

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Efeitos do carregamento cíclico da onda sobre
leitos marinhos vistos como meios poroelásticos
saturados**

João Paulo Chodacki Quiuqui

Porto Alegre
2021

JOÃO PAULO CHODACKI QUIUQUI

**EFEITOS DO CARREGAMENTO CÍCLICO DA ONDA SOBRE
LEITOS MARINHOS VISTOS COMO MEIOS
POROELÁSTICOS SATURADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Porto Alegre

2021

CIP - Catalogação na Publicação

Quiuqui, João Paulo Chodacki
Efeitos do carregamento cíclico da onda sobre
leitos marinhos porosos vistos como meios
poroelásticos saturados / João Paulo Chodacki Quiuqui.
-- 2021.
178 f.
Orientadores: Samir Maghous, Jorge Luis Palomino
Tamayo.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,
BR-RS, 2021.

1. Ondas marinhas. 2. Poroelasticidade. 3. Análise
Quase-Estática e Dinâmica. 4. Estabilidade de leito
marinho. I. Maghous, Samir, orient. II. Tamayo, Jorge
Luis Palomino, orient. III. Título.

JOÃO PAULO CHODACKI QUIUQUI

**EFEITOS DO CARREGAMENTO CÍCLICO DA ONDA
SOBRE LEITOS MARINHOS VISTOS COMO MEIOS
POROELÁSTICOS SATURADOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na área de concentração Estrutura, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 15 de março de 2021

Prof. Samir Maghous
Dr. pela École Nationale des Ponts et Chaussées
Orientador

Prof. Jorge Luis Palomino Tamayo
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande
do Sul
Orientador

Prof. Nilo Consoli
Ph.D. pela Concordia University, Canadá
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Profa. Denise Bernaud Maghous (UFRGS)
Dra. pela Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, França

Prof. Alexandre Luis Braun (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Antonio Marcos de Lima Alves (FURG)
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

Dedico o presente trabalho à minha mãe Tânia
e à meu pai Romildo, que foram os maiores
incentivadores para que este sonho se tornasse possível.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à meus orientadores, Professores Samir Maghous e Jorge Tamayo por toda a paciência em transmitir seus conhecimentos. Desde a primeira reunião presencial, até os encontros virtuais durante o período de isolamento social, vocês se fizeram presentes sempre dispostos a ajudar. Muito obrigado!

Agradeço à Jéssica Ribeiro, por todo apoio e compreensão durante todo o trabalho. Obrigado por estar sempre comigo desde os momentos de alegria até os mais difíceis. Você foi fundamental na construção deste trabalho.

Aos meus pais Tânia e Romildo, por sempre acreditarem em mim, e nunca terem medido esforços em ajudar. Sem o apoio de vocês, este trabalho não seria possível.

As minhas irmãs Sabina, Natália e Beatriz, que mesmo distante, sempre se fizeram presentes, obrigado pelo apoio de sempre.

Aos meus grandes amigos Martinho e Humberto, obrigado pela amizade sincera. Vocês sempre trouxeram alegria nos momentos mais complicados.

À banca examinadora, que dispuseram seu tempo para contribuir com seus conhecimentos, em especial ao meu ex-orientador professor Antonio Marcos de Lima Alves, por ainda no início da graduação, ter me apresentado esta temática.

À Marilei da Rocha, Valderes Ribeiro e toda suas famílias, por sempre terem me acolhido e ajudado na permanência em Porto Alegre.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), pelo auxílio financeiro que possibilitou a dedicação em tempo integral ao programa de pós graduação.

"Aquele que não é um bom aprendiz não será um bom mestre."

Platão

RESUMO

QUIUQUI, J. P. C. **Efeitos do carregamento cíclico da onda sobre leitos marinhos vistos como meios poroelásticos saturados.** 2021. 178p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Os fenômenos associados à interação dinâmica entre ondas e leitos marinhos porosos são objeto de intensas pesquisas ao redor do mundo. O assunto é de extrema importância para a análise da estabilidade de estruturas portuárias e *offshore*, taludes e dutos submarinos, por exemplo. No presente trabalho, modelos analíticos para representação das tensões, poropressão e deslocamentos induzidos por ondas em leitos marinhos porosos foram formulados, considerando estes últimos como meios poroelásticos saturados. O carregamento do solo marinho, descrito como a pressão dinâmica gerada pela propagação da onda, foi obtido através da teoria linear de ondas. Deu-se ênfase nas diferentes abordagens das equações governantes, tendo sido resolvido o problema quase-estático bem como o dinâmico, mostrando assim a relevância e limitação de uma análise quase-estática. A formulação analítica abordou, através de condições de contorno específicas, duas configurações geométricas distintas: camada de solo submarino com espessura finita e infinita. A análise dos resultados indica que a solução obtida para a configuração infinita fornece uma aproximação relevante do estudo poromecânico para solos submarinos com espessura menores que o comprimento da onda. Baseando-se nas soluções analíticas previamente desenvolvidas, um estudo paramétrico foi realizado para avaliar a influência de vários parâmetros relevantes do problema poromecânico. Em particular, este estudo preliminar indica que a espessura da lâmina de água e o coeficiente de permeabilidade são fatores fundamentais controlando a resposta poromecânica do solo submarino. A última parte da dissertação é dedicada a uma primeira abordagem da estabilidade de massas submarinas sob a ação do carregamento induzido pelas ondas, através da introdução de um critério de Mohr-Coulomb em tensões efetivas. No contexto do método estático da teoria da Análise Limite, as distribuições de tensões e poropressão obtidas em poroelasticidade são empregadas para formular uma condição suficiente para a estabilidade do maciço submarino. Ilustrações numéricas permitem identificar as superfícies onde o limite em cisalhamento é atingido, sugerindo falha potencial.

Palavras-chave: *Ondas marinhas; Poroelasticidade; Análise Quase-Estática e Dinâmica; Estabilidade de leito marinho.*

ABSTRACT

QUIUQUI, J. P. C. **Efeitos do carregamento cíclico da onda sobre leitos marinhos vistos como meios poroelásticos saturados.** 2021. 178p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

The phenomena associated with the dynamic interaction between waves and porous seabeds are the subject of intense research around the world. The subject is extremely important for the analysis of the stability of port and offshore structures, slope and submarine pipelines, for example. In the present work, analytical models for the representation of stress, pore pressure and displacements induced by waves in porous seabeds were formulated, considering the latter as saturated poroelastic media. The loading of the marine soil, described as the dynamic pressure generated by the wave propagation, was obtained through linear wave theory. Emphasis was placed on the different approaches to the governing equations, having solved the quasi-static as well as the dynamic problem, thus showing the relevance and limitation of a quasi-static analysis. The analytical formulation approached, through specific boundary conditions, two distinct geometric configurations: submarine soil layer with finite and infinite thickness. The analysis of the results indicates that the solution obtained for the infinite configuration provides a relevant approximation of the poromechanical study for submarine soils with thickness smaller than the wavelength. Based on the analytical solutions previously developed, a parametric study was carried out to evaluate the influence of several relevant parameters of the poromechanical problem. In particular, this preliminary study indicates that the thickness of the water depth and the permeability coefficient are fundamental factors controlling the poromechanical response of submarine soil. The last part of the study is dedicated to a first approach to the stability of subsea masses under the action of wave-induced loading, through the introduction of a Mohr-Coulomb criterion in effective stress. In the context of the static method of Limit Analysis theory, the stress and pore pressure distributions obtained in poroelasticity are used to formulate a sufficient condition for the stability of the marine sediment. Numerical illustrations allow to identify the surfaces where the shear limit is reached, suggesting potential failure.

Keywords: *Marine waves; Poroelasticity; Quasi-Static and Dynamic analysis; Seabed stability.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Deformação elástica do solo marinho durante a passagem de uma onda progressiva.	29
Figura 2 – Esquema representativo dos dois mecanismos de poropressão (residual e oscilatória).	31
Figura 3 – Deformação elástica do solo marinho durante a passagem de uma onda progressiva: (a) Estado do solo não carregado, (b) Pressão transferido ao solo com o carregamento e (c) Deformação do solo após o carregamento.	32
Figura 4 – Tensões de cisalhamento e suas deformações associadas no solo durante a propagação de uma onda.	33
Figura 5 – Distribuições típicas da dissipação do excesso de poropressão com a profundidade na cava de uma onda. (a) Solo saturado e (b) Solo não saturado.	33
Figura 6 – Liquefação momentânea causada por ondas.	34
Figura 7 – Parâmetros característicos da onda de água.	40
Figura 8 – Tensões normais e tangenciais em cubo elementar de fluido	42
Figura 9 – Cubo elementar de fluido.	44
Figura 10 – Esquema representativo dos eixos de orientação adotados na solução da teoria linear de ondas.	48
Figura 11 – Esquema representativo da superfície livre η com a passagem de uma onda progressiva.	55
Figura 12 – Desenho esquemático das componentes da pressão ao longo da coluna de água durante a passagem de uma onda progressiva	57
Figura 13 – Ilustração dos perfis de ondas.	59
Figura 14 – Limites de validade das teorias de ondas.	59
Figura 15 – Fases que compõem o meio poroso.	60
Figura 16 – Esquema representativo dos eixos de orientação.	76
Figura 17 – Distribuição vertical da amplitude adimensional do excesso de poropressão, deslocamentos e tensões efetivas ao longo da profundidade adimensional (λz).	84
Figura 18 – Razão entre o excesso de poropressão da solução que considera a compressibilidade do fluido pela solução que o desconsidera.	85
Figura 19 – Excesso de poropressão induzida pela onda, ao longo da profundidade em camadas de solo com diferentes espessuras d . (a) - Presente solução e (b)- Resultados obtidos numericamente por Gatmiri (1990)	89
Figura 20 – Variação dos perfis verticais de tensões efetivas, deslocamentos e excesso de poropressão adimensionalizados induzidos pela onda para diferentes razões d/L e para a variação espacial x	90
Figura 21 – Excesso de poropressão induzida pela onda ao longo da profundidade.	91

Figura 22 – Diferença relativa no excesso de poropressão para solo de espessura finita e infinita ao longo de z	92
Figura 23 – Diferença relativa entre deslocamentos para solo de espessura finita e infinita ao longo de z ; Linha contínua - $2G\lambda/p_0(u_{x\infty} - u_x d)$, Linha tracejada - $2G\lambda/p_0(u_{z\infty} - u_z d)$	92
Figura 24 – Diferença relativa nas tensões efetivas calculadas com formulações para solo de espessura finita e infinita ao longo da profundidade para diferentes valores da razão d/L	93
Figura 25 – Regime de propagação de ondas para os pontos em estudo.	102
Figura 26 – Distribuição vertical da amplitude máxima das respostas induzida por ondas em areia grossa. (a) - Excesso de poropressão, (b) - Tensão efetiva vertical e (c) - Tensão cisalhante.	103
Figura 27 – Distribuição vertical da amplitude máxima das respostas induzida por ondas em areia fina. (a) - Excesso de poropressão, (b) - Tensão efetiva vertical e (c) - Tensão cisalhante.	104
Figura 28 – Dados experimentais obtidos por Tzang (1998) em comparação com o presente estudo.	105
Figura 29 – Variação espacial das respostas induzidas para um coeficiente de permeabilidade $k = 10^{-2} m/s$: (a) espessura da camada de solo $d = L$, (b) $d = 0,5L$ e (c) $d = 0,25L$	106
Figura 30 – Variação espacial das respostas induzidas para um coeficiente de permeabilidade $k = 10^{-4} m/s$: (a) espessura da camada de solo $d = L$, (b) $d = 0,5L$ e (c) $d = 0,25L$	107
Figura 31 – Comparação entre os resultados obtidos por Wang et al. (2018) e o presente estudo.	110
Figura 32 – Distribuição vertical da aceleração do esqueleto, da derivada da velocidade relativa e do termo gradiente desprezado para solos com espessura infinita: (a) direção x e (b) direção z	111
Figura 33 – Distribuição vertical da aceleração do esqueleto, da derivada da velocidade relativa e do termo gradiente desprezado para solos com espessura finita: (a) direção x e (b) direção z	112
Figura 34 – Solução com espessura infinita: distribuição vertical do termo desprezado.	113
Figura 35 – Solução com espessura finita: distribuição vertical do termo desprezado.	114
Figura 36 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica para $d/L = 0,5$: (a) Excesso de poropressão, (b) Tensão efetiva horizontal, (c) Tensão efetiva vertical e (d) Tensão cisalhante.	115
Figura 37 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de k para espessura de solo infinita.	119

Figura 38 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de k para espessura de solo $d/L = 0,25$	120
Figura 39 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de G para espessura de solo infinita.	121
Figura 40 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de G para espessura de solo $d/L = 0,25$	122
Figura 41 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de v para espessura de solo infinita.	123
Figura 42 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de v para espessura de solo $d/L = 0,25$	124
Figura 43 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de h para espessura de solo infinita.	127
Figura 44 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de h para espessura de solo $d/L = 0,25$	128
Figura 45 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de T para espessura de solo infinita.	129
Figura 46 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de T para espessura de solo $d/L = 0,25$	130
Figura 47 – Diferença relativa em % das respostas induzida entre as soluções quase-estática e dinâmica para o período de onda $T = 5s$. (a) - Solo com espessura infinita, (b) - Solo com espessura finita $d = 0,25L_0$	132
Figura 48 – Diferença relativa em % das respostas induzida entre as soluções quase-estática e dinâmica para o período de onda $T = 10s$. (a) - Solo com espessura infinita, (b) - Solo com espessura finita $d = 0,25L_0$	133
Figura 49 – Diferença relativa em % das respostas induzida entre as soluções quase-estática e dinâmica para o período de onda $T = 15s$. (a) - Solo com espessura infinita, (b) - Solo com espessura finita $d = 0,25L_0$	134
Figura 50 – Diferença relativa em % das respostas induzida entre as soluções quase-estática e dinâmica para o período de onda $T = 20s$. (a) - Solo com espessura infinita, (b) - Solo com espessura finita $d = 0,25L_0$	135
Figura 51 – Geometria do modelo e condições de carregamento.	138
Figura 52 – Esquema representativo das tensões verticais desenvolvidas ao longo da coluna de solo.	142
Figura 53 – Regime de propagação de ondas para os pontos de estudo para a aplicação da estabilidade de massas submarinas.	144
Figura 54 – Zonas de ruptura por cisalhamento do ponto P7.1.	144
Figura 55 – Zonas de ruptura por cisalhamento do ponto P7.2.	145
Figura 56 – Zonas de ruptura por cisalhamento do ponto P7.3.	145
Figura 57 – Zonas de ruptura por cisalhamento do ponto P7.4.	146

Figura 58 – Estado de tensão em $x = 0$ considerando a rotação dos eixos principais. . . .	147
Figura 59 – Zonas de ruptura considerando as soluções quase-estática e dinâmica para $G = 10^8 Pa$	148
Figura 60 – Zonas de ruptura considerando as soluções quase-estática e dinâmica no caso em que há distinção entre as soluções: (a) $d = 0,25L$, (b) $d = 0,5L$, (c) $d = 0,75L$ e (d) $d = 1L$	149

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Possíveis soluções para a Equação de Laplace usando o artifício da separação de variáveis	52
Tabela 2 – Parâmetros do solo e da onda utilizados para resposta poroelástica em camada de solo de espessura finita.	88
Tabela 3 – Parâmetros de entrada para a verificação da solução analítica considerando solos com espessura infinita.	101
Tabela 4 – Parâmetros de entrada para os exemplos numéricos da solução dinâmica para solos com espessura finita.	108
Tabela 5 – Parâmetros de entrada para a verificação da solução analítica para solos com espessura finita.	109
Tabela 6 – Parâmetros de entrada para os exemplos numéricos para o estudo dos efeitos dinâmicos.	114
Tabela 7 – Parâmetros de entrada para os exemplos numéricos da análise de sensibilidade e diferença relativa entre as soluções.	116
Tabela 8 – Parâmetros de entrada para os exemplos numéricos da estabilidade de massas submarinas.	143
Tabela 9 – Pontos de estudo para os exemplos numéricos da estabilidade de massas submarinas.	143
Tabela 10 – Valores típicos do módulo de elasticidade de solos E	177
Tabela 11 – Valores típicos do coeficiente de Poisson de solos ν	177
Tabela 12 – Valores típicos do coeficiente de permeabilidade de solos k	178
Tabela 13 – Valores típicos do índice de vazios do solo e	178

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equação Diferencial Ordinária
HPP	Hipótese das pequenas perturbações
PPGEC	Programa de pós graduação em Engenharia Civil
$u-p$	Deslocamento e poropressão
\star^d	Resposta induzida pela onda referente a solução dinâmica
\star^{q-s}	Resposta induzida pela onda referente a solução quase-estática
ZEE	Zona econômica exclusiva

LISTA DE SÍMBOLOS

Notação

a	Escalar
\mathbf{a}	Vetor
$\underline{\underline{a}}$	Tensor de segunda ordem
\tilde{a}	Tensor de quarta ordem

Operadores

\det	Operador determinante
∇F $\text{grad } f$	Operador gradiente de uma grandeza F
$\text{Div } F$ $\text{div } F$	Operador divergente de uma grandeza F
\exp	Operador exponencial
$\text{div}(\text{grad}(F))$ ∇^2 Δ	Operador Laplaciano
$\nabla \times F$ $\text{rot } F$	Operador rotacional de F
$\dot{\mathbf{a}} = d\mathbf{a}/dt$	Derivada material de a
$\partial a / \partial x$	Derivada parcial de a em relação a x
$ \mathbf{a} $	Módulo do vetor \mathbf{a}
F^T	Operador transposto de F
$\text{tr } a$	Operador traço de a
$a^{-1} = 1/a$	Operador inverso de a

Letras Romanas Maiúsculas

A, B, C	Matrizes da Equação (6.10)
A_{ijk}	Constantes definidas no Anexo (D)
C_n	Constantes complexas definidas em (5.49)

$C_{un}, C_{wn}, C_{xn}, C_{zn}, C_{tn}$	Constantes complexas definidas no Anexo (B)
D_j	Constantes da solução analítica dinâmica para espessura finita
E	Módulo de elasticidade transversal do solo
$\underline{\underline{F}}$	Tensor gradiente da transformação
$F_{un}, F_{wn}, F_{xn}, F_{zn}, F_{tn}$	Constantes complexas definidas no Anexo (B)
G	Módulo de cisalhamento do solo
G'	Constante definida em (3.74)
G_s	Energia potencial termodinâmica
H	Altura da onda
H_0	Altura da onda em águas profundas
J	Jacobiano da deformação
K	Módulo de compressibilidade do esqueleto
K_f	Módulo de compressibilidade do fluido
L	Comprimento de onda
M	Constante definida pela Equação (4.64)
N_{biot}	Módulo de Biot
L_0	Comprimento de onda em águas profundas
Q	Carregamento no solo marinho
R	Matriz dos coeficientes com componentes r_{kj} com $k = 1, 2, 3$ para solos com espessura infinita e $k = 1, \dots, 6$ para solos com espessura finita
T	Período da onda
\mathbf{T}	Densidade de força de superfície
$\mathbf{T}^f, \mathbf{T}^s$	Forças de superfície relacionada ao fluido e ao esqueleto, respectivamente
$T(t)$	Função de variável única em t
$U(x), U(z)$	Funções deslocamentos dos sólidos nas direções x e z , respectivamente, dependentes somente da variável z
U_r	Parâmetro de Ursell

$\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$	Vetor velocidade do fluido e suas componentes (Capítulo 3)
\mathbf{V}^f	Vetor velocidade da partícula do fluido (Capítulo 4)
\mathbf{V}^r	Vetor velocidade relativa entre as partículas do fluido e do esqueleto
\mathbf{V}^s	Vetor velocidade da partícula do esqueleto
\mathbf{X}	Vetor material infinitesimal
$X(x)$	Função de variável única em x
$Z(z)$	Função de variável única em z

Letras Romanas Minúsculas

a_x	Aceleração na direção x
a_j, b_j, c_j, d_j	Constantes da solução dinâmica
a_j^∞	Constantes da solução dinâmica para solos com espessura infinita
$\underline{\underline{b}}$	Tensor de Biot
c_{un}, c_{wn}, c_{pn}	Constantes definidas em Anexo (A)
$c(t)$	Função arbitrária dependente somente do tempo
d	Espessura da cama de solo
e	Índice de vazios do solo
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	Componentes normais aos eixos cartesianos
$f(\underline{\underline{\sigma}}')$	Critério de resistência do solo em tensões efetivas
$\mathbf{f}_{int}^{\rightarrow\pi}$	Força de volume que diz respeito à força de interação macroscópica exercida por um meio contínuo sobre o outro, onde π assume f para o fluido e s para o esqueleto
$f_{un}, f_{wn}, f_{xn}, f_{zn}, f_{tn}$	Constantes definidas em Anexo (A)
g	Aceleração da gravidade
\mathbf{g}	Vetor densidade de força de volume e suas componentes
\mathbf{g}_f	Vetor densidade de força de corpo do fluido
\mathbf{g}_s	Vetor densidade de força de corpo do esqueleto

h	Profundidade da lâmina de água
$i^2 = -1$	Identidade dos números complexos
k	Coefficiente de permeabilidade com unidade $[m/s]$
k_0, k_p	Coefficiente de empuxo em repouso e coeficiente de empuxo passivo do solo, respectivamente
k_{pe}	Coefficiente de permeabilidade com unidade $[m^3 \cdot m / (N \cdot s)]$, onde $k_{pe} = k / \gamma_f$
m	Massa de um volume qualquer
m_f	Massa fluida Lagrangeana
\mathbf{n}	Vetor unitário normal a uma superfície qualquer
p	Pressão do fluido (Capítulo 3) ou poropressão (Capítulos 4,5 e 6)
\bar{p}	Distribuição de poropressão total ao longo do solo marinho
$p_{onda}(x, t)$	Função da pressão dinâmica gerada pela onda no fundo marinho
$p_H(z)$	Função da pressão hidrostática ao longo da coluna de água
$p_r(x, z, t)$	Função da pressão resultante ao longo da coluna de água
p_d	Poropressão total resultante da soma da pressão gerada pela onda e da pressão hidrostática
p_0	Amplitude da pressão dinâmica no fundo marinho
\mathbf{q}	Vetor filtração
s_1, s_2, s_3	Constantes definidas pelas equações (6.16)
t	Variável tempo
$\mathbf{u} = (u_x, u_z)$	Vetor deslocamento do esqueleto nas direções x e z , respectivamente
\mathbf{x}	Vetor material infinitesimal após a deformação
x, y, z	Sistema de eixos cartesianos
\mathbf{w}	Vetor de fluxo relativo de massa fluida Euleriana

Letras Gregas Maiúsculas

Δ_{ij}	Componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange
---------------	--

Φ_f	Dissipação volumétrica associada ao escoamento do fluido
Φ_s	Dissipação volumétrica associada ao esqueleto
Φ_{th}	Dissipação volumétrica associada ao gradiente de temperatura
Ψ_s	Densidade de energia livre do esqueleto Lagrangeana
Ω	Constante arbitrária obtida a partir da solução da Equação de Laplace
Ω_0	Volume inicial do material
Ω_t	Volume atual do material

Letras Gregas Minúsculas

α_n, β_n	Parte real e imaginária das constantes C_n definidas no Anexo (B)
γ	Peso específico do meio poroso
γ_f	Peso específico do fluido (água)
δ_{ij}	Componentes do tensor delta de Kronecker
γ^f	Aceleração do fluido
γ^r	Aceleração relativa entre o fluido e o esqueleto
γ^s	Aceleração dos sólidos
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tensor de deformações linearizadas
\in	Dilatação volumétrica do meio
\in_s	Dilatação volumétrica do esqueleto
$\eta(x, t)$	Deslocamento vertical da superfície livre do mar
λ	Número de onda
λ_j	Constantes com $j = 1, \dots, 6$ definida em (6.22)
λ'	Raiz da equação diferencial ordinária dada pela Equação (5.23)
λ'_1, λ'_2	Parte real e imaginária da Equação (5.23)
λ_{Lame}	Coefficiente de Lamé
μ_f	Viscosidade dinâmica do fluido

μ_s	Módulo de cisalhamento do esqueleto
ν	Coefficiente de Poisson
ν_f	Viscosidade cinemática do fluido
ξ	Vetor deslocamento (Capítulo 3)
π_{ij}	Componentes de tensor de tensões de Piola-Kirchoff
ρ	Massa específica do meio poroso
ρ_f	Massa específica do fluido
ρ_s	Massa específica do esqueleto
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tensor de tensões
$\underline{\underline{\sigma}}'$	Tensor de tensões efetivas
$\underline{\underline{\bar{\sigma}}}$	Tensor de tensões totais
$\underline{\underline{\sigma}}'$	Tensor de tensões efetivas totais
$\bar{\sigma}'_1, \bar{\sigma}'_3$	Tensões principais
$\bar{\sigma}'_x = \bar{\sigma}'_H, \bar{\sigma}'_z = \bar{\sigma}'_V$	Tensões efetivas instantânea horizontal x e vertical z , respectivamente
$\underline{\underline{\sigma}}^\gamma$	Campo de tensões referente ao carregamento geostático do solo
$\underline{\underline{\sigma}}^{\gamma_f}$	Campo de tensões referente a pressão hidrostática
ν_1, ν_2	Constantes definidas pelas equações (6.17) e (6.18), respectivamente
φ	Constante dada pela Equação (3.65) (Capítulo 3) ou Porosidade Euleriana (Capítulos 4,5 e 6)
ϕ	Função potencial de velocidade (Capítulo 3) ou Porosidade Lagrangeana (Capítulos 4,5 e 6)
ψ	Ângulo de atrito instantâneo do círculo de Mohr
ψ_f	Ângulo de atrito interno do solo
ω	Frequência angular da onda
ω_t	Velocidade angular do escoamento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	24
1.1	RELEVÂNCIA DO TEMA	24
1.2	OBJETIVOS	26
1.3	DELIMITAÇÕES	26
1.4	DELINEAMENTO	27
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	27
2	RESPOSTA DO SOLO INDUZIDA POR ONDAS MARINHAS	29
2.1	INSTABILIDADE GERADA POR ONDAS MARINHAS	29
2.1.1	Ruptura por cisalhamento	29
2.1.2	Erosão	30
2.1.3	Liquefação	30
2.1.3.1	Liquefação residual	30
2.1.3.2	Liquefação momentânea	31
2.2	MODELOS TEÓRICOS	32
2.2.1	Modelo Desacoplado	33
2.2.2	Modelo de Adensamento	35
2.2.2.1	Solução analítica direta	35
2.2.2.2	Aproximação por camada limite	36
2.2.2.3	Modelos numéricos	37
2.2.3	Modelos Dinâmicos	38
2.2.3.1	Modelo Aproximado $u-p$	38
2.2.3.2	Modelo Geral	39
3	MODELAGEM DE ONDAS MARINHAS	40
3.1	INTRODUÇÃO	40
3.2	EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DO FLUIDO	41
3.2.1	Balço de momento	41
3.2.2	Balço de massa	43
3.2.3	Equação de Laplace	45
3.2.4	Equação de Bernoulli	46
3.3	O PROBLEMA DA ONDA DE ÁGUA	47
3.3.1	Generalidades	47
3.3.2	Definição do Problema	48
3.3.3	Condições de Contorno	48
3.3.4	Solução do Problema	50
3.4	CARREGAMENTO DA ONDA DO MAR	55
3.5	VALIDADE DA TEORIA LINEAR DE ONDAS	57

4	FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DO MEIO POROSO	60
4.1	DESCRIÇÃO DO MEIO POROSO	60
4.2	CONSERVAÇÃO DA MASSA FLUIDA	61
4.3	LEI DE CONDUÇÃO DE DARCY	62
4.4	CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO	63
4.4.1	Hipótese das forças locais	63
4.4.2	Balço de momento	63
4.4.3	Teorema da resultante dinâmica	64
4.4.4	O tensor de tensões	64
4.4.5	Equação do movimento	64
4.4.6	Tensores de tensões parciais	65
4.4.7	Conservação da quantidade de movimento do fluido	66
4.5	TERMODINÂMICA DO MEIO POROSO	67
4.6	COMPORTAMENTO POROELÁSTICO	68
4.6.1	Esqueleto poroelástico	68
4.6.1.1	Incompressibilidade da matriz e a tensão efetiva	69
4.6.1.2	Esqueleto poroelástico linear e isotrópico	69
4.6.2	Equação constitutiva do fluido	70
4.6.3	Equação constitutiva do material poroso	71
4.7	FORMULAÇÃO BASEADA NO MÉTODO DESACOPLADO	71
4.7.1	Escoamento incompressível	71
4.7.2	Escoamento compressível	72
4.8	CONSIDERAÇÃO DOS TERMOS INERCIAIS NAS EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS	72
5	RESPOSTA POROELÁSTICA INDUZIDA POR ONDAS - SOLUÇÃO QUASE-ESTÁTICA	74
5.1	EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS	74
5.2	CONDIÇÕES DE CONTORNO	76
5.3	SOLUÇÃO ANALÍTICA	77
5.4	SOLUÇÃO DO PROBLEMA	80
5.4.1	Camada de solo infinita	80
5.4.1.1	Escoamento incompressível	82
5.4.1.2	Efeito da compressibilidade do escoamento	83
5.4.2	Camada de solo finita	84
5.4.3	Comparação entre as soluções de solos com espessura infinita e finita	90
6	RESPOSTA POROELÁSTICA INDUZIDA POR ONDAS - SOLUÇÃO DINÂMICA	94
6.1	EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS	94
6.2	SOLUÇÃO ANALÍTICA	95

6.3	SOLUÇÃO DO PROBLEMA	100
6.3.1	Camada de solo infinita	100
6.3.1.1	Verificação da solução analítica - solos com espessura infinita	101
6.3.2	Camada de solo finita	103
6.3.2.1	Verificação da solução analítica - solos com espessura finita .	108
6.4	ANÁLISE DOS TERMOS DESPREZADOS	109
6.5	EFEITOS DINÂMICOS	113
6.5.1	Efeitos dos parâmetros na resposta poromecânica	115
6.6	DOMÍNIO DE APLICAÇÃO DAS SOLUÇÕES DINÂMICA E QUASE-ESTÁTICA	131
7	ANÁLISE SIMPLIFICADA DA ESTABILIDADE DE MASSAS SUBMARINAS	137
7.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ESTABILIDADE	137
7.1.1	Modo do carregamento	137
7.1.2	Critério de resistência	139
7.1.3	Definição do problema de estabilidade	139
7.1.4	Abordagem estática	140
7.2	APLICAÇÕES	142
7.2.1	Abordagem simplificada para análise de estabilidade	146
7.2.2	Efeito dos termos inerciais na análise de estabilidade	148
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	151
8.1	CONCLUSÕES	151
8.2	RECOMENDAÇÃO PARA TRABALHOS FUTUROS	152
	Referências	154
	Anexos	161
	ANEXO A COEFICIENTES REAIS DA SOLUÇÃO QUASE-ESTÁTICA PARA SOLOS COM ESPESSURA INFINITA	162
	ANEXO B COEFICIENTES REAIS DA SOLUÇÃO QUASE-ESTÁTICA PARA SOLOS COM ESPESSURA FINITA	164
	ANEXO C COEFICIENTES DA SOLUÇÃO QUASE-ESTÁTICA PARA SOLOS COM ESPESSURA FINITA DE JENG (2012)	167
	ANEXO D COEFICIENTES DA SOLUÇÃO DINÂMICA PARA SOLOS COM ESPESSURA FINITA	172
	ANEXO E VALORES TÍPICOS DOS PARÂMETROS DO SOLO	177

1 INTRODUÇÃO

1.1 RELEVÂNCIA DO TEMA

O Brasil possui uma das maiores faixas costeiras do mundo, se estendendo entre a foz do Rio Oiapoque, no Amapá e o Chuí, no Rio Grande do Sul. A Zona Marinha tem início na região costeira e compreende a plataforma continental marinha e a Zona Econômica Exclusiva – ZEE, estendendo-se até 200 milhas a partir da costa. Os recursos advindos da Zona Marinha, como o petróleo e seus derivados, têm gerado grandes riquezas, justificando os investimentos em infraestrutura nessas áreas. Além de estruturas *offshore* necessárias à exploração de recursos, a proteção dos ambientes costeiros e zonas portuárias são vitais para o desenvolvimento do país. Estruturas marinhas como quebra-mares, molhes e espigões são comumente adotados para tal proteção.

Quando uma estrutura costeira é instalada em ambientes marinhos, sua presença altera os padrões de escoamento em sua vizinhança imediata. A condição de escoamento ao redor da estrutura não afeta apenas a força da onda que atua na estrutura, mas também induz a instabilidade do fundo do mar. A primeira tem sido a principal preocupação no dimensionamento de estruturas costeiras, no entanto, esta última envolve as fundações, dado que pode haver ruptura por liquefação ou erosão nas proximidades da estrutura (JENG, 2012). Por consequência, a proteção das estruturas *offshore* tem atraído a atenção crescente de engenheiros geotécnicos e costeiros marinhos nos últimos anos.

A principal razão para o interesse neste problema é que blocos de concreto nas extremidades das estruturas de proteção marinhas foram encontrados abaixo da interface água-solo, com a liquefação induzida por ondas sendo identificada como a principal causadora do fenômeno (CHRISTIAN et al., 1974; SMITH; GORDON, 1983; SILVESTER; HSU, 1989; LUNDGREN H.; ROMHILD, 1989). É bem documentado na literatura vários outros exemplos de liquefação de solos marinhos, dentre os quais, Christian et al. (1974) e Herbich et al. (1984) relataram incidentes onde oleodutos ascenderam à superfície do solo durante tempestades.

A flutuação de oleodutos é apenas uma das possíveis consequências da liquefação do solo ao redor do duto (DAMGAARD et al., 2006). Quando um oleoduto é mais leve do que o solo, haverá a flutuação para a superfície do fundo do mar, ficando exposto às forças das ondas e das correntes, bem como aos impactos de objetos caídos, colisão de redes de arrasto, entre outros. Já em casos onde o oleoduto é mais pesado do que o solo circundante, a liquefação do fundo do mar fará com que o tubo afunde. Dutos submarinos podem ser protegidos através de uma cobertura rochosa (SUMER et al., 2002), onde havendo a liquefação do solo, a estrutura de proteção

pode afundar. Em casos de oleodutos projetados a permanecerem assentados na superfície do solo, o fenômeno da liquefação pode ocasionar o afundamento de parte do duto, estando outras partes expostas à ação de ondas e correntes, que podem gerar grandes movimentos verticais e horizontais do oleoduto.

A ocorrência de instabilidade do fundo do mar é um fenômeno generalizado em ambientes oceânicos (SILVESTER; HSU, 1993). Há evidências de instabilidade do fundo do oceano em uma ampla variedade de regiões costeiras e oceânicas, desde águas rasas, zonas próximas à costa, encostas continentais até leitos oceânicos profundos. Portanto, a instabilidade do fundo do mar tem sido responsável por danos e destruição de estruturas *offshore* (BARENDS; SPIERENBURG, 1991; BEA et al., 1983; CHRISTIAN et al., 1974).

Falhas de estruturas marítimas durante ou imediatamente após as tempestades atraíram a preocupação de engenheiros e pesquisadores. A partir de estudos recentes, muitos pesquisadores concordaram que as instabilidades de taludes submarinos na plataforma continental e na encosta são causadas pela ação das ondas. Grandes ondas em águas rasas e intermediárias produzem variações da pressão na interface água-solo. Essas variações de pressão, por sua vez, podem causar cargas cíclicas agindo na superfície do sedimento e, finalmente, gerar excesso de pressão de água dos poros dentro da camada de sedimento. O acúmulo de pressão nos poros do solo afetará, sem dúvida, na estabilidade do fundo do mar e desempenhará um papel importante no possível movimento de deslizamento subsequente (TSUI; HELFRICH, 1983).

A instabilidade de massas submarinas não é um fenômeno exclusivo de terrenos submarinos com grandes inclinações. Prior e Coleman (1978) detectaram formas de relevo no delta subaquático do Mississippi com ângulos muito baixos. Com base nesses registros, perturbações subaquáticas no fundo foram encontradas. Essas perturbações ocorrem em águas rasas e em encostas com inclinações de 0,01 a -0,45 graus, onde a morfologia das feições indicou um processo de movimento de massa submarina (XU et al., 2009; PRIOR; COLEMAN, 1978).

Deste modo, os fenômenos associados à propagação de ondas em leito marinho poroso requer atenção especial em projetos de estruturas costeiras e *offshore*. Ao propagar-se em zonas costeiras, as ondas geram um campo de pressões dinâmicas oscilatórias ao longo da coluna de água, que por sua vez induzem variações de tensões efetivas e poropressão do solo abaixo. O excesso de poropressão, em conjunto com a redução da tensão efetiva vertical, pode resultar na instabilidade ou em condições de liquefação de parte do solo. Além disso, o solo liquefeito suspende as partículas do solo, que sob a ação de ondas e correntes, acarreta o transporte de sedimentos.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é determinar as respostas do solo marinho poroso perante a propagação de ondas progressivas, considerando a abordagem quase-estática e dinâmica das equações fundamentais. Como objetivos secundários, pode-se citar:

1. Conferir as soluções analíticas, para a abordagem quase-estática e dinâmica, disponíveis na literatura;
2. Traçar limites de validade entre as duas abordagens propostas;
3. Avaliar a inclusão dos termos de aceleração do fluido e do solo na resposta induzida por ondas de forma analítica considerando na solução duas situações, solos com espessura finita e infinita;
4. Analisar a estabilidade de massas submarinas de acordo com as formulações descritas, considerando o critério de ruptura de Mohr-Coulomb;

1.3 DELIMITAÇÕES

O fundo marinho está exposto constantemente a ondas. Existem diversos modelos que representam a variação da superfície do mar e do carregamento transferido ao solo. Neste sentido, a formulação adotada neste estudo se limita à **Teoria Linear de Ondas**, por este modelo abranger um razoável limite de validade conforme será apresentado na Seção (3.5).

As ondas marinhas, por influência do fundo, tendem a chegar de forma paralela à costa. Porém, a existência de uma parede vertical, um quebra mar ou algum outro obstáculo natural, pode resultar na reflexão de parte da onda incidente. Nestes casos, existirão duas direções de propagação de onda, sendo necessário que o problema de resposta induzida por ondas seja tratada de forma tridimensional. Neste estudo, não serão consideradas mais de uma direção predominante de propagação de ondas, possibilitando o tratamento do problema de forma **bidimensional**.

A resposta induzida pela propagação de ondas são os deslocamentos, tensões e excesso de poropressão. Entende-se excesso de poropressão, aquele que é gerado exclusivamente pelo carregamento da onda. Esta última, se manifesta de duas formas diferentes: poropressão residual (ocasionada pelo acúmulo progressivo da pressão dos poros a cada ciclo de onda) e poropressão oscilatória (variação instantânea da pressão dos poros). Dos mecanismos mencionados, será abordado neste trabalho somente a parcela de **poropressão oscilatória**, sendo gerada e dissipada instantaneamente, segundo comportamento típico de areias.

Durante uma tempestade severa, as ondas marinhas podem ter alturas elevadas, ocasionando deformações de grandes magnitudes no solo. Neste sentido, um modelo poro-elastoplástico em

grandes deformações representaria de maneira mais adequada os efeitos no solo. No entanto, neste estudo serão analisadas somente situações em pequenas deformações adotando um modelo **poro-elástico linear**.

Não é incomum a presença de solos não saturados em ambiente marinho já que a saturação em sedimentos marinhos varia de 0,9 a 1 (JENG, 2012). Porém, o presente estudo está baseado na hipótese de solo completamente **saturado**, ou seja, o fluido preenche totalmente os poros somente com água sem a presença de gás.

É de interesse procurar refletir as condições em que ocorre a ruptura de massas submarinas, sendo assim, o critério de ruptura de **Mohr-Coulomb** é adotado neste trabalho.

1.4 DELINEAMENTO

O trabalho foi realizado através das seguintes etapas:

1. Revisão bibliográfica dos modelos que representam a resposta do solo marinho induzido por ondas;
2. Pesquisa do carregamento gerado por ondas marinhas e estudo dos meios porosos;
3. Restabelecer a solução analítica do modelo quase-estático de resposta induzida por ondas para solos com espessura finita e infinita;
4. Restabelecer a solução analítica do modelo dinâmico de resposta induzida por ondas para solos com espessura finita e infinita;
5. Definir os intervalos de validade das soluções quase-estática e dinâmica;
6. Estabelecer zonas de ruptura através do critério de Mohr-Coulomb considerando, para isso, as soluções propostas;
7. Organização e análise dos resultados;
8. Conclusões e recomendações;

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O presente trabalho está organizado em oito capítulos, onde o primeiro, já apresentado, tratou da introdução do tema, os objetivos, as delimitações do estudo, bem como o delineamento. Nos demais capítulos, pode-se destacar os seguintes conteúdos:

Capítulo 2: Neste capítulo, são apresentadas as respostas induzida por ondas e seus efeitos no solo marinho. São definidas as instabilidades que podem ser causadas pela indução de poro-pressão, deslocamentos e tensões, assim como a ruptura por cisalhamento, erosão e liquefação. Também é apresentado o estado da arte em ordem cronológica dos principais trabalhos realizados nesta temática realizando, ainda quando possível, contraponto entre os autores.

Capítulo 3: No capítulo 3, é definido o carregamento gerado pela onda e transferido para o fundo marinho. Uma breve revisão das equações fundamentais do fluido é feita com o propósito de definir matematicamente o problema de ondas marinhas. A partir da linearização das equações, a solução é particularizada para a denominada *Teoria Linear de Ondas*, no qual é obtido o carregamento, neste caso, a pressão dinâmica a ser aplicada no solo marinho. A validade desta teoria também é discutida.

Capítulo 4: Neste capítulo, são apresentadas as equações fundamentais do meio poroso, onde é apresentada uma formulação para a solução quase-estática, assim como a consideração dos termos inerciais nas equações fundamentais tendo-se, portanto, a solução dinâmica.

Capítulo 5: A resposta poroelástica induzida pela onda do mar no maciço de material granular é apresentada neste capítulo. Após a apresentação das equações fundamentais do problema, são consideradas duas condições de solução de acordo com a espessura da camada de solo: infinita e finita. Soluções analíticas apresentadas na literatura para o caso quase-estático são verificadas, discutidas e utilizadas para determinação das grandezas envolvidas, permitindo identificar diferenças significativas entre os resultados obtidos para os casos já mencionados.

Capítulo 6: Em complemento ao capítulo anterior, as equações fundamentais acrescidas dos termos inerciais, são consideradas aqui, nas mesmas condições do capítulo anterior. Os resultados obtidos aqui, são confrontados com aqueles de outros autores, assim como com dados experimentais quando possível. Os efeitos da inclusão dos termos inerciais nas equações fundamentais são discutidos em detalhe, traçando intervalos de validade para as soluções quase-estática e dinâmica.

Capítulo 7: Neste capítulo, a análise de estabilidade do solo marinho é realizada considerando o critério de ruptura de Mohr-Coulomb. Exemplos dos capítulos anteriores são reanalisados visando detectar sinais de falha potencial. A inclusão dos efeitos inerciais nas respostas também é estudada.

Capítulo 8: Por fim, são apresentados os resultados finais, bem como sugestões para trabalhos futuros.

2 RESPOSTA DO SOLO INDUZIDA POR ONDAS MARINHAS

2.1 INSTABILIDADE GERADA POR ONDAS MARINHAS

Em geral, a instabilidade do leito marinho induzido por ondas tem sido classificada em três mecanismos: Ruptura por cisalhamento, Erosão e Liquefação (RAHMAN, 1991; RAHMAN, 1998; SUMER; FREDSE, 1999; SUMER et al., 2002).

2.1.1 Ruptura por cisalhamento

As rupturas por cisalhamento são causadas por tensões cisalhantes, as quais, em algum ponto dentro do sedimento marinho, induzidas por forças de gravidade e tempestades, podem ser significativas o suficiente para superar a resistência ao cisalhamento do solo, resultando em instabilidade do fundo do mar. Este tipo de instabilidade pode produzir um movimento horizontal de sedimentos (JENG, 2012).

Considerando o equilíbrio do momento estático em uma superfície de deslizamento de arco circular abaixo de uma onda estacionária (Figura 1), Henkel (1970) demonstrou que o excesso de poropressão em um dado instante é suficiente para causar falha por cisalhamento em sedimentos moles subconsolidados. Henkel (1970) fundamentou seus cálculos usando dados de força de sedimentos no delta do Mississippi e sugere que, sob uma sequência natural de ondas progressivas, uma sequência de deslizamentos de arco circular resultaria em um movimento descendente progressivo do sedimento (MITCHELL et al., 1972).

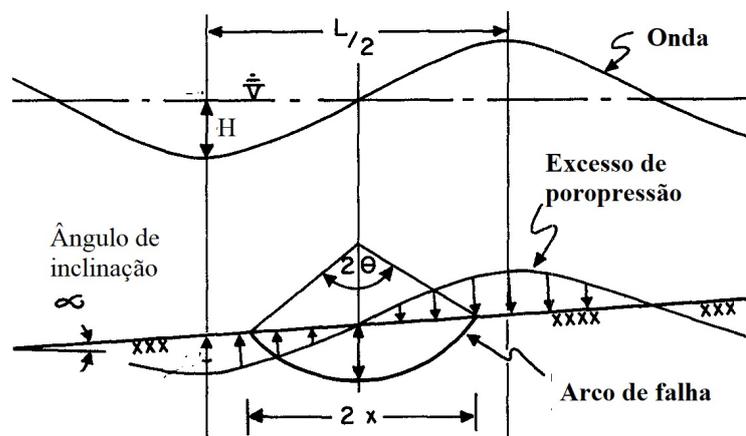


Figura 1 – Deformação elástica do solo marinho durante a passagem de uma onda progressiva.

Fonte: Modificado de Henkel (1970).

2.1.2 Erosão

A presença de uma estrutura construída em ambiente marítimo altera o padrão de escoamento na vizinhança, resultando em um ou mais dos seguintes fenômenos: a contração do fluxo; a formação de um vórtice em frente à estrutura; a formação de vórtices (com ou sem desprendimento) atrás da estrutura; a geração de turbulência; a ocorrência de reflexão e difração de ondas; a ocorrência de quebra de onda; e as diferenças de pressão no solo que podem produzir liquefação, permitindo que os sedimentos sejam transportados por correntes. Estas alterações geralmente causam um aumento na capacidade local de transporte de sedimentos, que leva à erosão (SUMER et al., 2001).

A erosão ocorre onde o sedimento é erodido de uma área do fundo do mar em resposta à força das ondas e correntes. O rebaixamento do nível do leito do mar, em relação a alguma cota de equilíbrio obtido anteriormente, ocorre devido ao transporte de sedimentos acarretado pela instalação de uma estrutura ou devido a alteração no formato do fundo marinho. Whitehouse (1998) classificou o fenômeno da erosão causada por ondas em erosão local, como por exemplo, aquelas que ocorrem em uma única estaca, e em erosão global, como ocorre em um conjunto de estacas, com deposição e movimento do formato do leito marinho de maneira generalizada.

2.1.3 Liquefação

Solos marinhos estão constantemente expostos a ação de ondas. O fenômeno da liquefação está associado diretamente com ondas longas, que podem compreender períodos de 5 a 15 s, com alturas de 1 a 2 m em áreas costeiras e 10 a 20 m em zonas *offshore* para períodos de retorno de 50 a 100 anos (SUMER, 2014). A liquefação em solos marinhos induzida por ondas está associada a dois mecanismos diferentes (Figura 2): aumento da pressão nos poros relacionada a liquefação residual (poropressão residual representada pela linha contínua) e ao gradiente de pressão vertical abaixo da cava da onda (poropressão oscilatória) relativa à liquefação momentânea (SUMER, 2014; ZEN; YAMAZAKI, 1990a). Deve-se entender que a linha oscilatória na Figura (2) representa as parcelas de poropressão residual e oscilatória somadas.

2.1.3.1 Liquefação residual

O fundo do mar mostrado na Figura (3a), no caso de uma onda progressiva, sofrerá variações periódicas de pressão (Figura 3b). A porção do solo imediatamente abaixo da crista da onda sofrerá um processo de compressão, já a porção de solo abaixo da cava será expandido. Portanto, a interface água-solo estará aproximadamente 180° defasada com a elevação da superfície da água. Isso resultará na geração de tensões cisalhantes, variando periodicamente no tempo, conforme a onda se propaga (Figura 3c).

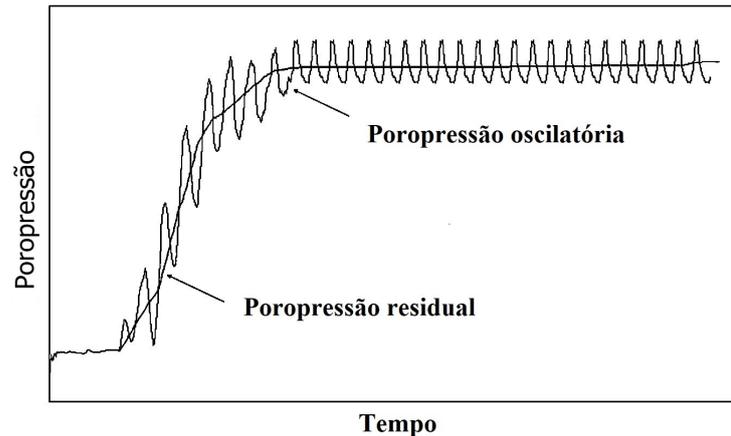


Figura 2 – Esquema representativo dos dois mecanismos de poropressão (residual e oscilatória).

Fonte: Modificado de Jeng (2012).

Em sedimentos pouco compactos, as tensões cisalhantes e as deformações associadas irão reorganizar gradualmente os grãos do solo (Figura 4). Ao propagar-se, a onda causará um efeito de pressurização nos poros rearranjados, onde, por consequência, em solos não drenados ocorrerá o aumento da poropressão. Conforme a ação progressiva das ondas, o excesso de poropressão continuará a se acumular (SUMER, 2014).

Durante esse acúmulo progressivo, a pressão da água dos poros pode atingir níveis que podem exceder o valor da tensão total. Nesta última situação, a tensão efetiva de anula, e em solos sem coesão os grãos do solo se tornarão desatados e completamente livres, de forma que o solo começará a se comportar como um fluido.

2.1.3.2 Liquefação momentânea

A liquefação momentânea ocorre abaixo da cava da onda, onde o excesso de poropressão p (em relação à pressão hidrostática) tem um sinal negativo (Figura 3b). Portanto, a distribuição de pressões ao longo do perfil do leito marinho é o esquematizado na Figura (5a), para um solo completamente saturado. No caso de solo não saturado, os vazios do solo contêm alguma quantidade de ar/gás e, portanto, a poropressão é dissipada rapidamente (Figura 5a) (SUMER, 2014).

Quando uma onda propaga-se sobre o leito poroso, uma força ascendente significativa pode ser gerada no topo da camada de solo durante a passagem do cavado da onda. Se essa força de ascensão exceder uma força igual ao peso submerso do solo, ocorrerá a liquefação momentânea, e a poropressão associada é chamada de poropressão oscilatória (Figura 6).

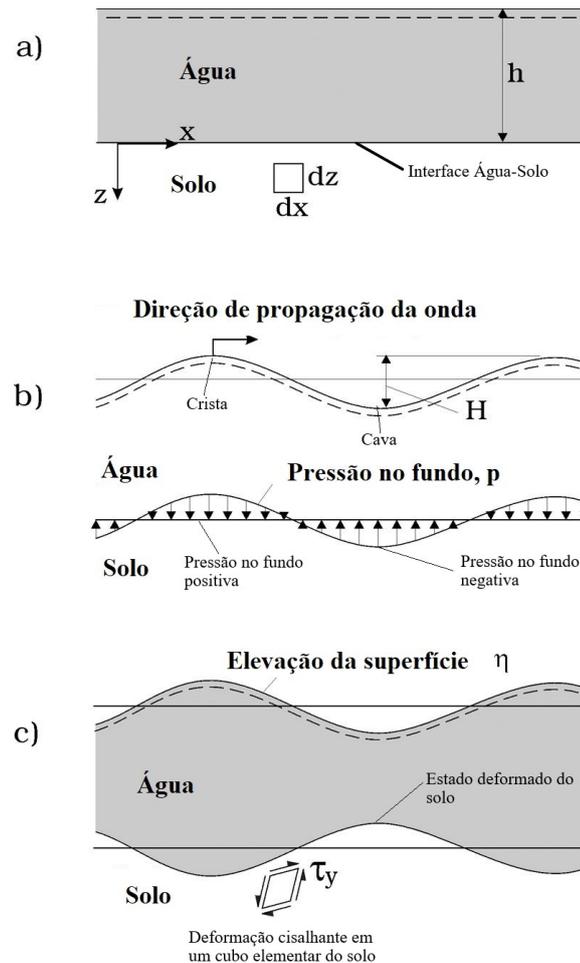


Figura 3 – Deformação elástica do solo marinho durante a passagem de uma onda progressiva: (a) Estado do solo não carregado, (b) Pressão transferido ao solo com o carregamento e (c) Deformação do solo após o carregamento.

Fonte: Modificado de Sumer (2014).

2.2 MODELOS TEÓRICOS

Recentemente, inúmeros trabalhos têm sido desenvolvidos para a melhor compreensão da resposta induzida por ondas em leitos marinhos porosos. A maior razão para o crescente interesse nesta área são os inúmeros danos em estruturas costeiras e *offshore* causadas pela resposta do fundo marinho induzida por ondas e não pela falha da estrutura per se (CHRISTIAN et al., 1974; SMITH; GORDON, 1983; SILVESTER; HSU, 1989; LUNDGREN H.; ROMHILD, 1989). Numerosos modelos teóricos foram desenvolvidos para representar a resposta induzida por ondas, eles são (JENG, 2012): Modelo Desacoplado (ou Modelo Drenado), Modelo de Adensamento (ou Modelo Quase-estático) e Modelo Dinâmico.

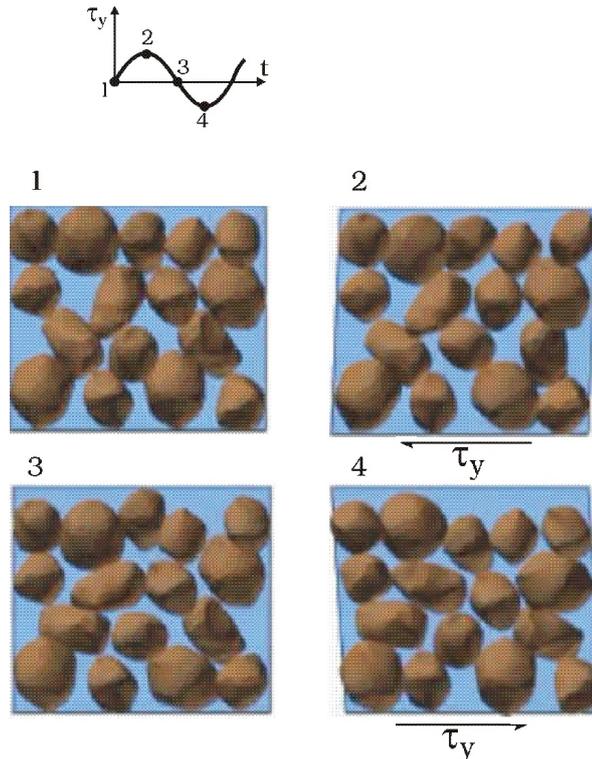


Figura 4 – Tensões de cisalhamento e suas deformações associadas no solo durante a propagação de uma onda.

Fonte: Modificado de Sumer (2014).

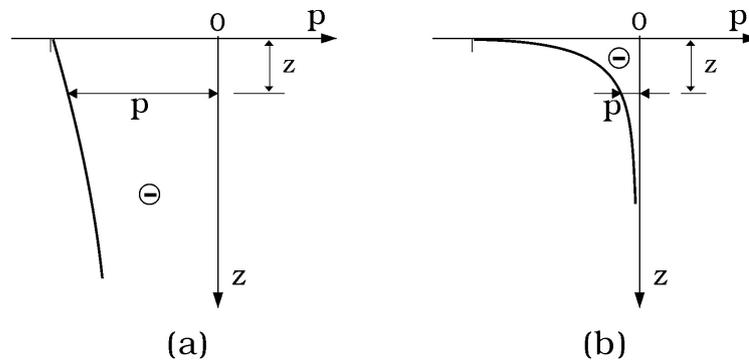


Figura 5 – Distribuições típicas da dissipação do excesso de poropressão com a profundidade na cava de uma onda. (a) Solo saturado e (b) Solo não saturado.

Fonte: Modificado de Sumer (2014).

2.2.1 Modelo Desacoplado

O Modelo Desacoplado foi uma das primeiras aproximações para o problema de interação onda-solo marinho. Neste modelo, o solo e o fluido são considerados incompressíveis, além disso, os termos de aceleração devidos ao movimento de ambos são negligenciados. Nestas condições, a equação fundamental do problema se torna a Equação de Laplace, e ao incluir a compressibilidade do fluido, tem-se a Equação da Difusão como equação fundamental. Uma vez que estas equações apresentam soluções analíticas bem desenvolvidas, a maioria das investigações prévias com

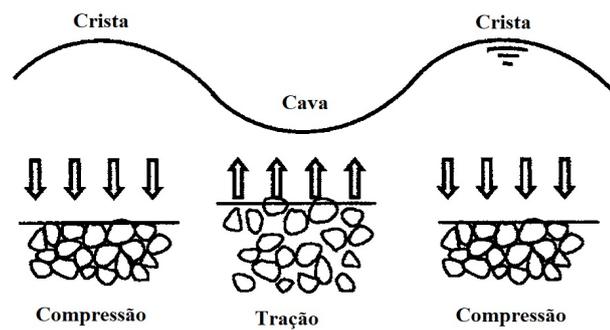


Figura 6 – Liquefação momentânea causada por ondas.

Fonte: Modificado de Groot et al. (2006).

essas suposições é constituída por aproximações analíticas.

Neste modelo, não é possível o acoplamento do movimento do fluido e do solo, portanto há dois tipos de equações fundamentais: Equação de Laplace para fluido incompressível ou a Equação de Difusão para fluido compressível. No entanto, essas soluções são limitadas a um caso particular de condições de solo e ondas, ou seja, a Equação de Laplace é utilizada para leitos muito permeáveis, como areia grossa, enquanto a Equação de Difusão é utilizada para leitos pouco permeáveis, como argila. Além disso, essas abordagens não fornecem informações para as tensões efetivas e deslocamentos do solo no fundo do mar (JENG, 2012).

Putnam (1949) apresentou uma solução considerando o leito marinho rígido, finito, composto de areia em condições de isotropia quanto à permeabilidade e o fluido considerado incompressível. O problema foi tratado como bidimensional, sendo empregada a teoria linear de ondas. Foi concluído que ocorreu uma perda significativa de energia das ondas na presença de um fundo marinho poroso devido à percolação viscosa do fluido. A percolação foi ativada pela variação da pressão na interface entre o leito marinho e a água. Assim como Putnam (1949), Sleath (1970) apresentou um estudo que considerou o leito marinho com espessura finita, porém a permeabilidade do meio foi tratada como anisotrópica. Foram realizados ainda, experimentos em laboratório para verificar os resultados analíticos.

Mallard e Dalrymple (1977) apresentaram uma solução analítica para ondas de gravidade propagando-se sobre um fundo deformável. Em sua solução, foi pressuposto que a água tem profundidade constante subjacente a um solo perfeitamente elástico de profundidade infinita com um módulo de elasticidade transversal representativo de todo o sedimento marinho. Foram negligenciados os efeitos da inércia do solo na resposta induzida. Dawson (1978) incluiu no modelo de Mallard e Dalrymple (1977) os efeitos inerciais e concluiu que seus efeitos não devem ser ignorados em casos de solos incompressíveis. Moshagen e Torum (1975) e Nakamura et al. (1973) propuseram um modelo que considera o fluido compressível e o meio poroso como indeformável. A equação fundamental é, portanto, a Equação da Difusão para pressão nos poros.

2.2.2 Modelo de Adensamento

O Modelo de Adensamento ou Modelo Quase-estático, é baseado na suposição da compressibilidade do fluido e do solo, porém, os termos de aceleração do fluido e do solo são negligenciados. Este modelo tem sido desenvolvido desde os anos 70. A metodologia se dá pela solução das equações fundamentais de três formas diferentes (JENG, 2012): solução analítica direta, aproximação por camada limite e solução numérica.

2.2.2.1 Solução analítica direta

O problema de interação onda-solo marinho é baseado nas equações de adensamento de Biot, sendo resolvidas diretamente obtendo-se as equações do deslocamento, poropressão e tensões efetivas. As primeiras aproximações deste modelo foram desenvolvidas por Yamamoto (1977), Yamamoto (1978) e Madsen (1978), nas quais foi assumido o fluido e o meio poroso como compressíveis. A teoria tridimensional de adensamento de Biot (1941) é adotada, juntamente com a Equação de Armazenamento de Verruijt (1969), onde são investigados os efeitos no leito marinho poroso causados por ondas progressivas bidimensionais e lineares.

Yamamoto (1978) analisou os efeitos induzido por ondas em um meio poroso hidraulicamente isotrópico com espessura de solo infinita. Foi considerado um meio não saturado, sendo particularizado ainda para a condição de solos saturados. Os resultados teóricos foram comparados com dados experimentais, obtidos em tanque de ondas, nos quais foi observada uma boa concordância. Yamamoto (1978) determinou alguns limites em sua solução: na ocasião em que a razão entre o módulo de elasticidade transversal e o módulo de compressibilidade do fluido tende a valores próximos a zero (ou para solos muito permeáveis), os resultados são muito próximos à solução de Putnam (1949), que resolveu a Equação de Laplace. Já em situações em que a razão entre o módulo de elasticidade transversal e o módulo de compressibilidade do fluido tende a valores muito grandes, sua solução se aproximou a aquelas desenvolvidas por Moshagen e Torum (1975) e Nakamura et al. (1973), tendo estes resolvido a Equação de Difusão.

Madsen (1978) investigou os efeitos no meio poroso causados pela propagação de ondas bidimensionais introduzindo, através da Lei de Darcy, o conceito de anisotropia da permeabilidade do solo marinho. Foi concluído que a inclusão da condição de anisotropia quanto à permeabilidade exerce maiores efeitos nas tensões efetivas do meio poroso para solos com granulometria mais grossa, especialmente em caso de solos saturados.

Yamamoto (1981) propôs um modelo semi analítico aproximando um leito não homogêneo por muitas camadas de solos homogêneos, cada uma das quais com diferentes características geotécnicas, realizando ainda verificações através de dados de observações no Delta do Mississipi sobre ação de ondas de tempestade. Os resultados numéricos indicaram que as ondas da tempestade induziram um deslizamento submarino contínuo que se estende até 9 m do topo da camada de

solo.

Okusa (1985) usou a equação de compatibilidade em condições elásticas e reduziu a equação fundamental de Yamamoto (1978) para uma equação diferencial linear de quarta ordem. Foi observado que a pressão dos poros induzida pelas ondas e as tensões efetivas consistiam em duas partes: a primeira dependia apenas das características das ondas e a segunda estava relacionada tanto ao sedimento quanto às características das ondas. Foi pontuado que para um fundo marinho totalmente saturado e isotrópico com espessura infinita e o fluido considerado incompressível, a resposta do solo induzida dependia apenas das condições das ondas e não das características do solo. No entanto, essa conclusão é inválida para um fundo marinho isotrópico de espessura finita, mesmo sob uma condição do meio saturado (GATMIRI, 1990; JENG; HSU, 1996). Rahman et al. (1994) desenvolveram um método semi-analítico para a análise da resposta do fundo do mar sob ação das ondas. Neste modelo, foi considerado o meio poroso como não homogêneo sendo, proposta ainda, uma camada de proteção do leito marinho.

Alguns estudos também foram realizados considerando a anisotropia transversal, caracterizada por um material que possui as mesmas propriedades em qualquer direção horizontal mas propriedades diferentes na direção vertical (PICKERING, 1970). Neste sentido, Jeng e Hsu (1996) e Jeng (1997) apresentaram uma solução analítica para resposta induzida por ondas em leito marinho considerando os efeitos da anisotropia transversal. Os resultados numéricos mostraram que a solução convencional, com a hipótese do comportamento isotrópico do solo, pode superestimar o excesso de poropressão, e portanto subestimar as tensões efetivas. A consideração do comportamento anisotrópico transversal do solo é particularmente importante na determinação dos deslocamentos do solo induzidos por ondas. Yuhi e Ishida (1997) apresentaram uma aproximação que considera a anisotropia transversal do solo juntamente com a anisotropia da permeabilidade.

2.2.2.2 Aproximação por camada limite

A solução analítica direta das equações fundamentais para a resposta induzida por ondas em meio poroso são matematicamente complicadas. Em casos em que o problema envolve delimitação da camada de solo, há um aumento da complexidade matemática da solução, sendo ainda impossível a solução fechada para solos estratificados. Neste contexto, Mei e Foda (1981) propuseram a solução por aproximação da camada limite. O princípio é a divisão do domínio do solo em região interna (perto da superfície do fundo do mar, definida pela espessura da camada limite) e região externa. Na região interna é necessária a solução completa, por outro lado, a solução simplificada é suficiente para a região externa. Esta abordagem concorda bem com o modelo proposto por Yamamoto (1977) para condições em que o solo é composto por areia fina, no entanto, em condições de solos não saturados ou areias grossas em condições saturadas há perdas de precisão (YAMAMOTO, 1977).

Huang e Song (1993) aplicaram a metodologia da aproximação por camada limite para um problema de uma onda de pequena amplitude, propagando-se em um canal de profundidade constante, com um leito poroelástico horizontal de espessura infinita. A solução geral é obtida e são definidos cinco parâmetros físicos, para o escoamento do meio poroso. O primeiro desses parâmetros físicos representa a rigidez relativa do sólido e do fluido, o segundo representa a penetrabilidade, enquanto os outros três revelam o número de *Mach* de duas ondas longitudinais e uma onda transversal do meio poroso, quando a penetrabilidade é baixa. Diversos outros trabalhos adotaram a solução para resposta do meio poroso induzida por ondas, dentre eles estão Sumer e Cheng (1999), Kitano e Mase (1999) e Song e Huang (2000).

2.2.2.3 Modelos numéricos

Métodos numéricos, incluindo o Método de Diferenças Finitas, Método dos Elementos Finitos e Método do Elementos de Contorno, são outro tipo de aproximação que gera resultados numéricos em pontos discretos para a resposta do solo induzida pelas ondas e instabilidade do fundo do mar (JENG, 2012).

Por exemplo, Magda (1990) e Zen e Yamazaki (1990a, 1990b) empregaram o Método de Diferenças Finitas. Magda (1990) desenvolveu um modelo unidimensional para areias saturadas, onde foi concluído que a fase temporal na geração de pressão é dominada pelo grau de saturação, compressibilidade do esqueleto e permeabilidade do solo. Zen e Yamazaki (1990a, 1990b) apresentaram a equação fundamental de pressão nos poros com verificação dos resultados com um modelo físico, onde obteve-se uma boa concordância.

Gatmiri (1990) desenvolveu um modelo simplificado em elementos finitos baseado em tensões efetivas para estudar a poropressão no solo induzida por ondas em leito marinho saturado e permeável. Foram investigados os efeitos da espessura do leito marinho, permeabilidade e rigidez do solo na poropressão induzidas pelas ondas, tensões normais efetivas, tensões de cisalhamento, deslocamento horizontal e vertical. Posteriormente, Gatmiri (1992) estendeu o modelo para um condição de anisotropia transversal do solo, onde foi constatado que o efeito da anisotropia transversal dos parâmetros do solo afeta significativamente a resposta induzida por ondas. Thomas (1995, 1989) apresentou um modelo cujas equações fundamentais de escoamento e deformações, foram discretizadas no espaço vertical unidimensional utilizando o Método dos Elementos Finitos. O resultado apresentado concordou muito bem com os modelos já apresentados por Yamamoto (1978), Madsen (1978) e Okusa (1985).

Outros modelos também foram desenvolvidos através do Método dos Elementos Finitos na forma unidimensional. Dentre eles, Jeng e Lin (1996) apresentaram um modelo de elementos finitos para a resposta do solo induzida por ondas em um fundo marinho poroso, com permeabilidade variável e módulo de cisalhamento em função da profundidade da camada porosa, sendo ainda o solo considerado não saturado e hidraulicamente anisotrópico, sujeito a um carregamento

tridimensional de ondas de crista curta. Adicionalmente, Lin e Jeng (1996) apresentaram uma formulação de elementos finitos usando uma combinação de técnicas semi-analíticas e o procedimento de Galerkin para avaliar a resposta induzida por ondas tridimensionais. Mais tarde, Jeng e Lin (1997) investigaram a resposta do fundo do mar induzida por ondas marinhas não lineares com permeabilidade variável, assim como o módulo de cisalhamento, em um domínio tridimensional. Com base em um modelo numérico de resposta induzido por ondas bidimensionais, Lin e Jeng (1997) avaliaram a instabilidade do fundo marinho juntamente com o critério de falha de Mohr Coulomb.

Liao et al. (2015) apresentaram um modelo numérico integrado para poropressão induzida por ondas em sedimentos marinhos. Foram considerados dois mecanismos de poropressão induzidas por ondas, onde os componentes elásticos representam a parcela oscilatória e os componentes plásticos a parcela residual. Foi avaliado também a contribuição do excesso de poropressão na geração de zonas de liquefação no solo arenoso. O modelo proposto em geral concordou bem com os experimentos de ondas e testes de centrífuga.

A vantagem dos modelos unidimensionais acima mencionados é o baixo custo computacional. No entanto, esses modelos não podem ser aplicados em casos em que o objeto de análise seja a interação entre o solo-onda-estrutura. Assim, um modelo bidimensional de elementos finitos foi proposto por Lin e Jeng (2000). Da mesma forma, Zhao et al. (2017) desenvolveram um modelo numérico integrado tridimensional para investigar a resposta induzida por ondas progressivas em torno de uma fundação. Tal modelo da resposta induzida por ondas, assim como o modelo de Liao et al. (2015), consistiu em dois mecanismos de geração de poropressão: poropressão oscilatória e poropressão residual.

2.2.3 Modelos Dinâmicos

2.2.3.1 Modelo Aproximado $u-p$

O modelo de aproximação $u-p$, que tem como variáveis primárias de campo o deslocamento da fase sólida u e a poropressão p , foi proposto por Zienkiewicz et al. (1980) baseado na teoria poroelástica de Biot (1956a, 1956b). Zienkiewicz et al. (1980) propuseram em seu modelo que os termos de aceleração do movimento do fluido sejam desprezados, sendo parte da solução somente a aceleração do solo.

Sakai e Mase (1988) examinaram os efeitos inerciais do fluido e do solo nos deslocamentos, poropressão e tensões efetivas induzidos por ondas. A solução foi obtida, através de um modelo numérico de elementos finitos, incluindo os termos de aceleração na aproximação da camada limite de Mei e Foda (1981). Mais tarde, Sakai et al. (1991) modificaram a aproximação da camada limite para levar em conta o efeito da tensão de cisalhamento induzida pelas ondas, que não pode ser negligenciada na zona de arrebentação das ondas.

2.2.3.2 Modelo Geral

Assim como a aproximação $u-p$, os modelos dinâmicos consideram na solução os termos de aceleração do solo incorporando ainda os efeitos inerciais do fluido. Jeng e Rahman (2001) e Cha et al. (2002) investigaram os efeitos do comportamento dinâmico do solo na poropressão induzida por ondas lineares e tensões efetivas no fundo do mar poroso. As soluções de Jeng e Rahman (2001) e Cha et al. (2002) são de natureza bidimensional e as equações fundamentais foram resolvidas analiticamente, sendo realizado ainda, a comparação dos resultados da solução dinâmica com o modelo quase estático e de aproximação $u-p$. Jeng e Cha (2003) consideraram em sua solução analítica os efeitos da não linearidade das ondas. Baseado na aproximação por camada limite, Chen et al. (1997), Hsieh et al. (2001) e Huang e Song (1993) desenvolveram uma série de soluções analíticas para ondas propagando-se sobre um leito marinho poro-elástico, considerando ondas lineares e não lineares.

Baseado nas equações fundamentais propostas por Mei e Foda (1981), Yuhi e Ishida (1998) apresentaram a solução geral para os efeitos induzido por ondas em leitos marinhos porosos homogêneos e com espessura infinita. São apontadas dois tipos de ondas compressivas e uma de cisalhamento ao longo da coluna de solo. A solução é particularizada e compatibilizada com o modelo de Yamamoto (1978). Posteriormente, Jeng e Lee (2001) estenderam esta solução para o caso de solos marinhos com espessura finita.

3 MODELAGEM DE ONDAS MARINHAS

3.1 INTRODUÇÃO

Todo corpo de água sob a ação dos ventos e pressão atmosférica está sujeito a sofrer ações de ondas em sua superfície. Essas ondas são as manifestações das forças que agem sobre o fluido tendendo a deformá-lo contra a gravidade e a tensão superficial, que atuam de forma a manter a superfície nivelada. Assim, para que ocorra propagação de ondas, deve existir uma força capaz de gerar a perturbação no fluido, como uma rajada de vento ou impacto de um objeto na superfície da água, capaz de criar a onda. Após sua criação, forças gravitacionais e a tensão superficial fazem com que a onda se propague pela superfície do corpo de água (DEAN; DALRYMPLE, 1991).

Do ponto de vista matemático, não há uma única solução para todos os tipos de ondas de superfície. Portanto, um aspecto importante são os limites de validade de cada solução respeitando as simplificações adotadas. A principal dificuldade nas soluções de ondas de superfície está relacionada a sua fronteira superior ou superfície livre que, por sua vez, é uma das variáveis a serem determinadas.

Em um sistema de coordenadas Euleriano um problema de onda de superfície geralmente envolve três incógnitas: a elevação da superfície livre, a pressão (que geralmente é conhecida na superfície livre) e a velocidade da partícula. Uma vez que um método geral de solução não está disponível, diversas hipóteses simplificadoras são feitas, as quais se aplicam a casos particulares. Em geral, o método de solução que é usado depende dos efeitos não lineares, isto é, da importância relativa dos termos de inércia convectivos com respeito ao termo de inércia local. Ao invés de lidar com esses termos inerciais diretamente, é mais conveniente relacioná-los a parâmetros mais acessíveis. Três parâmetros característicos são usados, conforme indica a Figura (7): a altura da onda H , o comprimento da onda L e a profundidade média da água h .

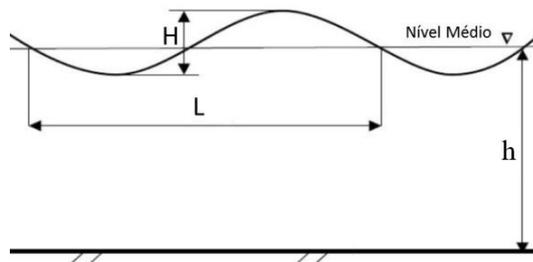


Figura 7 – Parâmetros característicos da onda de água.
Fonte: Modificado de Dean e Dalrymple (1991).

Embora as relações entre os termos inerciais e esses três parâmetros não sejam simples, seus

valores relativos ajudam consideravelmente na classificação das teorias de onda de água do ponto de vista matemático. Três razões características são definidas a partir destas grandezas geométricas: H/L ; H/h e L/h . A importância relativa dos termos convectivos de inércia aumenta na medida em que os valores dessas três razões aumentam. Em águas profundas (H/h pequeno) o parâmetro mais significativo é H/L , que é chamado de declividade da onda. Em águas rasas, o parâmetro mais significativo é a altura relativa H/h . Em águas de profundidade intermediária o parâmetro significativo, que também cobre os três casos, é dado por $(H/L)(L/h)^3$ (MÉHAUTÉ, 1976).

Dependendo do problema considerado e da variação dos valores dos parâmetros H/L , H/h e L/h , três abordagens matemáticas são geralmente usadas (MÉHAUTÉ, 1976): (1) linearização; (2) séries de potências e (3) métodos numéricos. Métodos estatísticos são também usados para descrever a complexidade do estado do mar ou ondas geradas pela ação do vento.

O caso mais simples das teorias das ondas de superfície é a teoria da onda linear, na qual os termos inerciais convectivos são completamente negligenciados, sendo uma aproximação da onda infinitesimal. As equações linearizadas podem ser resolvidas analiticamente e, por esse motivo, a teoria da onda linear é usada para descrever uma grande variedade de movimentos de ondas de água.

Na hidrodinâmica, as teorias das ondas de água são geralmente classificadas em dois grandes grupos: teoria de ondas de pequena amplitude e teoria de ondas longas. Dentro da teoria de ondas de pequena amplitude estão englobadas a teoria linearizada de ondas de amplitude infinitesimal e também a primeira categoria da série de potência, isto é, a série de potência em termos de H/L para ondas de amplitude finita. As teorias de ondas longas adotam o método numérico na solução, usadas principalmente para equações de ondas longas não lineares (MÉHAUTÉ, 1976).

3.2 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DO FLUIDO

As ondas de oceanos propagam-se sobre um fluido viscoso, porém na maioria dos casos, grande parte do fluido pode ser considerado irrotacional. Isto ocorre pelo fato dos efeitos viscosos se concentrarem numa fina camada da superfície e do fundo (DEAN; DALRYMPLE, 1991), onde ocorre mudanças de meio (ar-água e solo-água). Da mesma forma, considera-se que o escoamento é incompressível, já que aumentos de pressão resultam em mudanças muito pequenas na densidade do mesmo. Por consequência, assume-se a Equação de Euler incompressível. As equações fundamentais do movimento serão apresentadas a seguir.

3.2.1 Balanço de momento

Considerando a direção x , a segunda Lei de Newton pode ser escrita como $\sum F_x = ma_x$, onde F_x são as forças que agem na direção x e a_x é a aceleração na mesma direção. Por definição,

$a_x = dV_x/dt$, sendo V_x a componente da velocidade em x . A velocidade no entanto é função do espaço e do tempo $V_x = V_x(x, y, z, t)$. A derivada total é, portanto:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.1)$$

ou ainda:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \quad (3.2)$$

sendo V_x , V_y e V_z as componentes do vetor velocidade nas direções x , y e z , respectivamente. Esta é portanto a derivada material da função velocidade. Logo a segunda Lei de Newton para a direção x pode ser escrita como:

$$\sum F_x = m \frac{dV_x}{dt} \quad (3.3)$$

Considerando um cubo elementar de fluido que possui as arestas de comprimento Δx , Δy e Δz , em cujas faces atuam tensões tangenciais e normais, conforme Figura (8), o somatório de forças em cada uma das seis faces para a direção x pode ser obtida, através do truncamento da série de Taylor, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z \\ & - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y \\ & + \rho_f \Delta x \Delta y \Delta z g^x = \rho_f \Delta x \Delta y \Delta z \frac{dV_x}{dt} \quad (3.4) \end{aligned}$$

onde g^x indica a componente em x do vetor aceleração da gravidade, que eventualmente possa agir na direção x , e ρ_f representa a massa específica do fluido.

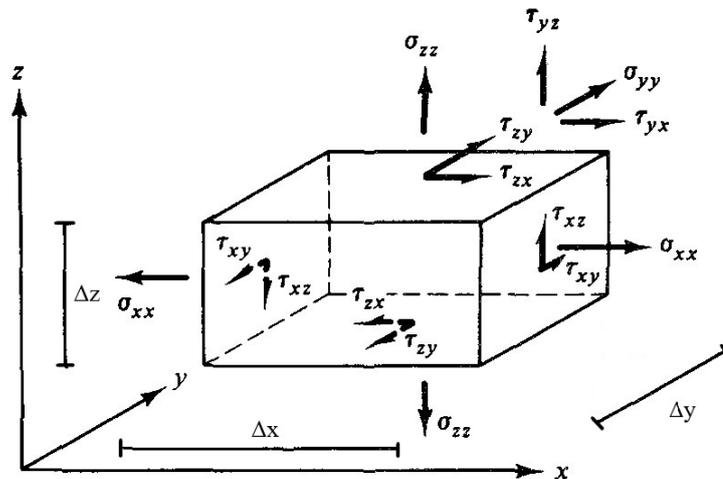


Figura 8 – Tensões normais e tangenciais em cubo elementar de fluido
Fonte: Modificado de Dean e Dalrymple (1991).

Considerando que em cada uma das faces age, juntamente com a tensão normal, a pressão, ou seja, $\sigma_{xx} = -p + \tau_{xx}$, a Equação (3.4) pode ser reescrita como:

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + g^x \quad (3.5)$$

Por definição, as componentes de tensão tangencial que agem em uma face do cubo elementar são obtidas através das seguintes equações:

$$\tau_{xy} = \mu_f \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (3.6a)$$

$$\tau_{xz} = \mu_f \frac{\partial V_x}{\partial z} \quad (3.6b)$$

$$\tau_{yz} = \mu_f \frac{\partial V_y}{\partial z} \quad (3.6c)$$

sendo μ_f a viscosidade dinâmica do fluido. Sendo assim, a Equação (3.5) pode ser reescrita como:

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_f \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + g^x \quad (3.7)$$

que também pode ser escrita em notação vetorial:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho_f} \text{grad}(p) + \nu_f \text{div}(\text{grad}(\mathbf{V})) + \mathbf{g} \quad (3.8)$$

onde $\nu_f = \frac{\mu_f}{\rho_f}$ e representa a viscosidade cinemática do fluido, $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ representa o vetor velocidade do fluido e \mathbf{g} o vetor aceleração da gravidade. Considerando o fluido sem viscosidade, a equação da conservação do momento pode ser simplificada para:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho_f} \text{grad}(p) + \mathbf{g} \quad (3.9)$$

A Equação (3.9) é denominada Equação de Euler.

3.2.2 Balanço de massa

Considerando ainda o cubo infinitesimal com arestas de comprimento Δx , Δy e Δz , representado pela Figura (9) com centro O e coordenadas (x, y, z) , no qual há um fluxo de massa passando pela suas faces de valor $\rho_f V_x$.

Analisando somente a face $AEGC$, a taxa de massa que a permeia será:

$$\rho_f \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) V_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \Delta z \quad (3.10)$$

onde os termos em parênteses representa a coordenada espacial da grandeza em questão. Extrapolando através da série de Taylor, truncada no segundo termo, é possível obter a taxa de massa

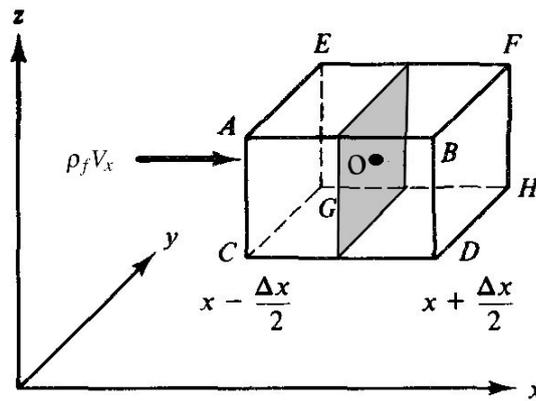


Figura 9 – Cubo elementar de fluido.
Fonte: Modificado de Dean e Dalrymple (1991).

que transpassa a seção central do cubo. Por conveniência, as coordenadas do centro do cubo serão suprimidas:

$$\rho_f \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) V_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \Delta z = \left[\rho_f V_x - \frac{\partial(\rho_f V_x)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z \quad (3.11)$$

Já o fluxo de massa para a face $BFHD$ pode ser escrita como:

$$\left[\rho_f V_x + \frac{\partial(\rho_f V_x)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z \quad (3.12)$$

Realizando um balanço de fluxo entre as faces $AEGC$ e $BFHD$, ou seja, subtraindo a taxa que permeia cada face, é obtido o acúmulo de massa na direção x :

$$-\frac{\partial(\rho_f V_x)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta x)^4 \quad (3.13)$$

onde o termo $O(\Delta x)^4$ indica os termos de ordem superior resultado do truncamento da série de Taylor. Considerando este balanço de fluxo em todas as outras faces do cubo, o acúmulo de massa dentro do volume será:

$$-\left[\frac{\partial(\rho_f V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_f V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_f V_z)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z + O(h)^4 \quad (3.14)$$

onde o último termo $O(h)^4$ representa o erro acumulado de cada uma das direções.

Levando em consideração que este acúmulo de massa ocorra para um incremento de tempo Δt , e avaliando este aumento, a massa no tempo t é $\rho_f(t) \Delta x \Delta y \Delta z$ e no tempo $t + \Delta t$ a massa será $\rho(t + \Delta t) \Delta x \Delta y \Delta z$. O aumento da massa será, portanto:

$$[\rho_f(t + \Delta t) - \rho_f(t)] \Delta x \Delta y \Delta z = \left[\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t)^2 \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3.15)$$

onde, da mesma forma, $O(\Delta t)^2$ representa termos de ordem superior da série de Taylor. Como há a conservação da massa, esse aumento na massa deve-se à taxa líquida de entrada que ocorre durante um incremento de tempo Δt , ou seja:

$$\left[\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t)^2 \right] \Delta x \Delta y \Delta z = - \left[\frac{\partial(\rho_f V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_f V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_f V_z)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t + O(h)^4 \Delta t \quad (3.16)$$

Dividindo toda a equação por $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ e desprezando os termos de ordem superior, é obtida a seguinte equação:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_f V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_f V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_f V_z)}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

ou ainda, reescrevendo a equação,

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial \rho_f}{\partial x} V_x + \frac{\partial \rho_f}{\partial y} V_y + \frac{\partial \rho_f}{\partial z} V_z + \rho_f \left[\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] = 0 \quad (3.18)$$

Como foi estabelecido que o fluido é incompressível, ou seja, não ocorre variação da massa específica no espaço e no tempo, é obtida a equação da conservação da massa ou equação da continuidade para o escoamento em questão:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.19)$$

também podendo ser representado por:

$$\text{div}(\mathbf{V}) = 0 \quad (3.20)$$

3.2.3 Equação de Laplace

Considerando o termo " $\text{div}(\text{grad}(\mathbf{V}))$ " da Equação (3.8), a seguinte identidade é válida (MALVERN, 1969):

$$\text{div}(\text{grad}(\mathbf{V})) = \text{grad}(\text{div}(\mathbf{V})) - \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{V})) \quad (3.21)$$

Conforme apresentado pela equação da conservação da massa (3.20), que retrata um fluido incompressível, e o termo " $\text{rot}(\mathbf{V})$ ", que representa o vetor vorticidade (definido como duas vezes o vetor velocidade angular do fluido $\text{rot}(\mathbf{V}) = 2\boldsymbol{\omega}_t$), a Equação (3.8) resulta em:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho_f} \text{grad}(p) - 2\nu_f \text{rot}(\boldsymbol{\omega}_t) + \mathbf{g} \quad (3.22)$$

Como o escoamento em questão é considerado irrotacional, a velocidade angular do escoamento é nula, ou seja, $\boldsymbol{\omega}_t = 0$, portanto:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho_f} \text{grad}(p) + \mathbf{g} \quad (3.23)$$

A condição de irrotacionalidade ($\text{rot}(\mathbf{V}) = 0$) é a condição necessária e suficiente para a existência de um potencial de velocidade ϕ , definido como $\mathbf{V} = \text{grad}(\phi)$, ou ainda, em componentes cartesianas:

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.24a)$$

$$V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.24b)$$

$$V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.24c)$$

Após a definição da função potencial, a equação da conservação da massa pode ser reescrita como:

$$\text{grad}(\mathbf{V}) = \text{div}(\text{grad}(\phi)) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.25)$$

A Equação (3.25) é denominada de Equação de Laplace e pode ser particularizada para o problema bidimensional como:

$$\text{div}(\text{grad}(\phi)) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.26)$$

3.2.4 Equação de Bernoulli

Da mesma forma, particularizando as equações de Euler para um problema bidimensional, a Equação (3.9) é a seguinte para as direções x e z , respectivamente:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (3.28)$$

onde g é a gravidade, agindo na direção vertical z . Da condição de irrotacionalidade ($\text{rot}(\mathbf{V}) = 0$), a relação entre as velocidades na direção x e z é dada por:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x} \quad (3.29)$$

As equações de Euler podem ser reescritas também em função do potencial de velocidade:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho_f} \right\} = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho_f} \right\} = -g \quad (3.31)$$

Integrando as equações em x e z respectivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho_f} = c'(z, t) \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho_f} = -gz + c(x, t) \quad (3.33)$$

por inspeção, $c'(z, t) = -gz + c(x, t)$. Logo, c não pode ser função de x e $c'(z, t) = -gz + c(t)$. A expressão resulta então na Equação de Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho_f} + gz = c(t) \quad (3.34)$$

Pode-se ainda reescrever a Equação de Bernoulli como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\text{grad}(\phi)|^2 + \frac{p}{\rho_f} + gz = c(t) \quad (3.35)$$

onde $c(t)$ é uma função arbitrária, dependente somente do tempo, e as barras representam o módulo do vetor gradiente.

3.3 O PROBLEMA DA ONDA DE ÁGUA

3.3.1 Generalidades

A abordagem mais simples e fundamental do problema da onda de água constitui na busca de uma solução linear para o problema, tomando a altura da onda H como sendo um valor muito menor que o comprimento de onda L e a profundidade do nível médio da água h . A teoria da onda que resulta desta hipótese é conhecida por *Teoria da onda linear de pequena amplitude*, *Teoria de Airy* ou *Primeira aproximação da Teoria de Stokes*.

As demais hipóteses adotadas na solução são (SORENSEN, 2005):

1. A água é homogênea e está em regime incompressível, e as forças de tensão superficial são insignificantes;
2. O escoamento é irrotacional. Portanto, não há tensão de cisalhamento na interface ar-mar ou no fundo.
3. O fundo é estacionário, impermeável e horizontal.
4. A pressão ao longo da interface ar-mar é constante.

3.3.2 Definição do Problema

Para esta solução, o eixo de orientação x é horizontal e o eixo de orientação z é positivo com sentido para cima, conforme a Figura (10). Considera-se ainda a superfície do fundo como rígida e horizontal. Para descrever o sistema, adota-se as seguintes terminologias:

- $\eta(x, t)$: deslocamento vertical da superfície livre sobre o nível médio da água;
- L : comprimento de onda;
- H : altura de onda;
- h : distância do nível médio de água ao fundo do mar;
- T : período de onda (tempo gasto durante um ciclo completo de propagação);

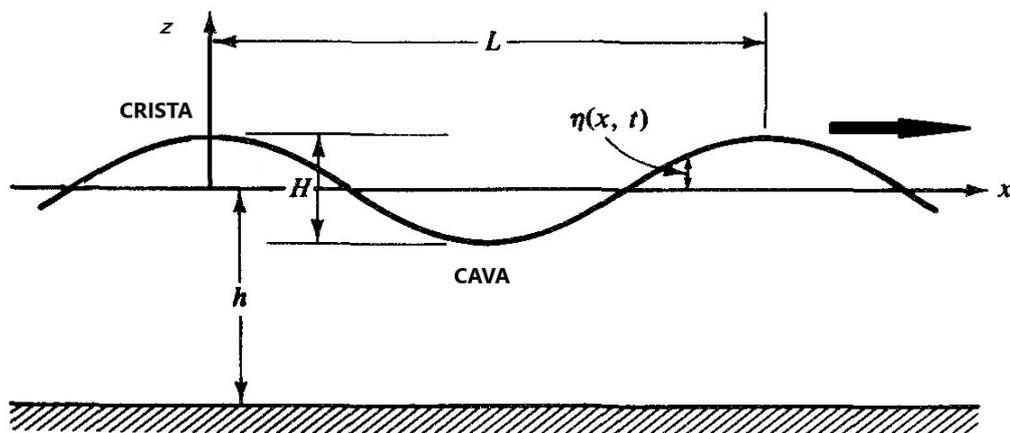


Figura 10 – Esquema representativo dos eixos de orientação adotados na solução da teoria linear de ondas.

Fonte: Modificado de Dean e Dalrymple (1991).

A equação diferencial de segunda ordem que governa o movimento de fluido sob uma onda de água bidimensional e periódica é a Equação de Laplace, $\text{div}(\text{grad}(\phi)) = 0$ e sua validade consiste na hipótese de ser uma única onda com limites $0 < x < L$ e $-h < z < \eta$.

3.3.3 Condições de Contorno

Muitas vezes, há um número infinito de soluções para uma equação diferencial. Portanto, é necessário selecionar uma ou mais soluções relevantes para o problema físico sob investigação. Esta seleção é efetuada através das condições de contorno. Assume-se que o oceano possui limites horizontais infinitos e que o fundo oceânico, como fronteira inferior, é considerado plano e horizontal. Como a superfície está em contato com o ar, cuja pressão é atmosférica e que por haver uma interface de dois fluidos, existe uma nova incógnita que é a posição da superfície η .

Condição de contorno cinemática

Os limites do campo em estudo, como a superfície livre e o fundo, devem satisfazer condições físicas no que se refere à velocidade do escoamento. Portanto, não deve haver fluxo de massa entre essas interfaces. Uma superfície qualquer pode ser descrita como uma função dependente do tempo e do espaço, representada matematicamente por $F(x, y, z, t) = 0$. Na superfície, a derivada material da função será nula:

$$\frac{dF(x, y, z, t)}{dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + V_x \frac{\partial F}{\partial x} + V_y \frac{\partial F}{\partial y} + V_z \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{F(x, y, z, t) = 0} \quad (3.36)$$

ou ainda:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{-\partial F / \partial t}{|\text{grad}(F)|} \quad (3.37)$$

sendo \mathbf{n} o vetor normal à superfície. Se a superfície não varia com o tempo, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$, ou seja, a componente normal da velocidade é nula.

Condição de contorno do fundo

Em geral, o limite inferior do objeto de estudo é representado por $z = -h(x)$, considerando um problema de natureza bidimensional com o sistema de referência apresentado na Figura (10). A equação da superfície do fundo pode ser representada então por $F(x, z) = z + h(x) = 0$. Considerando que no fundo, a superfície é invariável em relação ao tempo:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.38)$$

sendo \mathbf{n} neste caso:

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad}(F)}{|\text{grad}(F)|} = \frac{\frac{dh}{dx} \mathbf{e}_x + 1 \mathbf{e}_z}{\sqrt{(dh/dx)^2 + 1}} \quad (3.39)$$

onde \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z são as componentes normais a cada um dos eixos. Realizando o produto escalar, a condição de contorno do fundo é dada por:

$$V_z = -V_x \frac{dh}{dx} \quad (3.40)$$

Das hipóteses iniciais, considera-se que o fundo é plano. Portanto, a condição de contorno pode ser expressa em termos da função potencial:

$$V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \quad (3.41)$$

Condição de contorno cinemática da superfície livre

Considera-se que $F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$ é válida ao longo do espaço e tempo. Sabendo que:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{-\partial F / \partial t}{|\text{grad}(F)|} = \frac{\partial \eta / \partial t}{\sqrt{(\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \eta}{\partial y})^2 + 1}} \quad (3.42)$$

e o vetor normal à superfície livre é:

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad}(F)}{|\text{grad}(F)|} = \frac{-\frac{\partial \eta}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \eta}{\partial y} \mathbf{e}_y + 1 \mathbf{e}_z}{\sqrt{(\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \eta}{\partial y})^2 + 1}} \quad (3.43)$$

Substituindo a Equação (3.43) em (3.42), obtém-se:

$$V_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} V_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} V_y \quad (3.44)$$

ou, ainda, em termos da função potencial:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{z=\eta} \quad (3.45)$$

Condição de contorno dinâmica da superfície livre

A condição de contorno cinemáticas para a superfície livre foram descritas, porém, a superfície do mar está sujeita à pressão atmosférica. Fazendo-se o uso da Equação de Bernoulli, a condição de contorno dinâmica da superfície livre é dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(V_x^2 + V_z^2) + \frac{p_\eta}{\rho_f} + gz = c(t) \quad (3.46)$$

que em termos da função potencial pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2} \left| \text{grad}(\phi) \Big|_{z=\eta} \right|^2 + \frac{p_\eta}{\rho_f} + gz \Big|_{z=\eta} = c(t) \quad (3.47)$$

onde p_η é a pressão na superfície livre η .

Condição de contorno lateral

Considerando que as ondas são bidimensionais e que se propagam em um único sentido, as condições de contorno laterais podem ser expressas considerando que as mesmas sejam periódicas no espaço e no tempo, sendo, respectivamente:

$$\phi(x, t) = \phi(x + L, t) \quad (3.48a)$$

$$\phi(x, t) = \phi(x, t + T) \quad (3.48b)$$

3.3.4 Solução do Problema

Assume-se que a solução da função potencial velocidade é o produto de três termos independentes entre si:

$$\phi(x, z, t) = X(x) \cdot Z(z) \cdot T(t) \quad (3.49)$$

onde $X(x)$, $Z(z)$ e $T(t)$ são funções dependentes somente das variáveis x , z e t , respectivamente.

Sabe-se que ϕ é periódico no tempo, então uma das soluções possíveis a ser adotada é:

$$T(t) = \text{sen}(\omega t) \quad (3.50)$$

onde ω é a frequência angular da onda. Aplicando a condição de contorno (3.48b) na Equação (3.50), tem-se:

$$\text{sen}(\omega t) = \text{sen} \omega(t + T) \quad (3.51)$$

A relação trigonométrica $\text{sen} \omega(t + T) = \text{sen}(\omega t) \cos(\omega T) + \text{sen}(\omega T) \cos(\omega t)$ será verdadeira somente se:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.52)$$

ou ainda,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.53)$$

A Equação (3.49) pode então ser reescrita como:

$$\phi(x, z, t) = X(x) \cdot Z(z) \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (3.54)$$

Substituindo a Equação (3.54) em (3.26) e dividindo termo a termo pela Equação (3.54):

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (3.55)$$

O primeiro termo da Equação (3.55) é dependente somente de x , enquanto que o segundo termo é dependente de z . Desmembrando os termos e igualando-os a uma constante λ :

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2 \quad (3.56a)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \lambda^2 \quad (3.56b)$$

Desta forma, a solução obedecerá as seguintes condições: $\lambda^2 > 0$ um número real, $\lambda = 0$ e $\lambda^2 < 0$ um número complexo. Na Tabela (1), estão apresentadas as possíveis soluções da Equação (3.56). A princípio, todas as soluções são válidas, porém, somente a solução com $\lambda^2 > 0$ satisfaz a condição de contorno de periodicidade no espaço.

Tem-se, portanto, como solução do termo $X(x)$:

$$X(x) = \Lambda \cos(\lambda x) + \Gamma \text{sen}(\lambda x) \quad (3.57)$$

Tabela 1 – Possíveis soluções para a Equação de Laplace usando o artifício da separação de variáveis

Constante qualquer r	EDO	Soluções
Real $\lambda^2 > 0$	$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$	$X(x) = \Lambda \cos(\lambda x) + \Gamma \sin(\lambda x)$
	$\frac{d^2Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0$	$Z(z) = \varphi \exp(\lambda z) + \Omega \exp(-\lambda z)$
$\lambda = 0$	$\frac{d^2X}{dx^2} = 0$	$X(x) = \Lambda x + \Gamma$
	$\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$	$Z(z) = \varphi z + \Omega$
Complexo $\lambda^2 < 0$	$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda ^2 X = 0$	$X(x) = \Lambda \exp(\lambda x) + \Gamma \exp(- \lambda x)$
	$\frac{d^2Z}{dz^2} + \lambda ^2 Z = 0$	$Z(z) = \varphi \cos(\lambda z) + \Omega \sin(\lambda z)$

Fonte: Dean e Dalrymple (1991).

Da mesma forma, a solução para o termo $Z(z)$ será:

$$Z(z) = \varphi \exp(\lambda z) + \Omega \exp(-\lambda z) \quad (3.58)$$

Através das condições de contorno, é possível obter os valores das constantes Λ , Γ , φ e Ω .

Substituindo as soluções encontradas na Equação (3.54), obtém-se:

$$\phi(x, z, t) = [\Lambda \cos(\lambda x) + \Gamma \sin(\lambda x)] \cdot [\varphi \exp(\lambda z) + \Omega \exp(-\lambda z)] \cdot \sin(\omega t) \quad (3.59)$$

Para satisfazer a condição de contorno de periodicidade no espaço dada em (3.48a), a função $X(x)$ pode ser escrita como:

$$\Lambda \cos(\lambda x) + \Gamma \sin(\lambda x) = \Lambda \cos \lambda(x+L) + \Gamma \sin \lambda(x+L)$$

ou ainda, considerando as relações trigonométricas:

$$\begin{aligned} \Lambda \cos(\lambda x) + \Gamma \sin(\lambda x) &= \Lambda(\cos \lambda x \cdot \cos \lambda L - \sin \lambda x \cdot \sin \lambda L) \\ &\quad + \Gamma(\sin \lambda x \cdot \cos \lambda L + \cos \lambda x \cdot \sin \lambda L) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Sendo assim, a Equação (3.60) será verdadeira somente se $\cos \lambda L = 1$ e $\sin \lambda L = 0$. Para isto:

$$\lambda L = 2\pi \quad (3.61)$$

portanto, λ é denominado número de onda, sendo dado por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{L} \quad (3.62)$$

Fazendo-se uso do princípio da superposição, a função potencial de velocidade pode ser expressa como a soma de duas funções potenciais:

$$\phi_1 = \Lambda \cos(\lambda x) \cdot [\varphi \exp(\lambda z) + \Omega \exp(-\lambda z)] \cdot \sin(\omega t) \quad (3.63)$$

$$\phi_2 = \Gamma \operatorname{sen}(\lambda x) \cdot [\varphi \exp(\lambda z) + \Omega \exp(-\lambda z)] \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \quad (3.64)$$

Aplicando-se a condição de contorno do fundo, dado por (3.41), na Equação (3.59), determina-se que:

$$\varphi = \Omega \exp(2\lambda h) \quad (3.65)$$

Substituindo φ na Equação (3.63) e sabendo que $\cosh(\star) = \frac{\exp(\star) + \exp(-\star)}{2}$, a função potencial de velocidade ϕ_1 é dada por:

$$\phi_1 = G' \cos(\lambda x) \cdot \cosh(\lambda(h+z)) \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \quad (3.66)$$

onde,

$$G' = 2\Lambda\Omega \exp(\lambda h) \quad (3.67)$$

A condição de contorno necessária à solução do problema é a da superfície livre dinâmica. Esta condição está associada à Equação de Bernoulli, que deve ser satisfeita na superfície livre. A Equação de Bernoulli, apresentada em (3.35), é:

$$gz + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p_\eta}{\rho_f} = c(t) \quad (3.68)$$

onde p_η é a pressão na superfície livre, dada pela pressão atmosférica valendo $p_\eta = 0$.

A princípio, a Equação de Bernoulli deve ser aplicada em pontos cuja pressão deve ser conhecida, ou seja, em $z = 0$. No entanto, através da expansão em Série de Taylor, pode-se relacionar um ponto conhecido como o nível médio da água com a superfície livre da água ($z = \eta(x, t)$), até então desconhecida. Portanto,

$$\begin{aligned} (\text{Equação de Bernoulli})_{z=\eta} &= (\text{Equação de Bernoulli})_{z=0} \\ &+ \eta(x, t) \frac{\partial}{\partial z} (\text{Equação de Bernoulli})_{z=0} + \dots \end{aligned} \quad (3.69)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \left\{ gz + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}_{z=\eta} &= \left\{ gz + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}_{z=0} \\ &+ \eta \left\{ g + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}_{z=0} + \dots = c(t) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Desprezando termos muito pequenos e aplicando a equação anterior para a função potencial ϕ_1 :

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \eta g \right)_{z=0} = c(t) \quad (3.71)$$

Isolando a incógnita η :

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} + \frac{c(t)}{g} \quad (3.72)$$

Substituindo a Equação (3.66) em (3.72):

$$\eta = -\frac{G' \omega}{g} \cos(\lambda x) \cosh(\lambda(h+z)) \cos(\omega t) \Big|_{z=0} + \frac{c(t)}{g}$$

substituindo $z = 0$ e sabendo que η tem uma média espacial e temporal zero, determina-se que a constante $c(t) = 0$, logo:

$$\eta = -\left[\frac{G' \omega \cosh(\lambda h)}{g} \right] \cos(\lambda x) \cos(\omega t)$$

ou ainda:

$$\eta = -\frac{H}{2} \cos(\lambda x) \cos(\omega t) \quad (3.73)$$

onde G' é:

$$G' = -\frac{H}{2} \frac{g}{\omega \cosh(\lambda h)} \quad (3.74)$$

Substituindo a Equação (3.74) em (3.66), tem-se a função potencial ϕ_1 que representa fisicamente uma onda estacionária:

$$\phi_1 = -\frac{H g \cosh \lambda(h+z)}{2 \omega \cosh(\lambda h)} \cos(\lambda x) \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (3.75)$$

Realizando os mesmos procedimentos para a segunda parte da função potencial ϕ_2 (eq. 3.64), determina-se uma segunda função potencial que também representa uma onda estacionária defasada 90° da primeira solução:

$$\phi_2 = -\frac{H g \cosh \lambda(h+z)}{2 \omega \cosh(\lambda h)} \text{sen}(\lambda x) \cdot \cos(\omega t) \quad (3.76)$$

Considerando a solução da função potencial de velocidade como uma superposição das soluções, pode-se determinar uma terceira função potencial de velocidade, resultante de $\phi_3 = \phi_1 - \phi_2$:

$$\phi_3 = \frac{H g \cosh \lambda(h+z)}{2 \omega \cosh(\lambda h)} \text{sen}(\lambda x - \omega t) \quad (3.77)$$

Aplicando a condição de contorno dinâmica da superfície livre (3.72) na nova função potencial de velocidade (3.77), obtém-se:

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_3}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

Assim, é obtida a equação do deslocamento da superfície livre das ondas progressivas e a função potencial de velocidade é apresentada pela Equação (3.77):

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(\lambda x - \omega t) \quad (3.78)$$

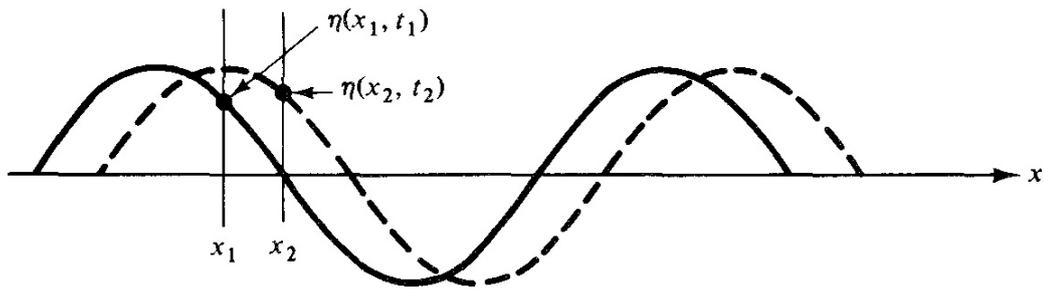


Figura 11 – Esquema representativo da superfície livre η com a passagem de uma onda progressiva.

Fonte: Modificado de Dean e Dalrymple (1991).

Na Figura (11) está apresentado um esquema representativo da propagação de uma onda progressiva através da função $\eta(x, t)$.

Considerando ainda a condição de contorno cinemática da superfície livre, dada pela Equação (3.45), para relacionar as variáveis λ e ω , dada em função da velocidade potencial ϕ_3 :

$$\left. \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left. \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right|_{z=\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left. \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right|_{z=\eta} \quad \text{em } z = \eta(x, t) \quad (3.79)$$

Expandindo em série de Taylor a equação acima, considerando somente os termos lineares e eliminando pequenos parâmetros, tem-se:

$$\left. \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3.80)$$

Substituindo as Equações (3.77) e (3.78) na Equação (3.80), obtêm-se:

$$\omega^2 = g\lambda \tanh(\lambda h) \quad (3.81)$$

A Equação (3.81) é denominada equação da dispersão e relaciona o número de onda (λ) com a frequência angular (ω). Tem-se portanto as equações do deslocamento da superfície livre (Equação 3.78), a função potencial de velocidade (Equação 3.77) e a relação de dispersão (Equação 3.81).

3.4 CARREGAMENTO DA ONDA DO MAR

Na superfície do fundo do mar, a tensão vertical efetiva é considerada nula, bem como a tensão cisalhante é pequena o bastante para ser desconsiderada. Nesses casos, a pressão induzida por ondas no leito marinho é o carregamento dominante (HSU et al., 2019).

Para obter o campo de pressão, mais uma vez é aplicada a Equação de Bernoulli (3.68).

$$gz + \frac{\partial \phi_3}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho_f} = c(t) \quad (3.82)$$

Linearizando a equação, pode-se reescrever a Equação de Bernoulli da seguinte forma:

$$gz + \frac{\partial \phi_3}{\partial t} + \frac{p}{\rho_f} = c(t) \quad (3.83)$$

Aplicando a Equação de Bernoulli linearizada entre z e $\eta = 0$ de maneira similar à Equação (3.70):

$$\left(gz + \frac{\partial \phi_3}{\partial t} + \frac{p}{\rho_f} \right)_z = g\eta + \frac{\partial \phi_3}{\partial t} \Big|_{z=\eta=0} \quad (3.84)$$

Da condição de contorno dinâmica da superfície livre, dada pela Equação (3.72):

$$g\eta = - \frac{\partial \phi_3}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (3.85)$$

Substituindo a Equação (3.85) em (3.84):

$$\frac{p}{\rho_f} = -gz - \frac{\partial \phi_3}{\partial t} \quad (3.86)$$

Substituindo a função potencial de velocidade dada pela Equação (3.77) na equação acima, tem-se:

$$p_r = -\rho_f g z + \rho_f g \frac{H}{2} \frac{\cosh \lambda(h+z)}{\cosh(\lambda h)} \cos(\lambda x - \omega t) \quad (3.87)$$

onde p_r é a pressão resultante da soma das parcelas da pressão hidrostática e pressão dinâmica. A influência de cada componente de pressão é apresentada graficamente na Figura (12). É possível notar que, ao contrário da pressão hidrostática, a componente dinâmica da pressão diminui com o aumento da profundidade da coluna de água.

Desmembrando as parcelas das pressões, obtém-se como parcela da pressão resultante, a pressão hidrostática:

$$p_H = \rho_f g z \quad (3.88)$$

A pressão dinâmica é causada pela passagem da onda progressiva em função de z , com validade entre $\eta = 0$ e $z = -h$:

$$p(z) = \rho_f g \frac{H}{2} \frac{\cosh \lambda(h+z)}{\cosh(\lambda h)} \quad (3.89)$$

Para a pressão no fundo marinho ($z = -h$):

$$p_{onda} = p_0 \cos(\lambda x - \omega t) \quad (3.90)$$

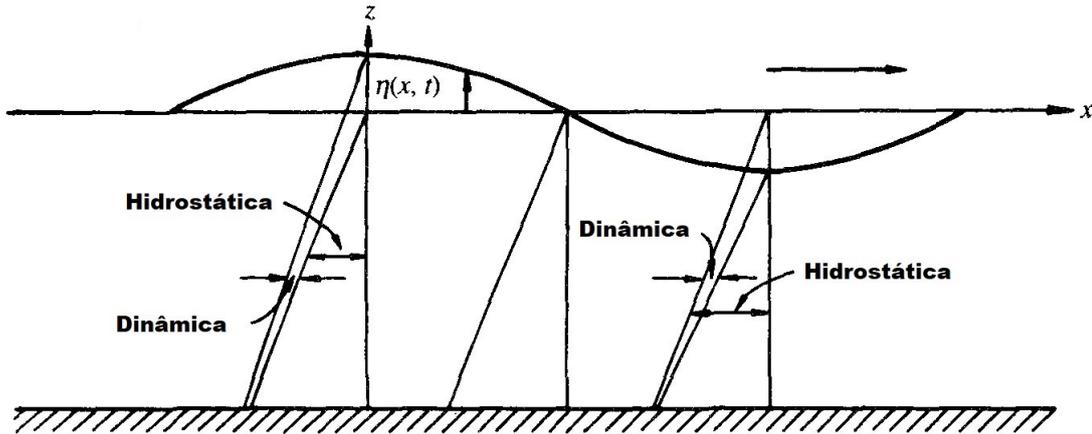


Figura 12 – Desenho esquemático das componentes da pressão ao longo da coluna de água durante a passagem de uma onda progressiva

Fonte: Modificado de Dean e Dalrymple (1991).

onde p_0 é a amplitude da pressão dinâmica gerada pela onda, definida como:

$$p_0 = \frac{\rho_f g H / 2}{\cosh(\lambda h)} \quad (3.91)$$

Assume-se que o período da onda T mantém-se inalterado, independentemente da profundidade da água. A partir dos parâmetros da onda em águas profundas: T , L_0 e H_0 , o valor do comprimento da onda L e da altura da onda H em uma profundidade h são obtidas através das seguintes expressões (RAHMAN; JABER, 1986):

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} \quad (3.92)$$

$$L = L_0 \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (3.93)$$

$$H = H_0 \left\{ \left[1 + \frac{4\pi h/L}{\sinh(4\pi h/L)} \right] \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \right\}^{1/2} \quad (3.94)$$

onde L_0 é o comprimento da onda em águas profundas e H_0 a altura da onda em águas profundas.

3.5 VALIDADE DA TEORIA LINEAR DE ONDAS

Existem basicamente duas maneiras de validar uma teoria: validade matemática e a validade física. A primeira está relacionada com o grau em que as equações satisfazem as condições de contorno, porém, a boa validade matemática não implica necessariamente na boa representação do fenômeno na natureza. A validade física, por sua vez, indicará a boa relação entre o modelo e os dados reais (DEAN, 1974).

Após a validade matemática ser atestada, uma teoria pode ter a validade física atestada por intervalos de validade, por exemplo: ondas que se propagam em profundidade relativas $h/L < 1/20$ são consideradas como ondas longas, ou seja, são ondas de águas rasas, já para ondas em profundidade relativa $h/L > 1/2$ considera-se como ondas curtas, ou ondas de águas profundas. Dentro deste intervalo, consideram-se as ondas intermediárias.

Stokes (1847), empregando técnicas de perturbação para resolver o problema de valor de contorno das ondas, desenvolveu uma teoria para as ondas de amplitude finita denominada de *Teoria de Stokes de Segunda Ordem*. Nesta teoria, todas as características das ondas (potencial de velocidade, celeridade, perfil da superfície, cinética das partículas, etc.) são formuladas em termos de uma série de potências em ordens sucessivamente mais altas da declividade da onda H/L . Uma condição dessa teoria é que a altura relativa H/h seja pequena; portanto, a teoria é aplicável apenas em águas profundas e em uma parte da faixa intermediária de profundidade (SORENSEN, 2005).

A aplicabilidade da teoria de Stokes diminui à medida que uma onda se propaga através da diminuição das profundidades das águas intermediárias e rasas. Para águas pouco profundas, é necessária uma teoria de amplitude finita baseada na profundidade relativa. Para descrever melhor o comportamento das ondas em águas rasas, comumente são usadas as *Teoria de Ondas Cnoidal* e *Teoria de Ondas Solitárias*. Uma Onda Cnoidal é uma solução não linear, periódica e exata da Equação de Korteweg–de Vries - KdV obtida em 1895. Esta solução descreve as ondas gravitacionais de superfície com comprimento de onda razoavelmente longo, quando comparado com a profundidade da água. Algumas das características básicas das ondas da Teoria Cnoidal, como o perfil da superfície e a velocidade das ondas, podem ser apresentadas por diagramas baseados em dois parâmetros, k^2 (função da profundidade da água, comprimento da onda e da distância vertical desde o fundo até a superfície da água na crista e na cava da onda) e do parâmetro de Ursell (função do comprimento de onda, altura da onda e profundidade da água) (SORENSEN, 2005).

Uma onda solitária, por sua vez, não possui cava e sua amplitude está completamente acima do nível médio da água. Como uma onda oscilatória de longo período se propaga em águas muito rasas de profundidade decrescente, o perfil da superfície se aproxima da forma de onda solitária, porém a onda se romperá antes que uma verdadeira forma solitária seja alcançada. Na Figura (13) estão ilustrado os perfis de ondas citados.

A Figura (14) indica os intervalos aproximados de validade das várias teorias. Tal Figura foi estabelecida para ondas periódicas bidimensionais onde três valores correspondentes do parâmetro de Ursell são apresentados. Na Figura, há um limite ($H/h = 0,78$) que indica o critério de quebra implicando que existe um limite máximo para a inclinação da onda, que é função da profundidade relativa (MÉHAUTÉ, 1976).

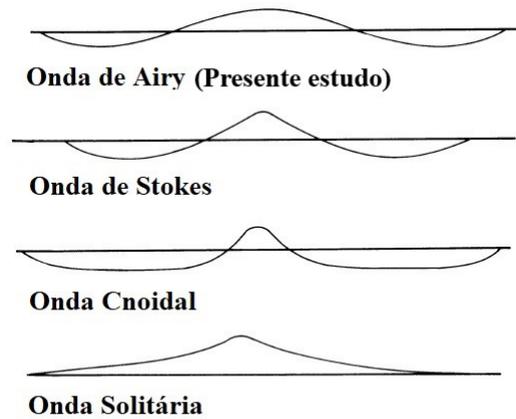


Figura 13 – Ilustração dos perfis de ondas.
Fonte: Modificado de Sorensen (2005).

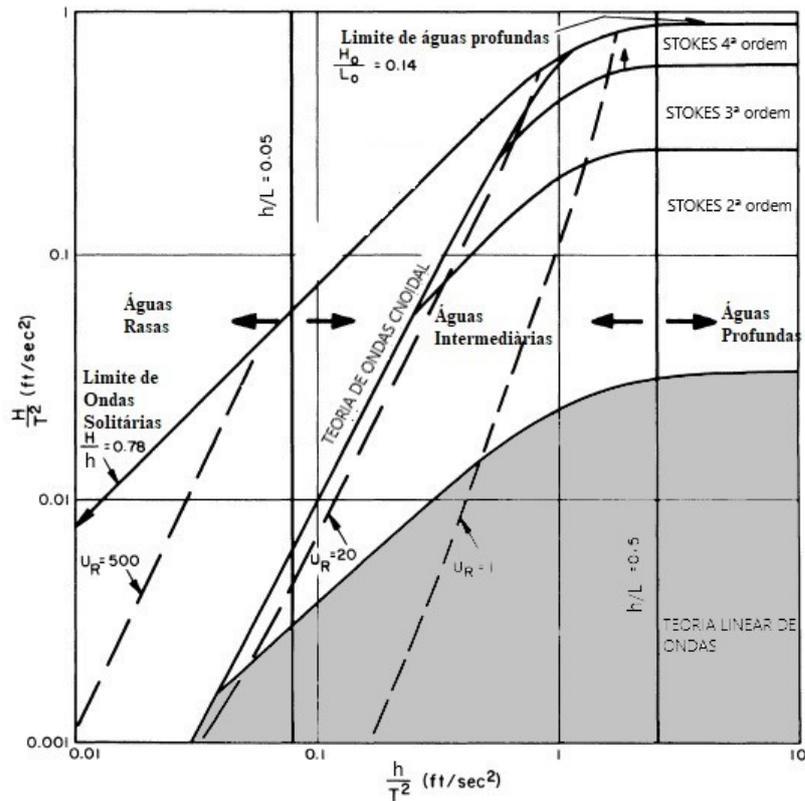


Figura 14 – Limites de validade das teorias de ondas.
Fonte: Modificado de Méhauté (1976).

Diante dos intervalos de validade de cada uma dos tipos de ondas e suas complexidades de solução, é conveniente fazer o uso da teoria linear de ondas, já que sua solução é simples e seu intervalo de validade é mais abrangente. Desta forma, tal teoria fornece parâmetros importantes na solução de problemas de indução de deslocamentos, poropressão e tensões por ondas progressivas em meio marinho poroso.

4 FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DO MEIO POROSO

4.1 DESCRIÇÃO DO MEIO POROSO

Um meio poroso saturado é composto de uma matriz sólida e um espaço poroso, preenchido com um ou mais fluidos. O espaço constituído por poros conectados é o espaço através do qual o fluido escoar, a fase fluida é contínua. A matriz sólida é composta de uma parte sólida e de uma possível porosidade oclusa, a qual pode estar saturada ou não e na qual não ocorre filtração (COUSSY, 2004). Na escala macroscópica, um meio poroso pode ser tratado como a sobreposição de dois meios contínuos, o esqueleto e o fluido, conforme a Figura (15). Por consequência, qualquer volume infinitesimal pode ser tratado como a sobreposição de duas partículas materiais, uma partícula do esqueleto (representando a fase sólida e o espaço poroso conectado seco) e uma partícula de fluido (representando o fluido que satura o espaço de poros conectados). A descrição contínua do meio, que é heterogêneo na escala microscópica, requer a escolha de uma escala macroscópica, na qual a constituição interna da matéria é ignorada na análise do fenômeno físico macroscópico. Quando sujeito a forças externas e variações da pressão do fluido de saturação, o esqueleto deforma. A descrição desta deformação não é diferente da descrição de um sólido contínuo clássico (COUSSY, 2004).

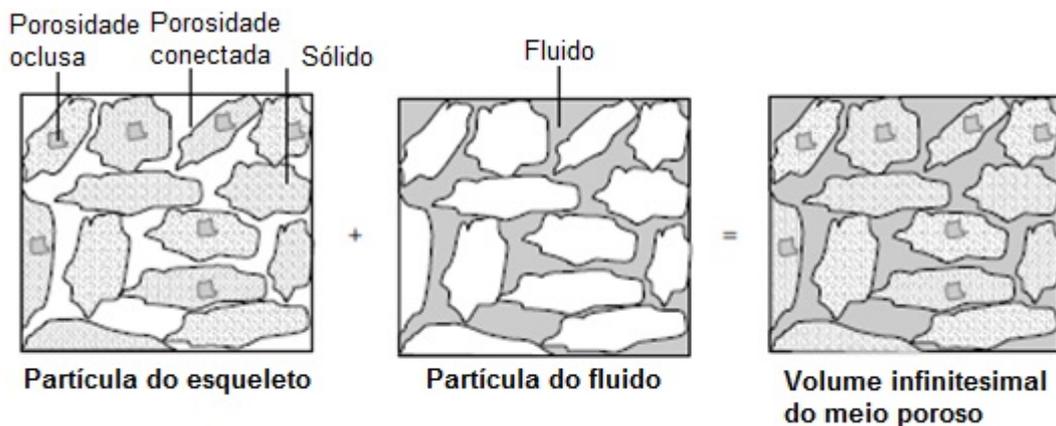


Figura 15 – Fases que compõem o meio poroso.

Fonte: Modificado de Coussy (2004)

Em todos os desenvolvimentos apresentados a seguir, adotam-se as seguintes notações. As grandezas escalares serão denominadas com letras em itálico: a ; grandezas vetoriais com letras em negrito: \mathbf{a} ; grandezas tensoriais de segunda ordem com letras com duas barras subscritas: $\underline{\underline{a}}$; e grandezas tensoriais de quarta ordem com letras com til superior: \tilde{a} . Observa-se que em diferença do capítulo anterior, as variáveis ϕ e φ representarão a porosidade Lagrangeana e Euleriana, respectivamente.

4.2 CONSERVAÇÃO DA MASSA FLUIDA

Considerando ρ_s e ρ_f a massa específica intrínseca da matriz sólida e da massa fluida respectivamente, onde φ é a porosidade Euleriana, a massa do esqueleto e do fluido contido num volume infinitesimal de material $d\Omega_t$ no tempo t será $\rho_s(1 - \varphi)d\Omega_t$ e $\rho_f\varphi d\Omega_t$, respectivamente. Portanto, a densidade de massa macroscópica do esqueleto e da massa fluida é respectivamente, $\rho_s(1 - \varphi)$ e $\rho_f\varphi$. Partindo do pressuposto que ocorra a conservação da massa, o balanço de massa para um volume Ω_t será:

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_s(1 - \varphi) d\Omega_t = 0 \quad (4.1a)$$

$$\frac{d^f}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_f\varphi d\Omega_t = 0 \quad (4.1b)$$

Sendo assim, a equação da continuidade Euleriana para o esqueleto e para a massa fluida pode ser definida, respectivamente:

$$\frac{\partial(\rho_s(1 - \varphi))}{\partial t} + \text{div}(\rho_s(1 - \varphi)\mathbf{V}^s) = 0 \quad (4.2a)$$

$$\frac{\partial(\rho_f\varphi)}{\partial t} + \text{div}(\rho_f\varphi\mathbf{V}^f) = 0 \quad (4.2b)$$

onde \mathbf{V}^s e \mathbf{V}^f são a velocidade do esqueleto e da massa fluida, respectivamente, e $\text{div}(\star)$ representa o operador divergente de (\star) com relação as coordenadas atuais do sistema.

A formulação apropriada das equações constitutivas para o esqueleto, considerando o acoplamento esqueleto-fluido requer referenciar o movimento do fluido à configuração do esqueleto. Neste sentido, é introduzindo o conceito de vetor de fluxo relativo de massa fluida Euleriana \mathbf{w} . Considerando que a quantidade $\varphi(\mathbf{V}^f - \mathbf{V}^s) \cdot \mathbf{n} da dt$ representa o volume infinitesimal de fluido que escoo através da superfície do esqueleto da , com \mathbf{n} representando o vetor normal a esta superfície, durante um tempo infinitesimal dt , \mathbf{w} pode ser definido por:

$$\mathbf{w} = \rho_f\mathbf{q} \quad (4.3)$$

onde \mathbf{q} é o vetor filtração, definido como:

$$\mathbf{q} = \varphi(\mathbf{V}^f - \mathbf{V}^s) \quad (4.4)$$

Relacionando o balanço de massa fluida ao movimento do esqueleto, a Equação (4.2b) pode ser reescrita como:

$$\frac{d^s}{dt}(\rho_f\varphi) + \rho_f\varphi \text{div}(\mathbf{V}^s) + \text{div}(\mathbf{w}) = 0 \quad (4.5)$$

A abordagem Lagrangeana para o balanço de massa fluida pode ser realizada através da introdução do conceito de massa fluida Lagrangeana atual m_f por unidade de volume infinitesimal

inicial $d\Omega_0$. Este conceito relaciona-se com o conteúdo de massa fluida Euleriana atual $\rho_f \varphi$ por unidade de volume infinitesimal atual $d\Omega_t$, de acordo com a expressão abaixo:

$$\rho_f \varphi d\Omega_t = m_f d\Omega_0 \quad (4.6)$$

Desta forma, o fluido ocupará o volume $\varphi d\Omega_t$ na configuração atual. Além disso, como o volume do material do esqueleto $d\Omega_t$ muda durante a deformação, a porosidade φ não quantifica adequadamente a variação de volume sofrida pelo espaço ligado ao volume inicial de material $d\Omega_0$. Em contraste com a porosidade Euleriana φ , que se refere ao volume atual $d\Omega_t$, a mudança no espaço poroso é eventualmente melhor capturada pela porosidade Lagrangeana ϕ , que refere o volume poroso atual ao volume inicial $d\Omega_0$, de acordo com:

$$\phi d\Omega_0 = \varphi d\Omega_t \quad (4.7)$$

Substituindo a Equação (4.7) em (4.6):

$$m_f = J\varphi\rho_f - \phi_0\rho_f^0 \quad (4.8)$$

onde ϕ_0 e ρ_f^0 representam a porosidade inicial e massa específica inicial de referência, respectivamente, e J é o Jacobiano da deformação definido por $J = \frac{d\Omega_t}{d\Omega_0}$.

Substituindo a Equação (4.6) em (4.5), obtém-se a equação da continuidade da massa fluida

$$\frac{d^s m_f}{dt} + J \operatorname{div}(\mathbf{w}) = 0 \quad (4.9)$$

Considerando a hipótese das transformações infinitesimais, em que a norma do gradiente do vetor deslocamento do esqueleto é muito menor que a unidade $\nabla \boldsymbol{\xi} \ll 1$, a expressão (4.9) pode ser reescrita como:

$$\frac{d^s m_f}{dt} + \operatorname{Div}(\mathbf{w}) = 0 \quad (4.10)$$

onde a Equação (4.10) representa a equação da continuidade da massa fluida Lagrangeana. Nessa mesma condição, as porosidades coincidem ($\varphi = \phi$).

4.3 LEI DE CONDUÇÃO DE DARCY

A Lei de Darcy relaciona linearmente o fluxo \mathbf{q} , dado pela Equação (4.4), à força de produção de filtração, sendo dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{q} = \underline{\underline{k}} \cdot [-\operatorname{grad}(p) + \rho_f(\mathbf{g} - \boldsymbol{\gamma}^f)] \quad (4.11)$$

onde $\underline{\underline{k}} = \frac{k}{\mu_f}$ é o tensor de permeabilidade do fluido, $\underline{\underline{k}}_{int}$ é o tensor permeabilidade intrínseca do meio (com unidade $[m^2]$), μ_f é a viscosidade dinâmica do fluido, p é a pressão no fluido,

ρ_f é a massa específica do fluido, \mathbf{g} é a densidade de força de volume e $\boldsymbol{\gamma}^f$ é a aceleração da partícula de fluido. Considerando um caso de isotropia hidráulica, a lei de condução de Darcy pode também ser reescrita como:

$$\mathbf{q} = \frac{k}{\gamma_f} \mathbf{1} \cdot [-\text{grad}(p) + \rho_f(\mathbf{g} - \boldsymbol{\gamma}^f)] \quad (4.12)$$

onde k é a constante de permeabilidade do meio, dada pela mecânica dos solos, com unidade $[m/s]$ e γ_f o peso específico do fluido.

4.4 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

4.4.1 Hipótese das forças locais

Dois tipos de forças agem sobre um corpo de domínio Ω_t : forças de superfície e forças de volume. Na maioria das aplicações, as forças externas do corpo, como as devidas à gravidade, são iguais para o esqueleto e para o fluido. Já a força infinitesimal de volume $\delta \mathbf{g}$ atuando sobre o volume do material elementar $d\Omega_t$ do meio poroso é definida através de uma densidade média da força de volume por unidade de massa (\mathbf{g}):

$$\delta \mathbf{g} = \rho \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t \quad (4.13)$$

onde ρ é a massa específica atual do volume elementar do meio poroso $d\Omega_t$, definida por:

$$\rho = \rho_s(1 - \varphi) + \rho_f \varphi \quad (4.14)$$

A densidade média de força de volume por unidade de massa (\mathbf{g}) é definida como:

$$\mathbf{g} = \frac{\rho_s(1 - \varphi)\mathbf{g}^s + \rho_f \varphi \mathbf{g}^f}{\rho} \quad (4.15)$$

sendo ρ_s e ρ_f são as massas específicas intrínsecas do esqueleto e do fluido, respectivamente; \mathbf{g}^s e \mathbf{g}^f as densidades de força de volume atuando sobre o volume elementar do esqueleto e sobre o volume elementar do fluido, respectivamente; e φ a porosidade Euleriana. De forma similar, as forças de superfície agindo na borda $\partial\Omega_t$ do volume infinitesimal $d\Omega_t$ são definidas através da densidade de força de superfície \mathbf{T} :

$$\delta \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) da \quad (4.16)$$

4.4.2 Balanço de momento

O equilíbrio instantâneo de momento do meio poroso incluído em um domínio qualquer Ω_t é definido como o somatório das forças externas atuantes sobre o meio poroso Ω_t :

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_s(1 - \varphi) \mathbf{V}^s d\Omega_t + \frac{d^f}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_f \varphi \mathbf{V}^f d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T} da \quad (4.17)$$

As forças de volume e superfície se referem a toda matéria do meio poroso, sem fazer distinção entre o esqueleto e o fluido. Enquanto que o uso da derivada material d^π/dt , com $\pi = s$ ou f , está relacionado à distinção de movimento entre as partículas do esqueleto e do fluido que formam o volume Ω_t .

4.4.3 Teorema da resultante dinâmica

Tomando a derivada particular do integrando da Equação (4.17), obtém-se o teorema da resultante dinâmica:

$$\int_{\Omega_t} (\rho_s(1 - \varphi)\boldsymbol{\gamma}^s + \rho_f\varphi\boldsymbol{\gamma}^f)d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho\mathbf{g}d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T}da \quad (4.18)$$

onde $(\rho_s(1 - \varphi)\boldsymbol{\gamma}^s + \rho_f\varphi\boldsymbol{\gamma}^f)d\Omega_t$ representa a força dinâmica relacionada à matéria contida em $d\Omega_t$; $\boldsymbol{\gamma}^s$ e $\boldsymbol{\gamma}^f$ são os vetores de aceleração das partículas do esqueleto e do fluido, respectivamente.

4.4.4 O tensor de tensões

Aplicando o teorema da resultante dinâmica, o qual deve ser válido para qualquer domínio Ω_t , a um tetraedro infinitesimal e fazendo sua altura tender a zero verifica-se a existência de um operador linear relacionando o vetor $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ a \mathbf{n} (COUSSY, 2004). Esse operador é conhecido como o tensor de tensões de Cauchy ($\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t)$) com componentes σ_{ij} , sendo i o subíndice que indica a direção do esforço e j o subíndice que indica a direção do vetor normal à face de aplicação do esforço. O vetor $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ é chamado de vetor de tensões, expresso por:

$$\mathbf{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \quad (4.19)$$

4.4.5 Equação do movimento

Considerando o teorema da divergência dado pela equação abaixo:

$$\int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\Omega_t} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}})d\Omega_t \quad (4.20)$$

Substituindo a Equação (4.19) em (4.18) e aplicando o teorema da divergência (4.20), tem-se:

$$\int_{\Omega_t} \left[\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho\mathbf{g} - \rho_s(1 - \varphi)\boldsymbol{\gamma}^s - \rho_f\varphi\boldsymbol{\gamma}^f \right] d\Omega_t = 0 \quad (4.21)$$

Observando que o teorema da resultante dinâmica dado em (4.21) é válido para todo o domínio Ω_t , a equação de equilíbrio ou conservação do movimento pode ser reescrita como:

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho\mathbf{g} - [\rho_s(1 - \varphi)\boldsymbol{\gamma}^s + \rho_f\varphi\boldsymbol{\gamma}^f] = 0 \quad (4.22)$$

Considerando a derivada material do vetor velocidade do fluido:

$$\boldsymbol{\gamma}^f = \frac{d^f \mathbf{V}^f}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}^f}{\partial t} + \text{grad}(\mathbf{V}^f) \cdot \mathbf{V}^f \quad (4.23)$$

a Equação (4.4) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{V}^f = \frac{\mathbf{q}}{\varphi} + \mathbf{V}^s \quad (4.24)$$

Substituindo a Equação (4.24) em (4.23), pode-se reescrever a equação da aceleração do fluido da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\gamma}^f = \boldsymbol{\gamma}^s + \frac{d^s}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}}{\varphi} \right) + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{q}}{\varphi} \right) \cdot \frac{\mathbf{q}}{\varphi} + \text{grad}(\mathbf{V}^s) \cdot \frac{\mathbf{q}}{\varphi} \quad (4.25)$$

Introduzindo o conceito de velocidade relativa entre o fluido e o esqueleto, onde $\mathbf{V}^r = \mathbf{V}^f - \mathbf{V}^s$, os vetores de fluxo relativo de massa Euleriano (4.3) e vetor filtração (4.4) podem ser expressos como:

$$\mathbf{q} = \varphi \mathbf{V}^r \quad (4.26)$$

$$\mathbf{w} = \rho_f \varphi \mathbf{V}^r \quad (4.27)$$

logo, a Equação (4.25) se torna:

$$\boldsymbol{\gamma}^r = \boldsymbol{\gamma}^f - \boldsymbol{\gamma}^s = \frac{d^s \mathbf{V}^r}{dt} + \text{grad}(\mathbf{V}^r + \mathbf{V}^s) \cdot \mathbf{V}^r \quad (4.28)$$

onde $\boldsymbol{\gamma}^r$ é a aceleração relativa entre o fluido e o esqueleto.

Substituindo a Equação (4.28) em (4.22) e considerando a relação expressa em (4.16), a equação de conservação do movimento ou do equilíbrio do meio poroso fica da seguinte forma:

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \mathbf{g} - \rho \boldsymbol{\gamma}^s - \rho_f \varphi \left[\frac{d^s \mathbf{V}^r}{dt} + \text{grad}(\mathbf{V}^r + \mathbf{V}^s) \cdot \mathbf{V}^r \right] = 0 \quad (4.29)$$

Em (4.29) está apresentada a equação da conservação do movimento. Numa análise dinâmica, uma das incógnitas cinemáticas é o deslocamento do esqueleto (\mathbf{u}) definido como $\mathbf{V}^s = \frac{d^s \mathbf{u}}{dt}$. As outras incógnitas são a velocidade relativa entre o fluido e o esqueleto (\mathbf{V}^r) e o excesso de poropressão (p).

4.4.6 Tensores de tensões parciais

O tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ não considera separadamente as tensões relacionadas ao esqueleto e ao fluido. Desta forma, através das forças de contato definidas em (4.16), é possível estabelecer a contribuição das duas fases da seguinte forma (COUSSY, 2004):

$$\delta T^s = \mathbf{T}^s(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) da \quad (4.30a)$$

$$\delta T^f = \mathbf{T}^f(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) da \quad (4.30b)$$

onde δT^s e δT^f são as forças de superfície do esqueleto e do fluido, respectivamente. Aplicando o teorema da conservação da quantidade de movimento, separadamente, ao esqueleto e ao fluido, chega-se à existência separada de um tensor de tensões parcial volumétrico relacionado ao esqueleto, $\underline{\underline{\sigma}}^s$, e de um tensor de tensões parcial volumétrico relacionado ao fluido, $\underline{\underline{\sigma}}^f$, tais que (COUSSY, 2004):

$$T^s = (1 - \varphi) \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \mathbf{n} \quad (4.31a)$$

$$T^f = \varphi \underline{\underline{\sigma}}^f \cdot \mathbf{n} \quad (4.31b)$$

Introduzindo o conceito de tensões parciais na equação do movimento, são obtidas as equações do movimento local para o esqueleto e o fluido:

$$\text{div}[(1 - \varphi) \underline{\underline{\sigma}}^s] + \rho_s(1 - \varphi)(\mathbf{g}^s - \boldsymbol{\gamma}^s) + \mathbf{f}_{int}^{\rightarrow s} = 0 \quad (4.32a)$$

$$\text{div}(\varphi \underline{\underline{\sigma}}^f) + \rho_f \varphi(\mathbf{g}^f - \boldsymbol{\gamma}^f) + \mathbf{f}_{int}^{\rightarrow f} = 0 \quad (4.32b)$$

onde $\mathbf{f}_{int}^{\rightarrow s}$ e $\mathbf{f}_{int}^{\rightarrow f}$ representam as forças de interação entre o esqueleto e o fluido. Da lei de ação e reação, tais forças de interação serão relacionadas por:

$$\mathbf{f}_{int}^{\rightarrow s} + \mathbf{f}_{int}^{\rightarrow f} = 0 \quad (4.33)$$

Somando as equações de movimento local do esqueleto (4.32a) e do fluido (4.32b) e comparando-as com a equação do movimento geral (4.22), o tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ é composto pelos tensores de tensões do esqueleto e do fluido na seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - \varphi) \underline{\underline{\sigma}}^s + \varphi \underline{\underline{\sigma}}^f \quad (4.34)$$

Considerando o fluido sem viscosidade, a tensão no fluido será:

$$\underline{\underline{\sigma}}^f = -p \underline{\underline{1}} \quad (4.35)$$

onde p é a poropressão do fluido. Substituindo a Equação (4.35) em (4.34):

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - \varphi) \underline{\underline{\sigma}}^s - \varphi p \underline{\underline{1}} \quad (4.36)$$

4.4.7 Conservação da quantidade de movimento do fluido

No contexto de uma análise dinâmica, as Equações de Campo (4.10) e (4.29) devem ser complementadas pela equação de conservação da quantidade de movimento do fluido, a qual pode ser escrita, considerando (4.32b) e (4.35), da seguinte forma:

$$-\text{div}(\varphi p \underline{\underline{1}}) + \rho_f \varphi(\mathbf{g}^f - \boldsymbol{\gamma}^f) + \mathbf{f}_{int}^{\rightarrow f} = 0 \quad (4.37)$$

Comparando a lei de Darcy (4.11) e a expressão (4.37) com (4.4), mostra-se que:

$$\mathbf{f}_{int}^{\rightarrow f} = p \text{grad}(\varphi) - \varphi^2 \underline{\underline{k}}^{-1} \cdot \mathbf{V}^r = 0 \quad (4.38)$$

Substituindo a Equação (4.38) em (4.37), a equação de movimento do fluido será:

$$-\varphi \text{grad}(p) + \rho_f \varphi (\mathbf{g}^f - \boldsymbol{\gamma}^f) - \varphi^2 \underline{\underline{k}}^{-1} \cdot \mathbf{V}^r = 0 \quad (4.39)$$

Considerando uma evolução quase-estática, onde $\boldsymbol{\gamma}^f = \boldsymbol{\gamma}^s = 0$, a Equação (4.22) pode ser reescrita como:

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (4.40)$$

4.5 TERMODINÂMICA DO MEIO POROSO

A termodinâmica analisa as transformações que afetam todas as formas de energia envolvidas na evolução de um sistema. Ela é baseada em duas leis: a primeira lei expressa a conservação de energia considerando todas as suas formas possíveis, já a segunda lei expressa que a qualidade da energia só pode se deteriorar no que diz respeito à sua transformabilidade em trabalho mecânico eficiente. Aplicadas a um sistema específico, essas leis envolvem as variáveis caracterizadoras de seu estado de energia interna e , eventualmente, fornecem um enquadramento adequado à formulação das equações constitutivas que governam suas evoluções (COUSSY, 2004).

O postulado do estado local é estendido ao meio poroso ao considerar que a termodinâmica deste meio contínuo resulta da superposição da interação dos meios contínuos que o formam, isto é, do meio contínuo do esqueleto e do meio contínuo fluido. Baseado neste postulado, a aplicação da primeira lei da termodinâmica no meio contínuo poroso leva à equação de conservação de energia (4.41), quando não se considera nenhuma fonte volumétrica de calor r . A equação de energia Euleriana aplicada a um volume infinitesimal $d\Omega_t$ é dada por (COUSSY, 2004):

$$\frac{d^s}{dt} e_{int} + e_{int} \text{div}(\mathbf{V}^s) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^s - \text{div}(h_f \mathbf{w} + \mathbf{q}) + (\mathbf{g} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{w} \quad (4.41)$$

onde $e_{int} = \rho_s(1 - \varphi)e_{int,s} + \rho_f \varphi e_{int,f}$ é a densidade de energia interna por unidade de volume, sendo $e_{int,s}$ e $e_{int,f}$ a energia intrínseca do esqueleto e do fluido, respectivamente; $\underline{\underline{d}}^s = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V}^s + \nabla^T \mathbf{V}^s)$ é o tensor taxa de deformação Euleriano do esqueleto e $h_f = e_{int,f} + \frac{P}{\rho_f}$ é a entalpia específica do fluido.

A segunda lei da termodinâmica no meio contínuo poroso leva ao balanço da entropia do volume do meio poroso Ω_t . Substituindo densidades de energia por potenciais energéticos, é possível derivar a inequação de Clausius-Duhem relacionada ao meio poroso deformável. A inequação de Clausius-Duhem estabelece que a dissipação total em um meio poroso é devido à soma das dissipações volumétricas relacionadas ao esqueleto Φ_s (dissipação intrínseca), ao escoamento do fluido Φ_f e ao gradiente de temperatura Φ_{th} (COUSSY, 2004):

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_f + \Phi_{th} \geq 0 \quad (4.42)$$

4.6 COMPORTAMENTO POROELÁSTICO

4.6.1 Esqueleto poroelástico

Considerando uma evolução isotérmica, a poroelasticidade isotérmica estende a teoria da elasticidade ao meio contínuo poroso. Nesta abordagem, o esqueleto é considerado elástico e a dissipação relacionada ao esqueleto é nula, ou seja:

$$\Phi_s = \pi_{ij} d\Delta_{ij} + pd\phi - d\Psi_s = 0 \quad (4.43)$$

onde π_{ij} é o tensor de tensões de Piola-Kirchoff dado por $\underline{\pi} = J\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot (\underline{F}^{-1})^T$, sendo $\underline{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}}$ o tensor gradiente da transformação, onde \mathbf{X} é o vetor material infinitesimal e \mathbf{x} o vetor material infinitesimal após a deformação, $J = \det \underline{F}$ é o jacobiano da transformação e $\underline{\sigma}$ o tensor de tensões de Cauchy. Δ_{ij} são as componentes do tensor de deformação de Green-Lagrange, definido por $\underline{\Delta} = \frac{1}{2}(\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{1})$, $pd\phi$ está relacionado ao trabalho de deformação realizado pela ação da poropressão sobre o esqueleto e Ψ_s é a densidade de energia livre do esqueleto Lagrangeana.

Se a condição dada por $\|\nabla \underline{\xi}\| \ll 1$, onde $\underline{\xi}$ representa o vetor deslocamento, definido pela diferença entre a posição de uma partícula x do esqueleto em $t = t$ e sua posição inicial X em $t = 0$, $\underline{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$, é válida, ou seja, se as transformações são infinitesimais, as componentes de deformação do tensor de Green Lagrange $\underline{\Delta}$ e as componentes de tensão do tensor de Piola-Kirchoff π_{ij} da Equação (4.43) podem ser substituídas, respectivamente, pelas componentes de deformação linearizada ε_{ij} , onde $\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\xi} + \nabla^T \underline{\xi})$ e pelas componentes do tensor de Cauchy σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + pd\phi - d\Psi_s = 0 \quad (4.44)$$

Alternativamente, usando a energia potencial termodinâmica G_s , definida por:

$$G_s = \Psi_s - p\phi \quad (4.45)$$

Logo, a Equação (4.44) pode ser reescrita como:

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \phi dp - dG_s = 0 \quad (4.46)$$

Portanto, as equações de estados são:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial G_s}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.47a)$$

$$\phi = -\frac{\partial G_s}{\partial p} \quad (4.47b)$$

Da simetria de Maxwell:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.48a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial p} = - \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.48b)$$

Diferenciando as Equações (4.47a) e (4.47b) e levando em conta as simetrias de Maxwell, é possível obter as relações constitutivas poroelásticas:

$$d\underline{\underline{\sigma}} = \tilde{C} : d\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{b} dp \quad (4.49a)$$

$$d\phi = \underline{b} : d\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{dp}{N_{biot}} \quad (4.49b)$$

onde $\underline{\underline{\varepsilon}}$ é o tensor linearizado de deformação elástica, \tilde{C} é o tensor elástico drenado de rigidez do esqueleto, \underline{b} é o tensor de Biot e $1/N_{biot}$ é o inverso do módulo de Biot, sendo \tilde{C} , \underline{b} e N_{biot} parâmetros tangentes.

4.6.1.1 Incompressibilidade da matriz e a tensão efetiva

Considera-se que a dilatação volumétrica macroscópica sofrida pelo esqueleto é devida à mudança na porosidade e dilatação volumétrica ε_s da fase sólida da matriz, isto é:

$$\varepsilon = (1 - \phi_0) \varepsilon_s + \phi - \phi_0 \quad (4.50)$$

onde ϕ_0 é a porosidade inicial de referência. Na ausência de porosidade oclusa, os grãos sólidos que formam a matriz geralmente sofrem alterações insignificantes de volume ($\varepsilon_s = 0$), de modo que a alteração volumétrica total do esqueleto $d\varepsilon = d\varepsilon_{ii}$ reduz-se à alteração da porosidade $d\phi$. Portanto, na condição de incompressibilidade da matriz, $b_{ij} = \delta_{ij}$ e $1/N_{Biot} = 0$, onde as relações constitutivas resultam em:

$$d\sigma'_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (4.51a)$$

$$d\phi = d\varepsilon_{ii} \quad (4.51b)$$

onde $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$ é a tensão efetiva do esqueleto.

4.6.1.2 Esqueleto poroelástico linear e isotrópico

Na poroelasticidade linear as propriedades poroelásticas são constantes e as Equações Constitutivas (4.49a) e (4.49b) podem ser integradas da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - b_{ij}(p - p^0) \quad (4.52a)$$

$$\phi - \phi_0 = b_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{p - p^0}{N_{biot}} \quad (4.52b)$$

onde σ_{ij}^0 e p^0 representam, respectivamente, a tensão inicial e a poropressão inicial de referência. Para um material linear e isotrópico ($\underline{b} = b\underline{1}$), as Equações (4.52a) e (4.52b) são:

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 = \left(K - \frac{2}{3}\mu_s \right) \epsilon_{ij} + 2\mu_s \epsilon_{ij} - b(p - p^0)\delta_{ij} \quad (4.53a)$$

$$\phi - \phi_0 = b \epsilon + \frac{p - p^0}{N_{biot}} \quad (4.53b)$$

onde K e μ_s são o módulo de compressibilidade e de cisalhamento do esqueleto, respectivamente, $\epsilon = \text{tr} \underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_{ii}$ é a deformação volumétrica do esqueleto, b o coeficiente de Biot, δ_{ij} são as componentes do tensor delta de Kronecker e $\lambda_{Lame} = K - \frac{2}{3}\mu_s$ é o coeficiente de Lamé. Portanto, as seguintes relações de compatibilidade são válidas:

$$b = 1 - \frac{K}{K_s} \quad (4.54)$$

$$\frac{1}{N_{biot}} = \frac{b - \phi_0}{K_s} \quad (4.55)$$

onde K_s é o módulo de compressibilidade da matriz. No caso de isotropia, a deformação elástica do esqueleto $d\underline{\underline{\epsilon}}$ é controlada pela tensão efetiva de Biot:

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + b p \underline{\underline{1}} \quad (4.56)$$

ou ainda:

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}} \quad (4.57)$$

quando o coeficiente de Biot é assumido $b = 1$ (matriz incompressível), obtendo-se assim, a tensão efetiva de Terzaghi. Na Equação (4.57), as tensões positivas serão consideradas como tração, assim como é tratado na mecânica dos sólidos, já a poropressão será positiva em compressão, como é convencional na mecânica dos solos.

4.6.2 Equação constitutiva do fluido

Diferenciando as equações de estado do fluido de saturação, considerando a condição isotérmica, pode-se escrever (COUSSY, 2004):

$$\frac{d\rho_f}{\rho_f} = \frac{dp}{K_f} \quad (4.58)$$

onde K_f é o módulo de compressibilidade tangente do fluido. O caso limite de um escoamento incompressível é obtido quando $K_f \rightarrow \infty$. Consequentemente:

$$\rho_f = \rho_f^0 \quad (4.59)$$

onde o sobrescrito "0" indica um valor de referência inicial. Já para o caso de um fluido compressível, com módulo de compressibilidade K_f , tem-se:

$$\rho_f = \rho_f^0 \exp\left(\frac{p - p_0}{K_f}\right) \quad (4.60)$$

4.6.3 Equação constitutiva do material poroso

Uma vez que a condição (4.8) para saturação completa permanece válida, diferenciando-se essa expressão, obtém-se:

$$\frac{dm_f}{\rho_f} = d\phi + \phi \frac{d\rho_f}{\rho_f} \quad (4.61)$$

Combinando as Equações (4.58) e (4.61), é obtido:

$$d\phi = \frac{dm_f}{\rho_f} - \phi \frac{dp}{K_f} \quad (4.62)$$

Substituindo a expressão (4.62) na relação constitutiva (4.49b) e chamando a Equação (4.49a), tem-se:

$$d\underline{\underline{\sigma}} = \tilde{\underline{\underline{C}}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{b}} dp \quad (4.63a)$$

$$\frac{dm_f}{\rho_f} = \underline{\underline{b}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{dp}{M} \quad (4.63b)$$

onde,

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N_{biot}} + \frac{\phi}{K_f} \quad (4.64)$$

Finalmente, considerando um esqueleto poroelástico linear e isotrópico:

$$d\sigma_{ij} = \left(K - \frac{2}{3}\mu_s \right) d\epsilon + 2\mu_s \varepsilon_{ij} - bdp\delta_{ij} \quad (4.65a)$$

$$\frac{dm_f}{\rho_f} = b d\epsilon + \frac{dp}{M} \quad (4.65b)$$

4.7 FORMULAÇÃO BASEADA NO MÉTODO DESACOPLADO

Considera-se a hipótese das transformações infinitesimais, a isotropia do meio poroso e a ausência de forças inerciais ($\boldsymbol{\gamma}^r = \boldsymbol{\gamma}^s = 0$) e de volume dada pela gravidade ($\mathbf{g} = 0$).

4.7.1 Escoamento incompressível

Considerando o fluido e a matriz incompressíveis e substituindo a Equação de Darcy (4.12), a equação da massa fluida Lagrangeana ($m_f = \rho_f \phi$), o vetor fluxo relativo ($\mathbf{w} = \rho_f \mathbf{q}$) e a variação da porosidade dada pela expressão (4.51b) na equação da continuidade da massa fluida (4.10), a Equação de Difusão que relaciona as deformações do esqueleto e poropressões, é obtida da seguinte maneira:

$$\text{tr } \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \frac{k}{\gamma_f} \Delta p \quad (4.66)$$

onde $(\text{tr } \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$, Δ é o operador Laplaciano definido por $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ e $\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}$ indica a derivada material de $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, onde no contexto das pequenas deformações do esqueleto, pode-se aproximá-la à derivada parcial.

4.7.2 Escoamento compressível

Considerando ainda o fluido compressível e a matriz incompressível, substituindo a Equação de Darcy (4.12) e a relação constitutiva (4.65b) na equação da continuidade da massa fluida (4.10), a Equação da Difusão pode ser escrita como:

$$\text{tr } \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}} + \frac{1}{M} \dot{p} = \frac{k}{\gamma_f} \Delta p \quad (4.67)$$

Neste caso, a Equação (4.64) se reduz a $\frac{1}{M} = \frac{\phi}{K_f}$. Logo, a Equação (4.67) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\text{tr } \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}} + \frac{\phi}{K_f} \dot{p} = \frac{k}{\gamma_f} \Delta p \quad (4.68)$$

4.8 CONSIDERAÇÃO DOS TERMOS INERCIAIS NAS EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Abordagem completa da solução dinâmica

Para a inclusão dos termos inerciais nas equações fundamentais, considera-se a hipótese das transformações infinitesimais e a isotropia da permeabilidade do meio poroso. Através da Lei de Fluxo de Darcy (4.12), da equação da massa fluida Lagrangeana ($m_f = \rho_f \phi$), do vetor fluxo relativo ($\mathbf{w} = \rho_f \mathbf{q}$) e considerando a equação da continuidade da massa fluida (4.10), tem-se a equação que considera a aceleração relativa entre as partículas de sólido e fluido, como:

$$-\text{grad}(p) + \rho_f \mathbf{g} = \rho_f \boldsymbol{\gamma}^s + \rho_f (\boldsymbol{\gamma}^f - \boldsymbol{\gamma}^s) + \frac{\gamma_f}{k} \mathbf{q} \quad (4.69)$$

considerando a aceleração do fluido $\boldsymbol{\gamma}^f$ dado pela Equação (4.28), pode-se reescrever (4.69) como:

$$-\text{grad}(p) + \rho_f \mathbf{g} = \rho_f \boldsymbol{\gamma}^s + \rho_f \left[\frac{d^s \mathbf{V}^r}{dt} + \text{grad}(\mathbf{V}^r + \mathbf{V}^s) \cdot \mathbf{V}^r \right] + \frac{\gamma_f}{k} \mathbf{q} \quad (4.70)$$

Adicionalmente, fazendo-se o uso da relação constitutiva (4.51b), que relaciona a variação da porosidade com a deformação do esqueleto, e assumindo o fluido com módulo de compressibilidade K_f , onde a equação constitutiva do fluido é dado por (4.62), tem-se a seguinte equação fundamental:

$$\text{tr } \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}} + \text{div}(\mathbf{q}) = -\frac{\phi}{K_f} \dot{p} \quad (4.71)$$

onde, nas Equações (4.70) e (4.71), o vetor filtração ($\mathbf{q} = \phi \mathbf{V}^r$) é dado em função da porosidade e da velocidade relativa entre o fluido e o esqueleto.

A abordagem completa da solução dinâmica consiste em resolver as Equações (4.70) e (4.71), além da Equação de Equilíbrio (4.29), tendo como variáveis o vetor deslocamento do esqueleto (\mathbf{u}), a poropressão (p) e o vetor velocidade relativa entre o fluido e o esqueleto (\mathbf{V}^r).

Abordagem aproximada nº 1 da solução dinâmica - aproximação $u-p$

Considerando ainda uma solução alternativa, também chamada de formulação aproximada $u-p$, onde a aceleração relativa entre o fluido e o esqueleto é desprezada, a equação fundamental pode ser dada substituindo (4.70) em (4.71), eliminando então a incógnita \mathbf{q} , além da exclusão do termo ($\boldsymbol{\gamma}^r$) definido pela Equação (4.28) da equação de equilíbrio dinâmico (4.29). Neste caso, tem-se como incógnita do problema, as variáveis deslocamento do esqueleto \mathbf{u} e, conseqüentemente a aceleração do esqueleto $\boldsymbol{\gamma}^s = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$, além da poropressão p . Neste caso, se faz necessário a verificação *a posteriori* do termo desprezado ($\boldsymbol{\gamma}^r$), onde a solução será válida se $\boldsymbol{\gamma}^r \ll \boldsymbol{\gamma}^s$.

Abordagem aproximada nº 2 da solução dinâmica

Alternativamente, pode-se considerar como solução dinâmica duas aproximações. A primeira delas, considera-se como parte da solução a aceleração relativa entre o fluido e o esqueleto. No entanto, o termo $\text{grad}(\mathbf{V}^r + \mathbf{V}^s) \cdot \mathbf{V}^r$ é desprezado, tendo a sua ordem de gradeza comparada com o vetor $\frac{d^s \mathbf{V}^r}{dt}$ para assim justificar sua supressão. Neste caso, tem-se como incógnitas do problema as variáveis deslocamento \mathbf{u} e aceleração do esqueleto $\boldsymbol{\gamma}^s = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$, a poropressão p , a velocidade relativa entre as partículas do esqueleto e do fluido \mathbf{V}^r , bem como sua derivada material $\frac{d^s \mathbf{V}^r}{dt}$.

Abordagem aproximada nº 3 da solução dinâmica

Na segunda forma, a hipótese das pequenas perturbações (HPP) para as partículas do esqueleto é empregada, fazendo com que $\mathbf{V}^r(\mathbf{x}, t) \simeq \mathbf{V}^r(\mathbf{X}, t)$, onde $\frac{d^s \mathbf{V}^r}{dt}$ possa se confundir com $\frac{\partial \mathbf{V}^r}{\partial t}$, sendo esta última, objeto de estudo. Neste caso, as incógnitas do problema são as variáveis deslocamento \mathbf{u} e aceleração do esqueleto $\boldsymbol{\gamma}^s = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$, a poropressão p e a velocidade relativa entre as partículas do esqueleto e do fluido \mathbf{V}^r , bem como $\frac{\partial \mathbf{V}^r}{\partial t}$.

5 RESPOSTA POROELÁSTICA INDUZIDA POR ONDAS - SOLUÇÃO QUASE-ESTÁTICA

Quando ocorre a propagação de ondas sobre um leito marinho poroso, ocorre a indução de fluxo de água através dos poros, que por sua vez tendem a deformá-los. Portanto, a resposta do fundo marinho em razão da propagação de ondas é a combinação dos efeitos mecânicos do fluido e do sólido (YAMAMOTO, 1978). A presente solução é baseada na teoria de adensamento tridimensional de Biot (1941).

5.1 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

A solução analítica é determinada através das seguintes considerações e hipóteses:

1. O solo oceânico é considerado poroso, com superfície horizontal, elástico isotrópico e hidraulicamente isotrópico – sendo considerada apenas uma camada de solo;
2. O esqueleto do solo (matriz e espaço poroso conectado) é compressível;
3. A matriz (parte sólida e a porosidade oclusa) é incompressível assim como os grãos de solo;
4. O esqueleto do solo obedece à lei de Hooke;
5. O fluido que preenche os poros é a água, considerada compressível ou incompressível;
6. O fluxo no leito poroso obedece à lei de Darcy;
7. Efeitos inerciais são negligenciados;
8. A onda é do tipo progressiva bidimensional e a teoria linear da onda é empregada;
9. A pressão da onda sobre a superfície do solo oceânico é considerada o único carregamento externo atuante, sendo definida conforme o Capítulo (3);
10. São desprezados da equação de equilíbrio (4.40) e na lei de Darcy (4.11) ou (4.12) as forças de volume dada pela gravidade ($\mathbf{g} = 0$), sendo esta considerada somente na análise de estabilidade de massas submarinas, apresentada pelo Capítulo (7);

A Condição (10), indica em particular, que a análise considera apenas a variação do estado poromecânico do solo do leito marinho induzido pelo movimento da onda marinha. Nessas

condições, a equação que governa o escoamento do fluido em um meio poroso é a equação da continuidade, apresentada anteriormente em (4.68):

$$\frac{k}{\gamma_f} \Delta p = \frac{\phi}{K_f} \dot{p} + \dot{\varepsilon} \quad (5.1)$$

onde p é o excesso de poropressão, $\varepsilon = \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}$ é a deformação volumétrica do leito poroso, dado por:

$$\varepsilon = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (5.2)$$

na qual u_x e u_z são as componentes do deslocamento nas direções x e z , respectivamente, t é o tempo, k é o coeficiente de permeabilidade do solo, γ_f é o peso específico do fluido, ϕ é a porosidade e K_f é o módulo de compressibilidade do fluido. As equações de equilíbrio do meio poroso em termos de tensões efetivas em suas componentes (Equação 4.40) são:

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5.4)$$

As equações das tensões normais efetivas e cisalhantes são dadas de acordo com a Lei de Hooke:

$$\sigma'_x = 2G \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \right] \quad (5.5)$$

$$\sigma'_z = 2G \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \right] \quad (5.6)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau = G \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] \quad (5.7)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e G é o módulo de elasticidade transversal, que se relaciona com o módulo de elasticidade longitudinal (E) da seguinte forma:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.8)$$

Valores típicos do módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson podem ser encontrados no Anexo (E).

Substituindo as relações elásticas nas equações de equilíbrio:

$$G \nabla^2 u_x + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.9)$$

$$G \nabla^2 u_z + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5.10)$$

5.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Na superfície do solo oceânico ($z = 0$), a tensão vertical efetiva é nula, a tensão cisalhante é desprezada e a poropressão é igual à gerada pela onda:

$$\sigma'_z = 2G \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] = 0 \text{ em } z = 0 \quad (5.11a)$$

$$\tau = G \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 \text{ em } z = 0 \quad (5.11b)$$

$$p = p_0 \exp[i(\lambda x - \omega t)] \text{ em } z = 0 \quad (5.11c)$$

onde p_0 é a amplitude da pressão dinâmica da onda no fundo marinho, dada pela Equação (3.91), baseada na teoria linear de ondas apresentada no Capítulo (3). Por conveniência, a condição de contorno (5.11c) foi expressa em variáveis complexas, onde somente a parte real será considerada na solução final. No fundo do solo oceânico considera-se a existência de um substrato rígido e impermeável. Tal substrato pode possuir distância limitada d ou infinita a partir da superfície do solo, conforme a Figura (16).

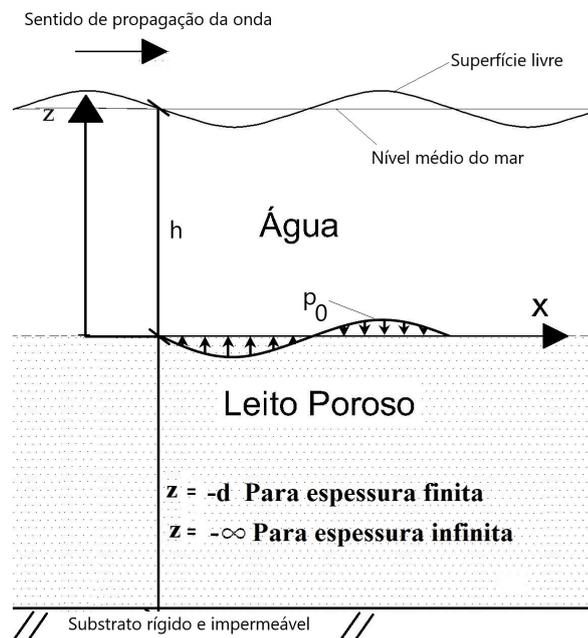


Figura 16 – Esquema representativo dos eixos de orientação.

Considerando uma espessura de solo infinita, os deslocamentos horizontais e verticais são nulos, assim como o excesso de poropressão:

$$\begin{cases} u_x = 0 \\ u_z = 0 \\ p = 0 \end{cases} \text{ para } z \rightarrow -\infty \quad (5.12)$$

Já para uma espessura finita, em $z = -d$ os deslocamentos horizontais e verticais assim como a variação do excesso de poropressão são nulos:

$$\begin{cases} u_x = 0 \\ u_z = 0 \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{para } z = -d \quad (5.13)$$

5.3 SOLUÇÃO ANALÍTICA

A solução analítica consiste em resolver as Equações Fundamentais (5.1), (5.3) e (5.4) com as condições de contorno (5.12) e (5.13). As expressões para o cálculo dos deslocamentos e poropressão são obtidas primeiro, sendo determinadas posteriormente as expressões para as tensões a partir das Equações (5.5), (5.6) e (5.7).

A linearidade das equações fundamentais sugere que todas as variáveis (e.g., u_x , u_z e p) irão depender de x e t na forma dada pela função de carregamento, isto é, $\exp[i(\lambda x - \omega t)]$. Isso facilita a análise subsequente, uma vez que a diferenciação de qualquer variável com respeito a x ou t reduz-se à própria variável multiplicada por $(i\lambda)$ ou $(-i\omega)$, respectivamente. Introduzindo este conceito nas Equações (5.1), (5.3) e (5.4), pode-se reescrevê-las como:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - p \left(\lambda^2 - \frac{i\omega\gamma_f\phi}{kK_f} \right) = -\frac{i\omega\gamma_f}{k} \left(i\lambda u_x + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (5.14)$$

$$p = \sigma'_x + \frac{1}{i\lambda} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + i\lambda \tau \quad (5.16)$$

Com o intuito de eliminar a variável p , é conveniente substituir a Equação (5.15) nas Equações (5.14) e (5.16):

$$\frac{\partial^2 \sigma'_x}{\partial z^2} + \frac{1}{i\lambda} \frac{\partial^3 \tau}{\partial z^3} - \left(\lambda^2 - \frac{i\gamma_f\omega\phi}{kK_f} \right) \left(\sigma'_x + \frac{1}{i\lambda} \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) = -\frac{i\omega\gamma_f}{k} \left(i\lambda u_x + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial z} + \frac{1}{i\lambda} \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + i\lambda \tau \quad (5.18)$$

As Equações (5.17) e (5.18) constituem as equações fundamentais do problema e são função somente das tensões efetivas vertical e horizontal, além da tensão cisalhante. Por sua vez, as

Equações Constitutivas (5.5), (5.6) e (5.7) são função dos deslocamentos horizontais e verticais. Portanto, introduzindo as Equações (5.5), (5.6) e (5.7) em (5.17) e (5.18), tem-se:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - u_z \lambda^2 = \frac{1}{i\lambda} \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial z^3} - \lambda^2 \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} & -i\lambda \left\{ \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \left[\left(\lambda^2 - \frac{i\omega\gamma_f}{k} \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{(1-2\nu)}{G} \right) \right) \right] \right\} = \\ & \frac{\partial^4 u_x}{\partial z^4} (1-2\nu) - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \left[2\lambda^2(1-\nu) + (1-2\nu) \left(\lambda^2 - \frac{i\gamma_f\omega\phi}{kK_f} \right) \right] \\ & + \lambda^2 u_x \left[2\lambda^2(1-\nu) - \frac{i\omega\gamma_f}{k} \left(\frac{2\phi(1-\nu)}{K_f} + \frac{(1-2\nu)}{G} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

Derivando a Equação (5.19) em relação à variável z , tem-se:

$$\frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} = \lambda^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{i\lambda} \left[\frac{\partial^4 u_x}{\partial z^4} - \lambda^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] \quad (5.21)$$

Substituindo agora na Equação (5.20):

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \left[\frac{2k(1-\nu)}{\lambda\omega\gamma_f \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{(1-2\nu)}{G} \right)} \right] \cdot \left\{ \frac{\partial^4 u_x}{\partial z^4} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \left[2\lambda^2 - (1-2\nu) \frac{i\omega\gamma_f\phi}{2kK_f(1-\nu)} \right] + \lambda^2 u_x \left[\lambda'^2 \right] \right\} \quad (5.22)$$

onde introduz-se o parâmetro λ' , o qual reúne as variáveis físicas dependentes da onda (número de onda λ e frequência angular ω), do solo (coeficiente de Poisson ν , porosidade ϕ e módulo de cisalhamento G) e do fluido (peso específico γ_f e módulo de compressibilidade do fluido K_f):

$$\lambda'^2 = \lambda^2 - \frac{i\omega\gamma_f}{k} \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)G} \right) \quad (5.23)$$

ou ainda:

$$\lambda' = \lambda'_1 + i\lambda'_2 \quad (5.24)$$

onde a parte real λ'_1 é:

$$\lambda'_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda^2 + 2\sqrt{\lambda^4 + \left[\frac{\omega\gamma_f}{k} \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)G} \right) \right]^2}} \quad (5.25)$$

e a parte imaginária λ'_2 é:

$$\lambda'_2 = - \sqrt{\frac{\frac{\omega\gamma_f}{k} \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)G} \right)}{2\lambda^2 + 2\sqrt{\lambda^4 + \left[\frac{\omega\gamma_f}{k} \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)G} \right) \right]^2}} \quad (5.26)$$

Derivando a Equação (5.22) duas vezes em relação à variável z , pode-se escrever:

$$\frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} = \left[\frac{2k(1-\nu)}{\lambda \omega \gamma_f \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{(1-2\nu)}{G} \right)} \right] \cdot \left\{ \frac{\partial^6 u_x}{\partial z^6} - \frac{\partial^4 u_x}{\partial z^4} \left[2\lambda^2 - (1-2\nu) \frac{i\omega \gamma_f \phi}{2kK_f(1-\nu)} \right] + \lambda^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} [\lambda'^2] \right\} \quad (5.27)$$

Analisando a Equação (5.20), nota-se que há termos em função de $\frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3}$ e $\frac{\partial u_z}{\partial z}$. Logo, substituindo as Equações (5.22) e (5.27) em (5.20), a expressão terá dependência somente da variável u_x . Realizando a substituição, rearranjando e simplificando alguns termos, obtém-se:

$$\frac{\partial^6 u_x}{\partial z^6} - (2\lambda^2 + \lambda'^2) \frac{\partial^4 u_x}{\partial z^4} + \lambda^2 (\lambda^2 + 2\lambda'^2) \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - \lambda^4 \lambda'^2 u_x = 0 \quad (5.28)$$

A Equação (5.28) em conjunto com a Equação (5.23), define o deslocamento horizontal do solo induzido pela onda progressiva bidimensional, considerando-se condições hidráulicas isotrópicas. Através das Equações (5.22) e (5.15) é possível determinar o deslocamento do solo na direção vertical e o excesso de poropressão, respectivamente, onde todas expressões são equações diferenciais homogêneas de sexta ordem conforme equação característica (5.29), onde o operador D indica $\frac{d}{dz}$:

$$(D^2 - \lambda^2)^2 (D^2 - \lambda'^2) \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \\ p \end{Bmatrix} = 0 \quad (5.29)$$

Tal equação característica possui seis raízes: duas $+\lambda$, duas $-\lambda$ e duas $\pm\lambda'$ e tendo como solução:

$$u_x = \{ (a_1 + a_2 z) \exp(\lambda z) + (a_3 + a_4 z) \exp(-\lambda z) + a_5 \exp(\lambda' z) + a_6 \exp(-\lambda' z) \} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.30a)$$

$$u_z = \{ (b_1 + b_2 z) \exp(\lambda z) + (b_3 + b_4 z) \exp(-\lambda z) + b_5 \exp(\lambda' z) + b_6 \exp(-\lambda' z) \} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.30b)$$

$$p = \{ (c_1 + c_2 z) \exp(\lambda z) + (c_3 + c_4 z) \exp(-\lambda z) + c_5 \exp(\lambda' z) + c_6 \exp(-\lambda' z) \} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.30c)$$

As constantes a_n , b_n e c_n com $n = 1, 2, 3, \dots, 6$, são dependentes entre si. A dependência é determinada substituindo-se as Equações (5.30a), (5.30b) e (5.30c) nas Equações Fundamentais

(5.1), (5.9) e (5.10). Sendo assim, as constantes b_n e c_n são escritas em função de a_n para as variáveis u_z e p da seguinte maneira:

$$u_z = -i \left\{ \left[a_1 + \left(\frac{1+2\delta}{\lambda} - z \right) a_2 \right] \exp(\lambda z) - \left[a_3 + \left(\frac{1+2\delta}{\lambda} + z \right) a_4 \right] \exp(-\lambda z) + \lambda' (a_5 \exp(\lambda' z) + a_6 \exp(-\lambda' z)) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.31a)$$

$$p = \frac{-2iG}{1-2\nu} \left\{ (1-\delta-2\nu)(a_2 \exp(\lambda z) - a_4 \exp(-\lambda z)) + (1-\nu)(\lambda'^2 - \lambda^2) (a_5 \exp(\lambda' z) + a_6 \exp(-\lambda' z)) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.31b)$$

onde,

$$\delta = \frac{(1-2\nu)\frac{\phi}{K_f}}{\frac{\phi}{K_f} + \frac{1-2\nu}{G}} \quad (5.32)$$

Finalmente, as constantes a_n são determinadas através das condições de contorno.

5.4 SOLUÇÃO DO PROBLEMA

5.4.1 Camada de solo infinita

Aplicando a condição de contorno (5.12) nas Equações (5.30a), (5.31a) e (5.31b), as constantes a_n , b_n e c_n , com $n = 3, 4, 6$, deverão ser nulas, resultando em:

$$u_x = \{(a_1 + a_2 z) \exp(\lambda z) + a_5 \exp(\lambda' z)\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.33a)$$

$$u_z = -i \left\{ \left[a_1 + \left(\frac{1+2\delta}{\lambda} - z \right) a_2 \right] \exp(\lambda z) + \frac{\lambda'}{\lambda} a_5 \exp(\lambda' z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.33b)$$

$$p = \frac{-2iG}{1-2\nu} \left\{ (1-\delta-2\nu)a_2 \exp(\lambda z) + (1-\nu) \left(\frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{\lambda} \right) a_5 \exp(\lambda' z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.33c)$$

Através das condições de contorno restantes, definidas nas Equações (5.11a), (5.11b) e (5.11c), as Equações (5.33a), (5.33b) e (5.33c) são redefinidas da seguinte maneira (JENG, 2012):

$$u_x = \frac{ip_0}{2G} \{(C_0^\infty + C_1^\infty z) \exp(\lambda z) + C_2^\infty \exp(\lambda' z)\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.34a)$$

$$u_z = \frac{p_0}{2G} \left\{ \left[C_0^\infty - \left(\frac{1+2\delta}{\lambda} \right) C_1^\infty + C_1^\infty z \right] \exp(\lambda z) + \frac{\lambda'}{\lambda} C_2^\infty \exp(\lambda' z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.34b)$$

$$p = \frac{p_0}{1-2\nu} \left\{ (1-\delta-2\nu)C_1^\infty \exp(\lambda z) + (1-\nu) \left(\frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{\lambda} \right) C_2^\infty \exp(\lambda'z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.34c)$$

onde as constantes C_0^∞ , C_1^∞ e C_2^∞ são definidas como:

$$C_0^\infty = \frac{-\delta[\nu(\lambda' - \lambda)^2 - \lambda'(\lambda' - 2\lambda)]}{\lambda(\lambda' - \lambda)(\lambda' - \lambda'\nu + \lambda\nu + \lambda\delta)} \quad (5.35)$$

$$C_1^\infty = \frac{\lambda' - \lambda'\nu + \lambda\nu}{(\lambda' - \lambda'\nu + \lambda\nu + \lambda\delta)} \quad (5.36)$$

$$C_2^\infty = \frac{\lambda\delta}{(\lambda' - \lambda)(\lambda' - \lambda'\nu + \lambda\nu + \lambda\delta)} \quad (5.37)$$

As equações da tensão cisalhante e das tensões normais efetivas nas direções x e z podem ser obtidas introduzindo as Equações (5.34a) e (5.34b) nas Equações (5.5), (5.6) e (5.7) (JENG, 2012):

$$\begin{aligned} \sigma'_x = -p_0 \left\{ \left[C_0^\infty \lambda + \left(\frac{2\nu\delta}{1-2\nu} \right) C_1^\infty + C_1^\infty z \lambda \right] \exp(\lambda z) \right. \\ \left. + \left(\lambda^2 - \frac{\nu(\lambda'^2 - \lambda^2)}{\lambda(1-2\nu)} \right) C_2^\infty \exp(\lambda'z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \end{aligned} \quad (5.38a)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_z = p_0 \left\{ \left[C_0^\infty \lambda - \left(\frac{2(1-\nu)\delta}{1-2\nu} \right) C_1^\infty + C_1^\infty z \lambda \right] \exp(\lambda z) \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda(1-2\nu)} (\lambda'^2(1-\nu) - \lambda^2\nu) C_2^\infty \exp(\lambda'z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \end{aligned} \quad (5.38b)$$

$$\tau = ip_0 \left\{ \left[C_0^\infty \lambda + (\lambda z - \delta) C_1^\infty \right] \exp(\lambda z) + \lambda' C_2^\infty \exp(\lambda'z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.38c)$$

Considerando somente a parte real da solução, as constantes C_0^∞ , C_1^∞ e C_2^∞ podem ser escritas como a soma de uma parte real e imaginária:

$$C_0^\infty = \alpha_0^\infty + i\beta_0^\infty \quad (5.39)$$

$$C_1^\infty = \alpha_1^\infty + i\beta_1^\infty \quad (5.40)$$

$$C_2^\infty = \alpha_2^\infty + i\beta_2^\infty \quad (5.41)$$

onde as constantes α_n^∞ e β_n^∞ ($n = 0, 1$ e 2) encontram-se no Anexo (A). A parte real das equações dos deslocamentos, propressão e tensões induzidas por ondas em leito marinho são portanto:

$$\begin{aligned} u_x = \frac{p_0}{2G} \left\{ \left[-f_{u1} \exp(\lambda z) - \left(c_{u1} \cos(z\lambda'_2) + c_{u2} \sin(z\lambda'_2) \right) \exp(z\lambda'_1) \right] \cos(\lambda x - \omega t) \right. \\ \left. - \left[f_{u2} \exp(\lambda z) + \left(c_{u2} \cos(z\lambda'_2) - c_{u1} \sin(z\lambda'_2) \right) \exp(z\lambda'_1) \right] \sin(\lambda x - \omega t) \right\} \end{aligned} \quad (5.42a)$$

$$u_z = -\frac{p_0}{2G} \left\{ \left[f_{w1} \exp(\lambda z) + \frac{1}{\lambda} \left(c_{w1} \cos(z\lambda'_2) - c_{w2} \sin(z\lambda'_2) \right) \exp(z\lambda'_1) \right] \cos(\lambda x - \omega t) - \left[f_{w2} \exp(\lambda z) + \frac{1}{\lambda} \left(c_{w2} \cos(z\lambda'_2) - c_{w1} \sin(z\lambda'_2) \right) \exp(z\lambda'_1) \right] \sin(\lambda x - \omega t) \right\} \quad (5.42b)$$

$$p = \frac{p_0}{1-2\nu} \left\{ \left[c_{p1} \exp(\lambda z) + \frac{1}{\lambda} \left(c_{p2} \cos(z\lambda'_2) - c_{p3} \sin(z\lambda'_2) \right) \exp(z\lambda'_1) \right] \cos(\lambda x - \omega t) - \left[c_{p4} \exp(\lambda z) + \frac{1}{\lambda} \left(c_{p3} \cos(z\lambda'_2) + c_{p2} \sin(z\lambda'_2) \right) \exp(z\lambda'_1) \right] \sin(\lambda x - \omega t) \right\} \quad (5.42c)$$

$$\sigma'_x = p_0 \left\{ \left[-f_{x1} \exp(\lambda z) - \frac{1}{\lambda(1-2\nu)} \left(c_{x1} \cos(z\lambda'_2) - c_{x2} \sin(z\lambda'_2) \right) \exp(z\lambda'_1) \right] \cos(\lambda x - \omega t) - \left[-f_{x2} \exp(\lambda z) - \frac{1}{\lambda(1-2\nu)} \left(c_{x2} \cos(z\lambda'_2) - c_{x1} \sin(z\lambda'_2) \right) \exp(z\lambda'_1) \right] \sin(\lambda x - \omega t) \right\} \quad (5.42d)$$

$$\sigma'_z = p_0 \left\{ \left[f_{z1} \exp(\lambda z) + \frac{1}{\lambda(1-2\nu)} \left(c_{z1} \cos(z\lambda'_2) - c_{z2} \sin(z\lambda'_2) \right) \exp(z\lambda'_1) \right] \cos(\lambda x - \omega t) - \left[f_{z2} \exp(\lambda z) + \frac{1}{\lambda(1-2\nu)} \left(c_{z2} \cos(z\lambda'_2) + c_{z1} \sin(z\lambda'_2) \right) \exp(z\lambda'_1) \right] \sin(\lambda x - \omega t) \right\} \quad (5.42e)$$

$$\tau = p_0 \left\{ \left[-f_{t1} \exp(\lambda z) - \left(c_{t1} \cos(z\lambda'_2) + c_{t2} \sin(z\lambda'_2) \right) \exp(z\lambda'_1) \right] \cos(\lambda x - \omega t) - \left[f_{t2} \exp(\lambda z) + \left(c_{t2} \cos(z\lambda'_2) - c_{t1} \sin(z\lambda'_2) \right) \exp(z\lambda'_1) \right] \sin(\lambda x - \omega t) \right\} \quad (5.42f)$$

onde as funções f_{un} , f_{wn} , f_{xn} , f_{zn} , f_{tn} , com $n = 1, 2$, e as constantes c_{un} , c_{wn} , c_{pn} , com $n = 1, 2$ e c_{pn} com $n = 3, 4$ encontram-se no Anexo (A).

5.4.1.1 Escoamento incompressível

Considerando que o fluido de saturação do meio poroso esteja em regime de escoamento incompressível, ou seja, que o módulo de compressibilidade do fluido tenda ao infinito ($K_f \rightarrow \infty$), por consequência a razão ϕ/K_f tenderá a zero ($\phi/K_f \rightarrow 0$). Desta forma, as Equações (5.23) e (5.32) serão, respectivamente:

$$\lambda'^2 = \lambda^2 - \frac{i\omega\gamma_f}{k} \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \right) \quad (5.43)$$

$$\delta = 0 \quad (5.44)$$

o que resultará nas constantes $C_0^\infty = C_2^\infty = 0$ e $C_1^\infty = 1$. Logo, as equações dos deslocamentos (5.42a e 5.42b) e poropressão (5.42c) podem ser simplificadas como (JENG, 2012):

$$u_x = -z \exp(\lambda z) \frac{p_0}{2G} \text{sen}(\lambda x - \omega t) \quad (5.45a)$$

$$u_z = (\lambda z - 1) \exp(\lambda z) \frac{p_0}{2\lambda G} \text{cos}(\lambda x - \omega t) \quad (5.45b)$$

$$p = p_0 \exp(\lambda z) \text{cos}(\lambda x - \omega t) \quad (5.45c)$$

Já as expressões das tensões efetivas vertical e horizontal e a tensão cisalhante podem ser simplificadas como (JENG, 2012):

$$\sigma'_x = -p_0 \lambda z \exp(\lambda z) \text{cos}(\lambda x - \omega t) \quad (5.46a)$$

$$\sigma'_z = p_0 \lambda z \exp(\lambda z) \text{cos}(\lambda x - \omega t) \quad (5.46b)$$

$$\tau = -p_0 \lambda z \exp(\lambda z) \text{sen}(\lambda x - \omega t) \quad (5.46c)$$

É interessante observar que a Expressão (5.46c) que representa a poropressão induzida por ondas para o caso de solo completamente saturado é a mesma encontrada por Putnam (1949) que assumiu o solo como rígido e o escoamento incompressível. Da mesma forma, Yamamoto (1978) determinou as mesmas equações para deslocamentos, poropressão e tensões efetivas para o caso de solo saturado e isotrópico apresentadas nas Equações (5.45) e (5.46). Verifica-se assim que as tensões induzidas pela onda dependem apenas das características do carregamento da onda, sendo independentes das propriedades do solo.

Através das Equações (5.45) e (5.46) a amplitude máxima dos deslocamentos horizontais e verticais, das tensões efetivas e do excesso de poropressão induzido por ondas adimensionalizadas (λz) pode ser visualizada na Figura (17). É possível representar por uma única curva as tensões efetivas, cisalhante e deslocamento horizontal, já que adimensionalmente, as curvas representam uma função exponencial. As partículas de solo se movem seguindo uma trajetória elíptica, se tornando circulares abaixo de $\lambda z = -4$. Próximo ao topo da camada, os deslocamentos do solo se dão somente na vertical. As tensões normais e tangenciais assumem valores nulos no topo da camada de solo, alcançado o pico de $0,36p_0$ em $\lambda z = -1$, diminuindo logo com a profundidade. Os mesmos resultados foram encontrados por Quiuqui (2019).

5.4.1.2 Efeito da compressibilidade do escoamento

A solução analítica considerando o solo com espessura infinita para o escoamento compressível e incompressível foi desenvolvida. Diante das duas soluções, é notável que a solução que considera

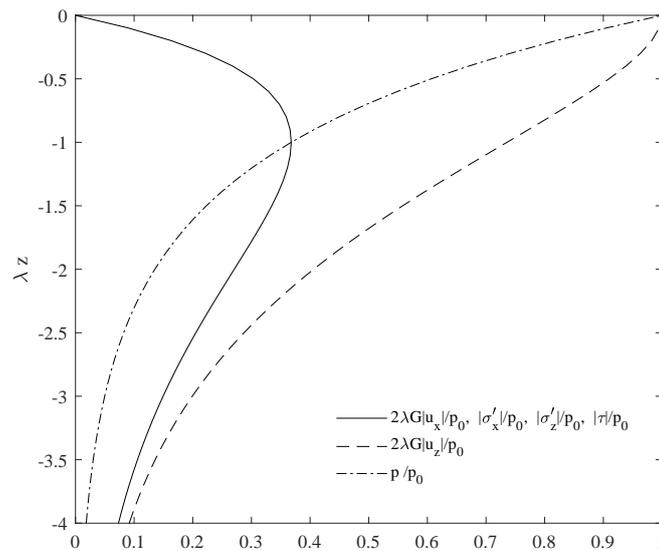


Figura 17 – Distribuição vertical da amplitude adimensional do excesso de poropressão, deslocamentos e tensões efetivas ao longo da profundidade adimensional (λz).

o fluido incompressível é bastante simples do ponto de vista matemático (ver a comparação entre as Equações 5.45 e 5.46 com 5.42). Neste sentido, é conveniente avaliar o efeito da compressibilidade do fluido nas respostas induzidas a fim de avaliar sua importância. Para tal avaliação, são necessários alguns parâmetros de entrada, por exemplo, Madsen (1978) apresentou o seguinte conjunto de dados para análise: espessura da lâmina de água $h = 7m$, período da onda $T = 8s$, comprimento da onda $L = 63m$, altura da onda $H = 0,2m$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, porosidade $\phi = 0,4$, módulo de cisalhamento $G = 10^5 Pa$, coeficiente de permeabilidade $k = 10^{-2} m/s$ e compressibilidade do fluido $K_f = 1,9 \cdot 10^9 Pa$. Para o conjunto de parâmetros dado, o ponto de estudo no regime de propagação de ondas é dado por P5.1 na Figura (25). A razão entre a solução que considera a compressibilidade do fluido pela solução que não a considera para o excesso de poropressão adimensionalizado por p_0 ao longo da profundidade pode ser observado na Figura (18).

É possível notar que o efeito da compressibilidade do escoamento é bastante reduzido já que a diferença máxima é de aproximadamente 0,006% para o conjunto de parâmetros analisado. Para o intuito de reduzir a solução analítica em aplicações práticas da obtenção das respostas induzidas por ondas, parece perfeitamente aceitável a desconsideração da compressibilidade do fluido.

5.4.2 Camada de solo finita

Através das Equações (5.30a), (5.31a) e (5.31b), e das condições de contorno (5.11a), (5.11b), (5.11c) e (5.13), são obtidas as expressões para os deslocamentos horizontais, verticais e poro-

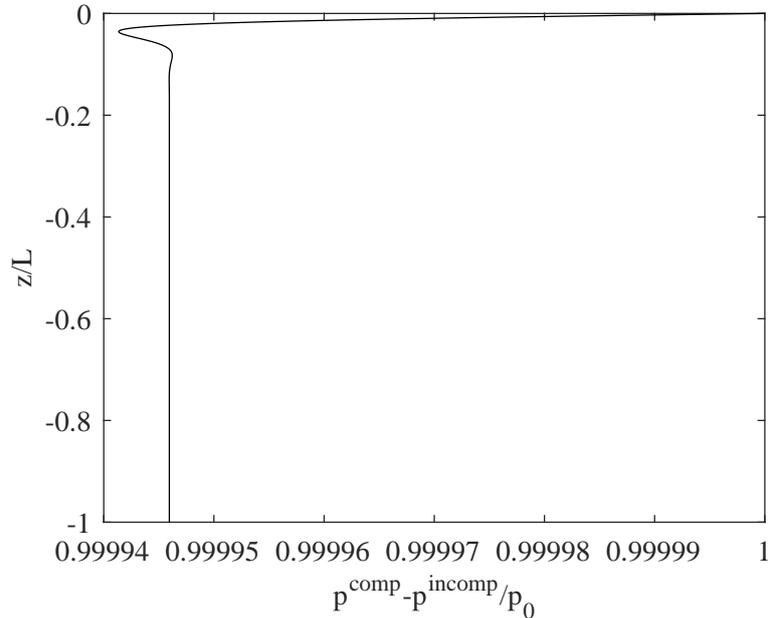


Figura 18 – Razão entre o excesso de poropressão da solução que considera a compressibilidade do fluido pela solução que o desconsidera.

pressão induzidos por ondas em solos que possuem uma camada finita, como:

$$u_x = \frac{ip_0}{2G\lambda} \left\{ (C_1 + C_2\lambda z) \exp(\lambda z) + (C_3 + C_4\lambda z) \exp(-\lambda z) + \lambda^2 \left(C_5 \exp(\lambda'z) + C_6 \exp(-\lambda'z) \right) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.47a)$$

$$u_z = \frac{p_0}{2G\lambda} \left\{ \left[C_1 - (1 + 2\delta - \lambda z)C_2 \right] \exp(\lambda z) - \left[C_3 + (1 + 2\delta + \lambda z)C_4 \right] \exp(-\lambda z) + \lambda\lambda' (C_5 \exp(\lambda'z) - C_6 \exp(-\lambda'z)) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.47b)$$

$$p = \frac{p_0}{1 - 2\nu} \left\{ (1 - \delta - 2\nu)(C_2 \exp(\lambda z) - C_4 \exp(-\lambda z)) + (1 - \nu)(\lambda'^2 - \lambda^2)(C_5 \exp(\lambda'z) + C_6 \exp(-\lambda'z)) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (5.47c)$$

onde os seis coeficientes complexos C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 e C_6 são funções dos parâmetros ν , λ , λ' , δ e d disponíveis no Anexo (B). Vale ressaltar que existe uma relação entre as constantes C e a , porém, tal relação não é de interesse na solução. Da solução, somente a parte real deve ser considerada. As tensões podem ser obtidas substituindo as Equações (5.47a) e (5.47b) em (5.5),

(5.6) e (5.7).

$$\begin{aligned}\sigma'_x = & -p_0 \left\{ \left[C_1 + C_2 \lambda z + \frac{2\nu\delta}{1-2\nu} C_2 \right] \exp(\lambda z) \right. \\ & + \left[C_3 + C_4 \lambda z - \frac{2\nu\delta}{1-2\nu} C_4 \right] \exp(-\lambda z) \\ & \left. + \left[\lambda^2 - \frac{\nu(\lambda'^2 - \lambda^2)}{1-2\nu} \right] (C_5 \exp(\lambda'z) + C_6 \exp(-\lambda'z)) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)]\end{aligned}\quad (5.48a)$$

$$\begin{aligned}\sigma'_z = & p_0 \left\{ \left[C_1 + C_2 \lambda z - \frac{2(1-\nu)\delta}{1-2\nu} C_2 \right] \exp(\lambda z) + \left[C_3 + C_4 \lambda z - \frac{2(1-\nu)\delta}{1-2\nu} C_4 \right] \exp(-\lambda z) \right. \\ & \left. + \frac{1}{1-2\nu} [\lambda'(1-\nu) - \lambda^2 \nu] (C_5 \exp(\lambda'z) + C_6 \exp(-\lambda'z)) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)]\end{aligned}\quad (5.48b)$$

$$\begin{aligned}\tau = & ip_0 \left\{ [C_1 + (\lambda z - \delta)C_2] \exp(\lambda z) - [C_3 + (\lambda z + \delta)C_4] \exp(-\lambda z) \right. \\ & \left. + \lambda \lambda' (C_5 \exp(\lambda'z) - C_6 \exp(-\lambda'z)) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)]\end{aligned}\quad (5.48c)$$

Considerando somente a parte real da solução, as constantes C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6 podem ser escritas como a soma de uma parte real e outra imaginária:

$$C_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \quad (5.49)$$

$$C_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \quad (5.50)$$

$$C_3 = \alpha_3 + i\beta_3 \quad (5.51)$$

$$C_4 = \alpha_4 + i\beta_4 \quad (5.52)$$

$$C_5 = \alpha_5 + i\beta_5 \quad (5.53)$$

$$C_6 = \alpha_6 + i\beta_6 \quad (5.54)$$

onde as constantes α_n e β_n com $n = 1, 2, 3, \dots, 6$ encontram-se no Anexo (B). A parte real das equações dos deslocamentos e poropressão induzidos por ondas em leito marinho são, portanto:

$$\begin{aligned}u_x = & \frac{p_0}{2G\lambda} \left\{ \left[-F_{u1} \exp(\lambda z) - F_{u2} \exp(-\lambda z) - \lambda^2 \left((C_{u1} \cos(z\lambda'_2) + C_{u2} \sin(z\lambda'_2)) \exp(z\lambda'_1) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + (C_{u3} \cos(z\lambda'_2) - C_{u4} \sin(z\lambda'_2)) \exp(-z\lambda'_1) \right) \right] \cos(\lambda x - \omega t) \\ & - \left[F_{u3} \exp(\lambda z) + F_{u4} \exp(-\lambda z) + \lambda^2 \left((C_{u2} \cos(z\lambda'_2) - C_{u1} \sin(z\lambda'_2)) \exp(z\lambda'_1) \right. \right. \\ & \left. \left. + (C_{u4} \cos(z\lambda'_2) + C_{u3} \sin(z\lambda'_2)) \exp(-z\lambda'_1) \right) \right] \sin(\lambda x - \omega t) \right\}\end{aligned}\quad (5.55a)$$

$$\begin{aligned}
u_z = \frac{p_0}{2G\lambda} \left\{ \left[F_{w1} \exp(\lambda z) - F_{w2} \exp(-\lambda z) + \lambda \left((C_{w1} \cos(z\lambda'_2) - C_{w2} \sin(z\lambda'_2)) \exp(z\lambda'_1) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + (C_{w3} \cos(z\lambda'_2) - C_{w4} \sin(z\lambda'_2)) \exp(-z\lambda'_1) \right) \right] \cos(\lambda x - \omega t) \right. \\
\left. - \left[F_{w3} \exp(\lambda z) - F_{w4} \exp(-\lambda z) + \lambda \left((C_{w2} \cos(z\lambda'_2) + C_{w1} \sin(z\lambda'_2)) \exp(z\lambda'_1) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + (C_{w4} \cos(z\lambda'_2) - C_{w3} \sin(z\lambda'_2)) \exp(-z\lambda'_1) \right) \right] \sin(\lambda x - \omega t) \right\}
\end{aligned} \tag{5.55b}$$

$$\begin{aligned}
p = \frac{p_0}{(1-2\nu)} \left\{ \left[(1-\delta-2\nu)(C_{p1} \exp(\lambda z) - C_{p2} \exp(-\lambda z)) + (1-\nu) \left((C_{p3} \cos(z\lambda'_2) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. - C_{p4} \sin(z\lambda'_2)) \exp(z\lambda'_1) + (C_{p5} \cos(z\lambda'_2) + C_{p6} \sin(z\lambda'_2)) \exp(-z\lambda'_1) \right) \right] \cos(\lambda x - \omega t) \right. \\
\left. - \left[(1-\delta-2\nu)(C_{p7} \exp(\lambda z) - C_{p8} \exp(-\lambda z)) + (1-\nu) \left((C_{p4} \cos(z\lambda'_2) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + C_{p3} \sin(z\lambda'_2)) \exp(z\lambda'_1) + (C_{p6} \cos(z\lambda'_2) - C_{p5} \sin(z\lambda'_2)) \exp(-z\lambda'_1) \right) \right] \sin(\lambda x - \omega t) \right\}
\end{aligned} \tag{5.55c}$$

Já as equações para as tensões efetivas induzidas por ondas são:

$$\begin{aligned}
\sigma'_x = -p_0 \left\{ \left[F_{x1} \exp(\lambda z) + F_{x2} \exp(-\lambda z) + \left((C_{x1} \cos(z\lambda'_2) + C_{x2} \sin(z\lambda'_2)) \exp(z\lambda'_1) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + (C_{x3} \cos(z\lambda'_2) + C_{x4} \sin(z\lambda'_2)) \exp(-z\lambda'_1) \right) \right] \cos(\lambda x - \omega t) \right. \\
\left. - \left[F_{x3} \exp(\lambda z) + F_{x4} \exp(-\lambda z) + \left(-(C_{x2} \cos(z\lambda'_2) + C_{x1} \sin(z\lambda'_2)) \exp(z\lambda'_1) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + (C_{x4} \cos(z\lambda'_2) - C_{x3} \sin(z\lambda'_2)) \exp(-z\lambda'_1) \right) \right] \sin(\lambda x - \omega t) \right\}
\end{aligned} \tag{5.56a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma'_z = p_0 \left\{ \left[F_{z1} \exp(\lambda z) + F_{z2} \exp(-\lambda z) + \left((C_{z1} \cos(z\lambda'_2) - C_{z2} \sin(z\lambda'_2)) \exp(z\lambda'_1) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + (C_{z3} \cos(z\lambda'_2) + C_{z4} \sin(z\lambda'_2)) \exp(-z\lambda'_1) \right) \right] \cos(\lambda x - \omega t) \right. \\
\left. - \left[F_{z3} \exp(\lambda z) + F_{z4} \exp(-\lambda z) + \left((C_{z2} \cos(z\lambda'_2) + C_{z1} \sin(z\lambda'_2)) \exp(z\lambda'_1) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + (C_{z4} \cos(z\lambda'_2) - C_{z3} \sin(z\lambda'_2)) \exp(-z\lambda'_1) \right) \right] \sin(\lambda x - \omega t) \right\}
\end{aligned} \tag{5.56b}$$

$$\begin{aligned}
\tau = -p_0 \left\{ \left[F_{t1} \exp(\lambda z) - F_{t2} \exp(-\lambda z) + \lambda \left((C_{t1} \cos(z\lambda'_2) + C_{t2} \sin(z\lambda'_2)) \exp(z\lambda'_1) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + (-C_{t3} \cos(z\lambda'_2) + C_{t4} \sin(z\lambda'_2)) \exp(-z\lambda'_1) \right) \right] \cos(\lambda x - \omega t) \right. \\
\left. - \left[F_{t3} \exp(\lambda z) - F_{t4} \exp(-\lambda z) + \lambda \left((C_{t2} \cos(z\lambda'_2) - C_{t1} \sin(z\lambda'_2)) \exp(z\lambda'_1) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. - (C_{t4} \cos(z\lambda'_2) + C_{t3} \sin(z\lambda'_2)) \exp(-z\lambda'_1) \right) \right] \sin(\lambda x - \omega t) \right\} \quad (5.56c)
\end{aligned}$$

onde as funções F_{un} , F_{wn} , F_{xn} , F_{zn} , F_{tn} , com $n = 1, 2, 3, 4$, e as constantes C_{un} , C_{wn} , C_{xn} , C_{zn} , C_{tn} , com $n = 1, 2, 3, 4$ e C_{pn} , com $n = 1, 2, 3, \dots, 8$, encontram-se no Anexo (B). A solução apresentada pode ser particularizada para uma condição de incompressibilidade do escoamento. Desta forma, os parâmetros λ' e δ já apresentados em (5.43) e (5.44), respectivamente, são novamente utilizados aqui. Para fins de verificação da solução analítica, considera-se os parâmetros do solo e da onda apresentados na Tabela (2), onde a pressão máxima que é transferida para a superfície do leito marinho correspondente aos parâmetros é de 11,72 kPa. O ponto P5.2 na Figura (25) representa o regime de propagação em que o ponto de estudo está inserido para este conjunto de parâmetros apresentados. Vale ressaltar que o presente caso não está no limite estabelecido pela teoria linear de ondas, porém utiliza-se o conjunto de parâmetros para a verificação da solução analítica (JENG; HSU, 1996; JENG, 2012; MADALOZZO, 2016).

Tabela 2 – Parâmetros do solo e da onda utilizados para resposta poroelástica em camada de solo de espessura finita.

Parâmetros do solo		Parâmetros da onda	
Módulo de elasticidade transversal (G)	$10^7 Pa$	Período (T)	$7s$
Coefficiente de Poisson (ν)	$1/3$	Comprimento (L)	$40m$
Coefficiente de permeabilidade (k)	$5 \cdot 10^{-4} m/s$	Lâmina de água (h)	$3,7m$
		Altura da onda (H)	$2,75m$

Fonte: Gatmiri (1990).

A Figura (19) apresenta o excesso de poropressão induzida pela onda considerando diferentes profundidades da camada de solo para a condição de incompressibilidade do escoamento. Os perfis foram traçados para a amplitude máxima do excesso de poropressão, que corresponde a $x = 0$ e $t = 0$. Nesta figura também estão apresentados os resultados obtidos numericamente por Gatmiri (1990).

Analisando a Figura (19a), pode-se observar que a dissipação vertical da poropressão é significativamente influenciada pela espessura da camada de solo. Independente da razão d/L empregada, verifica-se que o valor máximo do excesso de poropressão ocorre na superfície do leito marinho, isto é, em $z = 0$. Para pequenas espessuras de solo com relação ao comprimento da onda, a

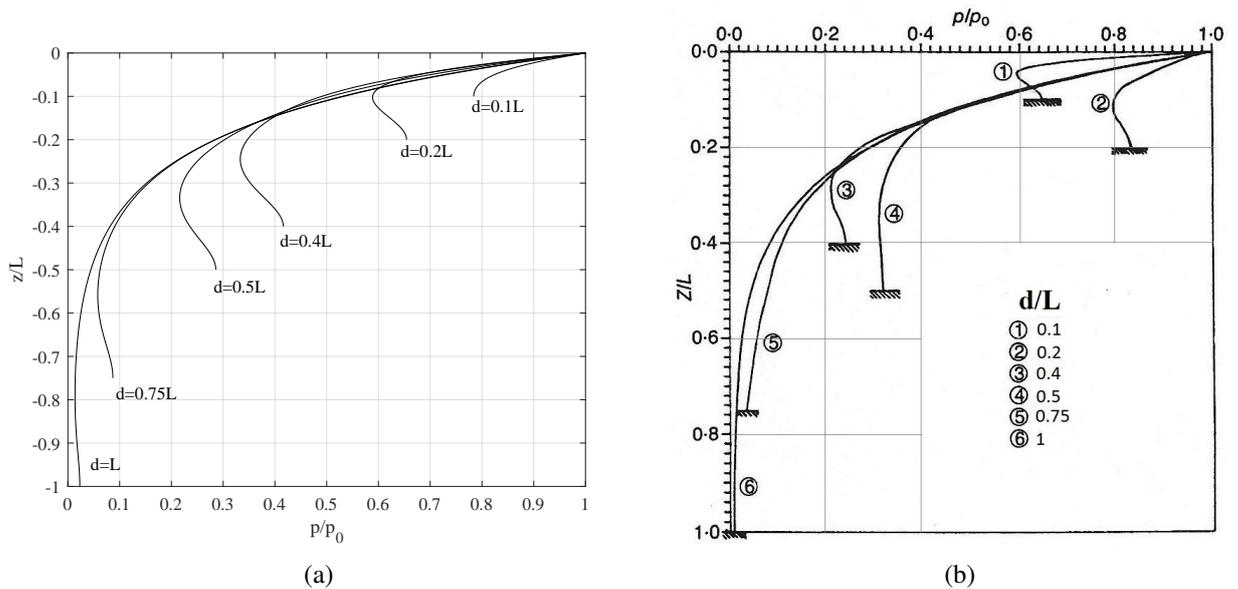
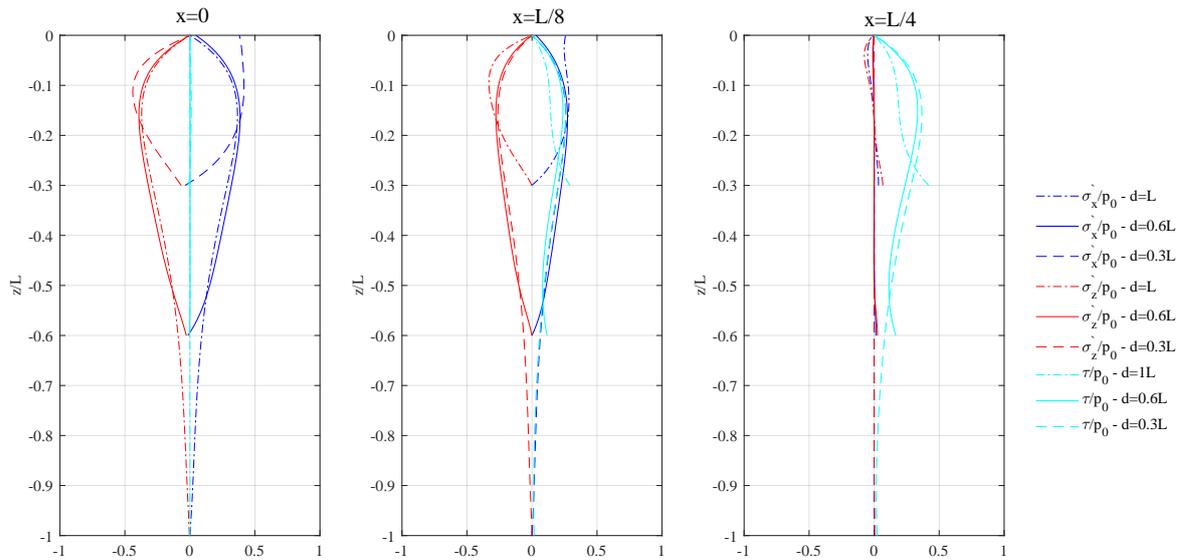


Figura 19 – Excesso de poropressão induzida pela onda, ao longo da profundidade em camadas de solo com diferentes espessuras d . (a) - Presente solução e (b)- Resultados obtidos numericamente por Gatmiri (1990)

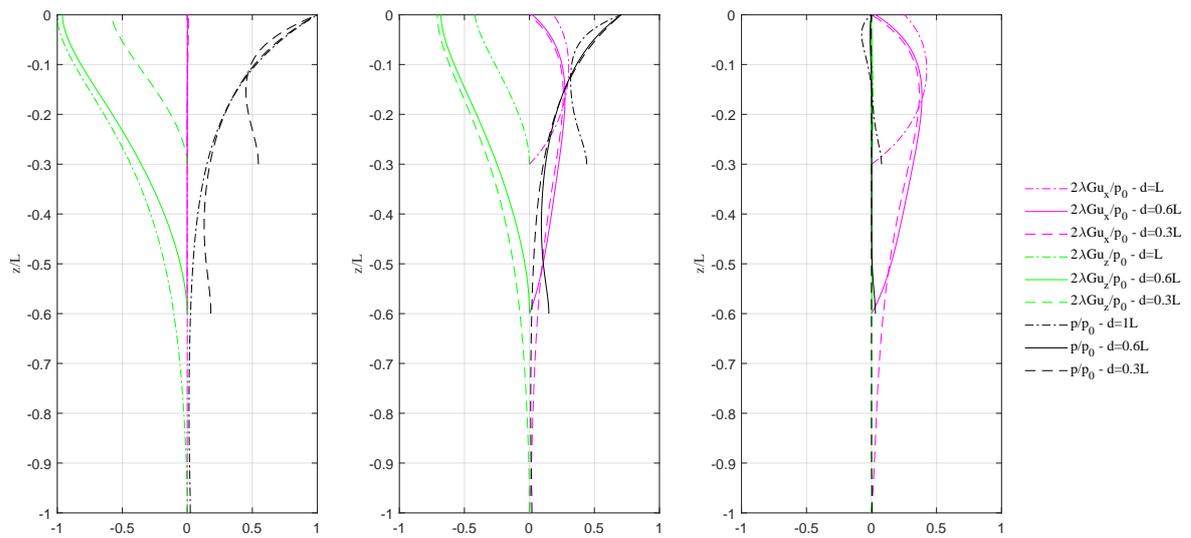
poropressão não diminui tão rapidamente. Um aumento da poropressão com a proximidade do substrato impermeável pode também ser observado para todos os cenários analisados, contrariamente ao observado na Figura (17), onde o excesso de poropressão diminui monotonicamente. Os resultados para a distribuição do excesso de poropressão obtidos numericamente por Gatmiri (1990) (Figura 19b) concordam razoavelmente com a presente solução, obtida a partir da formulação analítica proposta por Hsu e Jeng (1994) (Figura 19a). As diferenças qualitativas principais ocorrem quando Gatmiri (1990) infere que os valores do excesso de poropressão para $d/L = 0,2$ são maiores do que os valores para $d/L = 0,1$, e os valores do excesso de poropressão para $d/L = 0,5$ são maiores do que os valores para $d/L = 0,4$.

A Figura (20) representa os perfis verticais das tensões efetivas, os deslocamentos e o excesso de poropressão adimensionalizado para as profundidades relativas $d/L = 0.3, 0.6$ e 1 em três posições: $x = 0$ (que representa a crista da onda), $x = L/8$ (que representa um ponto intermediário) e $x = L/4$ (que indica o ponto de elevação da superfície nula, posterior a crista da onda), no tempo $t = 0$. Os parâmetros de onda e do solo já foram apresentados na Tabela (2).

Analisando o comportamento das curvas que representam as tensões efetivas vertical (σ'_z), horizontal (σ'_x) e o deslocamento horizontal (u_x), pode-se notar que as tensões aumentam com a diminuição da profundidade relativa (d/L) em $x = 0$. Já para o deslocamento horizontal, o aumento se dá para $x = L/4$. O deslocamento vertical (u_z) apresenta um comportamento inverso, apresentando maior amplitude em $x = 0$, assim como o excesso de poropressão (p). A tensão cisalhante (τ), por sua vez, obtém sua amplitude máxima em $x = L/4$.



(a)



(b)

Figura 20 – Variação dos perfis verticais de tensões efetivas, deslocamentos e excesso de poropressão adimensionalizados induzidos pela onda para diferentes razões d/L e para a variação espacial x .

5.4.3 Comparação entre as soluções de solos com espessura infinita e finita

O efeito da espessura da camada de solo sobre a distribuição vertical do excesso de poropressão induzido pela onda é considerado nesta seção. Os parâmetros do solo e da onda já foram apresentados na Tabela (2). O solo está sob condição de isotropia hidráulica e de completa saturação, onde o escoamento é considerado incompressível. Na Figura (21) estão apresentadas

as soluções com camada infinita, conjuntamente com a solução para camada finita. Nota-se que a partir da espessura $d = L$, a resposta poroelástica do excesso de poropressão concorda bem com a solução considerando a espessura infinita. Isso significa que solos marinhos com espessura do solo superior ao comprimento característico da onda L , podem ser representados com a solução matemática para solos com espessura infinita. Por outro lado, diminuindo a razão d/L abaixo de 1, os erros cometidos no cálculo do excesso de poropressão induzido por ondas adotando a solução matemática para solos infinitos são significativos.

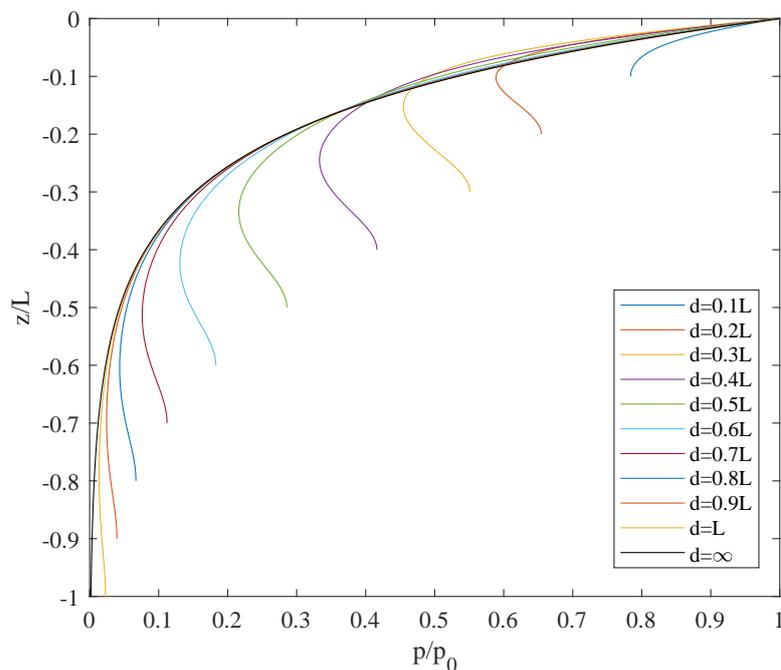


Figura 21 – Excesso de poropressão induzida pela onda ao longo da profundidade.

Com os parâmetros da Tabela (2), e as soluções apresentadas anteriormente, possibilitou-se comparar as diferenças relativas do excesso de poropressão da solução para solos de espessura infinita (p_∞) e finita (p_d) através da expressão $(p_\infty - p_d)/p_0$ onde (p_0) é a amplitude máxima da pressão dinâmica gerada pela onda. Através da Figura (22), é possível observar que para solos completamente saturados e hidraulicamente isotrópicos, a diferença relativa tendem a reduzir à medida que a espessura do solo aumenta, reforçando o que já foi observado na Figura (19). Seguindo a curva de uma razão d/L , observa-se que a solução considerando solo com espessura infinita p_∞ é superior à solução para solos com espessura finita p_d nas primeiras camadas de solo imediatamente abaixo da superfície no fundo do mar ($z = 0$), até um nível específico em que $p_\infty = p_d$. Abaixo deste nível, a solução para solos com espessura infinita p_∞ é inferior a p_d .

A diferença relativa entre as soluções que considera a espessura do solo infinita e finita para os deslocamentos horizontais e verticais adimensionalizados estão apresentados na Figura (23). Conforme indicado na figura, os deslocamentos verticais ($2G\lambda u_{z\infty}/p_0$) para espessura infinita (Linha tracejada), sempre são subestimados em relação à solução para espessura finita, ainda

que o erro reduz consideravelmente quando há o aumento da espessura da camada de solo. Já o deslocamento horizontal ($2G\lambda u_{x\infty}/p_0$) para espessura infinita (Linha contínua) tende a ser menor, quando comparada à solução para espessura finita, nas primeiras camadas de solo sendo logo superestimada após o nível z/L em que $u_{x\infty} = u_{xd}$.

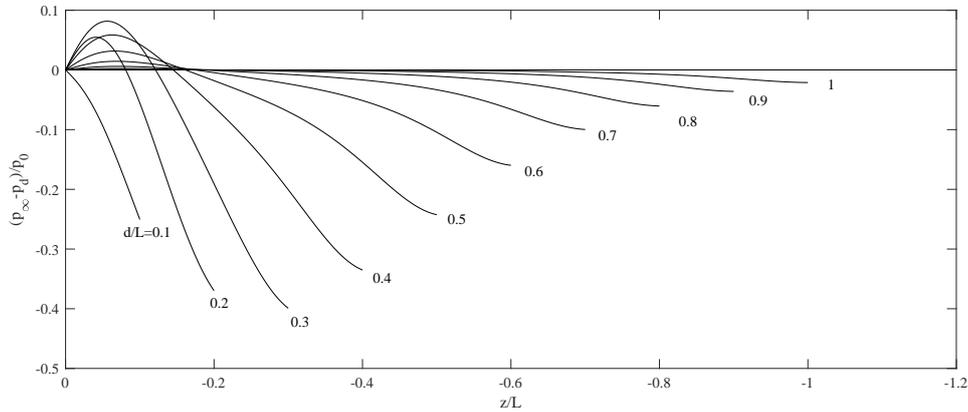


Figura 22 – Diferença relativa no excesso de poropressão para solo de espessura finita e infinita ao longo de z .

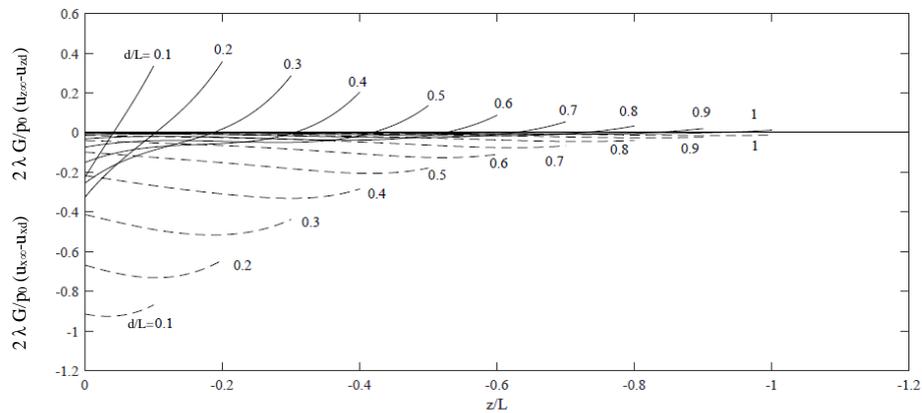


Figura 23 – Diferença relativa entre deslocamentos para solo de espessura finita e infinita ao longo de z ; Linha contínua - $2G\lambda/p_0(u_{xz} - u_{zd})$, Linha tracejada - $2G\lambda/p_0(u_{x\infty} - u_{xd})$

Na Figura (24) estão apresentados os erros relativos entre as tensões efetivas das soluções considerando o solo com espessura infinita e finita. Pode-se observar que as tensões efetivas verticais e as tensões cisalhantes apresentam comportamento muito semelhantes entre si, no qual a solução para solos com espessura infinita superestimam os resultados nas primeiras camadas de solo marinho havendo ainda uma subestimação nas camadas mais profundas de solo. Já a tensão efetiva horizontal apresenta comportamento contrário, fazendo com que a solução para solos infinitos seja subestimada nas primeiras camadas de solo e superestimada nas camadas

mais profundas. Nota-se ainda que as diferenças relativas nas tensões efetivas horizontais são superiores às demais.

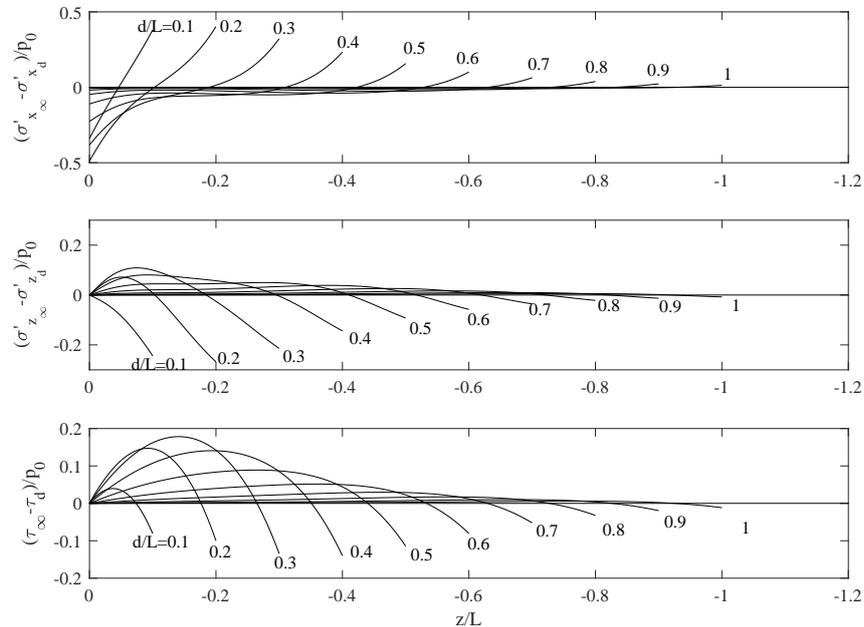


Figura 24 – Diferença relativa nas tensões efetivas calculadas com formulações para solo de espessura finita e infinita ao longo da profundidade para diferentes valores da razão d/L .

De modo geral, a solução para solos de espessura infinita na condição de saturação completa, tendo o escoamento como incompressível e isotropia hidráulica, pode ser adotada sem grandes erros nos deslocamentos, tensões efetivas e excesso de poropressão quando a espessura da camada de solo for igual ou superior ao comprimento da onda L . Para espessuras menores do que L , o erro cometido na predição do excesso de poropressão, deslocamentos e tensões será elevado.

6 RESPOSTA POROELÁSTICA INDUZIDA POR ONDAS - SOLUÇÃO DINÂMICA

Diversos parâmetros da oscilação da superfície do mar e do solo podem afetar a resposta induzida pelas ondas em meios porosos. Além dos parâmetros, a abordagem dinâmica do problema é de extrema relevância na determinação dos efeitos das ondulações sobre o solo marinho. Por isso, nesta seção será apresentada a solução que inclui os efeitos dinâmicos do fluido e do solo.

6.1 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

A solução analítica é determinada através das considerações e hipóteses apresentadas a seguir:

1. O solo oceânico é considerado poroso, com superfície horizontal, elástico isotrópico e hidraulicamente isotrópico – sendo considerada apenas uma camada de solo;
2. O esqueleto do solo (matriz e espaço poroso conectado) é compressível;
3. A matriz (parte sólida e a porosidade oclusa) é incompressível assim como os grãos de solo;
4. O esqueleto do solo obedece à lei de Hooke;
5. O fluido que preenche os poros é a água, considerada compressível;
6. O fluxo no leito poroso obedece à lei de Darcy;
7. Os Efeitos inerciais do solo e do fluido são considerados;
8. A onda é do tipo progressiva bidimensional e a teoria linear da onda é empregada;
9. A pressão da onda sobre a superfície do solo oceânico é considerada o único carregamento externo atuante, definida conforme Capítulo (3);
10. São desprezados da equação de equilíbrio dinâmico (4.29) e da equação da continuidade (4.70) as forças de volume dadas pela gravidade ($\mathbf{g} = 0$), sendo esta considerada somente na análise de estabilidade de massas submarinas, apresentada pelo Capítulo (7);
11. Por fim, será desprezado, *a priori*, o termo $(\text{grad}(\mathbf{V}^r + \mathbf{V}^s) \cdot \mathbf{V}^r)$ pela dificuldade matemática em obter uma solução analítica direta considerando tais termos. No entanto, mais adiante será avaliada a relevância de tal aproximação. Considera-se ainda a hipótese das

pequenas perturbações (HPP) para o esqueleto ($\mathbf{x} \simeq \mathbf{X}$), ou seja, $\frac{d\mathbf{V}^r}{dt} \simeq \frac{\partial \mathbf{V}^r}{\partial t}$. Sendo assim, as equações (4.70) e (4.71) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$-\text{grad}(p) = \rho_f \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \frac{\partial(\mathbf{q}/\phi)}{\partial t} + \frac{\gamma_f}{k} \mathbf{q} \quad (6.1)$$

$$-\dot{p} = \frac{K_f}{\phi} (\varepsilon_{ii} + \text{div}(\mathbf{q})) \quad (6.2)$$

onde $\ddot{\mathbf{u}}$ representa a derivada material segunda do deslocamento do esqueleto que, neste caso, se confunde com a derivada parcial, e $\mathbf{q} = \phi \mathbf{V}^r$ é o vetor filtração. Substituindo a Equação (6.2) em (6.1), tem-se uma das equações governantes em função somente de \mathbf{u} e \mathbf{q} :

$$\frac{K_f}{\phi} \text{grad}(\varepsilon_{ii} + \text{div}(\mathbf{q})) = \rho_f \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \frac{\partial(\mathbf{q}/\phi)}{\partial t} + \frac{\gamma_f}{k} \mathbf{q} \quad (6.3)$$

onde k é o coeficiente de permeabilidade do solo, γ_f é o peso específico do fluido, ϕ é a porosidade e K_f é o módulo de compressibilidade do fluido, ρ_f é a massa específica do fluido, $\rho = \rho_s(1 - \phi) + \rho_f \phi$ é a massa específica do meio poroso e ρ_s é a massa específica do esqueleto. Da mesma forma, a equação de equilíbrio dinâmico dada anteriormente por (4.29) pode ser reescrita em função das variáveis \mathbf{u} e \mathbf{q} :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \phi \frac{\partial(\mathbf{q}/\phi)}{\partial t} \quad (6.4)$$

A Equação (6.4) em conjunto com (6.3) se tornam as equações fundamentais do problema, onde são considerados os termos inerciais e desprezadas as forças de volume.

6.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

É conveniente para a solução analítica que as equações fundamentais tenham como variáveis o vetor deslocamento do esqueleto (\mathbf{u}), o excesso de poropressão (p) e a variável fictícia (\mathbf{v}) criada somente para a solução analítica do problema, sem nenhum significado físico, definida a partir da velocidade relativa entre o fluido e o esqueleto ($\mathbf{V}^r = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\phi}$) ou ainda ($\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{q}$). Sendo assim, as equações (6.2), (6.3) e (6.4) podem ser reescritas, respectivamente, como:

$$-p = \frac{K_f}{\phi} (\varepsilon_{ii} + \text{div}(\mathbf{v})) \quad (6.5)$$

$$\frac{K_f}{\phi} \text{grad}(\varepsilon_{ii} + \text{div}(\mathbf{v})) = \rho_f \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \frac{\partial(\dot{\mathbf{v}}/\phi)}{\partial t} + \frac{\gamma_f}{k} \dot{\mathbf{v}} \quad (6.6)$$

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \phi \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial t} \quad (6.7)$$

Desta maneira, elimina-se das Equações Fundamentais (6.6) e (6.7) a variável poropressão, sendo possível a solução analítica direta e, posteriormente, calcula-se a poropressão através da Equação (6.5).

Nas Equações (6.6) e (6.7), tem-se o termo $\frac{\partial(\dot{\mathbf{v}}/\phi)}{\partial t} = \frac{\ddot{\mathbf{v}}}{\phi} - \frac{\dot{\phi}\dot{\mathbf{v}}}{\phi^2}$, onde será desprezada a parcela da variação da porosidade Euleriana, sendo o termo correspondente das Equações (6.6) e (6.7) reduzido a $\frac{\partial(\dot{\mathbf{v}}/\phi)}{\partial t} = \frac{\ddot{\mathbf{v}}}{\phi}$. Os possíveis impactos da desconsideração deste termo serão tratados mais adiante.

Reescrevendo as Equações Fundamentais (6.6) e (6.7) em suas componentes, tem-se:

$$\frac{K_f}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] = \rho_f \ddot{u}_x + \frac{\rho_f}{\phi} \ddot{v}_x + \frac{\gamma_f}{k} \dot{v}_x \quad (6.8a)$$

$$\frac{K_f}{\phi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] = \rho_f \ddot{u}_z + \frac{\rho_f}{\phi} \ddot{v}_z + \frac{\gamma_f}{k} \dot{v}_z \quad (6.8b)$$

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{K_f}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] + \rho \ddot{u}_x + \rho_f \ddot{v}_x \quad (6.8c)$$

$$\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = -\frac{K_f}{\phi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] + \rho \ddot{u}_z + \rho_f \ddot{v}_z \quad (6.8d)$$

onde u_x e u_z são as componentes do deslocamento do esqueleto nas direções x e z , v_x e v_z são as componentes da variável fictícia criada a partir da velocidade relativa entre o fluido e o esqueleto nas direções x e z e o tempo é dado pela variável t . As equações das tensões efetivas são dadas através da Lei de Hooke e as condições de contorno serão as mesmas adotadas para a solução quase estática, apresentadas anteriormente no Capítulo (5).

A solução analítica do problema bidimensional da resposta induzida por ondas em leitos marinhos para solos hidraulicamente isotrópicos, considerando a solução dinâmica completa, consiste em resolver as equações (6.8), considerando as condições de contorno (5.13) e (5.12). As tensões no meio poroso são determinadas posteriormente através das Equações (5.5), (5.6) e (5.7). Como a resposta oscilatória do solo induzida por ondas oscila periodicamente, todas as quantidades podem ser substituídas imediatamente por sua forma complexa:

$$u_x = U_x(z) \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (6.9a)$$

$$u_z = U_z(z) \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (6.9b)$$

$$v_x = V_x(z) \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (6.9c)$$

$$v_z = V_z(z) \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (6.9d)$$

onde, $U_x(z)$, $U_z(z)$, $V_x(z)$ e $V_z(z)$ são dependentes somente da variável z . Substituindo as Equações (6.9) nas equações fundamentais do problema (Equação 6.8) e reescrevendo-as em formato matricial, obtêm-se:

$$A \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + B \cdot \frac{\partial X}{\partial z} + C \cdot X = 0 \quad (6.10)$$

onde,

$$X = \begin{bmatrix} U_x & U_z & V_x & V_z \end{bmatrix}^T \quad (6.11)$$

$$A = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} + \frac{K_f}{\phi} & 0 & \frac{K_f}{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_f}{\phi} & 0 & \frac{K_f}{\phi} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & i\lambda \left(\frac{G}{1-2\nu} + \frac{K_f}{\phi} \right) & 0 & i\lambda \frac{K_f}{\phi} \\ i\lambda \left(\frac{G}{1-2\nu} + \frac{K_f}{\phi} \right) & 0 & i\lambda \frac{K_f}{\phi} & 0 \\ 0 & i\lambda \frac{K_f}{\phi} & 0 & i\lambda \frac{K_f}{\phi} \\ i\lambda \frac{K_f}{\phi} & 0 & i\lambda \frac{K_f}{\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$C = \begin{bmatrix} -2G\lambda^2 \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) - \lambda^2 \frac{K_f}{\phi} + \rho\omega^2 & 0 & \rho_f\omega^2 - \lambda^2 \frac{K_f}{\phi} & 0 \\ 0 & \rho\omega^2 - \lambda^2 G & 0 & \rho_f\omega^2 \\ \rho_f\omega^2 - \lambda^2 \frac{K_f}{\phi} & 0 & \frac{\rho_f}{\phi}\omega^2 + i\omega \frac{\gamma_f}{k} - \lambda^2 \frac{K_f}{\phi} & 0 \\ 0 & \rho_f\omega^2 & 0 & \frac{\rho_f}{\phi}\omega^2 + i\omega \frac{\gamma_f}{k} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

A Equação (6.10) representa o conjunto de quatro equações diferenciais ordinária simultâneas de segunda ordem, sendo estas ainda, lineares e homogêneas. A solução das EDO's pode ser obtida através do polinômio característico. Para isto, introduz-se o operador $D = \frac{d}{dz}$ em (6.10) e iguala-se o determinante a zero obtendo-se, assim, o seguinte polinômio característico:

$$\left\{ D^6 + (-3\lambda^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)D^4 + [(\lambda^2 - s_1^2)(2\lambda^2 - s_2^2 - s_3^2) + (\lambda^2 - s_2^2)(\lambda^2 - s_3^2)]D^2 - [(\lambda^2 - s_1^2)(\lambda^2 - s_2^2)(\lambda^2 - s_3^2)] \right\} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_z \\ V_x \\ V_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.15)$$

onde as constantes s_1 , s_2 e s_3 são dadas por:

$$s_1^2 = \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 - 4v_2^2}}{2} \quad (6.16a)$$

$$s_2^2 = \frac{v_1 - \sqrt{v_1^2 - 4v_2^2}}{2} \quad (6.16b)$$

$$s_3^2 = \frac{\rho \omega^2 \left(\frac{\rho_f}{\phi} \omega^2 + i \frac{\gamma_f}{k} \omega \right) - \rho_f^2 \omega^4}{G \left(\frac{\rho_f}{\phi} \omega^2 + i \frac{\gamma_f}{k} \omega \right)} \quad (6.16c)$$

e as constantes v_1 e v_2 são:

$$v_1 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \left(\rho \omega^2 - 2\rho_f \omega^2 + \frac{\rho_f}{\phi} \omega^2 + i \frac{\gamma_f}{k} \omega \right) + \frac{\frac{\rho_f}{\phi} \omega^2 + i \frac{\gamma_f}{k} \omega}{K_f/\phi} \quad (6.17)$$

$$v_2 = \frac{\phi}{K_f} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \left[\rho \omega^2 \left(\frac{\rho_f}{\phi} \omega^2 + i \frac{\gamma_f}{k} \omega \right) - \rho_f^2 \omega^4 \right] \quad (6.18)$$

Através da solução dinâmica, é possível facilmente recuperar a solução quase-estática apresentada no Capítulo (5). Para tal, desconsidera-se os termos inerciais referentes ao esqueleto ($\rho_f \ddot{u} = 0$ e $\rho \ddot{u} = 0$), assim como os termos inerciais referentes a aceleração relativa entre o fluido e o esqueleto ($\rho_f \ddot{v} = 0$). Portanto, as equações (6.16c) e (6.18) se reduzem a zero, da mesma forma que a Equação (6.16b) é nula. A Equação (6.16a), por sua vez, pode ser reescrita como:

$$s_1^2 = \frac{i\gamma_f \omega}{k} \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)G} \right) \quad (6.19)$$

Retornando ao polinômio característico (6.15) e aplicando tais considerações, o novo polinômio será:

$$(D^2 - \lambda^2)^2 (D^2 - \lambda'^2) = 0 \quad (6.20)$$

onde $\lambda'^2 = \lambda^2 - s_1^2$, sendo portanto, o mesmo polinômio característico apresentado pela Equação (5.29) da solução quase-estática, já apresentada no Capítulo (5).

Através do polinômio característico (Equação 6.15), obtém-se as soluções para as equações diferenciais, que podem ser dadas por:

$$u_x = \left\{ \sum_{j=1}^6 a_j \exp(\lambda_j z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (6.21a)$$

$$u_z = \left\{ \sum_{j=1}^6 a_j b_j \exp(\lambda_j z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (6.21b)$$

$$v_x = \left\{ \sum_{j=1}^6 a_j c_j \exp(\lambda_j z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (6.21c)$$

$$v_z = \left\{ \sum_{j=1}^6 a_j d_j \exp(\lambda_j z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (6.21d)$$

onde a_j, b_j, c_j e d_j são constantes a serem determinadas e as raízes do polinômio característico λ_j , com $j = 1, 2, 3, \dots, 6$, são:

$$\lambda_1^2 = -\lambda_2^2 = \lambda^2 - s_1^2 \quad (6.22a)$$

$$\lambda_3^2 = -\lambda_4^2 = \lambda^2 - s_2^2 \quad (6.22b)$$

$$\lambda_5^2 = -\lambda_6^2 = \lambda^2 - s_3^2 \quad (6.22c)$$

As constantes b_j, c_j e d_j podem ser determinadas através da Equação (6.10), dadas pelos seguintes determinantes:

$$b_j = \begin{vmatrix} -i\lambda\lambda_j\left(\frac{G}{1-2\nu} + \frac{K_f}{\phi}\right) & i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} & \lambda_j^2\frac{K_f}{\phi} + \rho_f\omega^2 \\ -\rho_f\omega^2 + \lambda^2\frac{K_f}{\phi} & \frac{\rho_f}{\phi}\omega^2 + i\omega\frac{\gamma_f}{k} - \lambda^2\frac{K_f}{\phi} & i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} \\ -i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} & i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} & \frac{\rho_f}{\phi}\omega^2 + i\omega\frac{\gamma_f}{k} + \lambda_j^2\frac{K_f}{\phi} \end{vmatrix} / \Delta_j \quad (6.23)$$

$$c_j = \begin{vmatrix} \lambda_j^2\left(\frac{2(1-\nu)G}{(1-2\nu)} + \frac{K_f}{\phi}\right)\rho\omega^2 - G\lambda^2 & -i\lambda\lambda_j\left(\frac{G}{1-2\nu} + \frac{K_f}{\phi}\right) & \rho_f\omega^2 - \lambda_j^2\frac{K_f}{\phi} \\ i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} & -\rho_f\omega^2 + \lambda^2\frac{K_f}{\phi} & i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} \\ -i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} & i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} & \frac{\rho_f}{\phi}\omega^2 + i\omega\frac{\gamma_f}{k} + \lambda_j^2\frac{K_f}{\phi} \end{vmatrix} / \Delta_j \quad (6.24)$$

$$d_j = \begin{vmatrix} \lambda_j^2\left(\frac{2(1-\nu)G}{(1-2\nu)} + \frac{K_f}{\phi}\right)\rho\omega^2 - G\lambda^2 & i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} & -i\lambda\lambda_j\left(\frac{G}{1-2\nu} + \frac{K_f}{\phi}\right) \\ i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} & \frac{\rho_f}{\phi}\omega^2 + i\omega\frac{\gamma_f}{k} - \lambda^2\frac{K_f}{\phi} & -\rho_f\omega^2 + \lambda^2\frac{K_f}{\phi} \\ \rho_f\omega^2 - \lambda_j^2\frac{K_f}{\phi} & i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} & -i\lambda\lambda_j \end{vmatrix} / \Delta_j \quad (6.25)$$

onde o denominador em comum Δ_j é dado por:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \lambda_j^2\left(\frac{2(1-\nu)G}{(1-2\nu)} + \frac{K_f}{\phi}\right)\rho\omega^2 - G\lambda^2 & i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} & \rho_f\omega^2 - \lambda_j^2\frac{K_f}{\phi} \\ i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} & \frac{\rho_f}{\phi}\omega^2 + i\omega\frac{\gamma_f}{k} - \lambda^2\frac{K_f}{\phi} & i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} \\ \rho_f\omega^2 - \lambda_j^2\frac{K_f}{\phi} & i\lambda\lambda_j\frac{K_f}{\phi} & \frac{\rho_f}{\phi}\omega^2 + i\omega\frac{\gamma_f}{k} + \lambda_j^2\frac{K_f}{\phi} \end{vmatrix} \quad (6.26)$$

A poropressão induzida por ondas pode ser obtida através da Equação (6.5):

$$p = \left\{ \sum_{j=1}^6 a_j f_j \exp(\lambda_j z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (6.27)$$

onde f_j é dado por

$$f_j = -\frac{K_f}{\phi} \left[i\lambda \left(1 + c_j \right) + \lambda_j \left(b_j + d_j \right) \right] \quad (6.28)$$

Através das equações (5.5), (5.6) e (5.7) são obtidas as expressões para o cálculo das tensões efetivas induzidas por ondas:

$$\sigma'_x = \left\{ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} G \sum_{j=1}^6 \left(i\lambda + \frac{\nu}{1-\nu} b_j \lambda_j \right) a_j \exp(\lambda_j z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (6.29a)$$

$$\sigma'_z = \left\{ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} G \sum_{j=1}^6 \left(i\lambda \frac{\nu}{1-\nu} + b_j \lambda_j \right) a_j \exp(\lambda_j z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (6.29b)$$

$$\tau_{xz} = \left\{ G \sum_{j=1}^6 (i\lambda b_j + \lambda_j) a_j \exp(\lambda_j z) \right\} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad (6.29c)$$

As constantes a_j com os coeficientes $j = 1, 2, \dots, 6$, são determinadas através das condições de contorno já apresentadas na Seção 5.2. Das soluções discorridas, somente a parte real deve ser considerada.

6.3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA

De acordo com as condições de contorno, há duas possíveis formas de obter-se a solução analítica. A primeira delas, a mais simples matematicamente, é a consideração da espessura do solo infinita; já a segunda, considera o solo com espessura limitada e, por isso, sua solução é mais extensa.

6.3.1 Camada de solo infinita

Considerando a espessura do solo infinita, através da condição de contorno (5.12), os coeficientes $a_2^\infty = a_4^\infty = a_6^\infty = 0$ são nulos. Através das condições de contorno restantes, equações (5.11a), (5.11b) e (5.11c), é obtido o seguinte sistema linear:

$$a_j^\infty = R^{-1} \cdot q^\infty \quad (6.30)$$

onde $q^\infty = \{0, 0, p_0\}^T$ e R é a matriz dos coeficientes, tendo como elementos $r_{1j} = i \frac{\lambda \nu}{1-\nu} + b_j \lambda_j$, $r_{2j} = i\lambda b_j + \lambda_j$ e $r_{3j} = f_j$, com $j = 1, 3, 5$.

A solução do sistema linear pode ser dado, por:

$$a_1^\infty = p_0 \frac{\left(i \frac{\lambda \nu}{1-\nu} + b_3 \lambda_3 \right) (i\lambda b_5 + \lambda_5) - \left(i \frac{\lambda \nu}{1-\nu} + b_5 \lambda_5 \right) (i\lambda b_3 + \lambda_3)}{\sum \left(i \frac{\lambda \nu}{1-\nu} + b_j \lambda_j \right) (i\lambda b_k + \lambda_k) f_l} \quad (6.31)$$

$$a_3^\infty = p_0 \frac{\left(i \frac{\lambda \nu}{1-\nu} + b_5 \lambda_5 \right) (i\lambda b_1 + \lambda_1) - \left(i \frac{\lambda \nu}{1-\nu} + b_1 \lambda_1 \right) (i\lambda b_5 + \lambda_5)}{\sum \left(i \frac{\lambda \nu}{1-\nu} + b_j \lambda_j \right) (i\lambda b_k + \lambda_k) f_l} \quad (6.32)$$

$$a_5^\infty = p_0 \frac{\left(i \frac{\lambda \nu}{1-\nu} + b_1 \lambda_1 \right) (i\lambda b_3 + \lambda_3) - \left(i \frac{\lambda \nu}{1-\nu} + b_3 \lambda_3 \right) (i\lambda b_1 + \lambda_1)}{\sum \left(i \frac{\lambda \nu}{1-\nu} + b_j \lambda_j \right) (i\lambda b_k + \lambda_k) f_l} \quad (6.33)$$

onde os índices j, k e l assumem 1, 3 e 5 em permutação circular direta, tendo o produto dos termos positivo e a permutação circular inversa com o produto dos termos negativo.

6.3.1.1 Verificação da solução analítica - solos com espessura infinita

Com o intuito de verificar a presente solução, são realizadas algumas comparações com soluções disponíveis na literatura. Neste contexto, Cha et al. (2002) apresentaram alguns exemplos numéricos da solução dinâmica, tendo como entrada os parâmetros da onda e do solo disponíveis na Tabela (3), onde o ponto de estudo está representado por P6.1 na Figura (25). Em sua formulação, Cha et al. (2002) retrataram a solução dinâmica completa considerando somente a espessura do solo como infinita, apresentando-a através de parâmetros adimensionais.

Tabela 3 – Parâmetros de entrada para a verificação da solução analítica considerando solos com espessura infinita.

Parâmetros da onda	
Período de onda (T)	12 s
Espessura da lâmina de água (h)	30 m
Comprimento de onda em águas profundas (L_0)	225 m
Comprimento de onda em $h = 30m$ (L)	177 m
Altura da onda (H)	0,4 m
Compressibilidade da água (K_f)	$2.2 \cdot 10^9 Pa$
Parâmetros do solo	
Porosidade (ϕ)	0,4
Coefficiente de Poisson (ν)	0,35
Coefficiente de permeabilidade (areia fina) (k)	$10^{-4} m/s$
Coefficiente de permeabilidade (areia grossa) (k)	$10^{-2} m/s$
Módulo de cisalhamento (G)	$5 \cdot 10^6 Pa$

Fonte: Cha et al. (2002).

Nas Figuras (26) e (27) estão apresentadas as comparações da presente solução com o modelo proposto por Cha et al. (2002) para distribuições verticais do excesso de poropressão, tensão efetiva vertical e tensão cisalhante, considerando o solo composto por dois tipos de sedimentos, areia grossa e areia fina, respectivamente.

É possível observar que em ambos tipos de solo (areia grossa ou areia fina), a presente solução apresenta resultados muito próximos aos apresentados por Cha et al. (2002). Analisando o excesso de poropressão induzido por ondas para areia fina e grossa (Figuras 26a e 27a), observa-se a redução da grandeza com o aumento da profundidade do solo, já as tensões efetivas verticais (Figuras 26b e 27b) e as tensões cisalhantes (Figuras 26c e 27c) apresentaram aumento até a profundidade relativa $z/L = -0,15$ e conseqüente redução após esse valor máximo.

Tzang (1998) realizou medições em laboratório do excesso de poropressão gerado por ondas do tipo monocromática e com fundo composto de areia com diâmetro médio $d_{50} = 0,05mm$. Os

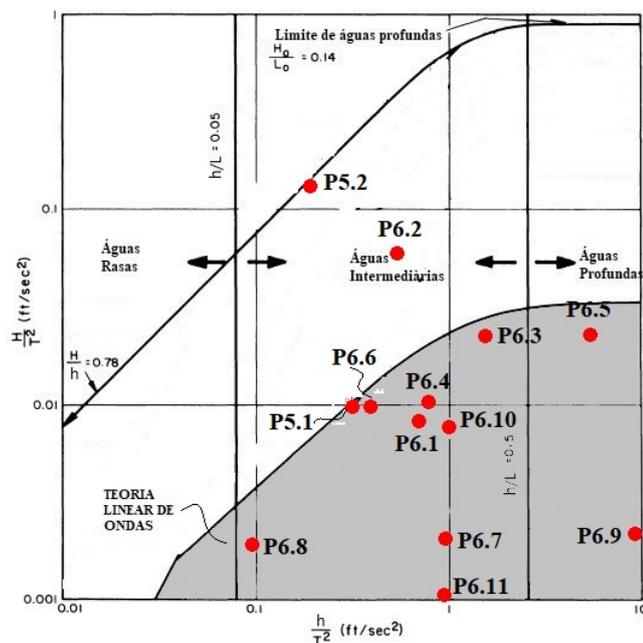


Figura 25 – Regime de propagação de ondas para os pontos em estudo.

dados experimentais foram obtidos através de um tanque de ondas com dimensões 2,4m (largura), 1,5m (altura) e 54,9m (comprimento). Transdutores de pressão foram instalados em um fundo falso de formato trapezoidal com inclinação de 1 : 10 em ambos os taludes. As medições foram obtidas em 4 pontos em diferentes profundidades do solo arenoso com distância de 0,2m entre o primeiro e o segundo e 0,15m entre os demais. Além disso, na extremidade oposta ao gerador das ondulações, foi disposto um dissipador de ondas para que não houvesse reflexão da mesma. A areia possui módulo de elasticidade transversal $G = 10^7 Pa$, porosidade $\phi = 0,4$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,35$ e coeficiente de permeabilidade $k = 3,92 \cdot 10^{-4} m/s$. Os parâmetros das ondas geradas foram: período $T = 1,97s$, altura da onda $H = 0,075m$, espessura da lâmina de água $h = 0,54m$ e comprimento de onda para o ponto estudado $L = 4,32m$ calculado através da Equação de Dispersão. Considerando os parâmetros da onda, o ponto P6.2 na Figura (25) representa onde está situado o regime de propagação da onda, que nesta ocasião, não está abrangido pela teoria linear de ondas. No entanto, o exemplo tem por objetivo relacionar os dados experimentais com a solução analítica. A comparação dos dados experimentais com a presente solução está exposto na Figura (28), onde os tempos $t = 30, 60, 100$ e $140s$ são definidos como a duração desde o início das medições de laboratório, sendo aproximadamente coincidentes com o tempo em que a amplitude do excesso de propressão é máximo, ou seja, na crista da onda.

Para este conjunto de parâmetros do solo e da onda, nota-se que não há diferença entre as soluções dinâmica e quase-estática. Ao mesmo tempo, há uma boa concordância entre os dados experimentais e o modelo analítico do presente estudo. Conforme a Figura (28), os dados experimentais não são coincidentes entre si, já que pode ter ocorrido imperfeições na geração e

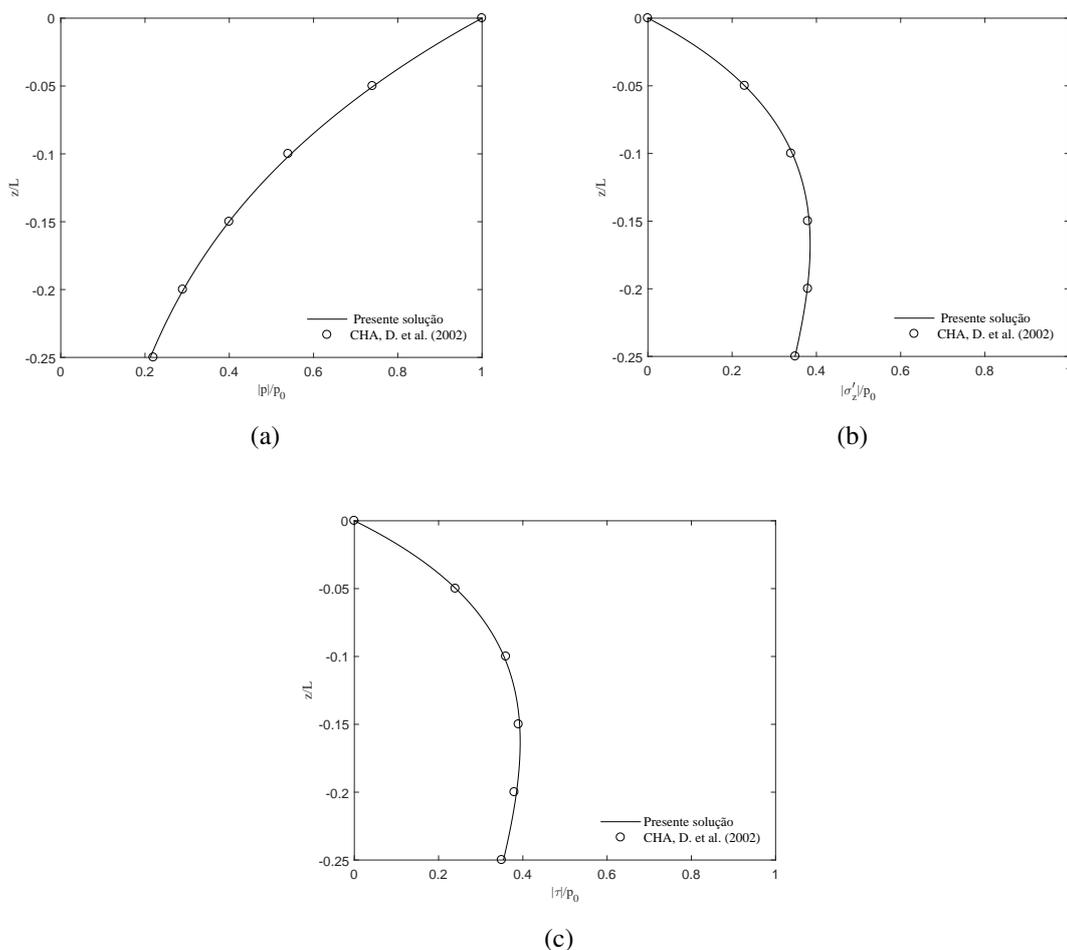


Figura 26 – Distribuição vertical da amplitude máxima das respostas induzida por ondas em areia grossa. (a) - Excesso de poropressão, (b) - Tensão efetiva vertical e (c) - Tensão cisalhante.

reflexão de parte da onda.

6.3.2 Camada de solo finita

No contexto de uma análise dinâmica, a condição de contorno que expressa a impermeabilidade do substrato rígido é escrita como:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_f \boldsymbol{\gamma}^f \cdot \mathbf{e}_z \quad (6.34)$$

que é reduzida à condição de contorno (5.13), ou seja, $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ em $z = -d$, quando a aceleração vertical $\boldsymbol{\gamma}^f \cdot \mathbf{e}_z$ das partículas de fluido em contato com o substrato é desprezada. No presente trabalho, adota-se esta hipótese.

Substituindo as equações gerais dos deslocamentos (6.21a) e (6.21b), excesso de poropressão (6.27) e tensões efetivas (6.29b) e (6.29c) nas condições de contorno (5.11a), (5.11b), (5.11c) e (5.13), os seis coeficientes a_j , com $j = 1, 2, 3, \dots, 6$, podem ser determinados, obtendo-se assim

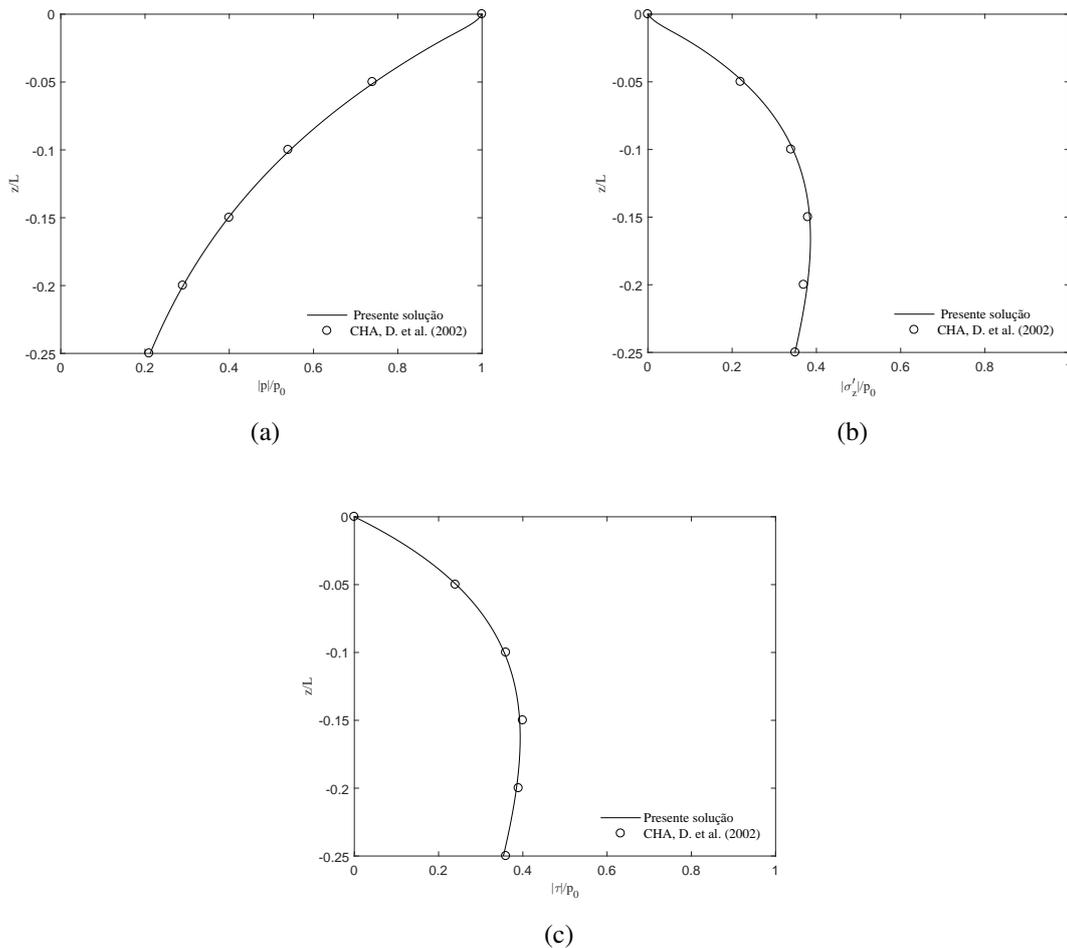


Figura 27 – Distribuição vertical da amplitude máxima das respostas induzida por ondas em areia fina. (a) - Excesso de poropressão, (b) - Tensão efetiva vertical e (c) - Tensão cisalhante.

a solução dinâmica completa para solos com espessura finita:

$$a_j = R^{-1} \cdot q \quad (6.35)$$

onde $q = \{0, 0, p_0, 0, 0, 0\}^T$ e R é a matriz dos coeficientes, tendo como elementos $r_{1j} = i \frac{\lambda v}{1-v} + b_j \lambda_j$, $r_{2j} = i \lambda b_j + \lambda_j$, $r_{3j} = f_j$, $r_{4j} = \exp(-\lambda_j d)$, $r_{5j} = b_j \exp(-\lambda_j d)$ e $r_{6j} = f_j \lambda_j \exp(-\lambda_j d)$.

Os coeficientes a_1 até a_6 são, portanto:

$$a_i = \frac{D_i}{D_0} \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (6.36)$$

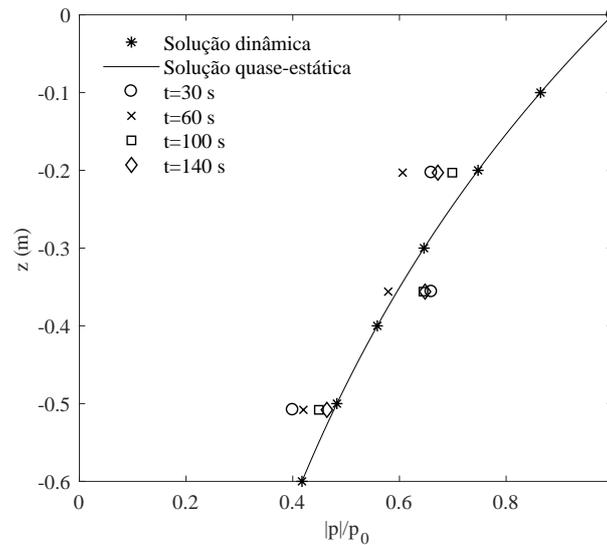


Figura 28 – Dados experimentais obtidos por Tzang (1998) em comparação com o presente estudo.

onde,

$$\begin{aligned}
 D_j = & A_{j1} \exp[-d(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)] + A_{j2} \exp[-d(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4)] + A_{j3} \exp[-d(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5)] \\
 & A_{j4} \exp[-d(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_6)] + A_{j5} \exp[-d(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)] + A_{j6} \exp[-d(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5)] \\
 & A_{j7} \exp[-d(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_6)] + A_{j8} \exp[-d(\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5)] + A_{j9} \exp[-d(\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6)] \\
 & A_{j10} \exp[-d(\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_6)] + A_{j11} \exp[-d(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)] + A_{j12} \exp[-d(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5)] \\
 & A_{j13} \exp[-d(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_6)] + A_{j14} \exp[-d(\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5)] + A_{j15} \exp[-d(\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6)] \\
 & A_{j16} \exp[-d(\lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_6)] + A_{j17} \exp[-d(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)] + A_{j18} \exp[-d(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6)] \\
 & A_{j19} \exp[-d(\lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_6)] + A_{j20} \exp[-d(\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6)]
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

Os coeficientes A_{jn} , com $j = 0, 1, \dots, 6$ e $n = 1, 2, \dots, 20$, encontram-se no Anexo (D).

Considerando os parâmetros da Tabela (4), onde o ponto de estudo está representado por P6.3 na Figura (25), a variação espacial em x e com a profundidade z para o excesso de poropressão (p/p_0), tensão efetiva vertical (σ'_z/p_0) e horizontal (σ'_x/p_0) e tensão cisalhante (τ/p_0), adimensionalizadas por p_0 , pode ser visualizada na Figura (29), para um solo mais permeável com coeficiente de permeabilidade $k = 10^{-2} m/s$ e na Figura (30) considerando um solo menos permeável com coeficiente de permeabilidade $k = 10^{-4} m/s$. Os resultados a seguir foram obtidos no tempo $t = 0$ e foram consideradas ainda três espessuras da camada de solo, $d = 0.25L, 0.5L$ e L .

Para todas as situações, o máximo valor para o excesso de poropressão (p) e tensão efetiva horizontal (σ'_x) ocorre na crista da onda, enquanto que para a tensão efetiva vertical, neste mesmo ponto, ocorre a mínima. Para a tensão cisalhante o valor é nulo. Quando o excesso de poropressão

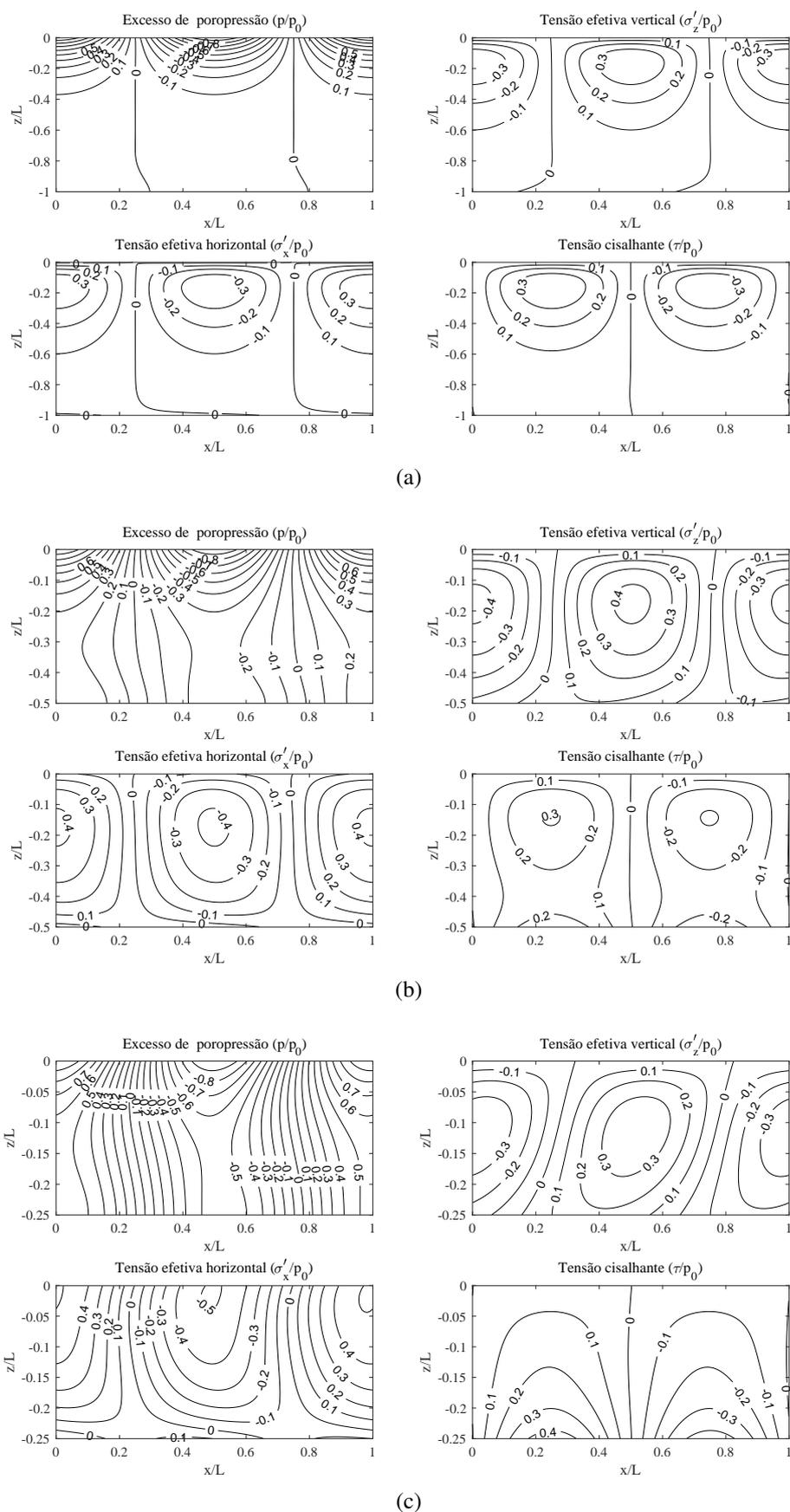


Figura 29 – Variação espacial das respostas induzidas para um coeficiente de permeabilidade $k = 10^{-2} \text{ m/s}$: (a) espessura da camada de solo $d = L$, (b) $d = 0,5L$ e (c) $d = 0,25L$.

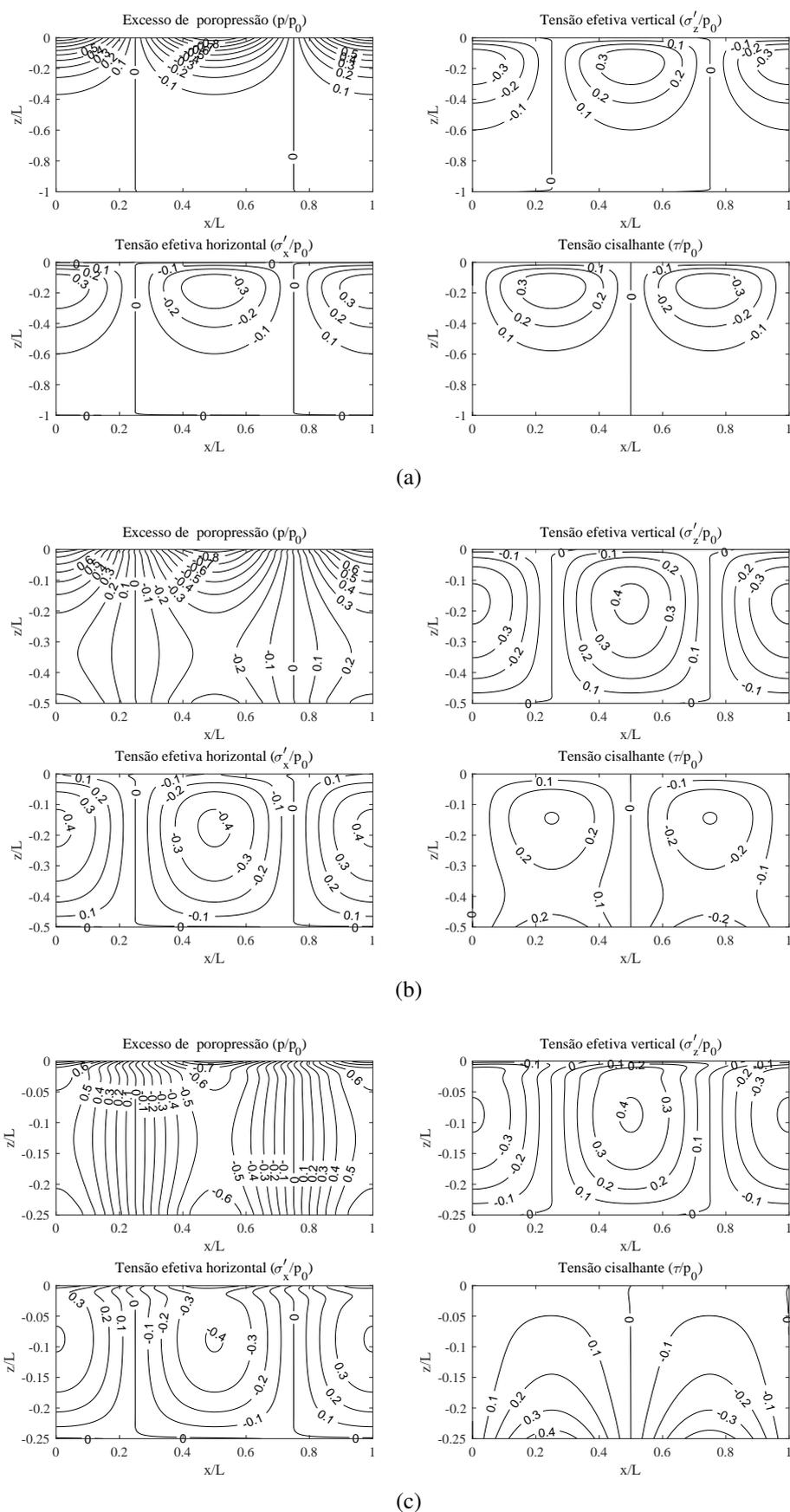


Figura 30 – Variação espacial das respostas induzidas para um coeficiente de permeabilidade $k = 10^{-4} m/s$: (a) espessura da camada de solo $d = L$, (b) $d = 0,5L$ e (c) $d = 0,25L$.

Tabela 4 – Parâmetros de entrada para os exemplos numéricos da solução dinâmica para solos com espessura finita.

Parâmetros da onda	
Período de onda (T)	10 s
Espessura da lâmina de água (h)	50 m
Comprimento de onda em águas profundas (L_0)	156,13 m
Comprimento de onda em $h = 50m$ (L)	121,15 m
Altura da onda (H)	0,61 m
Compressibilidade da água (K_f)	$1,9 \cdot 10^9 Pa$
Parâmetros do solo	
Porosidade (ϕ)	0,35
Coefficiente de Poisson (ν)	0,4
Coefficiente de permeabilidade (k)	10^{-4} ou $10^{-2} m/s$
Módulo de cisalhamento (G)	$5 \cdot 10^7 Pa$
Espessura da camada de solo (d)	$0.25L, 0.5L$ e L

é analisado, em solos com grande espessura (ou no caso da solução com espessura infinita), a influência da permeabilidade do solo não se mostrou relevante, já que os resultados para os dois valores de k apresentados foram muito próximos. Já quando são consideradas espessuras da camada de solo menores ($d < L$), para solos menos permeáveis ($k = 10^{-4} m/s$), pode-se notar que o excesso de poropressão apresentou ligeiro aumento imediatamente abaixo da crista ($x = 0$) e da cava ($x = L/2$) da onda quando se aproxima do substrato rígido e impermeável. Tal comportamento pode ser explicado pela dificuldade em ocorrer a dissipação do excesso de poropressão em solos menos espessos.

É perceptível também que em solos mais permeáveis, a diminuição da espessura da camada de solo resulta na distribuição não simétrica das respostas ao longo da profundidade na crista e no cavado da onda. Tal efeito é mais acentuado nas tensões efetivas e em profundidades próximas ao substrato rígido e impermeável (ver Figuras 29b e 29c).

6.3.2.1 Verificação da solução analítica - solos com espessura finita

Wang et al. (2018) desenvolveram um modelo analítico para a resposta induzida por ondas considerando os efeitos inerciais do fluido e do solo. Foi analisado a resposta dinâmica considerando o solo com espessura finita e infinita. Em sua análise, foi considerada a compressibilidade do fluido e do esqueleto. Os parâmetros de entrada do modelo estão disponíveis na Tabela (5), onde o ponto de estudo está representado por P6.4 na Figura (25).

Na Figura (31a) está apresentada a amplitude máxima do excesso de poropressão induzida pela onda enquanto que na Figura (31b) está a amplitude máxima da tensão efetiva vertical, onde as linhas representam a presente solução e os caracteres representam os resultados obtidos por Wang et al. (2018). Em ambas as respostas apresentadas, foi possível observar boa concordância entre os resultados. No entanto, no presente modelo, o esqueleto é considerado incompressível.

Tabela 5 – Parâmetros de entrada para a verificação da solução analítica para solos com espessura finita.

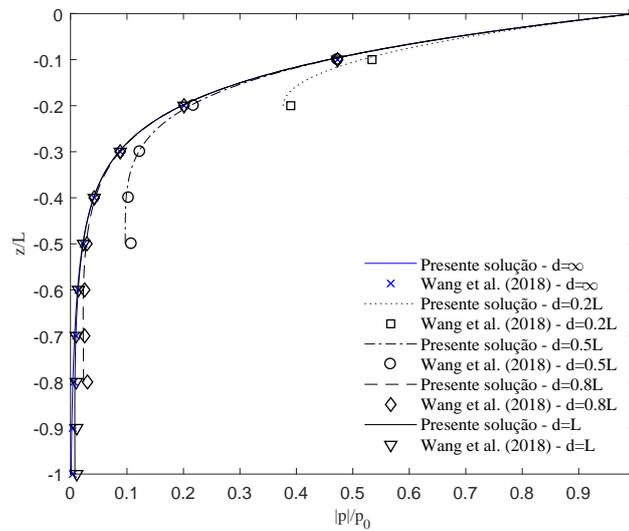
Parâmetros da onda	
Período de onda (T)	6 s
Espessura da lâmina de água (h)	8 m
Comprimento de onda em águas profundas (L_0)	56,2 m
Comprimento de onda em $h = 8m$ (L)	45,0 m
Altura da onda (H)	0,11 m
Compressibilidade da água (K_f)	$2 \cdot 10^7 Pa$
Parâmetros do solo	
Porosidade (ϕ)	0,4
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3
Coefficiente de permeabilidade (k)	$10^{-2} m/s$
Módulo de cisalhamento (G)	$10^7 Pa$
Espessura da camada de solo (d)	0.2L, 0.5L, 0.8L, L e ∞

Fonte: Wang et al. (2018)

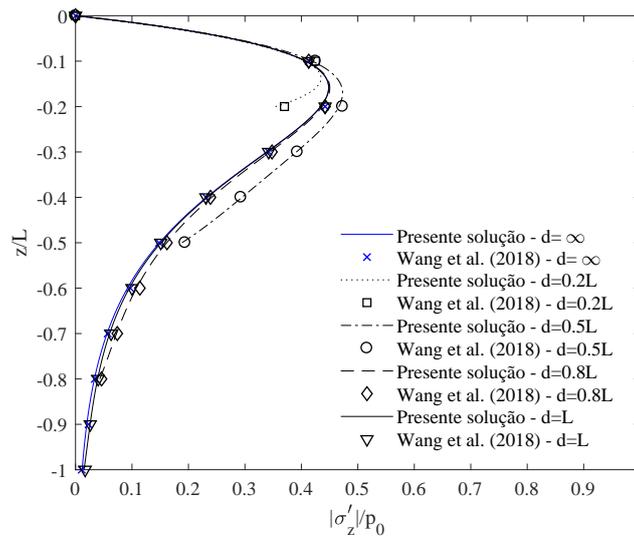
6.4 ANÁLISE DOS TERMOS DESPREZADOS

A priori, desprezou-se da equação de equilíbrio dinâmico (4.29) e da equação da continuidade (4.70) o termo $\text{grad}(\mathbf{V}^r + \mathbf{V}^s) \cdot \mathbf{V}^r$, onde \mathbf{V}^s é o vetor velocidade do esqueleto e \mathbf{V}^r é o vetor velocidade relativa entre o fluido e o esqueleto. Com a finalidade de analisar a ordem de grandeza do termo desprezado, compara-se o gradiente desprezado com a derivada da velocidade relativa entre as partículas de fluido e do esqueleto $\frac{\partial \mathbf{V}^r}{\partial t}$, assim como a aceleração do esqueleto $\frac{\partial \mathbf{V}^s}{\partial t}$. Os parâmetros de entrada são os mesmos já apresentados na Tabela (3), onde foi considerado um fundo composto majoritariamente de areia grossa. Adicionalmente, a altura da onda foi considerada $H = 0,4m$, resultando em uma pressão dinâmica da onda no fundo marinho $p_0 = 1,23kPa$, com ponto de estudo representado por P6.1 na Figura (25). Os resultados considerando a espessura do solo infinito para as duas direções consideradas estão expostos na Figura (32). Já na Figura (33), estão apresentadas a comparação do termo desprezado com a derivada da velocidade relativa entre as partículas de fluido e do esqueleto e a aceleração do esqueleto, considerando a solução para solos com espessura finita.

Considerando a solução para espessura do solo infinito, cujos resultados são dados na Figura (32), é possível observar que a magnitude do termo da derivada da velocidade relativa $\frac{\partial \mathbf{V}^r}{\partial t}$ entre as partículas do fluido e do esqueleto é da ordem de 1000 vezes maior do que o termo do gradiente, ambos desprezados na solução analítica, em ambas as direções consideradas. Já considerando a aceleração do esqueleto $\frac{\partial \mathbf{V}^s}{\partial t}$ na direção x , a derivada da velocidade relativa $\frac{\partial \mathbf{V}^r}{\partial t}$ é cerca de 2 vezes menor do que a aceleração do esqueleto, enquanto que na direção z a derivada da velocidade relativa é cerca de 1000 vezes menor do que a aceleração do esqueleto. Em relação à solução para espessura do solo com espessura finita, os resultados são apresentados na Figura (33) tendo as espessuras $d = 0.1L, 0.4L, 0.7L$ e $1L$ analisadas. Os resultados não são diferentes,



(a)

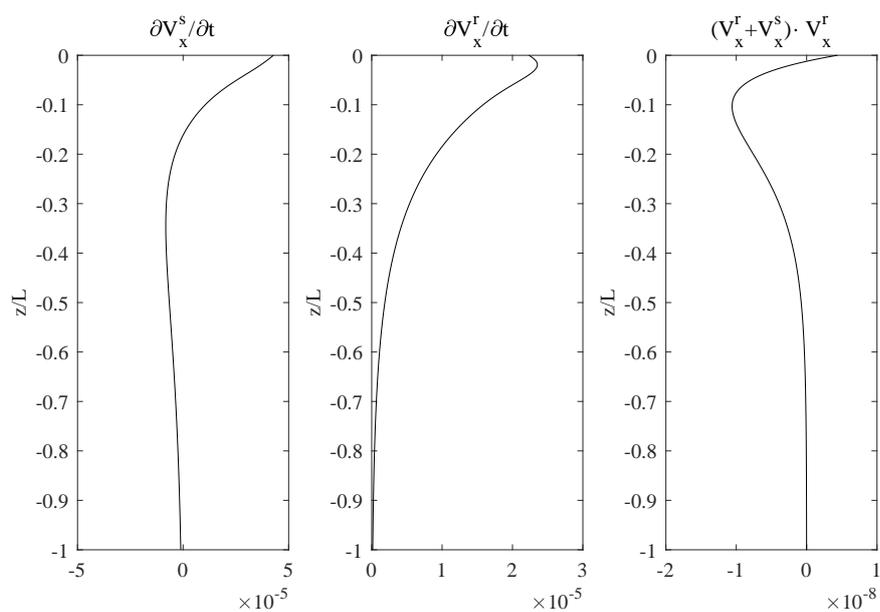


(b)

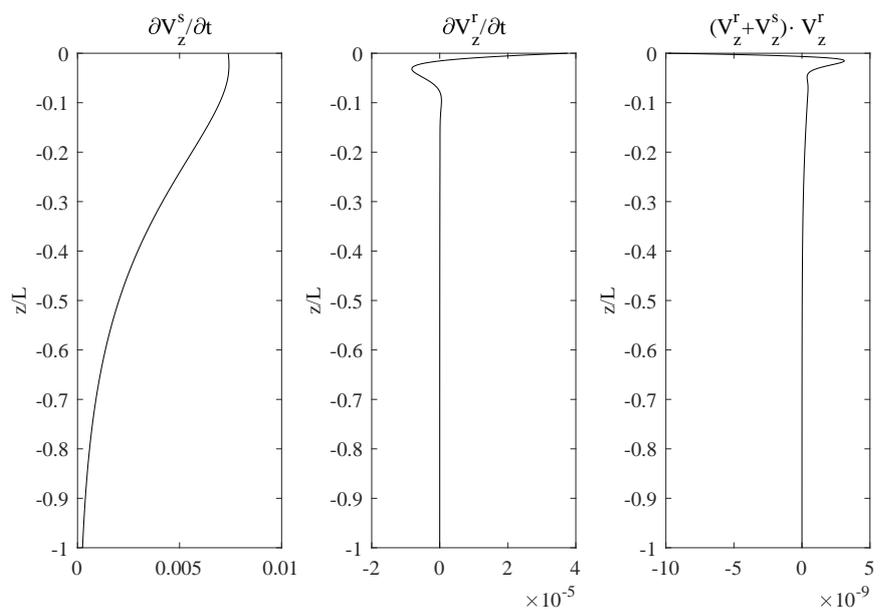
Figura 31 – Comparação entre os resultados obtidos por Wang et al. (2018) e o presente estudo.

sugerindo que o termo do gradiente pode ser desprezado sem prejuízos à solução, enquanto que o termo da derivada da velocidade relativa deve ser considerado, já que em certos casos ele pode ser da mesma ordem de grandeza da aceleração do esqueleto. No entanto, considerando a inclusão de tais termos na equação de equilíbrio, a aceleração do esqueleto é multiplicada pela massa específica do meio poroso ρ , enquanto que a aceleração relativa entre o fluido e o esqueleto é multiplicada por $\rho_f \phi$, o que poderia também favorecer a desconsideração da aceleração relativa.

Neste sentido, o termo do gradiente desprezado pode ser justificado pelos resultados apresentados,



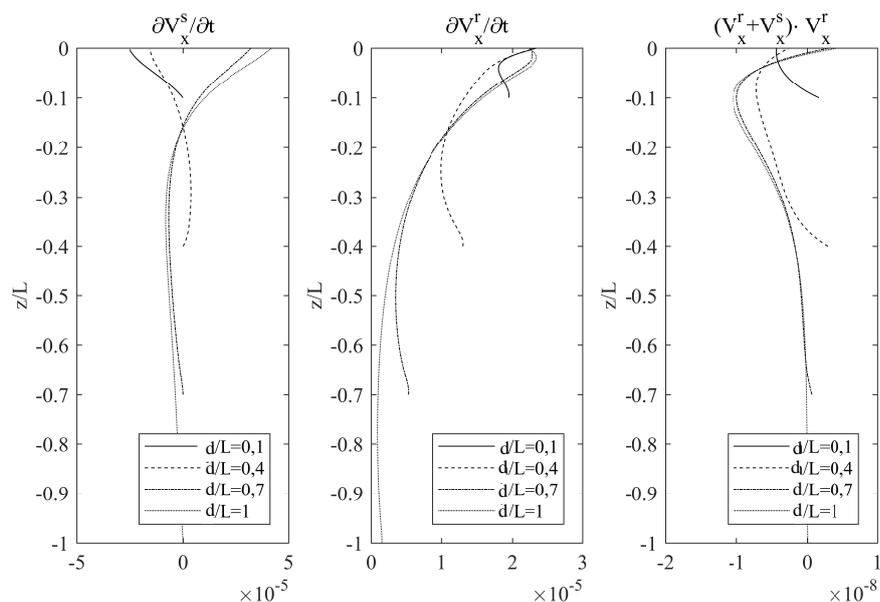
(a)



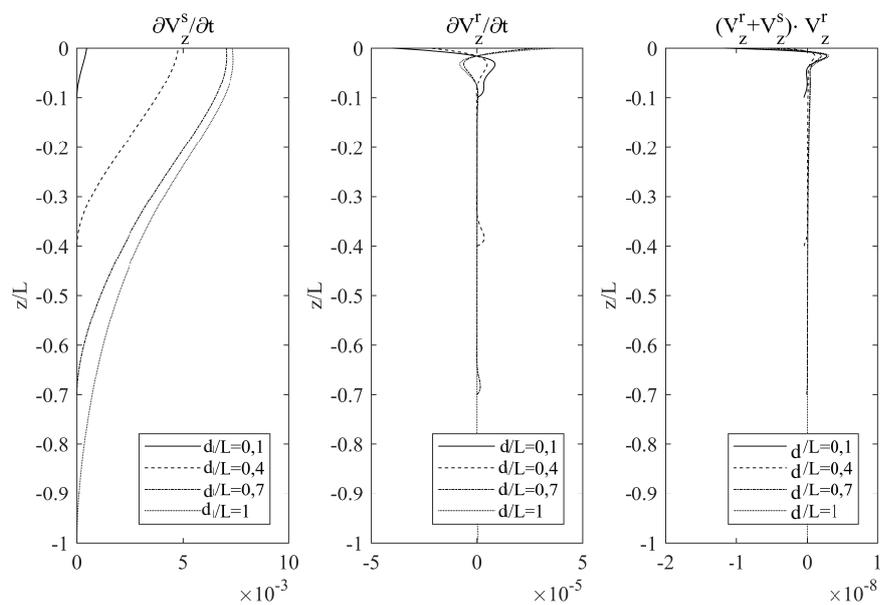
(b)

Figura 32 – Distribuição vertical da aceleração do esqueleto, da derivada da velocidade relativa e do termo gradiente desprezado para solos com espessura infinita: (a) direção x e (b) direção z .

enquanto que não é claro o suficiente que a derivada da velocidade relativa possa ser, da mesma forma, desprezada, recaindo na solução denominada de aproximação $u-p$. Sendo assim, este último é considerado no presente estudo.



(a)



(b)

Figura 33 – Distribuição vertical da aceleração do esqueleto, da derivada da velocidade relativa e do termo gradiente desprezado para solos com espessura finita: (a) direção x e (b) direção z .

De forma semelhante, desprezou-se *a priori* o termo $\frac{\dot{\phi}\dot{\nu}}{\phi^2}$ da Equação (6.6). Sendo assim, realizando a comparação da magnitude do termo desprezado com o termo $\frac{\ddot{\nu}}{\phi}$, é possível avaliar a relevância desta consideração. O cálculo de $\dot{\phi}$ foi aproximado através da Equação (4.51b) onde, no contexto das transformações infinitesimais, a hipótese da incompressibilidade dos grãos

sólidos implica a relação $\dot{\phi} = \dot{\varepsilon}_{ii}$.

A fim de verificar o efeito da desconsideração do termo em questão, verificou-se sua magnitude tendo como os parâmetros de entrada os mesmos já apresentados na Tabela (3), onde foi considerado um fundo composto majoritariamente de areia grossa. Adicionalmente, a altura da onda foi de $H = 0,4m$, resultando em uma pressão dinâmica da onda no fundo marinho $p_0 = 1,23kPa$, sendo que o ponto de estudo está representado por P6.1 na Figura (25). Na Figura (34), é considerada a solução para solos com espessura infinita, onde pode-se notar que o termo desprezado $\frac{\dot{\phi}\dot{v}}{\varphi^2}$ é de fato muito menor do que $\frac{\dot{v}}{\varphi}$ em ambas as direções consideradas.

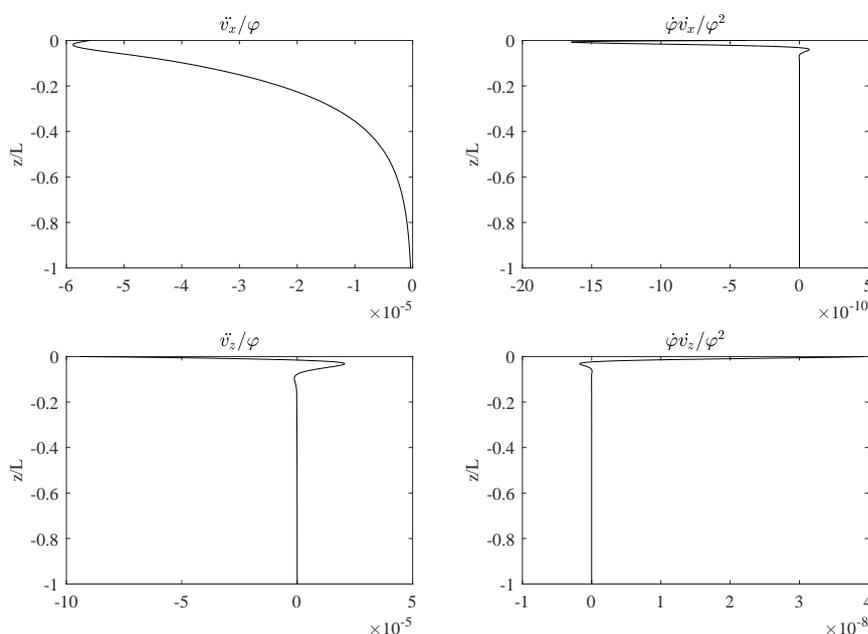


Figura 34 – Solução com espessura infinita: distribuição vertical do termo desprezado.

Da mesma maneira, comparou-se a magnitude dos termos desprezados considerando a solução para solos com espessura finita com $d = 0.1L, 0.4L, 0.7L$ e $1L$. Os resultados estão apresentados pela Figura (35) onde, mais uma vez, o termo desprezado mostrou-se irrelevante na solução, sugerindo que sua omissão parece ser válida.

6.5 EFEITOS DINÂMICOS

Com a finalidade de investigar os efeitos dinâmicos nas soluções analíticas da resposta induzida por ondas, dois exemplos numéricos são considerados a seguir. As características da onda e do solo estão apresentados na Tabela (6), onde os pontos de estudo estão representados na Figura (25) por P6.5 para o Caso 1 e P6.6 para o Caso 2.

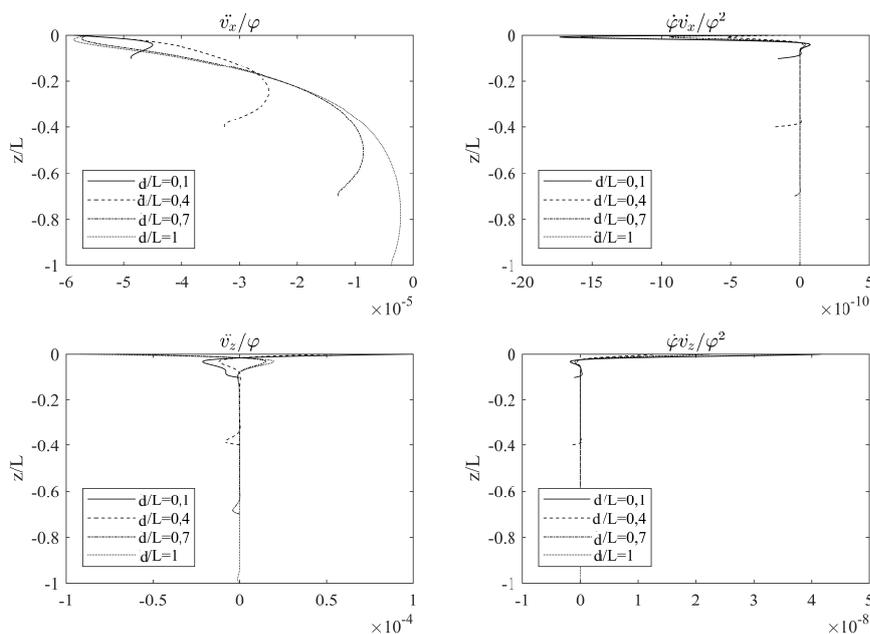


Figura 35 – Solução com espessura finita: distribuição vertical do termo desprezado.

Tabela 6 – Parâmetros de entrada para os exemplos numéricos para o estudo dos efeitos dinâmicos.

Parâmetros da onda	Caso 1	Caso 2
Período de onda (T)	4 s	20 s
Espessura da lâmina de água (h)	20 m	50 m
Comprimento de onda em águas profundas (L_0)	24,98 m	624,52 m
Comprimento de onda em h (L)	24,98 m	405,64 m
Altura da onda (H)	0,10 m	1,2 m
Compressibilidade da água (K_f)	$1,9 \cdot 10^9 Pa$	$1,9 \cdot 10^9 Pa$
Parâmetros do solo	Caso 1	Caso 2
Porosidade (ϕ)	0,35	0,35
Coefficiente de Poisson (ν)	0,4	0,4
Coefficiente de permeabilidade (k)	$10^{-2} m/s$	$10^{-4} m/s$
Módulo de cisalhamento (G)	$5 \cdot 10^6 Pa$	$5 \cdot 10^6 Pa$
Espessura da camada de solo (d)	0,5L	0,5L

As distribuições verticais do excesso de poropressão induzido por ondas (p/p_0), tensões efetivas (σ'_x/p_0 , σ'_z/p_0) e tensão cisalhante (τ/p_0) estão apresentadas na Figura (36), onde p_0 representa a amplitude máxima da pressão dinâmica no topo da camada de solo (em $z = 0$), calculada através da teoria linear de ondas. Nas figuras, a linha tracejada representa a solução quase-estática apresentada no Capítulo (5), enquanto que a linha contínua representa a solução dinâmica aproximada, apresentada neste capítulo.

Ao analisar as curvas que representam o Caso 1 (linhas pretas) é perceptível que as soluções dinâmica e quase-estática não diferem entre si, já para o Caso 2 (linhas azuis) são detectadas

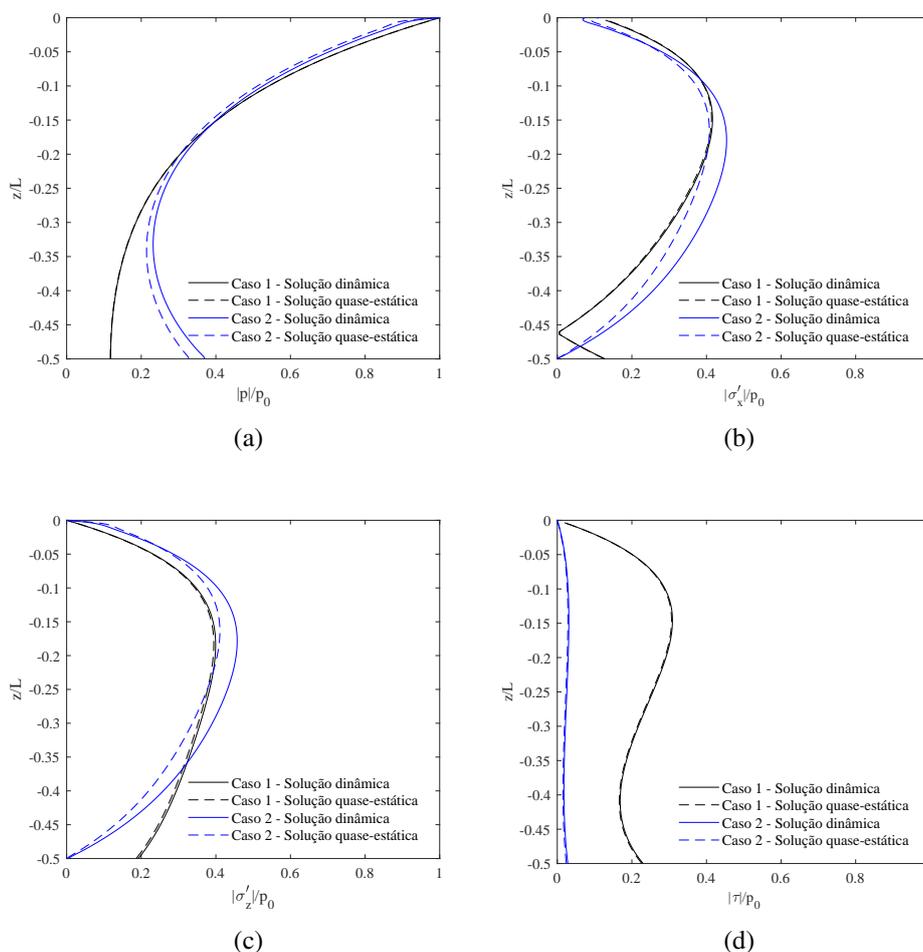


Figura 36 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica para $d/L = 0,5$: (a) Excesso de poropressão, (b) Tensão efetiva horizontal, (c) Tensão efetiva vertical e (d) Tensão cisalhante.

diferenças mais acentuadas nas tensões efetivas vertical (σ'_z) e horizontal (σ'_x), enquanto que diferenças mais discretas são observadas no excesso de poropressão (p). A tensão cisalhante (τ) não apresentou distinção em nenhum dos dois casos analisados. Tal comportamento indica que a solução dinâmica apresenta comportamento distinto da solução quase-estática para certas combinações dos parâmetros do solo e da onda. A influência dos parâmetros nas respostas dinâmica e quase-estática será estudada com mais detalhe a seguir.

6.5.1 Efeitos dos parâmetros na resposta poromecânica

De acordo com a solução analítica obtida anteriormente, vários parâmetros do solo como, coeficiente de permeabilidade (k), coeficiente de Poisson (ν) e módulo cisalhante (G), e da onda tal como, comprimento de onda (L), calculada através da relação de dispersão (Equação 3.81), que por sua vez é função da profundidade da lâmina de água (h), são requeridos para obter a resposta induzida. Desta forma, os efeitos de cada uns destes parâmetros são estudados, da

mesma maneira que é calculada a diferença percentual entre as soluções analíticas quase-estática e dinâmica através da seguinte equação:

$$Dif_{\star}[\%] = \frac{|\star^d - \star^{q-s}|}{p_0} \times 100 \quad (6.38)$$

onde p_0 é a pressão dinâmica no topo da camada de solo gerada pela propagação da onda, " \star " assume: p -excesso de poropressão, σ'_z -tensão efetiva vertical, σ'_x -tensão efetiva horizontal e τ -tensão cisalhante, o sobrescrito " d " indica a solução dinâmica e " $q-s$ " refere-se à solução quase-estática. Serão considerados ainda os dois casos das condições de contorno: espessura do solo infinita e finita sendo, esta última, fixada em $d = 0,25L$.

Na Tabela (7) estão apresentados os três níveis de variação dos parâmetros e os demais parâmetros tidos como constantes são a porosidade ($\phi = 0,4$), a compressibilidade do fluido ($K_f = 2 \cdot 10^9 Pa$), o peso específico do fluido e do esqueleto ($\rho_f = 1000 kg/m^3$ e $\rho_s = 2600 kg/m^3$) e a altura da onda ($H = 0,06m$) de modo que todas as combinações de parâmetros estarão abrangidos pela teoria linear de ondas. Os resultados podem ser observados nas Figuras (37-46). Na análise paramétrica desenvolvida nesta seção, os dados definidos no nível 2 são considerados como valores de referência para os parâmetros h, T, ν, k e G . Nas figuras a seguir, são analisados os efeitos da variação dos parâmetros de entrada no modelo, fixando ao nível 2 os demais parâmetros e variando entre os níveis 1, 2 e 3 o parâmetro em que há interesse em analisar. Por exemplo, se o objetivo é avaliar a variação do módulo cisalhante (G), varia-se G entre $5 \cdot 10^6$, 10^7 e $10^8 Pa$, enquanto que os demais parâmetros assumem valor fixo referente ao nível 2. As respostas induzidas por ondas nas figuras que se seguem estão apresentadas em módulo e em amplitude máxima adimensionalizadas pela pressão dinâmica gerada pela onda p_0 .

Para a variação dos parâmetros coeficiente de Poisson (ν), coeficiente de permeabilidade (k) e módulo de cisalhamento (G), onde a espessura da lâmina de água h e o período de onda T são fixados ao nível 2, o ponto de estudo P6.7 está indicado na Figura (25). Quando a espessura da lâmina de água é avaliada para h fixado ao nível 1, o ponto de estudo será P6.8 e para h fixado ao nível 3, o ponto de estudo será P6.9. Já quando é avaliado o período da onda T , para T fixado ao nível 1, o ponto de estudo será P6.10 e para T fixado ao nível 3, o ponto de estudo será P6.11. Os demais casos se remetem ao ponto P6.7.

Tabela 7 – Parâmetros de entrada para os exemplos numéricos da análise de sensibilidade e diferença relativa entre as soluções.

Parâmetros	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Espessura da lâmina de água (h)	3 m	30 m	300 m
Período de onda (T)	5 s	10 s	15 s
Coeficiente de Poisson (ν)	0,2	0,3	0,4
Coeficiente de permeabilidade (k)	$10^{-2} m/s$	$10^{-3} m/s$	$10^{-5} m/s$
Módulo de cisalhamento (G)	$5 \cdot 10^6 Pa$	$10^7 Pa$	$10^8 Pa$

Na Figura (37) são avaliadas as respostas dinâmica e quase-estática variando o coeficiente de permeabilidade (k), considerando a solução para solos infinito, enquanto que a Figura (38) avalia os mesmos parâmetros considerando a solução para solos com espessura finita. Neste caso $d/L = 0,25$, onde d é a espessura da camada de solo e L é o comprimento da onda na profundidade h . Analisando o efeito da variação do coeficiente de permeabilidade nas respostas induzidas (excesso de poropressão e tensões efetivas e cisalhantes), é possível constatar que não há diferença considerável entre solos mais ou menos permeáveis quando consideramos a solução para solos com espessura infinita. Por outro lado, a solução para solos com espessura finita, onde pela Figura (38) a espessura considerada é de $d = 0,25L$, ocorreu grande variabilidade no excesso de poropressão nas tensões efetivas e em menor grau na tensão cisalhante. É possível notar ainda que solos menos permeáveis apresentaram considerável redução no excesso de poropressão (p) nas camadas mais superficiais do solo. Contudo, há um leve aumento ao se aproximar do substrato impermeável. Já a tensão efetiva vertical (σ'_z) apresentou elevação nas primeiras camadas de solo para sedimentos menos permeáveis, sendo completamente dissipada até o substrato rígido e impermeável. Porém, em casos de solos mais permeáveis, a curva da tensão efetiva vertical é mais suave, não se dissipando por completo até o fim da camada de solo. Em casos de sedimentos mais permeáveis, a tensão efetiva horizontal (σ'_x) apresentou picos mais elevados e a tensão cisalhante (τ) não apresentou distinção variando-se a permeabilidade do meio.

Analisando a diferença relativa entre as soluções dinâmica e quase-estática para solução de solos com espessura finita, a diferença máxima para todos os casos de permeabilidade do meio analisados, foi de aproximadamente 0,4% para o excesso de poropressão (p), tensão efetiva horizontal (σ'_x) e tensão cisalhante (τ), alcançando 1% para tensão efetiva vertical (σ'_z). Já para a solução considerando a espessura do solo infinita, a diferença máxima entre as soluções dinâmica e quase-estática alcançou 1,5% para a tensão efetiva vertical e 1% para as demais respostas. Considerando os parâmetros adotados para esta análise, a diferença entre as soluções não se mostrou relevante quando diferentes permeabilidades são analisadas, porém foi possível notar que o aumento da permeabilidade do meio também aumentou a diferença relativa entre as duas soluções. Tal fato pode ser explicado pelo aumento da permeabilidade aumentar o fluxo de água no interior do solo.

Nas Figuras (39) e (40) estão apresentas o excesso de poropressão, tensões efetivas e cisalhante, além da diferença entre as soluções dinâmica e quase-estática, onde é considerada a variação em três níveis do módulo cisalhante do solo (G) para a solução com solo de espessura infinita (Figura 39) e espessura finita com $d/L = 0,25$ (Figura 40). Considerando o primeiro caso, em que a espessura do solo é considerada infinita, não foi possível observar diferença considerável nas respostas quando variou-se o módulo cisalhante nos três níveis. Já quando é analisada a diferença relativa entre as soluções dinâmica e quase-estática, ainda considerando o solo com espessura infinita, a diferença na predição das respostas induzidas alcançou pico de aproximadamente 2%

para o menor módulo de cisalhamento analisado ($G_1 = 5 \cdot 10^6 Pa$), tendo a diferença reduzida à medida em que G aumenta.

Já no caso da solução para solos com espessura finita (Figura 40), a variação do módulo cisalhante apresentou consideráveis discrepâncias nas respostas induzidas, principalmente no excesso de poropressão (p) e na tensão efetiva vertical (σ'_z). Os efeitos dinâmicos são bastante consideráveis para solos que possuem módulo cisalhante elevado, já que a tensão efetiva vertical apresentou diferença relativa de aproximadamente 8% para o maior módulo cisalhante considerado ($G_1 = 10^8 Pa$).

Nas Figuras (41) e (42) estão apresentadas as respostas induzidas por ondas considerando a variação do coeficiente de Poisson (ν) para as soluções dinâmica e quase-estática, assim como a diferença relativa entre as duas abordagens consideradas. Na Figura (41) considerou-se a espessura do solo infinita, enquanto que na Figura (42) é considerada espessura finita de $d/L = 0,25$. Analisando a solução para solos com espessura finita, é pouco perceptível a influência do coeficiente de Poisson, mostrando que este parâmetro possui baixa preponderância nas respostas para as soluções dinâmica e quase-estática. Analisando a diferença relativa entre ambas soluções para solos com espessura infinita, não houve grandes diferenças variando-se ν , onde a diferença relativa tem valor máximo de 1,5%, no caso da tensão efetiva horizontal para todos os valores de (ν) considerados, e alcançando 1% para as demais tensões. Já para o excesso de poropressão, a diferença relativa entre as soluções não alcança 1%.

Quando é estudado o efeito da camada de solo limitada, e neste caso $d/L = 0,25$ (Figura 42), percebe-se alguma diferença no topo da camada de solo em se tratando da tensão efetiva horizontal (σ'_x). Já para as demais tensões e o excesso de poropressão não foi percebido distinção considerável nas curvas variando-se o coeficiente de Poisson. A diferença relativa entre as soluções dinâmica e quase-estática mostrou ser desprezível em todas as respostas, tendo a diferença máxima de aproximadamente 0,4% para o excesso de poropressão, tensão efetiva horizontal e tensão cisalhante e um pouco maior no caso da tensão efetiva vertical, alcançando 1,5% quando considerado $\nu = 0,4$.

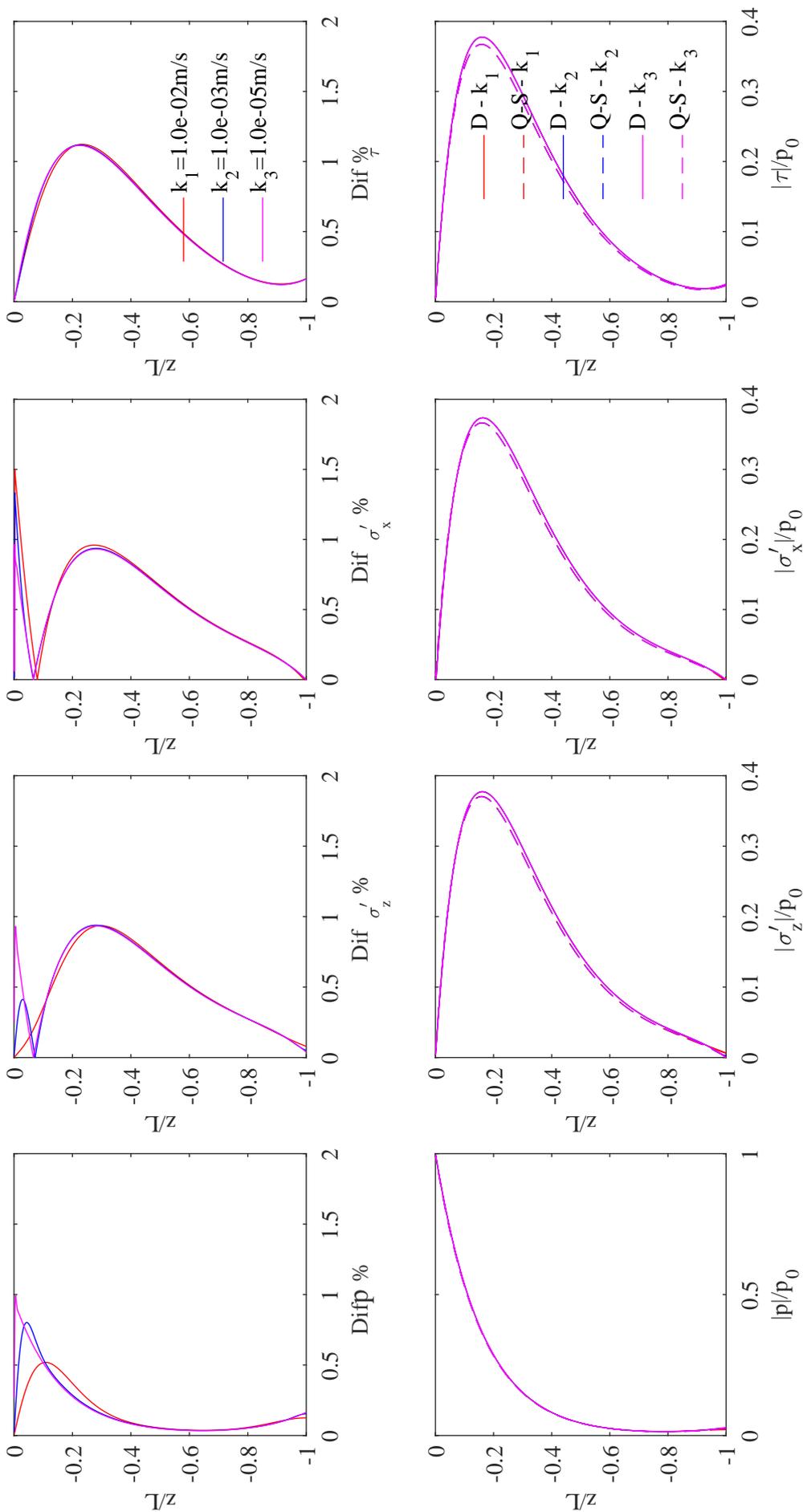


Figura 37 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de k para espessura de solo infinita.

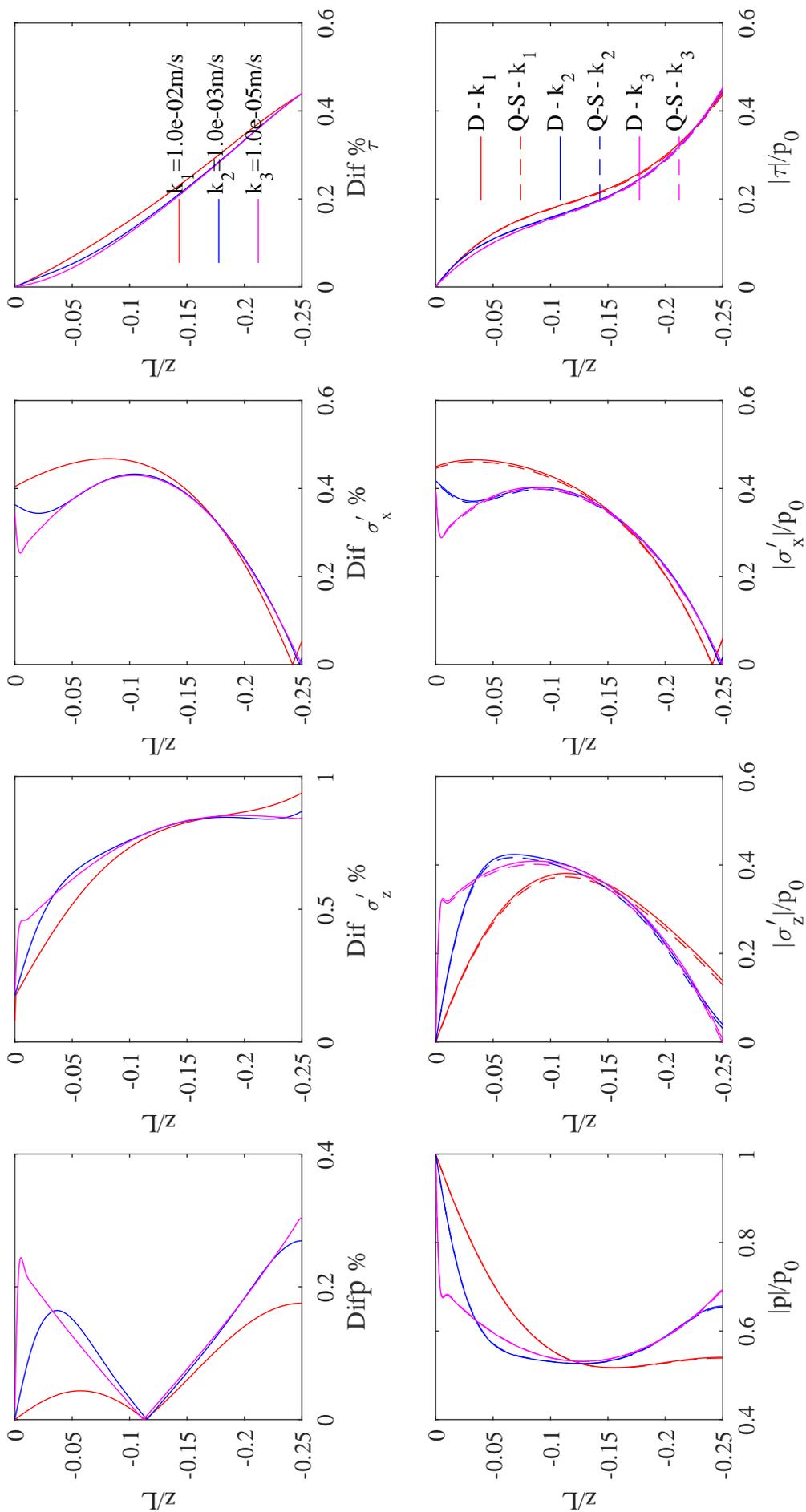


Figura 38 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de k para espessura de solo $d/L = 0, 25$.

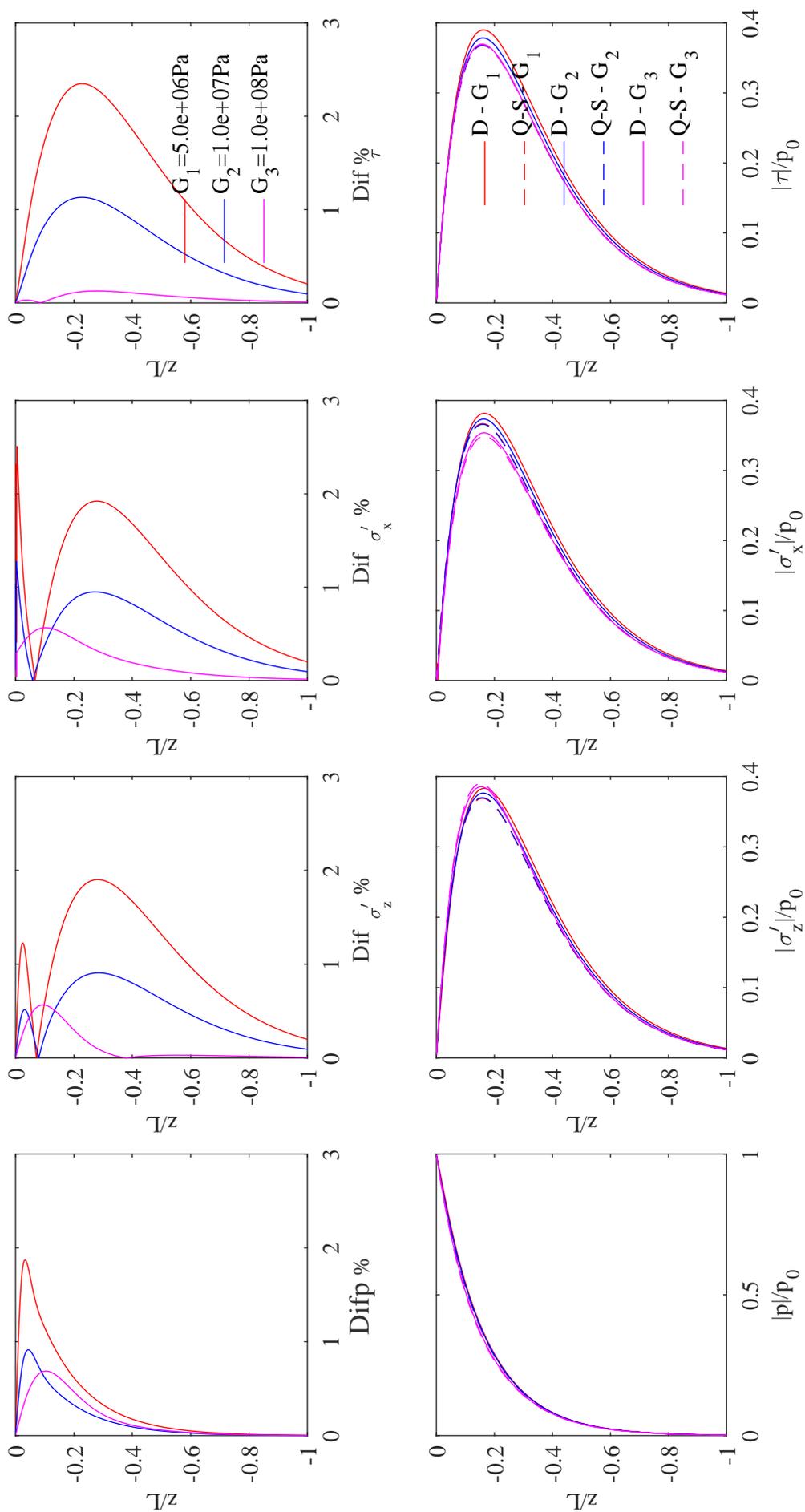


Figura 39 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de G para espessura de solo infinita.

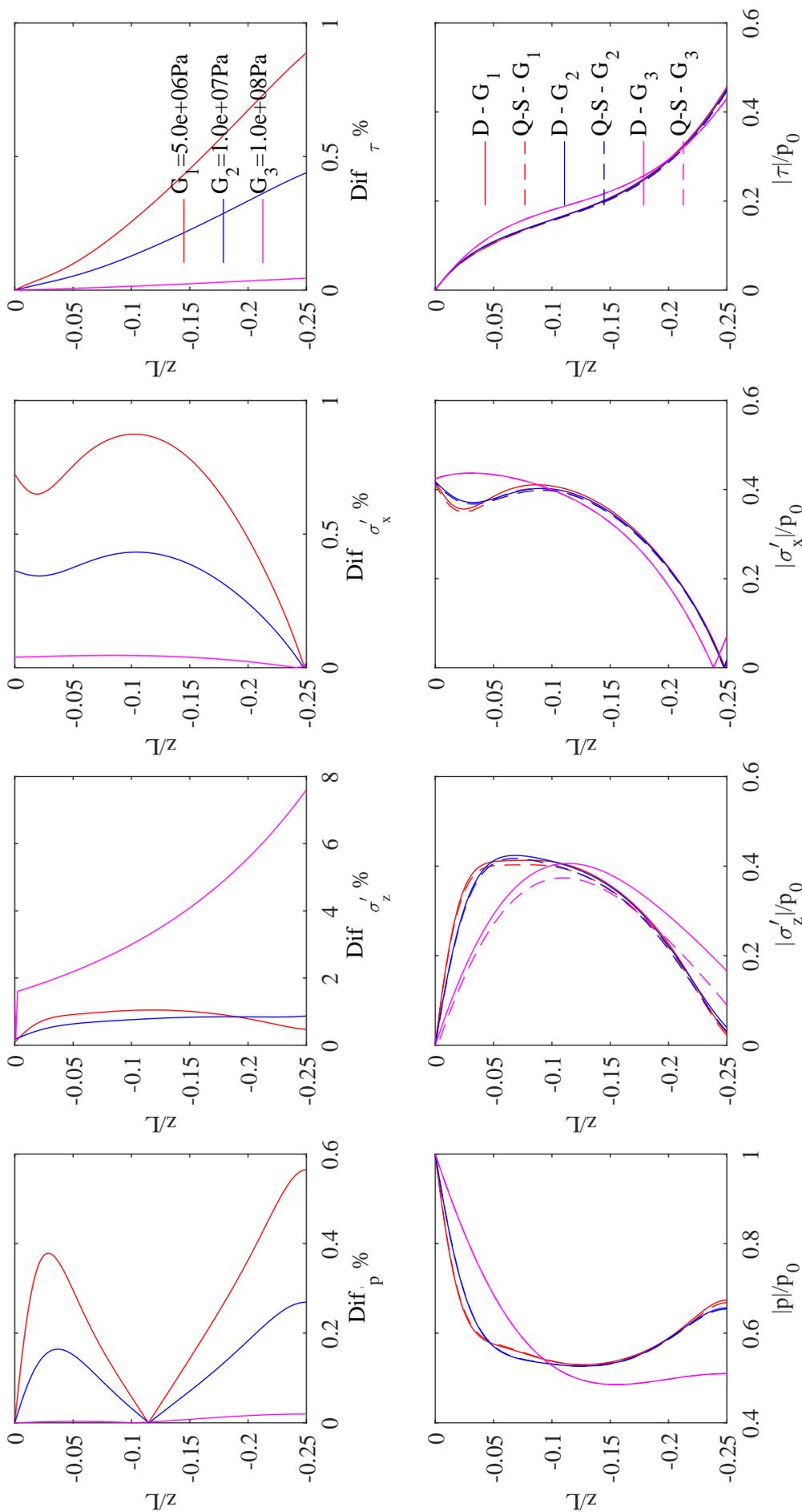


Figura 40 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de G para espessura de solo $d/L = 0,25$.

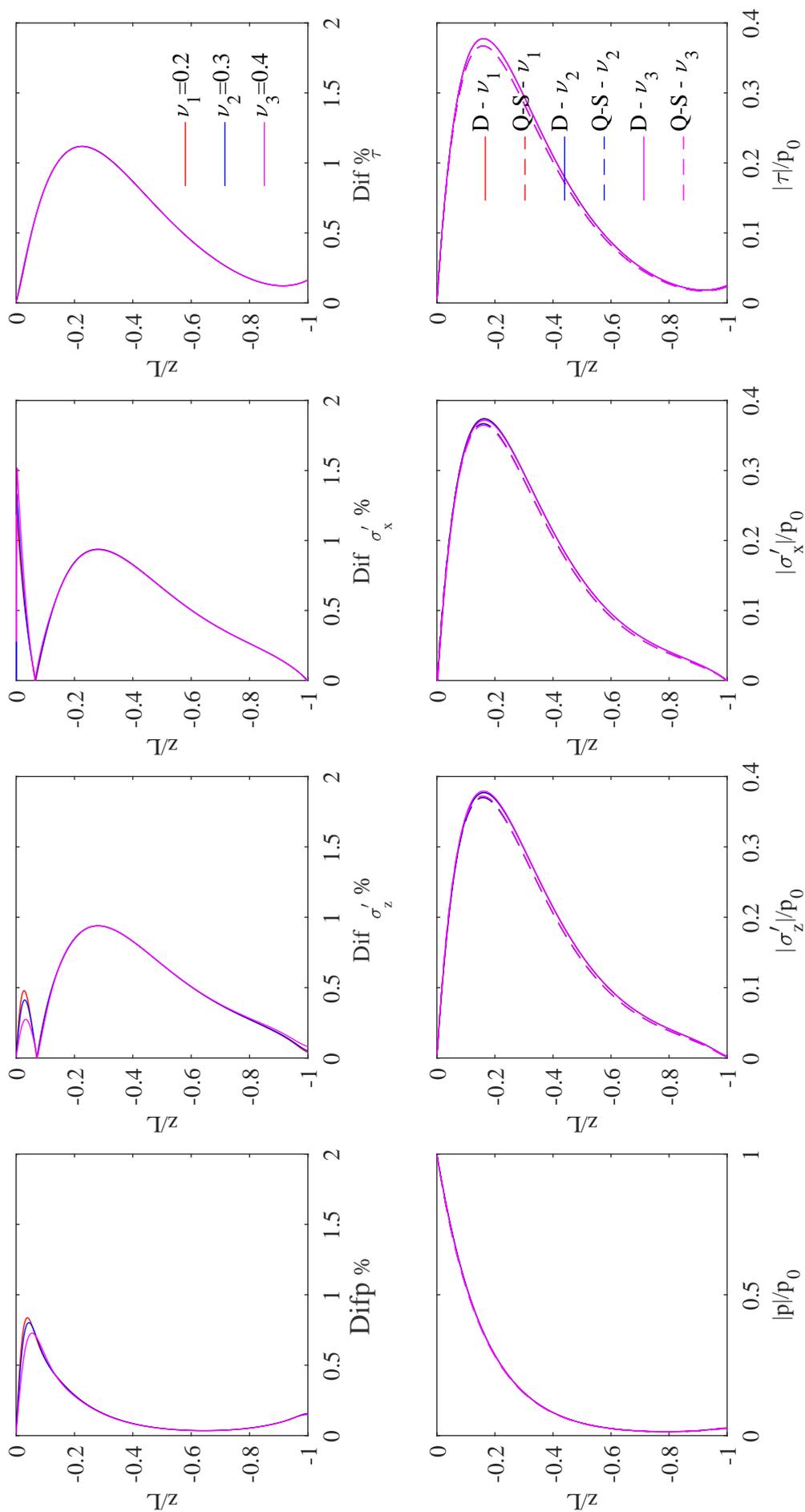


Figura 41 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de ν para espessura de solo infinita.

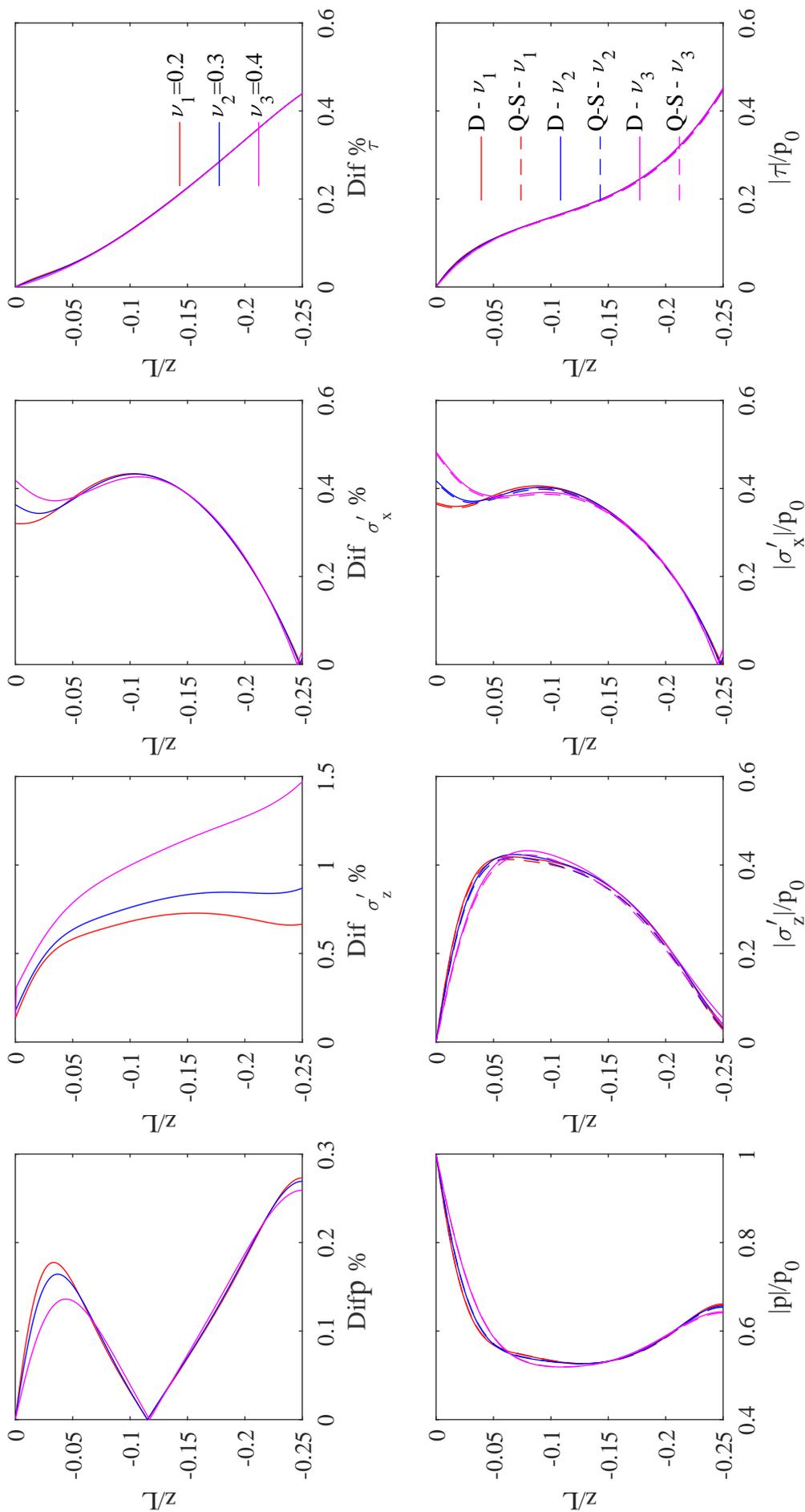


Figura 42 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de ν para espessura de solo $d/L = 0, 25$.

As respostas induzida por ondas considerando a variação da profundidade da lâmina de água h , para solução dinâmica e quase-estática, assim como a diferença relativa entre ambas as soluções, estão apresentadas na Figura (43), para solos com espessura infinita, e na Figura (44), considerando o solo com espessura finita de $d/L_0 = 0,25$, onde L_0 é o comprimento da onda em águas profundas, sendo esta, função somente do período da onda T (ver Equação 3.92). Logo, tem-se o mesmo valor para todas as variações de h . Diferentemente dos demais resultados até aqui apresentados, há considerável distinção nas respostas induzidas quando varia-se a espessura da lâmina de água. Lâminas de água com maiores profundidades induzem até maiores profundidades do solo, excesso de poropressão, assim como tensões efetivas e cisalhantes. Ao analisar as equações analíticas desenvolvidas, a variável espessura da lâmina de água (h) apresenta-se de duas formas: no cálculo da pressão dinâmica da onda (p_0), através da teoria linear de ondas, e indiretamente no cálculo do número de onda (λ), através do comprimento de onda L , dependente da profundidade da lâmina de água h . No primeiro caso, a relação entre a profundidade da lâmina de água e a pressão dinâmica é inversa, ou seja, em águas mais profundas (maiores valores de h) a pressão dinâmica da onda diminui, já no segundo caso, o comprimento da onda (L) é maior quando há lâminas de água mais espessas. Logo, na Figura (43) é compreensível que quanto maior o valor da lâmina de água, isto é, maior o comprimento de onda, a dissipação das respostas induzidas por ondas requerem maiores profundidades de solo para ocorrer, contudo, maiores valores de h geram pressões dinâmicas (p_0) reduzidas, no qual não é possível inferir que, do ponto de vista da estabilidade de massas submarinos, tal condição seja a mais crítica. Quando é analisada a diferença relativa entre as soluções dinâmica e quase-estática, não houve grandes diferenças entre as soluções, apesar de que os maiores picos da divergência entre as soluções foram encontradas em profundidades de lâmina de água elevadas.

Na Figura (44) estão apresentadas as respostas induzidas por ondas diante da variação da espessura da lâmina de água, considerando uma camada de solo limitada em $d/L_0 = 0,25$. Assim como no caso da solução considerando a espessura do solo infinita, houve diferença considerável nas respostas quando variou-se h . Maiores profundidades da água tendem a resultar em picos consideravelmente maiores no excesso de poropressão, tensão efetiva horizontal e tensão cisalhante. Por outro lado, a tensão efetiva vertical não apresentou o maior pico para a maior profundidade da lâmina de água analisada. Quando é analisada a diferença relativa entre as soluções dinâmica e quase-estática, como nos demais casos analisados, a tensão efetiva vertical apresenta maior discrepância, tendo o pico máximo da diferença em torno de 1% para a maior espessura de lâmina de água. De forma geral, as maiores diferenças foram obtidos em lâminas de água mais elevadas, tendo como exceção o excesso de poropressão, que teve o ponto crítico para $h = 30m$.

Finalmente, serão analisadas as respostas induzidas diante da variação do período da onda para as soluções dinâmica e quase-estática, assim como a diferença entre ambas. Na Figura (45) estão apresentadas as respostas considerando a espessura de solo infinita, onde obteve-se

resultados semelhantes aos encontrados na Figura (43), em que os picos das respostas se dão em maiores profundidades do solo, na medida que o período da onda aumenta. Tal fato ocorre pelo motivo que ondas com grandes períodos geram comprimento de onda maiores, necessitando assim de grandes profundidades para que as respostas induzidas por ondas se dissipem. Já a diferença relativa entre as soluções dinâmica e quase-estática apresentou valor máximo de aproximadamente 1,3% para a tensão efetiva vertical, cisalhante e excesso de poropressão, alcançando quase 2% para a tensão efetiva horizontal, todos ocorrendo no maior período dentre os analisados.

Na Figura (46) estão apresentadas as respostas considerando a espessura do solo limitada em $d/L = 0,25$, onde L é o comprimento de onda na profundidade da lâmina de água ao nível 2 (h_2) para cada um dos períodos analisados. São perceptíveis diferenças no excesso de poropressão e na tensão efetiva vertical e, em menor grau, na tensão efetiva horizontal, variando-se o período da onda. Já a tensão cisalhante não apresentou discrepância com a variação do parâmetro analisado. Considerando a diferença relativa, se comparada com a solução para solos com espessura infinita, houve redução para o excesso de poropressão e para as tensões efetivas horizontais e tensão cisalhante, já para a tensão efetiva vertical, a diferença relativa foi um pouco mais elevada, alcançando quase 1%.

De modo geral, considerando a solução para solos com espessura finita, os parâmetros mais importantes na resposta são a espessura da lâmina de água (comprimento da onda) e o coeficiente de permeabilidade e , em menor grau, o módulo de elasticidade transversal e o período da onda, sendo que o coeficiente de Poisson se mostrou menos relevante. Quando se trata de solos com espessura infinita, a espessura da lâmina de água e o período da onda se mostraram mais relevantes. A tensão efetiva vertical foi a resposta induzida que mais apresentou diferença relativa entre as soluções dinâmica e quase-estática, principalmente quando considerados solos com espessura finita. É importante ressaltar que os casos em que houve grandes divergências entre as soluções dinâmica e quase-estática, a solução que despreza os termos inerciais tendem a subestimar as respostas (ver a resposta da tensão efetiva vertical dada pelas Figuras (40) e (45) onde a linha contínua representa a solução dinâmica e alcança maiores valores do que a solução quase-estática, dada pela linha tracejada).

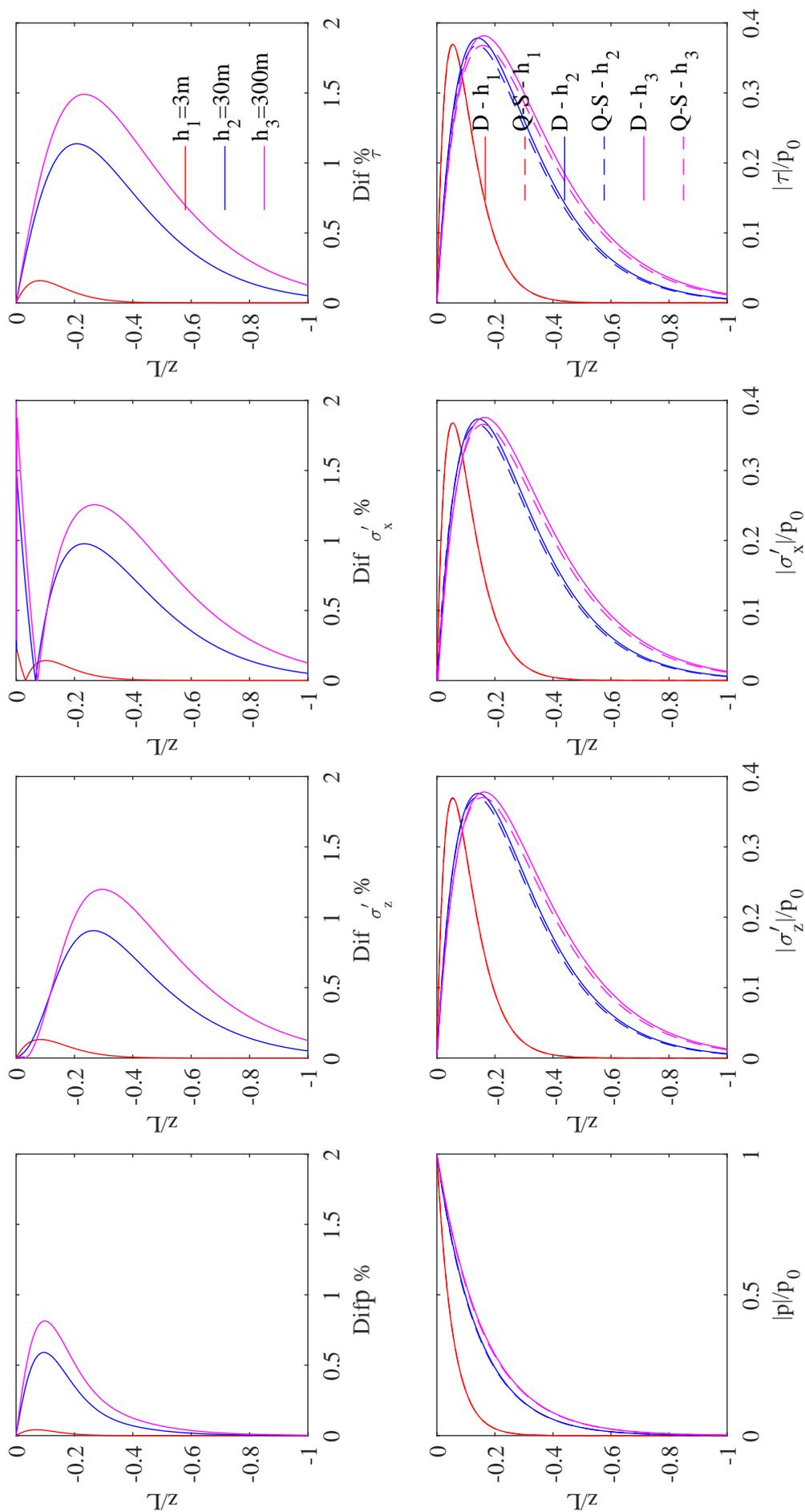


Figura 43 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de h para espessura de solo infinita.

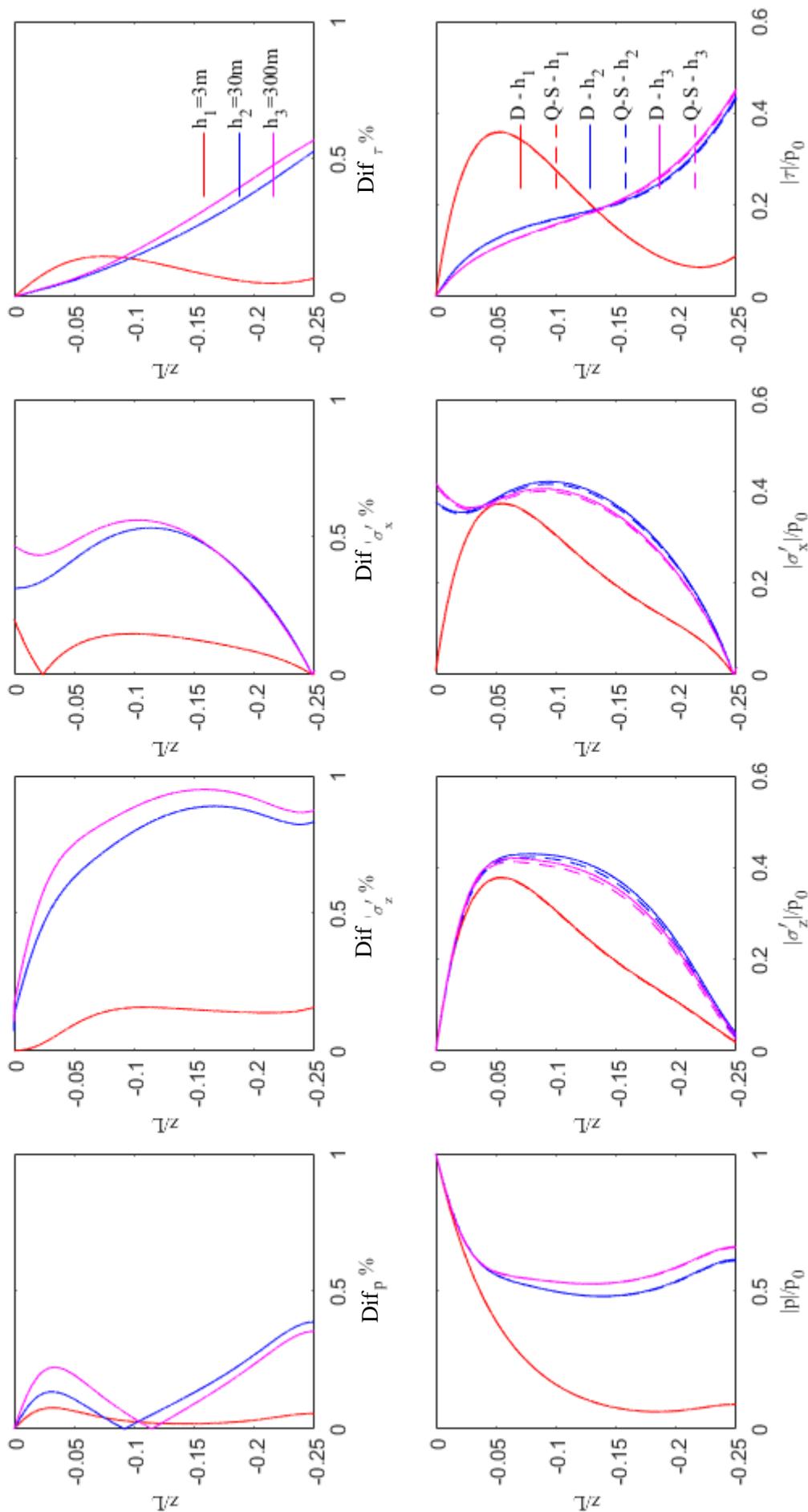


Figura 44 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de h para espessura de solo $d/L = 0,25$.

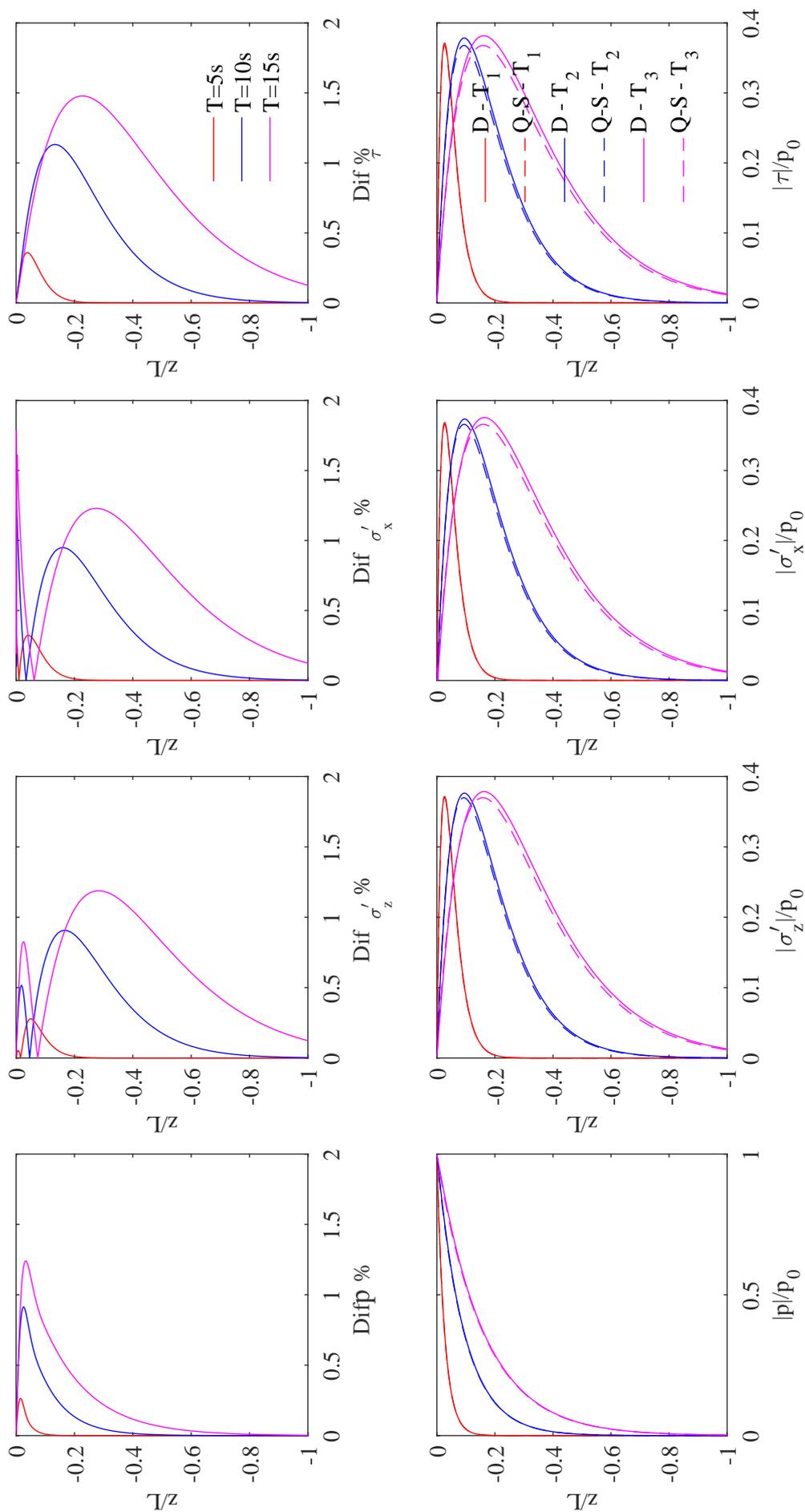


Figura 45 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de T para espessura de solo infinita.

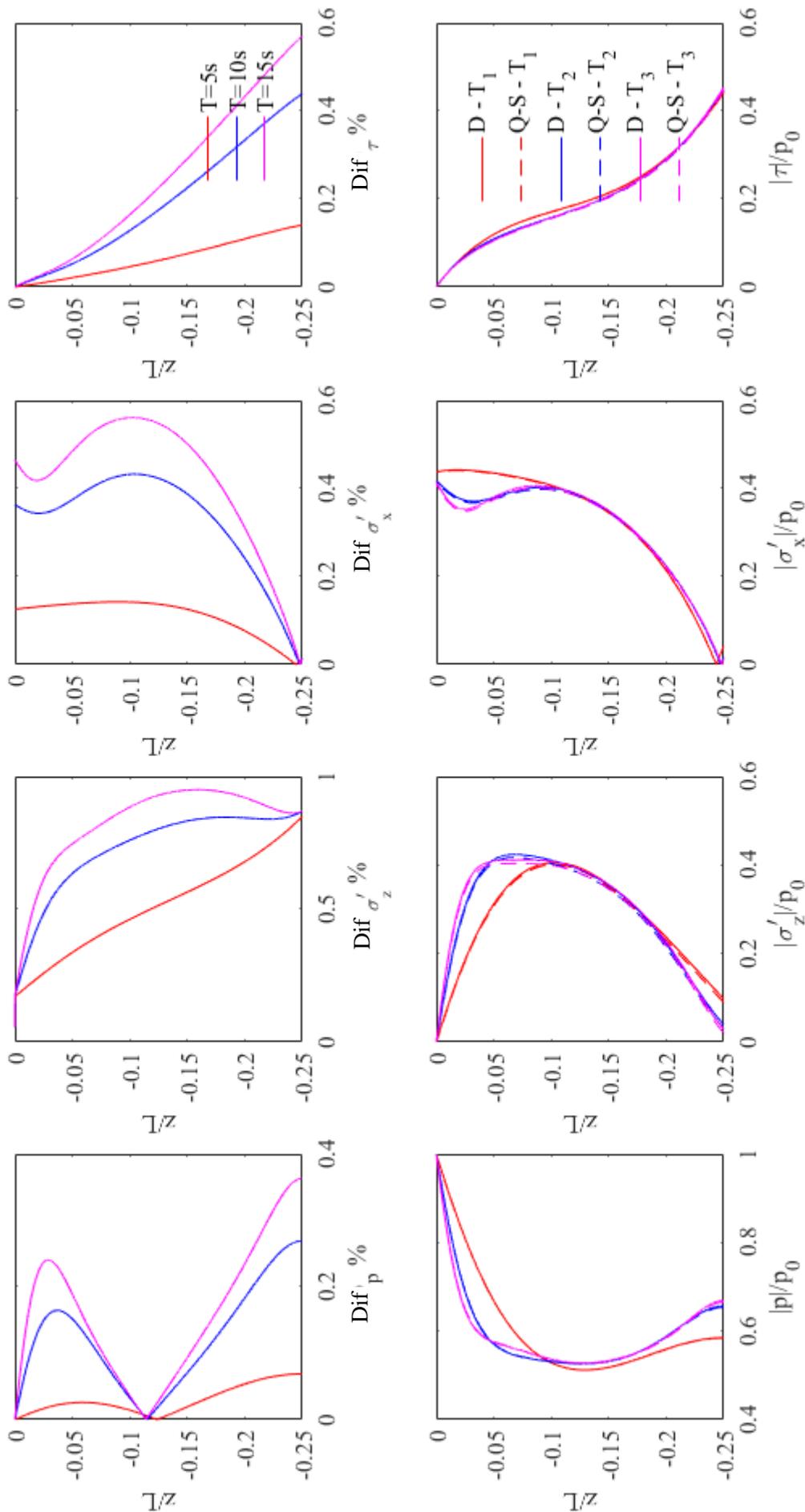


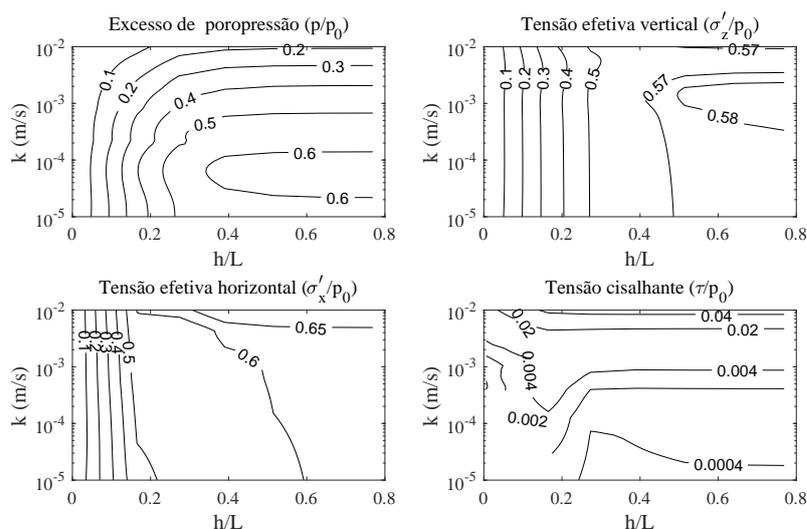
Figura 46 – Comparação das soluções quase-estática e dinâmica considerando a variação de T para espessura de solo $d/L = 0,25$.

6.6 DOMÍNIO DE APLICAÇÃO DAS SOLUÇÕES DINÂMICA E QUASE-ESTÁTICA

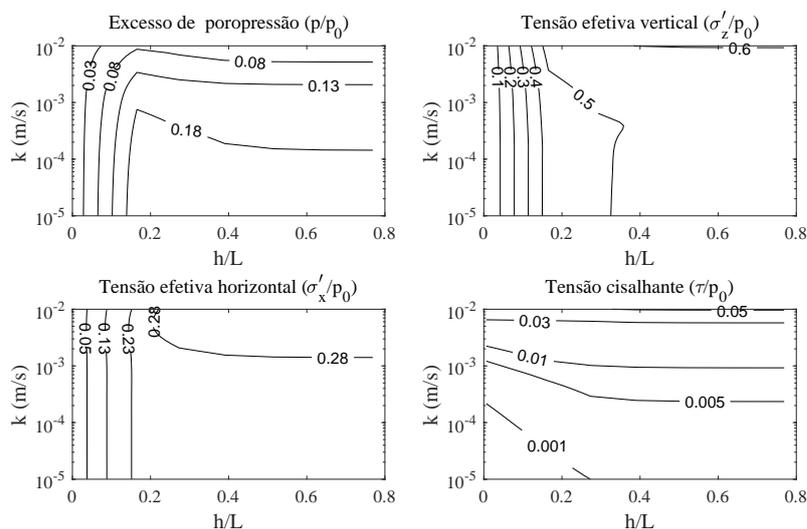
Nesta seção, será estabelecido o domínio de aplicação das duas formulações, objeto do presente estudo. Conforme investigado na seção anterior, o limite de validade se dará em função do coeficiente de permeabilidade do solo k e dos parâmetros que resultaram em maiores variabilidades, como o período da onda T e a profundidade da lâmina de água h (isto é, comprimento da onda L). Outro parâmetro importante na solução é o módulo de cisalhamento do solo, onde sua importância para a determinação da solução a ser adotada já foi discutida anteriormente. A diferença percentual será calculada através da Equação (6.38), onde, ao longo de toda a profundidade analisada, será tomado o maior valor. Sendo assim, nas Figuras (47 - 50) o eixo das abscissas representa a variação da profundidade da lâmina de água (h/L), e no eixo das ordenadas está o coeficiente de permeabilidade do solo (k). Os demais parâmetros necessários no modelo são tidos como constantes e são a porosidade ($\phi = 0,4$), o coeficiente de Poisson ($\nu = 1/3$), o módulo cisalhante ($G = 5 \cdot 10^6 Pa$), o módulo de compressibilidade do fluido ($K_f = 2 \cdot 10^9 Pa$) e o peso específico do fluido e do esqueleto ($\rho_f = 1000 kg/m^3$ e $\rho_s = 2600 kg/m^3$), respectivamente.

Os períodos de onda analisados foram $T = 5, 10, 15$ e $20s$, sendo adotada a solução considerando o solo com espessura infinita e finita com $d = 0,25L_0$, onde L_0 corresponde ao comprimento de onda em águas profundas, determinada através da Equação (3.92). As respostas induzidas por ondas estudadas aqui serão em termos de excesso de poropressão, tensões efetivas vertical e horizontal e tensão cisalhante, todas adimensionalizadas por p_0 . Previamente, é necessário estabelecer que o limite de aplicação dos modelos teóricos deve respeitar o limite de aplicação da Teoria Linear de Ondas, já que esta é base da presente solução. Sendo assim, a Teoria Linear de Ondas tem boa aplicação para um pequeno intervalo no regime de propagação de águas rasas, onde esta compreende a razão $h/L \leq 0,05$ e $H/T^2 \leq 0,003$, já em águas intermediárias e águas profundas, sua aplicação deve ser respeitada somente através da razão H/T^2 (ver região sombreada da Figura 25).

Na Figura (47), está apresentada a diferença relativa entre as soluções dinâmica e quase-estática variando-se o coeficiente de permeabilidade e a profundidade da lâmina de água para um período $T = 5s$. Considerando a diferença relativa das respostas induzidas por ondas para solução com espessura do solo infinita (Figura 47a), a diferença relativa não apresentou relevância para os intervalos analisados. Analisado os resultados obtidos pela solução para solos com espessura finita (Figura 47b), e neste caso em específico $d = 0,25L_0$, da mesma forma que o caso anterior, não houve divergência considerável entre as soluções para o período de onda $T = 5s$. Apesar da diferença relativa ser pequena em todas as respostas induzidas por ondas, é percebido que existe uma tendência de crescimento com o aumento da profundidade da lâmina de água (razão h/L), indicando que a diferença entre as duas abordagens aumente em profundidades da água elevada.



(a)

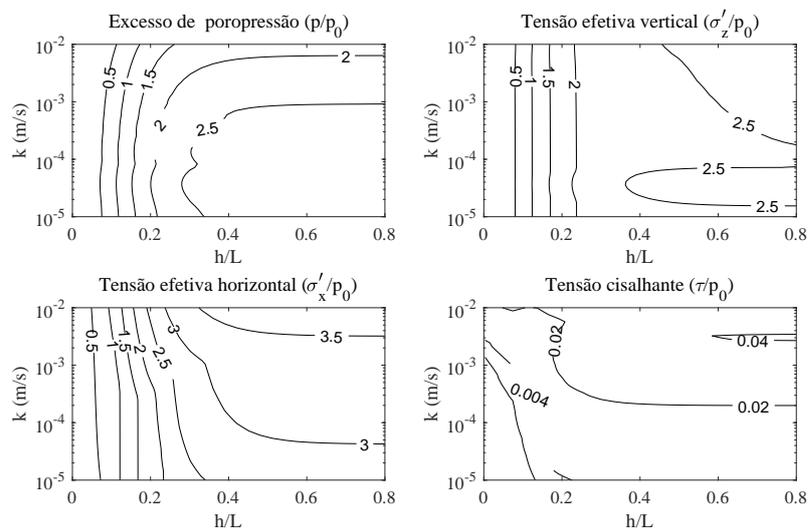


(b)

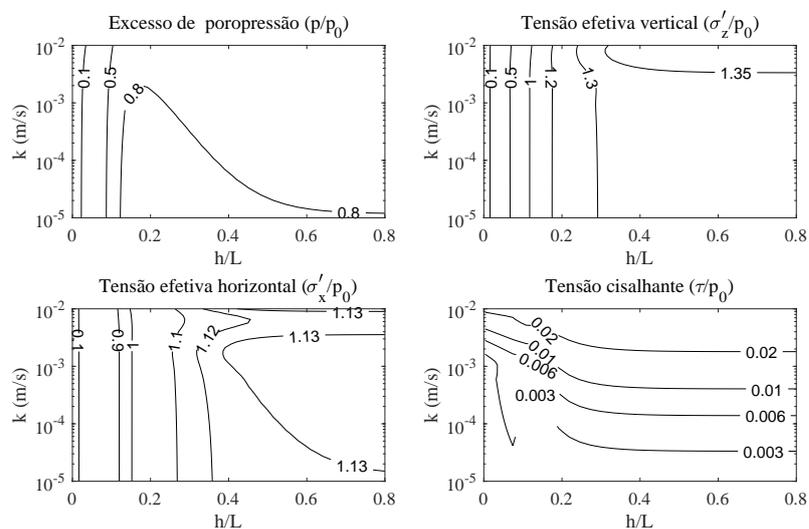
Figura 47 – Diferença relativa em % das respostas induzida entre as soluções quase-estática e dinâmica para o período de onda $T = 5s$. (a) - Solo com espessura infinita, (b) - Solo com espessura finita $d = 0,25L_0$.

Considerando o período de onda $T = 10s$, a diferença relativa entre as soluções dinâmica e quase-estática está apresentada na Figura (48). A diferença relativa do excesso de poropressão e tensões efetivas entre as soluções para o período $T = 10s$, considerando a espessura do solo infinita (Figura 48a), indicou aumento em relação ao período de onda menor analisado anteriormente. Porém, para o intervalo do coeficiente de permeabilidade do solo e da profundidade da lâmina de água analisados, a diferença máxima foi de aproximadamente 3,5% para a tensão efetiva horizontal e 2,5% para o excesso de poropressão, ambos ocorrendo em profundidades da lâmina de água mais elevadas. Da mesma forma, aumentando o período da onda para solos com espessura delimitada em $d = 0,25L_0$ (Figura 48b), houve crescimento da diferença relativa

entre as soluções para as tensões efetivas e excesso de poropressão, tendo como exceção, a tensão cisalhante que apresentou discreta queda. Até o período de onda analisado ($T = 10s$), as diferenças entre as soluções dinâmicas e quase-estáticas não se mostraram relevantes, já que a discrepância máxima de todas as respostas induzidas entre as soluções foi de 3,5%, indicando que este intervalo de aplicação é seguro.



(a)

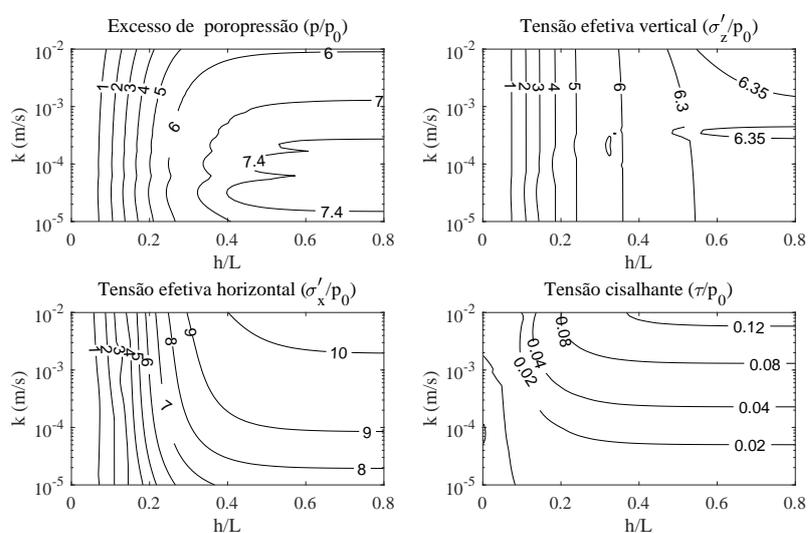


(b)

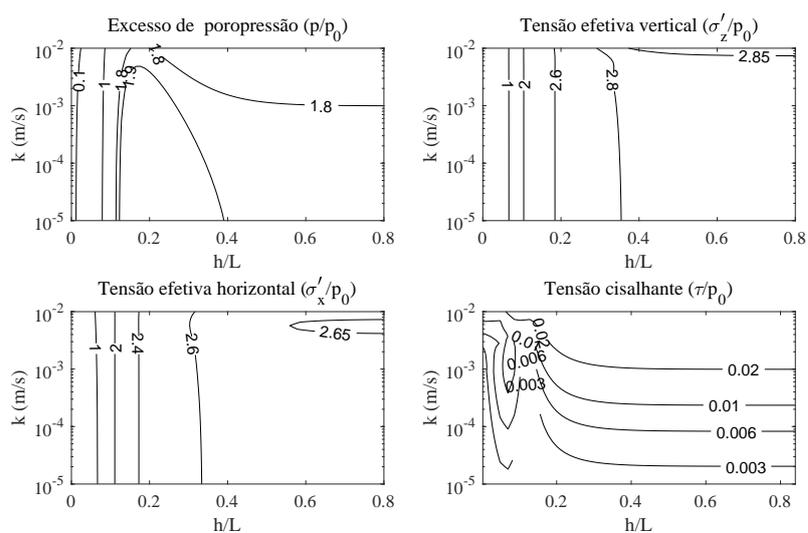
Figura 48 – Diferença relativa em % das respostas induzida entre as soluções quase-estáticas e dinâmicas para o período de onda $T = 10s$. (a) - Solo com espessura infinita, (b) - Solo com espessura finita $d = 0,25L_0$.

Levando em conta o período de onda $T = 15s$, as soluções dinâmicas e quase-estáticas para o excesso de poropressão e tensão efetiva vertical considerando a espessura de solo infinita e finita com $d = 0,25L_0$, estão apresentadas na Figura (49). Aumentando o período da onda em relação

ao resultados apresentados anteriormente, a diferença relativa para as respostas, considerando a espessura de solo infinito (Figura 49a), aumentou consideravelmente, alcançando 7% e 6,35% para o excesso de poropressão e tensão efetiva vertical e 10% para a tensão efetiva horizontal. Considerando o conjunto de parâmetros adotados limitando a diferença em no máximo 5% para espessura de solo maior do que L_0 (intervalo de aplicação para solos com espessura infinita) é possível a aplicação da solução quase-estática para profundidades inferiores à razão $h/L < 0,2$. Já considerando a espessura de solo limitada, os resultados apresentados pela Figura (49b) indicam que para o período analisado e espessura da camada de solo menor do que $d < 0,25L_0$, a solução quase-estática é suficiente, já que a diferença é menor do que 3%.



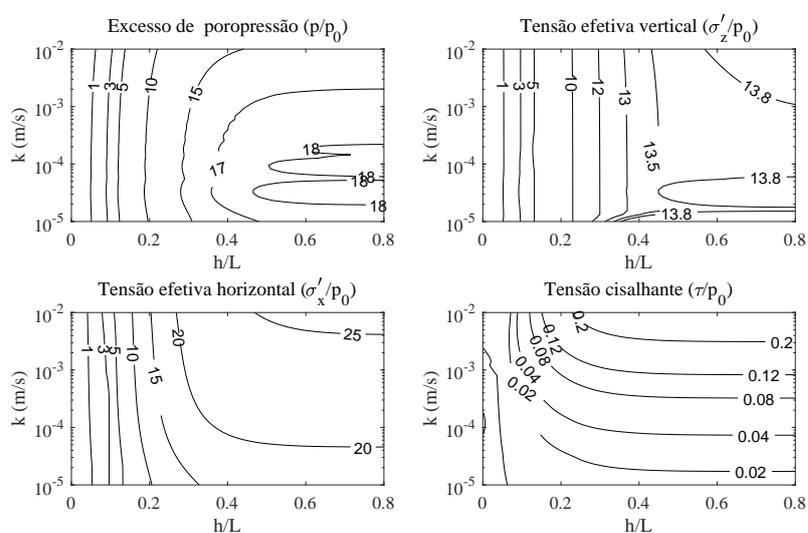
(a)



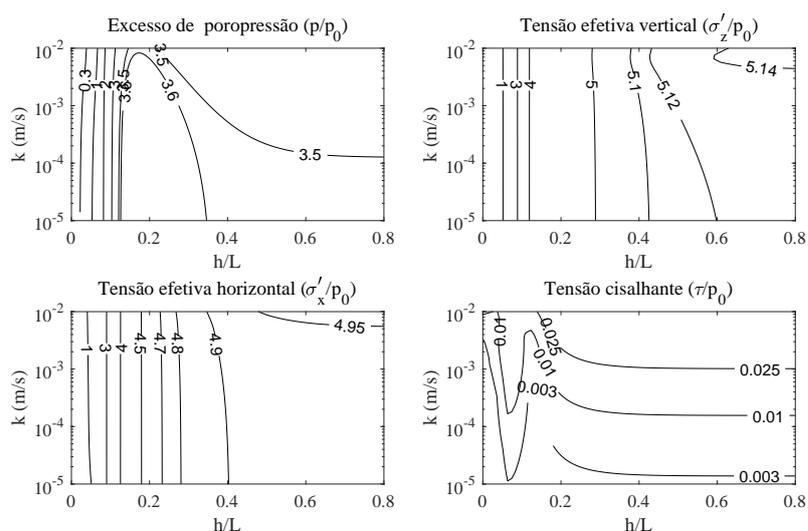
(b)

Figura 49 – Diferença relativa em % das respostas induzida entre as soluções quase-estática e dinâmica para o período de onda $T = 15s$. (a) - Solo com espessura infinita, (b) - Solo com espessura finita $d = 0,25L_0$.

Finalmente, considerando o período da onda $T = 20s$, a diferença entre as soluções para as respostas induzidas por ondas, considerando a espessura de solo infinita e finita, estão apresentadas na Figura (50). Considerando a espessura do solo infinita (Figura 50a), o erro cometido ao adotar a solução quase-estática é bastante elevado, sendo necessário, em períodos de onda maiores do que $T > 10s$, adotar a solução dinâmica. Já quando a espessura do solo é limitada (Figura 50b), a diferença entre as soluções para a tensão efetiva vertical excede 5% a partir da razão da profundidade da lâmina de água $h > 3L$, para as demais respostas, a diferença é menor. Para a tensão cisalhante, considerando o conjunto de parâmetros analisados, não há diferença entre as soluções.



(a)



(b)

Figura 50 – Diferença relativa em % das respostas induzida entre as soluções quase-estática e dinâmica para o período de onda $T = 20s$. (a) - Solo com espessura infinita, (b) - Solo com espessura finita $d = 0,25L_0$.

De forma geral, fica evidente através dos resultados apresentados, que a inclusão dos termos inerciais referentes ao fluido e ao esqueleto não devem ser desprezados em todas as situações de carregamento da onda e dos parâmetros do solo.

Mesmo nos casos em que a diferença entre as soluções possa ser desprezada, é notado que para as tensões efetivas e cisalhantes, a diferença entre as soluções tende a aumentar para solos mais permeáveis. Tal comportamento se dá pelo motivo de que à medida que a permeabilidade do solos aumenta, mais escoamento ocorre em solo mais profundos. Em meios altamente permeáveis, a velocidade do fluido tende a ser maior (ULKER et al., 2009).

Para períodos de onda menores do que $T < 10s$, a distinção entre a solução dinâmica e quase-estática é bastante reduzida, tendo portanto, a solução quase estática suficiente para a representação das respostas. Isso ocorre pelo fato de que períodos mais curtos resultam em celeridade de onda igualmente menores, fazendo com que os efeitos inerciais não sejam relevantes nestes casos. Já quando é considerado períodos de onda maiores do que $T > 10s$, é necessário se atentar à espessura da camada de solo: caso a espessura da camada de solo for inferior a razão $\frac{d}{L_0} < 0,25$, a solução quase-estática para solos com espessura finita é satisfatório. Já casos em que a espessura da camada de solo for superior a razão $\frac{d}{L_0} > 0,25$, a solução para solos com espessura finita incluída dos termos inerciais é requerida. Se a razão $\frac{d}{L_0} > 1$, e o período analisado for maior do que $T > 10s$, a solução dinâmica é indicada. Observa-se que para valores de $T \gg 1$, ou seja, $T \rightarrow \infty$, espera-se que as soluções quase-estática e dinâmica voltam a ser próximas.

É possível notar que a diferença relativa aumenta em casos de lâmina de água maiores, isto é, em casos de comprimento de onda maiores. Portanto, quanto maior a celeridade da onda ($C = L/T$), maior será o erro ao não incluir os efeitos inerciais na solução. Por outro lado, a pressão dinâmica gerada pela onda em espessura de lâmina de água muito elevada, tendem a gerar excesso de propressão e tensões efetivas bastante reduzidas no solo, não impactando diretamente na estabilidade de massas submarinas, mesmo que a diferenças entre as soluções sejam elevados.

7 ANÁLISE SIMPLIFICADA DA ESTABILIDADE DE MASSAS SUB-MARINAS

A avaliação da estabilidade do fundo do mar é uma parte importante do projeto de fundação para várias instalações marítimas, já que algumas estruturas falharam devido à instabilidade do fundo do mar (LUNDGREN H.; ROMHILD, 1989; SILVESTER; HSU, 1993; SMITH; GORDON, 1983). De modo geral, o excesso de poropressão e a diminuição das tensões efetivas dentro dos sedimentos pode levar à instabilidade do fundo do mar devido a falha de cisalhamento ou liquefação (RAHMAN, 1991). A primeira ocorre quando há tensões cisalhantes significativas o suficiente para superar a resistência ao cisalhamento em algum ponto do sedimento, ocorrendo então a instabilidade do fundo do mar. Já o segundo mecanismo ocorre quando o excesso de poropressão é maior ou igual a tensão total do solo, e portanto a tensão efetiva se anula. A liquefação do sedimento pode desencadear o transporte de sedimento, causando erosão do fundo marinho e por consequência, podendo ocorrer a desproteção de fundações que estejam sob o fundo marinho. A liquefação pode ainda ocasionar a perda de capacidade de carga, já que a tensão efetiva é anulada.

Uma análise racional da estabilidade de maciços submarinhos deve incorporar os efeitos irreversíveis da degradação da resistência ao cisalhamento induzido pelo carregamento cíclico das ondas marinhas (DORMIEUX, 1989). Neste contexto, Dormieux e Coussy (1991) e Madalozzo (2016) propuseram abordagens para avaliar a estabilidade baseadas nos teoremas estático e cinemático da teoria de Análise Limite (SALENÇON, 1990).

O objetivo deste capítulo é formular uma abordagem simplificada para o problema de estabilidade do maciço submarinho, considerando as distribuições de tensões e poropressão calculadas analiticamente nos Capítulos (5) e (6). Do ponto de vista teórico, estas soluções desenvolvidas em poroelasticidade nas situações quase-estática e dinâmica serão empregadas para formular condições suficientes para estabilidade da estrutura porosa sujeita ao carregamento da onda. No contexto da Análise Limite, a abordagem proposta se interpreta como uma abordagem estática.

7.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ESTABILIDADE

7.1.1 Modo do carregamento

O primeiro ingrediente para analisar a estabilidade do maciço submarinho é a definição do modo de carregamento do sistema material. Desconsiderando os efeitos das forças de gravidade, os capítulos precedentes focaram a análise na determinação do estado poromecânico induzido pelo movimento cíclico das ondas marinhas. No entanto, a consideração das forças de gravidade como componentes do modo de carregamento é fundamental para a avaliação relevante das condições

de estabilidade do leito marinho. Assim, a questão de estabilidade do leito marinho em qualquer instante t , fixado dentro do intervalo de estudo, pode ser abordada com base no seguinte modo de carregamento:

- Forças de gravidade $\gamma \mathbf{e}_z$, onde γ é referido ao peso específico do meio poroso;
- Pressão hidrostática induzida pelas forças $\gamma_f \mathbf{e}_z$, onde γ_f é o peso específico do fluido (água) saturando o meio poroso;
- Sobrepressão devido ao movimento das ondas $p_{onda} = p_0 \sin(\lambda x - \omega t)$;

O problema analisado na hipótese das deformações planas, definido pela geometria do sistema material e as condições de carregamento, é esquematizado pela Figura (51).

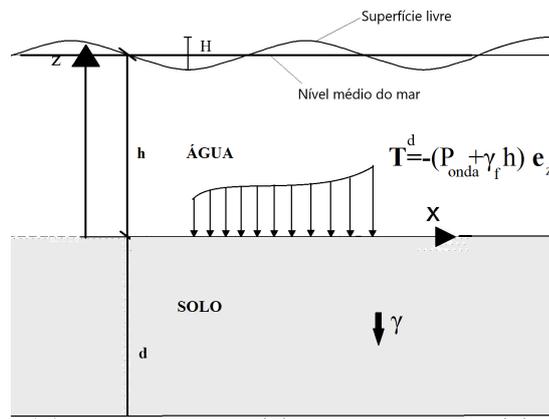


Figura 51 – Geometria do modelo e condições de carregamento.

Denotando por $\underline{\underline{\sigma}}$ e \bar{p} as distribuições de tensão e poropressão estaticamente admissíveis com o carregamento, as condições de contorno do sistema material em $d \leq z \leq 0$ se escrevem:

- em $z = 0$

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{T}^d \\ \bar{p} = p^d \end{cases} \quad (7.1)$$

onde $\mathbf{T}^d = -(p_{onda} + \gamma_f h) \mathbf{e}_z$, e $p^d = p_{onda} + \gamma_f h = p_0 \sin(\lambda x - \omega t) + \gamma_f h$.

- em $z = -d$

$$\left\{ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\gamma_f \right. \quad (7.2)$$

vale ressaltar ainda, que esta condição utiliza a hipótese de aceleração vertical nula para as partículas de fluido em contato com o substrato rígido. Esta condição é substituída pela relação $p - \gamma_f(d + h) \rightarrow 0$ no caso de $h \rightarrow \infty$ que expressa a poropressão tendendo à pressão hidrostática do fluido.

7.1.2 Critério de resistência

Um aspecto importante do problema da análise de estabilidade refere-se à definição das capacidades de resistência do material poroso. Para materiais granulares, estas são classicamente descritas pelo critério de Mohr-Coulomb sem coesão. Para um estado de tensão $\underline{\underline{\sigma}}$ e de poropressão \bar{p} , este critério introduz uma limitação sobre a tensão efetiva $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + \bar{p}\underline{\underline{1}}$, que se escreve em deformações planas como:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + \bar{p}\underline{\underline{1}}) = (\bar{\sigma}'_1 - \bar{\sigma}'_3) + (\bar{\sigma}'_1 + \bar{\sigma}'_3) \text{sen}(\psi_f) \quad (7.3)$$

onde $\bar{\sigma}'_1$ e $\bar{\sigma}'_3$ são respectivamente as tensões efetivas principais maior e menor, definidas por:

$$\bar{\sigma}'_1 = \frac{\bar{\sigma}'_x + \bar{\sigma}'_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_z}{2}\right)^2 + \bar{\tau}_{xz}^2} \quad (7.4)$$

$$\bar{\sigma}'_3 = \frac{\bar{\sigma}'_x + \bar{\sigma}'_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}'_x - \bar{\sigma}'_z}{2}\right)^2 + \bar{\tau}_{xz}^2} \quad (7.5)$$

O parâmetro de resistência ψ_f é o ângulo de atrito do material. Os valores de ψ_f variam de acordo com o tipo de solo granular: por exemplo, entre $30 - 35^\circ$ para areias e $35 - 40^\circ$ para pedregulhos (JENG, 2012).

7.1.3 Definição do problema de estabilidade

No sentido da teoria da Análise Limite (SALENÇON, 1990), a estabilidade do sistema material definida pelo leito marinho requer a compatibilidade entre as condições de equilíbrio da estrutura e as capacidades de resistência do material poroso constitutivo. Matematicamente, esta compatibilidade se traduz pela existência de um campo de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ e um campo de poropressões \bar{p} , estaticamente admissíveis com o carregamento $\mathbf{Q} = (\gamma, \gamma_f, p_{onda})$ e obedecendo o critério de resistência em todos os pontos:

$$\text{Estabilidade sob carregamento } \mathbf{Q} \Leftrightarrow \exists(\underline{\underline{\sigma}}, \bar{p}) \text{ tais que } \begin{cases} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} - \gamma \mathbf{e}_z = \mathbf{a} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_z = -(p_{onda} + \gamma_f h) \mathbf{e}_z \text{ em } z = 0 \\ \bar{p} = p_{onda} + \gamma h \text{ em } z = 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\gamma_f \text{ em } z = -d \\ f(\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + \bar{p}\underline{\underline{1}}) \leq 0 \forall \mathbf{x} \end{cases} \quad (7.6)$$

onde $\mathbf{a} = \rho_s(1 - \varphi)\boldsymbol{\gamma}^s + \rho_f\varphi\boldsymbol{\gamma}^f$ refere-se ao termo da aceleração já definido em (4.22).

A construção do campo $(\underline{\underline{\sigma}}, \bar{p})$ compatível com as equações de equilíbrio e as condições de resistência permite determinar carregamentos suportáveis pelo sistema material.

7.1.4 Abordagem estática

Uma condição suficiente para estabilidade do leito marinho é vinculada à existência de um campo de tensão $\underline{\underline{\sigma}}$ e de poropressão \bar{p} em equilíbrio com o carregamento $\underline{\underline{Q}} = (\gamma, \gamma_f, p_{onda})$ e que sejam compatíveis com o critério de Mohr-Coulomb em tensão efetiva, definido em (7.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} - \gamma \mathbf{e}_z = \mathbf{a} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_z = -(p_0 \text{sen}(\lambda x - \omega t) + \gamma_f h) \mathbf{e}_z \text{ em } z = 0 \\ \bar{p} = p_{onda} + \gamma h \text{ em } z = 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\gamma_f \text{ em } z = -d \\ f(\underline{\underline{\sigma}}') = (\bar{\sigma}'_1 - \bar{\sigma}'_3) + (\bar{\sigma}'_1 + \bar{\sigma}'_3) \text{sen}(\psi_f) \leq 0 \forall (x, z) \end{array} \right. \quad (7.7)$$

A ideia para formular campos de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ e de poropressão \bar{p} consiste em tirar proveito das distribuições de $\underline{\underline{\sigma}}$ e p , determinadas nos Capítulos (5) e (6) no contexto da poroelasticidade, induzidas pela sobrepressão da onda $p_{onda}(x, t)$.

Assim, pode-se escrever:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^\gamma + \underline{\underline{\sigma}}^{\gamma_f} + \underline{\underline{\sigma}} \quad (7.8)$$

onde:

- O campo $\underline{\underline{\sigma}}^\gamma$ está em equilíbrio com o carregamento geostático $\underline{\underline{Q}} = (\gamma, \gamma_f = 0, p_{onda} = 0)$;
- O campo $\underline{\underline{\sigma}}^{\gamma_f} = -\gamma_f h \mathbf{1}$ equilibra a pressão hidrostática aplicada sobre a superfície superior do leito marinho: $\underline{\underline{Q}} = (\gamma, \gamma_f \neq 0, p_{onda} = 0)$;
- O campo $\underline{\underline{\sigma}}$ determinado em poroelasticidade induzido pela sobrepressão p_{onda} , ou seja, equilibrando $\underline{\underline{Q}} = (\gamma = 0, \gamma_f = 0, p_{onda})$;

assim, o campo $\underline{\underline{\sigma}}$ definido em (7.8) satisfaz as condições de admissibilidade em tensão para qualquer escolha de $\underline{\underline{\sigma}}^\gamma$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} - \gamma \mathbf{e}_z = \mathbf{a} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_z = -(p_{onda} + \gamma h) \text{ em } z = 0 \end{array} \right. \quad (7.9)$$

Similarmente, uma distribuição \bar{p} da poropressão pode ser introduzida com:

$$\bar{p} = p^{\gamma_f} + p \quad (7.10)$$

no qual $p^{\gamma_f} = \gamma_f h - \gamma_f z$ representa a distribuição hidrostática na camada do solo e p é a poropressão resultante no meio poroso da aplicação de sobrepressão p_{onda} . As expressões de p foram determinadas nos Capítulos (5) e (6) no contexto da poroelasticidade infinitesimal.

A distribuição \bar{p} definida por (7.10) é compatível com as condições de admissibilidade em poropressão:

$$\begin{cases} \bar{p} = p_{onda} + \gamma_f h \text{ em } z = 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\gamma_f \text{ em } z = -d \end{cases} \quad (7.11)$$

Neste estágio do raciocínio estático da Análise Limite, já foram construídos campos de tensão $\underline{\underline{\sigma}}$ e poropressão \bar{p} em equilíbrio com o carregamento $\underline{\underline{Q}} = (\gamma, \gamma_f, p_{onda})$. O último passo do raciocínio é verificar se a distribuição de tensão efetiva $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + \bar{p}$ é compatível com o critério de resistência $f(\underline{\underline{\sigma}}') \leq 0$ do material. Se esta compatibilidade for verificada, pode-se afirmar em virtude do teorema do limite inferior, que o carregamento equilibrado seja suportável pela estrutura.

Como observado acima, a escolha da distribuição de tensão $\underline{\underline{\sigma}}^\gamma$ equilibrando as forças de gravidade deve ser também prescrita. Evidentemente, existe uma infinidade de campos de $\underline{\underline{\sigma}}^\gamma$ estaticamente admissíveis com as forças de gravidade $\underline{\underline{Q}} = (\gamma, \gamma_f = 0, p_{onda} = 0)$.

Antes de adotar uma escolha específica para a distribuição de tensão $\underline{\underline{\sigma}}^\gamma$, tem-se que precisar a forma geral da tensão efetiva $\underline{\underline{\sigma}}'$ associada às decomposições (7.6) e (7.10), controlando a condição de resistência do material poroso:

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + \bar{p}\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{\sigma}}^\gamma - \gamma_f z \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\sigma}}' \quad (7.12)$$

Nesta expressão, $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + \bar{p}\underline{\underline{1}}$ é o acréscimo de tensão efetiva induzido no solo pelo movimento da onda e determinado nos Capítulos (5) e (6).

Para desenvolver a abordagem estática da estabilidade do leito marinho, adota-se a distribuição particular:

$$\underline{\underline{\sigma}}^\gamma = \gamma_f z \underline{\underline{1}} + (\gamma - \gamma_f) z \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z + z k_0 (\gamma - \gamma_f) (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z) \quad (7.13)$$

classicamente considerado para modelar o campo de tensão geostático prevalecendo num maciço homogêneo. O parâmetro k_0 , definido como a razão entre as tensões efetivas horizontal e vertical, é o coeficiente de empuxo em repouso do material. O valor de k_0 depende da história geológica do material, sendo $k_0 \simeq 1 - \text{sen}(\psi_f)$ uma estimativa usualmente adotada nas análises geotécnicas (SCOTT, 1963).

A tensão efetiva (7.12) associada à expressão (7.13) se escreve:

$$\underline{\underline{\sigma}}' = (\gamma - \gamma_f) z \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z + z k_0 (\gamma - \gamma_f) (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z) + \underline{\underline{\sigma}}' \quad (7.14)$$

As componentes horizontal e vertical do campo de tensão efetiva são:

$$\bar{\sigma}'_H = \bar{\sigma}'_x = (\gamma - \gamma_f) k_0 z + \sigma'_x \quad (7.15a)$$

$$\bar{\sigma}'_V = \bar{\sigma}'_z = (\gamma - \gamma_f)z + \sigma'_z \quad (7.15b)$$

enquanto a tensão cisalhante $\bar{\tau}_{xz}$ coincide com o incremento de tensão induzido pelo movimento de onda τ_{xz} , determinada nos Capítulos (5) e (6):

$$\bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz} \quad (7.16)$$

Na Figura (52) está apresentado o esquema representativo das tensões que se desenvolvem ao longo da coluna de solo. A Equação (7.15) representa a soma da tensão efetiva inicial e do acréscimo de tensão gerado pela onda, onde as duas parcelas estão representadas na figura.

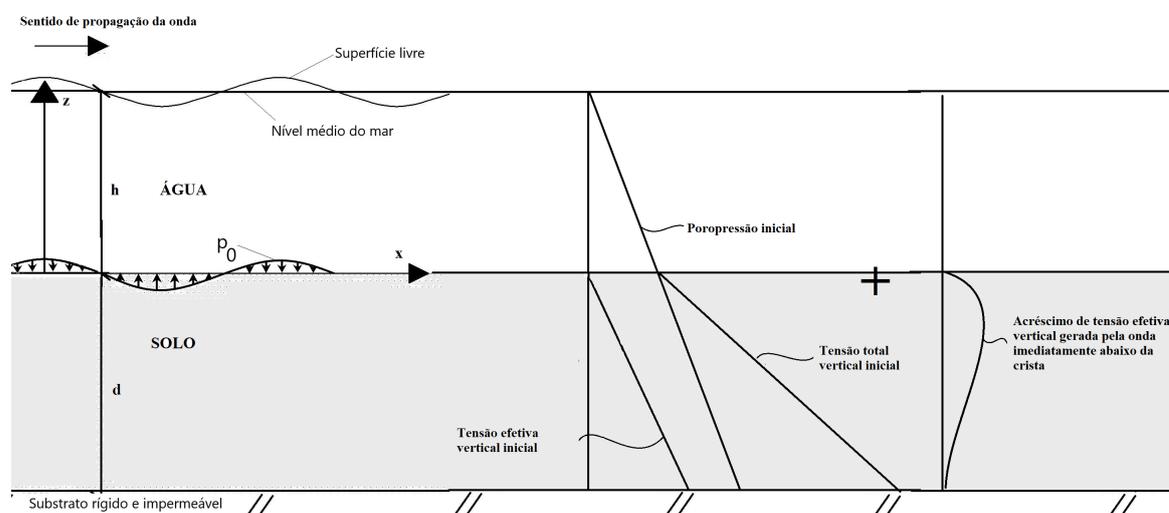


Figura 52 – Esquema representativo das tensões verticais desenvolvidas ao longo da coluna de solo.

Na perspectiva de implementar uma abordagem estática baseada nos campos de tensão $\bar{\sigma}$ e pressão \bar{p} por (7.6) e (7.10), o valor de k_0 pode ser escolhido arbitrariamente dentro do intervalo

$$\frac{1 - \text{sen}(\psi_f)}{1 + \text{sen}(\psi_f)} \leq k_0 \leq k_p = \frac{1 + \text{sen}(\psi_f)}{1 - \text{sen}(\psi_f)} \quad (7.17)$$

expressando que o estado inicial é compatível com a resistência do material. Entretanto, análises clássicas para este tipo de problema indicam que o valor de $k_0 = 1$ leva em geral às melhores estimativas das cargas de ruptura. Assim, nesta análise, será adotado $k_0 = 1$.

7.2 APLICAÇÕES

Considerando o conjunto de parâmetros do solo e da onda apresentado pelas Tabelas (8) e (9), pode-se analisar as regiões do solo onde existe potencial de ocorrência de rompimento por cisalhamento: $f(\underline{\underline{\sigma}}') \geq 0$.

Tabela 8 – Parâmetros de entrada para os exemplos numéricos da estabilidade de massas submarinas.

Parâmetros da onda	
Período de onda (T)	10 s
Compressibilidade da água (K_f)	$1,9 \cdot 10^9 Pa$
Parâmetros do solo	
Porosidade (ϕ)	0,35
Coefficiente de Poisson (ν)	0,4
Coefficiente de permeabilidade (k)	10^{-5} ou $10^{-2} m/s$
Módulo de cisalhamento (G)	$5 \cdot 10^7 Pa$
Ângulo de atrito interno do solo (ψ_f)	35°
Espessura da camada de solo (d)	0,25L 0,5L 0,75L e 1L

Foram considerados cinco pontos de estudo, de modo que a teoria linear de ondas seja abrangida em todos. Cada ponto corresponderá ao par de dados profundidade da lâmina de água h e altura de onda H . A representação gráfica dos pontos de estudos estão apresentados na Figura (53), enquanto que o conjunto de parâmetros está na Tabela (9). Foram consideradas ainda, quatro situações de espessura da camada de solo $d = 0,25L, 0,5L, 0,75L$ e $1L$, além de dois sedimentos hipotéticos com diferentes coeficientes de permeabilidade k . Nas Figuras (54-57), estão apresentadas as superfícies de ruptura no domínio do solo em função da profundidade adimensionalizada em todos os pontos ao longo de um período de onda ($x = 0$ a L). As zonas de potencial ruptura ocorrem desde a superfície da camada ($Z/L = 0$) de solo até as curvas indicadas nas figuras, ou seja, para $f(\underline{\sigma}') \geq 0$.

Tabela 9 – Pontos de estudo para os exemplos numéricos da estabilidade de massas submarinas.

Ponto de análise	h	H
P7.1	1,22m	0,06m
P7.2	9,24m	0,30m
P7.3	79,25m	0,30m
P7.4	79,25m	0,97m
P7.5	304,80m	1,04m

Na Figura (54), estão apresentadas as superfícies de ruptura por cisalhamento induzida por ondas para o ponto de estudo P7.1, onde este encontra-se em zona de águas rasas. Considerando a espessura da camada de solo $d = 0,25L$, quando a permeabilidade é alta, a superfície de ruptura é situada ligeiramente abaixo quando comparado com a superfície de ruptura de solos menos permeáveis, principalmente na crista da onda. Este comportamento tende a ser reduzido quando a espessura da camada de solo aumenta para $d = 0,5L$. No entanto, para $d = 0,75L$, quando se trata do solo menos permeável ($k = 10^{-5} m/s$), não houve potencial zona de ruptura do solo, ao contrário da situação em que o coeficiente de permeabilidade foi de $k = 10^{-2} m/s$, onde ocorre a ruptura imediatamente abaixo das cristas da onda na superfície da camada de solo ($z/L = 0$). Por outro lado, quando $d = L$, não foi possível identificar potencial zona de ruptura ao longo da

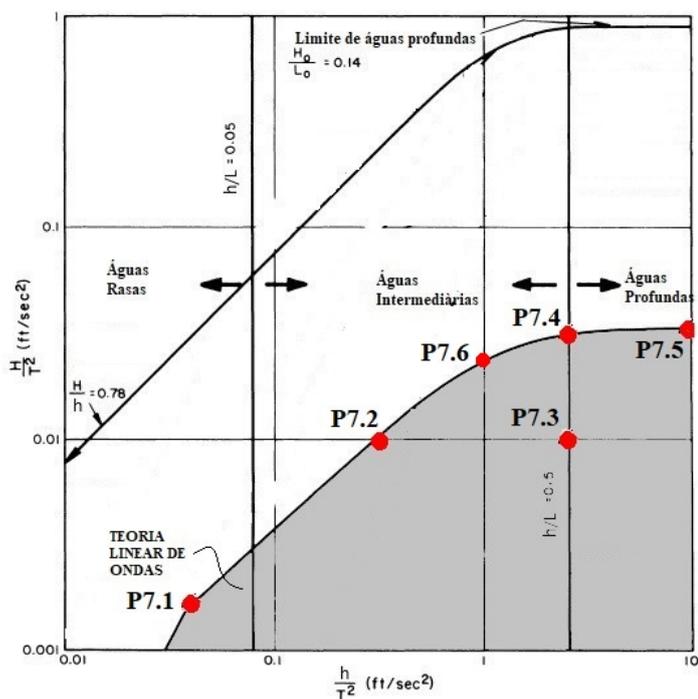


Figura 53 – Regime de propagação de ondas para os pontos de estudo para a aplicação da estabilidade de massas submarinas.

camada de solo.

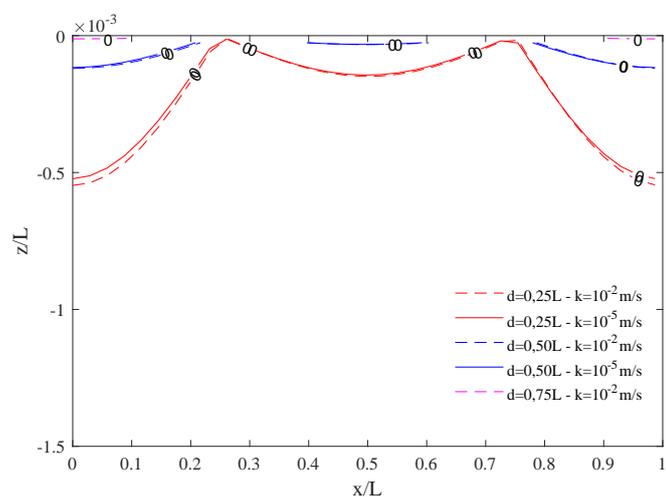


Figura 54 – Zonas de ruptura por cisalhamento do ponto P7.1.

Levando em consideração um ponto de estudo situado em zona de águas intermediárias, a Figura (55) apresenta as superfícies de ruptura por cisalhamento induzida por ondas para o ponto P7.2. Neste caso, houve semelhanças com o ponto já estudado P7.1, contudo, por se tratar de uma onda de maior altura H e, por consequência, maior pressão dinâmica p_0 transferida ao solo, os acréscimos de tensões também foram superiores, fazendo com que as potenciais superfícies de ruptura alcancem profundidades maiores ao se comparados com o ponto P7.1 (Figura 54). Houve

também maior evidência do efeito da permeabilidade, indicando que solos mais permeáveis apresentam maiores potenciais zonas de ruptura em comparação com solos menos permeáveis.

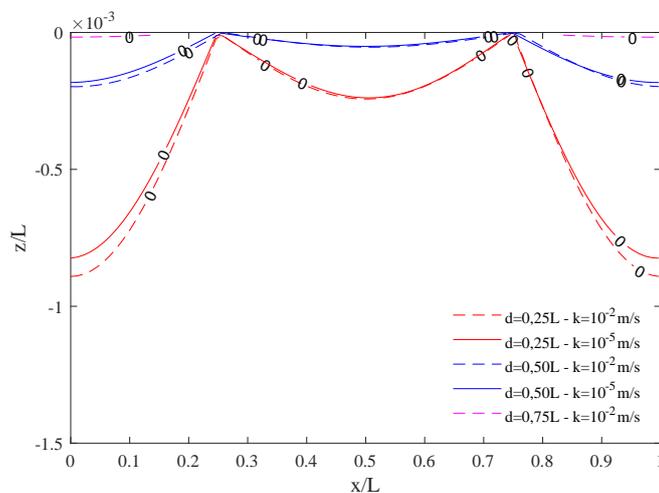


Figura 55 – Zonas de ruptura por cisalhamento do ponto P7.2.

As superfícies de ruptura para o ponto de estudo P7.3, situado no limite entre águas intermediárias e profundas, estão apresentados na Figura (56). Neste caso, as zonas de potencial ruptura se apresentaram somente para as espessuras da camada de solo $d = 0,25L$ e $d = 0,5L$, tendo ainda o coeficiente de permeabilidade pouco efeito.

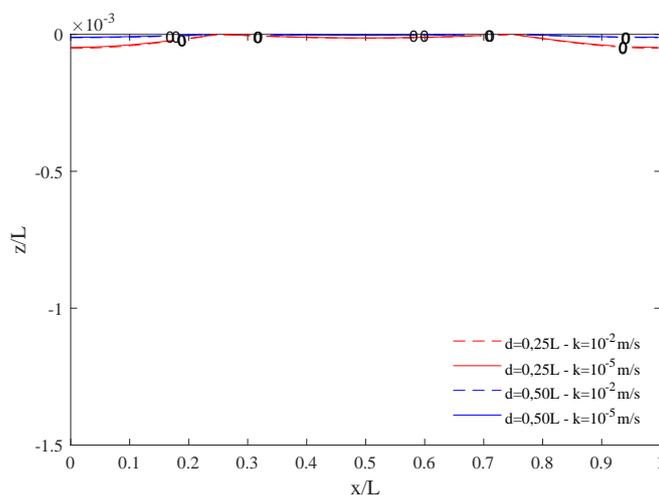


Figura 56 – Zonas de ruptura por cisalhamento do ponto P7.3.

Para o ponto de estudo P7.4, situado no limite da teoria linear de ondas e entre águas profundas e intermediárias, as superfícies de ruptura estão apresentadas pela Figura (57). Para $d = 0,25L$, as potenciais zonas de ruptura se apresentaram abaixo da crista, em um maior intervalo da profundidade do solo, e na cava em menor, considerando os dois coeficientes de permeabilidade estudados. Já para $d = 0,5L$, as zonas de potencial ruptura se limitaram a uma fina camada de solo ao longo de todo o comprimento de onda. O ponto de estudo P7.5 não apresentou zona

de ruptura ao longo da coluna de solo, já que para o período de onda analisado, este situa-se em águas profundas, sendo muito pequena a parcela da pressão dinâmica da onda p_0 que é transferida para o solo.

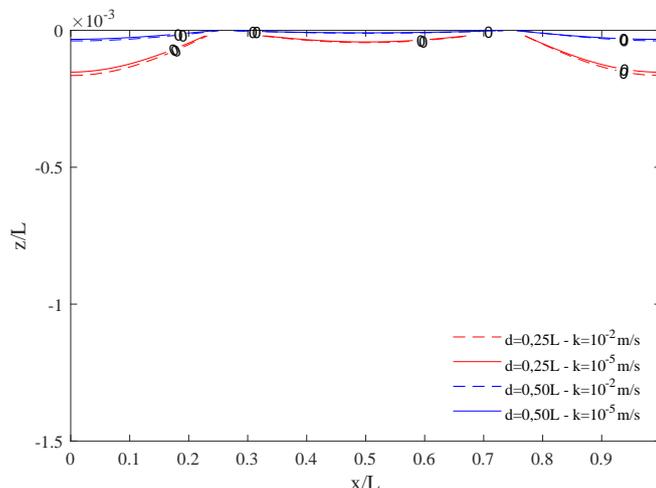


Figura 57 – Zonas de ruptura por cisalhamento do ponto P7.4.

7.2.1 Abordagem simplificada para análise de estabilidade

Como foi visto no Capítulo (6), a solução quase-estática possui um bom campo de aplicação, adicionalmente, a condição de incompressibilidade do fluido que preenche os vazios do solo é válida. A simplicidade da solução analítica, aliada ao critério de Mohr-Coulomb, permite de forma rápida e simples analisar a estabilidade de massas submarinas.

A tensão normal vertical efetiva induzida pela onda está em fase com a onda, ou seja, σ'_z é máximo quando $\lambda x - \omega t = 0$, uma vez que o fluxo é máximo na crista da onda. Da mesma forma, o fluxo horizontal induzido pelas ondas no solo e pela crista em direção às cavas adjacentes, cria uma tensão efetiva normal horizontal negativa sob a crista da onda (MADSEN, 1978). Desta forma, o estado de tensões efetivas induzida por ondas em $x = 0$ pode ser representado pela Figura (58), onde há a rotação dos eixos principais.

Partindo do pressuposto que a situação crítica do ponto de vista da estabilidade ocorra em $\omega t = 0$, a tensão cisalhante induzida pela onda será $\tau_{xz} = 0$. Logo, as tensões principais são dadas por $\sigma'_1 = \bar{\sigma}'_x$ e $\sigma'_3 = \bar{\sigma}'_z$. Através das equações das tensões efetivas induzidas pelas ondas apresentadas anteriormente pela Equação (5.46), as tensões principais máximas em função da profundidade, que estão situadas abaixo da crista da onda ($\lambda x - \omega t = 0$), podem ser dadas por:

$$\bar{\sigma}'_1 = z[\gamma_{sub}k_0 - p_0\lambda \exp(\lambda z)] \quad (7.18a)$$

$$\bar{\sigma}'_3 = z[\gamma_{sub} + p_0\lambda \exp(\lambda z)] \quad (7.18b)$$

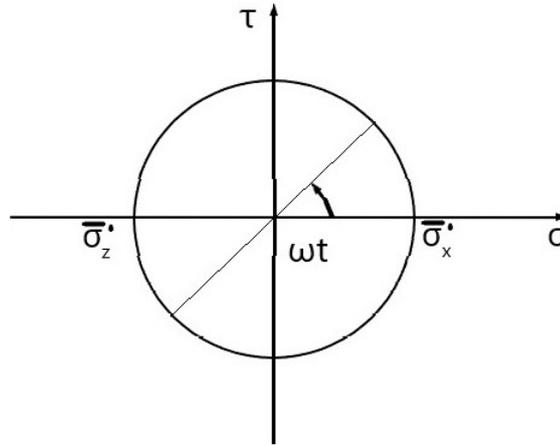


Figura 58 – Estado de tensão em $x = 0$ considerando a rotação dos eixos principais.

Fonte: Modificado de Madsen (1978).

onde $p_0 = \frac{\rho_f g H / 2}{\cosh(\lambda h)}$ com $\lambda = \frac{2\pi}{L}$ é a pressão dinâmica máxima gerada pela onda na superfície da camada de solo e $\gamma_{sub} = \gamma - \gamma_f$ é o peso submerso do solo. Substituindo a Equação (7.18) no critério de Mohr-Coulomb sem coesão, dado pela Equação (7.3), é obtida a seguinte expressão:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}') = \gamma_{sub} z [\sen \psi_f (1 + k_0) - (1 - k_0)] - H \frac{\gamma_f \lambda z \exp(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)} \quad (7.19)$$

A Equação (7.19) relaciona o ângulo de atrito interno do solo com a altura de onda e a profundidade da lâmina de água na iminência de ocorrer a ruptura por cisalhamento ao longo da profundidade z . As distribuições das tensões verticais e horizontais ao longo da profundidade já foram discutidas e apresentadas pela Figura (17), onde o valor máximo ocorre em $\lambda z = -1$, reduzindo monotonicamente a partir disso. Portanto é razoável considerar que a ruptura por cisalhamento pode ocorrer até a profundidade de $z = -\frac{L}{2\pi}$, medida a partir da superfície do solo. É possível também inferir que dentro da zona possível de ruptura por cisalhamento, isto é, $-\frac{L}{2\pi} \leq z \leq 0$, a função $\lambda z \exp(\lambda z)$ pode ser aproximada por λz . Sendo assim, a Equação (7.19), adicionada ao critério de Mohr-Coulomb, pode ser reescrita como:

$$H \geq \frac{\gamma_{sub} \cosh(\lambda h)}{\gamma_f \lambda} [\sen \psi_f (1 + k_0) - (1 - k_0)] \quad (7.20)$$

Através da Equação (7.20), é possível estimar a altura de onda H para a qual existe a potencial zona de ruptura por cisalhamento, considerando os parâmetros da onda (período T , comprimento L e espessura da lâmina de água h) e do solo (ângulo de atrito interno do solo ψ_f , coeficiente de empuxo em repouso k_0 e peso específico submerso γ_{sub}). Sendo assim, em uma situação hipotética em que $T = 8s$, $d = 7m$, $L = 61,4m$, $k_0 = 0,5$, $\psi_f = 30^\circ$ e $\gamma_{sub} = 9600N/m^3$, haverá ruptura por cisalhamento no interior da camada de solo e imediatamente abaixo da crista da onda quando $H \geq 2,97m$. Da mesma forma, considerando os mesmos parâmetros da onda e do solo, porém levando em conta um coeficiente de empuxo em repouso do solo $k_0 = 1$, a nova altura

de onda que induziria tensões no solo suficientes para causar zonas potenciais de ruptura por cisalhamento é de $H \geq 11,9m$, sendo portanto, valores de $k_0 < 1$ bastante conservadores.

7.2.2 Efeito dos termos inerciais na análise de estabilidade

Os efeitos da inclusão dos termos inerciais na solução para a resposta induzida por ondas já foram apresentados pelo Capítulo (6), assim como o intervalo de validade de cada uma das soluções apresentadas. No entanto, a diferença entre as soluções analíticas pode não influenciar nas potenciais superfícies de ruptura dadas pelo critério de Mohr-Coulomb. Diante dos parâmetros apresentados pela Tabela (7), ao estudar a sensibilidade do parâmetro módulo cisalhante do solo $G = 10^8 Pa$, a diferença entre a solução dinâmica e quase-estática para os demais parâmetros médios atingiu 8% no caso em que a espessura de solo foi $d = 0,25L$. Na Figura (59) estão apresentadas as superfícies de ruptura por cisalhamento considerando o solo com ângulo de atrito interno $\psi_f = 35^\circ$ e altura de onda $H = 0,9m$, tendo portanto o ponto de estudo P7.6, de acordo com a Figura (53), englobado pela teoria linear de ondas, onde a linha contínua refere-se à superfície de ruptura considerando a solução dinâmica e a linha tracejada à solução quase-estática.

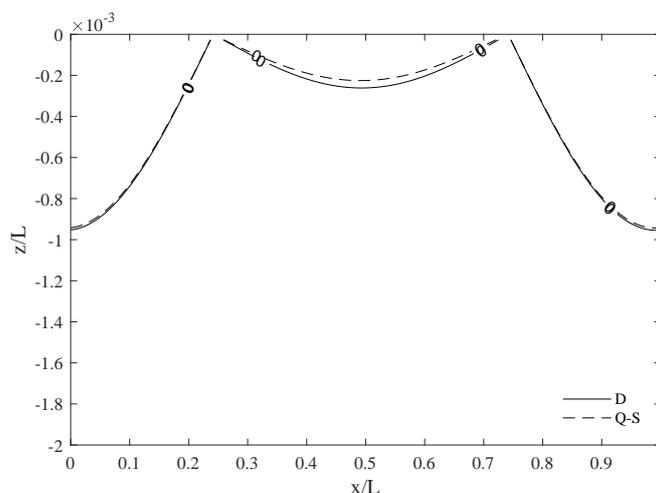


Figura 59 – Zonas de ruptura considerando as soluções quase-estática e dinâmica para $G = 10^8 Pa$.

De acordo com a Figura (59), para a solução dinâmica, a falha por cisalhamento do solo atinge a profundidade $z = -0,952 \cdot 10^{-3}L$, enquanto que para a solução quase-estática, o cisalhamento atingiu profundidade de até $z = -0,942 \cdot 10^{-3}L$. Neste caso, a diferença de 8% entre as soluções, resultou na prática, na diferença de apenas $0,01 \cdot 10^{-3}L$ na zona de ruptura no interior do solo. A pequena diferença para o critério de ruptura apresentado se deve ao fato de que altos valores do módulo cisalhante resultam em consideráveis diferenças entre as soluções à medida em que a distância da superfície do solo aumenta. Portanto, se a ruptura ocorre próxima a $z = 0$, não há relevante distinção da potencial zona de ruptura entre as soluções dinâmica e quase-estática.

Por outro lado, há casos em que as diferenças entre os modelos analíticos podem se refletir na estabilidade do solo. Na Figura (36) foram apresentados dois casos cujos parâmetros do solo e da onda estão apresentados na Tabela (6), mostrando razoável distinção entre as soluções. Considerando o ângulo de atrito interno do solo $\psi_f = 35^\circ$ e altura de onda $H = 1,2m$ que compreenda a teoria linear de ondas (ver ponto P6.6 na Figura 25), a Figura (60) apresenta as zonas de ruptura para o caso 2 do exemplo já apresentado considerando as espessuras de solo $d = 0,25, 0,5, 0,75$ e $1L$.

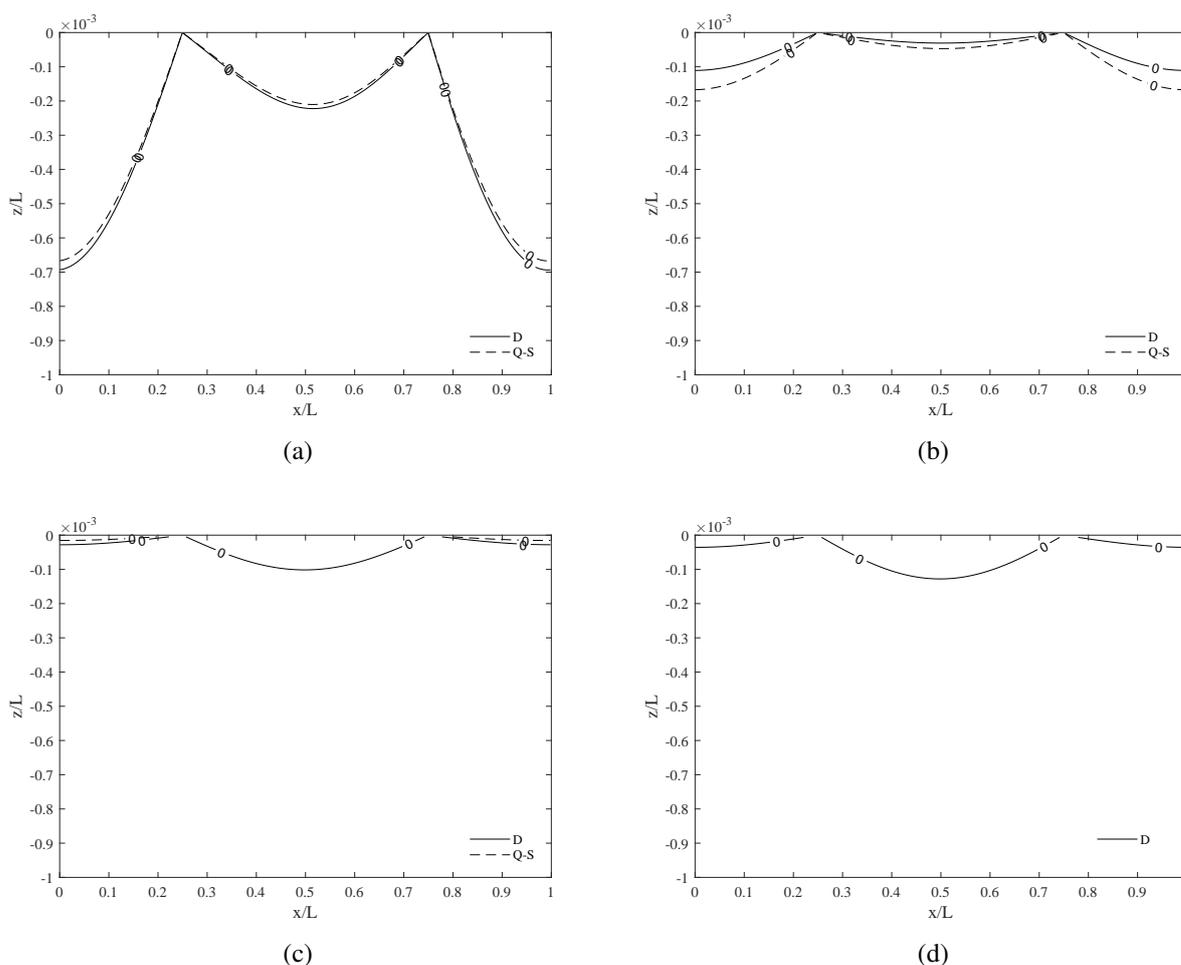


Figura 60 – Zonas de ruptura considerando as soluções quase-estática e dinâmica no caso em que há distinção entre as soluções: (a) $d = 0,25L$, (b) $d = 0,5L$, (c) $d = 0,75L$ e (d) $d = 1L$.

Na Figura (60a) não há diferença considerável entre as soluções dinâmicas e quase-estáticas, já que a espessura da camada de solo é $d = 0,25L$. Da mesma forma, as superfícies de ruptura são muito próximas. A partir da espessura de solo $d > 0,5L$ e períodos de onda $T > 10s$, a distinção entre as soluções se torna considerável, refletindo também na estabilidade do solo. Na Figura (60b), está apresentado o potencial superfície de ruptura para espessura de solo $d = 0,5L$, no qual a solução quase-estática tende a superestimar a superfície de ruptura para a profundidade em que ela ocorre. Já nas Figuras (60c) e (60d), onde a zona de ruptura ocorre mais próxima da

superfície da camada de solo, a solução quase-estática não indicou potencial ruptura para $d = L$ e para $d = 0,75L$ a zona de potencial ruptura pode ocorrer somente na superfície da camada de solo imediatamente abaixo da crista da onda. Por outro lado, para a solução dinâmica, a mesma ocorre imediatamente abaixo da cava.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

8.1 CONCLUSÕES

No presente trabalho, um estudo sobre os efeitos do carregamento cíclico da onda sobre leitos marinhos porosos foi apresentado. Após uma revisão bibliográfica sobre o assunto, a modelagem do carregamento foi estabelecida, onde foi utilizada a teoria linear de ondas e a mecânica do meio poroso. Duas abordagens foram estudadas para obter as equações governantes, sendo que numa delas foram incluídos os termos inerciais. Como conclusões do estudo, podem-se destacar os seguintes pontos:

- Em casos onde a espessura da camada de solo seja inferior ao comprimento da onda ($d/L < 1$), se faz necessário empregar a solução para solo com espessura finita, já quando a camada de solo é maior do que o comprimento da onda, a solução para solos com espessura infinita é suficiente; A adoção da solução dinâmica ou quase-estática deve ser atrelada ao conjunto de parâmetros do solo e da onda;
- Considerando a solução para solos com espessura finita, os parâmetros mais importantes na resposta são a espessura da lâmina de água h (isto é, comprimento da onda L), e o coeficiente de permeabilidade (k) e, em menor grau, o módulo de elasticidade transversal (G) e o período da onda (T). Entretanto, o coeficiente de Poisson (ν) se mostrou menos relevante. Já para a solução que considera o solo com espessura infinita, a profundidade da lâmina de água (h) e o período da onda (T) se mostraram mais relevantes;
- A partir da abordagem dinâmica apresentada, desconsiderando os termos inerciais referentes ao esqueleto e à velocidade relativa entre o esqueleto e o fluido, a solução pode ser particularizada para a abordagem quase-estática, já que tem-se o mesmo polinômio característico;
- Considerando as duas soluções desenvolvidas neste trabalho (soluções dinâmica e quase-estática), em casos em que a espessura da camada de solo seja menor do que o comprimento da onda ($d/L < 1$), o módulo de elasticidade transversal do solo (G) mostrou-se bastante relevante. Para módulo cisalhante elevado, a diferença obtida ao desprezar os termos inerciais é relevante, onde para o caso estudado, a tensão efetiva vertical (σ'_z) apresentou diferença de 8% para o módulo cisalhante de $G = 10^8 Pa$ considerando $d/L = 0,25$, sendo, portanto, necessária a adoção da solução dinâmica;
- Para solos mais permeáveis, como areia grossa e pedregulhos, a adoção da solução dinâmica é pertinente, já que em certas condições de carregamento de onda o erro ao adotar a solução quase-estática pode chegar a 3,5%;

- Para períodos de onda menores do que $T = 10s$, independentemente da razão d/L_0 , a solução quase estática é suficiente para predição das respostas induzidas. Já em períodos maiores que estes, a razão d/L_0 se torna importante. Se $\frac{d}{L_0} > 0,25$, a solução dinâmica deve ser adotada da mesma forma. Caso a solução para solos com espessura infinita deva ser adotada, a inclusão dos termos inerciais deve ser feita;
- Para a análise de estabilidade pelo critério de Mohr-Coulomb, para módulo cisalhante elevado e zona de ruptura próxima à superfície da camada de solo, a diferença do ponto em que ocorre a falha por cisalhamento é irrelevante. Já se a zona de ruptura ocorre em profundidades elevadas, a solução quase-estática pode subestima-la;

8.2 RECOMENDAÇÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Podem ser enumerados como sugestões de trabalhos futuros, os seguintes itens:

1. A análise paramétrica apresentada no Capítulo (6) baseia-se em valores discretos de grandezas consideradas de maneira independente. Um aspecto fundamental para desenvolver análises paramétricas cuja interpretação seja racional, consiste em formular previamente uma análise dimensional para identificar os fatores adimensionais relevantes que controlam a resposta do maciço marinho. Um aspecto fundamental a ser investigado no futuro é formular uma condição suficiente sobre os parâmetros da onda (amplitude, número de onda, etc) controlando a estabilidade do maciço poroso. A ideia é desenvolver um raciocínio analítico de Análise Limite baseado nas distribuições de tensão e pressão propostos no Capítulo (7), de maneira análoga ao trabalho de Madalozzo (2016);
2. Resolver, alternativamente, as equações apresentadas pelo Capítulo (4), substituindo a Equação (4.71) em (4.70) e eliminando a variável vetor filtração \mathbf{q} , resultando na seguinte equação:

$$\Delta p + \rho_f \operatorname{div}(\boldsymbol{\gamma}^s) + \rho_f \operatorname{div} \left[\frac{d^s \mathbf{V}^r}{dt} + \operatorname{grad}(\mathbf{V}^r + \mathbf{V}^s) \cdot \mathbf{V}^r \right] = \frac{\gamma_f}{k} \left[\frac{\phi}{K_f} \dot{p} + \operatorname{tr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right] \quad (8.1)$$

a equação de equilíbrio dinâmico é dada por:

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) - \rho \boldsymbol{\gamma}^s - \rho_f \phi \left[\frac{d^s \mathbf{V}^r}{dt} + \operatorname{grad}(\mathbf{V}^r + \mathbf{V}^s) \cdot \mathbf{V}^r \right] = 0 \quad (8.2)$$

nas equações (8.1) e (8.2), desconsideraram-se as forças de volume ($\mathbf{g} = 0$), as quais tornam-se as equações fundamentais do problema. Desta forma, não será necessária a criação de uma variável fictícia \mathbf{v} ;

3. Resolver analiticamente, as equações fundamentais resultantes da aproximação $u-p$, de modo que seja desprezada a aceleração relativa, mas considerada a aceleração do esqueleto,

tendo as seguintes equações a se resolver:

$$\Delta p + \rho_f \operatorname{div}(\boldsymbol{\gamma}^s) = \frac{\gamma_f}{k} \left[\frac{\phi}{K_f} \dot{p} + \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \right] \quad (8.3)$$

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) - \rho \boldsymbol{\gamma}^s = 0 \quad (8.4)$$

nas equações (8.3) e (8.4), desconsideraram-se as forças de volume ($\mathbf{g} = 0$), as quais tornam-se as equações fundamentais do problema;

4. Estudar a estabilidade de maciços submarinos, considerando os termos inerciais e empregando o conceito da Análise Limite;
5. Propor uma solução analítica, quando possível, ou numérica para múltiplas camadas de solo e anisotropia das propriedades, a fim de aproximar-se das condições encontradas na natureza;
6. Modelar o carregamento da onda sobre a superfície do maciço empregando uma teoria de onda não-linear como, por exemplo, a aproximação de segunda ordem de Stokes, com o propósito de aproximar-se das condições encontradas na natureza;
7. Incluir na solução, através da modelagem numérica, estruturas como dutos, quebra-mares entre outros tipos de fundações e verificar a ocorrência de liquefação e/ou falha por cisalhamento.

REFERÊNCIAS

- BARENDTS, F.; SPIERENBURG, S. Interaction between ocean waves and sea-bed. In: *Proceedings of the International Conference on Geotechnical Engineering for Coastal Development-Theory and Practice on Soft Ground (Geot-Coastal'91), Yokohama, Japan*. [S.l.: s.n.], 1991. v. 2, p. 1091–1108. Citado na página 25.
- BEA, R. G.; WRIGHT, S. G.; SIRCAR, P.; NIEDORODA, A. W. Wave-induced slides in south pass block 70, mississippi delta. *Journal of Geotechnical Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 109, n. 4, p. 619–644, 1983. Citado na página 25.
- BIOT, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of applied physics*, American Institute of Physics, v. 12, n. 2, p. 155–164, 1941. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 74.
- BIOT, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 28, n. 2, p. 168–178, 1956. Citado na página 38.
- BIOT, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. ii. higher frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 28, n. 2, p. 179–191, 1956. Citado na página 38.
- CHA, D.; JENG, D.; RAHMAN, M.; SEKIGUCHI, H.; ZEN, K.; YAMAZAKI, H. Effects of dynamic soil behaviour on the wave-induced seabed response. *International Journal of Ocean Engineering and Technology*, v. 16, n. 5, p. 21–33, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 101.
- CHEN, T.; HUANG, L.; SONG, C. Dynamic response of poroelastic bed to nonlinear water waves. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 123, n. 10, p. 1041–1049, 1997. Citado na página 39.
- CHRISTIAN, J. T.; TAYLOR, P. K.; YEN, J. K.; ERALI, D. R. et al. Large diameter underwater pipe line for nuclear power plant designed against soil liquefaction. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE. *Offshore technology conference*. [S.l.], 1974. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 32.
- COUSSY, O. *Poromechanics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 60, 64, 65, 66, 67 e 70.
- DAMGAARD, J. S.; SUMER, B. M.; TEH, T.; PALMER, A.; FORAY, P.; OSORIO, D. Guidelines for pipeline on-bottom stability on liquefied noncohesive seabeds. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 132, n. 4, p. 300–309, 2006. Citado na página 24.
- DAWSON, T. Wave propagation over a deformable sea floor. *Ocean Engineering*, Elsevier, v. 5, n. 4, p. 227–234, 1978. Citado na página 34.
- DEAN, R. G. *Evaluation and Development of Water Wave Theories for Engineering Application: Tabulation of dimensionless stream function theory variables*. [S.l.]: US Coastal Engineering Research Center, 1974. v. 1 e 2. Citado na página 57.

DEAN, R. G.; DALRYMPLE, R. A. *Water wave mechanics for engineers e scientists*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 1991. v. 2. Citado 8 vezes nas páginas 40, 41, 42, 44, 48, 52, 55 e 57.

DORMIEUX, L. *Influence de la houle sur la stabilité d'un massif sous-marin*. Tese (Doutorado) — Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1989. Citado na página 137.

DORMIEUX, L.; COUSSY, O. Stability of a sedimentary half-space subjected to an arbitrary pressure distribution. *European journal of mechanics. A. Solids*, v. 10, n. 4, p. 371–394, 1991. Citado na página 137.

GATMIRI, B. A simplified finite element analysis of wave-induced effective stresses and pore pressures in permeable sea beds. *Geotechnique*, Thomas Telford Ltd, v. 40, n. 1, p. 15–30, 1990. Citado 5 vezes nas páginas 9, 36, 37, 88 e 89.

GATMIRI, B. Response of cross-anisotropic seabed to ocean waves. *Journal of geotechnical engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 118, n. 9, p. 1295–1314, 1992. Citado na página 37.

GROOT, M. D.; BOLTON, M.; FORAY, P.; MEIJERS, P.; PALMER, A.; SANDVEN, R.; SAWICKI, A.; TEH, T. Physics of liquefaction phenomena around marine structures. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 132, n. 4, p. 227–243, 2006. Citado na página 34.

HENKEL, D. The role of waves in causing submarine landslides. *Geotechnique*, Thomas Telford Ltd, v. 20, n. 1, p. 75–80, 1970. Citado na página 29.

HERBICH, J.; SCHILLER, R.; DUNLAP, W.; WATANABE, R. *Seafloor scour: Design guidelines for ocean-founded structures*. [S.l.]: Marcel Dekker Incorporated, 1984. v. 4. Citado na página 24.

HSIEH, P.-C.; HUANG, L.-H.; WANG, T.-W. Dynamic response of soft poroelastic bed to linear water waves—a boundary layer correction approach. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, Wiley Online Library, v. 25, n. 7, p. 651–674, 2001. Citado na página 39.

HSU, C.-J.; CHEN, Y.-Y.; TSAI, C.-C. Wave-induced seabed response in shallow water. *Applied Ocean Research*, Elsevier, v. 89, p. 211–223, 2019. Citado na página 55.

HSU, J.; JENG, D. Wave-induced soil response in an unsaturated anisotropic seabed of finite thickness. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Wiley Online Library, v. 18, n. 11, p. 785–807, 1994. Citado na página 89.

HUANG, L.; SONG, C. Dynamic response of poroelastic bed to water waves. *Journal of Hydraulic Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 119, n. 9, p. 1003–1020, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.

HURTADO, J. E. A. diseño de cimentaciones. *Lima, Perú*, Institut de la construcción y gerencias, 2007. Citado na página 177.

JENG, D.; HSU, J. Wave-induced soil response in a nearly saturated sea-bed of finite thickness. *Geotechnique*, Thomas Telford Ltd, v. 46, n. 3, p. 427–440, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 88.

JENG, D.; LEE, T. Dynamic response of porous seabed to ocean waves. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, v. 28, n. 2, p. 99–128, 2001. Citado na página 39.

JENG, D.; LIN, Y. Non-linear wave-induced response of porous seabed: A finite element analysis. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, Wiley Online Library, v. 21, n. 1, p. 15–42, 1997. Citado na página 38.

JENG, D.; RAHMAN, M. Wave-induced oscillatory soil response: Difference between quasi-static and dynamic solutions. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, v. 2, p. 1103–1106, 2001. Citado na página 39.

JENG, D.-S. Soil response in cross-anisotropic seabed due to standing waves. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 123, n. 1, p. 9–19, 1997. Citado na página 36.

JENG, D.-S. *Porous models for wave-seabed interactions*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 13 vezes nas páginas 24, 27, 29, 31, 32, 34, 35, 37, 80, 81, 83, 88 e 139.

JENG, D.-S.; CHA, D. Effects of dynamic soil behavior and wave non-linearity on the wave-induced pore pressure and effective stresses in porous seabed. *Ocean Engineering*, Elsevier, v. 30, n. 16, p. 2065–2089, 2003. Citado na página 39.

JENG, D.-S.; LIN, Y. S. Finite element modelling for water waves-soil interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Elsevier, v. 15, n. 5, p. 283–300, 1996. Citado na página 37.

KITANO, T.; MASE, H. Boundary-layer theory for anisotropic seabed response to sea waves. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 125, n. 4, p. 187–194, 1999. Citado na página 37.

LIAO, C.; ZHAO, H.; JENG, D.-S. Poro-elasto-plastic model for the wave-induced liquefaction. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 137, n. 4, 2015. Citado na página 38.

LIN, Y.; JENG, D. The effects of variable permeability on the wave-induced seabed response. *Ocean engineering*, Elsevier, v. 24, n. 7, p. 623–643, 1997. Citado na página 38.

LIN, Y.-S.; JENG, D.-S. Response of poro-elastic seabed to a 3-d wave system: A finite element analysis. *Coastal Engineering in Japan*, Taylor & Francis, v. 39, n. 2, p. 165–183, 1996. Citado na página 38.

LIN, Y.-S.; JENG, D.-S. Effects of variable shear modulus on wave-induced seabed response. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, Taylor & Francis, v. 23, n. 1, p. 109–115, 2000. Citado na página 38.

LUNDGREN H., L. J. H. C.; ROMHILD, C. J. Stability of breakwaters on porous foundation. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, 12th International Conference Soil Mechanics and Foundation Engineering, v. 1, p. 451–454, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 24, 32 e 137.

MADALOZZO, D. M. S. Contribuição à análise das instabilidades do leito oceânico induzidas pelo carregamento cíclico da onda. *Universidade Federal do Rio Grande do Sul - PPGEC*, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 88, 137 e 152.

MADSEN, O. Wave-induced pore pressures and effective stresses in a porous bed. *Geotechnique*, Thomas Telford Ltd, v. 28, n. 4, p. 377–393, 1978. Citado 5 vezes nas páginas 35, 37, 84, 146 e 147.

MAGDA, W. *On one-dimensional model of pore pressure generation in a highly saturated sand bed due to cyclic loading acting on a sand surface. I: Theoretical description and numerical approach*. [S.l.], 1990. Citado na página 37.

MALLARD, W. W.; DALRYMPLE, R. A. Water waves propagating over a deformable bottom. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE. [S.l.], 1977. Citado na página 34.

MALVERN, L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. [S.l.: s.n.], 1969. Citado na página 45.

MÉHAUTÉ, B. L. *An introduction to hydrodynamics and water waves*. [S.l.]: Environmental Science Services Administration, 1976. v. 52. Citado 3 vezes nas páginas 41, 58 e 59.

MEI, C. C.; FODA, M. A. Wave-induced responses in a fluid-filled poro-elastic solid with a free surface—a boundary layer theory. *Geophysical Journal International*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 66, n. 3, p. 597–631, 1981. Citado 3 vezes nas páginas 36, 38 e 39.

MITCHELL, R.; TSUI, K.; SANGREY, D. Failure of submarine slopes under wave action. *Coastal Engineering Proceedings*, n. 13, p. 80–80, 1972. Citado na página 29.

MOSHAGEN, H.; TORUM, A. Wave induced pressures in permeable seabeds. *Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division*, ASCE, v. 101, n. 1, p. 49–57, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

NAKAMURA, H.; ONISHI, R.; MINAMIDE, H. On the seepage in the seabed due to waves. In: *Proceedings of 20th Coastal Engineering Conference, JSCE*. [S.l.: s.n.], 1973. p. 421–428. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

OKUSA, S. Wave-induced stresses in unsaturated submarine sediments. *Geotechnique*, Thomas Telford Ltd, v. 35, n. 4, p. 517–532, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

PICKERING, D. Anisotropic elastic parameters for soil. *Geotechnique*, Thomas Telford Ltd, v. 20, n. 3, p. 271–276, 1970. Citado na página 36.

PINTO, C. d. S. Curso básico de mecânica dos solos. *São Paulo: Oficina de Textos*, v. 3, 2006. Citado na página 178.

PRIOR, D. B.; COLEMAN, J. M. Disintegrating retrogressive landslides on very-low-angle subaqueous slopes, mississippi delta. *Marine Georesources & Geotechnology*, Taylor & Francis, v. 3, n. 1, p. 37–60, 1978. Citado na página 25.

PUTNAM, J. Loss of wave energy due to percolation in a permeable sea bottom. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, Wiley Online Library, v. 30, n. 3, p. 349–356, 1949. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 83.

QUIUQUI, J. P. C. Modelagem analítica bidimensional de deslocamentos, tensões e poropressão induzidos por ondas em leitos marinhos porosos. *Universidade Federal do Rio Grande - TCC*, 2019. Citado na página 83.

RAHMAN, M. Wave-induced instability of seabed: Mechanism and conditions. *Marine Georesources & Geotechnology*, Taylor & Francis, v. 10, n. 3-4, p. 277–299, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 137.

RAHMAN, M. Instability and movement of oceanfloor sediments: a review. *Oceanographic Literature Review*, v. 1, n. 45, p. 70, 1998. Citado na página 29.

RAHMAN, M.; EL-ZAHABY, K.; BOOKER, J. A semi-analytical method for the wave-induced seabed response. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Wiley Online Library, v. 18, n. 4, p. 213–236, 1994. Citado na página 36.

RAHMAN, M.; JABER, W. A simplified drained analysis for wave-induced liquefaction in ocean floor sands. *Soils and foundations*, The Japanese Geotechnical Society, v. 26, n. 3, p. 57–68, 1986. Citado na página 57.

SAKAI, T.; HATTORI, A.; HATANAKA, K. Wave-induced transient pore-water pressure and seabed instability in the surf zone. In: *Proceedings of International Conference on Geotechnical Engineering for Coastal Development-Theory and Practice on Soft Ground (Geo-Coastal 91)*. [S.l.: s.n.], 1991. p. 627–632. Citado na página 38.

SAKAI, T.; MASE, H. Effects of inertia and gravity on seabed response to ocean waves. 1988. Citado na página 38.

SALENÇON, J. Introduction to the yield design theory and its applications to soil mechanics. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Elsevier Masson, v. 9, n. 5, p. 477–500, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 137 e 139.

SCOTT, R. *Principle of Soil Mechanics*, Addison. [S.l.]: Wesley Publishing Comp. Inc, New York, 1963. Citado na página 141.

SILVESTER, R.; HSU, J. R. Sines revisited. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 115, n. 3, p. 327–343, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 32.

SILVESTER, R.; HSU, J. R. Coastal stabilization. ptr prentice hall. Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 137.

SLEATH, J. F. Wave-induced pressures in beds of sand. *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, v. 96, n. 2, p. 367–378, 1970. Citado na página 34.

SMITH, A. S.; GORDON, A. D. Large breakwater toe failures. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 109, n. 2, p. 253–255, 1983. Citado 3 vezes nas páginas 24, 32 e 137.

SONG, C.; HUANG, L.-H. Laminar poroelastic media flow. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 126, n. 4, p. 358–366, 2000. Citado na página 37.

SORENSEN, R. M. *Basic coastal engineering*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. v. 10. Citado 3 vezes nas páginas 47, 58 e 59.

STOKES, G. *On the Theory of Oscillatory Waves*. *Transaction of the Cambridge Society* 8. 441-455. Reprinted in *Stokes, GG (1880). Mathematical and Physical Papers*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1847. Citado na página 58.

SUMER, B. M. *Liquefaction around marine structures*. [S.l.]: World Scientific, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 30, 31, 32 e 33.

SUMER, B. M.; CHENG, N.-S. A random-walk model for pore pressure accumulation in marine soils. In: INTERNATIONAL SOCIETY OF OFFSHORE AND POLAR ENGINEERS. *The Ninth International Offshore and Polar Engineering Conference*. [S.l.], 1999. Citado na página 37.

SUMER, B. M.; FREDSE, J. Wave scour around structures. In: *Advances in coastal and ocean engineering*. [S.l.]: World Scientific, 1999. p. 191–249. Citado na página 29.

SUMER, B. M. et al. *The mechanics of scour in the marine environment*. [S.l.]: World Scientific, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 29.

SUMER, B. M.; WHITEHOUSE, R. J.; TØRUM, A. Scour around coastal structures: a summary of recent research. *Coastal Engineering*, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 153–190, 2001. Citado na página 30.

THOMAS, S. A finite element model for the analysis of wave induced stresses, displacements and pore pressures in an unsaturated seabed i: theory. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, v. 8, n. 1, p. 1–38, 1989. Citado na página 37.

THOMAS, S. D. A finite element model for the analysis of wave induced stresses, displacements and pore pressures in an unsaturated seabed ii: Model verification. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, v. 17, n. 1, p. 107–132, 1995. Citado na página 37.

TSUI, Y.; HELFRICH, S. C. Wave-induced pore pressures in submerged sand layer. *Journal of Geotechnical Engineering*, v. 109, n. 4, p. 603–618, 1983. Citado na página 25.

TZANG, S.-Y. Unfluidized soil responses of a silty seabed to monochromatic waves. *Coastal engineering*, Elsevier, v. 35, n. 4, p. 283–301, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 10, 101 e 105.

ULKER, M.; RAHMAN, M.; JENG, D.-S. Wave-induced response of seabed: various formulations and their applicability. *Applied Ocean Research*, Elsevier, v. 31, n. 1, p. 12–24, 2009. Citado na página 136.

VERRUIJT, A. *Elastic storage of aquifers*. In "*Flow through Porous Media*", edited by RJM DeWiest. [S.l.]: Academic Press, 1969. Citado na página 35.

WANG, G.; CHEN, S.; LIU, Q.; ZHANG, Y. Wave-induced dynamic response in a poroelastic seabed. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 144, n. 9, p. 06018008, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 10, 108, 109 e 110.

WHITEHOUSE, R. *Scour at marine structures: A manual for practical applications*. [S.l.]: Thomas Telford, 1998. Citado na página 30.

XU, G.; SUN, Y.; WANG, X.; HU, G.; SONG, Y. Wave-induced shallow slides and their features on the subaqueous yellow river delta. *Canadian Geotechnical Journal*, v. 46, n. 12, p. 1406–1417, 2009. Citado na página 25.

YAMAMOTO, T. Sea bed instability from waves. *Offshore Technology Conference*, A.S.C.E. Special Conference, Coastal Sediments '77, v. 28, n. 2, p. 898–913, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.

YAMAMOTO, T. Wave-induced pore pressures and effective stresses in inhomogeneous seabed foundations. *Ocean Engineering*, Elsevier, v. 8, n. 1, p. 1–16, 1981. Citado na página 35.

YAMAMOTO, T. e. a. On the response of a poro-elastic bed to water waves. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 87, n. 1, p. 193–206, 1978. Citado 6 vezes nas páginas 35, 36, 37, 39, 74 e 83.

YUHI, M.; ISHIDA, H. Theoretical analysis of the response of a cross-anisotropic seabed to ocean surface waves. *Doboku Gakkai Ronbunshu*, Japan Society of Civil Engineers, v. 1997, n. 572, p. 49–61, 1997. Citado na página 36.

YUHI, M.; ISHIDA, H. Analytical solution for wave-induced seabed response in a soil-water two-phase mixture. *Coastal Engineering Journal*, World Scientific, v. 40, n. 04, p. 367–381, 1998. Citado na página 39.

ZEN, K.; YAMAZAKI, H. Mechanism of wave-induced liquefaction and densification in seabed. *Soils and foundations*, The Japanese Geotechnical Society, v. 30, n. 4, p. 90–104, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 37.

ZEN, K.; YAMAZAKI, H. Oscillatory pore pressure and liquefaction in seabed induced by ocean waves. *Soils and Foundations*, The Japanese Geotechnical Society, v. 30, n. 4, p. 147–161, 1990. Citado na página 37.

ZHAO, H.; JENG, D.-S.; LIAO, C.; ZHU, J. Three-dimensional modeling of wave-induced residual seabed response around a mono-pile foundation. *Coastal Engineering*, Elsevier, v. 128, p. 1–21, 2017. Citado na página 38.

ZIENKIEWICZ, O.; CHANG, C.; BETTESS, P. Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils. *Geotechnique*, Thomas Telford Ltd, v. 30, n. 4, p. 385–395, 1980. Citado na página 38.

Anexos

ANEXO A – COEFICIENTES REAIS DA SOLUÇÃO QUASE-ESTÁTICA PARA SOLOS COM ESPESSURA INFINITA

Considerando as constantes $C_0^\infty = \alpha_0^\infty + i\beta_0^\infty$, $C_1^\infty = \alpha_1^\infty + i\beta_1^\infty$ e $C_2^\infty = \alpha_2^\infty + i\beta_2^\infty$:

$$\alpha_0^\infty = \frac{[c_{01}(\lambda'_1 - \lambda) + c_{02}\lambda'_2](-\lambda'_1 + \lambda'_1 v - v\lambda - \lambda\delta) + [c_{02}(\lambda'_1 - \lambda) - c_{01}\lambda'_2](-\lambda'_2 + \lambda'_2 v)}{\lambda [(\lambda'_1 - \lambda)^2 + \lambda_2'^2][(-\lambda'_1(1-v) - \lambda(v + \delta))^2 + \lambda_2'^2(1-v)^2]} \quad (\text{A.1})$$

$$\beta_0^\infty = \frac{[c_{02}(\lambda'_1 - \lambda) - c_{01}\lambda'_2](-\lambda'_1 + \lambda'_1 v - v\lambda - \lambda\delta) - [c_{01}(\lambda'_1 - \lambda) + c_{02}\lambda'_2](-\lambda'_2 + \lambda'_2 v)}{\lambda [(\lambda'_1 - \lambda)^2 + \lambda_2'^2][(-\lambda'_1(1-v) - \lambda(v + \delta))^2 + \lambda_2'^2(1-v)^2]} \quad (\text{A.2})$$

$$c_{01} = (1-v)(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2 - 2\lambda\lambda'_1) - v\lambda^2 \quad (\text{A.3})$$

$$c_{02} = -2\lambda_2'^2(1-v)(\lambda - \lambda'_1) \quad (\text{A.4})$$

$$\alpha_1^\infty = \frac{(-\lambda'_1 + v\lambda'_1 - \lambda v)(-\lambda'_1 + v\lambda'_1 - \lambda v - \lambda\delta) + (-\lambda'_2 + v\lambda'_2)^2}{(-\lambda'_1 + v\lambda'_1 - \lambda v - \lambda\delta)^2 + (-\lambda'_2 + v\lambda'_2)^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\beta_1^\infty = -\frac{\lambda_2(1-v)\lambda\delta}{(-\lambda'_1 + v\lambda'_1 - \lambda v - \lambda\delta)^2 + (-\lambda'_2 + v\lambda'_2)^2} \quad (\text{A.6})$$

$$\alpha_2^\infty = \frac{\lambda\delta(\lambda'_1 - \lambda)(-\lambda'_1 + v\lambda'_1 - \lambda v - \lambda\delta) + \lambda\delta\lambda'_2(-\lambda'_2 + v\lambda'_2)}{\left((\lambda'_1 - \lambda)^2 + \lambda_2'^2\right) \left((- \lambda'_1 + v\lambda'_1 - \lambda v - \lambda\delta)^2 + (-\lambda'_2 + v\lambda'_2)^2\right)} \quad (\text{A.7})$$

$$\beta_2^\infty = -\frac{\lambda_2' * (1-v)\lambda\delta}{\left((\lambda'_1 - \lambda)^2 + \lambda_2'^2\right) \left((- \lambda'_1 + v\lambda'_1 - \lambda v - \lambda\delta)^2 + (-\lambda'_2 + v\lambda'_2)^2\right)} \quad (\text{A.8})$$

As funções $f_{un}, f_{wn}, f_{xn}, f_{zn}$ e f_{tn} , com $n = 1, 2$, são:

$$f_{u1} = \beta_0^\infty + z\beta_1^\infty \quad (\text{A.9})$$

$$f_{u2} = \alpha_0^\infty + z\alpha_1^\infty \quad (\text{A.10})$$

$$f_{w1} = \alpha_0^\infty - \frac{\alpha_1^\infty}{\lambda}(1 + 2\delta) + z\alpha_1^\infty \quad (\text{A.11})$$

$$f_{w2} = \beta_0^\infty - \frac{\beta_1^\infty}{\lambda}(1 + 2\delta) + z\beta_1^\infty \quad (\text{A.12})$$

$$f_{x1} = \lambda(\alpha_0^\infty + z\alpha_1^\infty) + \frac{2\nu}{1-2\nu}\delta\alpha_1^\infty \quad (\text{A.13})$$

$$f_{x2} = \lambda(\beta_0^\infty + z\beta_1^\infty) + \frac{2\nu}{1-2\nu}\delta\beta_1^\infty \quad (\text{A.14})$$

$$f_{z1} = \lambda(\alpha_0^\infty + z\alpha_1^\infty) - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\delta\alpha_1^\infty \quad (\text{A.15})$$

$$f_{z2} = \lambda(\beta_0^\infty + z\beta_1^\infty) - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\delta\beta_1^\infty \quad (\text{A.16})$$

$$f_{t1} = \lambda(\beta_0^\infty + z\beta_1^\infty) - \delta\beta_1^\infty \quad (\text{A.17})$$

$$f_{t2} = \lambda(\alpha_0^\infty + z\alpha_1^\infty) - \delta\alpha_1^\infty \quad (\text{A.18})$$

As constantes $c_{un}, c_{wn}, c_{xn}, c_{zn}$ e c_{tn} , com $n = 1, 2$, e c_{pn} , com $n = 3, 4$, são:

$$c_{u1} = \beta_2^\infty \quad (\text{A.19})$$

$$c_{u2} = \alpha_2^\infty \quad (\text{A.20})$$

$$c_{w1} = \lambda'_1\alpha_2^\infty - \lambda'_2\beta_2^\infty \quad (\text{A.21})$$

$$c_{w2} = \lambda'_2\alpha_2^\infty + \lambda'_1\beta_2^\infty \quad (\text{A.22})$$

$$c_{p1} = (1 - 2\nu - \delta)\alpha_1^\infty \quad (\text{A.23})$$

$$c_{p2} = (\lambda'_1 - \lambda)\alpha_2^\infty - \lambda'_2\beta_2^\infty \quad (\text{A.24})$$

$$c_{p3} = \lambda'_2\alpha_2^\infty + (\lambda'_1 - \lambda)\beta_2^\infty \quad (\text{A.25})$$

$$c_{p4} = (1 - 2\nu - \delta)\beta_1^\infty \quad (\text{A.26})$$

$$c_{x1} = \alpha_2^\infty[\lambda^2(1-\nu) - \nu(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2)] + 2\nu\lambda'_1\lambda'_2\beta_2^\infty \quad (\text{A.27})$$

$$c_{x2} = -2\nu\lambda'_1\lambda'_2\alpha_2^\infty + \beta_2^\infty[\lambda^2(1-\nu) - \nu(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2)] \quad (\text{A.28})$$

$$c_{z1} = \alpha_2^\infty[-\lambda^2\nu + (1-\nu)(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2)] - 2(1-\nu)\lambda'_1\lambda'_2\beta_2^\infty \quad (\text{A.29})$$

$$c_{z2} = 2(1-\nu)\lambda'_1\lambda'_2\alpha_2^\infty + \beta_2^\infty[-\lambda^2\nu + (1-\nu)(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2)] \quad (\text{A.30})$$

$$c_{t1} = c_{w2} \quad (\text{A.31})$$

$$c_{t2} = c_{w1} \quad (\text{A.32})$$

ANEXO B – COEFICIENTES REAIS DA SOLUÇÃO QUASE-ESTÁTICA PARA SOLOS COM ESPESSURA FINITA

As funções F_{un} , F_{wn} , F_{xn} , F_{zn} e F_{in} , com $n = 1, 2, 3, 4$, são:

$$F_{u1} = \beta_1 + \lambda z \beta_2 \quad (\text{B.1})$$

$$F_{u2} = \beta_3 + \lambda z \beta_4 \quad (\text{B.2})$$

$$F_{u3} = \alpha_1 + \lambda z \alpha_2 \quad (\text{B.3})$$

$$F_{u4} = \alpha_3 + \lambda z \alpha_4 \quad (\text{B.4})$$

$$F_{w1} = \alpha_1 - \alpha_2(1 + 2\delta - \lambda z) \quad (\text{B.5})$$

$$F_{w2} = \alpha_3 + \alpha_4(1 + 2\delta + \lambda z) \quad (\text{B.6})$$

$$F_{w3} = \beta_1 - \beta_2(1 + 2\delta - \lambda z) \quad (\text{B.7})$$

$$F_{w4} = \beta_3 + \beta_4(1 + 2\delta + \lambda z) \quad (\text{B.8})$$

$$F_{x1} = \alpha_1 + \alpha_2 \left(\lambda z + \frac{2\nu\delta}{1-2\nu} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$F_{x2} = \alpha_3 + \alpha_4 \left(\lambda z - \frac{2\nu\delta}{1-2\nu} \right) \quad (\text{B.10})$$

$$F_{x3} = \beta_1 + \beta_2 \left(\lambda z + \frac{2\nu\delta}{1-2\nu} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$F_{x4} = \beta_3 + \beta_4 \left(\lambda z - \frac{2\nu\delta}{1-2\nu} \right) \quad (\text{B.12})$$

$$F_{z1} = \alpha_1 + \alpha_2 \left(\lambda z - \frac{2\nu\delta}{1-2\nu} \right) \quad (\text{B.13})$$

$$F_{z2} = F_{x2} \quad (\text{B.14})$$

$$F_{z3} = \beta_1 + \beta_2 \left(\lambda z - \frac{2\nu\delta}{1-2\nu} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$F_{z4} = F_{x4} \quad (\text{B.16})$$

$$F_{i1} = \beta_1 + \beta_2(\lambda z - \delta) \quad (\text{B.17})$$

$$F_{i2} = \beta_3 + \beta_4(\lambda z + \delta) \quad (\text{B.18})$$

$$F_{i3} = \alpha_1 + \alpha_2(\lambda z - \delta) \quad (\text{B.19})$$

$$F_{i4} = \alpha_3 + \alpha_4(\lambda z + \delta) \quad (\text{B.20})$$

$$(\text{B.21})$$

As constantes C_{un} , C_{wn} , C_{xn} , C_{zn} e C_{tn} , com $n = 1, 2, 3, 4$, e C_{pn} , com $n = 5, 6, 7, 8$, são:

$$C_{u1} = \alpha_5 \quad (\text{B.22})$$

$$C_{u2} = \beta_5 \quad (\text{B.23})$$

$$C_{u3} = \beta_6 \quad (\text{B.24})$$

$$C_{u4} = \alpha_6 \quad (\text{B.25})$$

$$C_{w1} = \alpha_5 \lambda'_1 - \beta_5 \lambda'_2 \quad (\text{B.26})$$

$$C_{w2} = \beta_5 \lambda'_1 + \alpha_5 \lambda'_2 \quad (\text{B.27})$$

$$C_{w3} = -\alpha_6 \lambda'_1 + \beta_6 \lambda'_2 \quad (\text{B.28})$$

$$C_{w4} = \beta_6 \lambda'_1 + \alpha_6 \lambda'_2 \quad (\text{B.29})$$

$$C_{p1} = \alpha_2 \quad (\text{B.30})$$

$$C_{p2} = \alpha_4 \quad (\text{B.31})$$

$$C_{p3} = \alpha_5 (\lambda'_1 - \lambda'_2 - \lambda^2) - 2\lambda'_1 \lambda'_2 \beta_5 \quad (\text{B.32})$$

$$C_{p4} = \beta_5 (\lambda'_1 - \lambda'_2 - \lambda^2) + 2\lambda'_1 \lambda'_2 \alpha_5 \quad (\text{B.33})$$

$$C_{p5} = \alpha_6 (\lambda'_1 - \lambda'_2 - \lambda^2) - 2\lambda'_1 \lambda'_2 \beta_6 \quad (\text{B.34})$$

$$C_{p6} = \beta_6 (\lambda'_1 - \lambda'_2 - \lambda^2) + 2\lambda'_1 \lambda'_2 \alpha_6 \quad (\text{B.35})$$

$$C_{p7} = \beta_2 \quad (\text{B.36})$$

$$C_{p8} = \beta_4 \quad (\text{B.37})$$

$$C_{x1} = \alpha_5 \left(\frac{\lambda^2(1-v) - v(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2)}{1-2v} \right) + \beta_5 \frac{2v}{1-2v} \lambda'_1 \lambda'_2 \quad (\text{B.38})$$

$$C_{x2} = -\beta_5 \left(\frac{\lambda^2(1-v) - v(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2)}{1-2v} \right) + \alpha_5 \frac{2v}{1-2v} \lambda'_1 \lambda'_2 \quad (\text{B.39})$$

$$C_{x3} = \alpha_6 \left(\frac{\lambda^2(1-v) - v(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2)}{1-2v} \right) + \beta_6 \frac{2v}{1-2v} \lambda'_1 \lambda'_2 \quad (\text{B.40})$$

$$C_{x4} = \beta_6 \left(\frac{\lambda^2(1-v) - v(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2)}{1-2v} \right) - \alpha_6 \frac{2v}{1-2v} \lambda'_1 \lambda'_2 \quad (\text{B.41})$$

$$C_{z1} = \alpha_5 [(1-v)(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2) - \lambda^2 v] - 2\beta_5 (1-v) \lambda'_1 \lambda'_2 \quad (\text{B.42})$$

$$C_{z2} = \beta_5 [(1-v)(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2) - \lambda^2 v] + 2\alpha_5 (1-v) \lambda'_1 \lambda'_2 \quad (\text{B.43})$$

$$C_{z3} = \alpha_6 [(1-v)(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2) - \lambda^2 v] - 2\beta_6 (1-v) \lambda'_1 \lambda'_2 \quad (\text{B.44})$$

$$C_{z4} = \beta_6 [(1-v)(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2) - \lambda^2 v] + 2\alpha_6 (1-v) \lambda'_1 \lambda'_2 \quad (\text{B.45})$$

$$C_{t1} = \alpha_5 \lambda'_2 + \beta_5 \lambda'_1 \quad (\text{B.46})$$

$$C_{t2} = -\beta_5 \lambda'_2 + \alpha_5 \lambda'_1 \quad (\text{B.47})$$

$$C_{t3} = \alpha_6 \lambda'_2 + \beta_6 \lambda'_1 \quad (\text{B.48})$$

$$C_{t4} = -\beta_6 \lambda'_2 + \alpha_6 \lambda'_1 \quad (\text{B.49})$$

Sabendo que $C_n = \alpha_n + i\beta_n$ com $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 , as constantes α_n e β_n serão:

$$\alpha_n = \frac{a_n a_0 + b_n b_0}{a_0^2 + b_0^2} \quad (\text{B.50})$$

e

$$\beta_n = \frac{b_n a_0 - a_n b_0}{a_0^2 + b_0^2} \quad (\text{B.51})$$

As constantes a_l e b_l com $l = 0, 1, 2, 3, \dots, 6$ serão:

$$\begin{aligned} a_l = & a_{l0} + a_{l1} \exp(-2\lambda d) + (a_{j2} \cos(d\lambda'_2) + b_{j2} \sin(d\lambda'_2)) \exp[-d(\lambda + \lambda'_1)] \\ & + a_{l3} \exp(-4\lambda d) + (a_{j4} \cos(2d\lambda'_2) + b_{j4} \sin(2d\lambda'_2)) \exp(-2d\lambda'_1) \\ & + (a_{j5} \cos(2d\lambda'_2) + b_{j5} \sin(2d\lambda'_2)) \exp[-2d(\lambda + \lambda'_1)] + (a_{j6} \cos(d\lambda'_2) \\ & + b_{j6} \sin(d\lambda'_2)) \exp[-d(3\lambda + \lambda'_1)] + (a_{j7} \cos(2d\lambda'_2) \\ & + b_{j7} \sin(2d\lambda'_2)) \exp[-d(4\lambda + 2\lambda'_1)] \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

$$\begin{aligned} b_l = & b_{l0} + b_{l1} \exp(-2\lambda d) + (b_{j2} \cos(d\lambda'_2) - a_{j2} \sin(d\lambda'_2)) \exp[-d(\lambda + \lambda'_1)] \\ & + b_{l3} \exp(-4\lambda d) + (b_{j4} \cos(2d\lambda'_2) - a_{j4} \sin(2d\lambda'_2)) \exp(-2d\lambda'_1) \\ & + (b_{j5} \cos(2d\lambda'_2) - a_{j5} \sin(2d\lambda'_2)) \exp[-2d(\lambda + \lambda'_1)] + (b_{j6} \cos(d\lambda'_2) \\ & - a_{j6} \sin(d\lambda'_2)) \exp[-d(3\lambda + \lambda'_1)] + (b_{j7} \cos(2d\lambda'_2) \\ & - a_{j7} \sin(2d\lambda'_2)) \exp[-d(4\lambda + 2\lambda'_1)] \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Os coeficientes a_{lj} e b_{lj} correspondem respectivamente à parte real e à parte imaginária dos coeficientes C_{lj} , com $l = 0, 1, 2, 3, \dots, 6$ e $j = 0, 1, 2, \dots, 7$, disponíveis no Anexo (C).

ANEXO C – COEFICIENTES DA SOLUÇÃO QUASE-ESTÁTICA PARA SOLOS COM ESPESSURA FINITA DE JENG (2012)

Os coeficientes C_{lj} , com $l = 0, 1, 2, 3, \dots, 6$ e $j = 0, 1, 2, \dots, 7$, são:

$$C_{00} = (\lambda' - \lambda)(\lambda' - \lambda v + \lambda v + \lambda \delta)(B1 + \delta B7) \quad (C.1)$$

$$C_{01} = -2\lambda'((\lambda^2 v - \lambda'^2 + \lambda'^2 v)^2 + \lambda^4(1 - 2v)^2 + 2\lambda^2 d^2(1 - v)^2(\lambda'^2 - \lambda^2)^2) + 4\lambda^2 d(\lambda'^4 - \lambda^4)(1 - 2v)(1 - v) + \delta B8 \quad (C.2)$$

$$C_{02} = -8\lambda'\lambda^2(1 - \delta - 2v)(\lambda d(\lambda'^2 - \lambda^2)(1 - v) - \lambda'^2(1 - v) + \lambda^2 v + \delta B9) \quad (C.3)$$

$$C_{03} = (\lambda' + \lambda)^2(\lambda' - \lambda'v - \lambda v - \lambda \delta)(B2 + \delta B10) \quad (C.4)$$

$$C_{04} = C_{03} \quad (C.5)$$

$$C_{05} = C_{01} - 8\lambda^2 d(\lambda'^4 - \lambda^4)(1 - v)(1 - \delta - 2v) \quad (C.6)$$

$$C_{06} = C_{02} + 16\lambda'\lambda^3 d(\lambda'^2 - \lambda^2)(1 - v)(1 - \delta - 2v) \quad (C.7)$$

$$C_{07} = C_{00} \quad (C.8)$$

$$C_{10} = -\delta(\lambda' - \lambda)(-\lambda'(\lambda' - 2\lambda)(1 - v) + \lambda^2 v)(B1 + \delta B7) \quad (C.9)$$

$$C_{11} = (2d^2\lambda'v + 2dv - 2d^2\lambda'v^2 - 4dv^2 - 2d\delta v)\lambda^6 + (\delta v + 6d^2\lambda'^2 v - \delta^2 v - 2\delta\lambda' dv^2 + 8d\lambda'v - 2\delta v^2 + 2\delta\lambda'd - 4d^2\lambda'^2 v^2 - 2d^2\lambda'^2 - 2d\lambda' - 8d\lambda'v^2 - 2\delta\lambda' dv)\lambda^5 + (-4dv^2\lambda'^2 + 6\delta\lambda'v + 2\delta^2\lambda' - 4d\delta\lambda'^2 v^2 + 2d^2\lambda'^3 v - 2\delta\lambda' + \delta^2\lambda'v + 6dv\lambda'^2 - 2d^2\lambda'^3 - 3\delta\lambda'v^2 - 2d\delta\lambda'^2 + 6d\delta\lambda'^2 v - 2d\lambda'^2 - 2\delta^2\lambda'v^2)\lambda^4 + (-5\delta^2\lambda'^2 + 4d^2\lambda'^4 v^2 - 6d^2\lambda'^4 v + 2\delta\lambda'^3 dv - \delta\lambda'^2 - 4\delta^2\lambda'^2 v^2 - 2\delta\lambda'^3 d + 9\delta^2 v\lambda'^2 + \delta v\lambda'^2 + 2d^2\lambda'^4)\lambda^3 + (-4d^2\lambda'^5 v + 4d\delta\lambda'^4 v^2 + 4d\delta\lambda'^4 + 2\delta\lambda'^3 v^2 + 3\delta^2\lambda'^3 v + 2d^2\lambda'^5 - 3\delta^2\lambda'^3 + 2d^2\lambda'^5 v^2 - 2\delta\lambda'^3 v - 8d\delta\lambda'^4 v)\lambda^2 + (-8\delta^2\lambda'^4 v - 4\delta\lambda'^5 dv + 2\delta\lambda'^5 d + 2\delta\lambda'^4 + 2\delta v^2\lambda'^4 + 4\delta^2\lambda'^4 v^2 - 4\delta v\lambda'^4 + 4\delta^2\lambda'^4 + 2\delta\lambda'^5 dv^2)\lambda - 2\delta\lambda'^5 v + \delta\lambda'^5 v^2 - 4\delta^2\lambda'^5 v + 2\delta^2\lambda'^5 v^2 + \delta\lambda'^5 + 2\delta^2\lambda'^5 \quad (C.10)$$

$$C_{12} = (8d\lambda'v^2 - 4d\lambda'v + 8\delta\lambda' dv^2 - 10\delta\lambda' dv + 6\delta\lambda' d)\lambda^5 + (-10\delta^2\lambda' - 6\delta\lambda'v + 20\delta^2\lambda'v + 8\delta\lambda'v^2 - 8\delta^2\lambda'v^2)\lambda^4 + (-10\delta\lambda'^3 d - 12\lambda'^3 dv - 8\delta\lambda'^3 v^2 d + 8\lambda'^3 dv^2 + 18\delta\lambda'^3 dv + 4\lambda'^3 d)\lambda^3 + (-12\delta^2\lambda'^3 v + 6\delta\lambda'^3 + 8\delta\lambda'^3 v^2 + 8\delta^2\lambda'^3 v^2 - 14\delta\lambda'^3 v + 4\delta^2\lambda'^3)\lambda^2 \quad (C.11)$$

$$C_{13} = 0 \quad (C.12)$$

$$C_{14} = \delta(\lambda' + \lambda)(\lambda'(\lambda' + 2\lambda)(1 - v) - \lambda^2 v)(B2 + \delta B10) \quad (C.13)$$

$$\begin{aligned} C_{15} = & (-2dv + 2d\delta v + 4dv^2 + 2d^2\lambda'v - 2d^2\lambda'v^2)\lambda^6 + (-\delta v + 2\delta v^2 - 2\delta\lambda'dv + \delta^2 v \\ & + 2d^2\lambda'^2 - 2d\lambda' + 4d^2\lambda'^2 v^2 - 2\delta\lambda'dv^2 - 8d\lambda'v^2 - 6d^2\lambda'^2 v + 2\delta\lambda'd + 8d\lambda'v)\lambda^5 \\ & + (2d\delta\lambda'^2 - 2\delta^2\lambda'v^2 - 3\delta\lambda'v^2 + 2d^2\lambda'^3 v + 6\delta\lambda'v - 2d^2\lambda'^3 + 2d\lambda'^2 + 2\delta^2\lambda' \\ & + 4dv^2\lambda'^2 - 6dv\lambda'^2 + \delta^2\lambda'v + 4d\delta\lambda'^2 v^2 - 6d\delta\lambda'^2 v - 2\delta\lambda')\lambda^4 + (5\delta^2\lambda'^2 \\ & + 6d^2\lambda'^4 v + 4\delta^2\lambda'^2 v^2 - 4d^2\lambda'^4 v^2 - 9\delta^2 v\lambda'^2 + 2\delta\lambda'^3 dv - 2\delta\lambda'^3 d - 2d^2\lambda'^4 \\ & - \delta v\lambda'^2 + \delta\lambda'^2)\lambda^3 + (-3\delta^2\lambda'^3 + 8d\delta\lambda'^4 v + 2\delta\lambda'^3 v^2 + 2d^2\lambda'^5 v^2 - 2\delta\lambda'^3 v \\ & - 4d\delta\lambda'^4 v^2 - 4d\delta\lambda'^4 - 4d^2\lambda'^5 v + 3\delta^2\lambda'^3 v + 2d^2\lambda'^5)\lambda^2 + (2\delta\lambda'^5 d + 4\delta v\lambda'^4 \\ & - 4\delta^2\lambda'^4 - 2\delta\lambda'^4 - 4\delta\lambda'^5 dv - 4\delta^2\lambda'^4 v^2 + 2\delta\lambda'^5 dv^2 - 2\delta v^2\lambda'^4 \\ & + 8\delta^2\lambda'^4 v)\lambda - 2\delta\lambda'^5 v - 4\delta^2\lambda'^5 v + 2\delta^2\lambda'^5 v^2 + \delta\lambda'^5 v^2 + 2\delta^2\lambda'^5 + \delta\lambda'^5 \end{aligned} \quad (C.14)$$

$$C_{16} = 2\lambda'\lambda^2\delta((1 - v)(\lambda'^2(1 + 2\delta) + \lambda d(\lambda'^2 - \lambda^2)) + \lambda^2(2\delta v - 3\delta - v)) \quad (C.15)$$

$$C_{17} = 0 \quad (C.16)$$

$$C_{20} = (\lambda' - \lambda)^2(\lambda' - \lambda'v + \lambda v)(B1 + \delta B7) \quad (C.17)$$

$$\begin{aligned} C_{21} = & (-2v^2 - 2d\lambda'v^2 + v + 2d\lambda'v - \delta v)\lambda^5 + (\delta\lambda' - 4dv^2\lambda'^2 + 6dv\lambda'^2 \\ & - 3\delta\lambda'v - 2d\lambda'^2 + 4\lambda'v - 5\lambda'v^2 - \lambda')\lambda^4 + (4v\lambda'^2 - 2\lambda'^3 d - \lambda'^2 - 4v^2\lambda'^2 - \delta v\lambda'^2 \\ & + 2\lambda'^3 dv)\lambda^3 + (\delta\lambda'^3 - 2\lambda'^3 v^2 + 2d\lambda'^4 - \delta\lambda'^3 v + 4\lambda'^4 v^2 d \\ & - 6d\lambda'^4 v + 2\lambda'^3 v)\lambda^2 + (-4d\lambda'^5 v + 2d\lambda'^5 v^2 + 2d\lambda'^5 - 2\lambda'^4 v^2 - 2\delta v\lambda'^4 \\ & + 2\delta\lambda'^4 + 3\lambda'^4 v - \lambda'^4)\lambda + 2\lambda'^5 v - \lambda'^5 v^2 - \lambda'^5 \end{aligned} \quad (C.18)$$

$$\begin{aligned} C_{22} = & (-12d\lambda'v + 4d\lambda' + 8d\lambda'v^2)\lambda^5 + (22\delta\lambda'v + 16\lambda'v^2 - 8\lambda'v - 8\delta\lambda'v^2 \\ & - 6\delta\lambda')\lambda^4 + (12\lambda'^3 dv - 4\lambda'^3 d - 8\lambda'^3 dv^2)\lambda^3 + (16\lambda'^3 v^2 - 2\delta\lambda'^3 \\ & - 6\delta\lambda'^3 v - 24\lambda'^3 v + 8\lambda'^3 + 8\delta\lambda'^3 v^2)\lambda^2 \end{aligned} \quad (C.19)$$

$$C_{23} = 0 \quad (C.20)$$

$$C_{24} = (\lambda' + \lambda)^2(\lambda' - \lambda'v - \lambda v)(B2 + \delta B10) \quad (C.21)$$

$$C_{25} = C_{00} + (\lambda' - \lambda)((\lambda' - \lambda)(\lambda' - \lambda'v + \lambda v)B6 + \delta(B14 - B15)) \quad (C.22)$$

$$C_{26} = 2\lambda'\lambda^2\delta(1 - v)(\lambda'^2 - \lambda^2) \quad (C.23)$$

$$C_{27} = 0 \quad (C.24)$$

$$C_{30} = 0 \quad (C.25)$$

$$\begin{aligned} C_{31} = & (2d^2\lambda'v + 2dv - 2d^2\lambda'v^2 - 4dv^2 - 2d\delta v)\lambda^6 + (-\delta v + \delta^2 v + 8d\lambda'v^2 - 8d\lambda'v \\ & + 2\delta\lambda'dv + 2\delta v^2 + 4d^2\lambda'^2v^2 + 2d\lambda' + 2\delta\lambda'dv^2 - 6d^2\lambda'^2v + 2d^2\lambda'^2 - 2\delta\lambda'd)\lambda^5 \\ & + (-4dv^2\lambda'^2 + 6\delta\lambda'v + 2\delta^2\lambda' - 4d\delta\lambda'^2v^2 + 2d^2\lambda'^3v - 2\delta\lambda' + \delta^2\lambda'v \\ & + 6dv\lambda'^2 - 2d^2\lambda'^3 - 3\delta\lambda'v^2 - 2d\delta\lambda'^2 + 6d\delta\lambda'^2v - 2d\lambda'^2 - 2\delta^2\lambda'v^2)\lambda^4 \\ & + (\delta\lambda'^2 - 4d^2\lambda'^4v^2 + 5\delta^2\lambda'^2 + 2\delta\lambda'^3d - 2d^2\lambda'^4 - \delta v\lambda'^2 + 6d^2\lambda'^4v \\ & - 2\delta\lambda'^3dv - 9\delta^2v\lambda'^2 + 4\delta^2\lambda'^2v^2)\lambda^3 + (-4d^2\lambda'^5v + 4d\delta\lambda'^4v^2 + 4d\delta\lambda'^4 \\ & + 2\delta\lambda'^3v^2 + 3\delta^2\lambda'^3v + 2d^2\lambda'^5 - 3\delta^2\lambda'^3 + 2d^2\lambda'^5v^2 - 2\delta\lambda'^3v \\ & - 8d\delta\lambda'^4v)\lambda^2 + (-4\delta^2\lambda'^4v^2 + 8\delta^2\lambda'^4v - 4\delta^2\lambda'^4 + 4\delta v\lambda'^4 + 4\delta\lambda'^5dv \\ & - 2\delta v^2\lambda'^4 - 2\delta\lambda'^5dv^2 - 2\delta\lambda'^4 - 2\delta\lambda'^5d)\lambda - 4\delta^2\lambda'^5v + 2\delta^2\lambda'^5v^2 \\ & - 2\delta\lambda'^5v + 2\delta^2\lambda'^5 + \delta\lambda'^5 + \delta\lambda'^5v^2 \end{aligned} \quad (C.26)$$

$$C_{32} = -2\lambda'\lambda^2\delta((\lambda d - \delta)(\lambda'^2 - \lambda^2)(1 - v) - \lambda'^2(1 - v) + \lambda^2v + \delta B9) \quad (C.27)$$

$$C_{33} = C_{14} \quad (C.28)$$

$$C_{34} = 0 \quad (C.29)$$

$$\begin{aligned} C_{35} = & (-2dv + 2d\delta v + 4dv^2 + 2d^2\lambda'v - 2d^2\lambda'v^2)\lambda^6 + (\delta v - \delta^2 v + 8d\lambda'v^2 \\ & - 8d\lambda'v + 2\delta\lambda'dv - 2\delta v^2 - 4d^2\lambda'^2v^2 + 2d\lambda' + 2\delta\lambda'dv^2 + 6d^2\lambda'^2v - 2d^2\lambda'^2 \\ & - 2\delta\lambda'd)\lambda^5 + (2d\delta\lambda'^2 - 2\delta^2\lambda'v^2 - 3\delta\lambda'v^2 + 2d^2\lambda'^3v + 6\delta\lambda'v \\ & - 2d^2\lambda'^3 + 2d\lambda'^2 + 2\delta^2\lambda' + 4dv^2\lambda'^2 - 6dv\lambda'^2 + \delta^2\lambda'v + 4d\delta\lambda'^2v^2 \\ & - 6d\delta\lambda'^2v - 2\delta\lambda')\lambda^4 + (-\delta\lambda'^2 + 4d^2\lambda'^4v^2 - 5\delta^2\lambda'^2 + 2\delta\lambda'^3d \\ & + 2d^2\lambda'^4 + \delta v\lambda'^2 - 6d^2\lambda'^4v - 2\delta\lambda'^3dv + 9\delta^2v\lambda'^2 - 4\delta^2\lambda'^2v^2)\lambda^3 \\ & + (-3\delta^2\lambda'^3 + 8d\delta\lambda'^4v + 2\delta\lambda'^3v^2 + 2d^2\lambda'^5v^2 - 2\delta\lambda'^3v - 4d\delta\lambda'^4v^2 \\ & - 4d\delta\lambda'^4 - 4d^2\lambda'^5v + 3\delta^2\lambda'^3v + 2d^2\lambda'^5)\lambda^2 + (4\delta^2\lambda'^4v^2 - 8\delta^2\lambda'^4v \\ & + 4\delta^2\lambda'^4 - 4\delta v\lambda'^4 + 4\delta\lambda'^5dv + 2\delta v^2\lambda'^4 - 2\delta\lambda'^5dv^2 + 2\delta\lambda'^4 \\ & - 2\delta\lambda'^5d)\lambda - 4\delta^2\lambda'^5v + 2\delta^2\lambda'^5v^2 - 2\delta\lambda'^5v + 2\delta^2\lambda'^5 + \delta\lambda'^5 + \delta\lambda'^5v^2 \end{aligned} \quad (C.30)$$

$$\begin{aligned} C_{36} = & (-6\delta\lambda'd + 4d\lambda'v + 10\delta\lambda'dv - 8\delta\lambda'dv^2 - 8d\lambda'v^2)\lambda^5 + (-10\delta^2\lambda' \\ & - 6\delta\lambda'v + 20\delta^2\lambda'v + 8\delta\lambda'v^2 - 8\delta^2\lambda'v^2)\lambda^4 + (-8\lambda'^3dv^2 - 4\lambda'^3d \\ & + 10\delta\lambda'^3d + 12\lambda'^3dv + 8\delta\lambda'^3v^2d - 18\delta\lambda'^3dv)\lambda^3 + (-12\delta^2\lambda'^3v \\ & + 6\delta\lambda'^3 + 8\delta\lambda'^3v^2 + 8\delta^2\lambda'^3v^2 - 14\delta\lambda'^3v + 4\delta^2\lambda'^3)\lambda^2 \end{aligned} \quad (C.31)$$

$$\begin{aligned} C_{37} = & (-\delta v + 2\delta v^2 + \delta^2 v)\lambda^5 + (6\delta\lambda'v - 5\delta^2\lambda'v + 2\delta^2\lambda' + 2\delta^2\lambda'v^2 \\ & - 5\delta\lambda'v^2 - 2\delta\lambda')\lambda^4 + (11\delta^2v\lambda'^2 + \delta\lambda'^2 - 5\delta v\lambda'^2 + 4\delta\lambda'^2v^2 \\ & - 7\delta^2\lambda'^2 - 4\delta^2\lambda'^2v^2)\lambda^3 + (3\delta^2\lambda'^3 + 2\delta\lambda'^3v - 2\delta\lambda'^3v^2 \\ & - 3\delta^2\lambda'^3v)\lambda^2 + (2\delta v^2\lambda'^4 - 8\delta^2\lambda'^4v - 4\delta v\lambda'^4 + 4\delta^2\lambda'^4v^2 + 2\delta\lambda'^4 + 4\delta^2\lambda'^4)\lambda \\ & + 2\delta\lambda'^5v - \delta\lambda'^5v^2 + 4\delta^2\lambda'^5v - 2\delta^2\lambda'^5v^2 - 2\delta^2\lambda'^5 - \delta\lambda'^5 \end{aligned} \quad (C.32)$$

$$C_{40} = 0 \quad (\text{C.33})$$

$$C_{41} = C_{25} - 2C_{00} - 2\delta(\lambda' - \lambda)(B_{20} + B_{21}) \quad (\text{C.34})$$

$$C_{42} = -C_{26} \quad (\text{C.35})$$

$$C_{43} = 0 \quad (\text{C.36})$$

$$C_{44} = 0 \quad (\text{C.37})$$

$$C_{45} = C_{21} - 2C_{03} - 2\delta(\lambda' + \lambda)(B_{20} - B_{21}) \quad (\text{C.38})$$

$$C_{46} = 4\lambda'\lambda^2(1 - 2\nu)(2\lambda^2\nu - 2\lambda'^2(1 - \nu) - \lambda d(\lambda'^2 - \lambda^2)(1 - \nu)) - \delta B_{16} \quad (\text{C.39})$$

$$C_{47} = -C_{20} \quad (\text{C.40})$$

$$C_{50} = \delta(\lambda' - \lambda)(B_1 + \delta B_7) \quad (\text{C.41})$$

$$C_{51} = -4\lambda^2 d(1 - 2\nu)B_3 + 2\delta(B_{22} - 2\lambda^4 d(1 - 2\nu)) \quad (\text{C.42})$$

$$\begin{aligned} C_{52} = & (-2d\delta\nu + 2d\nu - 4d\nu^2)\lambda^4 + (-8d\lambda'\nu^2 - 2d\lambda' + 4\delta\nu^2 + 2\delta\lambda'd - 4\delta\lambda'd\nu - 2\delta\nu \\ & + 2\delta^2\nu + 8d\lambda'\nu)\lambda^3 + (-4d\nu^2\lambda'^2 - 4\delta^2\lambda' + 6d\nu\lambda'^2 + 8\delta\lambda'\nu^2 + 2d\delta\lambda'^2 - 2d\lambda'^2 \\ & + 4\delta^2\lambda'\nu - 12\delta\lambda'\nu - 2d\delta\lambda'^2\nu + 4\delta\lambda')\lambda^2 + (4\delta\lambda'^2\nu^2 + 2\delta\lambda'^2 \\ & + 2\delta^2\nu\lambda'^2 - 6\delta\nu\lambda'^2 - 2\delta^2\lambda'^2)\lambda \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

$$C_{53} = \delta(\lambda' + \lambda)(B_2 + \delta B_{10}) \quad (\text{C.44})$$

$$C_{54} = 0 \quad (\text{C.45})$$

$$C_{55} = 0 \quad (\text{C.46})$$

$$C_{56} = 2\lambda(1 - \delta - 2\nu)(-\lambda d(\lambda' - \lambda)(\lambda' - \lambda'\nu + \lambda\nu) + \delta B_{24}) \quad (\text{C.47})$$

$$C_{57} = 0 \quad (\text{C.48})$$

$$C_{60} = 0 \quad (\text{C.49})$$

$$C_{61} = 0 \quad (\text{C.50})$$

$$C_{62} = -C_{56} + 4\lambda\delta(1 - \delta - 2\nu)B_{24} \quad (\text{C.51})$$

$$C_{63} = 0 \quad (\text{C.52})$$

$$C_{64} = C_{53} \quad (\text{C.53})$$

$$C_{65} = -4\lambda^2 d(1 - 2\nu)B_4 + 2\delta(2\lambda^4 d(1 - 2\nu) + B_{22}) \quad (\text{C.54})$$

$$C_{66} = -C_{52} - 4\lambda\delta(1 - \delta - 2\nu)B_{23} \quad (\text{C.55})$$

$$C_{67} = C_{50} \quad (\text{C.56})$$

$$(\text{C.57})$$

Onde os coeficientes B_n , com $n = 1, 2, 3, \dots, 23$, são:

$$B1 = \lambda^2 v - (1 - v)(\lambda'^2 + \lambda' \lambda + \lambda^2) \quad (C.58)$$

$$B2 = -\lambda'^2 + \lambda' \lambda - \lambda^2 + \lambda'^2 v - \lambda' \lambda v + 2\lambda^2 v \quad (C.59)$$

$$B3 = (\lambda'^3 d - \lambda^2 - \lambda' \lambda^2 d)(1 - v) + \lambda^2 v \quad (C.60)$$

$$B4 = (\lambda'^3 d + \lambda^2 - \lambda' \lambda^2 d)(1 - v) - \lambda^2 v \quad (C.61)$$

$$B5 = 2\lambda' \lambda d(\lambda' - \lambda)(1 - v) \quad (C.62)$$

$$B6 = 2\lambda' \lambda d(\lambda' + \lambda)(1 - v) \quad (C.63)$$

$$B7 = -2\lambda'(\lambda' + \lambda)(1 - v) + \lambda^2 \quad (C.64)$$

$$B8 = 4\lambda^6 d(1 - v) + 4\lambda' \lambda^4(1 - 4v + v^2 - \delta(3 - 3v + v^2)) \\ + 4\lambda'^3 \lambda^2(1 - v)(2 + \delta(3 - 2v)) - 4\lambda'^4 \lambda^2 d(1 - v) - 4\lambda'^5(1 + \delta)(1 - v)^2 \quad (C.65)$$

$$B9 = -\lambda'^2(1 - v) + \lambda^2(2 - v) \quad (C.66)$$

$$B10 = -2\lambda'(\lambda' - \lambda)(1 - v) + \lambda^2 \quad (C.67)$$

$$B11 = \lambda^5(1 - \delta - 2v) - 2\lambda^6 d v + 2\lambda'^4 \lambda(1 - v)^2(1 + 2\lambda d + \delta) \\ - \lambda'^2 \lambda^3(1 - v)(1 + 2\lambda d(1 - 2v) + \lambda \delta(5 - 4v)) \quad (C.68)$$

$$B12 = \lambda' \lambda^4(2\lambda d(1 - v - v^2) + \delta(2 + v - v^2) - 2 + 6v - 3v^2) \\ - \lambda'^3 \lambda^2(1 - v)(2\lambda d + 3\delta + 2v) + \lambda'^5(1 - v)^2(1 + 2\lambda d + 2\delta) \quad (C.69)$$

$$B14 = -\lambda^4(1 - \delta - 2v) - 2\lambda'^2 \lambda^2(2 - v)(1 - v) + 2\lambda'^4(1 - v)^2 \quad (C.70)$$

$$B15 = \lambda' \lambda^3(\delta + v)(3 - 2v) + \lambda'^3 \lambda(1 - v)(1 - 2\delta - 2v) \quad (C.71)$$

$$B16 = -2\lambda' \lambda^2(\lambda'^2(1 - v)(1 + 4v) + \lambda^2(3 - 11v + 4v^2)) \quad (C.72)$$

$$B17 = \lambda^4 v(1 - \delta - 2v) + 2\lambda' \lambda^4 d(1 - v - v^2) - \lambda'^2 \lambda^2(1 - v)(1 + \delta(5 - 4v)) \\ - 2\lambda'^3 \lambda^2 d(1 - v) + 2\lambda'^4(1 + 2\delta)(1 - v)^2 + 2\lambda'^5 d(1 - v)^2 \quad (C.73)$$

$$B18 = -\lambda^4 v(1 - \delta - 2v) + 2\lambda' \lambda^4 d(1 - v - v^2) - \lambda'^2 \lambda^2(1 - v)(1 + \delta(5 - 4v)) \\ - 2\lambda'^3 \lambda^2 d(1 - v) - 2\lambda'^4(1 + 2\delta)(1 - v)^2 + 2\lambda'^5 d(1 - v)^2 \quad (C.74)$$

$$B19 = -\lambda'^2(1 - v)(3 - 4v + 2\delta(1 - 2v)) + \lambda^2(v(3 - 4v) + \delta(5 - 10v + 4v^2)) \quad (C.75)$$

$$B20 = B14 \quad (C.76)$$

$$B21 = -B15 \quad (C.77)$$

$$B22 = \lambda' B19 \quad (C.78)$$

$$B23 = -\lambda'(\lambda' + 2\lambda)(1 - v) + \lambda^2 v \quad (C.79)$$

$$B24 = -\lambda'(\lambda' - 2\lambda)(1 - v) + \lambda^2 v \quad (C.80)$$

ANEXO D – COEFICIENTES DA SOLUÇÃO DINÂMICA PARA SOLOS COM ESPESSURA FINITA

Os coeficientes A_{ijk} são:

$$A_{001} = B_{123} \cdot C_{456} \quad (\text{D.1})$$

$$A_{002} = B_{456} \cdot C_{263} \quad (\text{D.2})$$

$$A_{003} = B_{142} \cdot C_{356} \quad (\text{D.3})$$

$$A_{004} = B_{125} \cdot C_{346} \quad (\text{D.4})$$

$$A_{005} = B_{162} \cdot C_{345} \quad (\text{D.5})$$

$$A_{006} = B_{341} \cdot C_{265} \quad (\text{D.6})$$

$$A_{007} = B_{153} \cdot C_{246} \quad (\text{D.7})$$

$$A_{008} = B_{361} \cdot C_{245} \quad (\text{D.8})$$

$$A_{009} = B_{154} \cdot C_{236} \quad (\text{D.9})$$

$$A_{010} = B_{461} \cdot C_{235} \quad (\text{D.10})$$

$$A_{011} = B_{561} \cdot C_{234} \quad (\text{D.11})$$

$$A_{012} = B_{243} \cdot C_{156} \quad (\text{D.12})$$

$$A_{013} = B_{352} \cdot C_{145} \quad (\text{D.13})$$

$$A_{014} = B_{452} \cdot C_{136} \quad (\text{D.14})$$

$$A_{015} = B_{462} \cdot C_{135} \quad (\text{D.15})$$

$$A_{016} = B_{265} \cdot C_{134} \quad (\text{D.16})$$

$$A_{017} = B_{345} \cdot C_{126} \quad (\text{D.17})$$

$$A_{018} = B_{463} \cdot C_{125} \quad (\text{D.18})$$

$$A_{019} = B_{356} \cdot C_{124} \quad (\text{D.19})$$

$$A_{020} = B_{456} \cdot C_{123} \quad (\text{D.20})$$

$$A_{101} = A_{102} = A_{103} = A_{104} = A_{105} = A_{106} = A_{107} = A_{108} = A_{109} = A_{110} = 0 \quad (\text{D.21})$$

$$A_{111} = B_{243} \cdot (a_5g_6 - a_6g_5) \quad (\text{D.22})$$

$$A_{112} = -B_{253} \cdot (a_4g_6 - a_6g_4) \quad (\text{D.23})$$

$$A_{113} = B_{263} \cdot (a_4g_5 - a_5g_4) \quad (\text{D.24})$$

$$A_{114} = B_{254} \cdot (a_3g_6 - a_6g_3) \quad (\text{D.25})$$

$$A_{115} = -B_{462} \cdot (-a_5g_3 + a_3g_5) \quad (\text{D.26})$$

$$A_{116} = B_{652} \cdot (a_3g_4 - g_3a_4) \quad (\text{D.27})$$

$$A_{117} = -B_{453} \cdot (a_2g_6 - a_6g_2) \quad (\text{D.28})$$

$$A_{118} = B_{463} \cdot (a_2g_5 - a_5g_2) \quad (\text{D.29})$$

$$A_{119} = -B_{653} \cdot (a_2g_4 - g_2a_4) \quad (\text{D.30})$$

$$A_{120} = B_{464} \cdot (a_2g_3 - g_2a_3) \quad (\text{D.31})$$

$$A_{201} = A_{202} = A_{203} = A_{204} = A_{211} = A_{212} = A_{213} = A_{214} = A_{215} = A_{216} = 0 \quad (\text{D.32})$$

$$A_{205} = -B_{134} \cdot (a_5g_6 - a_6g_5) \quad (\text{D.33})$$

$$A_{206} = B_{135} \cdot (a_4g_6 - a_6g_4) \quad (\text{D.34})$$

$$A_{207} = -B_{163} \cdot (a_4g_5 - a_5g_4) \quad (\text{D.35})$$

$$A_{208} = -B_{154} \cdot (a_3g_6 - a_6g_3) \quad (\text{D.36})$$

$$A_{209} = B_{164} \cdot (-a_5g_3 + a_3g_5) \quad (\text{D.37})$$

$$A_{210} = -B_{165} \cdot (a_3g_4 - g_3a_4) \quad (\text{D.38})$$

$$A_{217} = B_{354} \cdot (a_1g_6 - a_6g_1) \quad (\text{D.39})$$

$$A_{218} = -B_{364} \cdot (a_1g_5 - a_5g_1) \quad (\text{D.40})$$

$$A_{219} = B_{365} \cdot (a_1g_4 - g_1a_4) \quad (\text{D.41})$$

$$A_{220} = -B_{465} \cdot (a_1g_3 - g_1a_3) \quad (\text{D.42})$$

$$A_{301} = A_{305} = A_{306} = A_{307} = A_{311} = A_{312} = A_{313} = A_{317} = A_{318} = A_{319} = 0 \quad (\text{D.43})$$

$$A_{302} = B_{241} \cdot (a_5g_6 - a_6g_5) \quad (\text{D.44})$$

$$A_{303} = -B_{125} \cdot (a_4g_6 - a_6g_4) \quad (\text{D.45})$$

$$A_{304} = B_{126} \cdot (a_4g_5 - a_5g_4) \quad (\text{D.46})$$

$$A_{308} = B_{154} \cdot (a_2g_6 - a_6g_2) \quad (\text{D.47})$$

$$A_{309} = -B_{164} \cdot (a_2g_5 - a_5g_2) \quad (\text{D.48})$$

$$A_{310} = B_{165} \cdot (a_2g_4 - g_2a_4) \quad (\text{D.49})$$

$$A_{314} = -B_{245} \cdot (a_1g_6 - a_6g_1) \quad (\text{D.50})$$

$$A_{315} = B_{246} \cdot (a_1g_5 - a_5g_1) \quad (\text{D.51})$$

$$A_{316} = -B_{256} \cdot (a_1g_4 - g_1a_4) \quad (\text{D.52})$$

$$A_{320} = B_{465} \cdot (a_1g_2 - g_1a_2) \quad (\text{D.53})$$

$$A_{402} = A_{405} = A_{408} = A_{409} = A_{411} = A_{414} = A_{415} = A_{417} = A_{418} = A_{420} = 0 \quad (\text{D.54})$$

$$A_{401} = -B_{123} \cdot (a_5g_6 - a_6g_5) \quad (\text{D.55})$$

$$A_{403} = B_{125} \cdot (a_3g_6 - a_6g_3) \quad (\text{D.56})$$

$$A_{404} = -B_{126} \cdot (a_3g_5 - a_5g_3) \quad (\text{D.57})$$

$$A_{406} = -B_{135} \cdot (-a_6g_2 + a_2g_6) \quad (\text{D.58})$$

$$A_{407} = B_{163} \cdot (-a_5g_2 + a_2g_5) \quad (\text{D.59})$$

$$A_{410} = -B_{165} \cdot (a_2g_3 - g_2a_3) \quad (\text{D.60})$$

$$A_{412} = B_{235} \cdot (a_1g_6 - a_6g_1) \quad (\text{D.61})$$

$$A_{413} = -B_{236} \cdot (a_1g_5 - a_5g_1) \quad (\text{D.62})$$

$$A_{416} = B_{256} \cdot (a_1g_3 - g_1a_3) \quad (\text{D.63})$$

$$A_{419} = B_{365} \cdot (a_1g_2 - g_1a_2) \quad (\text{D.64})$$

$$A_{503} = A_{506} = A_{508} = A_{510} = A_{512} = A_{514} = A_{516} = A_{517} = A_{519} = A_{520} = 0 \quad (\text{D.65})$$

$$A_{501} = B_{123} \cdot (a_4g_6 - a_6g_4) \quad (\text{D.66})$$

$$A_{502} = -B_{241} \cdot (a_3g_6 - a_6g_3) \quad (\text{D.67})$$

$$A_{504} = B_{126} \cdot (a_3g_4 - g_3a_4) \quad (\text{D.68})$$

$$A_{505} = B_{134} \cdot (-a_6g_2 + a_2g_6) \quad (\text{D.69})$$

$$A_{507} = -B_{163} \cdot (a_2g_4 - g_2a_4) \quad (\text{D.70})$$

$$A_{509} = B_{164} \cdot (a_2g_3 - g_2a_3) \quad (\text{D.71})$$

$$A_{511} = -B_{342} \cdot (a_1g_6 - a_6g_1) \quad (\text{D.72})$$

$$A_{513} = B_{236} \cdot (a_1g_4 - g_1a_4) \quad (\text{D.73})$$

$$A_{515} = -B_{246} \cdot (a_1g_3 - g_1a_3) \quad (\text{D.74})$$

$$A_{518} = B_{364} \cdot (a_1g_2 - g_1a_2) \quad (\text{D.75})$$

$$A_{604} = A_{607} = A_{609} = A_{610} = A_{613} = A_{615} = A_{616} = A_{618} = A_{619} = A_{620} = 0 \quad (\text{D.76})$$

$$A_{601} = -B_{123} \cdot (a_4g_5 - a_5g_4) \quad (\text{D.77})$$

$$A_{602} = B_{241} \cdot (a_3g_5 - a_5g_3) \quad (\text{D.78})$$

$$A_{603} = -B_{125} \cdot (a_3g_4 - g_3a_4) \quad (\text{D.79})$$

$$A_{605} = -B_{134} \cdot (-a_5g_2 + a_2g_5) \quad (\text{D.80})$$

$$A_{606} = B_{135} \cdot (a_2g_4 - g_2a_4) \quad (\text{D.81})$$

$$A_{608} = -B_{154} \cdot (a_2g_3 - g_2a_3) \quad (\text{D.82})$$

$$A_{611} = B_{342} \cdot (a_1g_5 - a_5g_1) \quad (\text{D.83})$$

$$A_{612} = -B_{235} \cdot (a_1g_4 - g_1a_4) \quad (\text{D.84})$$

$$A_{614} = B_{245} \cdot (a_1g_3 - g_1a_3) \quad (\text{D.85})$$

$$A_{617} = -B_{354} \cdot (a_1g_2 - g_1a_2) \quad (\text{D.86})$$

$$B_{123} = -\lambda_1 f_1 b_2 + b_2 \lambda_3 f_3 - \lambda_2 f_2 b_3 - b_1 \lambda_3 f_3 + \lambda_1 f_1 b_3 + b_1 \lambda_2 f_2 \quad (\text{D.87})$$

$$B_{125} = -\lambda_1 f_1 b_2 + b_1 \lambda_2 f_2 + \lambda_1 f_1 b_5 - b_1 \lambda_5 f_5 + b_2 \lambda_5 f_5 - \lambda_2 f_2 b_5 \quad (\text{D.88})$$

$$B_{126} = -\lambda_1 f_1 b_2 + b_1 \lambda_2 f_2 + \lambda_1 f_1 b_6 + b_2 \lambda_6 f_6 - \lambda_2 f_2 b_6 - b_1 \lambda_6 f_6 \quad (\text{D.89})$$

$$B_{134} = b_1 \lambda_3 f_3 + \lambda_1 f_1 b_4 - \lambda_3 f_3 b_4 - b_1 \lambda_4 f_4 - \lambda_1 f_1 b_3 + b_3 \lambda_4 f_4 \quad (\text{D.90})$$

$$B_{135} = b_1 \lambda_3 f_3 - b_1 \lambda_5 f_5 - \lambda_1 f_1 b_3 + \lambda_1 f_1 b_5 - \lambda_3 f_3 b_5 + b_3 \lambda_5 f_5 \quad (\text{D.91})$$

$$B_{142} = \lambda_1 f_1 b_4 - \lambda_1 f_1 b_2 + b_2 \lambda_4 f_4 - \lambda_2 f_2 b_4 - b_1 \lambda_4 f_4 + b_1 \lambda_2 f_2 \quad (\text{D.92})$$

$$B_{153} = \lambda_1 f_1 b_5 + b_1 \lambda_3 f_3 - \lambda_1 f_1 b_3 - \lambda_3 f_3 b_5 + b_3 f_5 \lambda_5 - b_1 \lambda_5 f_5 \quad (\text{D.93})$$

$$B_{154} = \lambda_1 f_1 b_5 - b_1 \lambda_5 f_5 - \lambda_4 f_4 b_5 + b_4 f_5 \lambda_5 - \lambda_1 f_1 b_4 + b_1 \lambda_4 f_4 \quad (\text{D.94})$$

$$B_{162} = \lambda_1 f_1 b_6 - b_1 \lambda_6 f_6 + b_2 \lambda_6 f_6 + b_1 \lambda_2 f_2 - \lambda_2 f_2 b_6 - \lambda_1 f_1 b_2 \quad (\text{D.95})$$

$$B_{163} = -b_1 \lambda_6 f_6 + \lambda_1 f_1 b_6 + b_3 \lambda_6 f_6 - \lambda_1 f_1 b_3 + b_1 \lambda_3 f_3 - \lambda_3 f_3 b_6 \quad (\text{D.96})$$

$$B_{164} = -b_1 \lambda_6 f_6 + \lambda_1 f_1 b_6 + b_4 \lambda_6 f_6 - \lambda_1 f_1 b_4 + b_1 \lambda_4 f_4 - \lambda_4 f_4 b_6 \quad (\text{D.97})$$

$$B_{165} = -b_1 \lambda_6 f_6 + \lambda_1 f_1 b_6 + b_5 \lambda_6 f_6 - \lambda_1 f_1 b_5 + b_1 \lambda_5 f_5 - \lambda_5 f_5 b_6 \quad (\text{D.98})$$

$$B_{235} = -\lambda_2 f_2 b_3 - \lambda_3 f_3 b_5 + b_3 \lambda_5 f_5 - b_2 \lambda_5 f_5 + b_2 \lambda_3 f_3 + \lambda_2 f_2 b_5 \quad (\text{D.99})$$

$$B_{236} = b_2 \lambda_3 f_3 - b_2 \lambda_6 f_6 + b_3 \lambda_6 f_6 - \lambda_3 f_3 b_6 + \lambda_2 f_2 b_6 - \lambda_2 f_2 b_3 \quad (\text{D.100})$$

$$B_{241} = b_2 \lambda_4 f_4 + \lambda_1 f_1 b_4 - \lambda_2 f_2 b_4 - b_1 \lambda_4 f_4 - \lambda_1 f_1 b_2 + b_1 \lambda_2 f_2 \quad (\text{D.101})$$

$$B_{243} = \lambda_2 f_2 b_4 - \lambda_2 f_2 b_3 + b_3 f_4 \lambda_4 - \lambda_3 f_3 b_4 - b_2 \lambda_4 f_4 + b_2 \lambda_3 f_3 \quad (\text{D.102})$$

$$B_{245} = -\lambda_2 f_2 b_4 - \lambda_4 f_4 b_5 - b_2 \lambda_5 f_5 + b_4 \lambda_5 f_5 + b_2 \lambda_4 f_4 + \lambda_2 f_2 b_5 \quad (\text{D.103})$$

$$B_{246} = -\lambda_2 f_2 b_4 - \lambda_4 f_4 b_6 - b_2 \lambda_6 f_6 + b_4 \lambda_6 f_6 + b_2 \lambda_4 f_4 + \lambda_2 f_2 b_6 \quad (\text{D.104})$$

$$B_{253} = \lambda_2 f_2 b_5 + b_3 f_5 \lambda_5 + b_2 \lambda_3 f_3 - \lambda_2 f_2 b_3 - b_2 \lambda_5 f_5 - \lambda_3 f_3 b_5 \quad (\text{D.105})$$

$$B_{254} = \lambda_2 f_2 b_5 + b_4 f_5 \lambda_5 + b_2 \lambda_4 f_4 - \lambda_2 f_2 b_4 - b_2 \lambda_5 f_5 - \lambda_4 f_4 b_5 \quad (\text{D.106})$$

$$B_{256} = -\lambda_2 f_2 b_5 - \lambda_5 f_5 b_6 - b_2 \lambda_6 f_6 + b_5 \lambda_6 f_6 + b_2 \lambda_5 f_5 + \lambda_2 f_2 b_6 \quad (\text{D.107})$$

$$B_{263} = \lambda_2 f_2 b_6 + b_3 \lambda_6 f_6 + b_2 \lambda_3 f_3 - \lambda_2 f_2 b_3 - b_2 \lambda_6 f_6 - \lambda_3 f_3 b_6 \quad (\text{D.108})$$

$$B_{265} = \lambda_2 f_2 b_6 - \lambda_2 f_2 b_5 - \lambda_5 f_5 b_6 + b_5 \lambda_6 f_6 + b_2 \lambda_5 f_5 - b_2 \lambda_6 f_6 \quad (\text{D.109})$$

$$B_{341} = -\lambda_3 f_3 b_4 + b_1 \lambda_3 f_3 + b_3 f_4 \lambda_4 + \lambda_1 f_1 b_4 - \lambda_1 f_1 b_3 - b_1 \lambda_4 f_4 \quad (\text{D.110})$$

$$B_{342} = -\lambda_3 f_3 b_4 - b_2 \lambda_4 f_4 + b_3 \lambda_4 f_4 - \lambda_2 f_2 b_3 + b_2 \lambda_3 f_3 + \lambda_2 f_2 b_4 \quad (\text{D.111})$$

$$B_{345} = -\lambda_3 f_3 b_4 - b_3 f_5 \lambda_5 + \lambda_3 f_3 b_5 - \lambda_4 f_4 b_5 + b_4 f_5 \lambda_5 + b_3 f_4 \lambda_4 \quad (\text{D.112})$$

$$B_{352} = b_3 f_5 \lambda_5 - \lambda_3 f_3 b_5 - b_2 \lambda_5 f_5 + b_2 \lambda_3 f_3 + \lambda_2 f_2 b_5 - \lambda_2 f_2 b_3 \quad (\text{D.113})$$

$$B_{354} = -\lambda_3 f_3 b_4 - b_3 f_5 \lambda_5 + \lambda_3 f_3 b_5 - \lambda_4 f_4 b_5 + b_4 f_5 \lambda_5 + b_3 f_4 \lambda_4 \quad (\text{D.114})$$

$$B_{356} = -\lambda_3 f_3 b_5 + b_3 f_5 \lambda_5 - \lambda_5 f_5 b_6 + b_5 \lambda_6 f_6 - b_3 \lambda_6 f_6 + \lambda_3 f_3 b_6 \quad (\text{D.115})$$

$$B_{361} = -\lambda_3 f_3 b_6 + \lambda_1 f_1 b_6 - b_1 \lambda_6 f_6 + b_3 \lambda_6 f_6 + b_1 \lambda_3 f_3 - \lambda_1 f_1 b_3 \quad (\text{D.116})$$

$$B_{364} = b_4 \lambda_6 f_6 - b_3 \lambda_6 f_6 + \lambda_3 f_3 b_6 - \lambda_4 f_4 b_6 - \lambda_3 f_3 b_4 + b_3 f_4 \lambda_4 \quad (\text{D.117})$$

$$B_{365} = -\lambda_3 f_3 b_5 + b_3 f_5 \lambda_5 - \lambda_5 f_5 b_6 + b_5 \lambda_6 f_6 - b_3 \lambda_6 f_6 + \lambda_3 f_3 b_6 \quad (\text{D.118})$$

$$B_{452} = -\lambda_4 f_4 b_5 + b_2 \lambda_4 f_4 + b_4 f_5 \lambda_5 + \lambda_2 f_2 b_5 - b_2 \lambda_5 f_5 - \lambda_2 f_2 b_4 \quad (\text{D.119})$$

$$B_{453} = -\lambda_3 f_3 b_4 - b_3 f_5 \lambda_5 + \lambda_3 f_3 b_5 - \lambda_4 f_4 b_5 + b_4 f_5 \lambda_5 + b_3 f_4 \lambda_4 \quad (\text{D.120})$$

$$B_{456} = -\lambda_4 f_4 b_5 - \lambda_5 f_5 b_6 - b_4 \lambda_6 f_6 + \lambda_4 f_4 b_6 + b_5 \lambda_6 f_6 + b_4 f_5 \lambda_5 \quad (\text{D.121})$$

$$B_{461} = b_4 \lambda_6 f_6 - \lambda_4 f_4 b_6 + b_1 \lambda_4 f_4 + \lambda_1 f_1 b_6 - \lambda_1 f_1 b_4 - b_1 \lambda_6 f_6 \quad (\text{D.122})$$

$$B_{462} = -\lambda_4 f_4 b_6 + b_2 \lambda_4 f_4 - \lambda_2 f_2 b_4 + b_4 \lambda_6 f_6 - b_2 \lambda_6 f_6 + \lambda_2 f_2 b_6 \quad (\text{D.123})$$

$$B_{463} = b_4 \lambda_6 f_6 - b_3 \lambda_6 f_6 + \lambda_3 f_3 b_6 - \lambda_4 f_4 b_6 - \lambda_3 f_3 b_4 + b_3 f_4 \lambda_4 \quad (\text{D.124})$$

$$B_{464} = -\lambda_4 f_4 b_5 - \lambda_5 f_5 b_6 - b_4 \lambda_6 f_6 + \lambda_4 f_4 b_6 + b_5 \lambda_6 f_6 + b_4 f_5 \lambda_5 \quad (\text{D.125})$$

$$B_{465} = -\lambda_4 f_4 b_5 - \lambda_5 f_5 b_6 - b_4 \lambda_6 f_6 + \lambda_4 f_4 b_6 + b_5 \lambda_6 f_6 + b_4 f_5 \lambda_5 \quad (\text{D.126})$$

$$B_{561} = b_5 \lambda_6 f_6 - \lambda_1 f_1 b_5 - b_1 \lambda_6 f_6 + b_1 \lambda_5 f_5 - \lambda_5 f_5 b_6 + \lambda_1 f_1 b_6 \quad (\text{D.127})$$

$$B_{652} = -\lambda_5 f_5 b_6 + \lambda_2 f_2 b_6 - \lambda_2 f_2 b_5 + b_5 \lambda_6 f_6 + b_2 \lambda_5 f_5 - b_2 \lambda_6 f_6 \quad (\text{D.128})$$

$$B_{653} = -\lambda_3 f_3 b_5 + b_3 f_5 \lambda_5 - \lambda_5 f_5 b_6 + b_5 \lambda_6 f_6 - b_3 \lambda_6 f_6 + \lambda_3 f_3 b_6 \quad (\text{D.129})$$

$$C_{123} = -a_1 g_2 f_3 + f_1 g_2 a_3 + a_1 f_2 g_3 - f_1 a_2 g_3 - g_1 f_2 a_3 + g_1 a_2 f_3 \quad (\text{D.130})$$

$$C_{124} = g_1 a_2 f_4 + a_1 f_2 g_4 - f_1 a_2 g_4 - a_1 g_2 f_4 + f_1 g_2 a_4 - g_1 f_2 a_4 \quad (\text{D.131})$$

$$C_{125} = g_1 a_2 f_5 + a_1 f_2 g_5 - a_1 g_2 f_5 - f_1 a_2 g_5 + f_1 g_2 a_5 - g_1 f_2 a_5 \quad (\text{D.132})$$

$$C_{126} = -f_1 a_2 g_6 + f_1 g_2 a_6 - g_1 f_2 a_6 - a_1 g_2 f_6 + g_1 a_2 f_6 + a_1 f_2 g_6 \quad (\text{D.133})$$

$$C_{134} = -f_1 a_3 g_4 + f_1 g_3 a_4 - a_1 g_3 f_4 + a_1 f_3 g_4 - g_1 f_3 a_4 + g_1 a_3 f_4 \quad (\text{D.134})$$

$$C_{135} = a_1 f_3 g_5 - g_1 f_3 a_5 - f_1 a_3 g_5 - a_1 g_3 f_5 + f_1 g_3 a_5 + g_1 a_3 f_5 \quad (\text{D.135})$$

$$C_{136} = a_1 f_3 g_6 - a_1 g_3 f_6 + g_1 a_3 f_6 + f_1 g_3 a_6 - g_1 f_3 a_6 - f_1 a_3 g_6 \quad (\text{D.136})$$

$$C_{145} = g_1 a_4 f_5 - a_1 g_4 f_5 - g_1 f_4 a_5 + f_1 g_4 a_5 - f_1 a_4 g_5 + a_1 f_4 g_5 \quad (\text{D.137})$$

$$C_{146} = g_1 a_4 f_6 - a_1 g_4 f_6 - f_1 a_4 g_6 + f_1 g_4 a_6 - g_1 f_4 a_6 + a_1 f_4 g_6 \quad (\text{D.138})$$

$$C_{156} = -a_1 g_5 f_6 + a_1 g_6 f_5 - f_1 a_5 g_6 + f_1 a_6 g_5 + g_1 a_5 f_6 - g_1 a_6 f_5 \quad (\text{D.139})$$

$$C_{234} = a_2 f_3 g_4 - f_2 a_3 g_4 + f_2 g_3 a_4 - a_2 g_3 f_4 - g_2 f_3 a_4 + g_2 a_3 f_4 \quad (\text{D.140})$$

$$C_{235} = -g_2 f_3 a_5 - a_2 g_3 f_5 + f_2 g_3 a_5 + g_2 a_3 f_5 - f_2 a_3 g_5 + a_2 f_3 g_5 \quad (\text{D.141})$$

$$C_{236} = f_2 g_3 a_6 - f_2 a_3 g_6 + g_2 a_3 f_6 + a_2 f_3 g_6 - a_2 g_3 f_6 - g_2 f_3 a_6 \quad (\text{D.142})$$

$$C_{245} = -g_2 f_4 a_5 + g_2 a_4 f_5 + f_2 g_4 a_5 - f_2 a_4 g_5 - a_2 g_4 f_5 + a_2 f_4 g_5 \quad (\text{D.143})$$

$$C_{246} = g_2 a_4 f_6 + f_2 a_6 g_4 - g_2 f_4 a_6 - a_2 g_4 f_6 + a_2 f_4 g_6 - f_2 a_4 g_6 \quad (\text{D.144})$$

$$C_{265} = a_2 g_6 f_5 + f_2 a_6 g_5 + g_2 a_5 f_6 - g_2 a_6 f_5 - f_2 a_5 g_6 - a_2 g_5 f_6 \quad (\text{D.145})$$

$$C_{345} = -a_3 g_4 f_5 + a_3 f_4 g_5 - f_3 a_4 g_5 + f_3 g_4 a_5 + g_3 a_4 f_5 - g_3 f_4 a_5 \quad (\text{D.146})$$

$$C_{346} = g_3 a_4 f_6 + f_3 a_6 g_4 - a_3 g_4 f_6 - f_3 a_4 g_6 + a_3 f_4 g_6 - g_3 f_4 a_6 \quad (\text{D.147})$$

$$C_{356} = -a_3 g_5 f_6 + a_3 g_6 f_5 - f_3 a_5 g_6 + f_3 a_6 g_5 + g_3 a_5 f_6 - g_3 a_6 f_5 \quad (\text{D.148})$$

$$C_{456} = -a_4 g_5 f_6 + a_4 g_6 f_5 + g_4 a_5 f_6 - g_4 a_6 f_5 - f_4 a_5 g_6 + f_4 a_6 g_5 \quad (\text{D.149})$$

ANEXO E – VALORES TÍPICOS DOS PARÂMETROS DO SOLO

Neste anexo estão apresentados alguns parâmetros característicos de entrada nos modelos analíticos como o módulo de elasticidade E , o coeficiente de Poisson ν , o coeficiente de permeabilidade k e a porosidade ϕ . Na Tabela (10) estão disponíveis valores típicos do módulo de elasticidade do solo de acordo com o seu tipo. O módulo de elasticidade se relaciona com o

Tabela 10 – Valores típicos do módulo de elasticidade de solos E .

Tipo de Solo	Módulo de Elasticidade E (MPa)
Argila muito mole	0,3-3
Argila mole	2-4
Argila média	4,5-9
Argila dura	7-20
Argila arenosa	30-42,5
Solos granulares	10-160
Loess	15-60
Areia siltosa	5-20
Areia fofa	10-25
Areia compactada	50-100
Pedregulhos denso	80-200
Pedregulhos fofo	50-140
Rocha argilosa	140-1400
Silte	2-20

Fonte: Hurtado (2007).

módulo cisalhante do solo pela Equação (5.8).

Os valores característicos do coeficiente de Poisson são dados de acordo com a Tabela (11).

Tabela 11 – Valores típicos do coeficiente de Poisson de solos ν .

Tipo de solo	Coefficiente de Poisson ν
Argila saturada	0,4-0,5
Argila não saturada	0,1-0,3
Argila arenosa	0,2-0,3
Limo	0,3-0,35
Areia compactada	0,2-0,4
Areias grossas	0,15
Areias finas	0,25
Rocha	0,1-0,4
Loess	0,1-0,3

Fonte: Hurtado (2007).

Para solos sedimentares, pode-se considerar como ordem de grandeza os valores do coeficiente de permeabilidade apresentados pela Tabela (12).

Tabela 12 – Valores típicos do coeficiente de permeabilidade de solos k .

Tipo de solo	Coeficiente de permeabilidade k (m/s)
Argilas	$< 10^{-9}$
Siltes	$10^{-6} - 10^{-9}$
Areias argilosas	10^{-7}
Areias finas	10^{-5}
Areias médias	10^{-4}
Areias grossas	$> 10^{-3}$

Fonte: Pinto (2006).

Os índices de vazios máximo e mínimo dependem das características da areia. Valores típicos são dados pela Tabela (13). O Índice de vazios se relaciona com a porosidade do solo de acordo com a equação abaixo:

$$\phi = \frac{e}{1+e} \quad (\text{E.1})$$

Tabela 13 – Valores típicos do índice de vazios do solo e .

Descrição da areia	Índice de vazios e
Areia uniforme de grãos angulares	0,7-1,1
Areia bem graduada de grãos angulares	0,45-0,75
Areia uniforme de grãos arredondados	0,45-0,75
Areia bem graduada de grãos arredondados	0,35-0,65

Fonte: Pinto (2006).