

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM, IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS E IMPLEMENTAÇÃO DE  
SISTEMA DE CONTROLE POR TORQUE CALCULADO EM UM MANIPULADOR  
PLATAFORMA DE STEWART HIDRÁULICO

por

Rafael Marquette Vargas

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Maio de 2021

MODELAGEM, IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS E IMPLEMENTAÇÃO DE  
SISTEMA DE CONTROLE POR TORQUE CALCULADO EM UM MANIPULADOR  
PLATAFORMA DE STEWART HIDRÁULICO

por

Rafael Marquette Vargas

Bacharel em Engenharia de Controle e Automação

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Sistemas de Fabricação

Orientador: Prof. Dr. Eduardo André Perondi

Aprovada por:

Prof. Dr. Antonio Carlos Valdiero ..... POSMEC / UFSC

Prof. Dr. Flavio José Lorini ..... PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes ..... PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 7 de Maio de 2021

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço acima de tudo aos meus pais Odecio e Marlise, que nunca mediram esforços para me dar a melhor educação possível e sempre me apoiaram incondicionalmente na realização dos meus objetivos.

Ao Professor Eduardo Perondi, que me acompanha na vida acadêmica como professor e orientador desde meu terceiro semestre no curso de engenharia. Sempre dedicado, gentil, paciente com os alunos, uma verdadeira inspiração como pesquisador e docente. Obrigado por proporcionar inúmeras oportunidades de crescimento e aprendizado a todos os alunos e pesquisadores que transitam pelas salas do LAMECC.

A todos os colegas do LAMECC, que tiveram um papel fundamental na minha formação como pessoa e como engenheiro, compartilhando o seu conhecimento, me ensinando desde as coisas mais básicas até as mais complexas, e sendo ótimas companhias de trabalho no laboratório. Um agradecimento especial ao Eder Gonçalves, que gerenciou o LAMECC pelos mais de 10 anos estive presente, criando um ambiente de trabalho muito estimulante e descontraído para os bolsistas, sempre buscando fornecer os recursos necessários para todos realizarem as suas pesquisas, e contribuindo imensamente na formação das dezenas de engenheiros que passaram pelo laboratório.

Aos colegas, também do LAMECC, Vitor Valente, Leonardo Gutterres e Pablo Leonardelli, que, além de terem me proporcionado ótimos momentos enquanto fomos colegas de laboratório, tiveram uma contribuição indispensável no desenvolvimento deste trabalho, me auxiliando e tirando dúvidas sobre o desenvolvimento dos algoritmos e sobre o funcionamento dos equipamentos do laboratório.

Aos professores da engenharia, que me tornaram o engenheiro que sou e me inspiram até hoje na minha carreira docente. Um agradecimento especial ao Professor Mário Sobczyk, que se tornou um grande amigo, fez questão de manter contato e me auxiliou várias vezes a esclarecer dúvidas durante o desenvolvimento desta dissertação.

À CAPES, ao CNPq e ao PROMEC, por proporcionarem oportunidades para aqueles que desejam fazer pesquisa científica e por possibilitarem que a ciência brasileira não pare de avançar.

## RESUMO

O Manipulador Plataforma de Stewart é um tipo de manipulador paralelo composto por 6 atuadores prismáticos. Estes atuadores ligam a base do manipulador a uma plataforma que se move com 6 graus de liberdade em relação à base. A expansão ou retração de cada um dos atuadores influencia na posição da plataforma móvel. Usualmente utilizada em simuladores de movimento, uma Plataforma de Stewart é utilizada neste trabalho para simular movimentos de uma embarcação em alto mar. O objetivo principal deste trabalho é implementar um sistema de controle por Torque Calculado que possibilite que o manipulador execute um seguimento de trajetória com precisão, simulando os movimentos de um convés de uma embarcação em alto mar. Para que isso seja possível, é descrito o desenvolvimento do modelo matemático do manipulador utilizado na síntese do controlador, incluindo cinemática inversa, cinemática direta e dinâmica. Também é apresentado o desenvolvimento do modelo matemático do sistema hidráulico do manipulador, assim como a identificação experimental dos coeficientes de vazão das válvulas. Ao final, são apresentadas simulações e experimentos realizados utilizando controladores PI (Proporcional-Integral) e por Torque Calculado. Através destes procedimentos, são apresentadas uma validação do modelo matemático desenvolvido e um estudo sobre o desempenho dos controladores aplicados ao problema de seguimento de trajetórias típicas de convés de embarcações.

Palavras-chave: Plataforma de Stewart; Controle de trajetória de convés de embarcações; Robô hidráulico paralelo; Identificação de sistemas hidromecânicos.

## **ABSTRACT**

The Stewart Platform Manipulator is a type of parallel manipulator composed of 6 prismatic actuators. These actuators connect the base of the manipulator to a platform that moves with 6 degrees of freedom in relation to the base. The expansion or retraction of each of the actuators influences on the position of the mobile platform. Usually used in motion simulators, a Stewart Platform will be used in this work to simulate the movements of a vessel on the high seas. The main objective of this work is to implement a Computed Torque controller that allows the manipulator to accurately follow a trajectory, simulating the movements of a vessel's deck on an offshore operation. To make this possible, the development of the mathematical model of the manipulator used in the controller synthesis will be described, including inverse kinematics, direct kinematics and dynamics. The development of the mathematical model of the hydraulic system of the manipulator will be presented, as well as the experimental identification of the flow coefficients of the valves. At the end, simulations and experiments performed using PI (Proportional-Integral) and Computed Torque controllers will be shown. Through these procedures, a validation of the mathematical model developed and a study on the performance of the controllers applied to the problem of tracking typical trajectories of vessel decks will be presented.

**Keywords:** Stewart Platform; Offshore trajectory control; Parallel hydraulic robot; Hydro-mechanical system identification.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação: desenvolvimento de um sistema de compensação de movimentos da base	2
1.2	Objetivos.....	5
1.3	Metodologia e organização do trabalho.....	5
1.3.1	Etapa 1: Contextualização do tema abordado.....	6
1.3.2	Etapa 2: Modelagem matemática teórica.....	6
1.3.3	Etapa 3: Implementação do hardware de controle e identificação experimental .....	6
1.3.4	Etapa 4: Implementação do algoritmo de controle e avaliação dos resultados .....	6
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>7</b>
2.1	Manipuladores robóticos .....	7
2.2	Manipulador Plataforma de Stewart .....	9
2.3	Graus de liberdade do Manipulador Plataforma de Stewart.....	11
2.4	Controle para o Manipulador Plataforma de Stewart .....	13
2.5	Aplicações do Manipulador Plataforma de Stewart em simuladores de movimento ...	14
2.6	Sistemas de referência em navios.....	17
<b>3</b>	<b>MODELAGEM DO SISTEMA MECÂNICO DE UM MPS .....</b>	<b>18</b>
3.1	Definições gerais .....	18
3.2	Descrição geométrica da Plataforma de Stewart .....	19
3.3	Coordenadas no espaço de trabalho e de juntas .....	23
3.3.1	Coordenadas no espaço de trabalho.....	23
3.3.2	Coordenadas no espaço de juntas. ....	24
3.4	Matriz de rotação .....	25
3.5	Análise cinemática.....	26
3.5.1	Cinemática inversa.....	26
3.5.2	Matriz Jacobiana.....	28
3.5.3	Cinemática direta .....	33
3.5.4	Singularidades.....	37
3.6	Análise dinâmica .....	38
3.6.1	Formulação de Euler-Lagrange .....	38

3.6.2	Características do Manipulador Plataforma de Stewart.....	40
3.6.3	Energia cinética e energia potencial gravitacional .....	41
3.6.4	Formulação de Euler-Lagrange para o Manipulador Plataforma de Stewart .....	44
<b>4</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA DO ATUADOR HIDRÁULICO .....</b>	<b>46</b>
4.1	Características de sistemas hidráulicos .....	46
4.2	Descrição do funcionamento do atuador hidráulico .....	48
4.3	Modelagem matemática do atuador hidráulico .....	50
4.3.1	Equação do acionamento da válvula direcional proporcional .....	50
4.3.2	Equação da vazão nos orifícios da válvula direcional .....	52
4.3.3	Equação da variação de pressão no cilindro do atuador .....	54
4.3.4	Equação da força hidráulica e dinâmica inversa do atuador.....	55
4.3.5	Equilíbrio dinâmico de forças no pistão .....	56
4.3.6	Força de atrito .....	58
4.3.7	Zona morta e compensação de zona morta.....	68
<b>5</b>	<b>ALGORITMO DE CONTROLE POR TORQUE CALCULADO PARA O MPS</b>	
	<b>HIDRÁULICO.....</b>	<b>72</b>
5.1	Controle por Torque Calculado .....	72
5.2	Transformação da dinâmica do MPS para o espaço de juntas .....	74
5.3	Lei do Subsistema Mecânico .....	76
5.4	Lei do Subsistema Hidráulico .....	77
5.5	Prova de estabilidade do controle por Torque Calculado.....	78
<b>6</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS .....</b>	<b>80</b>
6.1	Descrição da bancada experimental .....	80
6.1.1	Descrição do sistema mecânico e identificação dos seus parâmetros .....	80
6.1.2	Descrição do sistema hidráulico .....	82
6.1.3	Descrição do sistema elétrico .....	84
6.2	Identificação dos parâmetros hidráulicos .....	85
6.2.1	Identificação da zona morta.....	86
6.2.2	Identificação de parâmetros mensuráveis .....	88
6.2.3	Identificação dos parâmetros de atrito .....	89
6.2.4	Identificação dos coeficientes de vazão da válvula .....	92
6.2.5	Determinação de $\beta_c$ .....	95

6.2.6	Aprimoramento da identificação dos coeficientes de vazão da válvula .....	95
6.2.7	Identificação dos coeficientes de vazão variáveis da válvula.....	97
6.3	Simulação do modelo completo do atuador hidráulico .....	99
6.4	Validação do modelo inverso do atuador hidráulico .....	100
<b>7</b>	<b>RESULTADOS .....</b>	<b>102</b>
7.1	Descrição das trajetórias aplicadas .....	102
7.1.1	Trajectoria 1.....	103
7.1.2	Trajectoria 2.....	104
7.2	Filtros digitais .....	106
7.3	Controle PI e validação do modelo matemático.....	108
7.3.1	Resultados para simulação do controlador PI.....	109
7.3.2	Resultados para implementação experimental do controlador PI.....	112
7.3.3	Validação do modelo matemático da dinâmica do MPS .....	114
7.3.4	Validação da dinâmica inversa .....	116
7.4	Controle por Torque Calculado para Trajetória 1 .....	117
7.4.1	Simulação do controle por Torque Calculado com Trajetória 1.....	118
7.4.2	Resultados para implementação experimental do controle por Torque Calculado ....	123
7.5	Controle por Torque Calculado para Trajetória 2 .....	131
7.6	Resumo dos resultados .....	138
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>140</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>143</b>
	<b>APÊNDICE A – Cálculo das propriedades de massa das partes móveis da Plataforma de Stewart.....</b>	<b>148</b>
	<b>APÊNDICE B – Cálculo detalhado das equações dinâmicas do manipulador. ....</b>	<b>149</b>
	<b>APÊNDICE C – Prova de anti-simetria da matriz <math>\mathbf{MX} - 2\mathbf{CX}, \mathbf{X}</math>.....</b>	<b>158</b>
	<b>APÊNDICE D – Desenvolvimento da derivada da Matriz Jacobiana <math>\mathbf{J}(\mathbf{X})</math> .....</b>	<b>159</b>
	<b>APÊNDICE E – Comprovação de anti-simetria da matriz <math>\mathbf{MX} - 2\mathbf{CX}, \mathbf{X}</math> .....</b>	<b>162</b>
	<b>APÊNDICE F – Programação dos modelos em diagrama de blocos.....</b>	<b>164</b>
	<b>APÊNDICE G – Imagens da movimentação do MPS para cada trajetória.....</b>	<b>170</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Estrutura de um Manipulador Plataforma de Stewart genérico.....	1
Figura 1.2	Funcionamento de um sistema de compensação de maré [Valente, 2016]. .....	3
Figura 1.3	Par de plataformas de dimensões reduzidas desenvolvidos na UFRGS.....	4
Figura 2.1	Primeira e última versão do manipulador desenvolvido por Gough para a Dunlop Rubber Co [Bonev, 2003].....	10
Figura 2.2	Plataforma de 6 graus de liberdade proposta por Stewart, 1965 [Bonev, 2003].	11
Figura 2.3	Simuladores de voo CAE 7000XR (à direita) e CAE 3000 (à esquerda) [CAE, 2020]. .....	15
Figura 2.4	Sistemas de compensação de movimentos de navio Ampelmann do Tipo- <i>AEP</i> (imagem superior) e Tipo- <i>E</i> (imagem inferior) [Ampelmann, 2020]. .....	16
Figura 2.5	Sistema de compensação para transporte de cargas entre navios [Tørdal et al., 2018]. .....	17
Figura 2.6	Denominação dos graus de liberdade de uma embarcação [Valente, 2016]. .....	17
Figura 3.1	Projeto simplificado do manipulador em estudo. ....	19
Figura 3.2	Representação dos sistemas de coordenadas da plataforma. ....	20
Figura 3.3	Projeções dos vetores de coordenadas nos planos <b>XY</b> .....	21
Figura 3.4	Vetores de coordenadas em perspectiva. ....	22
Figura 3.5	Sequência de rotações do sistema de coordenadas. ....	24
Figura 3.6	Cadeia vetorial de uma das pernas do manipulador. ....	27
Figura 4.1	Estrutura básica de um circuito hidráulico [Fonte: adaptado de BOSCH, 1989, apud De Negri, 2001]. .....	47
Figura 4.2	Visão geral do atuador hidráulico.....	48
Figura 4.3	Esquema representativo da cavidade de uma câmara da válvula [Perondi, 2002]. .....	53
Figura 4.4	Diagrama de corpo livre da haste do cilindro [adaptado de Valdiero, 2005]. ....	57
Figura 4.5	Modelos clássicos de atrito [adaptado de Iurian et al., 2005].....	59
Figura 4.6	Modelo de atrito com descontinuidade substituída por região linear [Iurian et al., 2005]. .....	60
Figura 4.7	Curva estática da força de atrito pela velocidade [adaptado de Perondi, 2002]. .	61
Figura 4.8	Sistema massa mola simulado [Canudas de Wit et al., 1995]. .....	63

Figura 4.9	Movimento adere-desliza simulado [adaptado de Canudas de Wit et al., 1995].	63
Figura 4.10	Esboço da lei que caracteriza o modelo de Karnopp [Karnopp, 1985].	65
Figura 4.11	Diagrama de blocos do modelo de atrito de Karnopp [Karnopp, 1985].	66
Figura 4.12	Tipos de centro em válvulas direcionais [Valdiero, 2005].	69
Figura 4.13	Representação do comportamento da zona morta [adaptado de García, 2015].	70
Figura 4.14	Compensação da zona morta [adaptado de García, 2015].	70
Figura 5.1	Esquema de controle por Torque Calculado para um MPS hidráulico.	73
Figura 6.1	Juntas esféricas e suportes angulares da plataforma móvel.	81
Figura 6.2	Juntas universais e suportes angulares da base fixa.	81
Figura 6.3	Componentes hidráulicos do MPS.	83
Figura 6.4	Circuito hidráulico de atuação do MPS.	83
Figura 6.5	Sistema de aquisição de dados.	85
Figura 6.6	Dados adquiridos para a identificação da zona morta.	86
Figura 6.7	Aproximação em detalhe dos dados do experimento.	87
Figura 6.8	Comportamento experimental da força de atrito em função da velocidade.	90
Figura 6.9	Dados experimentais utilizados para a identificação.	93
Figura 6.10	Comparação entre modelo identificado e experimento para a variação de volume da câmaras 1 e 2.	94
Figura 6.11	Influência do número de Reynolds no coeficiente de descarga em um orifício de área fixa, L e d são parâmetros geométricos do orifício [adaptado de Watton, 2007].	96
Figura 6.12	Valor identificado dos coeficientes de vazão em função da velocidade da haste.	98
Figura 6.13	Comparação entre novo modelo identificado e experimento.	99
Figura 6.14	Comparação entre modelo e experimento.	100
Figura 6.15	Diagrama de blocos para validação da dinâmica inversa.	101
Figura 6.16	Comparação sinal de comando da válvula, original e reconstruído.	101
Figura 7.1	Trajetória 1 no espaço de trabalho.	103
Figura 7.2	Trajetória 1 no espaço de juntas.	104
Figura 7.3	Trajetória 2 no espaço de trabalho.	105
Figura 7.4	Trajetória 2 no espaço de juntas.	106
Figura 7.5	Diagrama de blocos do filtro composto para a velocidade.	107

Figura 7.6	Comparação entre sinal de velocidade original e filtrado.....	108
Figura 7.7	Diagrama de blocos utilizado para simulação de um controle PI.....	109
Figura 7.8	Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de trabalho na simulação de um controlador PI para a Trajetória 1. ....	110
Figura 7.9	Resultados obtidos para os erros no espaço de trabalho na simulação de um controlador PI para a Trajetória 1. ....	111
Figura 7.10	Resultados obtidos para os erros no espaço de juntas na simulação de um controlador PI para a Trajetória 1. ....	111
Figura 7.11	Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador PI para a Trajetória 1. ....	112
Figura 7.12	Resultados obtidos para os erros no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador PI para a Trajetória 1. ....	113
Figura 7.13	Resultados obtidos para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador PI para a Trajetória 1. ....	113
Figura 7.14	Comparação entre forças hidráulicas obtidas na simulação e na implementação experimental do controlador PI para a Trajetória 1. ....	114
Figura 7.15	Comparação entre sinais de controle obtidos na simulação e na implementação experimental do controlador PI para a Trajetória 1. ....	115
Figura 7.16	Diagrama de blocos utilizado para validação da dinâmica inversa do Manipulador Plataforma de Stewart. ....	116
Figura 7.17	Erro de força obtido na validação da dinâmica inversa do Manipulador. ....	117
Figura 7.18	Diagrama de blocos utilizado para simulação do controle por Torque Calculado. ....	118
Figura 7.19	Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de trabalho na simulação de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1. ....	119
Figura 7.20	Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de juntas na simulação de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1. ....	120
Figura 7.21	Resultados ampliados para os erros no espaço de trabalho na simulação de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1. ....	121
Figura 7.22	Resultados ampliados para os erros no espaço de juntas na simulação de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1. ....	121

Figura 7.23	Resultados obtidos para as forças hidráulicas nos atuadores na simulação de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1. ....	122
Figura 7.24	Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.....	123
Figura 7.25	Resultados obtidos para os erros no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.....	124
Figura 7.26	Resultados ampliados para os erros no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.....	125
Figura 7.27	Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.....	126
Figura 7.28	Resultados obtidos para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.....	127
Figura 7.29	Resultados ampliados para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.....	127
Figura 7.30	Resultados ampliados e separados para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.....	128
Figura 7.31	Resultados obtidos para os sinais de controle na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1. ....	129
Figura 7.32	Resultados obtidos para as forças hidráulicas nos atuadores na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.....	130
Figura 7.33	Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.....	131
Figura 7.34	Resultados obtidos para os erros no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.....	132
Figura 7.35	Resultados ampliados para os erros no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.....	133
Figura 7.36	Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.....	134
Figura 7.37	Resultados obtidos para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.....	135

Figura 7.38	Resultados ampliados para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.....	135
Figura 7.39	Resultados obtidos para os sinais de controle na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2. ....	135
Figura 7.40	Resultados ampliados e separados para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.....	136
Figura 7.41	Resultados obtidos para as forças hidráulicas nos atuadores na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.....	137
Figura A.1	Corpos selecionados para o cálculo das propriedades de massa. ....	148
Figura A.2	Resultados dos cálculos das propriedades de massa da plataforma.....	148
Figura F.1	Diagrama de blocos referente à dinâmica direta do atuador hidráulico. ....	164
Figura F.2	Diagrama de blocos referente à simulação do controle PI.....	165
Figura F.3	Diagrama de blocos referente à simulação do controle por Torque Calculado. ....	165
Figura F.4	Diagrama de blocos referente à dinâmica inversa do atuador hidráulico. ....	166
Figura F.5	Diagrama de blocos referente aos coeficientes de vazão das válvulas hidráulicas. ....	166
Figura F.6	Diagrama de blocos referente ao cálculo das variáveis do controle por torque calculado $v$ , $dv$ e $s$ . ....	167
Figura F.7	Diagrama de blocos referente ao controle do subsistema mecânico. ....	167
Figura F.8	Diagrama de blocos referente dinâmica inversa mecânica para controle. ....	168
Figura F.9	Diagrama de blocos referente ao controle do subsistema hidráulico.....	168
Figura F.10	Diagrama de blocos referente à compensação de zona morta. ....	169
Figura F.11	Diagrama de blocos referente dinâmica direta do MPS. ....	169
Figura F.12	Diagrama de blocos referente à cinemática inversa do MPS.....	169
Figura G.1	Resultados experimentais quadro a quadro para a Trajetória 1.....	170
Figura G.2	Resultados experimentais quadro a quadro para a Trajetória 2.....	171

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Parâmetros do critério de Grübler-Kutzbach para o MPS estudado.....	13
Tabela 6.1	Parâmetros geométricos do MPS estudado.....	82
Tabela 6.2	Propriedades de massa do MPS estudado.....	82
Tabela 6.3	Parâmetros identificados para a zona morta e sua compensação.....	88
Tabela 6.4	Parâmetros mensuráveis identificados nesta seção.....	89
Tabela 6.5	Resultados obtidos através da identificação por mínimos quadrados.....	94
Tabela 7.1	Coeficientes para a Trajetória 1. ....	104
Tabela 7.2	Coeficientes para a Trajetória 2. ....	105
Tabela 7.3	Parâmetros dos filtros utilizados nos experimentos.....	107
Tabela 7.4	Ganhos do controlador PI utilizado. ....	109
Tabela 7.5	Ganhos do controle por Torque Calculado. ....	118
Tabela 7.6	Resultados para os erros no seguimento de trajetória.....	139

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CAD	Computer aided design
CASNAV	Centro de Análise de Sistemas Navais
EMA	Erros máximos absolutos
IMU	Inertial Measurement Unit
LAMECC	Laboratório de Mecatrônica e Controle
LVDT	Linear Variable Differential Transformer
MPS	Manipulador Plataforma de Stewart
PD	Proporcional-Derivativo
PI	Proporcional-Integral
RMSE	Root-mean-square error
TC	Torque Calculado
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UPS	Universal-Prismatic-Spherical

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_{oi}$	Área do orifício de passagem $i$	$[m^2]$
$A_1$	Área útil do embolo na Câmara 1	$[m^2]$
$A_2$	Área útil do embolo na Câmara 2	$[m^2]$
$\mathbf{B}_i$	Vetor da posição da junta inferior $i$ em relação à base	$[m]$
$c$	Curso total (valor máximo) do êmbolo do cilindro	$[m]$
$c_i$	Coefficiente de vazão do orifício $i$	$[m^3/(s \text{ VPa}^{\frac{1}{2}})]$
$c_{ij}$	Símbolos de Christoffel	
$C_d$	Coefficiente de descarga nos orifícios de controle	
$\mathbf{C}_t$	Vetor de coordenadas da posição da plataforma móvel	$[m]$
$\mathbf{C}/\bar{\mathbf{C}}$	Matriz de força centrífuga e de Coriolis	
$\mathbf{D}_i$	Vetor da posição da junta superior $i$ em relação à base	$[m]$
$\mathbf{e}$	Vetor de erros de posição	$[m]$ e $[rad]$
$f_i$	Número de graus de liberdade permitidos pela junta $i$	
$f_p$	Número de graus de liberdade passivos do mecanismo	
$F_a$	Força de atrito entre a haste e o restante do cilindro	$[N]$
$F_c$	Força de atrito de Coulomb	$[N]$
$F_{ext}$	Força externa	$[N]$
$F_g$	Força gravitacional	$[N]$
$F_h$	Força hidráulica	$[N]$
$F_s$	Valor máximo da força de atrito estático	$[N]$
$F_v$	Coefficiente de atrito viscoso	$[\frac{Ns}{m}]$
$g$	Aceleração da gravidade	$[\frac{m}{s^2}]$
$\mathbf{G}/\bar{\mathbf{G}}$	Vetor de forças gravitacionais	
$\hat{h}$	Parcela da dinâmica do atuador com termos independentes da tensão de controle	$[\frac{N}{s}]$
$\mathbf{I}_t$	Tensor de inércia do topo da plataforma	$[kgm^2]$
$I_x$	Momento de inércia em relação ao eixo $x$	$[kgm^2]$
$I_y$	Momento de inércia em relação ao eixo $y$	$[kgm^2]$

$I_z$	Momento de inércia em relação ao eixo $z$	$[kgm^2]$
$j$	Número de juntas do mecanismo	
$J$	Matriz Jacobiana	
$K$	Energia cinética	
$K_v$	Constante de proporcionalidade da válvula	$\left[\frac{m}{V}\right]$
$K_a$	Matriz de ganhos do controlador por Torque Calculado	
$K_d$	Matriz de ganhos do controlador por Torque Calculado	
$K_t$	Matriz de ganhos do controlador por Torque Calculado	
$K_p$	Matriz de ganhos do controlador por PI	
$K_i$	Matriz de ganhos do controlador por PI	
$l_c$	Faixa de suavização	$[V]$
$l_i$	Largura do orifício $i$ da válvula	$[m]$
$l_{min}$	Comprimento mínimo das pernas	$[m]$
$l_{max}$	Comprimento máximo das pernas	$[m]$
$L$	Função de Lagrange	
$L_i$	Comprimento total da perna $i$ do manipulador	$[m]$
$L_{i_m}$	Comprimento medido da perna $i$ do manipulador	$[m]$
$L_{i_c}$	Comprimento calculado da perna $i$ do manipulador	$[m]$
$m$	Massa do topo da plataforma	$[kg]$
$m_p$	Massa da haste do cilindro	$[kg]$
$md$	Inclinação direita da zona morta	
$me$	Inclinação esquerda da zona morta	
$M/\bar{M}$	Matriz de massa do manipulador	
$n$	Número de elos no mecanismo	
$n_{GLD}$	Número de graus de liberdade segundo o critério de Grübler-Kutzbach	
$O_b$	Coordenadas da origem do sistema de coordenadas da base	$[m]$
$O_t$	Coordenadas da origem do sistema de coordenadas do topo	$[m]$
$p_x$	Coordenada $x$ do efetuador em relação à base	$[m]$

$p_y$	Coordenada $y$ do efetuador em relação à base	[ $m$ ]
$p_z$	Coordenada $z$ do efetuador em relação à base	[ $m$ ]
$P$	Energia potencial gravitacional	
$P_s$	Pressão de suprimento	[ $Pa$ ]
$P_r$	Pressão de retorno	[ $Pa$ ]
$P_1$	Pressão na Câmara 1	[ $Pa$ ]
$P_2$	Pressão na Câmara 2	[ $Pa$ ]
$q_1$	Vazão no orifício da Câmara 1	$\left[\frac{m^3}{s}\right]$
$q_2$	Vazão no orifício da Câmara 2	$\left[\frac{m^3}{s}\right]$
$\mathbf{q}$	Vetor de coordenadas no espaço de juntas	[ $m$ ]
$\mathbf{q}_d$	Vetor de trajetórias desejadas no espaço de juntas	[ $m$ ]
$r_b$	Raio da circunferência circunscrita nos pontos de rotação das juntas inferiores	[ $m$ ]
$r_t$	Raio da circunferência circunscrita nos pontos de rotação das juntas superiores	[ $m$ ]
$\mathbf{R}_x(\alpha)$	Matriz de rotação em relação ao eixo $X$	
$\mathbf{R}_y(\beta)$	Matriz de rotação em relação ao eixo $Y$	
$\mathbf{R}_z(\gamma)$	Matriz de rotação em relação ao eixo $Z$	
$\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)$	Matriz de rotação sequencial $XYZ$	
$\mathbf{s}$	Vetor de erros de velocidade do controle por Torque Calculado	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$\mathbf{S}_i$	Vetor da perna $i$ do manipulador	[ $m$ ]
$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t))$	Matriz anti-simétrica	
$\mathbf{T}_i^t$	Vetor da posição da junta superior $i$ em relação ao topo	[ $m$ ]
$u_{czm}$	Sinal de controle compensado	[ $V$ ]
$u_d$	Sinal de controle desejado	[ $V$ ]
$u_v$	Tensão de controle (sinal de entrada) da válvula	[ $V$ ]
$\hat{u}$	Parcela da dinâmica do atuador com termos dependentes da tensão de controle	$\left[\frac{N}{sV}\right]$
$\mathbf{u}_i$	Vetor unitário da orientação da perna $i$ do manipulador	

$V$	Volume total inicial do fluido	$[m^3]$
$V_1$	Volume total da Câmara 1	$[m^3]$
$V_2$	Volume total da Câmara 2	$[m^3]$
$V_{10}$	Volume morto da Câmara 1	$[m^3]$
$V_{20}$	Volume morto da Câmara 2	$[m^3]$
$V_{Ly}$	Função de Lyapunov	
$x$	Deslocamento da haste do pistão	$[m]$
$x_v$	Posição do carretel	$[m]$
$\dot{x}_s$	velocidade de Stribeck	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$X$	Vetor de coordenadas no espaço de trabalho	$[m]$ e $[rad]$
$X_0$	Estimativa inicial para a raiz de uma função	$[m]$ e $[rad]$
$X_r$	Raiz real de uma função	$[m]$ e $[rad]$
$X_b$	Vetor $X$ do sistema de coordenadas da base	
$X_t$	Vetor $X$ do sistema de coordenadas do topo	
$Y_b$	Vetor $Y$ do sistema de coordenadas da base	
$Y_t$	Vetor $Y$ do sistema de coordenadas do topo	
$z_b$	Distância entre plano das juntas inferiores e a base	$[m]$
$z_t$	Distância entre plano das juntas superiores e o topo	$[m]$
$zmd$	Limite direito da zona morta	$[V]$
$zme$	Limite esquerdo da zona morta	$[V]$
$Z_b$	Vetor $Z$ do sistema de coordenadas da base	
$Z_t$	Vetor $Z$ do sistema de coordenadas do topo	
$\alpha$	Ângulo de rolagem do efetuador em relação à base	$[rad]$
$\beta$	Ângulo de arfagem do efetuador em relação à base	$[rad]$
$\beta_c$	Coefficiente de compressibilidade volumétrica do fluido	$[Pa]$
$\gamma$	Ângulo de guinada do efetuador em relação à base	$[rad]$
$\delta$	Constante de forma do efeito de Stribeck	
$\eta_i$	Ângulo para coordenada cada vetor de junta inferior	$[rad]$
$\theta_b$	Ângulo que separa as projeções dos vetores da base em relação ao centro do respectivo par	$[^\circ]$

$\theta_t$	Ângulo que separa as projeções dos vetores do topo em relação ao centro do respectivo par	$[^\circ]$
$\lambda$	Número de graus de liberdade do espaço em que o mecanismo deve funcionar	
$\lambda_i$	Ângulo para coordenada cada vetor de junta superior	$[rad]$
$\Lambda$	Matriz de ganhos do controlador por Torque Calculado	
$\mathbf{v}$	Vetor de referências de velocidade do controle por Torque Calculado	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$\xi_v$	Razão de amortecimento da válvula	
$\rho$	Massa específica do óleo	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
$\boldsymbol{\tau}$	Vetor de forças aplicadas pelos atuadores	$[N]$
$\boldsymbol{\tau}_d$	Vetor de forças desejadas	$[N]$
$\tilde{\boldsymbol{\tau}}$	Vetor de erros de forças aplicadas pelos atuadores	$[N]$
$\omega_v$	Frequência natural da válvula	$\left[\frac{rad}{s}\right]$
$\boldsymbol{\omega}(t)$	Vetor genérico de velocidades	
$\boldsymbol{\Omega}_b$	Vetor de velocidades angulares da plataforma móvel em relação ao sistema de coordenadas da base	$\left[\frac{rad}{s}\right]$
$\boldsymbol{\Omega}_t$	Vetor de velocidades angulares da plataforma móvel em relação ao sistema de coordenadas do topo	$\left[\frac{rad}{s}\right]$

# 1 INTRODUÇÃO

O meio industrial moderno vem apresentando um aumento na produtividade e competitividade. A execução de tarefas em alta velocidade e alta repetitividade é essencial nesse contexto. Para se atingir altos níveis de desempenho, algumas tarefas são automatizadas e aceleradas através de sistemas eletromecânicos automáticos. O uso de manipuladores robóticos para a execução de tarefas repetitivas é uma alternativa que usualmente proporciona uma execução relativamente rápida e com alta adaptabilidade em atividades de manufatura [Romano, 2002].

Os manipuladores robóticos de cadeia fechada fazem parte de uma categoria que vem aumentando suas aplicações no ambiente industrial. Este tipo de manipulador tem geralmente a capacidade de aumentar o desempenho em processos que necessitam de uma maior capacidade de carga e maior precisão. Um exemplo deste tipo de manipulador é o Manipulador Plataforma de Stewart (MPS), que é um mecanismo composto de uma base e uma plataforma móvel, conectadas por seis atuadores lineares, os quais, através de seu comprimento variável, proporcionam seis graus de liberdade na sua plataforma móvel [Merlet, 2006]. Um exemplo de MPS genérico pode ser observado na Figura 1.1.

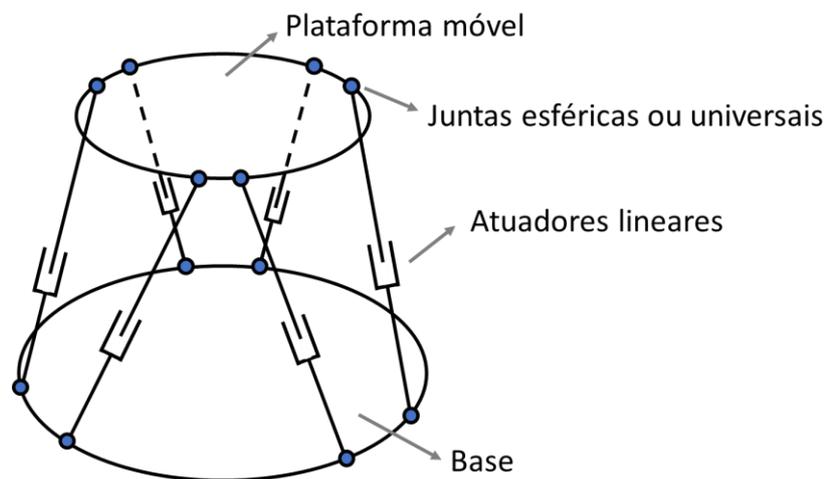


Figura 1.1 – Estrutura de um Manipulador Plataforma de Stewart genérico.

Em situações em que a capacidade de carga exigida pelo manipulador é grande, atuadores hidráulicos são geralmente utilizados. Devido à possibilidade de se trabalhar com altas pressões com o óleo, atuadores hidráulicos apresentam uma relação potência/volume melhor do que as de atuadores elétricos ou pneumáticos. Além disso, a sua alta durabilidade,

boa rigidez estrutural e resposta rápida são algumas vantagens do uso de atuadores hidráulicos em mecanismos robóticos [Merritt, 1967]. Entretanto, também existem desvantagens no uso deste tipo de atuador. Segundo Cunha, 2001, quando atuadores hidráulicos são utilizados em manipuladores robóticos, controladores baseados em modelos matemáticos simplificados de sistemas hidráulicos não apresentam bom desempenho para controle de posição. Desta forma, para obter um controle preciso de posição, é geralmente necessário utilizar estruturas computacionais complexas na síntese e análise de controladores (baseados em modelo), incluindo não-linearidades, o que dificulta o projeto do controlador.

Uma estratégia muito efetiva para o controle de manipuladores robóticos acionados por atuadores hidráulicos é a chamada controle por Torque Calculado (TC). A estratégia é uma extensão da técnica proposta por Slotine e Li, 1987, que consiste na utilização de uma parcela de realimentação referente à antecipação e compensação da dinâmica não-linear do sistema, através da sua modelagem, juntamente com outra parcela dissipativa, por exemplo, um controlador PD (Proporcional-Derivativo) de posição. A extensão desta técnica proposta por McDonnell, 1996, tornou possível utilizar o método de Slotine e Li em atuadores de potência fluídica, que são sistemas que usualmente não permitem o controle direto de força ou torque de saída. Esta técnica apresenta melhorias de desempenho em relação aos controladores mais comuns, além de facilitar a prova da estabilidade por meio de Lyapunov [Cunha, 2001].

Neste contexto, surge a possibilidade de criar manipuladores robóticos com alta capacidade de carga e alta precisão no seguimento de trajetórias. Dentre as diversas aplicações existentes para os tipos de manipuladores robóticos supracitado, uma delas é a criação de simuladores de movimento. Um exemplo comum, é a utilização de MPS em simuladores veículos de aviação e automobilismo, demonstrando a capacidade deste mecanismo de gerar este tipo de movimento. Levando em consideração os pontos abordados até aqui, uma aplicação nesta área será apresentada a seguir.

### **1.1 Motivação: desenvolvimento de um sistema de compensação de movimentos da base**

O desenvolvimento do presente trabalho é realizado no contexto de um projeto de pesquisa do Laboratório de Mecatrônica e Controle – LAMECC, do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. O projeto consiste no estudo e desenvolvimento de um mecanismo MPS para transferência de pessoal e de cargas em alto mar, entre navios e estruturas, quando as condições, tanto de clima, quanto do próprio mar, não são ideais [Valente, 2016]. O mecanismo visa a compensar o movimento

do convés de uma embarcação gerando um movimento oposto, mantendo assim a plataforma superior aproximadamente parada, como pode ser observado por meio dos diagramas apresentados na Figura 1.2.



Figura 1.2 – Funcionamento de um sistema de compensação de maré [Valente, 2016].

O projeto iniciou em 2014 através de uma parceria do LAMECC com a empresa TMSA (<https://www.tmsa.ind.br/>) e tem financiamento FINEP, a proposta consiste na construção de dois conjuntos de plataformas de Stewart para simulação e compensação de movimentos de navios em alto mar. No contexto deste projeto, García, 2015, realizou a modelagem dinâmica e simulação de controle de um MPS capaz de simular os movimentos de uma embarcação em alto mar. Valente, 2016, continuou esse trabalho realizando a simulação de dois MPS acoplados, um em cima do outro. O MPS inferior tem a função de simular os movimentos de um navio em alto mar enquanto que o superior, por meio de dados de aceleração obtidos através de uma IMU (*Inertial Measurement Unit*), gera e segue as trajetórias capazes de compensar o movimento produzido pela plataforma inferior.

Entre 2014 a 2019, dois pares de plataformas foram projetados e construídos pelos membros do projeto, sendo um par de dimensões reduzidas e outro com dimensões comerciais. O par de plataformas de dimensões reduzidas está apresentado na Figura 1.3. Os testes realizados com as plataformas até então utilizavam controladores simples, do tipo PI (Proporcional-Integral). Apesar de os resultados serem satisfatórios com a utilização destes controladores, procura-se, no presente trabalho, projetar e utilizar controladores mais sofisticados, visando a avaliar os desempenhos de ambos os controladores e ampliar o campo de aplicação do sistema desenvolvido. Assim, o escopo do presente trabalho está relacionado à implementação prática de algoritmos de controle na plataforma superior do par de plataformas de dimensões reduzidas. García, 2015, iniciou os estudos com foco em apenas uma única

plataforma. A seguir, Valente, 2016, realizou a modelagem e simulação de duas plataformas acopladas. García, 2015, e Valente, 2016, implementaram o controle por Torque Calculado por meio de simulações computacionais, não chegando a testar os controladores em uma bancada experimental. Ambos os autores também utilizaram modelos matemáticos para a dinâmica do manipulador que foram desenvolvidos em outros trabalhos, mas que não apresentam um detalhamento profundo sobre as etapas do seu desenvolvimento. Tendo isso em vista, considera-se importante um desenvolvimento mais detalhado das diferentes partes do modelo de um MPS hidráulico, de forma a ser possível modificá-lo e adaptá-lo para diferentes configurações. Para utilizar este modelo com um nível de confiança suficiente em uma aplicação experimental, surge também a necessidade de desenvolver procedimentos para realizar a identificação dos valores dos seus parâmetros. Este trabalho propõe o desenvolvimento destas demandas, e, além disso, propõe utilizar estes resultados para realizar a implementação prática e avaliação de desempenho de controladores por Torque Calculado, até então não aplicados à plataforma.



Figura 1.3 – Par de plataformas de dimensões reduzidas desenvolvidos na UFRGS.

## 1.2 Objetivos

Tomando como base os trabalhos de García, 2015, e Valente, 2016, uma vez que os mesmos fizeram a modelagem e simulação de controle em malha fechada tanto de uma quanto de duas plataformas integradas, o presente trabalho visa dar seguimento a estes trabalhos executando a identificação dos parâmetros dos sistemas do manipulador e a implementação prática dos algoritmos de controle por Torque Calculado. Isso foi feito inicialmente para uma única plataforma, para que, futuramente, possa ser expandido para duas plataformas acopladas na simulação e compensação de movimentos do convés de um navio. Ressalta-se que versões preliminares destes controladores foram propostas por ambas as pesquisas citadas, tendo sido testadas apenas em simulação.

Assim, o objetivo principal do presente trabalho se caracteriza por realizar a implementação prática de um algoritmo de controle por Torque Calculado no Manipulador Plataforma de Stewart do LAMECC para simulação de movimentos do convés de um navio.

Para que isso seja possível, alguns objetivos específicos terão que ser cumpridos ao longo do projeto:

- modelagem da cinemática direta e inversa do manipulador;
- modelagem dinâmica do manipulador;
- modelagem dinâmica detalhada de um atuador hidráulico do manipulador;
- identificação experimental dos parâmetros do modelo hidráulico;
- validação experimental do modelo hidráulico;
- identificação dos parâmetros do modelo mecânico;
- validação experimental do modelo mecânico;
- implementação e teste em simulação de um controlador por Torque Calculado;
- implementação e teste experimental de um controlador por Torque Calculado para diferentes tipos de trajetórias;
- avaliação do desempenho do controlador proposto.

## 1.3 Metodologia e organização do trabalho

Este trabalho está organizado em 8 capítulos, sendo que a metodologia pode ser dividida em 4 etapas que são descritas a seguir.

### **1.3.1 Etapa 1: Contextualização do tema abordado**

O Capítulo 1 apresenta informações gerais sobre o tema abordado, a motivação e os objetivos para este trabalho. No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica sobre manipuladores robóticos, destacando o Manipulador Plataforma de Stewart. Isto permite contextualizar o projeto desenvolvido com as aplicações comerciais atuais dos sistemas robóticos.

### **1.3.2 Etapa 2: Modelagem matemática teórica**

O Capítulo 3 apresenta a modelagem mecânica de um MPS genérico que é necessária para a implementação dos algoritmos de controle. O Capítulo 4 apresenta a modelagem matemática detalhada de um atuador hidráulico do MPS. Este modelo é importante na implementação do controle, pois é o sistema hidráulico que faz a aplicação das forças calculadas pelo controlador por Torque Calculado. No Capítulo 5 é apresentado o estudo do algoritmo de controle que faz com que o MPS seja capaz de seguir as trajetórias desejadas.

### **1.3.3 Etapa 3: Implementação do hardware de controle e identificação experimental**

O Capítulo 6 aborda a descrição do hardware utilizado para aquisição de dados e implementação do algoritmo de controle. O capítulo também descreve os procedimentos de identificação experimental dos parâmetros dos modelos desenvolvidos nos capítulos 3 e 4. Este procedimento é importante, pois o desempenho do algoritmo de controle desenvolvido é diretamente relacionado com a precisão da identificação dos parâmetros dos modelos matemáticos.

### **1.3.4 Etapa 4: Implementação do algoritmo de controle e avaliação dos resultados**

O Capítulo 7 apresenta os resultados obtidos usando diferentes controladores para o seguimento de trajetórias selecionadas, tanto em simulação quanto de forma experimental. Uma validação dos modelos também é feita. Finalmente, o Capítulo 8 apresenta as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, são apresentadas as principais características e aplicações de manipuladores robóticos paralelos, assim como as suas diferenças em relação aos manipuladores seriais. Também é feita uma revisão sobre o Manipulador Plataforma de Stewart assim como uma análise da sua estrutura e seus graus de liberdade. Um panorama geral sobre algoritmos de controle para esse manipulador e sobre as suas principais aplicações é apresentado. Ao final, são analisados os graus de liberdade usualmente utilizados para descrição de movimentos de navios.

### 2.1 Manipuladores robóticos

Um *robô*, ou, *manipulador robótico*, é constituído de um sistema mecânico composto por *elos* de alta rigidez conectados por *juntas*, as quais permitem movimento relativo entre elos adjacentes. Estas composições são usualmente chamadas de *cadeias cinemáticas*. As juntas são usualmente equipadas com sensores que permitem medições das posições relativas entre os elos vizinhos. Juntas que permitem o movimento de rotação relativa entre elos vizinhos são chamadas de juntas *rotacionais*, enquanto juntas que permitem um deslocamento translacional relativo entre elos vizinhos são chamadas de juntas *prismáticas*. Em uma das extremidades da cadeia cinemática se encontra a *base* do robô, que usualmente é fixa, enquanto que na outra extremidade do robô fica uma parte móvel denominada *efetuador* [Craig, 2004].

O efetuador de um robô pode ter diferentes formatos como, por exemplo, uma garra, uma tocha de solda, um eletroímã, uma ventosa, uma plataforma, ou diversos outros tipos de dispositivos. Os movimentos executados pelo efetuador do robô têm como objetivo realizar algum tipo de tarefa automatizada, que depende do tipo de robô e de sistema ao qual o mesmo está integrado. O efetuador de um robô pode se mover em diferentes direções no espaço tridimensional, através de movimentos translacionais e/ou rotacionais. Usualmente, a posição e orientação de um ponto específico do efetuador são utilizadas para definir a denominada “pose” do manipulador, que é determinada pelas posições e/ou ângulos das suas juntas. Uma pose pode ser representada por um conjunto de *coordenadas generalizadas*, usualmente compostas de coordenadas cartesianas, que definem a posição; e de ângulos, que definem a orientação do efetuador, ambas em relação à base do robô. Entretanto, qualquer outro conjunto de variáveis que sejam capazes de definir completamente a pose do efetuador também pode ser

considerado um conjunto de coordenadas generalizadas. Alguns robôs são capazes de executar controladamente todas as translações e rotações do efetuador, outros não, dependendo da topologia construtiva do manipulador em questão [Merlet, 2006].

Grande parte dos manipuladores robóticos presentes na indústria apresentam uma topologia de construção antropomórfica, lembrando o padrão de movimentação de um braço humano. Estes robôs são construídos como uma sucessão de elos e juntas, acoplados entre si através de uma única cadeia cinemática entre a base do manipulador e seu efetuador, o que caracteriza uma *cadeia cinemática aberta*. Manipuladores que apresentam apenas uma cadeia cinemática aberta em seus elos e apenas juntas rotacionais ou prismáticas são denominados *manipuladores seriais*. As diferentes combinações na sequência de juntas rotacionais e translacionais originam as diferentes categorias de robôs seriais, como, por exemplo, robô cartesiano, robô cilíndrico, robô esférico, robô SCARA e robô antropomórfico [Siciliano et al., 2009].

Em casos em que é necessária uma capacidade de carga superior ou maior rigidez mecânica para garantir a precisão de posicionamento, Merlet, 2006, recomenda o uso de *cadeias cinemáticas fechadas*. Cadeias cinemáticas fechadas referem-se a mecanismos que possuem duas ou mais cadeias cinemáticas independentes ligando a base e o efetuador do manipulador, formando assim um laço interno entre os elos. Um exemplo desse tipo de cadeia cinemática ocorre quando é utilizada uma geometria de paralelogramo entre o ombro e cotovelo de um robô antropomórfico.

Uma configuração específica de cadeia cinemática fechada ocorre nos denominados *manipuladores paralelos*. Este tipo de manipulador possui múltiplas cadeias cinemáticas conectando o efetuador com a base do robô. A principal vantagem desta configuração em relação aos manipuladores seriais é a possibilidade de atingir altas cargas ou velocidades operacionais, em detrimento de um espaço de trabalho reduzido quando comparado com manipuladores seriais [Siciliano et al., 2009].

O *espaço de trabalho* de um manipulador é o volume total alcançado pelo efetuador quando o manipulador executa todos os seus movimentos possíveis. O espaço de trabalho é dependente da geometria construtiva do manipulador, assim como das restrições de fim de curso das suas juntas. O espaço de trabalho é dividido em *espaço de trabalho alcançável* e *espaço de trabalho de destreza*. O espaço de trabalho alcançável contempla o conjunto inteiro de poses que o manipulador pode atingir, enquanto que o espaço de trabalho de destreza é o conjunto de poses que o manipulador pode atingir com uma determinada orientação arbitrária para o efetuador [Spong et al., 2005].

Um problema comum no estudo de manipuladores robóticos é o equacionamento da chamada *cinemática direta*. Este é o problema geométrico estático responsável por calcular a posição e orientação do efetuador do robô, baseando-se nos valores de posições e/ou ângulos relativos às juntas do robô. Já o cálculo da *cinemática inversa*, é relacionado ao cálculo de todas as possíveis configurações de juntas que levam o efetuador do robô a uma dada posição e orientação. Em manipuladores robóticos seriais, a cinemática direta tem solução relativamente simples, envolvendo uma única solução geométrica. A cinemática inversa nestes manipuladores é mais complicada, pois pode apresentar múltiplas soluções, ou mesmo nenhuma solução caso a posição e orientação desejada para o efetuador esteja fora do espaço de trabalho de destreza. Em manipuladores paralelos ocorre o contrário, a cinemática inversa usualmente possui uma solução geométrica e única, de cálculo relativamente simples, enquanto que a cinemática direta normalmente exige cálculos complexos ou algoritmos iterativos para que seja possível calcular uma solução [Merlet, 2006].

## 2.2 Manipulador Plataforma de Stewart

Gough e Whitehall, 1962, estabeleceram os princípios básicos de um mecanismo com cadeia cinemática fechada, que permitiria o posicionamento e orientação de uma plataforma móvel para realizar testes de desgaste de pneus. O primeiro protótipo desta máquina foi construído em 1954, para a empresa Dunlop Rubber Co., em Birmingham, Inglaterra. O efetuador do mecanismo consiste de uma plataforma móvel hexagonal que fica no topo do manipulador, cujos vértices são conectados a atuadores lineares através de juntas esféricas. A outra extremidade de cada um dos atuadores é conectada à base do mecanismo através de juntas universais. Os atuadores lineares formam múltiplas cadeias cinemáticas fechadas ligando o efetuador à base do manipulador, caracterizando este como sendo um manipulador paralelo. O equipamento recebeu melhorias ao longo das décadas e foi utilizado até o início dos anos 2000, quando a fábrica foi desativada e o equipamento enviado para um museu [Bonev, 2003]. A Figura 2.1 apresenta, à esquerda, uma fotografia da primeira versão do equipamento, e à direita, o equipamento pouco antes de ser retirado de operação.

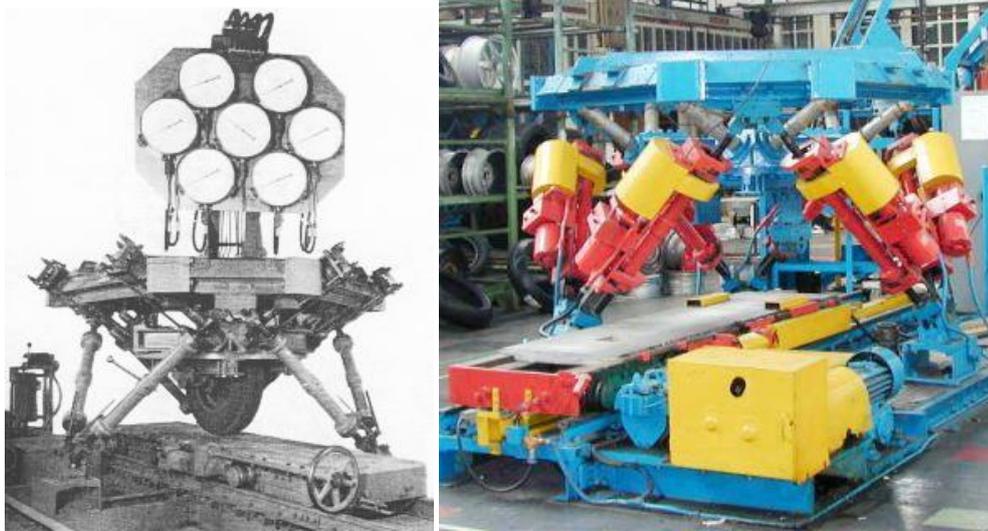


Figura 2.1 – Primeira e última versão do manipulador desenvolvido por Gough para a Dunlop Rubber Co [Bonev, 2003].

Este tipo de estrutura apresenta uma ótima relação carga/massa, uma vez que, quando a plataforma móvel se encontra na posição central, a carga suportada por cada atuador é aproximadamente  $1/6$  da carga total suportada pelo efetuador. Além disso, os esforços impostos aos atuadores neste tipo de manipulador são reduzidos pelo fato de que as juntas impõem apenas cargas de tração e compressão. Em manipuladores seriais, a carga relativa suportada por cada junta é maior, uma vez que cada junta tem que ser capaz de suportar sozinha a carga de todos os elos seguintes somadas ao valor da carga manipulada pelo efetuador. Essa característica permite aumentar a relação carga/massa do manipulador proposto por Gough quando comparado com manipuladores seriais, utilizando atuadores de baixa potência com menor peso, ou então utilizando atuadores de alta potência para aumentar muito a capacidade de carga. A precisão de posicionamento do efetuador também é beneficiada pela configuração geométrica proposta, uma vez que cargas melhores distribuídas entre os atuadores geram deformações menores nos elos. Além disso, a ausência de cadeias cinemáticas seriais impede que os erros de posicionamento nas juntas se acumulem ao longo da cadeia cinemática [Merlet, 2006].

Durante os anos de 1960, o rápido avanço da indústria aeronáutica incentivou o desenvolvimento de mecanismos com grande mobilidade a capacidade de carga, para que fosse possível desenvolver simuladores de voo. Stewart, 1965, sugeriu que este tipo de simulador poderia ser desenvolvido com o mecanismo proposto na Figura 2.2. A estrutura proposta tem formato triangular, e seus vértices são conectados por juntas esféricas a mecanismos inferiores compostos por 2 pistões cada. Em sua publicação, Stewart propõe a possibilidade de que uma

das extremidades de todos os pistões dos mecanismos inferiores fossem juntados à plataforma móvel, reproduzindo assim o mecanismo anteriormente proposto por Gough e Whitehall, 1962.

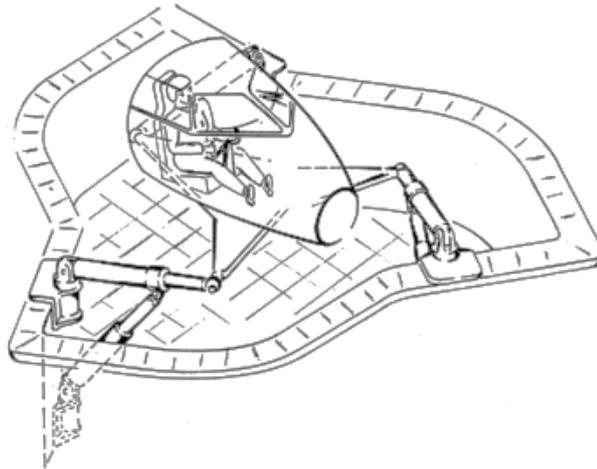


Figura 2.2 – Plataforma de 6 graus de liberdade proposta por Stewart, 1965 [Bonev, 2003].

Por coincidência, um dos revisores do artigo de Stewart era o próprio Gough, que indicou a pré-existência de seu mecanismo durante a revisão. Outros revisores do trabalho de Stewart, inclusive sugeriram que o mecanismo, em configurações semelhantes à proposta inicialmente por Gough, fosse utilizado em perfurações em alto mar, ou em processos de usinagem, o que acabou se tornando uma boa previsão para as aplicações futuras do mecanismo. Analisando o uso dos mecanismos ao longo do tempo, percebe-se que o mecanismo proposto por Stewart acabou não recebendo nenhuma aplicação prática, enquanto que o mecanismo de Gough foi utilizado extensivamente. Ironicamente, a plataforma de Gough, que foi proposta e construída muito antes de Stewart, é frequentemente conhecida como Manipulador Plataforma de Stewart (MPS) [Merlet, 2006].

### 2.3 Graus de liberdade do Manipulador Plataforma de Stewart

A mobilidade de um manipulador é proporcionada pela presença de juntas entre os seus elos, acarretando nos chamados *graus de liberdade* no mecanismo. O número de graus de liberdade de um manipulador pode ser compreendido como sendo o número de parâmetros (ou coordenadas) independentes que são necessários para especificar completamente a configuração de todos os membros do manipulador no espaço. Em uma cadeia cinemática aberta, cada junta prismática ou rotacional proporciona à estrutura apenas 1 grau de liberdade. Por este motivo, o número de graus de liberdade de um robô serial é igual ao seu número de

juntas. Para manipuladores com cadeias cinemáticas fechadas, o número de graus de liberdade do manipulador é menor do que o número de juntas, uma vez que o laço entre os elos restringe alguns dos graus de liberdade [Siciliano et al., 2009]. Para este tipo de manipulador, com exceção de alguns casos específicos, é possível calcular o número de graus de liberdade do mecanismo através do *critério de Grübler-Kutzbach*. Segundo Tsai, 2001, este critério estabelece que o número de graus de liberdade de um mecanismo é igual ao número de graus de liberdade dos elos móveis, subtraído do número graus de restrição impostos pelas juntas. O critério de Grübler-Kutzbach pode ser utilizado para calcular o número de graus de liberdade de um mecanismo através da seguinte equação:

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i - f_p, \quad (2.1)$$

onde,  $\lambda$  é o número de graus de liberdade do espaço em que o mecanismo deve funcionar (sendo 3 para espaços de trabalhos planares e 6 para espaços de trabalho volumétricos),  $n$  é o número de elos no mecanismo, incluindo um possível elo fixo,  $j$  é o número de juntas do mecanismo;  $f_i$  é o número de graus de liberdade permitidos por uma junta  $i$ ,  $f_p$  é o número de graus de liberdade passivos do mecanismo. Graus de liberdade passivos são aqueles que não são capazes de transmitir movimento ou torque através de um determinado eixo, no caso da Plataforma de Stewart, pode ser visto como um grau de liberdade em alguma junta que não tem efeito no movimento da plataforma móvel, como, por exemplo, o grau de liberdade referente ao giro de um atuador em torno do seu próprio eixo quando está conectado a duas juntas esféricas.

O MPS utilizado no presente trabalho, é caracterizado como sendo do tipo *UPS*, por possuir elos compostos por uma sequência de juntas universal-prismática-esférica (*Universal-Prismatic-Spherical*). As juntas universais ligam a base do manipulador com os atuadores prismáticos, e, as juntas esféricas ligam a outra extremidade do atuador à plataforma superior. Para determinar os parâmetros da Equação 2.1 para o MPS em questão, é preciso identificar a quantidade de elos e de juntas presentes no manipulador. Cada um dos 6 atuadores lineares presentes no manipulador é composto por 2 elos, ligados entre si através de 1 junta prismática, totalizando 12 elos e 6 juntas nos atuadores. Somando a isso as 6 juntas universais inferiores, as 6 juntas esféricas superiores, e os 2 elos relativos à plataforma da base e à plataforma móvel do MPS, pode-se calcular um total de 14 elos e 18 juntas. Sabendo que juntas esféricas possuem 3 graus de liberdade permitidos, juntas universais possuem 2 graus de liberdade permitidos e juntas prismáticas permitem 1 grau de liberdade permitido, pode-se determinar os parâmetros da Equação 2.1 conforme a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Parâmetros do critério de Grübler-Kutzbach para o MPS estudado.

Parâmetro	Valor
$\lambda$	6
$n$	14
$j$	18
$f_i$ para $i = 1, \dots, 6$ nas juntas esféricas	3
$f_i$ para $i = 7, \dots, 12$ nas juntas universais	2
$f_i$ para $i = 13, \dots, 18$ nas juntas prismáticas	1
$f_p$	0

Substituindo os valores da Tabela 2.1 na Equação 2.1, conclui-se que o Manipulador Plataforma de Stewart do tipo UPS possui 6 graus de liberdade, conforme mostra a Equação 2.2 a seguir:

$$F = 6(14 - 18 - 1) + \left( \sum_{i=1}^6 3 - \sum_{i=1}^6 2 - \sum_{i=1}^6 1 \right) - 0 = 6. \quad (2.2)$$

O critério de Grübler-Kutzbach pode ser utilizado também para calcular o número de graus de liberdade do mecanismo quando os atuadores lineares se encontram travados. Nesta situação, os graus de liberdade permitidos em cada junta prismática passam de 1 para 0. Recalculando a Equação 2.1, conclui-se que, nesta condição, o MPS passa a ter um total de 0 graus de liberdade, ou seja, o mecanismo se torna imóvel quando os atuadores se encontram travados.

#### 2.4 Controle para o Manipulador Plataforma de Stewart

O Manipulador Plataforma de Stewart é um sistema altamente acoplado por ser composto de cadeias cinemáticas fechadas, além disso, apresenta comportamento fortemente não-linear. Controladores clássicos como o PID (Proporcional-Integral-Derivativo) são aplicados na indústria, mas os mesmos não garantem um seguimento de trajetória de alto desempenho em sistemas hidráulicos [Sohl e Bobrow, 1999]. Portanto, em situações em que é necessária uma alta precisão de posicionamento, algoritmos de controle mais sofisticados são necessários.

Segundo Kim et al., 2000, a maioria dos algoritmos de controle se baseiam no comando direto das juntas do manipulador, utilizando uma aproximação do modelo do manipulador para

o desenvolvimento do algoritmo de controle. Para se obter alto desempenho, o projeto destes algoritmos envolve a disponibilidade de um modelo matemático preciso do manipulador. No caso de manipuladores paralelos, usualmente este modelo é obtido no espaço de trabalho do manipulador, ou seja, nas coordenadas referentes aos graus de liberdade de posição e orientação da plataforma móvel do MPS. Uma vez que os sensores de posição do manipulador medem os deslocamentos das juntas e não diretamente os da plataforma, ainda é necessário que o algoritmo de controle seja capaz de calcular a cinemática direta do mecanismo para realizar essa conversão.

García, 2015, propõe um algoritmo de controle para um MPS com atuadores hidráulicos baseado na técnica de controle por *Torque Calculado* (TC). Valente, 2016, propõe um método para determinação dos ganhos do controlador, baseado em modelo matemático. A técnica de Torque Calculado foi inicialmente desenvolvida por Slotine e Li, 1987, para realizar o controle de um manipulador robótico com acionamento elétrico. O algoritmo de controle envolve uma compensação direta da dinâmica do manipulador, em conjunto com uma correção dos erros de posição e velocidade das juntas. McDonell, 1996, propôs uma adaptação do algoritmo de Slotine e Li para robôs acionados pneumaticamente na qual utiliza a lei de Slotine e Li para controlar um subsistema relativo à dinâmica mecânica do robô, e uma segunda lei de controle para o subsistema pneumático do robô. Sarmanho, 2014, propõe a utilização desta estratégia para o controle de um manipulador cilíndrico pneumático de 5 graus de liberdade, com a adição de uma compensação explícita de atrito, realizando também a prova de estabilidade do novo controlador. No contexto de diferentes técnicas e abordagens para o controle de um MPS, Valente, 2016, faz uma análise de diferentes controladores utilizados por autores da área, tanto para o controle de Manipuladores Plataforma de Stewart, quanto para o controle de atuadores hidráulicos.

## **2.5 Aplicações do Manipulador Plataforma de Stewart em simuladores de movimento**

Conforme descrito no Capítulo 1, a proposta do presente trabalho contempla a utilização de um MPS como estrutura de movimentação para simular os movimentos do convés de um navio. A utilização de manipuladores do tipo Plataforma de Stewart em simuladores de movimentos é uma das suas principais utilizações na indústria. O MPS apresenta bom desempenho neste tipo de aplicação pois permite uma boa amplitude movimentação combinada com uma alta capacidade de carga. O simulador de voo CAE 7000XR é um exemplo de simulador de movimentos construído a partir de um MPS. Este equipamento foi desenvolvido

pela empresa canadense CAE e é utilizado como simulador de voo de aviões para treinamento de pilotos. A mesma empresa também produz um simulador de voo para helicópteros chamado CAE 3000. Ambos os simuladores utilizam plataformas de Stewart para realizar a movimentação das cabines dos pilotos e os atuadores dos manipuladores têm acionamento elétrico [CAE, 2020]. A Figura 2.3 apresenta as fotografias dos equipamentos.



Figura 2.3 – Simuladores de voo CAE 7000XR (à direita) e CAE 3000 (à esquerda) [CAE, 2020].

Exemplo do uso de manipuladores do tipo Plataforma de Stewart também podem ser encontrados em sistemas desenvolvidos para compensação de movimento. Um caso importante é o sistema de compensação de movimentos em navios para acesso em turbinas eólicas em alto mar desenvolvido pela empresa Ampelmann. O sistema consiste em uma passarela móvel, suportada por um MPS hidráulico, que é capaz de compensar movimentos de um navio em alto mar em relação a uma plataforma de acesso estática acoplada a uma turbina eólica no mar. Através de sensores inerciais, o equipamento consegue medir os movimentos do navio, e compensá-los com a movimentação contrária do MPS. Desta forma, engenheiros de manutenção podem se deslocar do navio até o gerador eólico sem sofrer influência significativa dos movimentos do navio. A ideia foi proposta inicialmente em 2002 pelos estudantes de PhD Jan van der Tempel e David-Pieter Molenaar. O conceito desenvolvido foi nomeado “Ampelmann”, mesmo nome da empresa que hoje comercializa este equipamento [Salzmann, 2010]. A Figura 2.4 apresenta imagens do equipamento descrito em funcionamento.



Figura 2.4 – Sistemas de compensação de movimentos de navio Ampelmann do Tipo- $A^{EP}$  (imagem superior) e Tipo- $E$  (imagem inferior) [Ampelmann, 2020].

Outra aplicação no contexto de compensação de movimentos de navios é desenvolvida em um laboratório chamado *Norwegian Motion-Laboratory*, na Universidade de Agder, Noruega. O laboratório desenvolve projetos em diversas áreas relacionadas à geração de energia elétrica em alto mar, desde a construção de turbinas eólicas até sua instalação e manutenção. Um de seus projetos consiste no transporte de cargas suspensas por um guindaste entre navios em alto mar. O sistema utiliza um braço robótico como guindaste, e propõe o desenvolvimento de um sistema de compensação automática dos movimentos do navio, com o objetivo de amortecer o movimento relativo entre a carga suspensa pelo cabo do guindaste e o navio de destino. No projeto são utilizadas duas plataformas de Stewart de acionamento elétrico, responsáveis por simular a movimentação dos dois navios envolvidos [Tørdal, 2019]. A Figura 2.5 mostra uma imagem do sistema utilizado para os experimentos no projeto.

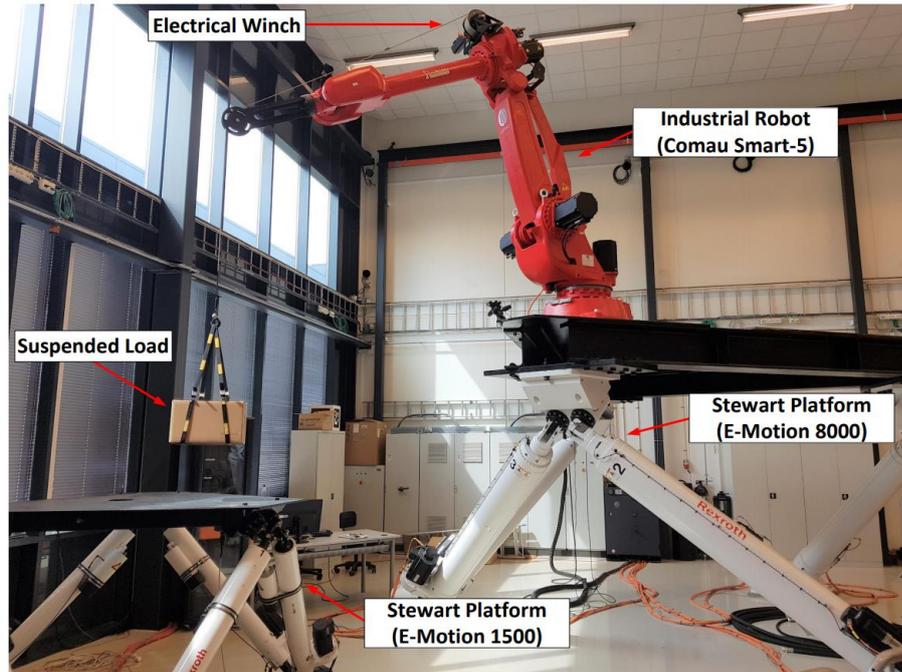


Figura 2.5 – Sistema de compensação para transporte de cargas entre navios [Tørdal et al., 2018].

## 2.6 Sistemas de referência em navios

Para realizar compensação de movimentos de um navio em alto mar, é necessário determinar os graus de liberdade que definem os movimentos da embarcação. Usualmente são utilizados para embarcações 3 graus de liberdade translacionais, chamados de *heave* (afundamento), *sway* (deriva) e *surge* (avanço), e 3 graus de liberdade rotacionais, chamados *roll* (rolagem), *pitch* (arfagem) e *yaw* (guinada) [Valente, 2016]. A Figura 2.6 apresenta os sentidos e direções destes graus de liberdade em relação ao casco de uma embarcação.

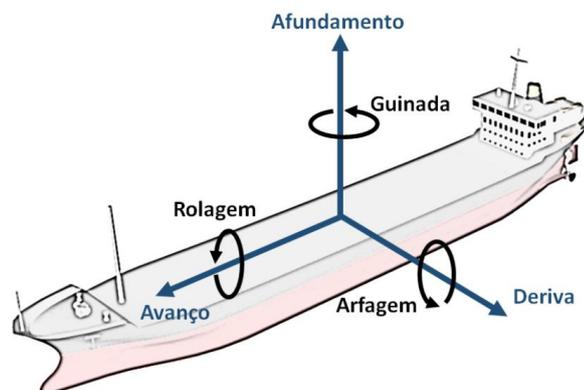


Figura 2.6 – Denominação dos graus de liberdade de uma embarcação [Valente, 2016].

### 3 MODELAGEM DO SISTEMA MECÂNICO DE UM MPS

Tendo em vista o objetivo de desenvolver um controlador de posição e trajetória para a Plataforma de Stewart de acionamento hidráulico do presente trabalho, é necessário realizar a execução da modelagem mecânica do manipulador. A modelagem mecânica desenvolvida neste capítulo é dividida em estática e dinâmica. A modelagem estática envolve a determinação dos sistemas de coordenadas da plataforma, das coordenadas das juntas, das transformações e rotações dos sistemas, das equações das cadeias cinemáticas das juntas, da cinemática inversa do manipulador, da Matriz Jacobiana do mecanismo e da cinemática direta da plataforma. A modelagem dinâmica envolve o equacionamento das forças necessárias, no espaço de juntas e de trabalho, para que a plataforma execute as trajetórias desejadas para posição, velocidade e aceleração.

#### 3.1 Definições gerais

A Plataforma de Stewart é um manipulador robótico de cadeia fechada composto por 2 corpos idealmente rígidos ligados por meio de 6 atuadores lineares. Os atuadores se comportam como juntas prismáticas, podendo variar o seu comprimento, e serão doravante chamados de *pernas*. Os corpos ligados pelos atuadores serão chamados de *base* (plataforma inferior) e *topo* (plataforma móvel). Cada perna tem uma de suas extremidades fixadas à base através das *juntas inferiores* e a outra ligada ao topo através das *juntas superiores*, como pode ser observado na Figura 3.1. As localizações destes 6 pontos de fixação em cada corpo são arbitrárias, dependendo do projeto mecânico do manipulador.

A Figura 3.1 apresenta uma imagem tridimensional do manipulador utilizado no presente trabalho, sendo que as válvulas, sensores e mangueiras foram ocultados para facilitar a visualização. As linhas cinzas ligando os centros das juntas explicitam uma característica importante desse manipulador: os planos gerados pelas linhas que ligam os centros das juntas estão a uma certa distância das superfícies da base e do topo. Essa distância se deve ao fato de que as juntas universais e esféricas, utilizadas na construção do manipulador, possuem dimensões não desprezíveis entre o ponto de rotação da junta e as superfícies as quais são fixadas, além disso, estas superfícies também possuem uma espessura considerável. Neste trabalho, estas distâncias serão representadas através das coordenadas dos pontos de fixação

dos atuadores. A determinação dos seus valores será feita através da análise do projeto 3D da plataforma no software SolidWorks.

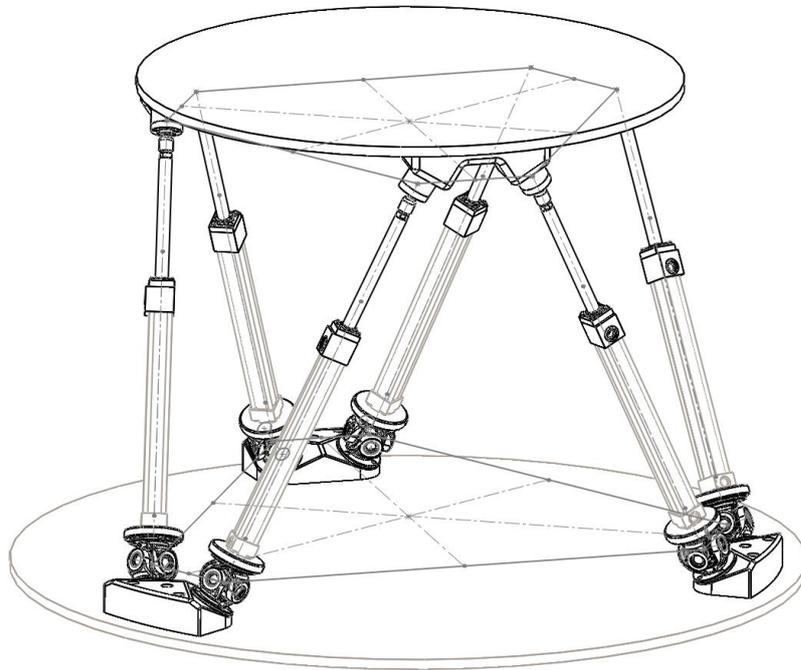


Figura 3.1 – Projeto simplificado do manipulador em estudo.

Na Figura 3.1 pode-se observar que este manipulador se trata de um MPS do tipo UPS, possuindo juntas universais na base e juntas esféricas no topo. Nesta imagem também pode ser observado que foram projetados suportes angulares para as juntas, que possibilitam uma maximização do espaço de trabalho alcançado pelo manipulador, otimizando as limitações físicas de movimentação das juntas utilizadas.

### 3.2 Descrição geométrica da Plataforma de Stewart

Os sistemas de coordenadas utilizados para representar os movimentos da Plataforma de Stewart são definidos como *sistema de coordenadas da base* e *sistema de coordenadas do topo*. O sistema de coordenadas da base é composto pelos eixos  $X_b$ ,  $Y_b$  e  $Z_b$ , e tem sua origem localizada no centro geométrico da superfície inferior da base, no plano que toca o chão ao qual a plataforma está apoiada. O sistema de coordenadas do topo é composto pelos eixos  $X_t$ ,  $Y_t$  e  $Z_t$ , e tem sua origem localizada no centro geométrico da superfície superior do topo, no plano em que futuramente poderá ser apoiada uma carga no manipulador.

Na Figura 3.2, são ilustrados os dois sistemas de coordenadas citados. Nesta mesma figura, observa-se em cinza, as circunferências referentes às superfícies da base e do topo. Os pontos pretos preenchidos representam os pontos de rotação das juntas universais e esféricas, os pontos pretos não preenchidos são a projeção dos pontos de rotação das juntas nos planos  $XY$  da base e do topo. Além disso, as linhas pretas grossas que ligam os pontos de rotação das juntas superiores com as inferiores representam os comprimentos dos atuadores hidráulicos da plataforma. As linhas pretas finas que ligam os pontos pretos preenchidos e os não preenchidos representam a distância constante entre os pontos de rotação das juntas e os planos  $XY$  dos sistemas de coordenadas da base ou do topo. As linhas pontilhadas que ligam os pontos de rotação das juntas servem para auxiliar a visualização da distância existente entre o plano formado por elas e os planos  $XY$  da base e do topo.

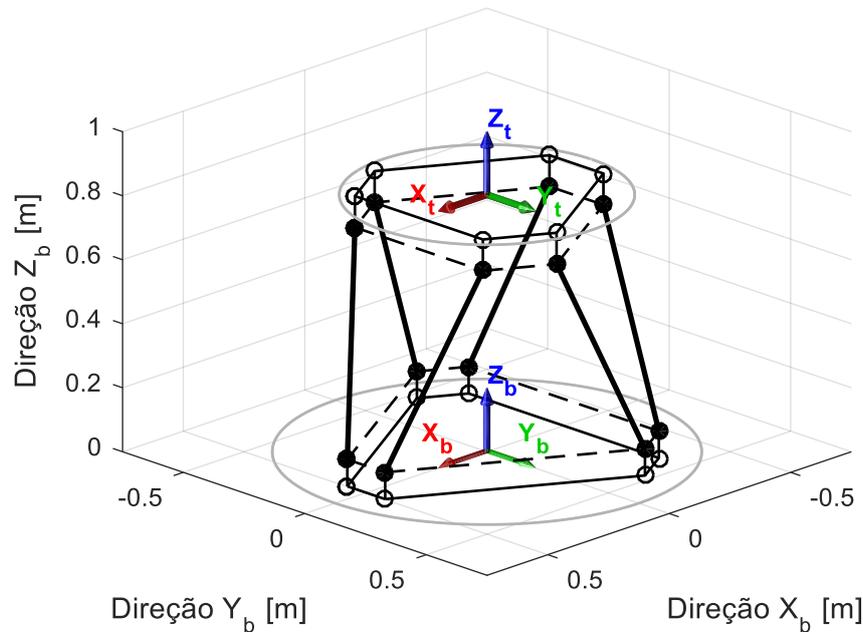


Figura 3.2 – Representação dos sistemas de coordenadas da plataforma.

A distância entre a origem do sistema de coordenadas da base até cada um dos seis pontos de rotação das juntas inferiores é descrita por um vetor de posição  $\mathbf{B}_i$ , referenciado ao sistema de coordenadas da base, conforme mostra a Figura 3.3. De forma similar, a distância entre a origem do sistema de coordenadas do topo até cada um dos pontos de rotação das juntas superiores é descrita por um vetor de posição  $\mathbf{T}_i^t$ , referenciado ao sistema de coordenadas do topo. O índice inferior direito  $i$  representa o número de identificação do atuador ligado à junta, podendo variar de 1 a 6. O índice superior direito é usado para indicar o sistema de coordenadas

ao qual um determinado vetor está referenciado,  $t$  refere-se ao sistema de coordenadas do topo e quando um índice superior está ausente, o termo refere-se ao sistema de coordenadas da base.

Conforme pode ser observado na Figura 3.3, as projeções dos vetores  $B_i$  no plano  $X_b Y_b$  estão inscritas em uma circunferência de raio  $r_b$ , e as projeções dos vetores  $T_i^t$  no plano  $X_t Y_t$  estão inscritas em uma circunferência de raio  $r_t$ . Os vetores são organizados em pares, de forma que os centros das projeções desses pares estão separados  $120^\circ$  entre si em relação à sua origem. As projeções dos vetores da base estão separadas por um ângulo  $\theta_b$  para cada lado, em relação ao centro do par. Da mesma forma, as projeções dos vetores do topo estão separadas por um ângulo  $\theta_t$  para cada lado em relação ao centro do respectivo par.

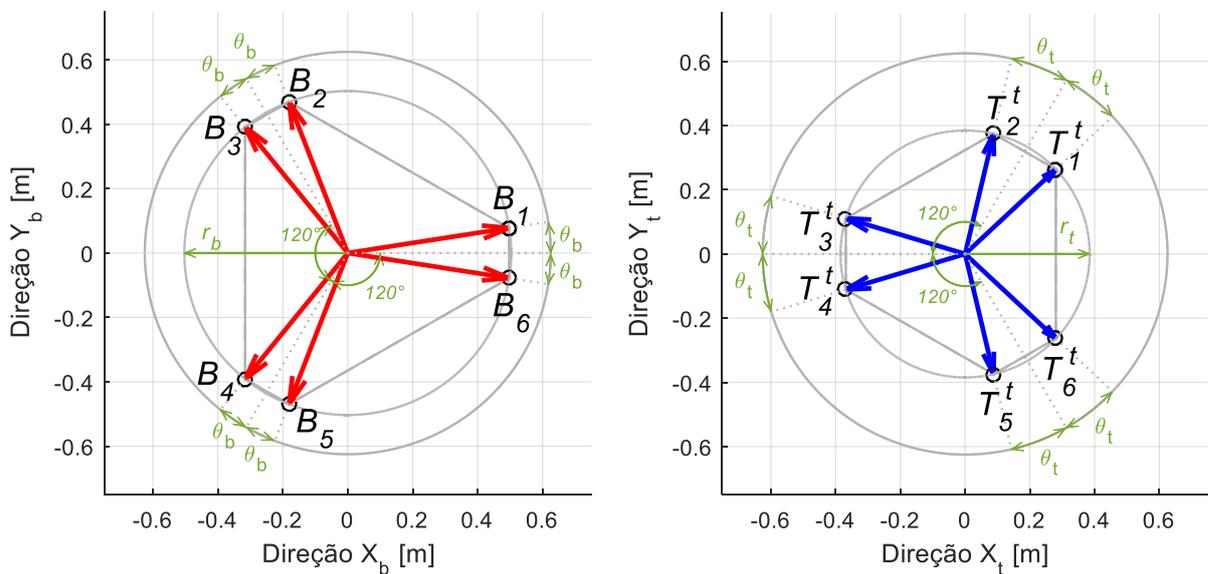


Figura 3.3 – Projeções dos vetores de coordenadas nos planos  $XY$ .

Conforme mencionado anteriormente, na Plataforma de Stewart utilizada no presente trabalho, os pontos de rotação das juntas inferiores se localizam um pouco acima do plano gerado pelos eixos  $X_b$  e  $Y_b$  do sistema de coordenadas da base, a esta distância será dado o nome  $z_b$ . Da mesma forma, a localização dos pontos de rotação das juntas superiores está um pouco abaixo do plano gerado pelos eixos  $X_t$  e  $Y_t$ , a esta distância será dado o nome  $z_t$ . Estas características podem ser observadas na Figura 3.4, na qual os vetores de coordenadas  $B_i$  e  $T_i^t$  são mostrados em perspectiva.

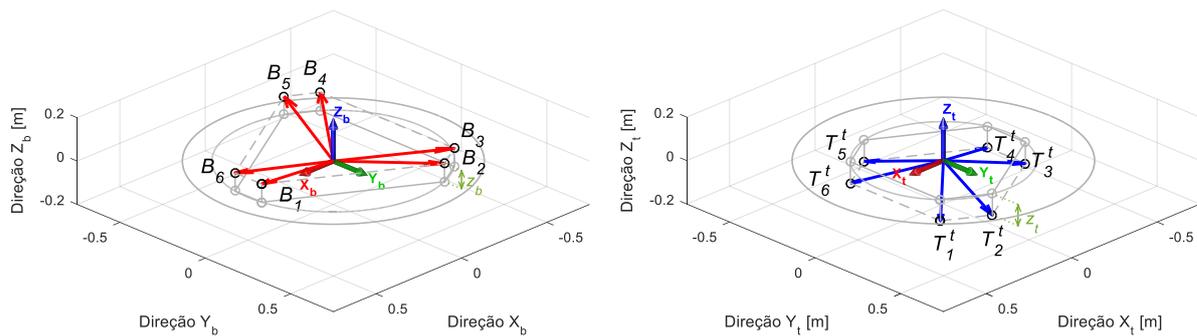


Figura 3.4 – Vetores de coordenadas em perspectiva.

Tendo em vista as descrições anteriores, pode-se definir os vetores  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  e  $\mathbf{T}_i^t \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  como seguem:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} B_{x_i} \\ B_{y_i} \\ B_{z_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_b \cos(\eta_i) \\ r_b \sin(\eta_i) \\ z_b \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde,  $\eta_i$  é o ângulo, expresso em radianos, para cada um dos pontos e é definido como  $\eta_i = \frac{2\pi}{6}(i-1) + \theta_b$ , para  $i = 1, 3, 5$ ,  $\eta_i = \frac{2\pi}{6}i - \theta_b$ , para  $i = 2, 4, 6$ , referenciado em relação ao sistema de coordenadas da base, e

$$\mathbf{T}_i^t = \begin{bmatrix} T_{x_i}^t \\ T_{y_i}^t \\ T_{z_i}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_t \cos(\lambda_i) \\ r_t \sin(\lambda_i) \\ -z_t \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde,  $\lambda_i$  é o ângulo, expresso em radianos, para cada um dos pontos e é definido como  $\lambda_i = \frac{2\pi}{6}i - \theta_b$ , para  $i = 1, 3, 5$ , e  $\lambda_i = \frac{2\pi}{6}(i-1) + \theta_b$ , para  $i = 2, 4, 6$ , referenciado em relação ao sistema de coordenadas do topo.

Para definir a Plataforma de Stewart geometricamente de forma completa ainda resta especificar o tamanho das pernas do manipulador. Pelo fato de as pernas do manipulador se tratarem de atuadores lineares, apenas dois parâmetros são necessários para defini-los: o comprimento mínimo das pernas,  $l_{min}$ , referente ao comprimento total do atuador quando o mesmo está totalmente recuado, e o comprimento máximo das pernas,  $l_{max}$ , referente ao comprimento total do atuador quando o mesmo está totalmente avançado. Neste caso, entende-se por comprimento total, a distância entre os centros das juntas do manipulador que estão ligadas às extremidades do atuador.

Os valores numéricos para os parâmetros definidos nessa seção são descritos no Capítulo 6, juntamente com os demais parâmetros do modelo matemático do manipulador.

### 3.3 Coordenadas no espaço de trabalho e de juntas

Para trabalhar com o controle de posição e trajetórias da Plataforma de Stewart, é necessário determinar formas de representar a posição e orientação do manipulador (pose). Uma determinada pose da Plataforma de Stewart pode ser representada de duas formas diferentes: *coordenadas no espaço de trabalho* ou *coordenadas no espaço de juntas*.

#### 3.3.1 Coordenadas no espaço de trabalho.

As coordenadas no espaço de trabalho são definidas pelo vetor  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ , na seguinte forma:

$$\mathbf{X} = [p_x \quad p_y \quad p_z \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma]^T, \quad (3.3)$$

onde,  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$ , são as coordenadas cartesianas da origem do sistema de coordenadas do topo em relação ao sistema de coordenadas da base, e  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os ângulos das rotações que seriam necessárias no sistema de coordenadas da base, para que este adquirisse a mesma orientação do sistema de coordenadas do topo. Em síntese, estas 3 primeiras coordenadas indicam a posição do topo da Plataforma de Stewart em relação à base e as 3 últimas, a sua inclinação em relação à base. Esta informação torna possível o planejamento de trajetórias para a execução de tarefas em que o manipulador interage com objetos dentro do seu volume de trabalho, que usualmente também é representado por um sistema de coordenadas cartesianas.

As rotações são aplicadas de forma consecutiva sob os eixos de coordenadas da base. A ordem das rotações é importante, pois um mesmo conjunto de ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  pode gerar uma pose diferente do manipulador, dependendo da ordem em que as rotações são aplicadas. Diferentes autores utilizam sequências de rotações diferentes. Por exemplo, Lebret et al., 1993, utilizam  $\mathbf{YXZ}$  e Kim et al., 2000, utilizam  $\mathbf{XYZ}$ . Esta sequência influencia diretamente na modelagem mecânica estática e dinâmica do manipulador, assim como nas posições de suas singularidades. Neste trabalho será utilizada a sequência de rotação  $\mathbf{XYZ}$ .

Para demonstrar o efeito das rotações consecutivas, a Figura 3.5 mostra dois sistemas de coordenadas intermediários, gerados em cada etapa da sequência de rotações. As linhas pontilhadas cinzas representam o sistema de coordenadas antes da rotação e as linhas pontilhadas pretas representam o sistema de coordenadas já rotacionado. No caso desta ilustração, as rotações aplicadas foram de  $0,2 \text{ rad}$ .

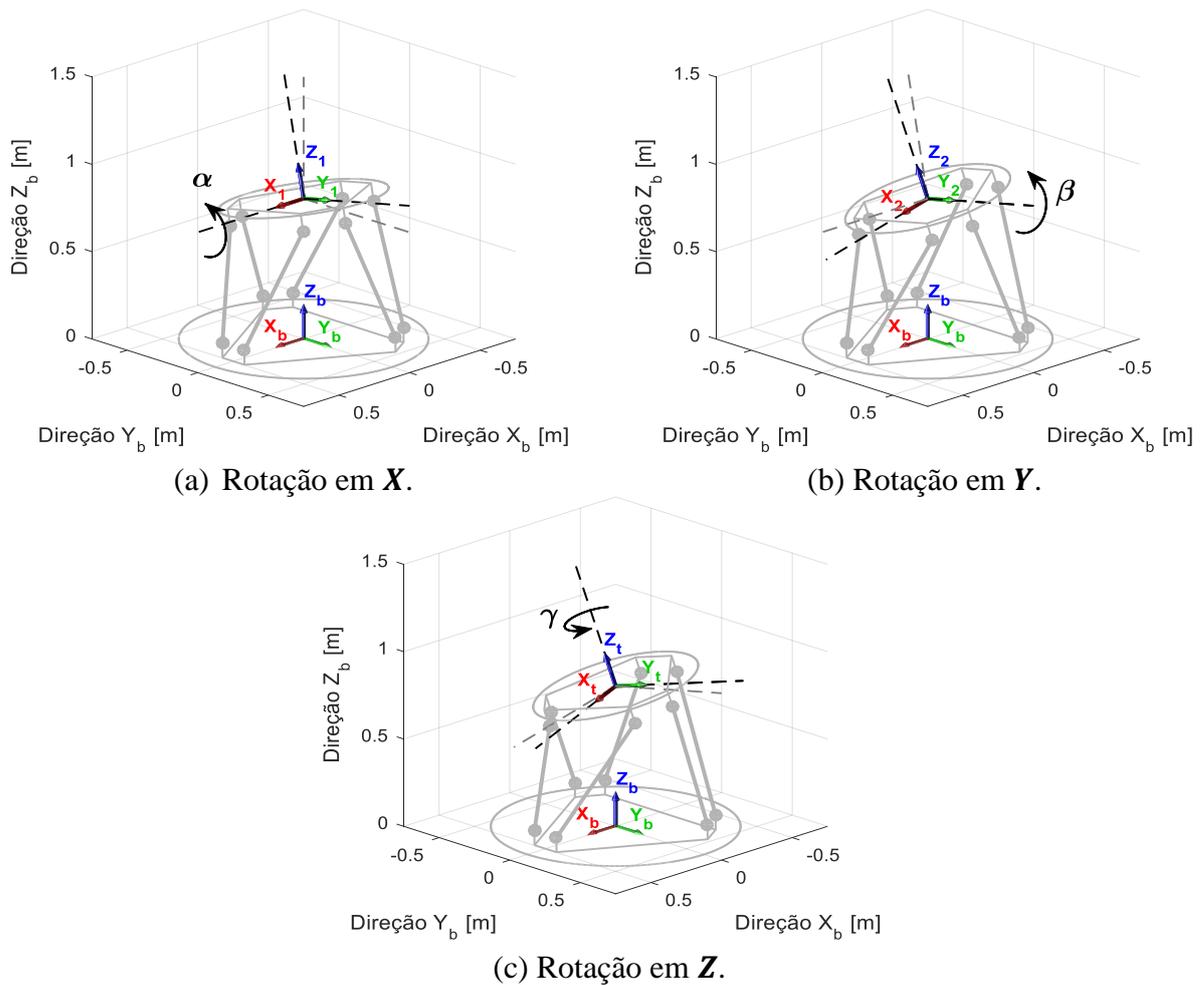


Figura 3.5 – Sequência de rotações do sistema de coordenadas.

Imaginando inicialmente o sistema de coordenadas da base com a sua origem deslocada para o centro da superfície superior do topo, rotaciona-se este por um ângulo  $\alpha$  em torno do seu eixo  $X_b$ , gerando assim o sistema  $X_1Y_1Z_1$ , conforme pode ser observado na Figura 3.5(a). Em seguida, uma rotação de valor  $\beta$  em torno do eixo  $Y_1$  é feita, rotacionando o sistema  $X_1Y_1Z_1$  e gerando o sistema  $X_2Y_2Z_2$  mostrado na Figura 3.5(b). Finalmente, o sistema  $X_2Y_2Z_2$  é rotacionado por um ângulo  $\gamma$  em torno do eixo  $Z_2$ , finalizando a sequência de rotações e gerando o sistema de coordenadas do topo  $X_tY_tZ_t$ .

### 3.3.2 Coordenadas no espaço de juntas.

A segunda forma de representar uma pose da Plataforma de Stewart é através da representação no espaço de juntas. Neste caso, as coordenadas de interesse são representadas

pelo conjunto de comprimentos das pernas do manipulador. As coordenadas no espaço de juntas são definidas por um vetor  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ , na seguinte forma:

$$\mathbf{q} = [L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad L_5 \quad L_6]^T, \quad (3.4)$$

onde,  $L_1$  a  $L_6$  são os comprimentos das 6 pernas do manipulador, respectivamente.

O sistema de coordenadas no espaço de juntas é utilizado no desenvolvimento do controlador, o qual, em sua configuração usual, necessita da informação do comprimento de cada perna, uma vez que esta informação está diretamente associada à de posição do pistão hidráulico que está sendo controlada (e medida pelo seu sensor de posição).

### 3.4 Matriz de rotação

A *matriz de rotação*, consiste de um arranjo (3×3) que pode ser utilizado como uma notação compacta para descrever a rotação de um corpo em respeito a um sistema de coordenadas de referência. Quando a rotação é feita em relação a apenas um dos eixos do sistema de coordenadas de referência, essa rotação é chamada de rotação elementar. As rotações elementares de ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  em torno dos eixos  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Z}$  respectivamente, são representadas pelas matrizes de rotação expressas por meio das equações 3.5, 3.6 e 3.7 a seguir:

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}; \quad (3.5)$$

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \text{sen}(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}; \quad (3.6)$$

$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\text{sen}(\gamma) & 0 \\ \text{sen}(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Uma matriz que representa a combinação sequencial destas três rotações, na ordem  $\mathbf{XYZ}$ , é definida pela multiplicação destas matrizes, conforme a Equação 3.8:

$$\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma). \quad (3.8)$$

Substituindo as equações 3.5, 3.6 e 3.7 em 3.8, após manipulação algébrica, obtém-se a Equação 3.9:

$$\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ c_\alpha s_\gamma + s_\alpha s_\beta c_\gamma & c_\alpha c_\gamma - s_\alpha s_\beta s_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ s_\alpha s_\gamma - c_\alpha s_\beta c_\gamma & s_\alpha c_\gamma + c_\alpha s_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde  $c_\alpha = \cos(\alpha)$ ,  $s_\alpha = \text{sen}(\alpha)$ ,  $c_\beta = \cos(\beta)$ ,  $s_\beta = \text{sen}(\beta)$ ,  $c_\gamma = \cos(\gamma)$  e  $s_\gamma = \text{sen}(\gamma)$ .

Através de uma pré-multiplicação por esta matriz, qualquer vetor oriundo do sistema de coordenadas do topo pode ser representado no sistema de coordenadas da base. Esta propriedade também funciona de forma análoga para sistemas de coordenadas intermediários e será explorada nas próximas seções no cálculo da cinemática e dinâmica do manipulador.

### 3.5 Análise cinemática

A análise cinemática do manipulador consiste no estudo e modelagem matemática das relações estáticas de posicionamento do manipulador. Conforme citado, uma mesma pose da Plataforma de Stewart pode ser representada tanto por um conjunto de coordenadas no espaço de juntas, quanto por um conjunto de coordenadas no espaço de trabalho. Devido às relações geométricas entre as duas formas de representar a pose do manipulador, é possível calcular o valor das coordenadas no espaço de juntas (comprimento dos atuadores) a partir de valores conhecidos para as coordenadas no espaço de trabalho (posição e orientação do topo). Esse cálculo resulta na chamada *cinemática inversa*. Quando são conhecidos os valores das coordenadas no espaço de juntas para uma determinada pose, o cálculo das respectivas coordenadas no espaço de trabalho é chamado de *cinemática direta*. O problema da cinemática direta para a Plataforma de Stewart é relativamente complicado, pois não é conhecida uma solução analítica de forma fechada, como ocorre no caso da cinemática inversa. Neste trabalho, será utilizada uma solução numérica para o cálculo da cinemática direta baseada na utilização do método Newton-Raphson para realização de aproximações sucessivas da solução a partir de uma estimativa inicial. Para aplicar esta técnica, será necessário calcular a Matriz Jacobiana do manipulador, que define as derivadas parciais entre coordenadas no espaço de juntas e coordenadas no espaço de trabalho. Através dessa matriz, também será possível avaliar as singularidades do manipulador, que consistem no conjunto de poses em que a correspondência entre velocidades e forças no espaço de juntas e de trabalho pode ser indefinida, gerando possibilidades de falhas no controle e operação do manipulador [Liu et al. 1993].

#### 3.5.1 Cinemática inversa

Para manipuladores paralelos, o cálculo da cinemática inversa possui uma única solução, o que normalmente não acontece com manipuladores seriais [Merlet, 2006]. No caso da Plataforma de Stewart, o cálculo da cinemática inversa determina o comprimento dos atuadores lineares para uma respectiva posição e orientação conhecida para o topo da

plataforma. Esse cálculo pode ser feito através de uma cadeia vetorial gerada entre o sistema de coordenadas da base, o sistema de coordenadas do topo e os pontos de rotação das juntas universais ou esféricas nas quais os atuadores estão ligados. A Figura 3.6 apresenta a representação gráfica da cadeia vetorial de um dos atuadores.

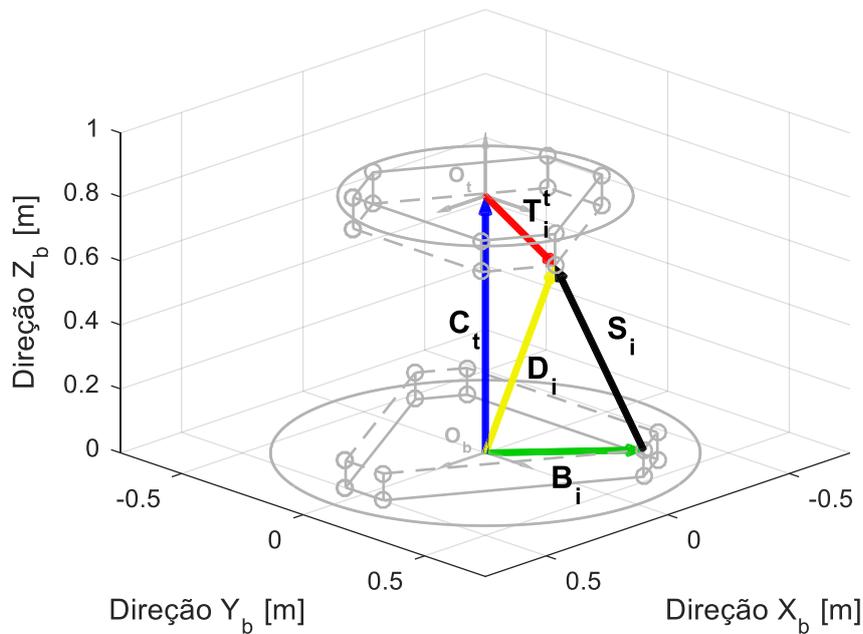


Figura 3.6 – Cadeia vetorial de uma das pernas do manipulador.

Na cadeia vetorial, o vetor  $\mathbf{C}_t = [p_x \ p_y \ p_z]^T$  representa a distância entre a origem do sistema de coordenadas da base ( $\mathbf{O}_b$ ) e a origem do sistema de coordenadas do topo ( $\mathbf{O}_t$ ), referenciado ao sistema de coordenadas da base. O vetor  $\mathbf{T}_i^t$  representa a distância entre  $\mathbf{O}_t$  e o ponto de rotação junta superior do  $i$ -ésimo atuador, em relação ao sistema de coordenadas do topo. As coordenadas deste vetor são fixas e conhecidas, e são definidas por meio da Equação 3.2. Para que este vetor seja representado em relação ao sistema de coordenadas da base, é necessário realizar a sua pré-multiplicação pela matriz de rotação  $\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)$ , apresentada na Equação 3.9. Somando o vetor  $\mathbf{C}_t$  com  $\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{T}_i^t$  (multiplicação que resulta em um vetor que representa  $\mathbf{T}_i^t$  em relação ao sistema de coordenadas da base), pode-se calcular o vetor  $\mathbf{D}_i$ , que representa a distância entre  $\mathbf{O}_b$  e o ponto de rotação da junta esférica superior do  $i$ -ésimo atuador. Esta relação se dá através da Equação 3.10:

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{C}_t(p_x, p_y, p_z) + \mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{T}_i^t. \quad (3.10)$$

Seguindo o outro lado da cadeia vetorial, o vetor  $\mathbf{B}_i$ , que também é fixo e conhecido, representa a distância entre  $\mathbf{O}_b$  e o ponto de rotação da respectiva junta inferior. O vetor  $\mathbf{S}_i$  representa o comprimento e orientação do  $i$ -ésimo atuador correspondente à distância entre os pontos de rotação das juntas inferior e superior do mesmo. Ambos os vetores são referenciados em relação ao sistema de coordenadas da base. Observando a cadeia vetorial, pode-se afirmar que a soma do vetor  $\mathbf{B}_i$  com o vetor  $\mathbf{S}_i$  também resulta no vetor  $\mathbf{D}_i$ , conforme a Equação 3.11:

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{B}_i + \mathbf{S}_i. \quad (3.11)$$

Substituindo a Equação 3.11 em 3.10 e isolando o termo  $\mathbf{S}_i$ , se obtém a Equação 3.12, a qual permite o cálculo do vetor  $\mathbf{S}_i$  em relação ao sistema de coordenadas da base:

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{T}_i^t + \mathbf{C}_t(p_x, p_y, p_z) - \mathbf{B}_i. \quad (3.12)$$

O valor do comprimento do  $i$ -ésimo atuador pode ser calculado através da norma do vetor  $\mathbf{S}_i$ , conforme a Equação 3.13:

$$L_i = \|\mathbf{S}_i\| = \sqrt{\mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{S}_i}. \quad (3.13)$$

### 3.5.2 Matriz Jacobiana

A *Matriz Jacobiana*,  $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ , é uma matriz de derivadas parciais que relaciona velocidades no espaço de juntas com velocidades no espaço de trabalho, conforme pode ser observado na Equação 3.14:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{X})\dot{\mathbf{X}}, \quad (3.14)$$

onde,  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{L}_1 \ \dot{L}_2 \ \dot{L}_3 \ \dot{L}_4 \ \dot{L}_5 \ \dot{L}_6]^T$  e  $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{p}_x \ \dot{p}_y \ \dot{p}_z \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]^T$ . Nota-se que a Matriz Jacobiana introduzida aqui, usualmente utilizada neste formato em robôs paralelos, tem a forma da clássica Matriz Jacobiana inversa utilizada em robôs seriais, pois quando multiplicada pelas velocidades do espaço de trabalho, resulta nas velocidades do espaço de juntas [Lebret et al., 1993]. A matriz  $\mathbf{J}(\mathbf{X})$  tem dimensões  $(6 \times 6)$  para o Manipulador Plataforma de Stewart e tem, em cada um de seus termos, a derivada parcial de uma das variáveis do espaço de junta em relação a uma das variáveis do espaço de trabalho, conforme a Equação 3.15.

$$J(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial p_x} & \frac{\partial L_1}{\partial p_y} & \frac{\partial L_1}{\partial p_z} & \frac{\partial L_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial L_1}{\partial \beta} & \frac{\partial L_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial L_2}{\partial p_x} & \frac{\partial L_2}{\partial p_y} & \frac{\partial L_2}{\partial p_z} & \frac{\partial L_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial L_2}{\partial \beta} & \frac{\partial L_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial L_3}{\partial p_x} & \frac{\partial L_3}{\partial p_y} & \frac{\partial L_3}{\partial p_z} & \frac{\partial L_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial L_3}{\partial \beta} & \frac{\partial L_3}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial L_4}{\partial p_x} & \frac{\partial L_4}{\partial p_y} & \frac{\partial L_4}{\partial p_z} & \frac{\partial L_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial L_4}{\partial \beta} & \frac{\partial L_4}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial L_5}{\partial p_x} & \frac{\partial L_5}{\partial p_y} & \frac{\partial L_5}{\partial p_z} & \frac{\partial L_5}{\partial \alpha} & \frac{\partial L_5}{\partial \beta} & \frac{\partial L_5}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial L_6}{\partial p_x} & \frac{\partial L_6}{\partial p_y} & \frac{\partial L_6}{\partial p_z} & \frac{\partial L_6}{\partial \alpha} & \frac{\partial L_6}{\partial \beta} & \frac{\partial L_6}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Para determinar as expressões matemáticas correspondentes aos termos da Equação 3.15, Lebet et al., 1993, propõem um método no qual a Matriz Jacobiana  $J(\mathbf{X})$  é dividida em  $J_1(\mathbf{X})$  e  $J_2(\mathbf{X})$ , sendo que  $J(\mathbf{X}) = J_1(\mathbf{X}) J_2(\mathbf{X})$ . A matriz  $J_1(\mathbf{X})$  relaciona as velocidades das coordenadas do espaço de juntas (velocidades de extensão ou retração dos atuadores) com as velocidades dos pontos de rotação das juntas superiores, representadas pelos vetores  $\dot{\mathbf{D}}_i$ . A matriz  $J_2(\mathbf{X})$  relaciona as velocidades dos pontos de rotação das juntas superiores com as velocidades das coordenadas do espaço de trabalho (velocidades cartesianas e angulares do topo da plataforma). As equações 3.16 e 3.17 representam essas relações:

$$\dot{\mathbf{q}} = J_1(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{D}}, \quad (3.16)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = J_2(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{X}}. \quad (3.17)$$

O vetor  $\dot{\mathbf{D}}$  tem dimensão  $(18 \times 1)$  e é definido pela concatenação vertical das derivadas temporais dos vetores  $\mathbf{D}_i$ , sendo  $i = 1, \dots, 6$ , ou seja,  $\dot{\mathbf{D}} = [\dot{\mathbf{D}}_1 \ \dot{\mathbf{D}}_2 \ \dot{\mathbf{D}}_3 \ \dot{\mathbf{D}}_4 \ \dot{\mathbf{D}}_5 \ \dot{\mathbf{D}}_6]^T$ . Neste caso,  $J_1(\mathbf{X})$  tem dimensões  $(6 \times 18)$  e  $J_2(\mathbf{X})$  tem dimensões  $(18 \times 6)$ .

Iniciando pelo cálculo da matriz  $J_2(\mathbf{X})$ , pode-se derivar os dois lados da Equação 3.10 para obter a Equação 3.18:

$$\dot{\mathbf{D}}_i = \dot{\mathbf{C}}_t(\dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z) + \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)) \mathbf{T}_i^t. \quad (3.18)$$

Os vetores  $\mathbf{T}_i^t$  têm valores constantes em relação ao tempo, se comportando portanto, como uma constante multiplicada à derivada da matriz de rotação. O vetor  $\dot{\mathbf{C}}_t$  não apresenta dificuldade no seu cálculo, por ser composto diretamente pelas derivadas  $\dot{p}_x$ ,  $\dot{p}_y$  e  $\dot{p}_z$ . Para calcular a derivada da matriz  $\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)$  é necessário aplicar a regra da cadeia para derivadas, originando a Equação 3.19:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)) & \tag{3.19} \\
&= \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha))\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma) + \mathbf{R}_x(\alpha)\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_y(\beta))\mathbf{R}_z(\gamma) \\
&+ \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_z(\gamma)).
\end{aligned}$$

As derivadas temporais das matrizes  $\mathbf{R}_x(\alpha)$ ,  $\mathbf{R}_y(\beta)$  e  $\mathbf{R}_z(\gamma)$  podem ser obtidas através do conceito da matriz anti-simétrica, apresentado em detalhe por Spong et al., 2005. Segundo esse método, a derivada de uma matriz rotacional para uma velocidade angular genérica pode ser determinada pela Equação 3.20:

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t))\mathbf{R}(t), \tag{3.20}$$

onde,  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t))$  é uma matriz anti-simétrica, definida pela Equação 3.21. O vetor  $\boldsymbol{\omega}(t)$  é composto pelas velocidades angulares do sistema de coordenadas que está rotacionando no instante  $t$ , em relação ao sistema referencial de coordenadas. Ele é composto por três componentes, na forma  $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ .

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Para calcular  $\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha))$ , utiliza-se a matriz anti-simétrica em relação ao vetor  $\boldsymbol{\omega}_\alpha(t) = [\dot{\alpha} \ 0 \ 0]^T$ , que pode ser reescrito da forma  $\boldsymbol{\omega}_\alpha(t) = \dot{\alpha}\mathbf{i}$ , sendo  $\mathbf{i} = [1 \ 0 \ 0]^T$ . Logo:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)) = \mathbf{S}(\dot{\alpha}\mathbf{i})\mathbf{R}_x(\alpha) = \mathbf{S}(\mathbf{i})\mathbf{R}_x(\alpha)\dot{\alpha}, \tag{3.22}$$

De forma análoga, podem-se obter as expressões 3.23 e 3.24 para  $\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_y(\beta))$  e  $\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_z(\gamma))$  a seguir:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_y(\beta)) = \mathbf{S}(\mathbf{j})\mathbf{R}_y(\beta)\dot{\beta}, \tag{3.23}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_z(\gamma)) = \mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}_z(\gamma)\dot{\gamma}, \tag{3.24}$$

onde,  $\mathbf{j} = [0 \ 1 \ 0]^T$  e  $\mathbf{k} = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

Substituindo as equações 3.22, 3.23 e 3.24 em 3.19, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)) & \tag{3.25} \\
&= \mathbf{S}(\mathbf{i})\mathbf{R}_x(\alpha)\dot{\alpha}\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma) + \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(\mathbf{j})\mathbf{R}_y(\beta)\dot{\beta}\mathbf{R}_z(\gamma) \\
&+ \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(\mathbf{k})\mathbf{R}_z(\gamma)\dot{\gamma}.
\end{aligned}$$

Substituindo a Equação 3.25 em 3.18 e reorganizando os termos, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}_i &= \dot{\mathbf{C}}_t(\dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z) + \mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_i^t \dot{\alpha} \\ &\quad + \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_i^t \dot{\beta} \\ &\quad + \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_i^t \dot{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Considerando  $\dot{\mathbf{C}}_t = [\dot{p}_x \ \dot{p}_y \ \dot{p}_z]^T$ , pode-se reorganizar a Equação 3.26 na sua forma matricial, que separa o vetor  $\mathbf{X}$  de coordenadas no espaço de trabalho, resultando na Equação 3.27:

$$\dot{\mathbf{D}}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_i^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_i^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_i^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Comparando a Equação 3.27 com a 3.17, pode-se perceber que a  $i$ -ésima linha  $\mathbf{J}_{2_i}(\mathbf{X})$  da matriz  $\mathbf{J}_2(\mathbf{X})$  pode ser definida pela Equação 3.28.

$$\mathbf{J}_{2_i}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_i^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_i^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_i^t \end{bmatrix}_{(3 \times 6)} \quad (3.28)$$

Logo, a matriz  $\mathbf{J}_2(\mathbf{X})$  pode ser definida por:

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_1^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_1^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_1^t \\ \mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_2^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_2^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_2^t \\ \mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_3^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_3^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_3^t \\ \mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_4^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_4^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_4^t \\ \mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_5^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_5^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_5^t \\ \mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_6^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_6^t & \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_6^t \end{bmatrix}_{(18 \times 6)}. \quad (3.29)$$

Resta agora desenvolver as equações para  $\mathbf{J}_1(\mathbf{X})$ . Este não exige cálculos tão complexos quanto os necessários para o cálculo de  $\mathbf{J}_2(\mathbf{X})$ . Para melhor compreensão do significado da matriz  $\mathbf{J}_1(\mathbf{X})$ , pode-se expandir a Equação 3.16 na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \\ \dot{L}_4 \\ \dot{L}_5 \\ \dot{L}_6 \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} = \mathbf{J}_1(\mathbf{X})_{(6 \times 18)} \begin{bmatrix} \dot{D}_1 \\ \dot{D}_2 \\ \dot{D}_3 \\ \dot{D}_4 \\ \dot{D}_5 \\ \dot{D}_6 \end{bmatrix}_{(18 \times 1)}. \quad (3.30)$$

Conforme já descrito,  $\dot{\mathbf{D}}_i$  representa um vetor ( $3 \times 1$ ) com as componentes cartesianas da velocidade do ponto de rotação da junta superior do  $i$ -ésimo atuador, em relação ao sistema de coordenadas da base. Estas velocidades podem ter componentes em todas as direções, em consequência da composição dos movimentos dos 6 atuadores ligados ao topo do manipulador. Entretanto, velocidades na direção do movimento longitudinal do próprio atuador, representadas por  $\dot{L}_i$ , só existem quando ocorre uma expansão ou retração do próprio atuador. A matriz  $J_1(\mathbf{X})$  relaciona as velocidades em todas as direções do ponto de rotação da junta superior ( $\dot{\mathbf{D}}_i$ ) com a velocidade do ponto de rotação da junta superior na própria direção do respectivo atuador. Esse cálculo é feito através de uma decomposição vetorial das velocidades  $\dot{\mathbf{D}}_i$ , na direção do vetor  $\mathbf{S}_i$ , conforme mostrado na Figura 3.6. Para isso, é definido um vetor unitário  $\mathbf{u}_i$ , de dimensões ( $1 \times 3$ ), que representa a orientação do vetor  $\mathbf{S}_i$  e pode ser calculado através da Equação 3.31.

$$\mathbf{u}_i = \left( \frac{\mathbf{S}_i}{\|\mathbf{S}_i\|} \right)^T \quad (3.31)$$

Para calcular a componente da velocidade  $\dot{\mathbf{D}}_i$  que existe na direção de  $\mathbf{S}_i$ , a Equação 3.32 é utilizada.

$$\dot{L}_i = \mathbf{u}_i \dot{\mathbf{D}}_i \quad (3.32)$$

Juntando as equações descritas acima para todos os 6 atuadores do manipulador, pode ser montada a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \\ \dot{L}_4 \\ \dot{L}_5 \\ \dot{L}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{u}_2 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{u}_3 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{u}_4 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{u}_5 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{u}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}}_1 \\ \dot{\mathbf{D}}_2 \\ \dot{\mathbf{D}}_3 \\ \dot{\mathbf{D}}_4 \\ \dot{\mathbf{D}}_5 \\ \dot{\mathbf{D}}_6 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Logo, comparando as equações 3.30 e 3.33, pode-se afirmar que a Matriz Jacobiana  $J_1(\mathbf{X})$  é definida por

$$J_1(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{u}_2 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{u}_3 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{u}_4 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{u}_5 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{u}_6 \end{bmatrix}_{(6 \times 18)}. \quad (3.34)$$

### 3.5.3 Cinemática direta

No contexto do desenvolvimento de controladores para Plataformas de Stewart, a cinemática direta é responsável por determinar a posição e orientação do topo da plataforma em relação à base, sem que seja necessário medir estas informações diretamente, apenas baseando-se nos comprimentos conhecidos dos atuadores  $L_1$  a  $L_6$ . Esse cálculo é necessário em sistemas de controle em que o espaço de trabalho é baseado em coordenadas cartesianas e os comprimentos das pernas são medidos por sensores de posição. Nestes sistemas, os comprimentos devem ser convertidos para a correspondente posição e orientação do topo da plataforma em coordenadas cartesianas, que então são comparadas com a configuração desejada especificada pelo usuário [Nguyen et al., 1993].

Considerando a Equação 3.12, se as coordenadas dos vetores  $\mathbf{S}_i$  fossem conhecidas, para  $i = 1, \dots, 6$ , um sistema de 18 equações e 12 incógnitas (9 para os termos da matriz  $\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)$  e 3 para o vetor  $\mathbf{C}_t(p_x, p_y, p_z)$ ) poderia ser criado e uma solução de forma fechada poderia ser obtida. As coordenadas  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  do topo da plataforma poderiam ser obtidas diretamente e os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  poderiam ser obtidos através da solução da cinemática inversa dos ângulos de Euler descrita por Spong et al., 2005, utilizando a matriz de rotação.

Entretanto, sensores para medir diretamente as coordenadas cartesianas dos vetores  $\mathbf{S}_i$  não são facilmente encontrados, ao contrário de sensores de posição como potenciômetros e sensores LVDT (*Linear Variable Differential Transformer*), que, usualmente, são itens de ampla comercialização. Por este motivo, em uma aplicação usual, apenas as informações dos comprimentos dos atuadores estarão disponíveis. Isso torna inviável o método de cálculo acima descrito, uma vez que não existe um único vetor possível  $\mathbf{S}_i$  para um determinado comprimento  $L_i$  medido. Devido a estes fatores, na maioria das aplicações é necessário utilizar um método numérico para resolução da cinemática direta de uma Plataforma de Stewart, uma vez que não é conhecida uma solução analítica em forma fechada para a mesma [Nguyen et al., 1993].

O problema da cinemática direta pode então ser descrito como sendo “encontrar um conjunto de coordenadas  $\mathbf{X}$  que faça a Equação 3.13 gerar um resultado muito próximo aos dos valores medidos pelos sensores”. Isso pode ser uma tarefa difícil, pois exige a resolução simultânea de um conjunto de 6 equações não-lineares com 6 incógnitas. Uma forma largamente utilizada para resolver sistemas de equações não lineares é utilizando métodos numéricos, entre eles, o método Newton-Raphson [Selig e Li, 2009], que será proposto nessa seção como forma de resolver o problema da cinemática direta.

O método Newton-Raphson é conhecido por ser uma forma rápida para encontrar uma boa aproximação para a raiz real de uma função  $f(x) = 0$ . O método utiliza a ideia de que uma função contínua e diferenciável pode ser aproximada por uma reta tangente a ela, representada pela derivada da função  $f(x)$ . Utilizando uma estratégia iterativa, pode-se, por meio de sucessivas aproximações, obter um valor próximo ao da raiz de interesse da equação. No caso de um sistema multivariável, a derivada é substituída por uma Matriz Jacobiana, que contém todas as derivadas parciais de cada função do sistema em relação a cada variável do vetor de incógnitas  $\mathbf{X}$ . Neste caso, é necessário definir 6 funções escalares  $f_1(\mathbf{X})$  a  $f_6(\mathbf{X})$ , para compor a função vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  que terá suas raízes calculadas pelo método numérico.

Primeiramente, assume-se que  $\mathbf{X}_r$  seja a raiz real para o sistema  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{X}_0$  seja uma estimativa para  $\mathbf{X}_r$ . Expandindo a série de Taylor de primeira ordem para a função vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  em  $\mathbf{X}_0$ , tem-se:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{J}_S(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0), \quad (3.35)$$

onde,  $\mathbf{J}_S(\mathbf{X}_0)$  é a Matriz Jacobiana do sistema de equações, que representa as derivadas parciais de  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  em relação a  $\mathbf{X}$ , quando o mesmo sistema se encontra no estado  $\mathbf{X}_0$ . Substituindo  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_r$  e considerando  $\mathbf{F}(\mathbf{X}_r) = \mathbf{0}$ , podem-se rearranjar os termos da Equação 3.35 para obter Equação 3.36:

$$\mathbf{X}_r \approx \mathbf{X}_0 - \mathbf{J}_S(\mathbf{X}_0)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0). \quad (3.36)$$

Da Equação 3.36, pode-se gerar a fórmula iterativa do algoritmo de Newton-Raphson:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \mathbf{J}_S(\mathbf{X}_k)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{X}_k), \quad (3.37)$$

na qual  $k$  representa o índice identificador da iteração. Deve-se, então, definir a função vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ , sua Matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_S(\mathbf{X})$ , e a forma do vetor  $\mathbf{X}$ , lembrando que o método Newton-Raphson encontra uma aproximação para os valores de um vetor  $\mathbf{X}$  que leva a função  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  a um valor aproximadamente  $\mathbf{0}$ .

No caso da cinemática direta, deseja-se encontrar os valores  $p_x, p_y, p_z, \alpha, \beta$  e  $\gamma$  de uma determinada pose do manipulador, que sejam correspondentes aos comprimentos medidos  $L_{1_m}, L_{2_m}, L_{3_m}, L_{4_m}, L_{5_m}$  e  $L_{6_m}$  dos atuadores nesta mesma pose, conhecidos e medidos pelos sensores de deslocamento das pernas do manipulador. Como citado anteriormente, não se dispõe de um equacionamento analítico fechado que permita calcular diretamente os valores de  $p_x, p_y, p_z, \alpha, \beta$  e  $\gamma$ , entretanto, é possível utilizar a cinemática inversa do manipulador para comparar se uma estimativa inicial  $p_{x_0}, p_{y_0}, p_{z_0}, \alpha_0, \beta_0$  e  $\gamma_0$  resulta em valores aproximados aos dos comprimentos  $L_{1_c}, L_{2_c}, L_{3_c}, L_{4_c}, L_{5_c}$  e  $L_{6_c}$  calculados por meio da cinemática inversa, quando comparados aos valores medidos  $L_{1_m}, L_{2_m}, L_{3_m}, L_{4_m}, L_{5_m}$  e  $L_{6_m}$ . O algoritmo mantém

o processo iterativo até que a estimativa para a pose do manipulador forneça resultados para os comprimentos obtidos através da cinemática inversa com valores suficientemente próximos dos valores medidos pelos sensores.

Baseado nisto, Yang et al. , 2009, propõem a seguinte função:

$$f_i(\mathbf{X}) = L_{i_c}(\mathbf{X}) - L_{i_m}, \quad (3.38)$$

sendo  $i = 1, \dots, 6$ , na qual  $L_{i_m}$  é o valor medido pelos sensores para o comprimento da  $i$ -ésima perna do atuador, e  $L_{i_c}(\mathbf{X})$  é o valor do comprimento calculado iterativamente para a  $i$ -ésima perna do manipulador, dependente dos valores da estimativa  $p_{x_k}, p_{y_k}, p_{z_k}, \alpha_k, \beta_k$  e  $\gamma_k$ , onde  $k$  é o índice identificador da iteração. É importante destacar que o valor  $L_{i_m}$  é constante, pois não varia (não é atualizado) enquanto as iterações do algoritmo estão ocorrendo. Já o valor  $L_{i_c}(\mathbf{X})$  varia, pois é atualizado a cada iteração. Baseando-se nesta função escolhida, o vetor de incógnitas  $\mathbf{X}$  escolhido para ser estimado pelo algoritmo é definido como  $\mathbf{X} = [p_x \ p_y \ p_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$ , semelhante ao vetor  $\mathbf{X}$  apresentado na Equação 3.3, que é o resultado esperado para o cálculo da cinemática direta.

Logo, utilizando as equações 3.12 e 3.13, que definem a cinemática inversa do manipulador, pode-se escrever a Equação 3.38 na forma:

$$f_i(\mathbf{X}) = \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{T}_i^t + \mathbf{C}_t(p_x, p_y, p_z) - \mathbf{B}_i\| - L_{i_m}. \quad (3.39)$$

Utilizando a Equação 3.39, a função  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  pode ser obtida na sua forma vetorial, conforme a Equação 3.40:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{X}) \\ f_2(\mathbf{X}) \\ f_3(\mathbf{X}) \\ f_4(\mathbf{X}) \\ f_5(\mathbf{X}) \\ f_6(\mathbf{X}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{T}_1^t + \mathbf{C}_t(p_x, p_y, p_z) - \mathbf{B}_1\| - L_{1_m} \\ \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{T}_2^t + \mathbf{C}_t(p_x, p_y, p_z) - \mathbf{B}_2\| - L_{2_m} \\ \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{T}_3^t + \mathbf{C}_t(p_x, p_y, p_z) - \mathbf{B}_3\| - L_{3_m} \\ \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{T}_4^t + \mathbf{C}_t(p_x, p_y, p_z) - \mathbf{B}_4\| - L_{4_m} \\ \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{T}_5^t + \mathbf{C}_t(p_x, p_y, p_z) - \mathbf{B}_5\| - L_{5_m} \\ \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{T}_6^t + \mathbf{C}_t(p_x, p_y, p_z) - \mathbf{B}_6\| - L_{6_m} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

A matriz  $\mathbf{J}_S(\mathbf{X})$ , como descrito anteriormente, é composta pelas derivadas parciais de  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  em relação a  $\mathbf{X}$ . Segundo a Equação 3.38, as funções  $f_i(\mathbf{X})$  têm um componente dependente de  $\mathbf{X}$  e outro não. Ao contrário do componente  $L_{i_c}(\mathbf{X})$ , o componente  $L_{i_m}$  não varia de uma iteração para a outra, portanto, não apresenta influência na derivada parcial da função  $f_i(\mathbf{X})$  em relação a  $\mathbf{X}$ . Apenas o componente  $L_{i_c}(\mathbf{X})$  contribui na derivada parcial, sendo este componente semelhante à relação entre coordenadas de trabalho e de juntas do manipulador calculadas na Seção 3.5.1. Logo, pode-se deduzir que as relações de derivadas parciais também

são iguais e concluir que  $J_S(\mathbf{X})$  se torna igual à matriz  $J(\mathbf{X})$  da Equação 3.15, calculada na Seção 3.5.2.

Finalmente, baseando-se nas considerações feitas até o momento, pode-se reescrever a Equação 3.37 para obter a equação iterativa do algoritmo Newton-Raphson para a cinemática direta da Plataforma de Stewart na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} p_{x_{k+1}} \\ p_{y_{k+1}} \\ p_{z_{k+1}} \\ \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \\ \gamma_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{x_k} \\ p_{y_k} \\ p_{z_k} \\ \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{bmatrix} - J(\mathbf{X}_k)^{-1} \begin{bmatrix} \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)\mathbf{T}_1^t + \mathbf{C}_t(p_{x_k}, p_{y_k}, p_{z_k}) - \mathbf{B}_1\| - L_{1m} \\ \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)\mathbf{T}_2^t + \mathbf{C}_t(p_{x_k}, p_{y_k}, p_{z_k}) - \mathbf{B}_2\| - L_{2m} \\ \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)\mathbf{T}_3^t + \mathbf{C}_t(p_{x_k}, p_{y_k}, p_{z_k}) - \mathbf{B}_3\| - L_{3m} \\ \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)\mathbf{T}_4^t + \mathbf{C}_t(p_{x_k}, p_{y_k}, p_{z_k}) - \mathbf{B}_4\| - L_{4m} \\ \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)\mathbf{T}_5^t + \mathbf{C}_t(p_{x_k}, p_{y_k}, p_{z_k}) - \mathbf{B}_5\| - L_{5m} \\ \|\mathbf{R}_{xyz}(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)\mathbf{T}_6^t + \mathbf{C}_t(p_{x_k}, p_{y_k}, p_{z_k}) - \mathbf{B}_6\| - L_{6m} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

A solução para o sistema pode não ser única, ou então não convergente, principalmente em momentos que a Matriz Jacobiana do manipulador esteja próxima ou em uma singularidade. Este é um importante motivo para analisar as posições de singularidade de  $J(\mathbf{X})$  [Wang et al., 2019].

Para aumentar as chances de convergência e diminuir o tempo de processamento, Abo-Shanab, 2014, e McAree e Daniel, 1996, sugerem utilizar a última posição do manipulador como estimativa inicial no algoritmo. Isso garante que a estimativa inicial esteja próxima da raiz, uma vez que posições consecutivas são próximas durante a execução da trajetória do manipulador. Conforme comentado, o algoritmo continua as iterações até que um erro máximo tolerado seja atingido entre o valor real do comprimento de cada perna e o valor estimado pela cinemática inversa. Em aplicações práticas, Selig e Li, 2009, recomendam que o valor tolerado para o erro seja determinado por um valor próximo à resolução de medição dos sensores dos deslocamentos das pernas.

Embora não seja possível garantir que o método convirja para qualquer estimativa inicial, de acordo com simulações feitas por Nguyen et al., 1991, todas as estimativas iniciais diferentes de zero testadas por meio de simulações em seu trabalho convergiram para a solução correta. O autor informa que acredita que talvez essa seja uma propriedade do Manipulador Plataforma de Stewart. As simulações realizadas no âmbito do presente trabalho também levam às mesmas conclusões de Nguyen.

### 3.5.4 Singularidades

Conforme comentado, a Matriz Jacobiana ( $6 \times 6$ ) introduzida na Equação 3.14 define um mapeamento das relações entre as velocidades no espaço de trabalho com as velocidades no espaço de juntas. A Equação 3.15 deixa implícito que todas as possíveis velocidades no espaço de juntas são combinações lineares das colunas da Matriz Jacobiana. Entretanto, uma vez que o espaço de juntas  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^6$ , é necessário que a Matriz Jacobiana tenha 6 colunas linearmente independentes para que seja possível obter qualquer velocidade arbitrária no espaço de juntas [Spong et al., 2005]. De forma semelhante, a mesma condição é necessária para que a Matriz Jacobiana seja inversível e seja possível se obter qualquer velocidade arbitrária no espaço de trabalho  $\mathbf{X}$  através de uma combinação linear das colunas de  $\mathbf{J}(\mathbf{X})^{-1}$ .

O número de linhas ou colunas linearmente independentes de uma matriz é determinado pelo posto da matriz. No caso do Manipulador Plataforma de Stewart, quando o posto da Matriz Jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{X})$  é igual a 6, a Matriz Jacobiana tem 6 colunas linearmente independentes. Entretanto, o posto de uma matriz não é necessariamente constante, na verdade, o posto da Matriz Jacobiana depende da pose  $\mathbf{X}$  do manipulador. Poses em que o posto de  $\mathbf{J}(\mathbf{X})$  é menor que o seu máximo são chamadas *singularidades* ou *configurações singulares*. Um exemplo de singularidade bem conhecida do Manipulador Plataforma de Stewart acontece quando o topo da plataforma está paralelo à base e está rotacionado  $90^\circ$  em relação a ela [Liu et al., 1993].

Segundo Merlet, 2006, em configurações singulares, os manipuladores paralelos perdem a sua capacidade de rigidez e o efetuador passa a ter graus de liberdade que não se podem controlar. Um dos tipos de singularidade acontece quando existe um vetor não nulo de velocidades cartesianas para o qual as velocidades das juntas é zero. Na vizinhança dessa configuração, o efetuador tem a possibilidade de ter um movimento infinitesimal enquanto os atuadores estão travados (como, nessa situação o efetuador deveria estar travado também, é dito que o robô “ganha” graus de liberdade). Existem casos em que nenhuma força ou torque no espaço cartesiano pode ser transformado para o espaço de juntas, isto é, a plataforma fica sem capacidade de controle nestes casos. Já foi sugerido que utilizar atuadores redundantes no manipulador poderia resolver esse problema, mas, na prática, a redundância apenas troca as singularidades originais de lugar, não removendo as singularidades. Portanto, estudar as singularidades é importante para aplicações práticas [Liu et al., 1993].

Quando o robô está sujeito a posicionamentos nas proximidades de posições singulares, alguns problemas podem acontecer:

- Problemas de controle: a pose do efetuador não é mais controlável pois algumas direções de movimento não podem ser obtidas.
- Problemas de segurança: nestas situações, pequenas velocidades no espaço de juntas podem corresponder a grandes velocidades no espaço de trabalho e elementos do robô podem ser submetidos a grandes forças, podendo causar problemas estruturais no robô.

É importante verificar se o espaço de trabalho do robô é livre de singularidades, assim como verificar se as trajetórias planejadas podem ser atingidas. Para se determinar as singularidades de uma Matriz Jacobiana, pode-se explorar a propriedade de que uma matriz é singular quando o seu determinante é igual a zero.

### 3.6 Análise dinâmica

Nesta seção é feito um estudo sobre as equações da dinâmica do Manipulador Plataforma de Stewart. Estas equações permitem o cálculo das forças necessárias a serem aplicadas pelos atuadores para que um determinado perfil de deslocamento, velocidade e aceleração seja obtido. Uma solução em forma fechada será desenvolvida baseando-se em um passo-a-passo descrito por Lebret et al., 1993, que desenvolveram o modelo dinâmico para uma Plataforma de Stewart com sequência de rotações  $YXZ$ . O método é baseado na formulação de Euler-Lagrange descrita por Spong et al., 2005, e por Siciliano et al., 2009. No presente trabalho, a sequência de rotações é do tipo  $XYZ$  e o resultado obtido no desenvolvimento das equações dinâmicas é em grande parte semelhante ao descrito por Kim et al., 2000, entretanto, alguns coeficientes encontrados apresentam diferenças em relação aos da bibliografia citada.

#### 3.6.1 Formulação de Euler-Lagrange

Spong et al., 2005, demonstram que o procedimento de cálculo do modelo dinâmico segundo a formulação de Euler-Lagrange consiste em: (1) calcular a energia cinética ( $K$ ) e a energia potencial gravitacional ( $P$ ) das partes móveis do manipulador em função de um conjunto de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = [q_1 \quad \dots \quad q_n]^T$ ; e (2) desenvolver as equações de Euler-Lagrange usando:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad (3.42)$$

onde,  $i = 1, \dots, n$ ;  $n$  é a ordem do sistema, determinada pelo número de coordenadas generalizadas  $q_i$  necessárias para descrever a evolução do sistema ao longo do tempo;  $L$  é a função de Lagrange, definida pela Equação 3.43; e  $\tau_i$  é a força ou torque a ser aplicado ao corpo que gera movimento no sentido da coordenada generalizada  $q_i$ . No caso de manipuladores seriais,  $\tau_i$  é normalmente aplicado diretamente pelo atuador da junta  $i$ . Já, no caso de manipuladores paralelos, as energias cinética e potencial são mais facilmente calculadas em função das coordenadas do espaço de trabalho, em vez das coordenadas do espaço de juntas. Por este motivo, se torna necessária uma transformação das forças e torques através da Matriz Jacobiana nestes manipuladores. Esta característica será detalhada na Seção 3.6.2.

$$L = K - P \quad (3.43)$$

Substituindo a Equação 3.43 em 3.42, pode-se expandir e reescrever a Equação 3.42 na forma vetorial:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \left( \frac{\partial K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right) = \boldsymbol{\tau}, \quad (3.44)$$

onde,  $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K$  e  $P(\mathbf{q}) = P$ .

A energia potencial gravitacional não depende das velocidades, logo  $\frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$ , resultando na equação

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}. \quad (3.45)$$

A resolução da Equação 3.45 para todos os graus de liberdade do robô pode ser manipulada e reorganizada para resultar na equação da dinâmica de um manipulador na sua forma clássica:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (3.46)$$

Para reorganizar os o resultado da Equação 3.45 na forma de 3.46, é necessário determinar quais termos da primeira equação serão parte de cada um dos termos da segunda.

A matriz  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  é a matriz de massa do manipulador e pode ser obtida diretamente da expressão da energia cinética

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.47)$$

e o termo gravitacional pode ser obtido através da expressão da energia potencial gravitacional  $P(\mathbf{q})$ , uma vez que

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3.48)$$

A matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  é composta pelos chamados termos de força centrífuga e de Coriolis, e não é tão simples de ser calculada. Uma das formas de realizar este cálculo é primeiramente resolver as equações 3.47 e 3.48 para determinar os termos  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ . Após isso, deve-se resolver a Equação 3.45 e isolar os termos dessa equação que são equivalentes a  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  calculados anteriormente, os termos que restarem são equivalentes ao termo  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ . Este método não exige um número elevado de cálculos, entretanto, apenas o valor da multiplicação  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  é obtida, possibilitando diferentes fatorações dos termos  $c_{ij}$  da matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  que satisfaçam o resultado obtido para  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ .

Nos casos em que algoritmos de controle são derivados a partir do modelo dinâmico do manipulador, existe uma escolha específica da matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  que facilita a prova da estabilidade do controlador. Esta escolha específica de  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  faz com que a matriz

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.49)$$

resulte em uma matriz anti-simétrica. Isso significa que para qualquer vetor  $\boldsymbol{\omega}$  de dimensões  $(n \times 1)$ , a relação

$$\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (3.50)$$

é verdadeira. Esta propriedade permitirá posteriormente a prova de estabilidade do sistema de controle através do critério de estabilidade de Lyapunov. Os termos  $c_{ij}$  da matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  que satisfaz a condição acima citada podem ser calculados através dos chamados símbolos de Christoffel do primeiro tipo, definidos por Siciliano et al., 2009, como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k, \quad (3.51)$$

onde,

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right), \quad (3.52)$$

e os termos  $b_{ij}$  são os termos  $m_{ij}$  da matriz de massa  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ .

### 3.6.2 Características do Manipulador Plataforma de Stewart

No caso de manipuladores paralelos, ao contrário do caso dos manipuladores seriais, as equações dinâmicas são geralmente menos difíceis de serem obtidas no espaço de trabalho do que no espaço de juntas [Lebret et al., 1993]. Por este motivo, em vez de utilizar o formato apresentado na Equação 3.46, neste trabalho procura-se obter as equações na forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{X})\boldsymbol{\tau}, \quad (3.53)$$

onde,

$$\boldsymbol{\tau} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6]^T, \quad (3.54)$$

e  $f_i$  é a força aplicada pelo atuador da perna  $i$  da plataforma. Nota-se que, neste caso, é necessária a utilização de uma pré-multiplicação do vetor  $\boldsymbol{\tau}$  por  $\mathbf{J}^T(\mathbf{X})$ , uma vez que essa operação transforma as contribuições das forças  $f_1$  a  $f_6$  (que têm o mesmo sentido de atuação dos atuadores), em forças e torques equivalentes nos sentidos de atuação do vetor  $\mathbf{X}$  (sentidos de  $p_x, p_y, p_z, \alpha, \beta$  e  $\gamma$ ).

O cálculo das matrizes descritas na Equação 3.53 pode envolver as características de massa de todas as partes móveis da Plataforma de Stewart. Entretanto, neste trabalho, optou-se por apenas considerar a dinâmica do topo da plataforma. A dinâmica das pernas do manipulador será desprezada, uma vez que a massa dos atuadores é muito menor do que a do topo da plataforma. Esta simplificação é adotada também por outros autores, como Kim et al., 2000, e Davliakos e Papadopoulos, 2008.

Li e Salcudean, 1997, utilizaram um manipulador de Stewart de dimensões semelhantes ao utilizado neste trabalho, o qual possuía uma massa de aproximadamente 140 kg para o topo da plataforma e aproximadamente 15 kg para cada perna. Vários testes e simulações foram feitas, considerando ou desprezando a dinâmica das pernas do manipulador, e as forças demandadas dos atuadores foram analisadas. Foi concluído que para uma trajetória senoidal típica no manipulador descrito, a dinâmica das pernas representa menos de 10% da força total exigida dos atuadores. Portanto, para simplificar o modelo matemático e otimizar o tempo computacional dos algoritmos de controle, a dinâmica das pernas pode ser negligenciada sem que haja grandes perdas de precisão do modelo.

### 3.6.3 Energia cinética e energia potencial gravitacional

Conforme citado, o método para avaliação da energia cinética e potencial descrito por Lebret et al., 1993, desenvolvido para um manipulador com sequência de rotações  $\mathbf{YXZ}$ , foi adaptado para a sequência de rotações  $\mathbf{XYZ}$ . A energia cinética do sistema é calculada considerando apenas a energia cinética do topo da plataforma, uma vez que as contribuições das pernas são desprezadas. O equacionamento para esta energia é dividido em duas partes, relativas ao movimento translacional e ao movimento rotacional, resultando na Equação 3.55:

$$K = K_{trans} + K_{rot}. \quad (3.55)$$

A energia cinética relativa ao movimento translacional pode ser obtida pela soma das energias cinéticas dos movimentos nas 3 direções de translação, conforme a Equação 3.56:

$$K_{trans} = \frac{1}{2}m(\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2 + \dot{p}_z^2), \quad (3.56)$$

onde  $m$  é a massa do topo da plataforma.

A energia cinética rotacional tem um cálculo relativamente mais complexo do que a translacional e pode ser calculada por meio da Equação 3.57:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_t^T \mathbf{I}_t \mathbf{\Omega}_t, \quad (3.57)$$

onde  $\mathbf{\Omega}_t$  é o vetor de velocidades angulares da plataforma móvel em relação ao sistema de coordenadas  $\mathbf{X}_t\mathbf{Y}_t\mathbf{Z}_t$  do topo da plataforma, e  $\mathbf{I}_t$  é o tensor de inércia do topo da plataforma na forma

$$\mathbf{I}_t = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

O cálculo de  $\mathbf{\Omega}_t$  em função das velocidades angulares do vetor de coordenadas generalizadas  $\dot{\mathbf{X}}$  envolve a utilização das matrizes relativas às rotações apresentadas na Figura 3.5. Primeiramente, calcula-se o vetor  $\mathbf{\Omega}_b$  de velocidades angulares do topo da plataforma em relação ao sistema de coordenadas da base. Observando a Figura 3.5, percebe-se que para gerar o sistema de coordenadas  $\mathbf{X}_t\mathbf{Y}_t\mathbf{Z}_t$ , rotaciona-se o sistema  $\mathbf{X}_b\mathbf{Y}_b\mathbf{Z}_b$  em torno de  $\mathbf{X}_b$  por uma quantidade  $\alpha$ , em seguida se rotaciona o sistema  $\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{Z}_1$  (resultante da rotação anterior) em torno de  $\mathbf{Y}_1$  por uma quantidade  $\beta$ , e finalmente se rotaciona o sistema  $\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_2$  (resultante das rotações anteriores) em torno de  $\mathbf{Z}_2$  por uma quantidade  $\gamma$ . Portanto, a velocidade  $\dot{\alpha}$  é aplicada sobre o eixo  $\mathbf{X}_b$ , a velocidade  $\dot{\beta}$  é aplicada sobre o eixo  $\mathbf{Y}_1$  e a velocidade  $\dot{\gamma}$  é aplicada sobre o eixo  $\mathbf{Z}_2$ . Para que as contribuições destas 3 velocidades sejam representadas em relação ao sistema de coordenadas da base,  $\mathbf{Y}_1$  necessita ser pré-multiplicado por  $\mathbf{R}_x(\alpha)$  (matriz que representa a rotação que originou o sistema  $\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{Z}_1$ ), e  $\mathbf{Z}_2$  necessita ser pré-multiplicado por  $\mathbf{R}_x(\alpha)$  e  $\mathbf{R}_y(\beta)$  (matrizes que representam as rotações que originaram o sistema  $\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_2$ ). A Equação 3.59 apresenta a expressão resultante das transformações descritas acima:

$$\mathbf{\Omega}_b = \mathbf{X}_b\dot{\alpha} + \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{Y}_1\dot{\beta} + \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{Z}_2\dot{\gamma}, \quad (3.59)$$

onde,  $\mathbf{X}_b$ ,  $\mathbf{Y}_1$  e  $\mathbf{Z}_2$  são os vetores dos sistemas de coordenadas apresentados na Figura 3.5, representados em seus próprios sistemas de coordenadas, portanto,  $\mathbf{X}_b = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{Y}_1 = [0 \ 1 \ 0]^T$  e  $\mathbf{Z}_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

Uma vez conhecido o vetor  $\mathbf{\Omega}_b$ , é possível calcular  $\mathbf{\Omega}_t$  através da rotação inversa de  $\mathbf{\Omega}_b$ , conforme é descrito na Equação 3.60:

$$\mathbf{\Omega}_t = \mathbf{R}_z(\gamma)^T \mathbf{R}_y(\beta)^T \mathbf{R}_x(\alpha)^T \mathbf{\Omega}_b. \quad (3.60)$$

Substituindo 3.59 em 3.60, obtém-se a Equação 3.61 para o cálculo de  $\mathbf{\Omega}_t$ .

$$\mathbf{\Omega}_t = \mathbf{R}_z(\gamma)^T \mathbf{R}_y(\beta)^T \mathbf{R}_x(\alpha)^T \mathbf{X}_b \dot{\alpha} + \mathbf{R}_z(\gamma)^T \mathbf{R}_y(\beta)^T \mathbf{Y}_1 \dot{\beta} + \mathbf{R}_z(\gamma)^T \mathbf{Z}_2 \dot{\gamma} \quad (3.61)$$

Substituindo na Equação 3.61 as coordenadas dos vetores e as matrizes de rotação 3.5, 3.6 e 3.7 transpostas, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_t = & \begin{bmatrix} c_\gamma & s_\gamma & 0 \\ -s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & -s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & s_\alpha \\ 0 & -s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\alpha} \\ & + \begin{bmatrix} c_\gamma & s_\gamma & 0 \\ -s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & -s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\beta} \\ & + \begin{bmatrix} c_\gamma & s_\gamma & 0 \\ -s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\gamma} = \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta \\ -s_\gamma c_\beta \\ s_\beta \end{bmatrix} \dot{\alpha} + \begin{bmatrix} s_\gamma \\ c_\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\beta} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Realizando a fatoração de  $\mathbf{\Omega}_t$  em uma forma matricial em função das coordenadas generalizadas  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  e  $\dot{\gamma}$ , obtém-se a Equação 3.63.

$$\mathbf{\Omega}_t = \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & s_\gamma & 0 \\ -s_\gamma c_\beta & c_\gamma & 0 \\ s_\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Agora é possível substituir as equações 3.58 e 3.63 em 3.57 para obter a Equação 3.64 para a energia cinética rotacional em função das coordenadas generalizadas  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  e  $\dot{\gamma}$ .

$$\begin{aligned} K_{rot} = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & -s_\gamma c_\beta & s_\beta \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & s_\gamma & 0 \\ -s_\gamma c_\beta & c_\gamma & 0 \\ s_\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x c_\beta^2 c_\gamma^2 + I_y c_\beta^2 s_\gamma^2 + I_z s_\beta^2 & (I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma & I_z s_\beta \\ (I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma & I_x s_\gamma^2 + I_y c_\gamma^2 & 0 \\ I_z s_\beta & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Finalmente, é possível calcular a energia cinética total, somando energia translacional e energia rotacional através da substituição de 3.56 e 3.64 em 3.55, e fatorando o resultado em função do vetor de coordenadas generalizadas  $\mathbf{X}$ , resultando na expressão da Equação 3.65.

$$K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{p}_x & \dot{p}_y & \dot{p}_z & \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x c_\beta^2 c_\gamma^2 + I_y c_\beta^2 s_\gamma^2 + I_z s_\beta^2 & (I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma & I_z s_\beta \\ 0 & 0 & 0 & (I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma & I_x s_\gamma^2 + I_y c_\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z s_\beta & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

A energia potencial gravitacional do topo da plataforma possui um cálculo bem mais simples do que a energia cinética. A mesma pode ser expressa através da Equação 3.66. A equação não apresenta o valor exato da energia potencial pelo fato de que o sistema de coordenadas do topo da plataforma não ter a sua origem no centro de massa do conjunto. Entretanto, a análise numérica apresentada no Apêndice A demonstra que a distância que separa os 2 pontos referidos acima é de apenas 12,3 mm para este manipulador, visto que este valor é muitas vezes menor do que a amplitude dos movimentos pretendidos para este estudo e que a maior contribuição na energia potencial gravitacional é dada pela variação da posição do centro de massa e não do seu valor absoluto, essa distância será desprezada.

$$P = mgp_z. \quad (3.66)$$

### 3.6.4 Formulação de Euler-Lagrange para o Manipulador Plataforma de Stewart

Uma vez conhecidas as expressões para a energia cinética e energia potencial gravitacional da Plataforma de Stewart, é possível resolver as equações de Euler-Lagrange definidas pela Equação 3.45 e encontrar a solução da dinâmica na forma da Equação 3.46.

O procedimento desenvolvido consiste em primeiramente utilizar as equações 3.65 e 3.66 para obter as derivadas parciais da Equação 3.45 e então classificar os termos obtidos entre: (1) termos dependentes de derivadas de segunda ordem de variáveis do vetor de coordenadas generalizadas; (2) termos dependentes de derivadas de primeira ordem de variáveis do vetor de coordenadas generalizadas; e (3) termos independentes das variáveis do vetor de coordenadas generalizadas. O desenvolvimento das equações, separação dos termos, fatoração das matrizes e obtenção dos resultados que serão apresentados a seguir, estão detalhadamente descritos no Apêndice B.

A primeira classificação apresentada se refere aos termos referentes a  $\mathbf{M}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}}$ . Neste caso, o resultado obtido permite uma única fatoração possível para a matriz  $\mathbf{M}(\mathbf{X})$ , apresentada na Equação 3.67. A matriz  $\mathbf{M}(\mathbf{X})$  também poderia ser obtida comparando a Equação 3.65 com a Equação 3.47, gerando o mesmo resultado.

$$\mathbf{M}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x c_\beta^2 c_\gamma^2 + I_y c_\beta^2 s_\gamma^2 + I_z s_\beta^2 & (I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma & I_z s_\beta \\ 0 & 0 & 0 & (I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma & I_x s_\gamma^2 + I_y c_\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z s_\beta & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

A segunda classificação apresentada se refere aos termos de a  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}}$ . Neste caso, existem termos que são multiplicados simultaneamente pelas derivadas de primeira ordem de mais de uma variável do vetor de coordenadas generalizadas, fazendo com que exista mais de uma fatoraçoão possível para a matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ . Entretanto, neste trabalho busca-se uma fatoraçoão específica que garanta a anti-simetria da matriz  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ . Para tanto, serão utilizadas as equações 3.51 e 3.52, que definem os chamados termos de Christoffel, para representar os termos da matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  que possuam múltiplas soluçoões. O resultado obtido para a matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  é expresso pela equaçoão

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_1\dot{\beta} + K_2\dot{\gamma} & K_1\dot{\alpha} + K_5\dot{\beta} + K_3\dot{\gamma} + K_6\dot{\gamma} & K_2\dot{\alpha} + K_3\dot{\beta} + K_6\dot{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & -K_1\dot{\alpha} + K_3\dot{\gamma} - K_6\dot{\gamma} & K_4\dot{\gamma} & K_3\dot{\alpha} + K_4\dot{\beta} - K_6\dot{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & -K_2\dot{\alpha} - K_3\dot{\beta} + K_6\dot{\beta} & -K_3\dot{\alpha} - K_4\dot{\beta} + K_6\dot{\alpha} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

onde,

$$K_1 = -c_\beta s_\beta (c_\gamma^2 I_x + s_\gamma^2 I_y - I_z), \quad (3.69)$$

$$K_2 = -c_\beta^2 c_\gamma s_\gamma (I_x - I_y), \quad (3.70)$$

$$K_3 = \frac{1}{2} C_\beta (c_\gamma - s_\gamma)(c_\gamma + s_\gamma)(I_x - I_y), \quad (3.71)$$

$$K_4 = c_\gamma s_\gamma (I_x - I_y), \quad (3.72)$$

$$K_5 = -c_\gamma s_\gamma s_\beta (I_x - I_y), \quad (3.73)$$

$$K_6 = \frac{1}{2} I_z c_\beta. \quad (3.74)$$

A prova da anti-simetria da matriz  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  obtida é apresentada no Apêndice C.

Finalmente, a terceira classificação apresentada, se refere aos termos equivalentes a  $\mathbf{G}(\mathbf{X})$ , os quais, quando representados na sua forma vetorial, resultam na Equaçoão 3.75.

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = [0 \quad 0 \quad mg \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.75)$$

Com isto, a Equaçoão 3.53, da dinâmica do manipulador, se torna completamente definida.

## 4 MODELAGEM MATEMÁTICA DO ATUADOR HIDRÁULICO

No Capítulo 3, foi apresentado o desenvolvimento dos modelos matemáticos cinemático e dinâmico da parte mecânica de um MPS. Como já explicado anteriormente, o principal objetivo do modelo apresentado é possibilitar, via algoritmo de controle, o cálculo da força necessária em cada junta do MPS para que as acelerações das trajetórias desejadas sejam alcançadas. O controlador proposto, que está apresentado no Capítulo 5, utiliza um procedimento de cálculo para obter o valor de força necessário a ser aplicado nas juntas, de forma que o erro do seguimento de trajetória tenda a zero à medida que o tempo avança.

As forças são aplicadas nas juntas do MPS por meio de um conjunto válvula + pistão hidráulico. Este conjunto é usualmente denominado como *atuador hidráulico*. Assim, cada atuador hidráulico gera uma força hidráulica que é aplicada nas juntas do MPS a partir de um sinal de tensão elétrica que é aplicado a cada válvula. Para o desenvolvimento e implantação do controlador, é necessário dispor de um modelo matemático que contemple suas principais características. Assim, neste capítulo será apresentado o desenvolvimento do modelo matemático do atuador hidráulico, incluindo todos os aspectos necessários para o projeto e implementação do controle por Torque Calculado. Posteriormente, no Capítulo 6, será apresentada a identificação experimental dos parâmetros desse modelo.

### 4.1 Características de sistemas hidráulicos

Segundo Linsingen, 2008, um sistema hidráulico é definido por “um conjunto de elementos físicos convenientemente associados que, utilizando um fluido como meio de transferência de energia, permite a transmissão e controle de forças e movimentos”.

Em um sistema hidráulico completo para controle de posição, observa-se a presença de um componente que realiza a conversão de energia mecânica em energia hidráulica e outro que realiza a conversão de energia hidráulica em energia mecânica novamente. No presente trabalho, estes componentes são, respectivamente, uma bomba hidráulica e os pistões hidráulicos presentes no MPS. Para que estas conversões de energia sejam controláveis, é necessária a utilização de dispositivos capazes de controlar ou limitar os valores de variáveis como forças, velocidades, pressões, vazões, torques, etc. Dependendo da aplicação e do esquema de controle, pode ser necessário o uso de válvulas hidráulicas e sensores para medição de variáveis como pressão, deslocamento, temperatura e vazão [De Negri, 2001]. A Figura 4.1

apresenta o esquema básico de um circuito hidráulico segundo as normas de representação diagramática ISO 1219-1 e ISO 1219-2.

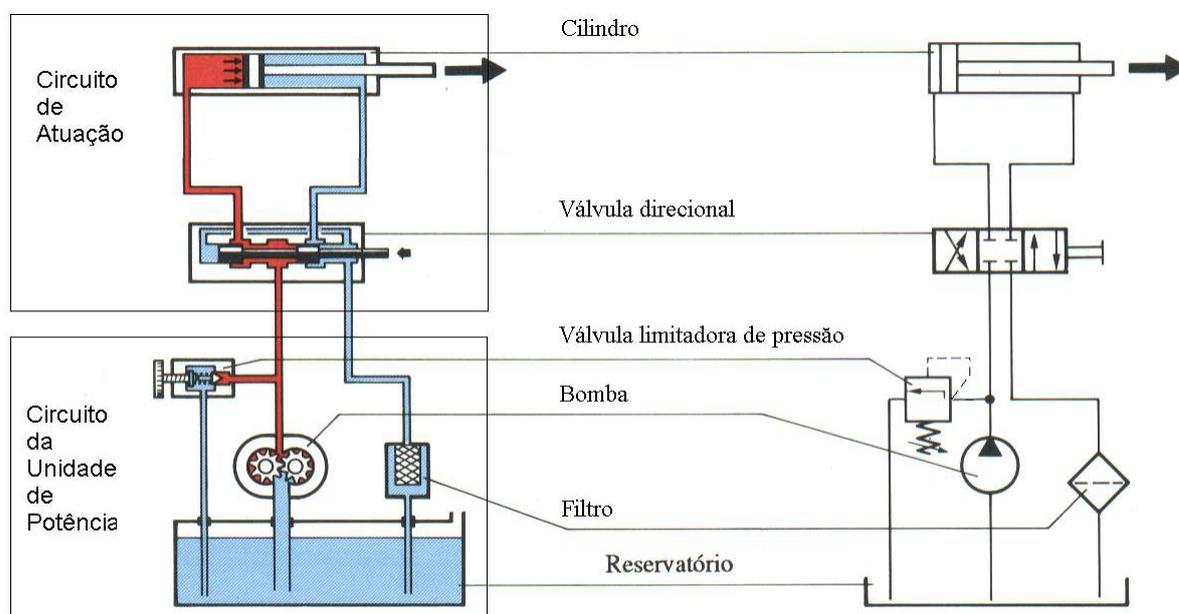


Figura 4.1 – Estrutura básica de um circuito hidráulico [Fonte: adaptado de BOSCH, 1989, apud De Negri, 2001].

Segundo De Negri, 2001, o circuito hidráulico apresentado na Figura 4.1 pode ser dividido em duas partes: o circuito de atuação e o circuito da unidade de potência. O componente que faz a conversão da energia mecânica (usualmente o torque gerado no eixo de um motor elétrico ou de combustão interna, em aplicações de hidráulica móbil) em energia hidráulica é a bomba hidráulica. A bomba, juntamente com o reservatório, filtro e válvula limitadora de pressão, compõem o circuito da unidade de potência. O elemento que faz a conversão da energia hidráulica em mecânica é o cilindro hidráulico, que faz parte do circuito de atuação juntamente com a válvula direcional. No circuito de atuação também podem existir outros dispositivos, como, por exemplo, sensores de pressão nas entradas das câmaras dos pistões.

Em Valente, 2016, destaca-se que atuadores hidráulicos apresentam vantagens importantes em relação aos demais, como alta velocidade de resposta, elevada rigidez e grande capacidade de carga. Dentre as desvantagens, são destacados os altos custos dos componentes, a menor disponibilidade de potência hidráulica em relação à potência elétrica e a possibilidade de ocorrer vazamento do fluido utilizado. Cunha, 2001, destaca também que atuadores hidráulicos apresentam uma elevada relação força/dimensão, característica importante em

aplicações que exigem manipulação de grandes cargas. Além disso, são dispositivos capazes de operar sob regimes contínuos, intermitentes, de reversão e parada repentina, sem avarias.

O presente estudo é desenvolvido considerando o circuito de atuação de um MPS composto por 6 atuadores hidráulicos e seus respectivos sensores de posição e de pressão. Os 6 conjuntos compartilham o mesmo sistema de potência, o qual é composto por uma unidade hidráulica completa, responsável por fornecer fluido à pressão de alimentação do circuito.

## 4.2 Descrição do funcionamento do atuador hidráulico

Nesta seção, é apresentada a modelagem matemática completa de um atuador hidráulico. O sistema em questão é composto por um pistão hidráulico de haste simples e uma válvula direcional proporcional de centro fechado. A Figura 4.2 apresenta uma representação gráfica do atuador hidráulico, onde estão representadas as principais variáveis físicas que serão utilizadas na execução da modelagem matemática.

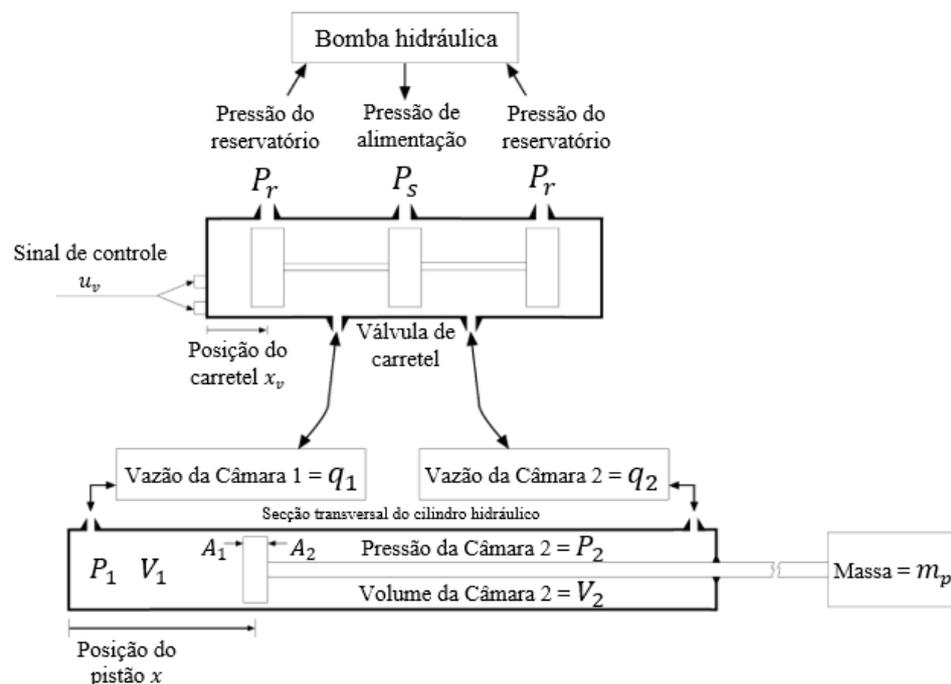


Figura 4.2 – Visão geral do atuador hidráulico.

O funcionamento e análise de servoatuadores hidráulicos estão documentados em Merritt, 1967. Segundo Cunha, 2001, pode-se afirmar que a bomba hidráulica fornece óleo a uma pressão de suprimento  $P_s$ , a qual é responsável por uma cadeia de eventos que pode

deslocar o óleo para dentro ou fora das duas câmaras do cilindro hidráulico. Dependendo da posição do carretel da válvula, a pressão  $P_s$  pode ser conectada com a Câmara 1 ou Câmara 2 do pistão. Devido à construção mecânica da válvula e de seu carretel, quando alguma das câmaras é pressurizada, a outra é conectada ao tanque, que está submetido à pressão de retorno  $P_r$  mais baixa do que a pressão de suprimento. As pressões  $P_1$  e  $P_2$  dentro das câmaras 1 e 2 serão sempre menores ou iguais a  $P_s$  e maiores ou iguais a  $P_r$ , caso não haja interferência de uma força externa aplicada sobre a massa conectada à haste do pistão. Para a descrição a seguir, considera-se que não existe força externa atuando sobre a massa.

No caso de um deslocamento positivo na posição do carretel, a pressão de suprimento  $P_s$  é conectada à Câmara 1 através de um orifício de área variável, proporcional ao deslocamento do carretel. A diferença de pressão entre  $P_s$  e  $P_1$  dentro da Câmara 1 gera uma vazão  $q_1$  no orifício da válvula no sentido de enchimento da Câmara 1, a intensidade dessa vazão depende da área do orifício e desta diferença entre as pressões. A vazão  $q_1$ , neste caso, gera uma variação positiva na pressão  $P_1$ , enquanto o limite  $P_s$  não é alcançado. A Câmara 2 apresenta uma pressão  $P_2$  que tende a ser menor, pelo fato de a câmara estar conectada ao tanque com pressão de retorno  $P_r$  através do outro orifício da válvula.

A diferença de pressão nas duas câmaras gera uma força hidráulica sobre o êmbolo móvel do pistão. O valor desta força resultante está relacionado com a diferença entre os produtos da pressão de cada câmara com as áreas de contato da pressão com o êmbolo em cada câmara (área  $A_1$  para a Câmara 1 e área  $A_2$  para Câmara 2). Esta característica permite que seja possível gerar grandes valores de força em um atuador quando utilizadas pressões elevadas de suprimento.

No caso de deslocamento negativo na posição do carretel, o mesmo processo acontece no sentido contrário, aumentando a pressão  $P_2$  em vez de  $P_1$ , gerando assim uma força hidráulica no sentido oposto.

A força hidráulica pode ocasionar um deslocamento  $x$  na haste do pistão que está conectada com a massa  $m$ , dependendo do somatório de forças aplicadas a esse sistema. Esse deslocamento do êmbolo muda o volume interno das câmaras do pistão, influenciando nas vazões nos orifícios, e, por consequência, na dinâmica das pressões das câmaras. Portanto, é esperado observar variações de pressão nas câmaras dependendo não somente da abertura da válvula, mas também da resultante de forças aplicadas à haste do pistão e do seu deslocamento. Estes fenômenos poderão ser observados em detalhe no Capítulo 6.

### **4.3 Modelagem matemática do atuador hidráulico**

Para se obter o modelo matemático não-linear do conjunto hidráulico, divide-se o modelo em duas partes: válvula e cilindro. O equacionamento da relação entre as variáveis dos componentes é derivado das leis da física que regem os fenômenos físicos observados. A união das equações das duas partes resulta no modelo utilizado neste trabalho. Os passos seguidos para a divisão do equacionamento do modelo são semelhantes aos seguidos por Cunha, 2001, Valdiero, 2005, e Pereira, 2006. Entretanto, algumas simplificações serão feitas baseadas no trabalho de Sohl e Bobrow, 1999, consistindo basicamente em aglutinações de constantes, não acarretando em perda de informação no modelo. Elas serão importantes para a implementação dos algoritmos de identificação experimental que estão apresentados no Capítulo 6.

#### **4.3.1 Equação do acionamento da válvula direcional proporcional**

Segundo De Negri, 2001, são chamadas “válvulas de controle contínuo direcional” as válvulas que promovem o direcionamento do fluido com uma vazão proporcional a um sinal de acionamento (comando). Este sinal de acionamento pode ser de diferentes naturezas como mecânica (alavanca ou pedal), pneumática, hidráulica ou elétrica.

Válvulas com acionamento elétrico utilizam dispositivos eletromecânicos, como motores ou solenoides, para fazer a movimentação do carretel. Quando comparado com outros tipos, o acionamento elétrico apresenta uma maior limitação de força, tornando mais difícil vencer as forças contrárias geradas pelo escoamento do fluido nos orifícios de passagem [Furst e De Negri, 2002, apud Pereira, 2006].

As válvulas de controle contínuo direcional são classificadas como servoválvulas ou como válvulas direcionais proporcionais. Servoválvulas surgiram primeiro, sendo muito utilizadas em aplicações que exigem precisão e respostas rápidas. Majoritariamente, o acionamento das servoválvulas é feito em 2 estágios, onde o primeiro é composto por um motor elétrico empregado como piloto que aciona um segundo estágio de natureza mecânica. O segundo estágio utiliza a própria pressão hidráulica do sistema para gerar as forças de acionamento do carretel. No caso de válvulas direcionais proporcionais, normalmente o acionamento é feito por um par de solenoides proporcionais, os quais são capazes de gerar forças para deslocar o carretel para um lado ou para o outro, sendo usualmente acionados um de cada vez. O equilíbrio de forças é dado pela soma das forças dos solenoides com a força de mola que tende a posicionar o carretel à posição central. Esse mecanismo resulta em um

controle contínuo do posicionamento do carretel. O uso de solenoides em válvulas direcionais proporcionais fornece maiores potências de acionamento para o deslocamento do carretel quando comparado com o uso de motores elétricos, entretanto, limita a largura de banda da resposta em frequência da válvula [Pereira, 2006].

Valdiero, 2005 e Pereira, 2006, modelam a dinâmica do acionamento do carretel da válvula direcional proporcional como uma dinâmica de 2ª ordem. Esta dinâmica determina a relação entre a tensão elétrica de entrada da válvula com o deslocamento efetivo do carretel. A expressão matemática que representa esta dinâmica de 2ª ordem está representada pela Equação 4.1:

$$x_v(s) = \frac{K_v \omega_v^2}{s^2 + 2\xi_v \omega_v s + \omega_v^2} u_v(s), \quad (4.1)$$

onde,  $x_v$  é a posição do carretel [m],  $K_v$  é uma constante de proporcionalidade da válvula  $\left[\frac{m}{V}\right]$ ,  $\omega_v$  é a frequência natural da válvula  $\left[\frac{rad}{s}\right]$ ,  $\xi_v$  é a razão de amortecimento da válvula e  $u_v$  representa a tensão de controle (sinal de entrada) da válvula [V].

A ordem deste comportamento é derivada do sistema massa-mola-amortecedor que compõe o carretel. Se o circuito elétrico do solenoide fosse incluído, o modelo resultante seria de 3ª ordem [Valdiero, 2005].

Segundo Pereira, 2006, os parâmetros  $\xi_v$  e  $\omega_v$  podem ser obtidos de forma experimental ou por meio de catálogos, a partir da curva de resposta da válvula para entradas em degrau ou a partir do gráfico de resposta em frequência (gráfico de Bode).

De acordo com Valdiero, 2005, a escolha de um modelo para a dinâmica da eletroválvula depende dos seus aspectos construtivos, devendo ser adequado às suas características de resposta dinâmica. Em casos em que a dinâmica do carretel é considerada suficientemente rápida em relação às demais dinâmicas do sistema completo, esta pode ser desprezada. Segundo Sohl e Bobrow, 1999, casos pesquisados na bibliografia nos quais os pesquisadores incluíram a dinâmica do carretel em seus modelos mostraram apenas uma pequena melhora nos resultados.

No MPS utilizado neste trabalho, são utilizadas válvulas direcionais proporcionais da marca Parker, série D1FP. Embora fosse usualmente esperada uma resposta em frequência deste tipo de válvula inferior à de servoválvulas, segundo o catálogo da empresa fabricante, a tecnologia patenteada de acionamento do atuador alcança a resposta em frequência semelhante a de servoválvulas [Parker Hannifin, 2020]. Por esse motivo, e considerando que as trajetórias

executadas neste trabalho não terão frequência maior que 1 Hz, é assumido, neste modelo, que a posição do carretel é diretamente proporcional à tensão aplicada à válvula.

Logo, utiliza-se para a válvula a relação proporcional:

$$x_v = K_v u_v. \quad (4.2)$$

Desta forma, considera-se que, a partir de um sinal de tensão de controle da válvula, o carretel se move instantaneamente de forma proporcional ao sinal. O valor de  $K$  será aglutinado com outras constantes no modelo. No Capítulo 6, o modelo proposto será identificado experimentalmente.

### 4.3.2 Equação da vazão nos orifícios da válvula direcional

Segundo Valente, 2016, faz-se uso da equação de Bernoulli para modelar a vazão nos orifícios da válvula. Em Merritt, 1967, está apresentado o desenvolvimento deste equacionamento, o qual relaciona a vazão de um orifício com a diferença das pressões a montante e a jusante dele. Este modelo é desenvolvido desconsiderando os possíveis vazamentos internos da válvula.

Considera-se que uma vazão positiva ocorre quando a câmara está enchendo, e uma vazão negativa quando a câmara se esvazia. Assim, tem-se para as vazões nas duas câmaras as seguintes equações:

$$q_1 = \begin{cases} C_d A_{o1} \sqrt{\frac{2(P_s - P_1)}{\rho}}, & x_v \geq 0 \\ C_d A_{o2} \sqrt{\frac{2(P_1 - P_r)}{\rho}}, & x_v < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

e

$$q_2 = \begin{cases} -C_d A_{o3} \sqrt{\frac{2(P_2 - P_r)}{\rho}}, & x_v \geq 0 \\ -C_d A_{o4} \sqrt{\frac{2(P_s - P_2)}{\rho}}, & x_v < 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

onde,  $q_1$  é a vazão na direção da Câmara 1  $\left[\frac{m^3}{s}\right]$ ,  $q_2$  é a vazão na direção da Câmara 2  $\left[\frac{m^3}{s}\right]$ ,  $C_d$  é o coeficiente de descarga nos orifícios de controle,  $A_{oi(i=1,2,3,4)}$  são as áreas dos orifícios de passagem  $[m^2]$ ,  $\rho$  é a massa específica do óleo  $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ ,  $P_s$  é a pressão de suprimento  $[Pa]$ ,  $P_1$  é a pressão na Câmara 1  $[Pa]$ ,  $P_2$  é a pressão na Câmara 2  $[Pa]$  e  $P_r$  é a pressão de retorno  $[Pa]$ .

O valor do coeficiente de descarga  $C_d$  pode depender de vários fatores e, em geral, não é fornecido pelos fabricantes, tornando complicada a sua utilização nas equações acima [Pereira, 2006]. Mesmo quando este parâmetro é fornecido ou pode ser calculado, valores mais precisos podem ser obtidos com testes experimentais [Sohl e Bobrow, 1999]. No Capítulo 6, o comportamento do coeficiente de vazão será analisado com maior detalhamento.

As áreas dos orifícios de passagem de óleo  $A_{oi}$  possuem uma área que é determinada pelo deslocamento do carretel da válvula, como pode ser observado por meio da Figura 4.3.

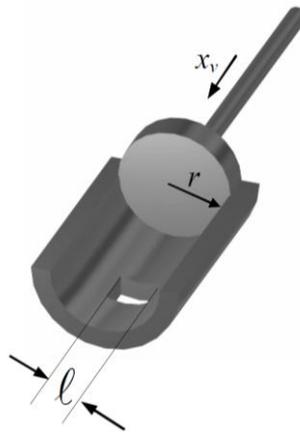


Figura 4.3 – Esquema representativo da cavidade de uma câmara da válvula [Perondi, 2002].

Deriva-se então a equação da área aproximada do orifício de passagem:

$$A_{oi} = l_i x_v, \quad (4.5)$$

onde,  $l_i$  é a largura do orifício  $i$  [m].

Como consequência, juntando as equações 4.2 e 4.5 com as equações de vazão 4.3, 4.4, tem-se:

$$q_1 = \begin{cases} C_d l_1 K_v \sqrt{\frac{2}{\rho}} u_v \sqrt{P_s - P_1}, & u_v \geq 0 \\ C_d l_2 K_v \sqrt{\frac{2}{\rho}} u_v \sqrt{P_1 - P_r}, & u_v < 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

e

$$q_2 = \begin{cases} -C_d l_3 K_v \sqrt{\frac{2}{\rho}} u_v \sqrt{P_2 - P_r}, & u_v \geq 0 \\ -C_d l_4 K_v \sqrt{\frac{2}{\rho}} u_v \sqrt{P_s - P_2}, & u_v < 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Para realizar a identificação experimental do sistema, todas as constantes que se multiplicam podem ser aglutinadas em uma só em cada uma das equações. Para isso, a seguinte definição será utilizada:

$$c_i = C_d l_i K_v \sqrt{\frac{2}{\rho}}. \quad (4.8)$$

Substituindo 4.8 em 4.6 e 4.7, resulta:

$$q_1 = \begin{cases} c_1 u_v \sqrt{P_s - P_1}, & u_v \geq 0 \\ c_2 u_v \sqrt{P_1 - P_r}, & u_v < 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

e

$$q_2 = \begin{cases} -c_3 u_v \sqrt{P_2 - P_r}, & u_v \geq 0 \\ -c_4 u_v \sqrt{P_s - P_2}, & u_v < 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

As constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  serão chamadas de coeficientes de vazão com valores identificados através de procedimentos experimentais descritos no Capítulo 6.

### 4.3.3 Equação da variação de pressão no cilindro do atuador

Segundo Merritt, 1967, o comportamento da compressibilidade de um fluido depende do chamado módulo de compressibilidade volumétrica, definido pela equação

$$\beta_c = -V \left( \frac{dp}{dv} \right), \quad (4.11)$$

onde,  $\beta_c$  é o coeficiente (módulo) de compressibilidade volumétrica do fluido (*Bulk Modulus*) [ $Pa$ ],  $V$  é o volume total inicial do fluido [ $m^3$ ] e  $\frac{dp}{dv}$  é a variação da pressão do fluido em relação à variação do seu volume  $\left[ \frac{Pa}{m^3} \right]$ .

Utilizando a equação da continuidade para o sistema apresentado na Figura 4.2, pode-se obter as equações que determinam a variação das pressões nas câmaras 1 e 2 [Pereira, 2006]:

$$\dot{P}_1 = \frac{\beta_c}{V_1} (-\dot{V}_1 + q_1), \quad (4.12)$$

$$\dot{P}_2 = \frac{\beta_c}{V_2} (-\dot{V}_2 + q_2), \quad (4.13)$$

onde,

$$V_1 = V_{10} + xA_1, \quad (4.14)$$

$$V_2 = V_{20} + (c - x)A_2, \quad (4.15)$$

e  $V_{10}$  é o volume morto entre a Câmara 1 e o seu orifício de passagem da válvula [ $m^3$ ],  $V_{20}$  é o volume morto entre a Câmara 2 e o seu orifício de passagem da válvula [ $m^3$ ],  $x$  é a posição do êmbolo do cilindro [ $m$ ],  $c$  é o curso total (valor máximo) do êmbolo do cilindro [ $m$ ],  $A_1$  é a área de contato do êmbolo com a pressão  $P_1$ , e  $A_2$  é a área de contato do êmbolo com a pressão  $P_2$ .

Entende-se volume morto como sendo o mínimo volume entre válvula e câmara, independentemente da posição da haste.

As equações que definem  $\dot{V}_1$  e  $\dot{V}_2$  podem ser obtidas diferenciando as equações 4.14 e 4.15, obtendo-se:

$$\dot{V}_1 = \dot{x}A_1, \quad (4.16)$$

$$\dot{V}_2 = -\dot{x}A_2. \quad (4.17)$$

#### 4.3.4 Equação da força hidráulica e dinâmica inversa do atuador

A força hidráulica  $F_h$  é definida pelo balanço das forças geradas pelas pressões  $P_1$  e  $P_2$  atuando nas respectivas áreas do êmbolo do pistão,  $A_1$  e  $A_2$ . A força gerada por  $P_1$ , quando positiva, contribui para uma aceleração positiva na direção  $x$ . Já, a força gerada por  $P_2$  contribui para uma aceleração negativa em relação a  $x$ . Baseando-se no fato de que a força pode ser calculada pelo produto da pressão com a área, e levando em conta os sentidos das contribuições das forças, obtém-se a equação da força hidráulica:

$$F_h = P_1A_1 - P_2A_2. \quad (4.18)$$

Derivando a Equação 4.18 e substituindo as derivadas das pressões pelas equações 4.12 e 4.13, tem-se:

$$\dot{F}_h = A_1 \frac{\beta_c}{V_1} (-\dot{V}_1 + q_1) - A_2 \frac{\beta_c}{V_2} (-\dot{V}_2 + q_2). \quad (4.19)$$

Substituindo as equações 4.9, 4.10, 4.14, 4.15, 4.16 e 4.17, na Equação 4.18, obtém-se então:

$$\begin{aligned} \dot{F}_h = A_1 \frac{\beta_c}{(V_{10} + xA_1)} (-\dot{x}A_1 + u_v f_1(P_1, \dot{x})) \\ - A_2 \frac{\beta_c}{(V_{20} + (c - x)A_2)} (\dot{x}A_2 + u_v f_2(P_2, \dot{x})), \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde,

$$f_1 = \begin{cases} c_1\sqrt{P_s - P_1}, & \dot{x} \geq 0 \\ c_2\sqrt{P_1 - P_r}, & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

e

$$f_2 = \begin{cases} -c_3\sqrt{P_2 - P_r}, & \dot{x} \geq 0 \\ -c_4\sqrt{P_s - P_2}, & \dot{x} < 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

As equações 4.21 e 4.22 são derivadas das equações 4.9 e 4.10 nas quais a dependência do sinal de  $u_v$  foi substituída pelo sinal de  $\dot{x}$ . Desta forma, é possível reorganizar a Equação 4.18 de modo a representar  $\dot{F}_h$  dependendo de um termo  $\hat{u}(P_1, P_2, x, \dot{x})$  multiplicado por  $u_v$  e um termo  $\hat{h}(x, \dot{x})$  independente de  $u_v$ , como segue:

$$\dot{F}_h = \hat{u}(P_1, P_2, x, \dot{x})u_v + \hat{h}(x, \dot{x}), \quad (4.23)$$

onde,

$$\hat{u}(P_1, P_2, x, \dot{x}) = \beta_c \left( \frac{A_1 f_1(P_1, \dot{x})}{(V_{10} + xA_1)} - \frac{A_2 f_2(P_2, \dot{x})}{(V_{20} + (c - x)A_2)} \right), \quad (4.24)$$

e

$$\hat{h}(x, \dot{x}) = -\beta_c \left( \frac{A_1^2}{(V_{10} + xA_1)} + \frac{A_2^2}{(V_{20} + (c - x)A_2)} \right) \dot{x}. \quad (4.25)$$

A partir da Equação 4.23 é possível se obter a seguinte equação da dinâmica inversa do atuador hidráulico, isolando  $u_v$ , obtendo-se:

$$u_v = \frac{1}{\hat{u}(P_1, P_2, x, \dot{x})} (\dot{F}_h - \hat{h}(x, \dot{x})). \quad (4.26)$$

A Equação 4.26 será importante no desenvolvimento do algoritmo de controle do MPS, pois permite o cálculo do valor de tensão a ser aplicado na válvula para que haja uma variação  $\dot{F}_h$  na força hidráulica aplicada pelo atuador.

### 4.3.5 Equilíbrio dinâmico de forças no pistão

O equilíbrio dinâmico de forças no atuador determina sua trajetória ao longo do tempo. Quando a soma de todas as forças sobre o pistão é zero, o mesmo não se move, caso contrário, existe de uma aceleração na sua haste.

Segundo o modelo utilizado por Valdiero, 2005, o equilíbrio dinâmico de 4 forças fornece a resultante que atua sobre a inércia da massa da haste e dos demais componentes associados ao movimento do pistão. O diagrama de corpo livre de um atuador hidráulico sob influência destas forças pode ser observado na Figura 4.4.

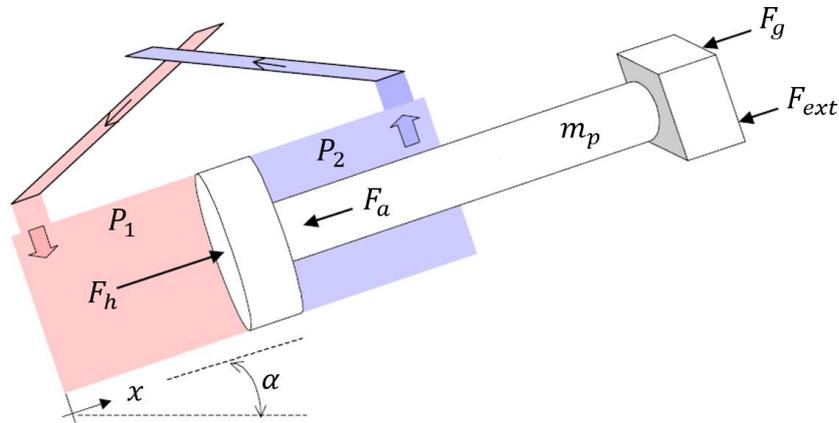


Figura 4.4 – Diagrama de corpo livre da haste do cilindro [adaptado de Valdiero, 2005].

O equilíbrio de forças do atuador hidráulico da na Figura 4.4 pode ser descrito pela Equação 4.27:

$$F_h - F_a - F_g - F_{ext} = m_p \ddot{x}, \quad (4.27)$$

onde,  $F_h$  é a força hidráulica gerada pelo balanço de pressões nas câmaras do cilindro [N],  $F_a$  é a força de atrito entre a haste e o restante do cilindro [N],  $F_g$  é a força gravitacional relativa à massa da haste e à sua inclinação [N],  $F_{ext}$  é a força externa gerada pela carga e aplicada sobre a haste do cilindro [N],  $m_p$  é a massa da haste do cilindro [kg] e  $\ddot{x}$  é a aceleração da haste do cilindro  $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ .

A força de atrito  $F_a$  em um cilindro hidráulico pode ser modelada de diversas formas, com diferentes níveis de complexidade e precisão. Um estudo detalhado sobre a modelagem desta força será apresentado na Seção 4.3.6.

A força gravitacional  $F_g$  está relacionada à massa vinculada à haste do pistão e também à inclinação da haste em relação ao eixo vertical. Nos experimentos apresentados no Capítulo 6, o pistão se encontra na posição vertical, portanto  $F_g = m_p g$ , onde  $m_p$  é a massa da haste do pistão [m] e  $g$  é a aceleração da gravidade  $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ .

A força  $F_{ext}$  é a força de reação ocasionada pela carga que é aplicada sobre a haste do cilindro. No caso do MPS, essa é a força que o manipulador robótico (inercial e gravitacional) exerce sobre o pistão hidráulico de um determinado grau de liberdade. Para o caso em que não exista carga acoplada ao cilindro, essa força assume valor nulo.

### 4.3.6 Força de atrito

Atrito é um fenômeno não-linear complexo. Existem muitos estudos sobre atrito para circunstâncias específicas, mas não se dispõe de um modelo geral de atrito que tenha um desempenho adequado para todas as situações de aplicação. Um modelo matemático adequado para ser utilizado em uma situação específica está intimamente ligado a aspectos como o nível de precisão necessário, tempo de processamento disponível e complexidade do modelo. Usualmente, pode existir mais de um modelo adequado a uma determinada aplicação.

Os efeitos do atrito podem depender de diversos parâmetros, como estado de lubrificação, temperatura, direção do movimento, características do material das superfícies e, além disso, ainda podem apresentar variações com o tempo. A disponibilidade de um bom modelo de atrito permite a realização de simulações com alta fidelidade com relação aos resultados experimentais, o que possibilita o uso destas simulações para o projeto de controladores e análises de seus desempenhos e estabilidade [Perondi, 2002].

Vários modelos matemáticos para descrever o fenômeno do atrito já foram propostos na literatura. Dentre eles, os chamados “estáticos” e os chamados “dinâmicos”. Modelos estáticos estabelecem uma relação estática entre velocidade relativa das superfícies e a força de atrito gerada. Já, modelos dinâmicos apresentam um comportamento de memória relacionado a uma relação dinâmica entre velocidade e força de atrito [Iurian et al., 2005].

No contexto do presente trabalho, diferentes modelos de atrito foram necessários para diferentes etapas das simulações. Um modelo de Coulomb combinado com o de Karnopp foi utilizado no Capítulo 6 para identificar os coeficientes de vazão das válvulas; um modelo de atrito viscoso foi utilizado para a composição do controlador por Torque Calculado desenvolvido no Capítulo 5; e um modelo de atrito completo (Coulomb + viscoso + estático + Stribeck) foi utilizado para as simulações do comportamento do MPS completo no Capítulo 7.

#### 4.3.6.1 Modelos clássicos de atrito

Segundo Iurian et al., 2005, os chamados “modelos clássicos de atrito” representam quatro fenômenos principais que se manifestam com o contato de superfícies: atrito de Coulomb, atrito viscoso, atrito estático e efeito de Stribeck. A Figura 4.5 apresenta a contribuição de cada um destes efeitos na relação entre força de atrito e velocidade das superfícies em contato. Todos esses efeitos são caracterizados por modelos estáticos de atrito, uma vez que dependem exclusivamente da velocidade e não possuem memória dinâmica.

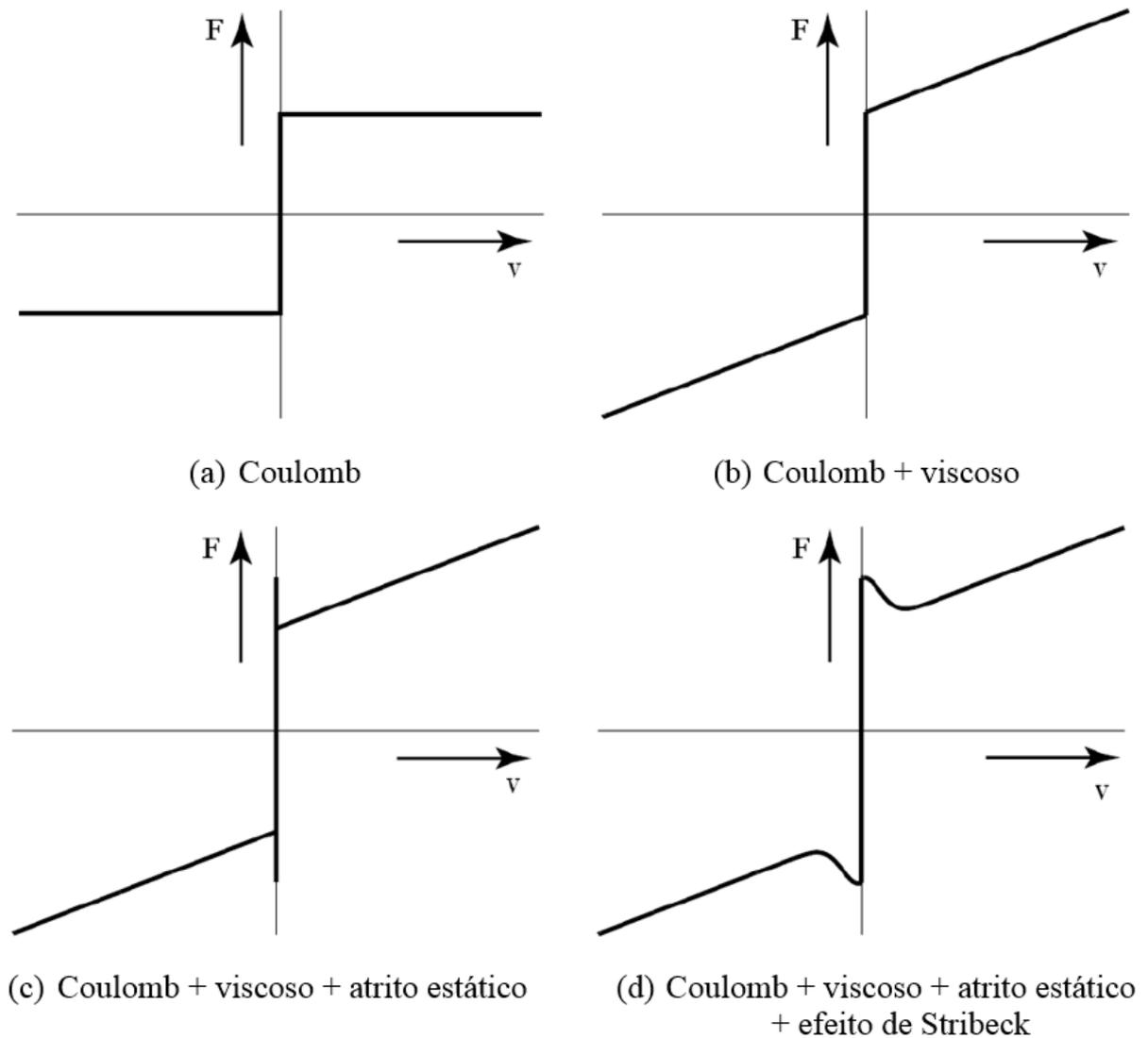


Figura 4.5 – Modelos clássicos de atrito [adaptado de Iurian et al., 2005].

A força de atrito de Coulomb, também chamado de atrito cinético, tem um valor constante, variando apenas de sinal em função da velocidade, conforme pode ser observado na Figura 4.5(a). A variação do sinal da força de atrito de Coulomb não depende da magnitude da velocidade, apenas do seu sentido e direção, sempre se opondo ao movimento relativo entre as superfícies.

O atrito viscoso é resultado de um comportamento do fluido lubrificante entre as duas superfícies em contato. A força de atrito viscoso varia proporcionalmente à velocidade, tendo valor nulo para velocidade nula. O seu efeito somado ao efeito do atrito de Coulomb pode ser observado na Figura 4.5(b).

Segundo Iurian et al., 2005, experimentalmente é usualmente observado que o valor da força de atrito estático é maior do que a força de Coulomb. Esta força contrária à tendência ao

movimento se manifesta apenas quando o sistema está inicialmente parado e uma força externa é aplicada sobre o mesmo. Enquanto esta força externa não ultrapassa o valor máximo da força de atrito estático, a força de atrito estático tem mesma magnitude da força externa e sentido oposto. Desta forma, o sistema permanece parado, pois a soma de forças resultante é nula. Uma vez que a força externa ultrapasse o valor máximo da força de atrito estático, a força resultante sobre o sistema deixa de ser nula e o mesmo sofre uma aceleração, adquirindo assim uma velocidade diferente de zero. Quando a velocidade deixa de ser nula, a força de atrito estático deixa de existir conforme pode ser observado na Figura 4.5(c), onde a composição das forças de atrito de Coulomb, viscoso e estático é apresentada.

O quarto fenômeno clássico de atrito é o efeito de Stribeck. Segundo Armstrong-Hélouvry et al., 1994, este efeito é consequência de uma transição de regimes de lubrificação das superfícies em contato. Sob pequenas velocidades, a velocidade não é suficiente para formar um filme de fluido lubrificante entre as superfícies. Esta transição ocorre então de forma gradual até que os efeitos do atrito estático deixam de existir e os efeitos do atrito viscoso e de Coulomb passam a ser predominantes. Pode-se observar como o efeito de Stribeck influencia na força de atrito através da Figura 4.5(d).

A principal desvantagem destes modelos é o fato de possuírem uma descontinuidade quando a velocidade é nula. Isso permite que a força de atrito tenha infinitos possíveis valores nessa condição. Esta descontinuidade não representa um comportamento realístico da força de atrito, sendo, muitas vezes inaceitável para uma dada aplicação, pois pode causar instabilidade em simulações em e algoritmos de compensação de atrito. Para resolver o problema da descontinuidade, uma possível estratégia é aproximar a descontinuidade por uma região linear em torno da velocidade nula, como pode ser observado na Figura 4.6.

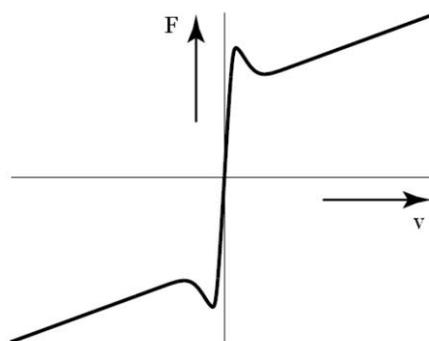


Figura 4.6 – Modelo de atrito com descontinuidade substituída por região linear [Iurian et al., 2005].

Entretanto, essa abordagem cria outro problema. O modelo permite que o sistema adquira uma aceleração mesmo que a força externa aplicada seja menor do que o valor da força máxima do atrito estático. Logo, espera-se que este modelo tenha dificuldades de representar corretamente fenômenos ligados ao atrito estático, como o surgimento de ciclos-limite em malha fechada [Haessig e Friedland, 1991].

#### 4.3.6.2 Equacionamento matemático dos modelos clássicos de atrito

A Figura 4.5(d) apresenta a representação da composição dos principais fenômenos estáticos relacionados ao atrito. A parte relativa à velocidade positiva do gráfico desta figura pode ser representado matematicamente através da seguinte equação proposta por Armstrong-Hélouvry et al., 1994:

$$F_a = F_c + (F_s - F_c)e^{-\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_s}\right)^\delta} + F_v\dot{x}, \quad (4.28)$$

onde,  $F_a$  é a força de atrito calculada [N],  $F_c$  é uma constante que representa o valor a força de atrito de Coulomb [N],  $F_s$  é uma constante que representa o valor máximo da força de atrito estático [N],  $\dot{x}$  é a velocidade relativa entre as duas superfícies em contato  $\left[\frac{m}{s}\right]$ ,  $\dot{x}_s$  é um parâmetro empírico constante chamado velocidade de Stribeck  $\left[\frac{m}{s}\right]$ ,  $\delta$  é um parâmetro empírico constante que determina a forma do efeito de Stribeck,  $F_v$  é o coeficiente de atrito viscoso  $\left[\frac{Ns}{m}\right]$ .

Observando a Figura 4.7, podem-se relacionar os parâmetros descritos na Equação 4.28 com o comportamento do atrito em relação à velocidade. O parâmetro chamado velocidade de Stribeck é relacionado ao valor da velocidade não nula em que a força de atrito é mínima. Entretanto, vale ressaltar que, ao resolver a equação, percebe-se que o seu mínimo não se dá exatamente no valor  $\dot{x}_s$ , embora seja uma boa aproximação.

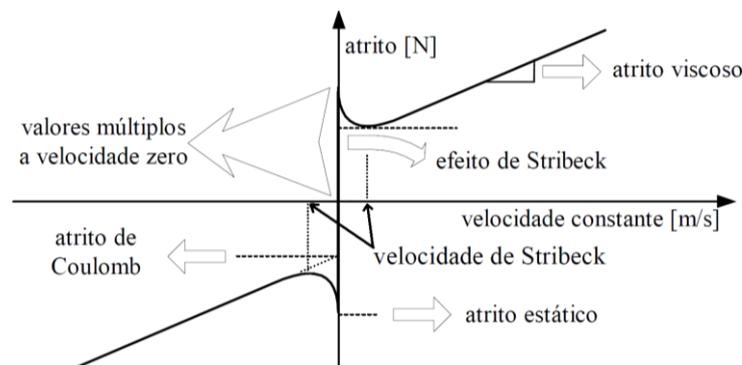


Figura 4.7 – Curva estática da força de atrito pela velocidade [adaptado de Perondi, 2002].

Embora a Equação 4.28 represente de forma satisfatória a curva do gráfico da Figura 4.7 para valores de velocidade positivas, a equação precisa ser modificada para representar velocidades nulas ou negativas. Adicionando os efeitos da força de atrito estático à Equação 4.28 e adaptando a mesma para velocidades também negativas, obtém-se então a Equação 4.29 para o cálculo completo do atrito:

$$F_a = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \left( F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{|\dot{x}|}{\dot{x}_s}\right)^\delta} \right) + F_v \dot{x}, & \dot{x} \neq 0 \\ F_{ext} & , \quad \dot{x} = 0 \text{ e } |F_{ext}| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_{ext}) & , \quad \dot{x} = 0 \text{ e } |F_{ext}| \geq F_s. \end{cases} \quad (4.29)$$

Conforme comentado anteriormente, em simulação, o modelo clássico de atrito pode gerar comportamento oscilatório e instabilidade devido a presença de uma descontinuidade para a velocidade zero. Em aplicações práticas, a principal desvantagem em utilizar o modelo clássico de atrito está relacionada ao fato de ser muito difícil detectar os momentos em que a velocidade é exatamente zero. Muitas vezes, o ruído associado à medição de posição e velocidade faz com que a velocidade medida tenha valor não nulo mesmo quando o sistema está parado. Logo, o modelo clássico acaba calculando uma força de atrito equivalente a um movimento de pequena velocidade, em vez de calcular a força equivalente à velocidade nula.

Em experimentos realizados no âmbito do presente trabalho foi constatado que, devido ao ruído de sinal, o valor medido de velocidade oscila em torno de zero continuamente, mesmo quando o atuador hidráulico se encontra em repouso.

#### 4.3.6.3 Modelo de Karnopp

Durante a identificação experimental dos coeficientes de vazão das válvulas descrita no Capítulo 6, onde o deslocamento de um único pistão sem carga foi simulado, foi necessária uma estratégia para atenuar as oscilações das forças de atrito durante as transições de velocidades positivas e negativas. Para isso, o modelo de atrito de Karnopp foi utilizado. Karnopp, 1985, propõe um modelo de atrito que é capaz de representar adequadamente a força de atrito para pequenas velocidades. O método foi proposto como uma forma de representar um comportamento típico de sistemas com atrito, o chamado movimento adere-desliza (*Stick-Slip motion*). Este fenômeno acontece em algum grau em todos os atuadores e mecanismos em decorrência do comportamento altamente não linear do atrito em baixas velocidades, conforme descrito na seção anterior.

A compreensão do funcionamento do modelo de Karnopp é facilitada quando se compreende o mecanismo do movimento adere-desliza. Canudas de Wit et al., 1995 propõe o sistema apresentado na Figura 4.8 para simular o movimento adere-desliza do sistema. O sistema é composto de uma massa que se desloca sobre uma superfície, submetida aos efeitos de forças de atrito de Coulomb, atrito estático, atrito viscoso, e efeito de Stribeck. Conforme pode ser observado na Figura 4.9, a massa, que desliza sobre a superfície com uma velocidade  $\dot{x}$ , é acoplada a uma mola que tem a sua outra extremidade puxada a uma velocidade constante  $\dot{y}$ . O comportamento do movimento adere-desliza pode ser observado na Figura 4.9 através da comparação entre os deslocamentos  $x$  e  $y$ .

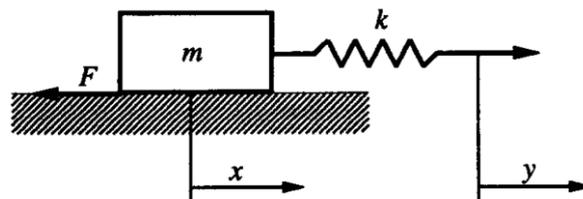


Figura 4.8 – Sistema massa mola simulado [Canudas de Wit et al., 1995].

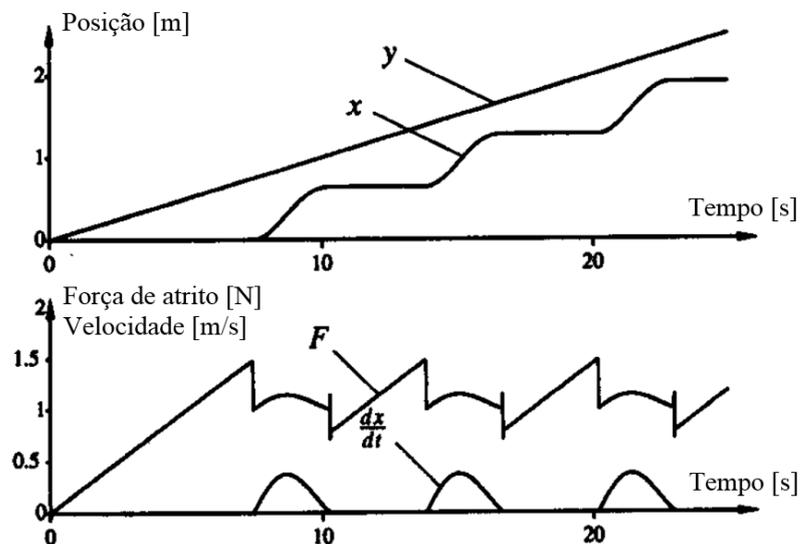


Figura 4.9 – Movimento adere-desliza simulado [adaptado de Canudas de Wit et al., 1995].

De acordo com Sobczyk Sobrinho, 2009, no movimento adere-desliza, o comportamento da força de atrito e do deslocamento entre as superfícies, apresentados na Figura 4.9, pode ser descrito em algumas etapas. Inicialmente, enquanto o sistema está em repouso, a magnitude da força exercida pela mola tem mesmo valor que a força de atrito estático, e vai aumentando gradualmente enquanto a extremidade da mola vai sendo puxada e

a massa continua parada. Quando o valor da força da mola ultrapassa o valor da força de atrito estático, o equilíbrio estático de forças deixa de ser zero e a massa inicia uma aceleração. Em função do efeito de Stribeck, a força de atrito diminui com o aumento inicial da velocidade, fazendo com que a massa acelere mais ainda. A aceleração da massa faz com que a mesma atinja uma velocidade maior do que a velocidade da extremidade oposta da mola. Desta forma, a mola acaba sendo comprimida, fazendo com que a força elástica gerada por ela na massa diminua, desacelerando assim mesma. Com a desaceleração da massa para velocidades menores do que a velocidade de Stribeck, a força de atrito cresce rapidamente por causa do efeito de Stribeck. No momento em que a força de atrito se torna maior do que a força elástica da mola, o movimento cessa e a massa passa a ter novamente influência do atrito estático. A massa então permanece parada enquanto a mola se expande, até o momento em que a força elástica se torna maior do que a de atrito estático e o ciclo se repete, caracterizando o movimento denominado adere-desliza.

A compreensão da mecânica envolvida no movimento adere-desliza é importante para compreender as diferentes limitações de cada tipo de modelo de atrito. Por exemplo, os modelos clássicos de atrito (apresentados na Figura 4.5), na sua forma original, não são capazes de prever a ocorrência do movimento adere-desliza. Em simulação, na fase do movimento em que a velocidade é nula, o modelo clássico apresenta um comportamento oscilatório. Para o modelo de atrito clássico ser implementável sem gerar oscilações, a sua descontinuidade deve ser substituída por uma região proporcional que passa pela origem do gráfico, conforme mostra a Figura 4.6. Neste caso, a situação “adere” nunca ocorre enquanto a força resultante aplicada sobre a massa não for exatamente zero.

Karnopp, 1985, consegue resolver este problema utilizando a estratégia apresentada em esboço na Figura 4.10. Nesta figura, percebe-se que a força de atrito tem uma característica arbitrária, que depende apenas da velocidade entre as superfícies, para todas as velocidades fora de um pequeno intervalo definido  $-DV < V < DV$ . Fora deste intervalo, qualquer um dos modelos apresentados na Figura 4.5 pode ser utilizado sem modificações. O diferencial do modelo de atrito de Karnopp está nas condições de cálculo para velocidades dentro deste pequeno intervalo.

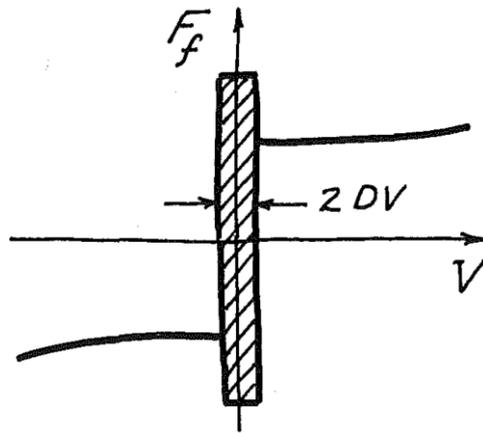


Figura 4.10 – Esboço da lei que caracteriza o modelo de Karnopp [Karnopp, 1985].

Diferentemente de outros modelos de atrito que têm como entrada a velocidade da massa e como saída a força de atrito, o modelo de Karnopp tem como entrada a força externa aplicada à massa e como saída a velocidade adquirida pela massa. O valor da massa é utilizado dentro do modelo para o cálculo da velocidade. O fato de a velocidade ser uma saída desse modelo, permite que o mesmo forneça uma saída de exatamente zero enquanto a velocidade calculada internamente estiver dentro do intervalo  $-DV < V < +DV$ .

A Figura 4.11 mostra o diagrama de blocos originalmente proposto por Karnopp, 1985, com o conceito do modelo, no qual considera-se uma massa  $m$  deslocando-se com uma velocidade  $v$  e uma quantidade de movimento  $P$ , sob a atuação de uma força de atrito  $F_f$  e uma força externa  $F$ .

Nota-se que, neste modelo, a força externa  $F$  também tem influência sobre o cálculo da força de atrito  $F_f$ . Nota-se também que  $F_f$  é composta de duas partes:

- 1) se  $+DV < V < -DV$ , então  $F = F_{slip}$ ,  $F_{slip}$  é a função de atrito arbitrária (dependente de  $V$ ) que é utilizada para velocidades com módulos maiores que  $DV$ . Esta é a força de atrito presente durante o regime de deslizamento (*slip*);
- 2) se  $-DV < V < +DV$ , ou seja, quando a velocidade tem módulo menor que  $DV$ , a força de atrito tem valor  $S$  multiplicado por  $F_{stick}$ , limitado por  $\pm FH$ . Esta é a força de atrito presente durante o regime de aderência (*stick*).

Observando no diagrama os blocos das funções que calculam  $F_{slip}$  e  $S$  e observando o seu comportamento em relação a  $V$ , percebe-se que: durante o regime de deslizamento,  $F_{slip}$  assume um valor não nulo, e  $S$  assume valor nulo; e, durante o regime de aderência,  $F_{slip}$  assume um valor nulo, e  $S$  assume valor não nulo. Ou seja, para nenhum valor de  $V$ ,  $F_{slip}$  e  $S$  têm

valores não nulos simultaneamente. Isso significa que, na fase de deslizamento, a multiplicação de  $S$  por  $F_{Stick}$  resulta em 0, e na fase de aderência  $F_{slip}$  é 0, determinando assim, dois regimes separados e independentes. O valor  $S$  só possui dois possíveis valores, 0 e 1, pois, desta forma, a multiplicação de  $S$  por  $F_{Stick}$  não altera o valor de força resultante durante o regime de aderência. O parâmetro  $FH$  é o valor da máxima força de atrito estático. Se  $F_{stick}$  ultrapassar os limites de  $\pm FH$ , a força de atrito calculada  $F_f$  é limitada a esses valores e a força externa  $F$  acaba se tornando maior que  $F_f$ , possibilitando o início do movimento.

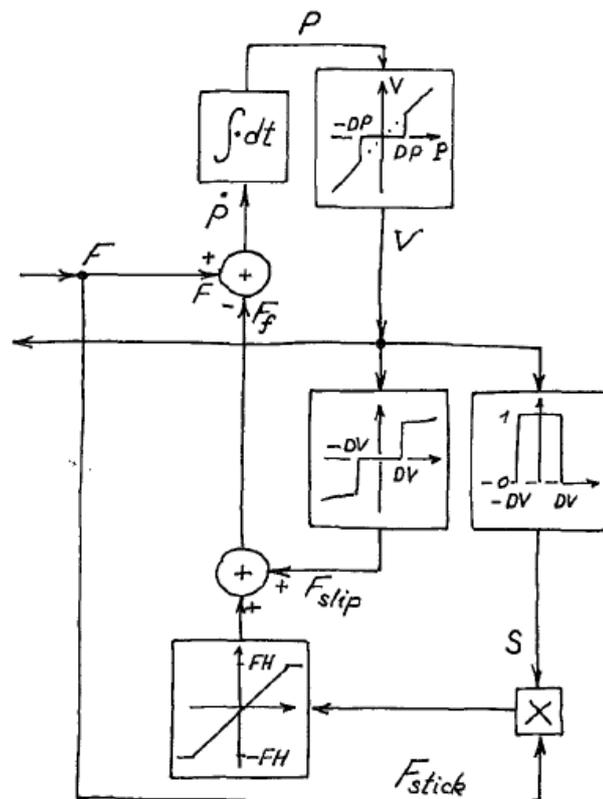


Figura 4.11 – Diagrama de blocos do modelo de atrito de Karnopp [Karnopp, 1985].

A parte de cima do diagrama de blocos da Figura 4.11 é o que permite que o modelo de Karnopp seja capaz de zerar a velocidade em determinadas situações, e também seja capaz de sair desta condição de velocidade nula quando a força externa aplicada for suficiente. Em vez de o modelo utilizar a força resultante para calcular a velocidade diretamente, ele calcula primeiro a quantidade de movimento da massa. Portanto, através da aplicação das leis de Newton, pode-se usar a equação  $\frac{dP}{dt} = F - F_f$ , a qual, juntamente com um bloco integrador, permite ao modelo calcular a quantidade de movimento  $P$  da massa. Conhecendo o valor da massa, é possível calcular o valor da sua velocidade através da equação  $V = \frac{P}{m}$ . Entretanto, o

modelo só calcula um valor de velocidade diferente de 0 caso a quantidade de movimento seja maior em módulo do que o parâmetro  $DP$  (função implementada pelo bloco da parte superior do diagrama). Desta forma, o modelo mantém o valor da velocidade em 0 até que a quantidade de movimento da massa seja suficiente para que haja uma alteração significativa. Segundo Karnopp, o parâmetro  $DP$  deve ser definido como  $DP = mDV$ .

Segundo Haessig e Friedland, 1991, o modelo de Karnopp possui a vantagem de ser rapidamente computado quando comparado com modelos como “*Bristle*”, “*Reset integrator*” e modelo de Dahl, sendo mais lento apenas do que o modelo clássico, por uma pequena diferença de tempo. Entretanto, como desvantagem, o modelo de Karnopp apresenta um incremento exponencial de complexibilidade em casos de várias massas acopladas, devido ao aumento de possíveis combinações de massas em regime de deslizamento ou aderência. Nestes casos, Haessig e Friedland, 1991, recomendam o uso do modelo “*Reset integrator*”, que possui desempenho semelhante, mas não se torna mais complexo com o aumento do número de massas acopladas.

#### 4.3.6.4 Modelos dinâmicos de atrito

Modelos estáticos de atrito são relativamente simples e, portanto, sua capacidade de representação de características associadas ao fenômeno real pode ser considerada limitada. Modelos mais complexos são necessários quando se necessita de uma modelagem mais detalhada e precisa do atrito. Comportamentos como o movimento de pré-deslizamento, atraso de atrito, força de atrito estático variante e características de atrito variante no tempo necessitam de modelos mais complexos para poderem ser levados em consideração. Para sanar estas demandas, foram desenvolvidos modelos como o modelo de Dahl, “*Bristle model*”, “*Reset integrator*”, modelo de LuGre, entre outros [Iurian et al., 2005].

Segundo Sobczyk Sobrinho, 2009, um modelo muito utilizado no contexto de algoritmos de controle é o denominado LuGre, proposto por Canudas de Wit et al., 1995. Este modelo tem sido usado para compensar atrito em diversos tipos de sistemas. Perondi, 2002, Sobczyk Sobrinho, 2009, e Sarmanho, 2014, utilizam esse modelo para o controle e simulação de atuadores pneumáticos.

Embora o modelo de LuGre tenha a vantagem de equacionar diversos fenômenos, Sobczyk et al., 2016, destacam uma limitação fundamental do modelo. Por não utilizar a força aplicada ao sistema como entrada (da forma como o modelo de Karnopp faz), controladores que utilizam compensação de atrito com o modelo de LuGre podem apresentar atrasos durante

a retomada de um movimento, após uma parada. Por causa da estrutura deste modelo, a estimativa da variável de estado da força de atrito permanece constante enquanto a velocidade é nula, desta forma, o modelo não calcula corretamente a força de atrito até que o movimento inicie.

#### **4.3.7 Zona morta e compensação de zona morta**

De acordo com Valdiero, 2005, zona morta é uma relação estática entre a entrada e a saída de um sistema, na qual a saída é nula para uma pequena faixa inicial de valores na entrada. No caso das válvulas direcionais estudadas nesse trabalho, a zona morta se manifesta de forma que a vazão óleo só ocorre se o módulo do valor da tensão elétrica na entrada for maior do que um valor mínimo.

A zona morta está fortemente relacionada com o tipo de centro de uma válvula, o qual consiste de uma característica construtiva da válvula que se baseia na relação da sobreposição do carretel em relação aos orifícios do pórtico da válvula. Essa sobreposição afeta a curva de resposta da válvula e também tem influência direta no vazamento interno da mesma [Borges, 2017].

Na Figura 4.12, estão representados os três tipos de centros que podem ser encontrados nas válvulas comerciais e suas características de vazão e de vazamento interno em função do sinal de entrada (comando). Os 3 tipos são os de:

- a) Centro subcrítico: aquele onde o ressalto do carretel não sobrepõe totalmente o pórtico da válvula. Nele, há deslocamento de óleo mesmo com o carretel na posição central.
- b) Centro crítico: aquele onde a sobreposição é nula. Nele, o carretel tem exatamente o mesmo tamanho do pórtico da válvula e qualquer deslocamento do carretel possibilita vazão na válvula.
- c) Centro supercrítico: aquele onde existe uma sobreposição positiva entre carretel e pórtico, fazendo com que não haja vazão a não ser que o deslocamento do carretel seja maior do que o tamanho da superposição.

Percebe-se também pela Figura 4.12 que a válvula do tipo de centro supercrítico tem o menor vazamento interno em relação às outras. As válvulas utilizadas nos experimentos deste trabalho são do tipo de centro supercrítico. Por esse motivo, os vazamentos internos foram desconsiderados na modelagem dinâmica das relações vazão/pressão nas válvulas.

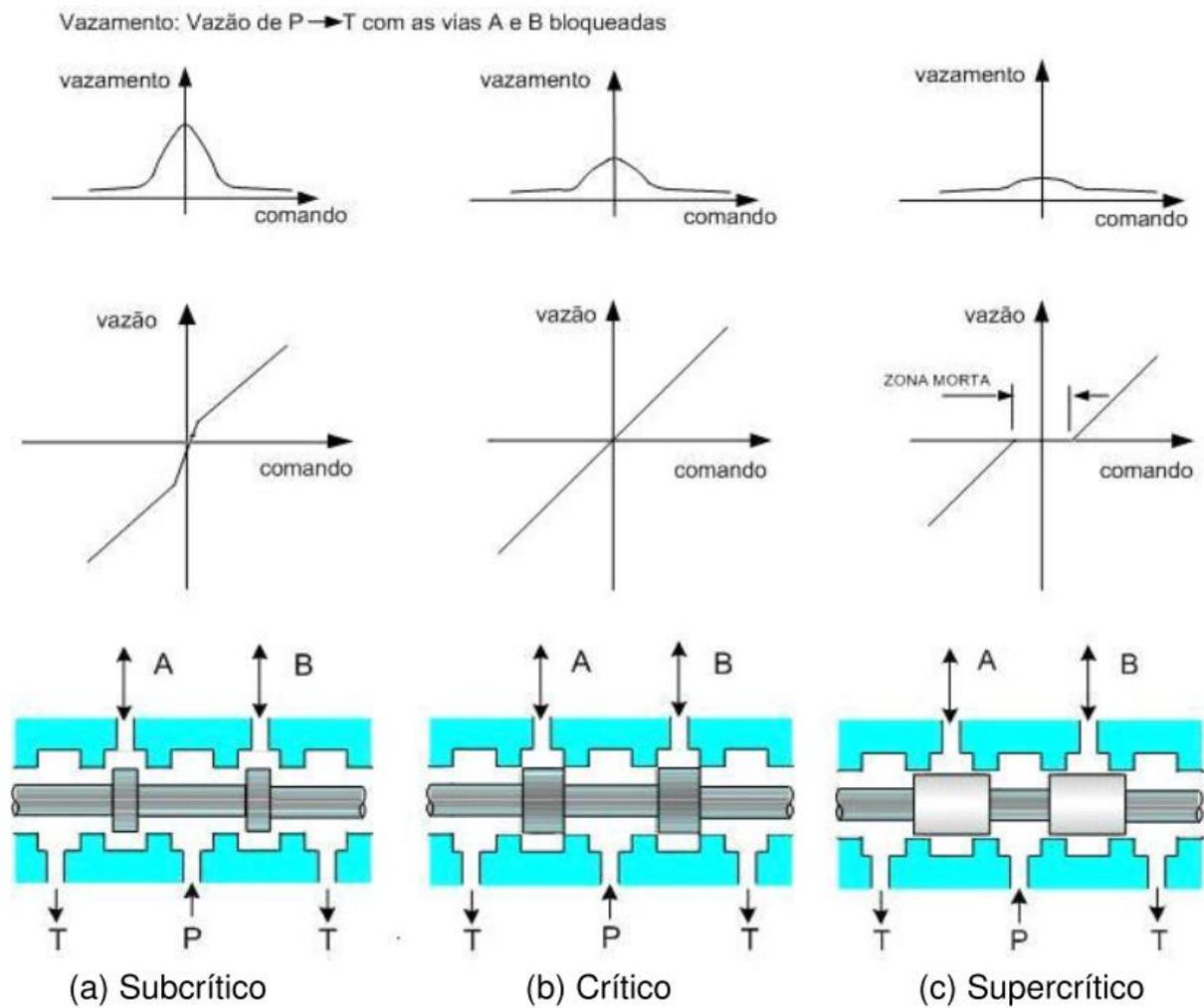


Figura 4.12 – Tipos de centro em válvulas direcionais [Valdiero, 2005].

Zona morta ocorre principalmente em válvula com centro supercrítico, onde há sobreposição (*overlap*) do carretel sobre o orifício, mas pode ocorrer também em válvulas de centro crítico devido a imperfeições na construção da válvula.

Kokotovic e Tao, 1996, apud Valdiero, 2005, propõem um modelo matemático para representação da zona morta em válvulas direcionais. Este modelo foram adotados por Valdiero, 2005, Pereira, 2006, García, 2015, Valente, 2016, e também será adotado no presente trabalho. A representação gráfica da zona morta pode ser observada na Figura 4.13.

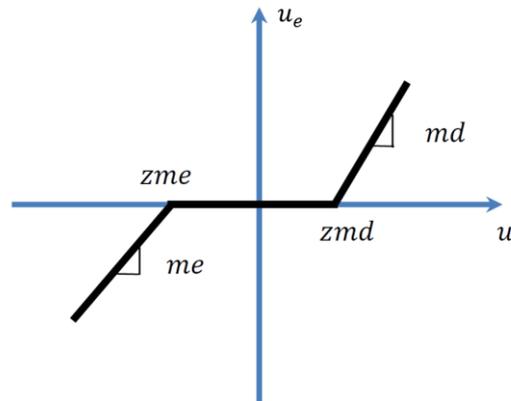


Figura 4.13 – Representação do comportamento da zona morta [adaptado de García, 2015].

O eixo  $u$  representa o sinal de comando original enviado para a válvula. Já, o eixo  $u_e$  representa o sinal de comando efetivo (que efetivamente afeta a vazão). Percebe-se que só há variação efetiva no sinal  $u_e$  quando o sinal de entrada está fora da zona morta. Os valores  $z_{me}$  e  $z_{md}$  indicam os limites da zona morta esquerdo e direito, respectivamente, e podem ser obtidos experimentalmente para cada caso. Os valores  $m_e$  e  $m_d$  são os coeficientes angulares das relações entre  $u$  e  $u_e$ . Nos trabalhos de Valdiero, 2005, García, 2015, e Valente, 2016, esses coeficientes têm valor unitário. Os mesmos só teriam valor diferente de 1 caso a zona morta influenciasse a sensibilidade do sinal de comando, o que não acontece em válvulas direcionais.

Segundo García, 2015, o efeito da zona morta representa uma não linearidade para o modelo matemático do atuador, o que traz dificuldades para a implantação de estratégias de controle. Para atenuar esse efeito, é possível compensar parcialmente a zona morta, Kokotovic e Tao, 1996, apud Valdiero, 2005, propõem um método para isso. O diagrama que representa a compensação proposta é apresentado na Figura 4.14.

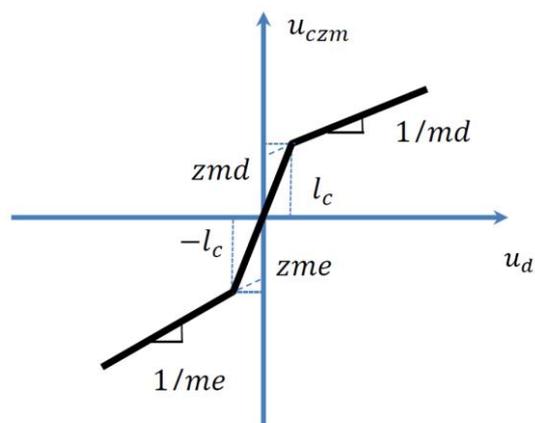


Figura 4.14 – Compensação da zona morta [adaptado de García, 2015].

O eixo  $u_d$  representa o sinal de controle efetivo desejado para controle da vazão. O eixo  $u_{czm}$  representa o sinal de controle compensado que deve ser aplicado para que a válvula gere a vazão equivalente a  $u_d$ . Assim, se o sinal  $u_{czm}$  for aplicado na válvula com zona morta, o resultado efetivo é o mesmo esperado para um sinal  $u_d$  aplicado em uma válvula sem zona morta.

Os parâmetros  $zmd$ ,  $zme$ ,  $md$  e  $me$  são os mesmos descritos anteriormente. O parâmetro  $l_c$  é utilizado para representar o tamanho de uma faixa de valores, chamada zona de suavização. A presença desta faixa evita que o controlador fique chaveando indefinidamente entre as tensões  $zme$  e  $zmd$  em função de ruídos de medição em situações que  $u_d$  cruza por 0. A Equação 4.30 representa matematicamente o método desenvolvido:

$$u_{czm} = \begin{cases} \frac{u_d(t)}{me} - |zme| & se, \quad u_d(t) \leq -|l_c| \\ \left( \frac{|zme| + \frac{|l_c|}{me}}{|l_c|} \right) u_d(t) & se, \quad -|l_c| \leq u_d(t) < 0 \\ \left( \frac{zmd + \frac{l_c}{md}}{l_c} \right) u_d(t) & se, \quad 0 \leq u_d(t) < l_c \\ \frac{u_d(t)}{md} + zmd & se, \quad l_c \leq u_d(t). \end{cases} \quad (4.30)$$

O método apresentado será utilizado nos algoritmos de controle abordados no Capítulo

7.

## 5 ALGORITMO DE CONTROLE POR TORQUE CALCULADO PARA O MPS HIDRÁULICO

Neste capítulo é abordada a estratégia de controle utilizada para realizar o seguimento de trajetória com o MPS. O objetivo do capítulo é descrever o funcionamento e as equações utilizadas na implementação do controle por Torque Calculado para um MPS hidráulico. A Seção 5.1 apresenta um panorama geral do esquema de controle a ser implementado; a Seção 5.2 apresenta a transformação do modelo dinâmico desenvolvido no espaço de trabalho para o espaço de juntas, necessária para a implementação do algoritmo de controle; enquanto que as Seções 5.3 e 5.4 apresentam o equacionamento para as leis de controle do subsistema mecânico e subsistema hidráulico, respectivamente; e, finalmente, a Seção 5.5 apresenta a prova de estabilidade do controlador proposto em malha fechada.

### 5.1 Controle por Torque Calculado

Em sistemas complexos como atuadores hidráulicos, controladores clássicos como os controladores PID podem apresentar desempenho relativamente inferiores quando comparados com outras técnicas de controle. Nestes casos, é desejável utilizar técnicas controle moderno e de compensação de atrito para obter melhorias no desempenho. Realizar compensação de atrito nesse tipo de sistema é mais difícil do que em sistemas elétricos, uma vez que o sinal de controle aplicado na válvula influencia diretamente na *derivada* da força hidráulica gerada, de forma que o atrito não possa ser diretamente cancelado, como nos casos de motores elétricos. Técnicas de controle linear avançadas usualmente não são capazes de melhorar muito o desempenho deste tipo de sistema, uma vez que as fortes não-linearidades na sua dinâmica geralmente demandam alguma forma de ganhos variáveis para que seja possível compensá-las. Neste caso, uma abordagem não-linear nos algoritmos de controle é uma boa opção para se obter um desempenho satisfatório [Sohl e Bobrow, 1999].

Para o MPS hidráulico, um algoritmo de controle não-linear com compensação de atrito viscoso é utilizado por García, 2015, e Valente, 2016. Um algoritmo semelhante, porém, com compensação ampla de atrito, foi proposto por Sarmanho Junior, 2014, no controle de um manipulador robótico do tipo cilíndrico com acionamento pneumático. Os algoritmos utilizados nesses trabalhos, são baseados na proposta de Slotine e Li, 1988.

A proposta original de Slotine e Li, 1988, foi desenvolvida para manipuladores de acionamento elétrico, nos quais os torques e forças podem ser controlados diretamente através da ação de controle. No caso dos atuadores hidráulicos, assim como nos pneumáticos, o controle direto das forças e torques não é possível, uma vez que a tensão aplicada nas válvulas permite um controle direto das vazões, as quais são diretamente proporcionais apenas à primeira derivada das forças e/ou torques nos atuadores [Sarmanho, 2014]. McDonell, 1996, propõe uma extensão da Lei de Slotine e Li (conhecida também como lei do Torque Calculado), que supera esta limitação, permitindo a sua utilização em sistemas com acionamentos pneumáticos e hidráulicos.

O algoritmo de controle por Torque Calculado é desenvolvido a partir do princípio de que o MPS hidráulico pode ser dividido em dois subsistemas principais: um *subsistema hidráulico* e um *subsistema mecânico*. O subsistema hidráulico, formado pelos atuadores hidráulicos, tem como entrada sinais de tensão elétrica aplicados em suas válvulas, que acabam gerando alterações nas pressões e forças hidráulicas geradas por cada atuador. O subsistema mecânico é composto pelo restante do MPS, que tem como entrada as forças geradas pelos atuadores, e, como saídas, as variações de posições do manipulador. A partir deste princípio, a técnica de controle por Torque Calculado propõe duas leis de controle separadas, uma para cada subsistema. A Figura 5.1 apresenta um diagrama de blocos que representa o sistema completo em malha fechada.

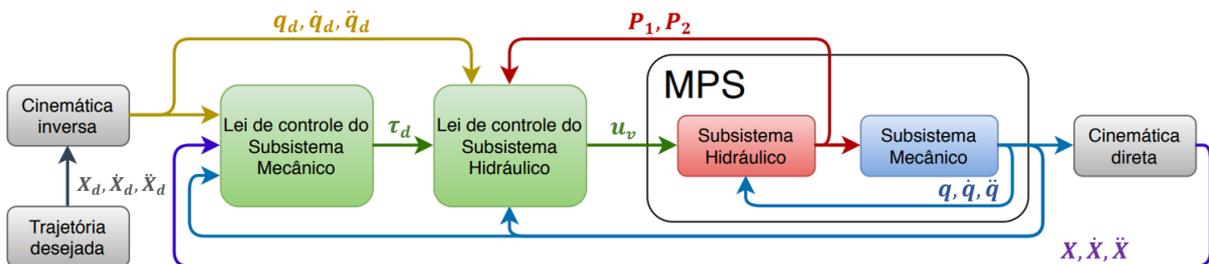


Figura 5.1 – Esquema de controle por Torque Calculado para um MPS hidráulico.

A lei de controle do subsistema mecânico é responsável por calcular as forças desejadas em cada atuador para que o MPS seja capaz de alcançar ou se manter nas trajetórias desejadas. A lei de controle do subsistema hidráulico é responsável por calcular os valores necessários de tensão elétrica a serem aplicados nas válvulas, de forma que os atuadores gerem as forças desejadas calculadas pela lei de controle do subsistema mecânico. As expressões matemáticas

que regem as duas leis de controle supracitadas são obtidas de modo que estabilidade do sistema seja garantida através do critério de estabilidade de Lyapunov. Antes de demonstrar o desenvolvimento destas equações, é necessário obter o modelo dinâmico do MPS hidráulico no espaço de juntas. Este procedimento será apresentado na Seção 5.2, a seguir.

## 5.2 Transformação da dinâmica do MPS para o espaço de juntas

A equação matricial apresentada no Capítulo 3 para representação do comportamento dinâmico do MPS foi desenvolvida em relação ao espaço de trabalho do manipulador e se apresenta reescrita aqui, por conveniência, na Equação 5.1:

$$\mathbf{M}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{X})\boldsymbol{\tau}. \quad (5.1)$$

Embora o modelo matemático tenha sido desenvolvido no espaço de trabalho, a estratégia de controle por Torque Calculado é mais simples de ser implementada utilizando as velocidades e acelerações no espaço de juntas, calculando diretamente as forças necessárias em cada atuador para realizar as trajetórias desejadas. Para que isso seja possível, é necessário substituir os termos  $\ddot{\mathbf{X}}$  e  $\dot{\mathbf{X}}$  por expressões dependentes das variáveis no espaço de juntas  $\ddot{\mathbf{q}}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$ . Para realizar essa transformação no modelo, a Matriz Jacobiana será utilizada, uma vez que ela apresenta uma relação direta entre as velocidades no espaço de juntas e espaço de trabalho, conforme pode ser observado na Equação 5.2:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{X}}, \quad (5.2)$$

onde,  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{X})$ . Para calcular o vetor de velocidades no espaço de trabalho  $\dot{\mathbf{X}}$  em função das velocidades no espaço de juntas, pode-se isolar  $\dot{\mathbf{X}}$  na Equação 5.2, obtendo-se a Equação 5.3 a seguir:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{q}}. \quad (5.3)$$

Para calcular agora as acelerações no espaço de trabalho  $\ddot{\mathbf{X}}$  em função de  $\ddot{\mathbf{q}}$ , pode-se derivar a Equação 5.2, originando a Equação 5.4:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{X}}, \quad (5.4)$$

onde  $\dot{\mathbf{J}}$  é a matriz derivada primeira no tempo da Matriz Jacobiana. O cálculo dos termos dessa matriz para o MPS do presente trabalho pode ser encontrado no Apêndice D.

Pode-se, portanto, substituir a Equação 5.3 na Equação 5.4, e isolar  $\ddot{\mathbf{X}}$ , gerando a Equação 5.5:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{q}}. \quad (5.5)$$

Tendo desenvolvido as equações 5.5 e 5.4 para representar  $\ddot{\mathbf{X}}$  e  $\dot{\mathbf{X}}$  em função de  $\ddot{\mathbf{q}}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$ , pode-se substituir estas equações na Equação 5.1, originando a Equação 5.6:

$$\mathbf{M}(\mathbf{X})(\mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{j}}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{X})\boldsymbol{\tau}. \quad (5.6)$$

Isolando e modificando a posição de alguns termos da Equação 5.6, obtém-se a Equação 5.7 na forma:

$$\mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - \mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{j}})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^{-T}\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (5.7)$$

Para adicionar os efeitos das dinâmicas dos atuadores e forças de atrito na Equação 5.7, pode-se transformar a Equação 4.27 do equilíbrio dinâmico do pistão na sua forma matricial, para os seis atuadores do MPS. Substituindo a aceleração da haste do pistão  $\ddot{x}$  da equação original pelo vetor de acelerações  $\ddot{\mathbf{q}}$  no espaço de juntas do MPS, e, substituindo a força externa aplicada ao pistão  $F_{ext}$  pelo vetor de forças nos atuadores  $\boldsymbol{\tau}$ , pode-se obter a Equação 5.8 a seguir:

$$\mathbf{F}_h - \mathbf{F}_a - \mathbf{F}_g - \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}_p\ddot{\mathbf{q}}, \quad (5.8)$$

onde,  $\mathbf{F}_h$ ,  $\mathbf{F}_a$  e  $\mathbf{F}_g$ , são vetores relativos às forças hidráulicas, de atrito e gravitacionais em cada atuador, respectivamente, e  $\mathbf{M}_p$  é uma matriz que contém as massas móveis dos seis pistões, definida como:

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_p \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Substituindo 5.7 em 5.8 e isolando o vetor de forças hidráulicas  $\mathbf{F}_h$  obtém-se:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{M}_p)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - \mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{j}})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{q}} \\ & + \mathbf{J}^{-T}\mathbf{G}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_a = \mathbf{F}_h. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Definindo:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{M}_p, \quad (5.11)$$

$$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - \mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{j}})\mathbf{J}^{-1}, \quad (5.12)$$

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}^{-T}\mathbf{G}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_g, \quad (5.13)$$

pode-se reescrever finalmente a Equação 5.7 na forma:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_a = \mathbf{F}_h. \quad (5.14)$$

A Equação 5.14 representa a dinâmica do MPS em função das velocidades e acelerações no espaço de juntas. Nota-se que a computação dos elementos das matrizes  $\bar{M}(\mathbf{X})$ ,  $\bar{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  e  $\bar{G}(\mathbf{X})$  ainda dependem das coordenadas no espaço de trabalho  $\mathbf{X}$  e  $\dot{\mathbf{X}}$ .

Assim como a matriz  $\dot{M}(\mathbf{X}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ , a matriz  $\ddot{M}(\mathbf{X}) - 2\dot{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  também possui a propriedade de anti-simetria. O desenvolvimento matemático necessário para chegar a essa conclusão é apresentado no Apêndice E. Esta propriedade será necessária para a prova de estabilidade do controlador por Torque Calculado proposto, descrita na Seção 5.5.

### 5.3 Lei do Subsistema Mecânico

O problema de controle do subsistema mecânico consiste de, para uma trajetória desejada  $\mathbf{q}_d$ , desenvolver uma lei de controle para as forças dos atuadores que seja capaz de fazer as posições dos atuadores, definidas pelo vetor  $\mathbf{q}$ , seguirem a trajetória desejada  $\mathbf{q}_d$ , após um período inicial de transitório. Para o desenvolvimento da lei de controle, Slotine e Li, 1988, definem inicialmente um vetor  $\mathbf{v}$ , denominado “velocidade de referência”, e sua derivada  $\dot{\mathbf{v}}$ , como sendo:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda \mathbf{e}, \quad (5.15)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \Lambda \dot{\mathbf{e}}. \quad (5.16)$$

A Equação 5.15 mostra que o vetor de velocidade de referência é gerado modificando a velocidade desejada  $\dot{\mathbf{q}}_d$  através da subtração do erro de posição  $\mathbf{e}$  multiplicado por uma matriz  $\Lambda \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  diagonal positiva e definida. O erro de posição  $\mathbf{e}$  e sua derivada  $\dot{\mathbf{e}}$  são definidos como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d, \quad (5.17)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d. \quad (5.18)$$

A velocidade de referência é introduzida na lei de controle do subsistema mecânico para garantir a convergência do erro de seguimento de trajetória. Analisando a Equação 5.17, pode-se concluir que o valor absoluto da velocidade de referência aumenta caso a trajetória atual das posições dos atuadores esteja atrasada em relação à trajetória desejada, e diminui no caso esteja adiantada, gerando assim, uma tendência do sistema a diminuir o módulo do erro de seguimento.

Segundo Slotine e Li, 1988, a seguinte lei de controle para o subsistema mecânico permite calcular o vetor de forças desejadas  $\boldsymbol{\tau}_d$  para os atuadores de forma que o erro tenda a zero a medida que o tempo avança:

$$\boldsymbol{\tau}_d = \bar{M}(\mathbf{X})\dot{\mathbf{v}} + \bar{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\mathbf{v} + \bar{G}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_a - \mathbf{K}_d \mathbf{s}, \quad (5.19)$$

onde,  $\mathbf{K}_d \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  é uma matriz diagonal positiva e definida, e o vetor  $\mathbf{s}$ , que é uma representação da precisão do seguimento da velocidade de referência  $\mathbf{v}$ , é definido, juntamente com a sua derivada  $\dot{\mathbf{s}}$ , por:

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{v} = \dot{\mathbf{e}} + \Lambda \mathbf{e}, \quad (5.20)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{e}} + \Lambda \dot{\mathbf{e}}. \quad (5.21)$$

Verifica-se, portanto, que o vetor  $\mathbf{s}$  consiste basicamente de uma combinação linear do erro de seguimento em posição com o erro de seguimento em velocidade. Sendo a matriz  $\Lambda$  positiva definida, quando  $\mathbf{s}$  tende a zero, a combinação linear também, e, conseqüentemente, os erros de posição e velocidade tendem a zero por meio da equação diferencial matricial de 1ª ordem. Logo, a Lei de Controle do Subsistema Mecânico apresentada na Equação 5.19 garante a convergência global dos erros de posição e velocidade, desde que as trajetórias desejadas  $\mathbf{q}_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d$  e  $\ddot{\mathbf{q}}_d$  sejam limitadas, conforme será provado pelo critério de estabilidade de Lyapunov, na Seção 5.5.

A estrutura da lei de controle descrita pela Equação 5.19, permite concluir que o controlador do subsistema mecânico consiste de duas partes. A primeira parte, composta pelos quatro primeiros termos do lado direito da lei de controle, consiste de uma forma especial de compensação da dinâmica completa do manipulador, com três termos correspondentes às parcelas de inércia, efeitos centrífugos e de Coriolis, e gravitacional da plataforma; e um termo relativo às forças de atrito correspondentes ao deslizamento das hastes dos pistões. Esta parte tem o objetivo calcular as forças necessárias para mover a plataforma conforme o vetor de velocidade de referência. A segunda parte, referente ao último termo da lei de controle, contém duas componentes representando uma realimentação PD (proporcional-derivativa) do erro de posição, uma vez que a Equação 5.20 permite concluir que:

$$-\mathbf{K}_d \mathbf{s} = -\mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_d \Lambda \mathbf{e}. \quad (5.22)$$

Esta componente PD funciona como uma forma de controlar as trajetórias dos sistemas para que convirjam aos valores da trajetória desejada ao longo do tempo.

#### 5.4 Lei do Subsistema Hidráulico

Conforme descrito na Seção 5.1, McDonell, 1996, propõe uma extensão da Lei de Slotine e Li, que permite a sua utilização em sistemas com acionamentos pneumáticos e hidráulicos. Para isto, McDonnell propõe a seguinte lei de controle para o subsistema fluídico:

$$\dot{\mathbf{F}}_h = \dot{\mathbf{\tau}}_d - \mathbf{K}_t \mathbf{s} - \mathbf{K}_d \tilde{\mathbf{r}}, \quad (5.23)$$

onde,  $\dot{F}_h$  é a derivada da força hidráulica a ser aplicada nos atuadores do manipulador,  $\dot{\tau}_d$  é a derivada do vetor de forças desejadas calculado pela lei de controle do subsistema mecânico (Equação 5.19),  $K_t$  e  $K_a$  são matrizes diagonais positivas definidas pertencentes ao domínio  $\mathbb{R}^{6 \times 6}$ , e  $\tilde{\tau}$  é um vetor que representa os erros de forças nas juntas. Ambas as matrizes de ganhos  $K_t$  e  $K_a$  atuam no sentido de controlar as forças aplicadas pelos atuadores em relação às forças desejadas calculadas pela lei de controle do subsistema mecânico. A matriz  $K_t$  multiplica o erro de velocidade das trajetórias, enquanto que a matriz  $K_a$  multiplica os erros de força nos atuadores. O vetor  $\tilde{\tau}$  e sua derivada  $\dot{\tilde{\tau}}$  são definidos por:

$$\tilde{\tau} = F_h - \tau_d, \quad (5.24)$$

$$\dot{\tilde{\tau}} = \dot{F}_h - \dot{\tau}_d. \quad (5.25)$$

Para que seja possível aplicar ao manipulador as derivadas das forças hidráulicas calculadas pela Equação 5.23, é necessário calcular o valor das tensões elétricas a serem aplicadas nas válvulas para que as respectivas variações nas forças hidráulicas sejam obtidas. Para calcular o vetor de ações de controle  $u_v$ , pode-se utilizar a Equação 4.26, transformando-a na sua forma vetorial para os seis atuadores presentes no manipulador, substituindo a posição e velocidade da haste do pistão pelos vetores  $q$  e  $\dot{q}$ , e substituindo o termo  $\dot{F}_h$  através da Equação 5.23, originando então a Equação 5.26 a seguir:

$$u_v = \frac{1}{\hat{u}(P_1, P_2, x, \dot{x})} \left( \dot{\tau}_d - K_t s - K_a \tilde{\tau} - \hat{h}(x, \dot{x}) \right), \quad (5.26)$$

onde, os termos  $\hat{u}$  e  $\hat{h}$  são a forma vetorial dos termos  $\hat{u}$  e  $\hat{h}$  definidos nas equações 4.24 e 4.25 da dinâmica inversa do atuador hidráulico.

## 5.5 Prova de estabilidade do controle por Torque Calculado

A estabilidade do controlador proposto neste capítulo pode ser comprovada através do Método Direto de Lyapunov. Segundo o método, se for possível encontrar uma função escalar qualquer, dependente do vetor de estados do sistema, que seja positiva definida, e que tenha a sua primeira derivada em relação ao tempo negativa definida, o sistema é assintoticamente estável. A função encontrada é denominada função de Lyapunov [Slotine e Li, 1991].

Baseando-se na prova de estabilidade proposta por García, 2015, propõe-se a seguinte função de Lyapunov:

$$V_{Ly} = \frac{1}{2} (s^T \bar{M}(X) s + \tilde{\tau}^T K_t^{-1} \tilde{\tau}). \quad (5.27)$$

Derivando a Equação 5.27, obtém-se:

$$\dot{V}_{Ly} = \mathbf{s}^T \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{X}) \mathbf{s} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \mathbf{K}_t^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}. \quad (5.28)$$

Para simplificar a Equação 5.28, é necessário calcular uma expressão para substituir o termo  $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{s}}$ . Para isso, considerando a hipótese de que a estimativa de atrito é ideal, pode-se substituir as equações 5.14 e 5.19 na Equação 5.24, obtendo-se a seguinte equação para a dinâmica do sistema em malha fechada:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X})(\ddot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{v}}) + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{v}) + \mathbf{K}_d \mathbf{s}. \quad (5.29)$$

Substituindo as equações 5.20 e 5.21 na Equação 5.29, obtém-se a seguinte expressão que define o termo  $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{s}}$ :

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{s}} = -\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \mathbf{s} - \mathbf{K}_d \mathbf{s} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}. \quad (5.30)$$

Substituindo as equações 5.25 e 5.30 em 5.28, e, reorganizando os termos, obtém-se:

$$\dot{V}_{Ly} = -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_d \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \left( \dot{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{X}) - 2\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \right) \mathbf{s} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \mathbf{K}_t^{-1} (\dot{\mathbf{F}}_h - \dot{\boldsymbol{\tau}}_d). \quad (5.31)$$

Conforme mencionado na Seção 5.2, a matriz  $\dot{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{X}) - 2\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  é anti-simétrica, portanto, a multiplicação  $\mathbf{s}^T \left( \dot{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{X}) - 2\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \right) \mathbf{s}$  é igual a zero para qualquer vetor  $\mathbf{s}$ . Logo, pode-se eliminar este termo da Equação 5.31 e substituir o termo  $\dot{\mathbf{F}}_h$  pela lei de controle do subsistema hidráulico escolhida, expressa pela Equação 5.23, possibilitando a sequência de simplificações apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{Ly} &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_d \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \mathbf{K}_t^{-1} (\dot{\boldsymbol{\tau}}_d - \mathbf{K}_t \mathbf{s} - \mathbf{K}_a \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \dot{\boldsymbol{\tau}}_d) \\ \dot{V}_{Ly} &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_d \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{K}_t \mathbf{s} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{K}_a \tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ \dot{V}_{Ly} &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_d \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \mathbf{s} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{K}_a \tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ \dot{V}_{Ly} &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_d \mathbf{s} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{K}_a \tilde{\boldsymbol{\tau}}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Uma vez que as matrizes  $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{K}_d$ ,  $\mathbf{K}_t$  e  $\mathbf{K}_a$  são positivas definidas, a função de Lyapunov proposta é necessariamente positiva definida e a expressão encontrada para a derivada da função de Lyapunov proposta é necessariamente negativa definida, ambas para qualquer  $\mathbf{s}$  e  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  diferentes de zero. Isso significa que, segundo o critério de estabilidade de Lyapunov,  $\mathbf{s}$  e  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  são assintoticamente estáveis, tendendo a zero quando o tempo tende ao infinito. Como  $\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}$ , e  $\boldsymbol{\Lambda}$  é uma matriz positiva definida, quando  $\mathbf{s}$  tende a zero,  $\dot{\mathbf{e}}$  e  $\mathbf{e}$  também tendem a zero, consolidando a estabilidade do controlador proposto.

## 6 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

Nos capítulos 3 e 4 foi apresentada a modelagem analítica para os sistemas mecânicos e hidráulicos que compõe o MPS. Porém, para utilizar estes modelos, há necessidade de se conhecer os valores dos seus parâmetros, o que muitas vezes é uma tarefa difícil, dependendo de alguns fatores como:

- disponibilidade de informações por parte dos fabricantes;
- possibilidade de intervenção nos componentes para realização de medições de grandezas (como folgas, dimensões internas, massa de partes móveis, etc);
- realização de experimentos com componentes visando a determinar os valores dos seus parâmetros;
- utilização de sistema de medição e aquisição de dados para aplicar técnicas de identificação de parâmetros a partir dos dados coletados.

No presente capítulo, são descritos os aspectos físicos da bancada experimental e os procedimentos utilizados para a medição e identificação dos valores dos seus parâmetros. Ao fim, serão apresentadas comparações entre os resultados experimentais e os fornecidos pela simulação do modelo identificado.

### 6.1 Descrição da bancada experimental

Nesta seção será descrita a bancada experimental quanto a seus parâmetros mecânicos e hidráulicos. Alguns parâmetros são mensuráveis, enquanto que outros serão identificados experimentalmente.

#### 6.1.1 Descrição do sistema mecânico e identificação dos seus parâmetros

O MPS utilizado neste trabalho foi projetado para suportar cargas de até 500 *kg*. As suas plataformas (base fixa e plataforma móvel), assim como os suportes angulares das juntas, são feitos de aço SAE 1020 – ASTM A 36. A base móvel é acoplada aos pistões por meio de juntas esféricas, como pode ser observado na Figura 6.1. A base fixa é acoplada aos pistões com juntas universais, como pode ser visualizado na Figura 6.2. Conforme já citado, essas conexões caracterizam o MPS utilizado como sendo do tipo UPS. Estas figuras também mostram os suportes angulares projetados especificamente para este MPS, que permitem a utilização das juntas em angulações que maximizam o espaço de trabalho do manipulador.



Figura 6.1 – Juntas esféricas e suportes angulares da plataforma móvel.

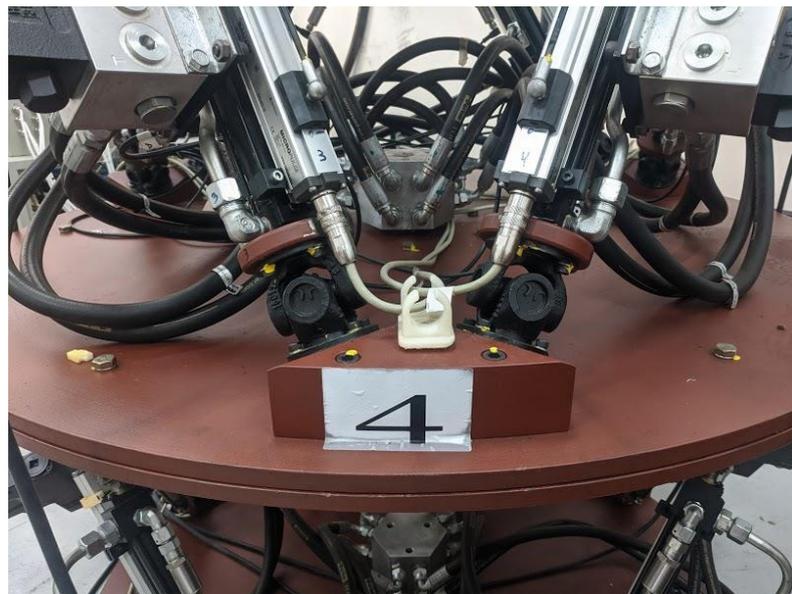


Figura 6.2 – Juntas universais e suportes angulares da base fixa.

A identificação dos parâmetros geométricos do MPS pode ser feita através do seu próprio projeto CAD (*computer aided design*) 3D. Estes parâmetros estão apresentados na Tabela 6.1. Utilizando também o modelo CAD 3D do manipulador, através de ferramentas computacionais apropriadas, obteve-se os valores dos parâmetros inerciais necessários para realizar simulações da dinâmica da sua estrutura. Os resultados das simulações podem ser

visualizados no Apêndice A, enquanto que a Tabela 6.2 apresenta os valores para as propriedades de massa obtidas referentes à plataforma móvel.

Tabela 6.1 – Parâmetros geométricos do MPS estudado.

Parâmetro	Valor
$r_b$	0,50312 <i>m</i>
$r_t$	0,38464 <i>m</i>
$\theta_b$	8,91 °
$\theta_t$	16,77 °
$z_b$	0,08371 <i>m</i>
$z_t$	-0,09791 <i>m</i>
$l_{min}$	0,534 <i>m</i>
$l_{max}$	0,834 <i>m</i>

Tabela 6.2 – Propriedades de massa do MPS estudado.

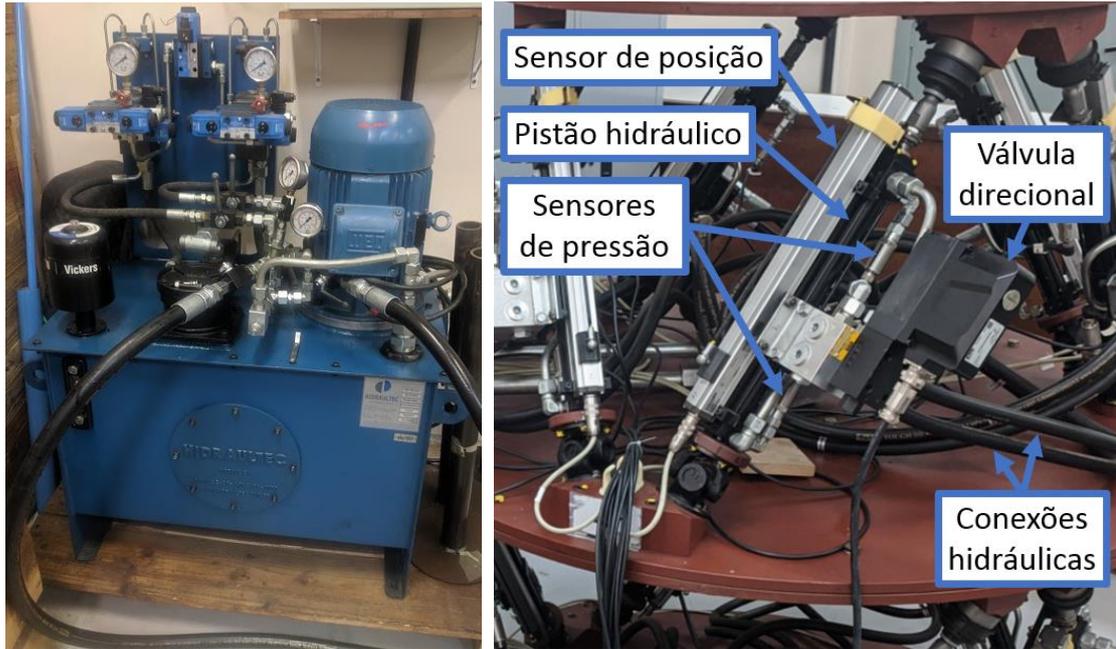
Parâmetro	Valor
Massa da base móvel <i>m</i>	85,54 <i>kg</i>
Momento de inércia $I_x$ da base móvel	4,31 <i>kgm</i> <sup>2</sup>
Momento de inércia $I_y$ da base móvel	4,31 <i>kgm</i> <sup>2</sup>
Momento de inércia $I_z$ da base móvel	8,57 <i>kgm</i> <sup>2</sup>

Conforme já comentado no Capítulo 3, a massa e os momentos de inércia dos atuadores serão considerados desprezíveis no modelo adotado neste trabalho.

O valor utilizado para a aceleração da gravidade será de 9,81  $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ .

### 6.1.2 Descrição do sistema hidráulico

O circuito hidráulico do MPS é alimentado por uma unidade hidráulica completa (Figura 6.3(a)), ajustada para gerar uma pressão de aproximadamente de 50 *bar*. Além da unidade hidráulica, o sistema é composto por 6 atuadores hidráulicos alimentados por ela. Acoplados a cada pistão, são dispostos 2 sensores de pressão conectados nas entradas das câmaras e um sensor de deslocamento linear acoplado à sua haste. Um atuador hidráulico do MPS é mostrado na Figura 6.3(b).



(a) Unidade hidráulica.

(b) Atuador hidráulico.

Figura 6.3 – Componentes hidráulicos do MPS.

Conforme pode ser observado na Figura 6.3(a), duas conexões hidráulicas estão acopladas à unidade de potência, uma é a linha de pressão que vai para o MPS e a outra é a de retorno. Essas linhas são conectadas em um bloco Manifold, localizado no centro do MPS, o qual distribui o óleo para as 12 conexões hidráulicas ligadas aos 6 atuadores. O circuito hidráulico do sistema de atuação do MPS pode ser observado na Figura 6.4.

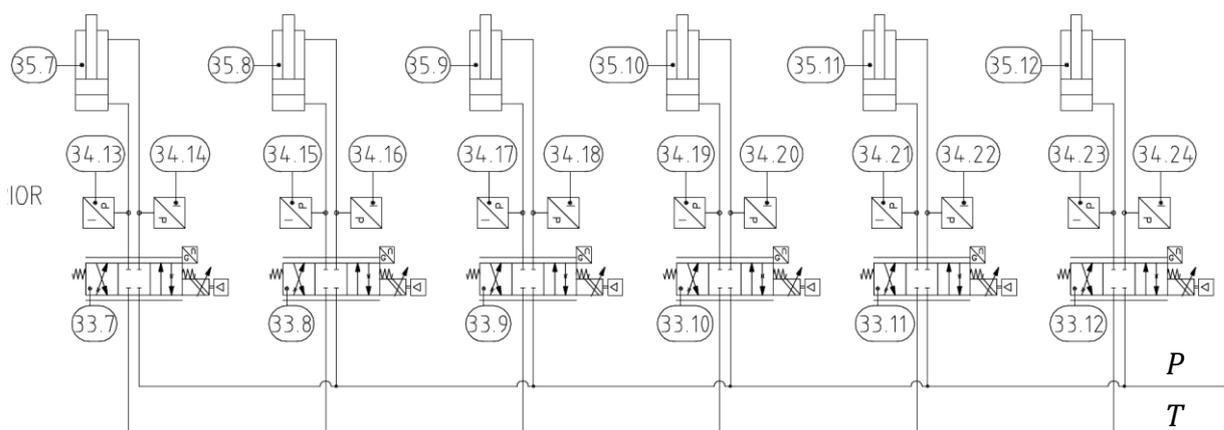


Figura 6.4 – Circuito hidráulico de atuação do MPS.

As válvulas proporcionais são do tipo D1FPB31GC9NB0036, da fabricante Parker. Segundo as especificações do seu manual técnico, essas válvulas são de centro supercrítico com

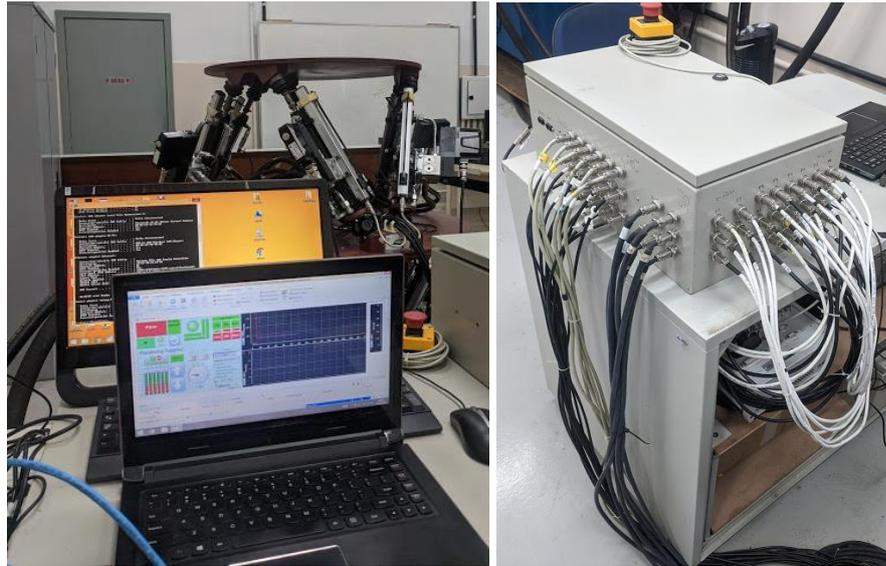
sobreposição (*overlap*) de 25%. O sinal de entrada é de tensão elétrica, variando de  $-10\text{ V}$  a  $+10\text{ V}$ , sendo que a válvula tem o seu centro fechado quando desenergizada ou submetida a  $0\text{ V}$ . A sua vazão tem característica assimétrica de forma que  $Q_B = \frac{Q_A}{2}$ , onde,  $Q_A$  e  $Q_B$  são, respectivamente, as vazões das câmaras  $A$  e  $B$  do pistão [Parker Hannifin, 2020]. Segundo Furst, 2001, válvulas assimétricas fornecem vazões diferentes visando à operação com pistões de haste não passante, nos quais a relação de áreas da válvula é semelhante à relação de áreas do cilindro. Já, as válvulas simétricas fornecem o mesmo valor de vazão para um sinal de entrada positivo ou negativo, e seu emprego está associado a cilindros simétricos (de haste passante).

O cilindro hidráulico, fabricado por encomenda pela empresa Parker, possui curso de  $300\text{ mm}$ , com diâmetro do pistão de  $25\text{ mm}$  e da haste de  $18\text{ mm}$ .

### 6.1.3 Descrição do sistema elétrico

A aquisição dos dados dos sensores e a geração dos sinais de comando para as válvulas são realizadas através de uma plataforma de prototipagem MicroLab Box, da fabricante dSPACE. Na presente aplicação, a plataforma adquire os sinais analógicos com uma faixa dinâmica de  $-10\text{ V}$  a  $+10\text{ V}$  e resolução de 14 bits. A geração dos sinais para as válvulas é feita através das saídas analógicas que possuem faixa dinâmica de  $-10\text{ V}$  a  $+10\text{ V}$  e resolução de 16 bits. A programação dos algoritmos de controle e aquisição de dados é feita com o software MATLAB/Simulink, os quais são compilados para serem processados pela MicroLab Box. A interface homem-máquina, que pode ser observada na Figura 6.5(a), foi desenvolvida através do software dSPACE ControlDesk 5.5. O software é capaz de gravar os códigos na plataforma e adquirir ou enviar dados em tempo real para a mesma através de uma conexão Ethernet. O algoritmo de controle e de aquisição de dados é processado com uma taxa de amostragem de  $1\text{ ms}$ .

A plataforma é conectada aos sensores e válvulas através de um hardware de condicionamento de sinais que pode ser observado na Figura 6.5(b). Este sistema opera com uma fonte  $24\text{ V}$  e transmite os sinais dos sensores para a MicroLab Box e desta para as válvulas. O hardware de condicionamento, assim como a base do sistema de aquisição de dados foi desenvolvido pela equipe do LAMECC especificamente para esta aplicação.



(a) Interface homem-máquina e ambiente de trabalho.

(b) Caixa do circuito de condicionamento de sinais (acima) e MicroLab Box (abaixo).

Figura 6.5 – Sistema de aquisição de dados.

Os sensores conectados a cada câmara dos pistões são da marca Parker, modelo SCP01-100-44-07, com fundo de escala de 100 *bar*, sinal de saída de 0 a 10 *V*, e tempo de resposta menor do que 1 *ms*. Segundo o fabricante, o erro total de medição é menor do que  $\pm 1\%$  do fundo de escala [Parker, 2020]. Para a realização dos experimentos, o sistema de aquisição de dados de pressão foi calibrado manualmente. No processo de calibração, todos os pistões são movidos para a posição máxima com a válvula totalmente aberta para um lado, e então, os dados brutos são adquiridos. O mesmo é feito no sentido oposto, sendo os valores brutos utilizados para realizar o processo de calibração. A unidade hidráulica é ajustada para 50 *bar* através do manômetro presente na sua saída. Como resultado, a pressão máxima fornecida pela unidade hidráulica é considerada 50 *bar*, enquanto que a mínima, a pressão atmosférica, 0 *bar*.

Para cada pistão, há um sensor de posição acoplado à sua haste, como pode ser observado na Figura 6.3 (b). Os sensores são da marca BALUFF, o modelo é BTL5-E10-M0300-P-S32. O princípio de funcionamento é magnetostrictivo, possuindo curso de 300 *mm*, resolução 0,2  $\mu\text{A}$ , e saída proporcional do tipo 4 a 20 *mA* [Balluff, 2019].

## 6.2 Identificação dos parâmetros hidráulicos

Nesta seção são apresentados os procedimentos utilizados para obter os valores dos parâmetros da zona morta da válvula e do pistão.

### 6.2.1 Identificação da zona morta

Um dos métodos tradicionais para identificação de zona morta consiste na utilização de transdutores para avaliar a vazão volumétrica da válvula em relação à variação no sinal de entrada. Valdiero, 2005, propõe um método alternativo ao procedimento tradicional, baseado na utilização de medição das pressões nas câmaras do atuador para determinar os valores dos parâmetros da zona morta. A principal vantagem deste método para o presente caso está associada ao fato de que os atuadores do MPS já possuem sensores de pressão acoplados às suas câmaras, permitindo realizar a obtenção dos valores sem alteração no hardware.

O procedimento consiste na aplicação, em malha aberta, de um sinal de entrada senoidal de lenta variação. Para que a abertura máxima da válvula seja possível, caso necessário, a amplitude do sinal utilizada chega até 10 V. Segundo o método, aplica-se um período de 100 s para a onda senoidal e durante o experimento, havendo pelo menos um ciclo de abertura e fechamento total da válvula. É também importante que no início da abertura, a haste do pistão já esteja na posição equivalente à aplicação da tensão inicial. Durante a variação do sinal de entrada, a haste do pistão começará a se movimentar em função da vazão gerada pela válvula, indo de sua posição mínima até a máxima e vice-versa. Durante esse procedimento, os valores de pressão e de sinal de entrada devem ser adquiridos e salvos. A Figura 6.6 apresenta os resultados obtidos no experimento realizado.

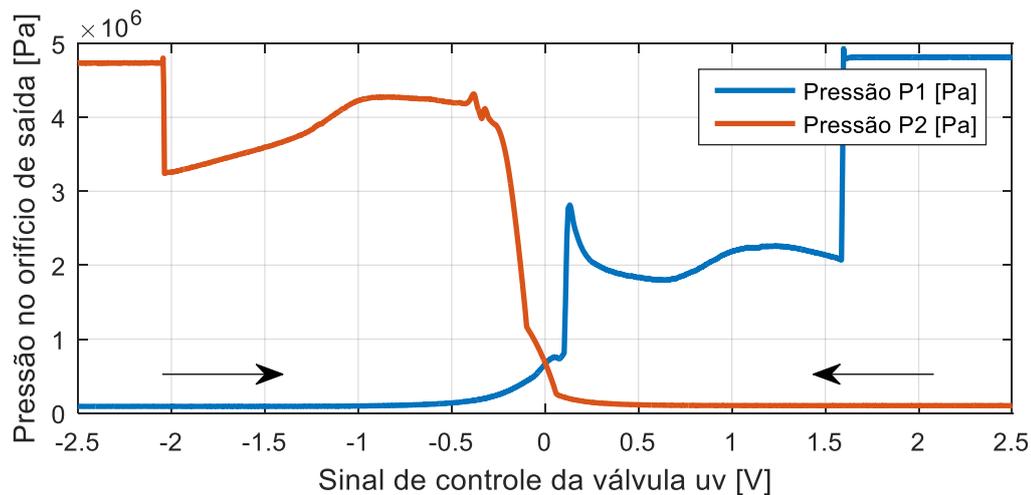


Figura 6.6 – Dados adquiridos para a identificação da zona morta.

Sendo suficientemente baixa a frequência do sinal de comando, o pistão já atinge a sua posição máxima e a pressão sobe para o valor da alimentação (que é aproximadamente 5 ·

$10^6 \text{ Pa}$ ) antes que o módulo da tensão da válvula atinja  $2,5 \text{ V}$ . As setas indicam o sentido da variação da pressão em relação ao tempo. A linha azul representa a variação da pressão  $P_1$  enquanto o sinal de entrada varia de  $-2,5 \text{ V}$  a  $+2,5 \text{ V}$ . Essa variação faz com que a Câmara 1 do cilindro, que estava conectada ao tanque, seja lentamente conectada à pressão de alimentação. A linha laranja representa a variação da pressão  $P_2$  enquanto o sinal de entrada varia de  $+2,5 \text{ V}$  a  $-2,5 \text{ V}$ . Esta variação faz com que a Câmara 2 do cilindro, que estava conectada ao tanque, seja lentamente conectada à pressão de alimentação. A Figura 6.7 apresenta uma aproximação em detalhe da região de interesse dos dados do experimento.

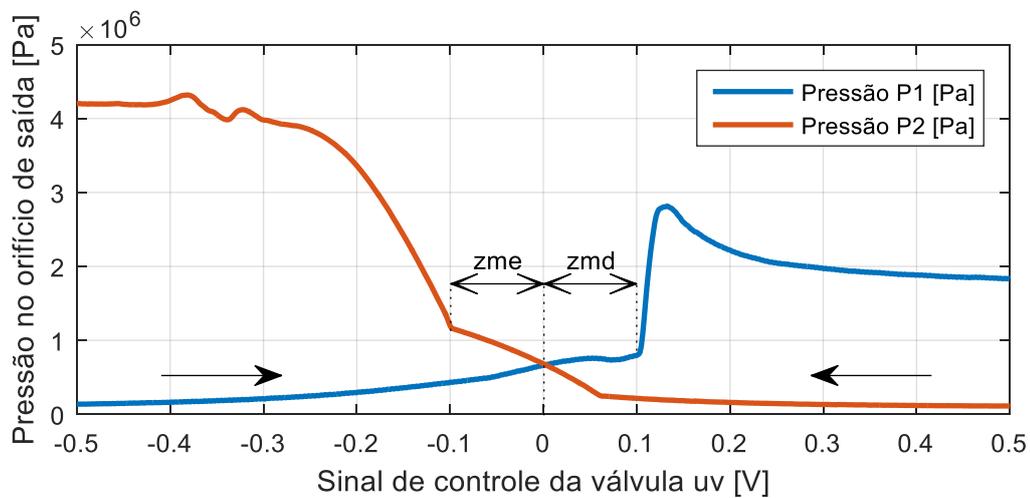


Figura 6.7 – Aproximação em detalhe dos dados do experimento.

Observa-se que nos dois casos, a pressão começa a subir mesmo antes de a tensão de entrada cruzar o valor de  $0 \text{ V}$ . Isso acontece devido à vazamentos internos na válvula quando o carretel está próximo ao seu centro. Estes vazamentos já foram apresentados em um gráfico na Figura 4.12(c) e, mesmo sendo muito pequenos, são capazes de alterar as pressões nas câmaras na medida em que o tempo avança.

Segundo Valdiero, 2005, no momento em que o sinal de controle ultrapassa o limite direito da zona morta direita ( $zmd$ ), ocorre uma variação brusca da pressão  $P_1$ . O mesmo vale para o limite da zona morta esquerda ( $zme$ ) em relação à variação da pressão  $P_2$ . Observando a Figura 6.7, se percebe que os valores de  $zmd$  e  $zme$  são aproximadamente  $0,1 \text{ V}$ .

Conhecendo os valores dos seus parâmetros, a estratégia de compensação da zona morta, descrita na Seção 4.3.7, pode ser utilizada, restando apenas definir o valor do parâmetro de suavização da compensação,  $l_c$ , pois os valores  $md$  e  $me$  terão valor unitário. O valor  $l_c$  regula uma região do sinal de controle em torno de  $0 \text{ V}$ , na qual é feita a suavização. Quanto

maior a amplitude do ruído do sinal de controle, maior deve ser o valor de  $l_c$ . Isso ajuda a evitar oscilações do sinal compensado em torno de  $0 V$ . Quanto maior o valor de  $l_c$ , maior é a suavização, mas, por outro lado, pode comprometer a exatidão da compensação, pois resulta em uma zona morta residual. Nos ensaios realizados, um valor de  $l_c$  igual a  $0,05 V$  apresentou uma compensação satisfatória da zona morta, sem haver maiores prejuízos no sinal de controle. A Tabela 6.3 apresenta os parâmetros do modelo identificados nessa seção.

Tabela 6.3 – Parâmetros identificados para a zona morta e sua compensação.

Parâmetro	Valor
$zmd$	$0,1 V$
$zme$	$0,1 V$
$md$	1
$me$	1
$l_c$	$0,05 V$

### 6.2.2 Identificação de parâmetros mensuráveis

Conforme mencionado no Capítulo 4, o valor do volume morto das câmaras do pistão é importante para a implementação do seu modelo matemático. Esta é uma das variáveis de difícil obtenção quando não se pode intervir nos componentes utilizados. Como pode ser observado na Figura 6.3(b), existem tubulações que levam o óleo da válvula até as câmaras do pistão. O volume interno dessas tubulações, somado aos volumes internos das conexões do pistão e da válvula, caracterizam o volume morto deste sistema hidráulico. Uma vez que a medição é de difícil execução, o mesmo será obtido por meio de cálculos teóricos utilizando valores de projeto nos seus parâmetros.

Ignorando volumes internos das conexões com a válvula e câmara e considerando que o comprimento de cada tubulação de aproximadamente  $40 cm$ , e que o diâmetro interno é  $8 mm$ , calcula-se o volume de cada tubulação como sendo aproximadamente  $2 \cdot 10^{-5} m^3$ , sendo considerado que os volumes mortos das duas câmaras têm o mesmo valor. O valor estimado é compatível com os valores experimentais utilizados em Pereira, 2006, considerando as proporções dos cilindros utilizados.

Os valores das áreas do pistão e da haste são calculados a partir dos dados disponibilizados pelo fabricante, os quais indicam um diâmetro de 25 mm para o pistão e de 18 mm para a haste. Assim, as áreas  $A_1$  e  $A_2$  podem ser facilmente calculadas:

$$A_1 = \pi \left( \frac{0,025}{2} \right)^2 = 4,9087 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad (6.1)$$

e

$$A_2 = \pi \left( \frac{0,025}{2} \right)^2 - \pi \left( \frac{0,018}{2} \right)^2 = 2,3640 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2. \quad (6.2)$$

Para calcular a massa da parte móvel do pistão, foram utilizadas as dimensões da haste e a densidade do seu material. Como resultado foi obtido um valor de aproximadamente 1 kg para a massa da haste.

Os parâmetros  $P_r$  e  $P_s$  são facilmente determinados, uma vez que a pressão de retorno é considerada como a pressão de referência (atmosférica) e a pressão de alimentação é 50 bar ( $5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ). Em uma referência manométrica, a pressão de referência atmosférica é zero.

Outro valor que precisa ser determinado é o parâmetro  $c$  que foi apresentado na Seção 4.3.3. Este parâmetro representa o curso do cilindro, ou seja, a diferença entre o comprimento mínimo e máximo do atuador apresentados na Tabela 6.1, o seu valor é 0,3 m.

A Tabela 6.4 apresenta os parâmetros do modelo identificados nesta seção.

Tabela 6.4 – Parâmetros mensuráveis identificados nesta seção.

Parâmetro	Valor
$V_{10}$	$2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$
$V_{20}$	$2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$
$A_1$	$4,9087 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
$A_2$	$2,3640 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
$m_p$	1 kg
$P_r$	0 Pa
$P_s$	$5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
$c$	0,3 m

### 6.2.3 Identificação dos parâmetros de atrito

Um método experimental comum para modelar o atrito é considerar a força de atrito como uma função da velocidade. Medindo a força de atrito necessária para mover o pistão a uma velocidade constante, pode-se levantar uma curva estática representativa para a força de

atrito em função da velocidade [Canudas de Wit et al., 1991]. Para tanto, o experimento de identificação consiste em mover o pistão em malha aberta, sob velocidade constante, obtendo a força de atrito, a qual, nesta situação, corresponde à força hidráulica de atuação. Como comentado previamente na Seção 4.3.4, a força hidráulica pode ser calculada através da medição das pressões nas câmaras. O processo foi feito com várias aberturas diferentes de válvula, resultando assim em diferentes velocidades. Os resultados do experimento podem ser visualizados na Figura 6.8.

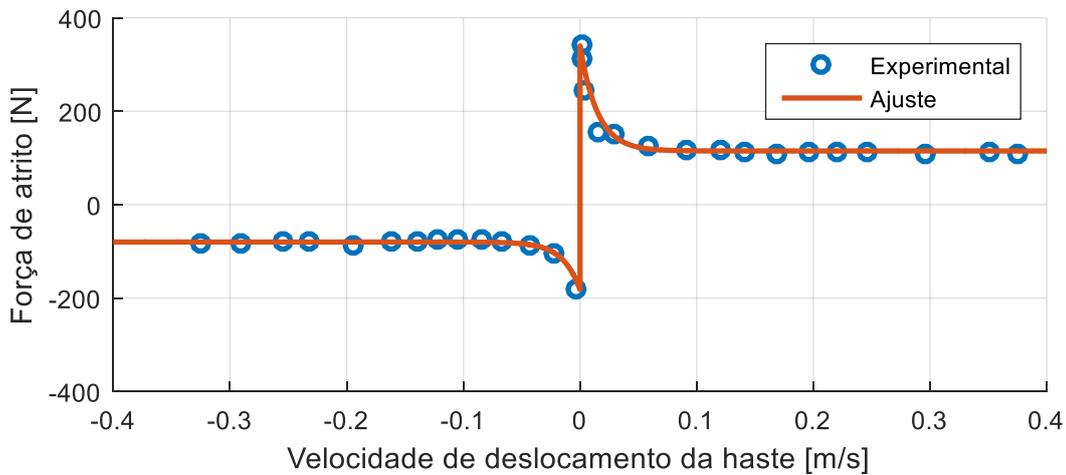


Figura 6.8 – Comportamento experimental da força de atrito em função da velocidade.

Observa-se nos resultados que são predominantes os efeitos da força de Coulomb, atrito estático e efeito de Stribeck. Os efeitos do atrito viscoso não são significativos para as velocidades de operação deste pistão. Nota-se também que os efeitos de atrito têm intensidade diferente para velocidades positivas e negativas. As mesmas características foram observadas por Sohl e Bobrow, 1999, quando identificaram o comportamento do atrito de um cilindro hidráulico semelhante ao utilizado neste trabalho, mas de maiores dimensões.

Também, na Figura 6.8, pode-se observar (em laranja) uma curva de ajuste desenvolvida com base nos resultados experimentais representados pelos pontos (azuis). O ajuste dos parâmetros desta curva foi feito de forma manual e iterativa para que corresponda de forma aproximada aos dados de força de atrito obtidos experimentalmente. A Equação 6.3 a seguir, baseada na Equação 4.29, descreve esta curva:

$$F_a = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \left( 115 + (340 - 115)e^{-\left(\frac{|\dot{x}|}{0,015}\right)^1} \right), & \dot{x} \geq 0 \\ \operatorname{sgn}(\dot{x}) \left( 80 + (182 - 80)e^{-\left(\frac{|\dot{x}|}{0,015}\right)^1} \right), & \dot{x} < 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Esta equação representa de forma relativamente precisa o comportamento do atrito para o experimento realizado, e foi utilizada para as simulações em malha fechada do MPS na dinâmica direta do manipulador, mostradas no Capítulo 7.

Na simulação de um único atuador hidráulico sem carga, o modelo de atrito representado pela Equação 6.3 se mostrou oscilatório, gerando resultados inadequados para a análise proposta do modelo do atuador hidráulico. Portanto, para obter resultados satisfatórios nas simulações do atuador apresentadas na Seção 6.3, foi utilizado um modelo de atrito simplificado, considerando apenas o atrito de Coulomb, representado pela Equação 6.4. Os valores utilizados foram determinados baseando-se em uma aproximação da força de atrito observada nos experimentos:

$$F_a = 150 \operatorname{sgn}(\dot{x}), \quad (6.4)$$

onde,  $\operatorname{sgn}$  é a função sinal, definida como 1 para  $\dot{x} \geq 0$  e  $-1$  para  $\dot{x} < 0$ .

Sohl e Bobrow, 1999, demonstram de forma experimental que a utilização de uma compensação de força de atrito no controlador, considerando apenas o atrito de Coulomb, apresenta uma melhora significativa nos resultados para o seguimento de trajetória. Entretanto, os autores destacam que para seguimento de trajetória em velocidades menores, o modelo simplificado pode apresentar desempenho inferior. Estudos aprofundados sobre a utilização de outros modelos de atrito mais complexos na identificação dos coeficientes de vazão poderão ser feitos em trabalhos futuros.

No Capítulo 7, são apresentadas simulações do MPS hidráulico completo controlado em malha fechada. Conforme citado, nestas simulações o modelo de atrito representado pela Equação 6.3 será utilizado no modelo matemático da dinâmica direta do MPS. Já, na dinâmica inversa para controle do manipulador, utilizada no algoritmo de controle por Torque Calculado, o modelo utilizado para estimar a força de atrito no controlador será composto apenas de uma parcela viscosa. A utilização de modelos de atrito mais completos dentro do controlador por Torque Calculado, como os utilizados por Sarmanho, 2014, exige provas de estabilidade mais complexas, o que está fora do escopo do presente trabalho. Neste caso, o valor do coeficiente de atrito viscoso utilizado terá o valor de  $B = 1500 \frac{Ns}{m}$ . Este valor foi obtido através da linearização do modelo de atrito completo em torno da velocidade  $0,08 \frac{m}{s}$ , que representa um valor aproximado para a média das velocidades de deslocamento dos atuadores durante as trajetórias. Diferentes valores para este coeficiente foram testados em malha fechada e este valor apresentou bons resultados experimentais para o controle por Torque Calculado.

### 6.2.4 Identificação dos coeficientes de vazão da válvula

A aplicação das leis de controle apresentadas no Capítulo 5 requerem estimativas dos parâmetros do modelo do atuador hidráulico. Algumas variáveis, como  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $V_1$  e  $V_2$ , podem ser calculadas através das equações apresentadas, mas ainda resta estimar valores para  $\beta_c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$ . Alguns fabricantes fornecem dados que tornam possível estimar os parâmetros das válvulas, entretanto, no presente trabalho, optou-se por realizar uma identificação numérica.

Sohl e Bobrow, 1999, apresentam um método numérico baseado em mínimos quadrados para calcular  $\beta_c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$ . O método consiste em utilizar dados obtidos por uma série de testes em malha aberta, realizando a medição das pressões  $P_1$  e  $P_2$  nas câmaras do cilindro e a posição  $x$  da haste. O experimento realizado para esta identificação consistiu na aplicação de uma onda senoidal com 1,5 V de amplitude e frequência de  $1 \frac{rad}{s}$ , a uma taxa de amostragem de 1 ms. A partir das medições feitas, juntamente com os parâmetros do modelo já identificados até então, as variáveis  $\dot{x}$ ,  $\dot{P}_1$ ,  $\dot{P}_2$ ,  $V_1$  e  $V_2$  são calculadas.

Para realizar a identificação por mínimos quadrados, primeiro é necessário organizar os dados na forma  $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , onde  $D \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^m$  são conhecidos,  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^m$  é desconhecido e  $m \gg n$ . Utilizando as equações das vazões 4.9 e 4.10 nas equações de dinâmica das pressões 4.12 e 4.13, podem-se derivar dois conjuntos de dados, um para identificar  $c_1$ ,  $c_2$  e  $\beta_c$ , outro para  $c_3$ ,  $c_4$  e  $\beta_c$ . O primeiro sistema é formado por equações da forma:

$$\begin{pmatrix} -\dot{P}_1(1)V_1 & w_1(1) & w_2(1) \\ -\dot{P}_1(2)V_1 & w_1(2) & w_2(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\dot{P}_1(n)V_1 & w_1(n) & w_2(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_c \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \dot{x}(1) \\ A_1 \dot{x}(2) \\ \vdots \\ A_1 \dot{x}(n) \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

onde (para  $T = 1, 2, \dots, n$ ),

$$\left. \begin{aligned} w_1(T) &= u_v(T) \sqrt{P_s - P_1(T)} \\ w_2(T) &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ para } u_v(T) \geq 0 \quad (6.6)$$

e

$$\left. \begin{aligned} w_1(T) &= 0 \\ w_2(T) &= u_v(T) \sqrt{P_1(T) - P_r} \end{aligned} \right\}, \text{ para } u_v(T) < 0. \quad (6.7)$$

O segundo sistema é formado por equações da forma:

$$\begin{pmatrix} -\dot{P}_2(1)V_2 & w_3(1) & w_4(1) \\ -\dot{P}_2(2)V_2 & w_3(2) & w_4(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\dot{P}_2(n)V_2 & w_3(n) & w_4(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_c \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_2 \dot{x}(1) \\ -A_2 \dot{x}(2) \\ \vdots \\ -A_2 \dot{x}(n) \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

onde (para  $T = 1, 2, \dots, n$ ),

$$\left. \begin{aligned} w_3(T) &= -u_v(T)\sqrt{P_2(T) - P_r} \\ w_4(T) &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ para } u_v(T) \geq 0 \quad (6.9)$$

e

$$\left. \begin{aligned} w_3(T) &= 0 \\ w_4(T) &= -u_v(T)\sqrt{P_s - P_2(T)} \end{aligned} \right\}, \text{ para } u_v(T) < 0. \quad (6.10)$$

De forma semelhante ao procedimento descrito por Sohl e Bobrow, 1999, o comando  $\mathbf{x} = D \setminus \mathbf{b}$  foi usado no MATLAB para resolver estas equações para os valores  $c_1, c_2, c_3, c_4$  e  $\beta_c$  que minimizam  $\|D\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ . Nota-se que, para cada procedimento de identificação, é gerado um valor independente para  $\beta_c$ . Os dados experimentais utilizados para calcular  $w_1, w_2, w_3, w_4$  e  $\mathbf{b}$  podem ser observados na Figura 6.9. Os valores de identificação obtidos estão apresentados na Tabela 6.5. É importante destacar que antes de utilizar os dados de tensão de entrada da válvula na montagem da matriz  $D$ , o valor da zona morta (0,1 V) foi compensado.

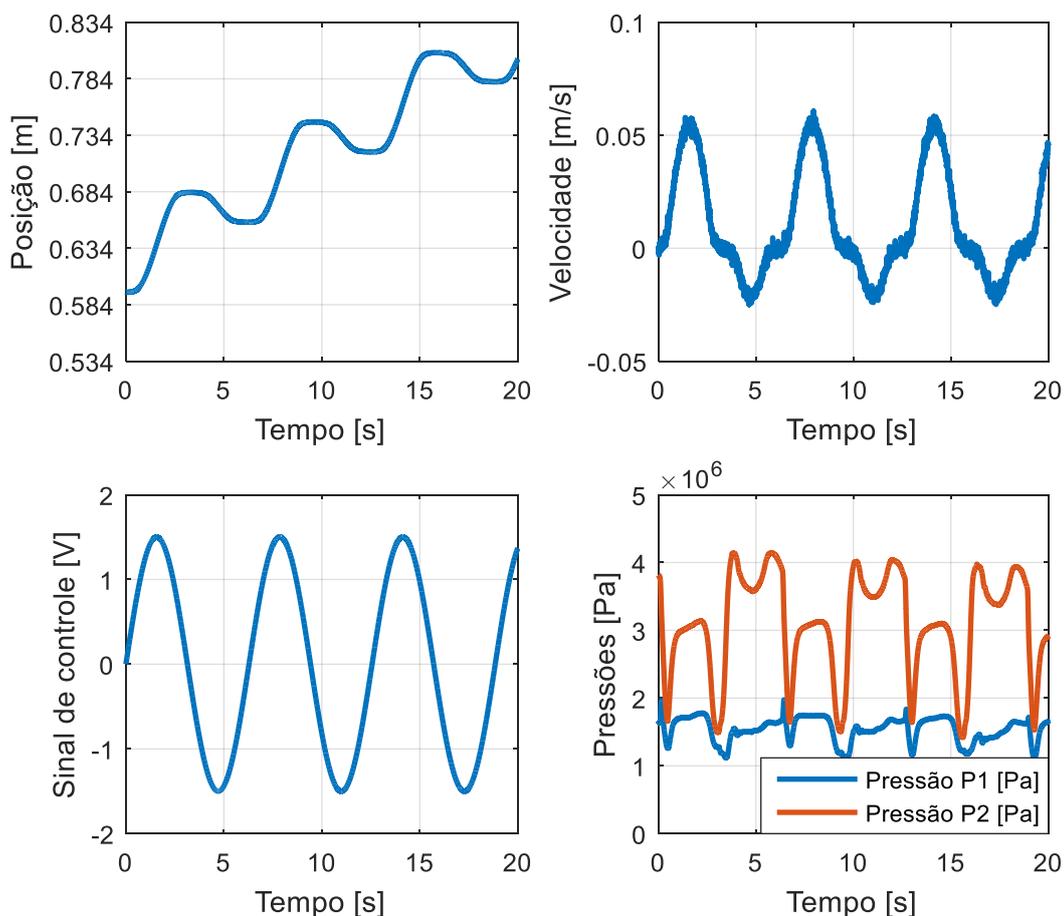


Figura 6.9 – Dados experimentais utilizados para a identificação.

Tabela 6.5 – Resultados obtidos através da identificação por mínimos quadrados.

Parâmetro	Valor
$\beta_c$ (Câmara 1)	$-2,2445 \cdot 10^8 Pa$
$c_1$	$9,2764 \cdot 10^{-9} m^3 / (s VPa^{\frac{1}{2}})$
$c_2$	$4,4481 \cdot 10^{-9} m^3 / (s VPa^{\frac{1}{2}})$
$\beta_c$ (Câmara 2)	$4,7143 \cdot 10^8 Pa$
$c_3$	$4,8028 \cdot 10^{-9} m^3 / (s VPa^{\frac{1}{2}})$
$c_4$	$2,3140 \cdot 10^{-9} m^3 / (s VPa^{\frac{1}{2}})$

Para avaliar o modelo identificado, realiza-se a comparação entre o valor do vetor  $b$  (variação de volume medida pelo sensor de posição) e  $Dx$  (variação de volume calculada através das equações do modelo e dos parâmetros identificados), os resultados estão apresentados na Figura 6.10.

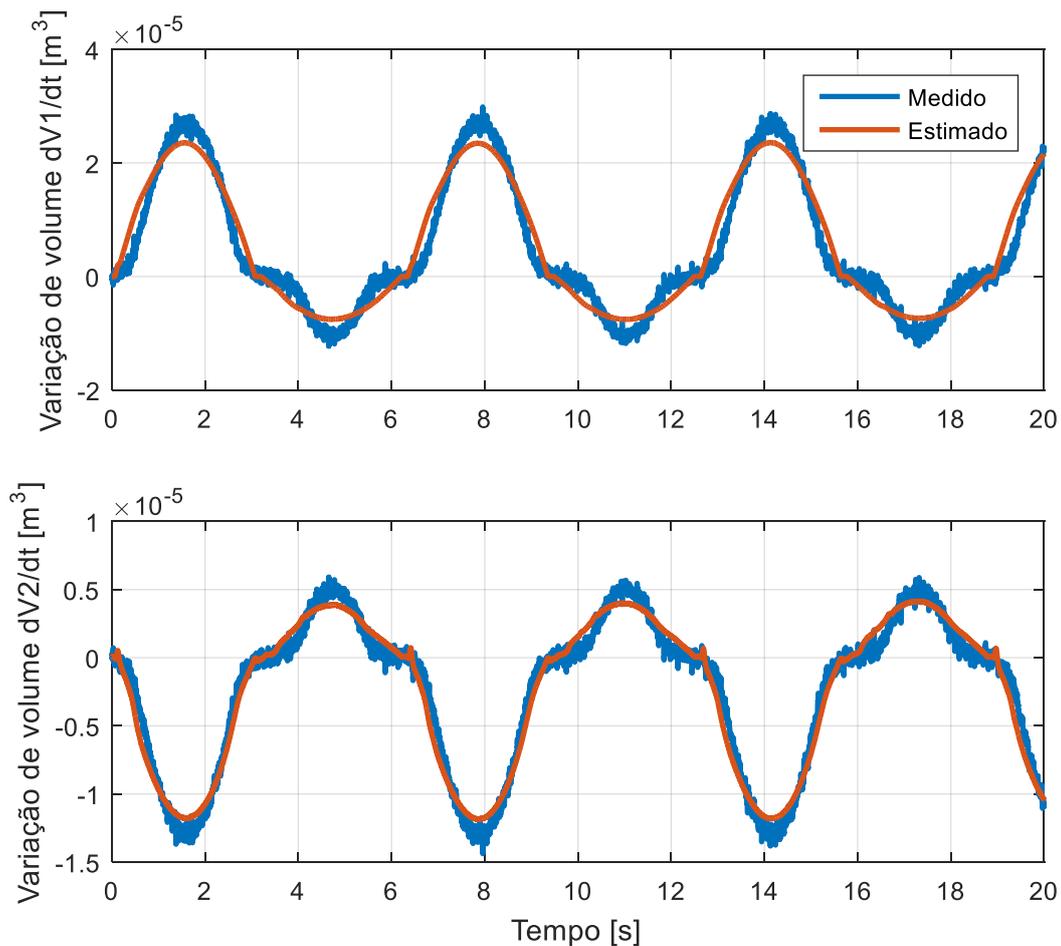


Figura 6.10 – Comparação entre modelo identificado e experimento para a variação de volume da câmaras 1 e 2.

Analisando os resultados obtidos por meio do procedimento de identificação, percebe-se que a curva que representa os valores de variação de volume medidos e a curva de valores estimados (calculados através do modelo) são aproximados.

### **6.2.5 Determinação de $\beta_c$**

Verificou-se uma alta sensibilidade de cálculo do valor de  $\beta_c$  em relação ao método de mínimos quadrados proposto por Sohl e Bobrow, 1999, e aos dados experimentais utilizados, não sendo possível obter valores consistentes para o parâmetro. Assim, optou-se por usar o valor de  $\beta_c = 8 \cdot 10^8 Pa$ , conforme sugerido por Pereira, 2006, para uma aplicação semelhante. Este valor será utilizado para os próximos procedimentos de identificação, simulações e experimentos. Estudos aprofundados sobre a identificação numérica deste parâmetro podem ser feitos em trabalhos futuros.

### **6.2.6 Aprimoramento da identificação dos coeficientes de vazão da válvula**

Considerando que a variação de volume é proporcional à velocidade da haste do cilindro, algumas considerações podem ser feitas em relação ao desempenho do modelo identificado. Comparando a variação de volume medida e simulada, percebe-se que, em situações de baixa velocidade (baixa variação de volume), o módulo da variação do volume é maior no modelo identificado do que no experimento. Já, em velocidades mais altas, o módulo da variação de volume é menor no modelo identificado do que no experimento. Considerando que o método de mínimos quadrados foi utilizado para a identificação dos parâmetros deste modelo, é natural que o método tenha retornado um valor médio aproximado para os coeficientes. Este valor faz com que o erro médio ao longo do experimento seja minimizado.

Observando as equações 4.9 e 4.10 do modelo do atuador hidráulico, percebe-se que os valores dos coeficientes de vazão influenciam as mesmas de forma proporcional. Também se percebe através das equações 4.12 e 4.13 que, desconsiderando a influência da compressibilidade do óleo, as variações de volumes e velocidades são fortemente influenciadas pelas vazões.

Baseando-se nestes fatos e analisando os resultados dos experimentos, percebe-se que, para baixas velocidades, a vazão do modelo identificado é menor do que a medida, e, para velocidades maiores, a vazão do modelo identificado é maior do que a medida. Através destas

observações é possível supor que os coeficientes de vazão não são constantes na realidade, e sendo influenciados principalmente pelo valor da velocidade da haste do pistão.

A Equação 4.8 mostra que o valor dos coeficientes de vazão é influenciado pelos parâmetros  $C_d$ ,  $l$ ,  $K_v$  e  $\rho$ . Destes,  $l$  é um parâmetro geométrico constante, dependente da construção da válvula;  $K_v$  é considerado constante, uma vez que a dinâmica da válvula é rápida quando comparada com a do sistema hidráulico;  $\rho$  é a massa específica do óleo que, segundo Watton, 2007, pode apresentar variações com pressão e temperatura, mas que são irrelevantes para as condições deste experimento. Desta forma, o parâmetro  $C_d$  pode ser considerado como sendo a possível causa da variação dos coeficientes de vazão.

Segundo Merritt, 1967 e Watton, 2007, o coeficiente de descarga  $C_d$  é influenciado por parâmetros geométricos do orifício de vazão (parâmetros constantes), mas também é influenciado pelo número de Reynolds do regime de escoamento no orifício. A relação entre  $C_d$  e o número de Reynolds pode ser observado na Figura 6.11.

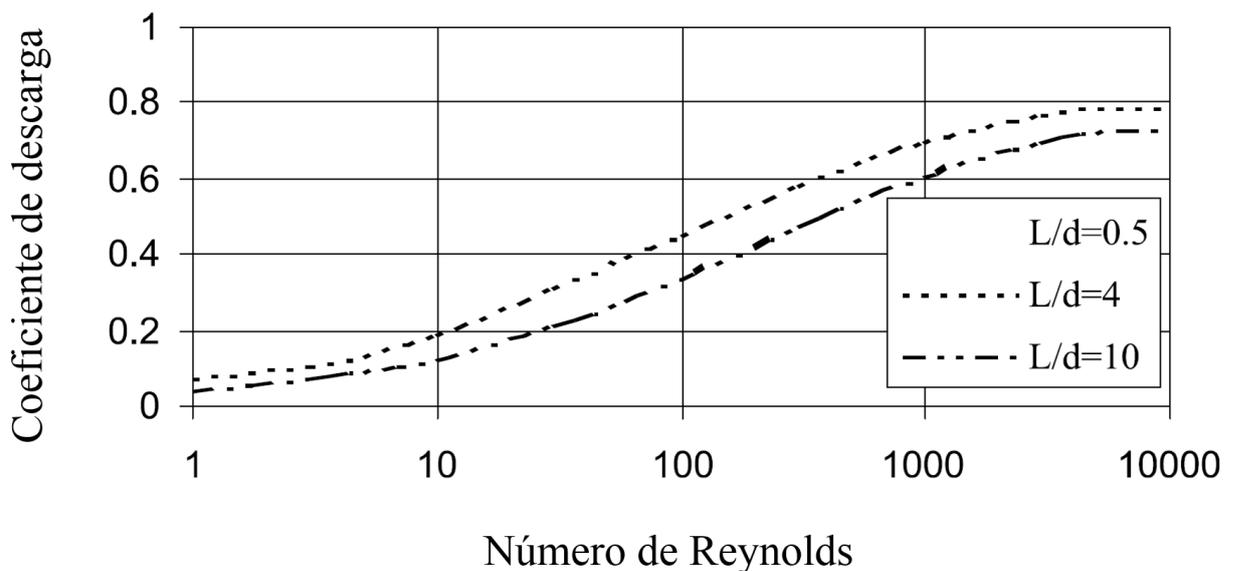


Figura 6.11 – Influência do número de Reynolds no coeficiente de descarga em um orifício de área fixa,  $L$  e  $d$  são parâmetros geométricos do orifício [adaptado de Watton, 2007].

O número de Reynolds representa o tipo de escoamento em um orifício e é proporcional à velocidade média do fluido que passa pelo orifício. Pequenas velocidades geram um número de Reynolds pequeno e representam um uma vazão em regime laminar. Por outro lado, grandes velocidades correspondem a um regime turbulento associado a um número de Reynolds alto [Watton, 2007].

Baseando-se nas informações apresentadas até agora, considerando uma abertura de válvula constante, é possível realizar as seguintes afirmações sobre as relações entre a velocidade de deslocamento do pistão e os coeficientes de vazão das válvulas:

- 1) a velocidade da haste do pistão é diretamente proporcional, à vazão de óleo no orifício da válvula;
- 2) a vazão de óleo no orifício é diretamente proporcional à velocidade do fluido no orifício;
- 3) a velocidade do fluido no orifício é diretamente proporcional ao número de Reynolds;
- 4) o número de Reynolds tem influência direta no coeficiente de descarga  $C_d$ ;
- 5) o coeficiente de vazão é diretamente proporcional ao coeficiente de descarga (Equação 4.8).

Logo, pode-se concluir que os coeficientes de vazão da válvula podem ser considerados variáveis em função da velocidade da haste do pistão.

### **6.2.7 Identificação dos coeficientes de vazão variáveis da válvula**

A partir das análises apresentadas na Seção 6.2.6, pode-se utilizar os valores de coeficientes de vazão, encontrados inicialmente através do método de mínimos quadrados, juntamente com o comportamento do coeficiente de descarga, apresentado na Figura 6.11, para fazer uma nova estimativa para o valor dos coeficientes de vazão.

Para essa nova estimativa, os valores dos coeficientes de vazão serão considerados variáveis em função da velocidade da haste do pistão. Observando a Figura 6.11, percebe-se que o coeficiente de descarga tem um valor mínimo, ou seja, não é nulo em velocidade nula. Percebe-se também que o valor do mesmo satura após uma certa velocidade, ou seja, não cresce indefinidamente. Para não tornar o modelo demasiadamente complexo, a faixa de transição entre valor mínimo e máximo é aproximada por um crescimento linear em função da velocidade. Os valores mínimos e máximos, assim como velocidade de saturação dos coeficientes de vazão, foram determinados empiricamente. Os valores foram ajustados para que o valor simulado das variações de volume seja o mais próximo possível dos valores medidos, o que é relativamente simples, uma vez que cada uma das 4 vazões presentes no modelo (vazões positivas e negativas nas câmaras 1 e 2) é influenciada de forma independente por cada um dos 4 coeficientes de vazão, conforme mostram as equações 4.9 e 4.10.

A Figura 6.12 apresenta as funções identificadas para o comportamento dos coeficientes de vazão, assim como o valor estimado através do método de mínimos quadrados.

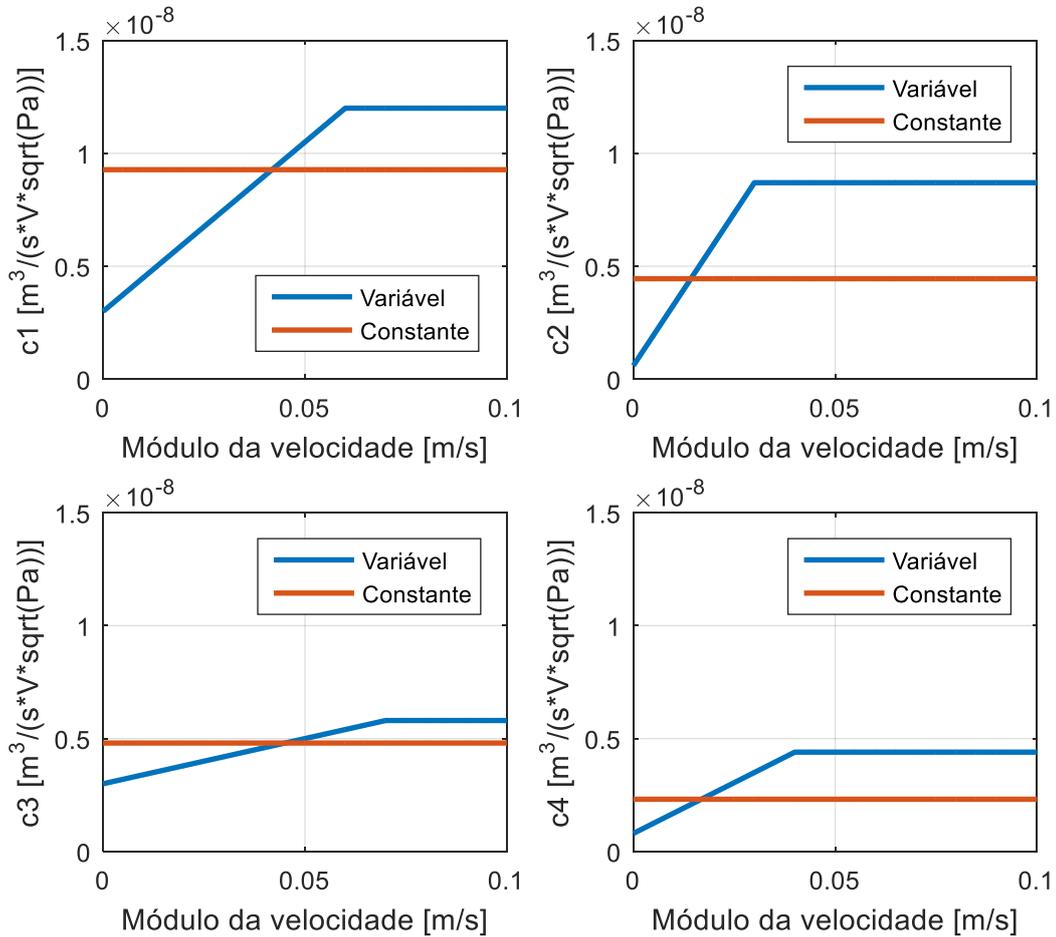


Figura 6.12 – Valor identificado dos coeficientes de vazão em função da velocidade da haste.

As equações utilizadas para gerar as funções apresentadas na Figura 6.12 podem ser observadas a seguir:

$$c1(\dot{x}) = 1,5 \cdot 10^{-7} \min(|\dot{x}|, 0,06) + 3,0 \cdot 10^{-9}, \quad (6.11)$$

$$c2(\dot{x}) = 2,7 \cdot 10^{-7} \min(|\dot{x}|, 0,03) + 0,6 \cdot 10^{-9}, \quad (6.12)$$

$$c3(\dot{x}) = 4,0 \cdot 10^{-8} \min(|\dot{x}|, 0,07) + 3,0 \cdot 10^{-9}, \quad (6.13)$$

$$c4(\dot{x}) = 0,9 \cdot 10^{-7} \min(|\dot{x}|, 0,04) + 0,8 \cdot 10^{-9}. \quad (6.14)$$

A função *min* retorna o valor mínimo entre dois valores, implementando a função de saturar do valor máximo do coeficiente neste caso. A correspondência entre a variação de volume nas câmeras do novo modelo identificado com os dados experimentais pode ser observada nos gráficos da Figura 6.13. Nota-se uma melhora de correspondência do modelo

com os valores medidos. O modelo foi testado com outros conjuntos de dados experimentais e se mostrou satisfatório.

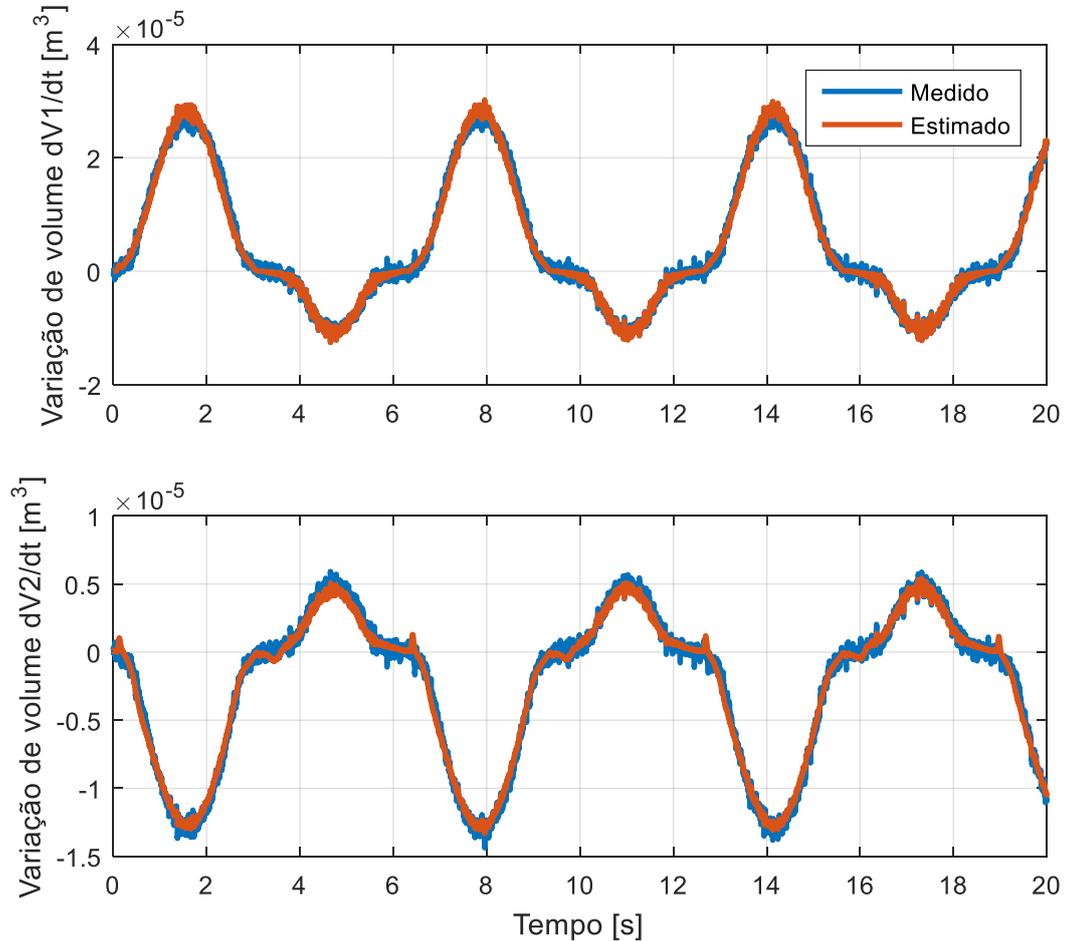


Figura 6.13 – Comparação entre novo modelo identificado e experimento.

### 6.3 Simulação do modelo completo do atuador hidráulico

A programação em diagrama de blocos do modelo identificado pode ser encontrada no Apêndice F. Uma simulação do modelo completo com todos os parâmetros identificados foi feita para realizar a validação do modelo. A simulação utiliza o modelo de atrito descrito pela Equação 6.4 inserido na estratégia de modelagem de atrito de Karnopp. As mesmas condições iniciais e mesmo sinal de entrada para a válvula de controle durante 20 s. A Figura 6.14 apresenta os resultados obtidos por meio de simulação e experimentos. Pode-se perceber que o modelo é capaz de simular o comportamento do atuador de forma satisfatória.

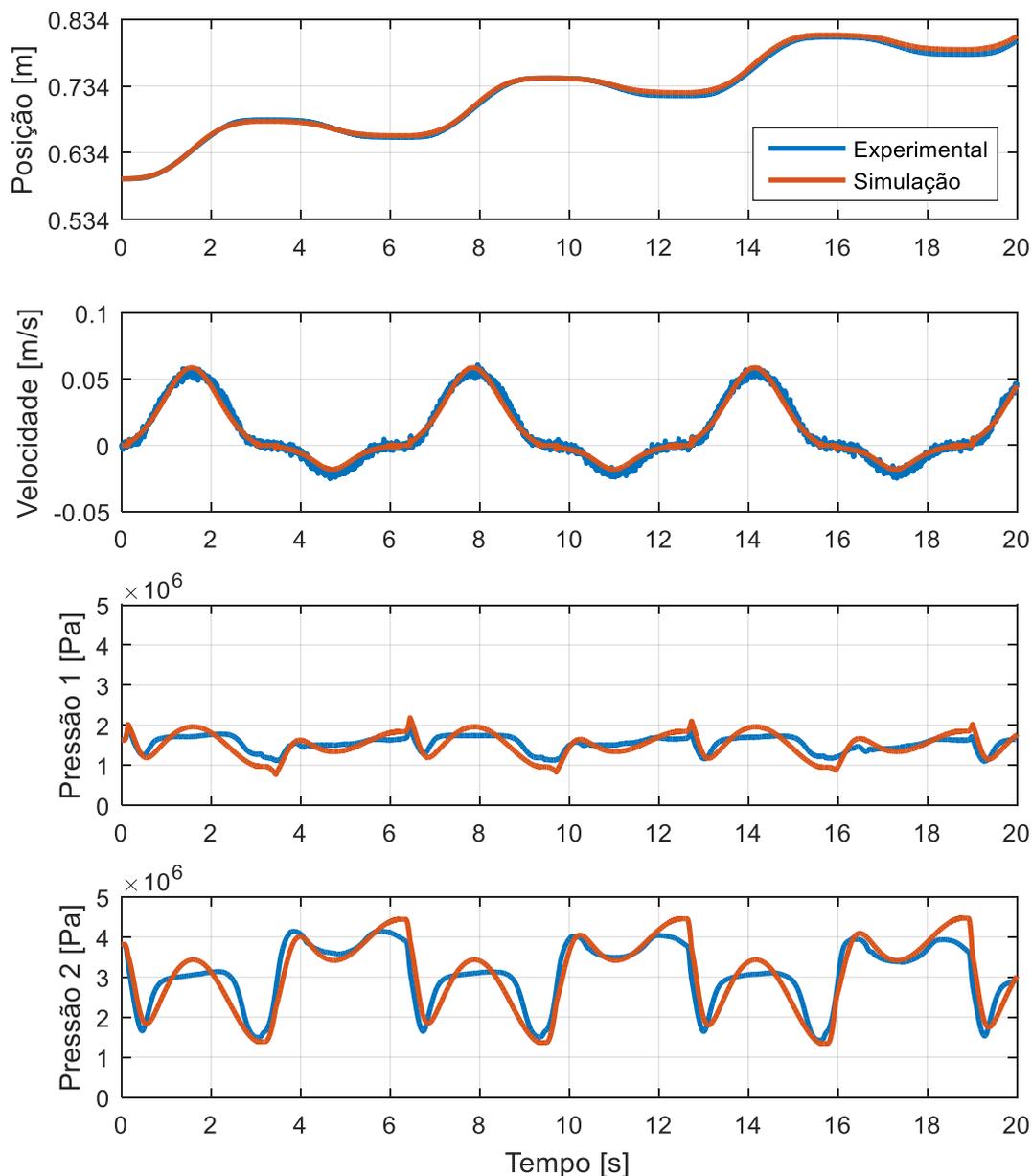


Figura 6.14 – Comparação entre modelo e experimento.

#### 6.4 Validação do modelo inverso do atuador hidráulico

Para implementação do controlador proposto no Capítulo 6, é necessária a programação do modelo inverso do atuador hidráulico. Isto envolve o desenvolvimento do diagrama de blocos para a Equação 4.26 da dinâmica inversa do subsistema hidráulico e também a implementação da Equação 4.30 para realizar a compensação de zona morta. Para realizar a verificação do desempenho do modelo inverso do atuador, os dados de entrada, apresentados na Figura 6.9, foram utilizados no modelo da dinâmica direta do atuador, e as saídas deste

último, utilizadas nas entradas do modelo da dinâmica inversa do atuador, conforme pode ser observado no diagrama de blocos da Figura 6.15. Os modelos de atrito utilizados para a dinâmica direta e para a dinâmica inversa são semelhantes. O objetivo desta simulação é verificar se a reconstrução do sinal de tensão aplicado à válvula é feita de forma satisfatória.

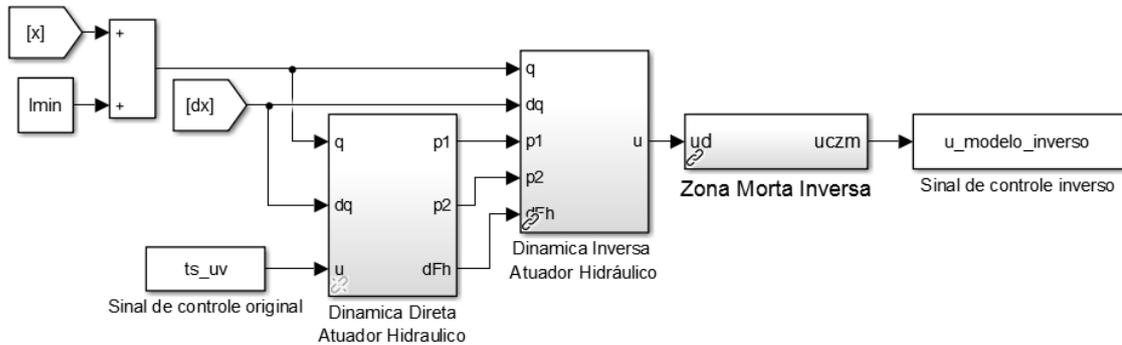


Figura 6.15 – Diagrama de blocos para validação da dinâmica inversa.

O resultado obtido para a simulação proposta pode ser observado na Figura 6.16. Percebe-se que em grande parte da zona de operação da válvula, o cálculo do modelo inverso é capaz de reproduzir de forma satisfatória o comportamento da tensão de entrada da válvula. Entretanto, em pontos próximos à tensão de 0 V, o sinal apresenta distorções na reconstrução. Isso ocorre por dois motivos. O primeiro é relacionado com a Equação 5.26, na qual os componentes  $f_1$  e  $f_2$  sofreram uma adaptação nas condições para troca das equações, que passaram a depender do sinal da variável velocidade do pistão em vez de depender do sinal da variável sinal de controle  $u_v$ . Isso faz com que em momentos em que a velocidade seja nula, não seja possível determinar se os coeficientes de vazão a serem utilizados sejam os de velocidades positivas ou negativas. O segundo motivo é a própria compensação de zona morta, que não é perfeita, uma vez que existe uma zona de suavização próxima a 0 V.

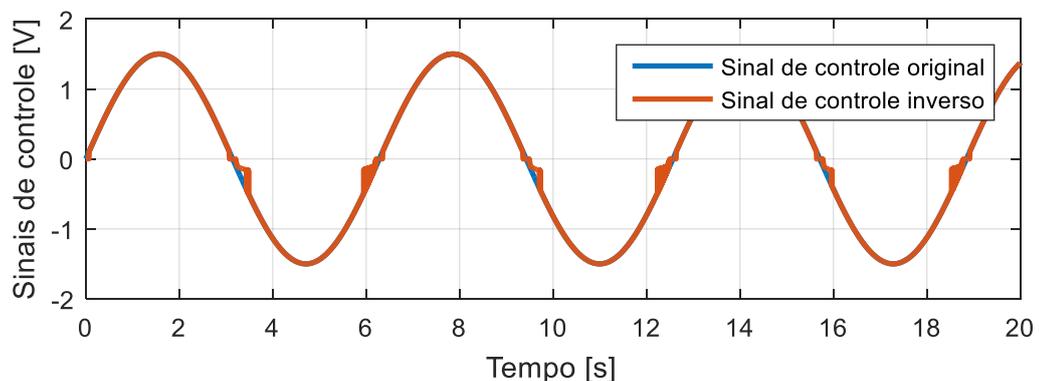


Figura 6.16 – Comparação sinal de comando da válvula, original e reconstruído.

## 7 RESULTADOS

Neste capítulo, dois aspectos principais são abordados: a validação experimental do modelo dinâmico do Manipulador Plataforma de Stewart e a implementação experimental do algoritmo de controle por Torque Calculado. Para realizar a validação experimental do modelo, foi implementado um controlador Proporcional-Integral. A validação é feita comparando resultados obtidos em simulação e nos experimentos. Para a implementação experimental do controle por Torque Calculado são testadas duas trajetórias, a primeira consiste de uma combinação de trajetórias senoidais, obtidas na bibliografia, com o objetivo de validar o modelo matemático, enquanto que a segunda consiste de um arranjo que simula os movimentos de um navio, composta de uma combinação de curvas harmônicas.

O capítulo é dividido em seis partes: na Seção 7.1, são apresentados os tipos de referências de trajetória utilizadas no capítulo; na Seção 7.2 são apresentados os filtros utilizados nos sinais dos sensores durante os experimentos; na Seção 7.3 é feita uma validação do modelo dinâmico do MPS através da comparação entre resultados de simulação e experimento utilizando um controlador PI; na Seção 7.4 são apresentados os resultados de simulação e experimento para o controle por Torque Calculado para uma trajetória senoidal arbitrária; na Seção 7.5 está apresentado o resultado experimental para o controle de Torque Calculado simulando uma trajetória de convés de navio; finalmente, na Seção 7.6 é apresentada uma compilação dos resultados obtidos, comparando os erros de seguimento de trajetória nas diferentes situações analisadas.

Para todas as simulações e experimentos, a posição inicial do manipulador corresponde à situação em que seus atuadores se localizam no meio do seu curso. As simulações e experimentos têm duração de 20 s e as análises de erros médios e valores mínimos e máximos de algumas variáveis serão feitas utilizando o intervalo entre o tempo 2 s a 20 s, considerado já como operação em regime permanente do sistema.

### 7.1 Descrição das trajetórias aplicadas

Neste estudo, duas trajetórias são aplicadas ao manipulador. Estas trajetórias são descritas no espaço de trabalho do manipulador e serão utilizadas como referências de movimentos a serem reproduzidos pelo mesmo através dos controladores desenvolvidos. A primeira é uma trajetória senoidal arbitrária, definida com o objetivo de testar os limites de

desempenho do manipulador em uma gama de frequências usualmente encontradas em movimentos de navios. A segunda, é uma trajetória fornecida pelo CASNAV (Centro de Análise de Sistemas Navais), que é utilizado em sistemas de simulação de passadiço (<https://www.marinha.mil.br/casnav/?q=node/150>). Esta trajetória refere-se aos movimentos de um navio em condições de mar na costa do Rio Grande do Sul.

### 7.1.1 Trajetória 1

A Trajetória 1 é composta por seis sinais senoidais com amplitudes, fases, e frequências variadas, cada um referente a um dos graus de liberdade do manipulador no espaço de trabalho. Esses sinais foram criados e utilizados por García, 2015, e também utilizados por Valente, 2016. No presente trabalho, tiveram suas amplitudes modificadas para se tornarem compatíveis com o espaço de trabalho do manipulador em questão. As frequências escolhidas por García, 2015, foram selecionadas considerando uma faixa de frequências compatíveis com os movimentos de uma embarcação de grande porte sob efeito das ondas do mar. A Figura 7.1 apresenta um gráfico dos sinais em função do tempo e a Tabela 7.1 apresenta os coeficientes de cada sinal senoidal.

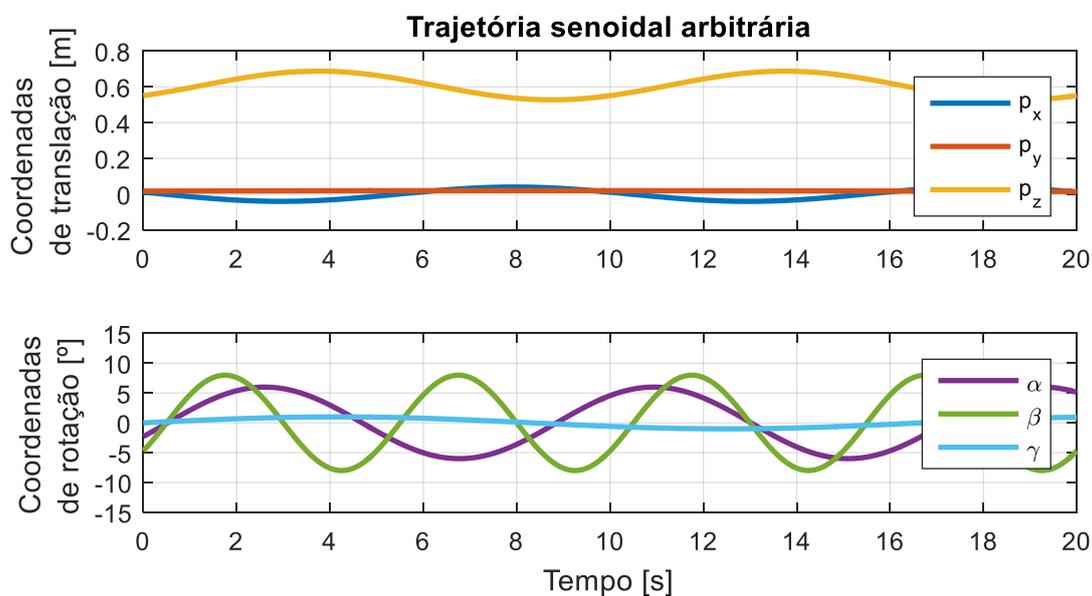


Figura 7.1 – Trajetória 1 no espaço de trabalho.

Tabela 7.1 – Coeficientes para a Trajetória 1.

Parâmetro	$p_x$	$p_y$	$p_z$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Amplitude	0,04 [m]	0,02 [m]	0,08 [m]	6 [°]	8 [°]	1 [°]
Frequência	0,1 [Hz]	0,01 [Hz]	0,1 [Hz]	0,12 [Hz]	0,2 [Hz]	0,06 [Hz]
Fase	$\frac{\pi}{1,1}$ [rad]	$\frac{\pi}{3}$ [rad]	$-\frac{\pi}{4}$ [rad]	$-\frac{\pi}{8}$ [rad]	$-\frac{\pi}{5}$ [rad]	0 [rad]
Offset	0 [m]	0 [m]	0,6074 [m]	0 [°]	0 [°]	0 [°]

Através do cálculo da cinemática inversa, as trajetórias no espaço de trabalho são transformadas em trajetórias no espaço de juntas, que então são utilizadas pelo controlador como referências a serem seguidas pelos atuadores do MPS. A Figura 7.2 apresenta um gráfico das trajetórias no espaço de juntas obtidas a partir da Trajetória 1.

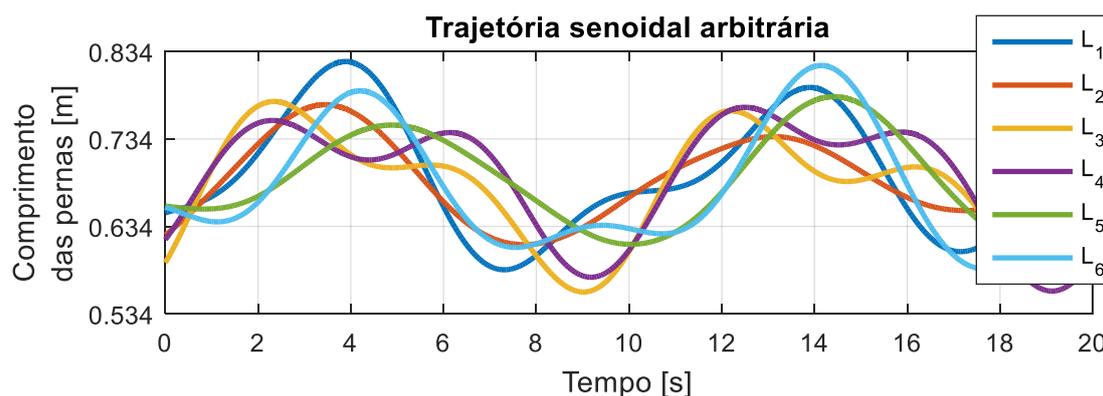


Figura 7.2 – Trajetória 1 no espaço de juntas.

Conforme descrito no capítulo anterior, os limites máximo e mínimo de comprimento do atuador hidráulico utilizado têm valores 0,834 m e 0,534 m, respectivamente. Observa-se na Figura 7.2 que em nenhum momento da trajetória estes limites são excedidos.

### 7.1.2 Trajetória 2

A Trajetória 2 foi gerada a partir de um software simulador da hidrodinâmica de embarcações. Foram simulados os movimentos de uma embarcação do tipo navio cargueiro, com 288 m de comprimento, 36 m de largura e 23 m de altura. As condições do mar para simulação dos movimentos foram baseadas em medições realizadas no litoral do Rio Grande

do Sul, disponibilizadas em Assis et al., 2013, com incidência de ondas de período de 6,4 s, 1,88 m de altura, e ângulo de ataque de 110° em relação ao eixo longitudinal do navio. As condições escolhidas para a simulação são condições prováveis de operação para um navio cargueiro no litoral gaúcho.

As simulações feitas por García, 2015, geraram um banco de dados com os deslocamentos, velocidades e acelerações na forma de vetores. Com o intuito de tornar estes dados compatíveis com os experimentos e simulações realizados neste trabalho, os mesmos foram convertidos para a forma de equações senoidais. A representação gráfica das trajetórias geradas em relação ao tempo pode ser observada na Figura 7.3. Os coeficientes das equações geradas podem ser observados na Tabela 7.2.

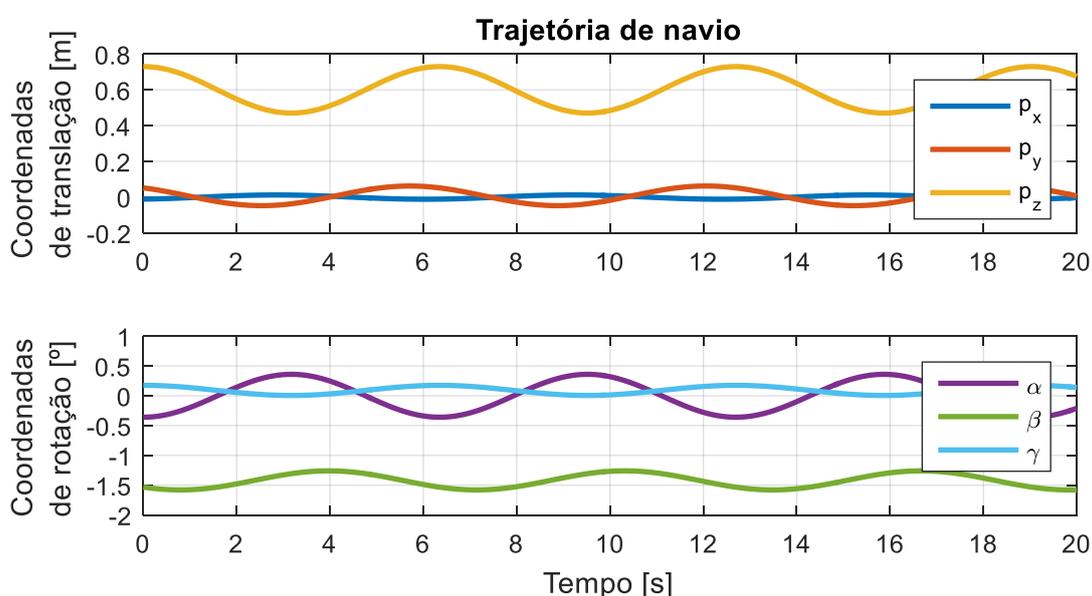


Figura 7.3 – Trajetória 2 no espaço de trabalho.

Tabela 7.2 – Coeficientes para a Trajetória 2.

Parâmetro	$p_x$	$p_y$	$p_z$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Amplitude	0,012 [m]	0,055 [m]	0,13 [m]	0,36 [°]	0,16 [°]	0,085 [°]
Frequência	0,1576 [Hz]	0,1576 [Hz]	0,1576 [Hz]	0,1576 [Hz]	0,1576 [Hz]	0,1576 [Hz]
Fase	$-\frac{\pi}{2,5}$ [rad]	$\frac{2,1 * \pi}{3}$ [rad]	$\frac{\pi}{2}$ [rad]	$-\frac{\pi}{2}$ [rad]	$-\frac{3\pi}{4}$ [rad]	$\frac{\pi}{2}$ [rad]
Offset	0 [m]	0,007 [m]	0,6 [m]	0 [°]	-1,42 [°]	0,09 [°]

Utilizando novamente as equações de cinemática inversa, as trajetórias no espaço de trabalho são transformadas em trajetórias no espaço de juntas. A Figura 7.4 apresenta um gráfico das trajetórias no espaço de juntas obtidas a partir da Trajetória 2.

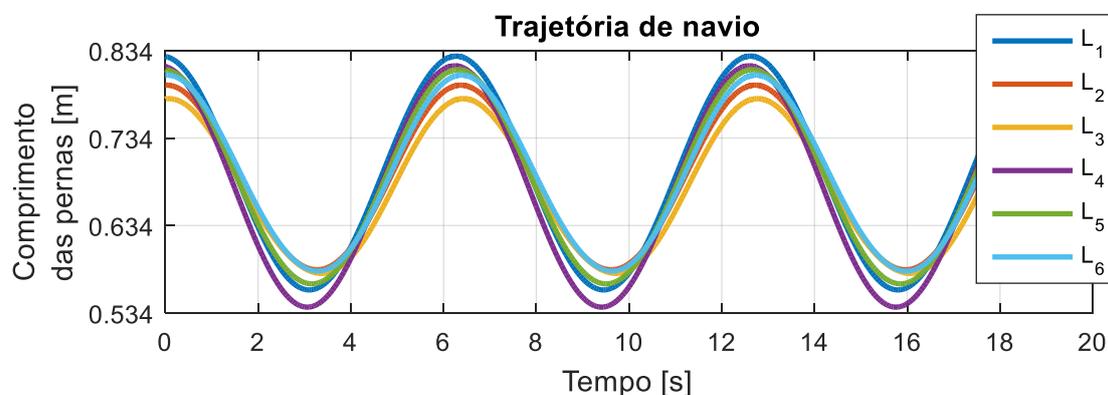


Figura 7.4 – Trajetória 2 no espaço de juntas.

## 7.2 Filtros digitais

Ao realizar a implementação experimental de controladores em malha fechada, o ruído de medição associado aos sensores utilizados pode causar oscilações indesejadas nos sinais de controle. Para eliminar ou atenuar estas oscilações, filtros do tipo passa-baixas podem ser utilizados. Neste trabalho foram utilizados filtros passa-baixas do tipo *butterworth* de primeira ordem nos sinais posição e pressão medidos, assim como no sinal da velocidade (calculada por meio da derivada da posição já filtrada) e no sinal de controle calculado pelo controlador. Os filtros utilizados têm a vantagem de atenuar as componentes de alta frequência dos sinais, tornando-os menos oscilatórios. Entretanto, possuem a desvantagem de adicionarem atrasos de fase nos sinais filtrados em relação aos sinais originais, o que pode causar prejudicar o desempenho dos controladores utilizados. A escolha das frequências de corte dos filtros foi feita empiricamente de forma a se obter uma atenuação de ruído adequada sem implicar em atrasos de fase significativos. A Tabela 7.3 apresenta as frequências de corte utilizadas para cada filtro.

O sinal de velocidade é calculado a partir da derivada do sinal de posição, o que potencializa os efeitos dos ruídos que contaminam os sinais originais. No controle por Torque Calculado, o sinal da velocidade é utilizado pelo algoritmo de controle. Verificou-se através de experimentos e simulações, o surgimento de oscilações em torno da velocidade nula que contaminam o sinal de controle calculado pelo algoritmo. Para resolver este problema, um filtro composto de três etapas foi desenvolvido para este sinal. A primeira etapa consiste de um filtro

*butterworth* de primeira ordem com frequência de corte de  $10 \frac{rad}{s}$  responsável por retirar a maior parte do ruído presente no sinal original. A segunda parte é composta de uma lógica numérica que força o valor filtrado para zero em situações que o seu módulo é menor do que  $0,005 \frac{m}{s}$ . Isso evita que o sinal de velocidade troque repetidamente de sinal, por efeito do ruído, enquanto o seu valor absoluto não for significativo. A terceira parte consiste de outro filtro *butterworth* de primeira ordem, mas com frequência de corte de  $100 \frac{rad}{s}$ . Esta parte é responsável por atenuar eventuais variações bruscas no sinal de velocidade geradas na segunda parte do filtro. Dentre as diferentes topologias de filtros e frequências de corte testadas experimentalmente, esta combinação foi a que apresentou os melhores resultados para o controle por Torque Calculado. A Figura 7.5 apresenta um diagrama de blocos com a implementação do conjunto de filtros para a velocidade. A Figura 7.6 apresenta uma comparação entre o sinal de velocidade original e o sinal de velocidade após filtragem. Neste trabalho, os filtros foram utilizados apenas nas implementações experimentais dos controladores, avaliações dos impactos da presença destes filtros em simulação podem ser realizadas em trabalhos futuros.

Tabela 7.3 – Parâmetros dos filtros utilizados nos experimentos.

Filtro	Frequência de corte $\left[\frac{rad}{s}\right]$
Posição	100
Velocidade	10*
Pressões	100
Sinal de controle	100

\*Filtro modificado para zerar velocidades baixas.

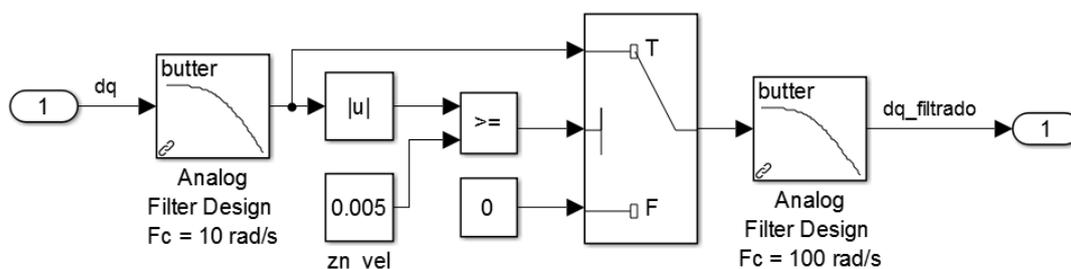


Figura 7.5 – Diagrama de blocos do filtro composto para a velocidade.

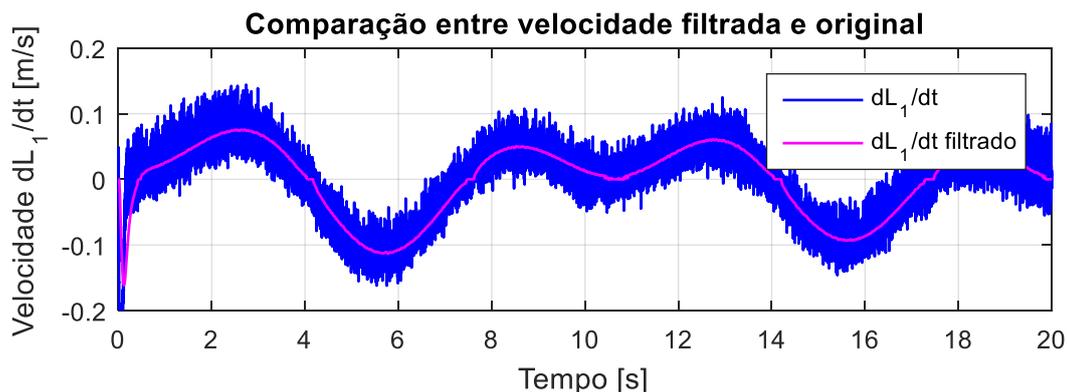


Figura 7.6 – Comparação entre sinal de velocidade original e filtrado.

### 7.3 Controle PI e validação do modelo matemático

O controlador PI é um controlador clássico muito utilizado, que calcula sua ação de controle a partir de uma componente proporcional ao erro, para realizar o seguimento de trajetória, e outra proporcional à integral do erro, usualmente responsável por eliminar erros de regime permanente. Nesta seção, o mesmo é utilizado para controlar o MPS em malha fechada, com o objetivo de validar o modelo dinâmico do mesmo. Simulações do modelo em malha aberta foram executadas, porém os resultados obtidos se mostraram inadequados, possivelmente pelo fato de o manipulador em questão ter topologia paralela. Neste tipo de manipulador, cada grau de liberdade influencia nas forças e movimentos de todos os outros, diferentemente do caso de manipuladores seriais, nos quais cada grau de liberdade pode ser movimentado separadamente. A validação em malha fechada executada permite que pequenos erros nos valores dos parâmetros não façam a resposta do sistema divergir quando são utilizados os mesmos sinais de entrada experimentais no modelo simulado. A validação é feita comparando os sinais de controle e forças hidráulicas obtidos na simulação do modelo com os obtidos na implementação experimental do controlador. Esta validação utilizará como trajetória de referência a Trajetória 1, apresentada na Seção 7.1.1. Os ganhos utilizados para o controlador são os mesmos na simulação e na implementação experimental. Os mesmos foram definidos heurísticamente, aumentando a ação proporcional gradualmente até se aproximar ao limite da instabilidade, e, posteriormente, incrementando o ganho integral para reduzir o erro no seguimento da trajetória. Os valores utilizados são apresentados na Tabela 7.4. Os resultados para os erros no seguimento de trajetória também serão utilizados como comparação para os erros obtidos para o controle por Torque Calculado, o qual será apresentado na Seção 7.6.

Tabela 7.4 – Ganhos do controlador PI utilizado.

Ganho	Valor
$K_p$	500
$K_i$	5

### 7.3.1 Resultados para simulação do controlador PI

Para realizar a simulação do controlador PI, foi utilizado um conjunto de blocos desenvolvido a partir das equações descritas nos capítulos 3, 4 e 5. O modelo é dividido em duas partes principais, um bloco que contém as equações da dinâmica direta dos seis atuadores hidráulicos presentes no MPS e outro bloco que contém as equações referentes à dinâmica mecânica do MPS. O modelo de atrito utilizado na dinâmica do MPS é o modelo de Stribeck, com efeitos de atrito estático, efeito de Stribeck e atrito de Coulomb, conforme os dados apresentados na Seção 6.2.3, sendo representado pela Equação 6.3. Na simulação também foram utilizados blocos desenvolvidos para gerar as trajetórias e para calcular a cinemática inversa do manipulador. O controlador PI atua no domínio do espaço de juntas, realimentando e controlando a posição de cada um dos seis pistões independentemente. Além dos blocos citados, o modelo de simulação conta com um bloco com a implementação da compensação de zona morta (conforme descrito na Seção 4.3.7). O modelo de simulação não contempla nenhum dos filtros digitais apresentados na Seção 7.2. A Figura 7.7 mostra um diagrama de blocos compactado, referente ao utilizado para realizar esta simulação. O Apêndice F mostra este diagrama de forma mais detalhada, assim como os diagramas de blocos referentes à programação dos principais blocos da simulação.

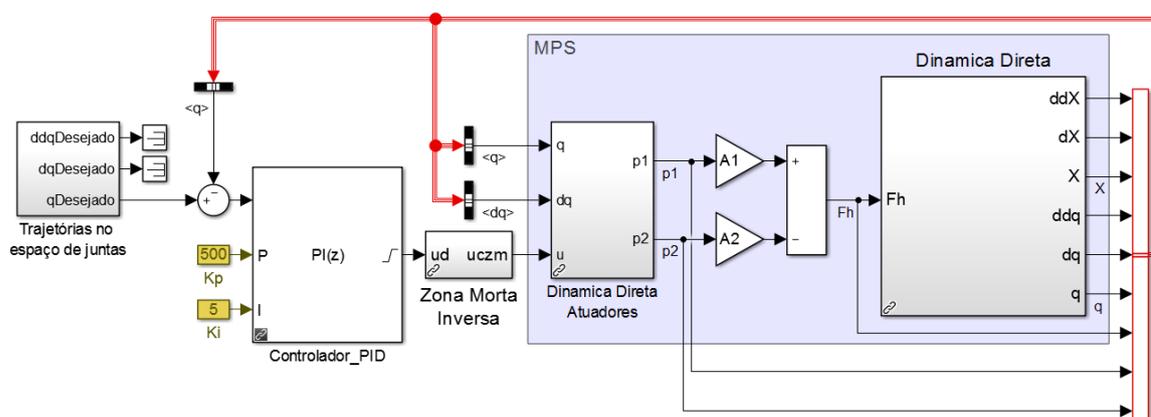


Figura 7.7 – Diagrama de blocos utilizado para simulação de um controle PI.

A Figura 7.8 apresenta os resultados obtidos por simulação para o seguimento de trajetória no espaço de trabalho em comparação com as trajetórias desejadas. A Figura 7.9 apresenta os erros de seguimento de trajetória no espaço de trabalho. Em regime permanente, a amplitude máxima absoluta dos erros é de  $5,0\text{ mm}$  para coordenadas de translação, e  $0,88^\circ$  para as coordenadas de rotação. A Figura 7.10 apresenta os erros no espaço de juntas, a amplitude máxima absoluta é de  $9,6\text{ mm}$  em regime permanente. Para esta simulação, os sinais de controle variam entre aproximadamente  $-4,9\text{ V}$  e  $2,6\text{ V}$  em regime permanente.

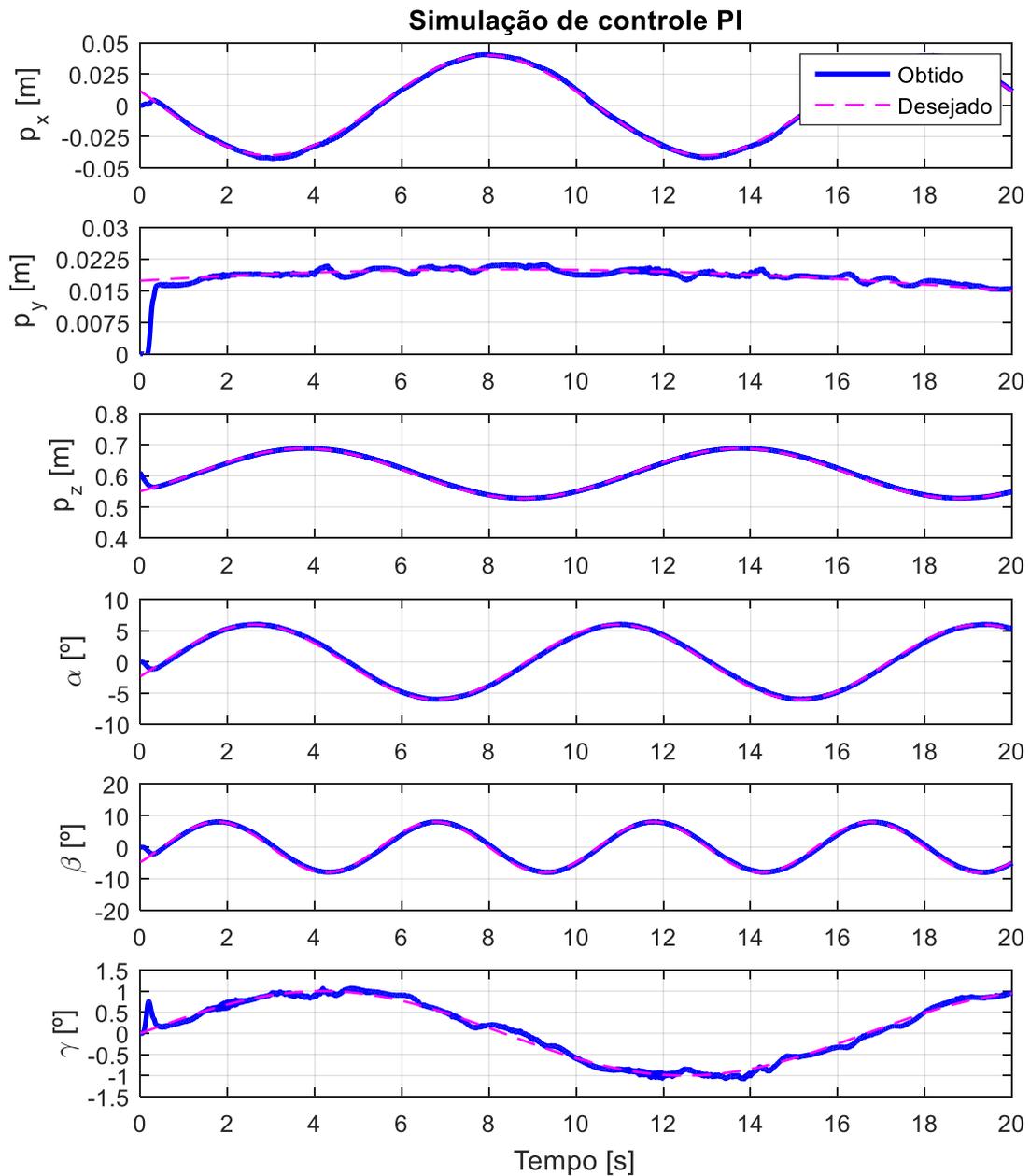


Figura 7.8 – Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de trabalho na simulação de um controlador PI para a Trajetória 1.

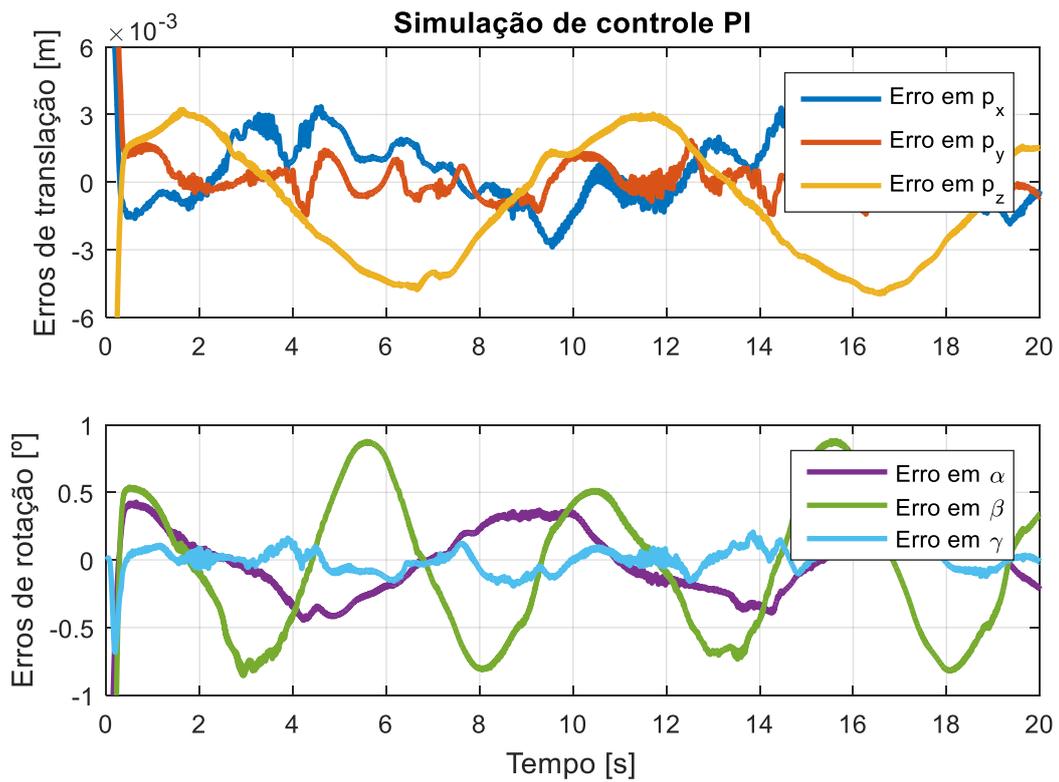


Figura 7.9 – Resultados obtidos para os erros no espaço de trabalho na simulação de um controlador PI para a Trajetória 1.

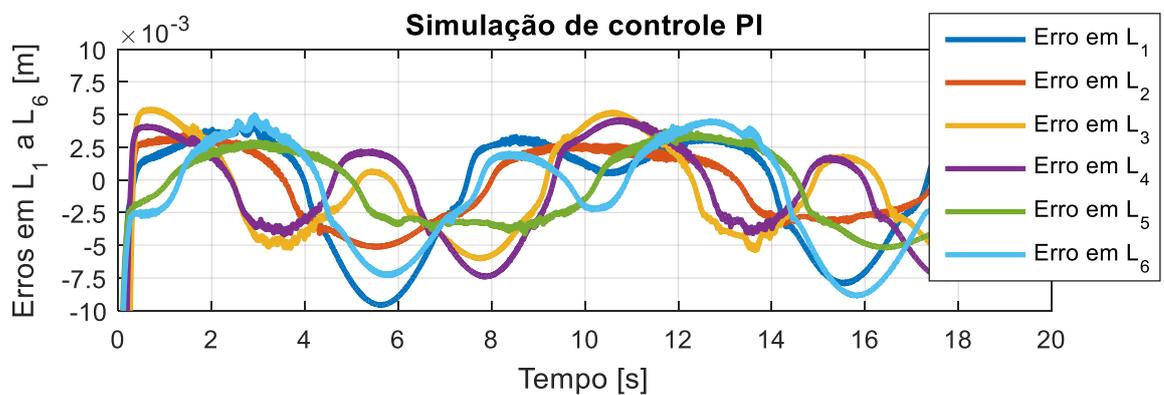


Figura 7.10 – Resultados obtidos para os erros no espaço de juntas na simulação de um controlador PI para a Trajetória 1.

### 7.3.2 Resultados para implementação experimental do controlador PI

Para a implementação experimental do controlador PI, foram utilizados os filtros apresentados na Seção 7.2, assim como os blocos de controle apresentados na simulação da Seção 7.3.1. A Figura 7.11 apresenta os resultados obtidos para o seguimento de trajetória no espaço de trabalho.

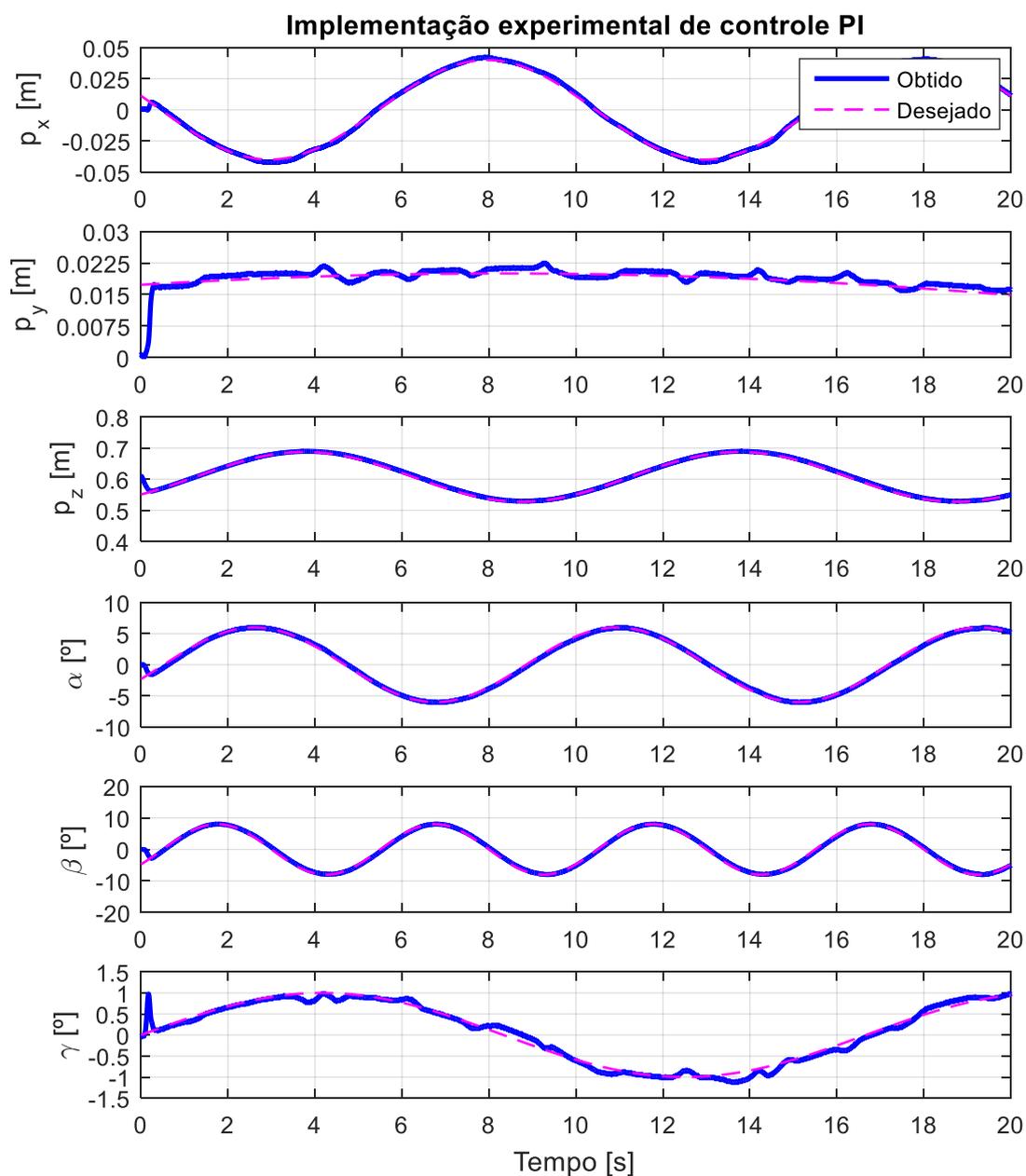


Figura 7.11 – Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador PI para a Trajetória 1.

A Figura 7.12 apresenta os erros de seguimento de trajetória no espaço de trabalho. Em regime permanente, a amplitude máxima absoluta é de  $5,6 \text{ mm}$  para coordenadas de translação, e  $0,72^\circ$  para as coordenadas de rotação. A Figura 7.13 apresenta os erros de seguimento de trajetória no espaço de juntas, onde, em regime permanente, a amplitude máxima absoluta é de  $7,8 \text{ mm}$ . Em regime permanente, os sinais de controle variam entre  $-3,4 \text{ V}$  e  $2,5 \text{ V}$ .

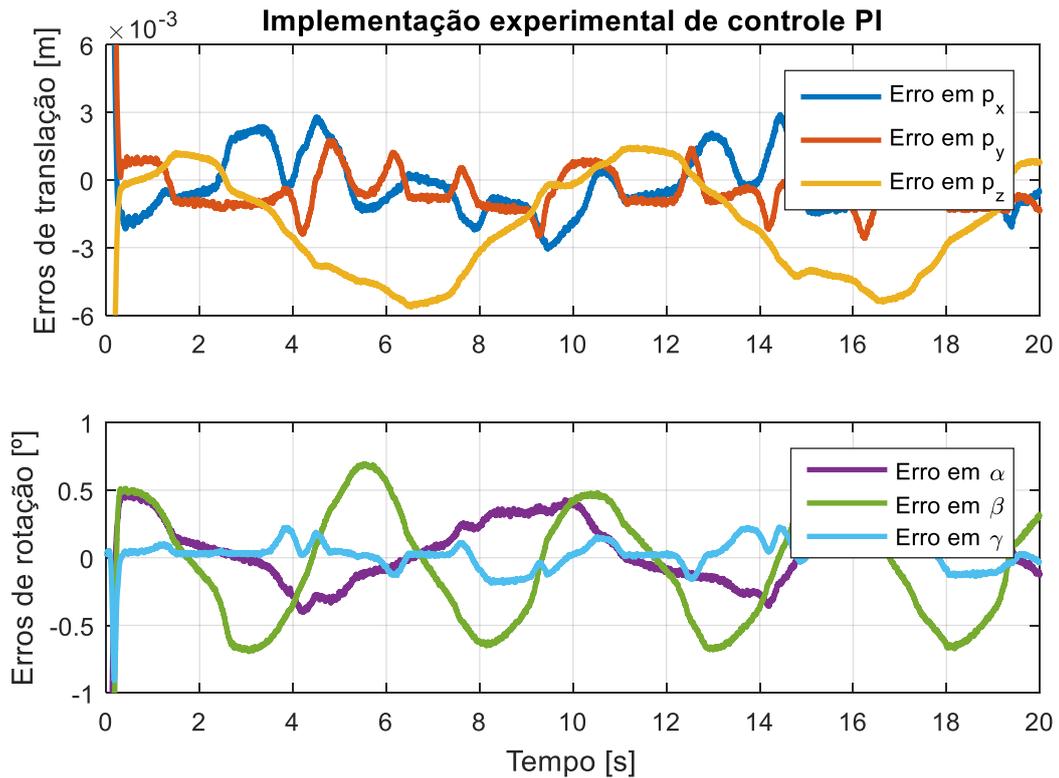


Figura 7.12 – Resultados obtidos para os erros no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador PI para a Trajetória 1.

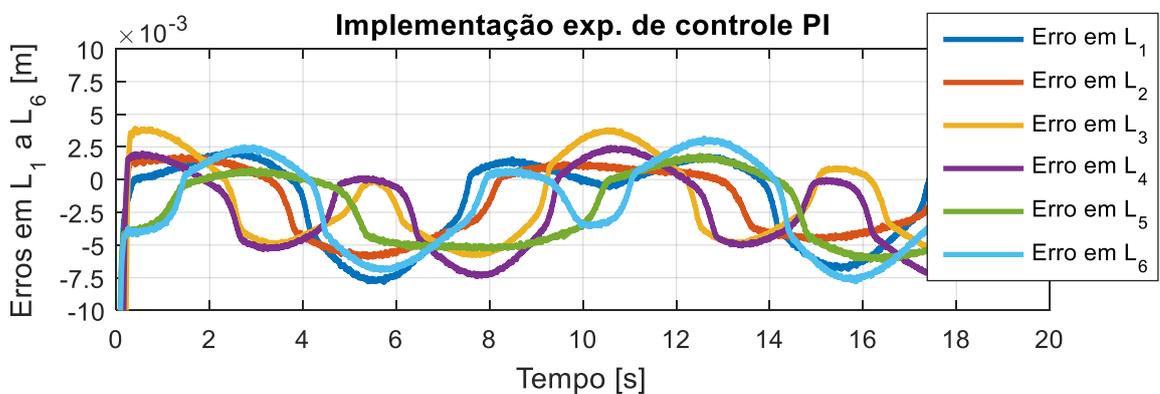


Figura 7.13 – Resultados obtidos para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador PI para a Trajetória 1.

### 7.3.3 Validação do modelo matemático da dinâmica do MPS

A validação do modelo matemático desenvolvido para a dinâmica do MPS é feita através da comparação direta entre forças hidráulicas e sinais de controle obtidos para a simulação e para a implementação experimental do controle PI. A Figura 7.14 apresenta a comparação entre as forças hidráulicas obtidas na simulação e na implementação, para a Trajetória 1.

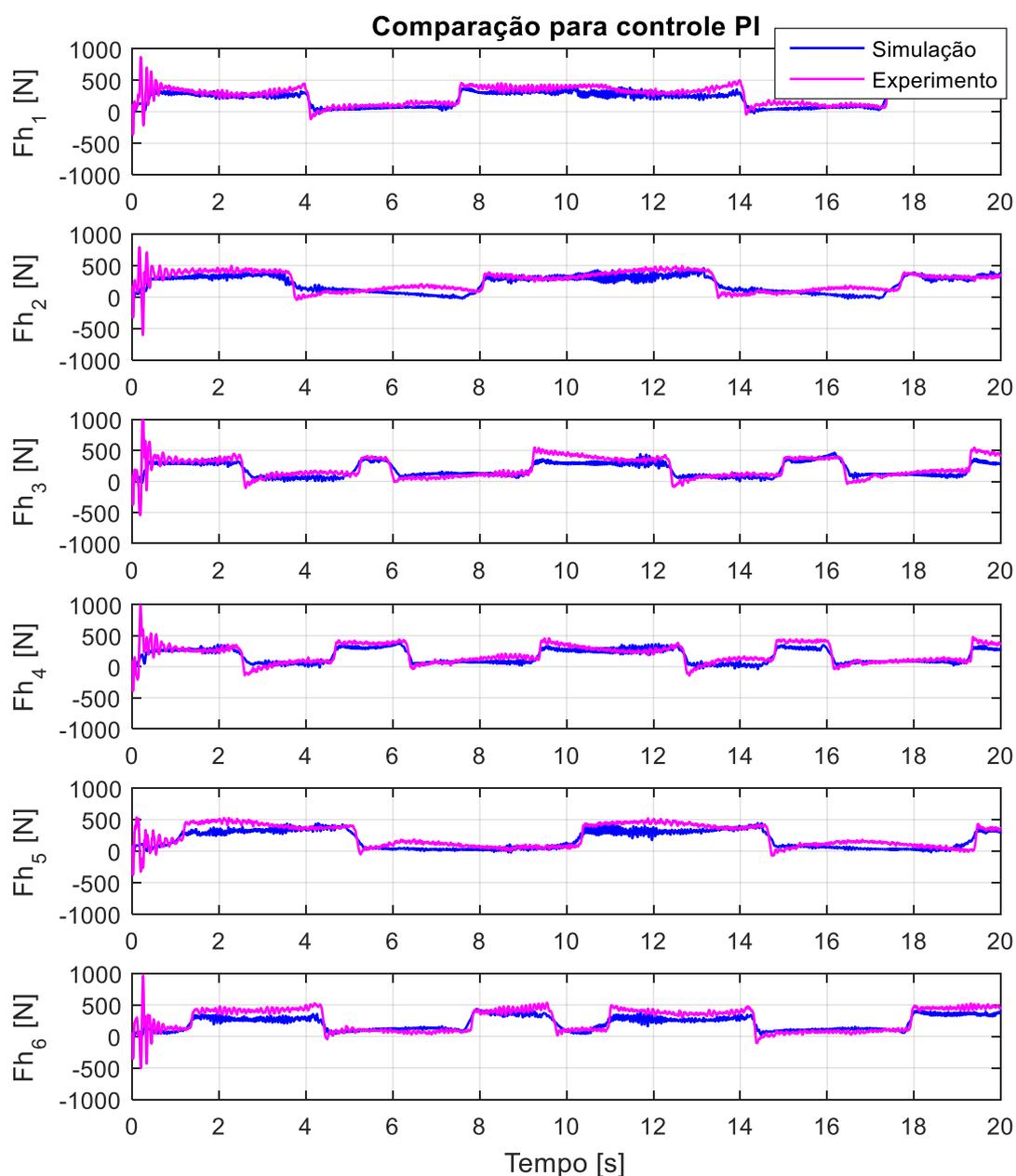


Figura 7.14 – Comparação entre forças hidráulicas obtidas na simulação e na implementação experimental do controlador PI para a Trajetória 1.

Os sinais de força hidráulica da simulação apresentaram um forte comportamento oscilatório, por isso, foram filtrados com um filtro *butterworth* de primeira ordem com frequência de corte de  $20 \frac{rad}{s}$  para facilitar a visualização do valor médio das forças na Figura 7.14. Os sinais de sinais de controle aplicados pelos controladores, apresentados na Figura 7.15, puderam ser comparados sem necessidade do uso de filtro.

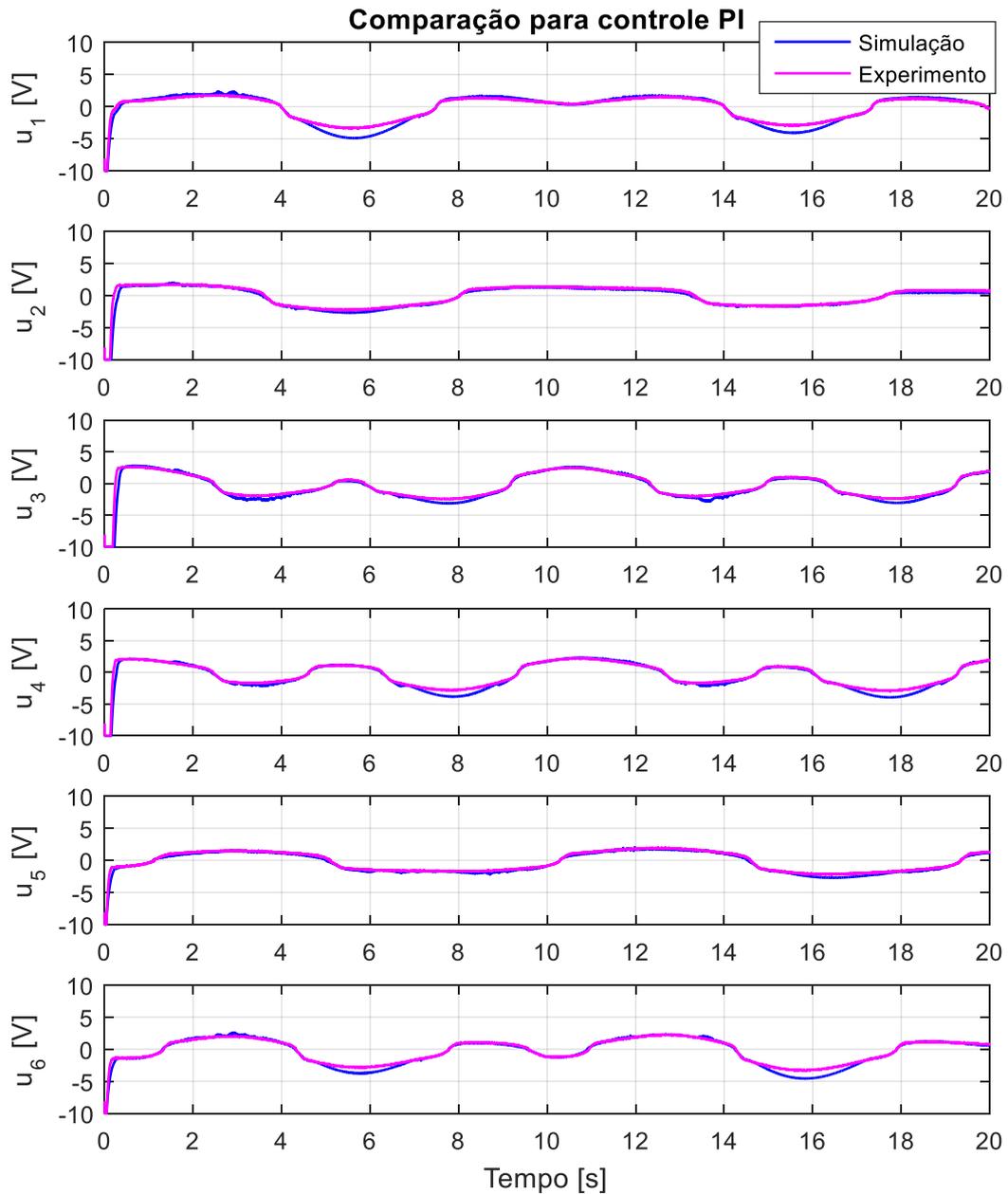


Figura 7.15 – Comparação entre sinais de controle obtidos na simulação e na implementação experimental do controlador PI para a Trajetória 1.

Analisando visualmente as figuras 7.14 e 7.15 pode-se perceber que tanto o modelo matemático desenvolvido quanto o sistema físico exigiram um perfil de forças hidráulicas e de sinais de controle semelhantes para realizar a mesma trajetória (Trajetória 1). Isso indica que, embora existam imprecisões intrínsecas nos valores dos parâmetros numéricos identificados, o modelo matemático como um todo funciona como uma representação relativamente fiel do comportamento do manipulador. Nota-se que, no caso das forças hidráulicas, os valores absolutos diferem em alguns instantes, mas as transições apresentam comportamentos geralmente semelhantes. Já, no caso dos sinais de controle, os valores absolutos e transições apresentam comportamentos muito semelhantes entre simulação e implementação experimental, com exceção de momentos em que a tensão é menor do que  $-2 V$ , o que indica uma possível imprecisão no processo de identificação dos parâmetros das válvulas. A imprecisão pode estar relacionada ao fato de que os dados utilizados na identificação dos coeficientes das válvulas foram gerados pela aplicação de um sinal variando apenas na faixa de  $-1,5 V$  a  $1,5 V$ , sinais maiores faziam o pistão sem carga atingir seus limites rapidamente.

### 7.3.4 Validação da dinâmica inversa

Uma vez que o modelo para a dinâmica direta do manipulador foi validado, pode-se utilizar o mesmo para avaliar a consistência do modelo da dinâmica inversa. Para realizar esta avaliação, foram utilizados os dados de realimentação dos sensores obtidos no experimento do controlador PI. As forças hidráulicas obtidas neste experimento alimentaram o bloco da dinâmica direta, que, por sua vez, teve suas saídas direcionadas ao bloco da dinâmica inversa, com o objetivo de reconstruir as forças hidráulicas inicialmente utilizadas. A Figura 7.16 apresenta o diagrama de blocos do sistema utilizado para realizar esta avaliação.

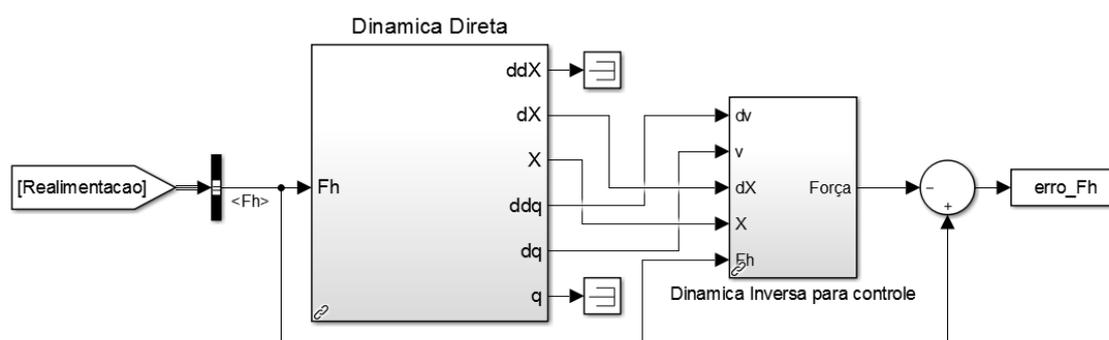


Figura 7.16 – Diagrama de blocos utilizado para validação da dinâmica inversa do Manipulador Plataforma de Stewart.

Caso exista consistência entre a programação da dinâmica direta e dinâmica inversa, a reconstrução da força hidráulica original deve ser realizada com precisão. Portanto, a diferença entre força hidráulica reconstruída e original deve ser próxima de zero. A Figura 7.17 apresenta os resultados obtidos, que confirmaram a consistência dos modelos desenvolvidos.

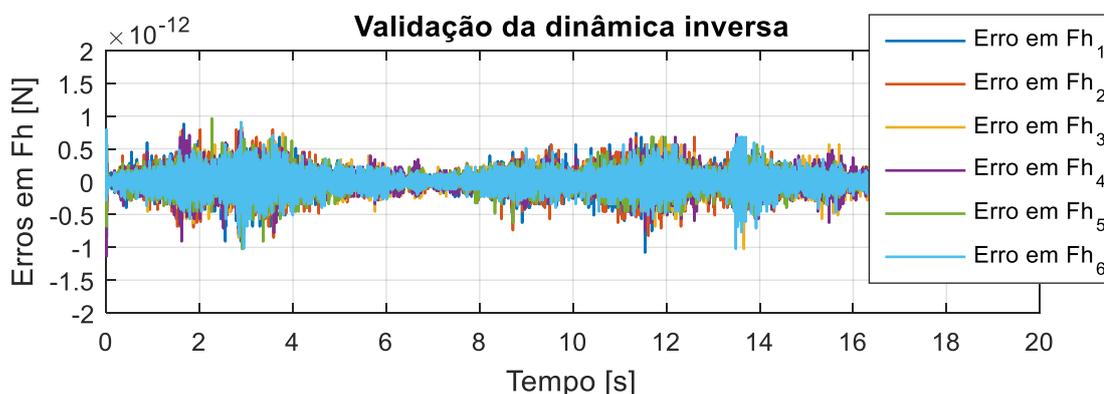


Figura 7.17 – Erro de força obtido na validação da dinâmica inversa do Manipulador.

#### 7.4 Controle por Torque Calculado para Trajetória 1

Uma vez que o modelo matemático do MPS foi validado, é possível implementar o sistema de controle por Torque Calculado. Primeiramente, o sistema foi testado em forma de simulação, utilizando os modelos matemáticos diretos e inversos desenvolvidos. Após a apresentação dos resultados das simulações, são apresentados os resultados obtidos para a implementação experimental do controlador. Nas simulações, o modelo de atrito utilizado na dinâmica direta é, novamente, o modelo de Stribeck, contemplando atrito seco, efeito de Stribeck e atrito de Coulomb. Já, o modelo de atrito utilizado na dinâmica inversa para controle, tanto na simulação quanto na implementação experimental, é composto apenas por uma parcela de atrito viscoso, conforme já comentado. A utilização de modelos atrito mais completos no controlador acarreta em um incremento de complexidade no modelo e na prova de estabilidade, o que foge do escopo do presente trabalho, conforme descrito na Seção 4.3.6. Os diagramas de blocos referentes à programação destas simulações podem ser visualizados no Apêndice F.

Os ganhos utilizados no controlador foram determinados com base no comportamento do MPS durante a implementação experimental do controle por Torque Calculado. Inicialmente, foram utilizados os valores de ganhos calculados por Valente, 2016, para um MPS de dimensões semelhantes ao utilizado no presente trabalho. Posteriormente, os valores dos ganhos foram incrementados de forma heurística com o objetivo de diminuir o erro no

seguimento de trajetória, introduzindo o mínimo possível de oscilação e saturação dos sinais de controle. Os ganhos escolhidos para os experimentos são os mesmos utilizados nas simulações, e estão apresentados na Tabela 7.5.

Tabela 7.5 – Ganhos do controle por Torque Calculado.

Ganho	Valor
$K_D$	500
$K_T$	200
$K_A$	50
$\Lambda$	300

Assim como no caso do controle PI, as simulações foram realizadas sem a presença de filtros de sinal. Por outro lado, os filtros apresentados na Seção 7.2 foram utilizados nas implementações experimentais dos controladores.

#### 7.4.1 Simulação do controle por Torque Calculado com Trajetória 1

A simulação do controle por Torque Calculado utiliza o mesmo modelo de MPS aplicado na simulação do controle PI. Neste caso, o bloco do controlador PI foi substituído por três novos blocos que implementam as equações do controle por Torque Calculado. A Figura 7.18 apresenta uma forma compacta do diagrama de blocos utilizado na simulação do controle por Torque Calculado, o diagrama completo pode ser observado no Apêndice F.

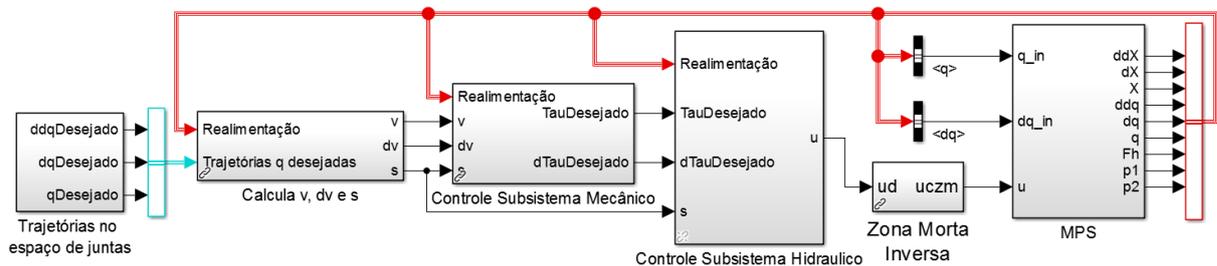


Figura 7.18 – Diagrama de blocos utilizado para simulação do controle por Torque Calculado.

A Figura 7.19 apresenta os resultados para o seguimento de trajetórias no espaço de trabalho. Analisando os gráficos, percebe-se uma melhora no seguimento de algumas das trajetórias, em comparação com a simulação do controle PI. Entretanto, mesmo que esta seja

uma simulação feita em condições ideais, a compensação absoluta dos erros no seguimento de trajetória não foi possível. Um dos motivos é o fato de que o modelo de atrito utilizado pelo controlador para estimar as forças necessárias para movimentar a plataforma é diferente do modelo de atrito utilizado na dinâmica direta da simulação, conforme destacado na Seção 7.4. Outro motivo, menos significativo, é o fato de que os modelos para a zona morta direta e inversa das válvulas não são exatamente complementares, conforme descrito na Seção 4.3.7.

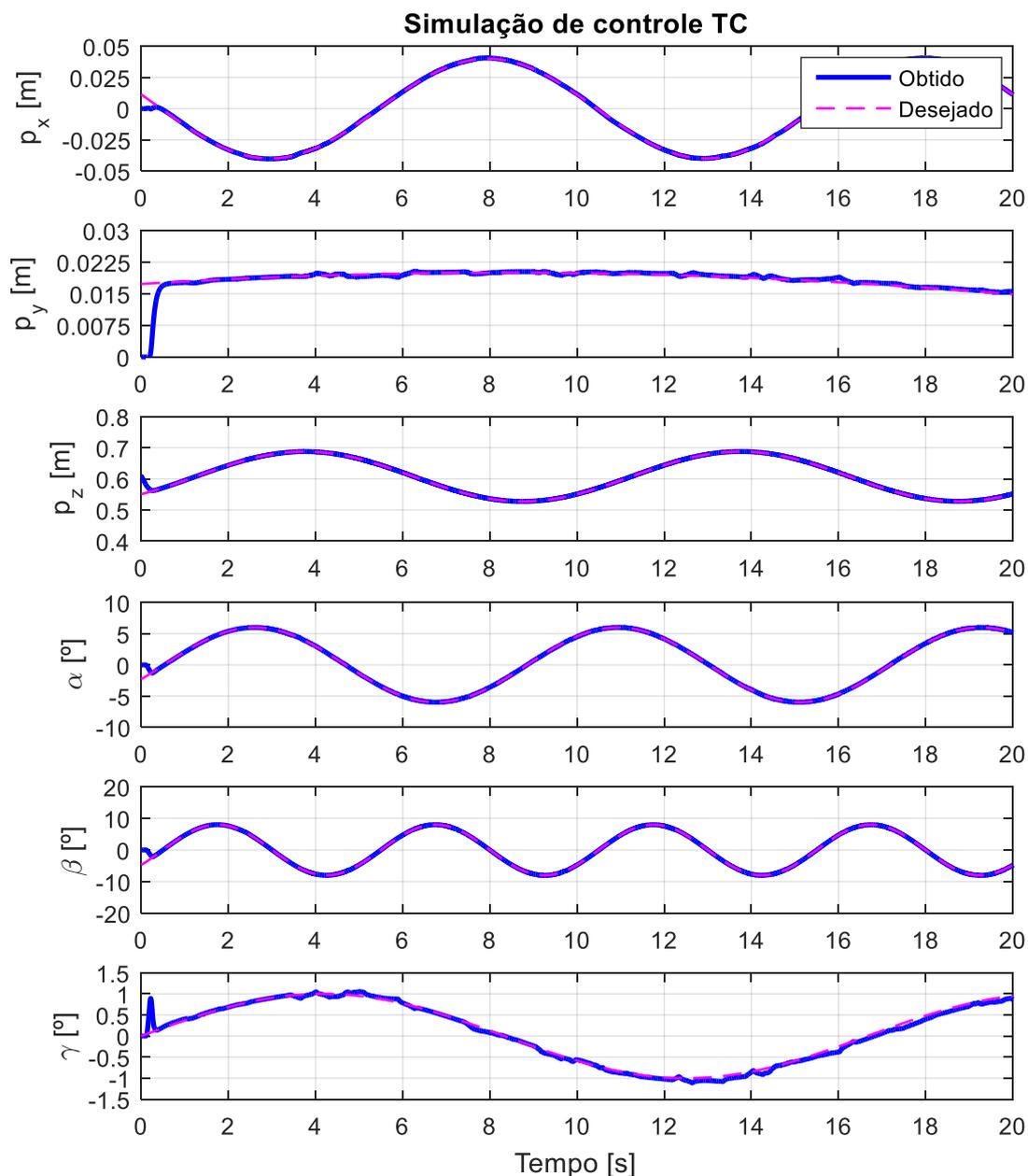


Figura 7.19 – Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de trabalho na simulação de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

Através da cinemática inversa do manipulador, as trajetórias no espaço de trabalho são transformadas para o espaço de juntas, e utilizadas pelo controlador para realizar o seguimento de trajetória. A Figura 7.20 apresenta os resultados obtidos para seguimento de trajetória no espaço de juntas.

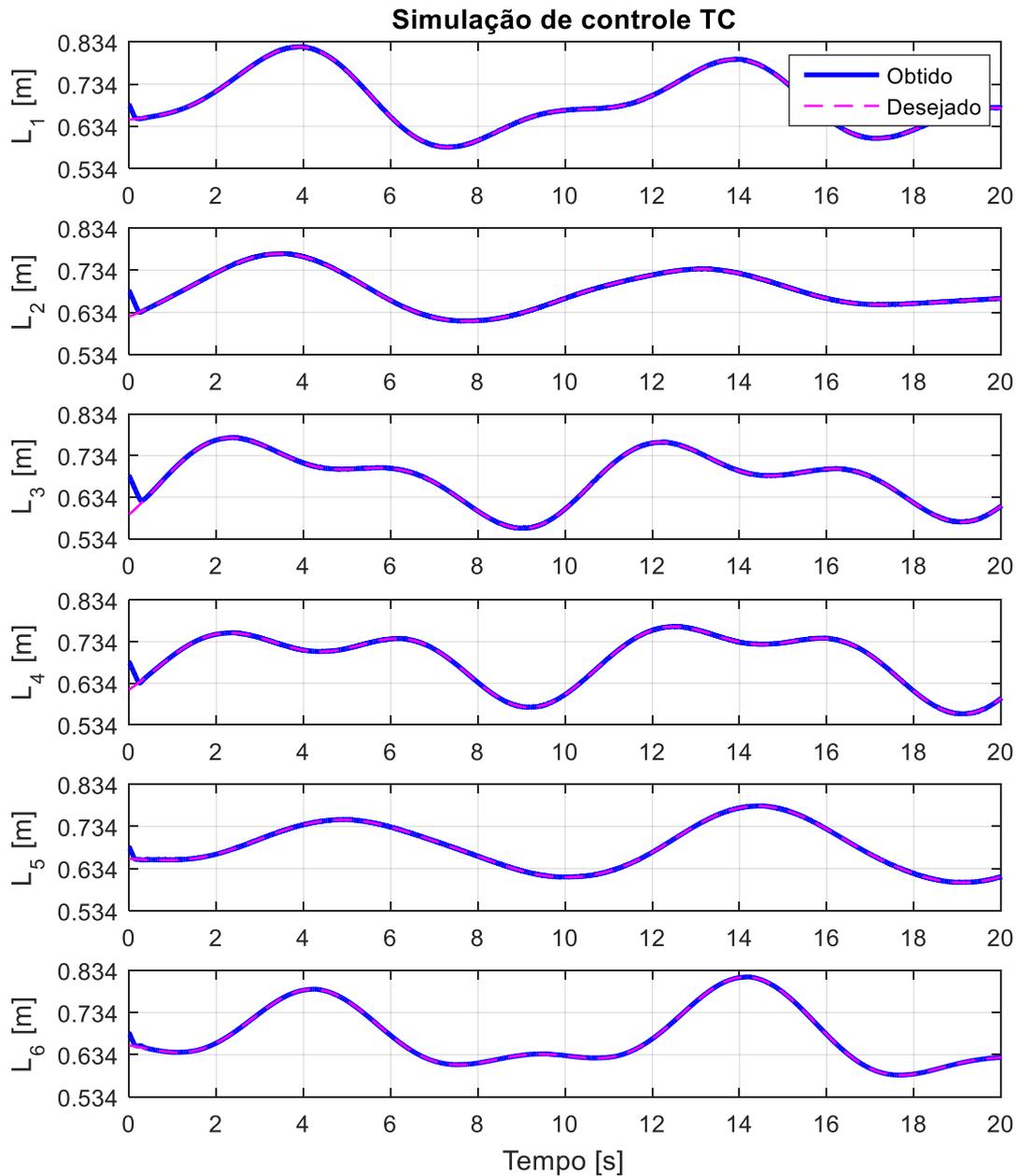


Figura 7.20 – Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de juntas na simulação de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

As figuras 7.21 e 7.22 apresentam, respectivamente, os erros obtidos para as coordenadas no espaço de trabalho e para as coordenadas no espaço de juntas. Os valores máximos absolutos, em regime permanente, são de 1,2 mm para coordenadas de translação, 0,14° para coordenadas de rotação, e 1,1 mm para coordenadas de junta.

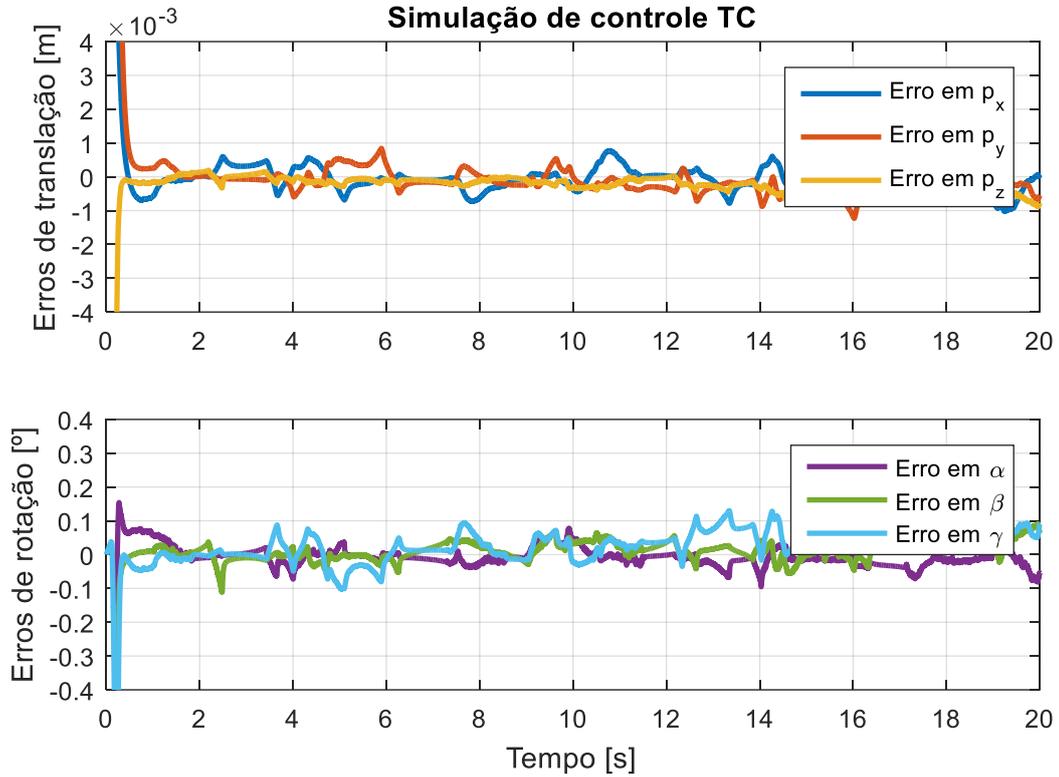


Figura 7.21 – Resultados ampliados para os erros no espaço de trabalho na simulação de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

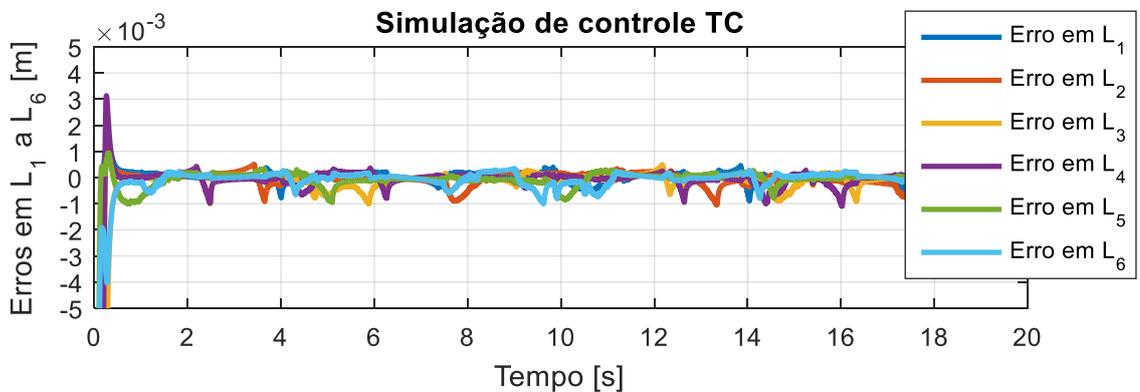


Figura 7.22 – Resultados ampliados para os erros no espaço de juntas na simulação de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

A Figura 7.23 apresenta as forças hidráulicas obtidas para a simulação do controle por Torque Calculado.

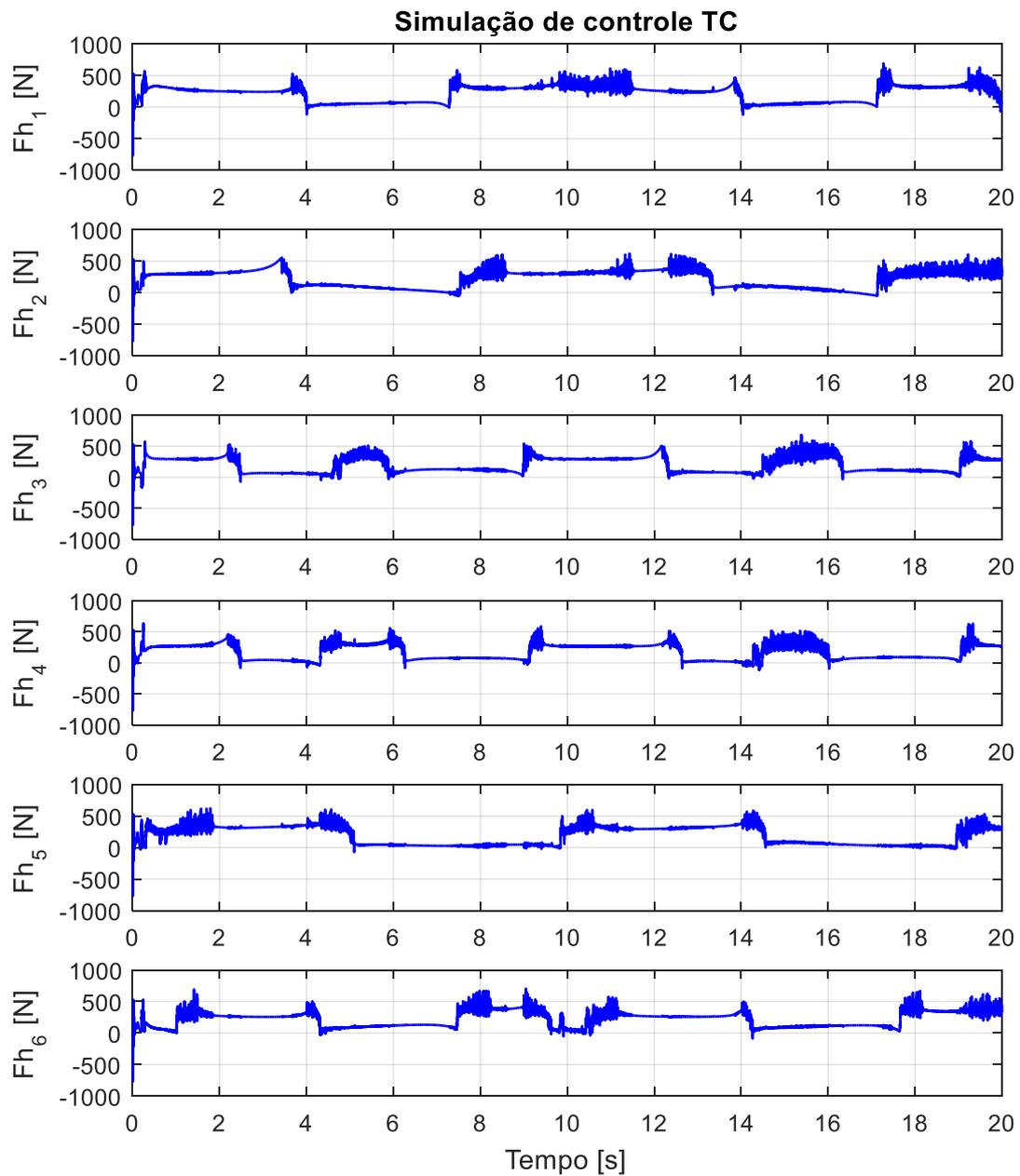


Figura 7.23 – Resultados obtidos para as forças hidráulicas nos atuadores na simulação de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

### 7.4.2 Resultados para implementação experimental do controle por Torque Calculado

Para realizar a implementação experimental do controle por Torque Calculado, o mesmo algoritmo aplicado na Seção 7.4.1 foi utilizado. Neste experimento, os filtros apresentados na Seção 7.2 foram utilizados. A Figura 7.24 apresenta os resultados obtidos para o seguimento da Trajetória 1 no espaço de trabalho.

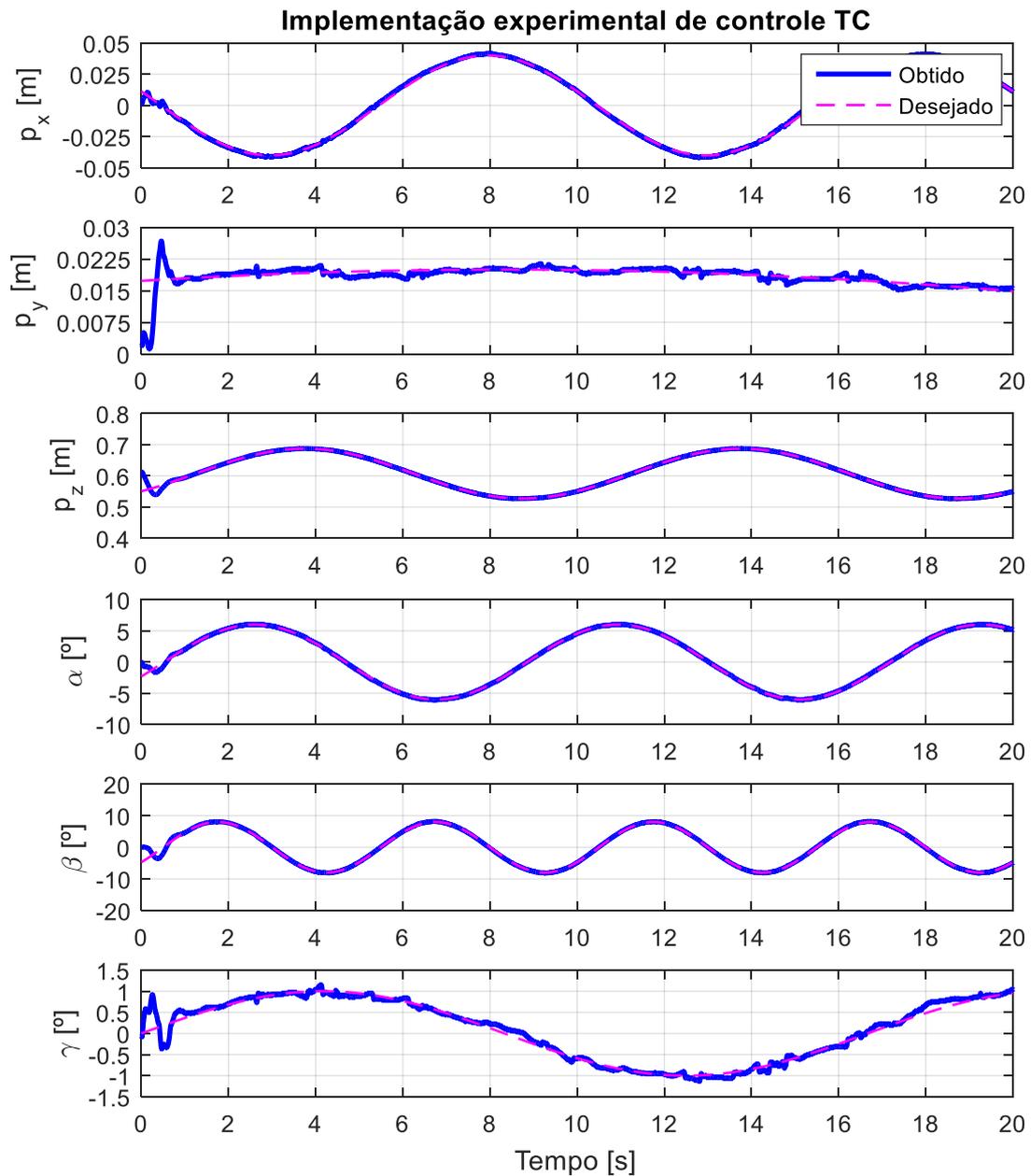


Figura 7.24 – Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

A Figura 7.25 apresenta uma visão geral dos erros no espaço de trabalho ao longo tempo. Nessa imagem é possível observar que os ganhos escolhidos para o controlador, além de proverem um seguimento de trajetória satisfatório em regime permanente, também possibilitam uma rápida estabilização das posições no início da trajetória. Neste momento, os pistões iniciam em posições distantes das posições das referências, e, mesmo assim, rapidamente levam o manipulador para a posição desejada, sem que grandes oscilações possam ser observadas.

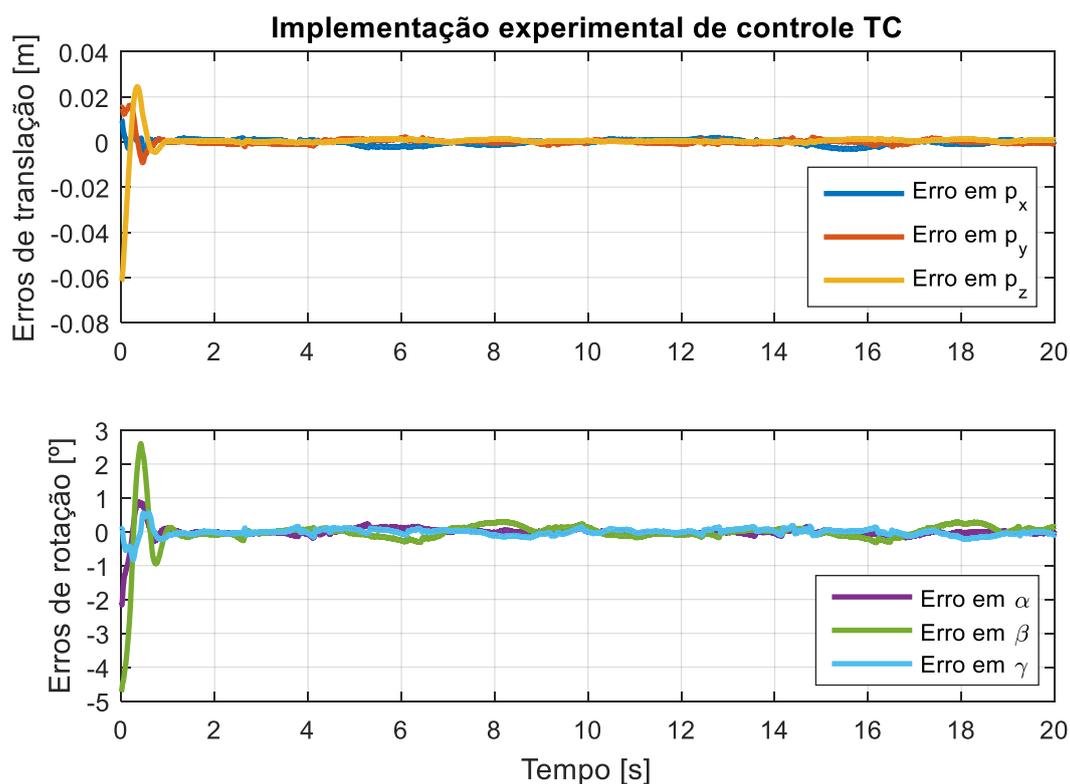


Figura 7.25 – Resultados obtidos para os erros no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

A Figura 7.26 também apresenta os erros no espaço de trabalho, mas ampliados e com destaque para os valores em regime permanente. O erro máximo absoluto nas coordenadas de translação em regime permanente é de 3,1 *mm*, nas coordenadas de rotação é 0,32 °.

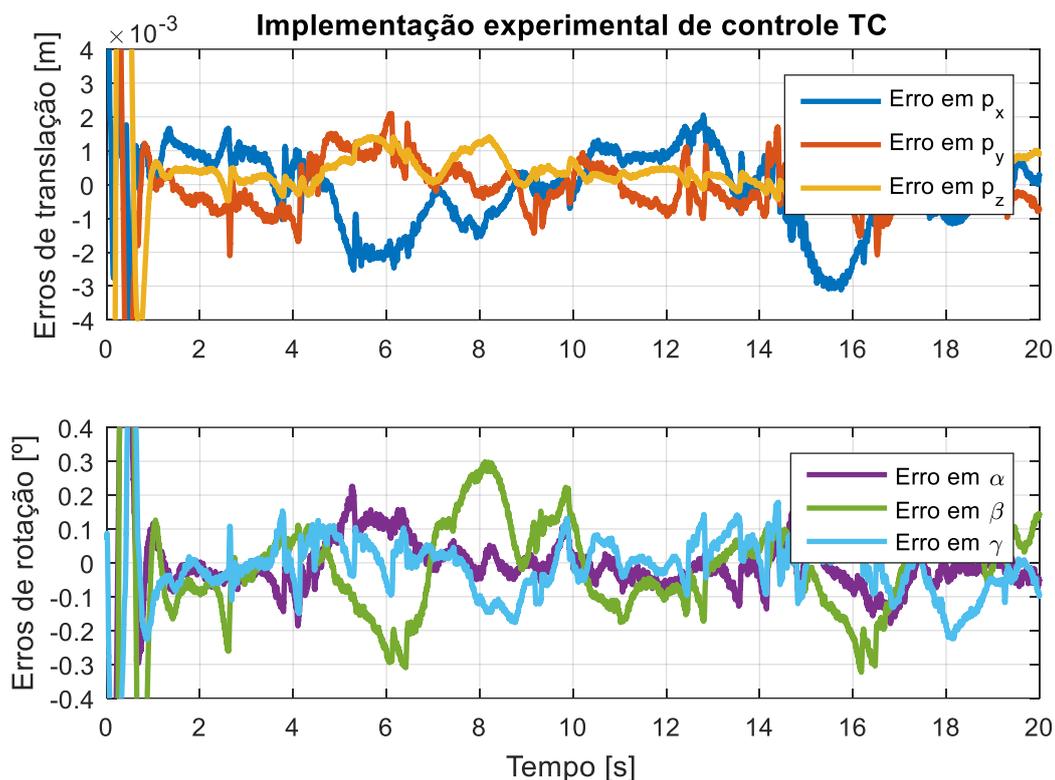


Figura 7.26 – Resultados ampliados para os erros no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

Comparando os resultados experimentais para os erros no espaço de trabalho mostrados na Figura 7.26 com os resultados equivalentes para a simulação mostrados na Figura 7.21 percebe-se que a amplitude dos erros na implementação experimental teve um aumento significativo. Baseando-se apenas na comparação entre dados experimentais e de simulação do controlador PI mostrada da Seção 7.3, uma diferença tão grande de amplitudes dos erros não seria esperada para o caso do controle por Torque Calculado. Entretanto, durante os experimentos do controle por Torque Calculado ocorreu um fenômeno que não havia ocorrido nos experimentos do controle PI, uma vibração significativa na plataforma nos momentos de baixa velocidade dos pistões. Esta vibração nos experimentos possivelmente foi responsável pelo aumento dos erros de seguimento de trajetória, e, provavelmente, é gerada pelo ruído remanescente nos sinais de velocidade dos pistões, que não são utilizados no controle PI mas são realimentados no controle por Torque Calculado.

Na Figura 7.27 são apresentados os resultados para seguimento de trajetória no espaço de juntas. Percebe-se que, no início da trajetória, cada pistão alcança rapidamente a trajetória desejada. Pode-se observar também que em alguns momentos, as trajetórias chegam muito

próximas dos limites de operação dos atuadores, mas em nenhum momento o ultrapassam, mantendo a trajetória inteira dentro do volume de trabalho do manipulador.

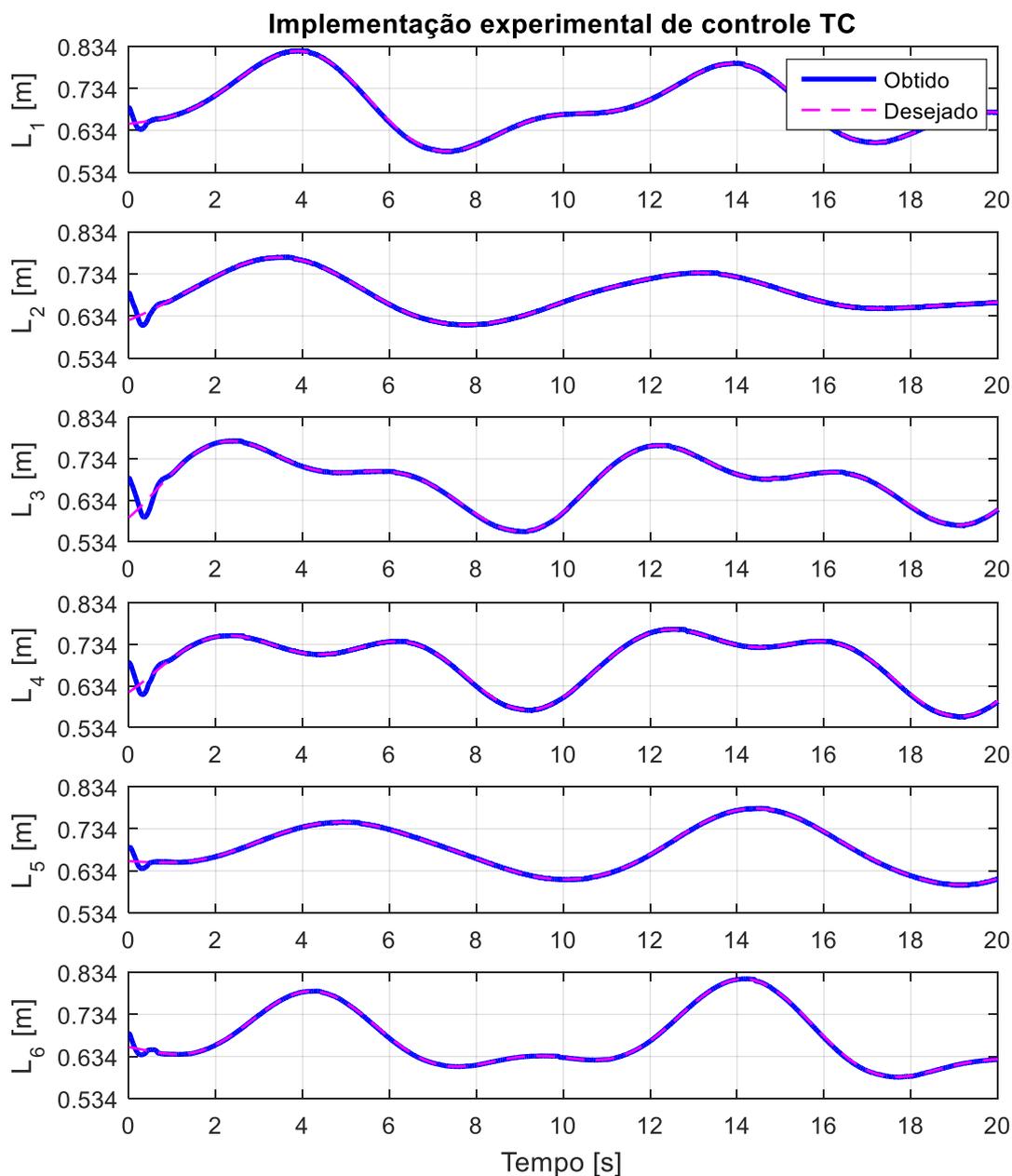


Figura 7.27 – Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

Na Figura 7.28, os erros no espaço de juntas podem ser observados, nesta figura percebe-se que o tempo de estabilização para todos os pistões é de aproximadamente 1 segundo, sendo que após isso o erro se mantém próximo a zero. Os erros absolutos em regime permanente têm o valor máximo de 4,1 *mm* neste experimento. Na Figura 7.29, os valores para os erros de

junta podem ser observados em detalhe. Nesta figura, percebe-se que os erros negativos, em sua maioria no formato de “pequenos dentes”, têm valor absoluto máximo de aproximadamente  $2\text{ mm}$ , apresentando comportamento semelhante com os erros no espaço de juntas apresentados na simulação para o mesmo controlador, apresentados na Figura 7.22. Para melhor visualizar os possíveis motivos para estes comportamentos nos erros no espaço de juntas, a Figura 7.30 apresenta estes erros de forma individual e ampliada.

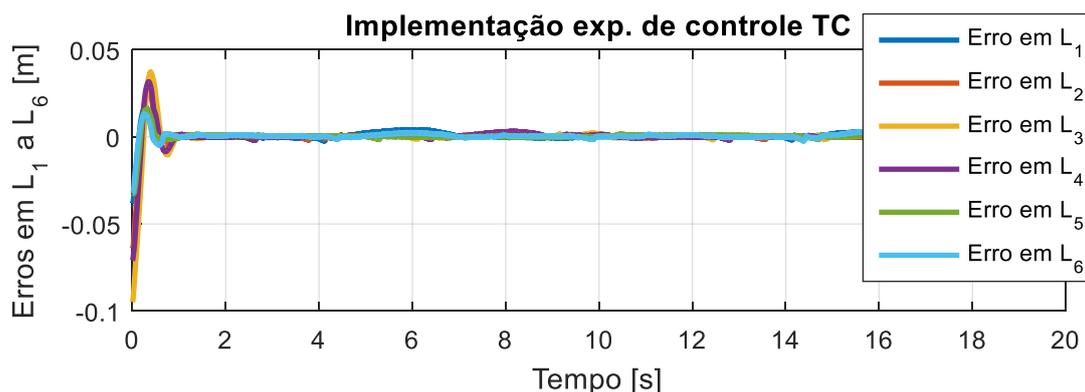


Figura 7.28 – Resultados obtidos para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

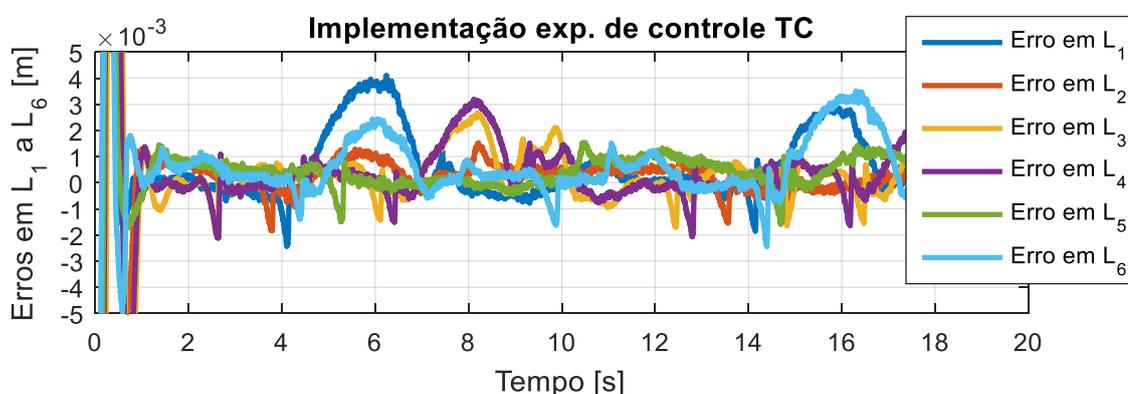


Figura 7.29 – Resultados ampliados para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

Ao comparar os gráficos dos erros no espaço de juntas da Figura 7.30 com as trajetórias executadas no mesmo espaço, apresentada na Figura 7.27, pode-se avaliar os possíveis motivos para os erros maiores em alguns pontos da trajetória. Ao analisar na trajetória os momentos em que os erros negativos em formato de “pequenos dentes” acontecem, percebe-se que esse tipo de erro acontece, na maioria das vezes, em pontos em que a trajetória de um pistão chega ao um ponto alto, e está na iminência de iniciar a descida. Este fenômeno também acontece, em

menor intensidade, em momentos em que os pistões estão em um ponto baixo e estão na iminência de iniciar uma subida. É provável que este tipo de erro esteja associado à parcela de atrito seco que está presente tanto no modelo de simulação quanto no manipulador real. Uma vez que o controlador por Torque Calculado desenvolvido não possui uma compensação explícita do atrito seco, em baixas velocidades o controlador pode não calcular corretamente o valor da força necessária para retirar o pistão da condição de parada para iniciar o movimento. Nestes momentos, o erro acaba crescendo até que o movimento se inicie, e o controlador volte a calcular de forma mais precisa as forças necessárias para seguir a trajetória desejada.

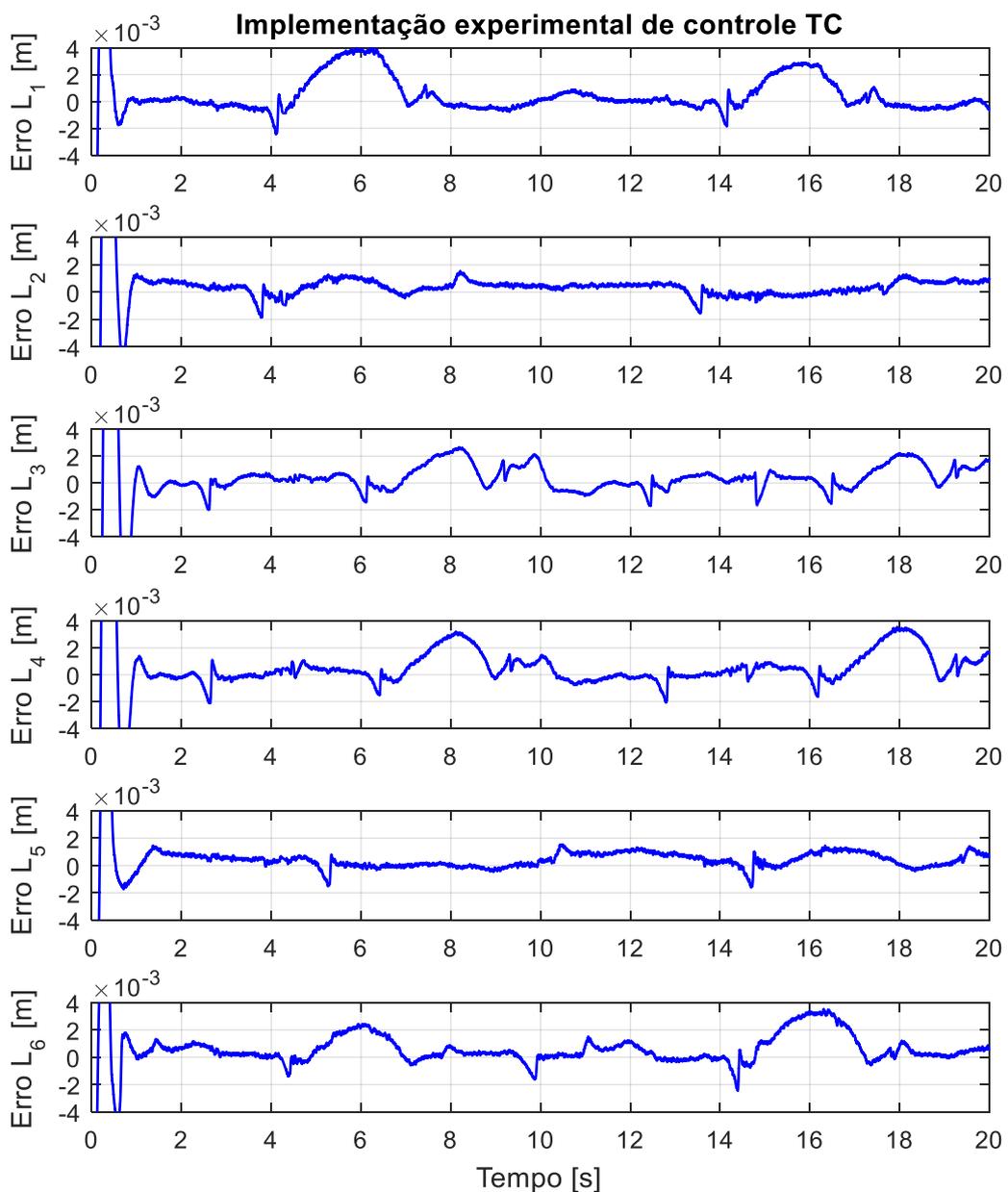


Figura 7.30 – Resultados ampliados e separados para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

Além dos “pequenos dentes”, observa-se também nas figuras 7.29 e 7.30 erros forma de “pequenos morros” em alguns momentos. Este tipo de erro não havia acontecido nas simulações do mesmo controlador. Ao comparar os instantes em que estes erros ocorrem em relação à trajetória, percebe-se que estão associados aos trechos em que a velocidade de descida desejada para o pistão é muito alta. Nesses momentos, o controlador calcula um sinal de controle com valor menor do que  $-2\text{ V}$ , como pode ser observado na Figura 7.31. Uma provável causa desse fenômeno está associada ao fato de que a identificação dos parâmetros das válvulas possa apresentar um desempenho inadequado para tensões negativas abaixo de  $-2\text{ V}$ , conforme já havia sido observado na Seção 7.3.3, durante a validação do modelo dinâmico. Nestes momentos, o algoritmo de controle aparentemente calcula com precisão insuficiente a tensão necessária para gerar o deslocamento desejado, acarretando no erro observado na forma de “pequenos morros”.

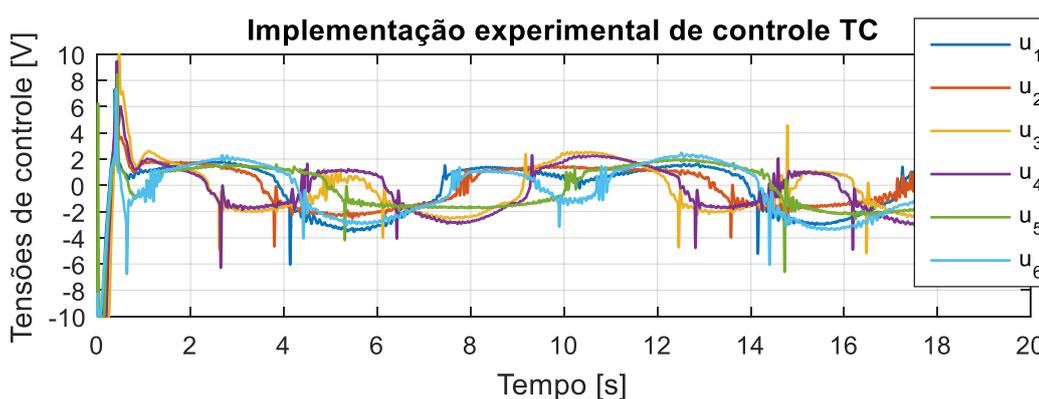


Figura 7.31 – Resultados obtidos para os sinais de controle na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

Finalizando a análise dos resultados deste experimento, a Figura 7.32 apresenta em gráficos individuais as forças hidráulicas estimadas para cada atuador durante a execução das trajetórias. Estas forças hidráulicas apresentam um caráter mais oscilatório quando comparadas com as forças hidráulicas obtidas no experimento do controlador PI, entretanto, os seus valores e comportamento nas transições da trajetória são semelhantes aos obtidos para a simulação do mesmo controle por Torque Calculado apresentadas na Figura 7.23. A característica oscilatória das forças hidráulicas no controle por Torque Calculado se mostrou fortemente dependente das frequências de corte utilizadas nos filtros do experimento, sendo que se verificou que filtros com atrasos de fase elevados resultam em aumento da amplitude das oscilações. Ressalta-se que os mesmos filtros foram utilizados para implementar o controlador PI, e, neste caso, as

oscilações apresentaram intensidade significativamente menor. No presente experimento, a presença de grandes oscilações em instantes de velocidades baixas pode estar relacionada tanto aos efeitos dos atrasos de fase gerados pelos filtros digitais, quanto ao fato de não existir uma compensação explícita de atrito seco no controlador. Os valores medidos para as forças hidráulicas neste experimento variam entre  $-764,9\text{ N}$  a  $1027,9\text{ N}$ , em regime permanente.

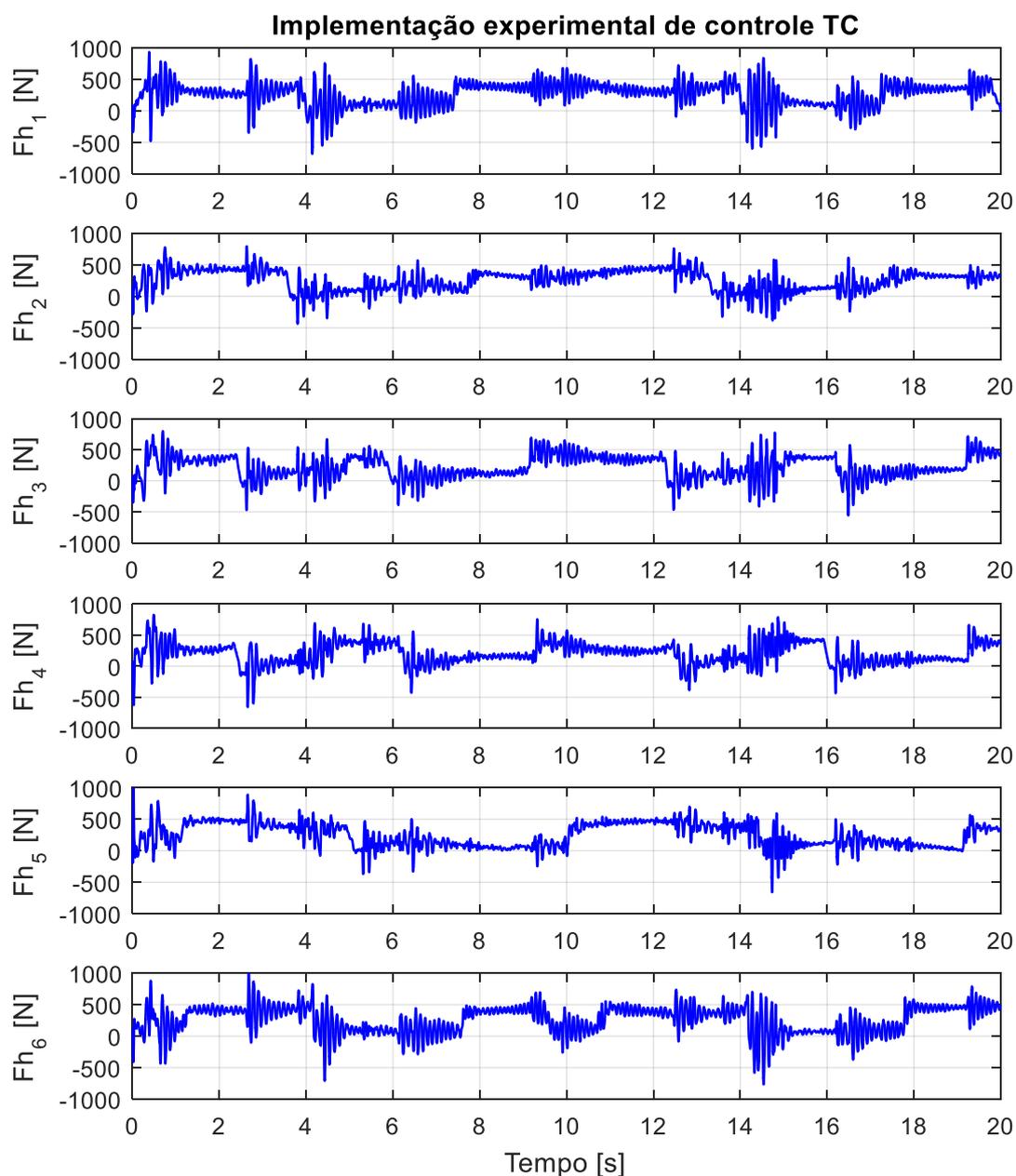


Figura 7.32 – Resultados obtidos para as forças hidráulicas nos atuadores na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 1.

## 7.5 Controle por Torque Calculado para Trajetória 2

O último experimento a ser apresentado é a implementação experimental de um controle por Torque Calculado utilizando como referência uma trajetória que simula os movimentos do convés de um navio, descrita na Seção 7.1.2. Este experimento utilizou o mesmo controlador e os mesmos filtros digitais utilizados no experimento da Seção 7.4. A Figura 7.33 apresenta os resultados obtidos para o seguimento de trajetória no espaço de trabalho.

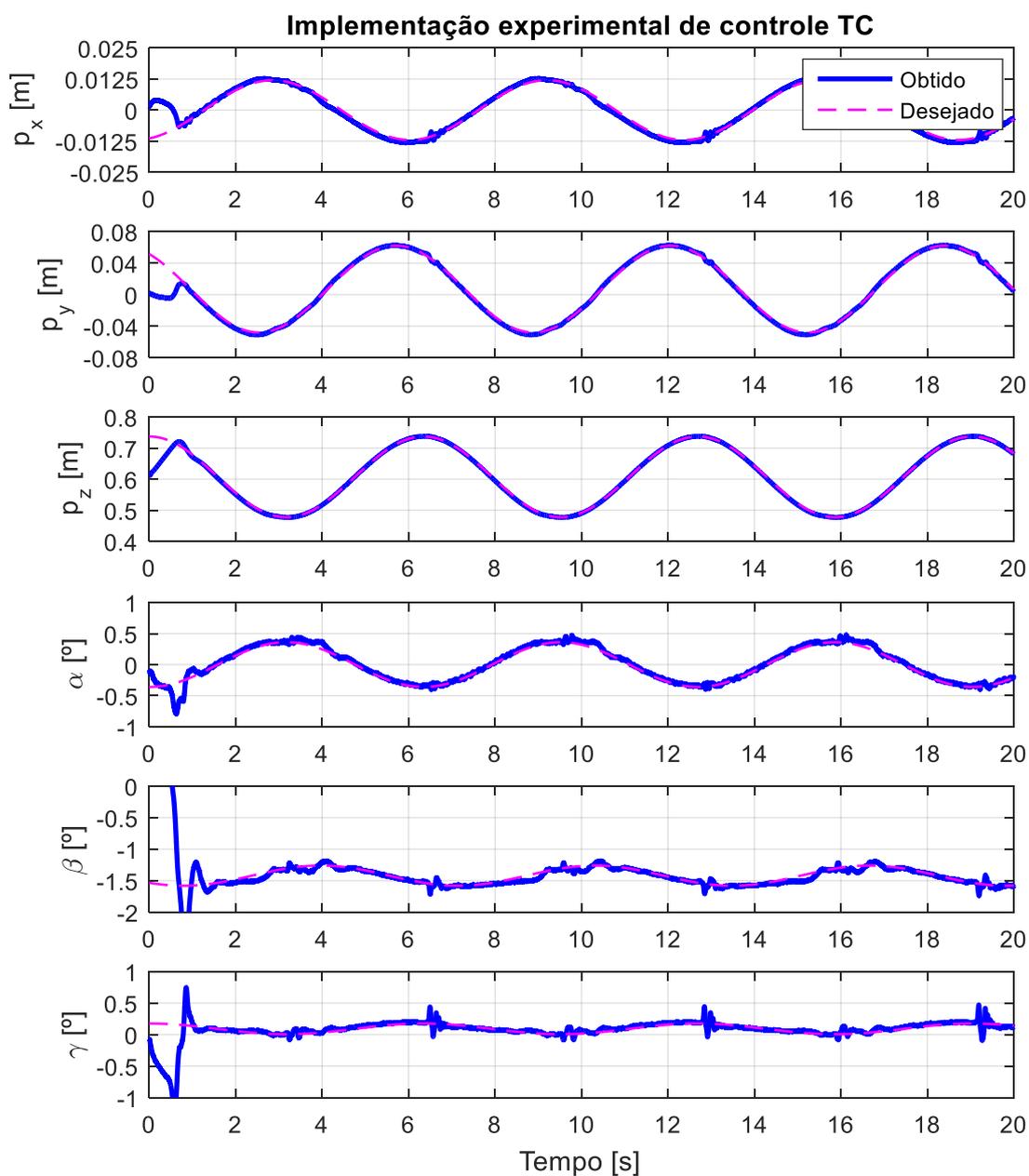


Figura 7.33 – Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.

A Trajetória 2, quando comparada com a Trajetória 1, apresenta uma amplitude de deslocamento vertical mais significativa, e amplitudes menores nas demais translações e rotações. A Figura 7.34 apresenta uma visão geral do comportamento dos erros no espaço de trabalho durante a execução desta trajetória. Nota-se que no início da trajetória, o erro em  $p_z$  é muito grande devido à posição inicial dos atuadores, mas converge rapidamente para valores muito próximos de zero, juntamente com as demais variáveis.

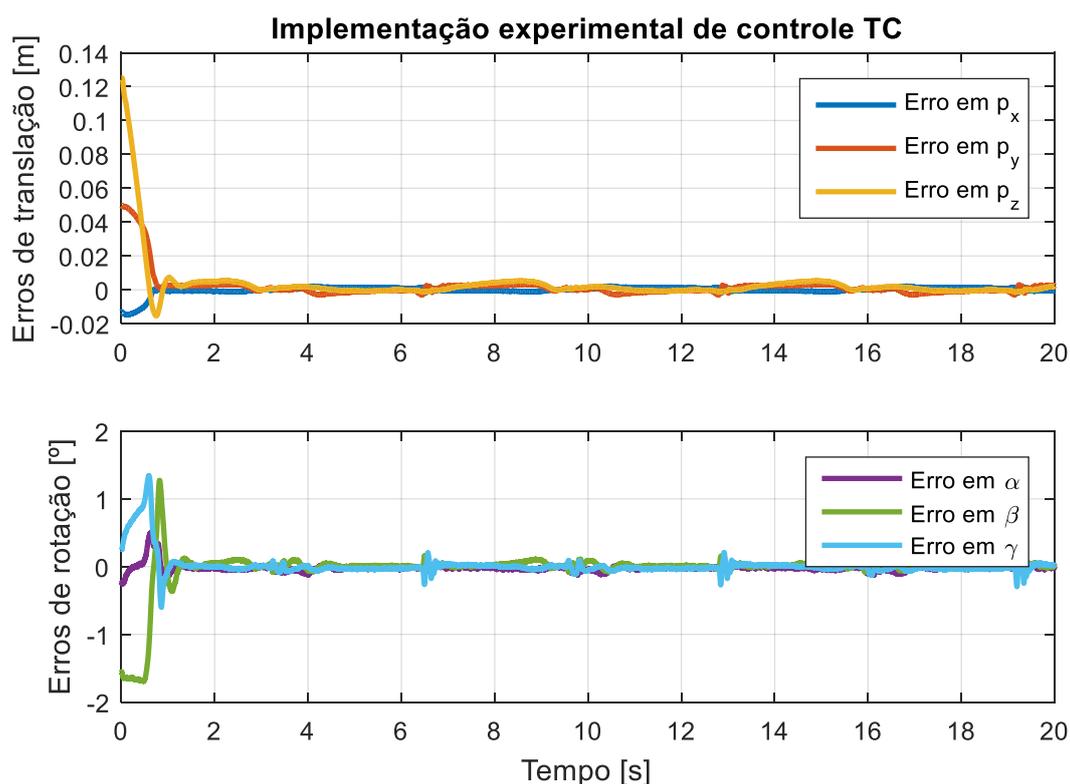


Figura 7.34 – Resultados obtidos para os erros no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.

A Figura 7.35 apresenta os erros no espaço de trabalho de forma ampliada, dando destaque à dinâmica dos erros em regime permanente. O erro máximo absoluto em regime permanente nas coordenadas de translação é de 5,3 mm, enquanto que nas coordenadas de rotação é 0,30°. Percebe-se que, embora esteja sendo utilizado o mesmo controlador do experimento anterior, as amplitudes dos erros são maiores. Comparando a Figura 7.35 com a Figura 7.33, percebe-se que os maiores erros também ocorrem nos instantes em que a plataforma atinge as maiores velocidades de descida, o mesmo fenômeno observado no experimento de controle por Torque Calculado para a Trajetória 1. Uma vez que esta trajetória

possui velocidades maiores, é natural que os erros nas estimativas de força do modelo aumentem, tornando o seguimento de trajetória menos preciso.

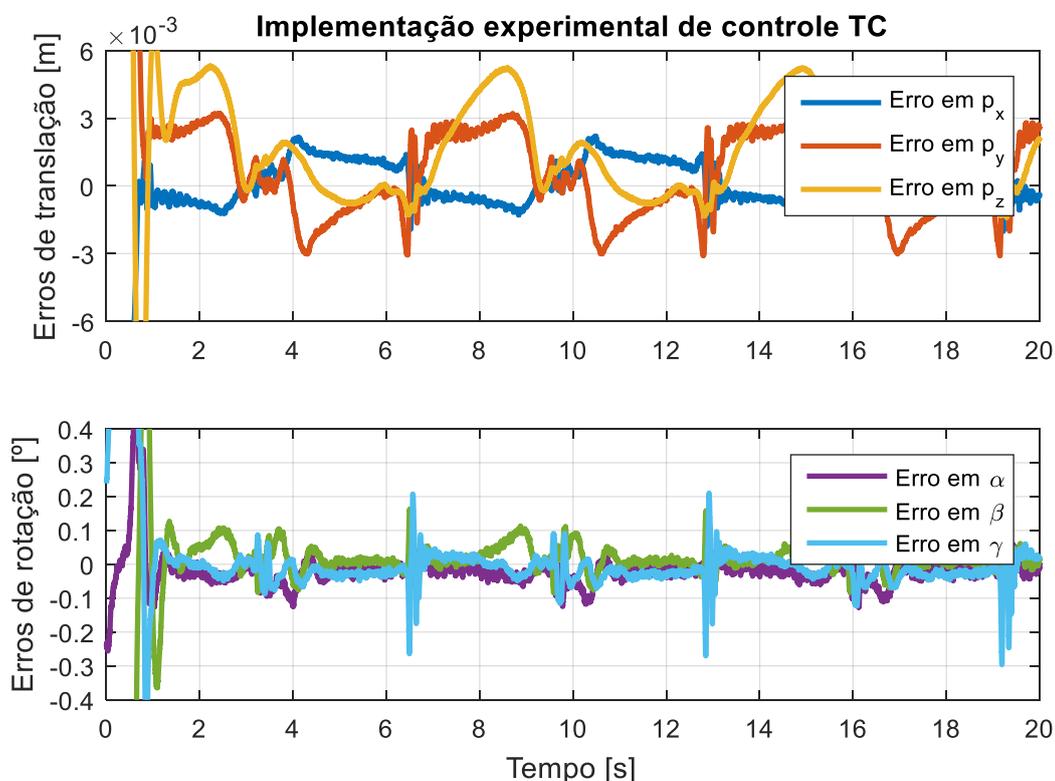


Figura 7.35 – Resultados ampliados para os erros no espaço de trabalho na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.

Novamente, a cinemática inversa é utilizada para criar as trajetórias no espaço de juntas. O resultado obtido para o seguimento de trajetória no espaço de juntas é mostrado na Figura 7.36. Percebe-se que no início da trajetória os atuadores se aproximam rapidamente da referência, sem que haja uma oscilação excessiva no instante em que a alcançam. O seguimento de trajetória em regime permanente também se mostra satisfatório. Algumas trajetórias se mostram próximas aos limites de operação dos atuadores em alguns instantes, mas em nenhum momento os ultrapassam.

A Figura 7.36 também permite perceber que a posição inicial dos pistões é distante da referência, exigindo um sinal de controle inicial mais intenso para que o controlador atinja a referência rapidamente. Nota-se que, mesmo ocorrendo uma rápida aproximação entre as posições e as referências, o sobresselo obtido no momento em que as curvas se cruzam têm uma amplitude pequena, evidenciando a estabilidade do controlador projetado.

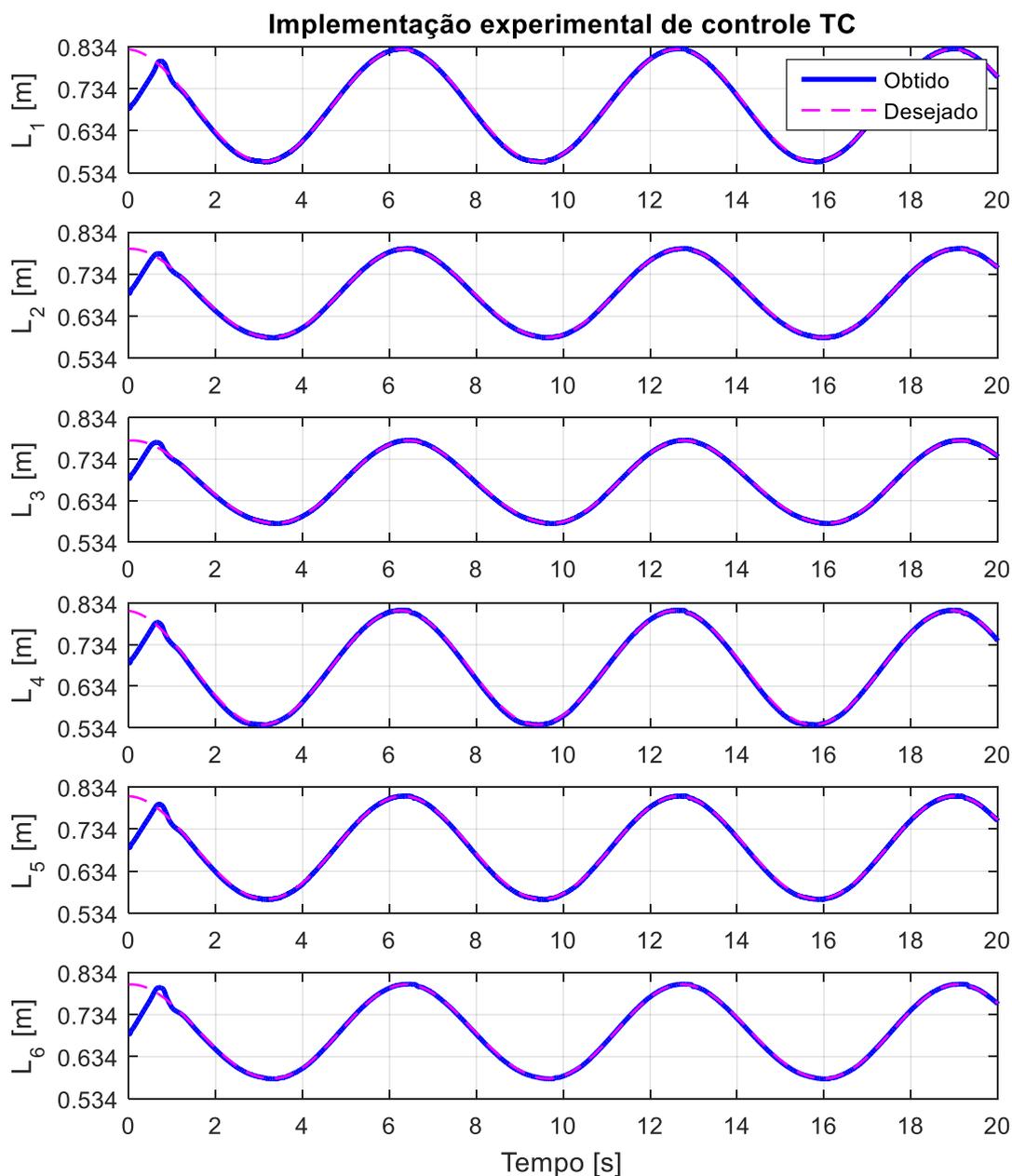


Figura 7.36 – Resultados obtidos para as trajetórias no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.

Na Figura 7.37, podem ser observados os erros no espaço de juntas. Nesta figura percebe-se que o tempo de estabilização para todos os pistões é de pouco mais de 1 s. Após este tempo, o erro se mantém próximo a zero. Os erros absolutos no espaço de juntas em regime permanente apresentam o valor máximo de 6,8 mm. Na Figura 7.38, podem ser observados em detalhe os valores para os erros de junta, enquanto que na Figura 7.39 são apresentados os sinais de controle.

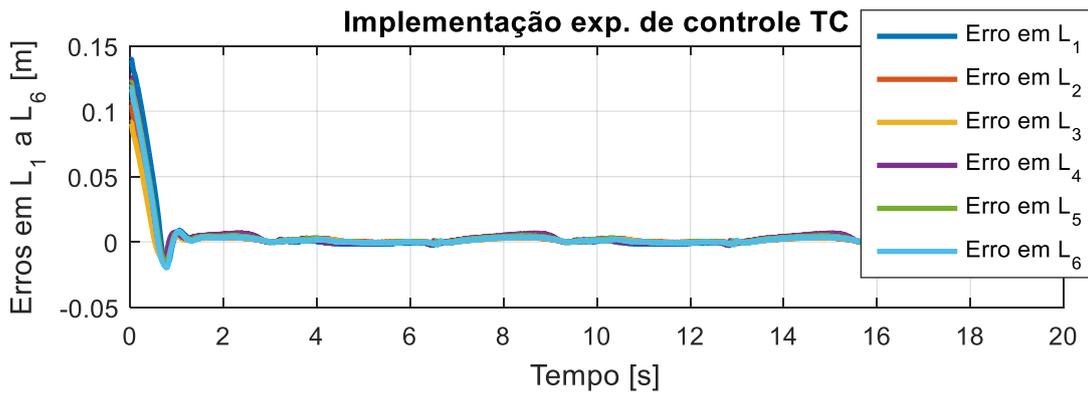


Figura 7.37 – Resultados obtidos para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.

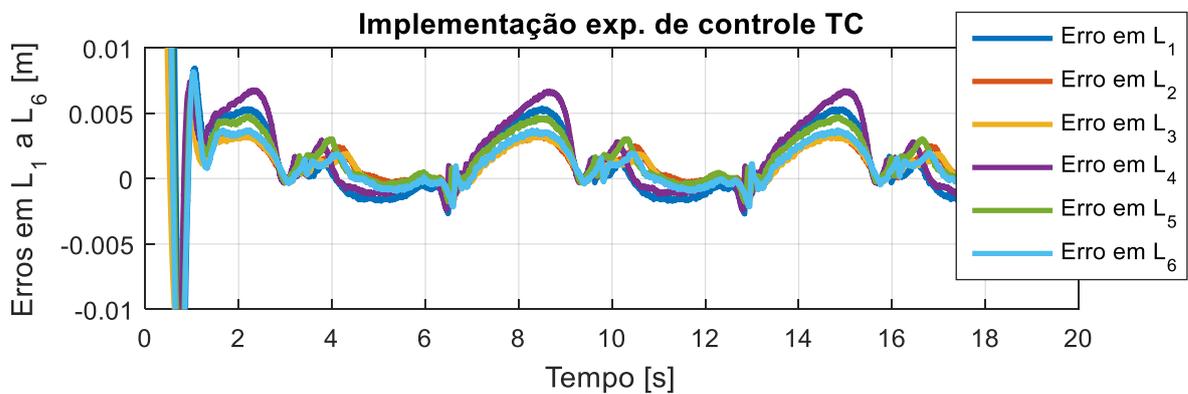


Figura 7.38 – Resultados ampliados para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.

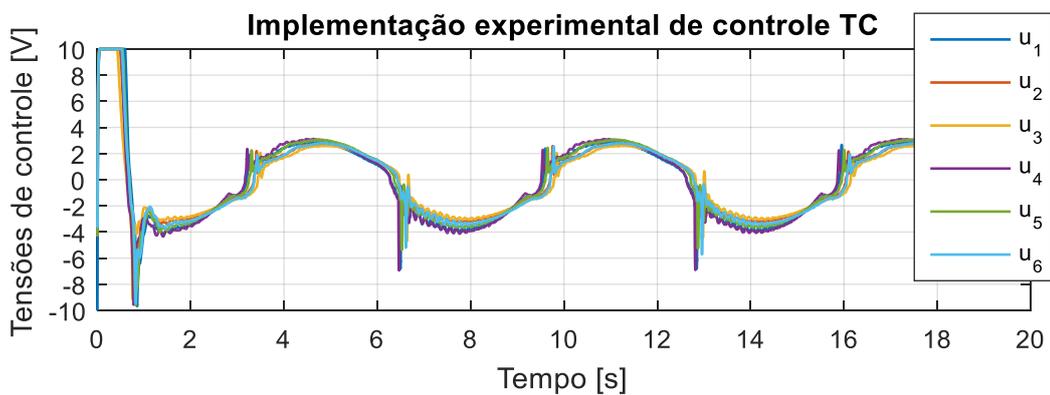


Figura 7.39 – Resultados obtidos para os sinais de controle na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.

Na Figura 7.37, percebe-se que os erros predominantes nesta trajetória são também no formato de “pequenos morros”, semelhantes aos descritos na Seção 7.4.2. Estes erros ocorrem sob as mesmas circunstâncias do caso anterior, em descidas de velocidade elevada nos atuadores. Possivelmente, os motivos para a existência destes erros são os mesmos citados na seção anterior, entretanto, nota-se que o fenômeno ocorre agora em maior intensidade, o que pode ser atribuído ao fato de as velocidades envolvidas e sinais de controle serem maiores.

Para analisar melhor os possíveis motivos para estes comportamentos nos erros no espaço de juntas, a Figura 7.40 apresenta estes erros de forma individual e ampliada.

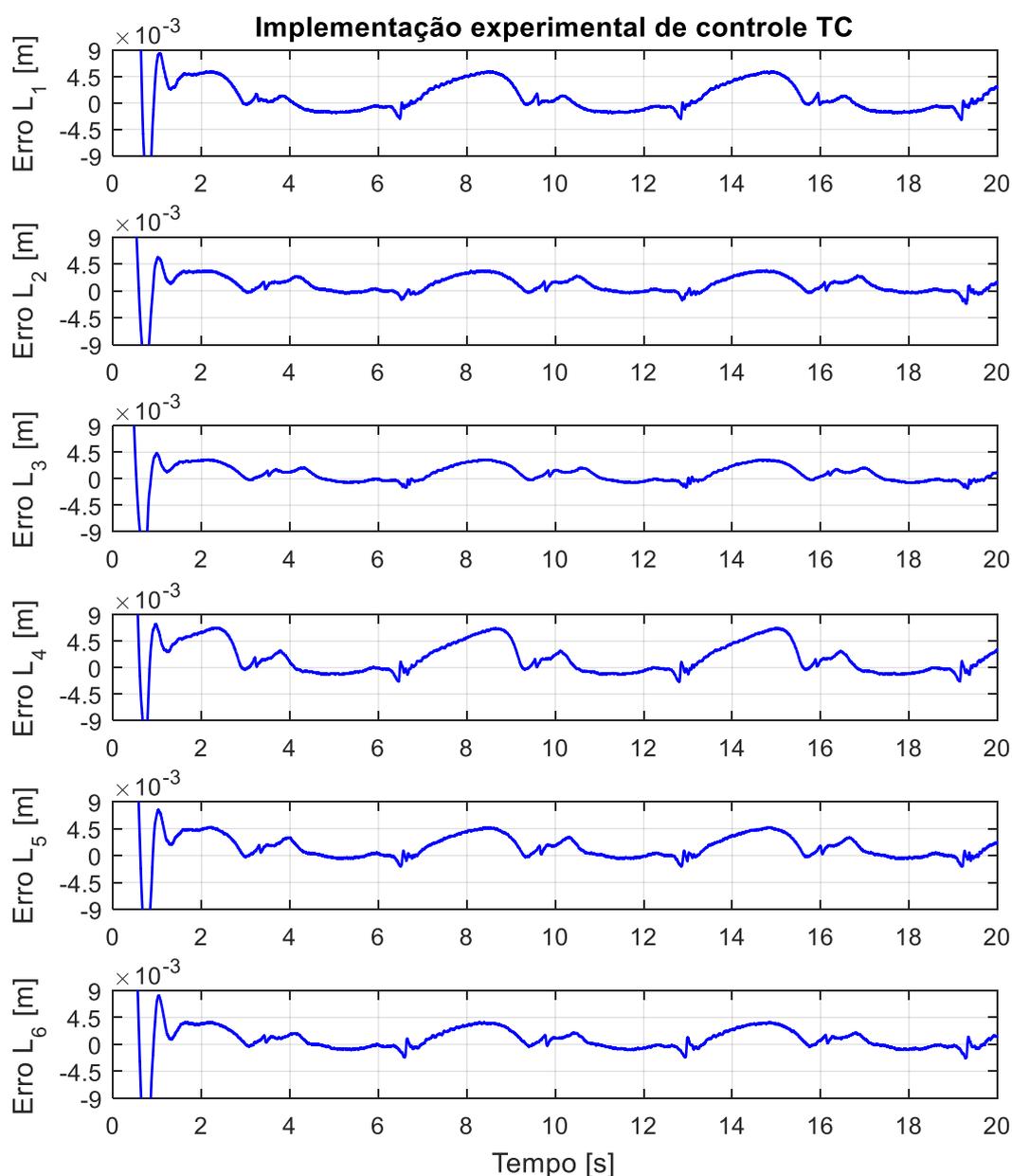


Figura 7.40 – Resultados ampliados e separados para os erros no espaço de juntas na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.

Uma característica interessante que a Figura 7.40 permite avaliar, é o fato de que os erros acontecem de forma mais intensa durante a descida dos atuadores do que durante a subida, ou seja, quando a tensão de controle é negativa. Analisando a Figura 7.39, também se percebe que os sinais de controle são mais oscilatórios nesses momentos, o que pode ser atribuído a imprecisões do modelo matemático da planta. A Figura 7.41 mostra que as forças hidráulicas também são mais oscilatórias nos momentos de descida do que nos momentos de subida dos atuadores.

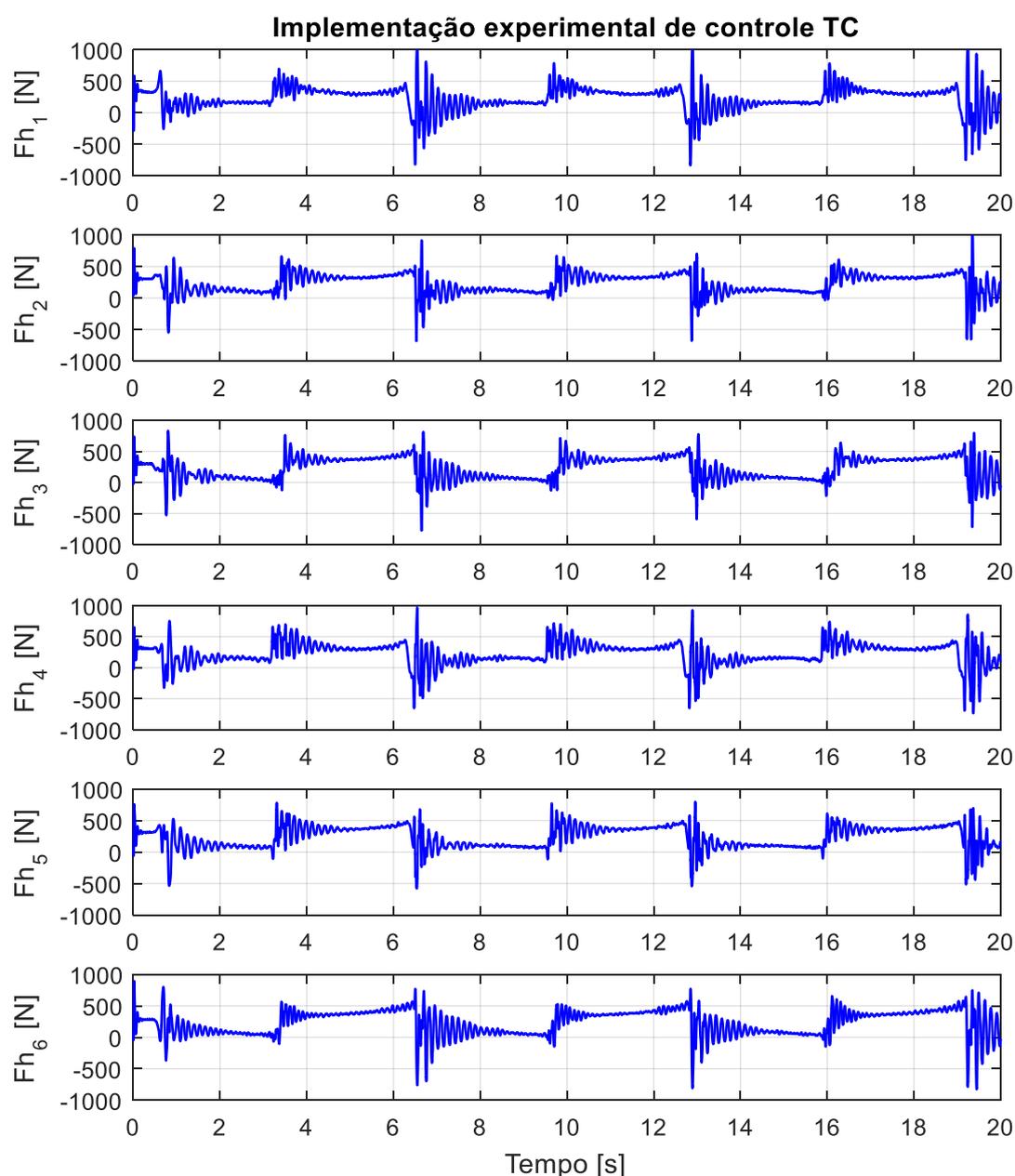


Figura 7.41 – Resultados obtidos para as forças hidráulicas nos atuadores na implementação experimental de um controlador por Torque Calculado para a Trajetória 2.

Os resultados obtidos, quando associados, corroboram a hipótese de que estes erros em formato de “pequenos morros”, que ocorreram de forma semelhante nas duas trajetórias executadas, podem ser consequência de uma imprecisão da modelagem da válvula. Neste caso, essa imprecisão não permite que o controlador calcule corretamente as tensões de controle necessárias para gerar as forças adequadas para executar com maior precisão os movimentos de descida, e acaba gerando as inconformidades observadas nas forças hidráulicas e nos sinais de controle. É interessante ressaltar que para velocidades positivas (subidas) e para velocidades pequenas, o controlador se comporta de forma mais adequada, o que pode ser resultado de a modelagem da válvula ser, provavelmente, mais precisa nestas condições do que nas condições de altas velocidades negativas. Esta constatação pode ser reforçada pelo fato de que os dados experimentais utilizados na identificação dos coeficientes das válvulas (Figura 6.9) apresentaram velocidades negativas com valor absoluto significativamente menores do que as velocidades positivas presentes no experimento. Portanto, o conjunto de dados utilizados na identificação dos coeficientes das válvulas pode não ter contemplado adequadamente todas as condições de operação necessárias para realizar uma modelagem que abrangesse de forma ampla as condições de operação das trajetórias testadas.

## 7.6 Resumo dos resultados

Para possibilitar uma comparação direta entre os resultados obtidos nas simulações e implementações experimentais dos diferentes controladores, foram calculadas as raízes quadráticas médias dos erros (*root-mean-square error*, ou, RMSE) e os erros máximos absolutos (EMA) para todas as trajetórias executadas. O RMSE pode ser interpretado como uma medida da intensidade média do comportamento do erro ao longo de toda a trajetória. Já, o erro EMA representa o valor mais alto alcançado pelo erro ao longo da trajetória. Os erros foram calculados com base apenas nos dados relativos ao regime permanente das trajetórias, que foi definido igualmente para elas como sendo o intervalo entre o tempo 2 s e 20 s. Os erros foram divididos em 3 categorias e o seu cálculo feito baseado na concatenação dos erros das coordenadas de cada categoria, sendo elas: erros das coordenadas de translação,  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$ ; erros das variáveis de rotação,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ ; e erros das variáveis de junta,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$ ,  $L_5$  e  $L_6$ . A Tabela 7.6 apresenta os valores para os erros calculados para as diferentes simulações e implementações experimentais realizadas.

Tabela 7.6 – Resultados para os erros no seguimento de trajetória.

	<b>Controle PI</b>				<b>Controle por Torque Calculado</b>					
	Trajetória 1				Trajetória 1				Trajetória 2	
	Simulação		Experimento		Simulação		Experimento		Experimento	
	RMSE	EMA	RMSE	EMA	RMSE	EMA	RMSE	EMA	RMSE	EMA
Coord. de translação [ $10^{-3} m$ ]	1,83	4,96	2,03	5,63	0,34	1,23	0,88	3,11	1,77	5,32
Coord. de rotação [°]	0,34	0,88	0,29	0,72	0,04	0,14	0,10	0,32	0,04	0,30
Coordenadas de juntas [ $10^{-3} m$ ]	3,57	9,60	3,65	7,84	0,23	1,10	1,01	4,10	2,07	6,78

Pode-se perceber através dos resultados apresentados na Tabela 7.6 que, em relação aos experimentos, o controle por Torque Calculado apresenta erros RMSE e EMA menores do que o controle PI para a mesma trajetória. Também se percebe que os erros para o mesmo controlador por Torque Calculado são diferentes entre os experimentos com trajetórias diferentes. Sobre as simulações, percebe-se que possuem erros de menor intensidade do que os seus respectivos experimentos, indicando que os atrasos de fase gerados pelos filtros digitais utilizados nos experimentos podem prejudicar o seguimento de trajetória. No caso do controle por Torque Calculado, erros maiores no experimento em comparação à simulação podem indicar a influência das imprecisões intrínsecas do modelo matemático utilizado no controlador, em relação ao sistema real.

O Apêndice G apresenta os resultados experimentais do controle por Torque Calculado em termos de frames de movimento, retirados de vídeos feitos durante os experimentos. São apresentadas as imagens da execução das trajetórias 1 e 2.

## 8 CONCLUSÕES

A partir dos resultados obtidos durante o desenvolvimento do presente trabalho, é possível concluir que o objetivo principal de realizar a implementação prática de um algoritmo de controle por Torque Calculado no Manipulador Plataforma de Stewart do LAMECC simulando uma trajetória de um convés de navio foi concluído com sucesso. Todos os objetivos específicos definidos no início do trabalho também foram atingidos, possibilitando a conclusão do projeto como um todo.

A modelagem mecânica do MPS, desenvolvida no presente trabalho, apresenta algumas contribuições para o estudo deste mecanismo. Usualmente, a cadeia cinemática das pernas do manipulador é desenvolvida considerando que os sistemas de referência da base e do topo do manipulador são alinhados com os planos que ligam as juntas inferiores e superiores. Em manipuladores reais, esse alinhamento dificilmente existe, uma vez que as juntas possuem dimensões não desprezíveis entre seus pontos de rotação e pontos de fixação nas plataformas. O modelo matemático desenvolvido neste trabalho considera as distâncias entre juntas e os planos citados, se tornando compatível com qualquer outro MPS de mesma topologia, desde que, obviamente, suas dimensões sejam conhecidas. Para auxiliar na compreensão do equacionamento completo, foi realizado e apresentado um minucioso detalhamento sobre a sequência de rotações dos sistemas de coordenadas. O modelo do sistema de corpo rígido inclui descrições detalhadas do desenvolvimento dos procedimentos de cálculo da cinemática inversa, Matriz Jacobiana, e cinemática direta.

Sobre o desenvolvimento das equações dinâmicas do subsistema mecânico, também existem pontos importantes a destacar. Usualmente, os trabalhos encontrados na bibliografia apresentam apenas as equações finais encontradas para as matrizes de massa e de forças centrífugas e de Coriolis, impossibilitando a confirmação dos valores fornecidos, ou a realização de adaptações no modelo para casos específicos. No presente trabalho, o método de Euler-Lagrange foi utilizado, sendo todo o desenvolvimento das equações detalhadamente descrito, se tornando facilmente adaptável para outras configurações de MPS ou outras sequências de rotação. Durante o desenvolvimento do modelo dinâmico, foram encontradas divergências em comparação a um modelo muito utilizado, proposto por Kim et al., 2000, para um MPS de igual configuração. Em função disso, a propriedade de anti-simetria da matriz  $\dot{M}(X) - 2C(X, \dot{X})$  foi testada de forma explícita para os 2 modelos divergentes, obtendo-se resultado positivo apenas para o modelo desenvolvido no presente trabalho.

A modelagem do sistema hidráulico foi feita inicialmente seguindo os passos orientados pela bibliografia clássica. Para identificação dos coeficientes de vazão das válvulas, foi utilizado um método numérico de mínimos quadrados. O método resultou em resultados satisfatórios, porém, uma modificação no modelo clássico foi sugerida com objetivo de aprimorar os resultados da simulação do modelo matemático. O modelo clássico utiliza valores constantes para os coeficientes de vazão das válvulas, porém, neste sistema, os experimentos realizados revelaram uma dependência entre os coeficientes e a vazão de óleo nos orifícios da válvula em momentos que a vazão é pequena. Por este motivo, um modelo para o atuador hidráulico utilizando coeficientes de vazão variáveis foi proposto e implementado, gerando resultados considerados mais adequados do que os do modelo clássico. Com essa alteração, o modelo proposto forneceu resultados na simulação da dinâmica das pressões nas câmaras mais próximos aos medidos experimentalmente, assim como na simulação dos movimentos do cilindro para velocidades baixas, próximas a paradas ou retomadas de movimento. Os resultados de um procedimento de identificação e equacionamento do perfil das forças de atrito de um pistão em função da velocidade da haste também foram apresentados.

Para os demais parâmetros do modelo matemático do MPS, um procedimento completo para a sua identificação, medição e estimativa foi descrito, possibilitando a simulação de um dado MPS, mesmo que dados importantes dos componentes não sejam disponibilizados pelos fabricantes.

Uma descrição detalhada do algoritmo de controle por Torque Calculado foi feita, incluindo uma interpretação para os efeitos de cada um de seus ganhos e um detalhamento matemático dos procedimentos necessários para a sua implementação. Uma prova de estabilidade do controlador pelo critério Lyapunov também foi apresentada.

A consistência entre modelos da dinâmica direta e inversa foi testada com sucesso. Além disso, a consistência dos modelos matemáticos do MPS foi comprovada através de testes experimentais. Um controlador PI foi implementado para o seguimento de uma trajetória senoidal arbitrária, sendo este controlador utilizado tanto com o modelo computacional, quanto com o MPS de forma experimental. Os resultados obtidos por simulações e experimentos para as forças hidráulicas e ações de controle utilizadas pelo controlador foram comparados, apresentando comportamentos semelhantes, comprovando que o modelo matemático desenvolvido é capaz de representar adequadamente o comportamento do sistema experimental.

Para realizar a análise de desempenho do controlador por Torque Calculado desenvolvido, filtros para o condicionamento dos sinais foram projetados e implementados, e duas trajetórias foram testadas: uma trajetória baseada em informações teóricas sobre

excitações em embarcações relacionadas aos efeitos de ondas e marés; e outra obtida por meio de software com o mesmo objetivo. Ambas apresentaram resultados de seguimento de trajetória satisfatório na implementação experimental, com erros médios nas juntas de aproximadamente 1 *mm*, para a trajetória baseada em informações teóricas, e de aproximadamente 2 *mm* para a trajetória obtida por meio de software, demonstrando assim o cumprimento do principal objetivo do presente trabalho. Além disso, percebe-se que o modelo matemático desenvolvido apresenta erros de seguimento de trajetória com comportamento dinâmico muito semelhante ao encontrado nos experimentos, apresentando picos e vales nos mesmos momentos, evidenciando a precisão do modelo ao representar o comportamento do sistema real. Isso indica que este modelo poderá ser utilizado futuramente para teste de melhorias no sistema ou outras estratégias de controle.

Como trabalhos futuros referentes ao presente trabalho, podem ser citadas as seguintes propostas:

- Desenvolver um método numérico para a identificação dos coeficientes de vazão variáveis, propostos no presente trabalho;
- Aprimorar a identificação do coeficiente de compressibilidade volumétrica do fluido;
- Realizar simulações que utilizam os mesmos filtros utilizados nos experimentos para avaliar os seus efeitos no seguimento de trajetória;
- Realizar a implementação da contribuição das pernas do manipulador no modelo dinâmico;
- Realizar um estudo detalhado sobre o volume de trabalho do manipulador em questão, considerando as inclinações e limites das juntas universais e esféricas assim como implementar um algoritmo de planejamento de trajetória que impeça o manipulador de tentar alcançar poses fora dos seus limites;
- Implementar uma compensação explícita de atrito no controlador proposto utilizando modelos de atrito mais complexos e comprovando a sua estabilidade;
- Acoplar uma unidade de medição inercial ao topo da plataforma e realizar estudos sobre sua precisão de medição, comparando as suas medições com os dados fornecidos pelo algoritmo de controle desenvolvido neste trabalho;
- Implementar melhorias na filtragem dos sinais do MPS do LAMECC e desenvolver algoritmos para atenuar as oscilações das ações de controle em baixas velocidades.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abo-Shanab, R. F. An Efficient Method for Solving the Direct Kinematics of Parallel Manipulators Following a Trajectory. **Journal of Automation and Control Engineering**, vol. 2, n. 3, p. 228–233, 2014.

Ampelmann. **Ampelmann Find your Solution**, 2020. Disponível em: <https://www.ampelmann.nl/systems/>. Acesso em: 02-04-2020.

Armstrong-Hélouvry, B.; Dupont, P.; e Canudas De Wit, C. A. Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction. **Automatica**, vol. 30, n. 7, p. 1083–1138, 1994.

Assis, L.; Beluco, A.; e Almeida, L. Avaliação e Aproveitamento da Energia de Ondas Ocoânicas no Litoral do Rio Grande do Sul. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, vol. 18, n. 3, 2013.

Balluff. **Magnetostrictive Sensors BTL5-E10-M0300-P-S32**, 2019.

Bonev, I. **The true origins of parallel robots**, 2003. Disponível em: <http://www.parallemic.org/Reviews/Review007.html>. Acesso em: 02-04-2020.

Borges, F. A. P. **Controle em Cascata de um Atuador Hidráulico Utilizando Redes Neurais**. 2017. - Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2017.

CAE. **CAE Full-Flight Simulators**, 2020. Disponível em: <https://www.cae.com/civil-aviation/aviation-services-and-solutions/training-equipment/full-flight-simulators/>. Acesso em: 02-04-2020.

Canudas De Wit, C. et al. A new model for control of systems with friction. **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. 40, n. 3, p. 419–425, 1995.

Canudas De Wit, C. et al. Adaptive Friction Compensation in Robot Manipulators: Low Velocities. **The International Journal of Robotics Research**, vol. 10, n. 3, p. 189–199, 1991.

Craig, J. J. **Introduction to Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control**, 2004. ISSN 0885-9000.

Cunha, M. A. B. **Controle em Cascata de um Atuador Hidráulico: Contribuições Teóricas e Experimentais**. 2001. - Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

Davliakos, I.; e Papadopoulos, E. Model-based control of a 6-dof electrohydraulic Stewart-Gough platform. **Mechanism and Machine Theory**, vol. 43, n. 11, p. 1385–1400, 2008.

De Negri, V. J. **Sistemas Hidráulicos e Pneumáticos para Automação e Controle PARTE III – Sistemas Hidráulicos para Controle**, 2001.

Furst, F. L. **Sistematização do projeto preliminar de circuitos hidráulicos com controle de posição**. 2001. - Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

García, R. M. L. **Controle de um Manipulador Plataforma de Stewart com Atuadores Hidráulicos como Simulador de Movimentos de Navios**. 2015. - Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.

Gough, V. E.; e Whitehall, S. G. Universal Tyre Test Machine. **FISITA Proceedings**, 1962.

Haessig, D. A.; e Friedland, B. On the Modeling and Simulation of Friction. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, vol. 113, n. 3, p. 354–362, 1991.

Iurian, C. et al. **Identification of a system with dry friction**, 2005.

Karnopp, D. Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, vol. 107, n. 1, p. 100–103, 1985.

Kim, D. H.; Kang, J.; e Lee, K. Robust tracking control design for a 6 DOF parallel manipulator. **Journal of Robotic Systems**, vol. 17, n. 10, p. 527–547, 2000.

Lebret, G.; Liu, K.; e Lewis, F. L. Dynamic analysis and control of a stewart platform manipulator. **Journal of Robotic Systems**, vol. 10, n. 5, p. 629–655, 1993.

Lewis, F. L.; Dawson, D. M.; e Abdallah, C. T. **Robot Manipulator Control: Theory**

**and Practice**, 2004.

Li, D.; e Salcudean, S. E. Modeling, simulation, and control of a hydraulic Stewart platform. *In:* , 1997. **Proceedings of International Conference on Robotics and Automation**. IEEE, 1997. p. 3360–3366.

Linsingen, I. Von. **Fundamentos de Sistemas Hidráulicos**. Editora da UFSC, 2008.

Liu, K. et al. The singularities and dynamics of a Stewart platform manipulator. **Journal of Intelligent & Robotic Systems**, vol. 8, n. 3, p. 287–308, 1993.

Mcaree, P. R.; e Daniel, R. W. A fast, robust solution to the Stewart platform forward kinematics. **Journal of Robotic Systems**, vol. 13, n. 7, p. 407–427, 1996.

Mcdonell, B. W. **Modeling, Identification, and Control of a Pneumatically Actuated Robotic Manipulator**. 1996. - Dissertação de mestrado, University of California Irvine, 1996.

Merlet, J. P. **Parallel Robots**. Springer Netherlands, 2006.

Merritt, H. E. **Hydraulic Control Systems**. Wiley, 1967.

Nguyen, C. C. et al. Adaptive control of a Stewart platform-based manipulator. **Journal of Robotic Systems**, vol. 10, n. 5, p. 657–687, 1993.

Nguyen, C. C. et al. Analysis and implementation of a 6 DOF Stewart Platform-based robotic wrist. **Computers and Electrical Engineering**, vol. 17, n. 3, p. 191–203, 1991.

Parker. **SCP01 pressure sensors**, 2020.

Parker Hannifin. **Proportional Directional Control Valves, Series D1FP**. Elyria, Ohio, USA, 2020.

Pereira, P. I. I. **Análise Teórico-Experimental de Controladores para Sistemas Hidráulicos**. 2006. - Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.

Perondi, E. A. **Controle Não-Linear em Cascata de um Servoposicionador Pneumático com Compensação do Atrito**. 2002. - Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

Romano, V. F. **Robótica Industrial: Aplicação na Indústria de Manufatura e de Processos**. Edgard Blucher, 2002.

Salzmann, D. J. C. **Ampelmann, Development of the Access System for Offshore Wind Turbines**. 207 f. 2010. - Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Delft, 2010.

Sarmanho Junior, C. A. C. **Desenvolvimento de um Robô Pneumático de 5 Graus de Liberdade com Controlador Não Linear com Compensação de Atrito**. 2014. - Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.

Selig, J. M.; e Li, H. A geometric Newton-Raphson method for Gough-Stewart platforms. **Proceedings of the 5th International Workshop on Computational Kinematics**, p. 183–190, 2009.

Siciliano, B. et al. **Robotics**. London: Springer London, 2009. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing).

Slotine, J. J. E.; e Li, W. Adaptive Manipulator Control: A Case Study. **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. 33, n. 11, 1988.

Slotine, Jean-Jacques E.; e Li, W. **Applied Nonlinear Control**. Prentice Hall, 1991.

Slotine, Jean-Jacques E.; e Li, W. Adaptive strategies in constrained manipulation. *In: , 1987. Proceedings. 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1987. p. 595–601.

Sobczyk, M. R. et al. A continuous version of the LuGre friction model applied to the adaptive control of a pneumatic servo system. **Journal of the Franklin Institute**, vol. 353, n. 13, p. 3021–3039, 2016.

Sobczyk Sobrinho, M. R. **Controle em Cascata e a Estrutura Variável com Adaptação de Parâmetros e Compensação de Atrito de um Servoposicionador Pneumático**. 2009. - Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

Sohl, G. A.; e Bobrow, J. E. Experiments and simulations on the nonlinear control of a hydraulic servosystem. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, vol. 7, n. 2, p. 238–247, 1999.

Spong, M. W.; Hutchinson, S.; e Vidyasagar, M. **Robot Modeling and Control**. Wiley, 2005.

Stewart, D. A Platform with Six Degrees of Freedom. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, vol. 180, n. 1, p. 371–386, 1965.

Tørdal, S. S. **Real-Time Motion Compensation in Ship-to-Ship Load Handling**. 2019. - Tese de Doutorado, Universidade de Agder, 2019.

Tørdal, S. S.; Olsen, J. T.; e Hovland, G. The Norwegian Motion-Laboratory. **Modeling, Identification and Control: A Norwegian Research Bulletin**, vol. 39, n. 3, p. 191–208, 2018.

Tsai, L.-W. **Mechanism Design: Enumeration of Kinematic Structures According to Function**. CRC Press LLC, 2001.

Valdiero, A. C. **Controle de Robôs Hidráulicos com Compensação de Atrito**. 2005. - Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2005.

Valente, V. T. **Análise, Simulação e Controle de um Sistema de Compensação de Movimento Utilizando um Manipulador Plataforma de Stewart Acionado por Atuadores Hidráulicos**. 2016. - Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016.

Wang, R. et al. A numerical method for forward kinematics of general Stewart manipulator using natural coordinates. **Journal of Advanced Mechanical Design, Systems and Manufacturing**, vol. 13, n. 1, p. 1–12, 2019.

Watton, J. **Modelling, Monitoring and Diagnostic Techniques for Fluid Power Systems**. 1. ed. London: Springer London, 2007.

Yang, C. et al. Forward kinematics analysis of parallel robots using global Newton-Raphson method. **2009 2nd International Conference on Intelligent Computing Technology and Automation, ICICTA 2009**, vol. 3, p. 407–410, 2009.

## APÊNDICE A – Cálculo das propriedades de massa das partes móveis da Plataforma de Stewart.

O cálculo das propriedades de massa das partes móveis da plataforma foi feito através do modelo 3D do MPS por meio do software SolidWorks. A Figura A.1 apresenta a seleção de corpos que compõe o cálculo das propriedades de massa (topo da plataforma). A Figura A.2 apresenta os resultados obtidos.

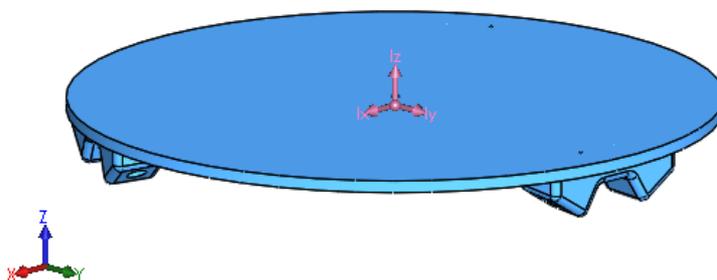


Figura A.1 – Corpos selecionados para o cálculo das propriedades de massa.

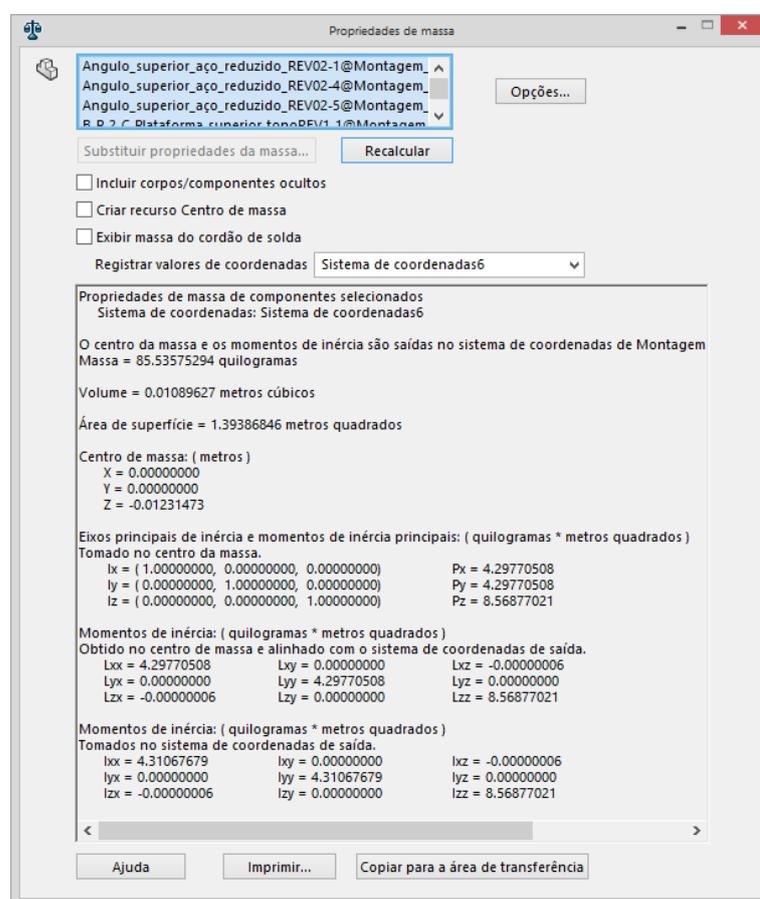


Figura A.2 – Resultados dos cálculos das propriedades de massa da plataforma.

## APÊNDICE B – Cálculo detalhado das equações dinâmicas do manipulador.

Conforme descrito na Seção 3.6, pode-se desenvolver as equações de Euler-Lagrange que definem a dinâmica de um sistema mecânico através do conhecimento das expressões da energia cinética e da energia potencial gravitacional do sistema. O procedimento é baseado na solução da Equação 3.45, reproduzida aqui, por conveniência, através da Equação B.1:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}. \quad (\text{B.1})$$

No caso do manipulador de Stewart, diferentemente do caso do modelo dinâmico clássico de manipuladores seriais, o vetor  $\mathbf{q}$  de coordenadas generalizadas no espaço de juntas é substituído pelo vetor  $\mathbf{X}$  de coordenadas generalizadas no espaço de trabalho na Equação 3.45. Isto implica também na necessidade da pré-multiplicação do vetor de forças  $\boldsymbol{\tau}$  pela Matriz Jacobiana transposta,  $\mathbf{J}^T(\mathbf{X})$ , originando então a Equação B.2.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right) - \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{J}^T(\mathbf{X})\boldsymbol{\tau} \quad (\text{B.2})$$

O procedimento de resolução desta equação foi dividido, calculando separadamente os termos  $\frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{\mathbf{X}}}$ ,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right)$ ,  $\frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}}$  e  $\frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$ , posteriormente juntando os resultados conforme a Equação B.2 e reorganizando os termos na forma  $\mathbf{M}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{X})\boldsymbol{\tau}$ .

Primeiramente, a Equação 3.65 que representa a energia cinética do manipulador terá seus termos renomeados para facilitar a manipulação das expressões, se tornando:

$$K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{p}_x & \dot{p}_y & \dot{p}_z & \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ 0 & 0 & 0 & m_{45} & m_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{46} & 0 & m_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

onde,

$$m_{44} = I_x c_\beta^2 c_\gamma^2 + I_y c_\beta^2 s_\gamma^2 + I_z s_\beta^2, \quad (\text{B.4})$$

$$m_{45} = (I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma, \quad (\text{B.5})$$

$$m_{46} = I_z s_\beta, \quad (\text{B.6})$$

$$m_{55} = I_x s_\gamma^2 + I_y c_\gamma^2, \quad (\text{B.7})$$

$$m_{66} = I_z. \quad (\text{B.8})$$

Para realizar os cálculos das derivadas parciais da energia cinética, primeiramente é realizada a multiplicação dos vetores e matrizes da Equação B.3, originando a Equação B.9.

$$K = \frac{1}{2} (\dot{p}_x^2 m + \dot{p}_y^2 m + \dot{p}_z^2 m + \dot{\alpha}^2 m_{44} + \dot{\beta}^2 m_{55} + \dot{\gamma}^2 m_{66} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}m_{45} + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}m_{46}) \quad (\text{B.9})$$

A partir da Equação B.9, serão realizados os cálculos dos termos  $\frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{\mathbf{X}}}$ ,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right)$  e  $\frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}}$ . O cálculo do termo  $\frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$  será realizado a partir da Equação 3.66.

- **Cálculo do termo**  $\frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{\mathbf{X}}}$

Os termos  $m_{44}$ ,  $m_{45}$ ,  $m_{46}$ ,  $m_{55}$  e  $m_{66}$  não dependem de  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  ou  $\dot{\gamma}$ , sendo descritos em função apenas de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Portanto, se comportam como constantes em relação a  $\dot{\mathbf{X}}$  e não é necessário o uso da regra da cadeia nas derivadas. Portanto:

$$\frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{p}_x} \\ \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{p}_y} \\ \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{p}_z} \\ \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{\alpha}} \\ \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{\beta}} \\ \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{\gamma}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\dot{p}_x m \\ 2\dot{p}_y m \\ 2\dot{p}_z m \\ 2\dot{\alpha}m_{44} + 2\dot{\beta}m_{45} + 2\dot{\gamma}m_{46} \\ 2\dot{\beta}m_{55} + 2\dot{\alpha}m_{45} \\ 2\dot{\gamma}m_{66} + 2\dot{\alpha}m_{46} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x m \\ \dot{p}_y m \\ \dot{p}_z m \\ \dot{\alpha}m_{44} + \dot{\beta}m_{45} + \dot{\gamma}m_{46} \\ \dot{\beta}m_{55} + \dot{\alpha}m_{45} \\ \dot{\gamma}m_{66} + \dot{\alpha}m_{46} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

- **Cálculo do termo**  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right)$

Para desenvolver este termo é necessário calcular a derivada temporal da expressão encontrada em Equação B.10. Uma vez que, nesta expressão, existem multiplicações de funções as quais dependem do tempo, é necessário o uso da regra da cadeia em alguns casos, originando a Equação B.11.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right) = \begin{bmatrix} \ddot{p}_x m \\ \ddot{p}_y m \\ \ddot{p}_z m \\ \ddot{\alpha}m_{44} + \dot{\alpha}\dot{m}_{44} + \ddot{\beta}m_{45} + \dot{\beta}\dot{m}_{45} + \dot{\gamma}m_{46} + \dot{\gamma}\dot{m}_{46} \\ \dot{\beta}m_{55} + \dot{\beta}\dot{m}_{55} + \ddot{\alpha}m_{45} + \dot{\alpha}\dot{m}_{45} \\ \dot{\gamma}m_{66} + \dot{\gamma}\dot{m}_{66} + \ddot{\alpha}m_{46} + \dot{\alpha}\dot{m}_{46} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

- Cálculo do termo  $\frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}}$

Realizando o cálculo das derivadas parciais da Equação B.9 em relação a  $\mathbf{X}$ , pode-se obter diretamente a Equação B.12.

$$\frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial p_x} \\ \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial p_y} \\ \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial p_z} \\ \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \beta} \\ \frac{\partial K(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}^2 \frac{\partial m_{44}}{\partial \alpha} + \dot{\beta}^2 \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha} + \dot{\gamma}^2 \frac{\partial m_{66}}{\partial \alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{\partial m_{45}}{\partial \alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \frac{\partial m_{46}}{\partial \alpha} \\ \dot{\alpha}^2 \frac{\partial m_{44}}{\partial \beta} + \dot{\beta}^2 \frac{\partial m_{55}}{\partial \beta} + \dot{\gamma}^2 \frac{\partial m_{66}}{\partial \beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{\partial m_{45}}{\partial \beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \frac{\partial m_{46}}{\partial \beta} \\ \dot{\alpha}^2 \frac{\partial m_{44}}{\partial \gamma} + \dot{\beta}^2 \frac{\partial m_{55}}{\partial \gamma} + \dot{\gamma}^2 \frac{\partial m_{66}}{\partial \gamma} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{\partial m_{45}}{\partial \gamma} + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \frac{\partial m_{46}}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

- Cálculo do termo  $\frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$

Sabendo que  $P = m g p_z$  (Equação 3.66), pode-se calcular  $\frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$  como segue:

$$\frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial p_x} \\ \frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial p_y} \\ \frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial p_z} \\ \frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial \beta} \\ \frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

Substituindo na Equação B.2 todos os termos calculados, obtém-se a Equação B.14.

$$\begin{bmatrix} \ddot{p}_x m \\ \ddot{p}_y m \\ \ddot{p}_z m \\ \ddot{\alpha} m_{44} + \dot{\alpha} \dot{m}_{44} + \dot{\beta} \dot{m}_{45} + \dot{\gamma} \dot{m}_{46} + \dot{\gamma} \dot{m}_{46} \\ \ddot{\beta} m_{55} + \dot{\beta} \dot{m}_{55} + \dot{\alpha} \dot{m}_{45} + \dot{\alpha} \dot{m}_{45} \\ \dot{\gamma} \dot{m}_{66} + \dot{\gamma} \dot{m}_{66} + \dot{\alpha} \dot{m}_{46} + \dot{\alpha} \dot{m}_{46} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}^2 \frac{\partial m_{44}}{\partial \alpha} + \dot{\beta}^2 \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha} + \dot{\gamma}^2 \frac{\partial m_{66}}{\partial \alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{\partial m_{45}}{\partial \alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \frac{\partial m_{46}}{\partial \alpha} \\ \dot{\alpha}^2 \frac{\partial m_{44}}{\partial \beta} + \dot{\beta}^2 \frac{\partial m_{55}}{\partial \beta} + \dot{\gamma}^2 \frac{\partial m_{66}}{\partial \beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{\partial m_{45}}{\partial \beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \frac{\partial m_{46}}{\partial \beta} \\ \dot{\alpha}^2 \frac{\partial m_{44}}{\partial \gamma} + \dot{\beta}^2 \frac{\partial m_{55}}{\partial \gamma} + \dot{\gamma}^2 \frac{\partial m_{66}}{\partial \gamma} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{\partial m_{45}}{\partial \gamma} + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \frac{\partial m_{46}}{\partial \gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T(\mathbf{X}) \boldsymbol{\tau} \quad (\text{B.14})$$

Reorganizando os termos de B.14 de forma a isolar no primeiro vetor da equação os termos dependentes da derivada de segunda ordem das variáveis do vetor de coordenadas generalizadas, obtém-se a Equação B.15.

$$\begin{bmatrix} \ddot{p}_x m \\ \ddot{p}_y m \\ \ddot{p}_z m \\ \ddot{m}_{44} + \ddot{\beta} m_{45} + \ddot{\gamma} m_{46} \\ \ddot{\beta} m_{55} + \ddot{\alpha} m_{45} \\ \ddot{\gamma} m_{66} + \ddot{\alpha} m_{46} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \dot{m}_{44} + \dot{\beta} \dot{m}_{45} + \dot{\gamma} \dot{m}_{46} - \frac{\dot{\alpha}^2 \partial m_{44}}{2 \partial \alpha} - \frac{\dot{\beta}^2 \partial m_{55}}{2 \partial \alpha} - \frac{\dot{\gamma}^2 \partial m_{66}}{2 \partial \alpha} - \dot{\alpha} \dot{\beta} \frac{\partial m_{45}}{\partial \alpha} - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \frac{\partial m_{46}}{\partial \alpha} \\ \dot{\beta} \dot{m}_{55} + \dot{\alpha} \dot{m}_{45} - \frac{\dot{\alpha}^2 \partial m_{44}}{2 \partial \beta} - \frac{\dot{\beta}^2 \partial m_{55}}{2 \partial \beta} - \frac{\dot{\gamma}^2 \partial m_{66}}{2 \partial \beta} - \dot{\alpha} \dot{\beta} \frac{\partial m_{45}}{\partial \beta} - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \frac{\partial m_{46}}{\partial \beta} \\ \dot{\gamma} \dot{m}_{66} + \dot{\alpha} \dot{m}_{46} - \frac{\dot{\alpha}^2 \partial m_{44}}{2 \partial \gamma} - \frac{\dot{\beta}^2 \partial m_{55}}{2 \partial \gamma} - \frac{\dot{\gamma}^2 \partial m_{66}}{2 \partial \gamma} - \dot{\alpha} \dot{\beta} \frac{\partial m_{45}}{\partial \gamma} - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \frac{\partial m_{46}}{\partial \gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau} \quad (\text{B.15})$$

É necessário agora calcular as derivadas no tempo e derivadas parciais dos termos  $m_{44}$ ,  $m_{45}$ ,  $m_{46}$ ,  $m_{55}$  e  $m_{66}$ . Para facilitar a manipulação das equações, serão definidas 6 expressões, denominadas  $K_1$  a  $K_6$ . Seguem os cálculos das derivadas temporais:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{44} &= I_x \frac{d}{dt} (c_\beta^2 c_\gamma^2) + I_y \frac{d}{dt} (c_\beta^2 s_\gamma^2) + I_z \frac{d}{dt} (s_\beta^2) \\ &= I_x \left( \left( \frac{d}{dt} c_\beta^2 \right) c_\gamma^2 + c_\beta^2 \left( \frac{d}{dt} c_\gamma^2 \right) \right) + I_y \left( \left( \frac{d}{dt} c_\beta^2 \right) s_\gamma^2 + c_\beta^2 \left( \frac{d}{dt} s_\gamma^2 \right) \right) + I_z \frac{d}{dt} (s_\beta^2) \\ &= I_x \left( (-2c_\beta s_\beta \dot{\beta}) c_\gamma^2 + c_\beta^2 (-2c_\gamma s_\gamma \dot{\gamma}) \right) + I_y \left( (-2c_\beta s_\beta \dot{\beta}) s_\gamma^2 + c_\beta^2 (2s_\gamma c_\gamma \dot{\gamma}) \right) \\ &\quad + I_z 2s_\beta c_\beta \dot{\beta} \\ &= 2(-c_\beta s_\beta (c_\gamma^2 I_x + s_\gamma^2 I_y - I_z) \dot{\beta} - c_\beta^2 c_\gamma s_\gamma (I_x - I_y) \dot{\gamma}) \\ &= 2(K_1 \dot{\beta} + K_2 \dot{\gamma}), \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

onde,

$$K_1 = -c_\beta s_\beta (c_\gamma^2 I_x + s_\gamma^2 I_y - I_z), \quad (\text{B.17})$$

$$K_2 = -c_\beta^2 c_\gamma s_\gamma (I_x - I_y); \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_{45} &= \frac{d}{dt} ((I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma) = (I_x - I_y) \frac{d}{dt} (c_\beta c_\gamma s_\gamma) \\ &= (I_x - I_y) \left( \frac{d}{dt} (c_\beta) c_\gamma s_\gamma + c_\beta \frac{d}{dt} (c_\gamma) s_\gamma + c_\beta c_\gamma \frac{d}{dt} (s_\gamma) \right) \\ &= (I_x - I_y) \left( -s_\beta \dot{\beta} c_\gamma s_\gamma + c_\beta (-s_\gamma \dot{\gamma}) s_\gamma + c_\beta c_\gamma (c_\gamma \dot{\gamma}) \right) \\ &= -c_\gamma s_\gamma s_\beta (I_x - I_y) \dot{\beta} + c_\beta (c_\gamma - s_\gamma) (c_\gamma + s_\gamma) (I_x - I_y) \dot{\gamma} \\ &= K_5 \dot{\beta} + 2K_3 \dot{\gamma}, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

onde,

$$K_5 = -c_\gamma s_\gamma s_\beta (I_x - I_y), \quad (\text{B.20})$$

$$K_3 = \frac{1}{2} c_\beta (c_\gamma - s_\gamma) (c_\gamma + s_\gamma) (I_x - I_y); \quad (\text{B.21})$$

$$\dot{m}_{46} = \frac{d}{dt} (I_z s_\beta) = I_z c_\beta \dot{\beta} = 2K_6 \dot{\beta}, \quad (\text{B.22})$$

onde,

$$K_6 = \frac{1}{2} I_z c_\beta; \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_{55} &= \frac{d}{dt} (I_x s_\gamma^2 + I_y c_\gamma^2) = I_x \frac{d}{dt} (s_\gamma^2) + I_y \frac{d}{dt} (c_\gamma^2) = I_x (2s_\gamma c_\gamma \dot{\gamma}) + I_y (2c_\gamma (-s_\gamma) \dot{\gamma}) \\ &= I_x 2s_\gamma c_\gamma \dot{\gamma} - I_y 2c_\gamma s_\gamma \dot{\gamma} = 2c_\gamma s_\gamma (I_x - I_y) \dot{\gamma} = 2K_4 \dot{\gamma}, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

onde,

$$K_4 = c_\gamma s_\gamma (I_x - I_y); \quad (\text{B.25})$$

$$\dot{m}_{66} = \frac{d}{dt} I_z = 0. \quad (\text{B.26})$$

As derivadas parciais em relação a  $\alpha$  podem ser expressas como:

$$\frac{\partial m_{44}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (I_x c_\beta^2 c_\gamma^2 + I_y c_\beta^2 s_\gamma^2 + I_z s_\beta^2) = 0, \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\partial m_{45}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} ((I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma) = 0, \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{\partial m_{46}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (I_z s_\beta) = 0, \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (I_x s_\gamma^2 + I_y c_\gamma^2) = 0, \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\partial m_{66}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} I_z = 0. \quad (\text{B.31})$$

E, as derivadas parciais em relação a  $\beta$ , como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{44}}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} (I_x c_\beta^2 c_\gamma^2 + I_y c_\beta^2 s_\gamma^2 + I_z s_\beta^2) = I_x c_\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \beta} (c_\beta^2) + I_y s_\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \beta} (c_\beta^2) + I_z \frac{\partial}{\partial \beta} (s_\beta^2) \\ &= I_x c_\gamma^2 2c_\beta (-s_\beta) + I_y s_\gamma^2 2c_\beta (-s_\beta) + I_z 2s_\beta c_\beta = -2c_\beta s_\beta (c_\gamma^2 I_x + s_\gamma^2 I_y - I_z) = 2K_1, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{\partial m_{45}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} ((I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma) = (I_x - I_y) c_\gamma s_\gamma \frac{\partial}{\partial \beta} (c_\beta) = -c_\gamma s_\gamma s_\beta (I_x - I_y) = K_5, \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{\partial m_{46}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} (I_z s_\beta) = 2K_6, \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{\partial m_{55}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} (I_x s_\gamma^2 + I_y c_\gamma^2) = 0, \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial m_{66}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} I_z = 0. \quad (\text{B.36})$$

Finalmente, as derivadas parciais em relação a  $\gamma$  são expressas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{44}}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} (I_x c_\beta^2 c_\gamma^2 + I_y c_\beta^2 s_\gamma^2 + I_z s_\beta^2) = I_x c_\beta^2 \frac{\partial}{\partial \gamma} (c_\gamma^2) + I_y c_\beta^2 \frac{\partial}{\partial \gamma} (s_\gamma^2) + 0 \\ &= I_x c_\beta^2 2c_\gamma (-s_\gamma) + I_y c_\beta^2 2s_\gamma c_\gamma = -2c_\beta^2 c_\gamma s_\gamma (I_x - I_y) = 2K_2, \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{45}}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} ((I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma) = (I_x - I_y) c_\beta \frac{\partial}{\partial \gamma} (c_\gamma s_\gamma) = (I_x - I_y) c_\beta \left( \frac{\partial}{\partial \gamma} (c_\gamma) s_\gamma + c_\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} (s_\gamma) \right) \\ &= (I_x - I_y) c_\beta (-s_\gamma s_\gamma + c_\gamma c_\gamma) = c_\beta (c_\gamma - s_\gamma)(c_\gamma + s_\gamma)(I_x - I_y) = 2K_3, \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$$\frac{\partial m_{46}}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} (I_z s_\beta) = 0, \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{55}}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} (I_x s_\gamma^2 + I_y c_\gamma^2) = I_x \frac{\partial}{\partial \gamma} (s_\gamma^2) + I_y \frac{\partial}{\partial \gamma} (c_\gamma^2) = I_x 2s_\gamma c_\gamma + I_y 2c_\gamma (-s_\gamma) = 2c_\gamma s_\gamma (I_x - I_y) \\ &= 2K_4, \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\partial m_{66}}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} (I_z) = 0. \quad (\text{B.41})$$

Substituindo as equações B.16 a B.41 em B.15, é possível reorganizar os termos na forma  $\mathbf{M}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{X})\boldsymbol{\tau}$ , resultando na Equação B.42.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \ddot{p}_x m \\ \ddot{p}_y m \\ \ddot{p}_z m \\ (I_x c_\beta^2 c_\gamma^2 + I_y c_\beta^2 s_\gamma^2 + I_z s_\beta^2)\ddot{\alpha} + (I_x - I_y)c_\beta c_\gamma s_\gamma \ddot{\beta} + I_z s_\beta \ddot{\gamma} \\ (I_x - I_y)c_\beta c_\gamma s_\gamma \ddot{\alpha} + (I_x s_\gamma^2 + I_y c_\gamma^2)\ddot{\beta} \\ I_z s_\beta \ddot{\alpha} + I_z \ddot{\gamma} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (K_1 \beta + K_2 \gamma)\dot{\alpha} + (K_1 \dot{\alpha} + K_5 \beta + K_3 \dot{\gamma})\dot{\beta} + (K_2 \dot{\alpha} + K_3 \dot{\beta})\dot{\gamma} + 2K_6 \beta \dot{\gamma} \\ (-K_1 \dot{\alpha} + K_3 \dot{\gamma})\dot{\alpha} + (K_4 \dot{\gamma})\dot{\beta} + (K_3 \dot{\alpha} + K_4 \dot{\beta})\dot{\gamma} - 2K_6 \dot{\alpha} \dot{\gamma} \\ (-K_2 \dot{\alpha} - K_3 \dot{\beta})\dot{\alpha} + (-K_3 \dot{\alpha} - K_4 \dot{\beta})\dot{\beta} + 2K_6 \dot{\alpha} \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Na Equação B.42 percebe-se que o primeiro vetor da soma representa o termo  $\mathbf{M}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}}$ , o segundo vetor representa  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}}$ , e o terceiro vetor representa  $\mathbf{G}(\mathbf{X})$ . No caso do primeiro vetor, nenhum dos seus termos é multiplicado por mais do que uma variável do vetor de coordenadas generalizadas  $\ddot{\mathbf{X}}$ , portanto só existe uma única fatoração possível da matriz  $\mathbf{M}(\mathbf{X})$  que torne  $\mathbf{M}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}}$  compatível com esse vetor. No caso do segundo vetor da soma, existem termos que são multiplicados por mais do que uma variável do vetor de coordenadas generalizadas  $\dot{\mathbf{X}}$ , logo, não existe uma única fatoração possível para a matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  e será necessário calcular alguns termos dessa matriz através dos símbolos de Christoffel de primeiro tipo. Já, o terceiro vetor da soma não exige fatoração, pois o mesmo já é o próprio vetor  $\mathbf{G}(\mathbf{X})$ .

Analisando a Equação B.42, pode-se realizar a fatoração do primeiro vetor na forma de uma matriz multiplicada pelo vetor  $\ddot{\mathbf{X}}$  conforme a equação

$$\mathbf{M}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x c_\beta^2 c_\gamma^2 + I_y c_\beta^2 s_\gamma^2 + I_z s_\beta^2 & (I_x - I_y)c_\beta c_\gamma s_\gamma & I_z s_\beta \\ 0 & 0 & 0 & (I_x - I_y)c_\beta c_\gamma s_\gamma & I_x s_\gamma^2 + I_y c_\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z s_\beta & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \\ \ddot{p}_z \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.43})$$

Logo, a matriz  $\mathbf{M}(\mathbf{X})$  é determinada por:

$$\mathbf{M}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x c_\beta^2 c_\gamma^2 + I_y c_\beta^2 s_\gamma^2 + I_z s_\beta^2 & (I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma & I_z s_\beta \\ 0 & 0 & 0 & (I_x - I_y) c_\beta c_\gamma s_\gamma & I_x s_\gamma^2 + I_y c_\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z s_\beta & 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad (\text{B.44})$$

ou,

$$\mathbf{M}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ 0 & 0 & 0 & m_{45} & m_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{46} & 0 & m_{66} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.45})$$

No caso do segundo vetor da Equação B.42, percebe-se que nenhum termo depende de  $\dot{p}_x$ ,  $\dot{p}_y$  ou  $\dot{p}_z$ , além disso, na última linha, nenhum termo depende de  $\dot{\gamma}$ . Logo, pode-se concluir que a matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  possui vários termos nulos e alguns ainda indefinidos, nomeados  $c_{ij}$ , sendo  $i$  a linha e  $j$  a coluna em que o termo se encontra, como pode ser observado na Equação B.46.

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (K_1\beta + K_2\dot{\gamma})\dot{\alpha} + (K_1\dot{\alpha} + K_5\beta + K_3\dot{\gamma})\dot{\beta} + (K_2\dot{\alpha} + K_3\beta)\dot{\gamma} + 2K_6\beta\dot{\gamma} \\ (-K_1\dot{\alpha} + K_3\dot{\gamma})\dot{\alpha} + (K_4\dot{\gamma})\dot{\beta} + (K_3\dot{\alpha} + K_4\beta)\dot{\gamma} - 2K_6\dot{\alpha}\dot{\gamma} \\ (-K_2\dot{\alpha} - K_3\beta)\dot{\alpha} + (-K_3\dot{\alpha} - K_4\beta)\dot{\beta} + 2K_6\dot{\alpha}\dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & c_{64} & c_{65} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{B.46})$$

Os termos  $c_{ij}$  da matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  serão calculados a seguir através dos símbolos de Christoffel do primeiro tipo, definidos por Siciliano et al., 2009, como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k, \quad (\text{B.47})$$

onde,

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right). \quad (\text{B.48})$$

No caso do manipulador em questão, o vetor  $[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T$  de coordenadas generalizadas é substituído pelo vetor  $[\dot{p}_x \ \dot{p}_y \ \dot{p}_z \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]^T$ . Os termos  $b_{ij}$  a que Siciliano et al., 2009, se referem, são os termos  $m_{ij}$  da matriz de massa do manipulador,



Substituindo os resultados de B.49 a B.56 em B.46, pode-se finalmente obter a matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ , como sendo:

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_1\dot{\beta} + K_2\dot{\gamma} & K_1\dot{\alpha} + K_5\dot{\beta} + K_3\dot{\gamma} + K_6\dot{\gamma} & K_2\dot{\alpha} + K_3\dot{\beta} + K_6\dot{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & -K_1\dot{\alpha} + K_3\dot{\gamma} - K_6\dot{\gamma} & K_4\dot{\gamma} & K_3\dot{\alpha} + K_4\dot{\beta} - K_6\dot{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & -K_2\dot{\alpha} - K_3\dot{\beta} + K_6\dot{\beta} & -K_3\dot{\alpha} - K_4\dot{\beta} + K_6\dot{\alpha} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.57})$$

## APÊNDICE C – Prova de anti-simetria da matriz $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ .

Para verificar a anti-simetria da matriz  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  é necessário antes realizar o cálculo da matriz  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X})$ . Este cálculo pode ser feito derivando a Equação B.44 em relação ao tempo, e substituindo as derivadas dos termos da matriz pelas expressões obtidas em B.16, B.19, B.22, B.24 e B.26, conforme demonstrado em C.1.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M}(\mathbf{X})) = \begin{bmatrix} \dot{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{m}_{44} & \dot{m}_{45} & \dot{m}_{46} \\ 0 & 0 & 0 & \dot{m}_{45} & \dot{m}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{m}_{46} & 0 & \dot{m}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(K_1\dot{\beta} + K_2\dot{\gamma}) & K_5\dot{\beta} + 2K_3\dot{\gamma} & 2K_6\dot{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & K_5\dot{\beta} + 2K_3\dot{\gamma} & 2K_4\dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2K_6\dot{\beta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Uma vez conhecida a matriz  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X})$ , pode-se montar e calcular o resultado da expressão  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  como segue:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(K_1\dot{\beta} + K_2\dot{\gamma}) & K_5\dot{\beta} + 2K_3\dot{\gamma} & 2K_6\dot{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & K_5\dot{\beta} + 2K_3\dot{\gamma} & 2K_4\dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2K_6\dot{\beta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_1\dot{\alpha} + K_5\dot{\beta} + K_3\dot{\gamma} + K_6\dot{\gamma} & K_2\dot{\alpha} + K_3\dot{\beta} + K_6\dot{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & -K_1\dot{\alpha} + K_3\dot{\gamma} - K_6\dot{\gamma} & K_4\dot{\gamma} & K_3\dot{\alpha} + K_4\dot{\beta} - K_6\dot{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & -K_2\dot{\alpha} - K_3\dot{\beta} + K_6\dot{\beta} & -K_3\dot{\alpha} - K_4\dot{\beta} + K_6\dot{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(K_1\dot{\beta} + K_2\dot{\gamma}) - 2(K_1\dot{\beta} + K_2\dot{\gamma}) & K_5\dot{\beta} + 2K_3\dot{\gamma} - 2(K_1\dot{\alpha} + K_5\dot{\beta} + K_3\dot{\gamma} + K_6\dot{\gamma}) & 2K_6\dot{\beta} - 2(K_2\dot{\alpha} + K_3\dot{\beta} + K_6\dot{\beta}) \\ 0 & 0 & 0 & K_5\dot{\beta} + 2K_3\dot{\gamma} - 2(-K_1\dot{\alpha} + K_3\dot{\gamma} - K_6\dot{\gamma}) & 2K_4\dot{\gamma} - 2(K_4\dot{\gamma}) & 0 - 2(K_3\dot{\alpha} + K_4\dot{\beta} - K_6\dot{\alpha}) \\ 0 & 0 & 0 & 2K_6\dot{\beta} - 2(-K_2\dot{\alpha} - K_3\dot{\beta} + K_6\dot{\beta}) & 0 - 2(-K_3\dot{\alpha} - K_4\dot{\beta} + K_6\dot{\alpha}) & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(K_5\dot{\beta} + 2K_1\dot{\alpha} + 2K_6\dot{\gamma}) & -2(K_2\dot{\alpha} + K_3\dot{\beta}) \\ 0 & 0 & 0 & K_5\dot{\beta} + 2K_1\dot{\alpha} + 2K_6\dot{\gamma} & 0 & -2(K_3\dot{\alpha} + K_4\dot{\beta} - K_6\dot{\alpha}) \\ 0 & 0 & 0 & 2(K_2\dot{\alpha} + K_3\dot{\beta}) & 2(K_3\dot{\alpha} + K_4\dot{\beta} - K_6\dot{\alpha}) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

O resultado obtido ao final de C.2 confirma a propriedade de anti-simetria da matriz  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ , uma vez que os seus elementos correspondem à descrição de matriz anti-simétrica da Equação 3.21.

## APÊNDICE D – Desenvolvimento da derivada da Matriz Jacobiana $J(\mathbf{X})$

Neste apêndice é apresentado o desenvolvimento matemático necessário para obtenção da matriz que representa a derivada temporal da Matriz Jacobiana. Recapitulando a descrição da Matriz Jacobiana apresentada na Seção 3.5.2, define-se a Matriz Jacobiana do Manipulador Plataforma de Stewart da seguinte forma:

$$J(\mathbf{X}) = J_1(\mathbf{X}) J_2(\mathbf{X}). \quad (\text{D.1})$$

As expressões para as matrizes  $J_1(\mathbf{X})$  e  $J_2(\mathbf{X})$  já foram descritas na Seção 3.5.2. Derivando a Equação D.1, obtém-se:

$$\dot{J}(\mathbf{X}) = \dot{J}_1(\mathbf{X}) J_2(\mathbf{X}) + J_1(\mathbf{X}) \dot{J}_2(\mathbf{X}). \quad (\text{D.2})$$

Iniciando o desenvolvimento pelo cálculo de  $\dot{J}_1(\mathbf{X})$ , pode-se derivar os dois lados da Equação 3.34, obtendo-se a seguinte expressão:

$$\dot{J}_1(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \dot{\mathbf{u}}_2 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \dot{\mathbf{u}}_3 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \dot{\mathbf{u}}_4 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \dot{\mathbf{u}}_5 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & \dot{\mathbf{u}}_6 \end{bmatrix}_{(6 \times 18)}, \quad (\text{D.3})$$

onde,  $\dot{\mathbf{u}}_i$ , sendo  $i = 1 \dots 6$ , pode ser calculado derivando a Equação 3.31 e substituindo o termo  $\|\mathbf{S}_i\|$  por  $L_i$ , em função da identidade apresentada na Equação 3.13. A sequência de operações a seguir apresenta uma forma de calcular esta derivada:

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{S}_i}{L_i} \right)^T = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{S}_i \frac{1}{L_i} \right)^T = \left( \dot{\mathbf{S}}_i \frac{1}{L_i} + \mathbf{S}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{L_i} \right) \right)^T. \quad (\text{D.4})$$

Para calcular o termo  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{L_i} \right)$ , pode-se utilizar novamente a identidade apresentada na Equação 3.13 para substituir o termo  $L_i$  por  $\sqrt{\mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{S}_i}$  e desenvolver a expressão como segue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{L_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{S}_i}} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{S}_i)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{S}_i)^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dt} (\mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{S}_i) \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{S}_i)^{-\frac{3}{2}} (\dot{\mathbf{S}}_i^T \cdot \mathbf{S}_i + \mathbf{S}_i^T \cdot \dot{\mathbf{S}}_i). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Sabendo que o valor escalar resultante da multiplicação  $\dot{\mathbf{S}}_i^T \cdot \mathbf{S}_i$  é igual ao valor da multiplicação  $\mathbf{S}_i^T \cdot \dot{\mathbf{S}}_i$  e, sabendo que  $(\mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{S}_i)^{\frac{1}{2}}$  pode ser substituído por  $L_i$  devido à identidade apresentada na Equação 3.13, pode-se reorganizar a Equação D.5 da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{L_i} \right) = -\frac{1}{2} L_i^{-3} (2\mathbf{S}_i^T \cdot \dot{\mathbf{S}}_i) = -L_i^{-3} (\mathbf{S}_i^T \cdot \dot{\mathbf{S}}_i). \quad (\text{D.6})$$

Logo, pode-se desenvolver a Equação D.4, substituindo nela a Equação D.6, resultando em:

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \left( \dot{\mathbf{S}}_i \frac{1}{L_i} - \mathbf{S}_i L_i^{-3} (\mathbf{S}_i^T \cdot \dot{\mathbf{S}}_i) \right)^T, \quad (\text{D.7})$$

definindo assim a expressão completa para a Matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_1(\mathbf{X})$ , apresentada na Equação D.3.

Para calcular  $\mathbf{J}_2(\mathbf{X})$ , pode-se derivar os dois lados da Equação 3.29, obtendo-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(\mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_1^t) & \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_1^t) & \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_1^t) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(\mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_2^t) & \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_2^t) & \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_2^t) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(\mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_3^t) & \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_3^t) & \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_3^t) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(\mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_4^t) & \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_4^t) & \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_4^t) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(\mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_5^t) & \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_5^t) & \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_5^t) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(\mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_6^t) & \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{S}(j)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_6^t) & \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_6^t) \end{bmatrix}_{(18 \times 6)} \quad (\text{D.8})$$

Para calcular a expressão da Equação D.8, deve-se calcular as derivadas presentes na matriz. Iniciando pelos termos da quarta coluna, pode-se desenvolver as expressões da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_i^t) \\ &= \mathbf{S}(i) \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_x(\alpha))\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_i^t \\ &+ \mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha) \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_y(\beta))\mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{T}_i^t \\ &+ \mathbf{S}(i)\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta) \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_z(\gamma))\mathbf{T}_i^t \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

onde,  $\mathbf{T}_i^t = \mathbf{T}_1^t \dots \mathbf{T}_6^t$ , e as derivadas das matrizes de rotação já foram apresentadas pelas equações 3.22, 3.23 e 3.24. De forma análoga, pode-se determinar expressões para os termos da quinta e sexta coluna da matriz, como segue:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_x(\alpha) \mathbf{S}(\mathbf{j}) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\gamma) \mathbf{T}_i^t) \\
&= \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_x(\alpha)) \mathbf{S}(\mathbf{j}) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\gamma) \mathbf{T}_i^t \\
&+ \mathbf{R}_x(\alpha) \mathbf{S}(\mathbf{j}) \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_y(\beta)) \mathbf{R}_z(\gamma) \mathbf{T}_i^t \\
&+ \mathbf{R}_x(\alpha) \mathbf{S}(\mathbf{j}) \mathbf{R}_y(\beta) \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_z(\gamma)) \mathbf{T}_i^t
\end{aligned} \tag{D.10}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_x(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{S}(\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(\gamma) \mathbf{T}_i^t) \\
&= \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_x(\alpha)) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{S}(\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(\gamma) \mathbf{T}_i^t \\
&+ \mathbf{R}_x(\alpha) \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_y(\beta)) \mathbf{S}(\mathbf{k}) \mathbf{R}_z(\gamma) \mathbf{T}_i^t \\
&+ \mathbf{R}_x(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{S}(\mathbf{k}) \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_z(\gamma)) \mathbf{T}_i^t.
\end{aligned} \tag{D.11}$$

Substituindo D.3 e D.8 em D.2, juntamente com os demais termos calculados na Seção 3.5.2, pode-se calcular a derivada da Matriz Jacobiana  $\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{X})$ .

## APÊNDICE E – Comprovação de anti-simetria da matriz $\dot{\bar{M}}(\mathbf{X}) - 2\bar{\mathcal{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$

Neste apêndice é apresentado o desenvolvimento matemático necessário para provar a anti-simetria da matriz  $\dot{\bar{M}}(\mathbf{X}) - 2\bar{\mathcal{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ . O método utilizado foi inicialmente proposto por Lewis et al., 2004, e reproduzido por García, 2015, o qual se vale da seguinte identidade:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{J}) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-1})\mathbf{J} + \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}} &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-1}) &= -\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1}.\end{aligned}\tag{E.1}$$

Usando a identidade da Equação E.1 e as expressões de  $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X})$  e  $\bar{\mathcal{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ , equações 5.11 e 5.12, respectivamente, pode-se desenvolver  $\dot{\bar{M}}(\mathbf{X}) - 2\bar{\mathcal{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  como sendo:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{M}}(\mathbf{X}) - 2\bar{\mathcal{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{M}_p) - 2\mathbf{J}^{-T}(\mathcal{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - \mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})\mathbf{J}^{-1} \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-T})\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}(\mathbf{X})\frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-1}) - 2\mathbf{J}^{-T}(\mathcal{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - \mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})\mathbf{J}^{-1} \\ &= -\mathbf{J}^{-T}\dot{\mathbf{J}}^T\mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1} - \mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1} - 2\mathbf{J}^{-T}(\mathcal{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - \mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})\mathbf{J}^{-1} \quad (\text{E.2}) \\ &= \mathbf{J}^{-T}(-\dot{\mathbf{J}}^T\mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}(\mathbf{X}) + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - \mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}} - 2\mathcal{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + 2\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})\mathbf{J}^{-1} \\ &= \mathbf{J}^{-T}(\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathcal{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - \dot{\mathbf{J}}^T\mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}(\mathbf{X}) + \mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})\mathbf{J}^{-1} \\ &= \mathbf{J}^{-T}(\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathcal{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - (\mathbf{M}(\mathbf{X})^T\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})^T + \mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})\mathbf{J}^{-1}.\end{aligned}$$

A propriedade de anti-simetria da matriz  $\dot{\bar{M}}(\mathbf{X}) - 2\bar{\mathcal{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  pode ser comprovada verificando se a expressão

$$\boldsymbol{\omega}^T \left( \dot{\bar{M}}(\mathbf{X}) - 2\bar{\mathcal{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \right) \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{E.3}$$

é verdadeira para um vetor qualquer  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^{3x1}$ . Sabendo que  $\mathbf{M}(\mathbf{X})^T = \mathbf{M}(\mathbf{X})$ , uma vez que  $\mathbf{M}(\mathbf{X})$  é simétrica, pode-se utilizar o resultado obtido na Equação E.2 para desenvolver a Equação E.3 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^T (\dot{\bar{M}}(\mathbf{X}) - 2\bar{\mathcal{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})) \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}^{-T} (\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathcal{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - (\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})^T + \mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}) \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\omega} \\ &= (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})^T (\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathcal{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}} - (\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})^T) (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}) \\ &= (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})^T (\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathcal{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})) (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})^T (\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}) (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}) - (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})^T (\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})^T (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}) \quad (\text{E.4}) \\ &= (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})^T (\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathcal{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})) (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}) \\ &\quad + \left( (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})^T ((\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})) - ((\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}})^T(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}))^T (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}) \right).\end{aligned}$$

Analisando a Equação E.4, pode-se concluir que, uma vez que a matriz  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  é anti-simétrica (comprovado no Apêndice C), a expressão  $(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})^T (\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})) (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})$  tem valor nulo. A expressão  $(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})^T ((\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{j}})(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})) - ((\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{j}})(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}))^T (\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})$  também tem valor nulo, uma vez que o vetor  $\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}$  transposto multiplicado pelo vetor  $(\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{j}})(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})$  resulta no mesmo valor que o vetor  $(\mathbf{M}(\mathbf{X})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{j}})(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega})$  transposto multiplicado pelo vetor  $\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}$ . Logo, a Equação E.3 é verdadeira, comprovando a anti-simetria da matriz  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) - 2\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ .

## APÊNDICE F – Programação dos modelos em diagrama de blocos

Neste apêndice, as figuras F.1 a F.12 apresentam os principais diagramas de blocos utilizados nas simulações do MPS com controle por torque Calculado. Estes diagramas foram desenvolvidos no software MATLAB/Simulink, e fazem parte do código que foi utilizado para as simulações e experimentos, juntamente com outros scripts e diagramas de blocos complementares.

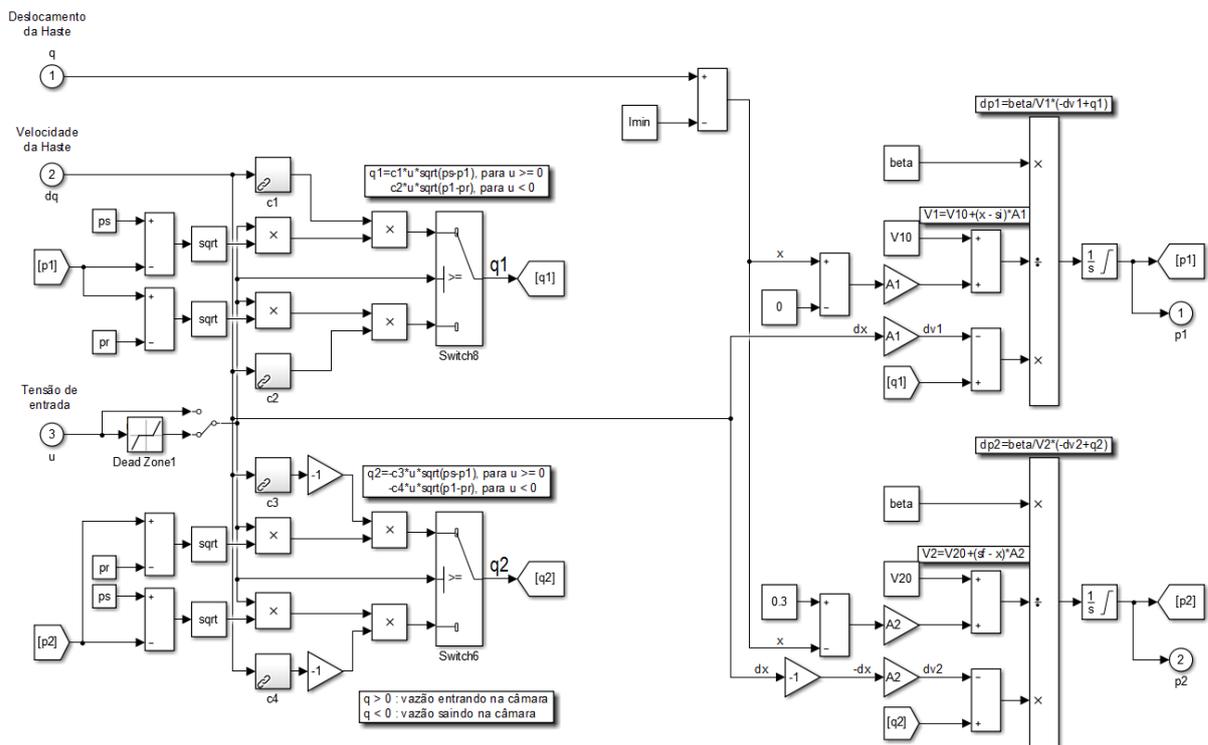


Figura F.1 – Diagrama de blocos referente à dinâmica direta do atuador hidráulico.

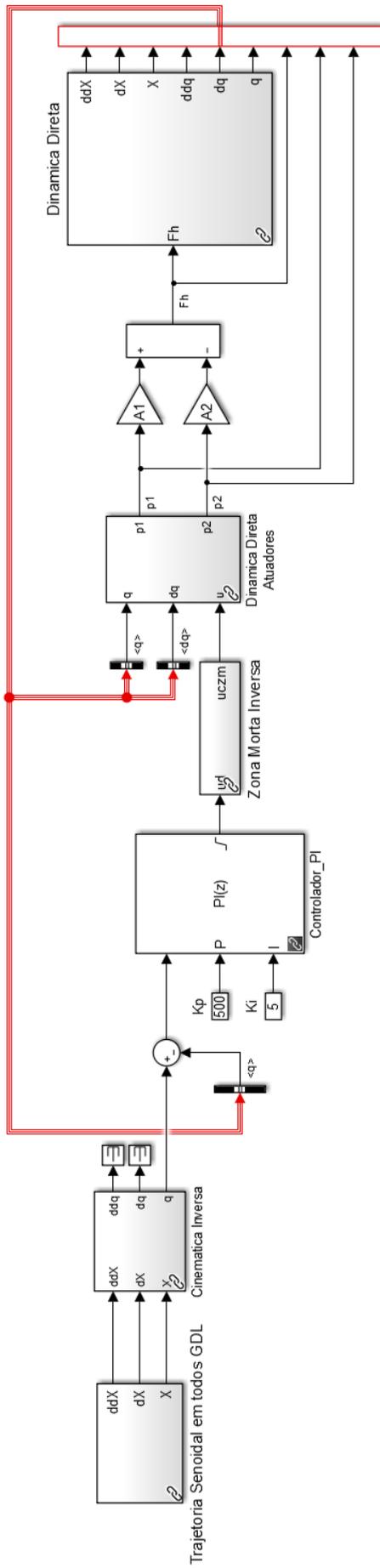


Figura F.2 – Diagrama de blocos referente à simulação do controle PI.

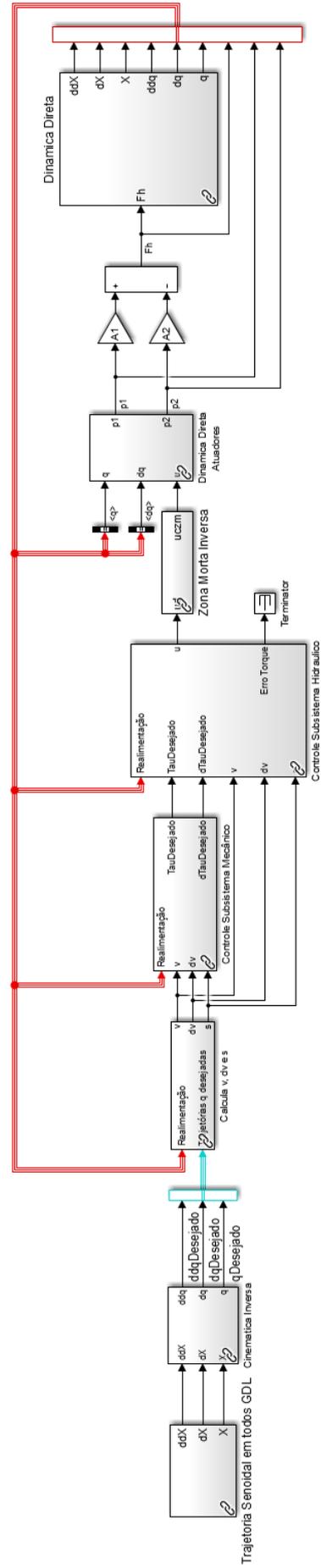


Figura F.3 – Diagrama de blocos referente à simulação do controle por Torque Calculado.

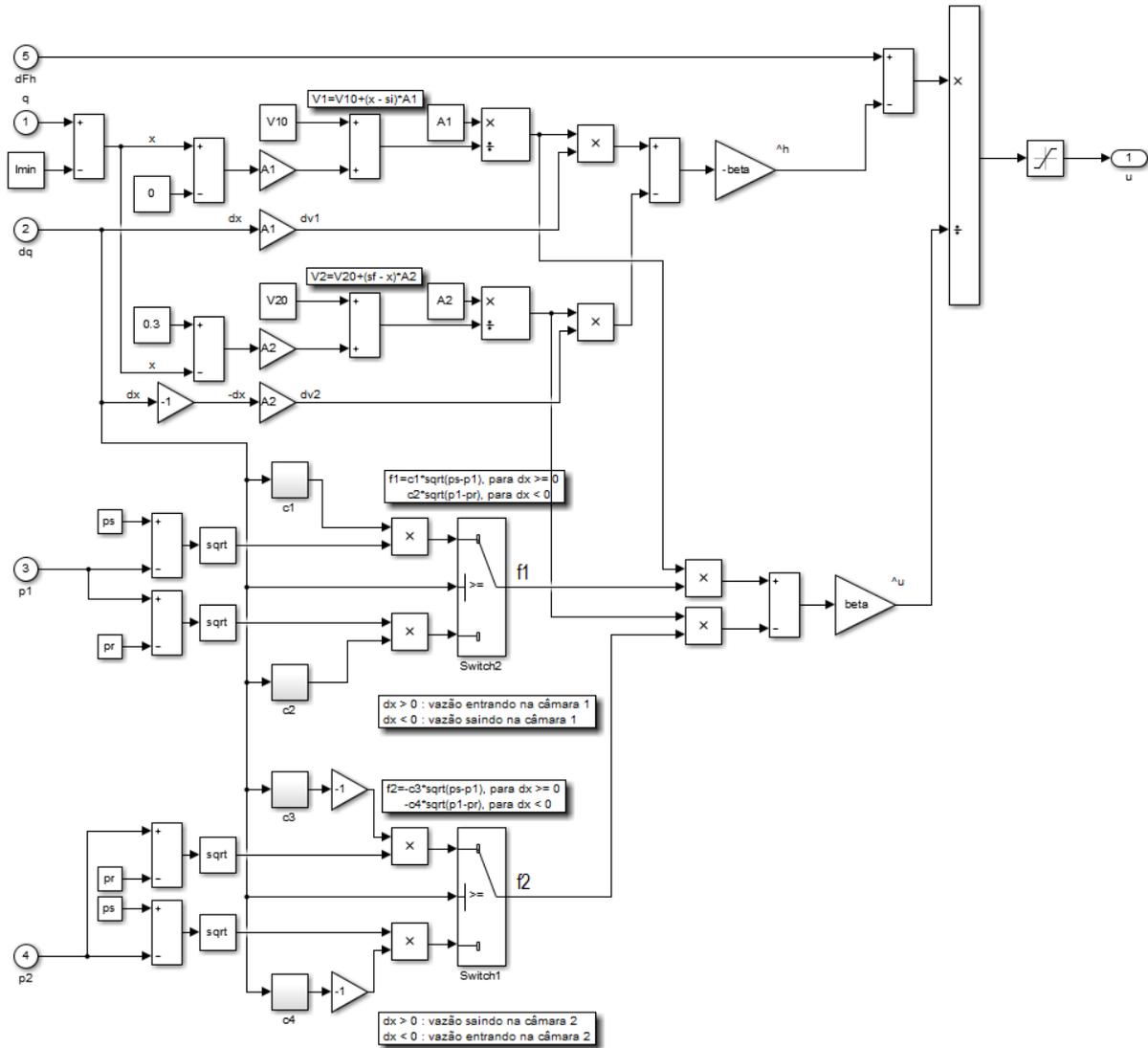
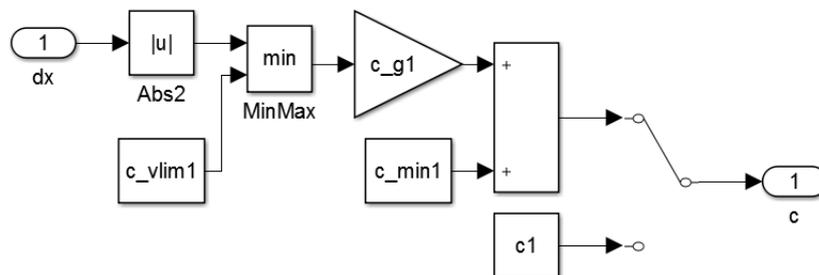


Figura F.4 – Diagrama de blocos referente à dinâmica inversa do atuador hidráulico.



A chave seletora seleciona entre coeficiente de vazão constante ou variável.

Figura F.5 – Diagrama de blocos referente aos coeficientes de vazão das válvulas hidráulicas.

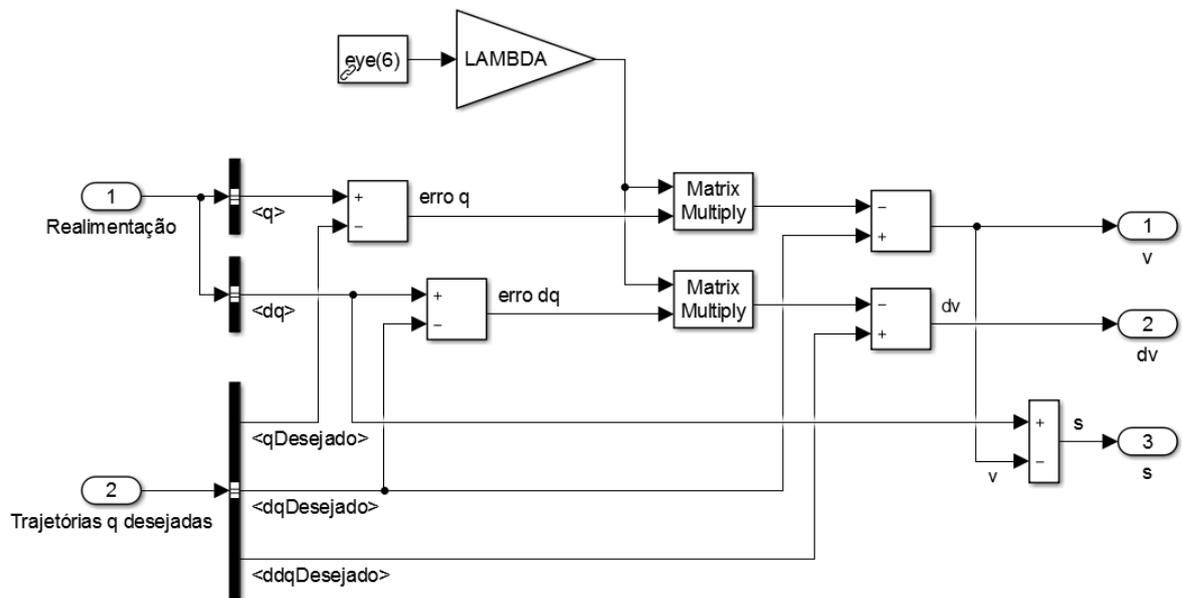


Figura F.6 – Diagrama de blocos referente ao cálculo das variáveis do controle por torque calculado  $v$ ,  $dv$  e  $s$ .

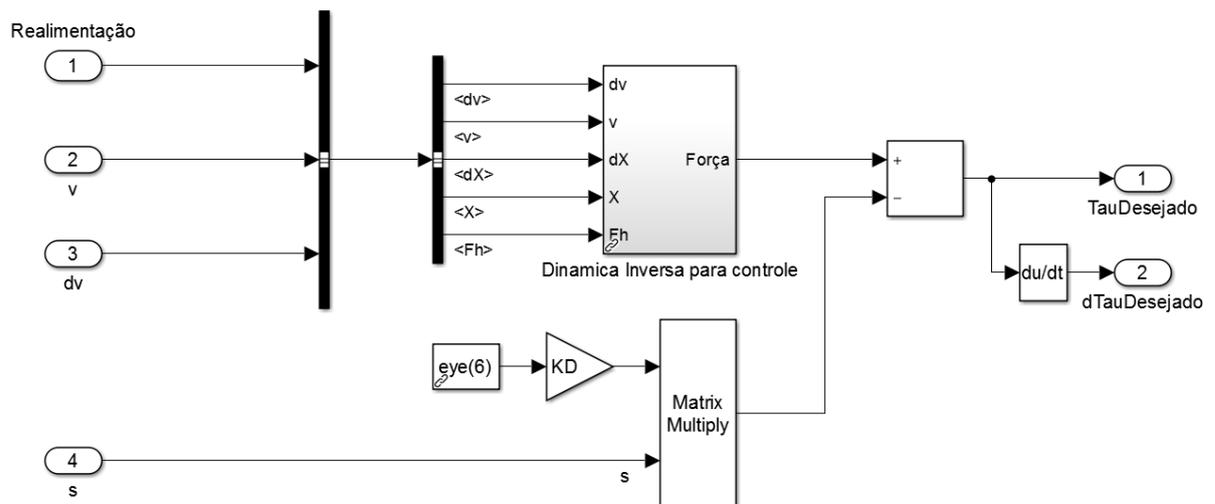


Figura F.7 – Diagrama de blocos referente ao controle do subsistema mecânico.

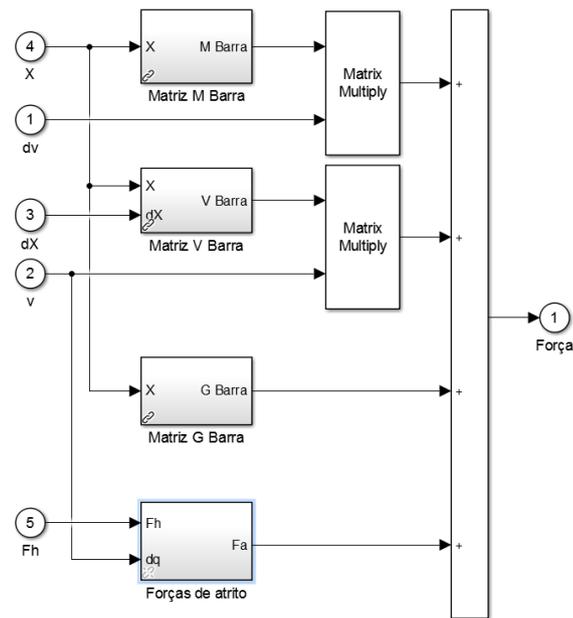


Figura F.8 – Diagrama de blocos referente dinâmica inversa mecânica para controle.

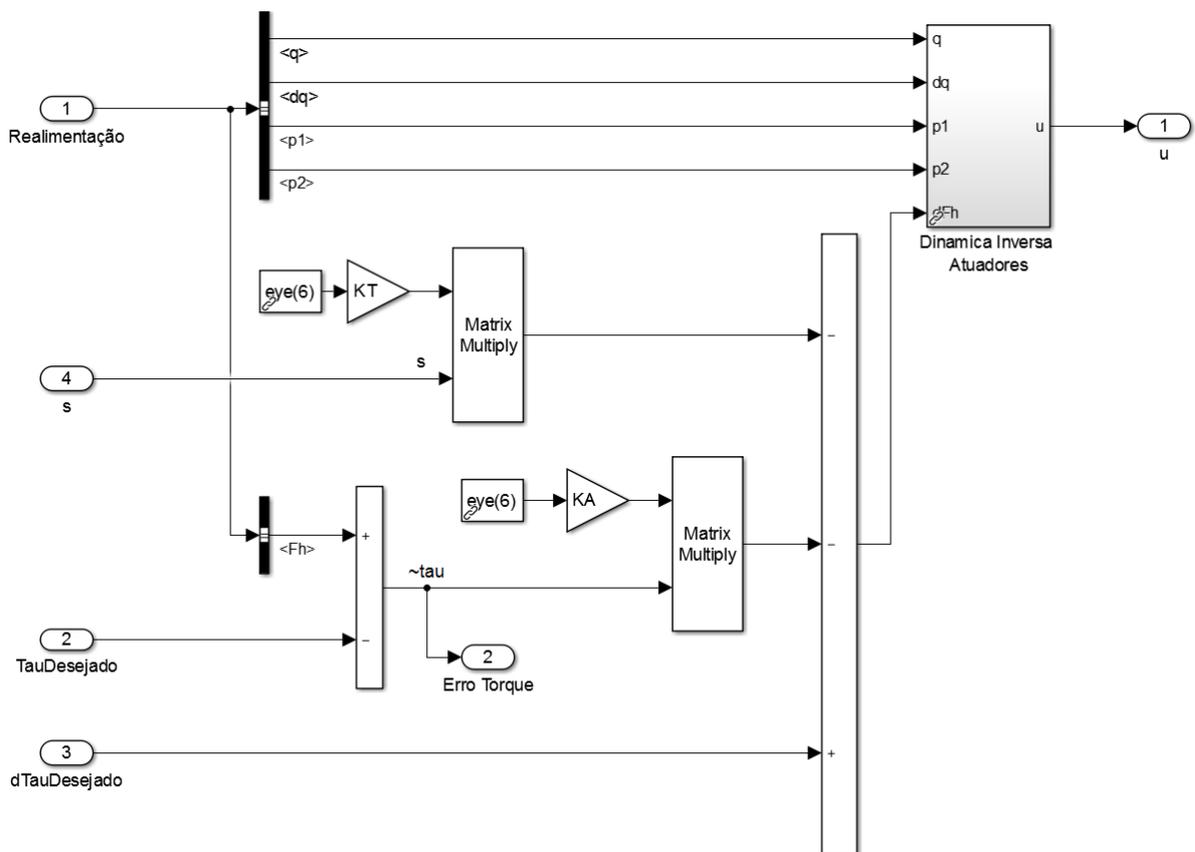


Figura F.9 – Diagrama de blocos referente ao controle do subsistema hidráulico.

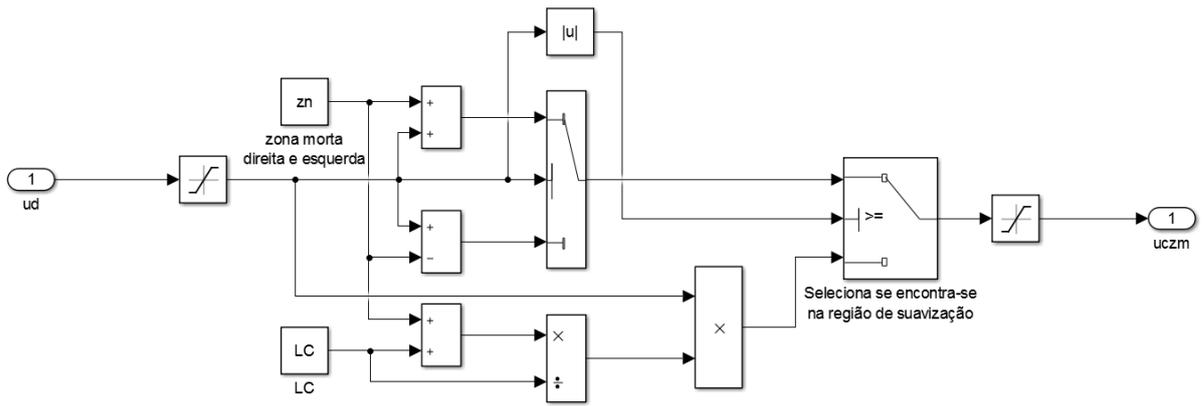


Figura F.10 – Diagrama de blocos referente à compensação de zona morta.

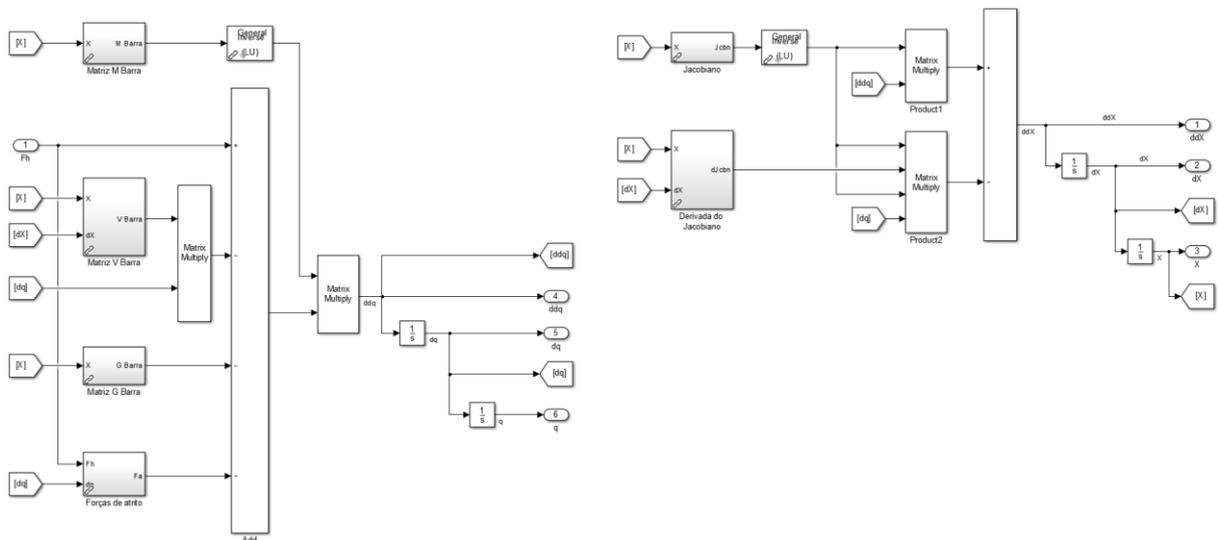


Figura F.11 – Diagrama de blocos referente à dinâmica direta do MPS.

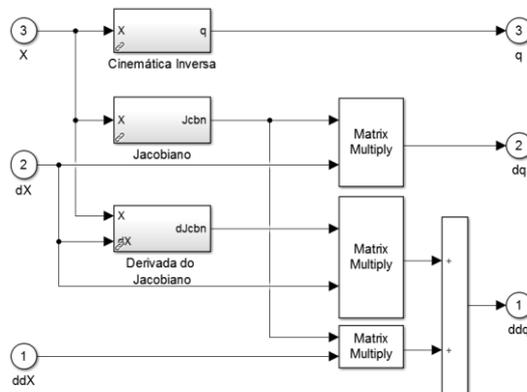


Figura F.12 – Diagrama de blocos referente à cinemática inversa do MPS.

## APÊNDICE G – Imagens da movimentação do MPS para cada trajetória

Neste apêndice são apresentados os resultados experimentais obtidos através de uma gravação de vídeo. A Figura G.1 apresenta frames do vídeo relativos à Trajetória 1 e a Figura G.2 apresenta frames do vídeo relativos à Trajetória 2.

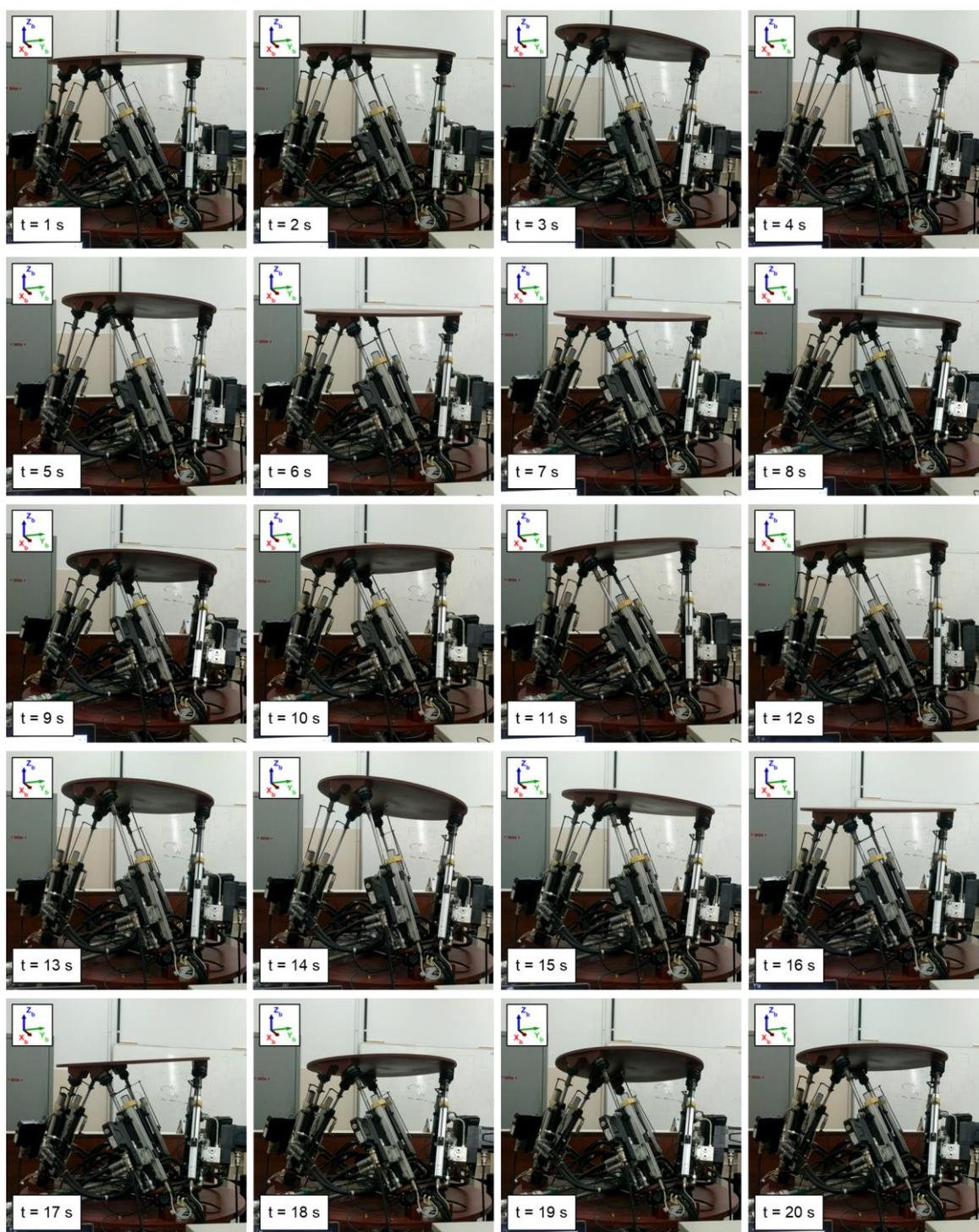


Figura G.1 – Resultados experimentais quadro a quadro para a Trajetória 1.

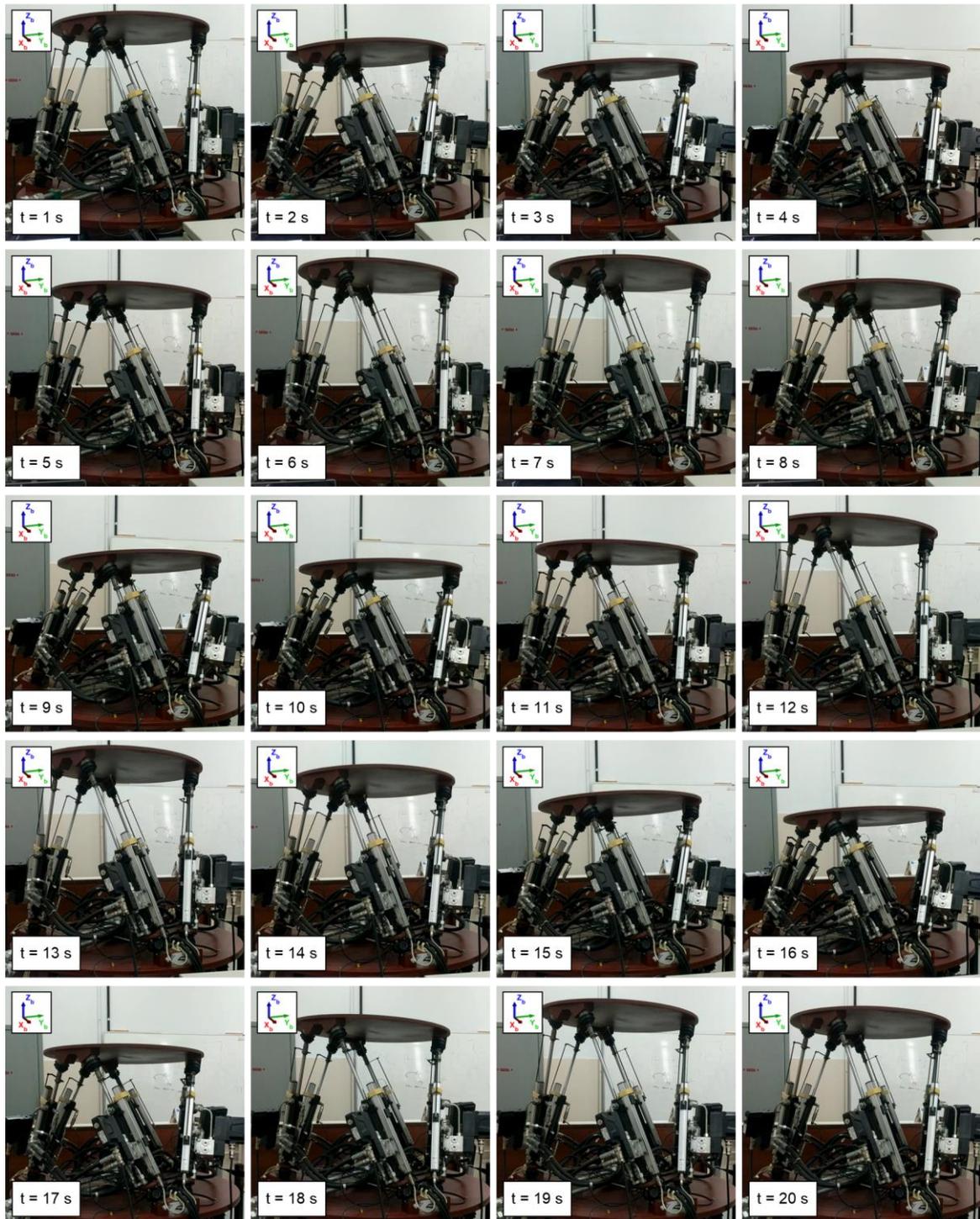


Figura G.2 – Resultados experimentais quadro a quadro para a Trajetória 2.