UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

Pensamento combinatório e Objetos Digitais de Aprendizagem
Estudo construtivista nos anos iniciais

Elisa Friedrich Martins

Porto Alegre, RS, Brasil
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

ELISA FRIEDRICH MARTINS

Pensamento combinatório e Objetos Digitais de Aprendizagem
Estudo construtivista nos anos iniciais

Tese apresentada ao programa de pós-graduação em Informática na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Doutora em Informática na Educação

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Porto Alegre, RS, Brasil, 2020

CIP - Catalogação na Publicação

Friedrich Martins, Elisa
Pensamento combinatório e Objetos Digitais de Aprendizagem: Estudo construtivista nos anos iniciais / Elisa Friedrich Martins. -- 2020.
274 f.
Orientador: Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2020.

1. Objetos Digitais de Aprendizagem. 2. Pensamento combinatório. 3. Matematica nos anos iniciais. 4. Construção de conhecimento. I. de Azevedo Basso, Marcus Vinicius, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

ATA SOBRE A DEFESA DE TESE DE DOUTORADO
Elisa Friedrich Martins

Às nove horas e trinta minutos do dia nove de janeiro de dois mil e vinte, na sala 329 do PPGIE/CINTED, nesta Universidade, reuniu-se a Comissão de Avaliação, composta pelos Professores Doutores: Fernando Becker, Rodrigo Dalla Vecchia e Rute Elizabete de Souza Rosa Borba para a análise da defesa de Tese de Doutorado intitulada **"Pensamento Combinatório e Objetos Digitais de Aprendizagem: Estudo Construtivista nos Anos Iniciais"**, da doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação Elisa Friedrich Martins, sob a orientação do Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso.
A Banca, reunida, após a apresentação e arguição, emite o parecer abaixo assinalado.

[X] Considera a Tese aprovada
(X) sem alterações;
( ) sem alterações, com voto de louvor;
( ) e recomenda que sejam efetuadas as reformulações e atendidas as sugestões contidas nos pareceres individuais dos membros da Banca;

[ ] Considera a Tese reprovada.

Considerações adicionais (a critério da Banca):
A tese atende os requisitos necessários para sua aprovação. Destaca-se a qualidade do trabalho de pesquisa, o aspecto inovador e o objeto digital construído. Sugere-se que os apontamentos da banca sejam considerados na versão final.

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Orientador

Prof. Dr. Fernando Becker
PPGIE/UFRGS

Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia
IME/UFRGS

Rute E S R Borba
Prof.ª Dr.ª Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
UFPE

Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação - UFRGS
Av. Paulo Gama, 110 - Anexo III - 3º andar - CINTED/PPGIE
90040-060 - Porto Alegre/RS - Brasil

RESUMO

A presente pesquisa busca compreender o desenvolvimento do pensamento combinatório em crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para isso, mostrou-se necessário conceber e desenvolver um Objeto Digital de Aprendizagem (ODA) abordando o tema para essa faixa etária. A concepção, assim como a utilização do objeto produzido foram realizados sob a perspectiva do construtivismo de Jean Piaget. O desenvolvimento do ODA se deu com base no que indica a bibliografia sobre requisitos pedagógicos e técnicos. O uso do ODA fez parte da produção de dados da pesquisa. A análise das resoluções dos problemas apresentados e dos caminhos percorridos pelos estudantes na busca pelas soluções tornaram-se objetos de análise para que se pudesse esclarecer como o pensamento combinatório se desenvolve no estádio das operações concretas. Foram propostos problemas de produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação. Foram analisados os percursos de pensamento e as abstrações dos participantes da pesquisa ocorridas durante a resolução dos problemas. Os dados analisados permitiram afirmar que os participantes aprenderam conceitos de análise combinatória a partir do uso do ODA e das discussões com colegas e pesquisadores. Sem intervenções específicas sobre o assunto ou modelos a serem seguidos, muitos resolveram os problemas propostos. A partir das condutas observadas, identificou-se o desenvolvimento e a criação de estratégias com indícios de sistematização e generalização na construção de soluções para os problemas de combinatória.

Palavras-chave: Objetos de Aprendizagem; Pensamento Combinatório; Construção de conhecimento

ABSTRACT

This research seeks to understand the development of combinatorial thinking in Elementary School children.For this, it was necessary to conceive and develop a Digital Learning Object (DLO) addressing the theme for this age group. The conception, as well as the use of the object produced, were carried out from the perspective of Jean Piaget's constructivism. The development of DLO took place based on what the bibliography on pedagogical and technical requirements indicates. The use of DLO was part of the production of research data. The analysis of the solutions to the problems presented and the paths taken by the students in the search for solutions became objects of analysis in order to clarify how combinatorial thinking develops at the stage of concrete operations. Cartesian product, combination, arrangement and permutation problems have been proposed. The pathways of thought and abstractions of the research participants that occurred during problem solving were analyzed. The analyzed data allowed to affirm that the participants learned concepts of combinatorial analysis from the use of DLO and from discussions with colleagues and researchers. Without specific interventions on the subject or models to be followed, many solved the proposed problems. From the observed behaviors, it was identified the development and creation of strategies with evidence of systematization and generalization in the construction of solutions to the problems of combinatorics.

Keywords: Learning Objects; Combinatorial Thinking; Piagetian Theory

Sumário

Índice de quadros

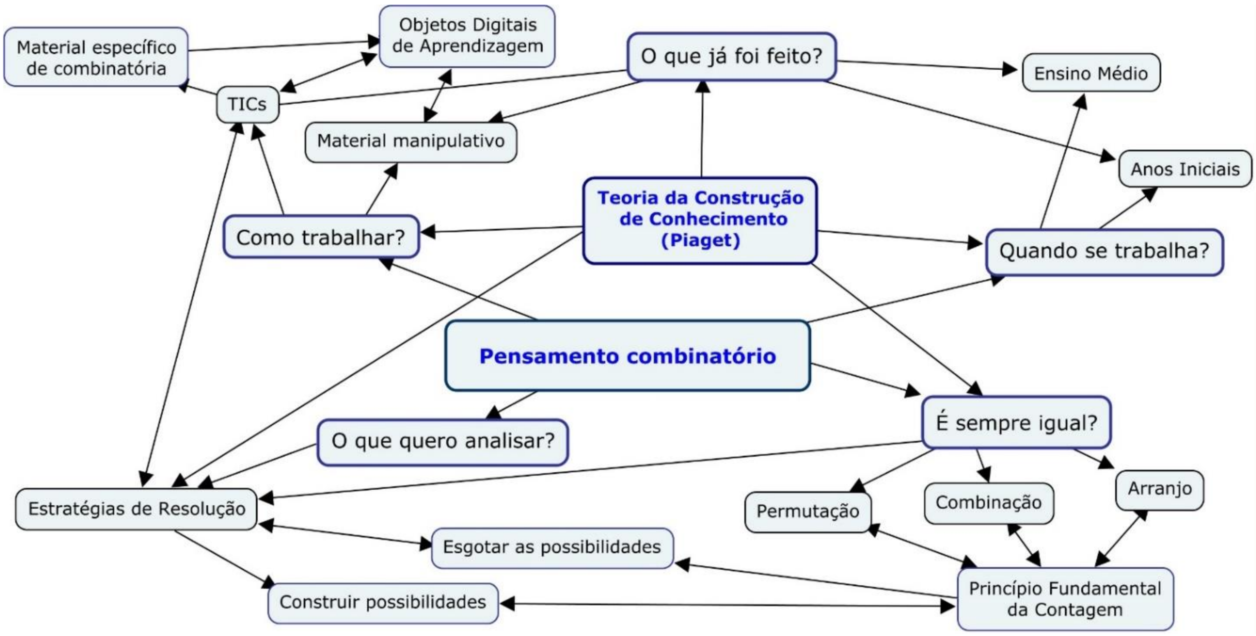
Índice de figuras

Índice de gráficos

1. INTRODUÇÃO

A presente Proposta de Tese inicia com um mapa que apresenta questões centrais e possíveis caminhos a serem explorados durante a pesquisa.

Figura 1 - Mapa com questões e percursos da pesquisa



Fonte: Elisa F. Martins

Nesse mapa, os aspectos centrais são a Teoria da Construção de Conhecimento, o Pensamento Combinatório e os Objetos Digitais de Aprendizagem. A partir desses temas surgem perguntas fundamentais para o encaminhamento e organização da pesquisa: O que já foi feito? Como trabalhar? O que analisar? Quando se trabalha na escola? É sempre da mesma maneira? O que existe de material disponível? Cada pergunta traz à tona aspectos que vão se ligando com as demais questões. A questão acerca do material existente contempla produção sobre o Ensino Fundamental (EF) e Médio (EM), com ou sem uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), usando ou não materiais manipulativos. A pergunta sobre o modo de inserir a Análise Combinatória nos Anos Iniciais está ligada às possíveis práticas: usar as TIC ou materiais manipulativos. Essa questão também sinaliza o uso de uma teoria sobre a aprendizagem que suporte o trabalho, que, nesse caso, é a Construção de Conhecimento, de Piaget. A indagação sobre a semelhança nos processos percorre as questões teóricas, metodológicas e conceituais. Além disso, para definir uma pesquisa, é imprescindível decidir o que se vai analisar e porquê. Usando uma teoria como base para determinada implementação metodológica, que tipos de dados serão produzidos e o que se busca na análise deles? Essas considerações constituem o esqueleto da pesquisa apresentada neste documento.

Documentos nacionais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) e a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017), produzidos pelo Ministério da Educação do Brasil, indicam que os problemas de contagem envolvendo raciocínio combinatório estejam presentes desde os anos inicias do Ensino Fundamental. Os livros didáticos que fazem parte do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) contemplam atividades com a temática, mas não aprofundam o tema. Na internet, os aplicativos que trabalham com problemas dessa natureza são voltados para os alunos do Ensino Médio ou aparecem na forma de questionário de múltipla escolha, voltados para uso e exploração de quem sabe resolver esse tipo de situação. Como a busca pelos materiais disponíveis na internet sobre o tema não encontrou nenhum ODA que atendesse aos interesses da pesquisa, fez parte da pesquisa, também, desenvolver um Objeto Digital de Aprendizagem (ODA) que proporcionasse a exploração de problemas de contagem - com situações de arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano - voltado para os alunos dos primeiros anos da Educação Básica.

O pensamento combinatório está associado à multiplicação. Autores como Vergnaud (1983) e Nunes e Bryant (1997) apresentaram as situações de combinatória como uma das interpretações para a multiplicação. Ou seja, o trabalho com a temática é relevante e se faz necessário. As TIC aparecem como possibilidade de, entre outras mudanças, romper os tempos estanques de uma aula. Trabalhando com um material digital, a partir de um repositório com diferentes atividades, permite-se que diferentes alunos ou grupos de alunos explorem diferentes problemas em um mesmo período em uma mesma sala de aula. Com material manipulativo isso também é possível, mas a organização do espaço e do professor é bem diferente. O mesmo problema pode ser resolvido em cinco minutos por um aluno ou grupo de alunos, e em 40 minutos por outro aluno ou grupo de alunos. Independentemente do tempo que levam e do número de problemas que resolvem, todos os participantes da aula estariam realizando a mesma atividade: problema de combinatória no computador.

Além do desenvolvimento, a pesquisa analisou o uso desse objeto sob a perspectiva da teoria piagetiana para investigar como se dá o desenvolvimento do raciocínio combinatório nessa etapa de escolarização. O objeto seguiu características definidas na literatura para recursos desse tipo e suas funções e questões foram pensadas a partir da teoria da construção do conhecimento de Jean Piaget.

Piaget, no seu livro *Da lógica da criança à lógica do adolescente* (1976) afirma que o pensamento combinatório e a construção de listas organizadas seriam atividades do período formal. Ou seja, apenas com cerca de 12 anos é que esses problemas seriam completamente compreendidos e resolvidos. Porém, pesquisas recentes mostraram que crianças dos anos iniciais já conseguem resolver alguns problemas envolvendo Análise Combinatória (PESSOA, 2009; AZEVEDO, 2013; OLIVEIRA, 2014; SILVA, 2016). Não quer dizer que elas sejam capazes de argumentar sobre o esgotamento das possibilidades encontradas, tampouco de utilizar cálculos para obter a resposta das questões, mas são capazes de criar listas com as possibilidades e, algumas, sistematizar a construção dessas listas. Não se tem a intenção de que estruturem o pensamento combinatório por completo, mas que sejam instigadas a pensar sobre esse tipo de questão e que comecem a construir suas soluções. O fato de não ter estruturas que permitam a resolução por completo e a justificativa do esgotamento de possibilidades não diminui a importância do envolvimento com os problemas. Além disso, o enfrentamento deste tipo de desafio é válido e importante para a formação matemática das crianças.

O texto está organizado de maneira que as questões identificadoras da pesquisa sejam apresentadas como seções do capítulo 1. O capítulo 2 traz o estado da arte sobre o tema, com uma revisão sistemática de ODA sobre a temática e com análise de produções científicas com problemas semelhantes. A fundamentação teórica sobre Análise Combinatória é desenvolvida no capítulo 3 e a obra de Piaget a ser usada na pesquisa compõe o capítulo 4. O capítulo 5 traz o suporte teórico sobre os Objetos de Aprendizagem. O capítulo 6 apresenta a metodologia implementada e o capítulo 7 apresenta o COMBOBJETO, objeto concebido e desenvolvido para a produção de dados. O capítulo 8 traz as a análise dos dados coletados. O capítulo 9 traz os resultados da pesquisa e o capítulo 10, as conclusões.

No corpo do texto, os capítulos apresentarão um mapa inicial apontando os principais pontos do capítulo e suas relações. Cada mapa possui uma síntese do que é discutido no texto e sintetiza as relações que pretendem ser evidenciadas.

1.1 Justificativa

No ano letivo de 2017, a coordenação pedagógica da escola onde trabalho[1] organizou os horários de forma que eu ficasse responsável por dois períodos semanais em cada turma dos quartos e quintos anos do Ensino Fundamental. Esses períodos deveriam ser dedicados à Matemática. Em reunião com os professores referência das turmas, decidiu-se que meu trabalho teria como foco a resolução de problemas (histórias matemáticas). A partir do conjunto de conteúdos elencados para cada um desses anos, se definiu também que eu assumisse o que era relativo à Análise Combinatória. Como essa era uma parte pouco discutida em sala de aula, propus problemas similares para as turmas de quarto e quinto ano. Foi surpreendente a semelhança nas dúvidas, estratégias usadas para encontrar soluções, erros e acertos. Defini, então, que levaria essa experiência adiante, na forma de pesquisa, pois como Piaget coloca “Toda pesquisa sobre o pensamento da criança deve partir da observação e a ela voltar para controlar as experiências que essa observação vier a inspirar.” (Piaget, 2005, p. 12)

Buscando materiais e textos acerca do tema, encontrei o material do PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa) - curso do qual participei em 2014 - que propunha os problemas de Análise Combinatória desde o primeiro ano do Ensino Fundamental. Folheando livros didáticos aprovados pelo PNLD 2016 localizei atividades (na forma de exercícios) relativas ao tema. Na internet, encontrei textos sobre a temática, mas não em volume expressivo. Dos materiais encontrados, a maioria tinha foco no Ensino Médio, etapa escolar em que o assunto Análise Combinatória é trabalhado com bastante ênfase. Foram localizados questionários para serem resolvidos online e videoaulas sobre o assunto, essas em maior quantidade e com foco no Ensino Médio. Inicialmente não foram localizados recursos na forma de aplicativos, *applet*, Objetos de Aprendizagem que fossem pensados para

[1] Para esta seção se optou por usar primeira pessoa do singular, uma vez que a justificativa da escolha do tema/problema foi uma situação particular vivida pela autora.

trabalhar o tema com os alunos do Ensino Fundamental.

Tal fato levou à decisão de desenvolver recurso digital que abordasse Análise Combinatória para ser usado com os alunos do Ensino Fundamental. Com o Objeto idealizado, a pesquisa passou a envolver, também, a análise do uso desse objeto pelos alunos. O ODA foi desenvolvido com o apoio de um bolsista, a partir da linha C: Recursos Educacionais Digitais do Edital UFRGS EaD 25, da Secretaria de Educação a Distância da UFRGS. Encontra-se pronto e em fase de catalogação para ser disponibilizado no repositório da secretaria citada.[2] Para a pesquisa, a utilização do ODA transformada em dados tornou-se objeto de análise para a compreensão sobre como ocorre o desenvolvimento do pensamento combinatório de alunos dos anos iniciais do EF.

No contato com pesquisas sobre o tema, cheguei a uma pesquisa realizada em Portugal que apresentou as diferentes resoluções de alunos do 9º ano (Correia & Fernandes, 2009) para problemas de combinatória. O trabalho analisou as diferentes representações e o desempenho dos alunos ao resolver problemas de combinação, arranjo simples, arranjo com repetição e permutação. O conjunto de problemas propostos continha questões específicas sobre generalizações. As representações e estratégias usadas pelos alunos demonstraram que

> a utilização de modelos sistemáticos de enumeração, de forma completa, revelou-se central na resolução correcta dos problemas de combinatória propostos, já que a falta de sistematização e a dificuldade em repetir procedimentos sistemáticos de enumeração conduziram ao esquecimento ou à repetição de configurações. (CORREIA; FERNANDES, 2009, p. 16)

O grupo GERACAO (Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório), da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), desenvolveu diferentes pesquisas envolvendo alunos de diferentes etapas escolares e propostas de exploração do tema. O contato com essas leituras só fez aumentar a curiosidade de estudar o pensamento combinatório dos alunos com os quais eu estava envolvida. As perguntas sobre o quê observar e como proceder borbulhavam. A vontade de ter um material do jeito que eu queria e pra atender as minhas demandas e expectativas ganhou força e peso. E virou realidade!

---

[2] O repositório que deve receber o COMBOJETE pode ser acessado através do link https://lume.ufrgs.br/handle/10183/119798.

1.2 Problema de pesquisa

Compreender o desenvolvimento do pensamento combinatório de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental utilizando Objetos Digitais de Aprendizagem.

1.3 Questão

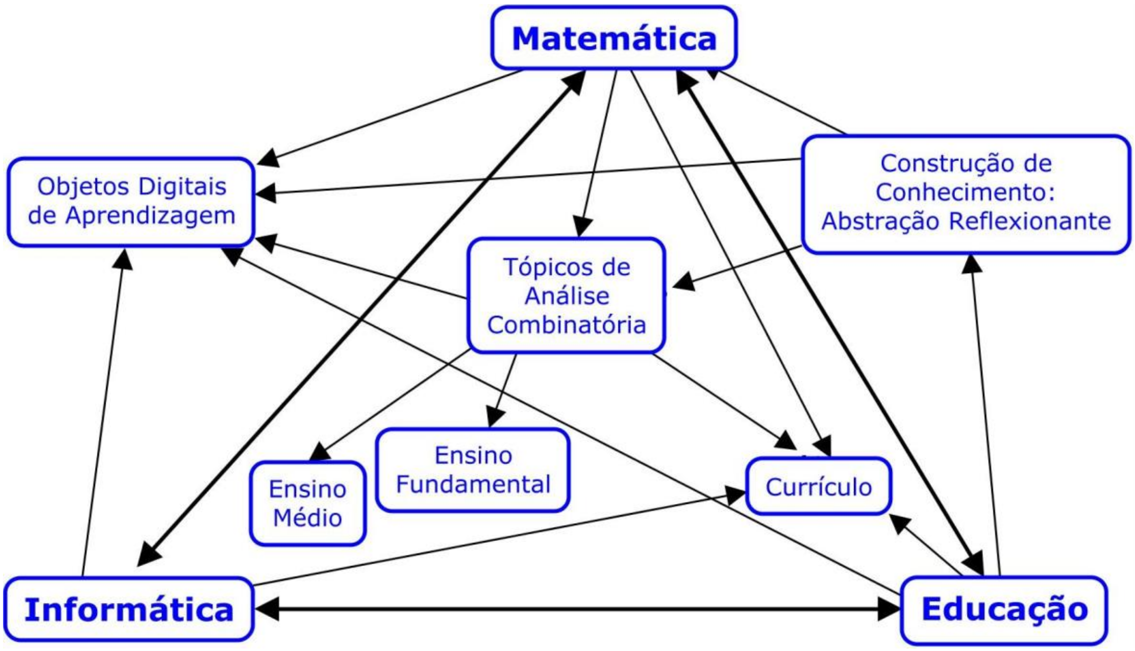
Quais os percursos cognitivos de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental na resolução de problemas envolvendo pensamento combinatório?

1.4 Objetivos

- Refletir sobre limites e possibilidades de trabalhar com problemas de Análise Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental
- Analisar, à luz da teoria piagetiana, as estratégias de resolução adotadas e o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes envolvidos na pesquisa
- Discutir o acesso às tecnologias pelos estudantes participantes da pesquisa
- Desenvolver um ODA que permita o trabalho com problemas de Análise Combinatória nos primeiros anos do Ensino Fundamental

2. ESTADO DA ARTE

Figura 2 - Mapa com relações entre as produções sobre a temática



Fonte: Elisa F. Martins

Para buscar o que há de produção de conhecimento sobre o tema deve-se considerar o tripé sobre o qual a pesquisa está colocada: Matemática-Informática-Educação. Sendo assim, a produção científica relacionada com essas três grandes áreas se faz presente no texto. As interseções entre as áreas trazem proximidade com o trabalho, mas pesquisas e materiais de cada uma das áreas, em específico, contribuem de maneira significativa na busca pelas respostas do presente estudo.

O mapa (Figura 2) apresenta, além das ligações entre esses três campos, dois itens ligados aos três: o Currículo e os Objetos Digitais de Aprendizagem. A discussão sobre como se desenvolve, quem desenvolve e, mais importante de tudo, o que consta no currículo da Educação Básica ocupa espaço nas diferentes áreas às quais a Educação está ligada. Especificamente, para essa pesquisa, se pensam as questões relativas à presença das Tecnologias Informação e Comunicação (TIC) e dos tópicos de Análise Combinatória como parte integrante do currículo dos anos iniciais do Ensino Fundamental. O desenvolvimento e o uso de Objetos Digitais de

Aprendizagem no Ensino Fundamental também marcam espaço nas discussões e propostas para essa etapa de escolarização.

O problema da pesquisa versa sobre os tópicos de Análise Combinatória que estão presentes nas salas de aula do Ensino Médio e se propõe fazer mais presentes nas salas dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A teoria de piagetiana construção do conhecimento – Epistemologia Genética, que dá suporte à pesquisa, está intimamente ligada à Educação e à Matemática e possibilita pensar o desenvolvimento do pensamento combinatório.

2.1 Publicações sobre o tema

No Brasil, o grupo GERAÇAO desenvolve pesquisas e discussões sobre problemas de Análise Combinatória em diferentes níveis de formação, da Educação Infantil ao Ensino Superior. Coordenado pela professora doutora Rute Borba, o grupo tem um expressivo número de publicações em eventos e periódicos, além de trabalhos de conclusão de curso, dissertações e teses acerca do tema sendo abordado em diferentes etapas e modalidades de ensino. Foram selecionados quatro trabalhos do grupo como amostra da produção sobre a temática. Além disso, uma dissertação de mestrado do Programa de Pós-graduação em Educação da UFRGS é trazida para complementar a amostra. O quadro a seguir apresenta as obras analisadas com informações sobre o tipo de trabalho, o ano de publicação e os principais referenciais teóricos utilizados para a análise dos dados. Depois, cada uma delas é apresentada de modo sintético junto das principais conclusões de cada trabalho:

Quadro 1 - Produção acadêmica sobre o tema

Tipo de trabalho e ano de publicação	Título	Referencial teórico utilizado
Trabalho de Conclusão de Curso	Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais	Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud

2007		
Tese de doutorado 2009	Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio	Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud Estádios de desenvolvimento de Jean Piaget
Dissertação de mestrado 2012	Análise combinatória e construção de possibilidades: o raciocínio formal no Ensino Médio	Abstração Reflexionante de Jean Piaget
Dissertação de mestrado 2013	Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: é melhor no papel ou no computador?	Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud
Dissertação de mestrado 2015	Reconhecendo o Princípio Fundamental da Contagem como estratégia na resolução de problemas combinatórios	Tipos de conhecimentos de Ball, Thames e Phelps

Fonte: Elisa F. Martins

A pesquisa de Fernanda Sá Barreto, Fábio Amaral e Rute Borba (BARRETO; AMARAL; BORBA; 2007), cujo título é *Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais* foi escrita como Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Pedagogia da UFPE. Para a pesquisa foram analisadas cinco coleções de livros didáticos aprovadas pelo PNLD. Nessas publicações, fez-se a verificação, tanto no livro do aluno quanto no manual do professor, dos tipos de problemas que envolviam o raciocínio combinatório e o tratamento dado a esses quanto a significados, propriedades e representações simbólicas trabalhados. Essas observações são consequência de usar, além da estatística, a teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

No texto, os dados são apresentados em quadros com conclusões apresentadas baseadas em estatísticas. Os problemas apresentados foram classificados entre produto cartesiano, combinação, arranjo, permutação. Ficou evidenciado que os problemas envolvendo combinação apresentaram maior percentual total de tipos de problemas encontrados nas cinco coleções analisadas. Os problemas do tipo produto cartesiano em segundo lugar. As situações envolvendo permutações apareceram em terceiro lugar e os problemas de arranjo obtiveram os menores percentuais entre os significados. Em nenhuma das coleções foram abordadas as propriedades invariantes do raciocínio combinatório. Os autores consideraram que no livro do aluno das séries iniciais do Ensino Fundamental não se faz necessária essa abordagem, no entanto salientaram a importância de que o professor tenha, em seu manual, orientações explícitas dos diferentes significados do conceito, assim como das propriedades invariantes.

Foi possível concluir também que, de modo geral, houve uma variação dos tipos de representações simbólicas tanto no que diz respeito às representações apresentadas pelos problemas quanto às propostas pelos autores como exemplos de resolução, incentivando, dessa forma, o aluno a representar os problemas de formas diversificadas. Foram reconhecidas as seguintes representações: desenho, apenas enunciado, algoritmo, manipulativo, tabela, árvore de possibilidades, cálculo oral ou mental, mais de uma para um mesmo problema, outras (fotografia, jogo, etc.).

No segundo trabalho, a autora Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa (PESSOA, 2009), da UFPE, defendeu sua pesquisa intitulada *Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio*. A pesquisa também utilizou como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, propondo a discussão sobre os significados, invariantes e representações simbólicas. O trabalho apresenta a classificação dos problemas a partir da proposição apresentada por Nunes e Bryant (1997), pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) e por Vergnaud (1983, 1991). Traz a teoria de Piaget e expõe as diferenças entre sua pesquisa e a realizada pelo pesquisador em 1955. A autora utiliza a classificação em níveis criada por Soares e Moro (2006) para avaliar o desempenho na resolução de problemas combinatórios (a partir das teorias apresentadas):

- Nível I: ausência de solução combinatória;
- Nível II: dos primeiros indícios de soluções combinatórias;

- Nível III: alguma aproximação de soluções combinatórias;
- Nível IV: presença de soluções combinatórias.

A pesquisa aplicou um teste com oito questões (duas de arranjo, duas de combinação, duas de permutação e duas de plano cartesiano) sendo que quatro tratavam de pequeno número de possibilidades e quatro envolviam valores maiores. Os mesmos problemas foram propostos a alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio de duas escolas públicas e duas escolas da rede privada de Recife. As respostas foram analisadas de forma qualitativa e quantitativa (estatisticamente) a partir dos seguintes critérios: gênero, tipo de escola, nível de ensino (Ensino Fundamental I[3], Ensino Fundamental II e Ensino Médio), ano de escolarização, significado de combinatória do problema (produto cartesiano, arranjo, permutação, combinação).

As conclusões foram de que não houve diferença significativa entre percentual de acertos por gênero. Houve diferença significativa entre o percentual de acerto por tipo de escola, sendo que os alunos de escola privada obtiveram resultados significativamente melhores. Houve diferença significativa nos resultados quando comparados pelos níveis de ensino. Pode-se dizer que há um salto maior do Ensino Fundamental I para o Ensino Fundamental II que do Fundamental II para o Ensino Médio. Considerando os anos de escolarização, os resultados dos alunos do 2º, 3º e 4º ano do EF não apresentam diferenças significativas, mas são inferiores aos resultados do 5º ano do EF. Da mesma forma, do 5º ao 8º ano os percentuais de acerto são crescentes, mas não apresentam diferença significativa. Comparando com os alunos do 9º ano eles apresentam resultados significativamente inferiores. Os percentuais de acerto do 9º ano do EF e dos 3 anos do Ensino Médio aparecem de forma crescente, mas não apresentam diferenças significativas.

A pesquisa de Mariana Lima Duro (DURO, 2012), intitulada *Análise combinatória e construção de possibilidades: o raciocínio formal no Ensino Médio*, foi realizada pelo Programa de Pós-graduação em Educação da UFRGS. No trabalho, a autora aplicou o método clínico piagetiano com alunos do Ensino Médio e da

[3] Ensino Fundamental I refere-se à primeira etapa do EF, os cinco primeiros anos; essa etapa é chamada também de anos iniciais. Já Ensino Fundamental II refere-se aos anos finais do EF, do 6º ao 9º ano.

Educação de Jovens e Adultos (EJA) em experimentos sobre combinatória. Utiliza a teoria da Abstração Reflexionante para analisar os dados coletados nas entrevistas. Para a classificação dos sujeitos, sintetiza como características de cada nível as atitudes listadas abaixo:

- Nível I: Ausência de sistematização multiplicativa. Sendo em IA a ausência total de sistematização e o nível IB uma sistematização aditiva.
- Nível II: início da sistematização multiplicativa. Sendo que IIA há um início de sistematização, mas sem dissociação dos fatores. Em IIB já há dissociação dos fatores empíricos (combinações n a n).
- Nível III: uso de sistematizações generalizadoras. Em IIIA há combinação sistemática (n a n) e em IIIB aparece a necessidade de generalização.

Uma conclusão é a de que as idades são mesmo variáveis, pois todos os sujeitos, por idade, seriam capazes de apresentar o nível III, porém apenas 5 dos 21 entrevistados apresentaram este tipo de raciocínio. Sendo que, destes cinco, apenas um caracterizou suas respostas como do nível IIIB.

A pesquisa de Juliana de Azevedo (AZEVEDO, 2013) traz o título *Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: é melhor no papel ou no computador?* e aborda duas maneiras de resolver problemas a partir dos diagramas de árvores de possibilidade: com papel ou com o computador. Utiliza como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud (significados, invariantes, representação) e analisa a resolução a partir da representação por árvore de possibilidades com computador ou com lápis e papel, por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Utiliza dados qualitativos e também quantitativos para comparar grupos com propostas/intervenções diferentes. Foram feitos pré-testes, pós-testes imediatos (logo depois das intervenções) e pós-testes depois de algum tempo para verificar as aprendizagens que se consolidaram. As conclusões finais indicam que apenas a passagem do tempo não faz com que os alunos melhorem seu desempenho na resolução de problemas combinatórios. Os alunos que trabalharam com multiplicação sem discutir especificamente problemas combinatórios também não tiveram melhora significativa no desempenho. Os alunos que contaram com intervenções específicas acerca do tema obtiveram resultados significativamente melhores (estatisticamente). Ainda se destacou que o grupo que utilizou o software obteve, em média, resultados inferiores à média do grupo que trabalhou com lápis e papel. Essa diferença foi atribuída à necessidade de trabalhar com duas representações diferentes, pois para a realização dos pós-testes era necessário trabalhar sem o computador, ou seja, de uma maneira diferente da abordada na intervenção. O grupo que fez as árvores de possibilidades com lápis e papel durante a intervenção trabalhou com esse mesmo tipo de representação na hora de resolver os pós-testes e foi o grupo que teve melhores resultados (estatisticamente).

A pesquisa de Ana Paula Barbosa de Lima (LIMA, 2015), com o título *Reconhecendo o Princípio Fundamental da Contagem como estratégia na resolução de problemas combinatórios* foi apresentada como dissertação de mestrado. O trabalho contemplou dois estudos: um com a finalidade de saber se professores e estudantes reconhecem o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) em situações combinatórias; e o outro estudo que tinha como objetivo investigar conhecimentos de professores de Matemática sobre a resolução e o ensino de problemas combinatórios com o uso do PFC.

Para analisar os dados foram usadas ferramentas e teorias estatísticas e os tipos de conhecimento sugeridos por Ball, Thames e Phelps (2008): conhecimento comum do conteúdo, conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento horizontal do conteúdo, conhecimento do conteúdo e alunos, conhecimento do conteúdo e ensino e conhecimento do conteúdo e currículo. Como principais resultados tem-se que os professores do Ensino Médio melhor reconhecem o uso do PFC quando comparados com os professores do Ensino Fundamental. O reconhecimento do PFC pelos professores do Ensino Médio é muito superior ao dos alunos deste nível de ensino. Os professores evidenciam conhecimentos comum e especializado do PFC, bem como horizontal, mas não indicam como relacionar o princípio multiplicativo com as fórmulas da Análise Combinatória. Evidenciam conhecimento do aluno, mas referente ao conhecimento do ensino não deixam claro como o uso de outras estratégias, tais como árvores de possibilidades e fórmulas, se relacionam com o PFC. Melhores conhecimentos do que é prescrito e apresentado em currículos também são necessários. Concluiu-se que os conhecimentos docentes do PFC podem servir de base para um melhor desenvolvimento do ensino e da aprendizagem da Combinatória, mas há aspectos do conhecimento que os professores necessitam desenvolver melhor.

Os resultados dos trabalhos relatados anteriormente foram publicados em diferentes eventos e periódicos. Algumas dessas publicações aparecem nas referências (AZEVEDO; BORBA; 2010; AZEVEDO; BORBA; 2015; AZEVEDO; VEGA; ARAÚJO; 2016; BORBA; ROCHA; AZEVEDO; 2015; BORBA; AZEVEDO; BITTAR; 2016; BORBA; AZEVEDO; BARRETO; 2015; DURO; BECKER; 2013; DURO; BECKER; 2015; LIMA; BORBA; 2014; LIMA; BORBA; 2015a; LIMA; BORBA; 2015b; PESSOA; BORBA; 2009; PESSOA; BORBA; 2010; PESSOA; BORBA; 2012), mas optou-se por discutir apenas os trabalhos completos.

Considerou-se os trabalhos relacionados ao uso de Objetos de Aprendizagem muito distantes da proposta da pesquisa por tratarem de questões de informática ou temas muito distantes da Combinatória nos anos iniciais. Sendo assim, as publicações acadêmicas sobre o tema versaram sobre a resolução de problemas dentro do universo da combinatória e focando a faixa etária ou o referencial teórico proposto por este trabalho.

Além das publicações acadêmicas, cabe ressaltar que o governo federal investiu e organizou um programa de formação continuada para os professores dos três primeiros anos do Ensino Fundamental. Este curso, com duração de dois anos, trabalhou com alfabetização por um ano (2014) e numeramento no ano seguinte (2015). O material produzido e utilizado pelos professores do PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa) em 2015 contemplava os conteúdos de matemática previstos para essa etapa de escolarização. O caderno 7, Educação Estatística, traz um texto de Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa de título *O ensino de combinatória no ciclo de alfabetização.* (Pessoa, 2014) Neste texto, a autora traz possibilidades de trabalho com crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental e propõe atividades para sala de aula. As atividades aparecem resolvidas e com uma breve análise de resoluções apresentadas, sendo elas completas, incompletas e incorretas. Como afirma a autora,

> O desenvolvimento do raciocínio combinatório é um processo longo. É

> necessário, portanto, que durante a escolarização os diferentes tipos de problemas sejam trabalhados e que haja um aprofundamento contínuo para que as estratégias próprias das crianças, mais informais, sejam gradativamente transformadas em procedimentos e sistematizados. (PESSOA, 2014 p. 50)

O presente trabalho pretende agregar dados e discussões sobre a temática. O uso das TIC aparecem em apenas um trabalho, a partir de um software específico e não gratuito. Os referenciais usados são bastante próximos aos utilizados, pois Vergnaud era discípulo de Piaget e sua teoria não é contraditória à produção do autor usado neste documento. O desenvolvimento e o uso do Objeto Digital de Aprendizagem, trouxeram elementos importantes sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos e o contexto da sala de aula. Dado o interesse por usar recursos digitais, a próxima seção traz a busca por tais recursos e o que foi encontrado.

2.2 Objetos Digitais de Aprendizagens disponíveis

A busca por Objetos existentes que abordassem conceitos de combinatória para uso no Ensino Fundamental deu-se em repositórios nacionais e internacionais. As ferramentas de busca disponíveis em cada repositório variam bastante. Sendo assim, o escopo “análise combinatória+ensino fundamental+objeto de aprendizagem” foi usado de maneiras diversas. O quadro abaixo (Quadro 2) apresenta, de forma sintética, o que foi encontrado em cada repositório visitado. Depois do quadro, cada ODA ou repositório será abordado separadamente.

Quadro 2 - Objetos digitais disponíveis em repositórios

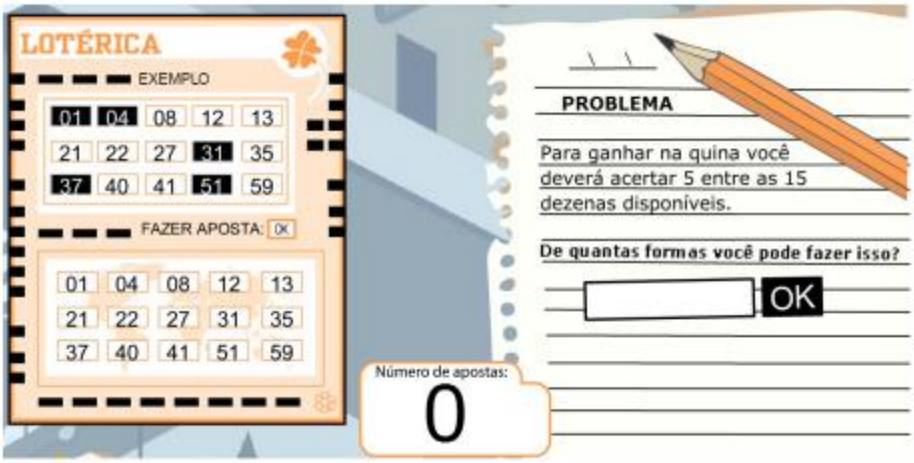
Repositório, Instituição responsável	Nome do objeto	Público-alvo e tipo de atividade proposta
RIVED Rede Internacional Virtual de Educação (MEC - Brasil)	Permutação	Para o Ensino Médio. Objeto Digital/ Aplicativo que contém problemas envolvendo permutação para serem resolvidos com o auxílio de fórmulas
	Arranjo	Para o Ensino Médio. Objeto Digital/ Aplicativo que contém problemas envolvendo arranjo para serem resolvidos com o

		auxílio de fórmulas
	Combinação	Para o Ensino Médio. Objeto Digital/ Aplicativo que contém problemas envolvendo combinação para serem resolvidos com o auxílio de fórmulas
BIOE Banco Internacional de Objetos Educacionais (MEC - Brasil)	Caminhões e outros	Para o Ensino Fundamental Atividade para imprimir com um problema envolvendo combinação
Casa das Ciências (Universidade do Porto - Portugal)	Cálculo Combinatório	Para o Ensino Médio Uma calculadora que apresenta as listas de arranjos, permutações e combinações de letras indicando o conjunto de onde os dados são retirados e a quantidade de elementos que devem ser considerados.
EDUCAPES (MEC - Brasil)	Combinatória	Para o Ensino Médio Uma calculadora que apresenta a quantidade de arranjos, permutações ou combinações a partir da indicação dos parâmetros *n* e *p*.
KhanAcademy (organização internacional)	Combinatória	Para o Ensino Médio Vídeo-aulas sobre o assunto e problemas que podem ser resolvidos e apresentam dicas e correção. Não fala na fórmula, mas apresenta a possibilidade de pedir dicas e permite o uso de uma calculadora para resolver os problemas
	Pixar in a box: multidões	Não especifica o público Conjunto de materiais contendo vídeos explicativos e problemas a serem resolvidos com uso de calculadora. Possui duas etapas onde aparecem as imagens para que a resposta seja construída na tela (montando as possibilidades) com ícones.
Portal do Professor (MEC - Brasil)	variados	Para o Ensino Médio. Vídeo-aulas e textos. Possui também alguns planos de aula com atividades sugerindo uso de material manipulativo não digital a ser produzido pelo professor.
Matific (Organização internacional)	Combinações	Para o Ensino Fundamental. Objeto que propõe uma questão e dispõe de ícones para que a resposta seja, antes de digitada, construída na tela. (Não é livre)

Fonte: Elisa F. Martins

Os três objetos do RIVED são semelhantes. São problemas que envolvem cada uma das três situações de combinatória (combinação, arranjo e permutação). Os ODA possuem uma contextualização interessante dos conceitos. O público-alvo para o uso dos ODA é o Ensino Médio. Além da linguagem usada, o material traz as fórmulas usadas em cada situação. Contém dicas e pretende levar o usuário a um entendimento da situação. Apesar disso, depois de um reduzido número de tentativas (três) a fórmula é apresentada como caminho para se chegar à solução. Além disso, cada ODA traz já no título a situação de combinatória envolvida; sejam elas combinação, arranjo ou permutação. Tal fato tira do usuário a responsabilidade e desafio de reconhecer a stiuação a partir do enunciado e do problema.

Figura 3 - Captura de tela do objeto Combinação do RIVED

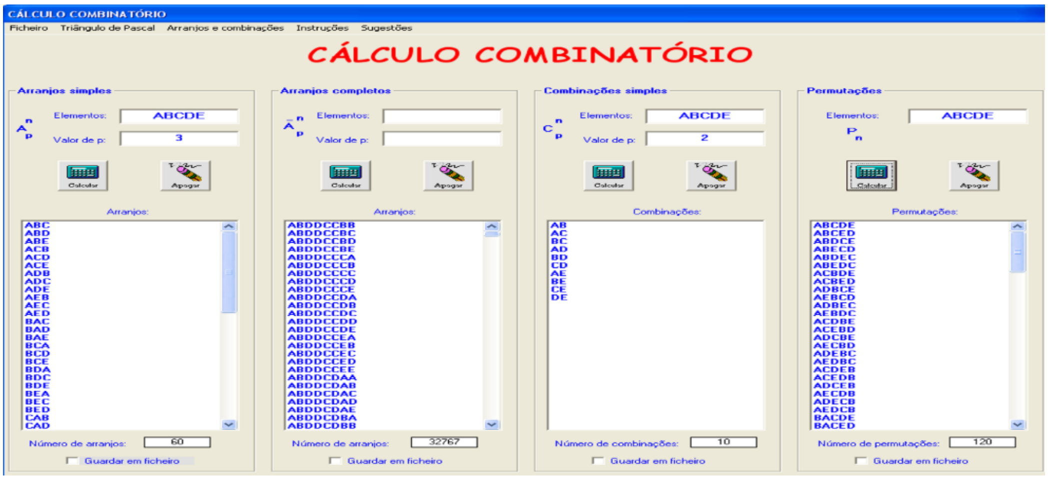


Fonte: RIVED

O que foi encontrado no BIOE atende a algumas expectativas da pesquisa, pois o público-alvo é o mesmo. Porém, são atividades para imprimir, ou seja, não proporcionam o uso das TIC em sala de aula.

O ODA *Cálculo combinatório* da Casa das Ciências e o material disponível no EDUCAPES são semelhantes. São calculadoras que realizam os cálculos a partir das fórmulas. No Cálculo combinatório (Figura 4) é preciso saber que tipo de situação é (combinação, arranjo ou permutação) e colocar os valores nos campos corretos. Além de dar o valor, o recurso exibe o conjunto solução.

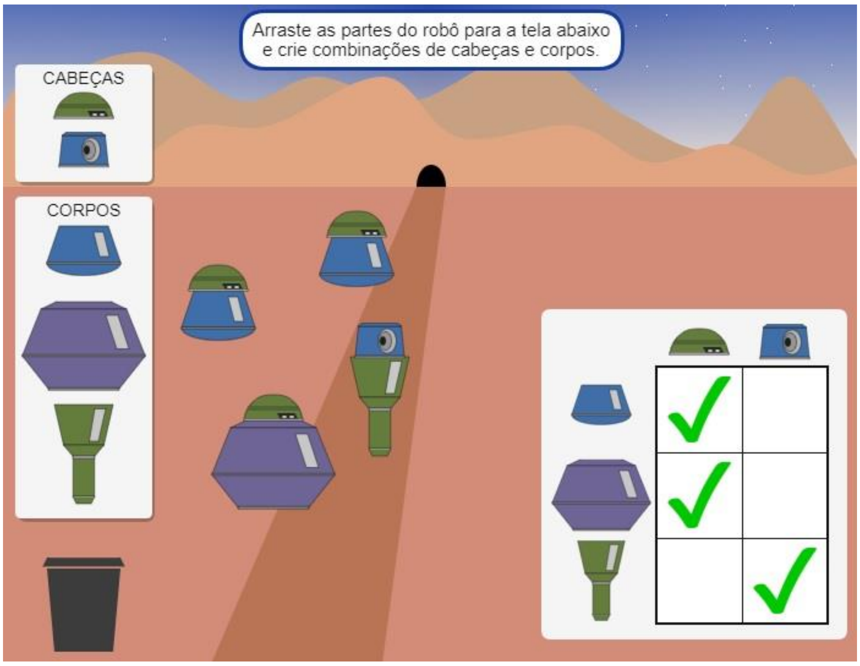
Figura 4 - Captura de tela do ODA Cálculo Combinatório



Fonte: Casa das Ciências

O material da KhanAcademy é bastante vasto. Contempla vídeos e problemas sobre combinatória. Um ODA que é parte de um conjunto de materiais explora um problema de produto cartesiano. O contexto, a linguagem e a ação esperada do usuário são bastante coerentes com o buscado pela pesquisa. Porém, o ODA é uma parte de uma unidade de trabalho, sendo assim, é um tanto laborioso chegar ao ODA de forma direta.

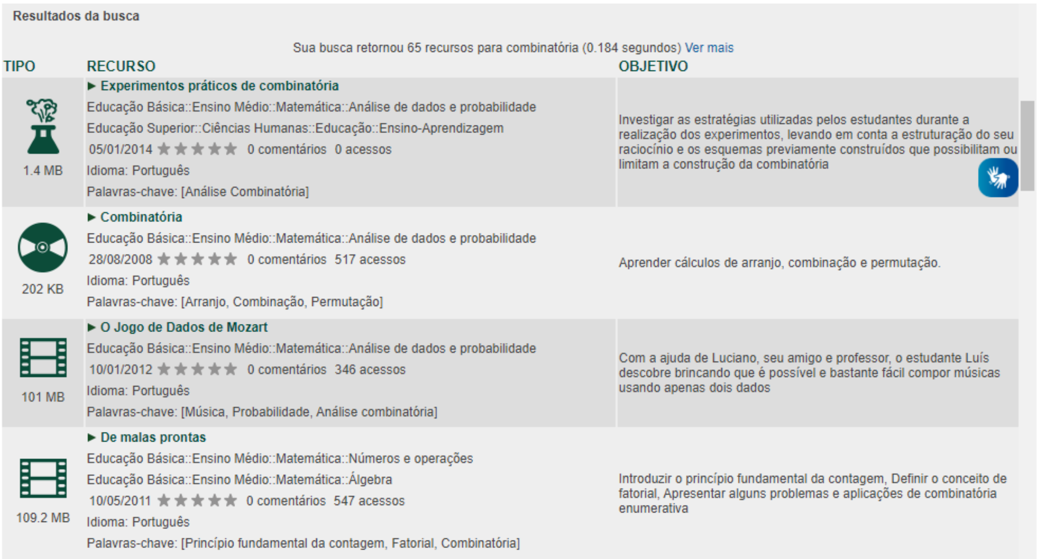
Figura 5 - Captura de tela do ODA do site KhanAcademy



Fonte: Khan Academy

No Portal do Professor estão disponíveis diferentes recursos multimídia sobre o tema combinatória; a maioria deles com foco nos estudantes do EM. Os recursos são classificados como: experimento prático, áudio, vídeo, software educacional, animação/simulação, imagem, mapa, hipertexto. Os experimentos são descrições de atividades a serem realizadas em sala de aula sem uso de tecnologia; os áudios e vídeos são materiais prontos e para serem usados de forma “passiva”, ou seja, sem interação com o ODA; os softwares educacionais e as animações/simulações são considerados, pela autora, ODAs que poderiam ser encaixados no que era buscado. Porém, além do foco ser os estudantes do Ensino Médio e, com isso, a linguagem e o tipo de problema e resolução esperada inapropriados para os anos iniciais, os recursos disponíveis traziam as fórmulas e poucas possibilidades de interação e de ação por parte dos usuários.

Figura 6 - Captura de tela da busca no Portal do Professor



Fonte: Portal do Professor

O site Matific possui muitos materiais de Matemática para os anos iniciais. O que afasta o material do desejado pela pesquisa é o fato de não ser livre. É preciso pagar para a escola ter acesso. Uma vez acessado o material, ele faz um acompanhamento dos alunos e permite ao professor montar sua proposta usando diferentes recursos disponíveis. A linguagem e o tipo de desafio proposto foram considerados adequados para a faixa etária, pois eram lúdicas e de vocabulário e uso bastante simples.

Figura 7 - Captura de tela do ODA do site Matific

Fonte: Matific

Além desses repositórios, o Repositório Aberto (Universidade Aberta - Portugal) e o Wisc-online (Wisconsin's Technical Colleges) também foram visitados, mas não apresentaram nenhum material relacionado à busca.

Uma revisão sistemática semelhante foi realizada e publicada em 2009. Tal revisão, intitulada *Softwares educativos e objetos de aprendizagem: um olhar sobre a combinatória* (LEITE et. al., 2009) traz, além dos objetos do RIVED apontados no quadro, os softwares Árbol e ML Combiner. O primeiro, constrói árvores de possibilidades a partir de informações dadas pelo usuário e permite editar uma série de parâmetros dos elementos das árvores criadas[4]. O segundo, explora as combinações de números, sendo possível determinar o conjunto de números possíveis (universo a ser usado) e quantos devem ser retirados (quantos farão parte da solução), mas não explora nenhuma maneira de auxiliar na aprendizagem sobre o tema.

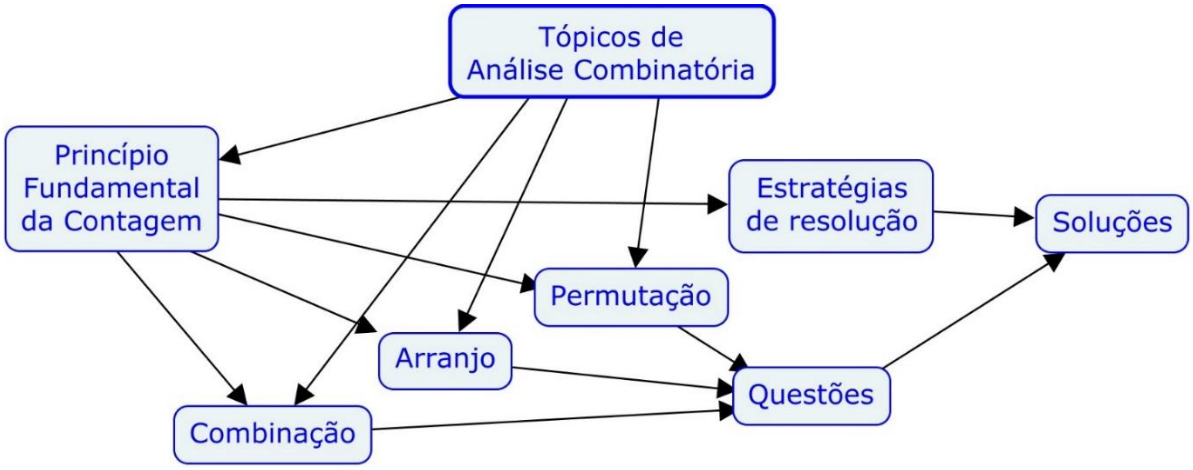
Comparando a busca atual com a realizada e publicada em 2009 (LEITE et. al., 2009) concluiu-se que pouco se produziu sobre a temática nesses dez anos decorridos. Um grande empenho em produção de videoaulas gerou grande parte do material produzido desde então. Porém, tal recurso não é considerado, pela pesquisadora, adequado para os anos iniciais do EF. Organizações Internacionais

[4] Esse software foi usado no trabalho citado na seção anterior (AZEVEDO, 2013)

como Khan Academy e Matific surgiram como desenvolvedores de material de qualidade sobre a temática. Todavia, esses dois contém particularidades que os impedem de fazer parte da sala de aula da maioria das escolas públicas: o Matific não é livre e o Khan Academy é um conjunto pronto de atividades que contém os ODA como uma fração da “unidade” sobre combinatória. O fim de projetos como o RIVED e o BIOE, que efetivaram investimento público em desenvolvimento de materiais digitais para a Educação Básica, evidenciou uma diminuição nessa produção. Sendo assim, a revisão realizada reforça a necessidade de desenvolvimento de material disponibilizado gratuitamente sobre o tema.

3. ANÁLISE COMBINATÓRIA

Figura 8 - Mapa com ideias acerca de Análise Combinatória presentes na pesquisa



Fonte: Elisa F. Martins

Diferentes documentos oficiais nacionais apresentam indicações para que os problemas de Análise Combinatória façam parte do currículo desde o Ensino Fundamental. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) tratam especificamente sobre o currículo da Educação Básica no Brasil. Os dois documentos trazem trechos evidenciando a presença desse tema desde os anos inicias do Ensino Fundamental. O Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) promoveu uma formação em massa dos professores dos primeiros três anos do EF, ciclo de alfabetização. O material produzido para essa formação contém um caderno intitulado *Educação Estatística* que foi mencionado no capítulo anterior. Ou seja, esse tema deve se fazer presente nas salas de aula do EF.

Apesar de ser aprofundado no Ensino Médio, este tema deve fazer parte dos currículos de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Uma vez que no Ensino Médio o trabalho acerca de Análise Combinatória utilize fórmulas para resolver problemas envolvendo combinação, arranjo e permutação; no Ensino Fundamental, o objetivo principal é familiarizar-se com o tipo de problema e elencar estratégias de resolução. Muitas vezes os alunos dos anos iniciais do EF não são fluentes na leitura, tampouco capazes de interpretar problemas escritos, também não efetuam com fluidez os algoritmos das quatro operações matemáticas elementares; os ODA são, portanto, uma maneira de transpor esses obstáculos. Também é por essas razões que os documentos oficiais citados falam em “lidar com situações envolvendo combinatória”. A indicação não é de que aprendam a resolver os problemas ou compreender em definitivo as diferenças e semelhanças entre as situações de arranjo, permutação, combinação e produto cartesiano.

O Quadro 3 traz os trechos dos documentos que abordam especificamente o tema:

Quadro 3 - Publicações nacionais apontando o ensino de Análise Combinatória

PCN	1º e 2º ciclos (1º ao 5º ano)	“(...) levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos e permutações e, principalmente, o princípio fundamental da contagem.” (BRASIL, 1997, p. 57)
	3º e 4º ciclos (6º ao 9º ano)	“(…) o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para aplicação no cálculo de probabilidade.” (BRASIL, 1998, p.52).
BNCC	4º ano	“Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.” (BRASIL, 2017, p. 289).
	5º ano	“Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.” (BRASIL, 2017, p. 293).
PNAIC		“(...) crianças de cinco a oito anos de idade, que estão ou que entrarão no ciclo de alfabetização, são capazes de desenvolver um raciocínio combinatório. Elas utilizam estratégias próprias de resolução e algumas conseguem esgotar todas as possibilidades e outras, mesmo que não consigam, demonstram que são capazes de entender o que o problema solicita. Há, também, crianças que não conseguem ainda compreender a lógica dos problemas, mas que, se vivenciarem um trabalho sistemático poderão desenvolver o pensamento combinatório” (BRASIL, 2014, p. 47).

Fonte: acervo da pesquisa

Cabe colocar que a BNCC retrocedeu quanto aos PCN e às indicações do PNAIC quanto ao trabalho com o tema nos anos iniciais. Os documentos anteriores não falavam em problemas simples, expressão usada na BNCC, e apontavam explicitamente todas as situações de contagem. Tal fato pode fazer retroceder também a prática adotada em salas de aula de manter esse tópico apenas no Ensino Médio. A presente pesquisa se mostra ainda mais relevante e necessária para que fique registrada a possibilidade e a importância desse assunto ser tratado desde o início da escolarização básica.

Embora não seja um objetivo da pesquisa aprofundar os conceitos e características específicas das situações de combinatória, considera-se importante trazê-los para o texto. Os conceitos apresentados aqui estão colocados de forma resumida e mais aprofundada do que foram trabalhados com os alunos do Ensino Fundamental. As classificações dos problemas e os enunciados não foram abordados durante a pesquisa. Porém, o conteúdo/conceito de Matemática trabalhado precisa estar claro para que se compreenda o quê e com que profundidade pode ser explorado nos anos inicias do Ensino Fundamental.

A Análise Combinatória é parte importante do trabalho de matemática do segundo ano do Ensino Médio e aparece em disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática. Assim, de forma recorrente, o conteúdo está presente nos livros de diferentes etapas escolares.

Autores e professores costumam trabalhar com fórmulas para resolver problemas de permutação, arranjo e combinação. Porém, com os pequenos com os quais a pesquisa se desenvolveu isso não seria possível, pois os alunos não dominam álgebra. Mais especificamente porque as fórmulas são expressões que envolvem indeterminadas que, em cada problema, tomam valores distintos; o que usualmente não é conhecido nessa etapa de escolarização. Sendo assim, optou-se por propor a construção das soluções. Mais importante do que conhecer e aplicar corretamente as fórmulas é construir a resolução dos problemas a partir dos princípios básicos de contagem: o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. As fórmulas para as situações especiais de permutação, arranjo ou combinação são a aplicação desses princípios. Como base para este capítulo foi utilizado o livro *Introdução à análise combinatória,* de José Plínio Santos, Margarida Mello e Idani Murari publicado em 2006.

3.1 Princípio Fundamental da Contagem

Ao tratar o ensino de combinatória se aborda o pensamento ou raciocínio combinatório. Resolver problemas desse assunto implica se colocar no lugar de quem toma as decisões e faz as escolhas. Para dividir determinada situação em casos particulares é necessário reconhecer quais as particularidades da situação que podem dar origem a esses casos. É imprescindível separar em casos que sejam complementares entre si e que, unidos, garantam a construção de todas as possibilidades, sem haver repetição e sem deixar de considerar alguma situação possível. Enfim, é preciso entender o problema em sua totalidade para poder resolvê-lo como problemas menores. Muitos problemas podem ser resolvidos a partir de atalhos (maneiras diferentes de olhar o problema e que o resolvem com um número reduzido de operações), mas o entendimento do atalho só será efetivo para aqueles que compreenderem a situação e a maneira de construir sua solução a partir dos princípios de contagem.

> Não dê preferência a raciocínios destrutivos, raciocínios do tipo contar a mais e depois descontar o que não servia e foi contado indevidamente. Os raciocínios que resolvem a maior parte dos problemas de combinatória são essencialmente construtivos. (LIMA et al. p. 137)

O Princípio Fundamental da Contagem pode ser descrito como princípio multiplicativo e, como dito anteriormente, é necessário pensar nas etapas de escolhas e no número de possibilidades existentes a cada etapa. Ao final, é necessário rever se há casos contados mais de uma vez, identificá-los para poder descartá-los.

Podemos enunciar tal princípio da seguinte maneira:

Se um evento A pode ocorrer de *p* maneiras diferentes e, se para cada uma dessas *p* maneiras de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de *q* maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $p \times q$.

Exemplo: *Numa lancheria há 5 opções de suco natural e 2 opções de* *sanduíche. Mariana quer comprar um sanduíche e um suco natural. Quantos são os possíveis pedidos que Mariana pode fazer?*

Tomando os sucos por Su e os sanduíches por Sa podemos montar as seguintes opções de pedido:

Su1 e Sa1	Su1 e Sa2
Su2 e Sa1	Su2 e Sa2
Su3 e Sa1	Su3 e Sa2
Su4 e Sa1	Su4 e Sa2
Su5 e Sa1	Su5 e Sa2

Conclui-se que ela tem 10 opções de pedido diferentes para fazer. Podemos identificar os conjuntos:

$A = \{p|p \text{ é } um\ suco\} = \{Su1, Su2, Su3, Su4, Su5\}$

$B = \{q|q \text{ é } um\ sanduíche\} = \{Sa1, Sa2\}$

$A \times B$

$= \{(Su1, Sa1), (Su1, Sa2), (Su2, Sa1), (Su2, Sa2), (Su3, Sa1), (Su3, Sa2), (Su4, Sa1),$

$(Su4, Sa2), (Su5, Sa1), (Su5, Sa2)\}$

O conjunto A tem 5 elementos, o conjunto B tem 2 elementos, o conjunto $A \times B$ tem 10 elementos ($5 \cdot 2$).

O princípio multiplicativo pode ser estendido para casos com mais de dois conjuntos. E o enunciado fica o seguinte:

> Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n$ maneiras diferentes. (Fonte: SANTOS et al. p. 29)

Dentro da Análise Combinatória costuma-se classificar os problemas como situações de combinação, arranjo ou permutação. Para essa classificação são levados em conta algumas características do problema como a relevância ou não da ordem e a utilização de todos os elementos do conjunto ou de parte deles. É importante identificar as situações e suas diferenças para que todas sejam apresentadas e vivenciadas pelos estudantes envolvidos na pesquisa, sem explicitar que determinado problema é de combinação, por exemplo. Essa classificação não foi apresentada e não é relevante para a etapa escolar envolvida na pesquisa, mas as particularidades de cada situação são importantes para que todas sejam exploradas.

3.2 Permutação

Os problemas de permutação simples são casos específicos de aplicação do princípio multiplicativo. São as situações que envolvem utilização de todos os elementos de um determinado conjunto variando a ordem em que os mesmos estão dispostos. É um caso particular de arranjo, cuja diferença é que utiliza todos os elementos do conjunto em cada elemento da solução.

Pode-se definir permutação como

> Permutação de *n* elementos distintos é o número de listas ordenadas que se pode formar com esses *n* elementos. Denotamos esse número por P_n.

Problemas comuns que envolvem permutação são os que tratam do número de anagramas de determinada palavra. Anagrama é uma "palavra" que pode ou não fazer sentido, escrita com as mesmas letras de uma palavra dada. Por exemplo, a palavra SOL tem 6 anagramas: SOL, SLO, LOS, LSO, OLS, OSL.

Exemplo: *Quantos são os anagramas da palavra FRIO?*

Para a solução, preciso montar palavras com as mesmas 4 letras: F-R-I-O.

É possível formar essa palavra escrevendo uma letra de cada vez. Para a primeira letra são 4 opções; depois, 3 opções para a segunda letra, 2 para a penúltima e a última letra será a que ainda não foi utilizada, com apenas uma opção. Então, o total de anagramas da palavra FRIO é $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Convém notar que poderíamos iniciar a escolha por qualquer letra e teríamos 4 opções, depois escolheríamos uma letra, dentre as 3 restantes, para outra posição e assim até que todas as posições estivessem ocupadas. Desta forma, o conjunto de anagramas seria exatamente o mesmo obtido escolhendo a letra da 1ª a 4ª posição, nesta ordem.

Como consequência do PFC $P_n = n!$, onde n é o número de elementos do conjunto e o ponto de exclamação se lê *fatorial*. O número n! é obtido pelo produto de todos os naturais de n até 1, ou seja, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$.

Para resolver o problema do exemplo anterior usando a fórmula, basta tomar n=4 obtendo P_4=4!=24.

3.3 Arranjo

Os problemas de arranjo simples são semelhantes aos de permutação, porém não são todos os elementos do conjunto que são utilizados em cada caso. Ou seja, de um conjunto de *n* elementos, são tomados *p* elementos (para poder fazer isso é necessário que $1 \leq n \leq p$) e formadas todas as listas ordenadas distintas.

Exemplo: *Sabrina, Manuela, Camila, Fernanda e Bruna apostaram uma corrida. De quantas maneiras elas podem subir no pódio se não houver empate?*

Para a solução é preciso colocar uma delas em primeiro, outra em segundo e uma em terceiro lugar. Duas meninas sempre ficarão de fora do pódio. Para o primeiro lugar são 5 opções. Para o segundo lugar são 4 opções e para o terceiro lugar restam 3 opções. É possível resolver a partir do princípio multiplicativo e obter $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Do princípio multiplicativo decorre $A(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!}$

Então, para resolver o exemplo usando esta fórmula é preciso identificar que n=5 e p=3 e aplicar

$$A(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

3.4 Combinação

As situações de combinação são aquelas em que um subconjunto é formado a partir de um conjunto dado. Ou seja, de um conjunto de *n* elementos é formado um subconjunto de *p* elementos (para isso é necessário que $1 \leq n \leq p$). Num conjunto, a ordem em que os elementos são representados é irrelevante.

Exemplo: *Uma turma de 7 meninas precisa inscrever uma dupla em um torneio* *de tênis de mesa. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?*

Para a solução é necessário escolher duas entre sete meninas. A dupla M1 e M2 é a mesma que M2 e M1, uma vez que as duas pessoas desempenham o mesmo papel na dupla. Para escolher a primeira menina são 7 opções, para escolher a segunda são 6 possibilidades. Usando o princípio multiplicativo tem-se $7 \cdot 6 = 42$ duplas ordenadas. Porém, nessa contagem a dupla M1 e M2 foi contada duas vezes, pois ora M1 aparece como primeira integrante, ora M2 aparece como primeira integrante. Então, dividindo o total por dois descontamos o que foi contado em excesso obtendo $42 \div 2 = 24$ duplas possíveis.

Partindo do princípio multiplicativo se chega a $C(n,p) = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$. Conhecendo essa fórmula, constata-se, no exemplo anterior, que n=7 e p=2 e calcula-se $C(7,2) = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 24$.

Conhecer os tipos de problemas se faz importante para que todos sejam abordados e explorados pelos alunos desde os primeiros anos de escolarização. As fórmulas e, tampouco, as classificações necessitam ser apresentadas ou figurarem como objetivo. Como apontaram as pesquisas do capítulo 2, cada tipo de problema tem invariantes e significados distintos. Com o tempo e a familiarização com os problemas esses invariantes vão sendo percebidos e, com eles, os esquemas de ação para se chegar à resolução também se estruturam. A resolução através do PFC é uma forma construtiva de buscar a resposta, que se assemelha às maneiras iniciais propostas por quem se coloca diante de um problema de combinatória pela primeira vez. Assim, o ODA que se pretende utilizar e as resoluções que se busca construir são desta forma também planejadas: construídas.

3.5 Produto Cartesiano

As situações envolvendo produto cartesiano foram definidas por Pessoa e Borba (2007) a partir de Nunes e Bryan (1997). Tratam-se de situações que envolvem dois ou mais conjuntos disjuntos para que se formem pares/trios/grupos.

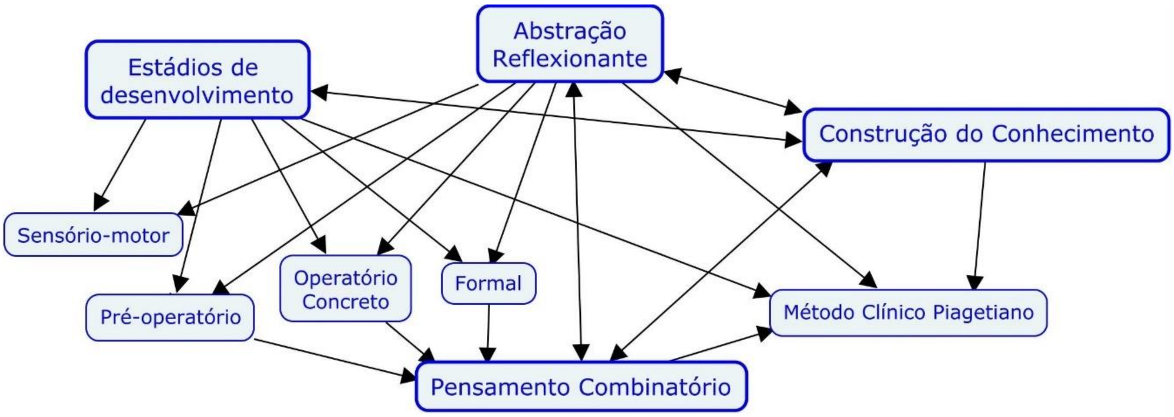
Considerando um conjunto A com *n* elementos e um conjuntos B com *m* elementos que não fazem parte de A, são formados pares com um elemento de cada conjunto. Por se tratarem de conjuntos disjuntos, a ordem em que o par é apresentado é irrelevante.

Exemplo: *Clarice tem folhas de ofício de 5 cores diferentes: amarelo, azul, branco, verde e vermelho. Ela também tem 3 envelopes distintos, sendo um deles laranja, um preto e outro roxo. De quantas maneiras ela pode montar um conjunto papel*+*envelope?*

Para a solução é necessário escolher uma cor de folha e outra de envelope. Ou seja, para cada uma das cinco cores de folha é possível escolher uma entre três cores de envelope. A multiplicação $5 \cdot 3 = 15$ é o cálculo que soluciona tal problema.

4 CONTRIBUIÇÕES DE JEAN PIAGET

Figura 9 - Mapa com relações entre a teoria de Jean Piaget e a pesquisa



Fonte: Elisa F. Martins

A obra de Piaget será explorada de modo a apresentar as ligações propostas no mapa acima. O processo de construção do conhecimento, especificamente dos conhecimentos relativos à Análise Combinatória, é estudado a partir da Abstração Reflexionante. Os sujeitos são desafiados e suas atitudes, observadas a partir dos princípios do método clínico. Esses procedimentos possibilitam descrever qual dos estádios de desenvolvimento caracteriza suas ações: sensório-motor, pré-operatório, operatório-concreto ou formal.

Jean Piaget (1896-1980) foi um biólogo e, depois, psicólogo e epistemólogo que dedicou sua vida a pesquisar para tentar entender como se desenvolve a inteligência humana. Suíço, viveu e estudou em Genebra por muitos anos. Também desenvolveu pesquisas e trabalhou em Paris, onde firmou importantes parcerias. Buscava responder à seguinte questão: Como um ser que nasce com um repertório tão limitado de movimentos e conhecimentos chega a ser capaz de desenvolver teorias abstratas e complexas?

Piaget é considerado um dos mais importantes pensadores do século XX. Sua obra consiste em mais de cinquenta livros e centenas de artigos, apresentando diferentes enfoques e discutindo diferentes campos de saberes. Um dos marcos de sua teoria é a descrição e explicação do que chamou de estádios de desenvolvimento cognitivo que podem ser observados em comportamentos característicos de diferentes etapas da vida de uma pessoa; ele o fez do nascimento ao início da vida adulta.

Para a realização de suas pesquisas desenvolveu um método de entrevista que foi denominado, posteriormente, “Método Clínico Piagetiano”. Esse método consiste em entrevistas que buscam compreender, ou melhor, evidenciar a maneira como pensam os entrevistados acerca de temas específicos. Esses temas variam de acordo com a pesquisa desenvolvida, passando por conceitos de Matemática, de Física ou mesmo sobre questões morais e filosóficas.

Para abordar a construção do conhecimento a respeito de Análise Combinatória buscamos as obras de Piaget: *Abstração Reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*, de 1977[5], *Da lógica da criança à lógica do adolescente,* de 1955[6] e *A Origem da ideia do acaso na criança*, de 1951. Essas três obras permitem que se vislumbre o desenvolvimento do raciocínio combinatório a partir da teoria piagetiana. O livro *Para onde vai a educação?* de 1972[7], traz questões gerais sobre a teoria de Piaget e suas implicações nas salas de aula. Da mesma forma, o texto de Orlando Lourenço, de 1998, traz contribuições sobre a obra de Piaget que complementam a discussão. Ainda foram consultadas obras como *Problemas de psicologia genética* de Piaget (1983) e *Para compreender Piaget* (Dolle, 1987) e outros títulos que auxiliaram na composição do presente texto.

Para discutir como Piaget compreende e apresenta o desenvolvimento do pensamento combinatório é necessário entender como ele apresenta o desenvolvimento do pensamento de forma geral. Para escrever sobre a construção do raciocínio combinatório é imprescindível tratar a construção do conhecimento de forma mais ampla.

As seções a seguir abordarão cada uma das ideias de Piaget consideradas importantes para esta pesquisa: os estádios de desenvolvimento cognitivo (seção 4.1), o método clínico (seção 4.2), o processo de construção do conhecimento (seção 4.3) e as abstrações reflexionantes (seção 4.4).

---

[5] O ano de publicação da primeira edição do livro é de 1977, mas o livro aparece com a referência de 1995, pois foi a edição usada para a consulta da pesquisa.
[6] O ano de publicação da primeira edição desta obra é 1955, mas a edição usada na pesquisa é de 1976, sendo essa a data que aparece nas referências do trabalho.
[7] A edição desta obra usada na pesquisa foi publicada em 2007, sendo esta a data que vai aparecer na citações ao longo do texto.

4.1 Estádios de desenvolvimento cognitivo

A classificação dos estádios de desenvolvimento é um dos grandes marcos da teoria piagetiana. Ele considerou um estádio uma estrutura de conjunto, um conjunto de ações e de certezas que se manifestam com certa duração. Essa descrição dos estádios está presente em muitas obras apresentando, a cada pesquisa, comportamentos que caracterizam cada um dos estádios. Os estádios são os seguintes: sensório-motor, pré-operatório, operatório-concreto e operatório-formal. Cada estádio apresenta idades médias, de início e término, das crianças/jovens que apresentam, em sua maioria, performances cognitivas similares. Em seus textos, Piaget apresenta essas idades sempre deixando claro que elas não são suficientes para que se classifique uma criança como encontrando-se neste ou naquele estádio, uma vez que "a idade é um indicador, não um critério de desenvolvimento" (LOURENÇO, 1998, p. 522). Em primeiro lugar porque as idades podem variar bastante e uma mesma pessoa pode apresentar comportamentos relativos a estádios diferentes quando envolvida com situações/conceitos diferentes. Em segundo lugar, porque "são os comportamentos, não as pessoas que se encontram em estádios" (LOURENÇO, 1998, p. 522).

O que ocorre quanto aos estádios é que a ordem de sucessão das aquisições deve ser constante. Independentemente da idade em que a criança esteja, ela vai apresentar atitudes típicas dos estádios desde o sensório-motor até alcançar o formal. Os estádios possuem um caráter integrativo, ou seja, as construções de um nível são integradas e fazem parte da estrutura do nível seguinte. Ou seja, cada estádio apresenta todas as construções/certezas e esquemas do estádio precedente, porém refeitos em função das características do novo estádio. Isso faz com que, muitas vezes, a criança apresente comportamentos que parecem intermediários a dois estádios. Isto também ocorre porque cada estádio tem uma parte de preparação para o estádio seguinte e de acabamento (DOLLE, 1987, p. 53). Preparação no sentido de que as estruturas que caracterizam o próximo estádio não se configuram de uma hora para outra, de forma imediata. E de acabamento porque quando se inicia a construção de novas estruturas é porque as anteriores estão se fundamentando de maneira completa.

Para pensar os estádios é necessário ter claro que o ponto fundamental da teoria piagetiana é a ideia de que pensar é agir. E a maneira de agir, as ações do sujeito é que permitem que se caracterize como pertencentes a este ou àquele estádio. Podem ser elencados como característicos dos estádios os seguintes comportamentos:

- Estádio sensório-motor. Vai do nascimento da criança até a aquisição da linguagem, por volta dos dois anos de idade. Os primeiros atos da criança são aprendidos a partir da repetição. Um bebê de duas semanas mama melhor do que nos primeiros dias de vida. Depois, quando fortuitamente atinge um resultado que o agrada procura repeti-lo. Posteriormente, explora os objetos para compreendê-los, não mais repete comportamentos considerados agradáveis, mas empreende diferentes ações para observar o que elas produzem: bater, esmagar, esfregar, sacudir, raspar, jogar, puxar. São os embriões da pesquisa, pois em um mesmo objeto se aplicam diferentes ações para se observar o resultado produzido. Em seguida, passa a usar de esquemas intermediários para atingir um fim: usa um bastão para trazer para si um objeto inatingível diretamente; puxa por um cordão um objeto que esteja amarrado a ele; ultrapassa ou retira obstáculos que impeça de alcançar objetos desejados. A intencionalidade das ações, com objetivos claros, marca o início das ações ditas inteligentes. (PIAGET, 1970)

- Estádio pré-operatório ou simbólico: Dos dois aos sete ou oito anos de idade, aproximadamente. Este estádio é, definitivamente, preparatório no que diz respeito às operações. A inteligência simbólica desenvolve-se e apresenta a capacidade de fazer de conta. O jogo e a fantasia começam a fazer parte da vida da criança. Primeiramente, imita algo que está vendo (ação de alguém, gestos de um vídeo, animais, etc.). Posteriormente imita algo que não está presente, demonstrando capacidade de representação. Esse estádio é marcado pela ausência de conservações de número, de massa, de superfície, de comprimentos, de peso, de volume. Caracterizam-se essas (pré)operações pela ausência de reversibilidade.

- Estádio operatório-concreto: Em média, dos sete aos doze anos, com algumas operações se manifestando a partir dos quinze anos. Nesse estádio é que se atinge a reversibilidade e a grande maioria das conservações. É nesse estádio que se estrutura a noção de número e muitos conceitos de Física e Matemática que podem ser aplicados em atividades cotidianas e práticas. As contradições nos argumentos começam a ser percebidas e a busca por explicações que as desconstruam surge. Suas ações são caracterizadas como operatórias, mas a reversibilidade é, ainda, incompleta. Consegue transitar com determinadas conclusões entre diferentes experimentos, mas ainda não compreende generalizações lógicas.

- Estádio operatório-formal: A partir dos doze anos, aproximadamente. Os sujeitos já apresentam respostas e argumentos construídos de forma proposicional e lógica. Agem de forma sistemática para buscar respostas às questões que formulam. O raciocínio combinatório de “fixar um fator enquanto se faz variar os outros” é característico desse estádio. A generalização começa a ser construída a partir de relações nem sempre verificáveis empiricamente. Suas ações se apresentam cada vez de forma mais sistemática e as respostas formuladas apresentam um grau maior de rigor lógico. (INHELDER; PIAGET; 1976)

Cada estádio é uma parte do processo de desenvolvimento que é vivido de forma única e individual. É importante considerar que a criança que apresenta respostas características de determinado estádio não é melhor nem pior que outra por suas respostas. O número de acertos em determinada entrevista/experiência não revela a inteligência de um sujeito, mas pode evidenciar como ele está pensando no momento da entrevista/experimento. É certo que

> Para chegar (...) à compreensão de certos fenômenos elementares, a criança necessita passar por um certo número de fases caracterizadas por ideias que adiante irá considerar erradas, mas que parecem ser necessárias para o encaminhamento às soluções finais corretas. (PIAGET, 2007 p. 18)

A teoria de Piaget sofre críticas por ser considerada determinista quando apresenta as idades de cada estádio. Porém, é claro que as idades são referências que fazem sentido para as crianças com essas idades no contexto em que ocorreram as entrevistas clínicas. A situação social, as experiências vividas anteriormente, o desenvolvimento biológico (maturação) são alguns dos fatores que podem fazer essas idades variar bastante, anulando a suposição de determinismo. Nunca se deve esquecer que as idades em que os estádios ocorrem são, segundo Piaget, médias obtidas após serem entrevistadas milhares de crianças. Mais do que as idades em que se atinge cada estádio, o importante da teoria é o caminho a ser percorrido até o desenvolvimento da inteligência operatório-formal. Novamente, independentemente da idade com que se atinja esse estádio, é importante saber por onde vai passar o pensamento infantil até conseguir se expressar proposicionalmente, compreender explicações unicamente lógicas e verbais. Uma das pesquisas referidas no capítulo 2 demonstrou que uma minoria de sujeitos com idade de pensamento formal apresentou comportamentos característicos desse estádio (DURO, 2012).

Essas preocupações são pertinentes quando pensadas no contexto da escola; independente do estádio de desenvolvimento que a criança, individualmente, estaria submetida a conteúdos puramente proposicionais e lógicos. A escola precisa levar em conta que “o que as crianças fazem quando raciocinam, não é seguir regras lógicas e internas de inferência, mas agir e operar (mentalmente) sobre as questões que lhes são colocadas nas provas operatórias.” (LOURENÇO, 1998, p. 539)

É preciso propor que elas ajam, criem, recriem, discutam, argumentem e experimentem. Passa por essa discussão a elaboração e implementação do currículo, as metodologias de trabalho e, principalmente, de avaliação. Os estádios não foram descritos para nortear o currículo ou para se avaliar uma criança considerando juízos de valor. Essa caracterização serve, entre outras, para descobrir a que etapa de desenvolvimento as atitudes são correspondentes. Lembra-se, ainda, que uma mesma pessoa pode apresentar comportamentos característicos de estádios anteriores diferentes quando se altera o conteúdo abordado na questão. Todavia, se uma pessoa apresenta características do estádio formal em uma atividade, ela tem condições, teoricamente, de ser formal em todas as suas ações.

A presente pesquisa pretende evidenciar os raciocínios efetuados pelos sujeitos na resolução de problemas combinatórios. Os percursos traçados na busca pelas soluções podem ou não estar relacionados com as idades indicadas por Piaget. A pesquisa busca compreender como os sujeitos constroem seus conhecimentos acerca da Análise Combinatória quando são levados a resolver problemas desta natureza. Que tipos de argumentos usam, a preocupação ou não com as contradições ou inconsistências. Pretende-se classificar as resoluções de acordo com os estádios e ainda, categorizar em níveis IA, IB, IIA, IIB, IIIA e IIIB. Esses níveis são subdivisões dos estádios pré-operatório, operatório-concreto e formal. O estádio sensório-motor tem outras subdivisões, mas não serão abordadas porque sujeitos com atitudes desse estádio não são colocados frente a problemas do tipo usado na pesquisa.

4.2 Método Clínico Piagetiano

Como referido anteriormente, o Método Clínico foi desenvolvido por Piaget para que suas pesquisas fossem realizadas. Os modelos de entrevista estruturada ou de observação não davam conta de encontrar as respostas buscadas. As respostas dadas pelos sujeitos não poderiam ser consideradas certas ou erradas, pois não era esse o interesse de sua pesquisa. Piaget queria saber *como* as crianças pensavam. O que, quando e como ocorriam as mudanças na forma de resolver questões envolvendo conhecimentos de Matemática, Física, moral.

O método consiste, precisamente, de entrevistas semiestruturadas, nas quais a resposta dada interfere na próxima pergunta. O pesquisador tem, mais do que uma lista de perguntas formuladas, uma questão primordial sobre como o entrevistado pensa a respeito de determinado tema ou tarefa. Não só as respostas faladas, mas os gestos, expressões e mesmo tentativas e erros na formulação de respostas são importantes. Como bem afirma Delval (2002),

> o método clínico é um procedimento para investigar como as crianças pensam, percebem, agem e sentem, que procura descobrir o que não é evidente no que os sujeitos fazem ou dizem, o que está por trás da aparência de sua conduta, seja em ações ou palavras. (DELVAL, 2002, p. 67)

As entrevistas são, muitas vezes, experiências, problemas, questões. São experimentadas, por um mesmo entrevistado, diferentes situações na busca por suas semelhanças e diferenças. Um mesmo experimento é realizado com distintos enfoques e a partir de diferentes questões. Para certificar-se das respostas dos sujeitos são apresentadas contra argumentações e o entrevistado é instigado a afirmar e reafirmar ou modificar seu modo de pensar sobre cada tema proposto. A entrevista, “não busca explicar apenas o quê das coisas, mas também o porquê e o como.” (DELVAL, 2002, p. 25)

Sua principal característica, que define o método e o distingue de outros métodos de entrevista, é a

> intervenção sistemática do experimentador diante da atuação do sujeito e como resposta às suas ações ou explicações. O experimentador está na presença de um sujeito a quem se estuda individualmente e com quem se estabelece uma interação. (DELVAL, 2002, p. 68)

Cada ação do sujeito exige uma pergunta que esclareça os motivos da ação e o sentido do que está sendo feito. O pesquisador necessita saber qual é o pensamento que quer ter esclarecido para aprofundar suas questões e suas observações. Conforme Piaget (2005), o foco da entrevista não é que a criança responda, mas que fale livremente. Busca-se descobrir as tendências espontâneas da criança e não canalizá-las. É preciso permitir que ela aja sobre os experimentos propostos e fale o que está pensando.

A linguagem, na aplicação deste método, tem uma importância bastante grande. Conforme a idade das crianças entrevistadas, o vocabulário utilizado precisa estar de acordo com o usado pelo sujeito. É necessário que se use um vocabulário conhecido e que a criança se sinta confortável para pensar e falar com as palavras que julgar adequadas. De nada adianta uma explicação com termos científicos usados incorretamente por ignorância sobre seu real significado. Por isso, a necessidade de questionar o sentido e o significado das expressões e explicações dadas pelos sujeitos ao longo de toda a entrevista.

As perguntas a serem feitas devem, da mesma forma, estar adequadas ao mundo da criança. Para atingir esse objetivo, Piaget (2005, p. 12) recomenda que se utilizem perguntas formuladas espontaneamente por outras crianças. Crianças perguntam muito. Crianças formulam perguntas sobre os mais variados temas. Para se desenvolver uma pesquisa usando o método clínico é indicado que se busquem perguntas sobre o tema formuladas espontaneamente por outras crianças de idades similares ou mais jovens.

É correto afirmar que

> O bom experimentador deve com efeito reunir duas qualidades frequentemente incompatíveis: saber observar, ou seja, deixar a criança falar, não calar nada, não desviar nada; e, ao mesmo tempo, saber buscar alguma coisa precisa, ter a cada momento alguma hipótese de trabalho, alguma

> teoria, verdadeira ou falsa, a controlar. (PIAGET, 2005, p. 15)

Alguns princípios do método podem ser elencados: a) as perguntas não podem sugerir, de forma alguma, uma resposta; b) para fazer argumentar, vale apresentar uma resposta contrária a dada pelo sujeito como sendo apresentada por alguém de sua faixa etária ou convívio; c) uma mesma pergunta pode ser feita mais de uma vez, mas com outra linguagem.

Na presente pesquisa, o método clínico vai servir como inspiração, sendo usado como forma de instigar os sujeitos a que falem, expressem, argumentem sobre sua forma de pensar as questões de Análise Combinatória. Os princípios desse método também foram usados no desenvolvimento do ODA. A formulação das perguntas a serem apresentadas e mesmo a estruturação e o feedback do objeto foram concebidos por inspiração nesse método, uma vez que propõem questões ao invés de apontarem um caminho que leve à solução.

4.3 Construção do Conhecimento

Apresentados o método usado por Piaget em suas pesquisas e os estádios elencados por ele, podemos tratar de forma mais aprofundada o processo de construção do conhecimento defendido por esse pesquisador. Para a pesquisa, foca-se nos conhecimentos relativos à Combinatória, mas sem deixar de considerar os conhecimentos de forma mais ampla.

O processo de construção de conhecimento inicia no nascimento e finda-se com a morte, ou seja, desde o primeiro até o último dia de vida se aprende e vive esse processo. Em um trecho do livro *O Nascimento da Inteligência na Criança*, Piaget (2008[8]) retrata um aspecto que se pode observar em todas as idades, dadas algumas diferenças. Quando a criança entra em contato com algo desconhecido

> tudo se passa como se a criança dissesse a si própria, na presença do novo objeto: “O que é esta coisa? Vejo-a, ouço-a, agarro-a, apalpo-a, reviro-a, sem a reconhecer: que mais poderei fazer com ela?” E como a compreensão, nessa idade, é puramente prática ou sensório-motora, (…) a criança procura fazer entrar o novo objeto em cada um dos seus esquemas, para ver em que

[8] A primeira edição da obra é de 1936, mas a edição usada na pesquisa é do ano de 2008.

> é que eles lhe podem convir. (PIAGET, 2008, p. 246)

Ou seja, o contato com o novo traz desejo de conhecê-lo. Para conhecê-lo é necessário explorá-lo. Essa exploração vai depender das ferramentas que estão disponíveis aos sujeitos (conhecimentos prévios construídos). A partir da tentativa de encaixar o novo aos esquemas existentes, conhecem-se algumas especificidades do novo objeto e se reformulam os esquemas ou as estruturas de forma a aceitá-lo. Assim, o conhecimento se desenvolve. O bebê vai usar os esquemas de agarrar, balançar, morder etc. Um adulto, ao agir sobre um aplicativo, vai clicar nos menus, observar os ícones e buscar semelhanças com aplicativos conhecidos. Um adolescente, ao agir sobre o conceito de velocidade, vai observar as distâncias, compreender que o deslocamento ocorre num determinado tempo (considerando distância e tempo conceitos/noções conhecidos) e relacionar os dois. As crianças, ao agirem sobre problemas de combinatória vão observar similaridades com problemas de adição ou de multiplicação que conheçam e explorar suas diferenças. Essa exploração do novo não vai resultar numa cópia mental desse objeto, pois

> O conhecimento não é uma cópia da realidade. Para conhecer um objeto, para conhecer um acontecimento não é simplesmente olhar e fazer uma cópia mental, ou imagem, do mesmo. Para conhecer um objeto é preciso agir sobre ele. Conhecer é modificar, transformar o objeto, e compreender o processo dessa transformação e, consequentemente, compreender o modo como o objeto é construído. Uma operação é, assim, a essência do conhecimento. É uma ação interiorizada que modifica o objeto do conhecimento. (PIAGET,1972, p. 1).

É preciso, então, que as crianças ajam sobre os problemas de Análise Combinatória. Que se envolvam com essas situações e que possam modificar e transformar esse tipo de problema. Durante essas ações, que podem ser modificações ou transformações, o conhecimento acerca do problema vai se construindo e levando o sujeito envolvido à compreensão dos conceitos. De acordo com os conhecimentos prévios, cada sujeito pode aprender coisas diferentes explorando um mesmo problema. Para cada um as novidades são distintas e as possibilidades de compreensão também. Por mais coletivo que seja o envolvimento com qualquer conceito, sua aprendizagem é individual.

A ação é determinante para a aprendizagem. Experimentos e possibilidades de agir sobre objetos específicos é o que faz pensar sobre certas relações, conceitos, padrões, etc. Além da importância da ação, para explicar o desenvolvimento cognitivo alcançado pela humanidade, Piaget (1972) apresenta quatro fatores determinantes para esse desenvolvimento: maturação, papel da experiência, transmissão social e equilibração. Os quatro fatores são igualmente importantes. Da mesma forma, todos são essenciais. A maturação é expressão do desenvolvimento biológico. Evidentemente esse fator não é suficiente, senão teríamos um desenvolvimento homogêneo para todas as pessoas da mesma idade. (O que não é verdadeiro.) Nem por isso, ele deixa de ser importante, pois também não temos crianças de cinco anos com condições de fazer inferências hipotético-dedutivas, pois suas estruturas cerebrais orgânicas ainda não suportam este tipo de formulação. Para tratar o papel da experiência é necessário compreender que Piaget considera dois tipos de experiência: as físicas e as lógico-matemáticas. As físicas são aquelas que consistem em agir sobre o objeto para se construir algum conhecimento sobre o mesmo mediante a abstração das qualidades deste. Dito de outra forma, as experiências físicas consistem em agir sobre os objetos e retirar deles qualidades que lhes são próprias e, com elas, construir algo novo. As experiências lógico-matemáticas são aquelas nas quais o conhecimento não é construído abstraindo qualidades do objeto, mas abstraindo qualidades das ações e coordenações de ações efetuadas sobre eles. A experiência é fundamental no processo, mas também insuficiente. A noção de conservação, por exemplo, surge como uma necessidade lógica, inexplicável apenas pela ação. Se a transmissão social não fosse importante, a sociedade (meio social onde vive o sujeito: família, escola, amigos, mídias diversas, etc.) não faria tanta diferença na vida do indivíduo. O modo de falar, o próprio “gosto” no que se refere ao paladar, estilo musical, interesses diversos são aprendidos via transmissão social. Na escola, o professor aparece para cumprir esse papel de repassar informações. Mas de nada adianta uma valiosa informação se o sujeito não tiver construído estrutura que o capacite a assimilá-la. E a equilibração, que poderia ser o fator principal se houvesse uma hierarquização desses fatores. Se algum desses fatores tivesse que ser tomado como mais importante, seria a equilibração. Equilibração é diferente de equilíbrio, pois não é estático, mas dinâmico. O equilíbrio alcançado é sempre momentâneo. São representados pelos patamares (ou estádios e subestádios) e podem, a qualquer momento, virar desequilíbrios e reconfigurarem-se de outra forma, se algo novo for assimilado.

A busca pelo equilíbrio é o que faz as estruturas existentes se reorganizarem quando afetadas por novas assimilações e acomodações, ou reflexões e reflexionamentos. Quando uma ação modifica a maneira de entender algo, as certezas de antes precisam ser reformuladas a partir do que se experienciou. O desequilíbrio impulsiona uma reestruturação dos esquemas atuais. Os conhecimentos/certezas anteriores também são transformados e reorganizados a partir da novidade. A nova organização manifesta-se por um estado novo de equilíbrio, que se mantém até que outra novidade assimilada desequilibre o sistema e modifique, reestruture gerando novo patamar de equilíbrio.

E o sistema pode ser estruturado através da forma, modo mais geral, ou apenas para determinado conteúdo. Quando se apresenta à criança duas questões semelhantes, mas envolvendo materiais (conteúdos) diferentes, é surpreendente a dificuldade enfrentada mesmo depois de encontrar solução para problema semelhante. Isso se deve porque

> A distinção pode parecer sutil entre uma mesma coordenação, com simples mudança de conteúdo, e uma coordenação análoga num outro problema, visto que, para o observador centrado nas estruturas, há identidade. Mas vimos, em múltiplos exemplos, o quanto o sujeito, malgrado as narrações corretas dos dois tipos de ações reunidas, sente dificuldades em compará-las. (PIAGET, 1995, p. 280)

Quando resolve um problema de forma operatório-concreta, manipulando os objetos físicos e construindo as respostas no mundo físico, nem sempre o sujeito está estruturando a forma do problema. Ou seja, ele está empenhado em uma questão específica, envolvendo um conjunto de objetos relativos ao problema. Ao mudar os objetos, a forma utilizada não se conserva, pois não se estrutura como esquema operatório formal. Os problemas combinatórios solucionados corretamente por um sujeito não sugerem que ele seja capaz de resolver qualquer problema envolvendo os mesmos conceitos. Isso só será garantido quando a forma utilizada na resolução se tornar esquema e estiver disponível no repertório de esquemas do sujeito. Tal fato se evidencia quando se pede aos estudantes que resolvam equações, por exemplo. Se, durante a aula, o professor apresenta sempre exemplos com a incógnita representada pela letra *x*, alguns alunos não sabem resolver um exercício que proponha a letra *y* como valor desconhecido. O sujeito conhece o conteúdo, mas não estruturou a resolução como forma. Ou seja, seu repertório de esquemas ainda é insuficiente para que se possa generalizar a compreensão desse tipo de problema. Pensando em combinatória, quando se aborda de forma dissociada os casos de arranjo, permutação e combinação, leva-se a ideia de que são três formas diferentes a serem estruturadas. Quando se privilegia o uso do Princípio Fundamental da Contagem, que resolve os três tipos de problema, foca-se em uma forma só. Ou seja, o repertório de conhecimento a ser construído é, numericamente, menor.

É claro que não é uma questão simplesmente numérica. Até porque “o conhecimento do sujeito é mais do que mera compilação de afirmações, por mais válidas que estas sejam quando consideradas ou em termos de pura forma ou de puro conteúdo.” (LOURENÇO, 1998, p. 542).

Mas há que se considerar que o conhecimento sobre um conceito tem mais relação com a forma do que com o conteúdo que ele envolve. E a forma, como trata Piaget, não tem relação com as fórmulas matemáticas. Estas até podem ser entendidas como forma para ocasiões específicas, mas a forma é mais geral. A forma de um problema tem relação com os esquemas operatórios empregados para resolvê-lo. O entendimento da forma é anterior ao entendimento métrico em Matemática. Piaget mesmo diz que “todas as noções de Matemática principiam por uma construção qualitativa antes de adquirirem caráter métrico.” (PIAGET, 2007, p. 59). Ou seja, os esquemas empregados são generalizados, de certa forma, antes mesmo de serem representados algébrica ou logicamente.

O raciocínio combinatório se desenvolve da mesma maneira: com a ação. No livro *A origem da ideia do acaso na criança* (1951), Inhelder e Piaget propõem problemas de raciocínio combinatório às crianças. São três situações envolvendo combinação, permutação e arranjo. Ao analisarem as respostas dadas pelas crianças, observa-se que os

> sujeitos não descobriram e não conhecem as fórmulas matemáticas do cálculo das combinações. Encontraram um processo operatório que, praticamente, equivale à aplicação da fórmula, mas que constitui um simples método de ação, e não um conhecimento refletido e que possa ser explicitado. (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 233)

Eles constataram que apenas a partir dos 14-15 anos os sujeitos foram capazes de explicitar verbalmente uma explicação equivalente às fórmulas utilizadas no Ensino Médio. Mas, antes disso, as crianças conseguiam resolver os problemas e dar respostas que conseguiam construir com o material do experimento. Os argumentos colocados oralmente pelos mais velhos são estruturados a partir da inteligência operatório-formal, usando deduções e generalizações. Os argumentos usados pelos menores que conseguem responder corretamente aos problemas propostos usam justificativas operatórias, baseadas na ação sobre os objetos disponíveis. Tal fato reforça a ideia de colocar as crianças menores, com menos de doze anos, a enfrentar esse tipo de problema. Mesmo não formulando uma generalização, essa ação sobre esse tipo de questão vai auxiliar na formação de esquemas para serem usados posteriormente. Considerando que a construção de conhecimento é integrativa e que o que é estruturado em um patamar serve de esquema e de instrumento para ser usado nas situações seguintes (PIAGET, 1995, p. 275), quanto mais experiências exitosas as crianças tiverem envolvendo problemas combinatórios, maiores serão seus esquemas disponíveis quando estiverem aptos a construir relações lógicas e generalizações de forma proposicional, operatório-formais.

O pensamento combinatório aparece mesmo em situações que em nada se parecem com problemas de contagem. Inhelder e Piaget (1976) identificam uma estratégia combinatória ao resolver problemas envolvendo conceitos de Física: “fixar um enquanto se faz variar todos os outros fatores”. Esse esquema é utilizado de maneira sistemática por jovens que procuram as possíveis implicações de fatores como tamanho, peso, impulso, formato, velocidade em resultados nos experimentos com balança, flexão de barras de ferro, vasos comunicantes, etc. Esse comportamento sistemático, intencional e carregado de hipóteses levantadas de maneira proposicional é característico do estádio das operações formais. Antes disso, no estádio das operações concretas, as crianças mudam mais de um fator, não tendo argumentos lógicos suficientes para sustentar suas conclusões. De forma não sistemática esse esquema é experimentado nesse estádio, mas ainda com pouco rigor lógico. Ou seja, para Piaget, o pensamento combinatório é imprescindível no comportamento formal. Conseguir isolar cada fator de um experimento e fazer variar os demais é uma atividade um tanto laboriosa. E esse esquema vem de uma mudança na forma de compreender e explorar o problema apresentado. Ou melhor, “a necessidade de excluir um fator para fazer variar um outro nasce de uma inversão de sentido na construção das correspondências, tendendo a abstrair ou a dissociar, em vez de multiplicar ou associar.” (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 214-215).

Os problemas combinatórios são, então, mais uma maneira de fazer aparecer esse esquema. De colocar em prática um esquema combinatório para resolver problemas que são, ao fim e ao cabo, problemas combinatórios. E os esquemas empregados são semelhantes aos usados para resolver questões de física. Por exemplo,

> se damos às crianças um certo número de copos de fichas de cores diferentes, e pedimos, com instruções explícitas, que formem tantos pares quantos forem capazes, com fichas tiradas de 5 ou 6 copos, também é somente no estádio III que o problema é resolvido por um método sistemático, enquanto que no nível concreto as combinações ficam incompletas e são obtidas por simples tentativa e erro. Quanto às permutações, (6 permutações entre 3 fichas de cores diferentes e 24 permutações entre 4 fichas de 4 cores) e aos arranjos (encontrar todos os números que é possível formar com 2, 3, 4, … algarismos), é só no nível IIIB que essas operações são adquiridas de maneira sistemática, isto é, sem formulação explícita de sua expressão matemática, mas com uma execução através do método exaustivo. (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 232)

Então,

> As operações combinatórias não participam do conjunto de operadores proposicionais e não derivam dele. Constituem, ao contrário, a condição preliminar de sua estruturação, o que é muito diferente, e de outro lado são generalizáveis para outras situações, a partir do momento em que servem para essa estruturação. Essas diversas características psicológicas mostram, assim, que as operações combinatórias têm suas raízes numa realidade mais profunda, que é a estrutura de conjunto de que decorrem tais operadores proposicionais, e exprimem algumas leis de totalidade. (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 234)

O pensamento combinatório se desenvolve muito mais do que pela Matemática e pelas relações lógico-matemáticas. Ele se desenvolve porque permite que situações variadas sejam exploradas de maneira sistemática. O pensamento combinatório é a raiz do método científico. É a partir desse tipo de esquema que se chegam a generalizações referentes aos conceitos de Física e de Química.

A presente pesquisa não almeja que os alunos resolvam, a partir de atitudes sistemáticas e características do estádio formal, os problemas. Porém, pretende que a exploração dos problemas combinatórios desequilibre conhecimentos e esquemas sobre resolução de problemas. Que os esquemas operatórios referentes à combinatória comecem a ser estruturados, pois serão embriões do conhecimento científico e de outras aprendizagens importantes para a conquista da sua autonomia e de seu desenvolvimento!

4.4 Abstração Reflexionante

Na teoria de Jean Piaget, o conceito de abstração é fundamental. São as abstrações empíricas e reflexionantes que levam uma criança que só sabe sugar o leite materno a construir teorias sobre Física, Química ou Matemática. As abstrações são a resposta à pergunta que levou Piaget a suas pesquisas. As abstrações, de todos os tipos, são processos invisíveis e, sendo assim, não podem ser observados ou mesmo distinguidos visualmente. Observando e conversando com as pessoas podem ser observados comportamentos ou mesmo falas que caracterizam cada um dos tipos de abstração. As abstrações reflexionantes são a maior contribuição da obra de Piaget, mas considera-se importante falar sobre todos os tipos de abstração: empíricas e reflexionantes; reflexionantes podendo ser puras, pseudo-empíricas ou refletidas.

Resumidamente, pode-se caracterizar cada tipo de abstração a partir do seguinte:

> A abstração “empírica” (empirique) tira suas informações dos objetos como tais, ou das ações do sujeito sobre suas características materiais; de modo geral, pois, dos observáveis, ao passo que a abstração “reflexionante” (réfléchissante) apoia-se sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo estas coordenações, e o próprio processo reflexionante, permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas. Quando o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações, a abstração apoiada sobre tais propriedades é chamada “pseudo-empírica” (pseudo-empirique), porque, ao agir sobre o objeto e sobre seus observáveis atuais, como na abstração empírica, as constatações atingem, de fato, os produtos da coordenação das ações do sujeito: trata-se, pois, de um caso particular de abstração reflexionante. (...) Finalmente, chamamos abstração “refletida” (réfléchie) o resultado de uma abstração reflexionante, assim que se torna consciente e, isto, independentemente do seu nível. (PIAGET, 1995. p. 274)

A distinção entre os tipos de abstração se faz necessária para que cada processo seja melhor compreendido e observado. Mas existe uma premissa importante em todas elas: a ação. Como colocado anteriormente, o primordial para a aprendizagem é a ação. Sendo assim, todos os processos de abstração, sejam empíricas ou reflexionantes, ocorrem quando há ação. Mas essas ações podem ser muito distintas. As abstrações empíricas estão relacionadas com ações que podem ser chamadas de práticas ou concretas. São abstrações que ocorrem quando se está agindo sobre objetos reais, concretos, manipuláveis no sentido de usar as mãos. Mais do que isso, as abstrações empíricas retiram propriedades intrínsecas dos objetos manipulados. A abstração empírica é a

> (...) que se apoia sobre os objetos físicos ou sobre aspectos materiais da própria ação, tais como movimentos, empurrões, etc. Observemos desde logo que, mesmo sob suas formas mais elementares, este tipo de abstração não poderia consistir em puras "leituras", pois para abstrair a partir de um objeto qualquer propriedade, como seu peso ou sua cor, é necessário utilizar de saída instrumentos de assimilação (estabelecimento de relações, significações, etc.) oriundos de "esquemas" (schèmes) sensório-motores ou conceptuais não fornecidos por este objeto, porém, construídos anteriormente pelo sujeito. (PIAGET, 1995, p. 5)

Este tipo de abstração está muito presente em todos os momentos de exploração de qualquer novidade. Seja por crianças ou mesmo por adolescentes e adultos, são as abstrações empíricas que surgem quando se age sobre algo pela primeira vez. Quando um novo aparelho eletrônico é adquirido, os adultos também clicam, torcem, olham por todos os ângulos, identificam os botões que parecem conhecidos, etc. Quando uma criança ganha um brinquedo novo, ela sacode, arrasta no chão, joga para cima, gira nas mãos e até dá umas pancadas. A atitude humana natural de conhecer algo novo é agir sobre a novidade. Essa ação vai ter relação com o repertório de ações que é conhecido; é seu repertório de ações que faz com que um bebê leve tudo à boca. Ao se deparar pela primeira vez com o ODA proposto, é natural que se clique nos botões, que se movam e posicionem os elementos de maneira exploratória antes mesmo de ler o problema proposto. Ao perceber as ações possíveis dentro do ODA, ao considerar o papel de cada elemento no problema é que os esquemas de construção de solução surgem. Quando ocorrem apenas abstrações empíricas, os sujeitos acabam por ser relacionados ao estádio I; uma vez que agem sobre os elementos sem levar em conta todas as condições impostas pelo problema ou mesmo apresentando possibilidades que não se encaixem com o tal.

Entretanto, falando do ODA, é preciso destacar que, apesar de não bastar a si mesma, a abstração empírica permanece necessária à medida que amplia o campo de aplicação dos esquemas já construídos. Assim, começam a ocorrer também abstrações pseudo-empíricas e essas fazem perceber negligências e regularidades na construção da solução. As abstrações empíricas que ocorrem são possíveis por conta de abstrações reflexionantes anteriores. Seja sobre o uso/manuseio do ODA ou sobre o tipo de pergunta proposta; as ações são realizadas a partir de construções anteriores. A linha entre um estádio e outro é tênue e difícil de traçar porque as ações vão mudando ao passo que novas abstrações ocorrem. As certezas, estratégias e esquemas aplicados são substituídos ou atualizados a cada instante.

Na escola, como em outras atividades realizadas pelas crianças, seria necessário levar em conta as condições de aprendizagem de cada estudante. As idades podem ser importantes marcos para a proposição de um ou outro tipo de tarefa, mas não podem ser definidas totalmente a priori. Uma vez que crianças de mesma idade tem histórias e, com isso, repertórios de ações distintos, suas capacidades são também distintas. Porém, as pesquisas de Piaget e seus colaboradores mostraram que atividades puramente proposicionais não são adequadas para a maioria das crianças antes dos 11-12 anos. No quarto ano, turmas onde foi desenvolvida a atual pesquisa, as crianças tem entre nove e doze anos. Para essa faixa etária, as atividades precisam ter uma natureza concreta. Considerando que as abstrações pseudo-empíricas

> (...) desempenham um papel fundamental durante todo o estágio das operações “concretas”, tanto que o sujeito, para efetuar uma composição operatória (e a fortiori pré-operatória), e para julgar seus resultados, tem necessidade de vê-las inseridas em objetos: a abstração pseudo-empírica serve, então, de suporte e de auxiliar essenciais às abstrações reflexionantes. (PIAGET, 1995, p. 277)

A abstração pseudo-empírica é um caso particular de abstração reflexionante, uma vez que ela se apóia sobre as coordenações das ações, coordenações que introduziu nos objetos (observáveis); ela retira dos observáveis o que não pertence aos observáveis, mas às coordenações das ações.Porém, exige uma exploração que remete à empírica e, por isso, foi assim denominada. Nela, o que o sujeito tira dos objetos são as propriedades que é capaz de neles introduzir, de acordo com o nível de suas coordenações de ações (Piaget, 1995, p. 147)

Quando se trabalha com Matemática, essas abstrações estão muito presentes. Para comparar dois objetos ou mesmo descrevê-los, é preciso observar características e propriedades que não são do objeto, mas atribuídas a ele por algum tipo de conhecimento prévio. Ao comparar duas possibilidades construídas no ODA, é preciso saber das exigências do problema para saber se são iguais ou diferentes. Por exemplo, num problema de combinação o par elefante-leão é igual ao par leão-elefante; entretanto, num problema de arranjo, essas duas construções são consideradas distintas. Sem usar as palavras arranjo ou combinação, o problema e o contexto esclarecem isso, mas é necessário ter uma estrutura cognitiva anterior que dê conta de registrar e compreender tais diferenças. As duplas que se encaixam no estádio I muitas vezes não tem essas condições. No caso das crianças com comportamentos característicos do estádio II essas regularidades começam a ser percebidas.

> Nos níveis já representativos, mas ainda pré-operatórios, assim como no nível das operações concretas, acontece de o sujeito poder somente efetuar construções, que mais tarde se tornarão puramente dedutivas, apoiando-se constantemente sobre seus resultados constatáveis. Neste caso, falaremos de “abstrações pseudo-empíricas” (pseudo-empiriques), pois, se a leitura destes resultados se faz a partir de objetos materiais, como se se tratassem de abstrações empíricas, as propriedades constatadas são, na realidade, introduzidas nestes objetos por atividades do sujeito. Encontramo-nos, então, em presença de uma variedade de abstração reflexionante, mas com a ajuda de observáveis ao mesmo tempo exteriores e construídas graças a ela. Ao contrário, as propriedades sobre as quais se refere a abstração empírica existiam nos objetos antes de qualquer constatação por parte do sujeito. (PIAGET, 1995, p.6)

Como os demais tipos de abstração, a pseudo-empírica é invisível e percebida, apenas, pelas ações ou falas observáveis durante a resolução de um problema. O trabalho em duplas facilita essa observação, pois o diálogo revela como cada um dos integrantes está pensando o problema e, consequentemente, a solução dele. Quando precisam justificar suas ações para o companheiro, buscam palavras que façam sentido para o colega, fugindo de uma busca pela resposta que o adulto quer ouvir. Com isso, também ficam repletas de gírias e referências pessoais as transcrições feitas. Apesar de usar o Método Clínico como referência, a conversa espontânea entre os participantes trouxe outros elementos à tona. Além do mais, o Método Clínico faz uso de uma entrevista individual e a pesquisa realizada ocorreu em uma sala de aula. Contudo, nas intervenções dos pesquisadores presentes eram formuladas perguntas com base nesse tipo de entrevista. Ao organizarem uma solução a partir de um elemento fixo, buscam regularidades quando fixam o próximo elemento. Mesmo tendo construído empiricamente as soluções com o primeiro elemento fixo, buscam obter o mesmo número de possibilidades ao variar esse elemento. Nas justificativas para o número buscado, é comum surgir argumentos como “porque o outro também deu”. Tal fala remete a uma abstração pseudo-empírica, pois traz um dado retirado da solução construída (ação) como conclusão. Importante ressaltar que, assim como a abstração empírica não consiste apenas em exploração despretensiosa de um objeto, a abstração pseudo-empírica não se reduz a um conjunto de constatações. Elas também exigem um quadro assimilador, mas neste caso, o quadro serve para assegurar uma leitura adequada dos dados. As abstrações pseudo-empíricas estão a um meio-caminho entre as abstrações empíricas e as refletidas. Elas fazem emergir

> (...) as generalizações e os sentimentos de necessidade, podendo acompanhá-las, a começar pelas quase necessidades, são primeiramente, relativos às situações de abstração pseudo-empírica, apoiando, portanto, não mais sobre objetos quaisquer, mas sobre objetos previamente arranjados e modificados pelo sujeito (ou por sujeitos). (PIAGET, 1995, p. 70)

Nem toda abstração reflexionante é pseudo-empírica, também ocorre a designada por reflexionante pura. Isso porque nem sempre uma abstração tem uma ação observável. Bom, as abstrações reflexionantes puras são menos citadas ou descritas na obra de Piaget. Porém, são igualmente importantes e ocorrem em grandes quantidades. Sendo assim, pode haver abstrações reflexionantes com características pseudo-empíricas ou não. Outra maneira de definir a abstração reflexionante seria como “um processo que permite construir estruturas novas, em virtude da reorganização de elementos tirados de estruturas anteriores.” (Piaget, 1995, p. 193)

Quando a abstração reflexionante é acompanhada de uma tomada de consciência, é chamada de abstração refletida. Nesse caso

> (...) se inaugura uma reflexão sobre as reflexões anteriores, fonte desta construção de “operações sobre operações” que caracteriza o estágio das

> operações formais. Mas não está lá o momento último deste processo, segundo o qual a abstração refletida é, ao mesmo tempo, resultado de abstrações reflexionantes anteriores e ponto de partida de outras que são novas, mas sobre elas se apoiarão. (PIAGET, 1995, p. 177)

As abstrações refletidas consistem em tomada de consciência das generalizações: quando as conclusões podem ser explicadas e os caminhos refeitos a partir de suposições. Podem ter dimensões diferentes, ou seja, pode ser a construção de um cálculo que leve ao número de combinações (a fórmula), mas também pode ser a de que deve haver o mesmo número de possibilidades de pódio com cada um dos elementos em primeiro lugar. Todos os tipos de abstração ocorrem ao longo de toda a vida. Tanto as crianças que exploram o mundo buscando explicações sobre o funcionamento das coisas quanto os pesquisadores em seus laboratórios efetuam abstrações empíricas, pseudo-empíricas e refletidas durante suas atividades. As generalizações surgem depois de muita ação. As generalizações a que se chega possuem características diferentes de acordo com a abstração que levou até elas. Pode-se afirmar que

> (...) a generalização ligada às abstrações empíricas é, apenas, extensiva e consiste em encontrar, em novos objetos, uma propriedade que já existia neles, semelhante àquela que se abstraiu dos objetos, no ponto de partida; ao contrário, a abstração reflexionante consiste em introduzir, em novos objetos, propriedades que eles não possuíam, seja porque são tiradas das construções de níveis precedentes, seja, sobretudo, porque sua reorganização consegue construir novas formas que engendram, então, novos conteúdos. (PIAGET, 1995, p. 286)

Para descrever o processo de elaboração das abstrações, um esboço de caminho é descrito a partir de cinco fases: na primeira delas, correspondendo ao estádio I, há um máximo de abstrações empíricas ou pseudo-empíricas mal coordenadas e com essas coordenações sendo feitas por esboços quanto às abstrações reflexionantes e refletidas. Na segunda fase, correspondente ao nível IIA, aparecem respostas corretas, mas fundadas sobre abstrações reflexionantes muito controladas pelas pseudo-empíricas. A terceira fase conduz a abstrações refletidas capazes de resumir ou comparar situações, mas sem ainda reflexão sobre o que foi refletido. A quarta fase seria correspondente ao nível IIB, quando as abstrações reflexionantes impõem-se a ponto de o sujeito deformar metade dos fatos reprimindo o controle das abstrações empíricas e pseudo-empíricas. A quinta fase seria correspondente ao estágio III, quando as abstrações refletidas se desdobram em reflexão sobre a reflexão. O sujeito, nessa fase, é capaz de livrar-se das incompatibilidades e das negligências ocorridas nas fases precedentes.

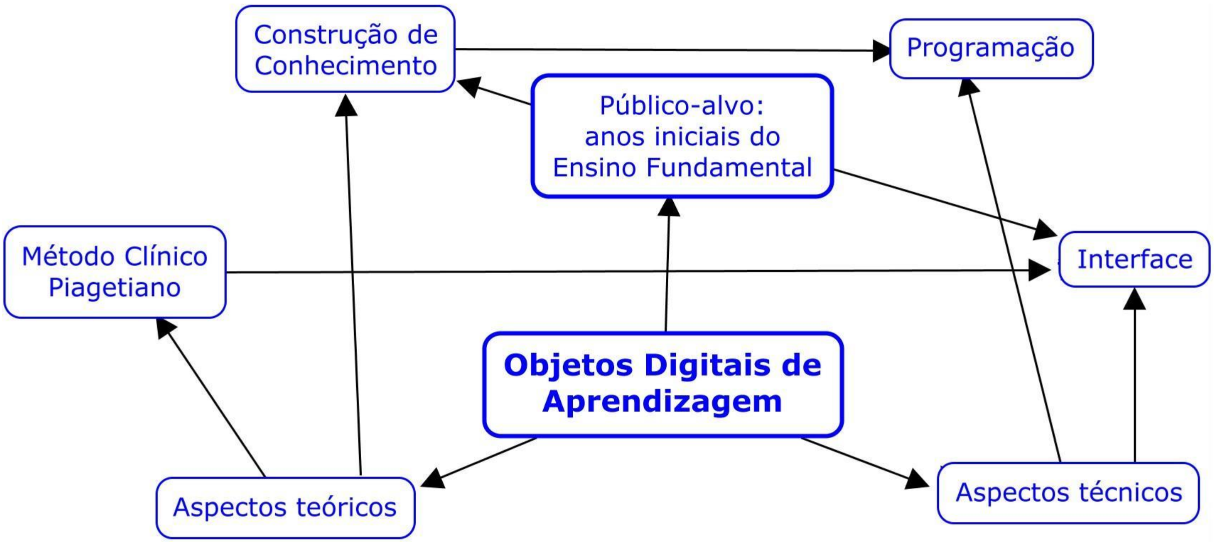
De maneira sintética, é possível afirmar que foi aprendido aquilo que pode ser usado. Diferente de pensar em conteúdos utilitários, os conhecimentos disponíveis como esquemas de ação e o repertório acessível para a solução de outros problemas são o que constituem o saber de uma pessoa. Piaget afirma que

> (...) toda nova capacidade acarreta a necessidade de exercê-la, donde o patamar das representações se superpondo ao das ações. Do mesmo modo, num processo de pensamento no qual não são inicialmente conscientes senão o objetivo e o resultado, a tomada de consciência do mecanismo intermediário constitui uma possibilidade aberta pelas variações eventuais das situações; donde a tematização das operações utilizadas como instrumentos e tornando-se, então, objetos de pensamento. (PIAGET, 1995, p. 284)

Ou seja, quando os caminhos que levam à solução são tematizados e podem ser usados em outros problemas; quando se resolve outro problema – similar ou não – usando os mesmos esquemas, e se tem consciência disso, significa que isso foi aprendido. Aprender algo que não será usado posteriormente não serve, nem ocorre. A aprendizagem “é uma espiral sem fim e sem começo absoluto” disse Piaget; quando está se consolidando em certo sentido, está também se abrindo para outras possibilidades.

5. OBJETOS DIGITAIS DE APRENDIZAGEM

Figura 10 - Mapa com as relações entre a pesquisa e as questões do ODA



Fonte: Elisa F. Martins

Os Objetos Digitais de Aprendizagem são um tipo de recurso disponível na web. O termo não é consensual em sua definição, pois a expressão Objeto de Aprendizagem aparece com diferentes definições na bibliografia. Em alguns casos é tratado como Objeto Digital de Aprendizagem (ODA) ou Objeto Virtual de Aprendizagem (OVA), noutros contextos aparece como Objetos Digitais e, ainda, como Objetos de Aprendizagem (OA). Em função dos objetivos pensados para o material proposto, trataremos Objetos de Aprendizagem e usaremos a definição de Tarouco e outros (2003):

> Um Objeto de Aprendizagem é qualquer recurso, suplementar ao processo de aprendizagem, que pode ser reusado para apoiar a aprendizagem, termo geralmente aplicado a materiais educacionais projetados e construídos em pequenos conjuntos visando a potencializar o processo de aprendizagem onde o recurso pode ser utilizado. (TAROUCO et al., 2003)

Porém, utilizaremos a sigla ODA por considerar relevante ressaltar que os recursos tratados são digitais. Os ODA são um formato específico de conteúdo digital: aplicativos que permitem uma interação entre o usuário e o computador. Em sua maioria são passíveis de serem utilizados com ou sem professor. Isto é, podem ser explorados a partir de uma proposta feita pelo professor, mas também podem ser utilizados em casa por usuários de diferentes idades, etapas de escolarização ou objetivos. O ritmo com que cada desafio é enfrentado e solucionado não depende de um grupo (turma), mas do explorador. São fáceis de serem acessados, pois ficam disponíveis na internet, mas nada impede que sejam disponibilizados off-line, podendo ser carregados em um pendrive, por exemplo. Acima de tudo, a linguagem e a interface dos ODA aproximam-se dos games e da linguagem usada em outros materiais disponíveis na internet, fazendo parte do contexto de vida das crianças e jovens da atualidade.

> Uma vantagem do uso de OAs é a possibilidade do aluno fazer inúmeras tentativas para construir hipóteses ou estratégias sobre determinado tema, podendo obter feedback do computador que o auxilia na correção dessas estratégias, tendo o professor como mediador dos conhecimentos embutidos no OA. (AGUIAR; FLORES; 2014, p. 12)

Para que um recurso seja considerado um Objeto de Aprendizagem, deve, segundo Mendes e outros (2004), apresentar as seguintes características: reusabilidade, adaptabilidade, granularidade, acessibilidade, durabilidade, interoperabilidade. A reusabilidade e a adaptabilidade consistem em ser um recurso que possa ser utilizado diversas vezes e em diferentes ambientes de ensino. A granularidade prevê que o recurso seja apresentado em pedaços, facilitando a reusabilidade. A acessibilidade indica que o recurso fique disponível na internet, para ser acessado de qualquer lugar. A durabilidade e a interoperabilidade sugerem que o material possa ser acessado independente das mudanças de tecnologia ou de sistema operacional utilizado pelos usuários. Essas características são importantes no desenvolvimento de novos recursos (como é o caso da pesquisa) e na avaliação de recursos disponíveis.

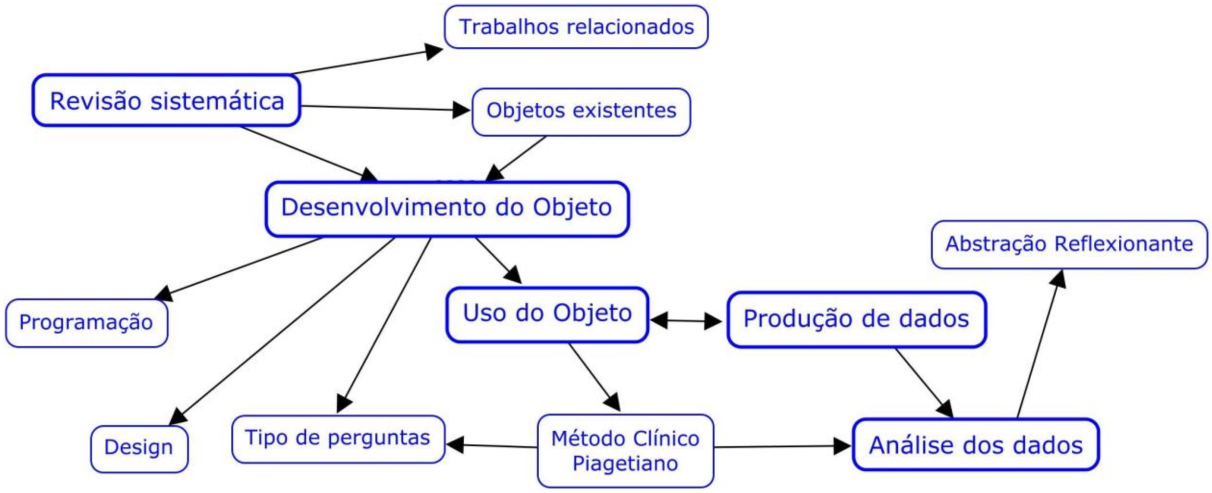
A BNCC não trata de ODA, mas aponta para o uso de tecnologias nas aulas de Matemática. Como uma das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, apresenta o seguinte: “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.” (Brasil, 2017, p.265).

Tal fato confirma que um material didático-pedagógico atual, deve fazer uso das potencialidades das tecnologias disponíveis desde o Ensino Fundamental. A indicação do uso de materiais digitais também se apresenta na oferta de cursos de capacitação e de especialização na área de Informática na Educação. Os programas voltados para uso de tecnologias crescem em número e em membros, aumentando a produção científica sobre o tema. Há incentivo de instituições governamentais e privadas para a produção de material digital, porém, como afirmam Tarouco e outros (2014), a quantidade de conteúdos educacionais digitais ainda é muito inferior ao que se considera necessário, uma vez que “o que se constata ao procurar um conteúdo educacional digital é que não é fácil encontrar material apropriado para apoiar todas as atividades de ensino e aprendizagem específicas que um professor tenha.” (Tarouco et al., 2014, p. 9).

A busca por ODA, que tratem da Matemática dos anos iniciais, depara-se com uma diversidade de materiais abordando as quatro operações, recursos explorando questões de Geometria e também envolvendo frações. Um exemplo de site com diferentes recursos disponíveis é o *Atividades Educacionais*; contém ODAs diversos envolvendo conteúdos dos anos iniciais, mas sem algo que atenda aos requisitos da pesquisa. Ou seja, apesar de haver material adequado para a etapa escolar em questão, ainda está longe de ser suficiente para todo o currículo, uma vez que o tema Combinatória resultou num número inexpressivo de resultados. Sendo assim, a presente pesquisa objetiva também o desenvolvimento de um ODA que integrará os repositórios nacionais, contribuindo para a possibilidade de inserção do tema Combinatória nas salas de aula com material digital adequado. O Objeto desenvolvido foi chamado de Combobjeto e é descrito com detalhes no capítulo 7.

6. METODOLOGIA

Figura 11 - Diagrama com a síntese da metodologia empregada



Fonte: Elisa F. Martins

As etapas da pesquisa estão destacadas no diagrama acima (Figura 11) e com desdobramentos importantes dentro de cada uma delas. A revisão sistemática realizada contemplou uma busca por produção científica acerca da Análise Combinatória no Ensino Fundamental, apresentada na seção 2.1. Além disso, buscou-se ODAs relacionados ao tema Análise Combinatória disponíveis na internet, apresentados na seção 2.2. O desenvolvimento do ODA usado na pesquisa exigiu que sua concepção tratasse de assuntos como a programação a ser desenvolvida, o design do ODA e o tipo de pergunta que seria proposto aos sujeitos. O conteúdo do capítulo 5 norteou esse processo. O objeto desenvolvido será apresentado no capítulo 7 e seu uso foi também a etapa de produção de dados. Para essa etapa, as considerações sobre o método clínico piagetiano foram também importantes. A análise dos dados, última etapa da pesquisa, foi feita a partir das considerações sobre o método clínico e sobre a teoria da Abstração Reflexionante.

6.1 Tipo de estudo/ Caracterização da metodologia

A pesquisa utilizou a investigação qualitativa como proposta por Bogdan e Biklen (2015). Eles apontam para cinco características da investigação qualitativa que corroboram a pesquisa apresentada:

1. A fonte de dados é o ambiente natural e o investigador é o instrumento principal.
2. É descritiva: os dados aparecem na forma de imagens e palavras.
3. Os investigadores interessam-se mais pelo processo que pelo resultado
4. Os dados são analisados de forma indutiva
5. O significado (das ações, respostas, meios) é vital.

Nesse entendimento, estudar o pensamento combinatório dos alunos dos Anos Iniciais é propor a esses alunos a resolução de problemas de combinatória. O investigador precisa fazer parte da cena, estar presente durante a resolução das questões, acompanhar os movimentos, as conversas, as dúvidas e as certezas que surgem ao longo da realização das atividades. A forma de pensar, agir e mesmo de compartilhar dos alunos não é numérica. A solução encontrada não é a síntese do raciocínio desenvolvido. Por isso, o resultado apresentado (certo ou errado) não é o dado mais importante produzido. As estratégias de resolução empregadas e suas hipóteses iniciais acerca do tema não são passíveis de serem visualizadas em um questionário. A imersão na sala de aula quando isso ocorreu foi necessária para captar os modos de pensar e o significado das ações e respostas dadas pelas crianças. Mais do que contar e analisar estatisticamente um conjunto de exercícios sobre o assunto, a pesquisa acompanhou o aluno durante sua resolução. As respostas preliminares e as descartadas depois de uma nova conclusão foram fundamentais para se compreender o processo de resolução de problemas e de pensamento. É evidente que o número de acertos é relevante para a pesquisa. É certo que a estatística descritiva auxilia na apresentação do contexto e dos sujeitos. Porém, o objetivo principal da pesquisa demandou observação presencial e o acompanhamento do processo de resolução dos problemas propostos pelo Objeto Digital de Aprendizagem.

6.2 O desenho da pesquisa

A etapa de revisão sistemática focou em pesquisas relacionadas com as questões envolvendo Análise Combinatória no Ensino Fundamental. A busca por ODA sobre a temática levou ao desenvolvimento de um Objeto para a realização da pesquisa, pois não foi encontrado recurso adequado à proposta de trabalho.

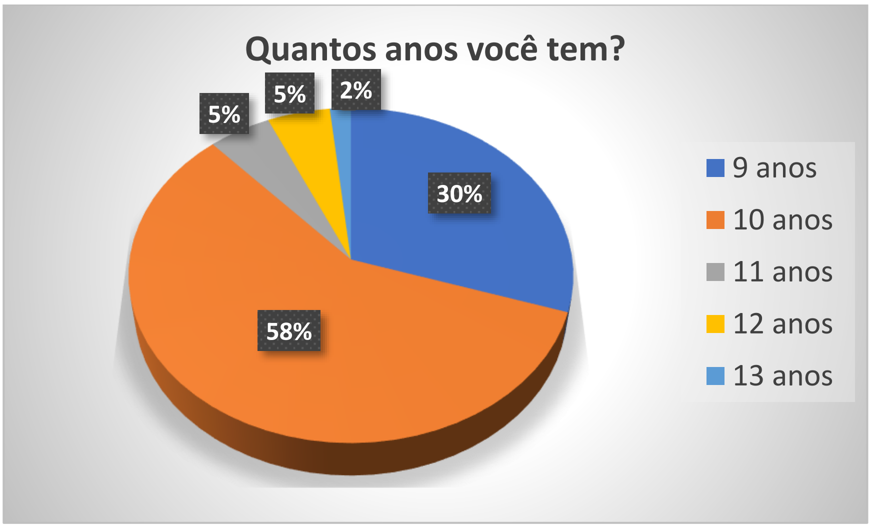
O desenvolvimento do ODA contou com a parceria de um bolsista de programação, a partir de um edital da SEAD (Secretaria de Educação da Distância) da UFRGS. O ODA foi desenvolvido em html5 e, para esse desenvolvimento, além das questões relativas à teoria piagetiana, foram atendidos requisitos de qualidade apontados pela literatura. O ODA, a ser descrito no capítulo 7, contém nove problemas envolvendo situações de Análise Combinatória.

A fase de produção de dados ocorreu durante as aulas de Matemática do quarto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Porto Alegre. A seleção da escola se deu fundamentalmente pelo fato da pesquisadora ser, na época da pesquisa, professora na mesma. A seleção por conveniência não foi problemática para a pesquisa uma vez que a escola possuía a mesma organização das outras escolas municipais e os alunos envolvidos não passaram por nenhum processo de seleção. Cabe destacar que a única seleção foi a condição de que, para participar, o aluno e os pais deveriam estar cientes e de acordo. O uso do ODA se deu no laboratório de informática da escola, onde os alunos trabalharam em duplas, trios ou individualmente. Três pesquisadores acompanharam as aulas gravando, em vídeo, os diálogos, questões e ações dos participantes ao usar o Combobjeto. Além disso, a solução encontrada foi salva como imagem, a partir de uma captura da tela de solução do ODA.

6.3 Participantes e contexto

Os participantes envolvidos foram 67 alunos de uma escola municipal de Porto Alegre, onde a pesquisadora atuava como professora de matemática. As atividades desenvolvidas fizeram parte das aulas regulares dos alunos do 4º ano do Ensino Fundamental (Anos Iniciais). A pesquisadora atendia esses alunos durante dois ou três períodos semanais (dependendo da turma) para complementar o trabalho de Matemática desenvolvido pela professora referência da turma. Nessa etapa de escolarização os alunos tinham uma única professora para trabalhar Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Sócio-históricas e Ciências. As aulas de Educação Física, Artes e Língua Estrangeira eram ministradas por especialistas nessas áreas. As turmas eram heterogêneas quanto ao gênero dos alunos e as idades variavam entre 9 e 13 anos – como apresenta o gráfico 1 representado abaixo. Ao longo de todo o texto, os nomes dos participantes foram substituídos por nomes fictícios para garantir o anonimato na pesquisa.

Gráfico 1 - Idades dos participantes

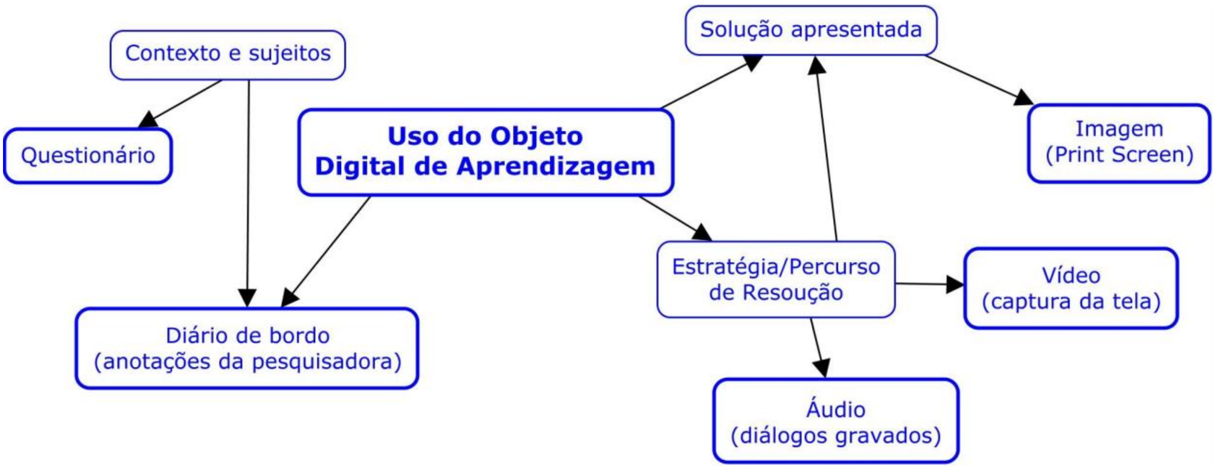


Fonte: acervo da pesquisa

O grande percentual de alunos com 9 ou 10 anos é característico da rede municipal de ensino de Porto Alegre. Sendo realizada a pesquisa no mês de agosto, uma parte dos participantes já haviam completado 10 anos durante o primeiro semestre. Portanto, 88% dos participantes estava na idade regular considerando que iniciaram o Ensino Fundamental com 6 anos. Apenas um aluno entre os participantes não estava completamente alfabetizado, mas era um aluno com necessidades educativas especiais e recebia um atendimento especializado no contraturno e um monitor o acampanhava em sala de aula durante alguns períodos. O monitor não esteve presente durante a pesquisa, pois os participantes trabalharam em duplas e o colega efetuou a leitura dos problemas e auxiliou a superar qualquer outro desafio.

6.4 Instrumentos e Produção de dados

Figura 12 - Relações entre os instrumentos de produção de dados



Fonte: Elisa F. Martins

A produção de dados se deu na realização de um questionário individual e na realização, por parte dos participantes, dos problemas de análise combinatória disponibilizados pelo Combobjeto. As resoluções entregues como captura de tela foram um dos tipos de dados. As aulas foram filmadas por três pesquisadores diferentes presentes nos encontros. As resoluções, bem como a participação nas discussões não fizeram parte da avaliação dos alunos, ou seja, não havia a pressão da avaliação ou uma cobrança pelo desempenho.

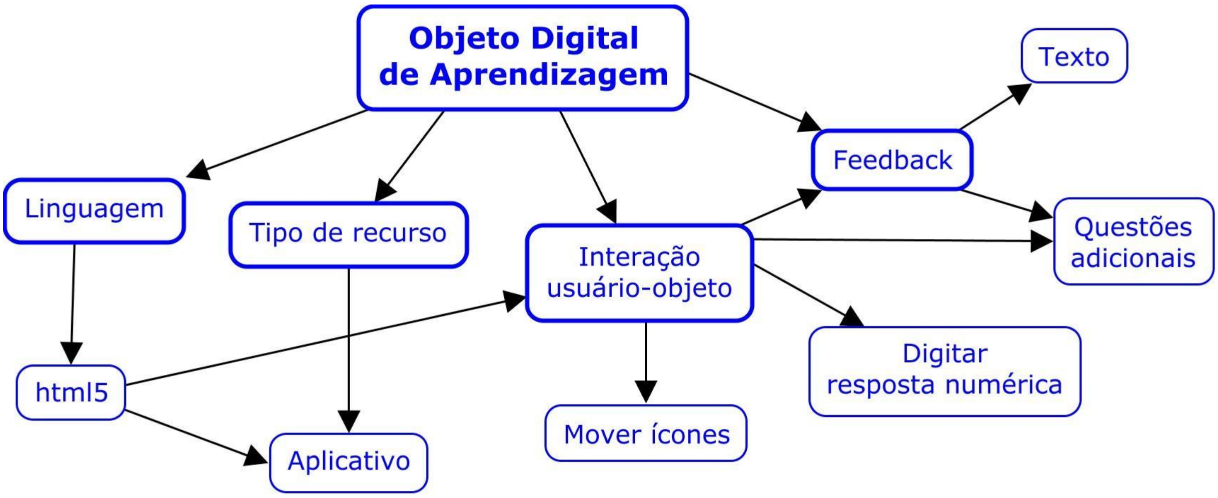
Foram respondidos 60 questionários, que são analisados na seção 8,1 e trazem a presença ou não das tecnologias na vida cotidiana dos participantes.

As soluções dos problemas deram origem a 270 arquivos de imagem. Cada um deles contém a captura de tela com a solução de um dos problemas. Foram descartadas 8 imagens por estarem com a solução cortada e não ser possível analisar a resposta construída. Sendo assim, foram 262 imagens/soluções consideradas válidas. Por encararem os problemas em dias diferentes, algumas duplas/trios entregaram duas soluções para um mesmo problema. A partir da data do arquivo foi possível saber qual a última solução encontrada. Essas imagens encontram-se ao longo do capítulo 8, nas análises de cada problema.

Os vídeos com os processos de resolução foram transcritos para que a análise deles pudesse ser feita. Totalizaram 11 horas e 29 minutos de gravação, distribuídas em 373 vídeos. Os vídeos foram transcritos e o arquivo com as transcrições gerou um documento com 219 páginas tamanho A4 que foram analisadas pela pesquisadora. Os vídeos foram identificados a partir de um código alfa numérico para que pudessem ser citados no texto e localizados pela pesquisadora. Um quadro com o conteúdo de cada vídeo encontra-se no Apêndice 2. Trechos das transcrições são citados nas análises e referenciados a partir do código alfanumérico que identifica cada vídeo. As análises descritas no capítulo 8 foram organizadas por problema. Os problemas analisados aparecem na ordem em que foram apresentados aos participantes. Cabe destacar que o tempo dedicado a cada problema variou de acordo com a dupla/trio. Houve uma grande diferença na quantidade de material relativo ao primeiro e ao nono problema. Isso se deve a dois fatores: 1) o ritmo de cada dupla/trio; 2) a assiduidade dos participantes, uma vez que a dupla que só participou de dois encontros teve menos tempo de envolvimento que a dupla que frequentou os quatro encontros. Tal fato não atrapalhou a pesquisa, e sim trouxe mais ainda o retrato da sala de aula real para o ambiente de pesquisa.

7.COMBOBJETO: O OBJETO DIGITAL DE APRENDIZAGEM

Figura 13 - Mapa que sintetiza a concepção do ODA



Fonte: Elisa F. Martins

Como referido no capítulo 5, a produção sobre Objetos de Aprendizagem é vasta. Os OA ou os ODA disponíveis tem os mais variados formatos e objetivos. Considerando os objetivos da pesquisa se buscou atender às características apontadas por Mendes e outros (2004) para se ter um OA de qualidade, sejam elas: reusabilidade, adaptabilidade (quanto a ambientes de ensino), granularidade, acessibilidade (referente ao local, ou seja, disponível na internet), durabilidade (quanto às mudanças de tecnologia) e interoperabilidade (quanto aos hardwares, browsers, sistemas operacionais). Também são levados em conta os aspectos técnicos apontados por Reategui, Boff e Finco (2010). Estes aspectos se dividem entre requisitos e interface, sendo que os requisitos apontados tratam da robustez e da portabilidade. A portabilidade corrobora os itens interoperabilidade e durabilidade de Mendes e outros (2004) e a robustez avalia a presença ou ausência de erros e o funcionamento em caso de erro. Quanto a interface, se discute o emprego de imagens, a apresentação das informações, condições de orientação e navegação, interatividade, estética e afetividade.

Além disso, Reategui, Boff e Finco (2010) também indicam que os aspectos pedagógicos são importantes na hora de criar um ODA com objetivos educacionais. A formulação das perguntas e o tipo de ação proposto neste ODA fundamentaram-se na teoria da construção do conhecimento de Jean Piaget. Da teoria também surgiram as questões apresentadas a partir das respostas dadas, sejam elas corretas ou incorretas. As mensagens apresentadas nos feedbacks e as mensagens apresentadas para respostas frequentes foram formuladas a partir do Método Clínico.

O COMBOBJETO[9] contempla nove problemas envolvendo combinação, arranjo, permutação e produto cartesiano. Cada problema é apresentado em uma tela diferente, a partir de um menu inicial (Figura 14), e permite a construção da solução fazendo uso de imagens. Tal formato contempla a granularidade apontada por Mendes e outros (2004) e a potencialidade de reuso e de adaptação, permitindo diferentes usos para o material.

Figura 14 - Tela inicial do COMBOBJETO

Fonte: COMBOBJETO

O formato do objeto se assemelha a um jogo. O objetivo é resolver cada problema apresentado e, para encontrar a solução, o usuário pode manipular objetos (que são os elementos apresentados no problema) e construir as possibilidades. Para informar a resposta encontrada o usuário preenche uma caixa de texto, onde deve inserir a resposta numérica. Dependendo da resposta dada, o objeto apresenta uma resposta (feedback) que pode ser a mensagem de êxito ou uma indicação de que algo

[9] Atualmente o ODA pode ser acessado a partir do endereço: <http://odin.mat.ufrgs.br/combinatoria>

está incorreto. No caso de apresentar uma resposta inferior à resposta correta, a indicação será a de rever e tentar encontrar as possibilidades que faltam. No caso da resposta informada ser maior que a resposta correta, a indicação será a de conferir se não foi contada mais de uma vez alguma possibilidade. Se errar novamente, a indicação será a de rever o que é necessário para construir uma possibilidade, apresentando alguns exemplos.

Além de apresentar as questões escritas, o ODA contém um ícone com forma de megafone que pode ser clicado para que a pergunta seja ouvida em áudio. Esse recurso pretende auxiliar os alunos com pouca fluência na leitura a compreender o problema a ser resolvido.

Os problemas propostos são apresentados a seguir, na ordem em que foram explorados pelos participantes da pesquisa. Além das questões e da tela inicial do problema, características sobre possíveis soluções permitem que seja compreendido o que se esperava com cada proposta.

Caras malucas

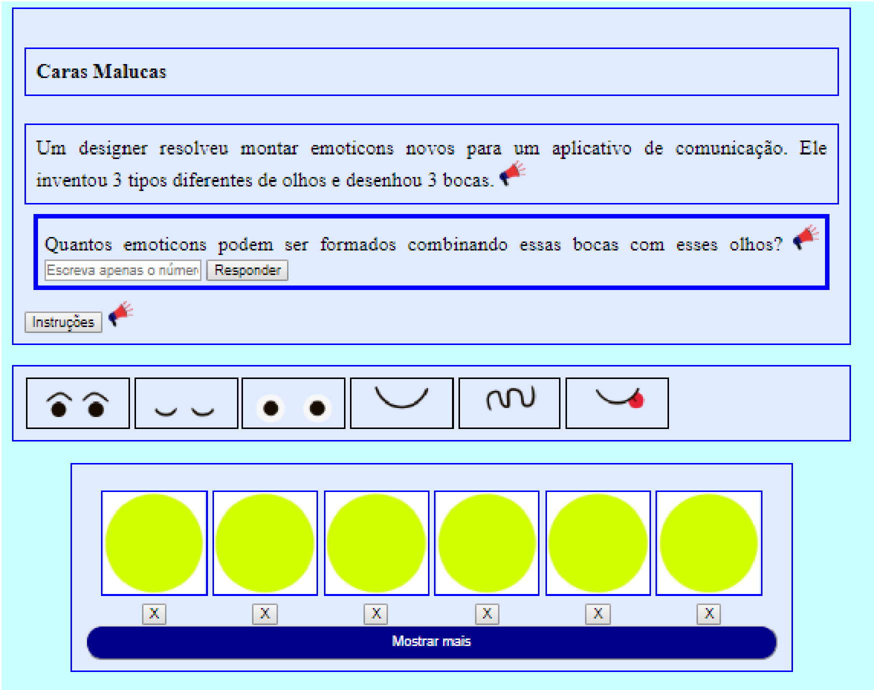
Um designer resolveu criar emoticons novos para um aplicativo de comunicação. Ele inventou 3 tipos diferentes de olhos e desenhou 3 bocas. Quantos emoticons podem ser formados combinando essas bocas com esses olhos?

Questões adicionais:

- Quantos emoticons estão de língua de fora?
- Quantos emoticons estão de olhos abertos?

Para a resolução deste problema, o ODA exibe as bocas e olhos criados pelo designer e esses elementos devem ser arrastados até as “carinhas” vazias para que sejam formadas todas as possibilidades. Os olhos devem ser encaixados na parte superior da carinha e a boca na parte inferior. Ou seja, O ODA não permite a construção de uma carinha com dois pares de olhos, duas bocas ou com os elementos nas posições invertidas. Não é possível visualizar o espaço onde o elemento deve ser encaixado, mas essa divisão existe na programação.

Figura 15 - Tela do problema Caras Malucas



Fonte: COMBOBJETO

É possível identificar na figura acima (Figura 15) o ícone do megafone que permite que o texto seja ouvido pelo usuário. Apenas depois que a resposta numérica for informada é que as perguntas adicionais aparecem. Não é necessário construir todas as possibilidades, mas as possibilidades criadas permanecem na tela para responder às questões adicionais.

Loja de brinquedos

Em uma loja de brinquedos existem quatro opções de animais de pelúcia: elefante, girafa, leão e zebra.

De quantas maneiras posso escolher dois animais diferentes?

Questões adicionais:

- Em quantas opções o elefante é escolhido como um dos animais?
- Quantas opções não escolhem a zebra?

Semelhante ao problema anterior, o ODA disponibiliza os elementos para que possam ser formados os pares de animais. Nesse caso, os mesmos elementos ocupam os dois espaços de cada “sacola de compras”.

Figura 16 - Tela do problema Loja da brinquedos

Fonte: COMBOBJETO

Nesse problema, os espaços disponíveis para a construção da solução encontram-se em uma coluna. É possível acrescentar outra coluna de espaços ou outros espaços abaixo dos já disponíveis. Essas opções são acessadas a partir dos botões inferiores.

Meias de palhaços

Palhaços usam roupas coloridas e, por isso, não precisam usar duas meias iguais. Um palhaço tem a sua disposição meias amarelas, vermelhas e azuis. Quantos diferentes pares de meias ele pode formar?

Questões adicionais:

- Em quantos desses pares as meias são iguais?

- Em quantos desses pares as meias são diferentes?

- E se aparecerem meias verdes para o próximo espetáculo, quantos novos pares ele pode formar?

Figura 17 - Tela do problema Meias de palhaços

Fonte: COMBOBJETO

Uma das perguntas adicionais para o problema trazia uma nova possibilidade de cor de meia: verde. Nesse caso, ao acertar as perguntas precedentes, além de abrir a última pergunta, surgia a opção de meia verde para a construção das soluções. Ou seja, para responder à última pergunta é necessário construir outros pares que ainda não foram formados. Na verdade, não é necessário construir os pares, basta informar a resposta numérica correta.

O Uniforme da Colômbia

A bandeira da Colômbia é azul, vermelha e amarela com um brasão. Para os uniformes do time de vôlei a equipe do vestuário tem à disposição camisetas vermelhas, amarelas e azuis. Da mesma forma, os calções disponíveis são lisos, nas cores azul, vermelha ou amarela. Sabendo disso, tente responder:

Quantos uniformes diferentes (camiseta+calção) podem ser formados com essas opções de camiseta e calção?

Questões adicionais:

- Em quantas dessas opções o uniforme fica de uma cor só?
- Em quantas dessas opções o uniforme tem alguma peça azul?
- Em quantas dessas opções o uniforme não possui nenhuma peça amarela?

Figura 18 - Tela do problema O Uniforme da Colômbia

Fonte: COMBOBJETO

O problema se assemelha ao primeiro quanto a sua resolução ou pensamento combinatório, mas tem características de contexto bem diferente. Esse contexto trouxe a possibilidade de fazer perguntas que envolvam peça de roupa e cor, pois os dois conjuntos de elementos possuem as mesmas opções de cores.

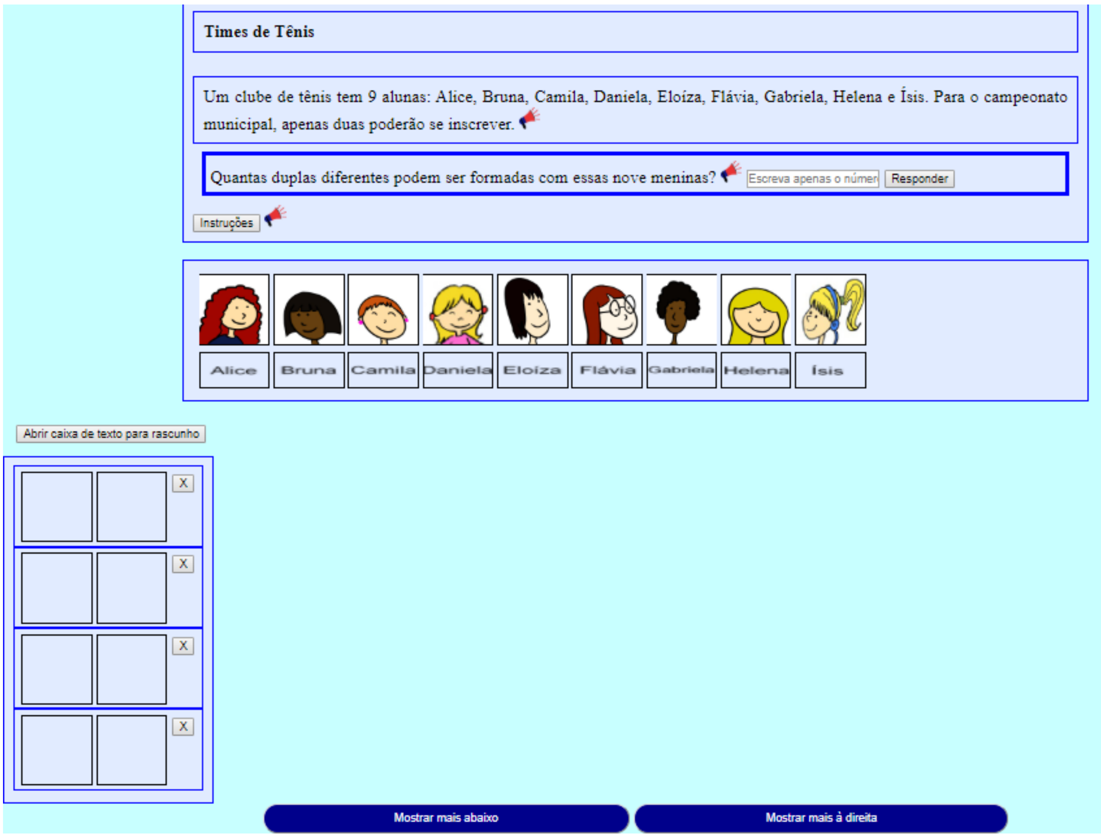
Times de tênis

Um clube de tênis tem 9 alunas: Alice, Bruna, Camila, Eloíza, Flávia, Gabriela, Helena e Ísis. Para o campeonato municipal, apenas duas poderão se inscrever.

Quantas duplas diferentes podem ser formadas com essas nove meninas?

Esse problema não apresentava questões adicionais. Por ser um número maior de possibilidades (trinta e seis) se considerou que a contagem não auxiliaria em perceber características do problema. Se previu que seria complicado construir corretamente as duplas, ou mesmo acertar o número correto de combinações sem empregar um esquema bastante elaborado. Isso porque as questões adicionais tem o objetivo de destacar propriedades interessantes do conjunto de soluções, características comuns a diferentes soluções construídas. Após a realização da pesquisa, se considerou importante ter as questões adicionais. Além de terem sido solicitadas pelos participantes, se percebeu que as regularidades não são totalmente percebidas e as questões podem vir a complementar o que está sendo descoberto/aprendido/concluído pelo usuário. As questões acrescentadas após a pesquisa foram as seguintes: a) De quantas possibilidades de dupla a Alice participa?; b) Quantas duplas diferentes possuem Ísis como uma das integrantes?

Figura 19 - Tela do problema Times de tênis



Fonte: COMBOBJETO

Para esse problema com maior número de possibilidades foram disponibilizadas algumas outras ferramentas. Uma delas é que os elementos a serem arrastados podem ser os rostos das meninas ou os nomes delas. Essa opção pretende que se atente para outras formas de montar as possibilidades, que não sejam apenas imagens. Além disso, um botão acima dos espaços para as duplas abre uma caixa de texto. As iniciais das meninas são todas diferentes, isso para facilitar uma representação das duplas a partir das iniciais. O bloco de notas e as outras opções de representação pretendem trazer diferentes formas de montar uma lista, diferentes maneiras de representar os elementos do problema.

Restaurante

Em um restaurante, o cliente monta o seu prato a partir das opções do cardápio. O restaurante oferece dois tipos de carne: coxa de frango ou bife e três opções de acompanhamento: arroz, batata cozida e massa. Para montar o pedido é preciso escolher um tipo de carne e dois acompanhamentos diferentes.

Quantos pedidos diferentes são possíveis de serem montados com esse cardápio?

Esse problema também não possuía questões adicionais. Todavia, assim como para o anterior, elas foram acrescentadas após a produção de dados. Nesse caso, as perguntas adicionais são: a) Quantos pratos diferentes contêm frango?; b) Quantos pratos não possuem batata como acompanhamento?; c) Quantos pratos possuem massa como um dos acompanhamentos?

Figura 20 - Tela do problema Restaurante

Fonte: COMBOBJETO

Esse problema contempla uma situação de combinação e outra de produto cartesiano. São as combinações dos acompanhamentos e o tipo de carne escolhido. Assim como no problema Caras malucas, nesse caso a carne tem um lugar determinado no prato a ser montado. Isto quer dizer que não é possível colocar duas opções de carne ou três acompanhamentos num mesmo prato. Esses espaços são determinados na programação e são invisíveis na tela do ODA.

Pódio

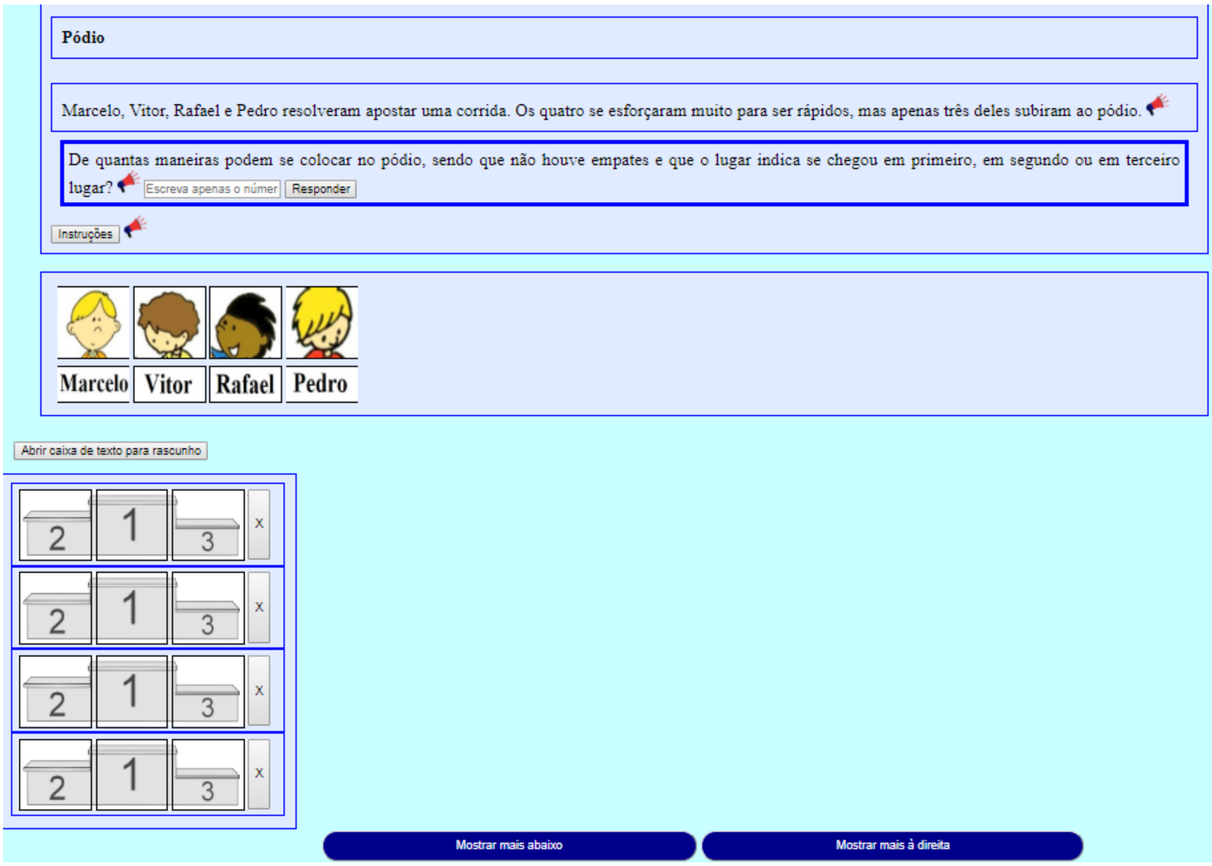
Marcelo, Vitor, Rafael e Pedro resolveram apostar uma corrida. Os quatro se esforçaram muito para ser rápidos, mas apenas três deles subiram ao pódio.

De quantas maneiras podem se colocar nesse pódio, sendo que o lugar indica se chegou em primeiro, em segundo ou em terceiro lugar?

Questões adicionais:

- Em quantas opções Marcelo é o primeiro colocado?
- Em quantas organizações de pódio Vitor aparece?

Figura 21 - Tela do problema Pódio



Fonte: COMBOBJETO

Por conta do número de possibilidades (vinte e quatro) exigir uma organização para ser encontrado com êxito, as mesmas ferramentas disponíveis no problema

Times de tênis são disponibilizadas também. Por se tratar de um arranjo, ou seja, a ordem em que estão colocados os meninos ser relevante, os espaços são colocados sobre um pódio. As três imagens (rostos dos meninos ou nomes deles) ficam sobre o pódio, todas alinhadas, porém a imagem ao fundo pretende auxiliar na compreensão de que os três lugares são distintos.

Notas

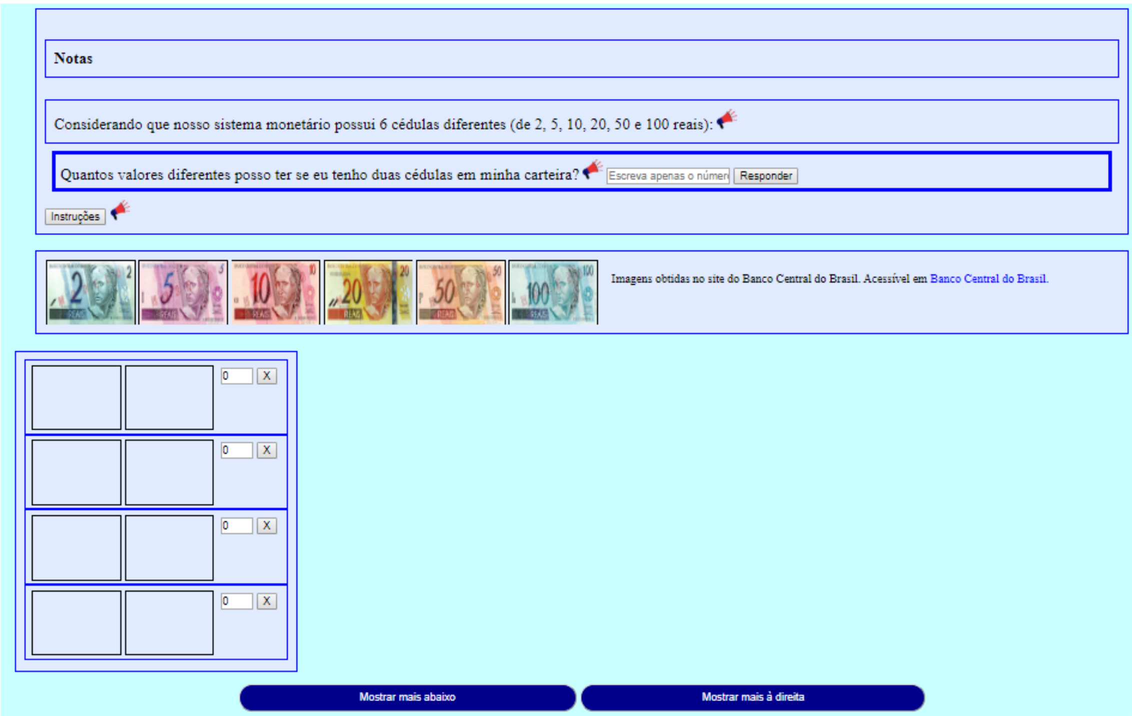
Considerando que nosso sistema monetário possui 6 cédulas diferentes (de 2, 5, 10, 20, 50 e 100 reais):

Quantos valores diferentes posso ter se eu tenho duas cédulas em minha carteira?

Questões adicionais:

- De quantas formas posso ter mais do que 21 reais?
- Em quantos desses valores eu tenho duas notas iguais?
- Em quantos desses valores eu tenho duas notas diferentes?

Figura 22 - Tela do problema Notas



Fonte: COMBOBJETO

Por ser um contexto bastante cotidiano, problemas envolvendo dinheiro costumam ser de interesse dos estudantes. A pergunta proposta é bastante diferente das usuais, pois não questiona quais, mas quantos são os valores. Essa mudança foi bastante significativa para os estudantes, que questionaram os pesquisadores até compreender o que estava sendo solicitado.

Pose pra foto

Tiago, Lucas, Mariana e Daniela se juntam para tirar uma foto. Eles se colocam um ao lado do outro e fazem a fotografia.

Para se posicionar um ao lado do outro, de quantas maneiras diferentes eles podem se organizar?

Outro problema que não continha questões adicionais à época da produção de dados. Posteriormente, foram acrescidas as perguntas: a) Em quantas fotos Lucas aparece na primeira posição (bem à esquerda)?; b) Em quantas fotos Mariana aparece na quarta posição (bem à direita)?

Figura 23 - Tela do problema Pose pra foto

Fonte: COMBOBJETO

Os nove problemas apresentados contemplam quatro situações de combinação, duas de produto cartesiano, uma que mistura as duas anteriores, uma situação de arranjo e uma de permutação. Cinco problemas possuem resposta igual ou inferior a 10. Esses problemas são considerados mais fáceis de resolver e pretende-se que sejam importantes na compreensão de características das soluções construídas. A resposta numérica não é um fator determinante na dificuldade de um problema, porém, no contexto considerado e o tipo de solução acabam, neste caso, tornando os problemas com respostas maiores (numericamente falando), mais difíceis. Os outros quatro problemas envolvem respostas entre 21 e 36. Para a construção dessas soluções era necessário usar esquemas de construção de solução que envolvessem separações em casos ou sistematizações a partir de algum critério elencado pelo usuário. Os números das respostas foram escolhidos de uma forma que coubessem todas as possibilidades na tela do ODA com os ícones (imagens). Também foram escolhidos esses valores para que se possa dar importância e atenção ao pensamento combinatório, não interessando a dimensão dos cálculos a serem efetuados. Inclusive, a proposta do ODA é que não se pense em cálculos, mas em construções de possibilidades e estratégias de construção de listas.

A decisão de permitir a possibilidade de construção da solução na tela foi tomada a partir da teoria de Jean Piaget. Ele diz que

> compreender é inventar, ou reconstruir através da reinvenção, e será preciso curvar-se ante tais necessidades se o que se pretende, para o futuro, é moldar indivíduos capazes de produzir ou de criar, e não apenas de repetir. (PIAGET, 2007, p. 17).

A partir disso, o desenho do ODA proposto pretende proporcionar a invenção e a reconstrução de soluções. Para que, agindo sobre os elementos do problema, se construam possibilidades e se busque uma estratégia de construção que permita esgotar as mesmas.

7.1 Alterações feitas no Combobjeto após a produção de dados da pesquisa

A fase de produção de dados da pesquisa também foi a fase de validação do ODA desenvolvido. Sendo assim, depois do uso feito com os participantes, o ODA passou por alterações antes de ser disponibilizado no repositório virtual da SEAD – UFRGS (Secretaria de Educação a Distância).

Além da inserção das questões adicionais em alguns problemas, apresentadas anteriormente, algumas modificações foram implementadas no funcionamento do ODA.

As soluções construídas variaram bastante quanto à disposição espacial das possibilidades construídas. A partir disso, optou-se por permitir que os espaços a serem adicionados pudessem ser feitos de maneira vertical (através do botão *Mostrar mais abaixo*) ou de maneira horizontal (através do botão *Mostrar mais à direita*). Essa decisão surgiu com a intenção de dar mais liberdade e, ao mesmo tempo, mais intencionalidade aos espaços criados. De uma maneira não impositiva, fazer pensar sobre a inserção de linhas ou de colunas, considerando que essa escolha faz diferença quando se trabalha com uma sistematização.

Outra modificação importante foi a implementação de mensagens diferentes para as respostas erradas mais informadas pelos participantes da pesquisa. O problema Caras malucas inicia com 6 espaços disponíveis e, ao completar os seis emojis, muitos participantes consideravam ter concluído. Sendo assim, para a resposta 6 foi implementada a seguinte mensagem: "*Será que não dá pra formar outros emoticons? Você pode clicar em 'Mostrar mais' e ter mais espaços para criar novas combinações.*" No problema Loja de brinquedos, a resposta errada mais frequente foi 12. Construir doze pares significa, possivelmente, ter considerado a ordem como relevante e ter feito todos os pares em duplicidade. Para essa resposta numérica, foi implementada a mensagem "*Escolher elefante e zebra é o mesmo que escolher zebra e elefante? Na hora de levar para casa, em uma sacola, essas duas opções são iguais ou diferentes? Reveja as possibilidades construídas*." Outro exemplo de mensagem específica foi no problema Notas. A pergunta questiona sobre quantidade de possibilidade com duas notas, mas muitos usuários pensam em duas notas diferentes. Sendo assim, a resposta 15 – que corresponde à quantidade de possibilidades com duas notas diferentes – recebeu uma mensagem específica que pretende transpor esse erro: "*Você precisa considerar todas os valores diferentes que* *podem ser formados com duas cédulas. Você já considerou a possibilidade de ter duas cédulas de R$2,00? Reveja as possibilidades que você já construiu, você deixou de considerar algumas.*”

Posteriormente a essas modificações, o COMBOJETO passou por uma análise do repositório da SEAD para ser disponibilizado online.

8. ANÁLISE DOS DADOS

Como referido na metodologia, os dados produzidos possuem naturezas e características distintas. Os questionários individuais foram analisados para que o contexto de uso e conhecimento de tecnologias por parte dos participantes ficasse claro. As capturas de tela com as soluções permitiram uma análise descritiva com dados quantitativos sobre o número de acertos, erros e uso de sistematização por parte das duplas. Os vídeos registraram e permitiram que fosse avaliado o processo de resolução dos problemas. Para a análise do pensamento combinatório, os vídeos se constituem os dados mais importantes. Porém, tanto os questionários quanto as capturas de tela foram imprescindíveis para a descrição do contexto e para algumas conclusões pertinentes acerca do trabalho. Os vídeos foram transcritos e organizados a partir do problema. As capturas de tela complementaram os dados, pois funcionaram como uma espécie de síntese do processo. Usando Piaget como referência teórica, as falas dos envolvidos, as intervenções dos pesquisadores e mesmo os caminhos percorridos até chegar a uma solução – seja ela correta ou não – foram primordiais para as análises. A partir dos registros feitos, foi possível classificar os estádios com os quais cada dupla se identificava na resolução de cada problema. A mesma dupla pode apresentar ações características de estádios diferentes ao enfrentar problemas diferentes; e isso apareceu em mais de um caso. Dentro de um mesmo estádio, explorando o mesmo problema, certezas similares e argumentos comuns eram apresentados. Tal fato permitiu que as análises não fossem registradas integralmente nesse texto da tese. São colocados os pontos marcantes e considerados relevantes para a descrição dos estádios e da construção do pensamento combinatório. Mais uma vez, afirma-se que os nomes usados são fictícios para proteger a identidade dos participantes.

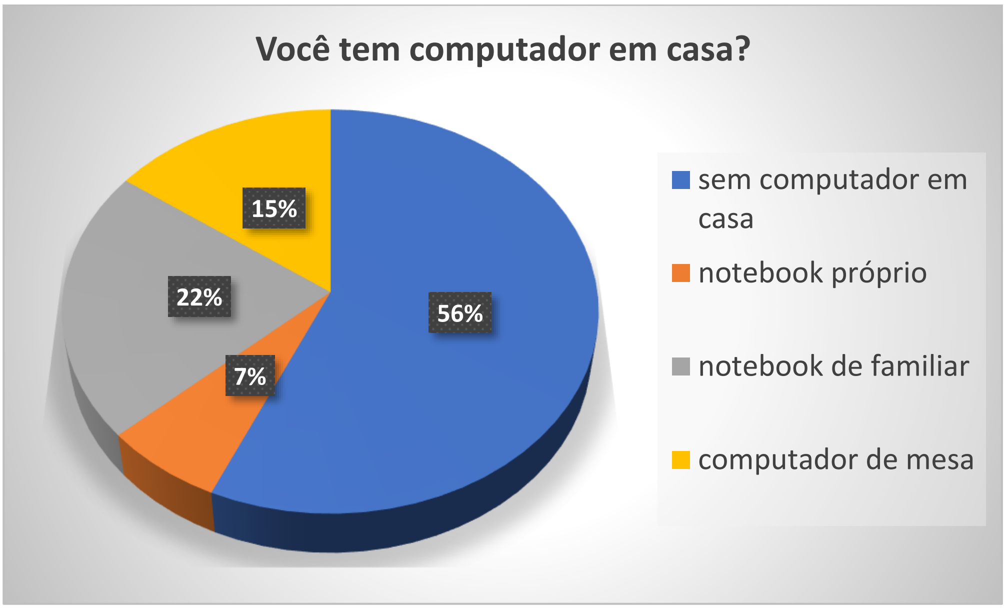
Todos os dados foram analisados. Inicialmente, os questionários, juntamente com trechos dos vídeos, caracterizam os sujeitos participantes. O contexto onde a pesquisa foi realizada e o acesso dos participantes às tecnologias são evidenciados na seção 8.1. Posteriormente, os problemas foram analisados a partir das capturas de tela e dos vídeos. A seção 8.2 traz essa análise completa e está subdividida em nove subseções, cada uma dedicada a um problema. Um esquema de apresentação dessa análise foi criado para dar uniformidade na apresentação das mesmas. Cada subseção da seção 8.2 inicia com a apresentação do problema, com o texto apresentado no ODA. Salienta-se que, como explicitado no capítulo 7, as questões adicionais aparecem apenas depois que a primeira questão for respondida de forma correta. A seguir, uma análise estatística descritiva sobre as capturas de tela entregues. Finalizando a análise do problema, os trechos dos vídeos que apresentam falas, ações ou esquemas característicos de cada um dos estádios. As capturas de tela foram consideradas relevantes por darem uma dimensão do número de acertos e erros ou mesmo da evidência de uso de esquemas. Estas imagens são apresentadas na sua totalidade (262 imagens), pois considera-se que a variedade de organização espacial das soluções, as distintas formas de categorização das soluções criadas, os erros cometidos e mesmo algumas regularidades são interessantes. O capítulo encerra com uma síntese das análises dos problemas, comparando situações de diferentes problemas na seção 8.3

8.1 Análises dos questionários

Ao todo, 60 entrevistas foram realizadas. Individualmente, conversaram com a pesquisadora sobre o acesso e o uso da tecnologia que faziam. A pesquisadora registrava no computador, por escrito, as respostas dadas por cada participante. A intenção do questionário era caracterizar os sujeitos participantes quanto ao seu contato/uso de computadores e internet fora do contexto escolar. Esse interesse surgiu a partir de narrativas comuns atualmente sobre a imersão dos jovens quanto à tecnologia. O senso comum difunde a ideia de que todas as crianças estão conectadas à internet e que tem acesso a computadores e celulares. Os comandos e o vocabulário referentes a esse contexto – copiar e colar, mover, arrastar, duplo clique, deletar, abrir ou fechar janelas – parecem ser conhecidos por todos que nasceram depois do ano 2000. Mas os questionários, além dos vídeos com o uso do ODA, apresentaram uma realidade diferente.

Os estudantes envolvidos tinham entre 9 e 13 anos. Sendo que 88% tinham 9 ou 10 anos e apenas 12% tinham 11 anos ou mais. A pergunta mais relevante no questionário foi sobre o aceso a computador.

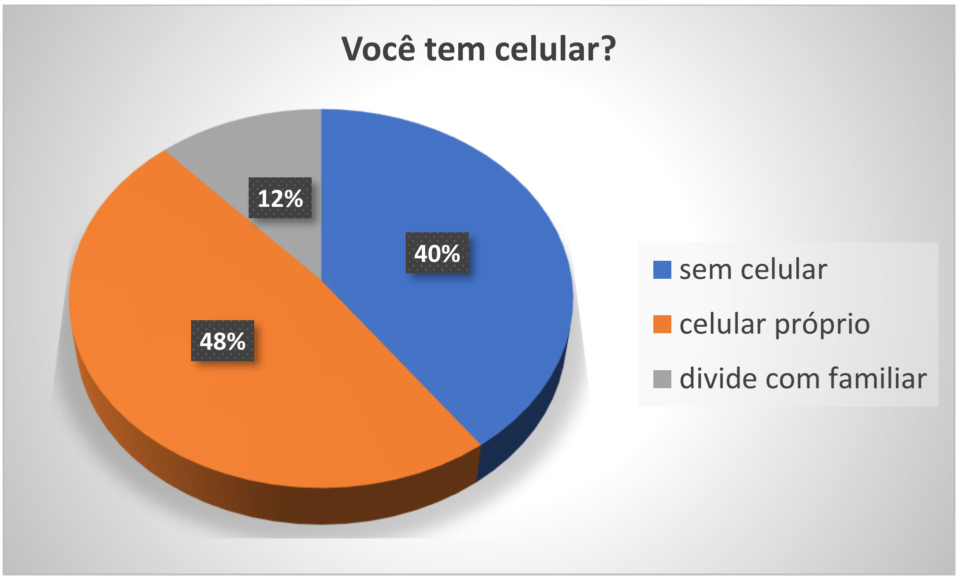
Gráfico 2 - Participantes com computador em casa



Fonte: acervo da pesquisa

Interessante notar que 56% não possuíam computador em casa, 7% possuía um computador próprio (individual) e 37% possuía um computador familiar. Ou seja, para 56% dos participantes, o acesso a computadores se restringe bastante ao ambiente escolar. Alguns ícones como o *xis vermelho* para fechar uma página, a tecla *enter* para efetuar um comando e o próprio uso do mouse não faziam parte do dia-a-dia desses participantes. No entanto, essa realidade muda quando questionados sobre celulares.

Gráfico 3 - Participantes com acesso a celulares

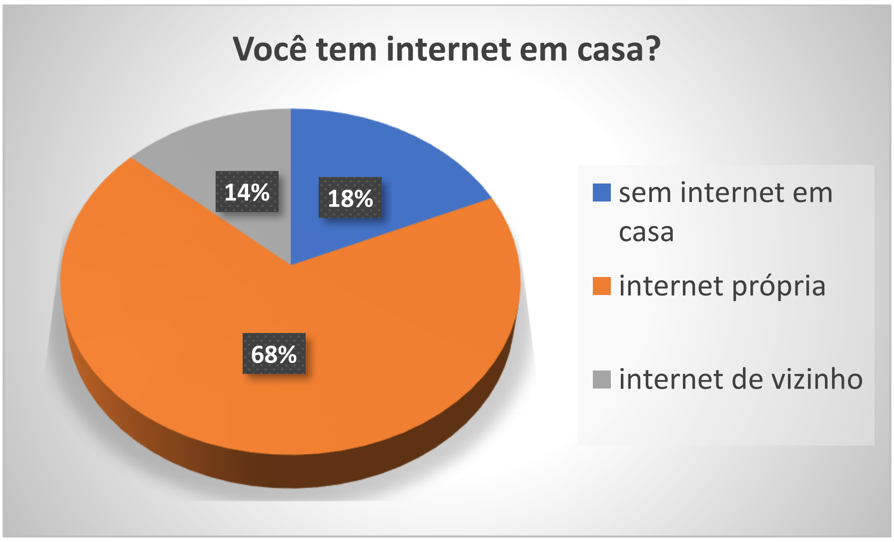


Fonte: acervo da pesquisa

Nesse caso, 48% dos participantes afirmaram ter seu próprio celular e outros 12% dividiam um celular com algum familiar. Havia ainda 40% sem acesso a celulares. Os números mostram que os celulares são mais acessíveis aos participantes, mas ainda de uso restrito a uma parte deles.

Quando se trata de internet, outros dados interessantes apareceram através do questionário:

Gráfico 4 - Participantes com acesso a internet em casa

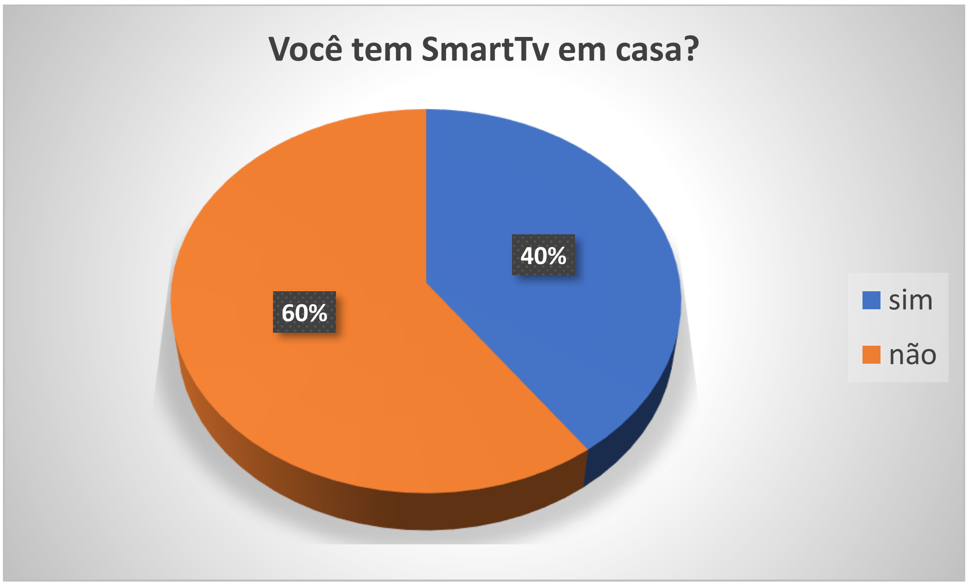


Fonte: acervo da pesquisa

Apenas 18% não possui acesso à internet em casa. Dos 82% com acesso, 68% possui algum serviço contratado por sua família e outros 14% usam a senha de algum vizinho com quem dividem o serviço. Ou seja, mesmo quem não tem celular ou computador, tem internet. Essa internet é usada por outros membros da família que possuam eletrônicos portáteis.

Além dos computadores e dos celulares, a internet também é acessada através de televisores. As smartTV são realidade nas casas de 40% dos participantes, como mostra o gráfico 5.

Gráfico 5 - Participantes com smartTv em casa



Fonte: acervo da pesquisa

Esses dados corroboram a informação de que essas crianças não possuem acesso irrestrito às novas tecnologias e à Rede mundial de computadores. Ainda é um grupo heterogêneo quanto ao uso, conhecimento e familiaridade com as novas tecnologias. Alguns estudantes apresentaram dificuldades em usar o mouse e a compreender os ícones que representassem comandos como “apagar”, “fechar”, “colar”, “salvar”, “voltar”. As transcrições dos vídeos mostraram algumas dificuldades enfrentadas pelos participantes quanto ao uso do computador ou da linguagem envolvida:

Quadro 4 - Dificuldades quanto ao uso de computador enfrentadas pelos participantes

Tipo de dificuldade	Trecho da transcrição
Uso do mouse no problema Caras malucas	Um pouco de dificuldade para montar as primeiras por conta do uso do mouse. (Rogério – vídeo B11-1)
Uso do mouse no problema Caras malucas	Bolívar aponta novamente SOBRANCELHA e vai movendo o dedo sobre a tela enquanto o colega faz o mesmo movimento com o cursor do mouse. Colocam SOBRANCELHA. Ângelo, com o mouse, não consegue colocar a boca. Bolívar: "Quer que eu bote pra ti?" (Vídeo B12-1)
Uso do mouse no problema Caras malucas	Pesquisadora Elisa: "Que botão tu tá clicando? [Referindo-se ao mouse.]" Diogo: "Esse aqui [mostra o mouse, sem referir algum específico]." Pesquisadora Elisa: "É só esse aqui [mostra o botão esquerdo do mouse]. É só esse aqui. Então vai, clica no olho." Coloca ARREGALADO. Pesquisadora Elisa: "Isso aí." Jonas tenta arrastar a boca, mas não consegue fazer o uso correto do mouse e solta o botão antes de chegar ao local correto. A professora da informática o auxilia pegando o mouse com sua mão sobre a do menino. (Vídeo B13 – 41)
Reconhecer um ícone no problema Caras malucas	Pesquisador Nicolau: "Para apagar tem que ir no xis daí. Quer trocar o olhinho? Tem que ir no xis, apagar, e daí botar outro olho." (Vídeo B12 – 2)
Reconhecer um ícone no problema Caras malucas	Pesquisador Nicolau: "Pra apagar a carinha tu aperta no xis. Daí ele apaga." André: "Daí vai apagar tudo aqui? [Desliza a mão pela tela.]" Pesquisador Nicolau: "Vai apagar toda a carinha. Só essa ele vai apagar." (Vídeo B12 – 59)
Reconhecer um ícone no problema Loja de brinquedos	Pesquisadora Elisa: "Vocês sabem apagar?" Se olham sem responder. Pesquisadora Elisa: "No xis daí apaga uma que tá repetida [aponta o xis de ZEBRA-LEÃO]." (Vídeo B13 – 73)
Fazer a captura de tela e salvar como imagem no problema Caras malucas	Paulo: "E agora, sora?" Pesquisadora Elisa: "Agora, Print Screen." Os dois vão com o dedo ao botão no teclado. Clicam. Olham para a tela. Paulo: "Deu, sora." Pesquisadora Elisa: "Print Screen? Agora abre o Paint [aponta rapidamente o menu iniciar]." Rogério: "Cadê o Paint?" Paulo: "Onde tá o Paint, sora?" Pesquisadora Elisa: "Aqui [aponta, com o indicador na tela, o menu iniciar]." (Vídeo B11 – 23)
Função Num Lock do teclado no problema	Não conseguem informar a resposta "6", pois o teclado está com a função Num Lock.

Loja de brinquedos	Naiara: "Ué, não tá dando..." Pesquisadora Elisa: "Aqui, ó [clica na tecla NumLock]. Tem que tá acesa a luzinha [aponta o led que acende no teclado]. Agora vai funcionar sempre o número." (Vídeo B12 – 4)
Uso do mouse e botões no problema Caras malucas	Nara clica, sem querer, no "voltar" do navegador e sai da página com o ODA e a construção feita. Pesquisadora Elisa: "Que vocês fizeram, gurias?" Rafaela: "Ela botou desde o começo." Nara: "Saiu do jogo..." (B13 – 25)
Captura de tela no problema Caras malucas	Pesquisadora Elisa: "Tá. Quantos são?" Jéferson: "Seis." Pesquisadora Elisa: "Então bota aqui na resposta. Tu tem que clicar no espaço. Quantos são?" Jéferson: "Seis." Pesquisadora Elisa: "Agora dá "enter" ou "responder". Correto! Agora sim, ok." Jéferson: "E agora, sora? [Pausa] Ô, sora! E agora aqui?" Pesquisadora Elisa: "Agora vamos fazer o Print Screen." Jéferson: "Print Screen?" (Vídeo B13 – 30)
Rolagem no problema Duplas de tênis	Eliseu: "Isso aqui não tem como ir pra baixo? [Dificuldade com a rolagem.]" Pesquisador Nicolau: "Tem." (Vídeo B13 – 98)
Captura de tela no problema Caras malucas	Ângelo: "Que que tem que fazer aqui? A sora falou que é pra salvar?" Pesquisador Lucas: "Sim, dá um "print" e salvar." Ângelo: "Aqui? Não entendi." (Vídeo B12 – 1)

Fonte: acervo da pesquisa

O maior número de dificuldades foi percebido no problema Caras malucas, que foi o primeiro a ser encarado pelos participantes. Tal situação deve-se ao fato de estarem também se familiarizando com o ODA. Ainda é possível inferir que as dificuldades enfrentadas foram superadas e não cometidas posteriormente.

Da mesma maneira que as dificuldades, a familiaridade de outros participantes apareceu em alguns trechos dos vídeos, como o quadro abaixo sintetiza:

Quadro 5 - Familiaridade com tecnologia

Tipo de familiaridade	**Trecho da transcrição que evidencia**
Uso dos ícones no problema Caras malucas	Estão com uma carinha na tela: ARREGALADO+LÍNGUA. Clicam em um dos olhos e acabam por abrir a imagem em outra página. Conseguem fechar e voltar ao problema. (Vídeo B11-1)
Expressão usada ao resolver o problema Pódio	Leonardo: "Pegou a senha do wi-fi agora." (Vídeo B13 – 92)

Captura de tela do problema Meias de palhaços	Pressionam PrtScr. Abrem o Paint que está com uma imagem errada da captura. (Dupla Amanda e Ricardo no vídeo B11 – 34)
Captura de tela do problema Restaurante	Pesquisadora Elisa: "Esse não tem mais perguntas. Bota mais pra baixo pra aparecer todos os pratos. E aí, Print screen." Fazem a rolagem. Acabam saindo da tela do navegador. Riem. Voltam para a tela do navegador, pressionam a tecla PrtScr. Gabriela: "Print Screen!" Abrem o Paint, colam a imagem. (B11 – 38)
Captura de tela do problema Meias de palhaços	Pesquisadora Elisa: "Muito bem. Print Screen. Salva, agora." Pressiona, no teclado, a tecla PrtScr. Abre o Paint com autonomia. Pressiona as teclas Ctrl e V. Salvam. (Dupla Luís e Tomé, vídeo B12 – 35)
Captura de tela no problema Meias de palhaços	Renato pega o mouse e clica no menu iniciar, já havia pressionado a tecla PrtScr antes. Pesquisadora Elisa: "Ele já deu print? Vamos ver se vai dar certo." Abrem o Paint, colam salvam. (Vídeo B12 – 72)
Captura de tela do problema Meias de palhaços	Pesquisadora Elisa: "Ah, ê! Agora conseguiram terminar esse. Print Screen." Wiliam aperta o botão PrtScr no teclado. Leonardo aponta o menu iniciar na tela com o indicador. Depois, aponta o ícone do Paint. Leonardo: "Agora fica apertando ali [aponta o botão Ctrl no teclado] e o ve." Wiliam segue o comando. (Vídeo B13 – 37)

Fonte: Elisa F. Martins

Pensando que

> (...) a internet não é apenas uma ferramenta de comunicação e de busca, processamento e transmissão de informações que oferece alguns serviços extraordinários; ela constitui, além disso, um novo e complexo espaço global para a ação social e, por extensão, para o aprendizado e a ação educacional. (COLL; MONEREO, 2010, p. 16)

Fica claro que os alunos que não tem acesso a internet são privados também deste espaço para ação social e para o aprendizado. Considerando que a escola dê acesso, que permita que esse espaço seja usado, ocupado e explorado, essa privação perde força e importância. Porém, o formato atual de disponibilização de computadores e internet para estudantes ainda é insuficiente. Na escola onde a pesquisa foi feita – que se assemelha a quase todas as escolas públicas – há apenas um laboratório de informática para toda a escola. Ou seja, são cerca de trinta turmas (15 por turno) para dividirem os horários de uso do espaço. Além disso, não havia wi-fi, ou seja, usar internet a partir dos celulares também não é possível. Como dizer que essas crianças/jovens estão conectados? Como dizer que fazem parte desse mundo?

Uma inquietação permaneceu durante todo o processo de pesquisa e também de trabalho com estudantes. É o fato de que “(...) enquanto o âmbito doméstico continuar sendo a principal via de acesso às TIC para as crianças e adolescentes, haverá uma brecha digital ligada ao nível de renda familiar.” (Lalueza e Camps, 2010, p. 63) Isso quer dizer que a escola pode ser um caminho para a mudança. Mas também quer dizer que ela não está sendo. E isso tem relação com as metodologias empregadas pelos professores, mas também com a forma como essa tecnologia está inserida no contexto escolar:

- Existem leis que proíbem o uso de celulares em sala de aula.
- Não se disponibiliza acesso a internet.
- São poucos computadores para muitos alunos.

Essas configurações também molduram as metodologias empregadas pelos professores. Ao afirmar que

> (...) as TIC supõem uma linguagem particular, um sistema particular de representações. Como todas as linguagens, é adquirida pelo uso em situações sociais, por meio de tarefas dirigidas a metas. O domínio das ferramentas estaria, assim, ligado à compreensão da sua particular semiótica, à maestria ao ler seus símbolos. (LALUEZA; CAMPS, 2010, p. 55)

A ideia de que muitos dos participantes não conhece essa linguagem nem seus símbolos ganha força. E, em 2019, não conhecer esses símbolos e não saber usar essa linguagem poderia ser considerado inaceitável ou mesmo incabível. Mas é realidade. Na periferia, para muitas crianças, essa linguagem é novidade. Se juntarmos essa ideia a outra frase impactante dos mesmos autores, “(...) um homem sem cultura - e sem tecnologia, acrescentamos aqui - seria uma monstruosidade impossível.” (Lalueza e Camps, 2010, p. 48) essas crianças e jovens são quase considerados “monstros”.

Muitas das dificuldades enfrentadas no primeiro problema não se repetirem nos problemas seguintes, ou seja, os participantes se apropriaram de questões específicas acerca do ODA. Mais do que sobre o objeto, sobre o computador em si. A melhora com o uso do mouse, a identificação do *xis* como ícone para fechar ou apagar, no caso do Cobobjeto, e da função da tecla *enter* ao informar a resposta foram mudanças quase imperceptíveis durante os encontros. Porém, com as leituras feitas sobre o tema, se percebe uma mudança razoavelmente potente na inserção social dos participantes.

Pode-se dizer que, quando se pensa que

> Usar uma determinada ferramenta não só permite que melhoremos nossas habilidades quando a utilizamos como deixa um 'rastro', ou seja, uma vez que nos apropriamos de seu uso, nossas capacidades melhoram. (LALUEZA; CAMPS, 2010, p. 50)

Sendo assim, o uso do ODA durante a pesquisa pode ter deixado rastros na vida dos participantes.

8.2 Análises das resoluções e soluções

Os problemas propostos envolviam combinação, arranjo, permutação e produto cartesiano. Apesar de terem características e estratégias diferentes, optou-se por apresentar as análises na ordem em que os problemas foram apresentados aos participantes. Tal escolha foi feita por se considerar que, embora haja diferenças quanto às características dos problemas, o envolvimento com problemas anteriores foi relevante para as estratégias criadas. Sendo assim, problemas com características semelhantes podem aparecer separados. Cabe mais uma vez destacar que nem todos os participantes resolveram ou tentaram resolver todos os problemas. Ao longo dos encontros, cada dupla partia de onde havia parado. Isto quer dizer que há menos resoluções dos últimos problemas, uma vez que muitos participantes não chegaram a enfrentá-los. Tal fato deve-se também a não frequência de todos os participantes em todos os encontros, sendo este outro fator que diminui a incidência de resoluções dos últimos problemas.

8.2.1 Análises do problema "Caras malucas"

Um designer resolveu criar emoticons novos para um aplicativo de comunicação. Ele inventou 3 tipos diferentes de olhos e desenhou 3 bocas. Quantos

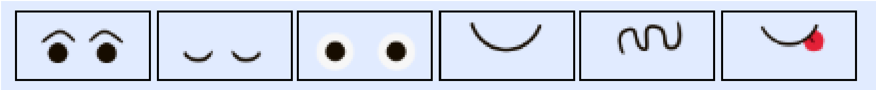
emoticons podem ser formados combinando essas bocas com esses olhos?

Questões adicionais:

- Quantos emoticons estão de língua de fora?
- Quantos emoticons estão de olhos abertos?

Abaixo do problema, apareciam os seguintes ícones que poderiam ser arrastados até as carinhas vazias para preenchê-las:

Figura 24 - Apresentação dos ícones do problema Caras malucas



Fonte: Elisa F. Martins

Das 37 capturas de tela com solução do problema, verificou-se que 2 (5,4%) estavam incorretas e 35 (94,6%) corretas. Ou seja, mesmo sem ter experiência com problemas de combinatória, a grande maioria dos participantes conseguiu resolver o problema.

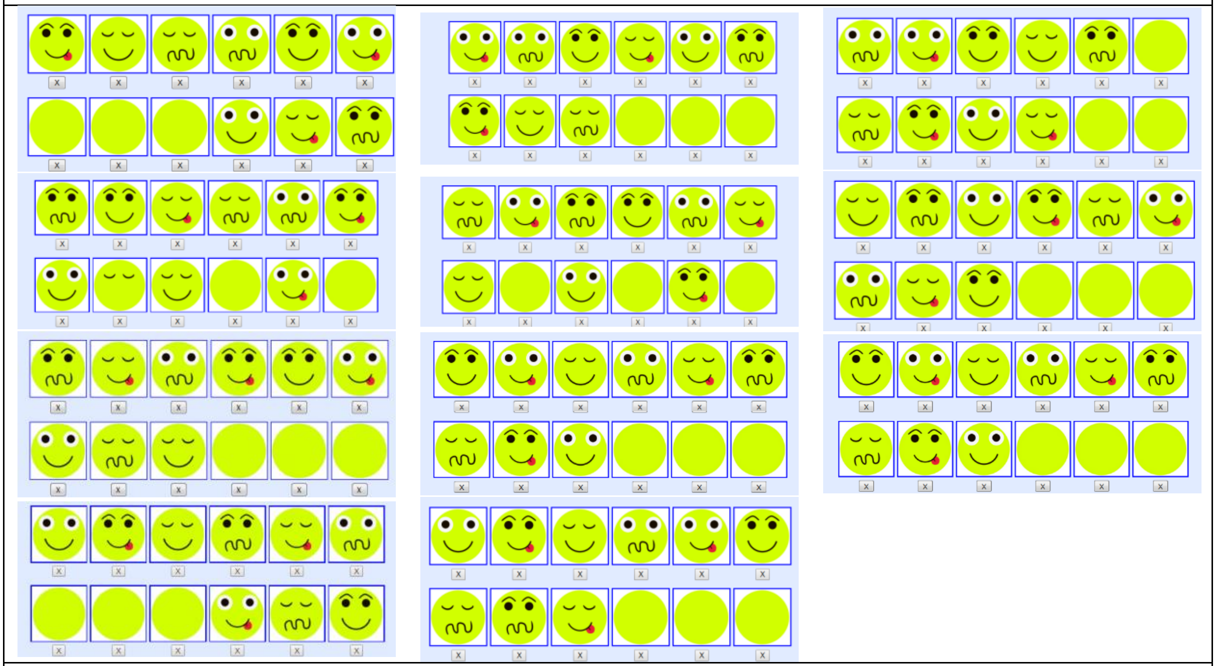
Das incorretas, uma solução estava incompleta, ou seja, apresentava menos possibilidades do que o total; e uma solução apresentava possibilidades repetidas.

Observando-se apenas a imagem da solução, considerou-se que 89,2% (33) das soluções não apresentaram evidência de sistematização, 2,7% (1) com evidência de sistematização parcial e 8,1% (3) com sistematização completa. Considerou-se importante o fato de ter muitos acertos sem o emprego de um esquema. Ainda se destacou o fato de que a sistematização apareceu, em todos os casos, considerando os olhos fixos e variando as bocas. Curiosamente, em 62,2% (23) das soluções apresentadas as três primeiras carinhas não tinham nenhum elemento (olhos ou boca) igual. A construção das possibilidades em blocos não foi considerada um esquema de construção de possibilidades. Apesar de revelar que alguma relação entre as possibilidades construídas foi considerada, tal ideia não apresentou um encadeamento com as construções seguintes. Ou seja, apesar de fazer em blocos, o bloco feito não auxiliava a pensar no próximo.

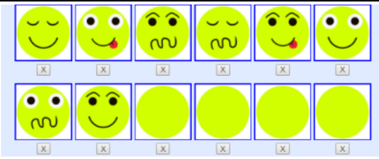
A seguir, todas as soluções entregues são apresentadas. A organização espacial das carinhas e os elementos extra que não foram apagados contam um pouco sobre a familiaridade com o ODA (apagar os elementos era bastante simples) ou a preocupação estética com a solução entregue. As soluções aparecem num quadro categorizadas a partir do estágio dos participantes que construíram. Além do estágio, a característica principal de cada conjunto de soluções é descrita antes das imagens. Cabe ressaltar que a captura de tela feita continha toda a janela do navegador. Para sintetizar o registro, foram cortadas apenas a área com a solução construída. Ou seja, as imagens foram feitas e capturadas pelos participantes, mas a autora cortou apenas uma parte para apresentar no texto. O mesmo vai ocorrer nos problemas seguintes.

Quadro 6 - Soluções entregues para o problema Caras malucas

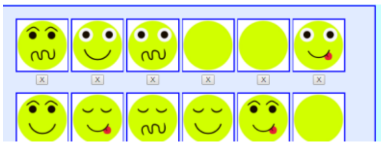
Estádio I: Construção empírica (evidência é dada pela repetição de algum elemento, boca ou olhos, nas três primeiras construções). Temos 11 soluções deste tipo.



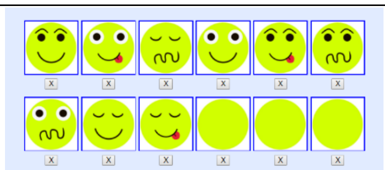
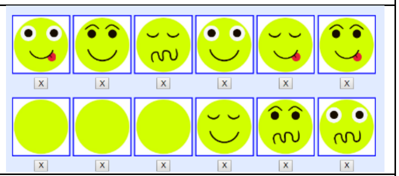
Estádio II: A solução está incompleta, mas constroem 2 conjuntos com 3 carinhas sem repetir bocas nem olhos. Consideram que elas não são totalmente independentes, mas ainda não usam uma sistematização para a construção. O último conjunto só apresenta duas carinhas. Temos uma solução deste tipo.



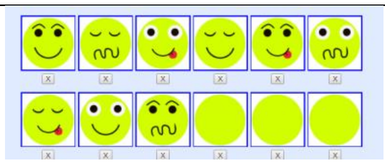
Estádio II: Sistema parcial, pois faz três seguidas com o mesmo par de olhos. Apenas uma solução deste tipo.

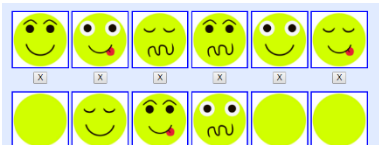
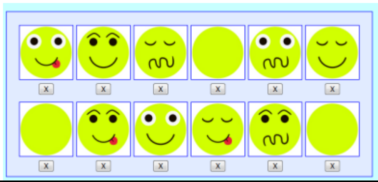


Estádio II: Justaposição. As três primeiras carinhas são formadas de forma “correspondente”: 1º olho + 1ª boca; 2º olho + 2ªboca; 3º olho + 3ª boca. Concluem com construções empíricas. São 3 exemplos dessa situação.

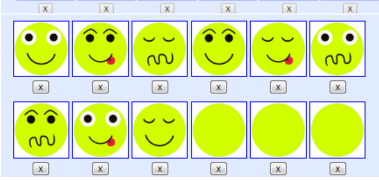
Estádio II: Justaposição. As três primeiras carinhas são formadas de forma “correspondente”: 1º olho + 1ª boca; 2º olho + 2ªboca; 3º olho + 3ª boca. Concluem considerando mais dois conjuntos de 3 carinhas, sem repetir bocas nem olhos a cada 3 carinhas. Saõ 5 exemplos.

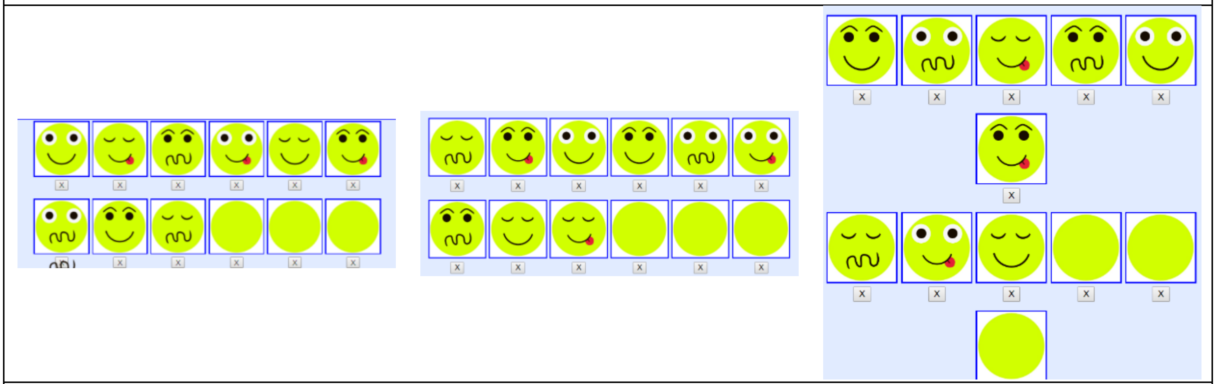
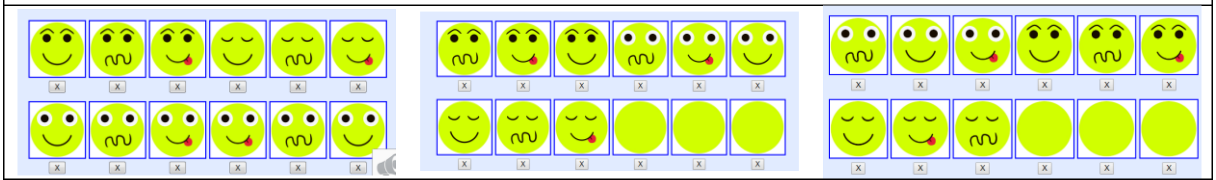



Estádio II: Não usam justaposição, mas constroem 3 conjuntos com 3 carinhas sem repetir bocas nem olhos. Consideram que elas não são totalmente independentes, mas ainda não usam uma sistematização para a construção. São 10 soluções construídas dessa maneira.




Estádio II: As três primeiras carinhas são formadas de forma que não se repitam olhos ou bocas, ou seja, existe alguma relação entre elas. Concluem com construções empíricas. São três soluções que se encaixam nessa descrição.

Estádio III: Usam um sistema para a construção das possibilidades. Três soluções construídas dessa maneira.


Fonte: acervo da pesquisa

O problema trata-se de uma situação de produto cartesiano, pois elementos de dois conjuntos disjuntos são utilizados na formação de elementos do conjunto solução. Piaget e Inhelder (1951) não trabalharam com esse tipo de situação, mas no livro da Origem da ideia de acaso na criança (Piaget e Inhelder, 1951) propuseram um problema de combinação a crianças de diferentes idades e identificaram três diferentes estádios na resolução desse problema. A partir das descrições desses estádios e das estratégias utilizadas, considerou-se razoável a mesma utilização dos estádios. As soluções produzidas a partir da captura da tela do ODA permitiram fazer uma primeira classificação acerca desses estádios.

<u>Estádio I: Combinações empíricas.</u> Nesse estádio as crianças montam as

possibilidades como se fossem independentes umas das outras. Empiricamente vão formando as duplas e analisando o que pode ainda ser construído.

Na presente pesquisa, observando as soluções, foram identificadas onze soluções construídas a partir dessa perspectiva. Construções empíricas, evidenciadas pela repetição de algum elemento, boca ou olhos, nas três primeiras construções.

Estádio II: Procura de um sistema. As crianças começam a perceber relações entre as possibilidades criadas. Usam estratégias diferentes, mas não conseguem as usar de forma completa, acabando por concluir a resolução com construções empíricas. Observa-se o uso de justaposição para a formação das possibilidades. Essa justaposição pode ser simples ou cruzada (onde repete-se o último elemento da primeira como primeiro da segunda). Também podem surgir formações simétricas. Todos esses sistemas são experimentados, mas nenhum é usado de forma completa. Na pesquisa, foram identificadas vinte e quatro soluções construídas com esse tipo de preocupação. Porém, as vinte e quatro apresentam características diferentes (Quadro 6), sendo construídas a partir de certezas distintas acerca do pensamento combinatório.

Uma solução está incompleta, mas constroem 2 conjuntos com 3 carinhas sem repetir bocas nem olhos. Os participantes consideraram que elas não eram totalmente independentes, mas ainda não usaram uma sistematização para a construção. O último conjunto só apresentava duas carinhas. Outra solução utilizou um sistema de forma parcial, pois fez três seguidas com o mesmo par de olhos. Três soluções admitem alguma relação entre as carinhas, pois as três primeiras carinhas foram formadas de forma que não se use olhos ou bocas repetidas. Porém, concluíram com construções empíricas. Três soluções foram construídas a partir da justaposição. As três primeiras carinhas foram formadas de forma "correspondente": 1º olho + 1ª boca; 2º olho + 2ªboca; 3º olho + 3ª boca. Porém, concluíram com construções empíricas. Outras cinco soluções também usaram justaposição, mas concluíram considerando mais dois conjuntos de 3 carinhas, sem repetir bocas nem olhos a cada 3 carinhas. Ainda neste estádio, observou-se que 10 soluções não usaram justaposição, mas construíram 3 conjuntos com 3 carinhas sem repetir bocas nem olhos. Consideraram que as possibilidades não eram totalmente independentes, mas ainda não usaram uma sistematização para a construção.

Estádio III: Descoberta do sistema. Nesse estádio passam a utilizar o esquema de fixar um elemento e fazer variar o outro na formação de pares. Essa operação é uma coordenação de diferentes seriações e pode ser considerada uma operação na segunda potência. Observou-se que três soluções foram construídas dessa maneira.

Além das soluções entregues em imagem, os vídeos com os gestos e os diálogos nos permitiram compreender de forma ainda mais clara a maneira como pensaram os envolvidos.

Quanto ao estádio I, construções empíricas, destacaram-se os seguintes processos:

- A dupla Ângelo e Bolívar usou construções empíricas e ficou bastante presa ao número de espaços disponíveis no ODA. Seus diálogos apresentaram frases soltas que não foram justificadas e que poderiam ter levado à correta solução: “Deu!” (Bolívar, b12-1) quando apagaram as carinhas repetidas; “Já foi todos repetidos.” (Ângelo, b12-1) quando tenta montar uma carinha diferente com um dos pares de olhos e percebe que não existem outras alternativas. Apesar dessas colocações, não consideraram o problema resolvido e voltaram a construir possibilidades repetidas. A pergunta foi lida e relida mais de uma vez.

- A dupla Elias e Eliseu demonstrou preocupações diferentes. Quando foram apagar uma das carinhas que identificaram como repetida após a mensagem do ODA, preocuparam-se em tirar da segunda linha de carinhas. Tal cuidado evidencia uma atenção à organização espacial da solução. “Que tira daí?!?! Tira o de baixo!” (Eliseu, B13-14) Quando estão com as nove carinhas corretamente construídas, um deles diz: “Tá aí. Deu.” (Eliseu, b13-14). O outro colega ainda coloca uma boca em um espaço vazio. Esse aluno aponta as três carinhas com essa boca, tal gesto é um argumento apresentado para o esgotamento de possibilidades com essa boca. Mesmo tendo uma forma de construir a solução correspondendo ao estádio I, essa dupla apresenta interessantes conclusões acerca do problema.

- A dupla Mariana e Silvio construiu as seis primeiras carinhas empiricamente e considerou pronto, pois ocuparam os espaços disponíveis no ODA. Quando questionados se seria possível fazer mais, Silvio disse que não sabia e Mariana indicou que poderiam fazer mais. Ao abrir mais espaços, Silvio disse: “Não sei se vai dar pra fazer tudo...” Quando fizeram as nove, o seguinte diálogo foi captado:

> **Sílvio:** Sora! A gente já fez todos que podia.
> **Pesquisadora Elisa:** Todos que podia? Quantos deu?
> **Mariana:** Não. A gente vai continuar tentando.
> **Sílvio:** Ai... já fizemos tudo!
> **Mariana:** Que tudo?!
> **Pesquisadora Elisa:** Fizeram todas que dá?
> **Mariana:** Não, não.
> (Vídeo B13-14)

Mariana continuava presa aos espaços do ODA, querendo completar todos. Mas Silvio já havia percebido a impossibilidade de criações diferentes. Quando conferiram a resposta ela se convenceu.

- A dupla Nara e Rafaela resolveu o problema *Caras malucas* três vezes diferentes. Na primeira vez, não salvaram a imagem da solução. Na segunda, por uma dificuldade técnica acabaram saindo da página do navegador e perdendo as construções que haviam feito. Na terceira vez concluíram a resolução. Em nenhuma das três vezes usaram qualquer sistematização. Construíram as possibilidades empiricamente. Na última vez se percebeu, pelo diálogo, o cuidado com as repetições. Ao passar o mouse para a colega construir, Rafaela disse (b13-29) “Não vamos botar repetida, tá bom? Vamos fazer mais uma coisa que vai ser com...” Nara apontou, com o indicador na tela, os olhos com sobrancelha. Eles foram colocados num espaço em branco.

> **Rafaela:** Que boca?
> [Nara se levanta, fica de pé ao lado da colega.]
> **Nara:** Essa daqui [aponta TREMIDO e se senta novamente].
> Rafaela: Já tá.
> (Vídeo B13-29)

Apesar do envolvimento com o problema e da construção das carinhas, estavam muito presas aos espaços disponíveis no ODA. Quando tinham as nove possibilidades na tela foram questionadas se haveriam mais

> **Pesquisadora Elisa**: Tá, tem mais pra fazer?
> [As duas trocam de lugar para trocar quem move o mouse.]
> **Rafaela:** Tem, sora. Mais três.
> (Vídeo B13-29)

Essa preocupação também demonstrou que o resultado pareceu ser dado pelo ODA e não buscado. Pois, se a resposta numérica for igual ao número de espaços, essa não seria uma pergunta interessante. Porém, tal preocupação poderia estar relacionada com o pouco envolvimento com materiais digitais ou com o entendimento do problema.

- A dupla Miguel e Alexandre não se preocupou em não repetir carinhas. Empiricamente foram completando os espaços com bocas e olhos. Essa indiferença aos critérios apontados no problema ficou evidente quando montaram a quarta e a quinta carinha exatamente iguais e seguidas uma da outra. Quando questionados pela pesquisadora, identificaram as repetidas e as apagaram. Substituíram as mesmas por carinhas diferentes, encontradas empiricamente.

Os processos característicos do estádio II, procura de um sistema, são os seguintes:

- A dupla Hélio e Nicole não empregou nenhum processo sistemático para a construção das possibilidades. Porém, construíram apenas uma carinha de forma repetida, demonstrando um controle sobre as possibilidades já construídas e a compreensão do que o problema solicitava.

Uma parte do processo foi descrita

> [colocam ARREGALADO e olham para a tela. Apagam e colocam SOBRANCELHA. Pausa. Completa SOBRANCELHA+LÍNGUA. Nicole aponta as carinhas com os olhos SOBRANCELHA, inclusive a igual.]
> (Vídeo B11-1)

Quando ela apontou todas as carinhas com esses olhos é porque percebeu que não havia mais possibilidades de criar com ele. Sem colocar em palavras, a comunicação gestual evidenciou o que pensaram e tentaram passar às suas duplas.

- A dupla Paulo e Rogério também não usou nenhuma sistematização para a construção das possibilidades. Iniciaram por montar as três caras usando as três opções de olhos e as três opções de boca. Para completar as primeiras 6 possibilidades não tiveram dificuldade. A resposta não ser “6” os desestabilizou um pouco. Pareceram deixar as condições do problema de lado, pois criaram e apagaram carinhas corretamente construídas.

> [Fazem ARREGALADO+TREMIDO; FECHADO+SORRINDO e SOBRANCELHA+SORRINDO. Apagam a última.]
> **Rogério**: Com a boca do sorriso [aponta uma carinha com LÍNGUA].
> [Apaga FECHADO+SORRINDO. Faz SOBRANCELHA+LÍNGUA.
> Apaga SOBRANCELHA+LÍNGUA e FECHADO+SORRINDO.
> Faz SOBRANCELHA+LÍNGUA. Olham para a tela.]
> **Rogério**: Já foi ali [aponta SOBRANCELHA+LÍNGUA].
> [Apagam essa última.]
> (Vídeo B11-1)

Chegaram a ter 12 opções na tela, o que mostrou a “força” dos espaços vazios na sua construção. Depois, identificando as repetições, chegaram ao resultado correto que era nove. Com as possibilidades na tela, não tiveram dificuldade de responder as perguntas adicionais.

- A dupla Francisco e Gustavo não usou nenhum processo sistemático para resolver o problema. No entanto, criaram as primeiras três carinhas sem repetir bocas ou olhos. Se ajudavam, apontando e mostrando ao colega o que pensavam que deveria ser colocado a cada nova carinha. Consideraram ter resolvido quando completaram os espaços inicialmente disponíveis. Porém, conseguiram continuar depois de abrir novos espaços. A primeira carinha montada na segunda linha estava repetida, mostrando que essa parada os fez perder um pouco a atenção ou mesmo a estratégia usada até o momento. Logo se deram conta e apagaram o que estava colocado de forma duplicada. Quando questionados se era possível fazer mais não apresentaram argumentos. Porém, quando tentaram formar mais uma carinha com os olhos arregalados, perceberam que esse elemento já havia usado com todas as possibilidades de boca.

Pesquisadora Elisa: Dá pra fazer mais, meninos?
[Eles olham para a tela concentrado.]
Francisco: Não, não dá [balança a cabeça negativamente].
[Gustavo segue olhando para a tela, ele está com o mouse. Francisco olha pra ele. Ele coloca os olhos ARREGALADOS.]
Pesquisadora Elisa: Dá pra fazer mais, meninos?
Francisco: Já foi... Já foi [aponta a primeira boca], já foi [aponta a segunda opção de boca com o indicador na tela] já foi [a terceira boca].
(Vídeo B12-5)

Depois disso é que concluíram que haviam encontrado todas as possíveis e responderam corretamente a todas as perguntas.

- A dupla Naiara e Geovane não usou de nenhum processo sistemático para construir a solução. Porém, não repetiram bocas nem olhos a cada conjunto de 3 carinhas. Não mantiveram a mesma sequência de olhos nem de bocas, demonstrando que montaram as carinhas uma de cada vez mesmo. Quando completaram os espaços inicialmente disponíveis pensaram ter solucionado o problema. Mas não encontraram dificuldades de continuar depois de abrirem novos espaços. Quando estavam com as nove carinhas foram questionados sobre o total. Um dos integrantes pediu que o outro concluísse. Mas esse já se havia se dado conta que fizeram todas.

[Colocam SOBRANCELHA.]
Pesquisadora Elisa: Tem mais pra fazer? Já fez todas?
[Geovane confirma com a cabeça.]
Pesquisadora Elisa: Quantas deu?
Naiara: Termina aí [aponta a carinha incompleta e os dois espaços vazios].
Pesquisadora Elisa: Não precisa encher todas, Naiara. Tem que fazer o máximo que dá.
[Apagam a incompleta.]
(Vídeo B12-4)

Não foram apresentados argumentos sobre o esgotamento das possibilidades, mas ficou evidente que eles perceberam tal fato.

- A dupla Cristina e Kate se prendeu, inicialmente, aos espaços disponibilizados pelo ODA. Mas não estavam convencidas de que fosse o maior número, pois logo começaram a construir outras.

Cristina: Um, dois, três, quatro, cinco, seis.
Pesquisadora Elisa: Não dá pra fazer mais tu acha? ... Bota a resposta seis e vê o que ele te diz... Se tu acha que dá pra fazer mais, faz mais. Bota aqui, ó [aponta o botão 'Mostrar mais'], vai ter mais carinhas pra fazer. Tem que fazer quantas conseguir! Dá pra fazer mais ou não?
Cristina: Dá.
Pesquisadora Elisa: Dá pra fazer mais? Então faz mais. Faz todas que dá. (Vídeo B13-14)

Mais uma vez se prenderam aos espaços do ODA e completaram a segunda linha. Ao perceber que a resposta 12 estava errada, identificaram as repetidas. Não usaram a ferramenta para apagar e se confundiam na contagem das carinhas. Com a intervenção da pesquisadora, apagaram as repetidas e contaram corretamente as carinhas construídas.

- A dupla William e Leonardo não usou nenhum processo sistemático para resolver o problema. Construíram as três primeiras carinhas sem repetir olhos e bocas. Controlavam as possibilidades construídas, pois não cometeram repetição. Um dos integrantes compreendeu quando esgotou todas as possibilidades e justificou que não havia como criar outras: "Não, ó, porque ó: tem todos os olhos com essa boca [aponta SORRINDO], todos os jeitos com essa boca, ó também [aponta LÍNGUA]." (William, b13-24)

- A dupla Jéssica e Renato construiu as três primeiras carinhas sem repetir olhos ou bocas. Tal fato levou a crer em uma certa lógica na construção das possibilidades. Os olhos das três carinhas seguintes foram usados de forma simétrica aos três primeiros, demonstrando outra regularidade. Quando completaram os espaços inicialmente disponíveis fizeram menção a ter concluído a tarefa. Porém, quando questionados se haveriam outras possibilidades, não hesitaram em continuar. Quando estavam com cinco carinhas diferentes construídas:

Jéssica: Pro meu último deixa eu ver...
[Coloca SOBRANCELHA e logo depois completa SOBRANCELHA+SORRINDO.]
Renato: Sora.
Pesquisadora Elisa: Só dá pra fazer essas ou dá pra fazer mais?

[Renato pega o mouse.]
Pesquisadora Elisa: Dá pra fazer mais?
Renato: Acho que sim.
Pesquisadora Elisa: Então clica no *Mostrar mais*.
(Vídeo B12-19)

Observaram a solução completa por um tempo até se convencerem de que não haveriam outras a serem construídas, mas não verbalizaram o que os levou a tal certeza.

- O aluno Jeferson, inicialmente, formou 3 carinhas sem repetir olhos e bocas. Também não repetiu elementos nas próximas 3 carinhas. Ainda se observou que a sequência de olhos utilizada foi a mesma, variando a posição das bocas. Ao montar a quarta carinha, depois de uma pausa logo após concluir a terceira, pareceu dar-se conta de como resolver o problema e disse que "Dá pra fazer muito mais!" (Jéferson, b13-20). Quando tinha mais que 6 carinhas demonstrou preocupação em preencher todos os espaços. Ao ter nove carinhas, foi questionado sobre a possibilidade de fazer mais e ele disse "Mais três." (Jéferson, b13-27) O ODA havia aberto mais 6 espaços, totalizando doze. Para responder as questões adicionais questionou sobre os olhos abertos, não demonstrando compreender as imagens. O aluno não usou nenhum processo sistemático, mas controlou as construções feitas. Quando as fez em duplicidade, identificou e apagou, demonstrando compreensão do problema.

- O aluno Luís, incialmente se prendeu aos espaços disponíveis no ODA, considerando que a resposta certa fosse seis. Depois, mesmo tendo encontrado todas continuou olhando para a tela. A partir da entrevista com a pesquisadora se assegurou de ter encontrado todas e respondeu.

Pesquisadora Elisa: Com esse olhinho aqui [move o cursor, com o mouse, e coloca sobre SOB] tu já fez todos que dá será?
[Ele olha para a tela. Confirma com a cabeça.]
Pesquisadora Elisa: Fez?
[Confirma seguramente com a cabeça.]
Pesquisadora Elisa: E o outro olho? Fez todos que dá ou não?
[Luís olha para a tela e confirma com a cabeça.]
Pesquisadora Elisa: E o terceiro olho?
[Ele olha para a tela e, depois de 17 segundos, confirma com a cabeça.]

Pesquisadora Elisa: Fez todas? Tu acha que tem mais pra fazer, Luis?
[Luís nega com a cabeça.]
(Vídeo B12-14)

Observou-se que as carinhas formadas na primeira linha usavam a mesma sequência de olhos, mas trocavam as bocas. As primeiras três foram criadas a partir da justaposição das informações oferecidas pelo ODA, e as seguintes usaram a mesma sequência de bocas. A ordem em que apareceram é a ordem em que foram criadas, ou seja, não houveram construções em duplicidade e a organização das possibilidades se assemelha a escrita. O fato de ter construído três grupos com três carinhas sem repetir olhos e bocas mostrou que as possibilidades não eram tomadas como totalmente independentes umas das outras. Porém, a sistematização ainda não foi usada.

O estádio III, descoberta de um sistema, apareceu no seguinte processo:

- A dupla Isabela e Pedro montou as carinhas desde o princípio usando sistematização. Porém, colocaram uma coisa de cada vez, não colocando todos os olhos de antemão. A colocação de um quarto par de olhos SOBRANCELHA, na primeira linha de possibilidades, demonstrou que ainda faltava antecipação dessas possibilidades. O processo de fixar um elemento e fazer variar o outro foi usado de maneira correta e sistemática. Inclusive, foi possível perceber que as bocas aparecem na mesma sequência nas três ocasiões. A solução apresentada foi completada com carinhas repetidas até que se preenchessem todos os espaços. Tal fato demonstrou que completar os espaços não era uma preocupação na hora de responder as perguntas, mas para entregar a solução sentiram necessidade de não deixar nada em branco.

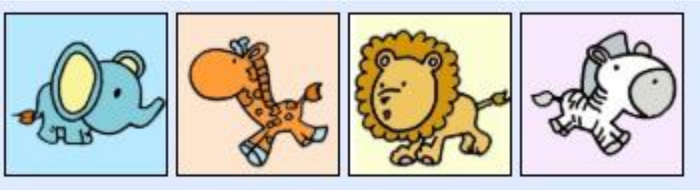
8.2.2 Análise do problema Loja de brinquedos

Em uma loja de brinquedos existem quatro opções de animais de pelúcia: elefante, girafa, leão e zebra.

De quantas maneiras posso escolher dois animais diferentes? Questões adicionais: - Em quantas opções o elefante é escolhido como um dos animais? - Quantas opções não escolhem a zebra?

Abaixo do problema, os animais estavam dispostos na seguinte ordem para a construção dos pares:

Figura 25 - Apresentação dos ícones do problema Loja de brinquedos

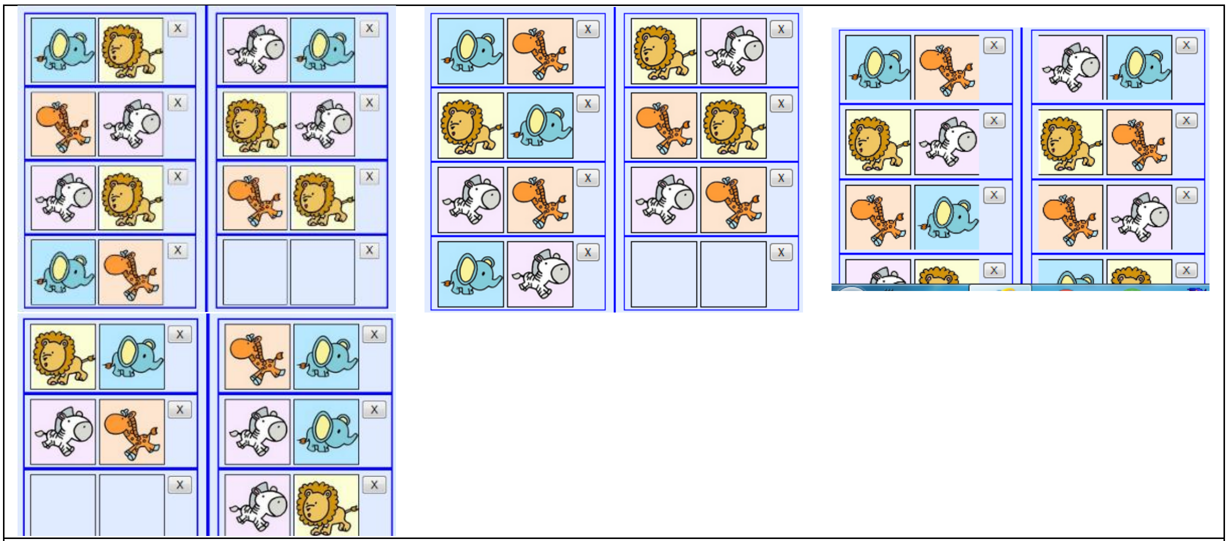


Fonte: Elisa F. Martins

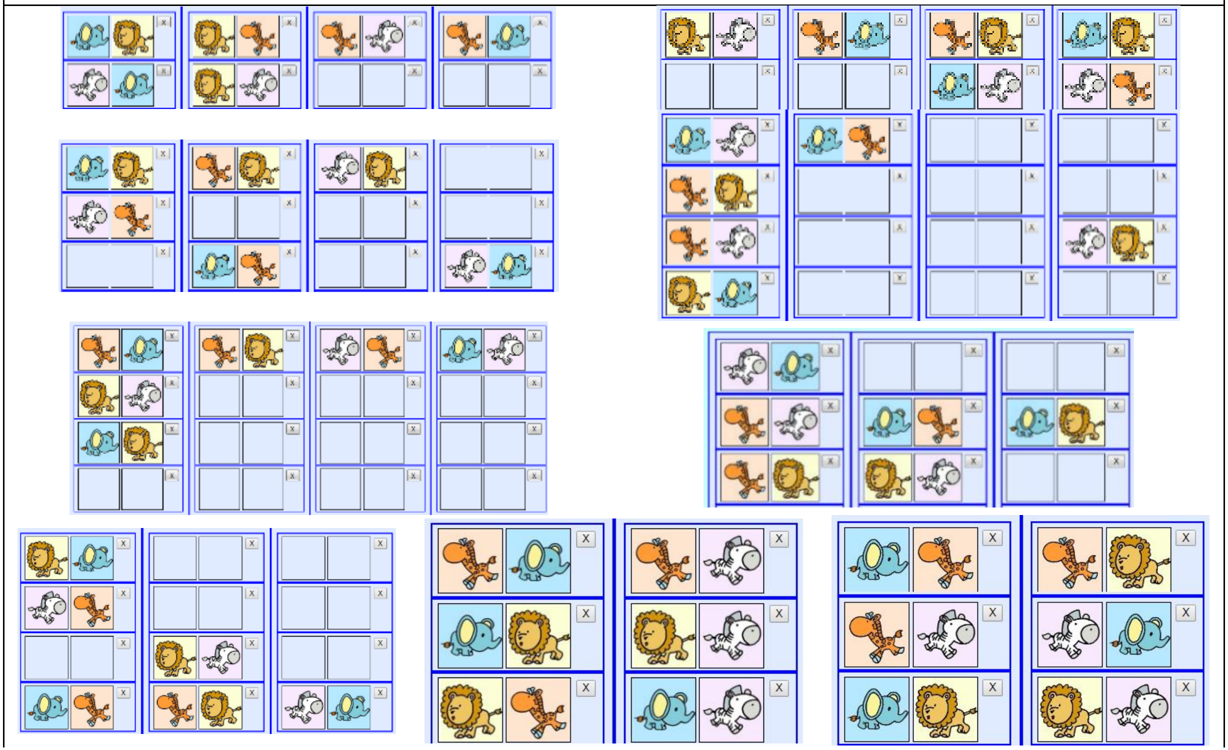
Foram entregues 39 capturas de tela com soluções. Porém, cinco delas estavam cortadas e não puderam ser aproveitadas. Esse fato retratou a dificuldade dos alunos desta etapa escolar em realizar um “Print Screen”, tarefa de aspecto técnico. As 34 soluções que foram consideradas válidas aparecem no Quadro 7; dessas soluções, 11,8% (4 soluções) estavam incompletas, podendo faltar casos possíveis ou conter repetições, e 88,2% (30 soluções) estavam completas e apresentavam as seis possibilidades de escolha. Pôde-se observar que 11,8% do total (4 soluções), dentre as completas, evidenciaram o emprego de sistematização na construção das possibilidades. Por se tratar de um problema de combinação, os mesmos estádios do problema anterior foram utilizados na classificação das soluções.

Quadro 7 - Soluções válidas para o problema Loja de brinquedos

Estádio I: construções empíricas sem identificar os seis pares distintos. Quatro duplas não conseguiram apresentar a solução correta. Três delas construíram um par em repetição e a outra não fez o par leão e girafa.



Estádio I: Construções empíricas com a solução do problema. Em algumas soluções observou-se espaços vazios, representando que foram apagados pares construídos em repetição ou uma não-preocupação com a disposição dos pares formados. Dezenove soluções se encaixam nesse estádio.



Estádio IIa: Justaposição dos primeiros e conclusão com construções empíricas. Sete soluções usaram da justaposição dos animais dispostos no menu para formar as duas primeiras duplas. Uma dupla dispôs na primeira linha, uma dupla manteve separados dos demais pares e outras duplas mantiveram na primeira coluna (nos dois primeiros pares). Os demais quatro pares foram construídos a partir de construções empíricas, ou seja, sem uma sistematização.

Estádio III: Usaram de um sistema para formar os pares

Fonte: acervo da pesquisa

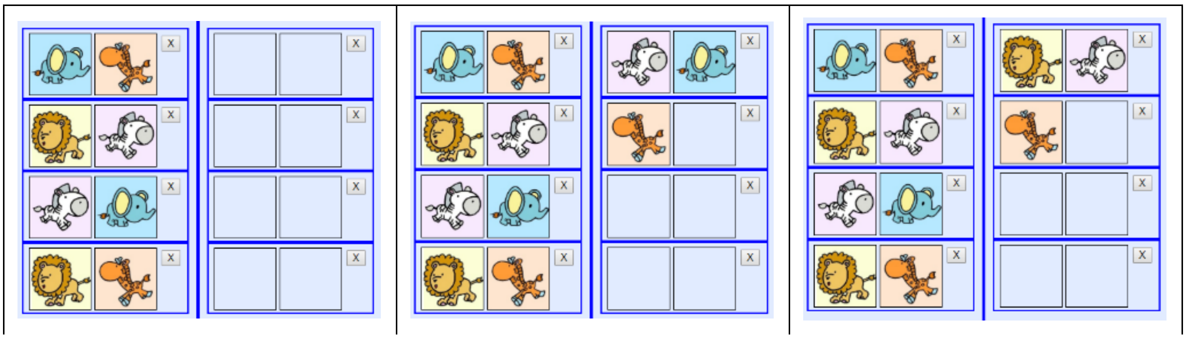
Observando as capturas de tela, percebeu-se uma grande variedade na disposição espacial dos pares. Espaços em branco poderiam representar pares construídos e apagados posteriormente, mas também poderiam ser reflexo de uma não preocupação com ocupar os espaços segundo a convenção léxico-escrita que ocuparia os espaços da esquerda para a direita, de cima para baixo. As imagens apresentadas no Quadro 7 mostraram que esses espaços são mais frequentes nas soluções características do estádio I. A falta de uso de um esquema sistemático não impediu que a solução fosse encontrada como mostraram as soluções características dos estádios I e IIa.

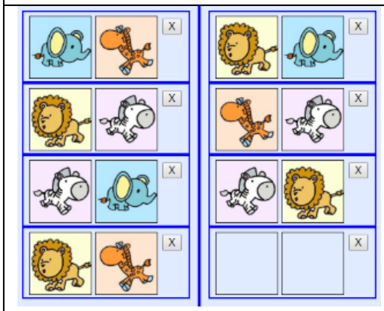
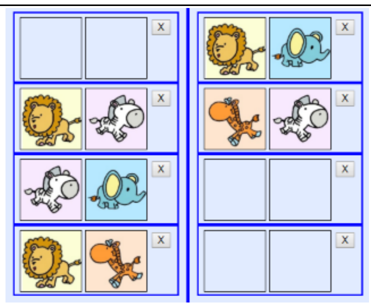
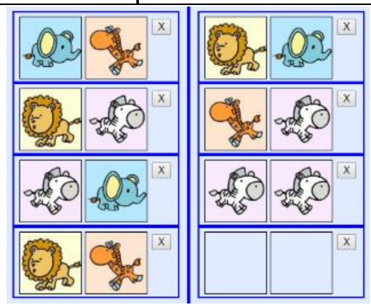
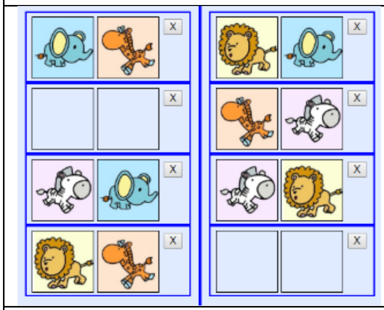
Para análise dos processos utilizou-se a mesma caracterização dos estádios do problema anterior, pois se tratava de uma situação de combinação. Para compreender as estratégias usadas foram analisados vídeos de 29 duplas resolvendo este problema. A partir dos vídeos foi possível perceber as dificuldades enfrentadas e a maneira de resolver o problema de cada dupla.

Foram considerados relevantes os processos característicos do estádio I – construções empíricas:

- A construção da dupla Mariana e Sílvio, apesar de usar justaposição para formar os dois primeiros pares, se encaixa mais com as atitudes típicas do estádio I. Eventualmente esqueceram alguns requisitos do problema para conseguir criar mais duplas. Por exemplo, em um determinado momento construíram um par com duas zebras. Perceberam seus enganos e apagaram o que fora construído em desacordo com o problema proposto. O processo dos dois foi reconstituído para que se perceba as certezas e dúvidas que encararam.

Quadro 8 - Etapas de construção da solução do problema Loja de Brinquedos



Etapa 1: construíram empiricamente 4 pares de animais.	Etapa 2: Construíram outro par e colocaram uma girafa para iniciar o sexto par.	Etapa 3: Identificaram a repetição do par ZEBRA-ELEFANTE e substituíram um deles por LEÃO-ZEBRA
		
Etapa 4: Identificaram que o par LEÃO-ZEBRA já estava representado e o substituíram por LEÃO-ELEFANTE. Completaram o par GIRAFA-ZEBRA e fizeram outro par.	Etapa 5: Apagaram o primeiro e o último pares construídos.	Etapa 6: Perceberam que o primeiro par foi apagado por engano e o refizeram. Construíram, além desse, o par ZEBRA-ZEBRA.
		
Etapa 7: Apagaram o par ZEBRA-ZEBRA por perceber que não atende aos requisitos do problema e construíram ZEBRA-LEÃO no lugar. Ao perceber a duplicidade desse par, apagaram o idêntico que estava na primeira coluna.		

Fonte: Elisa F. Martins, reconstituição feita a partir dos vídeos.

A ordem dos animais, em certo momento, foi considerada como importante na formação dos pares.

> **Sílvio**: E o leão já foi.
> **Mariana**: Arghhh! [Ergue as mãos com os dedos encolhidos]. Foi leão e zebra [aponta LEÃO+ZEBRA] e não zebra e leão!
> **Sílvio**: E já foi... Ah, não.
> **Mariana**: Foi leão e zebra... Ai, meu Deus, que que eu faço? [Leva as mãos a cabeça.] Tamo ferrados.

Sílvio: Leão e zebra.
(Vídeo B13 – 17)

Mas esta também não foi dada como certeza, pois não construíram outros pares invertendo a ordem. Como é típico do primeiro estádio, as certezas sobre o problema vão mudando à medida que que compreendem melhor o processo combinatório.

- Na dupla Hélio e Nicole, Nicole apresentou dúvidas sobre o que era considerado repetição no problema, considerando que a ordem poderia gerar novas possibilidades. No diálogo também ficou evidente que Hélio havia compreendido a não relevância da ordem:

Nicole: Aqui tá ao contrário
Pesquisador Lucas: Ao contrário como?
Nicole: Aqui tá o elefante e o leão e aqui tá ao contrário. [Apontando para os dois pares com mesmos animais mais dispostos em posições diferentes.]
Pesquisador Lucas: Tá repetido, né?
Hélio: Não pode repetir!
(Vídeo B11 – 3)

Nicole acaba concordando com sua dupla e com o pesquisador e apagando o par repetido. Realizaram construções empíricas para resolver o problema, construindo pares em repetição, mas apagando assim que identificavam a duplicidade. Para a solução completa deixaram sete possibilidades, não notando que o par zebra e girafa aparecia duas vezes. Entretanto, Nicole apresentou um critério para identificar repetições quando disse:

[Com o dedo Nicole aponta para o colega]
Nicole: O elefante já foi com a girafa e com o leão. Faz elefante e zebra.
(Vídeo B11 – 3)

Essa fala evidenciou um indício de sistema e de compreensão das regularidades, ainda que bem incipiente.

- A dupla Gabriela e Nisa construiu os pares prestando atenção para não construir com repetição. Quando estavam com cinco pares na tela, colocaram elefante e discutiram o seguinte:

> **Gabriela**: Girafa já foi.
> **Nisa**: Leão também. Foi todas.
> **Gabriela**: Não foi leão com zebra.
> (Vídeo B11 – 15)

Ao afirmar “foi todas”, Nisa sinalizou que a girafa e o leão já haviam sido colocados com todos os animais. Nessa fala ficou evidente um esquema para procurar o que faltava, mesmo que não tenha sido usado na construção das possibilidades. Porém, o par leão e zebra ainda não estava feito. Gabriela percebeu e, logo depois de fazer tal colocação para a colega, construíram o par que faltava e responderam a pergunta inicial do problema.

- A dupla Igor e Elizabete apresentou dificuldade em compreender o problema:

> **Elizabete**: Sora, não dá pra botar um animal com outro, né sora?
> [Na segunda coluna faz LEÃO+LEÃO.]
> **Igor**: Dá!
> **Pesquisadora Elisa**: Pode ser iguais? Lê.
> [Fazem ZEBRA+ZEBRA e ELEFANTE+LEÃO.]
> **Elizabete**: Agora girafa com zebra.
> **Pesquisadora Elisa**: E pode dois iguais? Vocês leram o problema?
> [Fazem GIRAFA+ZEBRA. Releem a parte inicial em voz alta.]
> **Igor**: Não fala nada...
> (Vídeo B11 – 16)

Igor leu a parte inicial do problema, que descrevia a situação, mas não leu a pergunta que buscava responder; nela está explícito que precisavam ser dois animais diferentes. Essa dificuldade fez com que construíssem pares em excesso, que não correspondiam à questão. Quando perceberam que a resposta numérica não correspondia ao esperado, retomaram a leitura do problema e da pergunta. Conseguiram, assim, encontrar a solução do problema através de construções empíricas.

- A dupla Amanda e Ricardo construiu a solução sem formar pares com dois animais iguais, mas com alguns pares repetidos - na mesma disposição ou em disposição invertida. Quando fizeram cinco pares, responderam a pergunta.

Estranharam não aparecer a mensagem de êxito.

> **Ricardo** lê a mensagem em voz alta: *Tem certeza que contou todas as possíveis?* Será que tem que completar tudo?
> **Amanda**: Sora, a gente já fez esses.
> **Ricardo**: Tem que completar tudo!
> **Pesquisadora Elisa**: Ó, girafa com zebra já foi, ó [aponta a dupla repetida na tela]. Girafa com zebra, girafa com zebra.
> **Ricardo**: Ah! Entendi.
> (Vídeo B11 – 20)

A primeira ideia de Ricardo era a de que era preciso completar todos os espaços. Ou seja, ainda faltavam construir alguns pares. Depois da fala da pesquisadora é que percebeu as repetições. Apagaram o que estava em excesso, construíram os pares que faltavam. Ainda havia um par repetido e só foi percebido depois que a pesquisadora solicitou que conferissem. A falta de um esquema apareceu nessas repetições. Mesmo tomando cuidado e compreendendo o problema, acabaram por repetir e só identificaram o erro com uma intervenção.

- A dupla Naiara e Geovane se organizou de modo que cada um construísse um par e passasse o mouse para o colega. Essa dinâmica não auxiliou na hora de perceber as repetições, pois estavam menos atentos à construção do colega. A dupla também teve dificuldade de expor suas ideias um ao outro; por exemplo, quando tinham mais de dez pares formados, sendo muitos repetidos.

> **Pesquisadora Elisa**: Vocês tão aí com todas opções diferentes essas que vocês tão construindo?
> **Geovane**: Aham.
> **Pesquisadora Elisa**: Vocês tão cuidando pra não repetir? Eu tô vendo um monte de coisa repetida aí.
> **Naiara**: Eu também, sora.
> (Vídeo B12 – 7)

Apesar de identificar as repetições, Naiara não comentou com Geovane tampouco apagou. Agiam como se cada um resolvesse à sua maneira, mesmo estando juntos. Construíram, inclusive, os pares com animais iguais e justificaram que esses pares também eram diferentes. Ou seja, a palavra *diferentes* foi compreendida apenas no sentido de comparar as possibilidades. Depois de discutir com a pesquisadora, o sentido da palavra *diferentes* foi compreendido e identificaram todos os pares construídos em repetição.

- A dupla André e Renan conseguiu compreender o problema e montar, a partir de construções empíricas, os pares de animais. Percebeu-se que as figuras são importantes para eles e se envolveram com as imagens. Quando Renan diz “Parece que a girafa que tá correndo atrás do leão ao invés do leão correr atrás da girafa!” (Vídeo B12 – 59) ficou evidente que sua atenção é colocada em todos os aspectos do ODA. Quanto ao reconhecimento do esgotamento de possibilidades, Renan percebeu antes que André. Assim que o sexto par foi formado, ele disse “Acabou agora.” (Renan, vídeo B12 – 59) Depois de montarem os pares, a interpretação do problema voltou a ser discutida, pois era preciso decidir como se encontrava a resposta numérica no que havia sido construído com as imagens.

> **Pesquisador Nicolau**: Construíram todos?
> **André**: Sim.
> **Pesquisador Nicolau**: Quantos deu ali?
> **André**: Peraí.
> **Pesquisador Nicolau**: Quantas duplas?
> **André**: Dois, quatro, seis, oito, dez, doze. [Conta com dois dedos em cada dupla, contando os animais utilizados.]
> **Renan**: Seis.
> (Vídeo B12 – 59)

Cada um havia entendido de uma maneira, mas Renan impôs sua ideia e a mensagem de êxito após a resposta sacramentou sua forma de contar.

- A dupla Yngrid e Marcos montou pares com animais diferentes a partir dos disponíveis no ODA. Chegam a ter 12 pares na tela, ou seja, vários deles aparecem mais de uma vez. E repetem na mesma ordem ou em posições invertidas.

> **Pesquisadora Elisa**: Quando eu compro uma girafa e um elefante, é a mesma coisa ou é diferente comprar um elefante e uma girafa?
> **Marcos**: Eu não sei.
> **Pesquisadora Elisa**: Quando bota na sacola, lá na loja, é a mesma coisa ou é diferente qual que eu comprei primeiro?
> **Yngrid**: O elefante.
> **Pesquisadora Elisa**: Tá. Faz diferença qual que eu comprei primeiro na

> hora que eu botei na sacola?
> **Yngrid**: Não.
> (Vídeo B13 – 50)

Ao apagarem os repetidos, começam a criar pares com dois animais iguais. É comum no estágio I, e mesmo no II, oscilarem o respeito a todas as “regras” do problema. Isto porque precisam encontrar a solução e vão respeitando cada vez critérios diferentes. Preocupam-se em completar todos os espaços disponíveis, o que os leva a montar pares repetidos. Discutem com a professora-pesquisadora os requisitos do problema e ela reforça a ideia de que não é necessário completar todos os espaços. Depois disso é que apagam os repetidos e os que possuem dois animais iguais e chegam ao resultado.

- A dupla Diogo e Jonas montou os pares sem uso de sistematização. Mas quando estavam com cinco pares na tela, sendo que três com elefante, Jonas colocou zebra e clicou sobre elefante. Na mesma hora Diogo falou: “Já deu de elefante! Girafa.” (Vídeo B13 – 52). A reação rápida também evidenciou que os dois estavam atentos ao que se passava na tela do computador, mesmo sendo apenas um a comandar o mouse. Foi compreendido também que a ordem em que os animais são colocados não importava para a formação de pares. Tal compreensão ficou evidente quando, depois de montarem mais uma dupla de zebra e elefante, Diogo disse o seguinte:

> **Diogo**: Tem aqui [aponta ZEBRA+ELEFANTE]. Não, tá igual, cara. Olha aqui: elefante e zebra [toca os pares ZEBRA+ELEFANTE e ELEFANTE+ZEBRA].
> **Pesquisadora Elisa**: Muito bem, Diogo, esse ali já foi, elefante e zebra. [Apaga ZEBRA+ELEFANTE.]
> (Vídeo B13 – 52)

Quando conseguiram montar a solução, enfrentaram dificuldade para perceber a resposta numérica na construção feita. Contaram cada animal disposto na tela e não entenderam porque o ODA não mostrava a mensagem de êxito. Depois de uma intervenção da professora-pesquisadora é que foi esclarecido o fato. Jonas entendeu antes de Diogo, mas ele também conseguiu entender ao fim do diálogo.

> **Pesquisadora Elisa**: Quantos jeitos de escolher dois? Onde tem um jeito de escolher dois?
> [Olham para a tela.]
> **Pesquisadora Elisa**: Onde tem um jeito de escolher dois? Vocês tão contando errado. Que que é um jeito de escolher dois?
> **Jonas**: Ah!
> **Pesquisadora Elisa**: Ó: zebra e elefante; girafa e elefante. Isso aqui é um jeito de escolher dois. Um jeito. Quantos jeitos vocês fizeram?
> **Jonas**: Entendi!
> **Diogo**: Eu não.
> [Jonas estende o indicador em direção à tela e conta os seis pares.]
> **Jonas**: Seis.
> **Pesquisadora Elisa**: Seis jeitos. Tu não entendeu, Diogo?
> [Ele nega com a cabeça.]
> **Pesquisadora Elisa**: Isso aqui não é dois animais [aponta GIRAFA+ELEFANTE], porque a pergunta é quantas maneiras de escolher dois. Uma maneira [aponta GIRAFA+ELEFANTE], duas [aponta LEÃO+ZEBRA], três, quatro, cinco, seis [apontando cada dupla formada].
> **Diogo**: Ah!
> (Vídeo B13 – 52)

- A dupla Elias e Eliseu montou pares sem uso de sistematização. Colocaram animais diferentes, mas fizeram variando a ordem. Por exemplo, estavam com ELEFANTE+GIRAFA; ZEBRA+LEÃO; GIRAFA+ELEFANTE e LEÃO+ZEBRA como quatro primeiros pares. A professora-pesquisadora os questionou sobre a relevância da ordem no problema em questão:

> **Pesquisadora Elisa**: Que que diz a pergunta? Pode ser iguais ou tem que ser diferentes?
> **Elias**: Diferente.
> **Pesquisadora Elisa**: Diferentes. Tá. Zebra e girafa é diferente de girafa e zebra ou é igual?
> **Elias**: Igual.
> **Kate** (de outra dupla): É igual.
> **Pesquisadora Elisa**: Ah! Então tá. Então olha se tu não tem coisa repetida aí.
> (Vídeo B13 – 95)

Depois disso, apagaram tudo e reiniciaram. Eliseu, porém, não gostou da atitude do colega de apagar tudo e pediu que ele completasse sozinho os seis primeiros espaços. Enquanto Elias remontava os pares, Eliseu estavaá atento. Ao completar quatro pares, Elias disse: “Vamos tentar terminar essa daqui [passa o dedo sobre a segunda coluna].” (Elias, vídeo B13-95) E Eliseu responde “Não dá.” É possível que ele tenha percebido que no máximo seriam formado seis pares, mas não argumentou mais sobre a questão. Quando fez a quinta dupla, Elias encontrou dificuldade em montar outra.

> **Elias**: Não dá, sempre vai tá repetido.
> **Eliseu**: Não vai dar repetido na dupla.
> **Elias**: É, né?! Eu acho que não dá.
> **Eliseu**: Zebra... Não tem zebra com elefante.
> [Faz ZEBRA+ELEFANTE.]
> **Elias**: Não dá mais, cara.
> (Vídeo B13 – 95)

Com a solução na tela, foram questionados sobre ter concluído ou não a tarefa:

> **Elias**: Primeiro nós vamos ver se não dá mais, sora.
> **Eliseu**: Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete. Falta um.
> (Vídeo B13 – 95)

Percebeu-se que, mesmo depois de conversarem sobre a impossibilidade de fazer mais duplas, não estavam certos disso. Eliseu contou errado e encontrou sete pares. Por alguma razão pensou que sete não poderia ser a resposta e pensou faltar um. Eles conferiram todas as duplas feitas e, depois de confirmarem que fizeram todas, recontaram os pares e responderam corretamente a pergunta inicial.

- A dupla Ângelo e Bolívar iniciou por formar pares sem nenhuma sistematização. Usaram sempre dois animais diferentes, mas construíram duplas em duplicidade. Quando completaram os dezesseis espaços disponíveis no ODA digitaram a resposta “16”. Tal fato mostrou que consideravam o número de espaços relevante para a resposta. Para que sua solução fosse revista, a professora-pesquisadora esclareceu o problema

> **Pesquisadora Elisa**: Vocês precisam fazer todos os jeitos de comprar dois animais diferentes. Se eu comprar, numa loja, um elefante e uma girafa de pelúcia, é igual ou é diferente eu comprar um elefante e uma girafa ou uma girafa e um elefante? É diferente? Quando tu bota na sacola faz diferença qual tu escolheu primeiro na loja?
> **Bolívar**: É, o elefante é o mesmo.
> **Pesquisadora Elisa**: Faz diferença se eu pego girafa e elefante ou elefante

> e girafa? É quantas maneiras de pegar dois diferentes. Vocês tão com um monte de sacola repetida aí.
> [Apagam três pares identificados como repetidos e olham para a tela buscando outros.]
> (Vídeo B12 – 21)

Apagaram todos repetidos, ficando apenas com cinco pares na tela. Construíram o par que faltava e tinham a solução na tela, mas digitaram a resposta “121”, surpreendendo a professora-pesquisadora.

> **Pesquisadora Elisa**: Cento e vinte e um?
> **Ângelo**: Não, sora! Eu escrevi errado.
> **Pesquisadora Elisa**: Ah, tá.
> [Olham para a tela. Contam as possibilidades construídas.]
> **Ângelo**: Será que não é seis?
> (Vídeo B12 – 25)

Concluíram a tarefa.

- Letícia e Ivone, ao formarem oito pares de animais diferentes, isto é, a solução e dois repetidos, digitaram a resposta quatro como resposta numérica. A professora-pesquisadora interveio para tentar compreender de onde havia saído essa resposta.

> **Pesquisadora Elisa**: De quantas maneiras eu posso escolher dois animais diferentes? Eu acho... Por que quatro? Tem só quatro ali?
> **Ivone**: Não. É que... É pra contar quanto tem?
> **Pesquisadora Elisa**: Quantas maneiras de escolher dois. De quantas maneiras vocês escolheram dois ali? Aonde tem uma maneira, Letícia, de escolher dois? Tu já identificou? Um jeito de escolher dois é pegar um elefante e uma girafa. Um jeito de escolher dois é um leão e uma zebra. Um jeito de escolher é um leão e uma zebra. Isso aqui [toca LEÃO+ZEBRA na segunda linha] é outro jeito ou é o mesmo jeito que já foi?
> **Ivone**: É outro.
> **Pesquisadora Elisa**: É outro? Leão e zebra, leão e zebra?! Esse é outro que esse? [Aponta as duas opções LEÃO+ZEBRA.] De quantas maneiras eu posso escolher dois animais? Tem que construir todas as maneiras.
> (Vídeo B13 - 69)

Contam as oito possibilidades construídas e percebem, pela mensagem exibida, que não é a resposta correta. O questionamento sobre a ordem em que aparecem é proposto novamente.

Pesquisadora Elisa: Pra comprar dois bichinhos de pelúcia, faz diferença qual que eu botei na sacola primeiro? Se foi a zebra ou se foi o leão?
Ivone: Não.
Pesquisadora Elisa: Então é a mesma coisa comprar leão e zebra e zebra e leão.
[Olham para a tela. Por trinta segundos.]
Pesquisadora Elisa: Vocês sabem apagar?
[Se olham sem responder.]
Pesquisadora Elisa: No xis daí apaga uma que tá repetida [aponta o xis de ZEBRA+LEÃO].
(Vídeo B13 – 73)

Acabam por apagar tudo e recomeçar. Os critérios importantes para a formação dos pares não foram completamente compreendidos, pois a solução entregue apresenta oito pares, sendo a solução e dois repetidos.

Como processos característicos do estádio II foram registrados os seguintes:

- A dupla Alice e Bruno construiu as duplas sem repetições e iniciou colocando os quatro animais na mesma disposição em que aparecem no ODA. O uso da justaposição é característico do estágio II, mesmo que não usem de alguma outra sistematização para a construção da solução. Quando encontram os seis pares, demoram para perceber que se esgotaram as possibilidades. Eles estavam com a solução na tela e uma zebra.

[Completam ZEBRA+LEÃO.]
Alice: Já tem aqui.
[Apaga ZEBRA-LEÃO.]
(Vídeo B11 – 35)

Os dois olharam para a tela buscando outras possibilidades. Bruno já se convenceu de que não era possível, mas Alice ainda não.

Pesquisadora Elisa: Tem mais, gente? Pra fazer?
Bruno: Tô dizendo! Um, dois, três, quatro, cinco, seis! [Conta movendo o dedo em direção a tela, mas sem tocar.]
(Vídeo B11 – 36)

A falta de um esquema de sistematização impediu a construção de um argumento acerca do esgotamento de possibilidades. Os espaços disponíveis no ODA acabaram por fazer pensar que mais pares pudessem ser formados.

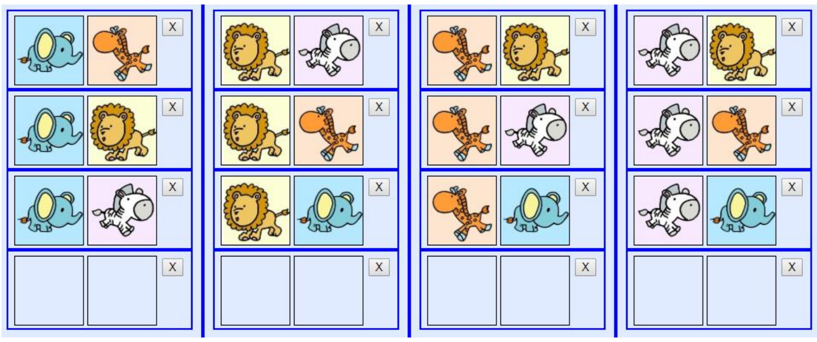
- A dupla Miguel e Alexandre, depois de ler o problema, começou por colocar os animais como estavam dispostos no ODA. Ou seja, usaram de justaposição para formar os dois primeiros pares. Quando estavam com os seis pares na tela, chamaram a professora-pesquisadora para confirmar se estavam no caminho certo

> **Miguel**: Sora! É assim?
> **Pesquisadora Elisa**: Isso! Sim. Só que, que que tem que pensar? Isso aí! Acho que vocês estão no caminho certo.
> **Alexandre**: Tem que fazer tudo isso aqui? [Aponta para os espaços vazios.]
> **Pesquisadora Elisa**: Não. Faz quantos consegue, diferentes. Não precisa encher.
> (Vídeo B11 – 35)

Com a solução na tela, não conseguiam justificar o esgotamento de possibilidades, o que os deixou procurando por mais pares durante um tempo. Os espaços disponíveis no ODA também os fizeram pensar que haviam construído poucos pares. Para que reconhecessem sua construção como solução, foi necessário que a professora-pesquisadora questionasse: “Tem mais pra fazer?” (Pesquisadora Elisa, vídeo B11 – 36). Ao afirmarem pra ela que não, digitaram a resposta.

- Kassia começou montando pares sem nenhuma sistematização. Quando tinha quatro pares na tela (GIRAFA+ELEFANTE; ZEBRA+LEÃO; LEÃO+GIRAFA; ELEFANTE+ZEBRA) chamou a professora-pesquisadora para perguntar se “Dá pra ser assim? [Aponta as construções na tela.]” (Kassia, vídeo B12 – 9) Ela ainda construiu ELEFANTE+LEÃO; ZEBRA+GIRAFA e LEÃO+ELEFANTE. Apagou tudo e recomeçou. Na segunda tentativa, organizou os pares de forma sistemática, mas considerou a ordem dos mesmos relevante. Construiu a seguinte solução:

Figura 26 - Solução apresentada para o problema Loja de Brinquedos



Fonte: Kassia

O uso da sistematização não garantiu a solução do problema, como pode ser observado. Ainda, na hora de contar para obter a resposta numérica, contou cada um dos animais e tentou a resposta vinte e quatro. Quando a professora-pesquisadora foi conversar sobre a solução, esse erro foi resolvido.

> **Pesquisadora Elisa**: Não tá certo. Por quê? Vinte e quatro? Não! Não é vinte e quatro jeitos. Vinte e quatro jeitos não. Isso aqui [indicador na tela sobre a primeira dupla ELEFANTE+GIRAFA] é um jeito. Um jeito de escolher dois [circula, com o dedo na tela, a opção ELEFANTE+GIRAFA]. Um jeito de escolher dois [circula, com o dedo na tela, a opção ELEFANTE+LEÃO].
> **Kassia**: Ah! Eu contei que era cada um [aponta, com o indicador, os quatro primeiros animais colocados].
> **Pesquisadora Elisa**: Não. Quantos jeitos de escolher dois.
> (Vídeo B12 - 10)

Depois, ainda foi necessário reconhecer os pares que estavam montados em duplicidade. A cada nova leitura e discussão do problema, outras dúvidas surgiam e se apresentavam como novos problemas menores.

- A dupla Nara e Rafaela resolveu o problema da loja de brinquedos duas vezes. Na primeira vez, colocaram na mesma ordem em que estavam no ODA, mas sem outra preocupação com sistematização. Ao construírem quatro pares se perguntaram se estaria pronto.

Rafaela: Olha, sora, quantos já fizemos.
Pesquisadora Elisa: Aham. Isso aí.
Nara: Será que a gente acabou esse?
Rafaela: Dois, quatro, seis, oito? [Conta sem nenhum apoio gestual.]
Nara: Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove.
(Vídeo B13 – 33)

Na hora de contar os pares, contaram cada animal e ainda o fizeram com erro. Elas tinham quatro pares na tela, mas contaram nove animais e consideraram que a resposta não poderia ser essa. Montaram outros dois pares e estavam com a solução na tela, mas contaram cada animal e novamente não obtiveram a mensagem de êxito.

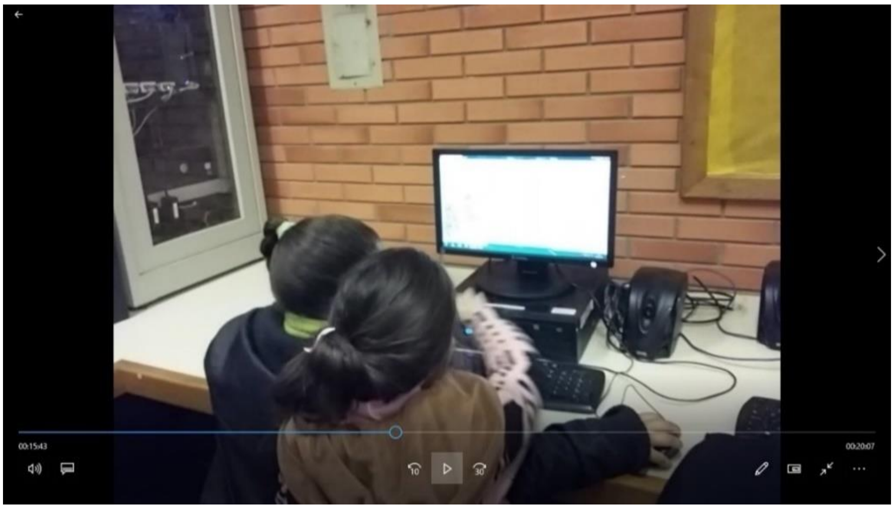
Nara: Doze! Passou do nove.
Rafaela: Cada quadradinho aqui tem oito. São oito quadradinhos pra fazer. Entendeu? Então oito, oito mais oito dezesseis... Entendeu?
[Nara confirma com a cabeça.]
(Vídeo B13 – 33)

Apesar de construírem a solução, não conseguiram identificar a resposta numérica para o problema neste dia. No outro dia, construíram os pares sem considerar que tinham que ser dois animais diferentes. Quando tinham sete pares, sendo os repetidos entre eles, um dos pesquisadores interveio e relembrou um dos critérios do problema.

Pesquisador Lucas: Ó. Mas olha só o que tá dizendo ó [aponta para a pergunta na tela]. Os dois animais tem que ser diferentes. Girafa com girafa não são dois animais diferentes.
(Vídeo B13 – 4)

Depois dessa intervenção, apagaram os repetidos e construíram os pares que faltavam, resolvendo o problema. Essa dupla trabalhou de forma conjunta, usando, inclusive, o mouse e o teclado quase simultaneamente. Uma captura de tela do vídeo demonstra esse envolvimento.

Figura 27 - Captura da tela do vídeo com dupla trabalhando juntas



Fonte: Elisa F. Martins

- Roni iniciou de modo sistemático, mas com construções que não estavam de acordo com o enunciado do problema. Construiu a primeira coluna com quatro pares iguais formados por dois elefantes; a segunda coluna tem três pares com duas zebras cada e a terceira coluna só com leões. A professora-pesquisadora interveio para esclarecer melhor o problema.

> **Pesquisadora Elisa**: Lê a pergunta aí, Roni. De quantas maneiras posso escolher dois animais diferentes? Olha o que tu tá fazendo aí...
> [Apaga três duplas ELEFANTE+ELEFANTE.]
> **Pesquisadora Elisa**: Tu não vai precisar encher, querido. Só quantas tu consegue. Quantas maneiras de fazer dois animais diferentes.
> (Vídeo B13 – 46)

Ele recomeçou e construiu a solução do problema. Usou os animais na ordem em que estavam no ODA para construir os quatro primeiros pares, o que é característico do estádio II.

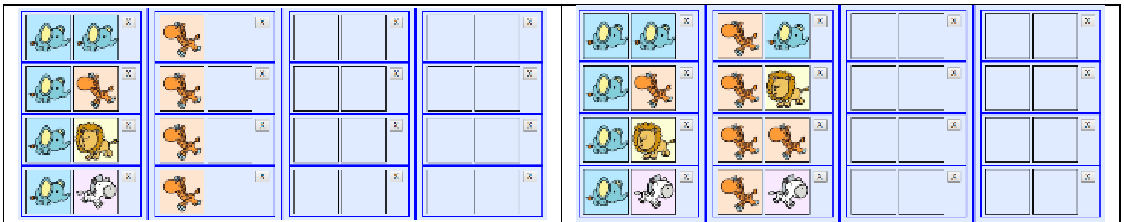
Alguns processos podem ser caracterizados como do estádio III.

- A dupla Valdo e Cláudio utilizou um processo sistemático até o fim. Colocaram, em cada coluna, os pares com um dos animais na primeira posição. Porém, tal processo não levou em conta alguns dos requisitos do problema; além de considerar a ordem como relevante, construíram pares com dois animais iguais. Como a resposta numérica não se encaixou, Valdo releu a pergunta e percebeu que não poderiam ser colocados dois animais iguais. Apagaram tudo e recomeçaram. Construíram os três primeiros pares com o elefante na primeira posição; não fizeram o par ELEFANTE+ELEFANTE desta vez. Ao montarem os pares com a girafa, repetiram o par GIRAFA+ELEFANTE, considerando ainda a ordem como fator relevante na construção dos pares. Construíram com repetição, identificaram e substituíram por outro par. Chegaram a sete pares e tentaram esse valor como resposta. Tal fato desmotivou a continuação do trabalho da dupla.

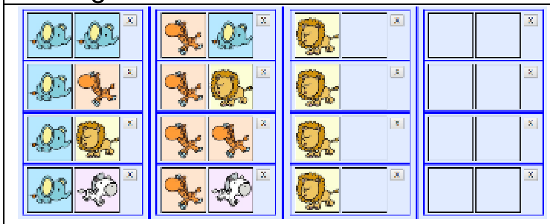
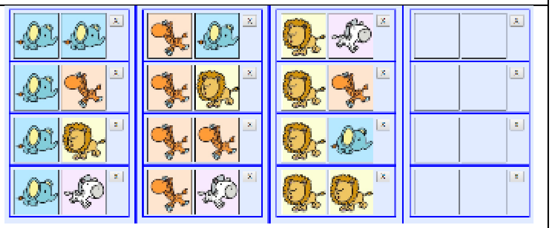
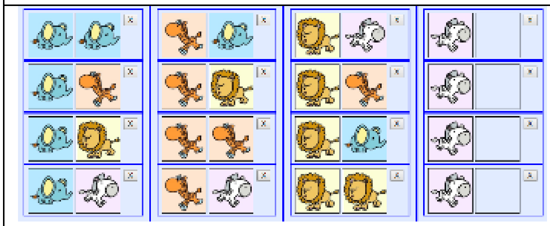
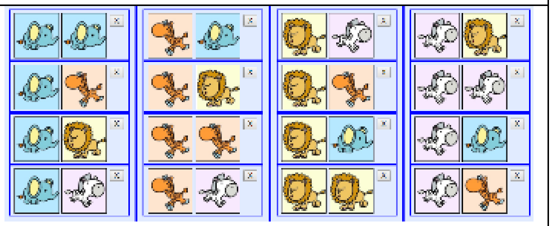
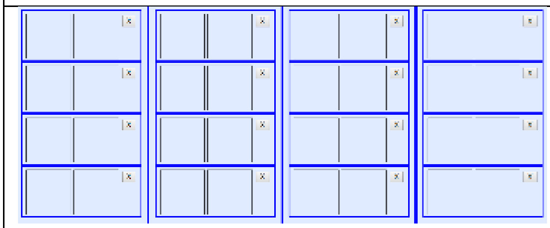
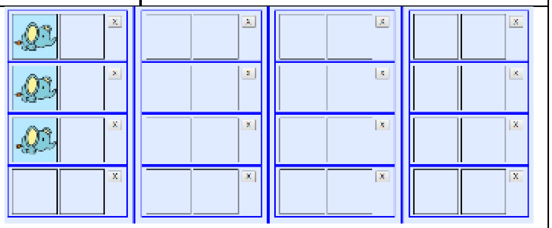
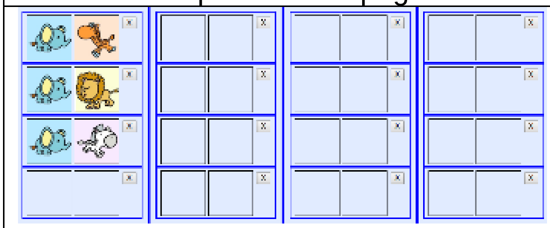
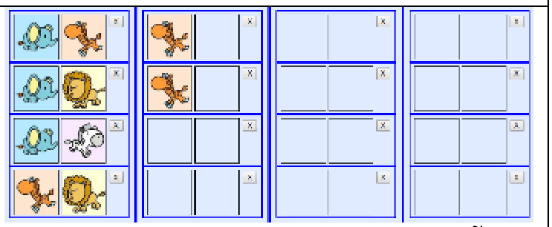
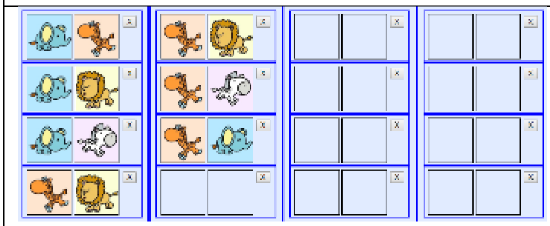
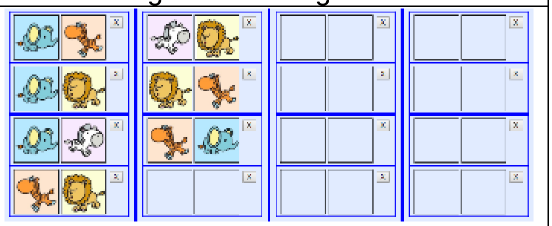
> **Valdo**: A gente já errou duas vezes.
> [Tentam a resposta sete. Não aparece a mensagem de êxito.]
> **Valdo**: Sete. [Ergue a mão demonstrando não perceber o erro.]
> **Cláudio**: Esse aqui tá duas vezes. [Referindo-se a GIRAFA-ZEBRA.]
> (Vídeo B11 – 102)

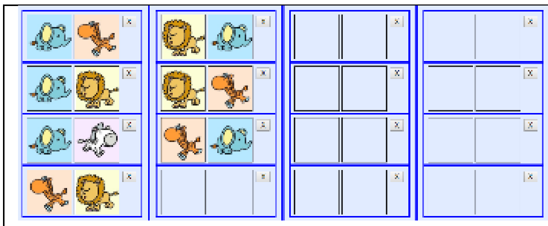
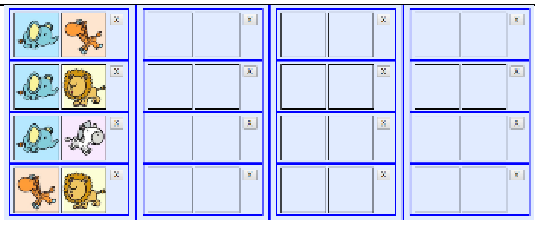
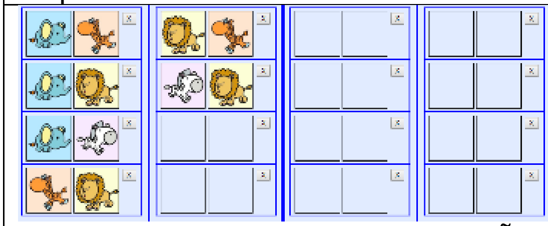
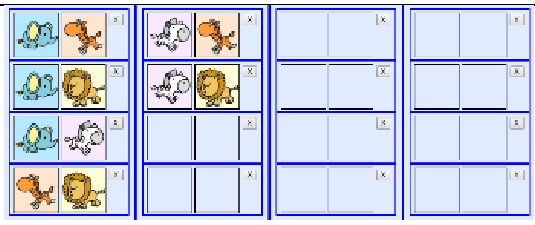
Passaram a chutar valores como resposta numérica. Tentaram dois, três, cinco, quatro, sete e seis. Conseguiram obter a mensagem de êxito e abrir as perguntas adicionais, mas sua construção não estava correta. Um dos pesquisadores fez a intervenção e voltou a atenção da dupla para os pares formados. Apagaram os três pares da segunda coluna e construíram outros dois no lugar. Contaram seis pares e se alegraram com o êxito. Entretanto, o pesquisador apontou que ainda havia um par repetido. Apagaram este e construíram o par que faltava. O quadro a seguir sintetiza o processo e permite perceber as certezas que foram mudando ao longo do processo.

Quadro 9 - Sequência de passos até a construção da solução do problema Loja de Brinquedos



Etapa 1: Constroi 4 pares com o elefante | Etapa 2: Completa os 4 pares com girafa

na primeira coluna e posiciona 4 girafas na segunda coluna.	na segunda coluna.
	
Etapa 3: Coloca 4 leões na terceira coluna.	Etapa 4: Completa os 4 pares com leão.
	
Etapa 5: Coloca 4 zebras na quarta coluna.	Etapa 6: Completa os 4 pares com a zebra na quarta coluna.
	
Etapa 7: Após reler a pergunta percebem que não podem haver dois animais iguais. A resposta numérica não foi dada como correta pelo ODA. Apagam tudo.	Etapa 8: Colocam 3 elefantes na primeira coluna.
	
Etapa 9: Completam os três pares com elefante.	Etapa 10: Fazem o par GIRAFA-LEÃO e colocam 2 girafas na segunda coluna.
	
Etapa 11: Completam os dois pares com girafa e fazem mais um par com a girafa.	Etapa 12: Identificam a repetição do par GIRAFA-LEÃO e apagam todos pares da segunda coluna. Nessa coluna, fazem 3 pares de maneira empírica. O par LEÃO-GIRAFA aparece duas vezes, mas em ordem diferente.

 Etapa 13: Substituem o par ZEBRA-LEÃO por LEÃO-ELEFANTE. Tentam a resposta numérica sete.	 Etapa 14: Ao perceber o erro, apagam os pares da segunda coluna.
 Etapa 15: Constroem os pares LEÃO-GIRAFA e ZEBRA-LEÃO na segunda coluna. Colocam a resposta numérica e se alegram com o êxito.	 Etapa 16: O pesquisador aponta o par repetido e o substituem por ZEBRA-GIRAFA.

Fonte: acervo da pesquisa

- A dupla Theo e Eloíza, na primeira tentativa de resolução, montou os pares sem uma sistematização completa. Além disso, construíram um conjunto de oito pares que continha ZEBRA+ZEBRA; LEÃO+LEÃO e ELEFANTE+ELEFANTE.

> **Pesquisadora Elisa**: Ó, vamos ler a pergunta aí. De quantas maneiras posso escolher dois animais diferentes? Todos os jeitos aí vocês escolheram dois animais diferentes?
> [Theo aponta os jeitos com dois animais iguais.]
> **Theo**: Viu? Ela quis colocar dois iguais.
> (Vídeo B11 – 85)

Apagaram os pares de animais iguais e tentaram a resposta cinco. A dificuldade por encontrar mais uma possibilidade os fez recomeçar. Na segunda tentativa de solução do problema usaram de uma sistematização. Fizeram os três pares com o elefante, depois dois pares com a girafa e concluíram com o par LEÃO+ZEBRA. A importância da sistematização para a certeza do esgotamento de possibilidades foi parte do processo de resolução do problema.

- Na dupla Wiliam e Leonardo, um dos meninos tentou construir de forma sistemática, mas não conseguiu se fazer entender pelo colega.

[Coloca ELEFANTE+GIRAFA.]
Wiliam: Continua com elefante [aponta o espaço abaixo do ELEFANTE].
[Leonardo, com o mouse, pega o LEÃO.]
Wiliam: Elefante!
[Coloca o LEÃO abaixo da girafa.]
Wiliam: Pega o ELEFANTE!
[Completa ELEFANTE+LEÃO.]
Leonardo: A zebra...
[Coloca ZEBRA abaixo de ELEFANTE.]
Wiliam: Não! Aqui, ó [aponta o espaço abaixo do LEÃO].
[Coloca outra ZEBRA, completando ZEBRA+ZEBRA.]
(Vídeo B13 – 30).

A sistematização não era necessária para Leonardo; e Wiliam não explicou o motivo de querer que os animais indicados fossem colocados em posições específicas. Com Wiliam orientando o colega sobre o que devia ser apagado e construído, conseguiram construir doze pares, sendo que cada três seguidos possuíam o mesmo animal na primeira posição. A mensagem que apareceu após a resposta doze ser informada não era a esperada. A professora-pesquisadora interveio para questionar a relevância da ordem.

Pesquisadora Elisa: Por que que não deu certo, meninos?
[Wiliam lê a mensagem.]
Pesquisadora Elisa: Ó, eu tô indo numa loja comprar. Se eu compro um elefante e uma girafa é a mesma coisa ou é diferente de eu comprar uma girafa e um elefante?
Leonardo: É a mesma coisa.
Pesquisadora Elisa: É a mesma coisa. Então, tem coisa aí que tá repetida.
Leonardo: Apaga esse [aponta LEÃO+GIRAFA].
Wiliam: Esse? [Com o cursor sobre a dupla.]
[Leonardo vai apontando os que identifica como repetidos e Wiliam, com o mouse, apaga.]
(Vídeo B13 – 32)

Identificaram os repetidos e os apagaram. Encontraram a resposta correta e fizeram a captura de tela.

8.2.3 Análise do problema Meias de palhaços

Palhaços usam roupas coloridas e, por isso, não precisam usar duas meias iguais. Um palhaço tem a sua disposição meias amarelas, vermelhas e azuis.

- Quantos diferentes pares de meias ele pode formar?

Questões adicionais:

- Em quantos desses pares as meias são iguais?
- Em quantos desses pares as meias são diferentes?
- E se aparecerem meias verdes para o próximo espetáculo, quantos novos pares ele pode formar?

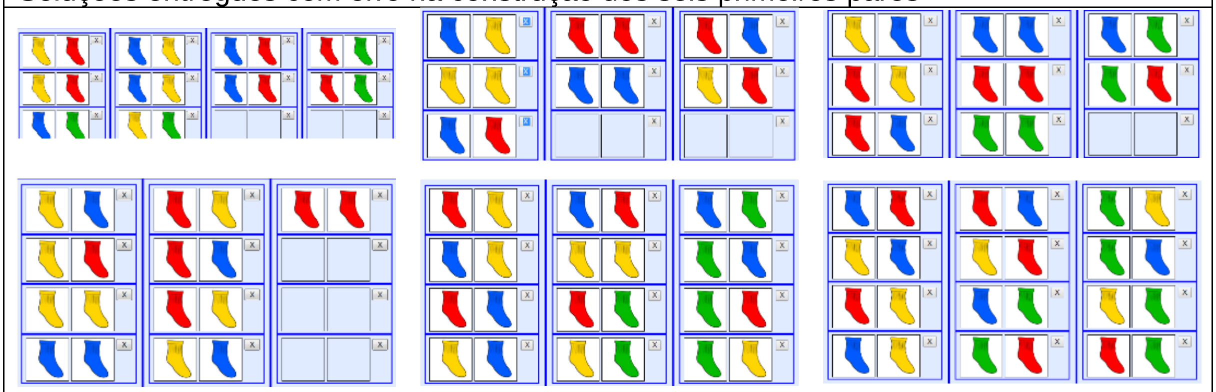
Para esse problema foram apresentadas 38 soluções diferentes, mas uma estava cortada; foram consideradas 37 soluções válidas.

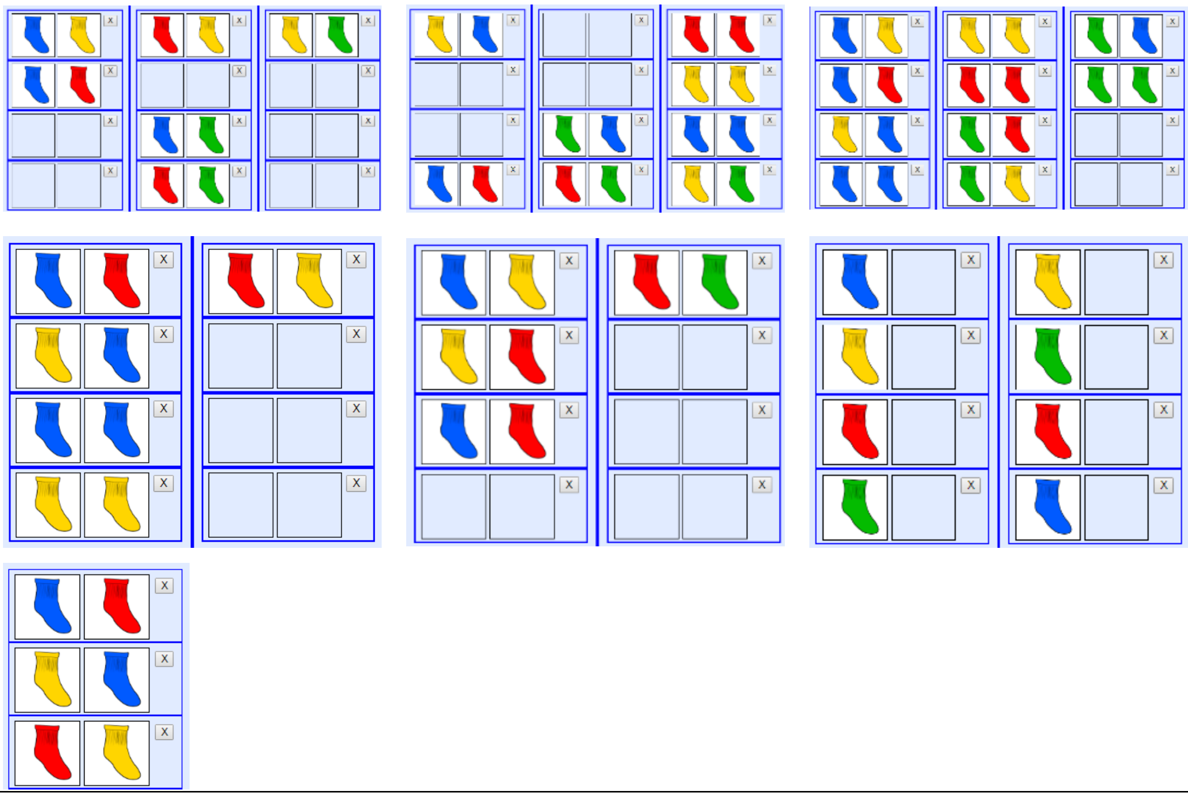
Dentre as soluções válidas, 35,1% (13 soluções) não conseguiram representar os seis pares diferentes relativos à primeira pergunta. Esse problema teve 51,3% (19 soluções) das soluções entregues com todas as construções feitas corretamente. No caso deste problema, a soma dos que acertaram com os que erraram não totaliza 100% porque houve duplas que não realizaram todo o problema, ficando apenas na questão inicial.

Percebeu-se que 8,1% das soluções válidas (3 soluções) acertaram a primeira parte, mas não tentaram responder às demais perguntas. E ainda houve 5,5% (2 soluções) que acertaram a primeira parte, mas apresentaram confusão na construção dos pares com uma nova meia.

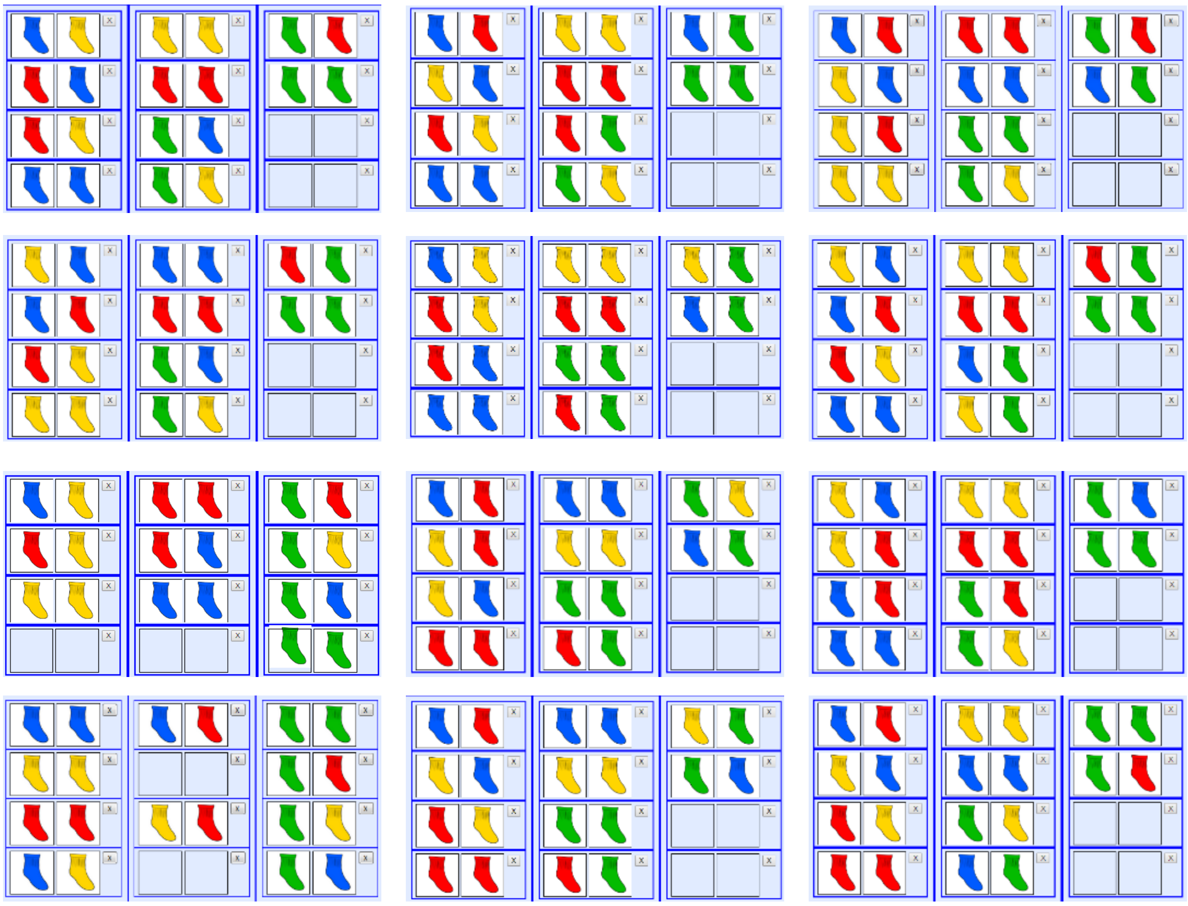
Quadro 10 - Soluções para o problema Meia de palhaços

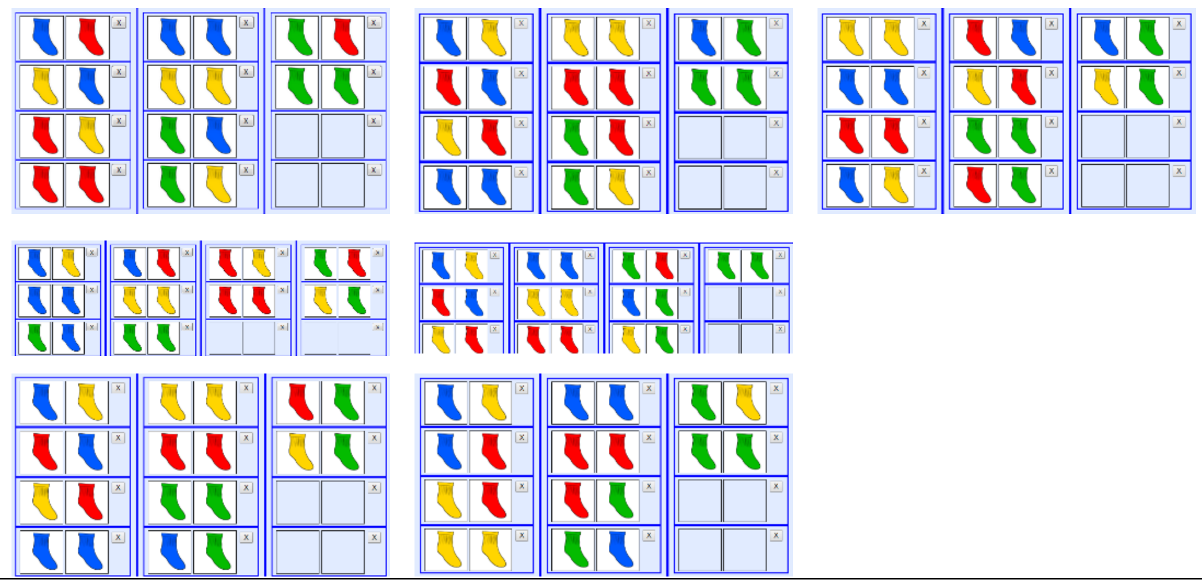
Soluções entregues com erro na construção dos seis primeiros pares



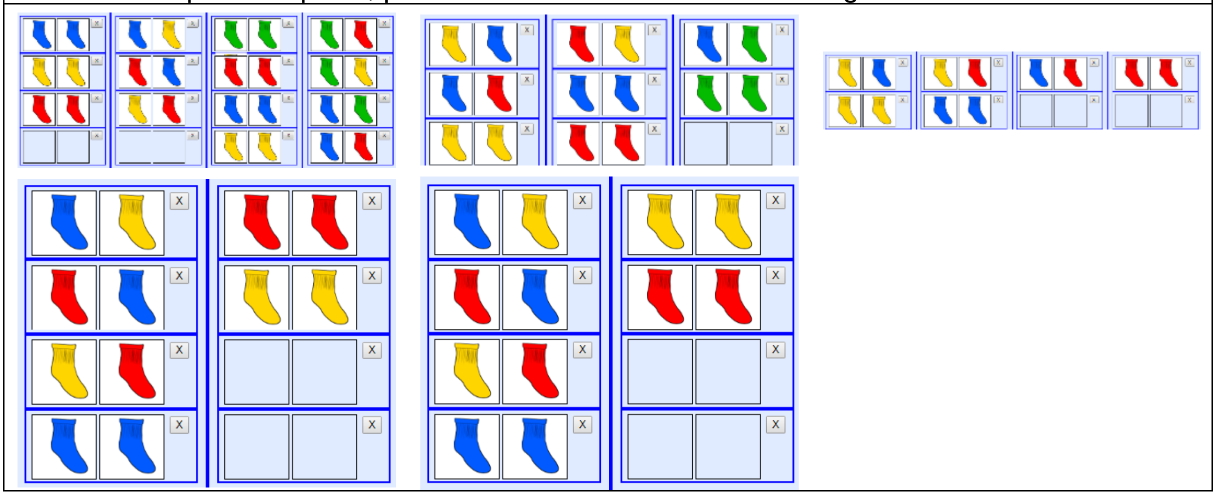


Soluções entregues com os 10 pares corretamente construídos





Acertaram a primeira parte, porém erraram ou não fizeram a segunda



Fonte: acervo da pesquisa

Foram gravadas em vídeo vinte e cinco duplas resolvendo este problema. A partir dos diálogos e etapas na construção da solução foi possível compreender como pensaram as combinações. Por se tratar de outro problema de produto cartesiano, os estádios foram caracterizados como nos problemas anteriores.

Foram processos característicos do estádio I, das construções empíricas, os seguintes:

- A dupla Amanda e Ricardo iniciou criando três pares monocromáticos: amarelo, azul e vermelho. Ao lerem a mensagem que pedia que repensassem, apagaram e criaram pares com meias de cores diferentes. Não consideraram o significado da expressão “não precisam” apresentada no problema. Consideraram que um par de meias não poderia ter duas meias da mesma cor. Apesar disso, construíram duas vezes cada par e obtiveram a resposta numérica correta. Para responder as questões adicionais, se perderam ao ler a pergunta e digitar a resposta. Ao recontarem os pares e perceber que fizeram três, digitaram o número no espaço da segunda pergunta e obtiveram a mensagem de êxito. Para criar as meias com a nova cor também fizeram dois pares iguais com cada cor, ou seja, dois pares verde e amarelo, dois pares verde e azul e dois pares verde e vermelho. Não colocaram a resposta numérica para saber se sua construção estava correta ou não e fizeram a captura de tela. Para essa dupla, apesar de não superarem as dificuldades, o ODA não apresentou as mensagens corretas. Ou melhor, mesmo resolvendo de forma errada, informaram as respostas numéricas corretas e o ODA considerou correto.

- O aluno Jéferson trabalhou sozinho e iniciou formando dois pares com duas cores distintas. Depois, formou dois pares com uma cor só de meia. Ainda fez um par com meias de cores diferentes e analisou as possibilidades construídas. Faz outro par igual a um construído, mas alterando a ordem. Contou e pensou ter encontrado a resposta.

> **Jéferson**: Um, dois, três, quatro, cinco, seis [Conta com dois dedos sobre cada par na tela].
> [Olha para a tela.]
> **Pesquisadora Elisa**: Só que esse [toca AZUL+VERMELHO] e esse [toca VERMELHO+AZUL] é o mesmo par, né?!
> (Vídeo B13 – 40)

Sem responder, ele apagou o repetido e tentou informar cinco como resposta. Apesar de perceber a mensagem do ODA, não teve tempo de concluir o problema e entregou a solução incompleta.

- Inicialmente, Nisa e Gabriela construíram considerando a ordem das meias e não considerando que pudessem ser duas da mesma cor. Acertaram a resposta numérica mesmo com a solução incorreta. As perguntas seguintes as fizeram refletir sobre a construção.

> **Gabriela**: Eu não entendo isso aqui!
> **Pesquisadora Elisa**: Quantos pares diferentes? Essa aí vocês já tinham acertado?
> **Gabriela**: Eram seis.
> **Pesquisadora Elisa**: Tá, mas olha só, vamos voltar... Quantos pares diferentes? Isso aqui [aponta AZ+AM na tela] e isso aqui [aponta AM+AZ na tela], se tiver na tua gaveta de meias, é um par diferente ou é um par igual de meias?
> **Gabriela**: É um par igual.
> **Pesquisadora Elisa**: Então não pode contar duas vezes.
> (Vídeo B11 – 20)

Depois de terem construído a solução correta, voltaram a responder as perguntas. Ao responder as perguntas adicionais, identificaram que as duas perguntas tratavam de conjuntos complementares:

> **Gabriela**: Vamos lá. Um, dois, três. Sim, porque três mais três é seis!
> **Nisa**: Ai, nós somos umas jumentas...
> (Vídeo B11 – 20)

Tal conclusão evidenciou que, apesar de usarem construções empíricas e agirem de maneira característica com o estágio I, propriedades do conjunto solução foram percebidas.

- A dupla Alice e Bruno construiu de maneira sistemática seis pares de meia, fazendo dois pares com cada uma das meias na primeira posição. Porém, tal estratégia considerava a ordem como relevante, o que não se encaixava no problema. Apesar de não montarem os pares monocromáticos, acertaram a resposta numérica. Curiosamente, acertaram também as duas perguntas adicionais sobre pares com meias da mesma cor e com meias diferentes. Ao construírem as opções com a nova cor, usaram o mesmo esquema e depararam-se com dúvidas:

> **Alice**: Seis. Não sei não. Ó, sora, acho que o Bruno tá fazendo alguma coisa errada aqui. Não sei não.
> (Vídeo B11 – 45)

Identificaram as repetições depois da intervenção da pesquisadora. Apesar disso, não voltaram a pensar nas questões anteriores e responderam que era possível fazer três pares com a meia verde, desconsiderando o par verde e verde. Não conferiram a resposta numérica para a última pergunta e fizeram a captura de tela. Outra vez o ODA acabou não auxiliando na superação da dificuldade encontrada. E as certezas acerca do problema não foram totalmente consideradas quando discutiram. Ou seja, as discussões e intervenções serviram para pensar nas próximas ações, mas não nas anteriores.

- Inicialmente, a dupla Miguel e Alexandre construiu os pares considerando a ordem e sem formar pares monocromáticos. Apesar da solução não estar correta, acertaram a resposta numérica. Ao serem questionados pela pesquisadora sobre a relevância da ordem, identificaram os pares repetidos e Alexandre sugeriu uma forma sistematizada de construir os pares:

> **Alexandre**: Olha só, sora. Bota amarelo, depois bota amarelo, depois bota amarelo. Depois é só botar... [Aponta dois dedos para a tela indicando que devem ser completados os pares] amarelo com...
> **Pesquisadora Elisa**: Por que tu não fez assim? Depois tu faz assim, então. (Vídeo B11 – 44)

Identificaram os pares e repetidos e, depois de discutirem com a professora o uso da expressão "não precisam" construíram os pares azul+azul e vermelho+vermelho. Não confirmaram se a solução estava correta, deixando de fazer o par amarelo+amarelo. A ideia de sistematização de Alexandre não foi implementada, mas certamente foi uma colocação importante. Provavelmente a ideia não foi levada adiante porque ele não estava com o mouse e a dupla, sem compreender os argumentos, acabou não dando ouvidos. Para os pares com a meia verde, fizeram verde+verde, mas deixaram de montar verde+amarelo. Também demonstraram não ter um sistema para conferir se haviam ou não esgotado as possibilidades. Mesmo considerando dois casos: pares monocromáticos e com duas cores distintas; não construíram todas as opções de monocromáticos possíveis.

- A dupla Nicole e Alexandre construiu apenas os três pares com meias de cores diferentes. Alexandre já havia resolvido esse problema com outra dupla em outro encontro, mas não conseguiu impor sua maneira de resolver. Tentaram a resposta três mais de uma vez, demonstrando que esperavam que o erro estivesse no ODA e não na sua resposta.

> **Elisa**: Não era. Então tá. Olha só porquê. Não precisa ser duas meias iguais, mas pode ser duas meias iguais.
> **Alexandre**: Ah! Então, era isso que eu tava fazendo.
> [Faz AZUL+AZUL.]
> (Vídeo B11 – 49)

Depois dessa intervenção construíram os pares monocromáticos e responderam corretamente as perguntas seguintes.

- A dupla Isabela e Pedro oscilou entre considerar a ordem como relevante ou não. Da mesma maneira, a expressão "não precisa" pareceu ter significado diferente para cada um dos integrantes. Ao colocar a primeira meia azul na tela, conversaram:

> **Isabela**: Azul com azul.
> **Pedro**: Olha ali [rola a página para que o problema apareça na tela]. Não precisam ser iguais.
> (Vídeo B12 – 1)

Isabela entendia que poderiam, mas não necessitariam ser iguais; Pedro entendia que não poderiam ser da mesma cor. Depois de terem construído três pares com meias de cores diferentes, Isabela propôs que a resposta fosse seis. Ela contou cada um dos pés de meia e não os pares. Pedro não aceitou a sugestão e criou outros dois pares iguais, mas com as posições das meias invertidas. Ele tentou a resposta cinco e não compreendeu a mensagem apresentada pelo ODA.

> **Pedro**: Não entendi. Ué.
> **Isabela**: Tem dez aí.
> **Pedro**: Tá louca? Tem doze. Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez. [Movendo o cursor sobre cada meia enquanto conta.] Não! É pares!
> (Vídeo B12 -1)

A compreensão sobre o problema se complementou. Pedro compreendia que o problema se tratava de pares e não de pés de meia; Isabela compreendia que poderiam haver pares monocromáticos. Apesar disso, formaram seis pares, sendo que cada um deles aparece duas vezes com a ordem diferente. Acertaram a resposta numérica e as perguntas adicionais apareceram. A primeira delas questionava sobre pares de meia de uma cor só. Isabela percebeu o que era necessário construir para encontrar a solução, mas teve dificuldade de ser ouvida pelo seu colega.

> **Isabela**: Bota amarelo com amarelo.
> **Pedro**: Não dá. Um, dois, três, quatro, cinco, seis. Preciso de mais um rosa [referindo-se ao vermelho].
> [Faz, na primeira coluna, AMARELO+AMARELO.]
> **Isabela**: Agora azul com azul.
> (Vídeo B12 – 1)

Ele acabou ouvindo suas sugestões e eles solucionaram o problema. Não tiveram tempo de responder a última pergunta e fazer as construções com a meia verde.

- A dupla Francisco e Gustavo construiu os pares considerando a ordem em que as meias estão dispostas e não fez os pares com duas meias iguais. A pesquisadora interviu para que identificassem o erro:

> **Gustavo**: Espera. Agora vamos contar.
> **Francisco** lê: Quantos pares de meias diferentes ele pode formar?
> **Pesquisadora Elisa**: Só deixa eu pensar uma coisa com vocês: se eu tenho um par de meia que é uma amarela e uma azul, é diferente ou é igual eu ter uma azul e uma amarela? Se é um par de meia?
> **Gustavo**: É igual.
> **Pesquisadora Elisa**: Ah! Então essa aí [a que está sob o cursor, que é AZUL+AMARELA] tá repetida.
> [Apaga AZUL+AMARELA. Move o cursor para VERMELHO+AZUL.]
> **Pesquisadora Elisa:** Tá repetido.
> **Francisco**: E... também [toca, com o indicador na tela, o par VERMELHO+AMARELO].
> **Pesquisadora Elisa**: E essa aí também tá repetida, é verdade.
> **Francisco**: Só três?!
> (Vídeo B12 – 11)

Para a resposta contaram cada um dos pés de meia e acharam seis. Responderam e se alegraram ao ler a mensagem de êxito.

> **Pesquisadora Elisa**: Ah! Isso aqui [aponta a meia amarela com o indicador na tela] é um par de meia, Francisco? Vocês acertaram o número, mas vocês não construíram todos os pares.
> [Gustavo leva as duas mãos ao rosto.]
> **Gustavo**: Como assim?!

> **Francisco** lê uma das outras perguntas: *Em quantos desses pares as meias são da mesma cor?* Amarelo com amarelo?
> (Vídeo B12 – 11)

Depois dessa conversa, construíram os pares que faltavam e fizeram a captura de tela, pois a aula havia acabado. Ou seja, não responderam as perguntas adicionais.

- A dupla Kate e Cristina construiu os seis pares da primeira parte do problema sem hesitar. Primeiro, os de cores diferentes, depois, os monocromáticos. Responderam as questões sem problemas. Depois de formarem os quatro pares com a meia verde, Kate contou os pares e informou a resposta dez para a última pergunta.

> **Cristina**: Um, dois, três, quatro. [Contando os pares com a meia verde.]
> **Kate**: Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez. [Conta todos os pares, com o dedo na tela.]
> **Cristina**: Não. Não pode contar os sem o verde.
> (Vídeo B13 – 96)

Apesar de construírem corretamente, a forma das perguntas e o que deve ser contado ainda não era totalmente claro para Kate.

- A dupla Diogo e Jonas formou três pares distintos, todos com duas cores diferentes. Quando estavam quase digitando a resposta obtida, a pesquisadora perguntou:

> **Pesquisadora Elisa**: Tem certeza? Ó, não foi todas, tá faltando. Se a tua mãe disser assim: *não precisa comer feijão no almoço*. E aí tu chega lá e quer comer feijão. Pode ou não pode?
> **Jonas**: Não.
> **Diogo**: Não [cochichando].
> **Pesquisadora Elisa:** Não pode?
> **Diogo**: Pode.
> **Pesquisadora Elisa**: Pode ou não pode?
> **Jonas**: Pode, porque comida não se nega.
> (Vídeo B13 – 57)

O diálogo mostrou que além da expressão não ter sido corretamente compreendida, outros fatores surgem quando se apresentam situações consideradas análogas. Diogo compreendeu o significado da palavra, mas Jonas não. A pesquisadora tentou ainda outra situação considerada análoga:

Pesquisadora Elisa: Se ela disser assim: *não precisa lavar a louça depois do almoço*. Mas daí tu ficou afim...
[Olham para a tela.]
Diogo: Tá, sora. Uma pergunta: dá pra colocar igual?
Pesquisadora Elisa: Isso mesmo!
Diogo: Dá pra por igual! Bota... amarelo-amarelo.
(Vídeo B13 – 58)

Diogo percebeu que a palavra estava relacionada a uma possibilidade e não a uma imposição. Construíram os pares monocromáticos e responderam as perguntas. Quando surgiu a meia verde, construíram os quatro pares possíveis e ficaram olhando para a tela.

Pesquisadora Elisa: E agora? Tem mais? Dá pra fazer mais verde agora?
Diogo: Não sabemos.
Jonas: Não.
Pesquisadora Elisa: Que que vocês acham? Dá pra fazer de algum outro jeito a verde?
[Diogo nega com a cabeça.]
Jonas: Não.
(Vídeo B13 – 61)

A certeza deles pareceu frágil, pois demoraram a digitar a resposta. A pesquisadora os incentivou a contar os pares novos e responder. Depois de digitar corretamente, fizeram a captura de tela e entregaram a solução corretamente construída.

Foram caracterizados como do estádio II – busca de um sistema - os processos referidos a seguir.

- A dupla Eloíza e Théo iniciou construindo os pares com meias iguais. Depois, construíram os pares com uma meia de cada cor. Inicialmente, consideraram a ordem relevante, construindo amarelo+azul e azul+amarelo como dois pares de meia distintos. Depois que a pesquisadora retomou a questão da ordem, apagaram os repetidos e responderam corretamente as perguntas.

Pesquisadora Elisa: Vê se tem mais algum aí que tá repetido. Porque meia não tem pé direito e pé esquerdo, né?!
(Vídeo B11 – 91)

Para a última pergunta, construíram os quatro pares possíveis em uma coluna que estava vazia. Tal organização evidenciou que começaram a perceber propriedades do problema, ou seja, uma primeira ideia sobre a separação em casos.

- A dupla Marisa e Jaqueline iniciou construindo pares com meias de cores diferentes. Quando fizeram o quarto par, fazendo um repetido, mas em outra ordem, uma colega de outra dupla avisou:

> **Luiza** (de outra dupla): Vocês também podem fazer amarelo com amarelo e essas coisas.
> **Marisa**: Ah! Tá...
> [Apaga AZUL+VERMELHO]
> [Faz AZUL+AZUL; AMARELO+AMARELO; VERMELHO+VERMELHO; AMARELO+AMARELO. Apaga AMARELO+AMARELO.]
> (Vídeo B12 – 2)

Nesse caso, a possibilidade de montar pares monocromáticos não foi sequer discutida ou questionada pela dupla, apenas ouviram a colega. Assim que concluíram esses pares monocromáticos, responderam a pergunta e sem discussões concluíram o problema. Em três minutos elas abriram a página e fizeram a captura da tela com a solução.

- A dupla Geovane e Naiara construiu seis pares com meias de cores diferentes. Ou seja, não haviam feito todos e os que estavam representados estavam de forma duplicada. Contaram os pares e responderam a pergunta. A pesquisadora questionou e consideraram que se o ODA informou que estava certo, não tinham cometido erro nenhum.

> **Naiara**: Correto!
> **Pesquisadora Elisa**: Olha só. Se eu tenho um par de meias que é uma amarela e uma azul [toca, com o indicador na tela, o par AMARELO+AZUL] é a mesma coisa ou é diferente de eu ter uma azul e uma amarela?
> **Naiara**: É a mesma coisa.
> **Pesquisadora Elisa**: Ah! Então esse par aí tá repetido.
> **Naiara**: Mas é que deu certo.
> (Vídeo B12 – 11)

Com a intervenção apagaram os repetidos e perceberam o que faltava.

> **Pesquisadora Elisa**: Isso... esses aí. Agora, o que que eu posso? Eu não preciso fazer meias iguais, mas eu posso fazer meias iguais? Não precisa comer feijão no almoço, Mas se eu quiser, eu posso?
> **Naiara**: Pode.
> **Pesquisadora Elisa**: Ah! Então?
> [Faz AZUL+AZUL; VERMELHO+VERMELHO e AMARELO+AMARELO.]
> (Vídeo B12 – 11)

Responderam as perguntas adicionais e, quando surgiu a questão sobre quantos pares poderiam ser formados se houvesse meia verde a disposição, construíram apenas os três pares com as cores que já estavam disponíveis antes. Tal fato mostrou que a ideia de montar pares monocromáticos não estava totalmente compreendida. Ao ler a mensagem, Geovane imediatamente sugeriu fazer com duas meias verdes.

- A dupla Luís e Tomé iniciou formando os três pares com meias de cores diferentes. Tentaram a resposta três e, a partir da mensagem, olharam para a tela buscando outras possibilidades. Acabaram por formar um par repetido, mas disposto em outra ordem.

> **Pesquisadora Elisa**: Tu acha que esse par é igual ou é diferente do primeiro?
> **Luís**: Igual.
> (Vídeo B12 – 33)

Mesmo compreendendo que a ordem era irrelevante, a falta de segurança para manter tal ideia não era mais forte do que a ideia de que o ODA pede para formar mais pares. Consideravam ainda que os pés de meia deveriam ser um de cada cor. Para superar tal obstáculo, a pesquisadora propôs o seguinte diálogo:

> **Pesquisadora Elisa**: Se a minha mãe diz assim: *não precisa comer feijão na hora do almoço*. Daí eu sento na mesa e vou me servir. Posso pegar feijão ou não?
> [Luís balança a cabeça negativamente.]
> **Pesquisadora Elisa**: Se a tua mãe disser *não precisa comer feijão*. Tu pode ou não pode?
> **Luís**: Pode.
> **Pesquisadora Elisa**: Pode! Tá, então, não precisa usar meia igual. Mas se o palhaço quiser colocar duas meias vermelhas, pode ou não pode?
> **Luís**: Pode [confirma com a cabeça também].

(Vídeo B11 – 33)

Depois disso, construíram os pares monocromáticos e responderam corretamente as questões. Quando surgiu uma nova possibilidade de cor de meia, construíram os quatro pares sem dificuldades.

- A dupla André e Renan iniciou pela leitura do problema e dividiram as colunas com os espaços disponíveis para que cada um construísse em duas delas. A comunicação entre a dupla não fluiu de maneira colaborativa, pois não estavam dispostos a compartilhar suas ideias acerca do problema.

Renan: Da mesma cor, né?!
André: Não. Peraí, sobe aqui pra ver.
[Rolam a página para reler o problema.]
[Enfrentam mais problemas com o mouse, que não quer funcionar. Trocam de computador.]
[Fazem AZUL+VERMELHO e colocam AMARELO.]
André: Isso aqui quer dizer? É pra fazer colorido?
Renan: Não vou falar.
(Vídeo B12 – 61)

Mesmo sem discutir, construíram três pares com meias de cores diferentes. Depois disso, Renan percebeu que haviam esgotado as possibilidades de pares com duas cores.

André: Deixa que eu faço.
Renan: Tá, meu. Acabou todos os pares. Já usou amarelo com os dois.
(Vídeo B12 – 61)

Não identificaram que poderiam ser construídos pares com duas meias da mesma cor e tentaram a resposta três. A mensagem do ODA não os auxiliou a superar a dificuldade e André se propôs a adivinhar a resposta numérica.

André: Vou responder de novo. Vou chutar. Vou chutar dois.
Pesquisador Nicolau: Não é pra chutar. Tenta pensar, tenta construir.
André: Ah, não! Tá faltando um par aqui.
[Faz AZUL+AZUL.]
Renan: Ah, vai ser seis de novo. Vai ser seis.
(Vídeo B12 – 62)

Quando perceberam que poderiam formar pares monocromáticos, Renan identificou a resposta sem necessidade de construir os pares. Tal fato evidenciou que ele já possuía esquemas a respeito do problema combinatório a ser resolvido. Quando surgiu a meia verde como possibilidade, construíram corretamente os quatro pares possíveis. Na hora de informar a resposta numérica, Renan auxiliou André na compreensão do que deveria ser contado: pares.

> **Renan**: Um, dois, três, quatro. [Conta os novos pares]
> **André**: Um, dois, três, quatro, cinco. [Conta as meias verdes.]
> **Renan**: Um, dois, três, quatro. [Apontando cada novo par.]
> **André**: Ah, tá, tá falando de pares...
> (Vídeo B12 – 62)

- A dupla Aurora e Luiza iniciou por formar dois pares com a meia vermelha, colocou outra vermelha e não completou o par. Apagaram tudo e recomeçaram, formando três pares com duas meias de cores diferentes. Este comportamento demonstrou que a irrelevância da ordem foi percebida. Depois de tentarem a resposta três, um dos pesquisadores interveio para falar sobre a expressão “não precisa”.

> [Olham para a tela. Tentam a resposta “3”. Olham para a tela.]
> **Pesquisador Nicolau**: Olha só: as meias não precisam ser iguais. Mas pode, né?! Se não... Se eu disser assim: tu não precisa tomar água. Tu pode tomar água, né?! Então, as meias podem ou não podem ser iguais?
> **Aurora**: Coloca as duas iguais.
> (Vídeo B12 – 62)

Com isso, construíram os pares faltantes e responderam corretamente as perguntas. Para formar as possibilidades com a meia verde não tiveram dificuldade e formaram, de maneira direta, os quatro pares.

- A dupla Mariana e Sílvio iniciou por construir três pares de meias com uma de cada cor. Um dos pesquisadores pediu que atentassem para o enunciado:

> **Pesquisador Lucas**: Oh! É diferentes pares de meias. As meias podem ser diferentes ou elas podem ser iguais. O par de meias vermelhas é diferente do par de meias azul? [pausa] Então pode fazer um par de meia azul só.
> (Vídeo B13 – 1)

Com isso, construíram os três pares monocromáticos e responderam corretamente a primeira pergunta. Ao tentarem responder a primeira pergunta adicional, se confundiram e acabaram fechando a janela do navegador. Reiniciaram a resolução do problema e, desta vez, iniciaram por formar os três pares monocromáticos primeiro. Construíram os seis pares e responderam corretamente as perguntas. Quando surgiu a meia verde como possibilidade, construíram os quatro pares possíveis, iniciando pelo par verde+verde. A segunda resolução e a facilidade com que completaram os quatro pares com a opção verde demonstrou que compreenderam o problema e as propriedades combinatórias presentes no mesmo.

- A dupla Rubem e Nícolas resolveu o problema sem dificuldades. Porém, na hora de contar os pares com a meia verde, Nícolas contou todos os pares. Rubem o auxiliou a compreender do que se tratava a pergunta.

> **Pesquisadora Elisa**: Quantos novos pares. Essa é a pergunta.
> **Nícolas**: Tem seis aqui [aponta os seis primeiros].
> **Rubem**: Não, não é. Que eu saiba é aqui [desliza a mão pela terceira coluna de pares de meia] os novos pares.
> **Pesquisadora Elisa**: Os novos; isso mesmo. O Rubem tá certo, Nícolas.
> **Rubem**: Tá aqui os novos pares.
> **Nícolas**: Sim, mas aqui tem seis [aponta os primeiros] mais... Peraí.
> **Rubem**: Seis, né, meu!?
> **Pesquisadora Elisa**: Tá. Quantos novos vocês fizeram com a verde?
> **Nícolas**: Três [aponta a terceira coluna], seis [aponta a segunda coluna].
> **Pesquisadora Elisa**: Nícolas, presta atenção no que ele tá te dizendo.
> **Rubem**: Meu! Esse daqui é os novos. Tem que contar só esses, cara!
> **Nícolas**: Então tem quatro.
> **Rubem**: Não.
> **Nícolas**: Um, dois, três, quatro. [Com o dedo em cada um dos pares com meia verde.]
> **Rubem:** É.
> (Vídeo B13 – 108)

Quando chegaram ao acordo de que eram mesmo quatro pares novos, responderam e fizeram a captura de tela.

Quanto ao estádio III, descoberta do sistema, processos foram identificados e são relatados abaixo:

- A dupla Platão e Nuno construiu os pares de meia seguindo um esquema com sistematização: primeiro três pares de meia com uma azul na primeira posição; depois três pares com a amarela na primeira posição (repetindo uma das anteriores, mas em outra ordem) e os outros três pares com a meia vermelha na primeira posição. Apesar de ter a solução incorreta, acertam a primeira pergunta e passam para as adicionais. A primeira foi corretamente respondida, mas perceberam algum erro ao responder a segunda. Discutiram com um dos pesquisadores e identificaram as repetidas. Responderam a última pergunta e passaram para o próximo problema. O pesquisador os avisou de que não fizeram a captura de tela e voltaram a montar a solução do problema. Na segunda vez, mantiveram o esquema, mas sem repetir:

> [Colocam AZUL+_; AZUL+_; AZUL+_. Completam AZUL+AMARELO; AZUL+VERMELHO; AZUL+AZUL. Faz AMARELO+VERMELHO e AZUL+VERMELHO.]
> **Nuno**: Esse aí já foi.
> [Apaga AZUL+VERMELHO. Faz AMARELO+AZUL e VERMELHO+AZUL.]
> **Platão**: Tá ao contrário agora.
> **Nuno**: Não, amarelo e azul e azul e amarelo é a mesma coisa.
> [Apagam os dois últimos pares.]
> **Platão**: Amarelo com amarelo.
> [Faz AMARELO+AMARELO e VERMELHO+VERMELHO. Respondem as perguntas.]
> (Vídeo B11 – 102)

Essa segunda resolução evidenciou que perceberam a irrelevância da ordem e conseguiram aplicar o esquema novamente.

- A dupla Elias e Eliseu construiu os três pares com cores diferentes e questionou sobre a questão:

> **Elias**: Só é pra fazer par diferente?
> **Pesquisador Nicolau**: Que que tá escrito ali? Podem. As meias podem ser diferentes, mas elas precisam ser diferentes?
> **Eliseu**: Precisa.
> **Pesquisador Nicolau**: Não tá dizendo isso.
> (Vídeo B13 – 96)

Construíram, então, os pares monocromáticos. Na hora de digitar a resposta, voltaram a pensar no número três. Mesmo depois de recontar os pares formados com o pesquisador, reafirmaram que a resposta seria três, pois se tratavam de pares diferentes.

> **Eliseu**: Mas eu tô falando diferente.
> **Pesquisador Nicolau**: Não. Quantos pares diferentes. Não as meias tem que ser diferentes. Quantos pares diferentes.
> (Vídeo B13 – 96)

Com isso, contaram todos os pares e responderam corretamente a pergunta inicial e as adicionais. Quando surgiu a meia verde, construíram os quatro pares contendo a mesma.

> **Eliseu**: Um, dois, três. Agora, mais três só de verde.
> [Faz VERDE+VERDE.]
> **Eliseu**: Deu. Acabou.
> (Vídeo B13 – 96)

Ao afirmar que as possibilidades acabaram, assim que o quarto par com verde foi formado, Eliseu demonstrou que compreendeu como se formavam e como garantir que se esgotaram as possibilidades para o problema.

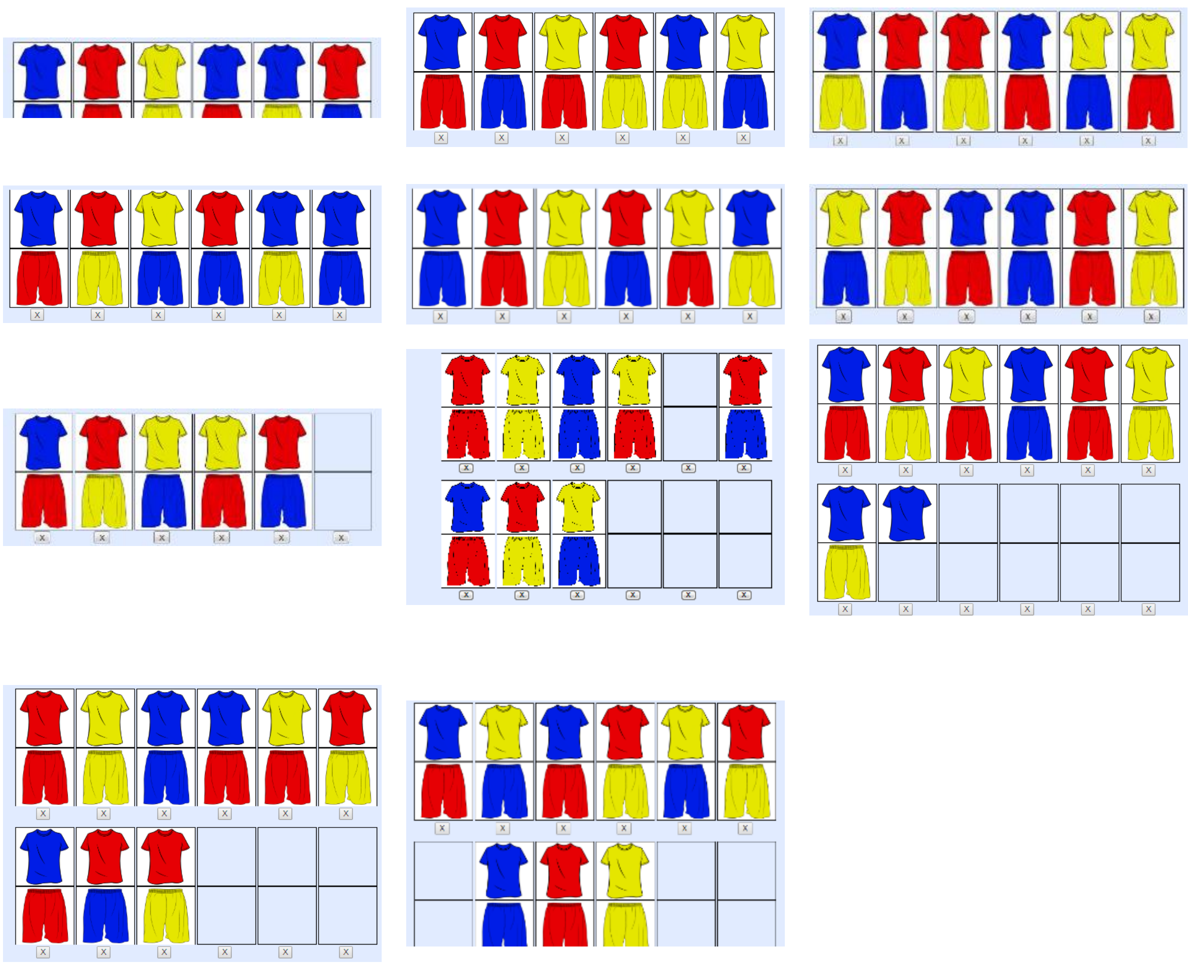
8.2.4 Análise do problema Uniforme da Colômbia

A bandeira da Colômbia é azul, vermelha e amarela com um brasão. Para os uniformes do time de vôlei a equipe do vestuário tem à disposição camisetas vermelhas, amarelas e azuis. Da mesma forma, os calções disponíveis são lisos, nas cores azul, vermelha ou amarela. Sabendo disso, tente responder: - Quantos uniformes diferentes (camiseta+calção) podem ser formados com essas opções de camiseta e calção? Questões adicionais: - Em quantas dessas opções o uniforme fica de uma cor só? - Em quantas dessas opções o uniforme tem alguma peça azul? - Em quantas dessas opções o uniforme não possui nenhuma peça amarela?

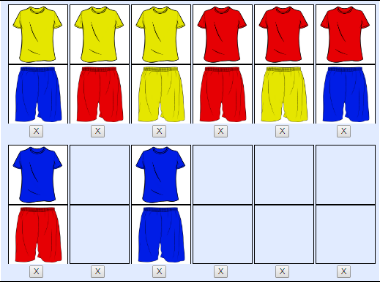
Esse problema teve retorno de 34 soluções. Destas, 35,3% (12 soluções) estavam incompletas e 64,7% (32 soluções) estavam completas. As incompletas se apresentaram de três formas diferentes: 20,6% (7 soluções) usaram apenas os espaços disponíveis no ODA inicialmente; 8,8% (3 soluções) encontraram mais que seis possibilidades, mas não chegaram a nove; 5,9% (2 soluções) construíram nove uniformes, mas com alguma repetição, ou seja, esquecendo de montar alguma possibilidade. Pôde-se observar que 20,6% (7 soluções) das soluções evidenciaram o uso de sistematização para a construção da solução; dentre estas, 2,9% (1 solução) está entre as incompletas. Isto é, uma dupla usou de uma sistematização, mas não conseguiu encontrar a solução.

Quadro 11 - Soluções apresentadas para o problema Uniforme da Colômbia

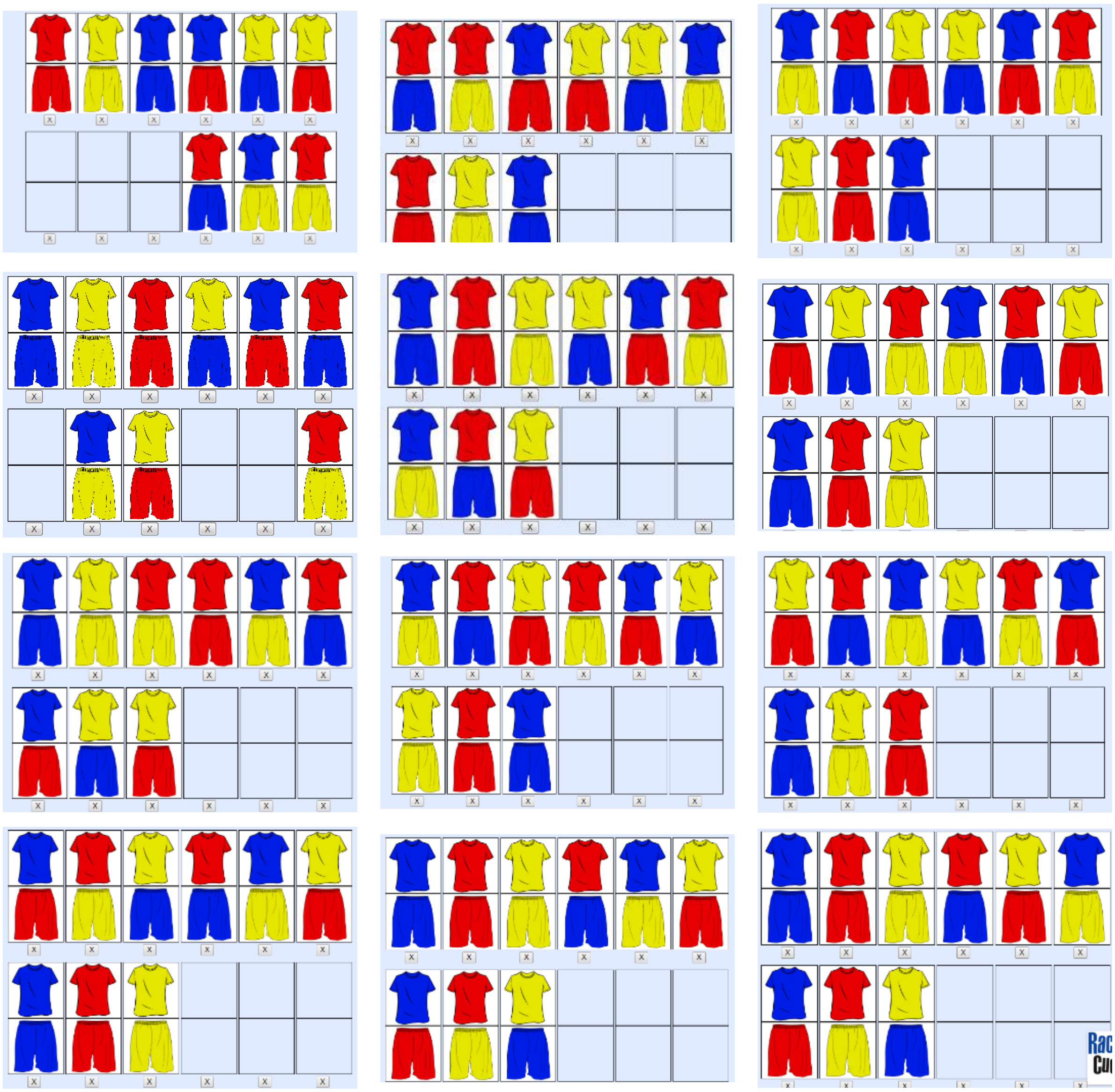
Incompletas sem evidência de sistematização



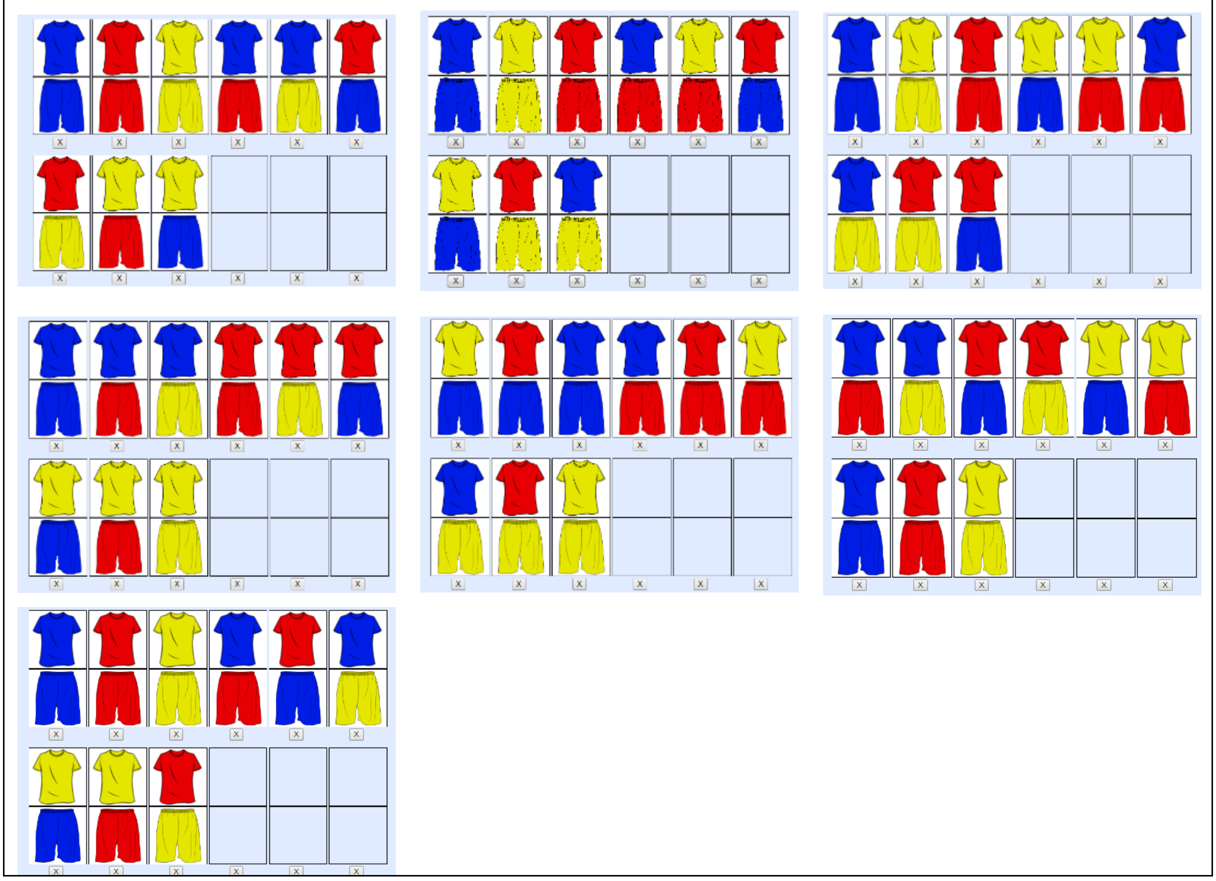
Incompleta com evidência de sistematização



Corretas, mas sem evidência de sistematização



Completas com evidência de sistematização



Fonte: acervo da pesquisa

Foram registradas vinte e cinco duplas resolvendo esse problema. A partir dos vídeos foi possível perceber as principais dificuldades, a maneira de pensar e as estratégias usadas na busca da solução. Os processos característicos de cada estádio são apresentados a seguir. Ressalta-se que era mais uma situação de produto cartesiano; sendo assim, as mesmas considerações do problema Caras malucas são relevantes nesse caso.

Os processos característicos do primeiro caso são os que se encaixam com a ideia de construções empíricas.

- O caminho percorrido por Sílvio e Mariana até chegar à solução evidenciou a construção empírica de uniformes. Usaram cores diferentes ou iguais para formar os uniformes, cuidando apenas para não fazer dois iguais. Ao montarem seis, tentaram essa resposta. Também pensaram que oito pudesse ser o máximo que conseguiriam e tentaram essa resposta ao atingirem esse número. Contaram cada peça de roupa e tentaram dezesseis como resposta. Tal atitude apontou uma convicção na sua construção, mas que não condizia com o número correto. Recomeçaram e montaram apenas os monocromáticos. Mariana considerou que resposta pudesse ser três. O pesquisador os questionou e os encorajou a continuar:

> **Pesquisador Nicolau**: Não deu certo. Olha só, os uniformes tem que ser diferentes entre si. Mas a camiseta e o calção podem ser da mesma cor ou de cores diferentes. Por exemplo, tu poderia ter... Se eu construísse, agora, um uniforme de calção vermelho e camiseta amarela. Ele seria diferente desse, desse e desse? [Aponta os três construídos.]
> **Mariana:** Sim.
> **Pesquisador Nicolau**: Sim, então esse vocês não contaram ainda. Vocês estavam indo no caminho certo. Pode ser com cores diferentes de camiseta e calção e pode ser igual também.
> (Vídeo B13 – 31)

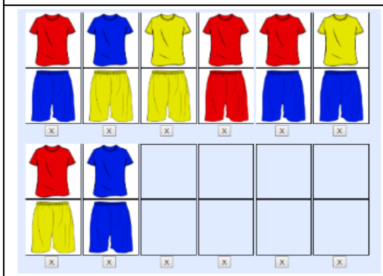
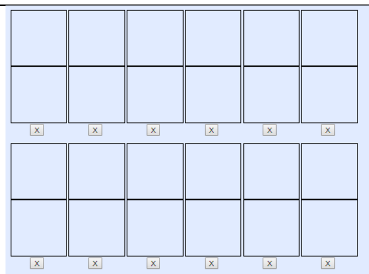
Voltam a construir uniformes com camiseta e calção de cores diferentes, mas Sílvio ficou bastante desanimado com o problema:

> **Sílvio**: É impossível fazer isso daqui. Não consigo fazer isso. Tem que preencher todos os quadradinhos?
> **Pesquisador Lucas**: É isso que tá pedindo ali?
> **Sílvio**: Não sei... Eu não sei mais.
> (Vídeo B13 – 2)

Mariana continuou, com o mouse, a construir possibilidades. Aos poucos, Sílvio voltou a envolver-se a ajudar sugerindo possibilidades.

Comparando cada uniforme feito com os já formados, foram formando os que faltavam até ter os nove na tela. Responderam a pergunta inicial e também às adicionais.

Quadro 12 - Sequência de etapas de construção da solução pro problema Uniforme da Colômbia

 Etapa 1: Construíram dois uniformes com cores de calção e camiseta diferentes.	 Etapa 2: Substituíram o segundo uniforme montado e montaram dois monocromáticos. Além disso, fizeram outro uniforme idêntico ao primeiro e colocaram um calção amarelo.	 Etapa 3: Apagaram o calção amarelo e construíram um sexto uniforme, diferente de todos os anteriores.
 Etapa 4: Abriram mais espaços no ODA e fizeram outros dois uniformes diferentes dos demais.	 Etapa 5: Substituíram o uniforme todo amarelo por um com camiseta amarela e calção vermelho.	 Etapa 6: Não conseguindo encontrar a resposta numérica correta, como esperavam, decidiram recomeçar. Apagaram tudo que haviam construído.
 Etapa 7: Iniciaram por construir três uniformes monocromáticos. Percebeu-se uma não preocupação com a disposição dos uniformes, uma vez que deixaram um espaço entre o segundo e o terceiro uniforme construídos.	 Etapa 8: Completaram a primeira linha de espaços com uniformes com calção e camiseta de cores diferentes.	 Etapa 9: Construíram os três uniformes que faltavam. Colocaram um calção azul, demonstrando não terem percebido o esgotamento de possibilidades.

 Etapa 10: Apagaram o calção azul que estava sobrando e concluíram a solução do problema.	

Fonte: acervo da pesquisa

- A dupla Hélio e Nicole iniciou construindo dois uniformes diferentes com cada camiseta, sem montar os monocromáticos. Ao tentarem a resposta seis e não obterem êxito, Hélio responsabilizou a colega e apagou tudo para recomeçar.

> **Hélio**: É seis!
> [Tentam. Errado.]
> **Nicole**: Tu leu a pergunta?
> **Hélio**: Tu não entendeu...
> [Ele pega o mouse e apaga tudo.]
> **Nicole**: Por que tu tá fazendo isso?
> (Vídeo B11 – 4)

Não identificando o que faltava, consideraram que recomeçar era a maneira de construir de forma correta. A comunicação entre eles não permite que o outro compreenda as estratégias empregadas e nem as justificativas para as ações. Nicole não entendeu porque o colega apagou tudo, pois sabia que estava construindo os pares de acordo com o solicitado no problema. Após reiniciarem, construíram novamente seis uniformes com duas cores e tentaram a resposta seis. Releram a pergunta e apontaram para a palavra “diferentes” presente na mesma. O uso dessa palavra os impediu de construir os monocromáticos. A aula encerrou sem que conseguissem construir a solução do problema.

- A dupla Ângelo e Bolívar construiu uniformes com camisetas e calções com cores diferentes. Montavam um de maneira empírica e o seguinte era com as cores invertidas. Porém, já tinham conseguido a resposta numérica correta com outra dupla e, portanto, já tinham as perguntas adicionais abertas mesmo sem ter a solução completa montada.

> **Pesquisadora Elisa**: Vocês não fizeram todos os uniformes, fizeram?
> **Ângelo**: Fizemos. Tava certo, sora.
> **Pesquisadora Elisa**: Quantos deu?
> [Rola a página e olha a resposta informada na pergunta um.]
> **Ângelo**: Deu nove.
> **Pesquisadora Elisa**: E cadê os nove aí que eu não tô vendo?
> **Ângelo**: Aqui, ó! [Rola a página para aparecer os uniformes construídos, que são cinco.]
> **Pesquisadora Elisa**: Não. Quero ver os nove construídos lá embaixo.
> [Olham para os uniformes montados.]
> **Pesquisadora Elisa**: Tu botou nove, mas tu não fez nove. Que que é um uniforme, Ângelo?
> **Ângelo**: É uma camisa e um...
> **Pesquisadora Elisa**: E um calção. Quantos uniformes tem aí então?
> **Ângelo**: Tô vendo.
> (B12 – 36)

Depois de construírem cinco uniformes, construíram mais um com camisa e calção diferentes e fizeram a captura de tela com os seis, considerando que o ODA havia dado a mensagem de êxito para a primeira pergunta. Para eles, mais importante que montar a solução, era ler a mensagem de êxito.

> **Pesquisadora Elisa**: Cinco. A resposta certa é nove e vocês não tem os nove aí.
> **Ângelo**: Tá, mas a gente acertou.
> (Vídeo B12 – 36)

Ter a resposta numérica poderia ser um objetivo ao montar os uniformes, validando certezas e refutando estratégias que levassem a quantidades diferentes de uniformes. Entretanto, tomaram a mensagem como o objetivo e deixaram a construção incompleta.

- A dupla Letícia e Ivone construiu seis uniformes sendo três monocromáticos e outros três com camiseta de cor diferente do calção. Informaram a resposta certa e estavam com as perguntas adicionais abertas. A pesquisadora questionou sobre a solução e Ivone considerou que estava certo, pois leu a mensagem de êxito.

> **Pesquisadora Elisa**: Cadê os uniformes que vocês responderam? Vocês responderam nove, mas só fizeram seis? Vocês botaram nove aqui, né?

> **Ivone**: É, mas deu certo.
> **Pesquisadora Elisa**: Tá. E vocês fizeram os nove uniformes?
> [Letícia nega com a cabeça.]
> (Vídeo B13 – 86)

A partir do diálogo, construíram outros uniformes, chegando a ter doze na tela. A pesquisadora relembrou-as da resposta numérica que era conhecida:

> **Pesquisadora Elisa:** Vocês já sabem que a resposta é nove. Então, vamos achar os nove. Ó, vermelho com vermelho e vermelho com vermelho. Não pode repetir. Quantos diferentes dá pra fazer?
> (Vídeo B13 – 90)

Apagaram os seis que estavam na segunda linha, pois eram todos repetidos. Essa dupla não conseguiu completar a solução do problema antes do fim da aula.

- Jéferson não demonstrou certeza sobre o que era pedido no problema. A cada uniforme formado pedia confirmação da pesquisadora se havia feito certo ou não. Quando conseguiu formar três, olhou para a tela e afirmou que não conseguiria fazer mais.

> **Jéferson**: Tá certo?
> **Pesquisadora Elisa**: Só essas? Acho que dá pra fazer mais.
> **Jéferson**: Eu não consigo.
> (Vídeo B13 – 43)

A resposta não esclareceu se ele se considerava incapaz ou se pensava não haver outras possibilidades. Foi encorajado a tentar e formou ainda os três uniformes monocromáticos. Como ele não tentou a resposta seis e tinha aberto mais espaços, a pesquisadora o auxiliou na busca pelos uniformes faltantes:

> **Pesquisadora Elisa**: Como é que tu pode fazer com a camiseta azul?
> [Ele olha atentamente pra tela e esboça um sorriso:]
> **Jéferson**: Ah, tá! Agora entendi.
> **Pesquisadora Elisa**: Qual que tu não fez ainda?
> (Vídeo B13 – 47)

Ele identificou o uniforme que faltava com a camiseta azul e acabou colocando outra camiseta azul.

> **Jéferson**: Se eu botar o calção aqui vai ser igual, né sora?! [Com o cursor

sobre o calção amarelo.]
Pesquisadora Elisa: Vai ficar igual. Daí não pode.
(Vídeo B13 – 47)

Não conseguiu identificar o esgotamento de possibilidades tampouco formular pergunta semelhante referente às outras camisetas. A aula acabou sem que ele conseguisse construir a solução completa.

- Amanda e Ricardo construíram duas linhas idênticas, com seis uniformes cada. Todos os uniformes tinham cores de camiseta e calção diferentes e estavam duplicados. Ao contarem para responder, discutiram e foram auxiliados pela pesquisadora:

Amanda: São seis, seis.
Ricardo: Sete, oito, nove, dez, onze, doze. [Conta sem apoio gestual] Doze!
[Tentam a resposta 12.]
[Ricardo lê a mensagem. Amanda olha para o computador da dupla do lado.]
Pesquisadora Elisa: *Tente criar de uma maneira organizada*. [Lê a mensagem.] Vai lá, fecha pra gente ver. Primeiro lugar: será que não tem uniforme repetido aí?
Ricardo: Tem.
Pesquisadora Elisa: E não pode! Quantos uniformes diferentes? Só tem que fazer uma vez cada um.
[Apagam toda a segunda linha de uniformes.]
Amanda: Vermelho com vermelho.
Pesquisadora Elisa: Isso, Amanda!
(Vídeo B11 – 38)

A mensagem do ODA para fazer de maneira organizada não foi bem compreendida por Ricardo, que apagou os uniformes com duas cores que haviam formado.

Pesquisadora Elisa: Que tá fazendo, Ricardo?
Ricardo: É pra botar nas ordens certas.
Pesquisadora Elisa: Não. Não precisava.
Ricardo: Mas tava escrito ali, sora.
Pesquisadora Elisa: Pra tu não te perder. Mas tu conseguiu achar. Bom, mas então faz organizado.
(Vídeo B11 – 39)

Acabou deixando apenas os três monocromáticos e não compreendendo como organizar os outros.

> **Pesquisadora Elisa**: Tá. E como tu acha que é organizado?
> **Ricardo**: Assim, ó sora [passa o indicador sobre os três uniformes monocromáticos presentes na tela].
> **Pesquisadora Elisa**: Mas isso... Tá. Só que assim só dá esses três. E os outros que tu tem que construir? Como é que tu poderia organizar?
> (Vídeo B11 – 40)

Amanda conseguiu que o colega se despreocupasse com a organização e construiu os uniformes com cores diferentes de calção e camiseta, encontrando a solução para o problema.

- A dupla Gustavo e Francisco construiu primeiro os três uniformes com camiseta e calção da mesma cor. Logo em seguida, formaram três uniformes com calções e camisetas de cores diferentes e já abriram mais espaços no ODA. Para continuar, Gustavo sugeriu que desistissem dos monocromáticos e misturassem as cores:

> **Gustavo**: Apaga esses dois [aponta para AZUL+AZUL e AMARELO+AMARELO].
> [Apagam AZUL+AZUL; AMARELO+AMARELO e VERMELHO+VERMELHO.]
> **Gustavo**: Vamos misturar. [Gira as mãos na frente da tela.]
> (Vídeo B12 – 2)

Construíram, então, outros três uniformes com duas cores diferentes. Para informar a resposta, contaram as opções:

> **Francisco**: Um, dois, três quatro... [Conta apontando para cada peça de roupa.]
> **Gustavo**: Não. É assim: um, dois, três, quatro, cinco, seis! [deslizando o dedo sobre cada uniforme ao dizer um número.]
> [Respondem 6. Gustavo olha para a dupla do lado.]
> **Francisco**: Tem que fazer mais, guri.
> (Vídeo B12 – 2)

Ainda tentaram a resposta doze, por insistência de Francisco. Construíram os uniformes de uma cor só, mas também repetiram outros que já haviam sido feitos e chegaram a ter doze uniformes montados. Acabaram por se dispersar e olhar para o computador da dupla do lado. Porém, identificaram os repetidos e apagaram os mesmos depois de uma intervenção do pesquisador. O mesmo, ainda os questionou sobre a finalização do problema:

> **Pesquisador Lucas**: Oh! O que vocês estão contando é os uniformes e não as peças de roupa. Isso é um uniforme [apontando um construído na tela], isso aqui é outro uniforme [aponta outro na tela]. Uniforme é a camiseta mais o calção e o que tu tá contando é os uniformes. Oh! Isso aqui ó, é um uniforme [aponta outro na tela]. Isso é outro uniforme, isso é outro [apontando as construções na tela].
> **Gustavo**: Isso aqui é um uniforme? [apontando para AZUL+AZUL e AMARELO+AMARELO]
> **Pesquisador Lucas**: É. Tipo ó: um, dois, três. É assim que vocês tem que contar [apontando cada uniforme]. Não é pra contar tipo um, dois, três, quatro [apontando cada peça de roupa]. Não, isso tá contando as peças de roupa. Tem que contar os uniformes.
> (Vídeo B12 – 2)

Com a solução completa, responderam às perguntas e fizeram a captura de tela.

- A dupla Cristina e Kate iniciou montando quatro uniformes com camiseta e calção com cores diferentes. Aí, construíram dois monocromáticos e, depois, trocaram um dos feitos pelo outro de uma cor só. Tentaram a resposta seis e não concordaram que não estivesse correto. Apagaram os de uma cor só e substituíram por outros três com duas cores. A mensagem que sugeriu que fizessem de uma maneira organizada não auxiliou, pois não tinham ideia do que poderia ser essa organização. Apesar de terem aberto mais espaços no ODA, tinham seis uniformes montados e queriam que essa fosse a resposta certa. Sugeriram que o ODA estivesse com problemas por não aceitar tal resposta:

> **Cristina**: Essa coisa tá louqueando.
> **Pesquisador Nicolau**: Tá louqueando?
> **Cristina**: A gente botou seis porque dava seis.
> **Pesquisador Nicolau**: Seis. Tá.
> **Cristina**: Um, dois, três, quatro, cinco, seis.
> **Pesquisador Nicolau**: Tá, mas eu poderia ter um uniforme todo amarelo?
> **Kate**: Poderia.

> **Pesquisador Nicolau**: E por que ele não tá aí, por exemplo?
> **Cristina**: Ah!
> (Vídeo B13 – 97)

Depois desse diálogo, reconstruíram os três uniformes de uma cor só e responderam as perguntas. A convicção acerca do processo era mais forte que a mensagem exibida pelo ODA. A conversa com o pesquisador fez com que essa certeza fosse repensada e os critérios do problema revistos.

- A dupla Diogo e Jonas iniciou construindo três uniformes com cores diferentes de camiseta e calção. Depois, montaram os três uniformes monocromáticos, abriram mais espaços e formaram outros dois uniformes diferentes. Informaram a resposta obtida e estranharam a mensagem. A pesquisadora questionou sobre o valor informado:

> **Pesquisadora Elisa**: Que que será que tá faltando aí? Mas... dezesseis? Da onde dezesseis? Quantos uniformes vocês montaram aí?
> **Diogo**: Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito [com o dedo estendido em direção a tela].
> **Pesquisadora Elisa**: Oito.
> **Jonas**: Eu botei oito.
> **Pesquisadora Elisa**: Não, tu botou dezesseis.
> **Jonas**: Mas é que antes eu já tinha botado oito.
> **Diogo**: É que eu contei as camisas assim um, dois, três, quatro [aponta para cada peça de roupa].
> (Vídeo B13 – 70)

O diálogo anterior mostrou que eles não tinham certeza de sua resposta numérica, mas confiavam na sua construção. Tentaram informar algum número que tivesse relação com o que haviam construído. Para que conseguissem analisar as construções feitas, a pesquisadora pergunta:

> **Pesquisadora Elisa**: Quantos jeitos vocês acharam? Quantos uniformes diferentes com a camiseta azul vocês conseguiram fazer?
> **Diogo**: Um, dois, três, quatro, cinco.
> **Pesquisadora Elisa**: Não. Com a camiseta azul, quantos vocês conseguiram fazer?
> **Jonas**: Três.
> **Pesquisadora Elisa**: Três. Com a camiseta vermelha, quantos?
> **Jonas**: Ã-ã, três.
> **Diogo**: Duas! Três.

Pesquisadora Elisa: Com a camiseta amarela?
Jonas: Duas.
Pesquisadora Elisa: Será que dá pra fazer mais algum?
[Olham para a tela.]
Pesquisadora Elisa: Será que tem algum que vocês não fizeram ainda?
Diogo: Calção e camiseta em baixo?
Jonas: Ah! Tá...
Pesquisadora Elisa: Descobriu qual que falta, Jonas?
(Vídeo B13 – 70)

Para revisar e conferir o que falta é preciso também usar de alguma estratégia. Identificar repetições pode ser uma tarefa visual, mas analisar o que foi feito para descobrir o que falta é continuar e rever o raciocínio empregado na resolução do problema. A partir do diálogo travado com a pesquisadora, Jonas identificou que havia um padrão, que cada camiseta apareceria três vezes. Com isso, percebeu o uniforme que não havia sido construído e o fez. Com a solução construída, responder as perguntas foi realizado sem dúvidas. Mesmo não tendo partido deles a estratégia de observar cada cor de calção em separado, ao ser proposto pela pesquisadora, Jonas compreendeu que haveria um padrão. Eles estavam certos de sua estratégia e de sua solução, mas não apresentaram argumentos que justificassem o esgotamento de possibilidades e esse argumento foi construído em conjunto com a pesquisadora, a partir de questões e ações.

No estádio II, os participantes buscavam por um sistema. O uso de sistematizações parciais e de certezas sobre a existência de relação entre as possibilidades construídas estiveram presentes nos processos característicos desse estádio.

- A dupla Paulo e Rogério construiu seis uniformes, sendo que três eram monocromáticos e mais um com cada camiseta. Tentaram a resposta três e, mediante a mensagem, apagaram os três últimos e acabaram por refazê-los. Tentaram novamente o número seis como resposta. Por ser o número de espaços que o ODA disponibilizava inicialmente, ficaram inclinados a encontrar apenas seis uniformes.

Pesquisador Lucas: Vocês fizeram todos que dá pra fazer?
Paulo: Quê?

> **Pesquisador Lucas:** Fizeram todos que dá pra fazer? Acham que não dá pra fazer mais? Diferentes?
> [A dupla olha para as soluções construídas. Clicam em “mostrar mais” para aparecerem mais espaços.]
> (Vídeo B11 – 4)

O diálogo os encorajou a buscar outras possibilidades e, depois que o pesquisador fez zoom out puderam perceber todos os uniformes construídos e os espaços em branco. Completaram os seis novos espaços, fazendo alguns de forma repetida. Depois de questionados, identificaram as repetições e apagaram o que estava em duplicidade. Com a solução na tela, responderam às perguntas corretamente.

- A dupla Wiliam e Leonardo iniciou por construir três uniformes sem repetir calção ou camiseta. Wiliam parecia ter uma estratégia para construir a solução e foi conduzindo Leonardo na montagem dos uniformes.

Assim que construíram os seis primeiros uniformes e completaram os espaços disponíveis, clicaram no botão que mostrava mais espaços. Leonardo se surpreendeu e pensou que teriam que preencher todos. Wiliam ainda pensou que poderiam ser necessários mais espaços. Essa antecipação mostrou que algumas propriedades do problema não haviam sido percebidas.

> **Leonardo**: Bah! Tem que fazer doze!
> **Wiliam**: Mas dá pra fazer mais...
> **Leonardo**: Não dá.
> **Wiliam**: Dá sim. Como... Azul com...
> **Leonardo**: Com? ... Nada!
> **Wiliam**: Azul com vermelho. Não. ... Azul com azul.
> **Leonardo**: Dá pra fazer azul com azul?
> (Vídeo B13 – 38)

Todavia, assim que construíram os três uniformes com calção e camiseta da mesma cor, perceberam que as possibilidades haviam se esgotado e passaram a responder às perguntas.

- A dupla Elias e Eliseu iniciou construindo os pares com calção e camiseta com cores diferentes. Montaram dois conjuntos que não repetiam calções ou camisetas. Um dos integrantes considerou que estava pronto, o outro pensava que era possível formar mais uniformes e clicou no botão que fazia surgir novos espaços..

> **Elias**: Que mostrar mais! Mostrar mais por quê? Nós não vamos conseguir. [Brigam pelo teclado.]
> **Elias**: Tu não vai fazer. Um, dois, três, quatro, cinco, seis. Eu vou chamar a sora. Não dá pra fazer mais, cara.
> **Eliseu**: Dá.
> **Elias**: Que dá!!!
> (Vídeo B13 – 97)

Um pesquisador interveio para que a dupla voltasse a conversar e encontrasse uma solução com a qual os dois concordassem.

> **Pesquisador Nicolau**: Quantos uniformes diferentes podem ser formados. Seis. Então bota lá a resposta, vamos ver. Será que pode fazer uniforme todo amarelo?
> **Eliseu**: Dá.
> (Vídeo B13 – 97)

Construíram os três uniformes monocromáticos e responderam corretamente às perguntas. Apesar de ter uma ideia, a dificuldade de expressar a mesma ao colega fez com que os dois se desentendessem. Tal dificuldade pode estar relacionada a falta de segurança e certeza sobre as questões combinatórias. Eliseu considerava possível fazer mais, mas não conseguiu expressar em palavras o que estava pensando. O colega Elias, da mesma forma, considerava impossível continuar, mas não foi capaz de colocar em palavras tal ideia. A mediação do pesquisador auxiliou a dupla a perceber que as diferentes ideias podem ser testadas e consideradas.

- Nícolas e Rubem iniciaram formando os três uniformes monocromáticos. Em seguida, formaram três uniformes com calção e camiseta com cores diferentes.

> **Pesquisadora Elisa**: Tem mais uniformes pra fazer ou é só esses daí?
> **Nícolas**: Só esses daí.
> (Vídeo B13 – 111)

Ficaram hesitantes em digitar a resposta, mas não viram outras possibilidades nem tinham certeza absoluta de ter construídos todas. A pesquisadora incentivou-os a ir adiante.

Pesquisadora Elisa: Quantos deu pra fazer?
Nícolas: Deu pra fazer... ã... Deu pra fazer seis uniformes diferentes.
[Olham para Elisa.]
Pesquisadora Elisa: Bota aí, ué.
[Digitam a resposta “6” e leem a mensagem.]
Pesquisadora Elisa: *Verificou todas as possibilidades?* [Leu a mensagem.] Acho que não.
[Olham para a tela. Nícolas levanta e se põe de pé para olhar a tela do computador.]
Nícolas: Então, alguma coisa.
[Olham para a tela por 15 segundos.]
Rubem: Ah! Eu sei qual é!
(Vídeo B13 – 112)

Todavia, Rubem apagou um e fez outro no lugar, ou seja, manteve a solução com seis uniformes. Mas Nícolas percebeu algo que poderia ser acrescentado:

Pesquisadora Elisa: Dá pra fazer mais algum que não tá aí?
[Se olham.]
Nícolas: Tem.
Pesquisadora Elisa: Dá pra fazer mais ou não?
Nícolas: Dá.
[Clicam no botão “Mostrar mais”.]
Pesquisadora Elisa: Dá. Qual que tu viu aí, Nícolas, que dá pra fazer?
Nícolas: Prestei bem atenção e falta uma peça.
[Coloca a camiseta amarela.]
Nícolas: Ah não, não. Vai tá igual; só vai mudar aqui, né?! [Cursor sobre AZUL+AMARELO.]
Pesquisadora Elisa: Vai tá igual? Amarelo com azul é igual a azul com amarelo? Camiseta azul é igual a camiseta amarela?
Rubem: Não.
Pesquisadora Elisa: Não.
Nícolas: A camisa não é, mas vai tá só invertido as roupa.
Pesquisadora Elisa: Mas se inverte a roupa, é a mesma roupa ou não?
Rubem: Não.
Pesquisadora Elisa: Não é a mesma. É diferente, claro.
[Completa AMARELO+AZUL.]
Nícolas: Põe o número sete aí.
(Vídeo B13 – 112)

A identificação de um uniforme faltante trouxe à tona a dúvida sobre o que configurava ou não uma possibilidade diferente. Mesmo superando tal obstáculo, Nícolas não percebeu que poderiam ser formados outros ainda. Considerou que haviam descoberto o último uniforme. Ao perceberem que a resposta sete não estava correta, voltaram a olhar para a tela e Rubem compreendeu as possibilidades não formadas.

> **Pesquisadora Elisa**: Descobriu, Rubem, o que tá faltando?
> **Rubem**: Eu acho que dá pra fazer mais. Dá pra inverter as cores também.
> (Vídeo B13 – 112)

Com essa colocação feita, Nícolas também compreendeu e formaram os dois uniformes que faltavam para completar a solução. Na hora de contar, se atrapalharam e contaram oito. Como a mensagem que apareceu era a mesma, voltaram a formar mais uniformes.

> **Rubem**: Não. Dá pra fazer mais. Qual mais dá pra fazer?
> **Nícolas**: Calça azul com amarelo.
> [Faz AMARELO+AZUL.]
> **Nícolas**: Aí. Tem mais.
> **Rubem**: Mais dois.
> (Vídeo B13 – 112)

Esses dois que eles consideraram estavam relacionados aos dois espaços ainda vazios no ODA. Haviam feito um uniforme repetido e a pesquisadora os questionou sobre qualquer repetição. Analisaram as construções e Rubem conferiu todas as construções com azul, usando uma estratégia interessante para a garantia de esgotamento de possibilidades.

> **Rubem**: Azul com azul. Azul com vermelho... Não, foi repetido. Vermelho com azul.
> **Nícolas**: Só inverteu.
> **Rubem**: Azul com amarelo.
> (Vídeo B13 – 112)

Identificaram o que estava repetido, apagaram e recontaram. Encontram novos uniformes e acertam a resposta. Não perceberam que haviam cometido um erro de contagem anterior, consideraram que o uniforme repetido é que os tinha confundido:

> **Rubem**: Êêê. Era por causa daquele lá.
> **Nícolas**: Era nove.
> (Vídeo B13 – 112)

Tal colocação trouxe uma dificuldade diferente. A conservação do número não parecia ser problemática ou inconsistente para os participantes. Porém, as incertezas sobre o problema mexeram inclusive com certezas bastante consolidadas como esta. Se não foram acrescidos nem apagados uniformes, a resposta numérica se manteve, mas isso não foi percebido. Não perceberam o erro de contagem porque alteraram, de fato, a quantidade de uniformes na tela. Passaram de nove para dez e para nove novamente. O erro foi atribuído a uma possibilidade construída e não a uma ação dos envolvidos.

- Renato e Roberta, depois de iniciarem construindo um uniforme totalmente azul, apagaram e fizeram um azul com vermelho e outro com as mesmas cores, invertidas. Ao olharem novamente para as roupas disponíveis, apagaram o segundo construído e fizeram um segundo uniforme com a camiseta azul. Nesse momento, sem falar nada, iniciaram uma construção considerando cada cor de camiseta. Fizeram, assim, dois uniformes diferentes com cada camiseta. Ao montarem seis uniformes diferentes, olharam para a tela. Não demonstraram certeza de ter a solução, pois hesitaram em informar a resposta. A pesquisadora questionou provocando: "E aí? Fizeram todos que dá, Roberta e Renato? E aquele primeiro que tinha feito, Renato?" (Pesquisadora Elisa, vídeo B12 – 76) A partir do questionamento, abriram mais espaços e construíram os três uniformes monocromáticos que faltavam para a solução.

Os processos característicos do estádio III já compreenderam que a sistematização da construção da solução permite uma certeza quanto ao esgotamento de possibilidades. Da mesma maneira, facilita a construção de todas as opções sem cometer repetições.

- Na dupla Nicole e Alexandre, Alexandre tinha uma estratégia para construir os uniformes e foi instruindo a colega que estava com o mouse. Pediu que colocasse as três camisetas de cores diferentes e, depois, o calção azul com todas elas. Depois, explicou como prosseguir:

> **Alexandre**: Agora bota de novo essas [aponta as 3 camisetas].
> [Pega AZUL.]
> **Alexandre**: Não. Azul não precisa mais.

[Ela, com o mouse, não pega outra camisa, mas também não posiciona a azul.]
Alexandre: O azul não precisa mais. Ah, não! Precisa sim.
(Vídeo B11 – 51)

Sem compreender a estratégia do colega, Nicole formou os uniformes AZUL+AMARELO e VERMELHO+VERMELHO. Depois da intervenção da pesquisadora, apagaram os dois últimos uniformes e Alexandre assumiu o mouse. Enquanto montava, explicava para a colega como havia pensado:

Alexandre: Tá. Agora a gente pega e faz assim...
[Coloca as camisas AZUL, VERMELHA e AMARELA.]
Alexandre: Agora é só colocar assim.
[Completa os três uniformes com calção vermelho: AZUL+VERMELHO, VERMELHO+VERMELHO, AMARELO+VERMELHO. Clica em "Mostrar mais".]
Alexandre: Deu. Entendeu?
[Coloca novamente as três camisas.]
Alexandre: Agora só falta o amarelo.
(Vídeo B11 – 51)

Construíram a solução e responderam as perguntas. Apresentaram dificuldade para contar, sendo necessário um incentivo ao uso de gestos para que contassem corretamente. Para o fazer com correção Nicole se pôs de pé em frente ao computador e contou com o dedo na tela.

- Gabriela e Nisa construíram corretamente, mas hesitaram em responder de acordo com a construção. Depois de construir os nove uniformes possíveis, releram a pergunta e responderam seis. Tal fato deu-se por desconsiderarem os uniformes monocromáticos na contagem. Assim que leu a mensagem do ODA, Nisa completou:

Nisa: Sete, oito, nove [apontando com o indicador cada uniforme de uma cor só].
[Responde.]
Gabriela: *Correto! Em quantas dessas opções os uniformes ficam de uma cor só?* [Lê a próxima pergunta] Vai [faz sinal com a mão para rolar a página].
Nisa: Três. [sem rolar a página, ou seja, sem visualizar os uniformes construídos]
(Vídeo B11 – 24)

Ao responder sem precisar visualizar os uniformes construídos, Nisa demonstrou que era possível saber a resposta dessa pergunta a partir do menu: três cores possíveis.

- Platão e Nuno resolveram o problema em apensas 4 minutos. A partir da primeira leitura do problema, Platão inferiu um conhecimento sobre a realidade que não auxiliou a resolver o problema, mas mostrou que o contexto em que estava inserido era conhecido dos envolvidos.

> **Platão**: Quem não sabe que o uniforme da Colômbia é amarelo?!
> **Pesquisador Nicolau**: E o reserva?
> **Nuno**: Daí ele não sabe.
> (Vídeo B11 – 102)

Fizeram os três uniformes monocromáticos e apagaram tudo em seguida. Colocaram, então, três camisas azuis e completaram os uniformes com um calção de cada cor.

> **Nuno**: Faltam mais duas. Agora, bota essa bermuda. O vermelho e depois o amarelo.
> (Vídeo B11 – 102)

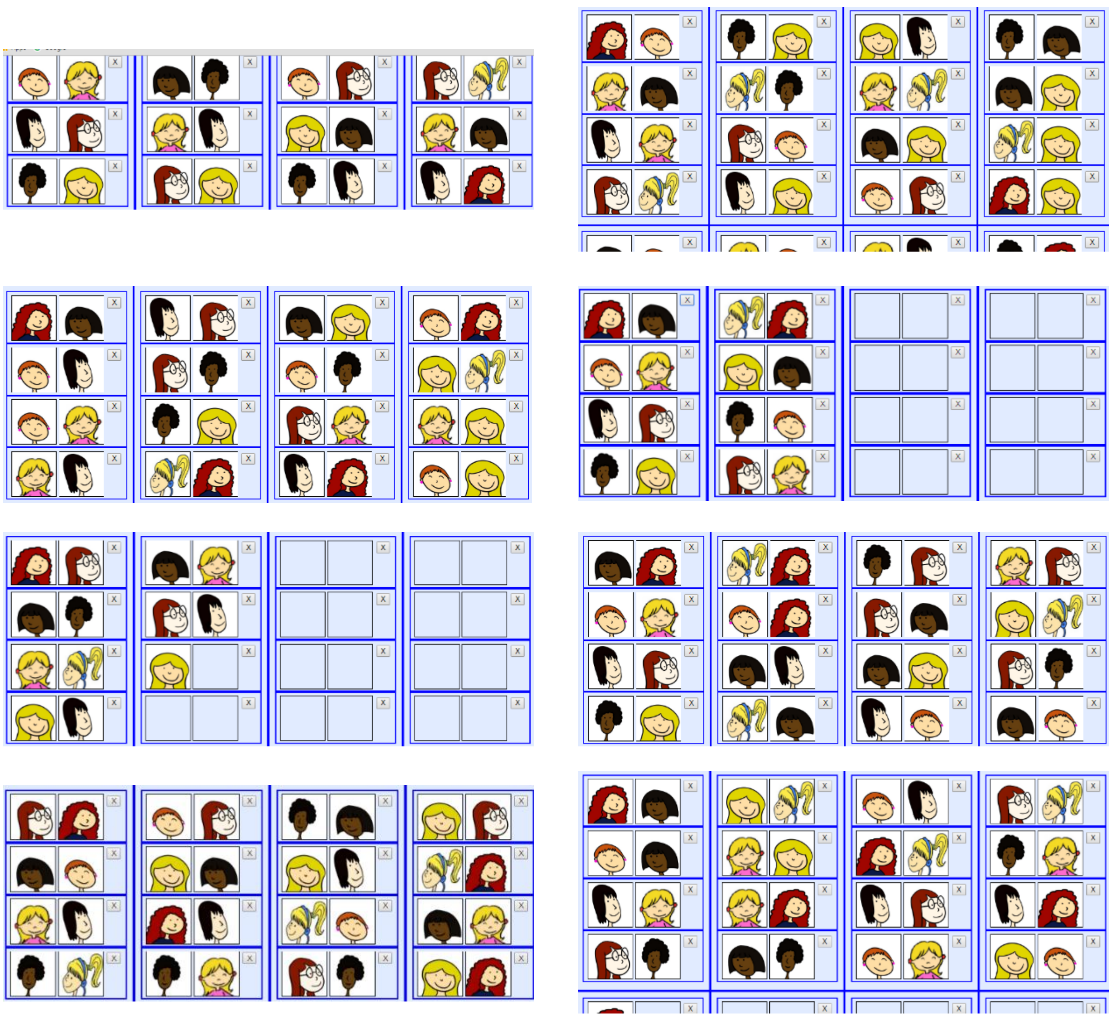
Essa última colocação de Nuno demonstrou que ele percebeu as propriedades do problema e conseguiu vislumbrar, inclusive, o esgotamento de possibilidades depois de usar as três camisetas.

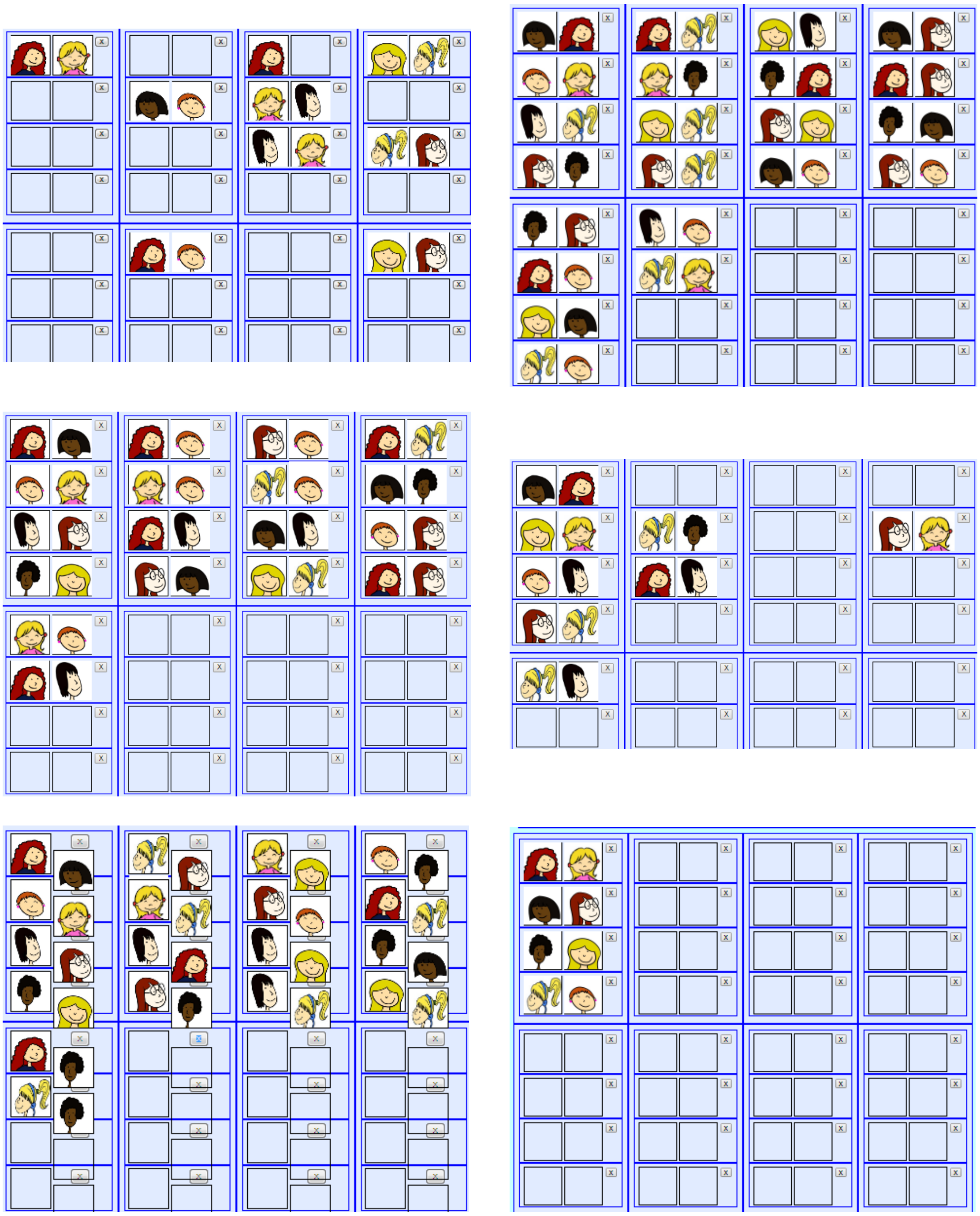
8.2.5 Análise do problema Times de tênis

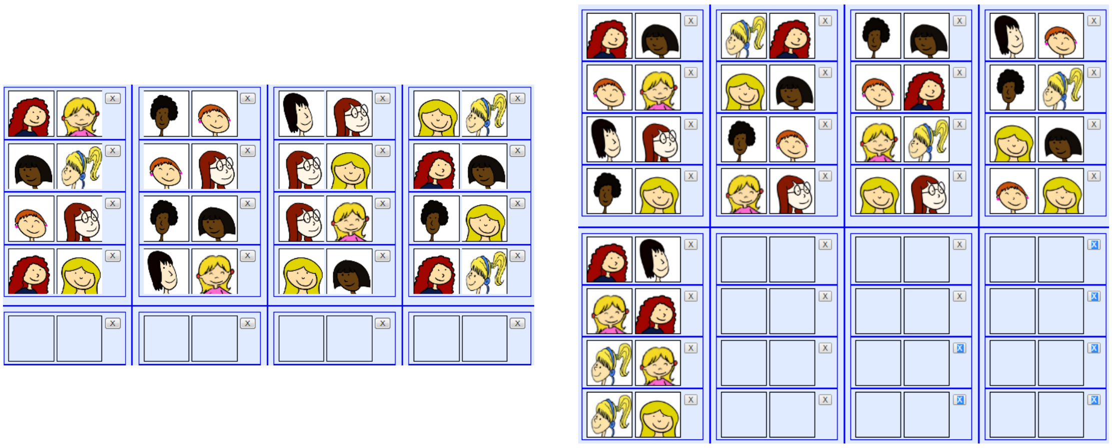
Um clube de tênis tem 9 alunas: Alice, Bruna, Camila, Eloíza, Flávia, Gabriela, Helena e Ísis. Para o campeonato municipal, apenas duas poderão se inscrever. Quantas duplas diferentes podem ser formadas com essas nove meninas?

Para esse problema foram apresentadas 31 soluções, sendo 91,3% (28 soluções) incompletas e apenas 9,7% (3 soluções) completas. O problema exigia um certo grau maior de sistematização, pois a resposta completa era formada por 24 opções de duplas diferentes. Mesmo apresentando respostas incompletas, 9,7% (3 soluções) apresentaram um erro muito pequeno, ou melhor, empregaram a sistematização corretamente, mas acabaram por repetir ou omitir alguma possibilidade. Ainda entre as incompletas, outros 29% (9 soluções) apresentaram uso de sistematização, mas sem manter o esquema até o fim das possibilidades. Entre essas soluções, algumas não foram concluídas por falta de tempo. Pode-se dizer que 51,6% (16 soluções) não empregaram nenhum processo de sistematização.

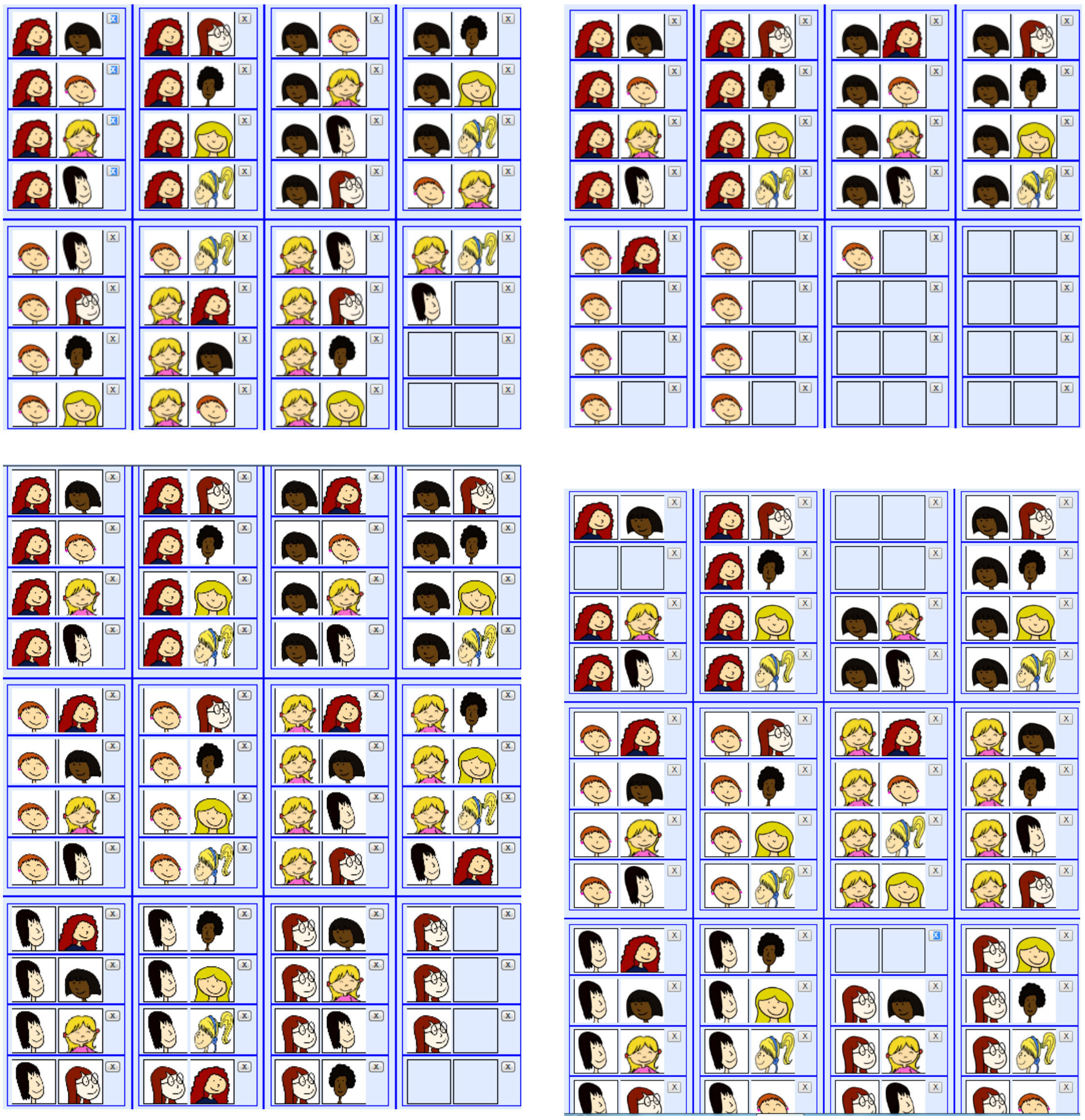
Quadro 13 - Soluções apresentadas para o problema Times de tênis

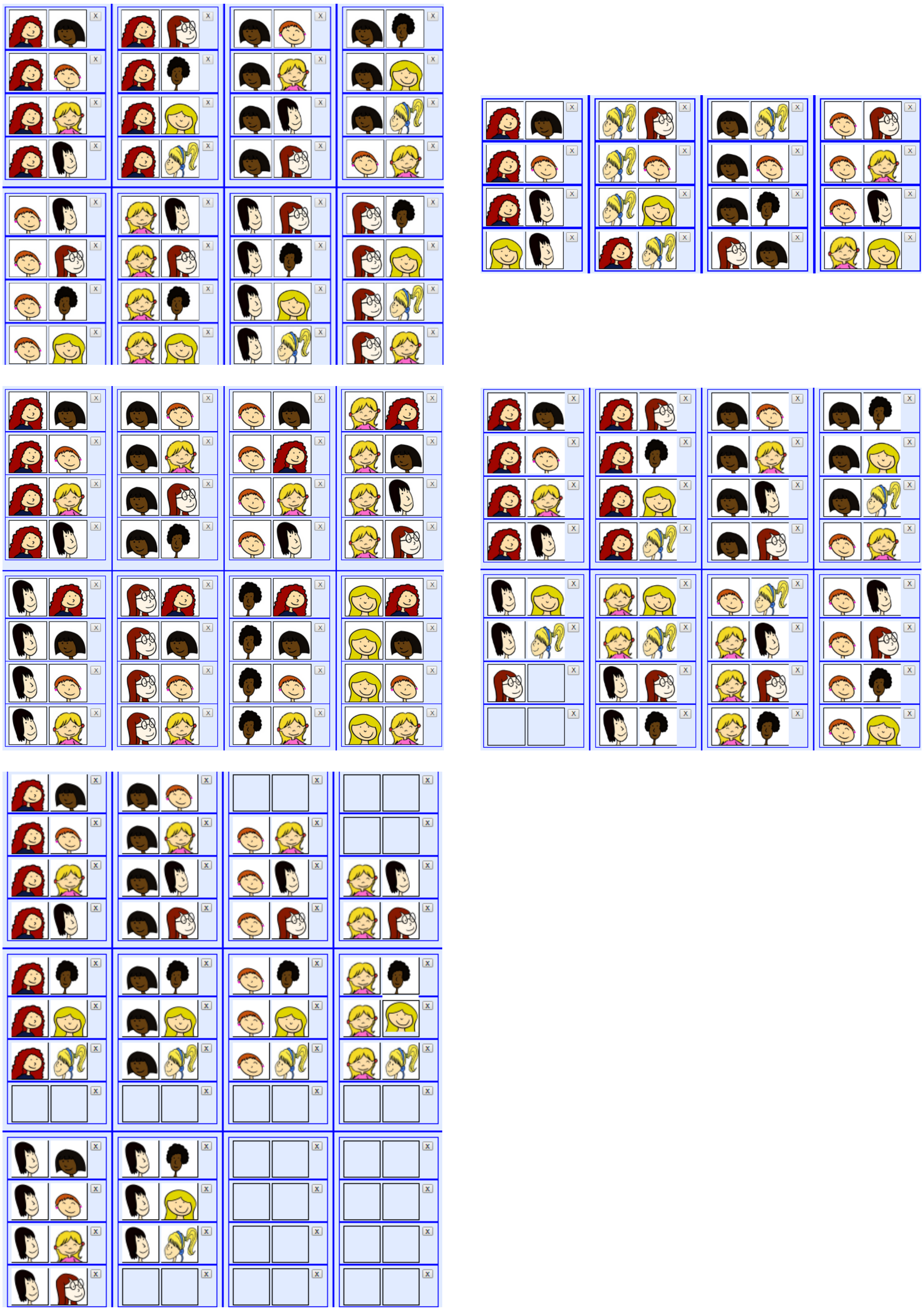
Incompletas sem sistematização




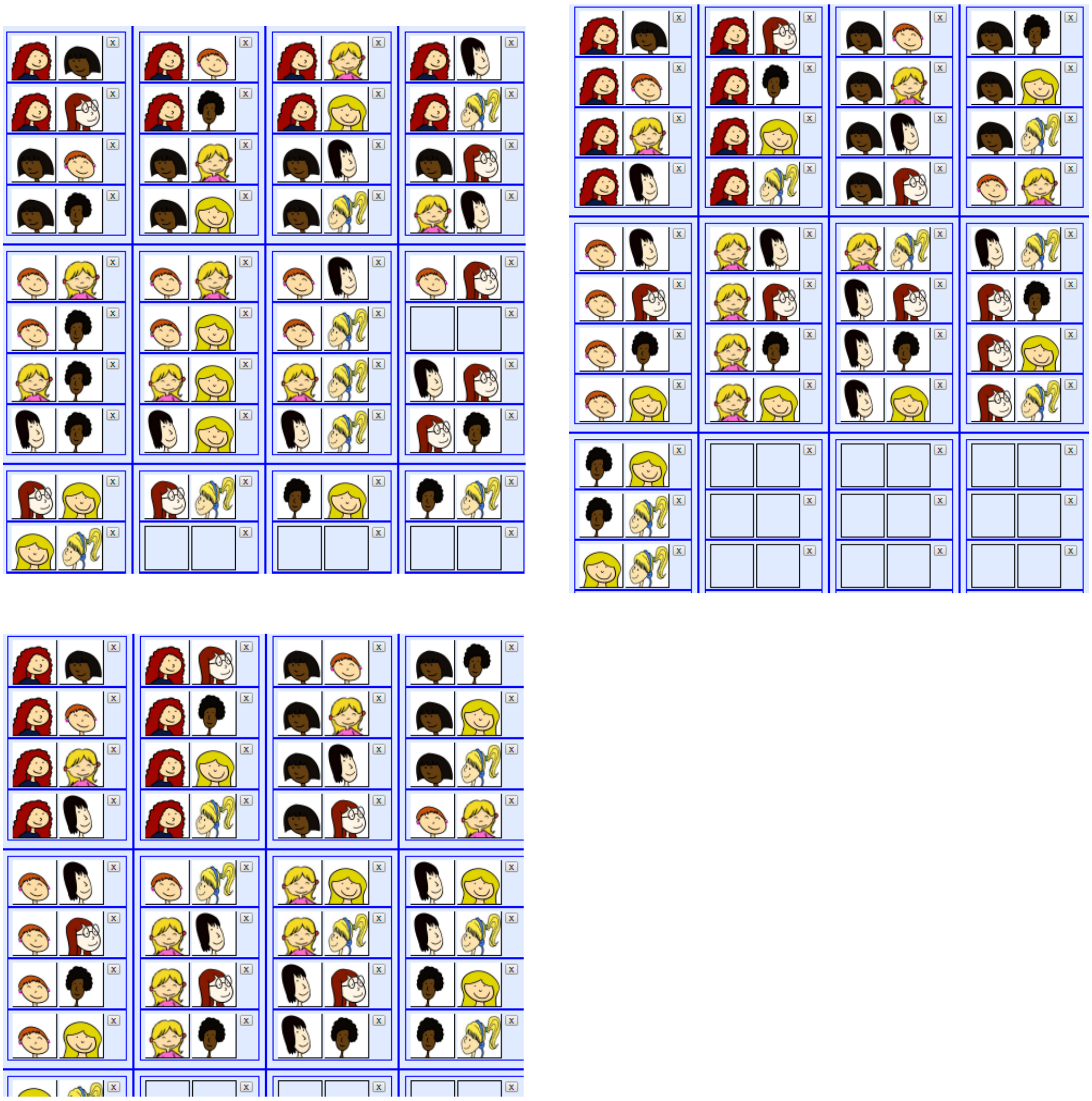


Incompletas com sistematização

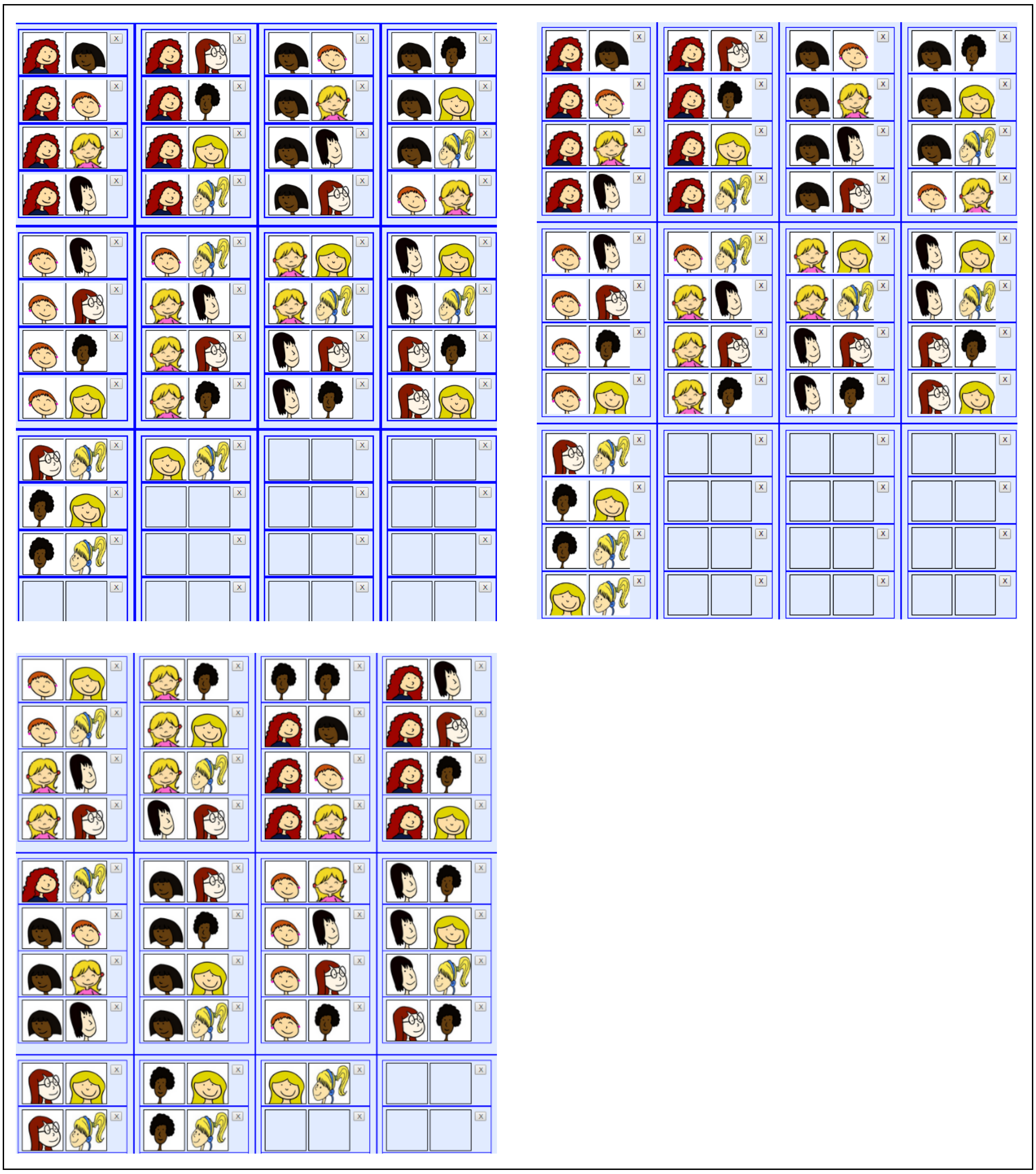




Sistematização total com algum detalhe “perdido”



Completas



Fonte: acervo da pesquisa

O problema explorava uma situação de combinação. Diferente dos anteriores, o número de possibilidades a serem construídas era superior a 15. Tal fato fez a sistematização ser tomada como necessária por um grande número de participantes. As questões acerca da relevância da ordem e as regularidades presentes nas duplas formadas foram bastante exploradas em discussões. Foram registradas, em vídeo, 24 duplas resolvendo este problema. As análises dos vídeos permitiram compreender o raciocínio combinatório presente.

- A dupla Elias e Eliseu iniciou construindo os pares de maneira empírica. Quando tinham quatro duplas formadas, Eliseu disse ao colega que seriam nove, antecipando o resultado.

> **Eliseu**.: Já tem uma, duas, três quatro. São nove.
> **Elias**: Nove?
> (Vídeo B13 -31)

Eliseu não justificou sua conclusão. Apenas tentou a resposta numérica, bastante convicto. Ao terem uma mensagem que não indicava o êxito na solução, Elias se propôs a preencher todos os espaços disponíveis no ODA, ou seja, dezesseis duplas. Ele avisou o colega: “Vou montar tudo.” (Vídeo B13 – 31) Construíram outros pares, discutiram sobre a existência ou não de algum par já formado. A aula encerrou sem que conseguissem concluir o problema. Fizeram a captura da tela como estava e não quiseram retomar o problema em outro encontro.

- A dupla Diogo e Jonas encarou o problema em dois dias diferentes. No primeiro dia, montaram duplas empiricamente. Formaram 18 duplas diferentes e Jonas sugeriu que formassem a dupla Alice e Alice. A pesquisadora discutiu essa sugestão:

> **Pesquisadora Elisa**: Dá pra fazer uma dupla Alice e Alice de jogar tênis?
> **Jonas**: Não [balança a cabeça e ri.]
> **Pesquisadora Elisa**: Não, né?! Então acho que não dá pra botar as duas iguais.
> **Jonas**: Dá pra botar repetido?
> **Pesquisadora Elisa**: Como assim?
> **Jonas**: Repetido assim... Eu já botei essa aqui [cursor sobre Alice-Bruna], Alice e não sei quem. Daí eu posso botar de novo?
> (Vídeo B13 – 87)

Ainda discutiram sobre o que seriam duplas diferentes e a pesquisadora acabou por dando uma ideia de sistematização:

> **Pesquisadora Elisa**: Se eu disser Diogo e Jonas ou Jonas e Diogo é a mesma ou é diferente?
> **Diogo**: É diferente.
> **Pesquisadora Elisa**: É diferente a dupla, pra trabalhar no computador, por

exemplo?
Diogo: Ah não, não.
Pesquisadora Elisa: Não. É a mesma, né?! Então tanto faz. Mas pode fazer... Eu poderia fazer Diogo e Jonas, Diogo e Ivone, Diogo e Letícia. Eu podia fazer de várias formas a tua dupla pra trabalhar hoje. Eu quero saber todos os jeitos de fazer dupla com essas gurias aí.
(Vídeo B13 – 87)

A aula encerrou sem que tivessem conseguido solucionar o problema.

No dia seguinte, retomaram o problema. Iniciaram a construção da solução fazendo a justaposição das meninas. Isto é, foram formando as duplas na mesma ordem em que apareciam no menu: Alice-Bruna; Camila-Daniela; Eloíza-Flávia, Gabriela-Helena; Ísis-Alice. Construíram outros três pares, mas de forma empírica. Apagaram todos depois que Diogo indicou uma outra maneira de fazer:

Diogo: Faz assim. Pega essa [aponta para a Alice] e botava aqui [desliza o dedo por todas as primeiras posições da primeira coluna]. Depois botava com essa [aponta a Bruna] e depois com essa [aponta a Camila].
(Vídeo B13 – 7)

Começaram a construir de forma sistematizada. Ajudaram-se bastante, com instruções e supervisões das duplas montadas. Porém, montaram as duplas considerando a ordem como relevante; ou seja, todas as duplas apareceram em duplicidade na sua solução. Contaram 73 duplas construídas, mesmo tendo construído só 72. A resposta não estava correta. Quando perceberam o que estava errado, Diogo procurou a pesquisadora para conversar:

Diogo: A gente não percebeu e fez quase todas repetidas. Porque, tipo assim, tem uma guria aqui e essa daqui tá aqui, né? A outra. [Gesticula como se cada mão fosse uma menina diferente.] A gente só botou essa aqui, aqui e essa aqui, aqui [move as mãos invertendo a posição delas].
Pesquisadora Elisa: E pode ou não pode?
Diogo: Não.
Pesquisadora Elisa: Por quê?
Diogo: Por causa que já foi.
Pesquisadora Elisa: Porque é a mesma dupla, né?!
Diogo: É.
(Vídeo B13 – 119)

Ao voltar para o computador e se sentar com seu colega, não conseguiram identificar que todas estavam em duplicidade nem apagar de forma sistemática. Ou seja, foi bastante confuso identificar e apagar as duplas repetidas. Apagaram todas as duplas construídas para recomeçar; desistiram do esquema usado anteriormente. Passaram a construir novamente de forma empírica. A pesquisadora tentou conversar sobre o erro cometido, mas consideraram que o esquema estava incorreto:

> **Diogo**: Vamos ver se a gente ganha!
> [Faz Alice-Bruna, Bruna-Camila, Camila-Daniela.]
> **Pesquisadora Elisa**: Não. Eu acho que aquela ideia de antes tava boa. Só que tem que cuidar pra não repetir.
> **Diogo**: Não. A gente vai fazer tudo.
> [Faz Daniela-Eloíza.]
> **Pesquisadora Elisa**: Mas daí, agora, vai começar assim? Tudo misturado?
> **Jonas**: Vai sim.
> **Pesquisadora Elisa**: E vai ser melhor? Tu acha?
> [Faz Eloíza-Flávia.]
> **Diogo**: A gente tava fazendo assim: [levanta e leva o dedo em direção a tela] botava essa aqui [aponta Alice e desliza o dedo pela primeira e segunda colunas].
> **Pesquisadora Elisa**: Claro! Tava ótimo!
> (Vídeo B13 - 127)

As certezas acerca do problema envolviam as possibilidades construídas, a estratégia utilizada e a resposta numérica. Se a resposta numérica não estivesse correta, tudo era descartado. As construções empíricas não são uma estratégia elaborada pelos participantes, ou seja, não é percebido como repetir a primeira maneira de montar as duplas. Infelizmente, a aula encerrou sem que conseguissem concluir o problema; também não voltaram a sistematizar, deixando duplas formadas aleatoriamente como sua solução parcial.

- A dupla Mariana e Sílvio iniciou construindo duplas empiricamente. Usaram um pouco de justaposição, montando duplas como Bruna- Alice, Camila-Daniela e Flávia-Gabriela. Mas construíram também algumas que não satisfaziam esse critério, como Gabriela-Alice e Eloíza-Ísis. Ao construírem oito duplas, se questionaram sobre o número de duplas possíveis.

> **Sílvio**: Meu! Será que tem que fazer todos? [Referindo-se aos espaços disponíveis no ODA.]
> **Mariana**: Será?
> (Vídeo B13 – 2)

Completam os dezesseis espaços disponíveis no ODA. Quando conseguiram, comemoraram:

> **Sílvio**: Ê, fizemos tudo!
> **Mariana**: Fizemos todas!
> (Vídeo B13 – 2)

O pesquisador sugeriu que relessem a pergunta e salientou que os espaços não tinham relação com a resposta e que era possível abrir mais espaços. Conseguiram fazer dezenove e tentaram essa resposta. Quando a mensagem negativa apareceu, se desanimaram. Sílvio falou, pedindo ajuda: “Nós não conseguimos! Nós não sabemos mais o que fazer.” (Vídeo B13 – 2) Mariana se desanimou a ponto de querer desistir: “Alguém me dá um martelo pra eu quebrar a tela desse computador?” (Vídeo B13 – 2) Distraíram-se e perderam o interesse no problema. Acabaram entregando a solução incompleta, com 22 duplas construídas.

- A dupla André e Renan construiu a partir de construções empíricas. Iniciaram usando as meninas na ordem em que apareciam, ou seja, fazendo justaposição do que era apresentado. Suas primeiras duplas foram Alice-Bruna, Camila-Daniela, Eloíza-Flávia, Gabriela-Helena. Tentaram a resposta quatro e perceberam que, talvez, pudessem usar a mesma menina em mais de uma dupla.

> **Renan**: Tu nem sabia que dava pra repetir. Viu? Burro!
> **André**: Eu falei que dava pra repetir.
> (Vídeo B12 – 2)

Apagaram e reiniciaram a resolução mais de uma vez. Entretanto, não usaram de nenhum esquema de ação sistematizado para a construção das possibilidades. Acabaram por considerar pronto quando tinham doze duplas formadas.

- Para Ricardo a organização da solução não fazia sentido. Por mais que ela fosse sugerida pelo ODA, não conseguia traduzir essa orientação em um esquema de solução. Depois de formar 27 duplas de maneira empírica, o ODA sugeriu que organizasse as duplas para facilitar.

> **Pesquisadora Elisa**: Tá apagando, Ricardo?

> **Ricardo**: É porque tem que botar em ordem.
> **Pesquisadora Elisa**: Ah, vai botar em ordem? Daí tu acha que vai ficar mais fácil de fazer?
> (Vídeo B11 – 53)

A pesquisadora fez zoom out para que mais duplas aparecem ao mesmo tempo na tela e quis esclarecer qual a organização que seria implementada, para isso, questionou:

> **Pesquisadora Elisa**: Como é que tu vai fazer então? De forma organizada. Como é que tu pode organizar será?
> **Ricardo**: Acho que fazer uma linha dessa [toca A e depois desliza o dedo por uma linha inteira de espaços]. Depois fazer uma linha dessas [desliza o dedo sobre outra linha].
> **Pesquisadora Elisa**: Ah, então vai. Vamos lá. Vamos ver se vai ficar bom.
> (Vídeo B11 – 53)

Depois de apagar todas as possibilidades que haviam sido construídas, formou duas duplas Alice e Alice na primeira coluna. Para esse menino, organizar era ter coisas iguais, idênticas. Ao se focar na ideia de organização, abandonava outros critérios do problema.

A pesquisadora questionou se poderia haver uma dupla de tênis formada por Alice e Alice. Sem responder, as duas possibilidades foram apagadas. A pesquisadora retomou a ideia das filas apresentada anteriormente, questionando outra vez:

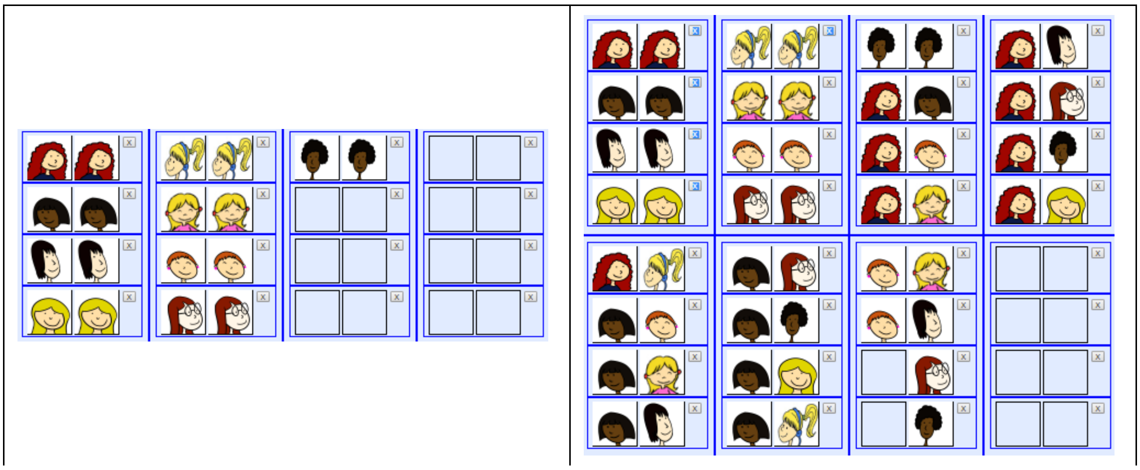
> **Pesquisadora Elisa**: Como é que tu pode fazer, Ricardo? A ideia de uma fila com essa aqui tá boa [toca A]. Mas não vai poder assim, né?! Porque não pode ser ela e ela. Como é que tu pode botar de outro jeito ela organizada?
> (Vídeo B11 – 53)

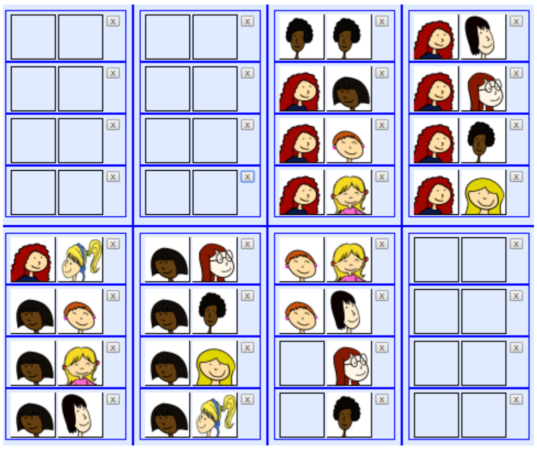
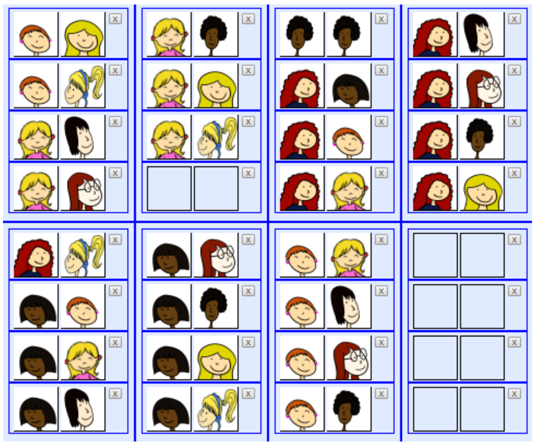
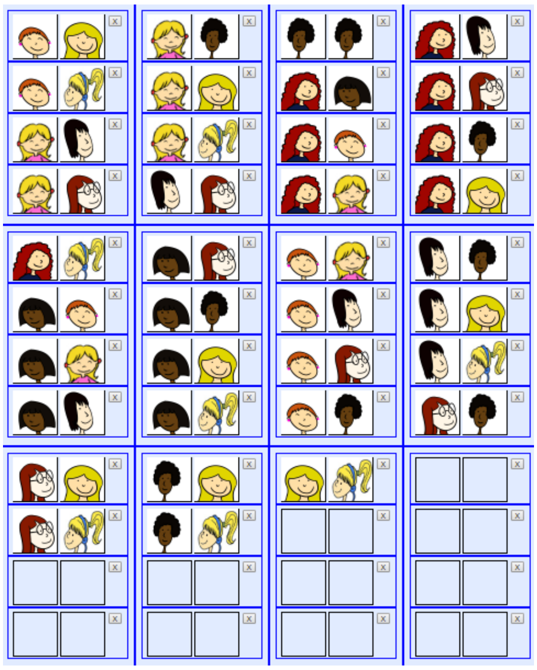
Então, formou as duplas Alice e Bruna, Camila e Daniela. Tal construção não apresentou a ideia de organização discutida, então a pesquisadora provocou questionando “Que tipo de ordem tu tá seguindo assim? Que tipo de organização tu tá seguindo aí?” (Vídeo B11 – 53). Ricardo não respondeu. Trocou as imagens pelos nomes das meninas no menu, mas tal mudança não o ajudou na solução. Voltou a mostrar as imagens das meninas e ele construiu os dezesseis pares que apresentou como solução. Este menino não quis resolver novamente o problema em outro encontro. Deixando essa solução incompleta.

Os processos característicos do estádio II foram bastante numerosos e ricos em colocações interessantes.

- A dupla Jaqueline e Tomé iniciou construindo nove duplas com duas meninas iguais. Depois, formaram todas as possibilidades com Alice e, em seguida, as possibilidades com Bruna. Não montaram a dupla Bruna-Alice, considerando a ordem como irrelevante. Enquanto construíam as possibilidades com Camila, a pesquisadora fez uma intervenção sobre as duplas que possuíam a mesma menina duas vezes: “Ah! Essa ideia de vocês foi boa! Agora, me diz uma coisa: isso aqui [toca Alice-Alice] pode ser uma dupla de tênis? Eu e eu mesma?” (Vídeo B12 – 52) Começaram a apagar as duplas que eram assim, mas acabou ficando Gabriela-Gabriela. Nos espaços que ficaram em branco, continuaram a construir as duplas com Camila. A disposição das duplas na solução acaba não representando a ordem em que as duplas foram formadas. Sem se perder, construíram as duplas com cada uma das meninas e montaram trinta e sete duplas. A resposta correta era trinta e seis, mas a dupla Gabriela-Gabriela não foi percebida e apagada. A dupla fez a captura de tela e entregou a solução sem conferir a resposta numérica.

Quadro 14 - Etapas da construção da solução pro problema Times de tênis



Etapa 1: Construíram os oito pares com duas meninas iguais.	Etapa 2: Construíram os oito pares com Alice, os sete pares com Bruna e começaram os pares com Camila. A ordem era considerada irrelevante, pois não foram repetidos os pares. Ao iniciar os pares com Camila, as meninas já estavam posicionadas na segunda posição (Daniela, Eloíza, Flávia e Gabriela)
 Etapa 3: Apagaram as duplas com duas meninas iguais.	 Etapa 4: Completaram as duplas com Camila. Observa-se que se preocuparam em ocupar os espaços que ficaram em branco depois da etapa 3. Construíram as duplas com Daniela.
	Etapa 5: Construíram as duplas com Eloíza, Flávia, Gabriela e Ísis. Ficaram com 37 possibilidades porque não apagaram a dupla Gabriela e Gabriela (na terceira coluna).

Fonte: acervo da pesquisa

- Igor iniciou montando empiricamente. As quatro primeiras duplas criadas foram Bruna e Gabriela, Eloíza e Daniela, Alice e Flávia, Helena e Ísis. Ao tentar a resposta quatro e ler a mensagem, releu a pergunta. Construiu, então, a partir da justaposição das meninas disponíveis, as duplas Alice e Bruna, Camila e Daniela, Eloíza e Flávia, Helena e Gabriela. Tentou, então, a resposta oito. Apagou todas as possibilidades construídas depois de ler a mensagem. Recomeçou a construção das duplas, ainda de forma empírica. Chegou a ter 10 duplas na tela, mas essa também não era a resposta numérica esperada pelo ODA. Pediu ajuda:

> **Igor**: Ã... Eu não entendi aqui. Mas é só pra formar duplas?
> **Pesquisador Lucas**: Sim. Tu forma todas as duplas que forem diferentes. Tipo ó... Se tu pegar essa e essa [apontando na tela do computador] é uma dupla. Essa com essa [apontando na tela do computador] é outra dupla. Essa com essa [apontando pra tela do computador] é outra dupla. Tu vai fazer todas que forem possíveis.
> (Vídeo B11 – 4)

Outra vez, recomeçou a montar as duplas de forma empírica. Passados 21 minutos do início da leitura do problema, apagou tudo e iniciou a construção de forma sistematizada. Formou todos as duplas com Alice, depois com Bruna. Ao montar as duplas com Bruna, fez também Bruna e Alice, não percebendo que se tratava da mesma dupla Alice e Bruna. Percebendo certa regularidade, colocou Camila em oito espaços vazios e começou a completar as duplas com essa menina. A aula encerrou e ele fez a captura de tela da solução parcial. Ele não quis resolver esse mesmo problema em outra data, deixando esta como sua solução.

Foi necessário começar e recomeçar muitas vezes até que se desse conta de uma organização possível. Ao criar o esquema, não considerou a irrelevância da ordem. A busca pelo sistema estava sendo aprimorada à medida que já antecipava quantas vezes uma menina deveria aparecer na primeira posição. Mesmo não tendo concluído o problema, sua solução parcial e seu processo foram bastante importantes.

- A dupla Nisa e Gabriela iniciou montando as duplas com Alice. Foi a única dupla a organizar em linhas e não em colunas. Formaram as oito duplas com Alice, depois as sete duplas com Bruna. Essas primeiras 15 duplas já permitiram uma antecipação de que a solução seria um número grande. Assim que concluíram as duplas com Bruna, Nisa comentou: “Ih, vai dar um monte!” (Vídeo B11 – 30) Antes de iniciar as duplas com Camila, clicaram no botão “mostrar mais” para que aparecessem mais espaços no ODA.

Na hora de formar as duplas com Camila, acabaram por fazer duas vezes a dupla Camila e Daniela. Não perceberam e iniciaram as duplas com Daniela. A mudança na disposição das duplas formadas atrapalhou na identificação do que já havia sido formado. Fizeram a dupla Daniela e Eloíza num espaço vago depois das duplas com Bruna. Na hora de passar para a linha vazia, esqueceram de fazer Daniela e Flávia. Construíram corretamente as duplas com as meninas seguintes. Contaram as duplas formadas e encontraram trinta e sete. Porém, estavam confiantes de ter resolvido corretamente e chamaram a pesquisadora-professora pra ajudar:

> **Nisa**: Sora! Mas tá falando que tá errado.
> **Pesquisadora Elisa**: Não são trinta e sete. Que que ele disse?
> (Vídeo B11 – 34)

Recontaram e encontram a resposta numérica correta. Porém, a construção da solução não estava completa. A dupla Camila e Daniela aparecia duas vezes e a dupla Daniela e Flávia foi omitida.

- A dupla Nicole e Alexandre iniciou a construção de modo sistemático. Formaram as duplas com Alice a partir das instruções de Alexandre. Porém, construíram Alice-Bruna e Bruna-Alice como se fossem duas duplas diferentes. Para montar as duplas com Camila, Alexandre colocou oito Camila nos espaços vazios e disse que precisava encher duas linhas [referindo-se a colunas].

> **Pesquisadora Elisa**: Por que duas linhas? [Referindo-se a colunas]
> **Alexandre**: É sempre. É duas linhas. Que nem aqui [aponta duas colunas com Alice]. É a mesma coisa, só muda a personagem.
> (Vídeo B11 – 62)

Alexandre verbalizou uma regularidade. Apesar de estar considerando a ordem como relevante, formulou uma conclusão acerca do problema. Depois de montarem as 72 duplas, todas aparecendo duas vezes, a pesquisadora chamou atenção para as repetições.

> **Pesquisadora Elisa**: Agora, olha só: essa com essa [aponta Alice-Bruna] tá aqui de novo [aponta Bruna-Alice]. Apaga uma delas.
> [Apagam uma das duplas.]
> **Rogério** (de outra dupla): E aqui também [aponta Alice-Camila e Camila-Alice] com essa.
> (Vídeo B11 – 74)

Passaram a olhar para a tela buscando identificar as repetições. Apagaram as que identificaram em duplicidade, mas sem uma sistematização para esse processo. Encerrou o tempo da aula e acabaram por entregar uma solução incompleta.

Mais uma vez a construção sistemática não levou à solução correta por desconsiderar informações importantes do problema. A ordem ser ou não relevante não é colocada de maneira explícita no problema. Mesmo assim, a ideia de sistematizar já demonstrou um avanço comparado a resoluções puramente empíricas.

- A dupla Theo e Kelvin iniciou formando duplas empiricamente. Mas quando tinham doze duplas, apagaram a segunda e a terceira colunas, por estarem confusos.

> **Kelvin**: Só me perdendo, sora.
> **Pesquisadora Elisa**: Vamos lá, vamos lá. Não dá pra fazer mais?
> **Kelvin**: Eu não sei, sora.
> **Pesquisadora Elisa**: De quantos jeitos essa aqui [toca Alice] pode fazer dupla, será?
> **Theo**: Doze.
> **Pesquisadora Elisa**: Doze jeitos ela pode fazer? Como?
> **Theo**: Oito.
> **Pesquisadora Elisa**: Oito? Por que oito?
> **Theo**: Porque tem oito gurias [desliza o dedo pelos oito rostos].
> (Vídeo B11 – 66)

Deixaram só a primeira dupla formada, que era Alice-Bruna e construíram as demais duplas com Alice. Quando concluíram as oito duplas, a pesquisadora voltou a conversar sobre a continuação da resolução. Ficou evidente que os dois estavam com ideias bastante diferentes a respeito do problema e da solução. Enquanto Theo conseguiu formular um esquema para construir a solução, Kelvin buscava a resposta em informações pouco precisas.

> **Pesquisadora Elisa**: Tá. E agora? Foi todas as duplas com ela? Foi?
> **Theo**: Foi.
> **Kelvin**: Oito, sora.

> **Pesquisadora Elisa**: E aí? Oito é com todo mundo?
> **Theo**: Não é oito.
> **Pesquisadora Elisa**: Oito é todas as duplas com essa [aponta Alice]. Mas se fosse fazer com todas essas [aponta todas as meninas], quantas seriam?
> **Kelvin**: Vinte e um.
> **Pesquisadora Elisa**: Por que vinte e um?
> **Kelvin**: Porque é um monte.
> **Pesquisadora Elisa**: Vinte e um é um monte?
> **Kelvin**: Daí ia dar.
> (Vídeo B11 – 66)

Theo iniciou a construção das duplas com Bruna. Ao formar a primeira dupla, Bruna-Alice, Kelvin identificou a repetição.

> **Kelvin**: Já foi. Não dá.
> **Pesquisadora Elisa**: Qual que já foi?
> **Kelvin**: As duas ali ele colocou [aponta Alice-Bruna e Bruna-Alice].
> **Pesquisadora Elisa**: Ah! Essa ali não vai poder ser. Verdade. Essa dupla aí já foi.
> (Vídeo B11 – 66)

Apagou a repetida e fez as outras duplas com Bruna. Kelvin apenas assistiu. Kelvin chutou um número a partir da construção do colega:

> **Kelvin**: Fiz de todas as gurias e é 32. Não aposto nada.
> **Pesquisadora Elisa**: Não é trinta e dois.
> **Kelvin**: É mais ou é menos?
> **Pesquisadora Elisa**: Não sei.
> **Kelvin**: Ô sora! Dá uma dica.
> (Vídeo B11 – 73)

Depois de formadas todas as duplas com Bruna, formaram também as com a Camila e a Daniela. A pesquisadora fez zoom out para que pudessem ver mais possibilidades numa mesma tela. A organização espacial adotada não era usual: depois de abrirem mais espaços, começaram ocupando os espaços mais à direita e avançaram para baixo e para a esquerda. A aula encerrou antes que conseguissem concluir a solução e acabaram por entregar uma solução incompleta.

- A dupla Pedro e Isabela iniciou formando pares empiricamente. Tomavam cuidado para não repetir as duplas e consideraram, desde o início, a ordem como irrelevante na formação de novas possibilidades. Com treze duplas formadas, já estava mais difícil conferir o que havia sido feito. Ao formar uma dupla repetida, Isabela avisou seu parceiro. E Pedro ainda ressaltou, antes de apagar, “Não adianta ser o inverso.” (Vídeo B12 -25). Depois de tentar as respostas treze e dezesseis, apareceu a mensagem sugerindo que montassem as duplas de forma organizada. A mensagem desestabilizou Pedro, que questionou o investigador:

> **Pedro**: De forma organizada? Como assim? Tá organizado!
> **Pesquisador Nicolau**: Uma pergunta que tu pode te fazer é a seguinte: essa menina aqui [aponta Alice], tu fez todas as duplas possíveis com essa menina?
> **Pedro**: Já fiz todas. Não, não fiz. Ah! Entendi...
> (Vídeo B12 – 26)

Apagaram todas as duplas formadas e passaram a construir as duplas com Alice. De forma sistematizada fizeram todas as possibilidades. Iniciaram, logo em seguida, as duplas com Bruna. A ordem passou a ser considerada relevante, pois construíram Bruna-Alice como primeira dupla com Bruna. O esquema de ação criado se sobrepôs às certezas sobre o problema. Colocaram oito vezes Camila e completaram as duplas. Depois, oito Daniela e completaram as duplas. A dupla Daniela-Camila foi esquecida, sobrando uma Daniela que foi apagada. Outra vez a ação se sebropôs ao que foi dito. Eles sabiam que deveriam ser oito pares com cada menina, mas sobrou uma ao fim das construções e ela foi apagada. Poderiam ter buscado a dupla faltante, se questionado sobre a “sobra”. Mas não o fizeram. A maneira como haviam agido lhes garantia convicção de que estava correto. Construíram ainda as oito duplas com Eloíza e colocaram as oito Flávia. Porém, a aula encerrou e a dupla entregou a solução incompleta.

- A dupla Marcos e Letícia iniciou com um sistema, mas usado de maneira parcial. Construíram quatro duplas com Alice na primeira posição; quatro com Bruna; quatro duplas com Camila e quatro com Daniela. Nessas primeiras dezesseis duplas, apareceram algumas repetidas, mas em ordem inversa. Quando Marcos questionou sobre a estratégia empregada, a pesquisadora aproveitou para perguntar sobre a relevância ou não da ordem.

> **Marcos**: O, sora, é assim?
> **Pesquisadora Elisa**: Oh! Que lindo que tá ficando. Tá. Quantas duplas dá pra fazer com essa [aponta Alice]? Só essas quatro duplas? Ah! Ela aparece aqui de novo [aponta Daniela-Alice]. Essa dupla [Daniela-Alice] é igual a essa [Alice-Daniela] ou é diferente?
> **Marcos**: É diferente.
> **Pesquisadora Elisa**: Se eu monto uma dupla Marcos e Letícia; daí, na outra semana, eu digo: ah, não; hoje vai ser Letícia e Marcos. É a mesma dupla ou é uma dupla diferente?
> **Marcos**: Não. É a mesma.
> (Vídeo B13 – 109)

Trocaram a dupla Daniela-Alice por Daniela-Ísis, mas não identificaram outras duplas na mesma situação. Tentaram a resposta 16 e a mensagem que apareceu sugeria que ainda faltavam duplas a serem construídas. Completaram outras dezesseis duplas, construindo mais quatro duplas com cada uma das meninas: Ísis, Flávia, Gabriela e Eloíza. Cabe ressaltar que colocavam a mesma menina quatro vezes na primeira posição e, depois, completavam as duplas. Essa atitude mostrou um esquema de ação empregado na construção da solução. Tentaram a resposta 32. A aula terminou sem que pudessem completar a solução.

- A dupla Rubem e Nícolas iniciou com a construção empírica de pares. Formaram doze duplas diferentes e tentaram esse número como resposta. Para auxiliá-los na busca de uma estratégia, a pesquisadora promoveu o seguinte diálogo:

> **Pesquisadora Elisa**: Tá. Vocês já fizeram todas as duplas que essa menina aqui [aponta Alice] pode fazer? A Alice?
> **Rubem**: Que essa daí pode fazer?
> **Pesquisadora Elisa**: Todas as duplas que a Alice pode fazer; já montaram?
> **Rubem**: Não. Ah! Então a gente tem que fazer...
> **Pesquisadora Elisa**: Todas as duplas que podem fazer pra jogar tênis. Esse aqui [passa a mão pelas imagens das meninas] é todo mundo que joga no time. Só que só vai duas pessoas.
> [Rubem apaga todas as duplas formadas.]
> **Rubem**: Peraí que eu vou fazer um negócio.
> **Pesquisadora Elisa**: Que tu vai fazer?
> **Rubem**: Vou apagar tudo e fazer de novo. Já entendi, eu acho.
> **Pesquisadora Elisa**: Pensa que ele vai fazer e ele apaga tudo. Que será que ele vai fazer, né?!
> **Nícolas**: É.

Rubem: Vamos fazer várias duplas com essa daqui [Coloca Alice].
Nícolas: Quem é Alice?
Pesquisadora Elisa: É essa primeira.
[Completa Alice-Bruna e faz Alice-Camila.]
Nícolas: Ah!
(Vídeo B13 – 119)

Iniciaram a construção de todas as possibilidades de dupla com Alice. A pesquisadora sugeriu que fizessem aparecer mais espaços para que construíssem uma coluna. Acataram, mas acabaram por esquecer a dupla Alice-Flávia. Para iniciar as duplas com Bruna, cada um dos integrantes tinha uma ideia sobre onde iniciar.

Rubem: Essa daqui agora [cursor sobre Bruna]. Vamos completar bastante.
Nícolas: Vamos começar ali do outro lado [aponta para a segunda coluna].
Rubem: Aqui tem lugar.
[Faz Bruna-Alice na primeira coluna. Coloca quatro Bruna na segunda coluna. Completaram Bruna-Camila, Bruna-Daniela, Bruna-Eloíza, Bruna-Flávia. Coloca mais duas Bruna. Completaram Bruna-Gabriela e Bruna-Helena. Faz Bruna-Ísis.]
Nícolas: Bah! Vai ter muito! Pode faltar pra todas.
Rubem: Mas deixa, vai ter bastante.
(Vídeo B13 – 121)

Ao montarem essas duplas, evidenciaram que estavam considerando a ordem como relevante, pois apareciam as duplas Alice-Bruna e Bruna-Alice. Montaram todas as duplas com Bruna, com Camila, com Daniela e com Eloíza. Nícolas se surpreendeu com o número de possibilidades já formadas e percebendo que ainda haviam muitas a serem feitas disse: “Ow! Vamos terminar todas! Vai dar pra fazer um montão!” (Nícolas, vídeo B13 – 123) Antes que iniciassem a construção das duplas com Flávia, a pesquisadora problematizou a relevância da ordem:

Pesquisadora Elisa: Olha só. Se eu digo que a dupla é Nícolas e Rubem. Aí, amanhã, eu vou dizer assim: hoje, nós vamos trabalhar com outras duplas. Hoje, vai ser Rubem e Nícolas. É a mesma dupla ou é outra dupla?
Rubem: É a mesma.
Pesquisadora Elisa: A mesma dupla. Então, olha essa dupla aqui [aponta Alice-Bruna e essa dupla aqui [aponta Bruna-Alice]. É a mesma ou é diferente?
[Apaga Bruna-Alice.]
Pesquisadora Elisa: Essa aqui [aponta Camila-Alice] e essa dupla aqui [aponta Alice-Camila].”

Rubem: Bah!
(Vídeo B13 – 124)

Passaram a examinar as duplas construídas, buscando outras repetições. Identificaram algumas e apagaram. Não voltaram a construir duplas, ou seja, o esquema que vinha sendo usado foi interrompido e não retomado. Depois de considerarem ter eliminado as repetidas, contaram trinta e duas duplas e informaram essa resposta. Ficaram decepcionados por não aparecer a mensagem de êxito. A aula acabou e fizeram a captura de tela de sua solução parcial.

O estádio III é caracterizado pelo emprego de um sistema. Foi observado e é apresentado em exemplos abaixo.

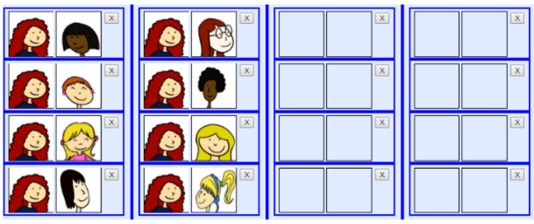
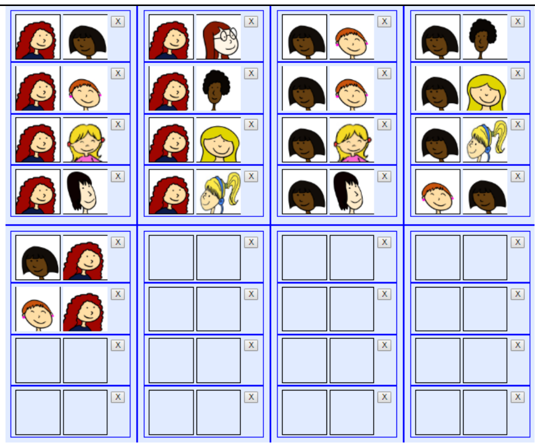
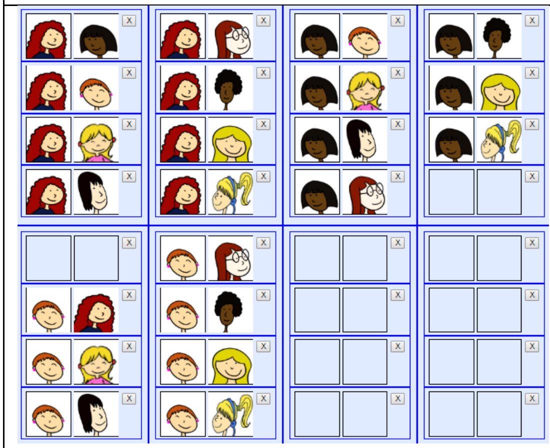
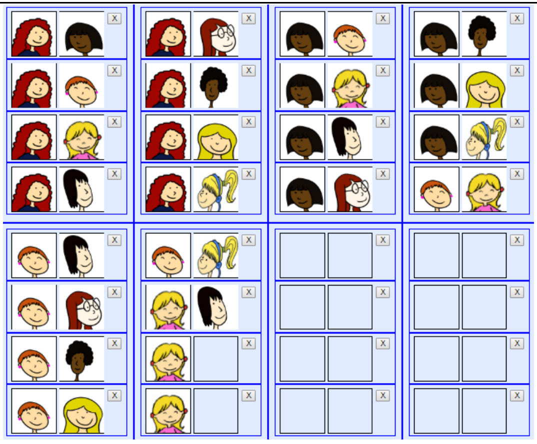
- Alice iniciou formando todas as duplas possíveis com Alice[10]. Quando montou as duplas com Bruna, repetiu Bruna e Camila e não fez Bruna e Alice. Ao montar as duplas com Camila, fez Camila e Alice e se deu conta de que não havia feito Bruna e Alice. Montou, então, essas duas duplas. Depois de montar as duplas com Camila, percebeu que a as duplas Alice e Bruna e Bruna e Camila estavam repetidas. Apagou-as. E acabou reorganizando as duplas com Bruna e com Camila para não ter espaços em branco. Ao iniciar as duplas com Daniela, a pesquisadora tentou uma explicação sobre a estratégia empregada:

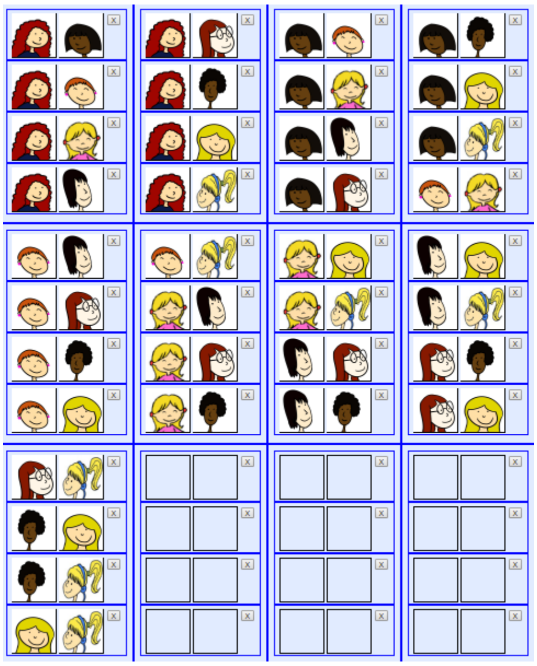
Pesquisadora Elisa: Como é que tu tá fazendo pra não repetir?
Alice: Ah, eu nem sei, mas eu tô conseguindo.
Pesquisadora Elisa: Tá muito legal esse teu jeito.
[Ela olha para a tela.]
Alice: Dei uma revisadinha aqui. Não tem nada repetido.
(Vídeo B11 – 69)

Conseguiu empregar a sistematização até o fim, construindo corretamente as 36 duplas possíveis. No quadro abaixo, o processo de construção da solução é descrito com imagens.

[10] Nesse caso, Alice é o nome da menina que resolve o problema e também é o nome de uma das meninas do problema. Durante a leitura, é possível perceber de qual se está falando.

Quadro 15 - Etapas de construção da solução do problema Duplas de tênis

 Etapa 1: Construiu as oito duplas com Alice.	 Etapa 2: Construiu 7 duplas com Bruna e uma com Camila. Parecia ter considerado a irrelevância da ordem ao não fazer Bruna e Alice, mas acrescentou a dupla Bruna e Alice logo em seguida. Construiu Camila e Alice.
 Etapa 3: Construiu as duplas com Camila e apagou as duplas repetidas (Alice e Bruna e Camila e Alice)	 Etapa 4: Reorganizou as duplas para não deixar espaços em branco.



Etapa 5: Construiu as duplas que faltavam, empregando a sistematização de maneira completa.

Fonte: acervo da pesquisa

- A dupla Nuno e Platão iniciou fazendo as oito duplas possíveis com Alice. Em seguida, formaram as sete duplas possíveis com Bruna. Tentaram a resposta quinze e também dezesseis. Apesar de criarem um sistema, não o empregaram até o fim e consideraram os espaços do ODA um limitador para a solução. Ou seja, mesmo tendo usado o sistema apenas para duas das oito meninas, aceitaram que estivesse pronto.

> **Pesquisador Nicolau**: Tu pode criar mais espaços. Vai bem pra baixo [rolagem]. Ali ó.
> **Nuno**: Como assim? Eu não tô vendo.
> **Pesquisador Nicolau**: Aí, ó. Mostrar mais. Aí tu cria mais espaços.
> (Vídeo B11 – 103)

Platão explicou sua estratégia para a dupla do lado, indicando como deveriam proceder na construção da solução: “Coloca essa mulher aqui [aponta Alice na tela da dupla] oito vezes.” (Vídeo B11 – 103) A dupla acatou e ele voltou a atenção para seu computador para formar as duplas com Camila. Construíram também as duplas com Daniela, Eloíza, Gabriela e com Helena. Esqueceram as duplas que teriam Flávia na primeira posição. Contaram as 33 duplas e não compreendiam a mensagem que aparecia, pois tinham certeza da construção.

> **Nuno**: Por que aparece isso aqui? *Tente criar as duplas de maneira organizada pra não se perder nas contas.*
> (Vídeo B11 – 105)

Nicolau auxiliou a observarem as duplas formadas e descobrir o que faltava. Construíram as três duplas com Flávia e contaram novamente. Conseguiram obter a solução completa.

- A dupla Wiliam e Leonardo iniciou construindo os pares de maneira empírica. Porém, ao montar dez duplas perceberam que as possibilidades eram bem numerosas. Leonardo, depois de ter a décima formada, comentou com a pesquisadora:

> **Leonardo**: Bah, sora! Aqui vai dar pra fazer um monte!
> **Pesquisadora Elisa**: É verdade.
> **Leonardo**: Se der, vai dá pra fazer todos os quadradinhos.
> **Pesquisadora Elisa**: Talvez até mais...
> **Leonardo**: É.
> (Vídeo B13 - 41)

Quando tinham vinte e um pares na tela, Leonardo surpreendeu-se com a quantidade de espaços que poderiam ser abertos no ODA.

> **Leonardo**: Bah! Botei pra mostrar mais e olha aqui... [passa a rolagem da página para baixo, visualizando muitos espaços em branco]. É infinito, sora!
> **Pesquisadora Elisa**: Sempre que tu clicar vai aparecer mais. Mas tu tem que fazer quantas tu conseguir, né?!
> (Vídeo B13 – 41)

Com mais de vinte duplas na tela, começaram a apagar tudo para recomeçar. A pesquisadora questionou a atitude.

> **Wiliam**: Porque os nossos estão embaralhados. Daí eu disse que a gente faz um negócio [indica uma coluna com a mão] só com essa [cursor sobre A] e vai ser mais rápido.
> (Vídeo B13 – 46)

Wiliam iniciou montando a dupla Alice-Bruna. Leonardo não compreendeu a estratégia do colega e logo questionou:

> **Leonardo**: Tu tá fazendo a mesma coisa, Wiliam.

[Faz Alice-Camila.]
Leonardo: Tem que colocar todas essas [aponta Alice e desliza o dedo para baixo, indicando que deveria colocar primeiro muitas Alice e depois montar as duplas.]
[Faz Alice-Daniela e Alice-Eloíza. Começa, na segunda coluna, Alice-Flávia.]
Leonardo: Daí dá mais rostos.
Pesquisadora Elisa: Dá mais rostos assim?
Leonardo: Aham.
[Faz Alice-Gabriela e Alice-Helena.]
Pesquisadora Elisa: Na verdade o número de possibilidades tem que ser o mesmo, né?!
[Conclui Alice-Isis.]
Wiliam: Agora a gente faz essa daqui [cursor sobre Bruna].
(Vídeo B13 – 48)

Depois de montarem todas as duplas com Alice, Bruna e Camila, surgiu uma discussão sobre a ordem. Os dois compreenderam que inverter a ordem não gerava outra dupla, mas esclareceram-se mutuamente através do seguinte diálogo:

Leonardo: Não dá pra fazer com essa daqui, ó [toca Camila na tela].
Wiliam: Eu sei, tipo, só vou fazer com essas senão vai ter tudo de novo.
(Vídeo B13 – 50)

Concluíram a construção da solução e obtiveram as trinta e seis duplas possíveis. Na hora de contar, acabaram se perdendo na rolagem da página e contaram trinta e duas duplas. A certeza da resposta fez com que considerassem que o computador estivesse com problemas:

Leonardo: Sora! Esse computador tá bugado, não dá pra fazer mais que trinta e dois.
Pesquisadora Elisa: Não?
Leonardo: Não aceitou, olha.
Pesquisadora Elisa: Então vamos fazer assim: deixa as trinta e duas duplas aparecendo, faz o print e salva.
(Vídeo B13 – 52)

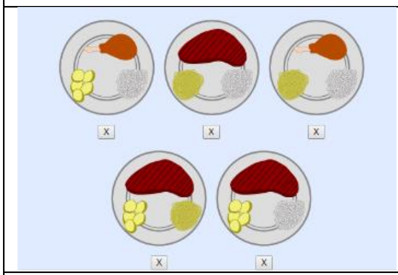
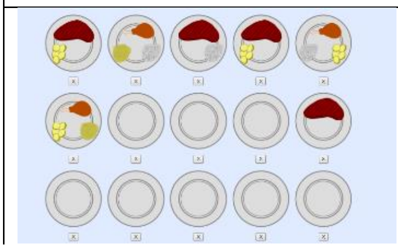
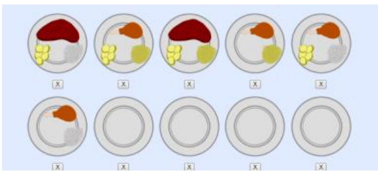
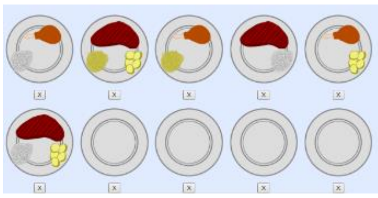
Entretanto, Wiliam recontou as duplas e percebeu que se tratavam de trinta e seis. Corrigiram a resposta e salvaram depois de ler a mensagem de êxito.

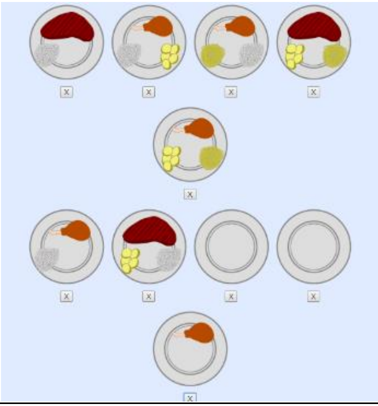
8.2.6 Análise do problema Restaurante

Em um restaurante, o cliente monta o seu prato a partir das opções do cardápio. O restaurante oferece dois tipos de carne: coxa de frango ou bife e três opções de acompanhamento: arroz, batata cozida e massa. Para montar o pedido é preciso escolher um tipo de carne e dois acompanhamentos diferentes. Quantos pedidos diferentes são possíveis de serem montados com esse cardápio?

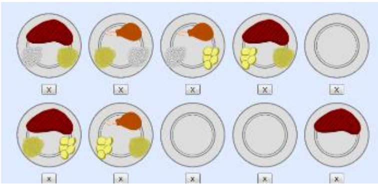
Esse problema teve 29 soluções diferentes, sendo que 31% (9 soluções) estavam incompletas e 69% estavam completas (20 soluções). O uso da sistematização para a construção das possibilidades ficou evidente em 20,7% (6 soluções) das soluções apresentadas. Chamou a atenção que 13,8% (4 soluções) das soluções apresentavam pratos montados de forma equivocada, pois não continham dois acompanhamentos diferentes.

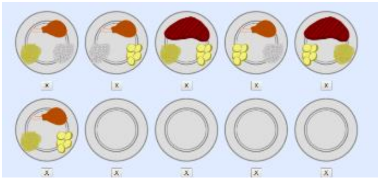
Quadro 16 - Soluções entregues para o problema Restaurante

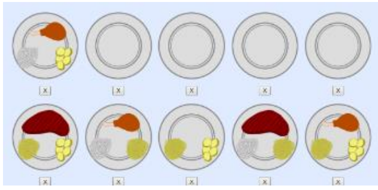
Incompleta, com menos que seis pratos montados

Incompleta com pratos montados de maneira incompleta
  

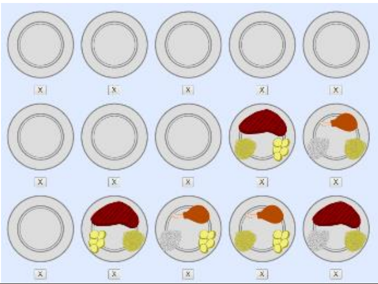


Incompletas, mas por apresentar algum prato em repetição

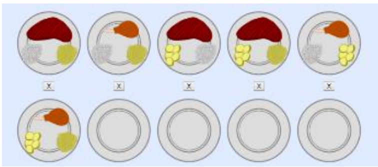


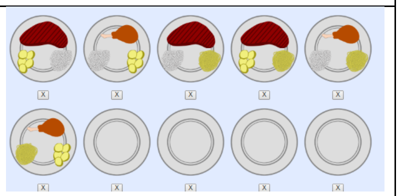


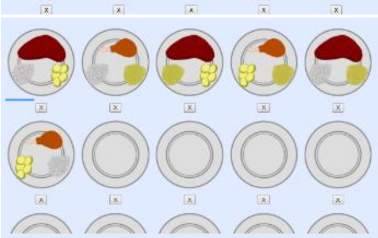


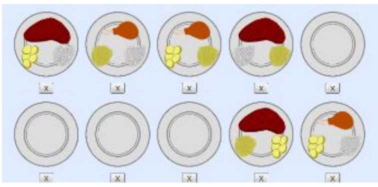


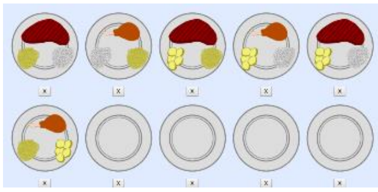
Completas, mas sem evidência de sistematização

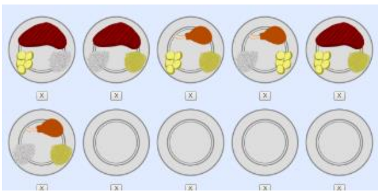


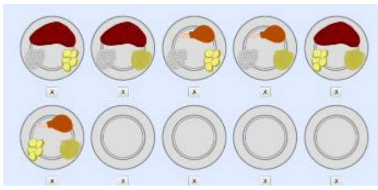


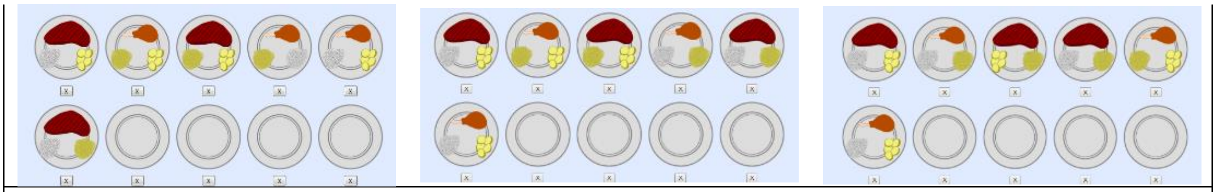
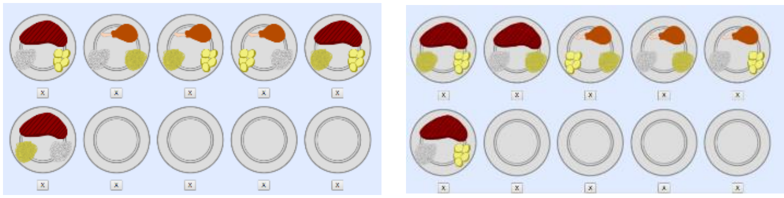
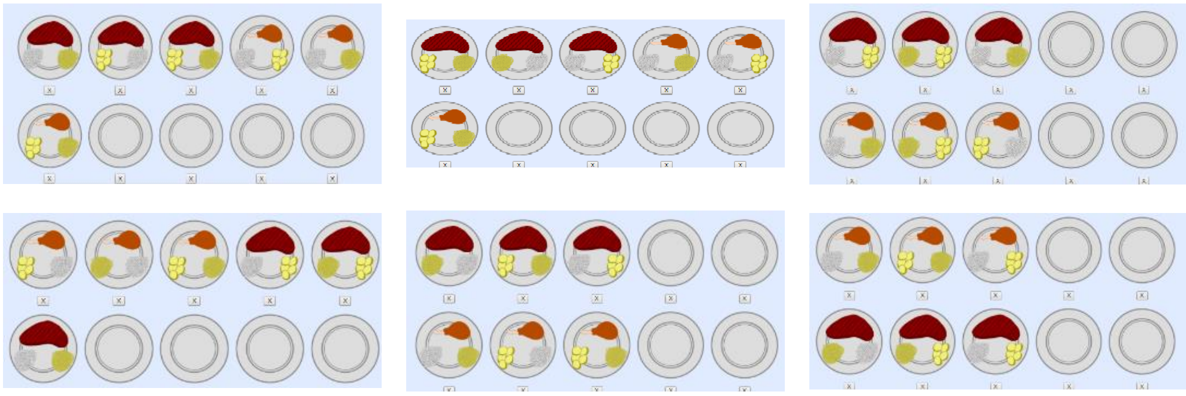











Completas com evidência de sistematização parcial

Completas com evidente sistematização


Fonte: acervo da pesquisa

O problema trata de um misto de combinação (para a escolha dos acompanhamentos) com produto cartesiano (ao colocar junto com uma opção de carne). Foram registradas em vídeos, 12 duplas resolvendo esse problema. A partir dessas observações foi possível caracterizar os estádios a partir dos mesmos critérios descritos nos problemas anteriores.

O primeiro estádio, caracterizado pelas construções empíricas, foi percebido no processo de algumas duplas e exemplificado a seguir.

- Mariana iniciou construindo quatro pratos diferentes. Todos estavam completos. Não compreendeu o erro, considerando que o ODA pudesse estar com problemas.

> **Mariana**: Já fiz. Não sei porque está dizendo isso...
> **Pesquisador Lucas**: Tu fez todos os pratos que dava pra fazer? Não dá

pra fazer pratos diferentes desses que tu já fez?
(Vídeo B13 – 4)

Uma vez que ela negou ter outras possibilidades a serem construídas, o pesquisador apresentou uma opção de prato que não estava considerada: “Tu poderia ter feito carne com batata e massa?” (Lucas, em vídeo B12 – 4) O pesquisador ainda lembrou que era possível abrir mais espaços, caso fosse necessário. Ela construiu a opção indicada por ele e também a última que faltava, concluindo o problema.

- Kate e Cristina iniciaram montando, empiricamente, pratos. As duas conversavam sobre o que colocar e também conferiam se a possibilidade construída não estava representada ainda. Construíram cinco pratos, mas um deles não continha nenhuma carne (bife ou frango). Tentaram a resposta cinco e, depois de ler a mensagem, abriram mais espaços para continuar construindo possibilidades. Os pratos montados a partir de então possuíam apenas dois elementos. O pesquisador interveio para que superassem esse erro:

Pesquisador Nicolau: Não tem que ter três coisas no prato será?
Cristina: É?
Pesquisador Nicolau: Acho que tem que ter três coisas no prato, né?!
Kate: É. É três coisas no prato.
Cristina: Não tô com muita fome.
Pesquisador Nicolau: Não tá com muita fome?
Cristina: Queria comer pouco, só as coisas mais simples.
Kate: Eu quero comer carne.
Cristina: Eu quero comer só arroz. Vou comer só arroz agora. Quantos a gente fez? Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez.
(Vídeo B13 – 99)

Esse diálogo mostrou como os requisitos do problema se misturavam com o contexto de vida das envolvidas. Seus desejos/fome são levados em conta na hora de resolver um problema que não tem isso como elemento importante. O pesquisador ainda reforçou o requisito do problema dizendo: “Só que é uma carne e dois acompanhamentos, né?! Isso.” (Nicolau, em vídeo B13 – 99) Elas, então, completaram alguns dos pratos que estavam incompletos e apagaram um que identificaram como repetido. Tentaram a resposta nove; a partir da mensagem, apagaram outros repetidos. A aula encerrou sem que pudessem concluir o problema.

- Da dupla Cristina e Rafaela, Cristina já havia se envolvido com este problema em outro dia, com outra dupla. Na primeira vez, não conseguiu resolver, deixando uma solução incompleta. Nessa segunda experiência, construiu, com a nova dupla, seis pratos de maneira empírica. Todos completos e diferentes. Ainda colocaram frango e batata em um sétimo prato. Ao perceberem que não teria como preencher o prato de forma que ficasse diferente dos demais, apagaram esse, contaram as possibilidades e responderam a pergunta. A partir da mensagem, fizeram a captura de tela da sua solução.

- Sílvio e Jéferson, empiricamente, montaram três pratos distintos, considerando todos os requisitos do problema. Sua pausa frente ao problema fez com que a pesquisadora incentivasse dizendo “Ah! Mas dá pra fazer mais. Só dá pra fazer um jeito de pedir frango?!” (Elisa, em vídeo B13 – 82). A partir daí, construíram outro prato completo, mas que era idêntico ao segundo prato montado. Depois, fizeram dois pratos com uma carne e duas vezes o mesmo acompanhamento. Chamaram a pesquisadora para confirmar se estavam no caminho da solução:

> **Pesquisadora Elisa**: Só que a pergunta diz que tem que ter dois acompanhamentos diferentes. Aqui tem dois acompanhamentos iguais: arroz e arroz.
> **Jéferson**: Ah, tá!
> (Vídeo B13 – 75)

Apagaram os que estavam montados de maneira errada e também identificaram o repetido. Empiricamente conseguiram formar outros três pratos diferentes e concluir corretamente o problema.

- Letícia e Marcos iniciaram por montar empiricamente os pratos. Ao ter cinco pratos construídos, Letícia questionou a pesquisadora sobre como deveriam ser feitos:

> **Letícia**: Sora! É pra montar os pratos que quiser?
> **Pesquisadora Elisa**: De acordo com a regra, né? Um tipo de carne e dois acompanhamentos diferentes.

(Vídeo B13 – 128)

Esse fato representou a incerteza frente ao que foi feito. Talvez a resposta não estivesse correta porque não compreenderam exatamente o que era pra fazer. Ao se certificarem, voltaram a atenção e tentaram reorganizar suas ideias para continuar tentando. A pesquisadora mostrou que haviam dois pratos idênticos e um deles foi apagado. Com os cinco pratos montados, ou seja, todos os espaços disponíveis no ODA completos, informaram a resposta numérica cinco. Com a mensagem, clicaram no botão que abria mais espaços. Chegaram a ter oito pratos montados, sendo que um deles só tinha frango. Neste último prato, tentaram colocar um bife, mas o ODA não permitiu. Depois de mais algum tempo identificaram as repetições e contaram seis pratos diferentes montados. Fizeram a captura de tela e salvaram sua solução.

- Marisa e Jaqueline iniciaram montando os pratos empiricamente. Ao completarem cinco, número de espaços disponíveis no ODA inicialmente, releram a pergunta pra se certificar de que estavam fazendo corretamente. Contaram os pratos montados e responderam cinco. Ao ler a mensagem, Marisa disse: “Eu acho que a gente não fez todos.” (Vídeo B12 – 72) Não é possível saber se ela já pensava em construir outro prato antes de tentar a resposta, mas essa fala demonstrou que não tinha certeza da solução construída. Passaram a construir outros pratos, mas deixaram alguns incompletos. Ao ter oito possibilidades construídas, chamaram a pesquisadora

> **Pesquisadora Elisa**: Vamos ver se vocês não contaram a mesma combinação mais de uma vez. Só que olha só: um prato tem que ter uma carne e dois acompanhamentos. Esse prato tá completo? [Aponta pra um prato sem carne.]
> **Marisa**: Não.
> **Pesquisadora Elisa**: Esse prato tá completo? [Aponta pra um prato com apenas um acompanhamento.]
> **Jaqueline**: Não.
> **Pesquisadora Elisa**: Não. Um prato tem que ser uma carne, que pode ser bife ou carne, e dois acompanhamentos diferentes. Então, tem prato aí que não tá completo.
> (Vídeo B12 – 78)

A partir daí, completaram os que estavam incompletos e identificaram o que ficou repetido. Para a conclusão do problema, conversaram bastante e estiveram bem atentas o tempo todo. Depois de conferirem mais de uma vez se não havia repetição ou se havia alguma outra possibilidade para formar, contaram os seis pratos e responderam corretamente e pergunta.

No estádio II, a procura por um sistema se apresenta na identificação de regularidades e na tentativa de usar essas informações na construção da solução.

- A dupla Nisa e Gabriela construiu dois pratos diferentes com carne e repetiu, na mesma ordem, os dois pratos com frango. Tal atitude demonstrou uma sistematização nas ações. Quando conseguiram fazer outro prato com carne, imediatamente concluíram que poderiam usar esses acompanhamentos com frango.

- A dupla Aurora e Luiza iniciou montando os pratos com apenas um acompanhamento além da carne. Chegaram a ter cinco pratos montados dessa forma até que o pesquisador chamou a atenção para tal fato: “Pra montar o prato tu tem que ter uma carne e dois complementos, tá? Não pode deixar espaço vazio no prato.” (Nicolau em vídeo B12 – 63) Completaram os cinco pratos e informaram esse número como resposta. Perceberam que teriam que fazer mais. Abriram mais espaços e, depois de fazer mais um prato, olharam para a tela por trinta segundos. Esse fato pode demonstrar que não tinham certeza de ter concluído e, por isso, procuravam outras possibilidades. Depois desse tempo, informaram a resposta seis e se alegraram com o êxito. Fizeram a captura de tela sem que aparecessem os pratos montados. Como já haviam fechado a janela, tiveram que refazer a solução para fazer a captura de modo correto. Na segunda vez que resolveram, montaram os pratos completos e logo encontraram as seis possibilidades para fazer a captura de tela de sua solução.

- A dupla André e Renan formou os pratos de maneira empírica. Porém, assim que o sexto prato foi montado, Renan diz “Print Screen!” (Renan, em vídeo B12 – 67). Esse fato demonstrou que reconheceu e que, mais do que isso, anteviu o esgotamento das possibilidades. André pediu calma, pois queria se certificar de ter construído todos. Depois de observar os pratos montados, contaram as possibilidades construídas e concluíram corretamente o problema.

- Elias e Eliseu, depois de montarem um primeiro prato, confirmaram se estavam compreendendo bem a configuração de um prato:

> **Elias**: São três coisas, né?!
> **Pesquisador Nicolau**: Só que é uma carne e dois acompanhamentos, né?!
> (Vídeo B13 – 99)

Construíram outros dois pratos, mas um ficou igual a um dos construídos.

> **Pesquisador Nicolau**: Ih! Ficou igual ou não?
> **Elias**: Igual ao outro. E agora pra calcular isso?
> **Pesquisador Nicolau**: Precisa apagar.
> (Vídeo B13 – 99)

Ao construírem cinco opções (espaços disponíveis no ODA), Eliseu considerou que terminaram as possibilidades e Elias queria tentar mais.

Começou a montar mais pratos, mas já o fez sem cumprir todos os requisitos do problema. Ao colocar frango, tentaram colocar também um bife no mesmo prato. O ODA não permitiu e o pesquisador interveio

> **Pesquisador Nicolau**: É uma carne só.
> **Elias**: Sor, precisa colocar três acompanhamentos?
> **Pesquisador Nicolau**: Dois acompanhamentos.
> **Eliseu**: Tem que colocar?
> **Pesquisador Nicolau**: Tem que colocar dois.
> **Elias**: Ah, tem que colocar só dois. Nós colocamos três.
> **Pesquisador Nicolau**: Não, colocaram dois. É uma carne e dois acompanhamentos.
> **Elias**: Ah, tá certo. Mas pode ser assim também, né?! [Aponta o prato só com Frango-Arroz.]
> **Pesquisador Nicolau**: Não. Tem que ter dois acompanhamentos e uma carne.
> (Vídeo B13 – 99)

Esse diálogo evidenciou que a palavra *acompanhamento* não fazia muito sentido para os meninos. Porém, quando Eliseu perguntou se *precisa colocar* evidenciou perceber diferença entre uma necessidade e uma possibilidade apresentada pelo problema.

Quando tinham cinco pratos montados, pensaram ter concluído, pois o sexto pensado já havia sido feito. Outra vez o pesquisador os questionou para que caminhassem na direção da solução:

> **Pesquisador Nicolau**: Quantos com carne vocês fizeram? Quantos com bife vocês fizeram?
> **Eliseu**: Três.
> **Pesquisador Nicolau**: E quantos com galinha?
> **Elias**: Três. Dois.
> **Pesquisador Nicolau**: Dois?
> **Elias:** Dá pra nós fazer mais um com galinha.
> (Vídeo B13 – 99)

A percepção de que poderiam construir a mesma quantidade de pratos com galinha e com bife foi resultado de uma generalização a partir do problema. Identificaram essa última possibilidade e aí sim, sem hesitar, concluíram a resolução do problema. Ao construir o sexto prato, Eliseu disse: “Já era.” (Vídeo B13 – 99)

8.2.7 Análise do problema Pódios

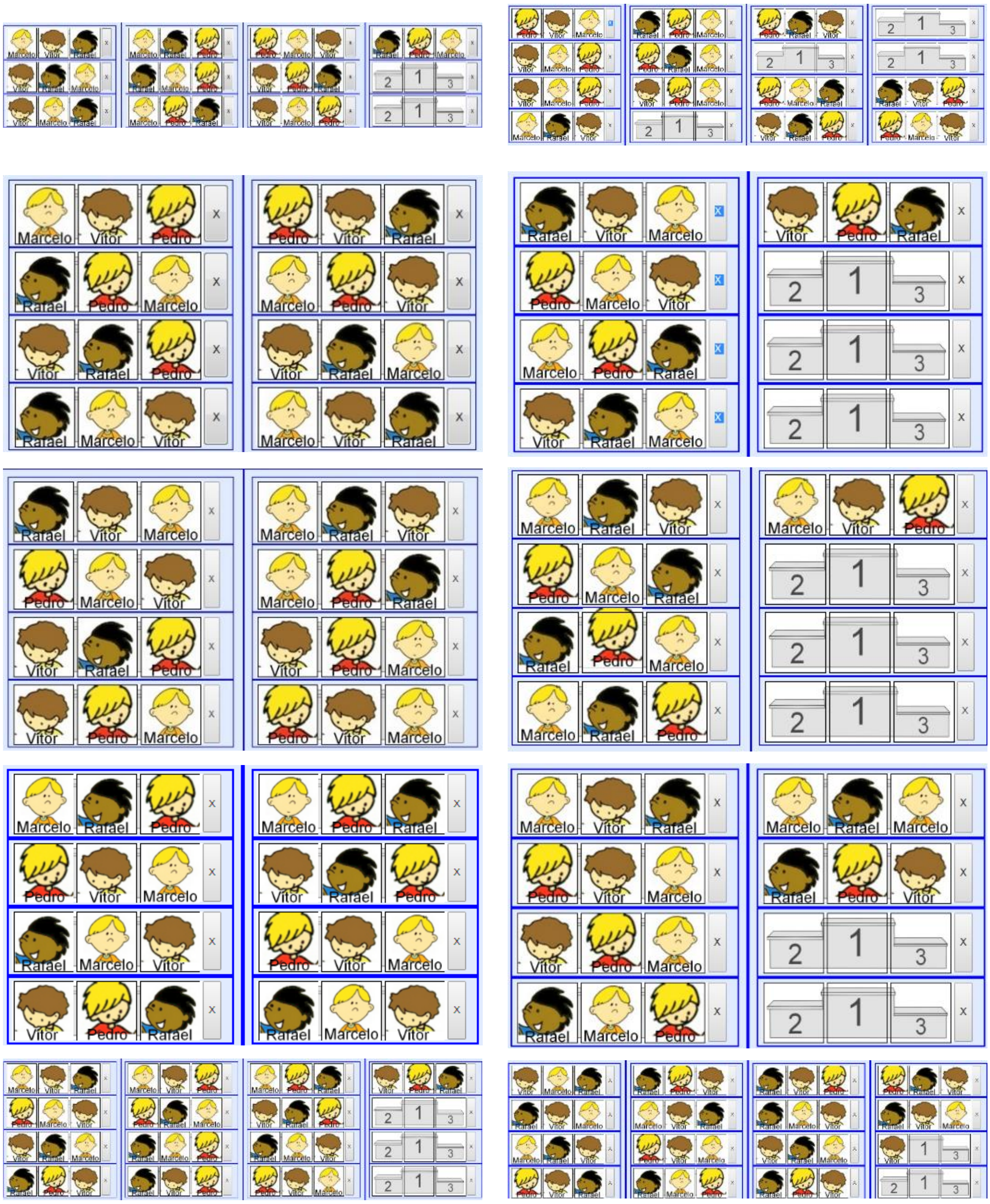
> Marcelo, Vitor, Rafael e Pedro resolveram apostar uma corrida. Os quatro se esforçaram muito para ser rápidos, mas apenas três deles subiram ao pódio.
>
> De quantas maneiras podem se colocar nesse pódio, sendo que o lugar indica se chegou em primeiro, em segundo ou em terceiro lugar?
>
> Em quantas opções Marcelo é o primeiro colocado?
>
> Em quantas organizações de pódio Vitor aparece?

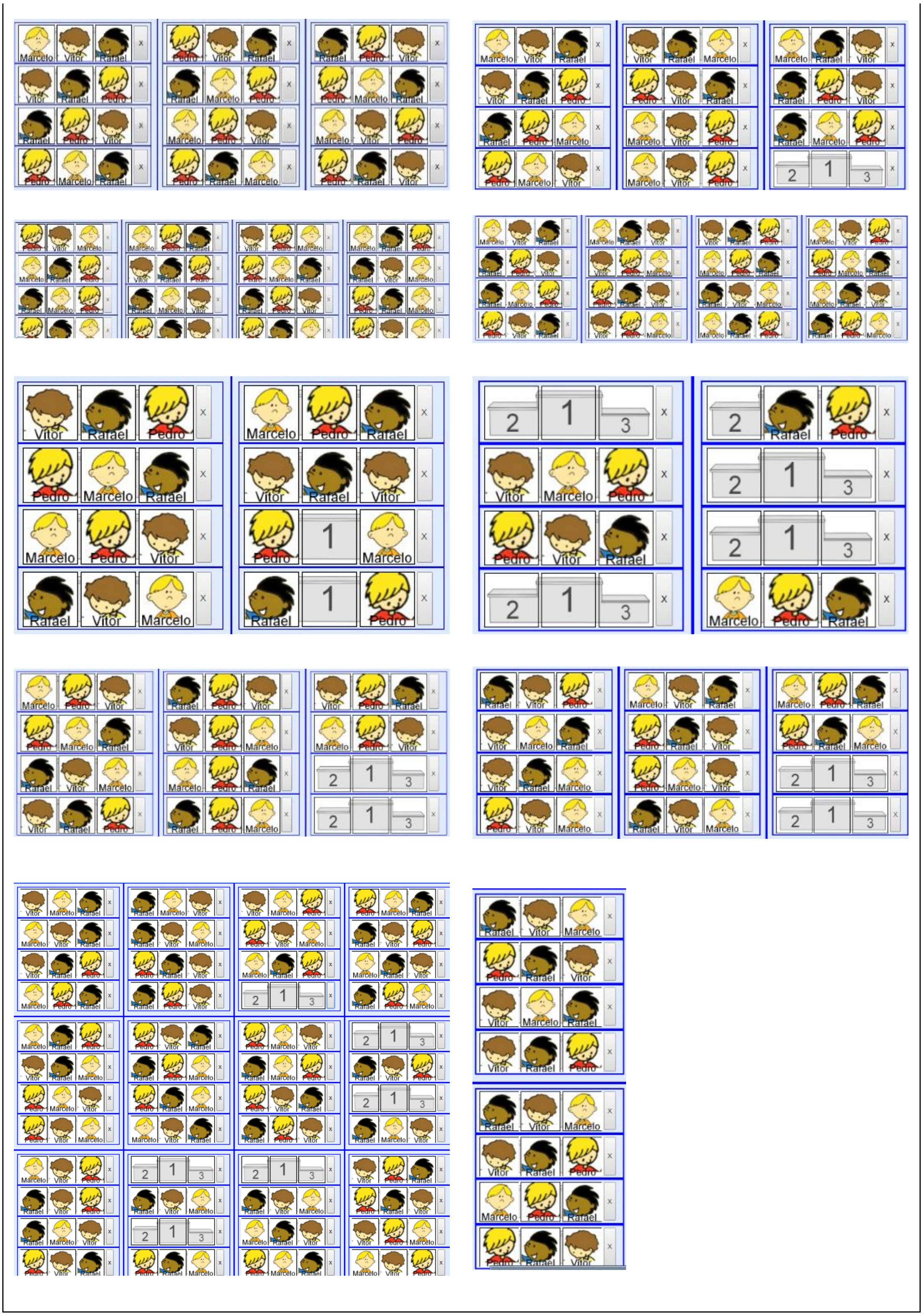
Foram apresentadas 34 soluções para este problema. Destas, 94,6% (31 soluções) estavam incompletas e apenas 5,4% (3 soluções) estavam completas. Porém, 58,8% das soluções (20 soluções) evidenciou o emprego de alguma sistematização, mesmo que usada de forma parcial. O número de possibilidades de pódio que poderia ser formado com esses quatro meninos era 24, número razoavelmente alto para construir sem qualquer sistematização. Salienta-se que

75,7% das soluções apresentaram 16 possibilidades ou menos. Esse fato pode indicar que os alunos esperavam que respostas com esses valores fossem apropriadas.

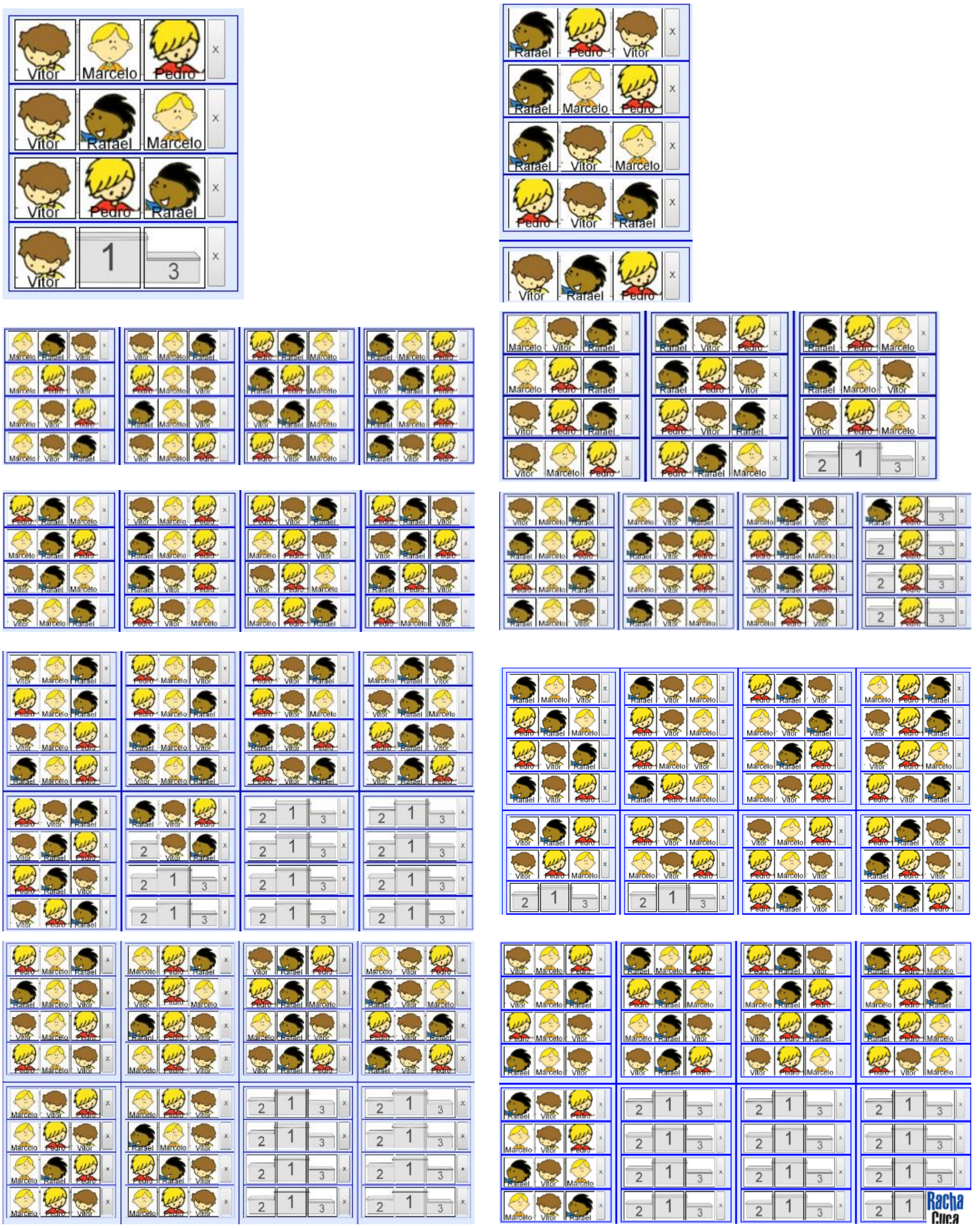
Quadro 17 - Soluções entregues para o problema Pódio

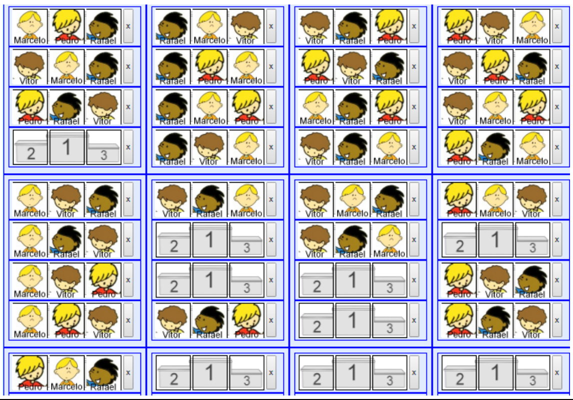
Soluções incompletas e sem sistematização:



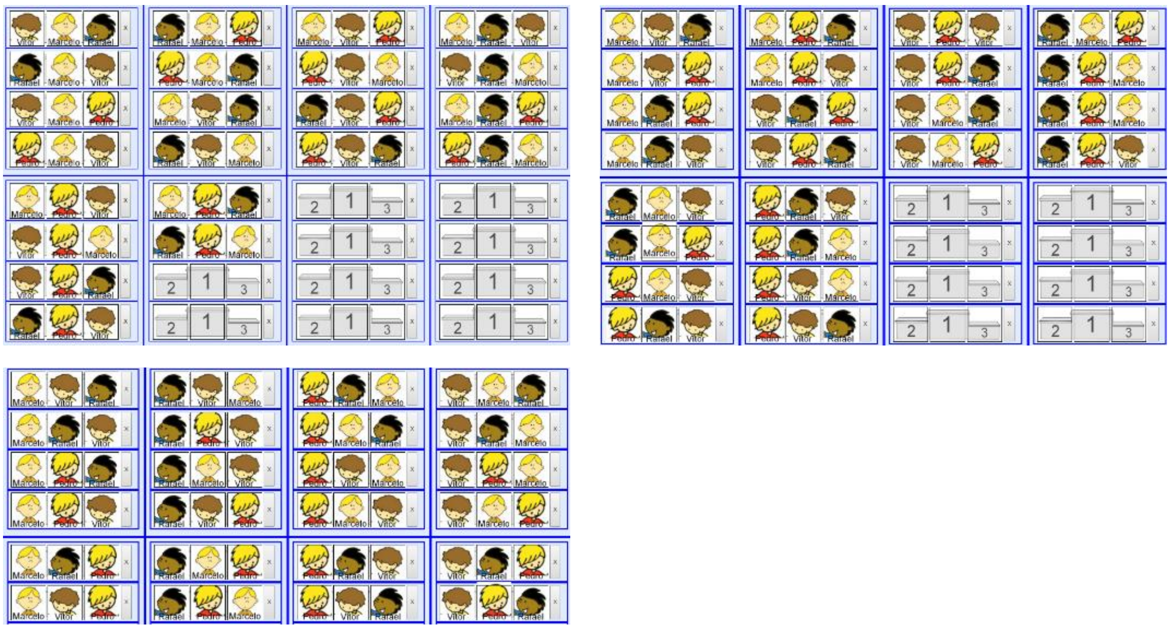


Soluções incompletas, mas com alguma sistematização:





Soluções completas (todas com uso de sistematização)



Fonte: acervo da pesquisa

Esse problema envolvia a ideia de arranjo. Da mesma maneira que os problemas de combinação e de permutação, as resoluções podem ser categorizadas de acordo com três estádios distintos. No primeiro estádio os arranjos são formados de forma totalmente empírica e os sujeitos nem desconfiam da existência de um sistema. No segundo estádio, não há um sistema, mas são percebidas regularidades. Por exemplo, já se suspeita de que haja a mesma quantidade de possibilidades com cada menino como primeiro lugar. Da mesma forma, se percebe que podem ser invertidas as posições de dois meninos e ter um novo pódio com Rafael em primeiro, por exemplo. O terceiro estádio é aquele em que o sistema é conhecido e, inclusive, já se podem ser feitas generalizações. Inhelder e Piaget (1951) marcam a idade de

11-12 anos como um marco de tempo na evolução da compreensão das operações combinatórias. Cabe ressaltar que os envolvidos na atual pesquisa tinham, em sua maioria, 9-10 anos.

Apesar de haver muitas respostas (imagens) com soluções que poderiam ser caracterizadas como do estádio I, os processos registrados em vídeo demonstraram que todas as duplas/trios filmados tiveram uma estratégia envolvendo um sistema. Por outro lado, apesar de haver três soluções completas e com uma visível sistematização, nenhum processo foi registrado que usasse a sistematização de modo total desde o início. Sendo assim, muitos dos processos analisados foram considerados característicos do estágio II: procura de um sistema. O número de soluções (imagens) características do estádio I é grande porque algumas duplas enfrentaram o problema mais de uma vez. A cada aula que enfrentavam o problema, faziam uma captura com a solução mesmo que parcial. Isto quer dizer que há mais de uma solução da mesma dupla, construídas em dias diferentes. Os processos relatados a seguir mostram que um sistema era descoberto/criado e usado no encontro seguinte.

Um grupo teve seu processo como característico do estádio I.

O trio Marisa, Jaqueline e Tomé começou criando quatro pódios, cada um com um menino diferente em primeiro lugar. Não colocaram esses pódios nem em uma coluna, nem em uma linha; colocaram dois em cada uma das duas primeiras colunas. Tal fato não é relevante quanto ao pensamento combinatório usado, mas diferencia essa solução das demais. Ao pensarem em outras possibilidades, Marisa se deu conta de que seria necessário repetir o primeiro colocado e questionou se isso configuraria um pódio diferente.

> **Marisa**: Sora! Dá pra repetir?
> [Colocam Marcelo-Vitor-espaço. Apagam em seguida. Coloca Vitor-espaço-espaço.]
> **Marisa**: Sora! Dá pra repetir? Tipo, vou botar na vitória [aponta Vitor-espaço-espaço] e outro aqui em cima? Duas em primeiro?
> **Pesquisadora Elisa**: Claro! De quantos jeitos o Vitor pode chegar em primeiro? Esse é um bom jeito de pensar! Pensar em todos os jeitos que o Vitor chega em primeiro. É uma ótima ideia!
> (Vídeo B12 – 86)

A possibilidade de repetir o primeiro colocado foi compreendida, todavia, o esquema de fixar Vitor como primeiro colocado não foi ainda compreendido como útil. Construíram, a seguir, alguns pódios empiricamente. Depois de montar, conferiam se era diferente das possibilidades que já tinham na tela. Montaram oito possibilidades diferentes. Tentaram essa resposta. Tentaram também a resposta dezesseis, provavelmente por ser o número de espaços disponíveis no ODA. A aula encerrou e entregaram a solução parcial que haviam construído, com oito pódios.

Outros grupos acabaram por iniciar o emprego de um ou de vários sistemas diferentes na construção da solução. Apesar de não concluírem a questão (muitas soluções entregues eram parciais, pois a aula acabava e era necessário salvar o que tinham feito) os avanços quanto ao pensamento combinatório ficam evidentes nos relatos que seguem.

- A dupla Amanda e Ricardo iniciou construindo empiricamente alguns pódios. Posteriormente, colocaram em quatro pódios diferentes (uma coluna) o mesmo menino em posições diferentes. Tal organização mostrou uma ideia de existência de um sistema, mas ainda não um que ajudasse a solucionar o problema. Tal esquema tinha outro ponto interessante: são três posições no pódio, mas a coluna tem quatro pódios. Então, foi colocado o menino Rafael nos quatro pódios: um em primeiro lugar; um em segundo lugar; um em terceiro e outra vez em segundo. Essa atitude revelou certa dependência do ODA e da organização apresentada por ele. Como o esquema criado era frágil, apoiaram-se sobre a organização do ODA para aplicá-lo. Depois de tentarem as respostas 16 e 18 sem sucesso, com 11 pódios montados na tela, Amanda questionou sobre as possibilidades montadas

> **Amanda**: Acho que eu sei qual é. Quantos desse tem o Marcelo? Quantos... quantos desse tem o Rafael? Quantos tem mesmo? Quantos tem esses? [ela faz nas mãos sete mais sete.]
> (Vídeo B11 – 7)

O esquema em uso continuou sendo considerado válido e reiniciaram algumas vezes o problema, mas aplicando o mesmo esquema. Por fim, acabou o tempo da aula e entregaram uma solução parcial que continha uma coluna de pódios montados.

Foi possível perceber que Rafael aparecia distribuído nas diferentes posições ao longo das possibilidades.

- A dupla Nisa e Gabriela enfrentou o problema em dois dias distintos. No primeiro dia, iniciou colocando cada menino em primeiro lugar em um pódio diferentes. Depois, empiricamente, completaram os pódios com outros meninos. Gabriela logo pensou sobre mais possibilidades:

> **Gabriela**: Será que tem mais probabilidades[11]?
> **Nisa**: Acho que...
> **Gabriela**: Rafael!
> **Nisa**: Já foi...
> [Tentam a resposta 4.]
> (Vídeo B11 - 39)

Apesar de seguirem montando mais pódios de forma empírica, a ideia de que deveria haver uma distribuição homogênea dos meninos nos pódios apareceu nas discussões. Com 10 pódios montados, Gabriela alertou a colega de que “A gente tá usando menos o Pedro.” (Vídeo B11 - 42). Chegaram a 16 pódios formados. Preocuparam-se com as repetições. Para conferir se não haviam repetições, elaboraram um princípio de esquema:

> **Gabriela**: Aqui, ó. Vamos ver se tem algum repetido, né?!
> **Nisa**: Rafael, Marcelo e Pedro.
> **Gabriela**: Vamos achar todos os Pedro que estão em segundo!
> **Nisa**: Não, calma. Rafael, Marcelo e Vitor... [Olha para a tela buscando outro igual.] Rafael... Rafael... Rafael. Não tem. [Ela olhou todas as opções que traziam Rafael em terceiro lugar no pódio, ou seja, no primeiro espaço.]
> (Vídeo B11 - 47)

Encerraram o primeiro dia com uma solução parcial, sem uso de sistematização e que apresentava 26 pódios.

No segundo dia de enfrentamento do problema, foi registrado o seguinte diálogo entre uma delas e a pesquisadora:

> **Nisa**: Nós também fizemos em ordem.

[11] Interessante o uso da palavra *probabilidades*. Usada de forma errada no contexto, ela usa um vocabulário que corresponde a um contexto de matemática. Se considera que ela quis dizer *possibilidades*.

Pesquisadora Elisa: Ah, é. Em ordem fica mais fácil às vezes.
Nisa: Vamos ver se agora vai dar.
(Vídeo B11 – 53)

A ordem é entendida como a execução de uma sistematização. Elas estavam criando com um esquema, mas que não era o mais efetivo para a solução do problema. Ainda não conseguiram chegar à solução, mas criaram, nas primeiras quatro linhas, em cada linha, quatro pódios com o mesmo menino ocupando o primeiro lugar. Seguiram com construções empíricas e os espaços em branco na solução salva ocorreram por terem sido identificadas repetições que foram sendo apagadas. Ainda tinham 42 pódios montados quando encerrou a aula, ou seja, entregaram outra solução incompleta.

- Rogério enfrentou o problema pela primeira vez sozinho. Empiricamente conseguiu montar dez pódios sem fazer uso de nenhum sistema. A aula acabou e ele entregou uma solução parcial com suas construções.

Outro dia, ele se juntou à colega Gabriela para tentar solucionar o problema dos pódios. Iniciaram por colocar cada um dos meninos em primeiro lugar em um pódio diferente e completaram de maneira empírica. Ou seja, usaram de uma organização/sistematização para iniciar a construção da solução. Depois de sete pódios formados e Pedro em primeiro lugar no oitavo pódio, Rogério questionou a colega:

Rogério: Como?
Gabriela: Tipo, tu é o Pedro. E daí tu ficou em primeiro. Daí tem que achar ali.
[Completa Vitor-Pedro-espaço.]
Rogério: Coloca o Rafael.
(Vídeo B11 – 77)

Seguiram montando empiricamente até terem 16 pódios montados. A pesquisadora observou que a segunda coluna tinha sempre Rafael em segundo lugar (posição mais à esquerda) e mostrou tal detalhe.

Pesquisadora Elisa: Olha aqui, ó. Aqui ficou bem fácil [desliza o dedo sobre os Rafael alinhados na segunda coluna]. Tu botou um monte de Rafael em segundo lugar, ó. Ficou bem fácil, assim, de montar vários com

o Rafael em segundo. Poderia tentar organizar algo assim com outros.
Gabriela: Boa! Vamos fazer isso daí, então.
(Vídeo B11 - 78).

Colocaram, então, quatro Marcelo em segundo lugar nos quatro pódios seguintes. O sistema começou a ser usado, mas de maneira incipiente.

Gabriela: Agora, Marcelo, Vitor e Rafael.
[Completa Marcelo-Vitor-Rafael.]
Gabriela: Tá certo?
[Olham para a tela.]
Gabriela: Agora, Rafael com Vitor, trocado.
[Completam Marcelo-Rafael-Vitor]
(Vídeo B11 – 113)

Depois, iniciaram um novo conjunto de pódios com Vitor em segundo lugar.

Giovanna: “Agora... ã... o Rafael, o Vitor e o Pedro.”
[Completa Marcelo-Vitor-Pedro.]
Giovanna: “E o Pedro e o Vitor.”
[Completa Marcelo-Pedro-Vitor.]
Giovanna: Ficou mais organizado, né?!
(Vídeo B11 – 110)

Conseguiram montar outros conjuntos com quatro pódios com o mesmo menino em segundo lugar, mas não o fizeram na sua totalidade. A solução entregue ainda apresentava repetições e alguns pódios montados sem seguir a organização do sistema. Tal fato revelou que, apesar de perceberem a existência de um sistema, não consideravam imprescindível seu uso para a construção de todas as possibilidades.

- A dupla Hélio e Paulo enfrentou o problema em dois dias diferentes. No primeiro dia, começaram a montar os pódios de maneira empírica. Recomeçaram algumas vezes sem usar sistema. Porém, quando a aula estava chegando ao fim, colocaram Marcelo em primeiro lugar, na posição do meio, em quatro pódios diferentes e completaram os mesmos. Em seguida, colocaram quatro Vitor em quatro pódios diferentes e Rafael em outros quatro. Não tiveram tempo de concluir a solução e no outro dia, encararam novamente o problema. Nessa segunda tentativa, iniciaram outra vez construindo empiricamente. Depois, passaram a usar o esquema do final da última aula e colocaram o mesmo menino em quatro pódios diferentes, em primeiro lugar. Com 16 pódios completos com esse sistema, iniciaram um novo conjunto de pódios colocando Marcelo em quatro pódios diferentes em segundo lugar. Ou seja, o sistema ainda não estava claramente construído. Não conseguiram esgotar as possibilidades com cada menino em segundo lugar provavelmente por conta da organização do ODA. Os conjuntos de quatro pódios foram montados em função do ODA disponibilizar quatro colunas com quatro pódios em branco. Ainda montaram outro conjunto de quatro pódios com Vitor em terceiro lugar. A aula encerrou e entregaram uma solução incompleta.

- A dupla Nuno e Platão iniciou montando um pódio com cada um dos meninos em primeiro lugar. Usar essa estratégia como ideia inicial para resolver o problema demonstrou reconhecer certas regularidades do problema e que usar de um esquema pode ser uma maneira que leve à solução. Os outros integrantes do pódio eram colocados de forma empírica, sem sistema ou preocupação. Passaram a observar a tela como se tivessem solucionado o problema, então, a pesquisadora provocou:

> **Nuno**: Acho que é assim a chegada.
> **Pesquisadora Elisa**: Não tem outro jeito do Marcelo ficar em primeiro? Se o Marcelo chegar em primeiro sempre o Vitor vai chegar em segundo e o Rafael em terceiro? Não tem outro jeito do Marcelo ficar em primeiro?
> **Nuno**: Não. Agora aqui, tipo, o Marcelo já tá em primeiro.
> **Pesquisadora Elisa**: Tá. Mas se o Marcelo ficar em primeiro. Só dá pra chegar assim? Não dá pro Marcelo chegar em primeiro e outro chegar em segundo?
> **Platão**: Ah...
> **Pesquisadora Elisa**: Tem outro jeito do Marcelo ficar em primeiro?
> **Platão**: Tem!
> (Vídeo B11 – 87)

Ao fazerem esses pódios com um menino fixo, perceberam que a organização poderia facilitar e apagaram todos os pódios montados e recomeçaram. Nessa nova tentativa, já colocaram o Marcelo em primeiro lugar em quatro pódios diferentes. Completaram empiricamente e montaram quatro pódios com Vitor em primeiro lugar completando, da mesma forma, empiricamente. O sistema apresentou-se como uma possibilidade ainda em construção. Porém, ainda levavam em consideração aspectos que se distanciavam da organização lógica. Por exemplo, depois de montar dois pódios com Vitor em terceiro lugar, Nuno comentou: “Bah, coitado. Ele é muito ruim, ficou duas vezes em terceiro.” (Vídeo B11 – 89). Esse fato mostrou que o contexto e a situação a ser representada era extremamente relevante para a construção das soluções. A aula terminou e não conseguiram concluir o problema, deixando uma solução incompleta.

- Helena encarou esse problema em dois dias distintos, com colegas diferentes em cada um deles. No primeiro dia, trabalhando com Theo, iniciaram por construir três pódios com Rafael em primeiro lugar. Em seguida, fizeram três pódios com Marcelo em primeiro e, logo depois, com Pedro e também com Rafael. Com uma posição definida, completaram os pódios de maneira empírica. Ao concluírem esses 12 pódios, montaram mais uma possibilidade com Pedro em primeiro e outra com Rafael em primeiro. Helena sentiu uma dificuldade maior para continuar, mas atribuiu a mesma ao pódio que faltava: “É difícil fazer esse aqui!” (Vídeo B11 – 95). A aula encerrou sem que tivessem concluído o problema. Essa dupla entregou uma solução parcial que evidenciou o uso de um princípio de sistema.

No segundo dia, com o colega Tomás, iniciaram montando os pódios que traziam Marcelo em terceiro lugar, ou seja, na posição mais à esquerda. Completaram os pódios empiricamente. Fizeram, na segunda coluna de pódios, quatro possibilidades com Rafael em terceiro lugar. Seguiram esse esquema na terceira coluna com Pedro fixo em terceiro lugar. Nessa coluna, depois de completarem o primeiro pódio, inverteram as posições dos outros dois meninos. Era um aperfeiçoamento do esquema que apenas fixava uma posição. Ao perceber apenas quatro possibilidades com cada elemento fixo, a pesquisadora questionou:

> **Pesquisadora Elisa**: Ah! Vocês tão arrumando pelo cara que tá em segundo. Claro! E só dá pra fazer esses quatro jeitos dele em segundo? [Desliza o dedo pela primeira coluna, que tem Marcelo em segundo.] Será que não dá pra fazer mais algum jeito ele em segundo?
> **Helena**: Não sei. Podemos tentar.
> (Vídeo B11 - 121)

A resposta dada revelou que não havia sido pensado em esgotar as possibilidades com Marcelo fixo, apenas completaram a primeira coluna do ODA.

Encontraram outros dois pódios com Marcelo naquela posição e outros dois com Rafael também nessa posição. A organização desses novos pares rompeu com a organização sugerida pelo ODA, ficando espaços em branco abaixo da primeira. Tal organização revelou que o sistema usado era considerado mais importante e efetivo do que a sugestão de organização do ODA. Com seis pódios com Marcelo em terceiro e seis pódios com Rafael em terceiro, se preparavam para completar a coluna com Pedro em terceiro.

> **Helena**: O Pedro... Tem que fazer dois desse daqui.
> **Pesquisadora Elisa**: Por que tu acha que tem que ser dois?
> **Tomás**: Mas depois nós vamos fazendo por ordem, sora.
> **Pesquisadora Elisa**: Tá, mas e por que tu acha que tem que ser dois? Por que que vai dar seis?
> **Tomás**: Porque nós voltamos tudo de novo e usamos a imaginação.
> **Helena**: Porque os outros deu.
> (Vídeo B11 – 125)

O diálogo revelou que Helena tinha argumentos mais construídos e lógicos sobre a questão. Mas Tomás estava certo de sua resposta, apesar de não ter argumentos logicamente elaborados. Construíram as outras opções com Pedro em terceiro e montaram a coluna de Vitor em terceiro. Nessa coluna, depois de completar um pódio, invertiam a posição dos dois outros meninos, usando um sistema mais elaborado do que o inicial. Antes de concluírem a última coluna, Helena questionou:

> **Helena**: Falta mais quantos?
> **Pesquisadora Elisa**: Não sei. Essa é a pergunta.
> **Tomás**: Oito, doze, dezesseis. [Contando os pódios sem recurso gestual.]
> **Helena**: Dois, quatro, seis, oito, dez, doze, catorze, dezesseis, dezoito, vinte, vinte e dois, vinte e quatro.
> **Tomás**: Falta só mais um!
> (Vídeo B11 – 127)

Contaram, inclusive, o espaço em branco; evidenciando, outra vez, uma antecipação da resposta e uma certeza sobre a regularidade percebida. Entretanto, a questão sobre quantos faltavam também trouxe à tona as incertezas. Mesmo com a solução na tela, olhavam para a mesma em busca de algo.

> **Pesquisadora Elisa**: Oh! Tem mais algum pra fazer, será?
> [Olham para a tela.]

> **Helena**: Não sei, já tem vinte e quatro aqui.
> **Pesquisadora Elisa**: Vinte e quatro. Tu acha que dá pra fazer mais?
> **Tomás**: Eu não sei.
> (Vídeo B11 – 128)

Depois de olharem pra tela, tentaram a resposta vinte e quatro e se alegraram com a mensagem de êxito. Responderam as questões adicionais e fizeram a captura de tela com a solução construída.

- A dupla Nicole e Alexandre iniciou montando pódios empiricamente. Casualmente os dois primeiros pódios da primeira coluna tinham Vitor em primeiro lugar, na posição central. Ao construírem o terceiro pódio dessa coluna sem essa característica, a pesquisadora a evidenciou para a dupla como algo que poderia ser pensado:

> **Pesquisadora Elisa**: Mas eu tinha achado boa a ideia de fazer o Vitor em primeiro de novo.
> [Completam Vitor-Rafael-Marcelo.]
> **Pesquisadora Elisa**: Não dá pra fazer mais jeitos do Vitor em primeiro? Tava boa aquela ideia.
> **Alexandre**: Como, sora?
> **Pesquisadora Elisa**: Fazer outro jeito do Vitor em primeiro [aponta as duas opções de pódio com Vitor em primeiro lugar na primeira coluna]. Diferente desses dois. Será que dá?
> (Vídeo B11 - 133)

Optaram por recomeçar usando a ideia de fixar um menino em uma posição. Construíram três pódios com Marcelo em primeiro e três pódios com Vitor em primeiro. Colocaram Rafael em primeiro e completaram empiricamente o pódio. Daí, Alexandre disse: “Já foram dois. Só falta o último.” (Vídeo B11 – 134) Essa fala evidenciou que considerava uma distribuição homogênea de possibilidades com cada menino fixo, porém, estava com o número de possibilidades incorreto. Depois de um tempo, acabaram por apagar tudo e recomeçar. Novamente, fixaram Marcelo em primeiro lugar e completaram empiricamente quatro pódios com essa característica. Provavelmente perceberam que haviam mais de três possibilidades com o menino fixo e aumentaram o número. A escolha por fazer quatro pode ter relação com a organização do ODA, que apresentava, inicialmente, quatro colunas com quatro pódios. Nessa coluna, fixaram também o menino que estava em terceiro lugar, montando dois pódios com Marcelo em primeiro e Rafael em terceiro e dois pódios com Marcelo em primeiro e Pedro em terceiro. Apesar de ter aperfeiçoado o sistema em uso, ainda não o usaram para esgotar as possibilidades, partindo para a coluna com Vitor fixo em primeiro lugar. Para essa segunda coluna, Alexandre teve outra ideia sobre como completar os pódios depois de fixar um elemento:

> **Pesquisadora Elisa**: Tu acha que tu já fez todos com Marcelo em primeiro. Então tá, então vamos tentar todos com Vitor.
> **Alexandre**: Dá pra mudar de lugar? [Gesticulando com os dedos o que parece tratar de uma inversão de posições.]
> **Pesquisadora Elisa**: Claro! É isso que tem que fazer, Alexandre!
> (Vídeo B11 – 137)

A partir desse diálogo, Alexandre tentou mostrar pra colega o que pensou:

> [Alexandre pega o mouse e faz, na segunda coluna, Rafael-Vitor-espaço e espaço-Vitor-Rafael.]
> **Alexandre**: Isso daqui.
> **Pesquisadora Elisa**: Claro! Sim...
> **Alexandre**: Tem muitos, então!
> (B11 – 137)

A descoberta de um sistema trouxe também condições de antecipação. Antes de usar o esquema, Alexandre já pensou sobre o que ele traria de novo à solução que estava construindo. Apagaram a segunda coluna e fizeram mais quatro pódios com Marcelo em primeiro lugar. Acabaram por cometer repetições, mas não as perceberam e partiram para a construção dos pódios com Vitor em primeiro lugar. Nessa nova coluna, mesclaram as duas ideias de sistema elaboradas: mantiveram Pedro em terceiro lugar nos dois primeiros pódios e nos outros dois, completaram um e inverteram as posições do segundo e do terceiro. Esse início de uso de um sistema ainda foi feito com muitos erros. Criaram apenas quatro pódios com Vitor em primeiro e, em seguida, quatro pódios com Rafael em primeiro. Ou seja, não consideraram uma distribuição regular com cada menino fixo. Ainda, para continuar, completaram alguns pódios empiricamente. A aula encerrou e acabaram por entregar uma solução parcial.

- A dupla Valdo e Cláudio iniciou montando quase empiricamente alguns pódios, isso porque os fez de maneira que cada menino estivesse uma vez em cada posição: uma em primeiro, uma em segundo e outra em terceiro. Ou seja, resolveram o problema como se ele fosse de combinação. Para ajudá-los a construir outras possibilidades e pensar em um sistema, a pesquisadora questionou

> **Pesquisadora Elisa:** Só tem esse jeito [aponta Marcelo-Pedro-Vitor] do Pedro chegar em primeiro? Que outro jeito tem do Pedro chegar em primeiro?
> (Vídeo B11 – 141)

A partir daí, montaram outros seis pódios com Pedro em primeiro lugar, mas um deles era uma repetição do primeiro pódio formado. Não tiveram tempo de ir adiante na construção da solução e acabaram por entregar uma solução parcial.

- A dupla Pedro e Isabela já iniciou a construção do problema colocando Marcelo em primeiro em diferentes pódios. Depois de completar o pódio, o seguinte era com os outros dois meninos em posições invertidas. Assim, construíram todas as possibilidades com Vitor em primeiro lugar também. Depois de construídas quatro possibilidades com Rafael em primeiro, foram colocados oito Pedro em primeiro lugar em outros pódios. A distribuição não homogênea intrigou a pesquisadora que travou o seguinte diálogo:

> **Pesquisadora Elisa**: Como é que tu tá fazendo? Por que tu tá botando um monte igual?
> **Pedro**: Não tô botando muitos iguais.
> **Pesquisadora Elisa**: Tá. Por que tu tá botando um monte de Pedro aí?
> **Pedro**: É cada combinação que o Pedro poderia participar. Olha só: todas combinações que tal cara pode fazer [passa o cursor sobre as colunas de cada menino] com outro e com outro.
> **Pesquisadora Elisa**: Tá. Pro Marcelo tinha quantos em primeiro lugar?
> **Pedro**: Marcelo? Um, dois, três, quatro, cinco, seis [conta com o cursor].
> **Pesquisadora Elisa**: E pro Vitor?
> **Pedro**: Vitor... Um, dois, três, quatro, por causa que ele... [conta, mas esquece duas possibilidades que estão em outra coluna].
> **Pesquisadora Elisa**: Aqui, ó [aponta as possibilidades esquecidas].
> **Pedro**: Um, dois, três, quatro, cinco, seis.
> **Pesquisadora Elisa**: E o Rafael?
> **Pedro**: Seis! [Responde sem contar.] Olha: um, dois, três, quatro. Não deu seis por causa que eles tavam certo com esses três.
> **Pesquisadora Elisa**: Hum. Daí o Rafael vai ter só quatro possibilidades

> pra ir em primeiro? Tu acha?
> [Ele inclina a cabeça, demonstrando não ter certeza da resposta dada.]
> **Pesquisadora Elisa**: E o Pedro tu acha que vai ter oito? O Pedro em primeiro é esse aí que tu tá botando, né?!
> **Pedro**: Sim.
> (Vídeo B12 - 45)

As respostas de Pedro mostraram que ele não considerava que devesse haver uma distribuição homogênea de pódios com cada menino em primeiro lugar. Apesar de não ter argumentos plausíveis sobre Vitor ter menos pódios como primeiro colocado, considerava ainda que havia esgotado as possibilidades. A antecipação de que haveriam seis pódios com Vitor em primeiro não foi suficiente para que revisse suas construções. O sistema aplicado foi incompleto apenas por não ter esgotado as possibilidades com Vitor e com Rafael em primeiro lugar. Possivelmente a disposição dos pódios poderia ter auxiliado se tivessem feito uma coluna com cada posição fixa. Construindo os seis pódios com Pedro em primeiro lugar, acabaram por entregar a solução parcial, pois não tiveram tempo de encontrar o que faltava.

- A dupla Wiliam e Leonardo enfrentou o problema em dois dias diferentes. Já no primeiro dia, lembrando dos problemas anteriores, Wiliam conversou com o colega:

> **Wiliam**: Ô, meu! É tipo de jeitos que dá pra botar em primeiro, em segundo e terceiro.
> [Leonardo pega o mouse.]
> **Wiliam**: Bota todos o Marcelo em primeiro. Vamos fazer aquele esquema.
> (Vídeo B13 - 59)

Quando ele mencionou *aquele* esquema ele se referia a uma estratégia usada em outros problemas. A ideia de fixar um elemento pareceu ser uma estratégia imediatamente reconhecida por Wiliam. Depois de terem construído quatro pódios com Marcelo em primeiro, Leonardo montou um com Rafael em primeiro. Wiliam logo questionou o colega.

> **Wiliam**: Já foi todos do Marcelo?
> **Leonardo**: Eu não sei.
> **Wiliam**: Então faz todas as maneiras do Marcelo primeiro.
> **Leonardo**: Todas do Marcelo [desliza o dedo sobre a tela, ao longo dos Marcelo alinhados]? Não conta agora esses dois?
> **Wiliam**: Ã?

> **Leonardo**: Não conta igual os dois?
> **Wiliam**: Não. Mudou aqui, ó [com o cursor sobre o segundo lugar dos dois pódios].
> **Pesquisadora Elisa**: Mudou o segundo lugar, mudou o pódio. Quando muda uma pessoa já tá diferente.
> (Vídeo B13 – 60)

Ficou claro que Leonardo não tinha clareza do esquema sugerido pelo colega, nem dos requisitos que seriam levados em conta para se considerar dois pódios diferentes. Em contrapartida, Wiliam estava seguro da estratégia e tentava fazer com que o colega a seguisse. Construíram ainda um pódio com Marcelo em primeiro, obtendo cinco possibilidades com essa característica. Wiliam considerou que haviam esgotado as possibilidades e iniciou a construção de pódios com Rafael em primeiro lugar. A pesquisadora quis se certificar de que Leonardo compreendia o que estava sendo realizado pelo colega e conversou com Leonardo:

> **Pesquisadora Elisa**: Tu entendeu o que ele tá fazendo?
> **Leonardo**: Sim. Ele tá colocando todos que tá o Rafael em primeiro [desliza uma caneta sobre a tela, ao longo da terceira coluna, no espaço do primeiro colocado.] Depois eu vou fazer os que é o Pedro ali.
> (Vídeo B13 – 62)

A partir desse esquema, que foi aplicado sem erros, chegaram a 20 possibilidades. A resposta não estava correta, mas a aula estava terminando. Fizeram a captura de tela com a solução incompleta e voltaram a enfrentar o problema alguns dias depois.

Neste segundo enfrentamento, organizaram as possibilidades construídas a partir do segundo colocado, ou seja, pelo menino que ocupa a posição mais à esquerda do pódio. Assim que construíram quatro possibilidades, se questionaram se haviam concluído:

> **Wiliam**: Tem mais jeitos de fazer com esse daqui em pri-... segundo?
> **Leonardo**: Agora... com todos já foi?
> **Wiliam**: Tem mais jeitos de fazer com o Marcelo em segundo? Hein?
> **Leonardo**: Com o Pedro.
> (Vídeo B13 – 91)

Montaram, desta vez, seis possibilidades com Marcelo em uma posição fixa. Assim que iniciaram os pódios com Vitor nessa posição, Leonardo comentou que o colega “Pegou a senha do wi-fi agora.” (Vídeo B13 – 92). Wiliam, compreendendo o elogio do colega, completou: “Todos esses tem tipo um esqueminha.” (Vídeo B13 – 92) A partir dali, além de fixar o primeiro menino, montavam dois pódios com a mesma sequência, por exemplo, Vitor-Marcelo-espaço e Vitor-Marcelo-espaço; seguido de Vitor-Rafael-espaço e Vitor-Rafael-espaço. Só depois, com os seis pódios montados assim, é que completavam com os meninos que faltavam. Tal esquema mostrou uma elaboração do esquema “fixar um e fazer variar os outros”. O esquema aplicado corretamente levou a pesquisadora a desafiá-los a descobrir a resposta antes de construí-la:

> **Pesquisadora Elisa**: E vocês conseguiriam saber quantos são sem desenhar todos?
> **Wiliam**: Doze.
> **Pesquisadora Elisa**: Assim, não vai dar tempo de fazer, mas dá pra saber quantos são?
> **Wiliam**: Dezesseis eu acho.
> [Tenta a resposta.]
> **Pesquisadora Elisa**: Por que dezesseis?
> **Wiliam**: Porque tem doze mais quatro.
> **Pesquisadora Elisa**: Quantos tem o Marcelo em segundo lugar?
> **Wiliam**: Quantos são...
> **Pesquisador Nicolau**: O Marcelo em primeiro aparece quantas vezes?
> **Pesquisadora Elisa**: Ele tá em segundo, aí, no caso.
> **Pesquisador Nicolau**: Tá. Em segundo.
> **Wiliam**: Um, dois, três, quatro, cinco, seis. Seis mais seis, doze. Seis mais seis, doze; mais seis: sete, oito, nove, dez, onze, doze. Dezoito!
> (Vídeo B13 – 94)

O diálogo mostrou que, apesar de criar e usar corretamente o esquema, construir mentalmente as regularidades ainda parecia complicado. Wiliam conseguiu pensar em blocos de seis pódios, mas acabou somando apenas três deles, quando eram quatro opções de meninos. A aula não estava encerrando como foi sugerido no diálogo e eles conseguiram concluir a construção correta da solução.

8.2.8 Análise do problema Notas

Considerando que nosso sistema monetário possui 6 cédulas diferentes (de 2, 5, 10, 20, 50 e 100 reais): Quantos valores diferentes posso ter se eu tenho duas cédulas em minha carteira? De quantas formas posso ter mais do que 21 reais? Em quantos desses valores eu tenho duas notas iguais? Em quantos desses valores eu tenho duas notas diferentes?

Foram apresentadas 16 soluções, mas duas estavam cortadas e foram desconsideradas. Então, das 14 soluções analisadas, 35,7% (5 soluções) estavam incompletas e 64,3% (9 soluções) estavam completas. Mesmo não construindo as 21 possibilidades, 92,8% das soluções (13 soluções) analisadas evidenciaram o emprego de alguma sistematização. O quadro 18 apresenta todas as soluções consideradas válidas.

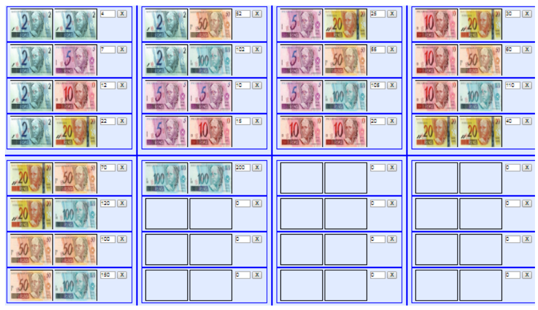
Quadro 18 - Soluções entregues para o problema Notas

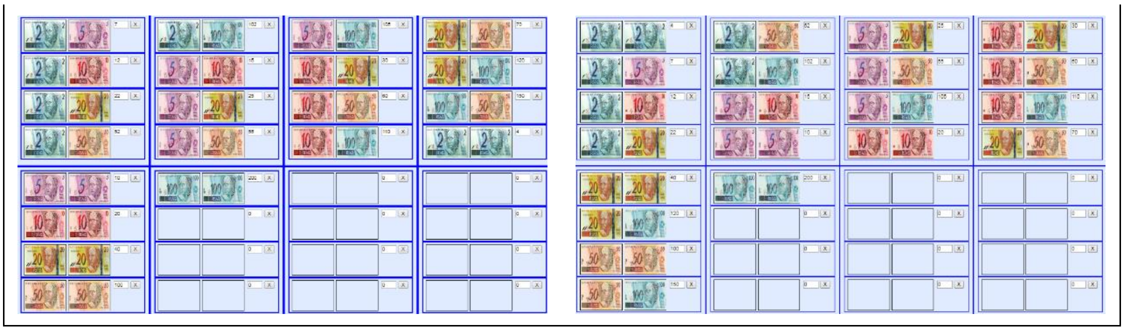
Incompleta sem evicência de sistematização

Incompletas, mas com sistematização:
 

Completas, mas com sistematização parcial:

Soluções completas, com sistematização total





Fonte: acervo da pesquisa

O problema tratava-se de uma situação de combinação. A solução completa consistia em 21 possibilidades de ter duas notas na carteira. Esse número dificultava a comparação visual das possibilidades para evitar repetições. Sendo assim, o sistema passava a ser quase necessário para a correta solução do problema. Sendo o oitavo problema a ser resolvido, os participantes que o resolveram já estavam com alguns esquemas de resolução construídos. A experiência adquirida nos problemas anteriores foi fundamental para a aparição de um percentual grande de sistematizações. Mesmo com experiência nos problemas anteriores, a sistematização ainda não era o primeiro caminho a ser trilhado pelos participantes. E, também é importante registrar, não foi adotado por todas as duplas.

Como processos característicos do estádio I, foram registrados a dupla Aurora e Luiza e o trio Naiara, Geovane e Luís.

- A dupla Aurora e Luiza construiu as possibilidades de maneira empírica. Inicialmente, consideraram que as duas notas deveriam ser diferentes, mas depois de montarem a possibilidade 2+2 fizeram todas possibilidades com duas notas iguais. Construíam algumas possibilidades, contavam quantas tinham e tentavam o valor como resposta. Quando completaram os espaços disponíveis no ODA e perceberam que dezesseis não era a resposta esperada, chamaram ajuda:

> **Pesquisador Nicolau**: Não deu certo?
> [Sacodem a cabeça negativamente.]
> **Pesquisador Nicolau**: Tu pode apertar aqui [aponta o 'mostrar mais'], né?! Pra fazer mais... Mas quantos vocês já fizeram? Quatro, Oito, doze, dezesseis [aponta cada coluna]. E não deu certo?
> [Tentam o 16 novamente.]
> **Pesquisador Nicolau**: Então provavelmente ou tem coisas repetidas aqui

> [desliza o indicador sobre todas as possibilidades construídas] ou tá faltando combinações. Que que tu acha?
> [Clicam em “mostrar mais”.]
> **Aurora**: Mas o dois tá repetido...
> **Pesquisador Nicolau**: Não... Quatro reais. Em algum outro lugar tem quatro reais [desliza o dedo por toda a tela]? Não, né?! Então tá faltando coisas. Então tenta fazer esses outros que tá faltando aí.
> (Vídeo B12-3)

A partir desse diálogo, conseguiram formar outras possibilidades diferentes. Quando acertaram a resposta numérica, passaram às perguntas seguintes. Em sua solução, as possibilidades 2+2 e 50+2 apareciam duas vezes. Faltaram as possibilidades 2+20, 2+100 e 5+50. A dupla não efetuou a captura de tela.

- O trio Naiara, Geovane e Luís encarou o problema em dois dias distintos. No primeiro dia, a dupla Naiara e Geovane trabalhou, mas não conseguiu chegar à solução. Começaram por montar possibilidades de forma empírica. Formaram oito maneiras diferentes e acabaram, sem querer, fechando a janela do navegador. Tal acontecimento os fez ter de reiniciar sua solução. Recomeçam de maneira empírica. Ao formarem oito pares, a pesquisadora provocou com um questionamento que pretendia fazer pensar sobre as regularidades da solução:

> **Pesquisadora Elisa**: Qual será que é o menor valor que dá pra ter? Vocês já pensaram nisso?
> **Geovane**: Quatro!
> **Pesquisadora Elisa**: E já tem esse?
> **Naiara**: Não.
> [Faz 2+2.]
> **Pesquisadora Elisa**: Qual será que é o maior valor que dá pra ter?
> **Geovane**: S-s duzentos.
> **Pesquisadora Elisa**: Como é que faz pra ter duzentos?
> **Naiara**: Põe duas notas de cem, fica duzentos.
> (Vídeo B12 - 46)

A partir disso, construíram outras possibilidades com duas notas de mesmo valor, chegando a ter dezesseis possibilidades na tela. A não construção de todas as possibilidades com duas notas de mesmo valor evidenciou a falta de um esquema que considerasse as propriedades do problema. Conseguiram formar quatro pares com duas notas idênticas (2+2, 100+100, 20+20 e 50+50), mas não formaram os pares

5+5 e 10+10. Quando tentaram responder e ainda não era a resposta esperada, algo estranho aconteceu. Geovane disse que tinham acertado e Naiara disse que não. Ou a mensagem exibida pelo ODA não estava clara pra ele, ou ele não havia lido o que dizia:

> **Pesquisadora Elisa**: Deu certo?
> **Geovane**: Aham.
> **Pesquisadora Elisa**: Então, PrintScreen.
> **Naiara**: Não deu certo ainda.
> **Pesquisadora Elisa**: Não deu? Então deve tá faltando alguma coisa. Que que mais será que dá pra fazer?
> [Olham para a tela.]
> **Pesquisadora Elisa**: Será que vocês conseguem achar mais algum que esteja faltando?
> **Naiara**: Não sei. Acho que não.
> (Vídeo B12 – 47)

A resposta de Naiara revelou que ela não se considerava capaz de resolver o problema. Apesar de ter conseguido montar dezesseis pares diferentes, a falta de argumentos que justificassem o esgotamento das possibilidades ou que levasse à construção da solução completa era percebida por ela. A aula encerrou sem que conseguissem a solução para o problema.

No outro dia, Luís juntou-se a dupla para tentar resolver o problema. Novamente construíram de maneira empírica as possibilidades. Com onze pares na tela, a pesquisadora questionou:

> **Pesquisadora Elisa**: Como é que vocês fazem pra saber que não foi nenhum repetido?
> **Naiara**: A gente olha bem!
> **Pesquisadora Elisa**: Vão olhando pra ver se não foi nenhum repetido?
> **Naiara**: É.
> (Vídeo B12 – 81)

Conseguem concluir o problema a partir desse esquema. Antes da solução, tentaram as respostas dezesseis, dezoito, dezenove. Construíam o que identificavam que faltava e conferiam se tinham encontrado todas as soluções. Se aparecia a mensagem dizendo que ainda faltavam possibilidades, voltavam a olhar pra tela e buscar algo que não houvesse sido contemplado.

Para responder a uma das perguntas adicionais, sobre quantas possibilidades somam mais que R$21,00, encararam algumas dificuldades. Primeiro, a falta de organização das soluções atrapalhava a contagem e se perdiam facilmente. Depois, a pergunta também envolvia um número, o que causou confusão na hora de formular a resposta numérica. Ao contar quantas possibilidades somavam mais de R$21,00, Naiara colocou pro grupo:

> **Naiara**: Deu treze.
> **Luís**: Sora! É pra botar uma só ou várias?
> **Pesquisadora Elisa**: Quantos jeitos tem mais que vinte e um reais?
> [Colocam a resposta 13.]
> **Pesquisadora Elisa**: Errado. Vamos contar de novo. Vocês tão em três aí! Quais são mais que vinte e um reais?
> **Geovane**: Vinte e cinco, bota vinte e cinco.
> (Vídeo B12 - 84)

O vinte e cinco sugerido por Geovane era, porém, uma possibilidade que ele percebeu que havia sido ignorada pela colega. Ou seja, uma possibilidade é assumida como resposta para uma pergunta sobre a quantidade de possibilidades. Luís já havia manifestado a mesma confusão quando perguntou se deveriam informar uma ou várias possibilidades como resposta. Com a intervenção da pesquisadora superaram tal obstáculo e conseguiram concluir o desafio

O estádio II, procura de um sistema, continuou caracterizando a maioria dos processos. Apesar da experiência anterior sugerir que haveria um esquema que facilitaria a construção da solução, esse sistema era desconhecido ou os participantes apresentavam dificuldade em implementá-lo do início ao fim da resolução.

- A dupla Pedro e Isabela enfrentou esse problema em dois dias diferentes. Já no primeiro dia montaram as possibilidades com a nota de R$2,00 de forma sistemática (esqueceram o 2+20). Assim que concluíram essa parte, iniciaram as construções com a nota de R$5,00. Ao fazer 5+2, Isabela alertou o colega:

> **Isabela**: Esse já foi. É a mesma coisa.
> **Pedro**: Não, só que invertido. Pra mim tem que ter invertido.
> **Pesquisadora Elisa**: Por que tu acha que vai dar a mesma coisa?
> **Isabela**: Porque cinco mais dois é sete.
> **Pesquisadora Elisa**: Porque cinco mais dois é sete! Mas pergunta quantos

valores eu posso ter? A onde tem valores iguais? Mostra aí na tela pra mim. [Movem o cursor entre 2+5 e 5+2.]
Pesquisadora Elisa: É valores iguais. Então, pode contar separado? Que tu acha?
[Pedro segue fazendo 5+10 e 5+20.]
Isabela: Tem que ver.
Pesquisadora Elisa: Se tem que perguntar quantos valores diferentes eu consigo. Será que isso [toca 2+5 e 5+2] são valores diferentes ou são valores iguais?
Isabela: Iguais.
Pesquisadora Elisa: Valores iguais. Então eu posso contar esses dois? Não, né? Ó, Pedro, escuta a tua dupla. E por que tu não deixa ela fazer com os do cinco?
(Vídeo B12-48)

As possibilidades com o a nota de R$5,00 foram apagadas e recomeçaram a montar as mesmas sem colocar 5+2. As possibilidades com a nota de R$10,00 foram construídas de forma sistemática, mas não houve o mesmo cuidado para formar as possibilidades com a nota de R$20,00. Foi feito 20+100, depois 20+2 (que havia sido esquecida na lista de possibilidades com a nota de R$2,00), 20+50 e 20+20. Ainda fizeram 50+100 e 50+50. Ao olhar para a tela buscando o que faltava ou argumentos que justificassem o esgotamento, a pesquisadora questionou:

Pesquisadora Elisa: Que que tá faltando será? Será que falta algum ainda?
Pedro: Não. Acho que o cem eu já usei com todo mundo já. [Passa o cursor por cima das opções construídas com a nota de cem.]
Pesquisadora Elisa: Qual tu acha que é o maior valor que dá pra ter?
Pedro: Ah! O cem!
Pesquisadora Elisa: Uma de cem? Não. Mas se eu tenho duas notas, qual é o maior valor que eu posso ter na minha carteira?
[Faz 100+100.]
(Vídeo B11-54)

Fizeram a captura de tela, mas não conseguiram responder as questões adicionais por falta de tempo.

No dia seguinte, voltaram a enfrentar o problema. Construíram de maneira sistemática as possibilidades com a nota de R$2,00. Com a nota de R$5,00 ficou faltando 5+5, mas as demais foram montadas de forma sistemática. As possibilidades com as notas de R$10,00, de R$20,00 e de R$50,00 foram construídas em sua totalidade, faltando apenas 100+100. Mesmo sem ter as 21 possibilidades construídas, informaram esse valor como resposta. Ou seja, não bastava ter conseguido resolver uma vez, se os processos não estivessem completamente estruturados não poderiam ser repetidos facilmente.

- A dupla Renato e Roberta iniciou montando as opções de forma sistemática, mas sem considerar todos os aspectos do problema. Construíram 15 possibilidades, todas com duas notas diferentes uma da outra. Para pensar sobre o que faltava, a pesquisadora perguntou:

> **Pesquisadora Elisa**: Quantos vocês conseguiram fazer?
> **Renato**: Esses.
> **Pesquisadora Elisa**: Qual é o menor valor que dá pra ter se eu tiver duas notas na minha carteira?
> **Renato**: Zero.
> **Pesquisadora Elisa**: Não. Se eu tiver duas notas de dinheiro na minha carteira; qual é o menor valor que eu posso ter?
> **Roberta**: Dois.
> **Renato**: Quatro.
> **Pesquisadora Elisa**: Quanto?
> **Renato**: Quatro.
> **Pesquisadora Elisa**: Quatro é o menor valor que eu posso ter. Qual que tá faltando aí, então?
> [Tentam colocar a resposta 4 na caixa de resposta.]
> **Pesquisadora Elisa**: Não... Esse é o menor valor. Como é que eu vou fazer pra ter quatro reais?
> **Renato**: Duas notas de dois.
> **Pesquisadora Elisa**: Duas notas de dois! Posso ter duas notas de dois na minha carteira?
> **Renato**: Sim.
> **Pesquisadora Elisa**: Então, esse jeito vocês ainda não consideraram.
> (Vídeo B12-78)

A partir daí, abriram mais espaços e construíram as possibilidades com duas notas iguais e concluíram o problema.

- A dupla Kate e Cristina encarou esse problema em dois dias diferentes. No primeiro dia, construíram algumas possibilidades de forma empírica. A aula encerrou sem que tivessem concluído. No segundo dia, iniciaram por construir possibilidades com duas notas iguais. Depois de terem feito 5+5, 10+10, 20+20 e 50+50 apagaram tudo e recomeçaram. Passaram a construir de forma empírica, mas com várias possibilidades com alguma das notas alinhadas. Chegaram a ter 31 possibilidades na tela. Começaram a identificar o que havia em repetição e apagar. Identificaram repetições e construíram outras possibilidades (repetidas também). A aula encerrou sem que conseguissem concluir o problema.

- A dupla Mariana e Elias montou as possibilidades de maneira empírica. Interessante notar que, quando procuravam uma possibilidade, buscavam a soma das notas. Tal fato demonstrou um entendimento da questão que buscavam responder. Inclusive, procurando valores que nem eram possíveis, como pode ser observado no diálogo a seguir:

> **Mariana**: Já foi cinquenta e cinco?
> **Elias**: Cinquenta e cinco? [Desliza o dedo sobre a tela, passando pelas possibilidades construídas.] Não.
> [Completa 50+5.]
> **Mariana**: Cento e vinte?
> **Elias**: Não.
> [Faz 100+20.]
> **Mariana**: Já foi setenta? Sessenta?
> **Elias**: Sessenta? Acho que já. [Desliza o dedo pelas possibilidades.] Sessenta! [Para o dedo sobre 50+10.] Setenta também já foi, eu acho. [Coloca o dedo sobre 50+20.] Setenta foi. Não foi oitenta.
> **Mariana**: Oitenta!
> **Elias**: Mas não tem como fazer oitenta.
> **Mariana**: É verdade, cinquenta com mais vinte já foi. Vamos tentar agora... (Vídeo B13 – 71)

Com dez possibilidades na tela, fizeram a composição 100+100. Ao montarem essa possibilidade, perceberam outras possibilidades com duas notas iguais e construíram, na sequência, 2+2, 5+5, 10+10, 20+20 e 50+50. Essa atitude revelou que perceberam alguma regularidade na composição das possibilidades. Para encontrar o que faltava a pesquisadora questionou se haviam feito todas as possibilidades com a nota de R$2,00. Buscaram na tela e perceberam que sim. Fizeram o mesmo para a nota de R$5,00. Ao conferirem o que faltava com a nota de R$10,00 tomaram outro caminho:

> **Elias**: Vamos ver agora a de dez. Uma de dez [toca 20+10].
> **Mariana**: Isso é vinte!

> **Elias**: Aqui, ó [mostra a nota de dez ao lado da de vinte]. Duas, três, quatro, cinco, seis. [Colocando o dedo sobre cada possibilidade que apresenta pelo menos uma nota de dez.]
> **Pesquisadora Elisa**: Que que vocês estão contando?
> **Mariana**: A gente tá contando quantos tem por causa que...
> **Elias**: São seis aqui [mostra as notas], né sora? Então é pra ser seis aqui de dez, seis de coisa. Entendeu, sora?
> **Pesquisadora Elisa**: Ah! Agora eu entendi. Agora eu botei fé em vocês.
> (Vídeo B13 – 77)

A falta de organização da solução os levou a uma outra percepção de regularidade na solução. Contavam para ver se haviam seis possibilidades com cada uma das notas. A justificativa era correta, pois eram seis notas disponíveis. Esse esquema só seria eficiente se não houvessem repetições, porém eles já consideravam ter apenas possibilidades diferentes na tela.

Algumas duplas sistematizaram de forma completa. Uma vez que elaboraram um esquema e o aplicaram até esgotar as possibilidades, seus processos foram classificados como característicos do estádio III.

- A dupla Nuno e Platão encarou o problema em dois dias. No primeiro dia, chegaram a construir de maneira parcialmente sistematizada, pois fizeram quatro possibilidades de pares com a nota de R$2,00; quatro possibilidades com a nota de R$5,00 e quatro possibilidades com a nota de R$10,00. A aula encerrou e saíram sem ter concluído o problema. Quando encararam o problema novamente, já resolveram de forma sistematizada esgotando as possibilidades com cada uma das cédulas.

- A dupla Wiliam e Leonardo iniciou a resolução montando de maneira sistemática as possibilidades com a nota de R$2,00. Na sequência, já construíram as possibilidades com a nota de R$5,00 sem repetir 5+2. Antes mesmo de iniciar a construção das possibilidades com a nota de R$10,00 perceberam que precisariam de mais espaços, ou seja, conseguiram antecipar a dimensão da solução que estavam construindo. Tal fato revelou que as propriedades do problema, bem como o resultado obtido depois de aplicado o esquema em uso, eram conhecidos.

> **Wiliam**: Tá. Agora é com dez.
> [Coloca 10+_.]
> **Leonardo**: A gente vai ter que apertar em mostrar mais depois.
> (Vídeo B11-102)

Construíram as possibilidades que faltavam e responderam as perguntas sem erros.

- A dupla Valdo e Cláudio encarou esse problema em três datas diferentes. No primeiro dia, começaram de maneira sistemática, considerando, porém, que as notas deveriam ser diferentes entre si. Depois de construírem cinco opções com a notas de R$2,00, quatro opções com a nota de R$5,00 (sem repetir 2+5), três opções com a nota de R$10,00 (também sem repetir 2+10 e 5+10) e duas opções com a nota de R$20,00 (não repetiram 20+2, 20+5 e 20+10) a pesquisadora questionou:

> **Pesquisadora Elisa**: Tá difícil achar todas? Fizeram todas com o dois? Tem um jeito que vocês não fizeram com o dois.
> [Olham para a tela.]
> **Pesquisadora Elisa**: É o mais comum de a gente ter na carteira.
> **Valdo**: Dois e o dois!
> (Vídeo B11-68)

Para acrescentar a possibilidade faltante, apagam tudo e recomeçam. A aula terminou sem que concluíssem o problema.

Em outra data, recomeçam de maneira sistemática construindo todas as possibilidades com a nota de R$2,00. Em seguida, formaram as possibilidades com a nota de R$5,00. Todavia, construíram também a possibilidade 5+2 que já estava contemplada em 2+5. Considerar a ordem como relevante poderia ser falta de entendimento do enunciado, sendo assim, a pesquisadora conversou com a dupla:

> **Pesquisadora Elisa**: Mas não tem nenhum lugar que tem valores iguais já?
> [Faz 10+20 e clica no “Mostrar mais”.]
> [Faz, na primeira coluna, 10+50 e 10+100.]
> **Pesquisadora Elisa**: Só que aqui eu tenho quinze reais [toca 5+10] e aqui eu também tenho quinze reais [toca 10+5].
> [Olham para a tela.]
> **Valdo**: Não, sora!

Cláudio: Tem, aqui e aqui tem quinze [toca 5+10 e 10+5].
Pesquisadora Elisa: É quantos valores eu posso ter na carteira. Se eu tenho essas duas notas [aponta 5+10] ou se eu tenho essas duas [aponta 10+5], dos dois jeitos eu tenho quinze.
Valdo: É, mas tá certo, né?!
Pesquisadora Elisa: Não. Porque esses valores aqui... o valor que eu tenho na carteira é o mesmo. E é quantos valores diferentes eu posso fazer. Esse valor que eu tenho [aponta 2+5] é igual a esse [aponta 5+2]. Aqui é sete e aqui é sete. Tá repetido.
Valdo: Tá. Então eu vou apagar todos.
Pesquisadora Elisa: Todos tu vai apagar, daí?
Cláudio: Só apaga os que tão errado!
Pesquisadora Elisa: Os que tão errado, não; os que tão repetido.
(Vídeo B11-86)

Acabaram por apagar tudo e recomeçar. Cláudio decidiu tentar organizar à sua maneira. Sendo assim, construiu primeiro uma linha com possibilidades de notas iguais (2+2; 5+5; 10+10 e 20+20) e uma linha com possibilidades com a nota de R$2,00 (2+5; 2+10; 2+20 e 2+50). Também não lhes pareceu eficiente e apagaram tudo outra vez. Recomeçaram pelas possibilidades com a nota de R$2,00. Assim que concluíram, a pesquisadora os incentivou:

Pesquisadora Elisa: Ah! Era esse jeito aí, né Valdo?! Esse jeito parece o jeito que tu queria fazer também, né?! Só que, qual é o cuidado? É que o Valdo repetiu. Tem que cuidar agora pra não repetir.
[Faz 2+50; 2+100 e 5+10.]
Pesquisadora Elisa: Vê se ele fez certo aí. Vê se ele começou bem. Ele foi pro 5. Ele fez o 5 e o 10. Tá certo? Tu acha que esse é o primeiro que ele tem que fazer?
Valdo: Tá certo.
Pesquisadora Elisa: Cinco com dez era o primeiro que tinha que fazer?
Valdo: Não. O primeiro que tinha que fazer era o 2+2.
[Apaga 5+10.]
Pesquisadora Elisa: Tá. Mas e agora? Como começa o cinco?
Cláudio: Cinco e cinco.
Valdo: É.
Pesquisadora Elisa: Ah! 5+5.
(Vídeo B11-86)

A partir daí, construíram corretamente as possibilidades com as notas de R$5,00 e de R$10,00. Dispersaram-se um pouco e perderam o foco do trabalho. Ao iniciar as possibilidades com a nota de R$20,00 a pesquisadora tentou ajudá-los a voltar a concentração:

Pesquisadora Elisa: E agora? Qual que tem que botar?
Cláudio: Vinte.
Pesquisadora Elisa: O vinte.
[Coloca 20.]
Pesquisadora Elisa: Vinte com dois. Tu tem que botar?
Cláudio: Não.
Pesquisadora Elisa: Vinte com cinco?
Cláudio: Tem. Precisa vinte com... vinte com dez.
(Vídeo B11-86)

Mais uma aula encerrou sem que concluíssem o problema, apesar de chegarem bem perto da solução. Na terceira vez que encararam o problema, construíram de forma sistematizada e sem repetir ou omitir possibilidades. Tal acontecimento mostra que, além de lembrarem das discussões dos encontros anteriores, perceberam qual era o caminho que os levaria à solução. Depois de respondida a primeira pergunta, tiveram dificuldade para contar as possibilidades que somam mais de R$21,00. Com a intervenção da pesquisadora conseguiram também responder às questões adicionais. Porém, esqueceram de fazer a captura de tela com a solução construída, deixando apenas a que estava incompleta, realizada no dia anterior.

8.2.9 Análise do problema Pose para foto

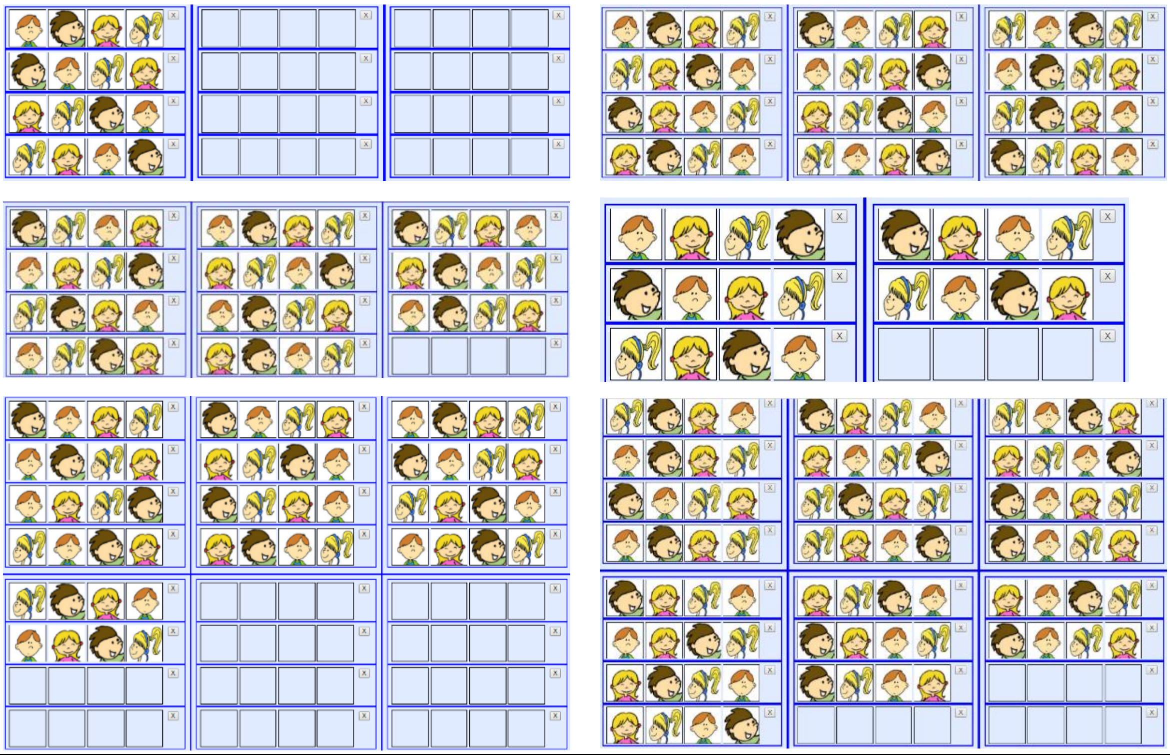
Tiago, Lucas, Mariana e Daniela se juntam para tirar uma foto. Eles se colocam um ao lado do outro e fazem a fotografia.

Para se posicionar um ao lado do outro, de quantas maneiras diferentes eles podem se organizar?

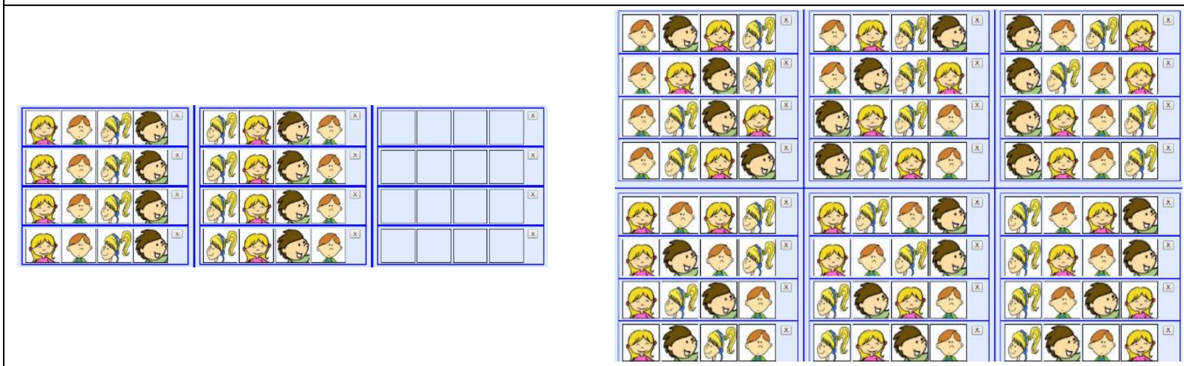
Esse problema teve apenas 8 soluções apresentadas. Nenhuma apresentava as 24 possibilidades corretamente construídas. Porém, o uso da sistematização ficou evidente em 37,5% (3 soluções) das soluções.

Quadro 19 - Soluções entregues para o problema Pose pra foto

Incompletas, sem uso de sistematização:



Incompletas, com uso de sistematização:



Fonte: acervo da pesquisa

Este problema tratava de permutação. Para Piaget, a descoberta do sistema e a generalização para os problemas de permutação segue um caminho semelhante ao das combinações e arranjos. Porém, as peculiaridades desse tipo de problema trazem peculiaridades também no processo de compreensão dos mesmos. Também aqui são três os estádios e cada um pode ser dividido em dois subníveis. Piaget afirma que apenas a partir dos 15 anos os jovens são capazes de generalizar e descobrir o sistema para esse tipo de situação. Todavia, assim como nos outros tipos de problemas, é possível que crianças e jovens de diferentes idades consigam resolver esses problemas sem um sistema completo. Mais do que isso, são capazes de ir aprimorando seus sistemas para alcançar essa generalização. O primeiro estádio seria caracterizado pela dificuldade em montar diferentes permutações com os mesmos elementos. Considerar a possibilidade de começar pelo mesmo elemento de mais de uma maneira. Ou seja, além da compreensão do enunciado, a dificuldade está em considerar tal construção possível. No estádio II estão as descobertas e a busca por algum sistema. Já podem ser percebidas tentativas de começar pelo mesmo elemento mais de uma vez, de propor inversões de um par de elementos, etc. Cabe colocar que grande parte dos envolvidos com o problema agiu conforme esse estádio. É no estádio III que os sujeitos generalizam a situação e usam de um processo sistemático para obter a solução. Importante salientar que Piaget percebeu que no subestágio IIIA sistemas errôneos são adotados. Ou seja, são criados esquemas de resolução que não levam à solução. Uma colocação interessante apresentada no livro faz refletir sobre o que seria a generalização nos casos de permutação:

> Achar empiricamente as diferentes permutações possíveis consiste em seguir adiante na procura de mudanças pedidas, ao passo que achar um sistema consiste em voltar sem cessar ao ponto de partida tanto quanto em prosseguir na direção da mudança. (INHELDER; PIAGET, 1951, p. 250)

O pequeno número de soluções para esse problema tem relação com diferentes fatores. Um deles foi o tempo. Como se observou nos problemas anteriores, o mesmo problema foi encarado em dias distintos até que fosse solucionado. Sendo assim, não chegaram ao nono problema em quatro encontros. O número de soluções não era uma preocupação da pesquisa. Até porque um dos objetivos de usar o ODA era permitir que cada dupla levasse o seu tempo para resolver os problemas. A não frequência em todos os encontros por parte de todos os participantes também reduziu a dois ou três encontros para algumas duplas; que, consequentemente, não chegaram a resolver o oitavo e o nono problemas. No entanto, cinco duplas tiveram seus processos registrados e analisados.

Apesar de ser marcante a dificuldade de montar diferentes possibilidades com um mesmo conjunto, o estádio I também pode ser caracterizado por dificuldades em compreender os requisitos do problema e o que caracteriza uma possibilidade. A dupla Naiara e Geovane teve um processo que foi característico desse estádio.

- A dupla Naiara e Geovane construiu algumas possibilidades de forma empírica. Três fotos estavam corretas e a quarta continha duas vezes Daniela e não aparecia Tiago. Depois de montarem cinco fotos, alteraram para a visualização dos nomes no lugar das "fotos" das pessoas. Construíram, então, uma sexta possibilidade com essa outra representação. A pesquisadora alertou para a maior dificuldade de perceber as repetições: "Ah! Mas daí tu vai fazer uns com os nomes e uns com as fotos? Vai ser bom assim de ver o que tá repetido? Não sei se essa é a melhor ideia." (Vídeo B12 – 53) A aula encerrou sem que conseguissem resolver o problema, mas com 11 fotos montadas, sendo que duas delas apareciam duas vezes, ou seja, com 9 fotos diferentes.

Como característico do estádio II, a presença de um sistema empregado de forma parcial e a identificação de regularidades nas possibilidades ficaram evidentes nos processos do Igor e da dupla Cristina e Rafaela.

- Igor iniciou construindo uma foto que tinha as pessoas na posição em que apareciam no ODA: Lucas, Tiago, Daniela e Mariana. Para a segunda composição, trocou Mariana e Daniela de posição. Esse ato já apresentou sistematização. De alguma forma, ele percebeu que poderia ir transformando uma possibilidade em outra. Para a terceira, trocou as posições de Tiago e Lucas, mas usou a segunda possibilidade como base, ou seja, acabou por transformar muito a primeira construção. Ao ter quatro fotos, tentou a resposta quatro. Com a mensagem do ODA, voltou às construções. Conseguiu formar outras duas e tentou a resposta seis; construiu outras duas e tentou também o número oito. Essas tentativas podem ser por falta de segurança sobre o sistema usado ou mesmo por ser fácil e rápido. Igor chegou a ter 14 fotos diferentes construídas, mas não conseguiu concluir o problema.

- Cristina e Rafaela iniciaram construindo quatro opções de foto, cada uma começando por uma pessoa diferente. Ao concluírem, tentaram a resposta quatro.

Levaram as mãos à cabeça ao ler a mensagem de que faltavam possibilidades. A pesquisadora tentou ajudá-las a pensar em outras possibilidades:

> **Pesquisadora Elisa**: Qual é o outro jeito que dá pra ela [aponta Daniela na primeira foto montada] ficar aqui na ponta? E como é que podem ficar os outros? Imagina que eles tão parando um do lado do outro pra tirar foto.
> **Cristina:** [Apontando pra primeira foto.] Esse aqui [aponta Lucas], aqui [aponta a segunda posição]. Essa aqui [aponta Mariana], aqui [aponta a última posição].
> **Pesquisadora Elisa**: Então faz, Cristina. Todos os jeitos que dá.
> (Vídeo B13 – 131)

Acabaram apagando as possibilidades construídas e recomeçaram tentando usar o que foi proposto. Colocaram Daniela na primeira posição em 4 fotos diferentes. Logo depois, colocaram Lucas na última posição de duas fotos diferentes e Tiago na última posição das outras duas. Essa configuração revelou uma ideia de generalização. De fato, cada configuração com Daniela em primeiro vai ter duas possibilidades com cada pessoa na última posição. Porém, a fragilidade dos esquemas se evidenciou quando, depois de completarem a primeira foto com Mariana e Lucas, completaram a segunda com Lucas e Daniela. A segunda foto apresentava Daniela duas vezes e não tinha Mariana. Com as quatro primeiras fotos prontas, Cristina sugeriu que colocassem Mariana na primeira posição das quatro fotos da segunda coluna: “Põe até aqui... [desliza o dedo sobre as primeiras posições da segunda coluna]” (Vídeo B13 – 9). Não foi percebido que a menina apareceria em seis fotos na primeira posição. Também não se deram conta da repetição cometida. A segunda coluna, apesar da ameaça de sistematização, foi construída de forma empírica. Ao se depararem outra vez com a mensagem de que faltavam possibilidades ao tentar a resposta oito, pediram ajuda. O pesquisador Nicolau as questionou:

> **Pesquisador Nicolau**: E aí, gurias?! Ah! Olha aí ó... Tá. Começou organizado e depois? Começou sempre com essa criatura aqui no canto [deslizando o dedo pelas quatro opções que iniciam com a mesma pessoa]. E depois? Que que aconteceu?
> **Cristina**: É que depois a gente fez todos esses diferentes...
> **Pesquisador Nicolau**: Diferente? Tá. Mas então por que agora tu não faz sempre com essa aqui [aponta para a primeira pessoa na primeira foto da segunda coluna de possibilidades]?

(Vídeo B13 – 6)

A discussão não auxiliou, uma vez que apagaram tudo e recomeçaram. Para manter a organização entendida por elas, a solução entregue eram duas colunas de quatro fotos idênticas.

O estádio III é caracterizado por uso de sistemas errôneos ou de uma sistematização completa, que leve à solução. Nuno e Platão percorreram um processo correspondente ao subnível IIIa, enquanto Wiliam e Leonardo poderiam ser exemplo de processo do subnível IIIb.

- A dupla Nuno e Platão iniciou com um sistema interessante, mas que não era efetivo para a resolução do problema. Colocaram Tiago em quatro fotos diferentes, sendo que, em cada uma delas, ele ocupava uma posição diferentes. Depois, completaram as fotos com as demais pessoas. Depois de completar as quatro fotos, construíram outras três possibilidades de forma empírica. Acidentalmente atualizaram a página do navegador e tiveram sua construção apagada. Recomeçaram da mesma maneira, mostrando que consideravam tal sistema efetivo. Recomeçaram ainda outra vez, colocando na primeira posição Lucas, Tiago, Daniela e Mariana. A primeira foto foi completada com essa mesma sequência (que é a forma como o ODA apresenta as pessoas): Lucas, Tiago, Daniela e Mariana. Completaram as outras de maneira empírica e a quarta foto ficou com Mariana, Lucas, Tiago e Mariana. Atento ao que o colega colocou, Nuno logo questionou: “Olha o que tu fez?! Ela tem uma irmã gêmea?” (Vídeo B11 – 7). Depois de apagarem, seguiram com o esquema de colocar uma mesma pessoa em quatro fotos em posições diferentes. Depois, escolhiam outra pessoa e distribuíam em posições diferentes nas mesmas quatro fotos e seguiam assim até completar outras quatro fotos. Não entregaram nenhuma solução, nem parcial. Suas estratégias não levaram à solução do problema, tampouco mudaram de estratégia.

- A dupla Wiliam e Leonardo iniciou construindo as possibilidades com Tiago na primeira posição. Montaram cinco fotos com essa configuração e Leonardo perguntou ao colega se era suficiente.

> **Leonardo**: Já deu?
> **Wiliam**: São seis possibilidades.
> (Vídeo B13 – 78)

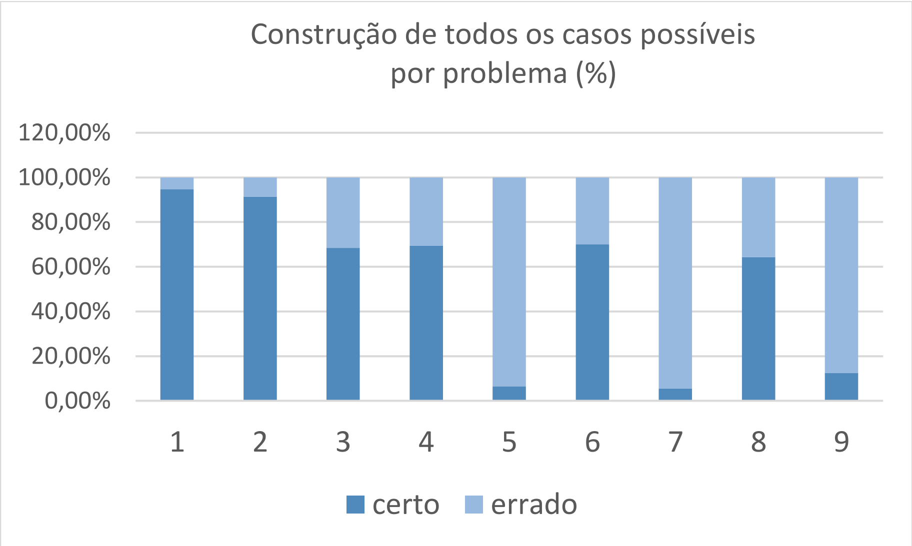
Wiliam tinha clareza da quantidade de possibilidades com cada pessoa na primeira posição. Colocaram, posteriormente, Lucas na primeira posição de 6 fotos diferentes. Para completar as fotos, colocavam uma pessoa em duas fotos na última posição e completavam as posições do meio com as pessoas que faltavam nas duas configurações possíveis. Depois de montarem as fotos com Lucas na primeira posição, passaram às possibilidades com Daniela bem à esquerda. Leonardo se mostrou inseguro, pois comentou que “Só falta dar errado. Se der errado eu não vou mais fazer.” (Vídeo B13 – 106). Wiliam não se afetou com o comentário do colega e seguiu orientando e montando como havia suposto. Concluíram, sem interrupções. Porém, passou despercebida a montagem de duas fotos idênticas com Tiago, Daniela, Lucas e Mariana. Tal fato não representou uma dificuldade com o raciocínio combinatório, uma vez que as possibilidades foram construídas de maneira sistemática e com segurança. Entretanto, não foi possível afirmar que apresentaram as 24 possibilidades distintas.

9. Resultados

Depois de analisar cada um dos problemas e os processos de resolução dos mesmos, considera-se relevante apresentar alguns dados que apresentem uma visão global do que foi realizado.

Foi significativa a diferença entre acerto e uso de sistematização. O objetivo da pesquisa não era de que os participantes aprendessem a resolver problemas de análise combinatória, mas buscava compreender o desenvolvimento do raciocínio combinatório. O desenvolvimento do pensamento combinatório passa pela sistematização da construção dos casos possíveis. Os dois gráficos a seguir mostram, em percentuais, os acertos (construção de todos os casos possíveis) e o uso evidente de sistematização por problema enfrentado.

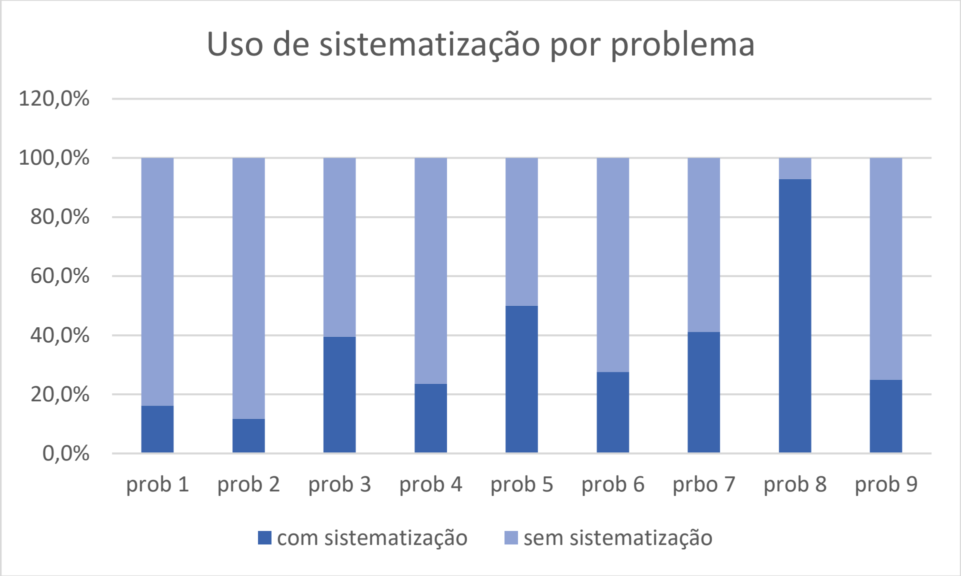
Gráfico 6 - Construção de todos os casos possíveis por problema



Fonte: Elisa F. Martins, 2018

Nesse gráfico se observa os altos índices de acerto (construção de todos os casos possíveis) nos problemas 1, 2, 3, 4, 6 e 8. Os primeiros quatro problemas tinham entre seis e 10 possibilidades a serem construídas. Esse universo pequeno permitiu que os problemas fossem resolvidos e controlado pelos participantes mesmo sem uma sistematização na construção das soluções.

Gráfico 7 - Evidente uso de sistematização na construção da solução por problema



Fonte: Elisa F. Martins, 2018

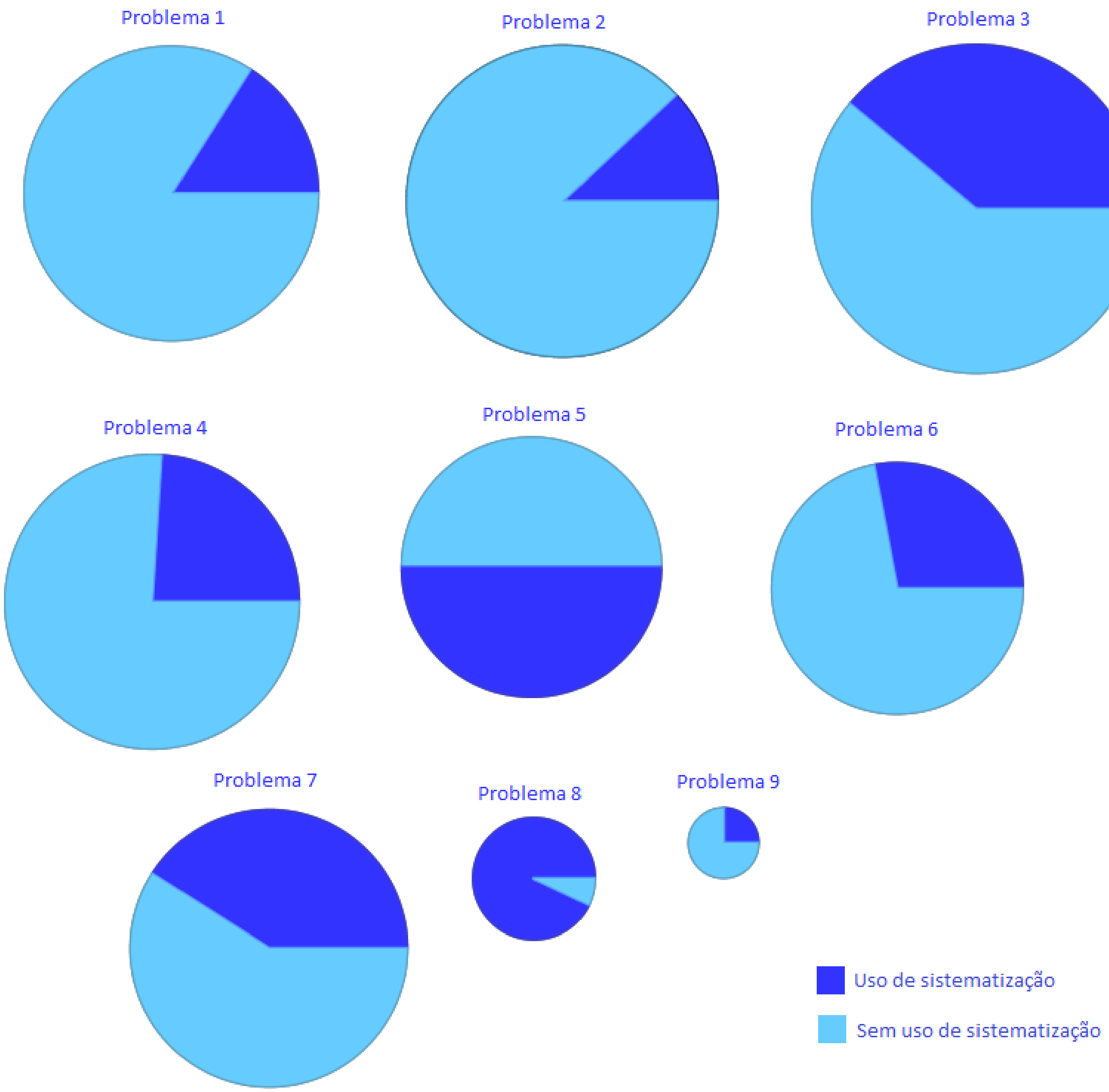
Esse segundo gráfico mostrou a evidência de sistematização nas soluções construídas. Percebe-se um baixo índice de sistematização nos problemas 1, 2, 4, 6 e 9. Os problemas 5 e 8 apresentaram os maiores índices de sistematização. Esses problemas envolviam 36 e 21 possibilidades, respectivamente. Os problemas 4 e 6, apesar de envolverem respostas similares aos dois primeiros (respostas numéricas 9 e 6) apresentaram índices maiores de sistematização.

Comparando os dois gráficos, concluiu-se que houve mudança na forma de encarar os problemas ao longo do tempo. Os primeiros quatro problemas possuíam soluções entre 6 e 12. O índice de acertos foi alto, mas as evidências de sistematização baixas. Isso foi atribuído a fatores como: pouca experiência com esse tipo de problema e número pequeno de possibilidades que facilitava um controle visual das construções. A sistematização não surgiu como uma necessidade para a correta solução do problema. O problema 5, Duplas de tênis, teve uma inversão nos gráficos. Um baixo índice de soluções completas e um elevado (50%) índice de sistematização evidente. O número de possibilidades a serem construídas era 36, maior entre todos os problemas. Esse fato, juntamente com a experiência com problemas anteriores, fez a sistematização ser considerada uma necessidade por grande número de participantes. O problema 6, Restaurante, apesar de tratar de um número pequeno de possibilidades – seis apenas – teve um maior índice de sistematização quando comparado aos quatro primeiros. Tal fato foi considerado consequência da experiência com problemas anteriores. A solução completa do problema oito, Notas, tinha 21 possibilidades distintas. Foi o problema com maior índice de sistematização evidente. Nesse caso, também houve um elevado percentual de acertos. Tal fato nos demonstrou que as experiências anteriores e a sistematização foram sentidas como necessidade e auxiliaram na correta resolução do problema. O contexto envolvendo dinheiro pode ter contribuído como motivação para os participantes.

Cabe repetir que o número de soluções de cada problema é diferente. Por motivos variados, há mais soluções dos primeiros e menos soluções dos últimos problemas.

Uma outra maneira de observar os gráficos que evidenciam o uso de sistematização é utilizando tamanhos diferentes de círculos representando a quantidade de soluções apresentadas para cada problema. Em cada gráfico, a parte mais escura representa as soluções que evidenciaram o uso de algum sistema na construção da solução. O azul mais claro, por consequência, representa as soluções apresentadas sem qualquer evidência de uso de sistematização. Os tamanhos dos círculos foram baseados no tamanho da amostra de cada problema. Fica evidente a diferença de soluções do oitavo e do nono problemas.

Gráfico 8 - Gráficos comparando o uso de sistematização em cada problema



Fonte: acervo da pesquisa

Outra vez percebeu-se como impactante o percentual de sistematização presente no oitavo problema. Como dito anteriormente, a quantidade de possibilidades a serem construídas (21 no total) e a experiência com os problemas anteriores foram decisivos na escolha por *organizar* as possibilidades construídas na tela do ODA. Outra vez se registra que o número de soluções completas não era foco da pesquisa e, por isso, não foram feitos gráficos similares com esse conteúdo. O pensamento combinatório se expressou por meio da organização das soluções construídas, fossem ela completas ou incompletas, corretas ou erradas. E, ao se perguntar por que uma dupla ou participante não passou a usar um sistema depois de ter percebido sua importância/relevância para a construção da solução, nos deparamos com a citação de Piaget que fala que

> O equilíbrio leva tempo, naturalmente, mas a equilibração pode ser mais ou menos rápida. Não impede que essa aceleração não possa ser aumentada indefinidamente, e é nesse ponto que concluirei. Não creio mesmo que haja vantagem em acelerar o desenvolvimento da criança além de certos limites. Muita aceleração corre o risco de romper o equilíbrio. O ideal da educação não é aprender ao máximo, maximizar os resultados, mas é antes de tudo aprender a aprender; é aprender a se desenvolver e aprender a continuar a se desenvolver depois da escola. (PIAGET, 1983, p. 225)

O sistema aparece em um momento de desequilíbrio, onde alternativas são experimentadas na busca de uma solução para o problema. Surge um sistema que é elaborado para esse problema específico e que auxilia na construção da solução. Essa situação é distante da ideia de que haja um sistema que resolve todos os problemas parecidos, que seria um equivalente operatório do Princípio Fundamental da Contagem. Mesmo em problemas idênticos quanto à forma, como era o caso dos problemas 1 e 4 (Cara malucas e Uniforme da Colômbia), as similaridades não foram verbalizadas por nenhum participante. Ou seja, cada problema era encarado como novo problema. Cada contexto representava uma situação diferente e, com isso, buscavam-se estratégias e a construção de novos esquemas. Alguns processos foram sendo percebidos como possivelmente *repetíveis* e foram sendo incorporados aos esquemas disponíveis para serem implementados em outros problemas. As próprias certezas quanto à relevância ou não da ordem e possibilidades ou não de repetir elementos em uma possibilidade eram abstraídas do problema (a partir do enunciado), mas também a partir do que já haviam feito em um problema anterior. Experimentar os mesmos esquemas e validá-los ou não fez parte da experiência com os problemas de combinatória. Cada dupla, cada participante a seu tempo e com suas certezas individuais, foram construindo novas respostas, novas estratégias e diferentes percursos.

Ainda pesando sobre o tempo para aprender e sobre o processo a ser percorrido até a consolidação de um esquema, Piaget foi categórico:

> Por que é necessário esperarmos oito anos para adquirir a invariante de substância, e muito mais para as outras noções em vez de elas aparecerem

> desde que haja função simbólica, quer dizer, a possibilidade de pensar, e não mais simplesmente de agir materialmente? Por essa razão, fundamental, que as ações que possibilitaram alguns resultados no terreno da efetividade material não podem ser interiorizadas sem mais e de uma maneira imediata, e que se trata de reaprender no plano do pensamento o que já aprendemos no plano da ação. Essa interiorização é na realidade uma nova estruturação; é não apenas uma tradução, mas uma reestruturação, com uma decalagem que toma um tempo considerável. (PIAGET, 1983, p. 219)

O tempo da pesquisa foi de quatro encontros. Para alguns participantes foi uma experiência de três ou menos. O tempo é diferente para cada um. O que se interiorizou muda muito de pessoa para pessoa. O que não se questionou é que foi um tempo importante no desenvolvimento do raciocínio combinatório de todos os envolvidos. Não se acredita ser possível um plano que dê conta de todos os alunos e todos os conceitos. Não era objetivo da pesquisa ter um grupo com conhecimentos homogêneos sobre o tema ao fim dos quatro encontros. Oportunizaram-se experiências para que algumas ideias acerca de combinatória fossem interiorizadas a partir delas. Para que, a partir da ação sobre os problemas, fossem elaboradas certezas e construídos esquemas de ação que pudessem se tornar esquemas de pensamento.

O uso de sistematização não significou a resolução correta do problema, uma vez que respostas incompletas também apresentaram emprego de sistematizações parciais. Mas o emprego da sistematização evidenciou uma mudança na forma de resolver os problemas. O emprego de um processo sistemático externou uma modificação na forma de compreender os problemas. Essa modificação tem relação com o raciocínio combinatório dos envolvidos. Cabe ressaltar que nenhuma dupla empregou sistematização em todos os problemas, mas algumas duplas não evidenciaram sistematização em nenhum deles. Essa consideração refletiu o caráter provisório deste tipo de processo para os participantes do estudo. Inhelder e Piaget (1976) mostraram que a ideia de fixar um fator e fazer variar outros é um dos indícios de pensamento formal. Esse tipo de estratégia demonstraria uma inversão de sentido na hora de resolver um problema. A lógica de dissociar ao invés de associar. Esse tipo de estratégia é o caminho para a generalização. Isto é, quando são percebidas as similaridades entre as possibilidades e se consegue elaborar um esquema de resolução que não depende do contexto do problema.

Na utilização do ODA os ícones eram arrastados, combinados, apagados, reorganizados, contados. Alguns estudantes tentaram, por tentativa e erro, encontrar a resposta numérica. Mas o insucesso os levou à construção. A sistematização não foi, em momento algum, imposta. Contudo, os problemas envolvendo respostas maiores que dez (problemas 5, 7, 8 e 9) levaram a perceber que a contagem e o controle das possibilidades construídas eram dificultados sem a presença de alguma organização. Foi possível compreender que passaram a separar em casos e usar procedimentos sistemáticos de forma mais regular nesses problemas.

O pensamento combinatório se desenvolve muito mais do que pela Matemática e pelas relações lógico-matemáticas. Ele se desenvolve porque permite que situações variadas sejam exploradas de maneira sistemática. O pensamento combinatório é a raiz do método científico. É a partir desse tipo de esquema que se chegam a generalizações referentes aos conceitos de Física e de Química (Inhelder; Piaget, 1976). Esse esquema é utilizado de maneira sistemática por jovens que procuram as possíveis implicações de fatores como tamanho, peso, impulso, formato, velocidade em resultados nos experimentos com balança, flexão de barras de ferro, vasos comunicantes, etc. Esse comportamento sistemático intencional é carregado de hipóteses levantadas de maneira proposicional. Antes de aplicar corretamente o esquema, as crianças mudam mais de um fator, não tendo argumentos lógicos suficientes para sustentar suas conclusões. De forma não sistemática esse esquema foi experimentado, mas ainda com pouco rigor lógico. Conseguir isolar cada fator de um experimento e fazer variar os demais é uma atividade um tanto laboriosa. Os problemas combinatórios são, então, mais uma maneira de fazer aparecer esse esquema; de colocar em prática um esquema combinatório para resolver problemas que são, ao fim e ao cabo, problemas combinatórios e os esquemas empregados são semelhantes aos usados para resolver questões de física. Tal fato e os dados apresentados no trabalho levaram a tomar consciência da inportância deste tipo de problema se fazer presente desde o início da Educação Básica.

O uso do ODA desenvolvido permitiu que, em um mesmo grupo de alunos, cada um estivesse explorando um problema diferente. De acordo com o seu ritmo, cada aluno resolveu os problemas a sua maneira e teve a possibilidade de obter um feedback de seu desempenho. A aula no Laboratório de Informática e com um “roteiro” conhecido, que no caso era a sequência dos problemas, aconteceu sem que fosse necessário que todos os alunos fizessem a mesma coisa ao mesmo tempo. O caminho para chegar à solução e mesmo o tempo que se levou no desenvolvimento de uma tarefa foi diferente para cada dupla. Se alguém não frequentou algum encontro, não precisaria ter sua sequência interrompida ou com lacunas, pois pode continuar sua caminhada — dentro do roteiro — de onde parou. As soluções apresentadas (capturas de tela) evidenciaram que muitos dos participantes começaram a compreender a necessidade de sistematização da construção das respostas e usaram, em alguns problemas, algum processo sistemático. Mas agir de maneira sistemática ainda não é natural e, portanto, esse procedimento aparecia empregado apenas de maneira parcial ou não continuada.

10. Conclusões

Para concluir o trabalho, reapresenta-se a questão de pesquisa proposta:

Quais os percursos do pensamento combinatório dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental na realização de problemas?

A utilização do COMBOBJETO permitiu que os participantes agissem sobre os problemas e experimentassem suas diferentes estratégias; consolidando suas certezas ou substituindo-as por outras. Ao longo dos problemas se evidenciou que o uso de sistematização não era entendido como necessário e, em alguns casos, nem mesmo possível. A partir dos questionamentos e dos erros e acertos dos próprios participantes, superaram-se dúvidas quanto a relevância da ordem ou mesmo a possibilidade de repetição de elementos na construção de cada possibilidade.

Sem mencionar termos específicos de análise combinatória como conjuntos, elementos, combinação, arranjo ou permutação fez-se os participantes pensarem e concluírem a respeito dos conceitos envolvidos.

Foram aulas de Matemática que permitiram ações e conclusões diferentes para cada participante. Mais do que possível, concluiu-se que esse tipo de problema é importante para o desenvolvimento do pensamento combinatório dos alunos dessa etapa escolar. À medida que enfrentaram problemas diferentes, formularam hipóteses, testaram essas hipóteses, elaboraram estratégias como foi apresentado no capítulo da análise dos dados.

Considerando que

> (...) entre uma leitura sem nenhuma compreensão e a descoberta da razão dos fatos observados, intercala-se uma etapa intermediária em que a criança já tem certeza de que há uma razão, mas sem ainda saber qual. (PIAGET, 1995, p. 70)

Pode-se afirmar que esta etapa intermediária é superada, ou melhor, é vivenciada a partir de experiências como as propostas na pesquisa. Foi preciso agir sobre os problemas para encontrar argumentos para as certezas apresentadas. Foram necessárias conversas e testagens de ideias até que se construíssem (ou desconstruíssem, em alguns casos) as explicações para determinadas respostas.

Ainda, a partir da ideia de que

> É preciso, pois, admitir que as relações lógico-matemáticas e notadamente seriais, introduzidas nos objetos, somente são acessíveis a um sujeito se for ele próprio quem se encarrega da operação, ou se dela for capaz. (PIAGET, 1995, p. 148)

Concluiu-se que a pesquisa permitiu que os alunos construíssem seus argumentos a partir dos esquemas que possuíam, construindo esquemas novos sempre que necessário. Mesmo trabalhando em duplas, as discussões e ações fizeram emergir certezas e estratégias que puderam ser repensadas e reformuladas a partir da visão de outra pessoa. Sendo assim, cada participante usou do seu repertório cognitivo, mas teve oportunidade de reconstruí-lo e reconfigurá-lo a partir das experiências vividas. Conclusões e certezas não foram impostas. Nem todos os envolvidos aprenderam as mesmas coisas com a mesma experiência. A partir de um mesmo conjunto de atividades, cada participante reorganizou suas estruturas cognitivas centradas em esquemas ou conceitos combinatórios.

Os problemas disponibilizados no ODA mostraram-se adequados à faixa etária e aos objetivos da pesquisa. Considerou-se que poderiam ser apresentados mais problemas de arranjo e permutação, pois os que foram contemplados ficaram para o fim e o de permutação, por exemplo, foi explorado por menos da metade dos participantes.

Na sequência, projeta-se o acréscimo de outros problemas ao ODA. Considerando que o tópico é interessante e que pode ser explorado por diferentes etapas de escolarização, pretende-se desenvolver outros problemas e enriquecer o material disponível.

Considera-se que a pesquisa realizada é relevante para professores dos anos iniciais e para quem pensa na formação desses profissionais. A Matemática pode ser abordada com menos aulas expositivas e mais ação por parte dos envolvidos. Os ODA se apresentam, inclusive, como alternativa potente para tornar tal fato possível.

11. REFERÊNCIAS

AGUIAR, Eliane Vigneron Barreto; FLÔRES, Maria Lucia Pozzatti. Objetos de Aprendizagem: conceitos básicos. In: TAROUCO, Liane et al. (Org.) **Objetos de Aprendizagem:** teoria e prática. Porto Alegre: Evangraf, 2014. Cap. 2 p. 12-28.

Atividades Educacionais. Site com materiais digitais. Disponível em < http://atividadeseducativas.com.br/> Acessado em 23 de outubro de 2019.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. Construindo árvores de possibilidades para compreensão de relações combinatórias. **Educação Matemática em Revista,** Brasília, ano 15, n. 31, p. 24-32, Nov. 2010. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/191>. Acesso em: 22 nov. 2019.

AZEVEDO, Juliana. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades:** é melhor no papel ou no computador? 2012. 127f. Dissertação (Mestrado), Pós-graduação em Educação matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013. Disponível em < https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/13237>. Acesso em: 22 nov. 2019.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. Desenvolvendo o raciocínio combinatório de crianças de anos iniciais do Ensino Fundamental pela construção em lápis e papel de árvores de possibilidades. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4., 2015, Ilhéus. **Anais...**. Ilhéus, 2015. p.

AZEVEDO, Juliana; VEJA, Danielle; ARAÚJO, Julia. Desenvolvendo o raciocínio combinatório por meio do software Diagramas de Árbol. In: Encontro de Combinatória, Probabilidade e Estatística dos Anos Iniciais. **Anais eletrônicos**, Recife, 2016.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content Knowledge for Teaching. **Journal Of Teacher Education**, [s.l.], v. 59, n. 5, p.389-407, nov. 2008. SAGE Publications. http://dx.doi.org/10.1177/0022487108324554.

BARRETO, Fernanda Lopes Sá; AMARAL, Fábio; BORBA, Rute. **Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais.** 2007. 22f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) Licenciatura em Pedagogia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

BARRETO, Fernanda Lopes Sá; BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais**. Salvador, Bahia, 2010.

BECKER, Fernando. Abstração pseudo-empírica e reflexionante: Significado epistemológico e educacional. **Schème:** Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas, Marília, v. 6, Edição especial, p. 104-128, nov. 2014.

BIOE: Banco Internacional de Objetos Educacionais: Repositório. Disponível em <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/> Acesso em 15 de maio de 2018.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora. 2015.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; ROCHA, Cristiane de Arimatéa; AZEVEDO, Juliana. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, [s.l.], v. 29, n. 53, p.1348-1368, dez. 2015. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a27.

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana; BARRETO, Fernanda. Using tree diagrams to develop combinatorial reasoning of children and adults in early schooling. **9th Congress of European Research In Mathematics Education**, Praga, República Tcheca, 2015.

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana; BITTAR, Marilena. Brazilian primary school textbooks: symbolic representations in combinatorial situations. **ICME 13 - 13th International Congress on Mathematical Education**. Hamburgo, Alemanha, 2016.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 3º e 4º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1998.

_______. **Educação Estatística**. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2014.

_______. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2017.

Casa das Ciências: Repositório. Disponível em <https://www.casadasciencias.org/>. Acesso em 15 de maio de 2018.

DELVAL, Juan Antonio. **Introdução à Prática do Método Clínico**: descobrindo o pensamento das crianças. Porto Alegre: ArtMed, 2002.

DOLLE, Jean-Marie. **Para Compreender Piaget**: Uma iniciação à Psicologia Genética Piagetiana. 4a. Edição. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1987.

DURO, Mariana Lima. **Análise combinatória e construção de possibilidades**: o raciocínio formal no Ensino Médio. 2012. 106f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em < http://hdl.handle.net/10183/49729>. Acesso em: 22 nov. 2019.

DURO, Mariana Lima; BECKER, Fernando. Reflexões sobre a aprendizagem de Análise Combinatória na Perspectiva da Epistemologia Genética: do método aleatório à combinação sistemática. In: III Colóquio Internacional de Epistemologia e Psicologia Genéticas, 2013, João Pessoa / PB. **Anais III Colóquio Internacional de**

Epistemologia e Psicologia Genéticas. João Pessoa / PB: UFPB, 2013. p. 258-272.

DURO, Mariana Lima; BECKER, Fernando. Análise Combinatória: do método aleatório à combinatória sistemática. **Educação & Realidade**, [s.l.], v. 40, n. 3, p.859-882, set. 2015. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/2175-623641714.

EDUCAPES: Repositório. Disponível em <https://educapes.capes.gov.br/>. Acesso em 15 de maio de 2018.

FERNANDES, José; CORREIA, Paulo. Estratégias espontâneas de alunos do 9º ano em Combinatória. **Revista Educação e Matemática**. nº 102, 12-17, mar./abr. 2009.

INHELDER, Barbel; PIAGET, Jean. **Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente**: Ensaio e construção das estruturas operatórias formais. Tradução: Dante Moreira Leite. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1976.

KhanAcademy - Repositório e portal de atividades. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/>. Acesso em 15 de junho de 2018.

LEITE, Maici Duarte; PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos; FERRAZ, Martha Cornélio; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Softwares educativos e objetos de aprendizagem: um olhar sobre a análise combinatória. In: X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2009, Ijuí. **Anais eletrônicos...** Ijuí: UNIJUÍ. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_46.pdf.> Acesso em: 03 jul. 2018.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do Ensino Médio**, volume 2, 6a. edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Ana Paula; BORBA, Rute. Professores de matemática reconhecem o Princípio Fundamental da Contagem como estratégia de resolução de problemas combinatórios? In: **Encontro de Pesquisa Educacional em Pernambuco**, Garanhuns, Pernambuco, 2014.

LIMA, Ana Paula. **Princípio Fundamental da Contagem:** Conhecimentos dos professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias. 2015. 139f. Dissertação (Mestrado) Programa de Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015. Disponível em < https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/18810>. Acesso em: 22 nov. 2019.

LIMA, Ana Paula; BORBA, Rute E. Reconhecendo o Princípio Fundamental da Contagem como estratégia na resolução de problemas combinatórios. **Educação Matemática Pesquisa (online)** v. 17, n. 4, pp.694-714, São Paulo, 2015a.

LIMA, Ana Paula; BORBA, Rute. Princípio Fundamental da Contagem: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso no ensino de combinatória. In: **Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Pirenópolis, Goiás, 2015b.

LOURENÇO, Orlando. Além de Piaget? Sim, mas Primeiro Além da Sua Interpretação

Padrão!. **Aná. Psicológica**, Lisboa, v. 16, n. 4, p. 521-552, dez. 1998. Disponível em <http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0870-82311998000400001&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 22 nov. 2019.

MATIFIC - Portal de materiais digitais. Acesso em: <https://www.matific.com/bra/pt-br/home/>. Acesso em 15 de junho de 2018.

MENDES, Rozi Mara; SOUZA, Vanessa Inacio; CAREGNATO, Sonia Elisa. A propriedade intelectual na elaboração de objetos de aprendizagem. Cinform – Encontro Nacional de Ciência da Informação, 2004, Salvador. **Anais**, Salvador: UFBA, 2004.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, Eliana Gomes. **Raciocínio combinatório na resolução de problemas nos anos iniciais do ensino fundamental:** um estudo com professores. 2014. 225f. Dissertação Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11012>. Acesso em:22 nov. 2019.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. 2009. 267f. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009. Disponível em <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4189>. Acesso em: 22 nov. 2019.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké** v. 17, n. 1, 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na Escolarização Básica. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** v. 1, n. 1, 2010.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Problemas combinatórios: estratégias e respostas de alunos da Educação Básica. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Petrópolis, Rio de Janeiro, 2012.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. O ensino de combinatória no ciclo de alfabetização. In: **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**: Educação Estatística. Brasília: MEC, SEB, 2014. p. 39-50

PIAGET, Jean. **A representação do mundo na criança.** 3ª edição. Tradução: Adail Ubirajara Sobral. Aparecida, SP: Ideias & Letras, 2005.

PIAGET, Jean. Problemas de psicologia genética. In: Piaget, J., **Piaget – vida e obra**. Coleção os Pensadores. 2ª edição. Tradução: Nathanael C. Caixeiro, Zilda A. Daeir Celia E. A.; Di Piero. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel. **A origem da ideia do acaso na criança**.

Tradução: Ana Maria Coelho. Rio de Janeiro: Editora Record, 1951.

PIAGET, Jean. **Abstração reflexionante; relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais**. Tradução: Fernando Becker e Petronilha B. G. da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança.** Tradução: Alvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

PIAGET, Jean. Development and learning. In: LAVATTELLY, C. S. e STENDLER, F. **Reading in child behavior and development.** Tradução Paulo Slomp. New York: Hartcourt Brace Janovich, 1972.

PIAGET, Jean. **Para onde vai a educação?** 18. Edição. Tradução de Ivette Braga. Rio de Janeiro: José Olympio, 2007.

Portal do Professor: Repositório. Disponível em <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/>. Acesso em 15 de maio de 2018.

REATEGUI, Eliseo; BOFF, Elisa; FINCO, Mateus David. Proposta de Diretrizes para Avaliação de Objetos de Aprendizagem Considerando Aspectos Pedagógicos e Técnicos. **Revista Novas Tecnologias na Educação** V. 8 Nº 3, dezembro, 2010.

Repositório Aberto. Repositório de materiais da Universidade do Porto. Acesso em: <https://repositorioaberto.uab.pt/>. Acesso em 15 de junho de 2018.

RIVED: Rede Internacional Virtual de Educação. Disponível em: <http://rived.mec.gov.br/>. Acesso em 15 de maio de 2018.

SANTOS, José Plínio; MELLO, Margarida; MURARI, Idani**. Introdução à Análise Combinatória.** 3a edição. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2002.

SILVA, Monalisa Cardoso. **A combinatória:** abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental. 2016. 201f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/17752>. Acesso em: 22 nov. 2019.

SOARES, Maria. Teresa.; MORO, Maria Lúcia. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. **Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Águas de Lindóia, SP, 2006.

TAROUCO, Liane Margarida Rockenbach; FABRE, Marie-Christine J. M.; TAMUSIUNAS, Fabricio. Reusabilidade de objetos educacionais. **RENOTE – Revista Novas Tecnologias para a Educação**. Porto Alegre: Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação (CINTED- UFRGS), v. 1. nº 1, 2003. Disponível em: <:http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/13628/7697 >. Acesso em 3 jul. 2018.

TAROUCO, Liane Margarida Rockenbach; ÁVILA, Bárbara Gorziza; SANTOS, Edson

Felix; BEZ, Marta Rosecler; COSTA, Valéria Machado. (Org.) **Objetos de Aprendizagem:** teoria e prática. Porto Alegre: Evangraf, 2014.

Wisc-Online: Repositório. Disponível em <https://www.wisc-online.com/>. Acesso em 15 de maio de 2018.

ANEXO 1 - Questionário

Nome:____
Idade: _________________Data da entrevista:__/__/18

Você tem computador em casa?
( ) Não ( ) Sim, notebook próprio
( ) Sim, notebook da família (mãe/pai/irmãos)
( ) Sim, computador de mesa

Você tem internet em casa?
( ) Não
( ) Sim, wi-fi de outra pessoa. Quem? __________________
( ) Sim, wi-fi próprio

Você tem celular?
( ) Não
( ) Sim, divido com alguém. Quem? _____________
( ) Sim, só meu.
Seu celular tem internet móvel?
( ) Não ( ) Sim.

Você tem conta em rede social?
( ) Não ( ) Sim.
( ) Facebook
( ) Twitter
( ) Instagram
( ) Pinterest
( ) Outra. Qual? __________________________

Você tem smartTV em casa?
( ) Não ( ) Sim.

Você tem conta em algum canal de vídeo por demanda (Exemplo: Netflix)?
( ) Não ( ) Sim. Qual? ____________________

Você tem conta em algum canal de música (Exemplo: Spotfy)?
( ) Não ( ) Sim. Qual? ____________________

Você tem canal no YouTube?
( ) Não ( ) Sim. Sobre o quê? _________________________

Você segue alguém ou um canal no YouTube?
( ) Não ( ) Sim.

O que você faz na internet?
____

ANEXO 2 – Quadro com conteúdo dos vídeos

Vídeo	tempo	problemas	participantes
B11-1	09:43	1	Paulo-Rogério Hélio-Nicole
B11-2	03:47	1	Paulo-Rogério
B11-3	07:55	1 e 2	Paulo-Rogério
B11-4	34:10	2, 3, 4 e 5	Hélio-Nicole Paulo-Rogério Igor
B11-5	02:48	9	Nuno-Platão
B11-6	01:51	7	Amanda-Ricardo
B11-7	24:30	7, 8 e 9	Amanda-Ricardo Nuno-Platão
B11-8	02:02	9	Nuno
B11-9	00:49	7	Amanda-Ricardo
B11-10	00:43	7	Amanda-Ricardo
B11-11	01:00	1	Igor-Elisabete Gabriela-Nisa
B11-12	00:43	1	Amanda-Ricardo Gabriela-Nisa
B11-13	00:39	1	Issac-Elisabete
B11-14	01:15	1	Amanda-Ricardo
B11-15	00:56	2	Gabriela-Nisa
B11-16	01:30	2	Igor-Elisabete
B11-17	00:30	1	Hélio-Nicole
B11-18	00:13	1	Hélio-Nicole
B11-19	00:08	2	Igor-Elisabete
B11-20	04:20	2 e 3	Gabriela-Nisa Amanda-Ricardo
B11-21	00:28	3	Igor-Elisabete
B11-22	01:02	3	Igor-Elisabete
B11-23	00:48	1	Paulo-Rogério
B11-24	00:55	3 e 4	Gabriela-Nisa Amanda-Ricardo
B11-25	00:40	3 e 4	Gabriela-Nisa Amanda-Ricardo
B11-26	00:34	1	Alice - Bruno Miguel-Alexandre
B11-27	00:43	3	Amanda-Ricardo

B11-28	00:25	1	Alice-Bruno Miguel-Alexandre
B11-29	00:18	1	Alice - Bruno Miguel-Alexandre
B11-30	01:45	3 e 5	Gabriela-Nisa Amanda-Ricardo
B11-31	00:46	1	Alice - Bruno Miguel-Alexandre
B11-32	00:14	1	Alice-Bruno
B11-33	01:17	3 e 5	Gabriela-Nisa Amanda-Ricardo
B11-34	00:42	3 e 5	Gabriela-Nisa Amanda-Ricardo
B11-35	00:47	2	Alice - Bruno Miguel-Alexandre
B11-36	00:31	2	Alice-Bruno Miguel-Alexandre
B11-37	00:07	2	Alice-Bruno
B11-38	01:15	4 e 6	Gabriela-Nisa Amanda-Ricardo
B11-39	00:55	4 e 7	Gabriela-Nisa Amanda-Ricardo
B11-40	00:35	4 e 7	Gabriela-Nisa Amanda-Ricardo
B11-41	00:07	4 e 7	Gabriela-Nisa Amanda-Ricardo
B11-42	00:31	4 e 7	Gabriela-Nisa Amanda-Ricardo
B11-43	00:15	3	Alice-Bruno Miguel-Alexandre
B11-44	01:33	3	Alice-Bruno Miguel-Alexandre
B11-45	00:17	3	Alice-Bruno Miguel-Alexandre
B11-46	01:13	4 e 7	Gabriela-Nisa Amanda-Ricardo
B11-47	01:22	3	Alice-Bruno Miguel-Alexandre
B11-48	00:14	3	Alice-Bruno
B11-49	01:05	3	Nicole-Alexandre
B11-50	01:02	6	Rogério
B11-51	01:36	4	Nicole-Alexandre

B11-52	01:02	4	Nicole-Alexandre
B11-53	02:17	5 e 7	Amanda-Ricardo Nisa-Gabriela
B11-54	00:41	4	Nicole-Alexandre
B11-55	00:25	5	Alice
B11-56	00:42	4	Nicole-Alexandre
B11-57	00:25	6	Rogério
B11-58	00:31	7	Rogério
B11-59	00:30	5	Alice
B11-60	01:24	5	Nicole-Alexandre
B11-61	00:22	7	Rogério
B11-62	00:17	5	Nicole-Alexandre
B11-63	00:39	5	Alice
B11-64	00:44	5 e 8	Nuno-Platão Kelvin-Theo
B11-65	00:58	8	Valdo-Cláudio
B11-66	02:27	5	Kelvin-Theo
B11-67	00:22	5	Kelvin-Theo
B11-68	00:48	8	Valdo-Cláudio
B11-69	00:49	5	Nicole-Alexandre Alice
B11-70	00:35	3	Michel
B11-71	01:02	7	Rogério
B11-72	00:24	5	Alice
B11-73	01:50	5	Kelvin-Theo
B11-74	00:36	5 e 7	Nicole-Alexandre Rogério
B11-75	00:40	7 e 9	Gabriela-Rogério Igor
B11-76	00:25	7 e 9	Gabriela-Rogério Igor
B11-77	00:33	7 e 9	Gabriela-Rogério Igor
B11-78	00:46	7	Gabriela-Rogério Igor
B11-79	00:34	6 e 7	Amanda-Ricardo Hélio-Paulo
B11-80	00:52	6 e 7	Amanda-Ricardo Hélio-Paulo
B11-81	00:12	7	Amanda-Ricardo Hélio-Paulo

B11-82	00:08	7	Amanda-Ricardo Hélio-Paulo
B11-83	00:11	7	Amanda-Ricardo Hélio-Paulo
B11-84	00:16	7	Amanda-Ricardo Hélio-Paulo
B11-85	01:02	2	Eloíza-Theo
B11-86	02:22	8	Valdo-Cláudio
B11-87	01:42	7	Platão-Nuno
B11-88	00:40	7	Platão-Nuno
B11-89	00:47	7	Platão-Nuno
B11-90	00:19	7	Platão-Nuno
B11-91	00:45	3	Eloíza-Theo
B11-92	01:02	7	Alice-Kelvin
B11-93	00:45	8	Valdo-Cláudio
B11-94	00:48	7	Helena-Theo
B11-95	00:24	7 e 8	Helena-Theo Valdo-Cláudio
B11-96	00:07	8	Valdo-Cláudio
B11-97	03:32	8	Valdo-Cláudio
B11-98	10:24	1	Valdo
B11-99	07:04	2	Eloíza-Helena Platão-Nuno
B11-100	06:06	2	Valdo-Cláudio
B11-101	04:17	2 e 3	Valdo-Cláudio Platão-Nuno
B11-102	11:55	2, 3 e 4	Helena-Tomás Valdo-Cláudio Platão-Nuno
B11-103	04:45	5	Platão-Nuno
B11-104	04:12	5	Platão-Nuno
B11-105	01:20	5	Platão-Nuno
B11-106	00:09	5	Platão-Nuno
B11-107	00:30	6 e 8	Valdo-Cláudio Helena-Tomás
B11-108	00:14	6 e 8	Valdo-Cláudio Helena-Tomás
B11-109	00:13	7 e 8	Valdo-Cláudio Helena-Theo
B11-110	00:22	7 e 8	Valdo-Cláudio Helena-Theo

B11-111	00:25	7 e 9	Rogério-Gabriela Igor
B11-112	00:08	7	Amanda-Ricardo Rogério-Gabriela
B11-113	00:58	7	Rogério-Gabriela Igor-Elisabete
B11-114	00:19	7	Rogério-Gabriela Igor-Elisabete
B11-115	00:14	7	Rogério-Gabriela Igor-Elisabete
B11-116	00:22	8	Valdo-Cláudio
B11-117	00:12	8	Valdo-Cláudio
B11-118	00:46	8	Valdo-Cláudio
B11-119	00:35	8	Valdo-Cláudio
B11-120	00:06	7	Helena-Tomás
B11-121	00:30	7	Helena-Tomás
B11-122	00:52	7	Helena-Tomás
B11-123	00:14	7	Helena-Tomás
B11-124	00:34	7	Helena-Tomás
B11-125	01:15	7	Helena-Tomás
B11-126	00:33	7	Helena-Tomás
B11-127	00:41	7	Helena-Tomás
B11-128	00:23	7	Helena-Tomás
B11-129	00:05	7	Helena-Tomás
B11-130	00:26	7	Helena-Tomás
B11-131	00:13	7	Amanda-Ricardo
B11-132	00:15	7	Amanda-Ricardo
B11-133	00:24	7	Nicole-Alexandre
B11-134	00:32	7	Nicole-Alexandre
B11-135	00:15	7	Nicole-Alexandre
B11-136	00:28	7	Nicole-Alexandre
B11-137	00:38	7	Nicole-Alexandre
B11-138	00:26	7	Nicole-Alexandre
B11-139	00:36	7	Valdo-Cláudio
B11-140	00:15	7	Valdo-Cláudio
B11-141	01:33	7	Valdo-Cláudio
B11-142	00:18	7	Valdo-Cláudio
B11-143	00:07	7	Valdo-Cláudio
B11-144	00:44	7	Nisa-Gabriela Hélio-Paulo
B11-145	02:05	7	Nisa-Gabriela Hélio-Paulo

B11-146	00:08	7	Nisa-Gabriela Hélio-Paulo
B11-147	00:23	7	Nisa-Gabriela Hélio-Paulo
B11-148	00:14	7	Nisa-Gabriela Hélio-Paulo
B11-149	02:52	7	Gabriela-Nisa
B11-150	01:11	7	Nisa-Gabriela Hélio-Paulo
B11-151	00:49	7	Nisa-Gabriela Hélio-Paulo
B11-152	00:13	7	Nisa-Gabriela Hélio-Paulo
B11-153	00:09	7	Gabriela-Nisa
B11-154	00:22	7	Hélio-Paulo
B12-1	27:26	1, 2 e 3	Pedro-Isabela Bolivar-Ângelo
B12-2	30:47	1, 2, 3, 4 e 5	Marisa-Jaqueline André-Renan Gustavo-Francisco Aurora-Luiza
B12-3	27:20	8	Aurora-Luiza Pedro-Isabela
B12-4	03:29	1	Gustavo-Francisco Naiara-Geovane
B12-5	00:52	1	Gustavo-Francisco
B12-6	01:02	2	Gustavo-Francisco Naiara-Geovane
B12-7	02:43	2	Gustavo-Francisco Naiara-Geovane
B12-8	01:21	2	Gustavo-Francisco Naiara-Geovane
B12-9	00:50	2	Kassia
B12-10	02:33	2	Kassia
B12-11	03:56	3	Gustavo-Francisco Naiara-Geovane
B12-12	00:27	1	Luís
B12-13	01:02	1	Luís
B12-14	01:14	1	Luís
B12-15	00:55	2	Luís
B12-16	01:09	2 e 4	Pedro-Isabela Bolivar-Ângelo

B12-17	00:07	2 e 4	Pedro-Isabela Bolivar-Ângelo
B12-18	00:11	2 e 4	Pedro-Isabela Bolivar-Ângelo
B12-19	00:57	1	Jéssica-Renato
B12-20	00:17	1	Jéssica-Renato
B12-21	01:29	2 e 5	Pedro-Isabela Bolivar-Ângelo
B12-22	00:32	1	Jéssica-Renato
B12-23	00:54	1 e 5	Jéssica-Renato Naiara-Geovane
B12-24	00:36	2 e 5	Ângelo-Bolivar Pedro-Isabela
B12-25	01:42	2 e 5	Ângelo-Bolivar Pedro-Isabela
B12-26	01:33	2 e 5	Ângelo-Bolivar Pedro-Isabela
B12-27	00:32	2	Luís
B12-28	00:17	2 e 4	Luís-Tomé Kassia
B12-29	00:27	5	Pedro-Isabela
B12-30	00:46	5	Pedro-Isabela
B12-31	00:35	2	Jéssica-Renato
B12-32	00:37	3 e 5	Ângelo-Bolivar Pedro-Isabela
B12-33	01:39	3 e 4	Luís-Tomé Kassia
B12-34	01:24	6	Naiara-Geovane
B12-35	00:49	3 e 5	Luís-Tomé Kassia
B12-36	01:10	4 e 5	Ângelo-Bolivar Pedro-Isabela
B12-37	00:29	3	Jéssica-Renato
B12-38	00:12	3	Jéssica-Renato
B12-39	00:11	4 e 5	Luís-Tomé Kassia
B12-40	00:40	8	Naiara-Geovane
B12-41	01:04	6	Pedro-Isabela
B12-42	00:31	8	Naiara-Geovane
B12-43	00:58	7	Pedro-Isabela
B12-44	01:25	8	Pedro-Isabela
B12-45	02:19	78	Pedro-Isabela

B12-46	01:49	7 e 8	Naiara-Geovane Pedro-Isabela
B12-47	01:11	8	Naiara-Geovane
B12-48	01:21	8	Pedro-Isabela
B12-49	00:40	8	Pedro-Isabela
B12-50	00:15	9	Naiara-Geovane
B12-51	00:37	8	Pedro-Isabela
B12-52	00:20	5	Joice-Tomé
B12-53	00:16	9	Naiara-Geovane
B12-54	00:41	8	Pedro-Isabela
B12-55	00:05	5	Joice-Tomé
B12-56	00:19	5	Joice-Tomé
B12-57	00:33	5	Bolivar-Jéssica
B12-58	00:16	5	Bolivar-Jéssica
B12-59	13:00	1 e 2	Aurora-Luiza André-Renan
B12-60	02:42	2	Aurora-Luiza
B12-61	02:42	2 e 3	Aurora-Luiza André-Renan
B12-62	04:46	3	Aurora-Luiza André-Renan
B12-63	00:34	6	Aurora-Luiza
B12-64	00:49	6	Aurora-Luiza
B12-65	00:58	6	Aurora-Luiza
B12-66	00:53	6	Aurora-Luiza
B12-67	00:47	6	André-Renan
B12-68	01:00	7	Aurora-Luiza
B12-69	00:14	7	Aurora-Luiza André-Renan
B12-70	00:15	7	Gustavo-Francisco
B12-71	00:16	6 e 8	Gustavo-Francisco Naiara-Geovane
B12-72	01:31	3 e 6	Renato-Roberta Marisa-Jaqueline
B12-73	00:12	4 e 7	Renato-Roberta Marisa-Jaqueline
B12-74	00:24	4 e 7	Renato-Roberta Marisa-Jaqueline
B12-75	00:19	4 e 7	Renato-Roberta Marisa-Jaqueline
B12-76	00:25	4 e 7	Renato-Roberta Marisa-Jaqueline

B12-77	00:30	6	Kassia
B12-78	02:00	6 e 8	Renato-Roberta Marisa-Jaqueline
B12-79	00:13	9	Naiara-Geovane-Luís
B12-80	00:21	9	Naiara-Geovane-Luís
B12-81	00:39	8	Naiara-Geovane-Luís
B12-82	01:57	8	Naiara-Geovane-Luís
B12-83	00:23	8	Naiara-Geovane-Luís
B12-84	01:14	8	Naiara-Geovane-Luís
B12-85	00:24	7 e 8	Roberta-Renato Marisa-Jaqueline-Tomé
B12-86	00:41	7 e 8	Roberta-Renato Marisa-Jaqueline-Tomé
B12-87	00:10	7	Marisa-Jaqueline-Tomé
B13-1	08:51	1	Sílvio-Mariana Margarida-Grigor
B13-2	29:03	4 e 5	Sílvio-Mariana Margarida-Grigor
B13-3	02:17	5	Diogo-Jonas
B13-4	35:50	1, 2, 3, 4, 5 e 6	Margarida-Grigor Nara-Rafaela Mariana
B13-5	01:20	5	Diogo-Jonas
B13-6	02:16	9	Cristina-Rafaela
B13-7	00:34	5	Diogo-Jonas
B13-8	02:01	7	Leonardo-Wiliam Sílvio-Jéferson
B13-9	01:49	9	Cristina-Rafaela
B13-10	01:27	5	Diogo-Jonas
B13-11	01:01	5	Diogo-Jonas
B13-12	00:30	6	Cristina-Rafaela
B13-13	00:27	5 e 7	Diogo-Jonas Sílvio-Jéferson
B13-14	08:58	1	Cristina-Kate Sílvio-Mariana Margarida-Grigor Elias-Eliseu
B13-15	05:32	1	Margarida-Grigor
B13-16	08:06	2	Margarida-Grigor
B13-17	11:24	1 e 2	Mariana-Sílvio Margarida-Grigor
B13-18	00:26	1	Wiliam-Leonardo

B13-19	00:32	1	Nara-Rafaela
B13-20	00:36	1	Wiliam-Leonardo Jéferson
B13-21	00:54	1	Nara-Rafaela
B13-22	00:39	1	Jéferson
B13-23	01:07	1	Nara-Rafaela
B13-24	01:43	1	Wiliam-Leonardo
B13-25	00:36	1	Nara-Rafaela
B13-26	00:21	1	Jéferson
B13-27	00:55	1	Jéferson
B13-28	00:16	1	Jéferson
B13-29	01:44	1	Nara-Rafaela
B13-30	04:00	1 e 2	Wiliam-Leonardo Jéferson
B13-31	08:00	4 e 5	Mariana-Sílvio Kate-Cristina Elias-Eliseu
B13-32	02:26	2	Wiliam-Leonardo Jéferson
B13-33	02:27	2	Rafaela-Nara
B13-34	00:05	2	Rafaela-Nara
B13-35	00:46	2 e 3	Wiliam-Leonardo Jéferson
B13-36	00:42	2 e 3	Wiliam-Leonardo Jéferson
B13-37	00:44	2 e 3	Wiliam-Leonardo Jéferson
B13-38	02:00	2 e 4	Wiliam-Leonardo Jéferson
B13-39	01:15	3	Nara-Rafaela
B13-40	01:18	3	Nara-Rafaela Jéferson
B13-41	01:14	1 e 5	Diogo-Jonas Wiliam-Leonardo
B13-42	02:21	1 e 5	Diogo-Jonas Wiliam-Leonardo
B13-43	00:45	4	Jéferson
B13-44	01:04	1 e 5	Diogo-Jonas Wiliam-Leonardo
B13-45	00:20	4	Jéferson
B13-46	00:49	2 e 5	Wiliam-Leonardo Roni

B13-47	01:03	4	Jéferson
B13-48	01:36	5	Wiliam-Leonardo
B13-49	00:35	2 e 5	Diogo-Jonas Wiliam-Leonardo
B13-50	01:40	2 e 5	Wiliam-Leonardo Yngrid-Marcos
B13-51	00:29	2 e 7	Yngrid-Marcos Elias-Eliseu
B13-52	05:15	2 e 5	Diogo-Jonas Wiliam-Leonardo
B13-53	00:25	6	Wiliam-Leonardo
B13-54	00:22	6	Wiliam-Leonardo
B13-55	00:41	5 e 8	Jéferson
B13-56	01:06	4	Rafaela-Nara
B13-57	00:40	3	Diogo-Jonas
B13-58	00:27	3	Diogo-Jonas
B13-59	01:06	7	Wiliam-Leonardo
B13-60	01:56	7	Wiliam-Leonardo
B13-61	01:07	3 e 7	Wiliam-Leonardo Diogo-Jonas
B13-62	00:49	7	Wiliam-Leonardo
B13-63	01:13	7	Wiliam-Leonardo
B13-64	00:12	5	Roni
B13-65	03:34	1	Mariana-Sílvio
B13-66	02:37	1	Mariana-Sílvio
B13-67	00:29	8	Mariana-Elias
B13-68	00:17	8	Cristina-Kate Wiliam-Leonardo
B13-69	00:48	2	Letícia-Ivone
B13-70	01:50	4	Diogo-Jonas
B13-71	01:05	8	Mariana-Elias
B13-72	00:16	4	Diogo-Jonas
B13-73	01:50	2	Letícia-Ivone
B13-74	00:52	8	Mariana-Elias
B13-75	00:45	6	Sílvio-Jéferson
B13-76	01:15	8	Mariana-Elias
B13-77	00:46	8	Mariana-Elias
B13-78	00:32	9	Wiliam-Leonardo
B13-79	00:31	5	Diogo-Jonas
B13-80	00:23	8	Mariana-Elias
B13-81	00:08	5	Yngrid-Marcos
B13-82	00:10	6	Sílvio-Jéferson

B13-83	00:11	9	Mariana-Elias
B13-84	00:20	4	Letícia-Ivone
B13-85	00:18	5	Yngrid-Marcos
B13-86	00:32	4	Letícia-Ivone
B13-87	00:57	5	Diogo-Jonas
B13-88	00:10	9	Mariana-Elias
B13-89	00:08	7	Nara-Rafaela
B13-90	00:30	4	Letícia-Ivone
B13-91	01:06	7 e 8	Wiliam-Leonardo Cristina-Kate
B13-92	00:31	7 e 8	Wiliam-Leonardo Cristina-Kate
B13-93	00:07	7 e 8	Wiliam-Leonardo Cristina-Kate
B13-94	00:50	7	Wiliam-Leonardo
B13-95	10:04	2	Cristina-Kate Elias-Eliseu
B13-96	07:03	3	Cristina-Kate Elias-Eliseu
B13-97	06:47	4	Cristina-Kate Elias-Eliseu
B13-98	08:00	4 e 5	Cristina-Kate Elias-Eliseu
B13-99	09:12	6	Cristina-Kate Elias-Eliseu
B13-100	00:11	8	Cristina-Kate Wiliam-Leonardo
B13-101	00:09	8	Cristina-Kate Wiliam-Leonardo
B13-102	00:28	8	Wiliam-Leonardo
B13-103	00:11	8	Wiliam-Leonardo
B13-104	00:17	8 e 9	Cristina-Kate Wiliam-Leonardo
B13-105	00:15	8 e 9	Cristina-Kate Wiliam-Leonardo
B13-106	02:03	8 e 9	Cristina-Kate Wiliam-Leonardo
B13-107	00:14	6 e 7	Sílvio-Jéferson Wiliam-Leonardo
B13-108	00:57	3	Rubem-Nícolas
B13-109	01:04	3 e 5	Joice-Yara Marcos-Letícia

B13-110	00:55	3 e 5	Joice-Yara Marcos-Letícia
B13-111	00:12	4	Rubem-Nícolas
B13-112	04:10	4	Rubem-Nícolas
B13-113	00:50	4 e 5	Joice-Yara Marcos-Letícia
B13-114	00:36	4 e 5	Joice-Yara Marcos-Letícia
B13-115	00:12	5	Diogo-Jonas
B13-116	00:09	5	Rubem-Nícolas
B13-117	00:08	5	Rubem-Nícolas
B13-118	00:13	5	Rubem-Nícolas
B13-119	01:05	5	Rubem-Nícolas Diogo-Jonas
B13-120	01:01	5	Rubem-Nícolas
B13-121	00:58	5	Rubem-Nícolas
B13-122	00:11	5	Rubem-Nícolas
B13-123	00:11	5	Rubem-Nícolas
B13-124	02:16	5	Rubem-Nícolas
B13-125	00:08	5	Rubem-Nícolas
B13-126	01:16	5	Joice-Yara
B13-127	00:51	5	Diogo-Jonas
B13-128	01:12	6	Letícia-Marcos
B13-129	00:19	6	Letícia-Marcos
B13-130	00:05	9	Cristina-Rafaela
B13-131	00:16	9	Cristina-Rafaela
B13-132	00:11	9	Mariana

APÊNDICE 1 – Artigo publicado na RENOTE

Concepção de Objetos Digitais de Aprendizagem para Combinatória nos Anos Iniciais.

Autores: Elisa Friedrich Martins e Marcus V. de A. Basso

DOI: https://doi.org/10.22456/1679-1916.86032

Concepção de Objetos Digitais de Aprendizagem para Combinatória nos Anos Iniciais

Elisa Friedrich Martins – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação UFRGS – titamat@yahoo.com.br
Marcus Vinicius de Azevedo Basso – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação UFRGS – mbasso@ufrgs.br

Resumo: O presente artigo apresenta o desenvolvimento de um Objeto Digital de Aprendizagem envolvendo Análise Combinatória voltado para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. O planejamento do material digital, suas características e objetivos estão descritos e atendem aos requisitos apontados pela literatura. A concepção está fundamentada na teoria de Jean Piaget sobre a construção do conhecimento. Uma prospecção por material similar nos permitiu concluir não existir Objetos Digitais de Aprendizagem sobre essa temática para a faixa etária considerada, apontando para a necessidade de seu desenvolvimento e na perspectiva de contribuir para a formação Matemática dos alunos dos anos iniciais.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Anos iniciais, Objetos de Aprendizagem, Matemática.

Conception of Digital Materials for Combinatorial in the Primary School

Abstract: The present article presents the development of a Digital Object of Learning involving Combinatorial Analysis aimed at students of the Elementary School. The planning of the material, its characteristics and objectives are described and meet the requirements pointed out in the literature. Also discussed is the theoretical basis on Jean Piaget's knowledge construction used in the object design process. A survey of similar resources allowed us to conclude that there were no Digital Learning Objects on this theme for the age group considered, pointing out the need for its development and the perspective of contributing to the mathematical formation of the students of the Primary School.

Keywords: Combinatorial, Primary School, Learning Objects, Mathematics

APÊNDICE 2 – Artigo publicado na RENOTE

Criação de objeto digital como suporte para aprendizagem de combinatória nos Anos Iniciais.

Autores: Elisa Friedrich Martins, Marcus V. de A. Basso e Lucas Vieira Lima.

DOI: https://doi.org/10.22456/1679-1916.95845

Criação de objeto digital como suporte para aprendizagem de Combinatória nos Anos Iniciais

Elisa Friedrich Martins – PGIE – UFRGS – titamat@yahoo.com.br
Lucas Vieira Lima – IME – UFRGS – lucaz.vl1@gmail.com
Marcus Vinicius de Azevedo Basso – IME – PPGEMat – PGIE – UFRGS – mbasso@ufrgs.br

Resumo

Nesse artigo, apresenta-se as etapas de desenvolvimento de um Objeto Digital de Aprendizagem (ODA) utilizado em pesquisa sobre o pensamento combinatório de estudantes dos Anos Iniciais. Os requisitos do ODA, assim como seus aspectos técnicos e teóricos, são apresentados de maneira a elucidar sua criação e desenvolvimento. Apresenta-se a cronologia da criação, desde a primeira versão até sua versão atual bem como os resultados do uso com alunos dos anos iniciais de uma escola pública do Ensino Fundamental. A importância desse tipo de material e a relevância de sua utilização nas escolas são aspectos discutidos no texto. A partir dos dados produzidos até o presente momento, pode-se dizer que sua utilização é adequada para a faixa etária para o qual foi planejado, constituindo-se em material que pode favorecer a aprendizagem das primeiras noções de Análise Combinatória por alunos dos Anos Inicias do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: combinatória, matemática, anos iniciais, objeto de aprendizagem.

Digital Object Creation as a Support for learn Combinatorics at the early years of Elementary School Learning

Abstract

In this article we present the development stages of a Digital Learning Object used in research on the combinatorial thinking of early years students. The requirements of the Digital Learning Object, as well as its technical and theoretical aspects, are presented in order to elucidate its creation and development. We present the chronology of creation, from the first version to its current version as well as the results of the use with students of the initial years of a public elementary school. The importance of this type of material and the relevance of its use in schools are aspects discussed in the text. From the data produced up to the present time, it can be said that its use is adequate for the age group for which it was planned, constituting itself in material that can favor the learning of the first notions of Combinatorial Analysis by students of the beginning years of Elementary School.

APÊNDICE 3 – Trabalho apresentado no EIEM

Uma aula de combinatória na escola primária: usando objeto digital de aprendizagem
Autores: Elisa Friedrich Martins e Marcus V. de A. Basso
Título da publicação: Livro de Atas do EIEM 2018, Encontro de Investigação em Educação Matemática. Coimbra, Portugal. Novembro de 2018.

UMA AULA DE COMBINATÓRIA NA ESCOLA PRIMÁRIA: USANDO OBJETO DIGITAL DE APRENDIZAGEM

Elisa Friedrich Martins
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil
titamat@yahoo.com.br

Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil
mbasso@ufrgs.br

Resumo: Este trabalho traz parte da pesquisa de doutoramento na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil. A investigação em execução estuda o desenvolvimento do pensamento combinatório de estudantes do quarto ano da Educação Básica de uma escola pública brasileira fazendo uso de um Objeto Digital de Aprendizagem (ODA). O ODA foi desenvolvido especificamente para a pesquisa e apresenta nove problemas envolvendo situações de combinação, arranjo e permutação. Os problemas foram resolvidos parcial ou completamente pelos alunos e as soluções apresentadas por eles são analisadas. São citadas outras pesquisas sobre a temática, que trazem a importância deste tópico ser trabalhado desde os primeiros anos de escolarização, corroborando com a ideia proposta pela investigação. Este trabalho apresenta a dinâmica da aula com a utilização do ODA, tornando o tempo da escola mais personalizado e respeitando o ritmo de trabalho dos alunos. Os dados analisados aqui sintetizam as mudanças na maneira de resolver os problemas, que são percebidas através das soluções apresentadas pelos participantes. O uso de processos sistematizados na construção das soluções não foi imediato, mas apareceu ao longo dos problemas e, de maneira mais evidente, nos problemas que envolviam respostas maiores que 20.

Palavras-chave: Objeto Digital de Aprendizagem, Pensamento Combinatório, Escola Primária

Introdução

O presente trabalho expõe a dinâmica da aula implementada em processo de investigação relacionado com pesquisa de doutoramento em Informática na Educação,

APÊNDICE 4 – Trabalho apresentado no AIDIPE

Pensamento Combinatório e Objeto Digital de Aprendizagem: Um Estudo Construtivista no Ensino Primário

Autores: Elisa Friedrich Martins e Marcus V. de A. Basso

Título da publicação: Actas del II Encuentro de Doctorandos/as e Investigadores/as Noveles de AIDIPE. Madrid, Espanha. Junho de 2019.

Pensamento Combinatório e Objeto Digital de Aprendizagem: Um Estudo Construtivista no Ensino Primário

Combinatorial Thinking and Digital Learning Object: a construtivist study in Primary School

Elisa Friedrich Martins
Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

A pesquisa de doutoramento em andamento busca compreender o desenvolvimento do Pensamento Combinatório de estudantes do quarto ano (Ensino Primário). Para o estudo, foi desenvolvido um Objeto Digital de Aprendizagem (ODA) que foi utilizado durante a produção de dados. O Método Clinico Piagetiano e a teoria da construção do conhecimento de Jean Piaget fundamentam a pesquisa. Alunos entre 9 e 13 anos resolveram problemas de Análise Combinatória usando o ODA. As resoluções e soluções para o primeiro problema proposto são analisadas no presente texto. O acesso a computadores tornou-se foco de pesquisa quando verificou-se que 57% dos envolvidos não possuía computador em casa, apesar de apenas 18% não terem acesso a internet de sua residência. O uso do ODA mostrou-se, além de um potente instrumento para o trabalho com Matemática, um recurso que propiciou a familiarização dos usuários com o computador. Ainda percebeu-se a importância de permitir que o tempo de cada estudante seja respeitado. Quanto ao pensamento combinatório, verificou-se que as estratégias de resolução e as concepções acerca do problema variavam bstante. Apesar disso, ao longo da pesquisa se evidenciou a descoberta da necessidade de sistematização para a completa solução de alguns problemas.

Descritores: Matemática Combinatória, Escola Primária, Tecnologia Educacional

The doctoral research in progress seeks to understand the development of the Combinatory Thinking of fourth degree students (Primary School). For the study, a Digital Learning Object (DLO) was developed that was used during data production. The Piagetian Clinical Method and Jean Piaget's knowledge-building theory ground the research. Students between 9 and 13 years old solved Combinatorial problems using DLO. The resolutions and solutions for the first problem proposed are analyzed in this text. Access to computers became the focus of research when it was found that 57% of those involved did not have a computer at home, although only 18% did not have internet access from their home. The use of DLO shows a powerful resource for familiarizing users with the computer. Also was felt the importance of respect the time of each student to be respected is still perceived. As for combinatorial thinking, it was found that the strategies of resolution and the conceptions about the problem varied steadily. Nevertheless, throughout the research the discovery of the necessity of systematization for the complete solution of some problems was evidenced.

Keywords: Combinatorial Mathematics; Primary School; Technology Education.

Introdução

O presente trabalho traz os primeiros resultados do processo de investigação relacionado com pesquisa de doutoramento em Informática na Educação, na Universidade Federal do Rio Grande