

# Quantização de dinâmicas no toro

Bruno Eickhoff Seefeld

Orientadora: Sandra Denise Prado

## Resumo

Existem diferentes abordagens para caracterizar caos em sistemas quânticos. Quando estes são quantizações de sistemas dinâmicos clássicos, tenta-se descobrir que fatores da versão quântica implicam que o limite clássico seja caótico. A exemplo, utilizam-se mapas no toro (ex. *baker's map* ou mapa do padeiro) para discutir a divergência as várias abordagens, mas mostrando que no âmbito da abordagem da Decoerência Auto-induzida, uma resposta concreta à pergunta pode ser dada.

## **Abstract**

There are several approaches to characterize chaos in quantum systems. When these quantizations are applied to classical dynamical systems, the question is which factors of the quantum version imply a classical chaotic limit. As an example, the baker's map is a paradigmatic model to discuss divergences among approaches, although the Self-induced Decoherence method can give a concrete answer to the question.

## 0.1 Introdução

O termo “caos quântico” refere-se a uma série de diferentes abordagens para estudar sistemas quânticos que são quantizações de sistemas dinâmicos. Não se trata de uma definição matemática precisa e, quando o sistema dinâmico em questão é um mapa (define-se mais precisamente abaixo), há uma grande arbitrariedade até mesmo para estabelecer sua quantização [1]. A quantização de sistemas classicamente caóticos foi uma questão já colocada por Einstein nos primórdios da Física Quântica, quando as regras de quantização semiclássicas explicavam a quantização de sistemas periódicos, que eram integráveis [2]. A questão permaneceu esquecida por décadas até o advento de uma teoria semiclássica desenvolvida por Gutzwiller [3].

Para clarificar o escopo desse trabalho, apresentam-se algumas definições:

1. dado um conjunto  $X$  (um espaço de estados do sistema) e uma função  $T : X \rightarrow X$  que representa sua evolução temporal, chama-se de sistema dinâmico o par  $(X, (T^t)_{t \in \Lambda})$  [4]. Um sistema dinâmico é discreto, um mapa, quando sua evolução é dada por iterações da função  $T$ , de forma que a evolução de um estado inicial  $x$  é dada por  $\{T^j(x) | j \in \mathbb{N}\}$  ( $\Lambda = \mathbb{N}$ ). O sistema é dito contínuo, quando a mesma é parametrizada por números reais, ou seja, a evolução é  $\{T^t(x) | t \in \mathbb{R}\}$  ( $\Lambda = \mathbb{R}$ ). Geralmente o sistema dinâmico é acompanhado de uma estrutura adicional, como uma topologia no conjunto  $X$ , aqui tais estruturas serão medidas  $\mu$  como a medida de Liouville do espaço de fase.
2. um sistema dinâmico hamiltoniano é o par  $(X, \Phi_H^t)$ , onde  $X$  é o espaço de fases da Mecânica Clássica, ou seja todos os pontos na forma  $(q, p)$  e  $\Phi_H^t$  é uma família parametrizada no espaço dos reais que dá a evolução temporal do sistema a partir das equações de Hamilton com hamiltoniano  $H$ :  $(x(t), p(t)) = \Phi_H^t(x(0), p(0))$  [5].

A quantização dos sistemas da definição 2. é importante porque é base para discutir a evolução temporal dos mapas quânticos. Se  $H(x, p)$  é um hamiltoniano do sistema clássico, chama-se de quantização o sistema quântico definido pelo operador auto-adjunto atuando em  $L^2(\mathbb{R})$   $H_h = H(\hat{x}_h, \hat{p}_h)$ , com  $\hat{x}_h \psi(x, t) = x\psi(x, t)$  e  $\hat{p}_h \psi(x, t) = -i\hbar \nabla \psi(x, t)$ . A evolução

temporal desse sistema é dada pela equação de Schrödinger:

$$H_{\hbar}\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}$$

e resolvendo-a temos o operador evolução temporal  $U_{\hbar}^t = e^{\frac{-iH_{\hbar}t}{\hbar}}$ . Esse operador é unitário e, por analogia, para mapas quânticos buscam-se evoluções com a mesma propriedade.

Além da evolução temporal, outra ideia que surge por analogia para os mapas quânticos é a do limite clássico. No caso da quantização de sistemas hamiltonianos, considera-se a constante de Planck como um parâmetro que mede o quão macroscópico é o sistema [6]. Por exemplo, consideremos o operador hamiltoniano de uma partícula livre de massa  $m$  dado por

$$H_{\hbar} = \frac{\hat{p}_{\hbar}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m}.$$

Se  $\psi$  é autofunção de  $H_{\hbar}$ , com energia  $E$ , é autofunção do operador Laplaciano com autovalor  $(-E/2m\hbar^2)$ , então estudar as autofunções com altos autovalores do Laplaciano é equivalente a estudar autofunções com  $\hbar \rightarrow 0$ . O limite clássico é então definido pela forma das autofunções quando  $\hbar \rightarrow 0$ .

Mais formalmente, o limite clássico é dado em termos de estimativas de Ergorov ([5]): seja  $f$  um observável no espaço de fase clássico (função infinitamente diferenciável), tem-se  $f(t) = f \circ \Phi_H^t$  e  $\hat{f}_{\hbar}(t) = U_{\hbar}^{-t} \hat{f}_{\hbar} U_{\hbar}^t$ , considerando  $f_{\hbar}(t)$  a quantização de  $f(t)$  o limite clássico é bem definido e conecta essas duas evoluções:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_{\hbar}(t) = \hat{f}_{\hbar}(t) + \mathcal{O}(e^{\Gamma|t|\hbar}) \tag{1}$$

onde  $\Gamma$  é um parâmetro que depende do sistema. Ou seja, no limite, a quantização do observável  $f(t)$  é aproximadamente a quantização do observável  $f$  evoluído para o tempo  $t$  (quantização e evolução comutam).

## Por que o toro?

Os mapas que serão analisados aqui são definidos no quadrado unitário  $X = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$ , como o mapa do padeiro e os automorfismos lineares. Para considerar isso um toro, basta identificar (por classe de equivalência), o lado superior com o inferior e o lado esquerdo com o direito. Isso tem duas vantagens: não é necessário considerar as “paredes”, o que dá condições adicionais de continuidade, além de permitir a análise de sistemas periódicos em que  $\psi$  é periódica tanto em posição quanto em momento.

### 0.1.1 Quantização de mapas

Embora não exista um procedimento único para a quantização de mapas, alguns fatores são comuns:

1. a constante de Planck é tratada como um parâmetro de dimensão do sistema,  $\hbar = \frac{1}{2\pi N}$ , com  $N < \infty$  sendo a dimensão do espaço de Hilbert.
2. a evolução temporal é dada por iterações de uma transformação unitária  $U_N$  atuando em vetores de  $\mathcal{H}_N$  (espaço de Hilbert de dimensão  $N$ ).

Uma quantização, de forma geral, é atribuir uma família de espaços de Hilbert e transformações unitárias que sejam similares aos iterados clássicos do mapa [1].

### 0.1.2 O mapa do padeiro

O mapa do padeiro (*baker's map*), assim chamado por lembrar o processo de se esticar, cortar e sobrepor um pedaço de massa como ilustrado na figura (1), é definido no quadrado unitário por:

$$q' = 2q - [2q] \tag{2}$$

$$p' = \frac{1}{2}(p + [2q]) \tag{3}$$

onde  $[x]$  é a parte inteira de  $x$ . Esse mapa estica por um fator de 2 a coordenada de posição  $q$  e achata por um fator de  $\frac{1}{2}$  a coordenada de momento, diminuindo e adicionando as partes inteiras para manter no quadrado unitário. Esse é um ótimo exemplo de caos, pois manifesta várias propriedades quantitativas associadas ao fenômeno: ergodicidade, mixing, expoente de Lyapunov positivo, entropia de Komolgorov-Sinai positiva [7], cujas definições são dadas na subseção 0.1.4.

Ao separar o quadrado em esquerda/direita (L/R) e cima/baixo (T/B), como ilustrado na figura (1), a ação de um iterado leva L em B e R em T. Esse comportamento é a base da versão quântica que será estudada.

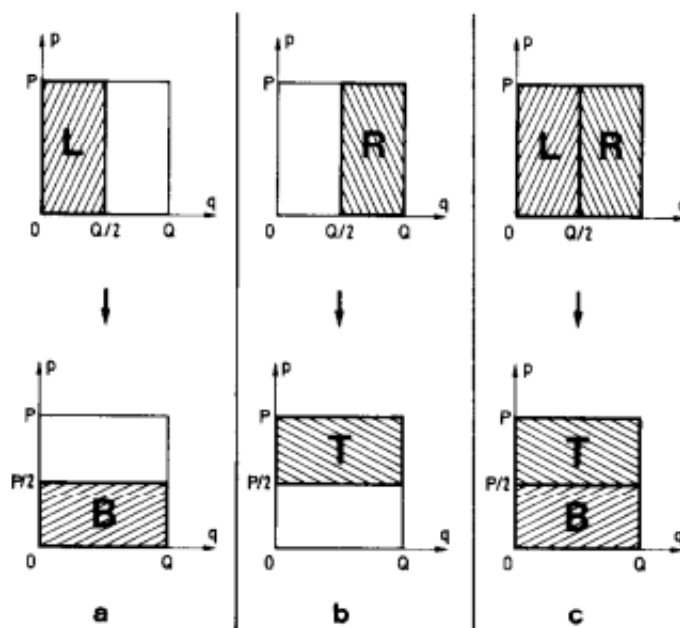


Figura 1: O mapa do padeiro clássico: a)  $L \rightarrow B$ ; b)  $R \rightarrow T$ ; c) a ação completa do mapa, [8]

Mostra-se agora uma quantização desse mapa, que não tem significado físico em termos de um Hamiltoniano, porém é matematicamente simples, além de possuir aplicações em circuitos quânticos que foram realizadas numericamente em um computador quântico [9].

Esse procedimento de quantização foi feito pela primeira vez em 1987 por Balasz e Voros [8]. Consideremos o quadrado unitário. Pelo Princípio da Incerteza, ele é dividido em  $N$  células de área  $\Delta q \Delta p \approx 2\pi\hbar$ , assim  $\hbar = 1/(2\pi N)$  e a constante de Planck é tratada como um parâmetro de dimensionalidade. Consideremos  $N$  autoestados normalizados de

posição  $|n\rangle$ , e  $N$  autoestados de momento  $\langle m|$  com  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ , com condições de periodicidade  $|n+N\rangle = |n\rangle$  e  $\langle m+N| = \langle m|$ , que são análogas à construção de um toro. Esses autoestados estão relacionados por uma transformada de Fourier discreta e se tem que  $\langle m|n\rangle = \exp(2\pi inm/N)$ . Definimos a matriz de Fourier em  $N$  dimensões por:

$$(F_N)_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-\frac{2\pi inm}{N}\right). \quad (4)$$

Assim, se  $\psi$  é um estado na representação de posição com componentes  $\psi_n$  nessa base, seus coeficientes na base de momento são dados por  $\tilde{\psi}_m = (F_N\psi)_m$ .

Para a quantização imita-se o procedimento da figura (1). Seja  $\mathcal{H}$  o espaço de Hilbert de dimensão  $N$ ,  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{R}$  subespaços ortogonais que decompõem  $\mathcal{H}$ , com vetores  $\psi^L, \psi^R$  respectivamente. Requer-se que esses vetores sejam de tal forma que, na representação de posição,  $\psi_n^L = 0$  para  $n \geq \frac{N}{2}$  e  $\psi_n^R = 0$  para  $n < \frac{N}{2}$ . Isso simula os lados esquerdo e direito do quadrado unitário. Nota-se que para manter a simetria entre os lados,  $N$  deve ser par.

Cria-se também outra decomposição de  $\mathcal{H}$ , formada pelos subespaços  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{B}$ , com vetores  $\phi^T, \phi^B$  respectivamente. Requer-se que, na representação de momento,  $\tilde{\phi}_m^T = 0$  para  $m < \frac{N}{2}$  e  $\tilde{\phi}_m^B = 0$  para  $m \geq \frac{N}{2}$ . Simulando a parte de cima a de baixo do quadrado unitário.

Agora, as propriedades que definem a transformação são tais que a parte que estica por um fator 2 ( $L \rightarrow B$ ) é dada, nos componentes pares, por

$$\phi_{2n}^B = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_n^L, \quad n \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (5)$$

e zero caso contrário ( $n$  está sendo levado em  $2n$ , esticando). Para os componentes ímpares de  $\phi^B$ , usa-se a representação de posição,

$$\tilde{\psi}_{2m}^L = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\phi}_m^B, \quad m \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (6)$$

zero caso contrário. Isso simula a parte da compressão por  $\frac{1}{2}$ , que é um esticamento quando aplicado inversamente. A transformação que leva R em T é definida analogamente, trocando-se a direção das desigualdades.

O que interessa na presente análise é representar isso na forma de matriz, portanto, a



equação (6) é

$$\tilde{\phi}_m^B = \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-2\pi i \frac{2mn}{N}} \psi_n^L, \quad m < \frac{N}{2} \quad (7)$$

$$\tilde{\phi}_m^B = 0, \quad m \geq \frac{N}{2} \quad (8)$$

escrevendo-se explicitamente os componentes de Fourier e em forma matricial

$$\tilde{\phi}^B = \begin{pmatrix} F_{N/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi^L, \quad (9)$$

onde  $F_{N/2}$  é uma matriz de Fourier  $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$  como na definição 4. Por analogia:

$$\tilde{\phi}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_{N/2} \end{pmatrix} \psi^R. \quad (10)$$

Note que nessa definição, o próximo estado está dado na representação de momento, então o próximo iterado, na representação de posição é:

$$\phi = (F_N)^{-1} \begin{pmatrix} F_{N/2} & 0 \\ 0 & F_{N/2} \end{pmatrix} \psi. \quad (11)$$

onde a transformação  $(F_N)^{-1}$  é usada para voltar à representação de posição. A transformação

$$B = (F_N)^{-1} \begin{pmatrix} F_{N/2} & 0 \\ 0 & F_{N/2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

é chamada *quantum baker map* e é, finalmente, a quantização que será analisada na próxima seção.

### 0.1.3 Formalismo matemático

Dado um observável no espaço de fase clássico, sua versão quântica no caso contínuo é estabelecida substituindo posição e momento por seus respectivos operadores. No caso

discreto, existem diferentes formas de quantizar observáveis [10], mas todas envolvem obter, a partir de uma função  $f$  no espaço de fase (nesse caso o toro  $\mathbb{T}^2$ ), um operador no espaço de Hilbert  $N$  dimensional. Uma forma bastante geral de fazer isso é dada por [11]:

$$Op_{\theta,N}^W(f) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n_1, n_2) T_{\theta,N}(n_1, n_2). \quad (13)$$

O operador  $Op_{\theta,N}^W(f)$  é chamado de transformada de Weyl de  $f$ , onde

$$\hat{f}(n_1, n_2) = \int_{\mathbb{T}^2} f(x, p) e^{-2\pi i(xn_1 + pn_2)} dx dp$$

é a transformada de Fourier do observável e  $T(n_1, n_2)$  é um operador de translação tanto em posição quanto em momento. A ação dos últimos na base canônica  $\{u_j\}_{j=0}^{N-1}$  de  $\mathbb{H}_N$  é dada por:

$$T_{\theta,N}(n_1, n_2)u_j = \exp\left(-\frac{2\pi i n_1 n_2}{N}\right) \exp\left[\frac{2\pi i n_1(j + \theta_1)}{N}\right] \exp\left(\frac{2\pi i n_2 \theta_2}{N}\right) u_{j-n_2}$$

O parâmetro  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  serve para escolher uma rede no toro em que se toma uma amostra do observável, podendo gerar diferentes quantizações. Para os correntes propósitos, assim como de prática por alguns autores [10, 12, 13], será fixo e nulo.

Como se está no toro, há uma noção de periodicidade tanto em posição quanto em momento, por isso as somas em  $\mathbb{Z}$  são periódicas e pode-se considerar  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , os inteiros módulo  $N$ .

A ideia por trás dessa quantização é baseada no fato de que os operadores posição e momento geram translações em momento e posição respectivamente. Assim, a transformada de Weyl decompõe o observável (usando os componentes de Fourier) e troca  $x, p$  por operadores de translação.

No caso discreto, como esses operadores estão relacionados com quantidades clássicas do sistema?

Através do formalismo de Weyl-Wigner-Moyal, dado um operador hermitiano  $\hat{A}$  no espaço de Hilbert de  $2(N + 1)$  dimensões, define-se sua transformada de Wigner  $W_{\hat{A}}$ :

$$W_{\hat{A}}(x, p) = \frac{1}{\hbar^{N+1}} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \langle q + \Delta | \hat{A} | q + \Delta \rangle e^{\frac{2\pi i p \Delta}{\hbar}} d\Delta. \quad (14)$$

Essa é uma função (mais geralmente uma distribuição) no espaço de fase e será importante para definir como obter o sistema clássico a partir da quantização. O símbolo de Weyl do operador  $\hat{A}$ ,  $\tilde{W}_{\hat{A}}$ , é dado por  $\hbar^{N+1} W_{\hat{A}}$ . O último está conectado com a quantização de Weyl da função clássica obtida. Na verdade são necessárias condições mais técnicas para garantir um isomorfismo, já que duas funções podem coincidir em uma amostra do espaço de fase e portanto ter a mesma quantização de Weyl, uma resolução dessa não unicidade é dada por Ligabó [11].

Uma propriedade importante da transformada de Wigner é que:

$$tr(\hat{A}\hat{B}) = \langle W_{\hat{A}}, \tilde{W}_{\hat{B}} \rangle \quad (15)$$

onde  $\langle a, b \rangle = \int_{\mathbb{T}^2} a(q, p)b(q, p)dq dp$ .

Agora será feita a conexão entre dinâmica quântica e clássica, através dos colchetes de Moyal (MB, *Moyal Brackets*). Primeiro, define-se o produto  $\star$  (chamado de produto estrela ou produto de Moyal):

$$\tilde{W}_{\hat{A}} \star \tilde{W}_{\hat{B}} = f(x, p) \quad (16)$$

tal que

$$Op_{\theta, N}^W(f) = \hat{A}\hat{B}.$$

Ou seja, o produto estrela de observáveis  $f, g$  é o observável cuja quantização é o produto das quantizações de  $f$  e  $g$ . Assim, são definidos os colchetes de Moyal "MB":

$$\{\tilde{W}_{\hat{A}}, \tilde{W}_{\hat{B}}\}_{\text{MB}} = \frac{1}{i\hbar} (\tilde{W}_{\hat{A}} \star \tilde{W}_{\hat{B}} - \tilde{W}_{\hat{B}} \star \tilde{W}_{\hat{A}}) \quad (17)$$

ou seja,

$$\{\tilde{W}_{\hat{A}}, \tilde{W}_{\hat{B}}\}_{\text{MB}} = \frac{1}{i\hbar} \tilde{W}_{[\hat{A}, \hat{B}]}$$

Finalmente, sejam  $\{ , \}_{PB}$  os colchetes de Poisson de duas funções no espaço de fase, lembrando que os  $\tilde{W}$  são definidos nesse espaço, tem-se a seguinte cota:

$$\{f, g\}_{\text{MB}} = \{f, g\}_{\text{PB}} + \mathcal{O}\left(\frac{\hbar^{N+1}}{S}\right),$$

onde  $S$  é a ação clássica.

No limite  $N \rightarrow \infty$ , os colchetes de Moyal são os colchetes de Poisson e recuperamos a evolução clássica dos observáveis.

#### 0.1.4 Limite clássico para mapas

O Princípio da Correspondência estabelece que o comportamento clássico de um sistema quântico deve ser obtido no limite do sistema quântico correspondente [6]. Isso deve, em princípio, incluir comportamento caótico. Características comuns, mas não necessárias, desse último são

1. Sensibilidade às condições iniciais: a evolução de dois estados próximos pode divergir muito e de forma imprevisível.
2. Expoentes de Lyapunov positivos, quando  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log((T^n)'(x))$  é positivo a separação entre os iterados de dois estados iniciais distintos cresce exponencialmente no limite  $n \rightarrow \infty$  (a definição dada é para mapas unidimensionais, para dinâmicas em dimensões maiores decompõe-se o espaço e em cada subespaço pode haver um expoente de Lyapunov).
3. Ergodicidade: dados conjuntos de medida positiva  $A, B$  do espaço de fase, temos ergodicidade se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^i(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ . Seja  $C(A, B) = \mu(A \cap$

$B) - \mu(A)\mu(B)$  a correlação entre os conjuntos  $A$  e  $B$ , a definição de ergodicidade é equivalente à  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} C(T^i A, B) = 0$ .

4. *Mixing*: mesmas hipóteses do item anterior mas  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^k(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ , na linguagem de correlações fica  $\lim_{n \rightarrow \infty} C(T^n A, B) = 0$ .
5. Entropia de Komolgorov-Sinai positiva: chama-se  $\mathcal{P}$  de partição do espaço de estados  $M$  uma família enumerável de conjuntos disjuntos cuja união é  $M$ . A soma de duas partições  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  são os conjuntos  $P \cap Q$  com  $P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}$  [14]; a entropia de uma partição  $\mathcal{P}$  é  $H(\mathcal{P}) = \sum_i -\mu(P_i) \log(\mu(P_i))$ , e a entropia de Komolgorov-Sinai do sistema por  $h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{P}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{P} \vee T(\mathcal{P}) \vee \dots \vee T^{n-1}(\mathcal{P}))$ , se essa quantidade for positiva, sempre se ganha informação em saber em qual das celas de  $\mathcal{P} \vee T(\mathcal{P}) \vee \dots \vee T^n(\mathcal{P})$  um iterado estará dado que se conhece em qual das celas de  $\mathcal{P} \vee T(\mathcal{P}) \vee \dots \vee T^{n-1}(\mathcal{P})$  ele está. Isso dá uma noção de imprevisibilidade [6].

As ideias da Mecânica Quântica colocam alguns entraves para se falar de caos quântico e seu limite, pois:

1. A evolução temporal é unitária então  $\| U^t \psi_1(0) - U^t \psi_2(0) \| = \| U^t(\psi_1(0) - \psi_2(0)) \| = \| \psi_1(0) - \psi_2(0) \|$ , ou seja, a distância entre duas funções de onda não apresenta separação de trajetórias como um sistema caótico clássico.
2. Até mesmo o conceito de trajetória na Mecânica Quântica não é bem definido para um sistema devido ao Princípio da Incerteza.
3. Caos clássico geralmente está associado a sistemas não-lineares e a evolução de estados quânticos segue a Equação de Schrödinger, que é linear [10].

Tomando-se uma quantização cujo limite existe quando  $\hbar \rightarrow 0$  e sabendo que o sistema clássico é não-integrável [15], procura-se identificar quais fatores nessa quantização implicam que o limite clássico seja caótico. Enquanto que para fluxos hamiltonianos o conceito é direto, para mapas existem diferentes interpretações do que significa tal limite. Uma delas é, dentro de uma abordagem dinâmica, tomar estimativas de Ergorov para os mapas [5]. Aqui, faz-se como na equação (1), porém substituindo a quantização de  $f$  por  $Op_{\theta, N}^W(f)$

e a evolução unitária é dada por uma quantização do mapa. A outra abordagem é mais estatística e consiste em recuperar o sistema através da desquantização da base do espaço de Hilbert dos operadores e matrizes de densidade, obtendo-se constantes de movimento locais que permitem que trajetórias clássicas possam ser estimadas.

Na próxima seção mostraremos duas abordagens, a saber: abordagem dinâmica para automorfismos lineares no toro [12, 16] e abordagem da decoerência auto-induzida [10] (chamada assim porque o sistema considerado entra em decoerência pela interação consigo mesmo, não com um ambiente). Vamos mostrar que há uma vantagem da segunda abordagem, extendendo-se o cálculo usando-se o mapa padrão ou mapa de Chirikov <sup>1</sup> para o mapa do padeiro [10]. O mapa padrão é obtido da hamiltoniana de um rotor periodicamente quicado e manifesta uma dinâmica clássica que vai de integrável a totalmente caótica, dependendo da intensidade do quique.

## 0.2 Desenvolvimento

### 0.2.1 Abordagem dinâmica para automorfismos lineares no toro e mapa do padeiro

Uma das características dessa abordagem é a existência de um tempo característico, o tempo de Ehrenfest, em que a dinâmica quântica é próxima da dinâmica clássica. Resultados experimentais mostram que esse tempo cresce com  $|\log \hbar|$  [5, 8, 16]. Poder-se-ia pensar então que analisando a dinâmica quântica para  $\hbar$  cada vez menor, poderia-se concluir se o mapa clássico é caótico ou não. Isso não é o caso, pois no que se segue é mostrado que algumas características de caos clássico já são assumidas para se estudar os mapas quânticos acima.

Aqui os estados possuem uma representação mista no sentido de as funções serem representadas em posição e momento ao mesmo tempo. Para dar um exemplo e introduzir o tipo de estado que será analisado, dados  $y \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  chama-se estado coerente centrado

---

<sup>1</sup> Chirikov B.V., "Research concerning the theory of nonlinear resonance and stochasticity", Preprint N 267, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk (1969), (Engl. Trans., CERN Trans. 71-40 (1971))

em zero a função

$$\eta_{0,z}(y) = \left(\frac{\text{Im}z}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{2\hbar}zy^2}. \quad (18)$$

Para se obter um estado coerente centrado em  $q, p$  arbitrários, aplica-se o operador de translação  $D(q, p)$ :

$$\eta_{(q,p),z}(y) = D(q, p)\eta_{0,z}(y). \quad (19)$$

O estado (19) pode ser entendido como uma gaussiana centrada em  $(q, p)$  com incertezas  $\Delta q$  e  $\Delta p$  nas direções de posição e momento respectivamente.

O grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$  das matrizes de coeficientes inteiros e determinante 1 é um automorfismo linear do toro quando se toma a parte fracionária dos vetores (mod 1, identificando todos os quadrados unitários do plano com o quadrado unitário que forma o toro). A forma explícita da quantização  $M$  desse grupo não é necessária para a posterior análise [17], somente o fato de que tal quantização reproduz o esticamento em uma direção por um fator  $\gamma$  (o expoente de Lyapunov clássico) e achatamento em outra direção por um fator  $\frac{1}{\gamma}$ .

O resultado quantitativo obtido em [16] é que, dados  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  um observável  $f, \epsilon > 0$  e um ponto  $x_0$ , com  $M(A)$  sendo a quantização de  $A$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty, t < (1-\epsilon)\frac{\ln N}{2\gamma}} (O_f^{AW,M}[t, N](x_0) - f(A^t x_0)) = 0 \quad (20)$$

onde

$$O_f^{AW,M}[t, N](x_0) = \int_{\mathbb{T}^2} f(x) |\langle x, z | M^t | x_0, z \rangle|^2 \frac{dx}{2\pi\hbar} \quad (21)$$

chama-se quantização anti-Wick de  $A$  [5], representando a média do operador  $M$  no tempo  $t$  no espaço de Hilbert de dimensão  $N$ . A ideia da prova é a seguinte: dado  $\epsilon > 0$ , para tempos  $t \ll \frac{\ln N}{2\gamma}$ , ou seja,  $t < (\frac{1}{2} - \epsilon)\frac{\ln N}{\gamma}$ , considera-se um estado coerente em  $x = (q, p)$  com largura  $z$ . Pelo Princípio da Incerteza  $z^2 \approx \Delta q \Delta p \approx h = 2\pi\hbar = \frac{1}{N}$ , então  $z \approx \frac{1}{N^{1/2}}$ . Como é uma quantização de um dos automorfismos lineares no toro, em uma certa direção haverá um esticamento por um fator  $\gamma$  a cada iterado, portanto o tamanho linear máximo

do estado considerado após  $t$  iteradas é:

$$ze^{\gamma t} \leq N^{-\frac{1}{2}} e^{(\frac{1}{2}-\epsilon)\ln N} = N^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}-\epsilon} = N^{-\epsilon}. \quad (22)$$

Isso significa que no limite  $N \rightarrow \infty$ , a largura do estado tende a zero e portanto na integral (21) só se tem a contribuição do termo  $M(A)^t(x_0)$ , que é  $f(A^t(x_0))$ . Assim, para tempos curtos nesse sentido, tem-se que a dinâmica quântica (média de um operador no tempo) converge para a dinâmica clássica (valor do observável no iterado clássico  $A^t(x_0)$ ).

Para o mapa do padeiro e a quantização apresentada anteriormente, a análise da dinâmica foi feita em [12] e consiste em demonstrar que a variância quântica vai a zero no limite  $N \rightarrow \infty$ . A variância quântica  $S_2(f, N)$  mede o quão equidistribuídos estão os autoestados do mapa quântico

$$S_2(f, N) \equiv \frac{1}{N} \sum_{N-1}^{j=0} |\langle \psi_{N,j} | Op_{\theta,N}^W(f) | \psi_{N,j} \rangle - \int_{\mathbb{T}^2} f(q, p) dq dp|^2. \quad (23)$$

O primeiro termo dentro do somatório é a média do operador  $Op_{\theta,N}^W(f)$  (quantização de Weyl do observável clássico  $f$ ) no autoestado  $\psi_{N,j}$ , o segundo é simplesmente a média espacial de  $f$  no espaço de fase clássico. Se  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_2(f, N) = 0$  para todo  $f$ , então se tem ergodicidade no sentido em que a média do operador em  $N$  converge para a média espacial.

O argumento consiste em escrever a variância quântica como

$$S_2(a, N) \leq \sum_{\mathbb{Z}} \hat{f}_T(n) \frac{1}{N} \text{tr} (Op_{\theta,N}^W(a) B^n Op_{\theta,N}^W(a) B^{-n}) \quad (24)$$

onde  $\hat{f}_T$  é um pulso triangular de largura de  $-T$  a  $T$ ,  $T \geq 1$ ; separar os observáveis clássicos em uma parte regular  $a_n$  e uma parte "ruim"  $a_{bad}$ , a última sendo definida próxima às discontinuidades do mapa clássico e seus iterados,  $a = a_n + a_{bad}$ . Escreve-se o traço (24) como:

$$\text{tr} (Op_{\theta,N}^W(a) B^n Op_{\theta,N}^W(a) B^{-n}) = \text{tr} (Op_{\theta,N}^W(a) B^n Op_{\theta,N}^W(a_n) B^{-n}) + \text{tr} (Op_{\theta,N}^W(a) B^n Op_{\theta,N}^W(a_{bad}) B^{-n}) \quad (25)$$



no termo com  $a_{bad}$ , a seguinte estimativa é dada, usando-se o Teorema de Calderón-Vaillancourt

$$|tr (Op_{\theta,N}^W(a)B^nOp_{\theta,N}^W(a_{bad})B^{-n})| \leq \frac{C(a)}{N^{2/5}} \quad (26)$$

onde  $C(a)$  é uma constante que depende apenas da função, portanto esse termo vai a zero no limite  $N \rightarrow \infty$ .

A parte mais relevante do argumento para o corrente propósito é que a estimativa do primeiro termo do lado direito da eq. (25) é feita substituindo uma conta com objetos quânticos por uma com objetos clássicos:

$$tr (Op_{\theta,N}^W(a)B^nOp_{\theta,N}^W(a_n)B^{-n}) = \int_{\mathbb{T}^2} a(x)(a_n \circ B^{-n})(x)dx + \mathcal{O} \left( \frac{C(a)}{N^{1/5}} \right). \quad (27)$$

O termo com a integral  $\int_{\mathbb{T}^2} a(x)(a_n \circ B^{-n})(x)dx = \mathcal{K}$  é a correlação entre  $a$  e ele mesmo (autocorrelação), que usando-se o fato de que o mapa clássico é caótico, decai exponencialmente. Dessa forma, todos esses termos vão a zero assim como a variância quântica, portanto há ergodicidade para o sistema quântico quando  $N \rightarrow \infty$ .

## 0.2.2 Abordagem da decoerência auto-induzida aplicada no mapa do padeiro

Aqui os objetos principais da teoria são os operadores no espaço de Hilbert e não vetores ou autofunções. Os estados são representados por matrizes densidade  $\rho$  atuando no espaço de operadores. Serão definidos esses objetos e como eles serão usados para calcular médias de observáveis e como obter, a partir do sistema quântico, o sistema clássico. Identificaremos também, para o mapa do padeiro, um fator que implica que o mesmo é caótico no sentido de ergodicidade e *mixing*.

Seja  $\mathbb{H}$  o espaço de Hilbert,  $\hat{O}$  um observável, ou seja, um operador auto-adjunto satisfazendo condições de regularidade dadas por [15], e  $\rho$  uma matriz densidade que será multiplicada por  $\hat{O}$ . O estado quântico no tempo  $t$  é dado por  $\rho(t)$ .

A média do observável  $\hat{O}$  no estado  $\rho(t)$  é  $tr(\rho(t)\hat{O}) = \langle \hat{O} \rangle_{\rho(t)}$ . Chama-se  $\rho^*$  de limite

fraco do estado inicial  $\rho$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \hat{O} \rangle_{\rho(t)} = \langle \hat{O} \rangle_{\rho^*} \quad (28)$$

para todo observável  $\hat{O}$ . Essa quantidade é importante para essa abordagem, porque permite definir correlações entre um observável e um estado, assim podendo estender o conceito de ergodicidade e *mixing* para sistemas quânticos.

Dado um operador Hamiltoniano  $\hat{H}$  no espaço de Hilbert, a evolução temporal do sistema é dada pelo operador  $U(n) = e^{-\frac{i\hat{H}n}{\hbar}}$ . A evolução dos estados é dada por:

$$\rho(n) = U(n)\rho U(n)^\dagger. \quad (29)$$

Um resultado importante aqui é que autovetores do Hamiltoniano são autovetores da evolução temporal, com autovalores diferentes, seja  $|a\rangle$  autovetor de  $\hat{H}$  com autovalor  $E_a$ :

$$U(n)|a\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}n}{\hbar}}|a\rangle = \mathcal{I}|a\rangle - \frac{i\hat{H}n}{\hbar}|a\rangle + \left(\frac{i\hat{H}n}{\hbar}\right)^2|a\rangle + \dots = e^{-\frac{iE_a n}{\hbar}}|a\rangle. \quad (30)$$

Decompõe-se o estado inicial  $\rho$  na base de autovetores de  $\hat{H}$ :

$$\rho = \sum_a \sum_b \rho_{ab} |a\rangle \langle b| \quad (31)$$

com  $\rho_{ab} = \langle a|\rho|b\rangle$ . Assim, a evolução (29) fica:

$$\rho(n) = \sum_a \sum_b \rho_{ab} e^{-\frac{i(E_a - E_b)n}{\hbar}} |a\rangle \langle b|, \quad (32)$$

pois  $U(n)\langle b| = e^{\frac{iE_b n}{\hbar}}\langle b|$ . Os observáveis  $\hat{O}$  também são decompostos nessa base:

$$\hat{O} = \sum_a \sum_b O_{ab} |a\rangle \langle b| \quad (33)$$

com  $O_{ab} = \langle a|\hat{O}|b\rangle$ .

O produto  $\rho(n)\hat{O}$  é então:

$$\sum_a \sum_b \left( \sum_c \rho_{ac} \hat{O}_{cb} e^{-\frac{i(E_a - E_b)}{\hbar} n} \right) |a\rangle \langle b| \quad (34)$$

e tomando-se o traço para calcular a média tem-se:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\rho(n)} = \sum_D + \sum_{ND} \quad (35)$$

onde a parte diagonal é dada por

$$\sum_D = \sum_a \rho_{aa} O_{aa}, \quad (36)$$

pois os autovalores na exponencial cancelam quando  $a = b$ . A parte não diagonal é dada por:

$$\sum_{ND} = \sum_{a \neq b} \sum_{b \neq a} \rho_{ab} O_{ba} e^{-\frac{i(E_a - E_b)}{\hbar} n}. \quad (37)$$

O termo  $\sum_D$  depende apenas do estado inicial e do observável, a dependência temporal aparece apenas em  $\sum_{ND}$ , de fato,  $\sum_D = \langle O \rangle_{\rho^*}$ . Assim:

$$\langle O \rangle_{\rho(n)} = \langle O \rangle_{\rho^*} + \sum_{ND} (n). \quad (38)$$

A ideia principal da Decoerência Auto-Induzida é garantir que o termo  $\sum_{ND}(n)$  tenda a zero quando  $n \rightarrow \infty$  (aqui  $n$  é o  $n$ -ésimo iterado,  $N$  a dimensão do espaço de Hilbert), isso significa que a média do observável no tempo converge para a média espacial, o que dá a ideia de ergodicidade. Baseando-se nisso, outros regimes de caos podem ser definidos.

Para fazer isso primeiro é necessário fazer uma conexão entre os estados e pseudo-distribuições de probabilidade.

Existem três formas de definir correlações dentro da teoria [10]:

1. Correlações entre conjuntos mensuráveis: se  $A, B$  são conjuntos do espaço de fase, então  $C(A, B) = \mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)$ , onde  $\mu$  é uma medida de probabilidade.

2. Correlação entre funções densidade de probabilidade  $f, g$ :  $C(f, g) = \langle f, g \rangle - \langle f, I_\Gamma \rangle \langle g, I_\Gamma \rangle$ .  
Onde  $I_\Gamma$  é a função identidade no conjunto  $\Gamma$  do espaço de fases:

$$\begin{aligned} I_\Gamma(x) &= 1, \text{ se } x \in \Gamma \\ I_\Gamma(x) &= 0, \text{ se } x \notin \Gamma \end{aligned} \tag{39}$$

3. Correlações entre operadores  $\hat{A}, \hat{B}$ :  $C(\hat{A}, \hat{B}) = \text{tr}(\hat{A}\hat{B}) - \hbar^{N+1}\text{tr}(\hat{A})\text{tr}(\hat{B})$ .

Como as definições clássicas de ergodicidade e mixing são dadas em termos de conjuntos ou densidades de probabilidade, é necessário estabelecer uma conexão entre esses e os operadores no espaço de Hilbert. A linguagem dos conjuntos mensuráveis e das funções densidade de probabilidade estão conectadas considerando  $f = I_A$  e  $g = I_B$ , assim  $\langle f, f \rangle = \int I_A I_B dqdp - \int I_A I_{\mathbb{T}^2} dqdp \int I_B I_{\mathbb{T}^2} dqdp = \mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B) = C(A, B)$ . Agora sejam  $A, B$  subconjuntos do espaço de fases, consideremos dois operadores  $\hat{A}, \hat{B}$  tais que  $\tilde{W}_{\hat{A}=I_A}$  e  $\tilde{W}_{\hat{B}} = \frac{1}{\hbar^{N+1}}I_B$ . Calculando a correlação no sentido de operadores e usando a propriedade da eq. (15):

$$\begin{aligned} C(\hat{A}, \hat{B}) &= \text{tr}(\hat{A}\hat{B}) - \hbar^{N+1}\text{tr}(\hat{A})\text{tr}(\hat{B}) \\ &= \langle \tilde{W}_{\hat{A}}, \tilde{W}_{\hat{B}} \rangle - \hbar^{N+1} \langle \tilde{W}_{\hat{A}}, I_{\mathbb{T}^2} \rangle \langle \tilde{W}_{\hat{B}}, I_{\mathbb{T}^2} \rangle \\ &= \langle I_A, I_B \rangle - \langle I_A, I_{\mathbb{T}^2} \rangle \langle I_B, I_{\mathbb{T}^2} \rangle = \langle I_{A \cap B}, I_{\mathbb{T}^2} \rangle - \langle I_A, I_{\mathbb{T}^2} \rangle \langle I_B, I_{\mathbb{T}^2} \rangle \\ &= \mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B) = C(A, B). \end{aligned} \tag{40}$$

Olhando para a definição do limite fraco  $\rho^*$ , nota-se que ele é um ponto fixo da evolução temporal (considerando a média de operadores sobre esse estado). Sua transformada de Wigner,  $f^*$ , é uma distribuição que pode ser entendida como distribuição de equilíbrio no sentido clássico, pois satisfaz a equação de Liouville  $\frac{df^*}{dt} = \frac{\partial f^*}{\partial t} + \{f^*, H\}_{PB} = 0$ , dando origem à medida

$$\mu^*(A) = \int_A f^* dqdp = \int_A d\mu^*. \tag{41}$$

Correlações entre conjuntos do espaço de fases em relação a essa medida serão denotadas por  $C_*$ .

Pela equivalência entre correlações entre operadores/conjuntos, pode-se escrever:

$$C_*(\rho(n), \hat{O}) = \langle \hat{O} \rangle_{\rho(n)} - \langle \hat{O} \rangle_{\rho^*}, \quad (42)$$

porque  $tr(\hat{O}) = \langle O, I \rangle = \int_{\mathbb{T}^2} W_{\hat{O}} d\mu^*$ . Dessa forma, a eq.(38) fica  $\sum_{ND}(n) = C_*(\rho(n), \hat{O})$  e se pode entender a Decoerência Auto-Induzida como um decaimento de correlações. Define-se então os seguintes regimes para o sistema quântico:

1. Ergodicidade quântica:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} C_*(\rho(k), \hat{O}) = 0$
2. *Mixing* quântico:  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_*(\rho(k), \hat{O}) = 0$

de acordo com as definições clássicas dadas na seção 0.1.4.

Para garantir então que o limite clássico nesse sentido é caótico, deve-se mostrar que o termo não-diagonal, ou seja, a correlação entre o estado e o observável vai a zero. A técnica para isso será aproximar o somatório como uma integral [13] e usar o Lema de Riemann-Lebesgue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{ND}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{W}_\rho(a, b) \tilde{W}_{\hat{O}}(a, b) \exp\left(-i \frac{(E_a - E_b)n}{\hbar}\right) da db = 0 \quad (43)$$

Mostra-se agora que usando a quantização do mapa do padeiro definida anteriormente, o limite clássico é de fato caótico. A conta feita aqui é baseada no procedimento utilizado em [18] para o mapa padrão (nota de rodapé 1).

Seja  $\rho$  um estado representado por uma matriz densidade e  $|k\rangle$  um auto-estado da evolução temporal unitária  $\hat{B}$  dada por:

$$\begin{pmatrix} F_{N/2} & 0 \\ 0 & F_{N/2} \end{pmatrix} \quad (44)$$

onde  $N$  é a dimensão do espaço de Hilbert considerado. Tem-se  $B|k\rangle = e^{i\phi_k}|k\rangle$  e  $\langle k|B^\dagger = e^{-i\phi_k}\langle k|$ . Dado um observável  $\hat{O}$ , mostra-se que seu valor médio no estado  $\rho$  converge, na média, para sua média espacial, ou seja, o sistema é *quantum ergodic*. Primeiro se decompõe

$\rho$  na base de auto-estados:

$$\rho = \sum_k \rho_{kk} |k\rangle\langle k| + \sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} \rho_{kk'} |k\rangle\langle k'| \quad (45)$$

após  $n$  iterados o estado é dado por

$$\rho(n) = \hat{B}^n \rho \hat{B}^{\dagger n} = \sum_k \rho_{kk} \hat{B}^n |k\rangle\langle k| \hat{B}^{\dagger n} + \sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} \rho_{kk'} \hat{B}^n |k\rangle\langle k'| \hat{B}^{\dagger n}, \quad (46)$$

portanto

$$\rho(n) = \sum_k \rho_{kk} |k\rangle\langle k| + \sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} \rho_{kk'} |k\rangle\langle k'| e^{in(\phi_k - \phi'_k)}. \quad (47)$$

A média do observável nesse estado, para a  $n$ -ésima iterada fica:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\rho(n)} = \sum_k \rho_{kk} O_{kk} |k\rangle\langle k| + \sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} \rho_{kk'} O_{kk'} |k\rangle\langle k'| e^{in(\phi_k - \phi'_k)}. \quad (48)$$

Calcula-se, então, o limite da média sobre os iterados, o primeiro termo da equação 48 é independente do iterado portanto sua média é constante. Assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \langle \hat{O} \rangle_{\rho(n)} = \sum_k \rho_{kk} O_{kk} |k\rangle\langle k| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} \rho_{kk'} O_{kk'} |k\rangle\langle k'| e^{il(\phi_k - \phi'_k)} \quad (49)$$

as somas em  $k$  são finitas pois a dimensão do espaço é fixa, portanto o segundo termo da eq. (49) pode ser escrito como:

$$\sum_{k \neq k'} \sum_{k' \neq k} \rho_{kk'} O_{kk'} |k\rangle\langle k'| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} e^{il(\phi_k - \phi'_k)} \quad (50)$$

e o último termo é uma progressão geométrica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} e^{il(\phi_k - \phi'_k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1 - e^{in(\phi_k - \phi'_k)}}{1 - e^{i(\phi_k - \phi'_k)}}. \quad (51)$$

O espectro é não-degenerado [12], portanto o termo

$$\frac{1 - e^{in(\phi_k - \phi'_k)}}{1 - e^{i(\phi_k - \phi'_k)}}$$

é limitado e o limite da equação (51) vai a zero. Assim, na média,  $\langle \hat{O} \rangle_{\rho(n)} = \sum_k \rho_{kk} O_{kk} |k\rangle \langle k| = \langle \hat{O} \rangle_{\rho^*}$ , onde  $\rho^*$  é o limite fraco. Dessa forma, conclui-se que o sistema é ergódico.

Agora argumenta-se que o sistema é *mixing* quântico, mas para isso é preciso provar que a correlação entre um observável e um estado qualquer vai a zero no limite de  $n$  assintótico, ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k' \neq k} \rho_{kk'} O_{kk'} |k\rangle \langle k'| e^{in(\phi_k - \phi'_k)} = 0 \quad (52)$$

Para isso, toma-se a seguinte aproximação para a densidade espectral feita por [19]:

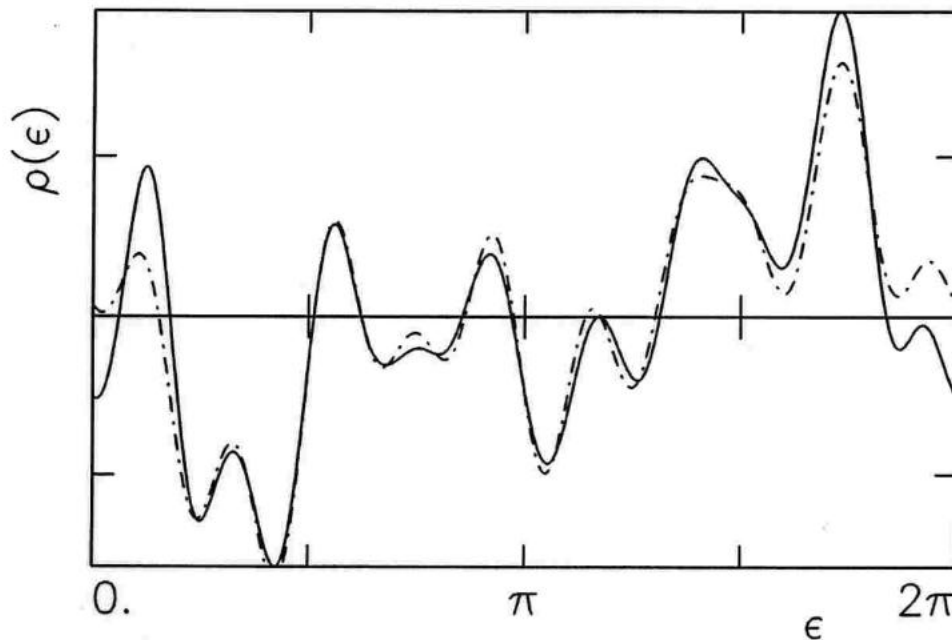


Figura 2: Aproximação da densidade de estados com energia  $\epsilon$ , espaçamento médio  $\frac{2\pi}{N}$ ,  $N = 1024$ . Tracejado representa os autovalores calculados computacionalmente da matriz e a curva representa a aproximação. Figura da ref. [19].

Ozorio de Almeida de Saraceno obtiveram que a densidade de estados é bem aproximada (utilizando a fórmula de Gutzwiller [3]) por funções com média de espaçamento das energias igual a  $\frac{2\pi}{N}$  [19], portanto o espaçamento médio pode ser tomado arbitrariamente pequeno,

o que faz com que a aproximação por integral do lema eq. (43) possa ser utilizada. Tendo isso em mente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \hat{O} \rangle_{\rho(n)} = \langle \hat{O} \rangle_{\rho^*} \quad (53)$$

e o sistema é *mixing*.

### 0.3 Conclusão

Na abordagem dinâmica vista na subseção 0.2.1, o foco é no sistema quântico no limite clássico, o que faz com que os autores já usem o fato do sistema ser a quantização de algo caótico, o que aparece no uso de expoente de Lyapunov e decaimento de correlações para os automorfismos lineares do toro e para o mapa do padeiro, respectivamente. Portanto, da forma que é utilizada, não se pode usá-la para inferir o caos do sistema clássico.

Já na abordagem da Decoerência Auto-Induzida, o caos no sistema clássico pode ser inferido analisando o termo não-diagonal na eq.(38), que representa a correlação entre estados e observáveis quânticos. A dinâmica no toro pode ser extraída disso, a partir das transformações de Wigner. É importante ressaltar que o que foi feito na subseção 0.2.2 para mostrar que o mapa do padeiro quântico é mixing não é uma prova, apenas um argumento, baseado na aproximação da densidade espectral da figura (2). Porém, em [8], resultados experimentais sugerem que os autovalores da quantização se distribuem entre dois *ensembles* gaussianos de matrizes aleatórias, sugerindo que uma prova possa ser feita usando Teoria de Matrizes Aleatórias - *Random Matrix Theory* (RMT).

Não há, *a priori*, motivos para que o problema não possa ser resolvido na abordagem dinâmica. O que ocorre é que a motivação dessa é estudar problemas relacionados à equidistribuição (ou não) das autofunções no limite clássico, como na eq. (23). Entretanto a abordagem da decoerência parece oferecer vantagens, visto que:

1. o termo não-diagonal depende do espectro, o que pode ser estudado do ponto de vista da RMT e da Fórmula de Gutzwiller, que são outras abordagens para o conceito de caos quântico.
2. ela implica uma das características da abordagem dinâmica, o tempo de Ehrenfest.



Em [10], prova-se assumindo entropia KS positiva, que há um tempo característico, da ordem de  $|\log \hbar|$ , em que dinâmica clássica e quântica são próximas.

Recomenda-se então para trabalhos futuros, encontrar cotas semelhantes às eqs. (22) e (27), porém sem assumir fatores caóticos do sistema clássico. Assim como provar que a distribuição espectral dessa quantização do mapa do padeiro tem espaçamentos entre vizinhos preditos pela Teoria das Matrizes Aleatórias (RMT), que para o mapa do padeiro é dada pelas estatísticas de matrizes ortogonais gaussianas (*Gaussian Orthogonal Ensemble*, GOE, (1987)), o que dá certeza sobre o comportamento médio dos espaçamentos, algo necessário para usar o lema 43.

Embora se perca em termos de generalidade com a hipótese de que o sistema clássico é não integrável, ganha-se em termos de dar uma resposta concreta, o que é importante para dizer se uma quantização é "boa" no sentido de satisfazer o Princípio da Correspondência, já que alguns sistemas caóticos possuem quantizações que não o são no limite [6].

# Bibliografia

- [1] N.L. Balazs e A. Voros. “The quantized Baker’s transformation”. Em: *Annals of Physics* 190.1 (1989), pp. 1–31. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(89\)90259-5](https://doi.org/10.1016/0003-4916(89)90259-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491689902595>.
- [2] A. Douglas Stone. “Einstein’s Unknown Insight and the Problem of Quantizing Chaos”. Em: *Physics Today* 58.8 (2005), p. 37. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2062917>. URL: <https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/1.2062917>.
- [3] Martin C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Systems*. Springer New York NY, 1990. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0983-6>.
- [4] M. Viana. *Stochastic Dynamics of Deterministic Systems*. IMPA, 1997. ISBN: 9788524401268. URL: <https://books.google.com.br/books?id=nv2sAAAACAAJ>.
- [5] Stéphane Nonnenmacher. *Anatomy of quantum chaotic eigenstates*. 2012. arXiv: 1005.5598 [math.DS].
- [6] Gordon Belot e John Earman. “Chaos out of order: Quantum mechanics, the correspondence principle and chaos”. Em: *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 28.2 (1997), pp. 147–182. ISSN: 1355-2198. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1355-2198\(96\)00025-1](https://doi.org/10.1016/S1355-2198(96)00025-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1355219896000251>.
- [7] Pablo Bianucci, Juan Pablo Paz e Marcos Saraceno. “Decoherence for classically chaotic quantum maps”. Em: *Physical Review E* 65.4 (abr. de 2002). ISSN: 1095-3787. DOI:

- 10.1103/physreve.65.046226. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.65.046226>.
- [8] N. L Balazs e A Voros. “The Quantized Baker’s Transformation”. Em: *Europhysics Letters (EPL)* 4.10 (nov. de 1987), pp. 1089–1094. DOI: 10.1209/0295-5075/4/10/001. URL: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/4/10/001>.
- [9] Todd A. Brun e Rüdiger Schack. “Realizing the quantum baker’s map on a NMR quantum computer”. Em: *Physical Review A* 59.4 (abr. de 1999), pp. 2649–2658. ISSN: 1094-1622. DOI: 10.1103/physreva.59.2649. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.59.2649>.
- [10] Ignacio Gomez, Marcelo Losada e Olimpia Lombardi. “About the Concept of Quantum Chaos”. Em: *Entropy* 19 (mai. de 2017), p. 205. DOI: 10.3390/e19050205.
- [11] Marilena Ligabò. “Torus as phase space: Weyl quantization, dequantization, and Wigner formalism”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 57.8 (2016), p. 082110. DOI: 10.1063/1.4961325. eprint: <https://doi.org/10.1063/1.4961325>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.4961325>.
- [12] M. Degli Esposti, S. Nonnenmacher e B. Winn. “Quantum Variance and Ergodicity for the Baker’s Map”. Em: *Communications in Mathematical Physics* 263.2 (fev. de 2006), pp. 325–352. ISSN: 1432-0916. DOI: 10.1007/s00220-005-1397-3. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-005-1397-3>.
- [13] Mario Castagnino e Olimpia Lombardi. “Towards a definition of the quantum ergodic hierarchy: Ergodicity and mixing”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 388.4 (2009), pp. 247–267. ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.10.019>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108008753>.
- [14] Marcelo Viana e Krerley Oliveira. *Foundations of Ergodic Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2016. DOI: 10.1017/CB09781316422601.

- [15] Mario Castagnino e Olimpia Lombardi. “The classical limit of non-integrable quantum systems, a route to quantum chaos”. Em: *Chaos, Solitons Fractals* 28.4 (2006). Sir Hermann Bondi 1919–2005, pp. 879–898. ISSN: 0960-0779. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.08.149>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077905008106>.
- [16] F Bonechi e S De Bièvre. *Exponential mixing and log h time scales in quantized hyperbolic maps on the torus; rev. version*. Rel. téc. Out. de 1999. URL: <https://cds.cern.ch/record/403688>.
- [17] A. Bouzouina e S. De Bièvre. “Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus”. Em: *Communications in Mathematical Physics* 178.1 (1996), pp. 83–105. DOI: [cmp/1104286555](https://doi.org/cmp/1104286555). URL: <https://doi.org/>.
- [18] Ignacio Gomez e Mario Castagnino. “Towards a definition of the Quantum Ergodic Hierarchy: Kolmogorov and Bernoulli systems”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 393 (jan. de 2014), pp. 112–131. ISSN: 0378-4371. DOI: [10.1016/j.physa.2013.08.070](https://doi.org/10.1016/j.physa.2013.08.070). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2013.08.070>.
- [19] A.M Ozorio de Almeida e M Saraceno. “Periodic orbit theory for the quantized baker’s map”. Em: *Annals of Physics* 210.1 (1991), pp. 1–15. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(91\)90274-C](https://doi.org/10.1016/0003-4916(91)90274-C). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000349169190274C>.