

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**UMA METODOLOGIA PARA AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO**  
**DE COMPÓSITOS COM MICROESTRUTURA MULTIFÁSICA**

**por**

**Matheus Madrid Moreira**

**Dissertação para obtenção do Título de**  
**Mestre em Engenharia**

**Porto Alegre, Outubro de 2019.**

UMA METODOLOGIA PARA AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO  
DE COMPÓSITOS COM MICROESTRUTURA MULTIFÁSICA

por

Matheus Madrid Moreira  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Aprovada por:

Profa. Dra. Branca Freitas de Oliveira ..... PGDESIGN/UFRGS

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz ..... PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Sandro Campos Amico ..... PPGE3M/UFRGS

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 04 de Outubro de 2019.

*À Sofia Madrid ...  
para quem dedico esta e todas as minhas conquistas.*

*“Success consists of going from failure to failure without loss of enthusiasm.”*

*Winston Churchill*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, inicialmente, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro durante o período deste mestrado, sem o qual não seria possível ter dedicado dois anos valiosos às disciplinas cursadas e ao trabalho de pesquisa realizado, concluídos com esta dissertação.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PROMEC – UFRGS) pela oportunidade de estudar em um dos melhores programas do país, por todo o apoio e a infraestrutura disponibilizada.

Ao meu orientador, professor Rogério José “Rato” Marczak, meus agradecimentos especiais. Primeiro, por ser um dos responsáveis pelo meu interesse em mecânica dos sólidos, em grande parte, adquirido durante suas aulas na graduação. Depois, pela confiança e pelo tempo que foram investidos na minha orientação, onde sempre demonstrou sua preocupação com meu desenvolvimento técnico e pessoal. Por seu incentivo e auxílio na solução dos problemas que surgiram ao longo do trabalho e por todas as conversas (além dos temas relacionados à engenharia) que aliaram muito bom humor e aprendizado.

Aos professores do Grupo de Mecânica Aplicada (GMAp), meu reconhecimento pelo ensino de elevada qualidade e pela disposição para ajudar os alunos. Da mesma forma, meus agradecimentos aos colegas do GMAp e dos demais grupos da UFRGS, especialmente, ao Dr. Tales Lisbôa, pelo conhecimento compartilhado e pela assistência de modo geral. Definitivamente, todos foram muito importantes para minha formação. Também agradeço pelos momentos de descontração, sem esquecer de mencionar as partidas de futebol, que tornaram o trabalho ainda mais agradável.

Agradeço aos professores da comissão de avaliação, Branca de Oliveira, Ignácio Iturrioz e Sandro Amico, por suas contribuições com a revisão deste texto. Em particular, agradeço ao professor Sandro pela oferta de cursar doutorado sob sua orientação, que além da motivação extra, consolidou minha decisão de seguir a carreira acadêmica e de pesquisa.

Por fim, mas longe de menos importante, agradeço aos meus amigos e familiares por todo o carinho, compreensão e suporte. As três grandes mulheres da minha vida, Maria, Nóra e Zita, por seu amor, pela estrutura física e psicológica, por seus exemplos de determinação e pela educação

que me proporcionaram. A pequena Sofia, por todas as alegrias que me trouxe e por me fazer querer ser melhor a cada dia.

Enfim, são muitas pessoas que participaram diretamente ou indiretamente de mais esta etapa da minha jornada, peço desculpas pelos possíveis esquecimentos. Estou muito feliz com a conclusão do mestrado e pronto para o próximo desafio. Quero registrar minha gratidão a todos os envolvidos!

## RESUMO

O desenvolvimento da manufatura aditiva leva a um novo paradigma no projeto de materiais, no qual a topologia da microestrutura desempenha um papel central. Nos últimos anos, processos que permitem a impressão tridimensional de diferentes materiais, incluindo feixes contínuos de compósitos poliméricos reforçados por fibras de carbono, têm atraído a atenção da comunidade científica. A flexibilidade no design geométrico e a precisão sub milimétrica das tecnologias de fabricação por métodos aditivos viabilizam adequar o arranjo microestrutural de materiais para obter respostas macroscópicas aprimoradas. Assim, também surge a necessidade de formular modelos matemáticos com capacidade de descrever comportamentos cada vez mais complexos. Neste contexto, o presente trabalho apresenta uma metodologia numérica para auxiliar no estudo do comportamento mecânico de compósitos com microestrutura formada pela disposição espacial de uma fase contínua de reforço. A estratégia computacional é programada em um software comercial de elementos finitos. São gerados modelos tridimensionais para caracterizar microestruturas com arquiteturas inspiradas nas tramas fundamentais de compósitos têxteis (tecidos do tipo plano, sarja e cetim) e nos entrelaçamentos resultantes em processos automatizados de posicionamento contínuo de reforços. O problema é abordado no domínio da elasticidade linear, com hipótese de pequenas deformações. Os detalhes microestruturais são incorporados na resposta efetiva do material por meio de um procedimento de homogeneização baseado nos argumentos físicos do Princípio de Hill-Mandel. A metodologia implementada é aplicada para investigar as dimensões que estabelecem o elemento de volume representativo (EVR) de um compósito microestruturado específico e para avaliar os efeitos que são produzidos por diferentes arranjos microestruturais sobre a resposta mecânica macroscópica observada em modelos que contêm a mesma quantidade de feixes de reforço. Os resultados obtidos revelam comportamentos constitutivos anisotrópicos, distintos daqueles que se pode intuir a partir de experiências prévias com materiais isotrópicos ou até mesmo ortotrópicos. A existência de fortes acoplamentos entre extensão e cisalhamento, em diferentes planos e direções, é demonstrada através dos campos de deslocamentos causados por uma condição de carregamento simples.

**Palavras-chave:** Compósitos; Microestrutura; Homogeneização; Anisotropia.

## ABSTRACT

The development of additive manufacturing leads to a new paradigm in the design of materials, in which the topology of the microstructure plays a central role. In recent years, processes that allow three-dimensional printing of different materials, including continuous tows of polymeric composites reinforced by carbon fibers, have attracted the attention of the scientific community. The flexibility in geometric shapes and the submillimetric precision of production technologies by additive methods make it possible to adapt the microstructural arrangement of materials to obtain improved macroscopic responses. Thus, there is also a need to formulate mathematical models with the ability to describe increasingly complex behaviors. In this context, the present work presents a numerical methodology to assist in the study of the mechanical behavior of composites with microstructure formed by the spatial arrangement of a continuous reinforcement phase. The computational strategy is programmed in commercial finite element software. Three-dimensional models are generated to characterize microstructures with architectures inspired by the fundamental wefts of textile composites (fabrics of plain weave type, twill, and satin) and the interlacing resulting in automated placement processes of continuous reinforcement. The problem is addressed in the domain of linear elasticity, with the hypothesis of small deformations. The microstructural details are incorporated into the effective response of the material through a homogenization procedure based on the physical arguments of the Hill-Mandel Principle. The implemented methodology is applied to investigate the dimensions that establish the representative volume element (RVE) of a specific microstructured composite and to evaluate the effects that are produced by different microstructural arrangements on the macroscopic mechanical response observed in models that contain the same amount of reinforcement tows. The results obtained reveal anisotropic constitutive behaviors, different from those that can be intuitive from previous experiences with isotropic or even orthotropic materials. The existence of strong couplings between extension and shear, in different planes and directions, is demonstrated on the displacement fields caused by a simple loading condition.

**Keywords:** Composites; Microstructure; Homogenization; Anisotropy.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1	Considerações iniciais .....	1
1.2	Objetivos.....	7
1.3	Estrutura da dissertação.....	8
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>10</b>
2.1	Materiais compósitos.....	10
2.2	Compósitos com entrelaçamento de reforços contínuos .....	13
2.3	Teoria de homogeneização .....	18
<b>3</b>	<b>RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DA ELASTICIDADE ANISOTRÓPICA .....</b>	<b>21</b>
3.1	Equações básicas da elasticidade linear.....	22
3.2	Relação constitutiva – caso anisotrópico.....	25
3.3	Simetria material.....	28
3.4	Constantes de engenharia .....	31
3.5	Princípio dos Trabalhos Virtuais – PTV.....	36
<b>4</b>	<b>ABORDAGEM MICROMECAÂNICA .....</b>	<b>39</b>
4.1	Micromecânica x Macromecânica.....	39
4.2	Elemento de volume representativo (EVR) e célula unitária de repetição (CUR).....	40
4.3	Média volumétrica.....	42
4.4	Condições de contorno homogêneas .....	43
4.5	Teorema da deformação média.....	44
4.6	Teorema da tensão média .....	45
4.7	Propriedades efetivas.....	47
4.8	Equivalência energética.....	48

<b>5</b>	<b>MODELAGEM E IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....</b>	<b>53</b>
5.1	Definição do problema .....	53
5.2	Modelos geométricos.....	56
5.3	Método dos Elementos Finitos – MEF.....	63
5.3.1	Discretização da geometria .....	63
5.3.2	Procedimento geral do MEF.....	65
5.4	Procedimento de homogeneização .....	68
<b>6</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>73</b>
6.1	Determinação do EVR de um material microestruturado .....	73
6.2	Análise dos padrões de entrelaçamento da fase de reforço .....	81
6.2.1	Padrão de entrelaçamento simples .....	82
6.2.2	Padrão de entrelaçamento sarja .....	84
6.2.3	Padrão de entrelaçamento cetim.....	87
6.2.4	Entrelaçamento de reforços com ângulos alternados de $0^\circ / 90^\circ$ .....	90
6.2.5	Entrelaçamento de reforços com ângulos alternados de $\pm 30^\circ$ .....	93
6.2.6	Entrelaçamento de reforços com ângulos alternados de $\pm 45^\circ$ .....	96
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>101</b>
7.1	Perspectivas futuras .....	102
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>104</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b> – Número de artigos, em intervalos de 4 anos, considerando FW, AFP, ATL e 3DP, conforme dados do <i>Google Scholar</i> [adaptado de Frketic et al., 2017]. .....	2
<b>Figura 1.2</b> – Pré-formas multidirecionais típicas para compósitos. Modelo projetado à esquerda e foto do objeto fabricado por impressão tridimensional à direita [adaptado de Quan et al., 2015]..	3
<b>Figura 1.3</b> – Impressão de compósitos em fibra de carbono [adaptado de <i>continuous composites</i> ].....	4
<b>Figura 2.1</b> – Aumento do uso de compósitos nas últimas quatro décadas [adaptado de Ghobadi, 2017]......	11
<b>Figura 2.2</b> – Lâmina com fibras unidirecionais à esquerda e lâmina com fibras entrelaçadas à direita [adaptado de Jones, 1999]. .....	13
<b>Figura 2.3</b> – Tecidos fundamentais: (a) plano, (b) cetim e (c) sarja. [Adaptado de Elmarakbi, 2014]......	14
<b>Figura 2.4</b> – Padrão com posicionamento em ângulos alternados ( $+\alpha/-\alpha$ ) [adaptado de Hernández-Moreno et al., 2008]......	15
<b>Figura 4.1</b> – Comparação entre as abordagens macromecânica e micromecânica [adaptado de Aboudi et al., 2013]......	40
<b>Figura 4.2</b> – Relação entre as escalas de uma CUR, um EVR e uma estrutura [adaptado de Aboudi et al., 2013]......	42
<b>Figura 5.1</b> – Níveis de escalas em uma placa de material compósito com microestrutura formada pela disposição de uma fase contínua de reforço. ....	54
<b>Figura 5.2</b> – Configuração de entrelaçamento do padrão plano.....	58
<b>Figura 5.3</b> – Configuração de entrelaçamento do padrão sarja. ....	58
<b>Figura 5.4</b> – Configuração de entrelaçamento do padrão cetim.....	59
<b>Figura 5.5</b> – Configuração de entrelaçamento para o posicionamento com ângulos alternados..	59
<b>Figura 5.6</b> – Mapeamento dos parâmetros geométricos no plano de entrelaçamento inferior.....	60
<b>Figura 5.7</b> – Mapeamento dos parâmetros geométricos ao longo da espessura (direção z).....	60

<b>Figura 5.8</b> – Formação dos volumes dos segmentos retos do feixe de reforço. ....	<b>61</b>
<b>Figura 5.9</b> – Conexão de dois volumes consecutivos para formação do feixe de reforço. ....	<b>61</b>
<b>Figura 5.10</b> – Formação do arranjo de reforços conforme o padrão de entrelaçamento plano. ...	<b>62</b>
<b>Figura 5.11</b> – Modelo geométrico do material compósito contendo as fases de reforço e matriz, para um padrão plano. ....	<b>63</b>
<b>Figura 5.12</b> – Representação do elemento tetraédrico quadrático de 10 nós utilizado [adaptado de ANSYS, 2016]. ....	<b>64</b>
<b>Figura 5.13</b> – Representação da malha de elementos finitos. ....	<b>64</b>
<b>Figura 5.14</b> – Estados de deformação para homogeneização. ....	<b>69</b>
<b>Figura 5.15</b> – Fluxograma do algoritmo implementado para avaliar o comportamento mecânico efetivo de materiais compósitos microestruturados. ....	<b>72</b>
<b>Figura 6.1</b> – Análise das dimensões do EVR para o modelo com microestrutura formada de acordo com o padrão de entrelaçamento simples da fase de reforço. ....	<b>73</b>
<b>Figura 6.2</b> – Módulos de elasticidade efetivos para microestrutura com entrelaçamento simples .....	<b>77</b>
<b>Figura 6.3</b> – Módulos de cisalhamento efetivos para microestrutura com entrelaçamento simples .....	<b>78</b>
<b>Figura 6.4</b> – Coeficientes de Poisson efetivos para microestrutura com entrelaçamento simples .....	<b>79</b>
<b>Figura 6.5</b> – Coeficientes de Chentsov efetivos para microestrutura com entrelaçamento simples .....	<b>79</b>
<b>Figura 6.6</b> – Coeficientes de influência mútua efetivos para microestrutura com entrelaçamento simples. ....	<b>80</b>
<b>Figura 6.7</b> – Condições de contorno para simulação e análise dos campos de deslocamentos. ....	<b>81</b>
<b>Figura 6.8</b> – Trama de reforços segundo o padrão simples. ....	<b>82</b>
<b>Figura 6.9</b> – Deslocamentos produzidos na microestrutura com padrão de entrelaçamento dos feixes de reforço conforme o tecido plano. ....	<b>84</b>
<b>Figura 6.10</b> – Trama de reforços segundo o padrão sarja. ....	<b>84</b>

<b>Figura 6.11</b> – Deslocamentos produzidos na microestrutura com padrão de entrelaçamento dos feixes de reforço conforme o tecido sarja.....	<b>87</b>
<b>Figura 6.12</b> – Trama de reforços segundo o padrão cetim. ....	<b>87</b>
<b>Figura 6.13</b> – Deslocamentos produzidos na microestrutura com padrão de entrelaçamento dos feixes de reforço conforme o tecido cetim. ....	<b>90</b>
<b>Figura 6.14</b> – Trama de reforços com ângulos alternados de $0^\circ/90^\circ$ .....	<b>91</b>
<b>Figura 6.15</b> – Deslocamentos produzidos na microestrutura com padrão de posicionamento dos feixes de reforço em ângulos alternados de $0^\circ/90^\circ$ .....	<b>93</b>
<b>Figura 6.16</b> – Trama de reforços com ângulos alternados de $\pm 30^\circ$ .....	<b>93</b>
<b>Figura 6.17</b> – Deslocamentos produzidos na microestrutura com padrão de posicionamento dos feixes de reforço em ângulos alternados de $\pm 30^\circ$ .....	<b>96</b>
<b>Figura 6.18</b> – Trama de reforços com ângulos alternados de $\pm 45^\circ$ .....	<b>96</b>
<b>Figura 6.19</b> – Deslocamentos produzidos na microestrutura com padrão de posicionamento dos feixes de reforço em ângulos alternados de $\pm 45^\circ$ .....	<b>99</b>

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 5.1</b> – Propriedades elásticas de um compósito de fibras de carbono unidirecionais impregnadas em resina. [Fonte: Tita, 2003] .....	<b>55</b>
<b>Tabela 5.2</b> – Propriedades elásticas de uma resina termofixa. [Fonte: Tita, 2003] .....	<b>56</b>
<b>Tabela 5.3</b> – Parâmetros geométricos para construção dos modelos tridimensionais. ....	<b>57</b>
<b>Tabela 6.1</b> – Constantes de engenharia efetivas para microestruturas formadas pelo padrão de entrelaçamento simples contendo de dois até seis feixes de reforço por direção da trama. ....	<b>75</b>
<b>Tabela 6.2</b> – Constantes de engenharia efetivas para microestruturas formadas pelo padrão de entrelaçamento simples contendo de sete até doze feixes de reforço por direção da trama. ....	<b>76</b>
<b>Tabela 6.3</b> – Constantes de engenharia efetivas obtidas para microestrutura formada pelo padrão de entrelaçamento sarja contendo cinco feixes de reforço por direção da trama. ....	<b>85</b>
<b>Tabela 6.4</b> – Constantes de engenharia efetivas obtidas para microestrutura formada pelo padrão de entrelaçamento cetim contendo cinco feixes de reforço por direção da trama. ....	<b>88</b>
<b>Tabela 6.5</b> – Constantes de engenharia efetivas obtidas para microestrutura formada pelo padrão de posicionamento em $0^\circ / 90^\circ$ contendo cinco feixes de reforço por direção da trama.....	<b>91</b>
<b>Tabela 6.6</b> – Constantes de engenharia efetivas obtidas para microestrutura formada pelo padrão de posicionamento em $\pm 30^\circ$ contendo cinco feixes de reforço por direção da trama. ....	<b>94</b>
<b>Tabela 6.7</b> – Constantes de engenharia efetivas obtidas para microestrutura formada pelo padrão de posicionamento em $\pm 45^\circ$ contendo cinco feixes de reforço por direção da trama. ....	<b>97</b>
<b>Tabela 6.8</b> – Constantes de engenharia efetivas obtidas para as microestruturas estudadas. ....	<b>100</b>

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$\mathbf{a}$	Vetor deslocamento nodal
$A$	Área
$b_i, \mathbf{b}$	Vetor força de corpo
$\mathbf{B}$	Matriz deslocamento-deformação
$C_{ijkl}, \mathbf{C}$	Tensor constitutivo de quarta ordem
$\hat{C}_{ijkl}$	Tensor constitutivo de quarta ordem no sistema de coordenadas rotacionado
$C_{ijkl}^*, \mathbf{C}^*$	Tensor constitutivo efetivo de quarta ordem
$E_{ij}$	Módulo de elasticidade ou de Young
$\mathbf{F}$	Vetor força
$G_{ij}$	Módulo de cisalhamento
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez do elemento
$l_w$	Comprimento de entrelaçamento dos padrões de trama
$l_{ij}$	Cossenos diretores associados aos sistemas de coordenadas $(x_1, x_2, x_3)$ e $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$
$n_i, \mathbf{n}$	Vetor unitário normal à superfície
$\mathbf{N}$	Funções de interpolação
$S_{ijkl}, \mathbf{S}$	Tensor de flexibilidade de quarta ordem
$S_{ijkl}^*, \mathbf{S}^*$	Tensor de flexibilidade efetivo de quarta ordem
$t$	Espessura do feixe de reforço
$t_i, \mathbf{t}$	Vetor força de superfície
$\bar{t}_i, \bar{\mathbf{t}}$	Vetor tração de superfície prescrita (condição de contorno)
$u_i, \mathbf{u}$	Vetor deslocamento
$\bar{u}_i, \bar{\mathbf{u}}$	Vetor deslocamento prescrito (condição de contorno)

$U$	Função densidade de energia de deformação
$V$	Volume
$w$	Largura do feixe de reforço
$W$	Trabalho realizado
$x_i, \mathbf{x}$	Sistema de coordenadas cartesianas
$\hat{x}_i, \hat{\mathbf{x}}$	Sistema de coordenadas cartesianas rotacionado
$x, y, z$	Sistema global de coordenadas cartesianas

### Símbolos Gregos

$\alpha$	Ângulo de posicionamento dos feixes de reforço
$\beta$	Parâmetro constante
$\partial$	Operador diferencial
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\delta u_i, \delta \mathbf{u}$	Deslocamento virtual
$\delta U$	Trabalho virtual interno
$\delta V$	Trabalho virtual externo
$\delta W$	Trabalho virtual realizado
$\delta \varepsilon_{ij}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}$	Deformação virtual
$\varepsilon_{ij}, \boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor deformação infinitesimal
$\hat{\varepsilon}_{ij}$	Tensor deformação infinitesimal no sistema de coordenadas rotacionado
$\langle \varepsilon_{ij} \rangle$	Média volumétrica do tensor deformação infinitesimal
$\gamma_{ij}$	Deformação cisalhante de engenharia
$\Gamma$	Contorno do domínio
$\Gamma_u$	Contorno do domínio sob condições de contorno essenciais
$\Gamma_\sigma$	Contorno do domínio sob condições de contorno naturais
$\eta_{k,ij}$	Coefficiente de influência mútua do primeiro tipo

$\eta_{ij,k}$	Coeficiente de influência mútua do segundo tipo
$\lambda$	Primeiro parâmetro de Lamé
$\mu$	Segundo parâmetro de Lamé
$\mu_{ij,k\ell}$	Coeficiente de Chentsov
$\nu_{ij}$	Coeficiente de Poisson
$\rho$	Densidade de massa
$\sigma_{ij}, \boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão de Cauchy
$\hat{\sigma}_{ij}$	Tensor tensão de Cauchy no sistema de coordenadas rotacionado
$\langle \sigma_{ij} \rangle$	Média volumétrica do tensor tensão de Cauchy
$\Omega_0$	Domínio do problema
$\nabla$	Operador gradiente

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações iniciais

O progresso tecnológico está associado à melhoria contínua dos materiais e de suas propriedades. Geralmente, novos materiais são elaborados devido à necessidade de aprimorar alguma característica de desempenho. Por sua vez, novos materiais oferecem oportunidades para o desenvolvimento de estruturas e tecnologias inovadoras. Uma das principais manifestações desta correlação ocorre através dos materiais compósitos [Vasiliev e Morozov, 2013].

Nas últimas décadas, diversas metodologias de fabricação e sistemas de materiais conjugados foram desenvolvidas para atender demandas de projetos cada vez mais complexos. Por exemplo, materiais de matriz polimérica com fibras de reforço estão substituindo os materiais tradicionais, como ligas de aço e de alumínio, em várias aplicações onde o meio ambiente corrosivo e a combinação entre resistência, rigidez e peso são preocupações importantes [Mazumdar, 2001].

Técnicas de manufatura aditiva surgem como uma opção extremamente interessante para fabricação destes materiais. Metodologias automatizadas de elevado rendimento como *Automated Tape Layup* – ATL, *Automated Fiber Placement* – AFP e *Filament Winding* – FW, estão desempenhando um papel fundamental na fabricação de componentes compósitos. Utilizando softwares de desenho assistido por computador (*computer-aided design* – CAD) e de manufatura assistida por computador (*computer-aided manufacturing* – CAM), máquinas com controle numérico computadorizado são programadas para produzir objetos com rapidez e precisão, reduzindo custos, em processos realizados camada por camada. Os métodos citados, geralmente, utilizam fitas compostas por milhares de fibras contínuas pré-impregnadas com resina, comumente chamadas de “*prepregs*”, para produzir peças com resistência equivalente à das técnicas convencionais, como a moldagem por transferência de resina (*resin transfer molding* – RTM). Entretanto, seu uso é limitado pela necessidade de maquinário especializado e por restrições na fabricação de peças com geometrias complicadas [Frketic et al., 2017].

Recentemente, processos que permitem a impressão tridimensional de materiais (em inglês, *three-dimensional printing* – 3DP) têm se destacado no cenário da manufatura aditiva e atraído a atenção de muitos pesquisadores. A Figura 1.1 ilustra o crescimento exponencial de artigos

publicados sobre o tema, conforme dados do *Google Scholar*. Segundo Frketic et al., 2017, a impressão tridimensional, conhecida inicialmente pela prototipagem rápida, está se tornando uma metodologia confiável, com capacidade de criar objetos customizados que podem ser usados como componentes de produtos finais.

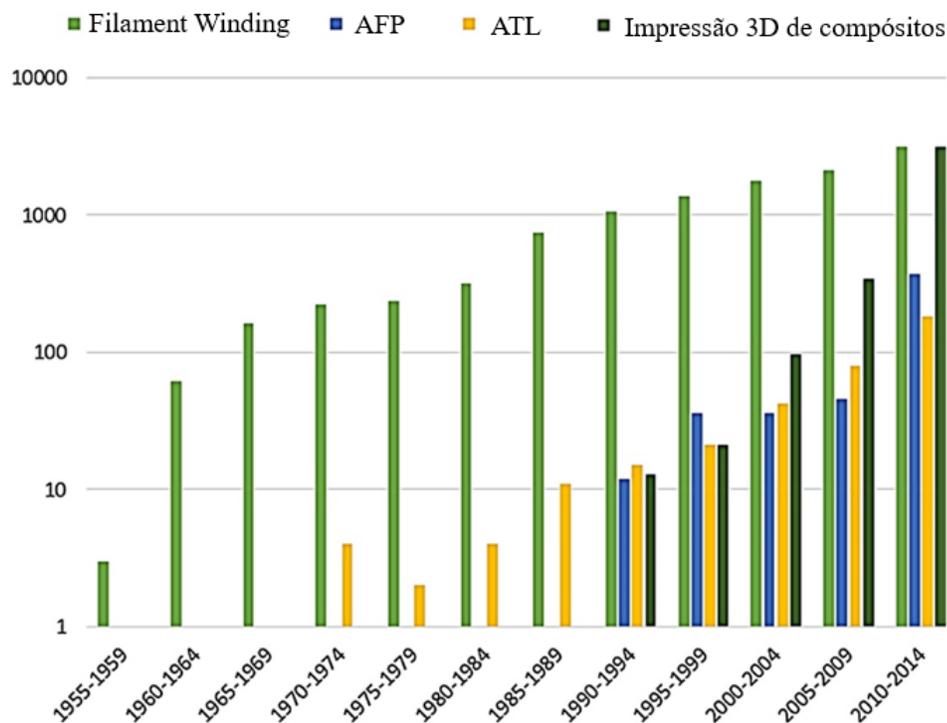


Figura 1.1 – Número de artigos, em intervalos de 4 anos, considerando FW, AFP, ATL e 3DP, conforme dados do *Google Scholar* [adaptado de Frketic et al., 2017].

A fabricação automática, com flexibilidade no design de geometrias complexas, sem a necessidade de ferramentas especializadas e moldes, com custo e tempo relativamente baixos devido à redução nas etapas do processo, estimularam a notável ascensão da 3DP. De acordo com Kabir et al., 2019, as aplicações desta metodologia de manufatura aditiva superaram as previsões do mercado, atingindo no ano de 2018 uma receita global de 14,5 bilhões de dólares, próxima ao dobro do valor projetado para 2020. Exemplos da sua utilização podem ser encontrados nas indústrias automotiva, aeroespacial, metalúrgica, de construção, equipamentos eletrônicos e dispositivos biomédicos. Ainda, segundo Goh et al., 2019, a impressão tridimensional deve

promover uma revolução entre as indústrias de manufatura em relação a produção de materiais de alto desempenho da próxima geração.

Os recursos dos vários métodos de impressão podem variar de acordo com a tecnologia envolvida. As especificidades dos principais processos existentes são revisadas no trabalho de Lee et al., 2017. Entretanto, de forma geral, os objetos são produzidos integralmente, seguindo um procedimento sistemático, no qual o modelo projetado é fatiado num certo número de seções com uma espessura predeterminada e as seções são impressas sucessivamente, de baixo para cima. Os sistemas atuais de 3DP conseguem atingir uma resolução sub milimétrica e possuem a capacidade de utilizar diferentes materiais na impressão dos modelos, inclusive compósitos de fibras de carbono contínuas, proporcionando a fabricação de peças com considerável desempenho mecânico e oportunizando projetos em nível microestrutural. A fidelidade de reprodução dos modelos projetados também promove a facilidade de ajustar parâmetros. A variação do ângulo de entrelaçamento de compósitos tridimensionais pode ser realizada simplesmente mudando a altura do modelo. Para atingir o mesmo objetivo utilizando técnicas tradicionais, é necessário recalcular uma série de variáveis em cada etapa de processamento e, às vezes, os parâmetros desejados não são exequíveis [Quan et al., 2015; Kabir et al., 2019]. A Figura 1.2 ilustra um modelo geométrico e a respectiva peça fabricada por impressão tridimensional.

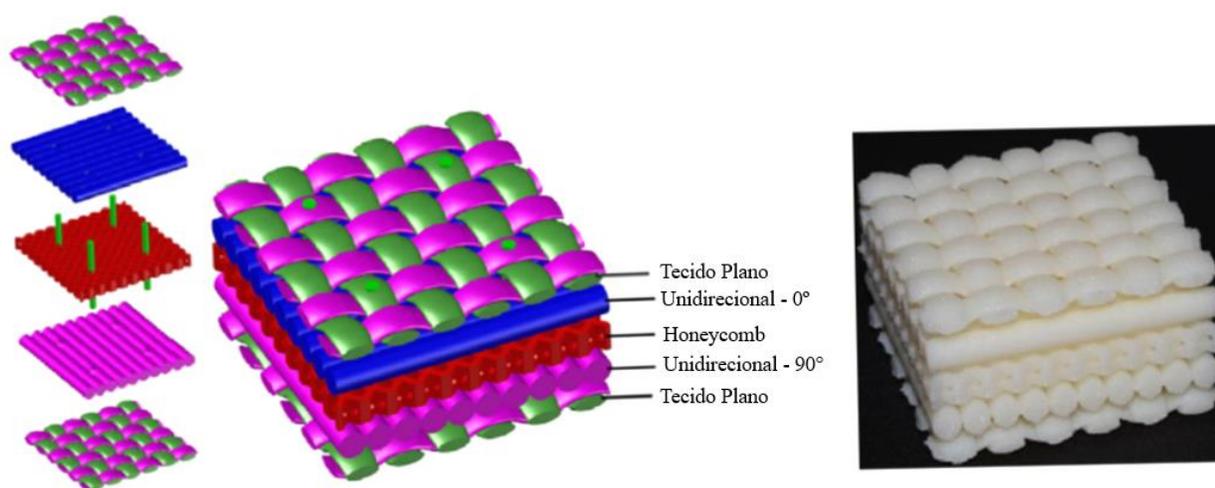


Figura 1.2 – Pré-formas multidirecionais típicas para compósitos. Modelo projetado à esquerda e foto do objeto fabricado por impressão tridimensional à direita [adaptado de Quan et al., 2015].

Em resumo, a manufatura por impressão possui qualidades atrativas para produção de estruturas em material compósito, com arquiteturas complexas, inclusive eliminando etapas de fabricação como infusão e cura. Adicionalmente, destaca-se pela capacidade de atribuir propriedades materiais e geométricas em escala sub milimétrica, inspirando projetos de múltiplos materiais [Quan et al, 2015]. A execução da impressão de um compósito reforçado por fibras de carbono é demonstrada na Figura 1.3.



Figura 1.3 – Impressão de compósitos em fibra de carbono [adaptado de *continuous composites*].

A evolução das técnicas de fabricação aditivas combinada com o desenvolvimento das ferramentas computacionais para modelagem e análise de engenharia levam a um novo paradigma no projeto de materiais, no qual a topologia da microestrutura desempenha um papel central. O arranjo adequado da microestrutura permite obter uma resposta macroscópica aprimorada, possibilitando atingir determinadas propriedades de interesse. Neste contexto, emerge uma classe de materiais artificiais, capazes de exibir propriedades estáticas e dinâmicas que, tipicamente, não são encontradas nos materiais tradicionais [Reda et al., 2018]. Para designar esta classe, a expressão “metamaterial” foi selecionada como sendo a mais representativa. O termo foi originalmente proposto por Rodger M. Walser, da Universidade do Texas, em Austin, no ano de 1999. O prefixo “meta”, em grego, significa exceder, ou seja, ir além dos materiais comuns. Assim, um metamaterial pode ser definido como um compósito macroscópico, de estrutura periódica ou não,

cuja função, ou resposta a uma excitação específica, é devido à combinação otimizada tanto da arquitetura celular projetada quanto da composição química [Cui et al., 2010].

O potencial dos metamateriais foi inicialmente explorado em áreas como ótica, transmissão de sinais e captação de energia. A observação de que ondas eletromagnéticas poderiam ser aumentadas, absorvidas, bloqueadas ou fletidas de acordo com a microestrutura dos materiais estimulou estudos extensos em diferentes campos de pesquisa. No âmbito da mecânica, a modelagem e a simulação de metamateriais microestruturados, projetados racionalmente em duas ou três dimensões, está bem menos avançada do que sua contraparte eletromagnética e é um tema em ascensão [Engheta e Ziolkowski, 2006].

Uma quantidade considerável de trabalhos foi dedicada à análise dos metamateriais auxéticos<sup>1</sup>. Tais materiais estão sendo inseridos em aplicações que vão da indústria biomédica até as indústrias automotiva e militar. Além disto, eles podem ser usados para formar estruturas completamente novas com funções especiais [Prawoto, 2012]. A necessidade de induzir um certo grau de anisotropia nos materiais, a fim de alcançar comportamentos mecânicos não convencionais, tem sido reconhecida em uma série de aplicações de engenharia. Por exemplo, a morfologia bem-sucedida de asas de aeronaves está associada ao desenvolvimento e uso de materiais que exibem uma combinação de baixa rigidez e alto coeficiente de Poisson em uma direção, para minimizar a energia de atuação, combinada a uma elevada rigidez na direção perpendicular, para suportar adequadamente as cargas aerodinâmicas [Lachenal et al., 2013]. No campo da bioengenharia, a restauração de ligamentos e tendões com materiais artificiais biocompatíveis, que sejam capazes de emular o comportamento nativo dos tecidos (valores elevados de coeficiente de Poisson) constitui um desafio em andamento [Karathanasopoulos et al., 2017].

A necessidade de modelar com precisão problemas cada vez mais complexos, como os exemplificados acima, está levando as teorias mecânicas convencionais além do seu limite de aplicabilidade [de Souza Neto e Feijóo, 2006]. No caso dos materiais compósitos reforçados por fibras contínuas, as teorias estruturais para placas laminadas, como a Teoria Clássica da Laminação e a Teoria de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem, não são capazes de capturar os efeitos microestruturais que podem influenciar significativamente a resposta local de um componente. Por

---

<sup>1</sup> Nome dado aos materiais com coeficiente de Poisson negativo.

outro lado, a simulação direta de uma estrutura macroscópica composta por um material microestruturado, incluindo todos os detalhes existentes na microescala, exige uma discretização espacial extremamente fina. Em uma análise baseada no método de elementos finitos, por exemplo, o sistema de equações resultante conteria, literalmente, bilhões de incógnitas numéricas, elevando o custo computacional a níveis impraticáveis em um futuro previsível [Zohdi e Wriggers, 2008]. Assim, várias metodologias continuam a ser perseguidas e aprimoradas, com o objetivo de desenvolver uma abordagem que seja computacionalmente eficiente e precisa para análises complexas [Aboudi et al., 2013].

O panorama apresentado indica um potencial tópico de pesquisa, motivando a realização deste trabalho, no qual pretende-se implementar uma metodologia numérica capaz de avaliar o comportamento mecânico de compósitos (ou metamateriais) cuja arquitetura microestrutural é formada por uma fase contínua de reforço, como ocorre nos processos de manufatura aditiva previamente mencionados. Objetos fabricados desta forma apresentam um aspecto geométrico importante, o entrelaçamento dos feixes de reforço. Para incorporar esta característica, sem elevar o custo computacional da simulação, o método proposto utiliza conceitos da micromecânica aplicados a um elemento de volume representativo do material. Assume-se que a distribuição espacial dos feixes de reforço ocorre em uma escala de comprimento inferior em relação as dimensões finais da peça. Então, o comportamento produzido pela microestrutura, em um determinado volume, pode ser interpretado como o estado mecânico de um ponto do material no nível macroscópico, designado como propriedade efetiva. A transição da microescala para a macroescala é realizada através de um processo apropriado de média, chamado de homogeneização [Gross e Seelig, 2017]. A estratégia computacional para montagem dos modelos e solução das equações que governam o problema é implementada utilizando o software comercial de análise por elementos finitos ANSYS.

Com este estudo busca-se contribuir com um procedimento que se aplica tanto para prever o comportamento macroscópico de compósitos microestruturados quanto para tratar o "problema inverso", isto é, auxiliar no projeto de novos materiais com uma microestrutura otimizada em relação ao desempenho geral desejado. Então, os modelos podem ser utilizados como referência para fabricação aditiva, com propriedades efetivas previamente estimadas.

## 1.2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia que viabilize estudar numericamente o comportamento mecânico de compósitos que possuem microestrutura formada pela distribuição espacial de uma fase contínua de reforço, em concordância com os processos de manufatura aditiva atuais. Procura-se atingir uma melhor eficiência computacional recorrendo a uma formulação micromecânica, onde são estimadas as propriedades efetivas do material. Segundo Gross e Seelig, 2017, em muitas aplicações técnicas, estas propriedades são adequadas para descrever o comportamento macroscópico de um material que possui constituição microestrutural complexa.

Como será explicado nos próximos capítulos desta dissertação, medir as propriedades mecânicas só faz sentido se os resultados não dependerem da amostra de teste escolhida, ou seja, a amostra deve ser representativa de todo o material. Requisitos análogos são mantidos quando propriedades efetivas são derivadas teoricamente a partir de uma dada microestrutura. Neste sentido, os seguintes objetivos específicos são estabelecidos:

- Desenvolver uma rotina numérica para criar modelos tridimensionais parametrizados. Embora, inicialmente, seja menos prático programar a montagem das geometrias, a facilidade para ajustar os parâmetros e variar as configurações de entrelaçamento da fase de reforço justificam o trabalho. Além disto, os dados geométricos são aproveitados na discretização do problema por elementos finitos;
- Implementar um procedimento de homogeneização, vinculando as relações mecânicas da microestrutura, para atribuir propriedades macroscópicas ao material em termos de um tensor constitutivo efetivo espacialmente constante;
- Definir as dimensões do domínio que contenha uma quantidade suficiente de detalhes microestruturais para que o volume seja estatisticamente representativo do material a ser avaliado, garantindo que os resultados sejam independentes da posição na macroescala, do tamanho e do formato do volume selecionado;
- Investigar os efeitos produzidos por microestruturas com diferentes padrões de entrelaçamento quanto ao grau de anisotropia induzido no material e verificar os acoplamentos desenvolvidos.

As estratégias computacionais dos objetivos traçados são implementadas no software comercial de análise por elementos finitos ANSYS, utilizando sua própria linguagem de programação (ANSYS *Parametric Design Language* – APDL) e seus recursos de modelagem e solução.

### 1.3 Estrutura da dissertação

Após os argumentos iniciais que contextualizam o presente trabalho e a descrição dos objetivos pretendidos, o texto desta dissertação está organizado da seguinte maneira:

- Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica

Está dividido em três seções. A primeira trata sobre materiais compósitos de um modo geral. A segunda seção é dedicada aos compósitos com reforços contínuos e entrelaçados. São abordados aspectos geométricos que servem como referência para programação dos modelos tridimensionais. A última seção compreende os desenvolvimentos relacionados a teoria de homogeneização. Ao longo do capítulo, são relatados estudos prévios encontrados na literatura que direcionam o presente trabalho.

- Capítulo 3 – Relações Constitutivas da Elasticidade Anisotrópica

Este capítulo é dividido em cinco partes que visam descrever o comportamento mecânico de materiais lineares elásticos. Primeiro, são apresentadas as equações básicas da elasticidade linear. A relação constitutiva geral para um material elástico, sob deformações infinitesimais, é derivada na segunda seção. Na terceira parte, são feitas considerações a respeito das simetrias materiais que afetam o tensor constitutivo. A quarta seção trata sobre as propriedades mecânicas em termos das constantes de engenharia, que possuem um significado físico mais claro. O capítulo é finalizado com uma formulação alternativa das equações que governam o problema, baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais.

- Capítulo 4 – Abordagem Micromecânica

É dividido em oito seções. Inicialmente, são explicadas as abordagens micromecânica e macromecânica, enfatizando suas possíveis vantagens e desvantagens. A seguir, é explorado o conceito de elemento de volume representativo de um material. A teoria de homogeneização, através do procedimento de média volumétrica, é discutida na terceira seção. As condições de

contorno que devem ser aplicadas para satisfazer as hipóteses que possibilitam relacionar o material heterogêneo real com um material homogêneo equivalente (idealizado) são dadas na quarta seção. As quatro partes finais do capítulo tratam dos teoremas e dos equacionamentos matemáticos que sustentam o método e permitem calcular as propriedades efetivas do material.

- Capítulo 5 – Modelagem e Implementação Numérica

É dividido em quatro seções. A primeira delas é destinada a estabelecer o problema e as demais a descrever a estratégia computacional implementada no trabalho. Assim, na segunda parte, é explicada a programação que gera os modelos geométricos parametrizados. Na terceira, são expostas as questões relacionadas ao método dos elementos finitos, utilizado para aproximar as soluções. O pós-processamento, onde são realizados os cálculos para obter as propriedades mecânicas efetivas do material, é apresentado na quarta seção.

- Capítulo 6 – Resultados

Está dividido em dois tópicos. O primeiro, apresenta os resultados obtidos com a metodologia implementada para determinar o EVR de um material microestruturado. O segundo, engloba o estudo do comportamento mecânico efetivo de seis modelos com microestruturas formadas por diferentes padrões de entrelaçamento da fase de reforço.

- Capítulo 7 – Conclusões

Este capítulo contém as conclusões observadas a partir das simulações realizadas. Além disto, são feitas algumas sugestões para trabalhos futuros.

- Referências

São listadas as fontes de referências bibliográficas utilizadas ao longo do trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Materiais compósitos

Em um contexto amplo, compósitos consistem em dois ou mais materiais (geralmente, referidos como constituintes ou fases), com propriedades diferentes e delimitações bem definidas, combinados para formar um terceiro material com propriedades resultantes que não são atingidas por seus constituintes individualmente [Vasiliev e Morozov, 2013]. Esta classe de materiais tornou-se uma das mais importantes em engenharia e a chave para o seu sucesso está na flexibilidade de projeto, isto é, na possibilidade de adequar o comportamento do compósito aos requisitos de determinada aplicação.

Na maioria dos casos, especialmente nos compósitos utilizados em engenharia estrutural, o arranjo de uma das fases é contínuo e mantém os outros constituintes ligados. Esta fase é denominada matriz. Os outros constituintes, normalmente, são referidos como inclusões ou reforços e podem ser contínuos ou descontínuos. Também pode haver materiais de interface, presentes entre a matriz e o reforço. Uma informação que deve ser indicada ao denotar um sistema de materiais conjugados (uma vez que influencia fortemente o comportamento efetivo) é a fração de volume das fases presentes [Aboudi et al., 2013].

Compósitos são tipicamente classificados em dois níveis. O primeiro nível de designação é feito com relação ao constituinte da matriz. Isto os divide em três categorias principais: compósitos com matriz polimérica (CMPs), compósitos com matriz metálica (CMMs) e compósitos com matriz cerâmica (CMCs). O segundo nível de classificação está relacionado à forma dos reforços: descontínuos (particulados ou fibras curtas) e fibras contínuas ou entrelaçadas (têxteis). No caso de compósitos têxteis, o padrão de trama também deve ser indicado [Aboudi et al., 2013].

O desenvolvimento de materiais compósitos de alto desempenho iniciou na década de 1940, com a introdução de compostos de matriz polimérica reforçados por fibras de vidro. A evolução continuou com a adição de novos sistemas de matriz e reforço, consolidando os compósitos no mercado mundial de materiais. Eles estão inseridos nos principais setores industriais, como aeroespacial, automotivo, naval, construção civil, esporte e lazer e, mais recentemente, energia eólica. A JEC Group, 2017, analisou o mercado mundial de compósitos. Segundo as pesquisas,

entre 2015 e 2016, o valor cresceu de 78 para 82 bilhões de dólares e é estimado um crescimento de 5% ao ano, projetando atingir 103 bilhões de dólares em 2021.

A Figura 2.1 ilustra o aumento significativo da utilização de compósitos no projeto e na fabricação de aviões comerciais ao longo das últimas décadas. Isto se deve, principalmente, às atrativas propriedades mecânicas específicas (propriedade/densidade), que proporcionam a redução de peso estrutural e se traduzem diretamente em economia de custos. Como exemplo, a aplicação extensiva de compósitos na aeronave A350 da Airbus contribuiu para uma diminuição de quase 25% no consumo de combustível [Ghobadi, 2017].

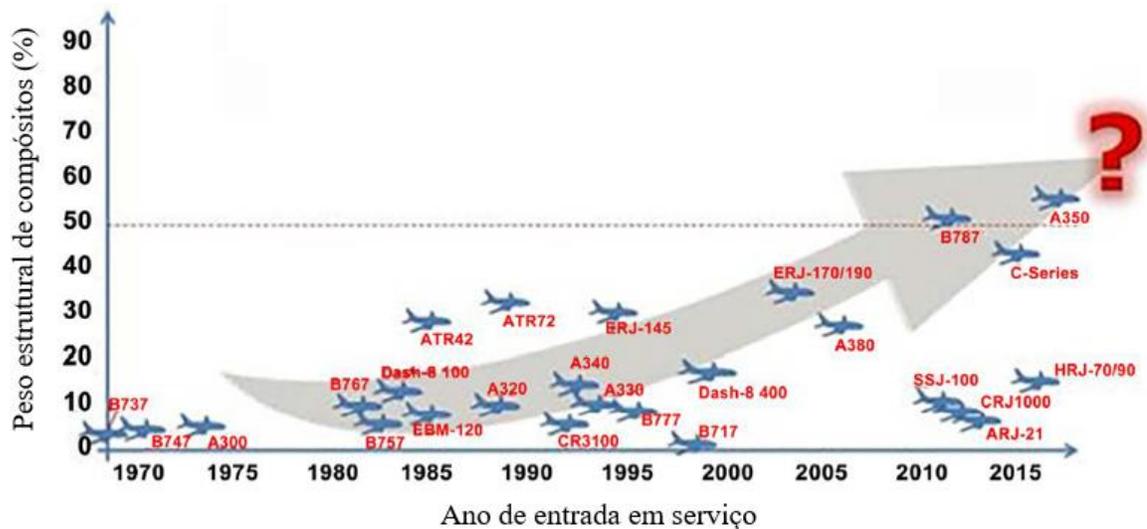


Figura 2.1 – Aumento do uso de compósitos nas últimas quatro décadas [adaptado de Ghobadi, 2017].

Antes da década de 1990, o emprego de compósitos era limitado a estruturas secundárias (ou seja, aquelas que não causam perigo imediato em caso de falha). No entanto, o aumento das demandas de desempenho impulsionou tanto o aperfeiçoamento dos métodos de fabricação e de união quanto o desenvolvimento de técnicas e ferramentas de análise, principalmente no campo da simulação numérica, levando os compósitos a serem amplamente utilizados em estruturas primárias, como asas e componentes da fuselagem [Harris et al., 2001].

O uso de compósitos (principalmente CMPs) em naves espaciais está atrasado em relação às aeronaves comerciais e militares, principalmente, devido aos requisitos únicos de carregamento

e do ambiente circundante, além do fato de estruturas espaciais serem, normalmente, projetadas para executar toda a sua missão sem inspeções intermediárias ou reparos. A NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) e seus parceiros industriais buscam ativamente o desenvolvimento e o uso de compósitos em grandes estruturas (módulo tripulante, sistemas de lançamento espacial, antenas, matrizes solares e tanques de propulsão, para citar alguns exemplos) para futuras missões espaciais [Aboudi et al., 2013].

Na indústria automotiva, o primeiro veículo com carroceria fabricada em material compósito (polímero reforçado por fibras de vidro) foi o Chevrolet Corvette, apresentado ao público em 1953, na cidade de Nova Iorque. Em relação aos esportes automobilísticos, o uso de polímeros reforçados por fibras de carbono foi incorporado na Fórmula 1, com o McLaren MP4, em 1981. Atualmente, 70% do carro de Fórmula 1 é fabricado com materiais compósitos e este percentual ainda está crescendo. Eles conferem melhor desempenho e segurança ao carro devido à sua capacidade de absorção de impacto. Além das peças estruturais, os materiais compósitos também são utilizados em outros componentes, como discos de freio, sistemas de suspensão, embreagens e isolamento térmico. A Ford Motor Company participa de um projeto de pesquisa que tem como objetivo encontrar formas mais econômicas para fabricação de compósitos reforçados por fibras de carbono. A perspectiva da empresa é reduzir o peso de seus veículos utilizando cada vez mais peças destes materiais avançados [Elmarakbi, 2014].

Também existe uma forte demanda de materiais compósitos para navios, submarinos e estruturas *offshore*, com o intuito de substituir materiais tradicionais, como alumínio e aço. Em adição à mencionada redução de peso que pode ser atingida, estes materiais também apresentam elevada resistência à corrosão, o que implica em menores custos de manutenção para estruturas expostas à água. Na indústria naval, principalmente de pequenas embarcações, o uso de materiais compósitos reforçados por fibras de vidro é notório, devido à boa relação custo-benefício [Mouritz et al., 2001].

Uma ampla variedade de aplicações dos materiais compósitos pode ser encontrada em Kelly, 2012. Para uma revisão histórica sobre a mecânica de compósitos, pode-se consultar o trabalho de Herakovich, 2012.

## 2.2 Compósitos com entrelaçamento de reforços contínuos

Materiais compósitos reforçados por fibras contínuas com propósitos estruturais, geralmente, são fabricados na forma de camadas finas, denominadas lâminas. Uma lâmina pode possuir um arranjo de fibras unidirecionais ou entrelaçadas em uma matriz de suporte, conforme ilustrado na Figura 2.2. Estas lâminas são então empilhadas em uma determinada sequência até que a espessura e as propriedades desejadas sejam atingidas, construindo um laminado [Jones, 1999].

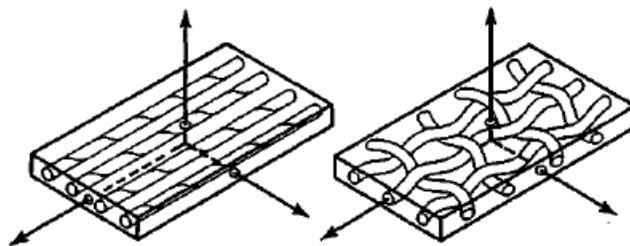


Figura 2.2 – Lâmina com fibras unidirecionais à esquerda e lâmina com fibras entrelaçadas à direita [adaptado de Jones, 1999].

Os principais fatores a serem considerados na decisão entre usar lâminas com fibras unidirecionais ou entrelaçadas são as propriedades mecânicas pretendidas, a facilidade e o custo de fabricação. De modo geral, compósitos com entrelaçamento de fibras, comumente chamados de têxteis, apresentam rigidez e resistência um pouco inferiores. Entretanto, são superiores em aplicações que exigem elevada deformação até a falha, são mais tolerantes ao trabalho de fratura, ao dano e a impactos e suportam melhor carregamentos triaxiais. Seu custo relativo depende muito das tecnologias de fabricação disponíveis. Se as peças puderem ser produzidas automaticamente e o número de uniões for reduzido pela formação de estruturas integrais, os compósitos têxteis são muito competitivos economicamente [Cox e Flanagan, 1997].

De acordo com Long, 2005, têxteis estão entre os reforços mais eficazes para compósitos. Uma característica importante deste grupo de materiais é sua natureza hierárquica, onde pode-se distinguir três níveis de escalas associadas: (1) fibras individuais, na escala microscópica; (2) arranjos de fios, formando células unitárias, na escala mesoscópica; e (3) tecidos, na escala macroscópica. Cada escala é identificada por um comprimento característico. O diâmetro das fibras

individuais, também chamadas de filamentos, como por exemplo, as fibras de vidro, de carbono e de aramida, variam entre  $5 \mu m$  e  $50 \mu m$ . Os fios, que consistem no agrupamento de milhares de filamentos, possuem seção transversal com dimensões entre 0,1 e 10 mm. As estruturas têxteis são constituídas em escalas superiores.

Existe uma grande variedade de padrões de entrelaçamento para reforços têxteis. Entretanto, um grupo de estruturas regulares é utilizado como base para construção de arranjos mais complexos. Este grupo é composto pelos padrões plano (ou simples), cetim e sarja, classificados como tecidos fundamentais [Miravete, 1999], ilustrados na Figura 2.3.

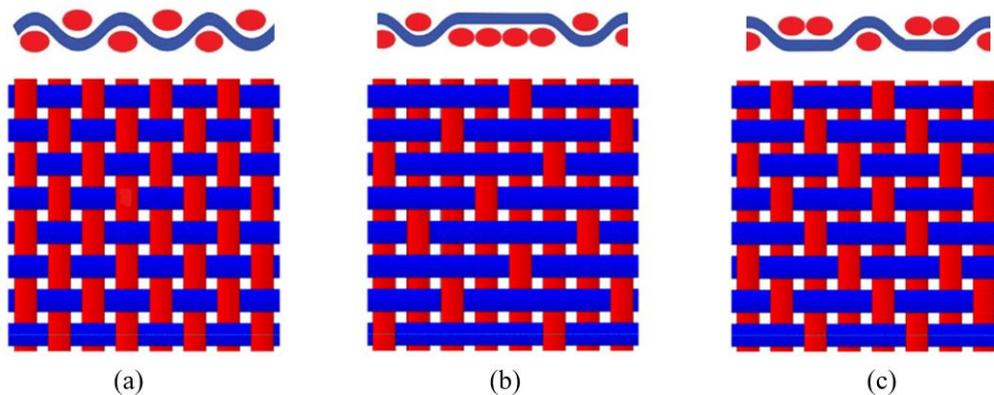


Figura 2.3 – Tecidos fundamentais: (a) plano, (b) cetim e (c) sarja.

[Adaptado de Elmarakbi, 2014].

São tecidos bidimensionais, caracterizados por apresentarem o mesmo número de fios em duas direções concorrentes (perpendiculares, no caso mais simples) e alternância constante entre as posições (abaixo ou acima) dos fios adjacentes. Na nomenclatura técnica de têxteis, os fios dispostos ao longo do tear são chamados de fios de urdume, ou urdidura, enquanto os fios na outra direção de entrelaçamento são denominados fios de trama, ou preenchimento. Nestes tecidos, um tipo de fio (urdidura ou trama) fica abaixo ou acima de apenas um outro, sendo o perfil de entrelaçamento longitudinal, aproximadamente, senoidal. As formas têxteis fundamentais são utilizadas neste trabalho como referência para modelagem das microestruturas formadas pela trama da fase de reforço.

No padrão plano (em inglês, *plain-weave*), Figura 2.3(a), cada fio de trama se entrelaça com cada fio de urdidura. A troca frequente de posição de cada fio é uma desvantagem do tecido plano, uma vez que a ondulação do fio reduz a resistência e a rigidez do compósito. Outros padrões de

tecelagem diminuem este número de trocas e aumentam os comprimentos dos segmentos retos. Os tecidos do tipo cetim (em inglês, *satín*), Figura 2.3(b), são caracterizados pelo posicionamento esparsos dos entrelaçamentos, criando uma superfície de tecido lisa. As trocas de posição são organizadas de modo a não se conectarem e não produzem diagonais contínuas. Os cetins são designados por uma relação de  $N/s$ , onde  $N$  é o número de fios e  $s$  é o período de entrelaçamento.  $N$  e  $s$  não podem ter denominadores comuns, caso contrário, alguns fios de urdidura não se entrelaçariam com fios de trama. Os cetins mais comuns são  $5/2$  e  $8/3$ . Camadas do tecido de cetim são assimétricas, conseqüentemente, existe acoplamento entre flexão e alongamento e entre alongamento e cisalhamento no plano. Entrelaçamentos do tipo sarja (em inglês, *twill*), Figura 2.3(c), são caracterizados por um período constante de troca entre as posições dos fios, criando diagonais típicas. Têxteis de sarja suportam bem o cisalhamento no plano, resultando em boa capacidade de cobertura [Miravete, 1999; Long, 2005].

Além dos tecidos fundamentais mostrados na Figura 2.3, onde o cruzamento das fibras ocorre de modo perpendicular ( $0^\circ$  e  $90^\circ$ ), outro padrão importante é formado quando o feixe de reforço é posicionado continuamente em trajetórias alternadas, avançando com ângulo positivo ( $+\alpha$ ) e retornando com ângulo negativo ( $-\alpha$ ), sendo  $\alpha$ , geralmente, entre  $5^\circ$  e  $80^\circ$ . Esta maneira de posicionamento pode ser observada em processos muito utilizados na indústria, como o *Automated Tape Layup*, o *Automated Fiber Placement* e o *Filament Winding*, citados na introdução deste trabalho, e origina um padrão de losangos no material compósito, como indicado na Figura 2.4. Este padrão de entrelaçamento também é utilizado como referência para criar os modelos tridimensionais de microestruturas que são estudadas neste trabalho.

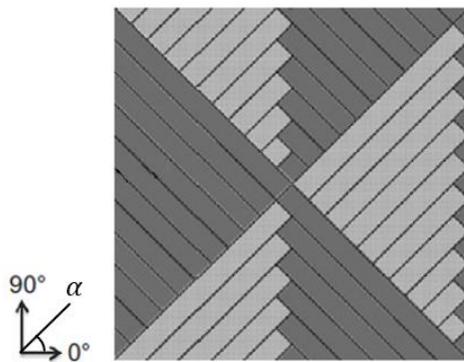


Figura 2.4 – Padrão com posicionamento em ângulos alternados ( $+\alpha/-\alpha$ )

[adaptado de Hernández-Moreno et al., 2008].

Componentes feitos por compósitos entrelaçados são amplamente utilizados. No entanto, a estrutura inerente dos reforços adiciona certa complexidade à análise de desempenho destes materiais. Uma revisão de métodos analíticos para predição das propriedades mecânicas de materiais poliméricos reforçados por têxteis foi publicada por Crookston et al., 2005. Os autores concluíram que modelos analíticos podem fornecer uma primeira estimativa das propriedades, mas a precisão da análise é comprometida devido às simplificações geométricas e de interação entre fios e entre os fios e a matriz.

Embora novos métodos analíticos ainda sejam de interesse da comunidade de pesquisadores, atualmente, a grande maioria das análises são realizadas numericamente. Esta abordagem fornece maior flexibilidade na definição da geometria dos reforços e permite que modelos físicos mais complexos sejam adicionados. Porém, mesmo com o auxílio de métodos computacionais, a quantidade de detalhes que precisam ser incorporados em um modelo mais realista de compósitos entrelaçados torna, normalmente, impraticável a simulação direta destas estruturas. Ao mesmo tempo, tais materiais podem ser considerados como uma hierarquia de estruturas em diferentes níveis de escala. Assim, uma abordagem eficiente para este problema é a modelagem baseada em conceitos multiescala, que separa o problema em várias etapas de solução. A partir da microescala, cada nível pode ser progressivamente homogeneizado, representando um meio heterogêneo como um meio homogêneo com propriedades equivalentes. [Matveev e Long, 2015].

A análise de compósitos têxteis é, principalmente, um problema a ser estudado na mesoescala, uma vez que as propriedades mecânicas dos fios podem ser, de modo geral, obtidas experimentalmente ou calculadas na microescala com modelos numéricos ou analíticos mais simples. O domínio necessário para determinar as propriedades equivalentes deve ser um elemento de volume representativo (EVR). A definição e a modelagem do EVR, em cada nível de escala da estrutura, é um dos principais problemas da abordagem multiescala [Lomov et al., 2001; Ghosh, 2008].

Modelos geométricos para análise numérica de compósitos entrelaçados podem ser tão simples quanto reforços seguindo arcos circulares [Dasgupta et al., 1996], ou trajetórias descritas por ondas senoidais [Ito e Chou, 1998], com seção transversal constante, e muitas vezes, projetados de tal forma que estejam em perfeito contato uns com os outros. Geometrias mais refinadas podem

ser criadas com pré-processadores têxteis. Segundo Matveev e Long, 2015, os dois mais conhecidos são WiseTex [Lomov et al., 2000] e TexGen [Long e Brown, 2011].

O software WiseTex é baseado em uma abordagem que emprega o princípio da mínima energia mecânica [Lomov et al., 2000]. Utilizando dados sobre o padrão de tecelagem e o comportamento mecânico dos fios, o software pode prever os caminhos dos fios. No entanto, a determinação experimental do comportamento mecânico dos fios requer estudos adicionais e pode ser um problema.

O software TexGen é baseado na representação de fios por *splines* cúbicas periódicas. O refinamento automático da geometria da seção transversal dos fios garante a ausência de interpenetração. Apesar de não haver fundamentação física nestes procedimentos, os refinamentos internos da geometria, sustentados por extensas medições experimentais, fornecem bons resultados quando comparados com exames de micro tomografia computadorizada de uma célula unitária têxtil [Long e Brown, 2011].

Uma maneira diferente de criar a geometria baseia-se na modelagem do carregamento mecânico durante a compactação e a conformação dos reforços têxteis. A pesquisa inicial de Wang e Sun, 2001, é baseada na representação de fios na forma de cadeias de barras unidimensionais conectadas por pinos sem atrito. As cadeias são então colocadas em contato para prever a geometria dos têxteis. Esta abordagem, chamada de método dos elementos de cadeia digital, foi desenvolvida por Zhou et al., 2004, representando fios como pacotes de múltiplas cadeias. Ela permitiu que a forma dos fios, juntamente com a geometria têxtil, fosse prevista. O método dos elementos de cadeia digital pode ser útil para previsão de geometrias complexas quando um pré-processador têxtil não consegue prever a geometria corretamente.

Foram realizados vários trabalhos para estimar numericamente as propriedades mecânicas de compósitos têxteis empregando os pré-processadores mencionados anteriormente. Por exemplo, o WiseTex foi utilizado por Kurashiki et al., 2007, para criar a geometria de um tecido plano e por Daggumati et al., 2010, para modelar um tecido de cetim. O TexGen, foi utilizado para análise de compósitos têxteis 2D por Schultz e Garnich, 2013. A previsão das propriedades elásticas é relativamente direta e requer apenas um modelo geométrico com fração de volume de fibras correta e orientações das fibras.

### 2.3 Teoria de homogeneização

A análise de materiais heterogêneos e o estudo da influência da microestrutura sobre as propriedades materiais não é um tema recente. De fato, ainda no século XIX, os trabalhos de Maxwell, 1867 e 1873, e Lord Rayleigh, 1892, trataram sobre a determinação de fenômenos de transporte macroscópicos em materiais constituídos por uma matriz com partículas esféricas distribuídas. Entretanto, a primeira análise das propriedades mecânicas efetivas de materiais sólidos não homogêneos, geralmente, é creditada a Voigt, 1889, com contribuição complementar dada posteriormente por Reuss, 1929. O método ficou conhecido como Teoria de Misturas e pode ser considerado a técnica mais simples de homogeneização, onde as propriedades globais são calculadas como uma média das propriedades dos constituintes, ponderada por suas respectivas frações de volume [Zohdi e Wriggers, 2008].

Voigt assumiu que o campo de deformação dentro de uma amostra de material heterogêneo era uniforme, enquanto Reuss aproximou o campo de tensão como uniforme. A hipótese de Voigt conduz a um campo de tensão em que as trações nos contornos das fases não podem estar em equilíbrio, ou seja, é estaticamente inadmissível. Já as deformações implícitas na hipótese de Reuss são tais que as heterogeneidades e a matriz não poderiam estar perfeitamente ligadas, portanto, é cinematicamente inadmissível. Assim, os resultados obtidos a partir destas metodologias fornecem apenas informações qualitativas preliminares, podendo ser interpretados como limites bastante amplos, onde a estimativa de Voigt fornece o limite superior e a estimativa de Reuss o inferior.

Um método mais sofisticado de aproximação do meio efetivo, denominado auto-consistente, foi estabelecido por Eshelby, 1957, e desenvolvido por vários autores, como Hashin, 1962, Hashin e Shtrikman, 1963, Budiansky, 1965, Hill, 1965, e Hashin, 1983. Neste modelo, as propriedades equivalentes do material heterogêneo são derivadas como resultado da solução analítica (ou semi-analítica) de um problema do valor de contorno para uma única partícula esférica ou elipsoidal de um material inclusa em uma matriz infinita de outro material, sob carregamento externo uniforme. O resultado obtido por Eshelby é considerado como a provável solução analítica mais importante da micromecânica [Gross e Seelig, 2017]. Esta abordagem auto-consistente fornece uma aproximação razoável para estruturas que possuem algum tipo de regularidade geométrica, entretanto, incorpora a hipótese de não interação entre partículas.

Outra teoria matemática de homogeneização foi desenvolvida no início dos anos 70, tendo como ponto de partida o trabalho de Sanchez-Palencia, 1971, intitulado “*Équations aux Dérivées Partielles dans un Type de Milieux Hétérogènes*”, onde o autor estudou a propagação de ondas em meios heterogêneos [Fonseca, 1997]. Esta abordagem, conhecida como homogeneização assintótica, aplica uma expansão assintótica dos campos de deslocamento e de tensão sobre um parâmetro de comprimento natural, que é dado pela razão entre o tamanho característico da heterogeneidade e uma medida da macroestrutura, para aproximar as respectivas distribuições macroscópicas e então utiliza princípios variacionais para criar uma relação entre as escalas. A teoria foi documentada em Bensoussan et al., 1978, e Sánchez-Palencia, 1980. Trabalhos semelhantes, produzidos na antiga União Soviética, foram descritos no livro de Bakhvalov e Panasenko, 1984.

O desenvolvimento de técnicas computacionais para solução das equações de homogeneização possibilitou a aplicação do procedimento em problemas mais complexos de engenharia. Os primeiros trabalhos sobre homogeneização numérica são devidos a Bougart, 1977 [Fonseca, 1997]. As equações de homogeneização para elasticidade foram implementadas em um código de elementos finitos, por Begis et al., 1983, e Guedes e Kikuchi, 1990. Assim, a abordagem baseada no conceito de elemento de volume representativo (EVR), originalmente introduzido por Hill, 1963, tornou-se amplamente utilizada. Esta metodologia consiste em determinar as propriedades homogeneizadas do material a partir do ajuste dos resultados obtidos em um modelo detalhado de EVR (geralmente, utilizando técnicas numéricas, como o método dos elementos finitos) às equações macroscópicas que descrevem a física do problema estudado.

Os métodos fundamentados na definição de um elemento de volume representativo permitem considerar microestruturas complexas e possibilitam investigar a influência de diferentes características geométricas sobre a resposta global. Hollister e Kikuchi, 1994, empregaram técnicas de imagem para modelar, via elementos finitos, EVRs complicados encontrados em materiais biológicos, mais especificamente, no tecido ósseo.

Outro método foi elaborado por Smit et al, 1998. No contexto desta abordagem, para cada ponto de integração da malha de elementos finitos da escala macroscópica, um EVR é atribuído e uma análise separada é realizada. As condições de contorno apropriadas para o EVR são derivadas a partir do tensor deformação macroscópico. O tensor tensão macroscópico é obtido pelo cálculo

da média do campo de tensão resultante no EVR. A matriz de rigidez macroscópica em um ponto de integração é derivada da matriz de rigidez total do EVR. Quando esta abordagem é utilizada, não há necessidade de especificar o comportamento constitutivo macroscópico, em vez disso, o comportamento em um ponto de integração é deduzido a partir da média dos resultados obtidos em um modelo detalhado da microestrutura associada. Kouznetsova et al., 2001, também exploraram esta metodologia, avaliando a aplicabilidade do procedimento para simulação de materiais descritos por um modelo visco-elasto-plástico, em regime de grandes deformações, comparando as respostas globais obtidas para microestruturas com poros regulares e aleatórios.

Segundo Zohdi e Wriggers, 2008, muitas análises numéricas foram realizadas utilizando modelos bidimensionais, o que ao contrário da maioria dos problemas estruturais, é relativamente sem sentido em um estudo envolvendo múltiplas escalas. Para uma amostra estatisticamente representativa do material microestruturado, simulações numéricas tridimensionais são inevitáveis para resultados confiáveis.

### 3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DA ELASTICIDADE ANISOTRÓPICA

Segundo Timoshenko e Goodier, 1951, todos os materiais estruturais possuem, em uma certa medida, a propriedade de elasticidade. Isto é, se forças externas produzindo deformação de uma estrutura não excederem um determinado limite, a deformação desaparece com a remoção das forças. Logo, um material é considerado idealmente elástico quando, sob condições isotérmicas, ele recupera sua forma original após a supressão dos carregamentos que causam deformação e há uma relação de um para um entre o estado de tensão e o estado de deformação na configuração atual [Reddy, 2013].

Hooke, Young, Cauchy e Timoshenko estabeleceram, praticamente, toda a teoria sobre o comportamento linear elástico dos materiais [Lemaitre e Chaboche, 1994]. A resolução de um problema no domínio da elasticidade, seja analítica ou numericamente, envolve determinar um campo que seja estaticamente admissível (aquele que satisfaz internamente o equilíbrio juntamente com as condições de contorno de tração), cinematicamente admissível (aquele que satisfaz as relações deslocamento-deformação e as condições de contorno de deslocamento) e que satisfaça as relações constitutivas do material.

Sendo assim, este capítulo é dedicado à revisão dos fundamentos teóricos básicos da elasticidade linear infinitesimal, visando a compreensão dos desenvolvimentos que seguem nos Capítulos 4 e 5. São apresentadas as equações partindo dos estados de tensão e de deformação para as relações constitutivas do material. A descrição do caso geral da elasticidade anisotrópica é enfatizada, devido a sua importância para o estudo de materiais compósitos. Uma breve explicação sobre o Princípio dos Trabalhos Virtuais é feita no final do capítulo, como forma alternativa de derivar as equações que governam o problema. Esta abordagem é adotada na formulação do método dos elementos finitos, utilizado neste trabalho.

Conceitos mais completos sobre a teoria da elasticidade podem ser encontrados em Atkin e Fox, 1980, e Reddy, 2013, que foram utilizados como textos base para elaboração deste capítulo.

### 3.1 Equações básicas da elasticidade linear

O estado de tensões em um ponto de um corpo pode ser definido em termos das componentes de tensão. Em princípio, nove componentes diferentes podem ser agrupadas no tensor tensão  $\boldsymbol{\sigma}$ , como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

entretanto, estas componentes não são todas independentes, elas estão relacionadas por considerações de equilíbrio. O equilíbrio das forças nas três direções ( $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ ) produz as conhecidas equações de equilíbrio, que devem ser satisfeitas em todo o domínio, expressas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $b_i$  são as componentes das forças de corpo. As Equações 3.2 podem ser reescritas de uma forma mais compacta, utilizando notação indicial, como:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad (3.3)$$

onde  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3$ .

Quando um corte fictício é realizado no corpo, as tensões podem ser projetadas em um elemento diferencial do contorno, onde produzem forças de superfície, também conhecidas como

vetor tração, denotadas por  $t_i$ , de tal forma que:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j, \text{ em } \Gamma, \quad (3.4)$$

onde  $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$  e  $n_1, n_2$  e  $n_3$  são as componentes do vetor normal  $\mathbf{n}$  com respeito aos eixos  $x_1, x_2$  e  $x_3$  e  $\Gamma$  representa o contorno, ou a superfície, do corpo.

Estas forças de superfície são assumidas como sendo dadas em uma parte  $\Gamma_\sigma$  do contorno e são chamadas de condições de contorno naturais do problema:

$$t_1 = \bar{t}_1; \quad t_2 = \bar{t}_2; \quad t_3 = \bar{t}_3; \text{ em } \Gamma_\sigma, \quad (3.5)$$

onde  $\bar{t}_i$  são valores prescritos. Estas condições implicam que as forças de superfície aplicadas  $\bar{t}_i$  devem estar em equilíbrio com as componentes da força de superfície obtidas a partir das tensões internas do contorno:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i, \text{ em } \Gamma_\sigma. \quad (3.6)$$

A deformabilidade do corpo fica implícita através das relações cinemáticas que levam em conta as variações dos campos de deslocamentos, que tem componentes  $u_1, u_2$  e  $u_3$  em todos os pontos, e para o caso linear produzem as deformações (aqui consideradas infinitesimais) que podem ser escritas como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right], \quad (3.7)$$

ou, em notação indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.8)$$

onde  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3$ . O estado de deformações em um ponto é, portanto, definido por um

tensor deformação expresso por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

sendo  $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$ ;  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ ;  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ .

É mais simples aplicar condições de contorno em termos dos deslocamentos do que em termos das deformações. Assim, em  $\Gamma_u$ , as seguintes condições de contorno essenciais podem ser definidas:

$$u_1 = \bar{u}_1; \quad u_2 = \bar{u}_2; \quad u_3 = \bar{u}_3; \quad \text{em } \Gamma_u \quad (3.10)$$

onde  $\bar{u}_i$  são valores prescritos e a superfície total do contorno é dada por  $\Gamma_u + \Gamma_\sigma$ . Os componentes de deformação  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  e  $\varepsilon_{33}$  representam as deformações normais infinitesimais e os componentes  $\varepsilon_{23}$ ,  $\varepsilon_{13}$  e  $\varepsilon_{12}$  as deformações cisalhantes infinitesimais. Ainda, é útil escrever as deformações cisalhantes como:

$$\gamma_{23} \equiv 2\varepsilon_{23}; \quad \gamma_{13} \equiv 2\varepsilon_{13}; \quad \gamma_{12} \equiv 2\varepsilon_{12}, \quad (3.11)$$

chamadas de deformações cisalhantes de engenharia. A deformação de engenharia  $\gamma_{ij}$  fornece o ângulo total de cisalhamento sob um estado de cisalhamento simples, enquanto a componente do tensor  $\varepsilon_{ij}$  fornece a metade do ângulo, sob um mesmo estado de cisalhamento simples.

Os estados de tensão e de deformação em um corpo estão relacionados através de equações denominadas relações constitutivas. Para um material com comportamento elástico linear isotrópico, pode-se definir as constantes  $\lambda$  e  $\mu$ , conhecidas como constantes de Lamé. Desta forma, as relações tensão-deformação podem ser equacionadas por:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (3.12)$$

onde o símbolo  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker ( $\delta_{ij} \equiv 1$ , para  $i = j$  e  $\delta_{ij} \equiv 0$ , para  $i \neq j$ ). Além disto,

$\varepsilon_{kk}$  é conhecido como deformação volumétrica, isso é:

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} . \quad (3.13)$$

A relação inversa da Equação 3.12 pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} , \quad (3.14)$$

onde  $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ . As constantes de Lamé, para materiais isotrópicos, podem ser expressas em termos do módulo de cisalhamento  $G$ , do módulo de elasticidade  $E$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$ , pelas seguintes formulações:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} ; \quad \lambda = \frac{\mu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} . \quad (3.15)$$

### 3.2 Relação constitutiva – caso anisotrópico

A relação constitutiva geral de um material elástico, sob deformações infinitesimais ( $|\nabla \mathbf{u}| \ll 1$ ), para o qual admite-se que existe uma função densidade de energia de deformação  $U_0$  que depende apenas do estado de deformação atual, pode ser derivada a partir de:

$$\sigma_{ij} = \rho_0 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} , \quad (3.16)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade de massa.

Para desenvolver um modelo linear,  $U_0$  deve ser uma função quadrática do tensor deformação. Aplicando uma expansão em série de Taylor sobre a deformação  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$  na configuração de referência, pode-se escrever:

$$\rho_0 U_0 = C_0 + C_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2!} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} , \quad (3.17)$$

em que  $C_0$  é um valor de referência a partir do qual a função densidade de energia de deformação é medida. Substituindo a Equação 3.17 na Equação 3.16, obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{mn} &= \rho_0 \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{mn}} = C_{ij} \delta_{mi} \delta_{nj} + \frac{1}{2} C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} \delta_{im} \delta_{jn} + \varepsilon_{ij} \delta_{km} \delta_{ln}) \\ \sigma_{mn} &= C_{mn} + \frac{1}{2} C_{mnkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijmn} \varepsilon_{ij} = C_{mn} + \frac{1}{2} (C_{mnij} + C_{ijmn}) \varepsilon_{ij}\end{aligned}\quad (3.18)$$

$$\sigma_{mn} = C_{mn} + C_{mnij} \varepsilon_{ij},$$

onde:

$$C_{mnij} = \frac{1}{2} (C_{mnij} + C_{ijmn}) = \rho_0 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn}} = \rho_0 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{mn} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijmn}. \quad (3.19)$$

O termo  $C_{mn}$  na Equação 3.18 tem as mesmas unidades que  $\sigma_{mn}$  e representa os componentes de tensão residual de um sólido. Assumindo, sem perda de generalidade, que o corpo está livre de tensão antes da aplicação de carga, pode-se escrever:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \text{ ou } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.20)$$

A Equação 3.20 é conhecida como lei de Hooke generalizada. Os coeficiente  $C_{ijkl}$  são chamados de coeficientes de rigidez elástica. Em geral, existem  $3^4 = 81$  componentes escalares no tensor de quarta ordem  $\mathbf{C}$ . Entretanto, o número de componentes independentes é reduzido devido as considerações de simetria de  $\boldsymbol{\sigma}$ , de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e de  $\mathbf{C}$ .

Na ausência de forças de corpo, o princípio da conservação do *momentum* angular requer que o tensor tensão seja simétrico,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Então,  $C_{ijkl}$  deve ser simétrico nos dois primeiros índices, resultando na redução dos coeficientes de rigidez independentes para  $6(3)^2 = 54$ . Como o tensor deformação é simétrico por definição,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ,  $C_{ijkl}$  também deve ser simétrico nos dois últimos índices, reduzindo novamente o número de componentes independentes para  $6^2 = 36$ . Por fim, a simetria demonstrada na Equação 3.19,  $C_{ijkl} = C_{klij}$ , reduz o número de coeficientes

independentes de rigidez material para 21. Assim, a relação constitutiva da Equação 3.20 toma a forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & \text{sim.} & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}. \quad (3.21)$$

Materiais que obedecem à Equação 3.21 são chamados de materiais triclinicos. É conveniente expressar a Equação 3.21 em uma forma alternativa, usando índice simples para as tensões e as deformações e índice duplo para os coeficientes de rigidez material, da seguinte maneira:

$$11 \rightarrow 1 \quad 22 \rightarrow 2 \quad 33 \rightarrow 3 \quad 23 \rightarrow 4 \quad 13 \rightarrow 5 \quad 12 \rightarrow 6. \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1; & \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1; \\ \sigma_{22} &= \sigma_2; & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2; \\ \sigma_{33} &= \sigma_3; & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3; \\ \sigma_{23} &= \sigma_4; & 2\varepsilon_{23} &= \varepsilon_4; \\ \sigma_{13} &= \sigma_5; & 2\varepsilon_{13} &= \varepsilon_5; \\ \sigma_{12} &= \sigma_6; & 2\varepsilon_{12} &= \varepsilon_6. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Esta representação é chamada de notação de engenharia ou notação de Voigt-Kelvin. Assim, a Equação 3.21 pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.24)$$

ou, simplesmente:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j, \quad (3.25)$$

para  $i$  e  $j$  assumindo valores de 1 até 6. Os coeficientes  $C_{ij}$  permanecem simétricos,  $C_{ij} = C_{ji}$ , uma propriedade inerente à Equação 3.21. Entretanto, deve-se observar com cuidado que a notação de Voigt-Kelvin torna os componentes não tensoriais, ou seja, eles não se transformam como componentes de um vetor ou de um tensor.

As relações tensão-deformação da Equação 3.25 são invertíveis. Assim, os componentes de deformação estão relacionados aos componentes de tensão por:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j, \quad (3.26)$$

onde  $S_{ij} = S_{ji}$  são os coeficientes de flexibilidade do material, com  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$ . As relações deformação-tensão são mais adequadas para determinar as constantes materiais em laboratório, uma vez que os experimentos, geralmente, envolvem a aplicação de carregamentos conhecidos e são medidas as mudanças na geometria (isto é, as deformações são determinadas a partir de um estado de tensão aplicado).

Em essência, equações constitutivas são modelos matemáticos do comportamento de materiais, validados por resultados experimentais. As diferenças entre previsões teóricas e constatações experimentais são, frequentemente, atribuídas a uma representação matemática imprecisa ou a erros experimentais.

### 3.3 Simetria material

Quando os parâmetros materiais elásticos em um ponto têm os mesmos valores para cada par de sistemas de coordenadas que são imagens espelhadas um do outro em relação a um determinado plano, este plano é chamado de plano de simetria material. Isto ocorre, por exemplo, devido a simetria de estruturas internas quanto à forma cristalográfica ou ao arranjo regular de fibras. A simetria material é uma propriedade direcional e não posicional. Assim, um material pode

ter uma certa simetria elástica em cada ponto e suas propriedades podem variar ponto a ponto. A dependência posicional das propriedades está relacionada à homogeneidade do material. Um material é dito homogêneo se as suas propriedades forem as mesmas em todo o seu domínio (independentemente da posição). Em um material heterogêneo, as propriedades são função da posição.

Um material anisotrópico apresenta diferentes valores para uma propriedade em diferentes direções, ou seja, as propriedades do material em relação a um ponto são dependentes da direção. Quando cada propriedade tem o mesmo valor em todas as direções, o material é chamado de isotrópico. Tanto os materiais isotrópicos quanto os anisotrópicos podem ser homogêneos ou não.

Os planos de simetria são determinados por matrizes de transformação. Uma revisão detalhada sobre o tema pode ser encontrada em Smith e Rivlin, 1958 e Smith et al., 1963. As equações de transformação são válidas apenas para componentes tensoriais de dois sistemas de coordenadas diferentes. Os componentes  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  dos tensores de segunda ordem e os componentes  $C_{ijkl}$  do tensor elasticidade de quarta ordem são transformados de acordo com as relações:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \ell_{ip}\ell_{jq}\sigma_{pq}, \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = \ell_{ip}\ell_{jq}\varepsilon_{pq}, \quad \hat{C}_{ijkl} = \ell_{ip}\ell_{jq}\ell_{kr}\ell_{ls}C_{pqrs}, \quad (3.27)$$

onde  $\ell_{ij}$  são os cossenos diretores associados aos sistemas de coordenadas  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  e  $(x_1, x_2, x_3)$  e  $\hat{C}_{ijkl}$  e  $C_{pqrs}$ , por exemplo, são os componentes do tensor de quarta ordem no sistema de coordenadas rotacionado e não rotacionado, respectivamente.

Os cinco casos mais comuns de simetria material, segundo Jones, 1999, são:

- Anisotrópica: Há vinte e uma constantes elásticas independentes e não há planos de simetria.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & sim. & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.28)$$

- Monoclínica: Há treze constantes elásticas independentes e um plano de simetria.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.29)$$

- Ortorrópica: Há nove constantes elásticas independentes e dois planos de simetria ortogonais, implicando em simetria com relação a um terceiro plano mutuamente ortogonal.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.30)$$

- Transversalmente isotrópica: Há cinco constantes elásticas independentes e em cada ponto do material existe um plano no qual as propriedades são iguais em todas as direções.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.31)$$

- Isotrópica: Há duas constantes elásticas independentes e infinitos planos de simetria.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ & sim. & & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.32)$$

### 3.4 Constantes de engenharia

Na maioria das vezes, as propriedades que caracterizam os materiais são determinadas, experimentalmente, em termos de constantes de engenharia, como o módulo de Young (ou módulo de elasticidade), o módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson. Estas constantes são medidas por testes simples, como o ensaio de tração uniaxial ou o teste de cisalhamento puro. Por possuírem significado físico mais claro e perceptível, as constantes de engenharia são usadas no lugar dos coeficientes de rigidez  $C_{ij}$  e dos coeficientes de flexibilidade  $S_{ij}$ , que são mais abstratos.

Em consequência da linearidade assumida (cinemática e material), o princípio da superposição de efeitos é válido. Neste caso, se os carregamentos aplicados e as restrições geométricas são independentes da deformação, a soma dos deslocamentos (portanto, das deformações) produzidos por dois conjuntos de carregamentos é igual aos deslocamentos (e deformações) que são produzidos pela soma dos dois conjuntos de carregamentos. Em particular, as deformações do mesmo tipo, causadas por componentes individuais de tensão, podem ser somadas.

Sendo a deformação de extensão  $\varepsilon_{11}^{(1)}$  na direção da coordenada material  $x_1$ , causada pela tensão  $\sigma_{11}$  na mesma direção, dada por  $\sigma_{11}/E_1$ , onde  $E_1$  denota o módulo de elasticidade do material na direção  $x_1$ . A deformação de extensão  $\varepsilon_{11}^{(2)}$ , resultante do efeito de Poisson devido à tensão  $\sigma_{22}$  aplicada na direção  $x_2$ , igual a  $-\nu_{21}\sigma_{22}/E_2$ , onde  $\nu_{21}$  é o coeficiente de Poisson definido como  $\nu_{21} = -\varepsilon_{11}/\varepsilon_{22}$  e  $E_2$  é o módulo de elasticidade do material na direção  $x_2$  (o primeiro subscrito em  $\nu_{ij}$ , para  $i \neq j$ , corresponde à direção do carregamento e o segundo subscrito se refere à direção da deformação). Da mesma forma,  $\sigma_{33}$  produz uma deformação  $\varepsilon_{11}^{(3)}$  equivalente a  $-\nu_{31}\sigma_{33}/E_3$ . Então, a deformação total  $\varepsilon_{11}$  devido à aplicação simultânea das três componentes de tensão normal é:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)} + \varepsilon_{11}^{(3)} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \nu_{31} \frac{\sigma_{33}}{E_3} \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_{11} = S_{11}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} + S_{13}\sigma_{33},$$

onde a direção do carregamento é denotada pelo sobrescrito.

Seguindo o mesmo procedimento, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= -\nu_{12} \frac{\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \nu_{32} \frac{\sigma_{33}}{E_3} = S_{21}\sigma_{11} + S_{22}\sigma_{22} + S_{23}\sigma_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= -\nu_{13} \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \nu_{23} \frac{\sigma_{22}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_3} = S_{31}\sigma_{11} + S_{32}\sigma_{22} + S_{33}\sigma_{33}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

A aplicação de estados de tensão por ensaios de cisalhamento simples em um material resulta em:

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} = S_{66}\sigma_{12}, \quad 2\varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G_{13}} = S_{55}\sigma_{13}, \quad 2\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G_{23}} = S_{44}\sigma_{23}, \tag{3.35}$$

sendo,  $2\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) a mudança no ângulo reto entre duas linhas paralelas às direções  $x_i$  e  $x_j$  em um ponto,  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) a tensão cisalhante correspondente no plano  $x_i x_j$ , e  $G_{ij}$  ( $i \neq j$ ) os módulos de cisalhamento nos planos  $x_i x_j$ . O sistema definido pelas equações anteriores pode ser expresso na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}, \tag{3.36}$$

onde  $E_1, E_2, E_3$  são os módulos de Young nas direções  $x_1, x_2$  e  $x_3$  do material, respectivamente,  $\nu_{ij}$  é o coeficiente de Poisson, definido como a razão da deformação transversal na direção  $j$  em relação a deformação longitudinal na direção  $i$  quando tensionado na direção  $i$ , e  $G_{23}, G_{13}, G_{12}$

são os módulos de cisalhamento nos planos  $x_2x_3$ ,  $x_1x_3$  e  $x_1x_2$ , respectivamente. A Equação 3.36 contém a matriz de flexibilidade  $\mathbf{S}$  para um material ortotrópico em termos das constantes de engenharia.

Como a matriz de flexibilidade  $\mathbf{S}$  é o inverso da matriz constitutiva  $\mathbf{C}$  e a inversa de uma matriz simétrica é simétrica, segue que a matriz de flexibilidade também é uma matriz simétrica. Isto, por sua vez, implica que as seguintes relações recíprocas são válidas:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}; \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}; \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}; \quad \text{ou} \quad \frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}. \quad (3.37)$$

Assim, os nove coeficientes materiais independentes para um material ortotrópico são:

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{13} \text{ e } \nu_{23}. \quad (3.38)$$

Entretanto, em um material anisotrópico, a matriz de flexibilidade é cheia. Logo, constantes adicionais devem ser definidas. Considerando um estado triaxial de tensões, Lekhnitsky, 1981, definiu os coeficientes de influência mútua<sup>2</sup> para caracterizar o acoplamento extensão-cisalhamento existente em um material anisotrópico [Mendonça, 2019]. Os coeficientes são de dois tipos.

### I. Coeficientes de Influência Mútua do Primeiro Tipo

Supondo que seja aplicado um estado uniforme de tensão cisalhante em um corpo, onde a única componente não nula é  $\sigma_{ij}$ , com  $i \neq j$ . Neste caso, pode-se determinar e medir o seguinte coeficiente, que é uma propriedade do material:

$$\eta_{k,ij} = \frac{\varepsilon_k}{\gamma_{ij}}. \quad (3.39)$$

---

<sup>2</sup> Os coeficientes de influência mútua são representados por uma notação que utiliza vírgula para separar os índices. Deve-se tomar cuidado para não confundir com a indicação de derivação da notação indicial.

Como  $k$  pode assumir os valores 1, 2 e 3, e  $ij$  os valores 23, 13 e 12, existem nove componentes dos coeficientes de influência do primeiro tipo. Eles são definidos como a relação entre a deformação de extensão na direção  $k$ ,  $\varepsilon_k$ , e a deformação cisalhante  $\gamma_{ij}$ , se o carregamento for  $\sigma_{ij} = \sigma$ , com as demais componentes de tensão nulas. Estes coeficientes preenchem o quadrante superior direito de dimensões  $3 \times 3$  da matriz de flexibilidade de um material anisotrópico, que fornece as deformações extensionais produzidas por tensões cisalhantes.

## II. Coeficientes de Influência Mútua do Segundo Tipo

São definidos por:

$$\eta_{ij,k} = \frac{\gamma_{ij}}{\varepsilon_k}, \quad (3.40)$$

quando  $\gamma_{ij}$  e  $\varepsilon_k$  são deformações provocadas por um estado de tensão normal no qual a única componente não nula é  $\sigma_k$ , isto é, estas nove constantes  $\eta_{ij,k}$  são a relação entre a deformação cisalhante  $\gamma_{ij}$  e a deformação de extensão  $\varepsilon_k$ , se o estado de tensão no ponto for  $\sigma_k = \sigma$  e as outras tensões forem nulas. Estes coeficientes preenchem o quadrante  $3 \times 3$  inferior esquerdo da matriz de flexibilidade de um material anisotrópico.

Um material anisotrópico também apresenta acoplamento de tensão e de deformação entre diferentes planos, representados por  $S_{45}$ ,  $S_{46}$  e  $S_{56}$ . Por exemplo, uma componente de tensão  $\sigma_{12}$  provoca não apenas  $\gamma_{12}$ , como também  $\gamma_{13}$  e  $\gamma_{23}$  [Mendonça, 2019]. Estes termos de  $\mathbf{S}$  são definidos com a ajuda dos coeficientes de Chentsov <sup>3</sup>, estabelecidos como:

$$\mu_{ij,k\ell} = \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{k\ell}}, \quad (3.41)$$

quando a única tensão não nula é  $\sigma_{k\ell}$ .

---

<sup>3</sup> Assim como acontece com os coeficientes de influência mútua, os coeficientes de Chentsov também são representados por uma notação que utiliza vírgula para separar os índices.

A matriz de flexibilidade  $\mathbf{S}$ , para um material anisotrópico, pode ser então escrita em termos das constantes de engenharia como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{\eta_{1,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{1,13}}{G_{13}} & \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{\eta_{2,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{2,13}}{G_{13}} & \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \frac{\eta_{3,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{3,13}}{G_{13}} & \frac{\eta_{3,12}}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{23,1}}{E_1} & \frac{\eta_{23,2}}{E_2} & \frac{\eta_{23,3}}{E_3} & \frac{1}{G_{23}} & \frac{\mu_{23,13}}{G_{13}} & \frac{\mu_{23,12}}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{13,1}}{E_1} & \frac{\eta_{13,2}}{E_2} & \frac{\eta_{13,3}}{E_3} & \frac{\mu_{13,23}}{G_{23}} & \frac{1}{G_{13}} & \frac{\mu_{13,12}}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{12,1}}{E_1} & \frac{\eta_{12,2}}{E_2} & \frac{\eta_{12,3}}{E_3} & \frac{\mu_{12,23}}{G_{23}} & \frac{\mu_{12,13}}{G_{13}} & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.42)$$

Uma vez que  $\mathbf{S}$  é uma matriz simétrica, os dezoito coeficientes de influência mútua  $\eta$  (ou de Lekhnitsky) são reduzidos a nove coeficientes independente, através da relação:

$$\frac{\eta_{i,jk}}{G_{jk}} = \frac{\eta_{ik,i}}{E_i}. \quad (3.43)$$

De maneira semelhante, os seis coeficientes de Chentsov  $\mu$  se reduzem a três:

$$\frac{\mu_{ij,k\ell}}{G_{k\ell}} = \frac{\mu_{k\ell,ij}}{G_{ij}}. \quad (3.44)$$

Estes doze coeficientes adicionados aos três coeficientes de Poisson  $\nu$ , aos três módulos de elasticidade  $E$  e aos três módulos de cisalhamento  $G$ , formam o conjunto de vinte e uma constantes de engenharia independentes que descrevem o comportamento constitutivo de um material anisotrópico.

### 3.5 Princípio dos Trabalhos Virtuais – PTV

A partir de considerações puramente geométricas, um sistema mecânico pode assumir muitas configurações consistentes com as restrições existentes. De todas as configurações possíveis, apenas aquela que satisfaz as equações de equilíbrio corresponde à configuração real. O conjunto de configurações que satisfazem as restrições geométricas, mas não necessariamente as equações de equilíbrio, é chamado de conjunto de configurações admissíveis. Estas configurações são restritas a uma vizinhança da configuração verdadeira, de modo que elas podem ser obtidas a partir de variações infinitesimais. Durante estas variações, as restrições geométricas do sistema não são violadas e todas as forças permanecem fixadas em seus valores reais.

Quando um sistema mecânico experimenta tais variações em sua configuração, diz-se que ele passa por deslocamentos virtuais a partir de sua configuração verdadeira ou real. Estes deslocamentos não precisam ter qualquer relação com os deslocamentos reais e são chamados de virtuais porque acontecem de forma hipotética, enquanto os carregamentos reais atuam em seus valores fixos. Os deslocamentos virtuais nos pontos do contorno em que as condições geométricas (ou deslocamentos) são especificadas são necessariamente zero.

O trabalho realizado por forças reais  $\mathbf{F}$  em um corpo  $\Omega_0$  na direção dos deslocamentos virtuais  $\delta\mathbf{u}$  é chamado de trabalho virtual, expresso por:

$$\delta W = \int_{\Omega_0} \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{u} \, dV, \quad (3.45)$$

onde  $dV$  denota o elemento de volume  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  no corpo  $\Omega_0$ .

O trabalho virtual externo realizado devido aos deslocamentos virtuais  $\delta\mathbf{u}$  em um corpo sólido  $\Omega_0$  submetido a forças de corpo  $\mathbf{b}$ , por unidade de volume, e trações de superfície  $\mathbf{t}$ , por unidade de área do contorno  $\Gamma_\sigma$ , é dado por:

$$\delta V = - \left( \int_{\Omega_0} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma \right), \quad (3.46)$$

onde  $d\Gamma$  denota um elemento de superfície e  $\Gamma_\sigma$  representa a porção do contorno na qual as tensões são especificadas. O sinal negativo na Equação 3.46 indica que o trabalho é realizado sobre o corpo.

Entende-se que os deslocamentos são especificado na porção restante  $\Gamma_u = \Gamma - \Gamma_\sigma$  do contorno. Portanto, os deslocamentos virtuais são zero em  $\Gamma_u$ , independentemente de  $\mathbf{u}$  ser especificado como zero ou não.

Os deslocamentos relativos do corpo sólido, exercidos pelas forças, podem ser medidos em termos das deformações e produzem tensões internas. As forças associadas ao campo de tensão movem as partículas do material através dos deslocamentos correspondentes ao campo de deformação e, conseqüentemente, trabalho é realizado. O trabalho feito por estas forças internas é chamado de trabalho interno. Assim, o trabalho realizado sobre o corpo é responsável pelo trabalho interno armazenado no corpo.

Supondo um elemento de volume infinitesimal  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  do corpo, submetido a deformações virtuais  $\delta\varepsilon_{ij}$  devido aos deslocamentos virtuais  $\delta u_i$ , matematicamente descritos por:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}), \quad (3.47)$$

$$\delta u_{i,j} \equiv \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}.$$

O trabalho realizado pela força devido à tensão real  $\sigma_{11}$  na direção do deslocamento virtual  $\delta u_1 = \delta\varepsilon_{11} dx_1$  é igual a:

$$\sigma_{11} dx_2 dx_3 \cdot \delta\varepsilon_{11} dx_1 = \sigma_{11} \delta\varepsilon_{11} dV. \quad (3.48)$$

Da mesma forma, o trabalho realizado pela força devido à tensão  $\sigma_{12}$  no corpo é dado por:

$$\sigma_{12} dx_2 dx_3 \cdot 2\delta\varepsilon_{12} dx_1 = \sigma_{12} \delta\varepsilon_{12} dV. \quad (3.49)$$

Assim, o trabalho virtual total realizado pelas forças, devido a todos os componentes de tensão em um elemento de volume  $dV$  ao longo dos seus respectivos deslocamentos, é:

$$(\sigma_{11} \cdot \delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \delta\varepsilon_{22} + \dots + \sigma_{12} \cdot 2\delta\varepsilon_{12}) dV = \sigma_{ij} \cdot \delta\varepsilon_{ij} dV. \quad (3.50)$$

E o trabalho virtual interno total realizado é obtido integrando a expressão acima em todo o volume do corpo:

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV . \quad (3.51)$$

A Equação 3.51 é chamada de energia de deformação virtual de um corpo deformável e é válida para qualquer corpo material, independentemente de seu comportamento constitutivo.

## 4 ABORDAGEM MICROMECAÂNICA

Este capítulo trata sobre a fundamentação física utilizada neste trabalho, que permite a transição da microescala para a macroescala, visando prever o comportamento mecânico efetivo, ou macroscópico, de materiais compósitos microestruturados. Uma discussão sobre os aspectos da micromecânica e da macromecânica na modelagem de compósitos é apresentada. O conceito de elemento de volume representativo de um material heterogêneo é explorado. A operação de média volumétrica como ferramenta matemática para o procedimento de homogeneização é descrita.

As referências para elaboração deste capítulo são os livros de Nemat-Nasser e Hori, 1993, Torquato e Haslach, 2002, Aboudi et al., 2013 e Gross e Seelig, 2017.

### 4.1 Micromecânica x Macromecânica

Existem duas abordagens básicas para modelagem de materiais compósitos: a micromecânica e a macromecânica. O objetivo da micromecânica é prever o comportamento efetivo de um material heterogêneo com base no comportamento dos seus materiais constituintes e seus arranjos geométricos. Partindo da microescala e considerando explicitamente os detalhes do meio, são empregados modelos constitutivos para os constituintes em conjunto com técnicas de homogeneização. No entanto, estas informações mais detalhadas costumam ter um elevado custo computacional. Ao determinar as propriedades efetivas de um compósito por meio da abordagem micromecânica, elas podem ser transferidas para análises em uma escala superior.

Na abordagem em macroescala, o compósito é idealizado como um material homogêneo, geralmente anisotrópico, com propriedades mensuráveis experimentalmente. Em consequência da caracterização experimental do comportamento constitutivo macroscópico, o próprio material realiza um procedimento de homogeneização, uma vez que os efeitos interativos intrínsecos dos constituintes (por exemplo, reforço, interface e matriz) são incorporados nos resultados experimentais. As propriedades obtidas podem ser inseridas em uma teoria estrutural ou em um código de análise, como elementos finitos, para determinar o desempenho de um componente em condições de trabalho. Esta é uma abordagem computacionalmente eficiente e direta. Entretanto, depende de dados experimentais com elevado custo financeiro, que devem ser gerados para cada

variação do compósito. Outro problema desta metodologia é que os processos físicos locais, como concentração de tensão, deformação, dano e falha, ocorrem nos materiais constituintes reais e não dentro de um meio anisotrópico idealizado.

Um benefício da micromecânica é que as propriedades de um material compósito podem ser estimadas em qualquer direção, para qualquer fração de volume ou arquitetura de reforço, mesmo antes do material ser fabricado. Por isto, esta abordagem é de grande valor no projeto de compósitos, bem como das microestruturas que os compõem.

A superioridade de uma metodologia em relação à outra permanece discutível frente ao propósito de desenvolver ferramentas de análises precisas, computacionalmente eficientes e validadas experimentalmente. É claro que cada uma tem seu domínio de aplicabilidade, com pontos fortes e fracos. Algumas das vantagens e das desvantagens de cada abordagem são, resumidamente, destacadas na Figura 4.1.

	Vantagens	Desvantagens
Macromecânica	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Eficiência computacional;</li> <li>2. Testes experimentais incorporam efeitos locais;</li> <li>3. Alinhada aos procedimentos de projeto padrão no nível de camadas;</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Requer teoria constitutiva anisotrópica;</li> <li>2. Novos testes para alterações da arquitetura, fração de volume e histórico de processamento;</li> <li>3. Idealização de meios homogêneos;</li> </ol>
Micromecânica	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Efeitos microestruturais explicitamente capturados, (efeitos físicos e estados em uma escala mais fundamental);</li> <li>2. Modelos constitutivos mais simples para os constituintes;</li> <li>3. Uso de critérios de falha mais fundamentais;</li> <li>4. Permite simular diferentes arranjos para o projeto de materiais;</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Maior custo computacional;</li> <li>2. Necessidade de validação da resposta constitutiva constituinte (reforço/matriz) do composto;</li> <li>3. Comportamento na interface um constante desconhecida;</li> </ol>

Figura 4.1 – Comparação entre as abordagens macromecânica e micromecânica [adaptado de Aboudi et al., 2013].

## 4.2 Elemento de volume representativo (EVR) e célula unitária de repetição (CUR)

A mecânica do *continuum* é baseada no conceito de meio contínuo e homogêneo. Neste contexto, um corpo pode ser subdividido repetidamente em volumes infinitesimais, onde cada um

destes mantém as propriedades do material. No entanto, em alguma escala, todos os materiais reais são heterogêneos. A micromecânica considera explicitamente os detalhes da microestrutura heterogênea de um material, permitindo que ele seja tratado como um *continuum* efetivo (idealizado) em uma escala de comprimento mais alta (por exemplo, em um componente ou em uma estrutura). Para avaliar a microestrutura, a micromecânica utiliza elementos de volume representativo (EVRs) ou células unitárias de repetição (CURs).

Um EVR é um volume de material cujo comportamento efetivo é representativo do material como um todo. Na hipótese de um material perfeitamente homogêneo, seu elemento de volume representativo poderia ser infinitamente pequeno. Entretanto, para materiais reais, o EVR deve ter volume suficiente para capturar a essência da microestrutura, do ponto de vista estatístico. Ou seja, a resposta obtida a partir de um EVR deve ser idêntica àquela obtida em uma amostra macroscópica do material. Hill, 1963, definiu o elemento de volume representativo baseado no requisito de que as densidades de energia de deformação induzidas tanto pela aplicação de condições de contorno de tração homogênea quanto por condições de contorno de deslocamento homogêneo devem ser, essencialmente, equivalentes.

Outro conceito importante é o de célula unitária de repetição. Neste caso, a microestrutura heterogênea é aproximada como periódica e a CUR é o volume de material que se repete para gerar a microestrutura inteira. Condições periódicas são aplicadas aos contornos da CUR para estabelecer a natureza repetitiva. Frequentemente, é difícil garantir que um volume de análise seja realmente um EVR, como consequência, a abordagem de CUR com a hipótese de periodicidade, é empregada. Drago e Pindera, 2007, apresentam uma discussão detalhada dos conceitos de EVR e CUR na análise micromecânica de compósitos.

A relação entre as escalas de uma CUR, um EVR e uma estrutura é ilustrada na Figura 4.2. A dimensão microestrutural da CUR é representada por  $d$ ,  $D$  está associado à dimensão do EVR e  $L$  ao comprimento característico do componente ou estrutura composta pelo material heterogêneo. Se as razões destas dimensões ( $d/D$  e  $D/L$ ) forem muito menores do que um, então o EVR deve incluir um número suficiente de unidades microestruturais para representar (estatisticamente) a natureza heterogênea do material.

Ou seja, o EVR do material é tal que: (1) é completamente representativo do volume do compósito, em média; (2) contém um número suficiente de fases do material e, portanto, é grande

quando comparado às escalas da microestrutura, mas ainda é pequeno quando comparado com o corpo inteiro. Consequentemente, a resposta do EVR é capaz de representar a resposta do meio compósito e, adicionalmente, a resposta é insensível aos valores das condições de contorno (valores de tração ou de deslocamento da superfície), desde que estes valores sejam macroscopicamente uniformes. Isto é, eles flutuam em torno de uma média com um comprimento de onda pequeno em comparação com as dimensões do volume e os efeitos de tais flutuações tornam-se insignificantes dentro dos comprimentos de onda da superfície.

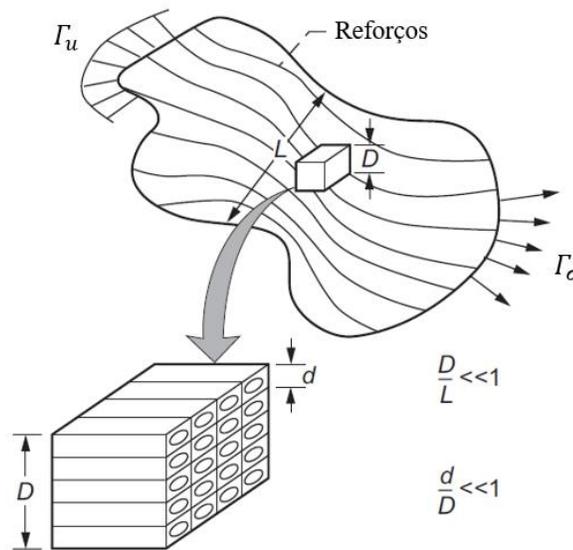


Figura 4.2 – Relação entre as escalas de uma CUR, um EVR e uma estrutura [adaptado de Aboudi et al., 2013].

De acordo com Aboudi et al., 2013, o conceito de EVR fornece um discriminador valioso entre teorias do *continuum* (macroscópicas) e teorias microscópicas. Para escalas maiores que o EVR, pode-se usar a mecânica do *continuum* e reproduzir as propriedades do material como um todo. Para escalas inferiores ao EVR, é preciso considerar a microestrutura do material.

### 4.3 Média volumétrica

Para um elemento de volume  $V$  representativo de um material heterogêneo, sob condições de contorno impostas por um campo de tensão ou de deformação macroscopicamente homogêneo,

a relação de homogeneização de alguma variável  $f(\mathbf{x})$  assume a forma de média sobre o volume, matematicamente descrita por:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{x}) dV. \quad (4.1)$$

Então, os tensores médios de tensão e de deformação podem ser, respectivamente, definidos como:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV, \quad (4.2)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV, \quad (4.3)$$

onde  $V$  é o volume do EVR.

#### 4.4 Condições de contorno homogêneas

Condições de contorno homogêneas aplicadas na superfície de um corpo homogêneo produzem um campo homogêneo. Tais condições são obtidas impondo deslocamentos sobre o contorno  $\Gamma$  do corpo, na forma:

$$u_i(\Gamma) = \varepsilon_{ij}^0 x_j, \quad (4.4)$$

onde  $\varepsilon_{ij}^0$  são deformações constantes. Ou, alternativamente, trações podem ser impostas sobre  $\Gamma$ :

$$t_i(\Gamma) = \sigma_{ij}^0 n_j, \quad (4.5)$$

onde  $\sigma_{ij}^0$  são tensões constantes e  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário que aponta para fora em relação à superfície  $\Gamma$ .

A formulação do equilíbrio com deslocamentos totalmente prescritos sobre o contorno do volume fornece soluções mais rígidas, isto é, com maiores restrições cinemáticas. Por outro lado, a prescrição de trações no contorno relaxa estas restrições de movimento, proporcionando soluções mais complacentes.

#### 4.5 Teorema da deformação média

Para calcular as deformações médias em um material compósito deve-se solucionar o problema da elasticidade sobre um EVR, submetido a condições de contorno de deslocamento homogêneo, Equação 4.4. No entanto, as deformações médias  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  são idênticas às deformações constantes  $\varepsilon_{ij}^0$  aplicadas em  $\Gamma$ . Este é o teorema da deformação média, que pode ser estabelecido da seguinte maneira. Sejam as relações infinitesimais de deformação-deslocamento dadas por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4.6)$$

onde a virgula denota derivação. Substituindo a Equação 4.6 na Equação 4.3, obtém-se:

$$2V \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \int_{V_1} (u_{i,j}^{(1)} + u_{j,i}^{(1)}) dV + \int_{V_2} (u_{i,j}^{(2)} + u_{j,i}^{(2)}) dV, \quad (4.7)$$

onde (1) e (2) indicam as fases de um compósito de duas fases e  $V_1$  e  $V_2$  são os volumes ocupados por estas duas fases, respectivamente. Aplicando o teorema de Gauss dado por:

$$\int_V u_{i,p} dV = \int_\Gamma u_i n_p d\Gamma, \quad (4.8)$$

pode-se reescrever a Equação 4.7 como:

$$2V \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \int_{\Gamma_1} (u_i^{(1)} n_j + u_j^{(1)} n_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i) d\Gamma, \quad (4.9)$$

onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são as superfícies das fases 1 e 2. As superfícies  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  contêm as interfaces compartilhadas  $\Gamma_{1-2}$  e a superfície externa  $\Gamma$ . Assumindo que o contato entre as fases é perfeito, ou seja:

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)} \quad \text{em } \Gamma_{1-2}, \quad (4.10)$$

as contribuições de  $\Gamma_{1-2}$  nas duas integrais da Equação 4.9 se cancelam, levando a:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_{\Gamma} (u_i n_j + u_j n_i) d\Gamma. \quad (4.11)$$

Substituindo as condições de contorno homogêneas da Equação 4.4 na Equação 4.11, chega-se a relação:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0. \quad (4.12)$$

A Equação 4.12 é o correspondente matemático do que foi enunciado, anteriormente, como teorema da deformação média.

#### 4.6 Teorema da tensão média

As condições de contorno homogêneas de trações aplicadas em  $\Gamma$  produzem um campo de tensão no compósito cuja média  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  é idêntica à tensão constante  $\sigma_{ij}^0$  aplicada. Para demonstrar esta igualdade, parte-se das equações de equilíbrio considerando a ausência de forças de corpo, descritas por:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (4.13)$$

que implicam na igualdade entre a derivada do momento de tensão e a própria tensão:

$$(\sigma_{ik} x_j)_{,k} = \sigma_{ik,k} x_j + \sigma_{ik} x_{j,k} = \sigma_{ik} \delta_{jk} = \sigma_{ij}. \quad (4.14)$$

Substituindo esta relação na Equação 4.2, obtém-se:

$$V\langle\sigma_{ij}\rangle = \int_V (\sigma_{ik}x_j)_{,k} dV . \quad (4.15)$$

Utilizando o teorema de Gauss, expresso na Equação 4.8, pode-se reescrever a Equação 4.15 da seguinte forma:

$$V\langle\sigma_{ij}\rangle = \int_{\Gamma_1} (\sigma_{ik}^{(1)}x_jn_k^{(1)}) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (\sigma_{ik}^{(2)}x_jn_k^{(2)}) d\Gamma . \quad (4.16)$$

Como as trações são contínuas nas interfaces  $\Gamma_{1-2}$ , ou seja:

$$\sigma_{ij}^{(1)}n_j^{(1)} = -\sigma_{ij}^{(2)}n_j^{(2)} , \text{ em } \Gamma_{1-2}, \quad (4.17)$$

as contribuições de  $\Gamma_{1-2}$  para as duas integrais se cancelam e a Equação 4.16 se reduz a:

$$V\langle\sigma_{ij}\rangle = \int_{\Gamma} \sigma_{ik}x_jn_k d\Gamma . \quad (4.18)$$

Substituindo as condições de contorno homogêneas da Equação 4.5 na Equação 4.18, chega-se a expressão:

$$V\langle\sigma_{ij}\rangle = \sigma_{ij}^0 \int_{\Gamma} x_jn_k d\Gamma , \quad (4.19)$$

na qual pode-se empregar o teorema de Gauss no sentido inverso ao utilizado anteriormente para escrever:

$$V\langle\sigma_{ij}\rangle = \sigma_{ij}^0 \int_V x_{j,k} dV . \quad (4.20)$$

Assim, chega-se a expressão:

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \sigma_{ij}^0 , \quad (4.21)$$

definida como o teorema da tensão média.

## 4.7 Propriedades efetivas

Supondo que um elemento de volume representativo de um compósito esteja submetido as condições de contorno de deslocamento homogêneo da Equação 4.4, que produzem uma deformação uniforme  $\varepsilon_{ij}^0$  em um material homogêneo. Então, pelo teorema da deformação média,  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0$ , o campo de deformação média no EVR é conhecido.

Desta forma, calculando a tensão média  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  suscitada pelas mesmas condições de contorno, pode-se determinar as constantes elásticas efetivas do material através da relação entre os campos médios de deformação e de tensão. Para fazer isto, assume-se que o campo de deslocamento induzido devido a deformação uniforme ( $\varepsilon_{k\ell}^0 = 1$ ) aplicada em  $\Gamma$  é representado por  $u_i^{(k\ell)}(\mathbf{x})$ . Pela superposição linear:

$$u_i(\mathbf{x}) = \varepsilon_{k\ell}^0 u_i^{(k\ell)}(\mathbf{x}), \quad (4.22)$$

onde um somatório deve ser realizado sobre os índices  $k$  e  $\ell$ . A deformação resultante do campo de deslocamento da Equação 4.22 é dada por:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{k\ell}^0 \left( u_{i,j}^{(k\ell)} + u_{j,i}^{(k\ell)} \right). \quad (4.23)$$

A tensão no ponto  $\mathbf{x}$  é determinada pela lei de Hooke, como:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} C_{ijpq}(\mathbf{x}) \varepsilon_{k\ell}^0 \left( u_{p,q}^{(k\ell)} + u_{q,p}^{(k\ell)} \right). \quad (4.24)$$

onde  $C_{ijpq}(\mathbf{x})$  são as constantes elásticas dependentes da posição do material compósito. Isto é, as constantes elásticas podem assumir valores  $C_{ijpq}^{(1)}(\mathbf{x})$  e  $C_{ijpq}^{(2)}(\mathbf{x})$ , dependendo da fase presente na posição  $\mathbf{x}$ .

A média volumétrica das tensões sobre o EVR é determinada a partir da Equação 4.2. Substituindo a Equação 4.24 na Equação 4.2 segue que:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \int_V \frac{1}{2} C_{ijpq}(\mathbf{x}) \varepsilon_{k\ell}^0 \left( u_{p,q}^{(k\ell)} + u_{q,p}^{(k\ell)} \right) dV = \varepsilon_{k\ell}^0 \int_V \frac{1}{2} C_{ijpq}(\mathbf{x}) \left( u_{p,q}^{(k\ell)} + u_{q,p}^{(k\ell)} \right) dV, \quad (4.25)$$

onde  $\varepsilon_{k\ell}^0 = \langle \varepsilon_{k\ell} \rangle$ , pelo teorema da deformação média.

Designando a integral no volume do último termo da Equação 4.25 como:

$$C_{ijk\ell}^* = \frac{1}{2V} \int_V C_{ijpq}(\mathbf{x}) \left( u_{p,q}^{(k\ell)} + u_{q,p}^{(k\ell)} \right) dV, \quad (4.26)$$

pode-se escrever a tensão média  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  relacionada a deformação média  $\langle \varepsilon_{k\ell} \rangle$  através das constantes elásticas efetivas  $C_{ijk\ell}^*$ :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijk\ell}^* \langle \varepsilon_{k\ell} \rangle. \quad (4.27)$$

Impondo condições de contorno de trações homogêneas sobre o EVR, Equação 4.5, a seguinte relação pode ser obtida de forma semelhante:

$$\langle \varepsilon_{k\ell} \rangle = S_{ijk\ell}^* \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad (4.28)$$

onde  $S_{ijk\ell}^*$  são as constantes efetivas de flexibilidade.

#### 4.8 Equivalência energética

As propriedades efetivas foram definidas em termos da relação explícita, expressa na Equação 4.25, envolvendo as tensões e as deformações médias calculadas em um elemento de volume representativo. Esta relação é fundamentada por uma analogia entre a microestrutura

heterogênea real de um material compósito e um meio homogêneo efetivo energeticamente equivalente.

Seja um compósito de duas fases, ambas lineares elásticas, onde o índice 1 denota a matriz e o índice 2 o reforço.<sup>4</sup> A superfície externa do material é designada por  $\Gamma$  e os contornos internos compartilhados pelas duas fases por  $\Gamma_{1-2}$ . Sob condições de contorno homogêneas de deslocamento, o trabalho externo pode ser escrito como:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^0 \int_{\Gamma} \sigma_{ik} n_k x_j d\Gamma . \quad (4.29)$$

Aplicando o teorema de Gauss em conjunto com as equações de equilíbrio, assumindo ausência de forças de corpo ( $\sigma_{i,j,j} = 0$ ), a expressão para o trabalho externo pode ser expandida da seguinte forma:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^0 \left[ \int_{V_1} \sigma_{ij} dV + \int_{\Gamma_{1-2}} t_i x_j d\Gamma \right]. \quad (4.30)$$

Agora, considerando a mesma geometria e as mesmas condições de contorno, mas substituindo o material do reforço pelo material da matriz, criando assim um meio homogêneo, o campo de deslocamento neste meio é homogêneo e descrito por  $u_i^0 = \varepsilon_{ij}^0 x_j$ .

Utilizando a lei de Hooke, para determinar o campo de tensão:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{kl} , \quad (4.31)$$

e o tensor deformação:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,\ell} + u_{\ell,k}) , \text{ em } V_1 , \quad (4.32)$$

---

<sup>4</sup> O equacionamento é feito para um material de duas fases, mas pode ser generalizado para o caso de múltiplas fases.

a Equação 4.30, pode ser reescrita como:

$$W = \frac{1}{4} \varepsilon_{ij}^0 C_{ijkl}^{(1)} \int_{V_1} (u_{k,\ell} + u_{\ell,k}) dV + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{1-2}} t_i u_i^0 d\Gamma. \quad (4.33)$$

Empregando o teorema de Gauss, a primeira integral da Equação 4.33 pode ser passada para o contorno:

$$\int_{V_1} (u_{k,\ell} + u_{\ell,k}) dV = \varepsilon_{kr}^0 \int_{\Gamma} x_r n_\ell d\Gamma + \varepsilon_{\ell r}^0 \int_{\Gamma} x_r n_k d\Gamma - \int_{\Gamma_{1-2}} (u_k n_\ell + u_\ell n_k) d\Gamma, \quad (4.34)$$

onde é assumido contato perfeito na interface  $\Gamma_{1-2}$ . A Equação 4.34 pode ser trabalhada a partir de algumas observações. As duas primeiras integrais do lado direito da igualdade resultam em:

$$\int_{\Gamma} x_r n_\ell d\Gamma = \delta_{r\ell} V. \quad (4.35)$$

Adicionalmente, os campos de deslocamento presentes no último termo da Equação 4.34 são dados por  $u_k = \varepsilon_{kj}^0 x_j$ . Logo:

$$\int_{V_1} (u_{k,\ell} + u_{\ell,k}) dV = 2 \varepsilon_{k\ell}^0 V - \int_{\Gamma_{1-2}} (\varepsilon_{kj}^0 x_j n_\ell + \varepsilon_{\ell j}^0 x_j n_k) d\Gamma. \quad (4.36)$$

Fazendo a substituição da Equação 4.36 na Equação 4.33:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4} \varepsilon_{ij}^0 C_{ijkl}^{(1)} \left( 2 \varepsilon_{k\ell}^0 V - \int_{\Gamma_{1-2}} (\varepsilon_{kj}^0 x_j n_\ell + \varepsilon_{\ell j}^0 x_j n_k) d\Gamma \right) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{1-2}} t_i u_i^0 d\Gamma \\ &= \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{k\ell}^0 V - \frac{1}{4} \varepsilon_{ij}^0 \int_{\Gamma_{1-2}} \left( C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{kj}^0 x_j n_\ell + C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{\ell j}^0 x_j n_k \right) d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{1-2}} t_i u_i^0 d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Por fim, reorganizando a Equação 4.37 com o campo homogêneo de tensão ( $\sigma_{k\ell}^0 = C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0$ ), a fórmula de Cauchy ( $t_k^0 = \sigma_{kj}^0 n_j$ ) e o campo de deslocamento ( $u_k = \varepsilon_{kj}^0 x_j$ ), o trabalho externo fica matematicamente expresso por:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 V - \frac{1}{4} \int_{\Gamma_{1-2}} 2 t_i^0 u_i d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{1-2}} t_i u_i^0 d\Gamma \\ &= \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 V + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{1-2}} (t_i u_i^0 - t_i^0 u_i) d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.38)$$

O trabalho externo  $W$  deve ser igual a energia de deformação  $U$ . Seja  $U_0$  a energia de deformação do material homogêneo dada por:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 V, \quad (4.39)$$

$U$  pode ser escrita como:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{1-2}} (t_i u_i^0 - t_i^0 u_i) d\Gamma. \quad (4.40)$$

Sob condições de contorno homogêneas, a integral do trabalho calculada a partir das trações e dos deslocamentos de superfície pode ser expressa por:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} t_i \varepsilon_{ij}^0 x_j d\Gamma = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^0 \int_{\Gamma} \sigma_{ik} n_k x_j d\Gamma = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^0 \langle \sigma_{ij} \rangle V \quad (4.41)$$

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl}^* \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 V.$$

Então, segue da Equação 4.40 e da Equação 4.41 a relação:

$$C_{ijkl}^* \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 = C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{1-2}} (t_i u_i^0 - t_i^0 u_i) d\Gamma, \quad (4.42)$$

que fornece uma definição do tensor constitutivo efetivo a partir de considerações de energia, isto é, através da igualdade da energia de deformação armazenada no meio heterogêneo com a energia armazenada no meio homogêneo equivalente.

Ainda, considerando o compósito de duas fases, sujeito a condição de contorno homogênea de deslocamento, a expressão do trabalho externo pode ser representada por:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} t_i \varepsilon_{ij}^0 x_j d\Gamma = \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle V. \quad (4.43)$$

De forma semelhante, porém, para o caso em que o material está submetido a condição de contorno homogênea de tração:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^0 n_j u_i d\Gamma = \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle V. \quad (4.44)$$

Como os equacionamentos são equivalentes:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (4.45)$$

Segue que em ambos os casos a seguinte identidade é verificada:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle. \quad (4.46)$$

Esta expressão é chamada de Princípio de Hill-Mandel e estabelece a consistência de energia entre as escalas microscópica e macroscópica. Este princípio considera que o trabalho das tensões macroscópicas deve ser igual à média volumétrica do correspondente trabalho realizado pelas tensões microscópicas.

## 5 MODELAGEM E IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

As tecnologias de manufatura aditiva, especialmente, a impressão tridimensional, conferem grande liberdade ao projeto de materiais, permitindo a otimização de topologias microestruturais para obtenção de respostas macroscópicas aprimoradas. Assim, este trabalho apresenta uma metodologia que pretende contribuir para avaliação do comportamento mecânico produzido por arquiteturas microestruturais compatíveis com tais processos de fabricação.

A metodologia implementada refere-se à análise do comportamento mecânico de materiais compósitos, ou metamateriais, completamente consolidados. Isto é, a modelagem do processo de fabricação aditiva não é abordada, sendo associada apenas como o meio para formação dos materiais microestruturados.

Para aplicar a metodologia proposta, entre as inúmeras configurações possíveis, são modeladas microestruturas tomando como referência os padrões de entrelaçamento da fase de reforço descritos na Seção 2.2. Logo, são especificadas duas fases para compor o material. Entretanto, cabe destacar que o relevante neste estudo é a metodologia de avaliação implementada, que não está restrita apenas aos casos testados e que pode ser utilizada em outras configurações.

A simulação computacional consiste na solução das equações que governam o modelo matemático assumido, através de métodos numéricos. O procedimento proposto é programado no software de análise por elementos finitos ANSYS. Os detalhes da estratégia são apresentados no decorrer deste capítulo.

### 5.1 Definição do problema

Materiais de alto desempenho, projetados racionalmente para responder de forma específica a uma determinada solicitação, são obtidos através da combinação de diferentes constituintes em um arranjo microestrutural adequado. Entretanto, esta configuração customizada torna o comportamento mecânico dos materiais mais complexo e difícil de prever, geralmente, levando as teorias mecânicas convencionais além do seu limite de aplicabilidade. Adicionalmente, em problemas de engenharia, é tão importante preservar as informações dos efeitos microestruturais

sobre o comportamento do material quanto representá-las de maneira que permitam avaliar, de forma eficiente, a performance global de uma estrutura.

Assim, a metodologia implementada utiliza uma abordagem multiescala, onde os detalhes da microestrutura heterogênea são incorporados na descrição do comportamento macroscópico do material através da definição de um tensor constitutivo efetivo espacialmente constante. Isto é, os campos microestruturais de tensão e de deformação em um determinado volume, dependentes das propriedades das fases e de seus aspectos geométricos, são relacionados a um ponto material na macroescala, por meio de técnicas de homogeneização.

A percepção dos níveis microscópico e macroscópico não se limita, simplesmente, à magnitude dimensional (metros, milímetros e micrometros, por exemplo), é uma questão de modelagem, levando em consideração os diferentes comprimentos característicos presentes no material. As escalas adotadas neste trabalho estão ilustradas na Figura 5.1, tratadas dentro da hipótese de validade da mecânica do *continuum*. Na microescala, estão os materiais constituintes, reforço e matriz. A mesoescala é definida por um elemento de volume representativo, no qual as fases são organizadas para formar a microestrutura do material. Na escala macroscópica, está o componente, que pode ser interpretado como uma placa de material compósito.

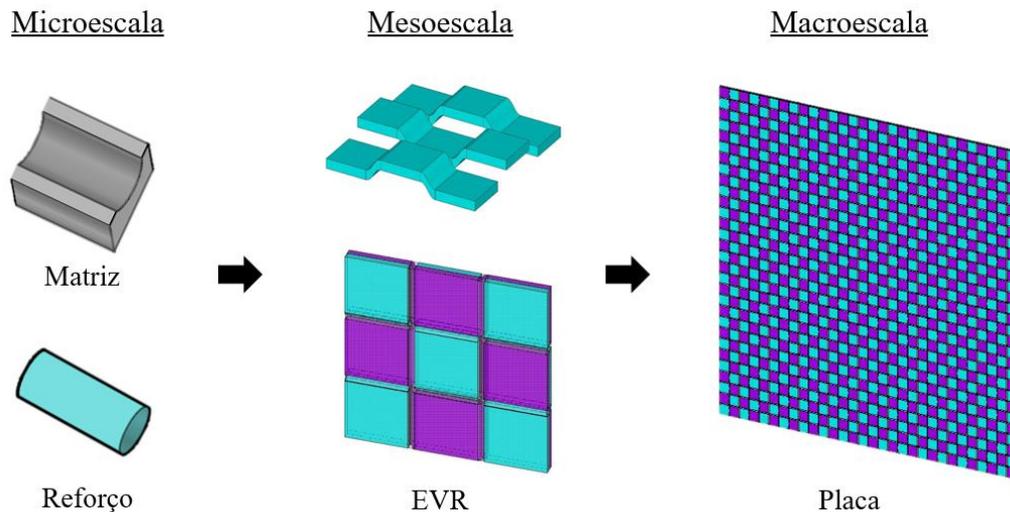


Figura 5.1 – Níveis de escalas em uma placa de material compósito com microestrutura formada pela disposição de uma fase contínua de reforço.

O comportamento mecânico efetivo, resultante da arquitetura microestrutural, é estudado sobre o domínio de um EVR, onde admite-se que as variações na disposição espacial da fase de reforço ocorrem em uma escala de comprimento inferior em relação as dimensões da placa. Assume-se que as fases integrantes são homogêneas, com propriedades constitutivas conhecidas. Esta hipótese é adequada quando as propriedades de cada fase são determinadas experimentalmente ou derivadas através de um processo prévio de homogeneização, conforme exposto na Seção 4.1.

São atribuídas propriedades mecânicas equivalentes às de um compósito formado por fibras de carbono unidirecionais impregnadas com resina, para a fase que desempenha a função de reforço. Este material, conhecido como “*prepreg*”, é utilizado na fabricação de componentes compósitos por métodos aditivos. Seu comportamento é representado pelo tensor constitutivo transversalmente isotrópico da Equação 3.31, com cinco constantes independentes. Embora as propriedades designadas sejam de um compósito, para as finalidades deste estudo, esta fase é considerada, simplesmente, como um feixe homogêneo de reforço. Para a fase que atua como matriz, são selecionadas propriedades semelhantes às de uma resina termorrígida, com comportamento mecânico caracterizado pelo tensor constitutivo isotrópico da Equação 3.32, definido em termos de duas constantes independentes. Os valores das propriedades adotadas para as respectivas fases estão indicados nas tabelas abaixo e foram obtidos no trabalho de Tita, 2003.

Tabela 5.1 – Propriedades elásticas de um compósito de fibras de carbono unidirecionais impregnadas em resina. [Fonte: Tita, 2003]

Propriedades Elásticas	Direção	Valor	Unidade
Módulos de Elasticidade:	Paralelo à fibra ( $E_{11}$ )	105,71	GPa
	Perpendicular à fibra ( $E_{22} = E_{33}$ )	8,57	GPa
Módulos de Cisalhamento:	Planos 1 – 2 e 1 – 3 ( $G_{12} = G_{13}$ )	4,39	GPa
	Plano 2 – 3 ( $G_{23}$ )	3,05	GPa
Coeficientes de Poisson:	Planos 1 – 2 e 1 – 3 ( $\nu_{12} = \nu_{13}$ )	0,327	-
	Plano 2 – 3 ( $\nu_{23}$ )	0,306	-

Tabela 5.2 – Propriedades elásticas de uma resina termofixa. [Fonte: Tita, 2003]

Propriedades Elásticas	Valor	Unidade
Módulo de Elasticidade:	3,2	GPa
Coefficiente de Poisson:	0,35	-

O equilíbrio sobre o EVR do material é formulado no regime linear elástico, com deformações infinitesimais, e solucionado numericamente através do método dos elementos finitos, em conjunto com os modelos constitutivos das fases e as condições de contorno impostas. Os campos de tensão e de deformação não uniformes, resultantes ao longo da microestrutura, são homogeneizados pelo processo de média volumétrica e, com base nos argumentos físicos do Princípio de Hill-Mandel, o domínio heterogêneo é associado a um meio homogêneo equivalente. O material homogeneizado é pressuposto completamente anisotrópico. Portanto, as componentes do tensor constitutivo são determinadas sem hipóteses simplificadoras com relação às simetrias materiais, evidenciando possíveis acoplamentos produzidos pela microestrutura e evitando que informações sobre a complexidade do comportamento sejam perdidas.

## 5.2 Modelos geométricos

A capacidade de um modelo prever o comportamento mecânico de um material microestruturado está diretamente relacionada à qualidade da descrição geométrica da arquitetura dos reforços. Simplificações feitas na geometria interna do modelo resultam em perda de resolução dos campos de tensão e de deformação [Adumitroaie e Barbero, 2011]. Sendo assim, procura-se representar a complexidade das microestruturas através de modelos tridimensionais detalhados, gerados com base nos parâmetros geométricos contidos na Tabela 5.3.

Os feixes de reforço são modelados como fitas de seção transversal constante e retangular, com largura  $w = 2 \text{ mm}$  e espessura  $t = 0,2 \text{ mm}$ . O comprimento de entrelaçamento  $l_w$  é especificado com o mesmo valor da espessura,  $l_w = 0,2 \text{ mm}$ , visando a compactação da microestrutura, isto é, reduzindo a distância entre feixes adjacentes. Ele tem papel fundamental na modelagem, ligando dois segmentos do mesmo reforço e evitando descontinuidades geométricas.

Tabela 5.3 – Parâmetros geométricos para construção dos modelos tridimensionais.

Parâmetros	Dimensão
Padrão de entrelaçamento:	[Adimensional]
Número de feixes de reforço por direção:	[Adimensional]
Ângulo de posicionamento: $\alpha$	[Graus]
Comprimento de entrelaçamento: $l_w$	[mm]
Largura do feixe de reforço: $w$	[mm]
Espessura do feixe de reforço: $t$	[mm]

Tomando como referência o sistema global de coordenadas cartesianas  $x, y$  e  $z$ , são definidos dois planos, um localizado em  $z = 0$ , nomeado plano de entrelaçamento inferior, e outro em  $z = t$ , referido como plano de entrelaçamento superior. O eixo  $z$  é estabelecido como a direção da espessura dos modelos tridimensionais. O ângulo de posicionamento  $\alpha$  é medido no plano  $xy$ , partindo de  $x = 0^\circ$  em direção ao  $y = 90^\circ$ , podendo assumir valores  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Quando um ângulo entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  é selecionado, as projeções dos parâmetros geométricos nos planos de entrelaçamento são calculadas pelas expressões:

$$w_x = \frac{w}{\text{sen}(\alpha)} \quad \text{e} \quad w_y = \frac{w}{\text{cos}(\alpha)}, \quad (5.1)$$

$$l_{w_x} = l_w \text{cos}(\alpha) \quad \text{e} \quad l_{w_y} = l_w \text{sen}(\alpha). \quad (5.2)$$

Os padrões de entrelaçamento são programados de acordo com as configurações dos tecidos fundamentais (plano, sarja e cetim), ilustrados na Figura 2.3, ou conforme o posicionamento sequencial em ângulos alternados ( $+\alpha/-\alpha$ ), exemplificado na Figura 2.4. Cada estrutura é reproduzida por uma função que determina as trajetórias dos reforços, ou seja, controla as trocas de posição entre os planos inferior ( $z = 0$ ) e superior ( $z = t$ ), da seguinte forma:

- Tecido plano (*plain weave*): os feixes de reforço são posicionados nas direções horizontal ( $x$ ) e vertical ( $y$ ), seguindo um padrão de entrelaçamento “um por baixo – um por

cima”. Cada feixe seguinte é posicionado invertendo o padrão do anterior. A troca frequente entre os planos inferior e superior gera um padrão semelhante a um tabuleiro de xadrez. A Figura 5.2 ilustra a configuração descrita.

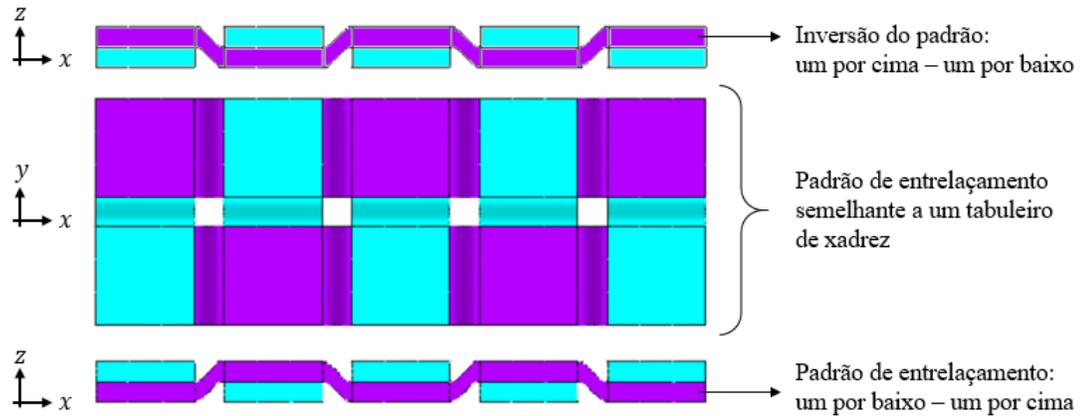


Figura 5.2 – Configuração de entrelaçamento do padrão plano.

- Tecido sarja (*twill weave*): esta estrutura é caracterizada pela formação de diagonais contínuas, obtidas pelo posicionamento dos reforços nas direções horizontal e vertical, em trajetórias que seguem a relação “um por baixo – dois por cima”, deslocando o padrão de entrelaçamento uma posição em  $x$  para os reforços subsequentes. A Figura 5.3 apresenta o modo como são realizadas as trocas entre os planos inferior e superior para esta arquitetura.

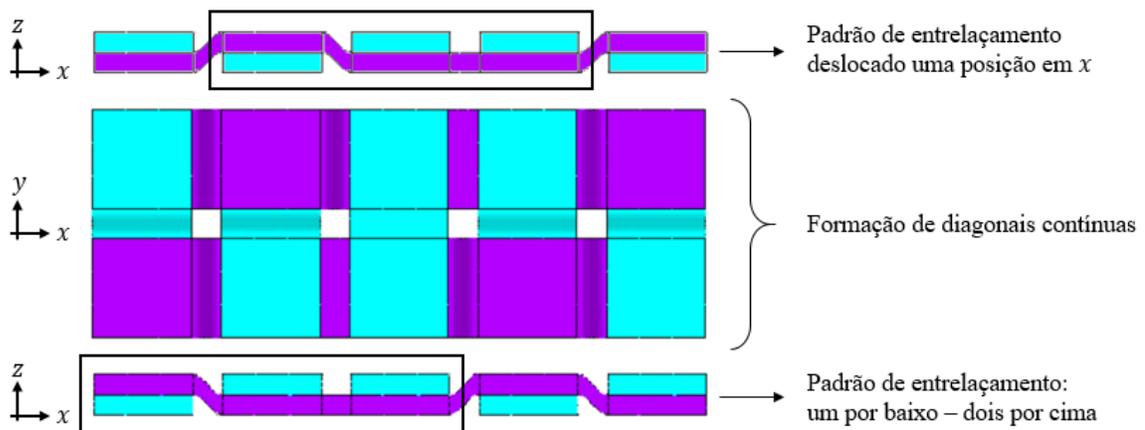


Figura 5.3 – Configuração de entrelaçamento do padrão sarja.

- Tecido cetim (*satín weave*): os entrelaçamentos ocorrem de maneira esparsa, evitando que diagonais contínuas sejam construídas. Para uma estrutura periódica contendo cinco feixes de reforço por direção, o posicionamento ao longo de  $x$  é feito em um padrão “um por baixo – quatro por cima”. Na fileira seguinte, em  $y$ , o padrão de entrelaçamento é deslocado duas posições na direção  $x$ . O processo de montagem é representado na Figura 5.4.

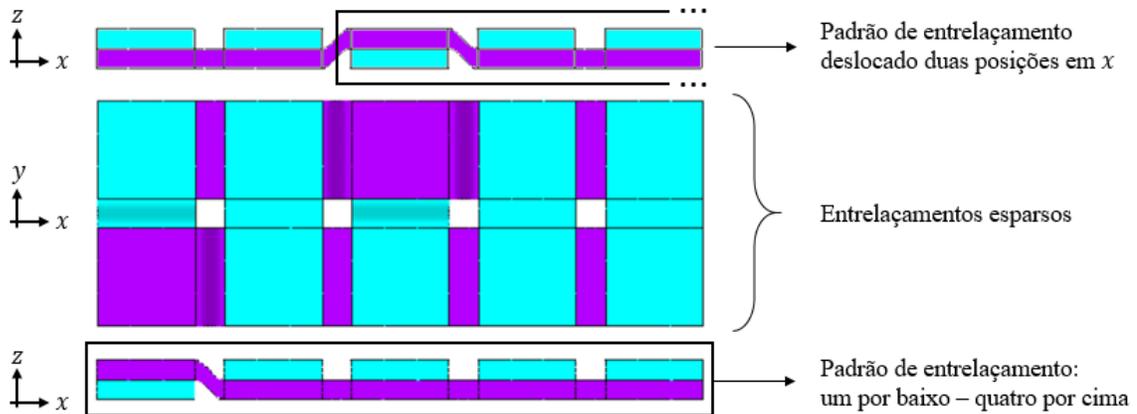


Figura 5.4 – Configuração de entrelaçamento do padrão cetim.

- Posicionamento sequencial em ângulos alternados ( $+\alpha/-\alpha$ ): o percurso de cada feixe é traçado individualmente, iniciando da esquerda para direita (movimento de avanço), no plano de entrelaçamento inferior, com um ângulo de inclinação ( $+\alpha$ ) em relação ao eixo global  $x$ . Ao atingir a dimensão final do modelo, o reforço seguinte é posicionado da direita para esquerda (movimento de retorno), com um ângulo ( $-\alpha$ ). Quando a trajetória de um reforço transpõe outros que já foram posicionados anteriormente, ela é sobreposta, passando para o plano de entrelaçamento superior. Quando não houverem reforços no plano inferior, a trajetória retorna, como indicado na Figura 5.5.

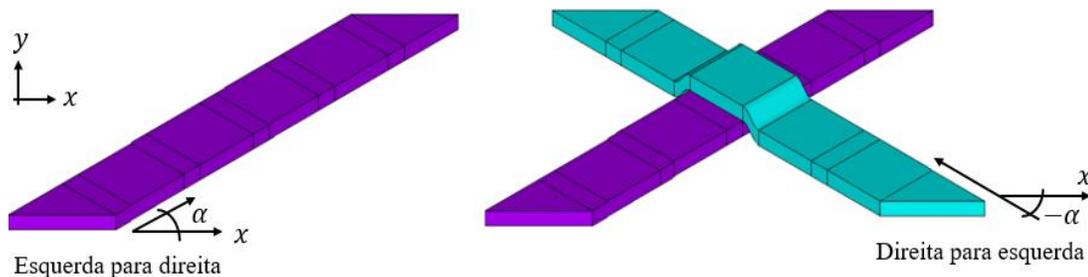


Figura 5.5 – Configuração de entrelaçamento para o posicionamento com ângulos alternados.

O código computacional que cria automaticamente os modelos tridimensionais tem início com o mapeamento dos parâmetros geométricos da Tabela 5.3, no plano de entrelaçamento inferior, utilizando pontos discretos, como mostra a Figura 5.6. Em seguida, estes pontos são replicados para o plano de entrelaçamento superior, ao longo da direção  $z$ , Figura 5.7, formando a base na qual são desenvolvidas as trajetórias da fase de reforço.

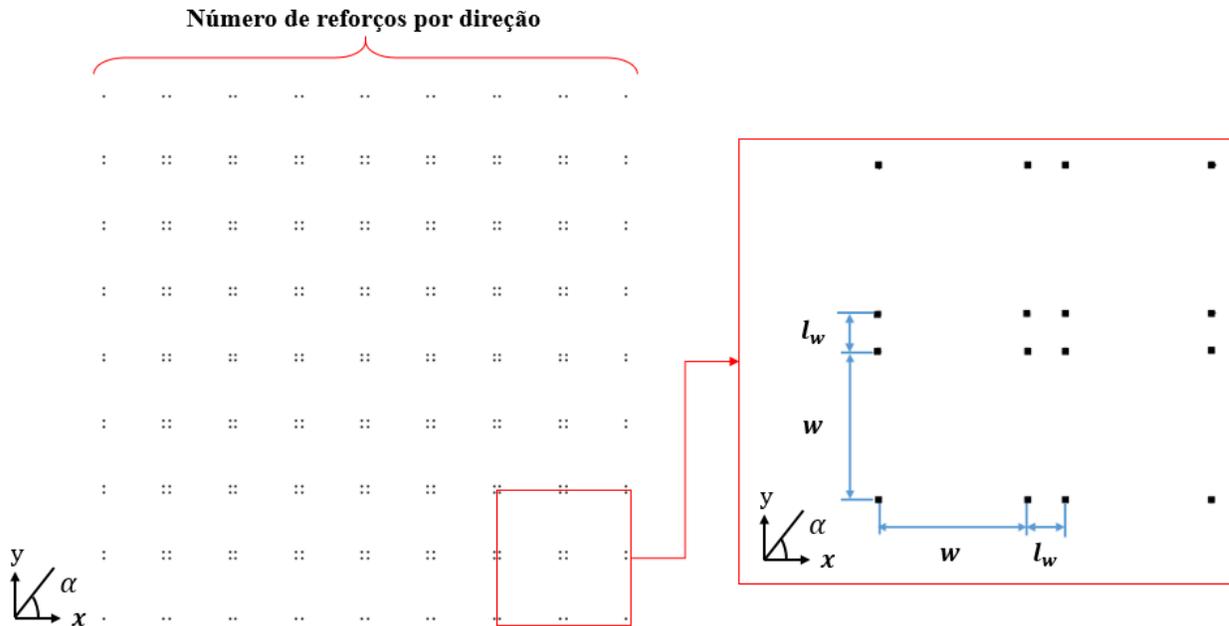


Figura 5.6 – Mapeamento dos parâmetros geométricos no plano de entrelaçamento inferior.

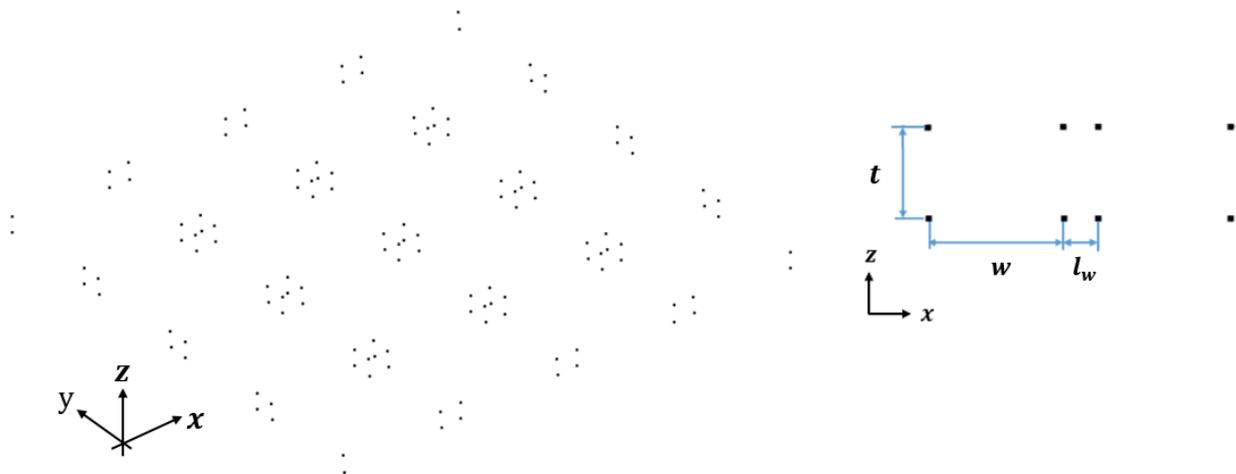


Figura 5.7 – Mapeamento dos parâmetros geométricos ao longo da espessura (direção  $z$ ).

A partir da escolha do padrão de entrelaçamento, as funções de posicionamento descritas anteriormente são aplicadas para selecionar os pontos que definem o percurso de cada feixe de reforço nos planos inferior e superior. Então, os volumes correspondentes aos trechos retos do feixe são gerados através dos pontos apropriados, como pode ser observado na Figura 5.8.

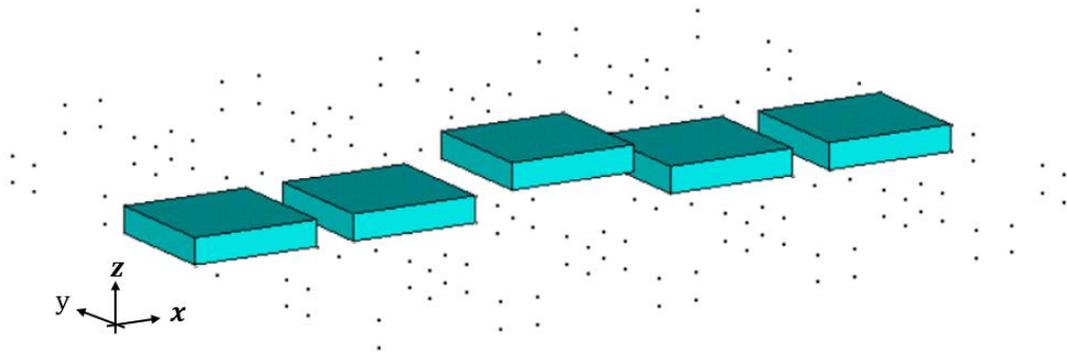


Figura 5.8 – Formação dos volumes dos segmentos retos do feixe de reforço.

Os volumes estão inicialmente afastados pelo comprimento de entrelaçamento  $l_w$ . Quando dois volumes consecutivos estão no mesmo plano, eles são conectados por segmentos retos adicionais. Entretanto, se eles estão em planos diferentes, a ligação é feita por *splines* cúbicas. Desta forma, os entrelaçamentos são desenvolvidos de maneira contínua e suavizada, conforme ilustrado na Figura 5.9.

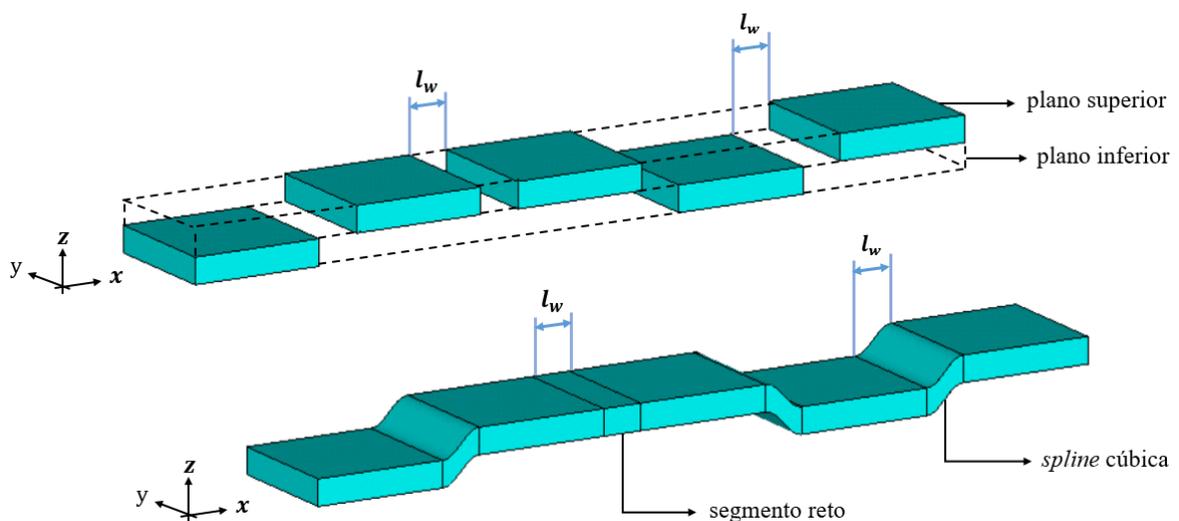


Figura 5.9 – Conexão de dois volumes consecutivos para formação do feixe de reforço.

A arquitetura da microestrutura é construída de modo ordenado, repetindo o processo de formação dos feixes de reforço nas duas direções de entrelaçamento e reposicionando as próximas trajetórias ao lado daquelas geradas na etapa anterior. A Figura 5.10 demonstra o procedimento de construção para um arranjo de reforços segundo o padrão do tecido plano, com direções de entrelaçamento ( $0^\circ/90^\circ$ ).

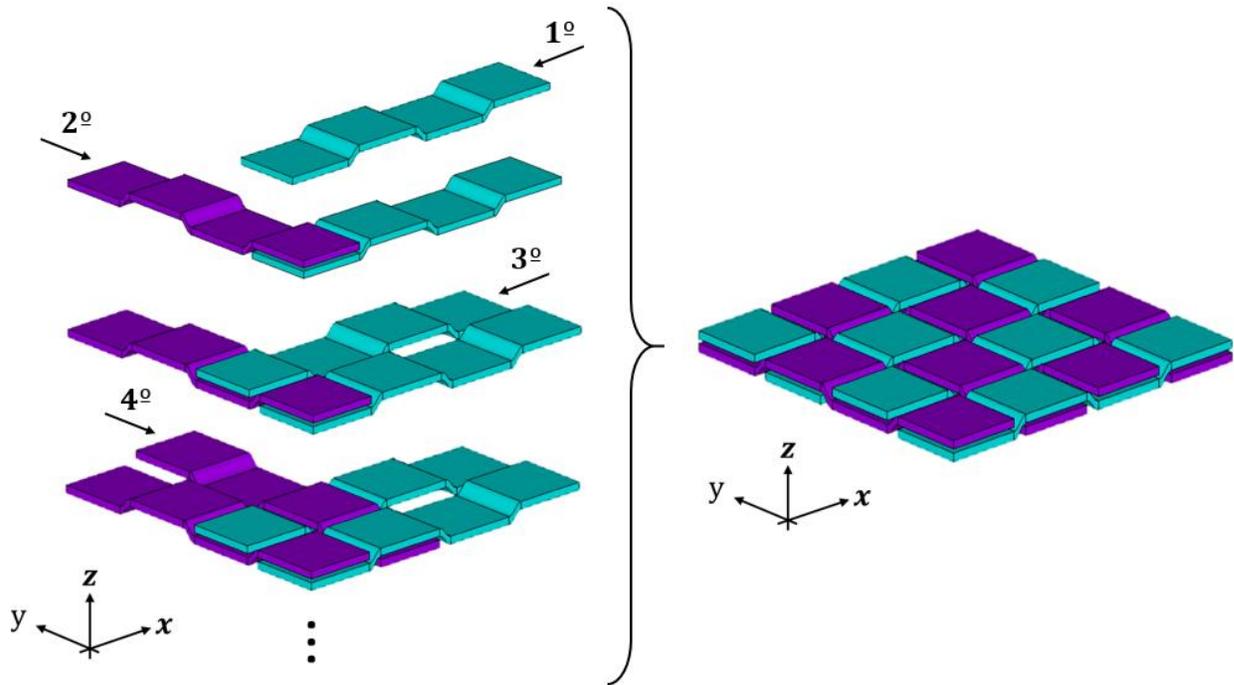


Figura 5.10 – Formação do arranjo de reforços conforme o padrão de entrelaçamento plano.

Por fim, a segunda fase é inserida, compondo a matriz do material. Ela é incorporada ao modelo através de um bloco, com as mesmas dimensões da microestrutura, do qual são subtraídos os volumes dos reforços existentes. Assim, ela preenche apenas os espaços que se formam entre os entrelaçamentos. Suas principais funções são manter os feixes de reforço ligados e o material isento de vazios. A Figura 5.11 ilustra o modelo completo, novamente, utilizando como exemplo a fase de reforço entrelaçada de acordo com o padrão plano. A matriz é representada com uma pequena ampliação em relação à microestrutura, para permitir uma melhor visualização.

Concluída a descrição geométrica dos modelos, é iniciada a formulação do problema conforme o método dos elementos finitos.

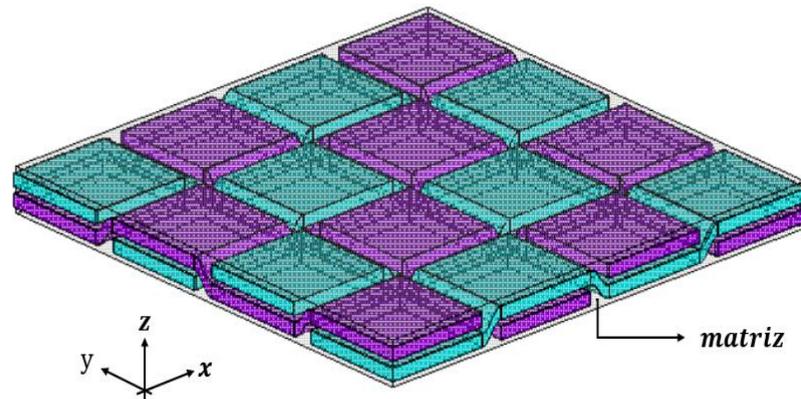


Figura 5.11 – Modelo geométrico do material compósito contendo as fases de reforço e matriz, para um padrão plano.

### 5.3 Método dos Elementos Finitos – MEF

Nas últimas décadas, o uso de técnicas computacionais baseadas no método dos elementos finitos tornou-se uma prática estabelecida na solução numérica de problemas da mecânica dos sólidos [de Souza Neto, 2011]. A estratégia do MEF consiste na divisão de um dado domínio em uma coleção de subdomínios e sobre cada subdomínio as equações governantes são aproximadas por um método variacional. A principal razão para procurar uma solução aproximada sobre uma coleção de subdomínios é o fato de ser mais fácil representar uma função complicada como uma coleção de polinômios simples. Cada segmento individual da solução deve ser ajustado com seus vizinhos no sentido de que a função e suas possíveis derivadas até uma ordem escolhida sejam contínuas nos pontos de conexão [Reddy, 2006].

#### 5.3.1 Discretização da geometria

A discretização por elementos finitos do modelo geométrico, que constitui o domínio do problema, é programada utilizando os recursos tecnológicos do gerador de malha do software, priorizando o mapeamento por elementos de forma regular e impondo um parâmetro de controle para o tamanho médio de cada elemento, de modo que os feixes de reforço sejam reproduzidos com dois elementos ao longo da espessura.

Entretanto, a complexidade da geometria espacial, em particular, nos locais onde ocorrem os entrelaçamentos e onde são formadas pequenas regiões ocupadas pela matriz, requer o uso de um elemento que também seja adequado para modelar malhas irregulares. Assim, o elemento selecionado neste trabalho é um sólido tetraédrico de dez nós, com três graus de liberdade por nó (translação nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ) e comportamento de deslocamento quadrático. A representação do elemento, conforme o manual do software, é indicada na Figura 5.12.

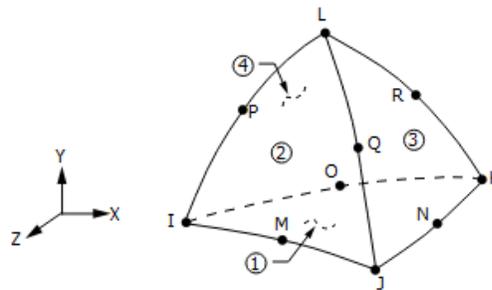


Figura 5.12 – Representação do elemento tetraédrico quadrático de 10 nós utilizado [adaptado de ANSYS, 2016].

Como a fase de reforço possui simetria material transversalmente isotrópica, os sistemas de coordenadas dos elementos correspondentes aos volumes dos reforços são reorientados em relação ao sistema de coordenadas global, para manter as propriedades direcionais corretamente alinhadas. Para os elementos vinculados à fase da matriz do material, isto é desnecessário, uma vez que o comportamento foi assumido como isotrópico. A Figura 5.13 mostra de forma separada as malhas dos feixes de reforço nas duas direções da trama, com as respectivas orientações dos sistemas de coordenadas dos elementos, a malha da matriz e do conjunto completo.

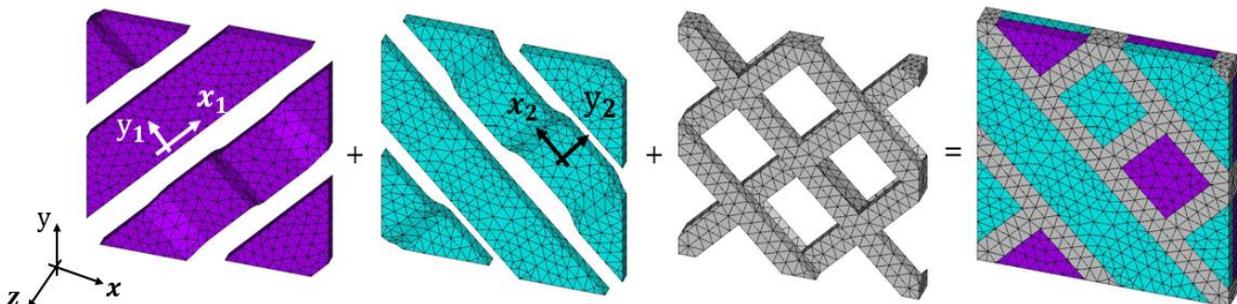


Figura 5.13 – Representação da malha de elementos finitos.

### 5.3.2 Procedimento geral do MEF

Um procedimento geral para derivar as equações do método dos elementos finitos pode ser obtido a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), apresentado na Seção 3.5. A formulação demonstrada a seguir, de modo resumido, tem como base o trabalho de Barbero, 2014.

Seja o trabalho virtual interno definido pela Equação 3.51, escrito em forma matricial como:

$$\delta U = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad (5.3)$$

onde as tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  e as deformações virtuais  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  são expressas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^T &= \left[ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy} \right], \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T &= \left[ \delta \varepsilon_{xx} \quad \delta \varepsilon_{yy} \quad \delta \varepsilon_{zz} \quad 2\delta \varepsilon_{yz} \quad 2\delta \varepsilon_{xz} \quad 2\delta \varepsilon_{xy} \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

E, seja o trabalho virtual externo dado pela Equação 3.46:

$$\delta V = \int_V \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma} \mathbf{t}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma, \quad (5.5)$$

com forças de corpo  $\mathbf{b}$ , por unidade de volume, e forças de superfície  $\mathbf{t}$ , por unidade de área, representadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^T &= \left[ b_x \quad b_y \quad b_z \right], \\ \mathbf{t}^T &= \left[ t_x \quad t_y \quad t_z \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

As deformações virtuais  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , calculadas a partir dos deslocamentos virtuais  $\delta \mathbf{u}$ , podem ser formuladas em notação matricial da seguinte maneira:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \underline{\underline{\partial}} \delta \mathbf{u}, \quad (5.7)$$

onde  $\underline{\underline{\partial}}$  é o operador definido por:

$$\underline{\underline{\partial}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Então, o PTV é matematicamente escrito como:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \underline{\underline{\partial}} \delta \mathbf{u} dV = \int_V \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma} \mathbf{t}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma. \quad (5.9)$$

As integrais de volume e de superfície da Equação 5.9 podem ser divididas elemento por elemento, através do somatório:

$$\sum_{e=1}^m \left[ \int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}^T \underline{\underline{\partial}} \delta \mathbf{u} dV \right] = \sum_{e=1}^m \left[ \int_{V^e} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma^e} \mathbf{t}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma \right] \quad (5.10)$$

onde,  $m$  é o número de elementos do corpo. Sempre que dois elementos compartilham uma superfície, as contribuições da segunda integral são canceladas. Os componentes de tensão são determinados pelas relações constitutivas. Para um material linear elástico as tensões são expressas pela Lei de Hooke, conforme a Equação 3.20:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.11)$$

Assim, o trabalho virtual interno sobre cada elemento é:

$$\delta U^e = \int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{V^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (5.12)$$

O campo de deslocamento  $\mathbf{u}$  é aproximado por uma combinação linear de funções conhecidas  $\mathbf{N}$  e coeficientes desconhecidos  $\mathbf{a}$ . Onde  $\mathbf{N}$  são as funções de interpolação do elemento e  $\mathbf{a}$  são os deslocamentos nodais. Portanto, as deformações são calculadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underline{\underline{\partial}} \mathbf{u} = \underline{\underline{\partial}} \mathbf{N} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{a} , \quad (5.13)$$

onde  $\mathbf{B} = \underline{\underline{\partial}} \mathbf{N}$  é a matriz deslocamento-deformação. Agora, a forma discretizada do trabalho virtual interno sobre um elemento pode ser reescrita como:

$$\delta U^e = \int_{V^e} \mathbf{a}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \delta \mathbf{a} dV = \mathbf{a}^T \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \delta \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{K}^e \delta \mathbf{a} , \quad (5.14)$$

sendo a matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{K}^e$  definida por:

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV . \quad (5.15)$$

O trabalho virtual externo, em conjunto com as deduções anteriores, se torna:

$$\delta V^e = \int_{V^e} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma^e} \mathbf{t}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma = \left( \int_{V^e} \mathbf{b}^T \mathbf{N} dV + \int_{\Gamma^e} \mathbf{t}^T \mathbf{N} d\Gamma \right) \delta \mathbf{a} = (\mathbf{F}^e)^T \delta \mathbf{a} \quad (5.16)$$

onde o vetor força do elemento  $\mathbf{F}^e$  é:

$$\mathbf{F}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma . \quad (5.17)$$

As integrais sobre o volume  $V^e$  e sobre a superfície  $\Gamma^e$  do elemento são, geralmente, aproximadas numericamente pelo procedimento de integração de Gauss, que avalia o integrando em alguns pontos. Estes pontos, chamados de pontos de Gauss, são importantes por duas razões.

Primeiro, a matriz constitutiva  $\mathbf{C}$  é avaliada nestes locais. Segundo, os valores mais precisos das deformações (e das tensões) também são obtidos nestes locais.

A montagem das equações de todos os elementos que compõem o corpo, através do PTV, é feita com base nas conectividades dos nós e de seus deslocamentos. A programação desta montagem faz parte da tecnologia envolvida no método dos elementos finitos. Em síntese, todas as matrizes de rigidez dos elementos  $\mathbf{K}^e$  e os vetores de força dos elementos  $\mathbf{F}^e$  são montados em um sistema global como:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{F} . \quad (5.18)$$

Em seguida, as condições de contorno são aplicadas sobre o sistema global da Equação 5.18 e o sistema algébrico é resolvido para encontrar a matriz de deslocamentos nodais  $\mathbf{a}$  sobre o corpo inteiro. Com os resultados dos deslocamentos nodais para cada elemento, os deslocamentos podem ser encontrados em qualquer lugar dentro dos elementos através das funções de interpolação, além disto, é possível voltar às Equações 5.13 e 5.11 para calcular as deformações e as tensões, respectivamente.

#### 5.4 Procedimento de homogeneização

Os detalhes microestruturais são incorporados à descrição do comportamento constitutivo macroscópico do material por meio da abordagem micromecânica apresentada no Capítulo 4. Assumindo que o modelo seja um elemento de volume representativo, o tensor constitutivo efetivo é obtido impondo condições de contorno de deslocamento homogêneo e integrando as tensões internas do volume para obter as tensões médias, ou ainda, integrando as trações do contorno. As tensões médias são relacionadas às trações do contorno pela Equação 4.18:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \sigma_{ik} x_j n_k d\Gamma . \quad (5.19)$$

Esta expressão é particularmente interessante para implementação numérica, uma vez que apenas as tensões dos elementos que estão sobre o contorno do modelo são necessárias e, além disto,

apenas aquelas que estão alinhadas com a direção do vetor normal à superfície resultam diferente de zero, simplificando consideravelmente os cálculos e aumentando a eficiência computacional.

Construir o tensor constitutivo completo requer a solução de seis conjuntos independentes de condições de contorno ( $u_i(\Gamma) = \varepsilon_{ij}^{(k)} x_j$ ). Estas condições de contorno são obtidas aplicando os estados de deformação ilustrados na Figura 5.14,

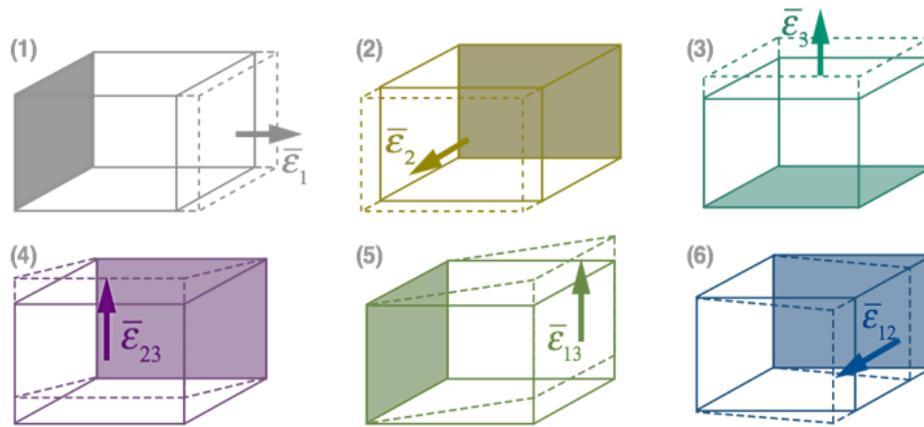


Figura 5.14 – Estados de deformação para homogeneização.

com representações tensoriais dadas por:

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \varepsilon_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \varepsilon_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}; \quad \varepsilon_{ij}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \varepsilon_{ij}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde  $\beta$  é um parâmetro constante. Como o problema é linear, pelo princípio da superposição de efeitos, as equações fornecidas pelas condições de contorno independentes podem ser somadas, resultando em um sistema contendo trinta e seis equações, que permitem determinar todas as

componentes do tensor constitutivo efetivo, de acordo com a relação entre tensão e deformação médias da Equação 4.27:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (5.21)$$

A partir da solução do problema para cada um dos estados de deformação impostos, via MEF, as tensões médias são calculadas utilizando as tensões obtidas nas superfícies do modelo através da Equação 5.19. A implementação numérica é expressa matematicamente por:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\Gamma=1}^6 \left( \sum_{e=e_{min}}^{e_{max}} \left( A^{(e)} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(e)} & \sigma_{12}^{(e)} & \sigma_{13}^{(e)} \\ \text{sim.} & \sigma_{22}^{(e)} & \sigma_{23}^{(e)} \\ & & \sigma_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(e)} \\ x_2^{(e)} \\ x_3^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^{(e)} & n_2^{(e)} & n_3^{(e)} \end{bmatrix} \right) \right)_{(\Gamma)}, \quad (5.22)$$

onde  $\sigma_{ij}^{(e)}$  são as componentes do tensor tensão do elemento,  $x_i^{(e)}$  são as componentes do vetor posição do centro do elemento,  $n_i^{(e)}$  são as componentes do vetor normal à superfície do elemento,  $A^{(e)}$  é a área da superfície do elemento,  $e_{min}$  e  $e_{max}$  correspondem ao menor e ao maior número atribuído aos elementos que estão presentes na superfície sendo avaliada,  $\Gamma$  são as superfícies do modelo numeradas de 1 até 6 e  $V$  é o volume de todo o modelo.

O procedimento descrito pela Equação 5.22 é repetido para cada condição de contorno, resultando em seis tensores de tensão média  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ . Estes tensores são transformados de acordo com a representação de Voigt-Kelvin da Equação 3.23 e organizados em uma matriz da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_1 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_2 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_3 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_4 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_5 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_6 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(6)} \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

onde o sobrescrito indica a condição de contorno que foi empregada para obter a tensão média.

De acordo com o teorema da deformação média, as deformações médias  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  são idênticas às deformações constantes  $\varepsilon_{ij}^0$  aplicadas no contorno  $\Gamma$ . Assim, a mesma transformação de Voigt-Kelvin dos tensores de deformação da Equação 5.20 é realizada. A organização das deformações médias em colunas de uma matriz resulta na matriz identidade  $I_6$  (de ordem 6) multiplicada pelo escalar  $\beta$ , que corresponde a magnitude das deformações uniformes impostas:

$$\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

A multiplicação da Equação 5.23 pelo inverso da Equação 5.24, forma o sistema que fornece as trinta e seis componentes do tensor constitutivo efetivo do material:

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \langle \sigma_1 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_2 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_3 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_4 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_5 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_6 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(6)} \end{bmatrix} \left( \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1},$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \langle \sigma_1 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_1 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_2 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_2 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_3 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_3 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_4 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_4 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_5 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_5 \rangle^{(6)} \\ \langle \sigma_6 \rangle^{(1)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(2)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(3)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(4)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(5)} & \langle \sigma_6 \rangle^{(6)} \end{bmatrix} \frac{1}{\beta}. \quad (5.25)$$

Embora tenha sido demonstrado no Capítulo 3 que o tensor constitutivo deve ser simétrico, as aproximações envolvidas na solução por elementos finitos podem resultar em um tensor não

simétrico [Cox e Flanagan, 1997]. Então, um resultado simétrico é produzido pela operação adicional:

$$\mathbf{C}_{sim.}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{C}^* + \mathbf{C}^{*T}). \quad (5.26)$$

Por fim, as propriedades efetivas, em termos das constantes de engenharia, são determinadas a partir da Equação 3.42, invertendo o tensor constitutivo efetivo  $\mathbf{C}^*$  para obter o tensor de flexibilidade efetivo  $\mathbf{S}^*$ .

As etapas programadas no código computacional desenvolvido são descritas na Figura 5.15, compreendendo a modelagem dos materiais compósitos microestruturados, a solução dos problemas de valor do contorno e o procedimento de homogeneização para obtenção do tensor constitutivo efetivo. As operações realizadas pelo algoritmo são validadas atribuindo as mesmas propriedades materiais para as duas fases do modelo, isto é, criando um material homogêneo e verificando através da avaliação numérica proposta que as propriedades efetivas resultantes são iguais aquelas previamente atribuídas.

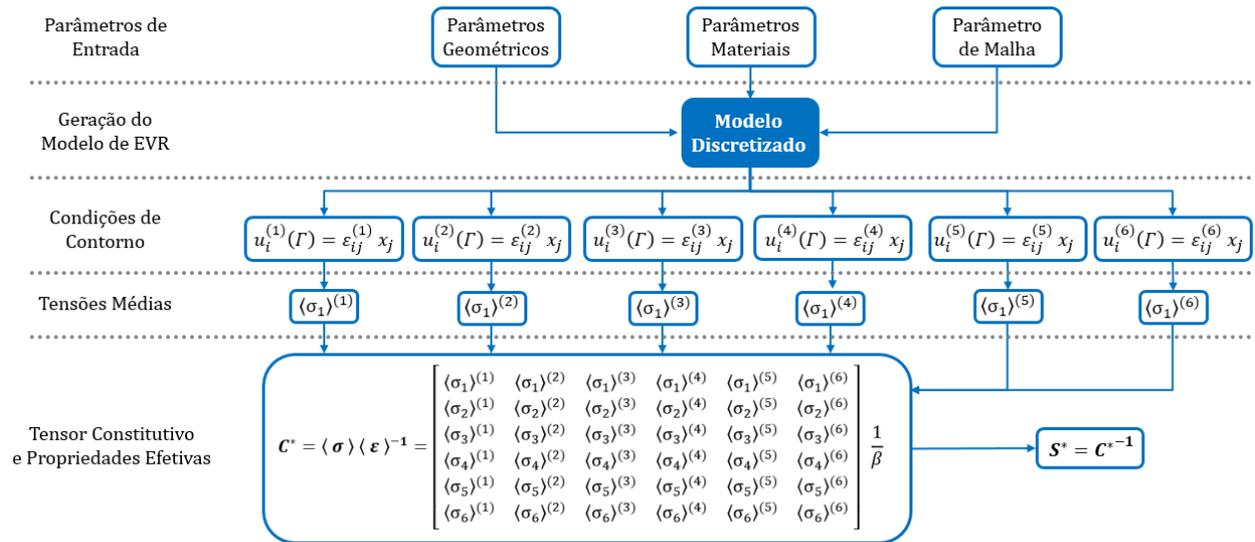


Figura 5.15 – Fluxograma do algoritmo implementado para avaliar o comportamento mecânico efetivo de materiais compósitos microestruturados.

## 6 RESULTADOS

### 6.1 Determinação do EVR de um material microestruturado

A definição de um domínio adequado para o elemento de volume representativo do material é parte fundamental em uma análise multiescala. Logo, esta é a primeira investigação feita através da metodologia descrita no capítulo anterior. Como critério avaliado, procura-se por um modelo com as menores dimensões capazes de capturar as propriedades efetivas estatisticamente estáveis do compósito microestruturado. Desta forma, as propriedades podem ser extrapoladas para uma escala superior (macroscópica).

Como caso estudado, é selecionado o material com reforço segundo o padrão de trama simples, ou tecido plano, ilustrado na Figura 6.1. Cabe ressaltar que para cada configuração microestrutural existe um EVR, ou seja, se algum parâmetro geométrico ou material for alterado uma nova análise deve ser efetuada.

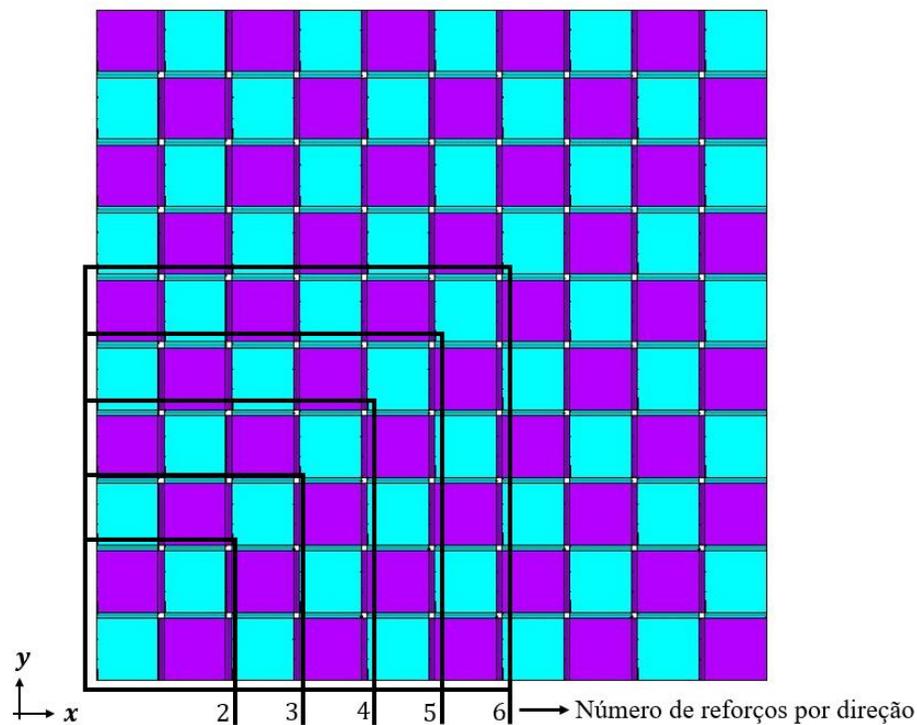


Figura 6.1 – Análise das dimensões do EVR para o modelo com microestrutura formada de acordo com o padrão de entrelaçamento simples da fase de reforço.

A estratégia adotada para estabelecer as dimensões do EVR consiste em determinar as propriedades homogeneizadas de modelos com incrementos sucessivos de feixes de reforço em cada direção da trama, conforme indicado na Figura 6.1. O acréscimo de reforços de maneira simultânea nas duas direções de entrelaçamento da microestrutura visa manter as proporções dos modelos (frações de volume das fases), lembrando que a largura e a espessura de cada feixe são fixas. O elemento de volume representativo do material é alcançado quando as propriedades efetivas calculadas se tornam estáveis dentro de um intervalo aceitável, isto é, quando seus valores não variam com a adição de novos feixes de reforço.

Os resultados são avaliados em termos das constantes de engenharia efetivas, obtidas após a solução do problema de homogeneização, através da matriz de flexibilidade de um material anisotrópico, com vinte e uma constantes independentes, expressa por:

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{\eta_{1,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{1,13}}{G_{13}} & \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{\eta_{2,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{2,13}}{G_{13}} & \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \frac{\eta_{3,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{3,13}}{G_{13}} & \frac{\eta_{3,12}}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{23,1}}{E_1} & \frac{\eta_{23,2}}{E_2} & \frac{\eta_{23,3}}{E_3} & \frac{1}{G_{23}} & \frac{\mu_{23,13}}{G_{13}} & \frac{\mu_{23,12}}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{13,1}}{E_1} & \frac{\eta_{13,2}}{E_2} & \frac{\eta_{13,3}}{E_3} & \frac{\mu_{13,23}}{G_{23}} & \frac{1}{G_{13}} & \frac{\mu_{13,12}}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{12,1}}{E_1} & \frac{\eta_{12,2}}{E_2} & \frac{\eta_{12,3}}{E_3} & \frac{\mu_{12,23}}{G_{23}} & \frac{\mu_{12,13}}{G_{13}} & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

O primeiro modelo testado contém dois feixes de reforço por direção da trama. Para o padrão de entrelaçamento simples, em particular, este modelo corresponde a uma célula unitária de repetição (CUR), o que significa que a microestrutura completa do material pode ser gerada a partir de cópias transladadas espacialmente, sem uso de rotações ou reflexões. Contudo, existem diferenças conceituais entre uma CUR e um EVR, conforme discutido no Capítulo 4. A metodologia implementada, pretendendo uma abordagem mais geral, não incorpora a hipótese de periodicidade do meio. Então, a identificação da célula unitária de repetição da microestrutura não

é suficiente para estabelecer que as propriedades efetivas resultantes deste modelo são representativas do comportamento do material em um nível macroscópico.

Sendo assim, o procedimento numérico é aplicado para estudar a resposta de modelos com até doze feixes de reforço por direção de entrelaçamento. Simulações de casos incluindo mais feixes de reforço tornaram-se pouco práticas, demandando um tempo computacional muito elevado para os recursos disponíveis. Os resultados para os modelos das microestruturas contendo de dois até seis reforços em cada direção são apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Constantes de engenharia efetivas para microestruturas formadas pelo padrão de entrelaçamento simples contendo de dois até seis feixes de reforço por direção da trama.

Constantes de Engenharia	Número de reforços por direção da trama.				
	2	3	4	5	6
$E_1$ [GPa]	43,2055	39,8963	38,4626	37,6622	37,1695
$E_2$ [GPa]	43,2122	39,9550	38,5275	37,7725	37,1874
$E_3$ [GPa]	8,6191	8,4393	8,3588	8,3226	8,2834
$G_{23}$ [GPa]	3,7195	3,7487	3,7389	3,7253	3,7521
$G_{13}$ [GPa]	3,7366	3,7722	3,7935	3,7894	3,7826
$G_{12}$ [GPa]	4,0200	3,9204	3,8683	3,8425	3,8221
$\nu_{23}$	0,4249	0,4461	0,4528	0,4539	0,4534
$\nu_{13}$	0,4232	0,4352	0,4436	0,4389	0,4515
$\nu_{12}$	0,0454	0,0448	0,0440	0,0449	0,0441
$\eta_{23,1}$	0,3570	0,3641	0,1488	0,1918	0,0959
$\eta_{13,1}$	0,1303	7,5308	0,0526	4,2366	0,0463
$\eta_{12,1}$	0,0639	-0,0104	0,0674	0,0283	0,0265
$\eta_{23,2}$	-0,0597	-7,4837	0,0514	-4,2422	-0,0038
$\eta_{13,2}$	-0,3502	-0,4055	-0,1698	-0,2461	-0,1142
$\eta_{12,2}$	-0,0652	-0,0196	-0,0712	-0,0775	-0,0697
$\eta_{23,3}$	-0,0207	0,4754	-0,0150	0,2839	-0,0075
$\eta_{13,3}$	0,0127	-0,4795	0,0064	-0,2817	0,0047
$\eta_{12,3}$	-0,0018	0,0002	-0,0017	0,0042	0,0033
$\mu_{13,23}$	-0,0009	-0,0001	-0,0006	0,0009	0,0000
$\mu_{12,23}$	-0,0324	0,0001	-0,0147	0,0034	-0,0086
$\mu_{12,13}$	0,0375	0,0005	0,0197	0,0036	0,0151

A Tabela 6.2 apresenta os demais resultados numéricos para as vinte e uma constantes de engenharia efetivas obtidas a partir da análise dos modelos das microestruturas que contêm de sete até doze feixes de reforço em cada direção da trama.

Tabela 6.2 – Constantes de engenharia efetivas para microestruturas formadas pelo padrão de entrelaçamento simples contendo de sete até doze feixes de reforço por direção da trama.

Constantes de Engenharia	Número de reforços por direção da trama.					
	7	8	9	10	11	12
$E_1$ [GPa]	36,7906	36,5387	36,3343	36,1908	36,0486	35,9533
$E_2$ [GPa]	36,8339	36,5211	36,3230	36,1928	36,0786	35,9642
$E_3$ [GPa]	8,2617	8,2354	8,2228	8,2265	8,2192	8,2137
$G_{23}$ [GPa]	3,7456	3,7538	3,7629	3,7275	3,7276	3,7255
$G_{13}$ [GPa]	3,7854	3,7855	3,7884	3,7730	3,7794	3,7810
$G_{12}$ [GPa]	3,8084	3,7992	3,7926	3,7851	3,7804	3,7765
$\nu_{23}$	0,4573	0,4572	0,4576	0,4553	0,4579	0,4560
$\nu_{13}$	0,4495	0,4583	0,4588	0,4535	0,4527	0,4547
$\nu_{12}$	0,0440	0,0434	0,0434	0,0443	0,0441	0,0441
$\eta_{23,1}$	0,1453	0,0730	0,1103	0,0653	0,0837	0,0451
$\eta_{13,1}$	2,9751	0,0712	2,2973	0,0084	1,8473	0,0214
$\eta_{12,1}$	0,0280	0,0519	0,0544	0,0223	0,0296	-0,0037
$\eta_{23,2}$	-2,9575	0,0438	-2,1946	0,0610	-1,8029	0,1041
$\eta_{13,2}$	-0,1723	-0,0843	-0,1215	-0,0722	-0,1136	-0,0594
$\eta_{12,2}$	-0,0334	-0,0730	-0,0638	-0,0407	-0,0225	-0,0140
$\eta_{23,3}$	0,2031	-0,0095	0,1509	-0,0088	0,1268	-0,0113
$\eta_{13,3}$	-0,2028	-0,0007	-0,1596	0,0052	-0,1270	0,0009
$\eta_{12,3}$	0,0006	0,0025	0,0011	0,0012	-0,0015	-0,0001
$\mu_{13,23}$	0,0007	0,0005	0,0002	-0,0004	0,0000	-0,0005
$\mu_{12,23}$	0,0031	-0,0055	0,0037	-0,0039	0,0016	-0,0041
$\mu_{12,13}$	0,0014	0,0111	0,0019	0,0103	0,0007	0,0068

Os índices 1, 2 e 3 são utilizados para designar as constantes de engenharia efetivas com o intuito de manter a notação coerente com as equações derivadas nos capítulos prévios, entretanto, para os resultados expostos, eles são considerados alinhados com os eixos do sistema global de

coordenadas do material  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Uma análise inicial dos dados das tabelas anteriores permite verificar que as propriedades efetivas exibem variações consideráveis entre o primeiro modelo investigado, que coincide com a célula unitária da microestrutura, e os modelos seguintes. Estas diferenças nos resultados tendem a diminuir com o aumento do número de feixes de reforço. A representação gráfica das respostas ilustra melhor este comportamento, possibilitando uma discussão mais detalhada sobre cada conjunto de propriedades homogeneizadas.

Os módulos de elasticidade efetivos obtidos através das simulações dos modelos são plotados na Figura 6.2. Pode-se observar que os módulos no plano  $xy$  do material,  $E_1$  e  $E_2$ , são praticamente iguais em cada modelo. De fato, este comportamento é esperado devido ao padrão geométrico da microestrutura, com pequenas diferenças atribuídas às aproximações numéricas. Além disto, à medida que o número de reforços aumenta, os valores dos módulos de elasticidade efetivos no plano diminuem, o que é fisicamente consistente, uma vez que o aumento da ondulação do feixe de reforço tem um efeito negativo sobre a rigidez do material. A partir de dez reforços por direção de entrelaçamento as respostas se tornam mais estáveis, com variações inferiores a 1% (indicadas pelas barras de erro no gráfico), que podem ser consideradas um intervalo de aproximação aceitável. O módulo de elasticidade efetivo fora do plano, dado por  $E_3$ , varia menos e os desvios dos resultados não ultrapassam 1% a contar do modelo com seis reforços por direção.

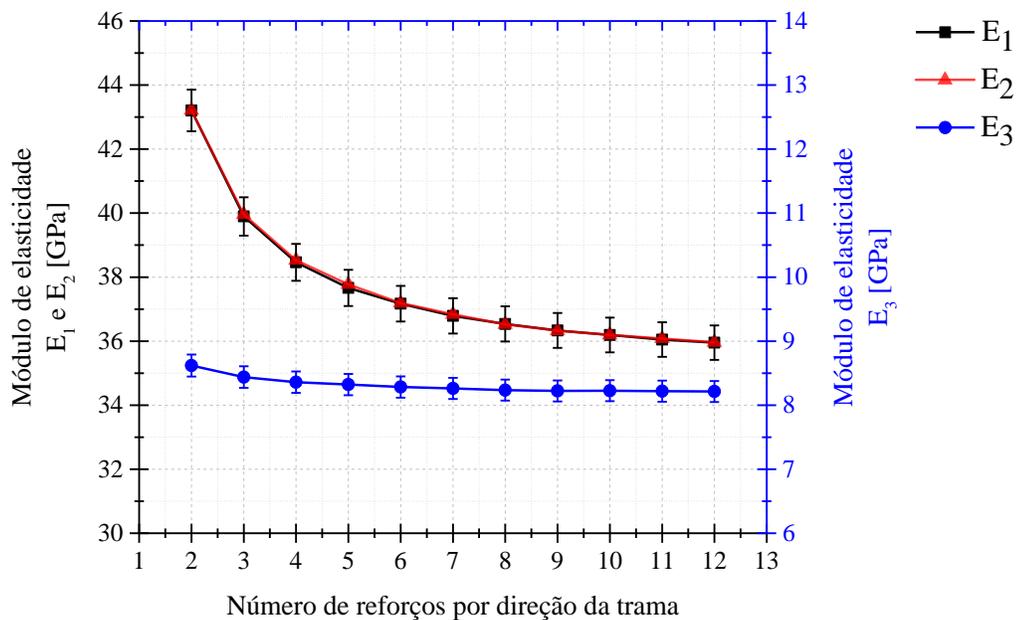


Figura 6.2 – Módulos de elasticidade efetivos para microestrutura com entrelaçamento simples.

A Figura 6.3 descreve os resultados dos testes numéricos para os módulos de cisalhamento efetivos. O comportamento desta propriedade no plano  $xy$ , denotada por  $G_{12}$ , apresenta uma curva de convergência similar àquela verificada para os módulos de elasticidade efetivos no mesmo plano e pode ser justificado pelo mesmo motivo, isto é, o aumento das regiões de entrelaçamento reduz a rigidez do material. Os módulos efetivos  $G_{23}$  e  $G_{13}$  oscilam dentro de intervalos com amplitudes pequenas. Modelos com sete feixes de reforço por direção da trama produzem resultados com variações inferiores a 1%. Outro apontamento que pode ser feito é em relação ao equilíbrio dos valores dos módulos de cisalhamento efetivos nos três planos principais do material, resultantes da configuração microestrutural estudada.

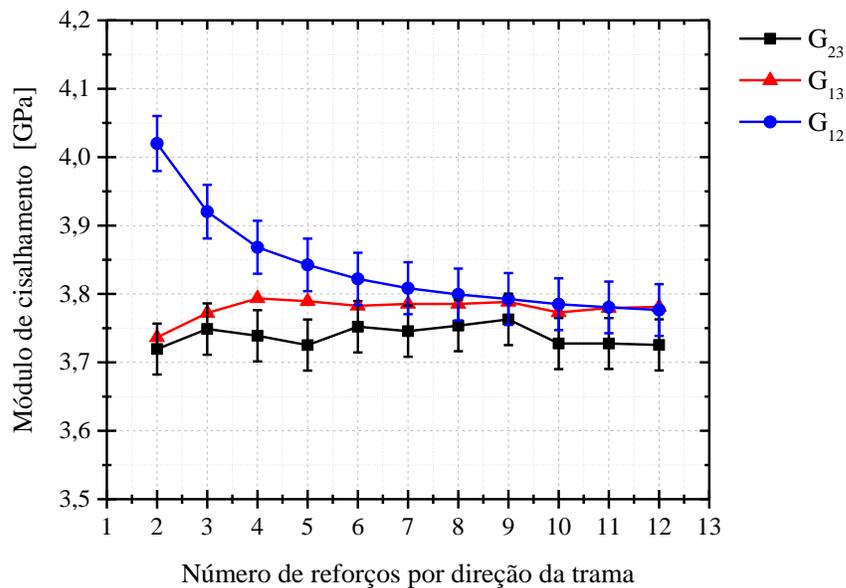


Figura 6.3 – Módulos de cisalhamento efetivos para microestrutura com entrelaçamento simples.

Os coeficientes de Poisson efetivos são examinados na Figura 6.4. Nota-se que o coeficiente  $\nu_{12}$  é praticamente constante em todo o histórico de resultados, independentemente do número de feixes de reforço dos modelos avaliados. Já os coeficientes de Poisson efetivos  $\nu_{23}$  e  $\nu_{13}$  são mais sensíveis e aumentam em função da quantidade de reforços. Este aumento para valores mais próximos de 0,5 indica que o material está adquirindo um comportamento “mais incompressível”. Isto pode ser explicado pela maior flexibilidade que o arranjo da microestrutura está conferindo ao material, de acordo com o que foi visto nos resultados anteriores. Respostas estáveis são encontradas a partir do modelo com oito reforços em cada direção de entrelaçamento.

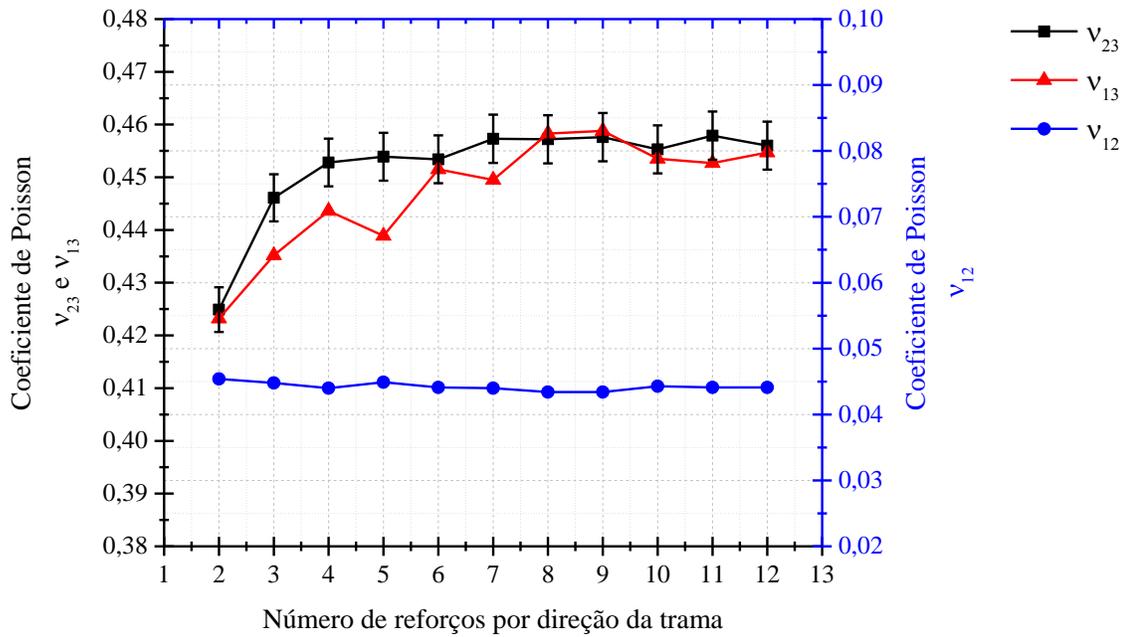


Figura 6.4 – Coeficientes de Poisson efetivos para microestrutura com entrelaçamento simples.

Os resultados obtidos para os coeficientes homogeneizados de Chentsov  $\mu$  e de influência mútua  $\eta$ , que caracterizam os acoplamentos entre as deformações nos diferentes planos e direções de um material anisotrópico, são ilustrados na Figura 6.5 e na Figura 6.6, respectivamente.

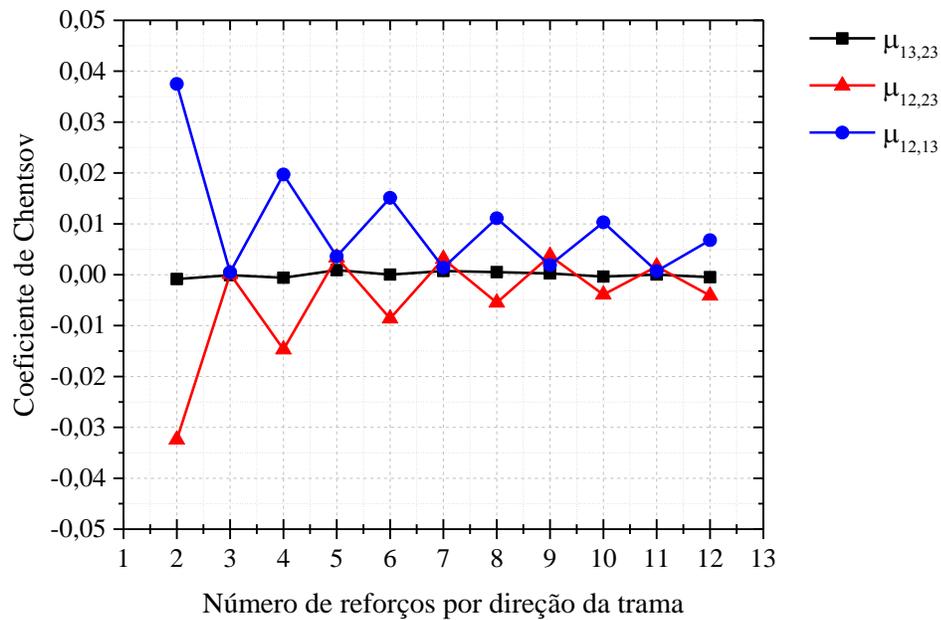


Figura 6.5 – Coeficientes de Chentsov efetivos para microestrutura com entrelaçamento simples.

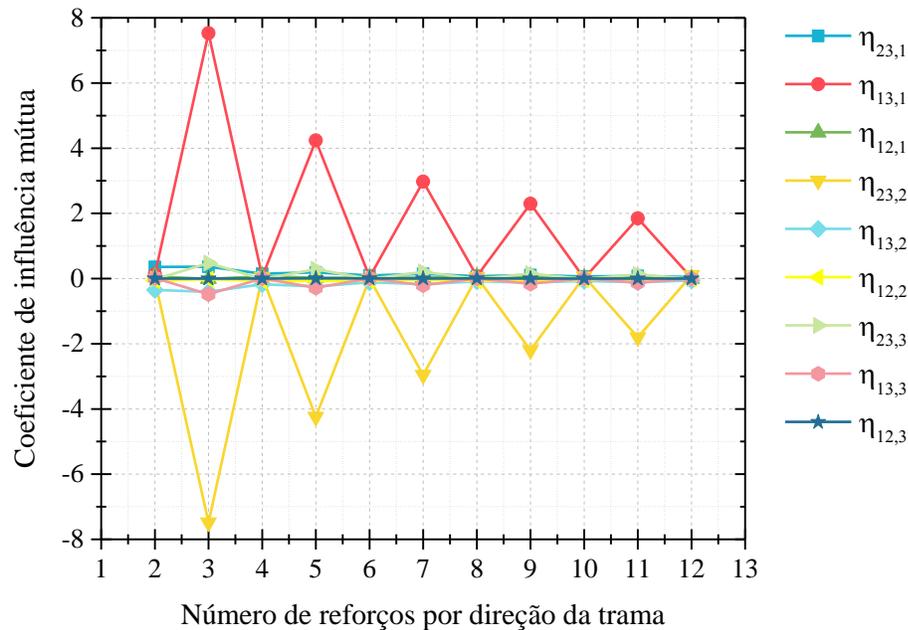


Figura 6.6 – Coeficientes de influência mútua efetivos para microestrutura com entrelaçamento simples.

Os gráficos evidenciam que os coeficientes variam em intervalos centrados próximos de zero. Nos modelos com números pares de feixes de reforço por direção de entrelaçamento, os coeficientes efetivos de Chentsov  $\mu_{12,13}$  e  $\mu_{12,23}$  apresentam efeitos mais acentuados e com sinais opostos. Já nos modelos com quantidades ímpares de reforços por direção, são os coeficientes efetivos de influência mútua  $\eta_{13,1}$  e  $\eta_{23,2}$  que se sobressaem, também com sinais opostos. De modo geral, conforme são adicionados feixes de reforço aos modelos da microestrutura do material, as respostas dos coeficientes efetivos tendem a zero. A diferença, em módulo, entre os valores resultantes das análises dos modelos contendo dez e doze feixes é inferior a 0,05.

Assim, com base nos resultados anteriores, é possível estabelecer que o modelo contendo dez feixes de reforço em cada direção da trama é capaz de representar o comportamento mecânico da microestrutura estudada, produzindo propriedades efetivas, ou homogeneizadas, estáveis em intervalos com pequenas amplitudes que podem ser consideradas aceitáveis, levando em conta as aproximações numéricas e as hipóteses simplificadoras da metodologia implementada. Segundo Cox e Flanagan, 1997, quando os reforços não estão em posições retas e paralelas na matriz, tensões e deformações, geralmente, apresentam fortes variações de um reforço para o outro. Logo, as propriedades mecânicas macroscópicas só podem ser consideradas aproximadamente uniformes

em escalas de 10 mm ou mais. Para os parâmetros geométricos e materiais previamente definidos, o elemento de volume representativo do compósito microestruturado analisado deve ter dimensões de aproximadamente 22 mm em cada lado do modelo, somando as larguras dos feixes de reforço e dos comprimentos de entrelaçamento.

## 6.2 Análise dos padrões de entrelaçamento da fase de reforço

A abordagem adotada para avaliar o efeito da arquitetura microestrutural sobre o comportamento mecânico dos compósitos consiste em gerar e simular modelos com diferentes padrões de entrelaçamento, conforme a metodologia descrita na Seção 5.2. O elemento de volume representativo de cada configuração analisada não é determinado nesta etapa do trabalho. O que se pretende é explorar, em modelos contendo a mesma quantidade de feixes de reforço, o impacto do arranjo espacial da microestrutura na resposta macroscópica do material, em termos do tensor constitutivo efetivo resultante. As propriedades efetivas também são calculadas.

Os testes numéricos são realizados em modelos compostos por cinco feixes de reforço em cada direção de entrelaçamento, com os parâmetros materiais e geométricos definidos no Capítulo 5. Os acoplamentos entre extensão e cisalhamento que ocorrem em cada uma das microestruturas são estudados através da análise dos campos de deslocamentos que se desenvolvem em uma situação de carregamento simples. As condições de contorno desta simulação são ilustradas na Figura 6.7, onde a superfície do modelo localizada em  $x = 0$  é engastada e uma tensão  $\sigma_{xx}$  de 1 MPa é aplicada na superfície oposta, com as demais superfícies livres.

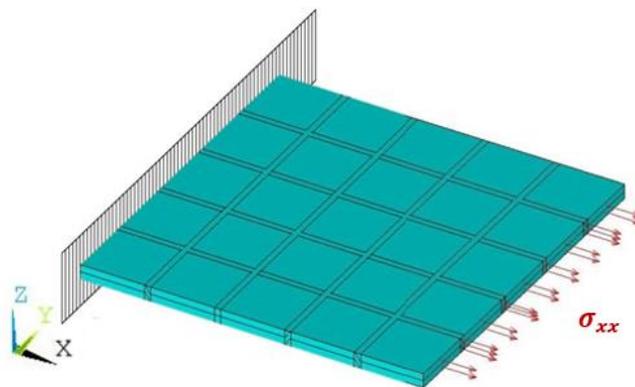


Figura 6.7 – Condições de contorno para simulação e análise dos campos de deslocamentos.

### 6.2.1 Padrão de entrelaçamento simples

A microestrutura formada pelo padrão de entrelaçamento simples já foi avaliada para definir as dimensões do elemento de volume representativo apropriado. Portanto, é conveniente iniciar a segunda parte do estudo por esta configuração. A Figura 6.8 ilustra o modelo com cinco feixes de reforço por direção da trama utilizado na análise. As propriedades homogeneizadas resultantes estão indicadas na Tabela 6.1.

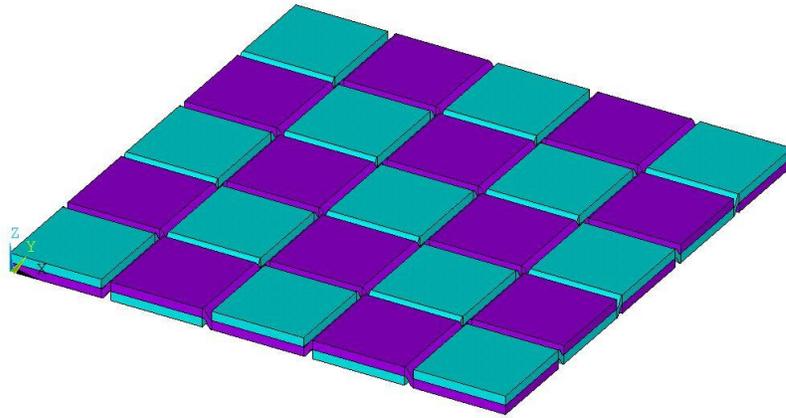


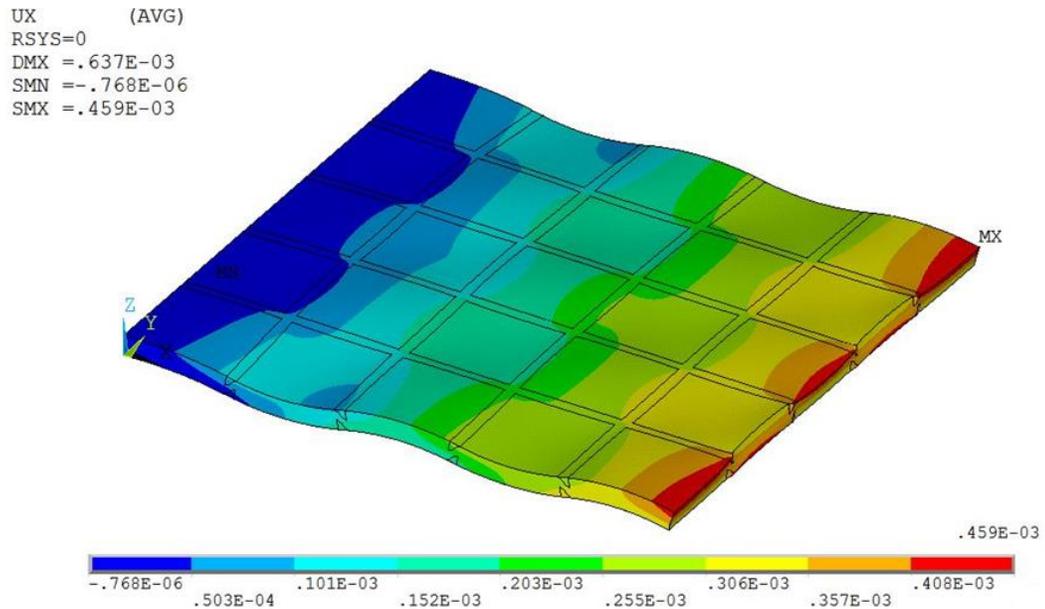
Figura 6.8 – Trama de reforços segundo o padrão simples.

O tensor constitutivo efetivo, que representa um meio anisotrópico homogêneo equivalente ao material heterogêneo real, obtido pelo procedimento numérico implementado é expresso por:

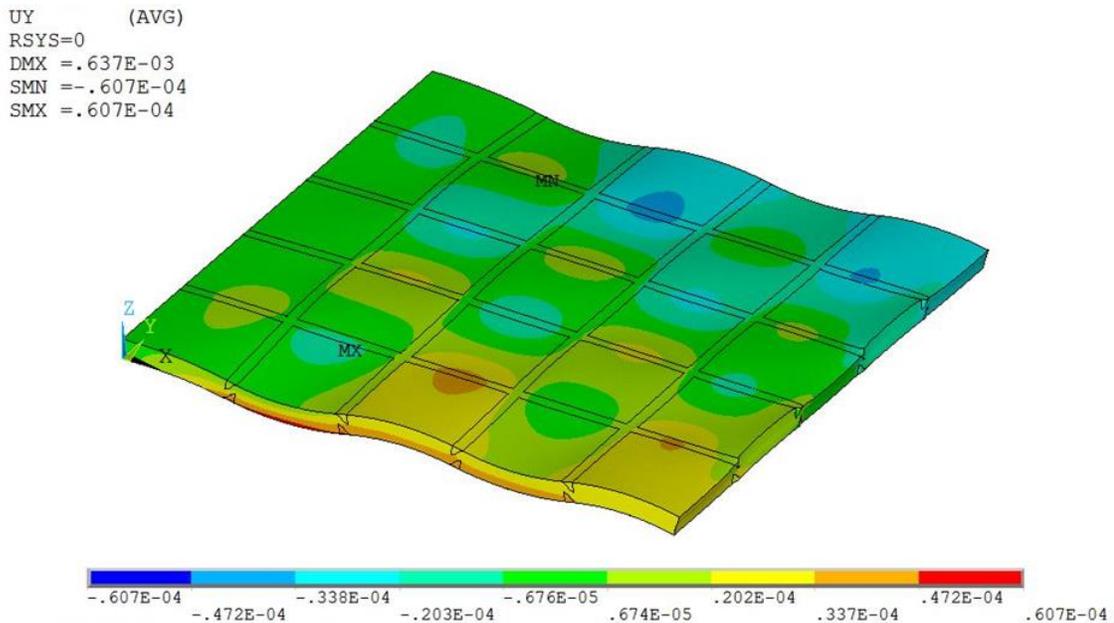
$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 38,6748 & 3,5854 & 3,8812 & 0,0151 & -15,7428 & -0,0427 \\ & 38,6698 & 3,8722 & 15,7684 & -0,0026 & -0,0166 \\ & & 9,1696 & 0,2066 & -0,2068 & -0,0042 \\ & & & 7,1646 & -0,0021 & 0,0026 \\ & sim. & & & 7,1634 & -0,0005 \\ & & & & & 7,6457 \end{bmatrix} \left[ GPa \right]. \quad (6.2)$$

Como mencionado anteriormente, este padrão de trama apresenta propriedades de rigidez semelhantes nas duas direções do plano de entrelaçamento ( $x$  e  $y$ ) e a troca frequente de posição dos reforços reduz significativamente esta rigidez, em comparação com o valor da rigidez longitudinal original do feixe de reforço dada na Tabela 5.1.

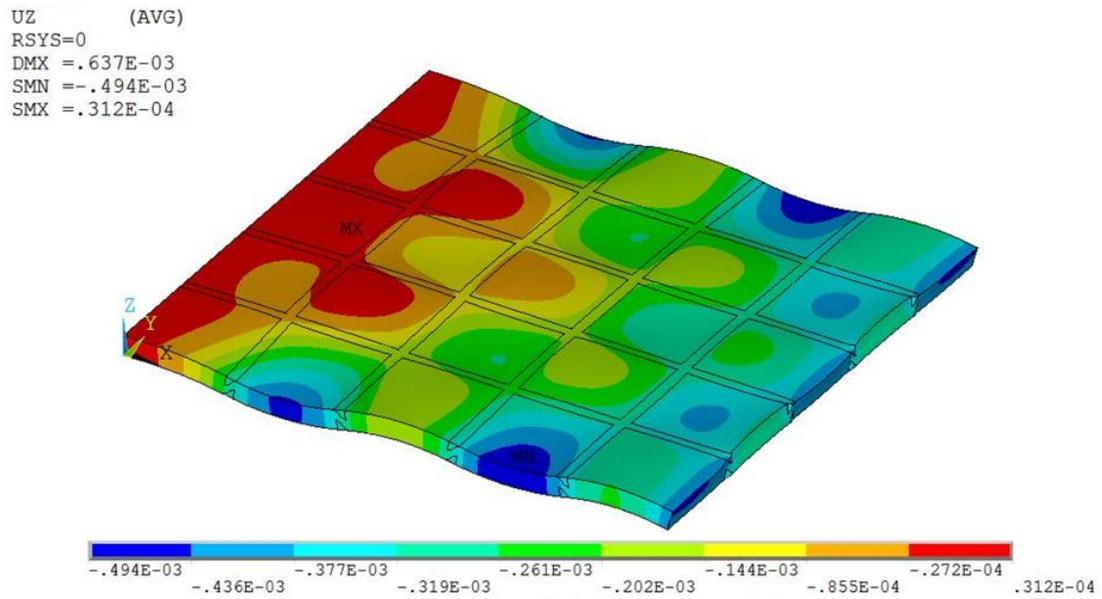
Os campos de deslocamentos nas três direções globais ( $x, y, z$ ) são ilustrados na Figura 6.9. Pode-se observar que o perfil de ondulação deste tipo de entrelaçamento é induzido em praticamente todo o material, quando este se deforma. Além disto, a figura demonstra o alto grau de complexidade dos acoplamentos entre extensão e cisalhamento.



(a) Campo de deslocamento na direção  $x$ .



(b) Campo de deslocamento na direção  $y$ .



(c) Campo de deslocamento na direção z.

Figura 6.9 – Deslocamentos produzidos na microestrutura com padrão de entrelaçamento dos feixes de reforço conforme o tecido plano.

### 6.2.2 Padrão de entrelaçamento sarja

A arquitetura da microestrutura gerada com um padrão geométrico de entrelaçamento do tipo sarja é reproduzida no modelo da Figura 6.10. Neste caso, as trocas de posições dos feixes de reforço ocorrem em períodos constantes, originando diagonais típicas na superfície do material.

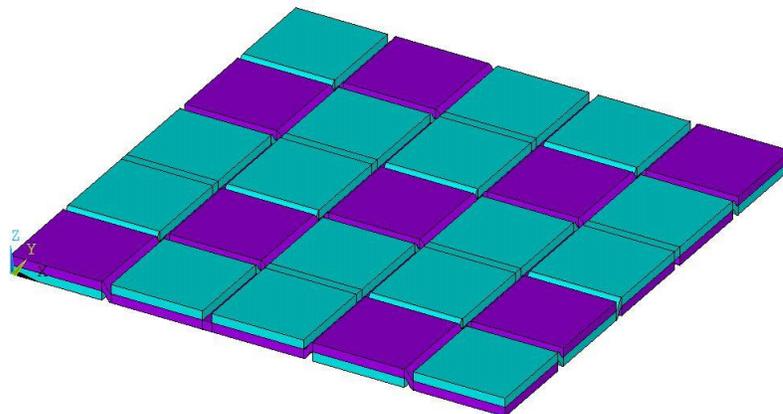


Figura 6.10 – Trama de reforços segundo o padrão sarja.

O tensor constitutivo efetivo resultante para esta configuração é expresso por:

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 43,4354 & 3,7513 & 4,1396 & 3,9596 & -142,8748 & 0,0472 \\ & 43,4356 & 4,1024 & 142,8718 & -3,8749 & 0,4054 \\ & & 9,1532 & 1,7322 & -1,7247 & 0,0035 \\ & & & 7,1490 & -0,0107 & -0,0604 \\ & sim. & & & 7,1826 & 0,0410 \\ & & & & & 7,7202 \end{bmatrix} \left[ GPa \right]. \quad (6.3)$$

Invertendo a Equação 6.3 e utilizando a Equação 6.1, são determinadas as constantes de engenharia homogeneizadas, mostradas na Tabela 6.3.

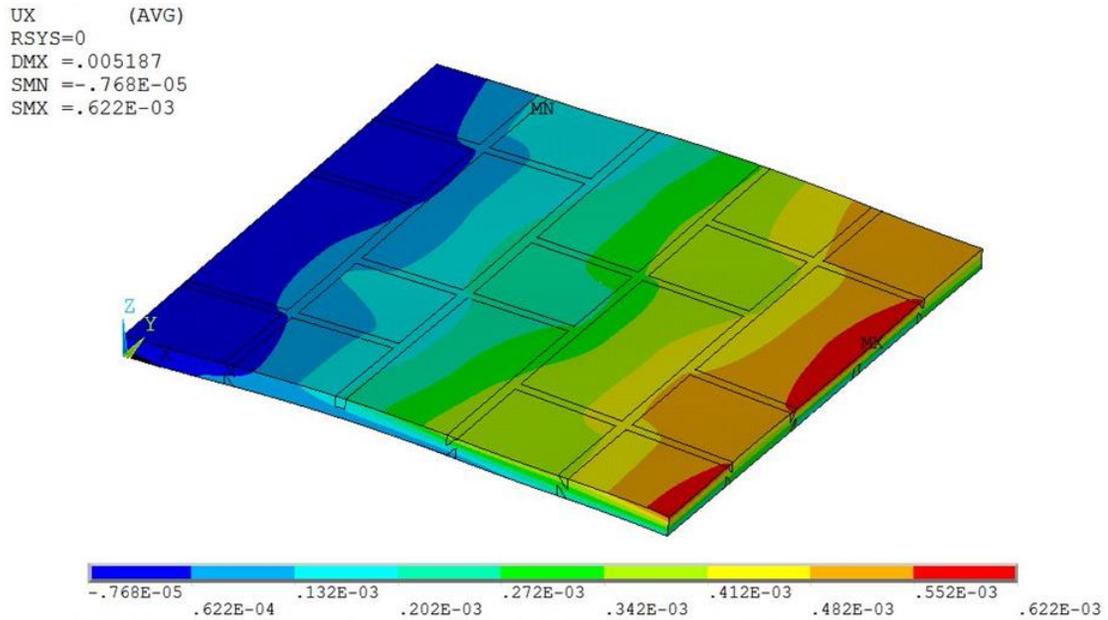
As trocas de posições dos reforços em períodos maiores do que no padrão de trama simples conferem a esta microestrutura propriedades de rigidez superiores no plano de entrelaçamento, no entanto, os efeitos de acoplamento entre extensão e cisalhamento são amplificados em aproximadamente dez vezes. Estes efeitos podem ser verificados através dos coeficientes de influência mútua  $\eta_{13,1}$  e  $\eta_{23,2}$ .

Tabela 6.3 – Constantes de engenharia efetivas obtidas para microestrutura formada pelo padrão de entrelaçamento sarja contendo cinco feixes de reforço por direção da trama.

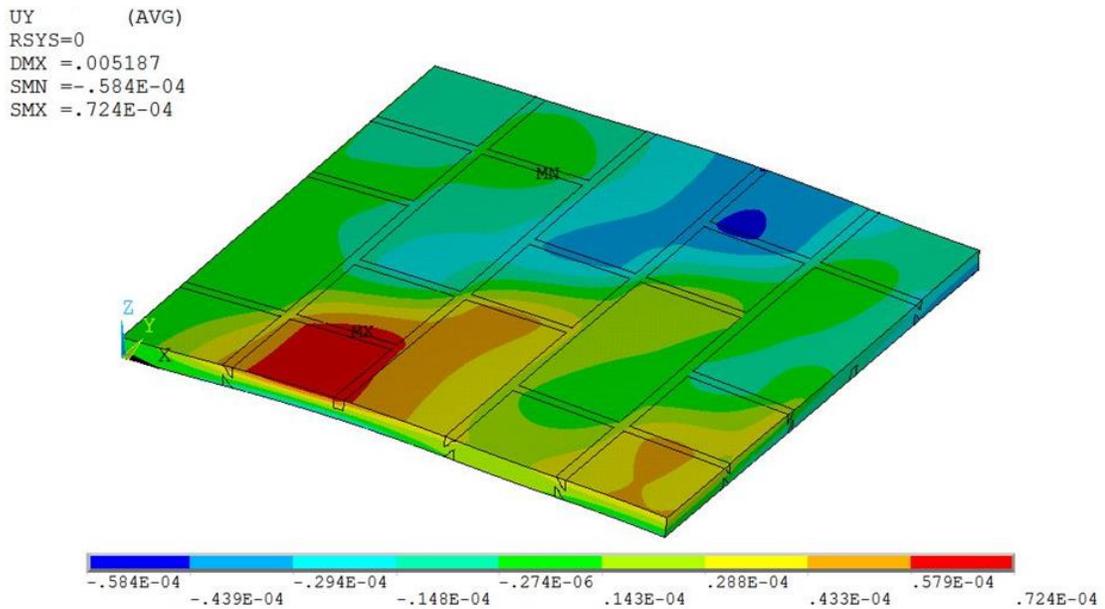
Constantes de Engenharia	Valor Efetivo	Constantes de Engenharia	Valor Efetivo	Constantes de Engenharia	Valor Efetivo
$E_1$ [GPa]	41,3718	$\nu_{13}$	0,3994	$\eta_{23,2}$	-39,6882
$E_2$ [GPa]	41,7541	$\nu_{23}$	0,4595	$\eta_{13,2}$	-1,3371
$E_3$ [GPa]	8,4507	$\nu_{12}$	0,0464	$\eta_{12,2}$	-1,1278
$G_{23}$ [GPa]	3,5908	$\eta_{23,1}$	0,8188	$\eta_{23,3}$	2,5395
$G_{13}$ [GPa]	3,5820	$\eta_{13,1}$	39,4602	$\eta_{13,3}$	-2,5165
$G_{12}$ [GPa]	3,8627	$\eta_{12,1}$	-0,9149	$\eta_{12,3}$	-0,1345
$\mu_{13,23}$	0,0018	$\mu_{12,23}$	0,0069	$\mu_{12,13}$	-0,0054

Os campos de deslocamentos nas três direções globais são ilustrados na Figura 6.11. A maneira como o modelo de elementos finitos se deforma, a partir da tensão aplicada na direção  $x$ ,

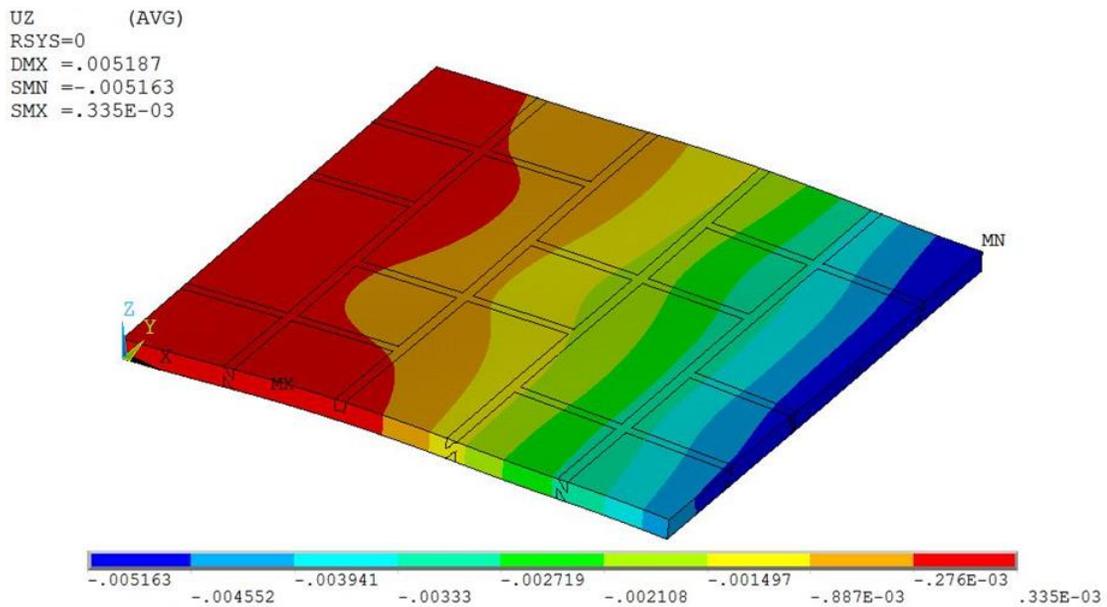
permite observar que o material tende a fletir em relação ao eixo  $y$ , devido ao arranjo microestrutural.



(a) Campo de deslocamento na direção  $x$ .



(b) Campo de deslocamento na direção  $y$ .



(c) Campo de deslocamento na direção z.

Figura 6.11 – Deslocamentos produzidos na microestrutura com padrão de entrelaçamento dos feixes de reforço conforme o tecido sarja.

### 6.2.3 Padrão de entrelaçamento cetim

A trama de acordo com o padrão cetim é caracterizada por um posicionamento mais esparsos dos entrelaçamentos. As trocas de posições entre os feixes de reforço são organizadas de modo a não se conectarem e não produzirem diagonais contínuas, como ocorre no padrão sarja, gerando uma microestrutura assimétrica. O aspecto do modelo avaliado é apresentado na Figura 6.12.

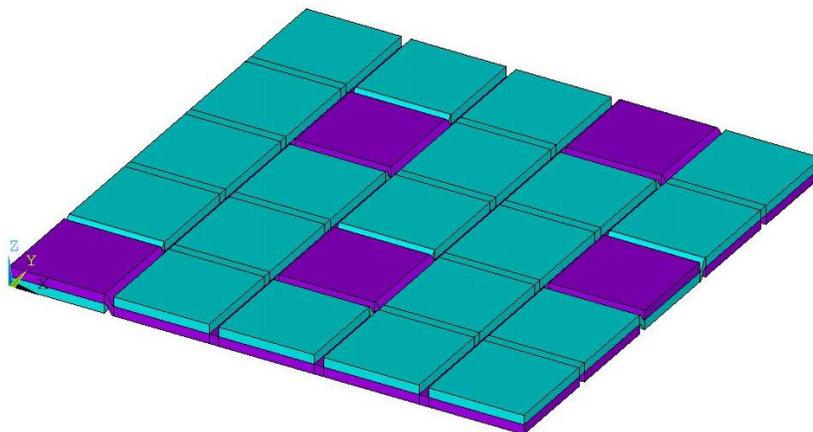


Figura 6.12 – Trama de reforços segundo o padrão cetim.

Para este arranjo microestrutural, o tensor constitutivo efetivo obtido é da seguinte forma:

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 48.0267 & 3.8564 & 3.8911 & 4.1283 & -337.6590 & -1.6261 \\ & 48.0653 & 3.8103 & 338.9407 & -4.0308 & -1.4332 \\ & & 9.1965 & 3.8096 & -3.8090 & -0.0080 \\ & & & 6.7291 & 0.0349 & -0.0912 \\ & sim. & & & 6.7526 & 0.0934 \\ & & & & & 7.7553 \end{bmatrix} \left[ GPa \right]. \quad (6.4)$$

As respectivas constantes de engenharia efetivas são exibidas na Tabela 6.4, a partir das quais é possível notar que, em relação ao padrão sarja, as propriedades de rigidez no plano de trama aumentam um pouco, enquanto os efeitos de acoplamento entre extensão e cisalhamento são superiores ao dobro.

Tabela 6.4 – Constantes de engenharia efetivas obtidas para microestrutura formada pelo padrão de entrelaçamento cetim contendo cinco feixes de reforço por direção da trama.

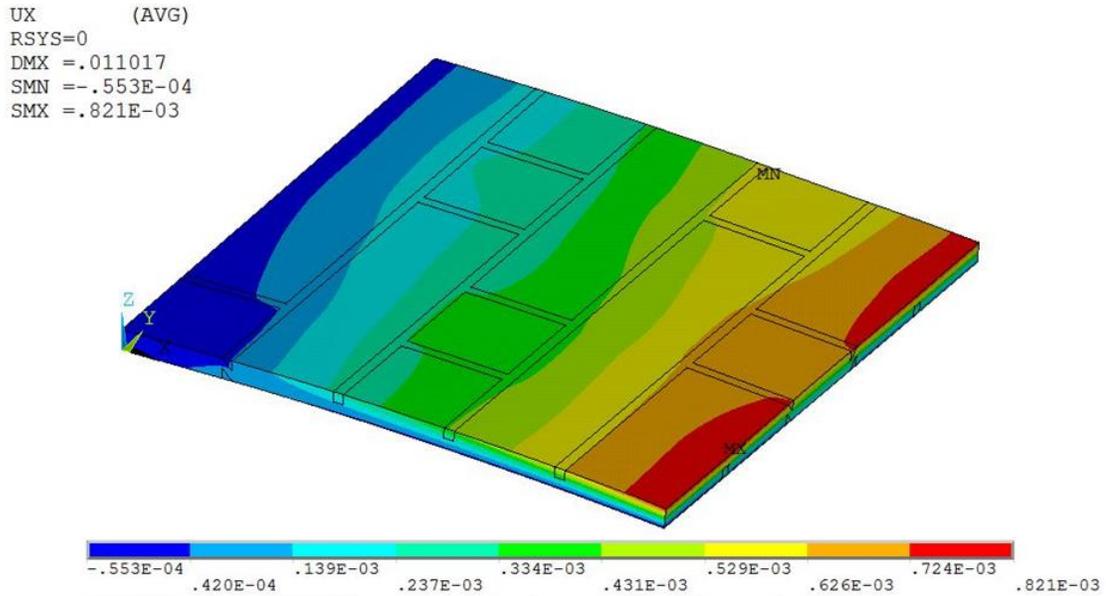
Constantes de Engenharia	Valor Efetivo	Constantes de Engenharia	Valor Efetivo	Constantes de Engenharia	Valor Efetivo
$E_1$ [GPa]	46,2860	$\nu_{13}$	0,3391	$\eta_{23,2}$	-100,2194
$E_2$ [GPa]	47,0177	$\nu_{23}$	0,4418	$\eta_{13,2}$	-5,4070
$E_3$ [GPa]	8,6484	$\nu_{12}$	0,0490	$\eta_{12,2}$	0,5494
$G_{23}$ [GPa]	3,4065	$\eta_{23,1}$	2,0255	$\eta_{23,3}$	5,7957
$G_{13}$ [GPa]	3,3803	$\eta_{13,1}$	99,3680	$\eta_{13,3}$	-5,6362
$G_{12}$ [GPa]	3,8771	$\eta_{12,1}$	0,3062	$\eta_{12,3}$	-0,0572
$\mu_{13,23}$	-0,0046	$\mu_{12,23}$	0,0016	$\mu_{12,13}$	-0,0061

Analisando a definição dos coeficientes de influência mútua da Equação 3.40:

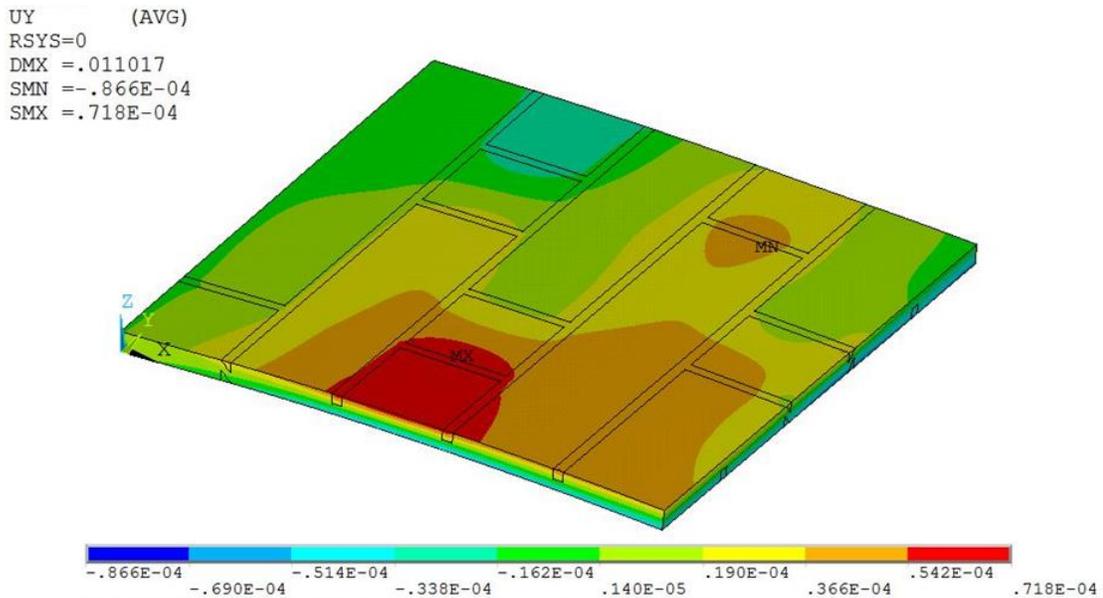
$$\eta_{ij,k} = \frac{\gamma_{ij}}{\varepsilon_k}, \quad (6.5)$$

é possível inferir que a resposta deste material a uma tensão normal aplicada na direção  $x$ , implica em um acoplamento muito significativo com a deformação cisalhante  $\gamma_{xz}$ .

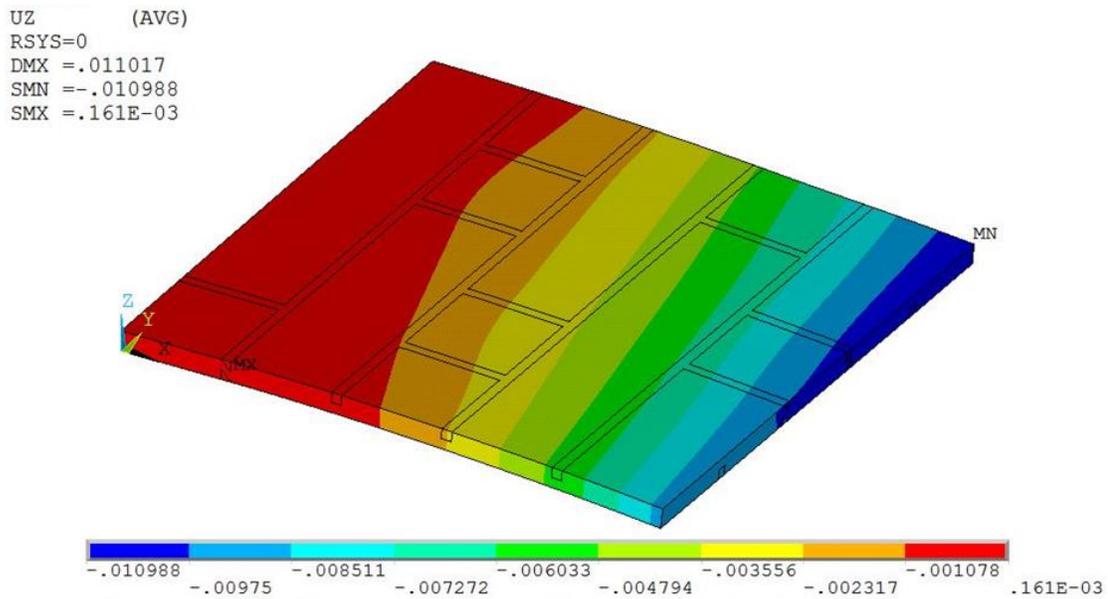
Os campos de deslocamentos para este compósito microestruturado, nas três direções globais, são apresentados na Figura 6.13. Pode-se identificar a existência dos acoplamentos entre alongamento e flexão e entre alongamento e cisalhamento.



(a) Campo de deslocamento na direção  $x$ .



(b) Campo de deslocamento na direção  $y$ .



(c) Campo de deslocamento na direção z.

Figura 6.13 – Deslocamentos produzidos na microestrutura com padrão de entrelaçamento dos feixes de reforço conforme o tecido cetim.

Em particular, a Figura 6.13(a) e a Figura 6.13(b) evidenciam um movimento relativo e oposto entre as superfícies superior e inferior do material. Este é um ponto que merece destaque, pois tal efeito dificilmente seria capturado por teorias estruturais de placas usuais e pela teoria clássica da laminação, que são as ferramentas mais amplamente empregadas para analisar o comportamento das camadas de compósitos reforçados por fibras contínuas.

#### 6.2.4 Entrelaçamento de reforços com ângulos alternados de $0^\circ/90^\circ$

Esta microestrutura é formada quando os feixes de reforço são depositados em movimentos alternados com ângulos de  $0^\circ$  e de  $90^\circ$  em relação ao eixo global de referência  $x$ . Como resultado, são criadas duas regiões lisas divididas por uma diagonal, onde ocorrem os entrelaçamentos. A Figura 6.14 ilustra o modelo gerado para estudar este padrão.

O tensor constitutivo que representa o comportamento mecânico homogeneizado deste material é apresentado na Equação 6.6 e as constantes de engenharia calculadas a partir do mesmo são descritas na Tabela 6.5.

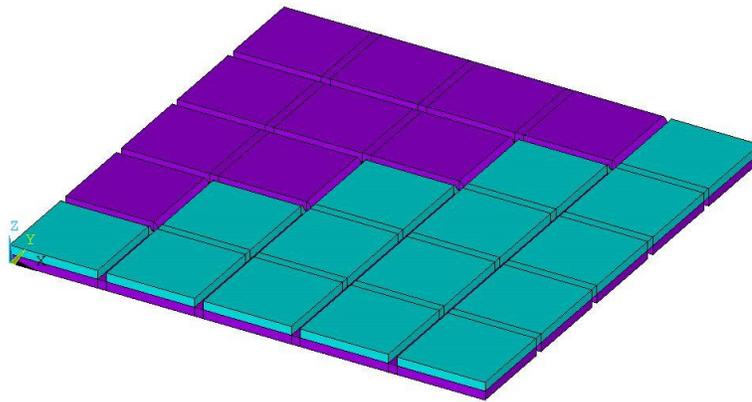


Figura 6.14 – Trama de reforços com ângulos alternados de  $0^\circ/90^\circ$ .

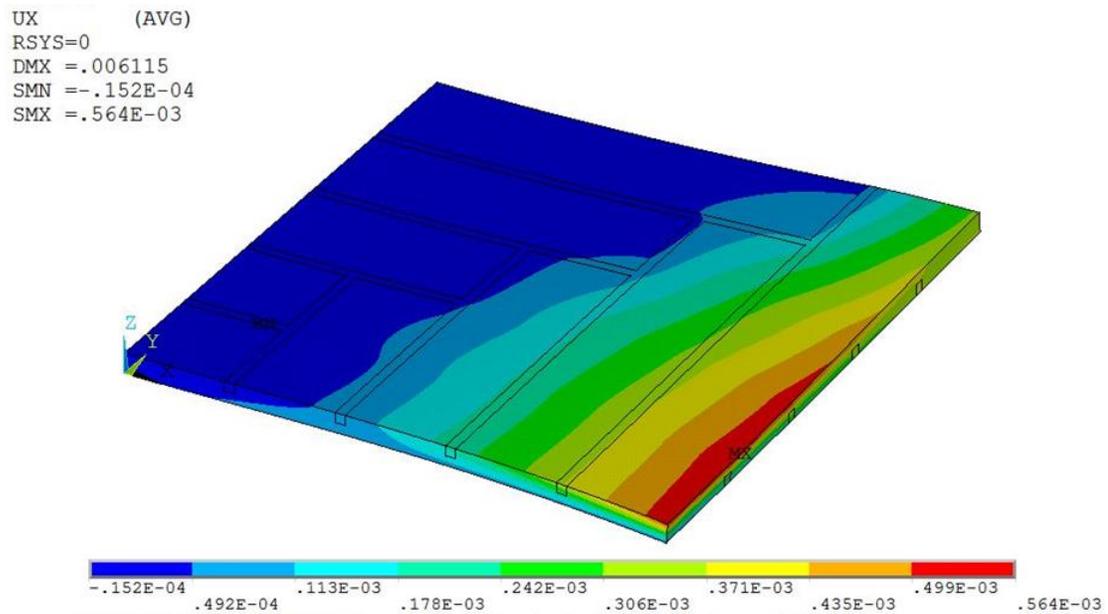
$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 51.1855 & 3.9603 & 3.7384 & -1.6663 & -300.3663 & -1.5696 \\ & 51.1886 & 3.6682 & -50.9663 & -1.5303 & 1.3128 \\ & & 9.2138 & -0.8275 & -3.5042 & -0.0017 \\ & & & 6.4963 & 0.2226 & 0.5021 \\ & sim. & & & 6.5138 & 0.3612 \\ & & & & & 7.7827 \end{bmatrix} \left[ GPa \right]. \quad (6.6)$$

Tabela 6.5 – Constantes de engenharia efetivas obtidas para microestrutura formada pelo padrão de posicionamento em  $0^\circ/90^\circ$  contendo cinco feixes de reforço por direção da trama.

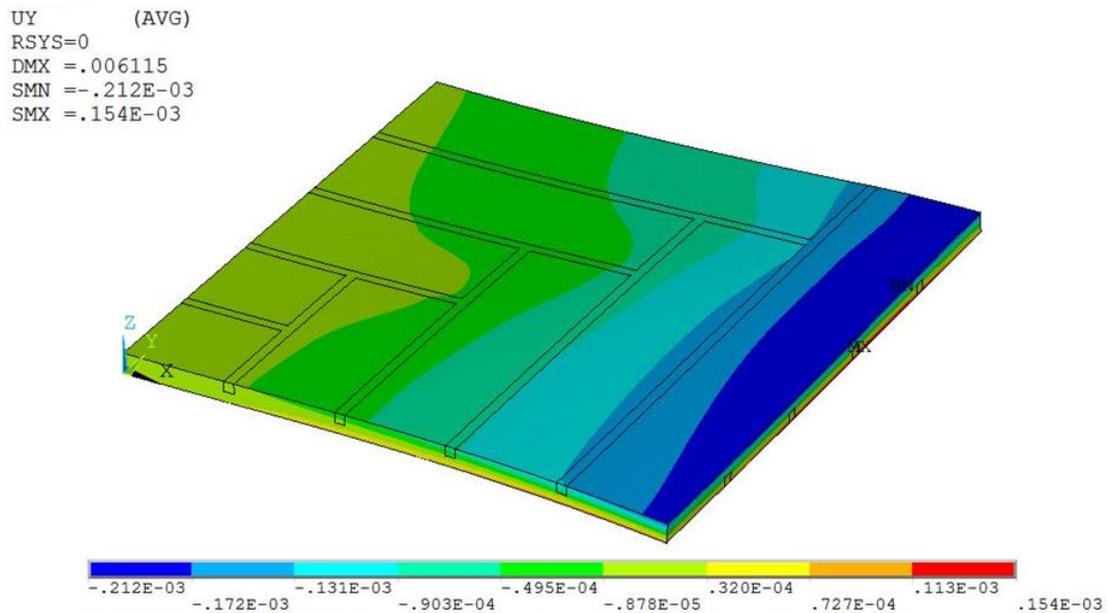
Constantes de Engenharia	Valor Efetivo	Constantes de Engenharia	Valor Efetivo	Constantes de Engenharia	Valor Efetivo
$E_1$ [GPa]	53,8650	$\nu_{13}$	0,3455	$\eta_{23,2}$	15,8419
$E_2$ [GPa]	49,8402	$\nu_{23}$	-0,2125	$\eta_{13,2}$	-4,8729
$E_3$ [GPa]	9,3314	$\nu_{12}$	0,0793	$\eta_{12,2}$	-0,5194
$G_{23}$ [GPa]	3,2590	$\eta_{23,1}$	-4,8642	$\eta_{23,3}$	-0,6010
$G_{13}$ [GPa]	3,4996	$\eta_{13,1}$	92,7951	$\eta_{13,3}$	-4,7798
$G_{12}$ [GPa]	3,9004	$\eta_{12,1}$	2,5908	$\eta_{12,3}$	-0,1149
$\mu_{13,23}$	-0,0415	$\mu_{12,23}$	-0,0613	$\mu_{12,13}$	-0,0418

Entre as propriedades marcantes originadas por esta configuração, destaca-se o coeficiente de Poisson negativo  $\nu_{23}$ , que corresponde a uma deformação positiva na direção  $z$  quando um carregamento de tração é aplicado na direção  $y$ . Outras características notadas são uma certa semelhança do acoplamento representado por  $\eta_{13,1}$ , bem como uma inversão do sentido e

uma atenuação da magnitude do acoplamento representado por  $\eta_{23,2}$ , em relação ao padrão de entrelaçamento do tipo cetim. Os campos de deslocamentos resultantes da simulação deste modelo são apresentados na Figura 6.15. Pode-se verificar um acoplamento de tração com flexo-torção ao longo de quase todo o material.



(a) Campo de deslocamento na direção  $x$ .



(b) Campo de deslocamento na direção  $y$ .

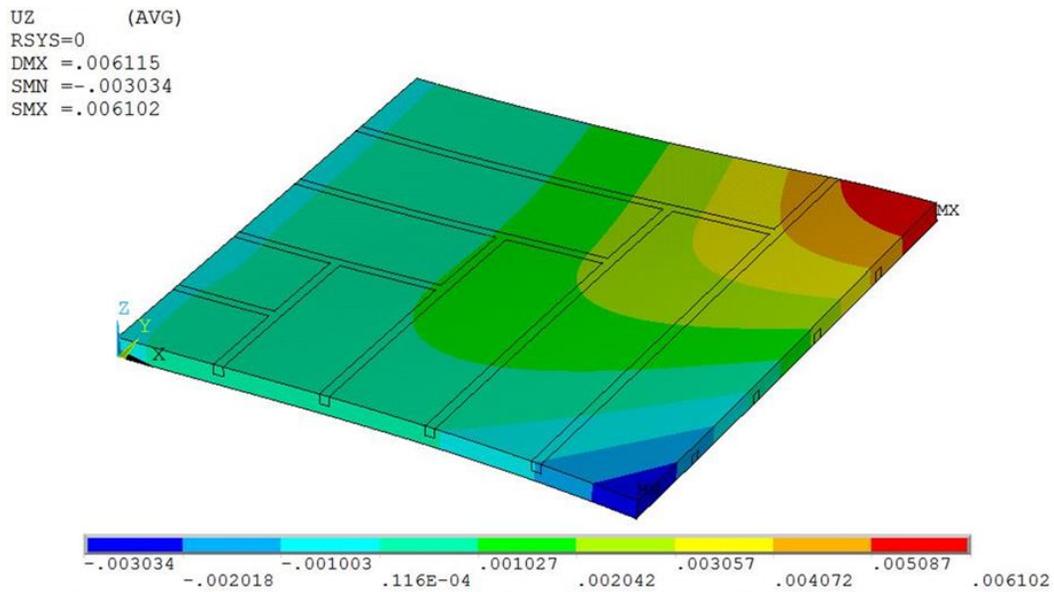


Figura 6.15 – Deslocamentos produzidos na microestrutura com padrão de posicionamento dos feixes de reforço em ângulos alternados de  $0^\circ/90^\circ$ .

### 6.2.5 Entrelaçamento de reforços com ângulos alternados de $\pm 30^\circ$

Quando o posicionamento dos feixes de reforço é realizado em trajetórias alternadas que formam um ângulo  $\alpha$ , maior que  $0^\circ$  e menor que  $90^\circ$ , com relação ao eixo global  $x$ , em movimentos de avanço com ângulo positivo e de retorno com ângulo negativo, um padrão geométrico de losangos é conferido ao material. A Figura 6.16 demonstra o modelo produzido com ângulos de  $\pm 30^\circ$ .

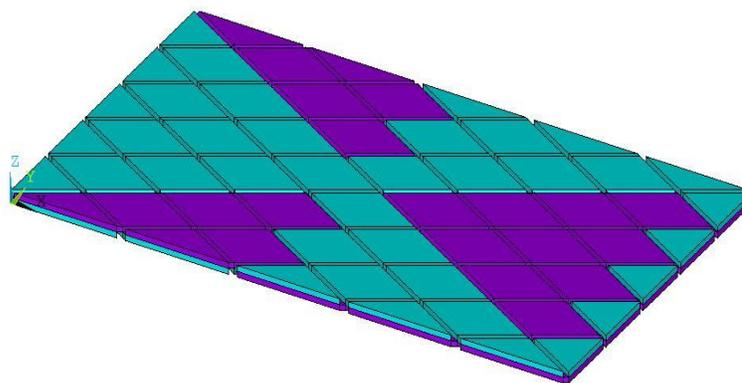


Figura 6.16 – Trama de reforços com ângulos alternados de  $\pm 30^\circ$ .

O tensor constitutivo efetivo que resulta da homogeneização da microestrutura contendo este arranjo de reforço é expresso por:

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 52,9479 & 17,0362 & 2,2644 & -63,4696 & -73,0752 & 0,5127 \\ & 14,5657 & 2,7512 & -22,5600 & -26,2472 & 0,0323 \\ & & 9,1218 & -1,0309 & -1,0591 & 0,0029 \\ & & & 7,0499 & -0,0457 & -24,0974 \\ & sim. & & & 7,9536 & -61,4810 \\ & & & & & 33,8611 \end{bmatrix} \left[ GPa \right], \quad (6.7)$$

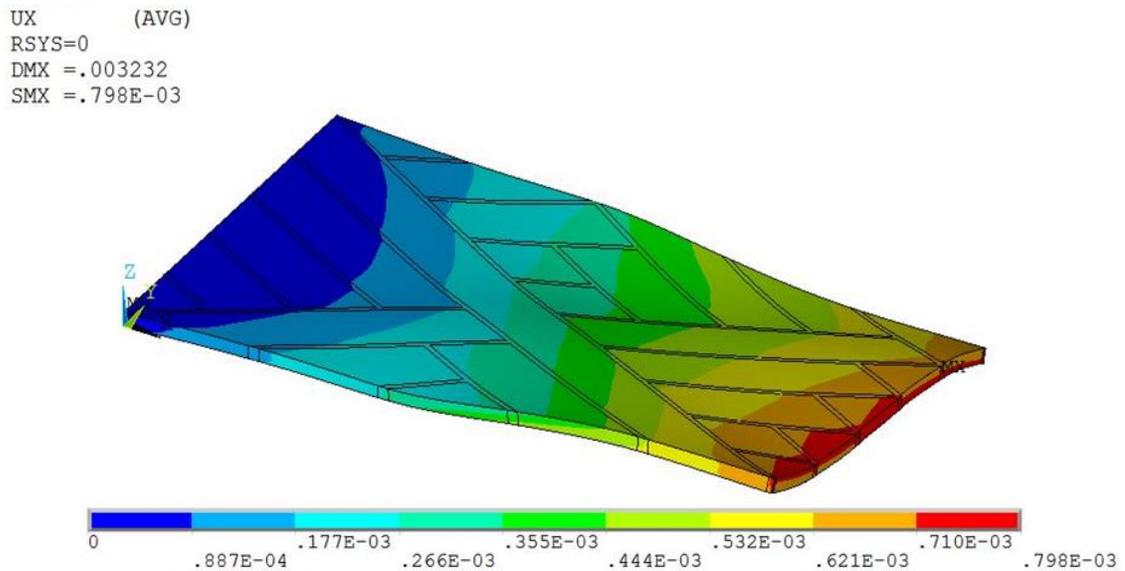
com as constantes de engenharia dadas na Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Constantes de engenharia efetivas obtidas para microestrutura formada pelo padrão de posicionamento em  $\pm 30^\circ$  contendo cinco feixes de reforço por direção da trama.

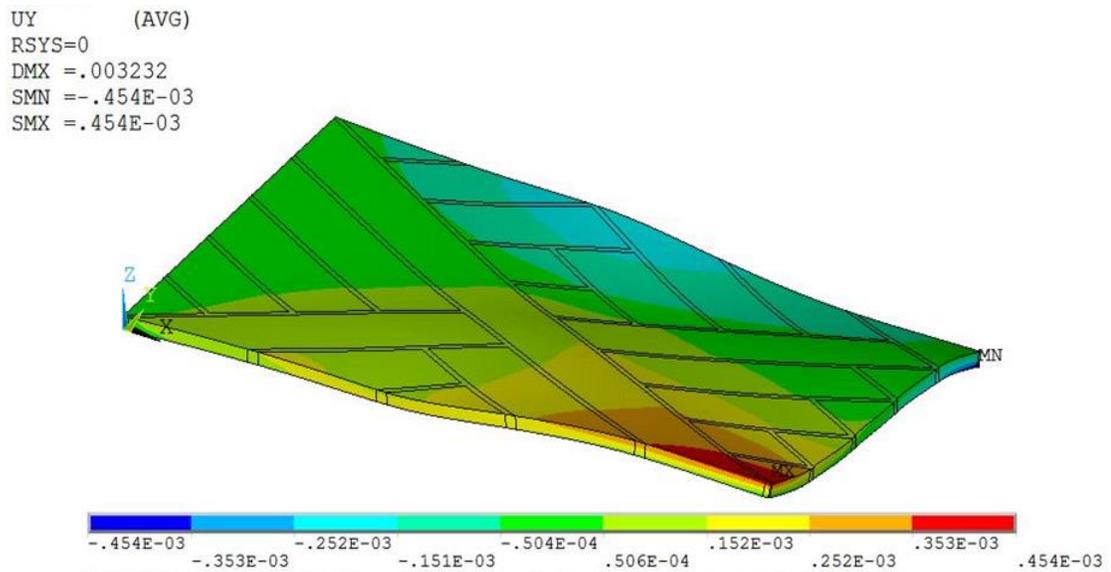
Constantes de Engenharia	Valor Efetivo	Constantes de Engenharia	Valor Efetivo	Constantes de Engenharia	Valor Efetivo
$E_1$ [GPa]	33,9869	$\nu_{13}$	0,2068	$\eta_{23,2}$	0,6755
$E_2$ [GPa]	8,6507	$\nu_{23}$	-0,3396	$\eta_{13,2}$	0,7278
$E_3$ [GPa]	9,0345	$\nu_{12}$	1,2524	$\eta_{12,2}$	0,0094
$G_{23}$ [GPa]	3,7995	$\eta_{23,1}$	9,6357	$\eta_{23,3}$	-1,0310
$G_{13}$ [GPa]	4,2384	$\eta_{13,1}$	9,2567	$\eta_{13,3}$	-1,0449
$G_{12}$ [GPa]	18,1994	$\eta_{12,1}$	-0,1149	$\eta_{12,3}$	0,0770
$\mu_{13,23}$	-0,0486	$\mu_{12,23}$	0,6603	$\mu_{12,13}$	1,7364

Neste caso, em decorrência do ângulo formado entre os feixes de reforço e o sistema global de coordenadas do material, o módulo de elasticidade na direção  $y$ , designado por  $E_2$ , é reduzido substancialmente em comparação com os outros modelos analisados até agora. Como contrapartida, um aumento significativo é percebido tanto no módulo de cisalhamento  $G_{12}$  quanto no coeficiente de Poisson  $\nu_{12}$ , ambos no plano da trama. De forma semelhante ao padrão  $0^\circ / 90^\circ$ , estudado anteriormente, o coeficiente de Poisson  $\nu_{23}$  é negativo. Além disto, os efeitos dos acoplamentos dados por  $\eta_{23,1}$  e por  $\eta_{13,1}$  se aproximam, o que ainda não havia sido observado.

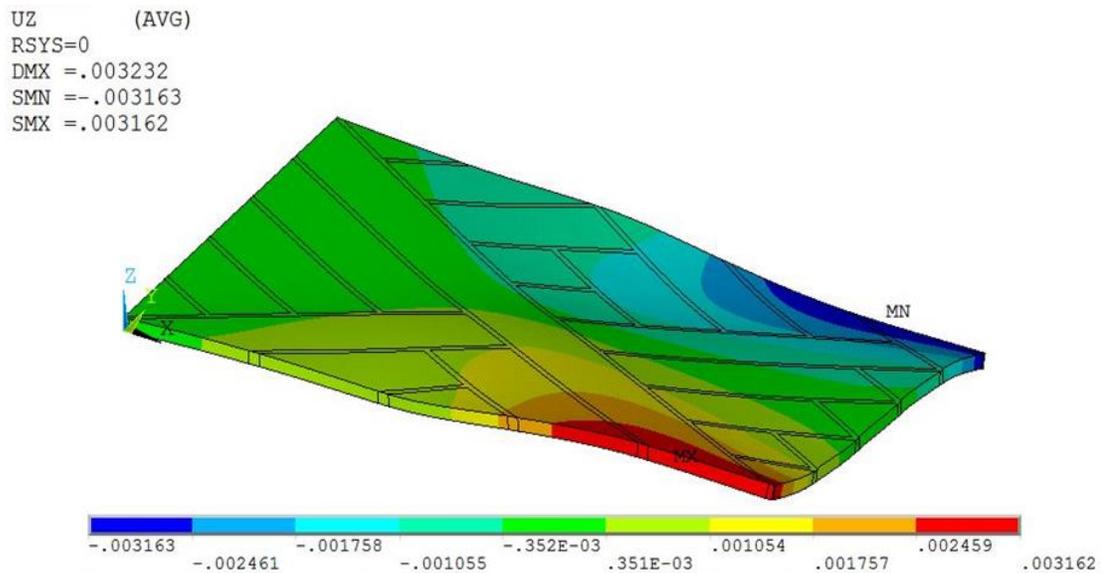
Os campos de deslocamentos obtidos nas três direções globais são ilustrados na Figura 6.17. A incidência de um efeito pronunciado de torção em relação ao eixo  $x$ , para um carregamento de tração também em  $x$ , é facilmente visualizada a partir desta arquitetura microestrutural.



(a) Campo de deslocamento na direção  $x$ .



(b) Campo de deslocamento na direção  $y$ .



(c) Campo de deslocamento na direção z.

Figura 6.17 – Deslocamentos produzidos na microestrutura com padrão de posicionamento dos feixes de reforço em ângulos alternados de  $\pm 30^\circ$ .

### 6.2.6 Entrelaçamento de reforços com ângulos alternados de $\pm 45^\circ$

Por último, é avaliada a trama entre reforços posicionados com ângulos alternados de  $\pm 45^\circ$ . O processo de construção desta microestrutura é, essencialmente, o mesmo utilizado para modelar a configuração anterior, modificando apenas a inclinação dos feixes em relação ao eixo global de referência  $x$ . A Figura 6.18 descreve o modelo estudado.

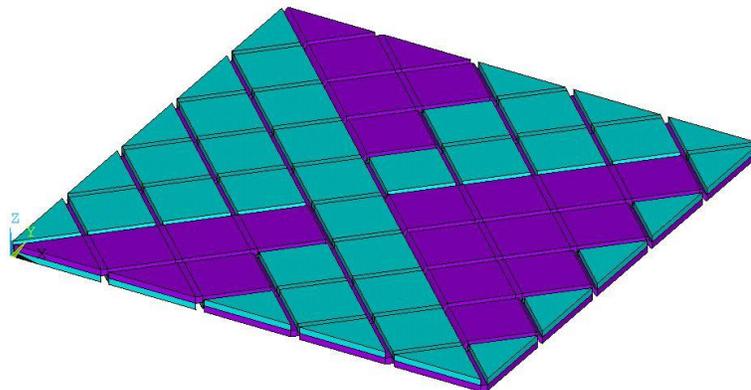


Figura 6.18 – Trama de reforços com ângulos alternados de  $\pm 45^\circ$ .

O tensor constitutivo efetivo obtido pelo método computacional de homogeneização implementado é representado por:

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 27,9604 & 19,4208 & 2,3736 & -32,4360 & -63,2908 & 0,3940 \\ & 25,7578 & 2,3540 & -32,1693 & -63,1506 & -0,4561 \\ & & 9,0766 & -0,7923 & -1,3700 & -0,1020 \\ & & & 7,5531 & -0,0582 & -65,8138 \\ & sim. & & & 8,1737 & -31,4494 \\ & & & & & 39,1322 \end{bmatrix} [GPa], \quad (6.8)$$

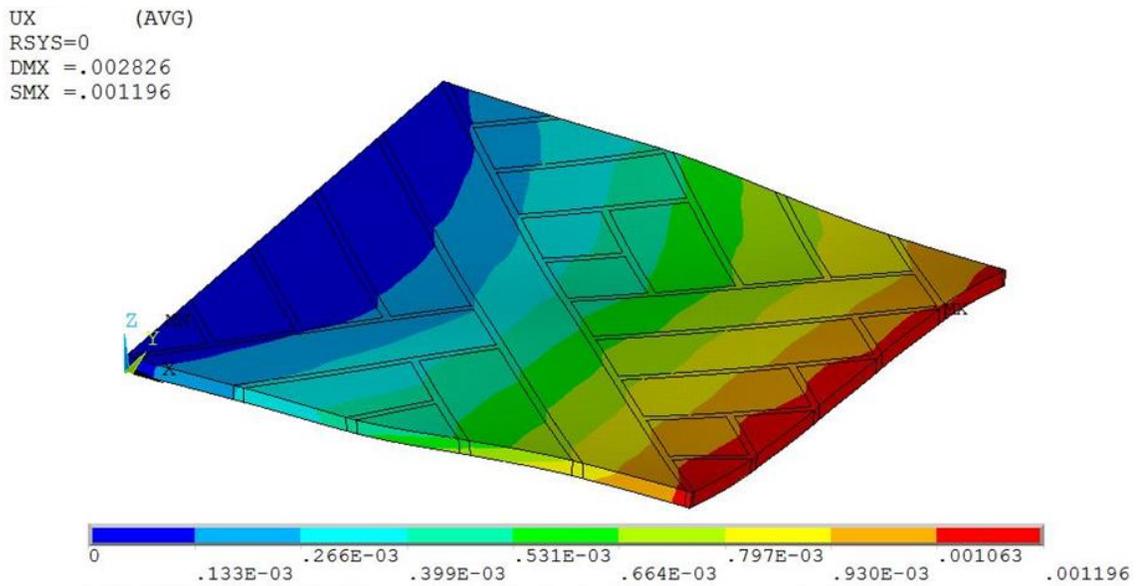
a partir do qual são calculadas as constantes de engenharia reportadas na Tabela 6.7.

Tabela 6.7 – Constantes de engenharia efetivas obtidas para microestrutura formada pelo padrão de posicionamento em  $\pm 45^\circ$  contendo cinco feixes de reforço por direção da trama.

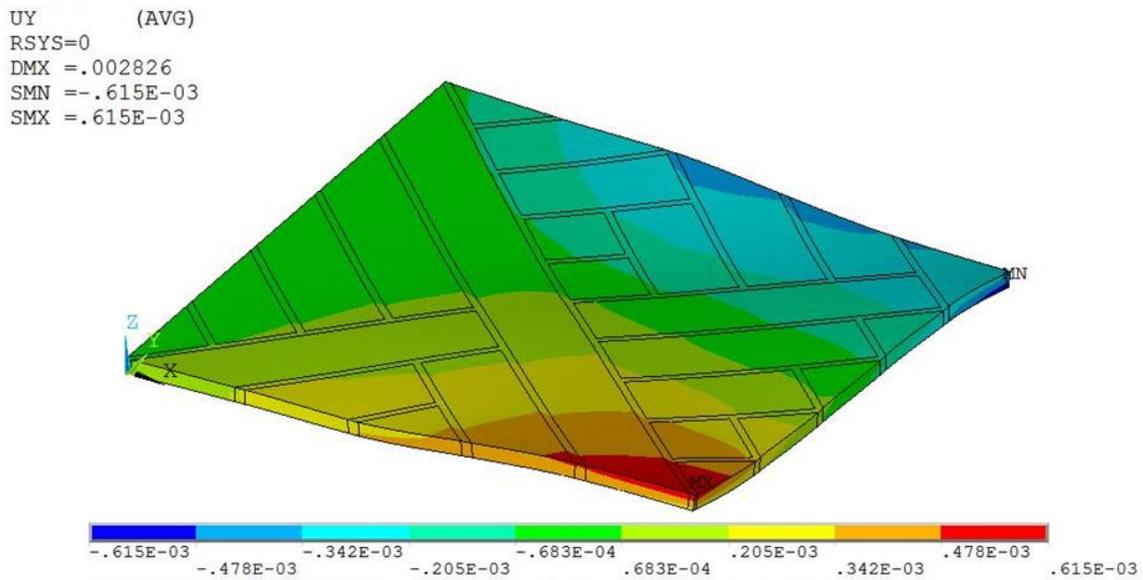
Constantes de Engenharia	Valor Efetivo	Constantes de Engenharia	Valor Efetivo	Constantes de Engenharia	Valor Efetivo
$E_1 [GPa]$	13,2882	$\nu_{13}$	0,0348	$\eta_{23,2}$	2,2757
$E_2 [GPa]$	12,3546	$\nu_{23}$	0,0104	$\eta_{13,2}$	4,1926
$E_3 [GPa]$	9,3051	$\nu_{12}$	0,7493	$\eta_{12,2}$	-0,0046
$G_{23} [GPa]$	3,9760	$\eta_{23,1}$	2,5867	$\eta_{23,3}$	-1,1159
$G_{13} [GPa]$	4,0189	$\eta_{13,1}$	4,5699	$\eta_{13,3}$	-2,0539
$G_{12} [GPa]$	20,0581	$\eta_{12,1}$	-0,0038	$\eta_{12,3}$	0,1497
$\mu_{13,23}$	0,0012	$\mu_{12,23}$	1,7009	$\mu_{12,13}$	0,7509

A disposição dos reforços em ângulos de  $\pm 45^\circ$  com relação ao sistema global de coordenadas do material proporciona o aumento da rigidez ao cisalhamento no plano de entrelaçamento, dado pelo módulo efetivo  $G_{12}$ . Os módulos de elasticidade longitudinal  $E_1$  e  $E_2$  apresentam valores reduzidos, porém, são equilibrados nas direções de  $x$  e de  $y$ , respectivamente. Os coeficientes de Poisson tornam a assumir valores positivos em todos os planos, enquanto os coeficientes de influência mútua são suavizados. Os campos de deslocamentos, nas três direções globais, são ilustrados na Figura 6.19. Embora seja atenuada, a torção em relação ao eixo  $x$

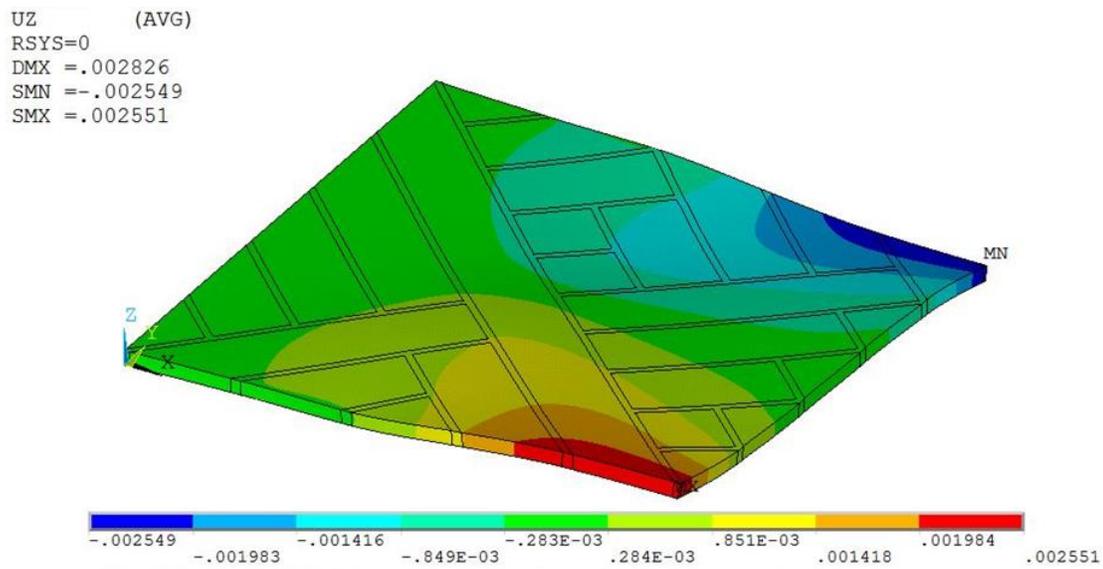
continua ocorrendo e pode ser novamente observada através da reprodução do modelo de elementos finitos na configuração deformada.



(a) Campo de deslocamento na direção  $x$ .



(b) Campo de deslocamento na direção  $y$ .



(c) Campo de deslocamento na direção z.

Figura 6.19 – Deslocamentos produzidos na microestrutura com padrão de posicionamento dos feixes de reforço em ângulos alternados de  $\pm 45^\circ$ .

O comportamento mecânico derivado dos diferentes arranjos tridimensionais da fase de reforço, presente nas microestruturas heterogêneas, é avaliado com o procedimento numérico de homogeneização aplicado a um determinado volume do material, para obter um tensor constitutivo espacialmente constante que pode ser atribuído a resposta homogênea equivalente produzida pelo compósito em escala macroscópica. Os tensores constitutivos efetivos resultantes em cada uma das seis microestruturas estudadas possuem propriedades características de materiais anisotrópicos, que variam em função da organização interna dos feixes de reforço conforme os comentários feitos anteriormente. O padrão anisotrópico é justificado pelo elevado grau de complexidade dos acoplamentos entre extensão e cisalhamento que se desenvolvem ao longo dos modelos de elementos finitos simulados e é evidenciado nas figuras que ilustram os campos de deslocamentos causados por um carregamento simples.

Embora as técnicas de homogeneização sejam amplamente utilizadas para estudar materiais heterogêneos, é comum que hipóteses preliminares sejam adotadas sobre a simetria material do meio analisado, simplificando as respostas e levando a desconsiderar os efeitos de termos como os coeficientes de influência mútua e de Chentsov. Assim, não foram encontradas soluções de referência na literatura comparáveis aos resultados atingidos neste trabalho. O que se pode

verificar, apesar dos valores incomuns, é que as constantes de engenharia calculadas estão respeitando as restrições termodinâmicas relacionadas ao trabalho mecânico, uma vez que os termos das diagonais principais de todos os tensores efetivos são positivos [Jones, 1999]. Logo, em cada caso, a soma do trabalho realizado pelas tensões nas direções das correspondentes deformações é sempre positiva. A Tabela 6.8 resume os valores das vinte e uma constantes de engenharia efetivas determinadas para cada uma das seis configurações microestruturais avaliadas.

Tabela 6.8 – Constantes de engenharia efetivas obtidas para as microestruturas estudadas.

Constantes de Engenharia	Padrão de entrelaçamento da fase de reforço.					
	Simplex	Sarja	Cetim	0°/ 90°	±30°	±45°
$E_1$ [GPa]	37,6622	41,3718	46,2860	53,8650	33,9869	13,2882
$E_2$ [GPa]	37,7725	41,7541	47,0177	49,8402	8,6507	12,3546
$E_3$ [GPa]	8,3226	8,4507	8,6484	9,3314	9,0345	9,3051
$G_{23}$ [GPa]	3,7253	3,5908	3,4065	3,2590	3,7995	3,9760
$G_{13}$ [GPa]	3,7894	3,5820	3,3803	3,4996	4,2384	4,0189
$G_{12}$ [GPa]	3,8425	3,8627	3,8771	3,9004	18,1994	20,0581
$\nu_{23}$	0,4539	0,4595	0,4418	-0,2125	-0,3396	0,0104
$\nu_{13}$	0,4389	0,3994	0,3391	0,3455	0,2068	0,0348
$\nu_{12}$	0,0449	0,0464	0,0490	0,0793	1,2524	0,7493
$\eta_{23,1}$	0,1918	0,8188	2,0255	-4,8642	9,6357	2,5867
$\eta_{13,1}$	4,2366	39,4602	99,3680	92,7951	9,2567	4,5699
$\eta_{12,1}$	0,0283	-0,9149	0,3062	2,5908	-0,1149	-0,0038
$\eta_{23,2}$	-4,2422	-39,6882	-100,2194	15,8419	0,6755	2,2757
$\eta_{13,2}$	-0,2461	-1,3371	-5,4070	-4,8729	0,7278	4,1926
$\eta_{12,2}$	-0,0775	-1,1278	0,5494	-0,5194	0,0094	-0,0046
$\eta_{23,3}$	0,2839	2,5395	5,7957	-0,6010	-1,0310	-1,1159
$\eta_{13,3}$	-0,2817	-2,5165	-5,6362	-4,7798	-1,0449	-2,0539
$\eta_{12,3}$	0,0042	-0,1345	-0,0572	-0,1149	0,0770	0,1497
$\mu_{13,23}$	0,0009	0,0018	-0,0046	-0,0415	-0,0486	0,0012
$\mu_{12,23}$	0,0034	0,0069	0,0016	-0,0613	0,6603	1,7009
$\mu_{12,13}$	0,0036	-0,0054	-0,0061	-0,0418	1,7364	0,7509

## 7 CONCLUSÕES

No presente trabalho, é apresentada uma metodologia numérica para auxiliar na análise do comportamento mecânico de materiais compósitos com microestrutura formada a partir do arranjo espacial de uma fase contínua de reforço, que pode ser entrelaçada segundo diferentes padrões. A estratégia computacional proposta consiste em criar modelos tridimensionais de geometrias relativamente detalhadas, envolvendo pelo menos duas fases, uma associada à matriz do material e a outra ao feixe de reforço. As configurações microestruturais estudadas são inspiradas nas tramas fundamentais de compósitos têxteis e nos entrelaçamentos decorrentes de processos automatizados de posicionamento contínuo de reforços, geralmente, realizados por movimentos sequenciais de avanço e de retorno.

Um problema de homogeneização dos compósitos heterogêneos é formulado no domínio da elasticidade linear, com hipótese de pequenas deformações. O comportamento constitutivo da fase que constitui a matriz é assumido como isotrópico, enquanto os feixes de reforço são transversalmente isotrópicos. Os dois constituintes são considerados homogêneos, em contato perfeito e com parâmetros materiais previamente conhecidos. Os detalhes da microestrutura são incorporados à resposta efetiva do material por meio de um procedimento de média volumétrica e com base nos argumentos físicos do Princípio de Hill-Mandel. As equações que governam o problema são solucionadas por aproximação numérica através do método dos elementos finitos, utilizando o software comercial ANSYS.

A metodologia é implementada através de um algoritmo desenvolvido na linguagem de programação do software de elementos finitos. A partir de parâmetros de entrada relacionados ao padrão de trama, comprimento de entrelaçamento e seção transversal dos feixes de reforço, da informação das propriedades dos materiais constituintes e da definição de um tamanho médio para o elemento finito, a rotina computacional constrói o modelo geométrico, discretiza o domínio, impõe condições de contorno predefinidas (segundo a teoria de homogeneização adotada), resolve o problema de valor do contorno, aplica o procedimento de homogeneização e calcula o tensor constitutivo efetivo para o material compósito microestruturado. Este algoritmo mostrou-se bastante eficiente uma vez que permitiu, com relativa flexibilidade, simular diversos casos. A validação das operações implementadas no código computacional é feita através de testes onde o

mesmo material homogêneo é atribuído para as duas fases do compósito, sendo obtidas como respostas as próprias propriedades informadas.

Como pré-requisito de uma análise de homogeneização adequada, a metodologia proposta é aplicada para determinar o domínio de um elemento de volume representativo (EVR) para o material compósito microestruturado com feixes de reforço organizados conforme o padrão do tecido plano. Busca-se um modelo com as mínimas dimensões suficientes para produzir uma resposta constante em termos das propriedades efetivas. Os resultados obtidos demonstram convergência dos valores e permitem estabelecer que o modelo contendo dez feixes de reforço em cada direção da trama é capaz de representar o comportamento mecânico da microestrutura de forma aproximadamente uniforme em escala macroscópica, produzindo propriedades efetivas estáveis. Referências na literatura corroboram os resultados atingidos.

Os ensaios numéricos realizados nos modelos contendo cinco feixes de reforço por direção de entrelaçamento, para as diferentes arquiteturas microestruturais, revelam um comportamento mecânico efetivo altamente anisotrópico e dependente do arranjo espacial. São obtidos resultados bem distantes daqueles que se pode intuir a partir de experiências prévias com materiais isotrópicos ou até mesmo ortotrópicos. São demonstrados fortes acoplamentos entre extensão e cisalhamento ocorrendo em diferentes planos e direções do material. Do ponto de vista de projeto de novos compósitos, estes resultados são muito interessantes. Com o auxílio de métodos de fabricação aditiva, em particular, da crescente tecnologia de impressão tridimensional, a topologia da microestrutura de materiais compósitos pode ser especificamente projetada para produzir um comportamento customizado, capaz de atender as mais diversas solicitações necessárias.

## 7.1 Perspectivas futuras

Em consequência dos desenvolvimentos realizados durante este estudo, algumas sugestões para trabalhos futuros são listadas a seguir:

- Realizar o procedimento de homogeneização aplicando a condição de contorno de tração homogênea, para comparar os resultados obtidos;
- Aprimorar a simulação em relação ao contato entre as fases, incluindo uma lei de atrito, ou modelar uma região de interface entre elas;

- Comparar os resultados obtidos através da simulação dos modelos tridimensionais estudados com trabalhos análogos que utilizam teorias de placa;
- Avaliar a resposta efetiva produzida quando há empilhamento de camadas com diferentes padrões de trama;
- Simular reforços contínuos com outras seções transversais, por exemplo, com geometria elíptica. Substituir a fase de reforço contínua por alguma fase descontínua, como inclusões e vazios;
- Validar os modelos numéricos através de testes experimentais.

## REFERÊNCIAS

- Aboudi, J., Arnold, S. M., Bednarczyk, B. A. **Micromechanics of Composite Materials: A Generalized Multiscale Analysis Approach**. Butterworth-Heinemann, 2013.
- Adumitroaie, A. e Barbero, E. J. Beyond plain weave fabrics – I. Geometrical model. **Composite Structures**, 2011: 1424–1432.
- ANSYS. **Academic Research Mechanical, APDL Guide**. ANSYS, Inc., 2016.
- Atkin, R. J. e Fox, N. **An introduction to the theory of elasticity**. Longman Group Ltd., 1980.
- Bakhvalov, N. S., e Panasenko, G. P. **Homogenization: Averaging Processes**. Kluwer Academic Publisher, 1989.
- Barbero, E. J. **Finite Element Analysis of Composite Materials Using ANSYS**. CRC press, 2014.
- Begis, D., Bestagno, A., Duvaut, G., Hassim, A., e Nuc, M. **A new method of computing global elastic moduli for composite materials**. Repports de Recherche, 1983.
- Bensoussan, A., Lions, J. L., e Papanicolaou, G. **Asymptotic analysis for periodic structures**. Elsevier North-Holland, 1978.
- Budiansky, B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1965: 223-227.
- Cox, B. N. e Flanagan, G. **Handbook of analytical methods for textile composites**. NASA Contractor Report 4750, Hampton, Virginia, USA, 1997.
- Crookston, J. J., Long, A. C., e Jones, I. A. A summary review of mechanical properties prediction methods for textile reinforced polymer composites. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications**, 2005: 91-109.
- Cui, T. J., Smith, D. R., Liu, R. **Metamaterials: Theory, Design, and Applications**. Springer, 2010.

Daggumati, S., Van Paepegem, W., Degrieck, J., Xu, J., Lomov, S. V., e Verpoest, I. Local damage in a 5-harness satin weave composite under static tension: Part II–Meso-FE modelling. **Composites Science and Technology**, 2010.

Dasgupta, A., Agarwal, R. K., e Bhandarkar, S. M. Three-dimensional modeling of woven-fabric composites for effective thermo-mechanical and thermal properties. **Composites Science and Technology**, 1996: 209-223.

de Souza Neto, E. A., Feijóo, R. A. **Variational Foundations of Multi-Scale Constitutive Models of Solid: Small and Large Strain Kinematical Formulation**. LNCC Research & Development Report 16, 2006.

de Souza Neto, E. A., Peric, D., e Owen, D. R. **Computational methods for plasticity: theory and applications**. John Wiley & Sons, 2011.

Drago, A., e Pindera, M. J. Micro-macromechanical analysis of heterogeneous materials: macroscopically homogeneous vs periodic microstructures. **Composites Science and Technology**, 2007: 1243-1263.

Elmarakbi, A. **Advanced composite materials for automotive applications: Structural integrity and crashworthiness**. John Wiley & Sons, 2014.

Engheta, N., Ziolkowski, R. W. **Metamaterials: physics and engineering explorations**. John Wiley & Sons, 2006.

Eshelby, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, 1957: 376-396.

Fonseca, J. S. O. **Design of microstructures of periodic composite materials**. Tese de Pós-Doutorado, The University of Michigan, 1997.

Frketic, J., Dickens, T., Ramakrishnan, S. Automated manufacturing and processing of fiber-reinforced polymer (FRP) composites: An additive review of contemporary and modern techniques for advanced materials manufacturing. **Additive Manufacturing**, 2017: 69-86.

Ghobadi, A. Common type of damages in composites and their inspections. **World Journal of Mechanics**, 2017: 24-33.

Ghosh, S. Adaptive concurrent multilevel model for multiscale analysis of composite materials including damage. **Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures**, 2008: 83-164.

Goh, G. D., Yap, Y. L., Agarwala, S., Yeong, W. Y. Recent progress in additive manufacturing of fiber reinforced polymer composite. **Advanced Materials Technologies**, 2019.

Gross, D., e Seelig, T. **Fracture mechanics: with an introduction to micromechanics**. Springer, 2017.

Guedes, J., e Kikuchi, N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1990: 143-198.

Harris, C. E., Starnes, J. H., Shuart, M. J. **An assessment of the state-of-the-art in the design and manufacturing of large composite structures for aerospace vehicles**. NASA/TM-2001-210844, Langley Research Center, Hampton, Virginia, 2001.

Hashin, Z. Analysis of composite materials - a survey. **Journal of Applied Mechanics**, 1983: 481-505.

—. The elastic moduli of heterogeneous materials. **Journal of Applied Mechanics**, 1962: 143-150.

Hashin, Z., e Shtrikman, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1963: 127-140.

Herakovich, C. T. Mechanics of composites: a historical review. **Mechanics Research Communications**, 2012: 1-20.

Hernandez-Moreno, H., Douchin, B., Collombet, F., Choqueuse, D., e Davies, P. Influence of winding pattern on the mechanical behavior of filament wound composite cylinders under external pressure. **Composites Science and Technology**, 2008: 1015-1024.

Hill, R. A self-consistent mechanics of composite materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1965: 213-222.

Hollister, S. J., e Kikuchi, N. Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue. **Biotechnology and Bioengineering**, 1994: 586-596.

Ito, M., e Chou, T. W. An analytical and experimental study of strength and failure behavior of plain weave composites. **Journal of Composite Materials**, 1998: 2-30.

JEC Group. **Overview of the global composites market – at the crossroads**. JEC Composites Strategic Study, 2017.

Jones, R. M. **Mechanics of composite materials**. CRC press, 1999.

Kabir, S. F., Mathur, K., Seyam, A. F. M. A critical review on 3D printed continuous fiber-reinforced composites: history, mechanism, materials and properties. **Composite Structures**, 2019.

Karathanasopoulos, N., Angelikopoulos, P., Papadimitriou, C., Koumoutsakos, P. Bayesian identification of the tendon fascicle's structural composition using finite element models for helical geometries. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2017: 744-758.

Kelly, A. (Ed.). **Concise encyclopedia of composite materials**. Elsevier, 2012.

Kouznetsova, V., Brekelmans, W. A. M., e Baaijens, F. P. T. An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. **Computational Mechanics**, 2001: 37-48.

Kurashiki, T., Nakai, H., Hirose, S., Imura, M., Zako, M., Verpoest, I., e Lomov, S. V. Trans Tech Publications. Mechanical behaviours for textile composites by FEM based on damage mechanics. **In Key Engineering Materials**, 2007: 257-260.

Lachenal, X., Daynes, S., Weaver, P. M. Review of morphing concepts and materials for wind turbine blade applications. **Wind Energy**, 2013: 283-307.

Lee, J. Y., An, J., Chua, C. K. Fundamentals and applications of 3D printing for novel materials. **Applied Materials Today**, 2017: 120-133.

Lekhnitsky, S. G. **Theory of Elasticity of an Anisotropic Body**. Moscou: Mir Publishers, 1981.

Lemaitre, J., e Chaboche, J. L. **Mechanics of solid materials**. Cambridge University Press, 1994.

Lomov, S. V., Gusakov, A. V., Huysmans, G., Prodromou, A., e Verpoest, I. Textile geometry preprocessor for meso-mechanical models of woven composites. **Composites Science and Technology**, 2000: 2083-2095.

Lomov, S. V., Huysmans, G., Luo, Y., Parnas, R. S., Prodromou, A., Verpoest, I., e Phelan, F. R. Textile composites: modelling strategies. **Composites Part A: applied science and manufacturing**, 2001: 1379-1394.

Long, A. C. **Design and manufacture of textile composites**. Elsevier, 2005.

Long, A. C., e Brown, L. P. Modelling the geometry of textile reinforcements for composites: TexGen. In **Composite Reinforcements for Optimum Performance**, 2011: 239-264.

Matveev, M. Y., e Long, A. C. Numerical modelling for predicting failure in textile composites. In **Numerical Modelling of Failure in Advanced Composite Materials**, 2015: 435-455.

Mazumdar, S. **Composites manufacturing: materials, product, and process engineering**. CRC press, 2001.

Mendonça, P. T. R. **Materiais compostos e estruturas-sanduíche: projeto e análise**. Orsa Maggiore, 2019.

Miravete, A. (Ed.). **3-D textile reinforcements in composite materials**. Woodhead Publishing, 1999.

Mouritz, A. P., Bannister, M. K., Falzon, P. J., e Leong, K. H. Review of applications for advanced three-dimensional fibre textile composites. **Composites Part A: applied science and manufacturing**, 1999: 1445-1461.

Mouritz, A. P., Gellert, E., Burchill, P., e Challis, K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines. **Composite Structures**, 2001: 21-42.

Nemat-Nasser, S., e Hori, M. **Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials**. Elsevier, 1993.

Prawoto, Y. Seeing auxetic materials from the mechanics point of view: a structural review on the negative Poisson's ratio. **Computational Materials Science**, 2012: 140-153.

Quan, Z., et al. Additive manufacturing of multi-directional preforms for composites: opportunities and challenges. **Materials Today**, 2015: 503-512.

Reda, H., Karathanasopoulos, N., Elnady, K., Ganghoffer, J. F., Lakiss, H. Mechanics of Metamaterials: An Overview of Recent Developments. **Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures**, 2018: 273-296.

- Reddy, J. N. **An introduction to continuum mechanics**. Cambridge University Press, 2013.
- . **An introduction to the finite element method**. McGraw-Hill, 2006.
- . **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis**, Second Edition. CRC Press, 2004.
- Ristinmaa, M., e Ottosen, N. S. **The Mechanics of Constitutive Modeling**. Elsevier Science, 2005.
- Sánchez-Palencia, E. **Non-homogeneous media and vibration theory**. Springer-Verlag, 1980.
- Schultz, J. A., e Garnich, M. R. Meso-scale and multicontinuum modeling of a triaxial braided textile composite. **Journal of Composite Materials**, 2013: 303-314.
- Smit, R. J. M., Brekelmans, W. A. M., e Meijer, H. E. H. Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1998: 181-192.
- Smith, G. F, e Rivlin, R. S. The Strain-Energy Function for Anisotropic Elastic Materials. **Transactions of the American Mathematical Society**, May 1958: 175-193.
- Smith, G. F., Smith, M., e Rivlin, R. S. Integrity bases for a symmetric tensor and a vector - The crystal classes. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, 1963: 93-133.
- Timoshenko, S., e Goodier, J. N. **Theory of Elasticity**. New York: McGraw-Hill Book Company. Inc. , 1951.
- Tita, V. **Contribuição ao estudo de danos e falhas progressivas em estruturas de material compósito polimérico**. Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos, 2003.
- Torquato, S., e Haslach, H. **Random heterogeneous materials: microstructure and macroscopic properties**. Springer Science+Business Media, 2002.
- Vasiliev, V. V., e Morozov, E. V. **Advanced mechanics of composite materials and structural elements**. Elsevier, 2013.
- Wang, Y., e Sun, X. Digital-element simulation of textile processes. **Composites Science and Technology**, 2001: 311-319.

Zhou, G.M., Sun, X.J., e Wang, Y.Q. Multi-chain digital element analysis in textile. **Composites Science and Technology**, 2004: 239-244.

Zohdi, T. I., e Wriggers, P. **An introduction to computational micromechanics**. Springer Science & Business Media, 2008.