)ds\Phi(x) + g(x), \quad (3.3)$$

onde $g(x)$ representa simultaneamente a contribuição da fonte e da fronteira, isto é:

$$g(x) = \int_0^L k(x, s)[S(s) - S(x)]ds + S(x) \int_0^L k(x, s)ds + (L_b B)(x).$$

Para concluir que a singularidade foi removida de fato, olhamos para o integrando do primeiro termo, que é uma função de x e s e completamos a diagonal com zero, e provaremos que essa função é contínua. Essa remoção da singularidade vai refletir em uma melhora no desempenho das quadraturas numéricas para esse termo. O segundo termo da direita terá sua singularidade integrada analiticamente e, por isso, não afetará o desempenho das quadraturas numéricas. Vamos então ao resultado do próximo teorema, uma das contribuições deste trabalho, que garante o bom comportamento do primeiro termo.

Teorema 3.1 *Seja $\Phi(x)$ uma solução da equação (3.1) no espaço de Hölder C^α . Então,*

$$\lim_{s \rightarrow x} k(x, s)[\Phi(s) - \Phi(x)] = 0.$$

Demonstração: Para demonstrar esse teorema, começamos estimando:

$$|k(x, s)[\Phi(s) - \Phi(x)]| = \left| \int_0^1 \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\rho_0(\mu)e^{\frac{-\sigma_t(s+x)}{\mu}} + \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} \right] \right|$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}} + \rho_L(-\mu)e^{\frac{-\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}} + e^{\frac{-\sigma_t|s-x|}{\mu}} \Big] d\mu[\Phi(s) - \Phi(x)] \Big| \\
\leq & \left(\frac{1}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \int_0^1 \left[\frac{e^{\frac{-\sigma_t(s+x)}{\mu}}}{\mu} + \frac{e^{\frac{-\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}}}{\mu} + \frac{e^{\frac{-\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}}}{\mu} + \frac{e^{\frac{-\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{\mu} \right] d\mu \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^{\frac{-\sigma_t|s-x|}{\mu}}}{\mu} d\mu \right) |\Phi(s) - \Phi(x)| \\
\leq & \left(\frac{1}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} \int_0^1 \left[\left| \frac{e^{\frac{-\sigma_t(s+x)}{\mu}}}{\mu} \right| + \left| \frac{e^{\frac{-\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}}}{\mu} \right| + \left| \frac{e^{\frac{-\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}}}{\mu} \right| + \left| \frac{e^{\frac{-\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{\mu} \right| \right] d\mu \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{e^{\frac{-\sigma_t|s-x|}{\mu}}}{\mu} \right| d\mu \right) |\Phi(s) - \Phi(x)|. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Agora, estimamos os termos da expressão (3.4), usando o fato do núcleo $k(x, s)$ ser uma combinação de exponenciais integrais (veja mais detalhes no Lema A.1 do Apêndice) e que Φ pertence ao espaço de Hölder C^α , temos:

$$\begin{aligned}
|k(x, s)[\Phi(s) - \Phi(x)]| \leq & \left(\frac{1}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} [-\ln(\sigma_t(s+x)) + \tau(\sigma_t(s+x))] \right. \\
& - \ln(\sigma_t(-s+2L+x)) + \tau(\sigma_t(-s+2L+x)) - \ln(\sigma_t(2L+s-x))] \\
& + \tau(\sigma_t(2L+s-x)) - \ln(\sigma_t(2L-s-x)) + \tau(\sigma_t(2L-s-x))] \\
& \left. + \frac{1}{2} [-\ln(\sigma_t|s-x|) + \tau(\sigma_t|s-x|)] \right) C(\alpha)|s-x|^\alpha
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos da desigualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
|k(x, s)[\Phi(s) - \Phi(x)]| \leq & \frac{C(\alpha)}{2(1 - e^{-2\sigma_t L})} [-\ln(\sigma_t(s+x))|s-x|^\alpha + \tau(\sigma_t(s+x))|s-x|^\alpha \\
& - \ln(\sigma_t(-s+2L+x))|s-x|^\alpha + \tau(\sigma_t(-s+2L+x))|s-x|^\alpha \\
& - \ln(\sigma_t(2L+s-x))|s-x|^\alpha + \tau(\sigma_t(2L+s-x))|s-x|^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\ln(\sigma_t(2L - s - x))|s - x|^\alpha + \tau(\sigma_t(2L - s - x))|s - x|^\alpha] \\
& + \frac{C(\alpha)}{2} [-\ln(\sigma_t|s - x)|s - x|^\alpha + \tau(\sigma_t|s - x)|s - x|^\alpha]. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

onde τ está definida no Lema A.1 do Apêndice. Agora, analisamos cada termo da expressão 3.5. Como τ é contínua, pois é analítica, o limite de τ quando $s \rightarrow x$, é um valor finito e multiplicada por $|s - x|^\alpha$, o limite é 0. Desta forma todos termos que envolvem τ se anulam.

Observe que os termos logaritmos $-\ln(\sigma_t(-s + 2L + x))|s - x|^\alpha$, $-\ln(\sigma_t(2L + s - x))|s - x|^\alpha$ e $-\ln(\sigma_t(2L - s - x))|s - x|^\alpha$ tendem a zero assintoticamente a $|s - x|^\alpha$. Agora, o termo $-\ln(\sigma_t|s - x)|s - x|^\alpha$, pode ser escrito na forma

$$-\ln(\sigma_t|s - x)|s - x|^\alpha = -\ln(\sigma_t)|s - x|^\alpha - \ln(|s - x|)|s - x|^\alpha. \tag{3.6}$$

Aqui, o termo $-\ln(\sigma_t)|s - x|^\alpha$ é tratado como os três primeiros e o termo $-\ln(|s - x|)|s - x|^\alpha$ é da forma $\ln(z)|z|^\alpha$. Afirmamos que $\ln(z)|z|^\alpha$ tende a zero quando z tende a zero. A demonstração desse resultado está no Lema A.3 do Apêndice.

Finalmente, concluímos que:

$$\lim_{s \rightarrow x} k(x, s)[\Phi(s) - \Phi(x)] = 0.$$

■

3.2 Discretização

Tratada a singularidade, derivamos uma implementação rápida do método de Nyström para resolvermos a formulação integral da equação de transporte. Reescrevemos a equação (3.3), como:

$$\Phi(x) = \sigma_s \int_0^L k(x, s)[\Phi(s) - \Phi(x)]ds + \sigma_s R(x)\Phi(x) + g(x),$$

onde $R(x) = \int_0^L k(x, s)ds$.

Aplicando o método de Nyström na equação acima para discretizar o operador integral envolvido, obtemos:

$$\Phi(x) = \sigma_s \sum_{j=1, s_j \neq x}^N w_j k(x, s_j)[\Phi(s_j) - \Phi(x)] + \sigma_s R(x)\Phi(x) + g(x) + E(x), \quad (3.7)$$

onde $\{w_j\}_{j=1}^N$ são pesos e $\{s_j\}_{j=1}^N$ abscissas de um esquema de quadratura numérica e $E(x)$ é o erro de truncamento.

Avaliando a equação (3.7) nos pontos que estão na quadratura e desprezando o erro de truncamento, podemos escrever para $i = 1, \dots, N$:

$$\Phi(x_i) = \sigma_s \sum_{j=1, i \neq j}^N w_j k(x_i, s_j)[\Phi(s_j) - \Phi(x_i)] + \sigma_s R(x_i)\Phi(x_i) + g(x_i). \quad (3.8)$$

Para simplificar a notação, definimos $\mathcal{K}_{ij} = k(x_i, s_j)$, $g_i = g(x_i)$ e $R_i = R(x_i)$ bem como Φ_i , que será a incógnita do problema discreto e aproximará $\Phi(x_i)$. Fazendo uso dessas definições, finalmente chegamos ao sistema algébrico:

$$\Phi_i = \sigma_s \sum_{j=1, j \neq i}^N w_j \mathcal{K}_{ij}[\Phi_j - \Phi_i] + \sigma_s R_i \Phi_i + g_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.9)$$

que pode ser escrito na forma matricial conforme:

$$\begin{bmatrix} 1 + \sigma_s \sum_{l \neq 1} w_l \mathcal{K}_{1l} - \sigma_s R_1 & -\sigma_s w_2 \mathcal{K}_{12} & \cdots & -\sigma_s w_N \mathcal{K}_{1N} \\ -\sigma_s w_1 \mathcal{K}_{21} & 1 + \sigma_s \sum_{l \neq 2} w_l \mathcal{K}_{2l} - \sigma_s R_2 & \cdots & -\sigma_s w_N \mathcal{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sigma_s w_1 \mathcal{K}_{N1} & -\sigma_s w_2 \mathcal{K}_{N2} & \cdots & 1 + \sigma_s \sum_{l \neq N} w_l \mathcal{K}_{Nl} - \sigma_s R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Note que quando $\sigma_s = 0$, a matriz do sistema é reduzida a matriz identidade, o que implica que o sistema linear possui uma solução única. A inversibilidade da matriz, que pode ser naturalmente estendida em torno de uma vizinhança de $\sigma_s = 0$, recai em um problema de autovalores, ou seja, a matriz do lado esquerdo poderia ser escrita da forma $I_d + \sigma_s M$, onde M é uma matriz, sendo inversível sempre que σ_s não for autovalor de M . Ainda, esse sistema representa o problema integral, e portanto, a solução do sistema linear $N \times N$ (3.10) aproxima numericamente a solução da equação integral (3.1).

O processo descrito acima produz as aproximações do fluxo escalar médio Φ_i para um conjunto de N pontos que estão na malha de uma quadratura. No entanto, observamos que para os pontos que não estão na malha da quadratura (por exemplo, zero na regra de Gauss-Legendre) desde que $(1 - \sigma_s L_g)^{-1}$ exista e rearranjando os termos de (3.7), escrevemos a equação para aproximação do fluxo escalar médio (3.7) da seguinte forma:

$$\Phi(x) = \frac{\sigma_s \sum_{j=1, s_j \neq x}^N w_j k(x, s_j) \Phi(s_j) + g(x)}{1 + \sigma_s \sum_{j=1, s_j \neq x}^N w_j k(x, s_j) - \sigma_s R(x)}. \quad (3.11)$$

3.2.1 Autovalores para equação do transporte isotrópica no caso unidimensional

Nesta seção apresentaremos a discretização para os autovalores considerando o caso isotrópico. O problema de autovalores que resolveremos nesse trabalho é dado pela equação:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \sigma_t \Psi(x, \mu) = c \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu) d\mu, \quad 0 < x < L, \quad (3.12)$$

com as condições de contorno semirreflexivas:

$$\begin{aligned} \Psi(0, \mu) &= \rho_0(\mu) \Psi(0, -\mu), \quad \mu > 0; \\ \Psi(L, \mu) &= \rho_L(\mu) \Psi(L, -\mu), \quad \mu < 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aqui, c são autovalores e $\Psi(x, \mu)$ são as autofunções do problema.

Fazendo uso de toda a discretização feita para o problema anterior e usando a mesma notação, chegamos ao sistema linear algébrico:

$$\Phi_i = c \sum_{j=1, j \neq i}^N w_j \mathcal{K}_{ij} [\Phi_j - \Phi_i] + c R_i \Phi_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.14)$$

que pode ser escrito na forma matricial conforme:

$$\begin{bmatrix} 1 + c \sum_{l \neq 1} w_l \mathcal{K}_{1l} - c R_1 & -c w_2 \mathcal{K}_{12} & \cdots & -c w_N \mathcal{K}_{1N} \\ -c w_1 \mathcal{K}_{21} & 1 + c \sum_{l \neq 2} w_l \mathcal{K}_{2l} - c R_2 & \cdots & -c w_N \mathcal{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c w_1 \mathcal{K}_{N1} & -c w_2 \mathcal{K}_{N2} & \cdots & 1 + c \sum_{l \neq N} w_l \mathcal{K}_{Nl} - c R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

O problema 3.15 também pode ser visto como um problema de autovalor matricial:

$$\begin{bmatrix} \sum_{l \neq 1} w_l \mathcal{K}_{1l} - R_1 & -w_2 \mathcal{K}_{12} & \cdots & -w_N \mathcal{K}_{1N} \\ -w_1 \mathcal{K}_{21} & \sum_{l \neq 2} w_l \mathcal{K}_{2l} - R_2 & \cdots & -w_N \mathcal{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_1 \mathcal{K}_{N1} & -w_2 \mathcal{K}_{N2} & \cdots & \sum_{l \neq N} w_l \mathcal{K}_{Nl} - R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

3.3 Resultados Numéricos

Nesta seção discutimos os resultados numéricos para o problema (2.1) - (2.3). Inicialmente descrevemos a implementação numérica, incluindo as técnicas para otimização do código e os pacotes computacionais usados. Depois, apresentamos os resultados do fluxo escalar médio em comparação com os resultados encontrados na literatura, especialmente os resultados fornecidos por [45] e [13]. Finalmente, apresentamos resultados para o cálculo de autovalores do problema.

3.3.1 Detalhes de Implementação

Os algoritmos, que usamos para resolver o problema numérico, foram implementados na linguagem de programação C, utilizamos as rotinas de álgebra linear e integração numérica da biblioteca *GNU Scientific Library* (ver [2]). Também utilizamos algoritmos de precisão múltipla para quadratura numérica no *software Maple 15 TM* para reproduzir alguns resultados obtendo valores de alta qualidade para validar nosso código.

Primeiramente, verificamos os operadores $L_g S$, k , $L_b B$ e R já descritos analiticamente, comparando os valores que nosso código C produz com aqueles obtidos por Maple com precisão arbitrária. Além disso, comparamo-os com a diferença da ordem de máquina Epsilon 10^{-16} para várias funções de fonte interna e de fronteira. Em seguida, testamos algumas quadraturas, a saber, a regra do Trapézio, a regra de Simpson, a regra de Boole e Gauss-Legendre. Nesta etapa do processo, testamos a metodologia com um vasto conjunto de parâmetros diferentes. Observamos que Boole e Gauss-Legendre mostraram resultados ligeiramente melhores do que outros esquemas para todos os casos que testamos, ainda Gauss-Legendre superando Boole para N pequeno (< 16) mas, comparável para N grande. Dito isso, apresentamos na seção seguinte apenas os resultados para essas duas regras.

Agora, para calcular os autovalores do problema 3.16, utilizamos o algoritmo QR desenvolvido por Francis e Kublanovskaya [25] implementando a rotina do GSL denominada `gsl eigen`.

3.3.2 Resultados numéricos para o fluxo escalar médio

Nesta seção apresentamos resultados para o fluxo escalar médio, ou seja, os resultados das soluções numéricas que são os resultados do sistema linear (3.10) e da interpolação (3.11). Fizemos comparações de nossos resultados com as disponíveis na literatura. Nas Tabelas 3.1 e 3.2 apresentamos os resultados das simulações numéricas para o fluxo escalar médio considerando os parâmetros $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = \frac{1}{8}$. Na tabela 3.1 a regra de Boole se estabilizou com $N = 401$ pontos de malha até seis

dígitos de precisão e coincide exatamente com a solução exata proposta em [45]. Ressaltamos que a solução exata proposta em [45], consiste numa aproximação para a sequência de valores para σ_s de 0.9, 0.99, 0.9999999. Observamos que os resultados de Azevedo *et al.* [13], produzido pelo método *GFD* com $N = 1600$, atingiram cinco dígitos de precisão e os resultados de Vargas *et al.* [45], produzido pelo método *LTS_N* com $N = 300$, apresentam cinco dígitos de precisão.

Na Tabela 3.2 a regra de Gauss-Legendre se estabilizou com $N = 101$ pontos de malha até seis dígitos de precisão e coincide exatamente com a solução exata proposta em [45]. Além disso, observamos um melhor ajuste com os valores exatos do que os relatados por Vargas *et al.* [45]. Observamos que o método *GFD* atinge precisão de até seis dígitos significativos quando $N = 1600$. Ressaltamos aqui que o método de Nyström, além de preservar as boas propriedades dos métodos integrais, também é computacionalmente mais eficiente que o método *GFD*.

Observe que as Tabelas 3.1 e 3.2 mostram que regras de Boole e Gauss-Legendre atingem seis dígitos de precisão com $N = 401$ e $N = 101$ pontos na malha, respectivamente. Além disso, esse comportamento tem se apresentado na maioria dos resultados que produzimos, fato que corrobora com a nossa afirmação de que a quadratura de Gauss-Legendre produz resultados ligeiramente mais precisos quando o número de pontos da malha não é muito grande.

Nas Tabelas 3.3 e 3.4 apresentamos a comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio considerando os parâmetros $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = L = 1$ e $S(x) = -x^2 + x$ com os resultados publicados em

Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [13]. Observamos uma boa concordância entre os resultados obtidos e os publicados em [45] e [13], visto que, tanto com regra de Boole quanto a regra de Gauss-Legendre, para $N = 101$ pontos, obtemos cinco dígitos de precisão comparando com os métodos LTS_N e GFD .

Agora, tomamos um valor pequeno para o domínio L e comparamos também com o método desenvolvido por Ganapol [22]. Nas Tabelas 3.5 e 3.6, apresentamos os resultados para o fluxo escalar médio usando a regra de Boole e a regra de Gauss-Legendre, respectivamente, mas com uma fonte interna não constante. Os parâmetros são: $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 0.10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$. Os resultados produzidos pelo método de Nyström coincidem em pelo menos cinco dígitos com aqueles gerados pelos métodos LTS_N , GFD_N e $CASN$. Também, quando usamos a quadratura de Gauss-Legendre, os resultados atingem seis dígitos significativos de precisão com apenas $N = 101$ pontos na malha.

Um ponto positivo dos métodos integrais é que eles não necessitam de uma discretização explícita da variável angular, visto que a formulação integral é descrita em termos do fluxo escalar médio. Quando se trata da discretização espacial, o esperado é que precisaremos de mais pontos quando o domínio for maior. Conforme discutido por Azevedo *et al.* [14] a respeito do método GFD , é mais difícil produzir resultados precisos para problemas com domínios grandes. Assim, para testar o desempenho do método de Nyström, simulamos alguns problemas com domínios maiores, por exemplo, $L = 10cm$ e $L = 100cm$, e comparamos com três metodologias diferentes, a saber: $CASN$, LTS_N e GFD_N [22, 45, 14]. As Tabelas 3.7 - 3.10 mostram o desempenho da presente metodologia para $L = 10cm$ e $L = 100cm$. Os parâmetros usados nas Tabelas 3.7 e 3.8 são

$\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$ e $S(x) = \exp(-x)$ e nas Tabelas 3.9 e 3.10 e são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$. Quando o domínio tem comprimento $L = 10cm$, os resultados alcançam até seis dígitos significativos de precisão com apenas $N = 801$ pontos na malha quando comparados com o método CASN. Com o mesmo número de pontos na malha, os resultados atingiram até quatro dígitos de precisão no caso do domínio ter comprimento $L = 100cm$. Esse resultado é bastante positivo, visto que, conforme Azevedo *et al.* [14] a metodologia GFD obtém até quatro dígitos corretos significativos com $N = 800$, para $L = 10cm$ e com $N = 3200$ para $L = 100cm$.

Tabela 3.1 Regra de Boole. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1\text{cm}^{-1}$, $L = 1\text{cm}$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ com os resultados publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [13].

x	Exact ^[45]	$LT S_{300}^{[45]}$	$GFD_{1000}^{[13]}$	N = 101	N = 201	N = 401	N = 801	N = 1601	N=3201	N=6401
0.0	0.516842	0.516841	0.516841	0.51682953	0.51683839	0.51684082	0.51684148	0.51684165	0.51684170	0.51684171
0.1	0.600637	0.600634	0.600637	0.60063348	0.60063618	0.60063684	0.60063701	0.60063705	0.60063706	0.60063707
0.2	0.647999	0.647997	0.647999	0.64799587	0.64799824	0.64799884	0.64799899	0.64799903	0.64799904	0.64799904
0.3	0.678718	0.678715	0.678718	0.67871479	0.67871711	0.67871769	0.67871784	0.67871787	0.67871788	0.67871789
0.4	0.696308	0.696303	0.696308	0.69630521	0.69630744	0.69630801	0.69630816	0.69630819	0.69630820	0.69630820
0.5	0.702056	0.702053	0.702055	0.70205253	0.70205479	0.70205536	0.70205550	0.70205553	0.70205554	0.70205555

Tabela 3.2 Gauss-Legendre. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1\text{cm}^{-1}$, $L = 1\text{cm}$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ com os resultados publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [13].

x	Exact ^[45]	$LT S_{300}^{[45]}$	$GFD_{1600}^{[13]}$	N = 101	N = 201	N = 401	N = 801	N = 1601	N=3201	N=6401
0.0	0.516842	0.516841	0.516841	0.51684172	0.51684172	0.51684172	0.51684172	0.51684172	0.51684172	0.51684172
0.1	0.600637	0.600634	0.600637	0.60063463	0.60063718	0.60063706	0.60063705	0.60063705	0.60063706	0.60063707
0.2	0.647999	0.647997	0.647999	0.64799447	0.64800006	0.64799932	0.64799912	0.64799906	0.64799904	0.64799905
0.3	0.678718	0.678715	0.678718	0.67872094	0.67871832	0.67871779	0.67871787	0.67871787	0.67871789	0.67871789
0.4	0.696308	0.696303	0.696308	0.69630814	0.69630775	0.69630808	0.69630822	0.69630820	0.69630821	0.69630820
0.5	0.702056	0.702053	0.702055	0.70205564	0.70205556	0.70205555	0.70205555	0.70205555	0.70205555	0.70205555

Tabela 3.3 Regra de Boole. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = -x^2 + x$ com os resultados publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [13].

x	$LTS_{300}^{[45]}$	$GFD_{1600}^{[13]}$	N = 101	N = 201	N = 401	N = 801	N = 1601	N = 3201	N = 6401
0.0	0.335952	0.335947	0.33593781	0.33594471	0.33594657	0.33594707	0.33594721	0.33594724	0.33594725
0.05	0.398459	0.398461	0.39845626	0.39846089	0.39846137	0.39846149	0.39846152	0.39846153	0.39846153
0.1	0.452925	0.452926	0.45292430	0.45292602	0.45292644	0.45292655	0.45292658	0.45292658	0.45292659
0.15	0.502992	0.502994	0.50299453	0.50299346	0.50299387	0.50299397	0.50299400	0.50299401	0.50299401
0.2	0.548165	0.548166	0.54816439	0.54816590	0.54816628	0.54816638	0.54816640	0.54816641	0.54816641
0.25	0.587762	0.587727	0.58772388	0.58772705	0.58772744	0.58772753	0.58772756	0.58772756	0.58772757
0.3	0.621014	0.621015	0.62101355	0.62101509	0.62101546	0.62101555	0.62101557	0.62101558	0.62101558
0.35	0.647477	0.647478	0.64747779	0.64747779	0.64747817	0.64747827	0.64747829	0.64747830	0.64747830
0.4	0.666684	0.666685	0.66668392	0.66668532	0.66668569	0.66668578	0.66668580	0.66668581	0.66668581
0.45	0.678336	0.678332	0.67833013	0.67833169	0.67833207	0.67833216	0.67833218	0.67833219	0.67833219
0.5	0.682233	0.682234	0.68223259	0.68223410	0.68223446	0.68223455	0.68223458	0.68223458	0.68223458

Tabela 3.4 Gauss-Legendre. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1\text{cm}^{-1}$, $L = 1\text{cm}$ e $S(x) = -x^2 + x$ com os resultados publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [13].

x	$LTS_{300}^{[45]}$	$GFD_{1600}^{[13]}$	N = 101	N = 201	N = 401	N = 801	N = 1601	N=3201	N=6401
0.0	0.335952	0.335947	0.33594725	0.33594726	0.33594726	0.33594726	0.33594726	0.33594726	0.33594726
0.05	0.398459	0.398461	0.39846563	0.39846047	0.39846178	0.39846148	0.39846151	0.39846153	0.39846153
0.1	0.452925	0.452926	0.45292217	0.45292679	0.45292657	0.45292655	0.45292656	0.45292658	0.45292659
0.15	0.502992	0.502994	0.50300029	0.50299194	0.50299455	0.50299386	0.50299404	0.50299402	0.50299401
0.2	0.548165	0.548166	0.54815619	0.54816867	0.54816703	0.54816658	0.54816644	0.54816640	0.54816642
0.25	0.587762	0.587727	0.58771861	0.58772662	0.58772699	0.58772751	0.58772753	0.58772756	0.58772756
0.3	0.621014	0.621015	0.62102326	0.62101667	0.62101534	0.62101554	0.62101554	0.62101559	0.62101558
0.35	0.647477	0.647478	0.64747036	0.64747792	0.64747792	0.64747819	0.64747832	0.64747830	0.64747830
0.4	0.666684	0.666685	0.66668562	0.66668458	0.66668549	0.66668586	0.66668580	0.66668582	0.66668581
0.45	0.678336	0.678332	0.67833502	0.67833242	0.67833200	0.67833218	0.67833220	0.67833219	0.67833219
0.5	0.682233	0.682234	0.68223483	0.68223462	0.68223459	0.68223459	0.68223459	0.68223459	0.68223459

Tabela 3.5 Regra de Boole. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 0.10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22] (ver[14]), Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [14].

x	CASN ^[22]	LTS ₃₀₀ ^[45]	GFD ₄₀₀ ^[14]	N=101	N=201	N=401	N = 801
0.00	2.317444	2.317428	2.317444	2.3174436	2.3174440	2.3174442	2.3174442
0.02	2.373155	2.373237	2.373154	2.3731545	2.3731547	2.3731547	2.3731548
0.04	2.390886	2.390864	2.390886	2.3908863	2.3908864	2.3908864	2.3908865
0.06	2.388975	2.388963	2.388975	2.3889751	2.3889753	2.3889753	2.3889754
0.08	2.368116	2.368189	2.368115	2.3681155	2.3681156	2.3681157	2.3681157
0.10	2.312675	2.312669	2.312675	2.3126748	2.3126752	2.3126753	2.3126754

Tabela 3.6 Gauss Legendre. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 0.10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [14].

x	CASN ^[22]	LTS ₃₀₀ ^[45]	GFD ₄₀₀ ^[14]	N=101	N=201	N=401	N = 801
0.00	2.317444	2.317428	2.317444	2.3174442	2.3174442	2.3174442	2.3174442
0.02	2.373155	2.373237	2.373154	2.3731546	2.3731548	2.3731548	2.3731548
0.04	2.390886	2.390864	2.390886	2.3908865	2.3908864	2.3908865	2.3908865
0.06	2.388975	2.388963	2.388975	2.3889754	2.3889753	2.3889753	2.3889754
0.08	2.368116	2.368189	2.368115	2.3681155	2.3681157	2.3681157	2.3681157
0.10	2.312675	2.312669	2.312675	2.3126754	2.3126754	2.3126754	2.3126754

Tabela 3.7 Regra de Boole. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1\text{cm}^{-1}$, $L = 10\text{cm}$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [14].

x	$CASN^{[22]}$	$LTS_{300}^{[45]}$	$GFD_{800}^{[14]}$	N=201	N=401	N=801	N = 1601	N = 3201	N = 6401	N = 12801
0	5.306414	5.306007	5.306226	5.3039455	5.3057224	5.3062229	5.3063618	5.3063999	5.3064102	5.3064130
2	9.104506	9.104450	9.104379	9.1040590	9.1043813	9.1044729	9.1044974	9.1045037	9.1045053	9.1045057
4	7.846664	7.846619	7.846563	7.8463100	7.8465651	7.8466378	7.8466572	7.8466622	7.8466635	7.8466638
6	6.145113	6.145074	6.145039	6.1448458	6.1450392	6.1450939	6.1451084	6.1451122	6.1451131	6.1451133
8	4.387136	4.387110	4.387089	4.3869542	4.3870866	4.3871233	4.3871330	4.3871355	4.3871362	4.3871363
10	2.509092	2.509086	2.509068	2.5087926	2.5090099	2.5090697	2.5090860	2.5090904	2.5090916	2.5090919

Tabela 3.8 Gauss-Legendre. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas *et al.* [45] and Azevedo *et al.* [14].

x	CASN ^[22]	LTS ₃₀₀ ^[45]	GFD ₈₀₀ ^[14]	N=200	N=400	N=800	N = 1600	N = 3200	N = 6400	N = 12800
0	5.306414	5.306007	5.306226	5.3064184	5.3064146	5.3064141	5.3064141	5.3064141	5.3064141	5.3064141
2	9.104506	9.104450	9.104379	9.1045576	9.1045124	9.1045055	9.1045050	9.1045056	9.1045058	9.1045058
4	7.846664	7.846619	7.846563	7.8464516	7.8465711	7.8466881	7.8466589	7.8466648	7.8466643	7.8466640
6	6.145113	6.145074	6.145039	6.1453666	6.1452168	6.1450877	6.1451189	6.1451125	6.1451131	6.1451134
8	4.387136	4.387110	4.387089	4.3870415	4.3871241	4.3871386	4.3871393	4.3871372	4.3871364	4.3871364
10	2.509092	2.509086	2.509068	2.5090873	2.5090914	2.5090919	2.5090920	2.5090920	2.5090920	2.5090920

Tabela 3.9 Regra de Boole. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 100.0cm$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$ com os publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [14].

x	$LTS_{300}^{[45]}$	$GFD_{3200}^{[14]}$	N=201	N=401	N=801	N=1601	N=3201	N=6401	N=12801
0	8.42592	8.443685	8.2115350	8.3754547	8.4277261	8.4433682	8.4478777	8.4491478	8.4494998
20	16.9490	16.945922	17.0052239	16.9512444	16.9492666	16.9507815	16.9514637	16.9516773	16.9517366
40	12.7473	12.746721	12.7908586	12.7506312	12.7492238	12.7503819	12.7508997	12.7510615	12.7511064
60	8.54702	8.547520	8.5764933	8.5500179	8.5491810	8.5499824	8.5503356	8.5504457	8.5504761
80	4.34782	4.348319	4.3621279	4.3494046	4.3491383	4.3495828	4.3497716	4.3498298	4.3498459
100	0.121203	0.121160	0.1166449	0.1199208	0.1208815	0.1211558	0.1212327	0.1212539	0.1212597

Tabela 3.10 Gauss-Legendre. Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 100.0cm$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$ com os publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [14].

x	$LTS_{300}^{[45]}$	$GFD_{3200}^{[14]}$	N=200	N=400	N=800	N=1600	N=3200	N=6400	N=12800
0	8.42592	8.443685	8.4508724	8.4498030	8.4496545	8.4496350	8.4496325	8.4496322	8.4496322
20	16.9490	16.945922	16.982152	16.956025	16.952232	16.951756	16.951746	16.951759	16.951757
40	12.7473	12.746721	12.759963	12.750944	12.752013	12.751032	12.751148	12.751131	12.751124
60	8.54702	8.547520	8.5431535	8.5508586	8.5496200	8.5505802	8.5504609	8.5504778	8.5504850
80	4.34782	4.348319	4.3209647	4.3457776	4.3494016	4.3498556	4.3498631	4.3498496	4.3498517
100	0.121203	0.121160	0.12001437	0.12108742	0.12123888	0.12125894	0.12126152	0.12126185	0.12126189

3.3.3 Resultados numéricos para o problema de autovalores

Nas Tabelas 3.11, 3.12 e 3.13 apresentamos resultados para os autovalores considerando o caso isotrópico com os coeficientes de reflexão $\rho = 0.5$ e variamos o comprimento do domínio. Comparamos nossos resultados com Atalay [4], Garis e Sjöstrand [24] e Sauter *et al* [42].

Ao analisarmos os resultados dos autovalores apresentados nas Tabelas 3.11, 3.12 e 3.13, percebemos uma convergência de cinco dígitos de precisão para $N \geq 200$, apresentando resultados idênticos aos valores de [24] e [42]. Ainda, para os resultados de [42], observamos que os autovalores ímpares convergem mais rapidamente que os autovalores pares e também apresentam resultados idênticos aos valores de [24] para precisão de cinco dígitos para $N \geq 200$.

Tabela 3.11 Comparação de resultados quando $\rho_0 = \rho_L = 0.5$ e $L = 0.2cm$. Com Atalay [4], Garis e Sjöstrand [24] e Sauter *et al* [42].

Auto- valores	Garis &							
	Atalay ^[4]	Sjöstrand ^[24]	Sauter ^[42] ₁₀₀₀	N = 50	N = 100	N = 200	N = 500	N = 1000
1	2.23324	2.23566	2.2356593	2.2356593	2.2356593	2.2356593	2.2356593	2.2356593
2	-	11.68733	11.690893	11.687216	11.687313	11.687326	11.687327	11.687328
3	21.60031	21.55182	21.551816	21.550674	21.551671	21.551798	21.551815	21.551816
4	-	31.58146	31.591056	31.576241	31.580801	31.581380	31.581458	31.581463
5	41.56884	41.53510	41.535103	41.519442	41.533120	41.534854	41.535087	41.535101
6	-	51.55623	51.571841	51.518962	51.551519	51.555641	51.556196	51.556229

Tabela 3.12 Comparação de resultados quando $\rho_0 = \rho_L = 0.5$ e $L = 2cm$. Com Atalay [4], Garis e Sjöstrand [24] e Sauter *et al* [42].

Auto- valores	Garis &							
	Atalay ^[4]	Sjöstrand ^[24]	Sauter ^[42] ₁₀₀₀	N = 50	N = 100	N = 200	N = 500	N = 1000
1	1.13287	1.13254	1.1325389	1.1325388	1.1325389	1.1325389	1.1325389	1.1325389
2	1.74833	1.75896	1.7594214	1.7589367	1.7589596	1.7589625	1.7589629	1.7589629
3	2.65301	2.65286	2.6528594	2.6526837	2.6528370	2.6528566	2.6528592	2.6528594
4	3.59623	3.61064	3.6117095	3.6099635	3.6105579	3.6106338	3.6106441	3.6106447
5	4.58930	4.58784	4.5878435	4.5859447	4.5876014	4.5878129	4.5878415	4.5878433
6	5.55987	5.57427	5.5759364	5.5699556	5.5737220	5.5742024	5.5742673	5.5742713

Tabela 3.13 Comparação de resultados quando $\rho_0 = \rho_L = 0.5$ e $L = 20cm$. Com Atalay [4], Garis e Sjöstrand [24] e Sauter *et al* [42].

Auto- valores	Garis &							
	Atalay ^[4]	Sjöstrand ^[24]	Sauter ^[42] ₁₀₀₀	N = 50	N = 100	N = 200	N = 500	N = 1000
1	1.00568	1.00567	1.0056733	1.0056606	1.0056716	1.0056731	1.0056733	1.0056733
2	-	1.02292	1.0229858	1.0228073	1.0229054	1.0229191	1.0229210	1.0229211
3	1.05204	1.05201	1.0520068	1.0517075	1.0519655	1.0520014	1.0520064	1.0520067
4	-	1.09257	1.0927439	1.0919596	1.0924858	1.0925588	1.0925691	1.0925698
5	1.14356	1.14350	1.1434987	1.1424019	1.1433477	1.1434789	1.1434974	1.1434985
6	-	1.20326	1.2035193	1.2014368	1.2030066	1.2032240	1.2032546	1.2032565

4 MÉTODO DE NYSTRÖM PRODUTO

Neste capítulo a metodologia do método de Nyström Produto é aplicada para resolver a formulação integral do problema de transporte unidimensional (2.1) - (2.3), a qual foi apresentada no Capítulo 2. Na sequência, discutimos os detalhes da discretização utilizada e, posteriormente, obtemos aproximações para o fluxo escalar médio e comparamos os resultados com aqueles encontrados na literatura.

4.1 Discretização por interpolação segmentada

No Capítulo 3, apresentamos o método de Nyström para resolver numericamente a equação integral (2.21), que é uma equação de Fredholm do segundo tipo no qual os núcleos dos operadores possuem singularidades integráveis. A aplicação direta, sem remoção singularidade, do método de Nyström nesse problema não tem um bom desempenho numérico, visto que as quadraturas usadas, sejam elas, Trapézio, Simpson, Boole ou Gauss-Legendre, não tratam bem a singularidade dos núcleos. A saída desenvolvida na metodologia no Capítulo 3 foi aplicar a técnica da subtração da singularidade para posteriormente usar o método de Nyström. Na metodologia que será desenvolvida nesse capítulo a singularidade será tratada de maneira distinta. Falando de outra forma, calcularemos os pesos de uma quadratura específica que absorva a singularidade dos núcleos. Para isso, vamos propor interpolações polinomiais para a função incógnita com o objetivo de resolver as integrais que definem os operadores.

Relembrando, que no Capítulo 2, escrevemos a equação integral (3.1) como:

$$\Phi(x) = \sigma_s \int_0^L k(x, s)\Phi(s)ds + \int_0^L k(x, s)S(s)ds + (L_b B)(x), \quad (4.1)$$

onde $k(x, s)$ é expresso em (2.18). O terceiro termo do lado direito da expressão (4.1) é integrado diretamente na variável μ , conforme a descrição do Capítulo 3. Os outros dois termos têm a forma:

$$\int_0^L k(x, s)q(s)ds \quad (4.2)$$

Para lidarmos com a expressão (4.2), começamos definindo n como a ordem dos polinômios interpoladores, M a quantidade de intervalos do domínio e $N = nM + 1$ o número de pontos da malha. Assim, temos a malha uniformemente espaçada:

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, (N - 1),$$

onde $h = L/(N - 1)$ é o tamanho (ou passo) da malha e os intervalos são:

$$I_j^n = [x_{nj}, x_{n(j+1)}], \quad j = 0, 1, 2, \dots, (M - 1).$$

Ilustraremos na Figura 4.1 os elementos que definimos até agora. Consideramos a ordem do polinômio $n = 2$ e a malha uniforme de $N - 1$ pontos no intervalo $[0, L]$:

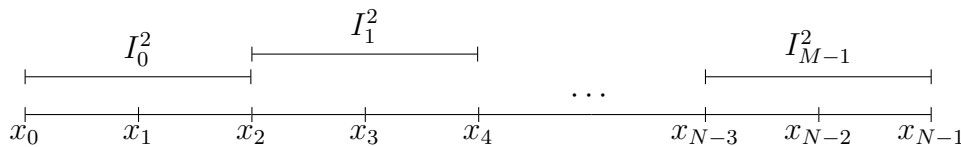


Figura 4.1 Discretização do intervalo $[0, L]$ para $N - 1$ e polinômio de ordem 2.

Definimos o operador de projeção $P_j^n : C^0[I_j^n] \rightarrow C^0[I_j^n]$ que mapeia $q(x)$ na função polinomial por partes $P_j^n(x)$ de grau não superior a n que coincide com $q(x)$ nos pontos $\{x_{nj+k}\}_{k=0}^n$. Assim, podemos escrever a parte da integral que envolve o fluxo escalar médio pelo núcleo da equação (3.1) da forma:

$$\int_0^L k(x, s)q(s)ds = \sum_{j=0}^{M-1} \int_{x_{nj}}^{x_{n(j+1)}} k(x, s)(P_j^n q)(s)ds + E(x), \quad (4.3)$$

onde $E(x)$ é o erro de truncamento. Os polinômios $P_j^n(x)$ são dados por:

$$P_j^n(x) = \sum_{k=0}^n q(x_{nj+k})L_k^n(x - x_{nj})$$

onde $L_k^n(x)$ são os polinômios de Lagrange definidos como:

$$L_k^n(x) = \prod_{\substack{0 \leq m < n \\ m \neq k}} \frac{x - x_m}{x_k - x_m} = \prod_{\substack{0 \leq m < n \\ m \neq k}} \frac{x - mh}{h(k - m)} = \prod_{\substack{0 \leq m < n \\ m \neq k}} \frac{x/h - m}{k - m}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Observe que só precisamos construir $n+1$ polinômios interpoladores, dado que na expressão (4.3), os polinômios de Lagrange são deslocamentos explícitos. Substituindo a interpolação polinomial de Lagrange na equação (4.3), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^L k(x, s)q(s)ds &= \sum_{j=0}^{M-1} \int_{x_{nj}}^{x_{n(j+1)}} k(x, s) \sum_{k=0}^n q(x_{nj+k})L_k^n(s - x_{nj})ds + E(x). \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^n q(x_{nj+k}) \int_{x_{nj}}^{x_{n(j+1)}} k(x, s)L_k^n(s - x_{nj})ds + E(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Definindo os pesos:

$$w_{j,k}^n(x) = \int_{x_{nj}}^{x_{n(j+1)}} k(x, s)L_k^n(s - x_{nj})ds \quad (4.5)$$

temos que:

$$\int_0^L k(x, s)q(s)ds = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^n q(x_{nj+k})w_{j,k}^n(x) + E(x) \quad (4.6)$$

O próximo passo consiste em calcular os pesos $w_{j,k}^n$. Para isso, observamos que os polinômios de Lagrange podem ser escritos na forma:

$$L_k^n(x) = \sum_{z=0}^n c_z x^z.$$

onde c_z são constantes. Logo, temos que:

$$\begin{aligned} w_{j,k}^n(x) &= \int_{x_{nj}}^{x_{n(j+1)}} k(x, s) \sum_{z=0}^n c_z (s - x_{nj})^z ds \\ &= \sum_{z=0}^n c_z \int_{x_{nj}}^{x_{n(j+1)}} (s - x_{nj})^z k(x, s) ds \end{aligned} \quad (4.7)$$

Agora, a forma do núcleo $k(x, s)$, definido em (2.18), permite simplificações na expressão (4.5). De fato, para $a, b, x \in I_j^n$, n a ordem do polinômio interpolador, temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b (s - a)^n k(x, s) ds &= \int_a^b (s - a)^n \int_0^1 \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\rho_0(\mu)e^{-\frac{\sigma_t(s+x)}{\mu}} + \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(-s+2L+x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(2L+s-x)}{\mu}} + \rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(2L-s-x)}{\mu}}}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\sigma_t L}{\mu}}} + e^{-\frac{\sigma_t|s-x|}{\mu}} \right] d\mu ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\rho_0(\mu)[e^{-\frac{\sigma_t x}{\mu}} + \rho_L(-\mu)e^{-\frac{\sigma_t(2L-x)}{\mu}}]}{t(\mu)} \frac{1}{\mu} \int_a^b (s - a)^n e^{-\frac{\sigma_t s}{\mu}} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_L(-\mu)[e^{-\frac{\sigma_t(2L-x)}{\mu}} + \rho_0(\mu)e^{-\frac{\sigma_t(2L+x)}{\mu}}]}{t(\mu)} \frac{1}{\mu} \int_a^b (s - a)^n e^{\frac{\sigma_t s}{\mu}} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu} \int_a^b (s - a)^n e^{-\frac{\sigma_t|s-x|}{\mu}} ds \right] d\mu \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $t(\mu) = 1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{-2\sigma_t L}{\mu}}$. Ainda na expressão (4.8), podemos expandir a última integral nos seguintes três casos:

a) Se $x < a$, então $s > x$ e obtemos: $\int_a^b (s - a)^n e^{\frac{-\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds$.

b) Se $a < x < b$ então $s < x$ em (a, x) e $s > x$ em (x, b) , obtemos:

$$\int_a^x (s - a)^n e^{\frac{-\sigma_t(x-s)}{\mu}} ds + \int_x^b (s - a)^n e^{\frac{-\sigma_t(s-x)}{\mu}} ds.$$

c) Se $x > b$, então $s < x$ e obtemos: $\int_a^b (s - a)^n e^{\frac{-\sigma_t(x-s)}{\mu}} ds$.

Observe que as integrais espaciais na expressão (4.8) podem ser resolvidas analiticamente. Com esse objetivo, escrevemos:

$$F_1^n = \int_a^b (s - a)^n e^{-\lambda s} ds.$$

Inserindo a mudança de variáveis:

$$s = a + \lambda^{-1}t, \quad 0 \leq t \leq \lambda(b - a),$$

escrevemos:

$$\begin{aligned} F_1^n &= \lambda^{-n-1} e^{-a\lambda} \int_0^{\lambda(b-a)} t^n e^{-t} dt \\ &= \lambda^{-n-1} e^{-a\lambda} \gamma(n+1, \lambda(b-a)), \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $\gamma(s, x)$ é a função gama inferior incompleta (veja p.259 [38]). A função $\gamma(s, x)$ possui uma fórmula expressa em termos de funções elementares, visto que basta integrar a expressão resultante por partes. Porém, do ponto de vista numérico, é mais conveniente usar implementações prontas, como a da Boost C++ Libraries [1].

Também, tomando:

$$F_2^n = \int_a^b (s-a)^n e^{\lambda s} ds,$$

e, inserindo a mudança de variáveis:

$$s = b - \lambda^{-1}t, \quad 0 \leq t \leq \lambda(b-a),$$

escrevemos:

$$\begin{aligned} F_2^n &= \int_{\lambda(b-a)}^0 (a+b-\lambda^{-1}t)^n e^{\lambda(b-\lambda^{-1}t)} (-\lambda^{-1}dt) \\ &= \lambda^{-1}e^{\lambda b} \int_0^{\lambda(b-a)} (a+b-\lambda^{-1}t)^n e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Agora, aplicando o Binômio de Newton e a definição da função gama inferior incompleta, temos:

$$\begin{aligned} F_2^n &= \lambda^{-1}e^{\lambda b} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (a+b)^{n-j} (-\lambda^{-1})^j \int_0^{\lambda(b-a)} t^j e^{-t} dt \\ &= \lambda^{-1}e^{\lambda b} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (a+b)^{n-j} (-\lambda)^{-j} \gamma(j+1, \lambda(b-a)) \\ &= e^{\lambda b} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (a+b)^{n-j} (-1)^j (\lambda)^{-j-1} \gamma(j+1, \lambda(b-a)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dado que os pesos $w_{j,k}^n$ definidos pela expressão (4.5) podem ser calculados através da expressão (4.7) e das relações em (4.9) e (4.10), substituiremos a discretização definida na expressão (4.6), desprezando os erros de truncamento, na equação integral (4.1) para obter:

$$\Phi(x) = \sigma_s \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^n \Phi(x_{nj+k}) w_{j,k}^n(x) + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^n S(x_{nj+k}) w_{j,k}^n(x) + (L_b B)(x). \quad (4.11)$$

Aplicando a equação (4.11) em cada ponto da malha uniformemente espaçada dada por $x_i = ih$, obtemos o seguinte sistema algébrico:

$$\Phi(x_i) = \sigma_s \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^n \Phi(x_{nj+k}) w_{j,k}^n(x_i) + g(x_i), \quad (4.12)$$

onde:

$$g(x_i) = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^n S(x_{nj+k}) w_{j,k}^n(x_i) + (L_b B)(x_i).$$

A solução do sistema linear $N \times N$ (4.12) produz as aproximações do fluxo escalar médio Φ para um conjunto de N pontos que estão na malha uniformemente espaçada.

Para os pontos que não estão na malha, usamos o fato que o método de Nyström Produto aproxima o fluxo escalar médio como uma função polinomial por partes. Assim, a interpolação mais natural, são os próprios polinômios aproximantes, pois, além de produzir resultados numéricos satisfatórios, a implementação é simples e computacionalmente mais eficiente que aquela usada para o método de Nyström.

4.2 Resultados numéricos para fluxo escalar médio

Nesta seção discutimos os resultados numéricos para o problema (2.1) - (2.3). Inicialmente fazemos uma breve discussão sobre a implementação numérica, depois, apresentamos os resultados do fluxo escalar médio em comparação com os resultados encontrados na literatura, especialmente os fornecidos por [45] e [13].

Os algoritmos que usamos para resolver o problema numérico foram implementados na linguagem de programação $C++$, utilizamos a rotina de integração numérica CQUAD [26] da *GNU Scientific Library* (ver [2]). As rotinas do OpenBlass foram usadas para acelerar as operações matriciais. Também utilizamos *software Maple 15 TM* para reproduzir os resultados do operador L_g para validar nosso código, obtendo até 16 dígitos de precisão, também foi comparado em precisão múltipla no Python.

Agora, apresentamos resultados para o fluxo escalar médio, os quais fizemos comparações dos nossos resultados com os disponíveis na literatura. Na Tabela 4.1 apresentamos os resultados das simulações numéricas para o fluxo escalar médio considerando a ordem do polinômio de grau 2 e, os parâmetros $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = \frac{1}{8}$. Observamos que se estabilizou com $N = 401$ pontos de malha até seis dígitos de precisão e fecha exatamente com as soluções propostas pelo método LTS_N com $N = 300$ em [45] e pelo método GFD com $N = 1600$ em [13]. Na Tabela 4.2 tomamos o grau de polinômio de ordem 3 e, considerando os mesmos parâmetros, observamos que o desempenho numérico é similar à da Tabela 4.1. E, na Tabela 4.3, o grau do polinômio de ordem 4 e com os mesmos parâmetros, observamos que o desempenho continua similar aos das Tabelas 4.1 e 4.2. O mesmo ocorre com a Tabela 4.4.

Na Tabela 4.5 apresentamos a comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio considerando os parâmetros $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 0$, $\lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = -x^2 + x$ e o grau do polinômio interpolador $n = 2$ com os resultados publicados em Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [13]. Observamos uma boa concordância entre os resultados, os obtidos e

os publicados, obtendo pelo menos cinco dígitos de precisão comparando com os métodos LTS_N e GFD para $N = 101$. Aumentando a ordem do polinômio (de ordem 3 até ordem 5), obtemos um desempenho similar a Tabela 4.5.

Também apresentamos resultados para domínios grandes, por exemplo, para $L = 10cm$ e $L = 100cm$ e comparamos com as metodologias de CASN, LTS_N e GFD_N [22, 45, 14]. Na Tabela 4.6 mostramos o desempenho da presente metodologia considerando o grau do polinômio de ordem 2, onde $L = 10cm$ e os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$ e $S(x) = \exp(-x)$. Observamos que para $N = 3201$ obtemos até cinco dígitos significativos com CASN. E, nas Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9, com polinômios de grau $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$, respectivamente, apresentamos os resultados numéricos para o mesmo conjunto de parâmetros usados na Tabela 4.6. Aqui observamos uma pequena melhora na qualidade numérica quando aumentamos o grau dos polinômios.

Nas Tabelas 4.10, 4.11 e 4.12, com polinômios de grau $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$, respectivamente, o domínio $L = 100cm$ e os parâmetros $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$. Quando comparamos com os resultados calculados na literatura, obtemos dois dígitos significativos corretos com o método LTS_N e três dígitos significativos corretos com o método GFD_N . Vale ressaltar que, como os próprios autores explicitaram, a precisão dos resultados encontramos na literatura também estão limitados a dois ou três dígitos. Também, quando olhamos os resultados conforme o número de pontos cresce, o método de Nyström Produto converge com três ou quatro dígitos significativos corretos.

Por fim, destacamos que em todos os casos, fizemos as tabelas com polinômios interpoladores de ordens 2 a 7 para cada conjunto de parâmetros, porém, não apresentamos os resultados aqui, pois, o comportamento numérico é similar aos apresentados nas tabelas anteriores, ou seja, os resultados são equivalentes em todos os seis casos, conforme aumentamos a ordem do polinômio observamos uma pequena melhora nos dois últimos dígitos.

Tabela 4.1 Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto de (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ com os resultados publicados por Vargat *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [13].

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Exact	0.516842	0.600637	0.647999	0.678718	0.696308	0.702056
LTS_{300}	0.516841	0.600634	0.647997	0.678715	0.696303	0.702053
GFD_{1600}	0.516841	0.600637	0.647999	0.678718	0.696308	0.702055
N = 101	0.51683336	0.60063273	0.64799505	0.67871404	0.69630442	0.70205179
N = 201	0.51683945	0.60063597	0.64799803	0.67871691	0.69630725	0.70205460
N = 401	0.51684110	0.60063679	0.64799879	0.67871764	0.69630796	0.70205531
N = 801	0.51684155	0.60063700	0.64799898	0.67871782	0.69630814	0.70205549
N = 1601	0.51684167	0.60063705	0.64799903	0.67871787	0.69630819	0.70205553
N=3201	0.51684171	0.60063706	0.64799904	0.67871788	0.69630820	0.70205554
N=6401	0.51684172	0.60063707	0.64799904	0.67871788	0.69630820	0.70205554

Tabela 4.2 Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto de (ordem 3) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ com os resultados publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [13].

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Exact	0.516842	0.600637	0.647999	0.678718	0.696308	0.702056
LTS_{300}	0.516841	0.600634	0.647997	0.678715	0.696303	0.702053
GFD_{1600}	0.516841	0.600637	0.647999	0.678718	0.696308	0.702055
N = 106	0.51683297	0.60063160	0.64799399	0.67871304	0.69630344	0.70205082
N = 202	0.51683912	0.60063556	0.64799768	0.67871657	0.69630691	0.70205426
N = 403	0.51684101	0.60063669	0.64799870	0.67871756	0.69630788	0.70205523
N = 802	0.51684153	0.60063697	0.64799896	0.67871780	0.69630812	0.70205547
N = 1600	0.51684167	0.60063704	0.64799902	0.67871787	0.69630818	0.70205553
N=3202	0.51684170	0.60063706	0.64799904	0.67871788	0.69630820	0.70205554
N=6400	0.51684171	0.60063706	0.64799904	0.67871788	0.69630820	0.70205554

Tabela 4.3 Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto de (ordem 4) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ com os resultados publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [13].

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Exact	0.516842	0.600637	0.647999	0.678718	0.696308	0.702056
LTS_{300}	0.516841	0.600634	0.647997	0.678715	0.696303	0.702053
GFD_{1600}	0.516841	0.600637	0.647999	0.678718	0.696308	0.702055
N = 101	0.51683529	0.60063356	0.64799582	0.67871478	0.69630515	0.70205251
N = 201	0.51683997	0.60063618	0.64799823	0.67871710	0.69630744	0.70205478
N = 401	0.51684125	0.60063684	0.64799884	0.67871769	0.69630801	0.70205535
N = 801	0.51684159	0.60063701	0.64799899	0.67871784	0.69630815	0.70205550
N = 1601	0.51684168	0.60063705	0.64799903	0.67871787	0.69630819	0.70205553
N=3201	0.51684171	0.60063706	0.64799904	0.67871788	0.69630820	0.70205554
N=6401	0.51684172	0.60063707	0.64799904	0.67871789	0.69630820	0.70205554

Tabela 4.4 Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto de (ordem 5) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ com os resultados publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [13].

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Exact	0.516842	0.600637	0.647999	0.678718	0.696308	0.702056
LTS_{300}	0.516841	0.600634	0.647997	0.678715	0.696303	0.702053
GFD_{1600}	0.516841	0.600637	0.647999	0.678718	0.696308	0.702055
N = 101	0.51683494	0.60063281	0.64799518	0.67871417	0.69630456	0.70205193
N = 201	0.51683986	0.60063601	0.64799808	0.67871696	0.69630730	0.70205465
N = 401	0.51684122	0.60063680	0.64799881	0.67871766	0.69630798	0.70205532
N = 801	0.51684158	0.6006370	0.64799899	0.67871783	0.69630815	0.70205549
N = 1601	0.51684168	0.60063705	0.64799903	0.67871787	0.69630819	0.70205553
N=3201	0.51684171	0.60063706	0.64799904	0.67871788	0.69630820	0.70205554
N=6401	0.51684172	0.60063707	0.64799904	0.67871788	0.69630820	0.70205554

Tabela 4.5 Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0, B_0 = B_L = 0, \sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}, L = 1cm$ e $S(x) = -x^2 + x$ com os resultados publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [13].

x	LTS_{300}	GFD_{1600}	N = 101	N = 201	N = 401	N = 801	N = 1601	N = 3201	N = 6401
0.0	0.335952	0.335947	0.33594196	0.3359458	0.33594686	0.33594715	0.33594723	0.33594725	0.33594725
0.05	0.398459	0.398461	0.39845851	0.39846075	0.39846133	0.39846148	0.39846152	0.39846153	0.39846153
0.1	0.452925	0.452926	0.45292383	0.45292588	0.45292641	0.45292654	0.45292658	0.45292659	0.45292659
0.15	0.502992	0.502994	0.50299138	0.50299334	0.50299384	0.50299396	0.5029940	0.50299401	0.50299401
0.2	0.548165	0.548166	0.54816387	0.54816576	0.54816625	0.54816637	0.5481664	0.54816644	0.54816641
0.25	0.587762	0.587727	0.58772508	0.58772693	0.58772741	0.58772753	0.58772756	0.58772756	0.58772757
0.3	0.621014	0.621015	0.62101313	0.62101496	0.62101542	0.62101554	0.62101557	0.62101558	0.62101558
0.35	0.647477	0.647478	0.64747587	0.64747768	0.64747814	0.64747826	0.64747829	0.64747830	0.64747830
0.4	0.666684	0.666685	0.66668340	0.66668520	0.66668566	0.66668577	0.66668580	0.66668581	0.66668581
0.45	0.678336	0.678332	0.67832979	0.67833158	0.67833203	0.67833215	0.67833218	0.67833219	0.67833219
0.5	0.682233	0.682234	0.68223219	0.68223397	0.68223443	0.68223455	0.68223458	0.68223458	0.68223459

Tabela 4.6 Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [14].

x	0.	2	4	6	8	10
CASN	5.306414	9.104506	7.846664	6.145113	4.387136	2.509092
LTS_{300}	5.306007	9.104450	7.846619	6.145074	4.387110	2.509086
GFD_{800}	5.306226	9.104379	7.846563	6.145039	4.387089	2.509068
N = 201	5.3047748	9.1038654	7.8461550	6.1447333	4.3868848	2.5088966
N = 401	5.3059538	9.1043395	7.8465318	6.1450147	4.3870710	2.5090376
N = 801	5.3062868	9.1044634	7.8466302	6.1450882	4.3871197	2.5090771
N = 1601	5.3063793	9.1044951	7.8466554	6.1451070	4.3871322	2.5090880
N=3201	5.3064047	9.1045031	7.8466618	6.1451118	4.3871353	2.5090909
N=6401	5.3064115	9.1045052	7.8466634	6.1451130	4.3871361	2.5090917

Tabela 4.7 Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 3) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [14].

x	0.	2	4	6	8	10
CASN	5.306414	9.104506	7.846664	6.145113	4.387136	2.509092
LTS_{300}	5.306007	9.104450	7.846619	6.145074	4.387110	2.509086
GFD_{800}	5.306226	9.104379	7.846563	6.145039	4.387089	2.509068
N = 202	5.3045847	9.1035312	7.8458898	6.1445356	4.3867544	2.5088574
N = 403	5.3058982	9.1042677	7.8464747	6.1449721	4.3870428	2.5090278
N = 802	5.3062695	9.1044466	7.8466169	6.1450783	4.3871131	2.5090744
N = 1600	5.3063741	9.1044911	7.8466522	6.1451047	4.3871306	2.5090872
N=3202	5.3064032	9.1045022	7.8466610	6.1451112	4.3871349	2.5090907
N=6400	5.3064111	9.1045049	7.8466632	6.1451129	4.3871360	2.5090916

Tabela 4.8 Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 4) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [14].

x	0.	2	4	6	8	10
CASN	5.306414	9.104506	7.846664	6.145113	4.387136	2.509092
LTS_{300}	5.306007	9.104450	7.846619	6.145074	4.387110	2.509086
GFD_{800}	5.306226	9.104379	7.846563	6.145039	4.387089	2.509068
N = 201	5.3051558	9.1039774	7.8462440	6.1447997	4.3869288	2.5089389
N = 401	5.3060611	9.1043704	7.8465563	6.1450330	4.3870831	2.5090497
N = 801	5.3063165	9.1044715	7.8466367	6.1450931	4.3871229	2.5090805
N = 1601	5.3063874	9.1044972	7.8466571	6.1451083	4.3871330	2.5090889
N=3201	5.3064068	9.1045037	7.8466622	6.1451121	4.3871355	2.5090911
N=6401	5.3064121	9.1045053	7.8466635	6.1451131	4.3871362	2.5090918

Tabela 4.9 Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 5) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 10cm$ e $S(x) = \exp(-x)$ com os resultados publicados por Ganapol [22], Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [14].

x	0.	2	4	6	8	10
CASN	5.306414	9.104506	7.846664	6.145113	4.387136	2.509092
LTS_{300}	5.306007	9.104450	7.846619	6.145074	4.387110	2.509086
GFD_{800}	5.306226	9.104379	7.846563	6.145039	4.387089	2.509068
N = 201	5.3050974	9.1038224	7.8461211	6.1447080	4.3868681	2.5089235
N = 401	5.3060443	9.1043391	7.8465315	6.1450145	4.3870709	2.5090461
N = 801	5.3063115	9.1044648	7.8466313	6.1450890	4.3871202	2.5090796
N = 1601	5.3063859	9.1044956	7.8466558	6.1451074	4.3871324	2.5090886
N=3201	5.3064064	9.1045033	7.8466619	6.1451119	4.3871354	2.5090911
N=6401	5.3064120	9.1045052	7.8466634	6.1451131	4.3871361	2.5090917

Tabela 4.10 Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1\text{cm}^{-1}$, $L = 100.0\text{cm}$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$ com os resultados publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [14].

x	0.0	20	40	60	80	100
LTS_{300}	8.42592	16.9490	12.7473	8.54702	4.34782	0.121203
GFD_{3200}	8.443685	16.945922	12.746721	8.547520	4.348319	0.121160
N = 201	8.3157289	16.898379	12.710677	8.5229750	4.3352729	0.11904411
N = 401	8.4056842	16.932276	12.736379	8.5404809	4.3445832	0.12050733
N = 801	8.4361778	16.945997	12.746763	8.5475298	4.3482962	0.12103026
N = 1601	8.4456944	16.950185	12.749932	8.5496797	4.3494271	0.12119457
N=3201	8.4485138	16.951345	12.750810	8.5502750	4.3497401	0.12124296
N=6401	8.4493210	16.951651	12.751042	8.5504324	4.3498229	0.12125668

Tabela 4.11 Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 3) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1\text{cm}^{-1}$, $L = 100.0\text{cm}$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$ com os resultados publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [14].

x	0.0	20	40	60	80	100
LTS_{300}	8.42592	16.9490	12.7473	8.54702	4.34782	0.121203
GFD_{3200}	8.443685	16.945922	12.746721	8.547520	4.348319	0.121160
N = 202	8.2972217	16.776605	12.618676	8.4607478	4.3028193	0.11792142
N = 403	8.3995931	16.909869	12.719435	8.5290019	4.3385685	0.12026256
N = 802	8.4343341	16.941624	12.743455	8.5452869	4.3471185	0.12097305
N = 1600	8.4451589	16.949288	12.749254	8.5492196	4.3491853	0.12118056
N=3202	8.4483627	16.951153	12.750665	8.5501767	4.3496885	0.12123944
N=6400	8.4492770	16.951608	12.751009	8.5504102	4.3498112	0.12125574

Tabela 4.12 Comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 4) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1\text{cm}^{-1}$, $L = 100.0\text{cm}$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$ com os resultados publicados por Vargas *et al.* [45] e Azevedo *et al.* [14].

x	0.0	20	40	60	80	100
LTS_{300}	8.42592	16.9490	12.7473	8.54702	4.34782	0.121203
GFD_{3200}	8.443685	16.945922	12.746721	8.547520	4.348319	0.121160
N = 201	8.3400934	16.890124	12.704502	8.5188795	4.3332572	0.11929711
N = 401	8.4146143	16.933967	12.737662	8.5413571	4.3450522	0.12064115
N = 801	8.4391090	16.946825	12.747390	8.5479552	4.3485204	0.12107709
N = 1601	8.4465844	16.950450	12.750133	8.5498159	4.3494987	0.12120904
N=3201	8.4487709	16.951420	12.750867	8.5503136	4.3497604	0.12124716
N=6401	8.4493930	16.951672	12.751057	8.5504428	4.3498284	0.12125785

4.3 Comparação entre os resultados numéricos para fluxo escalar médio entre os métodos de Nyström e Nyström Produto

Nesta seção faremos uma breve discussão e comparação das duas metodologias aplicadas nesse trabalho. A saber, a primeira é o método de Nyström combinado com a remoção de singularidade para resolver numericamente a equação integral (2.21), onde analisamos esquemas de quadratura, como as regras de Boole e Gauss-Legendre. A segunda, o método de Nyström Produto,

que consiste usar interpolações polinomiais para a função incógnita com o objetivo de resolver as integrais que definem os operadores, através de pesos de uma quadratura específica que absorva a singularidade do núcleo.

Considere os parâmetros $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = \frac{1}{8}$ e as Tabelas 3.1, 3.2 e 4.1, que apresentam os resultados para o fluxo escalar médio com o método de Nyström, regra de Boole e Gauss-Legendre e o Nyström Produto para ordem 2, respectivamente. Observamos que para ordem 2 os valores estão em boa concordância com regra de Gauss-Legendre obtendo até cinco dígitos significativos, para $N = 101$ e $N = 201$. Para $N = 401$ observamos seis dígitos corretos.

Nas Tabelas 3.3, 3.4 e 4.5 apresentamos a comparação entre os valores calculados para o fluxo escalar médio considerando os parâmetros $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 0$, $\lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = -x^2 + x$ com as duas metodologias apresentadas. Observamos que para ordem 2 os valores estão em boa concordância com regra de Gauss-Legendre, para $N = 101$ e $N = 201$ obtemos até cinco dígitos sinificativos e para maior que $N = 801$ obtemos até seis dígitos significativos corretos.

Para domínios maiores, como $L = 10cm$, considerando os parâmetros $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1.0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$ e $S(x) = \exp(-x)$ observamos nas Tabelas 3.7, 3.8 e 4.6 o desempenho das metodologias. Verificamos que para $N = 201$ obtemos até três dígitos corretos e, para $x = 0$, obtemos seis dígitos com $N = 6401$. Já para $N = 3201$ observamos até seis dígitos significativos corretos.

Considerando o domínio $L = 100cm$ e, os parâmetros $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = 1.0$, $B_L = 0$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$ e $S(x) = \exp(-x^2/4)$, nas Tabelas 3.9, 3.10 e 4.10, observamos que para ordem 4 usando o método de Nyström Produto temos um melhor desempenho numérico quando comparado com as outras ordens, mas mesmo assim o método de Nyström com Gauss-Legendre apresenta melhores resultados quando comparado com a literatura. Para $N = 6401$ verificamos até cinco dígitos significativos corretos comparando com Nyström e para $x = 0$ apenas quatro dígitos corretos.

Por fim, observamos que nos casos que comparamos as duas metodologias apresentadas nesse trabalho, para domínios menores que um, o comportamento numérico das duas metodologias são similares, embora Nyström com a quadratura de Gauss-Legendre, para N até 401 pontos, comparados os oito dígitos, obtenha resultados ligeiramente melhores. Para domínios $L = 10cm$ e $L = 100cm$ verificamos que para N maiores, 1601 e 3201, respectivamente, o comportamento numérico dos dois métodos são similares.

5 RESULTADOS NOVOS PARA FLUXO ESCALAR MÉDIO

Neste capítulo apresentamos resultados novos para fluxo escalar médio com as duas metodologias apresentadas no Capítulo 3 e 4. Inicialmente consideraremos a fonte descontínua, visto que são muitas as aplicações em problemas realísticos. E, posteriormente, os parâmetros ρ_0 e ρ_L diferentes de zero.

Nas Tabelas 5.1 e 5.2 apresentamos os resultados para o fluxo escalar médio com o método de Nyström com quadratura de Gauss-Legendre e o Nyström Produto para ordem 2, respectivamente. Considerando os parâmetros $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\lambda = \sigma = L = 1$ e, agora, uma fonte descontínua $S(x) = 0.5$ para $x \in [0, 0.5]$ e $S(x) = 0$ para $x \in (0.5, 1.0]$. Observamos uma boa concordância entre os resultados, obtendo pelo menos sete dígitos de precisão.

Nas Tabelas 5.3 e 5.4 apresentamos os resultados para o fluxo escalar médio com o método de Nyström com quadratura de Gauss-Legendre e o Nyström Produto para ordem 2, respectivamente. Considerando os parâmetros $\rho_0 = \rho_L = 0.5$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = 1./8$. Observamos uma boa concordância entre os resultados, obtendo pelo menos sete dígitos de precisão.

Nas Tabelas 5.5 e 5.6 apresentamos os resultados para o fluxo escalar médio com o método de Nyström com quadratura de Gauss-Legendre e o Nyström Produto para ordem 2, respectivamente. Considerando os parâmetros $\rho_0 = \rho_L = 0.5$, $B_0 = B_L = \frac{1}{8}$, $\lambda = \sigma = L = 1$ e $S(x) = 0.5$ para $x \in [0, 0.5]$ e $S(x) = 0$ para $x \in (0.5, 1.0]$. Observamos uma boa concordância entre os resultados, obtendo pelo menos sete dígitos de precisão.

Tabela 5.1 Resultados para fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström com Gauss-Legendre onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1./8$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = 0.5$ para $x \in [0, 0.5]$ e $S(x) = 0$ para $x \in (0.5, 1.0]$

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
N = 51	0.9628614	1.2980618	1.2930542	0.9922046	0.7939194	0.6045057
N = 101	0.9628618	1.2980622	1.2930989	0.9921336	0.7939156	0.6045050
N = 201	0.9628619	1.2980717	1.2931024	0.9921286	0.7939286	0.6045050
N = 401	0.9628619	1.2980705	1.2931002	0.9921321	0.7939268	0.6045050
N = 801	0.9628619	1.2980701	1.2930994	0.9921335	0.7939264	0.6045050
N = 1601	0.9628619	1.2980700	1.2930995	0.9921333	0.7939262	0.6045050
N=3201	0.9628619	1.2980700	1.2930995	0.9921334	0.7939262	0.6045050
N=6401	0.9628619	1.2980700	1.2930995	0.9921333	0.7939262	0.6045050

Tabela 5.2 Resultados para fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0$, $B_0 = B_L = 1./8$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = 0.5$ para $x \in [0, 0.5]$ e $S(x) = 0$ para $x \in (0.5, 1.0]$

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
N = 51	0.9627691	1.2980300	1.2930630	0.9921106	0.7939040	0.6044763
N = 101	0.9628365	1.2980600	1.2930920	0.9921261	0.7939200	0.6044969
N = 201	0.9628550	1.2980680	1.2930970	0.9921315	0.7939246	0.6045028
N = 401	0.9628600	1.2980690	1.2930990	0.9921329	0.7939258	0.6045044
N = 801	0.9628614	1.2980700	1.2930990	0.9921332	0.7939261	0.6045048
N = 1601	0.9628618	1.2980700	1.2930990	0.9921333	0.7939262	0.6045049
N=3201	0.9628619	1.2980700	1.2930990	0.9921333	0.7939262	0.6045049
N=6401	0.9628619	1.2980700	1.2930990	0.9921333	0.7939262	0.6045050

Tabela 5.3 Resultados para fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström com Gauss-Legendre onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0.5$, $B_0 = B_L = 1./8$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = 1./8$

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
N = 51	1.0277541	1.1074665	1.1525522	1.1819047	1.1987769	1.2042842
N = 101	1.0277540	1.1074496	1.1525514	1.1819204	1.1987706	1.2042835
N = 201	1.0277540	1.1074520	1.1525567	1.1819179	1.1987702	1.2042835
N = 401	1.0277540	1.1074519	1.1525560	1.1819174	1.1987705	1.2042834
N = 801	1.0277540	1.1074519	1.1525558	1.1819174	1.1987707	1.2042834
N = 1601	1.0277540	1.1074519	1.1525558	1.1819174	1.1987706	1.2042834
N=3201	1.0277540	1.1074519	1.1525558	1.1819175	1.1987706	1.2042834
N=6401	1.0277540	1.1074519	1.1525558	1.1819175	1.1987706	1.2042834

Tabela 5.4 Resultados para fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0.5$, $B_0 = B_L = 1./8$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = 1./8$

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
N = 51	1.0276853	1.1074031	1.1525091	1.1818717	1.1987253	1.2042382
N = 101	1.0277356	1.1074395	1.1525439	1.1819058	1.1987591	1.2042720
N = 201	1.0277491	1.1074488	1.1525528	1.1819145	1.1987677	1.2042805
N = 401	1.0277527	1.1074511	1.1525550	1.1819167	1.1987699	1.2042827
N = 801	1.0277537	1.1074517	1.1525556	1.1819173	1.1987705	1.2042833
N = 1601	1.0277539	1.1074519	1.1525557	1.1819174	1.1987706	1.2042834
N=3201	1.0277540	1.1074519	1.1525558	1.1819174	1.1987706	1.2042834
N=6401	1.0277540	1.1074519	1.1525558	1.1819175	1.1987706	1.2042834

Tabela 5.5 Resultados para fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0.5$, $B_0 = B_L = 1./8$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = 0.5$ para $x \in [0, 0.5]$ e $S(x) = 0$ para $x \in (0.5, 1.0]$

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
N = 51	2.0878382	2.3534043	2.3123373	1.9827703	1.7568046	1.5231783
N = 101	2.0878389	2.3534052	2.3123907	1.9826916	1.7568003	1.5231773
N = 201	2.0878390	2.3534115	2.3123948	1.9826861	1.7568154	1.5231771
N = 401	2.0878390	2.3534107	2.3123921	1.9826900	1.7568134	1.5231771
N = 801	2.0878390	2.3534105	2.3123911	1.9826916	1.7568128	1.5231771
N = 1601	2.0878390	2.3534104	2.3123913	1.9826913	1.7568127	1.5231771
N=3201	2.0878390	2.3534104	2.3123912	1.9826914	1.7568126	1.5231771
N=6401	2.0878390	2.3534104	2.3123912	1.9826913	1.7568126	1.5231771

Tabela 5.6 Resultados para fluxo escalar médio $\Phi(x)$ usando o método de Nyström Produto (ordem 2) onde os parâmetros são $\rho_0 = \rho_L = 0.5$, $B_0 = B_L = 1./8$, $\sigma_t = \sigma_s = 1cm^{-1}$, $L = 1cm$ e $S(x) = 0.5$ para $x \in [0, 0.5]$ e $S(x) = 0$ para $x \in (0.5, 1.0]$

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
N = 51	2.0876721	2.3533083	2.3122937	1.9826074	1.7567279	1.5230690
N = 101	2.0877944	2.3533851	2.3123679	1.9826686	1.7567905	1.5231480
N = 201	2.0878271	2.3534040	2.3123853	1.9826856	1.7568071	1.5231695
N = 401	2.0878358	2.3534088	2.3123897	1.9826899	1.7568112	1.5231751
N = 801	2.0878382	2.3534100	2.3123908	1.9826910	1.7568123	1.5231766
N = 1601	2.0878388	2.3534103	2.3123911	1.9826913	1.7568125	1.5231770
N=3201	2.0878389	2.3534104	2.3123912	1.9826913	1.7568126	1.5231771
N=6401	2.0878390	2.3534104	2.3123912	1.9826913	1.7568126	1.5231771

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho estabelecemos a teoria de existência e a solução numérica para a equação do transporte isotrópica, no estado estacionário em um meio participativo com fontes internas e fronteira semirreflexiva. No primeiro momento, estabelecemos a existência de solução, generalizando o resultado desenvolvido em [13], que estabeleceu a existência de solução no espaço Hölder C^α , aumentando a família de funções para fonte resolvendo para quaisquer fontes limitadas. De fato, em muitas aplicações no transporte de nêutrons as fontes são descontínuas, como apresentada em [21].

No segundo momento, para encontrar a solução numérica do fluxo escalar, aplicamos o método de Nyström para resolver a formulação integral da equação de transporte unidimensional. Em suma, discretizamos o operador integral, trabalhamos com a singularidade, fizemos testes com esquemas alternativos de quadratura, sendo Gauss-Legendre mais eficiente em todos os nossos experimentos numéricos, que produziu resultados com até seis dígitos significativos corretos.

Posteriormente, aplicamos uma segunda metodologia, método de Nyström Produto, que consiste em escrever o núcleo da integral como uma função peso em uma malha uniformemente espaçada, onde aproximamos a parte não singular do integrando em cada intervalo pelo polinômio interpolador de Lagrange com diferentes ordens. Nos nossos experimentos numéricos obtemos resultados com até seis dígitos significativos corretos comparados com a literatura.

Os métodos de Nyström, Nyström Produto e o *GFD* utilizado por [13], são da família dos métodos integrais, observamos que para o mesmo número de pontos, o método mais preciso foi o método de Nyström. Os métodos de Nyström e Nyström Produto, assim como o método GFD, funcionam como um vetor de Green, isto é, depois de escrever a formulação matricial, a solução do problema para diferentes fontes pode ser obtida apenas por uma multiplicação matricial. Essa propriedade é importante em problemas evolutivos de transferência radiativa, onde a equação de transporte é resolvida muitas vezes para diferentes fontes.

Seguidamente, comparamos as duas metodologias apresentadas nesse trabalho, Nyström e Nyström Produto, em questão de eficiência numérica nas situações apresentadas, para N não muito grande, por exemplo, $N = 101$ até $N = 401$ pontos, o método de Nyström apresenta resultados numericamente melhores, principalmente com a quadratura de Gauss-Legendre, porém para N suficientemente grande, por exemplo, $N = 3201$, os dois métodos produzem resultados com a mesma qualidade numérica.

Não fizemos uma comparação detalhada do tempo computacional entre as duas metodologias, visto que na implementação do método de Nyström Produto, na parte que envolve o núcleo, escrevemos $K(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$ e integramos essa função separadamente. Construimos a integral da soma por combinações dessas integrais, num loop simples com complexidade n , em vez de n^2 . Além disso, trabalhamos bem mais na otimização do método de Nyström Produto. Mas, por exemplo, para $N = 801$, com Nyström e Nyström Produto, obtemos 5s e 3s, respectivamente. Para $N = 1601$, com Nyström e Nyström Produto, obtemos 21s e 6s, respectivamente. Ressaltamos que o tempo computacional foi

medido a partir do início da compilação do código até a obtenção dos resultados em tela, em um computador Intel Core i5-7200U 2,50 GHz.

Por fim apresentamos resultados para o fluxo escalar médio com a fonte descontínua e coeficientes de reflexão diferentes de zero, relacionando a teoria de existência com a numérica, visto que, na teoria de existência estabelecemos solução no espaço Hölder C^α para quaisquer fontes limitadas. Do ponto de vista numérico, as duas metodologias apresentadas nesse trabalho, mostram-se estáveis para fonte descontínua, produzindo bons resultados.

Diante de uma perspectiva de estudos futuros poderíamos estender o método de Nyström Produto, removendo a singularidade do núcleo, como feito no Capítulo 3. Além disso, poderíamos estudar outras quadraturas para Nyström, por exemplo, Crenshaw-Curtis.

APÊNDICE A

Proposição A.1 A função $\ln(x) \in L^p[0, L]$, onde $1 \leq p < \infty$.

Começamos observando que se $L > 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^L |\ln(x)|^p dx &= \int_0^1 |\ln(x)|^p dx + \int_1^L |\ln(x)|^p dx \\ &= \int_0^1 (-\ln(x))^p dx + \int_1^L (\ln(x))^p dx \\ &= \int_0^1 (y)^p (-x dy) + d \\ &= \int_0^\infty (y)^p e^{-y} dy + d \\ &= \Gamma(p+1) + d,\end{aligned}$$

onde realizamos a troca de variável $-\ln(x) = y$ e $d = \int_1^L (\ln(x))^p dx$.

Agora, se $L \leq 1$:

$$\int_0^L |\ln(x)|^p dx \leq \int_0^1 |\ln(x)|^p dx = \Gamma(p+1),$$

assim, obtemos que $\ln(x) \in L^p[0, L]$, onde $1 \leq p < \infty$.

Proposição A.2 A função

$$\varphi(x) = \begin{cases} x \ln(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é $C^\alpha[0, L]$, $\forall x$ e $0 \leq \alpha < 1$.

Sem perda de generalidade assumimos $x < y$. Estimamos a diferença das funções $|y \ln(y) - x \ln(x)|$ pela integral da derivada da função ao longo

do intervalo x a y e utilizamos as desigualdades de Hölder e Minkowski:

$$\begin{aligned}
 |y \ln(y) - x \ln(x)| &= \left| \int_x^y (\ln(z) + 1) dz \right| \leq \int_x^y |\ln(z) + 1| dz \\
 &\leq \left(\int_x^y |\ln(z) + 1|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^y 1^q dz \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\int_x^y |\ln(z) + 1|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} |y - x|^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \left(\int_0^L |\ln(z) + 1|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} |y - x|^{\frac{1}{q}} \\
 &= \| |\ln(z) + 1| \|_{L^p[0,L]} |y - x|^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq [\| |\ln(z)| \|_{L^p[0,L]} + \| 1 \|_{L^p[0,L]}] |y - x|^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left[\left(\int_0^L |\ln(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} + (L)^{\frac{1}{p}} \right] |y - x|^{\frac{1}{q}} \\
 &= C |y - x|^{\frac{1}{q}}
 \end{aligned}$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha = \frac{1}{q}$ e $C = \left(\int_0^L |\ln(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} + (L)^{\frac{1}{p}}$, ou seja:

$$|y \ln(y) - x \ln(x)| \leq C |y - x|^\alpha,$$

onde C é constante.

Lema A.1 A integral $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{\mu}}}{\mu} d\mu = E_1(x)$, onde $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds$ e é chamada de exponencial integral.

Consideramos a seguinte mudança de variável $s = \frac{x}{\mu}$ e teremos $ds = -\frac{x}{\mu^2} d\mu$, assim:

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{\mu}}}{\mu} d\mu = \int_\infty^x \frac{e^{-s}}{\mu} \left(-\frac{\mu^2}{x} ds \right) = \int_x^\infty e^{-s} \left(\frac{\mu}{x} ds \right) = \int_x^\infty e^{-s} \frac{1}{s} ds.$$

Para maiores detalhes ver [7]. Agora, derivando $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds$

temos:

$$\frac{dE_1(x)}{dx} = \frac{-e^{-x}}{x} = \frac{-1}{x} \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = \frac{-1}{x} + 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} - \dots$$

logo:

$$E_1(x) \sim C - \ln x + x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{18}x^3 - \dots,$$

onde $C = -\gamma$ e $\gamma \approx 0,5772$ é a constante de Euler's. Assim, podemos representar:

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{\mu}}}{\mu} d\mu = -\ln(x) + \tau(x),$$

onde $\tau(x) = C + x - \frac{1}{4}(x)^2 + \frac{1}{18}(x)^3 - \dots$.

A seguir demonstraremos um lema técnico que, embora já está estabelecido na literatura (ver [39]), introduziremos aqui por completeza dos resultados.

Lema A.2 A função definida como

$$f(x) = \int_0^1 e^{-\frac{ax}{\mu}} d\mu \quad a > 0 \text{ e } x \geq 0$$

admite a seguinte estimativa:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \geq 0 \text{ e } C = C(a, \alpha)$$

Demonstração: Suponha sem perda de generalidade que $x > y$. Então temos

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_0^1 \left| e^{-\frac{ax}{\mu}} - e^{-\frac{ay}{\mu}} \right| d\mu$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 e^{-\frac{ay}{\mu}} \left| e^{-\frac{a(x-y)}{\mu}} - 1 \right| d\mu \\
&\leq \int_0^1 \left| e^{-\frac{a(x-y)}{\mu}} - 1 \right| d\mu \\
&= \int_0^1 \left(1 - e^{-\frac{a(x-y)}{\mu}} \right) d\mu \\
&= 1 - f(z), \quad z = x - y
\end{aligned}$$

Portanto, resta mostrar que

$$\sup_{z>0} \frac{1 - f(z)}{z^\alpha} < \infty$$

Defina

$$g(z) = \frac{1 - f(z)}{z^\alpha}.$$

Observe que $g(z)$ é uma função contínua para $z > 0$. Para mostrar que $g(z)$ é limitada é suficiente mostrar que são finitos os limites:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow 0} g(z).$$

Como $f(z)$ é decrescente e positiva, o primeiro limite existe. Agora, basta calcular o limite dado por

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - f(z)}{z^\alpha}. \quad (\text{A.1})$$

Para obter este limite, introduzimos a mudança de variáveis $s = \mu^{-1}$:

$$f(z) = \int_1^\infty e^{-azs} \frac{1}{s^2} ds$$

Integrando por partes, temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(-\frac{1}{s} e^{-azs} \right)_1^\infty - \int_1^\infty (-az e^{-azs}) \left(-\frac{1}{s} \right) ds \\ &= e^{-az} - az \int_1^\infty e^{-azs} \frac{1}{s} ds = e^{-az} - az E_1(az) \end{aligned}$$

onde $E_1(x) := \int_1^\infty e^{-xs} \frac{1}{s} ds$ representa a função exponencial integral, cuja assintótica em torno da origem pode ser obtida expandindo o integrando em séries de Taylor e extraindo a singularidade logarítmica (ver [7] [pág. 252] para detalhes):

$$E_1(x) = -(\gamma + \ln x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{kk!}, \quad x > 0.$$

Assim temos o seguinte comportamento assintótico para $f(z)$:

$$f(z) = e^{-az} - az E_1(az) = 1 + az \ln(az) + O(z), \quad z \rightarrow 0$$

e finalmente, temos:

$$\frac{1 - f(z)}{z^\alpha} = -az^{1-\alpha} \ln(az) + O(z^{1-\alpha}), \quad z \rightarrow 0$$

o que implica que o limite (A.1) é finito.

Agora basta definir

$$C = \sup_{z>0} |g(z)|.$$

■

Lema A.3 A função $x^\alpha \ln(x) \rightarrow 0, x \rightarrow 0^+$ e $\alpha \in [0, 1)$.

De fato, basta considerar a mudança de variável $z = x^\alpha$, e obtemos:

$$z \ln(z^{\frac{1}{\alpha}}) = \frac{1}{\alpha} z \ln(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow 0^+.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Boost c++ libraries, disponível em: <<https://www.boost.org/>>. Acesso em: 02 março 2020.
- [2] Gsl-gnu scientific library. disponível em: <<http://www.gnu.org/software/gsl/>>. Acesso em: 12 janeiro 2017.
- [3] ALTAC, Z., AND TEKKALMAZ, M. Nodal synthetic kernel (n-skn) method for solving neutron transport equation in one-and two-dimensional x-y geometries. *Annals of Nuclear Energy* 64 (2014), 320–332.
- [4] ATALAY, M. The critical slab problem for reflecting boundary conditions in one speed neutron transport theory. *Annals of Nuclear Energy* 23, 3 (1996), 183–193.
- [5] ATKINSON, K. The numerical solution of integral equations of the second kind. *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics* (1997).
- [6] BARICHELLO, L., AND SIEWERT, C. A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 62, 6 (1999), 665–675.
- [7] BENDER, C. M. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill, New York., 1978.
- [8] BOLTZMANN, L. Lectures on gas theory, english edition annotated by s. brush, 1964.

- [9] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [10] CASE, K. Elementary solutions of the transport equation and their applications. *ANNALS OF PHYSICS* 9 (1960), 1–23.
- [11] CHANDRASEKHAR, S. Radiative transfer. *New York: Dover, 1960* (1960).
- [12] DE AZEVEDO, F., SAUTER, E., KONZEN, P., THOMPSON, M., AND BARICHELLO, L. Integral formulation and numerical simulations for the neutron transport equation in x-y geometry. *Annals of Nuclear Energy* 112 (2018), 735–747.
- [13] DE AZEVEDO, F., SAUTER, E., THOMPSON, M., AND VILHENA, M. Existence theory and simulations for one-dimensional radiative flows. *Annals of Nuclear Energy* 38, 5 (2011), 1115–1124.
- [14] DE AZEVEDO, F., SAUTER, E., THOMPSON, M., AND VILHENA, M. Solution of the radiative heat transfer equation with internal energy sources in a slab by the greens functions decomposition method for anisotropic scattering. *Progress in Nuclear Energy* 65 (2013), 64–69.
- [15] DE BARROS, R. C., AND LARSEN, E. W. A numerical method for one-group slab-geometry discrete ordinates problems with no spatial truncation error. *Nuclear Science and Engineering* 104, 3 (1990), 199–208.
- [16] DE VILHENA, M., AND BARICHELLO, L. A new analytical approach to solve the neutron transport equation. *Kernteknik* 56, 5 (1991), 334–336.

- [17] DELVES, L., AND MOHAMED, J. Computational methods for integral equations, cambridge university press, 1985.
- [18] DOMÍNGUEZ, D. S., AND BARROS, R. C. The spectral green's function linear-nodal method for one-speed x, y-geometry discrete ordinates deep penetration problems. *Annals of Nuclear Energy* 34, 12 (2007), 958–966.
- [19] DUDERSTADT, J. J., AND MARTIN, W. R. Transport theory. *Transport theory*, by Duderstadt, JJ; Martin, WR. Chichester (UK): John Wiley & Sons (1979).
- [20] FRANK, M., SEAID, M., KLAR, A., PINNAU, R., THOMMES, G., AND JANICKA, J. A comparison of approximate models for radiation in gas turbines. *Progress in Computational Fluid Dynamics, an International Journal* 4, 3-5 (2004), 191–197.
- [21] GANAPOL, B. Analytical benchmarks for nuclear engineering applications.oecd nea/data bank, 2008.
- [22] GANAPOL, B. Comunicação privada, 2013.
- [23] GANAPOL, B. D. Radiative transfer with internal reflection via the converged discrete ordinates method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 112, 4 (2011), 693–713.
- [24] GARIS, N., AND SJ Ö STRAND, N. Eigenvalues for reflecting boundary conditions in one-speed neutron transport theory. *Annals of Nuclear Energy* 21, 2 (1994), 67–80.

- [25] GOLUB, G. H., AND VAN LOAN, C. F. *Matrix computations*, vol. 3. JHU press, 2012.
- [26] GONNET, P. Increasing the reliability of adaptive quadrature using explicit interpolants. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 37, 3 (2010), 1–32.
- [27] HOU, M. F., AND WU, C. Y. Integral equation method applied to radiative transfer in a 2d absorbing scattering refractive medium. *International communications in heat and mass transfer* 43 (2013), 63–68.
- [28] KRESS, R. Linear integral equations (applied mathematical sciences, volume 82), 1989.
- [29] LARSEN, E. W., THÖMMES, G., KLAR, A., SEAID, M., AND GÖTZ, T. Simplified pn approximations to the equations of radiative heat transfer and applications. *Journal of Computational Physics* 183, 2 (2002), 652–675.
- [30] LAX, P. D. *Functional Analysis Wiley Inter-Science*. Wiley-Interscience, New York, USA., 2002.
- [31] LOYALKA, S. K., AND TSAI, R. W. A numerical method for solving integral equations of neutron transport—ii. *Nuclear Science and Engineering* 58, 2 (1975), 193–202.
- [32] MARTIN, W. R., AND DUDERSTADT, J. J. Finite element solutions of the neutron transport equation with applications to strong heterogeneities. *Nuclear Science and Engineering* 62, 3 (1977), 371–390.

- [33] MODEST, M. F. *Radiative Heat Transfer*. Elsevier, 2003.
- [34] NAZ, S., AND LOYALKA, S. One speed criticality problems for a bare slab and sphere: Some benchmark results—ii. *Annals of Nuclear Energy* 35, 12 (2008), 2426–2431.
- [35] NYSTRÖM, E. J. Über die praktische auflösung von integralgleichungen mit anwendungen auf randwertaufgaben. *Acta Mathematica* 54, 1 (1930), 185–204.
- [36] PAZOS, R. P., AND DE VILHENA, M. T. Convergence in transport theory. *Applied Numerical Mathematics* 30, 1 (1999), 79–92.
- [37] PAZOS, R. P., AND DE VILHENA, M. T. Convergence of the ltsn method: approach of c0 semigroups. *Progress in nuclear energy* 34, 1 (1999), 77–86.
- [38] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., AND FLANNERY, B. P. *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007.
- [39] SAUTER, E. Modelos unidimensionais para fluxos condutivo-radiativos. tese doutorado, universidade federal do rio grande do sul, 2011.
- [40] SAUTER, E., AZEVEDO, F. S., THOMPSON, M., AND DE VILHENA, M. T. M. B. Solution of the one-dimensional transport equation by the vector green function method: Error bounds and simulation. *Applied Mathematics and Computation* 219, 24 (2013), 11291–11301.

- [41] SAUTER, E., DE AZEVEDO, F., AND KONZEN, P. Nyström method applied to the transport equation in a semi-reflective rectangle. *Journal of Computational and Theoretical Transport* 47, 4-6 (2018), 520–541.
- [42] SAUTER, E., DE AZEVEDO, F. S., THOMPSON, M., AND VILHENA, M. Eigenvalues of the anisotropic transport equation in a slab. *Transport Theory and Statistical Physics* 41, 5-6 (2012), 448–472.
- [43] THOMPSON, M., DE VILHENA, M., AND BODMANN, B. Existence theory for radiative flows. *Transport Theory and Statistical Physics* 37, 2-4 (2008), 307–326.
- [44] TSAI, R. W., AND LOYALKA, S. K. A numerical method for solving the integral equation of neutron transport—iii. *Nuclear Science and Engineering* 61, 4 (1976), 536–540.
- [45] VARGAS, R., SEGATTO, C., AND VILHENA, M. Solution of the radiative heat transfer equation with internal energy sources in a slab by the Itsn method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 105, 1 (2007), 1–7.
- [46] VAZ, P. Neutron transport simulation (selected topics). *Radiation Physics and Chemistry* 78, 10 (2009), 829–842.