

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Cinética e dinâmica de feixes de partículas carregadas durante o processo de equipartição[†]

Wilson Simeoni Junior

Tese realizada sob a orientação do Dr.Prof. Renato Pakter, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Porto Alegre, abril de 2010.

[†]Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Dedicatória

Ao meu amado pai.
Diante da vastidão do espaço e da
imensidão do tempo, foi uma alegria
partilhar um planeta, uma época com
você e ser seu filho.

Agradecimentos

- Aos meus pais, Maria e Wilson pela liberdade de expressão e pensamento que sempre me deram durante a vida.
- As minhas irmãs Camila e Bethania e minha sobrinha Bruna por aguentarem meus discursos.
- Aos meus amigos Fernando, Lucas e Cristian pela paciência.
- Ao meu primeiro amigo Gilson na física colega em física desde o vestibular.
- Aos meus amigos Antonio e Luciano por formarem comigo o gupo MES.
- Ao Professor Renato Pakter por ser meu orientador e permitir eu desenvolver esse trabalho.
- Ao Pofessor Felipe Rizzato por me dar a oportunidade de fazer Ciência e trabalhar em Física.
- E principlamente ao Instituto de Física da UFRGS e ao CNPQ.

Resumo

Esta tese analisa a transição de um feixe com perfil isotrópico para um perfil anisotrópico em um canal focalizador linear. Considerando um feixe de íons de alta intensidade no regime dominado pelas forças eletromagnetoestáticas do próprio feixe e com um grande desacasamento (*RMS*) do envelope do feixe, observa-se um rápido crescimento da anisotropia espacial do feixe. Uma vez que as interações eletromagnetoestáticas do próprio feixe em um acelerador linear de alta intensidade podem levar a equipartição da energia entre os graus de liberdade do feixe, este fenômeno de anisotropização sugere uma espécie de rota para a equipartição. Nesta tese, mostramos que as ressonâncias de partícula-partícula e as ressonâncias entre os modos de oscilação do feixe e as partículas levam à anisotropização do feixe, isto é, tanto a razão do envelope como a razão das emitâncias são diferentes de um. Propomos que esta anisotropia é responsável pelo equiparticionamento do feixe. Os resultados sugerem que quando o feixe permanece equiparticionado ele apresenta uma anisotropia macroscópica, que é caracterizada pelas seguintes propriedades: o desenvolvimento de um forma elíptica do feixe, com o crescimento do semi-eixo ao longo da direção x , a presença de um acoplamento entre as emitâncias transversais, a formação do anel ao longo de uma direção preferencial, a estacionariedade da temperatura e um crescimento da entropia, sob a forma de cascata. Chamamos o estado caracterizado por estas propriedades como um estado de equipartição via anisotropias.

Abstract

This thesis examines the transition from isotropic to anisotropic beam profiles in a linear focusing channel. Considering a high-intensity ion beam in a space-charge dominated regime and with an initially large mismatched *RMS* beam size, we observe a fast increasing spatial anisotropy of the beam. Since space-charge interactions in a high-intensity linear accelerator can lead to energy equipartition between the degrees of freedom, this anisotropization phenomena suggest a kind of route to equipartition. In this thesis we show that the particle-particle resonances and mode oscillation of the beam-particle resonances lead to the anisotropization of the beam, that is, both the envelope ratio and the emittance ratio are different from one. We propose that this anisotropy is responsible for the beam's equipartitioning. The results suggest that the beam remains equipartitioned when it exhibits a macroscopic anisotropy, which is characterized by the following properties: the development of an elliptical shape with increasing size along the x-direction, the presence of a coupling between transversal emittances, halo formation along a preferential direction, stationarity of the temperature and a growth of the entropy in the cascade form. We call the state characterized by these properties as an anisotropic equipartition state.

Conteúdo

1	Introdução	2
1.1	Aceleradores de Partículas	3
1.2	Feixes de Partículas Carregadas Equiparticionam?	6
1.2.1	Estado da Arte	7
1.2.2	O Problema	10
1.2.3	Metodologia	11
2	Dinâmica de Feixes de Partículas Carregadas Durante o Processo de Equipartição	14
2.1	O Modelo	16
2.2	Transição do Feixe Isotrópico para Anisotrópico	21
2.2.1	Equipartição via Anisotropias	27
3	Termodinâmica de Feixes de Partículas Carregadas Durante o Processo de Equipartição	30
3.1	Dinâmica das áreas no espaço de fases ocupadas pelas partículas do feixe .	31
3.2	Termodinâmica do Feixe Equiparticionado	34
4	Conclusão	40
4.1	Perspectivas	42
4.1.1	Pós-doutorado no IFMIF	42
	Apêndice	43
A	Simulações Numéricas Auto-Consistentes	43
A.1	Descrição das Simulações Numéricas Auto-Consistentes	43
A.2	Procedimento Numérico Adotado	46
A.3	Resultados das Simulações Numéricas Auto-consistentes	47
	Referências	51

Capítulo 1

Introdução

As pesquisas utilizando feixes de partículas em aceleradores tem nos fornecido quase tudo o que sabemos sobre o blocos básicos de construção da matéria, e sobre a natureza das forças fundamentais.

Nas condições controladas do laboratório, os aceleradores geradores de feixes altamente energéticos recriam as condições que ocorreram desde após o Big Bang. Eles são fundamentais para os esforços de compreender a natureza da matéria escura e da energia escura. Mas isso é apenas uma parte da importância dos aceleradores de partículas.

Milhares de aceleradores, a maioria deles um quarto do tamanho ou menores que os grandes aceleradores (FERMILAB e CERN), servem como ferramentas essenciais para a investigação biomédica e dos materiais, para diagnosticar e tratar doenças, e para uma série crescente de tarefas na produção e na tecnologia de energia e, até mesmo em questões de segurança interna (LOS ALAMOS).

Cerca de 10.000 pacientes com câncer são tratados todos os dias nos EUA, com feixes de aceleradores [1]. Aceleradores produzem radioisótopos que são usados em mais de 10 milhões de procedimentos médicos de diagnóstico e 100 milhões de exames laboratoriais a cada ano. A medicina nuclear de diagnóstico e a terapia de radiação juntas salvam inúmeras vidas e geram cerca de 5 bilhões de dólares em negócios por ano. A multi-bilionária indústria de semicondutores depende de feixes de íons de aceleradores para incorporar camadas de dopagem em semicondutores. A litografia de raios-X com feixes intensos modela microchips e outros dispositivos semicondutores. Aceleradores são utilizados para mais precisas datações de amostras arqueológicas e de objetos de arte, para desvendar a estrutura do DNA, e também para a pesquisa farmacêutica.

A ciência dos aceleradores tem um profundo impacto na sociedade como um todo. Suas aplicações estão bem estabelecidas na ciência em geral e nas tecnologias. Uma fração significativa dos radioisótopos utilizados no tratamento, diagnóstico, e na pesquisa em doenças são produzidos usando aceleradores. Feixes de raios-X, nêutrons, prótons e íons que são derivados de aceleradores de partículas são usados atualmente no tratamento de

câncer e outras doenças. Pesquisadores industriais em comum com cientistas de materiais em universidades e laboratórios, usam radiação síncrotron, espalhamento de nêutrons e outras técnicas baseadas em aceleradores como importantes ferramentas em suas atividades de pesquisa e desenvolvimento. No manufaturamento, os feixes são usados para alterar a composição do material (por exemplo, a implantação de íons), para melhorar as características de um produto (por exemplo, a esterilização de equipamentos médicos), como uma parte fundamental do processo de produção (por exemplo, a implantação de íons e litografia de raios-X na manipulação do silício) e para fornecer informações sobre os processos de fabrico (por exemplo, na caracterização de impurezas em semicondutores) [2]. Mas afinal o que são aceleradores de partículas?

1.1 Aceleradores de Partículas

Um acelerador de partículas é um aparelho que produz feixes de átomos, elétrons, moléculas ou algumas partículas mais exóticas, como antiprótons, pósitrons ou mésons, com velocidades altas, geralmente superiores a 1/1000 da velocidade da luz c . Para que sejam atingidas estas velocidades, que em alguns casos chegam quase na velocidade da luz, as partículas sofrem a ação de forças eletromagnéticas, com arranjos que diferem bastante entre os diversos tipos de aceleradores. Um feixe é caracterizado pela partícula que o forma, pela sua energia cinética E_c e pelo número de partículas por unidade de tempo N [3].

Uma questão preliminar é a das unidades. Em geral nos referimos as energias cinéticas em eV ou seus múltiplos $keV(1000eV)$, $MeV(1000keV)$, $GeV(1000MeV)$ ou $TeV(1000GeV)$. Um eV é a energia cinética de uma partícula com a carga do elétron que atravessou uma diferença de potencial elétrico de um Volt e corresponde a energia de $1.6 * 10^{(-19)}$ Joules. Caso a energia cinética de uma partícula seja muito inferior a sua "energia de repouso" (mc^2) podemos usar a fórmula usual $E_c = (1/2)mv^2$, de outra forma teremos que usar expressões relativísticas. Como exemplos, um elétron num tubo de TV tem cerca de $25000eV$ antes de bater na tela e produzir luz, uma molécula de gás tem cerca de 1/40 do eV, os fótons de luz visível tem cerca de $2eV$, as partículas emitidas pelos núcleos de alguns átomos, chamados radioativos, tem alguns milhões de eV [3].

Se desejarmos estudar o núcleo as energias são geralmente superiores a $1MeV$, podendo ir a GeV . Se quisermos estudar as partículas que formam o núcleo as energias serão maiores ainda, de GeV a TeV . Átomos ou núcleos com energia cinética de $1MeV$ tem velocidades, dependendo da massa atômica, indo de $0,003c$, para o urânio, a $0,05c$, para o hidrogênio. Não apenas a complexidade dessas máquinas aumenta com a energia, em cada faixa estudam-se fenômenos distintos, cuja relevância vai da compreensão de nossa atmosfera até a da origem do universo. Incidentalmente as máquinas gigantescas

que trabalham na região de 1 TeV, o CERN na Europa e o Fermilab na América do Norte, tem como subprodutos aplicações tecnológicas em mecânica fina, novos materiais, eletrônica e supercondutividade. Já os aceleradores que permitem estudar propriedades atômicas e suas ainda mais generalizadas aplicações, cujas, as energias disponíveis não serão suficientes para quebrar ou excitar o núcleo atômico, o que quer dizer velocidades entre cerca de 1/1000 e 1/10 de c , ou energias indo de $0,001eV$ a alguns MeV [3].

O acelerador de partículas é um instrumento construído utilizando uma fonte de partículas carregadas expostas a campos elétricos que as aceleram. Após a aceleração passam em seguida por um campo magnético que as desvia de suas trajetórias focalizando-as e controlando as direções (defletindo-as). Todos os tipos de aceleradores independentemente de seu grau de avanço tecnológico obedecem aos mesmos princípios básicos. Devido a disposição geométrica dos campos eletromagnéticos responsáveis pela aceleração das partículas, basicamente são classificados em dois tipos: cíclicos e lineares. Para que possam ocorrer as condições mais próximas do ideal, existe a necessidade de geração de vácuo de excelente qualidade na região de trânsito, evitando assim a dispersão destas pelas moléculas de gases que porventura estejam em sua trajetória [3, 4].

Os aceleradores lineares fazem a partícula seguir uma trajetória reta onde a energia final obtida é proporcional a soma das diferenças de potencial geradas a partir dos mecanismos de aceleração dispostos ao longo da trajetória. Estes aceleradores são desenvolvidos de duas formas ou sistemas. O primeiro sistema é o que utiliza a montagem de componentes que geram um campo magnético longitudinal variável no tempo fornecendo assim energia cinética para os elétrons. Este equipamento é provido de uma câmara de aceleração composta de um tubo de vácuo cilíndrico, tipo cavidade ressonante, ou guia de ondas que dirige o campo acelerador. Existe também um amplificador de potência de vários megawatts que excita as câmaras aceleradoras sucessivas e sequenciais que forçam o deslocamento de uma frente de onda progressiva no guia de ondas, esta uma vez sincronizada pelos dispositivos aceleradores se desloca cada vez com maior velocidade até chegar ao fim do tubo. O que assegura a sincronização é a velocidade de fase da onda progressiva que acaba por se igualar a velocidade dos elétrons. O segundo sistema de aceleração linear utiliza o método de ondas eletromagnéticas estacionárias, estas acabam por acelerar prótons. Os prótons possuem massa em torno de duas mil vezes a dos elétrons, gerando uma barreira para sua excitação através de uma guia por ondas progressivas que tenham velocidade de fase igual a sua velocidade de avanço. Os prótons cuja energia é de quatro megavolts têm cerca de cinco por cento da velocidade da luz. Estes impossibilitam o uso da técnica de guia de ondas da mesma forma que se usa para elétrons. Logo os aceleradores de ondas estacionárias são usados somente como injetores de prótons para aceleradores cíclicos de grande energia que possuem dispositivos para detectar e corrigir as distorções ocasionadas pelos efeitos relativísticos [3, 4].

Além dos aceleradores lineares existem os aceleradores cíclicos. Estes são construídos

para promover a trajetória curvada das partículas pela ação dos campos magnéticos em espiral ou circular. Este tipo de acelerador força a partícula a passar diversas vezes pelos sistemas de aceleração. A energia final das partículas depende da amplitude da diferença de potencial aplicada e do número de voltas que estas dão no dispositivo. Os tipos de aceleradores cíclicos mais utilizados são o ciclotron e o síncrotron. O ciclotron possui dois eletrodos com a forma de um D , estes são ocós e semicirculares. Sua montagem é numa câmara de vácuo entre os pólos de um eletromagneto. Os prótons, dêuterons ou outros íons de maior massa começam a se locomover no interior dos eletrodos em forma de D . Neste momento é injetada uma diferença de potencial alternada de alta frequência e potência nos eletrodos cuja frequência é próxima a da circulação iônica, produzindo assim saltos de aumento de velocidade cada vez que estes passam de um eletrodo para o outro subsequente. O que ocorre com as partículas neste momento, é uma trajetória em forma hipóide ou de semi-círculos cujos raios são crescentes havendo então uma perda do foco do feixe. É necessário então um sistema de "focalização" para forçar os íons numa trajetória pré-determinada, evitando assim a perda de íons por espiralamento. Causando uma repolarização forçada através da variação radial negativa do campo magnético, haverá sobre a partícula uma pequena componente perpendicular ao plano do movimento de aceleração. Este efeito manterá a trajetória da partícula estável não permitindo a perda desta para fora do acelerador. Essa componente de correção é primordial, pois a trajetória total da partícula muitas vezes chega a centenas de metros e, conforme o caso, milhares [3, 4, 5].

O desenvolvimento dos síncrotrons foi necessário para melhorar as soluções de aceleração de partículas cujas trajetórias são de raios fixos. Estes, da mesma forma que os ciclotrons, aceleram as partículas eletricamente e as confinam em campos magnéticos. A diferença é que o síncrotron utiliza o princípio da estabilidade de fase, mantendo desta forma o sincronismo entre campo elétrico aplicado e a frequência de revolução da partícula. O funcionamento se dá através de um campo magnético que causa a deflexão da partícula para uma órbita circular, e cuja intensidade do campo é modulada de forma cíclica, mantendo assim órbitas cujo raio é bastante estável e constante, apesar do ganho de energia e massa conseqüentemente. Uma vez que se usa o campo magnético para manter a órbita ao invés de acelerá-la, as linhas de campo magnético são necessárias na região anular que é definida pela órbita. O campo é gerado por um eletromagneto anular [3, 4, 5].

O aceleradores lineares devem ser concebidos e construídos com margens adequadas para perdas do feixe, a fim de atingir um funcionamento estável e confiável do sistema. Um código de simulação otimizado da dinâmica do feixe [6, 7], incluindo a distribuição do campo eletromagnético na seção de aceleração e o cálculo das forças eletromagnetoestáticas do próprio feixe devem ser utilizados para determinarem os principais parâmetros do acelerador linear do ponto de vista não só das propriedades *rms* do feixe, mas também da dinâmica das partículas do anel (*halo*) [8]. Focalização ao longo do acelerador linear é aplicada com base na teoria das equações do envelope acopladas, de acordo com a teoria

do equiparticionamento [9]. Este é um método usual do ponto de vista para a obtenção de um feixe de boa qualidade considerando os efeitos dos campos eletromagnéticos do próprio feixe e o ajustamento do crescimento da emitância nos espaços de fases transversal e longitudinal. O método do equiparticionamento foi proposto para a dinâmica de feixes em aceleradores lineares com alta corrente, sobre as considerações de impedir o crescimento da emitância e a formação do anel no feixe, por meio de manter o envelope do feixe casado e balancear a energia dentro do feixe. Mas afinal o que é um feixe de partículas equiparticionado?

1.2 Feixes de Partículas Carregadas Equiparticionam?

O primeiro cientista a discutir a questão da troca da emitância entre as direções longitudinais e radiais de um feixe de prótons em um acelerador linear foi Pierre Lapostolle há cerca de 30 anos atrás [10]. Depois de uma analogia direta com o fenômeno de trocas de calor, ele imediatamente pontuou que este não teria um sentido físico. Na verdade, o fato de que o tempo médio entre as colisões das partículas é muito maior do que o tempo de transporte do feixe em um acelerador linear, exclui uma interpretação direta em termos de mecânica estatística. No entanto, M. Promé [11] fez simulações numéricas mostrando a troca da emitância e uma possível evolução do feixe para um equiparticionamento (EQP) da energia cinética média radial e longitudinal : $\langle v_r^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$. O fato de que esse equilíbrio foi atingido mais rapidamente quando a corrente do feixe incrementa foi interpretado como um efeito direto das forças não-lineares eletromagnetoestáticas e corrente do próprio feixe (*space-charge*). Mas, isto poderia ser devido ao descasamento do feixe com o aumento da corrente. R.A. Jameson [12] confirmou estes resultados e ressaltou que, para um feixe casado $\langle v_r^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ leva a $\epsilon_r/\epsilon_z = \sigma_r/\sigma_z = r_r/r_z$, onde os ϵ_r e ϵ_z são as emitâncias médias, σ_r e σ_z são os avanços de fase considerando os efeitos dos campos elétricos e magnéticos do próprio feixe e, r_r e r_z são os raios médios nas direções transversal e longitudinal, respectivamente [13]. Jameson também fez uma simulação mostrando que não há fluxo da emitância entre as direções quando um acelerador linear é projetado usando a regra EQP ($\epsilon_r/\epsilon_z = \sigma_r/\sigma_z = r_r/r_z$). No entanto, isso, foi feito para um caso muito especial, onde as razões são $\epsilon_r/\epsilon_z = \sigma_r/\sigma_z = r_r/r_z = 1$, ou seja, um feixe circular ($r_x = r_y$) quando as forças dos campos do feixe não podem induzir acoplamento.

O sentido físico da equipartição para feixes acolisionais não tem sido exaustivamente analisado desde então. A equipartição por vezes tem sido enfatizada ao nível de uma regra básica para evitar não só o fluxo da emitância mas também o crescimento e a formação do anel. Suposições aparte, algumas questões importantes podem ser levantadas sobre a regra EQP:

- É baseada no caos molecular ou na hipótese ergódica em nível microscópico. Ela é

justificável em nosso sistema de N-partículas acolisionais? Se sim, para que tipo de feixe e parâmetros do acelerador?

- Refere-se aos valores médios (*rms*) nas direções transversal e longitudinal, como se o sistema poderia ser reduzido a um par de osciladores acoplados. Qual é a relação com a teoria clássica EQP [14], que se aplica aos auto-modos das oscilações e não aos osciladores individuais?
- Nós sabemos que as forças eletromagnetoestáticas do próprio feixe não podem induzir qualquer acoplamento para um feixe circular como considerado por Jameson [12]. Então como as forças dos campos do próprio feixe podem ser responsáveis pela EQP?
- A sua aplicação pode levar a um alto avanço de fase (*tune depressions*), que é bem conhecido ter consequências catastróficas sobre a dinâmica do feixe [8, 9]. O que é preferível, uma equipartição com grande avanço de fase ou um pequeno avanço de fase sem equipartição?

As respostas a estas perguntas não são simples e necessitam de trabalho cuidadoso. Nas seções a seguir, apresentamos algumas idéias e temas que parecem relevantes e que podem servir como ponto de partida para a pesquisa nesta direção.

1.2.1 Estado da Arte

No início de 1950, considerando que as investigações numéricas poderiam ser realizadas na primeira geração de um computador digital no Los Alamos National Laboratory, Enrico Fermi sugeriu a Stanislaw Ulam e a John Pasta explorarem os fundamentos da mecânica estatística. Ele propôs usar uma cadeia de osciladores acoplados não-linearmente para mostrar que essa não-linearidade levaria a equipartição da energia entre os graus de liberdade [14].

A fim de alcançar a equipartição é suficiente para a dinâmica do sistema ser "ergódica". A teoria ergódica começou com o esforço de Boltzmann para justificar a determinação dos valores médios na teoria cinética. A hipótese Ergódica afirma que as médias temporais dos observáveis de um sistema isolado em equilíbrio podem ser calculadas como médias de fase sobre a hiper-superfície constante de energia. Esta afirmação pode ser considerada como a primeira tentativa de estabelecer uma ligação entre a mecânica estatística e a dinâmica do sistema subjacente. O teorema da equipartição da energia [15] é compreendido para um sistema termodinâmico, onde cada grau de liberdade distribui o excesso de energia através de múltiplas colisões. O tempo de relaxamento para atingir o estado de equilíbrio equiparticionado é diretamente determinado pela taxa de colisão entre o grande número de partículas dentro de um volume finito [16].

A questão da ergodicidade é relacionada com o problema da existência de quantidades conservadas (integrais de movimento) não-triviais nos sistemas Hamiltonianos. Equipartição em sistemas hamiltonianos é um tema difícil e ainda um assunto de intensa pesquisa em diversas áreas da Física [17]. Como já dito, a equipartição da energia é geralmente baseada no pressuposto de que o sistema é ergódico. Neste caso, as trajetórias do sistema devem preencher toda a região acessível no espaço de fase. Assim, um sistema com curvas invariantes *KAM* não é ergódico desde que uma parte do sistema se limita a uma região específica do espaço de fases. Tal explicação foi logo percebida ser insustentável: a energia do sistema deve ser muito próxima de um valor mínimo, deduzido da teoria *KAM* para garantir os movimentos periódicos [17]. Mas também, se a dinâmica é caótica em alguns subespaços do espaço de fases, o sistema pode ser considerado ergódico nestes subespaços [18]. Neste caso, o sistema contém uma mistura de trajetórias quasiperiódicas (*KAM*) e trajetórias caóticas, e uma mistura de órbitas (pontos fixos) estáveis e instáveis [19]. É nesse regime de caos *fraco*, que as dificuldades de análise surgem em relação ao regime de caos *forte* para o qual a rápida mistura (*mixing*) induz um comportamento ergódico com a consequente equipartição da energia [20, 21]. Para feixes de prótons com correntes de $100mA$ ou mais, a razão entre os avanços de fases [13, 9] $\vartheta = \sigma/\sigma_0$, (σ e σ_0 são os avanços de fase com e sem as forças geradas pelos campos do próprio feixe, respectivamente) é geralmente superior a 0.2 e, a maioria das trajetórias das partículas são estáveis. A hipótese ergódica é verificada somente em algumas estreitas regiões caóticas do espaço de fases [22]. O sistema de partículas em tais condições se encontra num estado de caos *fraco* com *fracas* propriedades de *mistura*.

Para um sistema de N -osciladores acoplados, o teorema da equipartição indica que cada modo de frequência poderia em média, ter a mesma energia, se a média for tomada num tempo suficientemente longo. A determinação desse tempo de relaxamento em função dos parâmetros do sistema, ou seja, o número de osciladores, a energia média por oscilador, a frequência da excitação inicial, tem sido objeto de estudos desde os primórdios da mecânica estatística. O exemplo clássico é o problema de Fermi-Pasta-Ulam (FPU) [14] que aborda a questão da equipartição da energia em uma cadeia de osciladores acoplados com acoplamento não-linear. A cadeia de osciladores não-lineares revelou-se ser um sistema rico para investigar problemas de dinâmica não-linear. Primeiro foi proposto como um sistema não-linear para explicar os fundamentos da mecânica estatística, a falta inicial de confirmação das expectativas dos pesquisadores levou a uma série de reflexões profundas sobre o comportamento de sistemas não-lineares com muitas dimensões. Os estudos numéricos iniciais, propostos para demonstrar que a energia colocada em um único modo da cadeia linearizada se aproximaria da equipartição através de interações não-lineares, surpreendentemente, mostraram fenômenos de recorrência. Embora trabalhos posteriores mostraram que a origem das recorrências é a ressonância não-linear, a questão da falta de equipartição permaneceu. A tentativa de compreender a regularidade deu frutos e, bons

desenvolvimentos em dinâmica não-linear: tipo o nascimento da teoria das ondas solitárias (*soliton*) [17]. Um desenvolvimento paralelo, relacionado com as observações numéricas que, em energias mais altas, a equipartição ocorre entre os modos, foi o entendimento de que a transição de energia entre os modos ocorre devido a sobreposição das ressonâncias. Outras investigações mostraram que as escalas numéricas de tempo também são importantes, com uma transição entre a evolução mais rápida e a mais lenta [17]. Um feixe que é um sistema de N-partículas sujeito a forças externas e as forças dos campos gerados pelo próprio feixe, chamados de auto-campos, pode ser visto como um sistema de N-osciladores acoplados [9], assim sendo, as técnicas utilizadas para o problema FPU podem ser usadas para estudar o tempo de relaxamento para um equilíbrio equiparticionado em tal sistema.

O mecanismo de transferência da emitância induzido pelo acoplamento das ressonâncias é bem conhecido em aceleradores circulares. Ingo Hofmann tem estudado esta fonte de instabilidades coletivas induzida pelos auto-campos do feixe (*space-charge*). Ele elaborou cadeias e identificou os limiares das instabilidade para os principais modos da equação de Vlasov [23]. Deve-se notar que a física subjacente da análise em termos de ressonâncias acopladas é próxima a utilizada no problema FPU. Os conceitos de sobreposição das ressonância, levando ao *fraco* ou *forte* caos, são bons candidatos para explicar por que e quando a EQP pode ocorrer.

Uma questão interessante é a resposta de um feixe para uma anisotropia resultante da aceleração, compressão, injeção em uma rede dispersiva, ou focalização anisotrópica [9]. Modelos termodinâmicos [24] predizem a equipartição da energia entre todos os graus de liberdade. Entretanto um modelo termodinâmico requer algum processo estocástico tais como colisões para relaxar ao equilíbrio. Em um acelerador linear, no entanto, o tempo para as colisões é maior que o tempo do feixe propagar-se na máquina. A questão então é saber se um sistema anisotrópico de partículas acolisionais acoplado pelas forças dos auto-campos de longo alcance equiparticiona e, em caso afirmativo, como [25].

Embora o fluxo de energia em feixes acolisionais seja observado em simulações auto-consistente [26, 27], as explicações atuais dos mecanismos do acoplamento estão longe de serem completadas. Os modos dos auto-campos instáveis, semelhantes aos obtidos por Gluckstern para distribuições isotrópicas [28], foram propostos como prováveis candidatos[12]. Como já mencionado, Hofmann desenvolveu uma teoria [23], baseada na estabilidade de uma distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij (KV) anisotrópica para pequenas perturbações. O resultado dessa análise é que feixes anisotrópicos podem resistir ao equiparticionamento se as forças dos auto-campos são pequenas o suficiente para garantir a estabilidade. A teoria foi testada por simulações [29, 30, 31]. Porém não está claro, em que circunstâncias as previsões com base na estabilidade de tais distribuições podem ser aplicadas a feixes de laboratório [9]. Por exemplo, certas distribuições perdem os mecanismos naturais de amortecimento associados com as distribuições Maxwellianas. Além disso, a hipótese de pequenas perturbações do tratamento analítico não pode aplicar-se

em aceleradores reais.

Para entender melhor o mecanismo de acoplamento, *Kishek et al.* realizaram uma série de simulações de partículas auto-consistente usando distribuições iniciais fora do equilíbrio para modelar feixes de partículas nos experimentos [32]. Nestas circunstâncias, eles mostraram que a transferência de energia envolve um mecanismo baseado em interações tipo-onda que dependem da temperatura do feixe, bem como dos auto-campos. Desde que inicia-se com distribuições fora do equilíbrio, a questão da estabilidade não se aplica. Por meio de simulações sistemáticas mostram que a taxa de equiparticionamento em um canal focalizador simétrico depende de um único parâmetro relacionado com a razão entre as forças dos auto-campos e a força focalizadora externa. Mostram ainda que o processo de equiparticionamento para um feixe *rms* inicialmente casado não gera um anel. Este trabalho foi motivado em parte pela observação experimental de Bernal [33] das modulações da densidade em forma de anéis de um feixe de elétrons isotrópico com intensos auto-campos. Uma das propostas principais dessa tese é continuar examinando esta possibilidade de transferência de energia e equiparticionamento via interações coletivas, como aplicado para feixes inicialmente fora do equilíbrio.

1.2.2 O Problema

Com essa introdução estamos aptos a formular as questões que irão ser analisadas nessa tese. Todas já foram mencionadas no texto, abaixo elas serão lembradas.

- A regra da equipartição em feixes é baseada no caos molecular ou na hipótese ergódica em nível microscópico. Ela é justificável em nosso sistema de N -partículas acolisionais? Se sim, para que tipo de feixe e parâmetros do acelerador?
- Nós sabemos que as forças eletromagnetoestáticas do próprio feixe não podem induzir qualquer acoplamento para um feixe circular como considerado por Jameson [12]. Então como as forças eletromagnetoestáticas do próprio feixe podem ser responsáveis pela equipartição (EQP) ?
- A questão então é saber se um sistema anisotrópico de partículas acolisionais acoplado pelas forças de longo alcance dos auto-campos equiparticiona e, em caso afirmativo, como [25].

Nossas sentenças guias para responder essas questões foram expostas no livro de Martin Reiser *Theory and Design of Charged Particle Beams* [9] e serão escritas abaixo:

... discutimos o conceito termodinâmico de energia livre em feixes não-estacionários, ou descasados, e sua possível conversão em energia térmica e incremento da

emitância associados. Este tema é relativamente novo, como a maioria dos resultados de pesquisa obtidos durante os últimos anos e ainda não foi relatado em outros livros. A ênfase nessa seção foi sobre o papel dos auto-campos e a forma da distribuição de partículas. Mesmo se um feixe é casado em um canal de focalização ou acelerador, o crescimento da emitância pode ocorrer se o perfil de densidade inicial difere da distribuição de Maxwell-Boltzmann estacionária. Mas, nossa análise foi limitada a um feixe simétrico no espaço de fase transversal. Em algumas aplicações, a seção transversal do feixe pode ser assimétrica, com diferentes valores no tamanho *rms* do feixe e emitância *rms* nas duas direções ortogonais (por exemplo, em um “sheet beam”) e a teoria, tanto da distribuição de Maxwell-Boltzmann, bem como o formalismo do crescimento da emitância - precisam ser estendidos. O trabalho de Wangler, Lapostolle e Lombardi é um primeiro passo nessa direção [34].

Mais estudos são necessários para correlacionar as escalas de tempo do crescimento da emitância com as não-linearidades devido as forças do campo focalizador e as perturbações da densidade de carga do perfil estacionário. O correto, é voltar para a equação de Fokker-Planck e tentar obter um melhor modelo para o coeficiente de difusão e a taxa de relaxamento, como analisado primeiramente por Bohn [35].

Sabemos que o anel (*halo*) é causado pela existência de energia livre e a interação não-linear das partículas com as oscilações e flutuações de densidade no feixe. ... Será que o feixe alcança um estado final estável, com o caroço (*core*) do feixe termalizado rodeado por um anel? O anel pode ser removido por meio de placas de abertura devidamente colocados sem perturbar o caroço? ... Todas estas questões precisam de mais investigações. ... Finalmente, o objetivo deve ser o de compreender plenamente o comportamento da distribuição de partículas tridimensional com os efeitos dos auto-campos quando a energia livre é criada, o que acarreta no aumento da temperatura do feixe e do seu volume do espaço de fases. Isto se relaciona também com o problema do equiparticionamento...

Agora, com o problema formulado torna-se de fundamental importância descrever uma metodologia para esboçar uma solução para descrever o feixe de partículas carregadas durante o processo de equipartição.

1.2.3 Metodologia

Delineando as respostas as três questões :

- A regra da equipartição em feixes é justificável em nosso sistema de N-partículas acolisionais? Se sim, para que tipo de feixe e parâmetros do acelerador?

Mostraremos que a regra da equipartição é justificável para um modelo de um feixe axialmente longo, de carga q e massa m com velocidade axial de propagação $v_z = \beta_b c \hat{e}_z$, onde c é a velocidade da luz no vácuo e $\gamma_b = 1/\sqrt{1 - \beta_b^2}$ é o fator relativístico, sujeito a um campo magnético soleinoidal $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = B_z \hat{e}_z$, com densidade espacial parabólica no domínio das forças dos auto-campos.

- Nós sabemos que as forças eletromagnetoestáticas do próprio feixe não podem induzir qualquer acoplamento para um feixe circular como considerado por Jameson [12]. Então como as forças eletromagnetoestáticas do próprio feixe podem ser responsáveis pela equipartição (EQP) ?

Mostraremos que considerando uma densidade espacial parabólica

$n_b = 2N_b/\pi r_x r_y [1 - x^2/r_x^2 - y^2/r_y^2]$ onde $r_x = \sqrt{6\langle x^2 \rangle}$ e $r_y = \sqrt{6\langle y^2 \rangle}$ são os semi-eixos *rms* do feixe e N_b é a densidade linear axial de carga do feixe, as forças dos auto-campos produzem um feixe equiparticionado.

- A questão então é saber se um sistema anisotrópico de partículas acolisionais acoplado pelas forças de longo alcance dos auto-campos equiparticiona e, em caso afirmativo, como?

Mostraremos que as ressonâncias entre as próprias partículas e, entre os modos coletivos do feixe e as partículas levam o feixe a se anisotropizar, isto é, tanto a razão do envelope como a das emitâncias são diferentes da unidade. Propomos que esta anisotropia é responsável pelo equiparticionamento do feixe. Sugerimos que para o feixe permanecer equiparticionado ele exibe uma anisotropia macroscópica, que será caracterizada pelas seguintes propriedades : o desenvolvimento de um perfil transversal elíptico, com um maior crescimento do semi-eixo na direção x , o acoplamento das emitâncias transversais, a formação do anel numa direção preferencial, a estacionariedade da temperatura do feixe juntamente com o crescimento da entropia na forma de cascata.

Mas para tornar concretas essas respostas teremos que adotar a seguinte metodologia :

- Resolver a equação de Poisson para um distribuição de cargas espaciais parabólica com o objetivo de se obter as forças dos auto-campos.
- Analisar a dinâmica do envelope e das emitâncias.
- Analisar a dinâmica das partículas e modos coletivos, e calcular suas respectivas frequências.

- Definir as variáveis anisotrópicas e da equipartição e calcular suas evoluções temporais.
- Definir fluxo de calor, temperatura e entropia do feixe e analisar suas respectivas dinâmicas.

Capítulo 2

Dinâmica de Feixes de Partículas Carregadas Durante o Processo de Equipartição

As forças não-lineares eletromagnetoestáticas do próprio feixe, no regime de fortes campos gerados pelo próprio feixe, produzem um padrão de filamentação, que resulta em um feixe constituído por uma região interna, tipo um caroço, o *core* e uma região externa, tipo um anel, o *halo* [36, 37, 38, 39]. Quando o caroço é descasado em um canal focalizador linear, o envelope oscila e as partículas, representadas por partículas testes, oscilam sobre e através da região central do feixe, o caroço. Este mecanismo é chamado de modelo *particle-core* (partícula-caroço), considerando as partículas-testes, inicialmente localizadas fora do caroço. As partículas-testes executam oscilações sobre a ação da força do campo focalizador e dos auto-campos, esta iduzida pelo caroço oscilante, e apresentam vários comportamentos não-lineares, incluindo ressonância paramétrica. Em uma série de análises numéricas e simulações de macro-partículas, foi verificado que a ressonância 2:1 entre a oscilações das partículas-testes e a oscilação do modo simétrico (*breathing*) [13] do caroço é uma das principais causas da formação do anel [40, 41, 42, 43, 44, 45, 46].

O acoplamento entre os graus de liberdade induzidos pelo auto-campos pode ser responsável pelo crescimento da emitância ou pela transferência dessa de um plano de fase para outro. Em uma análise analítica da dinâmica das partículas do feixe, Montague [47] mostrou que as forças dos auto-campos levam as partículas a apresentarem ressonâncias do tipo $2w_x - 2w_y = 0$, onde w é a frequência da partícula, o que acarreta no acoplamento das emitâncias. A teoria das ressonâncias induzidas pelos auto-campos tem sido analisada de forma rigorosa por Hofmann, utilizando a equação de Vlasov [23]. As ressonâncias são importantes em aceleradores lineares como também em aceleradores circulares [48]. Os acoplamentos ressonantes dirigidos pelos auto-campos dependem apenas das razões das emitâncias e das razões entre as direções dos campos focalizadores. Em feixes aniso-

trópicos, a emitância e/ou a força externa do campo focalizador são diferentes entre as duas direções transversais. Efeitos do caroço anisotrópico na dinâmica do anel tem sido analisados por Ikegami [49].

A maioria das análises até o presente sobre o anel do feixe tem considerado feixes com seção transversal circular, sujeitos a uma focalização simétrica. Alguns aspectos novos, causados pela anisotropia, demonstram uma influência do descasamento no tamanho do anel [29, 30, 31, 32]. Na realidade, as oscilações descasadas podem conduzir as partículas do caroço para o anel, como o resultado da interação ressonante entre essas partículas e os modos coletivos descasados do feixe [41]. Até agora, apenas os modos coletivos de segunda ordem, os modos simétricos com formato circular (*breathing modes*) [13], têm sido considerados como possíveis modos descasados; a influência da anisotropia no segundo modo e, modos de maior ordem são esperados serem fatores importantes para a formação do anel.

Recentemente, alguns trabalhos foram feitos nesta direção. Um exemplo, é a análise não-linear do transporte do feixe considerando perturbações não simétricas [50]. Nessa análise foi mostrado que as oscilações simétricas de grande amplitude para um feixe inicialmente, de seção transversal circular acoplam não linearmente com as oscilações do modo anti-simétrico (*mode quadrupole*), oscilações com formato elíptico, de tal forma que o excesso de energia, inicialmente vinculado a oscilação simétrica, torna-se apto a fluir entre ambos modos oscilatórios. Neste caso, o feixe desenvolve uma forma elíptica, com um aumento de seu tamanho numa direção preferencial durante a propagação do feixe. Este é um fenômeno altamente não-linear que ocorre para amplitudes de descasamento do envelope do feixe da ordem de 100% [51].

Na presença do mecanismo de acoplamento não-linear, o feixe pode tornar-se equiparticionado, ou pode alcançar um estado onde os desvios das velocidades são iguais nos dois sentidos. O fato de que as forças do auto-campo podem levar ao equiparticionamento da energia entre os graus de liberdade do feixe deve ser analisado. No regime de fortes auto-campos, as colisões entre as partículas não são muito frequentes para serem responsáveis pelas transferência de energia, entretanto, as ondas dos campos do próprio feixe demonstraram serem as possíveis candidatas para a transferência [32, 52, 53]. Equiparticionamento de feixes anisotrópicos envolve transferência não linear de energia e evolução para um estado de quase-equilíbrio, devido à um tipo de mistura (*phase mixing*) via ressonâncias [54, 55, 56]. Estritamente falando, esse *phase mixing* é um processo reversível governado pela equação de Vlasov.

Nesta tese, estamos trabalhando para quantificar a relação entre a anisotropia do feixe e a equipartição e, como essa é dirigida pelos processos anisotrópicos. Analisando o efeito das ressonâncias partícula-partícula e, modo oscilatório-partícula no feixe, nós mostramos que essas ressonâncias levam o feixe a se anisotropizar, isto é, tanto a razão do envelope quanto a razão das emitâncias são diferentes de um. A conjectura aqui apresentada é que

esta anisotropia é responsável pelo equiparticionamento do feixe.

Em plasmas com funções de distribuição fortemente anisotrópicas, as instabilidades coletivas podem se desenvolver se houver suficiente acoplamento entre os graus de liberdade. Estudos anteriores se focaram principalmente na instabilidade eletrostática anisotrópica do tipo-Harris para feixes [57], onde foi demonstrado que uma rápida instabilidade eletrostática se desenvolve e satura não linearmente, para suficientemente alta temperatura anisotrópica. O termo equipartição se refere a propriedade ergódica de sistemas hamiltonianos multi-dimensionais, que tendem a distribuir-se uniformemente ao longo do espaço de fase na superfície de energia constante. A conservação da energia desempenha um regra fundamental no clássico equilíbrio termodinâmico. O termo “equipartição por turbulência” (TEP) foi introduzido por Yankov [58]. TEP é um estado de relaxamento em que os invariantes lagrangianos que não são destruídos pela turbulência são uniformemente distribuídos. O pressuposto básico é que a mistura (*mixing*) turbulenta causa equipartição do plasma nesses invariantes no espaço de fase acessível ao sistema. Em plasmas físicos, o melhor exemplo conhecido de uma equipartição por turbulência (**TEP**) é o *plateau* quase-linear da função distribuição causado pelo amortecimento de Landau não-linear das ondas do plasma. Em plasmas toroidais a única condição necessária para o estabelecimento do TEP é a conservação de invariantes adiabáticos na escala de tempo da mistura turbulenta. De acordo com a idéia de equipartição por turbulência, o valor destes invariante adiabáticos serão constantes em um tokamak sobre a difusão turbulenta de um grupo de partículas considerado. Exemplos anteriores da equipartição por turbulência em física de plasma foram consideradas por Yankov [59] e Isichenko *et al.* [60]. Um dos objetivos desta tese é caracterizar um estado de equipartição por anisotropias em feixes de partículas carregadas usando a equipartição por turbulência como modelo mental. A equipartição por anisotropias corresponde a uma densidade do espaço de fase que é uniforme sobre a superfície do invariante $\xi = (r_y \epsilon_x)^2 / (r_x \epsilon_y)^2$ onde ξ é a razão entre a energia oscilatória nas direções x e y , r é o envelope e ϵ é a emitância do feixe; uma versão da hipótese ergódica, onde o invariante ξ desempenha o papel que seria da energia conservada [61]. Mas antes de caracterizar esse estado de equipartição por anisotropias teremos que definir o feixe que iremos analisar e construir o modelo físico-matemático que possibilitará a caracterização.

2.1 O Modelo

Consideramos um feixe axialmente longo (*unbunched*) de íons de carga q e massa m propagando-se com velocidade média axial $\beta_b c \hat{\mathbf{e}}_z$ ao longo de um campo focalizador solenoidal uniforme $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$, em que as interações do auto-campo do feixe, o *space-charge* são eletrostáticas. Os parâmetros c e $\gamma_b = 1/\sqrt{1 - \beta_b^2}$ são a velocidade da luz no vácuo e o fator relativístico, respectivamente. Assumimos que o feixe tem uma seção transversal

centrada em $x = y = 0$ e um momento angular canônico médio $P_\theta \equiv \langle xy' - yx' \rangle = 0$, onde x e y são as posições das partículas do feixe. Consideramos que o feixe tem uma densidade espacial não-uniforme e está no regime de fortes campos gerados pelo próprio feixe, com emitância inicial $\epsilon_x = \epsilon_y$.

Como demonstrado por Sacherer [62] e Lapostolle [51], as equações do envelope para um feixe contínuo não se restringem somente, a feixes uniformemente carregados, mas são igualmente válidas para qualquer distribuição de carga com simetria elíptica, desde que o limite externo do feixe e as emitâncias sejam definidos pelos valores das raízes quadráticas médias (*rms*). Assim, podemos considerar um feixe com densidade espacial parabólica $n_b = 2N_b/\pi r_x r_y [1 - x^2/r_x^2 - y^2/r_y^2]$, onde $r_x = \sqrt{6\langle x^2 \rangle}$ e $r_y = \sqrt{6\langle y^2 \rangle}$ são os semi-eixos da elipse *rms*. O parâmetro N_b é a densidade axial linear de cargas.

Para essa densidade parabólica $n_b(x, y)$, a equação de Poisson, $\nabla_\perp^2 \phi = -qn/\epsilon_0$, onde ϵ_0 é a permissividade elétrica no vácuo, constitui a base para se obter as componentes dos auto-campos (supondo a aproximação paraxial [13]). A densidade é assumida nula fora da elipse e a solução foi calculada por Lapostolle [63]. Cálculos similares foram executados pelo autor dessa tese em sua dissertação [13]. O potencial eletrostático no interior do feixe (ϕ_{int}) e no exterior, (ϕ_{ext}) são expressos por:

$$\phi_{int} = \frac{2qN_b}{\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x^2}{r_x(r_x + r_y)} + \frac{y^2}{r_y(r_x + r_y)} - x^4 \left[\frac{2r_x + r_y}{3r_x^3(r_x + r_y)^2} \right] - y^4 \left[\frac{2r_y + r_x}{3r_y^3(r_x + r_y)^2} \right] - x^2 y^2 \left[\frac{1}{r_x r_y (r_x + r_y)^2} \right] \right\}, \quad (2.1)$$

$$\phi_{ext} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \log \left[y^2 + x^2 + \lambda + \sqrt{2y}\Delta^+ + \sqrt{2x}\Delta^- \right] + \frac{q}{2\pi\epsilon_0\lambda^2} \left[y^2 - x^2 - \frac{y}{\sqrt{2}}\Delta^+ + \frac{x}{\sqrt{2}}\Delta^- \right], \quad (2.2)$$

onde $\lambda = r_x^2 - r_y^2$, $\Lambda = \sqrt{(x^2 - y^2 - \lambda^2)^2 + 4x^2 y^2}$ e $\Delta^\pm = \sqrt{\Lambda \pm (x^2 - y^2 \mp \lambda^2)}$.

A órbitas transversais $x(s)$ e $y(s)$ de um feixe de partículas satisfazem as equações paraxiais do movimento [13]:

$$x'' + \kappa_0^2 x = \frac{-q}{m\gamma_b\beta_b^2 c^2} \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$y'' + \kappa_0^2 y = \frac{-q}{m\gamma_b\beta_b^2 c^2} \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (2.4)$$

onde s é a coordenada axial do feixe e as linhas ($''$) representam a segunda derivada em relação a s . O parâmetro $\kappa_0 = qB_z/2\gamma_b\beta_b mc^2$ é o avanço de fase do vácuo por unidade de comprimento axial e mede a intensidade do campo focalizador.

O envelope do feixe é uma seção transversal elíptica onde o raio r_{ms} , r_j (j representa as direções x ou y) obedece a equação KV (Kapchinskij-Vladimirskij) do envelope- r_{ms} [64] :

$$r_j'' + \kappa_0^2 r_j - \frac{2K}{r_x + r_y} - \frac{\epsilon_j^2}{r_j^3} = 0. \quad (2.5)$$

Aqui, $K = q^2 N_b / \pi^2 \epsilon_0 \gamma_b^3 \beta_b^2 m c^2$ é a perveância adimensional do feixe e ϵ_j é a emitância r_{ms} ao longo do plano j .

A emitância, $\epsilon_j = \sqrt{\langle j^2 \rangle \langle j'^2 \rangle - \langle j j' \rangle^2}$, pode ser calculada analiticamente, seguindo um modelo proposto por Lapostolle *et al.* [34] para as forças não-lineares eletromagnetoestáticas do próprio feixe, onde essas forças causam uma mudança nas componentes do momentum, caracterizada pelo produto da força pela quantidade de tempo durante o qual a força age. A força depende da distribuição espacial das partículas, e das coordenadas das partículas em que a força age. Em geral, essas variações nas componentes do momentum modificam a distribuição no espaço de fases das partículas. A partir do potencial eletrostático, o impulso do momentum transversal pode ser calculado e isso resulta em uma nova distribuição no espaço de fases e uma nova emitância r_{ms} [65, 66]. Por exemplo, no plano x ; a variação na componente do momentum é $\Delta p_x = q E_x L / v_b$, onde $E_x = \partial \phi^{int} / \partial x$ é o campo elétrico no interior do feixe, v_b é a velocidade do feixe e L é o comprimento do *drift space* [9]. O impulso pode ser expresso como uma variação no ângulo divergente, dado na aproximação paraxial não-relativística por $\Delta x' = q E_x L / m_b v_b^2$. Supondo que o feixe inicial seja idealizado e descreva uma linha reta no espaço de fases. Sabendo-se que as posições são assumidas permanecerem fixas e que a divergência é $x' = x / r_x + q E_x L / m_b v_b^2$, então o segundos momentos da distribuição de partículas podem ser calculados das expressão para x e x' , e a emitância r_{ms} para a densidade parabólica pode ser calculada.

Do potencial eletrostático (2.1), calculamos o campo elétrico e assim, o ângulo divergente no plano x pode ser expresso por:

$$x' = k_1 \frac{x}{r_x} - k_2 \frac{x^3}{r_x^3} - k_3 \frac{x y^2}{r_x r_y^2} \quad (2.6)$$

onde $k_1 = 1 + \frac{4KL}{[r_x + r_y]}$, $k_2 = \frac{4KL}{3} \frac{[2r_x + r_y]}{[r_x + r_y]^2}$ e $k_3 = 4KL \frac{r_y}{[r_x + r_y]^2}$. Para calcular a emitância r_{ms} nós temos que calcular os segundos momentos da distribuição. Usando a expressão para x' , podemos escrever :

$$\langle x'^2 \rangle = k_1^2 \frac{\langle x^2 \rangle}{r_x^2} + k_2^2 \frac{\langle x^6 \rangle}{r_x^6} + k_3^2 \frac{\langle x^2 y^4 \rangle}{r_x^2 r_y^4} - 2k_1 k_2 \frac{\langle x^4 \rangle}{r_x^4} - 2k_2 k_3 \frac{\langle x^4 y^2 \rangle}{r_x^4 r_y^2} - 2k_1 k_3 \frac{\langle x^2 y^2 \rangle}{r_x^2 r_y^2} \quad (2.7)$$

e

$$\langle x x' \rangle = k_1 \frac{\langle x^2 \rangle}{r_x^2} - k_2 \frac{\langle x^4 \rangle}{r_x^3} - k_3 \frac{\langle x^2 y^2 \rangle}{r_x r_y^2} \quad (2.8)$$

e a emitância r_{ms} será:

$$\epsilon_x = \frac{k_2^2}{r_x^6} [\langle x^2 \rangle \langle x^6 \rangle - \langle x^4 \rangle^2] + \frac{k_3^2}{r_x^2 r_y^4} [\langle x^2 \rangle \langle x^2 y^4 \rangle - \langle x^2 y^2 \rangle^2] + \frac{2k_2 k_3}{r_x^4 r_y^2} [\langle x^2 \rangle \langle x^4 y^2 \rangle - \langle x^4 \rangle \langle x^2 y^2 \rangle] \quad (2.9)$$

Para uma distribuição de densidade parabólica de um feixe elíptico com semi-eixos r_x e r_y nós temos:

$$\langle x^n y^m \rangle = \frac{2}{\pi r_x r_y} \int_{-r_x}^{r_x} x^n dx \int_{-r_y \sqrt{1-x^2/r_x^2}}^{r_y \sqrt{1-x^2/r_x^2}} \left[1 - \frac{x^2}{r_x^2} - \frac{y^2}{r_y^2} \right] y^m dy \quad (2.10)$$

A integral sobre y é:

$$\int_{-r_y \sqrt{1-x^2/r_x^2}}^{r_y \sqrt{1-x^2/r_x^2}} \left[1 - \frac{x^2}{r_x^2} - \frac{y^2}{r_y^2} \right] y^m dy = 2r_y^{m+1} \left[1 - \frac{x^2}{r_x^2} \right]^{\frac{m+3}{2}} \left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3} \right] \quad (2.11)$$

A integral sobre x pode ser calculada se fizermos a seguinte substituição $\mu = x/r_x$ e $p = m + 4$ e assim teremos:

$$\int_{-r_x}^{r_x} \left[1 - \frac{x^2}{r_x^2} \right]^{\frac{m+3}{2}} x^n dx = 2r_x^{n+1} \int_0^1 \left[1 - \mu^2 \right]^{\frac{p-1}{2}} \mu^n d\mu = r_x^{n+1} B \left[\frac{n+1}{2}, \frac{p+1}{2} \right] \quad (2.12)$$

onde B é a função beta. A função beta pode ser escrita como:

$$B \left[\frac{n+1}{2}, \frac{p+1}{2} \right] = \frac{\Gamma \left[\frac{n+1}{2} \right] \Gamma \left[\frac{p+1}{2} \right]}{\Gamma \left[\frac{n+p}{2} + 1 \right]} \quad (2.13)$$

onde Γ é a função gamma. Assim

$$\langle x^n y^m \rangle = \frac{4r_x^n r_y^m}{\pi} \left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3} \right] \frac{\Gamma \left[\frac{n+1}{2} \right] \Gamma \left[\frac{m+5}{2} \right]}{\Gamma \left[\frac{n+m}{2} + 3 \right]} \quad (2.14)$$

Nós podemos expressar esse resultado numa forma simétrica usando uma forma recursiva para a função gamma :

$$\left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3} \right] \Gamma \left[\frac{m+5}{2} \right] = \frac{1}{2} \Gamma \left[\frac{m+1}{2} \right] \quad (2.15)$$

Assim teremos :

$$\langle x^n y^m \rangle = \frac{2r_x^n r_y^m}{\pi} \frac{\Gamma \left[\frac{n+1}{2} \right] \Gamma \left[\frac{m+1}{2} \right]}{\Gamma \left[\frac{n+m}{2} + 3 \right]} \quad (2.16)$$

Essa fórmula leva-nos aos seguintes resultados para a distribuição parabólica : $\langle x^2 \rangle = r_x^2/6$, $\langle x^4 \rangle = r_x^4/16$, $\langle x^6 \rangle = r_x^6/32$, $\langle x^2 y^2 \rangle = r_x^2 r_y^2/48$, $\langle x^2 y^4 \rangle = r_x^2 r_y^4/160$ e $\langle x^4 y^2 \rangle =$

$r_x^4 r_y^2 / 160$. Aplicando esses resultados para os termos na expressão para a emitância-*rms* (2.9) obtemos :

$$\epsilon_x = \frac{1}{90} \sqrt{15} KL \left\{ \frac{\left(\frac{r_x}{r_y}\right)^2 \left[5 \left(\frac{r_x}{r_y}\right)^2 + 2 \frac{r_x}{r_y} + 5 \right]}{\left(1 + \frac{r_x}{r_y}\right)^4} \right\}^{1/2} \quad (2.17)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{90} \sqrt{15} KL \left\{ \frac{\left(\frac{r_y}{r_x}\right)^2 \left[5 \left(\frac{r_y}{r_x}\right)^2 + 2 \frac{r_y}{r_x} + 5 \right]}{\left(1 + \frac{r_y}{r_x}\right)^4} \right\}^{1/2} \quad (2.18)$$

Os resultados obtidos para a emitância-*rms* no plano x são facilmente transformados para o plano y trocando r_x por r_y . Pode-se notar que a emitância depende da perveância K do feixe e da razão dos semi-eixos. O primeiro termo corresponde ao efeito de filamentação causado pelo termo de quarta ordem do potencial eletrostático. O segundo termo origina-se do acoplamento, ou seja, a dependência da componente x do potencial da coordenada y , ou vice-versa, que produz a dispersão da filamentação inicial. O último termo é um termo cruzado entre o termo da filamentação e o termo do acoplamento.

A distribuição KV é considerada como a base teórica do modelo partícula-carço (*particle-core*), devido as forças dos auto-campos serem lineares. No entanto, não há dúvida de que feixes reais intensos contêm uma natureza completamente não-linear. Pode-se, assim, ser razoável construir um alternativo modelo partícula-carço com um potencial não-linear do carço, considerando que o modelo seja uma aproximação. Deste ponto de vista, propomos aqui um carço parabólico como uma hipótese simplificadora. Em nosso modelo partícula-carço, o carço é descrito pela equação *rms* do envelope (2.5) e as partículas do anel são modeladas usando partículas-teste. Estas estão submetidas a uma força externa e a força não-linear eletromagnetoestática do próprio feixe dependente do tempo associada ao carço parabólico. Assumimos que a densidade parabólica é aproximadamente mantida, mesmo com o descasamento do feixe, portanto, a distribuição espacial permanece inalterada durante a propagação do feixe. As partículas-teste não afetam o movimento do carço [67] e são descritas pelas equações (2.3) e (2.4), tomando os potenciais eletrostáticos ϕ_{int} , para o interior do feixe e ϕ_{ext} , para o exterior do feixe. Note que o modelo dessa forma, não é auto-consistente.

Com a definição do tipo de feixe a ser analisado e com a construção do modelo físico-matemático para esse feixe, estamos aptos a analisar a propagação desse. O fenômeno observado, logo, no início dessa propagação será a transição do perfil isotrópico do feixe para um perfil anisotrópico [68, 69].

2.2 Transição do Feixe Isotrópico para Anisotrópico ¹

É fácil verificar que há uma solução particular da equação do envelope (2.5) para a qual $r_j(s) = r_{b0} = [(K + (K^2 + 4\kappa_0^2\eta^2)^{1/2}) / 2\kappa_0^2]^{1/2}$, onde $\eta = \epsilon_x/\epsilon_y$ é a razão entre as direções x e y da emitância. Essa corresponde à chamada solução casada para o qual o feixe circular de raio r_{b0} preserva a sua forma durante o transporte ao longo do canal focalizador. Para a posterior análise numérica, nós transformamos as equações para uma forma adimensional introduzindo as seguintes variáveis adimensionais: $\tau = \kappa_0 s$ para a variável independente, $\tilde{r}_x = \sqrt{\kappa_0/\epsilon_y} r_x$ e $\tilde{r}_y = \sqrt{\kappa_0/\epsilon_y} r_y$ para o envelope, $\tilde{x} = \sqrt{\kappa_0/\epsilon_y} x$ e $\tilde{y} = \sqrt{\kappa_0/\epsilon_y} y$ para a partícula-teste, e $\tilde{K} = K/\epsilon_y \kappa_0$ para a perveância reescalada. Introduzimos também as seguintes variáveis anisotrópicas: a razão das emitâncias $\eta = \epsilon_x/\epsilon_y$ e a razão do envelope $\chi = r_x/r_y$; e ainda o fator do descasamento $\nu = r_x/r_{b0} = r_y/r_{b0}$.

O estado inicial do feixe será caracterizado por: $\tilde{K} = 3$, $\kappa_0 = 1$, $\nu = 2.4$, $L = 2 r_{j0} = \nu r_{b0}$, $r_{x0} = r_{y0}$ e $\eta = 1$. Primeiro integramos, numericamente, usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, a equação do envelope (2.5) até $s = 50$. A correspondente evolução da emitância-*rms* ($\epsilon_j(s)$) é calculada através da eq. (2.17) e (2.18). Para analisar os modos oscilatórios do feixe é conveniente introduzir novas variáveis canônicas definidas como $X_s = (r_{x_e} + r_{y_e})/2$ e $X_a = (r_{x_e} - r_{y_e})/2$, onde $r_{x_e} = r_x - r_{b0}$ e $r_{y_e} = r_y - r_{b0}$. Note que X_s descreve oscilações onde $r_x(s)$ e $r_y(s)$ oscilam em fase: modo simétrico. A variável X_a descreve oscilações onde $r_x(s)$ e $r_y(s)$ oscilam fora de fase: modo anti-simétrico [50].

O que pode ser observado, facilmente, na figura (2.1) é que o feixe desenvolve uma forma elíptica, com um incremento ao longo da direção x . Este efeito ocorre devido ao grande descasamento inicial do feixe, que acopla os modos oscilatórios do feixe [50]. Isso leva à uma perturbação nas forças eletromagnetoestáticas do próprio feixe, que induz o acoplamento entre os graus de liberdade e a ressonância entre os modos oscilatórios [29, 30, 31, 53]. Tal ressonância [23] é observada para feixes *rms* descasados quando condições de ressonância interna são obedecidas entre os planos. O descasamento do feixe é uma energia em excesso no sistema. Em geral, esse excesso é redistribuído como energia oscilatória nos graus de liberdade do sistema. O auto-campo acopla alguns graus de liberdade, causando uma ressonância entre eles, e possibilitando a troca de energia entre os graus de liberdade relevantes. Na Fig. (2.1), gráfico inferior, observa-se um aumento da amplitude de oscilação dos modos e, uma oscilação em fase de ambos, caracterizando uma ressonância entre o modo simétrico e o modo anti-simétrico. Nós analisamos esta ressonância por meio do cálculo numérico das frequências adimensionais dos modos realizando uma análise de Fourier. As frequências associadas com o modo simétrico e o modo anti-simétrico correspondem ao máximo da transformada de Fourier. Detalhes sobre a aplicação da

¹Trabalho laureado com a menção honrosa no PAC07 (Particle Accelerator Conference 2007) Student Poster Award, IEEE-NPSS.

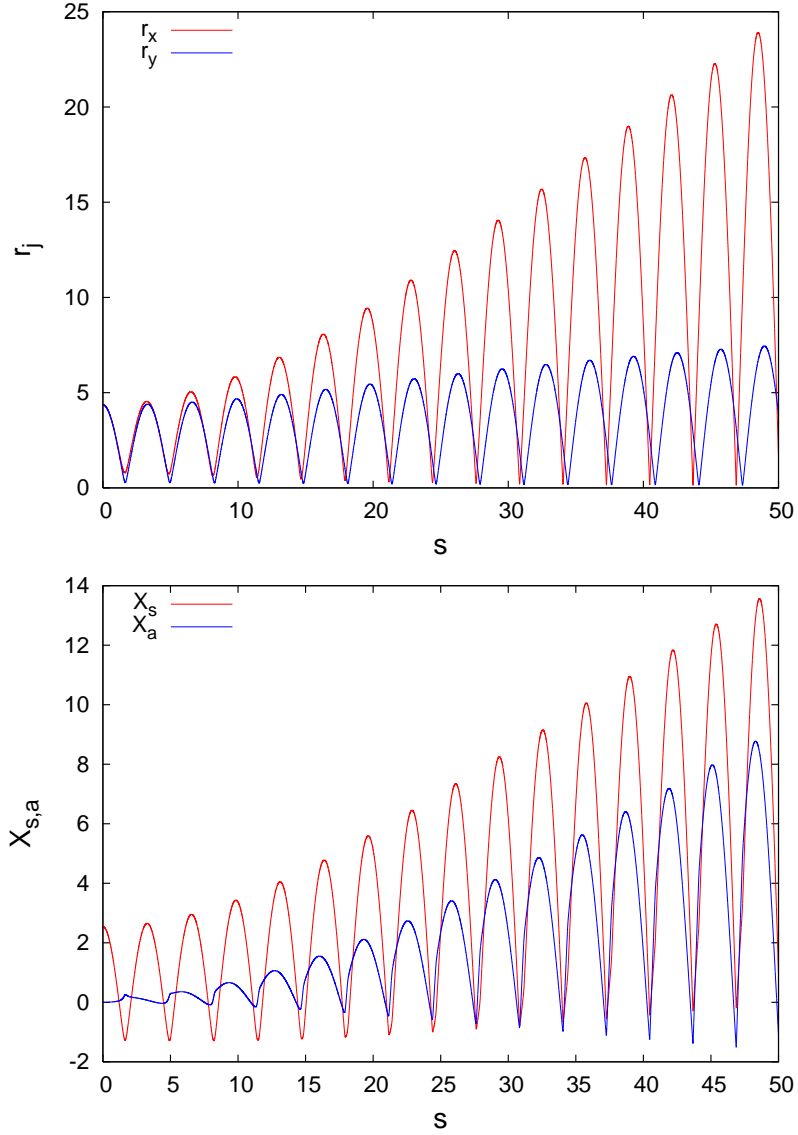


Figura 2.1: O gráfico superior mostra a evolução do envelope obtida pela integração direta da eq. (2.5). As variáveis r_x e r_y são representadas pelas linhas vermelha e azul, respectivamente. O gráfico inferior ilustra a evolução dos modos oscilatórios do feixe. As variáveis X_s e X_a estão representadas pelas linhas vermelha e azul, respectivamente.

transformadas de Fourier podem ser encontrados nas seguintes referências [70, 71]. As frequências do modo simétrico, ω_{X_s} , e do anti-simétrico, ω_{X_a} , são $\omega_{X_s} = \omega_{X_a} = 2,01334$.

Na análise da dinâmica da emitância pelas equações (2.17) e (2.18), as emitâncias transversais iniciais são $\epsilon_{x_0} = \epsilon_{y_0} = 0.22360$. Os resultados são mostrados na figura (2.2). Observa-se o acoplamento das emitâncias devido as ressonâncias entre as partículas do feixe, que são um efeito do auto-campo [47, 72, 73]. Este acoplamento é caracterizado por uma troca da emitância entre ambas direções x e y . O auto-campo afeta o campo de forças que é sentido pelas partículas de tal forma que ele se torna não-linear e de-

pendente da distribuição da densidade do feixe. Além disso, a troca da emitância entre as direções requer um acoplamento ressonante que pode tornar-se possível somente se certa condição ressonante entre as partícula for obedecida. Neste cenário, uma aproximação simplificada, consiste da seguinte condição de ressonância $l\omega_x - m\omega_y = 0$ onde l e m são números inteiros, como sugerido por Lagniel e Nath [25]. Neste caso, ω_x e ω_y são as frequências de partícula-única ao longo das direções x e y , respectivamente. Esse acoplamento da emitância é uma expressão da troca de energia entre ambas direções, que é uma característica comum em sistemas acoplados linearmente, isto é $l = m = 1$. Aqui, as frequências adimensionais ω_x e ω_y de 2500 partículas-teste foram computadas numericamente, usando a transformada de Fourier. As partículas-teste foram lançadas, inicialmente, ao longo dos eixos x e y no interior do feixe entre $0.01r_j$ e $0.7r_j$, espaçadas por $0.0004r_j$ ao longo das direções x e y . Observou-se que 2455 partículas adquiriram a mesma frequência $\omega_x = \omega_y = 1,05461$ em ambas direções. Assim, pode-se argumentar que essas 2455 partículas-teste estão sujeitas à condição de ressonância $\omega_x - \omega_y = 0$. Estes resultados estão ilustrados no histograma da figura (2.3). Desde que essa grande fração de partículas em ressonância gera o acoplamento da emitância, uma forte correlação entre as posições e os momentos das partículas origina-se. As oscilações da emitância são agora dirigidas pelas variações da força do auto-campo devido a compressão e expansão do feixe. As rápidas oscilações da emitância são devidas à coerente oscilações de plasma transversal no feixe e são uma expressão da troca de energia periódica entre a energia potencial e cinética.

Na fig. 2.2, observa-se também um aumento da amplitude de oscilação da emitância. Este efeito é uma consequência direta das não-linearidades da oscilação das partículas em torno de suas posições de equilíbrio. O excesso de energia é necessário a fim de conduzir estas não-linearidades, o que, por sua vez, são causadas pela anisotropia da energia entre os graus de liberdade. A figura 2.2 (gráfico inferior) mostra ϵ_x e ϵ_y versus a razão do envelope r_x/r_y , onde ϵ_x aumenta e ϵ_y diminui com o aumento de r_x/r_y mas ϵ_y aumenta e ϵ_x diminui com o decréscimo r_x/r_y . O fato de que ϵ_x aumenta à medida que o comprimento do semi-eixo aumenta pode parecer contra-intuitivo. Este efeito decorre do auto-campo, que aumenta à medida que diminui o semi-eixo do feixe. Isso pode ser explicado lembrando que as componentes do campo e portanto, a divergência em x e y , são insensíveis ao envelope, da seguinte forma : um feixe elíptico com uma densidade parabólica apresenta os campos nas bordas sobre os eixos maiores e menores não idênticos. Neste caso, temos : $E_x = \partial\phi^{in}/\partial x \rightarrow E_x(r_x, 0) = \frac{2q}{\pi\epsilon_0(r_x+r_y)} \left[1 - \frac{2+r_y/r_x}{3(1+r_y/r_x)} \right]$ e $E_y = \partial\phi^{in}/\partial y \rightarrow E_y(0, r_y) = \frac{2q}{\pi\epsilon_0(r_x+r_y)} \left[1 - \frac{2r_y/r_x+1}{3(1+r_y/r_x)} \right]$. Pode-se observar que, embora estes campos não são exatamente iguais (exceto quando o feixe é redondo) eles apresentam magnitudes comparáveis. No entanto, a emitância é uma área no espaço de fases e é essencialmente a propagação da divergência multiplicado pela extensão espacial do plano no espaço de fase em que o feixe está. Portanto, se os *kicks* da divergência são de intensidade comparável em ambos os

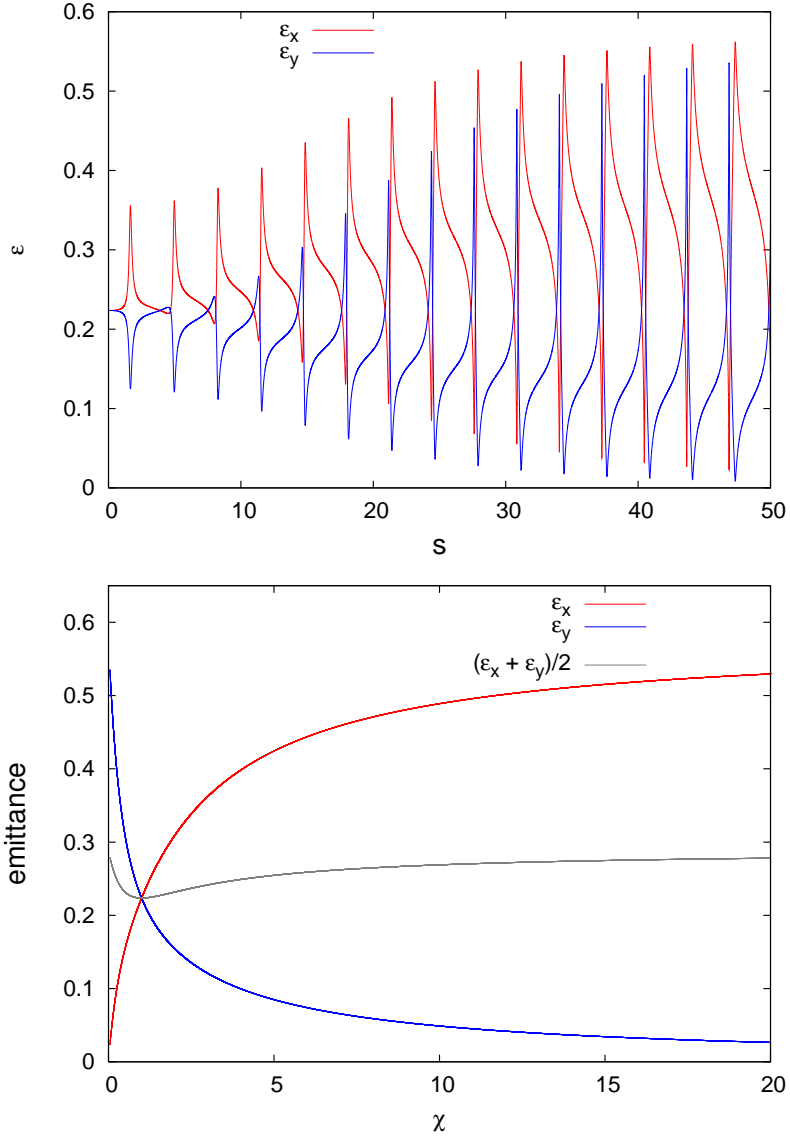


Figura 2.2: Evolução da emitância (gráfico superior) obtida das equações (2.17) e (2.18). ϵ_x e ϵ_y são representadas pelas linhas vermelha e azul, respectivamente. A emitância e a soma das emitâncias transversais (gráfico inferior) em função da razão do envelope $\chi = r_x/r_y$. ϵ_x , ϵ_y e $(\epsilon_x + \epsilon_y)/2$ versus χ estão representadas pelas linhas vermelha, azul e cinza, respectivamente. Observe que $(\epsilon_x + \epsilon_y)/2$ mostra uma resposta mais suave em relação a variável anisotrópica (χ).

planos, a emitância torna-se maior no plano, que apresenta o maior envelope.

O auto-campo é responsável por induzir ondas no feixe, um efeito coletivo. Essas ondas são caracterizadas pela frequência de plasma, e seu efeito é observado na evolução assintótica do envelope e da emitância, como mostrado na Figura 2.4. O crescimento exponencial do envelope e a troca entre as emitâncias é caracterizada pela instabilidade do modo coletivo de oscilação do feixe, denominado modo inclinado *tilting mode*, caracterizado por

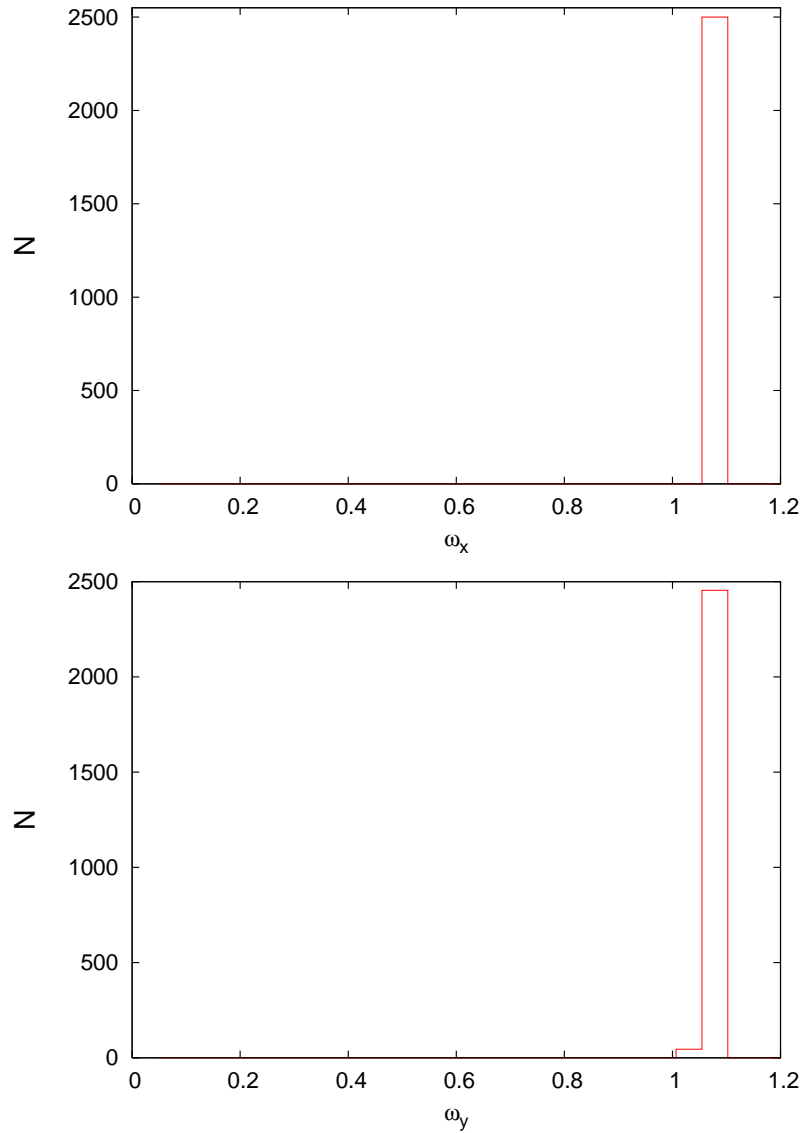


Figura 2.3: O histograma das frequências ω_x e ω_y de 2500 partículas-teste, calculadas numericamente através da transformada de Fourier. As partículas-teste foram lançadas ao longo de x e y em regiões específicas no interior do feixe (entre $0.01r_x$ e $0.7r_x$ espaçadas por $0.0004r_x$ ao longo da direção x , e também entre $0.01r_y$ e $0.7r_y$ espaçadas por $0.0004r_y$ ao longo da direção y). Os valores obtidos para as frequências podem ser encontrados no texto.

apresentar um crescimento exponencial da seção transversal do feixe no regime de fortes auto-campos [74, 23]. A distribuição parabólica é caracterizada pelo aparecimento desse modo onde as emitâncias são periodicamente transferidas entre x e y , semelhante as ressonância de segunda ordem produzidas pelas inclinações dos quadrupolos focalizadores. Esta instabilidade do modo inclinado nas direções x e y , obviamente, requer uma certa quantidade de anisotropia. Segundo, resultados anteriores do autor [50], o modo simétrico é excitado somente com perturbações simétricas, enquanto o modo anti-simétrico é exci-

tado somente com perturbações assimétricas. Mas quando a anisotropia é considerada, este não é o caso. Encontramos uma mistura dos modos. No nosso modelo os modos estão em ressonância e o auto-campo induz uma deslocamento coerente das condições de ressonância $l\omega_x - m\omega_y + \Delta\omega = 0$, desde que o conjunto de partículas responda a ressonância de uma forma coerente. Assim, o sistema pode seguir dois comportamentos distintos: quando $\Delta\omega = 0$ o feixe não é afetado pelo auto-campo [75], ao passo que quando $\Delta\omega \neq 0$ os efeitos do auto-campo são observados, e o modo inclinado é ativado [76]. Nesta situação, a maioria das partículas-teste lançadas ao longo dos eixos x e y dentro do feixe estão em um estado de ressonância. Neste modelo, o termo responsável por esta ressonância, não é a inclinação do quadrupolo como em síncrotrons, mas a força do auto-campo causada pelo crescimento exponencial da seção transversal.

Ressonâncias não-lineares podem, eventualmente, levar ao crescimento da emitância-*rms* lançando mais e mais partícula para fora do caroço. Entretanto, o anel não é formado por um efeito coletivo envolvendo todas as partículas do caroço mas, pela interação ressonante entre as partículas e os modos descasados do feixe. Estas ressonâncias permitem a transferência do excesso de energia de um plano para outro [29, 30, 31]. Como mostrado abaixo, essa troca ocorre com a formação do anel ao longo de uma direção preferencial.

Para entender como ocorre a formação do anel, diferentes ressonâncias são investigadas no feixe. As frequências computadas $\omega_{X_s} = \omega_{X_a} = 2.01334$ para o modo simétrico e o modo anti-simétrico, respectivamente, representam uma ressonância (1 : 1). Da análise de Fourier das 2500 partículas-teste mostramos que 2455 delas obedecem à condição de ressonância $\omega_x - \omega_y = 0$, com $\omega_x = \omega_y = 1.05461$, enquanto que as outras 45 tem $\omega_y = 1,00667$. A dominância da ressonância $\omega_x/\omega_y = 1$ gera uma significativa troca entre as emitâncias [77]. Isso cria tipo uma barreira entre a região interna do caroço e a região fora dele. A força de acoplamento do auto-campo é responsável pela transferência de energia das oscilações do caroço para as oscilações das partícula, acarretando a ressonância (2:1) partícula-caroço em ambos modos do feixe, o modo simétrico e o modo anti-simétrico, mas apenas na direção y das partículas-teste [45]. Como consequência, a formação do anel ocorre ao longo da direção y , conforme ilustrado na figura. 2.5.

Como mostrado nos parágrafos anteriores há anisotropias no feixe de partículas carregadas [78]. É mostrado que as ressonâncias partícula-partícula e partícula-modos oscilatórios do feixe levam esse a se anisotropizar, ou seja, a razão entre os envelopes $\chi = r_x/r_y$ e as emitâncias $\eta = \epsilon_x/\epsilon_y$ são diferentes da unidade. Essa anisotropia macroscópica é caracterizada pelas seguintes propriedades : o desenvolvimento de uma superfície elíptica com o incremento de um semi-eixo específico, a presença de um acoplamento entre as emitâncias transversais e a formação do anel ao longo de uma direção preferencial. Mas será que existiria um relação entre essas anisotropias e o possível equiparticionamento do feixe?

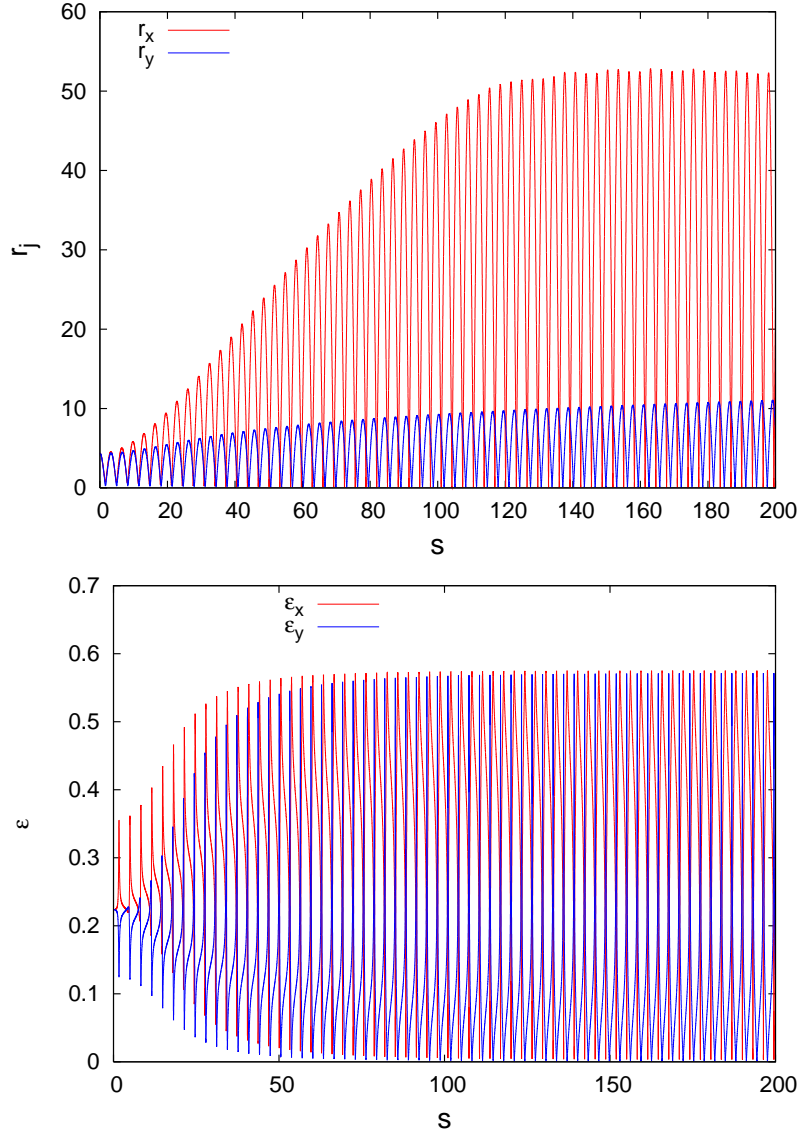


Figura 2.4: Evolução assintótica dos envelopes (gráfico superior) e emitâncias (gráfico inferior) obtidas das equações (2.5) e, (2.17) e (2.18), respectivamente. r_x (gráfico superior), ϵ_x (gráfico inferior) e r_y (gráfico superior) ϵ_y (gráfico inferior) estão representados pelas linhas vermelha e azul, respectivamente.

2.2.1 Equipartição via Anisotropias

Para um grande descasamento- rms do feixe com uma razão inicial $\chi = 1$ entre os envelopes, a razão da energia oscilatória nas direções x e y , dada por $\xi = (r_y \epsilon_x)^2 / (r_x \epsilon_y)^2 = 1$ [12, 79], mantém-se constante. Isso pode ser explicado, desde que $\xi = \eta^2 / \chi^2$ e para o nosso modelo, usando as equações (2.17) e (2.18) temos $\chi = \eta$. Como ilustrado na figura. 2.6, as quantidades χ e η variam de forma descontínua, o que caracteriza um feixe anisotrópico [68, 57]. A anisotropia conduzida pelo acoplamento ressonante [80, 81] na

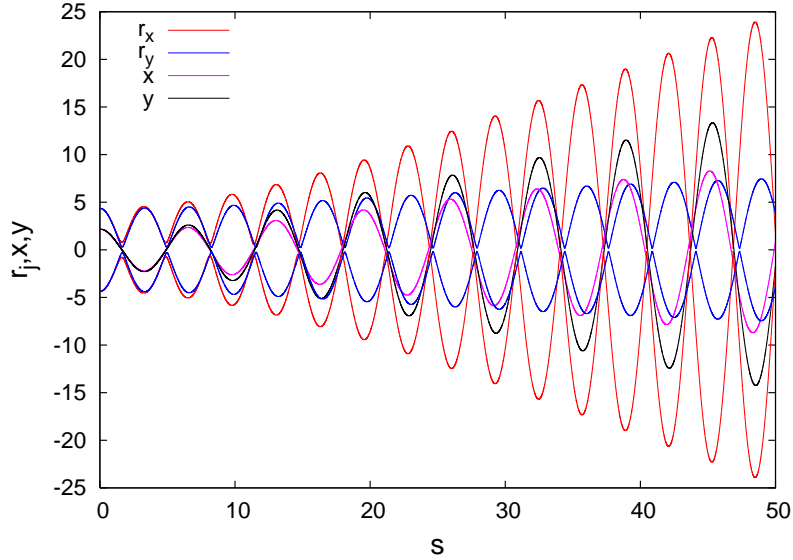


Figura 2.5: Evolução dinâmica de uma partícula-teste. Assumimos, inicialmente, que $x = 0.5r_x$ e $y = 0.5r_y$. As variáveis x e y da partícula-teste são representadas pelas linhas pretas e rosa, respectivamente. A evolução dos envelopes r_x e r_y são representados pelas linhas vermelha e azul, respectivamente.

presença das forças não-lineares do auto-campo tem sido sugerida como uma possível abordagem para o problema da equipartição em feixes de partículas carregadas [32, 25, 53], uma vez que as colisões não são as responsáveis pela transferência de energia em linacs [82]. As oscilações coletivas da densidade de carga seria o mecanismo responsável pela transferência [33], pois elas criam forças não-lineares, similares aos sextupólos magnéticos, que levam ao acoplamento ressonante e a equipartição, como observado por Kandrup *et al* [55].

As forças do auto-campo não-lineares levam ao equiparticionamento da energia entre os graus de liberdade. No regime de fortes campos gerados pelo feixe as colisões coulombianas não são responsáveis pela transferência de energia entre os graus de liberdade. No entanto, demonstrou-se que as ondas dos auto-campos são as candidatas para produzir o acoplamento entre os graus de liberdade [33, 53]. O equiparticionamento de um feixe anisotrópico envolve uma transferência de energia não-linear e a consequente evolução para um estado de quase-equilíbrio, devido a mistura por ressonância (*resonant phase mixing*) [55, 54]. Utilizamos a transformada de Fourier para calcular numericamente algumas frequências do feixe. As frequências do modo simétrico e anti-simétrico foram determinadas como $\omega_{X_s} = \omega_{X_a} = 2.01334$. O fato de ambos os modos terem a mesma frequência significa que estão em um estado de ressonância. Esta ressonância do tipo modo-modo é responsável por gerar a forma elíptica do feixe e pelo aumento do semi-eixo ao longo da direção x [23]. As frequências ω_x e ω_y de 2500 partículas-teste foram numericamente calculados, resultando em 2455 delas em uma condição de ressonância caracterizada por $\omega_x - \omega_y = 0$. Esta é a causa do acoplamento das emitâncias. As demais 45 partículas-teste

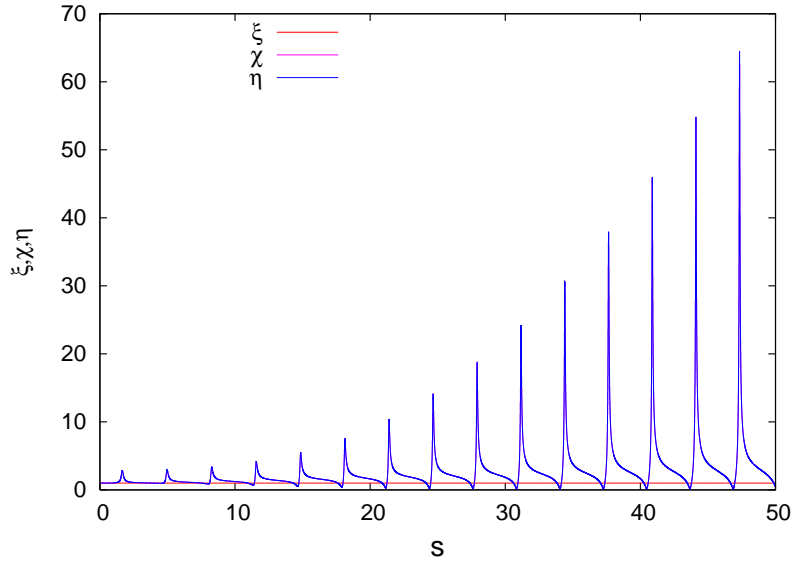


Figura 2.6: A evolução da dinâmica da razão das energias oscilatórias ξ e das variáveis anisotrópicas χ e η . A quantidade ξ é representada pela linha vermelha, enquanto χ e η são representados pela linha azul - χ aparece sobreposto a η .

foram observadas com $\omega_y = 1.00667$. Assim a ressonância do tipo particle-carroço (2 : 1) está presente em ambos modos oscilatórios do feixe, mas apenas na direção y [49]. Deste modo, o anel é formado ao longo da direção y . Tal anisotropia guiada pelas ressonâncias na presença das forças não-lineares do auto-campo conduz ao equiparticionamento da energia do feixe [77].

Conseqüentemente, a seqüência lógica dessa tese consiste em modelar a dinâmica e a termodinâmica do feixe durante esse processo de equiparticionamento [83]. As áreas máximas que o feixe ocupa no espaço de fases podem ser definidas, e usando o método de Lyapunov [84], equações dinâmicas para essas áreas são deduzidas. Através dessas áreas máximas uma definição de fluxo de calor entre direções se torna possível e uma equação dinâmica para a variável anisotrópica é dedutível. Em termos termodinâmicos, uma temperatura pode ser definida para o feixe e uma equação dinâmica para a entropia do feixe é analisada.

Capítulo 3

Termodinâmica de Feixes de Partículas Carregadas Durante o Processo de Equipartição

A fim de compreender o comportamento dinâmico inicial de um feixe anisotrópico, em particular para estudar possíveis mecanismos de equipartição conectado com o espaço de fases do feixe, temos de saber como podemos computar as variáveis que caracterizam o feixe anisotrópico no espaço de fases. A equipartição se refere à propriedade ergódica de sistemas Hamiltonianos multi-dimensionais. A dinâmica é descrita por uma trajetória no espaço de fases e se o sistema tem algumas integrais de movimento, a trajetória é confinada no subespaço que conserva o valor dessas integrais. O sistema é ergódico se a média temporal de qualquer quantidade dinâmica é igual à média sobre o subespaço, que é referido como a região ergódica. A região ergódica, em sistemas hamiltonianos é a superfície do espaço de fases de energia constante, isto é, a equipartição ocorre quando as partículas do sistema tem a mesma energia média na superfície invariante. As teorias estatísticas de sistemas caóticos são geralmente, baseadas no Teorema de Liouville e no pressuposto da equipartição, e também estão sujeitas aos vínculos impostos pelos invariantes do sistema. Se somente os invariantes do sistema são a energia total e o número total de partículas, a hipótese da equipartição leva a teoria da mecânica estatística dos sistemas em equilíbrio térmico [21, 85].

Se a dinâmica é caótica em algum subespaço do espaço de fases, o sistema pode ser considerado ergódico neste subespaço [20, 86]. Para alguns sistemas em que os fenômenos de turbulência ocorrem, a energia não é conservada. No entanto, pode existir outras quantidades invariantes. Neste caso, as flutuações podem conduzir o sistema para a equipartição por turbulência (TEP) em uma hipersuperfície no espaço de fase, que é definida por esses invariantes [87]. A equipartição por turbulência corresponde a uma densidade do espaço de fase que é uniforme em um dos invariantes adiabáticos do sistema. É uma

versão da hipótese ergódica, onde os invariantes adiabáticos jogam o papel da energia não conservada. A aplicabilidade da mecânica estatística para a auto-consistência do plasma turbulento não está bem formalizada, mas algumas previsões desta abordagem estão, em termos qualitativos de acordo com os experimentos [59]. No estado da equipartição por turbulência, a densidade e a temperatura do plasma são homogêneos, e não há fluxo de partículas ou de energia. Tal estado é, marginalmente, estável para os modos, que são potencialmente responsáveis por condizirem o plasma para este estado.

O feixe evolui na direção de um quase-equilíbrio, em que as órbitas das partículas preenchem um invariante no espaço de fase. A dinâmica transiente reflete a ação dos modos do auto-campo. Nós podemos definir este subespaço do espaço de fase por “ ξ ”, onde ξ é a razão das energias oscilatórias nas direções x e y . Ao contrário da equipartição da energia em sistemas termodinâmicos conservativos, a equipartição por anisotropias descreve um sistema fora do equilíbrio, como o feixe de íons de alta intensidade considerado aqui, inicialmente com um grande descasamento-*rms*. Então a equipartição por anisotropias corresponde a uma densidade uniforme no espaço de fase da superfície invariante $\xi = (r_y \epsilon_x)^2 / (r_x \epsilon_y)^2$. Depois dessa conceitualização, nosso próximo passo é analisar a dinâmica das áreas no espaço de fases ocupadas pelas partículas do feixe.

3.1 Dinâmica das áreas no espaço de fases ocupadas pelas partículas do feixe

Emitância é a área no espaço de fases ocupado pelas partículas do feixe. A emitância máxima que um sistema pode aceitar é chamada de aceitância do sistema “ a ” [88, 89]. Em um acelerador linear com não-linearidades, o movimento transversal é acoplado. As partículas movem-se em uma superfície distorcida quadridimensional do espaço de fases. Podemos analisar apenas as projeções dessa superfície nos dois planos transversais $a_x(x, x')$ e $a_y(y, y')$.

Como o feixe é focalizado e desfocalizado, a expansão ou compressão do envelope produz uma correlação entre a posição das partículas e o ângulo do movimento; se, porém, nossa análise se concentrar no feixe estacionário, a correlação entre a posição das partículas e o momento transversal é minimizada. Nós definimos a aceitância-*rms* como $a_j = \sqrt{\langle j^2 \rangle \langle j'^2 \rangle - \langle j j' \rangle^2}$, j representa x ou y . O segundo termo $\langle j j' \rangle^2$ representa uma correlação entre j e j' que existe quando o envelope do feixe é convergente ou divergente; qualitativamente, este pode ser pensado como uma medida do fluxo de entrada ou saída da energia cinética transversal. Quando o feixe é casado ou é estacionário, esta correlação é minimizada e o segundo termo é zero [9]. Neste caso, a aceitância reduz à $\tilde{a}_j = \sqrt{\langle j^2 \rangle \langle j'^2 \rangle}$.

As funções de Lyapunov [84] são funções que podem ser utilizadas para comprovar a es-

tabilidade de um determinado ponto fixo em um sistema dinâmico ou equação diferencial autônoma. Para sistemas dinâmicos (por exemplo, sistemas físicos), as leis de conservação podem ser usadas para construir uma função de Lyapunov [90]. Uma subclasse de sistemas dinâmicos, chamados, sistemas gradientes, são de particular interesse porque seu comportamento é simples, e porque eles são frequentemente encontrados nos tratamentos aproximativos dos sistemas físicos. Para um sistema gradiente, $\frac{dx(t)}{dt} = f(x)$ toma a forma $\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{dL(x)}{dx}$ onde $L(x)$ é uma da função da variável x . Mais genericamente, um sistema com um equilíbrio x_0 é dito ter uma função de Lyapunov L para esse equilíbrio, se esta função satisfaz as condições $L(x_0) = 0$, $\frac{dL(x)}{dt} \leq 0$ para $x \neq x_0$ e L é uma função suave de x em alguma vizinhança de x_0 [91]. Para este sistema a dinâmica consiste de um relaxamento para um mínimo de L . Isto significa que tais funções são definidas apenas quando o equilíbrio correspondente é um pontos fixo. Em seguida, vamos aplicar o método de Lyapunov para a aceitância dinâmica [92], assim, para esse fim, nós substituímos as quantidades acima $x(t)$ e $L(x)$ para, a aceitância $\tilde{a}_j(s)$, e para a função de Lyapunov da aceitância $L(\tilde{a}_j)$, respectivamente. Então, a função de Lyapunov é definida como [83]:

$$\begin{aligned} L &= \alpha \left(1 - \sqrt{1/\xi}\right) \frac{\tilde{a}_x^2}{2r_x} - \rho(1 + 1/\eta) \frac{\tilde{a}_x^2}{2} \\ &- \alpha \left(\sqrt{\xi} - 1\right) \frac{\tilde{a}_y^2}{2r_y} - \rho(1 + \eta) \frac{\tilde{a}_y^2}{2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde \tilde{a}_j é a aceitância, na ausência de correlações entre j e j' . Esta função depende do envelope r_j , da equipartição ξ , da variável anisotrópica η , do avanço de fase por período de focalização com corrente elétrica α , e do número de onda ou avanço de fase por unidade de comprimento ρ [9]. Para $\tilde{a}_{x_0} = 0$ e $\tilde{a}_{y_0} = 0$, L obedece a condição $L(\tilde{a}_{x_0}, \tilde{a}_{y_0}) = 0$. Esta função pode ser interpretada como a equação de uma superfície que se assemelha a um parabolóide aberto para baixo e tangente ao plano de origem $\tilde{a}_x X \tilde{a}_y$. Mais tarde, ficará claro na figura.(3.3) que $\frac{dL(\tilde{a}_j)}{ds} \leq 0$ é satisfeita na evolução de $L(\tilde{a}_j)$. Como a função de Lyapunov (3.1) satisfaz as condições $L(\tilde{a}_{j_0}) = 0$ e $\frac{dL(\tilde{a}_j)}{ds} \leq 0$ podemos aplicar a equação $\frac{d\tilde{a}_j(s)}{ds} = -\frac{dL(\tilde{a}_j)}{d\tilde{a}_j}$ para obter as seguintes equações dinâmicas da aceitância:

$$\frac{d\tilde{a}_x}{ds} = -\alpha \left(1 - \sqrt{1/\xi}\right) \frac{\tilde{a}_x}{r_x} + \rho(1 + 1/\eta) \tilde{a}_x \quad (3.2)$$

$$\frac{d\tilde{a}_y}{ds} = \alpha \left(\sqrt{\xi} - 1\right) \frac{\tilde{a}_y}{r_y} + \rho(1 + \eta) \tilde{a}_y \quad (3.3)$$

onde s é a coordenada axial do feixe. Nós derivamos equações para a evolução da aceitância em cada plano para um feixe contínuo elíptico propagando-se em um canal de focalização constante. Essas equações são aplicáveis à feixes dentro de um tubo condutor cujo raio é muito maior do que o tamanho do feixe. As equações resultantes contem dois termos: o primeiro termo descreve as variações na aceitância associados à transferência

de energia entre os dois planos, o segundo descreve as variações, associados aos processos anisotrópicos.

As oscilações do envelope do feixe perturbam não-linearmente as forças do auto-campo, o que produz uma correlação entre as posições e os momentos das partículas. Como o raio se comprime e se expande, as partículas ganham e perdem energia cinética. Assim, o termo $\langle jj' \rangle^2$ não é mais nulo e a aceitância se torna $a_j = \sqrt{\langle j^2 \rangle \langle j'^2 \rangle - \langle jj' \rangle^2}$. Portanto, a equipartição e a variável anisotrópica são dadas por $\xi = (r_y a_x)^2 / (r_x a_y)^2$ e $\eta = a_x / a_y$, respectivamente. Deste modo as equações (3.2) e (3.3) são transformadas em [93] :

$$\frac{da_x}{ds} = \left(\frac{-\alpha}{r_x} + \rho \right) a_x + \left(\frac{\alpha}{r_y} + \rho \right) a_y, \quad (3.4)$$

$$\frac{da_y}{ds} = \left(\frac{\alpha}{r_x} + \rho \right) a_x + \left(\frac{-\alpha}{r_y} + \rho \right) a_y \quad (3.5)$$

onde os termos a_x/r_x e a_y/r_y modelam o equiparticionamento e o termo $a_x + a_y$ descreve o crescimento através das ressonâncias não-lineares [73]. Jameson derivou equações idênticas [12, 94] para o problema do equiparticionamento em aceleradores lineares.

Nosso objetivo é analisar o efeito de acoplamento entre os dois planos de fase transversais $\tilde{a}_x(x, x')$ e $\tilde{a}_y(y, y')$, no caso sem correlações, e os dois, $a_x(x, x')$ e $a_y(y, y')$, com correlações entre a posição e o momento das partículas. Integramos numericamente até $s = 50.0$, as equações (3.2) e (3.3) e, (3.4) e (3.5) para obter a evolução das aceitâncias. Inicialmente $\alpha = 0.00001$ e $\rho = 0.25$, o que significa que as oscilações coletivas dominam sobre o movimento individual das partículas. As correspondentes evoluções da emitância-*rms* (2.17) e (2.18), e do envelope-*rms* (2.5) são usadas.

As evoluções das aceitâncias são mostradas na figura 3.1. A área em $\tilde{x} - \tilde{x}'$ e $\tilde{y} - \tilde{y}'$ permanece constante com a presença de oscilações muito pequenas, porque \tilde{a}_x e \tilde{a}_y são as áreas projetadas derivadas da função de Lyapunov (3.1). No entanto, é observado o acoplamento entre os planos $x - x'$ e $y - y'$ (definidos por a_x e a_y). Este acoplamento é caracterizado pela troca de energia entre as direções. Devido à definição da aceitância, observamos sua similaridade com a evolução da emitância mostrada na figura 2.2.

As oscilações da aceitância são conduzidas pelas variações da força do auto-campo devido a compressão e expansão do feixe. A aceitância cresce no plano que recebe energia, e diminui no plano que perde energia. Essas transferências entre $x - x'$ e $y - y'$ são geralmente observadas quando a aceitância inicial em cada plano é diferente uma da outra. Isso indica que a razão das aceitâncias são variáveis importantes. Para que o fluxo da aceitância ocorra entre as duas direções tem que ocorrer ressonâncias de acoplamento, somente assim a aceitância começa a fluir de um grau de liberdade "quente" para um, "frio".

O termo $\langle jj' \rangle^2$ representa o termo de fluxo de entrada e saída da energia cinética transversal. A interpretação física é que a energia cinética *rms* da distribuição de partículas é

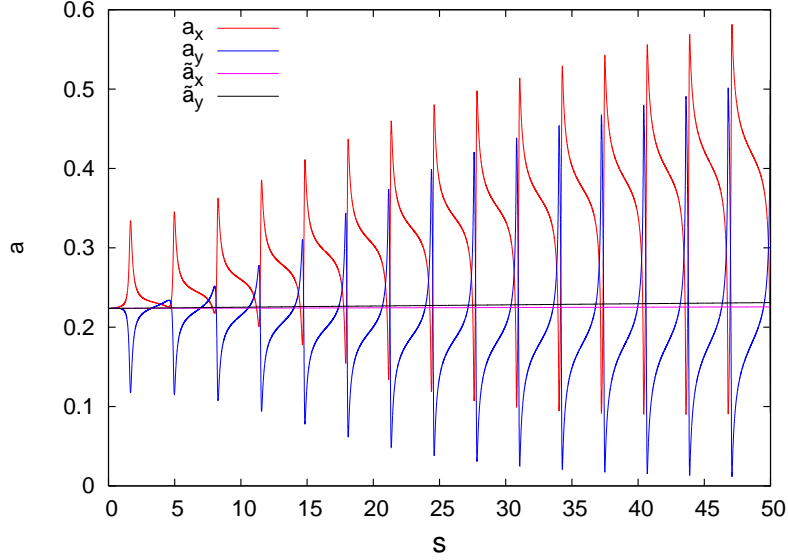


Figura 3.1: Evolução da acceptance do feixe sem (\tilde{a}_j), e com (a_j) correlações entre a posição e o momento da partícula. \tilde{a}_x e \tilde{a}_y são representados pelas linhas rosa e preta, respectivamente. a_x e a_y estão representados pelas linhas vermelha e azul, respectivamente.

constituída por uma componente térmica e uma componente de fluxo [9]. Transferência de energia cinética de uma direção para outra resulta em parcial ou total equipartição da energia cinética. Embora similar ao equiparticionamento da energia em um gás, essa transferência não resulta das colisões das partículas individuais mas, presumivelmente, das interações entre as partículas individuais e os campos coletivos. Hofmann mostrou que as instabilidades dos modos coerentes do feixe, podem levar a troca entre as direções da energia cinética [80].

3.2 Termodinâmica do Feixe Equiparticionado

Na análise posterior, a razão a_x/a_y é variada para explorar diferentes graus de anisotropia e fluxo de energia. A taxa do fluxo pode se calculada analiticamente. Para obter o fluxo da acceptance de uma direção para outra e portanto, a relação entre \tilde{a}_x e \tilde{a}_y , e entre a_x e a_y , elimina-se s dividindo (3.2) por (3.3), e (3.4) por (3.5), respectivamente. Assim, as equações para o fluxos das acceptâncias são:

$$\frac{d\tilde{a}_x}{d\tilde{a}_y} = \frac{\left[\frac{-\alpha(1-\sqrt{1/\xi}) + \rho(1+1/\eta)r_x}{r_x} \right] \tilde{a}_x}{\left[\frac{\alpha(\sqrt{\xi}-1) + \rho(1+\eta)r_y}{r_y} \right] \tilde{a}_y}, \quad (3.6)$$

$$\frac{da_x}{da_y} = \frac{(-\alpha + \rho r_x) r_y a_x + (\alpha + \rho r_y) r_x a_y}{(\alpha + \rho r_x) r_y a_x + (-\alpha + \rho r_y) r_x a_y} \quad (3.7)$$

As equações (3.6) e (3.7) são equações diferenciais de variáveis separáveis cujas soluções gerais são [69]:

$$F_{\tilde{a}_y/\tilde{a}_x} = \eta \ln(a_x) - \ln(a_y), \quad (3.8)$$

$$F_{a_y/a_x} = \frac{b_1 \ln(b_3 \Theta^2 + b_4 \Theta + b_5)}{2b_3} + \left(\frac{2b_2 - \frac{b_1 b_4}{b_3}}{\sqrt{4b_5 b_3 - b_4^2}} \right) \arctan \left(\frac{2b_3 \Theta + b_4}{\sqrt{4b_5 b_3 - b_4^2}} \right) - \ln(a_x) \quad (3.9)$$

onde $\eta = \epsilon_x/\epsilon_y$, $\Theta = a_x/a_y$, $b_1 = -r_y(\rho r_x + \alpha)$, $b_2 = r_x(\rho r_y - \alpha)$, $b_3 = r_y(\rho r_x + \alpha)$, $b_4 = \alpha(r_x - r_y)$, $b_5 = r_x(\rho r_y + \alpha)$. $F_{\tilde{a}_y/\tilde{a}_x}$ é o fluxo da aceptación sem correlação e F_{a_y/a_x} é o fluxo, com correlação.

Como discutido, $\langle jj' \rangle^2$ representa um fluxo entrando e saindo de energia cinética transversal, e esta energia consiste em uma componente térmica e uma componente de fluxo, este último é devido à correlação entre a velocidade e a posição das partículas em regiões onde o feixe se contrai e se expande. Esta componente de fluxo é então diretamente relacionada com as transferências de calor entre os diferentes graus de liberdade no interior do feixe. A diferença entre o fluxo da aceptación com correlação e o fluxo da aceptación sem correlação é a componente de fluxo definida por $F_{jj'} = F_{a_y/a_x} - F_{\tilde{a}_y/\tilde{a}_x}$ [9]. A evolução da componente de fluxo $F_{jj'}$ é mostrada na figura 3.2, onde podemos notar o desenvolvimento de rápidas variações semelhante as variações descontínuas em χ e η na Figura 2.6. A amplitude das oscilações cresce durante a propagação do feixe: quando o envelope do feixe expande, a componente de fluxo tem uma direção de saída e a componente térmica decresce, quando o envelope do feixe contrai, a componente de fluxo está entrando e a componente térmica aumenta. A propagação do feixe é, portanto, caracterizada pela variação do envelope que está correlacionada com a geração de fluxo de calor e uma variação da temperatura do feixe. Como normalmente é feito em física estatística, nós relacionamos a temperatura de um conjunto de partículas ao seu movimento aleatório.

Como feixes de partículas carregadas alteraram o seu tamanho ao passar por um sistema óptico, a energia cinética transversal $\langle p_j^2 \rangle / 2m$ conterà uma componente de fluxo se $\langle jj' \rangle \neq 0$. Assim, a componente de fluxo da energia cinética deve ser subtraída da energia cinética

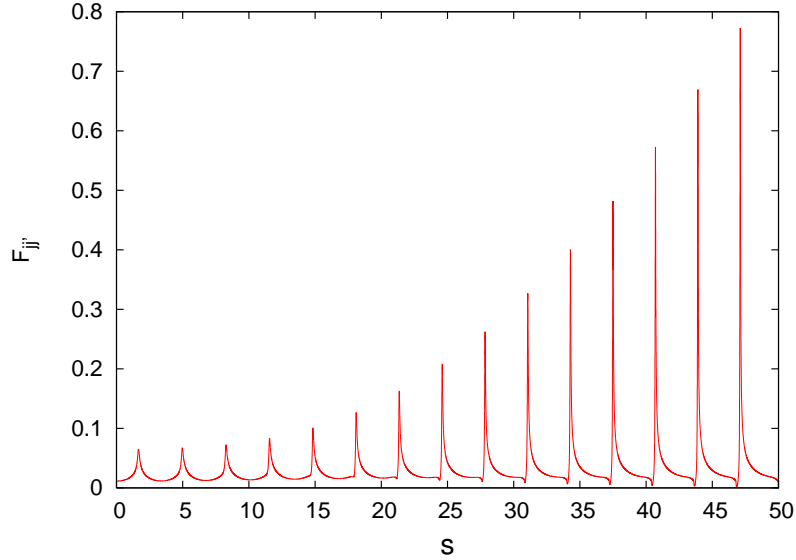


Figura 3.2: Evolução da componente de fluxo $F_{jj'}$ obtida da diferença entre as equações (3.9) e (3.8), $F_{jj'} = F_{a_y/a_x} - F_{\tilde{a}_y/\tilde{a}_x}$ até $s = 50.0$.

transversal, a fim de se obter a componente térmica. A “temperatura de não-equilíbrio” T_j será definida como a componente térmica da energia cinética transversal do j -ésimo grau de liberdade.

Nós temos mostrado que as interações ressonantes entre as partículas do feixe fornecem um mecanismo para uma troca de energia efetiva entre os diferentes graus de liberdade. Como a distribuição das partículas de um feixe está sujeita à potenciais focalizadores e ao próprio campo gerado pelo próprio feixe, as partículas individuais oscilam e conseqüentemente surge um intercâmbio contínuo entre a energia cinética e a potencial. A idéia básica é que essa troca contínua entre a energia cinética e a potencial poderia conduzir o sistema a um estado caótico, por meio de ressonâncias paramétricas [39, 55]. Não há nenhuma razão, a priori, para existir uma conexão entre o incremento de órbitas caóticas e a troca dessa energia. No entanto, seria de se esperar que os acoplamentos ressonantes entre as partículas levariam a trocas significativas entre a energia cinética e a potencial. O que acarretaria em uma correlação entre essas trocas e o incremento da quantidade de órbitas caóticas e, assim, teríamos condições de sugerir que os fenômenos de ressonância desempenham um papel principal na origem do caos [21, 85]. Esse caos transiente poderia dar origem a um tipo de mistura caótica (*chaotic phase mixing*), que, no contexto de uma evolução auto-consistente do feixe, pode-se esperar ter um papel importante no processo de violenta relaxação [95, 96]. Recentes simulações [97] mostraram que a evolução auto-consistente do feixe apresenta evidências dessa mistura caótica. O feixe atinge o equilíbrio “térmico” [98] apenas quando a energia é redistribuída entre todos os graus de liberdade.

Para caracterizar este equilíbrio “térmico”, analisamos a dinâmica da função de Lyapunov (3.1), e a dinâmica da temperatura e entropia do feixe. A “temperatura” T_j

do j -ésimo grau de liberdade de um feixe de partículas carregadas pode ser expressa em termos dos segundo momentos do feixe $T_j = \frac{ma_j^2}{\mathbb{k}_b r_j^2}$ onde m é a massa do feixe de íons e \mathbb{k}_b é a constante de Boltzmann [99]. Esta definição mostra que as variações do envelope r_j e da aceitância a_j , causam as variações da temperatura. Para um sistema com uma “temperatura fora do equilíbrio”, que está oscilando de forma anisotrópica próximo a T_{eq} , a temperatura de equilíbrio pode ser aproximada pela média aritmética das T_j 's.

$$T_{eq} = \frac{m}{2\mathbb{k}_b} \left(\frac{a_x^2}{r_x^2} + \frac{a_y^2}{r_y^2} \right) \quad (3.10)$$

Para um modelo 2-D de um feixe com uma temperatura de equilíbrio T_{eq} , a variação da entropia próxima ao equilíbrio termodinâmico, devido ao processo de balanceamento do calor pode ser escrito como [100]:

$$\frac{dS}{ds} = \frac{\mathbb{k}_b}{2} \left[\frac{(T_x - T_y)^2}{T_x T_y} \right] \quad (3.11)$$

Obviamente, a entropia $S(s)$ permanece inalterada no caso do equilíbrio, e incrementa durante o balanceamento do calor. Podemos considerar a eq.(3.11) como uma expressão do Teorema-H de Boltzmann [101]. A base para o comportamento dinâmico da entropia é a relação entre o envelope, a aceitância e a temperatura. No interior do feixe, a troca de calor entre os graus de liberdade pode ocorrer, levando a um crescimento da entropia, como descrito pela Eq.(3.11). Concluimos que os efeitos do equiparticionamento que ocorrem no feixe, que inicialmente não está no equilíbrio térmico, são sempre associados com uma degradação irreversível da qualidade do feixe. O transporte do feixe na ausência de incremento da entropia é somente possível, se o feixe permanece redondo durante toda a propagação. O conceito de entropia e sua relação com a emitância-*rms* foi estudado pela primeira por Lawson, Lapostolle e Gluckstern [102].

O estado inicial do feixe é caracterizado com $m = 1$, $r_{j_0} = 0,43616$ e $a_{j_0} = 0,22360$. Assim, temos $T_{j_0} = 0,26282$, inicialmente. A equação da entropia (3.11) foi integrada até $s = 200$. A correspondente evolução da temperatura T_j é usada na Eq.(3.11). Para a evolução da temperatura T_j a correspondente evolução da aceitância-*rms* (3.4) e (3.5), e os envelopes-*rms* (2.5) são usados. Para a dinâmica da função de Lyapunov, a evolução correspondente da aceitâncias-*rms* (3.2) e (3.3) são usadas. Os resultados para a dinâmica da entropia S (gráfico inferior), para a temperatura T_{eq} (gráfico intermediário) e para a dinâmica da função de Lyapunov L (gráfico superior) são mostrados na Figura 3.3.

No caso, sem correlação entre as posições e os momentos das partículas do feixe a função de Lyapunov L é monotonicamente decrescente no que diz respeito a s para soluções da \tilde{a}_j como mostrado na figura 3.3 (porque temos $\frac{dL(\tilde{a}_j)}{ds} \leq 0$); os pontos fixos $\tilde{a}_{x_0} = 0$ e $\tilde{a}_{y_0} = 0$ correspondem aos extremos de L (isto é, temos $\frac{d\tilde{a}_j(s)}{ds} = 0 \Leftrightarrow \frac{dL(\tilde{a}_j)}{d\tilde{a}_j} = 0$); das duas propriedades acima segue-se que L torna-se estacionária no limite $s \rightarrow \infty$. A

estacionariedade da função da função de Lyapunov L implica na estacionariedade do feixe de íons.

No caso com correlações entre as posições e os momentos das partículas, como mostrado na figura 3.3, a temperatura T_{eq} oscila depois estaciona, apresentando pequenas flutuações, e a entropia S cresce em forma de cascata. Em analogia com a compressão e expansão de um gás, a temperatura do feixe T_{eq} aumenta durante a compressão e diminui durante a expansão. O conceito de entropia em cascata é o agente fundamental no aquecimento e relaxamento do feixe [103]. O processo físico pelo qual este relaxamento ocorre são as interações onda-partícula, em vez das colisões Coulombianas: o reservatório de energia livre, representada pelos estados com $T_x/T_y \neq 1$, espalha energia em pequenas flutuações microscópicas. Isso conduz à uma produção significativa de campos electromagnéticos anisotrópicos. Isto afeta inicialmente a temperatura T_{eq} do sistema, que, portanto, decresce em função do tempo. Como um efeito de feedback não linear, as ondas aquecem as partículas do sistema. Este efeito não-linear resulta em um estado final em que as partículas e os campos estão em um estado quase-estacionário. Qualitativamente, o relaxamento acolisional é dirigido pelas flutuações do campo, que são induzidas pelas flutuações da densidade de carga. As flutuações dos campos electromagnéticos são capazes de redistribuir a energia entre as partículas e fornecem um mecanismo eficaz de relaxamento em uma curta escala de tempo. Fisicamente, esse relaxamento acolisional é interpretado como uma expressão do acoplamento ressonante entre as partículas e os campos [96]. A mistura por ressonâncias (“resonant phase mixing”) pode ser suficientemente forte para explicar o violento relaxamento. Durante o violento relaxamento, o feixe tende a maximizar a taxa de produção de entropia $\frac{dS}{ds}$, preservando os vínculos impostos pela dinâmica. Além disso, como o sistema aproxima-se do quase-equilíbrio, as flutuações do campo tornam-se progressivamente menos eficiente [93].

Nossa hipótese de trabalho é que durante o estágio de violenta relaxação, as partículas do feixe extraem energia das rápidas oscilações do campo eletromagnético. Por esse processo algumas partículas adquirem muita energia e escapam do feixe formando o anel. Com a formação do anel, a relaxação do sistema para o equilíbrio se torna incompleta [97]. Inicia-se um processo de interação caroço-anel. A energia dos campos gerados pelo caroço interagem com o anel e as flutuações tendem a se tornarem mais fracas. O caroço estaciona [104]. Com o caroço em quase-equilíbrio e o enfraquecimento das flutuações, o caroço servirá como um tipo de banho térmico ao anel, o que nos possibilitará encontrar uma solução de quase-equilíbrio para o sistema caroço-anel em estado relaxado. O trabalho futuro será construir um modelo cinético para o feixe, com o objetivo de deduzir as equações cinéticas para o caroço (*core*) e o anel (*halo*) e descrever suas evoluções [104].

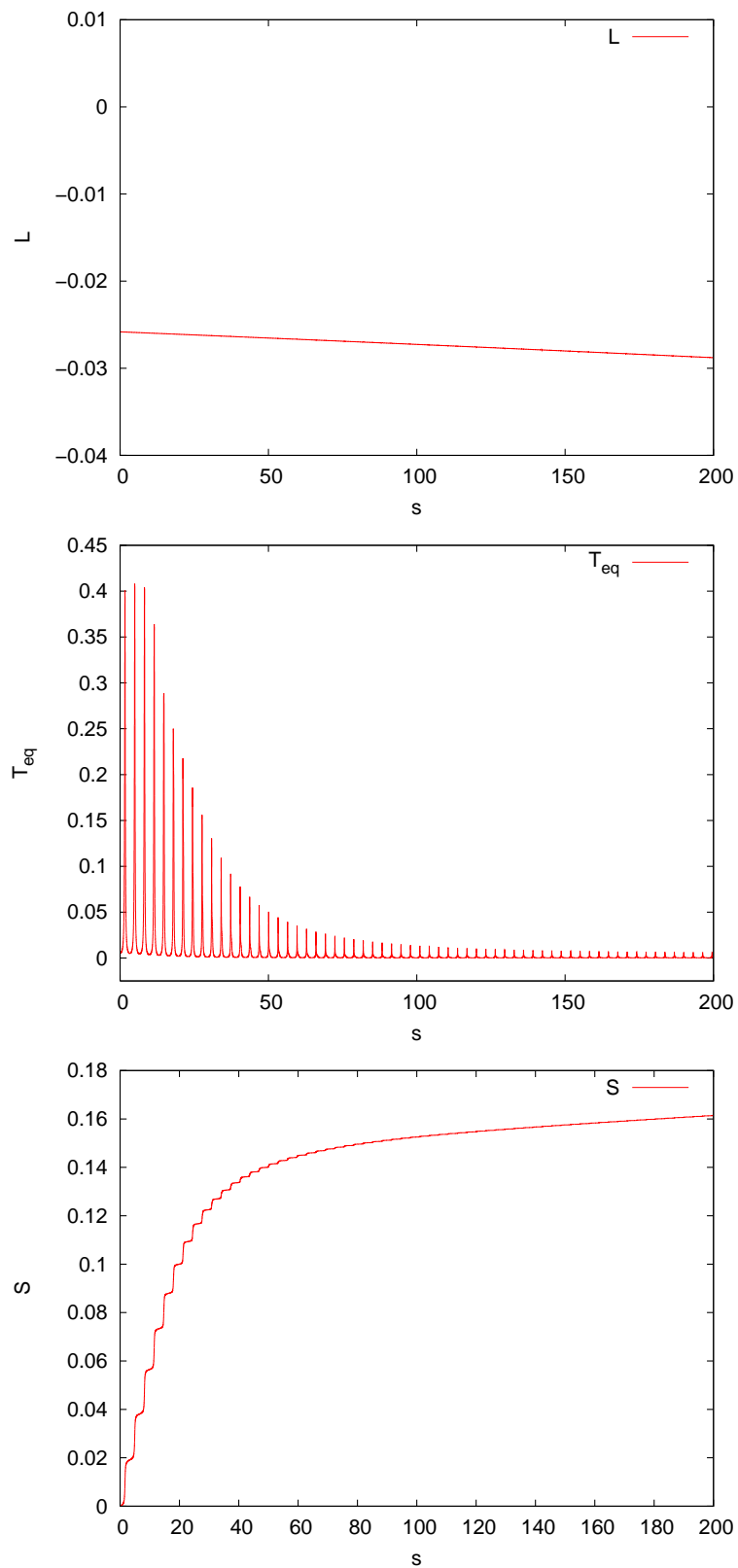


Figura 3.3: O gráfico superior mostra a evolução dinâmica da função de Lyapunov L . O gráfico intermediário mostra a evolução da temperatura T_{eq} , enquanto a parte inferior da figura ilustra a evolução correspondente da entropia S .

Capítulo 4

Conclusão

Nesse universo de fenômenos observados em aceleradores de partículas e descritos por uma variedade de técnicas matemáticas e computacionais organizados por esse ramo da ciência, chamado de física de feixes, muitos experimentos, conceitos, teorias e modelos foram propostos [3, 4, 5, 8, 9, 64]. A contribuição dessa tese, se situa na modelagem dos processos físicos envolvidos durante o equiparticionamento de um feixe de partículas carregadas [25, 32, 105, 106]. Propomos um modelo, simplificado, para descrever a dinâmica [78] e a termodinâmica [93] de um feixe de partículas carregadas durante seu processo de equipartição. Nos próximos parágrafos apresentaremos um resumo dos resultados desse modelo.

Nesta tese analisamos os efeitos da ressonância partícula-partícula e da ressonância modo oscilatório-partícula no feixe. Ao longo desse trabalho temos demonstrado que estas ressonâncias levam à anisotropização espacial do feixe, isto é, a razão do envelope e , das emitâncias são diferentes da unidade. A conjectura principal deste trabalho é que esta anisotropia é responsável pela equipartição do feixe. Com base na equipartição por turbulências [58], conjecturamos uma definição de um estado de equipartição por anisotropias do feixe. O estado de equipartição por anisotropias corresponde a densidade uniforme no espaço de fase do feixe sobre a superfície invariante $\xi = (r_y \epsilon_x)^2 / (r_x \epsilon_y)^2$, onde ξ é a relação entre as energias oscilatórias nas direções x e y . Nossos resultados sugerem que, no estado de equipartição por anisotropias, o feixe apresenta as seguintes propriedades: o desenvolvimento de uma forma elíptica com um incremento do tamanho ao longo da direção x , a presença de um acoplamento das emitâncias transversais, a formação do anel, ao longo de uma direção preferencial, a estacionariedade da temperatura e um aumento da entropia sob a forma de cascata. Seria necessário encontrar evidências experimentais do estado de equipartição por anisotropias, a fim de verificar as nossas previsões.

As forças não-lineares do auto-campo conduzem o feixe ao equiparticionamento da energia entre os graus de liberdade. No regime de um feixe altamente carregado, ou seja, com fortes campos gerados por ele próprio, as colisões entre as partículas não são muito freqüentes para serem o agente físico responsável pela transferência de energia

entre os graus de liberdade. No entanto, tem sido demonstrado que as ondas do auto-campo seriam as melhores candidatas para acoplarem os graus de liberdade [40, 32]. O equiparticionamento de um feixe anisotrópico envolve uma transferência de energia entre os graus de liberdade e a evolução para um estado de quase-equilíbrio, como consequência da mistura via ressonâncias (*resonant phase mixing*) [35, 55]. Utilizamos a transformada de Fourier para calcular numericamente as frequências, e obtivemos que a frequência do modo simétrico (*breathing mode*) e a frequência do modo anti-simétrico (*quadrupole mode*) são, respectivamente, $\omega_{X_s} = 2,01334$ e $\omega_{X_a} = 2,01334$. Ambos os modos têm a mesma frequência, o que mostra que eles estão em ressonância. Esta ressonância modo-modo oscilatório é responsável pela forma elíptica do feixe e o aumento do semi-eixo ao longo da direção x [29]. Computamos ainda, numericamente as frequências ω_x e ω_y de 2500 partículas-testes, e obtivemos que 2455 delas obedecem à condição de ressonância $\omega_x - \omega_y = 0$. Esse grande número de partículas-teste em ressonância é o agente físico responsável pelo acoplamento das emitâncias. Além disso, 45 partículas-teste apresentam $\omega_y = 1,00667$. Assim a condição de ressonância partícula-caroco (2 : 1) está presente em ambos modos oscilatórios simétrico e anti-simétrico do caroco, mas apenas na direção y destas partículas-teste [45]. Deste modo, a formação do anel ocorre ao longo da direção y . Como já relatado, a anisotropia levando ao acoplamento ressonante [30, 31] na presença de forças não-lineares do auto-campo foi sugerida como uma aproximação para o problema do equiparticionamento em feixe [40, 37, 32]. Nossos resultados corroboram essa sugestão.

Nossos resultados mostram também que a temperatura T_{eq} flutua ligeiramente no estado estacionário e a S entropia cresce na forma de cascata (ver Fig. 3.3). O conceito do crescimento da entropia em forma de cascata tem um papel central no aquecimento e no relaxamento do feixe [103]. O processo físico pelo qual esse relaxamento ocorre é a interação onda-partícula. As forças não-lineares coletivas do auto-campo desempenham o mesmo papel que as colisões na termalização da distribuição das partículas. As forças do auto-campo são requeridas para aumentar a entropia, e o equiparticionamento via anisotropias pode ser adequadamente descrito em termos da termalização do feixe no sentido dos processos de difusão [105, 107, 108]. É importante frisar que nunca a distribuição do feixe atinge o seu verdadeiro equilíbrio termodinâmico. Em vez disso, a distribuição do feixe permanece dividida em duas partes: a parte principal do feixe que está muito próxima do equilíbrio, ou seja, a região central, o caroco, mas essa é cercada por uma região de densidade baixa - o anel do feixe.

Deduzir as equações cinéticas para o caroco (*core*) e o anel (*halo*) e descrever suas evoluções será o meu próximo trabalho.

4.1 Perspectivas

4.1.1 Pós-doutorado no IFMIF

O projeto IFMIF (International Fusion Materials Irradiation Facility) é a primeira das três partes da *Fusion Broader Approach* assinado pelo Japão e a Europa, com o objetivo de estudar materiais que possam resistir as radiações de nêutrons muito intensos em futuros reatores de fusão. O sistema principal deste projeto são dois aceleradores que produzem um fluxo de nêutrons, acelerando partículas de Deutério e as fazendo colidir contra um alvo de lítio. Na primeira fase, chamada EVEDA (Engineering Validation and Engineering Design Activity), um protótipo na escala real que acelera partículas até $9MeV$ está sendo estudado e construído na Europa, para ser instalado no Japão.

O CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique), na França, em colaboração com o INFN (Istituto Nazionale di Fisica Nucleare) na Itália e o CIEMAT (Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas) na Espanha, está encarregado dos estudos da dinâmica do feixe nos aceleradores. Duas características sem precedentes são necessárias para o feixe de partícula no IFMIF : a potência elevada de 2×5 MW e a intensidade também elevada de 2×125 mA CW. Isso leva a dois desafios a serem analisados. Por um lado, as perdas de partículas, mesmo pequenas, são prejudiciais ao acelerador. Por outro lado, as fortes forças do auto-campo (*space charge*) podem levar a perdas não controladas por alguns mecanismos diferentes.

O pós-doutoramento consiste em estudar o comportamento do feixe sob este regime de fortes campos gerados pelo próprio feixe. A ênfase será na caracterização e compreensão dos pontos cruciais, como a formação do anel (*halo*), a interação caroço-anel (*core-halo*), o crescimento da emitância e perdas repentinas de partículas.

Apêndice A

Simulações Numéricas Auto-Consistentes

O ponto inicial das simulações numéricas é um modelo matemático para o fenômeno físico de interesse. As equações do modelo são transformadas em formas algébricas discretas acessíveis as soluções numéricas. As equações algébricas descrevem o modelo simulado que quando expresso numa seqüência de instruções computacionais estabelece um programa de simulação. A simulação permite investigar a evolução do sistema físico em questão. Neste apêndice as simulações numéricas auto-consistentes [6, 7] são usadas para investigar a propagação de feixes intensos de partículas carregadas submetidos a campos focalizadores. Analisa-se a evolução de quantidades *rms* do feixe, bem como a distribuição de partículas no espaço de fases.

A.1 Descrição das Simulações Numéricas Auto-Consistentes

Consideramos um feixe fino, contínuo, intenso de partículas carregadas propagando-se com velocidade axial média $\beta_b c \hat{\mathbf{e}}_z$ por um canal focalizador linear, com simetria axial submetido, por exemplo, a um campo solenoidal magnético periódico

$$\mathbf{B}_{sol}(\mathbf{x}) = B_z(s) \hat{\mathbf{e}}_z - \frac{1}{2} B'_z(s) (x \hat{\mathbf{e}}_x + y \hat{\mathbf{e}}_y)$$

onde $s = z = \beta_b c t$ é a coordenada axial, $B_z(s + S) = B_z(s)$ é a componente axial do campo magnético aplicado, S é a distância de aplicação do campo focalizador, e $'$ denota derivada em relação a s .

Num modelo bidimensional auto-consistente a densidade do feixe é dada por

$$n(x, y, s) = \frac{N}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \delta[x - x_i(s)] \delta[y - y_i(s)], \quad (\text{A.1})$$

onde $N = \int dx dy n(x, y, s) = \text{const.}$ e N_p é o número de micropartículas e macropartículas por comprimento axial do feixe, respectivamente, (x_i, y_i) é a posição transversal da i -ésima macropartícula e $\delta(x)$ é a função delta de Dirac. Como analisado na dissertação do autor [13], na aproximação paraxial, os autocampos elétricos e magnéticos são expressos como :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^s(x, y, s) &= - \left[\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} \right] \phi^s(x, y, s), \\ \mathbf{B}^s(x, y, s) &= \left[\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial y} - \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial x} \right] A_z^s(x, y, s).\end{aligned}$$

onde o potencial escalar para os autocampos elétricos obedece a equação de Poisson :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \phi^s(x, y, s) = -4\pi e_b n_b(x, y, s)$$

e o potencial vetorial para o autocampo magnético é definido por :

$$\mathbf{A}^s(x, y, s) = \beta_b \phi^s(x, y, s) \hat{\mathbf{e}}_z$$

Assim as N_p macropartículas do feixe interagem através da combinação dos autocampos e campo focalizador, $\mathbf{B}_{sol} + \mathbf{B}^s$ e \mathbf{E}^s . Podemos expressar as equações transversais do movimento para as i -ésima macropartícula do feixe no referencial de Larmor como :

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \kappa_z(s) x_i = - \frac{e_b}{\gamma_b^3 \beta_b^2 m c^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi^s(x_i, y_i, s) \quad (\text{A.2a})$$

$$\frac{d^2 y_i}{ds^2} + \kappa_z(s) y_i = - \frac{e_b}{\gamma_b^3 \beta_b^2 m c^2} \frac{\partial}{\partial y_i} \phi^s(x_i, y_i, s) \quad (\text{A.2b})$$

onde $i = 1, 2, \dots, N_p$, γ_b é o fator de massa relativístico, m e e_b são a massa de repouso e a carga da partícula respectivamente, $\kappa_z(s) = [e_b B_z(s) / 2\gamma_b \beta_b m c^2]^2$ é uma medida da força do campo focalizador e

$$\phi^s(x_i, y_i, s) = \frac{e_b N}{4\pi N_p} \sum_{j=1(j \neq i)}^{N_p} \ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \quad (\text{A.3})$$

é o potencial escalar experimentado pelas i -ésima macropartícula e obtido pela equação de Poisson com a densidade (A.1) via o método das funções de Green bidimensionais [109]. Considerando um cilindro condutor de comprimento infinito as funções de Green definem o potencial eletrostático dentro da região de interação devido as cargas pontuais e cargas de superfície induzidas. As funções de Green tridimensionais satisfazem as equações de Laplace com fontes de cargas pontuais periódicas [110]:

$$\nabla^2 G_{3D} = -\frac{4\pi}{r} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z') \quad (\text{A.4})$$

onde

$$\delta_L(z - z') = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(z - z' - nL) \quad (\text{A.5})$$

L é o espaçamento entre as fontes pontuais e z' denota a localização das cargas pontuais. As condições de contorno de Dirichlet e, periódicas para as simetrias translacionais e rotacionais requerem que:

$$G_{3D}(r, \theta, z + L; x') = G_{3D}(r, \theta, z; x'), \quad (\text{A.6a})$$

$$G_{3D}(r, \theta + 2\pi, z; x') = G_{3D}(r, \theta, z; x'), \quad (\text{A.6b})$$

$$G_{3D}(r_w, \theta, z; x') = 0 \quad (\text{A.6c})$$

onde r_w é o raio do cilindro. A solução da equação (A.4) pode ser construída expandindo em termos das auto-funções da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, obtendo a seguinte solução :

$$G_{3D}(x; x') = \frac{2}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{in(\varepsilon-\varepsilon')} e^{i(\theta-\theta')} \frac{I_l(n\delta_{<})}{I_l(n\alpha)} [I_l(n\alpha)K_l(n\delta_{>}) - I_l(n\delta_{>})K_l(n\alpha)] \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\delta = \frac{2\pi r}{L}, \quad \delta' = \frac{2\pi r'}{L}, \quad \varepsilon = \frac{2\pi z}{L}, \quad \varepsilon' = \frac{2\pi z'}{L}, \quad \alpha = \frac{2\pi r_w}{L} \quad (\text{A.8})$$

I_l e K_l são as funções de Bessel modificadas e os símbolos $>$ ($<$) denotam maior(menor) de δ e δ' . Separando os $n = 0$ termos dos $n > 0$ G_{3D} se transforma em :

$$\begin{aligned} G_{3D}(x; x') &= \frac{1}{L} G_{2D} + \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n(\varepsilon - \varepsilon')] \frac{I_0(n\delta_{<})}{I_0(n\alpha)} [I_0(n\alpha)K_0(n\delta_{>}) - I_0(n\delta_{>})K_0(n\alpha)] \\ &+ \frac{8}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \cos[n(\varepsilon - \varepsilon')] \cos[l(\theta - \theta')] \frac{I_l(n\delta_{<})}{I_l(n\alpha)} [I_l(n\alpha)K_l(n\delta_{>}) \\ &- I_l(n\delta_{>})K_l(n\alpha)] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde G_{2D} é a função de Green bidimensional definida por :

$$G_{2D} = \ln \left[\frac{\alpha^2 + (\delta_{>}\delta_{<}/\alpha)^2 - 2\delta_{>}\delta_{<}\cos(\theta - \theta')}{\delta_{>}^2 + \delta_{<}^2 - 2\delta_{>}\delta_{<}\cos(\theta - \theta')} \right] \quad (\text{A.10})$$

Quando nós tomamos o limite $L \rightarrow 0$ em (A.9) recuperamos a função de Green (A.10)

$$G_{2D} = \lim_{L \rightarrow 0} L G_{3D} \quad (\text{A.11})$$

pois o segundo e terceiro termos da equação (A.9) anulam-se para $L \rightarrow 0$. Pakter e colaboradores [109] encontraram um exato acordo numérico entre os resultados conhecidos e os computados de G_{3D} quando incluídos os primeiros 15000 termos da somatória.

As simulações numéricas auto-consistentes para um feixe de partículas carregadas descritas pelas equações (A.2-A.3) envolvem $2N_p$ equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que podem ser integradas numericamente.

A.2 Procedimento Numérico Adotado

Executaremos simulações numéricas auto-consistentes com macropartículas de tamanho finito. Nas simulações $N_p = 15000$ macropartículas estão submetidas a interações coulombianas via potenciais estáticos gerados pelo método das funções de Green [111]. As partículas são lançadas de acordo com a distribuição parabólica $n_b = 2N_b/\pi r_x r_y [1 - x^2/r_x^2 - y^2/r_y^2]$ com um raio descasado e transportadas ao longo do campo focalizador. Enquanto o feixe propaga, nós computamos os envelopes do feixe obtidos auto-consistentemente por :

$$r_x = (6 \langle x^2 \rangle)^{1/2}, \quad r_y = (6 \langle y^2 \rangle)^{1/2}, \quad (\text{A.12})$$

e as emitâncias transversais

$$\epsilon_\zeta \equiv \sqrt{\langle \zeta^2 \rangle \langle \zeta'^2 \rangle - \langle \zeta \zeta' \rangle^2}, \quad \zeta \equiv x, y \quad (\text{A.13})$$

onde

$$\langle Q \rangle \equiv \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{\infty} Q_j \quad (\text{A.14})$$

representa média sobre todas as macropartículas. Também computamos de instante em instante a distribuição do feixe no plano $x - y$, $v_x - v_y$ e no espaço de fases.

Na simulação numérica auto-consistente integramos numericamente $2N_p$ equações diferenciais ordinárias de segunda ordem de partícula (A.2) considerando um campo focalizador magnético constante e normalizado, ou seja, $\kappa_z(s) = \kappa_0 = 1$, e o potencial elétrico normalizado $\psi(x, y, s) \equiv \frac{e_b \phi^s(x, y, s)}{\gamma_b^3 m_b \beta_b^2 c^2}$ obtendo as seguintes equações :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{ds^2} + x_i &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \psi^s(x_i, y_i, s) \\ \frac{d^2 y_i}{ds^2} + y_i &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \psi^s(x_i, y_i, s) \end{aligned}$$

Usando a definição da perveância $K = \frac{2e_b^2 N_b}{\gamma_b^3 \beta_b^2 m_b c^2}$ e o potencial elétrico (A.3) normalizado obtemos :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \psi^s(x_i, y_i, s) = \frac{K}{\pi N_p} \frac{(x_i - x_j)}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \quad (\text{A.16a})$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \psi^s(x_i, y_i, s) = \frac{K}{\pi N_p} \frac{(y_i - y_j)}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \quad (\text{A.16b})$$

Note que a expressão acima é exatamente as forças coulombianas agindo sobre as partículas do feixe. Assim integraremos as seguintes equações :

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + x_i = -\frac{K}{\pi N_p} \frac{(x_i - x_j)}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \quad (\text{A.17a})$$

$$\frac{d^2 y_i}{ds^2} + y_i = -\frac{K}{\pi N_p} \frac{(y_i - y_j)}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \quad (\text{A.17b})$$

Fisicamente as partículas do feixe são pontuais sem dimensão espacial, mas computacionalmente estabelecemos um tamanho finito para elas, pois analisando a equação (A.17) notamos que quando $x_i - x_j = 0$ e $y_i - y_j = 0$ a equação apresenta uma indeterminação. Para contornar esse obstáculo no cálculo numérico das forças eletrostáticas, estabelecemos um tamanho pequeno para as partículas e quando estão muito próximas computamos um valor diferente para a força eletrostática como mostrado no gráfico (A.1) :

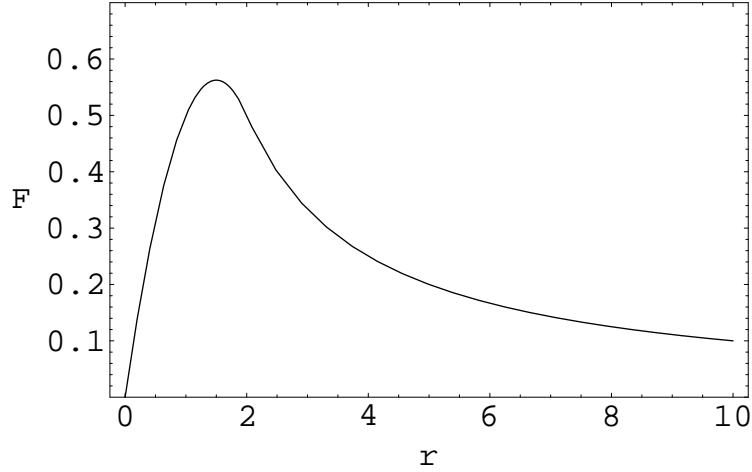


Figura A.1: Gráfico da força eletrostática para partículas de tamanho finito $r = r_p$.

No grafico (A.1) $F(r) = F_1(r) = \frac{3r-r^2/r_p}{4r_p^2}$ para $r < 2r_p$, onde r_p é o raio da partícula discreta neste caso igual a unidade; a força possui esse formato exatamente quando as partículas estão muito próximas $r < 2r_p$ e sobrepostas. Para $r > 2r_p$ $F(r) = F_2(r) = 1/r$ que é a força eletrostática característica de partículas pontuais. No ponto de transição $r = 2r_p$ as funções satisfazem a condição de continuidade $F_1(r_p) = F_2(r_p)$ e $\left. \frac{dF_1(r)}{dr} \right|_{r=r_p} = \left. \frac{dF_2(r)}{dr} \right|_{r=r_p}$.

A.3 Resultados das Simulações Numéricas

Auto-consistentes

O estado inicial do feixe será caracterizado por uma perveância de $K = 3$, um campo magnético focalizador constante de $\kappa_0 = 1$, e um descasamento inicial do envelope de $\nu = 2.4$. As 15000 partículas do feixe simulado são lançadas, inicialmente, com as posições de acordo com a distribuição espacial parabólica $n_b = 2N_b/\pi r_x r_y [1 - x^2/r_x^2 - y^2/r_y^2]$ e as velocidades $v_x = x/r_x$ e $v_y = y/r_y$. Iremos comparar o envelope e a emitância

calculados pela simulação auto-consistente com o envelope calculado com a Eq.(2.5) e as emitâncias calculadas com as Eqs.(3.4) e (3.5) com $\alpha = 0.005$ e $\rho = 0.25$. Os resultados são mostrados nas figuras A.2 (envelopes) e A.3 (emitâncias). O objetivo, principal das simulações é comparar o surgimento do formato elíptico no feixe com o crescimento de algum dos semi-eixos numa direção preferencial e, comparar o acoplamento e a anisotropia da emitâncias transversais.

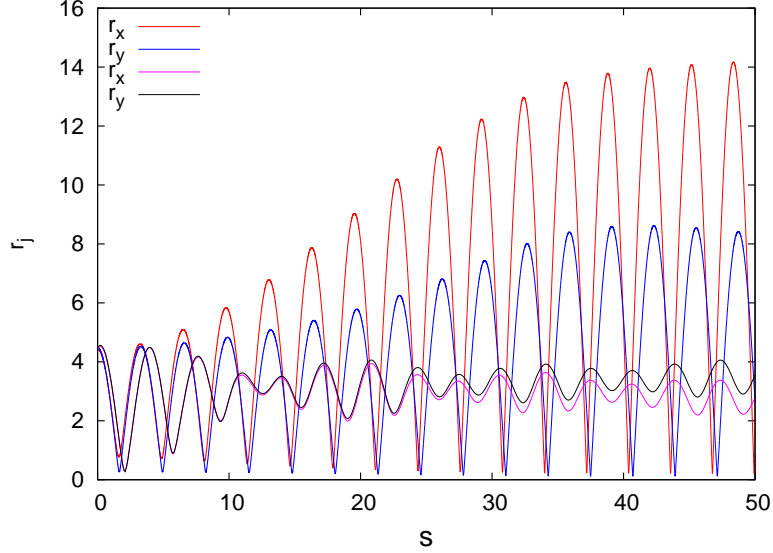


Figura A.2: Comparação entre o envelope calculado via simulação auto-consistente e o envelope calculado pela Eq.(2.5). Os envelopes da simulação r_x e r_y são representados pelas linhas rosa e preta, respectivamente. Os envelopes do modelo r_x e r_y são representados pelas linhas vermelha e azul, respectivamente.

Como visto na figura A.2, logo após a primeira oscilada os envelopes da simulação e do modelo oscilam em desacordo. O feixe da simulação a partir de $s = 35$ apresenta um formato elíptico, sendo o semi-eixo, maior na direção y . A razão entre os envelopes, na simulação em $s = 49.2$ é de $\frac{r_x}{r_y} = 0.763$. No modelo assumimos que a densidade parabólica é mantida, mesmo com o descasamento do feixe, portanto, a distribuição espacial permanece inalterada durante a propagação do feixe. Na simulação a densidade parabólica não é mantida durante a propagação do feixe, pois o descasamento do envelope e uma perveância alta, igual a $k = 3$ fornece energia em excesso ao feixe e consequentemente as partículas deste, sendo que essa energia em excesso faz com que as partículas se redistribuam durante a evolução do feixe, alterando a distribuição. É essa variação da distribuição o agente causador do desacordo entre a simulação auto-consistente e o modelo.

O efeito dessa variação da distribuição se torna crítico na evolução das emitâncias da simulação e do modelo. Como mostrado na figura A.3 as emitâncias ϵ_x e ϵ_y da simulação oscilam em fase, não apresentando acoplamento, ao contrário das emitâncias do modelo

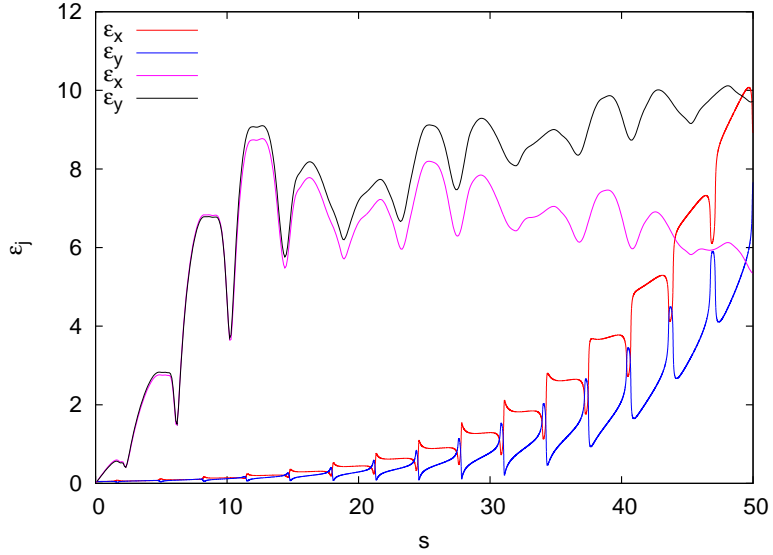


Figura A.3: Comparação entre as emitâncias calculadas via simulação auto-consistente e as emitância calculadas pelas Eqs.(3.4) e (3.5). As emitâncias da simulação ϵ_x e ϵ_y são representadas pelas linhas rosa e preta, respectivamente. As emitâncias do modelo ϵ_x e ϵ_y são representadas pelas linhas vermelha e azul, respectivamente.

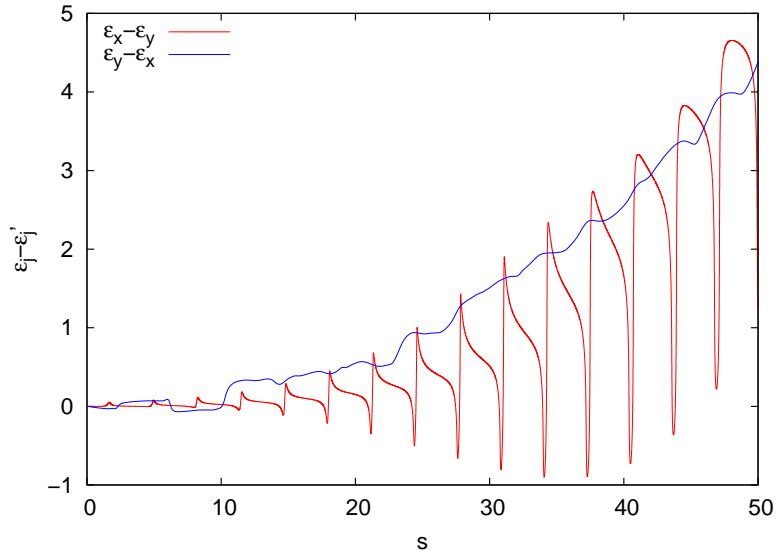


Figura A.4: Comparação entre a diferença da emitância maior e a menor calculadas via simulação auto-consistente e pelo modelo. A diferença $\epsilon_x - \epsilon_y$ do modelo é representada pela linha vermelha. A diferença $\epsilon_y - \epsilon_x$ da simulação é representada pela linha azul.

que oscilam fora de fase, caracterizando um acoplamento dessas. Na simulação as emitâncias ϵ_x e ϵ_y a partir de $s = 25$ são diferentes sendo a ϵ_y maior, carecterizando um feixe anisotrópico. A razão entre as emitâncias, na simulação, em $s = 50$ é de $\frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} = 0.549$. A diferença entre a enitância maior e a menor da simulação (linha azul) e do modelo (linha

vermelha) são mostradas na figura A.4. Esse gráfico mostra que o crescimento da anisotropia em ambos (simulação e modelo) apresenta similaridades. Observe que somente as amplitudes máximas de oscilação da diferença das emitâncias no modelo são compatíveis com a diferença das emitâncias da simulação. O desacordo entre a evolução das emitâncias da simulação e do modelo, novamente, é explicado pela variação da distribuição do feixe durante a evolução deste. Temos que lembrar que tanto o envelope, quanto a emitância são médias estatísticas sobre o espaço de fases do feixe e, conseqüentemente dependentes, essas médias, vale a pena frisar, da distribuição do feixe. Os fenômenos do feixe apresentar um formato elíptico e uma anisotropia das emitâncias estão presentes em ambos simulação e modelo, mas em escalas diferentes. Considerar um modelo que englobe a variação da distribuição na dinâmica dos envelopes e emitâncias tornaria a evolução desses, similares com a simulação auto-consistente [6, 7].

Bibliografia

- [1] T.F. De Laney and H.M. Kooy. *Proton and charged particle radiotherapy*. Lippincott Williams & Wilkins, 2007.
- [2] Z. Yu, L. Yu, I. Brown, and T. Vilaithong. *Introduction to ion beam biotechnology*. Springer Verlag, 2005.
- [3] A.W. Chao and M. Tigner. *Handbook of accelerator physics and engineering*. World Scientific, 1999.
- [4] P. Strehl. *Beam instrumentation and diagnostics*. Springer Verlag, 2006.
- [5] H. Wiedemann. *Particle accelerator physics*. Springer Verlag, 2007.
- [6] F. Zimmermann, R. Basset, G. Bellodi, E. Benedetto, U. Dorda, M. Giovannozzi, and et.al. Accelerator physics code web repository. In *Proceedings of the Sixth European Particle Accelerator Conference*, page 2254, 2006.
- [7] (http://care-hhh.web.cern.ch/CARE-HHH/simulation_codes_catalogue_and_repository.htm).
- [8] S.Y. Lee. *Accelerator physics*. World Scientific Pub, 2004.
- [9] M. Reiser. *Theory and Design of Charged Particle Beams*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1994.
- [10] Pierre M Lapostolle. On the design of a high intensity proton linear accelerator. In *2nd IEEE Particle Accelerator Conference*, page 572. IEEE, 1967.
- [11] M. Martini, M. ; Promé. Computer studies of beam dynamics in a proton linear accelerator with space charge. *Part. Accel.*, 2:289, 1971.
- [12] R.A. Jameson. Beam intensity limitations in linear accelerators. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 28:2408, 1981.
- [13] W. Simeoni Jr. Estabilidade não-linear de um feixe de partículas carregadas sujeito a um campo magnético focalizador. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. (<http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/7656>).

- [14] E. Fermi; and J. Pasta ;and S. Ulam. Studies of nonlinear problems. In *Los Alamos scientific report, LA-1940*, 1955.
- [15] F. Reif. *Statistical Physics*. McGraw-Hill, Berkeley, 1967.
- [16] J. Jellinek and A. Goldberg. On the temperature, equipartition, degrees of freedom, and finite size effects: Application to aluminum clusters. *The Journal of Chemical Physics*, 113:2570, 2000.
- [17] G. Gallavotti. *The Fermi-Pasta-Ulam Problem*, volume 728. Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, 2008.
- [18] A.J. Lichtenberg e M.A. Lieberman. *Regular and chaotic dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [19] R. Bachelard;, C. Chandre;, D. Fanelli;, X. Leoncini;, and S. Ruffo. Abundance of regular orbits and nonequilibrium phase transitions in the thermodynamic limit for long-range systems. *Physical Review Letters*, 101(4):260603, 2008.
- [20] J.R. Dorfman. *An introduction to chaos in nonequilibrium statistical mechanics*. Cambridge Univ Pr, 1999.
- [21] P. Gaspard. *Chaos, scattering, and statistical mechanics*. Cambridge Univ Pr, 1998.
- [22] J-M. Lagniel. Halos and chaos in space-charge dominated beams. In *Proceedings of the Fifth European Particle Accelerator Conference*, page 163, 1996.
- [23] I. Hofmann. Stability of anisotropic beams with space charge. *Physical Review E*, 57(4):4713, 1998.
- [24] Patrick G. O' Shea. Reversible and irreversible emittance growth. *Physical Review E*, 57(1):1081, 1998.
- [25] J-M. Lagniel; and S. Nath. On energy equipartition induced by space charge in bunched beams. In *Proceedings of the 1998 European Particle Accelerator Conference*, page 1118, 1998.
- [26] S. M. Lund;, J. J. Barnard;, G. D. Craig;, A. Friedman;, D. P. Grote;, H. S. Hopkins;, T. C. Sangster;, W. M. Sharp;, S. Eylon;, T. J. Fessenden;, E. Henestroza;, S. Yu;, and I. Haber. Numerical simulation of intense-beam experiments at llnl and lbl. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sect. A*, 415(1-2):345, 1998.
- [27] I. Haber;, D. A. Callahan;, A. Friedman;, D. P. Grote;, S. M. Lund, and T. F. Wang. Characteristics of an electrostatic instability driven by transverse longitudinal temperature anisotropy. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sect. A*, 415(1-2):405, 1998.

- [28] R.L. Gluckstern. Oscillation modes in two dimensional beams. In *Proceedings of the National Accelerator Lab Linac Conference*, page 811, 1970.
- [29] I. Hofmann;, J. Qiang;, and R. D. Ryne. Collective resonance model of energy exchange in 3d nonequipartitioned beams. *Physical Review Letters*, 86(11):2313, 2001.
- [30] I. Hofmann; and O. Boine-Frankenheim. Resonant emittance transfer driven by space charge. *Physical Review Letters*, 87(3):034802, 2001.
- [31] G. Franchetti;, I. Hofmann;, and D. Jeon. Anisotropic free-energy limit of halos in high-intensity accelerators. *Physical Review Letters*, 88(25):254802, 2002.
- [32] R. A. Kishek;, P. G. O’Shea;, and M. Reiser. Energy transfer in nonequilibrium space charge dominated beams. *Physical Review Letters*, 85(21):4514, 2000.
- [33] S. Bernal;, R. A. Kishek;, M. Reiser;, and I. Haber. Observations and simulations of transverse density waves in a collimated space charge dominated electron beam. *Physical Review Letters*, 82(20):4002, 1999.
- [34] T. Wangler;, P. Lapostolle;, and A. Lombardi. Space-charge-induced emittance growth in an elliptical charged particle beam with a parabolic density distribution. In *Proceedings of International Conference on Particle Accelerators*, page 3606, 1993.
- [35] Courtlandt L. Bohn. Transverse phase-space dynamics of mismatched charged-particle beams. *Physical Review Letters*, 70(7):932, 1993.
- [36] Robert A. Jameson. Design for low beam loss in accelerators for intense neutron source applications. In *IEEE Particle Accelerator Conference 1993*, page 3926, 1993.
- [37] J. Lagniel. On halo formation from space-charge dominated beams. *Nucl.Instrum. Methods Phys.Res.Sect.A*, 345(1):46, 1994.
- [38] J. Lagniel. Chaotic behaviour and halo formation from 2d space-charge dominated beams. *Nucl.Instrum. Methods Phys.Res.Sect.A*, 345(3):405, 1994.
- [39] Robert L. Gluckstern. Analytic model for halo formation in high current ion linacs. *Physical Review Letters*, 73(9):1247, 1994.
- [40] T. P. Wangler;, K. R. Crandall;, R. Ryne;, and T. S. Wang. Particle-core model for transverse dynamics of beam halo. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 1(8):084201, 1998.
- [41] Robert L. Gluckstern;, Wen-Hao Cheng;, and Huanchun Ye. Stability of a uniform-density breathing beam with circular cross section. *Physical Review Letters*, 75(15):2835, 1995.

- [42] Robert L. Gluckstern;, Wen-Hao Cheng;, Sergey S. Kurennoy;, , and Huanchan Ye. Stability and halo formation of a breathing axisymmetric uniform-density beam. *Physical Review E*, 54(6):6788, 1996.
- [43] Qian Qian; and Ronald C. Davidson. Nonlinear dynamics of intense ion beam envelopes. *Physical Review E*, 53(5):5349, 1996.
- [44] Hiromi Okamoto and Masanori Ikegami. Simulation study of halo formation in breathing round beams. *Physical Review E*, 55(4):4694, 1997.
- [45] Masanori Ikegami. Particle-core analysis of mismatched beams in a periodic focusing channel. *Physical Review E*, 59(2):2330, 1999.
- [46] A.V. Fedotov;, I. Hofmann;, R.L. Gluckstern;, and H. Okamoto. Parametric collective resonances and space-charge limit in high-intensity rings. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 6(9):094201, 2003.
- [47] B.W.Montague. Fourth-order coupling resonance excited by space-charge forces in a synchrotron. Technical report, CERN, CERN-Report No. 68-38, 1968.
- [48] Alexei V. Fedotov. Beam halo formation in high-intensity beams. *Nucl.Instrum. Methods Phys.Res.Sect.A*, 557(1):216, 2006.
- [49] Masanori Ikegami. Particle-core analysis of beam halo formation in anisotropic beams. *Nucl.Instrum. Methods Phys.Res.Sect.A*, 435(3):284, 1999.
- [50] W. Simeoni Jr.;; F. Rizzato;; and R. Pakter. Nonlinear coupling between breathing and quadrupole-like oscillations in the transport of mismatched beams in continuous magnetic focusing fields. *Physics of Plasmas*, 13:063104, 2006.
- [51] P.M.Lapostolle. Possible emittance increase through filamentation due to space-charge in continuous beams. In *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, page 1101, 1971.
- [52] R.A.Kishek;; S. Bernal;and P.G.O. Shea;; M. Reiser;; and I. Haber. Transverse space-charge modes in non-equilibrium beams. *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, A*, 464:484, 2001.
- [53] T.P. Wangler;; F.W. Guy;; and I. Hofmann. The influence of equipartitioning on the emittance of intense charged particle beams. In *Linear accelerator conference*, page 340, 1986.
- [54] Courtlandt L Bohn; and Ioannis V. Sideris. Chaotic orbits in thermal-equilibrium beams: Existence and dynamical implications. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 6(3):034203, 2003.

- [55] H.E. Kandrup;, I.M. Vass;, and I.V. Sideris. Transient chaos and resonant phase mixing in violent relaxation. *Mon.Not.R.Astron.Soc*, 341(3):927, 2003.
- [56] H.E. Kandrup; and Christos Siopis. Chaos and chaotic phase mixing in cuspy triaxial potentials. *Mon.Not.R.Astron.Soc*, 345(3):727, 2003.
- [57] E.A. Startsev;, R.C. Davidson;, and H. Qin. Anisotropy-driven collective instability in intense charged particle beams. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 8(12):124201, 2005.
- [58] J. Nycander; and V.V Yankov. Turbulent equipartition and up-gradient transport. *Physica Scripta*, T63:174, 1996.
- [59] V.V. Yankov; and J. Nycander. Description of turbulent transport in tokamaks by invariants. *Physics of Plasmas*, 4:2907, 1997.
- [60] M.B. Isichenko;, A.V. Gruzinov;, P.H. Diamond;, and P.N. Yushmanov. Anomalous pinch effect and energy exchange in tokamaks. *Physics of Plasmas*, 3:1916, 1996.
- [61] H.E. Kandrup. Invariant distributions and collisionless equilibria. *Mon.Not.R.Astron.Soc.*, 299:1139, 1998.
- [62] F.J. Sacherer. Rms envelope equations with space charge. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 18:1105, 1971.
- [63] P.M.Lapostolle. Champ et potentiel de charge d'espace produit par un faisceau de section elliptique dans un tube metallique egalement elliptique. Technical report, CERN, CERN Report AR/Int. SG/65-27, 1965.
- [64] R.C. Davidson; and H. Qin. *Physics of intense charged particle beams in high energy accelerators*. Imperial College Press, 2001.
- [65] Filippo Neri; and Govindan Rangarajan. Kinematic moment invariants for linear hamiltonian systems. *Physical Review Letters*, 64(10):1073, 1990.
- [66] Alex J. Dragt;, Filippo Neri;, and Govindan Rangarajan. General moment invariants for linear hamiltonian systems. *Physical Review A*, 45(4):2572, 1992.
- [67] N. Piovella;, A. Bourdier;, P. Chaix;, and D. Iracane. Perturbative theory of the core-halo interaction in a continuous focusing channel. In *Proceedings of the Fourth European Particle Accelerator Conference*, page 1186, 1994.
- [68] W. Simeoni Jr. Transition from isotropic to anisotropic beam profiles in a uniform linear focusing channel. In *Proceedings of the 2007 Particle Accelerator Conference*, page 3892, 2007. AWARD - PAC07 - (Particle Accelerator Conference 2007), Student Poster Award, IEEE - NPSS.

- [69] W. SIMEONI Jr. Transition from isotropic to anisotropic beam profiles in a linear focusing channel. Article submitted.
- [70] <http://www.fft.w.org/>.
- [71] M. Frigo; and S. G. Johnson. The design and implementation of fftw3. In *Proceedings of the IEEE*, page 216, 2005.
- [72] I. Hofmann;; G. Franchetti;; J. Qiang;; and R.D. Ryne. Dynamical effects in crossing of the montague resonance. In *Proceedings of the European Particle Accelerator Conference*, page 1960, 2004.
- [73] S. Ohnuma; and R.L. Gluckstern. Width of nonlinear difference resonances. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 32:2261, 1985.
- [74] G. Franchetti;; I. Hofmann;; and M. Aslaninejad. Collective emittance exchange with linear space charge forces and linear coupling. *Physical Review Letters*, 94(19):194801, 2005.
- [75] I. Hofmann;; G. Franchetti;; O. Boine-Frankenheim;; J. Qiang;; and R.D. Ryne. Space charge resonances in two and three dimensional anisotropic beams. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 6(2):024202, 2003.
- [76] M. Aslaninejad; and I. Hofmann. Effect of space charge on linear coupling and gradient errors in high-intensity rings. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 6(12):124202, 2003.
- [77] I. Hofmann. Equipartitioning and halo due to anisotropy. In *Proceedings of the Particle Accelerator Conference*, page 1852, 2007.
- [78] W. Simeoni Jr. Anisotropies in a charged particle beam. *J. Plasma Physics*, 2010.
- [79] L.M. Young. Equipartitioning in a high current proton linac. In *Proceedings of the Particle Accelerator Conference*, page 1920, 1997.
- [80] I.Hofmann. Emittance growth of beams close to the space charge limit. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 28:2399, 1981.
- [81] I. Hofmann; and G. Franchetti. Self-consistent study of space-charge-driven coupling resonances. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 9(5):054202, 2006.
- [82] R.L. Gluckstern; and A.V. Fedotov. Coulomb scattering within a spherical beam bunch in a high current linear accelerator. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 2(5):054201, 1999.

- [83] W. Simeoni Jr. Anisotropic kinetic and dynamic processes in equipartitioned beams. In *Proceedings of the Particle Accelerator Conference*, 2009.
- [84] A.M. Lyapunov. *Stability of Motion*. Academic Press,, New York, 1966.
- [85] C. Beck and F. F. Schlögl. *Thermodynamics of chaotic systems: An introduction*. Cambridge Univ Pr, 1995.
- [86] J.M. Ottino. *The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport*. Cambridge Univ Pr, 1989.
- [87] J. Nycander and V.V. Yankov. Turbulent equipartition and up-gradient transport. *Physica Scripta*, 63:174, 1996.
- [88] K. Joh; and J.A. Nolen. Applications of matrix optics to acceptance studies in low-beta ion linacs. In *Proceedings of the Particle Accelerator Conference*, page 71, 1993.
- [89] M. Weiss. Bunching of intense proton beams with six-dimensional matching to the linac acceptance. *IEEE Trans. Nucl. Sci*, 20(3):877, 1973.
- [90] D. Bambusi. Some stability properties of breathers in hamiltonian networks of oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 119(1):47, 1998.
- [91] M.W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations Dynamical System and Linear Algebra*. Academic Press,, New York, 1974.
- [92] T.D. Frank. Smoluchowski approach to nonlinear vlasov-fokker-planck equations: Stability analysis of beam dynamics and haïssinski theory. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 9(8):084401.
- [93] W. Simeoni Jr. Anisotropic equipartition state in a charged particle beam. *Physics Letters A*, 2010.
- [94] R.A. Jameson. Equipartitioning in linear accelerators. Technical report, Los Alamos, LA-UR-81-3073, 1981.
- [95] D. Lynden-Bell. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 136:101, 1967.
- [96] B. B. Kadomtsev; and O. P. Pogutse. Collisionless relaxation in systems with coulomb interactions. *Physical Review Letters*, 25(17):1155, 1970.
- [97] R.A. Kishkek;, C.L. Bohn;, I. Haber;, P.G.O. Shea;, M. Reiser;, and H.E. Kandrup. Computational investigation of dissipation and reversibility of space-charge driven

- processes in beams. In *Proceedings of the Particle Accelerator Conference*, page 151, 2001.
- [98] N. Brown; and M. Reiser. Thermal equilibrium of bunched charged particle beams. *Physics of Plasmas*, 2:965, 1995.
- [99] J. Struckmeier. Improved envelope and emittance description of particle beams using the fokker-planck approach. *Particle Accelerators*, 45(4):229, 1994.
- [100] J. Struckmeier. Concept of entropy in the realm of charged particle beams. *Physical Review E*, 54(1):830, 1996.
- [101] S. Tremaine;, M. Henon;, and D. Lynden-Bell. H-functions and mixing in violent relaxation. *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, 219:285.
- [102] J.D. Lawson;, P.M. Lapostolle;, and R.L. Gluckstern. Emittance, entropy, and information. *Particle Accelerators*, 5:61.
- [103] G.G. Howes. Inertial range turbulence in kinetic plasmas. *Physics of Plasmas*, 15:055904, 2008.
- [104] W. Simeoni Jr. Core-halo interactions in a charged particle beam. Article in preparation.
- [105] C. L. Bohn; and J. R. Delayen. Fokker-planck approach to the dynamics of mismatched charged-particle beams. *Physical Review E*, 50(2):1516, 1994.
- [106] Martin Reiser and Nathan Brown. Thermal distribution of relativistic particle beams with space charge. *Physical Review Letters*, 71(18):2911, 1993.
- [107] P. Chavanis. Hamiltonian and brownian systems with long-range interactions: II. kinetic equations and stability analysis. *Physica A*, 361(1):81, 2006.
- [108] S.I.Tzenov. Collision integrals and the generalized kinetic equation for charged particle beams. In *Fermilab-Pub-98/287*, page 1, 1998.
- [109] M. Hess, R. Pakter, and C. Chen. Greens's functions description of space-charge in intense charged-particle beams. *Proceedings of the Particle Accelerator Conference*, page 2752, May 1999.
- [110] J.D.Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Willey Sons, New Jersey, 1999.
- [111] R. Pakter and F.B. Rizzato. Nonlinear dynamics of periodically focused intense particle beams. *Physical Review E*, 65:056503, 2002.