UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LUANA KUISTER XAVIER

Exploração de conceitos geométricos por meio de fractais com o uso do GeoGebra em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental

Porto Alegre

2020

Luana Kuister Xavier

Exploração de conceitos geométricos por meio de Fractais com o uso do GeoGebra em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada à banca examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob orientação da Prof.ª Dra. Débora da Silva Soares.

Linha de Pesquisa: Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação na Educação Matemática

Porto Alegre

2020

CIP - Catalogação na Publicação

Xavier, Luana Kuister
Exploração de conceitos geométricos por meio de fractais com o uso do GeoGebra em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental / Luana Kuister Xavier. -- 2020.
162 f.
Orientadora: Débora da Silva Soares.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2020.

1. Tecnologias Digitais. 2. GeoGebra. 3. Ensino de Geometria. 4. Fractais.. I. Soares, Débora da Silva, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Luana Kuister Xavier

Exploração de conceitos geométricos por meio de Fractais com o uso do GeoGebra em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada à banca examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Profª. Dra. Débora da Silva Soares – Orientadora
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Alvino Alves Sant´Ana
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Profª. Dra. Aparecida Santana de Souza Chiari
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Finalmente, chego ao término dessa jornada. Não sei dizer quantas vezes me imaginei neste momento, mas sei que foram muitas. Por tantas vezes, o sonho de finalizar esse trabalho pareceu tão distante, que foi quase uma utopia imaginar que eu venceria todas as etapas e chegaria ao instante de escrever estas palavras. Mas aqui estou! Chega o momento de parar, refletir sobre essa jornada e lembrar carinhosamente de cada pessoa que esteve ao meu lado, me direcionando, me encorajando, me dando forças... ou que simplesmente estava ali, de maneira silenciosa, me lembrando a cada segundo que eu não estava sozinha.

Apesar de não ser uma pessoa religiosa, começo agradecendo à Deus, que considero ser uma força superior neste universo, e não necessariamente uma figura materializada com a aparência de um ser humano. Agradeço por ter me concedido persistência, força e inspiração, que nem eu mesma imaginava que tinha.

Agradeço à professora Débora da Silva Soares, que foi a pessoa mais importante dessa trajetória. Não sei se foi acaso ou destino, mas tive o prazer e a sorte de poder contar com sua orientação. Obrigada pelos ensinamentos, por compartilhar conhecimento, pelo ombro amigo, pelo apoio e por toda a paciência que teve comigo. Obrigada por ter sido tão persistente e não ter desistido de mim. Jamais terei palavras para expressar o sentimento de gratidão que sinto.

Ao meu namorado e amigo, Adriano Silveira Costa, agradeço pelo amor, carinho e paciência, principalmente durante meus momentos de instabilidade emocional. Obrigada por ser uma pessoa tão compreensível e ter o dom de se colocar no lugar do outro. Obrigada por me apoiar e me acalmar em todos os momentos que precisei. Obrigada pelo abraço e pela presença, por estar ao meu lado mesmo quando não sabia o que dizer.

Agradeço à minha mãe, Eda Kuister Xavier, por sempre me incentivar nos estudos e a “crescer na vida”. Obrigada por não ter medido esforços na minha educação, e por ser esse exemplo de vida, especialmente após a morte do meu pai. Se me tornei a pessoa que sou hoje, foi graças aos seus ensinamentos.

Aos colegas e professores com quem tive contato ao longo do mestrado, agradeço pela convivência, por compartilharem conhecimentos e por contribuírem no meu processo de formação. Agradeço ao PPGEMAT/UFRGS, em especial ao professor Marcus Basso, pela assistência nos momentos em que necessitei. Também, agradeço aos professores da banca examinadora pelo olhar atento ao meu trabalho, pelas contribuições e pelos momentos de aprendizado que me proporcionaram.

Aos meus amigos Carla e Aldo Damiani, agradeço pelo incentivo em todos os momentos, pela força nas situações de desânimo e por comemorarem comigo as minhas conquistas. À minha amiga e atual colega de vice direção, Maristela de Oliveira, agradeço pela compreensão nos momentos em que precisei estar ausente. Ao meu psicólogo, Milton José Cazassa, agradeço pelo apoio e por trazer estratégias que me auxiliaram a vencer a insegurança durante esta etapa. Obrigada pela sua amizade, e por se dispor a me ouvir e auxiliar a qualquer dia, em qualquer horário.

Por fim, agradeço aos colegas da escola em que realizei a intervenção pedagógica, pela convivência e por compartilharem saberes e experiências. Aos alunos que participaram da produção de dados, agradeço pelo carinho, pelos momentos de troca de conhecimento e por contribuírem no aprimoramento da minha prática pedagógica.

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é *analisar potencialidades do GeoGebra para a compreensão de conceitos geométricos a partir da exploração de fractais, especialmente os conceitos de área e perímetro, por alunos de uma turma regular do sexto ano do Ensino Fundamental.* Para tanto, foi realizada uma intervenção pedagógica com os alunos, composta basicamente por quatro momentos: Apresentação da ideia de fractal, construção do Tapete de Sierpinski usando material concreto, exploração do Tapete de Sierpinki no GeoGebra e exploração do Triângulo de Sierpinski no GeoGebra. Com relação ao referencial teórico, foi utilizada a ideia de *seres-humanos-com-mídias,* que entende a mídia como protagonista no processo de construção de conhecimento (BORBA; VILLARREAL, 2005). Partindo dessa ideia, buscou-se identificar as potencialidades do software GeoGebra ao longo da realização das tarefas. Neste trabalho, optou-se pela metodologia de pesquisa qualitativa, e os dados produzidos foram registrados por meio de gravações de áudio, anotações no caderno de campo da pesquisadora e respostas dos alunos no material impresso. A partir da análise de dados, foi possível perceber que as principais potencialidades do GeoGebra nesta pesquisa estão relacionadas com a dinamicidade presente no software, as possibilidades de apresentar diferentes representações de um ente matemático e, principalmente, sua contribuição na visualização. Tais características auxiliaram na compreensão de conceitos geométricos, além de possibilitar a exploração de conceitos abstratos envolvendo a ideia de fractal em um cenário *experimental-com-tecnologia*.

Palavras-chave: Tecnologias Digitais. GeoGebra. Ensino de Geometria. Fractais.

ABSTRACT

The main goal of this research is *to analyze the potential of GeoGebra is for the understanding of geometric concepts from the exploration of fractals, especially the concepts of area and perimeter, by students of a regular class of the sixth grade of Elementary School.* In order to do so, a pedagogical intervention was carried out with the students, basically consisting of four moments: Presentation of the idea of fractal, construction of the Sierpinski Carpet using concrete material, exploration of the Sierpinki Carpet in GeoGebra and exploration of the Sierpinski Triangle in GeoGebra. As for the theoretical framework, the idea of *humans-with-media* was used, which understands the media as a protagonist in the process of knowledge construction (BORBA; VILLARREAL, 2005). With this in mind, we tried to identify the potential of the GeoGebra software to carry out the tasks. In this sense, the qualitative research methodology was chosen, and the data produced were registered through audio recordings, notes in the researcher's field notebook and students' answers in the printed material. Based on the data analysis, it was possible to realize that the main potentialities of GeoGebra in this research are related to the dynamics present in the software, the possibilities of presenting different representations of a mathematical entity and, mainly, their contribution in visualization. Such characteristics helped in the understanding of geometric concepts, in addition to enabling the exploration of abstract concepts involving the idea of fractal in an *experimental-with-technology* scenario.

Keywords: Digital Technologies. GeoGebra. Geometry Teaching. Fractals.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Processo de construção do Triângulo de Sierpinski. 42
Figura 2 - Processo de construção do Tapete de Sierpinski. 44
Figura 3 - Quadrado e segmento de reta. 46
Figura 4 - Triângulo e Tapete de Sierpinski...48
Figura 5 - Interface do software GeoGebra. 57
Figura 6 - Exemplos de fractais na natureza. 59
Figura 7 - Árvore Pitagórica e Tapete de Sierpinski 59
Figura 8 - Tapete de Sierpinski. 61
Figura 9 - Triângulo de Sierpinki feito com cartolina. 62
Figura 10 - Applet do Triângulo de Sierpinski..64
Figura 11 - Atividades propostas aos alunos...64
Figura 12 - Respostas do primeiro questionamento. 65
Figura 13 - Respostas do segundo questionamento. 66
Figura 14 - Respostas do terceiro questionamento. 66
Figura 15 - Respostas do quarto questionamento..67
Figura 16 – Samambaia. 75
Figura 17 - Exemplos de fractais na natureza. 78
Figura 18 - Árvore Pitagórica...79
Figura 19 – Passos da construção da Árvore Pitagórica..81
Figura 20 - Tapete de Sierpinski. 84
Figura 21 - Passos da construção do Tapete de Sierpinski no nível 1. 85
Figura 22 - Passos da construção do Tapete de Sierpinski no nível 2. 86
Figura 23 - Triângulo de Sierpinski...88
Figura 24 - Passos da construção do Tapete de Sierpinski no nível 1. 89
Figura 25 – Respostas da Dupla 11. 92
Figura 26 - Respostas da Dupla 3. 93
Figura 27 - Respostas da Dupla 9. 94
Figura 28 - Resposta da Dupla 7...95
Figura 29 - Resposta da Dupla 6...96
Figura 30 - Resposta da Dupla 9...96
Figura 31 - Tapete de Sierpinski construído com papel emborrachado. 100
Figura 32 - Tapete de Sierpinski construído com papel emborrachado. 100
Figura 33 - Tapete de Sierpinki construído pela Dupla 11. 106
Figura 34 - Applet do Tapete de Sierpinski. 111
Figura 35 - Applet do Tapete de Sierpinski. 111
Figura 36 - Resposta da Dupla 7...113
Figura 37 - Resposta da Dupla 8...119
Figura 38 - Resposta da Dupla 1...120
Figura 39 – Resposta da Dupla 5. 120
Figura 40 - Resposta da Dupla 11...120
Figura 41 - Resposta da Dupla 11...122

Figura 42 - Resposta da Dupla 1..122
Figura 43 - Resposta da Dupla 11..125
Figura 44 - Resposta da Dupla 7..125
Figura 45 - Resposta da Dupla 11..125
Figura 46 - Respostas da Dupla 8. 126
Figura 47 - Respostas da Dupla 6. 126
Figura 48 - Applet do Triângulo de Sierpinski..127
Figura 49 - Segmentos representando o perímetro do Tapete de Sierpinski. 128
Figura 50 - Resposta da Dupla 7..130
Figura 51 - Resposta da Dupla 1..131
Figura 52 - Resposta da Dupla 6..134
Figura 53 - Resposta da Dupla 1..135
Figura 54 - Resposta da Dupla 6..135
Figura 55 - Resposta da Dupla 10..136
Figura 56 - Resposta da Dupla 7..136
Figura 57 - Resposta da Dupla 1..138
Figura 58 - Resposta da Dupla 6..138
Figura 59 - Resposta da Dupla 9..138

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Área e Perímetro do Triângulo de Siespinski 43
Quadro 2 - Área e perímetro do Tapete de Sierpinski. 45
Quadro 3 – Respostas envolvendo a ideia de fractal. 91

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14
1. 1 GÊNESE DO ESTUDO 14
1. 2 CONSTRUÇÃO DAS TAREFAS E DA PERGUNTA DIRETRIZ.......................... 17
1. 3 RELEVÂNCIA DA PESQUISA.. 20
1. 4 ESTRUTURA DO TRABALHO 24
2 REFERENCIAL TEÓRICO 27
2.1 REVISÃO DE LITERATURA 27
2.2 TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA 32
2. 3 ENSINO DE GEOMETRIA E SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA 35
2. 4 GEOMETRIA FRACTAL.. 40
2. 4. 1 Triângulo de Sierpinski 42
2. 4. 2 Tapete de Sierpinski 44
2 . 4. 3 Noção intuitiva de fractal 46
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 49
3. 1 METODOLOGIA DE PESQUISA QUALITATIVA 49
3. 2 CONTEXTO DA PESQUISA 55
3. 2. 1 A escola.. 55
3. 2. 2 A turma... 56
3. 3 A ESCOLHA DO SOFTWARE GEOGEBRA 56
3. 4 ATIVIDADE PILOTO 57
3. 5 PROCESSO DE REFLEXÃO SOBRE AS ATIVIDADES.................................... 68
4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS 71
4.1 PRIMEIRO MOMENTO – APRESENTAÇÃO DA IDEIA DE FRACTAL 72
4.2 SEGUNDO MOMENTO – CONSTRUÇÃO DO TAPETE DE SIERPINSKI USANDO MATERIAL CONCRETO.. 90
4.3 TERCEIRO MOMENTO – EXPLORAÇÃO DO TAPETE DE SIERPINSKI NO GEOGEBRA.. 110
4. 4 QUARTO MOMENTO – EXPLORAÇÃO DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI NO GEOGEBRA.. 126
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 139

REFERÊNCIAS 143
APÊNDICE A – PRODUTO TÉCNICO: RECOMENDAÇÕES AO PROFESSOR 146
APÊNDICE B – APPLETS DO GEOGEBRA 154
APÊNDICE C – TAREFAS REALIZADAS NA ATIVIDADE PILOTO 155
APÊNDICE D – TAREFAS SOBRE NOÇÃO INTUITIVA DE FRACTAL E TAPETE DE SIERPINSKI 156
APÊNDICE E – TAREFAS SOBRE TRIÂNGULO DE SIERPINSKI 158
APÊNDICE F – TERMO DE CONSENTIMENTO DA ESCOLA 161
APÊNDICE G – TERMO DE CONSENTIMENTO DO ALUNO 162

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, começo apresentando minha trajetória acadêmica e profissional, que influenciou na escolha do tema deste estudo. Além disso, faço um breve relato do rumo da pesquisa e do processo de construção da pergunta diretriz, juntamente com algumas das reflexões e inquietações que surgiram neste processo. Na sequência, embasada em alguns autores e nos documentos oficiais da Educação Básica, apresento alguns argumentos para justificar a relevância desta pesquisa. Por fim, finalizo apresentando a estrutura deste trabalho, explicando de forma sucinta os tópicos abordados em cada seção.

1. 1 GÊNESE DO ESTUDO

O principal objetivo deste trabalho é *analisar potencialidades do GeoGebra para a compreensão de conceitos geométricos a partir da exploração de fractais, especialmente os conceitos de área e perímetro, por alunos de uma turma regular do sexto ano do Ensino Fundamental.* Para justificar a escolha deste tema, é relevante falar sobre minha trajetória acadêmica e profissional. Nesta seção, apresento alguns aspectos dessa trajetória que motivaram a escolha dessa pesquisa.

No decorrer da minha graduação em Matemática – Licenciatura Plena, realizada na Universidade Federal de Santa Maria, entre os anos de 2010 e 2014, tive a oportunidade de participar do Programa de Educação Tutorial, como integrante do Grupo PET Matemática da UFSM. Este programa, cujo objetivo é estimular o desenvolvimento de atividades envolvendo a tríade ensino, pesquisa e extensão, proporcionou a participação em diversas atividades, dentre elas, o desenvolvimento de projetos de iniciação científica e elaboração e dinamização de pequenos cursos envolvendo softwares matemáticos.

Dentre estes minicursos, três deles versaram sobre a utilização do software GeoGebra para abordagem de conceitos de Geometria, Funções e Cálculo Diferencial e Integral. A partir deste momento, começou meu interesse pelo uso de tecnologias no ensino de matemática e, em especial, pelo software GeoGebra, por ser um software de geometria dinâmica com potencial para a exploração de diferentes conteúdos, tanto do Ensino Superior como da Educação Básica.

Enquanto integrante do grupo PET, participei de um projeto de iniciação científica, cujo objetivo era desenvolver *applets* para o estudo de Geometria Analítica no Ensino Básico, utilizando o software GeoGebra. Neste projeto, adquiri conhecimentos sobre as ferramentas do software, bem como desenvolvi alguns *applets* com atividades envolvendo diversos conteúdos de geometria analítica, utilizando recursos como variação de parâmetros e construções dinâmicas para relacionar os aspectos algébricos e geométricos dos conteúdos. Neste momento, minha curiosidade por utilizar o software na realidade de sala de aula no Ensino Básico aumentou ainda mais, pois não tive a oportunidade de aplicar as atividades e verificar potencialidades do aplicativo para o ensino desta temática.

No que se refere à escolha da Geometria, esta sempre foi minha área preferida da matemática, mesmo no Ensino Básico. Além disso, a dificuldade que os alunos apresentam com relação aos conceitos geométricos sempre causaram inquietação nas minhas reflexões sobre o ensino de matemática e a prática docente. Inclusive, nas minhas vivências, percebi que, muitas vezes, a dificuldade de alguns alunos em visualizar situações ou resolver problemas que envolvam formas geométricas é tão grande que esta persiste mesmo quando utilizados exemplos cotidianos ou materiais concretos.

No decorrer da minha trajetória acadêmica e profissional, tive a oportunidade de ter maior contato com alunos do Ensino Fundamental, os quais mesmo sendo de diferentes escolas e municípios, frequentemente apresentavam dificuldade na compreensão de conceitos geométricos. Também, em conversa com colegas licenciandos e licenciados em matemática, as dificuldades de alguns alunos nesta temática também sempre foi alvo de discussão e inquietação.

Participei de projetos de ensino e extensão em escolas municipais de Santa Maria/RS, com o intuito de realizar atividades lúdicas no turno inverso, a fim de contribuir para a desmitificação da matemática e auxiliar a compreensão de conteúdos que os alunos apresentassem dificuldades, por meio de uma metodologia diferente da utilizada em sala de aula. Não raramente, um dos principais conteúdos solicitados pela professora titular da turma como sendo o que os alunos mais apresentavam dificuldade, era Geometria.

Há aproximadamente quatro anos, venho atuando como professora nas séries finais do Ensino Fundamental na rede municipal de Gramado/RS, principalmente com alunos de sextos e sétimos anos do Ensino Fundamental. Agora, enquanto professora titular das turmas, continuo me deparando com a dificuldade dos alunos, especialmente do sexto ano, nas aulas de Geometria. Novamente, tais experiências me levaram a refletir sobre possibilidades de estratégias para o ensino e aprendizagem nessa área, visando minimizar as dúvidas apresentadas pelos alunos.

Creio que o sexto ano é o momento em que os conceitos básicos de Geometria começam a ser trabalhados com certa formalidade, e dentre as dificuldades apresentadas pelos alunos está a assimilação da imagem mental de algumas figuras. Por exemplo, ao verem um cubo, muitos alunos dizem que este é um quadrado, mas não percebem que o cubo é uma figura tridimensional cujas faces são quadrados. Ao se depararem com um quadrado rotacionado, os alunos possuem dificuldade em identificar a forma geométrica, pois acreditam que dois de seus lados devem ser paralelos às linhas do caderno. Este tipo de representação é conhecido como figura prototípica (Gravina, 1996), e será tratado com mais detalhes ao longo do trabalho, juntamente com a ideia de imagem mental.

Outro grande problema que identifico nas aulas está relacionado à resolução de problemas que envolvem Geometria. Inclusive, atividades que envolvam situações “cotidianas”, como pensar sobre o cálculo da área do interior de uma piscina para revesti-la com azulejo tornam-se difíceis, e não porque os alunos não conseguem fazer o cálculo, mas porque não conseguem visualizar a situação. Apresentam dificuldade em identificar os polígonos que formam a piscina e em traçar estratégias para resolver o problema o que, consequentemente, pode se tornar um obstáculo para relacionar a matemática com a realidade. Ainda, os alunos comumente confundem área e perímetro, apresentando dificuldade na diferenciação destes conceitos.

Diante de todos estes problemas de aprendizagem, vivenciados por muitos alunos, decidi escolher o software GeoGebra como recurso para o ensino e aprendizagem de conceitos geométricos, como tentativa de desconstruir os equívocos cometidos pelos alunos e também como uma possibilidade de tornar a abordagem da Geometria mais dinâmica e concreta, por meio da visualização e manipulação. Além disso, entendi que os recursos disponíveis no software e a praticidade da sua interface poderiam contribuir para o desenvolvimento de diferentes atividades.

Sobre a temática escolhida, optei pela exploração de fractais, pois considero este um tema interessante e visualmente atrativo, e acredito que possa também despertar o interesse e curiosidade dos alunos. Ainda, este tipo de forma geométrica permite a exploração de diferentes conteúdos matemáticos além da possibilidade de construção e abordagem por meio de softwares de geometria dinâmica. Destaco também que, por meio do estudo de fractais, é possível mostrar aos alunos a existência de outras geometrias, enfatizando que no ambiente em que vivemos, não existem apenas formas geométricas pertencentes à Geometria Euclidiana.

Finalmente, cheguei à suposição que a junção de fractais com recursos tecnológicos poderia ser um tema promissor para os processos de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos, por meio da manipulação dos fractais de forma dinâmica. Ainda, percebi que esta poderia ser uma oportunidade de introduzir, de forma intuitiva, a noção de limite aos alunos do sexto ano, a partir da análise da área e perímetro dos fractais conforme o número de iterações aumentava. Na sequência, faltava definir que tipo de tarefas seriam realizadas, qual seria a pergunta de pesquisa e as teorias a serem utilizadas. Como este foi um processo de decisão bastante lento, será relatado na próxima seção.

1. 2 CONSTRUÇÃO DAS TAREFAS E DA PERGUNTA DIRETRIZ

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 16), “uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo em qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver.” Ou seja, o desafio seguinte foi construir a pergunta diretriz da minha pesquisa. Mesmo sabendo o público alvo, a metodologia de pesquisa, os instrumentos de registro de dados e as temáticas envolvidas, ainda não conseguia formular a minha pergunta diretriz. O que exatamente eu queria investigar? De que forma eu iria conduzir esta pesquisa com os alunos? Que tipo de tarefas eu iria elaborar? Eram alunos de sexto ano... Será que seria possível explorar tais conceitos com eles? Ainda havia muitas dúvidas e incertezas.

Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), uma investigação não requer somente a exploração de problemas difíceis, mas é uma possibilidade de pesquisar questões que nos interessam, buscando formular uma resposta com base em argumentos fundamentados. Pensando em nível de sala de aula, mais especificamente no Ensino Básico, uma investigação matemática pode ser feita acerca de temáticas que os alunos não possuem respostas prontas, ou a partir de perturbações e questionamentos feitos pelo professor, a fim de encontrar uma resposta baseada em argumentos matemáticos e que leve em consideração os conhecimentos que os alunos já possuem.

Esse tipo de procedimento, além de possibilitar a abordagem de conteúdos presentes no currículo da escola, também é uma possibilidade de construção de conhecimento, por meio de experiências, pesquisas, entrevistas, entre outros. “O envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 23).

Refletindo acerca dessas ideias, um dos desafios seria elaborar tarefas que envolvessem as temáticas escolhidas (ensino de Geometria, tecnologias e fractais), articulando os questionamentos de forma que os alunos pudessem relacionar os conhecimentos já adquiridos com a temática proposta, avançando para conceitos mais complexos, tais como a ideia de limite e infinito. Além disso, seria necessário conduzir essa pesquisa de forma que ela se tornasse atrativa para os alunos, fazendo com que eles mobilizassem seus conhecimentos em torno da resolução dos questionamentos, possibilitando um ambiente de aprendizagem, conforme destacado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2016).

Atrelada a isso, estava a preocupação de elaborar tarefas que fossem compatíveis com a série e habilidades cognitivas dos alunos, já que o conteúdo de limite, por exemplo, pode ser dificultoso até mesmo para alunos de graduação, dependendo de sua abordagem. Decidi, então, que faria atividades de forma “dirigida”, ou seja, os alunos receberiam, juntamente com os questionamentos, algumas orientações auxiliando na escolha das ferramentas, atentando para alguns detalhes específicos da construção. A partir dessas observações, os alunos escreveriam suas conclusões e argumentariam com base nos seus conhecimentos matemáticos e no *feedback* dado pelo software.

Ainda tendo em mente a preocupação com o fato de os sujeitos da pesquisa serem crianças, resolvi focar principalmente na parte da visualização, e é neste aspecto que o GeoGebra traria suas principais contribuições. Assim, mesmo havendo questões em que os alunos necessitassem fazer algum cálculo, teriam a representação geométrica da situação para auxiliar na visualização e compreensão do questionamento, ou mesmo no momento de redigir as respostas e argumentos. Ainda sobre o GeoGebra, sua dinamicidade na transição entre as iterações ajudaria na parte visual do problema.

Ademais, faltava definir a pergunta diretriz da pesquisa. Ainda não havia decidido qual seria o foco de análise. Se fosse focar na aprendizagem dos alunos, que teorias de aprendizagem eu poderia usar? Se usasse a Teoria da Atividade como principal referencial teórico, seria interessante analisar as contradições internas que surgiriam no decorrer das atividades? Caso escolhesse investigar o papel do software nesta investigação, seria suficiente utilizar a ideia de *seres-humanos-com-midias*? Novamente, ainda havia muitas dúvidas. Destaco que a dúvida entre esses dois referenciais, dentre tantos envolvendo as temáticas mencionadas, diz respeito aos referenciais teóricos que estavam sendo discutidos pelo grupo de pesquisa com professora orientadora no momento. Além disso, eu estava cursando a disciplina de Tópicos Especiais em Educação Matemática: Tecnologias Digitais e Teoria - Tópicos Especiais em Educação Matemática: Tecnologias Digitais e Teoria da Atividade, que relacionava tais referenciais.

Após algum tempo de reflexão, surgiu a primeira possibilidade de pergunta diretriz: De que forma a exploração de fractais com o GeoGebra pode contribuir para a compreensão de conceitos geométricos? Entretanto, a estrutura desta pergunta sugere que o foco de análise estaria na compreensão dos conceitos geométricos, e não era exatamente isso que eu estava empenhada a fazer. Mesmo sem saber como formular a pergunta, eu sabia que o foco seria investigar as contribuições do software GeoGebra no ensino de Geometria, por meio da construção de fractais.

Após fazer a leitura de algumas dissertações e livros envolvendo diferentes teorias, tive certeza que meu interesse estava no papel da tecnologia. Após muitas conversas com minha orientadora, e graças ao auxílio da banca na qualificação, depois de aproximadamente dezoito meses, a pergunta finalmente surgiu: *Quais as potencialidades do GeoGebra para a compreensão de conceitos geométricos a partir da exploração de fractais em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental?* Aparentemente, meus dados seriam suficientes para responder essa pergunta, faltando apenas definir o objetivo geral da pesquisa e refletir acerca da possibilidade de objetivos específicos. Destaco que o intuito dessa pesquisa é investigar algumas das potencialidades do software GeoGebra neste contexto, não todas. Ou seja, irei analisar as potencialidades que se destacarem ao longo da intervenção pedagógica, sem a pretensão de esgotá-las.

1. 3 RELEVÂNCIA DA PESQUISA

De acordo com Kilpatrick (1996), a relevância é um dos critérios de qualidade mais importantes de uma pesquisa, e também um dos mais difíceis de serem avaliados. Julgar uma pesquisa pode ser algo complexo, e que varia de acordo com o observador. Por exemplo, uma pesquisa envolvendo Educação Matemática e Análise Real pode parecer pouco interessante para um professor dos anos iniciais que ensina as operações básicas, mas será extremamente relevante para um professor de Ensino Superior que atua nesta área. Assim, um dos intuitos desta seção é argumentar sobre a relevância desta pesquisa, no contexto do Ensino Básico, para o campo da Educação Matemática, mais especificamente, sobre o uso de Tecnologias Digitais no Ensino de Geometria.

Nos parágrafos seguintes, farei uma reflexão sobre a importância de trabalhar atividades de exploração e investigação com os alunos em sala de aula, como forma de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico e matemático. Apresento, também, a relevância, sob minha ótica, de abordar as duas principais temáticas que esta pesquisa apresenta, relacionando-as com os textos apresentados na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), a saber: uso de Tecnologias Digitais e Ensino de Geometria. A importância da abordagem de fractais será trabalhada de maneira mais específica na seção 2.4.

Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), vários estudos têm mostrado que investigar é uma forma importante de construir o conhecimento. Do ponto de vista matemático, ao realizar uma investigação, busca-se a solução de determinado problema ou pretende-se encontrar relações entre dois ou mais objetos matemáticos, identificando as propriedades envolvidas. Desta maneira, durante uma investigação, um aluno pode fazer descobertas, encontrar as mais diferenciadas soluções ou identificar relações e propriedades ainda não conhecidas por ele, de forma a aprimorar seus conhecimentos matemáticos.

Um exercício matemático é uma questão que pode ser resolvida, pelo aluno, usando um procedimento já conhecido, ou seja, empregando os conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo dos anos. Na investigação de um problema, o contexto é outro. Não existe uma receita ou conjunto de passos para encontrar a solução. Há uma situação aberta, e é o aluno que irá definir a direção a ser seguida dentro da temática. Ou seja, cabe ao aluno propor suas estratégias de pesquisa, conjecturas, argumentos, entre outros. Assim, além de adquirir conhecimentos, ele também estará praticando valores como determinação, autonomia, criatividade e até mesmo frustração. Como afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 23):

> Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Este é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações.

Alguns documentos orientadores da Educação Básica, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) e a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) também defendem a investigação matemática como sendo importante para a apropriação do conhecimento matemático. Inclusive, os PCN trazem o processo investigativo como parte integrante do processo de construção do aluno como cidadão:

> [...] é importante que o professor estimule os alunos a desenvolver atitudes de organização, investigação, perseverança. Além disso, é fundamental que eles adquiram uma postura diante de sua produção que os leve a justificar e validar suas respostas e observem que situações de erro são comuns, e a partir delas também se pode aprender. Nesse contexto, é que o interesse, a cooperação e o respeito para com os colegas começam a se constituir (BRASIL, 1997, p. 49-50).

Com o intuito de ser um documento plural e contemporâneo, a BNCC foi concebida a fim de sistematizar o conjunto de competências e habilidades indispensáveis a que todos os estudantes têm direito e devem atingir ao término do Ensino Básico. Dentre as propostas pedagógicas apresentadas, este documento norteador traz o uso de algumas tendências para o ensino e aprendizagem de matemática, defendendo a importância destas para a construção do conhecimento matemático:

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2017, p. 264).

Nesse sentido, as tarefas realizadas pelos alunos contemplam as colocações trazidas nestes documentos, por meio da inserção em um ambiente de investigação no qual poderão observar, investigar, experimentar, conjecturar e discutir estratégias, a fim de encontrar soluções e produzir argumentos a partir de seus conhecimentos matemáticos. Diante disso, a interpretação de informações, capacidade de argumentação e comunicação de resultados presentes contribui diante de situações políticas e sociais, indispensáveis para o convívio em sociedade (BRASIL, 1997).

No que se refere ao estudo de Geometria, de acordo com os conteúdos conceituais e procedimentais apresentados nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997, p. 60), espera-se contemplar no estudo de Espaço e Forma, a "percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas". Para tanto, o documento menciona a importância de relacionar a matemática com outras disciplinas e com o cotidiano e espaço em que o aluno vive, e entende que a matemática tem papel decisivo na vida dos seres humanos, o que é possível perceber no primeiro objetivo geral do Ensino Fundamental:

> Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (BRASIL, 1997, p. 37).

Apesar dessas afirmações, em nenhum momento o documento aponta a Geometria Fractal como uma possibilidade para estudar as formas e padrões geométricos presentes na natureza, e muito menos menciona a existência de Geometrias não-euclidianas. Independente disso, o estudo de Fractais pode ser interessante para aproximar as diferentes formas existentes na natureza, como nuvens, plantas e rochas; uma vez que a regularidade presente na Geometria

Euclidiana nem sempre é suficiente para realizar tal representação. Nesse sentido, o presente trabalho vai ao encontro das propostas deste documento.

Ainda no campo da Geometria, as orientações presentes na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) enfatizam o estudo de transformações (ampliações e reduções) de figuras planas, semelhança, congruência e simetria como fundamentais para que o aluno adquira as habilidades de aprendizagem propostas. Novamente, todas estas temáticas podem ser abordadas na Geometria Fractal, e estão presentes nas atividades realizadas pelos alunos, mesmo que de forma implícita.

No tocante ao uso de Recursos Tecnológicos, mesmo não sendo um documento norteador tão recente, os PCN já defendiam sua utilização para a aquisição e construção de conhecimentos. Assim, o uso de softwares educativos é visto como um recurso que pode ser usado para a realização de atividades dirigidas que sirvam para testar conhecimentos, bem como uma possibilidade de interação entre aluno e recurso tecnológico, capaz de proporcionar a construção de conhecimentos. O computador, por sua vez, é visto como um aliado neste processo, pois auxilia o aluno respeitando seu tempo de aprendizagem:

> Ele [o computador] é apontado como um instrumento que traz versáteis possibilidades ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, seja pela sua destacada presença na sociedade moderna, seja pelas possibilidades de sua aplicação nesse processo. Tudo indica que seu caráter lógico-matemático pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que ele permite um trabalho que obedece a distintos ritmos de aprendizagem (BRASIL, 1997, p. 35).

Ainda, a BNCC também menciona o uso de tecnologias, essencial na atividade humana atualmente. Para a matemática, mais especificamente, as Tecnologias Digitais se apresentam como recursos “para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2017, p. 265). Para reafirmar a importância desta tendência, não só na matemática, mas em todas as áreas do conhecimento, reproduzo aqui a quinta competência geral da BNCC (BRASIL, 2017, p. 297):

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Finalmente, é possível perceber que o intuito desta pesquisa converge para as orientações propostas pelos documentos norteadores citados. As atividades planejadas priorizam um ambiente de experimentação e investigação matemática, onde o aluno é o protagonista. O estudo da geometria auxilia na compreensão do mundo à sua volta e dos diferentes tipos de formas geométricas. O recurso tecnológico participa ativamente neste cenário; contribuindo na construção de conhecimento e respeitando o ritmo de aprendizagem do aluno, além de auxiliar na formação do caráter cidadão dele.

Ademais, ainda sobre relevância de uma pesquisa, Kilpatrick (1996, p. 23), afirma que "os resultados de um estudo podem ser a sua parte menos importante. A pesquisa em Educação Matemática ganha sua relevância para a prática ou para as futuras pesquisas por seu poder de nos fazer parar e pensar". Desta forma, acredito que esta pesquisa possa servir como estímulo para que outros professores possam refletir sobre maneiras de inserir as tecnologias em suas práticas, bem como explorar conteúdos matemáticos que não fazem parte do currículo escolar, mas que podem contribuir para que o aluno desenvolva e aprimore seu raciocínio matemático. Além disso, creio que esta investigação também possa servir como inspiração e material de apoio para futuras pesquisas na área.

1. 4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Neste capítulo de introdução, comecei relatando minha trajetória, tanto acadêmica quanto profissional, além de explicar a partir destes relatos o meu interesse acerca das temáticas abordadas. De forma resumida, contei sobre minhas inquietações durante o processo de busca pela pergunta geratriz desta pesquisa, que foi sofrendo alterações até se tornar a pergunta que trago neste trabalho. Trouxe algumas reflexões que justificam a relevância deste trabalho, relacionando a temática abordada com os Documentos Oficias do Ensino Básico e com as ideias de algumas literaturas que tive a oportunidade de estudar.

No segundo capítulo, referencial teórico, a revisão de literatura contém as ideias sintetizadas de alguns trabalhos que também envolveram fractais, e que contribuíram na reflexão sobre a temática e elaboração das tarefas. A seção seguinte destaca algumas das possibilidades do uso de tecnologias digitais no ensino de matemática, com ênfase no construto teórico *seres-humanos-com-mídias.* Apresento algumas ideias importantes nesta teoria, tais como a ideia de moldagem recíproca que pode ser estabelecida entre pensamento e mídia além da possibilidade de *pensar-com-tecnologia,* segundo a qual a natureza do problema muda de acordo com a tecnologia utilizada. Além disso, são abordadas reflexões envolvendo o uso de tecnologias digitais nas representações visuais e sua participação em cenários de investigação.

Na sequência, há um breve relato histórico sobre o ensino de Geometria, além de ponderações sobre as dificuldades enfrentadas nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos. Na tentativa de amenizar essas dificuldades, destaco algumas contribuições que o uso de softwares de geometria dinâmica pode trazer para a abordagem de conceitos geométricos. Para finalizar este capítulo, apresento algumas considerações sobre os fractais explorados na intervenção pedagógica, além de apontar algumas potencialidades da exploração de fractais com base na BNCC (BRASIL, 2017) e nos PCN (BRASIL, 1997).

Os procedimentos metodológicos utilizados estão apresentados no terceiro capítulo, justificando a escolha da metodologia de pesquisa qualitativa na realização desta pesquisa. Além de trazer e discutir algumas das características da pesquisa qualitativa e os instrumentos utilizados para registro dos dados produzidos, apresento o contexto da investigação, descrevendo a escola e a turma de sexto ano onde a intervenção pedagógica foi realizada. Também, justifico a escolha do software GeoGebra para a realização das tarefas propostas.

Ainda no terceiro capítulo, faço um breve relato de uma atividade piloto que foi realizada antes desta intervenção pedagógica, também com uma turma de sexto ano, no ano de 2017. Tal atividade não foi dinamizada com o intuito de fazer uma análise aprofundada dos dados, mas sim de verificar possíveis alterações que deveriam ser feitas nas atividades e na metodologia usada. Por exemplo, a partir da atividade piloto, foi possível perceber a necessidade do trabalho com material concreto e do uso de *applets*. Ao final deste capítulo, proponho uma reflexão sobre as situações observadas e as mudanças que seriam interessantes para a segunda versão desta intervenção.

No quarto capítulo, faço a apresentação e análise dos dados, relacionando os dados produzidos com o referencial teórico apresentado neste trabalho, em especial com a ideia de *seres-humanos-com-mídias.* Assim, o foco principal do trabalho consiste em analisar potencialidades do GeoGebra para a compreensão de conceitos geométricos a partir da exploração de fractais por alunos de uma turma regular do sexto ano do Ensino Fundamental, mas também olhar as outras tecnologias presentes. Por exemplo, discutir também o papel do *PowerPoint* e do material concreto ao longo da realização das tarefas. Por fim, apresento minhas conclusões sobre este trabalho, fazendo uma discussão dos resultados obtidos no decorrer da análise dos dados.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Começo este capítulo apresentando uma síntese de alguns dos trabalhos envolvendo fractais com os quais tive contato ao longo da minha pesquisa. Na sequência, estão algumas ideias relacionadas com o uso de tecnologias digitais e suas contribuições nos processos de ensino e aprendizagem, com ênfase na ideia de *seres-humanos-com-mídias*. Nesse sentido, destaco a possibilidade do uso de softwares de geometria dinâmica para o ensino e aprendizagem de Geometria, uma vez que esse tipo de mídia apresenta, dentre outros recursos, potencialidades relacionadas à visualização, essencial na compreensão de conceitos geométricos. Por fim, apresento algumas ideias envolvendo o estudo de fractais e o cálculo de área e perímetro do Tapete e do Triângulo de Sierpinski.

2.1 REVISÃO DE LITERATURA

Apesar de não ser um dos conteúdos da grade curricular do Ensino Básico, a Geometria Fractal vem, nos últimos anos, sendo objeto de pesquisa de vários docentes. Em seus estudos e intervenções pedagógicas, os professores buscam alternativas variadas para inserir os fractais no contexto de sala de aula, além de relacioná-los com os conteúdos obrigatórios de cada ano ou mesmo com diferentes áreas do conhecimento. Ao realizar buscas no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e nos repositórios de algumas universidades, tive a oportunidade de ter contato com algumas dessas pesquisas, as quais me inspiraram a definir os rumos que meu trabalho seguiria. Ressalto que, nessas buscas, procurei por trabalhos envolvendo Tecnologias Digitais e Fractais, ou então trabalhos envolvendo Fractais aplicados especialmente em turmas do Ensino Fundamental. Na sequência, apresento alguns dos trabalhos cuja leitura contribuiu para a definição da minha pergunta diretriz e elaboração das atividades.

No decorrer de sua experiência docente, Mineli (2012) levantou a hipótese de que grande parte da dificuldade dos alunos na resolução de equações do primeiro grau estava relacionada com a generalização de padrões. A fim de investigar sua conjectura, elaborou uma sequência didática com atividades relacionando fractais e generalização de padrões, usando como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau.

A sequência didática elaborada por Mineli (2012) foi aplicada em uma turma de sétimo ano de uma instituição privada situada na cidade de Ribeirão Preto, momento da vida escolar em que os alunos comumente aprendem equações do primeiro grau. Dentre os resultados obtidos, o autor destaca que as características dos fractais possibilitam o reconhecimento de padrões, que contribuem para o processo de generalização. Além disso, acredita que a visualização de formas geométricas contribui para a organização, generalização e resolução de um problema matemático.

Faria (2012) utilizou o software GeoGebra para investigar quais contribuições a exploração de padrões fractais traz ao processo de generalização de conteúdos matemáticos com alunos do Ensino Médio. Para tanto, os alunos buscavam identificar o padrão existente em cada fractal proposto, expressando-o por meio de uma equação para generalizar área, perímetro e/ou outras propriedades. Além destes, os exercícios abordaram outros conteúdos matemáticos como progressões geométricas, Teorema de Pitágoras e séries (por meio do somatório das áreas).

Com relação aos resultados obtidos por Faria (2012), a partir da análise de dados da pesquisa qualitativa, a autora concluiu que o trabalho contribuiu no processo de generalização dos conteúdos abordados por parte dos alunos. Além disso, destacou a importância da tecnologia digital utilizada, uma vez que o software GeoGebra contribuiu para a percepção das propriedades dos fractais por meio da construção, visualização e manipulação realizada no software.

Por meio de uma pesquisa qualitativa, Padilha (2012) também utilizou a Geometria Fractal, com o auxílio do software GeoGebra, para investigar a contribuição destes na aquisição de conhecimentos algébricos e geométricos em uma turma da 7ª série (atual 8° ano) do Ensino Fundamental. Dentre as atividades realizadas, os alunos exploraram características de vários fractais no GeoGebra, dentre eles, o Tapete e Triângulo de Sierpinski, que também tiveram suas versões em "cartões fractais" e montagens tridimensionais em cartolina. Durante a realização das atividades, os alunos enalteceram a precisão de medidas possibilitada pelo software, além da rapidez proporcionada pelo mesmo na realização das iterações. Além do mais, a própria pesquisadora destaca esse ponto positivo, uma vez que a realização das atividades poderia ter sido mais complicada, dependendo dos recursos usados.

A partir da análise dos dados e relato dos alunos, a autora concluiu que o trabalho contribuiu para o processo de aprendizagem, que o recurso tecnológico foi importante para a construção dos fractais e que a temática proporcionou um ambiente motivador e interativo. Também, conforme Padilha (2012, p. 105), “a inserção do recurso computacional no ensino de matemática só implicará qualificação dos processos de ensino e aprendizagem se vier acompanhada de mudanças de paradigmas”. De fato, ao usar uma tecnologia, creio que devemos explorar as potencialidades da mesma durante a realização das atividades, evitando domesticar essa tecnologia, usando-a da mesma maneira que faríamos ao utilizar métodos tradicionais. Tratarei sobre essa ideia com mais detalhes na próxima seção.

Moreira (2013) faz uma abordagem histórica sobre o estudo de fractais, e afirma que este tema pode ser usado para a introdução de certos conteúdos no Ensino Fundamental, mas que a maior abundância de aplicações ocorre com tópicos estudados no Ensino Médio. A partir da construção de forma dinâmica no GeoGebra, o autor apresenta várias sugestões de atividades que relacionam fractais com padrões (numéricos e geométricos), sequências, séries, progressões geométricas, perímetro, área, volume, logaritmos e noção do conceito de limite. Por fim, o autor apresenta elementos para um estudo mais aprofundado da Geometria Fractal, tangenciando conceitos como dimensão de Hausdorff e similaridade.

Em seu estudo, Reis (2014) utilizou os padrões geométricos presentes na natureza para a introdução ao estudo de fractais no Ensino Médio. Para isso, apresentou diferentes tipos de plantas, moluscos e crustáceos que se assemelham a fractais e, a partir da análise destes exemplos, partiu para a abordagem de conceitos matemáticos. Usando o software GeoGebra, o autor propôs atividades envolvendo noções de geometria plana, análise combinatória, progressões geométricas e introdução a recorrências lineares de primeira ordem. Apesar de não ter realizado nenhuma intervenção pedagógica com alunos, o autor acredita que a proposta possa auxiliar na prática pedagógica dos professores ao ensinar os conteúdos citados.

Alves (2014), em sua pesquisa, relata a experiência em uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual, em que realizou uma intervenção pedagógica envolvendo fractais. Essa intervenção consistiu de uma sequência didática composta de três atividades, que visavam a investigação de padrões e de escrita matemática por meio da associação da Geometria Fractal com as ideias de progressões geométricas e funções. Baseado no *feedback* dos alunos, o autor ressalta que muitos apresentaram dificuldade na realização das atividades, por não ter os conhecimentos mínimos necessários sobre funções e progressões nesta etapa de ensino. Ainda, destaca a necessidade de explorar a observação de padrões nas atividades de matemática, o que muitas vezes não ocorre no Ensino Básico.

Em seu trabalho, Souza (2014) apresenta a definição formal de alguns fractais clássicos (Conjunto de Cântor, Tapete de Sierpinki, Esponja de Menger, Curva e Ilha de Koch) e estuda as suas principais características. Na sequência, é apresentado o projeto "Oficina de Fractais para o Ensino Médio", que objetivou introduzir a temática e mostrar sua aplicabilidade em diferentes áreas para alunos do Ensino Médio. A análise dos dados demonstrou que a oficina auxiliou na aquisição de conhecimentos dos alunos. Além disso, conforme a autora, o interesse dos alunos pelo tema foi tão expressivo, que muitos destes continuaram a pesquisar sobre a temática por conta própria, como um projeto extracurricular, o que demonstra o potencial do projeto em despertar o interesse dos alunos na disciplina de matemática.

Mingoranci (2014) entende que a geometria não deve ser tratada como um mero conteúdo da grade curricular de matemática, mas sim vinculado à conceitos que muitas vezes são considerados monótonos pelos alunos. Nesse sentido, a autora utiliza as propriedades dos fractais para a elaboração de atividades que contemplem tópicos dos Documentos Oficiais da Educação Básica, tais como contextualização, protagonismo juvenil e inserção de tecnologias. As atividades propostas abordam diferentes fractais, tais como curva de Koch, Árvore Pitagórica, Fractal Degraus Centrais, entre outros, relacionando-os com conteúdos programáticos do Ensino Médio e fazendo uso de tecnologias. Entretanto, tais atividades não foram aplicadas com alunos para uma posterior análise de resultados.

Souza (2018) utiliza o software GeoGebra para o desenvolvimento de uma sequência didática envolvendo o ensino de Geometria Analítica, no Ensino Médio. Neste trabalho, são citadas algumas aplicações da Geometria Fractal na engenharia e na física, e é apresentado o processo de construção de vários fractais a partir de formas geométricas da geometria euclidiana. Na sequência didática proposta, especificamente, o autor apresenta instruções para a construção da Esponja de Menger no aplicativo GeoGebra 3D, partindo de um cubo e realizando as iterações necessárias para obter o fractal. Em seguida, são propostas atividades que proporcionam ao aluno a exploração do fractal a partir de diferentes ângulos e a criação de estratégias para realizar o cálculo do seu volume. A sequência didática proposta não foi aplicada em sala de aula.

Valmorbida (2018) e Vieira (2019) direcionaram seus estudos na elaboração de sequências didáticas nas quais a Geometria Fractal serviu como uma ferramenta para o ensino de progressões geométricas. Em ambos os casos, as atividades foram direcionadas a alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Vieira (2019) elaborou uma sequência que perpassa desde a confecção de fractais com materiais concretos até o estudo de fórmulas e exigência de um domínio algébrico envolvendo progressões geométricas e logaritmos, porém não aplicou seu trabalho com alunos.

Valmorbida (2018) realizou uma intervenção com os alunos na forma de oficina, buscando conectar a matemática com ações práticas, por meio da construção de fractais clássicos com o software GeoGebra. No decorrer das oficinas, foram abordados vários conceitos referentes a Progressões Geométricas, tais como: progressões geométricas finitas, infinitas, crescentes, decrescentes e a ideia de razão. Com base no desempenho dos alunos e a partir das respostas obtidas no questionário de avaliação, a autora relata que as atividades contribuíram para a aprendizagem dos conceitos envolvidos, além de despertarem a iniciativa pela pesquisa e trabalho coletivo entre os alunos.

Os trabalhos anteriormente citados confirmam que, nos últimos anos, vários docentes e estudantes têm se dedicado a pesquisas envolvendo fractais. Além disso, também se percebe que o uso de tecnologias digitais, em especial o software GeoGebra, auxiliou em muitos estudos, pois possibilitou a construção e manipulação dos fractais, além de auxiliar na visualização, tornando mais plausível a abordagem de conceitos considerados abstratos.

A partir da leitura destes trabalhos, percebi que vários autores partiram da Geometria Fractal para realizar o estudo de outros conceitos matemáticos, principalmente generalização de padrões e progressões geométricas, mas sem focar nos conceitos geométricos. Também, a maioria das intervenções ocorreu com alunos do Ensino Médio ou alunos que estavam finalizando o Ensino Fundamental, mas ao longo de minhas pesquisas não encontrei nenhuma realizada com uma turma de sexto ano, por exemplo. Assim, realizar a abordagem da Geometria Fractal com alunos do sexto ano seria um diferencial da minha pesquisa, devido à série/faixa etária desses alunos. Ainda, focar principalmente na parte de visualização e propriedades destas formas geométricas se mostrou uma possibilidade interessante de investigação, além de que seria uma oportunidade para abordar os conceitos de área e perímetro, presentes nesta etapa do Ensino Fundamental.

2.2 TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A tecnologia está presente na atividade humana desde a antiguidade, seja na economia, cultura, lazer ou afazeres cotidianos. Quando falamos em tecnologia, logo vêm à nossa mente algum avanço tecnológico inovador. No entanto, essa palavra tem uma definição muito mais ampla. Conforme Kenski (2012, p. 24), tecnologia é o "conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade".

Com base nessa definição, é possível afirmar que o computador é um exemplo de tecnologia, assim como lápis, papel, quadro negro, linguagem, conhecimento, entre outros. Ou seja, todos os recursos, produtos, equipamentos, entre outros inventados pela humanidade são exemplos de tecnologias; de forma que existem diversos tipos de tecnologias. Para este trabalho, em particular, há um tipo que merece atenção: a tecnologia digital (TD). Segundo Kenski (2012, p. 31-32), a tecnologia digital:

> É uma linguagem de síntese, que engloba aspectos da oralidade e da escrita em novos contextos. A tecnologia digital rompe com as formas narrativas circulares e repetidas da oralidade e com o encaminhamento contínuo e sequencial da escrita e se apresenta como um fenômeno descontínuo, fragmentado e, ao mesmo tempo, dinâmico, aberto e veloz.

A inserção de mídias digitais[1] na sala de aula influencia nas formas de pensar, ensinar e aprender, uma vez que a manipulação deste recurso pode proporcionar situações de experimentação envolvendo conceitos matemáticos. Essa experimentação possibilita, ao aluno, a criação de conjecturas e também a validação e desenvolvimento de argumentos para as mesmas. Como afirmam Gravina e Basso (2012, p. 34), "as mídias digitais se tornam realmente interessantes quando nos ajudam a mudar a dinâmica da sala de aula, na direção de valorizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas com a concomitante aprendizagem da matemática".

---

[1] Neste trabalho, entendo que tecnologias digitais e mídias digitais são sinônimos.

Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 24), “o conhecimento é produzido por coletivos de *seres-humanos-com-mídias,* sendo as mídias neste caso o lápis e papel, um software, a internet, etc”. Neste constructo, a mídia não é uma mera ferramenta, mas sim protagonista no processo de construção de conhecimento. Existe uma influência mútua entre humanos e recursos tecnológicos, de forma que o computador, bem como as mídias digitais em geral, atuam reorganizando o pensamento dos indivíduos. “Além disso, a inserção de TI no ambiente escolar tem sido vista como um potencializador das ideias de se quebrar a hegemonia das disciplinas e impulsionar a interdisciplinaridade (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 65).

Os seres humanos desenvolvem as tecnologias e, ao mesmo tempo, são influenciados por elas, inclusive no processo de ensino e aprendizagem. Por exemplo, a relação entre pensamento matemático e tecnologia é chamada de moldagem recíproca. Um indivíduo molda uma mídia quando usa suas potencialidades a seu favor para a resolução de algum problema, muitas vezes de forma não imaginada pelos seus desenvolvedores. Já a mídia molda o pensamento quando condiciona o mesmo. Ou seja, a mídia influencia este pensamento, de forma que ele não teria acontecido sem a sua participação (BORBA; VILLARREAL, 2005).

A produção de conhecimento é condicionada pela mídia utilizada, ou seja, a tecnologia influencia a maneira de pensar ao resolver um determinado problema; e as estratégias usadas dependem da mídia envolvida. Ou seja, para desenhar um triângulo, por exemplo, devemos traçar estratégias que levem em consideração a mídia que está sendo utilizada. Os procedimentos necessários para a construção de um triângulo no papel, usando lápis, régua e compasso, são distintas das estratégias que devem ser utilizadas para desenhar este mesmo triângulo no GeoGebra ou outro software de geometria dinâmica.

As mídias digitais atuam como parte ativa do processo de aprendizagem, proporcionando diferentes (re)organizações de pensamento. De acordo com Borba Silva e Gadanidis (2014, p. 37), “quando *pensamos-com-tecnologias*, a natureza dos problemas e da atividade matemática está em simbiose com o design das tecnologias que utilizamos”, ou seja, dependendo da tecnologia utilizada, a natureza dos problemas muda, assim como mencionado no exemplo anterior. Além disso, o que pode representar um problema com um tipo de tecnologia pode não ser um problema com outra. Desta forma, uma atividade que representava um problema com lápis e papel pode perder seu sentido quando resolvido por meio de uma mídia digital. Por exemplo, a construção do gráfico de determinadas funções pode ser trabalhosa com lápis e papel, porém torna-se trivial com o uso de um software. Há uma simbiose entre esses sujeitos, de forma que o conhecimento está alinhado ao tipo de mídia e, essa mídia, é aprimorada pelos seres humanos.

Ressalta-se a importância das mídias digitais para abordagem de conceitos matemáticos que geralmente não são trabalhados na escola. A partir de um cenário de experimentação matemática, é possível explorar com os alunos ideias intuitivas, sem a necessidade de um tratamento formal para certos conceitos matemáticos. Por exemplo, é possível explorar a noção de limite com alunos do Ensino Básico, porém sem definir seu conceito de maneira formal. Neste contexto, a formulação de conjecturas resulta das investigações feitas pelo coletivo *seres-humanos-com-mídias* em um enfoque *experimental-com-tecnologias*. Além disso, a interação entre professor, alunos e tecnologias é componente essencial nesse contexto de investigação e experimentação, por meio da socialização e discussão de resultados (BORBA; PENTEADO, 2016).

Uma atividade baseada na ideia de experimentação matemática possui vários aspectos que podem ser destacados. Por exemplo, este cenário deve possibilitar a criação e validação de conjecturas, relação entre diferentes representações de um ente matemático, possibilidade de manipular uma construção de forma dinâmica, exploração de resoluções diversificadas, entre outros (BORBA; VILLARREAL, 2005). Ainda, segundo Borba e Penteado (2016):

> A experimentação com tecnologias tem como pano de fundo uma perspectiva na qual a produção de conhecimentos matemáticos assume uma dimensão heurística, de descoberta, sendo esta apropriada aos cenários de ensino e aprendizagem de Matemática.

Ressalto que a tecnologia não é a solução para todos os problemas relacionados à educação, além de apresentar muitas limitações (trago essa discussão ao longo da análise de dados). Por exemplo, uma representação visual oferecida pela mídia pode não ser suficiente para que os alunos compreendam o processo de construção ou propriedades de uma forma geométrica. Ou, ainda, o software pode dar um *feedback* inesperado em alguma situação, podendo inclusive não estar de acordo com as definições matemáticas envolvidas. De acordo com Borba e Penteado (2016,

p. 11), “nem sempre aparece de forma explícita para qual problema o computador é a solução [...]. Em particular, essa pergunta também aparece na educação matemática”. Inovações tecnológicas não representam inovações pedagógicas, de forma que a domesticação das mídias deve ser evitada.

Devemos explorar uma mídia em todo o seu potencial, criando atividades investigativas e não utilizando a mesma para a reprodução de práticas que já eram realizadas com outras mídias. Por exemplo, usar o recurso tecnológico para projetar um texto para os alunos copiarem, ao invés de usar o quadro, representa uma forma de domesticação. A TD está sendo usada para reproduzir uma prática costumeira, que pode ser realizada sem a presença do recurso tecnológico. Além disso, os alunos não estão sendo desafiados a resolver um problema ou realizar alguma investigação.

Por fim, destaco que a realização desta pesquisa e a análise dos dados produzidos foi inspirada nas ideias anteriormente apresentadas, relacionadas ao construto *seres-humanos-com-mídias*. No quarto capítulo, de apresentação e análise dos dados, essas ideias serão discutidas novamente e confrontadas com as situações vivenciadas durante a intervenção pedagógica.

2. 3 ENSINO DE GEOMETRIA E SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA

O ensino de geometria no Brasil passou por diversas fases, de acordo com o contexto político, social e educacional vivido no momento. Por exemplo, no início do século XX, o ensino de matemática era utilitarista, ou seja, favorecia o ensino de conceitos que pudessem ser aplicados nas práticas agrícolas e comerciais, predominantes no país naquela época. O ensino de Geometria, portanto, limitava-se a cálculos envolvendo áreas e volumes (PAVANELLO, 1993).

Mais tarde, entre 1970 e 1980, influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna, o ensino de Geometria priorizava a linguagem e o uso da Teoria de Conjuntos, causando dificuldade na compreensão de certos conceitos. Além disso, muitas vezes, os conteúdos de Geometria ficavam na parte final do livro didático, de forma que seu ensino acabava sendo abandonado ou condicionado ao tempo restante após a abordagem dos outros conteúdos (SANTOS; NACARATO, 2014).

Os fatores apresentados por Santos e Nacarato (2014) podem ter contribuído para que a geometria fosse considerada uma área de difícil compreensão. Além da abstração proporcionada pela abordagem por meio da Teoria de Conjuntos, o fato de os conteúdos serem os últimos na organização da matriz curricular ou de livros didáticos contribuiu para que seu ensino fosse, muitas vezes, tratado de maneira superficial. A abordagem breve, condicionada ao tempo restante, ou mesmo a sua inexistência podem ter gerado lacunas na compreensão de conceitos básicos, pré-requisitos na área, ocasionando a dificuldade na compreensão dos conteúdos posteriores. Mais do que isso, ocasionando um mito referente ao grau de dificuldade da Geometria.

Além das questões históricas, destaca-se a insegurança de alguns professores com o conteúdo geométrico, que muitas vezes resulta de uma deficiência na formação. Consequentemente, sua prática também poderá apresentar lacunas. “O pouco contato dos professores com o conteúdo geométrico propiciou que a sua prática também se tornasse deficitária, e isso vem, de certa forma, se arrastando até os dias atuais” (SANTOS; NACARATO, 2014, p. 15). Ou seja, além da crença cultivada por muitos alunos de que é difícil aprender Geometria, ela também existe entre professores, que consideram difícil ensinar Geometria. Possivelmente, tal crença atribui-se à deficiência do estudo de metodologias para abordar essa temática no decorrer de sua formação.

No que se refere às metodologias utilizadas nas aulas de geometria, ressalta-se a importância de proporcionar, ao aluno, a possibilidade de visualizar a forma geométrica estudada, seja por meio de recursos tecnológicos, desenhos ou objetos manipuláveis. Essa visualização é fundamental para que o aluno consiga estabelecer uma imagem mental sobre este objeto. Santos e Nacarato (2014, p. 17) destacam:

> O que propicia aumentar o nível de conhecimento sobre um sólido geométrico e as figuras planas que os compõem e estabelecer algumas propriedades está diretamente relacionado com a diversidade de materiais que o professor pode disponibilizar em sala de aula para o aluno manipular, desenhar e visualizar e, sobretudo, formar uma imagem mental sobre o objeto a ser estudado.

Dentre os principais problemas presentes no ensino e aprendizagem de geometria na atualidade, destaca-se a imagem mental reducionista que alguns alunos possuem com relação a certos entes geométricos. Por exemplo, quando provocado a desenhar um retângulo, possivelmente o aluno irá desenhá-lo com a base paralela às linhas da folha do caderno, não percebendo que a posição da figura não o define, mas sim seus ângulos. Este tipo de representação é conhecido como figura prototípica (GRAVINA, 1996). Mais uma vez, ressalta-se a importância da visualização e manipulação, a fim de evitar a construção de imagens mentais particulares (clássicas).

Conforme se pode observar nos livros didáticos e em aulas em que quadro e giz são as únicas mídias utilizadas, o ensino de geometria caracteriza-se por uma abordagem predominantemente estática. Como consequência, muitos alunos possuem dificuldade em empregar os conceitos aprendidos em situações mais gerais ou construções diferentes daquelas comumente apresentadas nos livros didáticos ou desenhadas no quadro pelo professor. Assim, “este caráter estático muitas vezes dificulta a construção de significado, e o significante passa a ser um conjunto de símbolos e palavras ou desenho a ser memorizado" (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 09).

Com relação ao ensino e aprendizagem de Geometria, a experimentação ocupa um papel central. Por meio da manipulação, juntamente com a interação estabelecida entre professor e alunos, e entre os próprios alunos, os significados vão sendo produzidos. A socialização de ideias na sala de aula possibilita uma reflexão sobre as semelhanças e diferenças dos objetos estudados, bem como a assimilação de propriedades e do vocabulário geométrico. Salienta-se que a experimentação não se trata apenas da manipulação de objetos, mas sim de uma exploração baseada na problematização envolvendo conceitos geométricos. (SANTOS; NACARATO, 2014).

Destaca-se a importância, para a construção do pensamento geométrico, de valorizar os conhecimentos que o aluno possui. Por exemplo, abordar as formas geométricas relacionando-as com elementos do espaço em que ele vive. Conforme Santos e Nacarato (2014, p. 25):

> No caso do aluno, a escolarização precisa levar em consideração os conhecimentos que ele traz de suas práticas sociais, ou seja, o processo de elaboração conceitual requer que os estudos partam dos conceitos espontâneos que os alunos já trazem consigo. A ampliação ou a ressignificação desses conceitos possibilitará a formação do pensamento geométrico.

Conforme os PCN (BRASIL, 1997, p. 55), a presença de conceitos geométricos é essencial na grade curricular de matemática do Ensino Fundamental, pois “por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive". Além de defender a importância da Geometria no Ensino Básico, o documento, juntamente com a BNCC (BRASIL, 2017, p. 297), também argumenta sobre a utilização de recursos e materiais variados para a abordagem de conceitos geométricos, tais como "malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica". Ainda, ressalta que a utilização dos mesmos deve gerar ambientes de reflexão que auxiliem na construção e formalização dos conceitos matemáticos.

Dentre os recursos citados, o uso de softwares de geometria dinâmica é um importante aliado no ensino de geometria, devido à contribuição que pode trazer em atividades que envolvam visualização e experimentação. Os softwares de geometria dinâmica (SGD), como o próprio nome sugere, são ambientes informatizados que proporcionam a construção e manipulação de formas geométricas numa concepção dinâmica. Ou seja, é possível "arrastar" os pontos dessa construção, de tal maneira que suas propriedades se mantenham. Nesses ambientes, "criam-se situações que preparam os alunos para o entendimento da necessidade e da importância das argumentações dedutivas, que são características da geometria" (GRAVINA E BASSO, 2012, p. 41).

De acordo com Gravina e Santarosa (1998), os softwares de geometria dinâmica possibilitam a realização de dois tipos de atividades: atividades de exploração e atividades de expressão. Nas atividades de exploração, os alunos utilizam construções prontas, buscando entender o processo de construção ou explorar conceitos envolvidos. Já nas atividades de expressão, os próprios alunos realizam a construção, tendo autonomia para criarem suas estratégias e usarem os conceitos geométricos que julgarem necessários.

Os SGD são ambientes digitais nos quais existe uma relação entre as ações do aluno e as reações do ambiente. De acordo com essas reações, o aluno tem, muitas vezes, a possibilidade de conferir a veracidade de suas conjecturas, de tal forma que a análise de equívocos também contribui para o processo de aprendizagem. Mesmo em situações de conflito teórico-computacional, o aluno é instigado a discutir conceitos matemáticos ao questionar o *feedback* dado pelo software. Ou seja, a possibilidade de concretização de pensamentos por meio do ambiente informatizado torna-se um recurso para a experimentação matemática. (GRAVINA; SANTAROSA, 1998).

Conforme Gravina e Basso (2012), “o desenho estático é um sistema de representação pobre, se comparado com uma representação dinâmica e manipulável na tela do computador”. Em uma representação dinâmica, é possível que o aluno arraste a construção explorando não só casos particulares, mas também situações mais gerais. Este recurso pode contribuir para a desconstrução de imagens mentais particulares, bem como colaborar para que os alunos identifiquem o ente matemático a partir de suas propriedades, e não a partir de figuras prototípicas. Por exemplo, usando o recurso “arrastar”, o aluno pode rotacionar e mover um quadrado, percebendo que o que o define não é sua posição, mas sim seus ângulos e o tamanho de seus lados.

Destaca-se que a variação de parâmetros e a possibilidade de transição entre diferentes estados também é um importante recurso para a construção de significados. Esta concepção dinâmica proporciona um ambiente de aprendizagem que repercute nas concretizações mentais do aluno. Gravina e Santarosa (1998, p. 10) afirmam:

> As novas tecnologias oferecem instâncias físicas em que a representação passa a ter caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito às concretizações mentais. Um mesmo objeto matemático passa a ter representação mutável, diferente da representação estática das instâncias físicas tipo “lápis e papel” ou “giz e quadro-negro”.

Conforme Borba e Vilarreal (2005), a visualização, obtida com o auxílio de mídias digitais, auxilia na compreensão de conceitos mais abstratos, pois a solução visual de um problema é um caminho para alcançar um nível mais elevado de abstração, ou mesmo realizar generalizações. Em algumas situações, a visualização pode ser considerada uma maneira de fazer matemática, um método para resolver problemas ou uma possibilidade de múltiplas visualizações de um ente matemático. Logo, “o papel da mídia no processo de visualização vai além do simples ato de mostrar uma imagem” (Borba e Vilarreal, 2005, p. 97, nossa tradução).

Finalmente, os recursos oferecidos pelo SGD são promissores para o ensino e aprendizagem de geometria, pois seus recursos possibilitam a criação de um ambiente de exploração e experimentação. Além disso, possibilidades como o recurso arrastar e a visualização de um ente matemático a partir de diferentes perspectivas podem auxiliar os alunos na compreensão de conceitos geométricos. Por essa razão, a utilização deste recurso foi escolhida para a realização deste trabalho, pois o uso de SGD poderia ser favorável na exploração de fractais e abordagem de conceitos geométricos com alunos do sexto ano.

2. 4 GEOMETRIA FRACTAL

O estudo dos fractais teve início com Benoit Mandelbrot, na década de 1970, a partir de uma investigação para solucionar questões de ruídos nas linhas telefônicas do local onde, na época, trabalhava com economia. Devido à aleatoriedade na frequência destes ruídos, o problema que parecia não ter solução só pôde ser resolvido quando tratado sob a perspectiva de um Conjunto de Cantor[2]. Essa investigação inspirou o estudo dos fractais, a partir da busca de padrões em fenômenos irregulares. “A geometria fractal de Mandelbrot reflete uma natureza de irregularidades, de reentrâncias, de saliências e depressões, de fragmentação” (BARBOSA, 2005, p. 12).

Conforme Maldelbrot (1991, p. 207, apud Faria, 2012, p. 34), “a geometria fractal “é o estudo de diversos objetos, tanto matemáticos quanto naturais, que não são regulares, mas rugosos, porosos ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau, em todas as escalas”. De acordo com essa definição, um fractal é uma forma autossimilar, ou seja, uma forma geométrica cuja estrutura se repete por meio de um processo recursivo em suas partes, em escalas cada vez menores. Este padrão de repetição (ou recursão) pode ser percebido tanto geometricamente quanto algebricamente, por meio do processo de iteração utilizado na sua construção.

Devido às suas propriedades únicas, a geometria fractal permitiu a reformulação e resolução de vários problemas antigos, por meio da identificação de regularidade onde só se via o caótico (BARBOSA, 2005). Além disso, está presente em diferentes áreas do conhecimento como matemática, física, biologia, economia, astronomia e, também, no espaço físico em que vivemos. Os fractais podem aproximar formas presentes em rochas, plantas, nuvens, relâmpagos e até mesmo no

[2] Conjunto de Cantor: subconjunto do intervalo [0,1] definido como limite do processo recursivo de retirada do terço médio.

nosso corpo, como, por exemplo, nos vasos sanguíneos e tecidos pulmonares. Como afirma Barbosa (2005, p. 10-11):

> Na constituição do nosso mundo, na natureza em geral, por mares e oceanos, [...] montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens e etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones, etc, seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas.

Devido a sua forma e características, o estudo de fractais pode ser um tema interessante e visualmente atrativo para os alunos, além de permitir a exploração de diferentes conteúdos matemáticos, nos diferentes níveis de ensino. Conforme Almeida (2006, p. 30), “o estudo de fractais deixou de ser limitado apenas às experiências científicas e cálculos complexos, e vem sendo gradativamente abordado no contexto escolar, com uma linguagem mais simples e de fácil entendimento”. Todavia, a Geometria Fractal raramente é abordada no Ensino Básico, pois quase não aparece nos livros didáticos. Ainda, não existe nenhuma menção quanto ao ensino de fractais nos documentos oficiais do Ensino Fundamental consultados, a saber: Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), Plano Nacional do Livro Didático – PNLD (BRASIL, 2016) e Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997).

Apesar de não existir orientação em relação a esta temática, este pode ser relevante para ser abordado no Ensino Básico, por várias razões. Como já mencionado, suas propriedades favorecem a exploração de diferentes conteúdos, a interdisciplinaridade com outras áreas e, também, abordagem por meio de recursos tecnológicos. Também, merece destaque a questão estética, por meio da beleza dos fractais, cuja relação com a arte, por meio de seu estudo e construção, envolve emoção, habilidade e criatividade (BARBOSA, 2005).

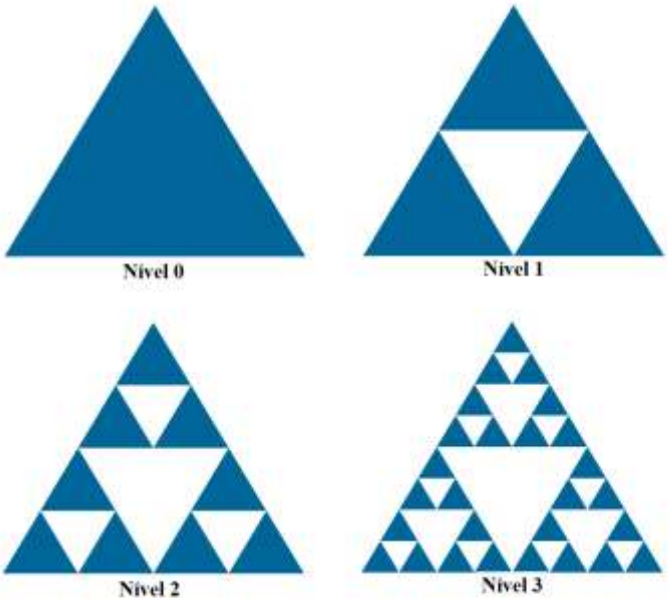
Com relação ao espaço em que vivemos, a Geometria Euclidiana possibilita o estudo de formas regulares, especialmente as construídas pelos seres humanos, compostas por círculos, quadrados, retângulos, cilindros, cubos, entre outros. Todavia, quando se trata de árvores, samambaias, rochas e nuvens, necessita-se de outro tipo de Geometria para representar e analisar estas formas, como, por exemplo, a geometria dos fractais. Assim, este pode ser um estudo pertinente, pois contribui para que o aluno possa estabelecer uma relação entre o meio que vive e as formas geométricas estudadas.

Apesar de compreender que um fractal é resultante de um processo de iteração recursivo, neste trabalho, o termo fractal será utilizado para se referir à forma geométrica obtida em qualquer uma das iterações realizadas, a fim de facilitar a linguagem para os alunos e simplificar a escrita. Na sequência, será realizada uma breve descrição sobre os fractais abordados com os alunos, explorando algumas características, área, perímetro e seu processo de construção.

2. 4. 1 Triângulo de Sierpinski

Este fractal é construído a partir de um triângulo equilátero qualquer, de modo que se deve marcar o ponto médio de cada um dos lados do triângulo e, em seguida, construir um triângulo com vértices nesses pontos. O triângulo obtido deve ser retirado, restando três triângulos equiláteros congruentes entre si e semelhantes ao triângulo inicial. Para cada triângulo restante, o processo deve ser repetido, sempre retirando o triângulo central obtido. Cada repetição desse processo corresponde a um nível e, após infinitas repetições, obtém-se o Triângulo de Sierpinski. Neste trabalho, o termo *nível* refere-se à *iteração.* Optou-se por esta nomenclatura a fim de simplificar a linguagem para os alunos.

Figura 1 - Processo de construção do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Elaborado pela autora com o software GeoGebra.

É possível calcular o perímetro e a área do fractal a cada nível da construção, bem como conjecturar o que acontece com esses valores à medida que o nível cresce. Lembrando que a área do triângulo equilátero de lado l é dada por $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, e seu perímetro por $P = 3l$, temos:

Quadro 1 - Área e Perímetro do Triângulo de Siespinski

Nível	**Número de triângulos**	**Medida do lado de cada triângulo**	**Perímetro (P$_n$)**	**Área (A$_n$)**
0	1	l	$P_0 = 3l$	A_0
1	3	$\frac{l}{2}$	$P_1 = P_0 + 3\left(\frac{l}{2}\right) = 3l + \frac{3l}{2} = \frac{3^2\,l}{2} = \frac{3}{2}P_0$	$A_1 = \frac{3}{4}A_0$
2	3^2	$\frac{l}{2^2}$	$P_2 = P_1 + 3^2\left(\frac{l}{2^2}\right) = \frac{3^2 l}{2} + \frac{3^2 l}{2^2} = \frac{3^3\,l}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 P_0$	$A_2 = \frac{3}{4}A_1 = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}A_0\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A_0$
3	3^3	$\frac{l}{2^3}$	$P_3 = P_2 + 3^3\left(\frac{l}{2^3}\right) = \frac{3^3 l}{2^2} + \frac{3^3 l}{2^3} = \frac{3^4\,l}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 P_0$	$A_3 = \frac{3}{4}A_2 = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 A_0\right] = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A_0$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

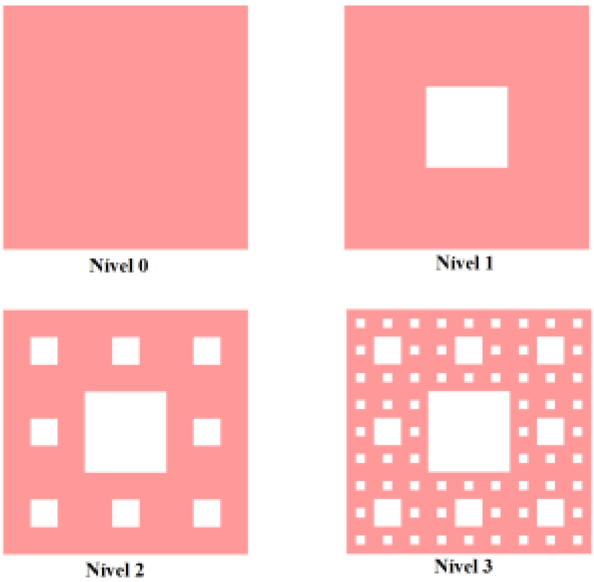
Fonte: Elaborado pela autora.

Sobre o perímetro, à medida que o nível aumenta, o numerador da fração cresce mais rapidamente que o seu denominador. Além disso, como l é constante, não interfere nesse crescimento. Ou seja, o perímetro do fractal cresce indefinidamente. Quanto à área, conforme o nível aumenta, o denominador da fração cresce mais rapidamente que o numerador, fazendo com que o resultado se aproxime de zero. Além disso, A_0 é constante, pois depende apenas de l. Assim, conforme o nível aumenta indefinidamente, o valor da área fica arbitrariamente próximo de zero. Essa ideia pode ser visualizada geometricamente, já que a cada nível são retirados mais triângulos do fractal. Inclusive, o uso de SGD pode contribuir nesse processo de visualização, uma vez que apresenta a possibilidade de visualizar vários níveis e transitar entre eles, por meio da dinamicidade. Tal recurso traz aos alunos elementos visuais que podem auxiliar na construção de conjecturas envolvendo os valores da área e do perímetro do fractal em níveis posteriores.

2. 4. 2 Tapete de Sierpinski

O processo de construção deste fractal é bem parecido com o Triângulo de Sierpinski. Começa-se com um quadrado qualquer. Inicialmente, cada lado deste quadrado deve ser dividido em três partes iguais, a fim de dividir o quadrado inicial em nove quadrados menores. Em seguida, o quadrado do meio deve ser retirado, restando oito quadrados menores, congruentes entre si. Para cada quadrado restante, o processo deve ser repetido, sempre retirando o quadrado central obtido. Cada repetição desse processo corresponde a um nível e, após infinitas repetições obtém-se o Tapete de Sierpinski.

Figura 2 - Processo de construção do Tapete de Sierpinski.



Fonte: Elaborado pela autora com o software GeoGebra.

A área e o perímetro deste fractal também podem ser calculados a cada nível da construção, e também é possível conjecturar o que acontece com esses valores à medida que o nível aumenta. Lembrando que a área do quadrado de lado l é dada por $A = l^2$, e seu perímetro por $P = 4l$ temos:

Quadro 2 - Área e perímetro do Tapete de Sierpinski.

Nível	**Número de quadrados**	**Medida do lado de cada quadrado**	**Perímetro (P_n)**	**Área (A_n)**
0	1	l	$P_0 = 4\,l$	$A_0 = l^2$
1	8	$\frac{l}{3}$	$P_1 = P_0 + 4\left(\frac{l}{3}\right) = 4\,l + \frac{4\,l}{3} =$ $\frac{16\,l}{3} = \frac{4}{3}P_0 = 1,\overline{3}\,P_0$	$A_1 = \frac{8}{9}A_0$
2	8^2	$\frac{l}{3^2}$	$P_2 = P_1 + 32\left(\frac{l}{3^2}\right) = \frac{16\,l}{3} + \frac{32l}{9} =$ $\frac{80\,l}{9} = \frac{20}{3^2}P_0 = 2,\overline{2}\,P_0$	$A_2 = \frac{8}{9}A_1 = \frac{8}{9}\left(\frac{8}{9}A_0\right) =$ $\left(\frac{8}{9}\right)^2 A_0$
3	8^3	$\frac{l}{3^3}$	$P_3 = P_2 + 256\left(\frac{l}{3^3}\right) = \frac{80l}{9} + \frac{256\,l}{27} =$ $\frac{496\,l}{27} = \frac{124}{3^3}P_0 \approx 4{,}6\,P_0$	$A_3 = \frac{8}{9}A_2 = \frac{8}{9}\left[\left(\frac{8}{9}\right)^2 A_0\right] =$ $\left(\frac{8}{9}\right)^3 A_0$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Elaborado pela autora

Novamente, à medida que o nível aumenta, o numerador da fração referente ao perímetro cresce mais rapidamente que o seu denominador. Como l é constante e não interfere nesse crescimento, o perímetro do Tapete de Sierpinski cresce indefinidamente. Com relação à área, conforme o nível aumenta, mais quadrados são retirados e o denominador da fração cresce mais rapidamente que o numerador, fazendo com que o resultado se aproxime de zero. Como A é constante, é possível perceber que a área do fractal diminui e, à medida que o nível aumenta, o valor da área fica arbitrariamente próximo de zero.

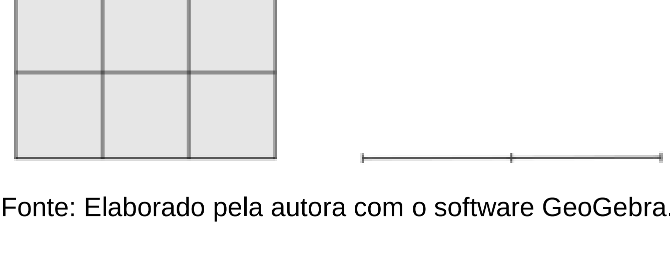
2 . 4. 3 Noção intuitiva de fractal

Conforme já mencionado, pode-se definir um fractal com base na autossimilaridade ou, de forma mais geral, usando a ideia de dimensão de Hausdorff. A seguir, serão apresentados conceitos necessários para o entendimento dessa ideia. Ressalta-se que o objetivo aqui não é enunciar uma definição formal, mas sim propor uma explicação intuitiva sobre o tema. Além disso, essa explanação não será abordada com os alunos.

Considerando a ideia de dimensão topológica (denotada por D_T) utilizada na Geometria Euclidiana, um ponto tem dimensão zero, um segmento de reta tem uma dimensão (comprimento), um quadrado tem duas dimensões (comprimento e largura) e um cubo tem três dimensões (comprimento, largura e altura). Estes objetos, exceto o ponto, são autossimilares, ou seja, podem ser divididos em formas geométricas semelhantes com as mesmas características, porém menores (BARBOSA, 2005).

Na figura a seguir, o quadrado está dividido em nove peças (nove quadrados menores), e a medida do lado de cada um desses quadrados é igual a 1/3 do quadrado inicial. Por esta razão, dizemos que o fator de contração neste caso é 1/3. De maneira análoga, o segmento de reta também foi dividido em duas peças (dois segmentos menores), de forma que o fator de contração de cada um é 1/2.

Figura 3 - Quadrado e segmento de reta.



Fonte: Elaborado pela autora com o software GeoGebra.

Para calcular a dimensão de Hausdorff (denotada por D_H), também conhecida como dimensão fractal, Anton (2001) utiliza a expressão a seguir, em que k é o número de peças e s é o fator de contração:

$$D_H = \frac{\ln k}{\ln\ (1/s)} \quad (1)$$

Uma forma geométrica em que a dimensão topológica e a dimensão de Hausdorff são diferentes é um fractal. Por exemplo, no caso do quadrado anterior, em que $k = 9$ e $s = 1/3$, substituindo estes valores em (1), obtemos:

$$D_H = \frac{\ln 9}{\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\ln 9}{\ln 3} = \log_3 9 = 2$$

Ou seja, para o quadrado, obtemos $D_T\ = D_H = 2$. Como a dimensão topológica e a dimensão de Hausdorff são iguais, o quadrado não é um fractal. Analogamente, para o segmento de reta, substituindo $k = 2$ e $s = 1/2$ na expressão (1), temos $D_T\ = D_H = 1$. Portanto, o segmento de reta também não é um fractal.

O Triângulo de Sierpinski (Figura 4) é uma forma bidimensional, portanto $D_T = 2$. Tomando $k = 3$ (pois o triângulo do meio foi retirado, e são necessários três triângulos para formar o triângulo maior) e $s = 1/2$, uma vez que o lado de cada triângulo menor tem a metade da medida do lado do triângulo inicial, e substituindo estes valores na expressão (1), obtemos:

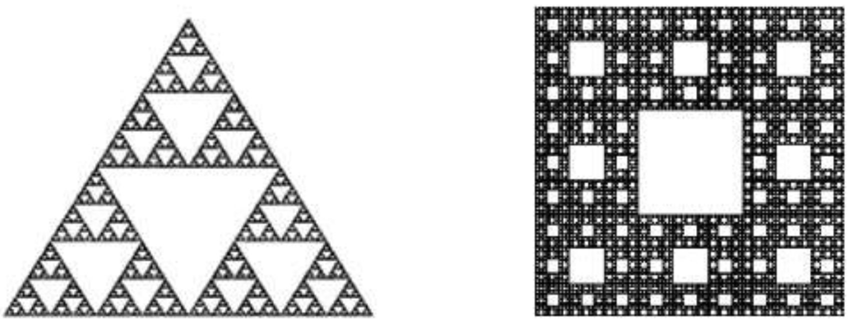
$$D_H = \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3 = 1{,}584\ldots$$

Calculando a dimensão de Hausdorff, $D_H = 1{,}584\ldots$, implicando $D_T\ \neq D_H$. Ou seja, o Triângulo de Sierpinski é, de fato, um fractal. Destaca-se que, caso fossem considerados valores diferentes para k e s, por exemplo $k = 9$ e $s = 1/4$, obteríamos o mesmo resultado, pois estes valores são múltiplos dos valores usados anteriormente. Assim, de acordo com as propriedades de logaritmo, obtemos o mesmo resultado:

$$D_H = \frac{\ln 9}{\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{\ln 9}{\ln 4} = \frac{\ln 3^2}{\ln 2^2} = \log_2 3 = \frac{2\ln 3}{2\ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1{,}584\ldots$$

Analogamente, para o Tapete de Sierpinski (Figura 4), tem-se $k = 8$, e $s = 1/3$. Logo, $D_H = 1{,}892\ldots$ que é diferente de $D_T = 2$, comprovando que esta forma geométrica é um fractal. Novamente, tomando outros valores para k e s, obteremos o mesmo resultado para D_H.

Figura 4 - Triângulo e Tapete de Sierpinski.



Fonte: Imagens Google.

Os conceitos apresentados nesta seção têm como intuito trazer uma ideia da definição de fractal, usando as dimensões topológica e de Hausdorff, para enriquecer o conteúdo deste trabalho. Durante as atividades desenvolvidas, para o reconhecimento de fractais, recorremos à visualização. Ou seja, foi utilizada a noção de autossimilaridade, que contribuiu para que os alunos percebessem que um fractal é “formado por várias formas geométricas semelhantes à forma inicial, porém em tamanhos cada vez menores”. Tal ideia será abordada com mais detalhes na seção de análise da intervenção.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, irei apresentar a metodologia de pesquisa escolhida, bem como as fontes de produção de dados utilizadas. Além disso, irei discutir a importância da variedade de instrumentos de produção de dados no controle do *bias* do pesquisador. Para encerrar a primeira seção, apresentarei, de forma sucinta, os critérios usados na análise dos dados e as questões éticas relacionadas a esta pesquisa.

Posteriormente, apresento o software GeoGebra e as características que me levaram a escolher esta mídia. Por fim, relato uma atividade piloto realizada, que teve como objetivo analisar a metodologia usada e aprimorá-la para o momento da intervenção de dados que originou este trabalho.

3. 1 METODOLOGIA DE PESQUISA QUALITATIVA

Para a realização desta pesquisa, busquei uma metodologia que estivesse de acordo com o meu principal objetivo: *analisar potencialidades do GeoGebra para a compreensão de conceitos geométricos a partir da exploração de fractais, especialmente os conceitos de área e perímetro, por alunos de uma turma regular do sexto ano do Ensino Fundamental.* Tal metodologia deveria possibilitar uma análise de diferentes fontes de dados, visando compreender as conclusões e estratégias de pensamento dos alunos, além de avaliar a participação da tecnologia, em particular do software GeoGebra ao longo desse processo. Para isso, procurei por uma metodologia que desse subsídios para escolher diferentes formas de registro de dados, além de auxiliar na análise destes, sem preocupação com a representação numérica dos resultados obtidos.

Nessa busca, percebi que as características da pesquisa qualitativa foram as que melhor se enquadraram nestes objetivos. De acordo com as características apontadas por Bogdan e Biklen (1994), em uma pesquisa qualitativa, o local de produção de dados é o ambiente natural do indivíduo – neste caso a sala de aula, e o investigador é o instrumento principal da pesquisa – neste caso a professora-pesquisadora. Desta forma, ao estar inserida no ambiente da sala de aula, foi possível observar os participantes por um longo período de tempo, “o que torna mais difícil que eles fabriquem o seu comportamento durante toda a duração da pesquisa" (GOLDENBERG, 2004, p. 47).

Ainda conforme Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa é descritiva, ou seja, o pesquisador preocupa-se em registrar todo o tipo possível de dado produzido, descrevendo minuciosamente cada situação, pergunta ou circunstância. O significado é de suma importância neste processo, pois o investigador preocupa-se com os diferentes significados atribuídos pelos participantes, observando os dados obtidos de forma indutiva, levando em consideração o contexto da pesquisa e os detalhes observados durante a investigação (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

"Os dados da pesquisa qualitativa objetivam uma compreensão profunda de certos fenômenos sociais apoiados no pressuposto da maior relevância do aspecto subjetivo da ação social" (GOLDENBERG, 2004, p. 49). Ou seja, os dados produzidos em uma pesquisa qualitativa permitem uma análise complexa do fenômeno, tendo em vista aspectos sociais do indivíduo e a influência do ambiente natural da pesquisa e dos participantes. Ainda, no que se refere às técnicas da pesquisa qualitativa, Goldenberg (2004, p. 47, grifo do autor) afirma:

> Para Becker, as técnicas de pesquisa qualitativa permitem um maior controle do *bias* do pesquisador do que as da pesquisa quantitativa. Por meio, por exemplo, da observação participante, por um longo período de tempo, o pesquisador coleta os dados através da sua participação na vida cotidiana do grupo ou da organização que estuda, observa as pessoas para ver como se comportam, conversa para descobrir as interpretações que têm sobre as situações que observou, podendo comparar e interpretar as respostas dadas em diferentes situações.

Uma pesquisa qualitativa possibilita ao pesquisador a inserção no ambiente natural do estudo, de tal maneira que, assim como os demais participantes da pesquisa, possa interagir, questionar, intervir e influenciar no rumo dessa investigação. Tais condições proporcionam dados diversificados e, consequentemente, um aprofundamento na análise do fenômeno. Ou seja, a metodologia de pesquisa qualitativa é a mais adequada para a abordagem pretendida.

Com relação ao *bias*[3] do pesquisador, tanto Goldenberg (2004) quanto Bogdan e Biklen (1994) recusam a neutralidade do pesquisador durante uma investigação. Assim, desde a seleção do contexto, escolha do problema e encaminhamento da

---

[3] "A utilização do termo em inglês é comum entre os cientistas sociais. Pode ser traduzido como viés, parcialidade, preconceito" (GOLDENBERG, 2004, p. 44).

pesquisa existe influência do pesquisador. Além do mais, a melhor maneira de minimizar a sua interferência na investigação é estar consciente que ela existe, pois o pesquisador pode prevenir algumas atitudes ou mesmo levá-las em consideração no momento da análise dos dados e ao realizar suas conclusões.

Estar na posição de professora-pesquisadora é algo complexo, tanto no momento da produção de dados quanto no momento da análise deles. Ao realizar a intervenção com alunos que já me conhecem, precisei estar ciente de que minhas ações poderiam ter influência direta sobre os dados obtidos, uma vez que eles sabem interpretar minha maneira de falar, expressões faciais e gestos. De fato, a consciência da minha interferência foi importante para buscar manter a maior neutralidade possível.

Além disso, a "personalidade de professora" tentava sobressair em vários momentos da pesquisa. Enquanto pesquisadora, precisava estar atenta ao tipo de intervenção que iria realizar, tendo um olhar atento aos elementos que poderiam surgir durante a intervenção, além de registrar todos os dados possíveis para assegurar a credibilidade da minha pesquisa. No entanto, enquanto professora, tinha o dever de esclarecer as dúvidas dos alunos, auxiliando no seu processo de aprendizagem. Assim, precisei encontrar um equilíbrio entre essas duas personalidades, interagindo com os alunos quando estavam estagnados em um problema, mas tentando fazer questionamentos que pudessem ajudá-los a chegar nas suas próprias conclusões.

Ao longo da intervenção, posso afirmar que, por várias, realizei intervenções que influenciaram nos caminhos da pesquisa. Como mencionado anteriormente, Bogdan e Biklen (1994) destacam que o pesquisador, ao estar inserido no ambiente do estudo, tem a possibilidade de interagir com os indivíduos e também de influenciar no seu rumo. Assim, cabe refletir sobre a importância dessa interferência ao longo da produção de dados, especialmente em momentos que os alunos não estão conseguindo avançar nas atividades. Por exemplo, em várias situações, foi necessário realizar questionamentos aos estudantes, direcionando seus pensamentos, de forma que surgiram dados que não teriam surgidos sem a minha interferência. No *Terceiro Momento da Apresentação Análise de dados*, (seção 4.3) irei retomar essa discussão, apontando situações em que minha interação com os alunos trouxe elementos que enriqueceram este trabalho.

Uma pesquisa qualitativa possibilita ao pesquisador a inserção no ambiente natural do estudo, de tal maneira que, assim como os demais participantes da pesquisa, possa interagir, questionar, intervir e influenciar no rumo dessa investigação.

Além disso, procurando ter o maior controle possível do *bias* do pesquisador no momento da análise, optei por utilizar diferentes métodos e fontes de registro de dados, inclusive porque essa diversidade permite visão mais ampla do fenômeno no momento de tirar conclusões. “O termo *dados* refere-se aos materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a estudar; são os elementos que formam a base da análise” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.149).

Os dados incluem todos os registros feitos durante a pesquisa, sejam eles através de imagens, entrevistas, gravações de áudio ou vídeo, notas de campo, material produzido pelos indivíduos participantes da investigação, entre outros. Durante a investigação, o pesquisador deve registrar, de forma minuciosa, cada detalhe, fala ou gesto, pois estes fatos servirão como pistas para o levantamento de hipóteses durante a análise. Conforme Bogdan e Biklen (1994, p. 48):

> Os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos.

Pensando em registrar a maior quantidade possível de detalhes e com a maior precisão possível, optei por usar três formas de registro: gravação de áudio, caderno de campo da pesquisadora e material impresso com as conclusões dos alunos. Além disso, em alguns momentos, também foram utilizadas fotografias para registrar a disposição dos alunos na sala de aula e os detalhes físicos do ambiente.

Desta forma, para o registro dos diálogos dos alunos com a pesquisadora durante os momentos de discussão, foi necessária a utilização de um gravador de áudio. Para analisar o entendimento dos alunos sobre o tema abordado foi analisado o material impresso onde os mesmos fizeram anotações sobre suas suposições e conclusões. Também, destaco as notas de campo feitas pela professora-pesquisadora, onde estão relatados acontecimentos, falas, questionamentos, reflexões, hipóteses e percepções sobre os participantes e o ambiente de investigação.

Ao usar diferentes métodos e fontes de construção dos dados, se tornou possível realizar a triangulação dos mesmos. Nesse sentido, a combinação de diversas metodologias auxilia na compreensão do fenômeno estudado, além de se apresentar como uma alternativa para aumentar a credibilidade de uma pesquisa. Conforme Goldenberg (2004, p. 63):

> A combinação de metodologias diversas no estudo do mesmo fenômeno, conhecida como triangulação, tem por objetivo abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo. Parte de princípios que sustentam que é impossível conceber a existência isolada de um fenômeno social.

Na análise dos dados, a triangulação teve um papel muito importante, pois possibilitou uma complementação de informações para realizar um estudo do fenômeno em profundidade. Por exemplo, ao olhar as respostas de uma dupla em um dos questionamentos do material, ler a transcrição dos diálogos com estes alunos e consultar as notas de campo sobre minhas percepções neste momento, de maneira concomitante, proporcionou uma visão mais abrangente da situação, uma vez que as respostas dos alunos foram complementadas pelas demais formas de registro. Além disso, também é importante compreender o contexto no momento do acontecimento do fenômeno.

A diversidade de métodos de registro também contribuiu para o controle do *bias*, pois proporcionou uma riqueza de detalhes que possibilitaram que a “personalidade de professora” não estivesse tão presente no momento da análise. Apesar da professora querer utilizar as informações que sabe sobre os alunos envolvendo suas dificuldades, histórico familiar, entre outros, a triangulação facilitou o esquecimento desses detalhes. Ou seja, ao possuir diferentes registros sobre cada situação, a pesquisadora pôde analisar os dados de maneira indutiva, não havendo necessidade de evocar a professora para tentar entender o fenômeno.

Ainda sobre a análise de dados, irei especificar de forma sucinta como ocorreu a organização do material e seleção das informações apresentadas. Os critérios variam de acordo com o momento da produção de dados pois, apesar do foco estar na identificação das potencialidades do GeoGebra, ele não esteve tão presente em determinadas ocasiões da intervenção pedagógica. Desta forma, procurei olhar para as outras tecnologias envolvidas, e também para situações que consegui identificar forte relação com o referencial teórico apresentado na pesquisa.

Ao longo da intervenção pedagógica, fiz minhas anotações de campo durante o instante em que estava na sala de aula e, posteriormente, um relato detalhado sobre os acontecimentos de cada aula, contendo as hipóteses e percepções registradas no caderno de campo. Essas anotações foram feitas em ordem cronológica e sempre identificando os alunos envolvidos, para que fosse possível cruzar com os demais dados.

Com relação às gravações de áudio, fiz a transcrição dos momentos relevantes para a pesquisa ao longo das 18 horas-aulas de intervenção, também em ordem cronológica. Quando uso o termo "relevante para a pesquisa" me refiro aos momentos em que aconteceram diálogos relacionados com a pesquisa, descartando momentos de conversa sobre outros assuntos ou situações em que precisei chamar a atenção dos alunos. Quanto ao material impresso, obtive 12 documentos relacionados ao Tapete e 12 relacionados ao Triângulo de Sierpinski contendo as respostas das duplas.

Os dados foram analisados de maneira indutiva, de forma que os aspectos analisados emergiram das fontes de registro utilizadas. Desta forma, ao olhar os dados, procurei evidências de que os alunos estavam entendendo (ou não) os conceitos e situações em que a mídia contribuiu para esse processo, usando como lente o construto teórico de *seres-humanos-com-mídias.* Assim, ao longo da análise procurei identificar momentos em que a mídia contribuiu para o processo de aprendizagem ou apresentou possibilidades diferentes das obtidas com lápis e papel.

No caso do segundo momento, no qual o material concreto esteve presente, também busquei situações em que os alunos deram sinais que estavam entendendo ou apresentando dificuldades com os conceitos envolvidos. Além disso, procurei entender qual foi o papel do material concreto nesse processo e as contribuições da mídia nos momentos que ela esteve presente, sempre sob a ótica de *seres-humanos-com-mídias*.

Por fim, destaco as questões éticas envolvendo esta pesquisa. A escola foi informada sobre os objetivos do trabalho, e a diretora assinou o Termo de Consentimento da Escola[4]. Quanto aos alunos, eles foram informados sobre os propósitos da atividade, e avisados que não haveria atribuição de nota e que poderiam se retirar da pesquisa a qualquer momento, caso não se sentissem confortáveis. Também, levaram o Termo de Consentimento do Aluno[5] para seus responsáveis assinarem, contendo as informações da pesquisa e meu contato para esclarecimento

[4] O Termo de Consentimento da Escola encontra-se no Apêndice F deste trabalho.
[5] O Termo de Consentimento do Aluno encontra-se no Apêndice G deste trabalho.

de dúvidas. Além disso, os dados produzidos nesta pesquisa ficarão arquivados durante 5 anos cada haja a necessidade de consulta.

3. 2 CONTEXTO DA PESQUISA

Nesta seção, irei contextualizar a pesquisa, apresentando a escola e a turma em que a pesquisa foi realizada. Além disso, apresento algumas características que julgo relevantes para entender o ambiente natural da pesquisa e que devem ser levados em consideração na análise de dados.

3. 2. 1 A escola

A pesquisa foi realizada em uma turma do sexto ano do ensino fundamental, em uma escola pública localizada em Gramado/RS. Esta instituição funciona em dois turnos, manhã e tarde, e atende aproximadamente 400 alunos (do pré ao nono ano do Ensino Fundamental). Por ser localizada em uma área não tão próxima da região central do município, a escola se encontra em um local com realidade diferente daquela encontrada no ambiente turístico da cidade.

A comunidade escolar é bem heterogênea, com muitas famílias naturais de outros estados, que vieram buscar melhores condições de vida na cidade. O público-alvo da escola, em sua maioria, são alunos do bairro que moram próximo à instituição e não necessitam de transporte escolar. Além disso, atendem-se muitos alunos em situação de pobreza e/ou vulnerabilidade social.

A escolha dessa escola atribuiu-se ao fato da maior parte da minha carga horária de trabalho ser realizada nela e, enquanto professora, constatei uma relevância para atuar com este público, uma vez que já me encontro inserida na realidade social dos alunos e da escola. Outro fator que contribuiu para esta escolha se refere à participação e comprometimento dos estudantes nos projetos e atividades oferecidos pela escola. Além disso, a direção da escola apoiou a ideia de realização da pesquisa e se manteve à disposição durante para auxiliar caso precisasse de algo durante o período da intervenção pedagógica.

Por ser tratar de uma pesquisa envolvendo o uso de tecnologias digitais havia, também, a necessidade de escolha de uma escola com laboratório de informática, que possibilitasse aos alunos a manipulação do software escolhido. Nesse aspecto, a estrutura física foi suficiente para atender as principais necessidades da pesquisa, por comportar laboratório de informática em funcionamento e também projetor multimídia para facilitar a exposição das atividades e explicações.

3. 2. 2 A turma

A pesquisa foi realizada na Turma 6°A, composta por 24 alunos, sendo 15 meninas e 9 meninos. A idade dos alunos era, em média, 11,7 anos, havendo 4 alunos com defasagem idade-série. Além disso, um destes alunos com defasagem chegou transferido de outra escola, e possuía dificuldade de aprendizagem e algum tipo de deficiência motora, que prejudicava sua locomoção, escrita, fala e quase impossibilitava o aluno de realizar atividades manuais delicadas, como medição e construção com régua ou uso de tesoura.

No que se refere à turma, de um modo geral os alunos eram participativos, empenhados no esclarecimento de dúvidas e dedicados às atividades propostas. Além disso, a maioria dos alunos era colegas desde a pré-escola, o que gera um certo vínculo entre a turma que facilita a participação em discussões no grande grupo.

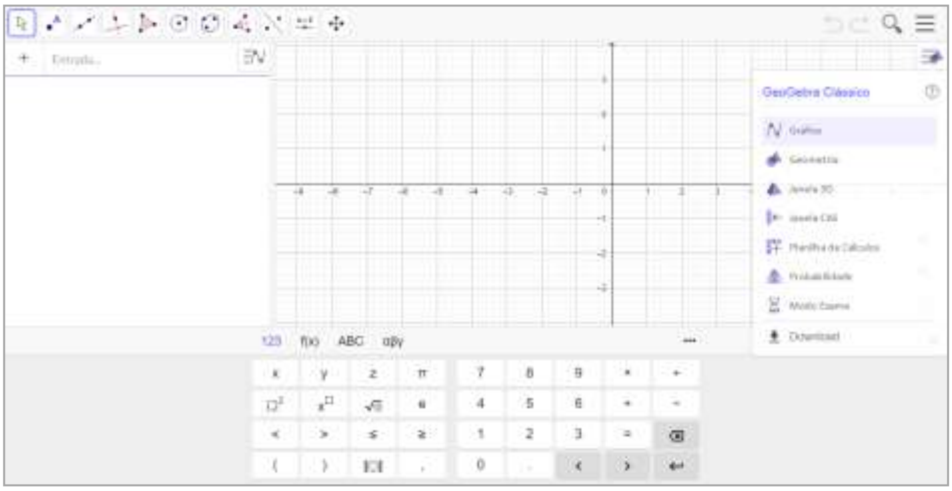
3. 3 A ESCOLHA DO SOFTWARE GEOGEBRA

O GeoGebra é um software livre, com interface agradável visualmente e desenvolvido numa concepção de matemática dinâmica, ou seja, é possível arrastar os entes geométricos de uma construção, bem como variar parâmetros dinamicamente. Este é um aplicativo completo, pois relaciona diferentes áreas da matemática e possibilita diferentes tipos de representações por meio de diferentes janelas de visualização – janela de álgebra, janelas de geometria (2D e 3D), janela CAS (cálculo simbólico) e planilhas.

Desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001, o aplicativo já passou por várias atualizações, além da inclusão de várias funcionalidades. Uma característica interessante é que o aplicativo pode ser executado no sistema operacional Linux, Windows e em *smartphones*, não necessitando de conexão com a internet. Além disso, é possível gerar *applets* (páginas HTML) com construções para posterior utilização, deixando visíveis apenas as ferramentas necessárias para a atividade. Este é um recurso interessante para diferentes níveis de ensino.

Com base nessas características, entende-se que o GeoGebra é um aplicativo completo e que possui todas as ferramentas necessárias para a execução das atividades planejadas por meio de applets. Além disso, o aplicativo possui um menu de ajuda detalhado, mostrando dicas para cada ferramenta selecionada. Este recurso pode auxiliar os alunos durante a manipulação e exploração das construções.

Figura 5 - Interface do software GeoGebra.



Fonte: *Print screen* do software no sistema operacional Windows 10.

3. 4 ATIVIDADE PILOTO

No segundo semestre de 2017, ao cursar a disciplina de Tecnologias em Educação Matemática – disciplina obrigatória do curso de mestrado, foi proposta a realização de uma atividade envolvendo o uso de algum tipo de tecnologia, para a elaboração de um artigo acadêmico relatando essa experiência. Com o intuito de verificar se as atividades que vinham sendo planejadas para a intervenção pedagógica que embasa esta pesquisa estavam bem postas, decidi aproveitar a oportunidade para realizar uma “atividade piloto”.

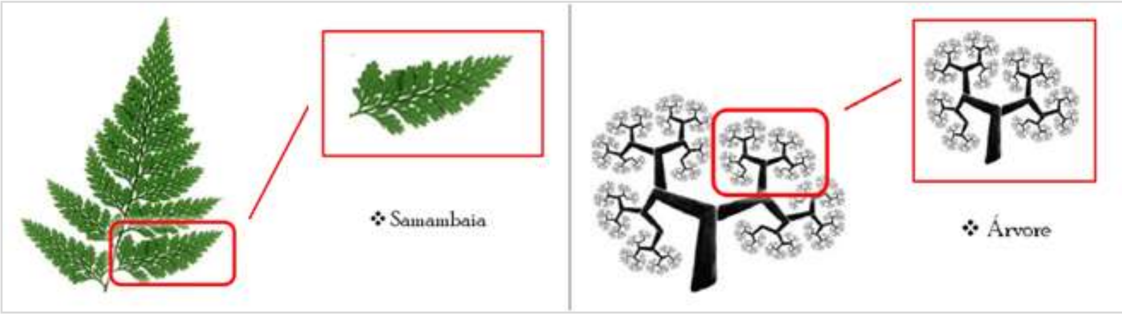
Destaco que o objetivo desta atividade piloto não era fazer uma análise de dados embasada no referencial teórico desta pesquisa. Ao invés de analisar os dados produzidos pelos alunos e as potencialidades do software, meu principal objetivo aqui foi olhar para as estratégias utilizadas. Ou seja, o foco foi analisar o meu trabalho, como eu estava me expressando e como estavam as atividades, identificando possíveis alterações para a segunda versão da produção de dados. Ressalto que a turma participante da atividade piloto não foi a mesma que participou da intervenção pedagógica descrita nessa dissertação.

A atividade foi desenvolvida na mesma escola em que foi feita a intervenção pedagógica, em uma turma regular de sexto ano composta por 20 alunos, com duração de 9 horas-aula. A proposta consistiu em utilizar o fractal Triângulo de Sierpinski para explorar conceitos geométricos, em particular, para revisar os conceitos de área e perímetro de polígonos, desenvolvidos com os alunos no início do ano letivo. O principal objetivo com as tarefas propostas foi calcular a área e o perímetro do triângulo de Sierpinski para as três primeiras iterações e, então, verificar se os alunos conseguiriam conjecturar o que acontece com a área e o perímetro deste fractal à medida que o número de iterações aumenta.

Como motivação para a temática, os alunos foram instigados a pensar sobre os tipos de formas geométricas que compõem a natureza e, também, questionados se saberiam apontar, com exatidão, quais são as formas geométricas que compõem uma nuvem e uma samambaia. Após algumas discussões com a turma, os alunos concluíram que não seria possível citar uma única forma geométrica, pois estes exemplos são formados pela junção/sobreposição de várias formas. Assim, expliquei aos alunos que os exemplos utilizados se assemelham a fractais, formas geométricas cuja estrutura se repete infinitamente, em escalas cada vez menores (ideia de autossimilaridade).

Com o auxílio de uma apresentação de *slides*, mostrei aos alunos alguns exemplos de fractais na natureza, usando a ideia de autossimilaridade. Facilmente, os alunos perceberam o padrão de repetição presente nas nuvens, raios, folhas de uma samambaia, couve-flor e árvores, inclusive identificando as partes menores que compõem cada figura e se assemelham às figuras originais. A partir destas explicações, os alunos foram questionados sobre outras formas da natureza que poderiam ser classificadas como fractais. As respostas obtidas foram: montanhas, água do mar, monte de areia/terra, brócolis, repolho, flores, entre outros.

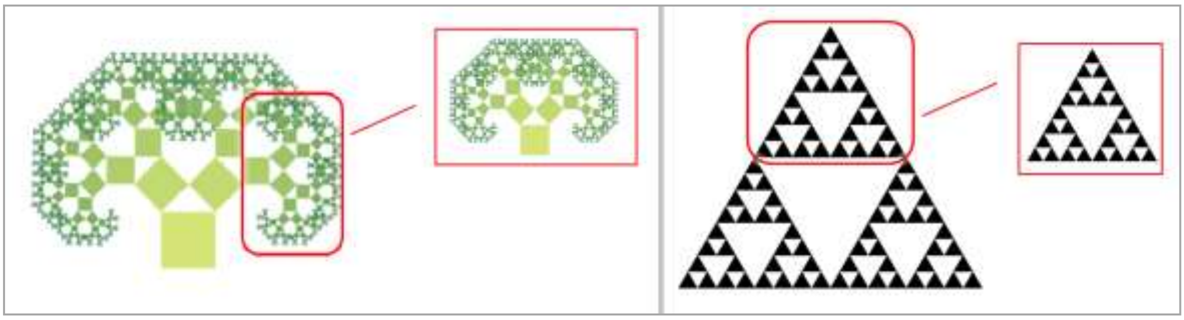
Figura 6 - Exemplos de fractais na natureza.



Fonte: Imagens Google.

Utilizando a mesma ideia, foram apresentados alguns exemplos de fractais estudados na matemática, como a Árvore Pitagórica, Tapete de Sierpinski e Triângulo de Sierpinski. Inicialmente, mostrei as imagens dos fractais aos alunos, usando os recursos do PowerPoint para dar ênfase em uma parte da figura e ampliá-la, tal como nos exemplos da natureza. Na sequência, também mostrei o processo de construção de cada fractal, usando a barra de navegação do software GeoGebra.

Figura 7 - Árvore Pitagórica e Tapete de Sierpinski



Fonte: Imagens Google.

Também, os alunos identificaram que a figura é um fractal, pois a árvore é composta por várias "árvores menores". Ressaltei que os triângulos construídos não podem ser triângulos quaisquer, mas sim triângulos que satisfaçam uma relação denominada Teorema de Pitágoras, de onde vem o nome do fractal. Também, aproveitei a representação geométrica projetada para dar uma noção sobre este Teorema, por meio da sua interpretação geométrica. Expliquei que a soma das áreas dos quadrados menores é igual a área do quadrado maior. Também, que essa afirmação não vale em qualquer triângulo, apenas nos triângulos retângulos.

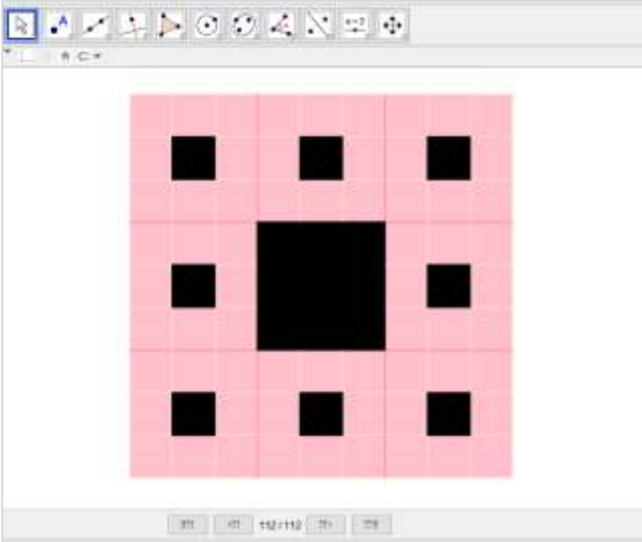
Por meio deste exemplo também destaquei que esse processo de construção pode ser repetido quantas vezes quisermos. Além do mais, enfatizei que, matematicamente, o fractal é resultado da repetição infinita desse processo, mas que nós não conseguiríamos ficar repetindo essa construção infinitamente. Também, mencionei que ao observar os exemplos da natureza, podemos perceber que nestas situações esse processo também é finito. Por exemplo, ao observar as folhas da samambaia, é possível que perceber que esse processo de recursão irá terminar, pois o número de folhas da samambaia é limitado.

Da mesma maneira, os alunos perceberam o Tapete de Sierpinski como um exemplo de fractal, por ser composto de formas iguais à forma geométrica inicial, porém menores. Utilizei a construção no GeoGebra para explicar aos alunos o processo de construção desse fractal detalhadamente, no qual começamos com quadrado e este deve ser dividido em nove quadrados congruentes e o quadrado do meio deve ser retirado. Mencionei que este processo que deve ser repetido sucessivamente para cada quadrado restante.

Escolhi um dos quadrados obtidos no nível 1 que permaneceu na construção, e perguntei aos alunos o que deveria ser feito neste quadrado. Percebi, neste momento, que os alunos compreenderam o processo de construção, mas não entenderam a ideia de "retirada dos quadrados". De acordo com a fala dos alunos, eles pareceram pensar que os quadrados do meio seriam apenas pintados de outra cor, sem ter entendido o processo de retirada.

Na verdade, vários alunos tentaram explicar esse processo falando ao mesmo tempo e mencionando que o quadrado deveria ser pitando de preto. Segue a fala de um dos alunos: *"Sora, tu pega o quadrado e divide em nove quadradinhos, que nem tu fez no quadrado grandão. Depois, tu pega o quadrado do meio e pinta de preto".* Cheguei a mencionar que o quadrado preto (do meio) não foi simplesmente pitando de preto, mas sim retirado da figura. Ou seja, que era como se ele tivesse sido recortado, e ficado um "buraco na forma de quadrado" no centro desta figura. Em seguida, a aula terminou e não foi possível continuar debatendo acerca dessa ideia.

Figura 8 - Tapete de Sierpinski.

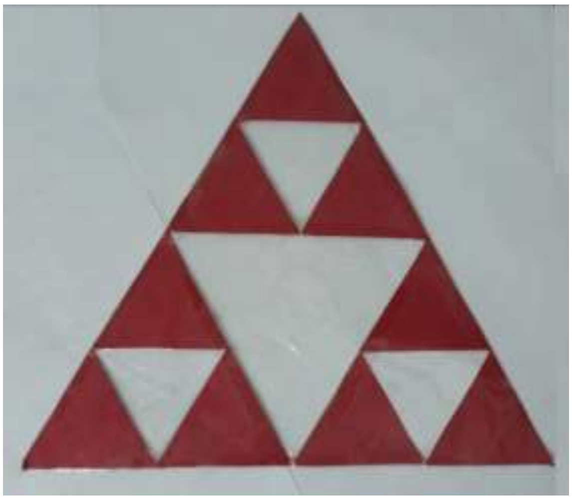


Fonte: Elaborado pela autora com o software GeoGebra.

Para a aula seguinte, em que falaríamos sobre o Triângulo de Sierpinski, resolvi confeccionar o fractal em cartolina até o nível 2, para esclarecer as dúvidas relacionadas ao processo de retirada e explicar melhor os passos da construção. Inicialmente, os alunos viram a imagem do fractal e buscaram interpretar e explicar o processo de construção. Aparentemente, os alunos conseguiram entender esse processo, inclusive relacionando com o Tapete de Sierpinski, conforme a fala de um dos alunos: *"Sora, esse é tipo o quadrado da aula passada né? Só que agora a gente vai dividindo em triângulos... E daí vai pintando o triângulo do meio".*

Neste momento, retomei a ideia de retirada, apresentando o triângulo confeccionado em cartolina para ilustrar a ideia. Quando essa forma geométrica e a construção no GeoGebra foram apresentadas aos alunos, eles se mostraram surpresos, por ver o que eu estava querendo dizer com "retirada". Além disso, a partir de seus comentários, foi possível perceber que agora a ideia estava realmente clara. Por exemplo, um aluno fez o seguinte comentário: *"Ah, agora entendi. As figuras pretas da construção quer dizer que elas saíram. Que nem aí no triângulo de papel".* Ou seja, apesar das várias possibilidades que a tecnologia pode oferecer, ela também tem suas limitações, uma vez que somente a representação visual utilizada não foi suficiente para esclarecer a ideia de retirada envolvida.

Figura 9 - Triângulo de Sierpinki feito com cartolina.



Fonte: Elaborado pela autora.

Após introduzir a temática, fiz a revisão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas e uma breve apresentação sobre o software. Na sequência, os alunos tiveram a oportunidade de manipular o aplicativo e fazer perguntas, visando sua familiarização. Finalmente, os alunos receberam um material impresso, contendo um resumo do que havia sido discutido até o momento e as orientações para a construção do fractal no GeoGebra.

A ideia inicial era que os alunos fizessem alguns níveis do Triângulo de Sierpinski, e a partir dessa representação geométrica respondessem os questionamentos propostos. Para tanto, os alunos receberam um roteiro descrevendo o processo de construção do fractal, indicando que o primeiro passo seria construir um triângulo equilátero medindo 24 cm de lado, usando a ferramenta *Polígono regular*. O passo seguinte seria a marcação do ponto médio de cada um dos lados e posterior construção do triângulo com vértices nesses pontos. Destaco que a medida de 24 cm foi pré-definida para que os alunos não obtivessem números decimais como resultado, uma vez que este conteúdo seria estudado posteriormente.

Neste momento, os alunos já tinham uma noção sobre a ideia de fractal, haviam revisado os conceitos de área e perímetro e já haviam feito uma breve familiarização com o software. Assim, já seria possível iniciar a construção do fractal, exceto por um problema: o software não estava instalado nos computadores do laboratório da escola, e apenas o técnico em informática do município possuía a senha para fazer instalações. Mesmo realizando a solicitação, ele não conseguiu ir até a escola instalar o software devido à grande demanda de solicitações vindas das escolas do município.

Então, a única possibilidade seria utilizar o GeoGebra online. Mais um problema: os computadores estavam programados para desligarem no final do dia e apagarem todos os arquivos salvos, havendo a necessidade de salvar as construções em um *pendrive*.

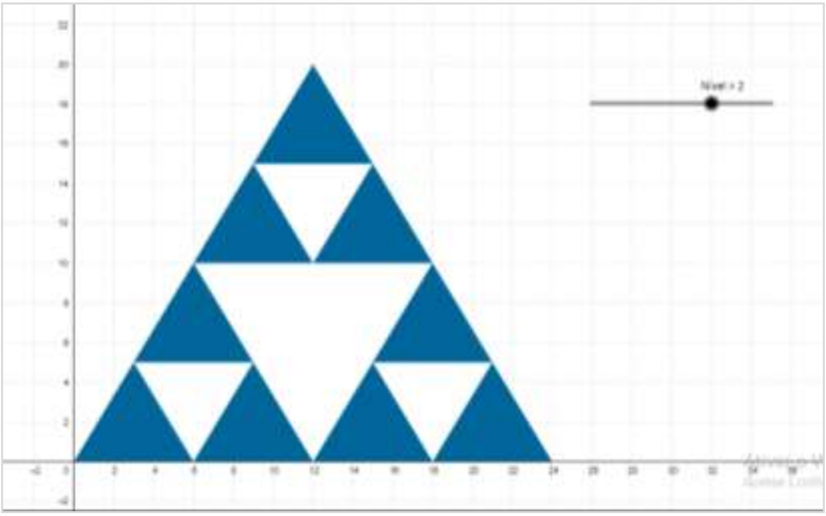
Usando o projetor, combinei com os alunos que faria os primeiros passos da construção com eles, mostrando os passos e ferramentas do software que deveriam ser usados e, então, eles dariam sequência com suas duplas. Mostrei que começaríamos usando a ferramenta *Polígono regular* e realizei a construção do primeiro triângulo no projetor. Já neste primeiro passo, os alunos tiveram muita dificuldade em usar o software e, principalmente, em escutar minhas orientações.

Os alunos usavam a ferramenta errada e não manipulavam o mouse corretamente. Ao invés de clicar nos locais onde seriam colocados os pontos, eles arrastavam o cursor, tentando desenhar o polígono. Acabavam mexendo em várias ferramentas ou então colocando os pontos nos lugares errados. Tive que atender as duplas várias vezes para auxiliar e, em duas horas-aulas, poucas duplas haviam feito o triângulo inicial. Imaginei que seria mais fácil fazer essa construção com os alunos, e com os contratempos a aula de matemática terminou e eu não consegui salvar os triângulos que já estavam prontos.

Para a aula seguinte, resolvi gerar um *applet* e esconder todas as ferramentas que não seriam utilizadas. Ou seja, este *applet* estava simulando a tela inicial do software, porém mostrando apenas as ferramentas que os alunos usariam na construção. Ainda assim, várias duplas persistiram nos erros e precisaram de auxílio. Mais uma vez, 2 horas-aula serviram apenas para que todas as duplas conseguissem construir o triângulo equilátero inicial. Ao final da aula, tive que salvar todas as construções em um *pendrive*, o que acabou gastando bastante tempo. Se eu continuasse tendo que abrir as construções no início de todas as aulas e salvar uma por uma no final, acabaria ocupando grande parte do tempo do período de matemática.

Nessas condições, resolvi que seria mais prático gerar um *applet* em que os alunos pudessem manipular a construção a partir de um controle deslizante para variar os níveis, e com base nessa construção fazer a análise e cálculos necessários. Então, criei um *applet* no site do GeoGebra, para que os alunos pudessem acessar a partir do *link* gerado. Na construção, deixei visível os eixos cartesianos e a malha, para que os alunos pudessem identificar informações sobre os triângulos envolvidos, como altura e medida dos lados.

Figura 10 - Applet do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra.

Na aula seguinte, cada dupla abriu o *applet* e recebeu instruções do que deveria ser feito: calcular a área e perímetro do fractal nos três níveis, completando o quadro (Figura 11), e então responder aos questionamentos finais. No início, os alunos ficaram com algumas dúvidas sobre o que deveria ser feito, talvez devido à linguagem utilizada. Auxiliei os estudantes nos cálculos da primeira iteração (com a primeira linha de cada tabela), e então eles seguiram sozinhos com a atividade, manuseando o controle deslizante e explorando cada nível.

Figura 11 - Atividades propostas aos alunos.

1. Analise o fractal e complete os quadros a seguir:

Nível	Quantidade de triângulos	Medida da base de cada triângulo	Medida da altura de cada triângulo	Área de cada triângulo	Área total do fractal
0					
1					
2					
3					

Nível	Quantidade de triângulos	Medida do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total do fractal
0				
1				
2				
3				

Fonte: Elaborado pela autora.

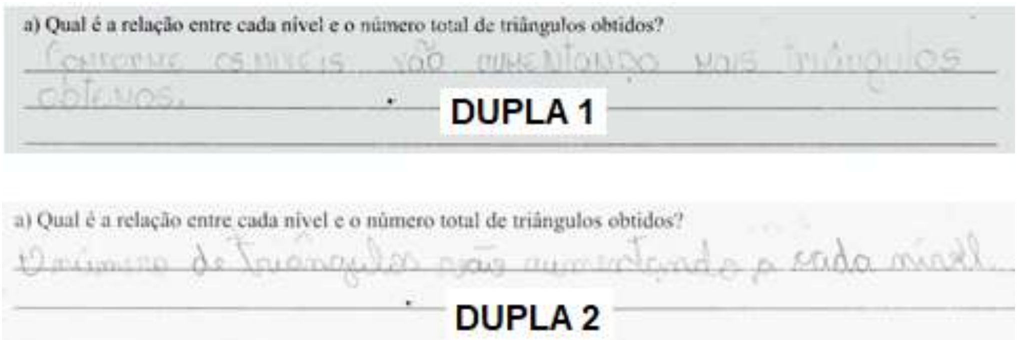
Enquanto realizavam os cálculos, várias duplas pediram auxílio várias vezes, fazendo questionamentos como: *“Pra calcular a área soma os lados?”*; *“O perímetro é a parte de dentro ou contorno da figura?*”; “*Na área é só multiplicar o lado por três?*”, entre outros. Ou seja, os alunos confundiram área e perímetro várias vezes, de forma que durante a atividade foi necessário relembrar cada conceito frequentemente para esclarecer suas dúvidas. Além disso. As duplas tiveram certa dificuldade para responder os questionamentos finais. Em cada item, foi necessário explicar usando linguagem mais simples, enfatizando que eles poderiam manipular a construção e também analisar as tabelas para confirmar suas hipóteses.

Ao interagir com as duplas, respondendo seus questionamentos, notei grande dificuldade, por parte dos alunos, em relacionar a parte geométrica (construção) com a algébrica (cálculos da tabela). Algumas duplas tratavam essas informações de forma independente, como se não tivesse relações entre elas. Ou seja, eles não conseguiam perceber que, ao olhar os resultados dos cálculos e perceber que a área estava diminuindo, isso também poderia ser confirmado geometricamente, a analisando a superfície do triângulo.

Por fim, apesar das dúvidas apresentadas, a maioria das duplas conseguiu realizar os cálculos adequadamente ao preencher os quadros referentes à área e ao perímetro. Com relação aos questionamentos finais, os alunos conseguiram ter certa percepção sobre o que estava acontecendo ao longo dos níveis, apesar de nem sempre conseguirem usar a linguagem matemática corretamente.

Quanto ao primeiro questionamento, referente ao número de triângulos de cada nível, ao manipular a construção no *applet,* todas as duplas conseguiram perceber que o número de triângulos vai aumentando. A seguir, trago as respostas de duas duplas, que confirmam essa afirmação.

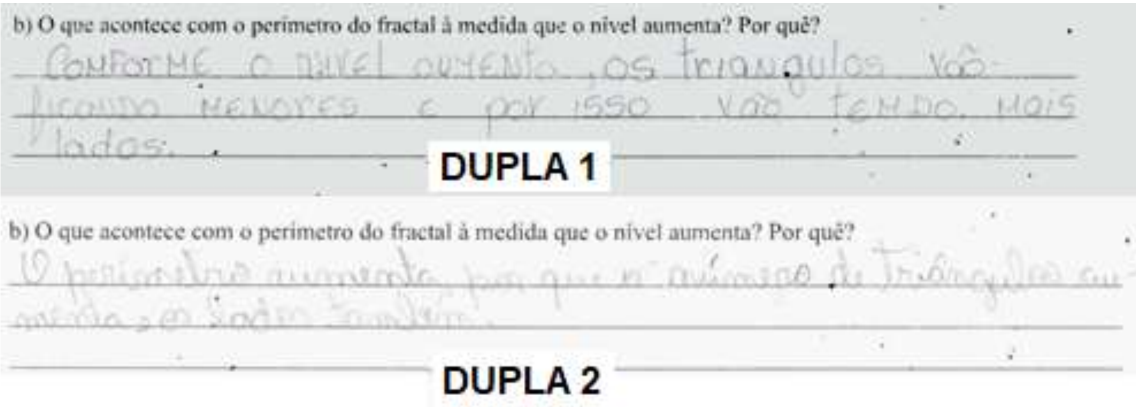
Figura 12 - Respostas do primeiro questionamento.



Fonte: Material produzido pelos alunos.

No segundo questionamento, *"O que acontece com o perímetro do fractal à medida que o nível aumenta? Porque?"*, uma das duplas (Dupla 2) afirmou que o perímetro aumentada, pois aumenta a quantidade de triângulos e consequentemente aumentou o número de lados cuja medida será somada. Já a Dupla 1 não deixou claro o seu pensamento, pois não respondeu se a área aumenta ou diminui. Entretanto, também mencionou que "existem mais lados", parecendo ter uma ideia similar à Dupla 2.

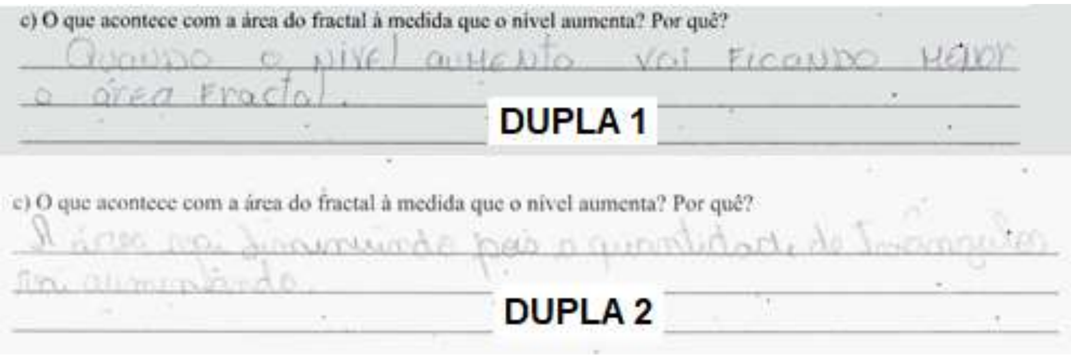
Figura 13 - Respostas do segundo questionamento.


b) O que acontece com o perimetro do fractal à medida que o nivel aumenta? Por quê?
CONFORME O NIVEL AUMENTA, OS triangulos VÃO FICANDO MENORES E POR ISSO VÃO TENDO MAIS lados.
DUPLA 1
b) O que acontece com o perimetro do fractal à medida que o nivel aumenta? Por quê?
DUPLA 2

Fonte: Material produzido pelos alunos.

Quanto ao terceiro questionamento, referente à área do fractal ao longo dos níveis, as duplas pareceram ter compreendido o processo, mas apresentaram dificuldade ao transpor para o papel. Por exemplo, a Dupla 1 respondeu corretamente, mas não justificou sua hipótese. Já a Dupla 2 não especificou que a quantia de triângulos mencionada se refere aos triângulos retirados.

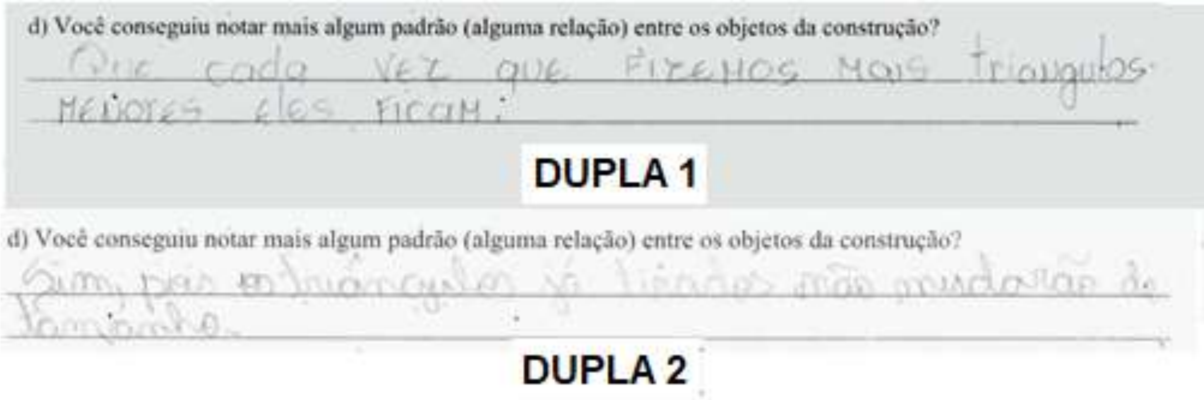
Figura 14 - Respostas do terceiro questionamento.


c) O que acontece com a área do fractal à medida que o nivel aumenta? Por quê?
QUANDO O NIVEL AUMENTO VAI FICANDO MAIOR o área Fractal.
DUPLA 1
c) O que acontece com a área do fractal à medida que o nivel aumenta? Por quê?
DUPLA 2

Fonte: Material produzido pelos alunos.

No quarto questionamento, perguntei aos alunos se foi possível observar mais algum padrão (relação) entre os elementos da construção. A Dupla 2 fez uma observação interessante ao dizer que os triângulos construídos são cada vez menores. Seria interessante questionar a esses alunos se os triângulos atingiriam algum tamanho mínimo, para analisar suas respostas. Ainda sobre o quarto questionamento, é possível que a Dupla 1 não tenha entendido muito bem o processo de retirada dos triângulos, pois afirmou que os triângulos retirados não mudam de tamanho.

Figura 15 - Respostas do quarto questionamento.


d) Você conseguiu notar mais algum padrão (alguma relação) entre os objetos da construção?

Que cada vez que fizemos mais triangulos menores eles ficam;

DUPLA 1

d) Você conseguiu notar mais algum padrão (alguma relação) entre os objetos da construção?

Sim, pois os triângulos já tirados não mudarão de tamanho.

DUPLA 2

Fonte: Material produzido pelos alunos.

Por fim, os alunos tiveram facilidade para entender a definição de fractal e citar exemplos destes, além de deduzirem os processos de construção. Conforme esperado, este é um tema complexo e, em algumas situações, os alunos tiveram dificuldade para compreender algumas ideias, tais como o processo de retirada dos quadrados.

Como afirmam Borba e Penteado (2016), a tecnologia, sozinha, não é suficiente. Isso foi perceptível quando a ideia de simulação de “retirada” não ficou clara por meio das imagens mostrando e da animação feita no GeoGebra. Houve a necessidade de levar aos alunos a construção em material concreto, para que pudessem ver e manusear. Assim, acredito que é interessante ter em mente que alunos do sexto ano ainda são crianças e a manipulação de material concreto pode contribuir no processo de aprendizagem.

De maneira geral, a execução desta atividade proporcionou uma reflexão para a aplicação da segunda versão, pois foi possível perceber a necessidade de várias alterações. Tais alterações serão discutidas na próxima seção.

3. 5 PROCESSO DE REFLEXÃO SOBRE AS ATIVIDADES

Ao refletir sobre esta atividade piloto, concluí que o método usado para a introdução da temática pareceu ser eficiente. Tanto a abordagem realizada usando o *PowerPoint* quanto a exibição dos passos da construção no GeoGebra contribuíram para o entendimento da noção de fractal por meio da visualização. Além disso, os alunos participaram deste processo, fazendo comentários e questionamentos. Destaco que talvez a escolha da cor preta para pintar os triângulos retirados pode ter confundido os alunos. Desta forma, optei por usar a cor branca quando realizei a atividade novamente.

Levando em consideração a dificuldade dos alunos em compreender o processo de retirada, acredito que a construção do fractal em material concreto poderia contribuir no entendimento do processo de construção durante as atividades. Além do mais, para alunos do sexto ano, manusear o fractal poderia ser uma estratégia interessante para a compreensão do processo de construção e constituição da imagem mental de fractal. Por isso, na segunda versão desta atividade, ao abordar o Tapete de Sierpinski, os alunos começaram fazendo a construção do fractal em EVA e somente depois fizeram uso do recurso tecnológico.

Ao invés dos alunos construírem o fractal no GeoGebra, optei por gerar um *applet* contendo a construção, por várias razões que envolvem limitações técnicas, de tempo e do conhecimento dos alunos acerca do software. Além dos aspectos envolvendo a preocupação com o tempo para a realização da intervenção, temos também a falta de familiaridade dos alunos com o software.

Para realizar a construção dos fractais abordados na segunda versão (Tapete e Triângulo de Sierpinski), demandaria tempo para que os alunos pudessem aprender a utilizar as ferramentas do GeoGebra, além da necessidade de conhecimentos matemáticos que alunos do sexto ano ainda não têm. Ressalto que até mesmo a digitação do *link* na barra de endereço acabava sendo demorada, devido à falta de habilidade dos estudantes com o computador.

Ao discutir os problemas nas relações entre mídias e processos educacionais, Kenski (2012) menciona que o processo de aprendizagem mediado por computadores demanda habilidades que as crianças ainda não possuem. De fato, para que os alunos tivessem o domínio necessário do software, demoraria algumas aulas, além de que, durante a construção, surgiriam várias dúvidas relacionadas ao software que tornariam esse processo bastante lento. Talvez, o processo de construção também poderia acabar tirando o foco das análises que deveriam ser feitas pelos alunos.

Além disso, ao planejar uma atividade, o recurso pedagógico utilizado (seja tecnologia digital, material concreto, ou outro) deve estar alinhado com o objetivo da atividade proposta. Posteriormente, ao fazer uma análise da situação, penso que a utilização do *applet* com a construção pronta não interferiu nos objetivos envolvidos. Ou seja, mesmo sem construir o fractal, os alunos puderam realizar os cálculos e responder os questionamentos propostos. Talvez a construção do fractal poderia ter trazido discussões interessantes para a aula, mas não prejudicou a análise da área e do perímetro do mesmo.

Quando esta atividade piloto foi realizada, a ideia inicial era que os alunos realizassem a construção do Triângulo de Sierpinski no software, a partir das minhas orientações usando o GeoGebra no projetor. Entretanto, já na primeira tentativa, percebi que seria inviável, pois os alunos acabavam se distraindo ou tendo problemas devido à falta de habilidade com o software. Assim, os alunos se perdiam no processo de construção ou usavam as ferramentas erradas, havendo a necessidade de ajudar cada uma das duplas individualmente. Por fim, acabei gerando o *applet* na atividade piloto e optando pela mesma metodologia novamente.

Para a instalação de programas nos computadores da escola, é necessária a inserção de uma senha que somente o técnico de informática da Secretaria de Educação possui. Apesar de eu ter solicitado a instalação do GeoGebra, ela não aconteceu até o momento da realização da produção de dados, devido à grande demanda em todo o município. Uma alternativa seria usar o GeoGebra online, mas como o sinal de internet da escola é fraco, o aplicativo poderia ficar instável.

Além disso, como mencionado, os computadores do laboratório estão programados para apagar todos os arquivos salvos quando são desligados, e eu não teria tempo hábil para salvar todas as construções em um *pendrive* e abri-las novamente toda vez que voltássemos ao laboratório de informática. Ou seja, devido a todas as limitações já mencionadas, a ideia inicial de elaborar atividades de expressão se tornou inviável, e acabou dando espaço para a criação de atividades de exploração, por meio de *applets* (GRAVINA; SANTAROSA, 1998).

Também, devido à dificuldade que alunos de sexto ano têm em diferenciar área e perímetro, acredito que possa ser mais interessante trabalhar esses conceitos separadamente, a fim amenizar a confusão entre as definições. A ideia de usar tabelas foi uma forma de organizar o pensamento dos alunos, mas que também pode ter restringido suas próprias ideias. Por exemplo, uma dupla poderia ter pensado em calcular a área total do fractal e então descontar a área do triângulo retirado na iteração.

Por fim, acredito que a realização desta atividade foi essencial para promover tais reflexões, além de indicar a necessidade de um aprimoramento da linguagem utilizada no material impresso. No próximo capítulo, farei a apresentação e análise dos dados obtidos na segunda versão da produção de dados, explicando com mais detalhes as atividades planejadas e a metodologia utilizada.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, irei apresentar os dados produzidos ao longo das 18 horas-aulas de intervenção pedagógica, além de realizar a análise destes dados confrontando-os com o referencial teórico apresentado, especialmente com a ideia de *seres-humanos-com-mídias*. Tal referencial será usado no propósito de responder a seguinte pergunta: *Quais as potencialidades do GeoGebra para a compreensão de conceitos geométricos a partir da exploração de fractais em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental?*

Os dados produzidos foram registrados por meio de gravações de áudio, anotações de campo e também por meio do material produzido pelos alunos. Destaco que, devido à impossibilidade de gravar as conversas de todas as duplas, os registros de áudio se referem aos momentos de discussão no grande grupo ou então aos momentos de interação das duplas com a professora.

Por uma questão de organização, os dados serão apresentados em quatro momentos, que se referem ao tipo de atividade que foi realizada. O primeiro momento se refere à ocasião em que a ideia de fractal foi apresentada aos alunos, começando com exemplos da natureza e partindo para as formas geométricas fractais. Esta etapa se caracteriza pela apresentação de imagens nos slides, dos passos da construção dos fractais Árvore Pitagórica e Tapete e Triângulo de Sierpinski no GeoGebra e pela discussão com os alunos das características e padrões observados.

Com relação à análise de dados, neste primeiro momento o enfoque estará no papel das tecnologias usadas, no caso a apresentação em PowerPoint e a utilização do GeoGebra, para auxiliar na introdução da ideia de fractal e no processo de construção de alguns fractais. Além disso, será feita uma relação entre a BNCC (BRASIL, 2017) e outros autores citados no referencial teórico no decorrer do relato da atividade.

No segundo momento, será realizada uma discussão mais aprofundada sobre o processo de construção do Tapete de Sierpinski, para que posteriormente os alunos pudessem realizar a construção do mesmo até o nível 2, usando papel emborrachado de EVA, registrando as estratégias utilizadas. Além disso, os alunos calcularam a área obtida em cada um dos níveis usando lápis e papel. Nesta oportunidade, a análise de dados estará voltada para a importância dos materiais utilizados, uma vez que a TD nem sempre possibilita a resolução de todos os problemas.

Já no terceiro momento, os alunos tiveram a oportunidade de confirmar os resultados obtidos no cálculo da área, usando o *applet* criado no GeoGebra. A utilização do recurso tecnológico possibilitou a abordagem de mais níveis do fractal, e os alunos puderam manipular de forma dinâmica e analisar algumas propriedades solicitadas.

No quarto e último momento, os alunos trabalharam com o Triângulo de Sierpinski, novamente por meio da manipulação deste fractal no *applet* desenvolvido no GeoGebra. Neste caso, os alunos trabalharam com duas janelas de visualização, calculando o perímetro do fractal e observando semelhanças e diferenças entre os níveis da construção.

Para identificar os alunos em cada uma das discussões realizadas no grande grupo, usarei a palavra *"Aluno"* seguida do número referente à ordem de pronuncia dos mesmos. Assim, os indivíduos serão identificados por *Aluno 1*, *Aluno 2*, e assim por diante. No entanto, o indivíduo identificado como *Aluno 1* em uma discussão, não necessariamente será o mesmo da discussão seguinte, uma vez que não estou me atendo a acompanhar o progresso dos alunos individualmente, mas sim acompanhar os questionamentos e contribuições da turma como uma unidade.

A partir do segundo momento, no qual os alunos se reuniram em duplas para a produção do material, irei identificá-los pela palavra *Dupla* seguida de um número, e este sim será único para cada dupla, a fim de facilitar a apresentação dos dados e análise do material. A seguir, estão descritas cada uma das etapas com maiores detalhes.

4.1 PRIMEIRO MOMENTO – APRESENTAÇÃO DA IDEIA DE FRACTAL

Os alunos já estavam cientes da realização da intervenção, pois haviam levado o termo de consentimento para seus pais assinarem, e eu havia explicado a eles qual seria o propósito da realização destas atividades. Os estudantes sabiam que não seria atribuída nota e que haveria gravação de áudio durante as aulas, o que causou certo receio e timidez nos primeiros momentos, pois percebi que eles não participavam como de costume na conversa inicial da aula. Felizmente, conforme a discussão foi acontecendo e eles foram se interessando pela temática, foram esquecendo esse detalhe.

Comecei a aula explicando que estudaríamos um outro tipo de formas geométricas, chamadas fractais. Que este tópico geralmente não é estudado no Ensino Básico, pois faz parte de conteúdos mais "avançados" na matemática. Entretanto, estudaríamos algumas propriedades mais simples, para que eles tivessem a oportunidade de ter contato com este tipo de geometria e ampliassem seu conhecimento matemático. Neste momento, percebi que os alunos ficaram entusiasmados e até mesmo sentindo-se privilegiados por estudarem este conteúdo "diferente". A seguir, estão transcritas algumas das falas dos alunos:

Aluno 1: *Então quer dizer que a gente vai estudar um conteúdo que os outros alunos da nossa série não estudam?*
Aluno 2: *Os outros alunos da escola não estudaram esses tais de fractais? Nem os do nono?*
Professora: *Vocês terão a oportunidade de ampliar seus conhecimentos e estudar algo diferente. Provavelmente os outros alunos da escola não viram, pois não faz parte do conteúdo programático. A não ser que a professora deles também tenha falado sobre este assunto em algum momento.*
Aluno 1: *Porque não está nos conteúdos? É muito difícil?*
Professora: *Assim como todos os conteúdos, tem coisas fáceis e coisas mais complicadas. Mas calma gente, vamos começar que daí vocês vão entender.*

A partir da fala dos estudantes, é possível perceber que o estudo de um conteúdo considerado "diferente" por eles causou certa curiosidade e despertou o interesse dos alunos na aula de matemática, tal qual ocorreu com Souza (2014) em seu trabalho. Conforme afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), o envolvimento ativo e afetivo do aluno é fundamental para que ocorra aprendizagem, ou seja, se os alunos permanecerem com essas expectativas ao longo dos encontros, este pode ser um importante aliado para a aprendizagem dos conceitos abordados.

Para introduzir a ideia de fractal, pensei que seria interessante começar relacionando com exemplos da natureza, instigando os alunos a assimilarem este conceito "novo" com elementos do seu cotidiano. Como afirma a BNCC (2018), o estudo de Geometria deve estar relacionado com elementos e problemas do mundo físico. Além disso, Santos e Nacarato (2014, p. 21) também acreditam que “os professores podem, por meio de ações pedagógicas em sala de aula, oportunizar aos seus alunos a interpretação do espaço”.

Iniciei a apresentação de slides trazendo o seguinte questionamento, com a finalidade de provocar os alunos: *“Vocês sabem me dizer, com exatidão, que forma(s) geométrica(s) compõem uma nuvem?”.* Dentre as várias respostas, destaquei o seguinte trecho:

Aluno 1: *Círculos! As nuvens são formadas por vários círculos, um em cima do outro.*
Professora: *Tu acha que são vários círculos, bem perfeitos, todos bem “redondinhos”?*
Aluno 2: *Claro que não! As nuvens são formas irregulares. Não tem uma só forma geométrica que “forme uma nuvem”.*
Professora*: Exatamente! Não existe uma regularidade. Na verdade, as nuvens são exemplos de fractais.*

Esta discussão foi muito interessante, pois o *Aluno 1* possivelmente, ao pensar em uma nuvem, associou àquela imagem mental da nuvem que desenhamos quando crianças, que é formada por círculos e apresenta certa regularidade. Já o *Aluno 2* parece ter ido além, e pensando no elemento nuvem que compõe a natureza. Em sua fala, o *Aluno 2* parece ter captado a essência da ideia de fractal, inclusive remetendo a Mandelbrot (1991, p. 207, apud Faria, 2012, p. 34) quando afirma que os fractais “são objetos tanto matemáticos quanto naturais, que não são regulares, mas rugosos, porosos ou fragmentados’.

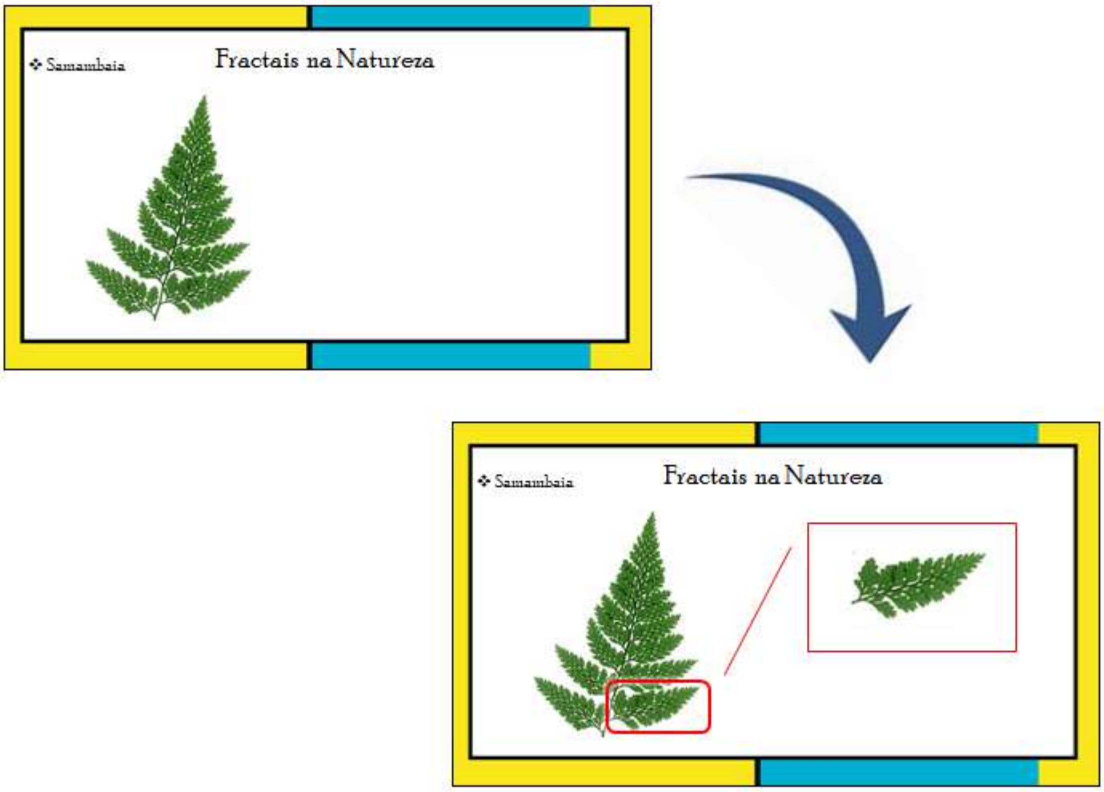
Na sequência, questionei os alunos sobre as formas geométricas que compõem uma samambaia, e alguns deles se arriscaram a dizer que pareciam ser triângulos. Outros, inspirados pelo questionamento anterior, responderam que provavelmente as samambaias também eram exemplos de fractais. Resolvi avançar para a explicação da ideia de fractal, sabendo que seria necessário usar uma linguagem menos formal com os alunos, uma vez que o sexto ano ainda não teria bagagem matemática para alguns conceitos.

Realizando pesquisas em vários materiais sobre a definição de fractal, acabei optando por apresentar aos alunos a seguinte definição: “Fractais são formas geométricas cuja estrutura se repete infinitamente, em escalas cada vez menores”.

No entanto, essa explicação ainda pode ser um tanto abstrata e, por isso, utilizei a imagem de uma samambaia para explicar melhor a ideia envolvida.

Comecei apenas mostrando a imagem de uma samambaia, e explicando aos alunos que a samambaia é um exemplo de fractal, pois é como se ela fosse formada por várias samambaias cada vez menores em sua estrutura. Os alunos tiveram certa dificuldade de entender essa afirmação, e então usei o recurso de selecionar uma parte da samambaia dando *zoom* (conforme a figura) e mostrar que este pedaço é idêntico à samambaia original, porém menor. Neste momento, um aluno percebeu: *"E esta folha também é formada por várias "samambaiazinhas" pequenas, que são iguais a samambaia grande!".* Ou seja, este aluno compreendeu a ideia de fractal, a partir deste exemplo da natureza.

Figura 16 – Samambaia.



Fonte: Elaborado pela autora no PowerPoint.

Nesta situação, podemos perceber que o uso da tecnologia, em especial da aplicação do *zoom*, contribuiu para que os alunos percebessem a semelhança da parte destacada com a estrutura da figura inicial. Também seria possível realizar tal explicação usando apenas quadro e giz, mas demandaria mais tempo e talvez a qualidade do desenho poderia acabar confundindo os alunos. Assim, o uso do computador se mostrou muito importante, mesmo aparecendo de maneira sutil.

O uso da tecnologia na seleção de uma parte da samambaia e sua ampliação permitiu a comparação destes dois elementos, indo ao encontro da orientação da BNCC (BRASIL, 2017) de abordar o estudo de transformações (ampliações e reduções) e semelhança de figuras planas nas aulas de Geometria. Conforme Borba e Villarreal (2005, p. 91, nossa tradução), “o computador é uma rica fonte de imagens visuais e computacionais que possibilita a exploração de conceitos matemáticos”, possibilitando, neste caso, a exploração da ideia intuitiva de fractal em um elemento da natureza.

O recurso tecnológico possibilitou evidenciar e ampliar parte da imagem, de forma que o pensamento do aluno foi condicionado pela representação visual exibida. A imagem inicial, juntamente com minha explicação, pareceu não ter esclarecido a ideia de fractal. No entanto, a partir da fala do estudante, é perceptível que a visualização possibilitou relacionar a imagem com a definição matemática apresentada. Tal situação reforça que a visualização pode transformar a compreensão por si só, sendo um elemento essencial na atividade matemática (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Reforcei a afirmação do aluno, explicando aos demais que, se pegássemos cada uma das ramificações da primeira samambaia que mostrei, elas seriam iguais à samambaia inicial. Se nesta ramificação repetíssemos esse mesmo processo e usássemos o *zoom*, também conseguiríamos perceber a semelhança com a figura inicial. Ressaltei que, de acordo com a definição de fractal, em objetos matemáticos, esse processo seria infinito, ou seja, poderíamos aproximar quantas vezes quiséssemos e sempre perceberíamos que as partes são iguais à figura original. Além disso, o diálogo abaixo também indica que, no decorrer desse estudo, quando manipularmos os fractais usando o software GeoGebra, o uso do *zoom* será fundamental:

Aluno 1: *“Sora”, mas dá pra fazer isso? Ficar aproximando a figura, tipo, pra sempre? Teria o que ver?*

Professora: *Com o uso de um programa computacional, poderíamos aproximar quantas vezes a gente quisesse, e daí poderíamos olhar cada pedacinho cada vez mais de perto. Poderíamos fazer isso quase infinitamente*[6] *usando o computador. Mas na prática, usando um desenho no papel, por exemplo, não seria possível. Quando chegarmos nas figuras estudadas na matemática, vocês entenderão melhor.*
Aluno 2: *Mas nas coisas da natureza não dá pra fazer isso né?*
Professora: *Não. Se a gente ficar aproximando cada vez mais a folha da samambaia, terá um momento em que a estrutura vai parar de se repetir. Se pensarmos bem, não tem espaço na folha pra isso acontecer infinitamente. Não acham?*
Aluno 2: *Hum, é verdade. Se dermos zoom vamos encontrar células e outras coisas.*

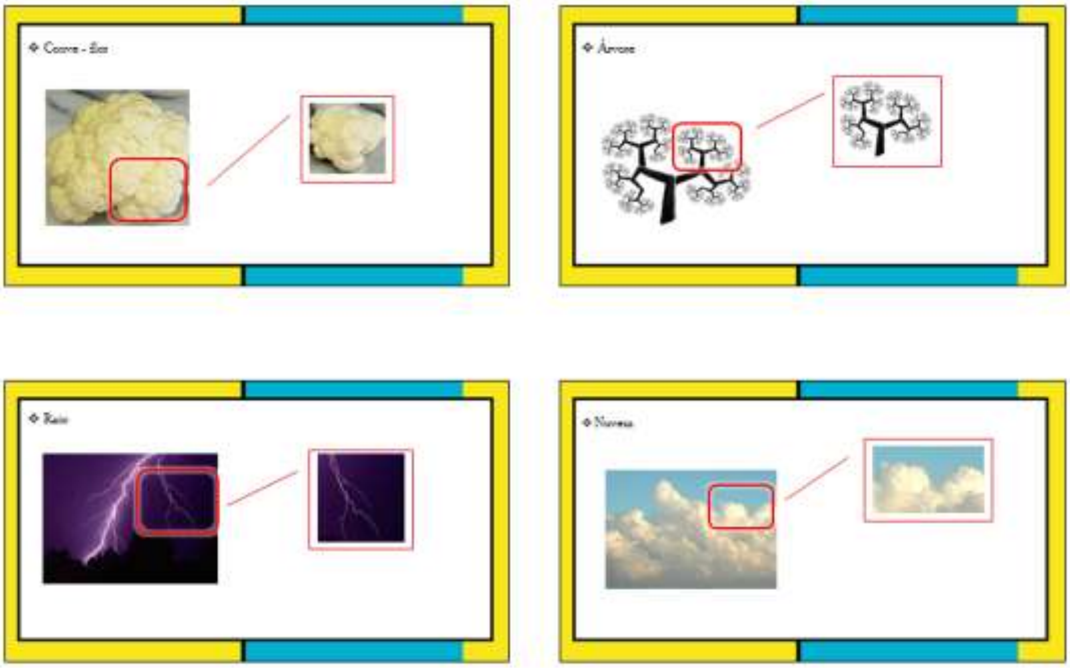
Mesmo de maneira não tão explícita, neste momento o *Aluno 2* mobilizou os conhecimentos que ele já possuía da área de Ciências da Natureza, confirmando as afirmações de vários autores, como Mandelbrot (1991) e Barbosa (2005) sobre o potencial da interdisciplinaridade dos fractais. Além disso, neste instante, o aluno manifestou, de maneira espontânea, conhecimentos que ele possuía de suas vivências, o que contribui no processo de elaboração conceitual e formação do pensamento geométrico (SANTOS E NACARATO, 2014).

Em seguida, comecei a mostrar outras imagens de elementos da natureza para os alunos, a fim de dar sequência na noção intuitiva de fractal partindo desses exemplos. Dentre as imagens mostradas, estavam nuvens, samambaia, árvore, relâmpagos e couve flor. Novamente, utilizei o recurso da apresentação em *PowerPoint* para selecionar parte do objeto e mostrar que a couve-flor, por exemplo, é formada pelo agrupamento de vários pedacinhos iguais, porém menores.

Ao longo desses exemplos, os alunos se mostraram animados por conseguir perceber cada uma das estruturas em escalas menores, formando a inicial. Inclusive, vários alunos levantaram de suas classes e foram até o quadro, onde a apresentação estava projetada, mostrar o que estavam percebendo: *"Olha "sora", aqui nesta árvore tem um monte de árvores pequenininhas... Essa aqui é igual a essa, que é igual a essa e que é igual à árvore "grandona"!".* Perguntei aos alunos se todos conseguiam perceber isso, e eles afirmaram que sim.

[6] A expressão "quase infinitamente" foi utilizada no sentido de "quantas vezes quisermos". Ao longo da discussão esclareci aos alunos que esta era a ideia.

Figura 17 - Exemplos de fractais na natureza.



Fonte: Elaborado pela autora no PowerPoint.

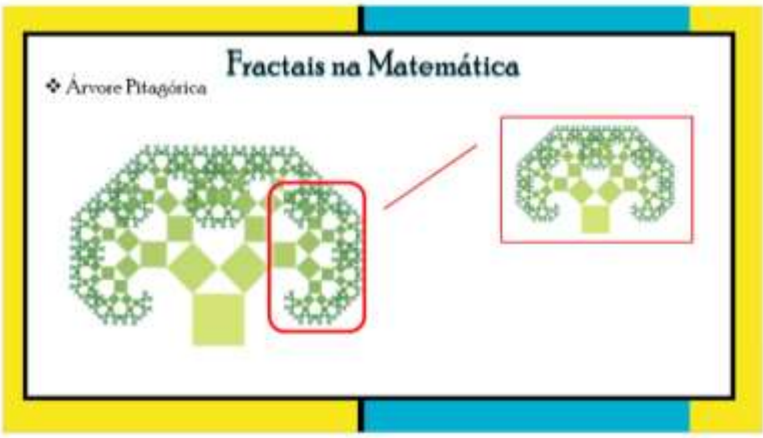
Santos e Nacarato (2014), ressaltam que “o processo de elaboração conceitual requer que os estudos partam dos conceitos espontâneos que os alunos já trazem consigo”. Neste caso, trata-se da valorização do conhecimento da natureza e do espaço em que o aluno vive para a formação do pensamento geométrico, mais especificamente, para a compreensão da ideia intuitiva de fractal.

Durante essa abordagem o recurso tecnológico possibilitou que fossem levados para a sala de aula exemplos que não poderiam ser abordados naquele momento, tais como uma representação colorida e com tamanho ampliado de um relâmpago. Ou seja, o propósito da mídia nesse processo de visualização foi além de apenas mostrar uma imagem, mas possibilitou a identificação da geometria na natureza e também a troca de ideias entre um coletivo composto por estudantes, professor e a mídia (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Na sequência, mostrei aos alunos algumas imagens de fractais clássicos, novamente enfatizando a ideia de que são formados por estruturas que se repetem infinitamente, em escalas cada vez menores, e idênticas à figura inicial. Comecei mostrando aos alunos a Árvore Pitagórica, cujo nome causou certa curiosidade. Expliquei que tal nome vem do Teorema de Pitágoras, e aproveitei a imagem que estava sendo projetada para dar uma noção da interpretação geométrica do Teorema. Ou seja, que a soma das áreas dos quadrados menores é igual a área do quadrado maior. Também, que tal afirmação não vale em qualquer triângulo, apenas nos triângulos retângulos.

Conforme Borba e Villarreal (2005, p. 90, nossa tradução), “a visualização é considerada como uma ferramenta para a compreensão matemática”, pois contribui para aprofundar o entendimento de conceitos. Usando a representação visual, foi possível explorar a ideia do Teorema de Pitágoras, por meio de sua representação geométrica. Apesar de ainda não terem estudado este Teorema, os alunos foram capazes de compreender, com auxílio da visualização, que ao calcular as áreas dos quadrados menores e somarem estes resultados, obteriam a área do quadrado maior. Nesse processo, as representações visuais e algébricas acabam se complementando.

Figura 18 - Árvore Pitagórica.



Fonte: Elaborado pela autora no PowerPoint.

Na sequência, perguntei aos alunos se eles conseguiam perceber que essa figura era um exemplo de fractal, e eles afirmaram que sim, pois a árvore estava sendo formada por várias árvores iguais, porém menores. Como recentemente havíamos trabalhado algumas formas geométricas em aula, resolvi fazer alguns questionamentos relacionados a este conteúdo, conforme transcrito a seguir:

Professora: *Quais formas geométricas que compõem essa figura?*
Aluno 1: *Vários quadrados e triângulos.*
Aluno 2: *Também tem esses pontinhos verde escuros.*

Aluno 1: *Acho que os pontinhos também são triângulos e quadrados, mas bem pequenininhos.*

Professora: *Vou aproximar para vocês enxergarem melhor.*

Professora: *E agora, conseguem ver?*

Aluno 3: *Acho que são triângulos e quadrados mesmo, pois é este o "modelo" da figura.*

Professora: *Como assim "modelo" da figura?*

Aluno 3: *O jeito que ela é construída, sora. Na parte maior da figura tem um quadrado, um triângulo e mais dois quadrados, daí vai repetindo sempre.*

Professora: *Isso aí Aluno 3, esse é o padrão de construção do fractal! Em seguida falaremos mais sobre isso.*

Professora: *Exatamente pessoal, muito bem! Toda a árvore é formada por quadrados e triângulos. Conforme o processo de construção vai acontecendo, eles vão ficando cada vez menores.*

Conforme as falas transcritas anteriormente, os alunos tiveram facilidade para identificar as formas geométricas que compõem a figura. Apesar do *Aluno 2* ter ficado com dúvida nos "pontinhos verdes", o *Aluno 1* já estava apresentando uma conjectura, a qual foi confirmada após a ampliação da figura no projetor, graças ao recurso tecnológico (GRAVINA E SANTAROSA, 1998). Proporcionar aos alunos discussões e situações onde possam fazer induções e verificar conjecturas também é uma das orientações da BNCC (BRASIL, 2017, p. 265).

Ainda, a interação constituída entre a professora e os alunos, e entre os próprios alunos, auxiliou na produção de significados pois, a partir da discussão fundamentada em uma ideia intuitiva, surgiu um novo elemento na conversa: o "modelo" da figura. Na verdade, quando o aluno mencionou este "modelo", ficou evidente que houve uma movimentação no sentido de desvendar o padrão geométrico presente neste fractal.

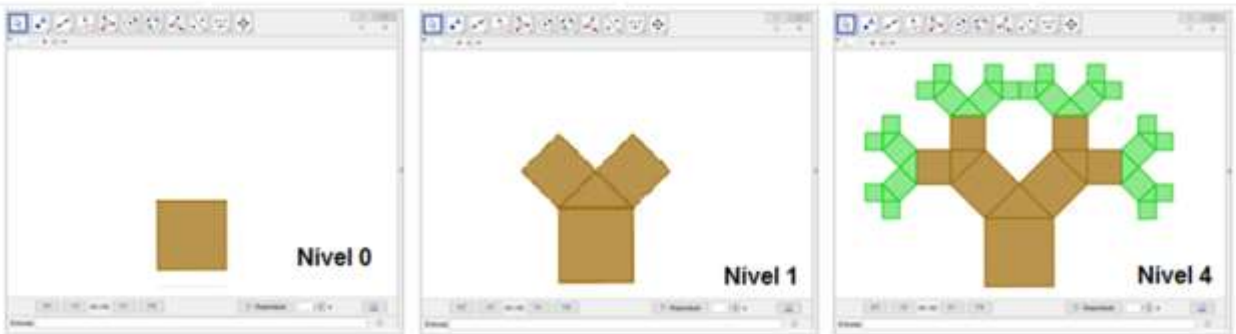
Por meio dessa troca de ideias, significados vão sendo produzidos, bem como a assimilação de propriedades e a apropriação do vocabulário geométrico (SANTOS; NACARATO, 2014). Também, neste contexto inicial de investigação, a interação entre professor, alunos e tecnologias foi um elemento importante na confirmação da conjectura do aluno frente a um conteúdo desconhecido. (BORBA; PENTEADO, 2016).

Dando sequência na aula, aproveitei para questionar os alunos sobre o processo de construção do fractal, usando como apoio uma construção feita por mim no GeoGebra exibindo a barra de navegação para mostrar os passos da construção de forma dinâmica. Comecei mostrando aos alunos o *Nível 0*, no qual havia apenas um quadrado, e perguntei qual seriam os próximos passos. Rapidamente, eles disseram que teria um triângulo sobre o lado superior do quadrado, e em cada um dos lados restantes do triângulo, quadrados novamente.

Avancei usando o botão da barra de navegação e perguntei, novamente, quais seriam os próximos passos. Imediatamente, os alunos responderam que o processo deveria ser repetido em cada um dos quadrados obtidos. Então, expliquei a eles que quando determinados elementos se repetem de maneira previsível, temos um padrão. Nesta situação, como havia formas geométricas se repetindo com certa regularidade, tratava-se de um padrão geométrico.

Maltempi (2008) ressalta a importância do uso de recursos tecnológicos como forma de ampliar as possibilidades de ensinar e de aprender, possibilitando a execução de atividades antes inviáveis devido a questões de tempo, espaço físico, custo, entre outros. Neste caso, a mídia possibilitou a apresentação do fractal até o Nível 4 e do seu processo de construção usando formas geométricas com medidas e ângulos exatos. Sem a utilização da mídia, seria dificultoso levar essa abordagem para sala de aula, pois demandaria muito tempo para construir a figura (possivelmente mais do que o tempo disponível na aula), além de dificuldade de medir vários ângulos e desenhar as formas geométricas com precisão no quadro negro.

Figura 19 – Passos da construção da Árvore Pitagórica



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra

Neste momento, acabei mencionando que estas construções foram feitas por mim, usando um software matemático. Os alunos ficaram surpresos, pois relataram não saber que a matemática poderia ter esse tipo de abordagem, por meio de aplicativos e programas computacionais. Essa também foi uma oportunidade de mostrar aos alunos diferentes possibilidades para trabalhar matemática na sala de aula, fazer com que percebam que “fazer matemática” vai muito além de fazer um enorme número de cálculos em seu caderno. Abaixo, transcrevo algumas das falas dos alunos:

Aluno 1: *Sério, Sora?! Foi tu que fez isso?*
Aluno 2: *Que legal! É muito difícil?*
Aluno 3: *Não sabia que tinha programa de computador pra matemática.*
Professora: *Sim, gente. Eu que fiz. Não é difícil, é meio trabalhoso só, pois tem muitos passos. Esse software é muito legal, pois dá pra fazer muitas coisas de matemática com ele. Por exemplo, todas as formas geométricas que estudamos podem ser construídas aqui. Podemos girar os sólidos geométricos e observá-los de diferentes pontos de vista.*
Aluno 4: *Sora, a gente vai poder mexer nesse “negócio” nas atividades que tu vai dar pra gente?*
Professora: *Sim, vocês irão usar esse software nas atividades. Percebam que podemos estudar matemática de várias maneiras, não só fazendo “contas”. O computador é uma dessas possibilidades.*
Aluno 4: *Que massa! Já estou curioso para ver como é.*

No diálogo anterior, é possível perceber a empolgação dos alunos para usar o recurso computacional. Talvez, pela oportunidade de estudar a matemática com um enfoque diferente da sala de aula, ou talvez pela chance de ir ao laboratório de informática e ter acesso ao computador, o que não é uma realidade para muitos alunos, mesmo nos dias atuais. Na verdade, mesmo tendo laboratório de informática na escola, muitas vezes os professores acabam não realizando aulas no laboratório, fazendo com que os alunos não tenham acesso a este recurso.

Borba e Penteado (2016) e Kenski (2012) discutem alguns dos problemas enfrentados pelos professores ao utilizarem a sala de informática das escolas (no caso das escolas que possuem). Problemas, estes, que muitas vezes causam desmotivação e provocam a desistência dos professores em realizar atividades neste ambiente. Por exemplo, no caso desta escola, a sala de informática possui 15 computadores, impossibilitando a acomodação de um aluno por máquina. Ainda, devido à disposição dos computadores em um espaço pequeno, os alunos acabam ficando muito próximos, gerando conversa e dificultando a realização de atividades de maneira individual.

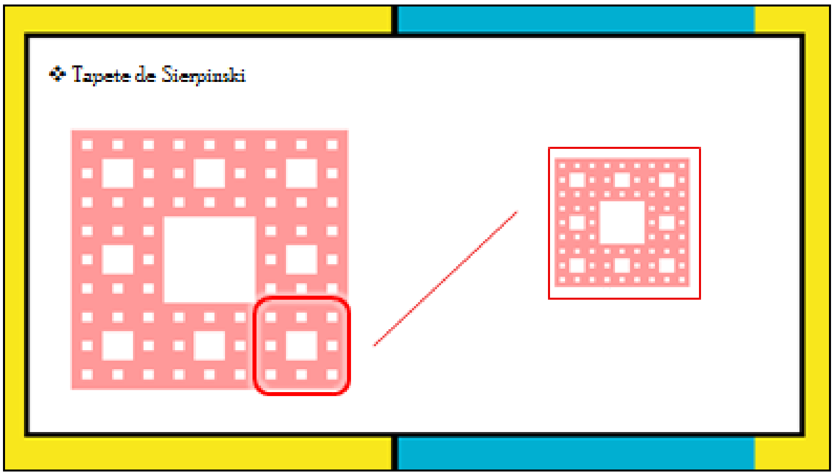
Outra situação mencionada pelos autores e que também ocorre na escola, é a questão das senhas para instalação de algum programa nos computadores. Conforme já mencionado, a oportunidade da coleta de dados, havia apenas um técnico em informática para atender toda a rede de ensino municipal e apenas este profissional possuía a senha. Assim, após ser feita a solicitação de instalação, acabava demorando por ter outras escolas na fila ou, algumas vezes, a instalação do programa solicitado nem ocorria.

Também, o fato da escola não possuir um monitor de informática na oportunidade, acabava trazendo insegurança aos professores que não dominam as tecnologias digitais e também dificuldade para atender todos os alunos que precisam de orientação. Ou seja, as questões mencionadas por Borba e Penteado (2016) no que tange os limites do uso das TD em relação a questões de infraestrutura é, de fato, um problema que se faz presente na realidade das escolas brasileiras.

Retornando ao momento da atividade, devido os comentários dos alunos, acabei saindo do roteiro de planejamento e abri o software para mostrar algumas de suas potencialidades, como a construção e rotação dos sólidos geométricos que havíamos estudado recentemente. Pude ver que eles ficaram muito interessados, pois o recurso computacional trouxe uma nova perspectiva de matemática para eles.

Dando sequência na aula, passei para o slide referente ao Tapete de Sierpinski. Mostrei aos alunos uma imagem com algumas iterações, e perguntei se essa figura tinha as características de um fractal, recebendo resposta afirmativa. Novamente, usei o recurso tecnológico para selecionar uma das partes da figura e mostrar a autossimilaridade em relação à figura inicial. Questionei os alunos se eles conseguiam perceber qual era o padrão de construção dessa forma geométrica, mas não conseguiram dizer com precisão.

Figura 20 - Tapete de Sierpinski.



Fonte: Elaborado pela autora no PowerPoint.

Neste caso, apesar de perceber as características de um fractal na forma geométrica apresentada, os alunos tiveram dificuldade de identificar o padrão geométrico envolvido. Perceberam algumas características como o número de quadrados e sua disposição, mas não souberam dizer qual deveria ser o tamanho dos quadrados, por exemplo. A seguir, estão transcritas algumas falas que ocorreram no momento em que o Tapete de Sierpinski estava projetado:

Professora: *Vocês saberiam me dizer como é o processo de construção deste fractal? Ou seja, conseguem perceber qual é o padrão geométrico aqui?*

Aluno 1: *Tem um quadrado branco grande, e vários quadradinhos em volta.*

Professora: *Mas como são estes quadrados? Como eles dispostos?*

Aluno 1: *O quadrado grande tá no meio... Daí tem quadrados médios e outros pequenininhos...*

Aluno 2: *Tem oito quadrados médios e, em volta de cada um, mais oito pequenos...*

Professora: *Como eu construo esse fractal então?*

Aluno 2: *Tu pega o quadrado rosa, e desenha um quadrado no meio, dai pinta ele de branco. Depois, tu vai fazendo os outros e pinta de branco também.*

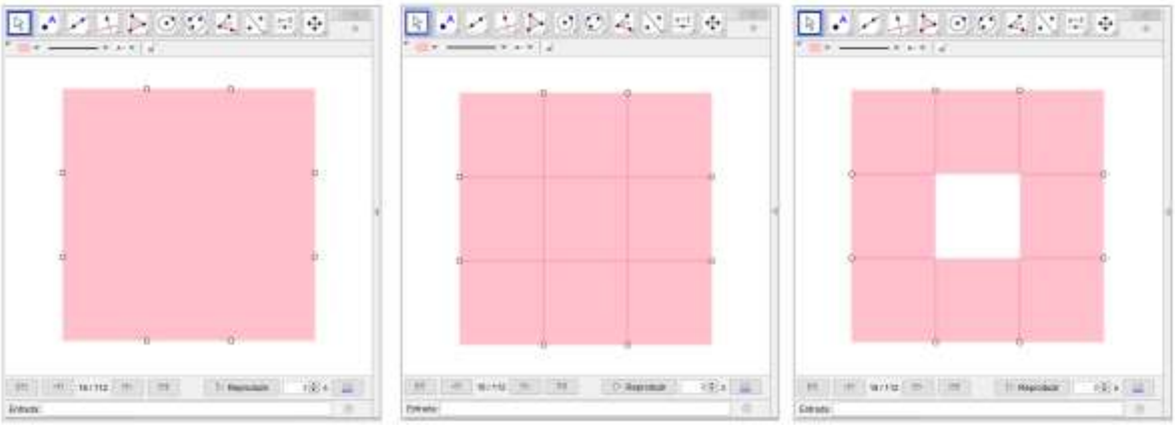
Professora: *Mas como eu vou saber o tamanho que cada quadrado deve ter?*

Aluno 2: *Hum, daí não sei...*

A fim de facilitar o processo de compreensão por trás da construção do fractal, usei novamente o recurso computacional, com a barra de navegação no GeoGebra para mostrar cada um dos passos e a transição entre os níveis do fractal. Expliquei que começamos com um quadrado (que é o *Nível 0*), e devemos dividi-lo em outros nove quadrados iguais, retirando o quadrado do meio. Esclareci aos alunos que o quadrado do meio é retirado, como se fosse recortado, e não apenas pintado de branco como mencionado por eles.

Também, exibi e expliquei os passos necessários para fazer a divisão dos quadrados e então obter o *Nível 1*. Deixei os pontos utilizados para dividir cada uma das arestas visíveis, bem como os segmentos de reta que foram utilizados para formar os quadrados. Optei por deixar estes elementos aparentes a fim de adicionar informações aos alunos, que possivelmente poderiam contribuir para a compreensão do processo. Além disso, procurei sempre ter em mente que estava trabalhando com alunos de sexto ano, então a riqueza de detalhes seria importante.

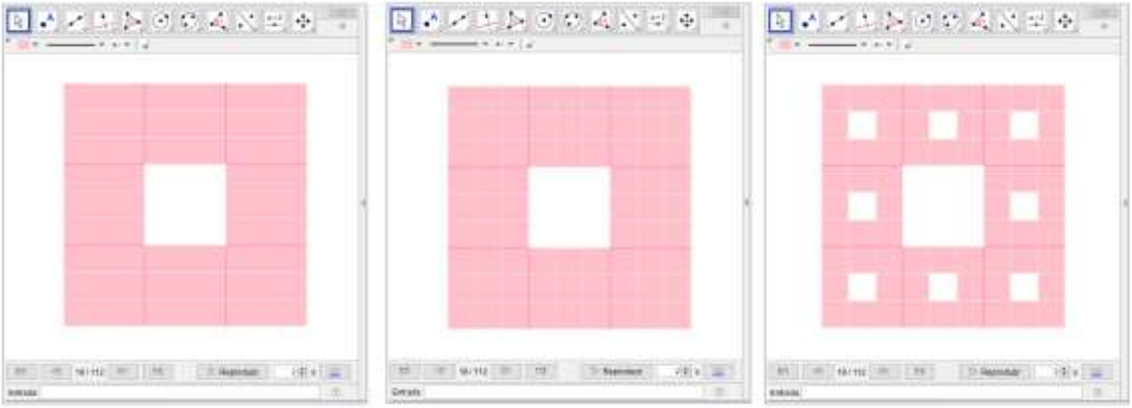
Figura 21 - Passos da construção do Tapete de Sierpinski no nível 1.



Fonte: Elaborado pela autora no Software GeoGebra.

Da mesma forma, para obtermos o *Nível 2* do fractal, esse procedimento deveria ser repetido para cada um dos oito quadrados restantes, retirando o quadrado do meio. Novamente, deixei as linhas utilizadas para as divisões dos quadrados visíveis, inclusive com outra cor, para facilitar a visualização. Ao perceber o “número 112” na barra de navegação do software, os alunos perguntaram se esse foi o número de passos da construção e ficaram surpresos com este número.

Figura 22 - Passos da construção do Tapete de Sierpinski no nível 2.



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra.

Expliquei a eles que o processo poderia ser repetido novamente, para cada quadrado restante, e assim sucessivamente quantas vezes quiséssemos. Entretanto, seria bastante trabalhoso, pois iria demandar um elevado número de passos e construções:

Aluno 1: *Sora, esse 112 aí é os passos da construção?*
Aluno 2: *Nossa, tu precisou fazer 112 coisas pra fazer essa figura?*
Professora: *Sim, são os passos da construção. Esses 112 são as linhas, pontos... objetos que eu precisei usar pra construir essa parte do fractal. Poderíamos continuar esse processo, pegar cada quadrado restante, fazer as divisões e tirar o quadrado do meio. Mas seriam muitos passos.*
Aluno 2: *Nossa, ia dar muito trabalho.*
Professora: *Matematicamente, o fractal é resultado de um processo infinito. Mas não teria como a gente ficar repetindo esses passos infinitamente.*
Aluno 3: *Mas ia dar pra continuar tirando os quadrados? Eles iam ficar muito pequenos, a gente não iria conseguir...*
Professora: *Daí usaríamos a ferramenta zoom. A gente poderia aproximar e desenhar mais quadrados. Aproximar e desenhar mais. Ir repetindo isso enquanto a gente quisesse.*
Aluno 3: *Ah sim, verdade. Mas desenhando no papel não dá né? Só daria pra fazer uns.*

Professora: *Não, chegaria num ponto onde não conseguiríamos mais fazer. Só com o computador mesmo.*

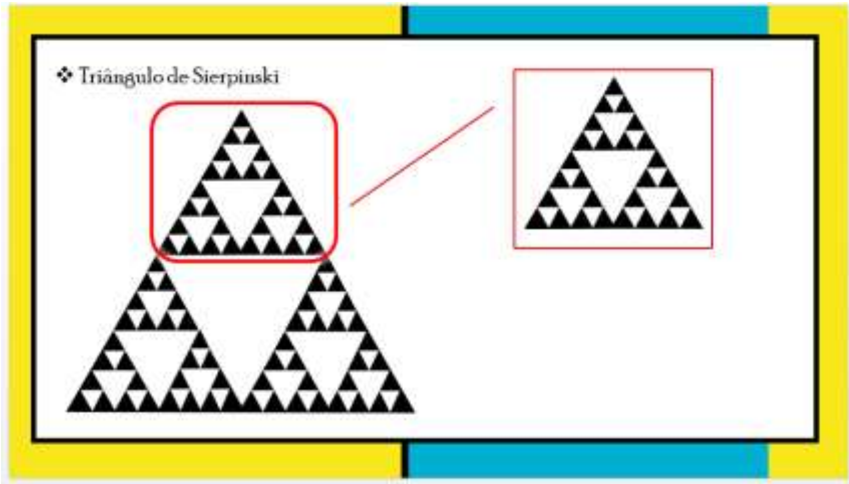
Ao longo da abordagem deste fractal, com base na fala dos alunos, é possível perceber que a visualização de uma imagem estática não foi suficiente para que os alunos interpretassem a construção e percebessem o padrão geométrico envolvido. O uso da mídia, no caso o software GeoGebra, viabilizou transitar pelos níveis da construção, possibilitando a explicação dos conceitos algébricos e geométricos necessários para a realização de cada um dos passos.

Ao exibir os níveis do fractal no software, foi possível reforçar aos alunos a ideia de que este processo poderia ser repetido muitas vezes, gerando o questionamento do *Aluno 3* sobre a possibilidade de continuar repetindo os passos da construção, uma vez que os quadrados seriam muito pequenos. Usando o software, foi possível argumentar e mostrar que, usando o *zoom*, poderíamos continuar repetindo esse processo. Se a atividade estivesse acontecendo apenas por meio de lápis e papel, talvez este questionamento não teria surgido, ou não seria possível explicar ao aluno de que é o número de níveis do fractal não é limitado.

Por meio da tecnologia usada, a natureza do problema muda. Inclusive, o próprio aluno percebeu essa mudança na problemática. Ao construir um fractal com lápis e papel, parece que o número de níveis que é possível construir é limitado, condicionado ao tamanho do papel usado. Entretanto, ao trazer o recurso de ampliação disponível na mídia, a ideia de que este processo pode ser repetido muitas foi bem aceita pelos alunos. Ou seja, o uso da mídia trouxe contribuições no processo de compreensão, possibilitando uma representação visual de uma ideia tão abstrata como o processo recursivo presente no fractal. (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014).

Por fim, mostrei aos alunos o último fractal que seria abordado: O Triângulo de Sierpinski. Os alunos logo perceberam a semelhança com o fractal anterior, e rapidamente um aluno disse que deveria ser desenhado um triângulo no meio e pintado de branco. Depois o processo deveria ser repetido nos demais triângulos pretos.

Figura 23 - Triângulo de Sierpinski.



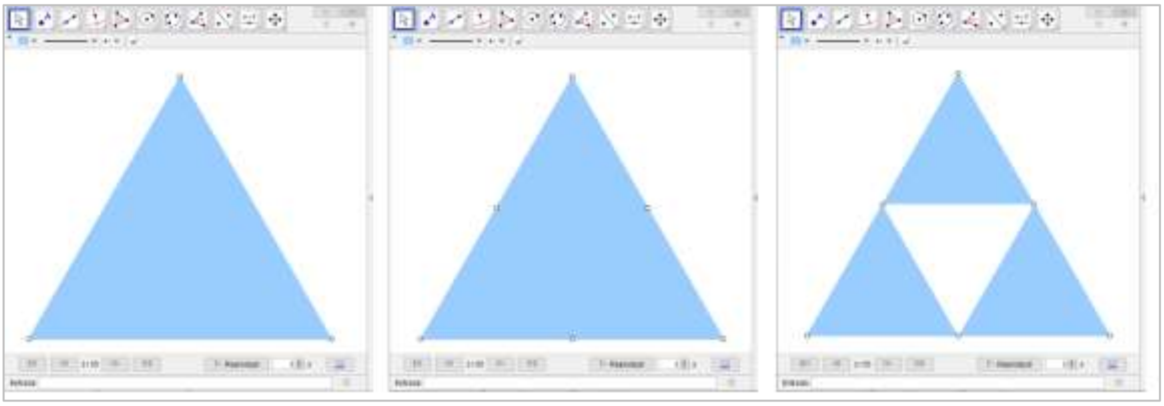
Fonte: Elaborado pela autora no PowerPoint.

Reforcei novamente aos alunos que os triângulos brancos eram como "buracos", que deveriam pensar que eles foram recortados e retirados. Ou seja, novamente houve esta confusão com os triângulos retirados, com alunos pensando que eles haviam sido apenas pintados de uma cor diferente. Essa situação aconteceu na Atividade Piloto, quando pensei que eu havia causado a confusão nos alunos por pintar os triângulos retirados de preto. Entretanto, essa situação se repetiu novamente na produção de dados desta intervenção, tanto no Tapete quanto no Triângulo de Sierpinski.

Conforme apontado por Borba e Penteado (2016) e por Kenski (2012), as tecnologias digitais têm suas limitações e muitas vezes não são suficientes para a resolução de alguns problemas. Além disso, aliado ao conhecimento tecnológico, é necessário ter o conhecimento matemático, para inserção correta dos dados no software e para interpretar corretamente o resultado apresentado por ele. Nesse caso, apenas com as representações visuais apresentadas no PowerPoint e no GeoGebra não foi possível esclarecer a ideia de "retirada dos quadrados" aos alunos. As mídias se mostraram promissoras para a exploração dos passos da construção dos fractais, mas não foram suficientes para sanar todas as dúvidas. Desta forma, se fez necessário o uso de outro recurso, como material concreto, para a abordagem destes conceitos. Essa discussão será retomada com mais detalhes na apresentação e análise de dados da segunda etapa.

Finalmente, a fim de indagar os alunos a respeito do processo de construção deste fractal, e visando esclarecer as dúvidas sobre os triângulos retirados, mostrei a eles a construção no GeoGebra até o Nível 3. Assim como nos fractais anteriores, explorei o recurso da barra de navegação, deixando os pontos médios (vértices dos triângulos retirados) visíveis a fim de adicionar elementos que pudessem colaborar para a visualização do processo de construção. Desta vez, não discuti os passos da construção com tantos detalhes, pois os alunos deveriam usar o software GeoGebra para fazer análise desse processo em uma das atividades seguintes.

Figura 24 - Passos da construção do Tapete de Sierpinski no nível 1.



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra.

Mostrei aos alunos que, neste caso, começamos com um triângulo equilátero, explicando a eles que neste triângulo todos os lados têm a mesma medida (este assunto não é abordado no sexto ano). Abordamos os passos necessários para obter o Nível 1 (Figura 24), e perguntei se, na opinião deles, teria um critério para o posicionamento dos pontos que estão sobre as arestas. Os alunos responderam que parecia estar no meio. Confirmei a eles, dizendo que posteriormente teriam a possibilidade de verificar isso usando o GeoGebra. Também, aproveitei a oportunidade para dizer que este ponto, que divide o segmento ao meio, é chamado de ponto médio.

A abordagem de fractais com as mídias utilizadas oportunizou, além da ideia de fractal, a noção intuitiva do Teorema de Pitágoras, definição de triângulo equilátero e definição de ponto médio. Apesar de serem conceitos básicos, geralmente não são estudados nesta etapa de ensino. Assim, a atividade realizada, além de abordar um conceito que geralmente não é trabalhado na escola (fractal) também oportunizou a antecipação de conceitos importantes na geometria (BASSO; GRAVINA, 2012).

Ao longo deste primeiro momento, a representação visual foi o centro da aprendizagem matemática. Todas as ideias discutidas decorreram da visualização, seja de figuras geométricas ou de exemplos da natureza. O dinamismo do GeoGebra também foi fundamental para destacar os procedimentos de construção, permitindo aos alunos comparações entre os diferentes estados da construção.

Na verdade, a mídia digital atuou moldando o pensamento dos estudantes, de forma que as representações visuais inspiraram a criação de conjecturas antecipando os passos da construção dos fractais, proporcionando a percepção de padrões geométricos em vários momentos. Com o auxílio da mídia digital, conjecturas foram criadas e verificadas visualmente, caracterizando uma possibilidade alternativa de alcançar o conhecimento matemático (BORBA; VILLARREAL; 2005).

4.2 SEGUNDO MOMENTO – CONSTRUÇÃO DO TAPETE DE SIERPINSKI USANDO MATERIAL CONCRETO

Inicialmente, retomamos o processo de construção do Tapete de Sierpinki para que os alunos pudessem recordar os passos necessários para a construção. Projetei novamente a construção feita no GeoGebra e pedi aos alunos que explicassem o que estava acontecendo em cada um dos passos. De modo geral, os estudantes conseguiram relembrar o processo com facilidade, respondendo aos questionamentos corretamente. Então, solicitei a eles que se reunissem em duplas para que pudéssemos dar sequência nas atividades.

A escolha da realização da atividade em duplas ocorreu por mais de um motivo. O primeiro, devido à infraestrutura do laboratório de informática, pois não teria máquinas suficientes para que todos os alunos pudessem realizar as atividades de maneira individual. O segundo, por acreditar que as trocas entre os alunos são importantes no processo de aprendizagem. A interação entre as duplas oportuniza o surgimento de diferentes ideias, e o processo de argumentação é um aliado importante para a aprendizagem de conceitos e aquisição do vocabulário geométrico.

Cada dupla recebeu uma folha impressa, contendo perguntas e instruções para realizar o registro de suas respostas. No primeiro item, foi solicitado que as duplas escrevessem o que elas entenderam por fractal após a discussão da aula anterior. No geral, os alunos disseram que é “Uma forma grande composta por vários pedacinhos iguais, mas menores”. A seguir, seguem algumas das respostas registradas pelas duplas no material impresso.

Quadro 3 – Respostas envolvendo a ideia de fractal.

Escreva, com suas palavras, o que é um fractal.	
Dupla	**Resposta**
Dupla 1	*Fractal é quando uma figura grande é formada por várias figuras “menor”, iguais ou parecidas com a maior.*
Dupla 2	*Fractal é pedaços pequenos que juntos formam uma imagem grande igual a imagem pequena.*
Dupla 4	*Um fractal é uma figura grande que é composta por figuras iguais, só que menores.*
Dupla 8	*Um fractal é uma figura inteira que se pegarmos um pedaço ficará igual a inteira.*

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

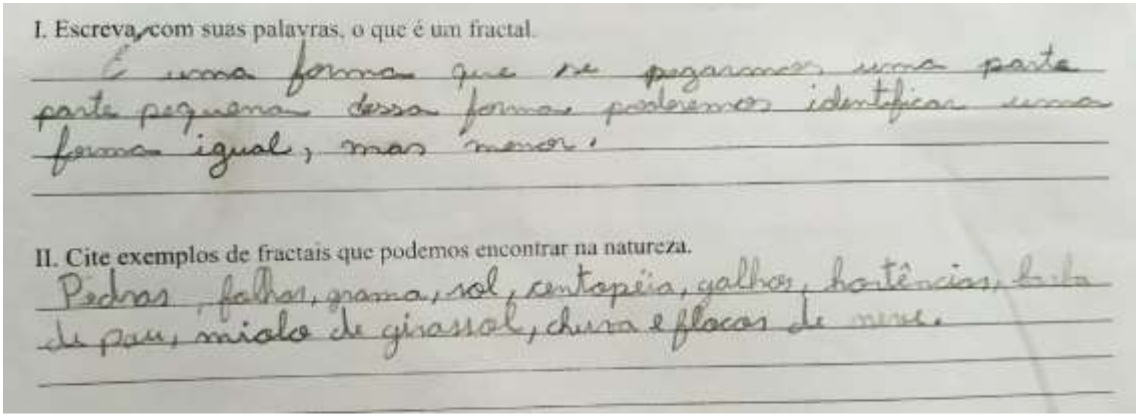
No segundo item, as duplas deveriam escrever exemplos de fractais que podem ser encontrados na natureza, diferentes dos exemplos que foram abordados durante a apresentação no *PowerPoint*. Os alunos foram bem criativos em suas respostas, apresentando vários tipos de exemplos. Alguns destes exemplos são mais previsíveis, por se encaixarem bem na ideia de fractal, tais como pedras, hortênsias, brócolis, algumas flores, flocos de neve, folhas, grama, miolo de girassol, entre outros. Também, surgiram alguns exemplos mais inusitados, como centopeia, veias (vasos sanguíneos), escamas de animais, estrias, cabelos, células e bactérias.

O objetivo desses itens era relembrar a ideia de fractal abordada na aula anterior e também promover uma discussão entre as duplas, a fim de refletir sobre outros exemplos da natureza que se encaixavam nessa ideia. Os alunos pareceram inseguros ao formular suas respostas, pois várias duplas me chamaram para perguntar se suas respostas estavam corretas. Em vários casos, os alunos apresentaram suas ideias buscando relacionar com algum dos exemplos por mim apresentados.

Por exemplo, a *Dupla 11* fez o seguinte questionamento: *“Sora, dá pra botar hortênsia né? Pois acontece que nem na couve-flor que tu mostrou, é formada por vários pedacinhos iguais à figura grande”.* Neste caso, é possível perceber que os alunos fizeram uma relação com a couve-flor, em que o objeto é formado por um “agrupamento de elementos iguais, mas com tamanhos distintos”. Ou seja, os alunos estavam buscando relações de semelhança entre o exemplo mostrado por mim e um exemplo da natureza, e não pensando diretamente na ideia de fractal.

A estratégia usada pela dupla foi interessante, até porque a BNCC (BRASIL, 2017) enfatiza que é importante que os alunos consigam fazer comparações entre elementos nas aulas de matemática, estabelecendo relações de semelhança ou diferença entre elementos. Observando a resposta apresentada no Item I, a dupla parece ter compreendido a ideia central, mas talvez não tenha ficado bem clara a ideia de que *“esta forma igual, mas menor”* se repete várias vezes na estrutura da forma geométrica, em escalas cada vez menores.

Figura 25 – Respostas da Dupla 11.


I. Escreva, com suas palavras, o que é um fractal.

É uma forma que se pegarmos uma parte parte pequena dessa forma, poderemos identificar uma forma igual, mas menor.

II. Cite exemplos de fractais que podemos encontrar na natureza.

Pedras, folhas, grama, sol, centopéia, galhos, hortências, bola de pau, miolo de girassol, chuva e flocos de neve.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

No decorrer da atividade, outra dupla me chamou para esclarecer suas dúvidas com relação a apresentação de exemplos, apresentando certa similaridade com o questionamento proposto pela dupla anterior. O diálogo com estes alunos está transcrito a seguir.

Dupla 3: *Sora, veia pode ser um exemplo né?*

Professora: *Veia? Como assim?*

Dupla 3: *As veias de sangue, do nosso corpo...*

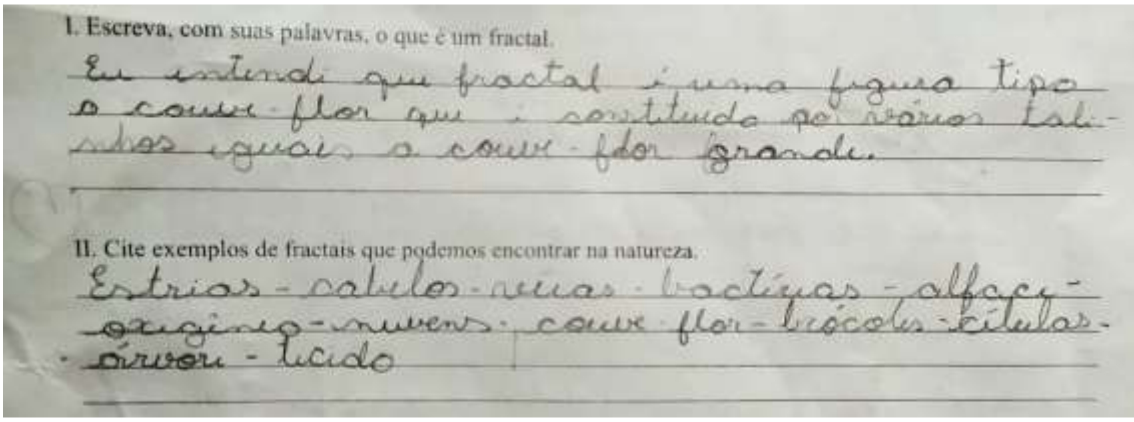
Professora: *Ah... E porque vocês acham que é um fractal?*

Dupla 3: *Porque tem umas ramificações, que nem no exemplo do relâmpago que tu mostrou.*

Professora: *Se vocês acham que é, então coloquem.*

Novamente, os alunos estavam pensando em um exemplo relacionado com aqueles que apresentei. Possivelmente, como a ideia de fractais era "nova" e um tanto abstrata, os alunos estavam usando a estratégia da comparação com exemplos concretos como uma possibilidade de assimilar esse novo conceito. Olhando para a resposta apresentada no Item I, pode-se perceber que a dupla apresentou certa dificuldade em compreender a abstração envolvida e também em generalizar a ideia, pois usou um exemplo concreto também na explicação da ideia de fractal. Santos e Nacarato (2014) ressaltam que a imagem mental é figurativa, ou seja, a palavra remete à imagem. Dessa forma, a resposta apresentada pela dupla sugere que a palavra fractal remete a um exemplo concreto, no caso a couve-flor. Ou seja, possivelmente a imagem mental associada a palavra "fractal" seja uma couve-flor para os integrantes dessa dupla.

Figura 26 - Respostas da Dupla 3.


I. Escreva, com suas palavras, o que é um fractal.

Eu entendi que fractal é uma figura tipo a couve-flor que é constituido por vários talinhos iguais a couve-flor grande.

II. Cite exemplos de fractais que podemos encontrar na natureza.

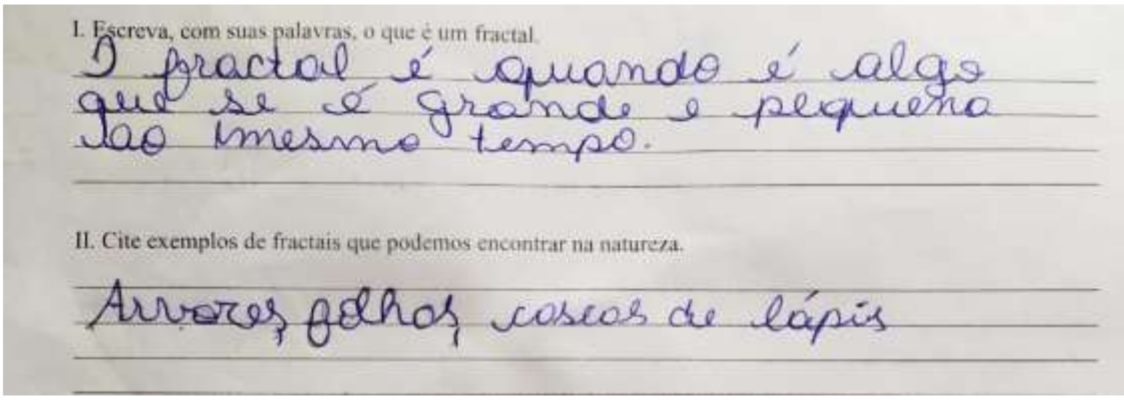
Estrias - cabelos - veias - bactérias - alface - oxigênio - nuvens - couve flor - brócolis - células - árvore - tecido

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Analisando as respostas da Dupla 9, parece que a ideia de fractal não ficou clara, ou então os alunos não conseguiram expressar, por meio da escrita, o que compreenderam sobre o assunto. Além disso, os exemplos apresentados parecem confirmar esta ideia. Os alunos citaram árvores, que foi um dos exemplos utilizados na aula, indicando que provavelmente não conseguiram associar a ideia de fractal a algum outro elemento da natureza que tenha essas características.

Ao mencionar folhas, provavelmente os alunos estavam tentando se referir às samambaias, ou então não ficou claro que nem todas as folhas tem as características de um fractal. Quanto ao último exemplo citado, cascas de lápis, não é possível saber de que forma os alunos relacionaram este exemplo com a ideia de fractal.

Figura 27 - Respostas da Dupla 9.


I. Escreva, com suas palavras, o que é um fractal.

O fractal é quando é algo que se é grande e pequena ao mesmo tempo.

II. Cite exemplos de fractais que podemos encontrar na natureza.

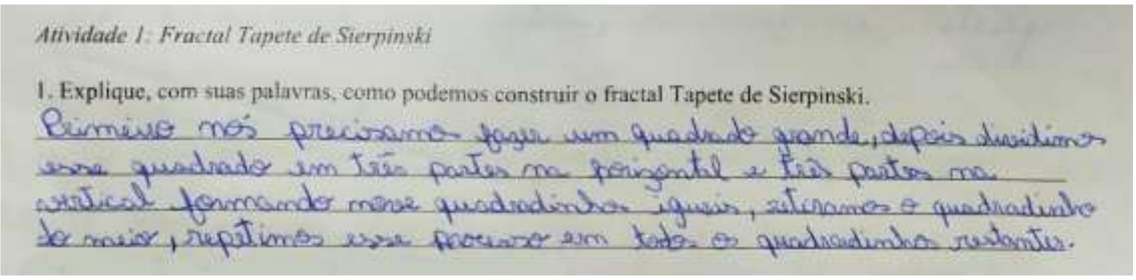
Arvores, folhas, cascas de lápis

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Na sequência destes itens de revisão, os alunos finalmente começaram com as atividades específicas sobre o Tapete de Sierpinski. A primeira atividade consistia em explicar o processo de construção deste fractal, a fim de contribuir no esclarecimento e detalhamento de cada um dos procedimentos pertencentes a construção. Ao responder esta questão, algumas duplas detalharam o processo, algumas foram mais sucintas e outras pareceram não ter compreendido os passos da construção.

Dentre as doze duplas que realizaram a atividade, apenas duas (Dupla 5 e Dupla 7) descreveram o procedimento de forma detalhada. Enquanto as demais duplas disseram que o quadrado inicial deveria ser dividido em nove quadrados menores, essas duas duplas descreveram como fazer essa divisão. Por exemplo, os alunos disseram que o lado do quadrado inicial deveria ser medido e dividido em três partes, e que essas marcações deveriam ser feitas em todos os lados para que, posteriormente, fossem traçadas as linhas que iriam constituir os nove quadrados. Além de citar todos os passos necessários, as duas duplas também mencionaram que os quadrados do meio devem ser retirados durante a construção. A seguir, está a resposta apresentada por uma dessas duas duplas.

Figura 28 - Resposta da Dupla 7.



Atividade 1: Fractal Tapete de Sierpinski

1. Explique, com suas palavras, como podemos construir o fractal Tapete de Sierpinski.

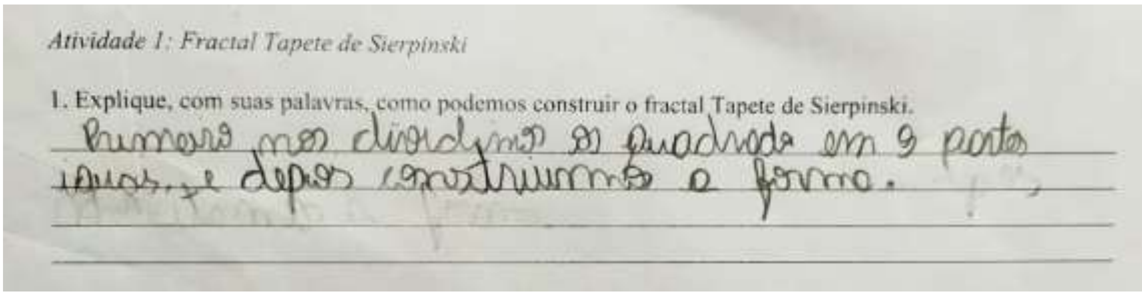
Primeiro nós precisamos fazer um quadrado grande, depois dividimos esse quadrado em três partes na horizontal e três partes na vertical formando nove quadradinhos iguais, retiramos o quadradinho do meio, repetimos esse processo em todos os quadradinhos restantes.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Cinco duplas explicaram o procedimento de maneira mais resumida, dizendo que o quadrado maior deveria ser dividido em nove quadrados menores, mas não especificaram como proceder para obter essa divisão. Outras três duplas mencionaram que o quadrado maior deveria ser dividido em nove partes, mas não especificaram como seriam essas partes, ou seja, não disseram que seriam partes iguais (quadrados). Em ambos os casos, as duplas mencionaram que o quadrado do meio deveria ser retirado e o processo repetido nos quadrados restantes.

As duas duplas restantes apresentaram equívocos ou descrição incompleta durante seu relato. Essas duplas podem não ter entendido o processo corretamente, apresentado dificuldade para transpor suas ideias para o papel ou então optaram por não fazer uma descrição detalhada. A *Dupla 6* entendeu o procedimento inicial, no qual o quadrado maior deve ser dividido em nove partes iguais, mas não explicou o que acontece na sequência na “construção da forma”. É possível que esta dupla não tenha entendido o processo de retirada do quadrado do meio, já que apenas o processo de divisão foi mencionado. Assim, a construção do fractal usando material concreto poderia auxiliar nesta questão.

Figura 29 - Resposta da Dupla 6.


Atividade 1: Fractal Tapete de Sierpinski

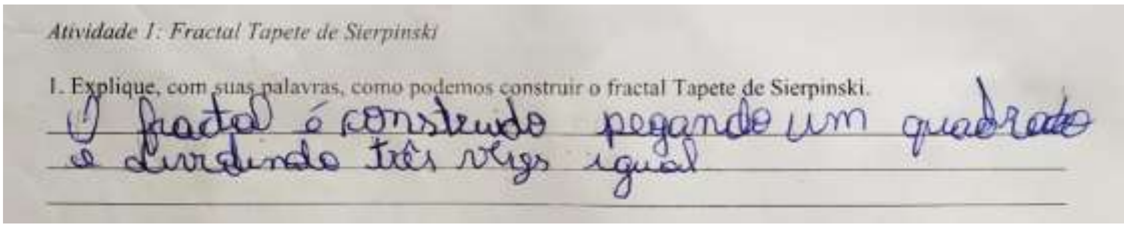
1. Explique, com suas palavras, como podemos construir o fractal Tapete de Sierpinski.

Primeiro nós dividimos o quadrado em 9 partes iguais, e depois construímos a forma.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

A *Dupla 9* relatou apenas o primeiro passo, não dando sequência aos demais procedimentos, talvez por não terem compreendido como os quadrados são construídos a partir da “divisão em três partes iguais”. Esta dupla parece estar apresentando dificuldade com o conteúdo, pois não conseguiu explicar seu entendimento sobre fractal e apresentou limitações para citar os exemplos da natureza, conforme anteriormente mencionado.

Figura 30 - Resposta da Dupla 9.


Atividade 1: Fractal Tapete de Sierpinski

1. Explique, com suas palavras, como podemos construir o fractal Tapete de Sierpinski.

O fractal é construído pegando um quadrado e dividindo três vezes igual

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Após responder os questionamentos iniciais, cada dupla recebeu um quadrado de EVA de lado 27 cm. A medida escolhida atribui-se ao fato de que, neste caso, a medida de todos os quadrados retirados até o nível 2 sempre seriam números inteiros, uma vez que os alunos ainda não haviam estudado números decimais. Tais conteúdos são abordados no terceiro trimestre do sexto ano, e a intervenção foi realizada no início do ano, logo após os alunos estudarem formas geométricas e cálculo de área e perímetro de triângulos e quadriláteros. O conteúdo envolvendo números decimais também está previsto no quinto ano, mas por ser um dos últimos tópicos do conteúdo programático, muitas vezes não é possível contemplar, por falta de tempo.

O material escolhido foi o EVA por ser mais maleável, sendo menos provável que pudesse ser rasgado ou danificado durante o recorte. Os alunos já receberam os quadrados prontos, pois eu queria aproveitar cada folha ao máximo, já que realizei a compra com recurso próprio. Também, os alunos não tinham os conhecimentos necessários de ângulo para realizar a construção e demandaria muito tempo da aula até que realizassem a construção na folha destes quadrados.

Um dos fatores que muitas vezes impede os professores de realizarem atividades com abordagens diferenciadas em sala de aula é o tempo que se tem disponível, levando em consideração o conteúdo programático que deve ser desenvolvido no decorrer do ano letivo. Santos e Nacarato (2014) também apontam esse problema envolvendo tempo *versus* conteúdo programático como um limitante para a realização de atividades "diferenciadas". No meu caso, enquanto pesquisadora, possuía vontade de realizar a intervenção com calma, dispondo de todo o tempo necessário para que os alunos fizessem as atividades no seu tempo. No entanto, enquanto professora titular da turma, tinha muitas inquietações.

Existia a preocupação do currículo a ser vencido, especialmente em relação aos conceitos que são pré-requisitos para os conteúdos do sétimo ano. Eu sabia que, como estava utilizando vários períodos para a realização da pesquisa, depois teria que encontrar uma forma de compensar este tempo, usando material impresso, por exemplo. Além disso, também havia a preocupação com os pais, pois existia a possibilidade de reclamação, já que os alunos ficariam várias aulas fazendo atividades "diferentes" e sem registrar conteúdo no caderno.

Muitas vezes, também existe um preconceito dos pais sobre o uso do computador, pois alguns pais acreditam que seus filhos estão "brincando na sala de informática" e não estudando. Na verdade, esta é mais uma das dificuldades que existem sobre o uso de tecnologias, além das questões abordadas na análise do primeiro momento, que vão ao encontro de Borba e Penteado (2016) e Kenski (2012). Por todas as razões apresentadas, em alguns momentos tive que fazer escolhas para economizar tempo, e esta foi uma delas.

Ao receber o material, os alunos foram orientados a usarem os procedimentos descritos na Atividade 1 como apoio para a construção do fractal. Também, os alunos deveriam calcular a área do fractal do nível 0 até o nível 2. Orientei os alunos que começassem pelo cálculo da área no nível 0 e depois começassem a confecção do fractal, para evitar confusão entre os níveis. Pelo mesmo motivo, pedi que, ao finalizar o nível 1, fosse calculada a área do fractal antes da construção do nível 2.

Os alunos começaram calculando a área do nível 0, conforme solicitado. Ao passar nas classes dos alunos, vi que todas as duplas, sem exceção, estavam realizando o cálculo corretamente. Na sequência, os alunos começaram com o processo de construção. Algumas duplas ficaram em dúvida sobre como começar, e foram pedindo orientações. Por isso, resolvi trazer a discussão para o grande grupo.

Professora: *Pessoal, lá na construção que eu mostrei pra vocês no GeoGebra, qual era o primeiro passo?*
Aluno 1: *Dividir o quadrado em nove quadrados iguais!*
Professora: *Tá, e como podemos fazer isso?*
Aluno 2: *Temos que dividir o quadrado em três partes iguais, tanto assim quanto assim.* (O aluno sinalizou com as mãos que seria no sentido vertical e no sentido horizontal).
Professora: *Certo. E como fazer essa divisão? Como eu sei onde devo marcar as linhas?*
Aluno 2: *Tu tem que medir o lado do quadrado e dividir por 3.*
Aluno 3: *Eu já medi, deu 27. Daí tem que marcar de 9 em 9.*
Professora: *Isso aí, muito bem! Usem a régua para medir e marquem direitinho.*

O questionamento realizado promoveu a socialização de ideias, de forma que as contribuições dos alunos foram se complementando na elaboração de uma estratégia para construir o fractal. O Aluno 1 sabia que o quadrado precisava ser dividido em nove quadrados iguais, mas talvez não sabia como fazer isso. Ainda, é possível que o Aluno 2 não tivesse pensado nessa possibilidade, mas assim que o colega deu a ideia, ele pensou em uma estratégia para realizar essa divisão. De acordo com Curi (2009, p. 142 apud Santos e Nacarato, 2014, p. 91):

> Em sala de aula, o desenvolvimento de atividades que permitam a comunicação dos alunos permite a construção de um ambiente de aprendizagem solidário, cooperativo, em que os alunos vão se apropriando da linguagem matemática, à medida que descobertas e dúvidas são socializadas nas atitudes de ouvir colegas e professor e expor suas próprias ideias.

Além da socialização de ideias, o papel da mídia também foi importante nesse processo. A representação visual é um meio de construção de significados na aprendizagem matemática, e colaborou para o entendimento das estratégias envolvidas no processo de construção dinamicamente, por meio do GeoGebra. De acordo com a fala dos alunos, é possível perceber que significados foram, de fato, produzidos, resultando na memorização e entendimento dos procedimentos apresentados (BORBA; VILLARREAL, 2005).

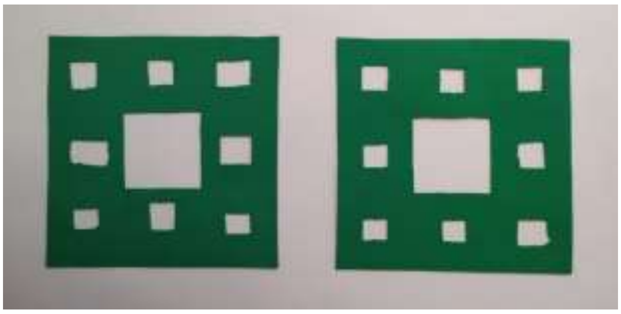
Os alunos seguiram com a construção, tirando dúvidas sempre que necessário. Fiquei circulando pela sala, passando para ver o que as duplas estavam fazendo. Então, uma das duplas fez alguns questionamentos:

Dupla 8: *Sora, a gente já fez a primeira parte e recortou o quadrado. Agora a gente tá fazendo o segundo nível. A gente dividiu 9 por 3, e estamos fazendo a mesma coisa nos outros quadrados.*
Professora: Isso mesmo.
Dupla 8: *Mas daí a gente tá pegando os quadradinhos e dividindo um por um... Tá certo isso?*
Professora: *Precisa mesmo fazer em todos os quadradinhos? Não dá pra dividir vários ao mesmo tempo?*
Dupla 8: *Como assim?*
Professora: *Usem a borda do quadrado grande. Não acham que dá pra medir aqui e aqui, e fazer as linhas? Daí vai dividindo todos os quadrados.*
Dupla 8: *Ah, verdade. Obrigada, sora.*

A Dupla 8 entendeu o processo de construção, mas parece ter sido bem literal na ideia de que o processo “deveria ser repetido em cada um dos quadrados restantes”. A estratégia usada estava correta, porém demandaria muito tempo e trabalho na realização da construção. Por isso, auxiliei a dupla. No geral, a maioria das duplas demorou muito tempo na realização da atividade, demandando aproximadamente 5 horas-aulas.

Notei que vários alunos estavam com dificuldade em usar a régua, e não sabiam onde começar a medir. Alguns começavam a medir no início da régua, ou até mesmo no número 1. Então, passei pelas classes auxiliando neste processo. Ainda assim, vários alunos não mediram corretamente ou não tiveram firmeza para segurar a régua na hora de fazer as linhas, especialmente no nível 2. Por isso, alguns quadrados ficaram com tamanhos diferentes, ou acabaram sendo construídos retângulos ao invés de quadrados. Também, muitos alunos apresentaram dificuldade ao manusear a tesoura e recortar os quadrados corretamente.

Figura 31 - Tapete de Sierpinski construído com papel emborrachado.



Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Figura 32 - Tapete de Sierpinski construído com papel emborrachado.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Mesmo alunos de sexto ano não sendo tão pequenos, foi perceptível a dificuldade que eles apresentaram ao manusear o material e realizar a construção. Os alunos ainda não sabiam usar a régua corretamente, não sabendo por onde começar a medir. Olhando esses pequenos detalhes, essas pequenas dificuldades, acredito que os conceitos abordados no decorrer deste trabalho, embora pareçam simples, são bastante avançados, devido ao nível escolar e idade dos alunos.

Apesar da minha orientação de calcular a área imediatamente após o término da construção de cada nível, todos os alunos acabaram realizando todo o processo de construção e deixando o cálculo da área para o final. Desta forma, não sabiam mais quais os quadrados que foram retirados em cada nível, e estavam com dificuldade para relembrar como o fractal estava no nível 1, e quais quadrados deveriam ser descontados para o cálculo da área. A seguir a transcrição do diálogo com uma das duplas, que se assemelha com a dúvida de outras duplas, já que fui questionada por vários alunos sobre isso.

Dupla 3 (primeiro integrante): *Sora, a gente fez toda a construção primeiro, pra depois calcular a área nos níveis.*
Dupla 3 (segundo integrante): *É, sora. Só que agora a gente não lembra mais como que era o nível 1 pra calcular a área.*
Professora: *No nível 1 foi retirado só o quadrado grande. Essa parte aqui dos quadrados menores não tinha ainda.*
Dupla 3 (primeiro integrante): *Tá, mas daí a gente não tira esses quadrados no cálculo? Não tô entendendo direito...*
Professora: *Calma, vou projetar no datashow cada um dos níveis pra ajudar vocês.*

Como a situação se repetiu com várias duplas, senti a necessidade de conversar com os alunos no grande grupo, perguntando quantos estavam nesta situação. Apenas duas duplas disseram ter conseguido calcular a área com facilidade, e as demais não conseguiram ou estavam inseguros sobre o resultado, já que estavam confusos sobre a configuração do fractal em cada um dos níveis. Assim, usei a projeção da construção no software GeoGebra para retomar cada um dos níveis com os alunos, conforme diálogo a seguir.

Professora: *Pessoal, vou projetar cada um dos níveis aqui, e vocês vão calculando a área, certo?*
Alunos (em coral): *Sim, sora.*
Professora: *Este é o nível 0. É só o quadrado grande, sem retirar nada ainda. Vocês calcularam para este nível?*
Alunos (em coral): *Esse sim.*
Professora: *Esse aqui é o nível 1, quando vocês retiraram só o quadrado do meio. Vou deixar um tempo aqui para vocês discutirem com as duplas e calcularem...*

Aluno 1: *Ah ta, agora lembrei.*
Aluno 2: *Eu também, ficou mais fácil agora.*

Em função das dúvidas apresentadas pelos alunos sobre o nível 1 do fractal, tive a necessidade de buscar uma representação visual que pudesse esclarecer a configuração de cada um dos seus níveis. Para isso, usei a projeção do software GeoGebra para retomar o desenho do fractal nos níveis 0 e 1. Conforme a fala dos alunos, essa ação foi importante para que as duplas pudessem dar seguimento na atividade. Neste momento, a mídia digital possibilitou "retornar no tempo", ou seja, regredir ao nível anterior, algo que não seria possível com o material concreto. Assim, a possibilidade de transitar entre os níveis, conforme fosse necessário, contribuiu no processo de visualização do fractal.

Borba e Villarreal (2005) destacam que a visualização é fundamental para a compreensão matemática, uma vez que as representações algébricas e visuais fundamentalmente se complementam neste processo. Neste caso, a representação visual do fractal motivou o desenvolvimento do cálculo da área numericamente. Também, no caso das duas duplas que já haviam realizado o cálculo, a representação visual possibilitou a verificação das suposições feitas pelos alunos ao elaborar sua estratégia de resolução. Nesse sentido, a possibilidade oferecida pela visualização permitiu a reorganização do pensamento dos alunos em relação aos quadrados retirados em cada nível, possibilitando a busca de métodos para o cálculo da área

Para o cálculo da área, os alunos, sem exceção, tentaram usar o mesmo método: o cálculo da área inicial, subtraindo a área do quadrado retirado neste nível. Talvez tal estratégia deve-se ao tipo de linguagem utilizada, por meio da palavra "retirada", que pode remeter à subtração. Além isso, a utilização do material concreto provavelmente contribuiu, por meio da visualização e manipulação, para que os alunos percebessem que a superfície da figura havia diminuído após o recorte do quadrado.

Algumas duplas conseguiram realizar o cálculo da área com facilidade, sem a necessidade de orientações. Entretanto, alguns pensaram nesta estratégia, mas estavam com dificuldade de transpor as ideias para o papel. Por exemplo, uma dupla calculou a área no nível 0 corretamente, e no nível 1 havia feito o seguinte cálculo: 729 – 1. Ao serem questionados sobre esse número, os alunos responderam que o número 1 se devia ao fato de ser retirado apenas um quadrado neste nível, conforme transcrição abaixo:

Professora: *Qual foi a ideia que vocês usaram aqui? Porque usaram o número 1?*
Dupla 6: *É do quadrado que foi tirado. Como foi só um quadrado, diminuímos 1.*
Professora: O tamanho do quadrado não influencia no valor da área? Por exemplo, se eu tirar um quadrado grande ou um quadradinho pequeno, o resultado vai ser o mesmo?
Dupla 6: *Muda sim...*
Professora: Então, como poderia ser feito o cálculo da área do quadrado retirado?
Dupla 6: *Acho que tem que medir os lados do quadrado e fazer vezes, pra depois descontar.*
Professora: *Isso aí!*

Apesar da dupla ter compreendido a necessidade de usar a subtração, não estava claro o procedimento que deveria ser feito. Por meio da interação entre os alunos e professora, e com base nos questionamentos feitos, os alunos tiveram a possibilidade de refletir sobre a sua resposta, analisando a coerência do número encontrado quando confrontado com o questionamento. Devido a este momento de troca de ideias, tão importante no processo de aprendizagem, os alunos puderam reestruturar seus pensamentos na elaboração da resposta. Além disso, puderam perceber que o número referente à área final é alterado de acordo com o tamanho da superfície retirada.

Ao interagir com os alunos, é possível perceber que eles ainda confundem muito os conceitos de área e perímetro, uma situação que sempre observei nas turmas que tive. Não só no sexto ano, mas mesmo nas séries seguintes, percebi que os alunos frequentemente apresentavam dificuldades com estes conceitos. Mesmo associando a área com a superfície interna da figura, muitas vezes se equivocavam ao realizar o cálculo.

Por exemplo a Dupla 8 fez o seguinte questionamento: *"Pra calcular a área aqui, é só somar os lados né?".* Ao serem indagados se área se referia à superfície deste quadrado ("parte interna" da figura) ou comprimento ao redor deste quadrado, os alunos responderam "que era a parte de dentro da figura". Então, perguntei qual o processo que é usado para saber “o número de quadradinhos de lado 1 da figura”. Em seguida, os alunos responderam que era “lado vezes lado” (eles ainda não aprenderam potenciação, por isso usam essa nomenclatura).

A interação com as Duplas 6 e 8 mostra que os alunos apresentam dificuldade na compreensão de alguns conceitos, entretanto a manipulação do material e o recorte de uma parte contribuiu neste processo. Os alunos conseguiram associar a ideia de área com a superfície da figura, e perceber o tipo de cálculo a ser realizado. Desta forma, o material concreto foi um elemento importante para influenciar na construção da imagem mental dos alunos. Tal abordagem está em conformidade com as ideias apresentadas por Nacarato e Passos (2003, p. 70), que afirmam que “ o ensino de Geometria deve pautar-se pelo trabalho simultâneo com o objeto, o conceito e o desenho, destacando aspectos figurais e conceituais das figuras geométricas”.

Com relação ao cálculo da área no nível 2, uma dupla calculou a área corretamente no nível 1 (descontando a área do quadrado de lado 9 cm e obtendo 648 cm^2) e, ao fazer o cálculo no nível 2, acabaram descontando novamente o quadrado de lado 9 cm. Então, pedi aos integrantes da dupla que me explicassem os procedimentos usados:

Dupla 5 (primeiro integrante): *A gente fez 27 vezes 27 e daí achamos 729, que é a área do quadrado grande. Daí aqui (nível 1), a gente fez 9 vezes 9 pra achar a área do quadrado que a gente recortou, e deu 81. Daí fizemos 729 menos 81, que deu 648.*
Professora: *Certo. E aqui no nível 2, como vocês fizeram?*
Dupla 5 (segundo integrante): *A gente pegou o número do resultado, e daí descontamos o quadrado grande e os oito quadrados menores. Ficou 648 menos 81, que deu 567. Daí fizemos menos 72 e deu 495.*
Professora: *Tá, mas porque vocês descontaram 81 de novo?*
Dupla 5 (segundo integrante): *Porque é o quadrado grande...*
Professora: *Sim, mas vocês já não tinham descontado esse valor antes? Quando estavam fazendo a construção, o quadrado grande não foi recortado uma vez só?*
Tem como tirar novamente o quadrado, se ele já havia sido retirado?
Dupla 5 (primeiro integrante): *Ah, verdade. É uma vez só né? No nível 2 o quadrado não tava mais ali.*

Além da contribuição do material concreto para a visualização da situação discutida, o questionamento feito aos alunos foi importante para auxiliar na compreensão dos conceitos geométricos envolvidos. A intervenção do professor é muito importante para a aprendizagem, inclusive porque o aluno precisa ter um retorno sobre seus resultados para avaliar seu processo de resolução. Ao revisar este processo, o aluno tem a possibilidade de analisar seus erros e aprender com eles. (NACARATO; LOPES, 2009).

Além disso, uma dupla não usou os resultados de maneira recursiva, ou seja, utilizou o resultado do nível 0 para fazer o cálculo no nível 2, descontando os 8 quadrados menores e esquecendo de subtrair a área do quadrado maior. Ao serem indagados se o quadrado maior retirado voltaria para a figura no nível 2, os alunos perceberam o engano, e responderam que o valor usado deveria ser o resultado obtido no nível 1.

Também no nível 2, uma dupla esqueceu de subtrair os oito quadrados que foram retirados, descontando apenas um deles. Perguntei aos alunos o motivo de terem descontado aquele número nove, e eles responderam que era o valor da área do quadrado. Perguntei quantos quadrados eles haviam recortado no nível 2, e eles responderam que foram oito. Então questionei: *“Vocês recortaram oito quadrados. Ou seja, tiraram oito quadrados do fractal, certo? E agora no cálculo, subtraíram a área de apenas um. Isso?”.* Neste momento, os alunos responderam que deveriam multiplicar o valor por oito, e descontar setenta e dois.

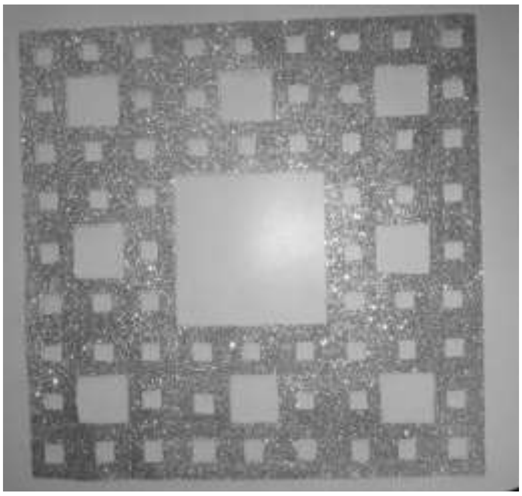
Nas três situações recentemente mencionadas, foi necessário rememorar o momento em que os alunos estavam fazendo a construção no EVA, para que compreendessem os equívocos que aconteceram. Ou seja, isso reforça a importância do uso do material concreto, pois os alunos tiveram dificuldade com a abstração envolvida nos cálculos. Em todas as situações, quando mencionei o processo de construção, os alunos conseguiram fazer a associação entre o algébrico e o geométrico, sanando suas dúvidas.

A visualização do desenho por meio da tecnologia digital também teve um papel importante no decorrer da atividade, pois os alunos precisaram recorrer a um modelo de apoio durante a construção e cálculo da área. A manipulação do material concreto, visualização por meio da mídia e a interação com a sua dupla e com professora foram essenciais para a realização da atividade proposta e construção da imagem mental de fractal. No processo de aprendizagem, é essencial a relação entre o objeto, o desenho, o conceito e a imagem mental (SANTOS; NACARATO, 2014).

É importante destacar que, na aula posterior à realização destas atividades, uma das duplas trouxe o Tapete de Sierpinki construído até o Nível 3 (um nível além do proposto em aula). As integrantes da Dupla 11 disseram que acharam muito interessante a construção do fractal, e resolveram comprar um papel emborrachado com *gliter* e reunirem-se fora do horário de aula para construir a figura. As alunas afirmaram que estavam curiosas para ver como o fractal ficaria usando mais passos da construção, e por isso usaram uma folha inteira para a confecção.

Ao descrever a estratégia usada, as alunas afirmaram ter comprado uma folha 40x60, e então começaram com um quadrado de 40 cm, pois queriam construir o Tapete com o maior tamanho possível. Em seguida, dividiram esta medida por três, obtendo aproximadamente 13,3 cm, medida do lado do primeiro quadrado a ser retirado. Em seguida, repetiram o processo, usando aproximações para os valores obtidos na divisão e foram retirando os quadrados até o nível 3. A seguir, está a imagem do material produzido pelas alunas extraclasse.

Figura 33 - Tapete de Sierpinki construído pela Dupla 11**.**



Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Como na pesquisa de Souza (2014) sobre fractais, a temática abordada em sala de aula inspirou a dupla a se reunir fora do horário de aula a fim de aprofundar seus conhecimentos sobre o Tapete de Sierpinski. A construção dos primeiros níveis em sala de aula despertou a curiosidade e autonomia com relação à aquisição de conhecimentos, além de ter inspirado o protagonismo juvenil mencionado na pesquisa de Mingoranci (2014) ao aliar fractais e tecnologias.

Cabe ressaltar que o material concreto utilizado, no caso o papel emborrachado de EVA, não deixa de ser uma tecnologia. Kenski (2012, p. 22-23) destaca que "a expressão "tecnologia" diz respeito a muitas outras coisas além de máquinas. (...) Engloba a totalidade de coisas que a engenhosidade do cérebro humano conseguiu criar em todas as épocas, suas formas de uso, suas aplicações". Assim, o material utilizado pode ser considerado uma tecnologia, pois é uma invenção humana que surgiu para auxiliar na realização de alguma atividade e que comumente é usada para fins escolares.

A partir dessa ideia, podemos dizer que, ao trabalhar com esse material, os alunos puderam *pensar-com-tecnologias,* pois suas ideias estavam em simbiose com os procedimentos realizados durante a construção. A manipulação desta tecnologia proporcionou uma (re)organização no pensamento dos alunos, uma vez que o processo de manusear o material concreto e recortar os quadrados influenciou nas estratégias utilizadas para o cálculo da área. Ao realizar este cálculo, os alunos associaram os quadrados recortados com a ideia de subtração e também com a quantidade de quadrados que deveriam ser descontados.

Cabe ressaltar que o uso do material concreto e a representação visual proporcionada pela tecnologia digital acabaram se complementando no decorrer da atividade. Ao realizar o cálculo da área, os alunos tiveram a necessidade de regredir ao nível anterior para visualizar a configuração do Tapete, o que não seria possível apenas com o material concreto. A dinamicidade do software GeoGebra possibilitou avançar e regredir pelos níveis a qualquer momento de acordo com a necessidade dos alunos, inclusive transitando detalhadamente pelos passos da construção.

A possibilidade de repassar o processo de construção oferecida pela mídia no início da atividade permitiu *pensar-com-GeoGebra*, pois a produção do conhecimento matemático no que se refere ao cálculo da área e a construção do fractal foi condicionada pela representação visual fornecida pelo software. Mesmo os alunos não tendo manipulado o software ainda, é possível perceber que ele participou ativamente no coletivo *seres-humanos-com mídias*, influenciando o cenário cognitivo por meio da visualização. É importante ressaltar que, além do GeoGebra, outras mídias como a escrita e a oralidade também se fizeram presentes durante as discussões e ao transpor as ideias para o papel.

No entanto, o uso da tecnologia digital não conseguiu esclarecer todas as dúvidas dos alunos relacionadas à representação visual do processo de construção do fractal, confirmando que a tecnologia tem suas limitações. Ou seja, apenas a simulação visual da retirada não foi suficiente, havendo a necessidade de manipulação do material concreto e recorte dos quadrados. Durante a realização da atividade piloto, os alunos deram sinais de que não haviam compreendido o “processo de retirada” durante a exploração do Triângulo de Sierpinski, pois afirmaram que o “triângulo do meio havia sido pintado de outra cor”. Com base nessas falas, o uso do material concreto surgiu nesta intervenção para auxiliar no processo de compreensão dos conceitos, mas também como uma precaução caso os alunos apresentassem dificuldade utilizando apenas a imagem fornecida pelas tecnologias digitais (PowerPoint e GeoGebra).

Novamente, a ideia de retirada representada pela forma geométrica em branco pareceu abstrata para os alunos, e isso pode ser confirmado nas várias falas em que os alunos sugeriam a troca de cor do ente matemático. De certa forma, essa possibilidade já era esperada, uma vez que os alunos participantes da pesquisa eram crianças e ainda possuíam certa dificuldade na assimilação de conceitos mais abstratos. Neste momento, a manipulação de algo concreto se fez essencial para a formação do pensamento geométrico dos alunos, e serviu como apoio para a realização do cálculo da área da figura.

Todas as vezes em que os alunos apresentaram dificuldade no cálculo da área, as memórias do processo de construção no material concreto foram evocadas para auxiliar na compreensão das ideias ou embasar os questionamentos feitos aos alunos. Provavelmente, se não tivesse sido feito uso deste recurso, a lembrança dos quadrados brancos no GeoGebra não fariam o mesmo efeito. Os alunos poderiam ter dificuldade para entender o processo de retirada, uma vez que no software os quadrados ainda estariam ali, porém coloridos de outra cor.

Borba, Silva e Gadanidis (2014) destacam que as TD, apesar de suas várias potencialidades, podem não ser suficientes. Seu uso permite a exploração de diferentes conteúdos matemáticos, promove a experimentação e possibilita o surgimento de cenários alternativos para os processos de ensino e aprendizagem. No entanto, existem momentos em que o uso de outros tipos de materiais também se faz necessário, e não há problema nisso. Uma tecnologia[7] não exclui a outra, bem pelo contrário, elas podem se complementar, de acordo com os objetivos de aprendizagem almejados.

Kenski (2012, p. 57) também destaca que “cada tecnologia tem a sua especificidade e precisa ser compreendida como um componente adequado no processo educativo”. Ou seja, inserir TD durante todas as tarefas e na abordagem de todos os conteúdos não é a solução para todos os problemas enfrentados em sala de aula. É necessário analisar se a sua utilização irá trazer, de fato, acréscimos nos processos de ensino e aprendizagem. Ao longo desta atividade, por exemplo, o uso de lápis e papel foi mais interessante para a realização do cálculo da área, pois desafiou os alunos e promoveu a mobilização de estratégias que são importantes para a compreensão dos conceitos envolvidos.

Se fosse usado o software para este propósito, o problema se tornaria trivial, pois os alunos receberiam um “número pronto” como resultado, e não seria necessário todo um processo de interação e construção de estratégias. Provavelmente, se esta fosse a metodologia utilizada, os alunos não entenderiam o processo de retirada durante a realização do cálculo. O uso do material concreto e do GeoGebra foram recursos importantes no processo de visualização e desenvolvimento do pensamento geométrico, e acabaram se complementando perante as dificuldades que surgiram.

Por fim, sobre os recursos digitais presentes até aqui (PowerPoint e GeoGebra), pode surgir o pensamento de que a TD foi “domesticada” durante o seu uso nas atividades, que as imagens foram projetadas obtendo o mesmo efeito que a entrega de folhas impressas teriam sobre os alunos. Entretanto, a possibilidade de dar ênfase e ampliar pedaços das figuras no PowerPoint, bem como a possibilidade de perambular dinamicamente pelos níveis no GeoGebra asseguram possibilidades de exploração que não teríamos com uma figura estática, no papel.

[7] Neste contexto, estou usando o sentido amplo da palavra tecnologia, conforme a definição apresentada por Kenski (2012). Ou seja, não se refere apenas a TD, mas todo o tipo de invenção humana que possa servir como recurso pedagógico.

4.3 TERCEIRO MOMENTO – EXPLORAÇÃO DO TAPETE DE SIERPINSKI NO GEOGEBRA

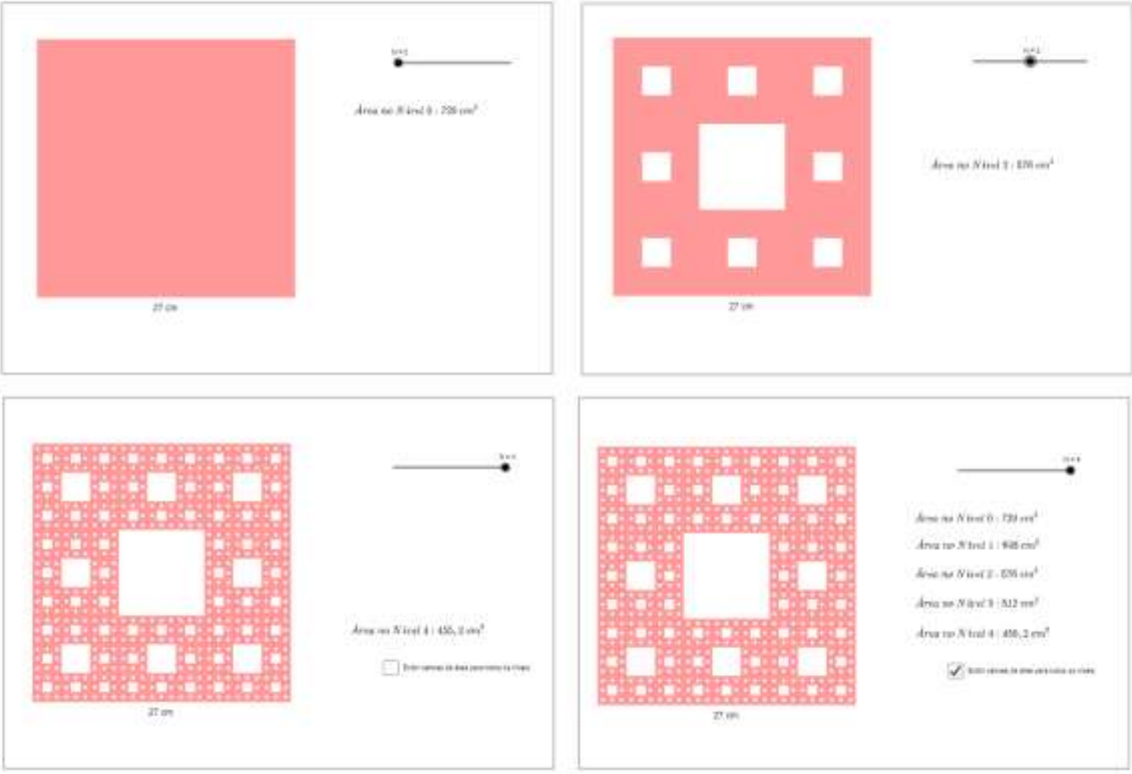
No terceiro momento, os alunos foram conduzidos ao laboratório de informática, com a finalidade de dar sequência na realização das atividades envolvendo o Tapete de Sierpinski. Na primeira parte, os alunos construíram o Tapete usando material concreto e calcularam sua área, para posteriormente confirmar estes resultados no GeoGebra. Além disso, neste terceiro momento, os alunos deveriam manipular o *applet* criado por mim, com a finalidade de analisar alguns aspectos do fractal conforme o nível aumenta.

Pelos motivos já citados neste trabalho, optei por usar *applets* para a exploração dos fractais, salvando os dois arquivos produzidos no meu perfil nos materiais do GeoGebra[8]. Assim, foi necessário apenas passar o *link* para que os alunos pudessem acessar as construções durante as aulas. Na sequência segue a descrição do conteúdo dos dois *applets* gerados para esta etapa da intervenção e das atividades realizadas.

O primeiro *applet* explorado pelos alunos consiste de uma representação virtual do Tapete de Sierpinski de lado 27 cm construído com material concreto em sala de aula. O controle deslizante possibilita a exploração do nível 0 até o nível 4, além de que o valor da área correspondente é exibido em cada um dos níveis. Ou seja, os alunos puderam observar a representação numérica e geométrica da área ao longo dos níveis. No nível 4, há uma caixa que permite a exibição do valor da área em todos os níveis ao mesmo tempo, possibilitando uma comparação destes valores.

[8] Os links dos applets gerados estão disponíveis no apêndice B deste trabalho.

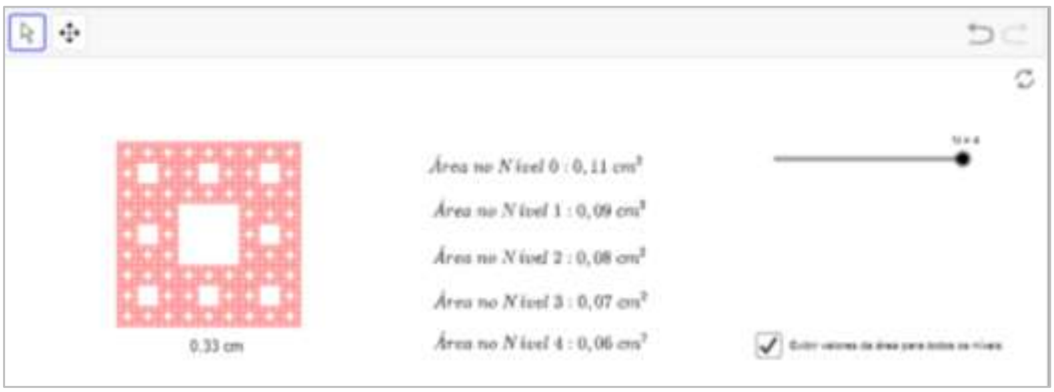
Figura 34 - Applet do Tapete de Sierpinski.



Fonte: Elaborado pela autora com o software GeoGebra.

No segundo *applet*, há uma versão do Tapete de Sierpinski com lado 0,33 cm, simulando a aproximação de um dos quadradinhos obtidos no nível 4. Novamente, o controle deslizante permite transitar pelos níveis de forma dinâmica, e o valor da área aparece em cada um dos níveis. Por fim, também há uma caixa que permite marcar a opção “Exibir valores da área para todos os níveis”, em que os alunos puderam observar os números decimais referentes a área em cada um dos níveis.

Figura 35 - Applet do Tapete de Sierpinski.



Fonte: Elaborado pela autora com o software GeoGebra.

Nos *applets* gerados, optei por esconder as ferramentas que não seriam úteis, deixando visíveis apenas as ferramentas *Mover*, *Mover Janela de Visualização*, *Ampliar* e *Reduzir*. Tal decisão ocorreu porque na realização da atividade piloto, os alunos acabavam tentando usar as ferramentas aleatoriamente, alterando as construções, o que poderia gerar dúvidas e influenciar no momento de observar as características do fractal.

No primeiro momento em que fomos ao laboratório de informática, eu mostrei aos alunos, por meio da projeção do software, as suas janelas, campo de entrada, ferramentas e instruções que aparecem quando uma ferramenta é selecionada. Mostrei como fazer construções de formas geométricas simples, como polígonos quaisquer, polígonos regulares, círculos, entre outros. Por fim, os alunos tiveram o restante do período livre para explorar o software e sanar suas dúvidas e curiosidades. Acredito que esse momento de exploração foi importante para os alunos, pois eles puderam realizar a manipulação das ferramentas neste momento para posteriormente direcionar sua atenção nas atividades.

Na aula seguinte, comecei mostrando os *applets* no projetor, além de explicar de maneira geral cada uma das tarefas, para auxiliar na compreensão e interpretação das mesmas. Além disso, atentei para o fato de que o primeiro *applet* seria uma versão do Tapete construído por eles, porém com a possibilidade de explorar mais níveis. Comuniquei que o segundo *applet* se referia a um dos quadradinhos do nível 4, mostrando quais seriam os quadradinhos obtidos após esse nível. Reforcei bem a ideia de que este segundo Tapete representaria o que veríamos ao dar *zoom* em um destes quadradinhos, retomando a ideia de autossimilaridade envolvida.

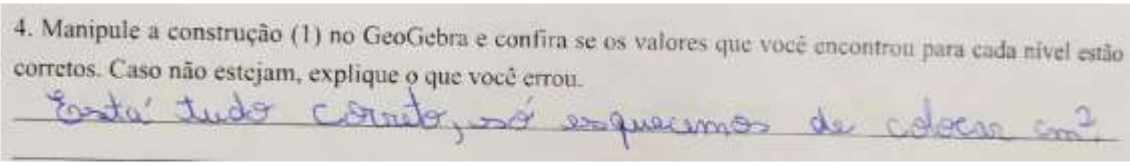
Na sequência, passei os links dos *applets* e auxiliei os alunos a acessá-los. Como já mencionado, os estudantes apresentaram bastante dificuldade em usar o computador, demorando para digitar o *link* e cometendo vários equívocos durante esse processo. Assim, várias duplas precisaram de auxílio e demorou certo tempo até que todas estivessem organizadas para receber o material no qual seriam feitos os registros e começar. Destaco que os alunos se organizaram nas máquinas com as mesmas duplas que realizaram a construção do material concreto.

Na primeira tarefa, foi solicitado que os alunos manipulassem a construção no primeiro *applet*, a fim de conferir se os resultados obtidos com lápis e papel no cálculo da área estavam corretos. Desta forma, a atividade teve como objetivo mostrar a relação existente entre o Tapete construído com material concreto e a representação visual proporcionada pela mídia. Ainda, os alunos tiveram a oportunidade de verificar as respostas obtidas na realização dos cálculos e analisar seus erros por meio da mídia. Ou seja, a mídia, por meio da visualização, seria importante para confirmar a resposta encontrada ou possibilitar uma análise e discussão do erro cometido.

De acordo com Gravina e Santarosa (1998), a análise de erros é importante para a compreensão matemática, uma vez que, ao questionar o *feedback* apresentado pelo software, o aluno é desafiado a debater os conceitos envolvidos. Por esta razão, essa tarefa foi elaborada com o intuito de que, ao perceber a divergência entre os resultados, os integrantes da dupla pudessem fazer uma análise da estratégia realizada, discutir os conceitos matemáticos relacionados e refazer o cálculo.

No entanto, ao registrarem suas respostas no material impresso, todas as duplas disseram que os resultados obtidos no cálculo da área estavam corretos. Apenas a Dupla 7 registrou que esqueceu de colocar a unidade de medida de área. O fato de todos os alunos terem efetuado o cálculo corretamente demostra que o material concreto auxiliou no processo de visualização e posterior cálculo da área. Além disso, os questionamentos realizados por mim também contribuíram para esclarecer as dúvidas das duplas, impedindo possíveis equívocos, conforme mencionado durante a apresentação dos dados do segundo momento.

Figura 36 - Resposta da Dupla 7.


4. Manipule a construção (1) no GeoGebra e confira se os valores que você encontrou para cada nível estão corretos. Caso não estejam, explique o que você errou.

Está tudo correto, só esquecemos de colocar cm².

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

De acordo com Goldenberg (2004) e Bogdan e Biklen (1994), durante uma pesquisa, deve ser levado em consideração o *bias* do pesquisador, de forma que a melhor maneira de minimizar a sua influência seja admitir que ela existe. Ou seja, ao estar consciente de que algumas ações como maneira de falar, expressões faciais ou gestos podem ter influência direta sobre os dados obtidos, o pesquisador pode prevenir algumas atitudes ou mesmo levá-las em consideração no momento de fazer suas conclusões.

Tendo em vista minha condição de professora-pesquisadora, e levando em conta as considerações apresentadas no terceiro capítulo deste trabalho, creio que seja impossível negar minha interferência em alguns momentos desta pesquisa. Por exemplo, ao fazer questionamentos aos alunos durante o cálculo da área usando lápis e papel, conforme apresentado no segundo momento, acabei influenciando nos resultados obtidos na atividade 1 mencionada anteriormente. Certamente, questionamentos como *“Porque vocês descontaram o número um no cálculo da área?”* e “*O tamanho do quadrado retirado não influencia no resultado*?” contribuíram para a alteração dos resultados inicialmente apresentados pelos alunos. Assim, somente durante o cálculo da área do fractal, posso concluir que tive influência nas respostas encontradas por, pelo menos, três duplas.

Sob o meu ponto de vista, estar na posição de professor e de pesquisador, concomitantemente, é algo bastante complexo. Enquanto pesquisadora, precisava estar atenta ao tipo de intervenção que iria realizar durante a produção de dados, tendo um olhar atento e registrando cada detalhe. Enquanto professora, me sentia na “obrigação” de auxiliar os alunos em suas dúvidas, além de ter em mente, o tempo todo, que era justamente isso que estavam esperando de mim. Além do mais, por serem alunos do sexto ano (crianças), me questionava se eles entenderiam “o que seria uma pesquisa”. Ou seja, caso eu não desse o retorno esperado para minimizar minha influência nos resultados, poderiam pensar que “a professora não quis auxiliar”.

Por várias vezes ao longo da produção de dados, me questionei o quanto eu estava interferindo nos dados produzidos. O quanto as respostas dos alunos mudariam de acordo com as minhas colocações. E foi exatamente isso o que aconteceu nesse momento na pesquisa. Sem a minha intervenção durante o cálculo da área, que respostas os alunos teriam colocado? Teriam errado o cálculo? O software teria auxiliado na identificação e correção desse erro? Eu teria outros dados para analisar nesta atividade? Essa reflexão sobre a minha influência teria surgido? Enfim, são muitos questionamentos.

Vários autores citados neste trabalho, tais como Santos e Nacarato (2014) enfatizam a importância da interação com o professor durante o processo de aprendizagem, uma vez que os questionamentos feitos por ele podem contribuir para o surgimento de discussões importantes para a aquisição do conhecimento. Além disso, tais indagações podem direcionar o aluno de forma a progredir na realização da tarefa, além de provocar reflexões que talvez não teriam surgido. As interrogações propostas pelo professor favorecem não só a interação entre professor e alunos, mas também dos alunos entre si. Nesse contexto, a oralidade atua como protagonista nesse sistema de *seres-humanos-com-mídias*, (re)organizando pensamentos e colaborando para a aprendizagem matemática.

Com base nas ideias apresentadas, creio que a interferência do professor é algo natural e até mesmo essencial em uma intervenção pedagógica, orientando os alunos quando estes se encontrarem estagnados na resolução de um problema. Além do mais, não fossem meus questionamentos durante o cálculo da área, não teriam surgidos os dados e reflexões mencionados no momento 2 e nem a presente discussão evolvendo o *bias* do pesquisador.

Esta situação reforça a importância de diferentes fontes de registro de dados para que o pesquisador possa ter uma visão mais ampla no momento de tirar suas conclusões. Além disso, a inserção no ambiente da pesquisa e observação dos participantes por um maior período de tempo contribuem para a interpretação dos dados obtidos em diferentes situações (GOLDENBERG, 2004). Nessa pesquisa, em particular, a utilização de diferentes formas de registro de dados foi essencial, sendo indispensáveis as informações obtidas nas gravações de áudio e anotações no caderno de campo.

Se o foco de análise fosse apenas o material dos alunos, não seria possível levar em consideração todos esses acontecimentos, falas e percepções registradas ao longo das aulas. Na verdade, essa é a ideia de uma pesquisa qualitativa, não olhar só o resultado obtido, mas levar em conta todo o processo ao longo da intervenção. Essas diferentes formas de registro oferecem essa possibilidade, fornecem pistas que tornam possível entender ou pelo menos levantar hipóteses sobre como o aluno chegou na resposta apresentada. E foi exatamente isso que aconteceu neste momento e ao longo de toda a pesquisa: as diferentes formas de registro se complementaram na hora de analisar as respostas dos alunos.

Dando sequência nas atividades, a última tarefa foi dividida em quatro itens, a fim de auxiliar os alunos na organização de uma linha de raciocínio. Para a realização destas tarefas, foi necessária a manipulação dos dois *applets*, inclusive porque a construção e valores do segundo *applet* conseguem dar um panorama mais claro sobre os resultados referentes ao cálculo quando o quadrado inicial apresenta um valor pequeno para a medida do lado.

No primeiro item, foi perguntado aos alunos o que acontece com a quantidade de quadrados que são retirados, à medida que o nível aumenta. Ao realizar esta tarefa, várias duplas questionaram se os quadradinhos que eu estava me referindo ao mencionar “quadrados retirados” seriam os quadrados brancos no fractal. Após responder esse questionamento algumas vezes, senti a necessidade de esclarecer isso com todos os alunos. A seguir, trago o diálogo com a Dupla 11, no momento do seu questionamento, e o posterior comentário com os alunos da turma:

Dupla 11: *Sora, aqui quando fala em quadrados retirados, são os brancos né?*
Professora: *Sim, são os brancos. Pensem que estes quadrados foram recortados, assim como vocês fizeram ao construir o fractal. Como o fundo da tela é branco, então os “buracos” que surgiram permitem enxergar esse fundo.*
Dupla 11: *Tá, a gente só queria ter certeza.*
Professora (se direcionando para toda a turma): *Pessoal, olha só... Ali na letra a), quando pede o que acontece com os quadrados retirados, são os quadrados brancos tá? Pensem que eles foram recortados, que nem vocês fizeram com o EVA... Certo?*
Alunos (em coral): *Tá bom, sora.*

Na verdade, não parece que os alunos estavam, de fato, com dúvidas em relação a isso, uma vez que as duplas, assim como a Dupla 11, faziam esse questionamento dando a sensação de que já sabiam a resposta, querendo apenas a confirmação. Provavelmente, esses sinais de insegurança podem estar relacionados com a troca de metodologia, já que os alunos estavam começando com as atividades no laboratório de informática, e ao longo dos encontros anteriores mostraram ansiedade com relação a este momento. De qualquer forma, achei conveniente esclarecer no grande grupo, evocando o momento da construção do material concreto para que fosse possível estabelecer uma relação entre esses dois momentos.

Com relação às respostas dos alunos, seis duplas escreveram que o número de quadrados aumentou, parecendo não ter dificuldade neste aspecto; cinco duplas responderam que a área estava diminuindo e uma dupla não compareceu neste encontro. Sobre as duplas que responderam o questionamento falando da área, que seria o segundo item da tarefa, parece que os alunos prontamente tiveram essa percepção ao manipular o *applet* e olhar para a representação visual envolvendo a área do fractal. Na sequência, o diálogo com a Dupla 8 reforça essa hipótese:

Dupla 8 (primeiro integrante): *Sora, olha só... Quando a gente vai mexendo aqui* (no controle deslizante*) pra ir passando os níveis, os quadradinhos vão sumindo né....*
Dupla 8 (segundo integrante): *Eles não vão sumindo, vão sendo retirados!*
Dupla 8 (primeiro integrante): *É, isso. Sendo retirados...* (Pausa). *Então, quando a gente vai passando* (os níveis), *dá pra ver que a área vai ficando menor.*
Professora: *Por que vocês acham isso?*
Dupla 8 (primeiro integrante): *Olha aqui* (apontando para a tela do computador), *nesse nível tem essa parte aqui óh, e aqui já não tem mais* (mostrando o primeiro quadrado retirado)*. Quando a gente passa para o outro* (nesse momento, a aluna move o controle deslizante para N=2)*, esses oito quadrados saem.*
Professora: *Uhum...*
Dupla 8 (primeiro integrante): *Então essas partes que tinha aqui* (aluna retorna ao nível 1 e fica oscilando entre os níveis) *somem, e assim vai indo nos outros níveis.*
Dupla 8 (segundo integrante): *É, a gente notou que quando passa de um nível para o outro sempre tem quadrados sendo tirados. Daí essa parte cor-de-rosa vai diminuindo.*
Professora: *A região cor-de-rosa vai diminuindo.*
Dupla 8 (segundo integrante): *É, isso.*
Professora: *Ok, está correto o raciocínio de vocês. Mas essa é a letra b) né?*
Na letra a) vocês só vão falar do número de quadrados.
Dupla 8 (primeiro integrante): *Tá, então só botar que o número tá aumentando?*
Professora: *Isso. Daí usem isso que vocês me falaram pra responder o item b).*

De acordo com o diálogo anterior, a dupla utilizou a possibilidade de transitar entre os níveis, usando o controle deslizante, para fazer comparações entre os níveis. Em especial, essa dinamicidade oportunizada pelo GeoGebra permitiu que os alunos pudessem “ir e vir” várias vezes entre dois níveis, a fim de comparar um nível com o posterior. Inclusive, quando pediram meu auxílio para confirmar a sua hipótese, os alunos usaram essa estratégia para explicar como eles perceberam essa diferença na região rosa entre um nível e outro.

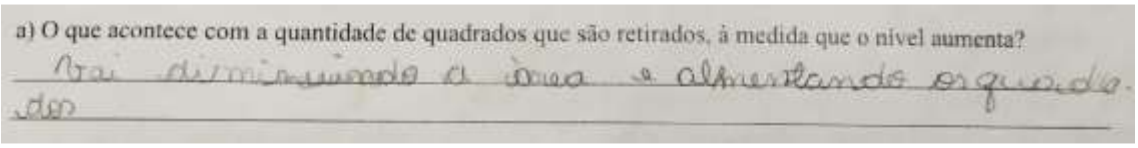
Neste momento, ao *pensar-com-GeoGebra*, houve uma moldagem recíproca entre o pensamento dos alunos e a mídia utilizada. A dupla criou uma estratégia para usar essa mídia a seu favor, realizando a comparação entre os pares de níveis. Já o pensamento desses alunos foi condicionado pelo *feedback* dado pelo software, ao realizar a transição de “ida e vinda” entre dois níveis várias vezes. Nesse sentido, a mídia participou ativamente deste construto de seres-humanos-com-mídias, possibilitando comparar os níveis ao “tirar e colocar” os quadrados envolvidos várias vezes.

Essa dupla identificou que também poderia utilizar o “processo inverso” para auxiliar na compreensão. Ou seja, além de visualizar os quadrados sendo retirados ao avançar de um nível para outro, também seria possível confirmar essa ideia ao regredir de um nível para o outro e ter a impressão que esses quadrados estavam retornando para a construção. Essa possibilidade de visualizar os quadrados sendo retirados e voltando para a construção de forma dinâmica oferecida pela mídia contribuiu para que o coletivo de *seres-humanos-com-mídia* chegasse nessa conclusão envolvendo a área do fractal, em um cenário de experimentação matemática.

Segundo Gravina e Santarosa (1998), a variação de parâmetros e a possibilidade que os SGD oferecem ao proporcionar a transição entre diferentes estados é importante aliado para as concretizações mentais do aluno. Nesta tarefa, em especial, esta concepção dinâmica permitiu que os alunos manipulassem o software usando uma estratégia que auxiliou na construção de significados, por meio da representação visual obtida ao longo da transição entre os níveis. Destaco que, quando interagi com a dupla, em nenhum momento os alunos usaram os valores numéricos. Ou seja, as conclusões foram obtidas principalmente a partir da visualização.

Inclusive, ao apresentar sua resposta no papel, a Dupla 8 afirmou que o número de quadrados aumentaria e a área diminuiria, ou seja, fez questão de responder ao questionamento e já mencionar a conclusão obtida ao manipular os *applets*, conforme a imagem a seguir.

Figura 37 - Resposta da Dupla 8.



a) O que acontece com a quantidade de quadrados que são retirados, à medida que o nível aumenta?

Vai diminuindo a área e aumentando os quadra-
dos

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

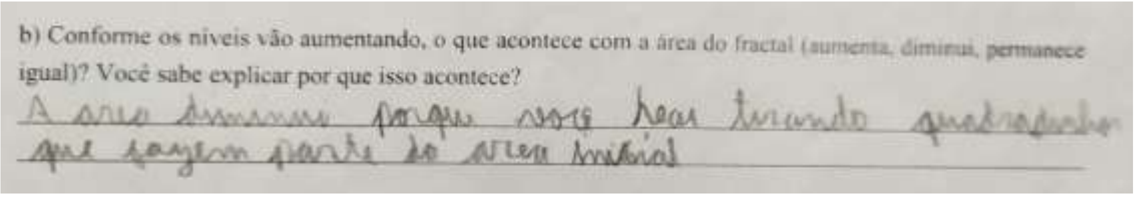
Desta forma, é possível perceber que a Dupla 8 (assim como as outras três duplas) foi além do solicitado, observando o que acontece também com a área do fractal conforme o nível aumenta. Ao pensar em simbiose com a mídia, os estudantes tiveram percepções a frente do questionamento apresentado (talvez a leitura do próximo item também tenha inspirado). Essas duplas não solicitaram auxílio para a realização desta atividade, pois a Dupla 8 pediu assistência apenas para tentar confirmar a conclusão já obtida pelos alunos.

Esses coletivos compostos por alunos e mídia foram além, observando os quadrados por meio da visualização. Provavelmente, a representação numérica da área também pode ter contribuído para que as outras duplas chegassem nessas conclusões. Nesse sentido, a possibilidade oferecida pela mídia ao explorar os diferentes níveis da construção e permitir comparações visuais e numéricas entre os níveis permitiu a antecipação desse resultado.

No segundo item, como já mencionado, foi solicitado que os alunos observassem o que estava acontecendo com a área à medida que os níveis aumentavam. Devido às dificuldades dos alunos em compreender questionamentos semelhantes durante a atividade piloto, complementei o questionamento apresentando possibilidades, sendo, portanto, apresentado da seguinte forma: *“Conforme os níveis vão aumentando, o que acontece com a área do fractal (aumenta, diminui, permanece igual)? Você sabe explicar por que isso acontece?”*.

Nesse questionamento, todas as onze duplas que estavam presentes responderam que a área diminuiu, sendo que, apenas uma dupla, não apresentou justificativa para essa afirmação. Com relação às demais duplas, as justificativas dadas foram similares. Os alunos perceberam que o número de quadrados retirados estava aumentando e, consequentemente, a superfície do fractal estava diminuindo ao longo dos níveis. A seguir, apresento as respostas dadas por três duplas, que mesmo se expressando de maneiras distintas, transmitem essa ideia.

Figura 38 - Resposta da Dupla 1.

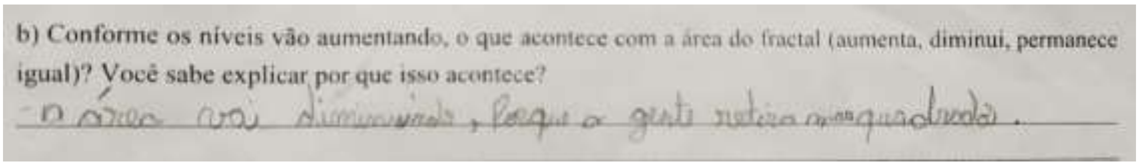


b) Conforme os níveis vão aumentando, o que acontece com a área do fractal (aumenta, diminui, permanece igual)? Você sabe explicar por que isso acontece?

A área diminui porque você vai tirando quadradinhos que fazem parte da área inicial

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Figura 39 – Resposta da Dupla 5.

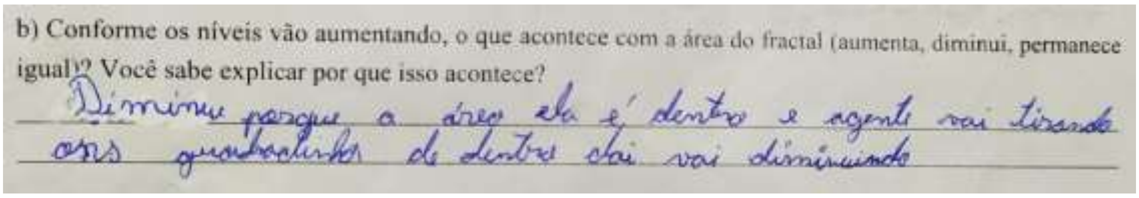


b) Conforme os níveis vão aumentando, o que acontece com a área do fractal (aumenta, diminui, permanece igual)? Você sabe explicar por que isso acontece?

A área vai diminuindo, porque a gente retira os quadrados.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Figura 40 - Resposta da Dupla 11.



b) Conforme os níveis vão aumentando, o que acontece com a área do fractal (aumenta, diminui, permanece igual)? Você sabe explicar por que isso acontece?

Diminui porque a área ela é dentro e agente vai tirando os quadradinhos de dentro daí vai diminuindo

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

No terceiro item da tarefa, os alunos deveriam responder ao seguinte questionamento: *“Conforme calculamos a área em cada nível, ela parece se aproximar de algum número? Se sim, diga qual e justifique.”.* Ao responder, dez duplas disseram que a área estava se aproximando do zero, e apenas a Dupla 06 respondeu que iria se aproximar do número 0,08. Apesar de ter solicitado que os alunos justificassem suas respostas, vários deles não seguiram essa instrução.

Ao circular pela sala ao longo da atividade e interagir com os alunos, eles não pareciam estar tendo muitas dúvidas a respeito desta tarefa, e quando pediam auxilio era mais no sentido de confirmar se a resposta estava correta. Ao conversar com as duplas, percebi o quanto é importante proporcionar aos alunos diferentes formas de representações, até porque cada indivíduo aprende de uma maneira diferente, e assim a probabilidade de contemplar as especificidades dos alunos é maior; além de que diferentes tipos de representações se complementam, auxiliando na aprendizagem do aluno. A seguir, transcrevo o diálogo com uma das duplas.

Dupla 10 (integrante 1): *Sora, olha só... A gente sabe que a área diminui porque em cada nível são tirados mais quadradinhos.* (Pausa). *Só que, só de olhar pra figura a gente não sabe que número que dá quando calculamos a área né. Daí, a gente foi olhando os resultados aqui* (aluno apontou para os valores da área exibidos no nível 4 do primeiro a*pplet) e só viu que fui diminuindo, ainda não dava pra saber...*
Dupla 10 (integrante 2): *Daí a gente olhou nesse aqui* (aluno trocou para o segundo applet) *e olhando esses números* (aluno apontou para os valores da área exibidos no nível 4) *e viu que vai chegando perto do zero. Olha só... tem o 0,08; o 0,07 e o 0,06. Acho que se tivesse mais níveis e a gente fizesse as contas, ia ir diminuindo mais ainda, chegando perto do zero.*
Professora: *Isso aí.*
Dupla 10 (integrante 1): *É, mas pensando bem, olhando na figura dá pra ver que a parte rosa tá sumindo... Então a área tá chegando perto do zero mesmo.*
Professora: *Ok. Agora pensem se esse valor da área vai chegar no zero, ou se só vai chegar cada vez mais perto e nunca ser zero. Depois volto aqui pra falar com vocês.*
Dupla 10 (ambos integrantes): *Tá bom.*

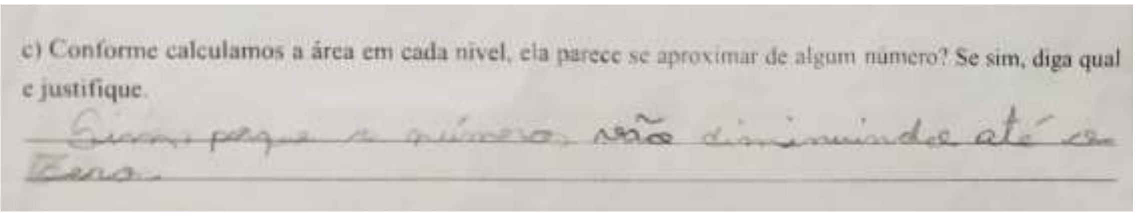
Conforme o diálogo com essa dupla, é possível perceber que foi importante apresentar a representação numérica, uma vez que apenas visualizando a forma geométrica, os alunos não conseguiram sugerir um número do qual o valor da área se aproximaria. Analisando os valores da área em cada nível no segundo *applet,* os alunos puderam formular uma conjectura, de que o valor da área iria diminuir, se aproximando de zero. Ainda, a fala de um dos alunos indica que, ao observar a figura novamente, ele pôde confirmar essa conjectura, percebendo que o número mencionado faria sentido ao pensar geometricamente também.

Borba e Villarreal (2005) ressaltam a importância da visualização na aquisição de conhecimentos matemáticos, pois ela pode contribuir de maneiras distintas de acordo com o problema apresentado. Por exemplo, pode auxiliar na criação e validação de conjecturas, contribuir para a compreensão de conhecimentos abstratos por meio da intuição ou pode ser uma possibilidade de múltiplas representações de um ente matemático. Neste caso, acredito que a visualização proporcionada pela mídia representa uma junção dessas possibilidades mencionadas.

O estudo de fractais, por si só, já pode ser um conceito abstrato para alunos do sexto ano. Analisar o que acontece com o valor da área conforme o nível aumenta também é algo que está relacionado com a ideia de limite, e com certeza também tem sua abstração. Ou seja, a visualização está, de fato, contribuindo para que os alunos tenham uma noção intuitiva sobre estes conceitos. Além disso, claramente este applet envolve múltiplas representações da área do Tapete de Sierpinski nos níveis apresentados. E, finalmente, a visualização da representação numérica proporcionou a criação de uma conjectura, e a análise da representação geométrica proporcionou sua validação, também de forma visual.

Analisando as respostas dos alunos, também há duplas que parecem ter se baseado principalmente na representação algébrica ou na representação numérica. Por exemplo, nas imagens a seguir, temos a Dupla 11 que menciona que “os números vão diminuindo” e a Dupla 1 afirma que “a figura vai diminuindo”, o que ilustra essa ideia.

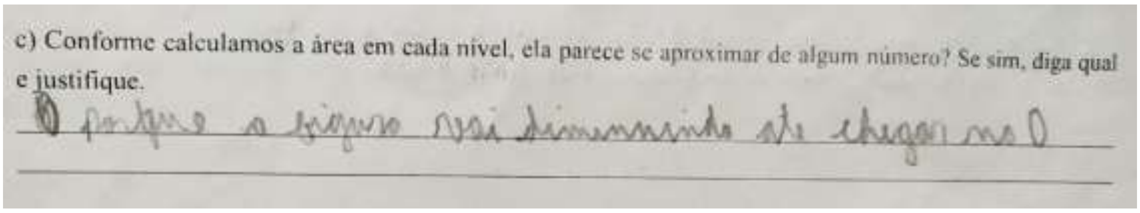
Figura 41 - Resposta da Dupla 11.


c) Conforme calculamos a área em cada nível, ela parece se aproximar de algum número? Se sim, diga qual e justifique.

Sim, porque os números vão diminuindo até o Zero.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Figura 42 - Resposta da Dupla 1.


c) Conforme calculamos a área em cada nível, ela parece se aproximar de algum número? Se sim, diga qual e justifique.

0 porque a figura vai diminuindo até chegar no 0

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Finalmente, no último item desta tarefa, questionei os alunos perguntando se eles pensavam que o valor da área chegaria neste número em algum momento. Nas respostas obtidas, apenas três duplas disseram que sim. Acredito que a ideia envolvida neste item seja uma das mais abstratas para os alunos, mas ao interagir com as duplas, surgiram algumas reflexões bem interessantes. Por exemplo, a seguir apresento o diálogo com a Dupla 10, a qual pedi que os alunos pensassem a respeito para depois discutirmos.

Dupla 10 (primeiro integrante): *Sora, já pensamos na última questão.*
Professora: *E aí meninos, o que vocês acham?*
Dupla 10 (primeiro integrante): *Achamos que vai chegar no zero sim, pois os números estão diminuindo aqui óh (aluno mostrou os valores da área no nível 4, no segundo applet).*
Professora: *Então o fractal vai desaparecer?*
Dupla 10 (segundo integrante): *Não!*
Professora: *Tá, mas se a área for zero quer dizer que não tem superfície, ou seja, a figura vai sumir...*
Dupla 10 (segundo integrante): *Não, ela não pode sumir. Tu disse pra gente pra gente que dava pra retirar os quadrados quantas vezes a gente quisesse... E disse que na matemática esse processo é infinito. Então a figura não vai sumir totalmente.*
Dupla 10 (primeiro integrante): *É verdade. Tem que sobrar alguma coisa na figura pra poder continuar tirando os quadrados. Não pode chegar no zero, só chega perto.*
Professora: *Ok, então anotem isso.*

Novamente, o questionamento feito por mim acabou gerando uma nova reflexão, de forma que a oralidade foi de extrema importância neste coletivo. Ao observar os números, apenas, os alunos perceberam que os valores convergiam para zero, podendo chegar neste número. Entretanto, não usaram a representação geométrica para validar essa hipótese, como fizeram na questão anterior. O pensamento dos alunos acabou se limitando apenas à representação numérica exibida pela mídia, e eles não usaram a possibilidade de analisar a questão do ponto de vista geométrico também. Quando eu fiz o questionamento, os alunos finalmente tiveram essa percepção de relacionar as duas representações, de pensar na representação geométrica de uma área com valor zero.

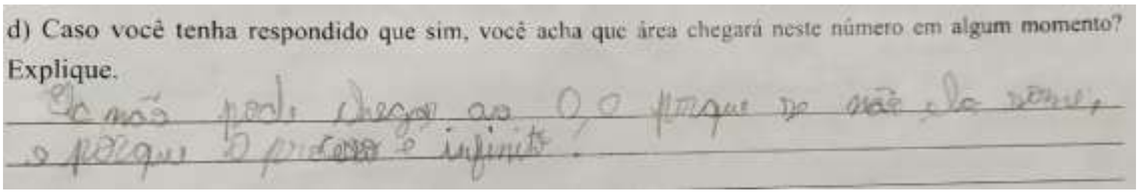
Na verdade, o pensamento dos alunos ao apresentar as respostas esteve o tempo todo condicionado à mídia utilizada, no caso o software GeoGebra. Quando apresentaram a primeira resposta, o pensamento estava “condicionado de forma limitada”, pois os alunos focaram apenas na representação numérica que estava sendo exibida. No entanto, quando fiz o questionamento, houve uma reorganização no pensamento dos alunos, e eles passaram a levar em consideração também a representação geométrica. Neste caso, a representação geométrica oferecida pela mídia acabou moldando a “nova resposta” dada pelos alunos.

Também é interessante refletir no quanto a oralidade influenciou nessa reorganização de pensamento com relação à segunda resposta. Os alunos acabaram fazendo algum tipo de assimilação ou criando alguma imagem mental que permitiu que eles memorizassem essa colocação feita por mim no primeiro dia da intervenção pedagógica. Sempre reforcei que o procedimento de retirada deveria ser visto como algo que poderíamos fazer quantas vezes quiséssemos. No entanto, mencionei apenas no primeiro dia que este processo é infinito do ponto de vista matemático, ou seja, que o fractal seria o resultado de infinitas repetições dessa construção. Também, reforcei que não seria possível nós repetirmos esse processo infinitamente.

Nesse caso, as representações exibidas pela mídia, juntamente com a oralidade referente à minha colocação no primeiro encontro, possibilitaram um debate interessante no construto *seres-humanos-com-mídias.* Os alunos descartaram a hipótese de que a área chegaria a zero quando perceberam que o fractal deixaria de existir e, consequentemente, seria impossível repetir o processo de retirada quantas vezes quiséssemos. Assim, os participantes deste coletivo se envolveram numa discussão relacionada com a ideia de infinito que, novamente, é uma ideia bastante abstrata e pareceu algo plausível aos alunos.

Ao longo da tarefa, acabei fazendo intervenções em outras duplas, e tendo um diálogo semelhante em mais uma delas. Assim, mais uma dupla disse que, se a figura sumisse, o processo não poderia mais ser repetido, e um dos alunos mencionou a minha fala sobre “o fractal ser resultado de um processo infinito do ponto de vista matemático”. A seguir, apresento a resposta desta dupla no material impresso.

Figura 43 - Resposta da Dupla 11.



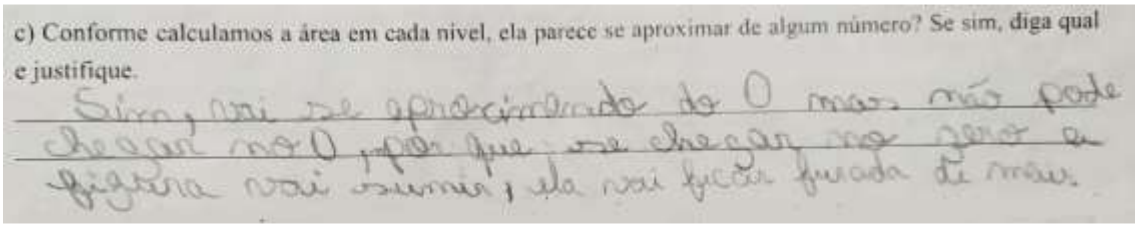
d) Caso você tenha respondido que sim, você acha que área chegará neste número em algum momento? Explique.

Ela não pode chegar ao 0 porque se não ela some, e porque o processo é infinito.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Com outras duplas que conversei, também recebi esta resposta que a figura não poderia sumir, e então a área não poderia ser zero. No entanto, os alunos não conseguiram apresentar um argumento. Uma dessas duplas, ao responder no material, apresentou a resposta da figura a seguir. No entanto, não é possível saber o que exatamente quiseram dizer com *"a figura vai ficar furada demais"*.

Figura 44 - Resposta da Dupla 7.



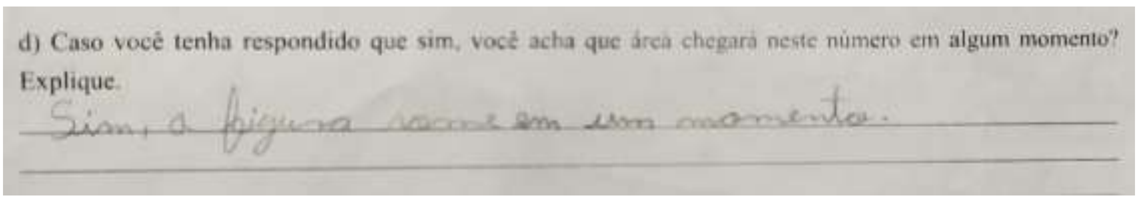
c) Conforme calculamos a área em cada nível, ela parece se aproximar de algum número? Se sim, diga qual e justifique.

Sim, vai se aproximando do 0 mas não pode chegar no 0, porque se chegar no zero a figura vai sumir, ela vai ficar furada de mais.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Em uma outra Dupla, quando realizei o questionamento relacionado com o "sumiço da figura", os alunos responderam que sim, que ia chegar um momento em que a figura sumiria. Questionei se isso poderia acontecer, e a dupla novamente respondeu: "Sim, pois a gente vai tirando os quadrados e não vai sobrar nada". A seguir está a resposta apresentada pela dupla.

Figura 45 - Resposta da Dupla 11.



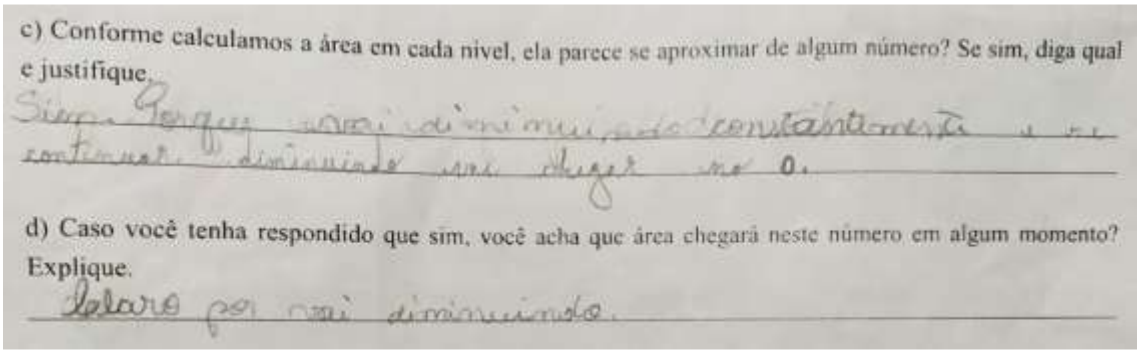
d) Caso você tenha respondido que sim, você acha que área chegará neste número em algum momento? Explique.

Sim, a figura some em um momento.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Sobre as outras duas duplas que mencionaram que a área chegaria no número da questão anterior, não interagi com esses alunos e não é possível afirmar como chegaram nessa conclusão ou de que forma usaram o recurso tecnológico nesse processo. A Dupla 8 respondeu que chegaria no zero, já que o valor da área vai diminuindo, mas não sei se a dupla chegou a refletir sobre a implicação geométrica disso. Já a Dupla 6, que respondeu que a área se aproximaria do número 0,08 (resultado da área no nível 2) na questão anterior, não justificou sua resposta e, por isso, não é possível saber qual foi o raciocínio utilizado.

Figura 46 - Respostas da Dupla 8.


c) Conforme calculamos a área em cada nivel, ela parece se aproximar de algum número? Se sim, diga qual e justifique.

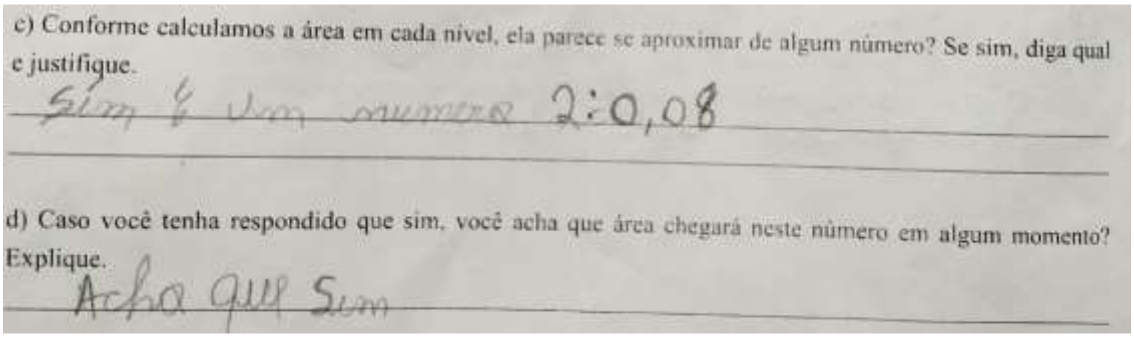
Sim. Porque vai diminuindo constantemente e se continuar diminuindo vai chegar no 0.

d) Caso você tenha respondido que sim, você acha que área chegará neste número em algum momento? Explique.

Claro pois vai diminuindo.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Figura 47 - Respostas da Dupla 6.


c) Conforme calculamos a área em cada nivel, ela parece se aproximar de algum número? Se sim, diga qual e justifique.

Sim é um numero 2: 0,08

d) Caso você tenha respondido que sim, você acha que área chegará neste número em algum momento? Explique.

Acho que Sim

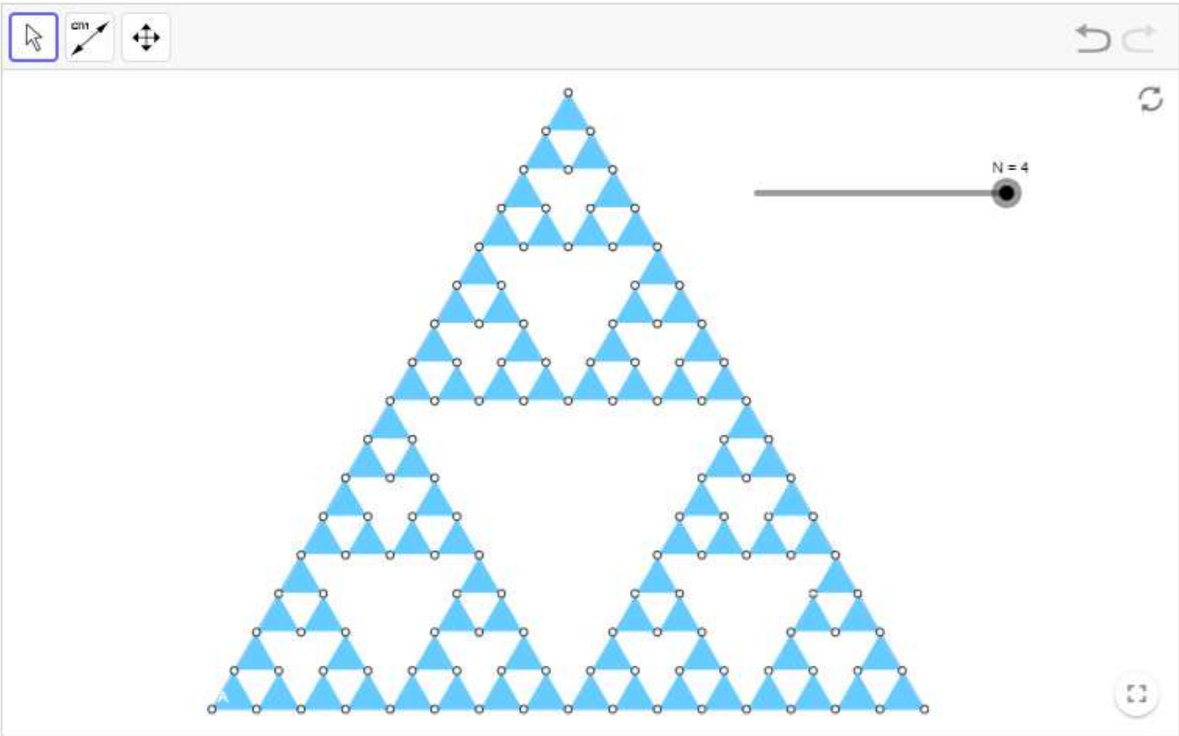
Fonte: Material elaborado pelos alunos.

4. 4 QUARTO MOMENTO – EXPLORAÇÃO DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI NO GEOGEBRA

No quarto e último momento, os alunos retornaram ao laboratório de informática para realizar as tarefas envolvendo o Triângulo de Sierpinski. Para tanto, as duplas manipularam dois *applets* envolvendo este fractal, calculando o perímetro nos níveis solicitados e respondendo alguns questionamentos acerca de suas características ao longo dos níveis. A seguir, descrevo cada um dos *applets* individualmente.

O primeiro *applet* manipulado pelos alunos consiste de uma construção do Triângulo de Sierpinski até o nível 4, sendo que deixei visível a ferramenta *Distância, comprimento ou perímetro* para que os alunos pudessem medir o comprimento dos lados dos triângulos por meio da distância entre seus vértices ou calcular diretamente o perímetro de cada triângulo. Além disso, as ferramentas *Ampliar* e *Reduzir* também ficaram disponíveis, para que os alunos pudessem dar *zoom* no fractal quando necessário. Também, o controle deslizante possibilita a exploração do nível 0 até o nível 4 deste fractal.

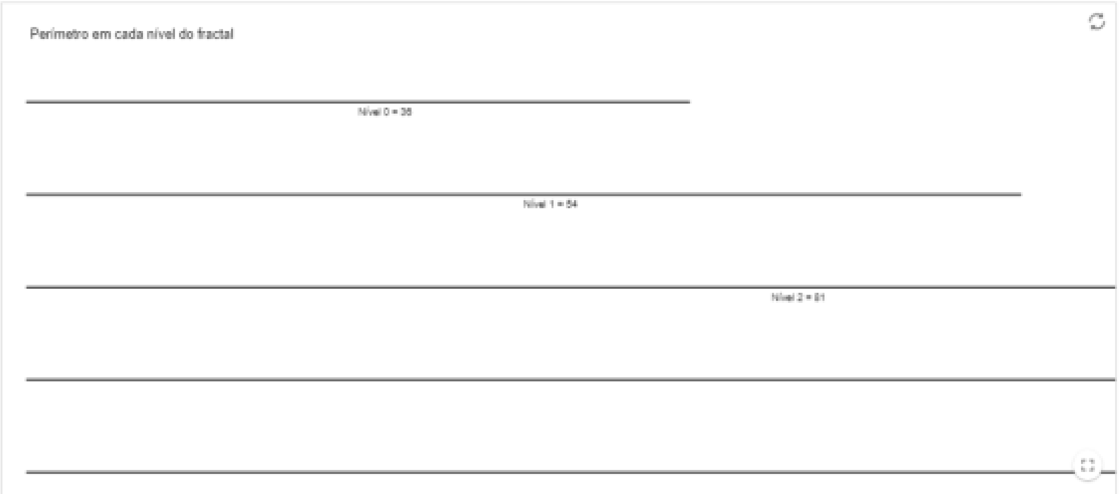
Figura 48 - Applet do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Elaborado pela autora no GeoGebra.

O segundo *applet* contém segmentos de reta que representam o comprimento do fractal em cada um dos níveis (até o nível 4), além de exibir o número que representa a medida de cada um destes segmentos. Neste caso, não há controle deslizante, mas os alunos podem arrastar a tela para visualizar todos os segmentos. Desta forma, o objetivo desse *applet* é contribuir na interpretação geométrica do perímetro, por meio da visualização. Reforço que os alunos usaram este *applet* somente nas tarefas finais.

Figura 49 - Segmentos representando o perímetro do Tapete de Sierpinski.



Fonte: Elaborado pela autora no GeoGebra.

Inicialmente, expliquei aos alunos que as atividades seriam relacionadas ao perímetro do Triângulo de Sierpinski, relembrando o conceito de perímetro. Na sequência, expliquei as questões de maneira geral, e passei o *link* do primeiro *applet* aos alunos, uma vez que os segundo *applet* só estaria presente nas últimas atividades. Destaco que, nesta aula, a Dupla 1 estava com um gravador de áudio para um trabalho que eu estava realizando da disciplina de Tópicos Especiais em Educação Matemática: Tecnologias Digitais e Teoria da Atividade. Portanto, existem trechos de conversas dessa dupla mesmo quando eu não estava presente.

Assim como na atividade anterior, os alunos receberam material impresso contendo questionamentos sobre o fractal, com características que deveriam ser observadas. No primeiro questionamento, os alunos deveriam refletir sobre a posição dos pontos que formam os vértices dos triângulos retirados. Ou seja, perguntei a eles se existia alguma regra ou se os pontos poderiam ser colocados em algum lugar. Expliquei aos alunos que havia uma ferramenta para medir distâncias disponível no *applet*, e que eles deveriam fazer uso deste recurso para tirar suas conclusões e elaborar as suas respostas. Na sequência, trago a transcrição do meu diálogo com uma das duplas acerca dessa questão. Na sequência, também trago um trecho da conversa entre esses alunos quando fui atender outra dupla.

Dupla 1 (primeiro integrante): Sora, aqui não pode colocar o ponto em qualquer lugar né? Tem que colocar na metade para que a imagem fique *"geometricamente igual", senão os triângulos vão ficar diferentes.*

Professora: *Usando a construção, como vocês podem ter certeza disso? Podem pegar a ferramenta distância e medir a distância entre os pontos pra ver se vai ser a mesma distância desse ponto até esse, e daquele ponto até este. Tentem fazer. Quais são as distâncias?*

Dupla 1 (primeiro integrante): *Daqui até aqui é 6 cm, e daqui até o outro ponto também.*

Professora: *Então, conforme tu havia dito, o ponto está no meio. Se não fosse no meio, a construção não ia ficar com todos os triângulos iguais.*

Dupla 1 (primeiro integrante): *Então não iam ficar geometricamente iguais daí?*

Professora: *Talvez os triângulos não iam ficar iguais, dependendo do lugar do ponto. Eles não seriam congruentes. Essa é a palavra que usamos para dizer que duas ou mais formas geométricas são iguais.*

(Neste momento fui olhar o que a dupla ao lado estava fazendo e os alunos continuaram conversando)

Dupla 1 (primeiro integrante): *Ah tah, então não seriam congruentes. A resposta vai ficar assim então: Não podemos colocar em qualquer lugar, por que não irá ficar...*

Dupla 1 (segundo integrante): *Não irá ficar proporcional.*

Dupla 1 (segundo integrante): *Como é a palavra que a sora disse mesmo? Aquela que usa quando são iguais?*

Professora: *Congruente!*

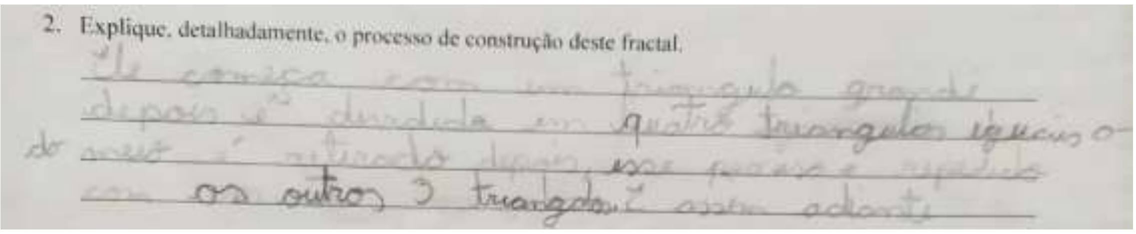
Dupla 1 (primeiro integrante): *Por que não irá ficar proporcional e nem congruente.*

A partir do questionamento do aluno, é possível perceber que a dupla formulou a hipótese de que "o ponto deveria ser colocado na metade" apenas observando a representação visual exibida pelo software, no entanto sem ter a certeza da veracidade da afirmação. Ao fazer uso do recurso disponível na mídia, os alunos puderam medir a distância deste ponto até cada um dos extremos do segmento e validar essa hipótese. Além disso, a interação entre esse coletivo composto por mídias, alunos e professor contribuiu para a aquisição do vocabulário geométrico, uma vez que a palavra “congruente” não costuma ser utilizada nesta etapa do Ensino Fundamental (SANTOS; NACARATO, 2014).

Quanto às demais duplas, todas perceberam que havia uma regra para a construção do ponto, respondendo que ele deveria ser colocado na metade. Entretanto, vários alunos estavam tentando “adivinhar” a resposta apenas olhando o desenho, sem validar essa hipótese. Várias duplas com as quais interagi perceberam que o ponto estava no meio do segmento, mas não haviam confirmado essa ideia. Ou seja, por várias vezes tive que sugerir a utilização do recurso disponível na mídia para que os alunos pudessem confirmar a suposição.

Na segunda questão, os alunos deveriam explicar o processo de construção do Triângulo de Sierpinski. De forma geral, os alunos parecem ter compreendido a ideia envolvida, mas nem todos explicaram o processo detalhadamente. Por exemplo, a Dupla 7 respondeu que o triângulo precisa ser divido em quatro partes iguais, mas não explicou como proceder para realizar essa divisão.

Figura 50 - Resposta da Dupla 7.



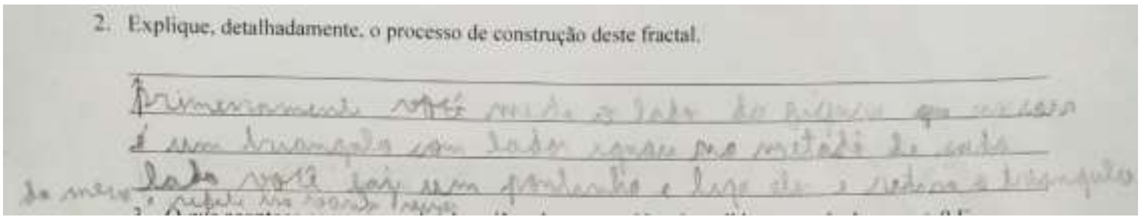
2. Explique, detalhadamente, o processo de construção deste fractal.

Ele começa com um triângulo grande depois é dividido em quatro triângulos iguais o do meio é retirado depois esse processo é repetido com os outros 3 triângulos é assim adiante

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

A Dupla 1 explicou o procedimento passo a passo, explicando que o lado do triângulo inicial deveria ser medido e então o ponto deveria ser colocado exatamente no meio desse segmento. É possível que a visualização possibilitada pelo GeoGebra, bem como os procedimentos realizados na questão anterior tenham influenciado a resposta dessa dupla. Ou seja, ao medir as distâncias usando o recurso disponível na mídia, os alunos podem ter compreendido que seria necessário medir o lado do triângulo, mesmo no papel, para encontrar seu ponto médio.

Figura 51 - Resposta da Dupla 1.


2. Explique, detalhadamente, o processo de construção deste fractal.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Ainda no segundo questionamento, surgiu uma discussão interessante com os alunos de uma dupla. Quando os alunos tentaram explicar o processo de construção por meio da escrita, surgiu a dúvida se havia necessidade de medir os três lados do triângulo para descobrir o ponto médio, ou se usando apenas um desses lados já seria suficiente. Assim, os alunos ficaram em dúvida se o triângulo inicial precisaria, necessariamente, ser um triângulo equilátero. A seguir, transcrevo uma parte do diálogo com essa dupla:

Dupla 11 (primeiro integrante): *Sora, aqui na questão 2... Medimos em todos os lados a metade. Daí em todos os lados do triângulo tu vai botar o pontinho no meio, e daí tu liga esses pontos, formando um triângulo. Daí tira o triângulo que foi formado. Daí já está pronta a primeira parte do fractal. Depois repete isso várias vezes nos outros triângulos*

Dupla 11 (segundo integrante): *É, então teria que medir os três lados, porque depende do tipo de triângulo né? Por que tem uns que os lados são todos diferentes, tem esse que os lados são todos iguais e aquele que um lado só é diferente.*

Dupla 11 (primeiro integrante): *Mas não teria que ser o que os lados são iguais pra dar certo?*

Dupla 11 (segundo integrante): *Hein, Sora... Dá pra fazer o fractal se o triângulos não tiver os lados iguais?*

Professora: *Dá sim. Os que eu mostrei pra vocês tinham os lados iguais. Mas pode ser feito com lados diferentes também. Vou mostrar aqui no Google.*

(Pesquisei o Tapete de Sierpinski quando o triângulo não é equilátero).

Dupla 11 (segundo integrante): *Viu. Eu disse que dava. É só medir nos três lados e daí ligar os pontos, do mesmo jeito.*

Professora: *Isso mesmo.*

Ao que parece, a necessidade de escrita do processo fez com que os alunos pensassem nos passos da construção de uma maneira mais aprofundada, de tal forma que os alunos se questionaram sobre a obrigatoriedade do triângulo ser equilátero. Assim, a escrita inspirou que o coletivo de *seres-humanos-com-mídias* realizasse uma discussão, de modo que um dos alunos formulou uma conjectura partindo do caso particular apresentado por mim e buscando generalizar para outros tipos de triângulo. Como o *applet* que estava sendo utilizado não permitia a possibilidade de experimentar essa hipótese, os alunos me chamaram para sanar a dúvida.

Borba e Villarreal (2005) afirmam que a representação visual, obtida com o auxílio de mídias digitais, auxilia na compreensão de conceitos mais abstratos e pode ser uma alternativa para alcançar um nível mais elevado de abstração, ou mesmo realizar generalizações. Nesse caso, a visualização aliada com a escrita e oralidade inspiraram a reflexão sobre a possibilidade de construir o fractal partindo de um triângulo diferente.

Na terceira questão, foi feita a seguinte pergunta: *“O que acontece com o tamanho dos triângulos construídos à medida que o nível aumenta? E consequentemente, o que acontece com o perímetro dos triângulos obtidos a cada nível?”.* Nas suas respostas, todos os alunos responderam que os triângulos construídos diminuem, porém nem todos responderam a segunda pergunta. Dentre os que responderam, todos disseram que o perímetro dos triângulos que vão sendo construídos diminui.

Nesta questão, uma das duplas que estavam próximas à Dupla 1 ficou com dúvidas em relação ao questionamento, pois não compreendeu se o perímetro solicitado era de cada triângulo ou do fractal inteiro. Então, a aluna pediu auxílio para os integrantes dessa dupla, que tentaram explicar a questão. Deste diálogo, destaquei o seguinte trecho:

Colega de outra Dupla: *Ali na três, tem que colocar do fractal inteiro ou só de uma parte?*
Dupla 1 (primeiro integrante): *É do fractal... Esse fractal não está todo completo, tem vários níveis. Mas olha só, aqui não está igual aqui? Então, entendeu?! Aqui*

*também é igual aqui. (*Apontando para as partes do fractal na tela do computador). *Cada nível tem seu fractal... É como se fosse outro fractal.*
Dupla 1 (segundo integrante): *Na verdade o fractal é esse triângulo, mas em cada nível vai aumentando a quantidade de fractais nele.*

Quando os alunos afirmam que "*cada nível tem seu fractal"*, ou que *"em cada nível vai aumentando a quantidade de fractais nele"*, os alunos estão se referindo à ideia de autossimilaridade. Ao apontar para a tela do computador e mostrar as regiões que eram semelhantes, o aluno estava usando a visualização proporcionada pela mídia para mostrar para a colega que a figura maior é formada por figuras iguais em cada uma de suas partes. Conforme Borba, Silva e Gadanidis (2014), a visualização "oferece meios para que conexões possam acontecer. Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática". Nessa situação, em particular, a visualização contribuiu para que a dupla pudesse realizar uma conexão entre a representação geométrica do fractal e a definição de fractal apresentada no primeiro dia da intervenção.

Ainda no terceiro questionamento, ao pensar sobre o tamanho dos triângulos e seu perímetro em cada nível, uma dupla foi além, e acabou formulando hipóteses também sobre o perímetro do fractal. Na sequência, estão as falas dos alunos.

Dupla 12 (primeiro integrante): *O tamanho dos triângulos diminui e o perímetro do fractal aumenta, porque quanto mais triângulos, mais perímetro vai ter que ser medido. É isso, Sora?*
Dupla 11 (segundo integrante): *Mas é pra dizer se aumenta a quantidade ou o tamanho?*
Professora: *Tamanho. Quero saber o que acontece com o tamanho dos triângulos que aparecem.*
Dupla 11 (segundo integrante): *E o perímetro aumenta? Porque cada vez mais perímetros vamos ter que medir... Não é? Tipo assim, aqui tinha só esse perímetro antes, e agora tem esse, esse, esse...*

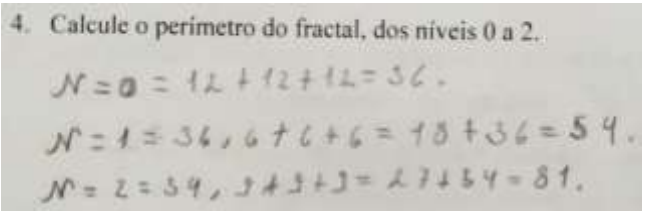
***Professora:** Sim... Mas olha só, o tamanho dos triângulos construídos vai diminuindo, e o perímetro de cada um sozinho diminui. O perímetro do fractal todo aumenta, que é o que tu me falou. Agora expliquem isso com suas palavras....*

Por meio da visualização e da dinamicidade apresentada pela mídia, os alunos perceberam que a cada nível existem segmentos surgindo e, por isso, mais medidas a serem somadas. Ao *pensar-com-GeoGebra*, os estudantes puderam comparar os níveis e ter a percepção dos segmentos que estavam sendo acrescentados quando os triângulos eram retirados.

Além disso, os alunos chegaram nessa conclusão somente por meio da análise da representação visual do fractal, pois não haviam valores numéricos na tela, e nenhum cálculo havia sido realizado até o momento. Também, os alunos ainda não estavam fazendo uso do segundo *applet.* Ressalto que os alunos ainda não haviam recebido a segunda parte do material impresso, e por isso não sabiam que havia um questionamento sobre isso posteriormente.

No quarto questionamento, os alunos deveriam calcular o perímetro do fractal do nível 0 até o nível 2. Caso necessário, os alunos poderiam usar a ferramenta *Comprimento* para medir os segmentos relativos aos lados do triângulo em cada nível. Apenas uma das duplas não acertou o cálculo. Sobre as duplas que acertaram, a maioria dos alunos usou o processo recursivo, sempre adicionando o perímetro dos triângulos retirados com o resultado obtido no nível anterior. Essa ideia pode ser percebida no cálculo realizado pela Dupla 6, conforme a imagem a seguir.

Figura 52 - Resposta da Dupla 6.


4. Calcule o perímetro do fractal, dos níveis 0 a 2.

N = 0 = 12 + 12 + 12 = 36.

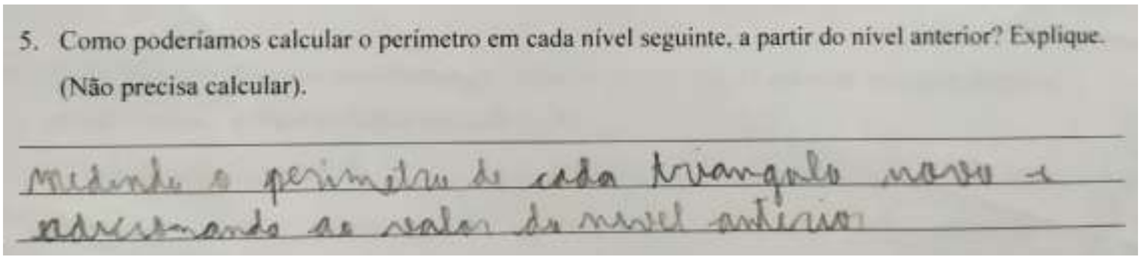
N = 1 = 36, 6 + 6 + 6 = 18 + 36 = 54.

N = 2 = 54, 3 + 3 + 3 = 27 + 54 = 81.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Inspirados pelo cálculo da questão anterior, no item seguinte os alunos deveriam explicar como poderíamos fazer para calcular o perímetro de cada nível a partir do anterior. Novamente, é possível perceber que os alunos utilizaram a ideia de recursão anteriormente mencionada, conforme pode ser percebido nas respostas da Dupla 1 e da Dupla 6. No entanto, todas as duplas tiveram dificuldades relacionadas com o vocabulário geométrico, pois responderam que *“somaram o resultado do nível anterior com o perímetro dos triângulos que foram aparecendo”,* mas na verdade foi com o perímetro dos triângulos que foram retirados.

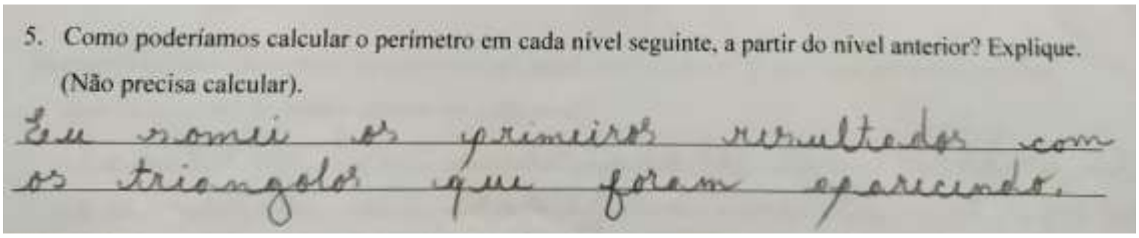
Figura 53 - Resposta da Dupla 1.


5. Como poderíamos calcular o perímetro em cada nível seguinte, a partir do nível anterior? Explique. (Não precisa calcular).

Medindo o perímetro de cada triangulo novo e acrescentando ao valor do nivel anterior

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Figura 54 - Resposta da Dupla 6.

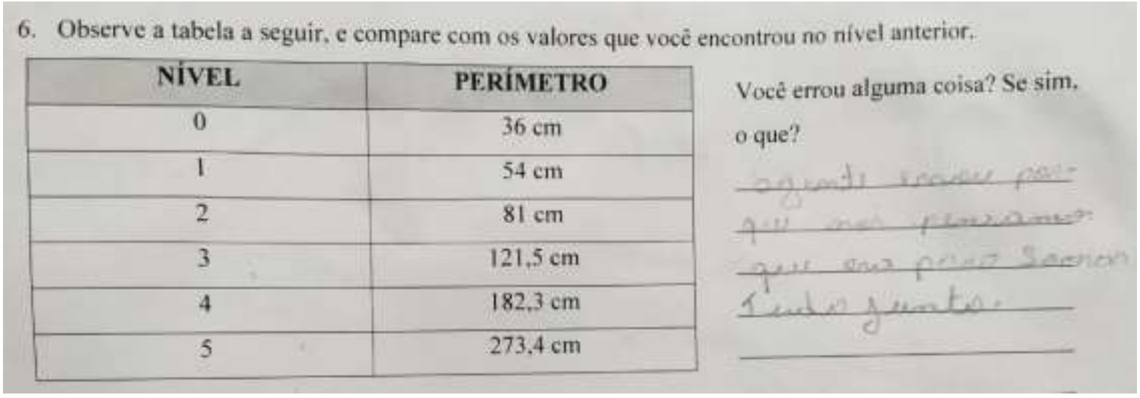

5. Como poderíamos calcular o perímetro em cada nível seguinte, a partir do nível anterior? Explique. (Não precisa calcular).

Eu somei os primeiros resultados com os triangolos que foram aparecendo.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Na sequência, os alunos receberam a segunda parte do material impresso, a qual continha o resultado do perímetro do fractal até o nível 5. Dessa forma, solicitei aos alunos que conferissem os resultados obtidos e, caso encontrassem algum erro, fizessem uma análise do processo. Como já mencionei, apenas uma das duplas afirmou ter errado a questão, pois os integrantes da dupla pensaram que deveriam ser somados os resultados do nível zero 0 ao nível 2.

Figura 55 - Resposta da Dupla 10.



6. Observe a tabela a seguir, e compare com os valores que você encontrou no nível anterior.

NÍVEL	PERÍMETRO
0	36 cm
1	54 cm
2	81 cm
3	121,5 cm
4	182,3 cm
5	273,4 cm

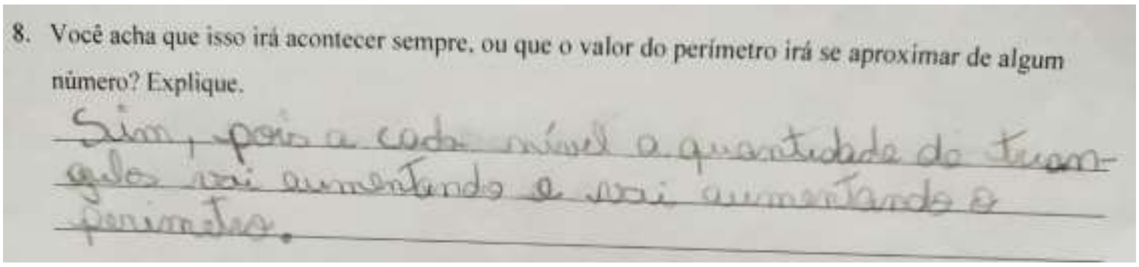
Você errou alguma coisa? Se sim, o que?

a gente errou por que nós pensamos que era para somar tudo junto.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Finalmente, na questão sete, os alunos deveriam analisar o que acontece com o perímetro do fractal conforme o nível aumenta, a partir da análise da tabela envolvendo o perímetro até o nível 5 (apresentada na questão anterior) e dos dois applets. Ou seja, o segundo applet foi utilizado nessa questão como outra forma de representação visual que poderia auxiliar os alunos na compreensão do crescimento do perímetro ao longo dos níveis. Todas as duplas, sem exceção, responderam que o perímetro aumenta, pois existem mais medidas para serem somadas. A seguir, a resposta de uma das duplas para este questionamento.

Figura 56 - Resposta da Dupla 7.



8. Você acha que isso irá acontecer sempre, ou que o valor do perímetro irá se aproximar de algum número? Explique.

Sim, pois a cada nível a quantidade de triângulos vai aumentando e vai aumentando o perímetro.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Na sequência, foi perguntado aos alunos se o perímetro irá aumentar sempre, ou se acabará se aproximando de algum número. Para responder este questionamento, duas duplas usaram o *zoom* para verificar sua conjectura de que o perímetro cresce sem se aproximar de nenhum valor. A seguir transcrevo parte do diálogo com uma dessas duplas.

Dupla 1 (primeiro integrante): *Sora, a gente tá com dúvida na nove.*

Professora: Qual é a dúvida?

Dupla 1 (primeiro integrante): *A gente sabe quando o nível aumenta, o perímetro aumenta porque tem mais medidas pra somar.*

Dupla 1 (segundo integrante): *Daí a gente ficou pensando, se ia ficar sempre aumentando esse número ou não. Daí a gente não sabia como ter certeza.*

Professora: E aí, no que pensaram?

Dupla 1 (primeiro integrante): *A gente pegou o zoom e foi aproximando os triângulos. Daí a gente percebeu que dá pra ir aumentando enquanto a gente quiser, sempre vai ter triângulos saindo e daí sempre tem mais medidas pra ir somando no perímetro.*

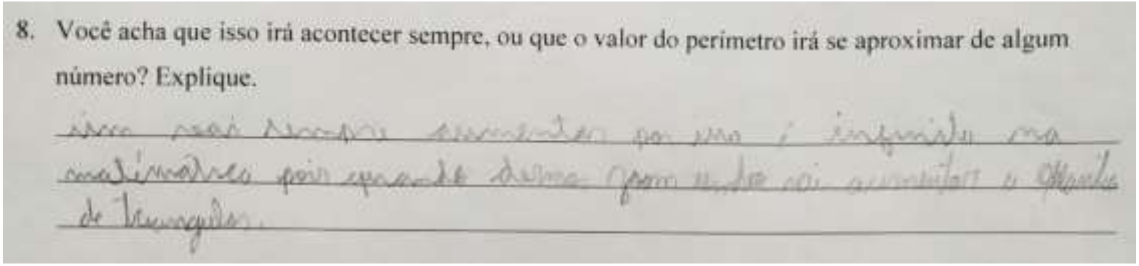
Dupla 1 (segundo integrante): *É. Se a gente for dando zoom sempre vai aumentar a quantia de triângulos. E sempre vai dar pra aumentar e ir somando enquanto a gente quiser, porque o processo é infinito na matemática né.*

Professora: *Isso aí! Agora anotem as ideias de vocês!*

Desta forma, ao utilizar o *zoom* associado à ideia de que o processo de recursão é infinito, os alunos perceberam que sempre seriam retirados mais triângulos e que, conforme ampliassem a imagem, seria possível continuar percebendo esse processo. Ou seja, a partir no nível 1, o perímetro em um nível sempre será maior do que o perímetro no nível anterior.

Neste momento, é possível identificar uma relação de moldagem recíproca entre o pensamento dos alunos e a tecnologia digital. Os alunos utilizaram os recursos disponíveis no software a seu favor, de forma que foi possível validar a conjectura em um cenário de experimentação, por meio da visualização. Além disso, o *feedback* dado pela mídia ao ampliar a imagem moldou o pensamento dos alunos de forma que eles perceberam que seria possível continuar fazendo isso o quanto quisessem, que sempre teria triângulos sendo retirados. A seguir, está a resposta da Dupla 1 no material impresso.

Figura 57 - Resposta da Dupla 1.

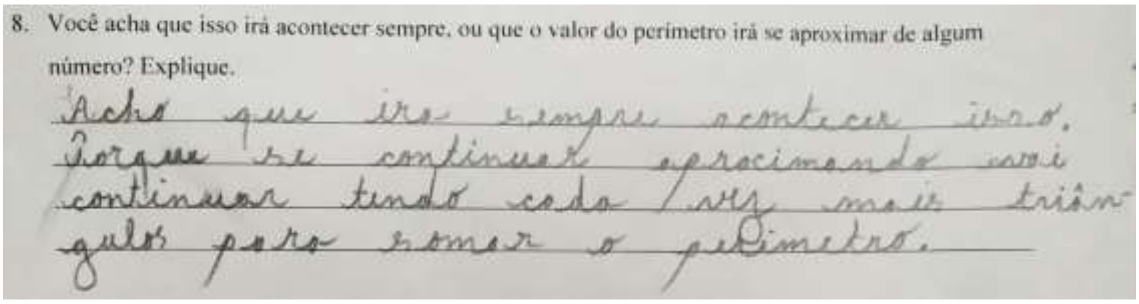

8. Você acha que isso irá acontecer sempre, ou que o valor do perímetro irá se aproximar de algum número? Explique.

isso vai sempre aumentar pois isso é infinito na matemática pois quando [illegible] [illegible] vai aumentar o [illegible] de triângulos.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Ao que parece, os integrantes da Dupla 6 tiveram a mesma percepção ao ampliar a figura, percebendo que “se continuar aproximando, vai continuar tendo cada vez mais triângulos para somar no perímetro”. Assim como em outras situações durante a intervenção, o uso do zoom contribuiu para que os alunos compreendessem que o processo de recursão presente na construção do fractal pode ser repetido muitas vezes, de tal forma que a ideia de infinito pareceu plausível para os alunos. A seguir está a resposta da Dupla 6 para o questionamento.

Figura 58 - Resposta da Dupla 6.

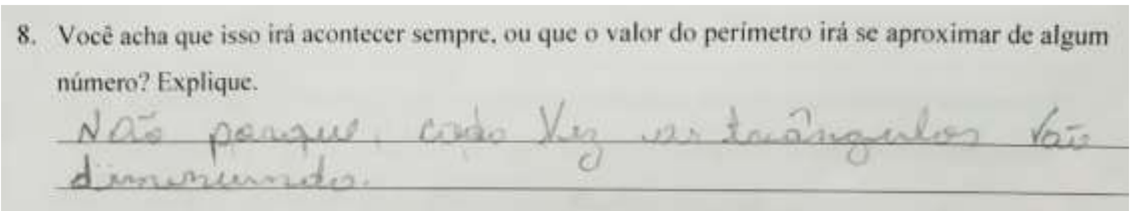

8. Você acha que isso irá acontecer sempre, ou que o valor do perímetro irá se aproximar de algum número? Explique.

Acho que irá sempre acontecer isso. Porque se continuar aprocimando vai continuar tendo cada vez mais triângulos para somar o perímetro.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

Dentre as duplas, apenas uma pensou que este processo não vai acontecer sempre, mencionando que “cada vez os triângulos vão diminuindo”. Entretanto, como não interagi com esta dupla, não é possível afirmar qual foi o raciocínio dos alunos.

Figura 59 - Resposta da Dupla 9.


8. Você acha que isso irá acontecer sempre, ou que o valor do perímetro irá se aproximar de algum número? Explique.

Não porque cada Vez os triângulos vão diminuindo.

Fonte: Material elaborado pelos alunos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme mencionado ao longo deste trabalho, o objetivo dessa pesquisa foi responder a seguinte pergunta: *Quais as potencialidades do GeoGebra para a compreensão de conceitos geométricos a partir da exploração de fractais em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental?* A fim de encontrar possíveis respostas, apresento, neste capítulo, uma síntese das principais discussões realizadas ao longo dos quatro momentos de análise de dados. Em particular, destaco o papel da mídia ao longo da intervenção pedagógica.

Ao introduzir a ideia de fractal, no primeiro momento, as mídias digitais envolvidas foram protagonistas para a construção de significados. O *PowerPoint* permitiu destacar e ampliar partes das figuras projetadas, possibilitando aos alunos identificar a autossimilaridade por meio da visualização. Além disso, por meio dessa mídia foi possível abordar exemplos da natureza que não poderiam ser levados para discussão em sala de aula, como foi o caso do relâmpago.

O software GeoGebra, em particular, auxiliou na compreensão dos passos da construção dos fractais, permitindo transitar entre os diferentes estados da construção de forma dinâmica. Conforme Basso e Gravina (2012), o dinamismo presente no sistema de representação contribui para a produção de sentidos e compreensão de conteúdos que geralmente não são trabalhados na escola. Neste caso, a visualização aliada ao dinamismo do software possibilitou a compreensão do processo de construção da Árvore Pitagórica, Tapete de Sierpinski e Triângulo de Sierpinski.

Por meio do *zoom*, foi viável explorar a ideia de que o processo de recursão em um fractal pode ser repetido quantas vezes quisermos, basta ampliar a construção. O uso da mídia tornou essa possibilidade aceitável para os alunos, o que talvez não teria acontecido com lápis e papel, uma vez que o número de níveis pareceria finito. Ainda no primeiro momento, nos deparamos com uma situação que não pôde ser resolvida apenas com a tecnologia digital, demostrando que as mídias também têm suas limitações. Apesar do software ter contribuído colocando a visualização no centro da aprendizagem, não foi suficiente para esclarecer o processo de retirada dos quadrados no Tapete de Sierpinski. Assim, diante dessa adversidade, foi necessária a utilização do material concreto.

A construção do Tapete de Sierpinski com material concreto foi importante para que os alunos pudessem compreender o processo de construção do fractal, além de contribuir para a criação de estratégias envolvendo o cálculo da área nos níveis solicitados. Mesmo não estando tão presente no terceiro momento, o software GeoGebra foi essencial para a construção dos conceitos abordados ao longo desta etapa contribuindo, novamente, com aspectos relacionados à visualização. Nesse sentido, os dois recursos utilizados (mídia e material concreto) se complementaram no processo de aprendizagem reorganizando pensamentos, por meio das especificidades de cada um.

A exploração do Tapete e do Triângulo de Sierpinski nos dois últimos momentos da análise evidenciou ainda mais o papel da mídia nessa intervenção pedagógica. Em um cenário de experimentação com tecnologia, os alunos puderam manipular as construções de forma dinâmica, comparando os níveis e moldando a mídia de acordo com suas necessidades. Por exemplo, no momento em que a dupla ficou “indo e vindo” entre dois níveis, comparando-os e identificando suas características, é possível destacar uma relação de moldagem recíproca, pois a dupla criou uma estratégia para usar essa mídia, a qual condicionou o pensamento dos alunos por meio da variação de parâmetros.

As diferentes possibilidades de representação proporcionadas pelo software, por meio de representações geométricas e numéricas, também contribuíram para que os alunos pudessem formular e verificar suas conjecturas, por meio da visualização. Assim, algo tão abstrato como analisar o que acontece com a área de um fractal à medida que o nível aumenta se tornou possível para alunos do sexto ano. Ou seja, o protagonismo da visualização por meio da mídia permitiu a abordagem de um conteúdo que geralmente não é trabalhado na escola. Destaco, também, a importância da oralidade nesse processo.

Todas as potencialidades citadas até aqui continuaram presentes no quarto momento da intervenção, entretanto, com um destaque especial para a possibilidade de ampliar a construção, ou seja, o *zoom*. Por meio deste recurso, os alunos puderam, novamente, formular e validar suas conjecturas, além de organizar seus pensamentos acerca do perímetro do Triângulo de Sierpinski. A aproximação constante da construção permitiu a compreensão da ideia de infinito relacionada ao processo, uma vez que os alunos puderam perceber que cada vez mais triângulos seriam retirados deste fractal.

Ao refletir sobre o processo de análise de dados e, principalmente, sobre as considerações até aqui mencionadas, acredito que o software GeoGebra tenha contribuído de maneira significativa para a compreensão dos conceitos geométricos envolvidos, em um cenário de experimentação com tecnologia. Dentre os recursos que auxiliaram no processo de construção de conhecimentos, destaco o dinamismo presente no software, as possibilidades de apresentar diferentes representações de um ente matemático, a oportunidade de ampliar e reduzir a construção *(zoom)* e, principalmente, sua contribuição na visualização.

Destaco que, ao inserir uma tecnologia digital na sala de aula, se faz necessário um planejamento que tenha seus objetivos alinhados à essa tecnologia, uma vez que o recurso tecnológico, sozinho, não transforma o contexto pedagógico. É necessário explorar as potencialidades oferecidas, transformando a maneira de ensinar e aprender, sem domesticar este recurso. Ou seja, a tecnologia digital deve ser usada de maneira distinta dos métodos costumeiros. Por exemplo, não adianta usar a tecnologia para projetar um texto e pedir que os alunos copiem, pois terá o mesmo resultado que o quadro teria. É necessário desafiar os alunos, estimular sua criatividade e autonomia, estimular um cenário de experimentação, pois ambos irão aprender juntos: alunos e professor.

Durante a intervenção pedagógica, procurei desafiar os alunos, e também fui desafiada por eles. Ao manipular as construções, eles fizeram vários questionamentos que eu jamais pensei que surgiriam, e que foram enriquecedores. Por exemplo, quando uma das duplas perguntou era necessário partir de um triângulo equilátero para realizar a construção do Tapete de Sierpinski, ou se poderia ser um triângulo qualquer. Essa foi uma discussão que eu não havia planejado, e sequer tinha pensado em mencionar ao longo da intervenção. Além disso, muitos questionamentos feitos pelos alunos me desafiaram no sentido de encontrar respostas que fossem convincentes, o que foi muito enriquecedor para a minha prática enquanto docente.

Destaco que os resultados obtidos foram orientados pelo objetivo geral dessa pesquisa, que consistiu em *analisar potencialidades do GeoGebra para a compreensão de conceitos geométricos a partir da exploração de fractais, especialmente os conceitos de área e perímetro, por alunos de uma turma regular do sexto ano do Ensino Fundamental.* Tal objetivo foi essencial para responder à pergunta diretriz, entretanto, destaco que objetivos diferentes poderiam ter direcionado a investigação para outros rumos, resultando em respostas diferentes.

Acredito que possam ser desenvolvidas outras pesquisas envolvendo essa temática. Conforme mencionado ao longo dessa dissertação, as propriedades presentes na Geometria Fractal permitem a abordagem de diferentes conteúdos matemáticos. Assim, podem ser realizados estudos a partir da exploração de fractais com uso de recursos tecnológicos para investigar a compreensão de outros conceitos matemáticos, não necessariamente relacionados à geometria. Além do mais, existe a possibilidade de uma pesquisa interdisciplinar, devido a aplicabilidade deste tema, conforme já mencionado.

Também, podem ser exploradas outros tipos de recurso digital e suas respectivas possibilidades, além de diferentes referenciais teóricos. Neste trabalho, o foco principal foi investigar as potencialidades da mídia durante o processo, mas também é possível realizar uma investigação voltada para o processo de aprendizagem dos alunos. Nesse caso, diferentes teorias de aprendizagem poderiam servir como referencial. Por exemplo, como mencionado na introdução deste trabalho, a Teoria da Atividade poderia ser utilizada para analisar contradições internas ou transformações expansivas entre os alunos durante a realização das tarefas.

Finalmente, além de acreditar que esta investigação possa servir como inspiração e material de apoio para futuras pesquisas na área, espero que sirva como estímulo e recurso pedagógico para colegas docentes que trabalham com o Ensino Básico. Espero que, a partir da minha experiência ou reproduzindo as tarefas utilizadas nessa pesquisa, professores se sintam encorajados para inserir as tecnologias digitais em suas práticas, bem como explorar conteúdos matemáticos que não fazem parte do currículo escolar, como é o caso da Geometria Fractal.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. A. de O. **Os Fractais na formação docente e sua prática em sala de aula.** 2006. 220f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: https://leto.pucsp.br/handle/handle/11076. Acesso em: 24 jul. 2020.

ALVES, D. C. S. **Fractais: uma ferramenta no Ensino Médio.** 2014. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2014. Disponível em: https://bit.ly/2UhSIKX. Acesso em: 24 jul. 2020.

ANTON, H; CHRIS, R. **Álgebra linear com aplicações.** Porto Alegre: Bookman, 2001.

BARBOSA, R. M. Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. **Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção matemática.** In: Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, 2002, Curitiba. Anais. Curitiba: SBPEM, SBEM, 2002. p. 135–146.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** 5 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias Digitais em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORBA, M. de C.; VILLARREAL, M. V. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.** New York, United States: Springer, 2005. doi: 10.1007/b105001

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base.** Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 02 jun. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).** Brasília: MEC, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf. Acesso em: 02 jun. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).** Brasília: MEC, 2016. Disponível em: https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-livro-didatico/item/8813-guia-pnld-2017. Acesso em: 02 jun. 2020.

FARIA, R. W. S. **Padrões fractais: contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos.** 2012. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012. Disponível em: https://bit.ly/2S2F78k. Acesso em: 24 jun. 2020.
GOLDENBERG, M. **A Arte de Pesquisar.** 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. *A* **aprendizagem da matemática em ambientes informatizados.** In: IV Congresso RIBIE, Brasilia, p. 1 – 23, 1998.

GRAVINA, M. A. **Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria.** In: VII SBIE – Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte (MG), p. 1-14, 1996.

GRAVINA, M. A.; BASSO M. V. de A. **Mídias Digitais na Educação Matemática.** In: Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para a formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraf, p. 11 – 36, 2012.

HOHENWARTER, M. **Software livre GeoGebra.** Versão: 5.0.286.0-3D. 2001. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 15 jun. 2019.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias: o novo ritmo da informação.** 8ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

KILPATRICK, J. **Fincando Estacas: Uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico.** ZETETIKÉ/UNICAMP, Faculdade de Educação, Revista do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática. v.4, n.5, jan./jun. 1996, pg.99-120.

MALTEMPI, M. V. **Educação Matemática e tecnologías digitais: Reflexões sobre prática e formação docente.** In: Acta Scientiae. Canoas, v. 10, n.1, p 59-67, jan/jun. 2008

MINELI, J. de P. **Fractais: generalização de padrões no ensino fundamental.** 2012. 88 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/10920. Acesso em: 24 jun. 2020.

MINGORANCI, S. **A Geometria Fractal aliada à contextualização, protagonismo juvenil e tecnologias como proposta de melhoria no processo ensino/aprendizagem da matemática na Educação Básica.** 2014. 121 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagos, 2014. Disponível em: https://bit.ly/3eWXs0A. Acesso em: 20 jul. 2020.

MOREIRA, R. de L. **FRACTAIS.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Fundação Universidade Federal do ABC, Santo André, 2013.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. **Práticas de leitura e escrita em Educação Matemática: tendências e perspectivas a partir do Seminário em Educação**

Matemática no Cole. In: Educação Matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidades. Campinas: Mercado de Letras, 2009. p. 25-46.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores.** São Carlos: Edufscar, 2003

PADILHA, T. A. F. **Geometria Fractal: Uma proposta de Sequência Didática para o ensino de Progressões Geométricas.** 2012. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas). Universidade do Vale do Taquari, Lajeado, 2012. Disponível em: univates.br/bdu/handle/10737/287. Acesso em: 15 jun. 2020.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências.** Zetetiké: Cempem/FE/UNICAMP, Campinas, SP, ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

REIS, J. N. C. **Fractais no Ensino Médio: Da observação de Padrões da Natureza ao uso do Geogebra**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2014. Disponível em: https://bityli.com/ZeJCP. Acesso em: 18 jul. 2020.

SANTOS, C. A. dos.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em Geometria na Educação Básica.** Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

SOUZA, C. **Geometria Fractal e aplicações no Ensino Médio.** 2014. 74 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade de Brasília, Brasília, 2014. Disponível em: https://bit.ly/3dRtueb. Acesso em: 20 jun. 2020.

SOUZA, L. R. **Geometria Fractal: Uma proposta de Sequência Didática para o Ensino De Progressões Geométricas. Monografia.** 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, São Paulo, 2018. Disponível em: https://bityli.com/AtP4e. Acesso em: 02 ago. 2020

VALMORBIDA, J. M. **Uma proposta de atividades para o estudo de progressões geométricas utilizando fractais e o software GeoGebra.** 2018. 128 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal Fronteira Sul, Chapecó, 2018. Disponível em: https://bit.ly/2An46hP. Acesso em: 20 jun. 2020.

VIEIRA, D. C. **O uso da Geometria Fractal como Ferramenta no ensino de progressões geométricas e logaritmos**. 2019. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019. Disponível em: https://bit.ly/3f9CewC. Acesso em: 20 jun. 2020.

APÊNDICE A – PRODUTO TÉCNICO: RECOMENDAÇÕES AO PROFESSOR

PRIMEIRO MOMENTO: NOÇÃO INTUITIVA DE FRACTAL

Nesta etapa, o objetivo é utilizar os recursos tecnológicos (PowerPoint e GeoGebra) para introduzir a ideia de fractal aos estudantes. Para tanto, serão usados os seguintes questionamentos: *Você sabe dizer quais são as formas geométricas que compõem uma nuvem? E quais formas compõem uma samambaia?* A partir dessa reflexão, espera-se que, após o momento de discussão, os alunos percebam que estas formas são irregulares e, por isso, não é possível citar uma forma geométrica que represente tais figuras com “exatidão”. Na sequência, deverá ser apresentada a ideia de fractal, mencionando que nuvem e samambaia são exemplos desse tipo de forma geométrica.

Figura 60 - Questionamentos iniciais

Fonte: Elaborado pela autora no PowerPoint.

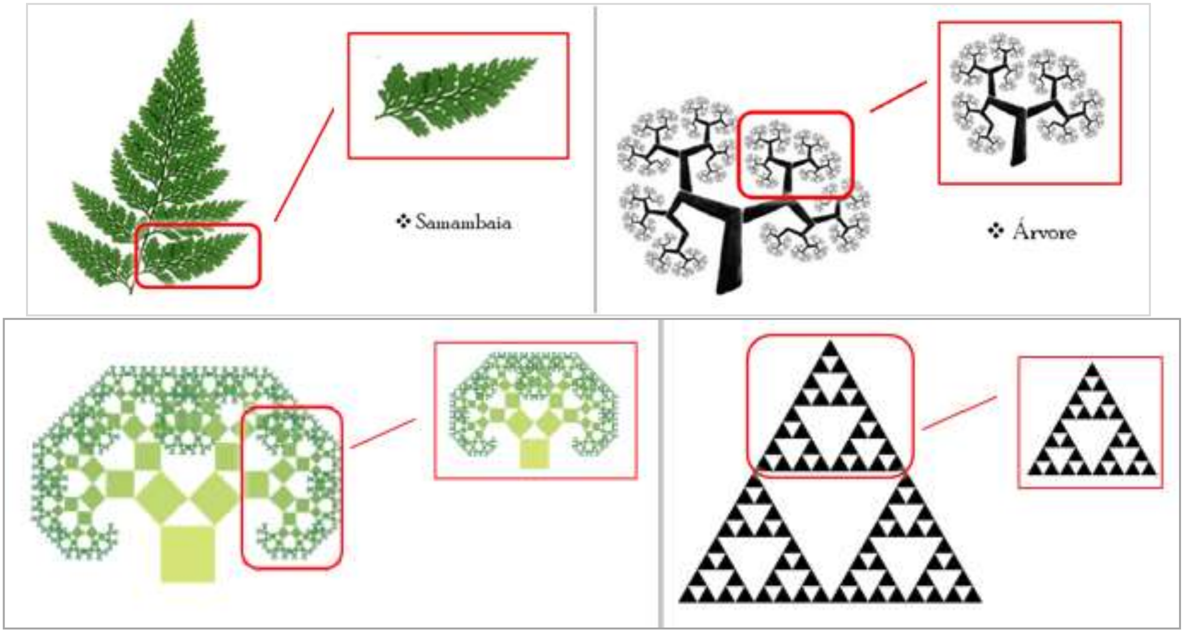
Em seguida, por meio de uma apresentação no PowerPoint[9] serão projetadas algumas imagens de exemplos da natureza relacionados à ideia de fractal. Neste momento, o professor poderá mostrar aos alunos, usando a representação visual, que cada imagem é formada por pedacinhos iguais a figura original, porém menores (ideia de autossimilaridade). Também, pode-se pedir que os alunos reflitam sobre outros

[9] Link da apresentação disponível no apêndice A desse trabalho.

exemplos de fractais na natureza, oportunizando a discussão das ideias apresentadas.

Posteriormente, serão mostradas imagens de fractais clássicos na matemática. Aqui, o professor poderá pedir que os alunos expliquem porque tais figuras são exemplos de fractais. Além disso, o professor poderá realizar uma discussão com os alunos, a fim de identificar o padrão geométrico de cada um dos exemplos. Neste momento, deverão ser utilizados os *applets* da construção dos fractais (Árvore Pitagórica, Tapete e Triângulo de Sierpinski) para auxiliar na compreensão do processo de construção usando elementos visuais. Por fim, com a finalidade de auxiliar na fixação das ideias discutidas, serão propostos alguns questionamentos em que os alunos usarão a escrita para sintetizar essas ideias.

Figura 61 - Exemplos de fractais na natureza.



Fonte: Google Imagens

Questionamentos:

I. Escreva, com suas palavras, o que é um fractal.

II. Cite exemplos de fractais que podemos encontrar na natureza.

SEGUNDO MOMENTO: CONSTRUÇÃO DO TAPETE DE SIERPINSKI COM MATERIAL CONCRETO

O objetivo desta etapa é realizar a construção do Tapete de Sierpinki, usando EVA[10], com o intuito de esclarecer o processo de retirada dos quadrados e o processo de construção deste fractal. Para começar, deverá ser mostrado aos alunos o *applet* com os passos para a construção do Tapete, realizando uma discussão sobre cada aspecto dessa construção com os estudantes. Em seguida, os alunos deverão realizar anotações, descrevendo o passo-a-passo de maneira detalhada. Espera-se que esta tarefa auxilie os alunos na fixação e compreensão do processo, para posterior construção do fractal.

Os alunos deverão se reunir em duplas, e cada dupla deverá receber um quadrado de EVA medindo 27 cm de lado. Na sequência, espera-se que os alunos se baseiem no *applet* para encontrar estratégias que possibilitem a construção deste fractal até o nível 2. Para que o professor possa acompanhar e analisar as estratégias utilizadas, recomenda-se solicitar que os alunos registrem os passos utilizados ao longo do processo de medição e recorte.

Além disso, ao receberem o quadrado de EVA e após a finalização de cada nível, os alunos deverão realizar o cálculo da área neste nível. Espera-se que o processo de retirada (recorte) dos quadrados auxilie os alunos a compreenderem que cada quadrado que foi recortado deverá ter o valor da sua área descontado da medida da superfície inicial. Além disso, espera-se que o processo de construção contribua para que os alunos possam perceber quantos quadrados deverão ser descontados a cada nível.

Figura 62 - Tapete de Sierpinski usando EVA.

Fonte: Elaborado pelos alunos.

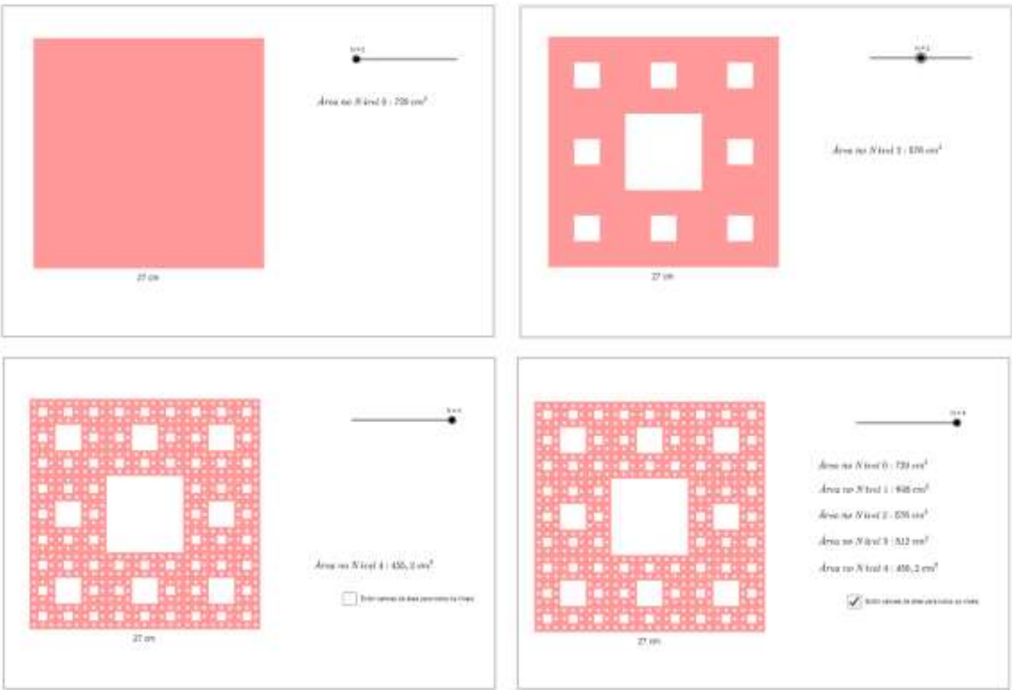
[10] Recomenda-se a utilização do EVA por ser maleável e não rasgar com facilidade.

Observação: *O quadrado inicial poderá ser maior, dependendo do tamanho da folha de cartolina disponível. Além disso, de acordo com este tamanho, os alunos poderão construir mais níveis do fractal. Caso os alunos ainda não tenham estudado números decimais, é interessante que a medida do quadrado inicial seja escolhida cuidadosamente, para que os resultados das divisões sejam números inteiros. Por exemplo, potências de 3 irão satisfazer essa condição.*

TERCEIRO MOMENTO: EXPLORAÇÃO DO TAPETE DE SIERPINSKI NO GEOGEBRA

O objetivo das tarefas presentes neste momento se refere à análise de características do Tapete de Sierpinski, visando conjecturar o que acontece com a área deste fractal à medida que o nível aumenta. Para dar início a esta etapa, os alunos irão usar o *applet Tapete de Sierpinski (lado 27 cm),* a fim de fazer a conferência dos resultados obtidos ao longo do cálculo da área. Espera-se que os alunos consigam identificar possíveis equívocos, realizando a análise dos erros e posterior correção por meio da manipulação da construção de forma dinâmica.

Figura 63 - Applet do Tapete de Sierpinski.



Fonte: Elaborado pela autora com o software GeoGebra.

Nas atividades seguintes, os alunos deverão usar também o segundo *applet*, outra versão do *Tapete de Sierpinski (lado 0,33 cm)*, simulando a aproximação de um dos quadradinhos obtidos no Nível 4. Por meio da manipulação da construção e usando os recursos disponíveis no software, os alunos deverão analisar o que acontece com a quantidade de quadrados à medida que o nível aumenta. Espera-se que, usando o controle deslizante, eles percebam que cada vez mais quadrados são retirados do fractal e, consequentemente, sua área vai diminuindo (pois a superfície retirada é cada vez maior).

Na sequência, os alunos deverão conjecturar se o valor da área do fractal se aproxima de algum número. Neste caso, somente a representação geométrica pode ser abstrata para os alunos, então recomenda-se que eles analisem com cuidado a representação numérica apresentada nos dois *applets*. Espera-se que eles percebam que o valor da área está diminuindo cada vez mais, estando cada vez mais próximo de zero.

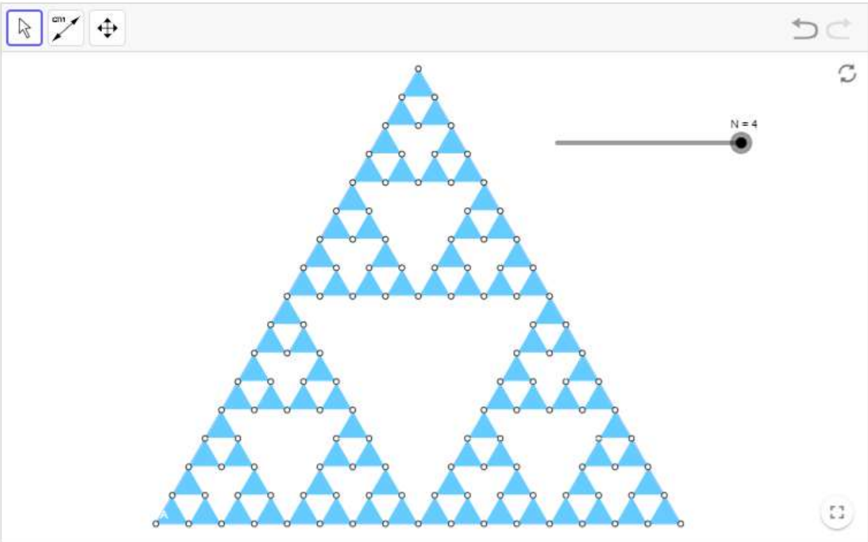
Por fim, os alunos deverão refletir se o valor da área chegará ao número conjecturado em algum momento. Novamente, devido ao nível de abstração envolvido, é possível que os estudantes digam que a área chegará, sim, no número zero. Sugere-se que o professor convide o aluno a analisar a representação geométrica, indagando-o a refletir sobre a possibilidade de o fractal sumir em algum momento. Além disso, pode-se fazer uma discussão envolvendo o padrão de construção da figura, para que o aluno perceba que, por meio deste processo de retirada, sempre irá sobrar alguma parte da região cor de rosa.

QUARTO MOMENTO: EXPLORAÇÃO DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI NO GEOGEBRA

No quarto e último momento, os alunos irão trabalhar com o fractal Triângulo de Sierpinski, tendo como objetivo analisar o que acontece com o perímetro deste fractal à medida que o nível aumenta. Para tanto, os estudantes deverão manipular dois *applets* no GeoGebra, um deles envolvendo a construção dinâmica do Triângulo de Sierpinski e o outro contendo segmentos usados para simular a medida do perímetro deste fractal até o nível 4, como apoio para a realização das atividades.

Inicialmente, os alunos deverão manipular o primeiro *applet* a fim de identificar o padrão geométrico presente na construção. Assim, os alunos deverão realizar conjecturas sobre a posição dos pontos que são construídos a cada nível, usando as ferramentas presentes no software. Inclusive, neste momento o professor deverá instruir o aluno a usar a ferramenta *Comprimento* para verificar a distância entre os pontos construídos e os vértices do triângulo. Espera-se que o estudante perceba que a distância é a mesma, oportunizando ao professor explicar que este é o ponto médio do segmento.

Figura 64 - Applet do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Elaborado pela autora no GeoGebra.

Após tal constatação e usando o controle deslizante para transitar entre os níveis, os alunos deverão descrever o processo de construção detalhado do fractal. O professor também poderá aproveitar a oportunidade para explicar aos alunos que, neste caso, o triângulo inicial é equilátero, ou seja, todos os lados têm a mesma medida. Também, o professor poderá comentar que, não necessariamente precisa-se começar com um triângulo equilátero.

A fim de inspirar os questionamentos finais desta etapa, o questionamento seguinte será referente aos triângulos que vão sendo construídos, bem como a medida do perímetro de cada um deles. Assim, espera-se que os alunos percebam que conforme o nível aumenta, cada vez mais triângulos são construídos (retirados).

Também, espera-se que eles identifiquem que a medida do perímetro dos triângulos diminui a cada nível, uma vez que eles são cada vez menores.

No questionamento seguinte, os alunos deverão calcular o perímetro do fractal até o nível 2, usando a ferramenta *Comprimento* para descobrir a medida dos lados de cada triângulo, uma vez que tais medidas não estão aparentes. Após, os alunos deverão descrever como pode-se calcular o perímetro de um nível a partir do perímetro do nível anterior. Nessa tarefa, o objetivo é que os alunos possam generalizar este processo, descrevendo-o sem a necessidade de rigor matemático. Espera-se que os alunos respondam que, em cada nível, basta adicionar o perímetro de todos os triângulos que forem retirados ao resultado obtido no nível anterior.

Neste fractal, os alunos também deverão realizar a conferência dos resultados obtidos no cálculo do perímetro. Desta vez, eles receberão um material impresso contendo os valores, que deverá ser usado com em conjunto com a construção para identificar possíveis equívocos, além de realizar a análise e correção dos mesmos, caso necessário. Na sequência, os alunos começarão a trabalhar com o segundo *applet* para a realização das tarefas, o qual também poderá auxiliar na conferência dos valores do perímetro.

Figura 65 - Segmentos representando o perímetro do Tapete de Sierpinski.

Fonte: Elaborado pela autora no GeoGebra.

Finalmente, os alunos deverão usar a tabela de resultados do material impresso e os dois *applets* para analisar o que acontece com o perímetro do fractal conforme o nível aumenta. Neste momento, os alunos terão dois tipos de representação geométrica (*applets*) e os valores numéricos para auxiliar na realização da tarefa. O professor também poderá sugerir que os alunos utilizem a ferramenta *zoom*, para aproximar a imagem, relembrando aos alunos que o processo de construção é infinito na matemática, apesar de ser finito no papel ou recurso digital. Assim, espera-se que os alunos percebam que o perímetro aumenta a cada nível, pois cada vez mais triângulos são retirados e, consequentemente, o perímetro destes será adicionado ao valor obtido no nível anterior.

Além disso, espera-se que, a partir dessa ideia, os alunos notem que o valor do perímetro continuará crescendo infinitamente. Os estudantes poderão confirmar essa ideia geometricamente, concluindo que, com a ferramenta *zoom*, eles poderão continuar aproximando e visualizando cada vez mais triângulos retirados. Caso os alunos tenham dificuldade de compreender essas ideias, recomenda-se que o professor conduza as discussões nesse sentindo, direcionando os alunos.

Por fim, nos dois últimos questionamentos, os alunos deverão comparar os níveis solicitados, indicando semelhanças e diferenças entre eles. Neste momento, o aluno terá maior liberdade para realizar comparações e explorar seu potencial de observação para identificar tais características. Diferentes constatações podem ser feitas, mas espera-se que, nesta altura da intervenção pedagógica, os alunos consigam compreender a ideia de autossimilaridade envolvida. Ou seja, espera-se que os alunos notem que o fractal, no nível 4, é formado por várias formas geométricas iguais aquela do nível 1.

APÊNDICE B – APPLETS DO GEOGEBRA

1. Triângulo de Sierpinski usado na Atividade Piloto
Disponível em https://www.geogebra.org/m/MkB5dWgr

2. Passos da construção da Árvore Pitagórica
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/cb24pabv

3. Passos da construção do Tapete de Sierpinski
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/pcjpkzqh

4. **Passos da construção do Triângulo de Sierpinski**
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/t6vkgusj

5. Tapete de Sierpinski manipulado pelos alunos (lado 27 cm)
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/zanjkspv

6. Tapete de Sierpinski manipulado pelos alunos (lado 0,33 cm)
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/za4qu5gz

7. Triângulo de Sierpinski manipulado pelos alunos
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/hdv43mgr

8. Triângulo de Sierpinski (segmentos representando o perímetro)
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/jhme7h6t

9. Apresentação sobre fractais em PowerPoint
Disponível em:
https://drive.google.com/file/d/1DEm2iAjSCC_byX6WhfMEYhTgfralFFzq/view?usp=sharing

APÊNDICE C – TAREFAS REALIZADAS NA ATIVIDADE PILOTO

1. Analise o fractal e complete os quadros a seguir:

Nível	Quantidade de triângulos	Medida da base de cada triângulo	Medida da altura de cada triângulo	Área de cada triângulo	Área total do fractal
0					
1					
2					
3					

Nível	Quantidade de triângulos	Medida do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total do fractal
0				
1				
2				
3				

2. Responda:

a) Qual é a relação entre cada nível e o número total de triângulos obtidos?

b) O que acontece com o perímetro do fractal à medida que o nível aumenta? Por quê?

c) O que acontece com a área do fractal à medida que o nível aumenta? Por quê?

d) Você conseguiu notar mais algum padrão (alguma relação) entre os objetos da construção?

APÊNDICE D – TAREFAS SOBRE NOÇÃO INTUITIVA DE FRACTAL E TAPETE DE SIERPINSKI

1. Explique, com suas palavras, como podemos construir o fractal Tapete de Sierpinski.

____

____

____

____

2. Conte as estratégias utilizadas por você e seu colega para a construção do Tapete no papel emborrachado.

____

____

____

____

3. Calcule a área do fractal para cada um dos níveis:

Nível 0	**Nível 1**	**Nível 2**

4. Manipule a construção (1) no GeoGebra e confira se os valores que você encontrou para cada nível estão corretos. Caso não estejam, explique o que você errou.

____

____

____

____

5. Após manipular as construções (1) e (2), responda os seguintes questionamentos:

a) O que acontece com a quantidade de quadrados que são retirados, à medida que o nível aumenta?

____

____

____

b) Conforme os níveis vão aumentando, o que acontece com a área do fractal (aumenta, diminui, permanece igual)? Você sabe explicar por que isso acontece?

____

____

____

____

c) Conforme calculamos a área em cada nível, ela parece se aproximar de algum número? Se sim, diga qual e justifique.

____

____

____

d) Caso você tenha respondido que sim, você acha que área chegará neste número em algum momento? Explique.

____

____

____

____

APÊNDICE E – TAREFAS SOBRE TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Atividades: Use a ferramenta *comprimento* e em seguida responda os questionamentos:

1. A cada nível, existe alguma regra para construção dos pontos que serão vértices do triângulo retirado? (Ou seja, os pontos que irão gerar o triângulo podem ser colocados em qualquer lugar?)

2. Explique, detalhadamente, o processo de construção deste fractal.

3. O que acontece com o tamanho dos triângulos construídos, à medida que o nível aumenta? E consequentemente, o que acontece com o perímetro dos triângulos construídos a cada nível?

4. Calcule o perímetro do fractal, dos níveis 0 a 2.

5. Como poderíamos calcular o perímetro em cada nível seguinte, a partir do nível anterior? Explique. (Não precisa calcular).

6. Observe a tabela a seguir, e compare com os valores que você encontrou no nível anterior.

NÍVEL	PERÍMETRO
0	36 cm
1	54 cm
2	81 cm
3	121,5 cm
4	182,3 cm
5	273,4 cm

Você errou alguma coisa? Se sim, o que?

7. Analise a tabela, o fractal e a janela de visualização 2, e responda: O que acontece com o perímetro conforme os níveis aumentam? Por quê?

8. Você acha que isso irá acontecer sempre, ou que o valor do perímetro irá se aproximar de algum número? Explique.

9. Qual a relação (diferenças ou semelhanças) entre os níveis 1 e 2? O que você consegue perceber quando compara as figuras obtidas em cada nível?

10. Qual a relação (diferenças ou semelhanças) entre os níveis 1 e 4? O que você consegue perceber quando compara as figuras obtidas em cada nível?

APÊNDICE F – TERMO DE CONSENTIMENTO DA ESCOLA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Av. Bento Gonçalves 9500 - Agronomia – 91509-900 Porto Alegre – RS - BRASIL
Tel: (051)3316-6189/3316-6225 FAX: (051)3316-7301
e-mail: matematica@mat.ufrgs.br Internet: www.mat.ufrgs.br

TERMO DE CONSENTIMENTO DA ESCOLA

A [redacted], escola da rede pública municipal de ensino do município de Gramado, neste ato representada pela direção por intermédio do presente instrumento, autoriza **Luana Kuister Xavier**, brasileira, professora, CPF [redacted] a aplicar a proposta de ensino: "Desenvolvimento de conceitos geométricos por meio da construção e exploração de fractais com o GeoGebra". A Escola está ciente de que a referida proposta de ensino é base para a elaboração da dissertação da aluna, a qual é uma exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, e que é orientada pela professora Dra. Débora da Silva Soares.

A autorizada, por sua vez, se compromete a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes da escola que participarão da aplicação da proposta de aula.

Gramado, 28 de março de 2018.

____
Estudante

____
Orientadora

____
Direção da Escola

APÊNDICE G – TERMO DE CONSENTIMENTO DO ALUNO

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____, declaro, por meio deste termo, que concordei que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Desenvolvimento de conceitos geométricos por meio da construção e exploração de fractais com o GeoGebra**, desenvolvida pela professora Luana Kuister Xavier. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela professora Dra. Débora da Silva Soares (UFRGS), a quem poderei contatar a qualquer momento através do e-mail debora.soares@ufrgs.br.

Estou ciente de que a participação do(a) aluno(a) tem como finalidade a contribuição para o sucesso da pesquisa, cujos objetivos são:

- Discutir as dificuldades presentes no ensino e aprendizagem de geometria;
- Verificar a contribuição das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de conceitos básicos de geometria;
- Analisar de que forma a construção e exploração de formas geométricas fractais com o GeoGebra pode contribuir para a construção de conceitos geométricos.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos e seminários), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade, ou seja, sem divulgar sua identidade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de questionário escrito, bem como da participação nas aulas de matemática em que a pesquisa será realizada, onde ele(a) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, poderei contatar a professora responsável na Escola ou através do fone

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Gramado, _____ de abril de 2018.

Assinatura do Responsável pelo aluno: _________________________________

Assinatura da pesquisadora: ____

Assinatura da Orientadora da pesquisa: ________________________________