

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Modelagem Micromecânica das Propriedades Efetivas e da
Propagação do Dano em Meios Viscoelásticos Fraturado**

Cássio Barros de Aguiar

Porto Alegre

2021

CÁSSIO BARROS DE AGUIAR

**MODELAGEM MICROMECAÂNICA DAS PROPRIEDADES
EFETIVAS E DA PROPAGAÇÃO DO DANO EM MEIOS
VISCOELÁSTICOS FRATURADOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos
requisitos a obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Orientador: Prof. Samir Maghous (PPGEC - UFRGS)

Dr. pela Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Co-orientador: Prof. Rodrigo Rossi (PROMEC/PPGEC - UFRGS)

Dr. pela Universidade Federal de Santa Catarina

BANCA EXAMINADORA

Prof. Eduardo Bittencourt (PPGEC - UFRGS)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques (UFAL)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre, 28 de abril de 2021

Dedico este trabalho a minha noiva Aline, cujo incentivo, compreensão e amor me motivaram para que eu me dedicasse a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu orientador Samir Maghous, por me ajudar a superar as dificuldades encontradas ao longo do desenvolvimento deste trabalho, tanto no âmbito pessoal quanto no âmbito acadêmico.

Agradeço a minha Noiva Aline Vargas, a qual sempre me incentivou a manter-me dedicado aos estudos, me permitindo pequenas fugas para desopilar.

Agradeço ao CEMACOM, pelo espaço físico cedido, e a todos colegas que nele trabalham, pelo apoio e brincadeiras quando precisávamos relaxar.

Agradeço ao PPGEC/UFRGS pela oportunidade de cursar um curso prestigiado no Brasil e no mundo, me concedendo condições para os estudos.

Agradeço ao CNPq/CAPES pela bolsa, a qual me permitiu dedicar-me integralmente aos meus estudos.

RESUMO

AGUIAR, C. B. **Modelagem micromecânica das propriedades efetivas e da propagação do dano em meios viscoelásticos fraturados**. 2021. 284 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Este trabalho tem por objetivo principal o desenvolvimento de ferramentas analíticas para análise do comportamento mecânico diferido de materiais viscoelásticos com fraturas aleatoriamente distribuídas. O termo “fratura” faz referência a superfícies de descontinuidade capazes de transmitir esforços (normais e cisalhantes) ao longo de seu comprimento. Na escala do material, formula-se via abordagem micromecânica o comportamento viscoelástico homogeneizado do material fraturado. Tal raciocínio é desenvolvido combinando o esquema de homogeneização de Mori-Tanaka na elasticidade com o princípio da correspondência elástico/viscoelástico entre os domínios do tempo e de Carson-Laplace. A formulação por meio de um procedimento próprio, para escrever o comportamento homogeneizado no domínio do tempo, permitiu verificar que o material fraturado pode ser representado a nível macroscópico por um modelo reológico de Maxwell generalizado. Um raciocínio combinado entre os resultados da micromecânica e argumentos termodinâmicos macroscópicos é empregado para formular, na escala macroscópica, um critério de propagação de dano. A expressão resultante assimila-se ao critério de propagação de Griffith, comparando a derivada da energia elástica em função do parâmetro de dano (denominada de taxa de liberação de energia) com uma energia crítica, propriedade do material. Aplicações numéricas verificaram que, enquanto estruturas submetidas a carregamentos constantes podem ser estudadas utilizando somente as componentes instantâneas, estruturas sujeitas a taxas de carregamento constantes (crescimento linear) demonstram clara dependência das componentes diferidas para a verificação da propagação. Nesta última situação, simulações cujos componentes (matriz sólida e fraturas) foram representadas por modelos reológicos particulares, apresentaram taxa de liberação de energia crescente até um patamar assintótico. Tal situação, associada com o balanço entre taxa de liberação de energia e energia crítica durante a propagação, permitiu a determinação de um limite inferior para o parâmetro de dano final do material após encerrada a propagação. Para intervalos de tempo transientes, o raciocínio viscoelástico linear foi atualizado para contar com as não-linearidades provenientes da propagação das fraturas. Assim, duas formulações baseadas na variável interna “função de dano” foram propostas. Tais formulações, aliadas a um raciocínio análogo à plasticidade, permitiu a formulação de uma lei de evolução do dano, que resultou em um algoritmo numérico capaz de avaliar a história do dano (bem como do estado do material) ao longo do tempo. Este procedimento foi amplamente estudado em diversas aplicações numéricas, as quais identificaram os principais fatores que contribuem com a propagação estável/instável do dano, bem como da taxa de propagação ao longo do tempo. Por fim, a consequência da correta avaliação dos parâmetros elásticos e viscosos foi ressaltada, discutindo-se os efeitos resultantes da sub/super avaliação destes valores.

Palavras-chave: *viscoelasticidade; micromecânica; dano; propagação.*

ABSTRACT

AGUIAR, C. B. **Micromechanical modeling of effective properties and damage propagation in fractured viscoelastic media**. 2021. 284 f. Thesis (Doctor in Engineering) – Postgraduate Program in Civil Engineering, UFRGS, Porto Alegre.

The main objective of this work is the development of analytical tools for analysis of the deferred mechanical behavior of viscoelastic materials with randomly distributed fractures. The term “fracture” refers to surfaces of discontinuities able to transfer (normal and shear) efforts along their length. In the material scale, the homogenized viscoelastic behavior of the fractured material is formulated via micromechanical approach. Such reasoning is developed by combining the Mori-Tanaka homogenization scheme into elasticity with the elastic/viscoelastic correspondence principle between the time domain and the Carson-Laplace domain. The formulation by mean of an own procedure to write the homogenized behavior in the time domain, allowed to verify that the fractured material can be represented at the macroscopic level by a generalized Maxwell rheological model. A combined reasoning between micromechanics results and macroscopic thermodynamic arguments is used to formulate, on the macroscopic scale, a criterion for damage propagation. The resulting expression is assimilated to the Griffith propagation criterion, comparing the derivative of the elastic energy with respect to the damage parameter (called the energy release rate) to a critical energy, property of the material. Numerical applications have verified that, while structures subject to constant loading can be studied using only the instantaneous components, structures subject to constant loading rates (linear growth) demonstrate a clear dependence of the deferred components for the propagation verification. In this last situation, simulations whose components (solid matrix and fractures) were represented by specific rheological models, presented increasing energy release rate until an asymptotic level. This situation, associated with the balance between energy release rate and critical energy during propagation, allowed the determination of a lower limit for the final damage parameter of the material after the end of the propagation. For transient time intervals, linear viscoelastic reasoning has been updated to account for non-linearities from fracture propagation. Thus, two formulations based on the internal variable "damage function" have been proposed. Such formulations, combined with a reasoning analogous to plasticity, allowed the formulation of a damage evolution law, which resulted in a numerical algorithm capable of evaluating the history of the damage (as well as the state of the material) over time. This procedure has been widely studied in several numerical applications, which have identified the main factors that contribute to the stable/unstable propagation of the damage, as well as the rate of propagation over time. Finally, the consequence of the correct evaluation of elastic and viscous parameters was highlighted, discussing the effects resulting from the under/over-evaluation of these values.

Key-words: *viscoelasticity; micromechanics; damage; propagation.*

Sumário

1.	INTRODUÇÃO.....	10
1.1.	Objetivos da pesquisa.....	12
1.2.	DELINEAMENTO DO TRABALHO.....	14
2.	CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	17
2.1.	VISCOELASTICIDADE.....	17
2.1.1.	Ensaio de Fluência e de Relaxação.....	19
2.1.2.	Transformada de Carson-Laplace e Princípio da Reciprocidade.....	24
2.1.3.	Modelos Reológicos Clássicos.....	25
2.1.4.	Formulação Tridimensional.....	32
2.2.	MEIOS FRATURADOS.....	34
2.2.1.	Caracterização das Descontinuidades.....	35
2.2.2.	Comportamento Mecânico.....	37
2.2.3.	Modelagem Discreta X Contínua.....	39
2.2.4.	Critério de Propagação de Fraturas.....	40
2.2.5.	Mecânica da Fratura Viscoelástica.....	42
2.3.	HOMOGENEIZAÇÃO.....	46
2.3.1.	Teoria da Homogeneização.....	47
2.3.2.	Regra das Médias.....	49
2.3.3.	Condições de Contorno.....	50
2.3.4.	Lema de Hill.....	53
2.3.5.	Métodos de Homogeneização.....	54
2.3.6.	Lema de Hill Estendido à Meios com Descontinuidades.....	57
3.	HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS VISCOELÁSTICOS FRATURADOS.....	59
3.1.	RELAÇÃO MICRO-MACRO DO PROBLEMA ELÁSTICO.....	59
3.2.	HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAL ELÁSTICO.....	63

3.3.	RELAÇÃO MICRO-MACRO DO PROBLEMA VISCOELÁSTICO	66
3.3.1.	Lei de comportamento macroscópica	67
3.3.2.	Relação entre campos microscópicos e macroscópicos	71
3.4.	HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAL VISCOELÁSTICO.....	75
3.4.1.	Transformada Inversa de Carson-Laplace.....	77
3.4.2.	Modelo Reológico Homogeneizado	80
3.4.3.	Modelo Aproximado de Burger para o Comportamento Viscoelástico Efetivo	82
3.5.	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	85
3.6.	VALIDAÇÃO DO MODELO MICROMECAÂNICO	91
3.6.1.	Aplicação 1	96
3.6.2.	Aplicação 2	102
3.6.3.	Aplicação 3	107
4.	CRITÉRIO DE PROPAGAÇÃO DO DANO EM MEIOS VISCOELÁSTICOS	111
4.1.	CONDIÇÃO DE PROPAGAÇÃO ELÁSTICA	111
4.2.	QUADRO TERMODINÂMICO VISCOELÁSTICO	113
4.3.	CRITÉRIO DE PROPAGAÇÃO DE FRATURAS	117
4.4.	ENERGIA LIVRE MACROSCÓPICA	120
4.5.	ANÁLISE DA TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA	124
4.6.	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	125
4.6.1.	Aplicação de carregamento isotropico	126
4.6.2.	Aplicação de carregamento cisalhante	139
5.	EVOLUÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO.....	143
5.1.	FORMULAÇÕES NÃO LINEARES PARA A VISCOELASTICIDADE ...	143
5.1.1.	Formulações Empíricas	144
5.1.2.	Formulações Fundamentadas na Viscoelasticidade Linear	145
5.1.3.	Formulações Fundamentadas em Conceitos Não-Lineares.....	148

5.1.4.	Formulação Viscoelástica Não-Linear Aplicada a Evolução do Dano ..	151
5.2.	MODELO DE EVOLUÇÃO DO DANO	158
6.	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	169
6.1.	CARREGAMENTO MACROSCÓPICO DEFINIDO POR UMA DEFORMAÇÃO ISÓTROPICA CONSTANTE.....	170
6.2.	DEFORMAÇÃO ISÓTROPICA COM EVOLUÇÃO LINEAR	177
6.3.	DEFORMAÇÃO ISÓTROPICA BILINEAR	187
6.4.	DEFORMAÇÃO UNIAXIAL COM EVOLUÇÃO LINEAR	191
6.5.	DEFORMAÇÃO CISALHANTE COM EVOLUÇÃO LINEAR	194
6.6.	MATRIZ SÓLIDA COM MODELO DE KELVIN-VOIGT	200
6.7.	COMPARAÇÃO ENTRE DIFERENTES MODELOS REOLÓGICOS	205
6.7.1.	Soluções no domínio linear (sem propagação).....	208
6.7.2.	Comparação do comportamento no regime de propagação de dano	213
7.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	220
7.1.	CONCLUSÕES	220
7.2.	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	223
	REFERENCIAS	225
	ANEXO A: COMPONENTES DOS POLINÔMIOS A(P) E B(P).....	232
A.1)	CASO 1: MATRIZ DE MAXWELL E FISSURAS	232
A.2)	CASO 2: MATRIZ DE MAXWELL E FRATURAS ELÁSTICAS.....	233
A.3)	TABELA DE ORDEM DOS POLINÔMIOS RESULTANTES	236
A.4)	DEMONSTRAÇÃO: RAIZES r_k REAIS E NEGATIVAS	237
A.5)	PROBLEMAS COM MULTIPLICIDADE DAS RAIZES.....	240
A.6)	DEMONSTRAÇÃO: TERMOS ADICIONAIS DECORRENTES DA MULTIPLICIDADE DE r_k SÃO NULOS	240
	ANEXO B: PARÂMETROS DO MODELO DE BURGER APROXIMADO.....	245

ANEXO C: COMPARAÇÃO ENTRE MODELO DE BURGER APROXIMADO E SOLUÇÃO EXATA.....	248
ANEXO D: DETERMINAÇÃO DA ENERGIA DIFERIDA ESCRITA EM VARIÁVEIS MACROSCÓPICAS.....	252
ANEXO E: EXPRESSÕES PARA CONDIÇÃO DE PROPAGAÇÃO PARA FRATURAS PARALELAS.....	254
ANEXO F: EXPRESSÕES COMPLEMENTARES.....	259
F.1) EXPRESSÕES DERIVADAS DA FORMA σ_t	259
F.2) EXPRESSÕES DERIVADAS DA FORMA σ_τ	261
ANEXO G: CÓDIGO UTILIZADO NO SOFTWARE MAPLE.....	263
G.1) INICIALIZAÇÃO DO PROGRAMA.....	263
G.2) DETERMINAÇÃO DO COMPORTAMENTO HOMOGENEIZADO (PARA FRATURAS ISÓTROPICAS).....	264
G.3) SOLUÇÃO PARA CARREGAMENTO EM DEFORMAÇÕES.....	267
G.4) DETERMINAÇÃO DA ENERGIA ELÁSTICA E DA TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA.....	269
G.5) COMPARAÇÃO ENTRE TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA ASSINTÓTICA E ENERGIA CRÍTICA MACROSCÓPICA.....	270
G.6) LEI DE EVOLUÇÃO DO DANO E EVOLUÇÃO DOS PARÂMETROS AO LONGO DO TEMPO.....	271
G.6.1 Solução para $R(t, \tau, \phi(t))$	271
G.6.2 Solução para $R(t, \tau, \phi(\tau))$	275
ANEXO H: PROPRIEDADES DOS MODELOS UTILIZADOS NA SEÇÃO 6.7....	279

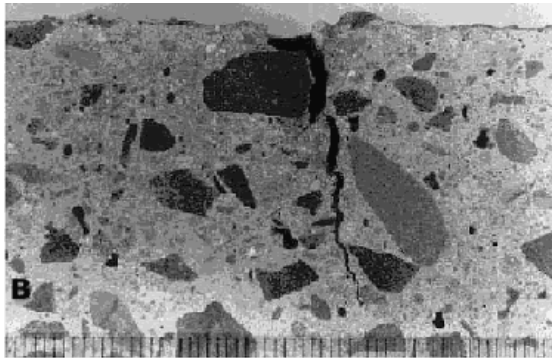
1. INTRODUÇÃO

Dentre as características mais importantes presentes nos materiais utilizados na engenharia situam-se as fraturas. Existentes tanto em escalas cristalinas quanto em escalas geológicas, as fraturas referem-se a um tipo particular de degradação físico-mecânica, sendo distinguidas das demais descontinuidades sobretudo pela sua capacidade de transmitir esforços normais e tangenciais ao longo de seu comprimento. Embora sua presença seja muitas vezes indesejada, sua ocorrência natural as torna indispensáveis no projeto e na caracterização de materiais, uma vez que a degradação das propriedades induzidas no meio fraturado reduz significativamente a rigidez e a resistência do meio, bem como aumenta a permeabilidade do material.

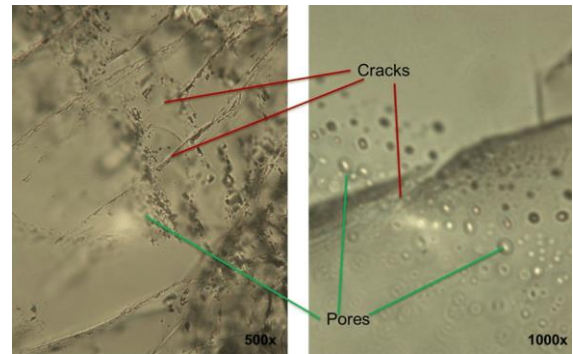
A gama de materiais ou estruturas nas quais as fraturas se fazem presente contempla quase que a totalidade dos materiais sólidos conhecidos, representando em maior ou menor escala um dos problemas mais universais na engenharia. Estruturas de concreto, pavimentos asfálticos, peças de aço, vida útil de equipamentos, resistência e permeabilidade de solos, estruturas subterrâneas e/ou submersas, construção de obras de arte (pontes, barragens, portos, reatores nucleares), projetos aeronáuticos, habitabilidade espacial, recuperação estrutural, capacidade de maciços rochosos, bioengenharia, depósitos petrolíferos, são alguns dos temas naturalmente relacionados a presença de fraturas. Em escalas superiores, contudo, fraturas podem ser aplicadas a modelos geológicos de falhas tectônicas (falha de San Andreas, por exemplo). A Figura 1.1 apresenta exemplos de fraturas em alguns materiais.

Embora nem sempre as fraturas estejam associadas ao colapso estrutural, sua presença é entendida como um alerta, podendo indicar potenciais riscos (corrosão de elementos protegidos, vazamento de gases, percolação de fluidos, deformações elevadas, ruptura parcial ou total) e requisitando, na maioria das vezes, análises mais aprofundadas para a investigação da segurança estrutural. A justificativa para estas investigações baseia-se na premissa de que a adição de carregamentos, acima de níveis críticos aceitos pela estrutura, induz a propagação de fraturas já existentes ou a nucleação (surgimento) de novas fraturas, podendo levar ao colapso estrutural. Este raciocínio enfatiza a importância de modelos capazes de prever a propagação de fraturas

bem como sua evolução, permitindo o conhecimento do estado final da estrutura ao se manter as condições e carregamentos impostos.



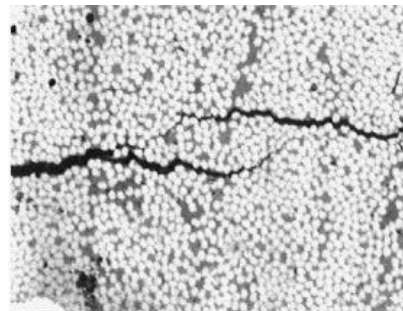
a) Concreto



b) Rochas (grãos de quartzo - granito)



c) Biomateriais



d) Compósitos

Figura 1.1: Fraturas em materiais de engenharia.

Referindo-se aos mecanismos de propagação, estudos envolvendo respostas lineares ou não lineares têm sido aplicados desde os trabalhos pioneiros de Griffith (1921), Irwin (1961), Barrenblatt (1962) ou Bieniawski (1967), dando menor atenção, contudo, à avaliação da propagação de descontinuidades capazes de transferir esforços. Nesse aspecto, a maior parte da análise teórica ou computacional tem focado na resposta instantânea (elástica e plástica) do material. No entanto, em muitas situações, o comportamento diferido revela-se uma componente fundamental da deformação do material, tornando-se indispensável para a análise da propagação.

Baseando-se em escalas de tempos suficientemente curtas, a maioria dos materiais podem ser vistos sob a ótica da elasticidade ou plasticidade, tornando negligenciável a presença de componentes diferidas. Em uma escala de tempo mais ampla, contudo, as deformações diferidas

gradualmente se manifestam, revelando-se essenciais para o comportamento mecânico de materiais viscoelásticos. A dependência da escala de tempo investigada pode levar a caracterização inadequada da reologia do material em estudo, comprometendo análises e resultados de “longa duração”. Amparados em suas próprias escalas de tempo, diversos materiais utilizados na engenharia podem ser classificados como viscoelásticos, incluindo desde geomateriais (rochas, argilas, solos, concreto) até polímeros (plásticos, asfaltos, polímeros naturais) e diversos metais ou determinados tipos de borrachas. Fora do âmbito tradicional da engenharia estrutural, alimentos, tecidos biológicos e bio-estruturas também apresentam forte comportamento viscoelástico.

Diferentemente do que ocorre em estruturas elásticas ou plásticas, espera-se que critérios e modelos de propagação na viscoelasticidade sejam diretamente dependentes do tempo. Estudos focados na propagação de fissuras únicas (descontinuidades inaptas a transmitir esforços) têm sido abordados sob a ótica viscoelástica desde, pelo menos, a década de 60 (Williams (1967), Willis (1967), Knauss e Dietmann (1970), Wnuk e Knauss (1970), Sih e Macdonald (1974), Schapery (1975a, 1975b, 1975c, 1984), Christensen e Wu (1981), Liang e Zhou (1997), Dubois et al. (1999), Carbone e Persson (2005), Persson e Brener (2005), Nguyen et al. (2010), D'Amico et al. (2013)). Contudo, estas abordagens são de difícil implementação quando a análise envolve um grande número de micro-fraturas.

Abordagens mais recentes (Nguyen et al. (2013) ou Nguyen e Dormieux (2014)) fundamentadas na teoria da micromecânica estenderam o raciocínio termodinâmico elástico de Griffith para o contexto viscoelástico, permitindo a formulação de um critério de propagação para materiais micro fissurados viscoelásticos associados a uma variável que represente o dano em uma escala macroscópica. Entretanto, raciocínios envolvendo a evolução do dano nestas teorias ainda carecem de estudos, justificando o desenvolvimento desta pesquisa.

1.1. Objetivos da pesquisa

Este trabalho tem por objetivo principal o desenvolvimento de ferramentas analíticas para análise do comportamento mecânico diferido de materiais viscoelásticos com fraturas aleatoriamente distribuídas.

Para que o objetivo principal deste trabalho seja alcançado, determinados objetivos intermediários necessitam ser previamente concluídos. Elencam-se então os seguintes objetivos específicos:

- Utilizar a teoria da micromecânica para formular a lei de comportamento na escala macroscópica para materiais elásticos heterogêneos, partindo das respectivas leis de comportamento dos constituintes na escala microscópica.
- Utilizar o princípio da correspondência, bem como o comportamento elástico homogeneizado previamente estabelecido, para estimar o tensor de relaxação homogeneizado do material viscoelástico com distribuição aleatória de fraturas.
- Determinar um modelo reológico que represente adequadamente o comportamento mecânico homogeneizado do material viscoelástico fraturado.
- Utilizar a teoria da micromecânica para determinar relações entre escalas (microscópicas/macroscópicas) para os campos de deformações (e tensões) auxiliares (elástica, viscosa e residual) decorrentes do problema viscoelástico.
- Utilizar a primeira e segunda leis termodinâmicas para fundamentar um critério de propagação macroscópico em um raciocínio análogo ao de Griffith, estendido a materiais viscoelásticos micro-fraturados.
- Formular uma expressão para a taxa de liberação de energia a qual permita uma determinação analítica ou numérica do critério de propagação, propiciando o cálculo do tempo de iniciação da propagação.
- Propor uma estimativa para o valor final do parâmetro de dano, após o encerramento da propagação devido ao equilíbrio entre taxa de liberação de energia e energia crítica.
- Adaptar a relação linear entre tensão-deformação do material viscoelástico homogeneizado ao domínio não-linear capaz de lidar com evolução da variável interna que representa o dano na escala macroscópica.
- Formular uma lei de propagação de fraturas que permita o estudo das propriedades mecânicas do material homogeneizado durante a propagação.

1.2.DELINEAMENTO DO TRABALHO

Este trabalho é estruturado em sete seções. Esta primeira visa a contextualização do tema proposto, apresentando sua importância no cenário da engenharia. A limitação, com relação ao número e abrangência de trabalhos nos quais o tema é debatido, justifica a realização desta pesquisa. Dado isso, os objetivos relativos a este trabalho são apresentados, esclarecendo metas principais e específicas a serem atingidas ao longo do desenvolvimento.

A segunda seção constitui uma compilação de ferramentas relacionadas aos temas centrais utilizados no decorrer deste trabalho. No âmbito da viscoelasticidade, ensaios de caracterização, formulação matemática, modelos reológicos e outras ferramentas específicas são apresentadas. No âmbito da mecânica da fratura, características físico-geométricas, modelagem mecânica e critérios de propagação clássicos são abordados. Por fim explica-se brevemente a teoria da homogeneização, tendo em vista o volume elementar representativo, as condições de contorno clássicas e métodos de homogeneização.

A terceira seção visa a formulação do comportamento viscoelástico homogeneizado do meio fraturado. Nele, a teoria da homogeneização justifica a determinação dos comportamentos macroscópicos elásticos e viscoelásticos. Os tensores de rigidez (elástico) e de relaxação (viscoelástico) são determinados segundo a distribuição de orientação das fraturas. Por meio de um procedimento específico é possível verificar que o material viscoelástico segue macroscopicamente o modelo reológico generalizado de Maxwell. Visando maior aplicabilidade, um modelo aproximado foi desenvolvido, demonstrando uma boa correlação com os resultados analíticos determinados. Aplicações numéricas reforçam o estudo, apresentando a evolução das propriedades mecânicas segundo parâmetros de dano pré-estabelecidos e evidenciando a importância dos modelos reológicos dos constituintes (matriz sólida e fraturas) para a evolução das propriedades viscoelásticas. Por fim, verifica-se o modelo constituinte micromecânico através da comparação com ensaios experimentais disponíveis na literatura. Tomando como base ensaios de fluência uniaxiais em tração e compressão realizados sob diversos níveis de carregamento foi possível realizar o ajuste das propriedades do modelo micromecânico e compará-lo com os demais dados disponíveis. Verificou-se que o modelo desenvolvido apresenta elevado nível de concordância quando o material apresenta características viscoelásticas lineares, além de conseguir reproduzir de forma muito satisfatória

o comportamento não-linear devido ao aumento do valor do parâmetro de dano decorrentes da maior intensidade de carregamento.

A quarta seção concentra-se na extensão do critério de propagação ao meio viscoelástico, mantendo uma conexão com as variáveis micromecânicas. Em um raciocínio similar ao de Griffith foi possível estender a formulação termodinâmica aos materiais viscoelásticos. Demonstrou-se que, sob dadas condições, é possível simplificar a expressão do critério de propagação, permitindo uma formulação similar a elasticidade. A diferença com relação ao raciocínio elástico centra-se na expressão da energia livre para o material macroscópico viscoelástico, dividida em três termos. Aplicações numéricas foram apresentadas, evidenciando a evolução temporal da taxa de liberação de energia. Verificou-se que aplicando o modelo reológico de Burger à matriz sólida eleva a taxa de liberação de energia a valores assintóticos, os quais podem ser utilizados na formulação de critérios de propagação independentes do tempo. A suposição de que a evolução da propagação ocorre respeitando o balanço entre taxa de liberação de energia e energia crítica permite a determinação de um parâmetro de dano final mínimo, para o qual a estrutura tenderá ao término da propagação. Critérios de propagação específicos em função da orientação do carregamento são formulados em termos de tensões e deformações, retirando o caráter restrito em relação a análises energéticas.

Na quinta seção faz-se uma releitura da formulação viscoelástica linear utilizada até então. Supondo-se válido o princípio da superposição, uma formulação viscoelástica não-linear capaz de lidar com a evolução da variável interna que representa o dano na escala macroscópica foi desenvolvida. Dada a escassez de ensaios experimentais que investiguem o dano microscópico em materiais viscoelásticos, duas formulações similares são elaboradas. A associação entre as formulações não-lineares com um raciocínio análogo a plasticidade permitiu o desenvolvimento de uma lei de evolução das fraturas na escala macroscópica, dando origem a um algoritmo numérico capaz de avaliar o dano (e as demais variáveis relacionadas ao estado do material homogeneizado) em qualquer instante, mesmo durante a evolução do dano.

A sexta seção aborda aplicações numéricas relacionadas a lei de evolução desenvolvida. Nesse capítulo são estudados efeitos decorrentes da história/taxa/orientação/superposição de carregamentos bem como dos modelos e parâmetros dos constituintes sobre a curva de dano e evolução das tensões/deformações viscosas. Assim, verificou-se como se desenvolve a propagação de fraturas em materiais viscoelásticos, evidenciando-se a influência das

componentes viscosas sobre a propagação bem como a necessidade da correta avaliação dos parâmetros dos constituintes.

A última seção refere-se as conclusões alcançadas ao longo de toda esta pesquisa. Destacam-se os procedimentos próprios e objetivos alcançados ao longo deste trabalho. Comentários relativos as perspectivas futuras e sugestões para trabalhos futuros são apresentados, indicando um caminho a ser seguido pelos pesquisadores interessados em dar continuidade a este tema.

2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

A presente seção tem por objetivo revisar de forma sucinta os conceitos que fundamentam esta pesquisa. Neste âmbito, noções básicas de viscoelasticidade, mecânica dos meios fraturados e homogeneização são apresentadas, familiarizando os leitores com conceitos, termos e equações essenciais utilizados durante a elaboração deste trabalho.

2.1. VISCOELASTICIDADE

A teoria da viscoelasticidade é resultado da união entre as teorias da elasticidade e da viscosidade. Desenvolvida sob o intuito de formular o comportamento de materiais sólidos, a teoria da elasticidade determina que deformações, provenientes de carregamentos externos, são armazenadas em forma de energia potencial elástica. Removidos os carregamentos aplicados, a energia potencial elástica é integralmente restituída, fazendo com que o material regresse a sua configuração original. Antagonicamente, a teoria da viscosidade descreve o comportamento de fluidos newtonianos, os quais – sob tensões hidrostáticas – dissipam completamente a energia fornecida pelo carregamento. Nesta teoria, as tensões estão correlacionadas as taxas de deformações, causando deformações permanentes quando removidos as forças atuantes sobre o fluido. Neste aspecto, a teoria da viscoelasticidade reúne ambas as teorias, permitindo a conservação de parte da energia sob a forma potencial elástica bem como a dissipação referente a viscosidade (Christensen, 1982).

Observações experimentais demonstraram que diversos materiais sólidos apresentam componentes de comportamento compatíveis com a teoria da viscosidade. Experimentos conduzidos sobre estruturas poliméricas (piche) identificaram que a relação constitutiva entre carregamentos aplicados e solicitações resultantes é dividida em duas etapas: uma parcela elástica, cujo comportamento se manifesta instantaneamente, e uma parcela viscosa, cujo comportamento remete às solicitações diferidas, interpretadas por meio da evolução das propriedades mecânicas (Marques e Creus, 2012). Desde então, experimentos aplicados a outras classes de materiais têm verificado o comportamento elástico/viscoso inclusive para materiais outrora analisados em uma perspectiva puramente elástica.

Em uma escala de tempo suficientemente curta, características viscosas podem ser pouco relevantes para fundamentar o comportamento mecânico dos materiais. Em uma escala de tempo mais ampla, porém, a variação temporal associada ao comportamento mecânico pode ser fundamental para a caracterização das solicitações desenvolvidas pela estrutura. Neste âmbito, é comum definir erroneamente o comportamento dos materiais como “instantâneo” quando esforços diferidos não se manifestam na escala de tempo humana. Contudo, estruturas submetidas por longos períodos a carregamentos externos gradualmente manifestam esforços diferidos, os quais podem comprometer a integridade estrutural quando não forem previstos.

É importante frisar que a evolução temporal das propriedades mecânicas também pode estar associada ao envelhecimento do material. Em geral, o envelhecimento é relacionado à transformação químico-cristalina, sendo, portanto, observado em intervalos de instabilidade química. Tal designação faz referência aos instantes iniciais da vida de determinados materiais, nos quais as reações químicas decorrentes de sua produção ainda não foram estabilizadas. Observa-se, contudo, que instabilidades químicas também podem ser induzidas por variações térmicas, radioativas ou luminosas, bem como catalisadas pela presença de determinados materiais, causando um envelhecimento tardio do material. Na maioria dos casos, contudo, o envelhecimento dos materiais é limitado, cessando ao atingir a estabilidade química com o decorrer do tempo.

A evolução das propriedades mecânicas em materiais viscoelásticos sem envelhecimento é invariante com relação a idade do material, ocorrendo de forma idêntica em materiais carregados em instantes distintos. Em materiais viscoelásticos com envelhecimento, contudo, a evolução das propriedades mecânicas diverge em função da idade do material, ocorrendo de forma diferente para carregamentos aplicados em diferentes instantes. A Figura 2.1 exhibe a diferença na solicitação (deformação) entre materiais sem envelhecimento e com envelhecimento frente a um carregamento (tensão) constante instantaneamente aplicado em distintos instantes.

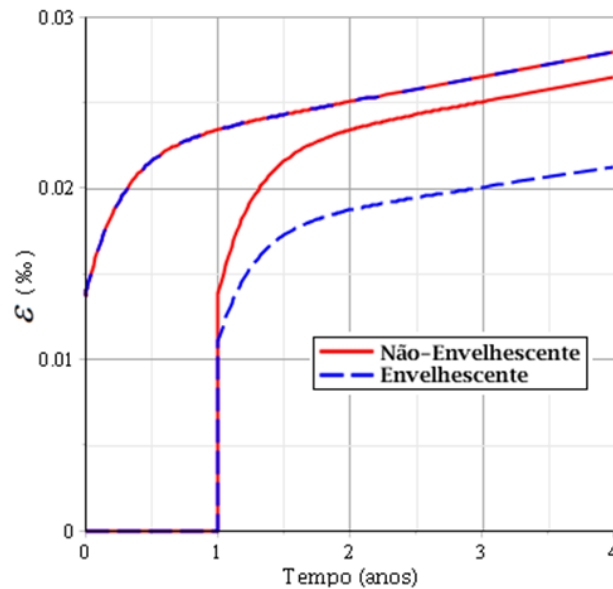


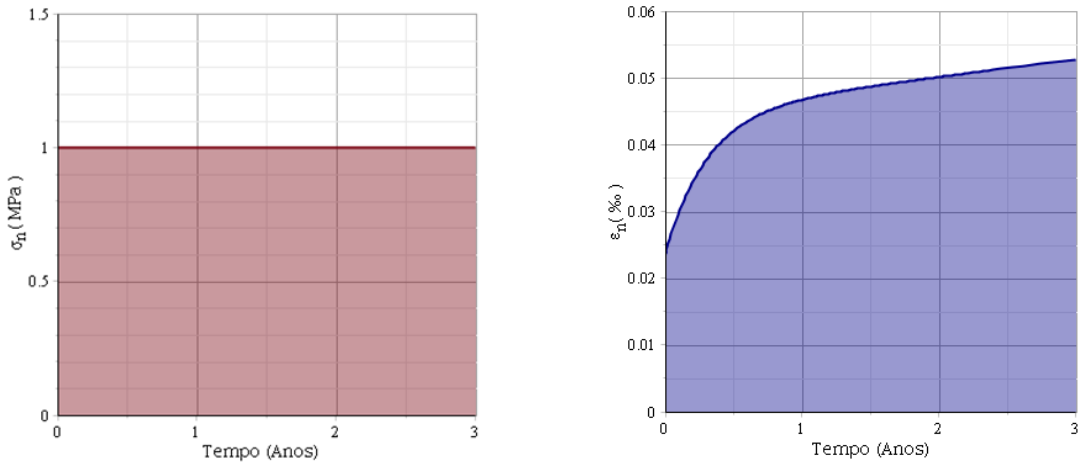
Figura 2.1: Comparação conceitual entre materiais com envelhecimento e sem envelhecimento

2.1.1. Ensaios de Fluência e de Relaxação

A caracterização das propriedades mecânicas dos materiais é tradicionalmente realizada por meio de ensaios específicos. Na elasticidade, por exemplo, ensaios de tração/compressão uniaxiais determinam a rigidez do material através da relação entre tensões e deformações no corpo de prova. Na viscoelasticidade, contudo, esta relação é diretamente dependente do tempo, sendo necessária a manutenção dos carregamentos por períodos mais prolongados para estudar esta evolução. Os ensaios mais usuais para caracterização do comportamento viscoelástico são denominados de ensaios de fluência e ensaios de relaxação, os quais investigam o modo como as tensões e deformações se relacionam com o passar do tempo. A diferença entre os ensaios de fluência e de relaxação referem-se ao tipo de carregamento aplicado (tensão ou deformação) e a solicitação medida (deformação ou tensão), sendo realizados tanto em tração quanto em compressão (Salençon, 2009, Marques e Creus, 2012). A seguir os dois ensaios são explicitados.

O **ensaio de fluência** é caracterizado pela aplicação instantânea de uma tensão uniaxial σ_n sobre o corpo de prova, a qual deve ser mantida constante durante o período de elaboração do ensaio. A finalidade deste ensaio consiste na medição das deformações ε_n no sentido da

tensão aplicada em cada instante de tempo. Espera-se que, sob as condições impostas neste ensaio, materiais viscoelásticos apresentem aumento das deformações em função do tempo, alongando ou encurtando o corpo de prova. A Figura 2.2 exemplifica de forma genérica as tensões e deformações atuantes sobre um corpo de prova viscoelástico durante a elaboração de um ensaio de fluência.



a) Tensões aplicadas

b) Deformações resultantes

Figura 2.2: Ensaio de fluência.

Conhecendo as tensões e deformações atuantes sobre o corpo de prova, determina-se o comportamento mecânico que relaciona estas duas grandezas – denominado função de fluência – por meio da integral hereditária de Riemann-Stieltjes:

$$\epsilon_n(t) = \int_{-\infty}^t F_{mn}(t, \tau) d\sigma_n(\tau) = \int_{-\infty}^t F_{mn}(t, \tau) \frac{\partial \sigma_n(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.1)$$

onde, $F_{mn}(t, \tau)$ é a função de fluência do corpo de prova no sentido normal à aplicação das tensões, com unidade em (Pa^{-1}) . Alternativamente, pode-se utilizar a forma:

$$\epsilon_n(t) = F_{mn}(t, \tau) \circ \sigma_n(\tau) = F_{mn}(t, t) \sigma_n(t) - \int_0^t \frac{\partial F_{mn}(t, \tau)}{\partial \tau} \sigma_n(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

onde o operador \circ define a **Integral de Boltzmann**, sendo utilizado para simplificar o tratamento matemático. Por meio desta expressão, ajusta-se a função de fluência $F_{mn}(t, \tau)$ do material como uma função do tempo. Em geral, $F_{mn}(t, \tau)$ é determinada supondo-se conhecido

o modelo reológico que descreve o comportamento do meio (ver modelos reológicos clássicos em 2.1.3).

O inverso mecânico do ensaio de fluência retrata o **ensaio de relaxação**, caracterizado pela aplicação instantânea de uma deformação uniaxial ε_n sobre o corpo de prova, a qual também deve ser mantida constante durante o período de elaboração do ensaio. O objetivo consiste na medição das tensões σ_n no sentido da deformação causada em cada instante de tempo. Espera-se que, sob as condições impostas neste ensaio, materiais viscoelásticos apresentem redução nas tensões em função do tempo. Observa-se que apenas materiais viscoelásticos com elasticidade instantânea podem ser instantaneamente carregados com deformações, fazendo com que este ensaio não possa ser aplicado a todos os materiais. A Figura 2.3 exemplifica as deformações e tensões atuantes sobre um corpo de prova viscoelástico durante a elaboração de um ensaio de relaxação.

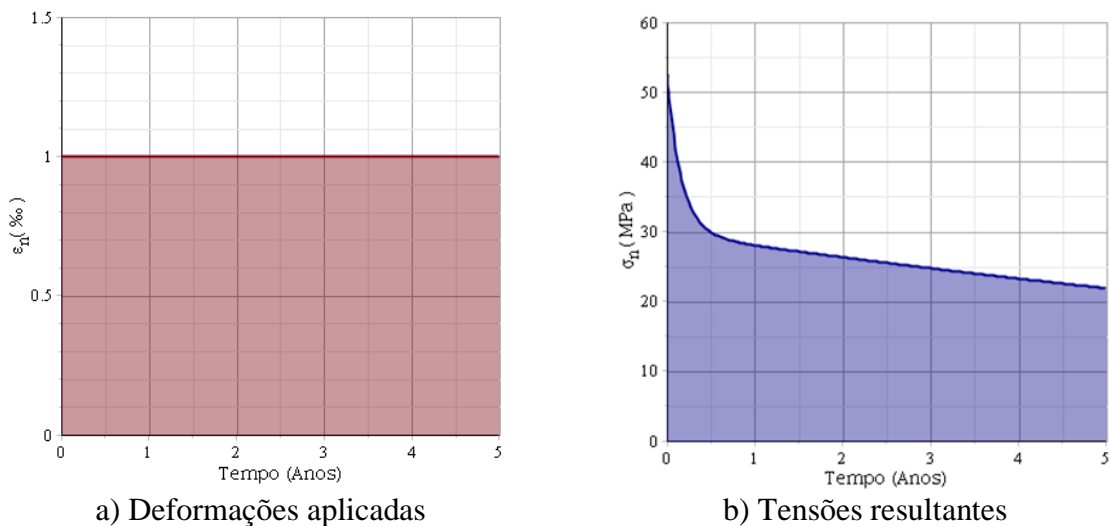


Figura 2.3: Ensaio de relaxação

Novamente, conhecidas as tensões e deformações atuantes sobre o corpo de prova, determina-se o comportamento mecânico do material – agora denominado função de relaxação – por meio da integral hereditária de Riemann-Stieltjes:

$$\sigma_n(t) = \int_{-\infty}^t R_{mn}(t, \tau) d\varepsilon_n(\tau) = \int_{-\infty}^t R_{mn}(t, \tau) \frac{\partial \varepsilon_n(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.3)$$

onde, $R_{mn}(t, \tau)$ é a função de relaxação do corpo de prova no sentido normal à aplicação das tensões, com unidade em (Pa). Alternativamente a esta expressão, pode-se utilizar a integral de Boltzmann descrita por:

$$\sigma_n(t) = R_{mn}(t, \tau) \circ \varepsilon_n(\tau) = R_{mn}(t, t) \varepsilon_n(t) - \int_0^t \frac{\partial R_{mn}(t, \tau)}{\partial \tau} \varepsilon_n(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

As Eq. (2.3) e Eq. (2.4) são utilizadas para ajustar uma função de relaxação $R_{mn}(t, \tau)$ do material como função do tempo. Em geral $R_{mn}(t, \tau)$ é determinada supondo-se conhecido o modelo reológico que descreve o comportamento do meio (ver modelos reológicos clássicos em 2.1.3). A vantagem que o ensaio de relaxação possui sobre o ensaio de fluência recai sobre o tempo característico em relaxação, o qual é menor que o tempo característico em fluência, fazendo com que os ensaios sejam mais rápidos. Simplificadamente, o tempo característico (em fluência ou relaxação) é definido como o tempo necessário para que o material apresente o comportamento típico de materiais viscoelásticos em seu respectivo ensaio (ver mais em Salençon, 2009). As Eq. (2.2) e Eq. (2.4) podem ser adaptadas ao contexto da viscoelasticidade sem envelhecimento como:

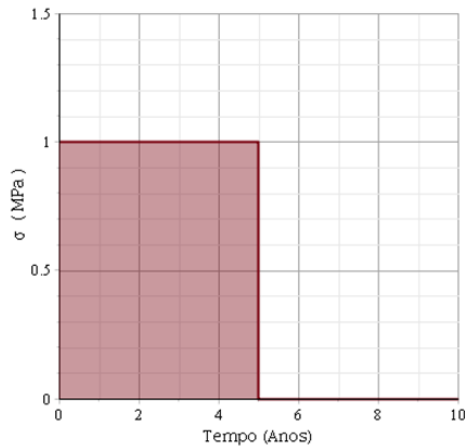
$$\varepsilon_n(t) = F_{mn}(t - \tau) \circ \sigma_n(\tau) = F_{mn}(0) \sigma_n(t) - \int_0^t \frac{\partial F_{mn}(t - \tau)}{\partial \tau} \sigma_n(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

$$\sigma_n(t) = R_{mn}(t - \tau) \circ \varepsilon_n(\tau) = R_{mn}(0) \varepsilon_n(t) - \int_0^t \frac{\partial R_{mn}(t - \tau)}{\partial \tau} \varepsilon_n(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

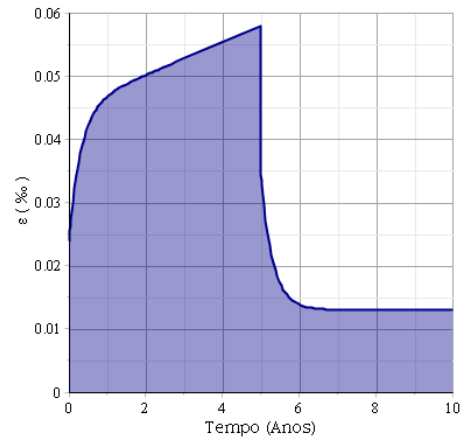
onde $F_{mn}(0) = F_{mn}(t - t)$ e $R_{mn}(0) = R_{mn}(t - t)$ são as funções de fluência e de relaxação instantâneas, avaliadas para materiais sem envelhecimento.

Além dos ensaios tradicionais, ensaios adicionais denominados de **ensaio de remoção do carregamento** podem ser realizados tanto para ensaios de fluência quanto para ensaios de relaxação (Salençon, 2009). Estes ensaios visam distinguir o comportamento viscoelástico de outros comportamentos mecânicos geralmente associados a plasticidade (visco-plasticidade por exemplo). Para o ensaio em fluência, espera-se que, ao remover as tensões aplicadas, a deformação diminua até atingir um valor residual mínimo, este valor residual está associado a dissipação de energia do material devido a viscosidade. No ensaio de relaxação, após a remoção

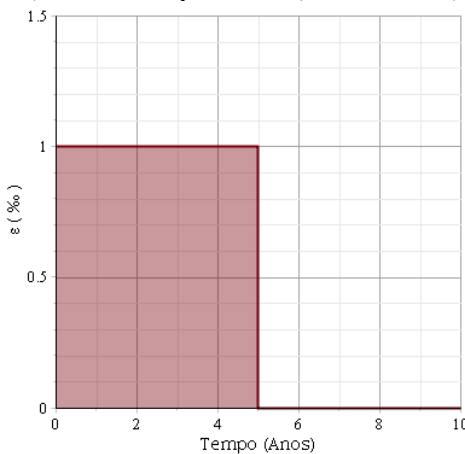
das deformações há inversão de tensões, as quais tendem a se anular com o passar do tempo. A Figura 2.4 a seguir ilustra um ensaio de remoção de carregamentos e suas respectivas solicitações:



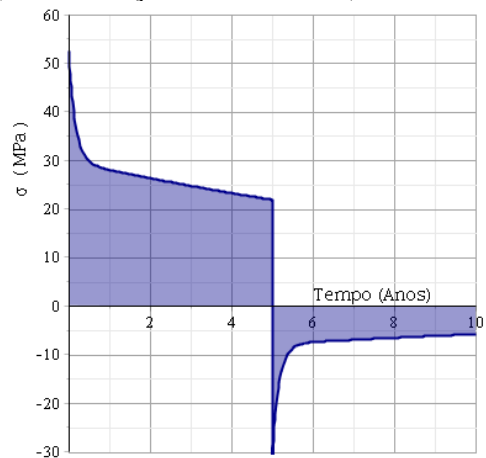
a) Tensões aplicadas (em fluência)



b) Deformações resultantes (em fluência)



c) Deformações aplicadas (em relaxação)



d) Tensões resultantes (em relaxação)

Figura 2.4: Ensaio de remoção do carregamento em fluência/relaxação.

Por fim, diversos materiais viscoelásticos são suscetíveis a elaboração de **ensaios de ruptura a tensão constante** (Figura 2.5). Tal ensaio assemelha-se ao ensaio de fluência, no qual uma tensão constante é aplicada. Levado em conta o aumento crescente das deformações, espera-se que, mantendo o carregamento por um período suficientemente longo, o material romperá por excesso de deformações. Ensaios de ruptura a tensão constante conseguem descrever todos os estágios típicos de fluência do material – tais estágios são denominados de primário, secundário e terciário.

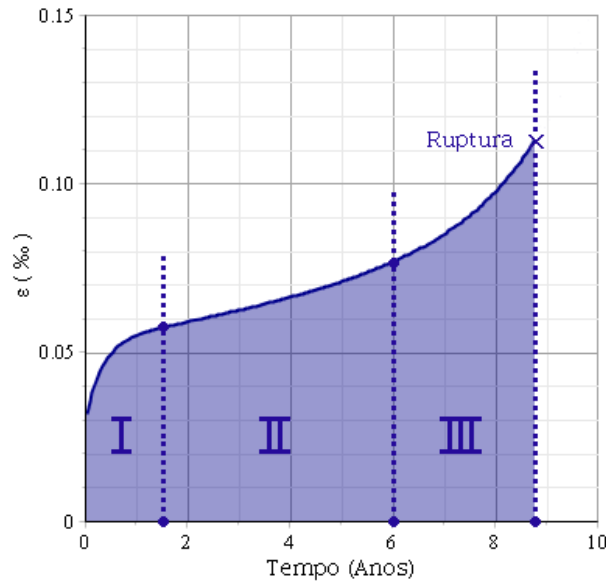


Figura 2.5: Ensaio de ruptura a tensões constantes.

A fluência primária é caracterizada por altas taxas decrescentes de deformação em um mecanismo análogo ao endurecimento da plasticidade. A taxa de deformação decresce a um valor mínimo, dando origem a fluência secundária, onde a taxa de deformação se mantém razoavelmente constante. Por fim, a taxa de deformação volta a crescer devido ao fenômeno do estreitamento da seção transversal ou micro-fissuração interna, culminando na ruptura do material.

2.1.2. Transformada de Carson-Laplace e Princípio da Correspondência

A **transformada de Carson-Laplace** é um operador matemático utilizado para solução de equações diferenciais. O cerne da transformada de Carson-Laplace consiste em modificar o domínio do tempo de uma função $u(t)$ para um domínio operacional no qual a função é descrita por $u^*(p)$:

$$u^*(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(t) e^{-pt} dt = p \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-pt} dt = p \cdot u^{\mathcal{L}}(p) \quad (2.7)$$

onde $u^{\mathcal{L}}(p)$ é variável no espaço de Laplace. Particularmente útil na viscoelasticidade linear, a transformada de Carson-Laplace simplifica a análise viscoelástica escrita em termos de operadores integrais para uma análise elástica equivalente. Aplicando a transformação de Carson-Laplace sobre as expressões integrais destacadas na Eq. (2.5) e Eq. (2.6) pode-se reescrevê-las como:

$$\varepsilon_n^*(p) = F_{mn}^*(p) \sigma_n^*(p) \quad (2.8)$$

$$\sigma_n^*(p) = R_{mn}^*(p) \varepsilon_n^*(p) \quad (2.9)$$

As Eq. (2.8) e Eq. (2.9) são equivalentes às expressões elásticas apresentadas no domínio do tempo, podendo ser resolvidas de forma análoga. Uma vez obtida a solução desejada, basta aplicar a transformada inversa de Carson-Laplace para que a solução seja determinada no domínio do tempo – para diversas configurações, a transformada inversa de Laplace, relacionada a Carson-Laplace pela Eq. (2.7), encontra-se tabelada na literatura. A esta equivalência entre o problema viscoelástico no domínio real do tempo e o problema elástico no espaço operacional de Carson-Laplace dá-se o nome de **princípio da correspondência** (Christensen, 1982). Observa-se, contudo, que a consideração de envelhecimento para material viscoelástico invalida o princípio da correspondência.

2.1.3. Modelos Reológicos Clássicos

Em um âmbito mais geral, a reologia é a ciência que estuda o comportamento mecânico dos materiais. A principal contribuição desta ciência refere-se a caracterização de propriedades mais complexas referentes a materiais plásticos, viscoelásticos e viscoplásticos por meio da descrição de seu comportamento baseado em modelos comportamentais mais simples. Sob este pretexto, modelos reológicos básicos e clássicos na viscoelasticidade são apresentados nesta seção (para mais detalhes ver: Betten, 2004; Salençon, 2009; Marques e Creus, 2012). Nota-se que os modelos aqui apresentados não levam em consideração o envelhecimento dos materiais.

Para que a caracterização dos modelos seja possível, é necessário definir previamente duas funções matemáticas: Função de Heaviside $H(t - t_0)$ e Delta de Dirac $\delta(t - t_0)$.

$$H(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } t = t_0 \\ 1 & \text{se } t > t_0 \end{cases} ; \quad \delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0 - \delta \\ \frac{1}{2\delta} & \text{se } t_0 - \delta < t < t_0 + \delta \\ 0 & \text{se } t > t_0 + \delta \end{cases} \quad (2.10)$$

Para a finalidade descrita neste trabalho, t_0 representa o instante inicial da aplicação do carregamento. Para motivos de simplificação, as formulações seguintes adotam $t_0 = 0$.

O modelo mais simples refere-se ao comportamento elástico, o qual é representado por uma **mola simples** (Figura 2.6.a) e descreve materiais com capacidade de armazenar energia mecânica, possibilitando que a forma do material seja recuperada após o descarregamento. Em contrapartida, o modelo reológico mais simples a descrever o comportamento viscoso refere-se ao **amortecedor simples** (Figura 2.6.b), o qual descreve materiais com capacidade dissipativa onde as tensões aplicadas afetam diretamente a taxa de deformação.

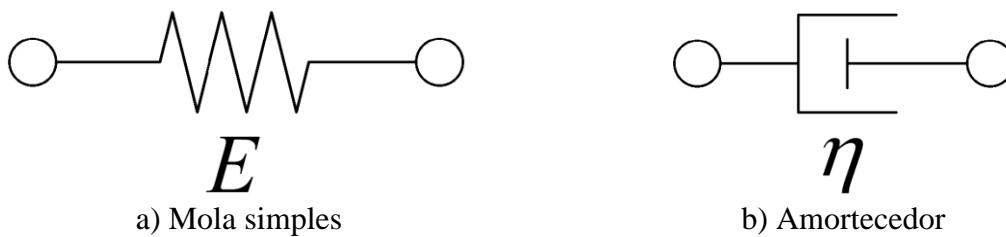


Figura 2.6: Modelos reológicos simples.

A Figura 2.6 exhibe os respectivos elementos em função do módulo de Young e da viscosidade. Estes modelos também podem ser escritos tomando como base outros parâmetros do material, tal como o coeficiente de Poisson ν ou os módulos volumétrico k e de cisalhamento μ bem como as propriedades viscosas recíprocas. Sob esta ótica, os comportamentos mecânicos destes elementos podem ser equacionados através de:

$$\text{Modelo de mola simples: } F_{mn}(t) = \frac{1}{E} H(t) \quad ; \quad R_{mn}(t) = E H(t) \quad (2.11)$$

$$\text{Modelo de amortecedor: } F_{mn}(t) = \frac{t}{\eta} H(t) \quad ; \quad R_{mn}(t) = \eta \delta(t) \quad (2.12)$$

onde E é o módulo de Young do material e η é a viscosidade do meio. Para carregamentos aplicados além do instante inicial em $t = 0$, usa-se $H(t - t_0)$ no lugar de $H(t)$. Aplicando a transformada de Carson-Laplace às Eq. (2.11) Eq. (2.12) obtém-se:

$$\text{Modelo de mola simples: } F_{mn}^*(p) = \frac{1}{E} \quad ; \quad R_{mn}^*(p) = E \quad (2.13)$$

$$\text{Modelo de amortecedor: } F_{mn}^*(p) = \frac{1}{\eta p} \quad ; \quad R_{mn}^*(p) = \eta p \quad (2.14)$$

Observa-se que para ambos os elementos as funções de fluência e de relaxação são matemáticas inversas no domínio de Carson-Laplace. Tal raciocínio permanece válido para os modelos que seguem. As funções de fluência e de relaxação não podem ser consideradas

inversas matemáticas no domínio do tempo, limitando-se ao domínio de Carson-Laplace. A Figura 2.7 compara as funções de fluência e de relaxação destes dois modelos. Observa-se que a função de relaxação do amortecedor é definida por meio de um delta de Dirac, sendo virtualmente nula em qualquer instante de tempo.

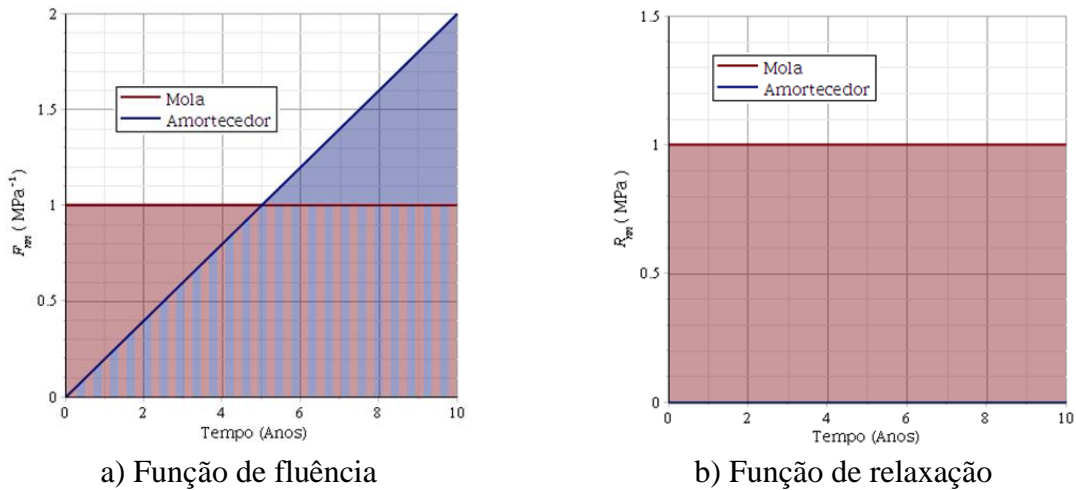


Figura 2.7: Função de fluência/relaxação da mola simples e amortecedor.

Pode-se agrupar os elementos acima apresentados sob o pretexto de formar modelos reológicos mais complexos, os quais descrevem melhor as propriedades de certos materiais. Essencialmente existem duas formas de agrupar os elementos: em série ou em paralelo. Restringindo-se inicialmente aos modelos com dois elementos, pode-se citar o **modelo de Maxwell** (Figura 2.8.a) e o **modelo de Kelvin** (Figura 2.8.b).

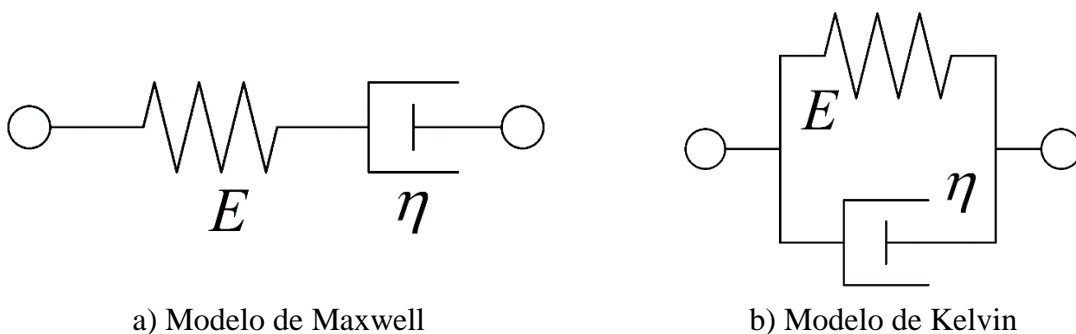


Figura 2.8: Modelo reológicos com dois elementos.

O comportamento mecânico de ambos os modelos pode ser matematicamente escrito por meio de:

$$\text{Modelo de Maxwell: } F_m(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) H(t) \quad ; \quad R_m(t) = E e^{-\frac{E}{\eta}t} H(t) \quad (2.15)$$

$$\text{Modelo de Kelvin: } F_{mn}(t) = \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E} e^{-\frac{E}{\eta}t} \right) H(t) \quad ; \quad R_{mn}(t) = \frac{1}{E} H(t) + \frac{t}{\eta} \delta(t) \quad (2.16)$$

Aplicando a transformada de Carson-Laplace às Eq. (2.15) e Eq. (2.16) obtém-se:

$$\text{Modelo de Maxwell: } F_{mn}^*(p) = \frac{1}{p\eta} + \frac{1}{E} \quad ; \quad R_{mn}^*(p) = \left(\frac{1}{p\eta} + \frac{1}{E} \right)^{-1} \quad (2.17)$$

$$\text{Modelo de Kelvin: } F_{mn}^*(p) = (E + p\eta)^{-1} \quad ; \quad R_{mn}^*(p) = E + p\eta \quad (2.18)$$

Tal como antes, as funções de fluência e de relaxação são inversas matemáticas no domínio de Carson-Laplace. Nota-se nas Eq. (2.17) e Eq. (2.18) um dos princípios utilizados para a elaboração de modelos mais complexos: Quando elementos estão alinhados em série, a fluência no espaço de Carson-Laplace é a soma da fluência de cada segmento no respectivo espaço, ao passo que quando os elementos estão organizados em paralelo, a relaxação equivalente no espaço de Carson-Laplace é a soma das relaxações dos dois segmentos neste mesmo domínio. A Figura 2.9 compara as funções de fluência e de relaxação destes dois modelos.

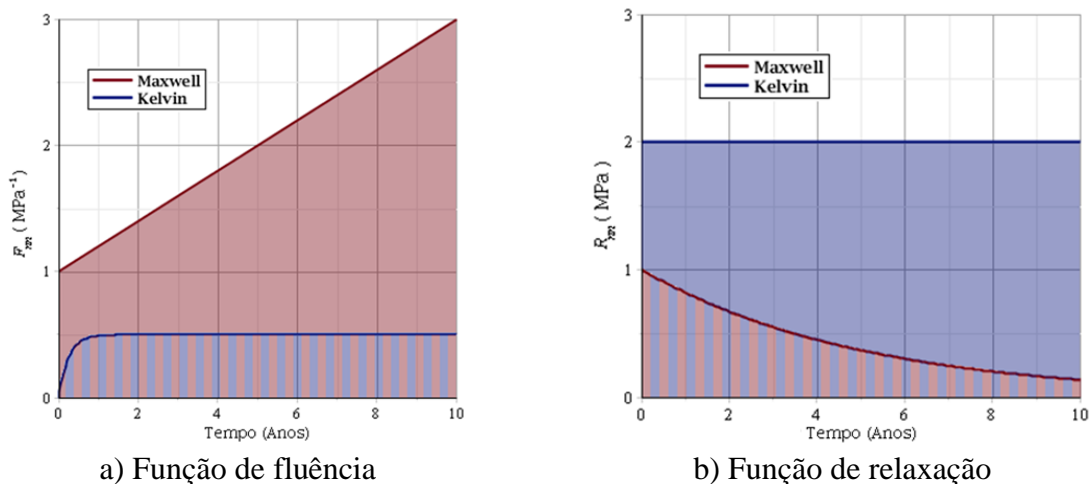


Figura 2.9: Função de Fluência/relaxação para modelos reológicos de dois elementos.

Modelos com maior quantidade de elementos eventualmente são necessários para descrever o comportamento dos materiais. Muitas vezes, entretanto, as funções de fluência ou de relaxação são demasiadamente extensas. Dentre os modelos com maior quantidade de elementos, pode-se citar o modelo standard (Kelvin-Voigt (Figura 2.10.a) ou Zener) com 3 elementos, ou o modelo de Burger (Figura 2.10.b) com 4 elementos, sendo este último uma associação em série dos modelos de Maxwell e Kelvin.

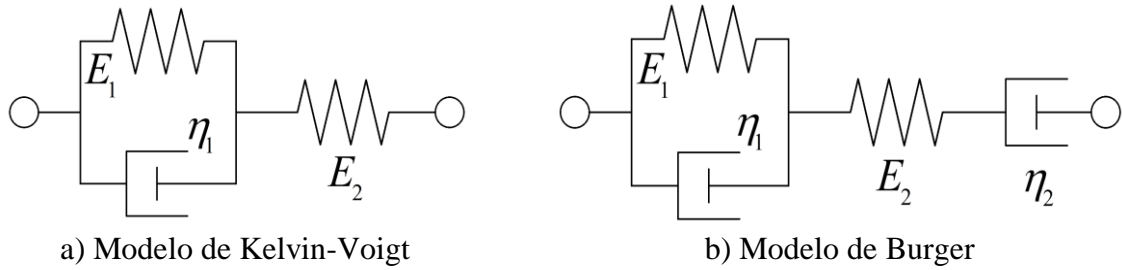


Figura 2.10: Modelos reológicos com maior número de elementos.

O comportamento mecânico de ambos os modelos pode ser matematicamente escrito por meio de:

Modelo de Kelvin-Voigt:

$$F_{mn}(t) = \left[\frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1 t}{\eta_1}} \right) \right] H(t) \quad ; \quad R_{mn}(t) = \frac{E_2^2 e^{-\frac{E_1 + E_2 t}{\eta_1}} + E_1 E_2}{E_1 + E_2} H(t) \quad (2.19)$$

Modelo de Burger:

$$F_{mn}(t) = \left[\frac{1}{E_2} + \frac{t}{\eta_2} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1 t}{\eta_1}} \right) \right] H(t) \quad (2.20)$$

A função de relaxação normal para o modelo de Burger é muito extensa, não havendo necessidade de ser matematicamente representada neste contexto. Aplicando a transformada de Carson-Laplace às Eq. (2.19) e Eq. (2.20) obtém-se:

Modelo de Kelvin-Voigt:

$$F_{mn}^*(p) = \frac{1}{p\eta_2} + \frac{1}{E_1 + p\eta_1} \quad ; \quad R_{mn}^*(p) = \left(\frac{1}{p\eta_2} + \frac{1}{E_1 + p\eta_1} \right)^{-1} \quad (2.21)$$

Modelo de Burger:

$$F_{mn}^*(p) = \frac{1}{E_2} + \frac{1}{p\eta_2} + \frac{1}{E_1 + p\eta_1} \quad ; \quad R_{mn}^*(p) = \left(\frac{1}{E_2} + \frac{1}{p\eta_2} + \frac{1}{E_1 + p\eta_1} \right)^{-1} \quad (2.22)$$

Devido à simplicidade e a boa correlação com o comportamento da maioria dos materiais, estes dois modelos são amplamente utilizados para representar materiais viscoelásticos. A Figura 2.11 compara as funções de fluência e de relaxação destes dois modelos.

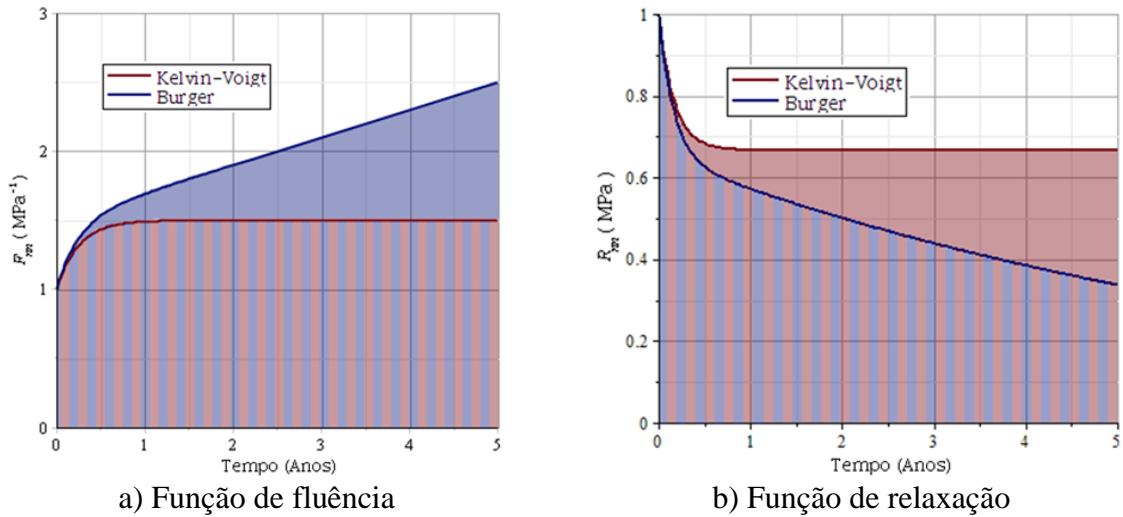


Figura 2.11: Funções de fluência e relaxação para modelos de Kelvin-Voigt e Burger.

Materiais cuja caracterização mecânica demandem um número maior de elementos são, em geral, estudados através do **modelo generalizado de Maxwell** (Figura 2.12.a) ou do **modelo generalizado de Kelvin** (Figura 2.12.b).

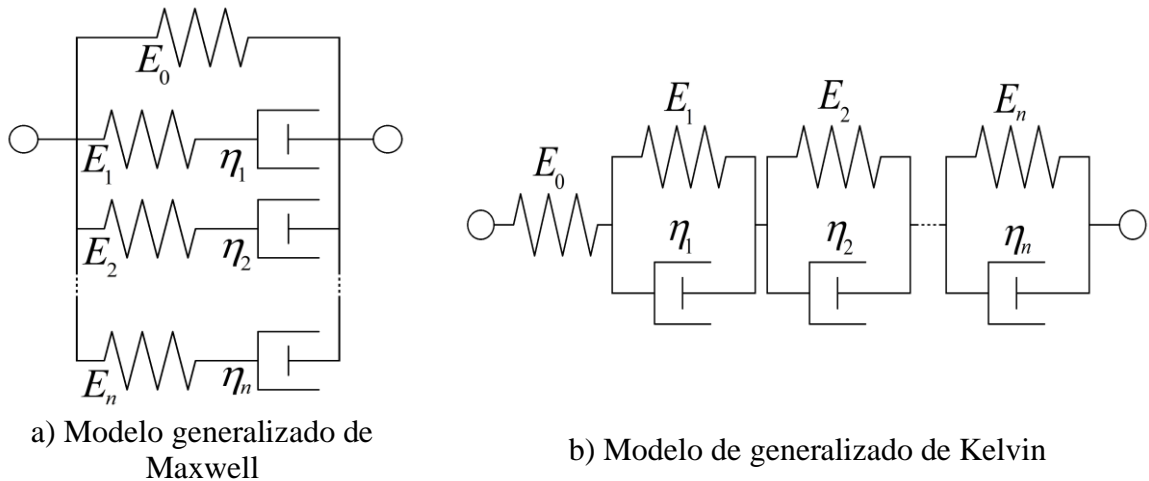


Figura 2.12: Modelos reológicos generalizados

O modelo generalizado de Maxwell, também denominado de modelo de Maxwell-Wiechert, generaliza a função de relaxação através da soma finita em paralelo de diferentes modelos de Maxwell, permitindo que a função de relaxação resultante seja capaz de representar qualquer função de relaxação dado um número suficientemente grande de segmentos. Por outro lado, o modelo generalizado de Kelvin atua sobre a função de fluência, efetuando a soma finita em série de diferentes modelos de Kelvin, tornando a função final apta a representar qualquer função de fluência. Devido às limitações matemáticas, a função de fluência generalizada do modelo de Maxwell e a função de relaxação generalizada do modelo de Kelvin não podem ser representadas no caso geral no domínio do tempo, sendo necessário a transformação inversa de

Carson-Laplace caso a caso. Desta forma, no domínio do tempo, as propriedades mecânicas representadas por estes dois modelos são descritas como:

Modelo generalizado de Maxwell:

$$R_{mn}(t) = \sum_{j=0}^n E_j e^{-\frac{E_j}{\eta_j} t} H(t) \quad (2.23)$$

Modelo generalizado de Kelvin:

$$F_{mn}(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{E_j} \left(1 - e^{-\frac{E_j}{\eta_j} t} \right) H(t) \quad (2.24)$$

A Eq. (2.23) pode ser adaptada para modelos generalizados de Maxwell que apresentam um primeiro segmento com viscosidade nula (tal como retratado na Figura 2.12.a) tomando o limite $\eta_0 \rightarrow \infty$. De forma análoga, o modelo generalizado de Kelvin pode apresentar um primeiro segmento puramente elástico (tal como retratado na Figura 2.12.b), e a Eq. (2.24) deve ser adaptada por meio de $\eta_0 = 0$. As respectivas funções de fluência e relaxação no domínio de Carson-Laplace são representadas por:

Modelo generalizado de Maxwell:

$$F_{mn}^*(p) = \frac{\prod_{j=0}^n [p\eta_j + E_j]}{\sum_{j=0}^n \left[p\eta_j E_j \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n [p\eta_k + E_k] \right]} \quad ; \quad R_{mn}^*(p) = \sum_{j=0}^n \left[\frac{1}{p\eta_j} + \frac{1}{E_j} \right]^{-1} \quad (2.25)$$

Modelo generalizado de Kelvin:

$$F_{mn}^*(p) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{E_j + \eta_j p} \quad ; \quad R_{mn}^*(p) = \frac{\prod_{j=0}^n [E_j + \eta_j p]}{\sum_{j=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n [E_k + \eta_k p]} \quad (2.26)$$

2.1.4. Formulação Tridimensional

Embora os experimentos unidimensionais sejam suficientes para caracterizar respostas de carregamentos uniaxiais, sabe-se por analogia à elasticidade que solicitações puramente normais não condizem, em geral, com a complexidade creditada aos materiais utilizados na engenharia. Por meio dos conhecimentos adquiridos no âmbito elástico, atribui-se a viscoelasticidade efeitos similares as deformações transversais (efeito Poisson) e cisalhantes. Assim como na viscoelasticidade unidimensional, experimentos específicos são desenvolvidos com a intenção de caracterizar as demais propriedades dos materiais (Christensen, 1982; Salençon, 2009; Marques e Creus, 2012; Betten, 2015). Sob a ótica do princípio da correspondência, no espaço de Carson-Laplace todas as constantes envolvidas na caracterização dos materiais viscoelásticos podem ser relacionadas de forma análoga aos coeficientes de Lamé:

$$k^* = \frac{E^*}{3 - 6\nu^*} \quad ; \quad \mu^* = \frac{E^*}{2 + 2\nu^*} \quad ; \quad \lambda^* = \frac{E^* \nu^*}{(1 + \nu^*)(1 - 2\nu^*)} \quad (2.27)$$

Estendendo a análise unidimensional para uma análise tridimensional, as propriedades mecânicas do meio devem ser caracterizadas segundo cada uma das direções. Definindo o tensor de tensões como $\underline{\underline{\sigma}}$ e o tensor de deformações como $\underline{\underline{\varepsilon}}$, o comportamento mecânico passa a ser representado por um tensor de quarta ordem. Chamando o tensor de fluência de \mathbb{F} e o tensor de relaxação de \mathbb{R} , portanto as Eq. (2.2) e Eq. (2.3) são reescritas como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \mathbb{F}(t, \tau) \circ \underline{\underline{\sigma}}(\tau) = \mathbb{F}(t - t) : \underline{\underline{\sigma}}(t) - \int_0^t \frac{\partial \mathbb{F}(t, \tau)}{\partial \tau} : \underline{\underline{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (2.28)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{R}(t, \tau) \circ \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) = \mathbb{R}(t - t) : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) - \int_0^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau)}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (2.29)$$

onde o operador “:” corresponde a contração dupla entre dois tensores de ordem igual ou superior a dois. Analogamente, no âmbito da viscoelasticidade sem envelhecimento, escreve-se:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \mathbb{F}(t) \circ \underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{F}(0) : \underline{\underline{\sigma}}(t) - \int_0^t \frac{\partial \mathbb{F}(t - \tau)}{\partial \tau} : \underline{\underline{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (2.30)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{R}(t) \circ \underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \mathbb{R}(0) : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) - \int_0^t \frac{\partial \mathbb{R}(t-\tau)}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (2.31)$$

A caracterização reológica tridimensional é realizada com auxílio dos modelos unidimensionais aplicados às diferentes direções e/ou propriedades em questão. A análise tridimensional de materiais isotrópicos pode ser realizada ao se definir, por exemplo, os modelos reológicos dos módulos volumétrico k e cisalhamento μ . Para materiais com estas características, os tensores de relaxação e fluência representados no domínio de Carson-Laplace são dados por:

$$\mathbb{R}^* = 3k^* \mathbb{J} + 2\mu^* \mathbb{K} \quad ; \quad \mathbb{F}^* = \frac{1}{3k^*} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu^*} \mathbb{K} \quad (2.32)$$

onde $\mathbb{J} = \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}$ é o tensor de quarta ordem de projeção esférica, $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ é o tensor de quarta ordem de projeção desviadora, $\underline{\underline{1}}$ é o tensor identidade de segunda ordem, \mathbb{I} é o tensor identidade de quarta ordem e o operador “ \otimes ” representa o produto tensorial. Por sua vez, tal como respaldado nas Eq. de (2.11) até Eq. (2.26), no domínio do tempo \mathbb{R} e \mathbb{F} não são inversos matemáticos, por esta razão é comum definir:

$$\begin{aligned} k_R(t) &= \mathcal{L}_c^{-1}(k^*) \quad ; \quad \mu_R(t) = \mathcal{L}_c^{-1}(\mu^*) \\ k_F(t) &= \left[\mathcal{L}_c^{-1}\left(\frac{1}{k^*}\right) \right]^{-1} \quad ; \quad \mu_F(t) = \left[\mathcal{L}_c^{-1}\left(\frac{1}{\mu^*}\right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde $\mathcal{L}_c^{-1}(\cdot)$ é o operador inverso da transformada de Carson-Laplace. \mathbb{R} e \mathbb{F} são, portanto, escritos através de:

$$\mathbb{R}(t) = 3k_R(t) \mathbb{J} + 2\mu_R(t) \mathbb{K} \quad ; \quad \mathbb{F}(t) = \frac{1}{3k_F(t)} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu_F(t)} \mathbb{K} \quad (2.34)$$

Por definição, ao longo deste trabalho utiliza-se a notação simplificada $k(t) = k_R(t)$ e $\mu(t) = \mu_R(t)$ para representar as funções de relaxação dos parâmetros do material. A função de fluência, quando necessária, permanecerá utilizando o sub-índice.

Em uma abordagem mais ampla, pode-se representar o modelo reológico tridimensional baseando-se nos tensores constituintes \mathbb{C} e \mathbb{N} que generalizam, respectivamente, as propriedades elástica E (extensível a k, μ, ν ou λ) e viscosa η (extensível a k^v, μ^v, ν^v ou λ^v). Neste âmbito, o tensor de relaxação do modelo generalizado de Maxwell e o tensor de fluência do modelo generalizado de Kelvin são representados por:

Modelo generalizado de Maxwell:

$$\mathbb{R}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbb{C}_j e^{-\mathbb{N}_j^{-1}:\mathbb{C}_j t} H(t) \Leftrightarrow \mathbb{R}^*(p) = \sum_{j=0}^n \left[\mathbb{C}_j^{-1} + p \mathbb{N}_j^{-1} \right]^{-1} \quad (2.35)$$

Modelo generalizado de Kelvin:

$$\mathbb{F}(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{\mathbb{C}_j} \left(1 - e^{-\mathbb{N}_j^{-1}:\mathbb{C}_j t} \right) H(t) \Leftrightarrow \mathbb{F}^*(p) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{\mathbb{C}_j + \mathbb{N}_j p} \quad (2.36)$$

O tensor de quarta ordem exponencial $e^{\underline{\mathbb{A}}t}$ é definido por:

$$e^{\underline{\mathbb{A}}t} = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underline{\mathbb{A}}^k \quad (2.37)$$

Em um contexto de segunda ordem, onde procedimentos computacionais são desenvolvidos, $e^{\underline{\mathbb{A}}t}$ é calculado por meio de:

$$e^{\underline{\mathbb{A}}t} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbb{I}} \\ \underline{\mathbb{A}} \\ \underline{\mathbb{A}}^2 \\ \vdots \\ \underline{\mathbb{A}}^{n-1} \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \underline{\mathbb{A}}^j \quad ; \quad \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Onde λ_j são os autovalores da matriz $\underline{\mathbb{A}}$.

2.2.MEIOS FRATURADOS

Uma das principais características de materiais utilizados na engenharia – incluindo principalmente geomateriais como rochas, concreto ou pavimentos asfálticos – é a presença de discontinuidades em diferentes escalas e orientações. Frequentemente relacionadas às fraturas, estas discontinuidades correspondem a zonas de pequena espessura ao longo das quais as

propriedades físicas e mecânicas do meio são degradadas. A presença das fraturas corresponde a um ponto de fragilidade no material, cuja contribuição fundamental afeta a estabilidade e segurança de estruturas, reduzindo a rigidez, a resistência e a ductilidade bem como cria canais preferenciais para percolação de fluidos.

Dada a importância das fraturas, esta seção visa estabelecer algumas conexões básicas, fazendo referência à caracterização geométrico-mecânica das fraturas bem como distinguindo as formas de modelagem as quais estes elementos geralmente são tratados na engenharia.

2.2.1. Caracterização das Descontinuidades

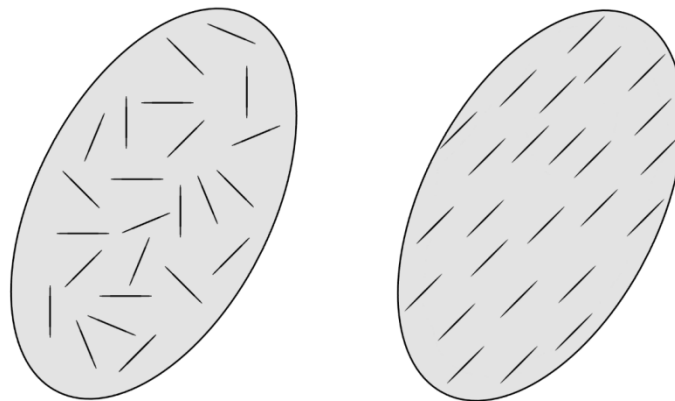
Diversas características físicas e geométricas são utilizadas para a caracterização e classificação das descontinuidades. A seguir são listadas algumas destas características, muitas das quais são essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Existentes tanto em escala cristalina quanto em escala geodésica, a **dimensão** das descontinuidades é talvez a mais notável característica destes elementos. A relação entre o tamanho das descontinuidades e da estrutura estudada permite a aplicação de diferentes abordagens para a modelagem. Enquanto elementos de grandes dimensões, em geral, são analisados individualmente, requerendo o conhecimento tanto das propriedades do material quanto das descontinuidades, descontinuidades de pequenas dimensões podem ser incorporadas ao meio, o que possibilita a determinação das propriedades do meio descontínuo como um todo. Este raciocínio referente a incorporação das descontinuidades é muito similar ao realizado pela teoria da homogeneização, descrita detalhadamente na seção 2.3.

No âmbito geral, o termo “descontinuidade” refere-se a qualquer mudança abrupta nas propriedades dos materiais. Frequentemente relacionadas a vazios – preenchidos ou não – elas podem apresentar diferentes origens mecânicas ou químicas, frequentemente levando a diferentes propriedades físico/mecânicas. Referindo-se exclusivamente à dimensão dos vazios, podem-se realizar três diferentes associações. Quando as descontinuidades apresentam uma dimensão com ordem de grandeza superior às demais dá-se o nome de **descontinuidades cilíndricas**, as quais estão associadas a canais de percolação fluida. Descontinuidades com uma dimensão com ordem de grandeza inferior às demais dá-se o nome de **fraturas** planares, as quais alteram severamente as propriedades mecânicas do meio. Comumente estas

descontinuidades são analisadas associando-as a determinados comportamentos mecânicos específicos, dada a aspereza de suas paredes. Por fim, vazios com três dimensões da mesma ordem de grandeza são denominados de **poros**. Este trabalho restringe o termo descontinuidade às fraturas (planares).

Além da dimensão ou da forma, a **orientação** das fraturas influencia fortemente o comportamento mecânico e hidráulico do meio. A orientação das fraturas é definida através de um “vetor de orientação” unitário, em geral normal a superfície das fraturas, o qual é posicionado sobre um sistema geral de coordenadas. Os ângulos formados entre o vetor de orientação e o sistema de coordenadas geral caracteriza a orientação das fraturas. Quando um grupo de fraturas apresenta a mesma orientação, dá-se o nome de fraturas paralelas (ver Figura 2.13). Quando a orientação das fraturas é aleatoriamente distribuída no meio, dá-se o nome de fraturas isotrópicas (ver Figura 2.13). Outras distribuições de orientação em geral são estudadas considerando diferentes famílias de fraturas. A distribuição de orientação das fraturas pode alterar a nível macroscópico a morfologia do material, levando a comportamentos anisotrópicos.



a) Distribuição isotrópica b) Distribuição paralela

Figura 2.13: Orientação das Fraturas.

Chama-se de **família** os grupos de fraturas que mantêm propriedades similares. Agrupar fraturas em famílias facilita o tratamento matemático e a interpretação das propriedades relativas a cada grupo. Além das propriedades acima citadas, pode-se destacar: abertura, rugosidade, preenchimento, espaçamento, dentre outras características. A **abertura** caracteriza o quão afastadas estão as faces opostas da fratura. Dado que a abertura pode ser tratada como uma descontinuidade de deslocamentos, este parâmetro é utilizado para formular leis de comportamento ao lado da força superficial atuando nestas faces. Em geral, modelos analíticos tendem a tratar matematicamente as fraturas como descontinuidades de espessura nula. Embora

nos modelos comportamentais supõe-se comportamentos simétricos em abertura e fechamento, modelos físicos sugerem limitações quanto ao fechamento, impedindo o fechamento total das fraturas.

A **rugosidade** é caracterizada pelas irregularidades existentes nas paredes das fraturas. Estas irregularidades geram resistência à abertura ou fechamento das fraturas, tendo o papel de rigidez na relação abertura/força que descreve o comportamento mecânico das fraturas. Na geomecânica a rugosidade das fraturas é quantificada através dos índices JRC (*Joint Roughness Coefficient*) e JCS (*Joint Wall Compressive Strength*) (Jaeger et al., 2007). Outro fator que pode gerar resistência a abertura/fechamento é o **preenchimento** das fraturas. Fluxos de fluidos podem depositar minerais no interior das fraturas, preenchendo-as com materiais diferentes daqueles que compõem o meio são. Os materiais que preenchem as fraturas podem ser mais ou menos rígidos, alterando a rigidez equivalente do material como um todo. Além de depósitos sólidos, líquidos no interior das fraturas também alteram o comportamento resultante.

Muitas vezes geomateriais apresentam fraturas equidistribuídas, caracterizadas por um **espaçamento** aproximadamente uniforme. Este espaçamento constante altera uniformemente o comportamento efetivo ao longo de todo o material. Por fim, com base em todas as famílias de fraturas existentes no meio, mensura-se o **grau de fraturamento**, expressando a quantidade de fraturas em relação ao volume do material. Em geral, materiais com maior grau de fraturamento são mais frágeis e mais propensos a ruptura.

2.2.2. *Comportamento Mecânico*

Dada a modelagem por interfaces, o comportamento mecânico das fraturas é definido através da relação entre esforços \underline{T} aplicados sobre a descontinuidade e deslocamentos relativos $\left[\begin{smallmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{smallmatrix} \right]$ representando o salto de deslocamento entre as duas faces da fratura. Ensaios experimentais realizados sobre corpos de prova contendo uma fratura avaliam a relação força/deslocamento segundo as orientações normais e tangenciais, obtendo assim as propriedades mecânicas em compressão e cisalhamento (Goodman, 1976; Bandis et al., 1983). Ensaios em compressão normal medem o fechamento da fratura, em geral avaliado por meio da diferença entre a deformação de um corpo de prova são e de um corpo de prova com uma fratura. Durante esta análise, o deslocamento relativo na direção tangencial à descontinuidade

é negligenciado. A relação obtida é em geral não linear, resultando em uma relação hiperbólica entre tensões normais e o fechamento normal. A derivada desta relação corresponde a rigidez normal k_n da fratura indicada na Figura 2.14:

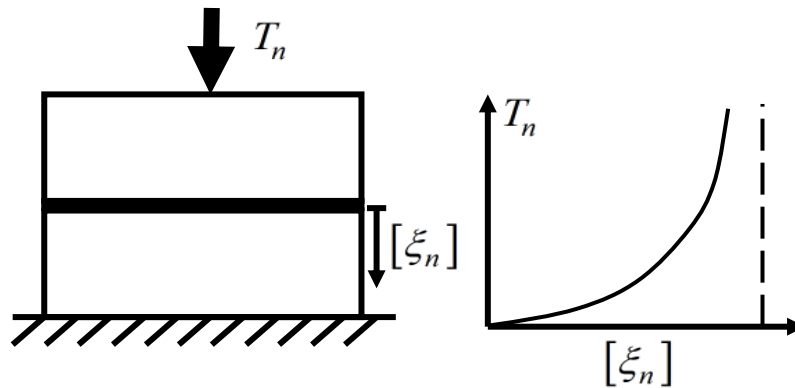


Figura 2.14: Ensaio de compressão em uma fratura.

O comportamento em cisalhamento das fraturas é avaliado por meio da aplicação de uma força tangente à descontinuidade e, como resultado, os deslocamentos cisalhantes são avaliados. Neste ensaio, a rigidez tangente k_t da fratura apresenta um primeiro trecho decrescente, até a tensão de pico, a partir de onde se verifica o deslizamento das faces. Neste ensaio, contudo, o deslocamento relativo normal não pode ser negligenciado, pois para que o deslizamento seja possível ocorre, primeiramente, o afastamento das faces da fratura. A relação entre os deslocamentos normais $[\xi_n]$ e tangenciais $[\xi_t]$ é dada por um ângulo dilatante d , e indicada na Figura 2.15:

$$d = \arctan\left(\frac{d[\xi_n]}{d[\xi_t]}\right) \quad (2.39)$$

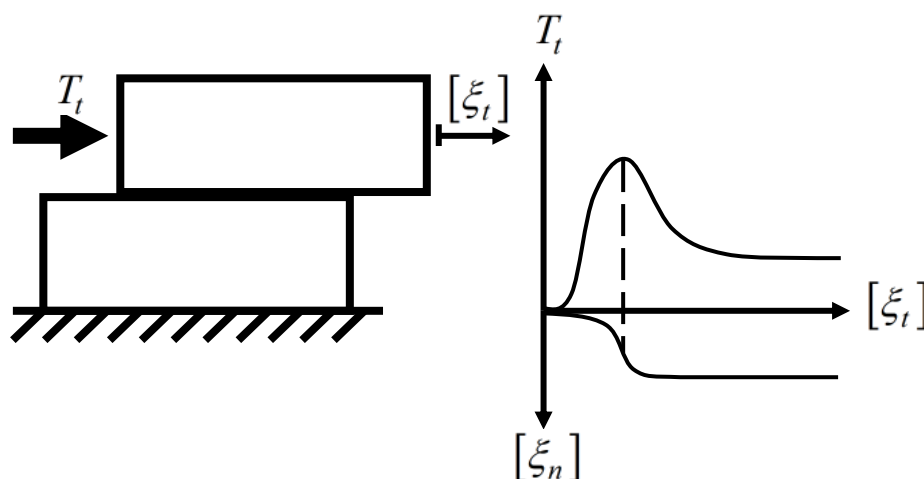


Figura 2.15: Ensaio de cisalhamento em uma fratura.

A forte não linearidade nos comportamentos em compressão e cisalhamento dificulta o tratamento matemático e por esta razão é comum linearizar estas relações, mantendo a validade dos ensaios quando em pequenos deslocamentos. Para as relações linearizadas tanto k_n quanto k_t passam a ser independentes da força aplicada:

$$T_n = k_n \cdot [\xi_n] \quad ; \quad T_t = k_t \cdot [\xi_t] \quad (2.40)$$

Sob uma ótica tridimensional, denominando de $\underline{k} = \underline{k}([\underline{\xi}])$ o parâmetro que assume o papel da rigidez da fratura, a relação entre força e deslocamento é dada por:

$$\underline{T} = \underline{k} \cdot [\underline{\xi}] \quad (2.41)$$

Dados os eixos ortonormais $(\underline{n}, \underline{t}, \underline{t}')$, e supondo que a fratura apresenta o mesmo comportamento segundo ambos os eixos \underline{t} e \underline{t}' tangenciais, \underline{k} é expresso por meio de:

$$\underline{k} = k_n(\underline{n} \otimes \underline{n}) + k_t(\underline{t} \otimes \underline{t} + \underline{t}' \otimes \underline{t}') \quad (2.42)$$

k_n e k_t continuam sendo denominados de rigidezes normal e tangencial.

2.2.3. Modelagem Discreta X Contínua

Dentre as formas de modelagem de descontinuidades, destacam-se principalmente duas abordagens (para mais detalhes, ver Anderson (2005)). Na modelagem **discreta**, quantificam-se as fraturas uma a uma, distinguindo individualmente as geometrias e propriedades mecânicas de todas as descontinuidades. Em função da tecnologia envolvida, é possível mapear todas as fraturas significativas em uma estrutura, permitindo a modelagem da estrutura com todas suas particularidades. A análise discreta permite a obtenção de resultados mais precisos, visto que a geometria do meio fraturado está representada de forma mais fidedigna à realidade. Desta forma, é possível mensurar, por exemplo, a abertura e crescimento de cada fratura existente no material, bem como avaliar as condições necessárias para que cada fratura existente se propague.

Entretanto, estudos analíticos utilizando fraturas discretas tornam-se progressivamente mais complexos à medida que o número de fraturas aumenta, dificultando tanto no tratamento

matemático quanto na interpretação física resultante da interação existente entre fraturas. Mesmo em estudos numéricos, materiais cuja densidade de fraturas é muito elevada demandam de alto poder computacional, tornando as análises progressivamente mais lentas a medida que o número de fraturas aumenta. Em virtude destas razões, análises discretas são mais utilizadas para representar materiais com fratura única ou com um pequeno número de fraturas significativas.

Alternativamente à modelagem discreta, a modelagem **contínua** retira o foco das fraturas, evidenciando o comportamento do material como um todo. Sendo assim, a modelagem contínua visa representar o material incluindo as fraturas no comportamento do meio. Nesta forma de modelagem as fraturas não são mais modeladas individualmente, sendo agrupadas em uma ou mais famílias, as quais são representadas por fraturas padrão. Antagonicamente à modelagem discreta, na modelagem contínua apenas se modela um comportamento esperado do material como um todo, não sendo possível determinar as propriedades individuais de cada fratura.

Em contrapartida, resultados analíticos ou numéricos utilizando modelagem contínua tendem a ser mais simples, o que possibilita a modelagem de materiais com altas densidades de fraturas. Dada esta facilidade, muitas vezes são requeridas menos hipóteses simplificadoras para obtenção dos resultados. Em geral, a modelagem contínua é mais adequada a materiais com grandes números de fraturas, onde a importância do coletivo é maior do que a importância individual de cada fratura.

Modelagens **combinadas** discreta/contínua também podem ser utilizadas. Neste aspecto tenta-se extrair o melhor de cada método. Assim, fraturas significativas ou de grandes dimensões são modeladas individualmente ao passo que famílias de fraturas menores são modeladas de forma contínua. Este método torna-se muito eficiente na análise de maciços geomateriais, onde se observa um restrito número de fraturas de grandes dimensões embebidas na matriz rochosa composta por um grande número de fraturas de pequenas dimensões.

2.2.4. Critério de Propagação de Fraturas

Quando fraturas são submetidas a carregamentos externos, espera-se que elas se propaguem. Dentre os meios de propagação distinguem-se a **nucleação**, responsável pelo aparecimento de novas fraturas no meio, e o **crescimento**, quando fraturas já existentes crescem em dimensão. A maioria dos critérios de propagação avalia apenas o crescimento das fraturas

já existentes no meio, negligenciando a nucleação. Esta abordagem pode ser inadequada quando o material encontra-se intacto, mas apresenta melhores resultados à medida que o número de fraturas aumenta.

Em sua essência, os critérios de propagação são equações matemáticas que formulam condições para as quais as fraturas se propagam. Griffith (1921) formulou o primeiro critério de propagação ao utilizar as leis termodinâmicas para estudar a energia dissipada durante a propagação das fraturas. O critério de propagação de Griffith se mostrou muito compatível com materiais elásticos frágeis (vítreos), deixando os demais materiais na ausência de uma teoria. Esta lacuna possibilitou que diversos outros critérios de propagação fossem estabelecidos, hora voltados a uns, hora voltados a outros materiais (Dugdale, 1960; Irwin, 1961; Bieniawski, 1967). Embora a teoria exposta por Griffith apresente limitações, sua abordagem ainda é fortemente empregada na análise de propagação de fraturas, servindo de base para o desenvolvimento de novos critérios de propagação.

Fundamentando-se sobre o critério estabelecido por Griffith, pode-se escrever a dissipação de energia Φ como:

$$\Phi = -\frac{\partial \psi}{\partial s} \dot{s} \quad (2.43)$$

onde s é a área superficial relativa as faces da fratura e ψ é a energia elástica do material. Dado que a dissipação de energia Φ e a variação da área superficial da fratura \dot{s} devem ser não-negativas, percebe-se que a grandeza $\partial \psi / \partial s$ assume o papel de força termodinâmica responsável pela propagação. Esta grandeza passa então a ser denominada de taxa de liberação de energia \mathcal{F} .

Neste aspecto, o critério de propagação de energia é estabelecido comparando-se a taxa de liberação de energia \mathcal{F} com uma energia crítica \mathcal{F}_c avaliada por testes de laboratório para cada material. Baseado nestes argumentos, o critério de propagação de fraturas para fraturas discretas é formulado por:

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_c \leq 0 \quad ; \quad \dot{s} \geq 0 \quad ; \quad (\mathcal{F} - \mathcal{F}_c) \dot{s} = 0 \quad (2.44)$$

Em essência, se $\mathcal{F} < \mathcal{F}_c$, não existe propagação de fraturas. Por outro lado, se $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ a energia disponível ao material alcançou o limite para propagação, permitindo que as fraturas se propaguem.

Embora este critério tenha sido desenvolvido para fraturas únicas, facilmente se estende para o contexto de fraturas contínuas. Neste aspecto, o critério de propagação é descrito por:

$$\Phi = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} \quad ; \quad \mathcal{F} - \mathcal{F}_v(\varepsilon) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad ; \quad (\mathcal{F} - \mathcal{F}_v(\varepsilon)) \dot{\varepsilon} = 0 \quad (2.45)$$

onde ε é um parâmetro que representa as fraturas em uma análise contínua. Observa-se, contudo, que $\mathcal{F}_v(\varepsilon)$ é função das fraturas, não sendo mais propriedade intrínseca dos materiais. Definindo o parâmetro de densidade de fraturas de Budiansky e O'Connell (1976) $\varepsilon = \mathcal{N} a^3$ com \mathcal{N} sendo a quantidade de fraturas dentro do volume estudado, Dormieux e Kondo (2016) demonstram que é possível relacionar $\mathcal{F}_v(\varepsilon)$ com \mathcal{F}_c por meio de:

$$\mathcal{F}_v = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\mathcal{N}}{\varepsilon} \right)^{1/3} \mathcal{F}_c \quad (2.46)$$

O presente desenvolvimento restringe-se a mecânica da fratura linear elástica. Mais à frente este desenvolvimento é estendido para o contexto da viscoelasticidade, o qual descreve o presente trabalho.

2.2.5. Mecânica da Fratura Viscoelástica

As correções de Irwin possibilitaram a aplicação da mecânica das fraturas a metais e materiais mais dúcteis, entretanto, materiais com comportamento viscoelástico, tais como geomateriais e polímeros, continuaram a não se enquadrar na teoria apresentada. Diferentemente do que ocorre na elasticidade ou na plasticidade, na viscoelasticidade as fraturas não necessariamente se propagam instantaneamente ao atingir uma condição aparentemente crítica de propagação, fazendo com que o conceito velocidade de propagação adquira importância. Diversos estudos foram realizados a fim de formular uma teoria para a mecânica da fratura válida para materiais viscoelásticos, dentre eles pode-se citar: Williams (1967), Knauss e Dietmann (1970), Wnuk e Knauss (1970), Schapery (1975a, 1984), Nikitin (1984), Cabone e Persson (2005), entre outros. A presente seção tem como objetivo apresentar alguns

dos conceitos formulados voltados a fenomenologia de fraturas presentes em materiais viscoelásticos.

Primeiramente é necessário compreender que a propagação em materiais viscoelásticos se dá de forma diferente da propagação puramente elástica. A primeira diferença consiste no intervalo entre o instante em que se aplica o carregamento e o início da propagação do dano. Em materiais elásticos, quando se atinge o carregamento crítico, instantaneamente a fratura inicia sua propagação, rompendo o material a uma velocidade similar a velocidade do som no interior deste material. O estudo da velocidade de propagação em materiais elásticos, entretanto, apresenta pouca relevância prática, uma vez que a propagação instável condiciona ao rápido colapso estrutural, ficando dependente do valor desenvolvido pela relação $\dot{\mathcal{F}} - \dot{\mathcal{F}}_c$. Nestas situações, portanto, interessa-se apenas em prever o início da propagação. (Knauss e Dietmann, 1970).

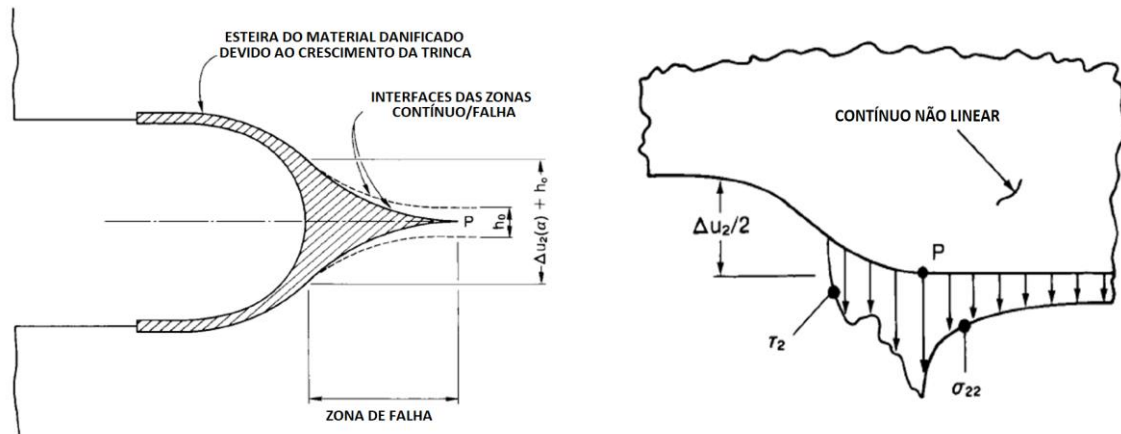
Em materiais viscoelásticos, contudo, ambos os processos são significativamente importantes. Enquanto a condição de propagação direciona sua importância às condições geométricas iniciais e ao instante em que a fratura se propagará, a velocidade de propagação define a manutenção da propagação e o estado final da fratura. Decorre que em materiais viscoelásticos a velocidade de propagação pode variar desde velocidades extremamente altas, similar as que ocorrem em materiais elásticos, a velocidades tão lentas que seria sensato julgar que o dano está estacionário (Knauss e Dietmann, 1970). Estas características permitem estimar o tempo de vida útil de uma estrutura baseando-se na velocidade de propagação de suas fraturas.

Com a finalidade de mensurar esta e outras características do dano em meios viscoelásticos, diversos autores sugeriram modelos matemáticos para a determinação da condição de propagação, tempo de iniciação e velocidade de propagação de trincas. De certa forma pode-se distinguir as abordagens em 3 casos: a) abordagens energéticas similares ao modelo de Griffith (Williams (1967), Knauss e Dietmann (1970), Sih e Macdonald (1974), Nikitin (1984), Bukharin e Nikitin (1991), Nguyen e Dormieux(2014)); b) abordagens baseadas em forças coesivas, semelhante aos modelos de Barrenblat (1962) e Dugdale (1960) (Schapery (1975a, 1975b, 1975c, 1984), Masuero e Creus (1993), Gamby e Delauné, 1997; Dubois et al. (1999)); c) abordagens termo-viscoelásticas, onde a dissipação viscoelástica na ponta da

trinca se dá em forma de calor, alterando as propriedades do material nesta região (Carbone e Persson (2005), Persson e Brener (2005), D'Amico et al. (2013)).

A primeira abordagem consiste na extensão da formulação baseada nas leis da termodinâmica ao contexto de materiais viscoelásticos. Desta forma, a condição de propagação é escrita de forma muito similar a aquela apresentada na elasticidade. Conhecidas a condição de propagação e uma lei de evolução do dano, o tempo necessário até o início da propagação bem como o estado final da estrutura podem ser avaliados. Dada a simplicidade operacional desta abordagem, pode-se facilmente estendê-la ao contexto de fraturas contínuas por meio da teoria da homogeneização. Na viscoelasticidade, tradicionalmente estas abordagens levam em consideração apenas um parâmetro para propagação (mecânica da fratura de único parâmetro), podendo conter mais parâmetros de análise em virtude de observações experimentais diretas. Neste contexto, contudo, análises que buscam maior precisão tendem a focar nas demais abordagens.

A segunda abordagem é um pouco mais complexa pois, a consideração de forças coesivas se dá através de uma zona de falha (ver Figura 2.16.a), onde ocorre a degradação (formação de cavidades, fibrilamento, quebra da microestrutura) e eventual falha do material. A maior dificuldade desta abordagem encontra-se na forte não linearidade envolvida nestes processos. Após esta zona de falha, presume-se que o material se situa em uma zona linear viscoelástica, onde a abordagem similar à de Griffith é válida (ver Figura 2.16.b) (Schapery, 1975a). Masuero e Creus (1993) expõem que resultados experimentais sob carregamentos constantes demonstram que o dano em meios viscoelástico se propaga em níveis substancialmente abaixo do esperado para materiais elásticos. O motivo para tal é, a princípio, a zona de falha. Dubois et al. (1999) explicam que o tamanho da zona de falha é proporcional ao nível de tensões, entretanto, não é possível determinar seu tamanho exato. Schapery (1984) demonstrou (estendendo o conceito da integral J) que não é necessário determinar o tamanho da zona de falha para estudar a condição de propagação e o tempo de iniciação. Por fim, Dubois et al. (1999) observam que a velocidade com que a propagação vai ocorrer pode variar ao longo do processo, passando de velocidades extremamente lentas a velocidades extremamente altas.



a) Representação da região à frente da ponta da fratura viscoelástica (Schapery, 1984) b) Distribuição não linear das tensões na zona de falha (Schapery, 1984)

Figura 2.16: Representação da zona de falha de fraturas viscoelásticas.

A terceira abordagem aproveita resultados experimentais que mostraram que a energia de superfície depende da temperatura e da velocidade de propagação. Carbone e Persson (2005) sugeriram que a dissipação viscoelástica na ponta da trinca induz um gradiente de temperaturas, o qual depende da velocidade de propagação, influenciando as propriedades viscoelásticas do material. Segundo Carbone e Persson, a variação na energia crítica segundo a temperatura, é descrita pela função de Williams-Landel-Ferry (1955), evidenciando que os efeitos da temperatura são de natureza viscoelástica. A correlação entre velocidade de propagação e produção de calor na ponta da trinca foi estabelecida por D'Amico et al. (2013), os quais verificaram um aumento linear na temperatura na ponta de trincas com baixa velocidade de propagação.

Devido a mudança nas propriedades reológicas produzidas pela variação da temperatura, os autores diferenciaram 3 tipos de propagação: a) 'low-speed cracks'; b) 'high speed hot-cracks'; c) 'high speed cold-cracks'. No primeiro caso, as velocidades não induzem variações de temperatura, mantendo as propriedades viscoelásticas inalteradas. No segundo caso, a velocidade induz altas temperaturas, alterando as propriedades do meio, e no terceiro caso a alta velocidade não é capaz de induzir altas temperaturas. Entre estes casos, entretanto, surgem casos transientes. O modelo baseado na dissipação viscoelástica em forma térmica, entretanto, complementa o modelo anterior, considerando duas contribuições para a dissipação de energia, a primeira associada a zona de falha e a segunda associada a dissipação viscoelástica em forma de calor, a qual ocorre mais significativamente na ponta da trinca.

Ensaio experimentais sobre materiais viscoelásticos fraturados (ver, por exemplo Knauss e Dietmann (1970), Braham (2008), Aragao (2011) ou Im (2012), por exemplo) indicam que a energia de fratura depende fundamentalmente da velocidade de carregamento e da temperatura do material, a partir de onde a formulação prática se enquadra no âmbito da mecânica da fratura de múltiplos parâmetros. No presente trabalho, contudo, as evoluções são tratadas como isotérmicas e a taxa de carregamento é naturalmente levada em consideração pela técnica desenvolvida. Por fim, embora as abordagens voltadas a análise da zona de falha representem melhor os fenômenos que ocorrem no material, a extensão destas técnicas a modelos contendo mais de uma fratura carece de resultados, impedindo que sejam utilizadas para os materiais em questão neste trabalho. Assim, justifica-se a utilização de princípios energéticos para o estudo da propagação de fraturas ao longo deste trabalho.

2.3.HOMOGENEIZAÇÃO

Durante a etapa de caracterização das propriedades mecânica dos materiais, é comum supor a homogeneidade do corpo de prova em análise, admitindo-se que todo o corpo de prova é composto por um único material, indistinguível em qualquer escala. Decorre que a maioria dos materiais naturais ou industrialmente produzidos contém impurezas ou heterogeneidades provenientes de falhas ou intrínsecas aos materiais em questão. Tais heterogeneidades correspondem a presença de outros materiais (incluindo aqui poros e fraturas) ou a alterações na estrutura cristalina do material. Neste aspecto, quando a dimensão das heterogeneidades é maior do que o limiar da visão humana, pode-se constatar a existência da outra fase por meio de inspeção visual, caso contrário pode ser necessário recorrer à microscopia.

A premissa de homogeneidade dos materiais é inevitável, visto que o objetivo da caracterização mecânica se refere ao comportamento equivalente do material que compõem a estrutura. Desta forma, ensaios sobre o material heterogêneo fornecem uma resposta equivalente, sob influência das heterogeneidades no comportamento final do material. Neste aspecto, a caracterização mecânica das fases torna-se desnecessária. Um exemplo clássico referente a este problema remete ao concreto. Em uma análise visual verifica-se a existência dos agregados graúdos e da nata cimentícia. Entretanto, quando ensaios de caracterização mecânica do concreto são realizados, o comportamento obtido refere-se ao meio equivalente (concreto) e não às fases (agregados ou nata cimentícia).

Ensaio de caracterização mecânica fornecem o comportamento do material com distribuições volumétricas e espaciais das fases prefixadas. Esta abordagem é adequada a caracterização de materiais concretos (reais), sendo ineficiente durante a etapa de otimização das propriedades mecânicas, onde o volume das fases é indefinido, ou em materiais cujo volume das fases varia ao longo do tempo. Nestas abordagens, o conhecimento das propriedades mecânicas das fases associado a ferramentas que permitam a determinação mecânica das propriedades equivalentes do material como um todo mostram-se mais eficientes. A ferramenta em questão denomina-se **teoria da homogeneização**, sendo melhor descrita nas subseções seguintes.

2.3.1. Teoria da Homogeneização

Conceitualmente a **teoria da homogeneização** consiste em um conjunto de ferramentas matemáticas voltadas a determinação das propriedades de um material heterogêneo tendo por base o conhecimento das propriedades das fases que constituem o material. Sendo assim, a homogeneização consiste em transformar o material heterogêneo em um material homogêneo equivalente, facilitando o tratamento matemático do problema (Dormieux e Ulm, 2005; Dormieux et al., 2006). A Figura 2.17 ajuda a compreender o tratamento realizado sobre um determinado volume que constitui o material. Esta substituição do material heterogêneo por um material homogêneo é estendida ao comportamento mecânico, visto que as heterogeneidades provocam não-uniformidades locais nos campos de tensão/deformação, as quais o material homogêneo equivalente não apresenta. Do ponto de vista morfológico, a isotropia material das fases não é necessariamente estendida ao meio homogêneo, dependendo fortemente da distribuição volumétrica das fases. Exemplos clássicos deste comportamento são observados em materiais compostos por fibras unidirecionalmente posicionadas, provocando um comportamento mecânico ortótropo no meio homogêneo equivalente.

Neste contexto, supõem-se a existência de duas escalas materiais: A escala local (também denominada de **escala microscópica**) na qual o material é heterogêneo com fases distinguíveis entre si, e a escala global (também denominada de **escala macroscópica**) na qual o material é substituído por um meio homogêneo equivalente. Embora a divisão entre escalas locais e globais sugira a existência de apenas duas escalas, em uma escala ainda menor do que as heterogeneidades, cada uma das fases pode ser composta por mais heterogeneidades. Como

exemplo utiliza-se o concreto, na escala da visão humana distinguem-se os agregados graúdos e a nata cimentícia. Contudo, observando a nata cimentícia em uma escala menor, é possível distinguir entre cimento e areia.

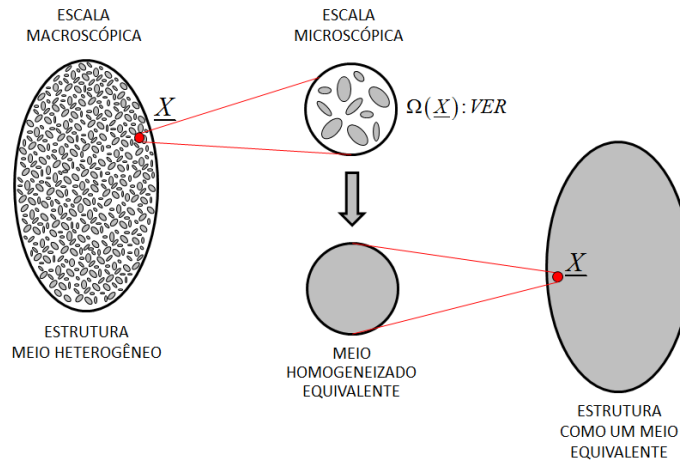


Figura 2.17: Descrição simplificada da homogeneização de materiais.

Para que a teoria de homogeneização seja corretamente aplicada, a substituição do material heterogêneo pelo material homogêneo equivalente deve-se manter válida a nível estrutural, de forma que os campos locais não afetem o comportamento da estrutura a nível macroscópico. Além disso, ambos os modelos (microscópico e macroscópico) devem apresentar resultados médios idênticos. Para tanto, o primeiro passo consiste em determinar um volume que mantém a representatividade de todas as características do material, tal volume é denominado **Célula Base (CB)**, quando a distribuição das heterogeneidades ocorre de forma periódica ao longo de toda a estrutura, ou de **volume elementar representativo (VER)**, nas demais situações, demandando um tratamento estatístico do material. Para que os campos locais não afetem o comportamento macroscópico da estrutura, é necessário que o tamanho \mathbf{l} do VER (ou CB) seja muito pequeno quando comparado ao tamanho \mathbf{L} da estrutura. A segunda premissa (equiparidade entre soluções) passa a depender do volume adotado para representar o meio. Esta premissa é automaticamente satisfeita quando as heterogeneidades são **periodicamente distribuídas**. Por outro lado, quando as heterogeneidades são **aleatoriamente distribuídas** e não há como definir um VER que se repete de forma idêntica em todos os pontos da estrutura, esta condição torna-se substancial dado a necessidade de um tratamento estatístico. A consequência direta desta abordagem condiz com a limitação imposta ao tamanho \mathbf{d} das heterogeneidades, as quais devem ser muito menores do que o tamanho característico \mathbf{l} do VER.

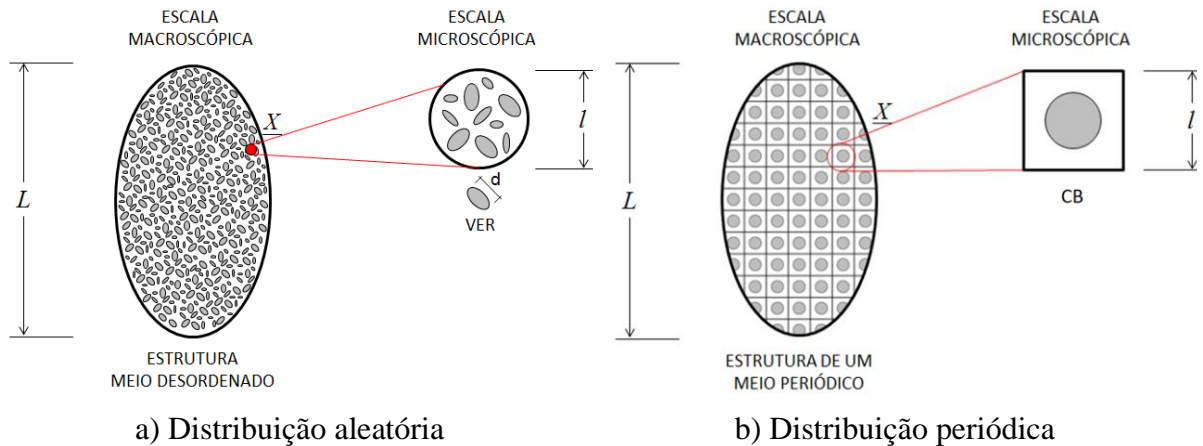


Figura 2.18: Caracterização do VER e da CB.

Nota-se que, em geral, fraturas distribuem-se de forma aleatória no meio e, por esta razão, a abordagem estatística baseada no VER é utilizada no decorrer deste trabalho.

2.3.2. Regra das Médias

Quando se faz referência a solução de um problema mecânico, interessa-se em caracterizar os campos de tensões e deformações desenvolvidos pela estrutura. Neste aspecto, a condição de equiparidade das soluções demanda que os campos de tensões e de deformações na microescala e na macroescala sejam na média iguais. Do ponto de vista da teoria da homogeneização, esta condição fornece uma relação entre escalas, conectando tensões (ou deformações) microscópicas com as macroscópicas (Dormieux et al. 2006). Do ponto de vista físico, contudo, é indiferente obter esta relação para todo volume da estrutura ou simplesmente para o VER. Define-se o operador média $\langle \bullet \rangle$ atuando sobre uma quantidade física Q definida no volume representativo $\Omega(\underline{x})$ por meio de:

$$\langle Q \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Q(\underline{x}) dV \quad (2.47)$$

onde \underline{x} é o vetor posição. Na notação que segue define-se $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega}$ para as tensões macroscópicas e $\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega}$ para as deformações macroscópicas.

2.3.3. Condições de Contorno

A relação entre médias fornecida na Eq. (2.47) não permite uma definição única do problema. Para tanto, torna-se necessário definir as condições de contorno aplicadas sobre o VER. Independentemente da condição de contorno apresentada, a solução deve levar a respostas médias iguais, tornando-se interessante adotar condições de contorno matematicamente mais simples. Classicamente adotam-se duas condições de contorno: tensão homogênea aplicada em todo o contorno OU deformação homogênea aplicada em todo o contorno.

A **condição de tensão homogênea** implica na aplicação de uma tensão macroscópica $\underline{\underline{\Sigma}}$ constante aplicada em toda a fronteira do VER. Mantidas as condições que levam as tensões microscópicas $\underline{\underline{\sigma}}$ a ser estaticamente admissíveis e os deslocamentos $\underline{\underline{\xi}}$ a ser cinematicamente admissíveis, o problema de localização mecânico é definido pelo seguinte conjunto de expressões:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) & \text{sobre } \Omega \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0 & \text{sobre } \Omega \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = (\nabla \underline{\underline{\xi}} + \nabla^t \underline{\underline{\xi}}) / 2 & \text{sobre } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) & \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.48)$$

onde \mathbb{S} é o tensor de flexibilidade na escala microscópica de cada ponto do VER, $\underline{\underline{\xi}}$ são os deslocamentos de cada ponto \underline{x} e \underline{n} é o vetor normal à superfície.

Do ponto de vista da micromecânica, na análise do meio homogeneizado, a aplicação de uma tensão macroscópica $\underline{\underline{\Sigma}}$ constante em todo contorno leva a uma resposta média em tensões $\underline{\underline{\Sigma}}$ idênticas ao longo de todo o volume em análise, independentemente da posição \underline{x} . Portanto, matematicamente é possível escrever as tensões microscópicas como um produto entre as tensões macroscópicas e um tensor de mapeamento dependente da posição (Lemaitre e Chaboche, 1990; Dormieux e Ulm, 2005; Dormieux et al. 2006; Dormieux e Kondo, 2016):

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.49)$$

Fisicamente o tensor de quarta ordem $\mathbb{B}(\underline{x})$ consiste na relação entre o campo de tensões microscópicas $\underline{\underline{\sigma}}$ com as tensões macroscópicas $\underline{\underline{\Sigma}}$ e é denominado de **tensor de localização**

das tensões. Visto que a média entre as soluções macro e micro devem ser as mesmas, escreve-se:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{B}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad \text{contudo} \quad \langle \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.50)$$

Desta relação extrai-se que a média do tensor de localização das tensões deve ser unitária:

$$\langle \mathbb{B}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \mathbb{I} \quad (2.51)$$

Aplicando a Eq. (2.49) sobre a Eq. (2.48) e aplicando o operador média, formula-se:

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{S}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{S}(\underline{x}) : \mathbb{B}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.52)$$

A Eq. (2.52) descreve a lei de comportamento mecânica na escala macroscópica para condições de contorno definidas em tensões, de forma que o tensor $\langle \mathbb{S}(\underline{x}) : \mathbb{B}(\underline{x}) \rangle_{\Omega}$ representa o tensor de flexibilidade equivalente do material homogeneizado. Simplificadamente escreve-se:

$$\underline{\underline{E}} = \mathbb{S}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad \text{com} \quad \mathbb{S}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{S}(\underline{x}) : \mathbb{B}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} \quad (2.53)$$

Por outro lado, a **condição de deformação homogênea** implica na aplicação de uma deformação macroscópica $\underline{\underline{E}}$ constante aplicada em toda a fronteira do VER. Mantidas as condições que levam as tensões microscópicas $\underline{\underline{\sigma}}$ a serem estaticamente admissíveis e os deslocamentos microscópicos $\underline{\underline{\xi}}$ a serem cinematicamente admissíveis, o problema de localização elástico é definido pelo seguinte conjunto de expressões:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) & \text{sobre } \Omega \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0 & \text{sobre } \Omega \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = (\nabla \underline{\underline{\xi}} + \nabla^t \underline{\underline{\xi}}) / 2 & \text{sobre } \Omega \\ \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.54)$$

Assim como no caso anterior, analisando o meio homogêneo equivalente, a aplicação de uma deformação macroscópica $\underline{\underline{E}}$ constante no contorno do VER leva a uma deformação média idêntica em todo o volume de análise sendo, portanto, independente da posição. Analogamente,

torna-se possível escrever as deformações microscópicas como o produto entre as deformações macroscópicas e um tensor de mapeamento dependente da posição, dado por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\mathbb{A}}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\mathbb{E}}} \quad (2.55)$$

A interpretação física de $\underline{\underline{\mathbb{A}}}(\underline{x})$ é análoga a $\underline{\underline{\mathbb{B}}}(\underline{x})$, representando a relação entre o campo de deformações microscópicas com as deformações macroscópicas. Este tensor é, portanto, denominado de **tensor de localização das deformações**. Visto que a média entre as soluções macro e micro devem ser as mesmas, escreve-se

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\mathbb{A}}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\mathbb{E}}} \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\mathbb{A}}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} \quad \text{contudo} \quad \langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\mathbb{E}}} \quad (2.56)$$

Desta relação extrai-se que a média do tensor de localização das deformações também deve ser unitária:

$$\langle \underline{\underline{\mathbb{A}}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \mathbb{I} \quad (2.57)$$

Aplicando a Eq. (2.56) sobre a Eq. (2.54) e aplicando o operador média, formula-se:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\mathbb{A}}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} \quad (2.58)$$

A Eq. (2.58) descreve a lei de comportamento mecânica na escala macroscópica para condições de contorno definidas em deformações, de forma que o tensor $\langle \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\mathbb{A}}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega}$ representa o tensor de flexibilidade equivalente do material homogeneizado. Simplificadamente escreve-se:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} \quad \text{com} \quad \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{\text{hom}} = \langle \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\mathbb{A}}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} \quad (2.59)$$

Embora as Eq. (2.53) e Eq. (2.59) sejam análogas às microscópicas, estas relações não são necessariamente equivalentes, sendo válidas apenas para suas respectivas condições de contorno. Esta diferença fica evidente ao multiplicar os tensores de rigidez e flexibilidade, os quais classicamente resultam em $\underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\mathbb{S}}} = \mathbb{I}$. Na escala macroscópica, contudo, existe um erro $\underline{\underline{\mathbb{E}}}(\alpha)$ associado à unitariedade devido às flutuações aleatórias:

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{S}}}^{\text{hom}} = \mathbb{I} + \underline{\underline{\mathbb{E}}}(\alpha) \quad (2.60)$$

Verifica-se, contudo, que o erro é função de $\alpha = d/l$ onde d é a dimensão característica das heterogeneidades e l é a dimensão característica do VER. Neste âmbito, respeitadas as condições de separação das escalas no qual $d \ll l$ tem-se $\mathbb{E}(d/l) \rightarrow 0$ e, portanto, diz-se que as soluções são equivalentes.

2.3.4. Lema de Hill

Com base nas relações entre campos microscópicos e macroscópicos na Eq. (2.50) em tensões e Eq. (2.56) em deformações, torna-se conveniente conhecer os efeitos da mudança de escala sobre a expressão da energia mecânica. Dada a média volumétrica da energia de deformação microscópica, tem-se:

$$\frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla^s \underline{\underline{\xi}} dV = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\xi}}) dV = \frac{1}{2\Omega} \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS \quad (2.61)$$

Aplicando-se sobre o termo $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$ a condição de contorno em tensões homogêneas $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$ dada na Eq.(2.48), tem-se:

$$\frac{1}{2\Omega} \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS = \frac{1}{2\Omega} \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{\xi}}) dV = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \underline{\underline{\Sigma}} : \nabla^s \underline{\underline{\xi}} dV = \frac{1}{2\Omega} \underline{\underline{\Sigma}} : \int_{\Omega} \nabla^s \underline{\underline{\xi}} dV = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} \quad (2.62)$$

Resumidamente esta relação pode ser escrita como:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} \quad (2.63)$$

A relação apresentada acima refere-se ao **Lema de Hill**, o qual define uma das relações mais importantes na teoria da homogeneização. Esta expressão é enunciada como: “a média volumétrica da energia de deformação microscópica deve ser igual a energia de deformação macroscópica” (Dormieux et al. 2006). Embora a relação acima tenha sido obtida partindo-se de condições de contorno em tensões homogêneas, a mesma relação pode ser obtida por meio das condições em deformações. Partindo da mesma relação anterior:

$$\frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla^s \underline{\underline{\xi}} dV = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\xi}}) dV \quad (2.64)$$

Aplicando-se a condição de contorno em deformações homogêneas $\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x}$ dada na Eq. (2.54):

$$\frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{x} \cdot \underline{\underline{E}}) dV = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \otimes \underline{x} : \underline{\underline{E}}) dV = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \otimes \underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} dV : \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2\Omega} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} \quad (2.65)$$

A demonstração do lema de Hill, contudo, requer que condições sobre $\underline{\underline{\sigma}}$ e $\underline{\underline{\xi}}$ sejam satisfeitas. O tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ deve ser estaticamente admissível, satisfazendo a condição de balanço de momentos $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0$. O campo de deformações $\underline{\underline{\xi}}$ precisa ser geometricamente compatível, de modo que $\underline{\underline{\xi}} = \nabla^s \underline{\underline{\xi}}$ implica em $\underline{\underline{\xi}}$ contínuo e diferenciável. Observa-se que $\underline{\underline{\sigma}}$ e $\underline{\underline{\xi}}$ não são necessariamente correlacionados por nenhuma lei constitutiva, não restringindo o lema de Hill à elasticidade.

2.3.5. Métodos de Homogeneização

O termo “homogeneização” refere-se à determinação das propriedades macroscópicas do material equivalente, tendo por base as propriedades microscópicas. Diferentes abordagens para a determinação das propriedades homogeneizadas podem ser empregadas, a depender da complexidade do problema em questão.

Análises sobre problemas particulares (compósitos estratificados, fibras longas periodicamente distribuídas, etc) podem utilizar **resoluções analíticas**, nas quais o problema é resolvido de forma exata. Esta abordagem leva a soluções em função dos parâmetros utilizados no problema, permitindo o ajuste das propriedades em questão sem a necessidade de efetuar um novo cálculo, tornando-a uma abordagem adequada a modelagem para otimização. Contudo, a complexidade do material eleva rapidamente a dificuldade na obtenção de soluções analíticas, podendo facilmente ultrapassar o limiar no qual soluções analíticas não são mais possíveis.

Estudos sobre problemas mais complexos podem facilmente levar a soluções pouco esperadas. Tais resultados podem, contudo, ser examinada sobre a ótica dos **limites variacionais**, os quais fornecem intervalos para os quais as soluções são possíveis. A base aplicada para a abordagem dos limites variacionais consiste nos princípios do mínimo em deslocamentos (limite superior) e do mínimo em tensões (limite inferior). Contudo, a utilização

de limites variacionais não é capaz de caracterizar adequadamente a morfologia do material, levando a resultados que nem sempre condizem com a realidade. Dentre os limites variacionais mais conhecidos citam-se os limites de Reuss e Voigt ou os limites de Hashin-Strikman.

Problemas de alta complexidade são, em geral, tratados por meio de **resolução numérica**. Tais resoluções envolvem a utilização de técnicas de elementos finitos ou similares, na qual o VER contendo todas suas inclusões é modelado. Extraíndo-se a solução média obtida tem-se a solução homogeneizada do meio. Visto que o VER deve ser modelado segundo as condições preestabelecidas do material, torna-se muito difícil estender a análise a outras frações volumétricas ou morfologias. Não obstante, técnicas que produzam distribuições aleatórias das heterogeneidades ou condições especiais de contorno devem ser desenvolvidas.

Por fim, abordagens analíticas aproximadas, nomeadas de **estimativas**, podem ser utilizadas. Embora a solução não necessariamente seja conduzida ao valor exato do problema, estes métodos têm se mostrado amplamente aplicáveis, apresentando soluções parametrizadas para problemas de natureza complexa. Estimativas bem sucedidas são capazes de representar corretamente a natureza morfológica do material homogeneizado bem como apresentar soluções muito próximas ao comportamento efetivo.

Em geral, formulações embasadas em estimativas são realizadas fazendo uso da **solução analítica de Eshelby**, desenvolvida para uma inclusão elipsoidal presente em um meio infinito (ver Figura 2.19). O elipsoide fica definida por seus eixos principais, cujos raios são conhecidos.

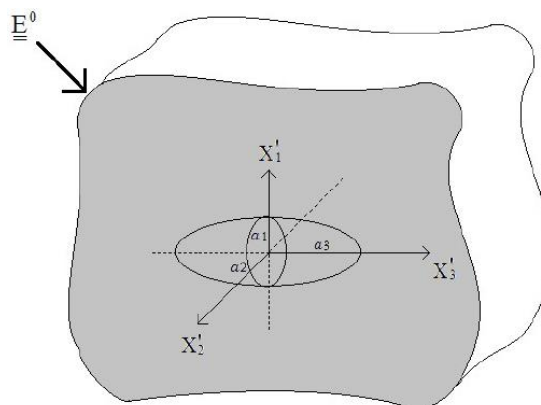


Figura 2.19: Volume sobre análise no problema de Eshelby.

Aplicando-se deformações constantes $\underline{\underline{E}}^0$ no contorno do meio infinito, Eshelby (1957) demonstrou que a deformação no interior da inclusão mantém-se constante e definida por:

$$\langle \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\omega} = \mathbb{A}_E(\underline{x}) : \underline{\underline{E}}^0 \quad (2.66)$$

onde \mathbb{A}_E é o tensor de localização das deformações de Eshelby, o qual pode ser escrito por meio de:

$$\mathbb{A}_E(\underline{x}) = \langle \mathbb{A} \rangle_{\omega} = \left[\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i + \mathbb{C}^s) \right]^{-1} \quad (2.67)$$

os tensores \mathbb{C}^i e \mathbb{C}^s correspondem respectivamente a rigidez das inclusões e do meio infinito adjacente a inclusão. \mathbb{P} é denominado de tensor de Hill, sendo determinado por meio de:

$$\mathbb{S}^e = \mathbb{P} : \mathbb{C}^s \quad (2.68)$$

onde \mathbb{S}^e é o tensor de Eshelby encontrado para diversas configurações de inclusões em Handbooks (ver Mura (1987) ou Nemat-Nasser and Hori (1993)).

Partindo da solução de Eshelby, pode-se primeiramente considerar que existe um número muito pequeno de inclusões presentes no meio infinito ao ponto de que seja possível considerar a fração volumétrica f_s do meio infinito aproximadamente unitária. Esta solução leva a **estimativa diluída**, a qual desconsidera a variação do campo de deformações decorrentes do conjunto de inclusões sobre cada inclusão. Tal estimativa leva a seguinte equação:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s + \sum_{i=1}^n f_i (\mathbb{C}^i + \mathbb{C}^s) : \left[\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i + \mathbb{C}^s) \right]^{-1} \quad (2.69)$$

Generalizando, supondo que o número de inclusões torna a variação do campo de deformações decorrente do conjunto de inclusões perceptível para cada inclusão, e supondo-se que mesmo para um número suficientemente elevado de inclusões o meio infinito continua tendo o papel de matriz (isso é, as inclusões são inteiramente cercadas pela matriz), dá-se origem a **estimativa de Mori-Tanaka**, matematicamente descrita por:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s + \sum_{i=1}^n f_i (\mathbb{C}^i + \mathbb{C}^s) : \left[\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i + \mathbb{C}^s) \right]^{-1} : \left\langle \left[\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i + \mathbb{C}^s) \right]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} \quad (2.70)$$

Além das estimativas acima, pode-se citar a **estimativa auto-consistente**, na qual nenhum material assume o papel de matriz:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \sum_{i=1}^n f_i \mathbb{C}^i : \left[\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i + \mathbb{C}^{\text{hom}}) \right]^{-1} : \left\langle \left[\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i + \mathbb{C}^{\text{hom}}) \right]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} \quad (2.71)$$

A Figura 2.20 destaca visualmente as características de cada método de homogeneização.

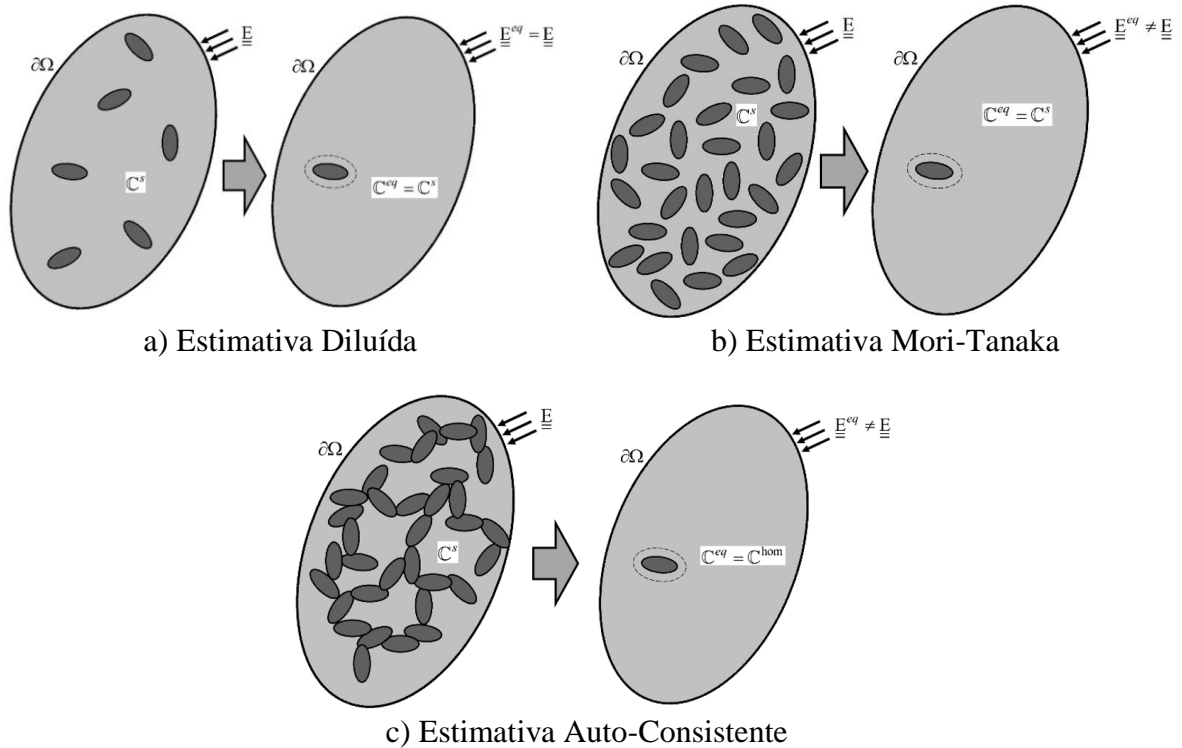


Figura 2.20: Estimativas clássicas da teoria da homogeneização.

2.3.6. Lema de Hill Estendido à Meios com Descontinuidades

Quando o meio em questão apresenta heterogeneidades modeladas como fraturas (descontinuidades que transmitem esforços), a média da energia de deformação deve ser acrescida da energia decorrente do comportamento mecânico das descontinuidades. Sob esta ótica, o lema de Hill deve ser atualizado, de forma que sua expressão passa a ser escrita por (Maghous et al., 2011):

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle + \frac{1}{\Omega_0} \int_{\omega} \underline{\underline{T}} \cdot [\underline{\underline{\xi}}] ds \quad (2.72)$$

Por definição, a ausência do domínio sobre o operador média volumétrica descrita no termo $\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle$ indica que o domínio desta função restringe-se apenas ao volume $\Omega \setminus \omega$ da matriz sólida do material, desconsiderando o volume ω das fraturas. Observa-se que $\underline{\underline{T}}$ corresponde

as forças superficiais atuando nas faces de cada uma das fraturas e $[\underline{\underline{\xi}}]$ refere-se ao salto de deslocamentos observado em cada descontinuidade (estas grandezas são melhor definidas na seção seguinte).

As condições clássicas sobre $\underline{\underline{\sigma}}$ estaticamente admissível e $\underline{\underline{\varepsilon}}$ geometricamente compatível continuam sendo necessárias, além de ser acrescida a necessidade de continuidade do vetor de forças \underline{T} junto as descontinuidades. Neste caso, para um tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ simétrico e uniforme (o qual é obviamente estaticamente admissível), a deformação macroscópica pode ser escrita por:

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle + \frac{1}{\Omega_0} \int_{\omega} \underline{n} \otimes^s [\underline{\underline{\xi}}] ds \quad (2.73)$$

onde \otimes^s corresponde a parte simétrica do produto de Dyadic $(\underline{a} \otimes^s \underline{b})_{ij} = (a_i b_j + a_j b_i) / 2$.

Observe que a deformação macroscópica contém as contribuições da matriz sólida bem como das descontinuidades.

3. HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS VISCOELÁSTICOS FRATURADOS

A presente seção visa estabelecer a lei de comportamento macroscópica de materiais viscoelásticos fraturados bem como determinar o respectivo tensor de relaxação. Primeiramente, o desenvolvimento clássico voltado ao quadro elástico é abordado, apresentando relações entre as solicitações nas escalas micro e macroscópicas, bem como formulando o tensor de rigidez homogeneizado do material elástico equivalente. Partindo do raciocínio elástico, a lei de comportamento macroscópica no domínio viscoelástico é formulada, apresentando as relações entre campos estendidas à viscoelasticidade. Aplicando-se o princípio da correspondência ao tensor de rigidez elástico, o tensor de relaxação no domínio de Carson-Laplace é estabelecido. Sua representação no domínio do tempo é formulada por meio de um procedimento específico de transformada inversa de Carson-Laplace, o qual permite verificar que o comportamento macroscópico é reologicamente representado por um modelo generalizado de Maxwell. Em uma abordagem simplificada, o tensor de relaxação é aproximado pelo modelo de Burger, o qual apresenta boa precisão para modelos reológicos simples de fraturas. Por fim, aplicações numéricas são realizadas, exibindo graficamente o comportamento mecânico estabelecido nas equações que seguem.

3.1.RELAÇÃO MICRO-MACRO DO PROBLEMA ELÁSTICO

A presente seção consiste em uma releitura do procedimento descrito na seção 2.3.3, na qual o comportamento homogeneizado é formulado. A diferença com relação àquela abordagem consiste apenas no nível de detalhamento utilizado, bem como na ênfase em eventuais consequências formuladas com base nesta formulação.

A análise de meios heterogêneos é uma tarefa cuja complexidade matemática está diretamente relacionada à complexidade morfológica. Neste sentido, a teoria da homogeneização tem demonstrado ser uma ferramenta robusta capaz de simplificar a complexidade matemática de problemas com morfologias complexas, levando a resultados médios equivalentes ao tratamento heterogêneo do material. Neste sentido, a morfologia

aleatória de materiais fraturados demanda a consideração de um volume Ω denominado de volume elementar representativo, cujas propriedades devem representar estatisticamente o material em qualquer lugar da estrutura. Ao longo deste trabalho, o volume que descreve as fraturas é tratado por ω , enquanto o volume da matriz sólida é definido por $\Omega \setminus \omega$. A Figura 3.1 abaixo esquematiza os volumes explicitados acima.

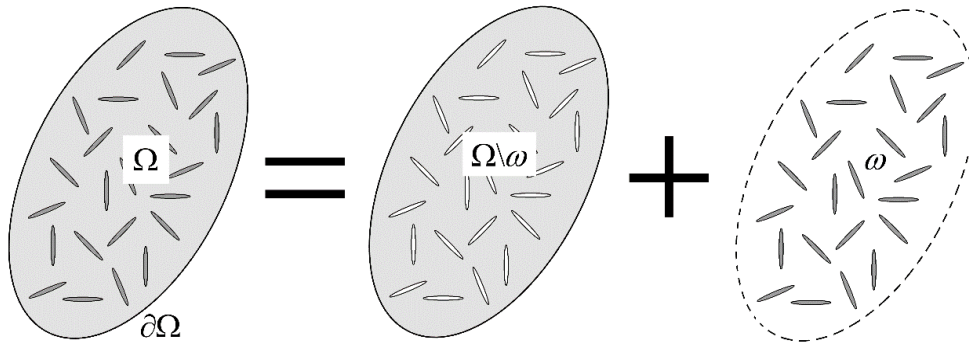


Figura 3.1: Representação do VER composto por matriz sólida e fraturas.

De forma simplificada, as fraturas podem ser geometricamente modeladas por meio de interfaces planares de superfície ω_i e orientação definida pelo vetor de orientação normal \underline{n}_i . Contudo, em uma escala inferior à microscópica, as fraturas são interpretadas como elementos de espessura finita, permitindo a distinção entre as superfícies superiores ω_i^+ e inferiores ω_i^- (Figura 3.2). Nota-se que dentro do volume ω , tanto campos de tensões quanto de deformações não são naturalmente definidos devido à ausência de materiais. Neste âmbito, é conveniente definir o deslocamento relativo $[\underline{\xi}]$ como a diferença relativa entre os deslocamentos da superfície superior $\underline{\xi}^+$ e inferior $\underline{\xi}^-$:

$$[\underline{\xi}] = \underline{\xi}^+ - \underline{\xi}^- \quad (3.1)$$

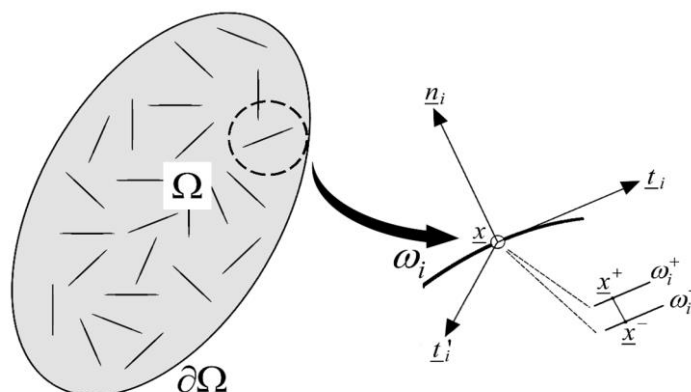


Figura 3.2: Representação das fraturas no VER.

A grandeza complementar de $\left[\underline{\underline{\xi}} \right]$ consiste no vetor de forças $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$, atuando na interface de cada fratura. No contexto da elasticidade linear, o deslocamento relativo $\left[\underline{\underline{\xi}} \right]$ é relacionado ao vetor de forças \underline{T} por meio do tensor de segunda ordem \underline{k} em função do sistema de coordenadas local $(\underline{n}, \underline{t}, \underline{t}')$ para cada fratura (Maghous et al., 2011):

$$\underline{k} = k_n \underline{n} \otimes \underline{n} + k_t (\underline{t} \otimes \underline{t} + \underline{t}' \otimes \underline{t}') \quad (3.2)$$

onde k_n e k_t representam respectivamente as componentes de rigidez normal e tangencial expressas em (Pa/m), as quais são avaliadas em laboratório por meio de ensaios realizados sobre corpos de prova contendo uma única fratura. A interpretação física destes parâmetros, bem como os procedimentos de identificação são apresentados em Bart et al. (2004). O caso particular de fraturas que não transmitem esforços (aqui denominadas de fissuras) é incluído na formulação acima considerando $k_n = 0$ e $k_t = 0$.

O comportamento mecânico do material sólido (matriz sólida) é definido pela expressão:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.3)$$

onde $\underline{\underline{\sigma}}$ é o tensor de tensões, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ é o tensor de deformações e o tensor de quarta ordem \mathbb{C}^s representa a rigidez elástica do material. A relação entre o problema microscópico e o problema macroscópico no domínio Ω do VER pode ser estabelecida fazendo uso da condição de contorno em deformação homogênea retratada na Eq. (2.54)₄. Assim, o par $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\xi}})$ é solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 & \text{em } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{em } \Omega \setminus \omega \\ \underline{T} = \underline{k} \cdot \left[\underline{\underline{\xi}} \right] & \text{sobre } \omega \\ \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} & \text{em } \partial\Omega \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = (\nabla \underline{\underline{\xi}} + \nabla^t \underline{\underline{\xi}}) / 2 & \text{em } \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $\underline{\underline{\xi}}$ é o vetor de deslocamento e \underline{x} é o vetor de posição. Dado que no meio homogeneizado a deformação macroscópica $\underline{\underline{E}}$ é constante ao longo de todo VER, é possível demonstrar (ver Zaoui (2002) ou Dormieux e Kondo (2016)) que as deformações locais $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ são linearmente relacionadas as deformações efetivas $\underline{\underline{E}}$ por meio de um tensor de quarta ordem $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ (definido na seção 2.3):

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \quad (3.5)$$

Fisicamente o tensor $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ representa a conexão entre as deformações locais $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ em qualquer ponto \underline{x} e a deformação macroscópica $\underline{\underline{E}}$ aplicada ao sistema. Em um raciocínio contínuo, a aplicação do operador média leva a relação $\langle \underline{\underline{A}} \rangle = \underline{\underline{I}}$. Contudo, em uma análise na qual descontinuidades são mensuradas, a Eq. (2.73) evidencia que $\langle \underline{\underline{A}} \rangle \neq \underline{\underline{I}}$ (ver Maghous et al. (2011) para mais detalhes). Nas soluções subsequentes o comportamento mecânico das fraturas permite a substituição destas por um material fictício equivalente, o que garante a utilização da relação clássica para $\langle \underline{\underline{A}} \rangle$, além disso, a relação $\langle \underline{\underline{A}} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{I}}$ permanece válida para ambas as situações. Aplicando-se o operador média sobre a Eq. (3.4)₂, utilizando a Eq.(3.5) e considerando a relação $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}}$ entre tensões microscópicas e tensões macroscópicas, tem-se:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \left\langle \underline{\underline{C}}^s(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \right\rangle_{\Omega} \quad (3.6)$$

Dado que o tensor $\underline{\underline{E}}$ é independente da posição \underline{x} , pode-se escrever:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \quad \text{com} \quad \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} = \left\langle \underline{\underline{C}}^s(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}(\underline{x}) \right\rangle_{\Omega} \quad (3.7)$$

A Eq. (3.7) representa a lei de comportamento elástica macroscópica do meio fraturado, relacionando tensões e deformações macroscópicas por meio do tensor de rigidez elástico de quarta ordem $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$.

Aplicando-se um raciocínio similar, dada a condição de contorno em tensões homogêneas descrita na Eq. (2.48)₄, obtém-se a seguinte lei de comportamento macroscópica:

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{S}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad \text{com} \quad \underline{\underline{S}}^{\text{hom}} = \left\langle \underline{\underline{S}}^s(\underline{x}) : \underline{\underline{B}}(\underline{x}) \right\rangle_{\Omega} \quad (3.8)$$

onde $\mathbb{B}(\underline{x})$ é o tensor de localização das tensões, representando a conexão entre tensões microscópicas e macroscópicas por:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.9)$$

Supondo respeitadas as condições de separação de escalas, onde se verifica que as heterogeneidades têm dimensão muito inferior ao VER, pode-se admitir que $\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{S}^{\text{hom}^{-1}}$. Partindo da relação microscópica descrita na Eq. (3.4)₂ e aplicando as relações entre escalas da Eq. (3.9) e Eq. (3.5) obtém-se:

$$\mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^s : \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \quad (3.10)$$

Por fim, aplicando a lei de comportamento macroscópica da Eq. (3.7) ou Eq.(3.8), obtém-se a relação entre os tensores de localização de tensão e de deformação:

$$\mathbb{B}(\underline{x}) : \mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s : \mathbb{A}(\underline{x}) \quad (3.11)$$

O raciocínio empregado nesta análise aplica-se a qualquer material elástico linear. Expressões específicas para \mathbb{C}^{hom} em função da orientação das descontinuidades podem ser determinadas por meio da teoria da homogeneização, tal como é realizado na seção seguinte.

3.2.HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAL ELÁSTICO

O procedimento de homogeneização destacado a seguir foi realizado por meio da estimativa de Mori-Tanaka, baseada no problema da inclusão de Eshelby. Para tanto, torna-se necessário simplificar a forma das fraturas por inclusões de geometria elipsoidal oblata com altura tendendo a zero (similar a uma moeda) e orientação associada ao sistema de coordenadas local $(\underline{t}, \underline{t}', \underline{n})$ (ver Figura 3.3). O raio maior do esferoide é a e a abertura é definida como $2c$. Define-se o fator de aspecto do esferoide como $X = c/a$, para as condições destacadas, impõem-se $X \ll 1$.

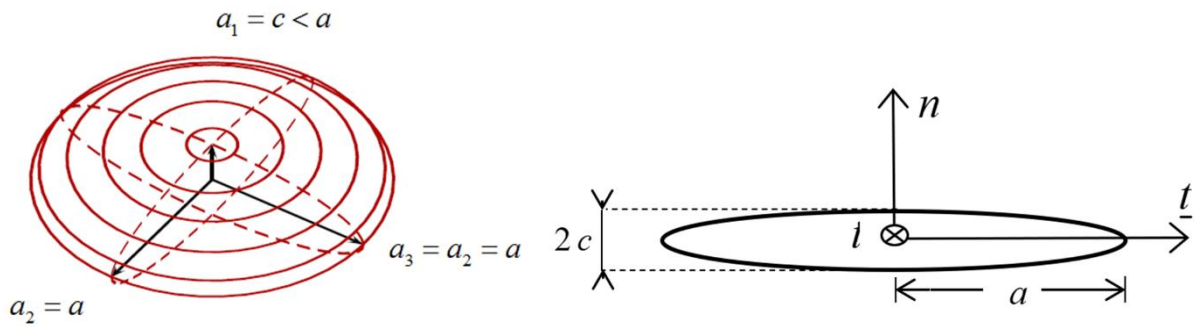


Figura 3.3: Modelo geométrico das fraturas.

Assumindo que o material da matriz sólida é homogêneo e isótropo, o tensor de rigidez associado assume a seguinte forma:

$$\mathbb{C}^s = 3k^s \mathbb{J} + 2\mu^s \mathbb{K} \quad (3.12)$$

onde k^s e μ^s são respectivamente os módulos volumétrico e de cisalhamento e $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ são respectivamente os tensores de projeção esférico e desviador.

Considerando a existência de uma única família de fraturas cujo vetor de orientação \underline{n} de todas as fraturas aponta na mesma direção, o que leva a uma solução com **fraturas paralelamente distribuídas**, e dado \mathcal{N} como o número de fraturas por unidade de volume, a fração volumétrica das fraturas no meio é dada por:

$$f = \frac{4}{3} \pi \varepsilon X \quad (3.13)$$

onde $\varepsilon = \mathcal{N} a^3$ é o parâmetro de densidade de fraturas associado ao conjunto de fraturas paralelas (Budiansky e O'Connell; 1976), o qual pode ser visto como o parâmetro que representa o dano na escala macroscópica.

Dada a estimativa de Mori-Tanaka, a expressão de \mathbb{C}^{hom} para o meio fraturado é escrita como (Maghous et al.; 2013,2014):

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{X \rightarrow 0} \left[\left(\mathbb{C}^s + f \mathbb{C}^f : \left(\mathbb{I} + \mathbb{P} : \left(\mathbb{C}^f + \mathbb{C}^s \right) \right)^{-1} \right) : \left(\mathbb{I} + f \left(\mathbb{I} + \mathbb{P} : \left(\mathbb{C}^f + \mathbb{C}^s \right) \right)^{-1} \right)^{-1} \right] \quad (3.14)$$

onde $\mathbb{P} = \mathbb{P}(X, \underline{n})$ é o tensor de Hill associado ao conjunto de fraturas paralelas, o qual depende do fator de aspecto X e da orientação \underline{n} dos esferoides oblatos. As componentes do tensor de Hill para esferoides oblatos são encontrados em Handbooks (ver, por exemplo, Eshelby (1957),

Mura (1987) ou Nemat-Nasser e Hori (1993)). Na Eq. (3.14), o tensor \mathbb{C}^f relaciona-se a rigidez das fraturas \underline{k} por meio de:

$$\mathbb{C}^f = 3X a \left(k_n - \frac{4}{3} k_t \right) \mathbb{J} + 2X a k_t \mathbb{K} \quad (3.15)$$

As componentes do tensor \mathbb{C}^{hom} , solução da Eq. (3.14) (estimativa de Mori-Tanaka), são expressas por (veja Maghous et al. (2014) ou Aguiar e Maghous (2018)):

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{1111}^{\text{hom}} = \mathbb{C}_{2222}^{\text{hom}} &= (3k^s + 4\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi(1 + 16/3\varepsilon)\kappa_1(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\ \mathbb{C}_{3333}^{\text{hom}} &= (3k^s + 4\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\ \mathbb{C}_{1122}^{\text{hom}} &= (3k^s - 2\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi(\kappa_1 + 8/3\varepsilon)(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\ \mathbb{C}_{1133}^{\text{hom}} = \mathbb{C}_{3322}^{\text{hom}} &= (3k^s - 2\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\varepsilon} \\ \mathbb{C}_{2323}^{\text{hom}} = \mathbb{C}_{1313}^{\text{hom}} &= 2\mu^s \frac{4\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1)}{4\kappa_3 + 16/3\pi\varepsilon(1 - \kappa_1) + \pi(1 + 2\kappa_1)(1 - \kappa_1)} \\ \mathbb{C}_{1212}^{\text{hom}} &= \mu^s \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde

$$\kappa_1 = \frac{3k^s + \mu^s}{3k^s + 4\mu^s} ; \quad \kappa_2 = \frac{3k_n a}{3k^s + 4\mu^s} ; \quad \kappa_3 = \frac{3k_t a}{3k^s + 4\mu^s} ; \quad \kappa_4 = \frac{\mu^s}{3k^s + 4\mu^s} \quad (3.17)$$

Considera-se agora o caso no qual as fraturas são aleatoriamente orientadas (**distribuição isotrópica de fraturas**). Neste caso, o vetor de orientação \underline{n} é definido para cada inclusão no espaço tridimensional pelas coordenadas angulares esféricas $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$. Utilizando a mesma notação que aquela utilizada para fraturas paralelas, o tensor de rigidez estimado pelo esquema de Mori-Tanaka é dado por:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{X \rightarrow 0} \left[\left(\mathbb{C}^s + \mathbb{C}^f : \left(\mathbb{I} + \mathbb{P} : \left(\mathbb{C}^f + \mathbb{C}^s \right) \right)^{-1} \right) : \left(\mathbb{I} + \left(\mathbb{I} + \mathbb{P} : \left(\mathbb{C}^f + \mathbb{C}^s \right) \right)^{-1} \right) \right] \quad (3.18)$$

o operador $\overline{\bullet}$ aplicado sobre uma quantidade Q denota a integral sobre as coordenadas esféricas $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$ (Maghous et al., 2013):

$$Q = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{f}{4\pi} Q(\theta, \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi \quad (3.19)$$

A distribuição isotrópica de fraturas induz um tensor de rigidez homogeneizado isotrópico, convenientemente expresso por:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = 3k^{\text{hom}} \mathbb{J} + 2\mu^{\text{hom}} \mathbb{K} \quad (3.20)$$

Os módulos volumétrico k^{hom} e de cisalhamento μ^{hom} homogeneizados dependem das propriedades elásticas dos constituintes bem como do raio das fraturas a e do parâmetro de densidade de fraturas ε :

$$k^{\text{hom}} = \frac{k^s}{1 + \varepsilon \mathcal{M}_k} \quad ; \quad \mu^{\text{hom}} = \frac{\mu^s}{1 + \varepsilon \mathcal{M}_\mu} \quad (3.21)$$

As funções adimensionais $\mathcal{M}_k(k^s, \mu^s, ak_n, ak_t)$ e $\mathcal{M}_\mu(k^s, \mu^s, ak_n, ak_t)$ são escritas como:

$$\mathcal{M}_k = \frac{\frac{4}{3}\pi k^s / \mu^s}{\pi \kappa_1 + ak_n / \mu^s} \quad ; \quad \mathcal{M}_\mu = \frac{16\pi \kappa_4}{15} \frac{6\kappa_2 + 4\kappa_3 + 9\pi \kappa_4 (3\kappa_1 + \kappa_4)}{(3\pi \kappa_1 \kappa_4 + \kappa_2)(4\kappa_3 + 9\pi \kappa_4 (\kappa_1 + \kappa_4))} \quad (3.22)$$

Note que para a formulação descrita há necessidade de conhecer ao menos dois parâmetros dentre $(\varepsilon, \mathcal{N}, a)$ que quantificam o dano. Em particular, o caso de material fissurado é representado fazendo $\underline{k} = 0$ na estimativa do \mathbb{C}^{hom} . Nesta situação o raio médio das fraturas a é naturalmente eliminado da Eq. (3.22), apenas sendo avaliado indiretamente por meio de ε , o que reduz o número de parâmetros que quantifica o dano para apenas um.

3.3.RELAÇÃO MICRO-MACRO DO PROBLEMA VISCOELÁSTICO

Esta seção objetiva estender o raciocínio elástico realizado na seção 3.1 ao domínio viscoelástico, formulando a lei de comportamento viscoelástica macroscópica bem como determinando a relação entre os tensores microscópicos e macroscópicos. A fim de garantir a acurácia da análise, o formalismo realizado nesta seção foi desenvolvido de duas formas diferentes. O primeiro desenvolvimento baseou-se sobre a linearidade do operador de

Boltzmann, demonstrada em Maghous e Creus (2003), enquanto o segundo procedimento teve como base uma analogia com o raciocínio micromecânica voltado a plasticidade, desenvolvido por Dormieux et al. (2006)

3.3.1. Lei de comportamento macroscópica

Supõem-se agora que o comportamento dos constituintes condiz com a viscoelasticidade linear sem envelhecimento. Neste contexto, o comportamento mecânico da matriz sólida e das fraturas são respectivamente expressos por:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}}(t) &= \mathbb{R}^s(t) \circ \underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{R}^s(t-\tau) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau) d\tau \\ \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{k}}^v \circ [\underline{\underline{\xi}}] = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{k}}^v(t-\tau) \cdot [\underline{\underline{\dot{\xi}}}] (\tau) d\tau\end{aligned}\tag{3.23}$$

onde \mathbb{R}^s é o tensor de relaxação da matriz sólida e $\underline{\underline{k}}^v$ é o tensor de relaxação viscoelástico homólogo ao tensor de rigidez $\underline{\underline{k}}$. Observa-se que não existe na literatura uma relação bem definida para expressar o comportamento viscoelástico linear de fraturas, de forma que a formulação apresentada foi proposta pelos autores com base no formalismo elástico e viscoelástico do material sólido de forma a manter as características geométricas atribuídas ao comportamento interfacial das fraturas. Dentro do contexto apresentado, o símbolo \circ corresponde a convolução de Boltzmann, cuja expressão pode ser generalizada de forma a ser compatível com a formulação envolvendo tensores de segunda ordem das fraturas:

$$U(t, \tau) \circ V(t) = U(t, t) * V(t) - \int_0^t \frac{\partial U(t, \tau)}{\partial \tau} * V(\tau) d\tau\tag{3.24}$$

onde $U(t, \tau)$ e $V(t)$ são funções definidas em $t \geq 0$ e $*$ define o operador contração tensorial com ordem compatível tal que a operação resultante mantenha a ordem da variável V .

Definindo as condições de contorno em deformações homogêneas, o par $(\underline{\underline{\sigma}}; \underline{\underline{\xi}})$ é determinado ao solucionar o seguinte problema mecânico.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 & \text{em } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{R}^s \circ \underline{\underline{\varepsilon}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{R}^s(t-\tau) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau) d\tau & \text{em } \Omega \setminus \omega \\ \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{k}}^v \circ [\underline{\underline{\xi}}] = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{k}}^v(t-\tau) \cdot [\underline{\underline{\dot{\xi}}}] (\tau) d\tau & \text{sobre } \omega \\ \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}} & \text{em } \partial\Omega \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = (\nabla \underline{\underline{\xi}} + \nabla^t \underline{\underline{\xi}}) / 2 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Em uma associação similar ao realizado durante a etapa de homogeneização elástica, pode-se substituir o comportamento interfacial das fraturas definido na Eq. (3.25)₃ por um material equivalente que preenche a descontinuidade. O comportamento mecânico deste material pode ser diretamente estendido da elasticidade (formulado por Maghous et. al., 2014), sendo dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{R}^f \circ \underline{\underline{\varepsilon}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{R}^f(t-\tau) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau) d\tau & \text{em } \omega \\ \mathbb{R}^f = 3 \mathbb{X} a \left(k_n^v - \frac{4}{3} k_t^v \right) \mathbb{J} + 3 \mathbb{X} a k_t^v \mathbb{K} & \end{array} \right. \quad (3.26)$$

onde k_n^v e k_t^v são respectivamente as rigidezes normal e tangencial associadas ao comportamento viscoelástico das fraturas. Esta abordagem permite unificar a expressão do comportamento mecânico no VER, permitindo a forma:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{R} \circ \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) - \int_0^t \frac{\partial \mathbb{R}(t-\tau)}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad \text{com } \mathbb{R} = \begin{cases} \mathbb{R}^s & \text{em } \Omega \setminus \omega \\ \mathbb{R}^f & \text{em } \omega \end{cases} \quad (3.27)$$

$\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}(t, t)$ corresponde à relaxação instantânea do material correspondente.

Em uma abordagem análoga a elasticidade, define-se o tensor \mathbb{A}^v na viscoelasticidade, homólogo a $\mathbb{A}(\underline{\underline{x}})$, atuando como a conexão entre os campos de deformação microscópicos e os campos macroscópicos correspondentes (ver Maghous e Creus, 2003):

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}, t) = \mathbb{A}^v(\underline{\underline{x}}, t, \tau) \circ \underline{\underline{E}}(\tau) \quad (3.28)$$

Aplicando a relação entre os campos de deformação microscópica e macroscópica à lei de comportamento viscoelástica representada na Eq.(3.27), tem-se:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{R}(\underline{x}, t, \tau_1) \circ \mathbb{A}^v(\underline{x}, \tau_1, \tau_2) \circ \underline{\underline{E}}(\tau_2) \quad (3.29)$$

Por fim, aplicando o operador média sobre a Eq. (3.29) e utilizando a relação $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\Sigma}}$, escreve-se:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \left\langle \mathbb{R}(\underline{x}, t, \tau_1) \circ \mathbb{A}^v(\underline{x}, \tau_1, \tau_2) \circ \underline{\underline{E}}(\tau_2) \right\rangle_{\Omega} \quad (3.30)$$

Dada as propriedades da convolução de Boltzman, reescreve-se a expressão acima como (Maghous e Creus, 2003)

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{R}^{\text{hom}}(t, \tau) \circ \underline{\underline{E}}(\tau) \quad \text{com} \quad \mathbb{R}^{\text{hom}}(t, \tau) = \left\langle \mathbb{R}(\underline{x}, t, \tau_1) \circ \mathbb{A}^v(\underline{x}, \tau_1, \tau) \right\rangle_{\Omega} \quad (3.31)$$

\mathbb{R}^{hom} assume o papel de tensor de relaxação homogeneizado, descrevendo o comportamento efetivo do material heterogêneo. Pode-se, enfim, escrever a Eq. (3.31) por meio do campo de deformações elástico $\underline{\underline{E}}^e$ ou viscoelástico $\underline{\underline{E}}^v$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} &= \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^v) = \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}}^e \quad \text{onde} \\ \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}}^v(t) &= \int_0^t \frac{\partial \mathbb{R}^{\text{hom}}(t - \tau)}{\partial \tau} : \underline{\underline{E}}(\tau) d\tau \quad \text{e} \quad \underline{\underline{E}}^e(t) = \underline{\underline{E}}(t) - \underline{\underline{E}}^v(t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$\mathbb{R}_0^{\text{hom}} = \mathbb{R}^{\text{hom}}(0)$ representa o tensor de relaxação homogeneizado no instante corrente. Uma expressão análoga pode ser obtida aplicando condições de contorno em tensões, a partir do qual:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = \mathbb{B}^v(\underline{x}, t, \tau) \circ \underline{\underline{\Sigma}}(\tau) \quad (3.33)$$

onde, analogamente a elasticidade, \mathbb{B}^v atua como a conexão entre as tensões microscópicas $\underline{\underline{\sigma}}$ e as tensões macroscópicas $\underline{\underline{\Sigma}}$.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \mathbb{R}_0 : [\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v] = \mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}^v \\ \text{dado} \quad \mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^v &= \int_0^t \frac{\partial \mathbb{R}(t - \tau)}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v$ representam, respectivamente, os campos de deformação diferida (ou viscosa na analogia à plasticidade) e instantâneo (ou elástico na analogia à plasticidade)

microscópicos e $\underline{\underline{\sigma}}^v = -\mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^v$ corresponde ao campo de tensões diferidas (ou viscosas) locais. Introduce-se o tensor $\mathbb{A}_0^v(\underline{x}) = \mathbb{A}^v(\underline{x}, 0)$ no contexto viscoelástico sem envelhecimento como sendo o valor instantâneo de \mathbb{A}^v . Observa-se que \mathbb{A}_0^v condiz exatamente com o tensor de localização de deformações \mathbb{A} na abordagem elástica representado na Eq.(3.5). Pré-multiplicando a Eq. (3.34) por \mathbb{A}_0^v obtém-se a relação:

$$\mathbb{A}_0^v : \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{A}_0^v : \mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} - \mathbb{A}_0^v : \mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \quad (3.35)$$

Aplicando a média volumétrica e o lema de Hill, dado que $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ não é necessariamente geometricamente compatível, demonstra-se que:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} - \langle \mathbb{A}_0^v : \mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} \quad \text{com} \quad \mathbb{R}_0^{\text{hom}} = \langle \mathbb{A}_0^v : \mathbb{R}_0 \rangle_{\Omega} \quad (3.36)$$

Admitindo-se que as condições de contorno em tensão ou deformação homogêneas levam a mesma solução (tal raciocínio é válido sempre que as condições de separação de escala forem respeitadas), utiliza-se a Eq. (3.11) na Eq. (3.36) para escrever:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} - \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : \langle \mathbb{B}_0^v : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} \quad (3.37)$$

Neste contexto, $\mathbb{B}_0^v(\underline{x}) = \mathbb{B}^v(\underline{x}, 0)$ é a variável dual a \mathbb{A}_0^v , representando o valor instantâneo do tensor \mathbb{B}^v . Tal como para \mathbb{A}_0^v , o valor de \mathbb{B}_0^v retrata exatamente o tensor \mathbb{B} descrito na elasticidade. Na sequência, por definição denomina-se o campo de deformações diferidas (ou viscosas) macroscópicas como:

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}}^v = \langle \mathbb{B}_0^v : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} \quad (3.38)$$

Resultando na seguinte expressão:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : (\underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v) \quad (3.39)$$

Observa-se que a Eq. (3.39) condiz perfeitamente com a Eq. (3.32) anteriormente obtida.

3.3.2. Relação entre campos microscópicos e macroscópicos

A presente seção busca por relações entre campos microscópicos e macroscópicos para as variáveis instantâneas e diferidas previamente estabelecidas no raciocínio anterior. Tais relações são indispensáveis para a determinação da condição de propagação por meio de um tratamento energético. O raciocínio aqui apresentado pode ser consultado de forma sintetizada em Aguiar e Maghous (2018).

Convenientemente aplicando-se condições de contorno em tensões homogêneas sobre o contorno do VER, lembrando que as abordagens com condições de contorno em tensões e deformações levam ao mesmo resultado, o problema mecânico que relaciona o par $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\xi}})$ é dado por:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 & \text{em } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{R} \circ \underline{\underline{\xi}} = \mathbb{R}_0 : (\underline{\underline{\xi}} - \underline{\underline{\xi}}^v) & \text{em } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} & \text{em } \partial\Omega \\ \underline{\underline{\xi}} = (\nabla \underline{\underline{\xi}} + \nabla^t \underline{\underline{\xi}}) / 2 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (3.40)$$

Para tal propósito, pode-se considerar matematicamente que o campo de deformações viscosas $\underline{\underline{\xi}}^v$ é dado. Desta forma, do ponto de vista matemático, pode-se separar o problema definido pelos campos $\underline{\underline{\Sigma}}$ e $\underline{\underline{\xi}}^v$ em dois problemas auxiliares dados apenas em $\underline{\underline{\Sigma}}$ ou $\underline{\underline{\xi}}^v$. A figura 3.4 exhibe os dois problemas originados deste primeiro.

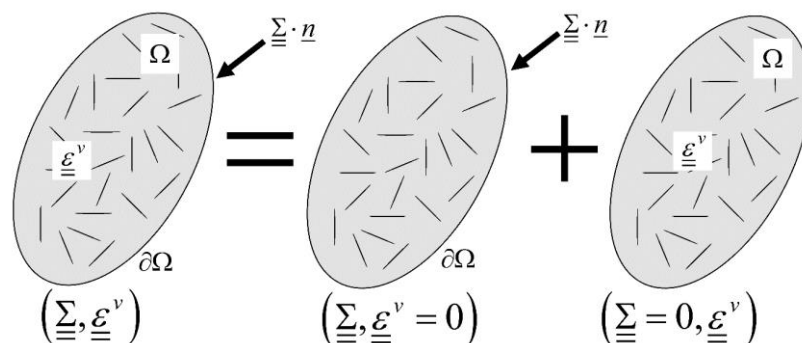


Figura 3.4: Problemas auxiliares.

O **primeiro problema auxiliar** é caracterizado por tensões macroscópicas $\underline{\underline{\Sigma}}$ uniformemente aplicadas no contorno do VER e, por consequência, campo de deformações

viscosas $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ nulo, equiparando-se ao problema descrito no âmbito elástico. A resposta $(\underline{\underline{\sigma}}^{EL}, \underline{\underline{\xi}}^{EL})$ proveniente desta condição é obtida por meio de:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}^{EL}) = 0 & \text{in } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}^{EL} = \mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} & \text{in } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}^{EL} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} & \text{in } \partial\Omega \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} = (\nabla \underline{\underline{\xi}}^{EL} + \nabla^t \underline{\underline{\xi}}^{EL}) / 2 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.41)$$

Observa-se que $\underline{\underline{\varepsilon}}^{EL}$ representa a verdadeira deformação elástica, cuja definição difere da deformação $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ previamente definida. A solução deste problema é bem conhecida na literatura (Ver Zaoui (2002) ou Dormieux et al. (2006)):

$$\underline{\underline{\sigma}}^{EL} = \mathbb{B}_0^v : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.42)$$

$\underline{\underline{\sigma}}^{EL}$ e $\underline{\underline{\Sigma}}$ representam respectivamente os o capô de tensões microscópico e o tensor de tensões macroscópico do problema elástico. A relação entre tensões e deformações macroscópicas deste problema foi dada na Eq.(3.8), sendo agora reescrita como:

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}}^{EL} = \mathbb{F}_0^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad \text{com} \quad \mathbb{F}_0^{\text{hom}} = \langle \mathbb{B}_0^v : \mathbb{F}_0 \rangle_{\Omega} = \mathbb{R}_0^{\text{hom}^{-1}} \quad (3.43)$$

onde \mathbb{F}_0 e $\mathbb{F}_0^{\text{hom}}$ correspondem ao valor instantâneo do tensor de fluência respectivamente microscópico e homogeneizado. Se o processo de carregamento é reversível, nenhum campo de deformações viscosas é induzido, tornando a deformação elástica $\underline{\underline{\mathbb{E}}}^{EL}$ idêntica a $\underline{\underline{\mathbb{E}}}^e$ (Dormieux e Kondo, 2016):

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}}^e = \underline{\underline{\mathbb{E}}}^{EL} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} \rangle_{\Omega} \quad (3.44)$$

O **segundo problema auxiliar** caracteriza-se pela aplicação do campo deformação viscoso $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$, tornando nulas as tensões uniformes $\underline{\underline{\Sigma}} = 0$ no VER. A resposta mecânica desta condição é caracterizada pelo par $(\underline{\underline{\sigma}}^R, \underline{\underline{\xi}}^R)$, solução do sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}^R) = 0 & \text{in } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}^R = \mathbb{R}_0 : (\underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) & \text{in } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}^R \cdot \underline{n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^R = (\nabla \underline{\underline{\xi}}^R + \nabla^t \underline{\underline{\xi}}^R) / 2 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.45)$$

A tensão macroscópica correspondente é $\underline{\underline{\Sigma}}^R = \langle \underline{\underline{\sigma}}^R \rangle_{\Omega} = 0$ e a deformação macroscópica induzida pelo carregamento corresponde a $\underline{\underline{E}}^R = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^R \rangle_{\Omega}$. O significado físico de $\underline{\underline{\sigma}}^R$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}^R$ condiz com os campos de tensões e deformações microscópicos residuais induzidos no VER após o descarregamento $\underline{\underline{\Sigma}} = 0$.

É importante frisar, que os campos $\underline{\underline{\varepsilon}}^{EL}$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}^R$ são solução respectivamente do primeiro e segundo problemas auxiliares, o que automaticamente os tornam geometricamente compatíveis. Por outro lado, os campos $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ não necessariamente apresentam compatibilidade geométrica.

A relação entre os campos de deformações macroscópicos $\underline{\underline{E}}^R$ e $\underline{\underline{E}}^e$ ou $\underline{\underline{E}}^v$ não é previamente conhecida. Utilizando-se o lema de Hill em termos cruzados referentes aos primeiro e segundo problemas auxiliares tem-se:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^{EL} : \underline{\underline{\varepsilon}}^R \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}}^{EL} \rangle_{\Omega} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^R \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}}^R \quad (3.46)$$

Alternativamente, esta relação pode ser modificada utilizando $\underline{\underline{\varepsilon}}^R = \mathbb{J}_0 : \underline{\underline{\sigma}}^R + \underline{\underline{\varepsilon}}^v$:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^{EL} : \underline{\underline{\varepsilon}}^R \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}}^{EL} : \mathbb{J}_0 : \underline{\underline{\sigma}}^R \rangle_{\Omega} + \langle \underline{\underline{\sigma}}^{EL} : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} \quad (3.47)$$

Dado que $\underline{\underline{\Sigma}}^R = \langle \underline{\underline{\sigma}}^R \rangle_{\Omega} = 0$, aplicando o lema de Hill no primeiro termo a direita da Eq.(3.47):

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^{EL} : \mathbb{F}_0 : \underline{\underline{\sigma}}^R \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} : \underline{\underline{\sigma}}^R \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} \rangle_{\Omega} : \langle \underline{\underline{\sigma}}^R \rangle_{\Omega} = 0 \quad (3.48)$$

Por fim, aplicando a Eq. (3.42) sobre o segundo termo:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^{EL} : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\Sigma}} : \langle \mathbb{B}_0^v : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} \quad (3.49)$$

Dado que a Eq. (3.46) e Eq. (3.47) são matematicamente equivalentes:

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}}^R = \underline{\underline{\Sigma}} : \langle \mathbb{B}_0^v : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} \quad (3.50)$$

levando a:

$$\underline{\underline{E}}^R = \langle \mathbb{B}_0^v : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{E}}^V \quad (3.51)$$

Resume-se as relações entre campos de deformação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}^{EL} = \underline{\underline{E}}^e \quad ; \quad \underline{\underline{E}}^R = \underline{\underline{E}}^V \quad ; \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} + \underline{\underline{\varepsilon}}^R = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^v \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} = \mathbb{F}_0 : \underline{\underline{\sigma}}^{EL} \quad ; \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^R = \underline{\underline{\varepsilon}}^v + \mathbb{F}_0 : \underline{\underline{\sigma}}^R \quad ; \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^v = \mathbb{F}_0 : \int_0^t \frac{\partial \mathbb{F}(t-\tau)}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.52)$$

Diferentemente do raciocínio desenvolvido na plasticidade por Dormieux et al. (2006), na viscoelasticidade as expressões para as tensões residuais $\underline{\underline{\sigma}}^R$ podem ser obtidas usando as Eq. (3.33), Eq. (3.42) e $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{EL} + \underline{\underline{\sigma}}^R$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^R = [\mathbb{B}^v - \mathbb{B}_0^v] \circ \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.53)$$

Dado que $\langle \underline{\underline{\sigma}}^R \rangle = 0$ é possível inferir que:

$$\langle \mathbb{B}^v \rangle = \langle \mathbb{B}_0^v \rangle \quad (3.54)$$

Usando a expressão $\underline{\underline{\varepsilon}}^R = \mathbb{F}_0 : \underline{\underline{\sigma}}^R + \underline{\underline{\varepsilon}}^v$ obtém-se a expressão para as deformações residuais $\underline{\underline{\varepsilon}}^R$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^R = \underline{\underline{\varepsilon}}^v + \mathbb{F}_0 : [\mathbb{B}^v - \mathbb{B}_0^v] \circ (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^v) : \mathbb{R}_0^{\text{hom}} \quad (3.55)$$

Observa-se que, no contexto apresentado, $\underline{\underline{\varepsilon}}^R$ e $\underline{\underline{\sigma}}^R$ correspondem as deformações e tensões referentes a um descarregamento em tensões $\underline{\underline{\Sigma}} = 0$. Uma solução envolvendo

descarregamento em deformações $\underline{\underline{E}} = 0$ leva aos campos residuais $\underline{\underline{\varepsilon}}_{def}^R$ e $\underline{\underline{\sigma}}_{def}^R$, os quais não condizem necessariamente com os valores residuais apresentados nesta seção.

Embora as expressões de $\underline{\underline{\varepsilon}}^R$ e $\underline{\underline{\sigma}}^R$ já correspondam a uma contribuição teórica ao assunto, a determinação da distribuição espacial destes campos pode ser melhor compreendida resolvendo analítica ou numericamente as expressões apresentadas, não sendo o foco deste trabalho.

3.4.HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAL VISCOELÁSTICO

No contexto da viscoelasticidade linear sem envelhecimento, o comportamento global do material fraturado pode ser obtido por meio da combinação da abordagem micromecânica formulada para a elasticidade (seção 3.2) junto com o princípio da correspondência (seção 2.1.2) entre os domínios de Carson-Laplace e do tempo (Beurthey e Zaoui, 2000; Le et al., 2007). Cabe ressaltar que a solução viscoelástica escrita no domínio de Carson-Laplace consiste exatamente na solução elástica correspondente. Com base nesta abordagem, pode-se escrever o comportamento homogeneizado do material viscoelástico equivalente partindo-se diretamente da solução elástica obtida anteriormente. Supondo-se inicialmente que as fraturas se distribuem paralelamente, pode-se escrever as componentes do tensor de relaxação homogeneizado no espaço de Carson-Laplace $\mathbb{R}^{\text{hom}*}$ por meio de (Aguiar e Maghous, 2018):

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{1111}^{\text{hom}*} &= \mathbb{R}_{2222}^{\text{hom}*} = (3k^{s*} + 4\mu^{s*}) \frac{\kappa_2^* + \pi(1 + 16/3\varepsilon)\kappa_1^*(1 - \kappa_1^*)}{3\kappa_2^* + 3\pi\kappa_1^*(1 - \kappa_1^*) + 4\pi\varepsilon} \\
\mathbb{R}_{3333}^{\text{hom}*} &= (3k^{s*} + 4\mu^{s*}) \frac{\kappa_2^* + \pi\kappa_1^*(1 - \kappa_1^*)}{3\kappa_2^* + 3\pi\kappa_1^*(1 - \kappa_1^*) + 4\pi\varepsilon} \\
\mathbb{R}_{1122}^{\text{hom}*} &= (3k^{s*} - 2\mu^{s*}) \frac{\kappa_2^* + \pi(\kappa_1^* + 8/3\varepsilon)(1 - \kappa_1^*)}{3\kappa_2^* + 3\pi\kappa_1^*(1 - \kappa_1^*) + 4\pi\varepsilon} \\
\mathbb{R}_{1133}^{\text{hom}*} &= \mathbb{R}_{3322}^{\text{hom}*} = (3k^{s*} - 2\mu^{s*}) \frac{\kappa_2^* + \pi\kappa_1^*(1 - \kappa_1^*)}{3\kappa_2^* + 3\pi\kappa_1^*(1 - \kappa_1^*) + 4\pi\varepsilon} \\
\mathbb{R}_{2323}^{\text{hom}*} &= \mathbb{R}_{1313}^{\text{hom}*} = 2\mu^{s*} \frac{4\kappa_3^* + \pi(1 - \kappa_1^*)(1 + 2\kappa_1^*)}{4\kappa_3^* + 16/3\pi\varepsilon(1 - \kappa_1^*) + \pi(1 + 2\kappa_1^*)(1 - \kappa_1^*)} \\
\mathbb{R}_{1212}^{\text{hom}*} &= \mu^{s*}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

onde

$$\kappa_1^* = \frac{3k^{s^*} + \mu^{s^*}}{3k^{s^*} + 4\mu^{s^*}} ; \kappa_2^* = \frac{3k_n^* a}{3k^{s^*} + 4\mu^{s^*}} ; \kappa_3^* = \frac{3k_t^* a}{3k^{s^*} + 4\mu^{s^*}} ; \kappa_4^* = \frac{\mu^{s^*}}{3k^{s^*} + 4\mu^{s^*}} \quad (3.57)$$

Os parâmetros k^{s^*} , μ^{s^*} , k_n^* e k_t^* definem os módulos dos tensores associados ao comportamento mecânico da matriz sólida e das fraturas através da variável p no domínio de Carson-Laplace e são dependentes do modelo reológico de cada constituinte. Modelos reológicos clássicos são apresentados na seção 2.1.3 em função de suas respectivas funções de fluência ou relaxação, as quais podem ser adaptadas para o contexto vigente.

Supondo-se então que as fraturas se distribuem aleatoriamente, pode-se escrever o tensor de relaxação homogeneizado no espaço de Carson-Laplace $\mathbb{R}^{\text{hom}^*}$ como:

$$\mathbb{R}^{\text{hom}^*} = 3k^{\text{hom}^*} \mathbb{J} + 2\mu^{\text{hom}^*} \mathbb{K} \quad (3.58)$$

k^{hom^*} e μ^{hom^*} são os módulos volumétrico e de cisalhamento homogeneizados representados no espaço operacional de Carson-Laplace, representados matematicamente por (Aguar e Maghous, 2018):

$$k^{\text{hom}^*} = \frac{k^{s^*}}{1 + \varepsilon \mathcal{M}_k^*} ; \mu^{\text{hom}^*} = \frac{\mu^{s^*}}{1 + \varepsilon \mathcal{M}_\mu^*} \quad (3.59)$$

As funções $\mathcal{M}_k^*(k^{s^*}, \mu^{s^*}, ak_n^*, ak_t^*)$ e $\mathcal{M}_\mu^*(k^{s^*}, \mu^{s^*}, ak_n^*, ak_t^*)$ são os parâmetros viscosos homólogos à Eq. (3.22), apresentadas no contexto elástico, podendo ser escritos como:

$$\mathcal{M}_k^* = \frac{\frac{4}{3}\pi k^{s^*} / \mu^{s^*}}{\pi \kappa_1^* + ak_n^* / \mu^{s^*}} ; \mathcal{M}_\mu^* = \frac{16\pi \kappa_4^*}{15} \frac{6\kappa_2^* + 4\kappa_3^* + 9\pi \kappa_4^* (3\kappa_1^* + \kappa_4^*)}{(3\pi \kappa_1^* \kappa_4^* + \kappa_2^*) (4\kappa_3^* + 9\pi \kappa_4^* (\kappa_1^* + \kappa_4^*))} \quad (3.60)$$

Deve-se enfatizar que nenhuma restrição referente ao modelo reológico que representa os constituintes foi introduzida até então. Uma vez definidos os modelos reológicos dos constituintes, a expressão de $\mathbb{R}^{\text{hom}^*}$ pode ser analiticamente representada. A aplicação da transformada inversa de Carson-Laplace sobre $\mathbb{R}^{\text{hom}^*}$ permite expressar \mathbb{R}^{hom} no domínio do tempo $\mathbb{R}^{\text{hom}}(t) = \mathcal{L}_c^{-1}(\mathbb{R}^{\text{hom}^*}(p))$.

Vários procedimentos numéricos e analíticos foram desenvolvidos na literatura com o objetivo de abordar a transformada inversa de Laplace e, conseqüentemente, de Carson-Laplace

(ver, por exemplo, Jagerman (1982), Honig e Hirdes (1984), Donolato (2002) ou Ahn et al. (2003)). No entanto, a maioria desses métodos envolve operações matemáticas ou computacionais complexas, uma vez que foram originalmente formuladas para lidar com funções gerais no domínio de Laplace. Em vez disso, um procedimento analítico mais específico será desenvolvido na sequência, atualizando as expressões de Aguiar e Maghous (2018).

3.4.1. Transformada Inversa de Carson-Laplace

O presente raciocínio foi estabelecido para realizar a transformada inversa dos parâmetros k^{hom^*} , μ^{hom^*} e $\mathbb{R}_{ijkl}^{\text{hom}^*}$ anteriormente apresentados. Parte-se inicialmente do princípio de que a transformada inversa de $\mathbb{R}^{\text{hom}^*}$ leva a \mathbb{R}^{hom} no domínio do tempo, representando uma função de relaxação. Na sequência, R^{hom^*} refere-se genericamente a qualquer componente $\mathbb{R}_{ijkl}^{\text{hom}^*}$ não-nula do tensor $\mathbb{R}^{\text{hom}^*}$ ou, no caso específico da isotropia macroscópica, R^{hom^*} indicará o módulo de compressão aparente k^{hom^*} ou o módulo de cisalhamento aparente μ^{hom^*} .

Simplificadamente o raciocínio consiste na representação de $R^{\text{hom}^*}(p)$ por meio de um quociente entre polinômios na variável p o qual permite a aplicação de métodos de fração parcial. Tendo em vista que cada termo resultante tem sua transformada inversa de Laplace tabelada, a função $R^{\text{hom}}(t)$ no domínio do tempo é obtida como uma soma destas transformadas inversas. Observa-se que o cerne do raciocínio consiste justamente em determinar um quociente $R^{\text{hom}^*}(p)$ que permita a segregação por frações parciais. Supondo-se que os constituintes são representados pelos modelos reológicos clássicos com elasticidade inicial (mola, Maxwell, Sólido Linear Padrão, Burger, Maxwell Generalizado ou Kelvin Generalizado), demonstra-se por inspeção que a forma procurada de $R^{\text{hom}^*}(p)$ é sempre possível. Portanto, dentro das limitações impostas sobre os modelos reológicos dos constituintes, sempre é possível encontrar um $R^{\text{hom}^*}(p)$ escrito por meio de:

$$R^{\text{hom}^*}(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \quad (3.61)$$

$A(p)$ e $B(p)$ correspondem a polinômios de mesma ordem, genericamente expressos por:

$$A(p) = \sum_{k=0}^g a_k p^k \quad ; \quad B(p) = \sum_{k=0}^g b_k p^k = \prod_{k=1}^z (p - r_k)^{g_k} \quad \text{com } b_g = 1 \quad (3.62)$$

onde g corresponde ao grau dos polinômios $A(p)$ e $B(p)$. a_k e b_k são os coeficientes reais dos respectivos polinômios, os quais dependem dos modelos reológicos viscoelásticos adotados para a matriz sólida e para as fraturas. O valor z corresponde ao número de polos principais de $B(p)$ enquanto r_k consiste na k -ésima raiz de $B(p)$ com correspondente multiplicidade g_k .

Abordagens tradicionais do método de frações parciais demandam que o polinômio $A(p)$ tenha ordem inferior ao polinômio $B(p)$. Tal necessidade pode ser contornada ao transformar $R^{\text{hom}*}(p)$ do domínio de Carson-Laplace em $R^{\text{hom } \mathcal{L}}(p)$ no domínio de Laplace:

$$R^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{R^{\text{hom}*}(p)}{p} = \frac{A(p)}{pB(p)} \quad (3.63)$$

Aplicando qualquer método de frações parciais sobre $R^{\text{hom } \mathcal{L}}(p)$, dado $g_k = 1 \forall k \leq g$, obtém-se:

$$R^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{a_0}{p \prod_{k=1}^g (-r_k)} + \sum_{n=1}^g \frac{A(r_n)}{r_n \left. \frac{\partial B(p)}{\partial p} \right|_{p=r_n} (p - r_n)} \quad (3.64)$$

Realizadas as devidas simplificações, $R^{\text{hom}*}(p)$ é escrito como:

$$R^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{a_0}{p b_0} + \sum_{n=1}^g \frac{A(r_n)}{(p - r_n) r_n \left. \frac{\partial B(p)}{\partial p} \right|_{p=r_n}} \quad (3.65)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na Eq.(3.65):

$$R^{\text{hom}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(R^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) \right) = \frac{a_0}{b_0} H(t) + \sum_{n=1}^g \frac{A(r_n)}{r_n \left. \frac{\partial B(p)}{\partial p} \right|_{p=r_n}} e^{r_n t} H(t) \quad (3.66)$$

onde $H(t)$ corresponde a função de Heaviside. Deve-se ter em mente que a função de relaxação genérica $R^{\text{hom}}(t)$ refere-se a qualquer componente não nula do tensor de relaxação \mathbb{R}^{hom} ou, no caso de isotropia macroscópica, aos módulos $k^{\text{hom}}(t)$ e $\mu^{\text{hom}}(t)$. Neste último caso, o tensor de relaxação homogeneizado pode ser escrito como:

$$\mathbb{R}^{\text{hom}}(t) = 3k^{\text{hom}}(t)\mathbb{J} + 2\mu^{\text{hom}}(t)\mathbb{K} \quad (3.67)$$

onde

$$k^{\text{hom}}(t) = \frac{a_0^k}{b_0^k} H(t) + \sum_{n=1}^g \frac{A^k(r_n^k)}{r_n^k \left. \frac{\partial B^k(p)}{\partial p} \right|_{p=r_n^k}} e^{r_n^k t} H(t) \quad (3.68)$$

$$\mu^{\text{hom}}(t) = \frac{a_0^\mu}{b_0^\mu} H(t) + \sum_{n=1}^g \frac{A^\mu(r_n^\mu)}{r_n^\mu \left. \frac{\partial B^\mu(p)}{\partial p} \right|_{p=r_n^\mu}} e^{r_n^\mu t} H(t) \quad (3.69)$$

Deve-se observar que, exceto pela determinação das raízes r_n do polinômio $B(p)$, todo procedimento foi desenvolvido de forma analítica, não acrescentando mais restrições além das necessárias para obtenção da forma de $R^{\text{hom}*}(p)$. Para fins ilustrativos, o **Anexo A** fornece expressões de $A_k(p)$, $B_k(p)$, $A_\mu(p)$ e $B_\mu(p)$ considerando o modelo de Maxwell para a matriz sólida bem como fissuras ou fraturas elásticas, os quais permitem identificar por meio da Eq. (3.68) e da Eq. (3.69) os respectivos módulos no domínio do tempo.

Um raciocínio análogo pode ser realizado para as respectivas funções de fluência. Neste sentido busca-se novamente uma forma:

$$F^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{F^{\text{hom}*}(p)}{p} = \frac{A(p)}{pB(p)} \quad (3.70)$$

A principal diferença com relação ao procedimento descrito anteriormente refere-se ao polinômio $B(p)$, cujo termo independente vale sempre $b_0 = 0$ (verificado por inspeção para os modelos indicados no início desta seção), levando $B(p)$ a possuir sempre uma raiz nula. Além disso, por simplicidade $b_g = 1$. Faz-se necessário uma adaptação da Eq. (3.70) para:

$$F^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{F^{\text{hom } *}(p)}{p} = \frac{A(p)}{p^2 B^*(p)} \quad \text{com} \quad B^*(p) = \frac{B(p)}{p} \quad (3.71)$$

Desta forma fica evidenciado o termo p^2 no denominador, levando a uma raiz dupla nula. Observa-se que o polinômio $B^*(p)$ apresenta grau $g - 1$. Assim, adaptando qualquer método de frações parciais para atender tal condição, chega-se a solução

$$F^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{a_1 \prod_{k=1}^{g-1} (-r_k^*) - a_0 \sum_{n=1}^{g-1} \frac{\prod_{k=1}^{g-1} (-r_k^*)}{r_n^*}}{p \left(\prod_{k=1}^{g-1} (-r_k^*) \right)^2} + \frac{a_0}{p^2 \prod_{k=1}^{g-1} (-r_k^*)} + \sum_{n=1}^{g-1} \frac{A(r_n^*)}{r_n^{*2} \frac{\partial B^*(p)}{\partial p} \Big|_{p=r_n^*}} (p - r_n^*) \quad (3.72)$$

onde r_k^* é a k -ésima raiz do polinômio $B^*(p)$. Realizadas as devidas simplificações, sobre a Eq. (3.72) tem-se:

$$F^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{a_1 b_1 - a_0 b_2}{p b_1^2} + \frac{a_0}{p^2 b_1} + \sum_{n=1}^{g-1} \frac{A(r_n^*)}{r_n^{*2} \frac{\partial B^*(p)}{\partial p} \Big|_{p=r_n^*}} (p - r_n^*) \quad (3.73)$$

Por fim, aplicando-se a transformada de Laplace chega-se a:

$$F^{\text{hom}}(t) = \frac{a_1 b_1 - a_0 b_2}{b_1^2} H(t) + \frac{a_0}{b_1} t H(t) + \sum_{n=1}^{g-1} \frac{A(r_n^*)}{r_n^{*2} \frac{\partial B^*(p)}{\partial p} \Big|_{p=r_n^*}} e^{r_n^* t} H(t) \quad (3.74)$$

Deve-se ter em mente que a função de fluência genérica $F^{\text{hom}}(t)$ refere-se a qualquer componente não nula do tensor de fluência \mathbb{F}^{hom} .

3.4.2. Modelo Reológico Homogeneizado

Uma análise comparativa da Eq. (3.66) com a Eq. (2.23) permite evidenciar que a expressão da função de relaxação homogeneizada retrata o **modelo reológico de Maxwell generalizado** (Figura 2.12.a) com um primeiro segmento puramente elástico. A comparação entre estas duas funções leva às seguintes igualdades:

$$E_0 = \frac{a_0}{b_0} ; \eta_0 \rightarrow \infty ; E_n = \frac{A(r_n)}{r_n \left. \frac{\partial B(p)}{\partial p} \right|_{p=r_n}} ; \eta_n = - \frac{A(r_n)}{r_n^2 \left. \frac{\partial B(p)}{\partial p} \right|_{p=r_n}} \quad (3.75)$$

Observa-se que o número de segmentos corresponde a $g + 1$ (incluindo o segmento puramente elástico), o qual é função da combinação dos modelos reológicos dos componentes na escala microscópica.

Tal raciocínio permite estabelecer as propriedades mecânicas de cada um dos componentes (molas e amortecedores) do modelo generalizado de Maxwell resultante. Desta forma, o raciocínio apresentado constitui uma forma consistente de representação reológica do material homogeneizado através do comportamento reológico particular dos constituintes (matriz sólida e heterogeneidades), utilizando a teoria da micromecânica.

É importante notar que as raízes r_k sempre devem ser reais e negativas, tal condição não impede a realização da transformada inversa pelo método acima descrito, no entanto, a solução do sistema levaria a parâmetros E_n e η_n complexos e/ou negativos, não representando parâmetros com significado físico. Nota-se, entretanto, que diversas avaliações numéricas utilizando uma ampla gama de diferentes modelos reológicos para os constituintes, cujos parâmetros foram os mais diversos possíveis, não apresentaram resultados com valores de r_k complexos ou positivos. É difícil de demonstrar analiticamente que r_k é sempre real e negativo para o caso geral (dado que a ordem dos polinômios resultantes pode superar 4 com facilidade, impedindo soluções analíticas), contudo, demonstrou-se no **Anexo A** para o caso “matriz sólida de Maxwell e fissuras” (único caso em que tanto o módulo volumétrico quanto o módulo de cisalhamento apresentam solução analítica) que as raízes r_k são sempre reais e negativas.

O procedimento de transformada inversa acima apresentado não pode, a priori, ser utilizado para casos no qual tem-se multiplicidade das raízes r_k (i.e. $g_k \neq 1$), tornando-se necessário deduzir as devidas equações considerando tal possibilidade (ver **Anexo A**). Tal solução leva a adição de parcelas de correção transiente do tipo:

$$\sum_{g=1}^{g_k} C_g t^g e^{-r_k t} H(t) \quad (3.76)$$

cujo valor máximo de cada termo da soma encontra-se em $t = g/r_k$. Observa-se que para $t = 0$ e $t = \infty$ estas parcelas são matematicamente nulas. Estas parcelas não podem ser representadas através do modelo generalizado de Maxwell. Ainda assim, verifica-se numericamente que estes termos podem ser negligenciados sem que haja perda de precisão do modelo resultante, podendo então descrever a solução por um modelo generalizado de Maxwell novamente. Embora tal proposição não seja fácil de demonstrar analiticamente para o caso geral, a solução para o caso “matriz sólida de Maxwell e fissuras” (o qual apresenta solução analítica), apresentada no **Anexo A**, expõem que $C_g = 0 \forall g > 0$.

Por fim, nota-se que o espectro de relaxação associado ao comportamento viscoelástico do meio homogeneizado permanece discreto. Isso provavelmente está relacionado ao esquema de homogeneização particular adotado acrescido da modelagem de fraturas como interfaces 2D, o que equivale a desconsiderar os efeitos geométricos 3D das inclusões. Note que as raízes do polinômio representam (em valor absoluto) o inverso dos tempos de relaxação característicos para o comportamento macroscópico e, como tal, são todos escalares negativos.

3.4.3. Modelo Aproximado de Burger para o Comportamento Viscoelástico Efetivo

Para estudos práticos, é conveniente representar o material homogeneizado por meio de um modelo matematicamente mais simples. Nguyen et al. (2011) e Nguyen e Dormieux (2014) desenvolveram uma técnica que permite aproximar o comportamento homogeneizado do material por um modelo reológico de Burger, a qual foi generalizada nesta seção para permitir descrever fenômenos decorrentes da transmissão de esforços nas fraturas (desconsiderados por Nguyen e coautores). A principal vantagem de operar com modelos simplificados é evitar a complexidade da transformada inversa de Laplace, permitindo uma solução puramente analítica onde as raízes r_n não precisam ser avaliadas.

A metodologia será ilustrada aqui no caso particular de um material com distribuição aleatória de fraturas. Em tal situação, o comportamento isotrópico do meio homogeneizado é definido pela função de relaxação volumétrica e pela função de relaxação em cisalhamento (Eq. (3.58) e Eq. (3.59)). Atenta-se, contudo, que este procedimento foi desenvolvido partindo-se da suposição de que os módulos volumétrico k^{s*} e de cisalhamento μ^{s*} da matriz sólida são descritos por meio do modelo de Burger:

$$\frac{1}{k^{s*}(p)} = \frac{1}{k_{e,M}^s} + \frac{1}{p k_{v,M}^s} + \frac{1}{k_{e,K}^s + p k_{v,K}^s} ; \quad \frac{1}{\mu^{s*}(p)} = \frac{1}{\mu_{e,M}^s} + \frac{1}{p \mu_{v,M}^s} + \frac{1}{\mu_{e,K}^s + p \mu_{v,K}^s} \quad (3.77)$$

Os parâmetros do modelo aproximado de Burger (k^{app*} e μ^{app*}) são descritos por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^{app*}(p)} &= \frac{1}{k_{e,M}^{app}} + \frac{1}{p k_{v,M}^{app}} + \frac{1}{k_{e,K}^{app} + p k_{v,K}^{app}} \\ \frac{1}{\mu^{app*}(p)} &= \frac{1}{\mu_{e,M}^{app}} + \frac{1}{p \mu_{v,M}^{app}} + \frac{1}{\mu_{e,K}^{app} + p \mu_{v,K}^{app}} \end{aligned} \quad (3.78)$$

A ideia da aproximação consiste basicamente em comparar, no domínio de Carson-Laplace, as expressões analíticas de k^{hom*} e μ^{hom*} com aquelas associadas ao modelo aproximado:

$$\frac{1}{k^{hom*}} \approx \frac{1}{k^{app*}} ; \quad \frac{1}{\mu^{hom*}} \approx \frac{1}{\mu^{app*}} \quad (3.79)$$

Obviamente a Eq. (3.79) não pode ser satisfeita rigorosamente para qualquer valor estipulado aos parâmetros. Em vez disso, o modelo aproximado de Burger é formulado de tal forma que coincide com o comportamento efetivo a curto ($t \rightarrow 0$) e a longo ($t \rightarrow \infty$) prazo. Visto que tais igualdades estão sendo realizadas no domínio de Carson-Laplace, usa-se para quaisquer funções $t \rightarrow u(t)$ dependentes do tempo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{p \rightarrow 0} u^*(p) ; \quad \lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} u^*(p) \quad (3.80)$$

Conseqüentemente, as equivalências a curto e longo prazo são avaliadas considerando a expansão em séries da Eq. (3.79) respectivamente nas vizinhanças de $p \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$. Dada a Eq.(3.59), escreve-se $1/k^{hom*}$ e $1/\mu^{hom*}$ na vizinhança $p \rightarrow 0$ como:

$$\frac{1}{k^{hom*}} = \frac{K_{-1}^0}{p} + K_0^0 + \mathcal{O}(p) ; \quad \frac{1}{\mu^{hom*}} = \frac{M_{-1}^0}{p} + M_0^0 + \mathcal{O}(p) \quad (3.81)$$

As funções $K_{-1}^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_0^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_{-1}^0(\varepsilon, \mathcal{N})$ e $M_0^0(\varepsilon, \mathcal{N})$ são analiticamente expressas em função do modelo reológico destinado a representar as fraturas. No entanto, na maioria das situações de modelo viscoelástico para fraturas, as soluções analíticas revelam-se

muito extensas e complexas, não sendo, portanto, apresentadas neste trabalho. Por sua vez, as expansões de séries para o modelo Burger aproximado são:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^{app*}(p)} &= \frac{1}{k_{e,M}^{app}} + \frac{1}{p k_{v,M}^{app}} + \frac{1}{k_{e,K}^{app}} + \mathcal{O}(p) \\ \frac{1}{\mu^{app*}(p)} &= \frac{1}{\mu_{e,M}^{app}} + \frac{1}{p \mu_{v,M}^{app}} + \frac{1}{\mu_{e,K}^{app}} + \mathcal{O}(p)\end{aligned}\quad (3.82)$$

Reproduzindo o mesmo raciocínio na vizinhança de $p \rightarrow \infty$, as expansões em série de $1/k^{\text{hom}*}$ e $1/\mu^{\text{hom}*}$ são escritas como:

$$\frac{1}{k^{\text{hom}*}} = K_0^\infty + \frac{K_{-1}^\infty}{p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right) ; \quad \frac{1}{\mu^{\text{hom}*}} = M_0^\infty + \frac{M_{-1}^\infty}{p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad (3.83)$$

Mais uma vez, as expressões de $K_{-1}^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_0^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_{-1}^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$ e $M_0^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$ requerem o conhecimento do modelo reológico aplicado às fraturas, sendo demasiadamente extensas para serem representadas. Para fins ilustrativos, o **Anexo B** fornece expressões para fissuras e fraturas elásticas das variáveis definidas no modelo de Burger aproximado ($K_{-1}^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_0^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_{-1}^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_0^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_{-1}^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_0^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_{-1}^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$ e $M_0^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$). Por sua vez, as expansões de séries para o modelo Burger aproximado são:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^{app*}(p)} &= \frac{1}{k_{e,M}^{app}} + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{k_{v,M}^{app}} + \frac{1}{k_{v,K}^{app}} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right) \\ \frac{1}{\mu^{app*}(p)} &= \frac{1}{\mu_{e,M}^{app}} + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\mu_{v,M}^{app}} + \frac{1}{\mu_{v,K}^{app}} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right)\end{aligned}\quad (3.84)$$

Dado que o modelo de Burger aproximado foi estabelecido para obter uma boa aproximação em curto e longo prazo, comparam-se as expansões em séries em $t \rightarrow 0$ (Eq. (3.83) e Eq.(3.84)) bem como em $t \rightarrow \infty$ (Eq. (3.81) e Eq.(3.82)), levando as seguintes relações:

$$\begin{aligned}K_{-1}^0 &= \frac{1}{k_{v,M}^{app}} = ; \quad K_0^0 = \frac{1}{k_{e,M}^{app}} + \frac{1}{k_{e,K}^{app}} ; \quad M_{-1}^0 = \frac{1}{\mu_{v,M}^{app}} ; \quad M_0^0 = \frac{1}{\mu_{e,M}^{app}} + \frac{1}{\mu_{e,K}^{app}} \\ K_{-1}^\infty &= \frac{1}{k_{e,M}^{app}} ; \quad K_0^\infty = \frac{1}{k_{v,M}^{app}} + \frac{1}{k_{v,K}^{app}} ; \quad M_{-1}^\infty = \frac{1}{\mu_{e,M}^{app}} ; \quad M_0^\infty = \frac{1}{\mu_{v,M}^{app}} + \frac{1}{\mu_{v,K}^{app}}\end{aligned}\quad (3.85)$$

Os parâmetros do modelo de Burger aproximados escrevem-se então:

$$\begin{aligned}
k_{e,M}^{app} &= \frac{1}{K_0^\infty} ; & k_{v,M}^{app} &= \frac{1}{K_{-1}^0} ; & k_{e,K}^{app} &= \frac{1}{K_0^0 - K_0^\infty} ; & k_{v,K}^{app} &= \frac{1}{K_{-1}^\infty - K_{-1}^0} \\
\mu_{e,M}^{app} &= \frac{1}{M_0^\infty} ; & \mu_{v,M}^{app} &= \frac{1}{M_{-1}^0} ; & \mu_{e,K}^{app} &= \frac{1}{M_0^0 - M_0^\infty} ; & \mu_{v,K}^{app} &= \frac{1}{M_{-1}^\infty - M_{-1}^0}
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Dado que o raciocínio foi desenvolvido igualando o comportamento exato e aproximado em curto e longo prazo, espera-se que estes resultados coincidam quando $t \rightarrow 0$ e $t \rightarrow \infty$. Em regimes transientes, contudo, desvios em relação a solução real são esperados. Estes desvios tendem a aumentar em função da complexidade do modelo reológico das fraturas. O **Anexo C** apresenta gráficos onde a solução aproximada é comparada com a solução esperada supondo-se diferentes modelos reológicos às fraturas. Tal anexo demonstra uma excelente precisão quando modelos de fissuras são utilizadas, apresentando precisão reduzida à medida que os modelos das fraturas se tornam mais complexos. Ressalta-se que este modelo foi desenvolvido considerando que a matriz sólida segue o modelo reológico de Burger. A extrapolação deste raciocínio para modelos homogeneizados aproximados de Kelvin-Voigt ou Maxwell pode ser realizada, contanto que a matriz sólida siga o mesmo modelo reológico. Esta extensão pode ser diretamente avaliada por meio do procedimento acima descrito, avaliando o limite com propriedades específicas tendendo a zero ou infinito. Um exemplo voltado ao modelo reológico generalizado de Kelvin é dado em Nguyen (2014).

Deve-se ter em mente que todo o raciocínio aqui estabelecido tem validade restrita a micro-fraturas. A determinação do comportamento mecânico homogeneizado para materiais viscoelásticos com fraturas de grandes dimensões (i.e., superiores ao tamanho do VER), pode ser realizada diretamente no domínio do tempo, sem a necessidade de recorrer a transformada de Laplace-Carson. Tal formulação pode ser acessada em Maghous et al. (2021).

3.5. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

A presente seção visa representar graficamente os comportamentos referentes aos materiais viscoelásticos homogeneizados obtidos nas seções anteriores. Por razão de simplicidade, será adotado $\mathcal{N} = 1$ para todas as situações subseqüentes e, exceto quando explicitado o contrário, o valor do parâmetro de dano será dado como $\varepsilon = 0.1$. Além disso são adotados valores constantes para as propriedades de todos os modelos que representam os constituintes (matriz sólida e fraturas). Em outras palavras, apenas as propriedades relativas ao

modelo reológico mais genérico (Burger para a matriz e Maxwell para as fraturas) são apresentadas, sendo os demais modelos obtidos segundo a adaptação deste modelo, anulando ou tendendo ao infinito determinadas propriedades e mantendo idênticas todas as demais. As propriedades referentes ao modelo de Burger da matriz (dadas em $\{GPa\}$ ou $\{GPa\} \cdot \{ano\}$) e modelo de Maxwell das fraturas (dadas em $\{GPa\}/\{m\}$ ou $\{GPa\} \cdot \{ano\}/\{m\}$) são:

$$\begin{aligned} k_{e,M}^s &= 24.4 \quad ; \quad k_{v,M}^s = 23.2 \quad ; \quad k_{e,K}^s = 39.3 \quad ; \quad k_{v,K}^s = 1.6 \\ \mu_{e,M}^s &= 13.3 \quad ; \quad \mu_{v,M}^s = 12.3 \quad ; \quad \mu_{e,K}^s = 14.1 \quad ; \quad \mu_{v,K}^s = 0.4 \\ k_n^e &= 42.2 \quad ; \quad k_n^v = 22.2 \quad ; \quad k_t^e = 16.9 \quad ; \quad k_t^v = 8.9 \end{aligned} \quad (3.87)$$

Primeiramente considera-se o caso em que as fraturas são distribuídas aleatoriamente. Tal situação leva à isotropia em nível macroscópico, cujo comportamento mecânico é descrito pela Eq.(3.67). O comportamento isotrópico e em cisalhamento são individualmente analisados considerando individualmente carregamentos isotrópicos e desviadores.

O **carregamento isotrópico** será definido por meio da deformação macroscópica $\underline{\underline{E}} = E(t) \underline{\underline{1}}$, levando a um estado de tensões macroscópicas da forma $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma(t) \underline{\underline{1}}$. De acordo com a Eq. (3.31) e Eq.(3.67):

$$\underline{\underline{\Sigma}} = 3k^{\text{hom}} \circ E \quad (3.88)$$

O módulo de relaxação volumétrico pode ser deduzido considerando o teste de relaxação definido pela aplicação de deformações constantes macroscópicas $E(t) = E_0 H(t)$ aplicada em $t = 0$:

$$\frac{\underline{\underline{\Sigma}}}{3E_0} = k^{\text{hom}} = \mathcal{L}_c^{-1}(k^{\text{hom}*}) \quad (3.89)$$

onde \mathcal{L}_c^{-1} representa a transformada inversa de Carson-Laplace e $k^{\text{hom}*}$ é dado na Eq.(3.59).

A determinação da função de fluência volumétrica F_k^{hom} pode ser realizada por meio da transformada inversa do inverso matemático de $k^{\text{hom}*}$, isso é:

$$F_k^{\text{hom}} = \mathcal{L}_c^{-1}(1/k^{\text{hom}*}) \quad (3.90)$$

A Figura 3.5.a que segue retrata a variação temporal do módulo volumétrico em relaxação k^{hom} e fluência F_k^{hom} homogeneizados em função do modelo reológico adotado para representar as fraturas. Observa-se que as figuras se encontram normalizadas em função do respectivo módulo instantâneo para o material intacto $k^s(t=0)$. Observa-se que as figuras apenas se estenderam até $t=1$ ano e que $\lim_{t \rightarrow \infty} k^{\text{hom}} = 0$ quando o modelo de Burger é adotado para a matriz sólida. A presença de discontinuidades reduziu (aumentou) significativamente o módulo de relaxação (fluência), apresentando um limite mínimo (máximo) relativo às discontinuidades modeladas através de fissuras. Nota-se também a presença de um limite máximo (mínimo) relativo ao material intacto. Quando comportamentos viscoelásticos são atribuídos às fraturas, observa-se uma variação das taxas de relaxação (fluência) em relação ao comportamento modelado por fraturas elásticas.

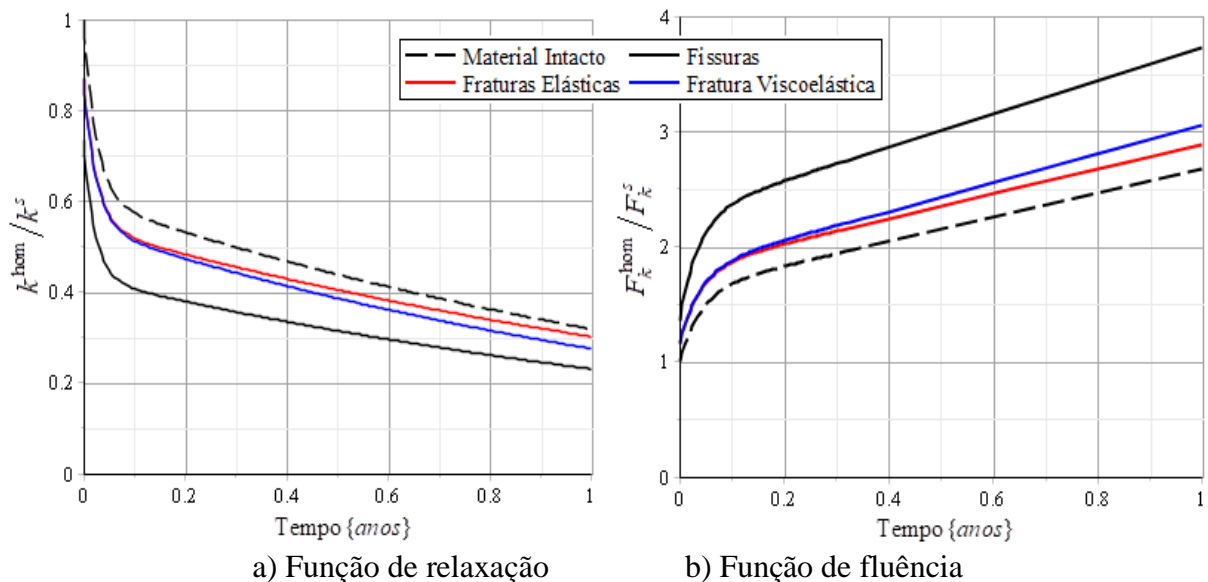
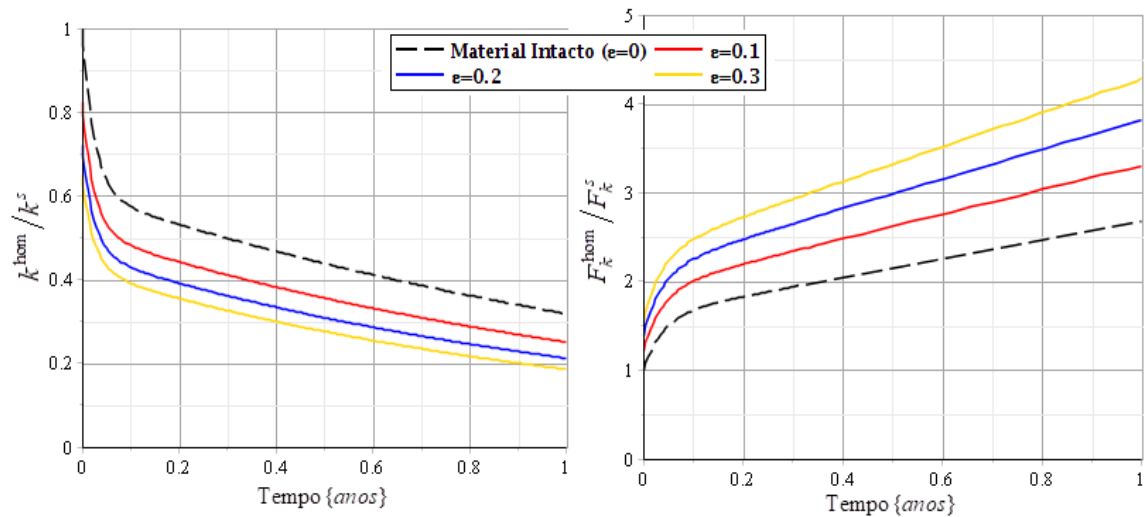


Figura 3.5: Evolução das funções de fluência e relaxação homogeneizadas em compressão.

A Figura 3.5 utiliza um valor fixo para o parâmetro de dano, estudando com isso a influência dos modelos reológicos utilizados para as fraturas no comportamento homogeneizado. Uma análise inversa, adotando o modelo reológico de Maxwell às fraturas, pode ser realizada para estudar a influência do parâmetro de dano ε , a qual é exibida na Figura 3.6. Tal como o esperado, à medida que o parâmetro de dano aumenta, maiores as flutuações (redução da relaxação e aumento da fluência) em relação ao comportamento do material intacto.

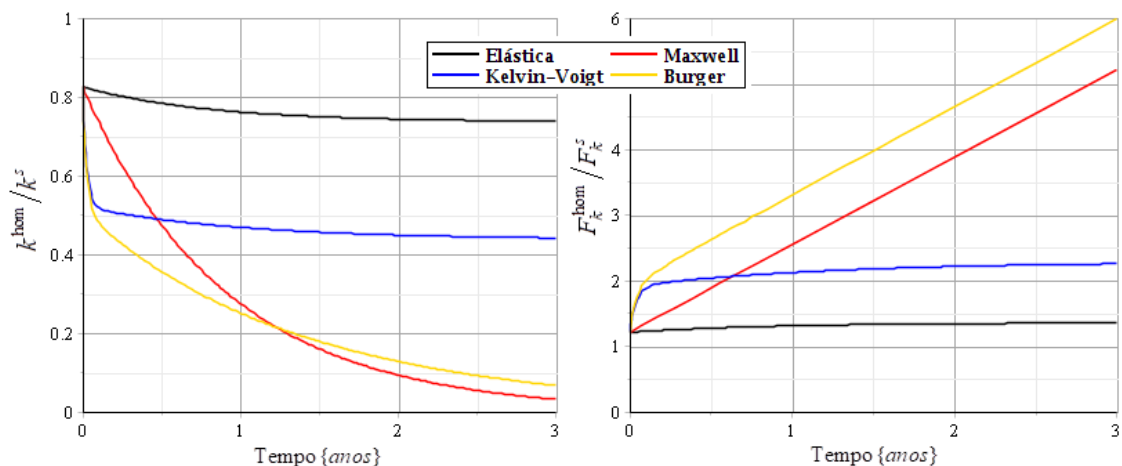


a) Função de relaxação

b) Função de fluência

Figura 3.6: Influência do parâmetro de dano no comportamento homogeneizado.

Finalmente, a influência do modelo da matriz pode ser estudada mantendo-se constantes o modelo reológico das fraturas (modelo de Maxwell) e o parâmetro de dano. Observa-se claramente na Figura 3.7 a importância do comportamento da matriz sobre o meio homogeneizado, induzindo uma tendência de o comportamento efetivo retratar o modelo adotado para a matriz sólida. Tal tendência, contudo, pode ser alterada na presença de parâmetros de dano mais elevados.



a) Função de relaxação

b) Função de fluência

Figura 3.7: Influência do modelo reológico da matriz na evolução das funções de fluência e de relaxação homogeneizadas em compressão.

Para o estudo das respectivas funções em cisalhamento, induz-se um **carregamento desviador**. Referindo-se a um sistema de eixos cartesianos definido por $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ o carregamento aplicado assume a forma $\underline{\underline{E}} = E(t)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)$, cuja deformação constante

responsável pela determinação de μ^{hom} é dada por $E(t) = E_0 H(t)$. Tal carregamento induz o seguinte resultado:

$$\Sigma = 2\mu^{\text{hom}} \circ E \quad \text{e} \quad \frac{\Sigma}{2E_0} = \mu^{\text{hom}} = \mathcal{L}_c^{-1}(\mu^{\text{hom}*}) \quad (3.91)$$

Analogamente, a função de fluência em cisalhamento F_k^{hom} é determinada por meio de:

$$F_\mu^{\text{hom}} = \mathcal{L}_c^{-1}(1/\mu^{\text{hom}*}) \quad (3.92)$$

A Figura 3.8 a seguir retrata a variação temporal dos módulos de cisalhamento em relaxação μ^{hom} e fluência F_μ^{hom} homogeneizados em função do modelo reológico adotado para representar as fraturas. Novamente, as funções encontram-se normalizadas pelo respectivo módulo instantâneo do material intacto $\mu^s(t=0)$. Dado que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu^{\text{hom}} = 0$, as mesmas restrições sobre o período de tempo retratado são utilizadas. Embora as flutuações das propriedades em cisalhamento tenham tido menor variação, as mesmas conclusões obtidas com relação a Figura 3.5 são possíveis.

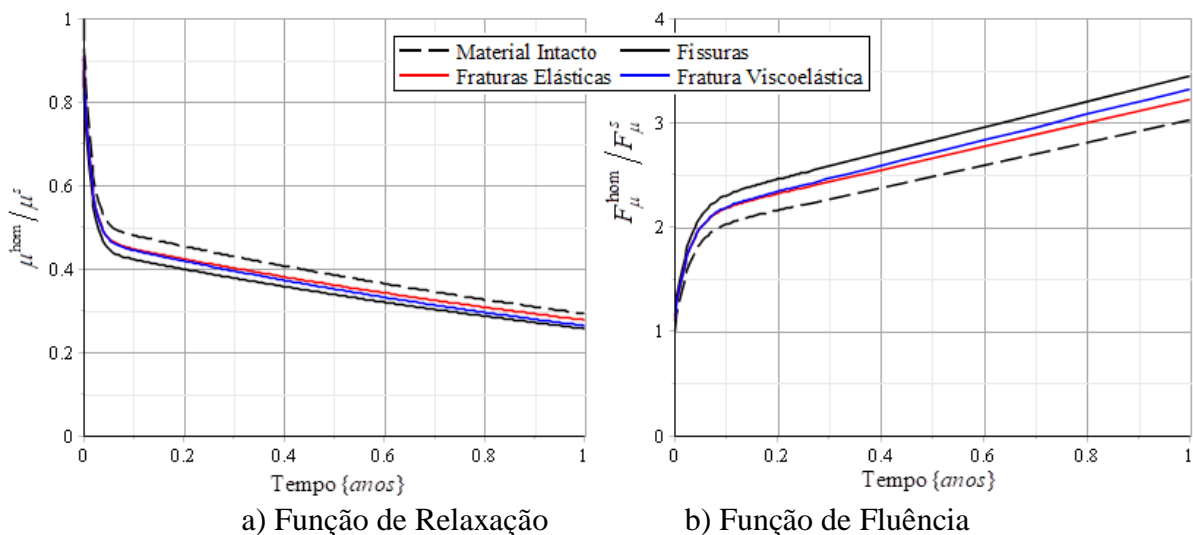


Figura 3.8: Evolução das funções de fluência e de relaxação homogeneizadas em cisalhamento.

Por fim, de forma similar aos exemplos anteriores, modelos com **distribuição paralela de fraturas** podem ser estudados. Impondo-se deformações macroscópicas uniaxiais na forma

$\underline{\underline{E}} = E_0 H(t) \underline{n} \otimes \underline{n}$, onde \underline{n} retrata o vetor normal às fraturas, leva a seguinte expressão para as tensões macroscópicas:

$$\Sigma_{nn} = E_0 \underline{n} \otimes \underline{n} : \mathbb{R}^{\text{hom}} : \underline{n} \otimes \underline{n} \rightarrow \frac{\Sigma_{nn}}{E_0} = E_{\text{oed}}^{\text{hom}}(t) = \underline{n} \otimes \underline{n} : \mathcal{L}_c^{-1}(\mathbb{R}^{\text{hom}*}) : \underline{n} \otimes \underline{n} \quad (3.93)$$

onde $E_{\text{oed}}^{\text{hom}}$ é o módulo odométrico efetivo em relaxação segundo a direção \underline{n} . Dada a direção das fraturas \underline{n} paralela ao eixo global e_3 , o módulo odométrico representado consiste em $\mathbb{R}_{3333}^{\text{hom}}$. O correspondente parâmetro em fluência pode ser estudado por meio de:

$$F_n^{\text{hom}}(t) = \underline{n} \otimes \underline{n} : \mathcal{L}_c^{-1}(\mathbb{F}^{\text{hom}*}) : \underline{n} \otimes \underline{n} \quad \text{com} \quad \mathbb{F}^{\text{hom}*} = [\mathbb{R}^{\text{hom}*}]^{-1} \quad (3.94)$$

A Figura 3.9 a seguir retrata a variação temporal de $E_{\text{oed}}^{\text{hom}}$ e F_n^{hom} homogeneizados em função do modelo reológico adotado para representar as fraturas. Novamente, as funções encontram-se normalizadas pelo respectivo parâmetro instantâneo escrito para o material intacto, onde $E_{\text{oed}}^s(0) = k_{e,M}^s + \frac{4}{3} \mu_{e,M}^s$ e $F_n^s(0) = 1/E_{\text{oed}}^s(0)$. As mesmas conclusões provenientes dos exemplos anteriores podem ser retiradas, demonstrando um bom condicionamento do comportamento efetivo.

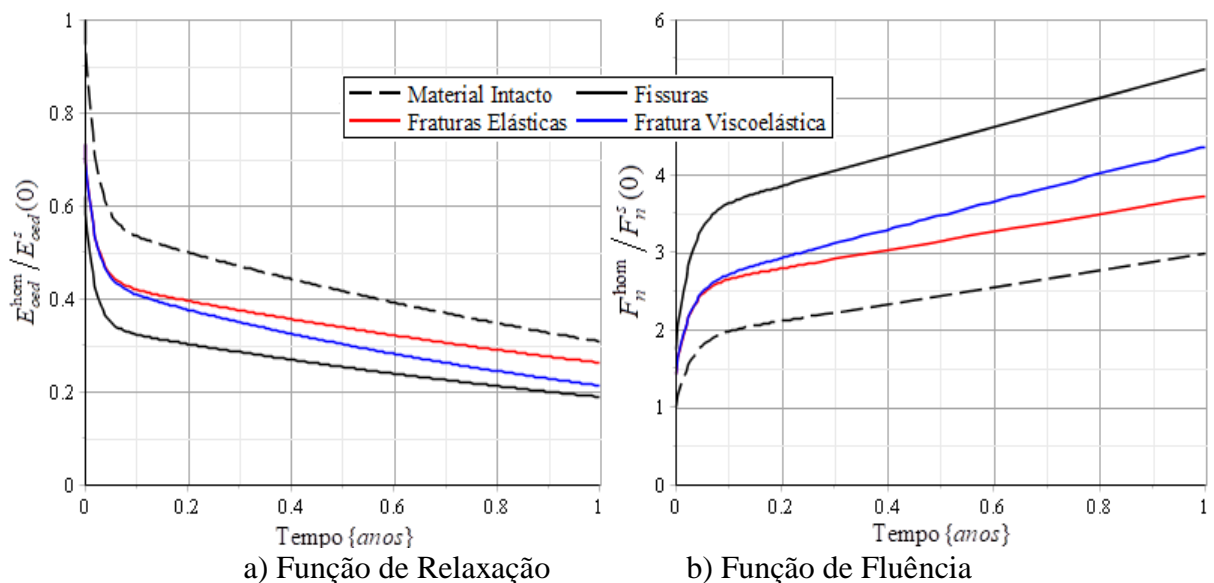


Figura 3.9: Evolução das funções de fluência e de relaxação normais homogeneizadas para fraturas paralelamente orientadas.

Outas aplicações podem ser consultadas em Aguiar e Maghous (2018).

3.6. VALIDAÇÃO DO MODELO MICROMECAÂNICO

A presente seção visa comparar o modelo constitutivo micromecânico desenvolvido na seção 3 com dados experimentais extraídos de ensaios de fluência uniaxiais oriundos de diferentes referências. O procedimento desenvolvido em todas as aplicações seguintes consiste em ajustar os parâmetros do modelo micromecânico desenvolvido por meio de curvas experimentais de deformação axial X tempo para um determinado nível de carregamento em tensões. Em seguida, as demais curvas experimentais para deformação axial são comparadas com as previsões realizadas pelo modelo ajustado para os demais níveis de carregamento. Na presente seção, toda análise é desenvolvida sobre o material homogeneizado (isso é, na escala macroscópica). Desta forma, sob o intuito de simplificar a notação, a distinção entre tensões/deformações microscópicas e macroscópicas (i.e., $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e $\underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{\sigma}}$ e $\underline{\underline{\Sigma}}$) será omitida, de forma que apenas a notação habitual minúscula será utilizada.

Algumas observações importantes devem ser realizadas. Primeiramente, o modelo micromecânico foi desenvolvido para a modelagem de materiais viscoelásticos lineares sem envelhecimento. Neste aspecto, materiais com envelhecimento (tal como o concreto em idades iniciais) não podem ser modelados. Adicionalmente, por razões operacionais, a maioria dos ensaios envolvendo geomateriais são realizados em compressão, levando a um trecho de comportamento (tensão x deformação) não-linear para níveis de tensões suficientemente baixos. A razão deste comportamento frequentemente é atribuída ao fechamento de fraturas existentes em geomateriais (Hou et al., 2019). À medida que as tensões se elevam as deformações por fechamento de fratura tendem a se estabilizar, levando o comportamento a um domínio linear. A Figura 3.9 ilustra o teste de comportamento na fase elástica em ensaios caracterizando o comportamento instantâneo de materiais.

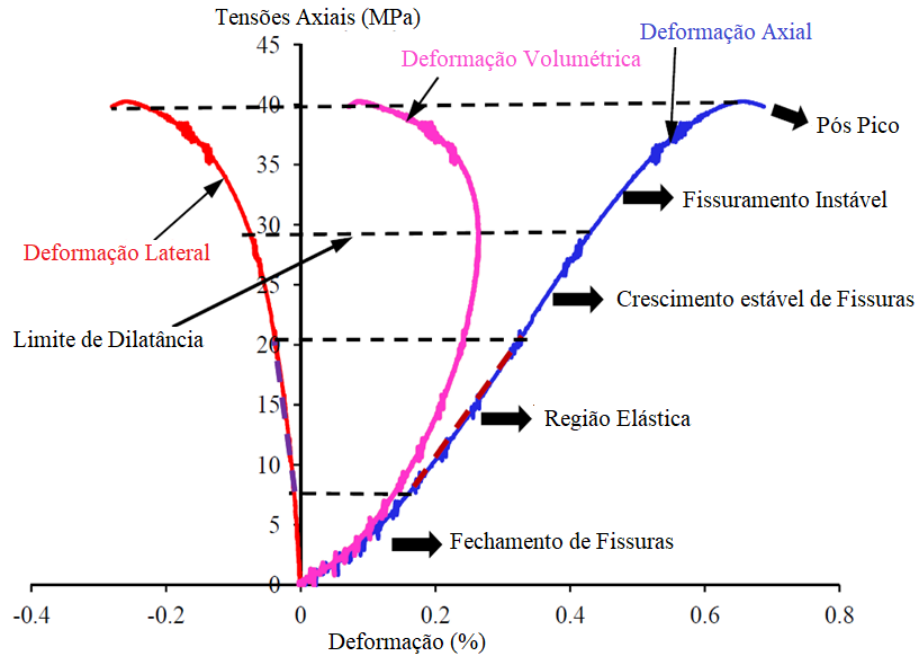


Figura 3.10: Curva típica de tensão x deformação de geomateriais (Hou et al., 2019).

Ainda que ensaios em tração envolvendo geomateriais sejam mais escassos, tais não-linearidades iniciais eventualmente podem ser observadas, creditadas agora a abertura parcial das fraturas. Decorre que quando geomateriais são extraídos, a amostra torna-se livre de esforços externos, tendendo a uma configuração onde fraturas não estão totalmente abertas nem fechadas. Neste sentido, baixos carregamentos mobilizam a abertura/fechamento das fraturas em um regime não-linear antes de atingir um regime onde tensões e deformações se relacionam de forma linear.

Devido à capacidade preditiva do modelo desenvolvido ser limitada ao domínio linear e tendo em vista as não-linearidades iniciais observadas experimentalmente, torna-se necessário dividir o comportamento mecânico do material homogeneizado em duas partes: a primeira descrevendo o regime não-linear inicial delimitado por uma fronteira ∂R_{NLI} e a segunda descrevendo o regime linear subsequente:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} &= f(\underline{\underline{\sigma}}) & \text{se } \underline{\underline{\varepsilon}} \in R_{NLI} \\ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} &= \mathbb{F}^{\text{hom}} \circ \Delta \underline{\underline{\sigma}} & \text{se } \underline{\underline{\varepsilon}} \notin R_{NLI} \end{aligned} \quad (3.95)$$

onde $f(\underline{\underline{\sigma}})$ é uma função não-linear qualquer em $\underline{\underline{\sigma}}$, \mathbb{F}^{hom} corresponde ao tensor de fluência homogeneizado desenvolvido no regime linear e $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ corresponde às variações de deformação decorrentes da variação de carregamento $\Delta \underline{\underline{\sigma}}$ aplicada no regime linear.

Dentro do contexto destacado, o modelo desenvolvido se restringe a região linear. Neste sentido o objetivo desta análise consiste em determinar as propriedades do tensor de fluência homogeneizado \mathbb{F}^{hom} que relaciona $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}$ e $\underline{\underline{\Delta\sigma}}$. Contudo, para a comparação das deformações experimentais com suas respectivas previsões em termos absolutos ($\underline{\underline{\varepsilon}}$), pode-se denominar de $\underline{\underline{\varepsilon}}_r$ o tensor de deformações de referência desenvolvido pela aplicação de um carregamento $\underline{\underline{\sigma}}_r$ arbitrariamente escolhido. Considerando que o nível de deformação $\underline{\underline{\varepsilon}}_r$ associado se situa fora da região R_{NLI} , pode-se escrever:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_r + \underline{\underline{\Delta\sigma}} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_r + \underline{\underline{\Delta\varepsilon}} \quad (3.96)$$

De forma genérica, a verificação do modelo desenvolvido com dados experimentais consiste em a) assumir $\underline{\underline{\varepsilon}}_r$ e $\underline{\underline{\sigma}}_r$ como os menores valores de deformações ensaiadas e sua respectiva tensão de carregamento, b) determinar $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}$ e $\underline{\underline{\Delta\sigma}}$ através da diferença entre as demais histórias de deformação com $\underline{\underline{\varepsilon}}_r$ e a diferença entre o respectivo carregamento com $\underline{\underline{\sigma}}_r$, c) ajustar os parâmetros da função de fluência homogeneizada \mathbb{F}^{hom} que relaciona $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}$ e $\underline{\underline{\Delta\sigma}}$ para o segundo menor nível de carregamento e, d) utilizando \mathbb{F}^{hom} modelado, prever as curvas de $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}$ para os demais níveis de carregamento $\underline{\underline{\Delta\sigma}}$.

Deve-se mencionar que todos os ensaios de fluência analisados neste trabalho se restringem às deformações uniaxiais, não examinando as deformações transversais. Neste contexto apenas é possível identificar uma combinação linear de parâmetros da função de fluência relacionada ao módulo de E^{hom} (onde tem-se $E^{\text{hom}} = 9k^{\text{hom}}\mu^{\text{hom}} / (3k^{\text{hom}} + \mu^{\text{hom}})$ em função dos módulos volumétrico e de cisalhamento em fluência), impossibilitando a determinação da função de fluência homogeneizada associada ao coeficiente de Poisson $\nu^{\text{hom}} = (3k^{\text{hom}} - 2\mu^{\text{hom}}) / [2(3k^{\text{hom}} + \mu^{\text{hom}})]$. Adicionalmente, pode-se simplificar a análise tensorial por uma análise escalar, na qual tensões e deformações (ambas axiais) podem ser representadas por σ^a e ε^a (ou por $\Delta\sigma^a$ e $\Delta\varepsilon^a$ em termos de incremento e σ_r^a e ε_r^a para os respectivos valores de referência). A notação utilizando o índice a visa evitar confusões com o parâmetro de dano ε utilizado neste trabalho.

Dada a forte influência que os valores iniciais têm em métodos de ajuste de parâmetros à medida que o número de variáveis aumenta, o coeficiente de Poisson da matriz sólida ν^s será tratado como constante perante o tempo, visando reduzir o número de parâmetros necessários. Esta simplificação se adapta bem ao comportamento de geomateriais, mas pode não ser verdadeira para outros tipos de materiais tal como polímeros. Por esta razão, todos materiais analisados estão contidos na categoria de geomateriais.

Nas aplicações seguintes, a função de fluência E^s (estendida do módulo de Young na elasticidade) da matriz sólida será tratada genericamente através de um modelo reológico de Burger, ν^s será tratado elasticamente e k_n e k_t são tratados genericamente através do modelo reológico de Maxwell. Manipulando matematicamente as formulações apresentadas para \mathbb{F}^{hom} na Eq. (3.22) para uma forma em termos de um parâmetro viscoelástico associado ao módulo de Young tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_s^*} &= \frac{1}{E_{M,e}^s} + \frac{1}{pE_{M,v}^s} + \frac{1}{E_{K,e}^s + pE_{K,v}^s} ; \quad \frac{1}{\nu_s^*} = \frac{1}{\nu^s} \\ \frac{1}{k_n^*} &= \frac{1}{k_n^e} + \frac{1}{pk_n^v} ; \quad \frac{1}{k_t^*} = \frac{1}{k_t^e} + \frac{1}{pk_t^v} ; \quad \kappa_1^* = \frac{1}{2(1-\nu^s)} \\ \kappa_2^* &= \frac{ak_n^*(1-2\nu^s)(1+\nu^s)}{E_s^*(1-\nu^s)} ; \quad \kappa_3^* = \frac{ak_t^*(1-2\nu^s)(1+\nu^s)}{E_s^*(1-\nu^s)} ; \quad \kappa_4^* = \frac{(1-2\nu^s)}{6(1-\nu^s)} \quad (3.97) \\ M_E^* &= \frac{16\pi}{15\kappa_1^*} \left(\frac{\frac{5}{9}\kappa_1^{*2}(1+\nu^s)^2 + \kappa_4^{*2}}{3\pi\kappa_1^*\kappa_4^* + \kappa_2^*} + \frac{6\kappa_4^{*2}}{9\pi\kappa_4^*(\kappa_1^* + \kappa_4^*) + 4\kappa_3^*} \right) ; \quad E^{*\text{hom}} = \frac{1 + \varepsilon M_E^*}{E_s^*} \end{aligned}$$

Nota-se que todas as funções são definidas no espaço de Carson-Laplace. Para determinação no domínio do tempo, realiza-se o procedimento de inversão da transformada de Carson-Laplace descrito na seção 3.4.1.

Antes das aplicações, algumas observações importantes devem ser destacadas. Primeiro, os ensaios estudados não fornecem informações quanto a presença de dano, nível de fraturamento ou orientação e dimensão das fraturas. Neste sentido, torna-se necessário assumir algumas hipóteses que podem não representar os materiais ensaiados pelos autores. Primeiramente, assume-se que as fraturas de fato existem no material e que apresentam dimensões pequenas o suficiente para que a modelagem micromecânica seja válida. Adicionalmente, assume-se que as fraturas estão isotropicamente distribuídas ao longo de todo

o material, consistindo em uma hipótese relativamente forte dado que a presença de fraturas orientadas em direção única também é comum em geomateriais.

Dado que os ensaios desenvolvidos são uniaxiais, não é possível verificar a eventual anisotropia do material. Assim sendo, por razão de simplicidade operacional, o comportamento mecânico homogeneizado, bem como dos constituintes (matriz sólida e fraturas), foi assumindo como isotrópico. Observe que a anisotropia decorrente das fraturas e da compressão de eventuais poros foi fundamentalmente desconsiderada da modelagem em questão.

O raciocínio mais preciso no que se refere a determinação das propriedades homogeneizadas consiste em ensaiar separadamente o comportamento mecânico da matriz sólida (material intacto) e das fraturas para estabelecer o comportamento global e então comparar com ensaios realizados sobre o material fraturado. Contudo, não foram localizados estudos que realizam ensaios nestas três condições sobre o mesmo material viscoelástico. Neste sentido, as propriedades do modelo homogeneizado foram ajustadas tendo como base ensaios viscoelásticos sobre geomateriais supostamente fraturados. As propriedades determinadas foram utilizadas para prever o comportamento do material sob outros níveis de carregamento.

O modelo micromecânico utilizado considera valores constantes para o parâmetro de dano e, portanto, não avalia a propagação de fraturas. Todo o raciocínio desenvolvido em termos de propagação de fratura, realizado nas seções seguintes deste trabalho, foi desenvolvido em relaxação (deformações aplicadas) não podendo ser estendido às aplicações em fluência analisadas nesta seção. Note que, para que o estudo da propagação de fraturas seja realizado em termos de tensões, será necessário redefinir as expressões relacionadas à dissipação, escrevendo-as em termos do potencial de energia. Dado que na maioria dos ensaios disponíveis na literatura os carregamentos são aplicados em passos constantes (onde a propagação ocorre de forma instantânea), não há diferença significativa em utilizar ensaios em fluência ou relaxação no que se refere a validação do modelo desenvolvido durante toda etapa precedente à propagação.

A escolha por ensaios uniaxiais de fluência utilizados nessa seção se deve principalmente a maior quantidade de ensaios de fluência em relação aos de relaxação para geomateriais, facilitando a busca de ensaios com as características necessárias para os ajustes em questão. Adicionalmente, é mais fácil verificar os estágios de fluência em ensaios de fluência, o que

permite descartar ensaios que eventualmente apresentem componentes plásticas ou cujo dano esteja visivelmente em evolução. Adicionalmente, a escolha por ensaios uniaxiais se dá pela ausência de ensaios que caracterizem o comportamento viscoelástico individual dos constituintes. Ensaios uniaxiais reduzem significativamente o número de parâmetros a serem ajustados para determinação do comportamento homogeneizado, reduzindo as fontes de erro decorrentes do ajuste dos parâmetros.

3.6.1. Aplicação 1

A primeira aplicação faz uso dos dados experimentais do trabalho de Zhao et al. (2011) relativos ao comportamento mecânico do arenito vermelho típico da região de Chongqing, na China. As amostras foram extraídas com ferramentas de perfuração sob mesma orientação, evitando efeitos decorrentes da anisotropia nos ensaios uniaxiais desenvolvidos pelos autores. Duas dimensões de amostras foram preparadas, $\phi 50 \times 100$ mm para os ensaios de compressão (apresentados nesta aplicação) e $\phi 30 \times 60$ mm para ensaios de tração (apresentados na aplicação seguinte). Os carregamentos foram adicionados a uma taxa constante de 0.5 MPa/s, sendo praticamente instantâneo dado o tempo de ensaio (da ordem de horas), mantendo-se constante uma vez atingido o carregamento desejado. Cinco níveis de carregamento foram ensaiados em compressão: 28.03 MPa, 33.63 MPa, 39.24 MPa, 44.84 MPa e 50.45 MPa, sendo que o último levou a ruptura por fluência e, portanto, foge ao regime linear estudado neste trabalho, tendo sido desconsiderado.

Para finalidade de ajuste, 51 pontos ao todo foram extraídos de cada curva, limitando-se ao tempo de análise de 2,62 horas (correspondente ao menor tempo de ensaio dentre as curvas analisadas), sendo a densidade de pontos maior nos instantes iniciais sob finalidade de se adequar melhor às variações numéricas dos dados apresentados. A Figura 3.11.a apresenta os dados experimentais extraídos de Zhao et al. (2011) em termos absolutos ($\varepsilon^a \times t$), enquanto a Figura 3.11.b apresenta a evolução da deformação em termos de variação ($\Delta\varepsilon^a \times t$). Observe que a curva referente à $\sigma_r^a = 28.03$ MPa foi tomada como referência para a determinação das curvas de $\Delta\varepsilon^a = \varepsilon^a - \varepsilon_r^a$.

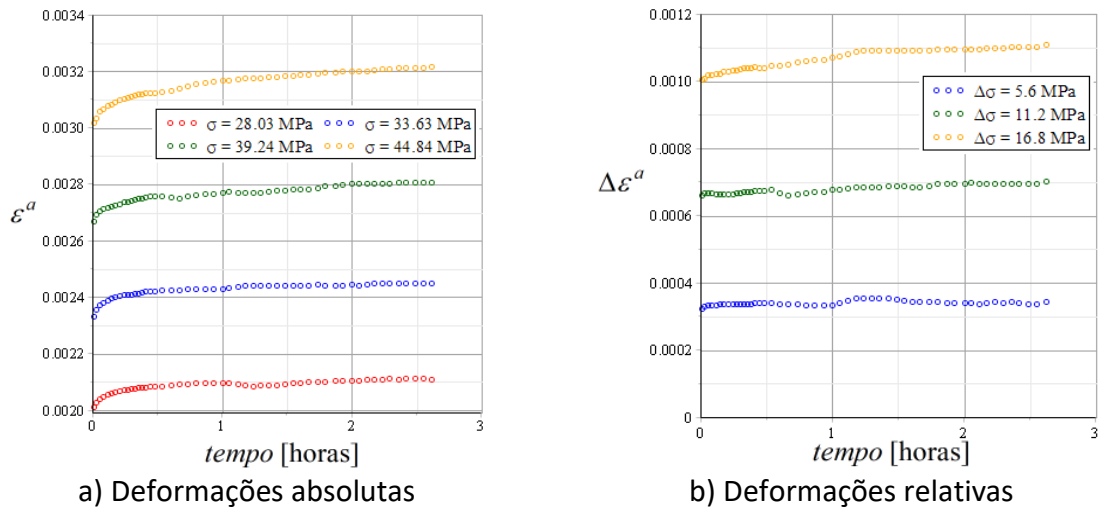


Figura 3.11: Curva Deformação x Tempo - Dados experimentais.

A verificação da linearidade dos dados pode ser realizada dividindo-se as curvas apresentadas na Figura 3.12 pela sua respectiva tensão σ^a (ou $\Delta\sigma^a$ para o caso de $\Delta\varepsilon^a$), tal como realizado na Figura 3.12.a e na Figura 3.12.b em função do tempo ou, alternativamente, em termos da relação $\sigma_0^a \times \varepsilon_0^a$ (ou $\Delta\sigma_0^a \times \Delta\varepsilon_0^a$) sobre a resposta instantânea, tal como realizado na Figura 3.12.c e na Figura 3.12.d.

No caso da Figura 3.12.a e da Figura 3.12.b, a linearidade fica definida quando as curvas decorrentes das funções ε^a/σ^a ou $\Delta\varepsilon^a/\Delta\sigma^a$ sobrepuerem-se para todos os níveis de carregamentos aplicados. Dado o comportamento não-linear esperado para baixas tensões solicitantes (ver Figura 3.10), a não-sobreposição das curvas de ε^a/σ^a na Figura 3.12.a já era esperada. Por outro lado, a análise da Figura 3.12.b aponta para funções numericamente mais próximas entre si em termos de $\Delta\varepsilon^a/\Delta\sigma^a$, indicando um comportamento mais próximo da linearidade. Adicionalmente, a adição de carregamento parece ocasionar um leve aumento na função de fluência, indicando maior flexibilização do material. Esta observação é compatível com a hipótese de aumento do dano no meio, tal como sugerido na Figura 3.10.

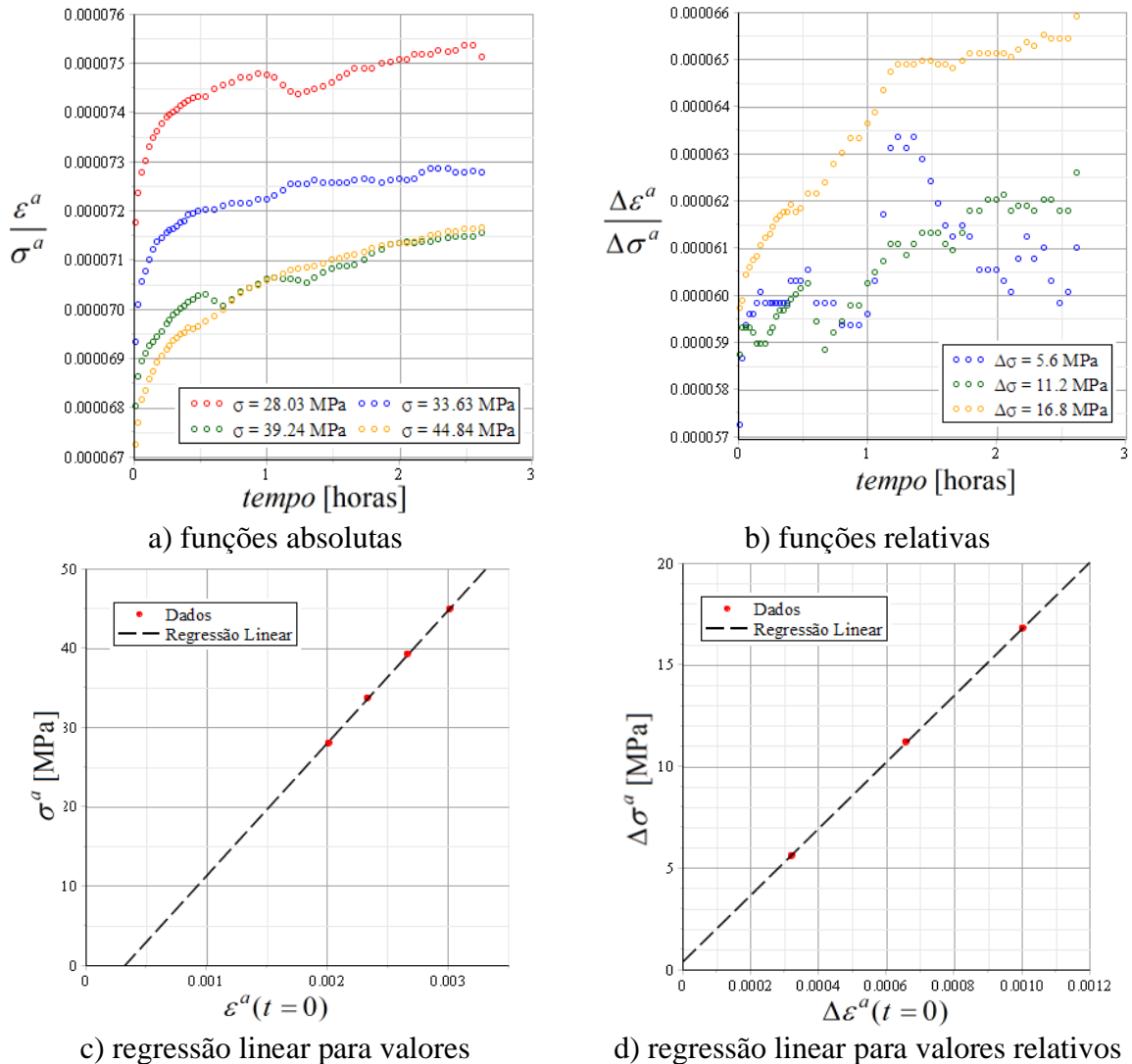


Figura 3.12: Verificação da linearidade dos dados experimentais.

Em termos da resposta instantânea, a Figura 3.12.c indica ausência de linearidade instantânea a nível global, visto que a curva de regressão linear que descreve os dados não leva a $\varepsilon^a = 0$ quando $\sigma^a = 0$. Alternativamente, para os níveis de carregamento estudado a Figura 3.12.d, verifica-se a linearidade instantânea dos dados com relação a $\Delta\varepsilon^a/\Delta\sigma^a$, existindo uma diferença muito pouco significativa com relação ao estado sem carregamento aplicado (i.e., $\sigma^a = 0 \Rightarrow \varepsilon^a = 0$).

A etapa seguinte consiste no ajuste dos parâmetros descritos na Eq. (3.97) que descrevem o comportamento mecânico do material homogeneizado. O procedimento foi realizado por meio do método dos mínimos quadrados. Tendo em vista o elevado número de parâmetros do modelo e a grande sensibilidade do modelo com relação a alguns destes parâmetros, os valores iniciais de $E_{M,e}^s$ e ν^s foram previamente escolhidos de acordo com valores clássicos tomados

como referência para materiais similares e os demais valores iniciais foram arbitrariamente escolhidos. Dado o contexto descrito na Eq. (3.95), duas funções foram ajustadas. O primeiro ajuste refere-se à função de fluência F^{hom} que descreve o comportamento viscoelástico no domínio linear do material ensaiado. Para tanto utiliza-se a menor deformação axial $\Delta\varepsilon^a$ disponível na Figura 3.11.b (relativas ao carregamento de $\Delta\sigma^a = 5.6$ MPa). O segundo ajuste refere-se aos parâmetros de uma suposta função de fluência de referência F_r^{hom} utilizada para descrever a deformação de referência ε_r^a (relativa ao carregamento de $\sigma^a = 28.03$ MPa) através de uma lei de comportamento linearizada. Observa-se que esta linearização não compromete a generalidade do procedimento, uma vez que apenas tem-se interessa-se no valor deformação de referência ε_r^a para obter $\varepsilon^a = \varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon^a$. O ajuste da curva ε_r^a ao modelo desenvolvido tem como finalidade principal evitar as variações naturais decorrentes da experimentação nas deformações absolutas. Na prática, transforma-se a função de fluência global do material (aquela que engloba o trecho não-linear) em uma função bilinear (primeiro trecho um ajuste de ε_r^a e segundo trecho um ajuste de $\Delta\varepsilon^a$). Os parâmetros de F^{hom} ajustados pelo método dos mínimos quadrados são apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Valores ajustados para os parâmetros de F^{hom} .

ε [-]	$E_{M,e}^s$ [MPa]	$E_{M,v}^s$ [MPa.s]	$E_{K,e}^s$ [MPa]	$E_{K,v}^s$ [MPa.s]	ν^s [-]	k_n^e [MPa/m]	k_n^v [MPa.s/m]	k_t^e [MPa/m]	k_t^v [MPa.s/m]
0.098	20849	1.1×10^7	625575	71052	0.20	7578	23157	1622	3.1×10^8

Analisando-se os parâmetros ajustados, verificou-se um elevado valor para k_t^v , o qual indica que as fraturas apresentam comportamento próximo à elasticidade em cisalhamento. Adicionalmente, observou-se que o comportamento normal das fraturas apresenta uma componente viscosa significativa, dado o relativamente baixo valor de k_n^v . Exceto pelo valor de $E_{M,v}^s$, os demais parâmetros relacionados a matriz sólida são pouco superiores aos valores estabelecidos por Zhao et al. (2011), o que era previsto devido a presença das fraturas, as quais reduzem o valor da função de relaxação quando se analisa a perspectiva macroscópica.

A Figura 3.13 apresenta as curvas ajustadas (linhas contínuas) comparadas aos dados experimentais (pontos) extraídos.

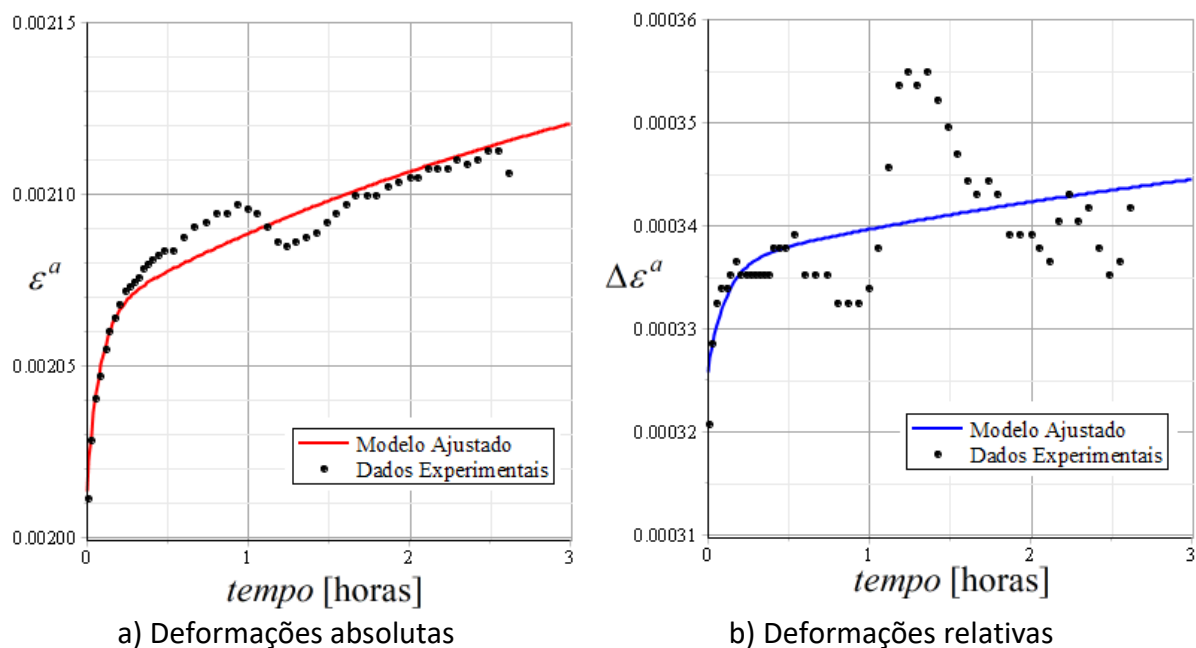


Figura 3.13: Ajuste das curvas de deformação.

Conhecendo os parâmetros que melhor ajustam a função de fluência homogeneizada torna-se possível determinar a evolução temporal das demais deformações ($\varepsilon^a = \varepsilon_r^a + \Delta\varepsilon^a$ e $\Delta\varepsilon^a$) em função dos carregamentos $\Delta\sigma^a$ aplicados. Tendo em vista ambas as funções ajustadas, a expectativa é que as curvas referentes a $\sigma^a = 28.03\text{MPa}$ e $\sigma^a = 33.63\text{MPa}$ e $\Delta\sigma^a = 5.6\text{MPa}$ coincidam perfeitamente, não servindo como propósito de validação do modelo.

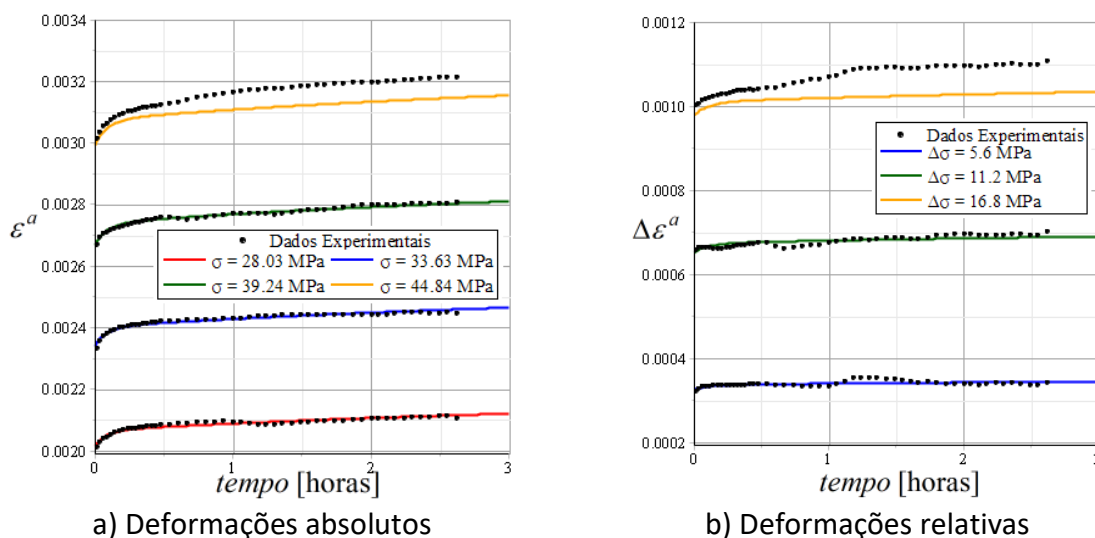


Figura 3.14: Comparação das curvas experimentais com as ajustadas.

Com base na Figura 3.14 verifica-se que as histórias de deformações previstas pelo modelo concordam perfeitamente com os dados experimentais para $\sigma^a = 39.24\text{MPa}$ e $\Delta\sigma^a = 11.2\text{MPa}$, levando a um erro máximo de 0,3% nas deformações absolutas, demonstrando que o modelo desenvolvido é capaz de representar com elevado grau de precisão o comportamento homogeneizado do meio fraturado. A justificativa da precisão obtida deve-se a sobreposição das funções $\Delta\varepsilon^a/\Delta\sigma^a$ na Figura 3.12.b para os níveis de carregamento de $\Delta\sigma^a = 5.6\text{MPa}$ e $\Delta\sigma^a = 11.2\text{MPa}$, o que demonstra a linearidade do comportamento para o nível de carregamento aplicado, a qual só pode ser verificada sob o mesmo valor de parâmetro de dano.

De forma alternativa, para as histórias de deformações relativas aos carregamentos de $\sigma^a = 44.84\text{MPa}$ e $\Delta\sigma^a = 16.8\text{MPa}$, verifica-se uma diferença relativa mais acentuada, levando a um erro de 1,5% sobre os valores absolutos e 6,4% sobre os valores relativos. A principal explicação para esta diferença refere-se à não-linearidade do comportamento diferido para este nível de carregamento, tal como respaldado pela Figura 3.12.b. A razão fenomenológica desta não-linearidade é a priori desconhecida, contudo, pode-se inferir que se deve a propagação estável de fraturas, tal como observado na Figura 3.9. Decorre que o experimento em questão não fornece ferramentas suficiente para verificar se esta é, de fato, a causa desta discrepância, podendo ter se originado por outras causas tal como componentes plásticas, erros de laboratório, comportamento nativamente não-linear, entre outros.

A vantagem do modelo apresentado neste trabalho, com relação aos demais modelos presentes na literatura, consiste na capacidade de determinar as propriedades mecânicas do material com diferentes proporções de fraturas sem a necessidade de recalculá-los os parâmetros do modelo reológico para cada nível de carregamento aplicado. Neste aspecto, sugerindo-se que todo o erro entre a função preditiva e os dados experimentais possa ser explicado pela evolução do dano, é possível recalculá-los o valor do parâmetro de dano para o novo carregamento. Aqui, o procedimento mais correto demandaria a determinação da energia crítica, a qual não é disponível no trabalho em questão. Por esta razão, e para demonstrar a capacidade adaptativa do modelo desenvolvido, o parâmetro de dano foi recalculado através do método dos mínimos quadrados, mantendo todos os demais parâmetros imutáveis. Nota-se que este procedimento é realizado sob caráter puramente ilustrativo, dado que o ajuste dos dados para comparação com

a mesma curva impede a comparação não enviesada e, portanto, invalida a determinação de qualquer estimativa para o erro. A Figura 3.15 a seguir apresenta as deformações absolutas e relativas, corrigindo exclusivamente o parâmetro de dano associado à $\Delta\sigma^a = 16.8\text{MPa}$ para $\varepsilon = 0.126$.

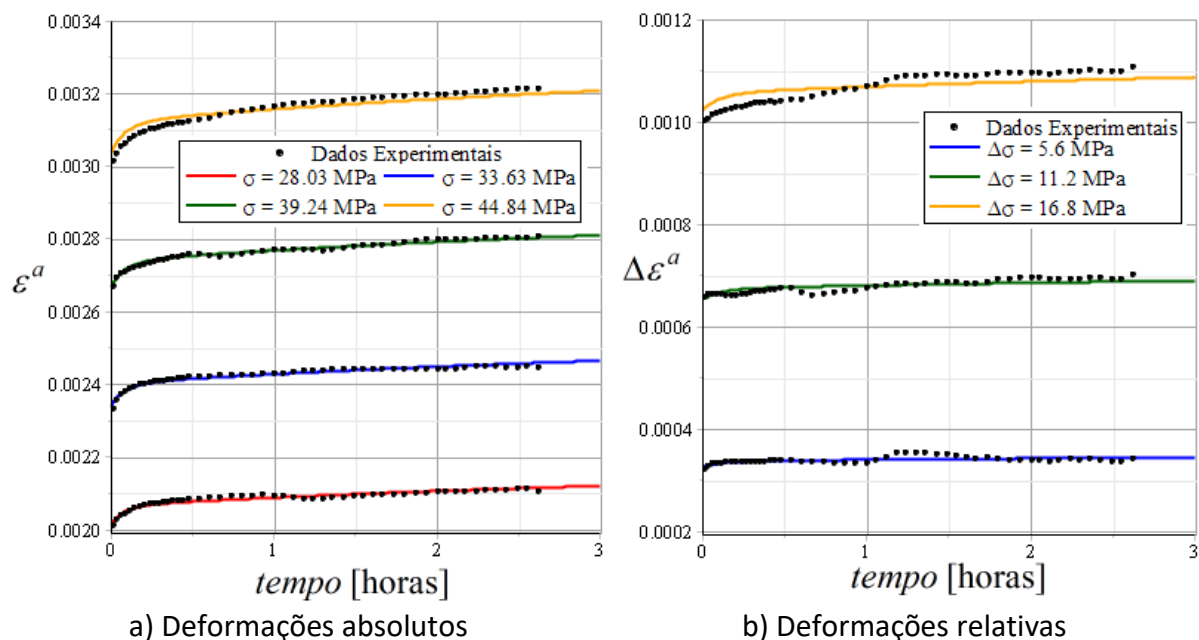


Figura 3.15: Comparação das curvas experimentais com as ajustadas com mudança do parâmetro de dano.

Observando-se a Figura 3.15 verifica-se que o simples ajuste do valor do parâmetro (através do método de mínimos quadrados para aplicação em questão) de dano foi capaz de adaptar o modelo desenvolvido a uma configuração de comportamento não-linear (vide Figura 3.12.a e Figura 3.12.b) mantendo imutável todos demais parâmetros ajustados. Baseando-se no aumento de carregamento aplicado, é natural que se verifique a propagação de fraturas, traduzida justamente no aumento do parâmetro de dano na escala macroscópica. Tal capacidade demonstra ser um grande progresso com relação à solução comumente utilizada na literatura, na qual todos os parâmetros do modelo escolhido são reajustados para se adaptar ao novo carregamento.

3.6.2. Aplicação 2

A segunda aplicação desenvolvida também faz uso do trabalho de Zhao et al. (2011), sendo diferenciada pelo fato de estudar o comportamento do arenito em questão sob um carregamento em tração. Dada a diferença de resistência entre tração e compressão, os

seguintes níveis de carregamento foram aplicados: 0.43 MPa, 0.71 MPa, 0.99 MPa, 1.14 MPa e 1.26 MPa. Novamente, o último carregamento aplicado levou a ruptura por fluência e, portanto, não será modelado nesta aplicação.

Foram extraídos 33 pontos ao longo de toda curva de deslocamento apresentada, com maior densidade nos instantes iniciais para reproduzir melhor as variações numéricas iniciais, limitando o intervalo de análise a 11,02 horas (correspondente ao menor tempo de ensaio dentre as curvas analisadas em tração). A Figura 3.16.a apresenta os dados experimentais extraídos de Zhao et al. (2011) em termos de $(\varepsilon^a \times t)$, enquanto a Figura 3.16.b apresenta a evolução da deformação em termos de variação $(\Delta\varepsilon^a \times t)$. Observe que a curva referente à $\sigma_r^a = 0.43$ MPa foi tomada como referência para a determinação das curvas de $\Delta\varepsilon^a = \varepsilon^a - \varepsilon_r^a$.

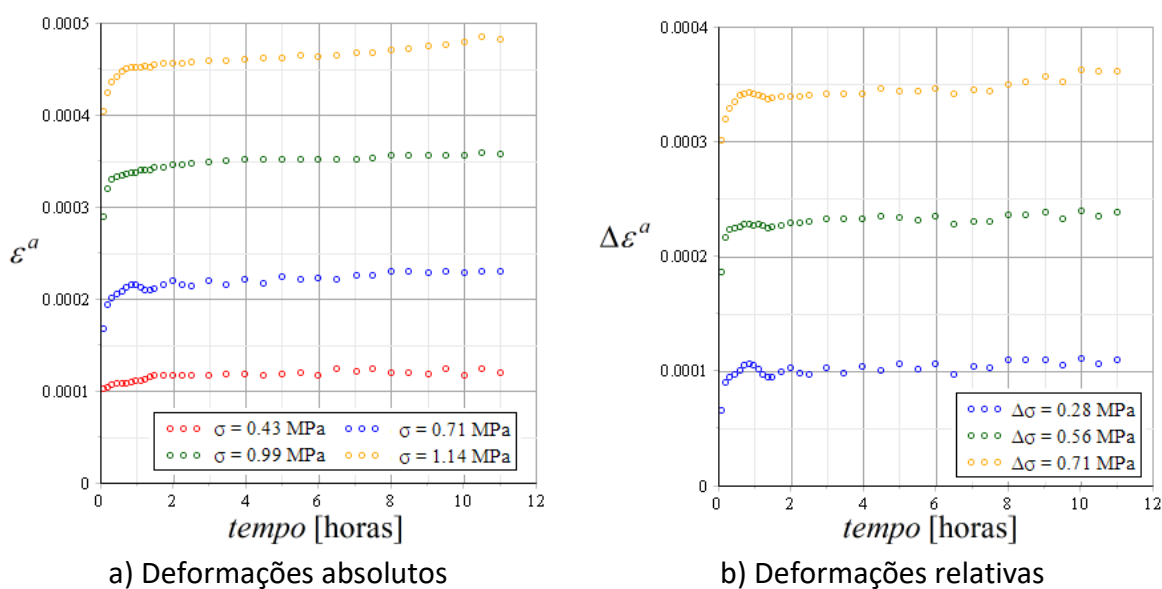


Figura 3.16: Curva Deformação x Tempo - Dados experimentais.

A linearidade diferida ($\Delta\varepsilon^a/\Delta\sigma^a \times t$) e instantânea ($\sigma_0^a \times \varepsilon_0^a$) dos dados pode ser verificada da mesma forma estudada na aplicação anterior, levando às quatro imagens representadas na Figura 3.17.

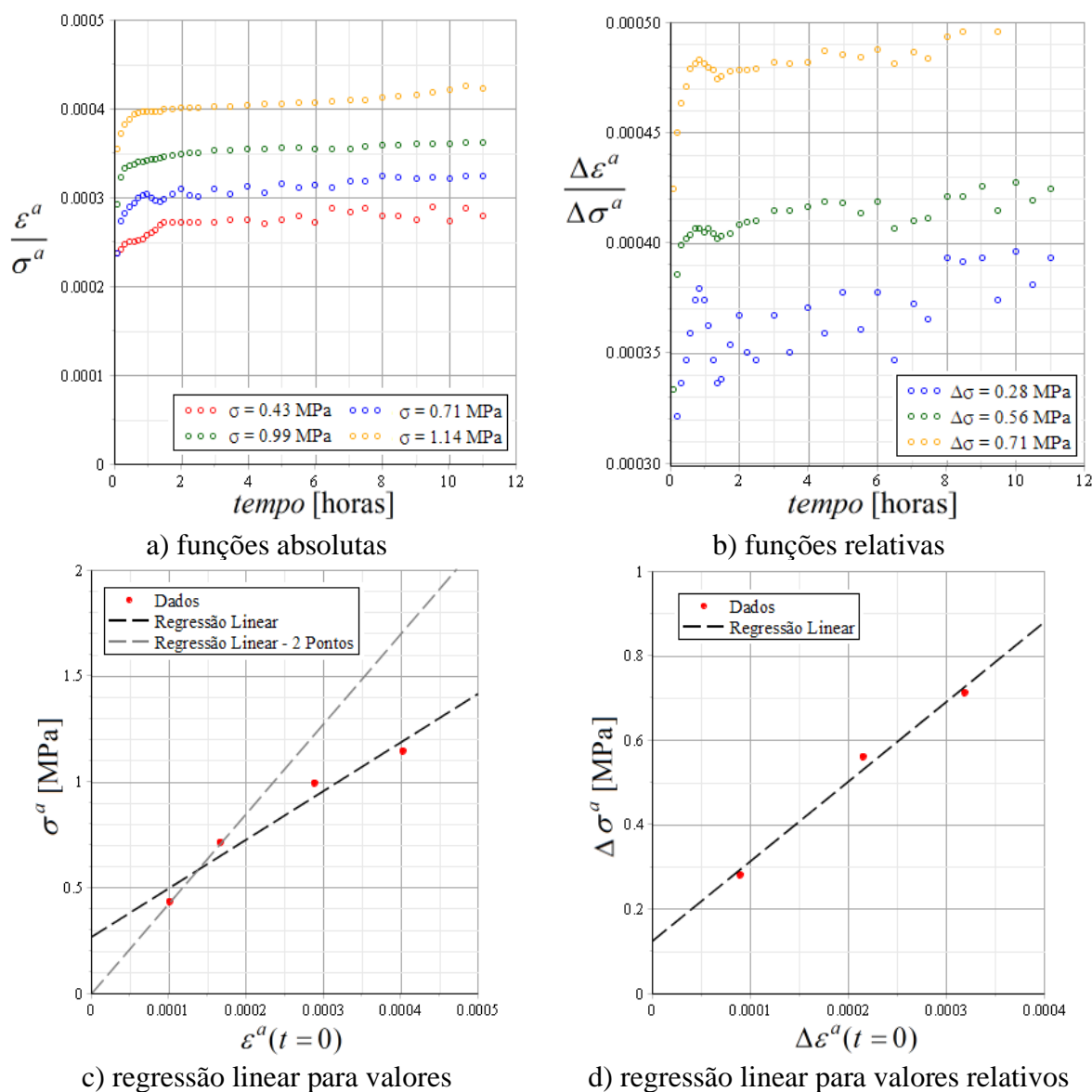


Figura 3.17: Verificação da linearidade dos dados experimentais.

Com base na Figura 3.17.a e na Figura 3.17.b, facilmente verifica-se que os dados não se ajustam de forma perfeitamente linear, o que pode ser visualizado com base na não sobreposição das curvas ao longo do tempo. Mais ainda, a Figura 3.17.b indica que a adição de carregamento implica no aumento da função de fluência do meio, sendo esta observação mais uma vez coerente com a hipótese de aumento do dano.

De forma alternativa, a Figura 3.17.c e Figura 3.17.d demonstram que a resposta instantânea dos dados extraídos não condiz com uma resposta linear. Observa-se, contudo, que a regressão linear utilizando apenas os dois primeiros pontos da Figura 3.17.c conduz a um comportamento instantâneo linear cuja ausência de carregamento leva a um estado indeformado, condizendo com comportamentos mecânicos esperados. Neste aspecto, os demais

pontos, com carregamentos mais elevados, parecem ser afetados por componentes plásticas ou pelo aumento do parâmetro de dano. Mesmo que os dados não se ajustem corretamente a um comportamento viscoelástico linear as análises precedentes ainda serão realizadas.

Prossegue-se então com o ajuste dos parâmetros do modelo que descrevem o comportamento mecânico do material homogeneizado. Novamente duas curvas foram ajustadas, uma para ε^a (apenas para melhor representar os dados absolutos) e uma para $\Delta\varepsilon^a$ (a qual descreve as propriedades buscadas para F^{hom}). Os parâmetros foram ajustados segundo o método dos mínimos quadrados e são apresentados (para F^{hom}) na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Valores ajustados para os parâmetros de F^{hom} .

ε [-]	$E_{M,e}^s$ [MPa]	$E_{M,v}^s$ [MPa.s]	$E_{K,e}^s$ [MPa]	$E_{K,v}^s$ [MPa.s]	ν^s [-]	k_n^e [MPa/m]	k_n^v [MPa.s/m]	k_t^e [MPa/m]	k_t^v [MPa.s/m]
0.105	5598	391331	9965	1801	0.196	0.83	9.1×10^9	1409	3.1×10^8

Analisando os parâmetros expostos na Tabela 3.2 verifica-se uma grande diferença com relação ao comportamento em compressão (Tabela 3.1). Primeiramente os parâmetros referentes a matriz sólida são muito inferiores, o que indica uma maior fluência e flexibilidade instantânea. Quanto as propriedades das fraturas, a rigidez normal foi quase nula, demonstrando pouca influência sobre o comportamento homogeneizado em tração, a passo que a rigidez cisalhante manteve valores sob a mesma ordem de grandeza. A Figura 3.18 a seguir indica as curvas ajustadas (linhas contínuas) comparadas aos dados experimentais (pontos).

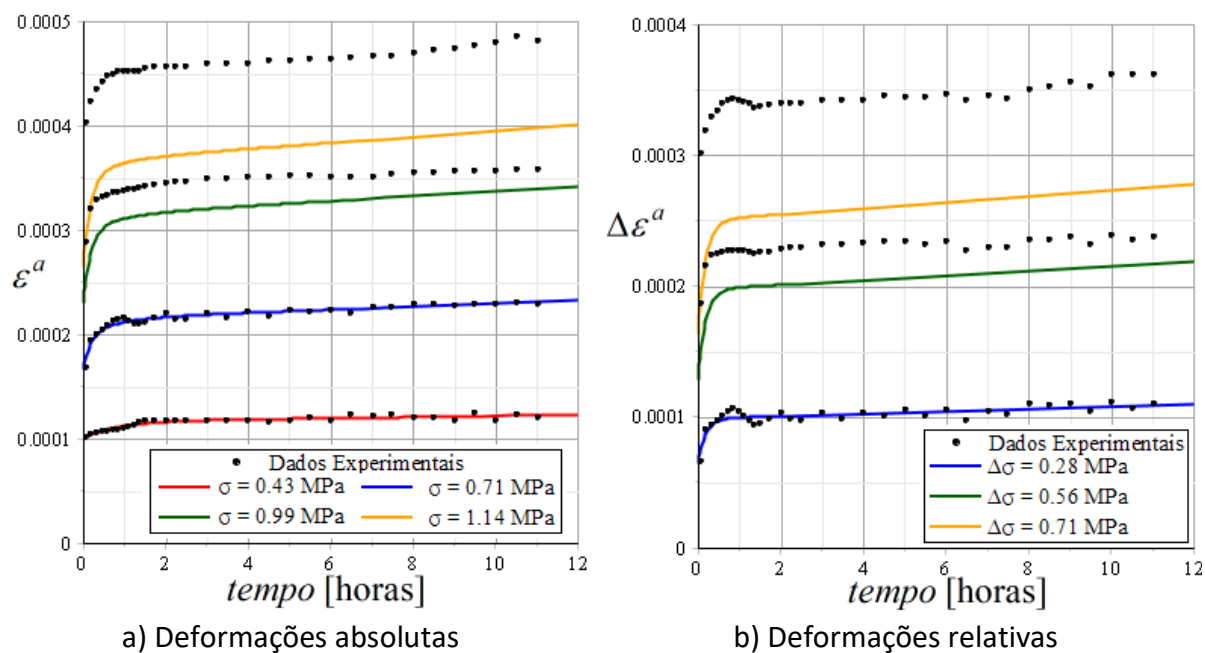
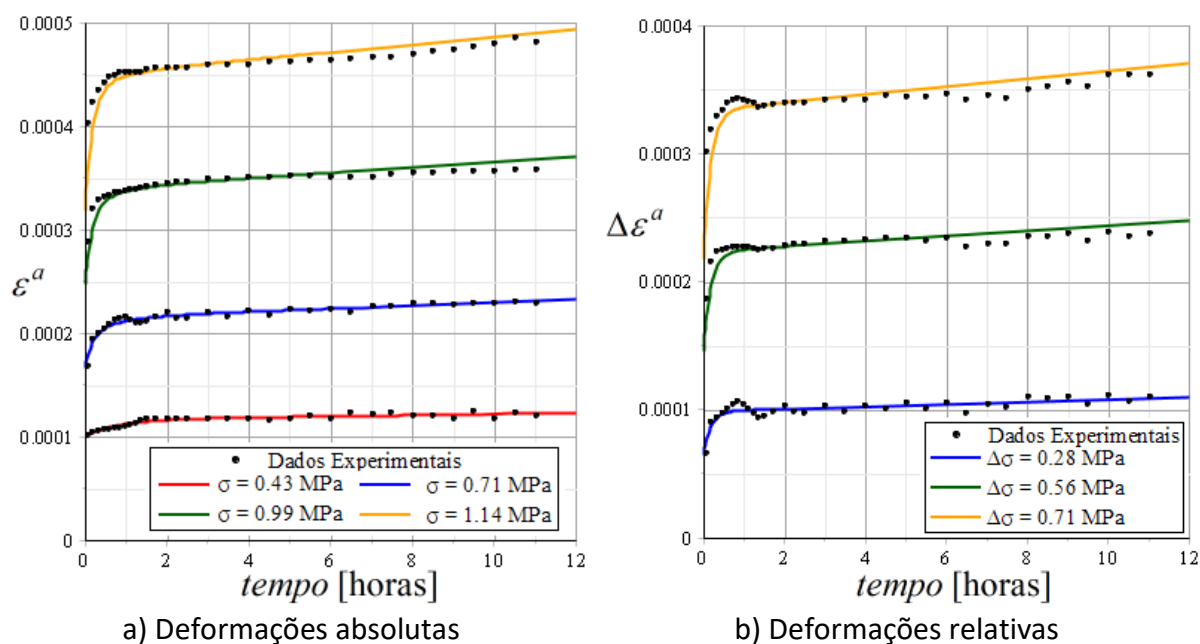


Figura 3.18: Comparação das curvas experimentais com as ajustadas.

A diferença obtida com relação ao modelo desenvolvido e os dados experimentais para os níveis de carregamento de $\sigma = 0.99 \text{ MPa}$ ($\Delta\sigma = 0.56 \text{ MPa}$) e $\sigma = 1.14 \text{ MPa}$ ($\Delta\sigma = 0.71 \text{ MPa}$) pode facilmente ser explicada pelo distanciamento com relação a linearidade do comportamento do material ensaiado (Figura 3.17). Dada a baixa resistência de geomateriais com relação a carregamentos em tração, pode-se associar a não-linearidade devido em relação ao carregamento a propagação das microfaturas no meio. Neste aspecto, realizando-se o mesmo procedimento destacado na aplicação anterior (ajuste apenas do parâmetro de dano) obtém-se os valores de $\varepsilon = 0.178$ para a situação de carregamento $\sigma = 0.99 \text{ MPa}$ ($\Delta\sigma = 0.56 \text{ MPa}$) e $\varepsilon = 0.274$ para a situação de carregamento $\sigma = 1.14 \text{ MPa}$ ($\Delta\sigma = 0.71 \text{ MPa}$). A evolução das deformações é dada na Figura 3.19 a seguir.



a) Deformações absolutas

b) Deformações relativas

Figura 3.19: Comparação das curvas experimentais com as ajustadas com mudança do parâmetro de dano.

Tendo em vista que apenas o valor do parâmetro de dano foi ajustado para compensar uma eventual propagação de fraturas, o modelo desenvolvido parece ter se ajustado muito bem aos dados experimentais coletados, demonstrando mais uma vez a elevada capacidade adaptativa do modelo desenvolvido em relação ao parâmetro de dano. Deve-se ter em mente que os valores associados ao parâmetro de dano foram obtidos considerando que a única razão da não-linearidade do carregamento em tração deve-se a propagação de fraturas, o que não necessariamente condiz com o material em questão.

3.6.3. Aplicação 3

A terceira aplicação analisa os dados ensaiados por Chen e Kulatilake (2015), cujos ensaios de fluência foram realizados sobre mármore branco. As amostras foram preparadas utilizando métodos de perfuração com água, com dimensões de $\phi 50 \times 100$ mm. Segundo os autores, a resistência uniaxial em compressão do mármore corresponde a 87 MPa, o qual permitiu estimar a resistência de longo prazo em torno de 69.6 MPa. Os valores dos carregamentos aplicados correspondem a 35 MPa, 47 MPa, 58 MPa e 69 MPa. Foram extraídos 27 pontos das curvas dos autores, limitando o tempo de análise a 50 horas, com maior densidade de pontos nos instantes iniciais. A Figura 3.20.a apresenta os dados experimentais

extraídos de Chen e Kulatilake (2015) em termos de $(\varepsilon^a \times t)$, enquanto a Figura 3.20.b apresenta a evolução da deformação em termos de variação $(\Delta\varepsilon^a \times t)$. Observe que a curva referente à $\sigma_r^a = 35\text{MPa}$ foi tomada como referência para a determinação das curvas de $\Delta\varepsilon^a = \varepsilon^a - \varepsilon_r^a$.

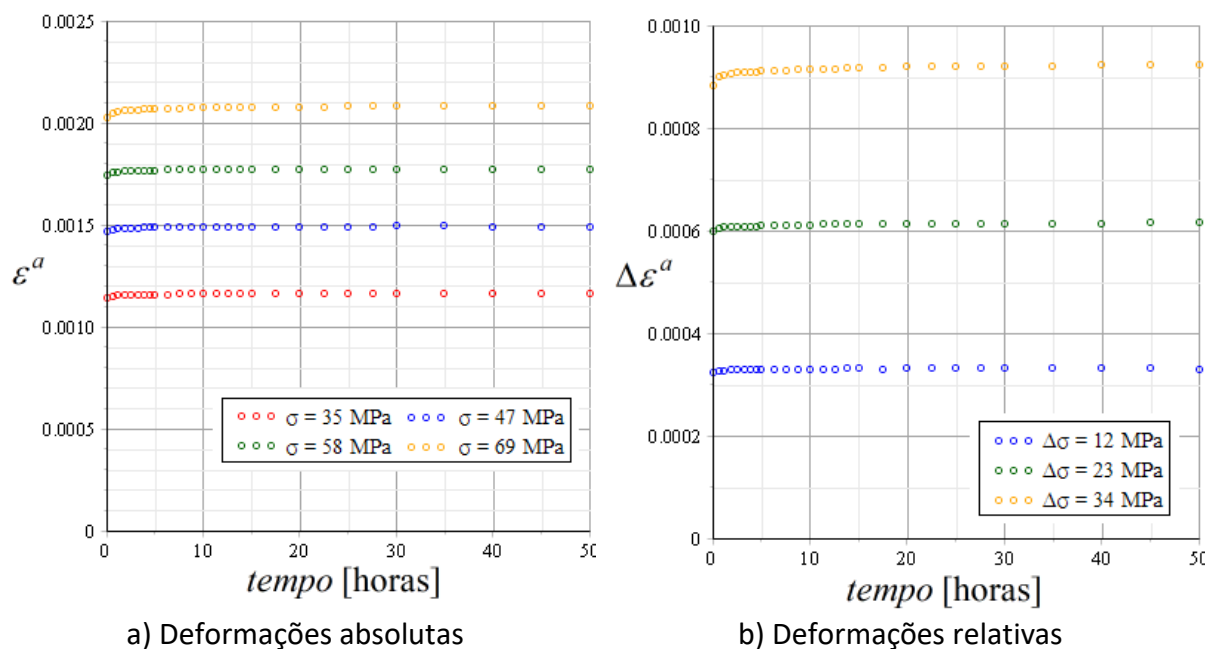


Figura 3.20: Curva Deformação x Tempo - Dados experimentais.

A verificação da linearidade em termos diferidos $(\Delta\varepsilon^a/\Delta\sigma^a \times t)$ e da linearidade instantânea $(\sigma_0^a \times \varepsilon_0^a)$ pode ser estudada da mesma forma que as aplicações anteriores, levando às quatro imagens destacadas na Figura 3.21.

Diferentemente das aplicações anteriores, a Figura 3.21.b indica uma redução da função $\Delta\varepsilon^a/\Delta\sigma^a$ para níveis de carregamentos mais elevados, o que contradiz a hipótese de aumento do dano. Nota-se, contudo, que os dados são suficientemente próximos de modo que possam ser considerados aproximadamente lineares, verificando-se um erro médio relativo da ordem de 3% para a função $\Delta\varepsilon^a/\Delta\sigma^a$ na Figura 3.21.b.

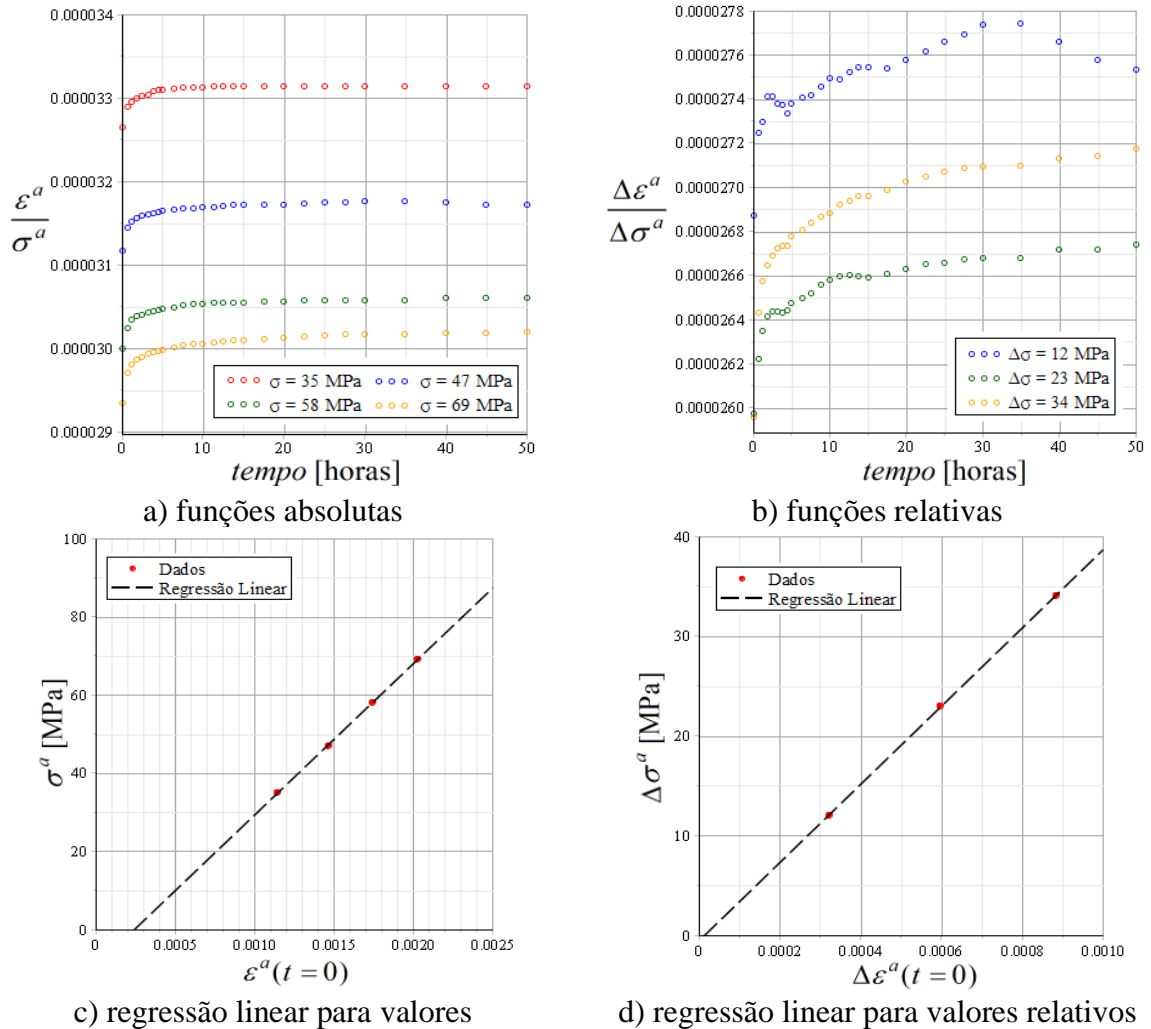


Figura 3.21: Verificação da linearidade dos dados experimentais.

A continuação da aplicação se dá pelo ajuste dos parâmetros necessários a caracterização do modelo. Novamente duas curvas foram ajustadas, uma para ε^a (apenas para melhor representar os dados absolutos) e uma para $\Delta\varepsilon^a$ (a qual descreve as propriedades buscadas para F^{hom}). Os parâmetros foram ajustados segundo o método dos mínimos quadrados e são apresentados (para $\Delta\varepsilon^a$) na Tabela 3.3. Nota-se que, devido a uma grande incoerência nos valores de deformações $\Delta\varepsilon^a$ para os últimos três pontos de análise, estes foram removidos do processo de ajuste (ver os últimos três pontos azuis da Figura 3.21.b).

Tabela 3.3: Valores ajustados para os parâmetros de F^{hom} .

ε [-]	$E_{M,e}^s$ [MPa]	$E_{M,v}^s$ [MPa.s]	$E_{K,e}^s$ [MPa]	$E_{K,v}^s$ [MPa.s]	ν^s [-]	k_n^e [MPa/m]	k_n^v [MPa.s/m]	k_t^e [MPa/m]	k_t^v [MPa.s/m]
0.070	44249	1.2×10^8	3707774	1355314	0.23	4207	6803	1742	60836

O elevado valor de k_t^v mais uma vez indica a menor influência de componentes viscosas no comportamento cisalhante das fraturas, sendo agora, no entanto, muito mais significativa do que nas aplicações anteriores. A Figura 3.22 exhibe as curvas ajustadas (linhas contínuas) comparadas aos dados experimentais (pontos) extraídos.

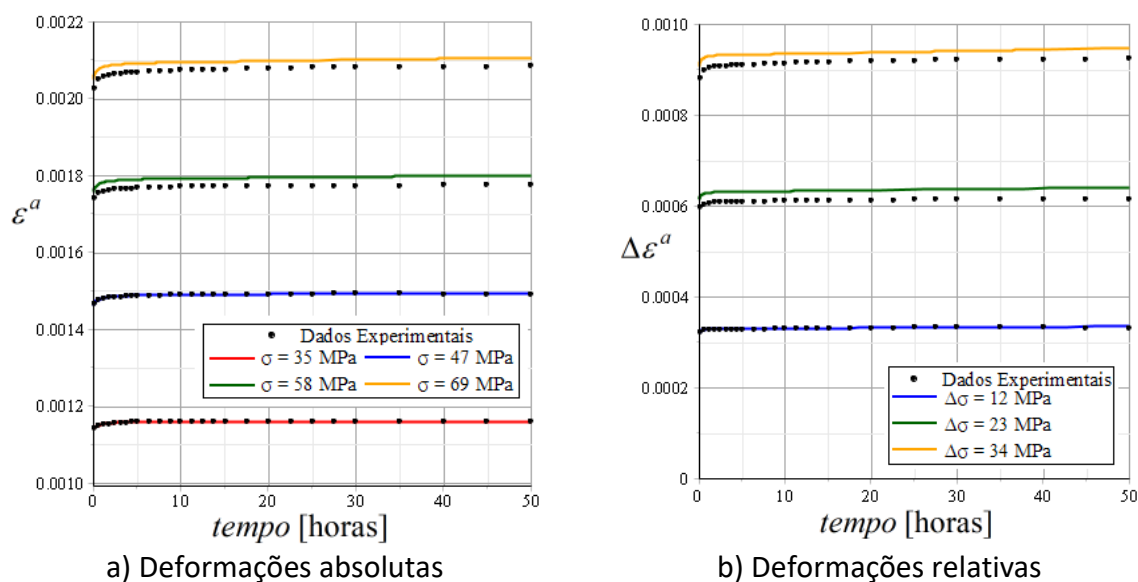


Figura 3.22: Comparação das curvas experimentais com as ajustadas.

As predições em questão alcançaram valores muito mais próximos dos dados experimentais do que nas aplicações anteriores, verificando-se um erro relativo máximo de 1.15% para $\sigma = 58\text{MPa}$ ($\Delta\sigma = 23\text{MPa}$) e 1.45% para $\sigma = 69\text{MPa}$ ($\Delta\sigma = 34\text{MPa}$), ambos em $t = 50$ horas. Tal erro é da mesma ordem de magnitude dos 3% na divergência com relação a linearidade da função $\Delta\varepsilon^a/\Delta\sigma^a$. Nota-se que, diferentemente das aplicações anteriores, não é possível associar este erro ao aumento do parâmetro de dano, dado que se verifica uma leve redução da função de fluência à medida que o carregamento imposto aumenta, o que seria, caso esta hipótese fosse realizada, traduzida em uma redução do parâmetro de dano.

4. CRITÉRIO DE PROPAGAÇÃO DO DANO EM MEIOS VISCOELÁSTICOS

Na seção 2.2 mencionou-se que as condições de propagação de fraturas formuladas com base em princípios termodinâmicos são mais suscetíveis a extrapolação analítica para o contexto multi-fraturado. Tal premissa justifica a abordagem termodinâmica na formulação da condição de propagação envolvendo fraturas em materiais viscoelásticos. Primeiramente contextualiza-se o raciocínio estabelecido para o critério de propagação no domínio elástico, introduzindo as variáveis utilizadas no raciocínio viscoelástico que segue. Na sequência, um raciocínio termodinâmico é desenvolvido, formulando uma expressão para dissipação de energia para materiais sujeitos a deformação viscosa. O raciocínio viscoelástico microscópico é estendido à escala macroscópica por meio da determinação da energia elástica média desenvolvida dentro do VER, a qual possibilita a determinação de uma expressão macroscópica para a taxa de liberação de energia que é utilizada no critério de propagação. Por fim, aplicações visando a taxa e liberação de energia são desenvolvidos, permitindo o reconhecimento de propriedades chaves para o estudo da propagação.

4.1. CONDIÇÃO DE PROPAGAÇÃO ELÁSTICA

Dada uma fratura de área superficial $a = f(\ell, e)$, descrita por uma função do comprimento ℓ em uma estrutura de espessura e , e dimensões planas suficientemente grandes, submetida a um carregamento externo definido através do parâmetro cinemático $\underline{\underline{\varepsilon}}$ cuja força externa associada denomina-se P (Figura 4.1), determina-se com base em um raciocínio termodinâmico a dissipação de energia ϕ^f proveniente do aumento da área superficial a da fratura:

$$\phi^f = - \left. \frac{\partial \psi(P, a)}{\partial a} \right|_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \dot{a} \quad (4.1)$$

ψ corresponde à energia livre de Helmholtz. Em um raciocínio similar ao de Griffith (1921) supõem-se que, durante a propagação ($\dot{a} > 0$), a dissipação de energia assume o seguinte valor limite:

$$\phi^f = \mathcal{F}_c \dot{a} > 0 \quad (4.2)$$

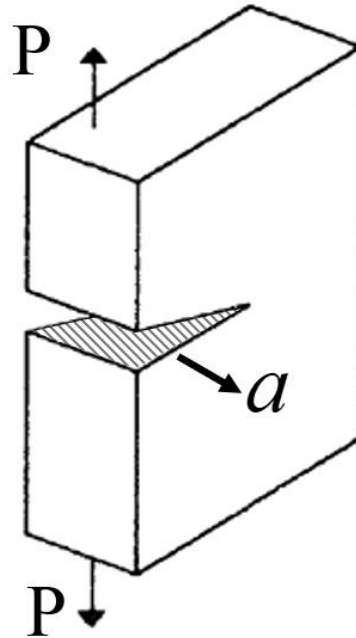


Figura 4.1: Representação do meio com fratura única.

\mathcal{F}_c denomina-se energia crítica, a qual retrata um parâmetro do material avaliado em ensaios de laboratório. Observa-se que \mathcal{F}_c é interpretado como um limite físico para a variação da energia $\partial\psi/\partial a$, o qual, quando atingido, permite a propagação das fraturas. Neste contexto, $\partial\psi/\partial a$ assume o papel de força termodinâmica responsável pela propagação, sendo então denominada de taxa de liberação de energia \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = - \left. \frac{\partial\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, a)}{\partial a} \right|_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (4.3)$$

A interpretação da Eq. (4.1), Eq. (4.2) e Eq. (4.3) permite formular o seguinte critério de propagação para as fraturas:

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_c \leq 0 \quad ; \quad \dot{a} \geq 0 \quad ; \quad (\mathcal{F} - \mathcal{F}_c)\dot{a} = 0 \quad ; \quad \dot{a} > 0 \Rightarrow \phi_f = \mathcal{F}_c \dot{a} > 0 \quad (4.4)$$

Na formulação apresentada, \mathcal{F} corresponde ao único parâmetro relacionado a propagação. Uma vez que ψ corresponde a uma função quadrática de $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(P) : \mathbb{C}(a) : \underline{\underline{\varepsilon}}(P) \quad (4.5)$$

onde $\underline{\underline{\varepsilon}}(P)$ corresponde ao tensor de deformações, linearmente relacionado ao carregamento P , e $\mathbb{C}(a)$ corresponde a rigidez global do sistema, \mathcal{F} toma a seguinte forma:

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(P) : \left. \frac{\partial \mathbb{C}(a)}{\partial a} \right|_{\underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(P) \quad (4.6)$$

Uma interpretação simplificada da condição de propagação descrita na Eq. (4.4) permite identificar que, para uma determinada área inicial a_0 , se a taxa de liberação de energia \mathcal{F} for igual ou virtualmente maior do que \mathcal{F}_c , ocorrerá a propagação da fratura ($\dot{a} > 0$). Nota-se que \mathcal{F} não pode ser fisicamente maior do que \mathcal{F}_c , uma vez que quando \mathcal{F}_c for atingido ocorrerá a propagação da fratura. Neste sentido o termo “virtualmente” refere-se a uma comparação entre $\mathcal{F}(a_0)$ e \mathcal{F}_c supondo que não ocorrerá a propagação da fratura.

4.2. QUADRO TERMODINÂMICO VISCOELÁSTICO

Dentro do escopo deste trabalho, a dissipação de energia deve ser formulada considerando o comportamento viscoelástico e os mecanismos de propagação do dano. Tal expressão é estabelecida através de leis termodinâmicas estendidas ao meio fraturado viscoelástico. A partir da primeira lei termodinâmica (conservação de energia) pode-se escrever:

$$\frac{d}{dt}(E + K) = \dot{W} + \dot{Q} \quad (4.7)$$

onde E é a energia interna do material, K é a energia cinética, \dot{W} é a taxa de energia aplicada pelos esforços externos e \dot{Q} é a taxa de calor recebida pelo meio. As expressões relativas a estas variáveis são dadas por

$$\begin{aligned}
E &= \int_{\Omega} \rho e dV \\
K &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \underline{\dot{v}} \cdot \underline{v} dV \\
\dot{W} &= \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} dV + \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{v} dS \\
\dot{Q} &= \int_{\Omega} r dV - \int_{\partial\Omega} \underline{q} \cdot \underline{n} dS
\end{aligned} \tag{4.8}$$

ρ representa a densidade de massa específica, e é a energia interna específica, \underline{v} é a velocidade de deslocamentos, \underline{f} são as forças volumétricas, r representa a densidade volumétrica de calor interno produzido e \underline{q} é o vetor de fluxo térmico. Combinando a Eq. (4.7) com a Eq. (4.8) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \rho \dot{e} dV + \int_{\Omega} \rho \underline{\dot{v}} \cdot \underline{v} dV = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} dV + \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{v} dS + \int_{\Omega} r dV - \int_{\partial\Omega} \underline{q} \cdot \underline{n} dS \tag{4.9}$$

Dado que $\underline{f} = \rho \underline{\dot{v}}$, recorrendo ao teorema da divergência para escrever as integrais de superfície por meio de integrais volumétricas obtém-se:

$$\int_{\Omega} \rho \dot{e} dV + \int_{\Omega} \rho \underline{\dot{v}} \cdot \underline{v} dV = \int_{\Omega} \rho \underline{\dot{v}} \cdot \underline{v} dV + \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) dV + \int_{\Omega} r dV - \int_{\Omega} \text{div} \underline{q} dV \tag{4.10}$$

que pode ser simplificada em:

$$\int_{\Omega} \rho \dot{e} dV = \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{v} dV + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \underline{v} dV + \int_{\Omega} r dV - \int_{\Omega} \text{div} \underline{q} dV \tag{4.11}$$

A Eq. (4.11) deve ser válida em cada ponto do domínio Ω , além disso, em um sistema mecanicamente equilibrado, desconsiderando forças de volume tem-se $\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$. Estas duas condições permitem escrever a Eq. (4.11) na forma:

$$\rho \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \underline{v} + r - \text{div} \underline{q} \tag{4.12}$$

Considerando evoluções infinitesimais e aplicando o conceito de energia livre de Helmholtz $\psi = \rho e - T s$, onde T é a temperatura e s é a densidade volumétrica de entropia, escreve-se a Eq. (4.12) como:

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}} + r - \text{div} \underline{q} - (\dot{\psi} + \dot{T}s + T\dot{s}) = 0 \tag{4.13}$$

O seguimento no raciocínio é dado por meio da segunda lei da termodinâmica (produção de entropia). Dado que fenômenos de dissipação viscosa ocorrem no meio, a segunda lei da termodinâmica pode ser escrita por meio da seguinte desigualdade (Lemaitre e Chaboche, 1990):

$$\int_{\Omega} \dot{s} dV \geq \int_{\Omega} \frac{r}{T} dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{n} dS \quad (4.14)$$

Aplicando novamente o teorema da divergência e dada a validade em qualquer ponto do sistema Ω , pode-se formular:

$$\dot{s} \geq \frac{r}{T} - \text{div} \underline{q} + \frac{1}{T^2} \underline{q} \cdot \nabla T \quad (4.15)$$

A Eq. (4.13) e a Eq. (4.15) permitem escrever a dissipação de energia ϕ^f :

$$\phi^f = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - (\dot{\psi} + \dot{T}s) - \frac{1}{T} \underline{q} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (4.16)$$

Lemaitre e Chaboche (1990) sugerem que é possível separar matematicamente as dissipações segundo sua origem em dissipações intrínsecas ϕ^I e dissipações térmicas ϕ^T , sem implicar em um desacoplamento dos mecanismos físicos correspondentes:

$$\phi^I = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - (\dot{\psi} + \dot{T}s) \quad ; \quad \phi^T = -\frac{1}{T} \underline{q} \cdot \nabla T \quad (4.17)$$

Tal situação mantém a condição sobre dissipações não negativas $\phi^I \geq 0$ e $\phi^T \geq 0$. O raciocínio que segue foi estendido para tensores de deformações viscosas utilizando o conceito de variáveis de estado, em um raciocínio similar ao desenvolvido por Lemaitre e Chaboche (1990), postulando que qualquer estado termodinâmico, para um determinado ponto sobre o domínio do material, é completamente determinado por meio do conhecimento de um certo número de variáveis para aquele instante. Dado o parâmetro geométrico α relacionado às fraturas (comprimento, área interfacial ou outros) e postulando a existência de um potencial de dissipação $\phi^p(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \dot{\alpha})$ definido por:

$$\frac{\partial \phi^p}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}; \quad \frac{\partial \phi^p}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \quad (4.18)$$

Relacionado com a dissipação intrínseca ϕ^I por meio de:

$$\phi^I = \frac{\partial \phi^p}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v} + \frac{\partial \phi^p}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha} \quad (4.19)$$

Postula-se que a energia livre ψ pode ser escrita como função de suas variáveis de estado (ou internas) $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v, T, \alpha)$, levando a (ver Lemaitre e Chaboche (1990)):

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad (4.20)$$

Aplicando a Eq. (4.19) e a Eq. (4.20) sobre a Eq. (4.17) da dissipação intrínseca ϕ^I :

$$\frac{\partial \phi^p}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v} + \frac{\partial \phi^p}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha} = \left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v} - \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad (4.21)$$

Dado que a Eq. (4.21) deve ser não negativa para quaisquer valores de $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ e \dot{T} em qualquer ponto do domínio, é necessário que:

$$\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = 0 \quad \text{and} \quad s + \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0 \quad (4.22)$$

Então, a dissipação intrínseca assume a forma:

$$\phi^I = \frac{\partial \phi^p}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v} + \frac{\partial \phi^p}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha} = - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad (4.23)$$

Por fim, a formulação termodinâmica voltada ao meio viscoelástico conduz às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad ; \quad s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \\ \phi^I &= \frac{\partial \phi^p}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad \text{com} \quad \frac{\partial \phi^p}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v}} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi^p}{\partial \dot{\alpha}} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0 \\ \phi^T &= - \frac{1}{T} \underline{\underline{q}} \cdot \nabla T \end{aligned} \quad (4.24)$$

Na análise subsequente os efeitos térmicos são negligenciados ($\nabla T = 0$), tornando o conceito de energia livre matematicamente idêntico a energia interna. Deve-se, contudo, observar que a presente análise foi realizada para situações em que se considera deformações uniformes no contorno. Caso a condição fosse estabelecida em tensões, a energia potencial deveria ser utilizada, contudo, dentro do quadro analisado, a equivalência entre tensões e deformações permite inferir que a solução do problema em tensões deve levar a mesma formulação.

4.3. CRITÉRIO DE PROPAGAÇÃO DE FRATURAS

Supondo-se agora que o comportamento do material condiz com a viscoelasticidade, a avaliação da condição de propagação estabelecida na seção 4.1 deve ser reformulada. Para tanto, utiliza-se as mesmas condições estabelecidas na Figura 4.1 (elemento de espessura unitária constante, no qual a única fratura de área superficial a atravessa toda a espessura do elemento, e carregamento definido por meio do parâmetro cinemático $\underline{\underline{\varepsilon}}$). Em análises similares a de Griffith, tendo em vista que a abertura de fraturas é responsável por dissipar a energia livre do material, o critério de propagação pode ser naturalmente estabelecido por meio da formulação termodinâmica da dissipação de energia. Supondo que existam apenas efeitos viscosos e de abertura de fraturas (desprezando efeitos plásticos e outras não linearidades), toma-se a Eq. (4.23) como base para definir a dissipação viscosa $\phi^v = \frac{\partial \phi^p}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v}$ de forma que:

$$\phi^I - \phi^v = \phi^f = - \left. \frac{\partial \psi}{\partial a} \right|_p \dot{a} \quad (4.25)$$

Tal como no trabalho de Griffith (1921), o termo $\partial \psi / \partial a$ assume o papel de força termodinâmica responsável pela propagação das fraturas. Classicamente este termo é denominado de taxa de liberação de energia \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = - \left. \frac{\partial \psi}{\partial a} \right|_{\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^v}} \quad (4.26)$$

Sugere-se então que a propagação começa quando a taxa de liberação de energia \mathcal{F} alcançar um valor crítico denominado de energia crítica \mathcal{F}_c , determinado por meio de ensaios

de laboratório em função do material. Baseando-se nestes argumentos, é possível formular o critério de propagação de fraturas como (Griffith, 1921):

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_c \leq 0 \quad ; \quad \dot{a} \geq 0 \quad ; \quad (\mathcal{F} - \mathcal{F}_c)\dot{a} = 0 \quad (4.27)$$

A diferença entre o critério de propagação acima em relação àquele aplicado na elasticidade consiste basicamente na expressão creditada a taxa de liberação de energia \mathcal{F} , a qual passa a ter influência dos tensores de deformações viscosos. Além disso, a energia crítica \mathcal{F}_c para materiais viscoelásticos pode, a priori, ser dependente do tempo, devendo ser corretamente mensurada em ensaios de laboratório. Para qualquer fim avaliado neste trabalho, a energia crítica \mathcal{F}_c será tomada como um valor constante, o qual é propriedade do material.

Baseando-se em argumentos termodinâmicos similares aos desenvolvidos por Nguyen et al. (2013) e Nguyen e Dormieux (2014), é possível estender o critério de propagação para materiais contendo diversas micro-fraturas, realizando-se uma releitura macroscópica do critério de propagação. Para tanto, torna-se necessário reescrever a dissipação de energia bem como a energia livre em termos das variáveis macroscópicas e do parâmetro de dano. Inicialmente toma-se as expressões:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^I &= \frac{\partial \phi}{\partial \{\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}^v}\}} : \{\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}^v}\} + \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\psi} &= \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\dot{\underline{E}}}}} : \underline{\underline{\dot{\underline{E}}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \{\underline{\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}^v}\}} : \{\underline{\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}^v}\}} + \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $\{\underline{\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}^v}}\}$ representa o conjunto de campos de deformações viscosas presentes no VER e ε é o parâmetro de densidade de fraturas de Budiansky e O'Connell (1976), o qual representa o dano na escala macroscópica. A dissipação por mecanismos de abertura de fratura passa a ser escrita por meio de:

$$\dot{\phi}^f = \dot{\phi} - \dot{\phi}^v = -\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} \quad (4.29)$$

No entanto, em uma análise macroscópica, a verificação de um único ponto do VER não é suficiente para avaliar a propagação do dano, tornando-se necessário analisar a dissipação de energia média ao longo de todo o VER. Tal raciocínio é firmado por meio da média volumétrica da dissipação:

$$\Phi^f = \langle \phi^f \rangle = - \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right\rangle \dot{\varepsilon} \quad (4.30)$$

Em um meio onde a fratura está se propagando ($\dot{\varepsilon} > 0$), a dissipação de energia assume um valor limite $\Phi_f = \mathcal{F}_v \dot{\varepsilon} > 0$. Deve-se observar que diferentemente da energia crítica \mathcal{F}_c , agora denominado de energia crítica microscópica, a energia crítica (macroscópica) \mathcal{F}_v depende do parâmetro de densidade de fraturas, não corresponde a um parâmetro material (Dormieux e Kondo, 2016). Dormieux et al. (2006) determinaram a seguinte correspondência entre \mathcal{F}_c e \mathcal{F}_v para materiais quase-frágeis:

$$\mathcal{F}_v = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} \mathcal{F}_c \quad (4.31)$$

Chamando a energia elástica macroscópica no VER de $\Psi = \langle \psi \rangle$ e assumindo que o volume do VER Ω não depende de ε :

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \quad (4.32)$$

Mais uma vez, a taxa efetiva de liberação de energia \mathcal{F} assume o papel da força termodinâmica responsável pela propagação:

$$\mathcal{F} = - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right|_{\underline{\underline{E}}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}} \quad (4.33)$$

Combinando as evidências que levam à propagação de fraturas na escala macroscópica, o critério de propagação em viscoelasticidade é escrito como:

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_v \leq 0 \quad ; \quad \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad ; \quad (\mathcal{F} - \mathcal{F}_v) \dot{\varepsilon} = 0 \quad ; \quad \dot{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \Phi_f = \mathcal{F}_v \dot{\varepsilon} > 0 \quad (4.34)$$

A Eq. (4.34) evidencia que o único parâmetro necessário para determinar a condição de propagação das fraturas na escala macroscópica ainda é a taxa de liberação de energia, agora escrito em termo de variáveis macroscópicas. Como esse parâmetro depende da energia elástica macroscópica, a próxima seção será dedicada a avaliar a energia elástica dos materiais viscoelásticos.

Cabe ressaltar que o modelo desenvolvido é fortemente influenciado pela mecânica da fratura de um parâmetro. A extensão do raciocínio desenvolvido ao contexto de múltiplos parâmetros pode, contudo, se mostrar uma tarefa complicada dado ao limitado número de pesquisas que utiliza esta abordagem para a propagação de fraturas na viscoelasticidade no atual estado da arte. Adicionalmente, a extensão ao contexto multi-fraturado acrescenta outra dificuldade as abordagens de múltiplos parâmetros, as quais precisam ser melhor estudadas ainda no contexto de única fratura.

4.4. ENERGIA LIVRE MACROSCÓPICA

Contrastando com a dissipação de energia, a energia elástica corresponde à energia armazenada no material. Quando o material é descarregado, parte dessa energia armazenada é utilizada para que o material tente retornar à sua forma original, sendo chamado de energia recuperável, e parte dessa energia permanece armazenada no material, sendo chamada de energia residual. Na viscoelasticidade, Bland (1960), Hunter (1961) e Breuner e Onat (1964) determinaram uma expressão analítica para avaliar a energia elástica:

$$\psi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\tau_1) : \mathbb{R}(2t - \tau_1 - \tau_2) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.35)$$

Embora essa equação seja geral, tal expressão não é prática para aplicação no critério de propagação, dado que não há distinção entre as formas de deformação (elástica ou viscosa). Considerando que o material pode ser representado por modelos reológicos, a energia elástica pode por definição ser avaliada pela soma da energia elástica armazenada em cada mola do modelo. Supondo que a matriz sólida e as fraturas podem ser representadas genericamente por um modelo reológico de Burger, a energia elástica na escala microscópica pode ser escrita como:

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}}_M^e : \mathbb{C}_M : \underline{\underline{\epsilon}}_M^e + \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}}_K^e : \mathbb{C}_K : \underline{\underline{\epsilon}}_K^e \quad \text{with} \quad \mathbb{C}_\alpha = \begin{cases} \mathbb{C}_\alpha^s & \text{in } \Omega \setminus \omega \\ \mathbb{C}_\alpha^f & \text{in } \omega \end{cases} \quad (4.36)$$

onde α representa as partes de Maxwell (M) ou Kelvin (K) do modelo de Burger destacado na Figura 4.2.

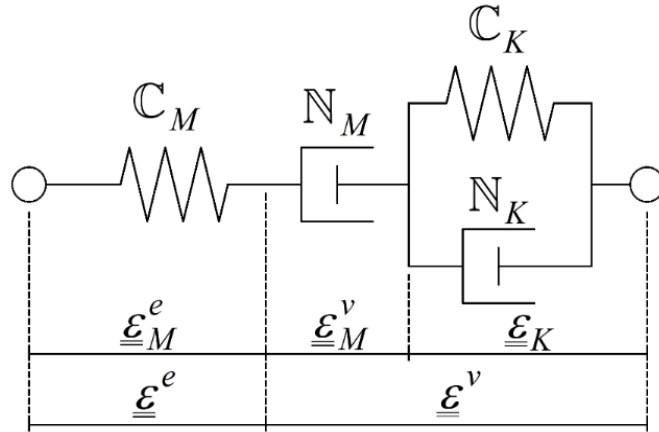


Figura 4.2: Modelo de Burger.

Considerando as relações $\underline{\underline{\varepsilon}}_M^e = \underline{\underline{\varepsilon}}^e$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_K^e = \underline{\underline{\varepsilon}}_K$ e $\mathbb{C}_M = \mathbb{R}_0$ do modelo de Burger, a Eq. (4.36) pode ser escrita como:

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}_K : \mathbb{C}_K : \underline{\underline{\varepsilon}}_K \quad \text{with} \quad \mathbb{R}_0 = \begin{cases} \mathbb{R}_0^s & \text{in } \Omega \setminus \omega \\ \mathbb{R}_0^f & \text{in } \omega \end{cases} \quad (4.37)$$

Baseado em argumentos micromecânicos, a energia elástica macroscópica é avaliada por meio da integral volumétrica da energia elástica na escala local:

$$\Psi = \langle \psi \rangle = \frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \rangle_{\Omega} + \frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_K : \mathbb{C}_K : \underline{\underline{\varepsilon}}_K \rangle_{\Omega} \quad (4.38)$$

Aplicando a relação $\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} + \underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v$ da Eq. (3.52) escreve-se:

$$\Psi = \frac{1}{2} \langle (\underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} + \underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \mathbb{R}_0 : (\underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} + \underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \rangle_{\Omega} + \frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_K : \mathbb{C}_K : \underline{\underline{\varepsilon}}_K \rangle_{\Omega} \quad (4.39)$$

Separando os termos referentes a deformação ligadas ao problema elástico ($\underline{\underline{\varepsilon}}^{EL}$) das deformações ligadas ao problema residual ($\underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v$) e aplicando o lema de Hill cruzado

$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} : \underline{\underline{\sigma}}^R \rangle = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} \rangle : \langle \underline{\underline{\sigma}}^R \rangle = 0$, a Eq. (4.39) pode ser reescrita na forma:

$$\Psi = \frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} : \mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} \rangle_{\Omega} + \frac{1}{2} \langle (\underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \mathbb{R}_0 : (\underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \rangle_{\Omega} + \frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_K : \mathbb{C}_K : \underline{\underline{\varepsilon}}_K \rangle_{\Omega} \quad (4.40)$$

O termo $\frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} : \mathbb{R}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^{EL} \rangle_{\Omega}$ refere-se a energia elástica ligada ao problema elástico, cuja solução é bem conhecida (ver Dormieux et al. (2006) ou Maghous et al. (2011)):

$$\Psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^{EL} : \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}}^{EL} + \frac{1}{2} \langle (\underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \mathbb{R}_0 : (\underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \rangle_{\Omega} + \frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_K : \mathbb{C}_K : \underline{\underline{\varepsilon}}_K \rangle_{\Omega} \quad (4.41)$$

Utilizando o conceito de deformação elástica macroscópica $\underline{\underline{E}}^e(t) = \underline{\underline{E}}(t) - \underline{\underline{E}}^v(t)$ tem-se:

$$\Psi = \frac{1}{2} (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^v) : \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^v) + \frac{1}{2} \langle (\underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \mathbb{R}_0 : (\underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \rangle_{\Omega} + \frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_K : \mathbb{C}_K : \underline{\underline{\varepsilon}}_K \rangle_{\Omega} \quad (4.42)$$

Para nosso propósito é conveniente separar a energia elástica em três partes:

$$\begin{aligned} 2\Psi^E &= (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^v) : \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^v) = \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{F}_0^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} = (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^v) : \underline{\underline{\Sigma}} \\ 2\Psi^R &= \langle (\underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \mathbb{R}_0 : (\underline{\underline{\varepsilon}}^R - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}}^R : \mathbb{F}_0 : \underline{\underline{\sigma}}^R \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^v : \underline{\underline{\sigma}}^R \rangle_{\Omega} \\ 2\Psi^D &= \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_K : \mathbb{C}_K : \underline{\underline{\varepsilon}}_K \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \odot \mathbb{F}_K : \mathbb{C}_K : \mathbb{F}_K \odot \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_K : \mathbb{C}_K : \mathbb{F}_K \odot \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde $\mathbb{F}_K = \mathbb{C}_K^{-1} - \mathbb{C}_K^{-1} : e^{-t \mathbb{N}_K^{-1} : \mathbb{C}_K}$ é o tensor de fluência associado a parte de Kelvin do modelo de Burger. Observe que a formulação permite identificar a origem de cada uma das parcelas de energia. Ψ^E corresponde à **energia elástica**, a qual é afetada instantaneamente pelas solicitações atuantes, observe que a dependência de Ψ^E com relação a $\underline{\underline{E}}^v$ implica na variação temporal desta função. Ψ^R corresponde à **energia residual**, associada as solicitações residuais remanescentes após o descarregamento completo em $\underline{\underline{\Sigma}} = 0$. Por fim, Ψ^D corresponde à **energia viscosa diferida**, relacionada as solicitações viscosas atrasadas (ou diferidas) que ocorrem no material. Embora não seja fácil avaliar a energia diferida por meio do equacionamento proposto na Eq. (4.43), é possível estabelecer uma expressão macroscópica para ela supondo-se que o modelo macroscópico do meio homogeneizado é conhecido. Expressões para Ψ^D baseadas em variáveis macroscópicas são apresentadas no **Anexo D**. Contudo, visto que para a propagação de fraturas apenas depende da derivada da energia elástica e, dado que Ψ^D está ligado as deformações viscosas, Nguyen e Dormieux (2014) apontam que $\partial \Psi_D / \partial \varepsilon$ pode ser negligenciado na análise da condição de propagação de fissuras, podendo ser estendido a presente análise.

Seguindo o raciocínio, a manipulação da expressão de Ψ^R leva a forma alternativa:

$$\Psi^R = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}}^v - \frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} \quad (4.44)$$

Dado que $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ não é necessariamente geometricamente compatível, não é possível aplicar o lema de Hill para simplificar a Eq. (4.44). Contudo, no caso particular em que $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ é geometricamente compatível, pode-se escrever:

$$\Psi^R = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \left(\underline{\underline{E}}^v - \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} \right) \quad (4.45)$$

Neste mesmo caso a Eq. (4.45) pode ser simplificada aplicando-se o lema de Hill sobre $\langle \underline{\underline{\mathbb{B}}}_0^v : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega}$:

$$\langle \underline{\underline{\mathbb{B}}}_0^v : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\mathbb{B}}}_0^v \rangle_{\Omega} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} \quad (4.46)$$

Recorrendo a Eq. (3.38), verifica-se que $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{E}}^v$, o que permite escrever a energia residual como:

$$\Psi^R = 0 \quad (4.47)$$

Nos casos em que $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ não é geometricamente compatível, determina-se a energia residual por meio da Eq. (4.43) e Eq. (3.53), o que leva a:

$$\Psi^R = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\dot{\Sigma}}}(\tau_1) : \left\langle \left[\underline{\underline{\mathbb{B}}}^v(t - \tau_1) - \underline{\underline{\mathbb{B}}}_0^v \right] : \underline{\underline{\mathbb{F}}}_0 : \left[\underline{\underline{\mathbb{B}}}^v(t - \tau_2) - \underline{\underline{\mathbb{B}}}_0^v \right] \right\rangle : \underline{\underline{\dot{\Sigma}}}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.48)$$

Para determinar a energia residual na viscoelasticidade, deve-se determinar a expressão não clássica de $\underline{\underline{\mathbb{B}}}^v$. Sua expressão pode ser obtida partindo de $\underline{\underline{\mathbb{B}}}$ na elasticidade e aplicando o princípio de correspondência para obter $\underline{\underline{\mathbb{B}}}^*$ e então realizar o inverso da transformada de Carson-Laplace. Os tensores de concentração $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$ e $\underline{\underline{\mathbb{B}}}$ são obtidos na literatura dependendo de cada caso (ver Mura (1987), Zaoui (2002) ou Dormieux e Kondo (2016)). Tanto a expressão de $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$ quanto $\underline{\underline{\mathbb{B}}}$ podem ser usada, visto que são relacionados através de:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_0^v : \mathbb{R}_0 &= \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : \mathbb{B}_0^v \\ \mathbb{A}^v \circ \mathbb{R} &= \mathbb{R}^{\text{hom}} \circ \mathbb{B}^v\end{aligned}\quad (4.49)$$

Tendo como base soluções numéricas desenvolvidas por Nguyen et al. (2013) as quais verificam que a energia residual de materiais fissurados é muito pequena quando comparada às componentes instantâneas, optou-se por desprezar os termos relacionados a $\Psi^R = 0$ do desenvolvimento seguinte.

4.5. ANÁLISE DA TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA

A Eq. (4.6) na elasticidade descreve uma forma quadrática para a taxa de liberação de energia em função do carregamento aplicado. A relação entre carregamento e solitação, entretanto, não é constante na viscoelasticidade, sendo função do tempo. Por este motivo, espera-se que a evolução temporal da taxa de liberação de energia na viscoelasticidade perca o caráter parabólico com relação ao carregamento. Dadas a Eq. (4.33), a Eq. (4.42) e fazendo, por simplicidade, $\Psi^R = 0$, escreve-se :

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v \right) : \frac{\partial \mathbb{R}_0^{\text{hom}}}{\partial \varepsilon} \Bigg|_{\underline{\underline{\mathbb{E}}}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}} : \left(\underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v \right) + \left(\underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v \right) : \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : \frac{\partial \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v}{\partial \varepsilon} \Bigg|_{\underline{\underline{\mathbb{E}}}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}} \quad (4.50)$$

Nguyen et al. (2013) argumenta que para estruturas unidimensionais o termo $\partial \langle \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v \rangle / \partial \varepsilon$ pode ser desconsiderado da análise. Para que seja possível dar continuidade a este raciocínio, supõem-se que o termo $\partial \langle \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v \rangle / \partial \varepsilon$ também pode ser desconsiderado da Eq. (4.50) para estruturas tridimensionais. Ainda assim, para casos específicos no qual $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ é geometricamente compatível, tem-se

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v}{\partial \varepsilon} \Bigg|_{\underline{\underline{\mathbb{E}}}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}} = \frac{\partial \langle \mathbb{B}_0^v : \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle}{\partial \varepsilon} \Bigg|_{\underline{\underline{\mathbb{E}}}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}} = \frac{\partial \left(\langle \mathbb{B}_0^v \rangle : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle \right)}{\partial \varepsilon} \Bigg|_{\underline{\underline{\mathbb{E}}}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}} = \frac{\partial \langle \mathbb{B}_0^v \rangle}{\partial \varepsilon} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle + \langle \mathbb{B}_0^v \rangle : \frac{\partial \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle}{\partial \varepsilon} \Bigg|_{\underline{\underline{\mathbb{E}}}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}} \quad (4.51)$$

Neste contexto, porém, o termo $\partial \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle / \partial \varepsilon$ pode ser escrito como:

$$\frac{\partial \underline{\underline{E}}^v}{\partial \varepsilon} \Big|_{\underline{\underline{E}}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}} = \frac{\partial \mathbb{I}}{\partial \varepsilon} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle + \underbrace{\langle \mathbb{B}_0^v \rangle : \frac{\partial \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^v \rangle}{\partial \varepsilon} \Big|_{\underline{\underline{E}}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}}}_0 = 0 \quad (4.52)$$

Desconsiderando-se $\partial \langle \underline{\underline{E}}^v \rangle / \partial \varepsilon$ da Eq. (4.50) tem-se, portanto:

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{2} (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_0^{\text{hom}}}{\partial \varepsilon} : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^v) \quad (4.53)$$

Dado que $(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^v) = \mathbb{F}_0^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}}$, escreve-se

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{F}_0^{\text{hom}} : \frac{\partial \mathbb{R}_0^{\text{hom}}}{\partial \varepsilon} : \mathbb{F}_0^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (4.54)$$

Recordando a equivalência entre condições de contorno em tensões e deformações homogêneas:

$$\mathbb{F}_0^{\text{hom}} : \mathbb{R}_0^{\text{hom}} = \mathbb{I} \quad (4.55)$$

Derivando a Eq. (4.55) em função do parâmetro de dano:

$$\mathbb{F}_0^{\text{hom}} : \frac{\partial \mathbb{R}_0^{\text{hom}}}{\partial \varepsilon} + \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : \frac{\partial \mathbb{J}_0^{\text{hom}}}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (4.56)$$

Conseqüentemente, aplicando a Eq. (4.56) sobre a Eq. (4.54), escreve-se a expressão da taxa de liberação de energia em função das tensões:

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_0^{\text{hom}}}{\partial \varepsilon} : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^v) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \frac{\partial \mathbb{F}_0^{\text{hom}}}{\partial \varepsilon} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (4.57)$$

A Eq. (4.57) corresponde à forma utilizada para \mathcal{F} nas abordagens numéricas seguintes.

4.6. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

A presente seção visa explorar a condição de propagação de fraturas, trazendo a representação gráfica da taxa de liberação de energia bem como permitindo o desenvolvimento de condições de propagação alternativas, propostas para carregamentos específicos (compressão isotrópica e cisalhamento puro). Por razão de simplicidade são utilizados os

modelos de Burger para a matriz sólida e o modelo de Maxwell às fraturas (Figura 4.3). Neste cenário, referências à modelos reológicos mais simples são avaliadas com base na adaptação dos modelos de Burger ou Maxwell, anulando ou tendendo ao infinito elementos específicos dos modelos originais. As propriedades referentes ao modelo de Burger da matriz (dadas em $[GPa]$ ou $[GPa \cdot ano]$) e modelo de Maxwell das fraturas (dadas em $[GPa / m]$ ou $[GPa \cdot ano / m]$) são dadas na Eq. (3.87) e, repetidas a seguir:

$$\begin{aligned} k_{e,M}^s &= 24.4 \quad ; \quad k_{v,M}^s = 23.2 \quad ; \quad k_{e,K}^s = 39.3 \quad ; \quad k_{v,K}^s = 1.6 \\ \mu_{e,M}^s &= 13.3 \quad ; \quad \mu_{v,M}^s = 12.3 \quad ; \quad \mu_{e,K}^s = 14.1 \quad ; \quad \mu_{v,K}^s = 0.4 \\ k_n^e &= 42.2 \quad ; \quad k_n^v = 22.2 \quad ; \quad k_t^e = 16.9 \quad ; \quad k_t^v = 8.9 \end{aligned} \quad (4.58)$$

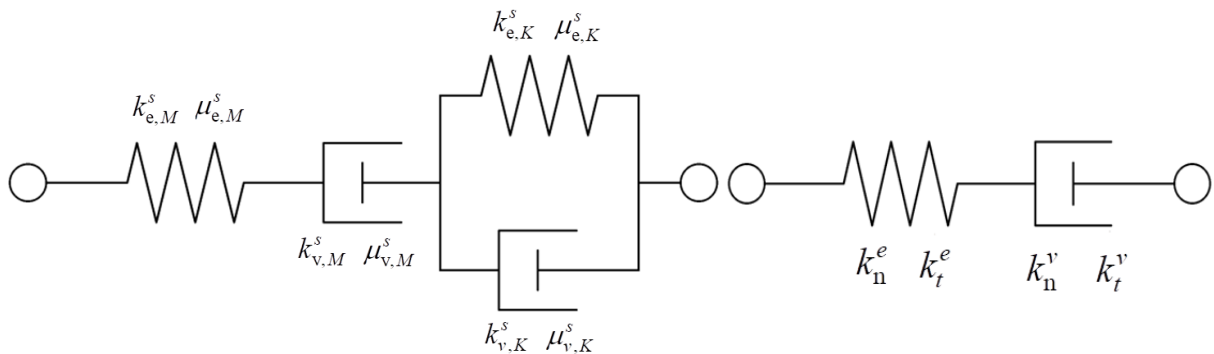


Figura 4.3: Modelo de Burger (matriz sólida) e de Maxwell (fraturas).

4.6.1. Aplicação de carregamento isotrópico

A primeira aplicação tem por objetivo a visualização gráfica da evolução da taxa de liberação de energia em função do tempo. Por razão de simplicidade considera-se no corpo do texto apenas o caso no qual as fraturas são aleatoriamente distribuídas no meio, deixando a situação em que fraturas são paralelamente orientadas para o **Anexo E**. Embora a distribuição de fraturas admitida permita a desassociação do comportamento segundo os carregamentos em isotrópico e cisalhamento, maior ênfase será dada a compressão, cujas expressões analíticas são mais simples e levam às mesmas conclusões. Define-se então o carregamento hidrostático estabelecido por meio das deformações macroscópicas $\underline{\underline{E}} = E(t) \underline{\underline{1}}$. Esta situação leva a tensões macroscópicas resultantes hidrostáticas, representadas sob a forma $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma(t) \underline{\underline{1}}$. Tem-se, portanto:

$$\Sigma(t) = 3k^{\text{hom}} \circ E = 3k_0^{\text{hom}} E - 3 \int_{-\infty}^t \frac{dk^{\text{hom}}(t-\tau)}{d\tau} E(\tau) d\tau \quad (4.59)$$

Para a situação de carregamento aplicada, a taxa de liberação de energia expressa na Eq. (4.57) é:

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} (E - E^v)^2 \frac{\partial k_0^{\text{hom}}}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{\partial k_0^{\text{hom}}}{\partial \varepsilon} \quad (4.60)$$

onde k_0^{hom} corresponde a componente instantânea do módulo volumétrico viscoelástico homogeneizado:

$$k_0^{\text{hom}} = \frac{k_{s,M}^e}{1 + \varepsilon \mathcal{M}_k^0} \quad \text{onde} \quad \mathcal{M}_k^0 = \frac{\frac{4}{3} \pi k_{s,M}^e / \mu_{s,M}^e}{\pi \kappa_1^e + a k_n^e / \mu_{s,M}^e} \quad (4.61)$$

Os parâmetros adimensionais κ_i^e são dados por:

$$\kappa_1^e = \frac{3k_{s,M}^e + \mu_{s,M}^e}{3k_{s,M}^e + 4\mu_{s,M}^e} ; \quad \kappa_2^e = \frac{3k_{n,M}^e a}{3k_{s,M}^e + 4\mu_{s,M}^e} ; \quad \kappa_3^e = \frac{3k_{t,M}^e a}{3k_{s,M}^e + 4\mu_{s,M}^e} ; \quad \kappa_4^e = \frac{\mu_{s,M}^e}{3k_{s,M}^e + 4\mu_{s,M}^e} \quad (4.62)$$

Aplicando a Eq. (4.61) sobre a Eq. (4.60) escreve-se:

$$\mathcal{F} = \frac{9}{2} (E(t) - E^v(t))^2 \frac{\mathcal{M}_k^{0^2}}{(1 + \varepsilon \mathcal{M}_k^0)^2} \left(\frac{k_{s,M}^e}{\mathcal{M}_k^0} - \frac{a k_{n,M}^e}{4\pi} \right) = \frac{1}{2} \Sigma(t)^2 \frac{\mathcal{M}_k^{0^2}}{k_{s,M}^e} \left(\frac{k_{s,M}^e}{\mathcal{M}_k^0} - \frac{a k_{n,M}^e}{4\pi} \right) \quad (4.63)$$

A Eq. (4.63) corresponde a da taxa de liberação de energia para carregamentos hidrostáticos aplicados a materiais isotrópicos a nível macroscópico. A comparação desta expressão com a energia crítica macroscópica \mathcal{F}_v permite a avaliação da propagação de fraturas. No caso em que $\mathcal{F}(\varepsilon) < \mathcal{F}_v(\varepsilon)$, não se aplica energia suficiente sobre o material para que ocorra a propagação de fraturas, levando a $\dot{\varepsilon} = 0$. Contudo, para o caso $\mathcal{F}(\varepsilon) = \mathcal{F}_v(\varepsilon)$ tem-se uma indeterminação, podendo existir o equilíbrio energético (sem propagação) ou a dissipação de energia por meio da propagação de fraturas, i.e. $\dot{\varepsilon} > 0$. Embora a situação $\mathcal{F}(\varepsilon) > \mathcal{F}_v(\varepsilon)$ não seja fisicamente possível, a análise voltada ao parâmetro de dano inicial ε_0 permite que a relação $\mathcal{F}(\varepsilon_0) > \mathcal{F}_v(\varepsilon_0)$ seja virtualmente estudada, exibindo uma condição na qual a propagação de fraturas é evidente. Neste contexto a expressão “virtualmente” faz

referência a uma impossibilidade física, visto que quando $\mathcal{F}(\varepsilon_0) = \mathcal{F}_v(\varepsilon_0)$ existirá a propagação de fraturas, invalidando a expressão $\mathcal{F}(\varepsilon_0) > \mathcal{F}_v(\varepsilon_0)$.

Para a representação gráfica da Eq. (4.63), torna-se necessário definir a evolução do carregamento aplicado. Supõem-se então duas formas para as deformações aplicadas: **deformações constantes** $E(t) = E_0 H(t)$ e **taxa de deformação constante** $E(t) = \dot{E}_0 t H(t)$. Dado o modelo reológico de Burger para a matriz sólida e o modelo de Maxwell para as fraturas, cujos parâmetros são apresentados na Eq. (4.58), a taxa de liberação de energia é representada segundo a Figura 4.4:

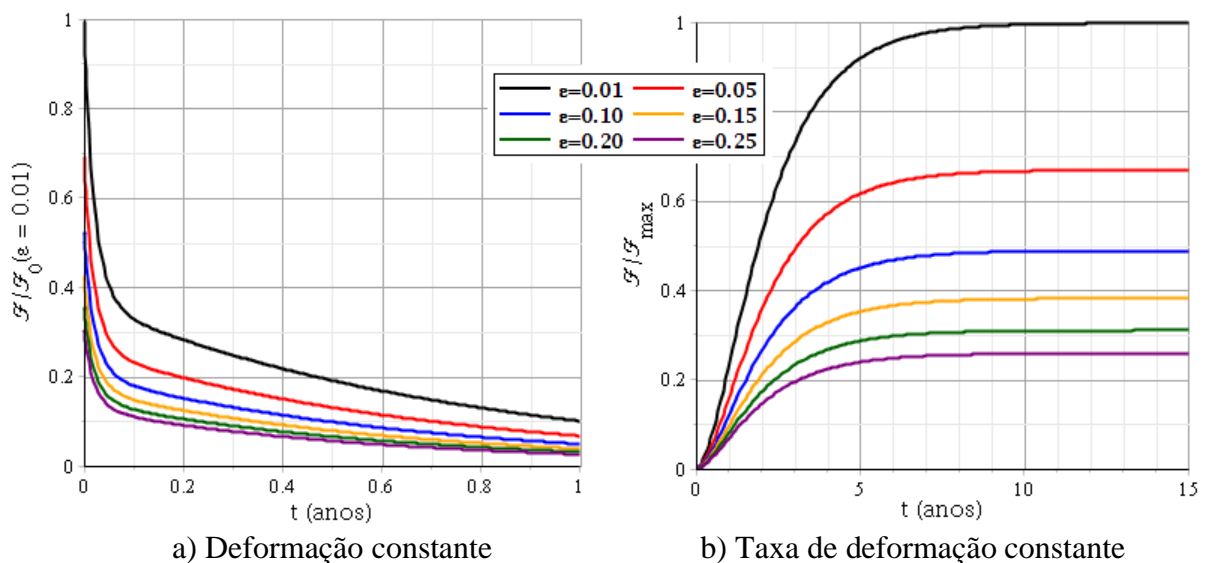


Figura 4.4: Evolução da taxa de liberação de energia.

$$\mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_0(\varepsilon = 0.01) = 651 J / m^3; \mathcal{F}_\infty(\varepsilon = 0.1) = 586 J / m^3; E_0 = 0.5 \times 10^{-4}; \dot{E}_0 = 0.5 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$$

Para a situação na qual se aplicam deformações constantes, observa-se que, devido à redução do valor da função de relaxação ao longo do tempo, os maiores valores referentes a taxa de liberação de energia ocorrem para os instantes iniciais, evidenciando que fenômenos instantâneos controlam a propagação de fraturas. Esta solução sugere que não há necessidade de avaliar toda a solução viscoelástica, pois o comportamento instantâneo do material define se há ou não propagação da fratura. Em relação ao parâmetro dano ε , valores maiores levam a menores taxas de liberação de energia \mathcal{F} no domínio do tempo analisado. A comparação direta entre o valor instantâneo da taxa de liberação de energia com um valor predefinido para a energia crítica macroscópica leva a um raciocínio equivocado, indicando que aumentar o parâmetro de dano torna a propagação mais difícil. Decorre que \mathcal{F}_v também é função do

parâmetro de dano e , portanto, cada taxa de liberação de energia \mathcal{F} deve ser comparada com sua respectiva energia crítica macroscópica \mathcal{F}_v , avaliada a partir da mesma energia crítica microscópica \mathcal{F}_c .

Referindo-se ao carregamento constante, a Figura 4.5.a mostra a diferença absoluta entre $\mathcal{F}(t=0)$ e \mathcal{F}_v para $\mathcal{F}_c = 30 \text{ J/m}^2$ enquanto a Figura 4.5.b mostra a diferença relativa $\mathcal{F}(t=0) - \mathcal{F}_v$ em função do parâmetro de dano para diferentes energias críticas \mathcal{F}_c . É possível perceber que, considerando o mesmo carregamento e energia crítica microscópica \mathcal{F}_c , determinados valores do parâmetro de dano podem ou não induzir a propagação de fraturas, reforçando que as situações mais propensas ao início da propagação não são necessariamente aquelas com maior ou menor parâmetro de dano. Além disso, diferentes valores de \mathcal{F}_c mostram-se mais ou menos críticos a propagação. Observa-se que a função foi definida desconsiderando a evolução da propagação e, valores iguais ou maiores que zero (atingidos até os parâmetros atuais) acionam o critério de propagação.

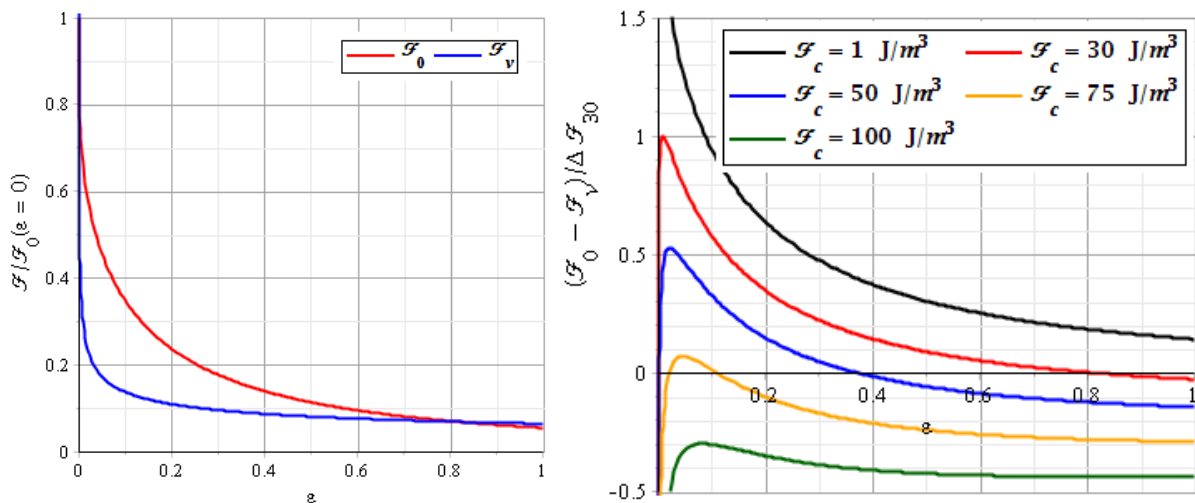


Figura 4.5: Diferença relativa entre $\mathcal{F}(t=0) - \mathcal{F}_v$ de acordo com o parâmetro de dano.

$$\mathcal{N} = 1 \text{ m}^{-3}; E_0 = 0.5 \times 10^{-4}; \mathcal{F}_c = 30 \text{ J/m}^2; \mathcal{F}_0(\varepsilon = 0) = 984 \text{ J/m}^3; \Delta\mathcal{F}_{30} = 359 \text{ J/m}^3$$

Em relação a taxa de carregamento constante, em um raciocínio elástico tem-se uma taxa de liberação de energia quadrática, condicionando o material rapidamente a propagação das fraturas. Do ponto de vista viscoelástico, contudo, a taxa de liberação de energia cresce até um valor máximo assintótico $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}(\infty)$. Caso o valor assintótico seja menor do que a energia

crítica, não haverá instante em que $\mathcal{F}(\varepsilon) = \mathcal{F}_v(\varepsilon)$ e, portanto, não ocorrerá a propagação de fraturas. \mathcal{F}_∞ assume então um papel importante no estudo da propagação de fraturas, permitindo formular uma **condição de propagação independente do tempo** ao compará-lo com \mathcal{F}_v :

- $\mathcal{F}_\infty \leq \mathcal{F}_v$ não há propagação de fraturas.
- $\mathcal{F}_\infty > \mathcal{F}_v$ há propagação de fraturas.

A condição acima é temporalmente independente e, portanto, não permite identificar o instante t_p de iniciação da propagação. Para que tal valor seja determinado, deve-se recorrer a igualdade $\mathcal{F}(t_p) = \mathcal{F}_v$ para $\varepsilon = \varepsilon_0$. Supondo que não ocorra a propagação das fraturas para o valor inicial do parâmetro de dano ε_0 , a expressão de \mathcal{F}^∞ pode ser avaliada aplicando se o limite em que $t \rightarrow \infty$ sobre a Eq. (4.63):

$$\mathcal{F}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}(t) = \frac{1}{2} \Sigma_\infty^2 \frac{\mathcal{M}_k^{0^2}}{k_{s,M}^e} \left(\frac{k_{s,M}^e}{\mathcal{M}_k^0} - \frac{a k_{n,M}^e}{4\pi} \right) = \frac{9}{2} \dot{E}_0^2 \frac{k_{s,M}^v{}^2}{k_{s,M}^e{}^2} \frac{\mathcal{M}_k^{0^2}}{(1 + \varepsilon \mathcal{M}_k^\infty)^2} \left(\frac{k_{s,M}^e}{\mathcal{M}_k^0} - \frac{a k_{n,M}^e}{4\pi} \right) \quad (4.64)$$

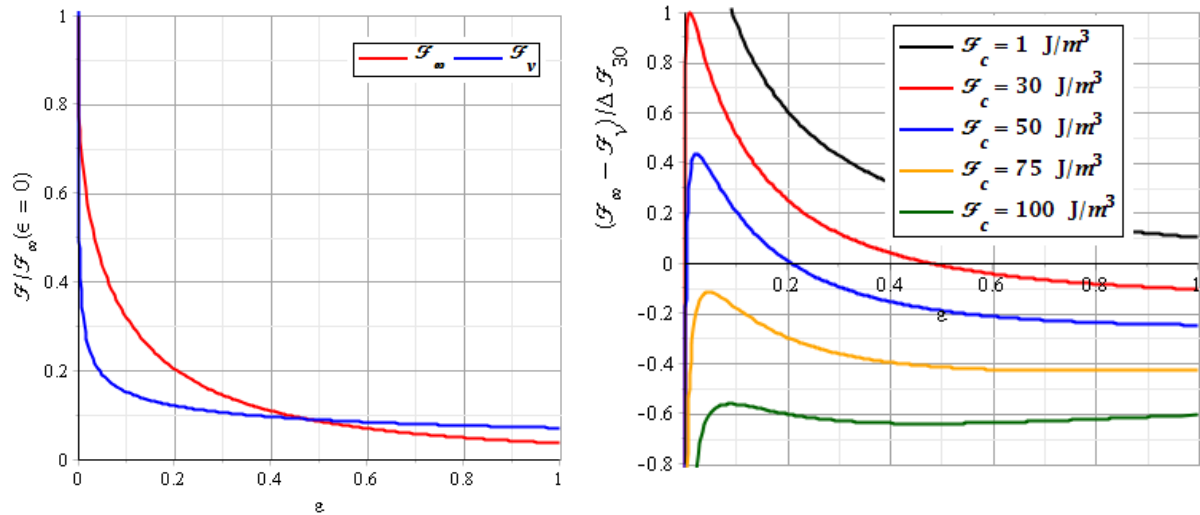
onde

$$\mathcal{M}_k^\infty = \frac{\frac{4}{3} \pi \frac{k_{s,M}^v}{\mu_{s,M}^v}}{\pi \kappa_1^\infty + a \frac{k_{n,M}^v}{\mu_{s,M}^v}} \quad \text{com} \quad \Sigma_\infty = 3 \dot{E}_0 \frac{k_{s,M}^v}{1 + \varepsilon \mathcal{M}_k^\infty} \quad (4.65)$$

e

$$\kappa_1^\infty = \frac{3k_{s,M}^v + \mu_{s,M}^v}{3k_{s,M}^v + 4\mu_{s,M}^v} ; \quad \kappa_2^\infty = \frac{3a k_{n,M}^v}{3k_{s,M}^v + 4\mu_{s,M}^v} ; \quad \kappa_3^\infty = \frac{3a k_{t,M}^v}{3k_{s,M}^v + 4\mu_{s,M}^v} ; \quad \kappa_4^\infty = \frac{\mu_{s,M}^v}{3k_{s,M}^v + 4\mu_{s,M}^v} \quad (4.66)$$

O critério de propagação em termos de \mathcal{F}_∞ pode, contudo, ser examinado diretamente no domínio do parâmetro de dano. A Figura 4.6 apresenta dois gráficos. No primeiro compara-se diretamente a taxa de liberação de energia assintótica com a energia crítica. No segundo gráfico compara-se a expressão $(\mathcal{F}_\infty - \mathcal{F}_v)$ a qual, para valores positivos, conduz a propagação de fraturas.



a) Comparação direta

b) Comparação relativa

Figura 4.6: comparação entre taxa de liberação assintótica e energia crítica.

$$\mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_c = 30 \text{ J/m}^2; \mathcal{F}_\infty(\varepsilon = 0) = 891 \text{ J/m}^3; \Delta \mathcal{F} = 293 \text{ J/m}^3; \dot{\varepsilon}_0 = 0.5 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$$

A Figura 4.6 sugere que existe um intervalo definido por $\mathcal{F}_\infty > \mathcal{F}_v$, no qual a propagação é possível (para $\mathcal{F}_c = 30 \text{ J/m}^2$ este intervalo é definido por $0.00056 < \varepsilon < 0.47662$). Tanto se o material estiver muito pouco danificado ($0.00056 > \varepsilon$) quanto se estiver muito danificado ($\varepsilon > 0.47662$), a taxa de liberação de energia não consegue atingir o valor da energia crítica à propagação e, portanto, não existe propagação de fraturas. Caso o valor do parâmetro de dano esteja localizado dentro do intervalo determinado, em algum instante $t < \infty$ a taxa de liberação de energia atingirá o valor da energia crítica e, dado que $\mathcal{F} > \mathcal{F}_c$ não é fisicamente possível, ocorrerá a propagação de fraturas ($\dot{\varepsilon} > 0$), até que o equilíbrio (ou a ruptura total) seja reestabelecido. Neste contexto, define-se ε_∞ como o parâmetro de dano final após encerrada a propagação.

Supondo-se que a evolução do sistema seja suficientemente lenta para que o comportamento durante a evolução das fraturas apresente equilíbrio a cada instante de tempo, o balanço entre a taxa de liberação de energia e a energia crítica do sistema leva a $\mathcal{F}_\infty(\varepsilon_{lim}) = \mathcal{F}_v(\varepsilon_{lim})$, onde ε_{lim} consiste no limite superior do intervalo destacado acima. No caso em que o equilíbrio não existir, espera-se que o parâmetro de dano final ε_∞ seja superior a ε_{lim} , justificando a notação $\varepsilon_\infty^{min} = \varepsilon_{lim}$ como o parâmetro de dano final mínimo.

Dado que a avaliação em termos energéticos tal como a representada na Eq. (4.63) nem sempre é conveniente, uma abordagem alternativa pode ser desenvolvida em termo de tensões e deformações. Partindo da Eq. (4.63) avaliada em um regime crítico $\mathcal{F} = \mathcal{F}_v$, é possível extrair as seguintes expressões:

$$\Sigma \leq \Sigma_c = \sqrt{\frac{2\mathcal{F}_v}{\frac{dk_0^{\text{hom}^{-1}}}{d\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{16\pi^2 k_{s,M}^e}{3a\mathcal{M}_k^0 (4\pi k_{s,M}^e - ak_{n,M}^e \mathcal{M}_k^0)}} \mathcal{F}_c \quad (4.67)$$

$$E^e \leq E_c^e = \sqrt{\frac{2\mathcal{F}_v}{9\frac{dk_0^{\text{hom}}}{d\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{16\pi^2 (1 + \varepsilon \mathcal{M}_k^0)^2}{27a\mathcal{M}_k^0 (4\pi k_{s,M}^e - ak_{n,M}^e \mathcal{M}_k^0)}} \mathcal{F}_c \quad (4.68)$$

onde $E^e = E - E^v$.

Neste contexto, enquanto $\Sigma < \Sigma_c$ ou $E^e < E_c^e$, não haverá propagação de fraturas. Dado o carregamento em taxa de deformações constantes anteriormente suposto, uma análise voltada a condição assintótica independente do tempo também pode ser evidenciada. Fazendo $t \rightarrow \infty$ tem-se:

$$\Sigma_\infty \leq \Sigma_c = \sqrt{\frac{2\mathcal{F}_v}{\frac{dk_0^{\text{hom}^{-1}}}{d\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{16\pi^2 k_{s,M}^e}{3a\mathcal{M}_k^0 (4\pi k_{s,M}^e - ak_{n,M}^e \mathcal{M}_k^0)}} \mathcal{F}_c \quad (4.69)$$

$$\dot{E}_0 \leq \dot{E}_{CR} = \frac{1 + \varepsilon \mathcal{M}_k^\infty}{3k_{s,M}^v} \sqrt{\frac{2\mathcal{F}_v}{\frac{dk_0^{\text{hom}^{-1}}}{d\varepsilon}}} = \frac{(1 + \varepsilon \mathcal{M}_k^\infty)}{k_{s,M}^v} \sqrt{\frac{16\pi^2}{27a\mathcal{M}_k^0} \frac{k_{s,M}^e}{(4\pi k_{s,M}^e - ak_{n,M}^e \mathcal{M}_k^0)}} \mathcal{F}_c \quad (4.70)$$

Ressalta-se que, neste raciocínio, \dot{E}_0 é um valor constante conhecido enquanto \dot{E}_{CR} depende do parâmetro de dano (em uma análise com condições de contorno formuladas em tensões, Σ_∞ é independente do parâmetro de dano e Σ_c mantém sua dependência). Pode-se então comparar diretamente os valores de \dot{E}_0 imposto (ou Σ_∞ resultante) para avaliar a propagação de fraturas,

- $\dot{E}_0 \leq \dot{E}_{CR}$ (ou $\Sigma_\infty \leq \Sigma_c$) não há propagação de fraturas

- $\dot{E}_0 > \dot{E}_{CR}$ (ou $\Sigma_\infty > \Sigma_c$) há propagação de fraturas

Observa-se que quando $\dot{E}_0 > \min[\dot{E}_{CR}(\varepsilon)]$ existirá um intervalo em ε para o qual $\dot{E}_0 > \dot{E}_{CR}(\varepsilon)$. O intervalo consiste exatamente nos mesmos valores apresentados anteriormente ($0.00056 < \varepsilon < 0.47662$). Tal como antes, o critério é temporalmente independente. A **Erro! Fonte de referência não encontrada.** exibe a evolução de \dot{E}_{CR} segundo o parâmetro de dano e da tensão crítica Σ_c .

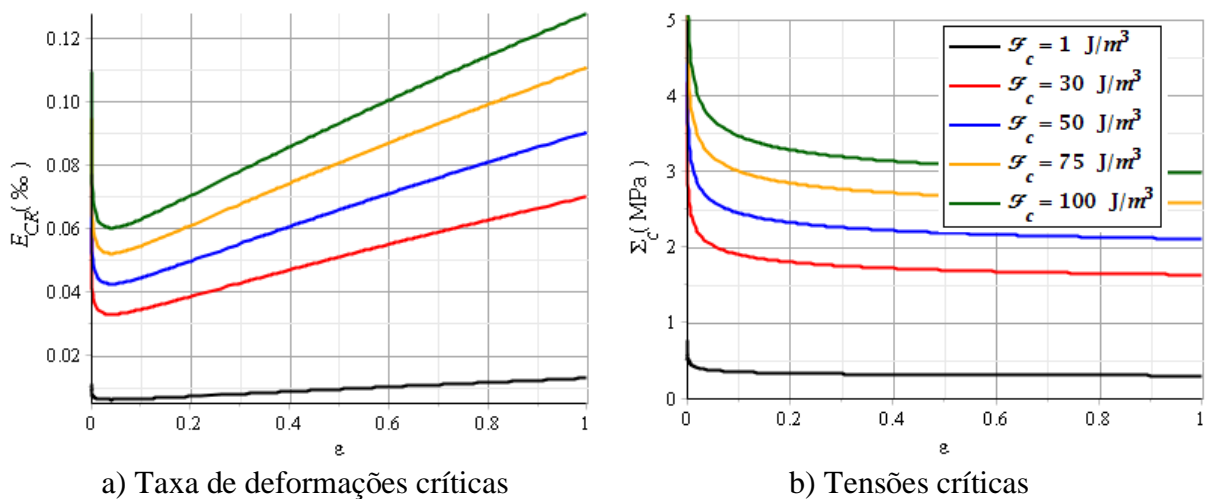


Figura 4.7: Taxas de deformação e tensões críticas à propagação.

$$\mathcal{N} = 1; \dot{E}_0 = 0.5 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$$

Análises sobre as expressões formuladas na Eq. (4.63) e na Eq. (4.64) fornecem duas informações importantes, a primeira corresponde ao início da propagação da fratura e a segunda ao limite de propagação. Estas expressões permitem a determinação do tempo necessário até o início da propagação bem como uma estimativa do parâmetro de dano $\varepsilon_\infty^{\min}$. A Figura 4.7 a seguir permite a construção de um raciocínio no qual as propriedades do material nos instantes antes ou após a propagação são conhecidos. Destaca-se que a linha azul contínua faz referência ao comportamento esperado antes da propagação ($\varepsilon = \varepsilon_0$), a linha vermelha contínua refere-se ao comportamento esperado após a propagação ($\varepsilon = \varepsilon_\infty^{\min}$) e as linhas tracejadas referem-se a taxa de liberação de energia fictícias para os parâmetros de dano inicial ε_0 e final $\varepsilon_\infty^{\min}$.

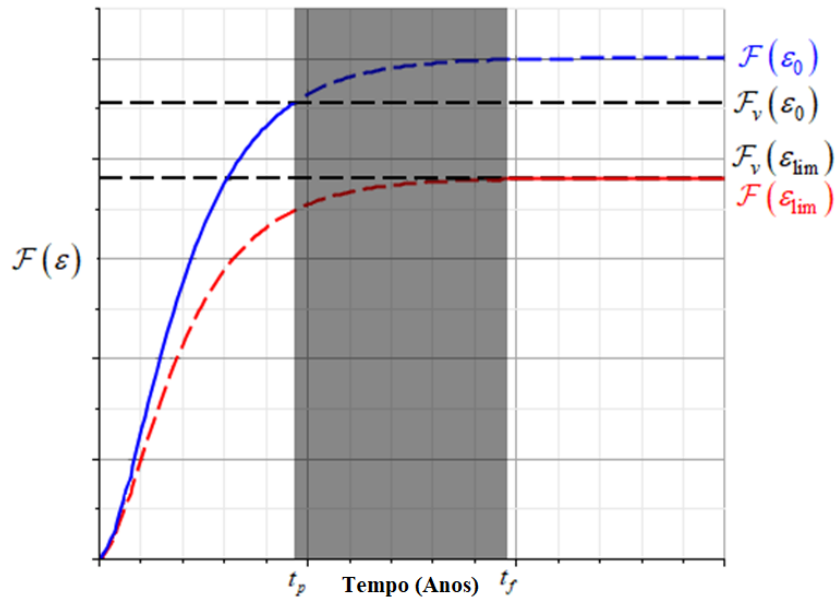


Figura 4.7 : evolução da taxa de liberação de energia no tempo.

Distinguem-se 3 intervalos distintos. No primeiro intervalo ($0 \leq t \leq t_p$), a energia crítica \mathcal{F}_v é maior que a taxa de liberação de energia \mathcal{F} , a qual aumenta de zero para \mathcal{F}_v . Neste intervalo não há propagação de fratura. No tempo limite t_p , o critério de propagação é alcançado e, conseqüentemente, a propagação é iniciada. O tempo t_p em que o critério de propagação é alcançado é chamado de **tempo de iniciação**.

O segundo intervalo ($t_p \leq t \leq t_f$) é marcado pela propagação das fraturas, correspondendo ao aumento do parâmetro de dano de ε_0 ao seu valor final. Nesse intervalo, o fenômeno da propagação ocorre, abrindo espaço para inclusão de modelos propagação. Uma vez que ε atinja $\varepsilon_\infty^{\min}$, a taxa de liberação de energia assintótica $\mathcal{F}_\infty(\varepsilon_\infty^{\min})$ coincide com a energia crítica $\mathcal{F}_v(\varepsilon_\infty^{\min})$ e, conseqüentemente, o critério de propagação torna-se inativo, interrompendo a propagação das fraturas. Dado que o critério $\mathcal{F}_\infty(\varepsilon_\infty^{\min}) = \mathcal{F}_v(\varepsilon_\infty^{\min})$ é independente do tempo, a localização exata do tempo t_f em que a propagação termina depende do modelo de propagação adotado bem como da velocidade de propagação. Nota-se que estes raciocínios pressupõem que a evolução das fraturas mantém o equilíbrio do sistema, o que não é necessariamente verdade. Caso o equilíbrio não seja mantido, o estado final definido por ε_∞

deve ser, obrigatoriamente, mais danificado do que o estado limite em equilíbrio $\varepsilon_{\infty}^{\min}$ para que o equilíbrio no estado final seja alcançado.

No último intervalo ($t > t_f$) tem-se $\mathcal{F}(\varepsilon_{\infty}^{\min}) = \mathcal{F}_v(\varepsilon_{\infty}^{\min})$ em um valor assintótico constante. Esse intervalo é marcado pela instabilidade unidirecional, onde aumentos na taxa de deformação levam a mais propagação e reduções na taxa de deformação mantem o mesmo nível de dano, reduzindo a taxa de liberação de energia. Observa-se que em problemas com propagação catastrófica, esse intervalo não ocorre porque o material rompe antes disso.

O raciocínio exposto até então foi desenvolvido supondo-se que as fraturas seguem o modelo reológico de Maxwell. Para que a comparação entre diferentes modelos reológicos de fraturas possa ser desenvolvida é necessário aumentar a gama de valores dos respectivos parâmetros. Para isso são considerados os cinco modelos reológicos destacados a seguir:

$$\mathbf{Fissura: } k_{n,M}^e = 0 ; k_{t,M}^e = 0$$

$$\mathbf{Elástico x2: } k_{n,M}^e = 84.4 ; k_{t,M}^e = 33.8$$

$$\mathbf{Elástico x4: } k_{n,M}^e = 168.8 ; k_{t,M}^e = 67.6 \quad (4.71)$$

$$\mathbf{Maxwell x2: } k_{n,M}^e = 84.4 ; k_{t,M}^e = 33.8 ; k_{n,M}^v = 44.4 ; k_{t,M}^v = 17.8$$

$$\mathbf{Maxwell x4: } k_{n,M}^e = 84.4 ; k_{t,M}^e = 33.8 ; k_{n,M}^v = 88.8 ; k_{t,M}^v = 35.6$$

A Figura 4.8.a compara a taxa de liberação de energia e a Figura 4.8.b a energia assintótica considerando o modelo de Burger com a matriz sólida e usando os modelos de fratura descritos acima.

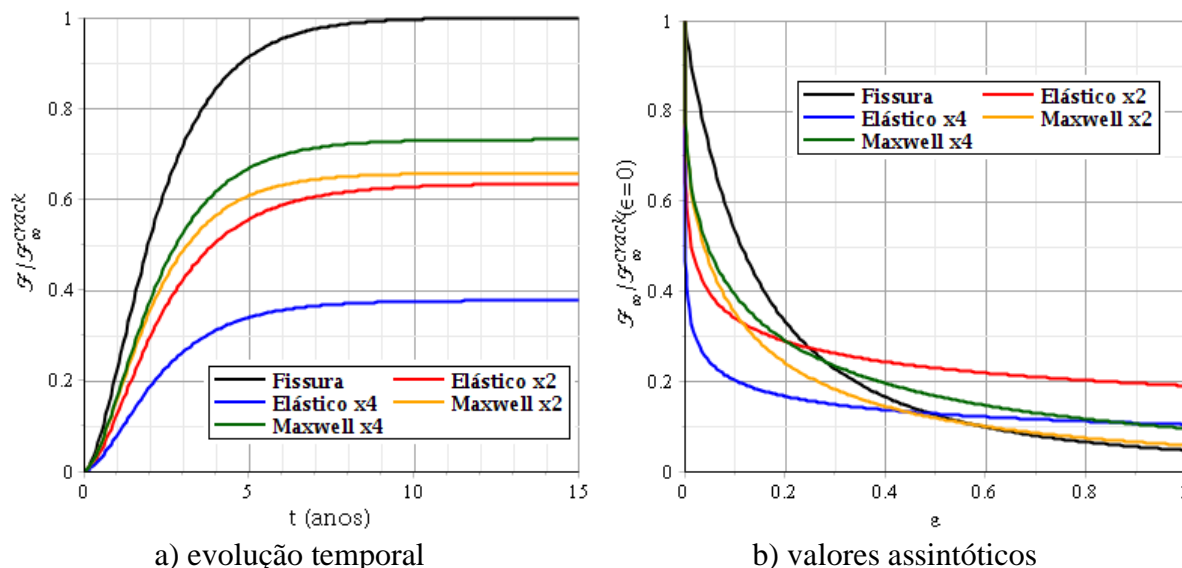


Figura 4.8 : Taxa de liberação de energia utilizando diferentes modelos para fraturas.

$$\mathcal{N} = 1; \varepsilon = 0.1, \mathcal{F}_\infty^{crack} = 478 J / m^3; \mathcal{F}_\infty^{crack}(\varepsilon = 0) = 891 J / m^3; \dot{\varepsilon}_0 = 0.5 \times 10^{-4} s^{-1}$$

As curvas apresentadas na Figura 4.8.a são semelhantes à taxa de liberação de energia já apresentada na Figura 4.4.b. Além disso, estudando os modelos “fissura”, “elástico x2” e “elástico x4” tem-se a impressão de que menores parâmetros elásticos referentes ao comportamento da fratura levam a maior taxa de liberação de energia. Porém, examinando a Figura 4.8.b, que mostra o valor assintótico da taxa de liberação de energia em função do parâmetro de dano, fica claro que essa relação não pode ser verificada, sendo apenas uma coincidência matemática para os parâmetros adotados. O achado mais forte dessa observação indica que não existem parâmetros elásticos para a fratura (ou fissuras) globalmente mais críticos do que os demais para o início da propagação, já que este último depende fortemente do parâmetro de dano. Porém, é possível inferir que a propagação de fissuras (em detrimento das fraturas elásticas) geralmente leva a parâmetros de dano final mais baixos, uma vez que sua energia assintótica diminui mais rapidamente, consequentemente, sendo menos suscetível à propagação crítica. Mesmo assim, deve-se observar que subestimar ou superestimar os parâmetros mecânicos das fraturas pode levar a riscos de projeto, prevendo que a propagação não ocorra ou que se estabilize dentro de valores aceitáveis, o que não ocorreria se os parâmetros fossem devidamente avaliados.

Por outro lado, analisando os modelos de fratura de Maxwell, que apresentam os mesmos parâmetros elásticos que o “elástico x2”, observa-se uma nítida redução no valor da energia assintótica. Isso ocorre devido à dissipação de energia viscosa, reduzindo a energia disponível

para desencadear a propagação. Nesse aspecto, menor rigidez viscosa (ou maior viscosidade do material) leva a maior energia dissipada pelos processos viscosos, reduzindo a disponibilidade de energia, o que dificulta o início da propagação e leva a valores finais menores para o parâmetro de dano.

É importante observar, contudo, que os valores assintóticos obtidos são uma característica referente ao modelo reológico adotado para a matriz sólida (Burger ou qualquer outro modelo com comportamento assintótico-no-tempo nulo). Modelos viscoelásticos que não seguem esta evolução levam a soluções diferentes. Dado o modelo de Kelvin-Voigt associado à matriz sólida, descrito por meio das propriedades elencadas na Eq. (4.58), e mantendo-se o modelo de Maxwell as fraturas, a Figura 4.9 avalia a taxa de liberação de energia em função do tempo:

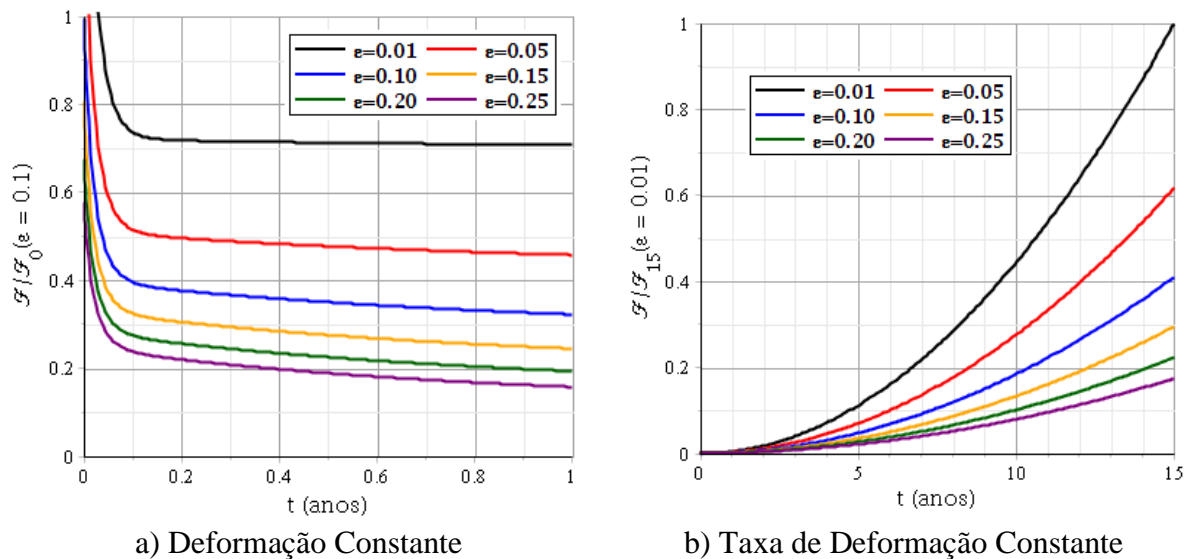


Figura 4.9: Evolução da taxa de liberação de energia.

$$\mathcal{N} = 1; \mathcal{F}^0(\epsilon = 0.1) = 343 J / m^3; \mathcal{F}^{15}(\epsilon = 0.01) = 54384 J / m^2; E_0 = 10^{-4}; \dot{E}_0 = 0.5 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$$

Mais uma vez, as componentes instantâneas governam a propagação da fratura quando deformações constantes são aplicadas. Durante a aplicação de taxas de deformação constantes, no entanto, a taxa de liberação de energia não apresenta um valor assintótico, assumindo uma forma parabólica, levando a propagações catastróficas em tempos suficientemente grandes. Comparando, no entanto, com a solução elástica e supondo que ambos os materiais apresentam a mesma energia crítica, espera-se que o modelo de Kelvin-Voigt exija maiores tempos para iniciar a propagação da fratura.

Por fim, análises relativas a carregamentos ascendentes de zero a um patamar constante do tipo $E(t) = \dot{\epsilon}_0 [tH(t) - (t - \tau)H(t - \tau)]$ – onde τ define o tempo em que o carregamento torna-se constante – típicas para processos em tempos transientes como aterramentos, etapas construtivas ou barragens, fornecem taxas de liberação de energia cuja forma não tende a ser assintótica em um valor máximo. Nestas situações, o valor máximo de \mathcal{F} ocorre em $t = \tau$ de forma que todo o processo ocorre em níveis substancialmente mais baixos do que na elasticidade. Sendo assim, pode-se definir critérios de propagação ao comparar $\mathcal{F}(\epsilon_0, \tau)$ ao valor da energia crítica. Se $\mathcal{F}(\epsilon_0, \tau) \leq \mathcal{F}_v(\epsilon_0)$ não existe propagação e se $\mathcal{F}(\epsilon_0, \tau) > \mathcal{F}_v(\epsilon_0)$ ocorrerá a propagação a partir do instante t_p definido por $\mathcal{F}(\epsilon_0, t_p) = \mathcal{F}_v(\epsilon_0)$. A Figura 4.10 exhibe o comportamento esperado para a taxa de liberação de energia dado os modelos de Burger e de Kelvin-Voigt à matriz sólida.

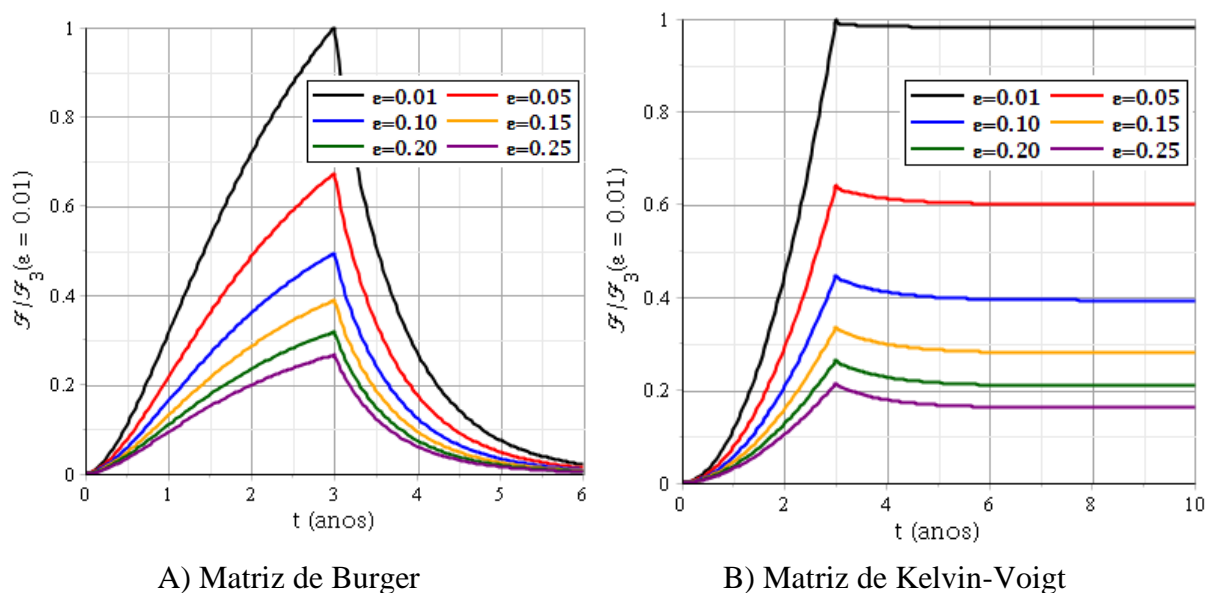


Figura 4.10: Evolução da taxa de liberação de energia.

$$\mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_3^{Burger}(\epsilon = 0.01) = 428 J / m^3; \mathcal{F}_3^{KV}(\epsilon = 0.01) = 2207 J / m^3; \dot{\epsilon}_0 = 0.5 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}; \tau = 3 \text{ anos}$$

A Figura 4.10 expõem que, para a forma de carregamento apresentado, a taxa de liberação de energia apresenta um comportamento similar ao modelo com taxa de carregamento constante até o momento em que o carregamento se torna constante, a partir de onde a taxa de liberação de energia começa a decrescer. Neste cenário, o maior valor de taxa de liberação de energia ocorre em $t = \tau$, levando aos valores mais críticos a propagação.

4.6.2. Aplicação de carregamento cisalhante

A exemplificação através de carregamentos cisalhantes mostra-se pouco proveitosa, visto que com ajuda da Eq. (4.57) verifica-se que, independentemente da orientação do carregamento aplicado, chega-se as mesmas conclusões que aquelas obtidas para o carregamento isotrópico. Por esta razão a análise referente a carregamentos cisalhantes será muito mais simplificada.

Dado o sistema de eixos ortonormal $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, referindo-se, então, ao comportamento em cisalhamento definido pelo carregamento macroscópico desviador $\underline{\underline{E}} = E(t)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)$, a tensão macroscópica relacionada é dada por $\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \Sigma(t)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)$ onde:

$$\Sigma(t) = 2\mu^{\text{hom}} \circ E = 2\mu_0^{\text{hom}}(E - E^v) \quad (4.72)$$

Neste caso de carregamento, a taxa de liberação de energia toma a forma:

$$\mathcal{F} = -\frac{9}{2}(E(t) - E^v(t))^2 \frac{\partial \mu_0^{\text{hom}}}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2}\Sigma(t)^2 \frac{\partial \mu_0^{\text{hom}^{-1}}}{\partial \varepsilon} \quad (4.73)$$

μ_0^{hom} corresponde à componente instantânea do módulo de cisalhamento em relaxação, definido por:

$$\mu_0^{\text{hom}} = \frac{\mu_{s,M}^e}{1 + \varepsilon \mathcal{M}_\mu^0} \quad \text{com} \quad \mathcal{M}_\mu^0 = \frac{16\pi \kappa_4^e}{15} \frac{6\kappa_2^e + 4\kappa_3^e + 9\pi\kappa_4^e(3\kappa_1^e + \kappa_4^e)}{(3\pi\kappa_1^e\kappa_4^e + \kappa_2^e)(4\kappa_3^e + 9\pi\kappa_4^e(\kappa_1^e + \kappa_4^e))} \quad (4.74)$$

Os parâmetros adimensionais κ_i^e são dados na Eq. (4.62). Os termos $\partial \mu_0^{\text{hom}} / \partial \varepsilon$ e $\partial \mu_0^{\text{hom}^{-1}} / \partial \varepsilon$ são analiticamente expressos por

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu_0^{\text{hom}^{-1}})}{\partial \varepsilon} &= -\frac{15}{48\pi} \frac{\kappa_2^e}{\mu_{s,M}^e \kappa_4^e} \mathcal{M}_\mu^{0^2} + \left(1 - \frac{4\kappa_3^e - 6\kappa_2^e}{3\mu_{s,M}^e(4\kappa_3^e + 9\pi\kappa_4^e(\kappa_1^e + \kappa_4^e))}\right) \mathcal{M}_\mu^0 + \frac{\frac{16\pi}{15\mu_{s,M}^e} \kappa_4^e (6\kappa_2^e + 4\kappa_3^e)}{3(4\kappa_3^e + 9\pi\kappa_4^e(\kappa_1^e + \kappa_4^e))(3\pi\kappa_1^e\kappa_4^e + \kappa_2^e)} \quad (4.75) \\ \frac{\partial \mu_0^{\text{hom}}}{\partial \varepsilon} &= \left[-\frac{15}{48\pi} \frac{\kappa_2^e}{\kappa_4^e} \mathcal{M}_\mu^{0^2} + \left(1 - \frac{4\kappa_3^e - 6\kappa_2^e}{3(4\kappa_3^e + 9\pi\kappa_4^e(\kappa_1^e + \kappa_4^e))}\right) \mathcal{M}_\mu^0 + \frac{\frac{16\pi}{15} \kappa_4^e (6\kappa_2^e + 4\kappa_3^e)}{3(4\kappa_3^e + 9\pi\kappa_4^e(\kappa_1^e + \kappa_4^e))(3\pi\kappa_1^e\kappa_4^e + \kappa_2^e)} \right] \frac{\mu_{s,M}^e}{(1 + \varepsilon \mathcal{M}_\mu^0)^2} \end{aligned}$$

Dado que a análise sob carga desviadora leva a algumas conclusões equivalentes ao modo de carregamento isotrópico, tratar-se-á apenas da situação $E(t) = \dot{E}_0 t H(t)$ (taxa de deformação constante). Nesta situação tem-se a evolução temporal da taxa de liberação de energia segundo a Figura 4.11.

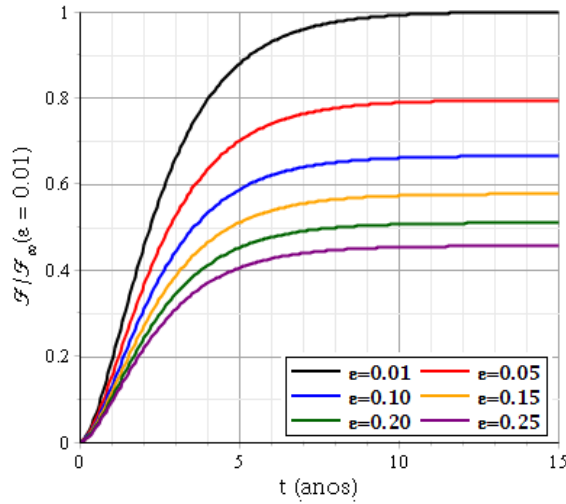


Figura 4.11: Taxa de liberação de energia para taxa de deformação constante.

$$\mathcal{N} = 1m^{-3}; \mathcal{F}_\infty(\epsilon = 0.01) = 62 J / m^3; \dot{E}_0 = 0.5 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$$

Com relação à Figura 4.11, podem ser observadas as mesmas conclusões já estabelecidas em relação ao carregamento em modo bulk. Tal similaridade demonstra que a taxa de liberação de energia avaliada através do modelo desenvolvido leva a uma curva com formato padrão para quaisquer orientações de carregamento, sendo diferenciada de acordo com o histórico de carregamento. Observa-se que essas conclusões só foram possíveis devido ao comportamento isotrópico do material na escala macroscópica, que, por sua vez, se deve à distribuição isotrópica das fraturas e ao comportamento isotrópico dos constituintes na escala microscópica.

Da mesma forma que para o carregamento volumétrico, é possível estudar a taxa de liberação de energia assintótica \mathcal{F}_∞ , definido por:

$$\mathcal{F}_\infty = 2\dot{E}_0^2 \left(\frac{\mu_{s,M}^v}{1 + \epsilon \mathcal{M}_\mu^\infty} \right)^2 \frac{\partial \mu_0^{\text{hom}^{-1}}}{\partial \epsilon} = \frac{1}{2} \Sigma_\infty^2 \frac{\partial \mu_0^{\text{hom}^{-1}}}{\partial \epsilon} \quad (4.76)$$

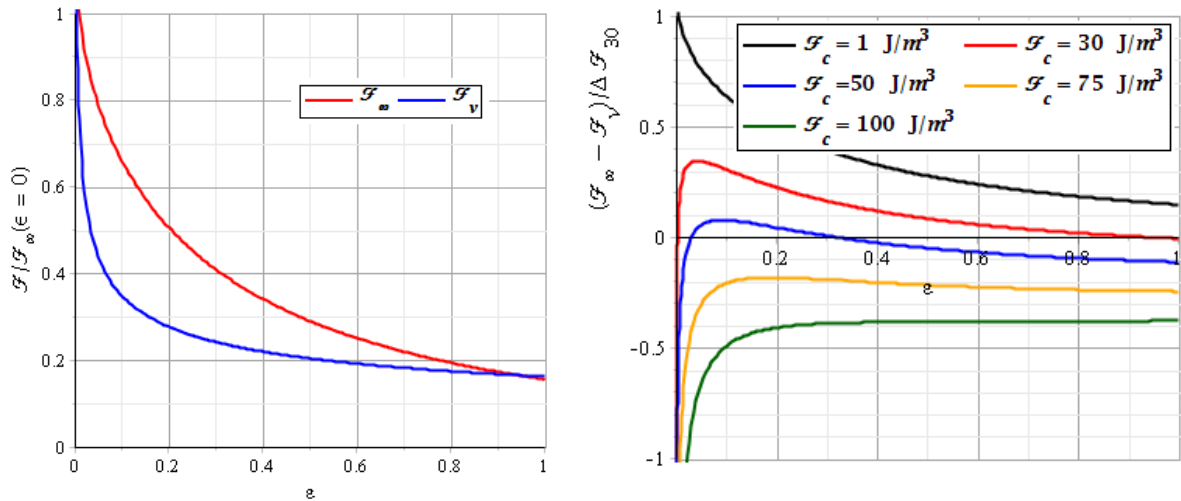
com

$$\Sigma_\infty = 2\dot{E}_0 \frac{\mu_{s,M}^v}{1 + \varepsilon \mathcal{M}_\mu^\infty} \quad \text{onde} \quad (4.77)$$

$$\mathcal{M}_\mu^\infty = \frac{16\pi \kappa_4^\infty}{15} \frac{6\kappa_2^\infty + 4\kappa_3^\infty + 9\pi\kappa_4^\infty (3\kappa_1^\infty + \kappa_4^\infty)}{(3\pi\kappa_1^\infty \kappa_4^\infty + \kappa_2^\infty)(4\kappa_3^\infty + 9\pi\kappa_4^\infty (\kappa_1^\infty + \kappa_4^\infty))}$$

Expressões para κ_i^∞ são definidas na Eq. (4.66). Os parâmetros associados ao modelo de Burger da matriz sólida e ao modelo de Maxwell das fraturas são elencados na Eq. (4.58). A Figura 4.12 compara novamente \mathcal{F}_∞ com \mathcal{F}_v através dos dois gráficos anteriormente expressos.

Avaliações realizadas sobre diversos valores associados a parâmetros de material e carregamento permitem verificar que, em geral, é necessário um maior carregamento para verificar a propagação em modo de cisalhamento. Tal afirmação indica que este modo tende a ser menos crítico à propagação para os parâmetros estabelecidos.



a) Comparação Direta

b) Comparação Relativa

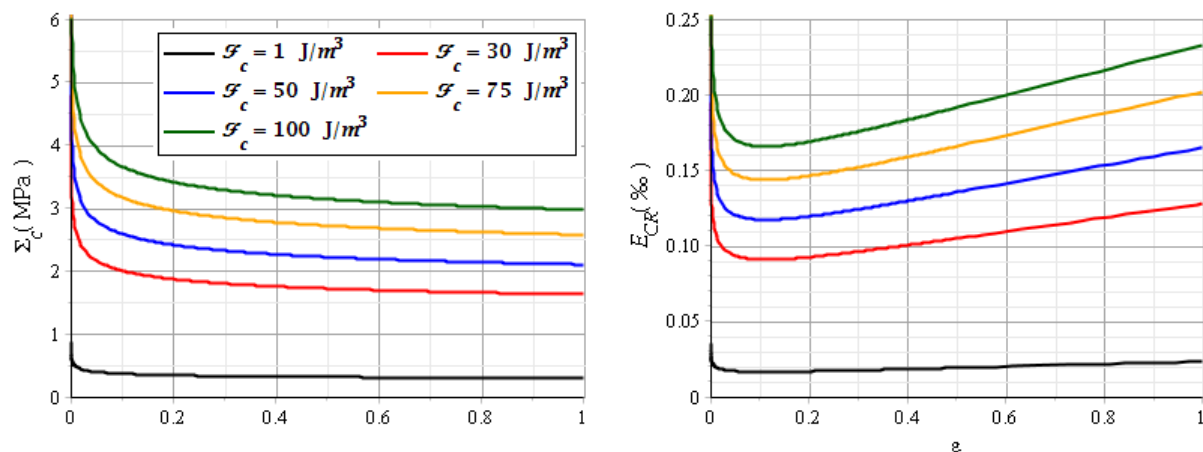
Figura 4.12: comparação entre taxa de liberação assintótica e energia crítica.

$$\mathcal{N} = 1; \dot{E}_0 = 1.25 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}; \mathcal{F}_c = 30 \text{ J} / \text{m}^2; \mathcal{F}_\infty(\varepsilon = 0) = 389 \text{ J} / \text{m}^3; \Delta \mathcal{F}_{30} = 396 \text{ J} / \text{m}^3$$

Alternativamente, a análise em termos de deformações críticas também é possível, aplicando (87) em (56) e realizando alguma manipulação matemática, é possível isolar a taxa de deformação em função de

$$\dot{E}_0 \leq \dot{E}_{CR} = \left(\frac{1 + \varepsilon \mathcal{M}_\mu^\infty}{2\mu_{s,M}^v} \right) \sqrt{\frac{2\mathcal{F}_v}{\left(\frac{\partial \mu_0^{\text{hom}^{-1}}}{\partial \varepsilon} \right)}} = \left(\frac{1 + \varepsilon \mathcal{M}_\mu^\infty}{\mu_{s,M}^v} \right) \sqrt{\frac{\pi}{3a} \mathcal{F}_c \left(\frac{\partial \mu_0^{\text{hom}^{-1}}}{\partial \varepsilon} \right)^{-1}} \quad (4.78)$$

A **Erro! Fonte de referência não encontrada.** apresenta as tensões críticas e taxas de deformações críticas em função do parâmetro de dano ao modo de carga de cisalhamento.



a) Tensões críticas

b) Taxa de deformações críticas

Figura 4.14: Taxas de deformação e tensões críticas à propagação.

$$\mathcal{N} = 1; \dot{E}_0 = 1.25 \times 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$$

Observa-se que a parte ascendente das curvas de deformações apresenta uma taxa menos acentuada do que as representadas na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, o que indica uma maior facilidade em atingir valores mais elevados dos parâmetros limite de dano. Estas curvas, contudo, se desenvolvem para maiores valores de taxa de deformação crítica.

5. EVOLUÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO

O raciocínio desenvolvido até então visava determinar o comportamento mecânico homogeneizado do material viscoelástico supondo um valor constante para o parâmetro de dano. Este comportamento mantinha-se válido até o instante de ativação do critério de propagação, a partir do qual o parâmetro de dano começa a aumentar. A hipótese de evolução do parâmetro de dano ao longo do tempo tem como consequência a perda da linearidade observada na relação constituinte do material na escala macroscópica, representada até então por meio da integral hereditária de Boltzmann. Neste sentido, a aplicação de um determinado carregamento em diferentes instantes leva a respostas mecânicas distintas, dada a variação no valor do parâmetro de dano a partir do instante de aplicação do carregamento. Desta forma, faz-se necessário recorrer a formulações baseadas na viscoelasticidade não-linear para o tratamento do comportamento mecânico homogeneizado. Nota-se que o modelo de crescimento das fraturas proposto se restringe ao crescimento da variável ligada à dimensão das fraturas a , não avaliando evoluções sobre a variável \mathcal{N} , que representa o número de fraturas dentro do volume destacado. Tal limitação deve à formulação relativa aos problemas relacionados à nucleação e à coalescência, envolve um formalismo não estudado no presente trabalho.

5.1. FORMULAÇÕES NÃO LINEARES PARA A VISCOELASTICIDADE

Segundo Findley et al. (1976), Brinson e Brinson (2008) e Lakes (2009), a diversidade de fenômenos associados à não-linearidades em materiais viscoelásticos inviabiliza a descrição matemática por meio de uma formulação única, levando a uma grande variedade de formulações para lidar com diferentes problemas desta área. Dado que a formulação aplicada neste trabalho deve ser capaz de lidar com a evolução do parâmetro de dano, observa-se a necessidade de uma formulação adequada ao tratamento de diferentes variáveis de estado internas. Assim, a presente seção visa apresentar algumas formulações para viscoelasticidade não-linear existentes na literatura ante a explicitação da forma utilizada neste trabalho.

5.1.1. Formulações Empíricas

No âmbito da viscoelasticidade não-linear, a ausência de uma formulação abrangente combinado com a complexidade matemática envolvendo os métodos teóricos até então desenvolvidos, tende a ser utilizado como justificativa para o desenvolvimento de formulações empíricas. Essencialmente, tais formulações surgem como resultados experimentais desenvolvidos sob condições específicas em materiais particulares, fornecendo resultados com níveis satisfatórios de precisão. A maior dificuldade relacionada a modelos empíricos refere-se à extrapolação para condições ou materiais diferentes daqueles que foram utilizados no desenvolvimento ou calibração do modelo. Neste cenário, modelos empíricos apresentam aplicabilidade limitada, restringindo-se a um grupo muito pequeno de materiais. Diversos autores (dos quais pode-se citar Ludwik (1909), Andrade (1910), Bailey (1910), Norton (1929), Soderberg (1936), Nadai (1937), Leaderman (1943)) propuseram formulações empíricas específicas para viscoelasticidade não-linear, contudo, segundo Findley et al. (1976) e Lakes (2009) a forma mais utilizada na literatura é dada por:

$$\varepsilon^c = k\sigma^p t^n \quad (5.1)$$

a qual descrever a fluência primária envolvendo tempos de carregamento relativamente curtos. Nesta formulação, ε^c representa as deformações de origem viscosa (creep) e k , p e n são parâmetros do material. A expressão acima pode facilmente ser generalizada para a forma:

$$\varepsilon^c = f(\sigma)g(t) \quad (5.2)$$

onde $f(\sigma)$ e $g(t)$ são funções ajustáveis respectivamente dependentes das tensões e do tempo. Segundo Hoff (1958), a forma de $g(t) = t^n$ se ajusta facilmente a experimentos realizados em diversos metais, plásticos, concreto e biomateriais. Neste sentido, Findley et al. (1976) adaptaram a Eq. (5.1) para representar o comportamento de plásticos rígidos, por meio da expressão:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon^+ t^n \quad (5.3)$$

onde ε_0 e ε^+ são funções das tensões.

Embora ambas as Eq. (5.1) e Eq. (5.3) apresentem bons resultados para fluência primária, seus formalismos matemáticos as tornam impossíveis de representar longas evoluções lineares características da fluência secundária ou assíntotas horizontais características da estabilidade da fluência em alguns materiais. Além disso, Brinson e Brinson (2008) destacam que o parâmetro n é altamente sensível a erros experimentais, variando conforme o tempo de duração do teste. Não obstante, a preditibilidade de modelos empíricos é questionada ao se referir a capacidade destas leis em lidar com histórias de carregamento mais complexas ou com efeitos de recuperação após o descarregamento (Roderic Lakes, 2009).

5.1.2. Formulações Fundamentadas na Viscoelasticidade Linear

Frente as dificuldades referentes a extrapolação dos materiais e das condições de validade dos modelos empíricos, diversos autores (Leaderman, 1943; Bernstein et al., 1963; Lai e Anderson, 1973; Hiel, 1984) tem se concentrado em generalizar as formulações viscoelásticas lineares, adicionando a dependência de variáveis que outrora eram desconsideradas aos parâmetros do material. Findley et al. (1976) e Roderic Lakes (2009) advertem que tais modelos apenas conseguem lidar com uma pequena gama de não linearidades observadas em materiais viscoelásticos, sendo condicionadas a materiais que respeitam a chamada “superposição de Boltzmann ampliada” (ou, de forma mais genérica, superposição não-linear). Sob condições específicas, estas formulações tendem a se reduzir a modelos lineares, o que garante a coerência destes modelos em domínios aproximadamente lineares.

Os modelos matematicamente mais simples tendem a incluir a dependência das tensões aos parâmetros do material diretamente sobre a relação tensão-deformação (Findley et al. (1976)). Tal abordagem é mais comum a experimentos que analisam a evolução das deformações submetidas a tensões constantes em ensaios de fluência. Tomando, por exemplo, o modelo de Burger, escreve-se:

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{E_1(\sigma_0)} + \frac{t}{\eta_1(\sigma_0)} + \frac{1}{E_2(\sigma_0)} \left(1 - e^{-\frac{E_2(\sigma_0)t}{\eta_2(\sigma_0)}} \right) \right] \sigma_0 \quad (5.4)$$

onde E_1 , η_1 , E_2 e η_2 são entendidos como parâmetros do material para o nível de tensões σ_0 dado.

Além das tensões, outras variáveis podem ser utilizadas, destacando-se o tempo (relacionado ao envelhecimento do material), o dano (relacionado a processos de degradação do material), a temperatura, a umidade relativa, entre outras. Contudo, a validade das expressões desenvolvidas geralmente está associada à valores constantes especificados para estas variáveis. Isso se deve ao processo de determinação destas expressões, obtidas por meio da integração da respectiva formulação diferencial tomando as variáveis que causam as não-linearidades como constantes. Após a integração, permite-se novamente que estas constantes assumam o papel de variáveis, estabelecendo o caráter não-linear sugerido por esta abordagem. Ainda que esta abordagem apresente vantagens com relação as formulações empíricas, ainda são observadas limitações quanto a capacidade preditiva da resposta para determinados materiais e quanto a histórias de carregamento mais complexas.

Uma primeira generalização da abordagem acima visa ampliar a capacidade preditiva frente a inclusão de diferentes histórias de carregamento. Para tanto, é comum recorrer a forma linear da integral de Boltzmann, incorporando a dependência de outras variáveis diretamente sobre os parâmetros de comportamento do material (Lakes, 2009). Tomando como exemplo o tensor de tensões, pode-se escrever:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(t, \tau, \sigma) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{ou} \quad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t F(t, \tau, \sigma) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (5.5)$$

A validade matemática destas formulações, no entanto, ainda requer um “princípio da superposição não-linear”, o qual não necessariamente é verificado para o material em questão. Além disso, a relação do tempo com as variáveis adicionadas pode levar a interpretações diferentes. Neste sentido, tomando como exemplo o tensor de tensões, as formas $R(t, \tau, \sigma(t))$, $R(t, \tau, \sigma(\tau))$ ou $R(t, \tau, \sigma(t-\tau))$ apresentam interpretações físicas distintas, levando a soluções diferentes. Embora estas formulações tenham como objetivo o tratamento de histórias de carregamento mais complexas, Lakes (2009) observa que o tipo de não-linearidade acessado por estas formulações não é, em geral, sensível a múltiplos passos de carregamento.

A abordagem destacada acima facilita a descrição matemática das relações não-lineares entre tensões e deformações ao longo do tempo, contudo, abandona o conceito de representação por meio de modelos reológicos. Neste sentido, modelos reológicos lineares, utilizados como base para estas formulações, tornam-se incapazes de descrever o comportamento formulado dada a dependência temporal das variáveis incluídas nos parâmetros comportamentais,

causando uma dissociação entre as formulações diferenciais dos respectivos modelos reológicos e as formulações utilizadas para a descrição do comportamento não-linear. As expressões utilizadas na representação não-linear apenas seriam obtidas caso as variáveis incorporadas fossem tomadas como constantes perante ao tempo, o que não retrata a realidade destas equações. Neste sentido, embora a Eq.(5.4), por exemplo, tenha sido elaborada por meio do modelo reológico linear de Burger, a formulação diferencial do modelo de Burger com elementos (molas e amortecedores) não-lineares (i.e., dependentes de σ ou outras variáveis) não condiz com a Eq.(5.4) enunciada.

Como forma de manter a idealização por meio de modelos reológicos, Findley et al. (1976) e Brinson e Brinson (2008) destacam que modelos não-lineares podem ser obtidos introduzindo elementos com comportamento não-linear diretamente sobre o modelo reológico de interesse (ver Figura 5.1):

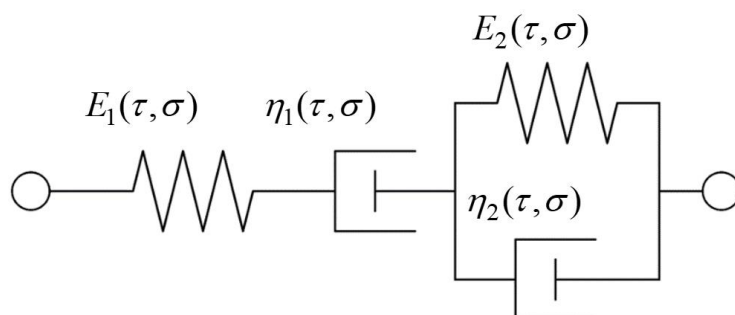


Figura 5.1: Modelo não-linear de Burger

A modelagem matemática do respectivo modelo se dá por meio de operadores diferenciais, permitindo uma correta correspondência entre o modelo reológico e sua representação matemática. Para o caso do modelo destacado na Figura 5.1, a respectiva formulação diferencial pode ser deduzida tomando como base as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E_1(\tau, \sigma)\varepsilon_1 \\
 \sigma &= \eta_1(\tau, \sigma)\dot{\varepsilon}_2 \\
 \sigma &= E_2(\tau, \sigma)\varepsilon_3 + \eta_2(\tau, \sigma)\dot{\varepsilon}_3 \\
 \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

onde ε_1 , ε_2 e ε_3 são, respectivamente, as deformações internas à mola E_1 , ao amortecedor η_1 e à cadeia de Kelvin representada por E_2 e η_2 .

Observa-se que as formulações acima foram escritas em termos de duas variáveis independentes (τ, σ) , podendo ser incluídas outras variáveis conforme a necessidade do problema em questão. Neste sentido, a dependência dos parâmetros do material com relação ao tempo, tensor de tensões (deformações), ou outras variáveis direta ou indiretamente relacionadas a estes valores, modifica a solução da equação diferencial, invalidando a forma destacada na Eq.(5.4). Embora abordagens viscoelásticas não-lineares utilizando esta técnica preservem o conceito de modelo reológico, a dificuldade matemática para obtenção de uma solução analítica é consideravelmente superior.

Abordagens alternativas fundamentadas na elasticidade linear foram sugeridas por diversos autores. Dentre as formas mais populares cita-se a expressão de Leaderman (1943):

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t F(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} f(\sigma, \tau) d\tau \quad (5.7)$$

onde as não-linearidades são introduzidas na integral linear de Boltzmann diretamente sobre as tensões, sendo representadas por meio de uma função $f(\sigma, \tau)$. Variações desta formulação foram propostas por Rabotnov e Koltunov (apud Hiel et al, 1984), permitindo-se escrever:

$$\phi(\varepsilon, t) = \int_{-\infty}^t F(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} f(\sigma, \tau) d\tau \quad (5.8)$$

onde $\phi(\varepsilon, t)$ descreve uma função não-linear correlacionada a $f(\sigma, \tau)$. Novamente, Fidler (1976) indica que as funções retratadas acima configuram modelos comportamentais para materiais específicos, não podendo ser generalizadas para todos materiais viscoelásticos não lineares. Para a correta descrição de materiais que não são bem representados por meio das formulações acima, é comum a utilização de modelos cuja parte da formulação é empírica (ver, por exemplo, Bernstein et al. (1963) ou Lai e Anderson (1973)).

5.1.3. Formulações Fundamentadas em Conceitos Não-Lineares

As abordagens elencadas na seção anterior foram fundamentadas com base nos conceitos desenvolvidos para a viscoelasticidade linear. Contudo, alguns autores propuseram abordagens intrinsecamente fundamentadas nas não linearidades dos materiais. Ainda que estas formulações tendam a ser mais gerais, apresentando boa correlação com o comportamento

apresentado pelos materiais que visam representar, a maior quantidade de parâmetros aumenta significativamente a dificuldade de identificação destes por meio de ensaios experimentais.

Baseando-se na termodinâmica de processos irreversíveis observados em polímeros, Schapery (1964,1966,1969) formulou a seguinte relação não-linear:

$$\varepsilon(t, \sigma) = g_0 D_0 \sigma + g_1 \int_0^t D_1 (\psi_\sigma - \psi'_\sigma) \frac{d[g_2 \sigma]}{d\tau} d\tau \quad (5.9)$$

onde:

$$\psi_\sigma = \int_0^t \frac{d\tau'}{a_\sigma[\sigma(\tau')]} \quad (a_\sigma > 0) \quad \text{e} \quad \psi'_\sigma = \psi_\sigma(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{a_\sigma[\sigma(\tau')]} \quad (5.10)$$

Destaca-se que o modelo proposto por Schapery enquadra-se como um modelo quasi-linear, desacoplando os efeitos da temperatura (retratados pelo *shift factor* a_σ), representando um exemplo de princípio da superposição. Na Eq.(5.9) os termos g_0 , g_1 e g_2 correspondem a funções dependentes da tensão, sendo originalmente determinados a partir da energia livre de Gibbs (com terceira ou maior ordem). D_0 corresponde a parcela instantânea da função de fluência enquanto D_1 corresponde a parcela transiente. A Eq. (5.9) é mais adequada ao tratamento de problemas cujo carregamento é realizado em termo de tensões. A situação oposta (carregamento em deformações) pode ser acessada por meio da formulação:

$$\sigma(t, \varepsilon) = h_\infty E_\infty \varepsilon + h_1 \int_0^t E_1 (\rho_\varepsilon - \rho'_\varepsilon) \frac{d[h_2 \varepsilon]}{d\tau} d\tau \quad (5.11)$$

onde:

$$\rho_\varepsilon = \int_0^t \frac{d\tau'}{a_\varepsilon[\varepsilon(\tau')]} \quad (a_\varepsilon > 0) \quad \text{e} \quad \rho'_\varepsilon = \rho_\varepsilon(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{a_\varepsilon[\varepsilon(\tau')]} \quad (5.12)$$

a_ε representa o *shift* fator para carregamento em deformações. E_∞ corresponde ao módulo de relaxação em equilíbrio, enquanto E_1 a função de relaxação transiente. Neste caso, os termos h_∞ , h_1 e h_2 correspondem a funções dependentes das deformações e são determinadas com base na energia livre de Hemholtz (com terceira ou maior ordem). Brinson e Brinson (2008) detalham o procedimento necessário para a determinação dos termos g_i e h_i . A formulação

proposta por Schapery tem se mostrado a mais adequada para a representação de polímeros, sendo facilmente adaptável a outros materiais (Lakes, 2009). Nota-se que nos casos em que $g_i = 1$ (respectivamente $h_i = 1$) e $a_\sigma = 1$ (respectivamente $a_\varepsilon = 1$) a formulação proposta por Schapery naturalmente se reduz a viscoelasticidade linear.

Em casos nos quais o princípio da superposição não pode ser aplicado, torna-se necessário recorrer a um método mais robusto. Neste contexto destaca-se a formulação por meio de integrais hereditárias múltiplas:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \int_0^t \varphi_1(t-\xi_1) \dot{\sigma}(\xi_1) d\xi_1 + \int_0^t \int_0^t \varphi_2(t-\xi_1, t-\xi_2) \dot{\sigma}(\xi_1) \dot{\sigma}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ & + \int_0^t \int_0^t \int_0^t \varphi_3(t-\xi_1, t-\xi_2, t-\xi_3) \dot{\sigma}(\xi_1) \dot{\sigma}(\xi_2) \dot{\sigma}(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde φ_i representa a funções de fluência de i -ésima ordem. Estas funções são obtidas por meio de experimentos laboratoriais, realizando-se diversas etapas de carregamento. A expressão homologa a Eq.(5.13), para carregamentos definidos em deformações, assume a forma:

$$\begin{aligned} \sigma = & \int_0^t \chi_1(t-\xi_1) \dot{\varepsilon}(\xi_1) d\xi_1 + \int_0^t \int_0^t \chi_2(t-\xi_1, t-\xi_2) \dot{\varepsilon}(\xi_1) \dot{\varepsilon}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ & + \int_0^t \int_0^t \int_0^t \chi_3(t-\xi_1, t-\xi_2, t-\xi_3) \dot{\varepsilon}(\xi_1) \dot{\varepsilon}(\xi_2) \dot{\varepsilon}(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde χ_i assume o papel de função de relaxação de i -ésima ordem. Embora as formulações elencadas nas Eq. (5.13) e Eq. (5.14) possam apresentar recuperação e relaxação diferindo significativamente entre si, Findley et al. (1976), Brinson e Brinson (2008) e Lakes (2009) destacam que a representação por meio de integrais múltiplas é capaz de reproduzir excelentes resultados para uma gama extremamente grande de materiais exigindo, contudo, um número elevado de dados para realizar a calibragem dos parâmetros.

A representação por integrais múltiplas pode, em alguns casos, ser simplificada para uma forma envolvendo integrais simples quando utilizada a integração por partes (ver Findley et al. (1976)):

$$\begin{aligned} \varepsilon = & F_1(0)\sigma(t) + F_2(0,0)\sigma^2(t) + F_3(0,0,0)\sigma^3(t) \\ & - \int_0^t \left\{ \dot{F}_1(t-\xi)\sigma(\xi) + \dot{F}_2(t-\xi,0)[\sigma(t)\sigma(\xi) + \sigma(\xi)\sigma(t)] \right. \\ & \left. + \dot{F}_3(t-\xi,0,0)[\sigma^2(t)\sigma(\xi) + \sigma(\xi)\sigma^2(t) + \sigma(t)\sigma(\xi)\sigma(t)] \right\} d\xi \end{aligned} \quad (5.15)$$

Contudo, a forma (5.15) não é analiticamente equivalente a (5.13), dado que algumas simplificações necessárias para obtê-la não são válidas para determinados materiais. Embora as formulações apresentadas tenham sido escritas no contexto uniaxial, é comum que estas expressões sejam encontradas no contexto tridimensional na literatura (ver Findley (1976, Brinson e Brinson (2008) e Lakes (2009)).

5.1.4. *Formulação Viscoelástica Não-Linear Aplicada a Evolução do Dano*

A presente seção visa estabelecer uma formulação viscoelástica não-linear que seja apta a descrever a evolução do parâmetro de dano, estabelecido como uma variável de estado do material na escala macroscópica. Justificada pela simplicidade matemática obtida na relação tensão/deformação e pela facilidade na inclusão de outras variáveis de estado, a formulação não-linear desenvolvida será baseada na integral hereditária de Boltzmann. Este desenvolvimento, contudo, inviabiliza a representação por meio de modelos reológicos enquanto houver a propagação das fraturas. No raciocínio que segue, a “função dano”, que representa a história de evolução do dano ao longo do tempo, será tratada pela variável ϕ , enquanto o valor inicial (pré-propagação) do parâmetro de dano será definido por $\phi(0) = \phi_0$. Tal nomenclatura visa evitar ambiguidades com relação às seções 3 e 4, no qual o dano era tratado por um valor fixo. A Tabela 5.1 a seguir visa apresentar as diferenças entre os parâmetros utilizados.

Na presente seção, toda análise é desenvolvida sobre o material homogeneizado (isso é, na escala macroscópica). Desta forma, sob o intuito de simplificar a notação, a distinção entre variáveis microscópicas e macroscópicas (i.e., $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e $\underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{\sigma}}$ e $\underline{\underline{\Sigma}}$, \mathbb{R} e \mathbb{R}^{hom} , \mathbb{F} e \mathbb{F}^{hom} , entre outras) será omitida, de forma que apenas a notação habitual minúscula será utilizada. Por fim, o raciocínio será desenvolvido inicialmente em um domínio unidimensional, sendo por fim estendido ao contexto tridimensional.

Para a descrição matemática do raciocínio, a formulação que segue será construída da mesma forma que a integral hereditária de Boltzmann na viscoelasticidade linear, i.e., por meio da superposição de uma infinidade de carregamentos sucessivos. Observa-se que para este raciocínio conduzir a uma solução correta, é necessário supor que o princípio da superposição permanece válido no domínio não-linear vigente na escala macroscópica. Dada a escassez de

dados experimentais na literatura, não é possível obter a magnitude do erro cometido por meio da modelagem desenvolvida, correspondendo a uma limitação destacada neste trabalho.

Tabela 5.1: Distinção entre os parâmetros utilizados para representar o dano.

Símbolo	Definição	Descrição
ε	Parâmetro de Dano	Usado nas seções 2, 3 e 4 para representar o grau de degradação de um determinado material, sendo tomado como um valor fixo e pré-definido. A modelagem por meio de ε era capaz de estabelecer o comportamento mecânico de um material viscoelástico, mantendo-se válida até o momento de ativação do critério de propagação. Neste contexto, a análise matemática do formalismo desenvolvido era realizada no domínio da viscoelasticidade linear. A utilização do parâmetro de dano ε em instantes posteriores ao início de propagação, além de representar um erro conceitual no âmbito da linearidade da formulação desenvolvida, impedia a determinação da história de evolução do parâmetro de dano.
ϕ_0	Parâmetro de Dano na fase de pré-propagação	Usado nas seções 5 e 6 para representar o grau de degradação de um determinado material antes da aplicação de um carregamento externo, correspondendo então a um parâmetro pré-definido que mensura o valor inicial do dano na fase pré-propagatória. Após a aplicação do carregamento externo, o valor da função de dano ϕ mantém-se igual a ϕ_0 até o instante de início da propagação. O conceito de ϕ_0 se confunde com o de ε em diversos aspectos, dado que o valor do parâmetro de dano inicial pode ser entendido como um parâmetro de valor constante, mantendo válido todo o raciocínio pré-propagação estabelecido sobre ε . A diferença fundamental se dá no fato de que o raciocínio estabelecido sobre ϕ_0 é fundamentado na viscoelasticidade não-linear, a qual valida o processo de evolução do dano após o início da propagação.
ϕ	Função de Dano	Usado nas seções 5 e 6 para representar o grau de degradação de um determinado material em um instante t qualquer. Torna possível determinar o comportamento mecânico de um material viscoelástico em qualquer instante desejado, seja antes ou depois ao início da propagação. Como será visto mais a frente, a função de dano é diretamente dependente das solicitações desenvolvidas pelo material, tornando obrigatória a formulação do comportamento viscoelástico em um domínio não-linear.
$\dot{\phi}$	Taxa de Evolução do Dano	Usado nas seções 5 e 6 para representar a evolução da função de dano ao longo do tempo. Por definição, em qualquer instante antes da propagação deve-se ter $\dot{\phi} = 0$ sustentado pela formulação desenvolvida. Embora este parâmetro não seja diretamente utilizado no comportamento do material, o valor de $\dot{\phi}$ define quão rápida ou lenta são as variações no comportamento mecânico. Como será visto mais a frente, o modelo de evolução do dano é baseado na determinação da taxa de evolução do dano, representando um parâmetro fundamental na análise de propagação.

Para a construção da integral hereditária não-linear, deve-se primeiramente avaliar os efeitos decorrentes da aplicação de um carregamento constante. Para tanto, será aplicada uma deformação constante do tipo $\varepsilon(t) = \varepsilon(\tau)H(t - \tau)$, onde $H(t - \tau)$ corresponde a função de

Heaviside aplicada em τ . Neste sentido, a evolução das tensões resultantes $\sigma(t) = \varepsilon(\tau)R(t, \tau, \phi)$ apresenta forma similar à de um ensaio de relaxação simples (Figura 5.2).

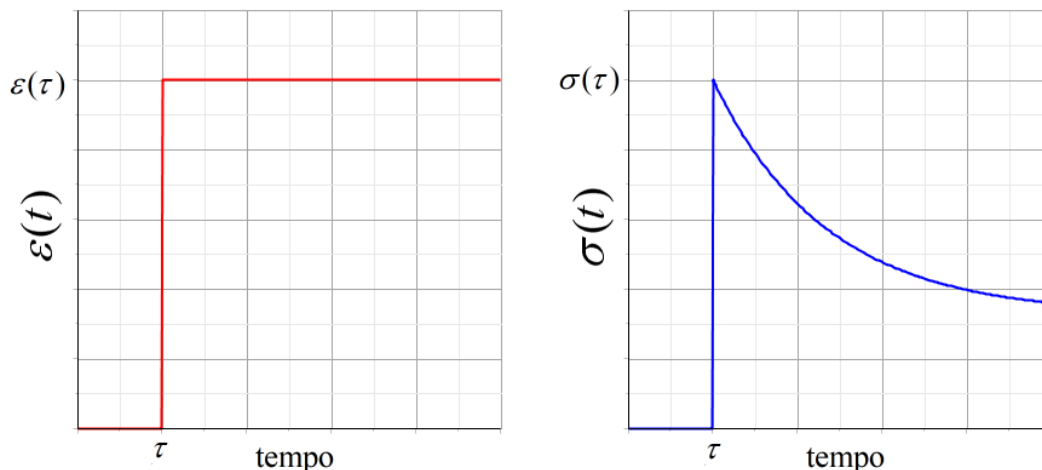


Figura 5.2: Ensaio de relaxação.

Retornando ao raciocínio estabelecido na seção 4 (mais especificamente às aplicações numéricas desenvolvidas) verifica-se que, para situações em que deformações constantes são aplicadas, o valor máximo desenvolvido pela taxa de liberação de energia ocorre no instante de aplicação do carregamento, decrescendo a partir de então. Embora o raciocínio estabelecido na seção 4 reduza-se ao domínio linear, descartando a evolução do dano, mudanças significativas a respeito das conclusões observadas para a energia livre não são esperadas no domínio não-linear, permitindo aproveitar este raciocínio para o quadro presente. Neste contexto, no caso de propagação estável, espera-se que o valor desenvolvido pelo parâmetro de dano $\phi(\tau)$ equilibre a taxa de liberação de energia e a energia crítica. Como a partir deste instante apenas se espera a redução da taxa de liberação de energia, toda a evolução do dano terá se resumido ao instante de aplicação do carregamento, mantendo-se constante a partir de então, i.e., para $t \geq \tau$ tem-se $\phi(t) = \phi(\tau)$. Desta forma, duas soluções são possíveis, na primeira o carregamento não foi suficiente para induzir a propagação do dano e na segunda o carregamento foi elevado o suficiente para ativar o critério de evolução do dano, o qual instantaneamente assumiu seu novo valor. A Figura 5.3 representa as consequências deste equilíbrio instantâneo do valor do parâmetro de dano sobre as tensões resultantes (a linha azul representa a evolução das tensões sem evolução do dano enquanto a linha roxa tracejada representa a evolução das tensões após a propagação do dano em $t = \tau$). Observe que este raciocínio induz o equilíbrio instantâneo

entre a taxa de liberação de energia e a energia crítica, o que não necessariamente é verdade para todos os materiais.

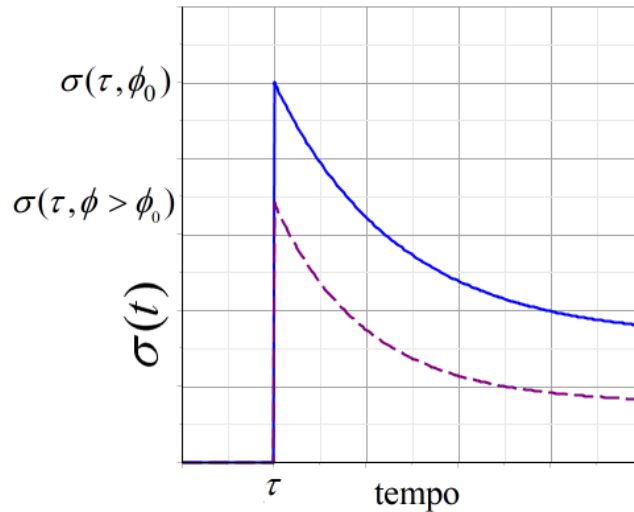


Figura 5.3: Tensões resultantes com e sem evolução do dano.

Até então, a variável temporal da função de dano ϕ (i.e., t, τ ou $t - \tau$) foi propositalmente omitida na função de relaxação, motivada pela ausência de informações suficientes a respeito da forma que melhor se ajusta ao modelo proposto. Contudo, o raciocínio desenvolvido acima, mostra que a forma $R(t, \tau, \phi(t - \tau))$ não condiz com os efeitos instantâneos esperados após a propagação, dado que no instante $t = \tau$ as tensões resultantes seriam $\sigma(\tau) = \varepsilon(\tau)R(\tau, \tau, \phi(0))$, enquanto o resultado esperada deveria ser $\sigma(\tau) = \varepsilon(\tau)R(\tau, \tau, \phi(\tau))$ para que haja o equilíbrio instantâneo entre taxa de liberação de energia livre e energia crítica. Esta diferença se torna ainda mais evidente ao se aplicar carregamentos sequenciais:

$$\varepsilon(t) = \sum_i \varepsilon(\tau_i) H(t - \tau_i) \quad (5.16)$$

Neste contexto, uma hipótese fundamental do raciocínio que segue, a qual deve ser validada por dados experimentais, corresponde a validade do princípio da superposição no domínio não-linear. Confirmada experimentalmente esta hipótese, a resposta instantânea referente ao carregamento aplicado na Eq. (5.16) é dada por

$$\sigma(t) = \sum_i \varepsilon(\tau_i) R(t, \tau_i, \phi(t - \tau_i)) \quad (5.17)$$

Assim, cada passo de carregamento apresenta a mesma função de evolução do dano $\phi(t - \tau_i)$, começando em ϕ_0 e evoluindo ao longo do tempo, causando uma defasagem nos

valores correntes. O problema deste desenvolvimento está relacionado ao aparecimento de flutuações nas tensões em instantes em que não existem carregamentos aplicados. Uma vez que esta modelagem induz resultados conflitante com aqueles esperados, a causa exata destas flutuações não foi estudada a fundo, podendo ter se originado no princípio da superposição ou por outras hipóteses levantadas a respeito da evolução temporal da função de dano ϕ . Tais flutuações são observadas graficamente na Figura 5.4, destacando em círculos vermelhos o aparecimento destas incoerências. Para os resultados obtidos utilizou-se $i = 2$, levando a uma evolução do dano em dois passos.

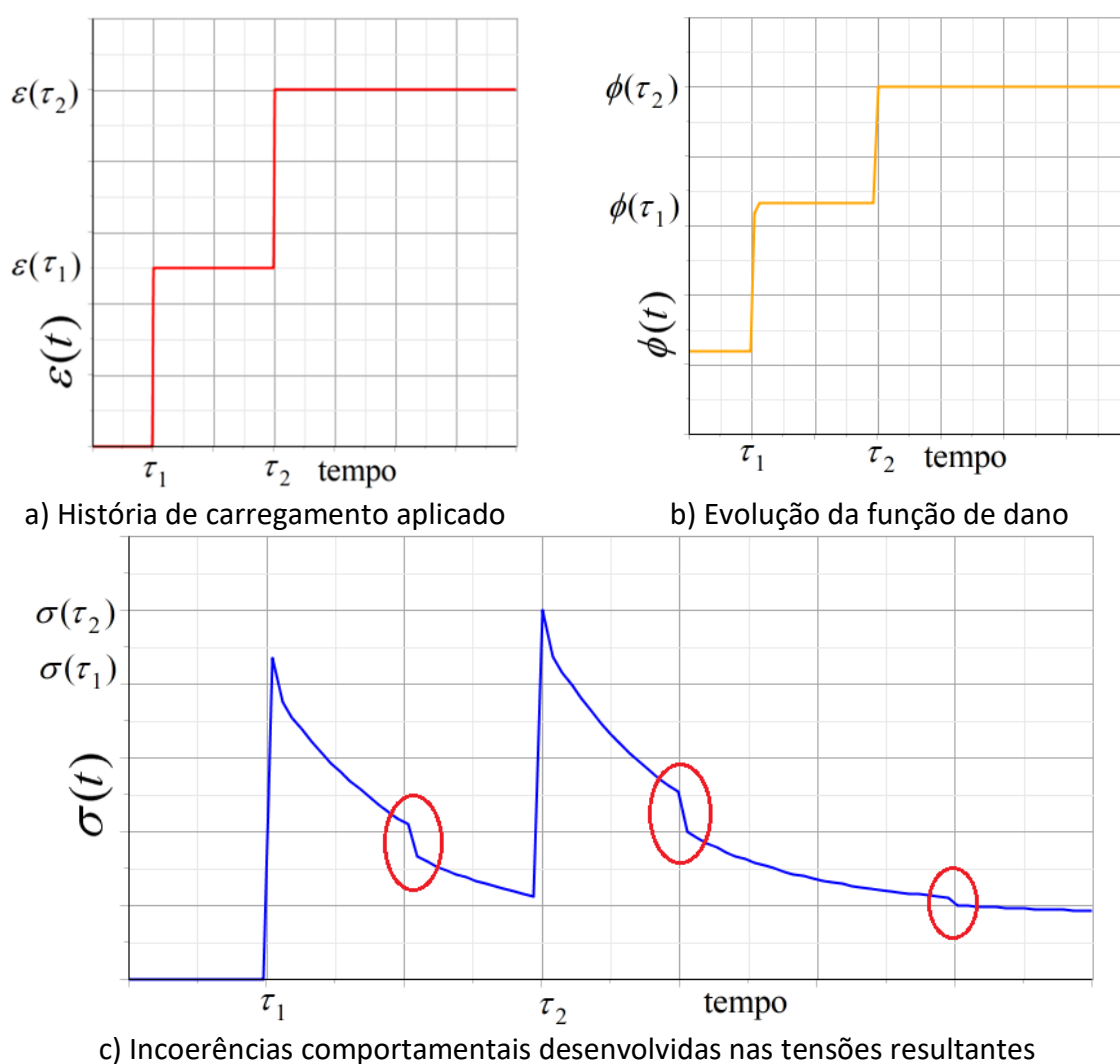


Figura 5.4: Evolução das tensões usando função de dano com a forma $\phi(t - \tau)$.

Tendo em vista que a forma $R(t, \tau, \phi(t - \tau))$ não se ajusta ao comportamento esperado, torna-se necessário definir novas hipóteses para $R(\cdot)$. Neste sentido, as formas $R(t, \tau, \phi(t))$ e $R(t, \tau, \phi(\tau))$ foram conjecturadas. Para um carregamento único, dada a evolução do parâmetro

de dano em *steps*, tem-se a relação $\phi(t) = \phi(\tau)$ para qualquer instante $t \geq \tau$, levado ambas as formas à mesma solução. Então, torna-se necessário recorrer novamente ao raciocínio desenvolvido sobre múltiplos *steps* de carregamento. Para isso, torna-se essencial validar a hipótese do princípio da superposição de Boltzmann no regime não-linear através de dados experimentais. Tal hipótese é a responsável por permitir o desenvolvimento da expressão viscoelástica integral de forma análoga ao raciocínio linear estabelecido na integral de Boltzmann, como será visto mais à frente. Ditada tal hipótese, as tensões resultantes decorrentes do carregamento definido na Eq. (5.16), para as formas $R(t, \tau, \phi(t))$ e $R(t, \tau, \phi(\tau))$, são respectivamente dadas por:

$$\sigma_t(t) = \sum_i \varepsilon(\tau_i) R(t, \tau_i, \phi(t)) \quad (5.18)$$

$$\sigma_\tau(t) = \sum_i \varepsilon(\tau_i) R(t, \tau_i, \phi(\tau_i)) \quad (5.19)$$

Enquanto na Eq. (5.18) cada etapa de carregamento é associada ao valor atual do parâmetro de dano, na Eq. (5.19) cada etapa de carregamento é associada ao valor do parâmetro de dano imediatamente após o respectivo carregamento. A comparação entre a Eq. (5.18) e Eq. (5.19) é apresentada, para $i=2$, na Figura 5.5, considerando a mesma função de evolução de dano em ambos os casos. Contudo, na ausência de dados experimentais, não é possível definir qual forma melhor se ajusta a realidade. Por esta razão, ambas as soluções serão desenvolvidas no raciocínio seguinte.

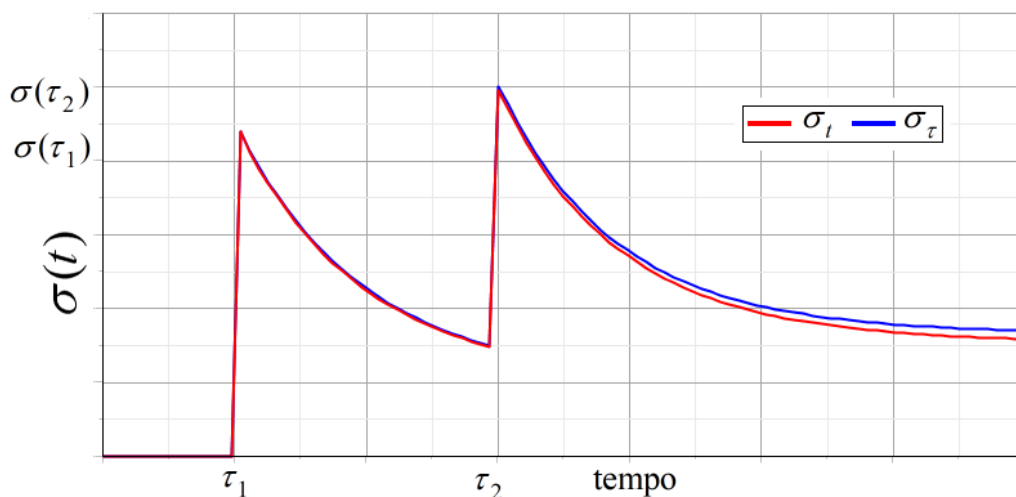


Figura 5.5: Comparação entre as tensões resultantes usando $R(t, \tau, \phi(t))$ e $R(t, \tau, \phi(\tau))$.

A generalização da Eq. (5.18) e da Eq. (5.19), em termos de um somatório infinito sobre todos instantes até o presente momento, é descrito pelas integrais:

$$\sigma_t(t) = \int_{-\infty}^t R(t, \tau, \phi(t)) d\varepsilon(\tau) \quad (5.20)$$

$$\sigma_\tau(t) = \int_{-\infty}^t R(t, \tau, \phi(\tau)) d\varepsilon(\tau) \quad (5.21)$$

Com breves operações matemáticas, ambas as expressões podem ser escritas de forma similar a integral hereditária de Boltzmann, no contexto não-linear, como:

$$\sigma_t(t) = \int_{-\infty}^t R(t, \tau, \phi(t)) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau = R(t, t, \phi(t)) \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial R(t, \tau, \phi(t))}{\partial \tau} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (5.22)$$

$$\sigma_\tau(t) = \int_{-\infty}^t R(t, \tau, \phi(\tau)) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau = R(t, t, \phi(t)) \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial R(t, \tau, \phi(\tau))}{\partial \tau} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (5.23)$$

Nota-se que na Eq. (5.22) a derivada parcial $\frac{\partial R(t, \tau, \phi(t))}{\partial \tau}$ é realizada apenas sobre a segunda variável (isso é, apenas sobre τ), a passo que na Eq. (5.23) a derivada parcial $\frac{\partial R(t, \tau, \phi(\tau))}{\partial \tau}$ é realizada tanto sobre a segunda quanto sobre a terceira variável (isso é, sobre τ e sobre $\phi(\tau)$).

Observa-se que a contribuição instantânea (i.e., a parte elástica) de ambas as equações é rigorosamente a mesma. No contexto em que não existe variação temporal da função de relaxação, ambas as soluções convergem para a solução elástica esperada. Adicionalmente, na ausência de evolução do dano, ambas formulações levam a solução viscoelástica linear esperada. Lembra-se, contudo, que devido à ausência de dados disponíveis na literatura, a formulação foi desenvolvida sem validação experimental, destacando mais uma limitação do raciocínio desenvolvido. As extensões tridimensionais da Eq. (5.22) e da Eq. (5.23) podem ser acessados por meio das expressões:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_t(t) &= \int_{-\infty}^t \mathbb{R}(t, \tau, \phi(t)) : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \mathbb{R}(t, t, \phi(t)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi(t))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}}_{\tau}(t) &= \int_{-\infty}^t \mathbb{R}(t, \tau, \phi(\tau)) : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \mathbb{R}(t, t, \phi(t)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi(\tau))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (5.25)$$

Estabelecida a hipótese do princípio da superposição de Boltzmann, observa-se que a formulação não-linear desenvolvida é similar a formulação linear análoga, correspondendo a uma grande vantagem do raciocínio estabelecido. Desta forma, boa parte do raciocínio desenvolvido na viscoelasticidade linear pode ser estendido ao contexto não-linear vigente. Por exemplo, em uma analogia a viscoelasticidade linear pode-se escrever $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{R}_0 : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v)$, onde originalmente define-se o tensor de relaxação instantâneo como $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}(t, t)$, pode-se definir os tensores de deformações viscosas $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ não-linear como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_t^v(t, \tau) = \mathbb{F}(t, t, \phi(t)) : \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi(t))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (5.26)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\tau}^v(t, \tau) = \mathbb{F}(t, t, \phi(t)) : \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi(\tau))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (5.27)$$

onde $\mathbb{F}(t, \tau, \phi(\bullet)) = \mathbb{R}^{\ominus 1}(t, \tau, \phi(\bullet))$ é a função de fluência do material, representando o inverso matemático, no sentido do operador de Boltzmann, da função de relaxação. No raciocínio que segue, $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ sem subíndice (t ou τ) será tratado como o tensor de deformações viscosas de forma geral, e $\underline{\underline{\varepsilon}}_t^v$ ou $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\tau}^v$ são utilizados para descrever o raciocínio estabelecido, respectivamente, sobre as Eq. (5.26) e (5.27). Adicionalmente, o tensor de relaxação instantâneo é definido através de $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}(t, t, \phi(t))$.

5.2.MODELO DE EVOLUÇÃO DO DANO

Uma vez definida a relação não-linear entre tensões e deformações, deve-se agora determinar a função de dano ϕ propriamente dita. Pavan et al. (2010, 2012) propuseram uma análise micromecânica para mensurar a evolução do parâmetro de dano – tratado pelos autores como um tensor de segunda ordem – em materiais compósitos nos quadros elástico e viscoelástico. Por meio de uma analogia com a plasticidade acoplada a uma abordagem termodinâmica, os autores determinaram uma expressão para a taxa de evolução do dano, com

a qual foi possível obter o tensor constitutivo tangente relacionando taxa de tensões e taxa de deformações no contexto em que há propagação do dano. Contudo, na abordagem desenvolvida por Pavan e coautores, a forma com que o material é tratado diverge com relação a este trabalho. Neste sentido, a presente seção visa adaptar o raciocínio desenvolvido por Pavan e colegas estendendo sua validade aos materiais viscoelásticos fraturados abordados neste trabalho.

O primeiro passo para estabelecer uma função que descreva a evolução do dano consiste em retomar o conceito de taxa de liberação de energia \mathcal{F} , estabelecido por meio do primeiro e segundo princípios da termodinâmica:

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2}(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \quad (5.28)$$

A formulação apresentada é diferente daquela desenvolvida na seção 4, sendo a principal diferença o parâmetro de dano, o qual passa a ser definido através da função de dano ϕ . Desta forma, o tensor de deformações viscosas $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ está associado ao regime não-linear estabelecido no contexto macroscópico, sendo matematicamente descrito pelas Eq. (5.26) ou Eq. (5.27).

Para prever a evolução do dano, é necessário introduzir o conceito de superfície de “carga-dano” $F(\mathcal{F}, \phi) = 0$, o qual delimita a região onde o dano não se propaga no espaço da força termodinâmica \mathcal{F} . No âmbito escalar descrito neste trabalho, é possível reaproveitar a formulação matemática do critério de propagação para definir esta região:

$$F(\mathcal{F}, \phi) = \mathcal{F} - \mathcal{F}_v(\phi) \leq 0 \quad (5.29)$$

A variável \mathcal{F}_v , denominada de energia crítica na escala macroscópica, é formulada em acordo com Dormieux et al. (2006):

$$\mathcal{F}_v = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\mathcal{N}}{\phi} \right)^{\frac{1}{3}} \mathcal{F}_c \quad (5.30)$$

onde \mathcal{N} é o número de fraturas no VER, o qual será tomado como constante neste trabalho. A variável \mathcal{F}_c denomina-se energia crítica na escala microscópica, seu valor retrata um parâmetro do material, devendo ser determinado por meio de ensaios de laboratório para cada material

estudado. Diferentemente de \mathcal{F}_c , a variável \mathcal{F}_v depende do valor corrente do parâmetro de dano e, portanto, não corresponde a um parâmetro do material em questão.

No contexto definido na Eq. (5.29), $F(\mathcal{F}, \phi) < 0$ indica um regime sem propagação do dano, $F(\mathcal{F}, \phi) = 0$ refere-se ao estado no qual o dano pode ser induzido e $F(\mathcal{F}, \phi) > 0$ é uma condição inadmissível. Nota-se, contudo, que a “superfície de carga-dano” F não é uma superfície propriamente dita, visto que se refere a uma formulação escalar. Segundo o raciocínio desenvolvido por Pavan et. al. (2010, 2012), quando o processo de dano está ativo, i.e. $F(\mathcal{F}, \phi) = 0$, o potencial de dano $G(\mathcal{F}, \phi)$ que controla a evolução do dano:

$$\dot{\phi} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{F}} \quad (5.31)$$

onde o multiplicador do dano $\dot{\lambda}$ deve cumprir com as condições de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad ; \quad F \leq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda} F = 0 \quad (5.32)$$

De forma análoga a plasticidade, modelos onde $G = F$ são denominados de “modelos associados”, levando a uma propagação normal do dano. A evolução do multiplicador de dano $\dot{\lambda}$ pode ser obtida por meio da condição de consistência $\dot{F} = 0$, a qual leva a:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \mathcal{F}} \dot{\mathcal{F}} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \dot{\phi} \Big|_{\mathcal{F}} = 0 \quad (5.33)$$

Dadas as Eq. (5.29), Eq. (5.31) e Eq. (5.33), pode-se escrever $\dot{\lambda}$ como:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\mathcal{F}}}{\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \phi} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{F}}} \quad (5.34)$$

Em um raciocínio similar ao desenvolvido na seção 4, pode-se estender $\dot{\mathcal{F}}$ em termos das variáveis de estado $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ e ϕ descritas na Eq.(5.28):

$$\dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}^v} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \dot{\phi} \quad (5.35)$$

Aplicando as Eq. (5.31) e Eq. (5.35) sobre a Eq. (5.34) escreve-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}^v}}{\left(\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \right) \frac{\partial G}{\partial \mathcal{F}}} \quad (5.36)$$

De onde permite-se estabelecer a taxa de evolução do parâmetro de dano $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}^v}}{\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}} \quad (5.37)$$

Observa-se que o potencial de dano G foi automaticamente eliminado da formulação. Uma forma simplificada da Eq. (5.37) pode ser estabelecida utilizando-se a Eq.(5.28), levando a:

$$\dot{\phi} = - \frac{(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi} : (\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}^v})}{\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \phi} + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \frac{\partial^2 \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi^2} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v)} \quad (5.38)$$

Além do caráter escalar, a principal diferença com relação a formulação estabelecida por Pavan et al. (2007, 2009, 2010, 2012) consiste na introdução das componentes viscosas no tensor de deformações, as quais apresentam dependência direta da variável ϕ no contexto não-linear. Tal relação desencadeia a dependência de $\dot{\phi}$ nos termos a direita da igualdade na Eq. (5.38). Para estabelecer $\dot{\phi}$ eliminando tal dependência, escreve-se $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^v = \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v}{\partial t} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v}{\partial \phi} \dot{\phi} \quad (5.39)$$

obtendo-se:

$$\dot{\phi} = - \frac{(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi} : \left(\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v}{\partial t} \right)}{\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \phi} + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \frac{\partial^2 \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi^2} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) - (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi} : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v}{\partial \phi}} \quad (5.40)$$

Expressões para as derivadas $\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v}{\partial t}$ e $\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v}{\partial \phi}$ são dadas no Anexo F em função do tipo de equação utilizada no domínio não-linear. Observa-se que para a dedução das Eq. (5.38) e Eq. (5.40) não foi necessário recorrer a lei de comportamento específica, mantendo as formulações válidas para ambas as formas descritas nas Eq. (5.26) e Eq. (5.27). Evidências físicas acerca de materiais fraturados sem recuperação condicionam as Eq. (5.38) e Eq. (5.40) à limitação $\dot{\phi} \geq 0$, neste contexto, condições particulares que levam a $\dot{\phi} < 0$ devem ser tratadas como $\dot{\phi} = 0$.

Com base na expressão de $\dot{\phi}$, torna-se possível obter a função ϕ que avalia a evolução do parâmetro de dano ao longo do tempo. A ideia inicial para a determinação de ϕ consiste em integrar a equação diferencial Eq. (5.38) e Eq. (5.40), contudo, visto que a determinação do tensor de relaxação homogeneizado é baseada na obtenção de raízes de polinômios de graus elevados (ver seção 3), torna-se impossível utilizar tal formulação para obter uma função ϕ dependente do tempo de forma analítica. Como alternativa, estabelecido um intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$ com Δt suficientemente pequeno, pode-se substituir o tensor de relaxação homogeneizado por uma formulação aproximada conveniente que permita uma solução analítica no intervalo destacado. Neste sentido, pode-se desacoplar as variáveis de dano e de tempo usando a forma:

$$\mathbb{R}_{apr}(t - \tau, \phi) = \mathbb{R}(t - \tau, \phi_{ref}) : \mathbb{R}_0^{-1}(\phi_{ref}) : \mathbb{R}_0(\phi) \quad (5.41)$$

onde ϕ_{ref} é um valor do parâmetro de dano de referência, de forma geral tomado como o valor do parâmetro de dano no início do intervalo. Na ausência de evolução do parâmetro de dano, quando $\phi_{ref} = \phi_0$, a Eq. (5.41) tem solução exata. Em outras situações, o erro aumenta à medida que ϕ_{ref} se distancia do valor corrente do parâmetro de dano. Na situação em que Δt é suficientemente pequeno, o erro desta aproximação tende a ser relativamente pequeno. Qualquer formulação analítica proveniente desta aproximação ainda é matematicamente complexa, dificultando a utilização desta alternativa e enfraquecendo este raciocínio.

Outra forma de determinar ϕ , sem recorrer a uma aproximação do tensor de relaxação, consiste em utilizar uma solução numérica. O procedimento sugerido a seguir visa determinar o valor da função de dano em um número discreto de pontos, prevendo assim a evolução da função de dano ao longo do tempo. O erro associado a este procedimento é inversamente

relacionado ao número de pontos calculados, quanto maior o número de pontos menor o erro cometido no procedimento. A primeira etapa do procedimento consiste na subdivisão do tempo de análise em um determinado número de intervalos. Cada ponto de cálculo corresponderá ao valor extremo do respectivo intervalo de tempo, criando assim uma sequência temporal dos estados (tensor de tensões, tensor de deformações viscosas, parâmetro de dano) do material homogeneizado. Nesta etapa, existem dois métodos distintos: a) divisão regular do intervalo de tempo com variação constante Δt ou b) divisão irregular do intervalo de tempo com variação Δt_i onde i representa o contador (posição do passo de tempo). Dada a maior variação da função de dano nos instantes iniciais da propagação, a divisão irregular do tempo consegue maximizar o esforço computacional, aumentando o número de pontos calculados apenas nesta região. Contudo, como efeito de demonstração, os procedimentos realizados neste trabalho fazem uso da divisão regular do domínio temporal. Observe que, quanto menor for o valor de Δt utilizado, menor será o desvio com relação a solução esperada. O tempo t_i , que define o tempo transcorrido desde o instante inicial (geralmente tomado como o instante de aplicação do carregamento), é relacionado com o i -ésimo ponto de cálculo por:

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t = i \cdot \Delta t \quad (5.42)$$

A verificação da evolução do dano no instante t_i demanda conhecer o valor da função de dano ϕ_i neste mesmo instante. Dado que o alvo do procedimento corresponde justamente ao valor de ϕ_i , deve-se estimar um valor de ϕ_i no início do intervalo. Existe uma ampla discussão na literatura quanto a métodos explícitos/implícitos utilizados na plasticidade, a partir de onde se estabeleceu que a utilização de métodos implícitos costuma levar a resultados mais confiáveis. Dado que o raciocínio desenvolvido neste trabalho corresponde a um primeiro estudo da função de evolução do parâmetro de dano, métodos explícitos mais fáceis de serem matematicamente avaliados são utilizados. Para tanto, adota-se o ϕ_i inicial como:

$$\phi_i = \begin{cases} \phi_0 & \text{se } i = 0 \\ \phi_{i-1} & \text{se } i > 0 \end{cases} \quad (5.43)$$

Nota-se que o valor ao final do intervalo de tempo poderá ser corrigido por $\dot{\phi}_i$, caso o critério de propagação seja atingido (ver Eq. (5.49)).

Uma vez estimado o valor da função de dano ϕ_i , atualiza-se os tensores de tensões e variáveis internas do material. Observa-se que as expressões dependem do modelo não-linear adotado. Em concordância com a Eq. (5.24) escreve-se, em termos de somatórios:

$$\underline{\underline{\sigma}}_i = \sum_{j=0}^i \mathbb{R}(t_i - t_j, \phi_i) : \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}_j - \underline{\underline{\varepsilon}}_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \quad (5.44)$$

onde, para simplificar a notação, define-se $\underline{\underline{\varepsilon}}_i = \underline{\underline{\varepsilon}}(t_i)$. Expressões alternativas, bem como eventuais formas integrais, podem igualmente ser utilizadas. Alternativamente, em concordância com a Eq. (5.25) tem-se:

$$\underline{\underline{\sigma}}_i = \sum_{j=0}^i \mathbb{R}(t_i - t_j, \phi_j) : \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}_j - \underline{\underline{\varepsilon}}_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \quad (5.45)$$

Neste contexto, os tensores de deformações viscosas $\underline{\underline{\varepsilon}}_i^v$, a taxa de liberação de energia \mathcal{F}_i e a energia crítica \mathcal{F}_v^i atuando sobre i-ésimo intervalo de tempo são dadas por:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}_i^v &= \underline{\underline{\varepsilon}}_i - \mathbb{R}(0, \phi_i)^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}_i \\ \mathcal{F}_i &= -\frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}}_i - \underline{\underline{\varepsilon}}_i^v) : \left. \frac{\partial \mathbb{R}(0, \phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_i} : (\underline{\underline{\varepsilon}}_i - \underline{\underline{\varepsilon}}_i^v) \\ \mathcal{F}_v^i &= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\mathcal{N}}{\phi_i} \right)^{\frac{1}{3}} \mathcal{F}_c \end{aligned} \quad (5.46)$$

Procede-se, então, verificando a condição de propagação:

$$F_i = \mathcal{F}_i - \mathcal{F}_v^i \leq 0 \quad (5.47)$$

No caso em que $F_i < 0$, não há propagação de fraturas e o valor associado a função de dano corresponde ao ϕ_i utilizado na atualização dos parâmetros. Caso contrário, isso é $F_i \geq 0$ (dado que o procedimento adotado não condiciona obrigatoriamente a $F_i = 0$, podendo levar a $F_i > 0$ pois se trata de uma solução explícita), determina-se $\dot{\phi}_i$ por meio de:

$$\dot{\phi}_i = - \frac{\left(\underline{\varepsilon}_i - \underline{\varepsilon}_i^v \right) : \frac{\partial \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_i} : \left(\dot{\underline{\varepsilon}}_i - \frac{\partial \underline{\varepsilon}_i^v}{\partial t} \right)}{\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_i} + \frac{1}{2} \left(\underline{\varepsilon}_i - \underline{\varepsilon}_i^v \right) : \frac{\partial^2 \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=\phi_i} : \left(\underline{\varepsilon}_i - \underline{\varepsilon}_i^v \right) - \left(\underline{\varepsilon}_i - \underline{\varepsilon}_i^v \right) : \frac{\partial \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_i} : \frac{\partial \underline{\varepsilon}_i^v}{\partial \phi}} \quad (5.48)$$

Assim, determina-se o valor de ϕ_i por meio da expressão

$$\phi_i = \phi_{i-1} + \dot{\phi}_i \Delta t \quad (5.49)$$

Nesta etapa o procedimento pode ser desdobrado em dois. No primeiro procedimento, encerra-se o cálculo de ϕ_i , partindo para o próximo intervalo de tempo (ponto $i+1$) e repetindo o procedimento destacado a partir da Eq.(5.43).

O segundo procedimento (cujo caráter é facultativo) consiste em verificar se o valor de ϕ_i determinado na Eq. (5.49) é satisfatório. Neste sentido, faz-se o valor de ϕ_i calculado representar uma nova estimativa para o valor da função de dano no início do intervalo. Repetindo-se o procedimento a partir da Eq. (5.44) (i.e. atualiza-se os tensores de tensões e variáveis internas, verifica-se a condição de propagação e, se necessário, recalcula-se o valor da taxa de dano com base no novo valor inicial de ϕ_i). Ao longo de aplicações sucessivas, este raciocínio aproxima a igualdade $F_i = 0$. Observa-se que não necessariamente este procedimento converge a solução esperada, podendo levar a soluções que não se enquadram em $F_i = 0$. A Figura 5.6 apresenta o fluxograma do raciocínio descrito anteriormente.

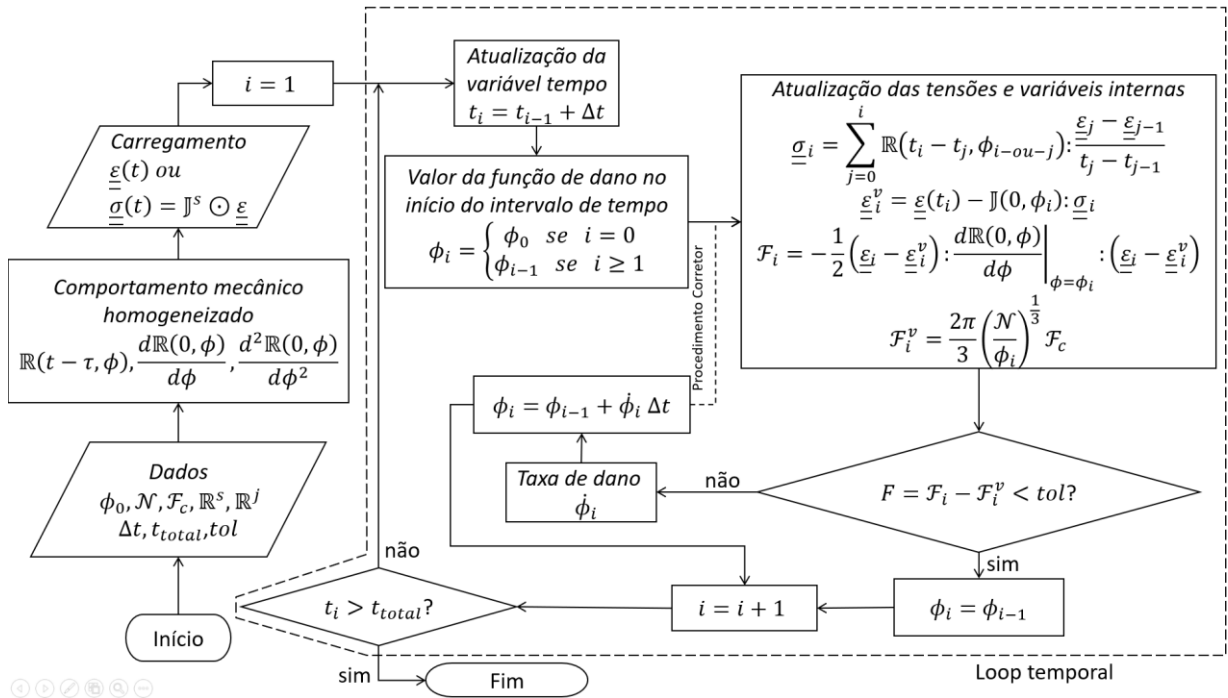


Figura 5.6: Fluxograma do procedimento numérico utilizado.

Alternativamente ao raciocínio numérico, é possível desenvolver uma lei constitutiva tangente, a qual fornece diretamente uma relação entre taxas de tensões e taxas de deformações.

Partindo-se da derivada temporal da relação $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{R}_0 : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v)$:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \mathbb{R}_0 : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) + \frac{\partial \mathbb{R}_0}{\partial \phi} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \dot{\phi} \quad (5.50)$$

substituindo a Eq. (5.38) em (5.50) obtém-se:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \mathbb{R}_0 : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) - \frac{\partial \mathbb{R}_0}{\partial \phi} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \frac{(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_0}{\partial \phi} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}})}{\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \phi} + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \frac{\partial^2 \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi^2} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v)} \quad (5.51)$$

A manipulação matemática da Eq. (5.51) permite isolar o termo $(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}})$ segundo a forma:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \left[\mathbb{R}_0 - \frac{\frac{\partial \mathbb{R}_0}{\partial \phi} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \otimes (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_0}{\partial \phi}}{\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \phi} + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) : \frac{\partial^2 \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi^2} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v)} \right] : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) \quad (5.52)$$

onde \otimes é o operador “produto tensorial”. Tem-se então:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \mathbb{R}_0^t : (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}^v) \quad (5.53)$$

onde o tensor constituinte de dano tangente \mathbb{R}_0^t é dado por:

$$\mathbb{R}_0^t = \begin{cases} \mathbb{R}_0 & \text{se } (F < 0) \text{ ou } (F = 0 \text{ e } \dot{F} < 0) \\ \mathbb{R}_0 - \frac{\frac{\partial \mathbb{R}_0}{\partial \phi} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) \otimes (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_0}{\partial \phi}}{\left. \frac{\partial (\mathcal{F}_v - \mathcal{F})}{\partial \phi} \right|_{\underline{\varepsilon}^v}} & \text{se } (F = 0 \text{ e } \dot{F} = 0) \end{cases} \quad (5.54)$$

A Eq. (5.53) destaca uma forma não-integral que mantém sua validade para as duas relações não-lineares expressas na Eq. (5.26) e na Eq. (5.27) associadas ao tensor de deformações viscosas. Na Eq. (5.54) o termo $\frac{\partial \mathbb{R}_0}{\partial \phi} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) \otimes (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_0}{\partial \phi}$ é uma forma quadrática de $\frac{\partial \mathbb{R}_0}{\partial \phi}$ e $(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^v)$, apresentando valores estritamente não-negativos para quaisquer valores desenvolvidos. Portanto, o termo $\partial(\mathcal{F}_v - \mathcal{F})/\partial\phi$ controla variação de rigidez do material (lembra-se que, pela condição de consistência, $d(\mathcal{F}_v - \mathcal{F})/dt = 0$ para que exista propagação de fraturas).

Alguns comentários a respeito da formulação desenvolvida devem ser abordados:

- A superfície de dano destacada na Eq. (5.29) faz uso de duas variáveis para mensurar a viabilidade da propagação do dano, correspondendo ao critério de propagação determinado na seção 4. Não há evidências experimentais de que o raciocínio efetuado sobre duas variáveis seja capaz de mensurar todos possíveis estados de propagação. Ainda, dada a procedência fundamentada na análise termodinâmica desenvolvida por Griffith, espera-se que o raciocínio desenvolvido abranja um grupo limitado de materiais viscoelásticos, especialmente aqueles que não evoluem até o domínio plástico, e/ou situações de carregamento/geometria que correspondem a modelos de ruptura frágil.
- A análise termodinâmica desenvolvida na seção 4 pressupõem que a passagem da escala microscópica à macroscópica mantém a linearidade do comportamento. No âmbito não-linear o raciocínio termodinâmico permanece válido, contudo, a

expressão para o campo de deformações residuais $\underline{\underline{\varepsilon}}^R$, e por consequência a energia residual, provavelmente adquirem caráter não-linear. Dada a complexidade matemática no tratamento da energia residual, ambos raciocínios (linear e não-linear) negligenciam a presença deste termo. Neste contexto, formulações mais completas podem levar a soluções diferentes das obtidas neste trabalho.

- Não foi possível localizar referências bibliográficas voltadas a propagação do dano em materiais viscoelásticos que utilizem abordagens experimentais expressando o comportamento individual dos constituintes. Por esta razão, não é possível estimar um valor de erro cometido pelo modelo desenvolvido neste trabalho, impedindo sua correta validação. Desta forma, observa-se uma lacuna na literatura a qual precisa ser preenchida para que a validação deste modelo possa ser acessada. Uma sugestão para trabalhos futuros envolve utilizar o raciocínio desenvolvido neste trabalho para realizar uma análise reversa sobre ensaios experimentais desenvolvidos em materiais viscoelásticos, visando a determinação do parâmetro de dano destes materiais.

6. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

A presente seção visa utilizar as formulações desenvolvidas ao longo da seção 5 para verificar os efeitos da propagação do dano sobre os tensores de tensões médias, desenvolvidos em um material viscoelástico fraturado submetido a diferentes histórias de carregamento. Além da obtenção destes resultados, as solicitações são comparadas àquelas que seriam desenvolvidas na ausência de propagação de fraturas, revelando a importância que a propagação de fraturas tem sobre o comportamento do material. Diferentes histórias de carregamento são analisadas individualmente. As aplicações 6.1 a 6.5 a seguir, são focadas em exibir as consequências da aplicação de carregamentos externos sobre a evolução do dano e, neste sentido, o comportamento mecânico do material foi descrito por meio do modelo reológico de Burger para a matriz sólida e de Maxwell para as fraturas (ver Figura 4.2), mantendo concordância com as aplicações desenvolvidas nas seções anteriores. Os parâmetros dos respectivos modelos são os mesmos destacados na Eq. (4.58). A aplicação 6.6 visa exibir os efeitos decorrentes da adoção de outros modelos reológicos, utilizando o modelo de Kelvin-Voigt (Sólido Padrão de Três Elementos) na modelagem da matriz sólida, o qual é obtido por meio da remoção do amortecedor que se encontra em série no modelo de Burger utilizado nas demais aplicações. Por fim, a seção 6.7 visa comparar os resultados viscoelásticos obtidos com diferentes modelos reológicos, dando ênfase a soluções elásticas de referência, demonstrando a necessidade da consideração de componentes diferidas na análise de propagação de fraturas. Os valores adotados para os parâmetros permanecem os mesmos da Eq. (4.58). Os valores do “Parâmetro de dano inicial” ϕ_0 e “Energia crítica” \mathcal{F}_c são apresentados abaixo de cada ilustração toda vez que tais valores se fizerem necessários.

Dado que a aplicação da Eq. (5.40) conduz a mesma solução que a Eq.(5.52), com o diferencial de explicitar a história de evolução do dano, tal equação foi utilizada nas aplicações que seguem. Com relação a formulação não-linear, ambas as Eq. (5.26) e Eq. (5.27) são utilizadas, contribuindo para evidenciar as diferenças entre tais relações. O desenvolvimento matemático será realizado via formulação numérica, evitando aproximar o tensor de relaxação. Tal decisão decorre da elevada complexidade matemática das formulações analíticas

resultantes. O raciocínio utilizado nas análises foi previamente descrito através do fluxograma (Figura 5.6). Dado que a distribuição de intervalos é discreta, condicionando a avaliação das propriedades aos extremos dos intervalos, percebe-se que este procedimento pode levar a $\mathcal{F} - \mathcal{F}_v > 0$ nos intervalos em que a propagação for se desenvolver, cujo domínio não é permitido. Por razão de simplicidade tais transgressões de domínio serão aceitas, não sendo realizado nenhum procedimento corretor para regresso ao domínio $\mathcal{F} - \mathcal{F}_v = 0$. Como consequência, a solução desenvolvida será uma aproximação da solução esperada, cuja precisão está relacionada ao número de intervalos definido. O Anexo G apresenta o código programado no software Maplesoft. Nota-se que os ensaios são desenvolvidos sobre um corpo de prova homogêneo, diretamente sobre a perspectiva macroscópica. Os valores de \mathcal{F}_c adotados durante esta seção são condizentes com ensaios elásticos realizados sobre corpos de prova padronizados de concreto (ver Bazant e Pfeiffer (1986), Gettu et al. (1990) ou Caland (2001)).

6.1. CARREGAMENTO MACROSCÓPICO DEFINIDO POR UMA DEFORMAÇÃO ISÓTROPICA CONSTANTE

Com o intuito de iniciar o exame da evolução do parâmetro de dano, a primeira aplicação visa abordar um caso mais simples, no qual uma história de deformações é definida por uma extensão isotrópica prescrita em duas etapas de carregamento, ilustrada na **Figura 6.1** e matematicamente escrita como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \varepsilon_1 H(t - \tau_1) \underline{\underline{1}} + \varepsilon_2 H(t - \tau_2) \underline{\underline{1}} \quad (6.1)$$

onde ε_1 e ε_2 retratam o módulo da deformação aplicada, $H(t - \tau)$ é a função de Heaviside, aplicada sobre os instantes τ_1 e τ_2 . Observa-se que, dadas as hipóteses de evolução isotrópica do dano (tanto inicialmente quanto durante toda sua evolução) e de comportamento instantâneo isotrópico, o tensor de tensões desenvolvido apresenta a mesma forma isotrópica do carregamento:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \sigma \underline{\underline{1}} \quad (6.2)$$

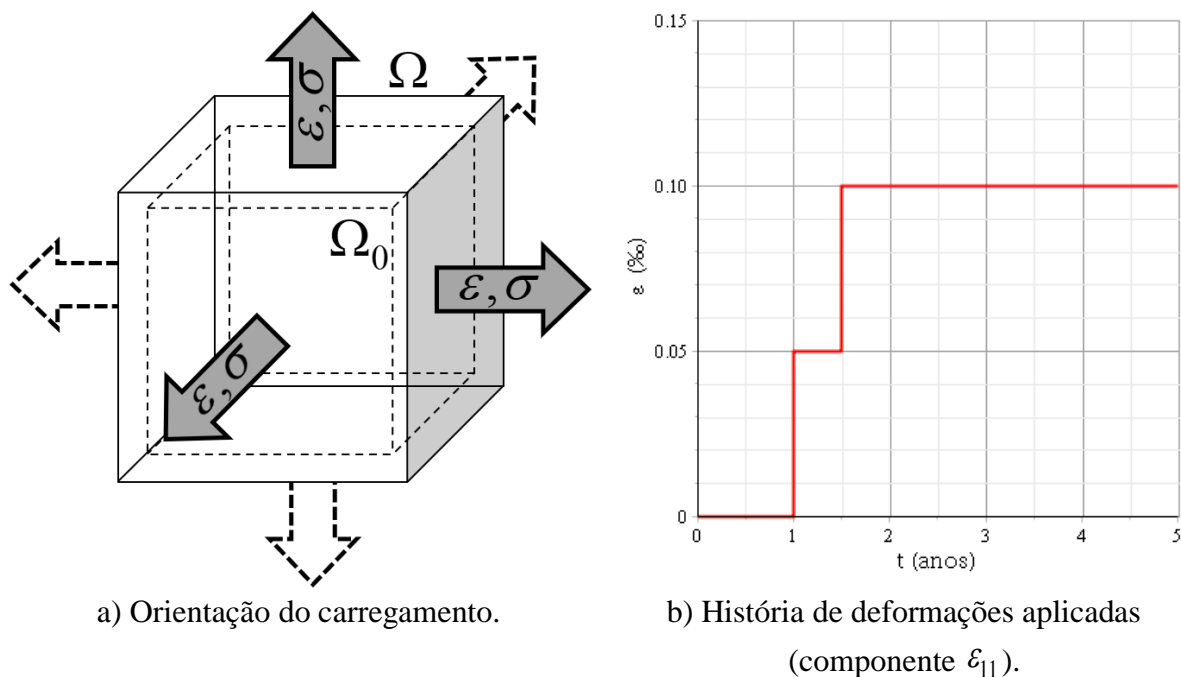


Figura 6.1: Carregamento imposto sobre o corpo de prova.

$$\varepsilon_1 = 0.05\text{‰}, \varepsilon_2 = 0.05\text{‰}, \tau_1 = 1 \text{ Ano e } \tau_2 = 1.5 \text{ Anos}$$

Aplicando-se o raciocínio numérico explicitado anteriormente, pode-se determinar o gráfico da função de dano $\phi(t)$. A Figura 6.2 a seguir exhibe como se dá a evolução do parâmetro de dano ao longo do tempo frente a história de carregamento aplicada. As legendas ϕ_t e ϕ_τ correspondem as funções de dano obtidas, respectivamente, com as expressões não lineares destacadas nas Eq. (5.26) e Eq. (5.27).

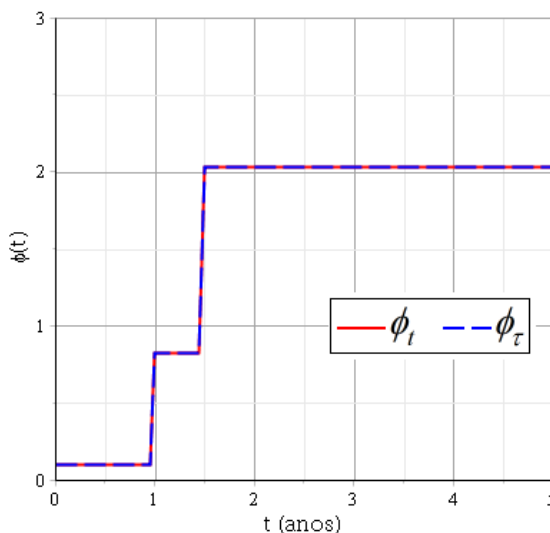


Figura 6.2: Evolução temporal da Função de dano.

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 \text{ J} / \text{m}^2 \text{ e } \Delta t = 0.033 \text{ anos}$$

Tal como se previa na seção 4, a propagação do dano decorrente de um carregamento em passos se dará integralmente no instante de aplicação do carregamento, mantendo-se constante a partir de então. A explicação para esta evolução é formulada com base em duas constatações: a) Na ausência de propagação (seção 4) observa-se a redução da taxa de liberação de energia logo após o instante de aplicação do carregamento, b) durante a propagação existe um equilíbrio entre \mathcal{F} e a energia crítica \mathcal{F}_v (i.e., $\mathcal{F} - \mathcal{F}_v = 0$). Assim, nos instantes seguintes ao carregamento, a relação $\mathcal{F} - \mathcal{F}_v < 0$ não verifica a condição de propagação.

O modelo desenvolvido constitui uma formulação explícita cuja verificação da precisão matemática pode ser realizada comparando-se a evolução da taxa de liberação de energia \mathcal{F} com a evolução de \mathcal{F}_v , as quais devem ser matematicamente iguais durante a propagação (neste caso, apenas no instante de aplicação do carregamento). A Figura 6.3 a seguir exibe uma comparação destas variáveis calculadas com base no valor do parâmetro de dano em cada instante. As legendas \mathcal{F}_t e \mathcal{F}_τ correspondem as taxas de liberação de energia obtidas, respectivamente, com as expressões não lineares destacadas nas Eq. (5.26) e Eq. (5.27). Em preto tem-se a energia crítica \mathcal{F}_v que, na presente situação, é idêntica para ambas as soluções.

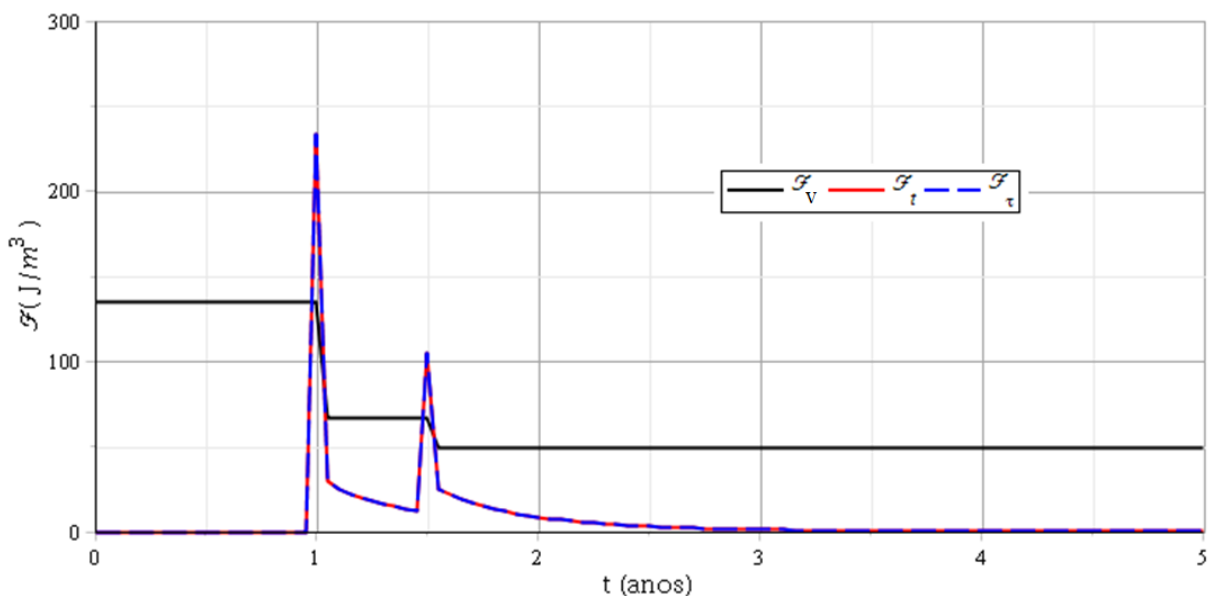


Figura 6.3: Comparação entre taxa de liberação de energia e energia crítica.

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 \text{ J} / \text{m}^2 \text{ e } \Delta t = 0.033 \text{ anos}$$

A Figura 6.3 exibe que no instante de aplicação dos passos de carregamento obteve-se $\mathcal{F} - \mathcal{F}_v > 0$, correspondendo a uma transgressão de domínio (i.e., um domínio que não é permitido pela teoria). Tal situação decorre da formulação explícita apresentada bem como do

fato de nenhuma ferramenta corretora ter sido aplicada após cada intervalo de tempo. Dado que o valor da taxa de liberação de energia deve ser no máximo igual a \mathcal{F}_v no momento da propagação, espera-se que a variação do parâmetro de dano verificado na Figura 6.2 seja menor do que aquele representado, reduzindo o valor absoluto da função de dano. Aumentar o número de intervalos de tempo não se mostra um método particularmente útil de melhorar a precisão deste problema tendo em vista a descontinuidade de carregamento, demonstrando que a aplicação numérica apresentada não é capaz de lidar corretamente com descontinuidades.

Uma alternativa a este problema consiste em substituir o carregamento descontínuo por um carregamento contínuo aproximado, tal como destacado na Figura 6.4. Neste sentido, faz-se uso de:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \varepsilon_1 \frac{t - \tau_1}{\Delta\tau} H(t - \tau_1) \underline{\underline{1}} - \varepsilon_1 \frac{t - \tau_1 - \Delta\tau}{\Delta\tau} H(t - \tau_1 - \Delta\tau) \underline{\underline{1}} + \varepsilon_2 \frac{t - \tau_2}{\Delta\tau} H(t - \tau_2) \underline{\underline{1}} - \varepsilon_2 \frac{t - \tau_2 - \Delta\tau}{\Delta\tau} H(t - \tau_2 - \Delta\tau) \underline{\underline{1}} \quad (6.3)$$

onde $\Delta\tau$ é o intervalo em que o carregamento será assumido como crescente.

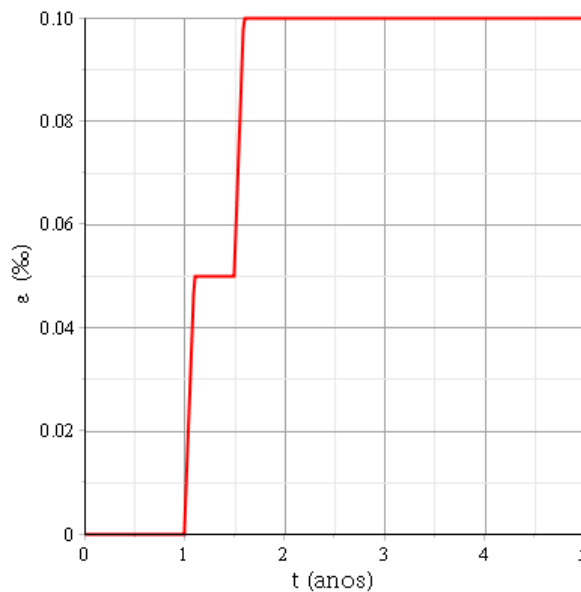


Figura 6.4: História de deformações aproximada (componente ε_{11}).

$$\varepsilon_1 = 0.05\%, \quad \varepsilon_2 = 0.05\%, \quad \tau_1 = 1 \text{ Ano}, \quad \tau_2 = 1.5 \text{ Anos} \quad \text{e} \quad \Delta\tau = 0.1$$

Dado o intervalo de tempo Δt fixo utilizado no procedimento descrito, o qual não distingue regiões que necessitam de maior precisão, entende-se que é necessário utilizar um número muito elevado de pontos para que a região de carregamento crescente com duração de

$\Delta\tau$ seja bem detalhada. A Figura 6.5 exibe a evolução do parâmetro de dano para a situação corrente.

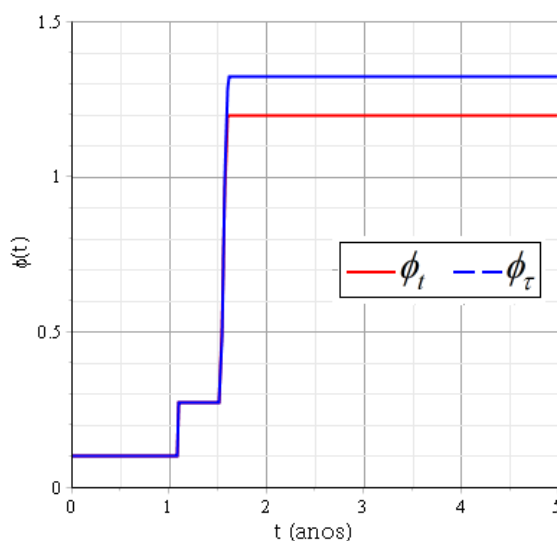
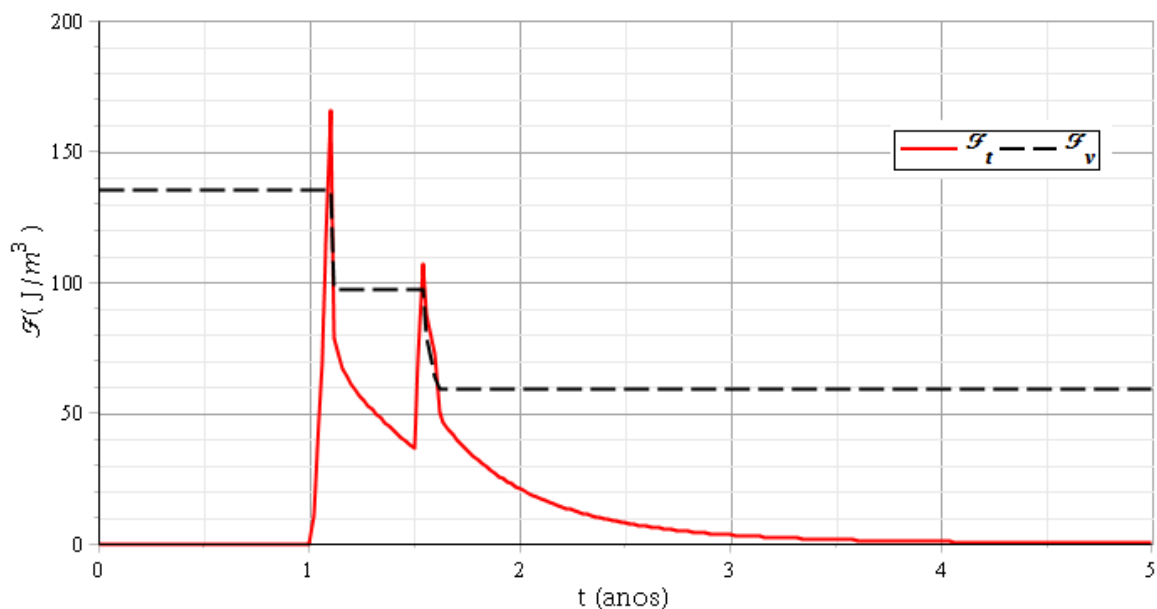
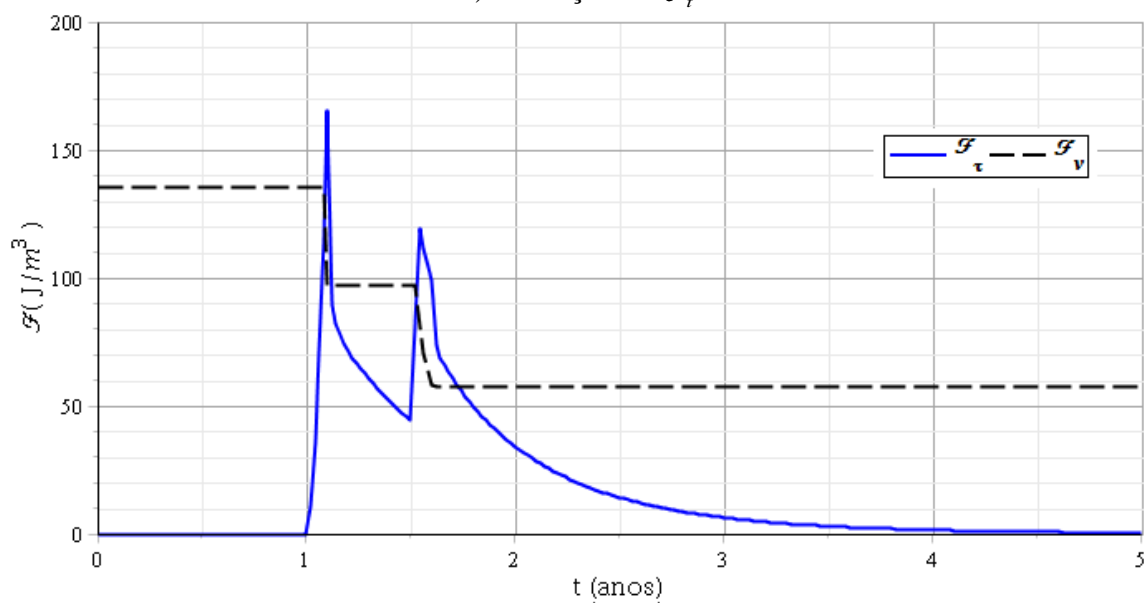


Figura 6.5: Evolução temporal da Função de dano.

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 J / m^2, \Delta t = 0.02 \text{ ano}$$

Comparando-se a Figura 6.5 com a Figura 6.2 observa-se uma clara redução do valor da função de dano ao longo do tempo. Ainda assim, a forma geral da evolução do dano permaneceu o mesmo, verificando-se uma evolução instantânea logo após ao carregamento. As diferenças entre as funções ϕ_t e ϕ_τ devem-se sobretudo a imprecisões numéricas, dado que foram admitidos poucos pontos no intervalo em que o carregamento é crescente. A forma instantânea da propagação corrobora com as conclusões obtidas na análise temporal da taxa de liberação de energia realizadas na seção 4. A qualidade da solução é guiada pela relação entre \mathcal{F} e \mathcal{F}_v , ilustrada na Figura 6.6:

a) Evolução de \mathcal{F}_t b) Evolução de \mathcal{F}_τ **Figura 6.6: Comparação entre taxa de liberação de energia e energia crítica.**

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 J / m^2, \Delta t = 0.02 \text{ ano}$$

Embora ainda seja possível observar transgressões de domínio, o valor do pico reduziu substancialmente, indicando que o resultado se aproximou mais do valor esperado. Nesta situação, para que a solução fosse mais precisa, seria necessário aumentar o número de pontos analisados dentro do domínio crescente do carregamento. Contudo, é importante destacar que o software Maplesoft, cujo raciocínio foi implementado, não foi fundamentalmente desenvolvido para cálculos numéricos, apresentando perda de desempenho significativa à

medida que o número de pontos precisa ser maior. Por esta razão, não foram produzidas soluções com maior nível de precisão.

Por fim, é importante comparar as propriedades desenvolvidas pelo corpo de prova com a situação em que não há propagação do dano. Para tanto, três propriedades são comparadas, as tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ desenvolvidas, as deformações viscosas $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ desenvolvidas e a própria taxa de liberação de energia \mathcal{F} . A Figura 6.7 expõem estas comparações.

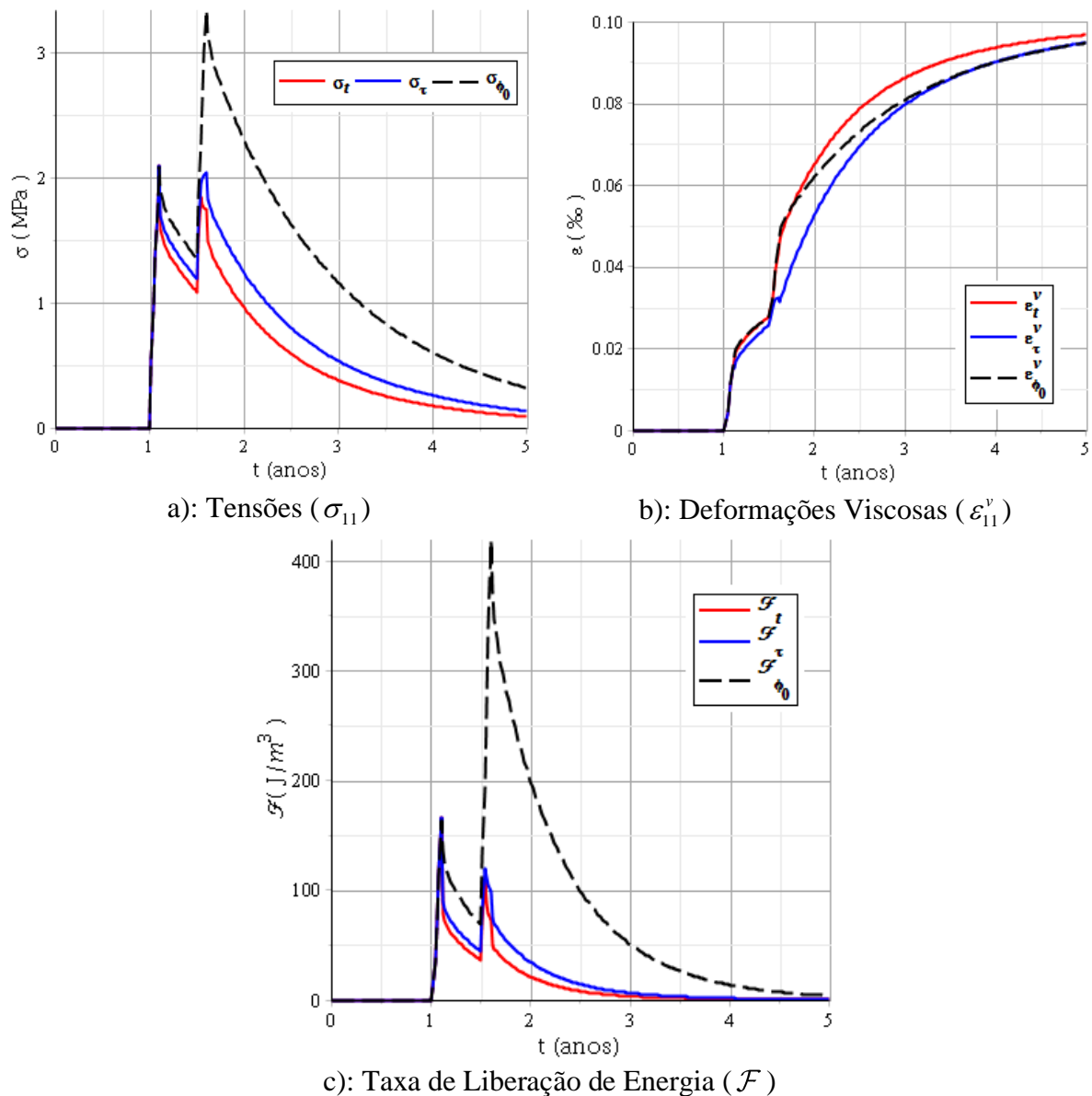


Figura 6.7: Comparação com e sem propagação.

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 \text{ J} / \text{m}^2, \Delta t = 0.02 \text{ ano}$$

Comparando-se os resultados obtidos com propagação de dano (vermelho e azul) e sem propagação de dano (preto), observa-se uma clara redução das tensões e da taxa de liberação de

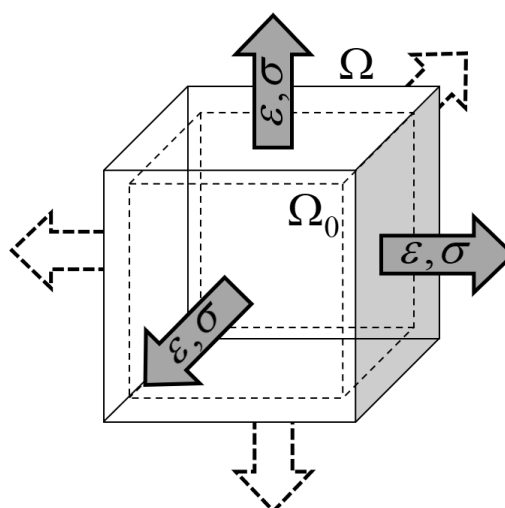
energia. Tal solução já era prevista, dado que o parâmetro de dano reduz a função de relaxação do material. Contudo, as deformações viscosas apresentam valores significativamente semelhantes, indicando que a propagação de fraturas não afeta ou tem pouca relevância para tal campo quando o carregamento é definido em deformações. Embora a utilização das Eq. (5.26) e Eq. (5.27) levem a soluções diferentes, a diferença deveria ser mais proeminente apenas após o segundo carregamento, de forma que as diferenças observadas na Figura 6.7 se devem preponderantemente a baixa precisão numérica. De fato, a quantidade de pontos calculados dentro do intervalo de alta variação dos carregamentos foi de apenas 6. Contudo, por limitações do Software utilizado ou das expressões programadas, aumentar o número de pontos calculados compromete significativamente o desempenho computacional, inviabilizando a rotina com intervalos de tempo equidistribuídos.

6.2.DEFORMAÇÃO ISÓTROPICA COM EVOLUÇÃO LINEAR

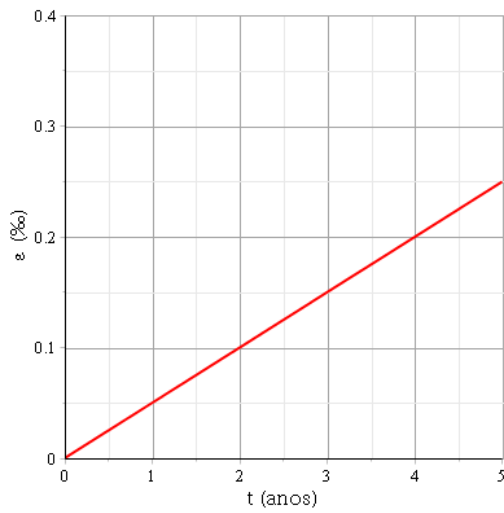
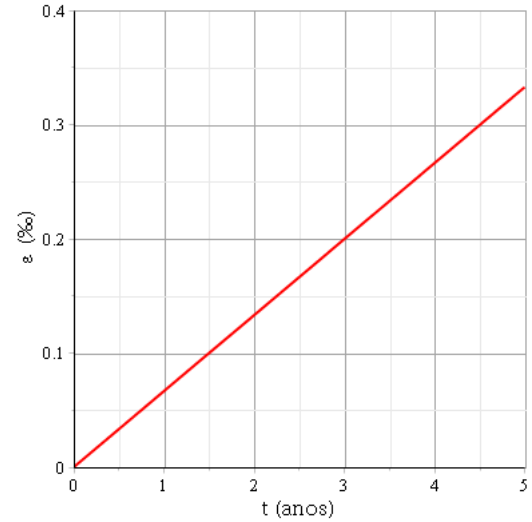
A segunda aplicação desenvolvida visa estudar a propagação das fraturas em função da taxa de carregamento aplicada. Para tanto, história de deformações é definida por uma taxa de extensão isotrópica definida por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \dot{\varepsilon} t H(t) \underline{\underline{1}} \quad (6.4)$$

Para desenvolver melhor a aplicação, dois valores distintos para a taxa de deformação $\dot{\varepsilon}$ são adotados, tal como pode ser observado na Figura 6.8.



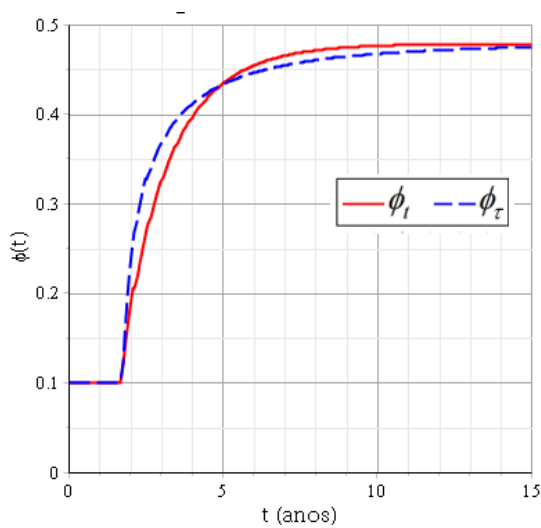
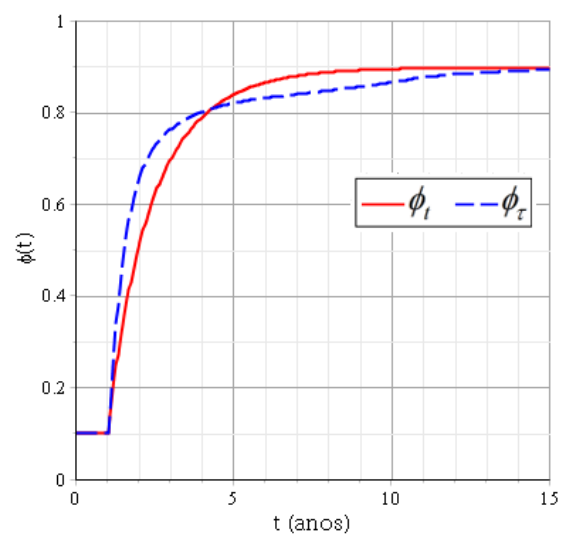
a) Orientação do carregamento.

b) $\dot{\varepsilon} = 0.5\text{‰}$ c) $\dot{\varepsilon} = 0.665\text{‰}$ **Figura 6.8: Carregamento imposto sobre o corpo de prova.**

Em virtude da hipótese de evolução isotrópica do dano, o tensor de tensões desenvolvido mantém a forma isotrópica imposta ao carregamento:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \sigma \underline{\underline{1}} \quad (6.5)$$

O raciocínio numérico anteriormente explicitado pode ser diretamente aplicado. A Figura 6.9 exibe o gráfico de evolução da função de dano $\phi(t)$ ao longo do tempo para as duas histórias de carregamento aplicadas.

a) $\dot{\varepsilon} = 0.5\text{‰}$ e $\Delta t = 0.05$ anob) $\dot{\varepsilon} = 0.665\text{‰}$ e $\Delta t = 0.05$ ano**Figura 6.9: Evolução temporal da Função de dano.**

$$\phi_0 = 0.1 \text{ e } \mathcal{F}_c = 30 \text{ J / m}^2$$

Observando cada um dos gráficos apresentados na Figura 6.9 verifica-se que o início da propagação não ocorre em $t = 0$, quando o carregamento começa a ser aplicado. Inicialmente, observa-se uma elevada taxa de evolução do dano a qual reduz-se à medida que o tempo passa, resultando em uma função de dano crescente até um valor assintótico. Claramente, a função de dano está fortemente relacionada a taxa de carregamento aplicada, dado que o aumento deste último condiciona a um início de propagação mais rapidamente, com maior taxa inicial de propagação e valor assintótico mais elevado. Com relação ao valor assintótico, o aumento da taxa de deformação em 33% causou uma variação no valor final do dano de quase 100%, demonstrando uma elevada sensibilidade.

O valor assintótico desenvolvido pela função de dano, pode ser comparado ao valor do parâmetro de dano assintótico determinado na seção 4, para o caso de taxa de carregamento $\dot{\varepsilon} = 0.5\%$. Observa-se para ambas as situações a convergência destes valores em $\phi_{\infty} = 0.47662$, indicando a plena compatibilidade entre ambas as metodologias. Nesta seção, todavia, a evolução do parâmetro de dano é calculada, levando a uma melhor compreensão deste fenômeno. Quanto as diferenças entre os modelos não-lineares, ainda que ambos conduzam a funções de dano similares, observa-se que a formulação descrita na Eq. (5.27) revela uma evolução de dano inicialmente mais rápida para os parâmetros aplicados mas, ainda assim, a longo prazo ambas as soluções convergem para o mesmo valor assintótico. Contudo, devido falta de dados experimentais com as características necessárias, não é possível verificar qual formulação melhor representa a realidade.

A análise da forma da função de propagação ϕ_t indica que esta pode ser aproximada por uma função do tipo

$$\phi_t(t) \approx \phi_{\infty} - (\phi_{\infty} - \phi_0)e^{-a(t-t_i)} \quad (6.6)$$

onde os termos ϕ_{∞} , ϕ_0 e t_i podem ser determinados com o raciocínio linear desenvolvido na seção 4. O parâmetro a está relacionado a velocidade da propagação, o qual foi calculado como $a = 0.66$ para ambas as taxas de carregamentos, estando provavelmente relacionado às propriedades mecânicas do material. Alternativamente, a análise da forma da função de propagação ϕ_{τ} indica uma aproximação do tipo

$$\phi_{\tau}(t) \approx \phi_{\infty} - (\phi_{\infty} - \phi_0) e^{-a(t-t_i)^b} \quad (6.7)$$

onde os parâmetros a e b foram determinados como $a=1.00$ e $b=0.59$. A Figura 6.10 a seguir exibe a comparação entre as funções de dano (vermelho e azul) e suas respectivas aproximações (linhas tracejadas pretas). Pode-se observar nas duas situações uma excelente correspondência entre a função aproximada e as funções de dano, permitindo que aplicações futuras utilizem uma formulação aproximada a qual pode ser determinada muito mais rapidamente. Mais estudos, contudo, devem ser realizados para que a formulação aproximada seja mais amplamente utilizada.

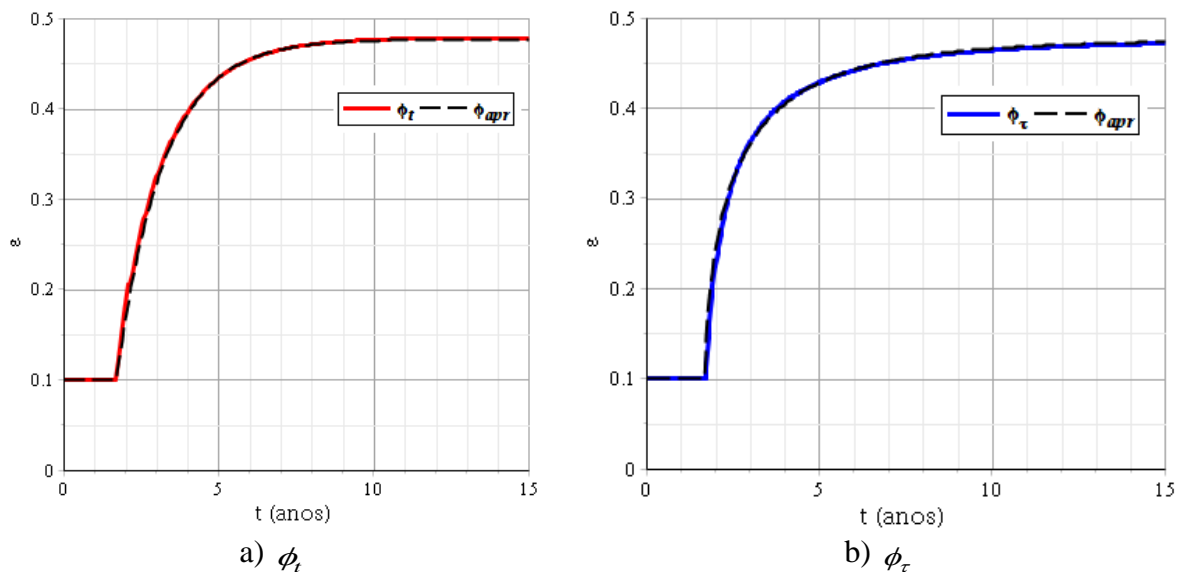


Figura 6.10: Comparação entre função de dano e curva aproximada para $\dot{\varepsilon} = 0.5\%$.

Novamente, a precisão da formulação numérica desenvolvida pode ser avaliada através da comparação entre a taxa de liberação de energia e a energia crítica. A Figura 6.11 exibe a evolução de ambas as variáveis ao longo do tempo.

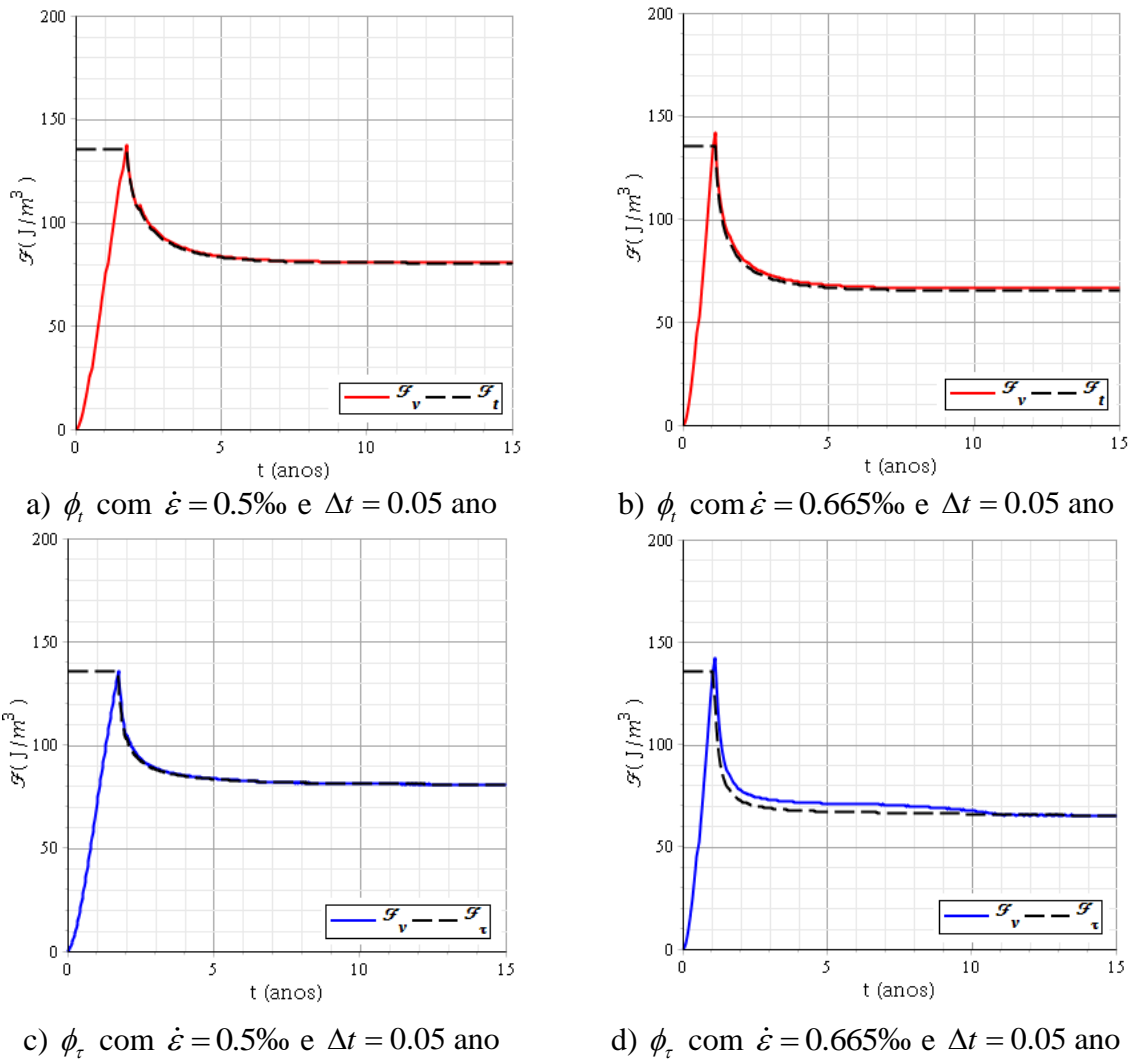


Figura 6.11: Comparação entre taxa de liberação de energia e energia crítica.

$$\phi_0 = 0.1 \text{ e } \mathcal{F}_c = 30 \text{ J} / \text{m}^2$$

Verifica-se que o valor da taxa de liberação de energia \mathcal{F} aumenta de zero até \mathcal{F}_v , iniciando a propagação. A partir de então percebe-se o equilíbrio entre os valores de \mathcal{F} e \mathcal{F}_v , condicionado pelo aumento do valor do parâmetro de dano no corpo de prova. Tal equilíbrio é observado tanto na fase rápida de evolução do dano quanto no patamar assintótico, mantendo-se até o fim do tempo analisado. Durante o equilíbrio, para materiais sem recuperação de dano, o aumento da taxa de liberação de energia não é possível dado que a função de energia crítica \mathcal{F}_v decresce com o aumento do dano, desta forma, quaisquer carregamentos adicionais causariam uma propagação mais acentuada no corpo de prova. Por outro lado, a redução da taxa de carregamento deixaria uma folga entre \mathcal{F} e \mathcal{F}_v , o que retiraria o status de “pronto para propagar” do material.

A comparação entre \mathcal{F} e \mathcal{F}_v indica que o modelo foi capaz de descrever a evolução do parâmetro de dano com maior precisão do que o exemplo com carregamento em passos. Dado que o modelo não apresenta uma etapa corretora para limitar o valor máximo de \mathcal{F} , transgressões de domínio ainda são observadas, mas os valores relativos destas transgressões são muito menores, reduzindo à medida que o número de pontos aumenta. De fato, comprovou-se que o valor máximo do erro está diretamente correlacionado ao valor de Δt escolhido. Dado que a função de dano deve ser capaz de representar adequadamente toda a evolução do dano e não apenas o valor estacionário do dano, define-se o erro ao longo de todo domínio temporal por:

$$e = \max \left(\frac{\mathcal{F}(t, \phi) - \mathcal{F}_v(\phi)}{\mathcal{F}_v(\phi)} \right) \quad (6.8)$$

Destaca-se que um valor diferente de erro máximo será calculado para cada valor de Δt assumido, permitindo exibir graficamente (Figura 6.12) o valor do erro máximo em função do Δt arbitrado. Observa-se que cada ponto (inflexão) do gráfico corresponde a um procedimento independente realizado, utilizando o valor de Δt destacado no eixo das abscissas. Assim, facilmente percebe-se que, quanto menor o valor de Δt utilizado no raciocínio, menor o erro cometido no procedimento. Nota-se, que o erro decresce linearmente com Δt , contudo, o tempo de processamento aumenta quadraticamente à medida que Δt diminui, inviabilizando a redução do erro a valores muito baixos com a formulação utilizada.

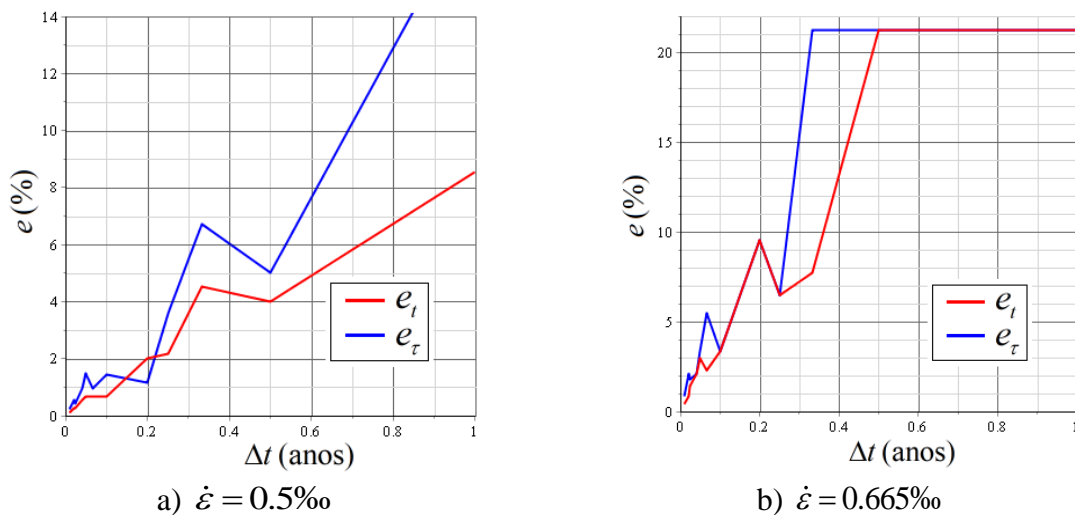
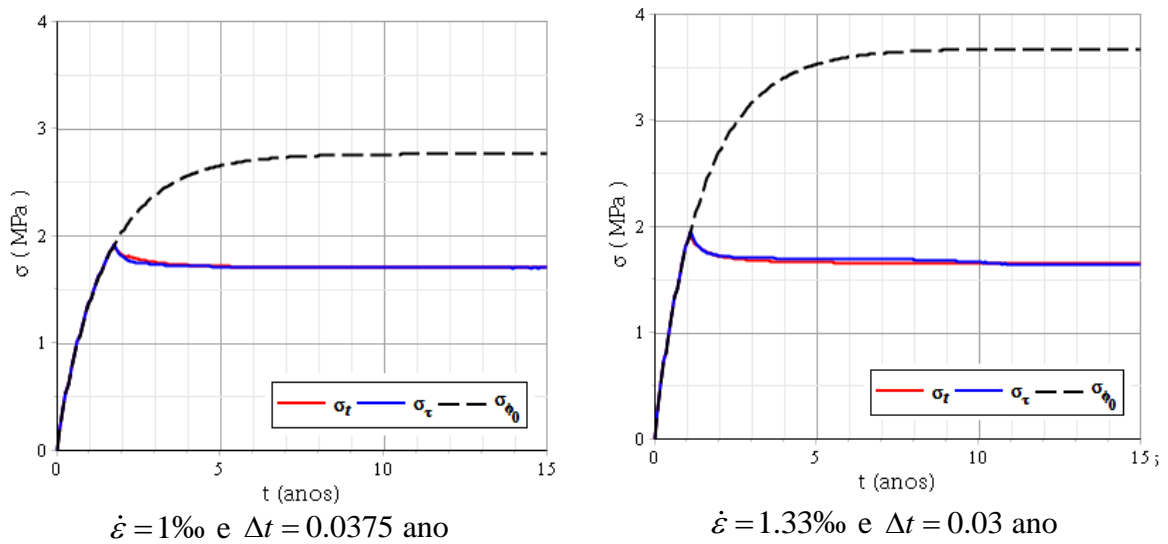
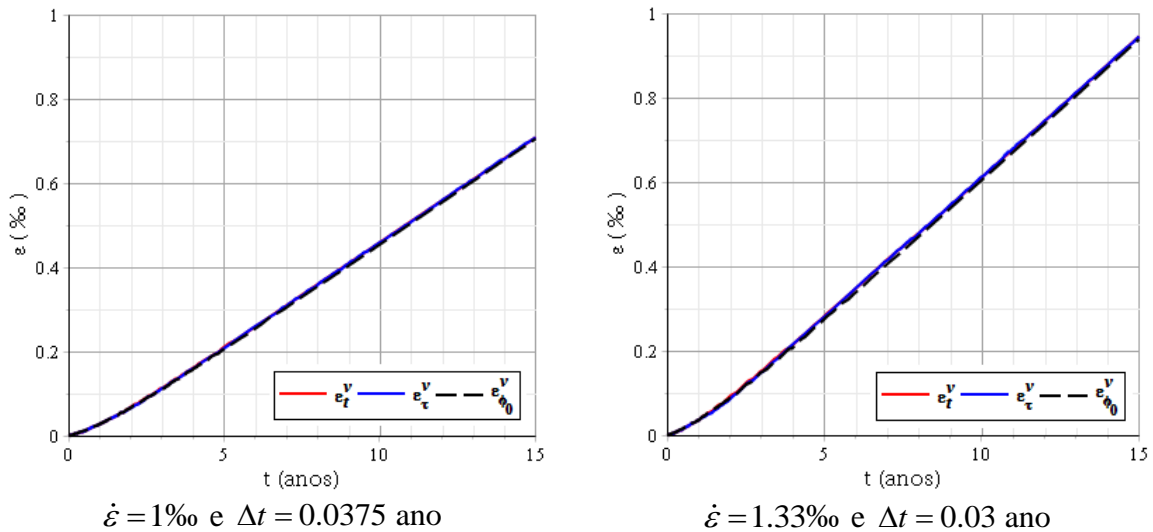
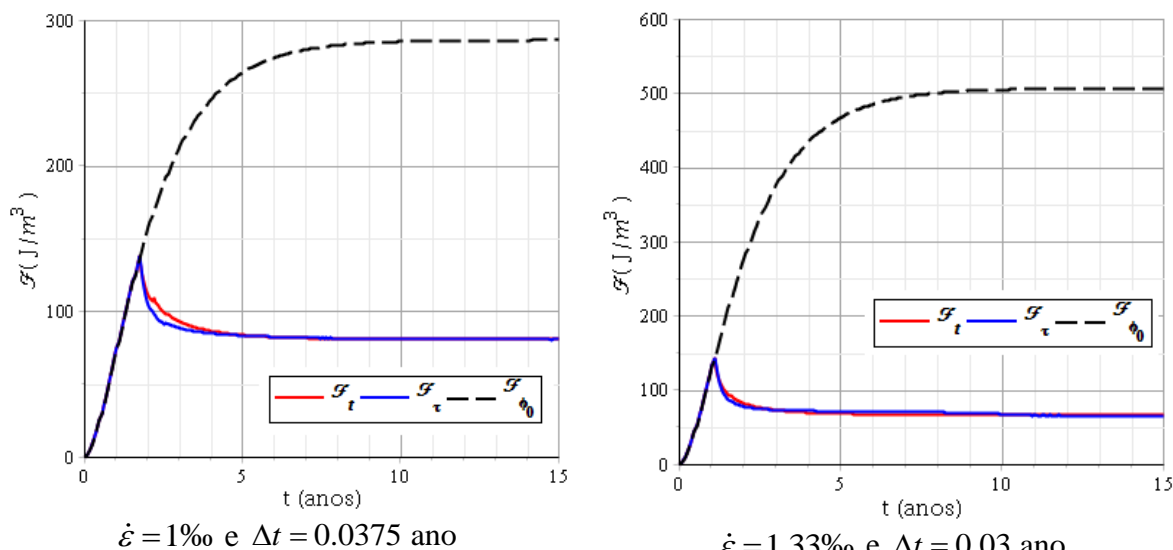


Figura 6.12: Erro máximo em função intervalo Δt utilizado.

$$\phi_0 = 0.1 \text{ e } \mathcal{F}_c = 30 \text{ J / m}^2$$

Tendo em vista os valores obtidos até então, cabe comparar as propriedades desenvolvidas no corpo de prova com a situação em que não se considera a propagação do dano. Para tanto são comparadas as tensões $\underline{\sigma}$ desenvolvidas, as deformações viscosas $\underline{\varepsilon}^v$ desenvolvidas e a própria taxa de liberação de energia \mathcal{F} . A Figura 6.13 expõem estas comparações, onde as linhas vermelhas correspondem a lei de comportamento não-linear da Eq. (5.26), as linhas azuis correspondem a lei de comportamento não-linear da Eq. (5.27), as linhas pretas correspondem a evolução das propriedades com valor do parâmetro de dano na fase de pré-propagação.

a): Tensões (σ_{11})b): Deformações Viscosas (ε_{11}^v)

c): Taxa de Liberação de Energia (\mathcal{F})**Figura 6.13: Comparação de propriedades com e sem propagação.**

$$\phi_0 = 0.1 \text{ e } \mathcal{F}_c = 30 \text{ J} / \text{m}^2$$

A Figura 6.13.a demonstra que a propagação do dano reduz o valor assintótico da tensão desenvolvida pelo material, migrando do valor da tensão com parâmetro de dano inicial para um valor correspondente a tensão com valor de parâmetro de dano final. Tal efeito era previsto dado que o aumento do parâmetro de dano reduz o valor do tensor de relaxação do material (seção 3), condicionando a uma menor tensão resultante. Obviamente, este fenômeno era previsto para valores fixos de parâmetro de dano, antes do início da propagação e após a estabilização, sendo agora evidenciados em uma etapa transiente, durante a evolução do dano. Nota-se também que, mesmo com grande variação da função de dano para ambas as taxas de carregamento, a evolução das tensões de deu de forma relativamente parecida, desenvolvendo valores significativamente próximos ao longo da evolução.

A Figura 6.13.b demonstra o que já havia sido verificado para o exemplo anterior, que as deformações viscosas têm pouca ou nenhuma influência com relação ao parâmetro de dano quando o carregamento é realizado em deformações. Constatações adicionais apenas podem ser realizadas após verificar eventuais consequências de um carregamento em tensões. Contudo, toda teoria de propagação desenvolvida tem como base carregamentos em deformações, devendo ser reescrita para carregamento em tensões na tentativa de estudar esta outra hipótese. Por fim, a Figura 6.13.c pode ser diretamente comparada com a Figura 4.6 (seção 4), a qual também demonstra a evolução da taxa de liberação de energia no tempo (sem evidenciar o que ocorre durante a propagação). Desta forma, a Figura 6.13.c apresenta um refinamento de

conhecimentos, evidenciando justamente como se dá essa evolução em um tempo transiente. Tal sincronismo entre as diferentes predições fornece boas evidências de que o raciocínio estabelecido está correto no âmbito matemático. Para a verificação mecânica do modelo torna-se necessário a comparação das predições com dados experimentais.

Por fim, cabe estudar o efeito da aplicação de outras taxas de carregamento $\dot{\varepsilon}$ sobre a função de dano. Para esta finalidade, utilizou-se somente a forma não-linear destacada na Eq. (5.26), dado que esta fornece soluções mais rapidamente:

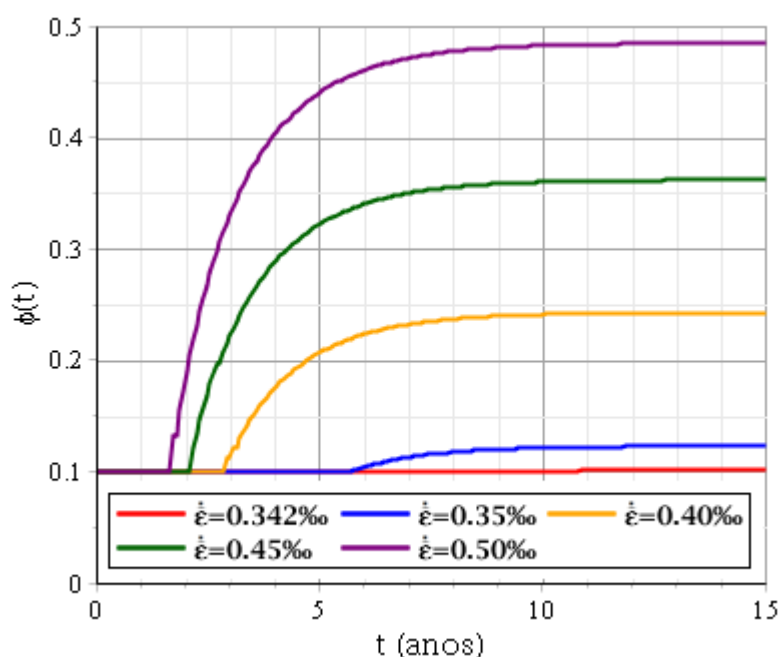
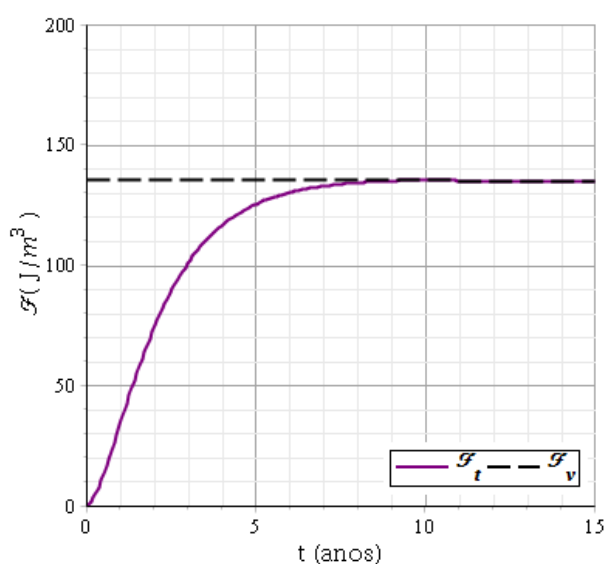


Figura 6.14: Evolução temporal da Função de dano com diferentes taxas de carregamento.

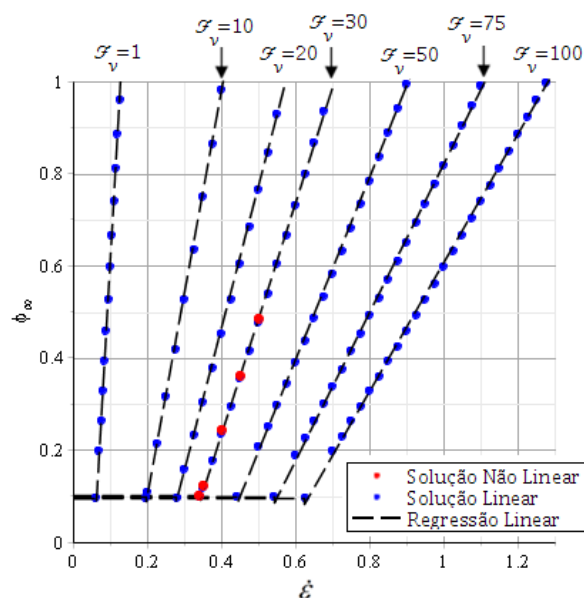
$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 J / m^2 \text{ e } \Delta t = 0.05 \text{ ano}$$

De acordo com a Figura 6.14, valores de taxa de carregamento inferiores a taxa crítica $\dot{\varepsilon}_c < 0.342\%$ não condicionam a propagação de fraturas para os parâmetros utilizados neste exemplo. Tal comportamento refere-se ao valor para o qual a taxa de liberação de energia tende a se estabilizar, sendo menor ou igual ao valor da função de energia crítica \mathcal{F}_v (Figura 6.15.a). Neste estado, a taxa de liberação de energia cresce até atingir o valor da função de energia crítica, a partir do qual permanece estável. Devido a este equilíbrio, não existe propagação, mantendo o material em um estado tal que qualquer adição de carregamento induza a propagação instantânea. O valor de taxa de carregamento $\dot{\varepsilon}_c$ que induz este estado é denominado de taxa de carregamento crítico. Além disso, verifica-se uma evolução linear no

parâmetro de dano à medida que a taxa de carregamento aumenta. Tal evolução pode ser verificada na Figura 6.15.b a seguir, a qual apresenta o aumento do parâmetro de dano assintótico em função da taxa de carregamento. Os pontos vermelhos representam os valores assintóticos da função de dano para as cinco situações representadas na Figura 6.14, os pontos azuis representam os valores finais do parâmetro de dano calculado através da metodologia linear destacada na seção 4 e a reta tracejada preta representa a regressão linear dos dados.



a) \mathcal{F} e \mathcal{F}_v para $\dot{\varepsilon} = 0.342\%$



b) Regressão linear para $\dot{\varepsilon} \times \phi_\infty$

Figura 6.15: Estudo da taxa de carregamento.

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 J / m^2 \text{ e } \Delta t = 0.05 \text{ ano}$$

Espera-se que a teoria utilizada neste trabalho forneça bons resultados para valores intermediários de parâmetro de dano, afastados de $\phi_\infty \sim 0$ (onde a maior efeito da nucleação) e de $\phi_\infty \sim 1$ (onde fenômenos relacionados a ruptura do material são acionados). A relação linear entre $\dot{\varepsilon}$ e ϕ_∞ não foi um resultado previsto anteriormente, provavelmente tendo sua origem na formulação linear válida ao final da propagação. Observa-se que esta relação emergiu diretamente das raízes de $\mathcal{F} - \mathcal{F}_v = 0$, sendo \mathcal{F} e \mathcal{F}_v duas funções não-lineares em função do parâmetro de dano. Estudos experimentais mais abrangentes são necessários para comprovar este comportamento.

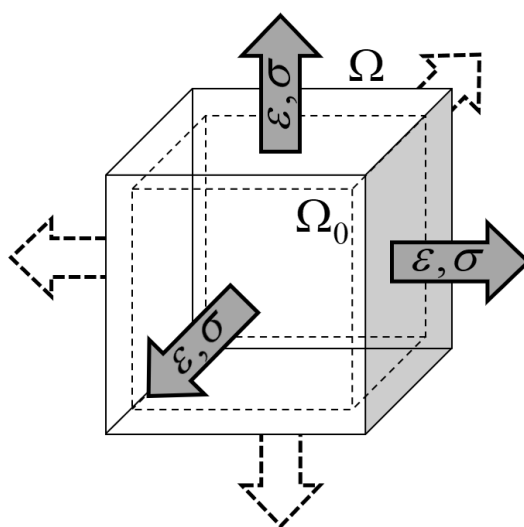
6.3.DEFORMAÇÃO ISÓTROPA BILINEAR

A terceira aplicação visa verificar como se dá a evolução do dano quando um carregamento é adicionado durante a etapa de evolução rápida da função de dano e durante a etapa de estabilização da função de dano. As seguintes histórias de deformações são prescritas:

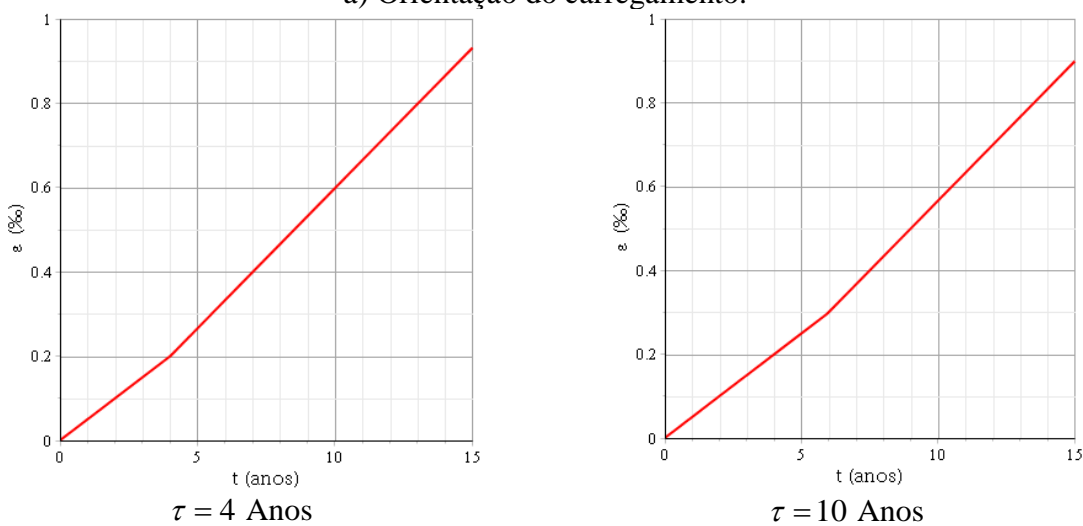
$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \dot{\varepsilon}_1 t H(t) \underline{\underline{1}} + \dot{\varepsilon}_2 (t - \tau) H(t - \tau) \underline{\underline{1}} \quad (6.9)$$

Mais uma vez, o tensor de tensões desenvolvido mantém a forma isotrópico:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \sigma \underline{\underline{1}} \quad (6.10)$$



a) Orientação do carregamento.



b) História de deformações aplicadas (componente ε_{11}).

Figura 6.16: Carregamento imposto sobre o corpo de prova.

$$\dot{\varepsilon}_1 = 1\text{‰} \text{ e } \dot{\varepsilon}_2 = 0.33\text{‰}$$

Neste contexto, resolvendo numericamente o problema apresentado, chega-se à seguinte evolução da função de dano:

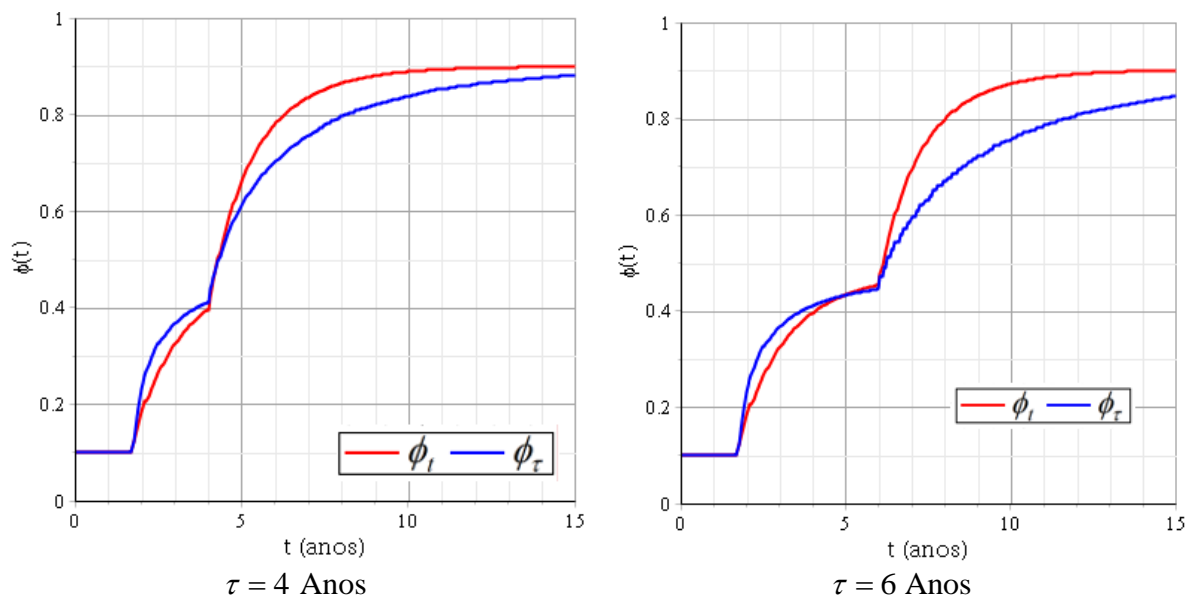


Figura 6.17: Evolução temporal da Função de dano.

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 J / m^2 \text{ e } \Delta t = 0.05 \text{ ano}$$

A Figura 6.17 demonstra que uma mudança pequena na taxa de carregamento afeta significativamente a evolução do parâmetro de dano. No raciocínio estabelecido com $\tau = 4$ Anos o segundo carregamento iniciou durante a fase de evolução rápida do dano, causando uma evolução ainda mais acelerada. Por outro lado, no raciocínio com $\tau = 6$ Anos o segundo carregamento iniciou após a estabilização do dano, fazendo com que um novo ciclo de evolução do dano se iniciasse. Tal como mencionado anteriormente, o modelo provou-se altamente sensível as taxas de carregamento aplicadas, o que mais uma vez pode ser verificado na Figura 6.17 após a adição do segundo carregamento.

Com relação a diferença entre os modelos, verificou-se que a função de dano do modelo ϕ_τ apresentou uma evolução inicialmente mais rápida, reduzindo principalmente após a estabilização proveniente do primeiro carregamento. Embora não tenha havido tempo suficiente para verificar a estabilidade da função de dano, espera-se que esta convirja aos mesmos valores do modelo com ϕ_I no longo prazo.

Por último, os módulos dos carregamentos utilizados permitem a comparação com o exemplo anterior. Embora os valores intermediários não possam ser comparados, os valores assintóticos da função de dano mostraram-se idênticos aos valores desenvolvidos na aplicação

anterior, indicando que a taxa de carregamento está diretamente relacionada ao valor assintótico desenvolvido pela função de dano.

Em relação a precisão matemática dos modelos, compara-se a taxa de liberação de energia e a energia crítica na Figura 6.18:

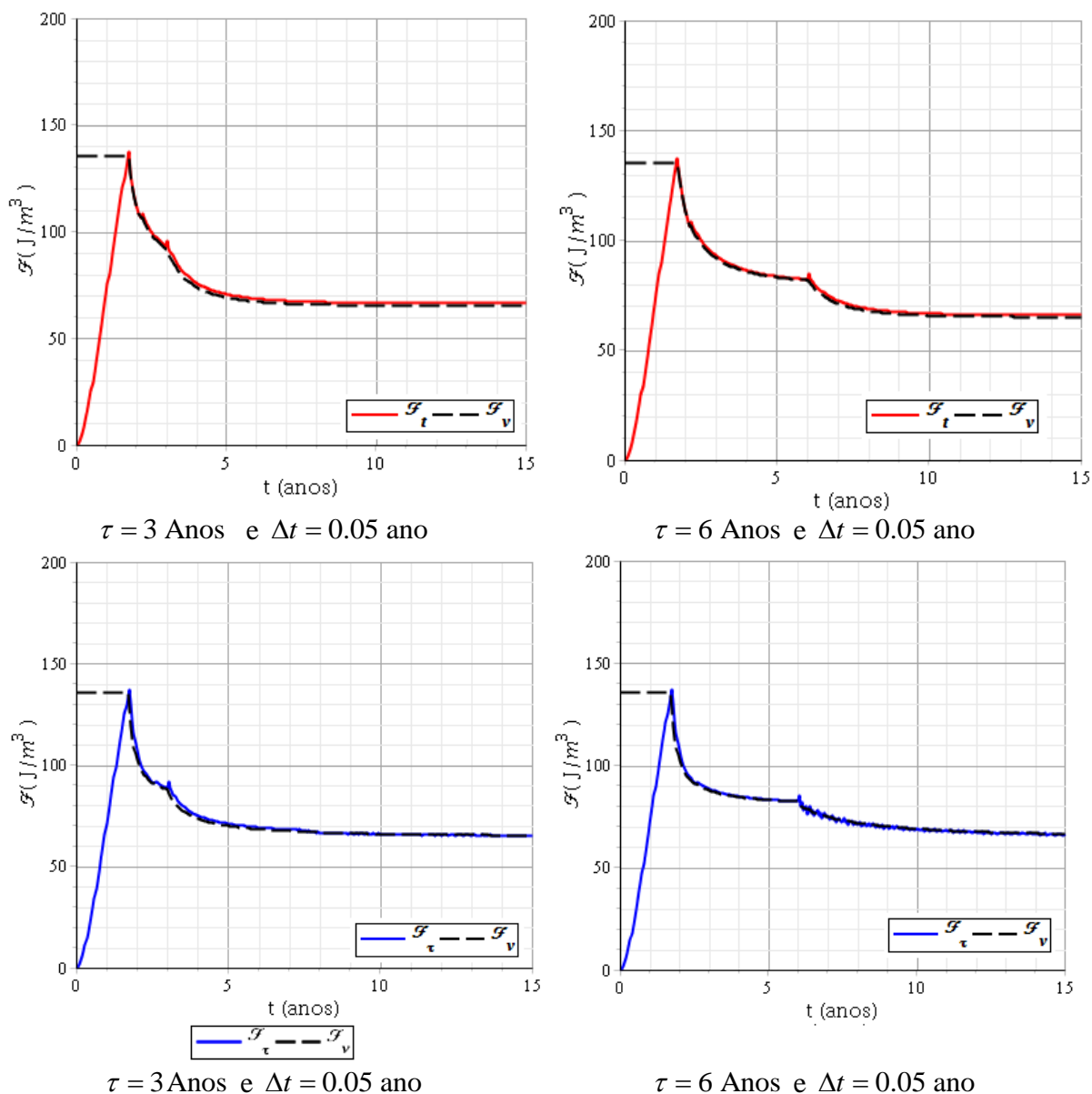


Figura 6.18: Comparação entre taxa de liberação de energia e energia crítica.

$$\phi_0 = 0.1 \text{ e } \mathcal{F}_c = 30 J / m^2$$

Pode-se verificar uma boa precisão em todas situações, obtendo-se valores de taxa de liberação de energia \mathcal{F} similares aos de energia crítica \mathcal{F}_v durante toda etapa após o início da propagação. Os mesmos comentários relativos as transgressões de domínio são realizados,

sendo necessário um procedimento corretor para evita-las ou uma abordagem implícita. Contudo, a precisão do procedimento aumenta à medida que mais pontos são incluídos.

Na sequência o módulo da tensão isotrópica e das deformações viscosas são apresentados

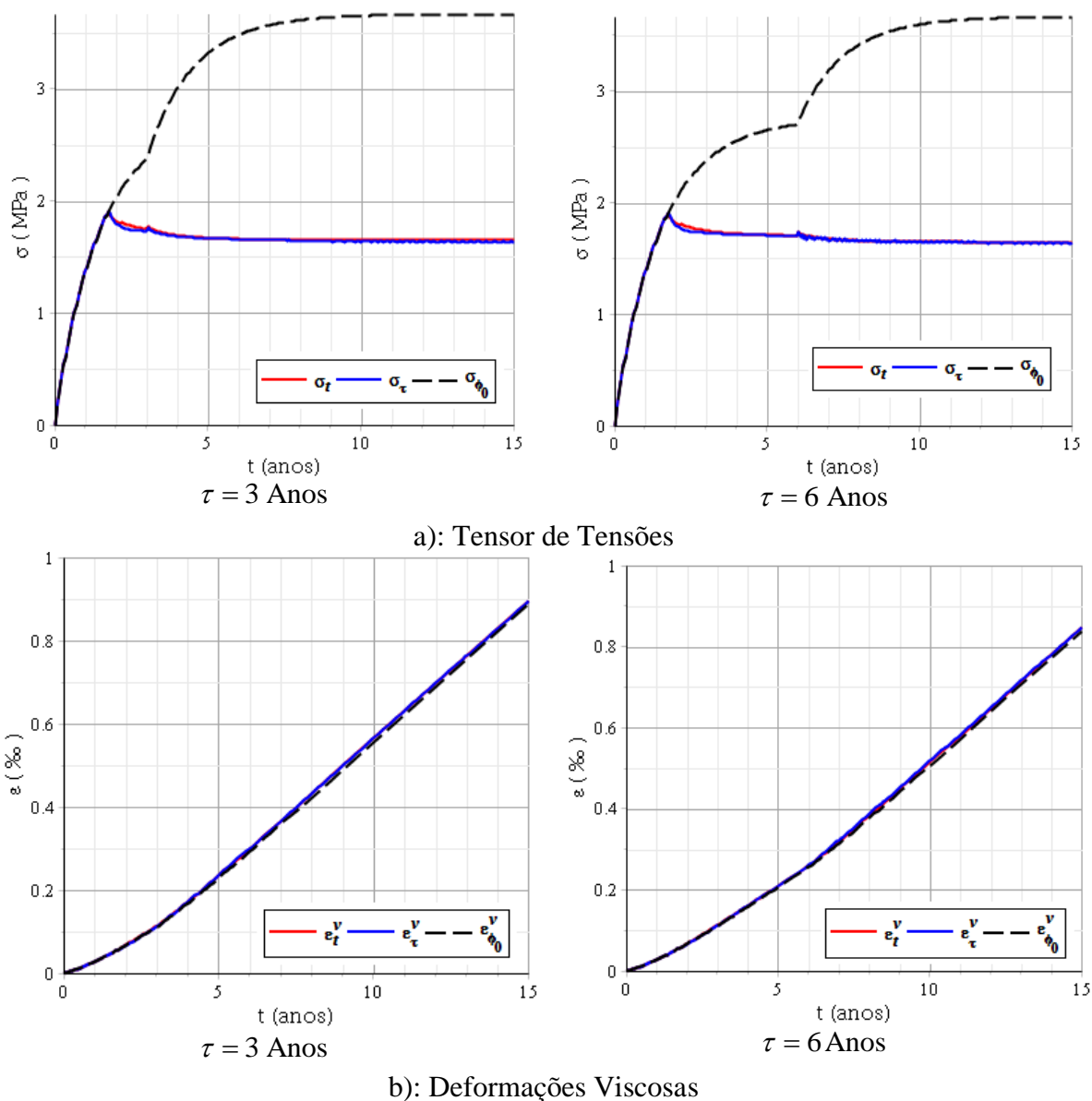


Figura 6.19: Comparação de propriedades com e sem propagação.

$$\phi_0 = 0.1 \text{ e } \mathcal{F}_c = 30 \text{ J} / \text{m}^2$$

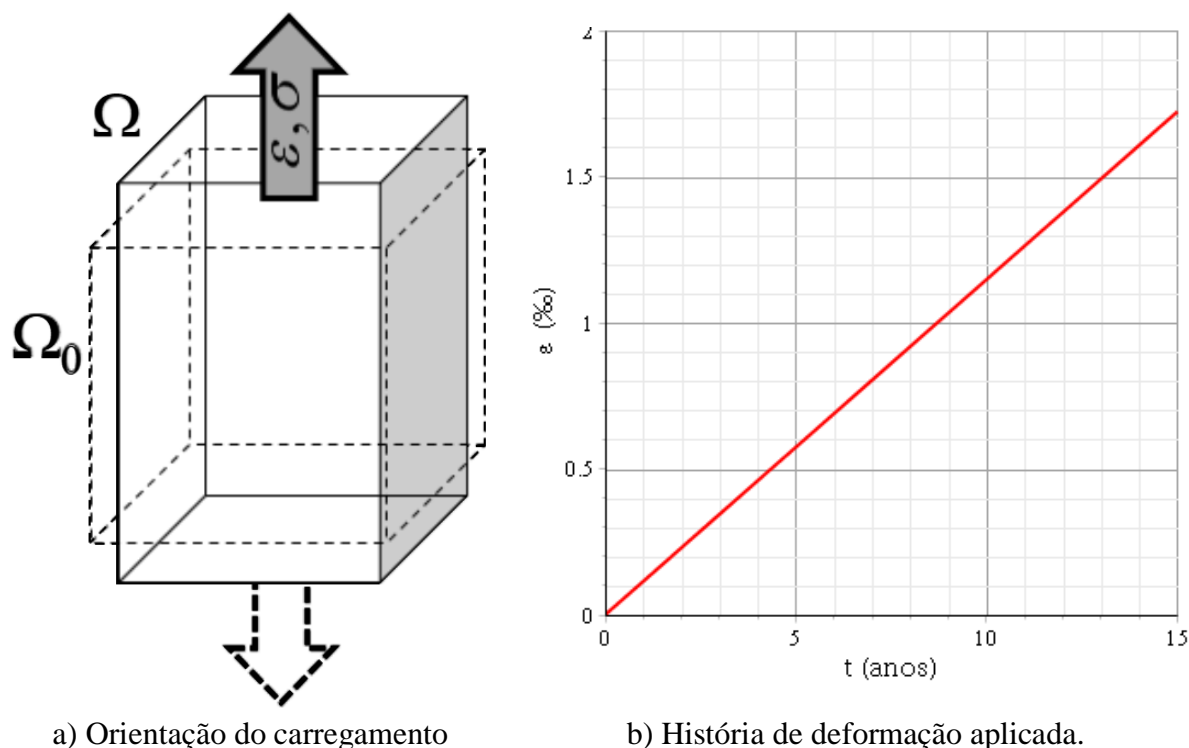
De acordo com a Figura 6.19, nenhuma diferença significativa entre os modelos usando ϕ_t e ϕ_τ foi observada nas tensões e deformações viscosas. Percebe-se com isso que a diferença na história de evolução do dano tem pouca influência sobre as solicitações desenvolvidas pelo material mesmo quando múltiplos passos de carregamento são utilizados.

6.4. DEFORMAÇÃO UNIAXIAL COM EVOLUÇÃO LINEAR

A aplicação de carregamentos isotrópicos ao corpo de prova mistura as contribuições individuais decorrentes do carregamento aplicado em diferentes direções. Desta forma, espera-se que a aplicação de carregamentos uniaxiais possa complementar este estudo, revelando evidências ocultadas durante a aplicação de carregamentos isotrópicos. Neste sentido, aplica-se sobre o corpo de prova o carregamento definido pela seguinte extensão uniaxial (Figura 6.20):

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \dot{\varepsilon} t H(t) (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1) \quad (6.11)$$

onde \otimes corresponde ao produto tensorial. Para manter os valores de \mathcal{F}_c e ϕ_∞ utilizou-se $\dot{\varepsilon} = 1.15\%$.



a) Orientação do carregamento

b) História de deformação aplicada.

Figura 6.20: Carregamento imposto sobre o corpo de prova.

O raciocínio numérico destacado no fluxograma da Figura 5.6 mais uma vez é aplicado, o que leva ao seguinte gráfico (Figura 6.21) de evolução da função de dano:

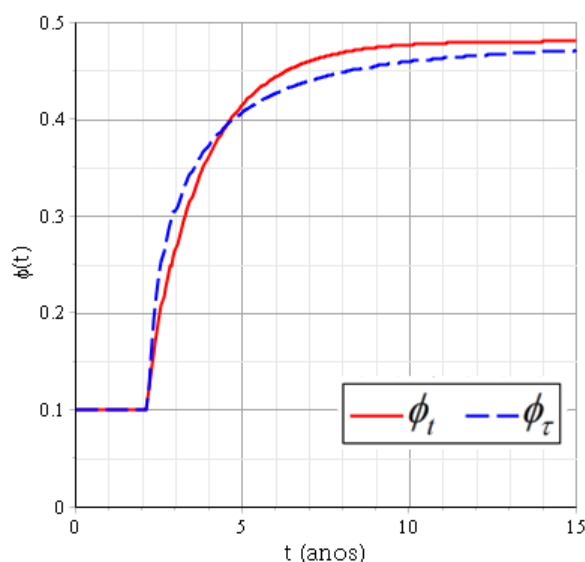


Figura 6.21: Evolução temporal da Função de dano.

$$\dot{\varepsilon} = 1.15\text{‰}, \Delta t = 0.05 \text{ ano}, \phi_0 = 0.1 \text{ e } \mathcal{F}_c = 30 \text{ J} / \text{m}^2$$

Observa-se inicialmente que o valor $\dot{\varepsilon} = 1.15\text{‰}$ utilizado nesta aplicação é significativamente mais elevado do que àqueles utilizados nas aplicações anteriores, demonstrando maior dificuldade com relação à propagação de fraturas. Embora a curva da função de dano apresentada na Figura 6.21 tenha se ajustado aos novos valores, sua forma visual manteve-se a mesma e as conclusões obtidas são as mesmas já verificados na seção 6.2. Assim sendo, verifica-se que tanto carregamentos uniaxiais quanto triaxiais apresentam capacidade de propagação de dano quando as fraturas são isotropicamente orientadas no meio. Nota-se que, ao final do tempo de análise o critério de propagação encontra-se saturado e que a adição de carregamentos em qualquer orientação mobiliza novamente a propagação do dano da mesma forma estudada na seção 6.3.

Novamente, a precisão do raciocínio matemático pode ser medida através da comparação entre taxa de liberação de energia e energia crítica. A Figura 6.22 exibe a evolução de ambas as variáveis para cada um dos modelos propostos (i.e., ϕ_t e ϕ_τ). Nesta situação, tem-se uma excelente precisão em ambos os modelos, apresentando taxas de liberação de energia que dificilmente transgredem seu domínio possível. Além da precisão verificada neste exemplo, as demais conclusões em termos da taxa de liberação de energia parecem ser as mesmas já observadas na seção 6.2.

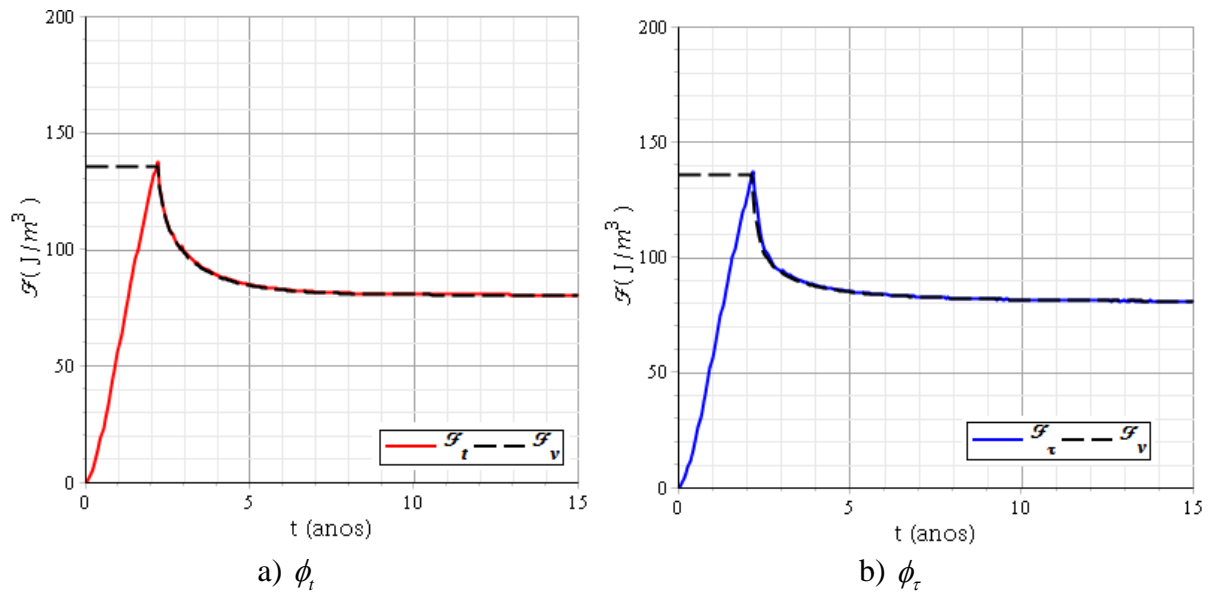
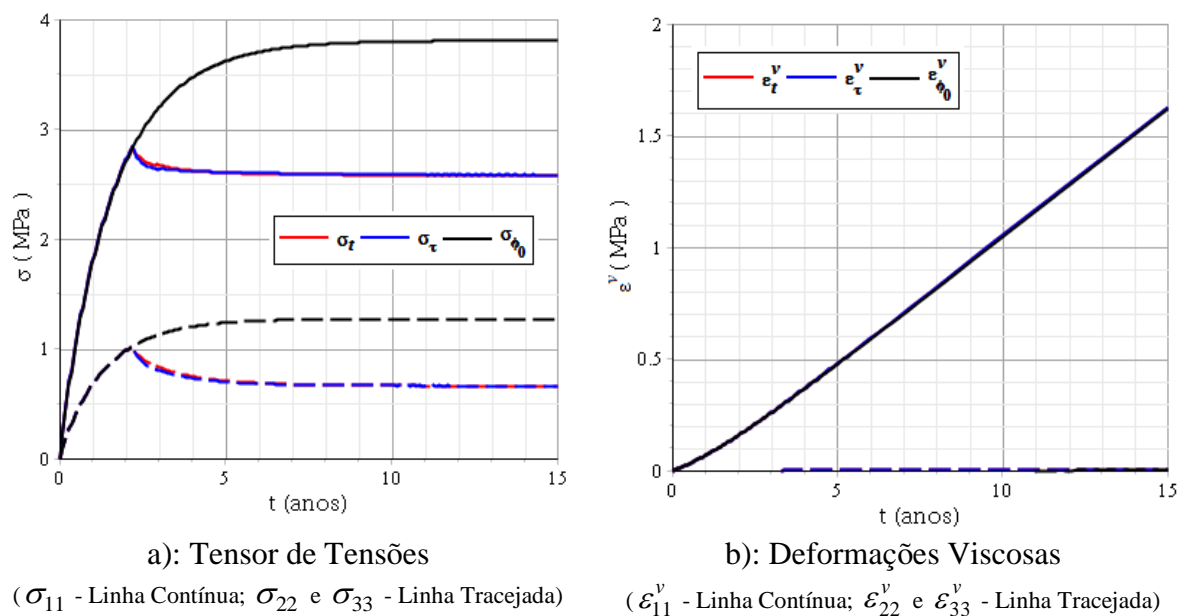
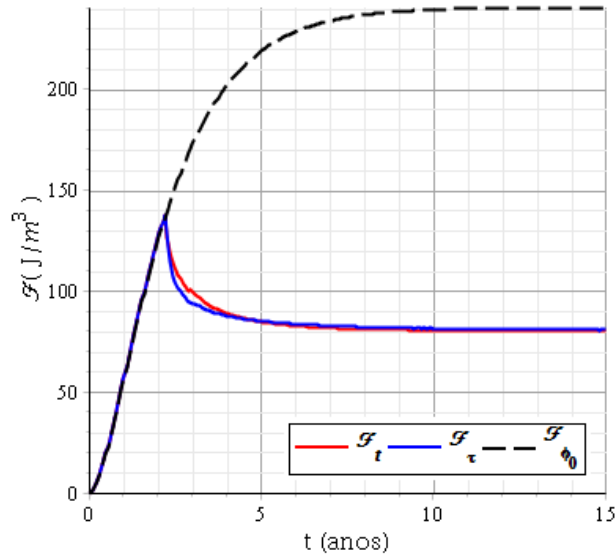


Figura 6.22: Comparação entre taxa de liberação de energia e energia crítica.

$$\dot{\varepsilon} = 1.15\%, \Delta t = 0.05 \text{ ano}, \phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 \text{ J} / \text{m}^2$$

Por fim, cabe comparar as demais propriedades desenvolvidas pelo corpo de prova nas situações com e sem propagação do dano. Novamente são comparadas as tensões $\underline{\underline{\sigma}}$, as deformações viscosas $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ e a própria taxa de liberação de energia \mathcal{F} . Na Figura 6.23 as linhas vermelhas correspondem a lei de comportamento não-linear da Eq. (5.26), as linhas azuis correspondem a lei de comportamento não-linear da Eq. (5.27), as linhas pretas correspondem a evolução das propriedades com valor do parâmetro de dano na fase de pré-propagação.





c): Taxa de Liberação de Energia (\mathcal{F})

Figura 6.23: Comparação de propriedades com e sem propagação.

$$\dot{\varepsilon} = 1.15\%, \Delta t = 0.05 \text{ ano}, \phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 \text{ J} / \text{m}^2$$

Seguindo os resultados verificados nos exemplos anteriores, as funções de dano ϕ_t e ϕ_τ parecem produzir campos de tensões, deformações viscosas e taxa de liberação de energia pouco diferentes entre si, indicando que a forma viscoelástica não-linear adotado tem pouca relevância em problemas que levam a propagação estável de dano. A verificação das componentes σ_{22} e σ_{33} segue a mesma configuração que a componente σ_{11} , diferenciando-se apenas quanto ao módulo. Com isso, verifica-se que as tensões transversais são igualmente afetadas tanto pela evolução do dano (o que já era previsto, dado que o modelo de dano utilizado é isotrópico) quanto pelo modelo viscoelástico não-linear desenvolvido. As componentes de deformação viscosas ε_{22}^v e ε_{33}^v assumiram valores não nulos de pequena magnitude ao longo do tempo, contudo, tal resultado pode ser atribuído a imprecisões numéricas.

6.5. DEFORMAÇÃO CISALHANTE COM EVOLUÇÃO LINEAR

Embora a condição de propagação determinada neste trabalho possa levar a propagação do dano mesmo em condições de carregamentos isotrópicos, tal como verificado nas aplicações anteriores, evidências experimentais sobre determinados materiais indicam a predileção de carregamentos desviadores (ou cisalhantes) para ativação do critério de propagação. Para tanto, o seguinte carregamento será aplicado ao corpo de prova:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \dot{\varepsilon} t H(t) (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) \quad (6.12)$$

onde \otimes corresponde ao produto tensorial. Para manter os valores de \mathcal{F}_c e ϕ_∞ utilizou-se $\dot{\varepsilon} = 1.47\%$.

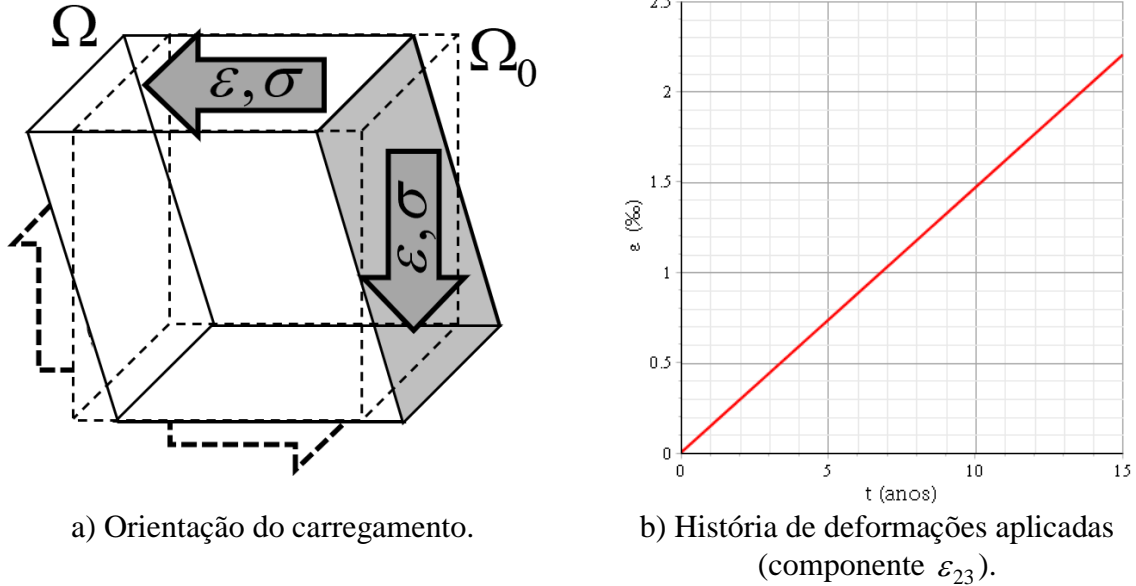


Figura 6.24: Carregamento imposto sobre o corpo de prova.

O raciocínio utilizado para a determinação da função de dano ϕ é o mesmo utilizado nos exemplos anteriores, representado no fluxograma destacado na Figura 5.4. Contudo, devido a razões numéricas, a Eq. (5.40) não pôde ser utilizada. A razão para isso concentra-se nos valores atribuídos as funções que se encontram no denominador da Eq. (5.40), tendendo a valores próximos a zero. Para tanto, foi necessário modificar a forma que se escrevia $\dot{\phi}$, representando-o em termos do tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\dot{\phi} = - \frac{\underline{\underline{\sigma}} : \frac{\partial \mathbb{F}_0(\phi)}{\partial \phi} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}}{\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \phi} + \underline{\underline{\sigma}} : \mathbb{F}_0(\phi) : \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi^2} : \mathbb{F}_0(\phi) - \frac{\partial \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi} : \frac{\partial \mathbb{F}_0(\phi)}{\partial \phi} \right] : \underline{\underline{\sigma}}} \quad (6.13)$$

$$\dot{\phi}_t = - \frac{\underline{\underline{\sigma}} : \frac{\partial \mathbb{F}_0(\phi)}{\partial \phi} : \left[\mathbb{R}_0(\phi) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi(t))}{\partial \tau} : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau \right]}{\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \phi} + \underline{\underline{\sigma}} : \mathbb{F}_0(\phi) : \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi^2} : \mathbb{F}_0(\phi) - \frac{\partial \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi} : \frac{\partial \mathbb{F}_0(\phi)}{\partial \phi} \right] : \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} : \frac{\partial \mathbb{F}_0(\phi)}{\partial \phi} : \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi)}{\partial \phi} : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau} \quad (6.14)$$

e

$$\dot{\phi}_\tau = - \frac{\underline{\underline{\sigma}} : \frac{\partial \mathbb{F}_0(\phi)}{\partial \phi} : \left[\mathbb{R}_0(\phi) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi(\tau))}{\partial t} : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau \right]}{\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial \phi} + \underline{\underline{\sigma}} : \mathbb{F}_0(\phi) : \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi^2} : \mathbb{F}_0(\phi) - \frac{\partial \mathbb{R}_0(\phi)}{\partial \phi} : \frac{\partial \mathbb{F}_0(\phi)}{\partial \phi} \right]} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (6.15)$$

onde as expressões não-lineares que relacionam $\underline{\underline{\sigma}}$ a $\underline{\underline{\varepsilon}}$ são dadas pelas Eq. (5.22) (para $\dot{\phi}_t$) e Eq. (5.23) (para $\dot{\phi}_\tau$). Mais uma vez, a derivada parcial $\frac{\partial R(t, \tau, \phi(t))}{\partial \tau}$ é realizada apenas sobre a segunda variável (isso é, apenas sobre τ), a passo que a derivada parcial $\frac{\partial R(t, \tau, \phi(\tau))}{\partial \tau}$ é realizada tanto sobre a segunda quanto sobre a terceira variável (isso é, sobre τ e $\phi(\tau)$).

Tal forma não levou a inconsistências numéricas, permitindo-se estabelecer a evolução da função de dano (ver Figura 6.25). Contudo, a precisão estabelecida pelo raciocínio parece ter sido inferior ao dos exemplos anteriores, dada a forma escalonado verificado na figura. Desta forma, constata-se a necessidade de melhor desenvolver a formulação com o objetivo de produzir resultados mais condizentes com a forma contínua esperado.

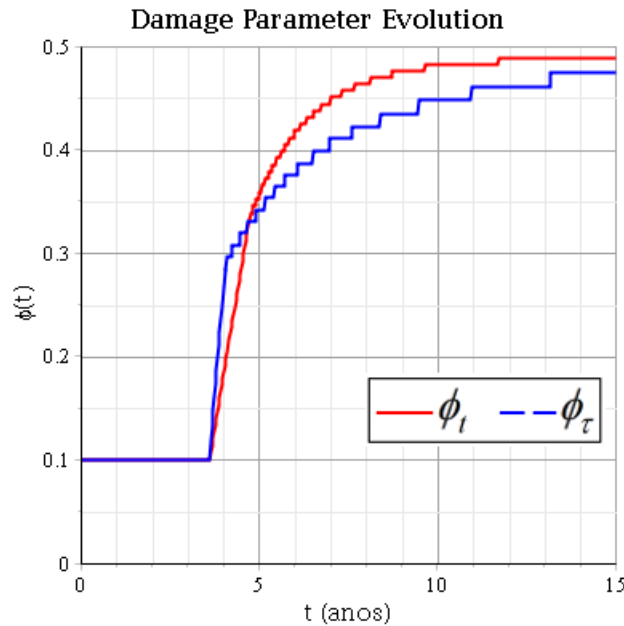


Figura 6.25: Evolução temporal da Função de dano.

$\dot{\varepsilon} = 1.47\%$, $\Delta t = 0.03$ ano , $\phi_0 = 0.1$ e $\mathcal{F}_c = 30J / m^2$

Verifica-se que no tempo analisado a função ϕ_t parece ter atingido um patamar estável, enquanto a função ϕ_r continua se desenvolvendo, sendo necessário estender um pouco mais o limite de tempo de análise. Contudo, espera-se que ambas as funções convirjam a valores semelhantes. A comparação entre as funções de dano destacadas na Figura 6.25 e Figura 6.9 parece indicar que o carregamento em cisalhamento tem uma propagação mais rápida nos instantes iniciais ($t < 5$), evoluindo a partir de então de forma muito similar ao carregamento normal. Esta semelhança entre as evoluções deve-se a forma com que a formulação é desenvolvida, sendo indiferente (exceto por k^{hom} e μ^{hom}) se o carregamento é normal ou cisalhante. Nota-se, contudo, que a taxa de carregamento aqui imposta foi substancialmente mais elevada, podendo ser esta a causa desta diferença em ($t < 5$).

Comparando-se a taxa de liberação de energia assintótica à energia crítica (procedimento destacado na seção 4), consegue-se estimar qual o valor limite a função de dano deve assumir ao fim da propagação. A Figura 6.26 exhibe a comparação relativa para a aplicação corrente. Nota-se que esta análise é realizada ainda no domínio linear, não existindo diferença para os modelos não-lineares propostos.

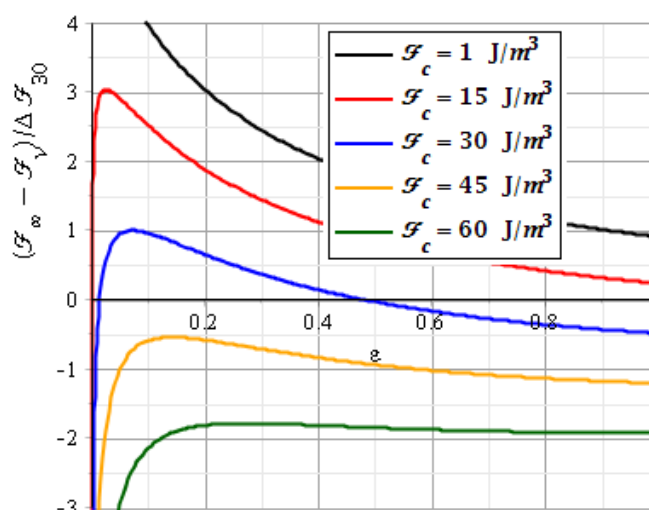


Figura 6.26: Comparação entre taxa de liberação assintótica e energia crítica.

$$\dot{\varepsilon} = 1.47\%, \Delta\mathcal{F}_{30} = 44 \text{ J} / \text{m}^3$$

Este gráfico delimita o domínio de propagação do material para as condições em que está sendo submetido. Valores positivos indicam que a região é propícia para a propagação e valores negativos indicam uma região em que não haverá propagação. Dado que o valor inicial para a função de dano ($\phi_0 = 0.1$) está em uma região de valor positivo, a propagação do dano ocorrerá.

Segundo a teoria verificada na seção 4, na hipótese do equilíbrio instantâneo entre taxa de liberação de energia e energia crítica, a segunda raiz desta função indica o limite da função de dano ao fim da propagação, a qual vale $\phi_\infty=0.48$ para $\mathcal{F}_c = 30J / m^2$. Note que esta expressão não indica como se dará a propagação nem quando ela iniciará, restringindo-se a análise dos valores de ϕ propícios a propagação bem como do valor final do parâmetro de dano. Comparando-se o valor de ϕ_∞ com o patamar atingido por ϕ_t na Figura 6.25 (dado que ϕ_τ não atingiu o equilíbrio no tempo destacado), nota-se uma excelente concordância entre os dois modelos.

Ainda que a forma escalonada nas funções contribua para verificar a existência de imprecisões locais, a comparação entre a taxa de liberação de energia e a energia crítica ao longo do tempo ainda pode ser utilizada para verificar a precisão numérica obtida pelo procedimento. A Figura 6.27 a seguir exhibe estas comparações ao longo do tempo. Como observado, os valores assumidos pelas funções são relativamente próximos, indicando uma boa coerência dos procedimentos. O aspecto serrilhado (mais visível em ϕ_τ) deve-se à forma escalonada da função de dano, fazendo com que a taxa de liberação de energia cresça enquanto o modelo não verifica a propagação. À medida que se aumenta o número de pontos, estas funções tendem a se tornar mais contínuas.

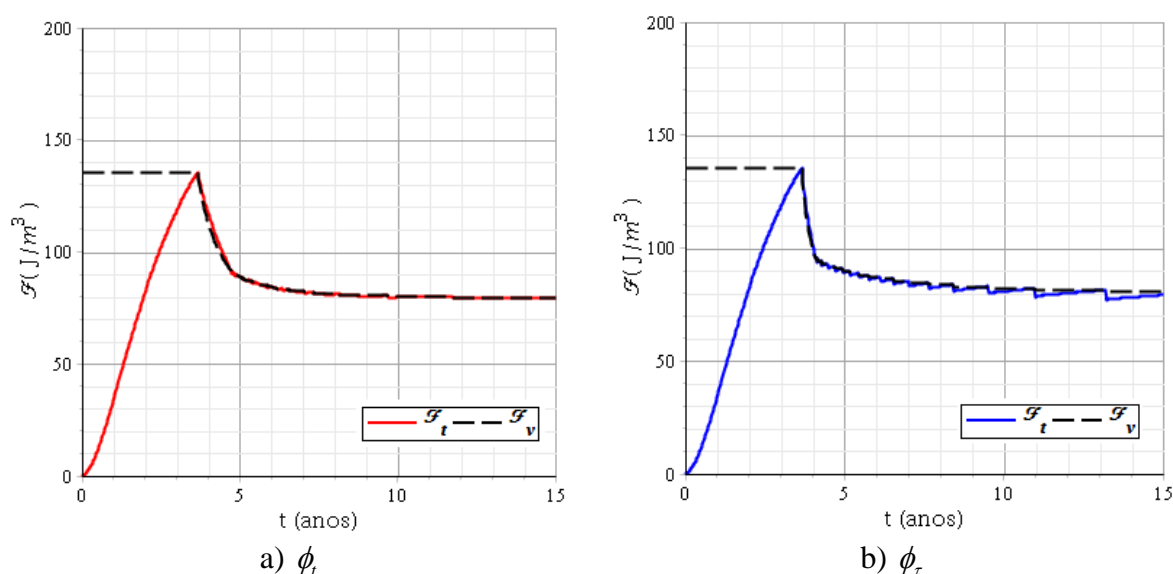
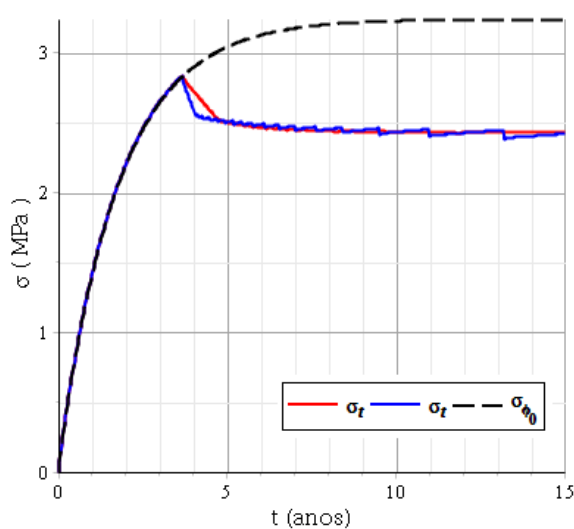


Figura 6.27: Comparação entre taxa de liberação de energia e energia crítica.

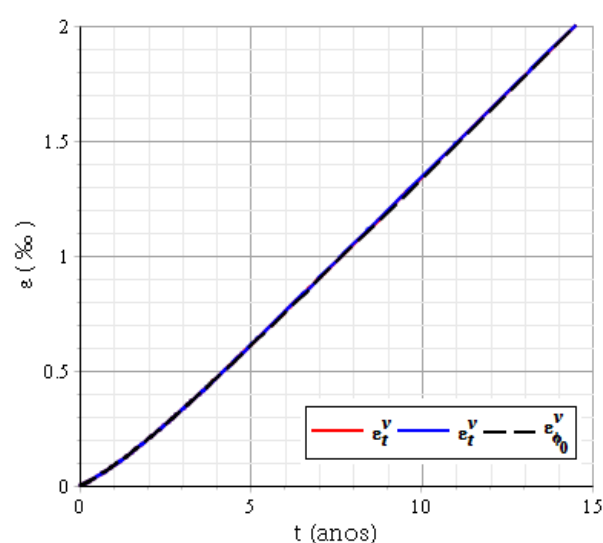
$$\dot{\varepsilon} = 1.47\%, \Delta t = 0.03 \text{ ano}, \phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30J / m^2$$

Observações a respeito da causa da forma escalonada de $\dot{\phi}_t$ e $\dot{\phi}_\tau$ apontam para a Eq. (6.13) (ou Eq. (5.40) para as seções anteriores), a qual parece assumir valores ligeiramente maiores para o valor de $\dot{\phi}$ do que aqueles que seriam esperados, provavelmente devido a causas numéricas. Como consequência a condição de propagação não se verifica nos instantes seguintes, existindo um aumento da taxa de liberação de energia até que atinja novamente o valor da energia crítica, a partir de quando o procedimento se repete. Por outro lado, algumas formulações alternativas (não incluídas neste trabalho) levam a valores de $\dot{\phi}$ mais baixos do que o esperado, causando uma defasagem constante entre \mathcal{F} e \mathcal{F}_v , verificando constantemente a condição de propagação, mas levando a valores subestimados para a função de dano.

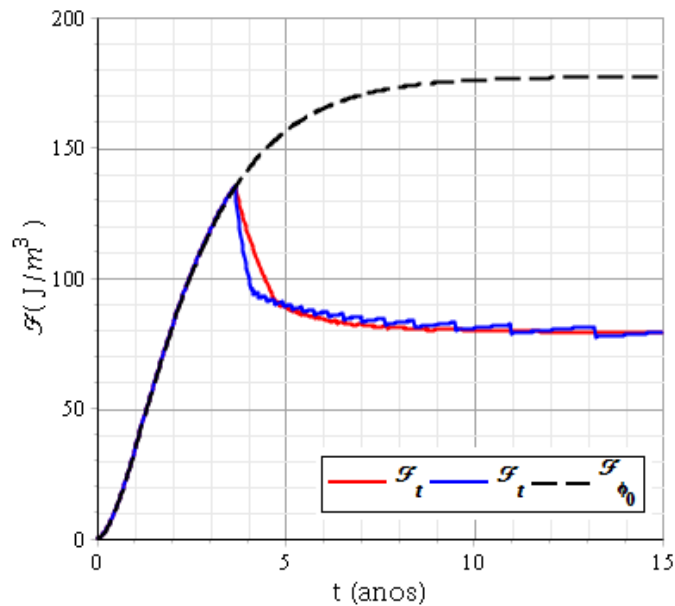
Por fim, tal como realizado nas seções anteriores, pode-se comparar as demais propriedades desenvolvidas pelo corpo de prova nas situações com e sem propagação do dano. Novamente são comparadas as tensões $\underline{\sigma}$, as deformações viscosas $\underline{\varepsilon}^v$ e a própria taxa de liberação de energia \mathcal{F} . As linhas vermelhas correspondem a lei de comportamento não-linear da Eq.(5.26), as linhas azuis correspondem a lei de comportamento não-linear da Eq. (5.27), as linhas pretas correspondem a evolução das propriedades com valor do parâmetro de dano na fase pré-propagatória.



a): Tensor de Tensões (componente σ_{23})



b): Deformações Viscosas (componente ε_{23}^v)



(c): Taxa de Liberação de Energia (\mathcal{F})

Figura 6.28: Comparação de propriedades com e sem propagação.

$$\dot{\epsilon} = 1.47\%, \Delta t_t = 0.03 \text{ ano}, \Delta t_\tau = 0.02 \text{ ano}, \phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 J / m^2$$

Seguindo os resultados verificados nos exemplos anteriores, as funções de dano ϕ_t e ϕ_τ parecem produzir tensores de tensões, deformações viscosas e taxa de liberação de energia pouco diferentes entre si, indicando neste caso que a forma do carregamento (normal ou cisalhante) tem pouca relevância em problemas que levam a propagação estável de dano.

6.6. MATRIZ SÓLIDA COM MODELO DE KELVIN-VOIGT

Todo raciocínio estabelecido até agora destaca que, sob aplicação de deformações lineares, as tensões resultantes adquirem um caráter assintótico após um determinado tempo. Tal característica é fruto do modelo reológico de Burger associado a matriz sólida, o qual decresce o valor do tensor de relaxação até zero à medida que o tempo passa. Outros modelos, tal como o modelo reológico de Maxwell também levam a resultados semelhantes. Contudo, muitos materiais não podem ser representados por modelos com tal comportamento, dado que suas respectivas funções de relaxação se estabilizam em um patamar assintótico ao longo do tempo. Consequentemente, as tensões provenientes de carregamentos crescentes não se estabilizam no tempo. A ideia desta seção é apresentar brevemente alguns resultados decorrentes da aplicação do modelo reológico de Kelvin-Voigt (sólido padrão de três elementos) à matriz sólida, cujo comportamento leva a um valor assintótico não nulo para a função de relaxação homogeneizada. Tal modelo levou a resultados significativamente

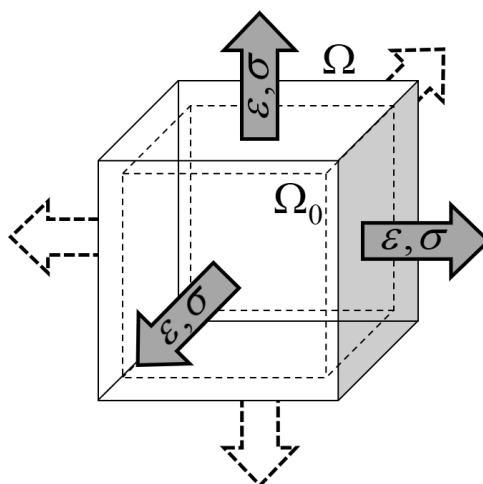
diferentes entre as formulações não-lineares, podendo ser utilizado para verificar qual das formulações melhor se adequa ao problema proposto. Dois tipos de carregamento distintos são aplicados. O primeiro carregamento corresponde a uma extensão definida por uma taxa de deformação constante igual à da seção 6.2:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \dot{\varepsilon} t H(t) \underline{\underline{1}} \quad (6.16)$$

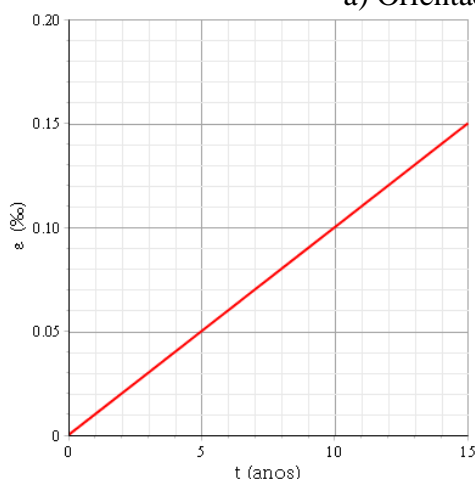
a passo que o segundo carregamento corresponde a uma extensão definida por um crescimento linear das deformações aplicadas, seguido da estabilidade nos valores correspondentes:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \dot{\varepsilon} t H(t) \underline{\underline{1}} - \dot{\varepsilon} (t - \tau) H(t - \tau) \underline{\underline{1}} \quad (6.17)$$

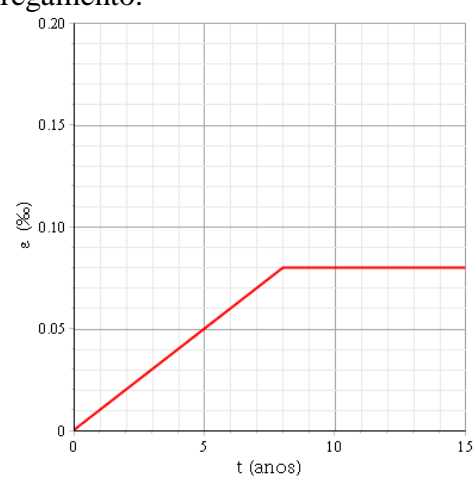
Os dois carregamentos são apresentados na Figura 6.29:



a) Orientação do carregamento.



$$\dot{\varepsilon} = 0.1\%$$



$$\dot{\varepsilon} = 0.1\% \text{ e } \tau = 8 \text{ anos}$$

b) História de deformações aplicadas (componente ε_{11}).

Figura 6.29: Carregamento imposto sobre o corpo de prova.

Tal como antes, o mesmo procedimento numérico pode ser aplicado, apenas modificando o modelo reológico do material da matriz sólida. Desta forma, a função de evolução do parâmetro de dano toma a forma:

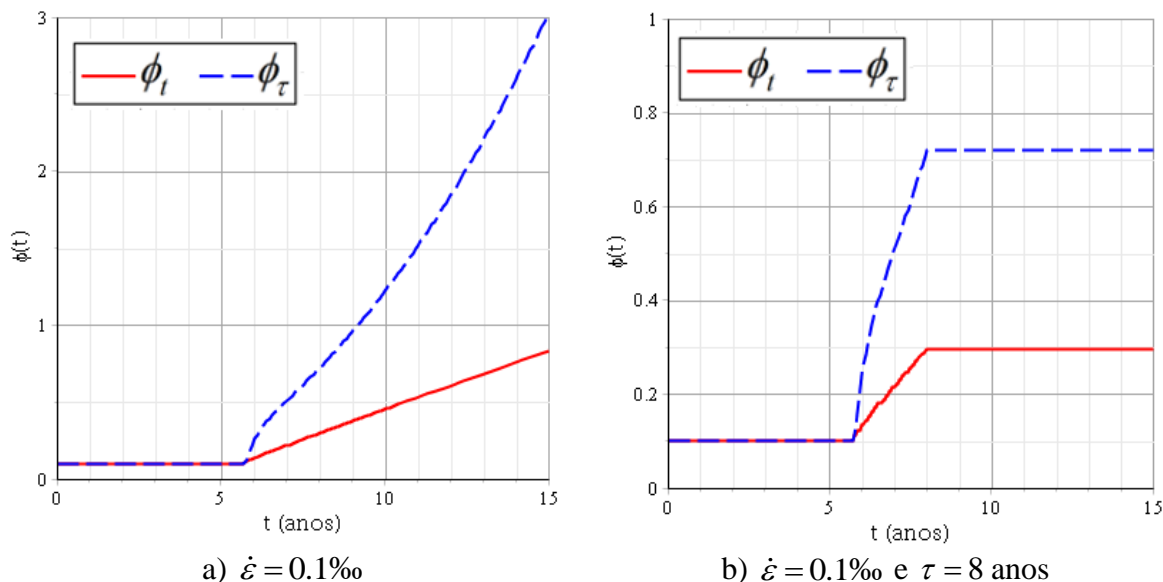


Figura 6.30: Evolução temporal da Função de dano.

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 J / m^2 \text{ e } \Delta t = 0.03 \text{ ano}$$

Com base na Figura 6.30 verifica-se que, para o caso de carregamento puramente crescente, a função de dano cresce indeterminadamente. Em teoria, ao atingir o valor $\phi = 1.00$ (ou até mesmo um valor ligeiramente menor) ocorre a ruptura local do material. Para o caso de carregamento crescente até um determinado ponto, observam-se uma estabilidade do parâmetro de dano a partir do momento em que se zera a taxa de carregamento. Neste sentido, a taxa de carregamento também afeta a taxa de propagação de forma direta. Nesta situação a diferença entre os modelos ϕ_l e ϕ_τ é significativamente diferente, o primeiro verificando uma evolução lenta quase linear e o segundo verificando uma evolução mais rápida e não linear. A teoria desenvolvida na seção 4, contudo, foi desenvolvida para valores assintóticos, não podendo ser aplicada neste modelo, o que impede a determinação de qual modelo está correto sem a condução de ensaios de laboratório desenvolvidos para esta finalidade. Nesta situação, dado que para $\phi = 1.00$ verifica-se a ruptura do material e para ambos os modelos este valor ocorre em instantes diferentes, é possível tomar ensaios de ruptura de longo prazo como referência para estas investigações. Por fim, o equilíbrio da função de dano após a estabilidade do carregamento não condiciona o material a um estado “pronto para propagar”, prevendo uma certa folga para os dois modelos (ver Figura 6.31):

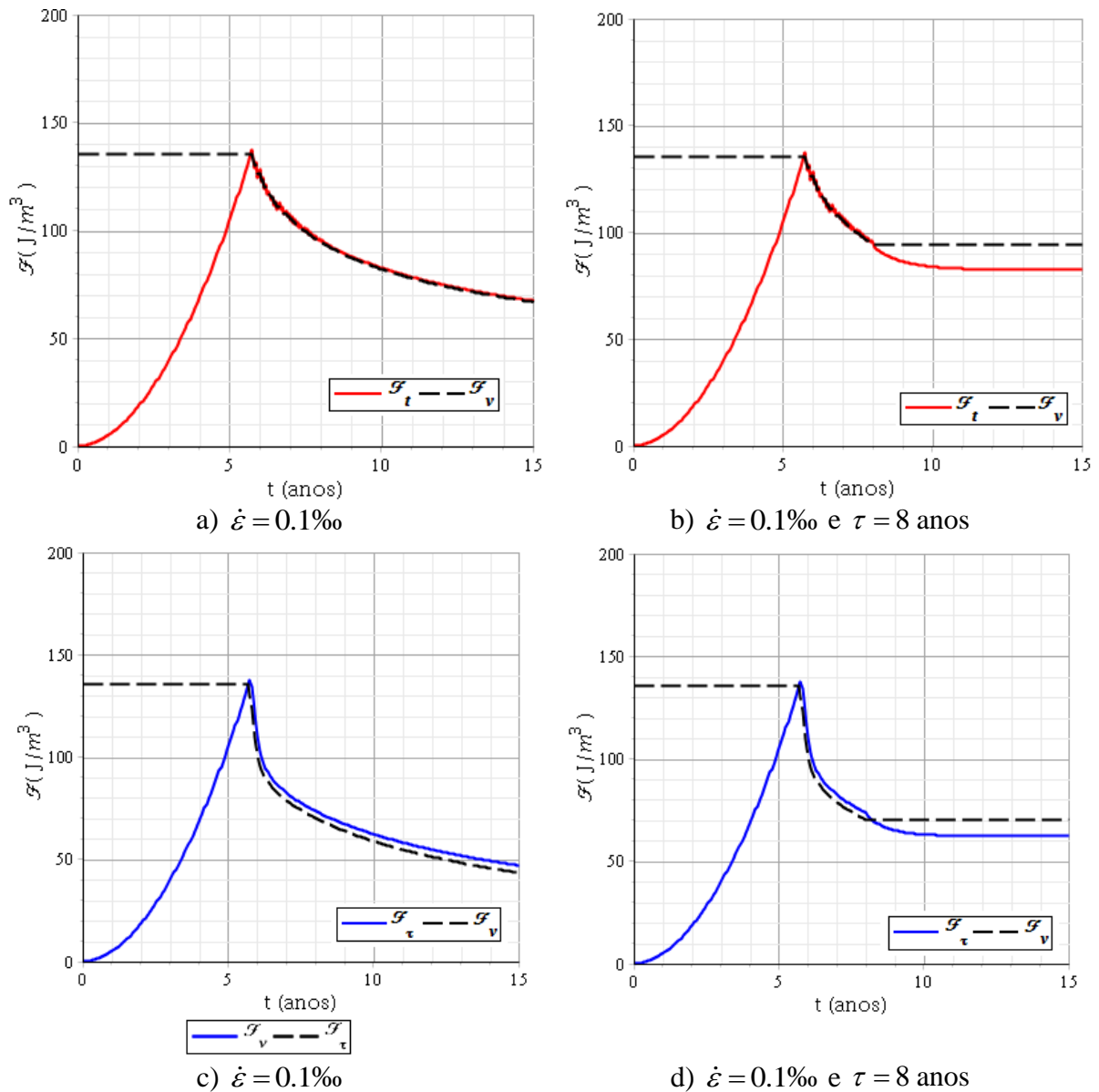


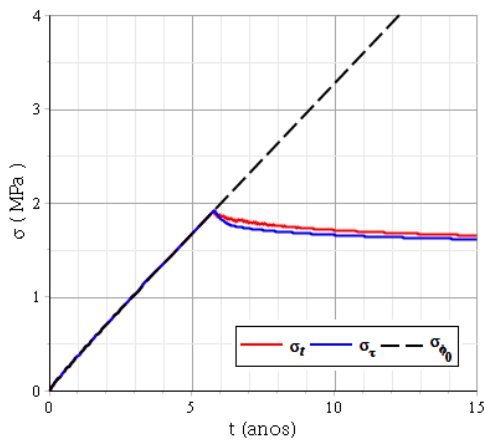
Figura 6.31: Comparação entre taxa de liberação de energia e energia crítica.

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 \text{ J} / \text{m}^2 \text{ e } \Delta t = 0.03 \text{ ano}$$

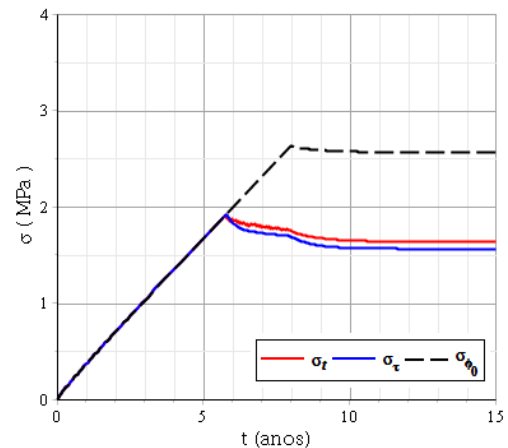
Novamente observa-se o equilíbrio entre os valores de \mathcal{F} e \mathcal{F}_v durante a propagação. A diferença fundamental entre os procedimentos usando o modelo de Burger e os procedimentos utilizando o modelo de Sólido Padrão se dá na tendência deste equilíbrio. Para a aplicação de deformações lineares aplicadas, enquanto os exemplos que utilizaram o modelo de Burger permitiram observar um equilíbrio entre \mathcal{F} e \mathcal{F}_v que tendia a um valor assintótico, a utilização do Sólido Padrão faz com que este equilíbrio decresça até atingir zero. Naturalmente, a evolução deste modelo será interrompida no momento da ruptura do material em $\phi = 1.00$

(aproximadamente $t \sim 9$ anos para ϕ_τ). Para o caso em que o carregamento se estabiliza após um certo intervalo, o equilíbrio entre \mathcal{F} e \mathcal{F}_v apenas ocorre durante a propagação enquanto houver acréscimo de carregamento. A partir do instante em que o carregamento é mantido constante o valor de \mathcal{F} diverge de \mathcal{F}_v (o qual permanece constante), indicando a ausência de propagação e retirando o status de “pronto para propagar” do material (a adição de carregamento não necessariamente leva a propagação). Nota-se aqui outra diferença fundamental, enquanto a utilização do modelo de Burger levava a um \mathcal{F} que tendia a zero após a remoção do carregamento, no modelo utilizando Kelvin-Voigt este declínio ocorre até um valor assintótico não nulo, o que, em tese mantém um estado mais próximo ao “pronto para propagar”. Comentários a respeito das transgressões de domínio permanecem os mesmos que aqueles mencionados nas aplicações anteriores, sendo necessário um procedimento corretor para que não ocorram, mas sendo menos visíveis à medida que o número de pontos aumenta.

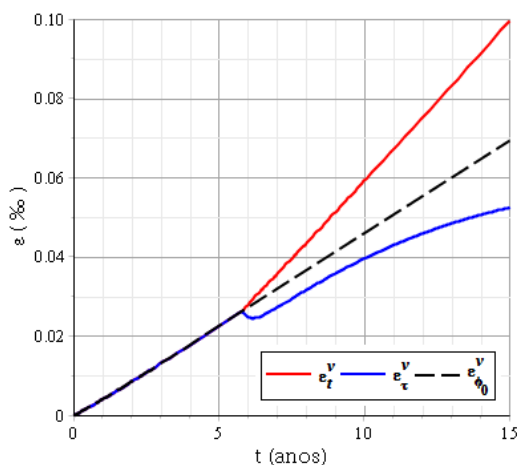
Gráficos adicionais referentes a evolução das tensões e deformações são exibidos a seguir.



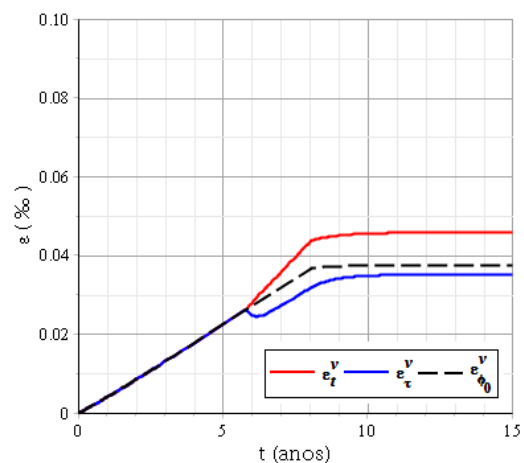
a) $\dot{\epsilon} = 0.1\text{‰}$



b) $\dot{\epsilon} = 0.1\text{‰}$ e $\tau = 8$ anos



c) $\dot{\epsilon} = 0.1\text{‰}$



d) $\dot{\epsilon} = 0.1\text{‰}$ e $\tau = 8$ anos

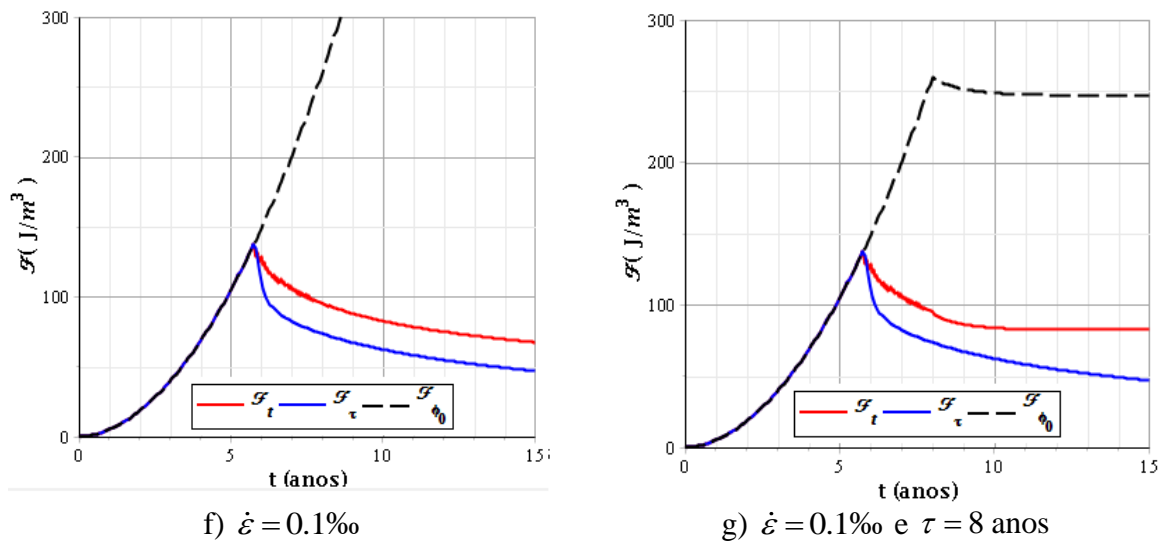


Figura 6.32: Comparação entre taxa de liberação de energia e energia crítica.

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 30 \text{ J} / \text{m}^2 \text{ e } \Delta t = 0.03 \text{ ano}$$

No que se refere às tensões solicitantes, não são verificadas diferenças muito significativas com relação às aplicações que utilizam o modelo reológico de Burger. Contudo, no que se refere às deformações viscosas, verificam-se as maiores divergências. Diferentemente do que se constatou até aqui, as deformações viscosas apresentam diferenças significativas entre si e entre o modelo linear sem propagação de fraturas. Enquanto no modelo envolvendo ϕ_t verifica-se uma evolução linear e mais rápida das deformações viscosas, o modelo envolvendo ϕ_τ leva a uma evolução não-linear e significativamente mais lenta. Além disso, após a estabilização do carregamento, estas deformações viscosas mantêm valores diferentes. Assim, estudando por ensaios experimentais o descarregamento de materiais que seguem este modelo viscoelástico, é possível constatar qual entre ϕ_t e ϕ_τ melhor descreve a realidade. Experimentos específicos para estes fins, contudo, não foram localizados na literatura. Por fim, a diferença na taxa de liberação de energia é facilmente creditada as deformações viscosas, às quais constituem uma parcela fundamental desta variável.

6.7.COMPARAÇÃO ENTRE DIFERENTES MODELOS REOLÓGICOS

A presente seção visa comparar a evolução da função de dano desenvolvida na escala macroscópica utilizando constituintes modelados através de diferentes modelos reológicos. Para melhor clareza dos resultados, torna-se necessário explorar alguns conceitos abordados

nas seções 3 e 4. Por esta razão, a seção é dividida em duas partes. Na primeira, os conceitos lineares são abordados, destacando que estes valores se desenvolvem na ausência de propagação de dano. Na segunda parte, avalia-se a propagação de fraturas, realizando-se uma comparação entre os modelos dentro do domínio não-linear.

A história de deformações é definida por uma extensão isotrópica (Figura 6.33). Dada a diferença persistente entre os modelos reológicos apresentados, duas histórias de deformação são apresentadas, na primeira a taxa de deformação cresce indefinidamente

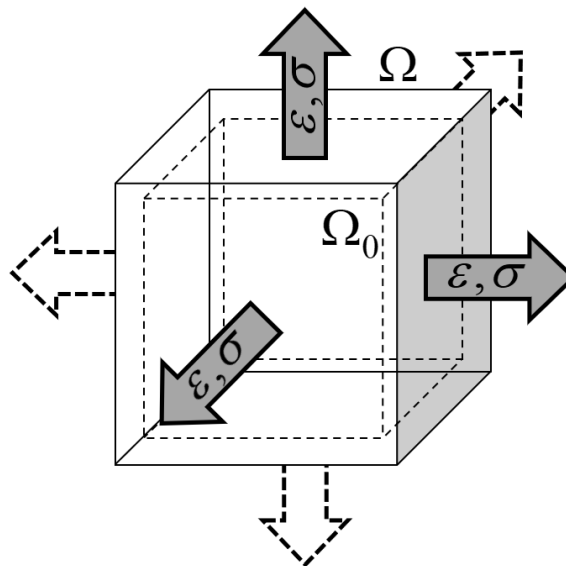
$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \dot{\varepsilon} t H(t) \underline{\underline{1}} \quad (6.18)$$

e na segunda a taxa de deformação cresce até chegar a um patamar constante.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \dot{\varepsilon} t H(t) \underline{\underline{1}} - \dot{\varepsilon} (t - \tau) H(t - \tau) \underline{\underline{1}} \quad (6.19)$$

Em virtude da hipótese de evolução isotrópica do dano, o estado de tensões desenvolvido mantém o caráter isotrópico imposto pelo carregamento:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \sigma \underline{\underline{1}} \quad (6.20)$$



a) Orientação do carregamento.

Adicionalmente, o modelo de propagação do dano desenvolvido requer a existência de um parâmetro de dano superior a zero. Considerando que a solução para material intacto utiliza $\phi_0 = 0$, foi necessário recorrer a um artifício consistindo na introdução de uma fratura elástica fictícia de rigidez infinita, cuja solução é matematicamente equivalente à da situação $\phi_0 = 0$. Além disso, dado o elevado número de modelos comparados e a alta variabilidade de algumas soluções, nem todos os modelos são representados no mesmo gráfico, contudo, a indicação de cor será mantida ao longo de toda esta aplicação.

6.7.1. Soluções no domínio linear (sem propagação)

A primeira parte do desenvolvimento consiste em determinar a curva de evolução das tensões, as funções de fluência e relaxação instantâneas em função do parâmetro de dano, a evolução da taxa de liberação de energia e a energia assintótica do modelo quando esta existir. O raciocínio é desenvolvido no contexto linear, desconsiderando qualquer fenômeno ligado a propagação do dano. Neste sentido, o primeiro resultado apresentado refere à componente de tensão σ_{11} (Figura 6.34 com $\varepsilon = 0.1$).

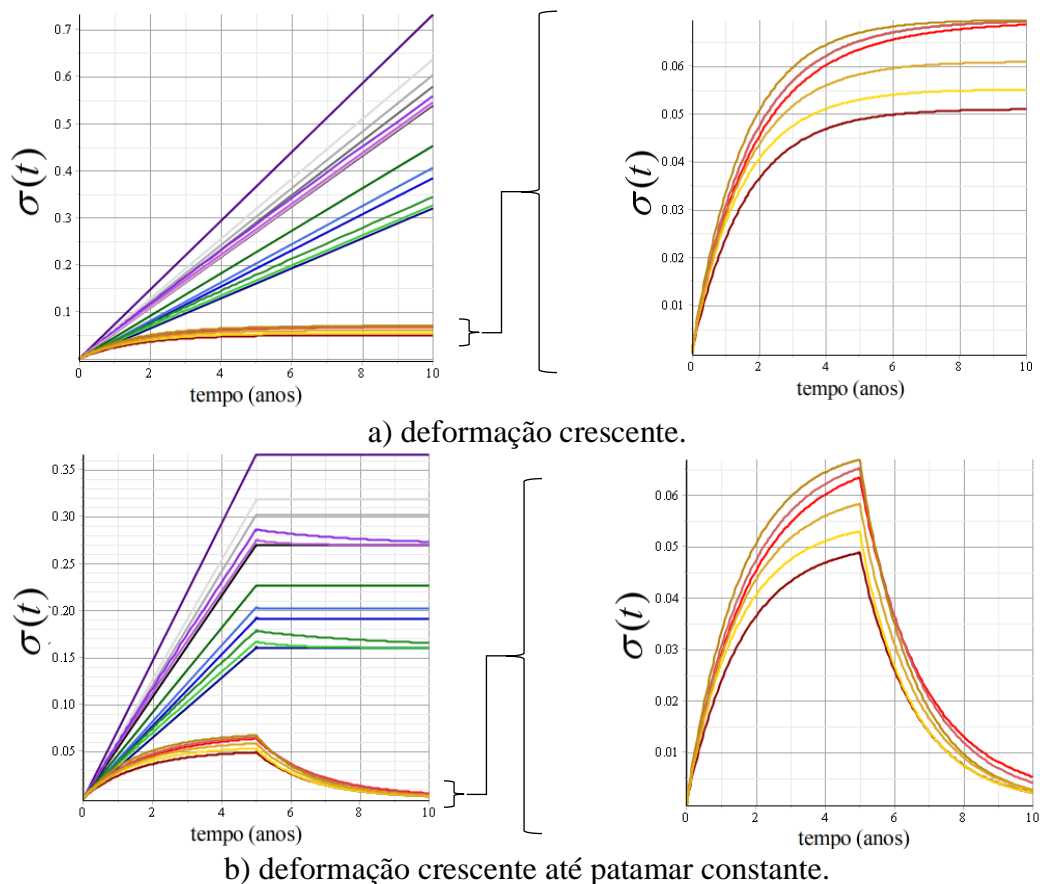
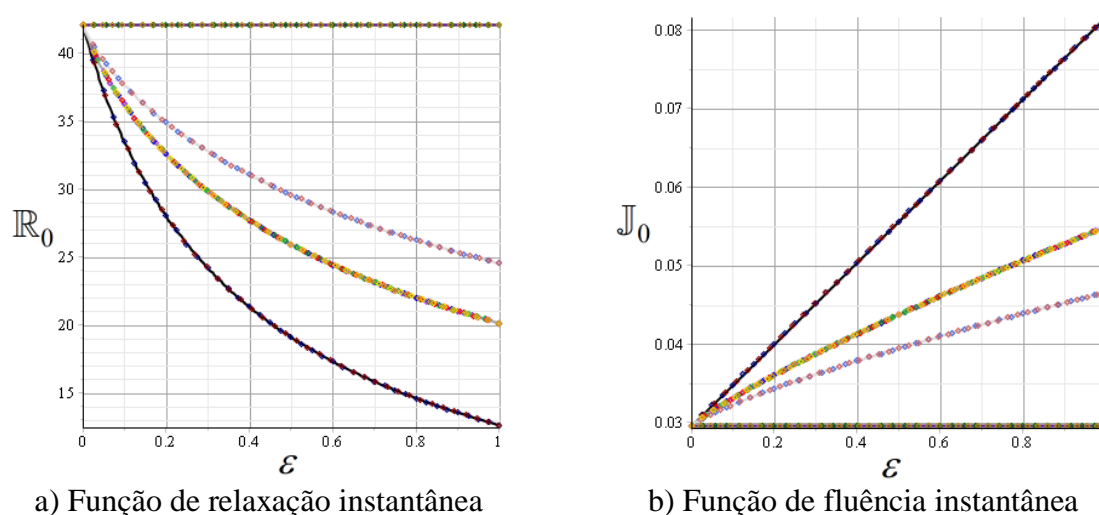


Figura 6.34: Evolução da componente de tensão σ_{11} .

Gráficos ilustrando as funções de fluência e relaxação já foram estudados na seção 3, de forma que a Figura 6.34 não traz novas contribuições, apenas corroborando que os tensores de tensões apresentam valores intermediários entre os respectivos limites fissura/material intacto durante o carregamento crescente. Durante a etapa de carregamentos constantes em relaxação estas curvas podem se cruzar para tempos transientes, normalizando-se após um certo período. Esta sobreposição nunca pode ser observada em fluência. Contudo, cabe enfatizar uma tendência de aumento nos níveis de tensão à medida que a rigidez das fraturas aumenta.

A seguir apresenta-se os valores de relaxação e fluência instantâneos em função do parâmetro de dano (Figura 6.35).



a) Função de relaxação instantânea

b) Função de fluência instantânea

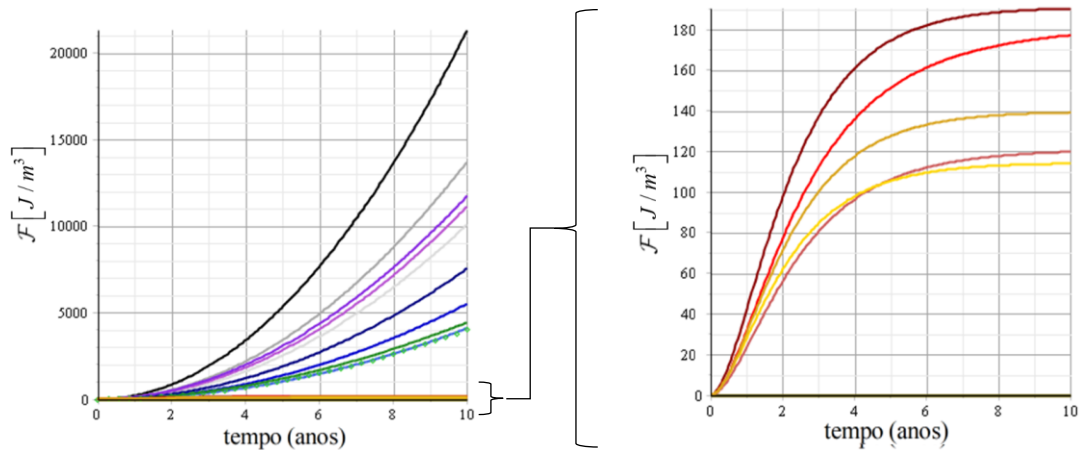
Figura 6.35: Funções de relaxação e fluência instantâneas em função do parâmetro de dano.

Nesta figura, os símbolos indicam a sobreposição das funções de relaxação/fluência instantâneas, mantendo as cores relativas a cada modelo, conforme descrito na Tabela 6.1. Como a rigidez instantânea da matriz sólida é idêntica para todos os modelos, toda diferença observada nas curvas da Figura 6.35 está diretamente associada a rigidez instantânea das fraturas. Neste sentido, há uma tendência de aumento (redução) da relaxação (fluência) instantânea à medida que se aumenta a rigidez instantânea das fraturas, deslocando-se dos valores relativos dos modelos utilizando fissura aos modelos de matriz sólida intacta. Por outro lado, à medida que o parâmetro de dano aumenta, a função de relaxação (fluência) diminui (aumenta).

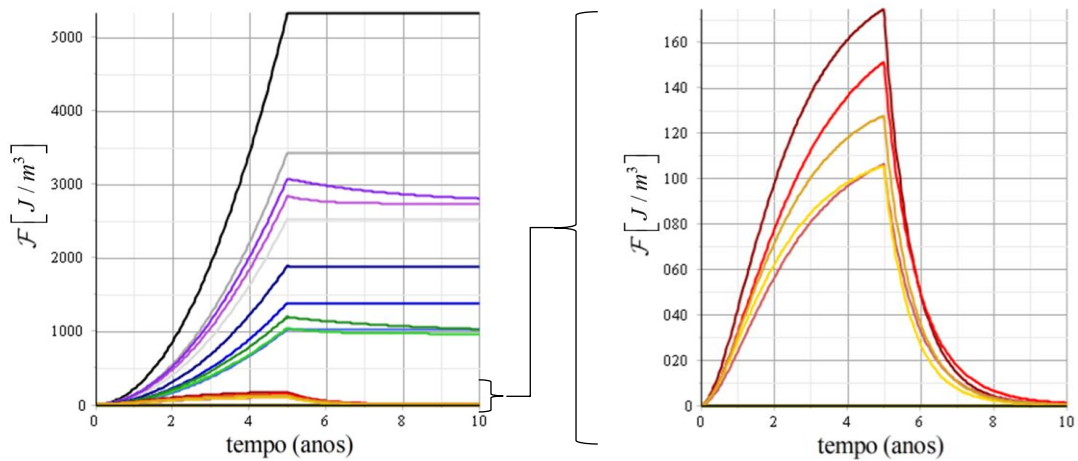
Com base nas tensões e função de fluência instantânea, a taxa de liberação de energia pode ser determinada através da expressão:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \frac{\partial \mathbb{F}_0^{\text{hom}}}{\partial \varepsilon} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (6.21)$$

A representação gráfica desta equação é dada para cada um dos modelos sugeridos na Figura 6.36 (com $\varepsilon = 0.1$).



a) deformação crescente.

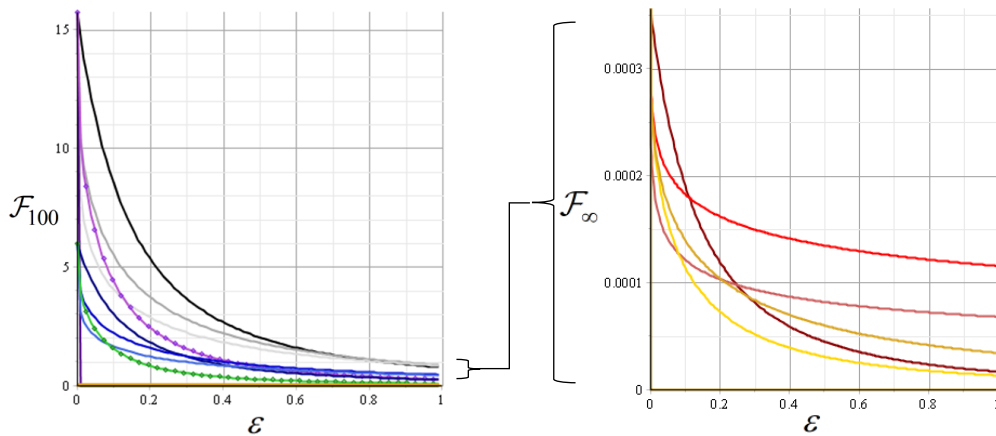


b) deformação crescente até patamar constante.

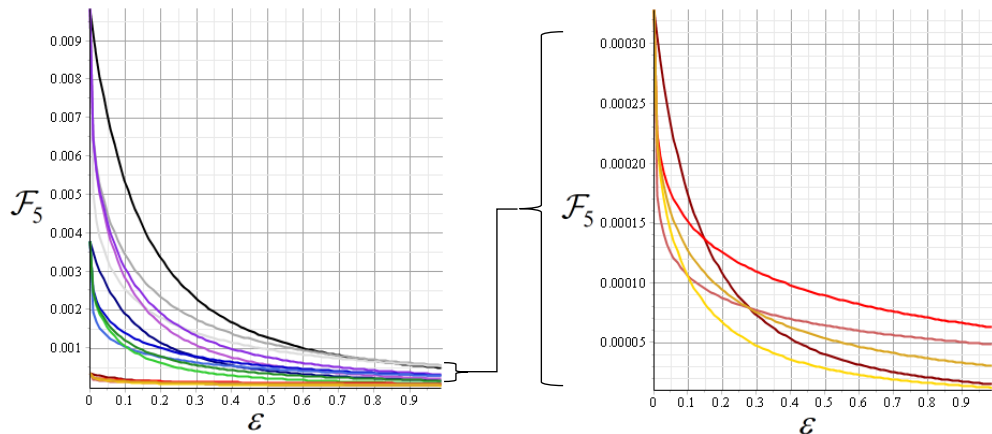
Figura 6.36: Evolução temporal da taxa de liberação de energia.

Na Figura 6.36, todos modelos nos quais utiliza-se material intacto levam a $\mathcal{F} = 0$ dado que neste caso $\partial \mathbb{F}_0^{\text{hom}} / \partial \varepsilon = 0$. Além disso, a tendência de os valores migrarem do valor \mathcal{F} calculado com fissura para o valor $\mathcal{F} = 0$ calculado com o material intacto parece persistir. A diferença na ordem de grandeza da taxa de liberação de energia, envolvendo o modelo de Burger, está associada aos parâmetros utilizados para o modelo da matriz sólida, os quais levam a uma relaxação mais rápida. Pela Eq. (6.21) verifica-se que as tensões (que decaem a zero no modelo de Burger) contribuem quadraticamente para a taxa de liberação de energia, explicando a grande diferença visualizada na Figura 6.36.

Por fim, a última análise da etapa linear corresponde ao valor da (taxa de liberação de) energia assintótica. Como nem todos os modelos convergem para um valor assintótico, a Figura 6.37 exibe a evolução de $\mathcal{F}(t = 100)$ em função do parâmetro de dano, onde $t = 100$ anos é um instante considerado bastante superior ao tempo necessário para manifestação dos fenômenos viscoelásticos. Para os modelos envolvendo matriz sólida de Burger tem-se que $\mathcal{F}_\infty \approx \mathcal{F}_{100}$. Além disso, quando a deformação se torna constante após um certo intervalo, observa-se que o maior valor desenvolvido pela taxa de liberação de energia encontra-se em $t = 5$ anos, correspondendo a mudança de carregamento. Por esta razão, a Figura 6.37.b representa $\mathcal{F}_5 = \mathcal{F}(t = 5)$ ao invés de \mathcal{F}_∞ assintótico. Adicionalmente, conforme mostrado na Figura 6.36, a taxa de liberação de energia é nula para todos os modelos de material intacto, por esta razão não se representou estas curvas.



a) Taxa de liberação de energia $\times 10^{-6}$ em $t = 100$ anos para deformação crescente.



b) Taxa de liberação de energia $\times 10^{-6}$ em $t = 5$ anos para deformação crescente até patamar constante.

Figura 6.37: Taxa de liberação de energia assintótica.

Fazendo referência aos gráficos de tensões e comportamento instantâneo, observa-se que tanto na Figura 6.34 quanto na Figura 6.35, as curvas tendem a deslocar-se de seus respectivos modelos envolvendo fissura ao modelo de material intacto à medida que a rigidez das fraturas aumenta. Contudo, a Figura 6.37 expõem que tal raciocínio não pode ser reproduzido no nível da energia assintótica (portanto, nem para a taxa de liberação de energia) para qualquer valor de parâmetro de dano, demonstrando que a tendência exibida na Figura 6.36 retrata uma coincidência matemática em função do parâmetro de dano adotado (em especial baixos valores de parâmetro de dano). Esta observação pode ser percebida ao verificar que as curvas referentes aos modelos BC, BE1 e BE2 (ver Tabela 6.1) se cruzam em diferentes valores do parâmetro de dano. A explicação para tal se deve ao balanço entre o aumento das tensões com o tempo (Figura 6.34) e a redução das funções de fluência com o parâmetro de dano (Figura 6.35) o qual é fortemente dependente do valor do parâmetro de dano. Tal resultado não apenas não foi previamente previsto como também é contraintuitivo, levando a consequências que devem ser levadas em consideração.

O aspecto mais forte desta observação indica que, dependendo dos valores do parâmetro de dano, modelos com fissuras ou com fraturas mais rígidas podem ser mais críticos a propagação. Primeiramente isso indica que não é possível definir se a alta rigidez das fraturas é mais ou menos crítica a propagação, de forma que tanto subavaliar quanto sobre-avaliar os parâmetros mecânicos das fraturas pode levar a riscos no projeto. Adicionalmente, desconsiderar a rigidez das fraturas (assumir fissura) pode levar a resultados errôneos que indicam a estabilização da propagação ao longo do tempo, o que não ocorreria se os parâmetros fossem adequadamente tratados.

Por outro lado, quando as propriedades das fraturas forem corretamente avaliadas, a Figura 6.36 parece indicar que materiais com fissuras são menos propensos a propagação crítica que materiais com fraturas mais rígidas, embora sejam mais propensos a iniciar a propagação das fraturas. Quanto ao aspecto viscoso, comparando os modelos BE1, BM1 e BM2 (lembrando que todos os modelos utilizados apresentam fraturas com a mesma rigidez elástica) observa-se que quanto menor a rigidez viscosa (k_n^v ou k_t^v) das fraturas, menor a taxa de liberação de energia e conseqüentemente menor a energia assintótica, diminuindo a propensão à propagação. Isso provavelmente ocorre devido a maior facilidade em transformar deformação elástica da mola em deformação viscosa nos amortecedores.

6.7.2. Comparação do comportamento no regime de propagação de dano

Por razão de simplicidade e de consumo computacional necessário para obter algumas curvas de propagação para os modelos destacados na Tabela 6.1, o desenvolvimento realizado nesta seção considera apenas o modelo não-linear baseado na Eq. (5.24) (isso é, σ_t). Adicionalmente, a curva de evolução do dano (e conseqüentemente as demais curvas) será truncada em $\phi = 1$, que representa uma condição limite à ruptura do material.

O procedimento desenvolvido para a determinação da curva de dano segue exatamente aquele descrito nas seções anteriores (Figura 5.6). Para entender melhor os efeitos decorrentes da propagação, dois valores diferentes de energia crítica \mathcal{F}_c foram adotados. Primeiramente utilizou-se $\mathcal{F}_c = 199.46 J / m^2$ (correspondendo a $\mathcal{F}_v(t=0) = 900 J / m^3$) para todos os modelos, contudo, o valor representado não verifica a propagação para nenhum modelo baseado na matriz sólida de Burger. Neste sentido adotou-se $\mathcal{F}_c = 11.08 J / m^2$ (correspondendo a $\mathcal{F}_v(t=0) = 90 J / m^2$) em uma segunda análise destinada apenas aos modelos com matriz sólida de Burger. A Figura 6.38 apresenta a evolução da função de dano para os dois carregamentos aplicados e para as duas energias críticas utilizadas. As Figura 6.38.a e Figura 6.38.b destacam o comportamento da matriz sólida elástica e de Kelvin-Voigt enquanto as Figura 6.38.c e Figura 6.38.d destacam o comportamento da matriz sólida de Burger.

Conforme mencionado anteriormente, a energia crítica $\mathcal{F}_c = 199.46 J / m^2$ é suficientemente elevada para que os modelos baseados em Burger não apresentem propagação de fraturas, mantendo o valor da função de dano constante em $\phi = 0.1$ para qualquer instante de tempo. Para os demais modelos, a aplicação de uma deformação constante leva indubitavelmente a ruptura do material em algum instante t após a propagação. Neste sentido, quanto maior a viscosidade dos constituintes mais lenta se dá a propagação do dano e conseqüentemente mais tempo decorrerá até a falha do material. A explicação deste fenômeno se baseia na energia disponível para propagação, sendo menor para materiais com elevada viscosidade dado que parte da energia adicionada pelo carregamento é transferida para os amortecedores. Adicionalmente, verifica-se que o aumento da rigidez das fraturas atrasa o início da propagação (para o valor de dano em pré-propagação fornecido) e também aumenta a taxa

de evolução do dano, fazendo com que a falha do material ocorra em um menor intervalo de tempo para modelos com fraturas mais rígidas.

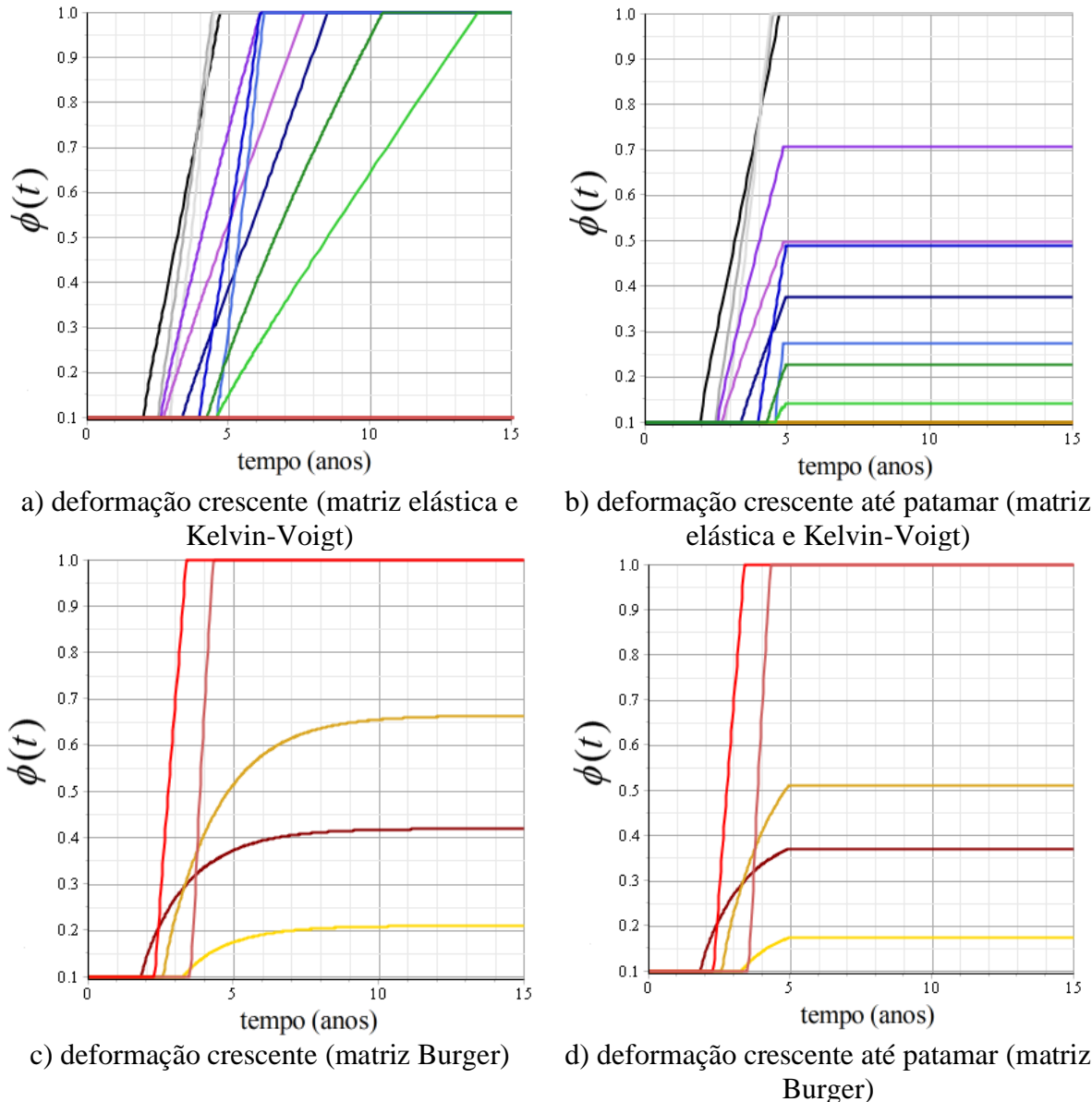


Figura 6.38: Evolução da função de dano.

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 199.46 J / m^2 \text{ ou } \mathcal{F}_c = 11.08 J / m^2 \text{ e } \Delta t = 0.03 \text{ ano}$$

Na Figura 6.38.b, verifica-se que a propagação das fraturas cessa imediatamente quando as deformações param de aumentar, mantendo a função de dano constante a partir de então. Neste sentido, a ausência de componentes viscosos nos modelos EC, EE1 e EE2 acelera o início da propagação e a taxa de evolução de dano, de forma que a falha do material se dá antes da mudança de carregamento. Comparando-se os modelos KC e KE1, verifica-se que para KE1 a propagação iniciou em $t \sim 4$ anos em detrimento de $t \sim 3.5$ anos para KC. Ainda assim, o

modelo KE1 terminou com $\phi \sim 0.48$ (contra $\phi \sim 0.37$ para KC), verificando as conclusões debatidas na Figura 6.37.

Quanto a Figura 6.38.c e a Figura 6.38.d, envolvendo a matriz sólida de Burger, conclusões similares podem ser observadas. O aumento da viscosidade (redução da k_n^v , k_t^v e os respectivos parâmetros da matriz sólida) reduz a taxa de propagação e acelera o início da propagação, elevando a taxa de evolução do dano enquanto o aumento da rigidez instantânea das fraturas retarda a propagação, mas leva a valores finais de dano mais elevados. Para os modelos envolvendo a matriz sólida de Burger, é possível analisar a relação entre energia crítica e energia assintótica para estimar o intervalo de propagação e o valor limite da função de dano. A Figura 6.39 apresenta a função $\|\mathcal{F}_\infty - \mathcal{F}_v\|$ (normalizada para apresentar valor máximo unitário), onde valores positivos indicam o intervalo de propagação possível e a segunda raiz da função (quando existir) indica o valor máximo da função de dano.

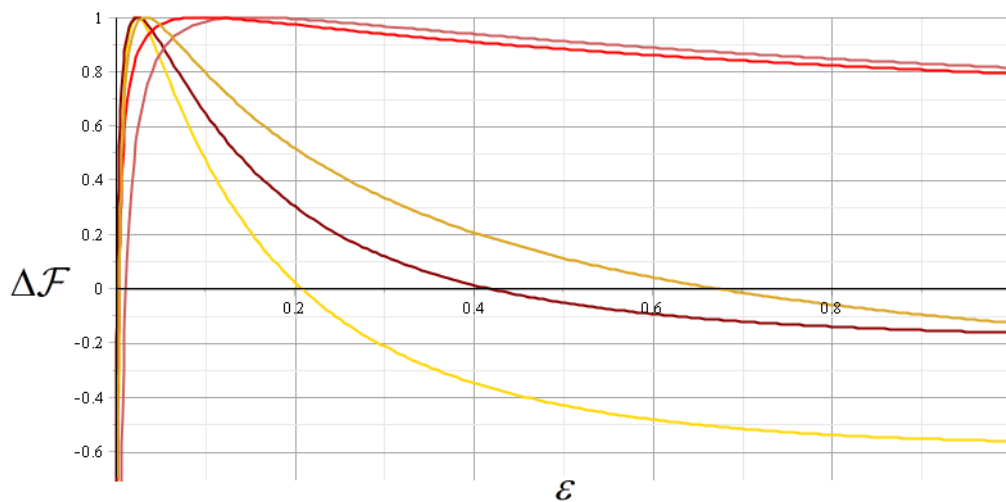
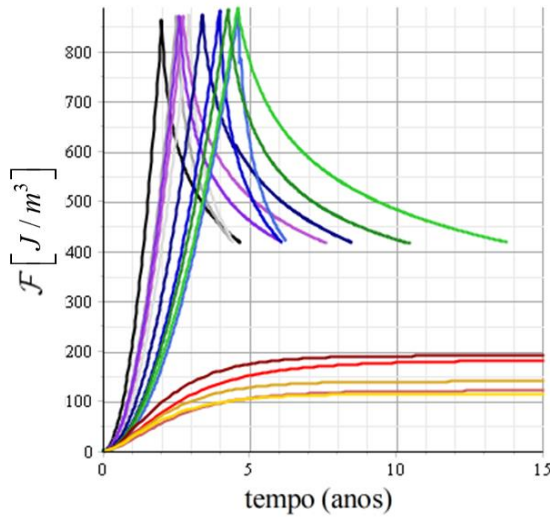


Figura 6.39: Comparação relativa entre energia crítica e energia assintótica.

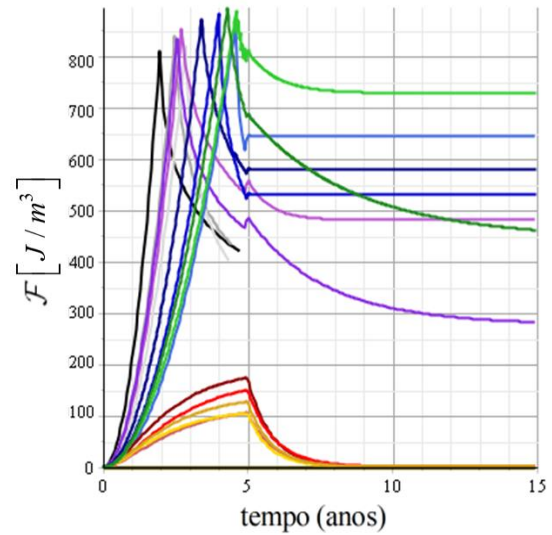
$$\mathcal{F}_c = 11.08 J / m^2$$

As previsões de valor máximo da função de dano obtidas por meio da Figura 6.39 são consistentes com os valores obtidos na Figura 6.38.c, com a vantagem de indicar todo domínio de viabilidade de propagação. Observa-se quanto maior a relação $(\partial\mathcal{F}_\infty - \mathcal{F}_v)/\partial\phi$ (inclinação das curvas destacadas na figura), significativamente menor o limite de propagação.

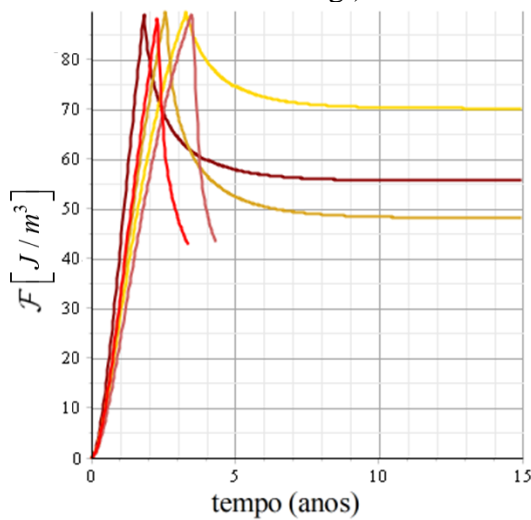
Na sequência (Figura 6.) é apresentada a evolução da taxa de liberação de energia, com funções truncadas a partir do momento que se verifica a falha do material.



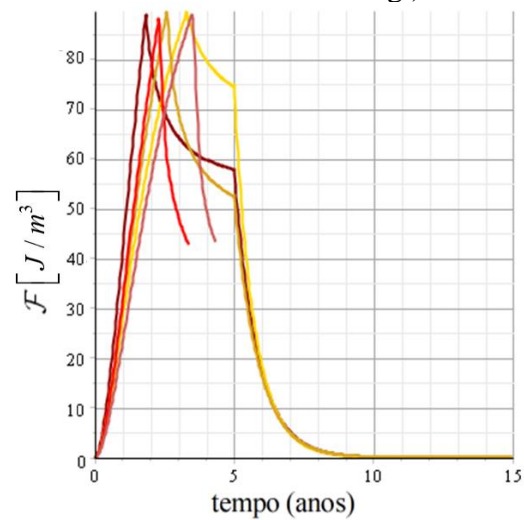
a) deformação crescente (matriz elástica e Kelvin-Voigt)



b) deformação crescente até patamar (matriz elástica e Kelvin-Voigt)



c) deformação crescente (matriz Burger)



d) deformação crescente até patamar (matriz Burger)

Figura 6.40: Evolução da taxa de liberação de energia.

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 199.46 J / m^2 \text{ ou } \mathcal{F}_c = 11.08 J / m^2 \text{ e } \Delta t = 0.03 \text{ ano}$$

Na Figura 6., o pico atingido pela taxa de liberação de energia indica o instante inicial da propagação das fraturas, sendo mais a frente ou atrás em função da combinação de modelos utilizados. Na Figura 6.b verifica-se que alguns materiais iniciaram a propagação um pouco antes de atingir o valor $\mathcal{F}_v = 900 J / m^2$, correspondendo a um problema ligado a precisão dos dados causado pela expressão analítica atribuída ao carregamento com descontinuidade na derivada.

Na sequência, a Figura 6.40 apresenta a evolução das tensões resultantes.

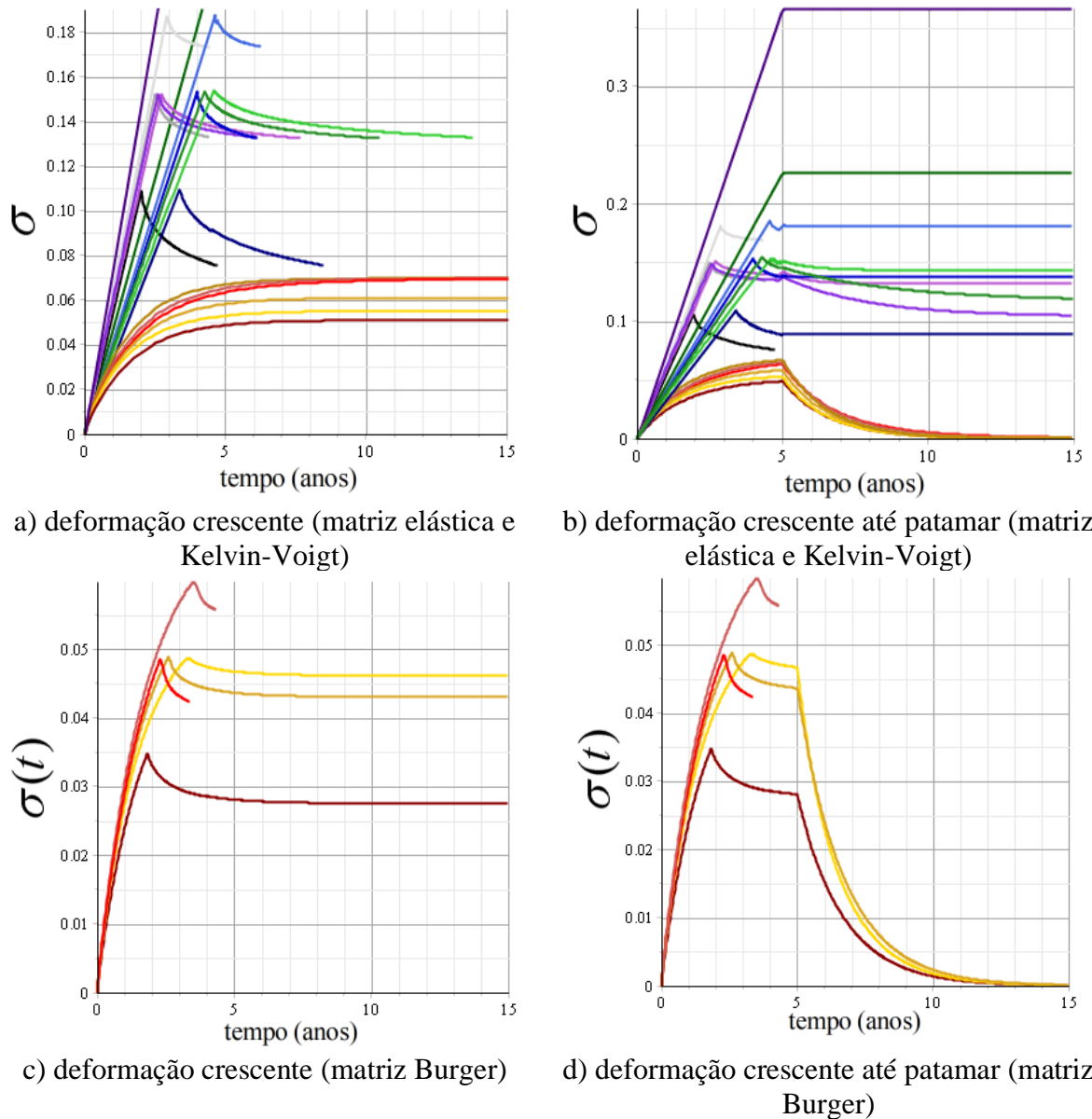


Figura 6.40: Evolução das tensões resultantes

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 199.46 J / m^2 \text{ ou } \mathcal{F}_c = 11.08 J / m^2 \text{ e } \Delta t = 0.03 \text{ ano}$$

Na Figura 6.40 verifica-se que a falha do material, quando esta ocorrer, é precedida pelo alívio das tensões devido a propagação do dano. Adicionalmente, a viscosidade das fraturas tem pouca influência sobre a intensidade das tensões resultantes, ao passo que rigidez elástica das fraturas é responsável por um aumento significativo na intensidade das tensões. Após a estabilização do carregamento aplicado, modelos baseados na matriz sólida elástica ou Kelvin-Voigt, instantaneamente tendem a manter as tensões solicitantes constantes, a passo que modelos baseados na matriz sólida de Burger tendem a descarregar as tensões.

Por fim, as deformações viscosas são apresentadas na Figura 6.41.

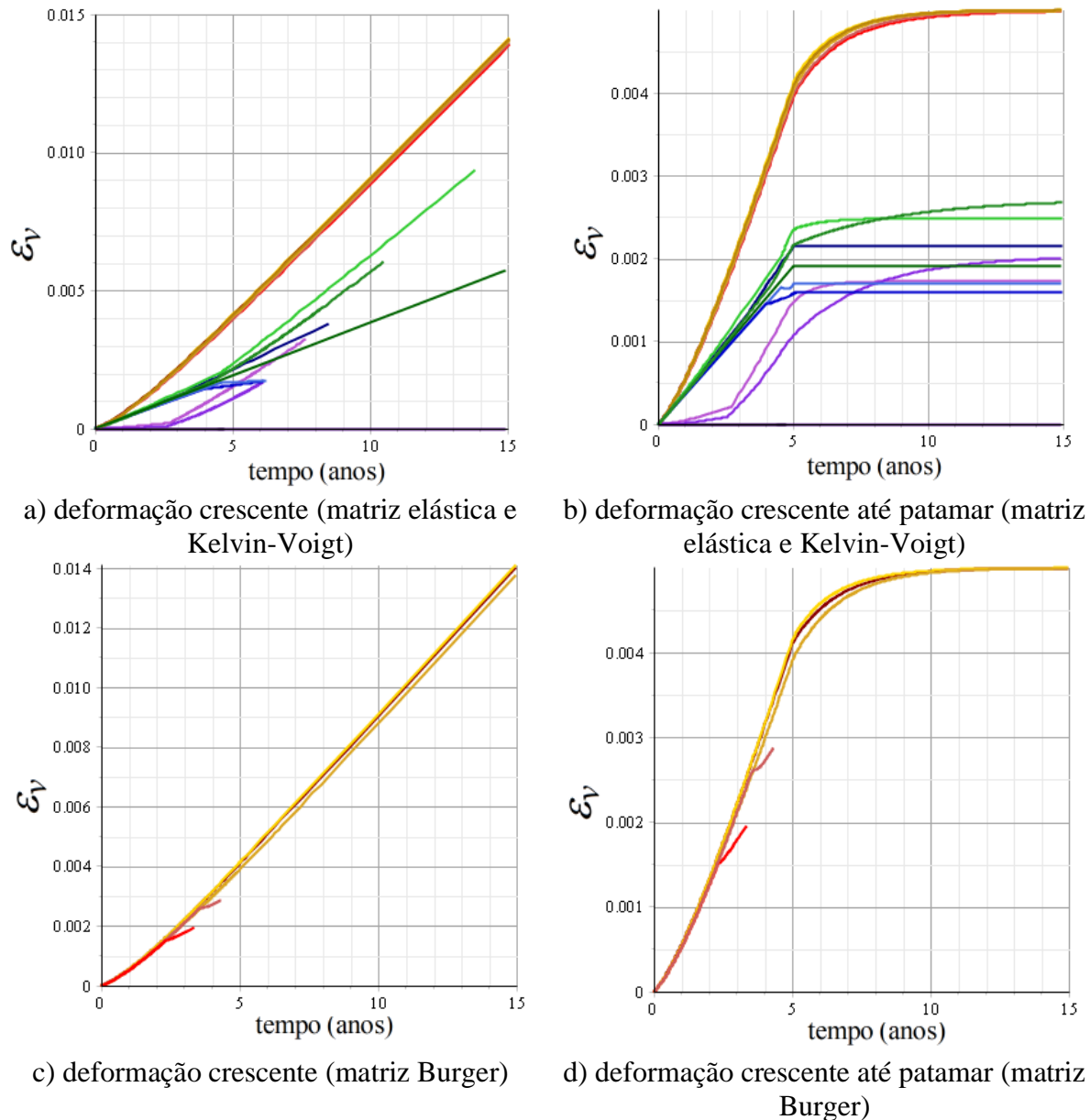


Figura 6.41: Evolução das deformações viscosas.

$$\phi_0 = 0.1, \mathcal{F}_c = 199.46 J / m^2 \text{ ou } \mathcal{F}_c = 11.08 J / m^2 \text{ e } \Delta t = 0.03 \text{ ano}$$

Verifica-se que para todos os modelos baseados na matriz sólida de Burger as deformações viscosas tendem a desenvolver valores similares, divergindo apenas quando se verifica uma alta taxa de propagação do dano. Para os demais modelos, o aumento da viscosidade parece elevar as deformações viscosas, contribuindo para a hipótese de que os amortecedores absorvem mais deformação. Além disso, o aumento da rigidez elástica das fraturas parece ter pouca influência sobre as deformações viscosas.

De forma geral, os resultados expostos nesta seção indicam que o aumento da viscosidade (redução da rigidez viscosa) dos constituintes (matriz sólida e fraturas) contribui para reduzir a taxa de propagação do dano, reduzir o valor final da função de dano e causa pequenos atrasos no início da propagação de fraturas, levando a propagação muito mais estável. Por outro lado, o aumento da rigidez elástica dos constituintes atrasa significativamente o início da propagação, mas eleva significativamente a taxa de propagação de fraturas. A longo prazo, esta combinação pode resultar em ruptura local mais rápida ou valores finais de parâmetro de dano mais elevados. Por fim, verifica-se a importância da correta avaliação dos parâmetros dos constituintes a fim de conseguir prever com maior precisão a iniciação da propagação e estabilização da função de dano. Subavaliar ou sobreavaliar a rigidez elástica das fraturas pode levar a evoluções de dano muito diferentes daquelas esperadas ao avaliar corretamente os parâmetros.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresenta as conclusões do trabalho que foi desenvolvido bem como sugestões para investigações futuras.

7.1. CONCLUSÕES

O propósito deste trabalho é desenvolver uma abordagem para a propagação de micro fraturas em meios viscoelásticos através da teoria da micromecânica. Devido ao fato que o tema em questão envolve diversas grandes áreas da engenharia, diversos conceitos necessitaram ser desenvolvidos em paralelo. Por esta razão, este trabalho foi dividido em quatro etapas. Na primeira etapa (seção 2) foi realizada uma breve revisão acerca de viscoelasticidade, mecânica das fraturas e teoria da homogeneização, apresentando ferramentas essenciais ao longo dos desenvolvimentos estabelecidos neste trabalho.

A segunda etapa deste trabalho (seção 3) consiste na determinação das propriedades mecânicas do meio viscoelástico homogeneizado (**1º, 2º, 3º e 4º objetivos específicos**). Primeiramente a lei de comportamento homogeneizada no domínio elástico foi determinada, partindo-se do comportamento elástico microscópico dos constituintes (matriz sólida e fraturas). Este raciocínio formou os alicerces para a determinação do comportamento mecânico homogeneizado por meio do esquema de Mori-Tanaka, o qual já havia sido formulado em trabalhos anteriores. A extensão para o contexto viscoelástico representou a primeira novidade proporcionada pelo presente trabalho. Baseando-se em um raciocínio micromecânico desenvolvido em plasticidade por Dormieux et al. (2006), foi possível determinar a lei de comportamento macroscópica com base no comportamento viscoelástico microscópico associado aos constituintes. Relações importantes entre campos nas escalas locais e globais foram estabelecidas, permitindo a formulação de relações entre campos microscópicos e macroscópicos bem como de caracterização dos campos residuais, representando outra contribuição inovadora ao tema. Utilizando o princípio da correspondência entre os domínios elástico e viscoelástico, foi possível formular o tensor de relaxação homogeneizado no domínio de Carson-Laplace. Tal solução foi transcrita para o domínio do tempo através de um procedimento próprio desenvolvido neste trabalho, o qual permitiu concluir que o meio homogeneizado pode ser representado macroscopicamente por um modelo de Maxwell generalizado. Alternativamente, um modelo aproximado de Burger foi sugerido, fornecendo

expressões mais simples a aplicações numéricas sem perda significativa de precisão. Algumas ilustrações numéricas foram desenvolvidas, demonstrando a evolução dos tensores de relaxação obtidos bem como do tensor de fluência associado. Com este procedimento, foram verificadas algumas conclusões já esperadas ao início do trabalho. Dentre essas, verificou-se que o tensor de relaxação (fluência) de materiais com fraturas elásticas é superior (inferior) ao do material com fissuras sendo, contudo, inferior (superior) ao do material intacto. Adicionalmente verificou-se que quanto maior o parâmetro de dano, menores (maiores) as funções de relaxação (fluência) do meio homogeneizado. A última etapa desta seção concentrou-se na verificação do modelo desenvolvido com dados experimentais extraídos de ensaios uniaxiais com diversos níveis de carregamento aplicados a geomateriais. Inicialmente, ajustou-se os parâmetros do modelo desenvolvido a partir de dados extraídos para os menores valores de carregamento aplicados. Os demais carregamentos foram utilizados para verificar a capacidade preditiva do modelo micromecânico. Verificou-se que quando os dados se alinham em acordo com a viscoelasticidade linear, o modelo consegue prever com excelente precisão o comportamento dos materiais fraturados. Nas demais situações assumiu-se que as não linearidades devem-se principalmente a propagação de fraturas, levando-se a calcular um novo valor de parâmetro de dano. Nas situações em que este procedimento pode ser realizado, verificou-se uma excelente concordância entre os dados experimentais e o modelo desenvolvido.

A terceira etapa deste trabalho (seção 4) consiste na determinação de um critério de propagação controlando as condições de iniciação da propagação de dano (**5º, 6º e 7º objetivos específicos**). Em uma análise similar ao desenvolvimento elástico de Griffith, as primeira e segunda leis termodinâmicas foram utilizadas sob justificativa de evidenciar a dissipação de energia. Supondo-se que apenas fenômenos ligados a propagação e a viscoelasticidade estão presentes, a dissipação resultante pôde ser escrita como a soma de dois termos, um relativo à propagação de fraturas e o outro relativo à dissipação viscoelástica. O critério de propagação foi, então, formulado com base na dissipação por propagação, evidenciando uma condição matemática similar à elasticidade, onde a taxa de liberação de energia é comparada com um valor de energia crítica. A taxa de liberação de energia para materiais viscoelásticos também é escrita como a derivada da energia livre em função do parâmetro de dano, a diferença com relação a elasticidade corresponde a expressão da energia livre (ou simplesmente energia elástica, na ausência de variação térmica). Esta última pode ser escrita na viscoelasticidade

como a soma de três termos: a energia instantânea, cuja resposta se manifesta instantaneamente após a aplicação do carregamento; a energia diferida, cuja derivada não é relevante ao problema em questão; e a energia residual, a qual pode ter pouca influência no resultado final, tal como verificado em algumas referências. Em análises nas quais os tensores de deformações viscosos são geometricamente compatíveis o termo da energia residual é matematicamente nulo, contudo este termo deve ser mantido no caso geral. Ilustrações numéricas foram desenvolvidas, exibindo a evolução da taxa de liberação de energia no tempo. Neste âmbito, verificou-se que carregamentos instantaneamente aplicados podem ser estudados sob a ótica instantânea. Por outro lado, carregamentos acedentes (para materiais cuja matriz sólida é representada por modelos reológicos cujo comportamento mecânico em relaxação a longo prazo tende a rigidez nula) apresentaram taxa de liberação de energia crescente até um valor assintótico. Dado que a taxa de liberação de energia não pode ser superior a energia crítica, a comparação entre estes termos permite definir o instante em que a propagação vai iniciar, para um dado parâmetro de dano inicial. Por outro lado, supondo-se um certo equilíbrio na evolução da taxa de liberação de energia, é possível determinar um valor mínimo para o parâmetro de dano final no qual a propagação se encerrará. Observa-se, contudo, que a inexistência de um equilíbrio durante a evolução da propagação condiciona a parâmetros de dano finais superiores aos calculados. O tempo de encerramento, porém, necessita da formulação de um mecanismo de propagação de fraturas, o qual foi avaliado na quarta etapa deste trabalho.

A quarta etapa (seção 5 e seção 6) consistiu no desenvolvimento e estudo de uma lei de evolução de dano apta ao tratamento de materiais viscoelásticos através de uma abordagem baseada na escala macroscópica (**8º e 9º objetivos específicos**). Dado que a propagação do dano condiciona a um comportamento viscoelástico não-linear do meio homogeneizado, o primeiro passo consistiu no desenvolvimento de uma lei de comportamento viscoelástica não-linear, fundamentada no princípio da superposição, a qual permite o tratamento de uma função de dano como variável de estado do material na escala macroscópica. Dada a ausência de parâmetros necessários à validação, duas leis similares foram desenvolvidas. Na primeira delas o dano é incluído no tensor de relaxação do material, mas tratado de forma independente aos fenômenos viscoelásticos, a passo que na segunda o dano é incluído no tensor de relaxação, e tratado de forma dependente. Tal comportamento não-linear permite associar uma função de dano variável ao material, permitindo que o parâmetro de dano varia ao longo do tempo. Na sequência, em um raciocínio análogo à plasticidade, foi desenvolvida uma lei de evolução do dano, a qual

computa a taxa de evolução do parâmetro de dano segundo as variáveis de estado do material. Diversos exemplos numéricos foram estudados, permitindo-se concluir quais os principais fatores que levam a propagação de fraturas, a forma como se dá a evolução do dano, fatores relacionados à propagação estável/instável, o tempo para fim da propagação bem como o valor final do parâmetro de dano. Um código numérico para estudo desta lei de evolução foi implementado, sendo apresentado nos anexos.

7.2.SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas questões-chave ainda precisam ser previstas em trabalhos futuros:

- Em primeiro lugar, deve-se ter em mente que a validação do modelo teórico em relação aos dados experimentais, seja a partir de medições laboratoriais ou de campo, ainda precisa ser avaliada. Devido à falta de dados disponíveis sobre o comportamento dependente do tempo (viscoelástico) das fraturas, uma estratégia adequada dependeria de uma análise inversa para identificar de antemão as propriedades viscoelásticas dos constituintes (matriz e fraturas) para comparação direta entre testes experimentais com as previsões micromecânicas, em uma análise similar a desenvolvida na seção de validação do modelo constitutivo.

- Este estudo restringe-se a micro-fraturas, que por definição são fraturas muito menores que o tamanho do VER. No entanto, alguns materiais, como maciços rochosos, podem apresentar descontinuidades de grande escala (fraturas longas), transversais ao REV. Como essas fraturas não podem ser vistas do ponto de vista micromecânico, a propagação destas fraturas deve ser avaliada separadamente. O trabalho de Maghous et al. (2021) apresenta uma possível abordagem para o tratamento deste problema.

- O raciocínio desenvolvido neste trabalho ainda carece de um formalismo incremental, apto ao tratamento de problemas numéricos em softwares de simulação/análise de estruturas, baseados por exemplo no método dos elementos finitos. Uma contribuição importante neste sentido consiste em implementar o comportamento desenvolvido em um destes softwares.

- A formulação desenvolvida neste trabalho foi focada no raciocínio sobre dano isotrópico. Embora a formulação desenvolvida seja apta ao tratamento de fraturas paralelas, o raciocínio sobre evolução de dano neste contexto não foi estudado. Além disso, pode vir a ser

necessário realizar um raciocínio adicional sobre o tensor de dano, permitindo a consideração de estados de dano mais genéricos.

- Embora o presente raciocínio tenha conseguido desenvolver uma formulação analítica para determinação do campo de deformações residuais e, por consequência, da energia residual, estes termos foram desconsiderados da análise. Estudos futuros sobre estes termos mostram-se necessários antes de análises mais aprofundadas sobre o assunto.

- O raciocínio desenvolvido foi embasado em um equilíbrio pleno e a cada instante entre a taxa de liberação de energia e a energia crítica durante a propagação. Tal hipótese foi realizada dado a simplicidade lógica e a ausência de informações necessárias a conclusões sobre evoluções diferentes. Esta consideração está associada a uma evolução lenta/gradual da função de dano, a qual permitiu a formulação quase/estática desenvolvida. Um estudo mais profundo sobre o tema deveria concentrar-se sobre a generalização da formulação desenvolvida para um raciocínio dinâmico, o qual deveria ser mais apto ao tratamento de evolução rápida das fraturas.

- A condição de propagação desenvolvida foi formalmente embasada no trabalho de Griffith, tendo sido estendida ao domínio dos materiais viscoelásticos através da dissipação viscosa decorrente das deformações viscosas. Nota-se que esta formulação conduz a uma abordagem similar a mecânica da fratura de único parâmetro, que mostra aplicabilidade limitada no contexto elástico. Embora as velocidades de propagação e carregamento sejam naturalmente levadas em consideração na formulação desenvolvida, outros efeitos destes parâmetros podem, eventualmente, ser necessários para explicar a evolução da propagação de fraturas em alguns materiais. Aditivamente, a consideração de evoluções isotérmicas despreza quaisquer influências decorrentes da variação de temperatura no modelo desenvolvido, as quais mostram clara influência sobre as propriedades de materiais viscoelásticos. Neste contexto, sugere-se estudar a influência de parâmetros adicionais (velocidade de carregamento, velocidade de propagação e temperatura), estendendo o modelo desenvolvido a uma análise de múltiplos parâmetros, os quais apresentam grande influência experimental sobre os materiais viscoelásticos.

REFERENCIAS

Aguiar, C. B.; Maghous, S. (2018). “Micromechanical approach to effective viscoelastic properties of micro-fractured geomaterials”, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 42(16), pp. 1-29.

Ahn, J.; Kang, S.; Kwon, Y. H. (2003). “A flexible inverse Laplace transform algorithm and its application”, *Computing*, v. 71(2), pp. 115-131.

Anderson, T.L. (2005). “Fracture mechanics: fundamentals and applications”, *CRC Press*, 3rd ed.

Andrade, E.N. (1910). “The viscous flow in metals and allied phenomena”. *Proceedings of Royal Society*, v 84.

Aragao, F. (2011). “Computational Microstructure Modeling of Asphalt Mixtures Subjected to Rate-Dependent Fracture”. Tese de Doutorado, Graduate College at the University of Nebraska.

Bailey, R. W. (1910). “Creep of steel under simple and compound stresses and the use of high initial temperature in steam power plant”. *Tokyo Sectional Meeting of the World Power Conference*, Tokyo (1929), p 1089.

Bandis, S. C.; Lumsden, A. C.; Barton, N. R. (1983). “Fundamentals of Rock Joint Deformation”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining & Geomechanics Abstracts*, v. 20(6), pp. 249-268.

Barenblatt, G. I. (1962). “The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture”, *Advances in Applied Mechanics*, v. 7, pp. 55-129.

Bart, M.; Shao, J. F.; Lydzba, D.; Haji-Sotoudeh, M. (2004). “Coupled hydromechanical modeling of rock fractures under normal stress”, *Canadian Geotechnical Journal*, v. 41(2), pp. 686-697.

Bazant, Z. P.; Pfeiffer, P. A. (1986). “Determination of Fracture Energy from Size Effect and Brittleness Number”, *ACI Materials Journal*, v. 84 (6), p. 463-480.

Bernstein, B., Kearsley, E.A., Zapas, L.J. (1963). “A study of stress relaxation with finite strain”. *Transactions of the Society of Rheology*, v. (7), p. 391-410.

Betten, J. (2004). “Creep Mechanics”, *Springer-Verlag*, 2nd ed.

Beurthey, S.; Zaoui, A. (2000). “Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous materials”, *European journal of Mechanics – A/Solids*, v. 19(1), pp. 1-16.

- Bieniawski, Z. T. (1967). "Mechanism of brittle fracture of rock", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science & Geomechanics Abstracts*, v. 4(4), pp. 395-430.
- Bland, D. R. (1960). "The theory of linear viscoelasticity", *Pergamon Press*, 1st ed.
- Braham, A. F. (2008). "fracture characteristics of asphalt concrete in mode I, mode II, and mixed-mode". Tese de Doutorado, Graduate College of the University of Illinois.
- Breuer, S.; Onat, E. T., (1964). "On the determination of free energy in linear viscoelastic solids", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, v. 15(2), pp. 184-191.
- Brinson, H.F., Brinson, L.C. (2008). "Polymer engineering science and viscoelasticity". *Springer*.
- Budiansky, B.; O'Connell, R. J. (1976). "Elastic moduli of a cracked solid", *International Journal of Solids Structures*, v. 12, pp. 81-97.
- Bukharin, O. A.; Nikitin, L. V. (1991). "Slow crack growth in viscoelastic solids", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, v. 15(3), pp. 199-206.
- Caland, V. S. (2001). "resultados experimentais dos parâmetros de fraturamento para concretos de alto desempenho". Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Carbone, G.; Persson, B. N. J. (2005). "Crack motion in viscoelastic solids: the role of the flash temperature", *The European Physical Journal E*, v. 17, pp. 261-281.
- Chen, W.; Kulatilake, P. H. S. W. (2015). "Creep behavior modeling of a marble under uniaxial compression", *Geotechnical and Geological Engineering*, v. 33, pp. 1183-1191.
- Christensen, R. M.; Wu, E. M. (1981). "A theory of crack growth in viscoelastic materials", *Engineering Fracture Mechanics*, v. 14, pp. 215-225.
- Christensen, R.M. (1982). "Theory of viscoelasticity", *Academic Press*, 1st ed.
- D'Amico, F.; Carbone, G.; Foglia, M. M.; Galietti, U. (2013). "Moving cracks in viscoelastic materials: temperature and energy-rate measurements", *Engineering Fracture Mechanics*, v. 98, pp. 315-325.
- Donolato, C. (2002). "Analytical and numerical inversion of the Laplace-Carson transform by a differential method", *Computer Physics Communications*, v. 145(2), pp. 298-309
- Dormieux, L.; Ulm, F.-J. (2005). "Applied Micromechanics of Porous Materials", *SpringerWien*, 1st ed.
- Dormieux, L.; Kondo, D.; Ulm, F.-J. (2006). "Microporomechanics", *JohnWiley & Sons*, 1st ed.
- Dormieux, L.; Kondo, D. (2016). "Micromechanics of Fracture and Damage", *John Wiley & Sons*, 1st ed.

Dubois, F.; Chazal, C.; Petit, C. (1999). “Modelling of crack growth initiation in a linear viscoelastic material”, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, v. 37(2), pp. 207-222.

Dugdale, D. S. (1960). “Yielding of steel sheets containing slits”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 8(2), pp. 100-104.

Eshelby, J. D. (1957). “The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems”, *Proceedings of the Royal Society A*, v. 241(1226), pp. 376-396.

Findley, W.N., Lai, J.S., Onaran, K. (1976). “Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials”, *North-Holland Publishing Company*.

Gamby, D.; Delauménie, V. (1997). “Measurement and modelling of crack propagation velocity in a viscoelastic matrix composite”, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, v. 28(9-10), pp. 875-881.

Gettu, R.; Bazant, Z. P.; Karr, M. E. (1990). “Fracture properties and Brittleness of High-Strength Concrete”, v. 87 (6), p. 608-618.

Goodman, R. E. (1976). “Methods of Geological Engineering in Discontinuous Rocks”, *West Publishing*, 1st ed.

Griffith, A. A. (1921), “The phenomenon of rupture and flow in solids”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, v. 221, pp. 163-198.

Hiel, C., Cardon, A.H., Brinson, H.F. (1984). “The Nonlinear Viscoelastic Response of Resin Matrix Composite Laminates”, *NASA publisher*.

Hoff, N.J. (1958). “Mechanics Applied to Creep testing, Society for Experimental Stress Analysis”, *Proceedings*, V. 17, p.1.

Honig, G.; Hirdes, U. (1984). “A method for the numerical inversion of Laplace transforms”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 10(1), pp. 113-132.

Hou, R.; Zhang, K.; Tao, J. (2019) “Effects of initial damage on time-dependent behavior of sandstone In uniaxial compressive creep test”, *Archives of Mining Sciences*, v. 64(4), pp. 687-707.

Hunter, S. C. (1961). “Tentative equations for the propagation of stress, strain and temperature fields in viscoelastic solids”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 9(1), pp. 39-51.

Irwin, G. R. (1961). “Plastic zone near a crack and fracture toughness”, *Sagamore Research Conference Proceedings*, v. 4, pp. 63-78.

Jeager, J. C.; Cook, N. G. W.; Zimmerman, R. W. (2007). “Fundamentals of rock mechanics”, *Oxford: Blackwell Publishing*, 4th ed.

Jagerman, D. L. (1982). "An inversion technique for the Laplace transform", *The Bell System Technical Journal*, v. 61(8), pp. 1995-2002.

Knauss, W. G.; Dietmann, H. (1970). "Crack propagation under variable load histories in linearly viscoelastic solids." *International Journal of Engineering Science*, v. 8(8), pp. 643-656.

Lai, J.S.; Anderson, D. (1973). "Irrecoverable and recoverable nonlinear viscoelastic properties of asphalt concrete". *Highway research record*, v. 468, pp. 73-88.

Lakes, R. (2009). "Viscoelastic Materials". *Cambridge University Press*.

Le, Q. V.; Meftah, F.; He Q.-C., Le, Pape, T. (2007). "Creep and relaxation functions of a heterogeneous viscoelastic porous medium using the Mori-Tanaka homogenization schemes and a discrete microscopic retardation spectrum", *Mechanics of Time-Dependent Materials*, v. 11(3), pp. 309-331.

Leaderman, H. (1943). "Elastic and creep properties of filamentous materials". *Textile Foundation*, Washington

Lemaitre, J.; Chaboche, J.-L. (1990). "Mechanics of solid materials", Cambridge University Press, 1st ed.

Liang, R. Y.; Zhou, J. (1997). "Energy based approach for crack initiation and propagation in viscoelastic solids", *Engineering Fracture Mechanics*, v. 58(1/2), pp. 71-85.

Ludwik, P. (1909). "Element der Technologischen Mechanik". *Springer*, Berlin.

Marques, S. P. C.; Creus, G. J. (2012). "Computational viscoelasticity", *Spring-Verlag*, 1st ed.

Masuro, J. R.; Creus, G. J. (1993). "Finite elements analysis of viscoelastic fracture", *International Journal of Fracture*, v. 60(3), pp. 269-282.

Maghous, S., Creus, G. J. (2002). "Periodic homogenization in thermoviscoelasticity: case of multilayered media with ageing", *International Journal of Solids and Structures*, v. 40(4), pp. 851-870.

Maghous, S.; Dormieux, L.; Kondo, D.; Shao, J. F. (2011). "Micromechanics approach to poroelastic behavior of a jointed rock", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 37, pp. 111-129.

Maghous, S.; Dormieux, L.; Kondo, D.; Shao, J. F. (2013). "Micromechanics approach to poroelastic behavior of a jointed rock", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 37(2), pp. 111-129.

Maghous, S.; Lorenci, G.; Bittencourt E. (2014). "Effective poroelastic behavior of a jointed rock", *Mechanics Research Communications*, v. 509, pp. 54-69.

Maghous, S.; Aguiar, C.B.; Rossi, R. (2021). “Micromechanical approach to effective viscoelastic behavior of jointed rocks”, *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, v. 139, pp. 1-16.

Mura, T. (1987). “Micromechanics of Defects in Solids”, *Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers*, 2nd ed.

Nadai, A. (1937). “On the creep of solids at elevated temperatures”. *Journal of applied physics*. V.8. p. 418.

Nemat-Nasser, S.; Horii, H. (1993). “Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials”, *North-Holland*, 1st ed.

Nguyen, S. T.; Dormieux, L.; Le Pape, Y.; Sanhuja, J. (2010). “Crack propagation in viscoelastic structures: Theoretical and numerical analyses.” *Computational Materials Sciences*, v. 50, 83–91.

Nguyen, S. T.; Dormieux, L.; Le Pape, Y.; Sanhuja, J. (2011). “A Burger model for the effective behavior of a microcracked viscoelastic solid”, *International Journal of Damage Mechanics*, v. 20(8), pp. 1116-1129.

Nguyen, S. T.; Jeannin, L.; Dormieux, L.; Renard, F. (2013). “Fracturing of viscoelastic geomaterials and application to sedimentary layered rocks”, *Mechanics Research Communications*, v. 49, pp. 50–56.

Nguyen, S.T. (2014). “Generalized Kelvin model for micro-cracked viscoelastic materials”. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 127, pp. 226-234.

Nguyen, S. T.; Dormieux, L. (2014). “Propagation of micro-cracks in viscoelastic materials: Analytical and numerical methods”, *International Journal of Damage Mechanics*, v. 24(4), pp. 562–581.

Nikitin, L. V. (1984). “Application of the Griffith's approach to analysis of rupture in viscoelastic bodies.” *International Journal of Fracture*, v. 24(2), pp. 149-157.

Norton, F.H. (1929). “The creep of steel at high temperature”. *McGraw Hill*, New York.

Pavan,R.C.; Oliveira, B.F.; Maghous, S.; Creus, G.J. (2010). “A model for anisotropic viscoelastic damage in composites”. *Composite Structures*. v. 92, p. 1223-1228.

Pavan,R.C.; Oliveira, B.F.; Creus, G.J. (2012). “Buckling analyses of viscoelastic structures considering ageing and damage effects”. *Composite Structures*. v. 94, p.1406-1412.

Persson, B. N. J.; Brener, E. A. (2005). “Crack propagation in viscoelastic solids.” *Physical Review E*, v. 71(3), pp. 1-8.

Salençon, J. (2009). “Viscoélasticité pour le Calcul des Structures”, *Presses des Ponts et Chaussées*, 1st ed.

Schapery, R.A. (1964). “Application of Thermodynamics to Thermomechanical, Fracture, and Birefringent Phenomena in Viscoelastic Media”. *Journal of Applied Physics*, V. 35(5), p. 1451-1465.

Schapery, R.A. (1966). “An engineering theory of nonlinear viscoelasticity with applications”. *International Journal of Solids and Structures*, V. 2(3), p. 407-425.

Schapery, R.A. (1969). “On the characterization of nonlinear viscoelastic materials”, *Polymer Engineering and Science*, V. 9(4), p. 295-310.

Schapery, R. A. (1975a). “A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media: I. Theoretical development”, *International Journal of Fracture*, v. 11 (1), pp. 141-159.

Schapery, R. A. (1975b). “A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media: II. Approximate methods of analysis”, *International Journal of Fracture*, v. 11(3), pp. 369-388.

Schapery, R. A. (1975c). “A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media: III. Analysis of continuous growth”, *International Journal of Fracture*, v. 11(4), pp. 549-562.

Schapery, R. A. (1984). “Correspondence principles and a generalized J integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media”, *International Journal of Fracture*, v. 25(3), pp. 195-223.

Sih, G. C.; Macdonald, B. (1974). “Fracture mechanics applied to engineering problems – strain energy density fracture criterion”, *Engineering Fracture Mechanics*, v. 6, pp. 361-386.

Soderberg, C.R. (1936). “The interpretation of creep tests for machine design”. *Transaction of ASME*, v.58. P 733

Im, S. (2012). “Characterization of viscoelastic and fracture properties of asphaltic materials in multiple length scales”. Tese de Doutorado, Graduate College at the University of Nebraska.

Williams, M. L.; Landel, R. F.; Ferry, J. D. (1955). “The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids”, *Journal of the American Chemical Society*, v. 77(14), pp. 3701-3707.

Williams, M. L. (1967). “Fracture in viscoelastic media”, *Fundamental Phenomena in the Materials Sciences*, v. 4, pp. 23-32.

Willis, J. R. (1967). “Crack Propagation in viscoelastic media”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 15, pp. 229-240.

Wunk, M. P.; Knauss, W. G. (1970). “Delayed fracture in viscoelastic-plastic solids”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 6(7), pp. 995-1009.

Zaoui, A. (2002). “Continuum Micromechanics: Suvey”, *Journal of Engineering Mechanics*, v. 128(8), pp. 808-816.

Zhao, B.; liu, D.; Dong, Q. (2011) “Experimental research on creep behaviors of sandstone under uniaxial compressive and tensile stresses”, *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, v. 3, pp. 438-444.

ANEXO A: COMPONENTES DOS POLINÔMIOS A(P) E B(P)

A.1) CASO 1: MATRIZ DE MAXWELL E FISSURAS

Dada a Eq. (3.61) e Eq. (3.62) cabe determinar os respectivos polinômios $A(p)$, $B(p)$ para determinar os módulos de compressão e cisalhamento homogeneizados no domínio no tempo. Por simplicidade matemática supõem-se o modelo Maxwell para a matriz sólida (suprime-se então o subíndice M referente a notação baseada no modelo de Burger) e adota-se fissuras às descontinuidades, os respectivos polinômios $A_k(p)$, $B_k(p)$, $A_\mu(p)$ e $B_\mu(p)$ são:

$$\begin{aligned} A_k(p) &= a_0^k + a_1^k p + a_2^k p^2 \\ B_k(p) &= b_0^k + b_1^k p + b_2^k p^2 \\ A_\mu(p) &= a_0^\mu + a_1^\mu p + a_2^\mu p^2 + a_3^\mu p^3 \\ B_\mu(p) &= b_0^\mu + b_1^\mu p + b_2^\mu p^2 + b_3^\mu p^3 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde:

$$\begin{aligned} a_0^k &= 0 \\ a_1^k &= 3k_e^{s^2} \mu_e^{s^2} (3k_v^s + \mu_v^s) \mu_v^s k_v^s \\ a_2^k &= 3k_v^{s^2} \mu_v^{s^2} (3k_e^s + \mu_e^s) \mu_e^s k_e^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_0^k &= k_e^{s^2} \mu_e^{s^2} (4\varepsilon k_v^s (3k_v^s + 4\mu_v^s) + 3\mu_v^s (3k_v^s + \mu_v^s)) \\ b_1^k &= k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s (8\varepsilon (3k_e^s k_v^s + 2k_e^s \mu_v^s + 2k_v^s \mu_e^s) + 9(3k_e^s \mu_v^s + 9k_v^s \mu_e^s + 6\mu_v^s \mu_e^s)) \\ b_2^k &= k_v^{s^2} \mu_v^{s^2} (4\varepsilon k_e^s (3k_e^s + 4\mu_e^s) + 3\mu_e^s (3k_e^s + \mu_e^s)) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} a_0^\mu &= 0 \\ a_1^\mu &= 45k_e^{s^2} \mu_e^{s^3} (3k_v^s + 2\mu_v^s) (3k_v^s + \mu_v^s) \mu_v^s \end{aligned}$$

$$a_2^\mu = 45k_e^s k_v^s \mu_e^{s^2} \mu_v^{s^2} (18k_e^s k_v^s + 9k_e^s \mu_v^s + 9\mu_e^s k_v^s + 4\mu_e^s \mu_v^s)$$

$$a_3^\mu = 45k_v^{s^2} \mu_v^{s^3} (3k_e^s + 2\mu_e^s)(3k_e^s + \mu_e^s) \mu_e^s$$

$$b_0^\mu = k_e^{s^2} \mu_e^{s^3} (16\varepsilon(3k_v^s + 4\mu_v^s)(9k_v^s + 4\mu_v^s) + 45(3k_v^s + 2\mu_v^s)(3k_v^s + \mu_v^s))$$

$$b_1^\mu = 16\varepsilon k_e^s \mu_e^{s^2} \mu_v^s (96k_e^s k_v^s \mu_v^s + 81k_e^s k_v^{s^2} + 48k_v^{s^2} \mu_e^s + 32k_v^s \mu_e^s \mu_v^s + 16k_e^s \mu_v^{s^2})$$

$$+ k_e^s \mu_e^{s^2} \mu_v^s (810k_e^s k_v^s \mu_v^s + 1215k_e^s k_v^{s^2} + 405k_v^{s^2} \mu_e^s + 180k_v^s \mu_e^s \mu_v^s + 90k_e^s \mu_v^{s^2})$$

$$b_2^\mu = 16\varepsilon k_v^s \mu_v^{s^2} \mu_e^s (96k_v^s k_e^s \mu_e^s + 81k_v^s k_e^{s^2} + 48k_e^{s^2} \mu_v^s + 32k_e^s \mu_v^s \mu_e^s + 16k_v^s \mu_e^{s^2})$$

$$+ k_v^s \mu_v^{s^2} \mu_e^s (810k_v^s k_e^s \mu_e^s + 1215k_v^s k_e^{s^2} + 405k_e^{s^2} \mu_v^s + 180k_e^s \mu_v^s \mu_e^s + 90k_v^s \mu_e^{s^2})$$

$$b_3^\mu = k_v^{s^2} \mu_v^{s^3} (16\varepsilon(3k_e^s + 4\mu_e^s)(9k_e^s + 4\mu_e^s) + 45(3k_e^s + 2\mu_e^s)(3k_e^s + \mu_e^s))$$

Dado que $B_k(p)$ e $B_\mu(p)$ são polinômios de ordem menor que quatro, as soluções de k^{hom} e μ^{hom} são completamente analíticas, incluindo a determinação das raízes dos referidos polinômios.

A.2) CASO 2: MATRIZ DE MAXWELL E FRATURAS ELÁSTICAS

Um raciocínio alternativo pode ser elaborado considerando que as fraturas são elásticas (suprime-se portanto os índices v ou e e M ou K), levando aos seguintes polinômios:

$$A_k(p) = a_0^k + a_1^k p + a_2^k p^2 + a_3^k p^3$$

$$B_k(p) = b_0^k + b_1^k p + b_2^k p^2 + b_3^k p^3$$

$$A_\mu(p) = a_0^\mu + a_1^\mu p + a_2^\mu p^2 + a_3^\mu p^3 + a_4^\mu p^4 + a_5^\mu p^5$$

$$B_\mu(p) = b_0^\mu + b_1^\mu p + b_2^\mu p^2 + b_3^\mu p^3 + b_4^\mu p^4 + b_5^\mu p^5$$
(A.3)

onde:

$$a_0^k = 0$$

$$a_1^k = 3ak_v k_e^{s^2} k_n \mu_e^{s^2} (3k_v^s + 4\mu_v^s)$$

$$a_2^k = 3k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s \left(\pi k_e^s \mu_e^s (3k_v^s + \mu_v^s) + 2ak_n (3k_e^s k_v^s + 2k_e^s \mu_v^s + 2k_v^s \mu_e^s) \right)$$

$$a_3^k = 3k_e^s k_v^{s^2} \mu_e^{s^2} \left(\pi \mu_e^s (3k_e^s + \mu_e^s) + ak_n (3k_e^s + 4\mu_e^s) \right)$$

$$b_0^k = 3ak_n k_e^{s^2} \mu_e^{s^2} (3k_v^s + 4\mu_v^s)$$

$$b_1^k = 3ak_n k_e^s \mu_e^s \left[\left(2k_v^s \mu_v^s (3k_e^s + 4\mu_e^s) + 4k_e^s \mu_v^{s^2} + 3k_v^{s^2} \mu_e^s \right) + \right. \\ \left. + \pi k_e^{s^2} \mu_e^{s^2} \left(4\epsilon k_v^s (3k_v^s + 4\mu_v^s) + 3\mu_v^s (3k_v^s + \mu_v^s) \right) \right]$$

$$b_2^k = k_v^s \mu_v^s \left[3ak_n \left(2k_v^s \mu_e^s (3k_e^s + 2\mu_e^s) + k_e^s \mu_v^s (3k_e^s + 8\mu_e^s) \right) + \right. \\ \left. + \pi k_v^s \mu_e^s \left(8\epsilon (3k_e^s k_v^s + 2k_e^s \mu_v^s + 2k_v^s \mu_e^s) + 9(9k_e^s \mu_v^s + 9k_v^s \mu_e^s + 6\mu_v^s \mu_e^s) \right) \right]$$

(A.4)

$$b_3^k = k_v^{s^2} \mu_v^{s^2} \left(3\pi \mu_e^s (3k_e^s + \mu_e^s) + (3k_e^s + 4\mu_e^s) (4\pi \epsilon k_e^s + 3ak_n) \right)$$

$$a_0^k = 0$$

$$a_1^k = 180a^2 k_e^{s^2} k_t k_n \mu_e^{s^5} \mu_v^s (3k_v^s + 4\mu_v^s)^2$$

$$a_2^k = 45ak_e^s \mu_e^{s^4} \mu_v^{s^2} (3k_v^s + 4\mu_v^s) \left[16ak_t k_n (3k_e^s k_v^s + 2k_e^s \mu_v^s + 2k_v^s \mu_e^s) + \right. \\ \left. + \pi k_e^s \mu_e^s (3k_n (3k_v^s + 2\mu_v^s) + 4k_t (3k_v^s + \mu_v^s)) \right]$$

$$a_3^k = 45\mu_e^{s^3} \mu_v^{s^3} \left\{ 3\pi^2 k_e^{s^2} \mu_e^{s^2} (3k_v^s + 2\mu_v^s) (3k_v^s + \mu_v^s) + \right. \\ \left. + \pi ak_e^s \mu_e^s \left[k_n \left(81k_e^s k_v^{s^2} + 108k_e^s k_v^s \mu_v^s + 24k_e^s \mu_v^{s^2} + 54k_v^{s^2} \mu_e^s + 48k_v^s \mu_e^s \mu_v^s \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 4k_t \left(27k_e^s k_v^{s^2} + 30k_e^s k_v^s \mu_v^s + 4k_e^s \mu_v^{s^2} + 15k_v^{s^2} \mu_e^s + 8k_v^s \mu_e^s \mu_v^s \right) \right] + \right. \\ \left. + 8a^2 k_n k_t \left(27k_e^{s^2} k_v^{s^2} + 36k_e^{s^2} k_v^s \mu_v^s + 8k_e^{s^2} \mu_v^{s^2} + 36k_e^s k_v^{s^2} \mu_e^s + 32k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s + 8k_v^{s^2} \mu_e^{s^2} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
a_4^k &= 45k_v^s \mu_e^{s^2} \mu_v^{s^4} \left\{ \left(3\pi^2 \mu_e^{s^2} k_e^s \left(18k_e^s k_v^s + 9k_e^s \mu_v^s + 9k_v^s \mu_e^s + 4\mu_e^s \mu_v^s \right) + \right. \right. \\
&\quad + 2\pi a \mu_e^s \left[k_n \left(27k_e^{s^2} \mu_e^s + 54k_e^s k_v^s \mu_e^s + 24k_e^s \mu_e^s \mu_v^s + 12k_v^s \mu_e^{s^2} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + 2k_t \left(27k_e^{s^2} k_v^s + 15k_e^s \mu_v^s + 30k_e^s k_v^s \mu_e^s + 8k_e^s \mu_e^s \mu_v^s + 4k_v^s \mu_e^{s^2} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + 16a^2 k_n k_t \left(3k_e^s + 4\mu_e^s \right) \left(3k_e^s k_v^s + 2k_e^s \mu_v^s + 2k_v^s \mu_e^s \right) \right\} \\
a_5^k &= 45k_v^{s^2} \mu_e^s \mu_v^{s^5} \left(3\pi \mu_e^s \left(3k_e^s + 2\mu_e^s \right) + 4a k_t \left(3k_e^s + 4\mu_e^s \right) \right) \left(\pi \mu_e^s \left(3k_e^s + \mu_e^s \right) + a k_n \left(3k_e^s + 4\mu_e^s \right) \right)
\end{aligned}$$

$$b_0^k = 180a^2 k_e^{s^2} k_t k_n \mu_e^{s^5} \left(3k_v^s + 4\mu_v^s \right)^2$$

$$\begin{aligned}
b_1^k &= a k_e^s \mu_e^{s^4} \mu_v^s \left(3k_v^s + 4\mu_v^s \right) \left[32\pi \varepsilon k_e^s \mu_e^s \left(3k_v^s + 4\mu_v^s \right) \left(3k_n + 2k_t \right) + \right. \\
&\quad + 180a k_n k_t \left(15k_e^s k_v^s + 12k_e^s \mu_v^s + 8k_v^s \mu_e^s \right) + \\
&\quad \left. + 45\pi k_e^s \mu_e^s \left(3k_n \left(3k_v^s + 2\mu_v^s \right) + 4k_t \left(3k_v^s + \mu_v^s \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2^k &= \mu_e^{s^3} \mu_v^{s^2} \left\{ 16\pi \varepsilon k_e^s \mu_e^s \left(3k_v^s + 4\mu_v^s \right) \left(8a \left(3k_n + 2k_t \right) \left(3k_e^s k_v^s + 2k_e^s \mu_v^s + 2k_v^s \mu_e^s \right) + 3\pi k_e^s \mu_e^s \left(9k_v^s + 4\mu_v^s \right) \right) + \right. \\
&\quad + 135\pi^2 k_e^{s^2} \mu_e^{s^2} \left(3k_v^s + 2\mu_v^s \right) \left(3k_v^s + \mu_v^s \right) + \\
&\quad + 90\pi a k_e^s \mu_e^s \left[k_n \left(54k_e^s k_v^{s^2} + 81k_e^s k_v^s \mu_v^s + 24k_e^s \mu_v^{s^2} + 27k_v^{s^2} \mu_e^s + 24k_v^s \mu_e^s \mu_v^s \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + 2k_t \left(36k_e^s k_v^{s^2} + 45k_e^s k_v^s \mu_v^s + 8k_e^s \mu_v^{s^2} + 15k_v^{s^2} \mu_e^s + 8k_v^s \mu_e^s \mu_v^s \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3^k &= \mu_e^{s^2} \mu_v^{s^3} \left\{ 16\pi \varepsilon \mu_e^s * \right. \\
&\quad * \left[4a \left(27k_e^{s^2} k_v^{s^2} + 36k_e^{s^2} k_v^s \mu_v^s + 8k_e^{s^2} \mu_v^{s^2} + 36k_e^s k_v^s \mu_e^s + 32k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s + 8k_v^{s^2} \mu_e^{s^2} \right) \left(3k_n + 2k_t \right) + \right. \\
&\quad + 3\pi k_e^s \mu_e^s \left(81k_e^s k_v^{s^2} + 96k_e^s k_v^s \mu_v^s + 16k_e^s \mu_v^{s^2} + 48k_v^{s^2} \mu_e^s + 32k_v^s \mu_e^s \mu_v^s \right) \left. \right] + \\
&\quad + 135\pi^2 k_e^s \mu_e^{s^2} \left(27k_e^s k_v^{s^2} + 18k_e^s k_v^s \mu_v^s + 2k_e^s \mu_v^{s^2} + 9k_v^{s^2} \mu_e^s + 4k_v^s \mu_e^s \mu_v^s \right) + \\
&\quad + 90\pi a \mu_e^s \left[k_n \left(81k_e^{s^2} k_v^{s^2} + 81k_e^{s^2} k_v^s \mu_v^s + 12k_e^{s^2} \mu_v^{s^2} + 81k_e^s k_v^{s^2} \mu_e^s + 48k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s + 12k_v^{s^2} \mu_e^{s^2} \right) + \right. \\
&\quad + 2k_t \left(54k_e^{s^2} k_v^{s^2} + 45k_e^{s^2} k_v^s \mu_v^s + 4k_e^{s^2} \mu_v^{s^2} + 45k_e^s k_v^{s^2} \mu_e^s + 16k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s + 4k_v^{s^2} \mu_e^{s^2} \right) \left. \right] + \\
&\quad \left. + 360a^2 k_n k_t \left(45k_e^{s^2} k_v^{s^2} + 48k_e^{s^2} k_v^s \mu_v^s + 8k_e^{s^2} \mu_v^{s^2} + 72k_e^s k_v^{s^2} \mu_e^s + 48k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s + 24k_v^{s^2} \mu_e^{s^2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_4^k &= k_v^s \mu_e^s \mu_v^{s^4} \left\{ 16 \pi \varepsilon \mu_e^s \left[8a(3k_n + 2k_t)(3k_e^s + 4\mu_e^s)(3k_e^s k_v^s + 2k_e^s \mu_v^s + 2k_v^s \mu_e^s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3\pi \mu_e^s \left(81k_e^{s^2} k_v^s + 48k_e^{s^2} \mu_v^s + 96k_e^s k_v^s \mu_e^s + 21k_e^s \mu_e^s \mu_v^s + 15k_v^s \mu_e^{s^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + 135\pi^2 \mu_e^{s^2} \left(27k_e^{s^2} k_v^s + 9k_e^{s^2} \mu_v^s + 18k_e^s k_v^s \mu_e^s + 4k_e^s \mu_e^s \mu_v^s + 2k_v^s \mu_e^{s^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + 90\pi a \mu_e^s \left[k_n \left(54k_e^{s^2} k_v^s + 27k_e^{s^2} \mu_v^s + 81k_e^s k_v^s \mu_e^s + 24k_e^s \mu_e^s \mu_v^s + 24k_v^s \mu_e^{s^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2k_t \left(36k_e^{s^2} k_v^s + 15k_e^{s^2} \mu_v^s + 45k_e^s k_v^s \mu_e^s + 8k_e^s \mu_e^s \mu_v^s + 8k_v^s \mu_e^{s^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + 180a^2 k_n k_t \left(3k_e^s + 4\mu_e^s \right) \left(15k_e^s k_v^s + 8k_e^s \mu_v^s + 12k_v^s \mu_e^s \right) \right\} \\
b_5^k &= k_v^{s^2} \mu_v^{s^5} \left[16 \pi \varepsilon \mu_v^s \mu_e^s \left(3k_e^s + 4\mu_e^s \right) \left(2a(3k_n + 2k_t)(3k_e^s + 4\mu_e^s) + 3\pi \mu_e^s (9k_e^s + 4\mu_e^s) \right) \right. \\
&\quad \left. + 45 \left(4a k_t (3k_e^s + 4\mu_e^s) + 3\pi \mu_e^s (3k_e^s + 2\mu_e^s) \right) \left(a k_n (3k_e^s + 4\mu_e^s) + \pi \mu_e^s (3k_e^s + \mu_e^s) \right) \right]
\end{aligned}$$

Para este modelo, a determinação de k^{hom} pode ser realizada analiticamente de forma plena. Para μ^{hom} , contudo, as raízes de $B_\mu(p)$ não podem ser determinadas analiticamente por se tratar de um polinômio de grau 5. Esta etapa, portanto, deve ser realizada utilizando uma abordagem numérica.

A.3) TABELA DE ORDEM DOS POLINÔMIOS RESULTANTES

Modelos mais gerais geram polinômios ainda mais complexos, com grau que impede o raciocínio analítico sobre as raízes. Dada a complexidade de representação, apenas o grau g de seus respectivos polinômios é apresentado na tabela abaixo:

	Fissura	Elástico	Maxwell	Kelvin-Voigt	Burger
Elástico	$g^k = 0$	$g^k = 0$	$g^k = 1$	$g^k = 1$	$g^k = 2$
	$g^\mu = 0$	$g^\mu = 0$	$g^\mu = 2$	$g^\mu = 2$	$g^\mu = 4$
Maxwell	$g^k = 2$	$g^k = 3$	$g^k = 3$	$g^k = 4$	$g^k = 4$
	$g^\mu = 3$	$g^\mu = 5$	$g^\mu = 5$	$g^\mu = 7$	$g^\mu = 7$
Kelvin-Voigt	$g^k = 4$	$g^k = 4$	$g^k = 5$	$g^k = 5$	$g^k = 6$
	$g^\mu = 5$	$g^\mu = 7$	$g^\mu = 9$	$g^\mu = 9$	$g^\mu = 11$
Burger	$g^k = 6$	$g^k = 7$	$g^k = 7$	$g^k = 8$	$g^k = 8$
	$g^\mu = 8$	$g^\mu = 12$	$g^\mu = 12$	$g^\mu = 14$	$g^\mu = 14$

Figura A.1: Grau dos polinômios A(p) e B(p) para as funções $k^{\text{hom}*}$ e $\mu^{\text{hom}*}$

A.4) DEMONSTRAÇÃO: RAIZES r_k REAIS E NEGATIVAS

A seguinte raciocínio visa demonstrar que as raízes r_k do polinômio $B(p)$ são reais e negativas. Dado que o desenvolvimento não pode ser realizado para o caso geral (visto que não é possível determinar analiticamente as raízes de polinômios de ordem superior a 4), o presente raciocínio se restringirá ao caso no qual a matriz sólida segue o modelo de Maxwell e as fraturas não apresentam comportamento mecânico (i.e., são fissuras). Para este caso, os polinômios $B_k(p)$ e $B_\mu(p)$ são representados na equação (A.1). Nota-se que o raciocínio presente na seção 3.4.1 permanece válido independentemente destas condições, contudo o modelo generalizado de Maxwell resultante apresenta elementos com interpretação não física. Lembra-se que k_e^s , k_v^s , μ_e^s e μ_v^s são necessariamente positivos e $\varepsilon \geq 0$.

Restringindo-se inicialmente ao módulo volumétrico tem-se:

$$\begin{aligned} b_0^k &= k_e^{s^2} \mu_e^{s^2} \left(4\varepsilon k_v^s (3k_v^s + 4\mu_v^s) + 3\mu_v^s (3k_v^s + \mu_v^s) \right) \geq 0 \\ b_1^k &= k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s \left(8\varepsilon (3k_e^s k_v^s + 2k_e^s \mu_v^s + 2k_v^s \mu_e^s) + 9(3k_e^s \mu_v^s + 9k_v^s \mu_e^s + 6\mu_v^s \mu_e^s) \right) \geq 0 \\ b_2^k &= k_v^{s^2} \mu_v^{s^2} \left(4\varepsilon k_e^s (3k_e^s + 4\mu_e^s) + 3\mu_e^s (3k_e^s + \mu_e^s) \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A condição para que o polinômio $B_k(p)$ apresente apenas raízes reais é dada por:

$$\Delta^k = (b_1^k)^2 - 4b_2^k b_0^k \geq 0 \quad (\text{A.6})$$

Realizando-se a substituição de b_0^k , b_1^k e b_2^k presentes na equação (A.2) em (A.6) obtém-se:

$$\Delta^k = \left[k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s (k_e^s \mu_v^s - k_v^s \mu_e^s) \right]^2 \left[256\varepsilon^2 + 144\varepsilon + 81 \right] \quad (\text{A.7})$$

Dado que k_e^s , k_v^s , μ_e^s , μ_v^s e ε são maiores ou igual a zero, tem-se obrigatoriamente $\Delta^k \geq 0$ o que implica em uma solução real.

Dada a expressão (A.5), sabe-se que:

$$r_1 = \frac{-b_1^k + \sqrt{\Delta^k}}{2b_2^k} \geq r_2 = \frac{-b_1^k - \sqrt{\Delta^k}}{2b_2^k} \quad (\text{A.8})$$

Portanto, se $r_1 \leq 0$ garante-se automaticamente que $r_2 \leq 0$. A expressão de r_1 pode ser simplificada para a seguinte forma:

$$r_1 = \frac{-b_1^k + k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s (k_e^s \mu_v^s - k_v^s \mu_e^s) \sqrt{256\varepsilon^2 + 144\varepsilon + 81}}{2b_2^k} \quad (\text{A.9})$$

Contudo, percebe-se que:

$$r_1 \leq r_{fic} = \frac{-b_1^k + k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s (k_e^s \mu_v^s - k_v^s \mu_e^s) \sqrt{256\varepsilon^2 + 288\varepsilon + 81}}{2b_2^k} \quad (\text{A.10})$$

De forma que se $r_{fic} \leq 0$ tem-se obrigatoriamente $r_1 \leq 0$. Realizando-se as devidas simplificações matemáticas sobre r_{fic} , obtém-se:

$$r_{fic} = \frac{-k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s \left[4\varepsilon k_v^s (3k_e^s + 4\mu_e^s) + 3\mu_e^s (3k_v^s + \mu_v^s) \right]}{2b_2^k} \quad (\text{A.11})$$

Dado que k_e^s , k_v^s , μ_e^s , μ_v^s e ε são maiores ou igual a zero, tem-se obrigatoriamente $r_{fic} \leq 0$, conseqüentemente tem-se $r_1 \leq 0$ e $r_2 \leq 0$, demonstrando que todas raízes são negativas.

Restringe-se a análise agora ao módulo de cisalhamento. Utilizando algum software para solução analítica das raízes de $B_\mu(p)$ chega-se aos seguintes valores:

$$r_1 = -\frac{\mu_e^s}{\mu_v^s}$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_e^s k_e^s}{\mu_v^s k_v^s} \frac{1}{16\varepsilon(3k_e^s + 4\mu_e^s)(9k_e^s + 4\mu_e^s) + 45(3k_e^s + 2\mu_e^s)(3k_e^s + \mu_e^s)} \left[54k_e^s k_v^s (16\varepsilon + 15) + \right. \\ \left. + 3(k_e^s \mu_v^s + k_v^s \mu_e^s)(256\varepsilon + 135) + 4\mu_e^s \mu_v^s (128\varepsilon + 45) - 3\sqrt{(k_e^s \mu_v^s - \mu_e^s k_v^s)^2 (16384\varepsilon^2 + 5760\varepsilon + 2025)} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$r_3 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_e^s k_e^s}{\mu_v^s k_v^s} \frac{1}{16\varepsilon(3k_e^s + 4\mu_e^s)(9k_e^s + 4\mu_e^s) + 45(3k_e^s + 2\mu_e^s)(3k_e^s + \mu_e^s)} \left[54k_e^s k_v^s (16\varepsilon + 15) + \right. \\ \left. + 3(k_e^s \mu_v^s + k_v^s \mu_e^s)(256\varepsilon + 135) + 4\mu_e^s \mu_v^s (128\varepsilon + 45) + 3\sqrt{(k_e^s \mu_v^s - \mu_e^s k_v^s)^2 (16384\varepsilon^2 + 5760\varepsilon + 2025)} \right]$$

Dado que k_e^s , k_v^s , μ_e^s , μ_v^s e ε são maiores ou igual a zero, r_1 e r_3 automaticamente são negativas e r_1 , r_2 e r_3 são reais. Resta então demonstrar que r_2 é positiva. Para tanto estuda-se apenas o termo

$$-54k_e^s k_v^s (16\varepsilon + 15) - 3(k_e^s \mu_v^s + k_v^s \mu_e^s)(256\varepsilon + 135) - 4\mu_e^s \mu_v^s (128\varepsilon + 45) + 3\sqrt{(k_e^s \mu_v^s - \mu_e^s k_v^s)^2 (16384\varepsilon^2 + 5760\varepsilon + 2025)} \quad (\text{A.13})$$

Visto que $(16384\varepsilon^2 + 5760\varepsilon + 2025) \leq (128\varepsilon + 45)^2$, a análise da expressão acima pode ser substituída por

$$-54k_e^s k_v^s (16\varepsilon + 15) - 3(k_e^s \mu_v^s + k_v^s \mu_e^s)(256\varepsilon + 135) - 4\mu_e^s \mu_v^s (128\varepsilon + 45) + 3\sqrt{(k_e^s \mu_v^s - \mu_e^s k_v^s)^2 (128\varepsilon + 45)^2} \quad (\text{A.14})$$

A qual pode ser reescrita como:

$$-54k_e^s k_v^s (16\varepsilon + 15) - 3(k_e^s \mu_v^s + k_v^s \mu_e^s)(256\varepsilon + 135) - 4\mu_e^s \mu_v^s (128\varepsilon + 45) + 3(128\varepsilon + 45) \left| (k_e^s \mu_v^s - \mu_e^s k_v^s) \right| \quad (\text{A.15})$$

Aplicando-se a propriedade $|k_e^s \mu_v^s| + |\mu_e^s k_v^s| \geq |k_e^s \mu_v^s - \mu_e^s k_v^s|$, a expressão acima é simplificada para a seguinte forma:

$$-54k_e^s k_v^s (16\varepsilon + 15) - 3(k_e^s \mu_v^s + k_v^s \mu_e^s)(128\varepsilon + 90) - 4\mu_e^s \mu_v^s (128\varepsilon + 45) \quad (\text{A.16})$$

Dado que $k_e^s, k_v^s, \mu_e^s, \mu_v^s$ e ε são maiores ou igual a zero, a expressão acima é obviamente negativa. Demonstra-se, portanto, que as raízes r_1, r_2 e r_3 são reais e negativas para o problema em questão.

A.5) PROBLEMAS COM MULTIPLICIDADE DAS RAIZES

Dado o polinômio $R^{\text{hom } \mathcal{L}}(p)$

$$R^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{R^{\text{hom } *}(p)}{p} = \frac{A(p)}{pB(p)} \quad (\text{A.17})$$

Cujos polinômios $A(p)$ e $B(p)$ de grau g são genericamente expressos por:

$$A(p) = \sum_{k=0}^g a_k p^k \quad ; \quad B(p) = \sum_{k=0}^g b_k p^k = \prod_{k=1}^z (p-r_k)^{g_k} \quad \text{com} \quad b_g = 1 \quad (\text{A.18})$$

Onde z representa o número de polos principais e g_n representa a repetitividade da raiz r_n . A expansão em frações parciais supondo possível a repetitividade das raízes r_k de $B(p)$ é dada por:

$$R^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{a_0}{pb_0} + \sum_{n=1}^z \sum_{k=1}^{g_n} \frac{1}{(p-r_n)^k (g_n-k)!} \frac{d^{g_n-k}}{dp^{g_n-k}} \left[(p-r_n)^{g_n} \frac{A(p)}{B(p)} \right]_{p=r_n} \quad (\text{A.19})$$

A.6) DEMONSTRAÇÃO: TERMOS ADICIONAIS DECORRENTES DA MULTIPLICIDADE DE r_k SÃO NULOS

A seguinte raciocínio visa demonstrar que os termos adicionais decorrentes da multiplicidade das raízes r_k do polinômio $B(p)$ podem ser desprezados do comportamento efetivo do material. Dado que o desenvolvimento não pode ser realizado para o caso geral (visto que não é possível determinar analiticamente as raízes de polinômios de ordem superior a 4), o presente raciocínio se restringirá ao caso no qual a matriz sólida segue o modelo de Maxwell e

as fraturas não apresentam comportamento mecânico (i.e., são fissuras). Para este caso, os polinômios $A_k(p)$, $B_k(p)$, $A_\mu(p)$ e $B_\mu(p)$ são representados na equação (A.1).

Restringindo-se inicialmente ao módulo volumétrico tem-se a seguinte condição para que $r_1 = r_2$ (i.e., raízes repetidas com multiplicidade 2):

$$\Delta^k = (b_1^k)^2 - 4b_2^k b_0^k = \left[k_e^s k_v^s \mu_e^s \mu_v^s (k_e^s \mu_v^s - k_v^s \mu_e^s) \right]^2 \left[256\varepsilon^2 + 144\varepsilon + 81 \right] = 0 \quad (\text{A.20})$$

Para que esta solução seja satisfeita, deve-se ter:

$$k_e^s \mu_v^s - k_v^s \mu_e^s = 0 \quad (\text{A.21})$$

Neste caso as raízes de $B_k(p)$ são dadas por:

$$r_1 = r_2 = r = -\frac{k_e^s}{k_v^s} \quad (\text{A.22})$$

A solução representada na expressão (A.19) assume a seguinte forma:

$$k^{\text{hom}} \mathcal{L}(p) = \frac{a_0^k}{pb_0^k} + \frac{1}{(p-r)} \frac{d}{dp} \left[(p-r)^2 \frac{A_k(p)}{B_k(p)} \right]_{p=r} + \frac{1}{(p-r)^2} \left[(p-r)^2 \frac{A_k(p)}{B_k(p)} \right]_{p=r} \quad (\text{A.23})$$

Dado que:

$$B_k(p) = b_2^k (p-r)^2 \quad (\text{A.24})$$

Tem-se

$$k^{\text{hom}} \mathcal{L}(p) = \frac{a_0^k}{pb_0^k} + \frac{1}{(p-r)} \frac{1}{b_2^k} \frac{dA_k(p)}{dp} \Big|_{p=r} + \frac{1}{(p-r)^2} \frac{A_k(r)}{b_2^k} \quad (\text{A.25})$$

Pela equação (A.1) e (A.2) o polinômio $A_k(p)$ se escreve como

$$A_k(p) = 3k_v^{s^2} \mu_v^{s^2} \mu_e^s k_e^s (3k_e^s + \mu_e^s) p^2 + 3k_e^{s^2} \mu_e^{s^2} \mu_v^s k_v^s (3k_v^s + \mu_v^s) p \quad (\text{A.26})$$

Tem-se, então:

$$A_k(r) = 3k_e^{s^3} \mu_v^s \mu_e^s \left(\mu_v^s (3k_e^s + \mu_e^s) - \mu_e^s (3k_v^s + \mu_v^s) \right) \quad (\text{A.27})$$

Aplicando-se a condição $k_e^s = \mu_e^s k_v^s / \mu_v^s$ estabelecida na equação (A.21) obtém-se $A_k(r) = 0$. Portanto, tem-se a seguinte solução:

$$k^{\text{hom}} \mathcal{L}(p) = \frac{a_0^k}{p b_0^k} + \frac{1}{(p-r)} \frac{1}{b_2^k} \frac{dA_k(p)}{dp} \Big|_{p=r} \quad (\text{A.28})$$

cuja solução é equivalente ao problema $k^{\text{hom}} \mathcal{L}(p) = \frac{dA_k(p)/dp}{p B_k(p)}$ sem raízes repetidas e com $B_k(p) = b_2^k (p-r)$. Dado que as condições impostas sobre $B_k(p)$ permanecem válidas, a solução no domínio do tempo é dada por:

$$k^{\text{hom}}(t) = \frac{a_0^k}{b_0^k} H(t) + \frac{1}{b_2^k} \frac{dA_k(p)}{dp} \Big|_{p=r} e^{\frac{k_e^s}{k_v^s} t} H(t) \quad (\text{A.29})$$

A solução expressa na equação acima pode ser representada pelo modelo generalizado de Maxwell.

Restringindo agora o problema ao módulo cisalhante, tem-se a seguinte condição para que $r_2 = r_3$ (i.e., raízes repetidas com multiplicidade 2) (ver expressão (A.12)):

$$3\sqrt{\left(k_e^s \mu_v^s - \mu_e^s k_v^s\right)^2 \left(16384\varepsilon^2 + 5760\varepsilon + 2025\right)} = 0 \quad (\text{A.30})$$

Levando a mesma condição imposta em (A.21). Neste contexto as três raízes do polinômio $B_\mu(p)$ são:

$$r_1 = -\frac{\mu_e^s}{\mu_v^s} \tag{A.31}$$

$$r_2 = r_3 = -\frac{1}{2} \frac{\mu_e^s k_e^s}{\mu_v^s k_v^s} \frac{1}{16\varepsilon(3k_e^s + 4\mu_e^s)(9k_e^s + 4\mu_e^s) + 45(3k_e^s + 2\mu_e^s)(3k_e^s + \mu_e^s)} \left[54k_e^s k_v^s (16\varepsilon + 15) + 3(k_e^s \mu_v^s + k_v^s \mu_e^s)(256\varepsilon + 135) + 4\mu_e^s \mu_v^s (128\varepsilon + 45) \right]$$

Aplicando a condição estabelecida em (A.21) leva-se à:

$$r_1 = r_2 = r_3 = r = -\frac{\mu_e^s}{\mu_v^s} \tag{A.32}$$

Tem-se então raízes repetidas com multiplicidade 3. A solução representada na expressão (A.19) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mu^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = & \frac{a_0^\mu}{p b_0^\mu} + \frac{1}{2(p-r)} \frac{d^2}{dp^2} \left[(p-r)^3 \frac{A_\mu(p)}{B_\mu(p)} \right]_{p=r} + \frac{1}{(p-r)^2} \frac{d}{dp} \left[(p-r)^3 \frac{A_\mu(p)}{B_\mu(p)} \right]_{p=r} + \\ & + \frac{1}{(p-r)^3} \left[(p-r)^3 \frac{A_\mu(p)}{B_\mu(p)} \right]_{p=r} \end{aligned} \tag{A.33}$$

Dado que:

$$B_\mu(p) = b_3^\mu (p-r)^3 \tag{A.34}$$

Tem-se

$$\mu^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{a_0^\mu}{p b_0^\mu} + \frac{1}{2b_3^k (p-r)} \frac{d^2}{dp^2} [A_\mu(p)]_{p=r} + \frac{1}{b_3^k (p-r)^2} \frac{d}{dp} [A_\mu(p)]_{p=r} + \frac{1}{(p-r)^3} \left[\frac{A_\mu(p)}{b_3^k} \right]_{p=r} \tag{A.35}$$

Dadas as equações (A.1) e (A.2) a função $A_\mu(r)$ se escreve como

$$A_\mu(r) = 90\mu_e^{s^4} \left(k_e^s \mu_v^s - \mu_e^s k_v^s \right)^2 \quad (\text{A.36})$$

Lembrando-se da condição estabelecida em (A.21), tem-se $A_\mu(r) = 0$. A expressão (A.35) é reescrita como:

$$\mu^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{a_0^\mu}{pb_0^\mu} + \frac{1}{2b_3^k(p-r)} \frac{d^2}{dp^2} [A_\mu(p)]_{p=r} + \frac{1}{b_3^k(p-r)^2} \frac{d}{dp} [A_\mu(p)]_{p=r} \quad (\text{A.37})$$

Na continuidade, dadas as equações (A.1) e (A.2) a função $\left. \frac{dA_\mu(p)}{dp} \right|_{p=r}$ se escreve como

$$\left. \frac{dA_\mu(p)}{dp} \right|_{p=r} = -45\mu_e^{s^3} \mu_v^s \left(9k_e^s k_v^s - 2k_e^s \mu_v^s + 6k_v^s \mu_e^s \right) \left(k_e^s \mu_v^s - \mu_e^s k_v^s \right) \quad (\text{A.38})$$

Novamente, dada a condição expressa em (A.21), tem-se $\left. \frac{dA_\mu(p)}{dp} \right|_{p=r} = 0$. Reescreve-se

(A.37) como:

$$\mu^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{a_0^\mu}{pb_0^\mu} + \frac{1}{2b_3^k(p-r)} \frac{d^2}{dp^2} [A_\mu(p)]_{p=r} \quad (\text{A.39})$$

cuja solução é equivalente ao problema $\mu^{\text{hom } \mathcal{L}}(p) = \frac{d^2 A_\mu(p)/dp^2}{2pB_\mu(p)}$ sem raízes repetidas

com $B_\mu(p) = b_3^\mu(p-r)$. Dado que as condições impostas sobre $B_\mu(p)$ permanecem válidas, a solução no domínio do tempo é dada por:

$$\mu^{\text{hom}}(t) = \frac{a_0^\mu}{b_0^\mu} H(t) + \frac{1}{2b_3^\mu} \left. \frac{d^2 A_\mu(p)}{dp^2} \right|_{p=r} e^{-\frac{\mu_e^s}{\mu_v^s} t} H(t) \quad (\text{A.40})$$

A solução expressa na equação acima pode ser representada pelo modelo generalizado de Maxwell.

ANEXO B: PARÂMETROS DO MODELO DE BURGER APROXIMADO

A presente seção visa apresentar as variáveis $K_{-1}^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_0^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_{-1}^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$, $K_0^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_{-1}^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_0^0(\varepsilon, \mathcal{N})$, $M_{-1}^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$ e $M_0^\infty(\varepsilon, \mathcal{N})$ necessárias ao modelo de Burger aproximado. Inicialmente supõem-se que as descontinuidades são modeladas como fissuras, o que leva ao seguinte conjunto de parâmetros:

$$\begin{aligned}
 K_0^0 &= \left(\frac{1}{k_{e,M}^s} + \frac{1}{k_{e,K}^s} \right) + \frac{4\varepsilon}{(3k_{v,M}^s + \mu_{v,M}^s)^2} \left\{ 3k_{v,M}^{s,2} \left(\frac{1}{k_{e,M}^s} + \frac{1}{k_{e,K}^s} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[k_{v,M}^s (3k_{v,M}^s + 2\mu_{v,M}^s) + \frac{4}{3} \mu_{v,M}^{s,2} \right] \left(\frac{1}{\mu_{e,M}^s} + \frac{1}{\mu_{e,K}^s} \right) \right\} \\
 K_{-1}^0 &= \frac{3}{k_{v,M}^s} + \frac{4\varepsilon}{\mu_{v,M}^s} \frac{(3k_{v,M}^s + 4\mu_{v,M}^s)}{(3k_{v,M}^s + \mu_{v,M}^s)} \\
 K_0^\infty &= \frac{3}{k_{e,M}^s} + \frac{4\varepsilon}{\mu_{e,M}^s} \frac{(3k_{e,M}^s + 4\mu_{e,M}^s)}{(3k_{e,M}^s + \mu_{e,M}^s)} \\
 K_{-1}^\infty &= \left(\frac{1}{k_{v,M}^s} + \frac{1}{k_{v,K}^s} \right) + \frac{4\varepsilon}{(3k_{e,M}^s + \mu_{e,M}^s)^2} \left\{ 3k_{e,M}^{s,2} \left(\frac{1}{k_{v,M}^s} + \frac{1}{k_{v,K}^s} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[k_{e,M}^s (3k_{e,M}^s + 2\mu_{e,M}^s) + \frac{4}{3} \mu_{e,M}^{s,2} \right] \left(\frac{1}{\mu_{v,M}^s} + \frac{1}{\mu_{v,K}^s} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

e

$$\begin{aligned}
M_0^0 &= \frac{48\varepsilon}{48} \left(\frac{1}{\mu_{e,M}^s} + \frac{1}{\mu_{e,K}^s} \right) + \frac{16}{45} \frac{\varepsilon}{(3k_{v,M}^s + 2\mu_{v,M}^s)^2 (3k_{v,M}^s + \mu_{v,M}^s)^2} * \\
&* \left[3k_{v,M}^s{}^2 (63k_{v,M}^s{}^2 + 60k_{v,M}^s \mu_{v,M}^s + 16\mu_{v,M}^s{}^2) \left(\frac{1}{k_{e,M}^s} + \frac{1}{k_{e,K}^s} \right) + \right. \\
&\left. + \mu_{v,M}^s{}^2 (99k_{v,M}^s{}^2 + 84k_{v,M}^s \mu_{v,M}^s + 20\mu_{v,M}^s{}^2) \left(\frac{1}{\mu_{e,M}^s} + \frac{1}{\mu_{e,K}^s} \right) \right] \\
M_{-1}^0 &= \frac{1}{\mu_{v,M}^s} + \frac{16\varepsilon}{45\mu_{v,M}^s} \frac{(3k_{v,M}^s + 4\mu_{v,M}^s)(9k_{v,M}^s + 4\mu_{v,M}^s)}{(3k_{v,M}^s + 2\mu_{v,M}^s)(3k_{v,M}^s + \mu_{v,M}^s)} \\
M_0^\infty &= \frac{1}{\mu_{e,M}^s} + \frac{16\varepsilon}{45\mu_{e,M}^s} \frac{(3k_{e,M}^s + 4\mu_{e,M}^s)(9k_{e,M}^s + 4\mu_{e,M}^s)}{(3k_{e,M}^s + 2\mu_{e,M}^s)(3k_{e,M}^s + \mu_{e,M}^s)} \\
M_{-1}^\infty &= \frac{48\varepsilon}{48} \left(\frac{1}{\mu_{v,M}^s} + \frac{1}{\mu_{v,K}^s} \right) + \frac{16}{45} \frac{\varepsilon}{(3k_{e,M}^s + 2\mu_{e,M}^s)^2 (3k_{e,M}^s + \mu_{e,M}^s)^2} * \\
&* \left[3k_{e,M}^s{}^2 (63k_{e,M}^s{}^2 + 60k_{e,M}^s \mu_{e,M}^s + 16\mu_{e,M}^s{}^2) \left(\frac{1}{k_{v,M}^s} + \frac{1}{k_{v,K}^s} \right) + \right. \\
&\left. + \mu_{e,M}^s{}^2 (99k_{e,M}^s{}^2 + 84k_{e,M}^s \mu_{e,M}^s + 20\mu_{e,M}^s{}^2) \left(\frac{1}{\mu_{v,M}^s} + \frac{1}{\mu_{v,K}^s} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Observa-se que os parâmetros K_0^∞ , K_{-1}^∞ , M_0^∞ e M_{-1}^∞ pode ser respectivamente escritos por meio de K_{-1}^0 , K_0^0 , M_{-1}^0 e M_0^0 simplesmente trocando as respectivas propriedades elásticas por viscosas e vice versa. Por exemplo, troca-se $k_{e,M}^s$ por $k_{v,M}^s$ e $\mu_{v,k}^s$ por $\mu_{e,k}^s$ (para todos parâmetros).

Supondo-se agora que as descontinuidades sejam escritas por meio de um modelo elástico, tem-se o seguinte conjunto de parâmetros:

$$\begin{aligned}
K_0^0 &= \left(\frac{1}{k_{e,M}^s} + \frac{1}{k_{e,K}^s} \right) + \frac{4\pi}{3} \frac{\varepsilon}{ak_n} \\
K_{-1}^0 &= \frac{1}{k_{v,M}^s}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$K_0^\infty = \frac{1}{k_{e,M}^s} + \frac{4\pi\varepsilon}{3} \frac{(3k_{e,M}^s + 4\mu_{e,M}^s)}{\pi\mu_{e,M}^s(3k_{e,M}^s + \mu_{e,M}^s) + ak_n(3k_{e,M}^s + 4\mu_{e,M}^s)}$$

$$K_{-1}^\infty = \left(\frac{1}{k_{v,M}^s} + \frac{1}{k_{v,K}^s} \right) + \frac{\varepsilon\pi\mu_{e,M}^{s^2}}{\pi\mu_{e,M}^s(3k_{e,M}^s + \mu_{e,M}^s) + ak_n(3k_{e,M}^s + 4\mu_{e,M}^s)} *$$

$$* \left[+12k_{v,M}^{s^2} \left(\frac{1}{k_{e,M}^s} + \frac{1}{k_{e,K}^s} \right) + \left(12k_{v,M}^{s^2} + 8k_{v,M}^s\mu_{v,M}^s + \frac{16}{3}\mu_{v,M}^{s^2} \right) \left(\frac{1}{\mu_{e,M}^s} + \frac{1}{\mu_{e,K}^s} \right) \right]$$

e

$$M_0^0 = \left(\frac{1}{\mu_{e,M}^s} + \frac{1}{\mu_{e,K}^s} \right) + \frac{8\pi\varepsilon(3k_n + 2k_t)}{15 ak_n k_t}$$

$$M_{-1}^0 = \frac{1}{\mu_{v,M}^s}$$

$$M_0^\infty = \frac{1}{\mu_{e,M}^s} + \frac{16\pi\varepsilon}{45} (3k_{e,M}^s + 4\mu_{e,M}^s) \left[\frac{6}{\pi\mu_{e,M}^s(3k_{e,M}^s + \mu_{e,M}^s) + ak_n(3k_{e,M}^s + 4\mu_{e,M}^s)} + \frac{1}{3\pi\mu_{e,M}^s(3k_{e,M}^s + \mu_{e,M}^s) + 4ak_t(3k_{e,M}^s + 4\mu_{e,M}^s)} \right]$$

$$M_{-1}^\infty = \left(\frac{1}{\mu_{v,M}^s} + \frac{1}{\mu_{v,K}^s} \right) + \frac{16\pi^2\varepsilon\mu_{e,M}^{s^2}}{45} *$$

$$* \left\{ \frac{9k_{e,M}^{s^2} \left(\frac{1}{k_{v,M}^s} + \frac{1}{k_{v,K}^s} \right) + (9k_{e,M}^{s^2} + 6k_{e,M}^s\mu_{e,M}^s + 4\mu_{e,M}^{s^2}) \left(\frac{1}{\mu_{v,M}^s} + \frac{1}{\mu_{v,K}^s} \right)}{\left[\pi\mu_{e,M}^s(3k_{e,M}^s + \mu_{e,M}^s) + ak_n(3k_{e,M}^s + 4\mu_{e,M}^s) \right]^2} \right.$$

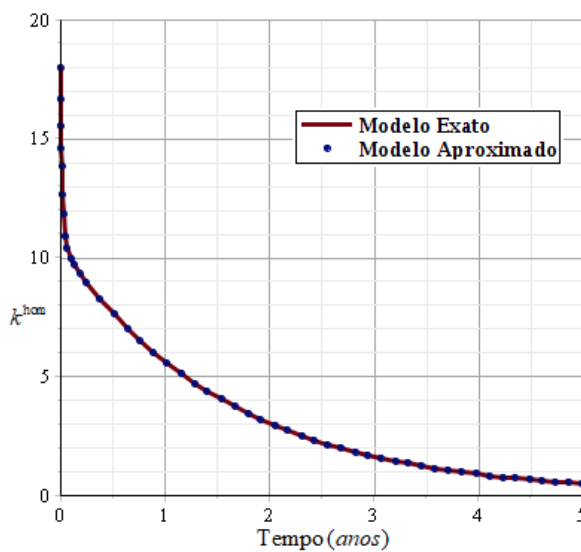
$$\left. + \frac{6k_{e,M}^{s^2} \left(\frac{1}{k_{v,M}^s} + \frac{1}{k_{v,K}^s} \right) + (9k_{e,M}^{s^2} + 12k_{e,M}^s\mu_{e,M}^s + 8\mu_{e,M}^{s^2}) \left(\frac{1}{\mu_{v,M}^s} + \frac{1}{\mu_{v,K}^s} \right)}{\left[3\pi\mu_{e,M}^s(3k_{e,M}^s + \mu_{e,M}^s) + 4ak_t(3k_{e,M}^s + 4\mu_{e,M}^s) \right]^2} \right\} \quad (\text{B.4})$$

ANEXO C: COMPARAÇÃO ENTRE MODELO DE BURGER APROXIMADO E SOLUÇÃO EXATA

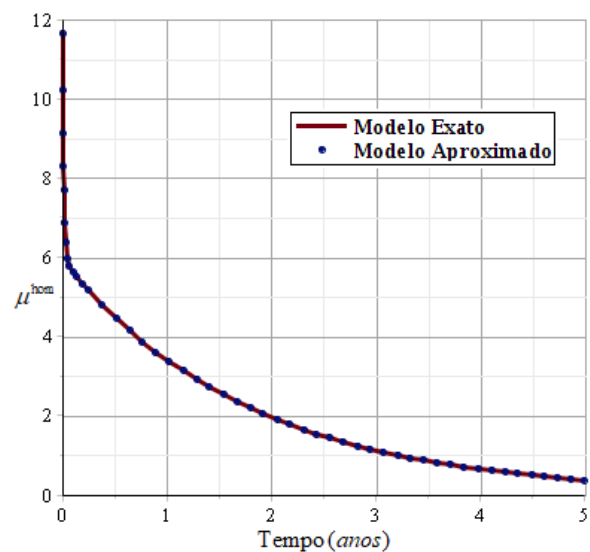
O presente anexo visa comparar graficamente os módulos k^{hom} e μ^{hom} obtidos por meio do modelo aproximado de Burger com os valores exatos das respectivas funções obtidas pela transformada inversa dos módulos $k^{\text{hom}*}$ e $\mu^{\text{hom}*}$. Dado que as principais diferenças entre estas abordagens são função do modelo reológico associado as fraturas, os seguintes modelos para fraturas são considerados: fissura, elástico, Maxwell. As propriedades admitidas para a matriz sólida e para as fraturas são as mesmas elencadas na seção 3:

$$\begin{aligned}
 k_{e,M}^s &= 24.4 \quad ; \quad k_{v,M}^s = 23.2 \quad ; \quad k_{e,K}^s = 39.3 \quad ; \quad k_{v,K}^s = 1.6 \\
 \mu_{e,M}^s &= 13.3 \quad ; \quad \mu_{v,M}^s = 12.3 \quad ; \quad \mu_{e,K}^s = 14.1 \quad ; \quad \mu_{v,K}^s = 0.4 \\
 k_n^e &= 42.2 \quad ; \quad k_n^v = 22.2 \quad ; \quad k_t^e = 16.9 \quad ; \quad k_t^v = 8.9 \quad ; \quad \mathcal{N} = 1
 \end{aligned}
 \tag{C.1}$$

Inicialmente, associando a matriz sólida junto com fissuras, o comportamento homogeneizado das propriedades é graficamente representado por:



a) Módulo Volumétrico



b) Módulo de Cisalhamento

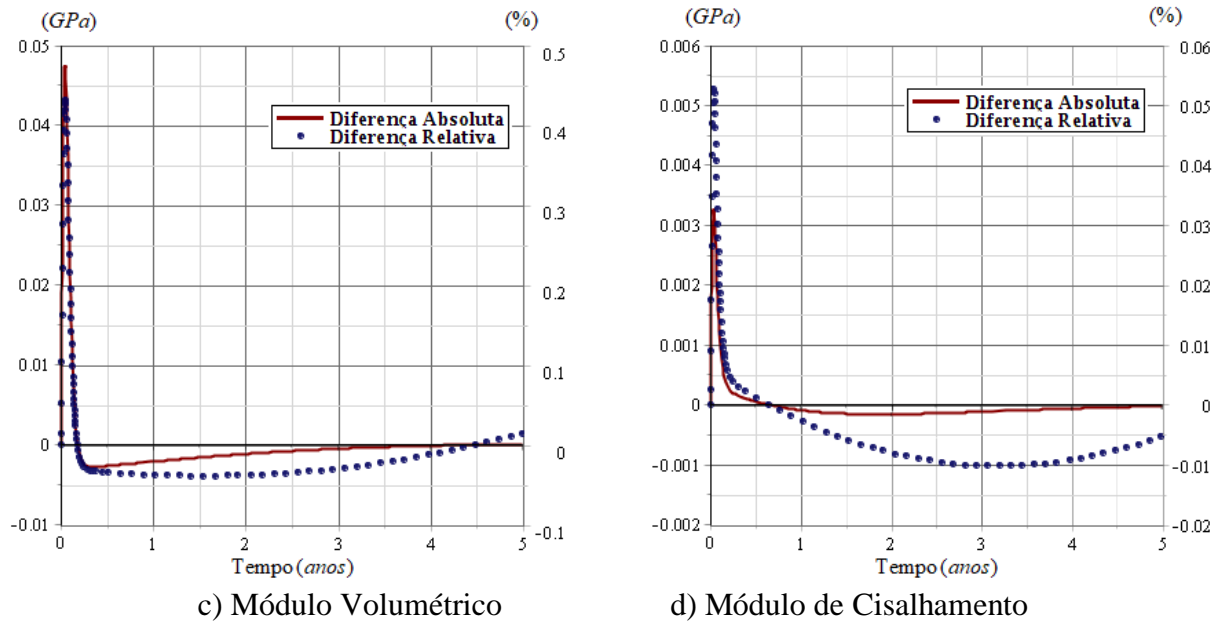
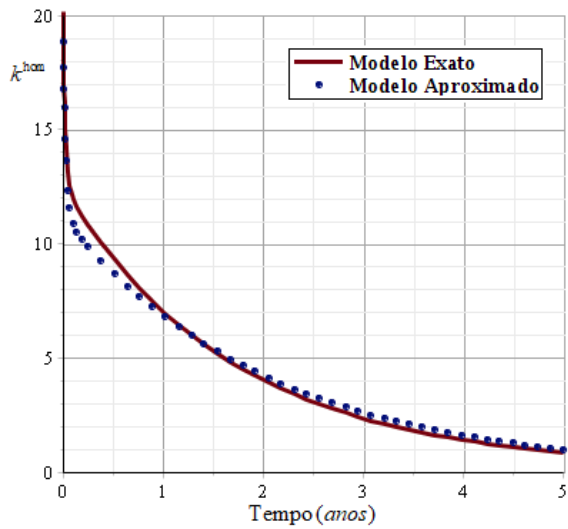


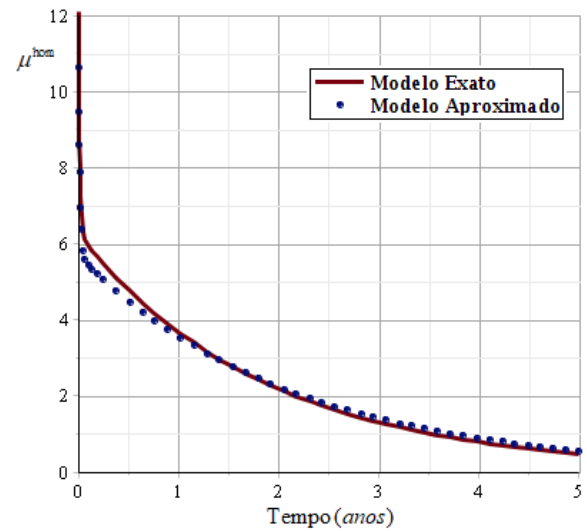
Figura C.1: Comparação entre modelo de Burger aproximado e modelo exato.

Adotado o modelo de fissuras para representar as descontinuidades, percebe-se que o modelo aproximado de Burger representa com excelente precisão o modelo reológico do material homogeneizado. O erro decorrente desta aproximação foi, para as referidas propriedades, menor de 0,5% nos instantes iniciais, onde as propriedades variam mais abruptamente. Para tempos superiores, o erro decresce até valores menores de 0,1%. Observa-se que, de acordo com a metodologia utilizada para esta aproximação, erros apenas ocorrem em tempos transientes, sendo nulos em $t = 0$ e em $t \rightarrow \infty$.

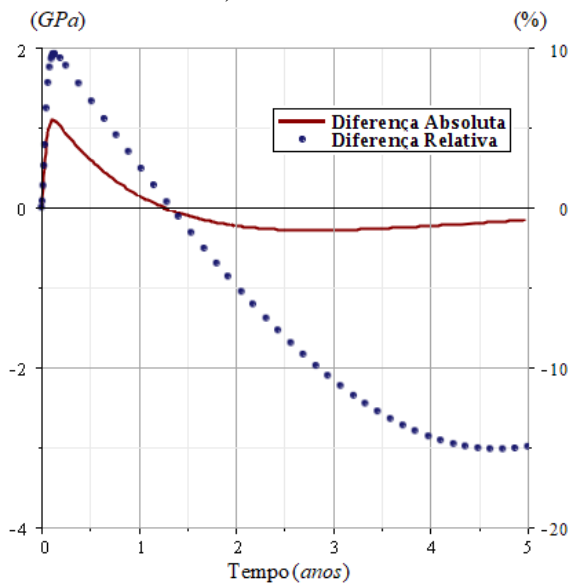
Fazendo uso de modelos elásticos para a representação das descontinuidades, tem-se:



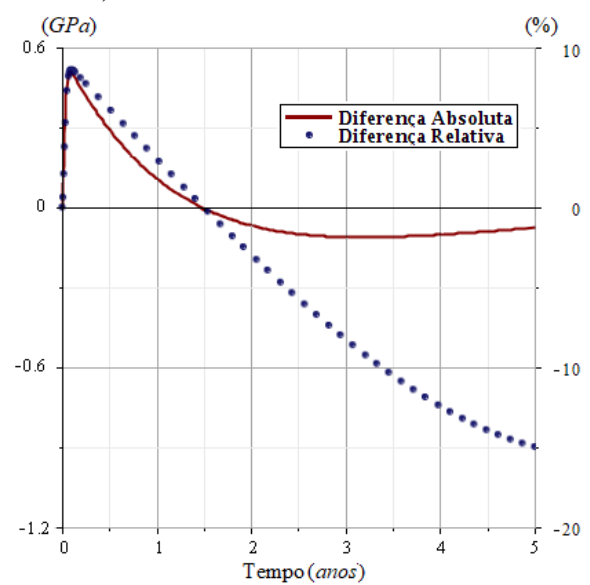
a) Módulo Volumétrico



b) Módulo de Cisalhamento



c) Módulo Volumétrico

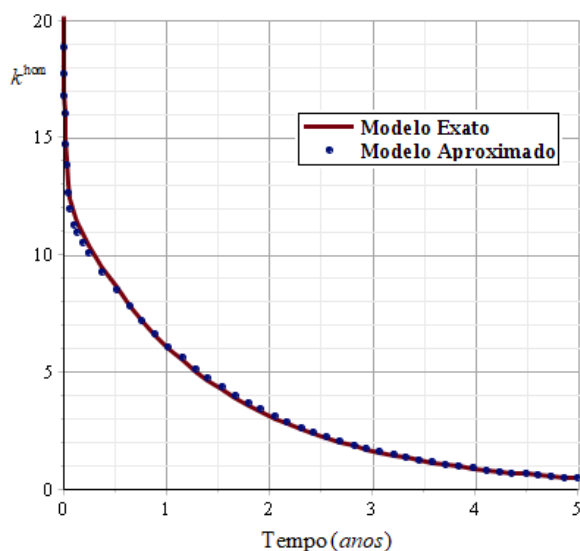


d) Módulo de Cisalhamento

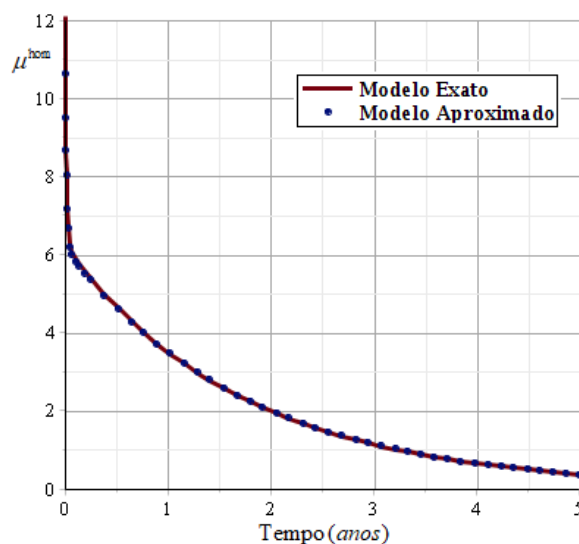
Figura C.2: Comparação entre modelo de Burger aproximado e modelo exato.

Relativamente a análise com fissuras, modelos de fraturas elásticas levam a uma aproximação menos precisa, promovendo um erro que pode chegar a 10% imediatamente após $t=0$. Embora o erro relativo atinja valores maiores no decorrer do tempo, a análise em valores absolutos indica que ambos os modelos tendem rapidamente a um mesmo valor comum nulo. Independentemente, o modelo aproximado de Burger permanece adequado nesta situação, sendo uma boa aproximação do comportamento homogeneizado.

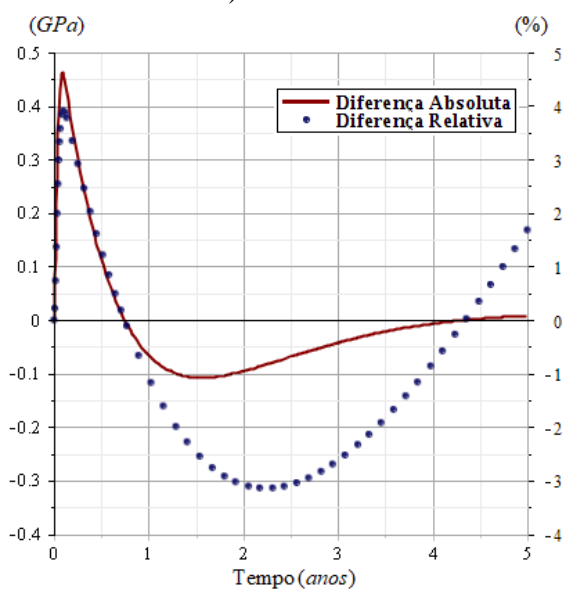
Fazendo uso do modelo de Maxwell para a representação das discontinuidades, tem-se:



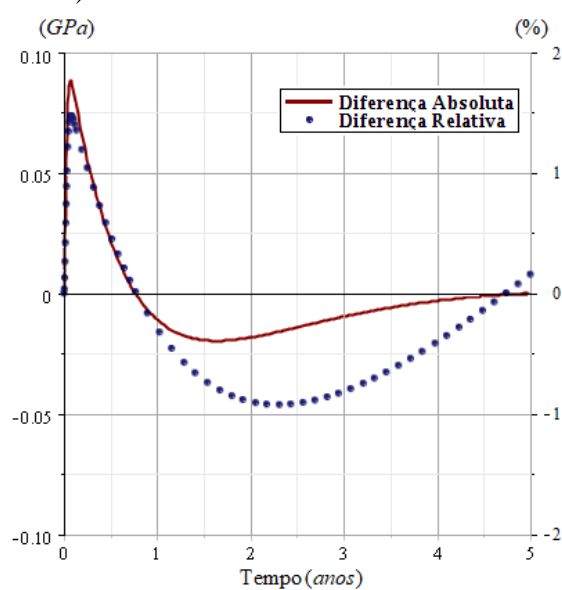
a) Módulo Volumétrico



b) Módulo de Cisalhamento



c) Módulo Volumétrico



d) Módulo de Cisalhamento

Figura C.3: Comparação entre modelo de Burger aproximado e modelo exato.

Por fim, a adoção do modelo reológico de Maxwell às fraturas também forneceu uma ótima aproximação do comportamento homogeneizado pelo modelo de Burger. Nesta análise, os erros relativos foram inferiores a 5%, fornecendo excelentes aproximações para tempos transientes.

ANEXO D: DETERMINAÇÃO DA ENERGIA DIFERIDA ESCRITA EM VARIÁVEIS MACROSCÓPICAS

Dado que a determinação da energia diferida homogeneizada com base na Eq. (4.43)₃ é matematicamente complexa, uma análise alternativa partindo do modelo reológico macroscópico (presumido previamente conhecido) pode ser realizada. Com base no modelo reológico macroscópico, termos residuais provenientes de uma eventual homogeneização não são encontrados, dividindo-se a energia livre apenas nos termos instantâneos e diferidos. A identificação da energia instantânea nos moldes da Eq. (4.43)₁ permite revelar a expressão macroscópica referente a energia diferida. Anteriormente, identificou-se que o comportamento macroscópico pode ser exatamente representado por um modelo Maxwell generalizado ou aproximado por um modelo Burger. Assim, as energias diferidas referentes a ambos os modelos são determinadas.

Partindo do **modelo generalizado de Maxwell**, a energia elástica macroscópica total é avaliada através da soma da energia elástica de cada tramo $\underline{\underline{\Sigma}}_j : \underline{\underline{E}}_j$:

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_j \underline{\underline{E}}_j^e : \underline{\underline{\Sigma}}_j \quad (\text{D.1})$$

Para o modelo generalizado de Maxwell, as seguintes igualdades são verificadas:

$$\underline{\underline{E}}_j = \underline{\underline{E}} \quad ; \quad \underline{\underline{E}}_j^e = \mathbb{S}_j^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}}_j \quad ; \quad \underline{\underline{\Sigma}}_j = \mathbb{R}_j^{\text{hom}} \odot \underline{\underline{E}}_j \quad (\text{D.2})$$

A manipulação matemática da expressão (D.1) permite escrever:

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_j \underline{\underline{E}} \odot \mathbb{R}_j^{\text{hom}} : \mathbb{S}_j^{\text{hom}} : \mathbb{R}_j^{\text{hom}} \odot \underline{\underline{E}} \quad (\text{D.3})$$

Onde $\mathbb{R}_j^{\text{hom}}$ é o tensor de relaxamento do j-ésimo ramo do modelo Maxwell e $\mathbb{S}_j^{\text{hom}}$ é a rigidez da mola correspondente. Definindo $\underline{\underline{E}}_j^v$ através de:

$$\mathbb{R}_{0,j}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}}_j^v = \int_0^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(\tau) : \frac{d\mathbb{R}_j^{\text{hom}}(t-\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{D.4})$$

onde $\mathbb{R}_{0,j}^{\text{hom}} = \mathbb{R}_j^{\text{hom}}(t=0) = \mathbb{C}_j^{\text{hom}}$, é possível escrever:

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_j (\underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\mathbb{E}}}_j^v) : \mathbb{C}_j^{\text{hom}} : (\underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\mathbb{E}}}_j^v) \quad (\text{D.5})$$

Separando de (D.5) o termo referente a energia elástica $\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \underline{\underline{\mathbb{E}}}^e + \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v$, é possível escrever:

$$\Psi = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v) : \sum_j \mathbb{C}_j^{\text{hom}} : (\underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v) + \frac{1}{2} \sum_j (\underline{\underline{\mathbb{E}}}^v - \underline{\underline{\mathbb{E}}}_j^v) : \mathbb{C}_j^{\text{hom}} : (\underline{\underline{\mathbb{E}}}^v - \underline{\underline{\mathbb{E}}}_j^v) - (\underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v) : \sum_j \mathbb{C}_j^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}}_j^v \quad (\text{D.6})$$

Dado que para o modelo generalizado de Maxwell $\mathbb{R}_0^{\text{hom}} = \sum_j \mathbb{C}_j^{\text{hom}}$, o primeiro termo de

(D.7) é matematicamente igual a energia instantânea, permitindo a identificação de energia diferida como:

$$\Psi_D = \frac{1}{2} \sum_j (\underline{\underline{\mathbb{E}}}^v - \underline{\underline{\mathbb{E}}}_j^v) : \mathbb{C}_j^{\text{hom}} : (\underline{\underline{\mathbb{E}}}^v - \underline{\underline{\mathbb{E}}}_j^v) - (\underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v) : \sum_j \mathbb{C}_j^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}}_j^v \quad (\text{D.7})$$

Supondo-se então que o modelo reológico do material na escala macroscópica é representado pelo **modelo de Burger**, a correspondente energia elástica se avalia por:

$$\Psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbb{E}}}^e : \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^e + \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbb{E}}}_K : \mathbb{C}_K^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}}_K \quad (\text{D.8})$$

Onde $\mathbb{C}_K^{\text{hom}}$ é a rigidez da mola do Kelvin. Essa equação pode ser reescrita diretamente como:

$$\Psi = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v) : \mathbb{R}_0^{\text{hom}} : (\underline{\underline{\mathbb{E}}} - \underline{\underline{\mathbb{E}}}^v) + \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbb{E}}}_K : \mathbb{C}_K^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}}_K \quad (\text{D.9})$$

Mais uma vez, o primeiro termo corresponde à energia instantânea. O termo remanente é, portanto, a energia diferida:

$$\Psi_D = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbb{E}}}_K : \mathbb{C}_K^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}}_K \quad (\text{D.10})$$

ANEXO E: EXPRESSÕES PARA CONDIÇÃO DE PROPAGAÇÃO PARA FRATURAS PARALELAS

Vamos considerar que o material é formado por uma matriz homogênea combinado com diversas microfaturas paralelamente orientadas. Tal como anteriormente relacionado, considera-se condições de carregamento uniaxial (Figura E.1). O problema é definido pela imposição das deformações uniaxiais, onde $\underline{\underline{E}} = E(t)\underline{n} \otimes \underline{n} = \dot{E}_0 t \underline{n} \otimes \underline{n}$, onde \underline{n} é o vetor normal as fraturas. A tensão resultante deste carregamento é dada por $\Sigma_{nn}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) : \underline{n} \otimes \underline{n}$, ligados pela relação:

$$\Sigma_{nn}(t) = E_{oed}^{\text{hom}} \circ E = E_{oed}^{\text{hom}}(0)(E - E^v) \quad (\text{E.1})$$

Onde $E_{oed}^{\text{hom}}(t)$ é o módulo efetivo no teste de relaxação aplicado segundo a direção \underline{n} . Desta forma, o módulo aparente $\underline{n} \otimes \underline{n} : \mathbb{C}^{\text{hom}*}(p) : \underline{n} \otimes \underline{n}$ corresponde a contraparte viscosa da componente C_{3333} .

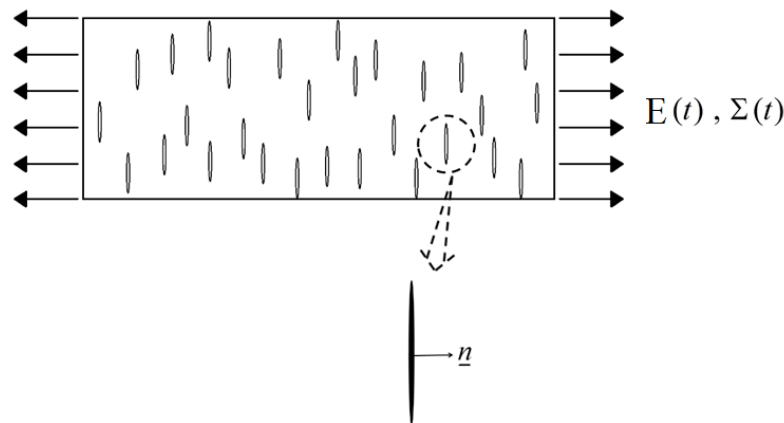


Figura D.1: Material com fraturas paralelas sujeitas a carregamento uniaxial.

Para este caso de carregamento, a taxa de liberação de energia toma a seguinte forma:

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} \left(E(t) - E^v(t) \right)^2 \frac{\partial E_{oed}^{\text{hom}}(0)}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} \Sigma_{nn}(t)^2 \frac{\partial \left(E_{oed}^{\text{hom}}(0)^{-1} \right)}{\partial \varepsilon} \quad (\text{E.2})$$

Onde $E_{oed}^{\text{hom}}(0) = E_{oed}^{\text{hom}}(t=0) = \mathbb{R}_{3333}^{\text{hom}}(t=0)$ corresponde ao modulo odométrico elástico expresso, na notação viscoelástica, por:

$$E_{oed}^{\text{hom}}(0) = (3k_{s,M}^e + 4\mu_{s,M}^e) \frac{\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e)}{3\kappa_2^e + 3\pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e) + 4\pi \varepsilon} \quad (\text{E.3})$$

Nos termos $\partial E_{oed}^{\text{hom}}(0)/\partial \varepsilon$ e $\partial E_{oed}^{\text{hom}}(0)^{-1}/\partial \varepsilon$ são analiticamente escritos como:

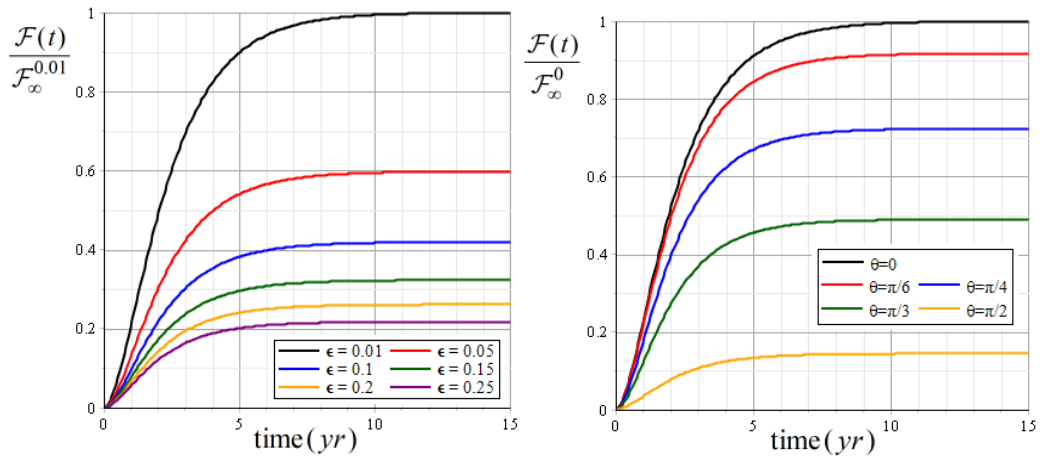
$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{oed}^{\text{hom}}(0)}{\partial \varepsilon} &= \frac{(3k_{s,M}^e + 4\mu_{s,M}^e)}{\mathcal{M}_{oed}^0} \left(\frac{\kappa_2^e}{3\varepsilon} \mathcal{M}_{oed}^0 - (\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e)) \left(\frac{\kappa_2^e}{\varepsilon} \right) + 4\pi \right) \\ \frac{\partial E_{oed}^{\text{hom}}(0)^{-1}}{\partial \varepsilon} &= - \frac{\frac{\kappa_2^e}{3\varepsilon} \mathcal{M}_{oed}^0 - (\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e)) \left(\frac{\kappa_2^e}{\varepsilon} \right) + 4\pi}{(3k_{s,M}^e + 4\mu_{s,M}^e) (\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e))^2} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

onde $\mathcal{M}_{oed}^0 = 3\kappa_2^e + 3\pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e) + 4\pi \varepsilon$

Portanto, a taxa de liberação de energia é analiticamente escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\frac{1}{2} (\mathbb{E}(t) - \mathbb{E}^v(t))^2 \frac{(3k_{s,M}^e + 4\mu_{s,M}^e)}{\mathcal{M}_{oed}^0} \left(\frac{\kappa_2^e}{3\varepsilon} \mathcal{M}_{oed}^0 - (\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e)) \left(\frac{\kappa_2^e}{\varepsilon} \right) + 4\pi \right) \\ &= \frac{1}{2} \Sigma_{mm}(t)^2 \frac{\frac{\kappa_2^e}{3\varepsilon} \mathcal{M}_{oed}^0 + 4\pi - (\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e)) \left(\frac{\kappa_2^e}{\varepsilon} \right)}{(3k_{s,M}^e + 4\mu_{s,M}^e) (\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e))^2} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Na situação em que o carregamento é linearmente crescente (i.e. $\mathbb{E}(t) = \mathbb{E}_0 t H(t)$) pode-se representar graficamente a taxa de liberação de energia com a figura D.2.



a) função do parâmetro de dano

b) função da orientação das fraturas

Figura D.2: Evolução temporal da taxa de liberação de ennergia.

$$\mathcal{N} = 1; \varepsilon = 0.1; \mathcal{F}_\infty^{0.01} = 504.0 \text{ J m}^{-3}; \mathcal{F}_\infty^0 = 211.4 \text{ J m}^{-3}; \dot{E}_0 = 3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

A observação direta da Figura D.2.a não permite tirar conclusões além das já feitas nas seções anteriores. No entanto, a Figura D.2.b mostra que a taxa de liberação de energia diminui à medida que o ângulo relativo entre as fraturas e o carregamento aumenta. No limite, quando o carregamento é perpendicular à orientação da fratura, a taxa de liberação de energia assume um valor mínimo, pois apenas os esforços transversais do carregamento dado contribuem para a propagação da fratura. Isso indica que a orientação do carregamento afeta diretamente a propagação da fratura paralela, apresentando mais destaque quando o carregamento e a fratura são orientados paralelamente.

Similarmente à distribuição isotrópica da fratura, é possível estudar a taxa de liberação de energia assintótica \mathcal{F}_∞ para carregamento de taxa de deformação constante, o qual pode ser avaliado aplicando \mathcal{F} ao limite quando $t \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{F}_\infty = \frac{1}{2} \Sigma_{nn,\infty} (t)^2 \frac{\frac{\kappa_2^e}{3\varepsilon} \mathcal{M}_{oed}^0 + 4\pi - (\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e)) \left(\frac{\kappa_2^e}{\varepsilon} \right)}{(3k_{s,M}^e + 4\mu_{s,M}^e) (\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e))^2} \quad (\text{E.6})$$

Onde a relação entre $\Sigma_{nn,\infty}$ e \dot{E}_0 é

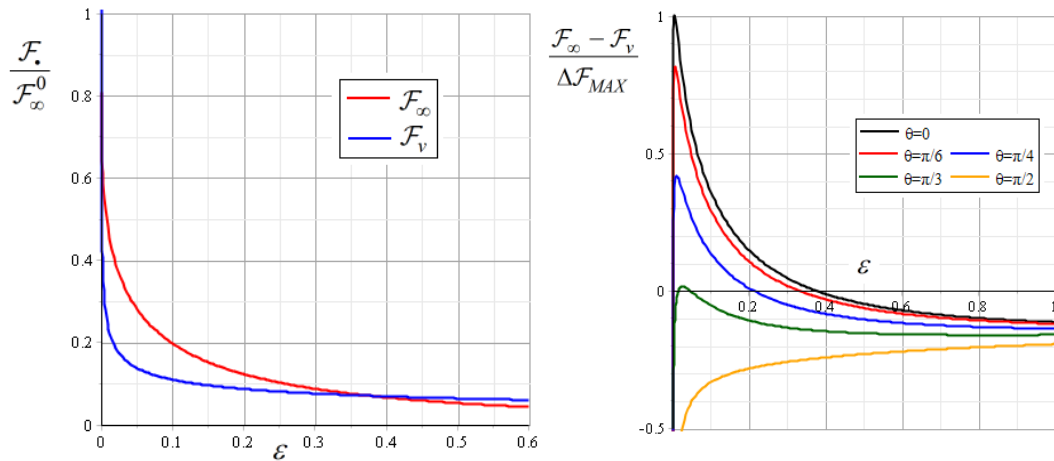
$$\Sigma_{m,\infty} = \dot{E}_0 \frac{\left(3k_{s,M}^v + 4\mu_{s,M}^v\right) \left(\kappa_2^\infty + \pi \kappa_1^\infty (1 - \kappa_1^\infty)\right)}{3\kappa_2^\infty + 3\pi \kappa_1^\infty (1 - \kappa_1^\infty) + 4\pi\varepsilon} \quad (\text{E.7})$$

O que leva a expressão de \mathcal{F}_∞ em função de \dot{E}_0 :

$$\mathcal{F}_\infty = \frac{1}{2} \dot{E}_0^2 \frac{\left(3k_{s,M}^v + 4\mu_{s,M}^v\right)^2 \left(\kappa_2^\infty + \pi \kappa_1^\infty (1 - \kappa_1^\infty)\right)^2 \frac{\kappa_2}{3\varepsilon} \mathcal{M}_{oed}^0 + 4\pi - \left(\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e)\right) \left(\frac{\kappa_2^e}{\varepsilon}\right)}{\left(3k_{s,M}^e + 4\mu_{s,M}^e\right) \left(\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e)\right)^2 \frac{\mathcal{M}_{oed}^\infty}{\varepsilon}} \quad (\text{E.8})$$

$$\text{onde } \mathcal{M}_{oed}^\infty = 3\kappa_2^\infty + 3\pi \kappa_1^\infty (1 - \kappa_1^\infty) + 4\pi\varepsilon$$

Mais uma vez, é possível comparar diretamente a taxa de liberação de energia assintótica com o valor crítico:



a) Valores absolutos

b) valores relativos conforme orientação

Figura D.3: comparação entre \mathcal{F}_∞ e \mathcal{F}_v .

$$\mathcal{N} = 1 \text{ m}^{-3}; \mathcal{F}_c = 26 \text{ J m}^{-3}; \mathcal{F}_\infty^0 = 1068.5 \text{ J m}^{-3}; \Delta \mathcal{F}_{MAX} = 261 \text{ J m}^{-3}; \dot{E}_0 = 3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Embora a forma geral do gráfico representado na figura D.3.a seja a mesma que a apresentada no caso de material isotrópico no nível macroscópico, um maior domínio de viabilidade de propagação é observado aqui, elevando o valor limite do parâmetro de dano. Nota-se que, ao contrário do que ocorreu para o cisalhamento nas fraturas isotrópicas, a razão para isso neste contexto se deve à orientação relativa entre as fraturas e o carregamento. Enquanto a Figura D.2.b indica que a taxa de liberação de energia diminui à medida que o

ângulo relativo entre as fraturas e a carga imposta aumenta, a Figura D.3.b indica um domínio de viabilidade menor para propagação. Tal domínio é entendido como valores de parâmetros de dano de limite inferior, indicando que, se atingido o critério de propagação, a propagação tende a ser menos crítica à medida que o ângulo relativo aumenta. Embora a determinação dos valores exatos dependa dos dados do modelo, é possível que a propagação seja instável (ou seja, $\varepsilon_{\text{lim}} \geq 1$) quando o carregamento é paralelo às fraturas e inexistente quando o carregamento é perpendicular.

Um raciocínio análogo ao abordado no corpo do trabalho pode ser realizado para obtenção de condições de propagação em tensões ou deformações. Para o caso de deformações escreve-se:

$$\dot{\varepsilon}_0 \leq \dot{\varepsilon}_{CR} = \frac{\left(\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e)\right)}{\left(3k_{s,M}^v + 4\mu_{s,M}^v\right) \left(\kappa_2^\infty + \pi \kappa_1^\infty (1 - \kappa_1^\infty)\right)} \sqrt{\frac{4\pi \left(3k_{s,M}^e + 4\mu_{s,M}^e\right) \mathcal{M}_{oed}^\infty}{3a \left(\kappa_2^e + \pi \kappa_1^e (1 - \kappa_1^e)\right) \left(\frac{\kappa_2^e}{\varepsilon} - \frac{\kappa_2^e}{3\varepsilon} \mathcal{M}_{oed}^0 - 4\pi\right)} \mathcal{F}_c} \quad (\text{E.9})$$

A Figura D.4 apresenta a deformação crítica em função do parâmetro de dano para distribuição de fratura paralela

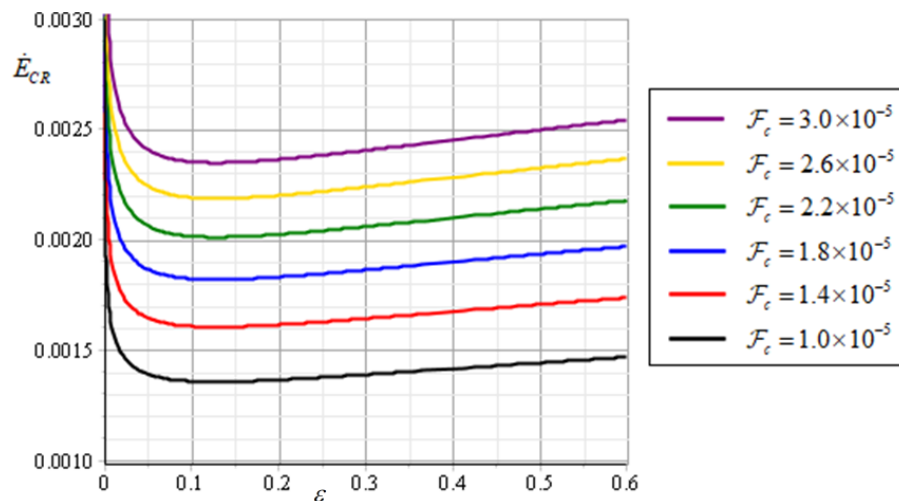


Figura 20: Taxa de deformação crítica $\dot{\varepsilon}_{CR}$ em função de ε e \mathcal{F}_c .

$$\mathcal{N} = 1m^{-3}; \dot{\varepsilon}_0 = 3 \times 10^{-3} s^{-1}$$

As conclusões obtidas na Figura D.4 são semelhantes às obtidas para os demais casos de carregamento, indicando uma maior facilidade em atingir o parâmetro de dano limite superior.

ANEXO F: EXPRESSÕES COMPLEMENTARES

Este anexo visa desenvolver as formulações viscoelásticas não-lineares complementares aos tensores de tensões descritos nas Eq. (5.24) e Eq. (5.25). Dado que cada uma das expressões condiciona um raciocínio diferente, este anexo será subdividido em dois: Enquanto seção F.1 formula as expressões derivadas da Eq. (5.24), a seção F.2 formula as expressões derivadas da Eq. (5.25).

Neste contexto, as derivadas parciais na forma $\frac{\partial R(t, \tau, \phi(t))}{\partial \tau}$ são realizadas sobre a segunda variável (isso é, apenas sobre τ), a passo que as derivadas parciais $\frac{\partial R(t, \tau, \phi(\tau))}{\partial \tau}$ são realizadas tanto sobre a segunda quanto sobre a terceira variável (isso é, sobre τ e também sobre $\phi(\tau)$). As formas similares ao formalismo sem envelhecimento (i.e., $\frac{\partial R(t-\tau, \phi(t))}{\partial \tau}$ e $\frac{\partial R(t-\tau, \phi(\tau))}{\partial \tau}$) tem uma interpretação similar, sendo suas derivadas parciais atuantes, respectivamente, sobre a primeira variável (isso é, apenas sobre $t-\tau$) e sobre ambas as variáveis (isso é, sobre $t-\tau$ e $\phi(\tau)$)

F.1) EXPRESSÕES DERIVADAS DA FORMA $\underline{\sigma}_t$

Primeiramente é lembrada a origem do tensor de deformações viscosas descrito na Eq.(5.26). Tomando-se a Eq. (5.24), que descreve o tensor de tensões $\underline{\sigma}_t$:

$$\underline{\sigma}_t = \int_{-\infty}^t \mathbb{R}(t, \tau, \phi(t)) : \frac{d\underline{\varepsilon}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{F.1})$$

A integração por partes desta expressão leva a forma:

$$\underline{\sigma}_t = \mathbb{R}(t, t, \phi(t)) : \underline{\varepsilon}(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi(t))}{\partial \tau} : \underline{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (\text{F.2})$$

Pré-multiplicando a Eq. (F.2) por $\mathbb{R}^{-1}(t, t, \phi(t)) = \mathbb{F}(t, t, \phi(t))$ obtém-se:

$$\underline{\varepsilon}(t) = \mathbb{F}(t, t, \phi(t)) : \underline{\sigma}_t(t, \phi(t)) + \mathbb{F}(t, t, \phi(t)) : \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi(t))}{\partial \tau} : \underline{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (\text{F.3})$$

Dado que o tensor de deformações elásticas é definido por $\mathbb{F}_0 : \underline{\sigma}_t$, onde $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}(t, t, \phi(t))$, verifica-se que o tensor de deformações viscosas $\underline{\varepsilon}_t^v$ é dado por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_t^v(t, \tau) = \mathbb{F}(t, t, \phi(t)) : \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi(t))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (\text{F.4})$$

A continuação desta seção visa determinar a taxa $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}_t$. Para tal raciocínio, adota-se uma forma similar ao formalismo sem envelhecimento do material, levando a expressão de $\underline{\underline{\sigma}}_t$ a:

$$\underline{\underline{\sigma}}_t = \int_{-\infty}^t \mathbb{R}(t - \tau, \phi(t)) : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{F.5})$$

A derivada temporal da Eq. (F.5) é diretamente descrita pela fórmula de Leibniz:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}_t = \left[\mathbb{R}(t - \tau, \phi(t)) : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=t} + \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t - \tau, \phi(t))}{\partial t} : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{F.6})$$

Chamando-se $T = t - \tau$, escreve-se:

$$\frac{\partial \mathbb{R}(t - \tau, \phi(t))}{\partial t} = \frac{\partial \mathbb{R}(T, \phi)}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial \mathbb{R}(T, \phi)}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{dT}{d\tau} \quad (\text{F.7})$$

de onde pode-se reescrever a Eq. (F.6) como:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}_t = \int_{-\infty}^t \mathbb{R}(t - \tau, \phi(t)) : \frac{d^2 \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau^2} d\tau + \frac{d\phi(t)}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t - \tau, \phi(t))}{\partial \phi} : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{F.8})$$

A representação das Eq. (F.5) e Eq. (F.8) através do operador de Boltzmann \odot , relacionado $\mathbb{R}(t - \tau, \phi(t))$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)$ a $\underline{\underline{\sigma}}_t$, é dada por:

$$\underline{\underline{\sigma}}_t = \mathbb{R} \odot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{F.9})$$

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}_t = \mathbb{R} \odot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \dot{\phi} \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \phi} \odot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{F.10})$$

De forma similar, a derivada temporal do tensor de deformações viscosas $\underline{\underline{\varepsilon}}_t^v$ pode ser determinada pela aplicação da fórmula de Leibniz:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_t^v &= \frac{d\mathbb{F}(0, \phi(t))}{dt} : \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t - \tau, \phi(t))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau + \\ &+ \mathbb{F}(0, \phi(t)) : \left[\left[\frac{\partial \mathbb{R}(t - \tau, \phi(t))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) \right]_{\tau=t} + \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 \mathbb{R}(t - \tau, \phi(t))}{\partial t \partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

A simplificação matemática da Eq. (F.11) leva a:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_t^v = \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_t^v}{\partial t} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_t^v}{\partial \phi} \dot{\phi} \quad (\text{F.12})$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_t^v}{\partial t} &= \mathbb{F}(0, \phi(t)) : \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t-\tau, \phi(t))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau) d\tau \\ \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_t^v}{\partial \phi} &= \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\mathbb{F}(0, \phi(t)) : \frac{\partial \mathbb{R}(t-\tau, \phi(t))}{\partial \tau} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (\text{F.13})$$

F.2) EXPRESSÕES DERIVADAS DA FORMA σ_τ

Relembra-se agora a origem do tensor de deformações viscosas descrito na Eq.(5.27). Tomando-se a Eq. (5.25) que descreve o tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}_\tau$:

$$\underline{\underline{\sigma}}_\tau = \int_{-\infty}^t \mathbb{R}(t, \tau, \phi(\tau)) : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{F.14})$$

A integração por partes desta expressão leva a forma:

$$\underline{\underline{\sigma}}_\tau = \mathbb{R}(t, t, \phi(t)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi(\tau))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (\text{F.15})$$

Pré-multiplicando a Eq. (F.15) por $\mathbb{R}^{-1}(t, t, \phi(t)) = \mathbb{F}(t, t, \phi(t))$ obtém-se:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \mathbb{F}(t, t, \phi(t)) : \underline{\underline{\sigma}}_\tau(t, \phi(t)) + \mathbb{F}(t, t, \phi(t)) : \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi(\tau))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (\text{F.16})$$

Dado que o tensor de deformações elásticas é definido por $\mathbb{F}_0 : \underline{\underline{\sigma}}_\tau$, onde $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}(t, t, \phi(t))$, verifica-se que o tensor de deformações viscosas $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau^v$ é dado por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau^v(t, \tau) = \mathbb{F}(t, t, \phi(t)) : \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t, \tau, \phi(\tau))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (\text{F.17})$$

A continuação desta seção visa determinar a taxa $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}_\tau$. Para tal raciocínio, novamente utiliza-se uma forma similar ao formalismo sem envelhecimento do material, levando a expressão de $\underline{\underline{\sigma}}_\tau$ a:

$$\underline{\underline{\sigma}}_\tau = \int_{-\infty}^t \mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau)) : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{F.18})$$

A derivada temporal da Eq. (F.18) é diretamente descrita pela fórmula de Leibniz:

$$\underline{\dot{\underline{\sigma}}}_\tau = \left[\mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau)) : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=t} + \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau))}{\partial t} : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{F.19})$$

Chamando-se $T = t - \tau$, escreve-se:

$$\frac{\partial \mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau))}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbb{R}(T, \phi)}{\partial T} \frac{dT}{d\tau} + \frac{\partial \mathbb{R}(T, \phi)}{\partial \phi} \frac{d\phi}{d\tau} \quad \text{e} \quad \frac{dT}{d\tau} = -\frac{dT}{dt} \quad (\text{F.20})$$

pode-se reescrever a Eq. (F.19) como:

$$\underline{\dot{\underline{\sigma}}}_\tau = \int_{-\infty}^t \mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau)) : \frac{d^2 \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau^2} d\tau + \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau))}{\partial \phi} \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{F.21})$$

A representação das Eq. (F.18) e Eq. (F.21) através do operador de Boltzmann \odot , relacionado $\mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau))$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)$ a $\underline{\underline{\sigma}}_\tau$, é dada por:

$$\underline{\underline{\sigma}}_\tau = \mathbb{R} \odot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{F.22})$$

$$\underline{\dot{\underline{\sigma}}}_\tau = \mathbb{R} \odot \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}} + \left[\frac{d\phi}{d\tau} \cdot \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \phi} \right] \odot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{F.23})$$

De forma similar, a derivada temporal do tensor de deformações viscosas $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau^v$ pode ser determinada pela aplicação da fórmula de Leibniz:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}_\tau^v = & \frac{d\mathbb{F}(0, \phi(t))}{dt} : \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau + \\ & + \mathbb{F}(0, \phi(t)) : \left[\left[\frac{\partial \mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau))}{\partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) \right]_{\tau=t} + \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 \mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau))}{\partial t \partial \tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

A simplificação matemática da Eq. (F.24) leva a:

$$\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}_\tau^v = \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_\tau^v}{\partial t} + \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_\tau^v}{\partial \phi} \dot{\phi} \quad (\text{F.25})$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_\tau^v}{\partial t} = & \mathbb{F}_0(\phi) : \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau))}{\partial \tau} : \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}(\tau) d\tau + \\ & + \mathbb{F}_0(\phi) : \int_{-\infty}^t \left(\frac{d\phi(t)}{dt} - \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} \right) \frac{\partial \mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau))}{\partial \phi} : \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_\tau^v}{\partial \phi} = \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\mathbb{F}(0, \phi(t)) : \frac{\partial \mathbb{R}(t-\tau, \phi(\tau))}{\partial \tau} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau$$

ANEXO G: CÓDIGO UTILIZADO NO SOFTWARE MAPLE

Este anexo visa apresentar o código programado no software Maple 18 para posterior reprodução por parte de pesquisadores interessados em dar continuidade ao formalismo desenvolvido aqui. O código desenvolvido foi dividido em “blocos”, computando partes diferentes do raciocínio.

G.1) INICIALIZAÇÃO DO PROGRAMA

Este bloco consiste na inicialização do código, bem como na adição das bibliotecas necessárias para rodá-lo. Adicionalmente, algumas funções globais e parâmetros fundamentais foram incluídos.

1) Reinicialização do Programa

restart;

Starter_Time := time();

2) Leitura de Bibliotecas Adicionais

with(LinearAlgebra);

with(inttrans);

with(MultiSeries);

with(Optimization);

with(plots);

with(CurveFitting);

NumericEventHandler(invalid_operation = Heaviside/EventHandler(value_at_zero = 1));

3) Declaração de Funções Globais

a) Transformada de Carson-Laplace e sua inversa

carson := (f, t, s) → laplace(f, t, s) s;

invcarsen := (f, s, t) → invlaplace($\frac{f}{s}$, s, t);

b) Representação matricial dos tensores de orientação esférico e desviador

JM := Matrix(6, 6, (m, n) → if m ≤ 3 and n ≤ 3 then $\frac{1}{3}$ else 0 end if);

IM := Matrix(6, 6, (m, n) → if m = n then 1 else 0 end if);

KM := IM - JM;

c) Definição das funções N e $a(\epsilon)$

N := 1; N_ := 1; a := $\epsilon \rightarrow \left(\frac{\epsilon}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$;

d) Parâmetros adimensionais de cálculo

$\kappa_1 := (p, \epsilon) \rightarrow \frac{3 \mathcal{L}k_s(p) + \mathcal{L}\mu_s(p)}{3 \mathcal{L}k_s(p) + 4 \mathcal{L}\mu_s(p)}$; $\kappa_2 := (p, \epsilon) \rightarrow \frac{3 \mathcal{L}k_n(p) a(\epsilon)}{3 \mathcal{L}k_s(p) + 4 \mathcal{L}\mu_s(p)}$;

$$\begin{aligned} \kappa_3 &:= (p, \epsilon) \rightarrow \frac{3 \mathcal{L}k_t(p) a(\epsilon)}{3 \mathcal{L}k_s(p) + 4 \mathcal{L}\mu_s(p)}; \quad \kappa_4 := (p, \epsilon) \rightarrow \frac{\mathcal{L}\mu_s(p)}{3 \mathcal{L}k_s(p) + 4 \mathcal{L}\mu_s(p)}; \\ \kappa_{1, e} &:= \epsilon \rightarrow \frac{3 k_{mse} + \mu_{mse}}{3 k_{mse} + 4 \mu_{mse}}; \quad \kappa_{2, e} := \epsilon \rightarrow \frac{3 k_{mne} a(\epsilon)}{3 k_{mse} + 4 \mu_{mse}}; \\ \kappa_{3, e} &:= \epsilon \rightarrow \frac{3 k_{mte} a(\epsilon)}{3 k_{mse} + 4 \mu_{mse}}; \quad \kappa_{4, e} := \epsilon \rightarrow \frac{\mu_{mse}}{3 k_{mse} + 4 \mu_{mse}}; \\ \kappa_{1, \infty} &:= \epsilon \rightarrow \frac{3 k_{msv} + \mu_{msv}}{3 k_{msv} + 4 \mu_{msv}}; \quad \kappa_{2, \infty} := \epsilon \rightarrow \frac{3 k_{mnv} a(\epsilon)}{3 k_{msv} + 4 \mu_{msv}}; \\ \kappa_{3, \infty} &:= \epsilon \rightarrow \frac{3 k_{mtv} a(\epsilon)}{3 k_{msv} + 4 \mu_{msv}}; \quad \kappa_{4, \infty} := \epsilon \rightarrow \frac{\mu_{msv}}{3 k_{msv} + 4 \mu_{msv}}; \end{aligned}$$

4) Encerramento do Bloco

Current_Time := time() – Starter_Time

G.2) DETERMINAÇÃO DO COMPORTAMENTO HOMOGENEIZADO (PARA FRATURAS ISÓTROPICAS)

Neste bloco o comportamento do meio viscoelástico homogeneizado foi determinado. A fim de salvar tempo computacional apenas as soluções mais rápidas foram mantidas. Aqui, os parâmetros referentes ao comportamento dos constituintes na escala microscópica devem ser incluídos. Para o comportamento estabelecido para fraturas paralelas, requisite diretamente ao autor. Observa-se que o raciocínio desenvolvido realiza a transformada inversa numericamente através das bibliotecas internas do software Maplesoft, não utilizando o raciocínio de transformada inversa, exposto na seção 3. Este raciocínio também foi codificado, mas por não ser otimizado computacionalmente verifica-se um maior tempo de solução. Caso algum leitor tenha interesse, solicite diretamente ao autor deste trabalho.

Sum_Time := time();

1) Definição dos Dados do Material

a) Modelo Reológico dos Constituintes

Modelo_Material_Bulk := 5 :

Modelo_Material_Shear := 5 :

Modelo_Fratura := 2 :

2) Valor dos Parâmetros Associados aos Modelos Reológicos dos Constituintes

a) Parâmetros da matriz sólida [GPa ou GPa.ano]

$k_{mse} := 24.42$: $k_{msv} := 23.24$: $k_{kse} := 39.27$: $k_{ksv} := 1.61$:

$\mu_{mse} := 13.27$: $\mu_{msv} := 12.28$: $\mu_{kse} := 14.07$: $\mu_{ksv} := 0.40$:

b) Parâmetros das Fraturas [GPa\m ou GPa.ano\m]

$k_{mne} := 42.2$: $k_{mnv} := 22.2$: $k_{kne} := 15$: $k_{knv} := 10$:

$k_{mte} := 16.9$: $k_{mtv} := 8.9$: $k_{kte} := 5$: $k_{ktv} := 4$:

c) Valor de Referência do Parâmetro de Dano

$\epsilon_- := 0.1 :$

3) Definição do Tensor de Relaxação no Espaço de Carson-Laplace

a) Modelo Reológico da Matriz Sólida: Bulk

Mola Simples

if (Modelo_Material_Bulk = 0) **then** $\mathcal{L}k_s := (p) \rightarrow k_{mse} :$

Amortecedor Puro

elif (Modelo_Material_Bulk = 1) **then** $\mathcal{L}k_s := (p) \rightarrow k_{msv} \cdot p :$

Modelo de Maxwell Simples

elif (Modelo_Material_Bulk = 2) **then** $\mathcal{L}k_s := (p) \rightarrow \left(\frac{1}{p \cdot k_{msv}} + \frac{1}{k_{mse}} \right)^{-1} :$

Modelo de Kelvin Simples

elif (Modelo_Material_Bulk = 3) **then** $\mathcal{L}k_s := (p) \rightarrow p \cdot k_{ksv} + k_{kse} :$

Modelo de Kelvin-Voigt

elif (Modelo_Material_Bulk = 4) **then** $\mathcal{L}k_s := (p) \rightarrow \left(\frac{1}{k_{mse}} + \frac{1}{p \cdot k_{ksv} + k_{kse}} \right)^{-1} :$

Modelo de Burger

elif (Modelo_Material_Bulk = 5) **then** $\mathcal{L}k_s := (p) \rightarrow \left(\frac{1}{k_{mse}} + \frac{1}{p \cdot k_{msv}} + \frac{1}{p \cdot k_{ksv} + k_{kse}} \right)^{-1} :$

Outro Modelo

else $\mathcal{L}k_s := (p) \rightarrow \text{"Modelo Indefinido"} :$

end if:

b) Modelo Reológico da Matriz Sólida: Shear

Mola Simples

if (Modelo_Material_Shear = 0) **then** $\mathcal{L}\mu_s := (p) \rightarrow \mu_{mse} :$

Amortecedor Puro

elif (Modelo_Material_Shear = 1) **then** $\mathcal{L}\mu_s := (p) \rightarrow \mu_{msv} \cdot p :$

Modelo de Maxwell Simples

elif (Modelo_Material_Shear = 2) **then** $\mathcal{L}\mu_s := (p) \rightarrow \left(\frac{1}{p \cdot \mu_{msv}} + \frac{1}{\mu_{mse}} \right)^{-1} :$

Modelo de Kelvin Simples

elif (Modelo_Material_Shear = 3) **then** $\mathcal{L}\mu_s := (p) \rightarrow p \cdot \mu_{ksv} + \mu_{kse} :$

Modelo de Kelvin-Voigt

elif (Modelo_Material_Shear = 4) **then** $\mathcal{L}\mu_s := (p) \rightarrow \left(\frac{1}{\mu_{mse}} + \frac{1}{p \cdot \mu_{ksv} + \mu_{kse}} \right)^{-1} :$

Modelo de Burger

elif (Modelo_Material_Shear = 5) **then** $\mathcal{L}\mu_s := (p) \rightarrow \left(\frac{1}{\mu_{mse}} + \frac{1}{p \cdot \mu_{msv}} + \frac{1}{p \cdot \mu_{ksv} + \mu_{kse}} \right)^{-1} :$

Outro Modelo

else $\mathcal{L}\mu_s := (p) \rightarrow \text{"Modelo Indefinido"} :$

end if:

c) Modelo Reológico das Fraturas

Cracks

if (Modelo_Fratura = -1) **then**

$$\mathcal{L}k_n := (p) \rightarrow 0 :$$

$$\mathcal{L}k_t := (p) \rightarrow 0 :$$

Mola Simples

elif (Modelo_Fratura = 0) **then**

$$\mathcal{L}k_n := (p) \rightarrow k_{mne} :$$

$$\mathcal{L}k_t := (p) \rightarrow k_{mte} :$$

Amortecedor Puro

elif (Modelo_Fratura = 1) **then**

$$\mathcal{L}k_n := (p) \rightarrow k_{mnv} \cdot p :$$

$$\mathcal{L}k_t := (p) \rightarrow k_{mtv} \cdot p :$$

Modelo de Maxwell Simples

elif (Modelo_Fratura = 2) **then**

$$\mathcal{L}k_n := (p) \rightarrow \left(\frac{1}{p \cdot k_{mnv}} + \frac{1}{k_{mne}} \right)^{-1} :$$

$$\mathcal{L}k_t := (p) \rightarrow \left(\frac{1}{p \cdot k_{mtv}} + \frac{1}{k_{mte}} \right)^{-1} :$$

Modelo de Kelvin Simples

elif (Modelo_Fratura = 3) **then**

$$\mathcal{L}k_n := (p) \rightarrow p \cdot k_{knv} + k_{kne} :$$

$$\mathcal{L}k_t := (p) \rightarrow p \cdot k_{ktv} + k_{kte} :$$

Modelo de Kelvin-Voigt

elif (Modelo_Fratura = 4) **then**

$$\mathcal{L}k_n := (p) \rightarrow \left(\frac{1}{k_{mne}} + \frac{1}{p \cdot k_{knv} + k_{kne}} \right)^{-1} :$$

$$\mathcal{L}k_t := (p) \rightarrow \left(\frac{1}{k_{mte}} + \frac{1}{p \cdot k_{ktv} + k_{kte}} \right)^{-1} :$$

Modelo de Burger

elif (Modelo_Fratura = 5) **then**

$$\mathcal{L}k_n := (p) \rightarrow \left(\frac{1}{k_{mne}} + \frac{1}{p \cdot k_{mnv}} + \frac{1}{p \cdot k_{knv} + k_{kne}} \right)^{-1} :$$

$$\mathcal{L}k_t := (p) \rightarrow \left(\frac{1}{k_{mte}} + \frac{1}{p \cdot k_{mtv}} + \frac{1}{p \cdot k_{ktv} + k_{kte}} \right)^{-1} :$$

Outro Modelo

else $\mathcal{L}k_n := (p) \rightarrow$ "Modelo indefinido" : $\mathcal{L}k_t := (p) \rightarrow$ "Modelo indefinido" :

end if:

4) Definição do Tensor de Relaxação no Espaço de Carson –Laplace

a) Orientação das Fraturas Isótropa

$$\mathcal{L}k_{hom} := (p, \epsilon) \rightarrow \frac{\mathcal{L}k_s(p)}{1 + \epsilon \cdot \mathcal{L}M_k(p, \epsilon)} :$$

$$\mathcal{L}\mu_{hom} := (p, \epsilon) \rightarrow \frac{\mathcal{L}\mu_s(p)}{1 + \epsilon \cdot \mathcal{L}M_\mu(p, \epsilon)} :$$

$$\mathcal{L}C_{hom} := (p, \epsilon) \rightarrow 3 \cdot \mathcal{L}k_{hom}(p, \epsilon) \text{ JM} + 2 \cdot \mathcal{L}\mu_{hom}(p, \epsilon) \text{ KM} :$$

$$\mathcal{L}M_k := (p, \epsilon) \rightarrow \frac{\frac{4}{3} \pi \cdot \frac{\mathcal{L}k_s(p)}{\mathcal{L}\mu_s(p)}}{\pi \cdot \kappa_1(p, \epsilon) + a(\epsilon) \cdot \frac{\mathcal{L}k_n(p)}{\mathcal{L}\mu_s(p)}} :$$

$$\mathcal{L}M_\mu := (p, \epsilon) \rightarrow \frac{16 \cdot \pi \cdot \kappa_4(p, \epsilon)}{15} \cdot \frac{6 \cdot \kappa_2(p, \epsilon) + 4 \cdot \kappa_3(p, \epsilon) + 9 \cdot \pi \cdot \kappa_4(p, \epsilon) \cdot (3 \cdot \kappa_1(p, \epsilon) + \kappa_4(p, \epsilon))}{(3 \cdot \pi \cdot \kappa_1(p, \epsilon) \cdot \kappa_4(p, \epsilon) + \kappa_2(p, \epsilon)) \cdot (4 \cdot \kappa_3(p, \epsilon) + 9 \cdot \pi \cdot \kappa_4(p, \epsilon) \cdot (\kappa_1(p, \epsilon) + \kappa_4(p, \epsilon)))} :$$

5) Definição do Tensor de Fluência no Espaço de Carson –Laplace

a) Orientação das Fraturas Isótropa

$$\mathcal{L}k_{ihom} := (p, \epsilon) \rightarrow \frac{1 + \epsilon \cdot \mathcal{L}M_k(p, \epsilon)}{\mathcal{L}k_s(p)} :$$

$$\mathcal{L}\mu_{ihom} := (p, \epsilon) \rightarrow \frac{1 + \epsilon \cdot \mathcal{L}M_\mu(p, \epsilon)}{\mathcal{L}\mu_s(p)} :$$

$$\mathcal{L}S_{hom} := (p, \epsilon) \rightarrow \frac{\mathcal{L}k_{ihom}(p, \epsilon)}{3} \text{ JM} + \frac{\mathcal{L}\mu_{ihom}(p, \epsilon)}{2} \text{ KM} :$$

6) Tensor de Fluência\Relaxação no Domínio do Tempo

$$k_{hom} := (t, \epsilon) \rightarrow \text{invcarson}(\text{factor}(\mathcal{L}k[hom](p, \epsilon)), p, t) :$$

$$\mu_{hom} := (t, \epsilon) \rightarrow \text{invcarson}(\text{factor}(\mathcal{L}\mu[hom](p, \epsilon)), p, t) :$$

$$R_{hom} := (t, \epsilon) \rightarrow 3 \cdot k_{hom}(t, \epsilon) \text{ JM} + 2 \cdot \mu_{hom}(t, \epsilon) \text{ KM} :$$

$$k_{ihom} := (t, \epsilon) \rightarrow \text{invcarson}(\text{factor}(\mathcal{L}k[ihom](p, \epsilon)), p, t) :$$

$$\mu_{ihom} := (t, \epsilon) \rightarrow \text{invcarson}(\text{factor}(\mathcal{L}\mu[ihom](p, \epsilon)), p, t) :$$

$$J_{hom} := (t, \epsilon) \rightarrow \frac{k_{ihom}(t, \epsilon)}{3} \text{ JM} + \frac{\mu_{ihom}(t, \epsilon)}{2} \text{ KM} :$$

7) Encerramento do Bloco

```
Txt_Modelo := (x) → if x = -1 then "Crack" elif x = 0 then "Elástico" elif x = 1 then "Viscoso"
                elif x = 2 then "Maxwell" elif x = 3 then "Kelvin" elif x = 4 then "Kelvin-Voigt"
                elif x = 5 then "Burger" else "Indefinido" end if;
cat(`, "Orientação das Fraturas : ", Txt_Tipo_Material(Tipo_Material));
cat(`, "Modelo da Matriz em Compressão : ", Txt_Modelo(Modelo_Material_Bulk));
cat(`, "Modelo da Matriz em Cisalhamento : ", Txt_Modelo(Modelo_Material_Shear));
cat(`, "Modelo Geral das Fraturas : ", Txt_Modelo(Modelo_Fratura));
Current_Time := Current_Time + time() - Sum_Time :
```

G.3) SOLUÇÃO PARA CARREGAMENTO EM DEFORMAÇÕES

Neste bloco define-se o carregamento imposto em deformações e estabelece-se o comportamento desenvolvido pelas tensões solicitantes ao longo do tempo. As solicitações decorrentes da aplicação de um carregamento em tensões também foram programadas, contudo,

visto que o carregamento em tensões não é utilizado na etapa de propagação, este código não será apresentado. Caso algum leitor tenha interesse, solicite diretamente ao autor deste trabalho.

```

Sum_Time := time( ) :
# 1) Deformações aplicadas
# a) Evolução temporal das deformações
ε_f := (t) → t · 10-3 · Heaviside(t) :
# b) Orientação das Deformações
ε := (t) → ε_f(t) · Transpose([ 1 1 1 0 0 0 ]) :
# 2) Tensores Solicitantes
σ := (t, ε) → R_hom(0, ε) · ε(t) -
    convert(map(int, map(diff, R_hom(t - τ_fic, ε), τ_fic) · ε(τ_fic), τ_fic = 0 .. t), expsincos)
# 3) Representação Gráfica
# a) Definição do intervalo de tempo em análise
t_i := 0 : t_f := 10 :
# b) Função Gráfica de Relaxação
GR_ := (i, j, ε) → plot(R_hom(t, ε)[i, j], t = t_i .. t_f, 0 .. R_hom(0, ε)[i, j] · 1.1, title = "Relaxation Function",
    legend = cat("Component ", i, i, j, j ), labels = [ "time (years)", typeset("( GPa )" ) ],
    titlefont = [ "Times", Bold, 13 ], legendstyle = [ font = [ "Times", Bold, 10 ] ],
    labelfont = [ "Times", Bold, 10 ], gridlines, thickness = 2,
    labeldirections = [ "horizontal", "vertical" ] ) :
# c) Função Gráfica de Fluência
GJ_ := (i, j, ε) → plot(J_hom(t, ε)[i, j], t = t_i .. t_f, 0 .. J_hom(t_f, ε)[i, j] · 1.1, title = "Creep Function",
    legend = cat("Component ", i, i, j, j ), labels = [ "time (years)", typeset("( 1/GPa )" ) ],
    titlefont = [ "Times", Bold, 13 ], legendstyle = [ font = [ "Times", Bold, 10 ] ],
    labelfont = [ "Times", Bold, 10 ], gridlines, thickness = 2,
    labeldirections = [ "horizontal", "vertical" ] ) :
# d) Função Gráfica de Deformação Aplicada
Gε_ := (i) → plot(ε(t)[i], t = t_i .. t_f, title = "Strain Load", legend = cat("Component ", i ),
    labels = [ "time (years)", typeset("( - )" ) ], titlefont = [ "Times", Bold, 13 ],
    legendstyle = [ font = [ "Times", Bold, 10 ] ], labelfont = [ "Times", Bold, 10 ],
    gridlines, thickness = 2, labeldirections = [ "horizontal", "vertical" ] ) :
# e) Função Gráfica de Tensão Solicitante
Gσ_ := (i, ε) → plot(σ(t, ε)[i], t = t_i .. t_f, title = "Resultant Stress", legend = cat("Component ", i ),
    labels = [ "time (years)", typeset("( GPa )" ) ], titlefont = [ "Times", Bold, 13 ],
    legendstyle = [ font = [ "Times", Bold, 10 ] ], labelfont = [ "Times", Bold, 10 ],
    gridlines, thickness = 2, labeldirections = [ "horizontal", "vertical" ] ) :
# f) Plotagem das funções gráficas
display(Array([[ GR_(1, 1, ε_), GJ_(1, 1, ε_) ], [ Gε_(1), Gσ_(1, ε_) ] ]));
# 5) Encerramento do Bloco
Current_Time := Current_Time + time( ) - Sum_Time :
cat(`, "Tempo Quadro: ", convert(time( ) - Sum_Time, string), " seg");
cat(`, "Tempo Total: ", convert(Current_Time, string), " seg");

```

G.4) DETERMINAÇÃO DA ENERGIA ELÁSTICA E DA TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA

Neste bloco define-se a energia elástica total, a energia elástica instantânea e a taxa de liberação de energia (através de diferentes expressões).

$Sum_Time := time() :$

1) Declaração de Funções Primitivas

a) Deformação viscosa

$Ev := (t, \epsilon) \rightarrow J_{hom}(0, \epsilon) \cdot map(int, map(diff, R_{hom}(t - \tau_{fic}, \epsilon), \tau_{fic}), \epsilon(\tau_{fic}), \tau_{fic} = 0..t) :$

b) Derivada dos tensores instantâneos de relaxação/fluência

$Dk_{hom} := (\epsilon) \rightarrow eval(diff(limit(\mathcal{L}k_{hom}(p, \chi), p = \infty), \chi), \chi = \epsilon) :$

$D\mu_{hom} := (\epsilon) \rightarrow eval(diff(limit(\mathcal{L}\mu_{hom}(p, \chi), p = \infty), \chi), \chi = \epsilon) :$

$DC_{hom} := (\epsilon) \rightarrow 3 \cdot Dk_{hom}(\epsilon) \text{ JM} + 2 \cdot D\mu_{hom}(\epsilon) \text{ KM} :$

$Dk_{ihom} := (\epsilon) \rightarrow eval(diff(limit(\mathcal{L}k_{ihom}(p, \chi), p = \infty), \chi), \chi = \epsilon) :$

$D\mu_{ihom} := (\epsilon) \rightarrow eval(diff(limit(\mathcal{L}\mu_{ihom}(p, \chi), p = \infty), \chi), \chi = \epsilon) :$

$DS_{hom} := (\epsilon) \rightarrow \frac{Dk_{ihom}(\epsilon)}{3} \text{ JM} + \frac{D\mu_{ihom}(\epsilon)}{2} \text{ KM} :$

2) Energia Elástica

a) Energia elástica total

$W_total := (t, \epsilon) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \text{Transpose}(map(diff, \epsilon(\tau_1), \tau_1)) \cdot R_{hom}((2t - \tau_1 - \tau_2), \epsilon) \cdot map(diff, \epsilon(\tau_2), \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 :$

b) Energia elástica na propagação

$W_inst := (t, \epsilon) \rightarrow \frac{1}{2} \text{Transpose}(\sigma(t, \epsilon)) \cdot J_{hom}(0, \epsilon) \cdot \sigma(t, \epsilon) :$

3) Taxa de Liberação de Energia

$F_ten := (t, \epsilon) \rightarrow \frac{1}{2} \text{Transpose}(\sigma(t, \epsilon)) \cdot DS_{hom}(\epsilon) \cdot \sigma(t, \epsilon) :$

4) Representação Gráfica

a) Definição do intervalo de tempo em análise

$t_i := 0 : t_f := 45 :$

b) Função gráfica da energia elástica

$GW_ten := (\epsilon) \rightarrow plot([simplify(W_total(t, \epsilon)), W_inst(t, \epsilon)], t = t_i..t_f,$

$title = "Elastic Energy - Strain Boundary Conditions",$

$legend = ["Total Free Energy", "Elastic Energy (Propagation)],$

$labels = ["time (years)", "(J)],$

$titlefont = ["Times", Bold, 13], legendstyle = [font = ["Times", Bold, 10]],$

$labelfont = ["Times", Bold, 10], color = ["Red", "Blue"],$

$gridlines, thickness = 2, labeldirections = ["horizontal", "vertical"]) :$

c) Função gráfica da taxa de liberação de energia

$GF_ten := (\epsilon) \rightarrow plot([F_ten(t, \epsilon)], t = t_i..t_f, legend = ["Energy Release Rate"],$

```

title = "Energy Release Rate – Strain Boundary Conditions",
labels = ["time (years)", typeset("( J/m3, " )")], titlefont = ["Times", Bold, 13],
legendstyle = [font = ["Times", Bold, 10]], labelfont = ["Times", Bold, 10],
color = ["Red"], gridlines, thickness = 2, labeldirections = ["horizontal", "vertical"] ):
# d) Plotagem das funções gráficas
display(Array([ GW_ten(ε_), GF_ten(ε_) ]));
# 5) Encerramento do Bloco
Current_Time := Current_Time + time( ) – Sum_Time :
cat(`, "Tempo Quadro: ", convert(time( ) – Sum_Time, string), " seg");
cat(`, "Tempo Total: ", convert(Current_Time, string), " seg");

```

G.5) COMPARAÇÃO ENTRE TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA ASSINTÓTICA E ENERGIA CRÍTICA MACROSCÓPICA

Neste bloco realiza-se a comparação entre a energia assintótica e a energia crítica, prevendo o intervalo de propagação bem como o valor limite para o parâmetro de dano ao fim da propagação.

```

Sum_Time := time( ) :
# 1) Determinação da Taxa de Liberação de Energia Assintótica
# a) Tensão no espaço de Carson-Laplace
Lσ := (p, ε) → (3 · ℒk[hom](p, ε) · JM + 2 · ℒμ[hom](p, ε) · KM).map(carson, ε(t), t, p) :
# b) Tensão avaliada no limite t=∞
LIσ := (ε) → map(limit, Lσ(p, ε), p = 0) :
# c) Taxa de liberação de energia assintótica
F_inf := (ε) → 1/2 · Transpose(LIσ(ε)).DS_hom(ε).LIσ(ε) :
# 2) Determinação da Energia Crítica
# a) Expressão para energia crítica macroscópica
Fv := (ε, Fc) → evalf( ( 2·Pi / 3 ) · ( N / ε )1/3 · Fc ) :
# b) Definição do valor da energia crítica microscópica
vFc := 0.00002 :
# 3) Representação Gráfica
# a) Intervalo de exibição do parâmetro de dano
minmax := solve(F_inf(ε) - Fv(ε, vFc) = 0) :
emin := 0 :
emax := min(max(eminmax), 1) :
# b) Comparação relativa entre taxa de liberação de energia assintótica e energia crítica
GFFI := (ε, Fc) → plot([ F_inf(ε), Fv(ε, Fc) ], ε = 0 .. emax, color = ["Red", "Blue"],
title = "Limit Energy Release Rate and Critical Energy",
legend = ["∞ Energy Release Rate", "Critical Energy"],
labels = ["ε", typeset("( J/m3, " )")], titlefont = ["Times", Bold, 13],
legendstyle = [font = ["Times", Bold, 10]], labelfont = ["Times", Bold, 10],
gridlines, thickness = 2, labeldirections = ["horizontal", "vertical"] ):

```

c) Função gráfica do critério de propagação normalizado

```
GFFID := (ε, Fc) → plot( [ [  $\frac{F_{inf}(\epsilon) - Fv(\epsilon, Fc)}{\text{Maximize}(F_{inf}(\epsilon) - Fv(\epsilon, Fc), \epsilon = 0..1)}$  ] ], ε = 0 .. emax,
    title = "Difference Between Functions", labels = [ "ε", typeset(" J", m3, " )" ],
    titlefont = [ "Times", Bold, 13 ], legendstyle = [ font = [ "Times", Bold, 10 ] ],
    labelfont = [ "Times", Bold, 10 ], color = [ "Red" ],
    gridlines, thickness = 2, labeldirections = [ "horizontal", "vertical" ] );
```

c) Plotagem das funções gráficas

```
plots[display](Array([ GFFI(ε, vFc), GFFID(ε, vFc) ]));
```

5) Encerramento do Bloco

```
if (eminmax[1] - Re(eminmax[1])) ≠ 0 then
```

```
    inform := cat( ``, "Sem Raizes Reais")
```

```
    else inform := cat( ``, "ε Máximo: ", convert(emax, string))
```

```
end if;
```

```
inform;
```

```
Current_Time := Current_Time + time( ) - Sum_Time :
```

```
cat( ``, "Tempo Quadro: ", convert(time( ) - Sum_Time, string), " seg");
```

```
cat( ``, "Tempo Total: ", convert(Current_Time, string), " seg");
```

G.6) LEI DE EVOLUÇÃO DO DANO E EVOLUÇÃO DOS PARÂMETROS AO LONGO DO TEMPO

Este bloco foi separado em duas análises diferentes, uma voltada a ϕ_t e outra voltada a ϕ_τ . Sob intuito de verificar a qualidade das soluções numéricas desenvolvidas, formulações alternativas às apresentadas também foram desenvolvidas pelos autores, tal como por exemplo a formulação baseada na Eq. (6.13). Caso o leitor tenha interesse por alguma destas soluções diferentes, solicite-as diretamente ao autor deste trabalho.

G.6.1 Solução para $R(t, \tau, \phi(t))$

```
Sum_Time := time( ) :
```

```
Digits := 20 :
```

1) Parametros de Cálculo**# a) Tempo máximo de análise**

```
tmax := 50 :
```

b) Número de pontos a ser analisados

```
npnt := 200 :
```

```
# Recomendado acima de 300 pontos
```

c) Determinação do tamanho do intervalo de análise

```
 $\Delta t_c := \frac{tmax}{npnt}$  :
```

d) Parâmetro de dano adicional numérico

$$\Delta\Phi := 10^{-7} :$$

2) Função de Evolução do Dano

a) Derivada do tensor de deformações viscosas

$$L\sigma := (p, \epsilon) \rightarrow (3 \cdot \mathcal{L}k[hom](p, \epsilon) \cdot JM + 2 \cdot \mathcal{L}\mu[hom](p, \epsilon) \cdot KM) \cdot map(carson, \epsilon(t), t, p) :$$

$$DL\sigma := (p, \epsilon) \rightarrow simplify(eval(map(diff, L\sigma(p, \chi), \chi), \chi = \epsilon)) :$$

$$FD\sigma := (t, \epsilon) \rightarrow map(invcarson, DL\sigma(p, \epsilon), p, t) :$$

$$DEv_D\phi := (t, \epsilon) \rightarrow -DS_{hom}(\epsilon) \cdot \sigma(t, \epsilon) - J_{hom}(0, \epsilon) \cdot FD\sigma(t, \epsilon) :$$

b) Derivada segunda da relaxação instantânea

$$DDC_{hom} := (\epsilon) \rightarrow map(fdiff, DC_{hom}(\chi), \chi = \epsilon) :$$

c) Zeragem dos vetores temporais

$$\phi_ := Matrix(npnt + 1, 2, (m, n) \rightarrow \text{if } n = 1 \text{ then } (m - 1) \cdot \Delta tc \text{ else } 0 \text{ end if}) :$$

$$\sigma_p1j := Vector(npnt + 1, (m) \rightarrow 0) :$$

$$\sigma_p2j := Vector(npnt + 1, (m) \rightarrow 0) :$$

$$\sigma_nlj := Vector(npnt + 1, (m) \rightarrow 0) :$$

$$E_nlj := Vector(npnt + 1, (m) \rightarrow 0) :$$

$$FY := Vector(npnt + 1, (m) \rightarrow 0) :$$

$$FV := Vector(npnt + 1, (m) \rightarrow 0) :$$

$$ME_nlj := Matrix(npnt + 1, 2, (m, n) \rightarrow \text{if } n = 1 \text{ then } (m - 1) \cdot \Delta tc \text{ else } 0 \text{ end if}) :$$

$$MFY := Matrix(npnt + 1, 2, (m, n) \rightarrow \text{if } n = 1 \text{ then } (m - 1) \cdot \Delta tc \text{ else } 0 \text{ end if}) :$$

$$MFv := Matrix(npnt + 1, 2, (m, n) \rightarrow \text{if } n = 1 \text{ then } (m - 1) \cdot \Delta tc \text{ else } 0 \text{ end if}) :$$

$$dMF := Matrix(npnt + 1, 2, (m, n) \rightarrow \text{if } n = 1 \text{ then } (m - 1) \cdot \Delta tc \text{ else } 0 \text{ end if}) :$$

3) Início do cálculo da Evolução do Dano

a) Início do cálculo numérico

for i from 1 to npnt + 1 do

if i = 1 then $\phi_ [i, 2] := \epsilon_$ else $\phi_ [i, 2] := \phi_ [i - 1, 2]$ end if:

b) Atualização dos vetores de tensão e deformação

$$\sigma_pj1[i] := R_{hom}(0, \phi_ [i, 2]) \cdot \epsilon((i - 1) \cdot \Delta tc) -$$

$$\text{add} \left(\frac{R_{hom}((i - 1 - j) \cdot \Delta tc, \phi_ [i, 2]) - R_{hom}((i - j) \cdot \Delta tc, \phi_ [i, 2])}{\Delta tc} \right).$$

$$\epsilon(j \cdot \Delta tc) \cdot \Delta tc, j = 1 \dots i - 1 \Big) :$$

$$\sigma_pj2[i] := \text{add}(R_{hom}((i - 1 - j) \cdot \Delta tc, \phi_ [i, 2]).$$

$$\left(\frac{\epsilon((j) \cdot \Delta tc) - \epsilon((j - 1) \cdot \Delta tc)}{\Delta tc} \right) \cdot \Delta tc, j = 0 \dots i - 1 \Big) :$$

$$\sigma_nlj[i] := \frac{\sigma_pj1[i] + \sigma_pj2[i]}{2} :$$

$$E_nlj[i] := \epsilon((i - 1) \cdot \Delta tc) - R_{hom}(0, \phi_ [i, 2])^{-1} \cdot \sigma_nlj[i] :$$

$$ME_nlj[i, 2] := E_nlj[i][1] :$$

c) Equação da taxa de evolução do dano

$QDS := 1$: # $QDS=1$ é a formulação aproximada $QDS=2$ é a melhor formulação analítica

4.I) Formulação Aproximada

if $QDS = 1$ then

$$\begin{aligned}
& \text{if } i = 1 \text{ then } d\phi_{_dt} := 0 \text{ else} \\
d\phi_{_dt} := & - \left(\text{Transpose}(\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - E_nlj[i]).DC_{hom}(\phi_{_}[i, 2]) \right. \\
& \left. \cdot \left(\frac{\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - \varepsilon((i-2) \cdot \Delta tc)}{\Delta tc} - \frac{E_nlj[i] - E_nlj[i-1]}{\Delta tc} \right) \right) / \left(\text{fdiff}(Fv(\chi, \right. \\
& \left. vFc), \chi = \phi_{_}[i, 2]) + \frac{1}{2} \cdot \text{Transpose}(\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - E_nlj[i]).DDC_{hom}(\phi_{_}[i, 2]) \cdot (\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - E_nlj[i]) \right) :
\end{aligned}$$

end if:

4.II) Formulação Analítica mais Completa

elif QDS = 2 then

a) Determinação da deformação viscosa no tempo anterior (mesmo dano)

$$\begin{aligned}
\text{if } i \geq 2 \text{ then } \sigma_{_pj1_va}[i] := & \left(R_{hom}(0, \phi_{_}[i, 2]) \cdot \varepsilon((i-2) \cdot \Delta tc) \right. \\
& - \text{add} \left(\frac{R_{hom}((i-2-j) \cdot \Delta tc, \phi_{_}[i, 2]) - R_{hom}((i-1-j) \cdot \Delta tc, \phi_{_}[i, 2])}{\Delta tc} \cdot \varepsilon(j \cdot \Delta tc) \right. \\
& \left. \left. \cdot \Delta tc, j = 1 \dots i-2 \right) \right) \text{ else } \sigma_{_pj1_va}[i] := \sigma_{_pj1}[i] \text{ end if:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{if } i \geq 2 \text{ then } \sigma_{_pj2_va}[i] := & \left(\text{add} \left(R_{hom}((i-2-j) \cdot \Delta tc, \phi_{_}[i, 2]) \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot \left(\frac{\varepsilon((j) \cdot \Delta tc) - \varepsilon((j-1) \cdot \Delta tc)}{\Delta tc} \right) \cdot \Delta tc, j = 0 \dots i-2 \right) \right) \text{ else } \sigma_{_pj2_va}[i] := \sigma_{_pj2}[i] \text{ end} \\
\text{if:}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{_nlj_va}[i] := \frac{\sigma_{_pj1_va}[i] + \sigma_{_pj2_va}[i]}{2} :$$

$$E_{_nlj_va}[i] := \varepsilon((i-2) \cdot \Delta tc) - R_{hom}(0, \phi_{_}[i, 2])^{-1} \cdot \sigma_{_nlj_va}[i] :$$

b) Determinação da deformação viscosa com dano reduzido em $\Delta\Phi$ (mesmo tempo)

$$\begin{aligned}
\text{if } i \geq 2 \text{ then } \sigma_{_pj1_\phi a}[i] := & \left(R_{hom}(0, \phi_{_}[i, 2] - \Delta\Phi) \cdot \varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) \right. \\
& - \text{add} \left(\frac{R_{hom}((i-1-j) \cdot \Delta tc, \phi_{_}[i, 2] - \Delta\Phi) - R_{hom}((i-j) \cdot \Delta tc, \phi_{_}[i, 2] - \Delta\Phi)}{\Delta tc} \cdot \varepsilon(j \right. \\
& \left. \cdot \Delta tc) \cdot \Delta tc, j = 1 \dots i-1 \right) \right) \text{ else } \sigma_{_pj1_ \phi a}[i] := \sigma_{_pj1}[i] \text{ end if:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{if } i \geq 2 \text{ then } \sigma_{_pj2_ \phi a}[i] := & \left(\text{add} \left(R_{hom}((i-1-j) \cdot \Delta tc, \phi_{_}[i, 2] - \Delta\Phi) \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot \left(\frac{\varepsilon((j) \cdot \Delta tc) - \varepsilon((j-1) \cdot \Delta tc)}{\Delta tc} \right) \cdot \Delta tc, j = 0 \dots i-1 \right) \right) \text{ else } \sigma_{_pj2_ \phi a}[i] := \sigma_{_pj2}[i] \text{ end} \\
\text{if:}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{_nlj_ \phi a}[i] := \frac{\sigma_{_pj1_ \phi a}[i] + \sigma_{_pj2_ \phi a}[i]}{2} :$$

$$E_{_nlj_ \phi a}[i] := \varepsilon((i-2) \cdot \Delta tc) - R_{hom}(0, \phi_{_}[i, 2] - \Delta\Phi)^{-1} \cdot \sigma_{_nlj_ \phi a}[i] :$$

c) Expressão da taxa de evolução do dano

```

if  $i = 1$  then  $d\phi_{dt} := 0$  else  $d\phi_{dt} := - \left( \text{Transpose}(\epsilon((i-1) \cdot \Delta t c) - E_{nlj}[i]) \right.$ 
 $.DC_{hom}(\phi_{[i, 2]}) \cdot \left( \frac{\epsilon((i-1) \cdot \Delta t c) - \epsilon((i-2) \cdot \Delta t c)}{\Delta t c} - \frac{E_{nlj}[i] - E_{nlj\_va}[i]}{\Delta t c} \right) \left. \right) /$ 
 $\left( \text{fdiff}(Fv(\chi, vFc), \chi = \phi_{[i, 2]}) + \frac{1}{2} \cdot \text{Transpose}(\epsilon((i-1) \cdot \Delta t c) - E_{nlj}[i]) \right.$ 
 $.DDC_{hom}(\phi_{[i, 2]}) \cdot (\epsilon((i-1) \cdot \Delta t c) - E_{nlj}[i]) - \text{Transpose}(\epsilon((i-1) \cdot \Delta t c)$ 
 $- E_{nlj}[i]) \cdot DC_{hom}(\phi_{[i, 2]}) \cdot (E_{nlj}[i] - E_{nlj\_\phi a}[i]) \left. \right)$  end if:

```

end if :

5) Demais Etapas do Procedimnto Numérico

a) Taxa de liberação de energia

$$FY[i] := -\frac{1}{2} \cdot \text{Transpose}(\epsilon((i-1) \cdot \Delta t c) - E_{nlj}[i]).$$

$$DC_{hom}(\phi_{[i, 2]}) \cdot (\epsilon((i-1) \cdot \Delta t c) - E_{nlj}[i]) :$$

$$MFY[i, 2] := FY[i] :$$

$$MFv[i, 2] := Fv(\phi_{[i, 2]}, vFc) :$$

if $i = 1$ **then** $dMF[i, 2] := 0$ **else**

$$dMF[i, 2] := \frac{(FY[i] - Fv(\phi_{[i, 2]}, vFc)) - (FY[i-1] - Fv(\phi_{[i-1, 2]}, vFc))}{\Delta t c}$$

end if:

b) Atualização da função de dano

if $i = 1$ **and** $FY[i] \leq Fv(\epsilon_{-}, vFc)$ **then** $\phi_{[i, 2]} := \epsilon_{-}$
elif $i > 1$ **and** $FY[i] \leq Fv(\phi_{[i-1, 2]}, vFc)$ **then** $\phi_{[i, 2]} := \phi_{[i-1, 2]}$

elif $i = 1$ **then** $\phi_{[i, 2]} := \epsilon_{-} + d\phi_{dt} \cdot \Delta t c$

else $\phi_{[i, 2]} := \phi_{[i-1, 2]} + d\phi_{dt} \cdot \Delta t c$

end if:

c) Plotagem da função de dano atual

pode ser desabilitado em caso de sobrecarga ou travamento (evitando o recall nulo)

```

print(DocumentTools:- SetProperty("Plot1", value, plot([phi_],
x=0..tmax, y=0..0.25, title="Damage Parameter Evolution", labels=["t", "€"],
titlefont=["Times", Bold, 13], legendstyle=[font=["Times", Bold, 10]],
labelfont=["Times", Bold, 10], color=["Red"], gridlines, thickness=2,
labeldirections=["horizontal", "vertical"] ))):

```

condição para evitar sobrecarga de memória

```

if  $\frac{\text{kernelopts}(\text{bytesalloc})}{1024 \cdot 1024 \cdot 2} \geq 2700$  then break end if:

```

end do:

6) Plotagem Gráfica

e) Plotagem da função de dano total

```

plot([phi_], x=0..15, y=0..0.25, title="Damage Parameter Evolution", labels=["t", "€"],
titlefont=["Times", Bold, 13], legendstyle=[font=["Times", Bold, 10]], color=["Red"],
color=["Red"], gridlines, thickness=2, labeldirections=["horizontal", "vertical"] );

```

e) Plotagem da taxa de liberação de energia e energia crítica

```

plot([MFY, MFv], x=0..15, titlefont=["Times", Bold, 13], labels=["time (years)", typeset("F ( J", m^3, " )")],
title="Comparasion between energy release rate and critical energy", color=["red", "blue"],
legendstyle=[font=["Times", Bold, 10]], labelfont=["Times", Bold, 10],
gridlines, thickness=2, labeldirections=["horizontal", "vertical"] );

```

7) Encerramento do Bloco

```

Current_Time := Current_Time + time() - Sum_Time :
cat("", "Tempo Quadro: ", convert(time() - Sum_Time, string), " seg");
cat("", "Tempo Total: ", convert(Current_Time, string), " seg");

```

G.6.2 Solução para $R(t, \tau, \phi(\tau))$

```
Sum_Time := time() :
```

```
Digits := 10 :
```

1) Parametros de Cálculo**# a) Tempo máximo de análise**

```
tmax := 20 :
```

b) Tempo máximo de Número de pontos a ser analisados

```
npnt := 500 : # Recomendado acima de 300 pontos
```

c) Tempo máximo de Número de pontos a ser analisados

```
 $\Delta t_c := \frac{tmax}{npnt} :$ 
```

d) Parâmetro de dano inicial

```
 $\Delta \Phi := 10^{-5} :$ 
```

2) Função de Evolução do Dano**# a) Derivada segunda da relaxação instantânea**

```
 $L\sigma := (p, \epsilon) \rightarrow (3 \cdot \mathcal{L}k[hom](p, \epsilon) \cdot JM + 2 \cdot \mathcal{L}\mu[hom](p, \epsilon) \cdot KM).map(carson, \epsilon(t), t, p) :$ 
```

```
 $DL\sigma := (p, \epsilon) \rightarrow simplify(eval(map(diff, L\sigma(p, \chi), \chi), \chi = \epsilon)) :$ 
```

```
 $FD\sigma := (t, \epsilon) \rightarrow map(invcarson, DL\sigma(p, \epsilon), p, t) :$ 
```

```
 $DEv\_D\phi := (t, \epsilon) \rightarrow -DS_{hom}(\epsilon) \cdot \sigma(t, \epsilon) - J_{hom}(0, \epsilon) \cdot FD\sigma(t, \epsilon) :$ 
```

b) Derivada segunda da relaxação instantânea

```
 $DDC_{hom} := (\epsilon) \rightarrow map(fdiff, DC_{hom}(\chi), \chi = \epsilon) :$ 
```

c) Função de dano

```
 $\phi_{\tau} := Matrix(npnt + 1, 2, (m, n) \rightarrow \text{if } n = 1 \text{ then } (m - 1) \cdot \Delta t_c \text{ else } \epsilon \text{ end if}) :$ 
```

```
 $\phi_{\tau}[1, 2] := \epsilon_ :$ 
```

d) Inicialização dos vetores de tensão

```
 $\sigma_{p1j\tau} := Vector(npnt + 1, (m) \rightarrow 0) :$ 
```

```
 $\sigma_{p2j\tau} := Vector(npnt + 1, (m) \rightarrow 0) :$ 
```

```
 $\sigma_{nlj\tau} := Vector(npnt + 1, (m) \rightarrow 0) :$ 
```

3) Início do Procedimento

```
for i from 1 to npnt + 1 do
```

a) Inicialização do valor inicial da função de dano

```
  if i = 1 then  $\phi_{\tau}[i, 2] := \epsilon$  else  $\phi_{\tau}[i, 2] := \phi_{\tau}[i - 1, 2]$  end if:
```

b) Cálculo das tensões não-lineares e deformações não-lineares

```
 $\sigma_{pj1\tau}[i] := R_{hom}(0, \phi_{\tau}[i, 2]) \cdot \epsilon((i - 1) \cdot \Delta t_c)$ 
```

```
  - add  $\left( \frac{R_{hom}((i - 1 - j) \cdot \Delta t_c, \phi_{\tau}[j + 1, 2]) - R_{hom}((i - j) \cdot \Delta t_c, \phi_{\tau}[j + 1, 2])}{\Delta t_c} \cdot \epsilon(j$ 
```

```
   $\cdot \Delta t_c), j = 1 .. i - 1 \right) :$ 
```

$$\sigma_{pj2\tau}[i] := \text{add} \left(R_{hom}((i-1-j) \cdot \Delta tc, \phi_{\tau}[j+1, 2]) \cdot \left(\frac{\varepsilon((j) \cdot \Delta tc) - \varepsilon((j-1) \cdot \Delta tc)}{\Delta tc} \right) \cdot \Delta tc, j=0 \dots i-1 \right) :$$

$$\sigma_{nlj\tau}[i] := \frac{\sigma_{pj1\tau}[i] + \sigma_{pj2\tau}[i]}{2} :$$

$$E_{nlj\tau}[i] := \varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - R_{hom}(0, \phi_{\tau}[i, 2])^{-1} \cdot \sigma_{nlj\tau}[i] :$$

c) Equação da taxa de evolução do dano

QDS := 1 : # QDS=1 é a formulação aproximada QDS=2 é a melhor formulação analítica

4.I) Formulação Aproximada

if QDS = 1 then

$$\begin{aligned} \text{if } i = 1 \text{ then } d\phi_{dt} := 0 \text{ else } d\phi_{dt} := \max & \left(0, - \left(\text{Transpose}(\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - E_{nlj\tau}[i]) \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot DC_{hom}(\phi_{\tau}[i, 2]) \cdot \left(\frac{\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - \varepsilon((i-2) \cdot \Delta tc)}{\Delta tc} - \frac{E_{nlj\tau}[i] - E_{nlj\tau}[i-1]}{\Delta tc} \right) \right) \right) \\ & \left/ \left(fdiff(Fv(\chi, vFc), \chi = \phi_{\tau}[i, 2]) + \frac{1}{2} \cdot \text{Transpose}(\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - E_{nlj\tau}[i]) \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot DDC_{hom}(\phi_{\tau}[i, 2]) \cdot (\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - E_{nlj\tau}[i]) \right) \right) \text{end if:} \end{aligned}$$

4.II) Formulação Analítica mais Completa

elif QDS = 2 then

a) Determinação da deformação viscosa no tempo anterior (mesmo dano)

$$\begin{aligned} \sigma_{pj1\tau_{vt}}[i] := R_{hom}(0, \phi_{\tau}[i, 2]) \cdot \varepsilon((i-2) \cdot \Delta tc) \\ - \text{add} \left(\frac{R_{hom}((i-2-j) \cdot \Delta tc, \phi_{\tau}[j+1, 2]) - R_{hom}((i-1-j) \cdot \Delta tc, \phi_{\tau}[j+1, 2])}{\Delta tc} \cdot \varepsilon(j \cdot \Delta tc) \cdot \Delta tc, j=1 \dots i-2 \right) : \end{aligned}$$

$$\sigma_{pj2\tau_{vt}}[i] := \text{add} \left(R_{hom}((i-2-j) \cdot \Delta tc, \phi_{\tau}[j+1, 2]) \cdot \left(\frac{\varepsilon((j) \cdot \Delta tc) - \varepsilon((j-1) \cdot \Delta tc)}{\Delta tc} \right) \cdot \Delta tc, j=0 \dots i-2 \right) :$$

$$\sigma_{nlj\tau_{vt}}[i] := \frac{\sigma_{pj1\tau_{vt}}[i] + \sigma_{pj2\tau_{vt}}[i]}{2} :$$

$$E_{nlj\tau_{vt}}[i] := \varepsilon((i-2) \cdot \Delta tc) - R_{hom}(0, \phi_{\tau}[i, 2])^{-1} \cdot \sigma_{nlj\tau_{vt}}[i] :$$

b) Determinação da deformação viscosa com dano reduzido em $\Delta\Phi$ (mesmo tempo)

$$\begin{aligned} \sigma_{pj1\tau_{v\phi}}[i] := R_{hom}(0, \phi_{\tau}[i, 2] + \Delta\Phi) \cdot \varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) \\ - \text{add} \left(\frac{1}{\Delta tc} \left(R_{hom}((i-1-j) \cdot \Delta tc, \phi_{\tau}[j+1, 2] + \Delta\Phi) - R_{hom}((i-j) \cdot \Delta tc, \phi_{\tau}[j+1, 2] + \Delta\Phi) \right) \cdot \varepsilon(j \cdot \Delta tc) \cdot \Delta tc, j=1 \dots i-1 \right) : \end{aligned}$$

$$\sigma_{pj2\tau_v\phi}[i] := \text{add} \left(R_{hom}((i-1-j) \cdot \Delta tc, \phi_{\tau}[j+1, 2] + \Delta \Phi) \right. \\ \left. \cdot \left(\frac{\varepsilon((j) \cdot \Delta tc) - \varepsilon((j-1) \cdot \Delta tc)}{\Delta tc} \right) \cdot \Delta tc, j = 0 \dots i-1 \right) :$$

$$\sigma_{nlj\tau_v\phi}[i] := \frac{\sigma_{pj1\tau_v\phi}[i] + \sigma_{pj2\tau_v\phi}[i]}{2} :$$

$$E_{nlj\tau_v\phi}[i] := \varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - R_{hom}(0, \phi_{\tau}[i, 2] + \Delta \Phi)^{-1} \cdot \sigma_{nlj\tau_v\phi}[i] :$$

c) cálculo para primeira iteração

$$\text{if } i = 1 \text{ then } pEv_{pt} := 0 \text{ else } pEv_{pt} := \frac{E_{nlj\tau}[i] - E_{nlj\tau_{vt}}[i]}{\Delta tc} \text{ end if:}$$

$$\text{if } i = 1 \text{ then } pEv_{p\phi} := 0 \text{ else } pEv_{p\phi} := \frac{E_{nlj\tau_v\phi}[i] - E_{nlj\tau}[i]}{\Delta \Phi} \text{ end if:}$$

d) Expressão da taxa de evolução do dano

$$\text{if } i = 1 \text{ then } d\phi_{dt} := 0 \text{ else } d\phi_{dt} := - \left(\text{Transpose}(\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - E_{nlj\tau}[i]) \right. \\ \left. \cdot DC_{hom}(\phi_{\tau}[i, 2]) \cdot \left(\frac{\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - \varepsilon((i-2) \cdot \Delta tc)}{\Delta tc} - pEv_{pt} \right) \right) / \left(fdiff(Fv(\chi, \right. \\ \left. vFc), \chi = \phi_{\tau}[i, 2]) + \frac{1}{2} \cdot \text{Transpose}(\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - E_{nlj\tau}[i]) \cdot DDC_{hom}(\phi_{\tau}[i, 2]) \right. \\ \left. \cdot (\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - E_{nlj\tau}[i]) - \text{Transpose}(\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - E_{nlj\tau}[i]) \cdot DC_{hom}(\phi_{\tau}[i, \right. \\ \left. 2]) \cdot pEv_{p\phi} \right) \text{ end if:}$$

end if:

5) Demais Etapas do Procedimnto Numérico

a) Taxa de liberação de energia

$$Fc\tau[i] := -\frac{1}{2} \cdot \text{Transpose}(\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - E_{nlj\tau}[i]).$$

$$DC_{hom}(\phi_{\tau}[i, 2]) \cdot (\varepsilon((i-1) \cdot \Delta tc) - E_{nlj\tau}[i]) :$$

$$MFY\tau[i, 2] := Fc\tau[i] :$$

$$MFv\tau[i, 2] := Fv(\phi_{\tau}[i, 2], vFc) :$$

b) Atualização da função de dano

$$\text{if } i = 1 \text{ and } Fc\tau[i] \leq Fv(\epsilon_{-}, vFc) \text{ then } \phi_{\tau}[i, 2] := \epsilon_{-} \\ \text{elif } i > 1 \text{ and } Fc\tau[i] \leq Fv(\phi_{\tau}[i-1, 2], vFc) \text{ then } \phi_{\tau}[i, 2] := \phi_{\tau}[i-1, 2] \\ \text{elif } i = 1 \text{ then } \phi_{\tau}[i, 2] := \epsilon_{-} + d\phi_{dt} \cdot \Delta tc \\ \text{else } \phi_{\tau}[i, 2] := \phi_{\tau}[i-1, 2] + d\phi_{dt} \cdot \Delta tc$$

end if

c) Plotagem da função de dano atual

pode ser desabilitado em caso de sobrecarga ou travamento (evitando o recall nulo)

`print(DocumentTools:- SetProperty("Plot2", value, plot([\phi_{\tau}`

`x=0..tmax, y=0..0.25, title="Damage Parameter Evolution", labels=["t", "\epsilon"],`

`titlefont=["Times", Bold, 13], legendstyle=[font=["Times", Bold, 10]],`

`labelfont=["Times", Bold, 10], color=["Red"], gridlines, thickness=2,`

`labeldirections=["horizontal", "vertical"]))) :`

condição para evitar sobrecarga de memória

$$\text{if } \frac{\text{kernelopts}(\text{bytesalloc})}{1024 \cdot 1024 \cdot 2} \geq 2700 \text{ then break end if:}$$

end do:

6) Plotagem Gráfica

e) Plotagem da função de dano total

```
plot([phi_tau], x = 0 ..15, y = 0 ..0.25, title = "Damage Parameter Evolution", labels = ["t ", "ε"],
titlefont = ["Times", Bold, 13], legendstyle = [font = ["Times", Bold, 10]], color = ["Red"],
color = ["Red"], gridlines, thickness = 2, labeldirections = ["horizontal", "vertical"] );
```

e) Plotagem da taxa de liberação de energia e energia crítica

```
plot([MFY_tau, MFv_tau], x = 0 ..15, titlefont = ["Times", Bold, 13], labels = ["time (years)", typeset("F ( J/", m^3, " )")],
title = "Comparasion between energy release rate and critical energy", color = ["red", "blue"],
legendstyle = [font = ["Times", Bold, 10]], labelfont = ["Times", Bold, 10],
gridlines, thickness = 2, labeldirections = ["horizontal", "vertical"] );
```

7) Encerramento do Bloco

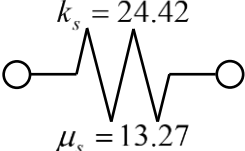
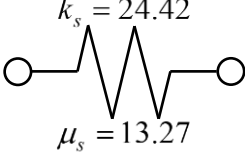
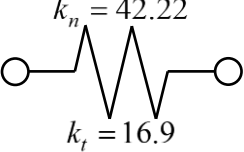
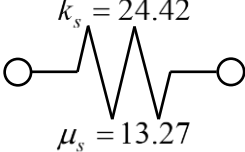
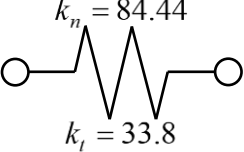
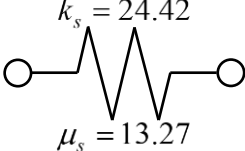
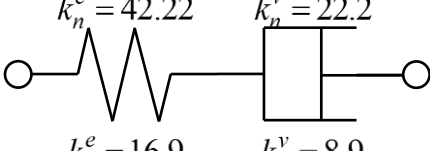
```
Current_Time := Current_Time + time( ) - Sum_Time :
```

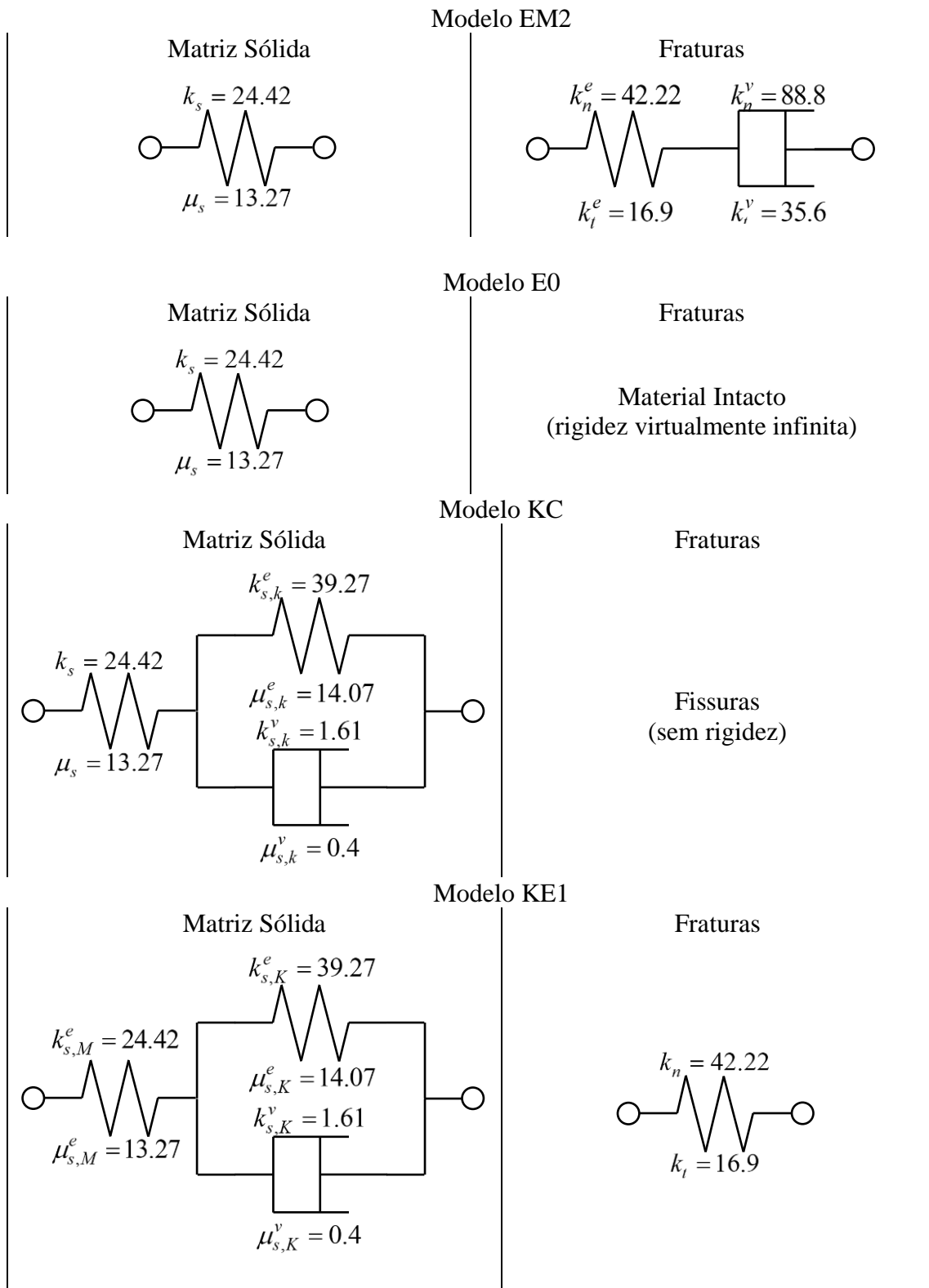
```
cat(`, "Tempo Quadro: ", convert(time( ) - Sum_Time, string), " seg");
```

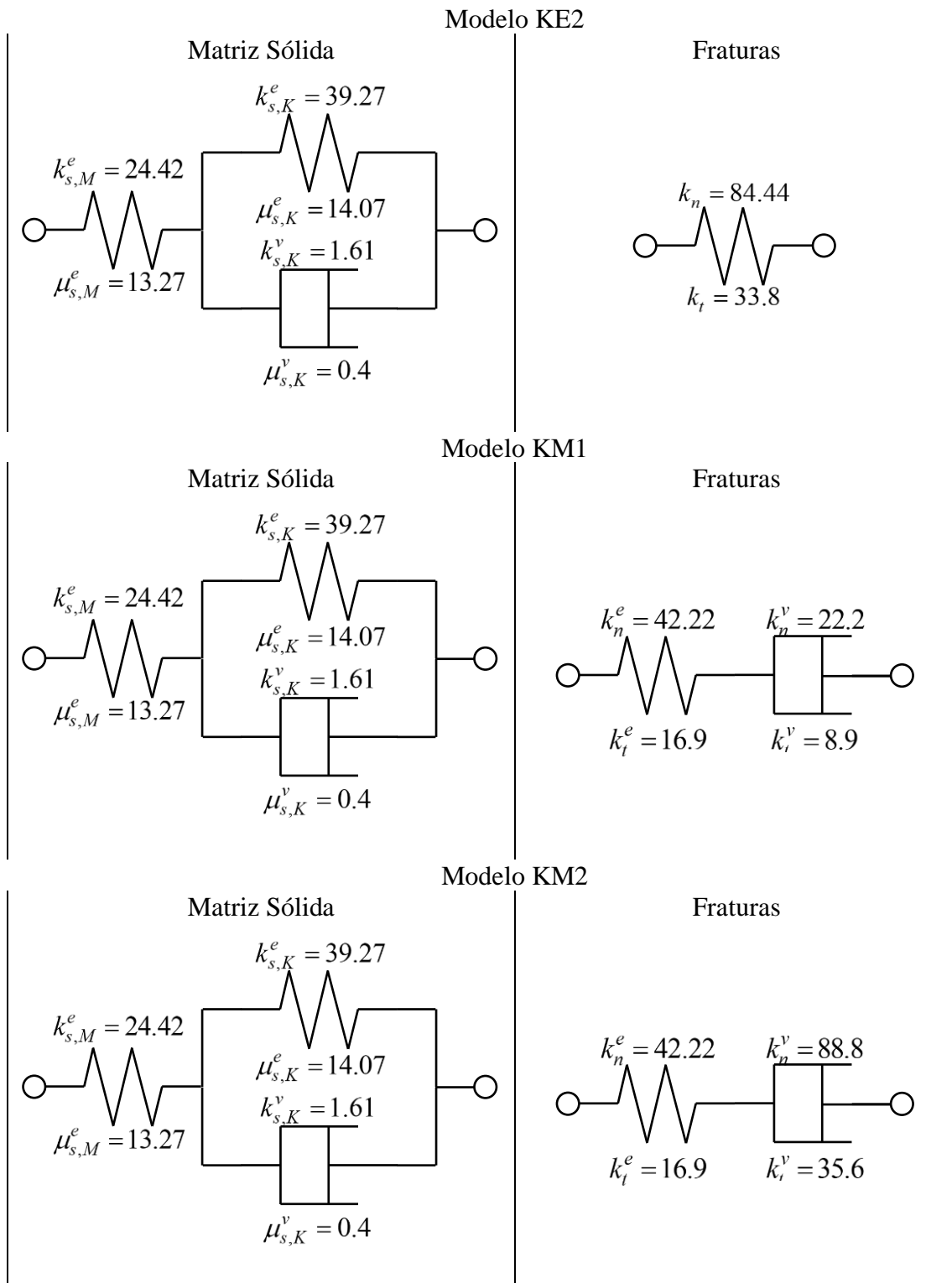
```
cat(`, "Tempo Total: ", convert(Current_Time, string), " seg");
```

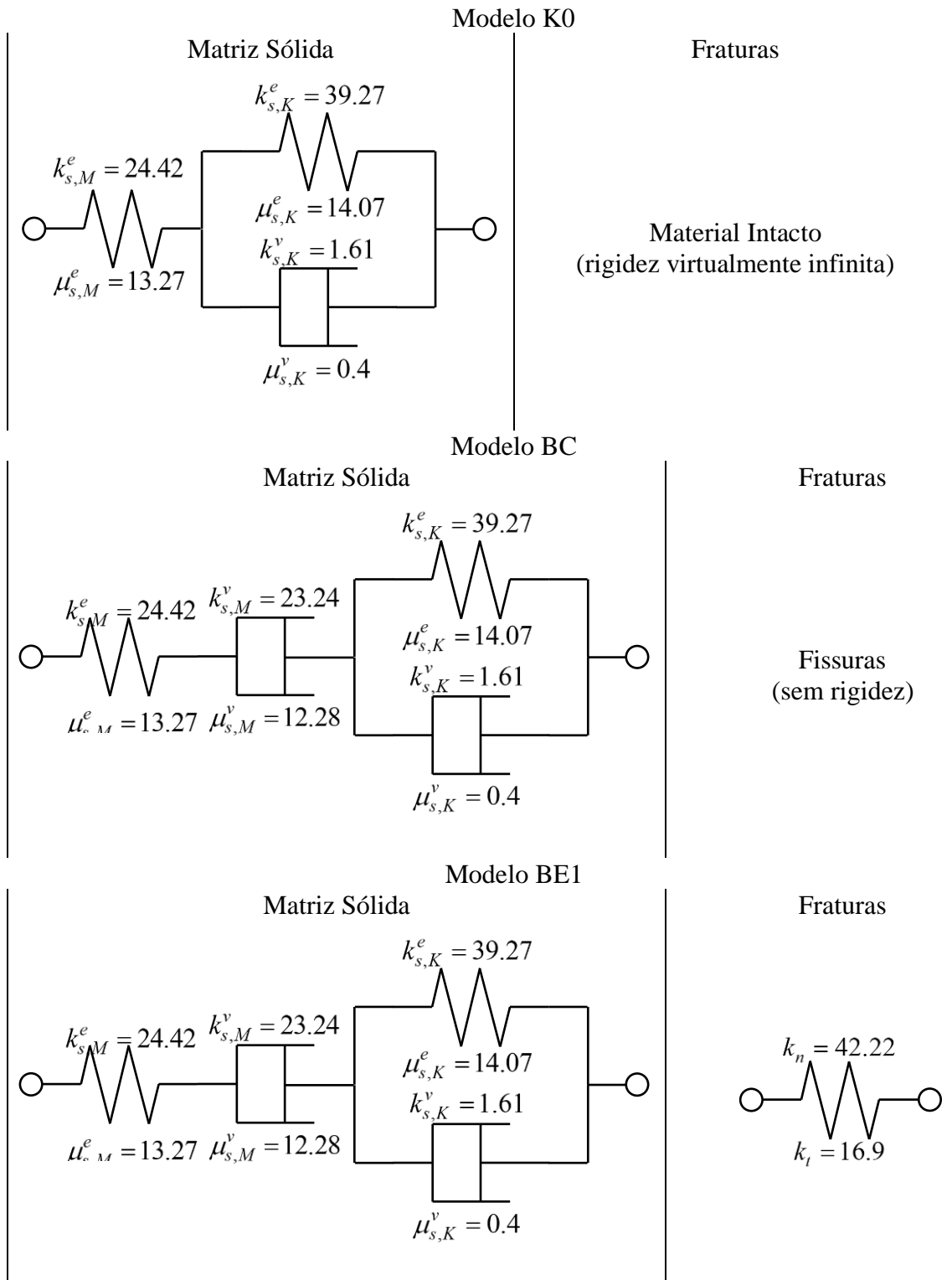
ANEXO H: PROPRIEDADES DOS MODELOS UTILIZADOS NA SEÇÃO 6.7

Este anexo visa apresentar as propriedades utilizadas para a determinação das curvas desenvolvidas na seção 6.7. Todas propriedades referentes a matriz sólida são dadas em *GPa* ou *GPa.ano*, enquanto as propriedades referentes as fraturas são dadas em *GPa/m* ou *GPa.ano/m*.

<p>Matriz Sólida</p>  <p>$k_s = 24.42$ $\mu_s = 13.27$</p>	<p>Modelo EC</p> <p>Fraturas</p> <p>Fissuras (sem rigidez)</p>
<p>Matriz Sólida</p>  <p>$k_s = 24.42$ $\mu_s = 13.27$</p>	<p>Modelo EE1</p> <p>Fraturas</p>  <p>$k_n = 42.22$ $k_t = 16.9$</p>
<p>Matriz Sólida</p>  <p>$k_s = 24.42$ $\mu_s = 13.27$</p>	<p>Modelo EE2</p> <p>Fraturas</p>  <p>$k_n = 84.44$ $k_t = 33.8$</p>
<p>Matriz Sólida</p>  <p>$k_s = 24.42$ $\mu_s = 13.27$</p>	<p>Modelo EM1</p> <p>Fraturas</p>  <p>$k_n^e = 42.22$ $k_n^v = 22.2$ $k_t^e = 16.9$ $k_t^v = 8.9$</p>

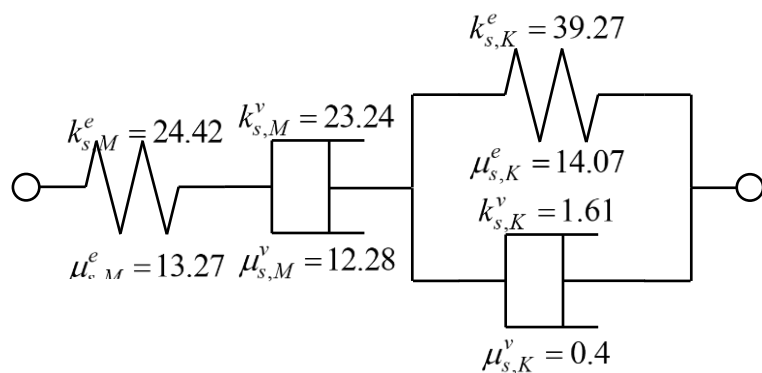




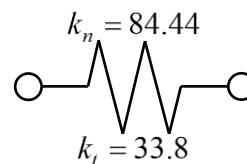


Modelo BE2

Matriz Sólida

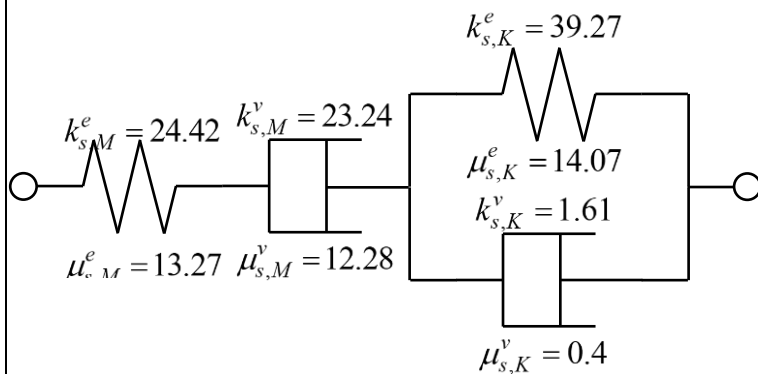


Fraturas

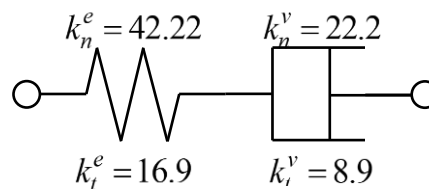


Modelo BM1

Matriz Sólida

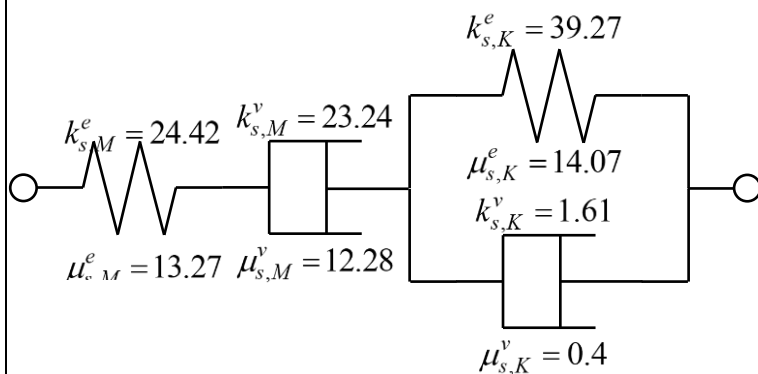


Fraturas



Modelo BM2

Matriz Sólida



Fraturas

