

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA ROBUSTA MULTIOBJETIVO APLICADA  
EM SUSPENSÃO VEICULAR

por

Ewerton Grotti

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Maio de 2021

# OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA ROBUSTA MULTI OBJETIVO APLICADA EM SUSPENSÃO VEICULAR

por

Ewerton Grotti  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Aprovada por:

Prof. Dr. Felipe Schaedler de Almeida .....PPGEC/UFRGS

Prof. Dr. Letícia Fleck Fadel Miguel .....PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Maria Alzira Araújo Nunes .....UnB-FGA/PPG-Integridade

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 10 de Maio de 2021.

*Reconhecer o que se sabe e o que  
não se sabe, isso é conhecimento  
verdadeiro.  
(Confúcio, 478 a.C.).*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha noiva Luísa Castilhos Dias por ser minha companheira em todos os momentos, e aos meus pais, Milton Grotti e Vitória Regina Zani Grotti, pelo apoio incondicional. Agradeço ao meu orientador, Herbert Martins Gomes, pela serenidade, ensinamentos, e conselhos. Agradeço a meus amigos Felipe Lins e Arthur Castilhos Dias pelas risadas, e aos meus amigos Pedro Bühner Santana e José Picoral Filho pelo companheirismo e ajuda nos momentos decisivos. Também agradeço a todos os professores que construíram uma ponte sólida para meu aprendizado, na escola, na graduação, e recentemente nas disciplinas do mestrado: jamais esquecerei cada momento de paciência que tiveram para comigo. Finalmente, agradeço ao *CNPq* e a *CAPES* pelo apoio financeiro dado à pesquisa, e à Comissão de Avaliação composta pelos professores Felipe Schaedler de Almeida, Maria Alzira Araújo Nunes, e Leticia Fleck Fadel Miguel.

## RESUMO

A presente dissertação aplica uma metodologia de otimização robusta multiobjetivo ao problema da otimização de parâmetros da suspensão de um modelo numérico de meio carro com 5 graus de liberdade. A fim de aumentar o conforto do motorista do veículo sem prejudicar a dirigibilidade, a função objetivo escolhida foi a aceleração *rms* ponderada conforme a norma ISO 2631 (1997) com restrição no espaço de trabalho da suspensão. A otimização robusta é baseada em uma abordagem probabilística, mais completa do que aquela baseada em intervalos. A solução é comparada com uma otimização determinística, que não leva em consideração as incertezas. O estudo leva em conta diferentes aproximações presentes na literatura para a média e desvio padrão da função e da restrição, comparando os benefícios e prejuízos dos métodos. A solução gerada pela otimização robusta multiobjetivo escolhida resulta em uma média de aceleração *rms* ponderada de  $0,205 \text{ m/s}^2$ , contra  $0,183 \text{ m/s}^2$  da otimização determinística. Estas soluções, robusta e determinística, representam uma redução de 85,25% e 86,82% da aceleração da configuração de referência, respectivamente. No entanto, a probabilidade de falha calculada a partir do método de Monte Carlo com 25000 amostras mostrou que a otimização robusta permaneceu dentro do intervalo de segurança aceitável do espaço de trabalho da suspensão que foi estipulado em 10%, com apenas 8,69% de chance de falha da restrição, contra 66,23% de chance de falha para a solução determinística.

Palavras-chave: Otimização robusta; *Quantum particle swarm optimization*; Suspensão veicular; Incertezas.

## ABSTRACT

This dissertation applies a multiobjective robust optimization methodology to the suspension optimization problem of a 5 degrees of freedom half-car numerical model. In order to increase the driver's comfort without compromising the drivability, the chosen objective function was the weighted rms acceleration according to ISO 2631 (1997) with constrain regarding the suspension working space. The robust optimization is based in a probabilistic approach, more complete compared to the interval based approach. The study accounts for different approximation approaches present in the literature for the mean and deviation of function and constrain, comparing the advantages and disadvantages of each method. The chosen solution generated by the multiobjective robust optimization results in a mean for weighted rms acceleration of  $0.205 \text{ m/s}^2$  against  $0.183 \text{ m/s}^2$  for the deterministic solution. These solutions, robust and deterministic, represent a reduction of 85.25% and 86.82% of the acceleration of the reference configuration, respectively. However, the failure probability calculated with the Monte Carlo method using 25000 samples, show that the robust optimization remained within the acceptable safety range of the suspension workspace which has been set to 10%, with an 8.69% chance of failure, against 66.23% chance of failure for the deterministic solution.

Keywords: Robust Optimization, Quantum Particle Swarm Optimization, Vehicle Suspension, Uncertainty.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	Justificativa .....	2
1.2	Objetivos .....	2
1.3	Organização do trabalho .....	3
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRAFICA</b> .....	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>13</b>
3.1	Otimização .....	13
3.2	O Algoritmo PSO ( <i>Particle Swarm Optimization</i> ) .....	15
3.3	O Algoritmo QPSO ( <i>Quantum Particle Swarm Optimization</i> ) .....	17
3.4	Otimização multiobjetivo .....	19
3.5	Otimização multiobjetivo baseado em enxame de partículas quânticas.....	21
3.6	Teorema Central do limite .....	27
3.7	Incertezas em sistemas de veiculares .....	27
3.8	Otimização Robusta.....	28
3.9	Noções Básicas sobre Probabilidade, Estatística, e Confiabilidade.....	30
3.10	Hipóteses da Otimização Robusta.....	34
3.11	Modelo da suspensão de meio carro .....	39
3.12	Geração de pista com irregularidades .....	46
3.13	Avaliação do conforto segundo a norma ISO 2631-1 (1997) .....	48
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÃO NUMÉRICA EM OTIMIZÃO ROBUSTA</b> .....	<b>51</b>
4.1	Otimização robusta de uma função explícita com restrições de desigualdade .....	51
4.1.1	Abordagem com otimização robusta multiobjetivo .....	57
4.1.2	Análise dos métodos de aproximação para estatísticas .....	60
4.2	Otimização do modelo de suspensão de meio veículo.....	66
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>84</b>
5.1	Sugestões para trabalhos futuros.....	86
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>87</b>
	<b>APÊNDICE A O Método de Monte Carlo</b> .....	<b>94</b>
A.1	Geração de amostras aleatórias seguindo certa distribuição de probabilidades ....	94
A.2	Técnicas de redução de variância.....	96
	<b>APÊNDICE B Teste De Lilliefors</b> .....	<b>99</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1	Fluxograma simplificado do algoritmo PSO.....	16
Figura 3.2	Fluxograma simplificado do algoritmo QPSO. ....	18
Figura 3.3	Ilustração representativa de uma Fronteira de Pareto.....	20
Figura 3.4	Exemplo de função multiobjetivo com 2 funções objetivo $f_1$ e $f_2$ e duas variáveis de projeto $x_1$ e $x_2$ , e duas restrições $g_1 \leq 0$ e $g_2 \leq 0$ .....	21
Figura 3.5	Ilustração esquemática da influência da partícula guia. [Adaptado de Grotti et al., 2020]. ....	25
Figura 3.6	Fluxograma simplificado do funcionamento do algoritmo MOQPSO. (Adaptado de Grotti et al., 2020). ....	26
Figura 3.7	Função densidade de probabilidade para o estado limite $G(X)$ . Adaptado de Choi et al., 2007. ....	33
Figura 3.8	Modelo esquemático do meio carro (adaptado de Grotti et al., 2020). ....	40
Figura 3.9	Densidade espectral da pista de tipo C, criada a partir da ISO 8608 (2016). ....	47
Figura 3.10	Perfil da pista de tipo C, criada a partir da ISO 8608 (2016). ....	48
Figura 3.11	Fatores de ponderação de acordo com a norma ISO 2631-1, 1997 (Adaptado de ISO 2631-1, 1997).....	49
Figura 4.1	Comportamento da função de utilidade $F$ . Vista $x_1$ e $F$ (Função de utilidade). ....	54
Figura 4.2	Comportamento da função de utilidade $F$ . Vista $x_2$ e $F$ (Função de utilidade). ....	55
Figura 4.3	Comportamento da função de utilidade $F$ . Vista $x_1$ e $x_2$ . ....	55
Figura 4.4	Comportamento da função de utilidade $F$ . ....	56
Figura 4.5	Comportamento da função objetivo $f$ . ....	56
Figura 4.6	Fronteira de Pareto resultante do MOQPSO, primeiro exemplo da referência Arora, 2012. ....	57
Figura 4.7	Comportamento da função de utilidade juntamente com os pontos da Fronteira de Pareto. Vista $x_1$ e $F$ . ....	58
Figura 4.8	Comportamento da função de utilidade juntamente com os pontos da Fronteira de Pareto. Vista $x_2$ e $F$ . ....	58



Figura 4.9	Comportamento da função de utilidade juntamente com os pontos da Fronteira de Pareto. Vista $x_1$ e $x_2$ . .....	<b>59</b>
Figura 4.10	Fronteira de Pareto resultante do MOQPSO e função de utilidade.....	<b>59</b>
Figura 4.11	Fronteira de Pareto resultante do MOQPSO e função de utilidade com ênfase na restrição e nos pontos mais extremos da fronteira. ....	<b>60</b>
Figura 4.12	Comparativo entre média e desvio da restrição 1 para diferentes valores de desvios das variáveis de projeto e equações de restrição. ....	<b>61</b>
Figura 4.13	Comparativo entre média e desvio da restrição 2 para diferentes valores de desvios das variáveis de projeto e equações de restrição. ....	<b>62</b>
Figura 4.15	Comparativo entre métodos de Monte Carlo e aproximações, com média e desvio da função objetivo para diferentes números de amostras. ....	<b>64</b>
Figura 4.16	Comparativo entre métodos de Monte Carlo e aproximações, com média e desvio da restrição 1 para diferentes números de amostras. ....	<b>65</b>
Figura 4.17	Comparativo entre métodos de Monte Carlo e aproximações, com média e desvio da restrição 2 para diferentes números de amostras. ....	<b>65</b>
Figura 4.18	Perfil de pista da lombada dupla usado na validação do modelo com Boonlong, 2013. ....	<b>67</b>
Figura 4.19	Validação do modelo numérico. Sinal da aceleração do motorista no tempo extraída de Boonlong, 2013, em vermelho, e sinal gerado por este trabalho, em azul. ....	<b>67</b>
Figura 4.20	Fronteira de Pareto gerada pela otimização robusta multiobjetivo. ....	<b>72</b>
Figura 4.21	Histogramas para a restrição usando a aproximação para curvas normais.	<b>75</b>
Figura 4.22	Histogramas para a restrição usando o método de Monte Carlo com 25000 amostras. ....	<b>75</b>
Figura 4.23	Histogramas para a aceleração RMS ponderada usando o método de Monte Carlo com 25000 amostras. ....	<b>78</b>
Figura 4.24	Histogramas para a aceleração RMS ponderada usando o método de Monte Carlo com 25000 amostras – Ênfase nas soluções ótimas. ....	<b>78</b>
Figura 4.25	Histogramas para o máximo espaço de trabalho dianteiro da suspensão usando o método de Monte Carlo com 25000 amostras. ....	<b>79</b>
Figura 4.26	Histogramas para o máximo espaço de trabalho traseiro da suspensão usando o método de Monte Carlo com 25000 amostras. ....	<b>79</b>

Figura 4.27	Sinal da aceleração vertical do motorista no tempo para as soluções das otimizações e referência. ....	<b>80</b>
Figura 4.28	Sinal da aceleração vertical do motorista no tempo para as soluções das otimizações e referência – Ênfase nas soluções ótimas. ....	<b>80</b>
Figura 4.29	Sinal da aceleração vertical no centro de gravidade do veículo no tempo para as soluções das otimizações e referência. ....	<b>81</b>
Figura 4.30	Sinal da aceleração vertical no centro de gravidade do veículo no tempo para as soluções das otimizações e referência - Ênfase nas soluções ótimas. ....	<b>81</b>
Figura 4.31	Sinal da arfagem do veículo no tempo para as soluções das otimizações e referência. ....	<b>82</b>
Figura 4.32	Sinal da arfagem do veículo no tempo para as soluções das otimizações - Ênfase nas soluções ótimas. ....	<b>82</b>
Figura 4.33	Sinal do espaço de trabalho da suspensão no tempo para as soluções das otimizações e referência, traseiro e dianteiro. ....	<b>83</b>
Figura A.1	Esquema de geração de amostras pelo Método da Transformação Inversa. ....	<b>95</b>
Figura A.2	Esquema de geração de amostras pelo Método da Transformação Inversa. ....	<b>95</b>
Figura A.3	Conceito básico do LHS para duas variáveis aleatórias e 5 realizações. ...	<b>98</b>

## LISTA DE TABELAS E QUADROS

Tabela 3.1	Valores originais dos parâmetros que compõem o modelo numérico da suspensão. ....	<b>41</b>
Tabela 3.2	Indicações aproximadas para os limites de aceleração para conforto. (Adaptado: ISO 2631-1, 1997). ....	<b>50</b>
Tabela 4.1	Comparação dos resultados para o primeiro exemplo referente à bibliografia (Fonte: Arora, 2012, terceira edição).....	<b>53</b>
Tabela 4.2	Comparativo entre os desvios das restrições para diferentes valores de desvios das variáveis de projeto. ....	<b>63</b>
Tabela 4.3	Valores dos parâmetros do modelo numérico da suspensão de meio carro. ....	<b>67</b>
Tabela 4.4	Valores das variáveis de projeto e das funções objetivo para validação do modelo numérico de meio carro. ....	<b>68</b>
Tabela 4.5	Variáveis e parâmetros incertos, variância, média, e intervalo de busca das variáveis de projeto usadas na simulação.....	<b>70</b>
Tabela 4.6	Comparação dos resultados para o segundo exemplo referente à suspensão de meio carro com 5 graus de liberdade.....	<b>74</b>
Tabela 4.7	Comparação entre as probabilidades de Falha. ....	<b>76</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### *Caracteres Latinos*

$x_{i,j}^k$	Variáveis de projeto $j$ na iteração $k$ da partícula $i$ (PSO)
$xlbest_{i,j}^k$	Melhor conjunto de variáveis de projeto $j$ encontrada pela partícula $i$ (PSO)
$v_{i,j}^k$	Velocidade atualizada da partícula $i$ para a variável de projeto $j$ (PSO)
$xgbest$	Melhor conjunto de variáveis de projeto encontrado por toda a população (PSO)
$r_1$	Valores aleatórios entre zero e um (PSO)
$r_2$	Valores aleatórios entre zero e um (PSO)
$\Delta t$	Intervalo de tempo ou passo (PSO)
$N_p$	Número de partículas total na população (PSO)
$i$	Índice correspondente à partícula (PSO)
$j$	Índice correspondente à variável de projeto (PSO)
$k$	Índice correspondente à iteração (PSO)
$pbest$	Matriz que guarda a melhor posição local de cada partícula $i$ (QPSO)
$gbest$	Melhor posição global do enxame (QPSO)
$mbest$	Média de todos os melhores locais (QPSO)
$n$	Tamanho da população do enxame (QPSO)
$t$	Passo da iteração (QPSO)
$T$	Número total de iterações (QPSO)
$u$	Número aleatoriamente distribuído entre 0 e 1 (QPSO)
$f(\mathbf{X}_A)$	Vetor que contenha as soluções de um problema multiobjetivo $k$ dimensional, para $\mathbf{X}_A$
$f(\mathbf{X}_B)$	Vetor que contenha as soluções de um problema multiobjetivo $k$ dimensional, para $\mathbf{X}_B$
$\mathbf{X}_A$	Vetor de variáveis de projeto
$\mathbf{X}_B$	Vetor que contenha as soluções de um problema multiobjetivo $k$ dimensional, para $\mathbf{X}_B$
$f_i(\mathbf{X}_A)$	Solução para a função objetivo $i$ , das variáveis de projeto $\mathbf{X}_A$
$f_i(\mathbf{X}_B)$	Solução para a função objetivo $i$ , das variáveis de projeto $\mathbf{X}_B$
$g$	Restrição para um problema de otimização
$f$	Função objetivo
$f_P$	Arquivo para armazenamento das melhores posições locais (MOQPSO)

$f_{G1}$	Arquivo para armazenamento das melhores posições globais (MOQPSO)
$f_{G2}$	Melhores posições globais que são filtradas por um critério de distância mínima (MOQPSO)
$X_G$	Os vetores das variáveis de projeto correspondentes ao arquivo $f_P$ (MOQPSO)
$X_{G1}$	Os vetores das variáveis de projeto correspondentes ao arquivo $f_{G1}$ (MOQPSO)
$X_{G2}$	Os vetores das variáveis de projeto correspondentes ao arquivo $f_{G2}$ (MOQPSO)
$guide_j$	Guia do algoritmo (MOQPSO)
$arg \max$	Expressão matemática <i>arguments of the maxima</i> , que escolhe o maior valor de saída de uma função
$guid\_perc$	Parcela das soluções do arquivo $f_{G1}$ usada na seleção do guia mais próximo. Admite valores entre 0 e 1, e em <i>default</i> usa 0,15. (MOQPSO)
$f_i$	Amostra $i$ de uma função $f$ qualquer
$l$	Número de amostras
$E$	Valor esperado, outra representação para média $\mu$
$X$	Variável aleatória com valor médio $\mu$ e desvio padrão $\sigma$
FDP	função densidade de probabilidade
$f_x(x)$	Representação para função densidade de probabilidade de $x$
FDA	Função de distribuição acumulada
$F_x(x)$	Representação para função de distribuição acumulada de $x$
$G(X)$	Estado limite
$R(X)$	Resistência estrutural
$S(X)$	carga
$G_j$	Restrição robusta, que leva em conta a incerteza das restrições para satisfazer a restrição.
$k$	Grau de confiança obtido por uma Tabela estatística de distribuição de Gauss para que a restrição não seja violada
$k^{xj}$	Fator de segurança para a parcela da variância da restrição $j$ devido as aleatoriedade das variáveis de projeto $x$
$k^{yj}$	Fator de segurança para a parcela da variância da restrição $j$ devido as aleatoriedade dos parâmetros $y$
$z^{xi}$	Máximos valores, assumidos pelas variáveis incertas $x_i$ , que podem ser estimados como um certo número de desvios padrões de cada variável incerta
$z^{yi}$	Máximos valores, assumidos pelas variáveis incertas $x_i$ e $y_j$ e que podem ser estimados como um certo número de desvios padrões de cada parâmetro incerto

$q$	Número de desvios considerados na segurança de $z^{y_i}e z^{x_i}$	
$L_1$	Distância entre o centro de gravidade (CG) e o eixo dianteiro do modelo de veículo	[m]
$L_2$	Distância entre o centro de gravidade (CG) e o eixo traseiro do modelo de veículo	[m]
$r$	Distância entre o CG e o assento do motorista no modelo de veículo	[m]
$k_{ss}$	Rigidez equivalente do assento do motorista no modelo de veículo	[N/m]
$c_{ss}$	Amortecimento equivalente do assento do motorista no modelo de veículo	[N.s/m]
$k_{s1}$	Rigidez equivalente da suspensão dianteira no modelo de veículo	[N/m]
$k_{s2}$	Rigidez equivalente da suspensão traseira no modelo de veículo	[N/m]
$c_{s1}$	Amortecimento equivalente da suspensão dianteira no modelo de veículo	[N.s/m]
$c_{s2}$	Amortecimento equivalente da suspensão traseira no modelo de veículo	[N.s/m]
$k_{p1}$	Rigidez equivalente dos pneus dianteiros no modelo de veículo	[N/m]
$k_{p2}$	Rigidez equivalente dos pneus traseiros no modelo de veículo	[N/m]
$c_{p1}$	Amortecimento equivalente dos pneus dianteiros no modelo de veículo	[N.s/m]
$c_{p2}$	Amortecimento equivalente dos pneus traseiros no modelo de veículo	[N.s/m]
$m_1$	Massa do eixo dianteiro no modelo de veículo	[m]
$m_2$	Massa do eixo traseiro no modelo de veículo	[m]
$m_c$	Massa do motorista no modelo de veículo	[kg]
$m_s$	Massa suspensa do veículo	[kg]
$J_s$	Momento polar de inércia da massa suspensa do veículo	[kg.m <sup>2</sup> ]
$L$	Lagrangeano	[J]
$T$	Energia cinética	[J]
$V$	Energia potencial	[J]
$D$	Termo não conservativo dissipador	[J.s]
$x$	Posição	[m]
$\dot{x}$	Velocidade	[m/s]
$\ddot{x}$	Aceleração	[m/s <sup>2</sup> ]
$z_c$	Deslocamento vertical do motorista no modelo de veículo	[m]
$z_{sp}$	Deslocamento da massa suspensa no ponto de contato com	[m]

	o assento do motorista no modelo de veiculo	
$z_s$	Deslocamento vertical da massa suspensa no modelo de veiculo	[m]
$z_{s1}$	Deslocamento da massa suspensa no ponto de contato com a suspensão dianteira no modelo de veiculo	[m]
$z_{s2}$	Deslocamento da massa suspensa no ponto de contato com a suspensão traseira no modelo de veiculo	[m]
$z_1$	Deslocamento do eixo dianteiro do modelo de veiculo	[m]
$z_2$	Deslocamento do eixo traseiro do modelo de veiculo	[m]
<b>M</b>	Matriz de massa do modelo numérico de veiculo	[kg]
<b>K</b>	Matriz de rigidez do modelo numérico de veiculo	[N/m]
<b>C</b>	Matriz de amortecimento do modelo numérico de veiculo	[N.s/m]
<b>F<sub>e</sub></b>	Matriz de forças do modelo numérico de veiculo	[N]
$G_\xi$	Densidade espectral unilateral para rugosidade de pista	[m <sup>2</sup> /ciclo/m]
$C$	Coefficiente de rugosidade geral para geração de pista	[m <sup>3</sup> /ciclo]
$w$	Distribuição do comprimento de onda para geração de pista	
$n_0$	Frequência de descontinuidade	[ciclo/m]
$v$	Velocidade do veículo	[m/s]
$f_c$	Frequência de corte para geração de pista	[m <sup>-1</sup> ]
$f_i$	Frequências da densidade espectral na geração de pista	
$ne$	Número de linhas espectrais na geração de pistas	
$\Delta t$	Intervalo de tempo que o veículo leva para percorrer a distância entre eixos	[m]
$a_{rms}$	Aceleração rms	[m/s <sup>2</sup> ]
$a_w$	Aceleração ponderada pela frequência, norma ISO 2631, 1997	[m/s <sup>2</sup> ]
$w_i$	Pesos para ponderação de $a_w$ , norma ISO 2631, 1997.	
$w_k$	Fator correspondente à aceleração percebida na direção y, vertical na ponderação, norma ISO 2631, 1997.	
$w_d$	Fator correspondente à aceleração percebida na direção x, longitudinal, norma ISO 2631, 1997.	
CV	Coefficiente de variação	
$n_{var}$	Número de variáveis incertas	
$n_{par}$	O número de parâmetros incertos	
$dt$	Passo de tempo	[s]
$ws_{crit}$	Espaço de trabalho crítico da suspensão	[m]
$ws_1$	Espaço de trabalho da suspensão dianteira	[m]
$ws_2$	Espaço de trabalho da suspensão traseira	[m]
$f_1$	Função objetivo 1	
$f_2$	Função objetivo 2	

$k_{cons}$	Confiança da restrição
$FU$	Função de utilidade
$f_i^*$	Função objetivo $i$ aplicada nos valores de referencia
$f_1^*$	Função objetivo 1 aplicada nos valores de referencia
$f_2^*$	Função objetivo 2 aplicada nos valores de referencia
$pvalue$	Probabilidade de obter resultados do teste probabilístico tão extremos quanto os resultados realmente observados

### Caracteres Gregos

$\omega$	Momento de inércia do algoritmo PSO	
$\lambda_1$	Componente cognitivo individual (PSO)	
$\lambda_2$	Componente cognitivo coletivo (PSO)	
$ \psi(x,t) ^2$	Função de onda (QPSO)	
$\beta_1^{cont}$	Limite superior para o coeficiente de contração-expansão (QPSO)	
$\beta_0^{cont}$	Limite inferior para o coeficiente de contração-expansão (QPSO)	
$\beta^{cont}$	Coeficiente de contração-expansão (QPSO)	
$\rho$	Número aleatoriamente distribuído entre 0 e 1 (QPSO)	
$\varphi$	Número aleatoriamente distribuído entre 0 e 1 (QPSO)	
$\mu$	Média	
$\sigma^2$	Variância	
$\sigma$	Desvio padrão	
$\beta$	Índice de confiabilidade	
$P_f$	A probabilidade de falha	
$\mu_f$	Média da função $f$	
$\mu_{g_j}$	Média da restrição $g_j$	
$\sigma_f^2$	Variância da função $f$	
$\sigma_{g_j}^2$	Variância da restrição $g_j$	
$\sigma_{g_j}$	Desvio padrão da restrição $g_j$	
$\xi_1$	Deslocamentos advindos das irregularidades verticais na trilha dianteira no modelo de veículo	[ $m$ ]



$\xi_2$	Deslocamentos advindos das irregularidades verticais na trilha traseira no modelo de veículo	[ <i>m</i> ]
$\theta_s$	Ângulo de arfagem do modelo de veículo	[ <i>rad</i> ]

## 1 INTRODUÇÃO

A vibração em um veículo depende de vários fatores, dentre os quais podemos destacar a velocidade do veículo, a rugosidade da pista e o sistema de suspensão. Diversos problemas são associados a esta vibração, incluindo problemas graves de saúde como danos na coluna vertebral. Problemas menores como desconforto, falta de atenção, tontura, enjôo, carga mental excessiva [Zamanian et al., 2014], e dores em diversas partes do corpo [Nunes et al., 2014], são muito recorrentes em motoristas. A suspensão do veículo é projetada para mitigar estes problemas, reduzindo a aceleração *RMS* (*root mean square*) sobre os passageiros e motorista. Nesta tarefa de mitigação, as suspensões ativas se mostram mais eficientes, porém ainda são pouco usadas devido à alta complexidade e alto custo intrínseco deste tipo de suspensão.

A otimização dos parâmetros da suspensão passiva é um passo importante no projeto de um automóvel. Como descrito por Chowdhury e Taguchi, 2016, a otimização deve ser realizada após o projeto conceitual do sistema e antes dos ajustes. Neste passo, o sistema deve ser otimizado para que seu custo seja reduzido mantendo um resultado que satisfaça os requisitos do produto. Sendo assim, estudar a otimização da suspensão é parte essencial do projeto, e motivação principal desta dissertação.

A crescente popularidade da otimização por meio de algoritmos é influência direta dos avanços computacionais das últimas décadas. O uso destes algoritmos é uma tendência global que torna possível a realização de testes avançados sem a necessidade da construção de um modelo real, propiciando mais qualidade e economizando tempo e dinheiro dentro da criação de um projeto. Em paralelo, muitos avanços vêm sendo feitos também na área de análise de incertezas, permitindo que exista um controle muito maior do comportamento final de um sistema com parâmetros incertos. Estes avanços fornecem mais informações ao projetista e permite que o projeto seja dimensionado de forma mais eficiente. Estes dois fatores, otimização e contabilização de incertezas, se alinham no tema da otimização robusta (RO).

## 1.1 Justificativa

Diferentes trabalhos aplicando otimização a suspensões veiculares vem sendo publicados na literatura, como Yang et al., 2019, Liu et al., 2019, Fossati et al., 2019, e Grotti et al., 2020, indicando que esta é uma linha de pesquisa atual e relevante. Na etapa de otimização há um potencial muito grande para incremento de qualidade e redução de custos, e por tanto é uma área interessante para investigação e experimentação. Além disso, existe o fator do impacto da vibração que já foi discutido anteriormente, embasando a importância de estudos acerca do tema.

O uso da RO na suspensão de um veículo se justifica pelas incontáveis variáveis incertas na operação e manufatura dos componentes, como por exemplo: carga do veículo; massa do motorista; velocidade de operação do veículo; condição da pista; tipo, condição e pressão do pneu; incertezas de fabricação e na matéria prima das molas, amortecedores e barras da suspensão; etc.

## 1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é aplicar um método de otimização robusta probabilística, baseada em uma otimização multiobjetivo de médias e desvios padrões, em suspensões veiculares. Pretende-se investigar o desempenho do método frente à abordagem tradicional determinística. Mais especificamente, algumas questões de pesquisa podem ser dispostas da seguinte forma:

- Quais são os erros associados aos métodos populares de aproximação da média e desvio usados durante uma otimização robusta probabilística?
- Dado o custo computacional dos métodos populares, existe vantagem real no uso da otimização robusta sobre a tradicional otimização determinística em um modelo de suspensão veicular?
- A abordagem multiobjetivo é viável para solucionar problemas de RO?
- O uso da otimização determinística pode gerar uma solução insegura?

De maneira natural, pode-se elencar também os objetivos:

- Investigar as metodologias de otimização robusta presentes na literatura.
- Investigar o erro dos métodos de aproximação para média e desvio, bem como os respectivos custos.
- Implementar uma metodologia de otimização robusta multiobjetivo.
- Acoplar a otimização a um modelo numérico de suspensão veicular.
- Investigar os resultados obtidos comparando-os com uma otimização determinística e com o modelo em sua configuração de referência.

### **1.3 Organização do trabalho**

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 é apresentada uma introdução ao tema, detalhando a motivação para o estudo, objetivos, questões de pesquisa, e a organização do trabalho; no capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica suscita, abordando as principais obras que possuem relevância para o tema; no capítulo 3 as ferramentas base para o estudo são detalhadas, como o modelo numérico da suspensão, a geração da pista segundo a ISO 8608, 2016, a avaliação do conforto segundo a ISO 2631, 1997, o algoritmo de otimização, e a abordagem usada na RO; no capítulo 4 dois problemas de RO são resolvidos, sendo o primeiro um exemplo da literatura com funções explícitas, e o segundo a otimização paramétrica da suspensão de um veículo; no capítulo 5 conclui-se o trabalho com uma discussão acerca dos resultados obtidos.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRAFICA

Muitos autores exploraram o tema da otimização robusta em suspensões veiculares. Cheng e Lin, 2014, estudaram a otimização robusta de um sistema de suspensão de duplo A (*Double wish bone*). Os autores usaram o programa ADAMS para simular numericamente a suspensão, alimentando um modelo de *kriging* com as médias e desvios padrões do ângulo de ação (*toe angle*) e deslocamento lateral. As amostras escolhidas para alimentar o *kriging* foram geradas pelo método de amostragem de hipercubo latino. As variáveis de projeto iniciais são as coordenadas das juntas da suspensão, sendo 12 juntas com 3 coordenadas cada, totalizando 36 coordenadas. Um estudo de sensibilidade é usado para filtrar as variáveis de projeto, reduzindo de 36 variáveis para 12. O modelo numérico é otimizado usando um algoritmo de otimização por enxame de partículas (PSO). Os autores encontraram uma redução na variação máxima do ângulo de ação de 52% com relação ao modelo com os parâmetros originais.

Outra bibliografia relevante sobre otimização robusta em veículos é o livro de Chowdhury e Taguchi, 2016, onde o tema da otimização robusta em veículos é abordado de uma maneira sistemática e bastante teórica. Os autores apresentam vários casos de otimização robusta, cada um com métodos de solução diferentes e foco em diferentes sistemas, como a otimização das janelas e da direção do automóvel por exemplo. Os autores definem robustez como a razão entre o sinal e o ruído, e usam uma base teórica para criar oito passos para otimização robusta que são usados em toda a extensão do livro: definir o escopo; identificar a função/resposta ideais; desenvolver uma estratégia de sinal/ruído; selecionar fatores de controle e níveis de controle; executar e coletar dados; conduzir análise de dados; adivinhar e confirmar; aprendizado e plano de ação.

Outros autores preferem o uso de uma rede neural artificial alimentada por um algoritmo ou software próprio para simulação, a fim de reduzir o número de chamadas da função objetivo. É o caso de Gobbi et al., 1999, que realiza um estudo sobre otimização robusta em suspensões veiculares usando rede neural artificial alimentada pelo software ADAMS de simulação de veículos. Os autores levam em conta as não linearidades, diversas velocidades, e diferentes situações: lombada, buraco na pista simétrico e assimétrico, pista com perfil irregular, e curva em J. O sinal no tempo e na frequência das acelerações do modelo numérico são comparados com as medições reais de um veículo

FIAT para validação. São consideradas na otimização 38 variáveis de projeto. 15 índices de eficiência (usados como funções objetivo em combinações de 2 a 15) foram selecionados para contabilizar o desempenho do modelo e avaliar a rede neural, sendo 5 destes exclusivos para a manobra de curva em J. A otimização é feita primeiramente considerando uma massa mínima para o veículo, e posteriormente outra otimização é feita com a massa máxima para o veículo (tanque de combustível cheio e capacidade de carga máxima). Esta segunda otimização é realizada usando apenas a pressão dos pneus como variável de projeto, mantendo constantes as demais variáveis já otimizadas. A justificativa para este passo é definir as pressões máximas e mínimas dos pneus. O coeficiente de correlação de postos de Spearman é usado para reduzir o número de índices de eficiência (usados como função objetivo, neste caso). Ao fim da otimização as Fronteiras de Pareto respectivas para cada caso com combinações de dois a seis funções objetivos foram geradas. A parte robusta da otimização é realizada usando o método da mínima sensibilidade.

Outra prática muito comum na bibliografia é o uso de análises de sensibilidade para descartar variáveis de projeto pouco relevantes, e só então a otimização é realizada para reduzir o número de chamadas da função objetivo. Nohtomi et al., 2016, realiza uma otimização robusta usando um algoritmo genético (GA) e o método de Monte Carlo (MC). Uma análise de sensibilidade apontou 22 variáveis de projeto, sendo elas as rigidezes das buchas e 8 pontos geométricos de montagem da suspensão. A função objetivo do controlador é encontrar a velocidade de avanço, a velocidade lateral e a taxa de guinada para o comando de direção e frenagem do motorista, com o menor esforço possível do controlador. Para o veículo, 10 variáveis de projeto foram usadas, entre elas a massa do veículo, o momento de inércia de guinada, a posição do centro de gravidade (C.G.), os coeficientes de força longitudinal e lateral do pneu e o coeficiente de atrito, todos considerados incertos. 39 métricas de desempenho foram usadas pelos autores, as quais refletem a estabilidade, o erro ao seguir o caminho prescrito do veículo, e o esforço do controlador. Para lidar com a alta complexidade do problema os autores usam 9 computadores em paralelo. A probabilidade de comportamentos fora do padrão acontecerem foram estimados com 200 simulações de Monte Carlo, informação que é usada para calcular a parte robusta do problema.

Há também, dentro do campo de pesquisa em otimização de suspensões veiculares, autores que preferem realizar as simulações no domínio da frequência. A grande vantagem desta abordagem é, novamente, a redução no tempo de processamento, uma vez que a simulação no tempo é muito mais lenta do que a simulação no campo da frequência. Todavia, a simulação no campo do tempo permite coletar informações que não estão disponíveis no domínio da frequência. Loyer e Jézéquel, 2009, realizam a otimização multiobjetivo da suspensão passiva de um modelo linear de quarto de carro no domínio da frequência. A robustez é avaliada pelo uso do método do índice de robustez analítico. As variáveis de projeto são a rigidez e amortecimento principais da suspensão. A massa suspensa e a rigidez do pneu são consideradas variáveis incertas, submetidas a uma variação de 10%. A distribuição escolhida pelos autores para este trabalho foi a distribuição normal, possibilitando o cálculo do desvio padrão das variáveis incertas a partir da aproximação de primeira ordem de Taylor. O coeficiente de correlação de postos de Spearman é usado para analisar a correlação entre as funções objetivo, que são: conforto associado à aceleração vertical e robustez; deflexão do pneu e robustez associada; deslocamento de massa suspensa e robustez associada. Para as restrições foram usadas as limitação de deslocamento da roda e limitação inferior da frequência não amortecida do modo da oscilação do corpo. Como critério de parada para o algoritmo genético os autores usaram um número máximo de gerações. As Fronteiras de Pareto geradas no estudo possuem 6 dimensões, os autores optaram por projeções de 3 dimensões para representar as soluções. Esta publicação possui uma abordagem para robustez semelhante àquela que será usada nesta dissertação, fazendo uso das aproximações por série de Taylor.

Entre outros trabalhos que abordam a otimização robusta em veículos está Koensgen et al., 2013, que faz uma otimização robusta de suspensão para grandes ângulos de cambagem ( $\pm 20^\circ$ ). Os autores usam dois modelos de pneus que se mostraram fortemente correlacionados. Três otimizações multiobjetivo usando o algoritmo genético NSGAI são realizadas: com 3 funções objetivo (fator de estabilidade R, escorregamento lateral específico do eixo dianteiro, e escorregamento lateral específico do eixo traseiro); com 2 funções objetivo (Efetividade e estabilidade); e também com 2 funções objetivo (função de performance de Sinus Ford e função de performance de Curva de regime permanente). Usando estas soluções, a otimização robusta é realizada baseada nos

métodos “*Design racional*” e “*electre*”, que consiste na montagem de uma tabela usada para avaliar a qualidade das funções objetivo, atribuindo os valores -1, 0 e 1, dependendo do desempenho da função.

Park et al., 2013, apresenta um método de otimização robusta usado para reduzir a tração na direção. Os autores usam o meta-modelo “função de base radial” (RBF), e otimização por aproximação sequencial para evitar o cálculo de derivadas e gradientes. O processo de otimização robusta contou com 28 variáveis de projeto com as respectivas tolerâncias, e as variâncias das funções objetivo foram aproximadas pela função de base radial. O processo levou 62 avaliações da função objetivo para convergir, resultando em uma solução que reduziu a tração na direção em 80% e seu desvio em 38,7%.

O modelo de veículo usado nesta dissertação já foi alvo de pesquisa de múltiplas publicações. Este modelo, que possui 5 graus de liberdade, foi analisado por Zadeh et al., 2010, Mahmoodabadi et al., 2013, Boonlong, 2013, Jamali et al., 2013, Fan et al., 2017, e Khalkhali et al., 2017, usando diferentes algoritmos de otimização e funções objetivo. Nariman-Zadeh *et al.*, 2010, usa um algoritmo genético cuja característica especial é um mecanismo de promoção de diversidade chamado eliminação- $\epsilon$ . O Algoritmo Genético Multiobjetivo de Diversidade Uniforme (traduzido do inglês: “*Multiobjective Uniform-diversity Genetic Algorithm*”, MUGA), é usado para otimizar quatro pares diferentes de funções objetivo e um problema contendo 5 funções objetivos. Boonlong, 2013, incorpora estes resultados e propõe um novo algoritmo chamado Algoritmo Genético de Objetivo Comprimido (traduzido do inglês: “*Compressed-Objective Genetic Algorithm*”, COGA-II). Boonlong, 2013, compara sua solução com aquela encontrada por Nariman-Zadeh *et al.*, 2010, e mostra que sua solução foi melhor do que aquela do trabalho anterior. Grotti et al., 2020, de mesma autoria desta dissertação, traz um novo algoritmo: o Otimizador de Partículas Quânticas Multiobjetivo (do inglês: *Multiobjective Quantum Particle Swarm Optimization*, MOQPSO). Este novo otimizador é colocado à prova com o mesmo modelo de suspensão de 5 graus de liberdade na primeira metade da publicação, onde o MOQPSO obteve resultados superiores àqueles encontrados por Boonlong, 2013. Este resultado é uma validação importante para o MOQPSO, uma vez que o algoritmo obteve resultados melhores em um problema de alta dimensionalidade de funções objetivo contra o algoritmo otimizador COGA-II, que foi especialmente desenvolvido para lidar com este tipo de problema. Na segunda metade da publicação, Grotti et al.,



2020, realiza a otimização de uma suspensão de ônibus com 13 graus de liberdade. Uma análise dinâmica com os sinais no tempo das acelerações, as Fronteiras de Pareto, e também uma análise de exposição à vibração para o motorista do ônibus são mostradas para avaliar as soluções. Uma comparação das soluções da otimização da suspensão do ônibus mostra que o algoritmo MOQPSO obteve resultados superiores àqueles obtidos pelo algoritmo NSGA-II, dominando toda a sua Fronteira de Pareto.

O MOQPSO, que também será usado nesta dissertação, já foi usado para realizar a otimização do direcionamento de fibras em materiais compostos no capítulo de livro Santana et al., 2019, no artigo citado anteriormente Grotti et al., 2020, e nas conferências Gomes et al., 2018, e Grotti et al., 2017.

Ainda usando o mesmo modelo de veículo, Khalkhali et al., 2017, usa uma abordagem probabilística semelhante àquela usada nesta dissertação. Um modelo de 5 graus de liberdade é colocado sobre uma pista irregular. Na primeira metade do trabalho, uma otimização determinística é realizada sobre 7 variáveis de projeto: rigidezes e amortecimentos da suspensão, do assento do motorista, e distância longitudinal entre centro de massa e assento do motorista. As funções objetivo nesta etapa são 5: Aceleração *RMS* do assento do motorista, velocidade vertical do pneu dianteiro e traseiro, deslocamento relativo do eixo frontal e traseiro. Como restrição, o limite para conforto foi usado de acordo com a ISO:2631. A otimização foi realizada usando o NSGAI. Em um segundo momento, a otimização robusta é realizada inserindo incertezas no amortecimento da suspensão dianteira e traseira. A escolha destas variáveis foi realizada com base em uma análise de sensibilidade das 5 funções objetivo usando o método de amostragem baseado no coeficiente de correlação de Pearson. Como resultado desta análise de sensibilidade, o autor encontrou que as variáveis mais influentes foram os coeficientes de amortecimento frontal e traseiro  $c_{s1}$  e  $c_{s2}$ . Por este motivo, apenas as variáveis de projeto  $c_{s1}$  e  $c_{s2}$  são consideradas incertas pelo autor. Novamente, o NSGAI é usado para otimizar as funções objetivo com seus respectivos desvios, resultando em 10 funções objetivo e 7 variáveis de projeto (sendo duas delas incertas). É importante ressaltar que as soluções anteriores foram inseridas na população inicial desta nova simulação, fazendo com que o algoritmo já iniciasse a busca com vantagem. A restrição ficou definida como a probabilidade para a violação do limite de conforto da ISO:2631-1978 (versão já ultrapassada desta norma), ser menor do que 10%. Para o cálculo das

médias e desvio, os autores usaram o método de Monte Carlo. Os resultados são então comparados com outros dois trabalhos: Nariman-Zadeh et al., 2010, e Bouazara, 1997. Nesta etapa do trabalho surge uma crítica, pois os trabalhos usados para comparação, a pesar de usarem o mesmo modelo de veículo, usam condições diferentes durante a otimização, resultando em comparações injustas. O trabalho em questão é muito relevante para esta revisão, e seus resultados mostram que a dispersão da função objetivo pode inviabilizar uma solução, aparentemente adequada, gerada por uma otimização determinística. Segundo os resultados encontrados por este autor, um *design* com alta dispersão pode violar as restrições facilmente, tornando-se um projeto de alto risco (resultado que será investigado nesta dissertação). Os resultados obtidos a partir de uma otimização robusta com abordagem probabilística podem fornecer aos engenheiros de projeto escolhas mais confiáveis. O trabalho Khalkhali et al., 2017, será mais discutido na seção 4.2, em resultados.

Jamali et al., 2013, também usa o mesmo modelo de veículo de 5 graus de liberdade. Os autores submetem a suspensão à excitação de uma lombada, e usa Monte Carlo para encontrar médias e desvios das funções objetivo: aceleração vertical do assento do motorista, velocidades verticais dos pneus dianteiros e traseiros, deslocamento relativo entre a massa suspensa e os pneus dianteiros e traseiros. As variáveis de projeto são as rigidezes e amortecimentos da suspensão e do assento do motorista, a distância longitudinal entre o assento e o centro de gravidade, e os coeficientes de amortecimento da suspensão ativa dianteiro e traseiro. Os parâmetros incertos são a massa do assento, a massa suspensa, e a amplitude e período da lombada. É importante ressaltar que o trabalho em questão aparentemente mantém o momento de inércia fixo, enquanto considera a massa suspensa como parametro incerto. Deve haver uma correção para o momento de inércia de forma que acompanhe a incerteza da massa suspensa. Os autores apresentam as Fronteiras de Pareto resultantes da otimização com o algoritmo MUGA (algoritmo genético multi-objetivo com diversidade uniforme, traduzido do inglês: “*Multi-objective Uniform-diversity Genetic Algorithm*”) e comparam pontos desta fronteira com soluções da bibliografia: Bouazara, 1997, e Nariman-Zadeh et al., 2010, mostrando soluções melhores do sinal no tempo para todas as funções objetivo.

Uma bibliografia muito importante no campo da otimização robusta é sem dúvida, Beyer e Sendhoff, 2007. Os autores fazem uma revisão dos métodos do “estado da arte”

da otimização robusta e apresentam várias abordagens para calcular o desvio e a média das funções objetivo, incluindo àquelas usadas nesta dissertação (Monte Carlo e aproximação por série de Taylor). Os autores discutem a abordagem clássica de Taguchi, e posteriormente entram na área heurística com programação evolutiva, e na área estocástica com Monte Carlo, além do uso de meta-modelos. As abordagens para as restrições englobam aquelas apresentadas por Arora, 2012, apresentando além desta, uma maneira alternativa de lidar com a aproximação por série de Taylor nas restrições. Uma discussão profunda acerca de outros trabalhos usando as ferramentas citadas anteriormente é feita, onde os prós e contras dos métodos utilizados são evidenciados. A revisão de Beyer e Sendhoff, 2007, se mostrou muito completa, e trouxe um guia compreensivo para o tema.

Poucos livros abordam o tema da otimização robusta. Arora, 2012, é um livro guia completo para a otimização, entrando no tema de maneira simples, mas não se restringindo a isso. No capítulo 20 de seu livro o autor abre uma seção sobre otimização robusta onde um exemplo é resolvido. Tal exemplo é usado como primeiro problema desta dissertação, e pode ser conferido no capítulo 4.

Outra abordagem para lidar com incertezas também comum na área da otimização é o uso do algoritmo FORM (*First-Order Reliability Method*). Uma breve revisão sobre o uso de FORM em otimização baseada em confiabilidade é feito em Lopez e Beck, 2012. O método FORM parte de uma equação de estado limite, estabelecida pelo usuário, que prevê a situação de falha do sistema em estudo. Essa equação de estado limite, referida comumente como FEL (Função de Estado Limite), é então aproximada como uma função linear usando uma expansão em série de Taylor com os termos limitados à primeira ordem [Ang, 2006, e Beck, 2012]. A partir disso, o método FORM calcula a confiabilidade do sistema. Diversos autores fazem o uso FORM, como por exemplo, Grujicic et al., 2009, que faz uma otimização baseada em confiabilidade usando elementos finitos. O autor usa o método FORM para otimizar o braço da suspensão de um automóvel HMMWV (lê-se Hum-vee) sob a perspectiva da falha em fadiga.

Outros veículos são estudados no campo da otimização robusta. Além de carros, ônibus e trens, também são ocasionalmente alvos de pesquisa veículos como o monotrilho suspenso estudado em Liu *et al.*, 2019. Os autores usam um modelo multi-corpo para simular um monotrilho suspenso e obter o índice de estabilidade de giro do

veículo. Este modelo é usado para treinar um meta-modelo (*Kriging*), que posteriormente é usado em uma otimização robusta com o método de Taguchi. A solução trouxe uma melhoria de cerca de 10% para a estabilidade de giro lateral e 9% para a estabilidade de giro vertical do monotrilha suspenso, com relação aos valores iniciais.

Modelos simplificados como o quarto de carro também são comuns, pois sua simplicidade torna a implementação fácil, aumentando a replicabilidade dos resultados e evitando comportamentos demasiadamente complexos que podem surgir em modelos com muitos graus de liberdade. Yang et al., 2019, submete um modelo de quarto de carro a uma pista irregular a fim de otimizar a suspensão do veículo admitindo irregularidades na rigidez vertical do pneu. As variáveis de projeto selecionadas foram a rigidez e o amortecimento da suspensão. As funções objetivo escolhidas pelos autores levam em conta o desconforto, o espaço de trabalho da suspensão e a aderência de pista. As incertezas foram inseridas no problema como parâmetros incertos na rigidez do pneu. O problema multiobjetivo é resolvido usando o método da restrição- $\epsilon$ , onde o problema é transformado em uma otimização simples ao converter as funções objetivo em restrições.

O algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas Quânticas (traduzido do inglês: *Quantum Particle Swarm Optimization*, QPSO) é a base para o MOQPSO usado nesta dissertação, e foi introduzido por Sun et al., 2004a. Outros autores usaram o modelo para resolver problemas multiobjetivos como Omkar et al., 2009, o qual aplicou uma técnica chamada de “vetor avaliado” para criar uma metodologia para otimização multiobjetivo simples, aplicado em um problema de compósito estrutural. Hassani e Lee, 2016, usaram o QPSO para otimizar controladores, onde um critério de ponderação dinâmica agregada é usado para resolver o dilema multiobjetivo.

De forma geral, o uso na bibliografia do algoritmo QPSO no âmbito multiobjetivo é limitado, e poucos autores tentaram de fato construir uma estrutura de otimização multiobjetivo completa, consistente e robusta. No entanto, modificações e novas abordagens no QPSO são recorrentes na literatura, como àquelas em Goh et al., 2012, Zhan e Qing-Wei, 2011, Yang et al., 2013, Zhou et al., 2016 e Xu et al., 2016. Al-Baity, 2015, constrói sua tese de doutorado acerca do potencial do algoritmo QPSO para resolver problemas de otimização multiobjetivo. O autor mostra que o QPSO é uma ferramenta válida para resolver problemas desta natureza, e a abordagem do autor é semelhante àquela usada no algoritmo MOQPSO desta dissertação. As soluções de Al-

Baity, 2015 mostraram melhores resultados em funções de benchmark contra algoritmos consolidados, como NSGA-II (Algoritmo Genético Ordenado por Não-dominância, traduzido do inglês: *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*), PAEAS (Estratégia de Evolução de Pareto Arquivado, traduzido do inglês: *The Pareto Archived Evolution Strategy*), e SPEA2 (Algoritmo Evolucionário de força de Pareto 2, traduzido do inglês: *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2*).

Mais recentemente, Fan et al., 2017, apresentou em uma publicação uma nova abordagem para o uso do algoritmo de enxame de partículas em um problema multiobjetivo, chamado Otimizador Multiobjetivo de Enxame de Partícula Baseado na Mínima Distância do ponto à linha (traduzido do inglês: *Minimum Distance of Point-to-Line – Multiobjective Particle Swarm Optimization*, MDPL-MOPSO). De forma geral, existem poucas aparições de algoritmos multiobjetivos completos baseados no QPSO, como àqueles mostrados em Al-Baity, 2015, Fan et al., 2017, e Grotti et al., 2020. A maior parte das soluções de problemas multiobjetivos com o QPSO presentes na literatura fazem uso de abordagens simplificadas, tais como aquela usada em Omkar et al., 2009, a técnica de vetor avaliado, ou aquela usada em Yang et al., 2019, a técnica da restrição- $\epsilon$ . Outros algoritmos completos já estabelecidos, por outro lado, são amplamente usados na solução de problemas multiobjetivos, como por exemplo o NSGA-II, o PAEAS e o SPEA2, já citados anteriormente.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, as principais ferramentas usadas para produzir os resultados do capítulo 4 serão detalhadas. As ferramentas usadas posteriormente que não estão presentes nesta seção são consideradas muito elementares ou irrelevantes para o entendimento do leitor. Isto inclui manipulação algébrica básica, programação, manipulação de matrizes, fundamentos da dinâmica de corpos rígidos, leitura de símbolos matemáticos como somatório ou produtório, entre outros.

#### 3.1 Otimização

A otimização é uma área de grande interesse na engenharia que vem se tornando cada vez mais útil em função dos grandes avanços computacionais das últimas décadas. Simulações computadorizadas aliadas aos algoritmos de otimização permitem entregar um produto final mais bem acabado, mais leve, mais barato, e a cima de tudo mais eficiente em sua função.

Conforme Belegundu e Chandrupatla, 2011, otimização é o processo de obtenção do valor ótimo de parâmetros livres de um conjunto de funções  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  que representam o desempenho de um sistema, devendo atender a uma ou mais restrições. Os parâmetros livres são agrupados em um vetor  $\mathbf{x}$  e são conhecidos como variáveis de projeto (*design variables*). As restrições podem ser de igualdade  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  ou desigualdade  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  (*equality or inequality constraints*). As próprias variáveis de projeto podem ter restrições quanto ao espaço dos valores que podem assumir de forma que podem haver valores máximos e mínimos admissíveis ( $\mathbf{x}_{\min}$  e  $\mathbf{x}_{\max}$ ).

Para tanto, faz-se necessário uma clara definição do problema. Assim, o problema de otimização genericamente pode ser posto na seguinte definição formal:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}); f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))^T \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{x}) = 0 & j = 1, \dots, n \\ \mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde o vetor  $\mathbf{x}$  representa as variáveis de projeto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  representa o vetor das  $k$  funções objetivo,  $g_i(\mathbf{x})$  representa as  $m$  restrições de desigualdade e  $h_j(\mathbf{x})$ , as  $n$  restrições de igualdade, ambas funções do vetor das variáveis de projeto  $\mathbf{x}$ .

Um problema de otimização pode ser classificado quanto a quantidade de funções objetivo, sendo mono ou multiobjetivo (única função ou múltiplas funções). Pode ser restritivo ou livre de restrições, e pode ser classificado como linear ou não linear de acordo com o formato em que as funções objetivo ou restrições se apresentam. Para cada uma dessas situações são aplicados métodos distintos para se obter o valor ótimo das variáveis de projeto. Dentre os métodos de solução, existem os clássicos, baseados na busca do gradiente da função, ou métodos numéricos, como o método das diferenças finitas. Os casos mais simples de problemas de otimização acontecem quando se tem apenas 1 função objetivo e não se tem restrições, chamado problema de otimização irrestrita. A solução de tais problemas para encontrar ótimos globais, passa pela avaliação da convexidade (quando possível) da função objetivo. Neste caso, havendo um ótimo e provada a convexidade da função, pode-se afirmar que o ótimo encontrado é global, ou seja, não existe nenhuma outra solução no espaço de procura das variáveis de projeto que torne a função melhor que o ótimo encontrado. Na maioria dos problemas, quando não se pode provar a convexidade, ou mesmo quando se tem restrições, não se pode assegurar que um eventual ótimo encontrado seja global, dizendo-se então que se trata de um ótimo local.

Em um problema de otimização simples, existe uma função objetivo a qual se deseja maximizar ou minimizar. As variáveis de projeto,  $\mathbf{x}$ , são aqueles parâmetros que podem ser variados no problema para obter diferentes valores da função objetivo. Em suma, o algoritmo de otimização vai procurar nas variáveis de projeto  $\mathbf{x}$ , combinações que gerem o menor (ou maior, para o caso da maximização) valor para a função objetivo  $f(\mathbf{x})$ .

Dentre os algoritmos de otimização, se destacam dois grandes grupos: os algoritmos heurísticos, baseados em probabilidades e em comportamentos observados na natureza, e os algoritmos determinísticos, baseados em gradientes. Os algoritmos determinísticos possuem a vantagem de convergir muito rapidamente, porém são muito suscetíveis a ficar presos em mínimos locais e necessitam que a função objetivo seja derivável em toda a sua extensão. Os algoritmos heurísticos por sua vez, são muito

versáteis, pois tendem a ficar presos em mínimos locais menos frequentemente e não tem pré-requisitos com relação ao comportamento da função objetivo. Como a maior parte dos problemas de engenharia tem natureza complexa e/ou caótica, os algoritmos heurísticos tornaram-se muito populares, sendo amplamente utilizados nos mais diversos problemas principalmente devido ao seu bom desempenho geral e versatilidade frente a outros algoritmos.

### 3.2 O Algoritmo PSO (*Particle Swarm Optimization*)

O PSO é um algoritmo de otimização heurístico, proposto por Kennedy e Eberhart, 1995. O PSO se baseia no comportamento de animais sociais como pássaros e peixes, se apoiando no conceito de aprendizado social. As equações 3.2 e 3.3 descrevem a atualização da posição e velocidade das variáveis de projeto ao longo das iterações. Uma boa maneira de compreender o algoritmo é visualizar que as partículas se movem em um espaço  $j$  dimensional, onde  $j$  é o número de variáveis de projeto, em busca da combinação que resulte no menor ou no maior valor da função objetivo. Estas partículas se movem com informações sobre o melhor local em que já estiveram, bem como informações sobre o melhor local que toda a população já esteve. Este último mecanismo, chamado aprendizado social, é a chave por trás do sucesso do PSO, que mesmo depois de décadas da sua criação continua a ser usado e aperfeiçoado com frequência no meio científico. As Equações 3.4 e 3.5 atualizam as melhores posições, e após a verificação de todas as partículas, o critério de parada é checado.

$$v_{i,j}^{k+1} = \omega v_i^k + \lambda_1 r_1 (x_{lbest_{i,j}}^k - x_{i,j}^k) + \lambda_2 r_2 (x_{gbest}^k - x_{i,j}^k) \quad (3.2)$$

$$x_{i,j}^{k+1} = x_{i,j}^k + v_{i,j}^k \Delta t \quad (3.3)$$

Para cada  $i = 1$  a  $N_p$

$$\text{Se } f(x_i^{(k+1)}) \leq f(x_{lbest_i}^k), \text{ então } x_{lbest_i}^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} \quad (3.4)$$

$$\text{Se não, } x_{lbest_i}^{(k+1)} = x_{lbest_i}^{(k)}$$

$$\text{Se } f(x_{lbest_i}^{(k+1)}) \leq f(x_{gbest}), \text{ então } x_{gbest} = x_{lbest_i}^{(k+1)} \quad (3.5)$$



onde,  $\omega$  é o momento de inércia,  $x_{ij}^k$  é o valor na iteração  $k$  das variáveis de projeto  $j$  da partícula  $i$ ,  $xlbest_{ij}^k$  é o melhor conjunto de variáveis de projeto  $j$  encontrada pela partícula  $i$ ,  $v_{ij}^k$  é a velocidade atualizada da partícula  $i$ ,  $xgbest$  é o melhor conjunto de variáveis de projeto encontrado por toda a população,  $r_1$  e  $r_2$  são valores aleatórios entre zero e um,  $\lambda_1$  é o componente cognitivo individual,  $\lambda_2$  é o componente cognitivo coletivo,  $\Delta t$  é o intervalo de tempo, e  $N_p$  é o número total de partículas.

Como critério de parada, usou-se as distâncias entre dois melhores globais respectivos, aliado a um cálculo baseado no coeficiente de variação das soluções. Quando ambos os critérios são satisfeitos, a convergência é assumida e o algoritmo de otimização finaliza as iterações. Um fluxograma simplificado por ser verificado na Figura 3.1.

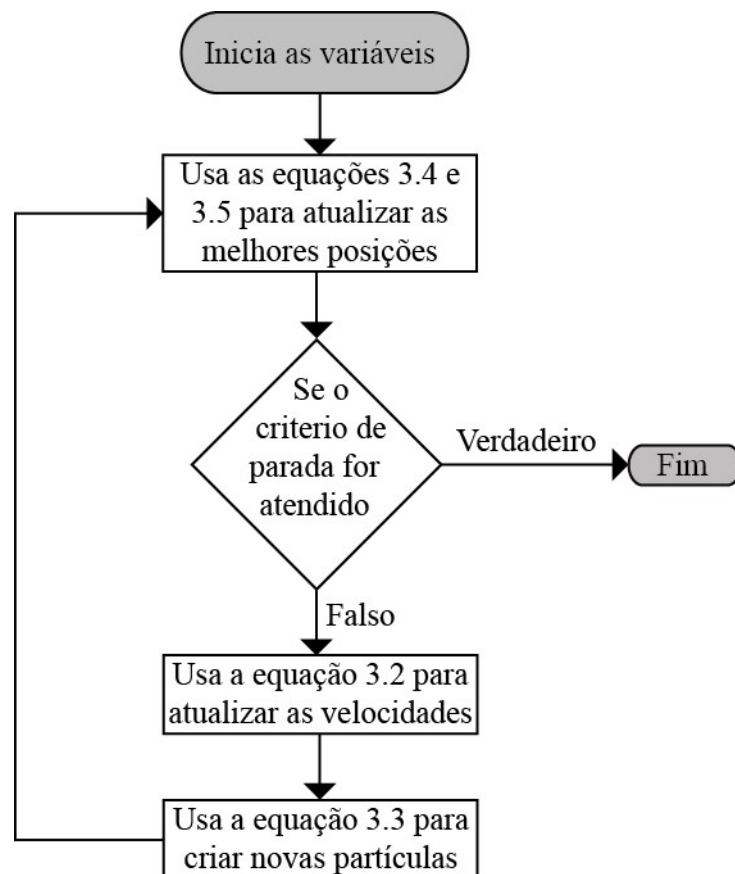


Figura 3.1 – Fluxograma simplificado do algoritmo PSO.

### 3.3 O Algoritmo QPSO (*Quantum Particle Swarm Optimization*)

De acordo com Sun et al., 2004a e 2004b, o algoritmo QPSO possui algumas características interessantes quando comparado com outros metaheurísticos: O algoritmo possui grandes tendências exploratórias que permitem buscar o ótimo da função objetivo sem ficar preso em mínimos locais. Esta característica é de suma importância, pois como já foi dito, os problemas de engenharia normalmente não são “bem-comportados”. Além disso, de acordo com Yang *et al.*, 2013, o QPSO possui melhor convergência quando comparado ao PSO, o que significa que o algoritmo, de forma geral, converge para um ótimo usando menos chamadas de função objetivo. Aliando convergência com espalhamento, o algoritmo QPSO torna-se uma escolha promissora, se sobressaindo no universo heurístico e mostrando-se uma ferramenta poderosa para solucionar problemas de otimização caóticos e complexos.

O QPSO foi desenvolvido por Sun et al., 2004a. O algoritmo PSO tradicional proposto por Kennedy e Eberhart, 1995, é o ponto de partida para o QPSO. Enquanto o PSO faz uso da velocidade e posição das partículas para localizá-las no espaço da função objetivo, o QPSO faz uso de uma função densidade de probabilidade, usando o método estocástico de Monte Carlo (ver Apêndice A) para inferir a posição. Esta etapa é inspirada na função de onda  $|\psi(x,t)|^2$  aplicada ao espaço quântico, emprestada da física quântica. As equações motoras do algoritmo ficam definidas da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_{ij}(t+1) = P_{ij} - \beta \cdot (mbest_j(t) - x_{ij}(t)) \cdot \ln\left(\frac{1}{u_{ij}(t)}\right), & \text{para } \rho \geq 0.5 \\ x_{ij}(t+1) = P_{ij} + \beta \cdot (mbest_j(t) - x_{ij}(t)) \cdot \ln\left(\frac{1}{u_{ij}(t)}\right), & \text{para } \rho < 0.5 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$P_{ij}(t) = \varphi_j(t) \cdot pbest_{ij}(t) + (1 - \varphi_j(t)) \cdot gbest_j(t) \quad (3.7)$$

$$mbest_j(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n pbest_{ij}(t) \quad (3.8)$$

$$\beta^{cont}(t) = [(\beta_1^{cont} - \beta_0^{cont})(T - t)/T] + \beta_0^{cont} \quad (3.9)$$

onde  $j$  faz referência à variável de projeto,  $pbest$  é uma matriz que guarda a melhor posição local de cada partícula  $i$ ,  $gbest$  é a melhor posição global do enxame,  $mbest$  é a

média de todos os melhores locais,  $n$  é o tamanho da população do enxame,  $t$  é o passo da iteração,  $T$  é o número total de iterações,  $\beta_1^{cont}$  e  $\beta_0^{cont}$  são os limites superior e inferior para o coeficiente de contração-expansão,  $\beta^{cont}$ .  $\rho$ ,  $u$ , e  $\varphi$ , são números aleatórios independentes distribuídos entre 0 e 1. A atualização dos melhores locais e global é realizada de forma análoga ao PSO, descrito nas Equações 3.4 e 3.5. Um fluxograma simplificado pode ser conferido na Figura 3.2.

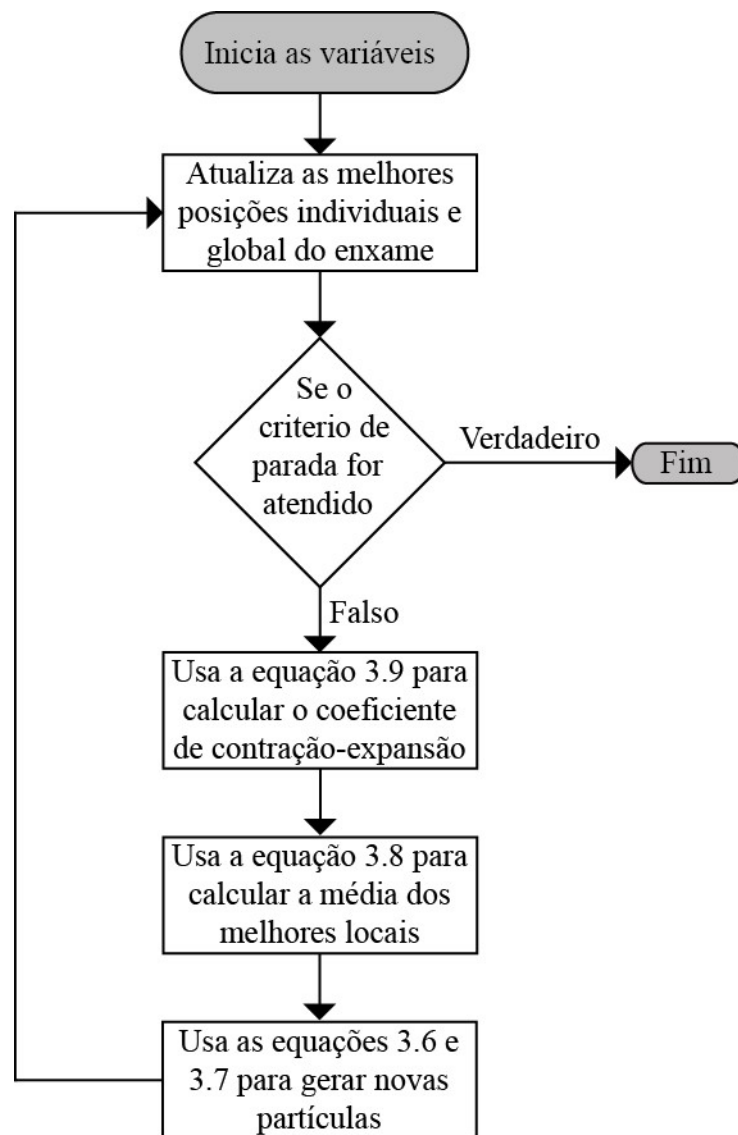


Figura 3.2 – Fluxograma simplificado do algoritmo QPSO.

### 3.4 Otimização multiobjetivo

Muitos problemas de engenharia não possuem apenas uma única função objetivo de interesse. Quando existem duas ou mais funções objetivo, o problema é denominado multiobjetivo. Diferente dos problemas de otimização simples, os problemas multiobjetivos possuem um nível completamente diferente de complexidade, sendo um universo a parte na área de otimização.

Em problemas de otimização simples existe uma única solução que satisfaz o máximo ou mínimo da função objetivo. Quando existem duas ou mais funções objetivo concorrentes, por outro lado, não há apenas uma solução que satisfaça o problema. Para abordar este dilema, a estratégia usada é a dominância de Pareto.

Considere  $f(\mathbf{X}_A)$  um vetor que contenha as soluções de um problema multiobjetivo  $k$  dimensional. O vetor  $f(\mathbf{X}_A)$  deve possuir  $k$  elementos, onde cada elemento carrega o valor da função objetivo correspondente. Estes valores das funções objetivo são resultantes da combinação das variáveis de projeto contidas no vetor  $\mathbf{X}_A$ . Para o caso da minimização, um vetor solução  $f(\mathbf{X}_A)$  domina outro vetor solução  $f(\mathbf{X}_B)$  se, e somente se,  $f_i(\mathbf{X}_A) \leq f_i(\mathbf{X}_B)$  para  $i = 1, 2 \dots k$ , e  $f_i(\mathbf{X}_A) < f_i(\mathbf{X}_B)$  em pelo menos uma das funções objetivo. Em outras palavras, uma solução domina a outra se, e somente se, suas funções objetivo são iguais ou melhores para todas as funções, e melhor em pelo menos uma função. Usando este conceito, é possível encontrar infinitas combinações de soluções para um problema multiobjetivo com funções concorrentes, soluções estas que em conjunto são denominadas Fronteira de Pareto.

Um problema de otimização com 2 funções objetivo pode ser representado no espaço bidimensional com uma Fronteira de Pareto, onde as soluções  $f(\mathbf{X})$  são expressas em função de  $f_1$  e  $f_2$ . A Figura 3.3 ilustra a não dominância de Pareto, onde os pontos dominados não pertencem à Fronteira de Pareto.

Para três funções objetivo têm-se uma superfície de Pareto em uma representação tridimensional. Para quatro ou mais funções objetivo, a solução é contida em um hiperespaço, e por isso a visualização se torna possível apenas através de cortes, onde as soluções são representadas em forma de nuvem de pontos.

É importante que o leitor entenda a diferença de complexidade entre os problemas de otimização simples e multiobjetivo, e compreenda o conceito de dominância de Pareto

para o entendimento básico desta Dissertação. De forma resumida, um programa de otimização simples não pode ser usado para solucionar problemas multiobjetivos. Para este tipo de problema é necessário um algoritmo multiobjetivo, com mecanismos e metodologias pensadas especialmente para lidar com o dilema das infinitas soluções.

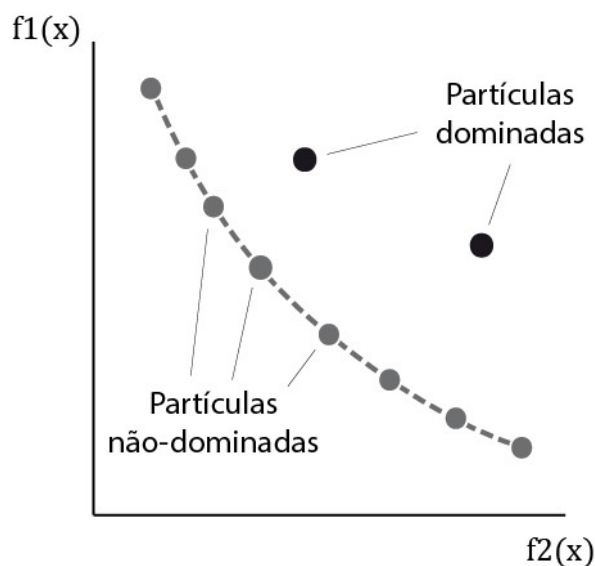


Figura 3.3 – Ilustração representativa de uma Fronteira de Pareto.

Pela definição do espaço de projeto viável  $S$ , que é o espaço que contém todos os vetores soluções  $\mathbf{x}$  dentro do espaço admissível das variáveis de projeto e que sejam viáveis, pode-se escrever:

$$S = \{\mathbf{x} | h_i(\mathbf{x}) \leq 0; i = 1, \dots, p; g_j(\mathbf{x}) \leq 0; j = 1, \dots, m\} \quad (3.10)$$

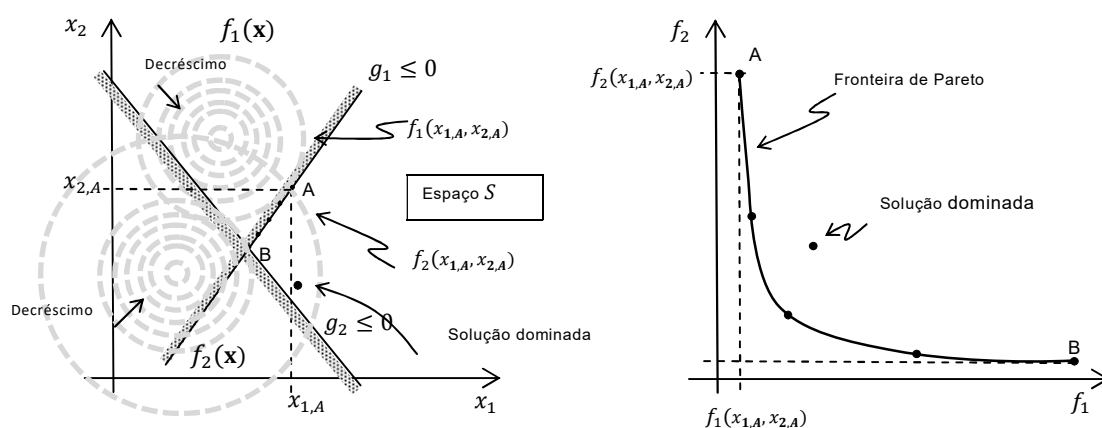
Uma restrição no espaço de projeto  $g_j(\mathbf{x}) = 0$  pode ser traduzida em uma curva  $q_j(\mathbf{x})$  no espaço das funções objetivo ( $f_1(\mathbf{x}) \times f_k(\mathbf{x})$ ) simplesmente avaliando os valores das funções objetivo em diferentes pontos que pertencem a esta curva.

O espaço de critério viável  $Z$  é aquele que contém o conjunto de funções objetivo correspondentes a pontos viáveis no espaço de procura e que atendem ao espaço de projeto viável  $S$ , ou seja,

$$Z = \{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in S\} \quad (3.11)$$

Embora as curvas  $q_j(\mathbf{x})$  representem as restrições  $g_j(\mathbf{x}) = 0$ , elas não necessariamente representam as fronteiras do espaço de critério viável  $Z$ .

Na Figura 3.4 é esboçado um problema de otimização multiobjetivo com duas funções objetivo e duas variáveis de projeto, com o intuito de exemplificar os conceitos de Fronteira de Pareto com restrições de desigualdade  $g_j(\mathbf{x}) = 0$ .



(a) Espaço das variáveis de projeto.

(b) Espaço das funções objetivo.

Figura 3.4 – Exemplo de função multiobjetivo com 2 funções objetivo  $f_1$  e  $f_2$  e duas variáveis de projeto  $x_1$  e  $x_2$ , e duas restrições  $g_1 \leq 0$  e  $g_2 \leq 0$ .

### 3.5 Otimização multiobjetivo baseado em enxame de partículas quânticas

O algoritmo usado nesta dissertação para lidar com a otimização multiobjetivo é o MOQPSO, que usa uma abordagem de arquivos similar àquelas apresentadas em Branke e Mostaghim, 2006, e Knowles e Corne, 1999. A idéia geral que rege os algoritmos baseados em arquivos é o armazenamento de todas as melhores posições em uma base de dados, que passa por uma manutenção ao final de cada iteração. O MOQPSO, em particular, usa 3 arquivos no espaço da função objetivo:  $f_P$  para guardar as melhores posições locais,  $f_{G1}$  para armazenar melhores posições globais, e  $f_{G2}$  que guarda as melhores posições globais que são filtradas por um critério de distância mínima para

evitar os chamados ‘clusters’ (um problema muito comum na otimização multiobjetivo). Os vetores das variáveis de projeto correspondentes a cada arquivo são  $\mathbf{X}_G$ ,  $\mathbf{X}_{G1}$  e  $\mathbf{X}_{G2}$ .

As equações motrizes do algoritmo MOQPSO são modificações daquelas descritas para o QPSO nas Equações 3.6 a 3.8:  $mbest_j(t)$  e  $gbest_{ij}(t)$  são substituídos por  $guide_j(t)$ , e  $x_{ij}(t)$  é substituído por  $pbest_{ij}(t)$ . Todas as modificações feitas nas equações motores do QPSO, juntamente com o framework multiobjetivo desenvolvido, e os mecanismos implementados no programa, são baseados em um extenso estudo empírico com 11 funções de *benchmark* multiobjetivo, incluindo Schaffer-1, Kursawe, Zitzler-1 até Zitzler-6, Fonseca, Viennet-2, e Viennet-3 [Coello et al., 2007].

Ao invés de usar a variável *meanbest* clássica, presente nas equações do QPSO, o algoritmo multiobjetivo usa partículas-guia,  $guide_j(t)$ , para levar o enxame de partículas em direção à Fronteira de Pareto. Cada partícula gera uma nova solução a cada iteração, e para cada uma delas, uma partícula guia é selecionada.

A escolha da partícula-guia mostrou-se mais eficiente quando uma combinação entre dois métodos foi usada: o método da “partícula mais próxima” e o método da “partícula mais extrema”. A probabilidade de cada método ser selecionado a cada vez que o algoritmo gera um novo ponto-solução é predefinida pelo usuário. No caso da partícula mais extrema, o número de partículas extremas escolhidas é igual à dimensionalidade do problema multiobjetivo, ou seja, igual ao número de funções objetivo. A escolha das partículas usa um método baseado na média geométrica das distâncias, o que previne que o algoritmo selecione partículas que estão muito próximas umas das outras, e por tanto aumenta a extensão da Fronteira de Pareto. As partículas são escolhidas a partir do arquivo  $f_{G1}$  em cada iteração para cada novo ponto-solução. Primeiramente, a distância cumulativa no espaço das funções objetivo entre cada partícula e todas as outras partículas é calculada como mostra a Equação 3.12 a seguir:

$$d_i \left( \mathbf{f}_{G1_i}(\mathbf{X}), \mathbf{f}_{G1_j}(\mathbf{X}) \right) = \sum_{j=1}^{ng_1} \left\| \mathbf{f}_{G1_i} - \mathbf{f}_{G1_j} \right\|_2, \quad (3.12)$$

com  $i = 1, \dots, ng_1$  e  $j = 1, \dots, ng_1$

com  $ng_1$  sendo o número de partículas no arquivo  $f_{G1}$ .

A primeira partícula extrema é escolhida como:

$$\mathbf{X}_{E1} = \underset{\mathbf{X} \in X_{G1}}{\operatorname{arg\,max}} d_i \left( \mathbf{f}_{G1_i}(\mathbf{X}), \mathbf{f}_{G1_j}(\mathbf{X}) \right) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{f}_{E1}(\mathbf{X}_{E1}) = \{f_1(\mathbf{X}_{E1}), f_2(\mathbf{X}_{E1}), \dots, f_k(\mathbf{X}_{E1})\}^T$$

onde *arg max* se refere à expressão matemática *arguments of the maxima*, que escolhe o maior valor de saída de uma função, neste caso a função  $d_i \left( \mathbf{f}_{G1_i}(\mathbf{X}), \mathbf{f}_{G1_j}(\mathbf{X}) \right)$ .

A segunda partícula extrema é escolhida a partir da primeira, como mostra a seguinte Equação 3.14:

$$\mathbf{X}_{E2} = \underset{\mathbf{X} \in X_{G1}}{\operatorname{arg\,max}} \left\| \mathbf{f}_{E1}(\mathbf{X}_{E1}) - \mathbf{f}_{G1_i} \right\|_2 \quad \text{for } i = 1, \dots, ng_1 - 1 \quad (3.14)$$

$$\mathbf{f}_{E2}(\mathbf{X}_{E2}) = \{f_1(\mathbf{X}_{E2}), f_2(\mathbf{X}_{E2}), \dots, f_k(\mathbf{X}_{E2})\}^T$$

Para a terceira partícula extrema, a distância acumulada passa a ser calculada com a média geométrica, e é avaliada como:

$$dg_i \left( \mathbf{f}_{E1}(\mathbf{X}_{E1}), \mathbf{f}_{E2}(\mathbf{X}_{E2}), \mathbf{f}_{G1_j}(\mathbf{X}) \right) = \left\| \mathbf{f}_{E1}(\mathbf{X}_{E1}) - \mathbf{f}_{G1_i} \right\|_2 \left\| \mathbf{f}_{E2}(\mathbf{X}_{E2}) - \mathbf{f}_{G1_i} \right\|_2 \quad (3.15)$$

com  $i = 1, \dots, ng_1$  e  $j = 1, \dots, ng_1$

E a terceira partícula fica definida como:

$$\mathbf{X}_{E3} = \underset{\mathbf{X} \in X_{G1}}{\operatorname{arg\,max}} dg_i \left( \mathbf{f}_{E1}(\mathbf{X}_{E1}), \mathbf{f}_{E2}(\mathbf{X}_{E2}), \mathbf{f}_{G1_j}(\mathbf{X}) \right) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{f}_{E3}(\mathbf{X}_{E3}) = \{f_1(\mathbf{X}_{E3}), f_2(\mathbf{X}_{E3}), \dots, f_k(\mathbf{X}_{E3})\}^T$$

Como regra geral, da terceira partícula extrema em diante, o extremo de número  $e$  pode ser avaliado com o mesmo princípio, usando o produtório, como mostra a Equação 3.17 a seguir:

$$dg_i = \prod_{l=1}^{e-1} \left\| \mathbf{f}_{El}(\mathbf{X}_{El}) - \mathbf{f}_{G1_i} \right\|_2, \quad \text{para } i = 1, \dots, ng_1 - (e - 1) \quad (3.17)$$



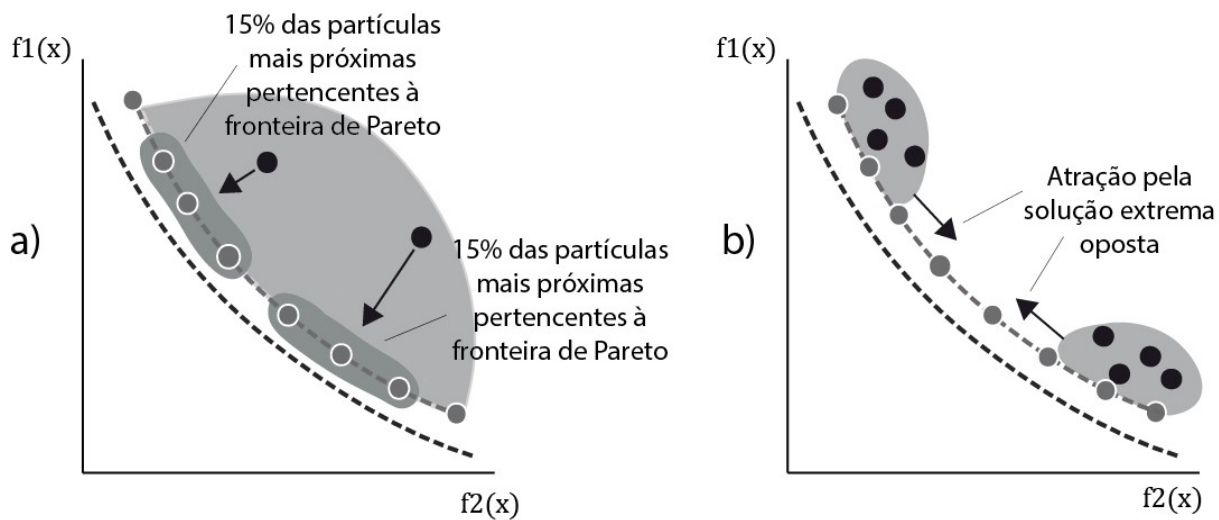
e a partícula extrema escolhida, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{Ee} &= \arg \max_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{G1}} dg_i \\ \mathbf{f}_{E3}(\mathbf{X}_{E3}) &= \{f_1(\mathbf{X}_{E3}), f_2(\mathbf{X}_{E3}), \dots, f_k(\mathbf{X}_{E3})\}^T \end{aligned} \quad (3.18)$$

O algoritmo, então, escolhe a partícula mais distante entre as partículas extremas pré-selecionadas para usar como guia. A Figura 3.5a ilustra o comportamento do algoritmo na geração da Fronteira de Pareto usando o método da “partícula guia mais extrema”. Foi observado, usando as funções de *benchmark* citadas anteriormente, que a implementação da abordagem com média geométrica aumentou o espalhamento e a convergência do algoritmo simultaneamente, o que é um resultado notório na área dos algoritmos multiobjetivos. Naturalmente, mecanismos implementados em um algoritmo multiobjetivo resultam em comportamento de proporcionalidade inversa entre convergência e espalhamento, de forma que uma melhoria no espalhamento normalmente prejudica a convergência e vice-versa. Outros métodos foram testados, como por exemplo, métodos baseados em média harmônica e geométrica, mas mostraram resultados inferiores ao método que foi descrito previamente.

A Figura 3.5b ilustra o comportamento induzido pela partícula guia quando a seleção é feita pela “partícula mais próxima”. Este mecanismo tem como foco principal o aumento da convergência do algoritmo. A escolha é feita aleatoriamente entre as  $n$ -ésimas partículas mais próximas pertencentes à Fronteira de Pareto, a fim de suavizar o movimento das partículas e manter a diversidade (evitando os famosos *clusters*). O número de partículas  $n$ -ésimas é assumido em 15% do arquivo  $\mathbf{f}_{G1}$ , definido a partir daqui como *guid\_perc*. Quanto às restrições, caso uma solução inviável seja gerada, esta solução é descartada e substituída por uma nova solução.

A Figura 3.6 indica um fluxograma simplificado de como o algoritmo implementado MPQPSO funciona para as otimizações multiobjetivos.



(a) Comportamento induzido pelas partículas mais próximas pertencentes à Fronteira de Pareto.

(b) Comportamento induzido pelo mecanismo de guia extremo.

Figura 3.5 – Ilustração esquemática da influência da partícula guia. [Adaptado de Grotti et al., 2020].

Outras aplicações do MOQPSO podem ser conferidas no capítulo de livro Santana et al., 2018, no artigo de periódico científico Grotti et al., 2020 (assim como detalhes sobre o funcionamento do algoritmo), e nos artigos de conferência Gomes et al., 2018, e Grotti et al., 2017.

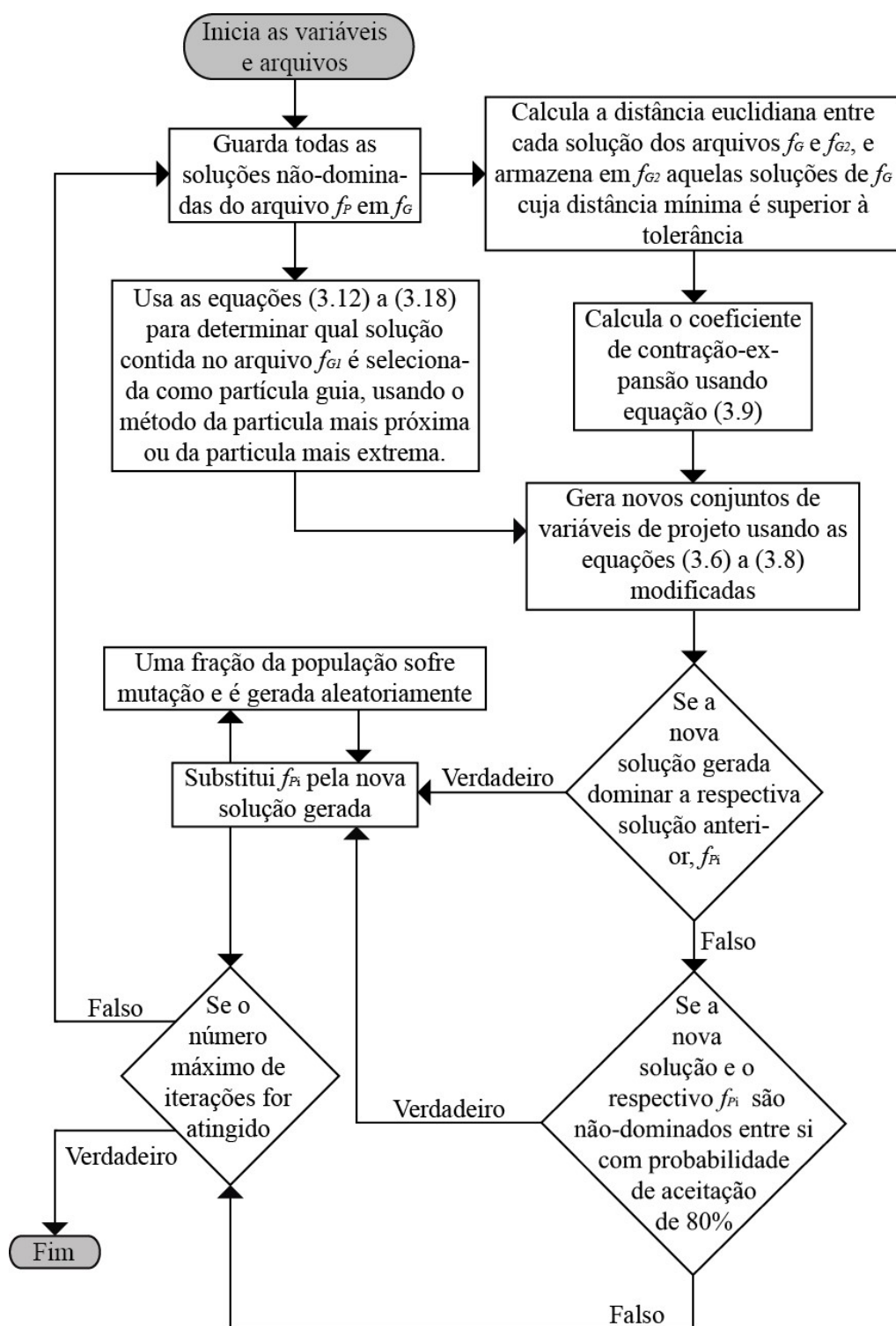


Figura 3.6 – Fluxograma simplificado do funcionamento do algoritmo MOQPSO.

(Adaptado de Grotti et al., 2020).

### 3.6 Teorema Central do limite

Segundo Montgomery e Runger, 2009, o teorema central do limite (não confundir com “Teorema do limite central”) afirma que a soma de variáveis com distribuição aleatória tenderá a possuir uma distribuição Normal se o número de variáveis somadas for suficientemente grande. Para a validade do teorema, é condição necessária e suficiente que nenhuma das variâncias das variáveis aleatórias individuais seja grande em comparação com suas somas. Existem formas mais gerais do teorema central do limite, as quais permitem variâncias infinitas e variáveis aleatórias correlacionadas.

O teorema central do limite é base para muitos procedimentos estatísticos, principalmente na área da inferência estatística. A demonstração matemática para a validade do teorema é extensa e não será demonstrada neste trabalho.

O teorema pode ser aplicado amplamente em vários processos na engenharia. Por exemplo, o erro em certa dimensão de uma peça usinada é o resultado da soma de muitos efeitos infinitesimais: variações de temperatura; erros de medição devido à vibração; variações no ângulo de corte da ferramenta; desgaste da ferramenta de corte; desgaste dos rolamentos do torno; variações na velocidade de rotação do torno; variações na fixação da peça; variações nas características da matéria prima; entre outros. O erro total neste caso hipotético pode ser aproximado por uma distribuição normal. Este conceito justifica a aproximação de certas distribuições probabilísticas como normais e, nesta dissertação, será usado para tanto.

### 3.7 Incertezas em sistemas de veiculares

Ao lidar com problemas reais, incertezas são inevitáveis. Segundo Ang e Tang, 2002, as fontes de incerteza podem ser classificadas em duas categorias: aquelas que são associadas com aleatoriedade natural, chamadas de aleatórias, e aquelas que são associadas com as imprecisões nas predições ou estimativas da realidade, chamadas epistêmicas. Desta forma, as incertezas epistêmicas são aquelas que são passíveis de redução pela aplicação de modelos mais precisos, experimentos melhorados, ou avanços do conhecimento envolvido no sistema. Por outro lado, não há maneiras eficientes para se lidar com as incertezas aleatórias, restando contê-las dentro de limites aceitáveis.

Em um sistema de veículo, as incertezas estão presentes de diversas formas, quer seja com próprios parâmetros que fazem parte do sistema dinâmico, como massas, rigidezes e amortecimentos, quer seja nas excitações externas representadas pela massa a ser transportada (passageiros e cargas), irregularidades da pista a ser trafegada, ações externas do arrasto e sustentação, desgastes das partes e alterações de suas propriedades mecânicas ao longo do tempo. Um projeto deve levar em conta todas estas incertezas de uma forma ou de outra, de maneira que o projeto final preveja eventuais usos e situações adversas a que o sistema possa vir a ser submetido.

A otimização robusta tenta reduzir a dispersão da função objetivo primária, considerando incertezas nas variáveis e parâmetros do projeto. Todos os problemas de otimização são levados a uma dimensão multiobjetivo quando um problema de otimização determinístico passa a admitir incertezas e se torna um problema de otimização robusta, como será descrito com mais detalhes na próxima seção. Inúmeros métodos tentam abordar o tema de forma mais simplificada, evitando entrar no campo multiobjetivo devido a sua alta complexidade e custo computacional, como por exemplo, a aplicação de uma função de utilidade simples durante a otimização.

### **3.8 Otimização Robusta**

Segundo Taguchi, 1987, robustez significa o estado onde uma tecnologia, produto, ou desempenho de um processo, é minimamente sensível a fatores que causam variabilidade e envelhecimento. A incerteza pode estar presente em diversas partes de um projeto, podendo advir de variáveis ambientais e sem controle (incertezas aleatórias), como temperatura, umidade, interferências eletromagnéticas, e etc.. Além disso, a incerteza também pode ser proveniente do projeto em si (incertezas epistêmicas): uso de modelos simplificados da realidade, propriedades dos materiais, carregamentos externos, usos diversos daqueles que foram assumidos em projeto, e condições de contorno, geralmente mensuráveis e controláveis. Estas incertezas epistêmicas, assim como as aleatórias, também afetam a variabilidade final de desempenho esperado para um sistema.

Em termos de otimização, um projeto otimizado robustamente deve reduzir ao máximo a função objetivo e a sua variância, frente às diversas variabilidades que podem

estar presentes no projeto (aleatórias ou epistêmicas). O ganho obtido durante o processo de otimização não deve ser perdido quando pequenas flutuações são inseridas no sistema. Desta forma, otimizar a função objetivo primária torna-se tão relevante quanto reduzir a variância da própria função. Sendo assim, a rigor, um problema de otimização robusta é também um problema de otimização multiobjetivo.

Dentro do problema de otimização robusta, pode haver variáveis aleatórias e não aleatórias, e isso inclui as variáveis e parâmetros de projeto. Deve-se ressaltar que estes conjuntos podem apresentar intersecção, de forma que possam existir variáveis de projeto determinísticas ou aleatórias simultaneamente, assim como os demais parâmetros do sistema. É importante lembrar que os parâmetros de um sistema, no problema de otimização, representam fatores constantes, dos quais o algoritmo não tem controle.

Existem duas formas mais comuns para se lidar com a otimização robusta. A primeira delas é tratar os dois objetivos de forma unificada. Esta metodologia é chamada Função de Utilidade (batizada por Pareto, 1906), onde pesos são atribuídos a cada objetivo e indicam a importância de cada um. Neste caso, as médias das funções objetivo primárias e suas respectivas variâncias são contabilizadas em uma única Função de Utilidade. Já a segunda forma consiste no tratamento do problema de forma a conter múltiplos objetivos independentes, trata-se do conceito de dominância de Pareto. Esta metodologia é a mais completa, e já foi discutida anteriormente. Esta metodologia busca uma grande quantidade de soluções igualmente ótimas, passíveis de escolha por um especialista baseando-se em sua experiência ou necessidade do projeto. Neste caso, o problema é muito mais complexo e pesado computacionalmente, já que cada ponto (teoricamente infinitos) da Fronteira de Pareto equivaleria a uma solução com uma função de utilidade, considerando funções convexas. É preferível adotar esta abordagem em problemas onde não se sabe completamente o comportamento das múltiplas funções objetivo, tendo em vista que possíveis regiões não-convexas jamais poderão ser acessíveis por uma metodologia baseada em Função de Utilidade.

Estes conceitos também devem ser estendidos às restrições do problema, visto que são afetadas igualmente pelas incertezas presentes no projeto. Se tratando de restrições de igualdade, nada se pode fazer acerca da eventual violação da restrição quando há presença de aleatoriedades. No caso de restrições de desigualdade, pode-se levar em conta a variabilidade da própria restrição, de forma a ter uma solução afastada (dentro da

região viável) do limite da desigualdade, gerando mais segurança para comportar eventuais variâncias da restrição.

Para mensurar as variabilidades da função objetivo e das restrições, é possível considerar apenas os limites máximos e mínimos, resultando em uma baixa precisão. Esta abordagem é conhecida como análise de intervalo. A nível industrial, a informação acerca desta incerteza pode ser melhorada a partir de bancos de dados, análises estatísticas por ajustes a tipos de distribuição probabilísticas, e valores de momentos estatísticos como média, desvio padrão, limite máximo, limite mínimo, etc. A distribuição Gaussiana é uma das mais utilizadas para estes ajustes devido à sua facilidade de definição por meio de médias e desvios padrão. Além do mais, o Teorema Central do Limite também indica que, ao se aumentar o número de amostras, para funções de variáveis de diversos tipos de distribuição, a média desta função tenderá a ter uma distribuição Gaussiana. Desta forma, o uso de distribuições de probabilidade Gaussianas não reduz o escopo numa abordagem que empregue estes tipos de distribuição.

### 3.9 Noções Básicas sobre Probabilidade, Estatística, e Confiabilidade

A média de um determinado evento pode ser dada pela soma de todas as amostras dividida pelo número de amostras. Este conceito também é chamado de valor esperado, e o símbolo padrão é a letra grega  $\mu$ . Seja uma função qualquer,  $f$ , avaliada em  $l$  pontos como  $f_1, f_2, \dots, f_l$ . A média, ou valor esperado desta função  $f$ , cujo valor pode ser positivo, negativo, ou zero, é:

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^l \frac{f_i}{l} \quad (3.19)$$

Outra propriedade de suma importância é a variância, normalmente representada por  $\sigma^2$ . A variância é definida como a média da diferença ao quadrado de cada amostra para a média das amostras. Para a situação hipotética descrita anteriormente, a variância fica definida como:

$$\sigma^2(f) = \sum_{i=1}^l \frac{(f_i - \mu(f))^2}{l} \quad (3.20)$$

A variância representa a dispersão dos dados de seu valor médio. Quando as amostras são extraídas de uma população grande, o grau de liberdade torna-se  $(l - 1)$ , e neste caso,  $l$  na Equação 3.20 torna-se  $(l - 1)$ . Este grau de liberdade é diferente de apenas  $l$ , pois a variância é uma métrica dependente das distâncias entre as amostras. Dividir pelo número de graus de liberdade significa dividir pelo número de espaços entre os dados, e não pelo número de dados. A evidência empírica para esta escolha são os estudos da Ciência Estatística, os quais concluíram que esta metodologia conduz a resultados mais coerentes [Ang e Tang, 2002].

O desvio padrão é definido como a raiz quadrada da variância, e é normalmente representada pela letra grega  $\sigma$ . Assim como a variância, o desvio padrão representa a variabilidade ou dispersão das amostras a partir da sua média. Junto da média, o desvio padrão oferece informações sobre o quão anormal é uma amostra. Um valor pequeno de desvio padrão indica que os dados são parecidos entre si, ou seja, estão próximos de seu valor médio. Por outro lado, valores grandes para o desvio padrão indicam que as amostras possuem uma grande dispersão em torno da média.

Seja  $X$  uma variável aleatória com valor médio  $\mu$ , o valor esperado pode ser representado da seguinte forma:

$$E[X] = \mu \quad (3.21)$$

onde o operador de esperança,  $E[X]$ , denota o valor médio ou esperado de  $X$ .

Usando o operador de esperança, o desvio padrão de  $X$  torna-se:

$$\sigma = \sqrt{E[(X - \mu)^2]} \quad (3.22)$$

Outro conceito importante que será muito usado na seção de soluções é a função densidade de probabilidade, ou FDP. Seja uma variável aleatória e contínua  $X$  que admite vários valores  $x$  no intervalo  $-\infty < x < \infty$ . Uma função matemática que descreve a



distribuição de uma variável aleatória contínua é chamada função densidade de probabilidade. A função densidade de probabilidade descreve a chance, ou probabilidade, de que esta variável aleatória  $X$  ocorra em um dado ponto  $x$ . A FDP, comumente referida como  $f_x(x)$ , é sempre não negativa em todo o seu domínio, e sua integral (ou área a baixo de sua curva) é por definição igual a 1, como mostra a Equação 3.23:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1 \quad (3.23)$$

A probabilidade  $P$  de que uma variável aleatória  $X$  vá cair em um intervalo entre  $a$  e  $b$  (descrito matematicamente como  $P[a \leq X \leq b]$ ) é dada pela integral da FDP definida entre  $a$  e  $b$ :

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_x(x) dx \quad (3.24)$$

A função de distribuição acumulada, ou FDA, descreve a probabilidade de que uma variável aleatória  $X$  com uma dada distribuição de probabilidade vá ser encontrada em um valor menor que, ou igual a  $x$ . Esta função é dada pela Equação 3.25:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_x(u) du \quad (3.25)$$

Ou seja, para um dado valor  $x$ ,  $F_X(x)$  é a probabilidade de que o valor observado de  $X$  é menos que, ou igual a  $x$ . Se  $f_x$  é contínua em  $x$ , então a FDP é a derivada da função distribuição acumulada:

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \quad (3.26)$$

Além do que foi dito anteriormente, a FDA também possui as seguintes propriedades:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad (3.27)$$

Segundo Choi et al., 2007, no campo do design estrutural o estado limite indica a margem de segurança que existe entre a resistência estrutural  $R$ , e a carga  $S$ , da seguinte forma:

$$G(X) = R(X) - S(X) \quad (3.28)$$

A probabilidade de falha,  $P_f$  é denotada por:

$$P_f = P[G(X) \leq 0] \quad (3.29)$$

A Figura 3.7 ilustra a probabilidade de falha em uma curva de FDP para o estado limite  $G$ . A área indicada por  $P_f$  representa a probabilidade de falha, e  $\beta$  é o índice de confiabilidade, que possui relação  $\beta = \mu_G / \sigma_G$ . A dedução e detalhamento deste conceito não é o foco desta dissertação, mas pode ser conferido em Choi et al., 2007, e em Arora, 2012.

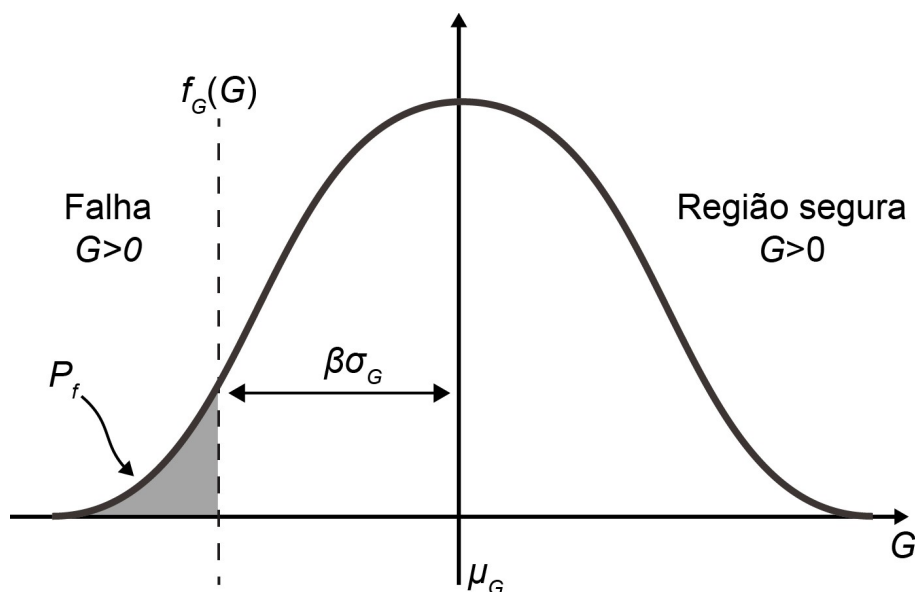


Figura 3.7 – Função densidade de probabilidade para o estado limite  $G(X)$ . Adaptado de Choi et al., 2007.

### 3.10 Hipóteses da Otimização Robusta

Se tratando da função objetivo que contém variáveis de projeto  $f$ , sua média pode ser estimada por:

$$\mu_f = E[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}) d\mathbf{Z} \cong \sum_{i=1}^n \mu_i / n \quad (3.30)$$

Na Equação 3.30  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{Z})$  representa a função de densidade de probabilidade conjunta da função objetivo  $f$ , a qual é função do vetor de variáveis aleatórias  $\mathbf{Z}$ . Pelos axiomas da probabilidade,  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{Z})$  é não negativa em todo o espaço de  $\mathbf{Z}$  assim como deve atender à condição de que  $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{Z}) d\mathbf{Z} = 1$ .

A variância da função objetivo também pode ser estimada (estimativa não tendenciosa para uma quantidade limitada de amostras) por:

$$\sigma_f^2 = E[(f - \mu_f)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (f - \mu_f)^2 p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}) d\mathbf{Z} \cong \sum_{i=1}^n (f_i - \mu_f)^2 / (n - 1) \quad (3.31)$$

Sendo assim, seja o seguinte problema de otimização robusta com  $m$  restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ & \text{Sujeito a } g_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.32)$$

Na Equação 3.32,  $g_j$  são as  $m$  restrições de desigualdade, o vetor de  $n$  variáveis de projeto é representado por  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$  e  $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_r)^T$  representa o vetor de  $r$  parâmetros fixos (que não serão otimizados). Ambos os vetores podem conter incertezas associadas em um problema típico de otimização robusta (tipo de distribuição, médias, desvios padrões, etc.). Sendo assim, precisa-se reformular o problema descrito na Equação 3.32 para levar em conta as incertezas [Arora, 2012].

Assim, procura-se o vetor  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$  de forma a:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X} + \mathbf{Z}^{\mathbf{X}}, \mathbf{Y} + \mathbf{Z}^{\mathbf{Y}}) \quad (3.33)$$

$$\text{Sujeito a } g_j(\mathbf{X} + \mathbf{Z}^{\mathbf{X}}, \mathbf{Y} + \mathbf{Z}^{\mathbf{Y}}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

onde  $\mathbf{Z}^{\mathbf{X}} = (z^{x_1}, \dots, z^{x_n})^T$  é o vetor que contém as incertezas das variáveis de projeto e  $\mathbf{Z}^{\mathbf{Y}} = (z^{y_1}, \dots, z^{y_r})^T$  é o vetor que contém as incertezas dos parâmetros fixos de projeto.

No contexto de otimização robusta, as incertezas originadas na função objetivo  $f$  e nas restrições  $g_j$ , por estes vetores de incerteza  $\mathbf{Z}^{\mathbf{X}}$  e  $\mathbf{Z}^{\mathbf{Y}}$ , podem ser estimadas por funções  $F$  e  $G_j$  definidas a partir das médias e variância das funções originais.

Desta forma, o problema pode ser reescrito como:

$$\text{Minimizar } F(f(x_1 + z^{x_1}, \dots, x_n + z^{x_n}; y_1 + z^{y_1}, \dots, y_r + z^{y_r})) \quad (3.34)$$

$$\text{Sujeito a } G_j(g_j(x_1 + z^{x_1}, \dots, x_n + z^{x_n}; y_1 + z^{y_1}, \dots, y_r + z^{y_r})) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

Para avaliar a média da função objetiva emprega-se a definição de valor esperado, e assim tem-se:

$$\mu_f = E[f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{X} + \mathbf{Z}^{\mathbf{X}}, \mathbf{Y} + \mathbf{Z}^{\mathbf{Y}}) \cdot p_f(\mathbf{Z}) d\mathbf{Z} \quad (3.35)$$

Correspondentemente, para avaliar sua variância, pode-se calcular:

$$\sigma_f^2 = E[(f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mu_f)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mu_f)^2 \cdot p_f(\mathbf{Z}) d\mathbf{Z} \quad (3.36)$$

Na Equação 3.36,  $p_f(\mathbf{Z})$  é a função de densidade de probabilidade conjunta da função objetivo e que é função das variáveis incertas. Caso assumam-se que as variáveis incertas são não correlacionadas ou estatisticamente independentes e Gaussianas, então a função de densidade de probabilidade  $p_f(\mathbf{Z})$  pode ser avaliada como sendo o produto das funções de densidade de probabilidade gaussianas de cada variável incerta.

$$\mu_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{X} + \mathbf{Z}^X, \mathbf{Y} + \mathbf{Z}^Y) \times p_{fz^{x_1}}(z^{x_1}) \dots p_{fz^{x_n}}(z^{x_n}) \dots p_{fz^{y_1}}(z^{y_1}) \dots p_{fz^{y_r}}(z^{y_r}) d\mathbf{Z} \quad (3.37)$$

e também:

$$\sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mu_f)^2 \times p_{fz^{x_1}}(z^{x_1}) \dots p_{fz^{x_n}}(z^{x_n}) \dots p_{fz^{y_1}}(z^{y_1}) \dots p_{fz^{y_r}}(z^{y_r}) d\mathbf{Z} \quad (3.38)$$

onde para uma dada função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $p_{fz^{x_i}}(z^{x_i})$ , por exemplo, a distribuição de Gauss é válida e vale:

$$p_{fz^{x_i}}(z^{x_i}) = \frac{1}{\sigma_{x_i} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x_i - \mu_{x_i})^2}{2\sigma_{x_i}^2} \right] \quad (3.39)$$

sendo  $\mu_{x_i}$  e  $\sigma_{x_i}$  a média e o desvio padrão da variável aleatória  $x_i$ .

Como o valor esperado de uma variável, por definição, é a integral deste valor pela função de densidade de probabilidade, pode-se avaliar a média da função objetivo a partir da aplicação da função usando os valores médios das variáveis aleatórias, sendo o mesmo válido para as funções de restrição:

$$\mu_f = f(\mu_{x_1}, \dots, \mu_{x_n}; \mu_{y_1}, \dots, \mu_{y_r}) \quad (3.40)$$

e também:

$$\mu_{g_j} = g_j(\mu_{x_1}, \dots, \mu_{x_n}; \mu_{y_1}, \dots, \mu_{y_r}) \quad j = 1, \dots, m \quad (3.41)$$

Para avaliar a variância da função objetivo, assumindo variáveis aleatórias independentes e gaussianas, pode partir da aproximação até primeira ordem desta função por expansão em série de Taylor, de forma que se tem:

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cong f(\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\mu}_Y) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x_i - \mu_{x_i}) + \sum_{i=1}^r \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \right) (y_i - \mu_{y_i}) \quad (3.42)$$

E a variância da função objetivo fica então definida aplicando o operador variância  $\text{Var}[\blacksquare] = E[(\blacksquare - \mu)^2]$  à expressão anterior:

$$\sigma_f^2 \cong \text{Var}[f(\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\mu}_Y)] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) (x_i - \mu_{x_i}) + \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) (y_i - \mu_{y_i}) \quad (3.43)$$

onde  $\boldsymbol{\mu}_X = (\mu_{x_1}, \dots, \mu_{x_n})^T$  e  $\boldsymbol{\mu}_Y = (\mu_{y_1}, \dots, \mu_{y_r})^T$  são os vetores de médias das variáveis de projeto aleatórias e médias dos parâmetros fixos. Aplicando a cada termo do somatório o operador  $\text{Var}[\blacksquare]$ , chega-se a:

$$\sigma_f^2 \cong \text{Var}[f(\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\mu}_Y)] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) (x_i - \mu_{x_i})\right] + \text{Var}\left[\sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) (y_i - \mu_{y_i})\right] \quad (3.44)$$

Lembrando que, por definição,  $\text{Var}[f(\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\mu}_Y)] = 0$  e após algumas manipulações algébricas, chega-se a:

$$\sigma_f^2 \cong 0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \text{Var}[x_i] + \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2 \text{Var}[y_i] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_{y_i}^2 \quad (3.45)$$

Sendo o mesmo válido para as funções de restrição, de forma que se tem:

$$\sigma_{g_j}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial g_j}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_{y_i}^2 \quad j = 1, \dots, m \quad (3.46)$$

Deve-se assegurar, com certo grau de confiança, que as restrições sejam satisfeitas mesmo com a presença das incertezas. Em otimizações determinísticas, quando a solução resulta em restrições ativas (ponto da solução em cima da restrição), a presença de incertezas nas próprias variáveis de projeto ou nos parâmetros fixos poderia facilmente levar a solução para o domínio inviável ou mesmo para o domínio viável. Assim a função  $G_j$  (Equação 3.34) que relaciona a incerteza das restrições para atender a esta necessidade, fica definida como:

$$G_j \equiv \mu_{g_j} + k\sigma_{g_j} \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (3.47)$$

onde  $k$  é um fator maior que zero definido pelo usuário e que representa o grau de confiança (obtido por uma Tabela estatística de distribuição de Gauss) para que a restrição não seja violada.  $\sigma_{g_j}$  é o desvio padrão da restrição  $g_j$  devido às incertezas e avaliado como indicado anteriormente pela Equação 3.46.

Considerando que as incertezas sejam limitadas por valores máximos e mínimos, num cenário de pior caso, com as incertezas combinando de forma a trazer a restrição mais próxima ou maior que o zero (lembrar que  $g_j \leq 0$ ), pode-se estimar seu valor, ao lado da segurança, como:

$$G_j = \mu_{g_j} + k^{x_j} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right| |z^{x_i}| + k^{y_j} \sum_{i=1}^r \left| \frac{\partial g_j}{\partial y_i} \right| |z^{y_i}| \quad j = 1, \dots, m \quad (3.48)$$

com  $k^{x_j}$  e  $k^{y_j}$  sendo os fatores de segurança pretendidos pelo projetista para a parcela da variância da restrição  $j$  devido às aleatoriedades das variáveis de projeto  $x$ , somado com a parcela da variância da restrição  $j$  devido às aleatoriedades dos parâmetros fixos  $y$ . Os parâmetros  $|z^{x_i}|$  e  $|z^{y_i}|$  são os máximos valores, em módulo, assumidos pelas variáveis incertas  $x_i$  e  $y_j$  e que podem ser estimados como um certo número de desvios padrões de cada variável ou parâmetro incerto. Assim, para um intervalo de confiança de 99% (com 99% de confiança, a variável incerta  $x_i$  não ultrapassará o intervalo  $\mu_{x_i} - q \cdot \sigma_{x_i} \leq x_i \leq \mu_{x_i} + q \cdot \sigma_{x_i}$ ), pode-se assumir  $|z^{x_i}| = q \times \sigma_{x_i} = 2,96 \times \sigma_{x_i}$  e  $|z^{y_i}| = 2,96 \times \sigma_{y_i}$ . Para valores de confiança de 95%,  $q = 2$  e para 90%,  $q = 1,64$ .

Note que a Equação 3.48 utiliza módulos das derivadas parciais dos parâmetros e variáveis de projeto, e módulos dos máximos valores assumidos pelas variáveis e parâmetros incertos ( $\left| \frac{\partial g_j}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right|, |z^{x_i}|$  e  $|z^{y_i}|$ ). O cálculo das restrições usando esta equação é relativamente comum, sendo a metodologia escolhida por Arora, 2012. Essa abordagem visa priorizar a segurança da restrição, como descrito anteriormente, e é normalmente referida como “análise do pior cenário” (do inglês, *worst case analysis*). Apesar de priorizar a segurança, a análise do pior cenário não é precisa na avaliação da restrição. De forma a manter o cálculo mais preciso, outra abordagem análoga à presente

na Equação 3.47, mas aplicada à restrição, também é comum [Beyer e Sendhoff, 2007, e Sundaresan, 1995]. Segundo Beyer e Sendhoff, 2007, esta metodologia foi proposta por Sundaresan, 1995. Nesta abordagem, tem-se um controle mais preciso do grau de confiança desejado para que as restrições não sejam violadas. Neste caso a restrição pode ser avaliada da seguinte forma:

$$G_j = \mu_{g_j} + \sqrt{k^{x_j} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_i} z^{x_i} \right)^2 + k^{y_j} \sum_{i=1}^r \left( \frac{\partial g_j}{\partial y_i} z^{y_i} \right)^2} \quad j = 1, \dots, m \quad (3.49)$$

Outras abordagens para a restrição, como as usadas nos algoritmos FORM (método de confiabilidade de primeira ordem, do inglês *First-Order Reliability Method*) e SORM (método de confiabilidade de segunda ordem, do inglês *Second-Order Reliability Method*), não serão abordadas neste trabalho, mas estão presentes para consulta em Beyer e Sendhoff, 2007, e Sundaresan, 1995. A diferenciação das condições de KKT (Karush-Kuhn-Tucker) também é um método usado no cálculo da restrição de problemas cuja avaliação das restrições é muito custosa computacionalmente. Este último método também não será avaliado ou aplicado neste trabalho, e pode ser conferido em Sundaresan, 1995.

### 3.11 Modelo da suspensão de meio carro

O modelo numérico escolhido para simular a suspensão é um modelo de meio carro com cinco graus de liberdade, o mesmo usado por diversos autores em publicações científicas na área de otimização. O modelo foi adotado, entre outros temas, na otimização de suspensões veiculares por Nariman-Zadeh *et al.*, 2009, Boonlong *et al.*, 2010, Mahmoodabadi *et al.*, 2012, Fan *et al.*, 2017, e Grotti *et al.*, 2020. A Tabela 3.1 mostra os valores originais dos parâmetros que compõem este modelo numérico de suspensão. A Figura 3.8 apresenta uma ilustração do modelo de metade de veículo utilizado.



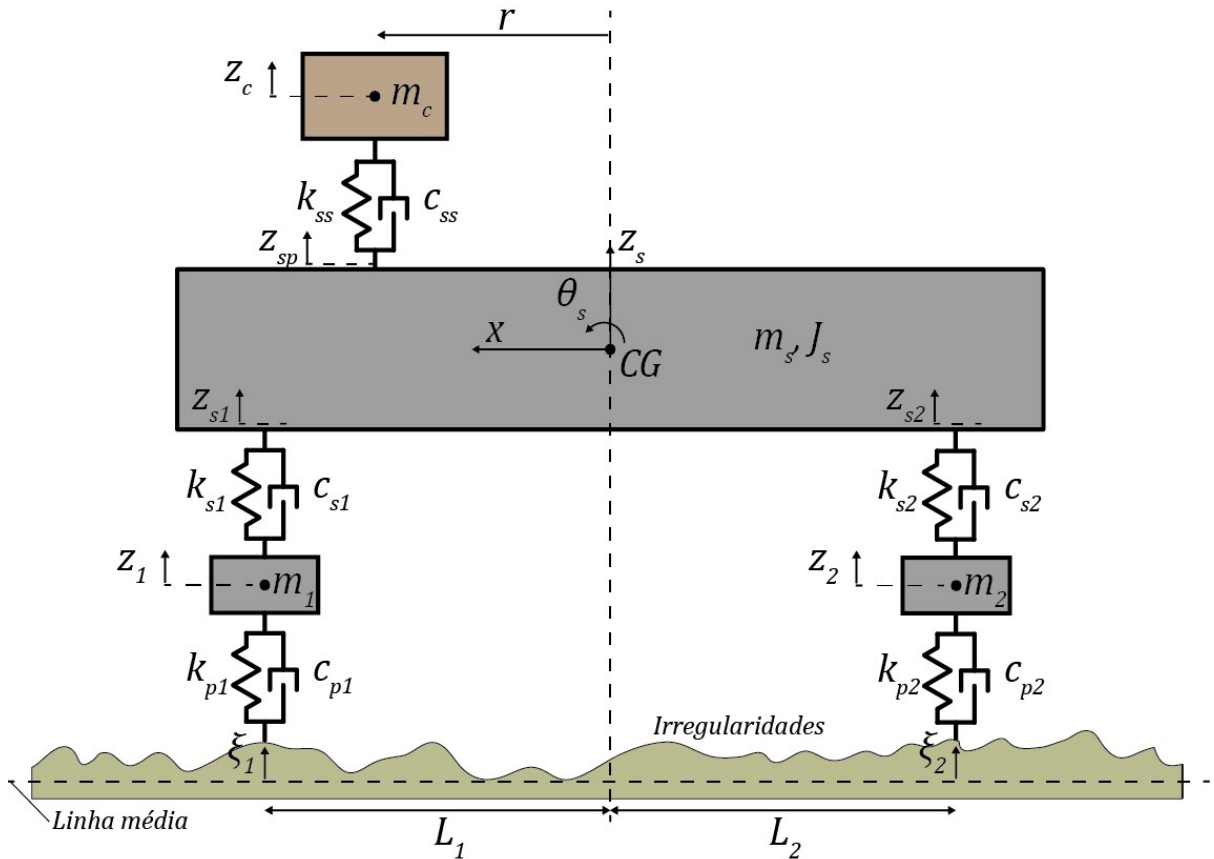


Figura 3.8 – Modelo esquemático do meio carro (adaptado de Grotti et al., 2020).

onde  $L_1$  e  $L_2$  são as distâncias entre o centro de gravidade (CG) e o eixo dianteiro e traseiro respectivamente,  $r$  é a distancia entre o CG e o assento do motorista,  $k_{ss}$  e  $c_{ss}$  é rigidez e amortecimento do assento do motorista,  $k_{s1}$  e  $k_{s2}$  são as rigidezes da suspensão dianteira e traseira,  $c_{s1}$  e  $c_{s2}$  são os amortecimentos da suspensão dianteira e traseira,  $k_{p1}$  e  $k_{p2}$  são as rigidezes dos pneus dianteiro e traseiro,  $c_{p1}$  e  $c_{p2}$  são os amortecimentos do pneu traseiro e dianteiro,  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são os deslocamentos advindos das irregularidades verticais na trilha dianteira e traseira,  $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos eixos dianteiros e traseiros,  $m_c$  é a massa do motorista,  $m_s$  e  $J_s$  são a massa e o momento polar de inércia da massa suspensa do veículo  $z_c$  representa o deslocamento vertical do motorista no modelo de veículo,  $z_{sp}$ , é o deslocamento da massa suspensa no ponto de contato com o assento do motorista,  $z_s$  é o deslocamento vertical da massa suspensa,  $z_{s1}$  e  $z_{s2}$  são os deslocamentos da massa suspensa nos pontos de contato com a suspensão dianteira e traseira, e  $z_1$  e  $z_2$  são os deslocamentos dos eixos traseiro e dianteiro. As variáveis podem ser conferidas na Figura 3.8 e Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Valores originais dos parâmetros que compõem o modelo numérico da suspensão.

Variáveis de inércia				
$m_1$	$m_2$	$m_c$	$m_s$	$J_s$
40 [kg]	35,5 [kg]	75 [kg]	730 [kg]	130 [kg.m <sup>2</sup> ]
Variáveis geométricas				
$L_1$		$L_2$		$r$
1,011 [m]		1,803 [m]		0,5 [m]
Variáveis de rigidez				
$k_{p1}$	$k_{p2}$	$k_{ss}$	$k_{s1}$	$k_{s2}$
175500 $\left[\frac{N}{m}\right]$	175500 $\left[\frac{N}{m}\right]$	100000 $\left[\frac{N}{m}\right]$	15000 $\left[\frac{N}{m}\right]$	15000 $\left[\frac{N}{m}\right]$
Variáveis de amortecimento				
$c_{p1}$	$c_{p2}$	$c_{ss}$	$c_{s1}$	$c_{s2}$
0 $\left[\frac{N.s}{m}\right]$	0 $\left[\frac{N.s}{m}\right]$	2500 $\left[\frac{N.s}{m}\right]$	1250 $\left[\frac{N.s}{m}\right]$	1250 $\left[\frac{N.s}{m}\right]$

As equações de movimento são derivadas a partir das equações de Lagrange. Primeiramente o Lagrangeano é construído como  $L = T - V$ , onde  $T$  e  $V$  são a energia cinética e potencial respectivamente.

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (3.50)$$

$$V = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} k_{i,j} (x_i - x_j)^2 \quad (3.51)$$

$$D = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} c_{i,j} (\dot{x}_i - \dot{x}_j)^2 \quad (3.52)$$

$D$  é um termo não conservativo dissipador,  $c$  refere-se ao amortecimento,  $k$  refere-se à elasticidade,  $m$  refere-se à massa,  $x$  é a posição,  $\dot{x}$  é a velocidade e  $\ddot{x}$  é a aceleração. De forma análoga, todas as variáveis a seguir com a notação pontual superior representam a própria variável derivada no tempo (com um ponto superior representando uma derivada no tempo e dois pontos superiores representando a

derivada segunda no tempo). Cada uma das variáveis é explícita na Figura 3.8. Então, com as forças externas agindo no sistema juntamente com as forças dissipativas não conservativas, monta-se a equação de Lagrange (Equação 3.53):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (3.53)$$

Expandindo o sistema de equações, chega-se ao sistema de equações diferenciais de movimento referente ao equilíbrio de forças e momentos.

$$m_1 \ddot{z}_1 = -k_{p1}(z_1 - \xi_1) - c_{p1}(\dot{z}_1 - \dot{\xi}_1) + k_{s1}(z_{s1} - z_1) + c_{s1}(\dot{z}_{s1} - \dot{z}_1) \quad (3.54)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = -k_{p2}(z_2 - \xi_2) - c_{p2}(\dot{z}_2 - \dot{\xi}_2) + k_{s2}(z_{s2} - z_2) + c_{s2}(\dot{z}_{s2} - \dot{z}_2) \quad (3.55)$$

$$m_s \ddot{z}_s = -k_{s1}(z_{s1} - z_1) - c_{s1}(\dot{z}_{s1} - \dot{z}_1) - k_{s2}(z_{s2} - z_2) - c_{s2}(\dot{z}_{s2} - \dot{z}_2) \\ + k_{ss}(z_c - z_{sp}) + c_{ss}(\dot{z}_c - \dot{z}_{sp}) \quad (3.56)$$

$$m_c \ddot{z}_c = -k_{ss}(z_c - z_{sp}) - c_{ss}(\dot{z}_c - \dot{z}_{sp}) \quad (3.57)$$

$$J_s \ddot{\theta}_s = -k_{ss}(z_c - z_{sp})r - c_{ss}(\dot{z}_c - \dot{z}_{sp})r + k_{s1}(z_{s1} - z_1)L_1 + c_{s1}(\dot{z}_{s1} - \dot{z}_1)L_1 \\ - k_{s2}(z_{s2} - z_2)L_2 - c_{s2}(\dot{z}_{s2} - \dot{z}_2)L_2 \quad (3.58)$$

Lembrando que para pequenos ângulos  $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ , obtêm-se as seguintes relações de aproximação:

$$z_{s1} = z_s - \theta_s L_1 \quad (3.59)$$

$$\dot{z}_{s1} = \dot{z}_s - \dot{\theta}_s L_1 \quad (3.60)$$

$$z_{s2} = z_s + \theta_s L_2 \quad (3.61)$$

$$\dot{z}_{s2} = \dot{z}_s + \dot{\theta}_s L_2 \quad (3.62)$$

$$z_{sp} = z_s - \theta_s r \quad (3.63)$$

$$\dot{z}_{sp} = \dot{z}_s - \dot{\theta}_s r \quad (3.64)$$

Rearranjando, obtêm-se:

$$m_1 \ddot{z}_1 + k_{p1} z_1 + c_{p1} \dot{z}_1 - k_{s1} (z_{s1} - z_1) - c_{s1} (\dot{z}_{s1} - \dot{z}_1) = k_{p1} \xi_1 + c_{p1} \dot{\xi}_1 \quad (3.65)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + k_{p2} z_2 + c_{p2} \dot{z}_2 - k_{s2} (z_{s2} - z_2) - c_{s2} (\dot{z}_{s2} - \dot{z}_2) = k_{p2} \xi_2 + c_{p2} \dot{\xi}_2 \quad (3.66)$$

$$m_s \ddot{z}_s + k_{s1} (z_{s1} - z_1) + c_{s1} (\dot{z}_{s1} - \dot{z}_1) + k_{s2} (z_{s2} - z_2) - c_{s2} (\dot{z}_{s2} - \dot{z}_2) - k_{ss} (z_c - z_{sp}) - c_{s2} (\dot{z}_c - \dot{z}_{sp}) = 0 \quad (3.67)$$

$$m_c \ddot{z}_c + k_{ss} (z_c - z_{sp}) + c_{ss} (\dot{z}_c - \dot{z}_{sp}) = 0 \quad (3.68)$$

$$J_s \ddot{\theta}_s + k_{ss} (z_c - z_{sp}) r + c_{ss} (\dot{z}_c - \dot{z}_{sp}) r - k_{s1} (z_{s1} - z_1) L_1 - c_{s1} (\dot{z}_{s1} - \dot{z}_1) L_1 + k_{s2} (z_{s2} - z_2) L_2 + c_{s2} (\dot{z}_{s2} - \dot{z}_2) L_2 = 0 \quad (3.69)$$

Aplicando as equações de pequenos ângulos nas equações de movimento, chega-se a:

$$m_1 \ddot{z}_1 + k_{p1} z_1 + c_{p1} \dot{z}_1 - k_{s1} (z_s - \theta_s L_1 - z_1) - c_{s1} (\dot{z}_s - \dot{\theta}_s L_1 - \dot{z}_1) = k_{p1} \xi_1 + c_{p1} \dot{\xi}_1 \quad (3.70)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + k_{p2} z_2 + c_{p2} \dot{z}_2 - k_{s2} (z_s + \theta_s L_2 - z_2) - c_{s2} (\dot{z}_s + \dot{\theta}_s L_2 - \dot{z}_2) = k_{p2} \xi_2 + c_{p2} \dot{\xi}_2 \quad (3.71)$$

$$m_s \ddot{z}_s + k_{s1} (z_s - \theta_s L_1 - z_1) + c_{s1} (\dot{z}_s - \dot{\theta}_s L_1 - \dot{z}_1) + k_{s2} (z_s + \theta_s L_2 - z_2) - c_{s2} (\dot{z}_s + \dot{\theta}_s L_2 - \dot{z}_2) - k_{ss} (z_c - z_s + \theta_s r) - c_{s2} (\dot{z}_c - \dot{z}_s + \dot{\theta}_s r) = 0 \quad (3.72)$$

$$m_c \ddot{z}_c + k_{ss} (z_c - z_s + \theta_s r) + c_{ss} (\dot{z}_c - \dot{z}_s + \dot{\theta}_s r) = 0 \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned}
J_s \ddot{\theta}_s + k_{ss}(z_c - z_s + \theta_s r)r + c_{ss}(\dot{z}_c - \dot{z}_s + \dot{\theta}_s r)r - k_{s1}(z_s - \theta_s L_1 - z_1)L_1 \\
- c_{s1}(\dot{z}_s - \dot{\theta}_s L_1 - \dot{z}_1)L_1 + k_{s2}(z_s + \theta_s L_2 - z_2)L_2 \\
+ c_{s2}(\dot{z}_s + \dot{\theta}_s L_2 - \dot{z}_2)L_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Rearranjando para as variáveis dos graus de liberdade:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{z}_1 + (c_{p1} + c_{s1})\dot{z}_1 - c_{s1}\dot{z}_s + (c_{s1}L_1)\dot{\theta}_s + (k_{s1} + k_{p1})z_1 - k_{s1}z_s + (k_{s1}L_1)\theta_s \\
= k_{p1}\xi_1 + c_{p1}\dot{\xi}_1
\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}
m_2 \ddot{z}_2 + (c_{p2} + c_{s2})\dot{z}_2 - c_{s2}\dot{z}_s - (c_{s2}L_2)\dot{\theta}_s + (k_{s2} + k_{p2})z_2 - k_{s2}z_s - (k_{s2}L_2)\theta_s \\
= k_{p2}\xi_2 + c_{p2}\dot{\xi}_2
\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
m_s \ddot{z}_s - c_{s1}\dot{z}_1 + c_{s2}\dot{z}_2 + (c_{s1} - c_{s2} + c_{s2})\dot{z}_s - c_{s2}\dot{z}_c \\
+ (c_{s1}L_1 - c_{s2}L_2 - c_{s2}r)\dot{\theta}_s - k_{s1}z_1 - k_{s2}z_2 + (k_{s1} + k_{s2} + k_{ss})z_s \\
+ -k_{ss}z_c + (-k_{s1}L_1 + k_{s2}L_2 - k_{ss}r)\theta_s = 0
\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$m_c \ddot{z}_c - k_{ss}z_s + k_{ss}z_c + (k_{ss}r)\theta_s - c_{ss}\dot{z}_s + c_{ss}\dot{z}_c + (c_{ss}r)\dot{\theta}_s = 0 \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}
J_s \ddot{\theta}_s + k_{s1}L_1 z_1 - k_{s2}L_2 z_2 + (-k_{ss}r - k_{s1}L_1 + k_{s2}L_2)z_s + k_{ss}r z_c \\
+ (k_{ss}r^2 + k_{s1}L_1^2 + k_{s2}L_2^2)\theta_s + c_{s1}L_1 \dot{z}_1 - c_{s2}L_2 \dot{z}_2 \\
+ (-c_{ss}r - c_{s1}L_1 + c_{s2}L_2)\dot{z}_s + c_{ss}r \dot{z}_c + (c_{ss}r^2 + c_{s1}L_1^2 + c_{s2}L_2^2)\dot{\theta}_s \\
= 0
\end{aligned} \tag{3.79}$$

As equações de equilíbrio também podem ser descritas na sua forma matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_e \tag{3.80}$$

Onde,  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento, e  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez, e  $\mathbf{F}_e$  é o vetor de forças externas geradas pelas ondulações da pista agindo nos pneus. As matrizes expandidas são:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_s \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{s1}+k_{p1} & 0 & -k_{s1} & 0 & k_{s1}L_1 \\ 0 & k_{s2}+k_{p2} & -k_{s2} & 0 & -k_{s2}L_2 \\ -k_{s1} & -k_{s2} & k_{s1}+k_{s2}+k_{ss} & -k_{ss} & -k_{s1}L_1+k_{s2}L_2-k_{ss}r \\ 0 & 0 & -k_{ss} & k_{ss} & k_{ss}r \\ k_{s1}L_1 & -k_{s2}L_2 & -k_{s1}L_1+k_{s2}L_2-k_{ss}r & k_{ss}r & k_{ss}r^2+k_{s1}L_1^2+k_{s2}L_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{s1}+c_{p1} & 0 & -c_{s1} & 0 & c_{s1}L_1 \\ 0 & c_{s2}+c_{p2} & -c_{s2} & 0 & -c_{s2}L_2 \\ -c_{s1} & -c_{s2} & c_{s1}+c_{s2}+c_{ss} & -c_{ss} & -c_{s1}L_1+c_{s2}L_2-c_{ss}r \\ 0 & 0 & -k_{ss} & c_{ss} & c_{ss}r \\ c_{s1}L_1 & -c_{s2}L_2 & -c_{s1}L_1+c_{s2}L_2-c_{ss}r & c_{ss}r & c_{ss}r^2+c_{s1}L_1^2+c_{s2}L_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 \\ 0 & k_{p2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{p1} & 0 \\ 0 & c_{p2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.84)$$

A equação que define o espaço de trabalho da suspensão é dada pela diferença entre  $z_1$  e  $z_{s1}$  na Figura 3.8. Usando dinâmica de corpos rígidos, e contabilizando a arfagem para encontrar  $z_{s1}$  como na Equação 3.59 e 3.61, chega-se a

$$ws_1 = (z_s - \theta_s L_1) - (z_1) \quad (3.85)$$

$$ws_2 = (z_s + \theta_s L_2) - (z_2) \quad (3.86)$$

onde a diferença no sinal é resultado da convenção do sentido anti-horário positivo, para rotações.

### 3.12 Geração de pista com irregularidades

A geração da pista é modelada como um processo estocástico simples, usando a Função de Densidade Espectral (PSD, do inglês *Power Spectral Density*) detalhada na norma ISO 8608 (2016):

$$G_{\xi}(\Omega) = \begin{cases} C \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-w_1} & \text{for } n \leq n_0 \\ C \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-w_2} & \text{for } n \geq n_0 \end{cases} \quad (3.87)$$

onde  $G_{\xi}$  é a densidade espectral unilateral para rugosidade de pista ( $\text{m}^2/\text{ciclo}/\text{m}$ ),  $n$  representa o número de onda ( $\text{ciclo}/\text{m}$ ),  $C$  é o coeficiente de rugosidade geral ( $\text{m}^3/\text{ciclo}$ ), o qual é relacionado com a condição da superfície da pista, e  $w$  é a distribuição do comprimento de onda. O PSD unilateral é dividido em duas partes na frequência de descontinuidade  $n_0$  ( $\text{ciclo}/\text{m}$ ). A frequência de descontinuidade normalmente é definida como  $n_0 = \frac{1}{2}\pi = 0,16$  ciclo/m.  $w_1$  e  $w_2$  são parâmetros de distribuição de comprimento de onda. Nesta dissertação um modelo simples é usado com  $n_0 = 0,1$  ciclo/m,  $w_1 = w_2 = 2$ , e  $C = 0,01$   $\text{m}^3/\text{ciclo}$ .

A geração do sinal é realizada de acordo com a equação do PSD unilateral pela seguinte fórmula:

$$x_a(t_i) = \sum_{i=1}^{ne} \sqrt{G_a(f_i)\Delta f} \sin(2\pi f_i t_i + \varphi_i) \quad (3.88)$$

onde  $\varphi_i$  são ângulos de fase uniformemente distribuídos no intervalo 0 a  $2\pi$ , e  $f_i$  são as frequências da densidade espectral, discretizado entre as  $ne$  linhas espectrais. Um deslocamento simples da escala de frequências é usado para correlacionar as trilhas traseiras e dianteiras da seguinte forma:

$$G_{a,shift}(f) = G_a(f)e^{i\omega\Delta t}, \quad (3.89)$$

onde  $\Delta t$  é o intervalo de tempo que o veículo leva para percorrer a distância entre eixos, ou seja,  $(L_1 + L_2)/v$ , com  $L_1$  e  $L_2$  sendo as distâncias entre os eixos dianteiros e traseiros até o centro de gravidade, respectivamente, e  $v$  a velocidade do veículo.

É importante enfatizar que, durante a otimização, o mesmo perfil de pista, apesar de randômico e com propriedades especificadas, deve ser usado durante otimizações devido à natureza estocástica do modelo de geração para assegurar comparações adequadas.

As Figuras 3.9 e 3.10 representam a pista tipo C, gerada usando a ISO 8608 (2016), usada para criar a excitação no modelo de meio carro.

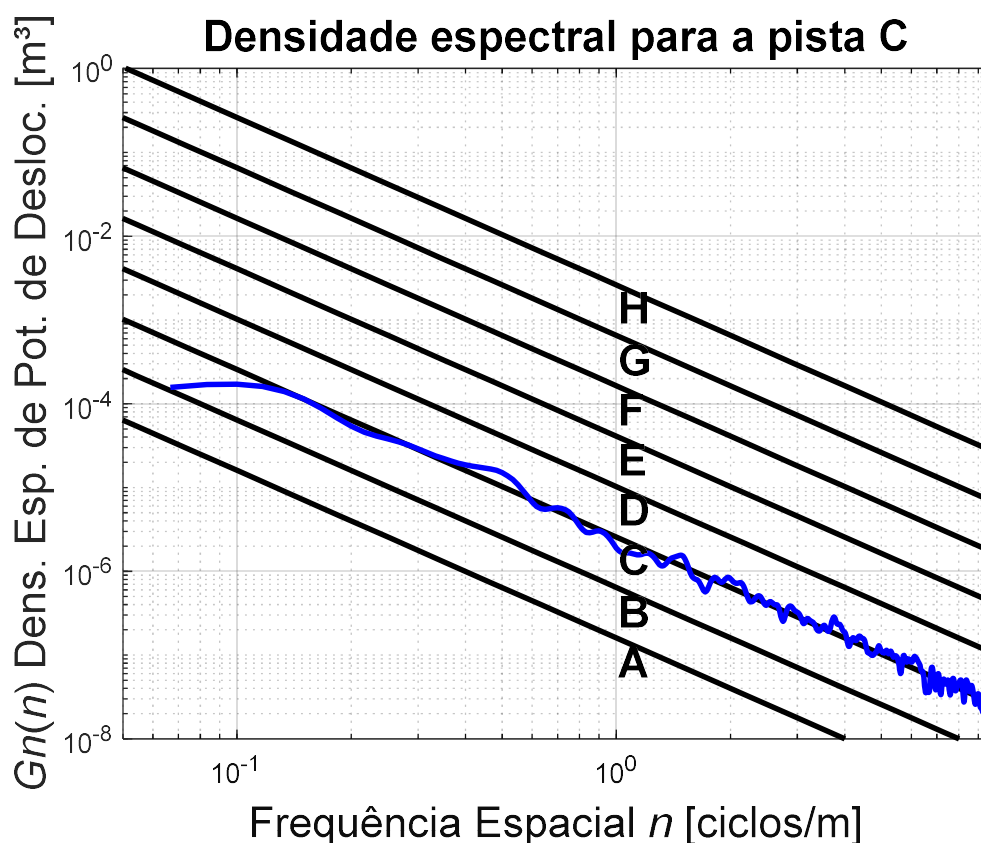


Figura 3.9 – Densidade espectral da pista de tipo C, criada a partir da ISO 8608 (2016).



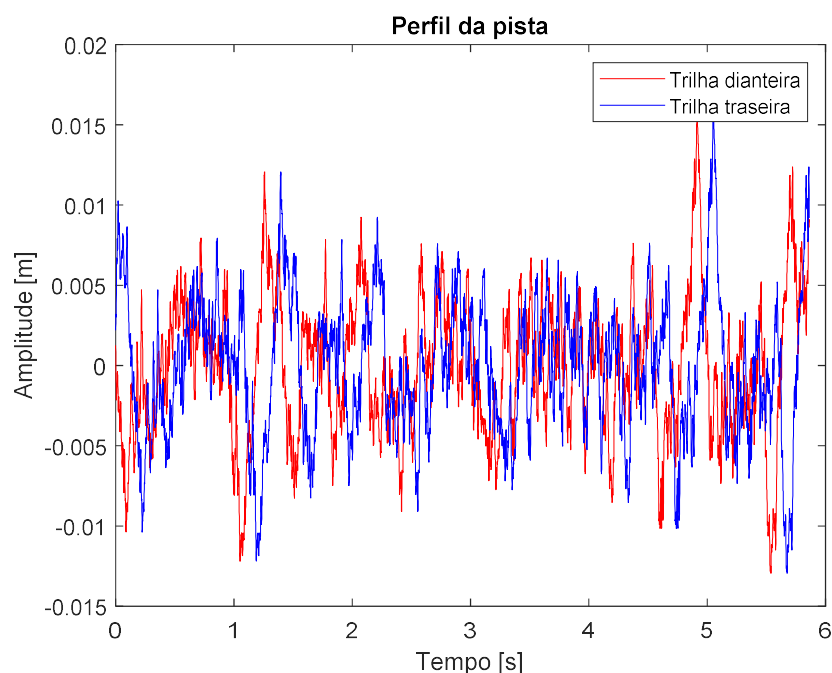


Figura 3.10 – Perfil da pista de tipo C, criada a partir da ISO 8608 (2016).

### 3.13 Avaliação do conforto segundo a norma ISO 2631-1 (1997)

A vibração incidente em humanos é classificada em dois grandes grupos segundo a norma ISO2631-1, 1997: a vibração de corpo inteiro e a vibração de mãos e braços. A vibração de mãos e braços é aquela produzida por ferramentas manuais, tais como furadeiras, britadeiras, e politrizes, incidentes sobre os membros superiores. Já a vibração de corpo inteiro, é frequentemente associada a transportes, como carros, ônibus e caminhões. A exposição à vibração de corpo inteiro pode gerar riscos: Problemas na coluna são comumente detectados em motoristas de caminhões ou ônibus de longa data, e sintomas menores como falta de atenção, sonolência, enjoo, elevada carga mental, e desconforto nos passageiros, também são associados à vibração [Zamanian et al., 2014].

De maneira geral, a vibração pode ser quantificada por um valor de aceleração RMS (*Root Mean Square*), que representa a energia média contida neste movimento oscilatório. Dado um intervalo de tempo  $t_1 \leq t \leq t_2$ , o valor RMS de um determinado sinal oscilatório pode ser dado por:

$$a_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [a(t)]^2 dt} \quad (3.90)$$

onde  $a(t)$  representa o sinal da aceleração e  $a_{rms}$  a corresponde aceleração RMS.

A norma ISO 2631-1, 1997, classifica a vibração no corpo humano de acordo com a magnitude e o tempo de exposição, e apresenta como método de avaliação um cálculo baseado em ponderação de frequências a fim de dar mais relevância a frequências mais danosas e perceptíveis.

$$a_w = [\sum_i (w_i a_i)^2]^{1/2}, \quad (3.91)$$

onde  $a_w$  é a aceleração ponderada pela frequência,  $w_i$  é a ponderação atribuída ao  $i$ -ésimo terço de banda de oitava, e  $a_i$  é a aceleração RMS da respectiva banda de frequência. A Tabela 3.2 abaixo foi adaptada da ISO 2631-1, 1997, e indica faixas de valores da aceleração RMS ponderada,  $a_w$ , correspondentes ao conforto percebido. A Figura 3.11 mostra o comportamento dos fatores de ponderação  $w_k$  (fator correspondente à aceleração percebida na direção  $y$ , vertical), e  $w_d$  (fator correspondente à aceleração percebida na direção  $x$ , longitudinal).

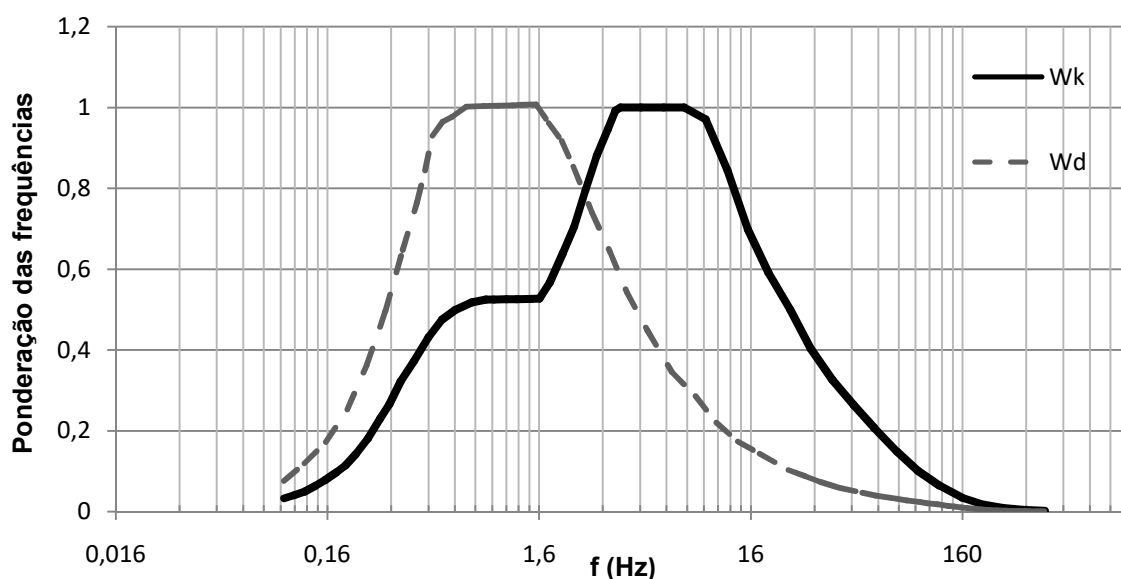


Figura 3.11 – Fatores de ponderação de acordo com a norma ISO 2631-1, 1997

(Adaptado de ISO 2631-1, 1997).

A norma ressalta, ainda, que o conforto percebido também pode variar com a duração da viagem e o tipo de atividade em vigor pelo passageiro, como leitura, escrita, alimentação, ou repouso por exemplo.

Tabela 3.2 – Indicações aproximadas para os limites de aceleração para conforto.

(Adaptado: ISO 2631-1, 1997).

Conforto (ISO 2361-1, 1997)	
Não desconfortável	$< 0,315 \text{ m/s}^2$
Levemente desconfortável	$0,315 \text{ a } 0,63 \text{ m/s}^2$
Razoavelmente desconfortável	$0,5 \text{ a } 1,0 \text{ m/s}^2$
Desconfortável	$0,8 \text{ a } 1,6 \text{ m/s}^2$
Muito desconfortável	$1,25 \text{ a } 2,5 \text{ m/s}^2$
Extremamente desconfortável	$>2 \text{ m/s}^2$

## 4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA EM OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

Neste capítulo estarão contidos os resultados e os comentários a respeito de dois problemas. O primeiro problema trata-se da otimização robusta de uma função explícita com restrições de desigualdade, encontrado na literatura. O objetivo é compreender os conceitos que foram apresentados anteriormente sobre otimização robusta multiobjetivo. O segundo problema, mais complexo e com funções implícitas, trata-se de uma otimização robusta de um modelo numérico de suspensão de meio carro.

### 4.1 Otimização robusta de uma função explícita com restrições de desigualdade

O primeiro caso resolvido neste trabalho se refere ao exemplo presente em Arora, 2012 (terceira edição, exemplo 20.7). O exemplo é formulado a seguir:

$$\text{minimizar: } f = x_1 x_2 \cos(x_1) + x_1^2 - \frac{1}{4} x_2^2 - e^{x_2} \quad (4.1)$$

*sujeito às seguintes restrições:*

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - x_1 - 6 \leq 0 \\ g_2(x) &= \frac{3}{7} x_1^2 - \frac{1}{10} x_2 + (x_2 - 1)^2 - 5 \leq 0 \\ &-2 \leq x_1 \leq 2 \\ &2 \leq x_2 \leq 2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

As variáveis  $x_1$  e  $x_2$  possuem distribuição normal com  $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = 0,1$ . As tolerâncias máximas ficam definidas como  $|z^{x_1}| = |z^{x_2}| = 0,3$ . São usados pesos na função de utilidade de  $w_1 = w_2 = 0,5$  e  $k^{x_1} = k^{x_2} = 0,5$ , e  $(0,4; 0,4)$  como ponto inicial para a busca. As médias serão posteriormente definidas já que serão parte das variáveis de projeto do problema.

Usando as Equações 3.41 e 3.45, as médias e desvios da função ficam definidos como na referência:

$$\mu_f = x_1 x_2 \cos(x_1) + x_1^2 - \frac{1}{4} x_2^2 - e^{x_2} \quad (4.3)$$

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2} \quad (4.4)$$

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{(-x_1 x_2 \sin(x_1) + x_2 \cos(x_1) + 2x_1)^2 \sigma_{x_1}^2 + (x_1 \cos(x_1) - (0,5)x_2 - e^{x_2})^2 \sigma_{x_2}^2}{(x_1 \cos(x_1) - (0,5)x_2 - e^{x_2})^2 \sigma_{x_2}^2}} \quad (4.5)$$

Um processo de normalização deve ser usado na função, pois a média e o desvio da função possuem ordens de grandeza diferentes. Define-se  $\mu_f^*$  e  $\sigma_f^*$  como a média e o desvio no ponto inicial (0,4;0,4).

$$\mu_f^* = (0,4)(0,4) \cos(0,4) + (0,4)^2 - (0,25)(0,4^2) - e^{0,4} = -1,224 \quad (4.6)$$

$$\mu_f^* = -1,224 \quad (4.7)$$

$$\sigma_f^* = \sqrt{\frac{(-(0,4)(0,4) \sin(0,4) + (0,4) \cos(0,4) + 2(0,4))^2 (0,1)^2 + ((0,4) \cos(0,4) - (0,5)(0,4) - e^{0,4})^2 (0,1^2)}{(0,4) \cos(0,4) - (0,5)(0,4) - e^{0,4}}}} \quad (4.8)$$

$$\sigma_f^* = 0,172 \quad (4.9)$$

A normalização da função de utilidade  $F = w_1 \mu_f + w_2 \sigma_f$ , é realizada da seguinte forma, como escolhida por Arora, 2012, através da normalização das funções objetivos pelos seus valores de referência:

$$F = \frac{w_1 \mu_f}{|\mu_f^*|} + \frac{w_2 \sigma_f}{|\sigma_f^*|} \quad (4.10)$$

$$F = (0,5) \frac{x_1 x_2 \cos(x_1) + x_1^2 - \frac{1}{4} x_2^2 - e^{x_2}}{|-1,224|} + (0,5) \frac{\sqrt{(-x_1 x_2 \sin(x_1) + x_2 \cos(x_1) + 2x_1)^2 \sigma_{x_1}^2 + (x_1 \cos(x_1) - (0,5)x_2 - e^{x_2})^2 \sigma_{x_2}^2}}{|0,172|} \quad (4.11)$$

e as restrições, considerando a robustez, são dadas pela Equação 3.49 como segue:

$$G_1 = \mu_{g_1} + k^{x_j} \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \right| |z^{x_i}| \quad (4.12)$$

$$G_1 = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - x_1 - 6 + (0,5)(|2(x_1 - 1) - 1|(0,3) + |2x_2|(0,3)) \quad (4.13)$$

$$G_2 = \mu_{g_2} + k^{x_j} \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_i} \right| |z^{x_i}| \quad (4.14)$$

$$G_2 = \frac{3}{7}x_1^2 - \frac{1}{10}x_2 + (x_2 - 1)^2 - 5 + (0,5) \left( \left| \frac{6}{7}x_1 \right| (0,3) + \left| 2(x_2 - 1) - \frac{1}{10} \right| (0,3) \right) \quad (4.15)$$

A solução deste exemplo pela referência, e também a solução encontrada neste trabalho usando o algoritmo PSO, podem ser comparadas na Tabela 4.1. A solução “Ótimo Determinístico” (DO) se refere à otimização simples da função objetivo sem consideração de aleatoriedades nas variáveis, e as soluções robustas são realizadas a partir da função de utilidade normalizada, explícita na Equação 4.11, considerando-se as aleatoriedades presentes e já definidas.

Os parâmetros usados pelo PSO nesta solução foram: Número de partículas ( $N$ ) = 20; Momento para a velocidade ( $\omega$ ) = 0,9; componentes cognitivas individuais e coletivas ( $c_1$  e  $c_2$ ) = 2,01; gerador de turbulência ( $\alpha$ ) = 0,8; decaimento da turbulência ( $\alpha_t$ ) = 0,99; tolerância para o critério de parada ( $tol$ ) = 0,001.

Tabela 4.1 – Comparação dos resultados para o primeiro exemplo referente à bibliografia (Fonte: Arora, 2012, terceira edição).

	<i>Ponto Inicial</i>	<i>DO</i> <sup>1</sup>	<i>RO</i> <sup>2</sup>	<i>PSO – RO</i> <sup>3</sup>
$(x_1; x_2)$	(0,4; 0,4)	(-0,303; 2,0)	(0,265; -0,593)	(-0,29645; 2,0)
$\mu_f$	-1,2245	-8,8756	-0,72201	-8,8682
$\sigma_f$	0,17248	0,87505	$3,01 \cdot 10^{-6}$	0,87481
$f$	-1,224	-8,8756	-0,72201	-8,8682
F	$1,2089 \cdot 10^{-3}$	-0,84564	-0,29459	-1,0796
$g_1$	-5,88	$8,1 \cdot 10^{-4}$	-5,373	$-2,2779 \cdot 10^{-2}$
$g_2$	-4,6114	-4,1607	-2,373	-4,1623
$G_1$	-5,8710	$2,3627 \cdot 10^{-2}$	-5,3622	$-2,4175 \cdot 10^{-7}$
$G_2$	-4,6065	-4,1542	-2,3624	-4,1559
Penalização	0	0,23	0	0

<sup>1</sup>DO se refere ao ótimo determinístico encontrado na literatura [Arora, 2012].

<sup>2</sup>RO se refere ao ótimo robusto encontrado na literatura [Arora, 2012].

<sup>3</sup>PSO-RO se refere ao ótimo robusto encontrado neste trabalho usando o algoritmo PSO.

Para as soluções indicadas como  $DO^1$  e  $RO^2$ , os códigos implementados geram os mesmos valores de função objetivo e restrições que aqueles presentes em Arora, 2012. Isso indica que as implementações das equações foram realizadas corretamente.

As Figuras 4.1 a 4.4 mostram o comportamento da função de utilidade ( $F$ ) juntamente com os pontos encontrados pelos programas de otimização. A Figura 4.5 mostra o comportamento da função objetivo  $f$ .

Nota-se a partir da Tabela 4.1, que a solução apresentada por Arora, 2012, viola a primeira restrição ( $g_1 = 8,1.10^{-4}$ ), lembrando que para problemas de otimização robusta valores positivos para restrição indicam violação. Outra solução, com função de utilidade menor, foi encontrada pelo algoritmo PSO, indicando que a solução da referência é na verdade um mínimo local encontrado possivelmente por um algoritmo determinístico.

Os valores encontrados na referência foram testados no programa usado neste trabalho e resultaram nas mesmas respostas, o que indica que a estrutura de otimização robusta foi implementada corretamente.

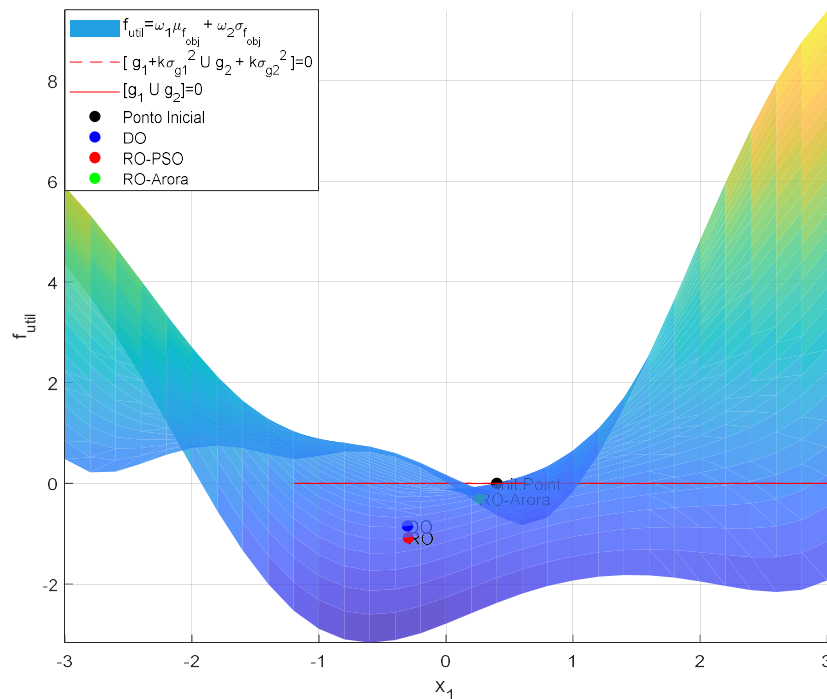


Figura 4.1 – Comportamento da função de utilidade  $F$ . Vista  $x_1$  e  $F$  (Função de utilidade).

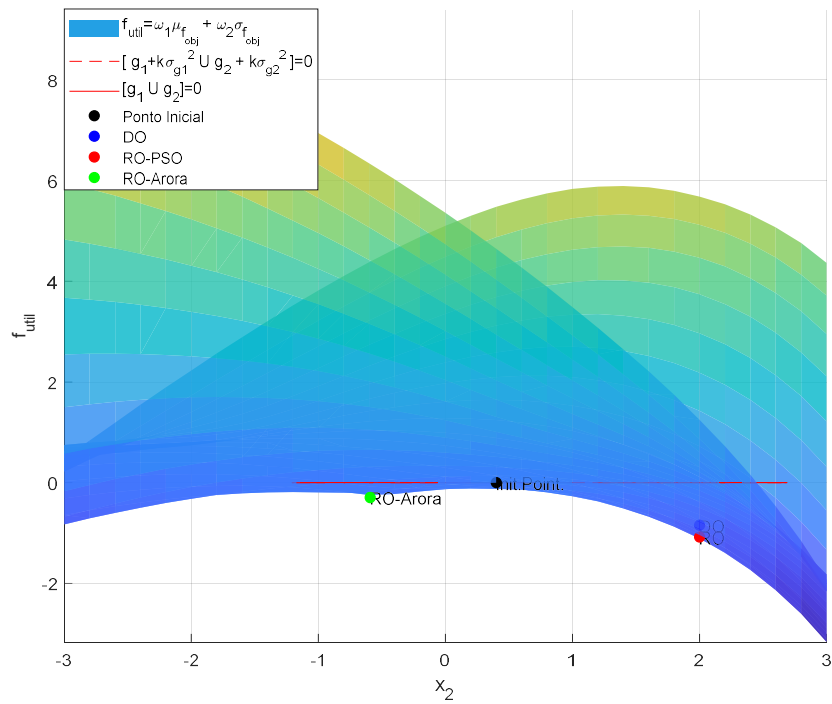


Figura 4.2 – Comportamento da função de utilidade F. Vista  $x_2$  e F (Função de utilidade).

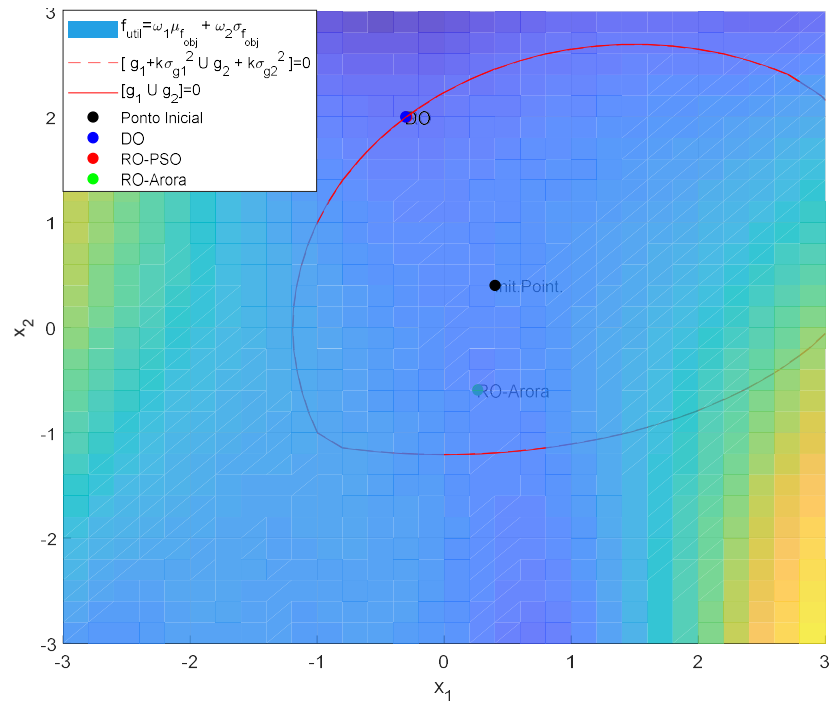


Figura 4.3 – Comportamento da função de utilidade F. Vista  $x_1$  e  $x_2$ .



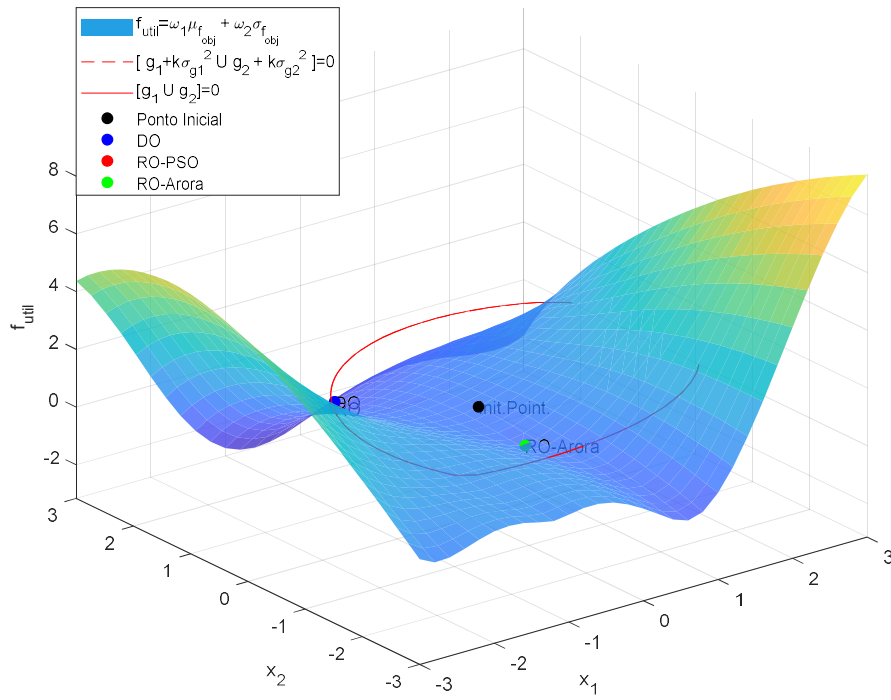


Figura 4.4 – Comportamento da função de utilidade F.

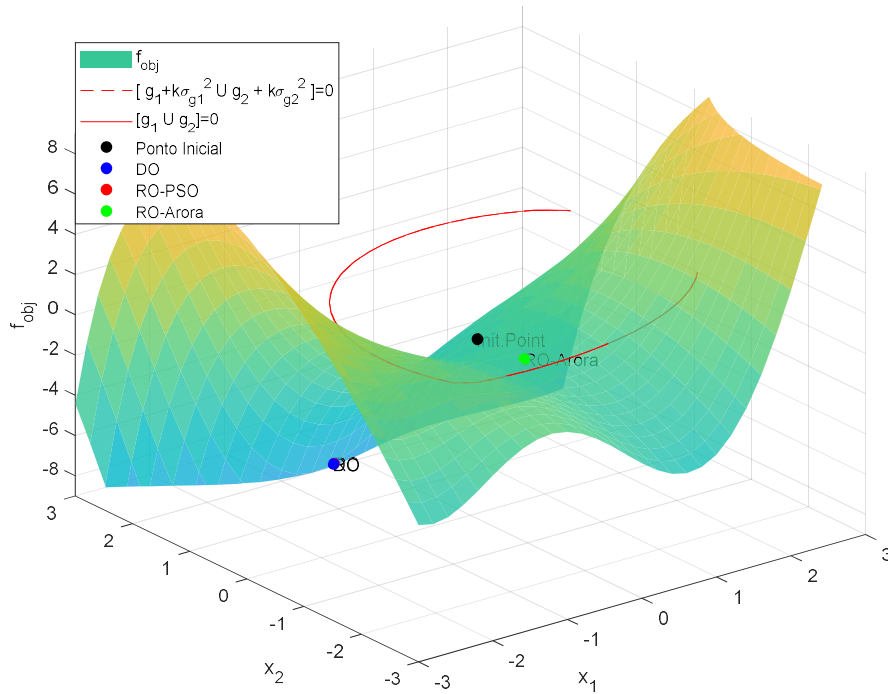


Figura 4.5 – Comportamento da função objetivo  $f$ .

#### 4.1.1 Abordagem com otimização robusta multiobjetivo

A abordagem da otimização robusta por algoritmo de otimização multiobjetivo também foi usada na solução do problema, utilizando o MOQPSO, gerando a Fronteira de Pareto da Figura 4.6. A Figura 4.7 mostra a manifestação da Fronteira de Pareto na função de utilidade  $F$  e na função objetivo. Na Figura 4.8 é possível notar o comportamento da Fronteira de Pareto nas proximidades da restrição. Nota-se a partir da Figura 4.11 que a otimização simples gerou um resultado levemente mais próximo da restrição do que a otimização multiobjetivo.

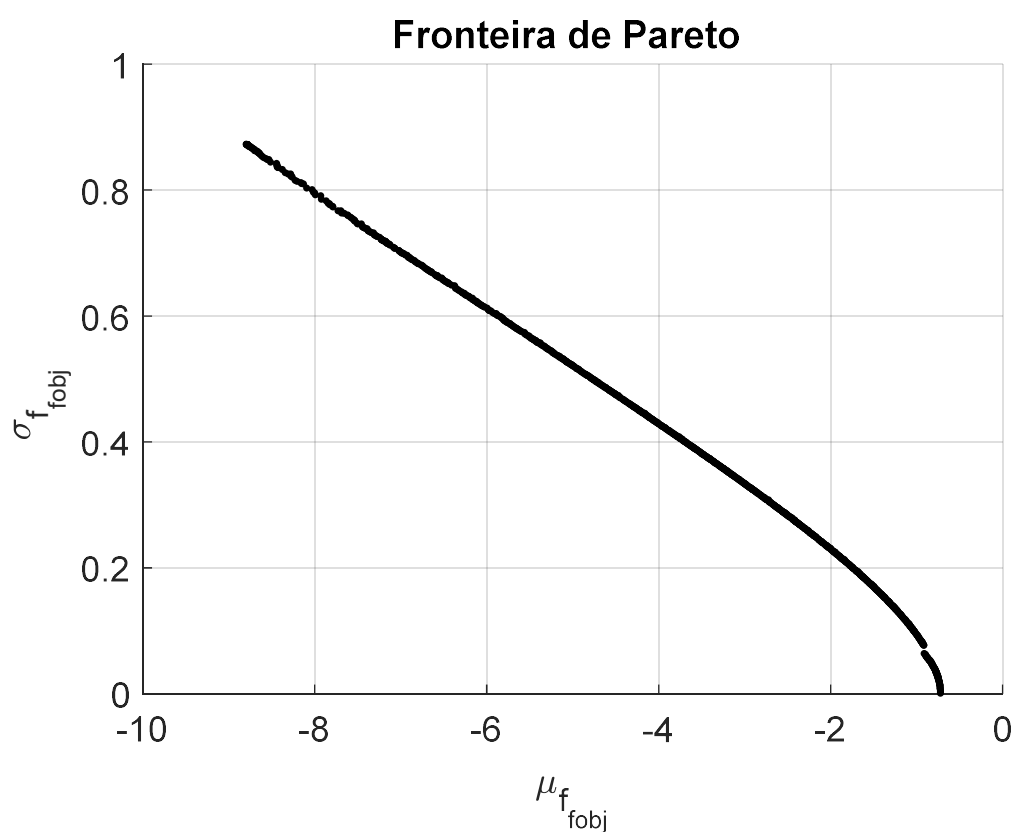


Figura 4.6– Fronteira de Pareto resultante do MOQPSO, primeiro exemplo da referência Arora, 2012.

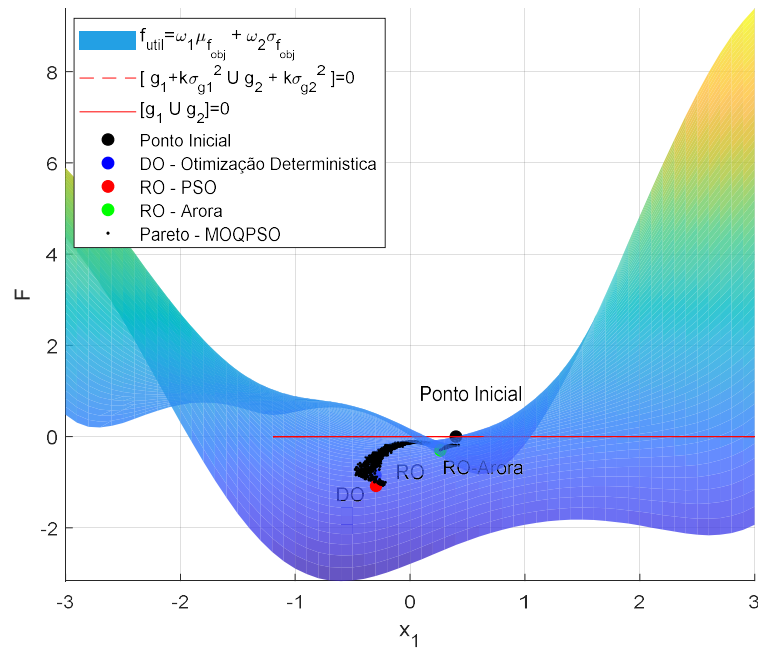


Figura 4.7 – Comportamento da função de utilidade juntamente com os pontos da Fronteira de Pareto. Vista  $x_1$  e  $F$ .

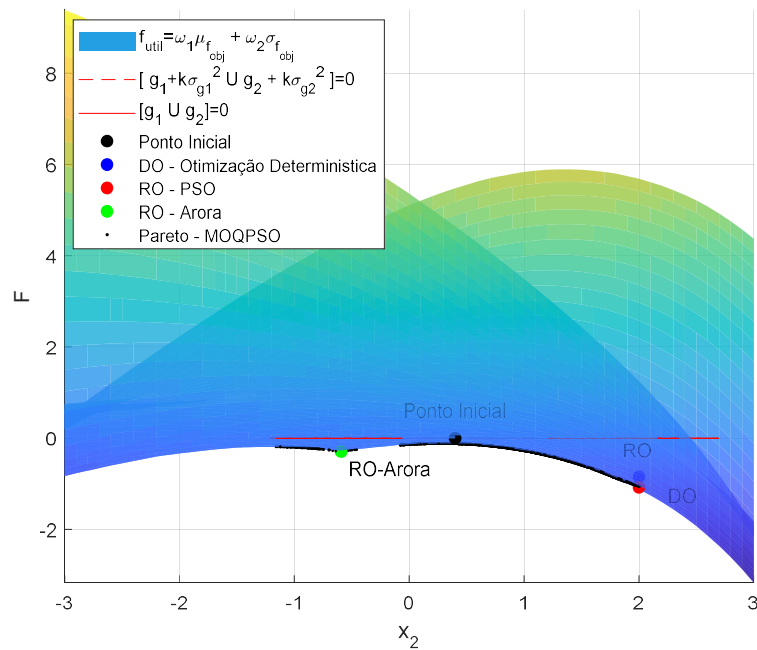


Figura 4.8 – Comportamento da função de utilidade juntamente com os pontos da Fronteira de Pareto. Vista  $x_2$  e  $F$ .

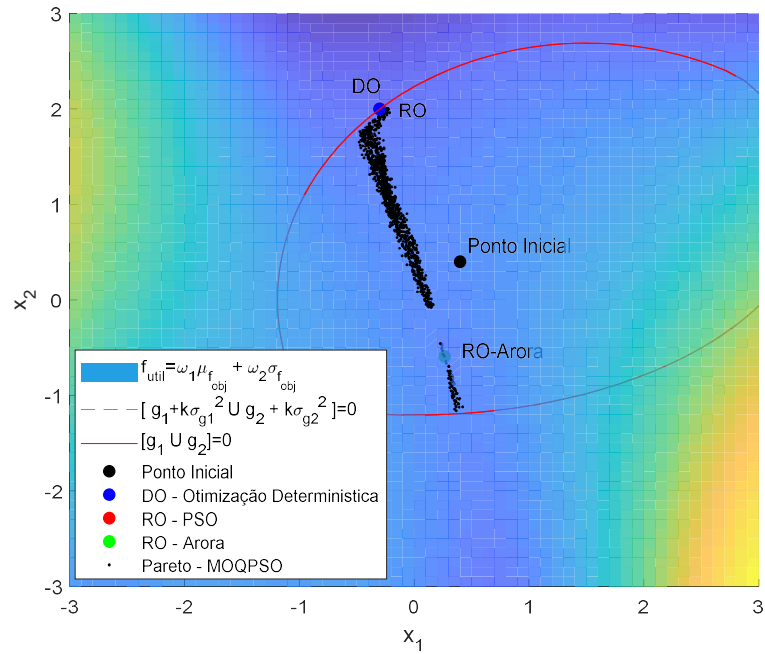


Figura 4.9 – Comportamento da função de utilidade juntamente com os pontos da Fronteira de Pareto. Vista  $x_1$  e  $x_2$ .

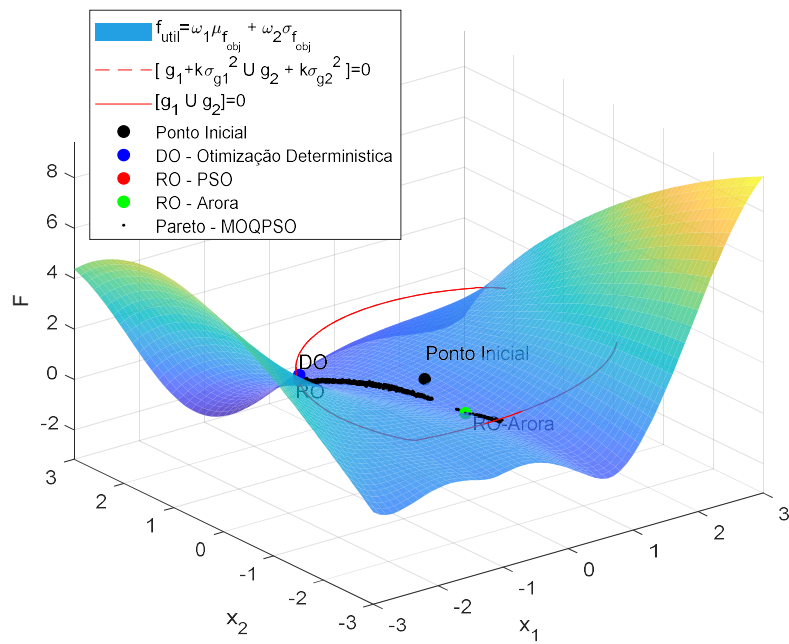


Figura 4.10 – Fronteira de Pareto resultante do MOQPSO e função de utilidade.

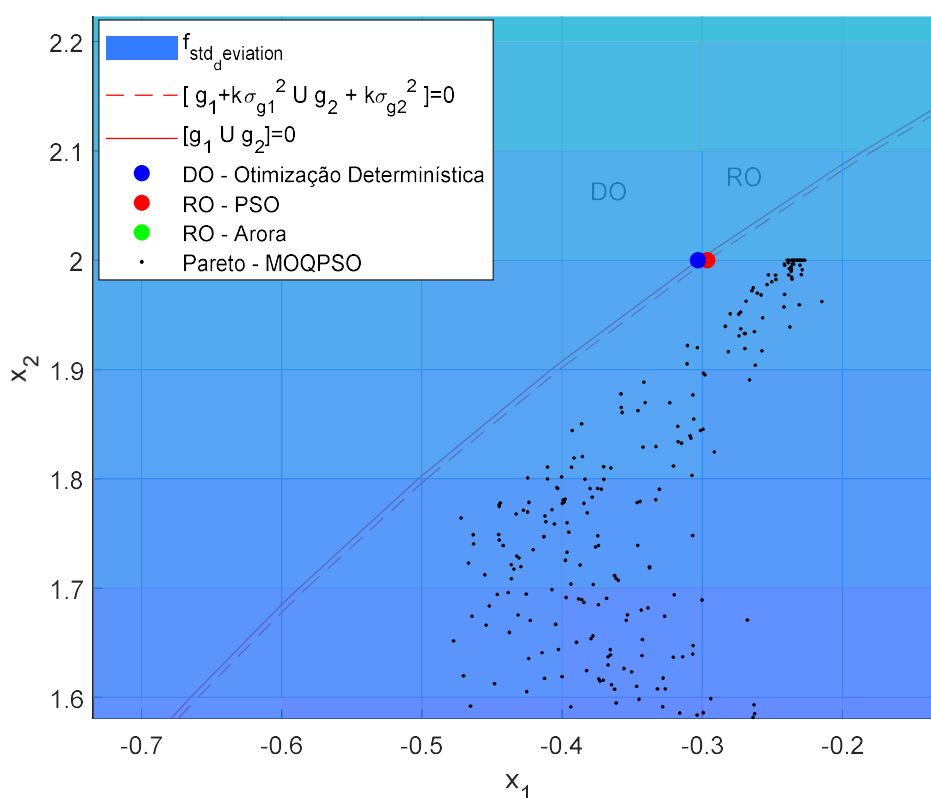


Figura 4.11 – Fronteira de Pareto resultante do MOQPSO e função de utilidade com ênfase na restrição e nos pontos mais extremos da fronteira.

#### 4.1.2 Análise dos métodos de aproximação para estatísticas

Os testes mostrados acima foram realizados usando a abordagem de Sundaresan, 1995, para a restrição. Outro teste foi realizado para detalhar o comportamento dos valores de média e desvio da função objetivo e restrições robustas quando diferentes valores de desvio eram usados nas variáveis de projeto, e pode ser visto nas Figuras 4.12 a 4.14 e na Tabela 4.2. Para as avaliações de Monte Carlo (ver Apêndice A), o tamanho da amostra utilizado foi de 1000000 chamadas da função objetivo. Além disso, o método do hipercubo latino para geração de amostras geração foi empregado (Apêndice A). Os testes foram realizados com números iguais para o desvio nas variáveis de projeto 1 e 2, variando os coeficientes de variação (CV) 0,05 até 1, totalizando 20 valores de CV. A solução descrita como “método de Arora, 2012” é aquela calculada pela Equação 3.48 e aquela descrita como “método de Sundaresan, 1995”, é calculada pela Equação 3.49. Os testes foram realizados com confiança de 84,13% ( $k = 1$ ). Valores maiores de confiança

transladam as soluções para cima nas Figuras 4.12 e 4.13, tornando-as mais “seguras”. O ponto escolhido para o teste foi o ponto inicial do problema, definido em  $(0,4; 0,4)$ .

É possível notar nas Figuras 4.12 e 4.13, que o cálculo do desvio pelo método de Sundaresan, 1995, (Equação 3.20 deste trabalho) é muito mais preciso do que o cálculo do desvio pelo método de Arora, 2012, (Equação 3.19 deste trabalho). Como esperado, o método de Arora, 2012, apresenta resultados mais conservadores, pois avalia o pior caso possível (*worst case scenario*). Note que a aproximação é mais precisa no método de Sundaresan, 1995, para valores mais baixos de desvios padrões de variável de projeto. Isso é previsto, uma vez que a aproximação advém de uma expansão em série de Taylor na qual se desprezam os termos de segunda ordem em diante, como é explicado na seção 3.4.

A Tabela 4.2 mostra as diferenças para as restrições. Note que para este exemplo, coeficientes de variação (CV) das variáveis de projeto de até 0,3 resultam em erros muito pequenos no método de Sundaresan, 1995, (0,65% e 1,04% para as restrições 1 e 2, respectivamente). O sinal negativo no erro aponta resultados favoráveis à segurança.

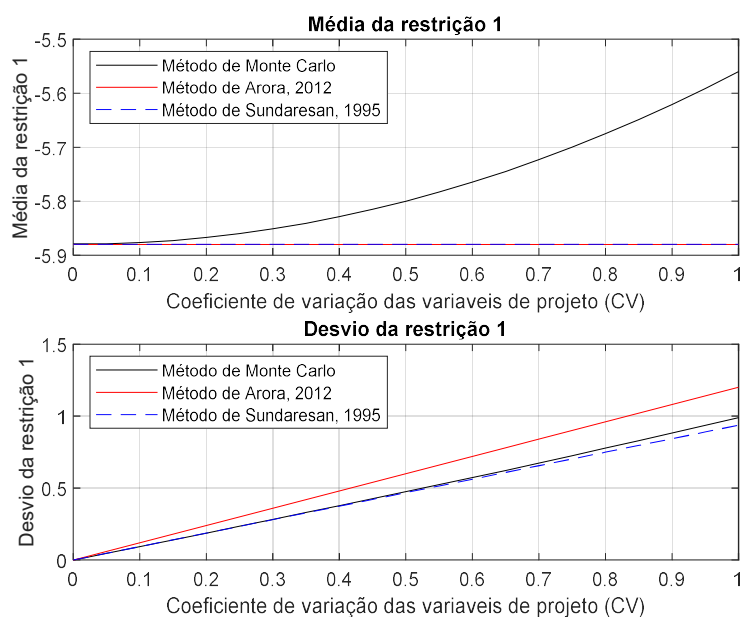


Figura 4.12 – Comparativo entre média e desvio da restrição 1 para diferentes valores de desvios das variáveis de projeto e equações de restrição.

Na Figura 4.14, é possível notar que a média da função para o método de Monte Carlo tende a diminuir com o aumento do desvio das variáveis de projeto, indicando que

existe uma assimetria da função objetivo em torno do ponto médio das variáveis de projeto. Essa redução não é capturada pelos métodos de aproximação, pois nesse caso o valor da média é assumido como o valor da função objetivo aplicada aos valores médios das variáveis de projeto como explicado na seção 3.10.

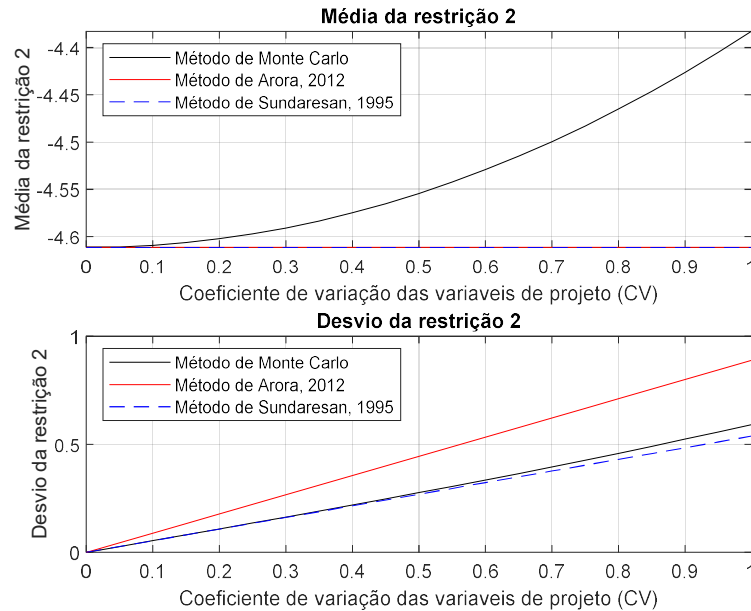


Figura 4.13 – Comparativo entre média e desvio da restrição 2 para diferentes valores de desvios das variáveis de projeto e equações de restrição.

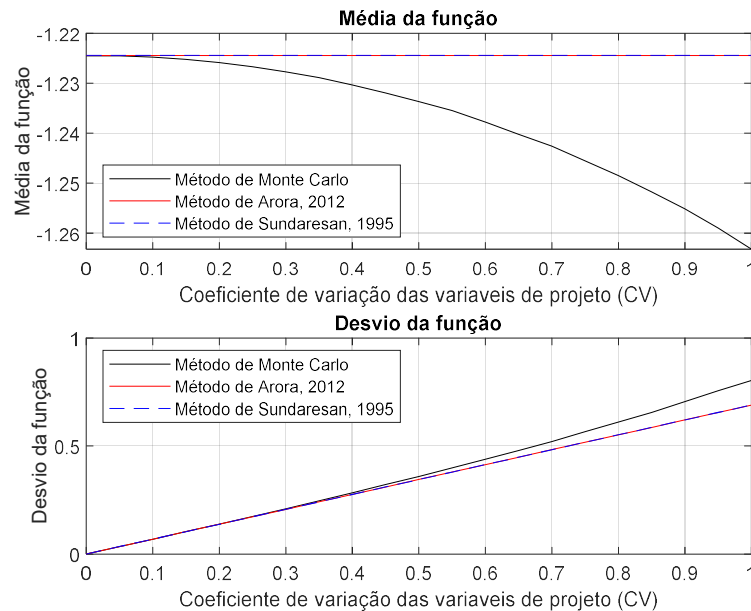


Figura 4.14 – Comparativo entre média e desvio da função objetivo para diferentes valores de desvios das variáveis de projeto e equações de restrição.

Tabela 4.2 – Comparativo entre os desvios das restrições para diferentes valores de desvios das variáveis de projeto.

Desvio Padrão da Restrição 1					
$CV(x_1, x_2)$	Sundaresan, 1995	Arora, 2012	Monte Carlo	Erro Arora, 2012 (%)	Erro Sundaresan, 1995 (%)
(0,1, 0,1)	0,0936	0,1200	0,0935	-28,2385	-0,0659
(0,2, 0,2)	0,1872	0,2400	0,1879	-27,6639	0,3823
(0,3, 0,3)	0,2809	0,3600	0,2827	-27,3166	0,6533
(0,4, 0,4)	0,3745	0,4800	0,3780	-26,9563	0,9344
(0,5, 0,5)	0,4681	0,6000	0,4754	-26,2088	1,5177
(0,6, 0,6)	0,5618	0,7200	0,5732	-25,5902	2,0004
(0,7, 0,7)	0,6554	0,8400	0,6739	-24,6460	2,7373
(0,8, 0,8)	0,7490	0,9600	0,7758	-23,7284	3,4532
(0,9, 0,9)	0,8427	1,0800	0,8810	-22,5853	4,3452
(1,0, 1,0)	0,9363	1,2000	0,9909	-21,0976	5,5061
Desvio Padrão da Restrição 2					
$CV(x_1, x_2)$	Sundaresan, 1995	Arora, 2012	Monte Carlo	Erro Arora, 2012 (%)	Erro Sundaresan, 1995 (%)
(0,1, 0,1)	0,0537	0,0888	0,0537	-65,1096	0,0103
(0,2, 0,2)	0,1075	0,1776	0,1080	-64,2960	0,5030
(0,3, 0,3)	0,1613	0,2664	0,1630	-63,3987	1,0464
(0,4, 0,4)	0,2151	0,3552	0,2187	-62,3603	1,6752
(0,5, 0,5)	0,2688	0,4440	0,2756	-61,0602	2,4625
(0,6, 0,6)	0,3226	0,5328	0,3341	-59,4522	3,4363
(0,7, 0,7)	0,3764	0,6216	0,3954	-57,1970	4,8021
(0,8, 0,8)	0,4302	0,7104	0,4575	-55,2504	5,9809
(0,9, 0,9)	0,4839	0,7992	0,5231	-52,7793	7,4775
(1,0, 1,0)	0,5377	0,8880	0,5921	-49,9713	9,1779

O último teste baseado neste exemplo foi realizado para comparar o número de chamadas de função objetivo: usado para calcular a média e o desvio da função e das restrições usando os métodos de aproximação e o método de Monte Carlo. As Figuras 4.15 a 4.17 mostram essa diferença, onde um CV de 0,1 foi usado no ponto inicial da função (0,4, 0,4). Para os métodos de Sundaresan, 1995 e Arora, 2012, o número de chamadas da função objetivo necessárias é dado por  $1 + (n_{var} + n_{par}) + n_g(n_{var} + n_{par})$ , onde  $n_{var}$  representa o número de variáveis incertas,  $n_{par}$  é o número de parâmetros incertos, e  $n_g$  é o número de restrições no espaço da função objetivo. Para



este exemplo, com apenas 2 restrições e 2 variáveis incertas, o número de chamadas usadas na aproximação é de 7.

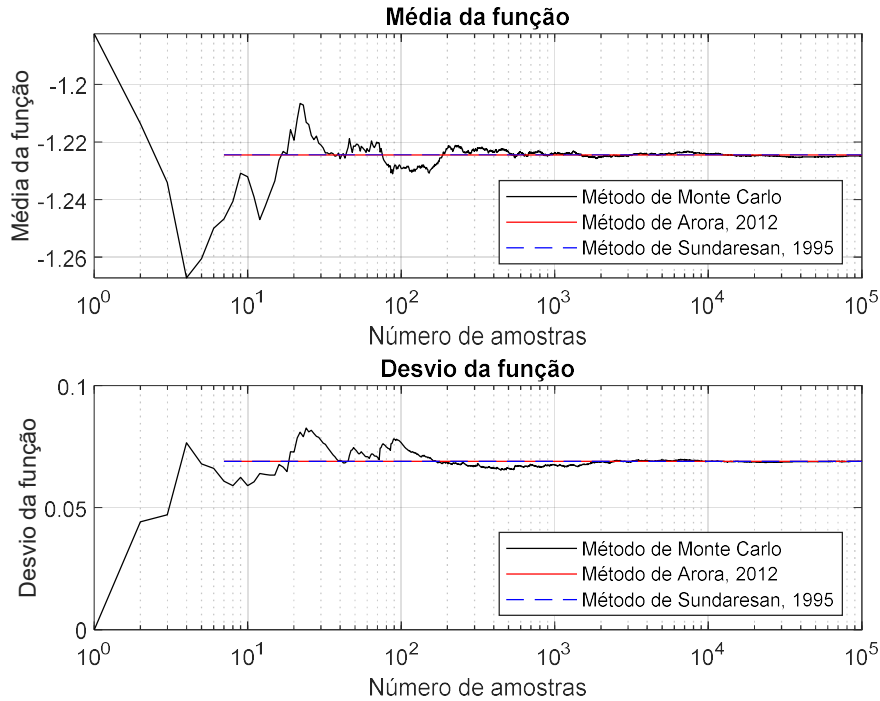


Figura 4.15 – Comparativo entre métodos de Monte Carlo e aproximações, com média e desvio da função objetivo para diferentes números de amostras.

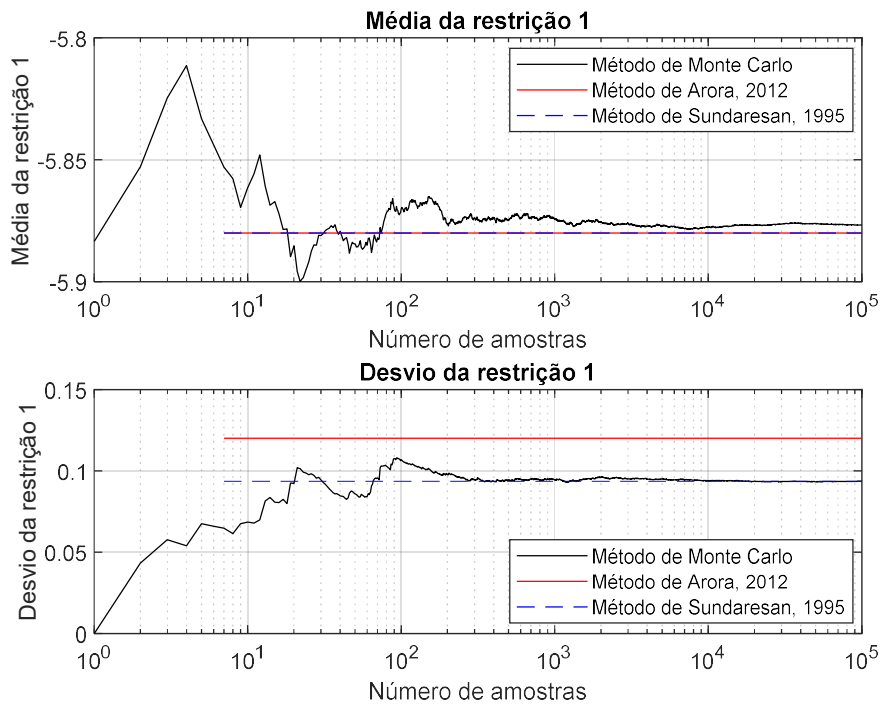


Figura 4.16 – Comparativo entre métodos de Monte Carlo e aproximações, com média e desvio da restrição 1 para diferentes números de amostras.

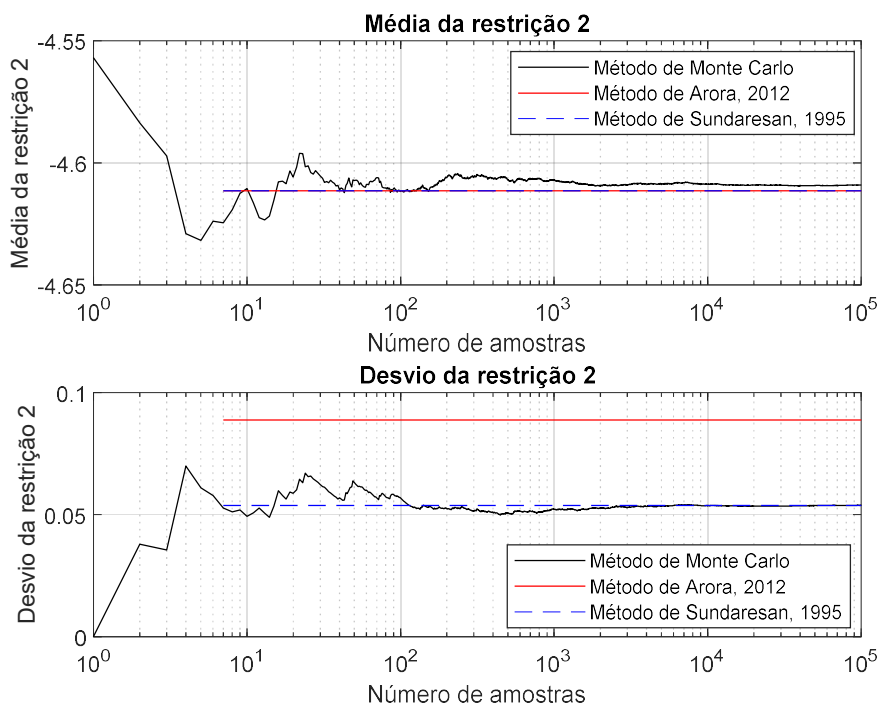


Figura 4.17 – Comparativo entre métodos de Monte Carlo e aproximações, com média e desvio da restrição 2 para diferentes números de amostras.

Na Figura 4.15, é possível notar que com apenas 7 chamadas da função objetivo, as aproximações de Arora, 2012, e Sundaresan, 1995, atingem resultados muito precisos, tanto para a média quanto para o desvio da função. Essa grande redução no número de chamadas representa um ganho extremamente expressivo, principalmente quando colocado sob a ótica da otimização multiobjetivo, que requer muitas chamadas de função e restrições para apresentar bons resultados.

Nas Figuras 4.16 e 4.17, é possível notar uma diferença entre as aproximações dos desvios das restrições. Fato este que já foi explorado na Tabela 4.2 usando diferentes valores de CV. Para as médias das restrições, nota-se que existe uma pequena diferença entre o valor esperado, de Monte Carlo, e os valores aproximados por Sundaresan, 1995. Esta divergência também já foi discutida anteriormente, e pode causar erros durante a contabilização das incertezas na restrição durante o uso dos métodos de aproximação.

Este erro depende, como notado na Figura 4.14 e 4.13, do coeficiente de variação, e do próprio comportamento da restrição. Restrições mais assimétricas e não lineares em torno do ponto da expansão da série de Taylor, e coeficientes de variação maiores, resultam em maiores erros na aproximação. Dito isto, é importante rastrear a fonte de erro dos métodos de aproximação para que se possa sugerir uma alteração a fim de obter uma precisão maior.

## 4.2 Otimização do modelo de suspensão de meio veículo

O segundo exemplo numérico desta dissertação se refere à otimização dos parâmetros da suspensão de um modelo de meio carro com 5 graus de liberdade, detalhado na seção 3.10. A Tabela 4.3 mostra os parâmetros do modelo numérico. Para validação do modelo implementado, o artigo Boonlong, 2013, foi usado. A Figura 4.18 mostra o perfil da lombada dupla utilizada, a mesma de Boonlong, 2013. O histórico no tempo de acelerações no assento do motorista pode ser verificado na Figura 4.19, onde o modelo foi submetido a um *bump* duplo sem rugosidades a 20 m/s com tempo de simulação de 5 s e comparado com a literatura. A Tabela 4.4 mostra os valores de Boonlong, 2013, e deste trabalho para comparação, onde razões próximas de 1 na última coluna indicam coerência entre os resultados.

Uma atenção especial é necessária ao replicar os resultados de Boonlong, 2013, pois o autor define o sinal RMS com uma abordagem não usual:

$$f_i = \sqrt{\int_0^T x_i^2 dt}, i = 1, 2, \dots, 5 \quad (4.15)$$

A Equação 4.15 não gera valores de RMS com as mesmas unidades do sinal de entrada como ocorre com a equação clássica ( $f_i = \sqrt{1/T \int_0^T x_i^2 dt}$ ). Para comparações entre as acelerações geradas pelas diferentes combinações de variáveis de projeto, no entanto, a diferença na equação não é relevante. Outro detalhe importante é referente ao valor RMS calculado para o espaço de trabalho da suspensão, cujo sinal é subtraído da sua média antes do cálculo com a Equação 4.15, fato que não é citado em Boonlong, 2013.

Tabela 4.3 – Valores dos parâmetros do modelo numérico da suspensão de meio carro.

$L_1$ (m)	$L_2$ (m)	$m_1$ (kg)	$m_2$ (kg)	$m_c$ (kg)
1.011	1.803	40	35.5	75
$m_s$ (kg)	$J_s$ (kg.m <sup>2</sup> )	$k_{p1}$ (N/m)	$k_{p2}$ (N/m)	
730	130	175500	175500	

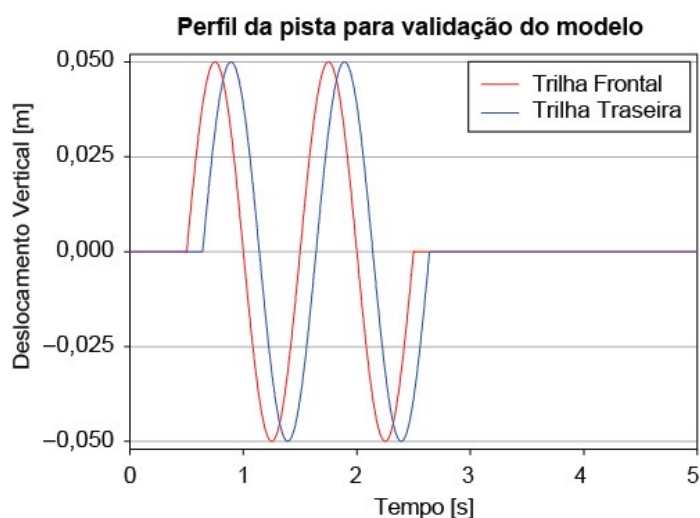


Figura 4.18 – Perfil de pista da lombada dupla usado na validação do modelo com Boonlong, 2013.

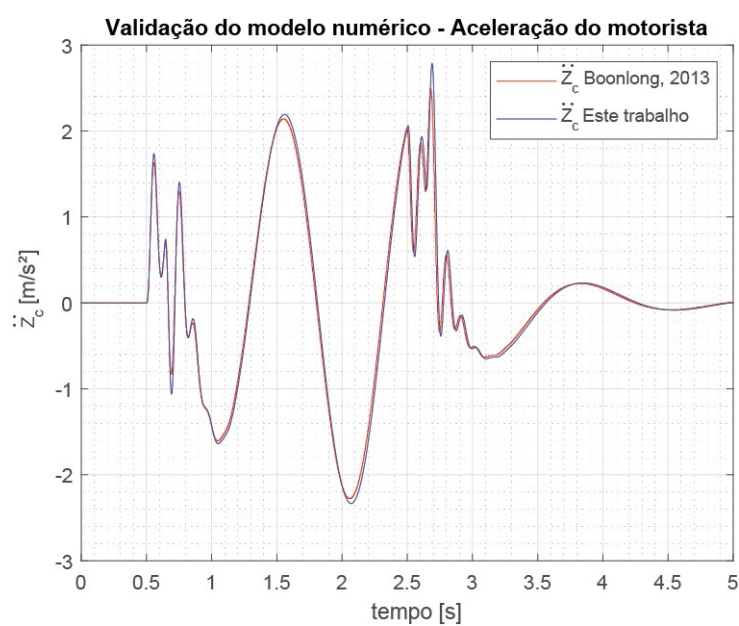


Figura 4.19 – Validação do modelo numérico. Sinal da aceleração do motorista no tempo extraída de Boonlong, 2013, em vermelho, e sinal gerado por este trabalho, em azul.

Tabela 4.4 – Valores das variáveis de projeto e das funções objetivo para validação do modelo numérico de meio carro.

	Este trabalho ( $H_*$ )	Boonlong, 2013 ( $H$ )	Razão ( $H_*/H$ )
$k_{ss}$ (N/m)	50115	50115	–
$c_{ss}$ (N.s/m)	4000	4000	–
$k_{s1}$ (N/m)	10000	10000	–
$c_{s1}$ (N.s/m)	1290	1290	–
$k_{s2}$ (N/m)	10034	10034	–
$c_{s2}$ (N.s/m)	1999,8	1999,8	–
$r$ (m)	0,49986	0,49986	–
$\ddot{Z}_c$ (m/s <sup>2</sup> )	2,1583	2,1584	0.999
$\dot{Z}_1$ (m/s)	0,3110	0,3109	1.000
$\dot{Z}_2$ (m/s)	0,3354	0,3353	1.000
$d_1$ (m)	0,0826	0,0826	1.000
$d_2$ (m)	0,0348	0,0348	1.000

Para o segundo exemplo de otimização deste trabalho, o modelo de meio carro é submetido a uma pista irregular classe C (norma ISO 8608, 1995) a uma velocidade de 20 m/s. A simulação tem duração de 6 segundos.

Khalkhali et al., 2017, realiza um interessante estudo, similar ao proposto neste exemplo. O autor realizou a otimização multiobjetivo de 10 funções simultaneamente, sendo elas: aceleração do motorista,  $a_w$ ; velocidade dos eixos dianteiro e traseiro,  $\dot{d}_1$  e  $\dot{d}_2$ ; deslocamento do eixo dianteiro e traseiro,  $d_1$  e  $d_2$ ; e todos os respectivos desvios. As variáveis de projeto incertas escolhidas por Khalkhali et al., 2017, são fruto de um estudo usando o método de amostragem baseado no coeficiente de correlação de Pearson para investigar a sensibilidade. Apenas duas das mais influentes variáveis de projeto,  $c_1$  e  $c_2$  foram usadas com incertezas durante a otimização de Khalkhali et al., 2017. O autor usa Monte Carlo para calcular os desvios das restrições e função objetivo, tornando o problema extremamente custoso. É importante ressaltar que otimizações multiobjetivo já são extremamente custosas por natureza. Outras incertezas são consideradas nos parâmetros: massa do motorista,  $m_c$ ; massa suspensa do veículo,  $m_s$ ; e rigidez do pneu dianteiro e traseiro,  $k_{p1}$  e  $k_{p2}$ . A idéia inicial para o segundo exemplo desta dissertação era reproduzir os resultados de Khalkhali et al., 2017, porém, devido a inconsistências e ao grande número de dados omissos, optou-se por modificar o exemplo. Khalkhali et al.,

2017, aparenta obter probabilidades de falha incongruentes, o perfil de pista descrito no material é incompatível com os resultados de pistas que seguem os padrões ISO 8608, existem inconsistências nas unidades apresentadas no trabalho, a “Tabela 1” citada no texto onde haveriam parâmetros da simulação que não estão presentes no texto. Além disso, existe omissão quanto à consideração, ou não, de duas parcelas na densidade espectral durante a geração de pista. O autor também omitiu o número de chamadas de Monte Carlo para o cálculo dos desvios durante a otimização, assim como o tempo da simulação do modelo numérico, o cálculo da probabilidade de falha, além do número de amostras nos histogramas. A soma dos fatores citados anteriormente torna os resultados do trabalho extremamente difíceis de serem replicados.

Ao invés das dez funções objetivo escolhidas por Khalkhali et al., 2017, a presente dissertação usou apenas duas, possibilitando a visualização clara da Fronteira de Pareto, e simplificando o exemplo para evidenciar os resultados relevantes de forma natural. A restrição usada também foi alterada, pois tratava da aceleração no motorista assim como a primeira função objetivo, gerando redundância. Apesar das divergências, os parâmetros incertos e intervalos de busca usados por Khalkhali et al., 2017, foram aplicados nesta dissertação. O coeficiente de variação de  $c_1$  e  $c_2$  também foi usado, e extrapolado, de forma a contabilizar incertezas em outras variáveis de projeto. As Equações 4.16 e 4.17 detalham as funções objetivo e restrição deste segundo exemplo, e a Tabela 4.5 detalha as variáveis de projeto, parâmetros incertos, variâncias, médias, e intervalos de busca das variáveis de projeto usados na simulação.

Como restrição, decidiu-se limitar o espaço de trabalho da suspensão,  $ws$ , ou seja, a distância entre  $Z_1$  e  $Z_{s1}$  na Figura 3.8. Esta limitação é concorrente com a aceleração no motorista, e tem o intuito de melhorar a dirigibilidade ao reduzir a altura do centro de gravidade do veículo, além de limitar eventuais choques com batentes das suspensões. Fica determinado que a falha ocorre caso o espaço de trabalho da suspensão supere um valor estipulado,  $ws_{crit}$ , em qualquer instante de tempo da simulação, em qualquer um dos eixos. Determinou-se um valor de 0,3 m para  $ws_{crit}$ . Note que o valor de  $ws_{crit}$  fica arbitrado nesta dissertação, mas que pode assumir qualquer valor que satisfaça a necessidade do projeto, tanto no sentido da redução do centro de gravidade quanto no sentido de compactação do *design* do veículo. Apesar disso, o valor se encontra dentro da ordem de grandeza dos usuais empregados na literatura [Baumal et al., 1988, e Shirahatti

et al. 2008]. Para confirmar a viabilidade do valor estipulado de  $ws_{crit}$  neste trabalho, duas otimizações determinísticas simples sem restrição foram realizadas: a primeira, otimizar a aceleração ponderada do motorista, e a segunda, otimizar o espaço de trabalho da suspensão. Os resultados para o espaço de trabalho máximo da suspensão nas soluções das duas otimizações foram respectivamente:  $0,4462\text{ m}$  e  $0,2653\text{ m}$ , indicando que o valor de  $ws_{crit} = 0,3\text{ m}$  é coerente. A restrição fica explícita na Equação 4.18, e se traduz em manter a probabilidade de falha do espaço de trabalho da suspensão menor do que 10%.

$$\text{Minimizar } \begin{cases} f_1 = \mu(rms(a_w)) \\ f_2 = var(rms(a_w)) \end{cases} \quad (4.16)$$

Com restrição:

$$G(x) = P(\max(\max(ws_1), \max(ws_2)) \leq ws_{crit}) > 90\% \quad (4.18)$$

$$ws_{crit} = 0,3\text{ m}$$

onde  $a_w$  se refere à aceleração ponderada (ISO 2631, 1997) descrita na seção 3.7.

Tabela 4.5 – Variáveis e parâmetros incertos, variância, média, e intervalo de busca das variáveis de projeto usadas na simulação.

	Variável	Valor ou Intervalo de Busca	Variância
Parâmetros incertos	$m_c$ (kg)	75	$6,25^2$
	$m_s$ (kg)	730	$37,5^2$
	$k_{p1}$ (N/m)	175500	$1250^2$
	$k_{p2}$ (N/m)	175500	$1250^2$
Variáveis de projeto	$c_{s1}$ (N.s/m)	$500 < \mu(c_{s1}) < 2000$	$50^2$
	$c_{s2}$ (N.s/m)	$500 < \mu(c_{s2}) < 2000$	$50^2$
	$k_{s1}$ (N/m)	$10000 < \mu(k_{s1}) < 20000$	$600^2$
	$k_{s2}$ (N/m)	$10000 < \mu(k_{s2}) < 20000$	$600^2$
	$k_{ss}$ (N/m)	$50000 < \mu(k_{ss}) < 150000$	$4000^2$
	$c_{ss}$ (N.s/m)	$1000 < \mu(c_{ss}) < 4000$	$100^2$
	$r$ (m)	$0 < r < 0,5$	0

É importante ressaltar que Khalkhali et al., 2017, usa o método de Monte Carlo para calcular a variância. O foco desta dissertação, por outro lado, é o estudo do uso das ferramentas apresentadas na seção 4.3 na área da otimização robusta multiobjetivo. O método de Monte Carlo é, de fato, a maneira mais clássica e direta para encontrar a variância e média de uma função a partir das variâncias e médias de seus argumentos, porém seu uso é custoso. A otimização multiobjetivo também é uma técnica extremamente custosa, principalmente quando um número grande de funções objetivo é usado. Por este motivo, é interessante buscar uma alternativa para o uso do método de Monte Carlo no cálculo da variância das funções e das restrições durante as chamadas de função objetivo na otimização. A redução do número de chamadas foi clara no primeiro exemplo com as Figuras 4.15 a 4.17, e este segundo exemplo deverá confirmar esta redução do número de chamadas, bem como explicitar o erro intrínseco dos métodos de aproximação. Desta forma, neste segundo exemplo é aplicado o mesmo método usado na primeira parte dessa dissertação, juntamente com o método de Sundaresan, 1995, e Arora, 2012 ( $z=1$ ), para contabilizar a incerteza na restrição.

As variáveis de projeto e parâmetros incertos são consideradas independentes entre si com distribuição normal, justificado pelo teorema central do limite explicado na seção 3.1: A grande quantidade de erros associados à matéria prima, fabricação, instalação, desgaste e intempéries, se acumulam de forma a resultar em uma distribuição aproximadamente normal. O momento de inércia  $J_s$  é atualizado com uma aproximação linear conforme as alterações de  $m_s$  durante as otimizações ( $J_s = 130m_s/730$ ).

A Figura 4.20 mostra o resultado da otimização multiobjetivo realizada com o algoritmo MOQPSO, citado anteriormente, com os seguintes parâmetros: 60 partículas; 400 iterações;  $10^{-6}$  para a tolerância de distância entre as soluções do segundo arquivo; 1,3 e 0,3 para os limites inicial e final do coeficiente de contração-expansão; 0,12 para o percentual de mutação; 0,3 para o fator de probabilidade do guia extremo; 0,3 para o fator de probabilidade do guia mais próximo; e 0,15 para a fração da fronteira usada durante a seleção do guia mais próximo.

Uma otimização determinística também foi realizada, usando um algoritmo PSO melhorado com um fator de mutação. O número de partículas usado durante esta otimização foi de 100; As componentes cognitivas global e local usadas foram ambos de 2,01; O fator de mutação e o decaimento do fator de mutação usados foram de 0,01 e 0,9



respectivamente; O momento de inércia para a velocidade da partícula usado foi de 0,95. O resultado desta otimização determinística, juntamente com as Fronteiras de Pareto podem ser conferidos na Tabela 4.6 e na Figura 4.20.

A solução da configuração de referência do modelo numérico não está representada na Figura 4.20 em função da sua distância para as demais soluções. A coordenada para esta solução é  $\mu(a_w) = 1,3907$  e  $\sigma(a_w) = 0,0869$ .

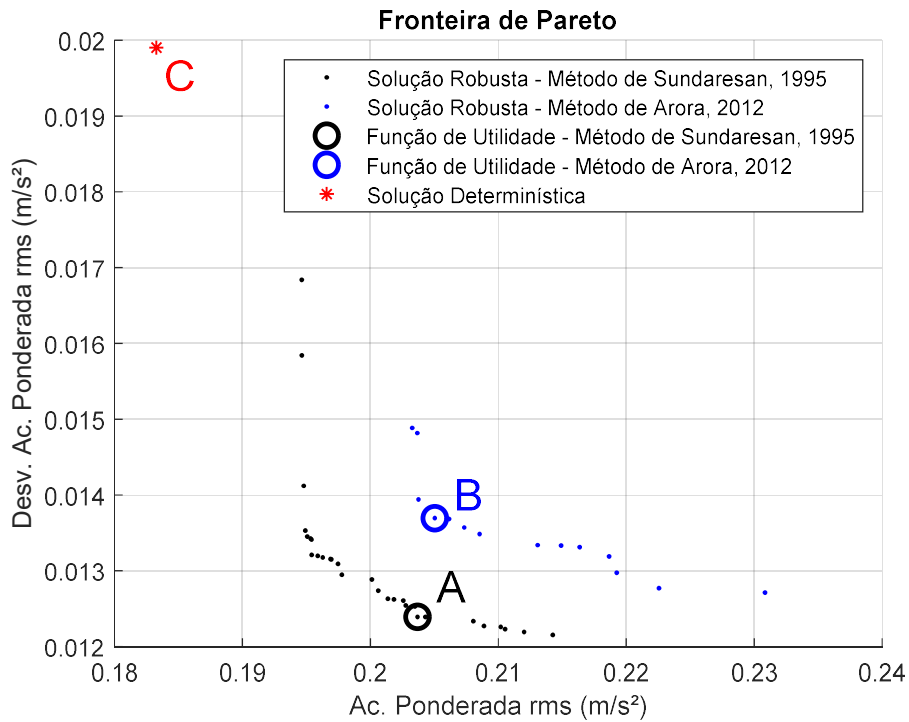


Figura 4.20 – Fronteira de Pareto gerada pela otimização robusta multiobjetivo.

A restrição usada para as otimizações foi escolhida com base em testes empíricos realizados sobre as próprias otimizações. Foram testadas as metodologias: aditiva, multiplicativa, e exponencial (Equações 4.19 a 4.21, respectivamente), com pesos  $k_{cons}$  variando entre 1 e 15.

$$f_i = f_i + k_{cons} \cdot G \quad (4.19)$$

$$f_i = f_i \cdot (1 + k_{cons} \cdot G) \quad (4.20)$$

$$f_i = f_i \cdot k_{cons}^G \quad (4.21)$$

A melhor restrição para este problema, que foi usada para gerar os resultados finais, é aquela da Equação 4.20, com o método multiplicativo. O peso escolhido para as soluções foi  $k_{cons} = 10$ . Para  $k_{cons} < 10$ , encontraram-se soluções que violaram levemente a restrição, e para  $k_{cons} > 10$ , a fronteira resultante ficou composta de menos soluções. De maneira geral, restrições muito abruptas tendem a piorar o desempenho da otimização, enquanto restrições muito relaxadas geram soluções que podem violar as restrições. Vale ressaltar que as diferenças nas equações de restrição nem sempre são relevantes, e muitos problemas bem-comportados, como aquele apresentado no primeiro exemplo desta dissertação, não necessitam de um estudo a cerca deste tema. A Equação 4.22 mostra a restrição ainda no domínio determinístico, onde o valor de  $g$  foi adimensionalizado.

$$g = \left( \frac{\max(ws)}{ws_{crit}} \right) - 1 \quad (4.22)$$

As soluções marcadas na Figura 4.20 com as anotações “A” e “B” são selecionadas usando uma função de utilidade de peso unitário,  $F$ , onde as funções objetivo são normalizadas pelos valores de referência, representados por  $f_i^*$ .

$$F = \frac{f_1}{f_1^*} + \frac{f_2}{f_2^*} \quad (4.23)$$

Da Tabela 4.6 é possível identificar que a solução obtida usando o método de Arora, 2012, para as restrições, se afasta mais das restrições. Isso se deve ao erro do método durante o cálculo do desvio padrão da restrição, como mostrado anteriormente nas Figuras 4.16 e 4.17 no primeiro exemplo desta dissertação. É possível notar também, que a solução determinística viola a restrição robusta, indicando que esta solução é insegura. Note que entre  $G$  e a penalização, na Tabela 4.6, existe uma diferença de dez vezes, resultado da Equação 4.20, de restrição. Valores de  $G$  negativos representam valores favoráveis à segurança e que não violam a restrição.

Tabela 4.6 – Comparação dos resultados para o segundo exemplo referente à suspensão de meio carro com 5 graus de liberdade.

	<i>Referência</i>	(A) $RO_{Sundaresan}^1$	(B) $RO_{Arora}^2$	(C) $DO^3$
$k_{SS}$ (N/m)	100000	50000,0000	50228,6765	50000,0000
$c_{SS}$ (N.s/m)	2500	1142,4021	1230,8856	1220,3462
$k_{s1}$ (N/m)	15000	19316,3003	20000,0000	18105,4053
$c_{s1}$ (N.s/m)	1250	510,3962	524,7437	500,0000
$k_{s2}$ (N/m)	15000	10958,9080	11301,3914	10175,2334
$c_{s2}$ (N.s/m)	1250	719,2473	581,9609	500,0000
$r$ (m)	0,5	$7,9464 \cdot 10^{-3}$	$5,1888 \cdot 10^{-6}$	$1,0824 \cdot 10^{-2}$
$\mu_f$	1,3906	$2,0368 \cdot 10^{-1}$	$2,0503 \cdot 10^{-1}$	$1,8327 \cdot 10^{-1}$
$\sigma_f$	$8,6874 \cdot 10^{-2}$	$1,2391 \cdot 10^{-2}$	$1,3694 \cdot 10^{-2}$	$1,9902 \cdot 10^{-2}$
$FU$	2	$2,8910 \cdot 10^{-1}$	$3,0507 \cdot 10^{-1}$	$3,6088 \cdot 10^{-1}$
$g$	$2,0943 \cdot 10^{-1}$	$-6,6099 \cdot 10^{-2}$	$-9,3273 \cdot 10^{-2}$	$-1,4408 \cdot 10^{-11}$
$G$	$3,0212 \cdot 10^{-1}$	$-2,9106 \cdot 10^{-4}$	$-3,5782 \cdot 10^{-2}$	$8,0240 \cdot 10^{-2}$
Penalização	3,0212	0	0	$8,0240 \cdot 10^{-1}$

<sup>1</sup>(A) $RO_{Sundaresan}$  se refere ao ótimo robusto encontrado na com o algoritmo MOQPSO com o método de Sundaresan, 1995, para restrições.

<sup>2</sup>(B) $RO_{Arora}$  se refere ao ótimo robusto encontrado na com o algoritmo MOQPSO com o método de Arora, 2012, para restrições.

<sup>3</sup>(C) $DO$  se refere ao ótimo determinístico encontrado com o algoritmo PSO.

A partir das médias e desvios aproximados e assumindo que a função resultante possui distribuição normal, a Figura 4.21 foi gerada. Em contrapartida, a Figura 4.22 foi gerada usando o método de Monte Carlo em combinação com o método do hipercubo latino (ver Apêndice A), entrando com as incertezas da Tabela 4.5 e usando 25000 amostras. A área da FDP à direita da linha tracejada da restrição, nas Figuras 4.21 e 4.22, equivale à probabilidade de falha. A Tabela 4.7 mostra a probabilidade de falha das soluções geradas a partir do método de Monte Carlo da Figura 4.22 e a partir da aproximação para a distribuição normal da Figura 4.21.

Uma avaliação estatística usando o teste de Lilliefors (ver Apêndice B) foi realizado sobre as distribuições da Figura 4.22. O teste é nativamente implementado no software Matlab R2018a com a função *lillietest*. De maneira resumida, o teste viola a hipótese nula,  $h_0$ , que diz que a distribuição dos dados é normal, com o máximo de confiança disponível pela função do software ( $p_{value} = 10^{-3}$ ). Este teste indica,

preliminarmente, que erros serão induzidos na contabilização das restrições robustas, uma vez que uma das hipóteses da aproximação é a de normalidade da restrição.

**Histograma (FDP) - Máximo Espaço de Trabalho Dianteiro e Traseiro**

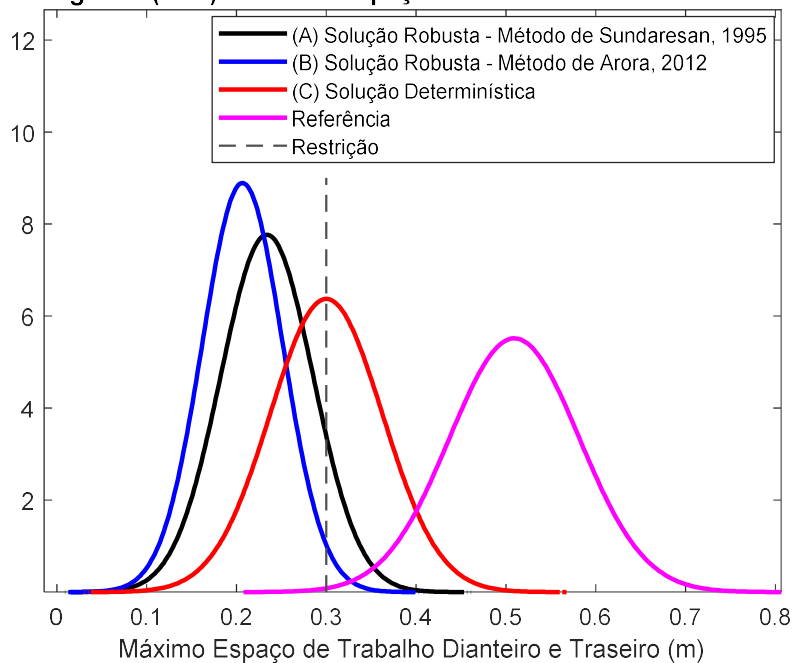


Figura 4.21 – Histogramas para a restrição usando a aproximação para curvas normais.

**Histograma (FDP) - Máximo Espaço de Trabalho Dianteiro e Traseiro**

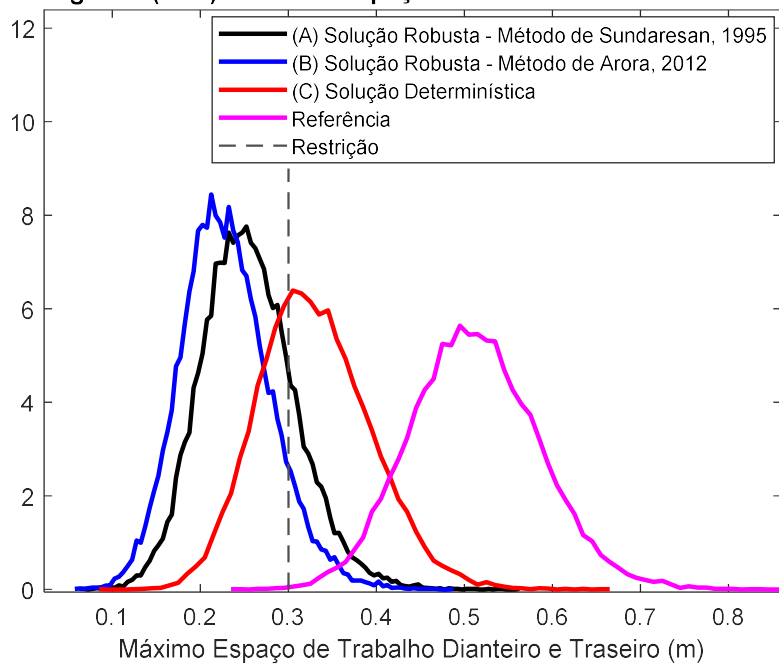


Figura 4.22– Histogramas para a restrição usando o método de Monte Carlo com 25000 amostras.

Da Tabela 4.7, é possível notar que, ao usar a aproximação normal, o método de Sundaresan, 1995, se manteve na região segura, muito próximo dos 10% estipulados para a falha da restrição. Note que a solução determinística se manteve exatamente sobre a restrição, indicando uma probabilidade de falha de 50% quando as incertezas forem levadas em conta. A solução com o método de Arora, 2012, se manteve mais afastada da restrição como o esperado, uma vez que o método é conservador e admite um erro favorável à segurança.

Na Tabela 4.7 a probabilidade de falha aproximada pelo método de Sundaresan, 1995, destoa daquela calculada por Monte Carlo. Esta variação é causada pelo erro do método de aproximação. A probabilidade de falha de Arora, 2012, no entanto, se aproxima mais dos valores de Monte Carlo, que podem ser considerados de alta confiança em função do alto número de amostras usado (25000). Este resultado aparentemente vai contra aquilo que foi apresentado no exemplo 1, onde o método de Sundaresan, 1995, mostrou-se muito mais preciso ao contabilizar as restrições. Este fato acontece porque existe um erro associado ao valor médio da restrição, como pode ser verificado na Tabela 4.8. Este erro aparece em ambos os métodos de aproximação, porém o método de Arora, 2012, possui um erro muito mais proeminente no cálculo do desvio do que aquele de Sundaresan, 1995. Este erro associado ao desvio é favorável à segurança, e acaba beneficiando o resultado final ao cancelar parte do erro proveniente do valor médio da restrição.

Tabela 4.7 – Comparação entre as probabilidades de Falha.

	Probabilidade de Falha (%)	
	Aproximação Normal	Monte Carlo
(A) método de Sundaresan, 1995	9,9009	18,9760
(B) método de Arora, 2012	1,8798	8,6920
(C) Determinístico	49,9999	66,2320
Referência	99,8107	99,9200

A probabilidade de falha da Tabela 4.7 é calculada usando a tabela da distribuição normal, para a coluna de aproximação normal. Para a coluna de Monte Carlo, a probabilidade de falha é calculada contando o número de soluções que violam a restrição dividido pelo número total de amostras. Como se pode notar, o algoritmo chegou à probabilidade de 10% especificada (9,9%), assumindo a hipótese de normalidade da restrição. Por outro lado, quando a análise é realizada diretamente com a simulação de Monte Carlo, percebe-se que o valor da probabilidade de falha aumenta para 18,97%, e viola a restrição, indicando que a hipótese de normalidade não é precisa neste exemplo. Este fato já era esperado, pois o teste de Lilliefors realizado anteriormente já havia apontado que os dados não possuíam uma distribuição normal.

Tabela 4.8 – Comparação dos erros dos métodos de aproximação.

		Aprox.	Monte Carlo	Erro (%)
(A) método de Sundaresan, 1995	Média da Restrição	0,2339	0,2550	8,3021
	Desvio da Restrição	0,0513	0,0534	3,8739
(B) método de Arora, 2012	Média da Restrição	0,2067	0,2292	9,8248
	Desvio da Restrição	0,0448	0,0508	11,7650

As Figuras 4.23 e 4.24 mostram o histograma (FDP) da aceleração RMS ponderada. A dispersão das curvas indica que as otimizações tiveram sucesso em reduzir o desvio padrão da função objetivo, gerando soluções muito mais previsíveis e robustas. A solução determinística conseguiu atingir acelerações menores, aparentando ser um *design* superior, porém como pode ser visto na Tabela 4.8, é uma solução com alta chance de falha.

As Figuras 4.25 e 4.26 mostram o histograma do máximo espaço de trabalho dianteiro e traseiro da suspensão de maneira independente, onde a área da região à direita da linha tracejada de 0,3m representa a probabilidade de falha individual de cada eixo, de maneira análoga à Figura 4.23.

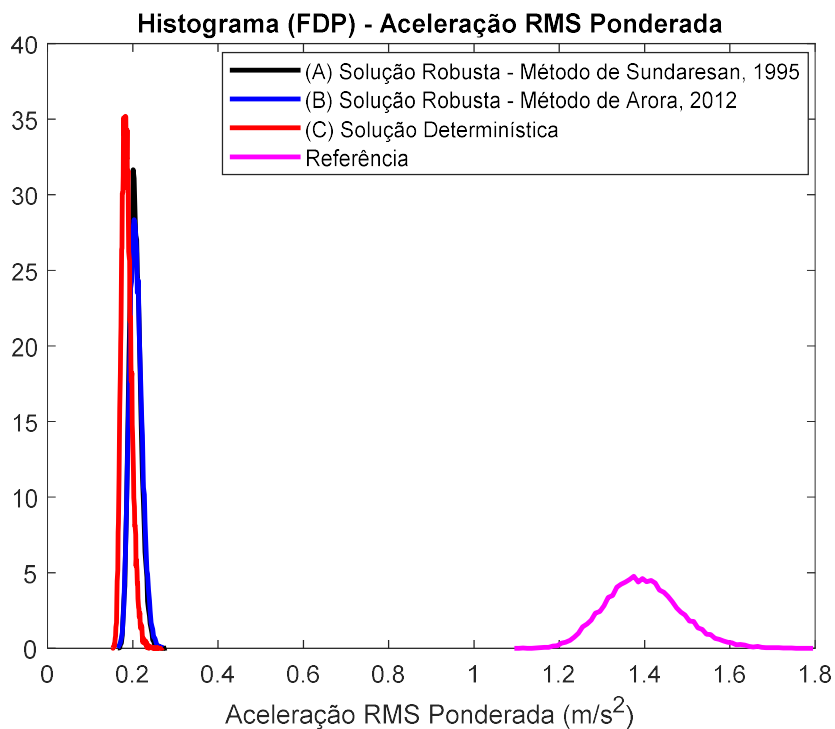


Figura 4.23 – Histogramas para a aceleração RMS ponderada usando o método de Monte Carlo com 25000 amostras.

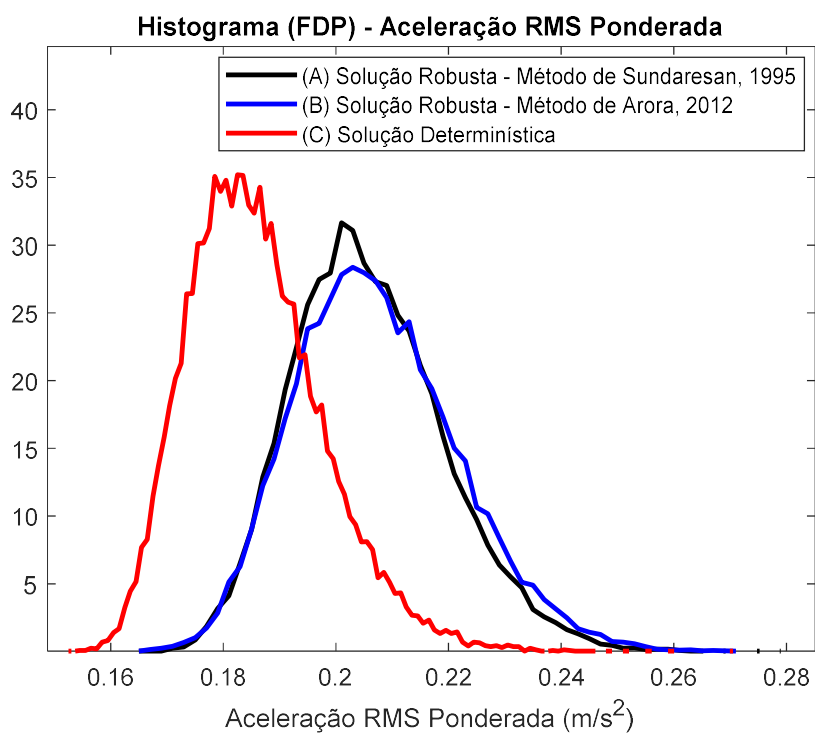


Figura 4.24 – Histogramas para a aceleração RMS ponderada usando o método de Monte Carlo com 25000 amostras – Ênfase nas soluções ótimas.

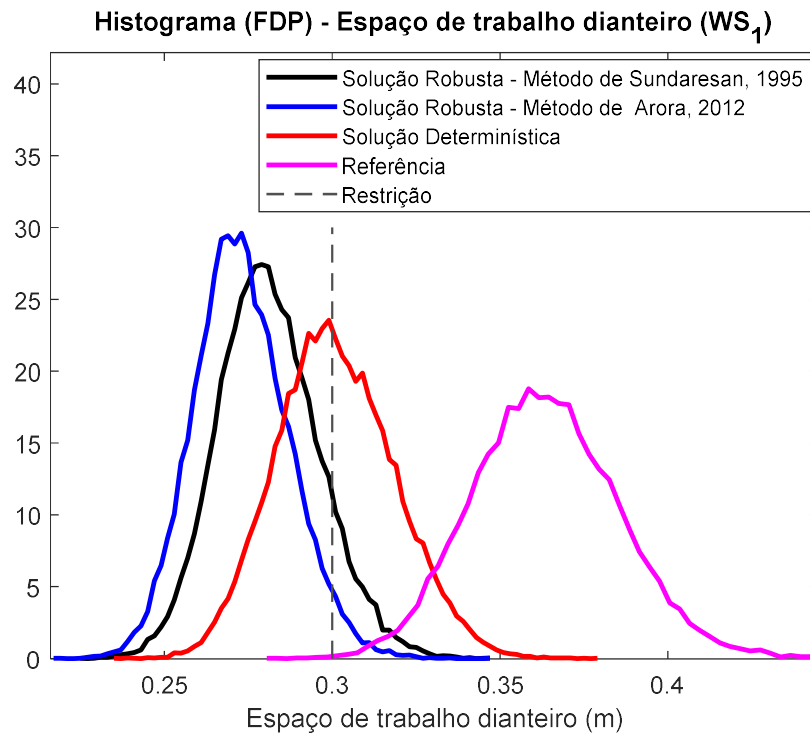


Figura 4.25 – Histogramas para o máximo espaço de trabalho dianteiro da suspensão usando o método de Monte Carlo com 25000 amostras.

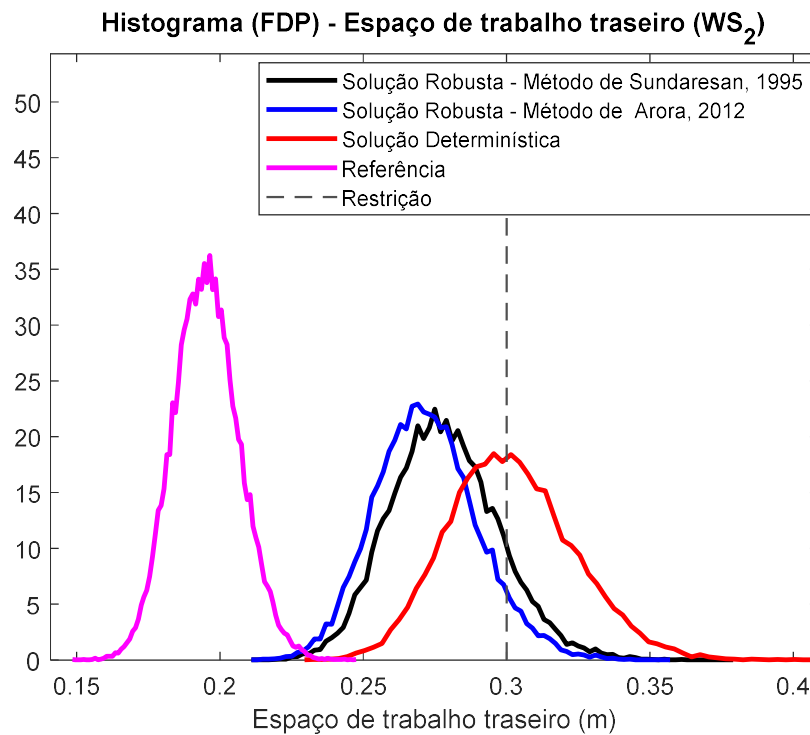


Figura 4.26 – Histogramas para o máximo espaço de trabalho traseiro da suspensão usando o método de Monte Carlo com 25000 amostras.



Nas Figuras 4.27 a 4.33 estão alguns sinais importantes da dinâmica do veículo no tempo: Aceleração do motorista, aceleração do centro de gravidade do veículo, arfagem do veículo, e espaço de trabalho da suspensão dianteira e traseira.

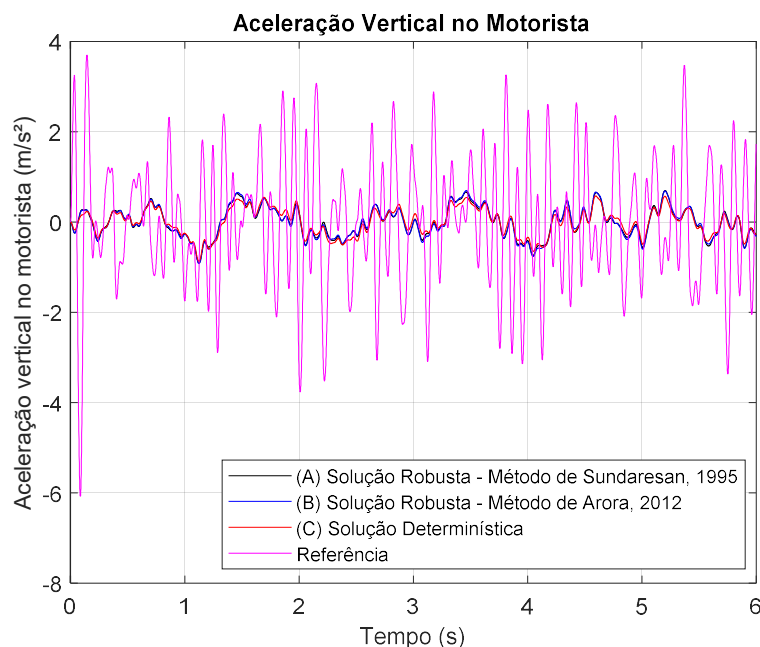


Figura 4.27– Sinal da aceleração vertical do motorista no tempo para as soluções das otimizações e referência.

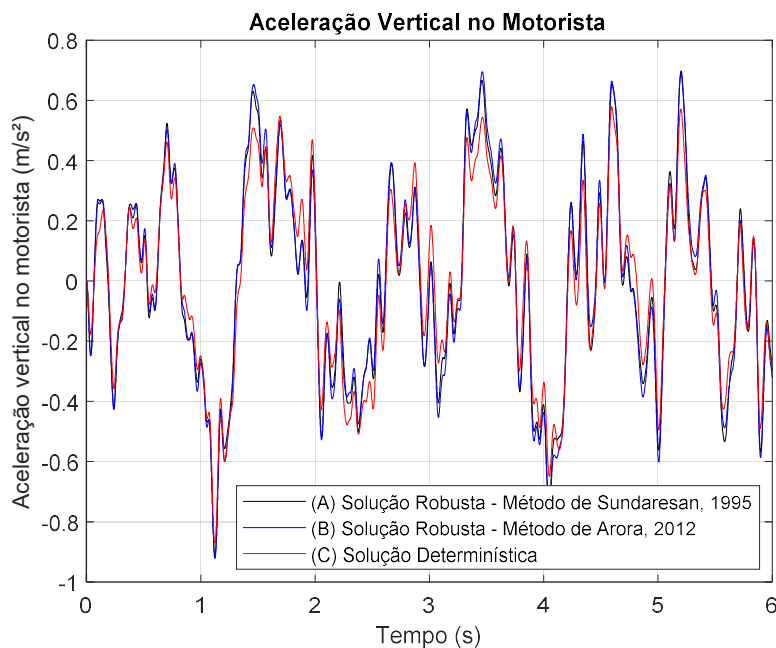


Figura 4.28– Sinal da aceleração vertical do motorista no tempo para as soluções das otimizações e referência – Ênfase nas soluções ótimas.

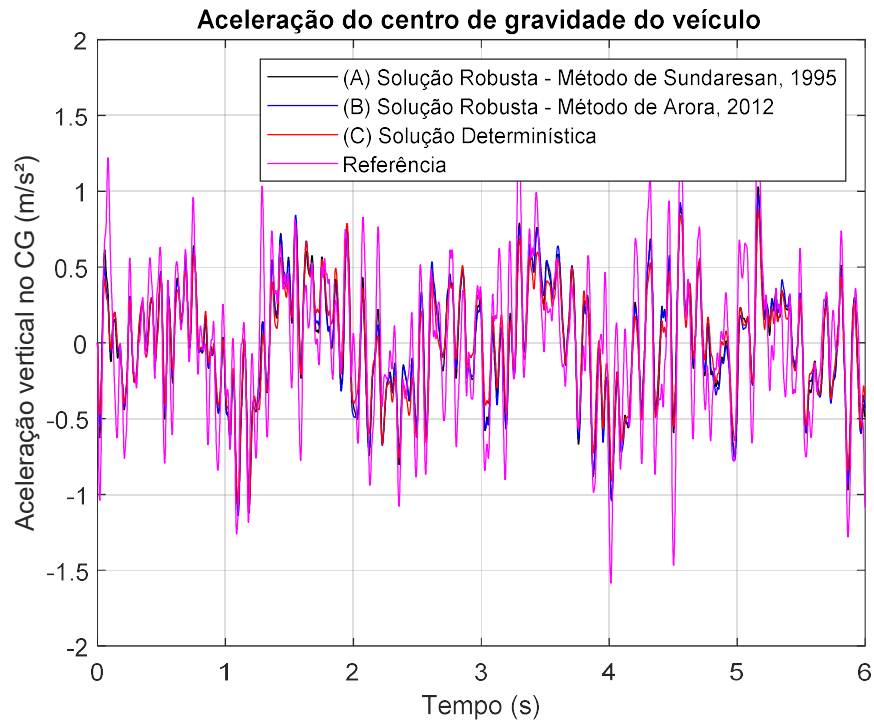


Figura 4.29 – Sinal da aceleração vertical no centro de gravidade do veículo no tempo para as soluções das otimizações e referência.

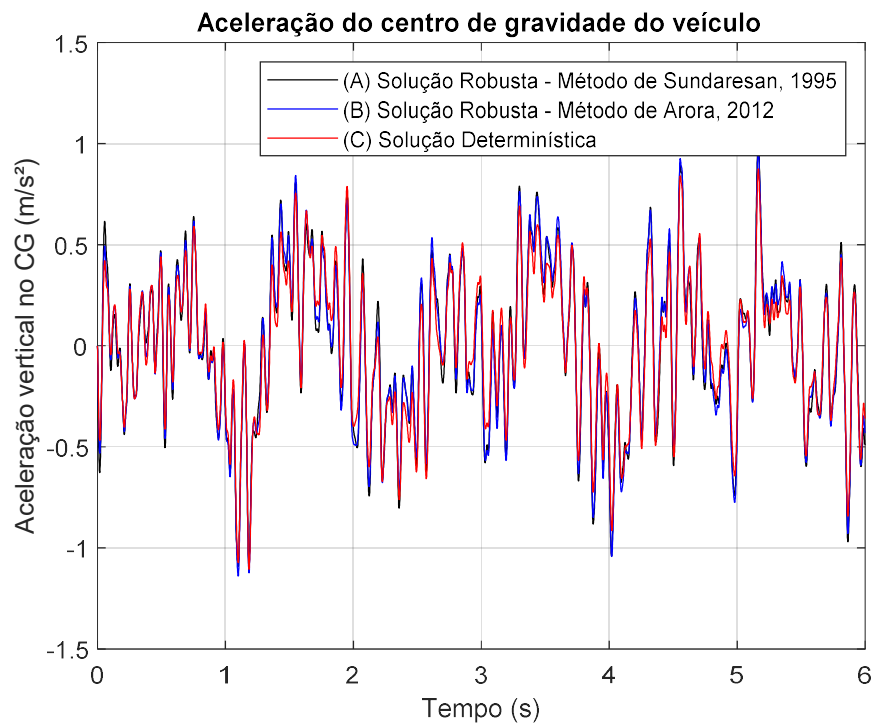


Figura 4.30 – Sinal da aceleração vertical no centro de gravidade do veículo no tempo para as soluções das otimizações e referência - Ênfase nas soluções ótimas.

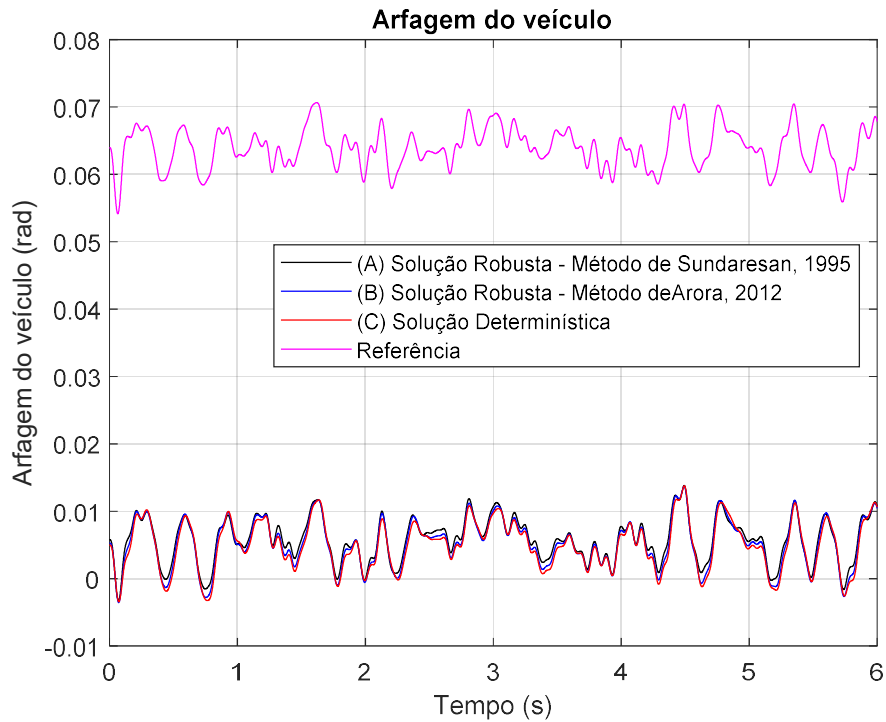


Figura 4.31 – Sinal da arfagem do veículo no tempo para as soluções das otimizações e referência.

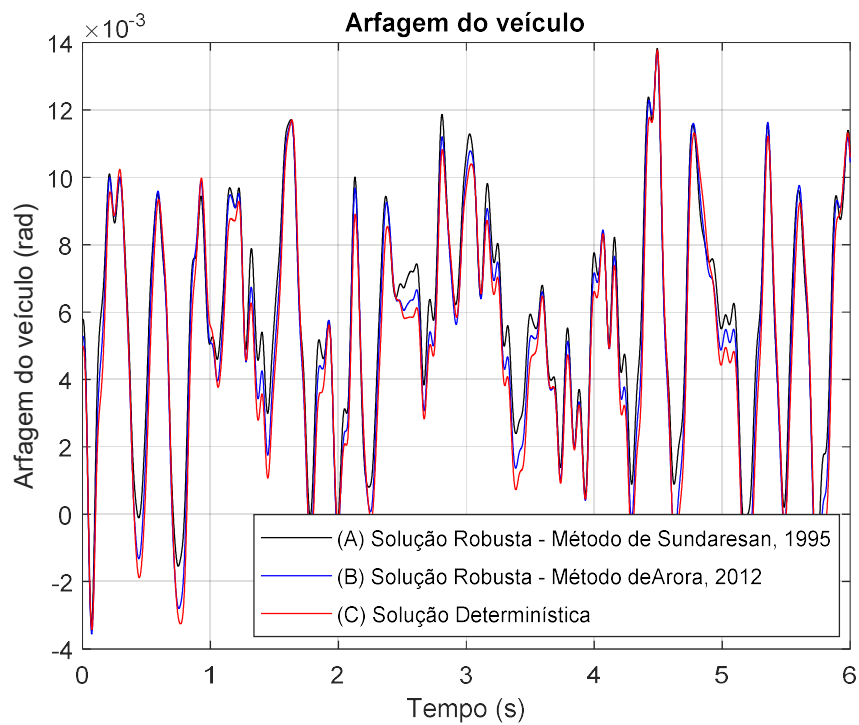


Figura 4.32 – Sinal da arfagem do veículo no tempo para as soluções das otimizações - Ênfase nas soluções ótimas.

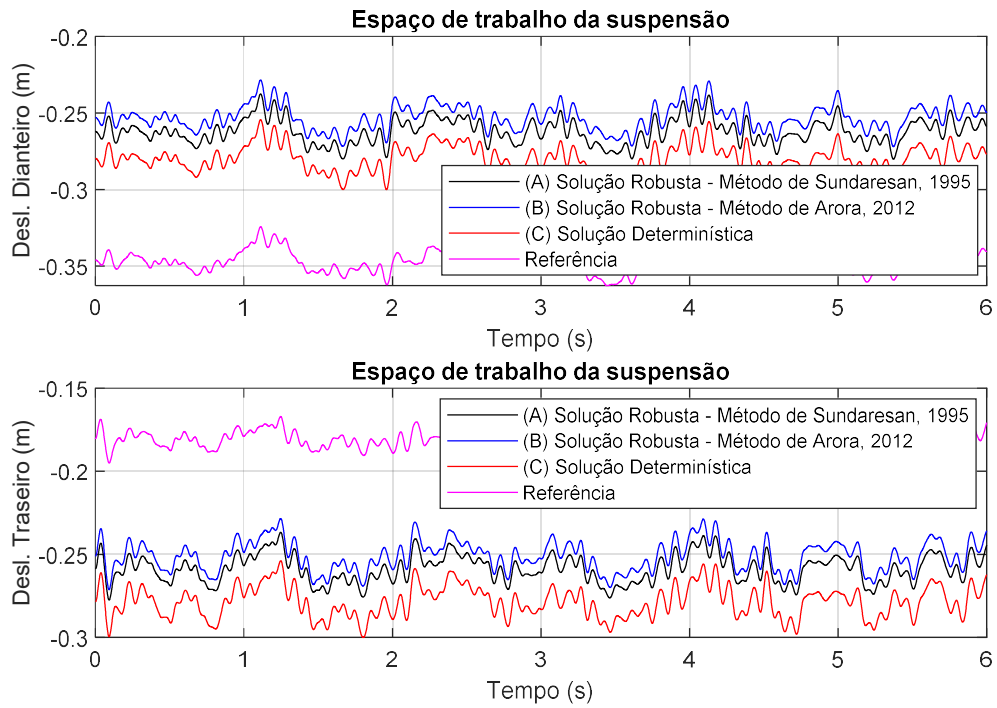


Figura 4.33 – Sinal do espaço de trabalho da suspensão no tempo para as soluções das otimizações e referência, traseiro e dianteiro.

## 5 CONCLUSÕES

A partir da Tabela 4.7 é possível concluir que no segundo exemplo o método de Sundaresan, 1995, é mais preciso do que o método de Arora, 2012, pois possui um erro menor associado a cada uma das etapas. A fonte do erro principal foi rastreada para a aproximação da média da restrição como as variáveis de projeto médias aplicadas à restrição. O erro por parte da aproximação do desvio padrão contabiliza a favor da segurança, sendo muito pequeno no método de Sundaresan, 1995, e maior no método de Arora, 2012. Conclui-se que a aproximação pode se tornar muito mais acertada caso uma metodologia mais avançada para aproximar a média da restrição seja empregada. Uma vez que todas as derivadas parciais da função objetivo e da restrição já são calculadas nestas aproximações, é desejável estudar o reaproveitamento destes cálculos em uma possível retificação do valor médio da restrição.

O primeiro exemplo reforça os resultados e conclusões do segundo exemplo. Como pode ser visto na Figura 4.17 e 4.18. É notório que a média da restrição 1 e 2 possui um erro em ambas as metodologias de aproximação. Em contrapartida, o desvio da restrição 1 e 2 tem erro muito pequeno no método de Arora, 2012, e um erro comparativamente grande no método de Sundaresan, 1995. Lembrando que o erro do desvio é favorável a segurança, e o erro da média, por outro lado, é desfavorável. Estes erros são ampliados quando o valor do coeficiente de variação, CV, é aumentado, como pode ser visto na Tabela 4.2, e Figuras 4.12 a 4.14. Pode-se concluir que as aproximações analisadas nesta dissertação só são válidas para pequenos coeficientes de variações, e que a aplicação em sistemas com elevados CV pode acarretar em erros cumulativos no decorrer dos cálculos (principalmente na contabilização das restrições).

Apesar da maior precisão do método de Sundaresan, 1995, o autor desta dissertação recomenda o uso do método de Arora, 2012, para a contabilização das incertezas em otimizações robustas até que uma melhor aproximação para a média da restrição não seja encontrada. Esta recomendação é fundamentada na Tabela 4.6, onde o resultado final mostra que o método de Arora, 2012, apesar de errar mais durante as aproximações, obtêm um resultado final mais próximo daquele desejado. Arora, 2012, obtêm uma probabilidade de falha de 8,69%, estando dentro do limite de segurança de

10% estipulado para o problema, enquanto Sundaresan, 1995, obtém uma probabilidade de falha de 18,97%, encontrando-se fora do limite de segurança.

A Fronteira de Pareto da Figura 4.20 mostra-se uma ferramenta interessante do ponto de vista do *design*, pois fornece ao projetista informações da resposta da suspensão para diferentes combinações ótimas de variáveis de projeto. Estas informações ampliam as possibilidades do projetista, dando a ele a oportunidade de escolher um projeto mais robusto para aplicações que necessitem desta maior robustez, ou um projeto menos robusto, para aplicações com menos flutuações, sem violar as restrições impostas pela otimização. Desta forma é possível concluir que a otimização multiobjetivo é de fato uma ferramenta atrativa no campo da otimização robusta.

Levando em conta todas as considerações prévias, a principal virtude da otimização robusta incide sobre a segurança. Como pode ser visto na Figura 4.21, a média da solução determinística, que não leva em conta as incertezas, repousa sobre a restrição (que permanece ativa em função da alta concorrência, já bem documentada, entre aceleração nos passageiros de um veículo e o espaço de trabalho de sua suspensão). Esta configuração gera uma probabilidade de falha de 66,23%, que é inaceitável em um projeto de engenharia. A aplicação da otimização determinística deve ser usada com cautela, pois quando as incertezas do projeto são desconsideradas, a solução pode representar uma configuração de alto risco de que as restrições serão violadas no projeto real, em serviço. As soluções robusta (método de Arora, 2012) e determinística, representam uma redução de 85.25% e 86.82% da aceleração da configuração de referência, respectivamente. No entanto, a probabilidade de falha calculada a partir do método de Monte Carlo com 25000 amostras mostrou que a otimização robusta permaneceu dentro do intervalo de segurança aceitável do espaço de trabalho da suspensão que foi estipulado em 10%, com apenas 8,69% de chance de falha, contra 66,23% de chance de falha para a solução determinística.

## 5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Dentre os temas abordados por esta Dissertação e que poderiam ter continuidade como trabalhos futuros, pode-se listar os seguintes:

- Estudo de uma metodologia de aproximação para a média da restrição que produza resultados mais precisos do que aqueles apresentados nesta dissertação. Uma vez que todas as derivadas parciais da função objetivo e da restrição já são calculadas nestes métodos de aproximação, é desejável analisar o reaproveitamento destes cálculos.
- O estudo e inclusão de novas variáveis incertas no modelamento da suspensão e o estudo de seu efeito no projeto ótimo obtido, como por exemplo incerteza no tipo de pista e velocidade do veículo;
- Avaliação do efeito do grau de irregularidade das pistas nas otimizações multiobjetivos robustas;
- Aplicação da mesma metodologia para modelos de suspensão veicular mais complexos e que levem em conta a dinâmica vertical assim como a lateral;
- Emprego e análise de outros algoritmos de otimização multiobjetivo e sua comparação quanto à robustez e eficiência nos mesmos problemas aqui analisados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Al-Baity, H. **A Quantum Behaved Particle Swarm Approach to Multiobjective Optimization**. Ph.D. Thesis. The University of Birmingham. 2015.

Ang, A. H-S., e Tang, W. G. **Probability Concepts in Engineering – Emphasis to Application to Civil and Environmental Engineering**. 2<sup>nd</sup>Ed. John Wiley & Sons. 2002.

Arora, J. S. **Introduction to optimum design**. 3rd Edition, Academic Press, Elsevier Ed. The University of Iowa, College Engineering, Iowa City, Iowa. 2012.

Baumal, A.E., McPhee, J.J., e Calamai, P.H. Application of genetic algorithms to the design optimization of an active vehicle suspension system, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 163(1-4):87-94 1998.doi: 10.1016/S0045-7825(98)00004-8.

Beck, A. T. **Curso de Confiabilidade Estrutural**. São Carlos; 2012. Departamento de Engenharia de Estruturas - Universidade de São Paulo. <https://www.scribd.com/doc/236066463/Curso-de-Confiabilidade-Estrutural-2012-10-15-HQ>. Acesso em 05-04-2021.

Belegundu, A. D., e Chandrupatla, T. R. **Optimization concepts and applications in engineering**. New York: Cambridge University Press, 2011.

Beyer, H. G., e Sendhoff, B. Robust optimization – A comprehensive survey, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 196, Issues 33–34, 2007, p. 3190-3218, ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/j.cma.2007.03.003.

Boonlong, K., Chaiyaratana, N., e Maneeratana, K. **Improved compressed objective genetic algorithm: COGA-II**. Proceedings of the International Conference on Evolutionary Computation (ICEC '10), p. 95–103, Valencia, Spain, October, 2010.

Bouazara, M. **Etude et analyse de la suspension active et semi-active des vehicules routiers**. (In French), Laval: Universite Laval, 1997.



Bouazara, M., e Richard. M. J. An optimization method designed to improve 3-D vehicle comfort and road holding capability through the use of active and semi-active suspensions. **European Journal of Mechanics A/Solids**, 20: 509–520, 2001.

Branke, J., Mostaghim, S. **About selecting the personal best in multiobjective particle swarm optimization**, Parallel Problem Solving from Nature-PPSN IX, 4196:523–532, 2006.

Cheng, X., e Lin, Y. Multiobjective Robust Design of the Double Wishbone Suspension System Based on Particle Swarm Optimization. **Scientific World Journal**, Hindawi Publishing Corporation, 2014.

Choi, S.-K., Grandhi, R. V., e Canfield, R. A. **Reliability-based structural design**, Springer-Verlag, 306p, 2007.

Chowdhury S. e Taguchi S. **Robust optimization - World's best practices for developing winning vehicles**. Wiley. 2016.

Coello C. A. C., Lamont G. B., e van Veldhuizen, D.A. **Evolutionary Algorithms for Solving Multiobjective Problems**. 2<sup>nd</sup> Edition. Springer Verlag Publisher. p. 175-228. 2007. ISBN: 978-0-387-33254-3.

Fan, Z., Wang, T., Cheng, Z., Li, G., e Gu, F. An Improved Multiobjective Particle Swarm Optimization Algorithm Using Minimum Distance of Point to Line, **Shock and Vibration**, Hindawi, Vol. 2017, Article ID 8204867, 1-16, 2017. doi: 10.1155/2017/8204867

Fossati, G.G., Miguel, L.F.F., e Casas, W.J.P. Multi-objective optimization of the suspension system parameters of a full vehicle model, **Optimization and Engineering**, 20, 151–177, 2019. <https://doi.org/10.1007/s11081-018-9403-8>

Gobbi, M., Mastinu, G., Doniselli, C., Guglielmetto, L., e Pisino, E. Optimal & Robust Design of a Road Vehicle Suspension System, **Vehicle System Dynamics**, 33:sup1 3-22, 1999. doi: 10.1080/00423114.1999.12063066.

Gomes, H. M., Grotti, E., Backes, A. D., e Awruch, M. D. F. **Numerical study on suspension parameters optimization for bus traveling on poor road condition**. SAE 2018, 2018. doi: 10.4271/2018-36-0062.

Grotti, E., Gomes, H. M., e Awruch, M. D. F. **Otimização Multiobjetivo de Parâmetros de Suspensão Veicular com algoritmo QPSO**. Proceedings of DINCON 2017, 2017.

Grotti, E., Mizushima, D.M., Backes, A. D., Awruch, M. D. F., e Gomes, H. M. A novel multi-objective quantum particle swarm algorithm for suspension optimization, **Computational and Applied Mathematics**. 39, 105, 2020. doi:10.1007/s40314-020-1131-y

Grujicic, M., Arakere, G., Bell, W., Marvi, H., Yalavarthy, H., Pandurangan, B., Haque, I., e Fadel, G. Reliability-Based Design Optimization for Durability of Ground Vehicle Suspension System Components. **Journal of Materials Engineering and Performance**. 19,2009. doi: 301-313. 10.1007/s11665-009-9482-y.

Goh, C.K., Tan, K.C., Liu, D.S., e Chiam, S. C. A competitive and cooperative co-evolutionary approach to multi-objective particle swarm optimization algorithm design, **European Journal of Operational Research**, 20242-54. 2012.

Hassani, K., e Lee, W. Multiobjective design of state feedback controllers using reinforced quantum-behaved particle swarm optimization, **Applied Soft Computing**, 41:66-76. 2015. doi:10.1016/j.asoc.2015.12.024.

ISO 8608:2016, International Organization for Standardization. **Road surface profiles - Reporting of measured data**, 2016.

ISO 2631-1:1997, International Organization for Standardization. **Mechanical Vibration and Shock-Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 1: General requirements**, 1997.

Jamali, A., Salehpour, M., e Nariman-Zadeh, N. Robust Pareto active suspension design for vehicle vibration model with probabilistic uncertain parameters. **Multibody System Dynamics**, 30, 2013. doi: 10.1007/s11044-012-9337-4.

Kennedy, J., e Eberhart, R. **Particle Swarm Optimization**. Proceedings of Icn95 - International Conference on Neural Networks. vol. 4, p. 1942, 1995.

Khalkhali, A., Sarmadi, M., e Yousefi, S. Reliability-based robust multi-objective optimization of a 5-DOF vehicle vibration model subjected to random road profiles,

**Journal of Central South University**, 24, 104-113, 2017. doi: 10.1007/s11771-017-3413-0

Knowles, J. e Corne, D. **The Pareto archived evolution strategy: A new baseline algorithm for Pareto multiobjective optimization**, Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation, 1999. (CEC 99), vol. 1. IEEE 1999. doi: 10.1109/CEC.1999.781913

Koensgen, E., Berger, S., Bouet, C., Jézéquel, L., e Aubry, E. Robust design strategy applied to a vehicle suspension system with high camber angle tires, **International Journal of Vehicle Design**, Inderscience, 62(1):42-71, 2013. doi:10.1504/IJVD.2013.051588

Lilliefors, H. On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown, **Journal of the American Statistical Association** 62 (1967): 399-402.

Liu, W., Yang, Y., Zheng, R., e Wang, P. Robust Optimization for Suspension Parameters of Suspended Monorail Vehicle Using Taguchi Method and Kriging Surrogate Model, **Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers**, Transactions of the Chinese Institute of Engineers - Series C. 40. 481-489, 2019.

Lopez, R. H., e Beck, A. T. Reliability-Based Design Optimization Strategies Based on FORM: A Review, **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**. 34. 506-514, 2012. doi: 10.1590/S1678-58782012000400012.

Loyer, B., e Jézéquel, L. Robust design of a passive linear quartercar suspension system using a multi-objective evolutionary algorithm and analytical robustness indexes, **Vehicle System Dynamics**, 47:10, 1253-1270, 2009. doi:10.1080/00423110802613394

Mahmoodabadi, M.J., Safaie, A. A., Bagheri, A., e Nariman-Zadeh, N. A novel combination of Particle Swarm Optimization and Genetic Algorithm for Pareto optimal design of a five-degree of freedom vehicle vibration model, **Applied Soft Computing**, 13:2577-2591, 2013. doi: 10.1016/j.asoc.2012.11.028

Montgomery, D. C. e Runger, G. C. **Applied Statistics and Probability for Engineers**, 4<sup>o</sup> ed. John Wiley & Sons, Inc. 490 p, 2009.

Nariman-Zadeh, N., Salehpour, M., Jamali, A., e Haghgoo, E. Pareto optimization of a five-degree of freedom vehicle vibration model using a multi-objective uniform-diversity genetic algorithm (MUGA), **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, 23(4): 543-551, 2010.

Nohtomi, S., Okada, K., Urabe, H., e Horiuchi, S. Simultaneous robust optimization of suspension and active control system of road vehicles for handling improvement, **Vehicle System Dynamics**, vol. 44, Supplement, 904-912, 2006.

Nunes, M. A. A., Silva, R. C., Miosso, C. J., Peixoto, L. R. T., e Rocha, A. F. **Análise estatística dos relatos de dores e desconfortos em motoristas de ônibus rodoviários**. XXIV Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica – CBEB 2014.

Olsson, A., Sabdberg, G., e Dahlblom, O. **On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis**. *Structural Safety*, 25:47-68, 2003.

Omkar, S.N., Khanderlwal, R., Ananth, T.V.S., Narayana, N.G., e Gopalakrishnan, S. Quantum behaved Particle Swarm Optimization (QPSO) for Multiobjective design optimization of composite structures, **Expert Systems with Applications**, 36:11312-11322. 2009. doi: 10.1016/j.eswa.2009.03.006.

Pareto, V. **Manuale di Economia Politica**. Societa Editrice Libreria, Milano, Italy, 1906. Translated into English by A.S. Schwier as *Manual of Political Economy*, Macmillan, New York, 1971.

Park, K.-S., Heo, S., Kang, D., Jeong, J., Yi, J., Lee, J., e Kim, K. Robust design optimization of suspension system considering steering pull reduction, **International Journal of Automotive Technology**. 1: 927-933, 2013. doi: 10.1007/s12239-013-0102-3

Santana, P. B., Awruch, M. D. F., Grotti, E., e Gomes, H. M. **Multiobjective Optimization of Composite Materials for Continuous Fiber Orientation**. Proceedings of ENGOPT 2018, 6<sup>th</sup> International Conference on Engineering Optimization, Lisbon, 2018. doi: 10.1007/978-3-319-97773-7 89.

Shirahatti, A., Prasad, P.S.S., Panzade, P., e Kulkarni, M.M. Optimal design of passenger car suspension for ride and road holding, **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, 30(1): 66-76. 2008. doi: 10.1590/S1678-58782008000100010

Sobol, I. M. **A Primer for the Monte Carlo Method**, CRC Press, 1994.

Sun, J., Feng, B. e Xu, W. **Particle swarm optimization with particles having quantum behavior**, Proceedings of Congress on Evolutionary Computation, Portland, OR, USA, p.325-331. 2004a.

Sun, J., Xu, e W., Feng, B. **A global search strategy of quantum-behaved particle swarm optimization**. Cybernetics and Intelligent Systems, 2004 IEEE Conference, 1:111-116. 2004b.

Sundaresan, S., Ishii, K., e Houser, D. R. A robust optimization procedure with variations on design variables and constraints, **Engineering Optimization**, 24:2, 101-117, 1995. doi: 10.1080/03052159508941185

Taguchi, G. **Systems of experimental design** (vol. I, II). New York: Kraus International. 1987.

Xu, S.-H., Mu, X.-D., Chai, e D., Zhao. P. Multiobjective quantum-behaved particle swarm optimization algorithm with double potential well and share learning, **Optik**, 127:4921-4927. 2016. doi:.1016/j.ijleo.2016.02.049.

Yang, X., Shi, P., Shen, W., Jiang, K., e Pang, S. Multiobjective quantum-behaved particle swarm optimization with entropy-based density assessment and chaotic mutation operator, **Journal of Computational Information Systems** 9(10):3873-3881. 2013.doi: 10.12733/jcis5841.

Yang, L., Ballo, F., Previati, G., e Gobbi, M. Robust Optimization of Road Vehicle Suspension Considering the Variation of Tire Vertical Stiffness. **Journal of Modeling and Optimization**, 11: 8-15. 2019. doi:10.32732/jmo.2019.11.1.8.

Zhan, S., e Qing-Wei, C. Multi-objective quantum-behaved particle swarm optimization algorithm based on QPSO and crowding distance sorting, **Control and Decision**, 26(4): 540-547. 2011.

Zamanian, A., Nikraves, A., Monazzam, M.R., Hassanzadeh, J., e Fararouei, M. Short-term exposure with vibration and its effect on attention, **Journal of Environmental Health Science & Engineering** 12(1):135. 2014.

Zhou, D.-Z., Li, Y., Jiang, B., e Wang, J. A Novel Multiobjective Quantum-Behaved Particle Swarm Optimization Based on the Ring Model, **Mathematical Problems in Engineering**, 2016:1-15. 2016. doi: 10.1155/2016/4968938

Zio, E. **The Monte Carlo simulation method for system reliability and riskanalysis**. Springer Series in Reliability Engineering, Hoang Pham Editor. London, 2013.

## APÊNDICE A – O Método de Monte Carlo

O nome dado ao método de Monte Carlo é proveniente dos jogos de azar nos cassinos de Monte Carlo em Mônaco e origina-se com trabalhos iniciais de Neumann e Ulam em 1949 (*apud* Sobol 1994). A aleatoriedade é encontrada em jogos de azar assim como em variáveis do nosso dia-a-dia. O Método de Monte Carlo é um método simples para a geração de amostras aleatórias e que sigam certo tipo de distribuição de probabilidade com parâmetros conhecidos como médias, desvios, assimetria, curtose, etc. A partir da geração de amostras (chamadas de realizações) é possível simular situações de aleatoriedades que se encontrariam na vida prática, permitindo avaliar estatísticas a respeito das variáveis de saída de um sistema, assim podendo fazer inferências acerca das chances de sua ocorrência. O método pode ser resumido como:

1. Selecionar os tipos de distribuição de probabilidade e seus parâmetros para as variáveis que sejam aleatórias que participam de um determinado sistema;
2. Gerar um conjunto de amostras (realizações) a partir deste conjunto de distribuições de probabilidade e que sigam, ao final, estas mesmas distribuições;
3. Conduzir simulações com o sistema analisado utilizando como entradas estas amostras geradas e guardar as respostas (saídas) de interesse do sistema para posterior análise estatística.

### A.1 Geração de amostras aleatórias seguindo certa distribuição de probabilidades

Uma parte crucial do método de Monte Carlo é a geração de variáveis que sejam completamente não correlacionadas e uniformemente distribuídas. Isto pode ser feito com o uso de métodos numéricos que permitem a geração dos chamados números pseudo-aleatórios, nos quais são empregadas fórmulas matemáticas recursivas para a geração de sequências quase-aleatórias (longas, mas com um período de repetição que é finito). O software Matlab possui diversos métodos implementados nativamente, entre os mais importantes estão o *MersenneTwister* e *Threefry*, que apresentam períodos muito elevados e correlação muito baixa. Neste ponto estas sequências devem ser geradas em um tamanho que seja igual à quantidade de realizações desejadas e numa quantidade que

seja igual à de variáveis aleatórias que se deseja simular. Dentre estes métodos o mais comumente utilizado para a geração é o chamado Método da Transformação Inversa. Se  $F_{X_i}(x_i)$  for a função acumulada de distribuição da variável aleatória  $X_i$  então seus valores, por definição deverão recair em  $[0,1]$ . Assumindo que  $u_i$  seja um número aleatório (ou pseudo-aleatório) uniformemente distribuído em  $[0,1]$ , o Método da Transformação Inversa é usado para gerar uma amostra da variável  $X_i$  como segue:

$$u_i = F_{X_i}^{-1}(x_i) \quad (\text{A.1})$$

Este método está esquematicamente representado na Figura A.1 para a geração de 2 amostras e com a técnica das variáveis antitéticas. Caso repita-se o processo diversas vezes, tem-se ao final um conjunto de variáveis  $x_i$  (vetor de variáveis aleatórias  $\mathbf{X}_i$ ) que seguem a distribuição de probabilidade representada por  $F_{X_i}$ .

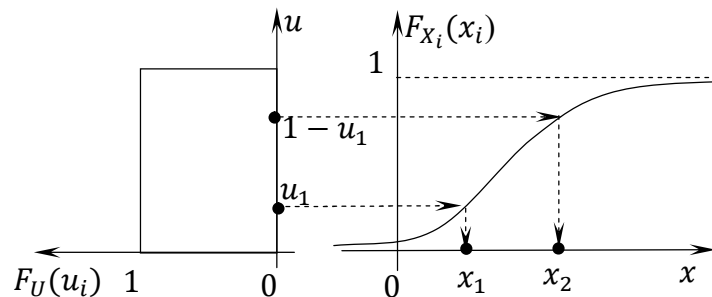


Figura A.1 – Esquema de geração de amostras pelo Método da Transformação Inversa.

Na Figura A.2 está representado esquematicamente o processo de simulações com o vetor de amostras (cada um com  $n$  amostras) para  $m$  variáveis aleatórias geradas, aplicadas em um sistema qualquer e a obtenção dos  $q$  vetores de variáveis de saída deste sistema (cada um dos vetores também com  $n$  amostras).

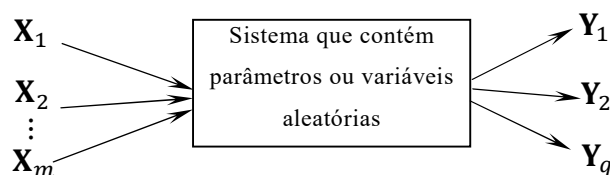


Figura A.2 – Esquema de geração de amostras pelo Método da Transformação Inversa.



Para qualquer variável de saída é possível avaliar as estatísticas de média assim como a variância, indicados nas Equações (A.2) e (A.3):

$$\bar{y}_i = E[Y_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma^2_{Y_i} = E[(Y_i - \mu_{Y_i})^2] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 \quad (\text{A.3})$$

Outro parâmetro muito importante é a variância do estimador da média calculada pela Equação A.2 e que fornece uma indicação se a quantidade de amostras ( $n$ ) é suficiente para estatisticamente representar (média e desvio padrão) os parâmetros da distribuição das variáveis de saída  $Y_i$ .

$$\text{Var}(\bar{y}_i) = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right]^2 \right\} \quad (\text{A.4})$$

Valores baixos para este parâmetro (5%, por exemplo) indicam que a quantidade de amostras é suficiente para representar a média e desvio padrão com acurácia. Entretanto para atingir valores tão baixos, talvez seja necessária uma quantidade relativamente grande de amostras  $n$  (realizações), o que pode tornar a metodologia custosa, principalmente se o sistema é complexo e demorado para ser avaliado.

## A.2 Técnicas de redução de variância

Com o objetivo de reduzir a variância das estimativas de Monte Carlo é possível modificar o método de geração de amostras de tal forma que se introduz uma correlação negativa entre as amostras e que se traduz numa redução mais acelerada (com poucas amostras) dos parâmetros estatísticos. Uma das técnicas é a geração de amostras antitéticas, ou seja, para cada variável aleatória uniformemente distribuída gerada  $u_i$ , gera-se outra complementar a esta ( $1 - u_i$ ), correlacionada negativamente. Isto pode

reduzir pela metade a quantidade de amostras necessárias para se ter uma variância especificada, caso não se utilize a técnica.

A técnica de amostragem do Hipercubo Latino, (*Latin Hypercube Sampling*, LHS) é um método que garante que as amostras permeiem o espaço multidimensional das distribuições de probabilidade de forma a ter ao menos uma quantidade de amostra em cada ponto percentual da distribuição que seja coerente com a sua probabilidade. Segundo Zio, 2007, já foi demonstrado experimentalmente [Olson et al., 2003] que o LHS é muito eficiente para estimar a média e desvios padrão em problemas complexos de forma mais eficiente que a técnica tradicional de geração por Monte Carlo simples. Desta forma, na geração de várias variáveis aleatórias, evita-se a aglomeração de amostras em regiões do espaço, assim como se garante ao menos amostras das variáveis nos extremos das caudas das distribuições, o que seria obtido com a simulação de Monte Carlo simples apenas após uma grande quantidade de simulações. No método de amostragem do Hipercubo Latino, a distribuição de probabilidade de cada variável pode ser subdividida em  $n$  intervalos (compartimentos) de igual probabilidade de ocorrência. Cada compartimento terá ao menos 1 amostra gerada. Há  $n$  pontos aleatoriamente misturados, de forma que cada compartimento tem probabilidade de  $1/n$  da distribuição de probabilidade. Os passos para geração pelo LHS podem ser resumidos como:

1. Divida a distribuição de probabilidade de cada variável em  $n$  compartimentos não superpostos de forma que todos tenham a mesma probabilidade;
2. Selecione um valor aleatoriamente dentro de cada intervalo com respeito à sua densidade de probabilidade;
3. Repita os passos 1. e 2. até que tenha-se selecionados valores para todas as variáveis aleatórias  $x_1, x_2, \dots, x_m$  ;
4. Associe os  $n$  valores obtidos para cada variável  $x_1$  com os  $n$  valores obtidos para as outras  $x_{i \neq j}$  de forma aleatória (emparelhamento aleatório).

Segundo Choi et al., 2007, a regularidade dos intervalos de probabilidade na função de densidade de probabilidade assegura que cada variável de entrada tenha todas as porções da sua faixa representada, resultando em uma relativa pequena variância na resposta. Ao mesmo tempo, com a redução no número necessário de amostras, a análise do sistema pode ficar muito menos dispendiosa. O método LHS também permite tamanhos de amostras flexíveis enquanto assegura uma amostragem estratificada (o

método também é chamado de *Stratified Sampling*), de forma que cada variável de entrada é amostrada em  $n$  níveis. A etapa restante do método requer o emparelhamento para as variáveis  $n$ -dimensionais geradas de forma que cada conjunto de variáveis não tenham o mesmo compartimento amostrado mais que uma vez. Isto é conseguido com uma permutação aleatória de forma a garantir que as amostras fiquem bem estratificadas. Felizmente grande parte das linguagens de programação já possuem este gerador implementado, como no Matlab (2012) que utiliza a função *lhsdesign*.

A Figura A.3 exemplifica para o caso de 2 variáveis e 5 realizações os passos explicados anteriormente.

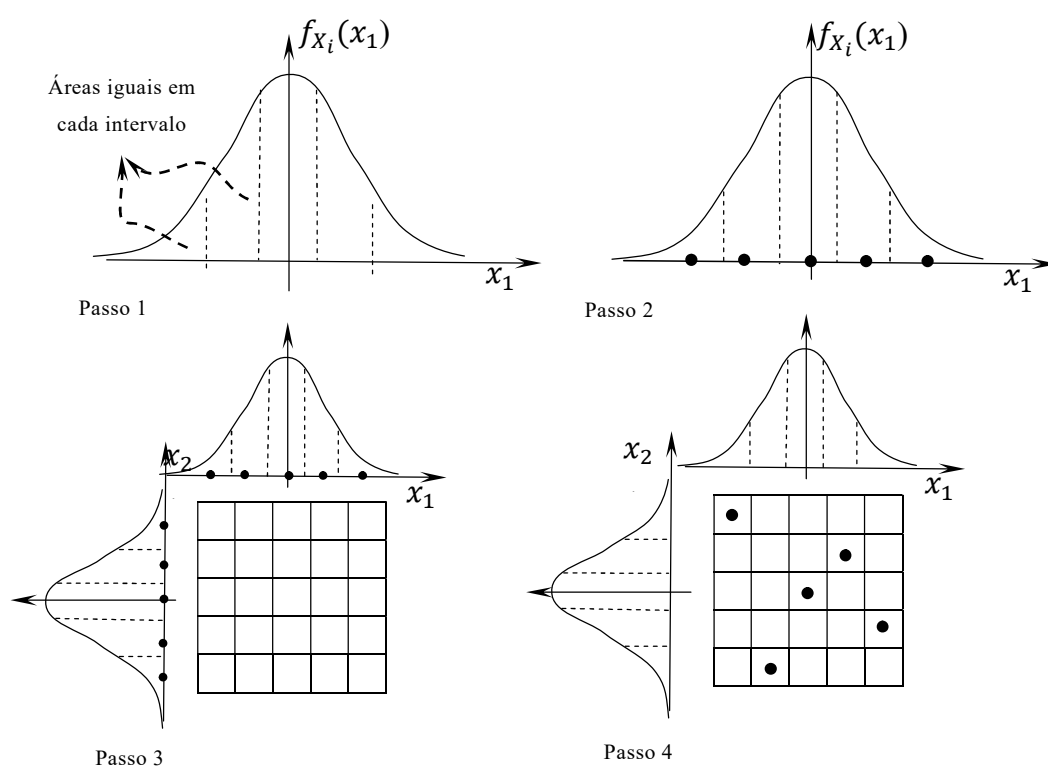


Figura A.3 – Conceito básico do LHS para duas variáveis aleatórias e 5 realizações.

## APÊNDICE B – Teste De Lilliefors

De acordo com o Lilliefors, 1967, o teste de Lilliefors é um teste de normalidade baseado no teste de Kolmogorov-Smirnov. É usado para testar a hipótese nula,  $h_0$ , de que as amostras que estão sendo testadas fazem parte de uma população normalmente distribuída, quando não é especificada qual é a média e a variância da distribuição. O nome do teste é uma homenagem a Hubert Lilliefors, professor de estatística na Universidade George Washington. Uma variante do teste pode ser usada para distribuições exponenciais, quando a hipótese nula não especificar qual é o tipo de distribuição exponencial.

O teste é dado da seguinte forma:

1. Estimar a média e a variância da população usando as amostras que estão sendo testadas;
2. Encontrar a discrepância máxima entre a função de distribuição empírica e a função de distribuição acumulada, FDA, da distribuição normal com a média e variâncias estimadas no passo 1;
3. Avaliar se a discrepância máxima calculada no passo 2 é grande o suficiente para ser estatisticamente significativa, resultando então na rejeição da hipótese nula  $h_0$ .

Como no passo 3, a FDA hipotética foi movida para mais próximo dos dados por uma estimativa realizada sobre estes próprios dados, a máxima discrepância tornou-se menor do que ela seria se a hipótese nula tivesse apontado a média e o desvio desejáveis (esta é essencialmente a diferença entre o teste de Kolmogorov-Smirnov e Lilliefors). Por este motivo, a distribuição de probabilidade, assumindo que a hipótese  $h_0$  seja verdadeira, é estocasticamente menor do que a distribuição de Kolmogorov-Smirnov. Esta é, então, a distribuição de Lilliefors. As tabelas do teste de Lilliefors são calculadas usando o método de Monte Carlo (ver Apêndice A).

O teste de Lilliefors está implementado nativamente no *software* Matlab R2018a, na função *lillietest*. O menor valor possível para o  $P_{value}$  do método usando esta função é de  $10^{-3}$ .