

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM RECURSOS HÍDRICOS E SANEAMENTO

USINA HIDRELÉTRICA FUNCIONANDO EM REGIME DE PONTA
MOTORIZAÇÃO X FLUTUAÇÕES DE NÍVEIS
"APLICAÇÃO DE MODELOS NUMÉRICOS
IMPLÍCITOS PARA FLUXO VARIADO"

MÊUSER JORGE SILVA VALENÇA
TESE DE MESTRADO

ORIENTADOR: Prof. Dr. ANTÔNIO
E.L. LANNA

PORTO ALEGRE

1 9 8 7

DEDICATÓRIA

À MINHA MULHER - CLORIS - PELO SEU INCENTIVO

AGRADECIMENTOS

À CHESF, PELA OPORTUNIDADE QUE ME DEU, PARA A ELABORAÇÃO DES
TE TRABALHO.

AO CORPO DOCENTE DO IPH, PELOS ENSINAMENTOS MINISTRADOS.

AO PROF. ANTÔNIO E.L. LANNA, POR SUA LOUVÁVEL PARTICIPAÇÃO CO
MO ORIENTADOR.

AO PROF. CARLOS E.M. TUCCI, PELA COOPERAÇÃO NO TRABALHO.

Í N D I C E

	PÁG.
1. <u>INTRODUÇÃO</u>	12
1.1 - OBJETIVO DO TRABALHO	13
1.2 - RELEVÂNCIA DO TRABALHO	14
2. <u>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</u>	15
2.1 - GENERALIDADES	16
2.2 - ABORDAGENS GERAIS	30
2.3 - ABORDAGEM ESPECÍFICA PARA DIFERENÇAS FINITAS	31
2.3.1 - Esquemas Explícitos	31
2.3.1.1 - Esquema Leap-Frog	32
2.3.1.2 - Esquema Difusivo	33
2.3.2 - Esquemas Implícitos	34
2.3.2.1 - Esquema Implícito Cheio (Stoker)	37
2.3.2.2 - Esquema de Preissmann	39
2.3.2.3 - Esquema de Verwey	40
2.3.2.4 - Esquema de Abbot-Ionescu	41
2.3.2.5 - Esquema de Amein e Fang	43
2.3.2.6 - Esquema de Amein e Chu	46
3. <u>METODOLOGIA</u>	48
3.1 - ESQUEMA IMPLÍCITO NÃO LINEAR	49
3.2 - ESQUEMA IMPLÍCITO LINEAR-PREISSMANN	57
4. <u>APLICAÇÃO DOS MODELOS HIDRODINÂMICOS</u>	58
4.1 - CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA	59
4.2 - PRIMEIRA ETAPA DOS ESTUDOS	60
4.2.1 - Calibração do Modelo	60
4.2.2 - Verificação do Modelo	61
4.2.3 - Aplicação	61
4.3 - SEGUNDA ETAPA DOS ESTUDOS	63

	PÁG.
4.3.1 - Aplicação	63
5. <u>CONCLUSÕES</u>	65
5.1 - Descrição do Sistema Fluvial e Aspectos Sócio-Eco- nômicos.	66
5.2 - Análise Dos Resultados	67
5.3 - Análise Das Hipóteses Básicas	68
5.4 - Modelo Utilizado	68
6. - <u>PROGRAMA COMPUTACIONAL</u>	70
7. - <u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	75
8. - <u>ABSTRACTS</u>	78
9. - <u>ANEXOS</u>	80

RESUMO

MÊUSER VALENÇA - USINA HIDRELÉTRICA FUNCIONANDO EM...

A Usina Hidrelétrica de Xingó, pertencente ao sistema CHESF, em construção, localiza-se no trecho inferior do rio São Francisco. Os estudos econômicos-energéticos realizados para este aproveitamento mostram que a supermotorização, tendo em vista suas características peculiares é a melhor forma de se atender aos picos da demanda.

Nessas condições de funcionamento poderá existir conflitos entre os usos integrados do rio, uma vez que esta Usina Hidrelétrica, funcionando em regime de ponta, poderá causar flutuações de níveis incompatíveis com a navegação e/ou áreas agriculturáveis e/ou cidades localizadas à jusante da mesma.

Para se avaliar o comportamento do fluxo neste trecho do rio São Francisco e verificar-se a necessidade, ou não, de construir-se uma outra barragem a jusante para absorver as flutuações de nível, foi utilizado um modelo hidrodinâmico, que resolve as equações de Saint Venant por um método implícito não linear de diferenças finitas. Para efeito de comparação dos resultados utilizou-se também um modelo implícito linear (Preissmann).

LISTA DE SÍMBOLOS

(L = COMPRIMENTO; M = MASSA; F = FORÇA; T = TEMPO)

- A ÁREA MOLHADA DA SEÇÃO TRANSVERSAL PERPENDICULAR AO FLUXO (L^2)
- C_r NÚMERO DE COURANT
- C CELEBRIDADE DA ONDA (LT^{-1})
- C_o CELEBRIDADE MÉDIA DA ONDA (LT^{-1})
- F_f FORÇA DE FRICÇÃO, ATUANDO SOBRE O VOLUME DE CONTROLE (F)
- F'_{p1} , F'_{p2} , F''_{p1} , F''_{p2} FORÇAS DE PRESSÃO ATUANDO SOBRE O VOLUME DE CONTROLE (F)
- F_r NÚMERO DE FROUD
- g ACELERAÇÃO DEVIDO A GRAVIDADE (LT^{-2})
- I_1 , I_2 MOMENTOS INTEGRAIS DA SEÇÃO TRANSVERSAL (L^3 e L^3)
- \tilde{i} ÍNDICE DE UM PONTO COMPUTACIONAL
- K COEFICIENTE DE CONDUÇÃO DO CANAL ($L^3 T^{-1}$)
- L LIMITE DE JUSANTE DO DOMÍNIO COMPUTACIONAL;
 COMPRIMENTO DE ONDA (L)
- M_f FLUXO LÍQUIDO MOMENTUM ENTRANDO NO VOLUME DE CONTROLE (F.T)
- ΔM INCREMENTO LÍQUIDO DE MOMENTUM CONTIDO NO VOLUME DE CONTROLE
- n COEFICIENTE DE RUGOSIDADE DE MANNING ($L^{-1/3} T$)

MÊUSER VALENÇA - USINA HIDRELÉTRICA FUNCIONANDO EM...

P	PERÍMETRO MOLHADO (L)
Q	VAZÃO ($L^3 T^{-1}$)
q_z	VAZÃO LATERAL POR UNIDADE DE COMPRIMENTO ($L^2 T^{-1}$)
R	RAIO HIDRÁULICO A/P (L)
R_1	FATOR DE AMPLIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA COMPARADA COM A SOLUÇÃO EXATA, POR INTERVALO DE TEMPO
R_2	FATOR DE DISPERSÃO NUMÉRICA DA SOLUÇÃO NUMÉRICA COMPARADA COM A EXATA, POR INTERVALO DE TEMPO
S_f	DECLIVIDADE DA LINHA DE ENERGIA NA DIREÇÃO x (DECLIVIDADE DE FRICÇÃO)
S_o	DECLIVIDADE DE FUNDO DO CANAL NA DIREÇÃO x
T	LARGURA DE TOPO DA SEÇÃO TRANSVERSAL (L); PERÍODO DA ONDA (T)
t	TEMPO (T)
Δt	INTERVALO DE TEMPO DE CÁLCULO (T)
V	VELOCIDADE D'ÁGUA NA DIREÇÃO x (LT^{-1})
V_o	VELOCIDADE MÉDIA DO ESCOAMENTO (LT^{-1})
x	DISTÂNCIA AO LONGO DO EIXO DO CANAL (L)
Δx	DISTÂNCIA ENTRE SEÇÕES (L)
Y	PROFUNDIDADE D'ÁGUA (L)
Y_o	PROFUNDIDADE MÉDIA DO ESCOAMENTO (L)
Z	COTA DO NÍVEL D'ÁGUA (L)
Z_b	ELEVAÇÃO DO FUNDO (L)

MÉUSER VALENÇA - USINA HIDRELÉTRICA FUNCIONANDO EM...

- η DISTÂNCIA DO CENTRÓIDE DA SEÇÃO TRANSVERSAL PARA A SUPERFÍCIE LIVRE (L)
- θ COEFICIENTE DE PONDERAÇÃO NA APROXIMAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS DAS FUNÇÕES E SUAS DERIVADAS
- ρ DENSIDADE DA MASSA D'ÁGUA (ML^{-3})
- σ LARGURA DA SEÇÃO TRANSVERSAL (L)
- ∂ DERIVADA PARCIAL

MEUSER VALENÇA - USINA HIDRELÉTRICA FUNCIONANDO EM...

1. INTRODUÇÃO

1.1 - OBJETIVO DO TRABALHO

Este trabalho tem como objetivo determinar como se estabelecem as flutuações do nível d'água a jusante de um aproveitamento hidro-elétrico cuja operação é voltada para o atendimento energético aos picos de demanda.

Este tipo de operação, ordinariamente conhecido como "Regime de Ponta", está sempre associado a variações abruptas nos valores das vazões liberadas, o que exigiu, durante a elaboração deste trabalho, uma análise bastante acurada, do ponto de vista teórico, das metodologias até então apresentadas na literatura especializada, o que nos permitiu escolher para utilização aquela metodologia que melhor viesse a caracterizar tal tipo de problema.

Uma vez que o nosso trabalho é voltado para a operação em Regime de Ponta, faz-se necessário definir, desde logo, o que é uma usina de ponta, sua importância, etc.

Em condições normais o consumo de energia elétrica numa dada região pode variar ao longo do ano (em geral é maior no inverno), durante a semana (o consumo reduz-se aos domingos), e até no decurso do dia.

À noite o consumo de energia é reduzido, sendo mínimo durante a madrugada, cresce durante o dia e tem sua ponta máxima entre as 17 e 22 horas.

Esta variação do consumo ao longo do dia pode ser representada num gráfico que tem como ordenadas o consumo em kW (ou similar) e como abscissas o tempo em horas; a este gráfico dá-se o nome de diagrama de carga de uma dada região.

A relação entre a carga média e a de ponta (máxima) obtidas deste diagrama chama-se fator de carga. A área do diagrama que fica acima da linha de carga mínima chama-se "Carga de Ponta" e a carga situada abaixo da mesma chama-se "Carga de Base". Nessas condições uma Usina Hidrelétrica é chamada

"De Ponta" ou "De Base", conforme a faixa do diagrama de carga para a qual foi projetado o seu atendimento.

A motorização de uma Usina Hidrelétrica pertencente a um parque gerador, em geral é estabelecida para atender o fator de carga do sistema. Em casos específicos, todavia, as características de uma dada Usina (tais como alta queda, pequena variação de volume em relação à queda, etc.) podem conduzi-la à operação na ponta do diagrama de carga. Outras Usinas ligadas ao mesmo sistema elétrico poderão até dispor de potências, menores, desde que o conjunto de Usinas, como um todo, atenda satisfatoriamente ao fator de carga do sistema.

1.2 - RELEVÂNCIA DO TRABALHO

Uma Usina Hidrelétrica funcionando em regime de ponta, como visto anteriormente, é aquela que tem como objetivo gerar energia nas horas de maior solicitação energética no parque gerador. A operação desta Usina, portanto, dependendo do grau de motorização poderá causar flutuações de níveis, incompatíveis com a navegação e/ou inundações de áreas agriculturáveis e/ou cidades, à jusante da mesma.

A relevância do trabalho do ponto de vista teórico consiste em aplicar um modelo numérico implícito não linear que permite caracterizar problemas de fluxo abrangendo do abrupto ao gradualmente variado, para determinação das flutuações de níveis, comparando-se este resultados com aqueles obtidos através de um modelo linearizado. Do ponto de vista prático a importância do trabalho está em permitir que as autoridades competentes conhecendo as flutuações de níveis e suas consequências, decidam em função de aspectos sociais políticos e econômicos quais as etapas de motorização.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 - GENERALIDADES

As equações de fluxo variado sobre as quais as simulações numéricas são baseadas, consistem em duas equações que controlam a conservação da massa e momentum. Estas equações são conhecidas como equações de Saint Venant, e não podem ser resolvidas analiticamente a não ser após simplificações que restringem sua aplicabilidade. Portanto, os métodos numéricos são usualmente empregados para permitir a utilização destas equações na sua forma completa.

As equações de Saint Venant apesar de ditas completas, são baseadas nas seguintes hipóteses básicas:

a) O fluxo é uni-dimensional; a velocidade é uniforme mente distribuída na seção transversal.

b) A curvatura das linhas de fluxo é pequena e a aceleração vertical é desprezada, a pressão é hidrostática.

c) A declividade do fundo do canal é pequena de forma que o cosseno do ângulo feito com a horizontal pode ser considerado igual a unidade.

d) A declividade de fricção é determinada por uma fórmula de regime permanente uniforme.

Para derivação das equações de Saint Venant vamos utilizar um volume de controle, para o qual usaremos os princípios de conservação de massa e momentum, assumindo que todas as hipóteses anteriores são válidas (Cunge 1980).

Consideremos um volume de controle no plano (x,t) entre as seções x_1 e x_2 , e entre os tempos t_1 e t_2 , como mostra-se na Figura 1.

- Equação da Conservação de Massa

A massa líquida que afluí ao volume de controle é defi

nida pela integral no tempo da diferença entre a descarga em massa (ρQ) entrando e saindo no volume de controle:

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\rho VA)_{x_1} - (\rho VA)_{x_2}] dt \quad (2.1)$$

Esta afluência líquida deve ser igual, também a variação do armazenamento no trecho durante o mesmo intervalo de tempo.

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho A)_{t_2} - (\rho A)_{t_1}] dx \quad (2.2)$$

Onde:

- ρ = Densidade d'água
- V = Velocidade uniforme na seção transversal
- A = Área molhada da seção transversal
- $Q = V.A =$ Vazão

Para a densidade constante, a relação integral da equação da continuidade de massa é:

$$\int_{t_1}^{t_2} [(Q)_{x_2} - (Q)_{x_1}] dt + \int_{x_1}^{x_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] dx = 0 \quad (2.3)$$

- Equação da Conservação de Momentum

A conservação de momentum na direção x requer que a variação de momentum no volume de controle entre os tempos t_1 e t_2 , seja igual a soma da afluência líquida de momentum para dentro deste volume de controle e a integral das forças externas atuando sobre ele, durante o mesmo intervalo de tempo.

O momentum é definido como o produto da massa pela velocidade, e o fluxo de momentum através da seção de fluxo é o produto da descarga em massa (ρQ) pela velocidade, ou seja:

$$\text{Fluxo de Momentum} = \rho Q.V = \rho V.A.V = \rho V^2 A \quad (2.4)$$

O fluxo líquido de momentum para dentro do volume de controle é:

$$(\rho V^2 A)_{x_1} - (\rho V^2 A)_{x_2} \quad (2.5)$$

Portanto, a afluência líquida de momentum (M_f) entre t_1 e t_2 é:

$$M_f = \int_{t_1}^{t_2} [(\rho V^2 A)_{x_1} - (\rho V^2 A)_{x_2}] dt \quad (2.6)$$

O momentum contido no volume de controle em qualquer instante é:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho V A dx \quad (2.7)$$

Logo, o incremento líquido de momentum (ΔM) de t_1 a t_2 é:

$$\Delta M = \int_{x_1}^{x_2} [(\rho V A)_{t_2} - (\rho V A)_{t_1}] dx \quad (2.8)$$

As forças externas importantes consideradas aqui, atuando sobre o volume de controle na direção x são pressão, gravidade e resistência a fricção. A força de pressão F'_p é a diferen

ça entre as forças de pressão F'_{p1} e F'_{p2} , aplicadas nas seções 1 e 2 do trecho, logo

$$F'_{p1} = g \int_0^{y(x)} \rho [y(x) - \eta] \sigma(x, \eta) d\eta \quad (2.9)$$

Onde: η = Profundidade de integração variável ao longo do eixo Z: $y(x, t)$ = Profundidade d'água: $\sigma(x, \eta)$ = Largura da seção transversal: g = aceleração da gravidade

Logo, a integral no tempo da força de pressão resultante é

$$\int_{t1}^{t2} F'_{p} dt = \int_{t1}^{t2} (F'_{p1} - F'_{p2}) dt = g \int_{t1}^{t2} [(\rho I_1)_{x1} - (\rho I_1)_{x2}] dt \quad (2.10)$$

sendo $I_1 = \int_0^{y(x)} [y(x) - \eta] \sigma(x, \eta) d\eta$

Considerando este trecho de canal, com comprimento dx , o incremento da força de pressão devido a variação de largura é representada pelo incremento da área molhada $d\sigma \cdot dM$ para uma dada profundidade $y = y_0$ vezes a distância do seu centróide para a superfície livre $y(x) - \eta$:

$$\rho g \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) dx \cdot d\eta \right]_{y=y_0} \cdot [y(x) - \eta] \quad (2.11)$$

Esta força é então integrada entre $\eta = 0$ e $\eta = y(x)$ para uma dada seção, e de x_1 a x_2 para obter-se a força total atuando

sobre o volume de controle. Portanto, a integral total ao longo do contorno do volume de controle e entre os tempos t_1 e t_2 é:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g \int_0^{y(x)} [y(x) - \eta] \cdot \left[\frac{\partial \sigma(x, \eta)}{\partial x} \right]_{y=y_0} d\eta dx dt \quad (2.12)$$

OU

$$\int_{t_1}^{t_2} F_p^n dt = g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho I_2 dx dt \quad (2.13)$$

onde, $I_2 = \int_0^{y(x)} (y - \eta) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right]_{y=y_0} d\eta$

A força de resistência a fricção F_f é aplicada no volume de controle através da força de cisalhamento ao longo do fundo e margens do canal. Esta força de cisalhamento por unidade de comprimento do canal pode ser expressa por $\rho g A S_f$ ($S_f =$ declividade de fricção), segundo Chow (1959). Logo, a integral no tempo da força de resistência sobre o volume de controle é:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_f dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_f dx dt \quad (2.14)$$

A força F_g devido a gravidade, que é a componente do peso d'

água na direção do escoamento, é evoluída assumindo-se que a declividade do fundo do canal $S_0 = \text{seno } \alpha \approx - \frac{\partial z_b}{\partial x}$ é pequena, logo:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_g dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_0 dx dt \quad (2.15)$$

Portanto, a conservação de momentum nos conduz a:

$$\Delta M = M_f + \int_{t_1}^{t_2} F'_p dt + \int_{t_1}^{t_2} F''_p dt + \int_{t_1}^{t_2} F_g dt - \int_{t_1}^{t_2} F_f dt \quad (2.16)$$

Admitindo-se a densidade ρ constante, podemos ainda escrever:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [(VA)_{t_2} - (VA)_{t_1}] dx &= \int_{t_1}^{t_2} [(V^2A)_{x_1} - (V^2A)_{x_2}] dt \\ &+ g \int_{t_1}^{t_2} [(I1)_{x_1} - (I1)_{x_2}] dt - g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho I_2 dx dt \\ &+ g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} A (S_0 - S_f) dx dt \end{aligned} \quad (2.17)$$

As equações (2.3) e (2.17) são portanto as equações de Saint Venant, na sua forma integral.

As equações de Saint Venant, são entretanto, apresentadas normalmente na sua forma diferencial. As equações na forma diferencial, podem ser obtidas das equações na forma integral se nós assumirmos que as variáveis dependentes são funções contí

nuas n vezes deriváveis. Então, expandindo-se em séries de Taylor, vem:

$$\begin{aligned} (A)_{t_2} &= (A)_{t_1} + \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \\ (Q)_{x_2} &= (Q)_{x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

Considerando-se apenas o termo de primeira ordem, e aplicando o limite quando Δt e Δx aproxima-se de zero, pode-se escrever:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial A}{\partial t} dt dx \quad (2.19)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} [(Q)_{x_2} - (Q)_{x_1}] dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dt$$

Então, a equação da continuidade fica

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right] dt dx = 0 \quad (2.20)$$

OU

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.21)$$

De maneira similar podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 (V^2A)_{x_2} - (V^2A)_{x_1} &= \frac{\partial (V^2A)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial (V^2A)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \\
 (VA)_{t_2} - (VA)_{t_1} &= \frac{\partial Q}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 (Q)}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \quad (2.22) \\
 (I1)_{x_2} - (I1)_{x_1} &= \frac{\partial I_1}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots
 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões (2.22) na equação (2.17), truncando no termo de primeira ordem, e aplicando o limite quando Δt e Δx aproximam-se de zero, resulta:

$$\begin{aligned}
 &\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (V^2A)}{\partial x} \right] dt dx \\
 &= -g \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial I_1}{\partial x} - I_2 - A (S_o - S_f) \right] dt dx \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

OU

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + g I_1 \right) = g A (S_o - S_f) + g I_2 \quad (2.24)$$

As equações (2.21) e (2.24) estão escritas numa forma especial, também chamada forma divergente das equações de Saint Venant.

Para obtermos as equações de Saint Venant, na sua forma usual, vamos continuar o desenvolvimento da equação (2.24), sempre assumindo que as variáveis dependentes são diferenciais, de

tal forma que podemos desenvolver o termo $\frac{\partial (gI_1)}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial x} (g I_1) = g \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y(x)} [y(x) - \eta] \sigma(x, \eta) d\eta \quad (2.25)$$

Aplicando o teorema de Leibniz para diferenciação de uma integral, lembrando que $\sigma(x, y) = T$

e
$$\int_0^{y(x)} \sigma(x, \eta) d\eta = A, \quad \text{resulta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (gI) &= g \frac{\partial y}{\partial x} \int_0^{y(x)} \sigma(x, \eta) d\eta \\ &+ g \int_0^{y(x)} [y(x) - \eta] \left[-\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{h = \text{const}} d\eta \end{aligned} \quad (2.26)$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x} (gI_1) = g A(x) \frac{\partial y}{\partial x} + gI_2 \quad (2.27)$$

Substituindo a equação (2.27) na equação (2.24) obtemos

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial y}{\partial x} = g A (S_0 - S_f) \quad (2.28)$$

Esta é a equação comumente apresentada e utilizada na engenharia prática, também conhecida como equação da dinâmica (conservação de energia).

Das equações de Saint Venant, escritas na sua forma diferencial as seguintes conclusões são fundamentais:

a) Quando as variáveis do fluxo são contínuas, duas representações são possíveis: Conservação de massa e momento ou conservação de massa e energia, e ambas são corretas.

b) Quando as variáveis do fluxo são descontínuas (aparecimento de ondas de choque), as duas representações não são equivalentes e só a representação "conservação de massa e momentum" é correta, pois só a forma divergente é conservativa.

Lax (1954), Abbott (1979), entre outros, têm provado que as soluções fracas de equações diferenciais homogêneas escritas sob a forma divergente tendem para as soluções descontínuas das relações integrais. Portanto, nós podemos esperar que as equações escritas sob a forma divergente tenham uma solução que, para $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, converge para a própria solução de descontinuidade.

A Sogreah, Grenoble (França), em 1964, utilizou as equações de Saint Venant na sua forma divergente, para determinar a altura de uma onda de choque num canal de restituição experimental. O modelo matemático utilizado resolve as equações pelo método de diferenças finitas, utilizando o esquema implícito de Preissmann. O resultado obtido foi comparado com aquele obtido através da fórmula teórica de H. Favre. Nestes estudos a Sogreah conclui que o método dá uma boa representação da onda. A altura calculada é correta, bem como a celebridade média.

As equações da continuidade e da dinâmica, equações (2.21) e (2.28) são muitas vezes modificadas de forma que se apresentem sob a forma de duas variáveis dependentes normalmente utilizadas na prática, vazão (Q) e profundidade (y).

A variável A(y) pode ser eliminada na equação da continuidade, equação (2.21) por

$$\frac{\partial A}{\partial t}(y) = \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2.29)$$

lembrando que $\frac{\partial A}{\partial y} = T(y)$, obtemos

$$\frac{\partial A}{\partial t}(y) = T(y) \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2.30)$$

O sistema de equações fica então

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + T(y) \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial y}{\partial x} = g A (S_0 - S_f) \quad (2.32)$$

A equação da dinâmica, equação (2.32), pode ser ainda modificada, desenvolvendo-se o segundo termo, ou seja

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2.33)$$

e

$$\frac{\partial A}{\partial x} \approx T \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial T}{\partial x} \approx T \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}} \quad (2.34)$$

Substituindo as equações (2.33) e (2.34) na equação (2.32) temos:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + g A (1-F^2) \frac{\partial y}{\partial x} = g A (S_0 - S_f) + \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}} \quad (2.35)$$

Entretanto as equações (2.31) e (2.32) somente são válidas nas regiões do fluxo onde não ocorrem aparecimento de ondas de choque. Quando da ocorrência de ondas de choque dois enfoques básicos são utilizados para tratar o problema da frente de onda:

- a) Pseudoviscosity Methods: Neste método duas abordagens são possíveis: 1) introdução de rugosidade artificial; 2) introdução de uma perda de carga localizada.
- b) Shock Fitting: Neste caso considera-se as equações de Rugoniot-Rankine.

Neste trabalho se necessário considerar-se-á às equações de Saint Venant com a introdução de uma perda de carga localizada conforme sugerido por Fread (1979).

$S_e = \frac{K}{2g\Delta x} (V_i^2 - V_{i+1}^2)$ onde, V_i =velocidade do fluxo na seção i ; V_{i+1} =velocidade do fluxo na seção $i+1$; Δx = distância en

tre as seções; K= coeficiente de proporcionalidade entre 0 e 1. Desta forma as equações de Saint Venant passam a ser:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + T \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial y}{\partial x} - gA (S - S - S) = 0 \quad (2.37)$$

o f e

Considerando outra simplificação como: canal prismático, as equações (2.31) e (2.32) ficam

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{T} \frac{\partial (VA)}{\partial x} = 0 \quad (2.38)$$

e

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} + S_f = 0 \quad (2.39)$$

As equações (2.38) e (2.39) são as formas das equações de Saint Venant geralmente encontradas na literatura de escoamento em canais.

Cada termo na equação (2.39) pode ser considerado como representando uma declividade. Os dois primeiros termos, são os "termos de inércia" ou "declividades da aceleração". O primeiro termo, $\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t}$, representa a declividade da linha de graduação de energia devido as variações da velocidade no tempo. O segundo é a declividade que corresponde as variações da carga de velocidade no espaço. O terceiro termo é a declividade da superfície d'água. O quarto termo representa a declividade de de fricção. Cada um destes termos têm importância relativa diferente, para situações de fluxo diferente, de tal forma que

alguns termos podem ser desprezados para situações específicas, surgindo então os modelos simplificados.

Os modelos simplificados são classificados de acordo com os termos que são desprezados na equação da dinâmica, ou seja:

a) Onda cinemática - em rios com grandes declividades de fundo, sem efeito de jusante com variações de velocidades não muito importante, pode-se desprezar os termos de inércia e pressão ($\partial Y/\partial x$) na equação da dinâmica, de tal forma que esta fica

$$S_f = S_o \quad (2.40)$$

Portanto, o modelo de onda cinemática é aquele que utiliza as seguintes equações:

$$\text{continuidade} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (2.41)$$

$$\text{dinâmica} \quad S_f - S_o = 0 \quad (2.42)$$

Ao considerar-se a declividade de fricção igual a declividade de fundo, as seguintes simplificações são assumidas: a força de gravidade é preponderante; a relação cota descarga é unívoca; a onda cinemática é mais importante do que as pequenas perturbações que se comportam como uma onda dinâmica; não há amortecimento da onda devido a rugosidade.

Na literatura alguns critérios são apresentados para verificar-se a aplicabilidade deste modelo.

$$1) \text{ Critério do número de Froud } (F_r = \frac{V}{\sqrt{gh}})$$

Comparando-se a celeridade de onda cinemática, com a celeridade da onda dinâmica, conclui-se que para $F_r < 3/2$ o modelo é aplicável.

2) Critério do número k

$$k = \frac{S_0 L}{F_0^2 y_0} \quad (2.43)$$

Sendo: S = Declividade de fundo; L = Comprimento do trecho do canal; y_0 = Profundidade média do escoamento $F_0 = \frac{V_0}{\sqrt{g y_0}}$; V_0 =

Velocidade média do escoamento.

Liggett e Woohiser (1967) concluíram que para $k > 20$ o modelo dá boa acuracidade.

3) Critério de Ponce et Alli (1978)

$$\frac{T S_0 V_0}{y_0} \geq 171 \quad (2.44)$$

Sendo: T = Período da onda; V_0 = Velocidade média; y_0 = Profundidade média; S_0 = Declividade de fundo.

Os critérios 2 e 3 foram obtidos através de análise linear, sendo portanto critérios aproximados do uso do modelo. A grande vantagem deste modelo é a sua simplicidade, matemática e computacional.

b) Modelo de difusão - em rios onde o escoamento é tal que a variação de velocidade não é muito importante, pode-se desprezar os termos de inércia, de tal forma que a equação da dinâmica fica

$$\frac{\partial y}{\partial x} + S_f - S_0 = 0 \quad (2.45)$$

Este modelo tem uma maior aplicabilidade que o de onda cinemática, pois é considerado o termo de pressão, o que permite levar em conta efeitos de jusante.

O critério de aplicabilidade dos modelos difusivos, é

apresentado por Ponce et Alli, obtido através de uma análise linear das equações de Saint Venant.

$$T.S_o \sqrt{\frac{g}{y_o}} > 30 \quad (2.46)$$

A vantagem deste método difusivo em relação ao dinâmico completo é o de reduzir o volume de cálculo. Entretanto com a disponibilidade computacional existente, isto não parece ser uma grande vantagem, uma vez que o modelo completo permite analisar as mais variadas situações.

2.2 - ABORDAGENS GERAIS

Os métodos para solução numérica das equações de fluxo variado em rios e canais abertos podem ser classificados como: métodos diretos e método das características. Nos métodos diretos, a representação de diferenças finitas é baseada diretamente nas equações primárias. No método das características o sistema de equações diferenciais é transformado num sistema de equações ordinárias, que é então utilizado para desenvolver a representação de diferenças finitas.

Os esquemas de diferenças finitas usados, quer nos métodos diretos quer no método das características, podem ser classificados de uma maneira geral em explícitos e implícitos. Nos métodos explícitos, obtem-se usualmente, equações algébricas lineares, sendo as variáveis no tempo $t + \Delta t$, calculadas com informações no tempo t , e assim a solução é explícita. Nos métodos implícitos, as equações de diferenças finitas são geralmente equações algébricas não lineares, sendo as variáveis no tempo $t + \Delta t$, calculadas com informações do tempo t e $t + \Delta t$ pela solução de um sistema de equações.

A escolha de um dado método portanto será função de vários fatores como: propriedades numéricas do método, ou seja, estabilidade, consistência e convergência, tipo de onda, tempo, etc.

2.3 - ABORDAGEM ESPECÍFICA PARA DIFERENÇAS FINITAS

2.3.1 - Esquemas Explícitos

Os esquemas explícitos apresentados a seguir têm como vantagem principal seu fácil desenvolvimento matemático e computacional. Entretanto estes esquemas têm grande limitação, quanto a condição de estabilidade, (condição de Courant) ou seja

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{V_0 \pm C_0} \quad (2.47)$$

Sendo:

V_0 = Velocidade média do escoamento

C_0 = Celeridade média da onda

Δt = Intervalo de tempo de cálculo

Δx = Espaçamento entre seções

Esta condição de estabilidade para os esquemas explícitos que serão aqui apresentados, foi obtida através do método de Von Newman. O método de Von Newman utiliza série de Fourier para estabelecer a solução analítica da versão linearizada das equações, pois o método permite analisar, somente, equações lineares.

A acuracidade dos esquemas explícitos também pode ser avaliada através da expansão por séries de Fourier, Leenderstse (1967). Os indicadores de acuracidade usados são duas proporções que representam o erro de amortecimento numérico (Dissipação) e o erro da velocidade calculada pelo esquema numérico que provoca dispersão.

Para os esquemas explícitos, de maneira geral, a condição ideal é de que a condição de Courant ocorra em cada intervalo de cálculo, ou seja

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{V_0 \pm C_0} \quad (2.48)$$

para que não ocorra dispersão ou dissipação.

A consequência principal ao satisfazer a condição de Courant, é a necessidade de intervalos de tempo de cálculo pequenos o que acarreta em muito tempo de computação.

2.3.1.1 - Esquemas Leap-Frog

Este esquema utiliza as seguintes expressões para discretizar as equações da continuidade e da dinâmica (equações 11 e 15).

$$f(x,t) \approx f_i^t \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1}^t - f_{i-1}^t}{2 \Delta x} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_i^{t+1} - f_i^{t-1}}{2 \Delta t} \quad (2.51)$$

Substituindo este esquema nas equações (2.31) e (2.35), resulta

- continuidade

$$\frac{Q_{i+1}^t - Q_{i-1}^t}{2 \Delta x} + T_1^t \frac{(Y_i^{t+1} - Y_i^{t-1})}{2 \Delta t} = 0 \quad (2.52)$$

- dinâmica

$$\begin{aligned} & \frac{Q_i^{t+1} - Q_i^{t-1}}{2 \Delta t} + 2 \frac{Q_i^t}{A_i^t} \frac{(Q_{i+1}^t - Q_{i-1}^t)}{2 \Delta x} + g A_i^t (1-F^2) \frac{(Y_{i+1}^t - Y_{i-1}^t)}{2 \Delta x} \\ & = g A_i^t S_0 - g A_1^t S_{fi}^{t+1} + \left(\frac{Q^2}{A^2} \right)_i^t \left(\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}} \right)_i^t \end{aligned} \quad (2.53)$$

Por razão de estabilidade numérica a declividade da linha de energia S_f é calculada no tempo $t+1$.

As equações (2.52) e (2.53) são portanto utilizadas para calcular as variáveis y e Q , nos pontos interiores, que juntas com as condições de contorno a montante e jusante permitem a solução do sistema de equações. As equações de contorno podem ser estabelecidas através das equações características.

A análise de acuracidade deste método indica que quando a condição de igualdade da equação (2.47) é satisfeita não ocorre dissipação ou dispersão. Entretanto, quando o sinal de menor é que é satisfeito, não ocorre dissipação, porém haverá dispersão.

2.3.1.2 - Esquema Difusivo

Este esquema utiliza as seguintes equações:

$$f(x,t) \cong f_i^t \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \frac{f_{i+1}^t - f_{i-1}^t}{2 \Delta x} \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cong \frac{f_i^{t+1} - \left(\frac{f_{i+1}^t + f_{i-1}^t}{2} \right)}{\Delta t} \quad (2.56)$$

Aplicando esta discretização nas equações (2.36) e (2.37), obtemos:

- continuidade

$$\frac{Q_{i+1}^t - Q_{i-1}^t}{2 \Delta x} + T_i \left[y_i^{t+1} - \frac{y_{i+1}^t + y_{i-1}^t}{2} \right] = qz_i^t \quad (2.57)$$

- dinâmica

$$\frac{Q_i^{t+1} - \frac{(Q_{i+1}^t + Q_{i-1}^t)}{2}}{\Delta t} + 2 \left(\frac{Q}{A} \right)_i \frac{(Q_{i+1}^t - Q_{i-1}^t)}{2 \Delta x}$$

$$\begin{aligned}
 + g A_i^t (1 - F^2) \frac{(Y_{i+1}^t - Y_{i-1}^t)}{2 \Delta x} &= g A_i^t (S_b^t - S_{fi}^t + q_{zi}^t V_i^t) + \\
 + \left(\frac{Q^2}{A^2} \right)_i^t \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_i^t \Big|_{y=cte} &
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

Estas equações que são a solução para os pontos interiores, juntamente com as condições de contorno, que podem ser determinadas através das equações características, permitem a solução do sistema de equações.

2.3.2 - Esquemas Implícitos

Os esquemas implícitos apesar de exigirem uma formulação matemática e computacional mais sofisticada, apresentam menores limitações, permitindo intervalos de tempo de cálculo maiores. Estes esquemas são os mais populares e os mais utilizados atualmente em trabalhos práticos, principalmente os de quatro pontos como veremos adiante.

Estes esquemas são classificados de acordo com o tipo de discretização e quanto a linearidade. O modelo tem formulação linear quando os coeficientes do sistema de equações não dependem das variáveis dependentes, em caso contrário não linear.

Os esquemas de quatro pontos como o próprio nome diz, são aqueles que utilizam quatro valores para discretizar os termos das equações da continuidade e da dinâmica no plano distância-tempo, ver Figura 2, a seguir.

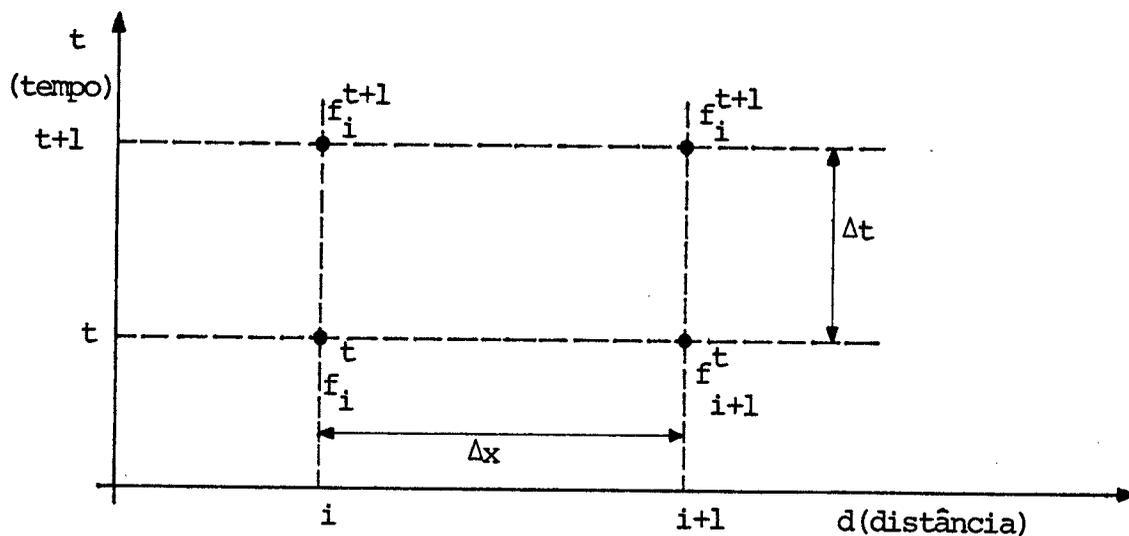


FIGURA 2 - ESQUEMA DE QUATRO PONTOS

As Equações de Discretização são:

$$f(x,t) = \frac{\theta}{2} (f_{i+1}^{t+1} + f_i^{t+1}) + \frac{(1-\theta)}{2} (f_{i+1}^t + f_i^t) \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (f_{i+1}^{t+1} - f_i^{t+1}) + \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (f_{i+1}^t - f_i^t) \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1}^{t+1} + f_i^{t+1} - f_{i+1}^t - f_i^t}{2 \Delta t} \quad (2.61)$$

Onde:

θ = Fator de ponderação estabelecido em função da estabilidade e acuracidade da solução numérica.

Price (1974) fazendo um estudo comparativo entre quatro métodos numéricos concluiu que o método implícito de quatro pontos era o mais eficiente e mantinha estabilidade sobre as mais severas condições de teste.

A estabilidade dos métodos implícitos é analisada da mesma forma que nos métodos explícitos, ou seja, através do

método de Von Newman. Analisando-se os esquemas de quatro pontos verifica-se que para $\theta = 1/2$, podemos ter oscilações, quando o termo de rugosidade é pequeno, recomenda-se portanto utilizar $\theta > 0,6$ para evitar este tipo de perturbação. Fread (1975) realizou uma análise comparativa entre resultados teóricos e aqueles obtidos com testes numéricos, concluindo que em geral existe concordância nos resultados obtidos. Em sua análise de estabilidade Fread concluiu ainda que para valores de θ próximo a 0,5 o esquema apresenta oscilações quando o intervalo de tempo de cálculo é grande quando comparado ao período da onda, ou seja, $\Delta t \approx 1/4$ do período da onda, bem como, quando a onda deixa de ser gradual.

A acuracidade dos métodos implícitos, pode ser analisada da mesma forma que nos métodos explícitos. Para o caso de esquemas implícitos de quatro pontos Fread (1975) obteve as seguintes expressões:

$$R_1 = \frac{\sqrt{\frac{1 + (2\theta - 2)^2 a + (\theta - 1) b}{1 - 4\theta^2 a + \theta b}}}{e^{-k \Delta t / 2}} \quad (2.62)$$

$$R_2 = \frac{\text{arc Tg} \left\{ \frac{\sqrt{16 a - b^2}}{2 + 8\theta (\theta - 1) a + 2(\theta - 1) b} \right\}}{\sigma \Delta t \sqrt{g y_0 - \frac{k}{2\sigma} a^2}} \quad (2.63)$$

onde:

$$R_1 = \frac{\text{AMORTECIMENTO NUMÉRICO}}{\text{AMORTECIMENTO ANALÍTICO}}$$

$$R_2 = \frac{\text{VELOCIDADE NUMÉRICA}}{\text{VELOCIDADE ANALÍTICA}}$$

$$b = k \Delta t$$

$$k = \frac{g V_0 n^2}{y_0^{4/3}}$$

$$\sigma = 2 \Pi / L$$

L = Comprimento de onda

y_0 = Profundidade média

V_0 = Velocidade média

Fread plotou os valores de R_1 e R_2 para diversos valores de θ , $L/\Delta x$, $C_r = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot C$ e $k \Delta t$. Nas Figuras 3 e 4 apresentam-se estes valores.

Todos os resultados anteriores foram obtidos através de uma análise linear, portanto têm limitações. Os resultados obtidos servem entretanto como indicadores, de forma a orientar o uso de um dado esquema numérico.

2.3.2.1 - Esquema Implícito Cheio (Stoker)

Neste esquema de quatro pontos o fator de ponderação θ tem os seguintes valores: $\theta = 1$ para a derivada no espaço e $\theta = 0$ para a determinação da função $f(x,t)$, logo as equações de discretização são:

$$f(x,t) = \frac{f_{i+1}^t + f_i^t}{2} \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1}^{t+1} - f_i^{t+1}}{\Delta x} \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1}^{t+1} - f_{i+1}^t + f_i^t - f_i^{t+1}}{2 \Delta t} \quad (2.66)$$

Utilizando este esquema de discretização nas equações (2.31) e (2.35), resulta

- continuidade

$$\frac{Q_{i+1}^{t+1} - Q_i^{t+1}}{\Delta x} + \frac{(T_{i+1}^t + T_i^t)}{2} \cdot \frac{(Y_{i+1}^{t+1} - Y_{i+1}^t + Y_i^{t+1} - Y_i^t)}{2 \Delta t} = 0 \quad (2.67)$$

- dinâmica

$$\frac{(Q_i^{t+1} - Q_i^t + Q_{i+1}^{t+1} - Q_{i+1}^t)}{2 \Delta t} + 2 \frac{(V_{i+1}^t + V_i^t)}{2} \cdot \frac{(Q_{i+1}^{t+1} - Q_i^{t+1})}{\Delta x} + g \bar{A}_i^t (1 - \bar{F}^2)^t \frac{(Y_{i+1}^{t+1} - Y_i^{t+1})}{\Delta x} = g \bar{A}_i^t \frac{(Z_{0i+1} - Z_{0i})}{\Delta x} \quad (2.68)$$

$$- g \bar{A}_i^t (S_{fi+1} + S_{fi})^{t+1} + (\bar{V}^2 \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}}^t)$$

sendo:

$$\bar{f}_i^t = \frac{f_{i+1}^t + f_i^t}{2}$$

O termo de fricção S_f é calculado no tempo $t + 1$.

Estas duas equações são utilizadas para cálculo dos pontos interiores, o que resulta em $2(n - 1)$ equações. Nós temos entretanto $2n$ incógnitas, portanto para resolver o sistema precisamos de mais duas equações, que são as condições de contorno a montante e a jusante, o que resulta num sistema de $2n$ equações a $2n$ incógnitas, para ser resolvido em cada intervalo de tempo. No caso em apreço trata-se de um sistema linear, cuja matriz dos coeficientes é do tipo banda pentadiagonal. A resolução deste sistema pode ser feita através da sub-rotina Gelb da IBM, método da dupla varredura, etc.

Tucci, Simões, Lanna, Silveira e Godoy (1986), utilizaram este tipo de modelo, para o estudo de gerenciamento

da nevegação do rio Jacuí (Porto Alegre/Brasil).

2.3.2.2 - Esquema de Preissmann

Este esquema de quatro pontos tem sido bastante utilizado, e consiste em utilizar as equações (2.59) a (2.61) para discretizar as equações da continuidade e da dinâmica. Ao se aplicar este esquema faz-se a seguinte transformação:

$$\Delta f = f^{t+1} - f^t$$

- continuidade

$$\frac{\Delta Y_{i+1} + \Delta Y_i}{2 \Delta t} + \frac{2}{\theta(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i) + (T_{i+1} + T_i)} \cdot \left[\frac{\theta(\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i)}{\Delta x} + \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{\Delta x} \right] = 0 \quad (2.69)$$

- dinâmica

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i}{2 \Delta t} + \left\{ \theta \left[\frac{(Q_{i+1} + \Delta Q_{i+1})}{A_{i+1} + \Delta A_{i+1}} + \frac{(Q_i + \Delta Q_i)}{A_i + \Delta A_i} \right] \right. \\ & + (1 - \theta) \left. \left[\frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}} + \frac{Q_i}{A_i} \right] \right\} \cdot \left[\theta \frac{(\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i)}{\Delta x} + \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta x} \right] \\ & + g \left\{ \frac{\theta}{2} \left[(A_{i+1} + \Delta A_{i+1})(1 - F_{i+1}^2) + (A_i + \Delta A_i)(1 - F_i^2) \right] \right. \\ & + \frac{(1-\theta)}{2} \left[A_{i+1}(1 - F_{i+1}^2) + A_i(1 - F_i^2) \right] \left. \right\} \left[\theta \frac{(\Delta Y_{i+1} - \Delta Y_i)}{\Delta x} \right. \\ & + \left. \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \right] = g \left[\frac{\theta}{2} (A_{i+1} + \Delta A_{i+1} + A_i + \Delta A_i) + \frac{(1-\theta)}{2} (A_{i+1} + A_i) \right] S_0 \\ & - g \left\{ \frac{\theta}{2} \left[(A_{i+1} + \Delta A_{i+1}) \cdot \Delta S_{f_{i+1}} + (A_i + \Delta A_i) \cdot \Delta S_{f_i} \right] + \frac{(1-\theta)}{2} (A_{i+1} S_{f_{i+1}} \right. \\ & + \left. A_i \cdot S_{f_i}) \right\} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Onde:

$$\Delta F = \frac{(Q + \Delta Q)^2 (T + \Delta T)}{(A + \Delta A)^3 g}$$

$$\Delta S_f = \frac{(Q + \Delta Q) |Q + \Delta Q|}{(k + \Delta k)^2}$$

As equações (2.69) e (2.70) são então linearizadas, através do desenvolvimento em séries de potências, desprezando-se os termos de segunda ordem e superiores das diferenças finitas.

Estas equações linearizadas juntamente com as condições de contorno a montante e a jusante formam um sistema de equações lineares de $2n$ equações a $2n$ incógnitas para ser resolvido em cada intervalo de tempo. Este sistema deve ser resolvido através de um método que resolva eficientemente matrizes banda pentadiagonais.

Preissman adotou o denominado "Double Sweep" para otimizar a resolução do problema. Este método encontra-se explicado no anexo III.

2.3.2.3 - Esquema de Verwey

Verwey derivou um esquema do tipo Preissmann, utilizando discretizações diferentes para alguns termos, como mostra-se abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \cong \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{Q_{i+1}^t \quad Q_{i+1}^{t+1}}{A_{i+1}^{t+1/2}} - \frac{Q_i^t \quad Q_i^{t+1}}{A_i^{t+1/2}} \right) \quad (2.71)$$

$$T \cong \frac{T_{i+1}^{t+1/2} + T_i^{t+1/2}}{2} \quad (2.72)$$

$$A \cong \frac{A_{i+1}^{t+1/2} + A_i^{t+1/2}}{2} \quad (2.73)$$

$$S_f \approx \frac{1}{2} \left[\frac{|Q_i^t| |Q_i^{t+1}|}{(k_i^{t+1/2})^2} + \frac{|Q_{i+1}^t| |Q_{i+1}^{t+1}|}{(k_{i+1}^{t+1/2})^2} \right] \quad (2.74)$$

O índice $t + 1/2$ indica que a equação média considerada é evoluída nos tempos t e $t + \Delta t$, ou seja:

$$f^{t+1/2} = \frac{f^t + f^{t+\Delta t}}{2}$$

O cálculo é inicializado através da escolha de um conjunto de valores para as variáveis com índice $t+1/2$, $T_i^{t+1/2} = T_i^t$; $A_i^{t+1/2} = A_i^t$; $K_i^{t+1/2} = K_i^t$.

O sistema de equações lineares em y_i^{t+1} , Q_i^{t+1} , $i = 1, 2, \dots, n$ é então resolvido para dar uma segunda aproximação destes valores, \tilde{y}_i^{t+1} , \tilde{Q}_i^{t+1} . As variáveis arbitradas anteriormente são valores então recalculadas da seguinte forma:

$$T_i^{t+1/2} \approx \frac{1}{2} \left[T_i(\tilde{y}_i^{t+1}) + T_i(y_i^t) \right],$$

$$A_i^{t+1/2} \approx \frac{1}{2} \left[A_i(\tilde{y}_i^{t+1}) + A_i(y_i^t) \right], \text{ etc.}$$

Estes valores são então utilizados para uma segunda iteração que nos conduz a um terceira aproximação das variáveis dependentes, e assim sucessivamente. Para que a solução tenha uma boa acuracidade duas iterações são necessárias para cada intervalo de cálculo.

2.3.2.4 - Esquema de Abbot - Ionescu

Este esquema utiliza as seguintes discretizações para as equações da continuidade e da dinâmica.

- continuidade

$$\frac{\partial y}{\partial t} \approx \frac{y_i^{t+1} - y_i^t}{\Delta t} \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V_{i+1}^{t+1} - V_{i+1}^t}{\Delta t} + \frac{V_{t-1}^t - V_{t-1}^{t-1}}{\Delta t} \right) \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V_{i+1}^{t+1} - V_{i-1}^{t+1}}{2\Delta x} + \frac{V_{i+1}^t - V_{i-1}^t}{2\Delta x} \right) \quad (2.77)$$

- dinâmica

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_{i+1}^{t+1} - V_{i+1}^t}{\Delta t} \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{y_{i+2}^{t+1} - y_{i+2}^t}{\Delta t} + \frac{y_i^{t+1} - y_i^t}{\Delta t} \right) \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{y_{i+2}^{t+1} - y_i^t}{2\Delta x} + \frac{y_{i+2}^t - y_i^t}{2\Delta x} \right) \quad (2.80)$$

logo, discretizando resulta:

- continuidade

$$T_1^{t+1/2} \cdot \left(\frac{z_i^{t+1} - z_i^t}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{Q_{i+1}^{t+1} - Q_{i-1}^{t+1}}{\Delta 2 x_i} + \frac{Q_{i+1}^t - Q_{i-1}^t}{\Delta 2 x_i} \right) = 0 \quad (2.81)$$

- dinâmica

$$\frac{Q_{i+1}^{t+1} - Q_{i+1}^t}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta 2 x_{i+1}} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+2}^{t+1/2} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i^{t+1/2} \right] + g \frac{A_{i+1}^{t+1/2}}{2} \left[\frac{z_{i+2}^{t+1} - z_i^{t+1}}{\Delta 2 x_{i+1}} + \frac{z_{i+2}^t - z_i^t}{\Delta 2 x_{i+1}} \right] \quad (2.82)$$

$$+ g \left(\frac{A}{k} \right)_{i+1}^{t+1/2} \left[\theta Q_{i+1}^t | Q_{i+1}^{t+1} | + (1-\theta) | Q_{i+1}^t | Q_{i+1}^t \right] = 0$$

Onde:

$$\Delta^2 x_i = x_{i+1} - x_{i-1} ; \Delta^2 x_{i+1} = x_{i+2} - x_i$$

θ = Coeficiente de ponderação

Esta discretização foi utilizada pelo Instituto de Hidráulica da Dinamarca, tendo sido desenvolvido por Verwey.

A solução deste sistema de equações requer iterações como no caso anterior; na primeira iteração θ é considerado igual a 1, e nas iterações subsequentes seu valor é dado por:

$$\theta = \frac{Q_i^{t+1/2} Q_i^{t+1} - Q_i^t Q_i^t}{Q_i^t (Q_i^{t+1} - Q_i^t)} \quad (2.83)$$

Para solução deste sistema de equações faz-se necessário como no caso anterior assumir-se valores para os coeficientes com índice $t + 1/2$, para termos a primeira aproximação para as variáveis Z_i^{t+1} , Q_{i+1}^{t+1} ($i=1, \dots, n$) e conseqüentemente uma segunda aproximação para os coeficientes $T^{t+1/2}$, A^{t+1} , $k^{t+1/2}$. A substituição destes novos valores dos coeficientes nos fornecerá uma segunda aproximação para \hat{Z}_i^{t+1} , \hat{Q}_i^{t+1} , $i = 1, 2, \dots, n$. Este esquema necessita de duas iterações para cada intervalo de cálculo, para que o resultado seja satisfatório. Na utilização deste método bem como do anterior é importante ter-se cuidado no processo iterativo, para que não ocorra problemas de instabilidade.

2.3.2.5 - Esquema de Amein e Fang

Este esquema utiliza as equações (2.59), (2.60) e (2.61), considerando o fator de ponderação $\theta = 1/2$, para discretizar as equações da continuidade e da dinâmica. Amein e Fang usaram como variáveis dependentes nas equações da continuidade e da dinâmica, a velocidade e a profundidade, portanto, estas equações apresentam-se da seguinte forma:

- continuidade

$$v \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{A}{T} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{q_z}{T} = 0 \quad (2.84)$$

- dinâmica

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} - g (S_o - S_f) + \frac{q_z v}{A} = 0 \quad (2.85)$$

discretizando as equações anteriores, resulta

- continuidade

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \Delta t} \left[(y_{i+1}^{t+1} + y_i^{t+1}) - (y_{i+1}^t + y_i^t) \right] \\ & + \frac{1}{2 \Delta x} \left[v_{i+(1/2)}^{t+(1/2)} \right] \cdot \left[(y_{i+1}^{t+1} + y_{i+1}^t) - (y_i^{t+1} + y_i^t) \right] \\ & + \frac{1}{2 \Delta x} \left(\frac{A}{T} \right)_{i+(1/2)}^{t+(1/2)} \left[(v_{i+1}^t + v_{i+1}^{t+1}) - (v_i^t + v_i^{t+1}) \right] \\ & - \left(\frac{q_z}{T} \right)_{i+(1/2)}^{t+(1/2)} = 0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

- dinâmica

$$\begin{aligned} & \frac{g}{2 \Delta x} \left[(y_{i+1}^{t+1} + y_{i+1}^t) - (y_i^{t+1} + y_i^t) \right] \\ & + \frac{1}{2 \Delta t} \left[(v_{i+1}^{t+1} + v_i^{t+1}) - (v_{i+1}^t + v_i^t) \right] \\ & + \frac{1}{2 \Delta x} \left[v_{i+(1/2)}^{t+(1/2)} \right] \cdot \left[(v_{i+1}^{t+1} + v_{i+1}^t) - (v_i^{t+1} + v_i^t) \right] \\ & + \frac{g}{4} (S_{fi}^t + S_{fi+1}^t + S_{fi}^{t+1} + S_{fi+1}^{t+1}) \\ & - \frac{g}{\Delta x} (z_i^t - z_{i+1}^t) + q_z \left(\frac{v}{A} \right)_{i+(1/2)}^{t+(1/2)} = 0 \end{aligned} \quad (2.87)$$

Sendo:

$$V_{i+(1/2)}^{t+(1/2)} = \frac{1}{4} (V_i^t + V_{i+1}^t + V_i^{t+1} + V_{i+1}^{t+1})$$

$$\left(\frac{V}{A} \right)_{i+(1/2)}^{t+(1/2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{V_i^t}{A_i^t} + \frac{V_{i+1}^t}{A_{i+1}^t} + \frac{V_i^{t+1}}{A_i^{t+1}} + \frac{V_{i+1}^{t+1}}{A_{i+1}^{t+1}} \right)$$

$$\left(\frac{q_\ell}{T} \right)_{i+(1/2)}^{t+(1/2)} = \frac{q_\ell}{4} \left(\frac{1}{T_i^t} + \frac{1}{T_{i+1}^t} + \frac{1}{T_i^{t+1}} + \frac{1}{T_{i+1}^{t+1}} \right)$$

$$\left(\frac{A}{T} \right)_{i+(1/2)}^{t+(1/2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{A_i^t}{T_i^t} + \frac{A_{i+1}^t}{T_{i+1}^t} + \frac{A_i^{t+1}}{T_i^{t+1}} + \frac{A_{i+1}^{t+1}}{T_{i+1}^{t+1}} \right)$$

Este esquema de equações obtido juntamente com as equações de contorno a montante e a jusante, formam um sistema de $2n$ equações não lineares a $2n$ incógnitas. Para resolver este sistema Amein e Fang, utilizaram o método iterativo de Newton - Raphson, associado a um método que resolva eficientemente matrizes banda pentadiagonais.

Chen (1973) utilizou nos seus estudos um esquema similar ao de Amein e Fang, só que considerou como variáveis dependentes vazão Q e profundidade y , em vez de velocidade e profundidade. Tal modificação é justificável uma vez que na aplicação de canais naturais e particularmente em reservatórios, o uso da vazão Q , em vez da velocidade V , como variável dependente é preferível porque a vazão é uma função muito mais suave no plano $x-t$. Enquanto as variáveis área A e velocidade V , podem variar significativamente, entre duas seções adjacentes, a vazão que é um produto das duas variáveis, provavelmente variará mais suavemente.

Este esquema é um esquema acurado, entretanto produz oscilações numéricas sobre certas condições transientes.

2.3.2.6 - Esquema de Amein e Chu

Este esquema de quatro pontos utiliza as equações (2.59), (2.60) e (2.61), para discretizar as equações (2.31) e (2.32), considerando o fator de ponderação θ igual a unidade ($\theta = 1$).

Substituindo este esquema nas equações (2.31) e (2.32) resulta

- continuidade

$$\frac{(Q_{i+1}^{t+1} - Q_i^{t+1})}{\Delta x_i} \frac{(A_{i+1}^{t+1} + A_i^{t+1}) - (A_{i+1}^t + A_i^t)}{2 \Delta t_t} = 0 \quad (2.88)$$

- dinâmica

$$\begin{aligned} & \frac{(Q_i^{t+1} + Q_{i+1}^{t+1} - Q_i^t - Q_{i+1}^t)}{2 \Delta t_t} + \frac{1}{\Delta x_i} \left[\frac{(Q_{i+1}^{t+1})^2}{A_{i+1}^{t+1}} - \frac{(Q_i^{t+1})^2}{A_i^{t+1}} \right] \\ & + \frac{g}{2} \frac{(Y_{i+1}^{t+1} - Y_i^{t+1})}{\Delta x_i} (A_{i+1}^{t+1} + A_i^{t+1}) + g (S_{fi}^{t+1} + S_{fi+1}^{t+1}) \quad (2.89) \\ & (A_{i+1}^{t+1} + A_i^{t+1}) - g \frac{S_0}{2} (A_{i+1}^{t+1} + A_i^{t+1}) = 0 \end{aligned}$$

Estas duas equações juntamente com as condições de contorno a montante e a jusante formam um sistema de equações não linear de $2n$ equações a $2n$ incógnitas. Para resolver este sistema de equações não linear Amein e Chu utilizaram o método iterativo de Newton-Raphson, através do qual a solução do sistema de equações não linear é reduzido para sucessivas soluções de sistemas lineares. Para resolver estes sistemas de equações lineares, que caracterizam-se por apresentar uma matriz de coeficientes do tipo banda pentadiagonal, utilizou-se a subro

tina Gelb da IBM.

Nas aplicações práticas realizadas Amein e Chu, concluíram que este método é acurado e pode caracterizar fluxo variado desde o gradual ao abrupto.

Uma das aplicações bastante interessante foi no rio Cumberland que conecta a barragem de Barkley ao rio Ohio com uma extensão de 45 km. A condição de contorno a montante utilizada são as vazões turbinadas na barragem de Barkley e a condição de contorno a jusante são cotas registradas no final do canal. Os resultados obtidos com este modelo mostrou um excelente ajuste entre os valores de cotas calculados e observados a jusante da barragem de Barkley.

3 - METODOLOGIA

Dentre as metodologias aqui apresentadas concluiu-se pelo uso de um modelo similar ao proposto por AMEIN e CHU, uma vez que este modelo mostrou-se acurado e estável quando aplicado em problemas de fluxo variado, abrangendo desde o gradualmente variado ao abrupto, tendo sido testado em estudos de abertura e fechamento abruptos de turbina. Este modelo tem ainda como vantagem possuir uma formulação matemática e computacional relativamente simples quando comparado com modelos similares.

Será também utilizado um modelo linear com esquema de discretização e linearização tal qual o proposto por PREISSMANN com o objetivo de comparar-se os resultados obtidos com o modelo não linear.

3.1 - ESQUEMA IMPLÍCITO NÃO LINEAR

Consideremos uma grade retangular não uniforme sobre o plano x-t, conforme a FIGURA 5.

A distância ao longo do eixo do canal está representando o eixo das abscissas e o tempo, o eixo das ordenadas. Considerando as equações (2.59), (2.60) e (2.61), para $\theta=1$, obtemos as seguintes expressões no ponto M para a função f e suas derivadas parciais, com respeito ao plano x-t.

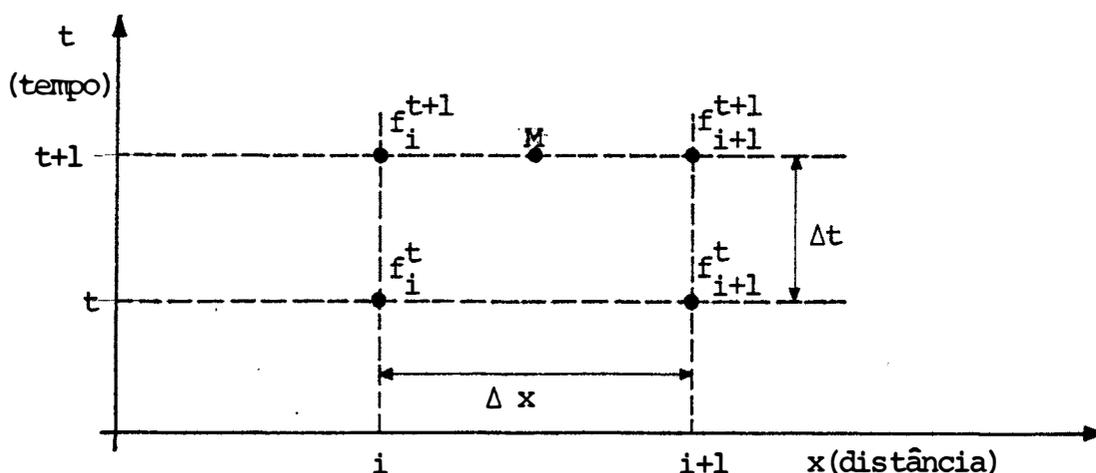


Figura 5 - Grade Retangular Não Uniforme

$$f(M) = \frac{f_{i+1}^{t+1} + f_i^{t+1}}{2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{f_{i+1}^{t+1} + f_i^{t+1}}{2} - \frac{f_{i+1}^t + f_i^t}{2} \right] \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x} = \frac{f_{i+1}^{t+1} - f_i^{t+1}}{\Delta x} \quad (3.3)$$

Apliquemos agora este esquema nas equações da continuidade e da dinâmica, equações (2.31) e (2.32).

- Equação da continuidade

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + T \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (3.4)$$

A representação de diferenças finitas para a continuidade de fica então

$$\frac{Q_{i+1}^{t+1} - Q_i^{t+1}}{\Delta x_i} + \frac{1}{\Delta t_t} \left(\frac{T_i^{t+1} + T_{i+1}^{t+1}}{2} \right) \left[\frac{(Y_{i+1}^{t+1} + Y_i^{t+1})}{2} - \frac{(Y_{i+1}^t + Y_i^t)}{2} \right] = 0 \quad (3.5)$$

$$Q_{i+1}^{t+1} - Q_i^{t+1} + \frac{\Delta x_i}{4\Delta t_t} (T_i^{t+1} + T_{i+1}^{t+1}) \cdot [(Y_{i+1}^{t+1} + Y_i^{t+1}) - (Y_{i+1}^t + Y_i^t)] = 0 \quad (3.6)$$

- Equação da Dinâmica

$$\frac{Q_{i+1}^{t+1} + Q_i^{t+1} - Q_{i+1}^t - Q_i^t}{2 \Delta T_t} + \frac{1}{\Delta x_i} \left[\frac{(Q_{i+1}^{t+1})^2}{A_{i+1}^{t+1}} - \frac{(Q_i^{t+1})^2}{A_i^{t+1}} \right] + g \frac{(S f_i^{t+1} + S f_{i+1}^{t+1})}{2} = \frac{(A_{i+1}^{t+1} + A_i^{t+1})}{2} + g \frac{(A_{i+1}^{t+1} + A_i^{t+1})}{2} \cdot \frac{(Y_{i+1}^{t+1} - Y_i^{t+1})}{\Delta x_i} \quad (3.7)$$

$$- g S_0 (A_{i+1}^{t+1} + A_i^{t+1}) = 0$$

OU

$$Q_{i+1}^{t+1} + Q_i^{t+1} - Q_{i+1}^t - Q_i^t + 2 \frac{\Delta T_t}{\Delta x_i} \left[\frac{(Q_{i+1}^{t+1})^2}{A_{i+1}^{t+1}} - \frac{(Q_i^{t+1})^2}{A_i^{t+1}} \right] \quad (3.8)$$

$$+ g \frac{\Delta T_t}{2} (S_{fi}^{t+1} + S_{fi+1}^{t+1}) (A_{i+1}^{t+1} + A_i^{t+1}) + g \frac{\Delta T_t}{\Delta x_i} (A_{i+1}^{t+1} + A_i^{t+1})$$

$$(Y_{i+1}^{t+1} - Y_i^{t+1}) - g \Delta T_t \text{ So } (A_{i+1}^{t+1} + A_i^{t+1}) = 0$$

Nas equações (3.6) e (3.8) todas as variáveis com índice t são conhecidas e todas as variáveis com índice $t+1$ são desconhecidas. Entretanto, todas as variáveis desconhecidas não são independentes. Porque a área e a largura de topo são funções da profundidade (cota) e a declividade da linha de energia é função da profundidade, da velocidade e do coeficiente de rugosidade. Como podemos notar o espaço entre seções, Δx_i , e o intervalo de tempo de cálculo, ΔT_t , não são necessariamente constantes. As equações (3.6) e (3.8) constituem um sistema de duas equações algébricas não linear, com quatro incógnitas. Estas equações são aplicadas nas seções $i=1,2,\dots,n-1$, o que resultam $2(n-1)$ equações. As incógnitas são $2n$ onde n é o número de seções e em cada seção existem duas variáveis Y^{t+1} e Q^{t+1} .

As condições de contorno de montante e jusante fornecem mais duas equações, resultando num sistema de equações algébricas não linear de $2n$ equações a $2n$ incógnitas para ser resolvido em cada intervalo de tempo.

A condição de contorno a montante pode ser:

- Linigrama
- Hidrograma

A condição de jusante pode ser:

- Linigrama
- Hidrograma
- Curva Chave

Para a solução deste sistema de Equações não Lineares, vamos utilizar o método iterativo de Newton-Raphson.

Seja $F_i(Y_i, Q_i, Y_{i+1}, Q_{i+1})=0$ e $G_i(Y_i, Q_i, Y_{i+1}, Q_{i+1})=0$, as equações da continuidade e dinâmica respectivamente, sendo $G_o(Y_1, Q_1)$ e $F_n(Y_n, Q_n)$, as condições de contorno a montante e a jusante. Por conveniência vamos escrever o sistema de equações de seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 G_o(Y_1, Q_1) &= 0 \\
 F_1(Y_1, Q_1, Y_2, Q_2) &= 0 \\
 G_1(Y_1, Q_1, Y_2, Q_2) &= 0 \\
 &===== \\
 F_i(Y_i, Q_i, Y_{i+1}, Q_{i+1}) &= 0 \\
 G_i(Y_i, Q_i, Y_{i+1}, Q_{i+1}) &= 0 \\
 &===== \\
 F_{n-1}(Y_{n-1}, Q_{n-1}, Y_n, Q_n) &= 0 \\
 G_{n-1}(Y_{n-1}, Q_{n-1}, Y_n, Q_n) &= 0 \\
 F_n(Y_n, Q_n) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Expandido as funções acima pela fórmula de Taylor com aproximação de primeira ordem, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
 G_o^{(k+1)}(Y_1, Q_1) &= G_o^{(k)}(Y_1, Q_1) + \frac{\partial G_o^{(k)}}{\partial Y_1} dy_1 + \frac{\partial G_o^{(k)}}{\partial Q_1} dQ_1 \\
 F_1^{(k+1)}(Y_1, Q_1, Y_2, Q_2) &= F_1^{(k)}(Y_1, Q_1, Y_2, Q_2) + \frac{\partial F_1^{(k)}}{\partial Y_1} dy_1 + \frac{\partial F_1^{(k)}}{\partial Q_1} dQ_1 \\
 &+ \frac{\partial F_1^{(k)}}{\partial Y_2} dy_2 + \frac{\partial F_1^{(k)}}{\partial Q_2} dQ_2 \\
 G_1^{(k+1)}(Y_1, Q_1, Y_2, Q_2) &= G_1^{(k)}(Y_1, Q_1, Y_2, Q_2) + \frac{\partial G_1^{(k)}}{\partial Y_1} dy_1 + \frac{\partial G_1^{(k)}}{\partial Q_1} dQ_1 \\
 &+ \frac{\partial G_1^{(k)}}{\partial Y_2} dy_2 + \frac{\partial G_1^{(k)}}{\partial Q_2} dQ_2
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

=====

$$\begin{aligned}
 G_{n-1}^{(k+1)}(Y_{n-1}, Q_{n-1}, Y_n, Q_n) &= G_{n-1}^{(k)}(Y_{n-1}, Q_{n-1}, Y_n, Q_n) + \frac{\partial G_{n-1}^{(k)}}{\partial Y_{n-1}} dy_{n-1} \\
 &+ \frac{\partial G_{n-1}^{(k)}}{\partial Q_{n-1}} dQ_{n-1} + \frac{\partial G_{n-1}^{(k)}}{\partial Y_n} dy_n + \frac{\partial G_{n-1}^{(k)}}{\partial Q_n} dQ_n
 \end{aligned}$$

$$F_n^{(k+1)}(y_n, Q_n) = F_n^{(k)}(y_n, Q_n) + \frac{\partial F_n^{(k)}}{\partial y_n} \cdot dy_n + \frac{\partial F_n^{(k)}}{\partial Q_n} dQ_n$$

$$\text{Em que } dy_i = y_i^{k+1} - y_i^k$$

$$dQ_i = Q_i^{k+1} - Q_i^k$$

As equações anteriores ficam então

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_o^{(k)}}{\partial y_1} \cdot y_1^{k+1} + \frac{\partial G_o^{(k)}}{\partial Q_1} Q_1^{k+1} = -G_o^{(k)}(y_1, Q_1) + \left(\frac{\partial G_o}{\partial y_1} \cdot y_1\right)^{(k)} \\ + \left(\frac{\partial G_o}{\partial Q_1} Q_1\right)^{(k)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1^{(k)}}{\partial y_1} y_1^{(k+1)} + \frac{\partial F_1^{(k)}}{\partial Q_1} Q_1^{(k+1)} + \frac{\partial F_1^{(k)}}{\partial y_2} y_2^{(k+1)} + \frac{\partial F_1^{(k)}}{\partial Q_2} Q_2^{(k+1)} = - \\ F_2^{(k)}(y_1, Q_1, y_2, Q_2) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} y_1\right)^{(k)} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial Q_1} Q_1\right)^{(k)} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2} y_2\right)^{(k)} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial Q_2} Q_2\right)^{(k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{n-1}^{(k)}}{\partial y_{n-1}} y_{n-1}^{(k+1)} + \frac{\partial G_{n-1}^{(k)}}{\partial Q_{n-1}} Q_{n-1}^{(k+1)} + \frac{\partial G_{n-1}^{(k+1)}}{\partial y_n} y_n^{(k+1)} + \frac{\partial G_{n-1}^{(k+1)}}{\partial Q_n} Q_n^{(k+1)} = -G_{n-1}^{(k)} \\ (y_{n-1}, Q_{n-1}, y_n, Q_n) + \left(\frac{\partial G_{n-1}}{\partial y_{n-1}} y_{n-1}\right)^{(k)} + \left(\frac{\partial G_{n-1}}{\partial Q_{n-1}} Q_{n-1}\right)^{(k)} + \left(\frac{\partial G_{n-1}}{\partial y_n} y_n\right)^{(k)} \\ + \left(\frac{\partial G_{n-1}}{\partial Q_n} Q_n\right)^{(k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_n^{(k)}}{\partial y_n} y_n^{(k-1)} + \frac{\partial F_n^{(k)}}{\partial Q_n} Q_n^{(k+1)} = -F_n^{(k)}(y_n, Q_n) + \left(\frac{\partial F_n}{\partial y_n} y_n\right)^{(k)} + \\ \left(\frac{\partial F_n}{\partial Q_n} Q_n\right)^{(k)} \end{aligned}$$

Colocando em forma matricial vem:

$$j^{(k)} \cdot x^{(k+1)} = s^{(k)}$$

(3.12)

$$j^{(k)} = \begin{array}{cccc} \text{CM}_1 & \text{CM}_2 & & \\ \frac{\partial F_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} \\ \frac{\partial G_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial G_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial G_1}{\partial Q_2} \\ & & \frac{\partial F_2}{\partial Y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial Q_2} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_3} & \frac{\partial F_2}{\partial Q_3} \\ & & \frac{\partial G_2}{\partial Y_2} & \frac{\partial G_2}{\partial Q_2} & \frac{\partial G_2}{\partial Y_3} & \frac{\partial G_2}{\partial Q_3} \\ & & \text{=====} & & & \\ & & & & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Y_{n-1}} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Q_{n-1}} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Y_n} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Q_n} \\ & & & & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Y_{n-1}} & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Q_{n-1}} & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Y_n} & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Q_n} \\ & & & & & & \text{CJ}_1 & \text{CJ}_2 \end{array}$$

Sendo CM_1 e CM_2 , CJ_1 e CJ_2 as condições de contorno.

Quando a condição de contorno é cotograma $y(o,t) = y_i(t)$, temos $CM_1 = \frac{\partial G_0}{\partial Y_1} = 1$ e $CM_2 = \frac{\partial G_0}{\partial Q_1} = 0$,

Quando é hidrograma $Q(o,t) = Q_1(t)$ temos $CM_1 = 0$ e $CM_2 = 1$.

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Q_1 \\ Y_2 \\ Q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$S^{(k)} = \begin{bmatrix} CC_1 \\ -F_1 (Y_1, Q_1, Y_2, Q_2) + \frac{\partial F_1}{\partial Y_1} Y_1 + \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} Q_1 + \frac{\partial F_1}{\partial Y_2} Y_2 + \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} Q_2 \\ -G_1 (Y_1, Q_1, Y_2, Q_2) + \frac{\partial G_1}{\partial Y_1} Y_1 + \frac{\partial G_1}{\partial Q_1} Q_1 + \frac{\partial G_1}{\partial Y_2} Y_2 + \frac{\partial G_1}{\partial Q_2} Q_2 \\ -F_{n-1} (Y_{n-1}, Q_{n-1}, Y_n, Q_n) + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Y_{n-1}} Y_{n-1} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Q_{n-1}} Q_{n-1} \\ + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Y_n} Y_n + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Q_n} \cdot Q_n \\ -G_{n-1} (Y_{n-1}, Q_{n-1}, Y_n, Q_n) + \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Y_{n-1}} Y_{n-1} + \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Q_{n-1}} Q_{n-1} \\ + \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Y_n} \cdot Y_n + \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Q_n} \cdot Q_n \\ CC_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Para resolver o sistema acima necessitamos conhecer as derivadas das funções F_i e G_i , com respeito as variáveis desconhecidas. Diferenciando as equações (3.6) e (3.8), obtemos:

$$\frac{\partial F_i}{\partial Y_1} = \frac{\Delta X_i}{4\Delta t} \left\{ (T_{i+1}^k + T_i^k) + \left[(Y_{i+1}^k + Y_i^k) - (Y_{i+1}^t + Y_i^t) \right] \frac{\partial T_i}{\partial Y_i^k} \right\} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}} = \frac{\Delta X_i}{4\Delta t_t} \left\{ (T_{i+1}^k + T_i^k) + \left[(y_{i+1}^k + y_i^k) - (y_{i+1}^t + y_i^t) \right] \frac{\partial T_{i+1}^k}{\partial y_{i+1}^k} \right\} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial Q_i} = -1 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial Q_{i+1}} = 1 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_i} = 2 \frac{\Delta t_t}{\Delta x_i} \left(\frac{Q_i^k}{A_i^k} \right)^2 \cdot T_i^k - g \frac{\Delta t_t}{\Delta x_i} (A_{i+1}^k + A_i^k) + g \frac{\Delta t_t}{\Delta x_i} (y_{i+1}^k - y_i^k) \cdot T_i^k \quad (3.19)$$

$$g \frac{\Delta t_t}{2} (S_{fi}^k + S_{fi+1}^k) \cdot T_i^k - g \Delta t_t (A_{i+1}^k + A_i^k) \cdot \frac{S_{fi}^k}{K_i^k} \cdot \frac{\partial K_i^k}{\partial y_i^k} - g \Delta t_t S_o \cdot T_i^k$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial y_{i+1}} &= \frac{-2\Delta t_t}{\Delta x_i} \left(\frac{Q_{i+1}^k}{A_{i+1}^k} \right)^2 \cdot T_{i+1}^k + g \frac{\Delta t_t}{\Delta x_i} (A_{i+1}^k + A_i^k) + g \frac{\Delta t_t}{2} (S_{fi}^k + S_{fi+1}^k) \\ &\cdot T_{i+1}^k - g \Delta t_t (A_{i+1}^k + A_i^k) \cdot \frac{S_{fi+1}^k}{K_{i+1}^k} \cdot \frac{\partial K_{i+1}^k}{\partial y_{i+1}^k} + \frac{\Delta t_t}{\Delta x_i} (y_{i+1}^k - y_i^k) \cdot T_{i+1}^k \\ &- g \Delta t_t S_o \cdot T_{i+1}^k \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial Q_i} = 1 - \frac{4\Delta t_t}{\Delta x_i} \cdot \frac{Q_i^k}{A_i^k} + g \Delta t_t (A_{i+1}^k + A_i^k) \cdot \frac{S_{fi}^k}{Q_i^k} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial Q_{i+1}} = 1 + \frac{4\Delta t_t}{\Delta x_i} + \frac{Q_{i+1}^k}{A_{i+1}^k} + g \Delta t_t (A_{i+1}^k + A_i^k) \frac{S_{fi+1}^k}{Q_{i+1}^k} \quad (3.22)$$

Como pode-se verificar, o problema agora consiste em resolver um sistema linear. A sequência de resolução é a seguinte:

- a) Estimativas das variáveis não conhecidas na interação k , encolhendo valores próximos ao ótimo para que haja convergência;
- b) Resolução da matriz $J^{(k)}$ por um método que resolva eficientemente matrizes banda pentadiagonais, utilizando-se aqui o Método "DOUBLE SWEEP". Ver anexo III.

- c) Verificar se com os valores calculados, F_i e G_i , são aproximadamente zero ou estão dentro de uma precisão desejada;
- d) Quando a precisão é atingida, o último valor calculado é a solução, quando não, incrementa-se o valor das variáveis e repete-se o processo.

3.2 - ESQUEMA IMPLÍCITO LINEAR-ESQUEMA DE PREISSMANN

Este esquema por ter um desenvolvimento matemático longo e enfadonho está apresentado no anexo II.

4. APLICAÇÃO

(3.12)

$$j^{(k)} = \begin{array}{cccc}
 \begin{array}{cc}
 CM_1 & CM_2 \\
 \frac{\partial F_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} \\
 \frac{\partial G_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial G_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial G_1}{\partial Q_2} \\
 & & \frac{\partial F_2}{\partial Y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial Q_2} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_3} & \frac{\partial F_2}{\partial Q_3} \\
 & & \frac{\partial G_2}{\partial Y_2} & \frac{\partial G_2}{\partial Q_2} & \frac{\partial G_2}{\partial Y_3} & \frac{\partial G_2}{\partial Q_3} \\
 & & \text{=====} & & & \\
 & & & & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Y_{n-1}} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Q_{n-1}} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Y_n} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Q_n} \\
 & & & & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Y_{n-1}} & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Q_{n-1}} & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Y_n} & \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Q_n} \\
 & & & & & & & & CJ_1 & CJ_2
 \end{array}
 \end{array}$$

Sendo CM_1 e CM_2 , CJ_1 e CJ_2 as condições de contorno.

Quando a condição de contorno é cotograma $y(o,t) = y_i(t)$, temos $CM_1 = \frac{\partial G_0}{\partial Y_1} = 1$ e $CM_2 = \frac{\partial G_0}{\partial Q_1} = 0$,

Quando é hidrograma $Q(o,t) = Q_1(t)$ temos $CM_1 = 0$ e $CM_2 = 1$.

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Q_1 \\ Y_2 \\ Q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$S^{(k)} = \begin{bmatrix} CC_1 \\ -F_1 (Y_1, Q_1, Y_2, Q_2) + \frac{\partial F_1}{\partial Y_1} Y_1 + \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} Q_1 + \frac{\partial F_1}{\partial Y_2} Y_2 + \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} Q_2 \\ -G_1 (Y_1, Q_1, Y_2, Q_2) + \frac{\partial G_1}{\partial Y_1} Y_1 + \frac{\partial G_1}{\partial Q_1} Q_1 + \frac{\partial G_1}{\partial Y_2} Y_2 + \frac{\partial G_1}{\partial Q_2} Q_2 \\ -F_{n-1} (Y_{n-1}, Q_{n-1}, Y_n, Q_n) + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Y_{n-1}} Y_{n-1} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Q_{n-1}} Q_{n-1} \\ + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Y_n} Y_n + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial Q_n} \cdot Q_n \\ -G_{n-1} (Y_{n-1}, Q_{n-1}, Y_n, Q_n) + \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Y_{n-1}} Y_{n-1} + \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Q_{n-1}} Q_{n-1} \\ + \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Y_n} \cdot Y_n + \frac{\partial G_{n-1}}{\partial Q_n} \cdot Q_n \\ CC_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Para resolver o sistema acima necessitamos conhecer as derivadas das funções F_i e G_i , com respeito as variáveis desconhecidas. Diferenciando as equações (3.6) e (3.8), obtemos:

$$\frac{\partial F_i}{\partial Y_1} = \frac{\Delta X_i}{4\Delta t} \left\{ (T_{i+1}^k + T_i^k) + \left[(Y_{i+1}^k + Y_i^k) - (Y_{i+1}^t + Y_i^t) \right] \frac{\partial T_i}{\partial Y_i^k} \right\} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}} = \frac{\Delta X_i}{4\Delta t_t} \left\{ (T_{i+1}^k + T_i^k) + \left[(y_{i+1}^k + y_i^k) - (y_{i+1}^t + y_i^t) \right] \frac{\partial T_{i+1}^k}{\partial y_{i+1}^k} \right\} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial Q_i} = -1 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial Q_{i+1}} = 1 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_i} = 2 \frac{\Delta t_t}{\Delta x_i} \left(\frac{Q_i^k}{A_i^k} \right)^2 \cdot T_i^k - g \frac{\Delta t_t}{\Delta x_i} (A_{i+1}^k + A_i^k) + g \frac{\Delta t_t}{\Delta x_i} (y_{i+1}^k - y_i^k) \cdot T_i^k \quad (3.19)$$

$$g \frac{\Delta t_t}{2} (S_{fi}^k + S_{fi+1}^k) \cdot T_i^k - g \Delta t_t (A_{i+1}^k + A_i^k) \cdot \frac{S_{fi}^k}{K_i^k} \cdot \frac{\partial K_i^k}{\partial y_i^k} - g \Delta t_t S_o \cdot T_i^k$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial y_{i+1}} &= \frac{-2\Delta t_t}{\Delta x_i} \left(\frac{Q_{i+1}^k}{A_{i+1}^k} \right)^2 \cdot T_{i+1}^k + g \frac{\Delta t_t}{\Delta x_i} (A_{i+1}^k + A_i^k) + g \frac{\Delta t_t}{2} (S_{fi}^k + S_{fi+1}^k) \\ &\cdot T_{i+1}^k - g \Delta t_t (A_{i+1}^k + A_i^k) \cdot \frac{S_{fi+1}^k}{K_{i+1}^k} \cdot \frac{\partial K_{i+1}^k}{\partial y_{i+1}^k} + \frac{\Delta t_t}{\Delta x_i} (y_{i+1}^k - y_i^k) \cdot T_{i+1}^k \\ &- g \Delta t_t S_o \cdot T_{i+1}^k \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial Q_i} = 1 - \frac{4\Delta t_t}{\Delta x_i} \cdot \frac{Q_i^k}{A_i^k} + g \Delta t_t (A_{i+1}^k + A_i^k) \cdot \frac{S_{fi}^k}{Q_i^k} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial Q_{i+1}} = 1 + \frac{4\Delta t_t}{\Delta x_i} + \frac{Q_{i+1}^k}{A_{i+1}^k} + g \Delta t_t (A_{i+1}^k + A_i^k) \frac{S_{fi+1}^k}{Q_{i+1}^k} \quad (3.22)$$

Como pode-se verificar, o problema agora consiste em resolver um sistema linear. A sequência de resolução é a seguinte:

- a) Estimativas das variáveis não conhecidas na interação k , encolhendo valores próximos ao ótimo para que haja convergência;
- b) Resolução da matriz $J^{(k)}$ por um método que resolva eficientemente matrizes banda pentadiagonais, utilizando-se aqui o Método "DOUBLE SWEEP". Ver anexo III.

- c) Verificar se com os valores calculados, F_i e G_i , são aproximadamente zero ou estão dentro de uma precisão desejada;
- d) Quando a precisão é atingida, o último valor calculado é a solução, quando não, incrementa-se o valor das variáveis e repete-se o processo.

3.2 - ESQUEMA IMPLÍCITO LINEAR-ESQUEMA DE PREISSMANN

Este esquema por ter um desenvolvimento matemático longo e enfadonho está apresentado no anexo II.

4. APLICAÇÃO

4.1 - CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

Como aplicação utilizaremos a Usina Hidrelétrica de Xingó, em construção, pertencente ao sistema da Companhia Hidro Elétrica do São Francisco (CHESF).

A CHESF é uma sociedade de economia mista controlada pela ELETROBRÁS, cuja função concentra-se na produção e transmissão de energia elétrica, cabendo às empresas concessionárias estaduais a sua distribuição aos consumidores finais.

A área de concessão da CHESF abrange oito dos nove estados do Nordeste, da Bahia ao Piauí. O sistema CHESF é composto basicamente de Usinas Hidrelétricas (~ 93%), na figura 6 pode-se visualizar a localização destas usinas e suas respectivas potências instaladas. As Usinas Termelétricas constituem, portanto, apenas 7% da potência instalada.

O fator de carga do sistema é da ordem 70%, o que vem a ser um valor relativamente alto, típico de região industrializada.

A Usina Hidrelétrica de Xingó localiza-se no rio São Francisco, próxima à cidade de Canindé do São Francisco, entre os estados de Alagoas e Sergipe, distando aproximadamente 60 Km do complexo Hidrelétrico de Paulo Afonso. Na figura 7 pode-se ver este trecho do rio São Francisco, chamado Baixo São Francisco. Este trecho tem uma extensão de 270 Km.

Os estudos econômico-energéticos realizados evidenciam que, a partir do segundo quinquênio da década de 90, o atendimento de energia deverá ser realizado através de Usinas Hidrelétricas de baixa queda, de energia proveniente da região Norte e de Usinas Térmicas. Torna-se, portanto, necessário, um atendimento complementar aos picos de demanda, o que pode ser conseguido com a supermotorização da Usina de Xingó, uma vez que este aproveitamento, por suas características peculiares de alta queda e baixo custo incremental apresenta condições que o predestinam à operação em regime de ponta.

dições de descarga líquida nas seções de Piranhas e Pão de Açúcar, que serviram para aferir esta variável.

As condições iniciais foram obtidas da campanha, pois diversas linhas d'água foram obtidas neste período, e interpolação.

As condições de contorno utilizadas foram:

- Motante - $Y(o,t)$ - Linigrama em Xingó
- Jusante - $Y(o,t) = 0$ - nível médio do mar.

Considerar o valor zero para o nível médio do mar, de ve-se ao fato da seção de Propriá está localizada aproximadamente a 73 Km da foz, sofrendo influência pouco significativa com a variação da maré. Entretanto quando dá aplicação do modelo analizaremos esta consideração.

Nesta fase de calibração utilizou-se os dias 12, 13 e 14 de Janeiro de 1979. O ajuste do modelo neste trecho consistiu em tentativas de valores para o coeficiente de rugosidade de manning.

O intervalo de tempo de cálculo foi de 1800s.

As figuras 11, 12, e 13, mostram o bom ajuste obtido, para as seções de Piranhas, Pão de Açúcar e Propriá.

4.2.2 - Verificação do Modelo

Uma vez calibrado o modelo faz-se necessário sua verificação, para determinar se os parâmetros podem ser usados em outros períodos de simulação. Utilizou-se aqui o período que vai do dia 10 ao dia 19 de 01/79.

As figuras 10, 12 e 13, mostram os resultados obtidos.

4.2.3 - Aplicação

A primeira utilização do modelo consistiu em avaliar as flutuações que ocorrerão com a implantação da 1ª etapa de mo

torização.

As condições iniciais utilizadas foram: linha d'água obtida em campanha de campo e interpolação.

As condições de contorno utilizadas foram:

- Montante - $Q(o,t)$ - Hidrograma defluente na 1ª etapa de motorização.
- Justante - $Y(o,t) = 0$ - Nível médio do mar.

O intervalo de tempo utilizado, foi de 1800s para a variação gradual de vazão e 120s para os períodos de abertura e fechamento abrupto das turbinas.

Os resultados obtidos nas cidades de Piranhas, Pão de Açúcar e Propriá, encontram-se nas figuras 14, 15 e 16. Estes resultados obtidos para as flutuações de níveis são pouco sensíveis à consideração de uma maré senoidal com amplitude de $\pm 2,10$ m, o que nos permite considerar como condição de contorno à jusante o nível médio do mar, $y(o,t) = 0,0$ m.

A segunda aplicação, nesta 1ª etapa dos estudos, serviu para confirmar a não possibilidade de uma 2ª etapa de motorização sem a construção da usina de Pão de Açúcar à Jusante, com o objetivo de amortecer as flutuações de níveis.

Em relação ao caso anterior, modificou-se apenas a condição de contorno à montante, que passou a ser o hidrograma defluente previsto para a 2ª etapa de motorização, figura 5.

Os resultados obtidos neste caso encontram-se nas figuras 17 e 18. As flutuações de níveis encontradas são bastante elevadas quando comparadas com as anteriores.

Portanto, a Usina de Xingó, foi projetada de forma modular, prevendo-se três etapas de motorização, sendo que, as motorizações de 2ª e 3ª etapas somente ocorrerão quando da construção da Usina de Pão de Açúcar, localizada 41 Km a jusante de Xingó, o que servirá para amortecer as flutuações de níveis. O nosso objetivo principal consiste pois, em avaliar as flutuações de níveis, decorrentes da operação de ponta desta usina, e suas consequências, na navegabilidade do trecho e nas cidades ribeirinhas, onde destacamos, Piranhas, Pão de Açúcar e Propriá, localizadas respectivamente a 5, 37 e 133 Km a jusante desta usina. Os hidrogramas defluentes para cada etapa de motorização estão apresentados nas figuras 8, 9, e 10. Estes hidrogramas correspondem a valores médios semanais, estabelecidos através de estudos energéticos.

4.2 - PRIMEIRA ETAPA DOS ESTUDOS

(Trecho Usina de XINGÓ - FOZ)

4.2.1 - Calibração do Modelo

O trecho que vai de Xingó à foz, tendo 206 Km, foi caracterizado por 51 seções transversais, sendo a escolha destas seções baseada em topo batimetria existente procurando caracterizar ao máximo a morfologia do trecho e nos critérios numéricos. Os dados observados e disponíveis para ajuste são:

- Níveis na seção de Xingó
- Níveis na cidade de Piranhas
- Níveis na cidade de Pão de Açúcar
- Níveis na cidade de Propriá.

Todos os dados anteriores foram obtidos através de uma campanha de campo realizada nos meses de Janeiro, Fevereiro e Março de 1979.

Os dados utilizados são horários obtidos com linígrafos, exceto em Piranhas onde os dados são de réguas linimétricas no período de 7 às 17:00h. Foram também realizadas me

4.3 - SEGUNDA ETAPA DOS ESTUDOS

(Trecho XINGÓ - PÃO DE AÇÚCAR)

Este trecho tem um comprimento de 37 Km. Utilizou-se 25 seções transversais topo batimétricas para discretização do trecho, procurando representar a morfologia do rio.

- Os dados disponíveis para ajuste são:
- Níveis na seção de Piranhas.

O ajuste e verificação neste caso foi feito com o objetivo de confirmar os valores dos coeficientes de rugosidade manning anteriormente obtidos. Os resultados obtidos, foram bastante próximos ao anterior, não havendo necessidade de modificação.

Condições iniciais e de contorno.

- As condições iniciais foram obtidas dos dados da campanha de campo e interpolação.

As condições de contorno utilizadas neste caso foram:

- Montante - $Y(o,t)$ - Linigrama em Xingó
- Jusante - $Y(m,t)$ - Linigrama em Pão de Açúcar.

4.3.1. - Aplicação

Nesta etapa o modelo foi utilizado para avaliar as flutuações de níveis quando da operação conjunta das usinas de Xingó (2^a e 3^a etapas) e Pão de Açúcar.

- Usina de Xingó (2^a etapa de motorização) com reservatório de Pão de Açúcar à Jusante.

Condições iniciais e de contorno.

- A condição inicial foi admitida como a cota normal de operação do reservatório de Pão de Açúcar ou seja 24,00m (IBGE).

As condições de contorno utilizadas neste caso foram:

- Montante - $Q(o,t)$ - Hidrograma defluente em Xingó para a 2ª etapa de motorização. Figura 9.
- Jusante - $Q(m,t)$ - Hidrograma defluente em Pão de Açúcar, admitiu-se que estas vazões ocorrem na seção imediatamente à montante da barragem, figura 18.

Neste caso obtemos em Piranhas, ver figura 20, flutuações bastantes amortecidas pelo reservatório de Pão de Açúcar, sendo estes valores da mesma ordem de grandeza das flutuações hora existentes neste trecho de rio.

Usina de Xingó (3ª etapa de motorização) com reservatório de Pão de Açúcar à Jusante.

- Condições iniciais e de contorno.
- A condição inicial foi admitida como a cota normal de operação do reservatório de Pão de Açúcar ou seja 24,00m (IBGE).

As condições de contorno utilizadas neste caso foram:

- Montante - $Q(c,t)$ - Hidrograma defluente em Xingó para a 3ª etapa de motorização.
- Jusante - $Q(n,t)$ - Hidrograma defluente em Pão de Açúcar, admitiu-se que estas vazões ocorrem na seção imediatamente à montante da barragem, figura 19.

Neste caso obtemos em Piranhas, ver figura 21, flutuações bastante elevadas, não conseguindo o reservatório de Pão de Açúcar amortecer suficientemente estas flutuações..

5- CONCLUSÕES

5.1 - DESCRIÇÃO DO SISTEMA FLUVIAL E ASPECTOS SÓCIO-ECONÔMICOS

A construção do reservatório, elevando o nível d'água até a El. 138,0 m, acarretará alterações no sistema fluvial da sua bacia contribuinte. Grande parte dos tributários terão o médio e baixo curso eliminados e passarão a ter um novo cone de dejeção.

Atualmente, no baixo São Francisco, há navegação eventual de pequenos navios de cabotagem, que aportam em Penedo, e de pequenos automotores. O trecho navegável vai da barra do rio a Piranhas, com uma extensão de 208 km. Entre Piranhas e Pão de Açúcar, no sub-trecho superior, as larguras do canal variam de 250 a 600 m e as profundidades mínimas em estiagens excepcionais chegam a 1,0 m.

O trecho do rio, a montante do local de implantação de Xingó, com uma extensão de 70 km, não é atualmente navegável. A navegação por este trecho será possível, após a construção do reservatório, entretanto o baixo São Francisco continuará isolado dos trechos de montante, em decorrência do obstáculo representado pelo aproveitamento de Paulo Afonso. É também economicamente inviável a comunicação do reservatório de Xingó com o trecho do rio a jusante, em vista do insignificante benefício econômico decorrente, relativamente aos importantíssimos custos associados ao necessário sistema de eclusas.

Durante a fase de projeto previu-se que, a jusante do aproveitamento, as condições de navegação não seriam afetadas significativamente durante a construção e a operação do mesmo, com referência a primeira etapa de motorização prevista. Entretanto, quando da implantação da segunda etapa de motorização de Xingó, as condições de navegação a jusante seriam basicamente governadas pela implantação da barragem de Pão de Açúcar que funcionaria como amortecedor das vazões turbinadas em Xingó fornecendo melhores condições de navegação no trecho inferior do rio São Francisco, pois elevará os níveis a montante e regularizará as vazões a jusante. A barragem de Pão de Açúcar deverá possuir uma eclusa, conforme estudos preliminares, de dez/80.

O reservatório da Usina Hidrelétrica de Xingó afetará áreas pertencentes a seis municípios do sertão nordestino, atingindo parte das micro-regiões do sertão de Paulo Afonso, do

sertão sergipano do São Francisco, e sertão alagoano, pertencentes aos estados da Bahia, Sergipe e Alagoas, respectivamente.

Segundo as informações básicas sobre os municípios ora em análise colhidas pelo IBGE, tendo como referência o ano de 1981, pode-se concluir que a região é, em média, economicamente pobre, comparando-a com o desempenho nacional. Há muito poucas informações oficiais quanto a situação agropecuária dos municípios em questão, sendo a sinopse preliminar do censo agropecuario, igualmente conduzido pelo IBGE, a única fonte atual de dados relativos a matéria, porém com ênfase as produções e particularidades de âmbito quase que exclusivamente estadual. Em termos de criação de gado bovino a região é considerada como de produção média, com menos de trinta cabeças por km².

5.2 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para conseguir uma boa calibração do modelo verificou-se a necessidade de considerar um coeficiente de rugosidade variável com o nível e ao longo do trecho, de tal forma que seu valor médio nas seções variam de 0,04 para as cabeceiras até um valor mínimo de 0,022 para a foz. É importante lembrar que os resultados obtidos, quando da operação conjunta dos dois reservatórios, poderão ser inferiores aqueles obtidos, pois, estamos usando um coeficiente de rugosidade calibrado para a situação atual, ou seja para um nível inferior ao que existirá quando da construção da barragem de jusante (Pão de Açúcar).

Nas condições atuais do rio São Francisco as flutuações de níveis nas localidades de Piranhas, Pão de Açúcar e Propriá causados pela operação do complexo de Paulo Afonso são da seguinte ordem de grandeza:

Piranhas - oscilação da ordem de 1,90 m.

Pão de Açúcar - oscilação da ordem de 60 cm.

Propriá - oscilação da ordem de 5 cm.

Comparando-se estas oscilações com as provocadas pela Usina de Xingó podemos tirar as seguintes conclusões:

a) A primeira etapa de Xingó (seis unidades) é viável pois provoca flutuações de níveis compatíveis com as atualmente provocadas pelo complexo de Paulo Afonso.

b) A segunda etapa de Xingó (10 unidades), só é viável

com a construção da barragem de Pão de Açúcar, para amortecer as flutuações, pois as flutuações provocadas seriam mais que o dobro das atuais, prejudicando a navegação e causando danos as margens do rio.

c) A terceira etapa de Xingó (16 unidades) é também incompatível, com uso integrado do trecho de rio, pois o reservatório de Pão de Açúcar não consegue amortecer suficientemente as flutuações de níveis.

5.3 - ANÁLISE DAS HIPÓTESES BÁSICAS

A utilização das equações (2.31) e (2.32) no esquema de Amein e Chu, tem como aceitação básica a não formação de ondas de choque, portanto para verificar tal hipótese consideramos as equações (2.36) e 2.37) que consideram a introdução de uma perda de carga localizada para representar a perda de energia no choque caso ele exista. A utilização destas equações foi feita ao uso mais crítico, que é a 2a. etapa de Xingó sem barragem de regulação à jusante, os resultados obtidos foram bastante próximos aos anteriores, o que nos indica não haver formação de ondas de choque, ou variações bruscas nas seções transversais que inviabilize a utilização das equações (2.31) e (2.32).

5.4 - MODELO UTILIZADO

Os resultados obtidos anteriormente, foram idênticos para os dois modelos utilizados.

Uma análise comparativa foi feita para o caso da 2a etapa de motorização sem barragem à jusante, por ser este caso um dos mais críticos, servindo, portanto como um caso padrão. As figuras 22, 23, 24, 25, 26 e 27 mostram os resultados obtidos nesta análise comparativa. Nesta análise fez-se variar o intervalo de tempo de cálculo e a distância entre as seções transversais, para cada distância analisada apresentamos apenas duas seções, entretanto os resultados obtidos para as demais foram idênticas aos aqui apresentados. Analisando-se os resultados obtidos verifica-se não haver diferenças significativas entre os modelos não linear, a ponto de concluir-se que um modelo é melhor do que o outro. Portanto, pode-se concluir

que em aplicações similares a utilização de um modelo não linear será função da sua disponibilidade para o usuário.

Para uma boa representação da frente de onda procuramos utilizar uma relação $\Delta x/\Delta t \approx \sqrt{gA/T}$ conforme proposto pela Sogreah, Grenoble (França), em 1964.

A utilização de um Δx menor ($\Delta x=1.000$ m), também nos leva a resultados idênticos. Desde que permaneça a relação $\Delta x/\Delta t \approx \sqrt{gA/T}$ o modelo matemático dá uma boa representação da frente de onda. Quando esta relação é grande a frente torna-se mais difusiva, por outro lado quando esta relação é muito pequena a parecem longas ondas artificiais, mas os resultados podem ser considerados ainda satisfatórios.

Nas aplicações realizadas por Amein e Chu, o espaçamento entre as seções foi da ordem de 3.200 m.

6. PROGRAMA COMPUTACIONAL

O programa foi desenvolvido em Fortran, para um computador IBM/370. Na sua forma mais geral utilizou-se as equações (2.36) e (2.37) que para $K=0$ (coeficiente de expansão ou contração) transformou-se nas equações (2.31) e (2.32). O programa é composto de um programa principal e de 3 subrotinas. O número máximo de seções a considerar é de 99 seções transversais, sendo cada seção caracterizada por uma tabela que fornece a cota, área, raio hidráulico e a largura de topo, com um máximo de 90 pontos para cada seção. Para a utilização do modelo com 51 seções necessitou-se de 3 megas de memórias, e um tempo máximo de 2 minutos de CPU para os estudos realizados.

- Programa principal é responsável pela leitura dos dados de entrada e pela chamada dos subrotinas. Os principais dados de entrada são:

- Coexco (k) coeficiente de proporcionalidade entre 0 e 1.

- Alfa e Beta = precisão para a vazão e profundidade no processo iterativo de Newton-Raphson.

- Z0 = Cota de fundo das seções transversais para cálculo da declividade.

- H, A, RH e T = Tabela com cota, área, raio hidráulico e largura de topo, para cada seção transversal.

- Tabela fornecendo o coeficiente de rugosidade x cota, para cada seção transversal.

- Vazão inicial e cota inicial para cada seção.

- Distância entre as seções.

- Intervalo de tempo de cálculo e de fornecimento dos dados para simulação.

- Condições de contorno à montante e à jusante.

- Subrotina NIVNA.

Esta subrotina é responsável pela resolução do sistema de equação não linear, utilizando o processo iterativo de Newton-Raphson e o método "Double-Sweet", calculando para cada instante de tempo em todas as seções os valores da vazão e da profundidade.

- Subrotina GEOMET

Esta subrotina é responsável pelo cálculo das grandezas geométricas e hidráulicas e de suas derivadas quando necessário. Esta subrotina utiliza a função FINT que realiza interpolação numa tabela de dados, calculando pois em cada instante

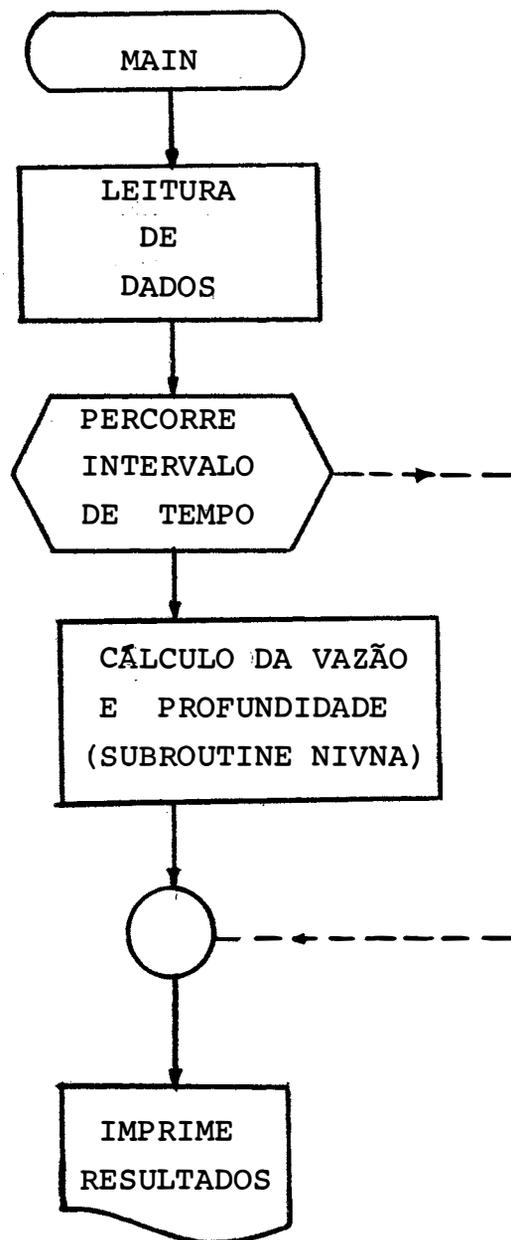
de tempo e para cada profundidade os valores da área, raio hi dráulico, largura de topo. Com estes valores e o coeficiente de rugosidade, calcula o coeficiente de condução e por fim a derivada da largura de topo e do coeficiente de condução.

- Subrotina IMPPLO

Esta subrotina é responsável pela impressão e plotagem dos dados de entrada e/ou resultados de saída.

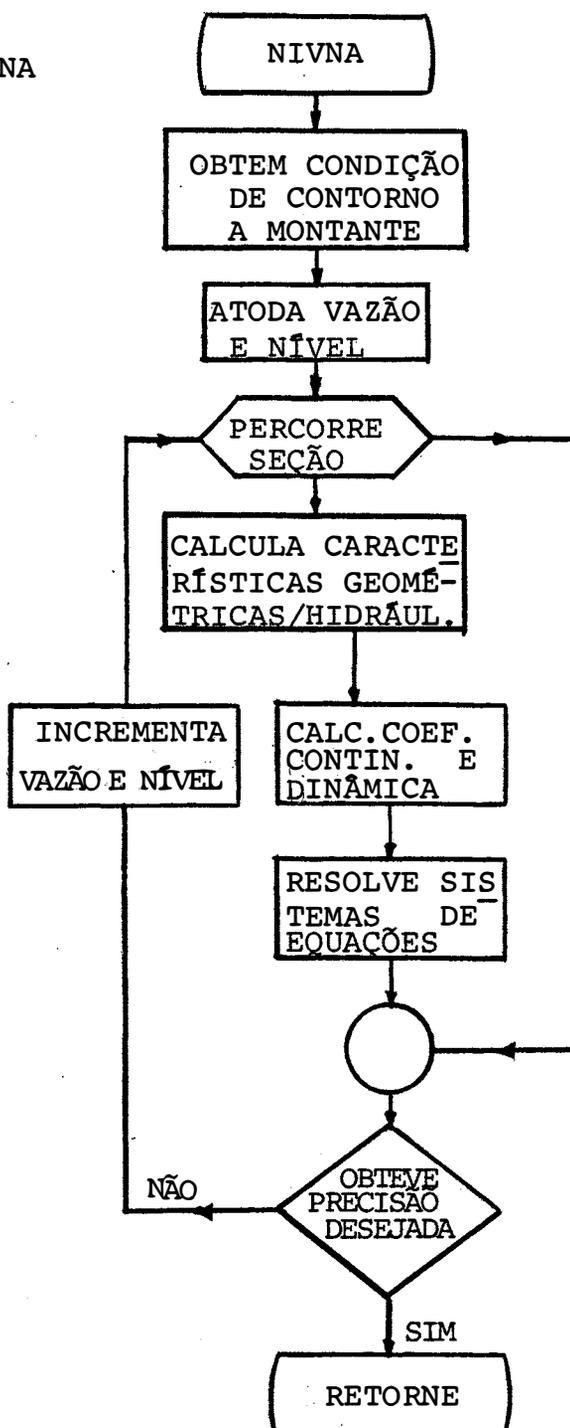
FLUXOGRAMA

PROGRAMA PRINCIPAL



FLUXOGRAMA

SUBROUTINE NIVNA



7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMEIN, M. Streamflow Routing on Computer by characteristics ,
Water Resources Research, American Geophy Union, 1966 .
Vol.2, N.1.
- _____, & FANG, C.S. Implicit Flood Routing in Natural Channels,
Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 1970. Vol.96,
Hy 12.
- _____, & CHU, H.L. Implicit Numerical Modeling of Unsteady Flows,
Journal of the Hydraulic Transients, Van Nostrand Reinhold
Co., New York, 1975.
- AKAN, A.O. & YEN, B.C. Diffusion Wave Flood Routing in Channel
Networks, Journal of the Hidraulics Division, 1981.
Vol. 107, No.Hy 6.
- CHAUDHRY, M.H. Applied Hidraulic Transients, Van Nostrand Reinhold
Co., New York, 1979
- CHEN, Y.H. Water and Sediment Routing in Rivers, Chapter 10,
Institute of River Modeling, CSU, Fort Collins, Co.1977.
- CHOW, V.T. Open Channel Hidraulics, Mc Graw-Hill Book Co.,
New York, 1959.
- CUNGE, J.A., Holly HR, F.M. & VERWEY, A. Practical Aspects of
Computational River Hidraulics, Pitman Advanced Publishing
Program, London, 1980.
- HENDERSON, F.A. Openn Channel Flow, Macmillam Co., New York, 1966.
- PONCE, U.M. & SIMONS, D.B. Shallow Wave Propagation in Open Channel
Flow, Asce Journal of Hidraulics Division, 1977, Vol. 103,
M. Hy 12.
- _____, & SIMONS, D.B. Aplicability of Kinematic and Difusion
Models, ASCE Journal Hidraulics Division, 1978, Vol. 104,
M. Hy 3.
- PROMON. ANÁLISE DE GALGAMENTO DA BARRAGEM DE XINGÓ, CHESE, 1983.

Implicit Water Wave Models. ASCE Journal of Hidraulics Division, 1978, Vol. 104. M.Hy 7.

PRICE, R.K. Comparison of four Numerical Methods of flood Routing, ASCE Journal of Hydraulics Division, 1974, Vol. 100. No Hy 7.

READ, D.L. Numerical Properties of implicit Four point Finite difference equations of unsteady flow, NOAA technical memo Nws Hydro-18, V.S. National Weather service, Silver Spring, Maryland, 1974.

SCHREIBER, G.P. Usinas Hidrelétricas, Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1978.

STRELKOFF, T. Numerical Solution of SAINT VENANT Equations, ASCE, Journal of the Hidraulics Division, 1970, Vol. 96. Mo Hy 1.

TINGSANCHALI, T. & MANAMDHAR, S.K. Analytical Difusion Model for Flood Routing, ASCE, Journal of Hidraulic Engineering, 1985, Vol. 111, No 3.

TUCCI, C.E. Modelos Matemáticos em Hidrologia e Hidráulica, curso de Mestrado, IPH, 1985.

_____, LOPES, M. Simões; LANNA, A.E.; SILVEIRA, G.L. da & GODOY, P.C. Gerenciamento da navegação do Rio Jacuí: 1 - Ajuste do modelo matemático. Caderno de Recursos Hídricos da Revista Brasileira de Engenharia, 1985, Vol. 4. N.1.

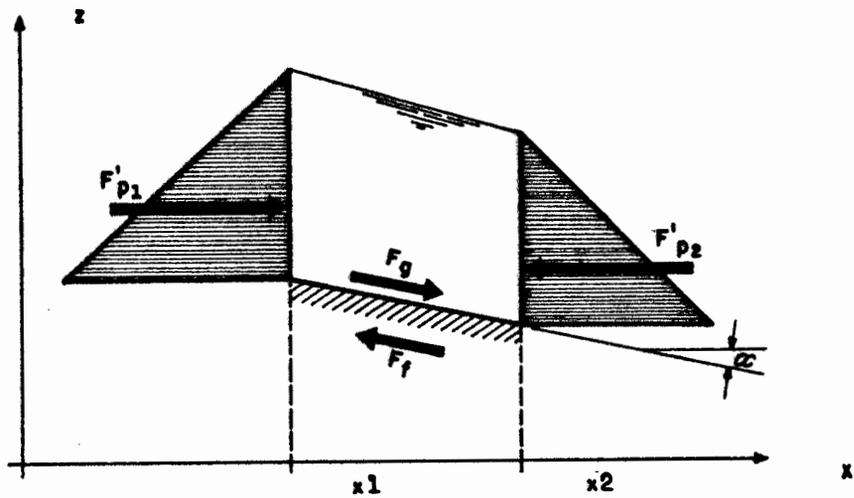
WYLIE, E.B. & STREETER, V.L. Fluid Transients, Mc Graw - Hill INC, New York, 1978.

The Xingó Hydroelectric Power Project, currently under construction, is located on the lower São Francisco River, Northeastern Brazil.

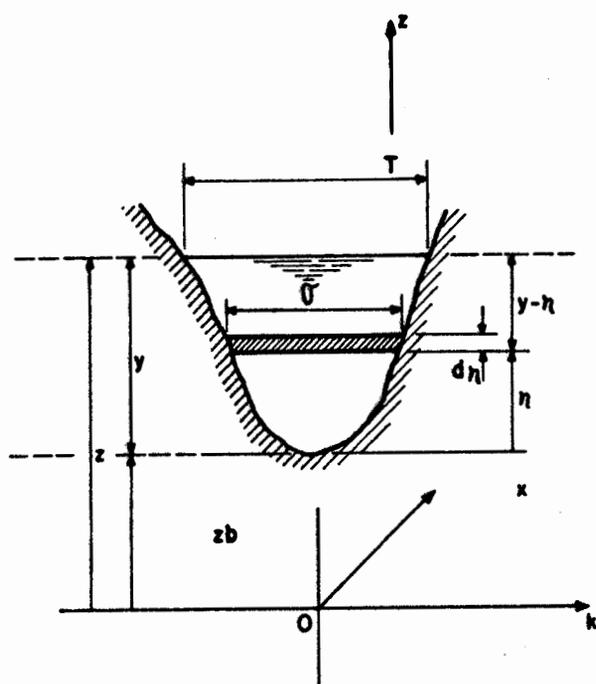
Economic studies have shown that the generating capacity over installation was the best way to meet the power requirements.

This particular operation could cause adverse effects on other river uses, like navigation and irrigation, due to the downstream water level fluctuation.

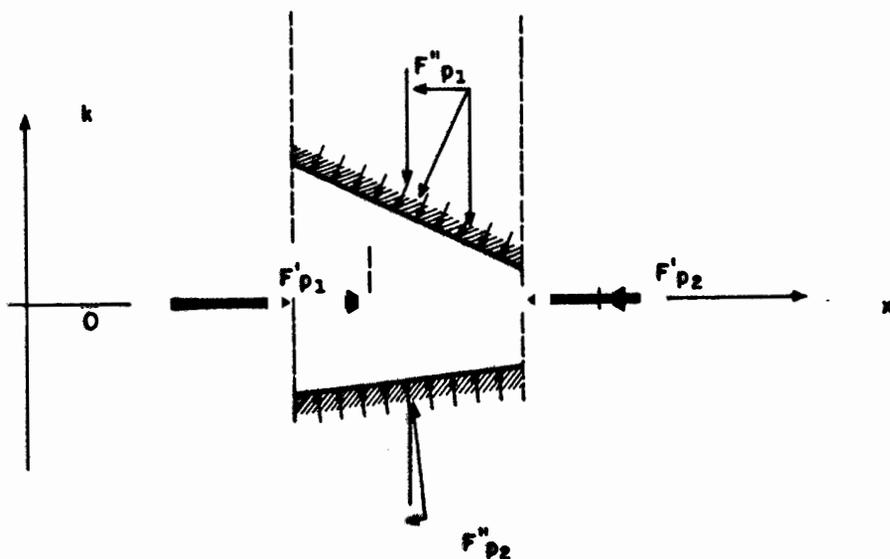
In order to assess the flow behaviour on the lower São Francisco River and to verify the necessity of a regulation dam, a hydrodynamic model was used. This model solves de Saint Venant equations by an implicit non linear finite difference method. The results were compared with an implicit linear model (Preissmann).



(a) VOLUME DE CONTROLE



(b) SEÇÃO TRANSVERSAL



(c) FORÇAS DE PRESSÃO

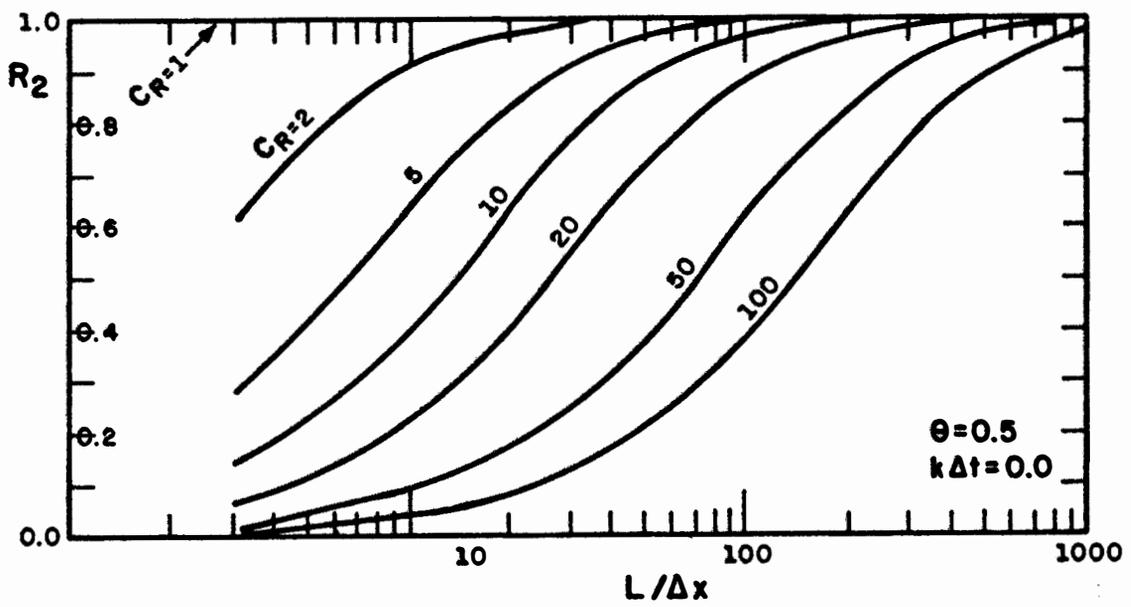
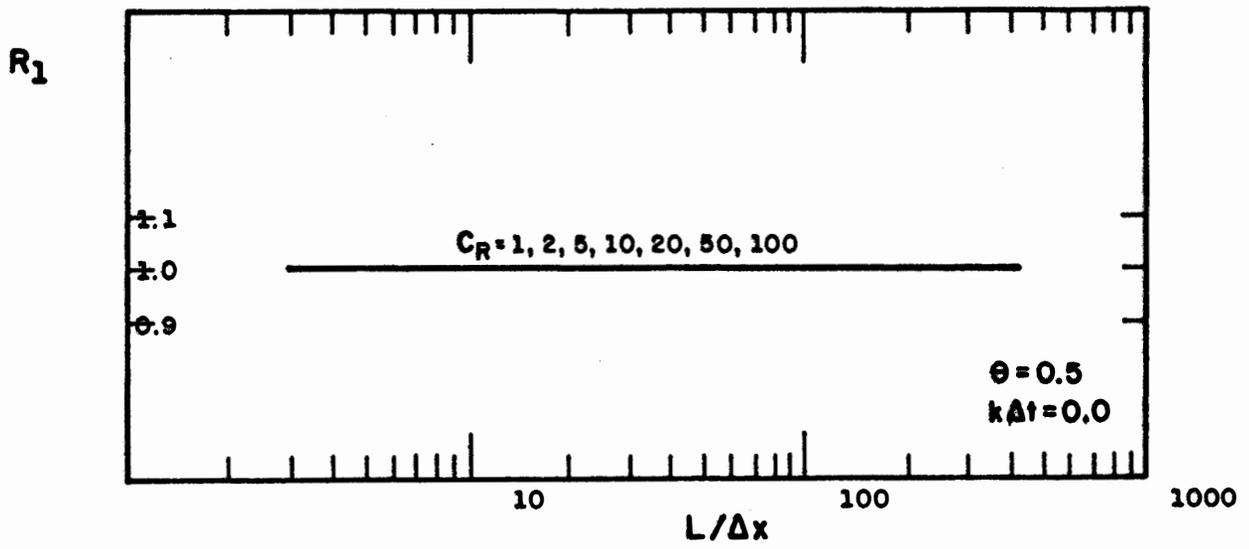


FIGURA 3 : Valores de R_1 e R_2 para alguns valores de C_R ($\theta=0.5, k\Delta t=0$)

(Fread, 1974)

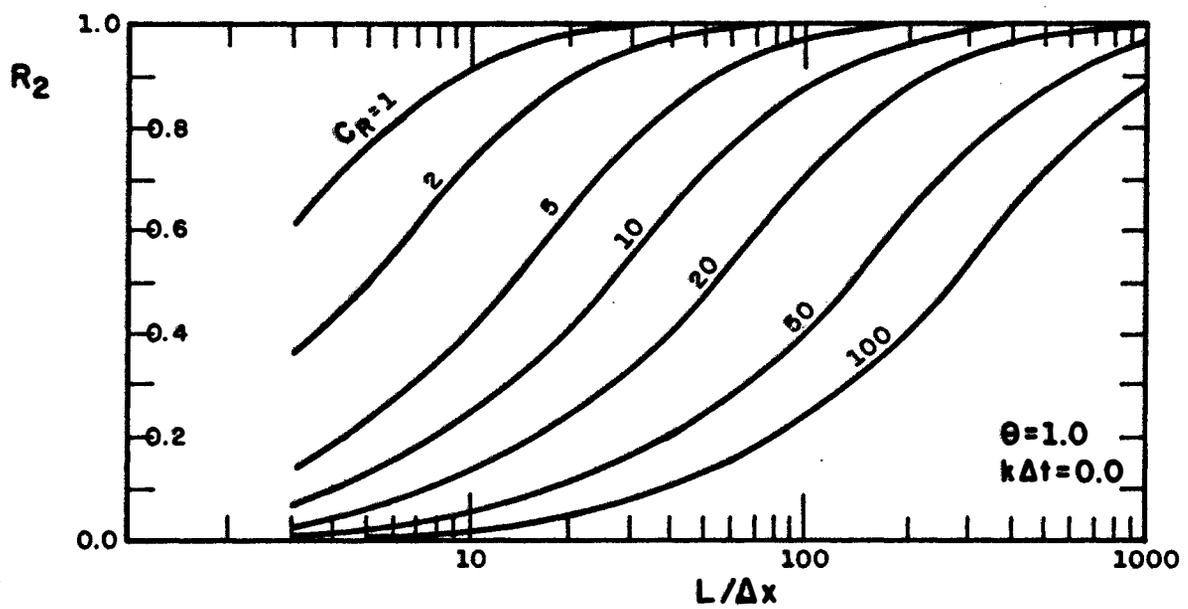
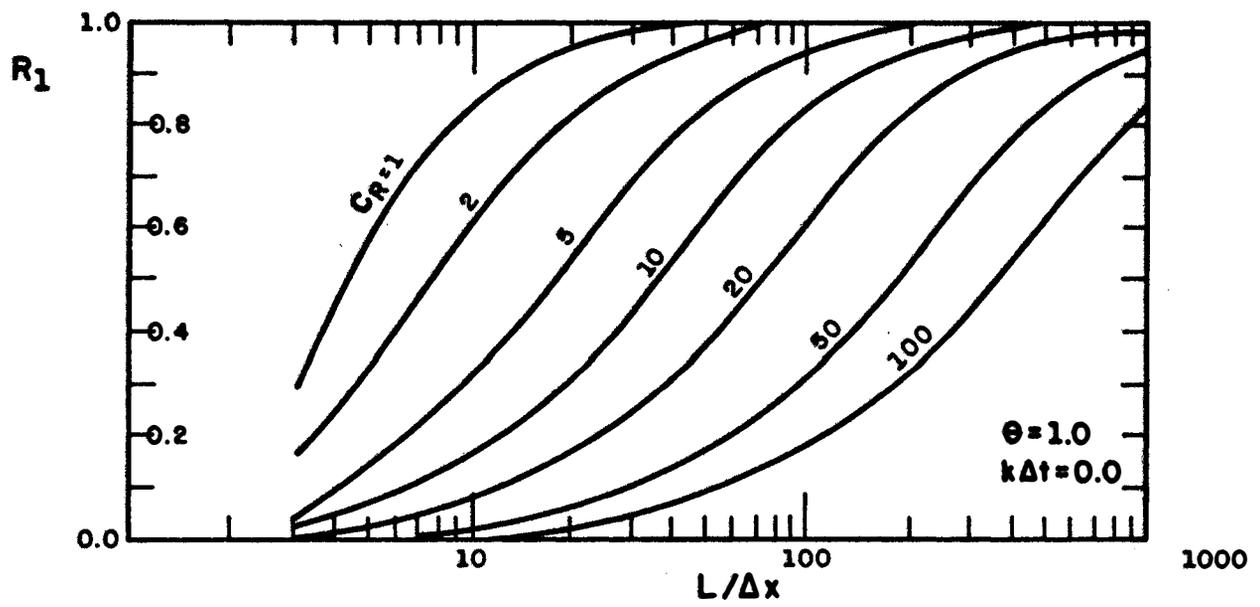


FIGURA 4 : Valores de R_1 e R_2 para alguns valores de C_R ($\theta=1.0, k\Delta t=0$)

(Fread, 1974)

HIDROGRAMA — XINGO

PRIMEIRA ETAPA

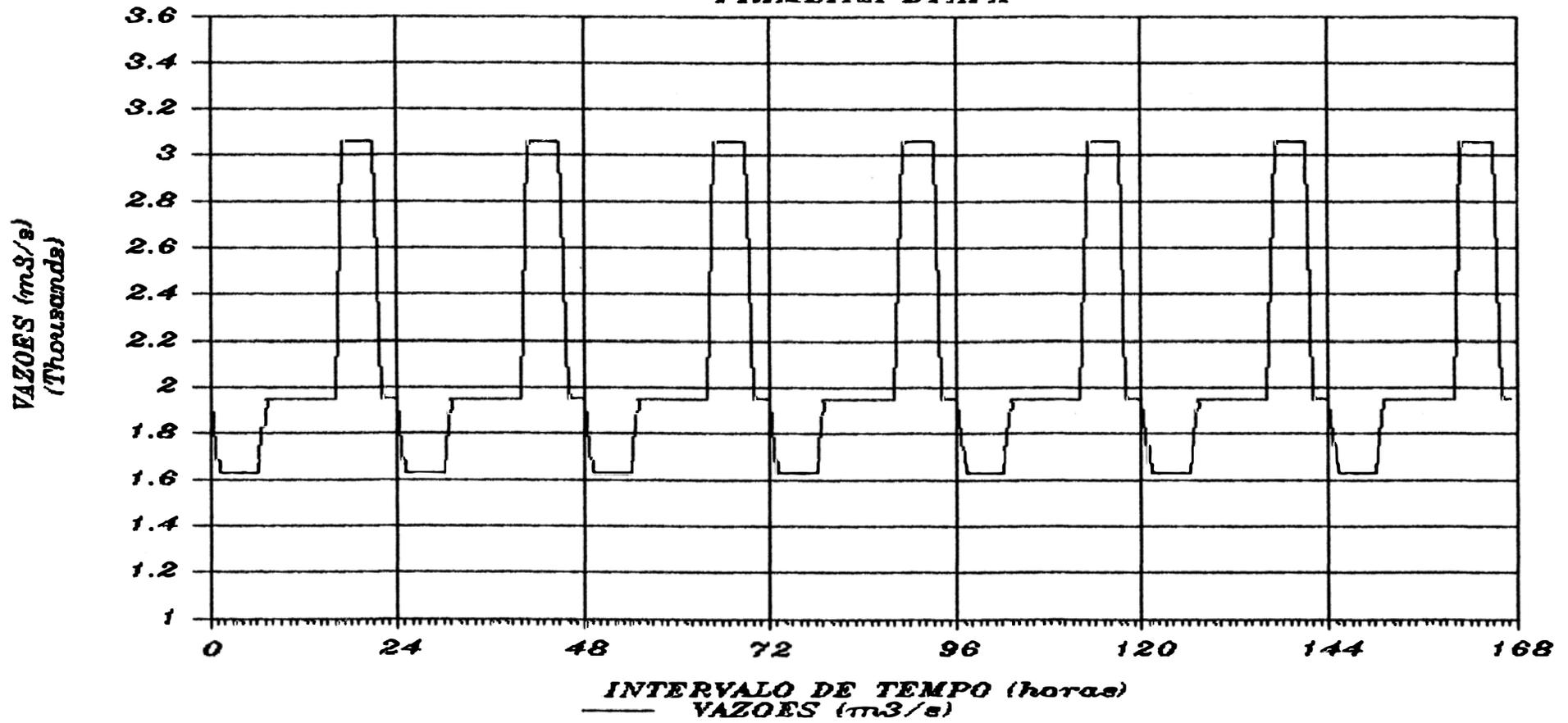


FIGURA 8

HIDROGRAMA — XINGO

SEGUNDA ETAPA

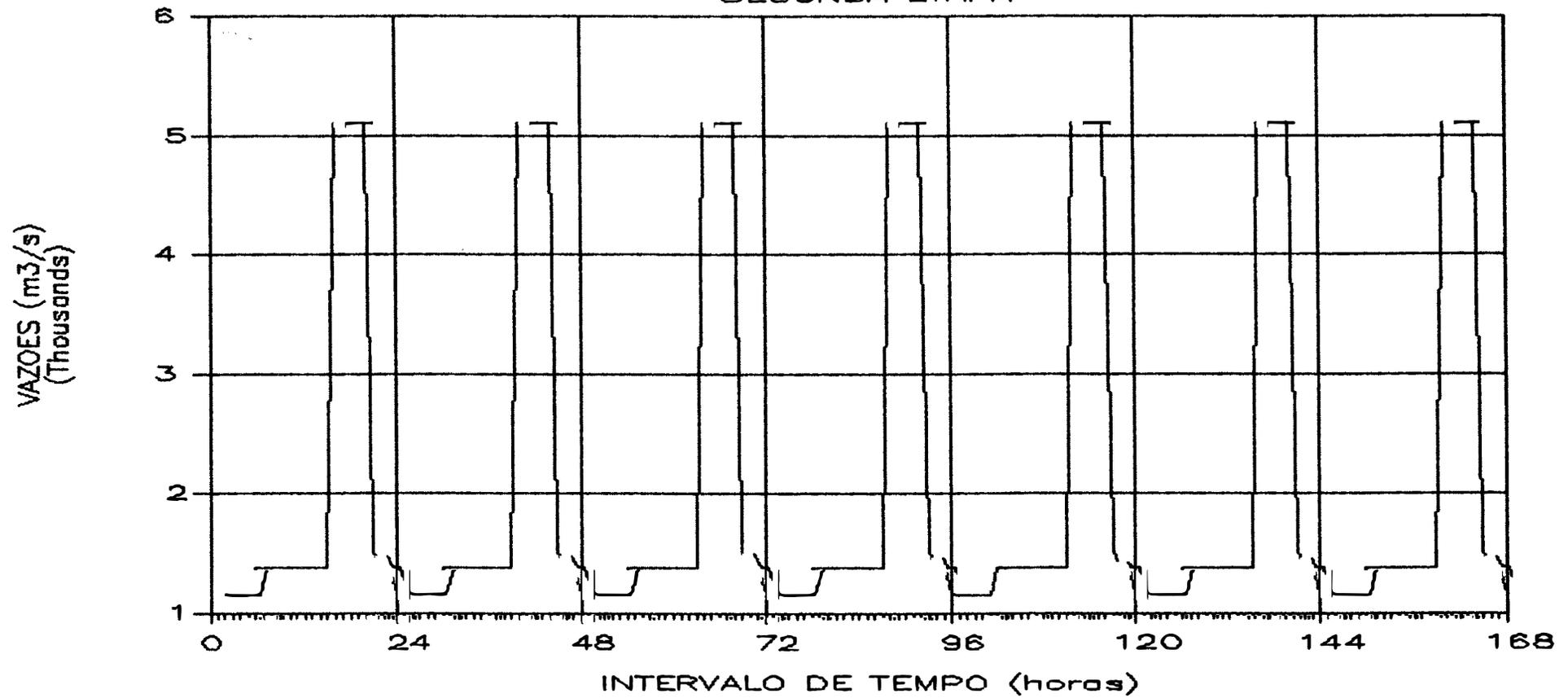


FIGURA 9

HIDROGRAMA — XINGO

TERCEIRA ETAPA

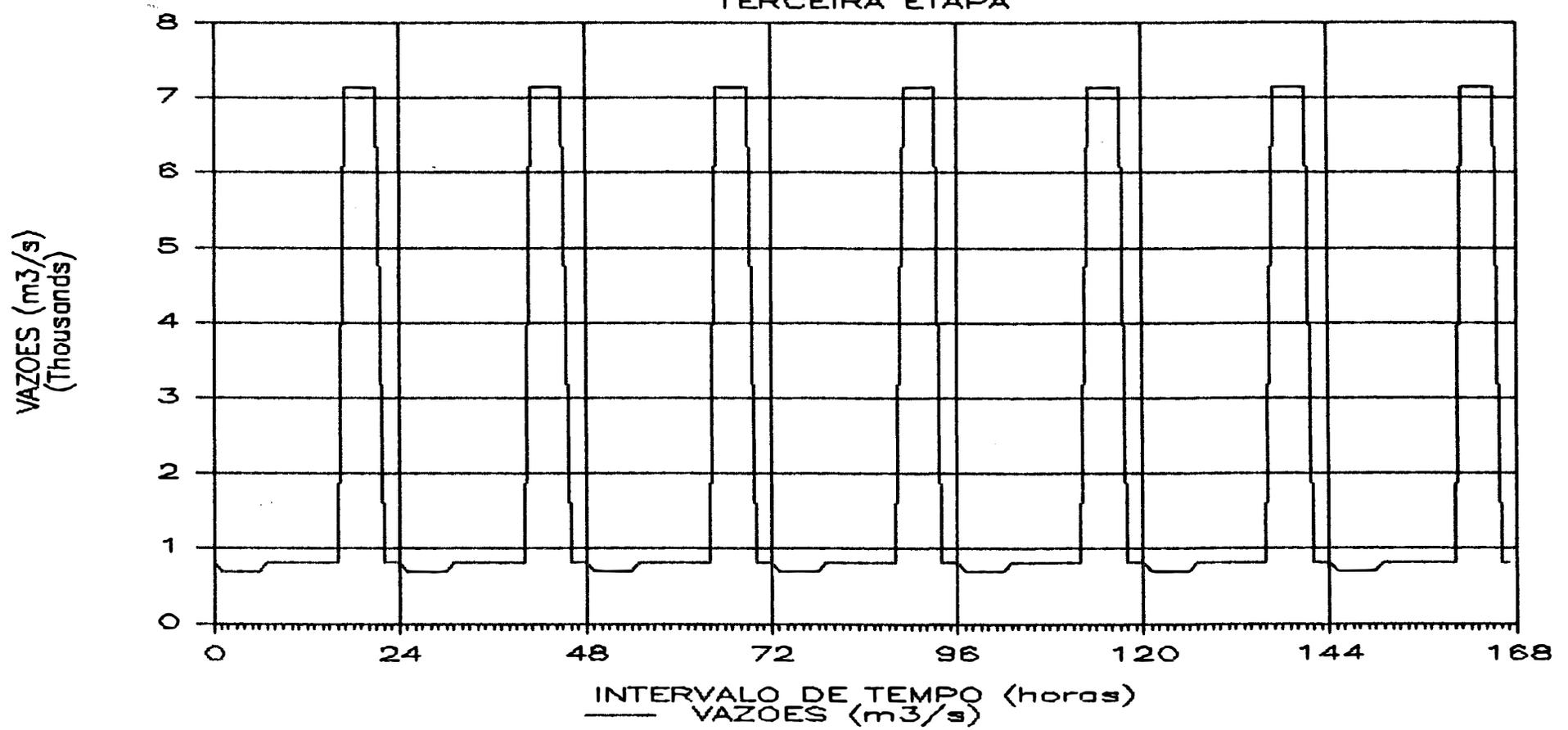


FIGURA 10

POSTO: PIRANHAS

JANEIRO 1979

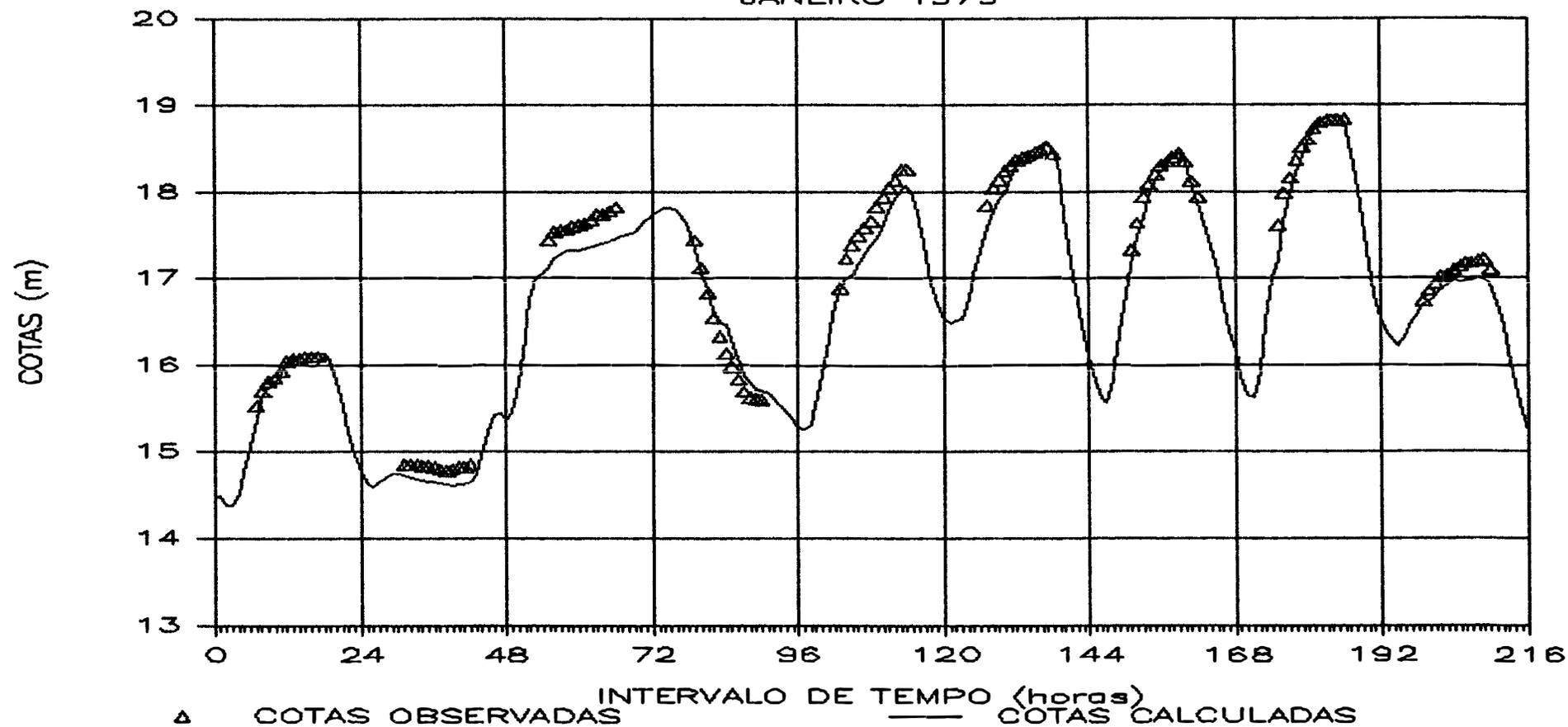


FIGURA 11

POSTO: PAO DE ACUCAR

JANEIRO 1979

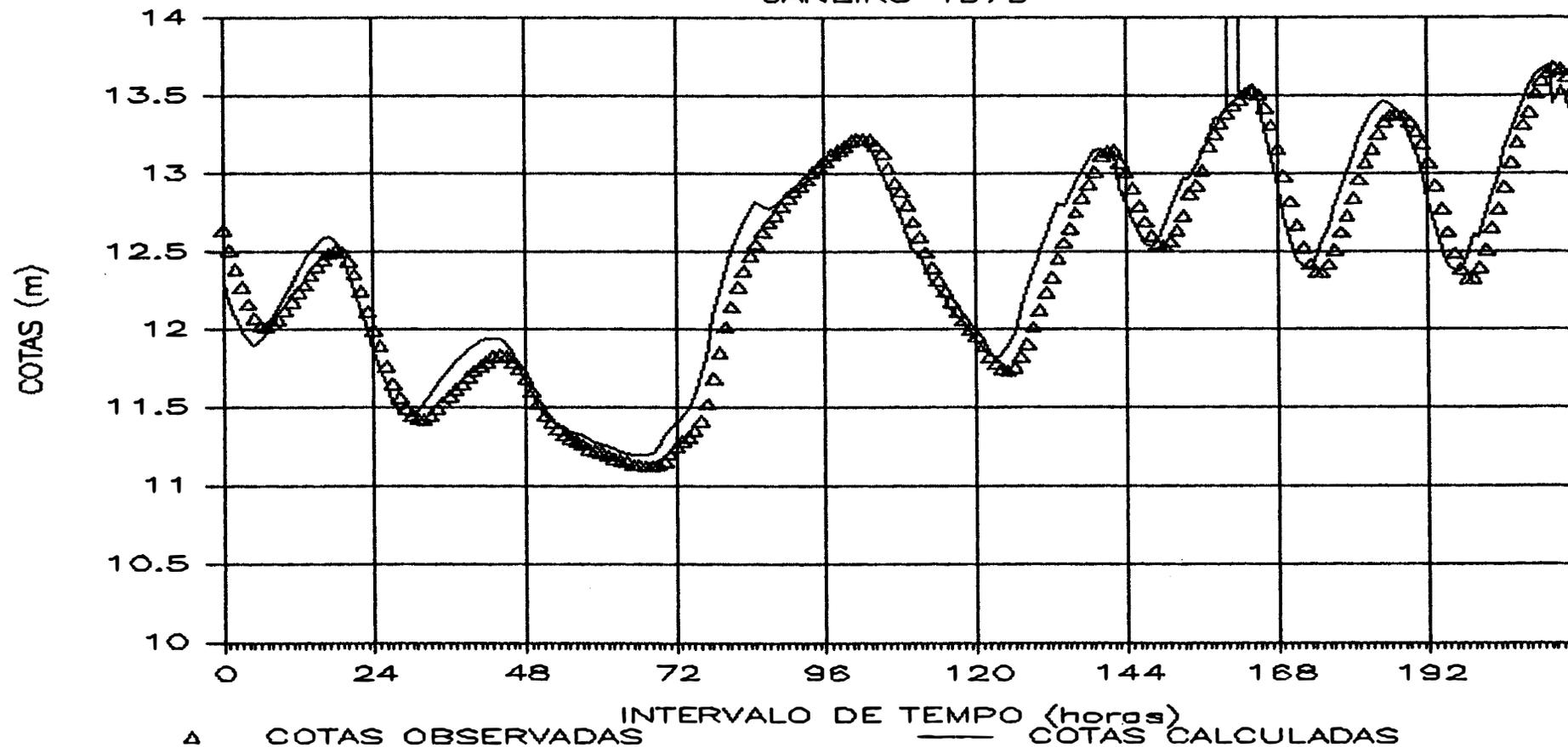


FIGURA 12

POSTO: PROPRIA

JANEIRO 1979

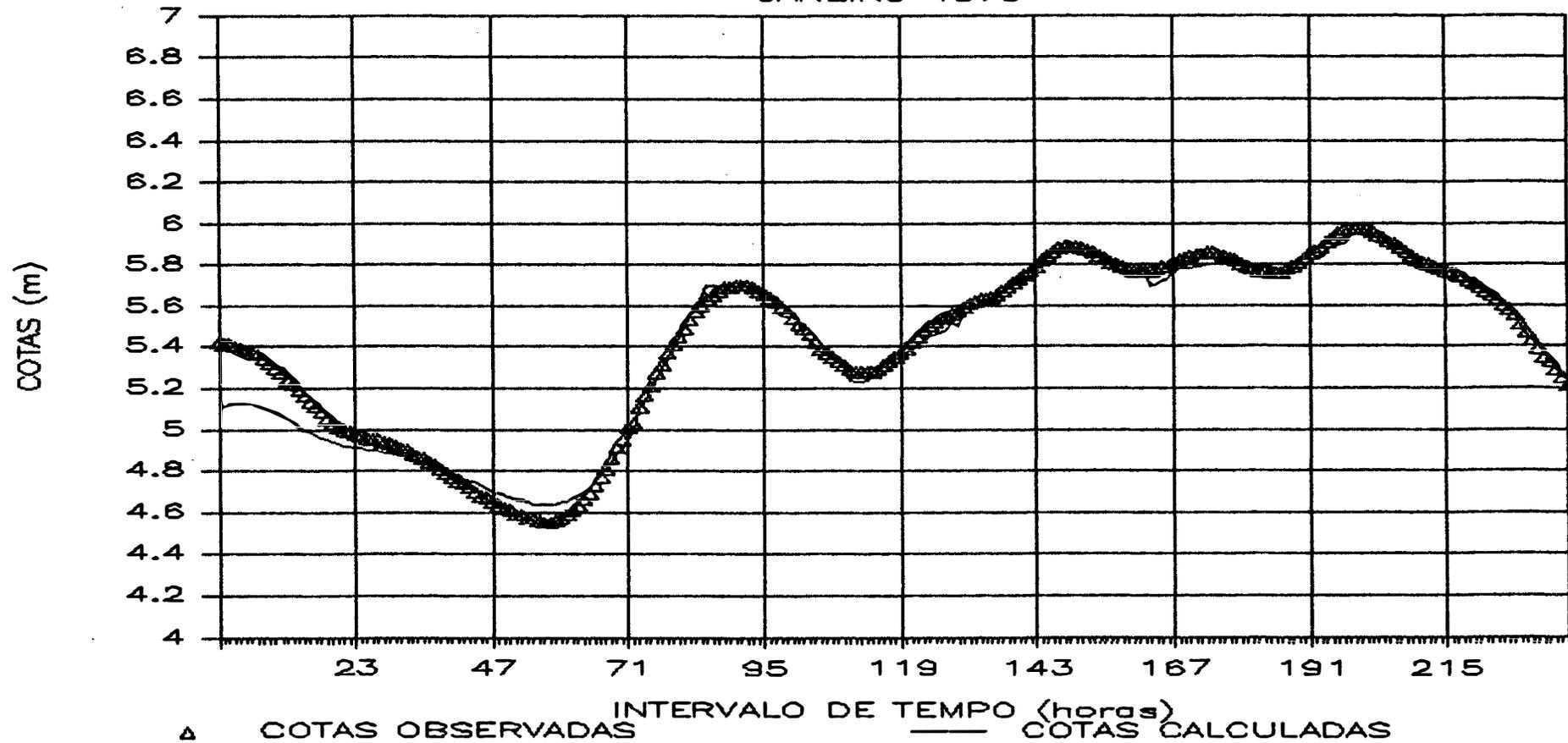


FIGURA 13

COTAS EM PIRANHAS

PRIMEIRA ETAPA DE XINGO S/ P. DE ACUCAR

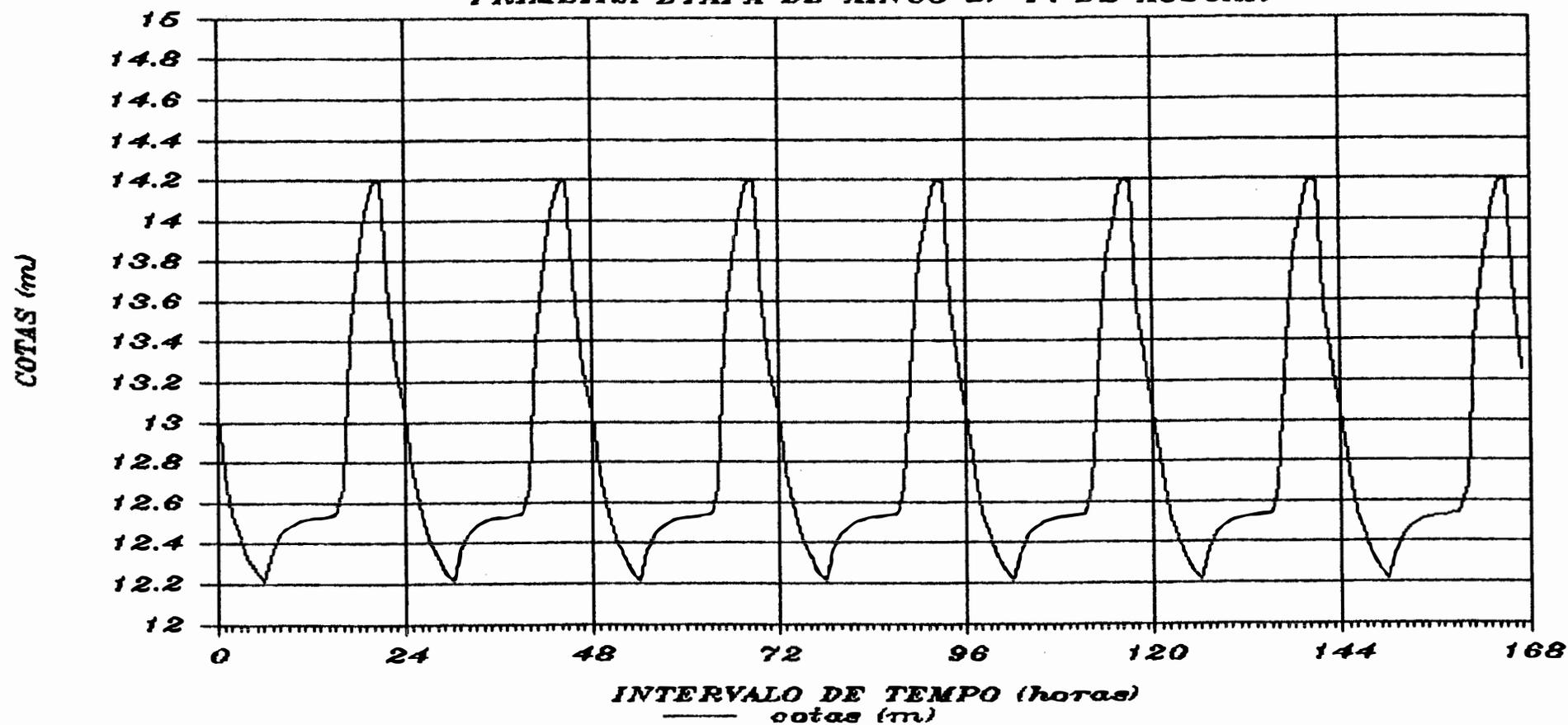


FIGURA 14

COTAS EM PAO DE ACUCAR

PRIMEIRA ETAPA DE XINGO S/ P. DE ACUCAR

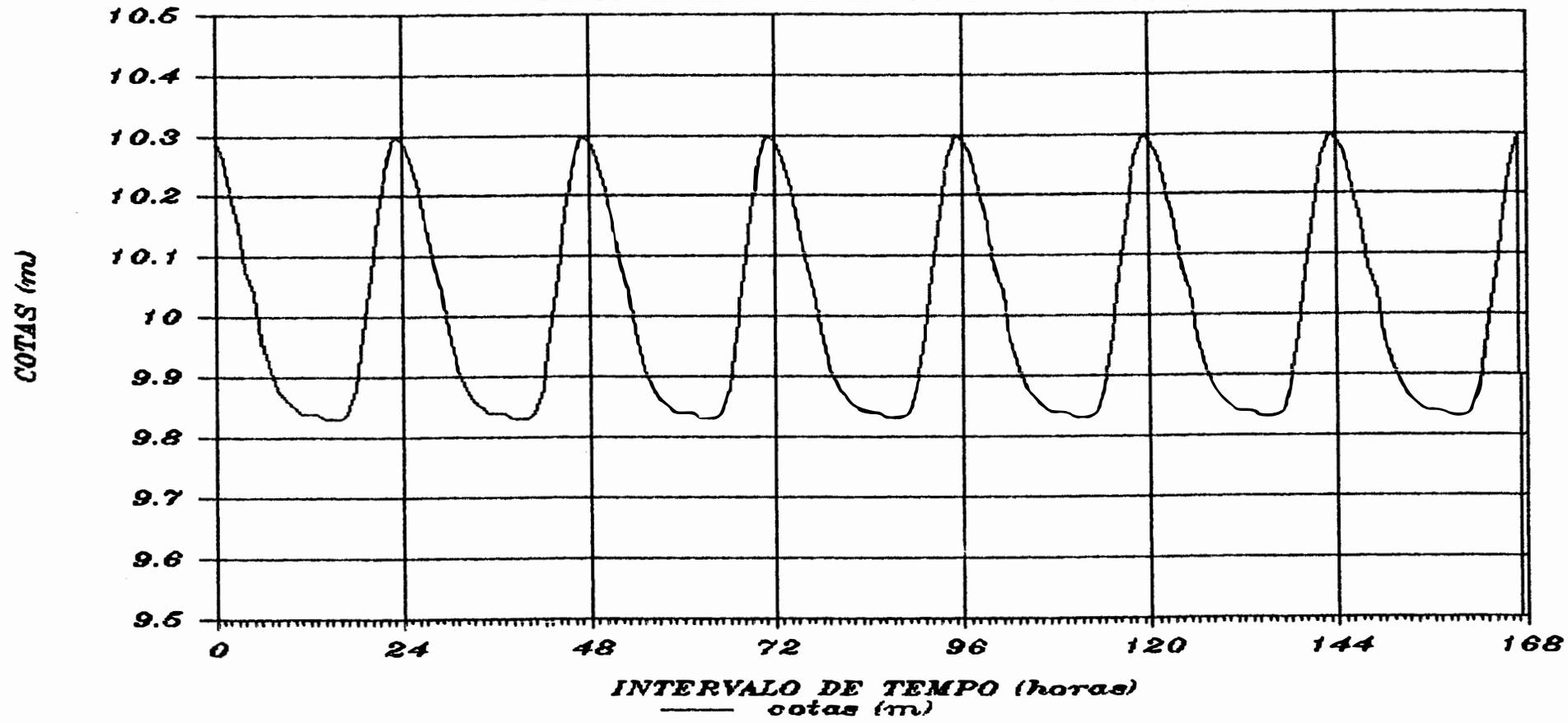


FIGURA 15

COTAS EM PROPRIA
PRIMEIRA ETAPA DE XINGO S/ P. DE ACUCAR

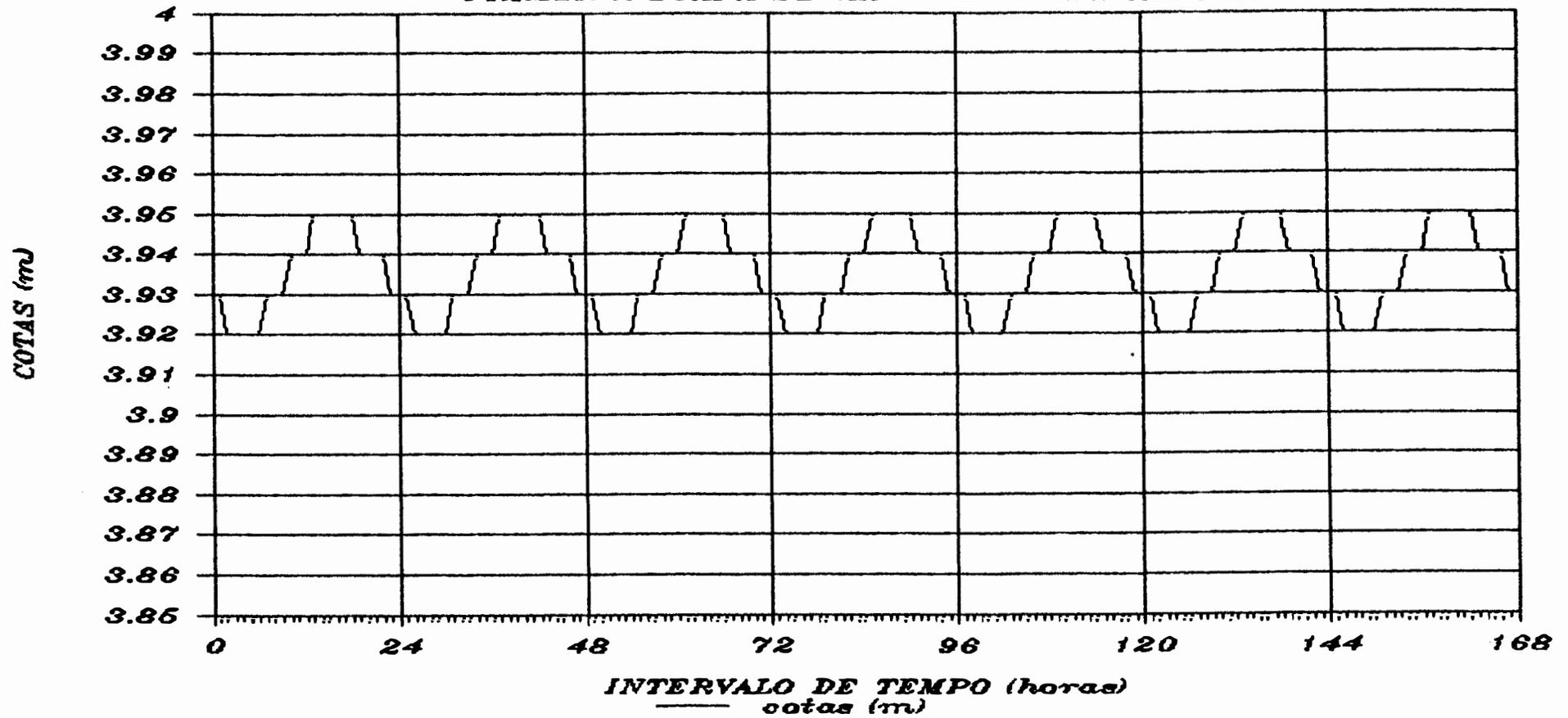


FIGURA 16

COTAS EM PIRANHAS

SEGUNDA ETAPA DE XINGO S/ PAO DE ACUCAR

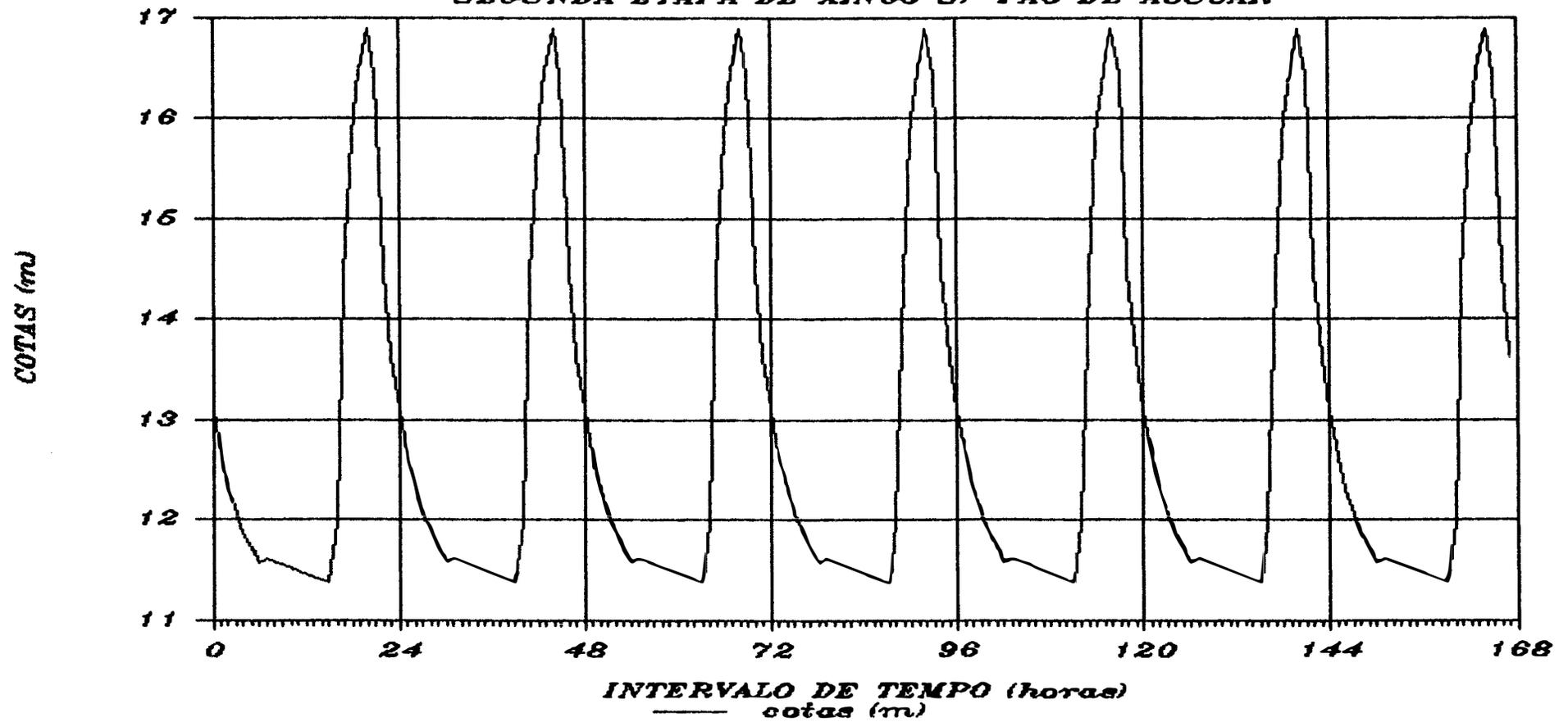


FIGURA 17

COTAS EM PAO DE ACUCAR

SEGUNDA ETAPA DE XINGO S/ PAO DE ACUCAR

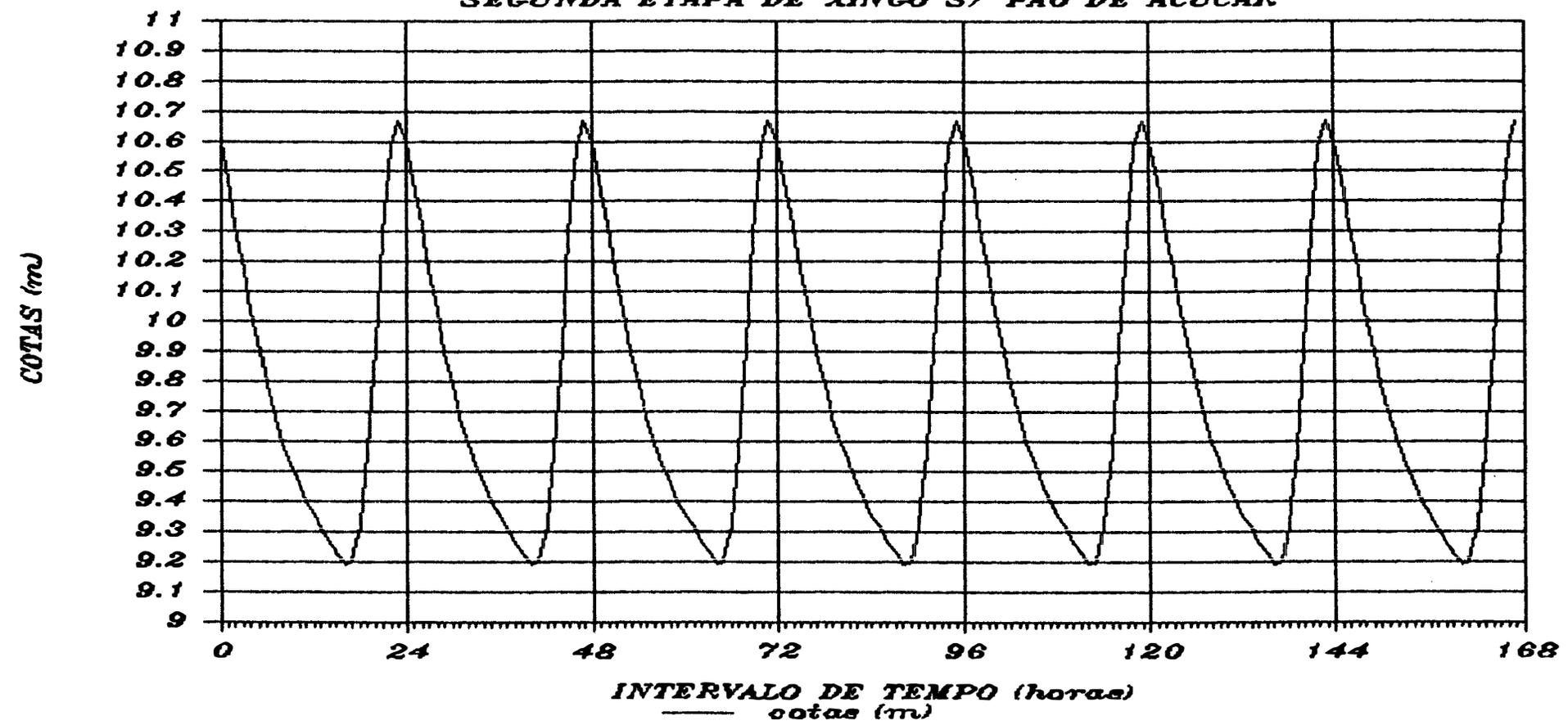


FIGURA 18

HIDROGRAMA - PAO DE ACUCAR

SEGUNDA/TERCEIRA ETAPA XINGO

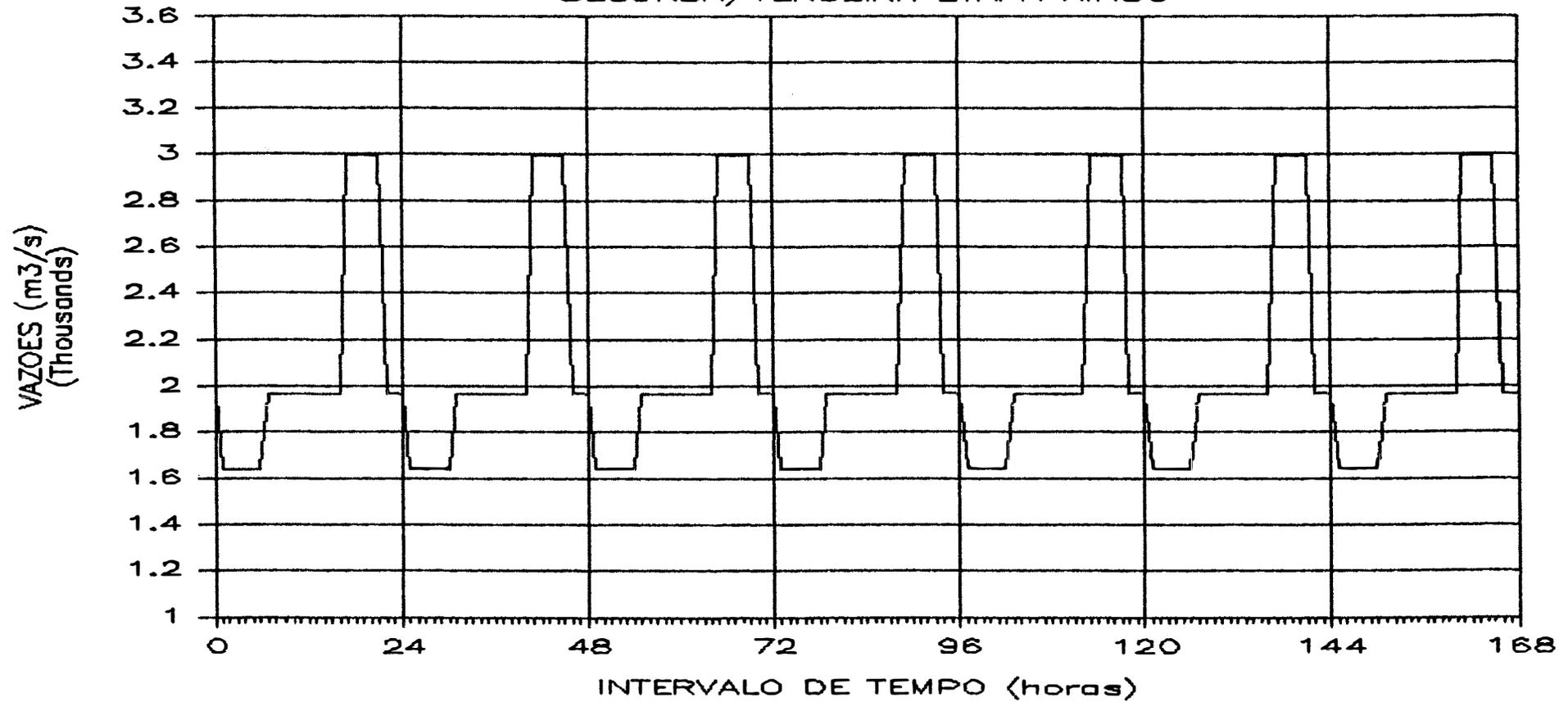


FIGURA 19

COTAS EM PIRANHAS

SEGUNDA ETAPA DE XINGO C/ PAO DE ACUCAR

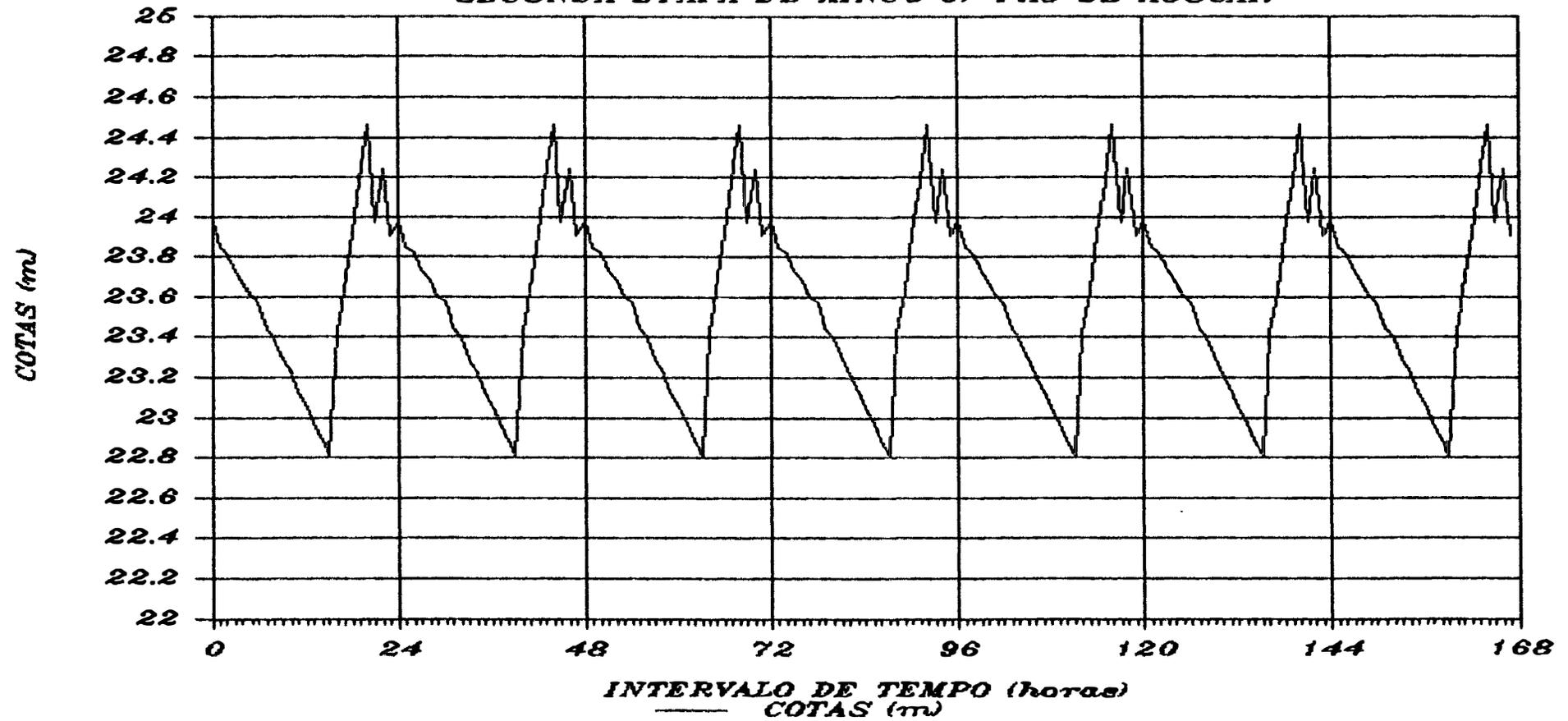


FIGURA 20

COTAS EM PIRANHAS

TERCEIRA ETAPA DE XINGO C/ P. ACUCAR

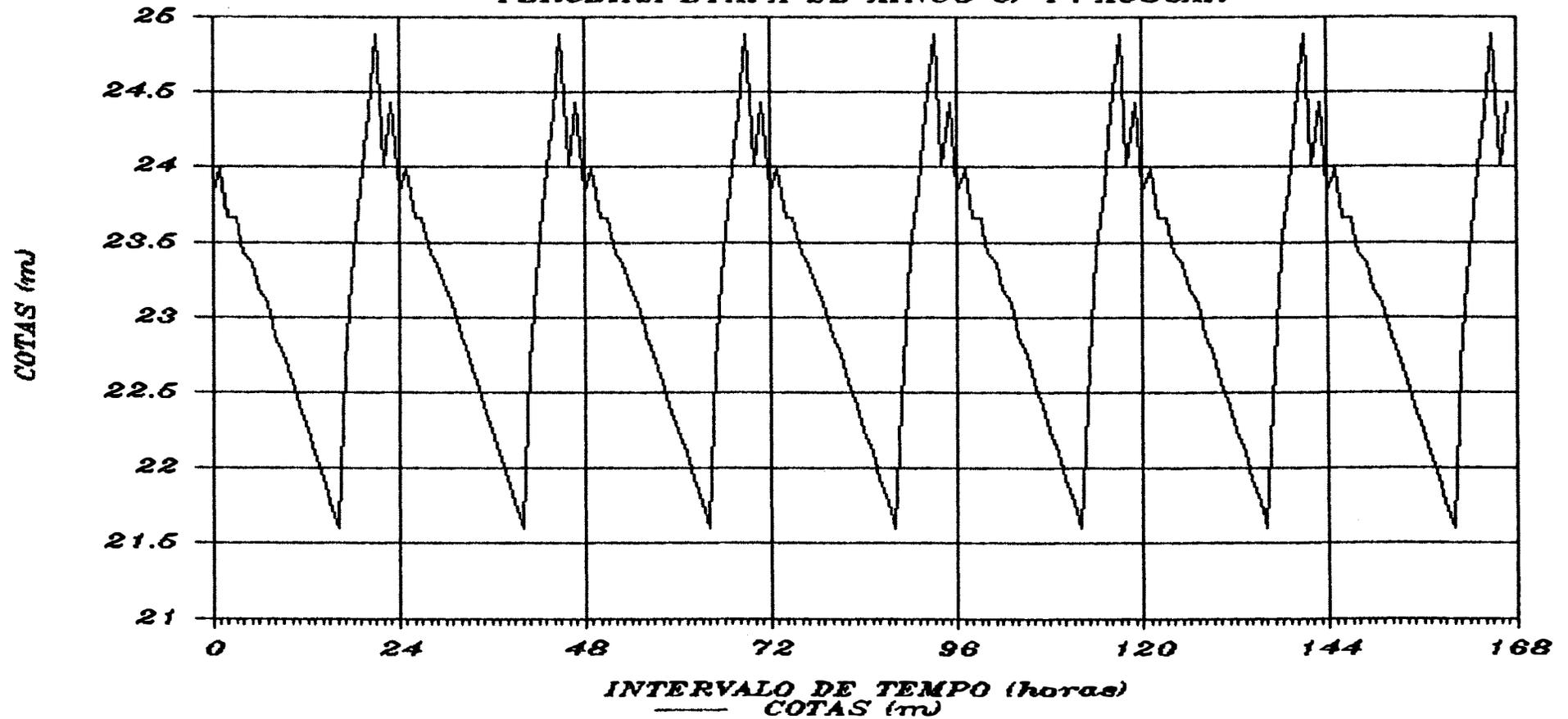


FIGURA 21

SEÇÃO LOCALIZADA - 5,0km A JUSANTE DA USINA DE XINGÓ

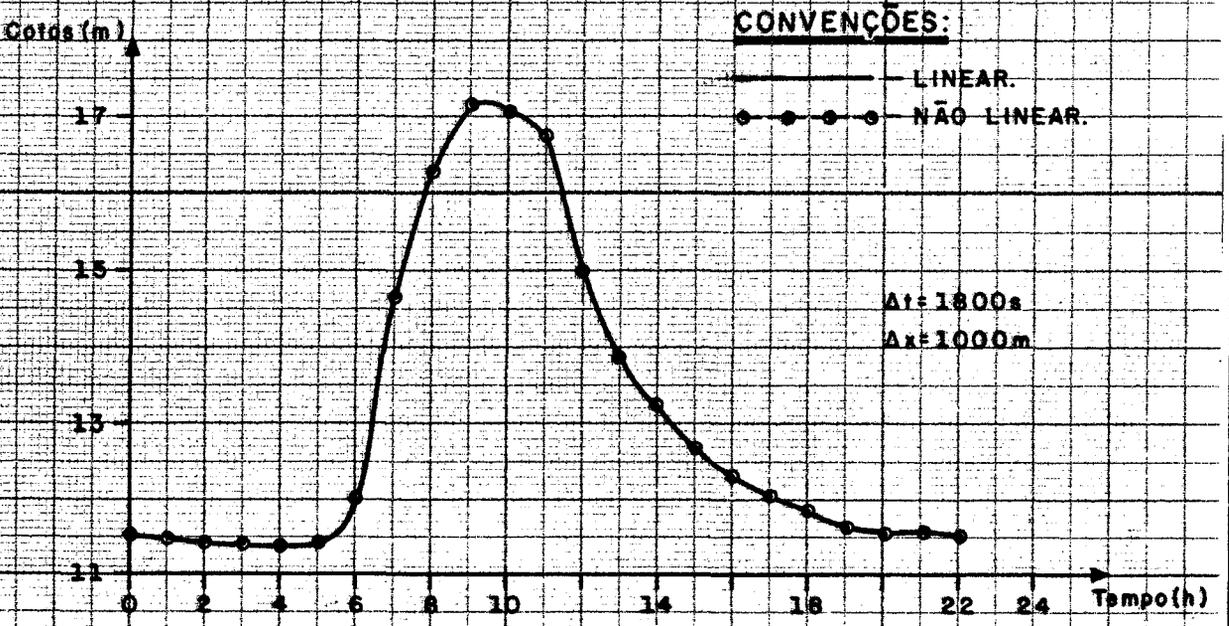
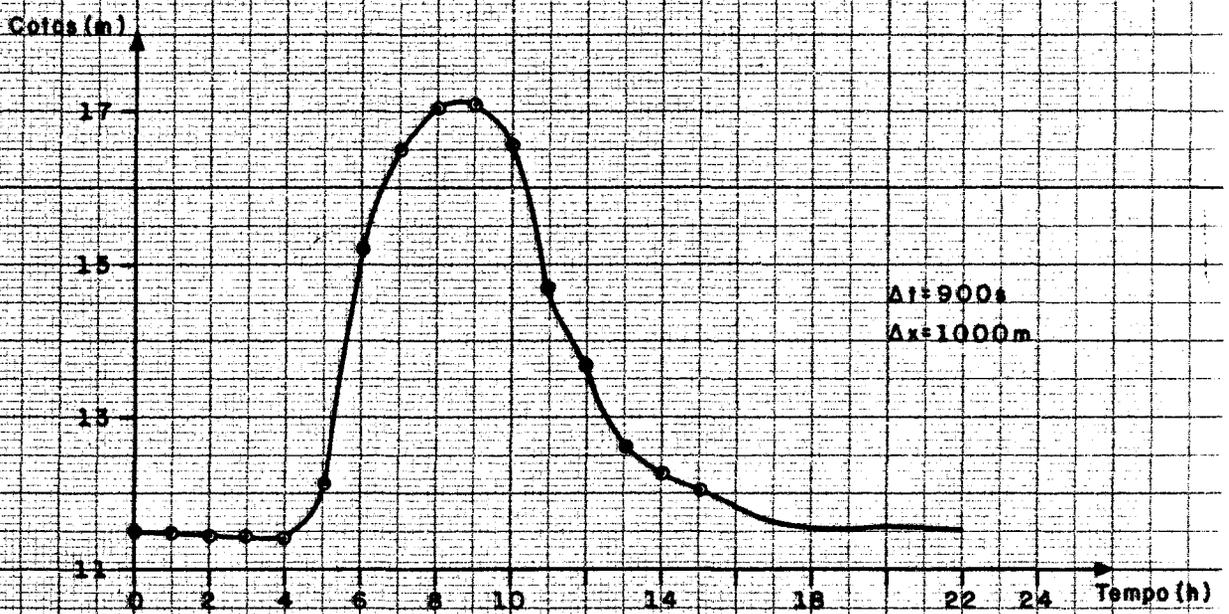
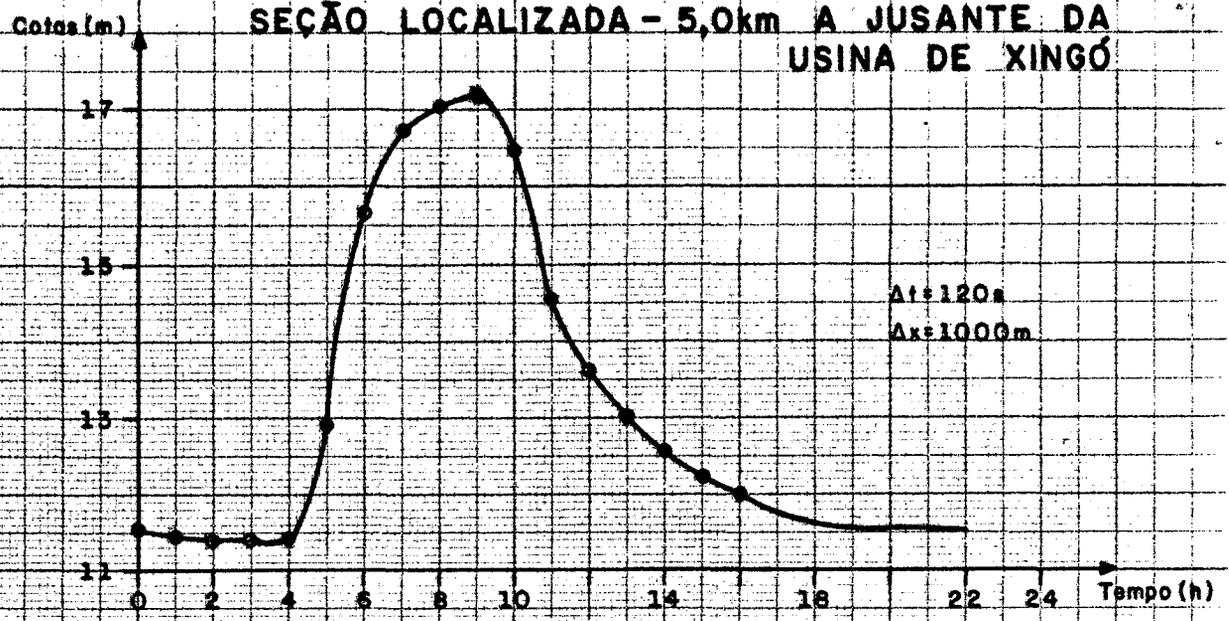


FIGURA 22

SEÇÃO LOCALIZADA - 30,0km A JUSANTE DA USINA DE XINGÓ

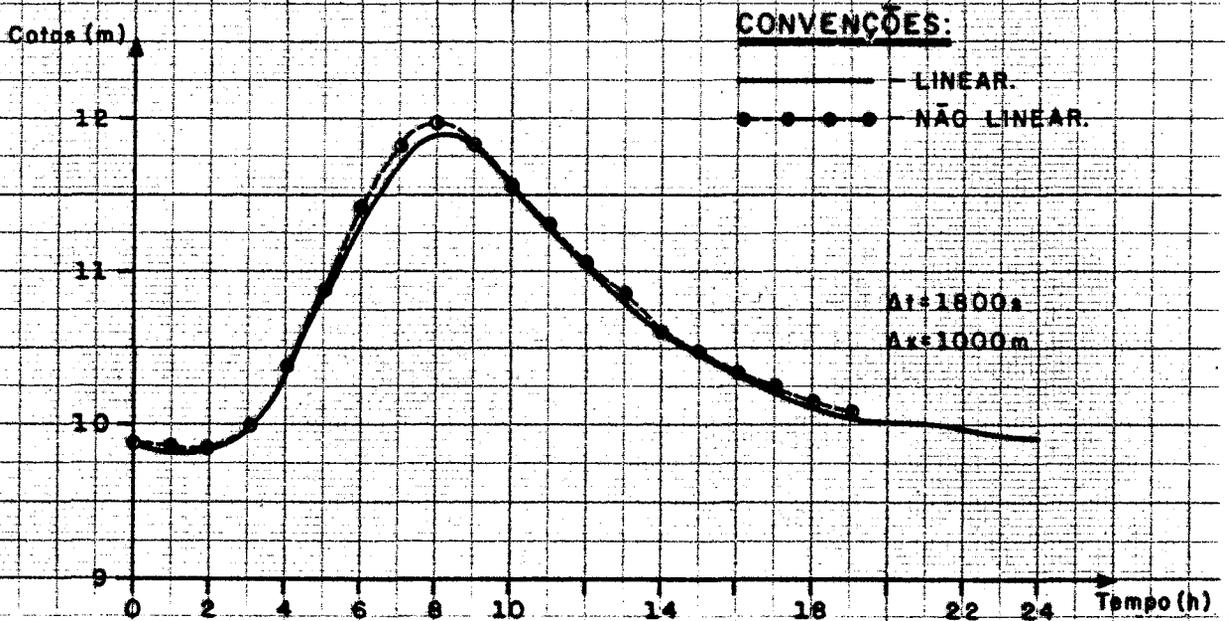
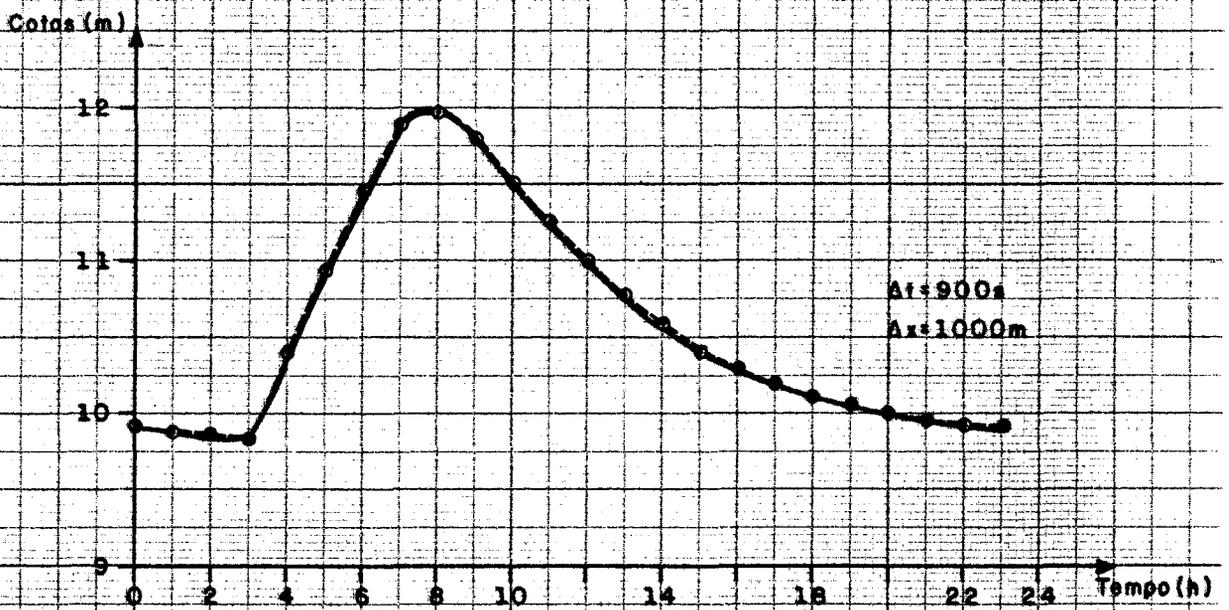
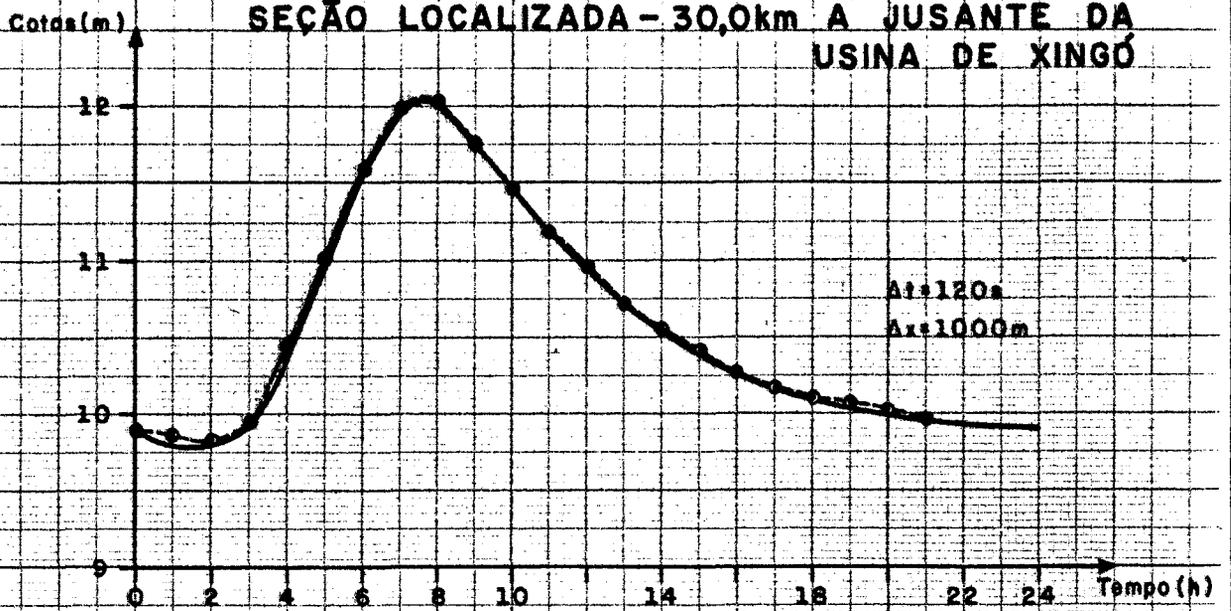


FIGURA 23

SEÇÃO LOCALIZADA - 11,8km A JUSANTE DA USINA DE XINGÓ

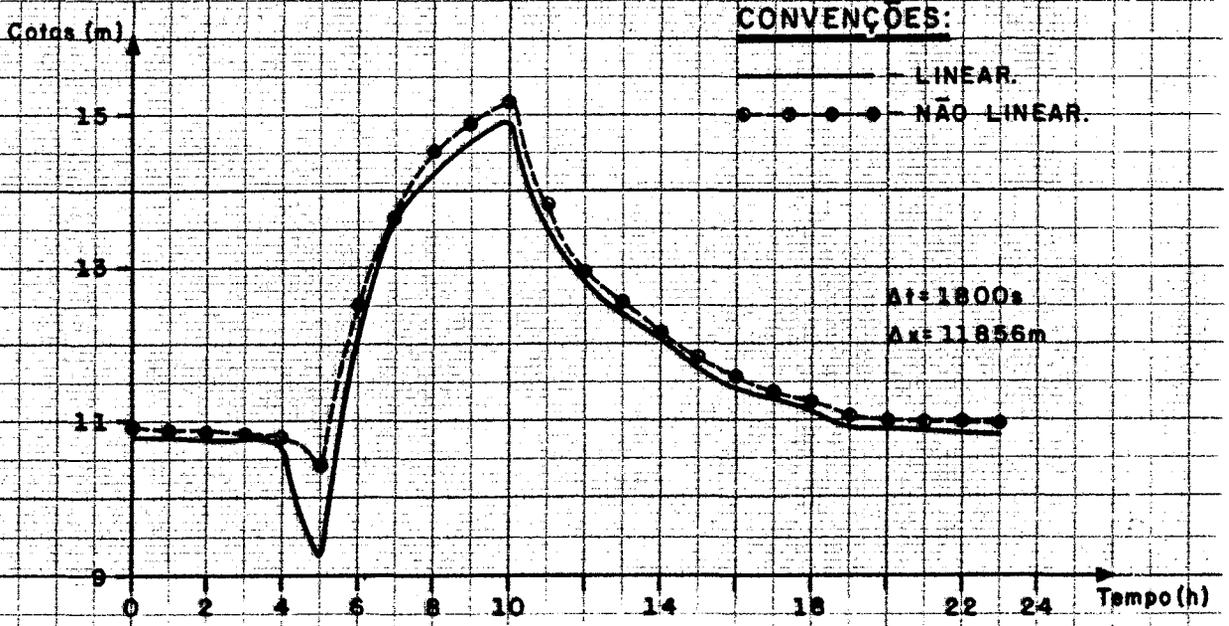
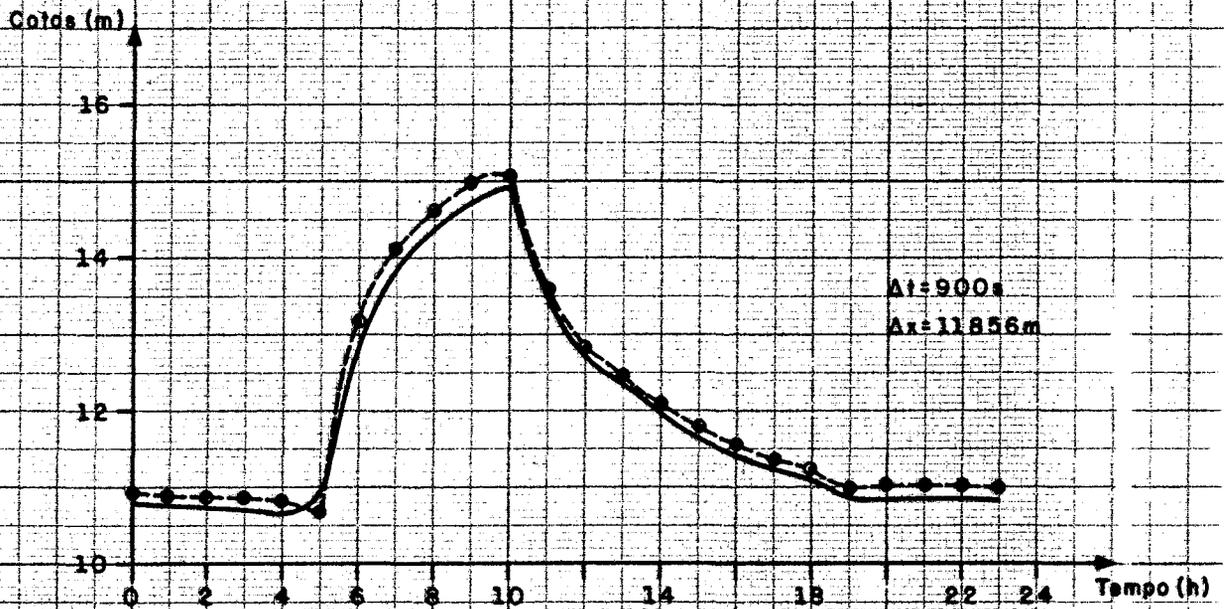
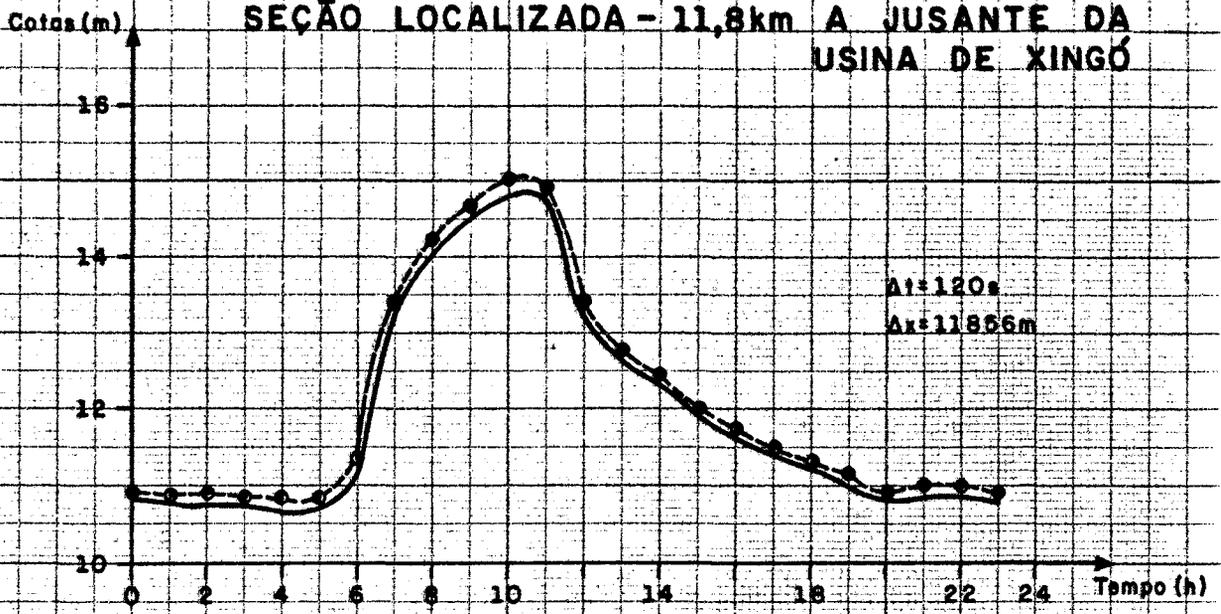


FIGURA 24

SEÇÃO LOCALIZADA - 35,6km A JUSANTE DA
USINA DE XINGÓ

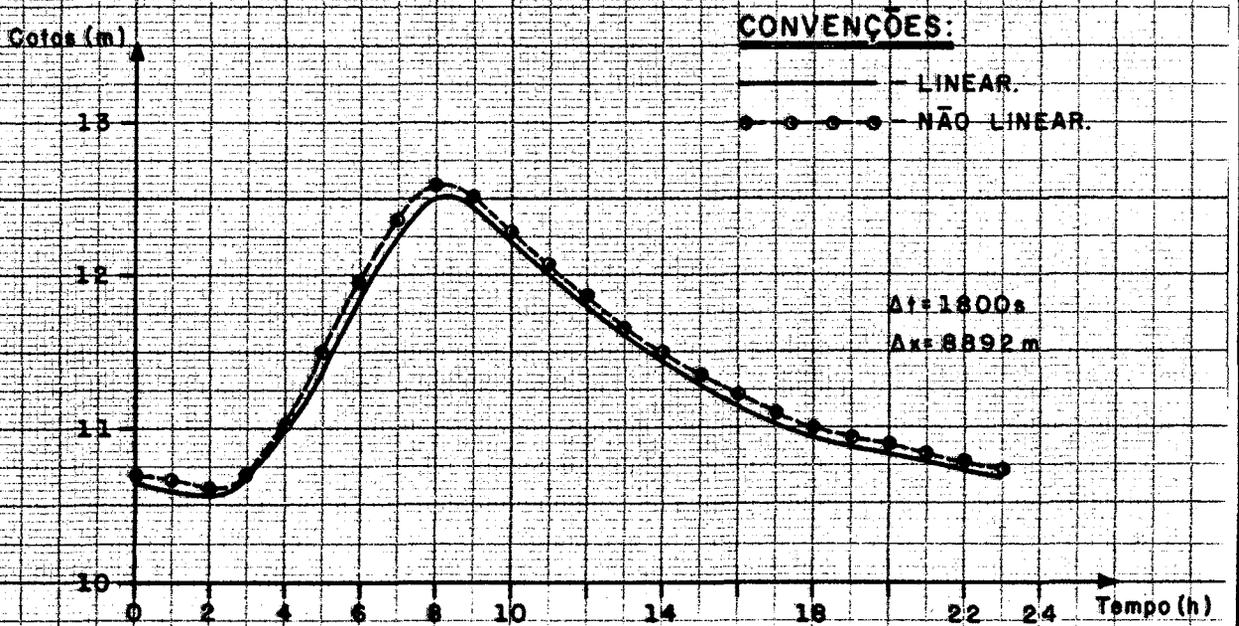
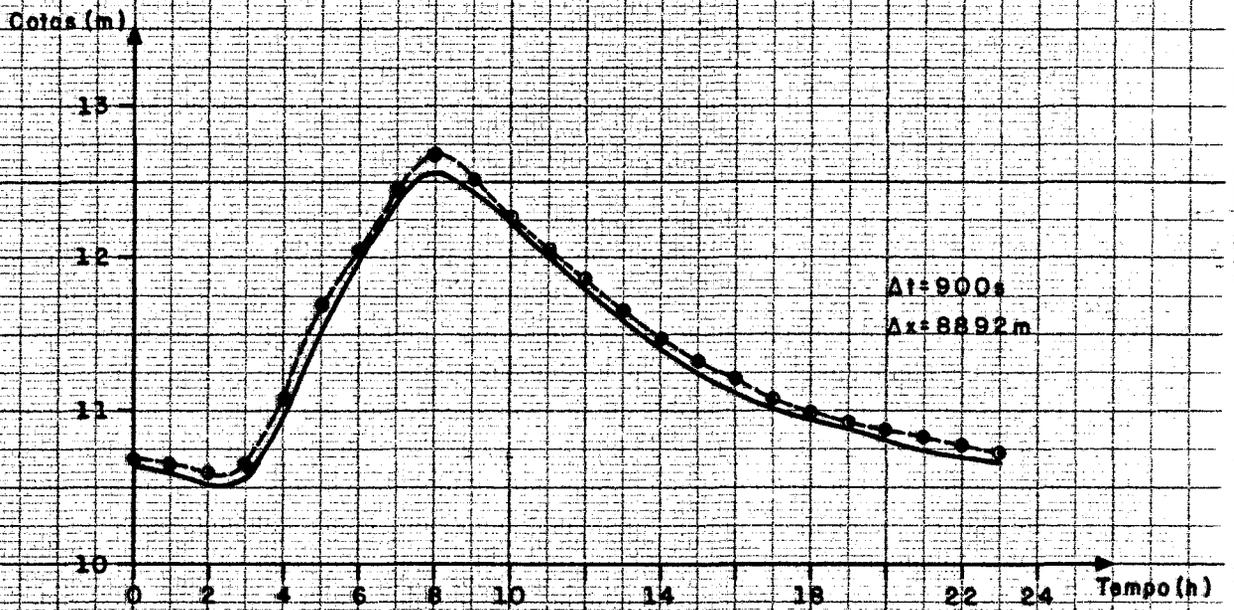
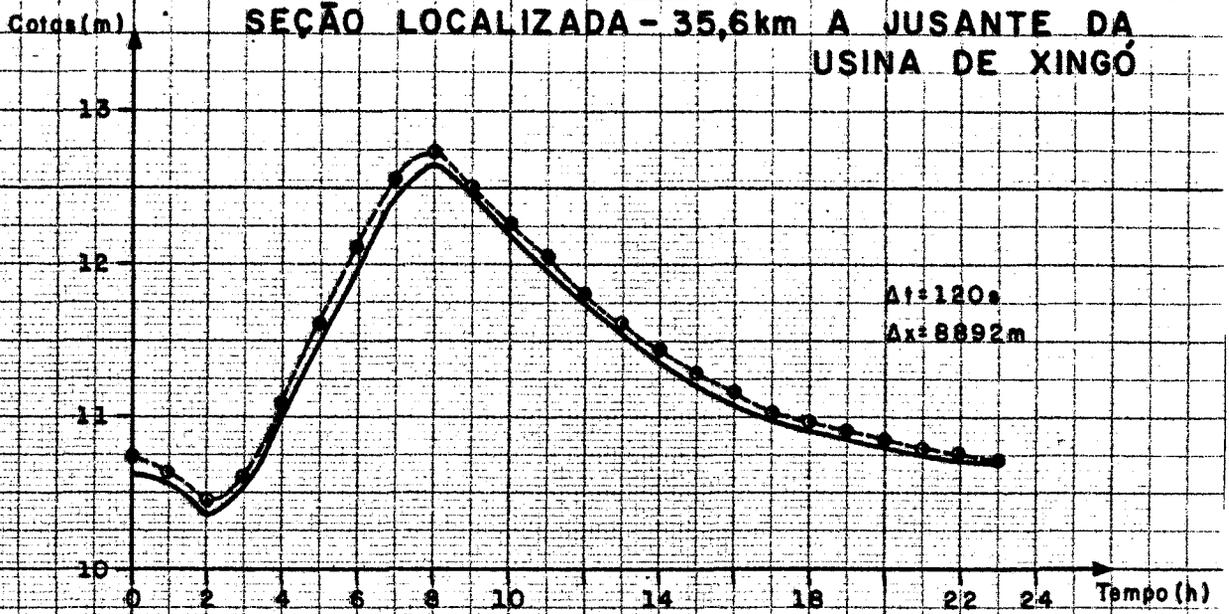
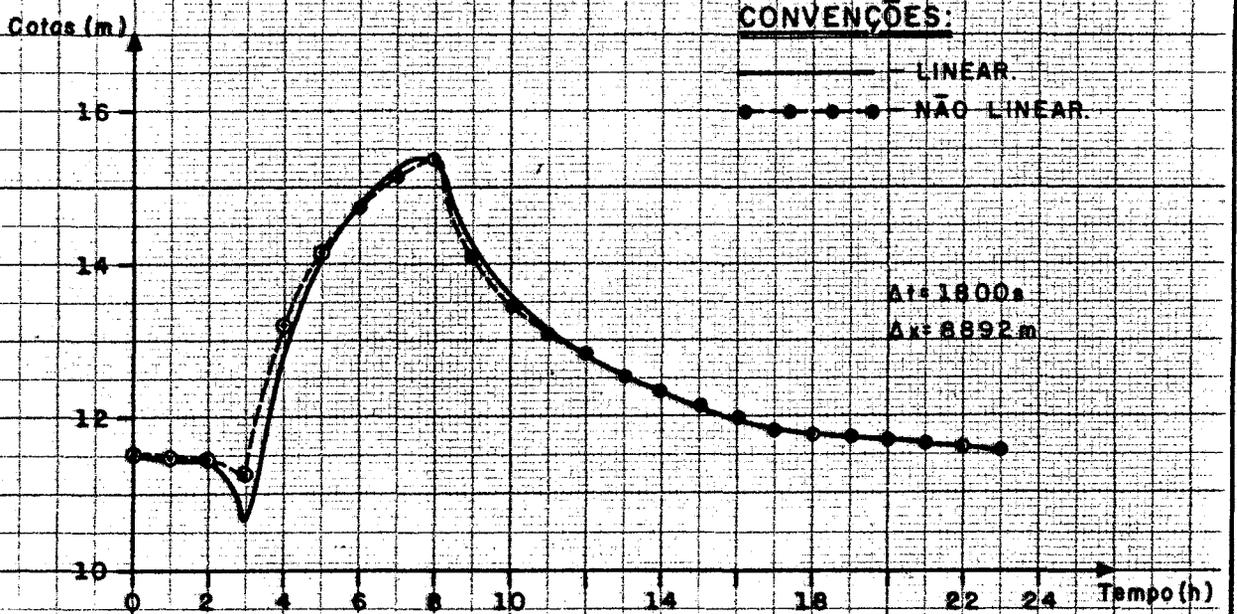
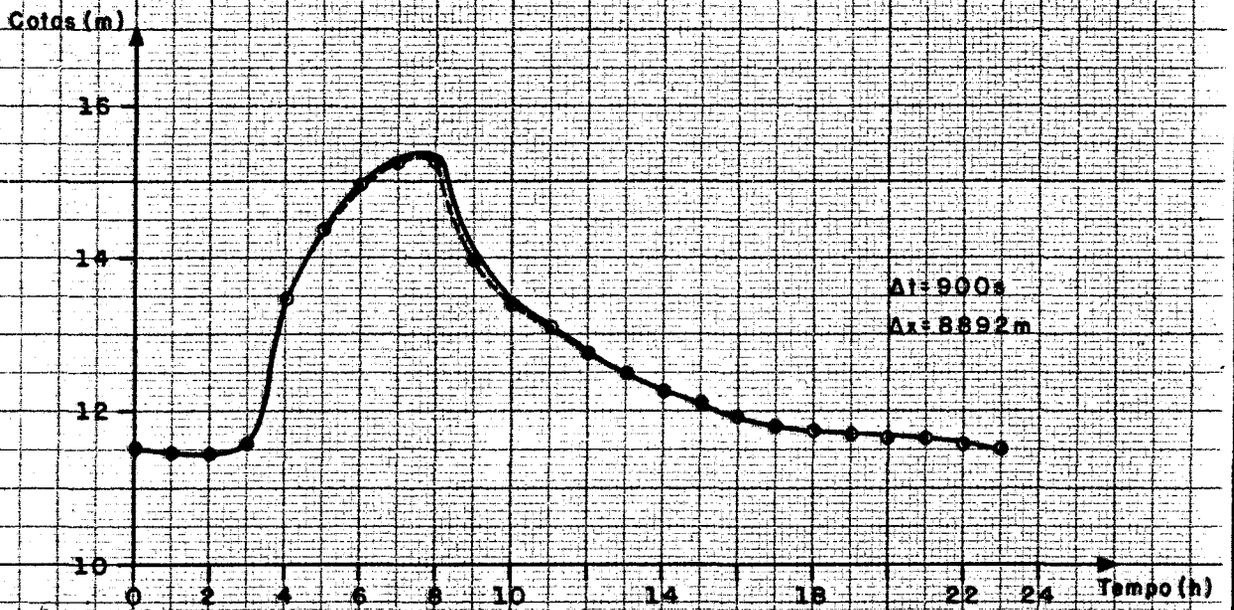
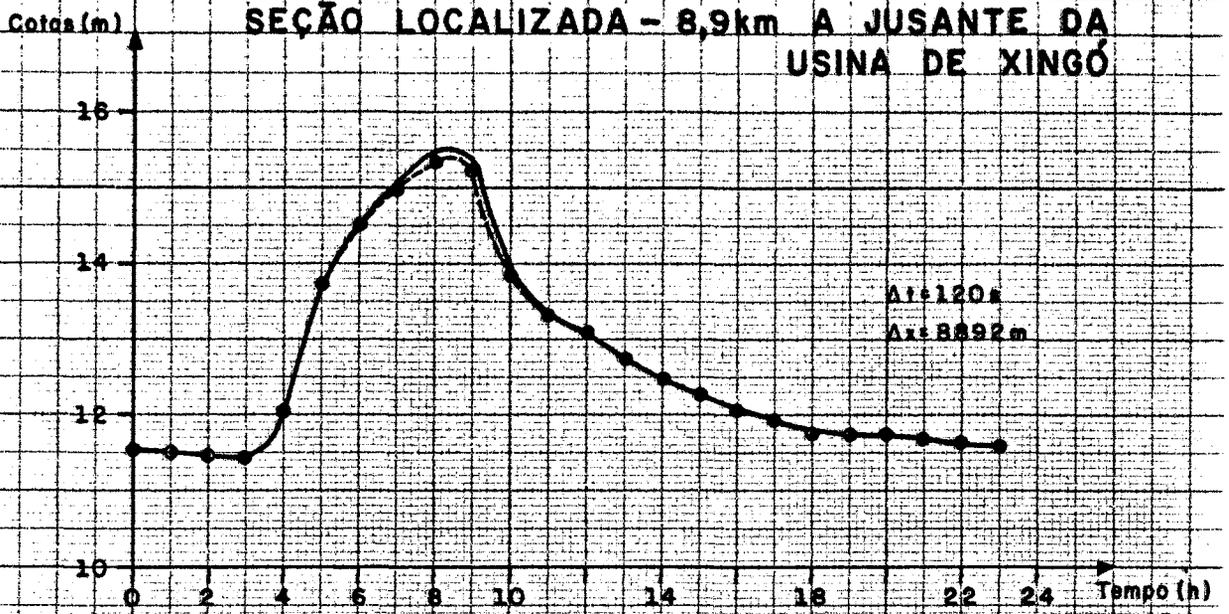


FIGURA 25

SEÇÃO LOCALIZADA - 8,9km A JUSANTE DA USINA DE XINGÓ



CONVENÇÕES:

- LINEAR
- NÃO LINEAR

FIGURA 26

SEÇÃO LOCALIZADA - 35,5km A JUSANTE DA USINA DE XINGÓ

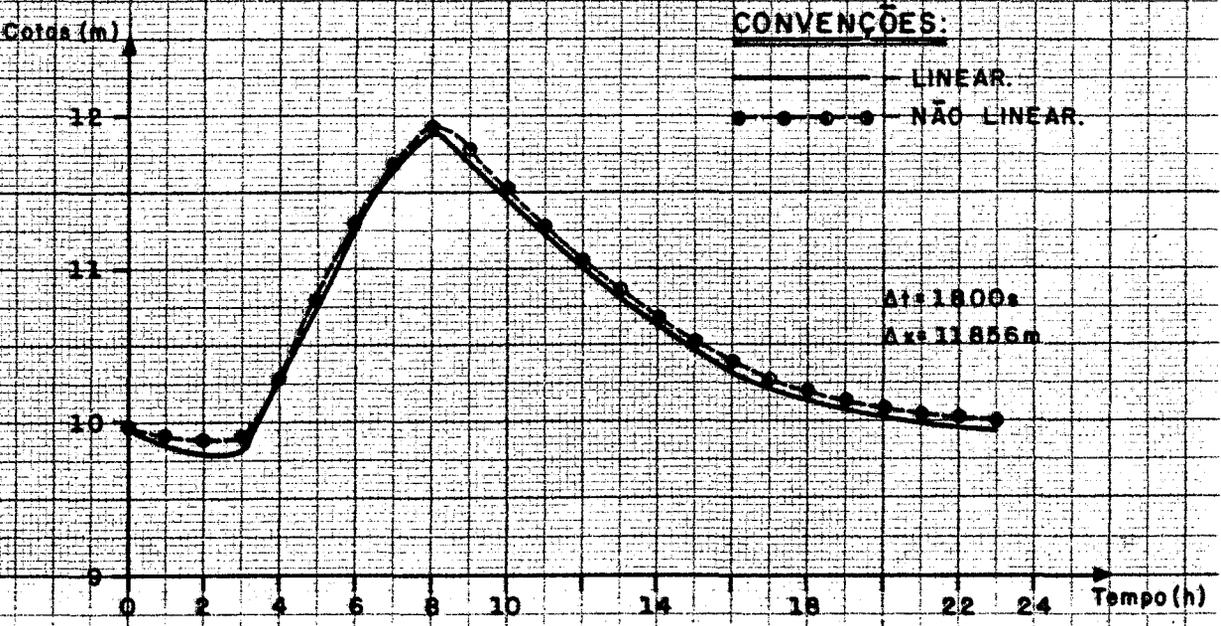
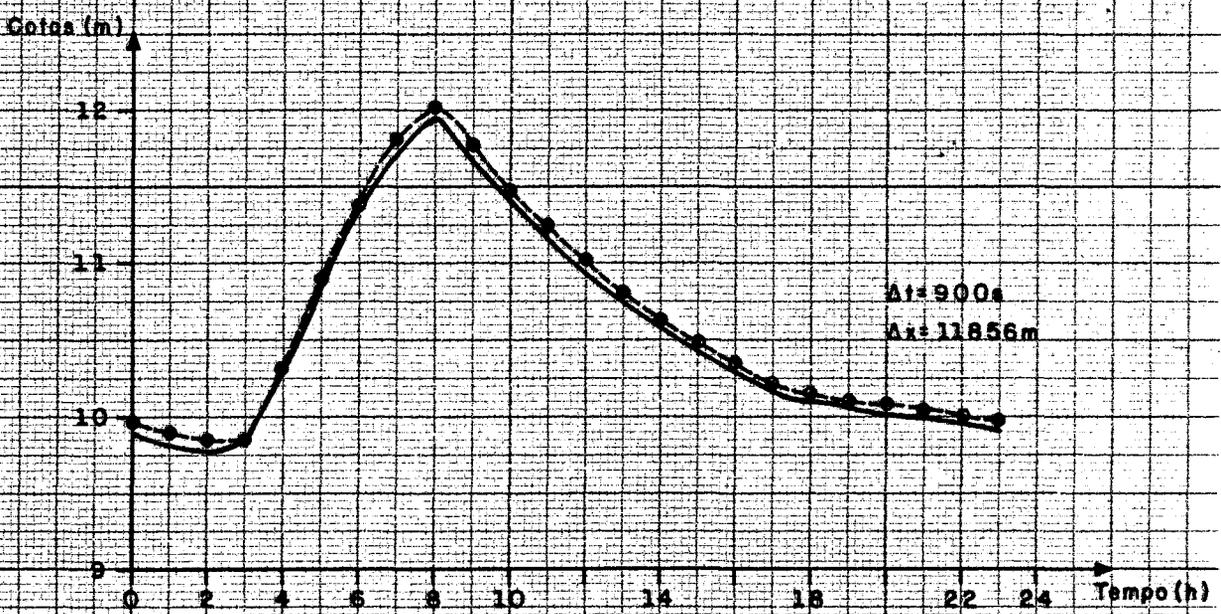
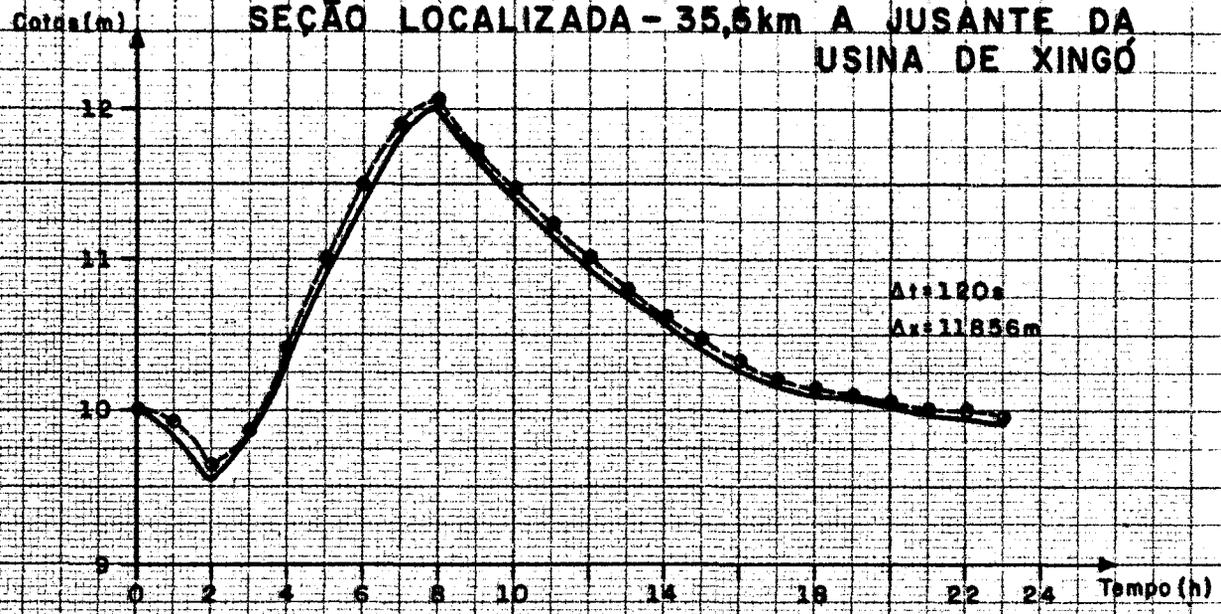


FIGURA 27

Este anexo tem por objetivo apresentar o desenvolvimento matemático do esquema implícito linear de PREISSMANN.

A apresentação deste desenvolvimento matemático tem por objetivo servir de orientação para as pessoas que desejarem realizar o mesmo de desenvolvimento de diferenças finitas para modelos hidrodinâmicos.

3.2 - ESQUEMA IMPLÍCITO LINEAR - ESQUEMA DE PREISSMANN

As equações (2.59), (2.60) e (2.61) são utilizadas para discretizar as equações da continuidade e dinâmica. Observando que $\Delta f = f_{i+1} - f_i$, temos:

$$f(M) = \frac{\theta}{2} (\Delta f_{i+1} + \Delta f_i) + \frac{1}{2} (f_{i+1} + f_i) \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial X} = \frac{\theta}{\Delta X} (\Delta f_{i+1} - \Delta f_i) + \frac{1}{\Delta X} (f_{i+1} - f_i) \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t} (\Delta f_{i+1} + \Delta f_i) \quad (3.25)$$

A linearização das equações, será feita através do desenvolvimento em séries de potência, desprezando-se os termos de segunda ordem e superiores das diferenças finitas.

- Equação de Continuidade

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial Q}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 \quad (3.26)$$

Utilizando-se as equações (3.23), (3.24) e (3.25), obtemos:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{(Y_{i+1}^{t+1} - Y_{i+1}^t) + (Y_i^{t+1} - Y_i^t)}{2\Delta t} = \frac{\Delta Y_{i+1} + \Delta Y_i}{2\Delta t} \quad (3.27)$$

$$T(x, t) = \frac{\theta}{2} (\Delta T_{i+1} + \Delta T_i) + \frac{T_{i+1} + T_i}{2} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = \frac{\theta}{\Delta X} (\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i) + \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta X} \quad (3.29)$$

substituindo vem:

$$\frac{\Delta Y_{i+1} + \Delta Y_i}{2\Delta t} + \frac{2}{\theta(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i) + (T_{i+1} + T_i)} \cdot \frac{\theta}{\Delta x} \left[(\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i) + \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta x} \right] = 0 \quad (3.30)$$

Considerando a linearização do coeficiente vem:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\theta(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i) + (T_{i+1} + T_i)} &= \frac{2}{(T_{i+1} + T_i)} \left[\frac{(T_{i+1} + T_i)}{T_{i+1} + T_i + \theta(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i)} \right] \\ &\approx \frac{2}{(T_{i+1} + T_i)} \cdot \left[\frac{T_{i+1} + T_i}{(T_{i+1} + T_i) + \theta(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i)} \right] \cdot \left[\frac{(T_{i+1} + T_i) - \theta(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i)}{(T_{i+1} + T_i) - \theta(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i)} \right] \\ &= \frac{2}{(T_{i+1} + T_i)} \cdot \left[\frac{(T_{i+1} + T_i)^2 - (T_{i+1} + T_i) \theta(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i)}{(T_{i+1} + T_i)^2 - \theta^2(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i)^2} \right] = \frac{2}{(T_{i+1} + T_i)} \\ &\left[\frac{(T_{i+1} + T_i)^2 - (T_{i+1} + T_i) \theta(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i)}{(T_{i+1} + T_i)^2} \right] \approx \frac{2}{(T_{i+1} + T_i)} \left[1 - \theta \frac{(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i)}{(T_{i+1} + T_i)} \right] \end{aligned}$$

Substituindo este resultado, na equação (3.30), onde $\frac{\Delta T_i}{\Delta Y_i} =$

$$= \left(\frac{dT}{dy}\right)_i \therefore \Delta T_i = \Delta Y_i \left(\frac{dT}{dy}\right)_i, \text{ vem}$$

$$\frac{\Delta Y_{i+1} + \Delta Y_i}{2\Delta t} + \frac{2}{(T_{i+1} + T_i)} \left[1 - \theta \frac{(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i)}{(T_{i+1} + T_i)^2} \right] \frac{\theta}{\Delta x} \left[(\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i) + \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta x} \right] = 0 \quad (3.32)$$

OU

$$\Delta Y_{i+1} + \Delta Y_i + \left[\frac{4\Delta t}{(T_{i+1} + T_i)} - \frac{4\theta\Delta t(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i)}{(T_{i+1} + T_i)^2} \right] \frac{\theta}{\Delta x} \left[(\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i) + \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta x} \right] = 0 \quad (3.33)$$

Multiplicando-se as expressões entre colchetes, e desprendendo-se os termos de segunda ordem obtemos:

$$\Delta Y_{i+1} + \Delta Y_i + 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i}{T_{i+1} + T_i} \right) + \frac{4\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{Q_{i+1} - Q_i}{T_{i+1} + T_i} \right) - \frac{4\theta^2 \Delta t}{\Delta x (T_{i+1} + T_i)^2} \quad (3.34)$$

$$(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i) \cdot (\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i) - 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(\Delta T_{i+1} + \Delta T_i)}{(T_{i+1} + T_i)^2} (Q_{i+1} - Q_i) = 0$$

Reordenando os termos, resulta

$$\Delta Y_{i+1} - 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{(T_{i+1} + T_i)^2} \cdot \Delta Y_{i+1} \left(\frac{dT}{dy} \right)_{i+1} + \Delta Y_i - 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{(T_{i+1} + T_i)^2} \quad (3.35)$$

$$\Delta Y_i \left(\frac{dT}{dy} \right)_i + 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(T_{i+1} + T_i)} \cdot \Delta Q_{i+1} - 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(T_{i+1} + T_i)} \cdot \Delta Q_i +$$

$$4 \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{(T_{i+1} + T_i)} = 0$$

Logo, resumindo a equação da continuidade fica:

$$\alpha_i^1 \Delta Y_{i+1} + \alpha_i^2 \Delta Q_{i+1} + \alpha_i^3 \Delta Y_i + \alpha_i^4 \Delta Q_i + \alpha_i^5 = 0 \quad (3.36)$$

ONDE:

$$\alpha_i^1 = 1 - 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{(T_{i+1} + T_i)^2} \cdot \left(\frac{dT}{dy} \right)_{i+1}$$

$$\alpha_i^2 = 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{(T_{i+1} + T_i)}$$

$$\alpha_i^3 = 1 - 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{(T_{i+1} + T_i)^2} \cdot \left(\frac{dT}{dy} \right)_i$$

$$\alpha_i^4 = -4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{(T_{i+1} + T_i)}$$

$$\alpha_i^5 = 4 \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{(T_{i+1} + T_i)}$$

- Equação da Dinâmica

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \left(\frac{Q}{A}\right) \frac{\partial Q}{\partial x} + gA (1-F^2) \frac{\partial y}{\partial x} = gA (S_o - S_f) \quad (3.37)$$

(a) (b) (c) (d)

oñde:

$$F^2 = \frac{Q^2 T}{A^3 g}$$

Utilizando-se as equações (3.23), (3.24) e (3.25) para discretização, obtemos para cada termo as seguintes expressões:

$$(a) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\Delta Q_{i+1} + \Delta Q_i}{2 \Delta t} \quad (3.38)$$

$$(b) \quad 2 \left(\frac{Q}{A}\right) \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.39)$$

$$\frac{Q}{A} = \frac{\theta}{2} \left[\frac{(Q_{i+1} + \Delta Q_{i+1})}{(A_{i+1} + \Delta A_{i+1})} + \frac{(Q_i + \Delta Q_i)}{(A_i + \Delta A_i)} \right] + \frac{(1-\theta)}{2} \left[\frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}} - \frac{Q_i}{A_i} \right] \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} \left[\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i \right] + \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta x} \quad (3.41)$$

Substituindo (3.40) e (3.41) em (3.39), vem

$$2 \left(\frac{Q}{A}\right) \frac{\partial Q}{\partial x} = 2 \left\{ \frac{\theta}{2} \left[\frac{(Q_{i+1} + \Delta Q_{i+1})}{A_{i+1}} \cdot \frac{(1 - \Delta A_{i+1})}{A_{i+1}} + \frac{(Q_i + \Delta Q_i)}{A_i} \cdot \frac{(1 - \Delta A_i)}{A_i} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}} - \theta \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}} + \frac{Q_i}{A_i} - \theta \frac{Q_i}{A_i} \right] \right\} \cdot \left[\frac{\theta}{\Delta x} (\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i) + \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta x} \right] \quad (3.42)$$

Desenvolvendo os parênteses dos termos, vem

$$2 \left(\frac{Q}{A}\right) \frac{\partial Q}{\partial x} = \left[\frac{\theta}{A_{i+1}} Q_{i+1} - \frac{\theta}{A_{i+1}^2} Q_{i+1} \Delta A_{i+1} + \frac{\theta}{A_{i+1}} \Delta Q_{i+1} - \frac{\theta}{A_{i+1}^2} \Delta Q_{i+1} \Delta A_{i+1} + \frac{\theta}{A_i} Q_i - \frac{\theta}{A_i^2} Q_i \Delta A_i + \frac{\theta}{A_i} \Delta Q_i - \frac{\theta}{A_i^2} \Delta Q_i \Delta A_i + \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}} - \frac{\theta}{A_{i+1}} \Delta Q_{i+1} + \frac{Q_i}{A_i} - \frac{\theta}{A_i} \Delta Q_i \right] \cdot \left[\frac{\theta}{\Delta x} \Delta Q_{i+1} - \frac{\theta}{\Delta x} \Delta Q_i + \frac{Q_{i+1}}{\Delta x} - \frac{Q_i}{\Delta x} \right]$$

Multiplicando de dois termos, vem:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\theta^2}{A_{i+1}\Delta x} Q_{i+1} \Delta Q_{i+1} - \frac{\theta^2}{A_{i+1}\Delta x} Q_{i+1} \Delta Q_i + \frac{\theta}{A_{i+1}\Delta x} Q_{i+1}^2 - \frac{\theta}{A_{i+1}\Delta x} \\
 & Q_{i+1} Q_i - \frac{\theta^2 Q_{i+1}}{A_{i+1}^2 \Delta x} \Delta A_{i+1} \Delta Q_{i+1} + \frac{\theta^2 Q_{i+1}}{A_{i+1}^2 \Delta x} \Delta A_{i+1} \Delta Q_i - \frac{\theta Q_{i+1}^2}{A_{i+1}^2 \Delta x} \\
 & \Delta A_{i+1} + \frac{\theta Q_{i+1}}{A_{i+1} \Delta x} \Delta A_{i+1} Q_i + \frac{\theta^2}{A_{i+1} \Delta x} \Delta Q_{i+1} - \frac{\theta^2 \Delta Q_{i+1}}{A_{i+1} \Delta x} \Delta Q_i + \frac{\theta^2 Q_{i+1}}{A_{i+1} \Delta x} \\
 & \Delta Q_{i+1} - \frac{\theta^2 \Delta Q_{i+1}}{A_{i+1} \Delta x} Q_i - \frac{\theta^2 \Delta Q_{i+1}}{A_{i+1}^2 \Delta x} \Delta A_{i+1} + \frac{\theta^2 \Delta Q_{i+1}}{A_{i+1}^2 \Delta x} A_{i+1} \Delta Q_i - \frac{\theta^2 \Delta Q_{i+1}}{A_{i+1}^2 \Delta x} \\
 & \Delta A_{i+1} Q_{i+1} + \frac{\theta \Delta Q_{i+1}}{A_{i+1}^2 \Delta x} \Delta A_{i+1} Q_i + \frac{\theta^2}{A_{i+1} \Delta x} Q_i \Delta Q_{i+1} - \frac{\theta^2}{A_{i+1} \Delta x} Q_i \Delta Q_i - \\
 & \frac{\theta Q_i^2}{A_i \Delta x} - \frac{\theta^2}{A_i^2 \Delta x} Q_i \Delta A_i \Delta Q_{i+1} + \frac{\theta^2}{A_i^2 \Delta x} Q_i \Delta A_i \Delta Q_i - \frac{\theta}{A_i^2 \Delta x} Q_i \Delta A_i \Delta Q_{i+1} \quad (3.44) \\
 & + \frac{\theta}{A_i^2 \Delta x} Q_i^2 \Delta A_i + \frac{\theta^2 \Delta Q_i}{A_i \Delta x} \Delta Q_{i+1} - \frac{\theta^2}{A_i \Delta x} \Delta Q_i^2 + \frac{\theta}{A_i \Delta x} \Delta Q_i Q_{i+1} - \frac{\theta^2 \Delta Q_i}{A_i \Delta x} Q_i \\
 & + \frac{\theta}{A_{i+1} \Delta x} Q_{i+1} \Delta Q_{i+1} - \frac{\theta Q_{i+1}}{A_{i+1}^2 \Delta x} \Delta Q_i + \frac{Q_{i+1}^2}{A_{i+1} \Delta x} - \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}} \cdot \frac{Q_i}{\Delta x} \\
 & - \frac{\theta^2 Q_{i+1}}{A_{i+1} \Delta x} \Delta Q_{i+1} + \frac{\theta^2}{A_{i+1} \Delta x} Q_{i+1} \Delta Q_i - \frac{\theta Q_{i+1}^2}{A_{i+1} \Delta x} + \frac{\theta Q_{i+1}^2}{A_{i+1} \Delta x} \Delta Q_i \\
 & + \frac{\theta Q_i}{A_i \Delta x} \Delta Q_{i+1} - \frac{\theta Q_i}{A_i \Delta x} \Delta Q_i + \frac{Q_i Q_{i+1}}{A_i \Delta x} - \frac{Q_i^2}{A_i \Delta x} \\
 & - \frac{\theta^2 \Delta Q_{i+1}}{A_i \Delta x} Q_i + \frac{\theta^2}{A_i \Delta x} Q_i \Delta Q_i - \frac{\theta^2 Q_i}{A_i \Delta x} Q_{i+1} + \frac{\theta Q_i^2}{A_i \Delta x} + \frac{\theta}{A_i \Delta x} Q_i Q_{i+1}
 \end{aligned}$$

Considerando apenas os termos de primeira ordem, vem:

$$\begin{aligned}
 2 \left(\frac{Q}{A} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\theta \Delta Q_{i+1}}{A_{i+1} \Delta x} Q_{i+1} - \frac{\theta \Delta Q_{i+1}}{A_{i+1} \Delta x} Q_i + \frac{\theta Q_{i+1}}{A_{i+1} \Delta x} Q_{i+1} + \frac{\theta Q_i}{A_i \Delta x} \Delta Q_{i+1} \\
 + \frac{\theta}{A_i \Delta x} \Delta Q_i Q_{i+1} - \frac{\theta \Delta Q_i Q_i}{A_i \Delta x} &= \frac{\theta}{A_{i+1} \Delta x} Q_{i+1} \Delta Q_i - \frac{\theta}{A_i \Delta x} Q_i \Delta Q_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\theta Q_{i+1}^2}{A_{i+1}^2 \Delta x} \Delta A_{i+1} + \frac{\theta Q_{i+1}}{A_{i+1}^2 \Delta x} Q_i \Delta A_{i+1} - \frac{\theta}{A_i^2 \Delta x} Q_i Q_{i+1} \Delta A_i + \frac{\theta}{A_i^2 \Delta x} Q_i^2 \Delta A_i \\
& + \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1} \Delta x} - \frac{Q_{i+1} Q_i}{A_{i+1} \Delta x} + \frac{Q_i Q_{i+1}}{A_i \Delta x} - \frac{Q_i^2}{A_i \Delta x}
\end{aligned} \quad (3.45)$$

Reordenando os termos, obtém-se finalmente

$$\begin{aligned}
2 \left(\frac{Q}{A} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} &= \Delta Q_{i+1} \left[- \frac{\theta}{A_{i+1} \Delta x} Q_i + \frac{\theta}{A_{i+1} \Delta x} Q_{i+1} + \frac{\theta}{A_{i+1} \Delta x} Q_{i+1} + \frac{\theta}{A_i \Delta x} \right] \\
& + \Delta Q_i \left[\frac{\theta}{A_i \Delta x} Q_{i+1} - \frac{\theta Q_{i+1}}{A_i \Delta x} - \frac{\theta}{A_i \Delta x} Q_i - \frac{\theta}{A_{i+1} \Delta x} Q_{i+1} \right] + \Delta A_{i+1} \\
& \left[- \frac{\theta}{A_{i+1}^2 \Delta x} Q_{i+1}^2 + \frac{\theta}{A_{i+1}^2 \Delta x} Q_{i+1} Q_i \right] + \Delta A_i \left[- \frac{\theta}{A_i^2 \Delta x} Q_i Q_{i+1} + \frac{\theta}{A_i^2 \Delta x} Q_i^2 \right] \\
& + \frac{Q_{i+1}^2}{A_{i+1} \Delta x} - \frac{Q_{i+1} Q_i}{A_{i+1} \Delta x} + \frac{Q_i Q_{i+1}}{A_i \Delta x} - \frac{Q_i^2}{A_i \Delta x} = \Delta Q_{i+1} \left[\frac{4\theta Q_{i+1}}{A_{i+1} \Delta x} - \frac{2\theta Q_i}{A_{i+1} \Delta x} \right. \\
& \left. + \frac{2\theta Q_i}{A_i \Delta x} \right] + \Delta Q_i \left[\frac{2\theta Q_{i+1}}{A_i \Delta x} - \frac{4\theta Q_i}{A_i \Delta x} - \frac{2\theta Q_{i+1}}{A_{i+1} \Delta x} \right] + \Delta Y_{i+1} T_{i+1} \\
& \left[- \frac{2\theta Q_{i+1}^2}{A_{i+1}^2 \Delta x} + \frac{2\theta Q_{i+1} Q_i}{A_{i+1}^2 \Delta x} \right] + \Delta Y_i T_i \left[- \frac{2\theta Q_i Q_{i+1}}{A_i^2 \Delta x} + \frac{2\theta Q_i^2}{A_i^2 \Delta x} \right]
\end{aligned} \quad (3.46)$$

$$(C) \quad gA \quad (1-F^2) \quad \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (3.47)$$

Por analogia com o caso anterior, temos:

$$\begin{aligned}
gA(1-F^2) &= \left\{ g \left[\frac{\theta}{2} (A_{i+1} + \Delta A_{i+1}) \left[1 - \frac{(Q_{i+1} + \Delta Q_{i+1})^2 (T_{i+1} + \Delta T_{i+1})}{(A_{i+1} + \Delta A_{i+1})^3 g} \right] \right. \right. \\
& + (A_i + \Delta A_i) \cdot \left. \left[1 - \frac{(Q_i + \Delta Q_i)^2 (T_i + \Delta T_i)}{(A_i + \Delta A_i)^3 g} \right] \right\} + \frac{(1-\theta)}{2} \left[A_{i+1} \right. \\
& \left. \left(1 - \frac{Q_{i+1}^2 T_{i+1}}{A_{i+1}^3 g} \right) + A_i \cdot \left(1 - \frac{Q_i^2 T_i}{A_i^3 g} \right) \right]
\end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\theta}{\Delta X} \left[\Delta Y_{i+1} - \Delta Y_i \right] + \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta X} \quad (3.49)$$

Substituindo as equações (3.48) e (3.49) em (3.47), obtêm-se

$$\begin{aligned} gA(1-F^2) \frac{\partial Y}{\partial X} &= g \left\{ \frac{\theta}{2} (A_{i+1} + \Delta A_{i+1}) \left[1 - \frac{(Q_{i+1} + \Delta Q_{i+1})^2 (T_{i+1} + \Delta T_{i+1})}{(A_{i+1} + \Delta A_{i+1})^3 g} \right] \right. \\ &+ \frac{\theta}{2} (A_i + \Delta A_i) \left[1 - \frac{(Q_i + \Delta Q_i)^2 (T_i + \Delta T_i)}{(A_i + \Delta A_i)^3 g} \right] + \frac{(1-\theta)}{2} \left\{ (A_{i+1}) \right. \\ &\left. \left[1 - \frac{(Q_{i+1})^2}{A_{i+1}^3 g} T_{i+1} \right] + A_i \left(1 - \frac{Q_i^2}{A_i^3 g} T_i \right) \right\} \cdot \left[\frac{\theta}{\Delta X} \Delta Y_{i+1} - \frac{\theta}{\Delta X} \Delta Y_i \right. \\ &\left. + \frac{Y_{i+1}}{\Delta X} - \frac{Y_i}{\Delta X} \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Desenvolvendo os colchetes, internos do primeiro termo, vem

$$\begin{aligned} gA(1-F^2) \frac{\partial Y}{\partial X} &= g \cdot \left[\frac{\theta A_{i+1}}{2} + \frac{\theta}{2} \Delta A_{i+1} - \frac{\theta}{2g} \frac{(Q_{i+1} + \Delta Q_{i+1})^2 (T_{i+1} + \Delta T_{i+1})}{(A_{i+1} + \Delta A_{i+1})^2} \right. \\ &+ \frac{\theta}{2} A_i + \frac{\theta}{2} \Delta A_i - \frac{\theta}{2g} \frac{(Q_i + \Delta Q_i)^2 (T_i + \Delta T_i)}{(A_i + \Delta A_i)^2} + \frac{(1-\theta) Q_{i+1}^2 T_{i+1}}{2g A_{i+1}^2} + \frac{(1-\theta) A_{i+1}}{2} \\ &\left. + \frac{(1-\theta) A_i}{2} - \frac{(1-\theta)}{2g} \frac{Q_i^2}{A_i^2} T_i \right] \cdot \left[\frac{\theta}{\Delta X} \Delta Y_{i+1} - \frac{\theta}{\Delta X} \Delta Y_i + \frac{Y_{i+1}}{\Delta X} - \frac{Y_i}{\Delta X} \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

OU

$$\begin{aligned} gA(1-F^2) \frac{\partial Y}{\partial X} &= g \cdot \left[\frac{\theta}{2} A_{i+1} + \frac{\theta}{2} \Delta A_{i+1} - \frac{\theta}{2g A_{i+1}^2} (Q_{i+1} + \Delta Q_{i+1})^2 \right. \\ &\left. (T_{i+1} + \Delta T_{i+1}) \left(1 - \frac{2 \Delta A_{i+1}}{A_{i+1}} \right) + \frac{\theta}{2} A_i + \frac{\theta}{2} \Delta A_i - \frac{\theta}{2g A_i^2} (Q_i + \Delta Q_i)^2 \right. \\ &\left. (T_i + \Delta T_i) \left(1 - \frac{2 \Delta A_i}{A_i} \right) + \frac{A_{i+1}}{2} - \frac{\theta A_{i+1}}{2} - \frac{(1-\theta)}{2} F_{i+1}^2 A_{i+1} + \frac{A_i}{2} \right. \\ &\left. - \frac{\theta A_i}{2} - \frac{(1-\theta)}{2} F_i^2 \Delta A_i \right] \cdot \left[\frac{\theta}{\Delta X} Y_{i+1} - \frac{\theta}{\Delta X} \Delta Y_i + \frac{Y_{i+1}}{\Delta X} - \frac{Y_i}{\Delta X} \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

Desenvolvendo os termos quadráticos entre parênteses, vem:

$$gA(1-F^2) \frac{\partial Y}{\partial X} = g \left[\frac{\theta}{2} \Delta A_{i+1} + \frac{\theta}{2} \Delta A_i + \frac{A_{i+1}}{2} + \frac{A_i}{2} - \frac{\theta}{2gA_{i+1}^2} (Q_{i+1}^2 + 2\Delta Q_{i+1} Q_{i+1} + \Delta Q_{i+1}^2) \cdot (T_{i+1} + \Delta T_{i+1}) \cdot \left(1 - \frac{2\Delta A_{i+1}}{A_{i+1}} - \frac{\theta}{2gA_i^2} (Q_i^2 + 2\Delta Q_i Q_i + \Delta Q_i^2) \cdot (T_i + \Delta T_i) \cdot \left(1 - \frac{2\Delta A_i}{A_i} - \frac{(1-\theta)}{2} F_{i+1}^2 A_{i+1} - \frac{(1-\theta)}{2} F_{i+1}^2 \Delta A_i \right) \right] \cdot \left[\frac{\theta}{\Delta x} (\Delta Y_{i+1} - \Delta Y_i) + \frac{(Y_{i+1} - Y_i)}{\Delta x} \right] \quad (3.53)$$

Desenvolvendo os parênteses internos e reordenando, temos

$$gA(1-F^2) \frac{\partial Y}{\partial X} = \left\{ -\frac{\theta}{2gA_{i+1}^2} \left[Q_{i+1}^2 T_{i+1} - \frac{2Q_{i+1}^2}{A_{i+1}} T_{i+1} \Delta A_{i+1} + Q_{i+1}^2 \Delta T_{i+1} - 2Q_{i+1}^2 \Delta T_{i+1} \Delta Q_{i+1} + 2Q_{i+1} T_{i+1} \Delta Q_{i+1} - \frac{4}{A_{i+1}} \Delta Q_{i+1} T_{i+1} \Delta A_{i+1} \right] - \frac{\theta}{2gA_i^2} \left[Q_i^2 T_i - \frac{2Q_i^2}{A_i} T_i \Delta A_i + Q_i^2 \Delta T_i - \frac{2}{A_i} Q_i^2 \Delta T_i \Delta A_i + 2\Delta Q_i Q_i T_i - \frac{4}{A_i} \Delta Q_i Q_i T_i \Delta A_i \right] + \frac{\theta}{2} \Delta A_{i+1} + \frac{\theta}{2} \Delta A_i + \frac{A_{i+1} + A_i}{2} - \frac{(1-\theta)}{2} F_{i+1}^2 A_{i+1} - \frac{(1-\theta)}{2} F_{i+1}^2 \Delta A_i \right\} \cdot g \cdot \left[\frac{\theta}{\Delta x} (Y_{i+1} - Y_{i+1}) + \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \right] \quad (3.54)$$

Desprezando-se os termos de segunda ordem, e substituindo

$\frac{Q^2 T}{gA^3}$ por F^2 , vem

$$A(1-F^2) \frac{\partial Y}{\partial X} = g \cdot \left\{ \left[-\frac{\theta}{2} F_{i+1}^2 A_{i+1} + \theta F_{i+1}^2 \Delta A_i - \frac{\theta}{2g} \cdot \frac{Q_{i+1}^2}{A_{i+1}^2} \Delta T_{i+1} - \frac{\theta}{gA_{i+1}^2} \cdot Q_{i+1} T_{i+1} \Delta Q_{i+1} \right] + \left[-\frac{\theta}{2} F_i^2 A_i + \theta F_i^2 \Delta A_i - \frac{\theta}{2g} \frac{Q_i^2}{A_i^2} \Delta T_i - \frac{\theta}{gA_i^2} \cdot \Delta Q_i Q_i T_i \right] - \frac{F_{i+1}^2}{2} A_{i+1} + \frac{\theta}{2} F_{i+1}^2 A_{i+1} - \frac{F_i^2 A_i}{2} + \frac{\theta}{2} F_i^2 A_i + \frac{\theta}{2} \Delta A_{i+1} + \frac{\theta}{2} \Delta A_i + \frac{A_{i+1}}{2} + \frac{A_i}{2} \right\} \cdot \left[\frac{\theta}{\Delta x} (\Delta Y_{i+1} - \Delta Y_i) + \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \right] \quad (3.55)$$

Reordenando, obtemos finalmente

$$g \cdot A(1-F^2) \frac{\partial Y}{\partial x} = g \cdot \left\{ \frac{\theta}{\Delta x} F_{i+1}^2 \Delta A_{i+1} (Y_{i+1} - Y_i) + \frac{\theta}{\Delta x} F_i^2 \Delta A_i (Y_{i+1} - Y_i) \right. \\ \left. - \frac{\theta Q_{i+1}^2 \Delta T_{i+1}}{2gA_{i+1}^2 \Delta x} \cdot (Y_{i+1} - Y_i) - \frac{\theta Q_i^2 \Delta T_i}{2gA_i^2 \Delta x} (Y_{i+1} - Y_i) - \left[\frac{\theta Q_{i+1} T_{i+1} \Delta Q_{i+1}}{gA_{i+1}^2 \Delta x} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\theta Q_i T_i \Delta Q_i}{gA_i^2 \Delta x} \right] \cdot (Y_{i+1} - Y_i) - \left[\frac{F_{i+1}^2}{2} A_{i+1} + \frac{F_i^2}{2} A_i \right] \cdot \frac{(Y_{i+1} - Y_i)}{\Delta x} \right\} \quad (3.56)$$

$$\left[\frac{F_{i+1}^2}{2} A_{i+1} + \frac{F_i^2}{2} A_i \right] \cdot \frac{\theta}{\Delta x} (\Delta Y_{i+1} - \Delta Y_i) \left. \right\} + g \cdot \left[\frac{\theta}{2} \Delta A_{i+1} + \frac{\theta}{2} \Delta A_i \right. \\ \left. \frac{A_{i+1}}{2} + \frac{A_i}{2} \right] \cdot \left[\frac{\theta}{\Delta x} (\Delta Y_{i+1} - \Delta Y_i) + \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \right] \quad (3.57)$$

(d) Primeira parcela: gAS_o (3.57)

$$AS = \left[\frac{\theta}{2} (A_{i+1} + \Delta A_{i+1} + A_i + \Delta A_i) + \frac{(1-\theta)}{2} (A_{i+1} + A_i) \right] \quad (3.58)$$

Substituindo (3.58) em (3.57), resulta

$$gAS_o = gS_o \left[\frac{\theta}{2} A_{i+1} + \frac{\theta}{2} \Delta A_{i+1} + \frac{\theta}{2} A_i + \frac{\theta}{2} \Delta A_i + \frac{A_{i+1}}{2} + \frac{A_i}{2} - \frac{\theta}{2} A_{i+1} \right. \\ \left. - \frac{\theta}{2} A_i \right] \quad (3.59)$$

Reordenando, obtemos

$$gAS_o = gS_o \left[\frac{\theta}{2} (\Delta A_{i+1} + \Delta A_i) + \frac{A_{i+1} + A_i}{2} \right] \quad (3.60)$$

Segunda parcela: gAS_f (3.61)

Onde: $S_f = \frac{Q|Q|n^2}{A^2 R^{4/3}};$ (3.62)

$$(Q+\Delta Q) \cdot |Q+\Delta Q| \cong Q|Q|+2Q\Delta Q \tag{3.63}$$

$$\frac{(A + \Delta A) (Q|Q|+ 2Q\Delta Q)}{(K+\Delta K)^2} = (Q|Q|A + 2QA\Delta Q + Q|Q|\Delta A) \cdot \frac{1}{K^2} (1 - \frac{2\Delta k}{K})$$

Portanto, a equação (3.61) fica

$$gAS_f = \left[\frac{Q_{i+1}|Q_{i+1}|A_{i+1}}{K_{i+1}^2} - \frac{2Q_{i+1}|Q_{i+1}|A_{i+1}\Delta k_{i+1}}{K_{i+1}^3} + \frac{2Q_{i+1}\Delta Q_{i+1}A_{i+1}}{K_{i+1}^2} \right. \\ + \frac{Q_{i+1}|Q_{i+1}|\Delta A_{i+1}}{K_{i+1}^2} + \frac{Q_i|Q_i|A_i}{k_i^2} - \frac{2Q_i|Q_i|A_i\Delta k_i}{k_i^3} + \frac{2Q_i\Delta Q_iA_i}{k_i^2} + \\ \left. + \frac{Q_i|Q_i|\Delta A_i}{k_i^2} \right] \cdot \frac{\theta}{2} + \frac{A_{i+1}Q_{i+1}|Q_{i+1}|}{2K_{i+1}^2} + \frac{A_i Q_i|Q_i|}{2K_i^2} - \frac{\theta}{2} \dots$$

$$\frac{A_{i+1}Q_{i+1}|Q_{i+1}|}{K_{i+1}^2} = \frac{\theta}{2} \frac{A_iQ_i|Q_i|}{K_i^2} \tag{3.65}$$

Reorganizando obtém-se finalmente

$$gAS_f = \left[- \frac{2Q_{i+1}|Q_{i+1}|A_{i+1}\Delta k_{i+1}}{K_{i+1}^3} - \frac{2Q_i|Q_i|A_i\Delta k_i}{k_i^3} + \frac{2Q_{i+1}\Delta Q_{i+1}A_{i+1}}{k_{i+1}^2} \right. \\ + \frac{2Q_i\Delta Q_iA_i}{k_i^2} + \frac{Q_{i+1}|Q_{i+1}|\Delta A_{i+1}}{k_{i+1}^2} + \left. \frac{Q_i|Q_i|A_i}{k_i^2} \right] \frac{\theta}{2} + \frac{A_{i+1}Q_{i+1}|Q_{i+1}|}{2k_i^2} \\ + \frac{A_iQ_i|Q_i|}{2K_i^2} \tag{3.66}$$

. Resumindo, a equação da dinâmica fica

$$\alpha_i^6 \Delta y_{i+1} + \alpha_i^7 \Delta Q_{i+1} + \alpha_i^8 \Delta y_i + \alpha_i^9 \Delta Q_i + \alpha_i^{10} = 0 \tag{3.67}$$

Onde:

$$\alpha_i^6 = - \frac{2\Delta t \theta}{\Delta x} \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}^2} T_{i+1} (Q_{i+1} - Q_i) + \theta g \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_{i+1} (1 - F_{i+1}^2) + A_i (1 - F_i^2)) + g \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} (y_{i+1} - y_i) (T_{i+1} - \frac{Q_{i+1}^2}{g A_{i+1}^2} (\frac{dT}{dy})_{i+1} + 2 F_{i+1}^2 T_{i+1})$$

$$- S_0 g \theta \Delta t T_{i+1} + 2 g \frac{\theta \Delta t}{k_{i+1}^2} Q_{i+1} |Q_{i+1}| (\frac{T_{i+1}}{2} - (\frac{dk}{dy})_{i+1} \frac{A_{i+1}}{k_{i+1}})$$

$$\alpha_i^7 = 1 + 2 \frac{\theta \Delta t}{\Delta x} \frac{2Q_{i+1} - Q_i}{A_{i+1}} + \frac{Q_i}{A_i} - \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}^2} T_{i+1} (y_{i+1} - y_i) +$$

$$+ 2 g \frac{\theta \Delta t}{k_{i+1}^2} A_{i+1} |Q_{i+1}|$$

$$\alpha_i^8 = - \frac{2\Delta t \theta}{\Delta x} \frac{Q_i}{A_i^2} T_i (Q_{i+1} - Q_i) - \theta \frac{g \Delta t}{\Delta x} (A_{i+1} (1 - F_{i+1}^2) + A_i (1 - F_i^2))$$

$$+ g \frac{\theta \Delta t}{\Delta x} (y_{i+1} - y_i) (T_i - \frac{Q_i^2}{g A_i^2} (\frac{dT}{dy}) + 2 F_i^2 T_i) - S_0 g \theta \Delta t T_i + 2 g \frac{\theta \Delta t}{k_i^2}$$

$$Q_i |Q_i| (\frac{T_i}{2} - (\frac{dk}{dy})_i \frac{A_i}{k_i})$$

$$\alpha_i^9 = 1 - \frac{2\Delta t \theta}{\Delta x} (\frac{2Q_i - Q_{i+1}}{A_i}) \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}} + \frac{Q_i}{A_i^2} T_i (y_{i+1} - y_i) + 2 g \frac{\theta \Delta t}{k_i^2}$$

$$A_i |Q_i|$$

$$\alpha_i^{10} = + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{i+1} - Q_i) (\frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}} + \frac{Q_i}{A_i}) + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (y_{i+1} - y_i) (A_{i+1} (1 - F_{i+1}^2)$$

$$- A_i (1 - F_i^2)) - g S_0 \Delta t (A_{i+1} + A_i) - g \Delta t (\frac{A_{i+1} Q_{i+1} |Q_{i+1}|}{k_{i+1}^2} + \frac{A_i |Q_i| Q_i}{k_i^2})$$

As equações (3.36) e (3.67) são aplicados nas seções $i = 1, 2, \dots, n-1$, o que resultam $2(n-1)$ equações. As incógnitas são $2n$ onde n é o número de seções e em cada seção existem duas variáveis y^{t+1} e Q^{t+1} . As condições de contorno de montante e jusante fornecem mais duas equações, resultando num sistema de equações algébricas linear de $2n$ equações a $2n$ incógnitas para ser resolvido em cada intervalo de tempo.

A forma matricial é idêntica ao caso anterior mudando apenas os coeficientes. Para resolver este sistema linear deve-se utilizar um método que resolva eficientemente matrizes banda pentadiagonais, tal qual a subrotina Gelb, IBM ou o método Double Sweep, explicado no anexo III.

MÉTODO DOUBLE-SWEEP

Eq. da continuidade.

$$A_i \Delta Y_{i+1} + B_i \Delta Q_{i+1} + C_i \Delta Y_i + D_i \Delta Q_i = E_i$$

A_i, B_i, C_i, D_i , e E_i são funções das variáveis de instante t , e portanto são conhecidas.

i : É o nº do trecho delimitado pelas seções i e $(i+1)$

Eq. da dinâmica

$$A'_i \Delta Y_{i+1} + B'_i \Delta Q_{i+1} + C'_i \Delta Y_i + D'_i \Delta Q_i = E'_i$$

M : Seções

Nº de incógnitas : $2M$ (vazões e níveis das seções)

Nº de equações : $2(M-1)$ para os trechos (continuidade e dinâmica para cada trecho).

Portanto para resolver o sistema precisamos de mais duas equações, que são as condições de contorno.

Matricialmente

$$A.X = E$$

MQ	MY	ΔQ_1
$A_1 B_1$	$C_1 D_1$	ΔY_1
$A'_1 B'_1$	$C'_1 D'_1$	ΔQ_2
$A_2 B_2$	$C_2 D_2$	ΔY_2
$A'_2 B'_2$	$C'_2 D'_2$.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	$A_{m-1} B_{m-1}$	ΔQ_m
.	$C_{m-1} D_{m-1}$	ΔY_m
.	$A'_{m-1} B'_{m-1}$	
.	$C'_{m-1} D'_{m-1}$	
JQ	JY	

$$= \begin{bmatrix} EM \\ E_1 \\ E'_1 \\ E_2 \\ E'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ E_{m-1} \\ E'_{m-1} \\ EJ \end{bmatrix}$$

Condição de contorno a montante

Hidrograma : $MQ = 1$
 $MY = 0$
 $EM = \Delta Q_1$

LINÍGRAMA : $MQ = 0$
 $MY = 1$
 $EM = \Delta Y_1$

JUSANTE

HIDROGRAMA : $JQ = 1$
 $JY = 0$
 $EJ = \Delta QM$

LINÍGRAMA : $JQ = 0$
 $JY = 1$
 $EJ = \Delta YM$

A matriz A é uma matriz banda do tipo pentadiagonal. Neste caso o método "DOUBLE SWEEP" foi utilizado para resolver o sistema de equações.

A seguinte relação para uma seção i no instante (t+1) é válida.

$$\Delta Q_i = F_i \Delta Y_i + G_i \quad (1)$$

Substituindo (1) nas equações da continuidade e dinâmica, prova-se a existência da seguinte relação:

$$\Delta Q_{i+1} = F_{i+1} \Delta Y_{i+1} + G_{i+1}$$

$$F_{i+1} = \frac{A'_i (C_i + D_i F_i) + A_i (C'_i F_i)}{B_i (C'_i + D'_i F_i) - B'_i (C_i + D_i F_i)}$$

$$G_{i+1} = \frac{(C_i + D_i F_i) \cdot (E'_i - D'_i G_i) - (E_i - D_i G_i) \cdot (C'_i + D'_i F_i)}{B'_i (C_i + D_i F_i) - B_i (C'_i + D'_i F_i)}$$

SEQUÊNCIA DE CÁLCULO

a) Varredura progressiva - cálculo de F_i, G_i

- Condição de contorno a montante

- Hidrograma - conhecido - ΔQ_1

$$F_1 = 0$$

$$G_1 = \Delta Q_1$$

- Linigrama - conhecido - ΔY_1

$$F_1 = \infty (10^6 \text{ por exemplo})$$

$$G_m = - F_1 \Delta Y_1$$

Portanto vão sendo calculados os valores de (F_2, G_2) , (F_3, G_3) ... (F_m, G_m) . Terminando neste ponto a varredura progressiva.

b) Varredura regressiva

Cálculo de Y_i, Q_i

- Condição de contorno a jusante

- Hidrograma - conhecido ΔQ_m

$$\Delta Y_m = \frac{\Delta Q_m - \Delta G_m}{F_m}$$

- Linigrama - conhecido ΔY_m

$$\Delta Q_m = F_m \Delta Y_m + G_m$$

- Curva de descarga

$$Q_m^{t+1} = F_m \Delta Y_m + G_m$$

$$\Delta Y_m = \frac{Q_m^t \cdot Y_m - Q_m^t + G_m - Y_m}{Q_m^t - F_m}$$

Para as outras seções

$$\Delta Y_i = - \frac{A_i \Delta Y_{i+1}}{C_i + D_i F_i} - \frac{B_i \Delta Q_{i+1}}{C_i + D_i F_i} + \frac{E_i - D_i - G_i}{C_i + D_i F_i}$$

$$\Delta Q_i = F_i \Delta Y_i + G_i$$

Após o cálculo de ΔQ_i e ΔY_i são obtidos os níveis e vazões da seguinte forma:

$$Y_i^{t+1} = Y_i^t + \Delta Y_i$$

$$Q_i^{t+1} = Q_i^t + \Delta Q_i$$