

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

**Interação de espirais em 2D:  
redução da dinâmica à interação de  
defeitos e exploração de novas estruturas  
espaço-temporais<sup>†</sup>**

**Carolina Brito Carvalho dos Santos**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Leonardo Gregory Brunnet e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre, 30 de janeiro de 2003

---

<sup>†</sup> Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pelo Commissariat d'Énergie Atomique (CEA).

## Agradecimentos

Atribuir nossos fracassos aos pais é sempre uma alternativa possível, a qual possui, inclusive, respaldo em argumentos da psicanálise. Atribuir todo sucesso a eles é, por outro lado, injusto com aqueles que trabalham para superar suas dificuldades. Não diria, portanto, que minhas vitórias ou derrotas são de inteira responsabilidade dos meus pais, mas estou certa de que o alicerce da minha personalidade é resultado de tudo o que eles são. Seja isto um elogio ou uma crítica (ou ambos!), gostaria de agradecer aos meus pais por todo amor, apoio e incentivo dado desde sempre. Os ensinamentos mais eficazes são transmitidos com atitudes e, por esta razão, me sinto imensamente feliz por ter o prazer de dividir minha vida e ser educada por eles.

Obviamente, muitos outros personagens fazem parte da construção da minha pessoa. Entre eles, muitos familiares e amigos especiais. Aliás, especialíssimos! Portanto, meus agradecimentos à minha Tia Leila, a qual considero minha segunda mãe, aos meus irmãos e a muitos amigos. Por terem sido fundamentais para meu crescimento e amadurecimento pessoal, não posso deixar de agradecer de maneira especial à Cris e à Bingue. Não apenas como amigas excepcionais, mas também como juízas da minha consciência. Também especial é o amor que tenho por três grandes amigas: minha irmã Cíntia, a Mari e a Leca. Ao Pedro, que, embora seja uma pessoa recente na minha vida, torna a minha existência muito mais plena. Os nossos muitos momentos de discussões políticas, filosóficas e pessoais fazem dele, hoje, alguém indispensável para minha felicidade.

Mais diretamente relacionado à minha vida acadêmica, agradeço ao meu orientador Leonardo Brunnet. Não somente pelas discussões físicas (desde a graduação), mas também pela segurança transmitida em alguns momentos difíceis. Pela sensibilidade de um amigo e conselhos de psicólogo dados por ele em momentos fundamentais. Ao professor Hugues Chaté, com quem trabalhei por quase 5 meses na França. Além de excelente profissional, é o responsável pela maravilhosa

oportunidade de ter feito parte do meu mestrado em Paris e ter vivido uma das experiências mais excepcionais da minha vida! Ao professor Igor Aranson, com quem tive a oportunidade de discutir algumas dúvidas e aprender muito.

E, finalmente, à UFRGS. Neste sentido, devo meus reconhecimentos à sociedade brasileira, a qual sustenta esta universidade. Muitas pessoas mereceriam meus agradecimentos por tornarem possível a manutenção da instituição no excelente nível em que ela se encontra. Vou me abster de citar professores por acreditar que acabaria injustamente esquecendo vários. Mas não posso deixar de agradecer aos meus colegas, em especial aos colegas da sala M207. Eles são responsáveis pelo maravilhoso ambiente de trabalho. Não me refiro aos momentos de descontração (somente!), mas às constantes ajudas e muitas discussões sócio-político-científica que fazem daquela sala um local de grande produtividade. Não apenas produção científica, mas nas mais diversas áreas do conhecimento humano. É um grande prazer fazer parte dessa atmosfera!

## Resumo

O presente trabalho apresenta uma nova proposta de tratamento de estruturas espirais em meios contínuos oscilatórios na vizinhança de bifurcações de Hopf supercríticas. Tais estruturas são normalmente descritas pela Equação de Ginzburg-Landau Complexa a qual usa um campo complexo associado a essas oscilações. A proposta apresentada reduz a dinâmica de espirais à interação entre os centros das mesmas. Inicialmente comparamos numericamente as duas descrições e com os ganhos computacionais decorrentes da abordagem reduzida caracterizamos finamente as estruturas espaço-temporais formadas nesses sistemas: em vez dos estados congelados mencionados anteriormente na literatura encontrou-se uma dinâmica espaço-temporal intermitente. Esse regime ocorre em duas fases distintas: *Líquido de Vórtices* e *Vidros de Vórtices*. Esta última evolui em escalas de tempo ultralentas como em fenômenos semelhantes encontrados na Mecânica Estatística, apesar de sua origem puramente determinista.

# Sumário

<b>1. Introdução</b> . . . . .	2
<b>2. Sistemas Dinâmicos</b> . . . . .	7
2.1 Sistemas Dinâmicos: Definição e Exemplos . . . . .	7
2.1.1 Célula de Rayleigh-Bénard . . . . .	8
2.1.2 Reação de Belousov-Zhabotinsky . . . . .	9
2.1.3 Morfogênese . . . . .	10
2.1.4 Outros Exemplos . . . . .	13
2.2 Sistemas Dinâmicos: um Tratamento Matemático . . . . .	16
2.2.1 Análise de estabilidade linear antes da bifurcação . . . . .	17
2.2.2 Análise de estabilidade após a bifurcação . . . . .	19
2.3 Um Método Alternativo: a Equação de Ginzburg-Landau Complexa (EGLC) . . . . .	20
<b>3. Algumas Características da Equação de Ginzburg-Landau Complexa (EGLC)</b> . . . . .	25
3.1 Análise de estabilidade linear da ECGL . . . . .	27
3.2 Defeitos . . . . .	33
3.2.1 Definições . . . . .	34
3.2.2 Espirais . . . . .	36
3.3 Os Limites do Diagrama de Fases . . . . .	39

<b>4. Teoria de Interação de Ondas Espirais em Meios Oscilatórios .</b>	<b>46</b>
4.1 Redução do estudo de interação de espirais ao Conjunto Equivalente de Equações Diferenciais Ordinárias (CEEDOs) . . . . .	48
4.1.1 O método . . . . .	50
4.2 Algumas características do CEEDOs . . . . .	59
<b>5. Resultados: análise comparativa e estudo da dinâmica . . . . .</b>	<b>65</b>
5.1 Medidas comparativas entre EGLC e o CEEDOs . . . . .	68
5.1.1 Caso Monotônico ( $c < c_{cr} = 0,845$ ) . . . . .	69
5.1.2 Caso Oscilatório ( $c > c_{cr} = 0,845$ ) . . . . .	74
5.2 Estudo dos sistemas Líquido e Vidro . . . . .	78
5.2.1 Fase Líquida . . . . .	79
5.2.2 Fase Vitrosa . . . . .	88
5.3 Comentários a respeito do método numérico . . . . .	95
<b>6. Conclusões, discussões e perspectivas . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>Apêndice</b>	<b>109</b>
<b>A. Análise de Instabilidade Linear da Equação de Ginzburg Landau</b>	<b>109</b>
<b>B. Determinação das equações de velocidade - apresentação do método em linhas gerais . . . . .</b>	<b>113</b>
B.1 Limite $r \rightarrow \infty$ . . . . .	113
B.2 Limite $r \rightarrow 0$ . . . . .	118
B.3 Determinação das velocidades . . . . .	120
B.4 Caso $c < c_{cr}$ . . . . .	121
<b>Referências . . . . .</b>	<b>124</b>

# 1. Introdução

Baseados na idéia de *turbulência mediada por defeitos*, lançada no início dos anos 80 [12, 2, 32, 30, 31], o presente trabalho apresenta e defende uma nova proposta de descrição de sistemas dinâmicos em meios oscilantes [23, 24]. A referida proposta refere-se à possibilidade de suprimir o espaço contínuo (normalmente utilizado para descrever sistemas dinâmicos com extensão espacial) e descrever a dinâmica apenas considerando-se a interação de estruturas existentes num certo intervalo de parâmetros: os defeitos *espirais* (também chamados *vórtices*). Tal descrição reduz o tratamento a partir de equações diferenciais parciais a uma dinâmica discreta onde o comportamento do sistema é caracterizado pela presença destes defeitos.

Antes de propormos a alternativa de descrição reduzida, introduziremos nosso objeto de estudo, os sistemas dinâmicos em meios oscilantes. Apresentamos exemplos destes sistemas em diversas áreas da ciência mostrando uma idéia da generalidade do tema. A motivação para estudá-los é colocada como uma consequência desta generalidade e das semelhanças macroscópicas entre sistemas que são microscopicamente descritos de maneiras diferentes. Argumentamos as dificuldades de tratamento destes sistemas usando as equações diferenciais que os descrevem em primeiros princípios \*. Com base nestes argumentos de semelhanças entre

---

\* Quando falamos em *descrição partindo de primeiros princípios* estamos nos referindo ao nível de descrição mais elementar que se faz sobre cada sistema dependendo do detalhamento que se busca. Em sistemas fluidos, por exemplo, a descrição a partir de primeiros princípios considera campos de velocidade, campos de densidade e os trata com equações hidrodinâmicas. Em sistemas quânticos, esta descrição será microscópica e será tratada, por exemplo, com a Equação de Schrödinger. Frequentemente ao longo do trabalho, nos referimos à descrição a

sistemas e de dificuldade de tratamento dos mesmos em nível microscópico, apresentamos uma alternativa de abordagem do problema. Este método alternativo é uma equação de amplitude: a Equação de Ginzburg-Landau Complexa (EGLC) em duas dimensões. Esta equação descreve propriedades de meios oscilatórios na vizinhança de uma bifurcação de Hopf supercrítica. A EGLC não possui uma dedução a partir de primeiros princípios. Existem muitos argumentos de simetrias [1, 2, 10, 12, 16] que nos permitem compreender a razão pela qual ela é geral e descreve uma vasta gama de sistemas bastante diferentes [17, 18, 19]. Tais argumentos serão expostos, mas nosso trabalho não se dedica a explorar rigorosamente a origem da equação.

É importante salientarmos que não pretende-se descrever dinâmicas em regiões altamente caóticas, tornando impossível a formação das estruturas espirais. A pretensão é descrever meios oscilantes em uma região de parâmetros onde os defeitos espirais são estáveis e fortemente atuantes. Neste referido intervalo de parâmetros, os métodos existentes não descrevem eficazmente tais sistemas e algumas alternativas para entendê-los devem ser encontradas.

Devido à generalidade da equação em descrever meios oscilantes, muito se conhece a respeito dela. A EGLC já foi objeto de estudo de muitos trabalhos e muitas de suas propriedades e/ou características já são conhecidas. Apresentamos a solução analítica mais simples que ela possui (ondas planas) e seus intervalos de estabilidade.

Mostramos que os intervalos de estabilidade das ondas planas estão relacionados aos intervalos de estabilidade das espirais, as quais também são soluções da equação. As espirais possuem importância “vital” para a descrição das diversas estruturas espaço-temporais que a EGLC apresenta. São os intervalos de estabilidade das espirais que determinam a existência de cada fase da equação. Esta característica explicita a importância destas estruturas na evolução da dinâmica.

---

partir de primeiros princípios como uma *descrição em nível microscópico*.



Apresentamos o diagrama de fases da equação, evidenciando as mais diversas estruturas que ela representa e destacamos a região de interesse do nosso trabalho. Nosso estudo está dirigido a uma região do diagrama de fases onde a solução de espiral única é estável. Até o presente trabalho, acreditava-se que, neste intervalo de parâmetros, as estruturas existentes eram congeladas. Um comportamento vítreo chegou a ser proposto para caracterizar tais estruturas [20, 33, 34]. A existência de uma dinâmica intermitente foi a primeira novidade que a abordagem proposta por nós apresentou: encontramos que as estruturas que se mostravam congeladas em escalas de tempo usuais (simuladas com a EGLC) evoluem em escalas de tempo ultralentas.

Este estado turbulento mediado por defeitos ocorre em duas fases distintas: *Líquido de Vórtices*, o qual é caracterizado por difusão normal das espirais e uma dinâmica que relaxa muito lentamente, intermitente, a qual chamamos *Vidros de Vórtices*.

Após evidenciar a importância destes defeitos na existência das fases que a equação apresenta e explicar que nosso estudo mostrou um cenário diferente do descrito até o presente trabalho, finalmente a proposta de redução da dinâmica à interação dos defeitos é apresentada. O conjunto de equações diferenciais desenvolvidas por Aranson e colaboradores [23, 24] é deduzido em linhas gerais. Ao invés de considerar todo o campo complexo “A” (o qual é descrito pela EGLC) para caracterizar a dinâmica, o método supõe que é suficiente descrevê-la apenas considerando as posições dos centros dos defeitos e suas fases.

O Conjunto Equivalente de Equações Diferenciais Ordinárias (CEEDOs) apresenta muitas vantagens sobre a EGLC. Por suprimir a necessidade do campo complexo A por todo o espaço, a eficiência computacional é muito maior, possibilitando o estudo dos sistemas em intervalos de tempo impossíveis de simular com a equação completa (EGLC). Esta possibilidade de ampliar as escalas de tempo computacionais implicam a ampliação real das escalas de tempo e dimensões dos sistemas. A ampliação das dimensões espaciais permite que estudemos

alguns comportamentos livres de efeitos de tamanho finito, os quais são grandes limitantes de estudos teóricos sobre sistemas reais.

Apresentamos algumas características do CEEDOs, estudando as interações entre as espirais. Mostramos algumas propriedades destas equações que explicam as razões pelas quais o modelo consegue reproduzir os fenômenos apresentados pelos sistemas quando estes são estudados no contexto da EGLC.

Obviamente, qualquer nova proposta de modelo exige comprovações de sua capacidade em descrever os sistemas em intervalos para os quais ela foi deduzida. Não há razões, *a priori*, para assumir a nossa abordagem como verdadeira e/ou superior à EGLC. Esta última é um modelo bastante estudado e aceito para descrever meios oscilatórios. Nós afirmamos que nossas simulações levaram a cenários diferentes daqueles descritos pela EGLC em razão dos limites os quais podemos alcançar com o CEEDOs. Portanto, precisamos mostrar que ambas as abordagens são equivalentes nos intervalos onde elas descrevem igualmente bem os sistemas. Uma vez tendo comprovado a competência das equações reduzidas em descrever os meios oscilatórios, podemos assumi-las como um bom modelo e valer-nos disso para explorar os sistemas dinâmicos usando-as como uma ferramenta poderosa.

A apresentação de sistemas dinâmicos e motivação para estudá-los estão colocados no capítulo 2. Neste mesmo capítulo, a EGLC é apresentada juntamente com algumas justificativas para sua generalidade em descrever sistemas bastante diferentes. O capítulo 3 é dedicado a explorar a equação, apresentando características e criando subsídios para entender a construção do seu diagrama de fases. O capítulo 4 é dedicado ao CEEDOs, desenvolvendo algumas linhas gerais de sua dedução. São estudadas algumas características destas equações reduzidas na tentativa de entender a reprodução de certos fenômenos. A comprovação de que o modelo (CEEDOS) se equivale à EGLC nos limites onde ambas as abordagens respondem bem e o estudo dos sistemas usando o CEEDOs estão desenvolvidos no capítulo 5. Ele é destinado, portanto, a mostrar nossos resultados e algumas

rápidas discussões a respeito de nossos estudos. Nossas discussões e conclusões a respeito do trabalho estão feitas no capítulo 6. Muitas de nossas idéias e intuições sobre o que foi apresentado no capítulo 5 estão colocadas nesse capítulo. Optamos por não discuti-las no capítulo de resultados (cap.5) por que há diversos temas em aberto e algumas idéias em construção. Portanto, o capítulo 6 contém, também, nossas perspectivas a respeito de algumas portas deixadas abertas para que alguns fenômenos sejam elucidados com base em muitas idéias discutidas ao longo deste trabalho.

## 2. Sistemas Dinâmicos

### 2.1 Sistemas Dinâmicos: Definição e Exemplos

Um sistema dinâmico é todo o objeto suscetível a evoluir de forma determinista em função de uma variável independente, a qual corresponde, em geral, ao tempo. Desta maneira, as iterações sucessivas de uma aplicação ou mesmo uma equação diferencial são sistemas dinâmicos.

Há exemplos de sistemas dinâmicos em diferentes áreas como física, química e biologia. A ampla ocorrência destes sistemas nos mais diversos ramos do conhecimento humano é a grande motivação para investigá-los. O estudo de algumas características gerais de sistemas dinâmicos muito diferentes nos permite identificar vários pontos comuns entre eles. Essencialmente, cada sistema dinâmico é descrito microscopicamente\* por um conjunto de equações (normalmente acopladas e sem solução analítica). As semelhanças encontradas entre eles são, em geral, macroscópicas†. Ou seja, é possível visualizar macroscopicamente algumas alterações sofridas por tais sistemas. Esta maneira macroscópica de descrevê-los permite a comparação entre os sistemas dinâmicos. A identificação das semelhanças possibilita o estudo “geral” dos mesmos. Portanto, sistemas dinâmicos bastante diferentes podem ser descritos, pelo menos em nível qualitativo, por um mesmo tipo de abordagem, a qual será discutida na segunda parte deste capítulo.

---

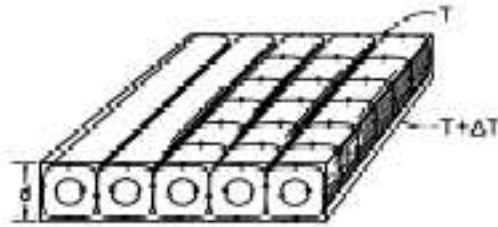
\* *descrição microscópica* significa, neste caso, a descrição feita a partir de primeiros princípios. Particularmente, para sistemas fluidos a referida descrição é feita a partir da definição de campos de velocidade, densidade, etc.

† A mudança de solução no nível de descrição em primeiros princípios, é macroscopicamente observada por uma mudança de estrutura espaço-temporal do sistema

A primeira parte deste capítulo contém uma breve exposição exemplificando sistemas dinâmicos. A argumentação é bastante qualitativa e o objetivo é expor um panorama geral de alguns sistemas completamente distintos para os quais podemos definir características comuns e elaborar modelos universais para descrição dos mesmos.

### 2.1.1 Célula de Rayleigh-Bénard

A Célula de Rayleigh-Bénard [1, 2, 3] é um sistema físico muito conhecido e investigado desde o início do século XX. Ele está esquematizado na figura (2.1).



**Fig. 2.1:** Figura esquemática da Célula de Rayleigh-Bénard mostrando as linhas de fluxo para um estado no qual  $R > R_c$ . (figura extraída de [2])

Idealmente, este sistema consiste em placas infinitas nas direções  $x$  e  $y$  (para que não seja necessário, num primeiro momento, considerar efeitos de fronteira), e um fluido preenchendo o espaço entre elas. As placas são condutores perfeitos e estão a temperaturas diferentes. Existe, portanto, um gradiente de temperatura entre elas, sendo que a placa inferior é colocada em mais alta temperatura.

Há um limite desta diferença de temperatura ( $\Delta T$ ) abaixo do qual a temperatura entre as placas cresce linearmente e o fluido permanece em repouso. Este é o estado de *equilíbrio* ou *condutor*, onde não há transporte de massa. Ocorre, porém, que o fluido próximo à placa inferior é menos denso e isto gera uma instabilidade devido à existência do campo gravitacional. Acima de um certo valor do

gradiente de temperatura, esta instabilidade vence e começa a haver transporte de matéria entre as placas. O sistema assume um estado *convectivo*.

Portanto, a existência de um gradiente de temperatura entre as duas placas e a possibilidade de variarmos tal diferença permite-nos observar mudanças macroscópicas no comportamento do sistema. Esta diferença de temperatura é definida como o *parâmetro de controle* ( $R$ ) do sistema e determina o limite acima do qual o sistema muda de estado.

Estamos afirmando, portanto, que existe um parâmetro externo que define o tipo de solução que o sistema assume e que tal solução é identificada de maneira macroscópica. Na linguagem matemática, acima de um certo valor crítico do parâmetro de controle ( $R_c$ ), o sistema sofre uma *bifurcação*: ou seja, a solução estável, a qual era o estado condutor para  $R < R_c$ , passa a ser o estado convectivo para  $R > R_c$ . Este novo estado do sistema apresenta *texturas espaciais*, o que significa dizer que a estrutura do fluido, que antes da bifurcação era homogênea em todo o espaço, passa a ser diferente para diferentes pontos do espaço. Diz-se que o sistema passa a apresentar *padrões ou estruturas espaciais*<sup>‡</sup>.

### 2.1.2 Reação de Belousov-Zhabotinsky

Dentre os sistemas dinâmicos químicos, muitas reações apresentam formação de padrões. A mais conhecida e estudada é a reação de Belousov-Zhabotinsky (BZ). A característica principal de um sistema deste tipo é a competição entre as diferentes taxas de crescimento temporal e difusão espacial dos componentes químicos que compõem a reação. Esta competição irá definir a coexistência dos chamados *inibidores* e *ativadores*, originando as texturas espaciais.

Estas oscilações entre as concentrações dos componentes químicos podem ser

---

<sup>‡</sup> Do nosso ponto de vista, “*texturas*” é a tradução mais adequada para “*patterns*”. Embora “*padrões*” seja a tradução literal, “*textura*” ou “*estrutura*” expressa melhor o significado destas flutuações espaço-temporais as quais são chamadas “*patterns*” em inglês

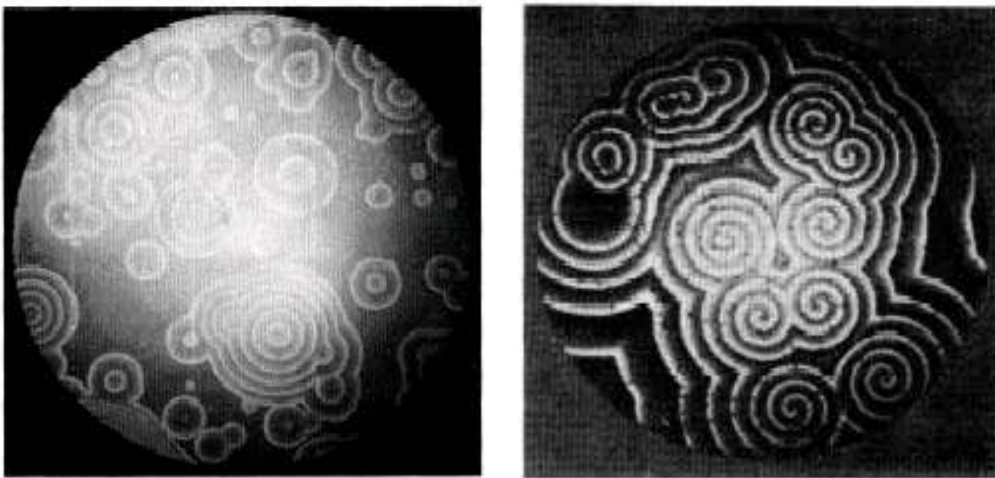
visivelmente observadas se tais componentes forem convenientemente escolhidos. A experiência que está mostrada neste trabalho, foi feita com o elemento *Ferro* como catalizador porque ele possui um estado *reduzido*  $Fe^{2+}$ , o qual aparece laranja e o estado *oxidado*  $Fe^{3+}$ , que é azul. Sob diferentes condições experimentais (dentre as quais as mais influentes são a concentração dos elementos, temperatura, pureza da amostra), o sistema será estável tanto no seu estado reduzido ou oxidado. Existem também intervalos de parâmetros onde o sistema pode ser *biestável*, dentro dos quais, para uma gama de parâmetros fixa, o sistema pode ir para um ou outro estado dependendo das condições iniciais.

O padrão espacial observado na figura (2.2 - (a)) é decorrente de uma perturbação feita em um dado ponto que se propaga concentricamente. Tal perturbação é um pulso periódico (assim escolhida por conveniência) que irá mudar a concentração do elemento naquele ponto, alterando, portanto, a coloração do sistema. Esta perturbação se propaga a partir de um “centro” formando os chamados *padrões tipo alvo* (*target patterns*). Quando duas ondas emitidas em diferentes pontos do meio por diferentes “pulsos de perturbação” se encontram, elas não se interpenetram; elas se aniquilam e formam estruturas angulares (olhar figura 2.2 - (a)).

Este experimento também pode apresentar formação de uma estrutura muito comum em meio excitáveis: as espirais. Observemos a figura (2.2- (b)). Tais estruturas aparecem quando um único pulso é emitido e, em um dado ponto, esta onda concêntrica é “quebrada” e começa a girar em torno do local onde a perturbação foi gerada.

### 2.1.3 Morfogênese

No campo da biologia, optamos por comentar um fenômeno natural observado em grande escala e modelado teoricamente com base nos conhecimentos de dinâmica não linear.



(a)

(b)

**Fig. 2.2:** Reação de Belousov-Zhabotinsky: parte branca representa as regiões de maiores concentrações do componente. (b) As espirais giram em um período de, aproximadamente, 1 minuto (figura extraída de Winfree e Strogatz, 1983)



O desenvolvimento da estrutura de um organismo durante o seu crescimento é um fenômeno muito interessante que vem sendo estudado intensamente desde a última década. A este estudo chamamos *morfogênese* [1].

O fenômeno interessante sobre o qual comentaremos são os padrões espaciais existentes na pelagem dos mamíferos e nas conchas de moluscos. Estas estruturas espaciais bem definidas leva-nos a buscar uma forma de modelagem para o fenômeno.

O que se sabe sobre o processo da morfogênese é que, em nível microscópico (controle químico molecular) o embrião é homogêneo. Este mesmo embrião visto em escala macroscópica exibe uma não homogeneidade devido ao fato de possuir tamanho finito. A questão colocada é como a não uniformidade macroscópica dos padrões existentes nos pêlos dos mamíferos ou conchas dos moluscos é comunicada a escalas microscópicas de forma que o processo, em princípio sem razões para gerar um organismo com padrão não homogêneo, gere um organismo que exiba tais estruturas.

Para explicar esta aparente contradição, foi postulado a existência de *morfogens*, argumentando-se que a concentração local destes definiria o desenvolvimento celular. Se tais morfogens obedecessem a reações de difusão, eles experimentariam uma quebra de simetria a qual explicaria a formação de tais padrões.

Há ainda uma discussão sobre a credibilidade desta forma de abordagem. Argumenta-se que se a concentração destes morfogens que definem os padrões fosse realmente regida por equações de difusão, este sistema seria facilmente perturbado e que, portanto, a construção de um modelo tão pouco robusto não faria sentido. Assim, propõe-se que tal gradiente de concentração pode ser tratado com equações de amplitude e a formação de tais padrões dar-se-ia devido à instabilidade de comprimento de onda finito.

É importante salientar que os primeiros estágios da morfogênese não são bem conhecidos e que, portanto, esta teoria proposta é muito fenomenológica. Não existe comprovação de tais suposições; apenas é uma abordagem inicial que re-

produz razoavelmente bem os padrões observados na natureza.

Não temos como objetivo fazer uma análise quantitativa minuciosa deste tema. Desejamos apenas abordá-lo de maneira tal que fique explícita a existência de tais padrões e a possibilidade de uma modelagem.

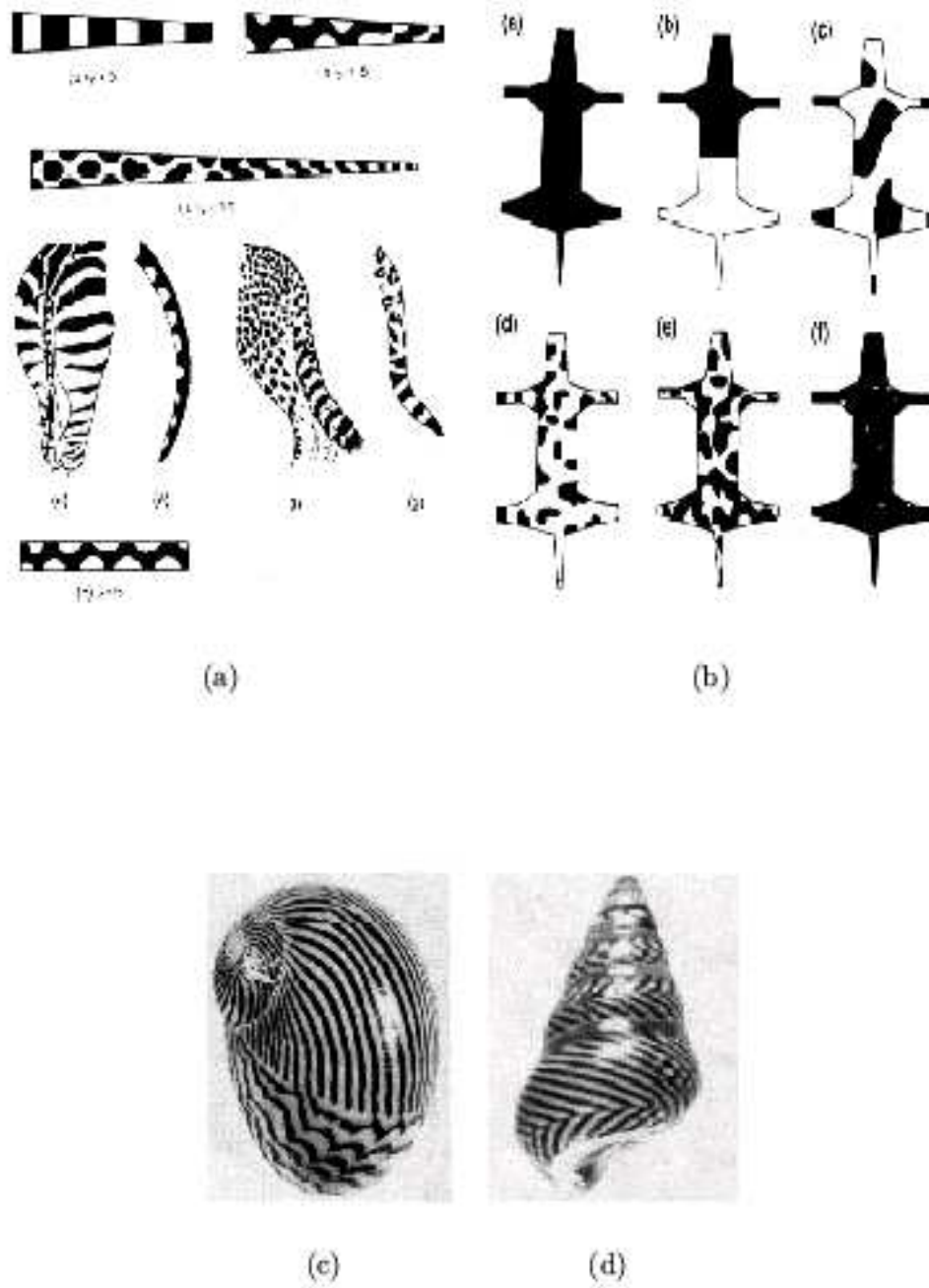
Observemos as figuras (2.3). As figuras (a) e (b) são, respectivamente, os padrões naturais existentes na natureza e a simulação destas estruturas modelando via instabilidade de comprimento de onda finito. É importante notarmos que um ingrediente determinante neste sistema é a relação entre o tamanho do sistema e o comprimento de escala do padrão. Isto pode ser verificado ao observarmos que as diferentes partes dos corpos dos mamíferos geram diferentes tipos de estruturas.

Sobre o aparecimento de estruturas espaciais em moluscos, há alguns aspectos muito interessantes a serem salientados. Sabe-se que é gerado uma coluna por vez. Portanto, a existência de muitas linhas numa concha exprime o tempo que o animal levou para desenvolver-se. Do ponto de vista de modelagem, isto significa que é possível simularmos tais padrões via equações unidimensionais e a existência de muitas linhas surge devido a evolução temporal de tais sistemas.

Para finalizar, observemos a figura (c). Ela exhibe uma concha que muda absolutamente de padrão a partir de um certo limiar. Estima-se que, em um certo estágio de sua evolução, a concentração de morfogens mudou absolutamente e que, matematicamente, isto se expressa pela variação nos parâmetros das equações.

#### 2.1.4 Outros Exemplos

Há muitos artigos experimentais que atestam a existência de texturas espaciais nos mais diversos tipos de sistemas dinâmicos. Exemplos experimentais de tais estruturas (texturas) podem ser encontrados em experimentos óticos [4], em tecidos do miocárdio quando ondas elétricas oscilantes são aplicadas no coração para tentar entender o processo de arritmia cardíaca [5], em experimentos de crescimento de superfícies [8].



**Fig. 2.3:** Exemplos naturais (a) e resultados de modelos (b) de padrões espaciais existentes em mamíferos. As figuras (c) e (d) mostram exemplos de padrões naturais em moluscos (figura extraída de [1]).

Outras três referências importantes com relação à abordagem experimental de sistemas oscilatórios onde as texturas espaciais estão presentes são estudos em reações químicas. Duas delas, [6] e [7], descrevem em detalhes a formação de espirais numa reação de BZ, sendo que a segunda faz também uma excelente abordagem teórica sobre o experimento. A terceira referência, o artigo [9], contém uma abordagem matemática feita com uma equação de amplitude (a mesma usada em [7], a qual será nosso objeto de estudo) sobre um experimento para compreender o fenômeno de turbulência em reações químicas.

Partindo de primeiros princípios, todos estes sistemas dinâmicos citados (e muitos outros não enumerados aqui) são descritos de formas muito distintas. Os sistemas fluidos, por exemplo, são descritos pela equação de Navier-Stokes e da Continuidade (olhar, por exemplo, [2] e [3]). Na imensa parte dos casos, não há solução analítica neste nível de descrição após o limiar de estabilidade e as soluções numéricas exigem muito tempo computacional. Além de equações diferenciais complicadas (por serem não lineares e acopladas), nem sempre é fácil representar matematicamente as condições de contorno do problema.

Aliando a esta dificuldade as semelhanças encontradas quando observamos macroscopicamente (texturas) tais sistemas dinâmicos, surge o interesse na tentativa de “universalizar” seus comportamentos. Portanto, a busca por um grupo de equações gerais que descrevam qualitativamente uma vasta gama de distintos sistemas é fortemente justificada.

Um primeiro passo na busca de tais equações é identificar os pontos comuns aos sistemas para, num momento posterior, encontrar uma maneira de descrevê-los matematicamente. A seção seguinte é destinada a este fim.

## 2.2 Sistemas Dinâmicos: um Tratamento

### Matemático

Conforme comentado no final da seção anterior, o objetivo da abordagem que segue é identificar, em sistemas dinâmicos microscopicamente descritos por equações absolutamente diferentes, elementos comuns. Esperando-se, assim, traduzir para uma linguagem matemática o que é macroscopicamente observado e descrever, pelo menos em nível qualitativo, tais sistemas.

Nossa abordagem será feita considerando-se sistemas onde existe um estado estacionário no qual eles se mantêm para um certo conjunto de parâmetros. Aplicando-se um estímulo externo (o que se traduz, na prática, a variar um certo parâmetro do sistema), o qual será diferente para cada sistema (a saber: a diferença de temperatura na Célula de Rayleigh-Bénard, o pulso periódico de perturbação no experimento de BZ) , eles poderão sofrer uma mudança qualitativa de comportamento observável macroscopicamente. Se isto ocorrer, e este padrão se mantiver, diz-se que o sistema sofreu uma bifurcação. Na vizinhança desta, tais sistemas podem ser descritos por um conjunto reduzido de equações não lineares de forma genérica.

A análise de estabilidade linear das soluções do conjunto de equações que descreve o sistema nos permitirá evidenciar a existência de uma bifurcação e caracterizar o tipo de estrutura bifurcada (estrutura espacial, temporal, espaço-temporal). Por outro lado, esta análise não responde sobre o tipo de solução que o sistema irá “escolher” após sofrer tal bifurcação. Para conhecê-las, é necessário fazer análise de estabilidade da solução encontrada em relação a uma perturbação que favoreceria uma outra solução.

Nas seções seguintes estão propostos os métodos para abordar o problema. Num primeiro momento, faremos a análise de estabilidade linear das soluções das equações que descrevem microscopicamente sistemas dinâmicos antes de tais

sistemas serem perturbados. Na seqüência, conhecendo-se o intervalo de parâmetros para o qual o sistema desestabiliza e assume uma outra solução, buscamos determinar o estado assumido por ele neste novo regime (após a bifurcação).

### 2.2.1 Análise de estabilidade linear antes da bifurcação

O tratamento mais geral que poderíamos propor é supor uma separação entre as partes linear e não-linear das equações que descrevem os sistemas microscopicamente. Suponhamos, portanto, que um dado sistema evolui segundo um conjunto de equações do tipo [2]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L(R, \nabla)U + N(U), \quad (2.1)$$

sendo  $U^{\S}$  o conjunto de variáveis que descrevem o estado do sistema,  $L$  um operador linear, o qual possui, em geral, um termo de derivadas espaciais e depende de um ou mais parâmetros de controle externos  $R$ .  $N(U)$  é um termo não linear na descrição microscópica dos sistemas. Observemos que esta suposição é bastante geral; não foram feitas restrições sobre o tipo de equações. A única hipótese é de que exista um termo linear separável de um outro não-linear.

Chamemos de  $U_0$  a solução encontrada antes da bifurcação. Considerando-se as perturbações existentes num sistema real, podemos classificá-la segundo sua estabilidade. Se tais perturbações são amortecidas,  $U_0$  é dita estável; do contrário, as perturbações serão amplificadas e o sistema assumirá uma outra solução. Neste último caso, diz-se que  $U_0$  é instável.

Para fazermos esta classificação, estudamos o comportamento de uma pequena perturbação, a qual iremos supor infinitesimal. Então, suponhamos a solução  $U_0$

---

<sup>§</sup> Para deixar mais claro a idéia desta abordagem, podemos exemplificá-la com o tratamento analítico do experimento de Rayleigh-Benard. Nele, este conjunto de equações (2.1) é dado pelas equações hidrodinâmicas (Equação de Navier-Stokes, Equação da Continuidade e Equação do Calor).

acrescida de uma pequena perturbação  $u$ :  $U = U_0 + u$  ¶ .

Substituindo esta solução perturbada na expressão (2.1), expandindo-se o termo não linear em torno do ponto  $u = 0$  (solução não perturbada),

$$N(U_0 + u) = N(U_0) + \frac{\partial N(U)}{\partial U}(U_0 + u - U_0) \quad (2.2)$$

definindo-se

$$\frac{\partial N(U)}{\partial U} \equiv DN(U_0) \quad (2.3)$$

e utilizando-se (2.1), obtemos um sistema linearizado para a perturbação  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(R, \nabla)u + DN(U_0)u \equiv L_0u \quad (2.4)$$

Tratemos o problema na base dos autovetores do operador  $L_0$ , a qual denotaremos  $\{u_j\}$ :

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \lambda_j u_j \quad (2.5)$$

Cada componente  $u_j$  evolui temporalmente de forma exponencial:

$$u_j = u_{j,0} \exp(\lambda_j t) \quad (2.6)$$

Sendo  $\lambda_j = \Re(\lambda_j) + i\Im(\lambda_j)$ , teremos:

$$u_j = u_{j,0} \exp(\Re(\lambda_j)t + i\Im(\lambda_j)t) \quad (2.7)$$

---

¶ Voltando ao exemplo da célula de RB, esta solução  $U_0$  é a solução condutiva e a perturbação feita verifica sua estabilidade; verifica se o sistema irá ou não assumir o estado convectivo, o qual é dado pela solução  $U = U_0 + u$ .

Portanto, o sinal da parte real de  $\lambda$  define a estabilidade da solução  $U_0$ . Se  $\Re(\lambda_j) > 0$ , a perturbação cresce e desestabiliza  $U_0$ . Caso isto ocorra, a parte imaginária de  $\lambda_j$  definirá se o padrão assumido pelo sistema depois da perturbação será estacionário ou oscilará no tempo. Ou seja, se  $\omega = \Im(\lambda_j) = 0$ , o padrão será estacionário; do contrário, ele oscilará periodicamente no tempo com uma frequência  $\omega$

Notemos que os autovalores  $\lambda_j$  dependerão de cada sistema físico a ser analisado. Em geral, é possível determinar uma faixa de parâmetros do sistema para os quais  $\Re(\lambda_j)$  são positivos e portanto a solução do problema não perturbado será instável. Na nossa abordagem, estes parâmetros do sistema são representados por  $R$ .

Com base na análise linear feita anteriormente, sabe-se se o sistema sofre uma bifurcação. Não se sabe, no entanto, a solução que ele escolhe após. Para conhecermos tal solução, é necessário fazer a análise de estabilidade das soluções possíveis para o sistema após o limiar de estabilidade.

### 2.2.2 Análise de estabilidade após a bifurcação

Após o limiar de estabilidade (quando  $\Re(\lambda_j)t$  ou  $R > R_c$ ), o sistema abandona seu estado estacionário. Qual o estado que ele assume? Matematicamente, todos os autovetores do operador  $L$  ( $\{u_j\}$ ) são soluções possíveis. No entanto, o estado do sistema será representado por uma destas possíveis soluções. Como reconhecê-la?

Teoricamente, supomos como solução o modo  $u_1$  e o perturbamos com a possível solução  $u_2$ . Se este último for amortecido, dizemos que  $u_1$  é estável em relação ao modo  $u_2$ . Utiliza-se o mesmo processo com o modo  $u_3$  e assim sucessivamente. Na prática, porém, a implementação deste método é impossível, tendo em vista a imensa quantidade de modos possíveis que o sistema poderia escolher. Portanto, embora pareça um método intuitivo e direto, a impossibilidade de aplicá-lo nos obriga a encontrar uma alternativa plausível.



Tendo em vista esta dificuldade (na maioria dos casos, a impossibilidade) em implementar um método onde a perda de detalhes sobre o sistema dinâmico é mínima, procura-se um método alternativo para que os sistemas dinâmicos fora do equilíbrio (mais precisamente logo após o limiar de instabilidade) possam ser descritos.

O chamado *método alternativo* recairá em uma equação de amplitude, a Equação de Ginzburg-Landau Complexa (EGLC). Algumas idéias usadas para a construção do método estão colocados na seção seguinte, bem como a interpretação dos termos da equação.

### 2.3 Um Método Alternativo: a Equação de Ginzburg-Landau Complexa (EGLC)

A equação que buscamos não possui uma dedução a partir de primeiros princípios; a EGLC é fenomenológica. Há diversos caminhos possíveis para chegarmos a sua expressão final e argumentar a validade (e generalidade) da equação. A nossa abordagem será feita a partir de argumentos intuitivos. Ao final, faremos interpretações sobre os termos da equação na tentativa de torná-la mais familiar.

Equações de amplitude descrevem uma lenta modulação do espaço e tempo próximo ao limiar de instabilidade. Mesmo que muitos modos coexistam no sistema, macroscopicamente é observado uma estrutura espacial a qual pode ser matematicamente descrita por um único modo o que “envolve” os demais. Imaginemos que o sistema esteja inicialmente em seu estado estacionário homogêneo<sup>||</sup> e que exiba *instabilidade de comprimento de onda finito*. Suponhamos ainda a existência de um parâmetro de controle externo  $R$ , o qual já foi explicado e exemplificado anteriormente. Possuir instabilidade de comprimento de onda finito significa que, quando consideramos a evolução temporal do modo normal

---

<sup>||</sup> Voltando a nossa analogia com a Célula de Rayleigh-Benard, seria o estado condutor

$\exp(-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r})$ , a taxa de crescimento de cada modo (ou seja,  $\Im(\omega)$ ) se comporta da seguinte maneira:  $\Im(\omega) < 0$  para valores de  $R < R_c$ , de forma que os modos irão decair com o passar do tempo e o estado inicial será estável. Quando  $R = R_c$ , a taxa de crescimento será nula ( $\Im(\omega) = 0$ ) e o modo associado a ela é chamado de *modo crítico*. Acima deste valor de  $R_c$ , a taxa de crescimento associada ao modo é positiva ( $\Im(\omega) > 0$ ) e ele dominará frente ao modo existente antes da bifurcação (solução estacionária homogênea é instável).

A parte real desta taxa de crescimento ( $\Re(\omega)$ ) determina se o padrão que existirá na dinâmica será estacionário ou irá oscilar no tempo. Se  $\Re(\omega) = 0$ , a amplitude dos modos próximos ao modo crítico ( $k_c$ ) estará crescendo no tempo se  $R > R_c$ , mas cada modo será estacionário no espaço.

A separação das texturas próximo ao limiar de instabilidade em termos de componentes rápidas (cujo comprimento de onda possui valor próximo ao comprimento de onda crítico) e um envelope que varia lentamente no espaço e tempo é escrito da seguinte forma:

$$\text{campos físicos} \propto A(x, y, t)e^{(i\omega_c + i\vec{k}_c\cdot\vec{r})} + A(x, y, t)^*e^{(-i\omega_c t - i\vec{k}_c\cdot\vec{r})}, \quad (2.8)$$

onde  $A(x, y, t)$  é a amplitude complexa ou envelope\*\*. Este envelope obedece à *Equação de Ginzburg-Landau Complexa (EGLC)*:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mu A + (1 + ib)\Delta A - (1 + ic)|A|^2 A, \quad (2.9)$$

$$\text{onde } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Por que razão esta equação descreve a evolução espaço-temporal da amplitude do campo complexo das grandezas físicas? A explicação de cada termo da equação juntamente com a observação de algumas de suas propriedades ([10, 16]

---

\*\* Na Célula de RB, este campo pode ser visto como o campo de temperaturas, por exemplo

) de invariância ajuda-nos a entender tal razão e mostra-nos que ela é bastante “razoável” e até mesmo intuitiva.

O primeiro termo do lado direito da equação é o responsável pela instabilidade linear. Tal instabilidade é saturada pelo termo cúbico. Observemos que estes dois termos descrevem o que chamamos de *Bifurcação de Hopf*. Se desconsideramos a dependência espacial do campo “A” e ainda supusermos que é uma variável complexa, recaímos no caso descrito por este tipo de bifurcação: um sistema *pontual* que perde a instabilidade de sua solução básica (sofre uma bifurcação) e a solução para a qual ele tende será um ciclo limite. O operador espacial é termo de *acoplamento* destes diversos sistemas pontuais a fim de descrever o comportamento de um sistema dinâmico com extensão espacial.

Observemos que a equação descreve um sistema que apresenta simetria de reflexão. Ou seja, a transformação de variáveis  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  não deve alterar a forma a equação. Portanto, o aparecimento deste operador espacial ( $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ) é justificado, já que estas derivadas espaciais são as de mais baixas ordens que respeitam a simetria de reflexão. Com outro argumento de invariância, entendemos por que razão o termo de saturação é cúbico e não quadrático (que seria o termo seguinte ao termo linear). O padrão formado deve ser invariante translacionalmente; o padrão deve ser o mesmo para a cada distância de  $\phi/k_c$ . Na equação, isto é traduzido pela invariância de  $A \rightarrow A \exp(i\phi)$ . Apenas termos de ordem ímpares mantêm a equação invariante frente a esta troca de variáveis. Como estamos supondo bifurcação *supercrítica*<sup>††</sup>, é o termo cúbico o termo de saturação.

E como entendemos os coeficientes complexos na frente dos termos cúbico e do operador espacial? Se nós tentarmos a solução de onda plana para esta equação ( $A = a_0 e^{(-i\omega t + i\vec{q} \cdot \vec{r})}$ ), obteremos uma relação de dispersão do tipo:  $\omega = -bq^2 - ca_0^2$ , com  $q^2 = \mu - a_0^2$ . Então, o coeficiente “b” mede a dispersão linear, já que relaciona a frequência com o comprimento de onda e o coeficiente “c” mede a dispersão

---

<sup>††</sup> nome dado às bifurcações que são saturadas pelo termo cúbico, não havendo necessidade, portanto, de escrever a série até a quinta potência em A.

não linear porque a superposição de modos com diferentes amplitudes (mas mesmos comprimentos de onda) não mantém a frequência invariante, invalidando o princípio da superposição linear.

A EGLC fornece uma simples descrição de meios oscilantes (nome dado aos meios excitáveis; olhar exemplos dados anteriormente) e por esta razão é uma equação estudada em diversos intervalos de parâmetros. A variação destes, permite reproduzir muitos tipos de comportamentos.

Gostaríamos de discutir o motivo pelo qual este tipo de descrição funciona. Poderíamos nos perguntar o motivo pelo qual uma equação que trabalha apenas com um modo marginal à bifurcação pode descrever bem sistemas nos quais, em geral, existem muitos modos coexistindo.

O que podemos argumentar é que, embora realmente haja muitos modos num sistema dinâmico neste limiar de instabilidade, a maioria possui uma dinâmica muito rápida (modos cuja parte real dos autovalores associados a eles são negativas e, portanto, relaxam rapidamente). Desta maneira, os modos com evoluções lentas dominarão a dinâmica e é possível *escravizarmos* os modos com relaxação rápida frente a este a este modos “dominadores”. A este tipo de abordagem damos o nome de *eliminação adiabática dos modos escravos* (desenvolvimento matemático do método pode ser encontrado em [2] e [11]).

O fato de o sistema poder ser descrito por uma única equação diferencial não-linear para uma transformada de Fourier especial (*modo crítico*) é válido para sistemas onde a perturbação de energia seja inicialmente concentrada em torno deste modo crítico (o qual é selecionado pela teoria de estabilidade linear) e que, com o decorrer do tempo, ela não se difunde para demais modos. A prova de que esta perturbação se mantém em torno de um modo crítico para muitos sistemas e que, portanto, a EGLC é uma ferramenta geral e poderosa para a descrição deles é feita num excelente artigo de Di Prima, Eckaus e Segel [17] ††.

---

†† Na linha de artigos que buscam comprovar a validade das equações de amplitude de maneira rigorosa estão [18] e [19].

É por este motivo, basicamente, que a suposição de um *envelope* que modula os diversos modos com dinâmicas rápidas funciona. Este envelope possui uma dinâmica lenta e “engloba” os demais modos existentes no sistema [10]. A explicação qualitativa de que o campo  $A$  é a amplitude de um modo que possui uma dinâmica lenta em relação aos demais modos que coexistem na dinâmica (e que por isto podemos fazer uma “eliminação adiabática” dos demais modos) resultando na interpretação de um “envelope” englobando modos de dinâmicas rápidas é, numa linguagem mais matemática, a explicação de que  $A$  é o modo *marginal*. Portanto, a EGLC faz o papel da forma normal na vizinhança de uma transição *supercrítica* para um estado oscilatório em sistemas espacialmente estendidos.

Devido a existência de um termo de dispersão não linear, esta equação apresenta estruturas muito ricas. Sendo ela bastante geral na descrição de sistemas oscilatórios e por fazer isto com relativa simplicidade, a EGLC já foi estudada em larga escala. No capítulo seguinte, apresentamos algumas características da EGLC. Comentaremos seus regimes em cada região de parâmetros, expondo a grande variabilidade de comportamentos que a equação possui.

### 3. Algumas Características da Equação de Ginzburg-Landau Complexa (EGLC)

Este capítulo é destinado à investigação de algumas características da equação de Ginzburg-Landau Complexa. Tendo em vista que os métodos analíticos desenvolvidos para o tratamento de equações não lineares são ainda bastante restritos, existe a dificuldade de tratarmos a equação com este tipo de abordagem. Em geral, o tratamento analítico de equações não lineares são feitos caso a caso. Encontrar leis gerais para este tipo de abordagem é ainda um desafio para matemáticos e cientistas que necessitam tais ferramentas.

Assim sendo, buscam-se alternativas para o tratamento da equação. Embora não possamos conhecer exatamente suas soluções, podemos familiarizar-nos com alguns limites importantes. Conhecemos analiticamente uma solução da equação e, a partir dela, utilizamos a teoria de perturbação linear. Desta maneira, conseguimos entender um pouco melhor a função de cada termo e porque algumas estruturas que aparecem nas simulações fazem-se estáveis. Muitas vezes, é possível também compreender a importância de certas estruturas, tendo em vista suas estabilidades frente a outros tipos de soluções.

Conhecer o comportamento das soluções dentro de certos intervalos de parâmetros permite-nos estudar a equação de maneira mais direta, pois torna possível intuímos ou até determinarmos os tipos de soluções que podemos esperar ao trabalhar numericamente com ela.

Este capítulo está organizado de maneira que apresentamos os elementos ne-

cessários para podermos entender os intervalos de estabilidade das espirais, as quais são estruturas que serão nosso objeto de estudo. Tendo conhecimento de que os intervalos de estabilidade destas espirais irão definir as transições de fases descritas pela EGLC, é essencial construirmos subsídios para entendermos o mecanismo que as torna instáveis.

Com este objetivo, a primeira seção do capítulo aborda a estabilidade das estruturas coerentes mais simples que podemos encontrar na EGLC em duas dimensões: as ondas planas. Nesta mesma seção, estão comentadas algumas linhas do diagrama de fases as quais podem ser explicadas apenas usando os conceitos destas estruturas. Na seqüência, introduzimos o conceito de *defeitos*, definindo-os e contextualizando-os no nosso trabalho. Após definirmos defeitos e apresentarmos as espirais como um tipo de defeito e característica distintiva da EGLC em duas dimensões, finalmente o capítulo é encerrado com a explicação total do diagrama de fases, o qual é definido pelos intervalos e estabilidade destas espirais.

Ao longo de toda esta construção, a qual nos leva (assim esperamos!) a compreender o mecanismo gerador das instabilidades das espirais, explicitamos a região de nosso maior interesse. Durante a explicação destes intervalos de estabilidade, salientamos que estes intervalos definem as transições de fases descritas pela EGLC \*. Esperamos argumentar de maneira suficientemente clara para que a motivação do nosso trabalho fique explícita ao final deste capítulo.

---

\* É importante explicar que nossas fases são dinâmicas. Os sistemas descritos pela EGLC não estão no equilíbrio e o conceito de *fase* vale para sistemas em equilíbrio termodinâmico. Em analogia às mudanças qualitativas existentes nestes referidos sistemas em equilíbrio termodinâmico quando ocorre uma transição de fases, chamamos as mudanças de padrões espaço-temporais descritos pela EGLC de uma *mudança fase*. Portanto, a caracterização das fases no caso dos sistemas fora do equilíbrio dinâmico é feita de maneira macroscópica de acordo com o tipo de padrão espaço-temporal apresentado por eles e descritos pela EGLC.

### 3.1 Análise de estabilidade linear da ECGL

A estrutura coerente mais simples que podemos encontrar como solução para a EGLC são ondas planas:

$$A = A_0 \exp(i(\vec{Q} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{Q})t + \phi)), \quad (3.1)$$

Substituindo-se esta solução na equação (2.9), obtém-se:

$$A_0 = \sqrt{\mu - Q^2} \quad (3.2a)$$

$$\omega(\vec{Q}) = Q^2(b - c) - \mu c \quad (3.2b)$$

Estamos, portanto, considerando uma onda plana com um vetor de onda  $\vec{Q}$  e frequência  $\omega(Q)$ . Esta solução de onda plana existe quando  $Q^2 < \mu$ . Caso contrário, até podemos impor ao sistema tal solução como condição inicial, mas ela não será solução assintótica para o problema; apenas aparecerá como um transiente.

Sendo esta uma solução para o problema não perturbado (na nossa notação, é a solução  $U_0$ ), estudamos como ela se comporta frente a uma perturbação. Buscamos conhecer os limites para os quais esta solução se mantém e os limites para os quais as instabilidades dominam a dinâmica e, portanto, macroscopicamente, é observado uma mudança qualitativa no sistema.

Para abordarmos o problema, perturbaremos o sistema com uma não homogeneidade do tipo:

$$a = a_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + \lambda(\vec{k})t), \quad (3.3)$$

Portanto, modo com o qual estamos perturbando o sistema possui vetor de onda  $\vec{k}$  e taxa de crescimento temporal  $\lambda$ . Sendo esta taxa complexa, é a parte



real da mesma que traduzirá os intervalos para os quais a perturbação proposta dominará a dinâmica. Se a parte real desta taxa de crescimento é positiva, a perturbação cresce e desestabiliza a solução não perturbada.

O tratamento matemático do problema é feito com uma aproximação linear na teoria de perturbação. O procedimento é simples: substituímos a solução perturbada na equação (2.9) e desprezamos termos quadráticos em “ $a$ ” (aproximação linear). Restam alguns termos lineares em  $A_0$  que são naturalmente cancelados quando (3.2) são substituídos. Obtém-se um sistema de equações (para o modo “ $a$ ” e seu complexo conjugado “ $\bar{a}$ ”) , de onde extraímos autovalores da matriz construída. Embora sejam cálculos simples, são tediosos. Por esta razão, estão desenvolvidos no Apêndice A.

Os autovalores da referida matriz são justamente a taxa de crescimento complexa do modo  $\vec{k}$ . A expressão desta taxa de crescimento (para entender alguns termos e notações, olhar o Apêndice A):

$$\lambda_{\pm} = C_{l\pm}k^0 - iV_{g\pm}k - D_{2\pm}k^2 + i\Omega_{g\pm}k^3 + D_{4\pm} + O(k^5) \quad (3.4)$$

O termo linear é dado por:

$$C_{l\pm} = -A_0^2 \pm A_0^2 \quad (3.5)$$

Sendo que o primeiro termo da série (e portanto o mais significativo) do autovalor  $\lambda_-$  é negativo ( $C_{l-} = -2A_0$ ), o modo associado a ele decai exponencialmente. A solução perturbada por um modo associado a este autovalor é amortecida e a solução do problema não perturbado é, portanto, estável frente a ele. Assim sendo, não precisaremos analisar os demais termos da série referentes ao autovalor  $\lambda_-$  ; este modo não será significativo para a descrição da dinâmica do sistema.

Por outro lado, este mesmo primeiro termo da expansão, porém correspondente ao autovalor  $\lambda_+$  é  $C_{l+} = 0$ , indicando que o sistema sofre uma bifurcação. O

modo associado a este autovalor merece, então, ser analisado com cuidado. Pelos demais termos da série, podemos saber o(s) intervalo(s) para os quais a solução do problema não perturbado é estável frente a este modo e, para outros intervalos, poderemos ainda conhecer o tipo de instabilidade que o sistema assume.

Tais termos são dados por (os índices “±” serão suprimidos, pois estamos apenas tratando o autovalor  $\lambda_+$ ):

$$V_g = 2(b - c)Q_k \quad (3.6)$$

$$D_2 = 1 + bc - \frac{2(1 + c^2)Q_k}{1 - Q^2} \quad (3.7)$$

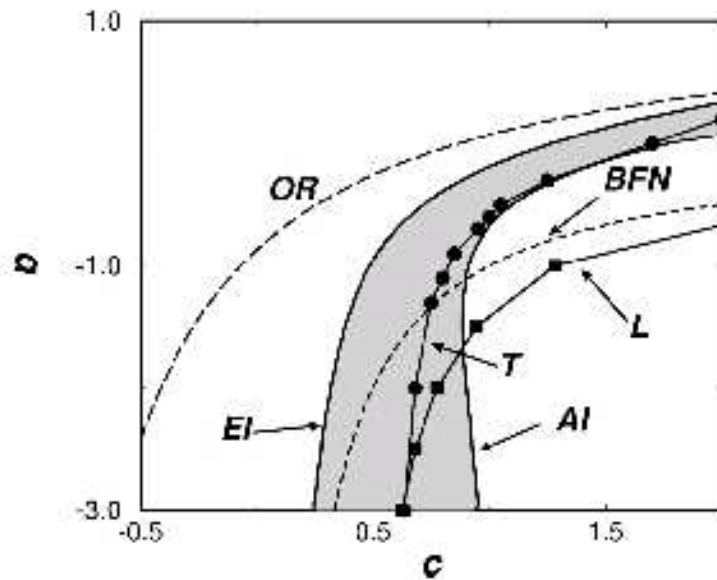
$$\Omega_g = \frac{2(b(1 - Q^2) - 2cQ_k^2)(1 + c^2)Q_k}{(1 - Q^2)^2} \quad (3.8)$$

$$D_4 = \frac{1 + c^2}{2(1 - Q^2)^3} [b^2(1 - Q^2)^2 - 12bc(1 - Q^2)Q_k^2 + 4(1 + 5c^2)Q_k^4] \quad (3.9)$$

De acordo com os critérios estabelecidos previamente, a solução do problema não perturbado é estável frente a um modo perturbador se a parte real do autovalor associado ao modo for positiva. Neste sentido, o termo linear em  $\vec{k}$  ( $V_g$ ) não é determinante para alterar a estabilidade da solução não perturbada. Ele é puramente imaginário e, por isto, apenas poderá definir o tipo de padrão espacial que o sistema assume após a bifurcação (discussão anterior; equação (2.7)). Utilizando tal definição, precisamos impor  $D_2 > 0$  para que a solução de onda plana com vetor de onda  $\vec{Q}$  seja estável.

Portanto, todos os vetores de onda  $\vec{Q}$  pertencentes ao intervalo  $Q^2 < Q_E^2 = \frac{1+bc}{3+2c^2+bc}$  são estáveis. Este critério é chamado *Critério Generalizado de Eckhaus*. Notemos que ele engloba o caso do estado homogêneo ( $\vec{Q} = \vec{0}$ ) quando o *Critério de Benjamin-Feir-Newell*  $(1 + bc) > 0$  é assegurado. Estes referidos critérios estão representados no diagrama (fig. 3.1) pelas curvas “EI” e “BFN”, respectivamente (olhar Aranson, Kramer [12, 13]).

Ocorre, porém, que a análise de instabilidade linear da equação retorna uma expressão bastante rica para os autovalores do modo perturbador. Ela exige,



**Fig. 3.1:** Estabilidade das soluções de ondas espirais. Também estão colocadas as linhas de Instabilidade Convectiva (EI) e Instabilidade Absoluta (AI) das ondas planas (limite assintótico das ondas emitidas pelas espirais). BFN é a linha que expressa o Critério de Benjamin-Feir-Newell; linha L é o limite da Turbulência de Fases (em duas dimensões); linha T corresponde à transição para a fase de Turbulência de Defeitos (partindo-se de condições iniciais aleatórias) e a linha OR divide o tipo de interação entre as espirais. (diagrama extraído de [12])

portanto, que façamos uma interpretação bem detalhada de seus termos para que seja possível extrair todas as informações que nela estão contidas.

Observemos o termo linear em  $\vec{k}$ :  $V_g = \nabla_Q \Omega = 2(b - c)Q_k$ . É a velocidade de grupo do modo perturbador. Então, se  $b \neq c$  e  $\vec{Q} \neq \vec{0}$ , ele será não nulo. Isto implica que o modo perturbador, embora possua parte real do autovalor associado a ele positiva, não se “desenvolve” no ponto onde foi gerado. Se a perturbação é gerada num ponto do espaço mas move-se deste lugar, então não necessariamente o padrão existente no sistema será desestabilizado.

A partir desta observação, definiu-se um novo tipo de instabilidade. A este novo tipo chamamos *Instabilidade Convectiva*, em respeito ao fato de que o modo perturbador não é amortecido (por isto *Instabilidade*) mas é “transportado” para longe do local onde foi gerada a perturbação. Assim, o Critério de Eckhaus passa a ser apenas um teste para a instabilidade convectiva.

Analisemos, neste momento, a evolução temporal de uma perturbação local  $S_0(\vec{x})$  um intervalo linear:

$$S(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{todoespaço}} d\vec{k} \widehat{S}_0(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} + \lambda(\vec{k})t), \quad (3.10)$$

com  $\widehat{S}_0(\vec{k})$  a transformada de Fourier da perturbação  $S_0(\vec{x})$ .

Para resolver esta integral, expande-se para o plano- $\vec{k}$  complexo e faz-se o limite de  $t \rightarrow \infty$ . Neste limite, existe um modo  $\lambda(\vec{k})$  que domina, permitindo que os demais sejam desprezados e possibilitando, portanto, um resultado analítico para esta integral (para melhor compreensão sobre o método, olhar, por exemplo, Morse e Feshbach, [25] e Churchill [26]).

O teste de estabilidade absoluta da solução de onda plana com vetor de onda  $\vec{Q}$  se traduz em:

$$\Re(\lambda(\vec{k}_0)) > 0 \quad \text{com} \quad \partial_{\vec{k}} \lambda(\vec{k}_0) = 0 \quad (3.11)$$

Com base neste novo critério estabelecido (expressão 3.11<sup>†</sup>), verificamos que, aplicando-o na expansão (3.4), a solução de onda plana é estável num intervalo diferente do que o previsto pelo critério anterior (no qual bastaria  $D_2 > 0$  para determinar o intervalo de estabilidade das ondas planas). A linha correspondente a este novo limite (limite de instabilidade absoluta) no diagrama da figura 3.1 é a “AI” (*Absolute Instability*).

Parece-nos interessante, neste momento, compreendermos a maneira como este limite de instabilidade está relacionado ao comprimento de onda  $\vec{Q}$ . Estamos afirmando que, embora  $D_2$  torne-se negativo, a solução ainda permanece estável (contrariando o critério inicialmente proposto pela teoria). Isto foi provado matematicamente e facilmente compreendido pelo fato de que o modo perturbador possui uma velocidade de grupo capaz de afastá-lo do ponto onde foi gerado. Podemos ainda entender esta estabilidade da solução observando o comportamento do comprimento de onda e compreender o motivo pelo qual ele permanece no intervalo de estabilidade.

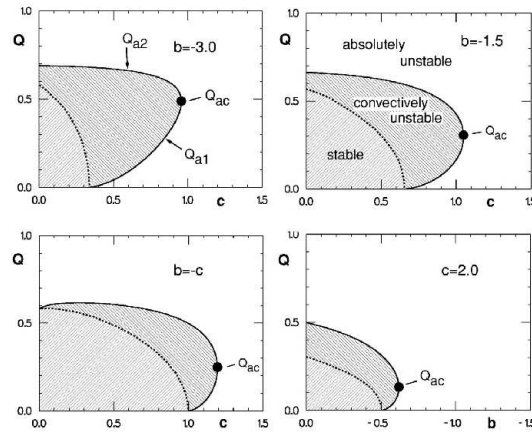
Observemos a figura 3.2, a qual mostra o corte feito em 4 pontos diferentes no espaço  $Q$ - $b$ - $c$ . À esquerda da linha inferior, é o intervalo dentro do qual todos os comprimentos de onda são absolutamente estáveis. Esta linha é delimitada pelo Critério de Eckhaus. À direita desta linha, existe uma banda de números de onda estáveis (na realidade, convectivamente instáveis):  $0 < Q_{a1} < |Q| < Q_{a2}$ . Tais limites (linhas  $Q_{a1}$  e  $Q_{a2}$ ) são obtidos numericamente utilizando-se o critério de instabilidade absoluta (equação 3.11).

O novo limite de estabilidade absoluta é então definido pela linha de intersecção entre  $Q = Q(b, c)$  e as linhas  $Q_{a1}(b, c)$  e  $Q_{a2}(b, c)$ , onde  $Q = |\vec{Q}|$ , o qual é o vetor de onda da onda plana.

É interessante observarmos que, acima do valor  $b = -1.2$  este “novo critério” é mais restritivo que a instabilidade de Benjamim-Feir-Newell e mais abrangente

---

<sup>†</sup>  $\partial_{\vec{k}}$  é apenas uma notação. Indica derivada em relação a cada componente do vetor “ $\vec{k}$ ”



**Fig. 3.2:** Quatro cortes no diagrama  $Q$ - $b$ - $c$ . A linha inferior delimita o intervalo de estabilidade e a linha superior delimita os intervalo de  $|\vec{Q}|$  convectivamente instável. Acima deste limite, as ondas planas possuem vetores de onda num intervalo de instabilidade absoluta. (figura extraída de [13])

nos demais casos; o intervalo de estabilidade das ondas planas é menor do que o previsto anteriormente acima deste valor. Esta descoberta explicou algumas observações encontradas em simulações numéricas. (para maiores detalhes, olhar Aranson, 1992 - [13]).

Os demais limites do diagrama de fases serão explicados numa seção posterior, após definirmos defeitos espirais.

## 3.2 Defeitos

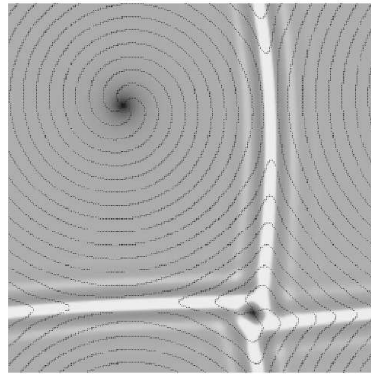
A definição de *defeitos* pode ser feita em diversos níveis de complexidade. Quando o consideramos como uma característica da EGLC, muitas interessantes propriedades aparecem e a descrição de tais estruturas faz-se importante em certos regimes de parâmetros, tendo em vista que podem explicar, por exemplo, uma transição de fases. A existência destes defeitos é tão relevante em alguns inter-

valos de parâmetros que a descrição da dinâmica pode ser reduzida ao estudo da interação destas estruturas.

A definição de tais estruturas será feita com base na análise das soluções da EGLC.

### 3.2.1 Definições

De uma maneira geral, defeitos são gerados devido a não homogeneidades de um sistema experimental. No entanto, eles podem aparecer espontaneamente no sistema; não apenas como uma consequência de problemas de tamanho finito ou meramente experimentais.



**Fig. 3.3:** Defeito Espiral: imagem do campo  $|A|$  e linhas de fase constante  $\phi = \arg(A) = 0, \pi$  para a solução de espiral única com condições periódicas de contorno.(figura extraída de [12])

De uma maneira intuitiva, podemos pensar que os defeitos são grandes desvios da solução homogênea; não apenas flutuações como ondas planas. Podem ser pontuais, estenderem-se sobre uma linha, terem formas diversas. O que podemos pensar, num primeiro momento, é que são estruturas que, de alguma maneira, perturbam o estado de equilíbrio do meio.

Diretamente relacionado ao nosso trabalho, poderíamos definir defeitos como as soluções das equações de amplitudes (no nosso caso, a EGLC); ou seja, em

duas dimensões, pontos no espaço onde a amplitude complexa  $A$  é nula ( e linhas quando trabalha-se com a EGLC em três dimensões). São estruturas observadas experimentalmente e as equações de amplitude são excelentes ferramentas para estudá-los. Defeitos são, portanto, pontos onde  $A = 0$  e, por conseqüência, a fase  $\theta = \arg(A)$  não é definida. Esta fase varia de  $2\pi$  quando “caminhamos” em torno destes defeitos.

Em duas dimensões, a EGLC admite soluções do tipo:

$$A_s(\mathbf{r}, t) = F(r) \exp[i(m\theta + \psi(r) + \omega t)], \quad (3.12)$$

onde  $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$  e  $\theta$  são ângulos polares medidos a partir do ponto central desta solução (agora chamada defeito),  $\psi$  é a fase e  $m = \pm 1$  é a carga topológica (sobre a qual comentaremos adiante).

Quando  $b \neq c$ , os defeitos são fontes de ondas espirais, cujas linhas de fase constantes possuem a forma de “braços espirais”. Por esta razão, tais defeitos são chamados *espirais*. Eles são, então, fontes geradoras de ondas propagantes e determinam a freqüência de oscilação de todo o sistema. A próxima seção trata estes defeitos com um pouco mais de detalhes.

Uma interessante observação a respeito de defeitos pode ser feita quando tratamos o campo “A” complexo com alguns conceitos da mecânica estatística.

Dentro da teoria de transições de fases, define-se um parâmetro chamado *parâmetro de ordem*, o qual é convenientemente definido de forma que seja nulo em uma fase do sistema e não nulo após uma dada transição de fases. Lembremos que este parâmetro é definido de forma a satisfazer a esta propriedade. Em cada sistema, ele é definido de maneira conveniente; não há uma regra para sua construção.

Convecionou-se chamar uma *Transição de fases de Segunda Ordem* onde este parâmetro de ordem varia continuamente, em contraste com as *Transições de Primeira Ordem*, onde existe um salto (uma descontinuidade) deste parâmetro



no ponto de transição ([28]) .

Fazendo uma analogia entre as soluções das equações de amplitude (no caso específico do nosso trabalho, a EGLC) e esta teoria de transições de fases, algumas interessantes observações podem ser feitas.

Notemos que o estado homogêneo dos sistemas dinâmicos aceita a solução  $A = 0$ . Ou seja, esta é uma solução da equação (2.9), a qual representa o estado do sistema antes de sofrer uma bifurcação (solução não perturbada). Depois dela, outras soluções são possíveis. Neste sentido,  $A$  pode ser visto como o parâmetro de ordem dos sistemas. Ele é nulo antes da bifurcação e diferente de zero depois dela.

### 3.2.2 Espirais

A existência da solução espiral é uma característica que distingue a EGLC em duas dimensões. Estas espirais são fontes geradoras de ondas. Deste ponto de vista, elas são estruturas capazes de selecionar os comprimentos de onda propagantes num sistema oscilante. Elas tornam-se, portanto, elementos fundamentais na descrição da dinâmica, tendo em vista que dominam a frequência de oscilação do meio.

Imaginemos um caminho que circula tal defeito, sobre o qual é possível definir valores finitos para o campo complexo  $A$  e portanto podemos definir uma integral de caminho. Definimos  $m = \frac{1}{2\pi} \oint_L \nabla\theta dl$ , onde  $L$  é o caminho sobre o qual a integral será efetuada e  $m$  a *carga topológica*.

Este nome nos remete a uma analogia com carga elétrica. Quando queremos calcular o campo elétrico gerado por um carga pontual, uma maneira bastante simples e elegante é imaginar uma superfície gaussiana (uma escolha inteligente seria um círculo se estivermos considerando um espaço bidimensional) que encerra tal carga. Independentemente de quão longe esta superfície esteja da carga, o campo elétrico gerado por ela faz-se presente (no limite qdo  $r \rightarrow \infty$  - sendo  $r$

o raio da superfície em torno na carga - o campo é nulo). A intensidade deste campo será proporcional ao valor desta carga.

Topologicamente, os defeitos estáveis são aqueles em que  $m = \pm 1$ . Este argumento de estabilidade topológica não garante a existência das espirais no meio. A estabilidade delas depende da configuração do meio; do *background* no qual estão inseridas.

O intervalo de estabilidade destas estruturas está diretamente relacionado com o intervalo de estabilidade das ondas por elas emitidas. Distantes do centro do defeito (o ponto central da espiral, onde  $|A| = 0$ ), estas ondas são aproximadamente ondas planas e é por esta razão que o estudo da estabilidade destas estruturas coerentes (primeira seção deste capítulo) é determinante para entendermos os intervalos de estabilidade das ondas espirais.<sup>‡</sup>

Para que possamos entender mais claramente o papel de cada uma das variáveis que compõem tal solução, observemos novamente a expressão matemática de uma espiral:

$$A_s(\mathbf{r}, t) = F(r) \exp[i(m\theta + \psi(r) + \omega t)],$$

$F(r)$  é a amplitude,  $\omega$  é a frequência de rotação (rígida) da espiral e  $\psi$  é fase, sobre a qual algumas hipóteses são feitas. O número de onda da onda plana assintótica emitida pela espiral é dado por  $Q = \partial_r \psi$  (portanto, no limite  $r \rightarrow \infty$ ). A frequência de rotação da espiral é relacionada com este número de onda assintótico pela relação  $\omega = c - (b - c)Q^2$  <sup>§</sup>.

Há um artigo de 1978 ([14]), onde matemáticos demonstram rigorosamente a existência de ondas espirais em meios oscilantes os quais podem ser descritos por

---

<sup>‡</sup> As espirais ainda podem se tornar instáveis quando seus “corações” são espontaneamente acelerados ([29]).

<sup>§</sup> Esta expressão é deduzida substituindo-se a solução espiral para o caso assintótico  $r \rightarrow \infty$ , onde a onda emitida é suposta uma onda plana. Esta suposição é mostrada matematicamente ainda nesta seção.

equações de difusão. Além desta prova rigorosa, os autores encontram expressões para  $F(r)$  e  $\psi(r)$  que satisfaçam tais equações. Estas expressões serão aqui destacadas porque explicitam o comportamento dominante das amplitude e fase nos limites em que se está distante ( $r \rightarrow \infty$ ) e próximo ( $r \rightarrow 0$ ) ao centro. Então:

$$F(r) = \sqrt{1 - Q^2} - \frac{(1 - b^2)Q}{2\sqrt{1 - Q^2}(b - c)}r^{-1} + O(r^{-2}) \quad (3.13a)$$

$$\psi(r) = Qr + \frac{(1 + bc)}{2(b - c)}\ln(r) + O(r^{-1}) \quad (3.13b)$$

Observemos que, para  $r \rightarrow \infty$ , o segundo termo da expressão de  $F(r)$  deixa de ser significativo. O termo constante domina neste limite. Para a expressão de  $\psi$ , é possível observarmos que o primeiro termo (o qual é linear em  $r$ ) é o dominante no limite em que se está distante do centro. Portanto, esta análise demonstra matematicamente a aproximação já comentada anteriormente de que, assintoticamente, as ondas emitidas pelas espirais são ondas planas.

Estas ondas planas fazem um papel fundamental na análise de estabilidade destas espirais. De fato, é necessário considerarmos o número de onda das ondas planas assintóticas por elas emitidas para conhecermos os intervalos de estabilidade destas espirais.

Sabe-se que, dentro do intervalo no qual as ondas planas assintóticas por elas emitidas são absolutamente estáveis, a estabilidade das espirais é também assegurada. Portanto, o estudo de estabilidade das ondas planas não é apenas importante para entendermos os intervalos de estabilidade das espirais; ele é determinante! Por sua vez, o estudo da estabilidade destas espirais é essencial para compreendermos o diagrama de fases da EGLC em duas dimensões. A perda de estabilidade desta solução determina absolutamente as transições de fases descritas pela equação.

### 3.3 Os Limites do Diagrama de Fases

Considerando que tenhamos dado subsídios necessários para o entendimento das transições de fases da EGLC delimitadas no diagrama pelas linhas, esta seção é dedicada à explicá-las. A pretensão é fazer um panorama geral das fases existentes, comentando características e intervalos de existência.

Não temos como objetivo fazer deduções de todos os limites que ali aparecem, tendo em vista que cada fase foi amplamente estudada e a “construção” de cada linha é tema de longos trabalhos, onde teoria e simulação são igualmente importantes. Portanto, para maiores informações, recomendamos ler artigos específicos como, por exemplo, Chaté e Mannerville, Huber et al. [20], [21], [33].

Na Equação Ginzburg-Landau Complexa em duas dimensões, dois distintos regimes de caos espaço-temporal podem ser identificados: *Turbulência de Fases* e *Turbulência de Defeitos*. Eles são assim diferenciados pela presença ou não dos defeitos.

No primeiro caso (Turbulência de Fases), o campo complexo  $A$  nunca é nulo. Estamos, portanto, numa região de parâmetros onde os defeitos não existem. Observa-se, no entanto, que as correlações entre as fases decaem muito rapidamente. Desta maneira, as amplitudes dos modos poderiam ser “escravizadas” frente à fase deles. A dinâmica passa a ser muito bem descrita somente pela fase dos modos.

Próximo à linha BFN, espera-se que  $\nabla\theta$  varie suavemente, permitindo uma expansão em série. O truncamento desta série em termos ainda significativos dá origem à Equação de Kuramoto-Sivashinsky (KS). Este regime é observado entre as linhas L e BFN. A linha L, portanto, seria a linha que delimita a existência deste regime para a EGLC em duas dimensões.

A existência desta fase no limite termodinâmico é fortemente questionada. Estima-se que ela seja, na verdade, consequência das escalas de espaço e tempo que usualmente observamos experimentalmente. Em 1996 ([20]), foram mostra-

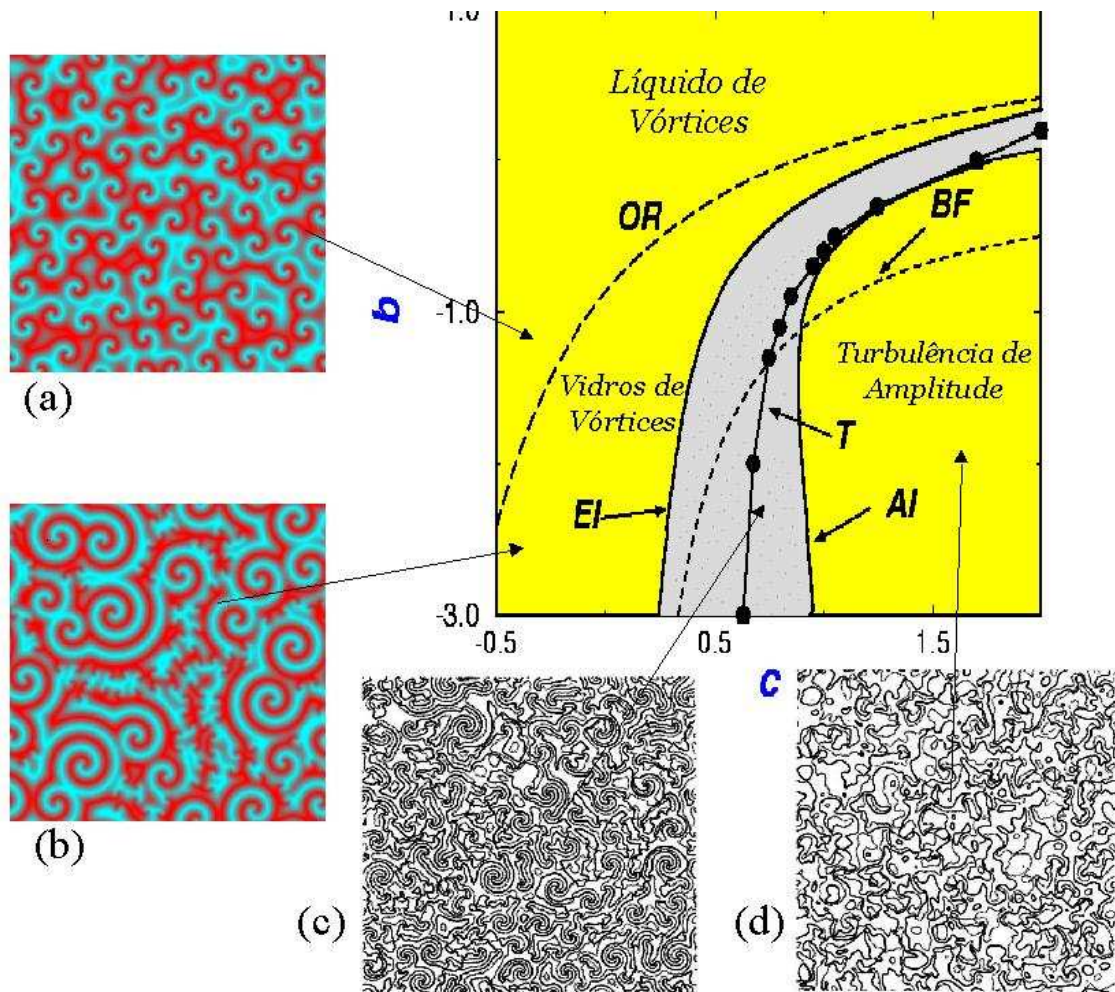
das evidências de que ela não existe no limite termodinâmico. Além disso, esta fase é instável frente às demais fases apresentadas na equação.

O outro regime caótico encontrado, *Turbulência de Defeitos*, é assim definido por apresentar tais estruturas. É o regime mais caótico que a EGLC em duas dimensões apresenta, já que as correlações decaem exponencialmente e a correlação no tempo e nas escalas de comprimento são muito pequenas. Segundo Chaté e Manenille (Physica A, 1996, [20]), um nome mais apropriado seria *Turbulência de Amplitude*. As amplitudes variam tão rapidamente, que, em muitas regiões de parâmetros não é possível observar-se a existência de espirais.

A linha AI delimita a região onde as espirais podem ser encontradas. A direita desta linha, o regime é tão caótico, o módulo da amplitude do campo complexo ( $|A|$ ) oscila tanto que as espirais não se mantêm. Esta linha é o limiar, portanto, da região de onde as espirais são estáveis. As correlações das amplitudes variam tão rapidamente e os defeitos são criados e aniquilados constantemente. É praticamente impossível observarmos espirais bem formadas neste limite. Na região de parâmetros onde a solução de espiral é estável ou possui instabilidade convectiva (esquerda da linha AI), observa-se a existência de espirais bem formadas (olhar diagrama 3.4).

Um terceiro comportamento distinto, encontrado quando os parâmetros são variados, é um cenário bastante interessante: formam-se arranjos de espirais “quase-congeladas” imersas em linhas de choques. É um estado desordenado e sobre o qual muitas perguntas podem ser feitas. A amplitude  $|A|$  é praticamente estacionária ao longo do tempo. Exemplos destas estruturas, as quais são chamadas *Vidros de Vórtice* e *Líquido de Vórtice* (separação dada pela linha “OR”, explicada em linhas posteriores), são mostradas na figura (3.4).

Até pouco tempo, este cenário era chamado de *Frozen State*. De fato, em escalas de tempo usuais (possíveis de simular com a EGLC), estes defeitos parecem estar “congelados”. Há um número fixo de vórtices circundados por linhas de choque. A analogia a Vidros de Spin chegou a ser proposta ([33],[20], [34]).



**Fig. 3.4:** Em todas as imagens instantâneas que exemplificam as fases, são mostradas as linhas de equifases do campo  $A$ . A figura (a) é um exemplo de um *Líquido de Vórtice* e (b) apresenta um *Vidro de Vórtice*. O azul representa  $\Re(A) = 0$ . Em (a), observam-se espirais de mesmo tamanho. Esta simetria não é observada em (b). Nas figuras que exemplificam a *Turbulência de Defeitos* - (c) e (d) -, as escalas são dadas em níveis de cinza:  $\Re(A) = 0$  em cinza claro e  $\Im(A) = 0$  representado pelas linhas pretas. Em (c), ao contrário do que podemos observar em (d), há evidente formação de espirais. (figuras extraídas de [12, 20]) e editadas)

Observavam-se fenômenos comuns a dinâmicas vitrosas, como por exemplo, o fenômeno de *aging*. Ou seja, as características deste estado “final” seria dependente da “história” do sistema; da evolução dele. Em seu artigo na PRA (1996), os autores referem-se ao fato, por exemplo, de que o tamanho do raio destas espirais dependeria da história do sistema até chegar naquele estado final.

Esta estrutura celular aparece em uma larga região do diagrama. Basicamente, sabe-se que ela não existe na região onde as ondas planas assintóticas emitidas pelas espirais são absolutamente instáveis. Ou seja, estes estados não são observados à direita de “AP” certamente.

Neste ponto, podemos caracterizar a linha “T” existente no diagrama de fases. Ela é definida como a linha de transição deste estado “congelado” para a dinâmica turbulenta. Do lado esquerdo desta linha, observa-se este cenário descrito há pouco. Ao aproximar-se dela, o número de vórtices começa a diminuir. No cruzamento, começa o regime turbulento, onde as amplitudes dos modos variam muito rapidamente e as correlações entre elas também. Estima-se que a distância a esta linha “T” daria uma medida do tempo de transição. Ou seja, o tempo em que o sistema se manteria no estado *metaestável* entre as duas configurações bem definidas. Deste ponto de vista, justamente sobre a linha “T” seria o ponto onde este tempo de transição seria infinito.

Este cenário de estados aparentemente “congelados” não foi constatado nas nossas simulações. É justamente nesta região de parâmetros que o nosso trabalho está mais diretamente conduzido e, acreditamos, onde mais novidades foram encontradas. Deixaremos os comentários detalhados para o momento apropriado, mas adiantamos que as nossas simulações permitiram que se observassem escalas de tempo bem superiores às usuais e, portanto, foi possível observar que estes arranjos de espirais evoluem numa dinâmica *ultralenta*.

O modelo por nós utilizado será abordado com detalhes posteriormente, mas é um ótimo momento para esclarecermos que a possibilidade de investigar esta dinâmica lenta é uma das grandes vantagens apresentadas pela nossa abordagem.

Existe ainda uma linha no diagrama de fases que não foi explicada. É uma divisão que separa as formas de interação assintótica entre os vórtices. À esquerda da linha “OR”, a interação entre os vórtices decai exponencialmente e, por esta razão, dá-se o nome de *Interação Monotônica* (ou *Regime Monotônico*). À direita dela, as interações decaem ainda exponencialmente, mas este comportamento apenas “modula” a interação entre as espirais. Neste intervalo, o regime é dito *Oscilatório*.

Matematicamente, esta linha pode ser explicada considerando-se uma perturbação estacionária. No apêndice (A), estão feitos os cálculos para o caso em que perturbamos a solução de onda plana por um modo com vetor de onde  $\vec{k}$  taxa de crescimento temporal  $\lambda$ . Portanto, para fazer estes cálculos decaírem no caso em questão (procuramos uma perturbação estacionária), basta supormos  $\lambda = 0$ . Substituindo  $p = ik$ , a equação (A.8) recai na expressão:

$$p\{(1 - b^2)(4Q^2 + p^2)p - 2F^2[(1 + bc)p - 2(b - c)Q]\} = 0 \quad (3.14)$$

A solução  $p = 0$  sempre existe. As demais raízes definirão a existência desta divisão. No Regime Monotônico, as três raízes são reais, ao passo que, no Oscilatório, tem-se uma raiz real e um par de raízes complexas conjugadas. Matematicamente são elas, portanto, que determinam a linha OR. Se pensarmos que  $Q$  é o número de onda da onda plana assintótica emitida pelas espirais e que este valor é somente dependente dos parâmetros “ $b$ ” e “ $c$ ” escolhidos (dependência numérica), então, uma vez dados tais parâmetros,  $p$  é absolutamente determinado. É uma função de  $c$  e  $b$  e os valores destas constantes que mudam o tipo de solução (de real para complexa) determina a linha OR:  $\frac{c-b}{1+bc} = \pm c_{cr} \approx 0.845$

Esta transição de regime de interação será novamente abordada no próximo capítulo. É uma questão muito importante quando tratamos da interação dos defeitos.



Após toda a investigação do diagrama de fases da EGLC, gostaríamos de evidenciar alguns aspectos desta análise. A primeira observação diz respeito à importância da análise de estabilidade das espirais. Notemos que a estabilidade destas estruturas define as transições de fases da equação.

Se pensarmos em termos de um sistema real, esta observação quanto à importância dos intervalos de estabilidade das espirais reflete a importância vital destas estruturas para definir as transições de fases dele. Desta maneira, estamos dizendo que o aparecimento dos defeitos e, por conseqüência, os intervalos para os quais eles se mantêm no sistema real, definirão as transições de fases que ele sofre.

Tendo em vista que os experimentos não selecionam apenas um único defeito, nos interessa saber como eles interagem. Conhecer os intervalos de estabilidade de uma espiral isolada não responde como elas se comportam estando em grupo. Não responde, portanto, de que maneira tais defeitos irão influenciar numa possível transição de fases.

A EGLC é uma excelente ferramenta para descrever tais interações. A comprovação desta afirmação reside na existência do diagrama de fases que acabamos de estudar. Foi utilizando a EGLC que o diagrama foi construído. Todo o conhecimento a respeito das transições de fases existentes até o presente momento foi construído com as simulações da equação.

Ocorre, porém, que a equação oferece um maneira pouco “sistemática” para este estudo de interação dos defeitos, porque se tem pouco domínio sobre tais interações. É um estudo muito observacional, onde é extremamente difícil ter controle sobre os parâmetros relevantes para o entendimento do sistema. É muito complicado, por exemplo, controlar o número de espirais que irão interagir.

As simulações têm um custo computacional muito grande. Muito pouco se pode fazer de analítico, porque é uma interação de muitos “corpos”. Os defeitos não são partículas, mas podem ser assim vistos se considerarmos os centros das espirais e as linhas onde duas espirais vizinhas se cruzam.

Usando esta idéia e valendo-se da observação já feita de que a existência dos defeitos influi de maneira decisiva na dinâmica é que a abordagem por nós utilizada foi desenvolvida.

A descrição desta referida abordagem, descrevendo motivações, vantagens e problemas da mesma é tema do capítulo seguinte. Este encerramento de capítulo é uma tentativa de motivação e explicação dos nossos objetivos. Na seqüência, portanto, estão colocadas as bases daquilo que foi usado como ferramenta deste trabalho.

## 4. Teoria de Interação de Ondas Espirais em Meios Oscilatórios

Assumindo que a EGLC é uma excelente ferramenta para descrever sistemas dinâmicos extensos na vizinhança de transições oscilatórias descritas por bifurcações de Hopf supercríticas, dedicamo-nos a estudar algumas de suas características gerais. Estudamos os intervalos de estabilidade de sua solução mais simples (ondas planas) e definimos defeitos. A partir desta definição, estudamos um tipo especial de defeitos: as espirais. Mostramos que os intervalos de estabilidade destas soluções definem as diferentes estruturas espaço-temporais (em duas dimensões), comprovando, portanto, a importância destes defeitos na descrição da dinâmica.

Considerando-se que as espirais não aparecem isoladas em experimentos reais, o estudo dos diversos tipos de estruturas espaço-temporais apresentados por um sistema dinâmico exige a investigação da interação destes defeitos. Esta necessidade de investigação, aliada ao fato de que a EGLC não possibilita um estudo sistemático das mesmas, levaram a diversas tentativas de redução deste problema. A tentativa de reduzir uma equação diferencial parcial (como é a EGLC) a um sistema discreto onde a dinâmica passa a ser descrita por equações ordinárias é proposta desde o início da década de 80 [23, 24, 30, 31, 32].

Quando falamos em *redução*, estamos nos referindo à tentativa de tratar a dinâmica de interação apenas observando os centros das espirais e as linhas onde duas espirais vizinhas se encontram (chamadas *linhas de choque*)[23]. Ao invés de considerar todo o campo complexo  $A$  (o qual é contínuo) para entender como

os defeitos interagem, trata-se a interação como se o movimento do centro de uma espiral fosse influenciado pela existência da espiral vizinha. A influência da espiral vizinha não é sentida pelo contato direto entre seus centros; elas interagem através de suas linhas de choque. Ou seja, a proposta é que o tratamento das interações dos defeitos se resuma ao estudo das posições das linhas de choque e dos centros dos defeitos.

As vantagens desta abordagem do problema de interação dos defeitos são muitas. Dentre elas, podemos adiantar que é computacionalmente muito mais eficaz. Por eficaz, entende-se que é possível simular sistemas muito maiores, com muito mais defeitos interagindo e por muito mais tempo usando um tempo computacional bem menor. Limites de tamanho que eram impossíveis de simular com a EGLC, tornam-se factíveis. Na EGLC, há uma grande dificuldade de domínio sobre o número de defeitos que interagem. Este problema não existe na abordagem que estamos propondo.

É claro que existem diversos argumentos contra este tipo de abordagem. A primeira dúvida que surge é se, de fato, a redução da dinâmica do caso contínuo para o caso discreto no qual apenas tratamos os centros e as linhas de choque das espirais descreve bem o sistema. Não sabemos, em princípio, se esta simplificação descreverá a dinâmica de maneira satisfatória. Dúvidas sobre a validade do nosso estudo também podem surgir. Conforme já comentamos no capítulo anterior, nossas simulações mostram um cenário diferente daquele que até então tinha sido estudado com a EGLC para o caso onde temos uma estrutura celular com estados assimétricos (região representada pela figura 3.4-b).

Por que deveríamos acreditar nos nossos resultados em detrimento ao que é observado usando a EGLC? Por que nosso estudo deve ser suposto verdadeiro se, na realidade, a EGLC é um modelo robusto, bastante estudado e com grande credibilidade?

Para responder a estas possíveis questões, antes de aceitarmos como válida a nossa abordagem, faremos uma análise comparativa entre os dados obtidos com

ela e com a EGLC (análise feita no capítulo de resultados, cap.5). Num primeiro momento, buscaremos nos certificar de que, nos intervalos onde ambas as abordagens são possíveis para descrever a dinâmica, elas o fazem igualmente bem. Posteriormente, então, valeremo-nos das vantagens do método para investigar os sistemas em limites os quais são impossíveis de serem estudados com a EGLC. Estas análises comparativas e o estudo dos sistemas serão feitos no capítulo seguinte. Neste capítulo, a nossa pretensão é apresentar a proposta de redução do estudo à uma dinâmica discreta desenvolvida por Aranson e colaboradores [23].

A apresentação desta proposta far-se-á em duas partes distintas: na primeira, apresentaremos o método usado para encontrar as equações que descrevem a dinâmica dos centros e das linhas de choque. A segunda parte investiga alguns aspectos destas equações, analisando suas propriedades e tipo de interação que elas representam. Portanto, a seção imediatamente seguinte apresenta a abordagem alternativa para o cálculo da interação de espirais. O método para se chegar às equações diferenciais ordinárias (CEEDOs) está muito bem explicado nos artigos de Aranson, Kramer e Weber [23, 24].

## 4.1 Redução do estudo de interação de espirais ao Conjunto Equivalente de Equações Diferenciais Ordinárias (CEEDOs)

Para a redução do tratamento da interação entre espirais ao caso discreto, a idéia básica é analisar a perturbação causada a uma espiral devido a presença de uma espiral vizinha. Matematicamente, tem-se uma espiral isolada que sofre uma perturbação expressa pelas condições de contorno do problema.

Para desenvolvermos qualquer teoria de interação, é fundamental observarmos duas grandes distinções entre as maneiras como as espirais interagem assintoticamente:  $c \neq b$  e  $c = b$ . É intuitivo imaginar que os “braços” das ondas espirais

emitidas pela fonte fazem o papel de “obstáculos” para a interação entre duas espirais vizinhas. As linhas de choque que se formam quando do encontro delas impede que a interação das espirais se propague a longas distâncias. Neste caso, o decaimento das interações é exponencial (e não tipicamente  $1/r$  como se supunha no princípio [30, 31]).

No caso limite em que  $b \rightarrow c$ , o número de onda da onda emitida pela fonte tende a zero e, portanto, tais “braços” não existem. Este fato permite que cada defeito “se faça sentir” a uma distância muito maior. No caso  $c = b$ , o decaimento das interações é tipicamente  $1/r$ . Notemos que este fato muda consideravelmente o tratamento do problema, já que muitas aproximações que podem ser feitas no primeiro caso (quando a interação decai exponencialmente) não são boas para o segundo. Desta maneira, certamente os tipos de equações que encontramos para descrever as interações são bastante diferentes.

O nosso trabalho se limita ao caso  $c \neq b$ . Por conveniência, as equações serão deduzidas para o caso  $b = 0$  \*. Esta restrição não representa perda de generalidade porque é possível fazer transformações (ditas transformações de similaridade) nas variáveis e recairmos no caso geral [23].

A idéia do método utilizado por Aranson e colaboradores para construir equações que descrevem as interações entre as espirais é usar teoria de perturbação, considerando que uma dada espiral sofre uma perturbação causada pela espiral vizinha. A espiral perturbada passa a movimentar-se, e os autores buscam equações que descrevam as velocidades dos centros delas. Como extrair tais soluções para as velocidades?

A solução de espiral única é conhecida (3.12). O que se faz é acrescentar um termo a ela que corresponde ao termo perturbativo. Esta perturbação é suposta ser causada pela presença de uma espiral vizinha. O tratamento sobre esta solução é feito com teoria de perturbação. O domínio de existência de cada

---

\* O artigo [23] contém uma seção onde os autores tratam os casos  $c = b$  e  $b \neq 0$ .

espiral é um semi-plano onde estão contidas as ondas emitidas por elas. Na prática, seus domínios são determinados pelas linhas de choque.

Este procedimento será aqui apresentado em linhas gerais; a descrição detalhada pode ser encontrada em [23, 24].

### 4.1.1 O método

Quando substituimos a solução de espiral isolada (3.12) na EGLC (2.9), as amplitude  $F(r)$  e fase  $\psi(r)$  obedecem ao seguinte conjunto de equações:

$$\Delta_r F - \frac{1}{r^2} F - (\psi')^2 F - b((\Delta_r \psi)F + 2\psi'F') + F - F^3 = 0 \quad (4.1a)$$

$$b(\Delta_r F - \frac{1}{r^2} F - (\psi')^2 F) + (\Delta_r \psi)F + 2\psi'F' - \omega F - cF^3 = 0 \quad (4.1b)$$

onde  $\Delta_r = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r$  e os superíndices linhas significam derivada em relação a  $r$ . O uso das coordenadas polares  $(r, \theta)$  foi assumido quando escrevemos a solução de espiral no capítulo 3. Neste mesmo capítulo, mostramos as expressões analíticas para  $F(r)$  e  $\psi(r)$  que satisfazem equações do tipo difusão. A partir delas, é possível entender o comportamento assintótico destas funções (longe e próximo do centro das espirais):

$$F(r) \rightarrow \sqrt{1 - Q^2}, \quad \psi'(r) \rightarrow Q \quad \text{para } r \rightarrow \infty \quad (4.2a)$$

$$F(r) \approx r, \quad \psi'(r) \approx r \quad \text{para } r \rightarrow 0 \quad (4.2b)$$

A interação com a espiral vizinha faz com que o centro da espiral se mova com velocidade  $v$ . A cada espiral associamos uma região, a qual é definida pelas ondas por ela emitida. Num sistema real, este *domínio* de cada espiral é dado pela região entre os choques (linhas onde espirais vizinhas colidem). Matematicamente, supomos que estas linhas de choque são as paredes do sistema e nelas

serão impostas as condições de fronteira. Tais condições expressarão as suposições físicas feitas a respeito da interação das duas espirais. Dentro da região de domínio, a solução de espiral perturbada é expressa por:

$$A_p(\mathbf{r}, t) = (F(r) + W(r, \theta, t)) \exp[i(m\theta + \psi(r) + \omega t)], \quad (4.3)$$

onde  $W(r, \theta, t)$  (pode ser complexo) é a correção acrescentada à solução de espiral não perturbada devido à existência da espiral vizinha. As variáveis  $(r, \theta)$  descrevem o movimento do centro da espiral, o qual move-se com velocidade  $v$ .

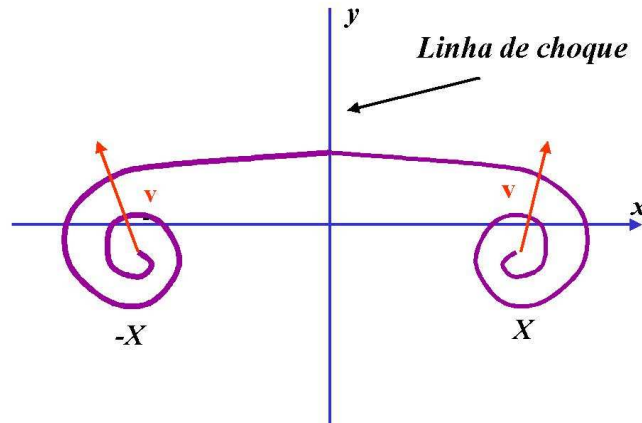
Antes de apresentarmos a equação que rege o termo  $W(r, \theta, t)$ , algumas observações são importantes. Como o centro da espiral se move devido a interação com a espiral vizinha, suas coordenadas passam a depender do tempo e portanto:  $\frac{dA_s}{dt} = v_y \partial_y A_s + v_x \partial_x A_s + i\omega A_s$ , onde  $v_x$  e  $v_y$  são as velocidades do centro da espiral. Supõe-se que o termo  $W$  é pequeno (aproximação válida quando os centros das espirais não estão muito próximos), o que permite que a teoria de perturbação seja feita até primeira ordem (aproximação linear). Com isto, ao substituímos a solução perturbada (4.3) na EGLC, a equação obedecida pelo termo  $W$  é dada por:

$$\begin{aligned} -\vec{v} \cdot \nabla W - W_t - i\{\vec{v} \cdot \nabla[\theta + \psi(r)]\}W + (1 + ib)[\Delta W - \frac{1}{r^2}W - (\psi')^2W + \\ i\Delta_r \psi W + 2i(\psi'W' + \frac{1}{r^2}\partial_\theta W)] + (1 - i\omega)W - (1 + ic)F^2(2W + W^*) \\ = v[(F' \sin(\theta + \eta) + i\psi'F \sin(\theta + \eta) + i\frac{R}{r} \cos(\theta + \eta)], \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde  $\vec{v}$  é o vetor velocidade ( $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$ ) e  $\eta = \arctan(v_x/v_y)$ . Notemos que, neste processo, as velocidades surgem como não homogeneidades para as soluções de  $W(r, \theta, t)$ . As velocidades envolvidas nesta não homogeneidade são lineares, o que significa dizer que a solução para uma distância arbitrária pode ser expressa como uma solução homogênea mais uma não homogênea (solução particular, a qual é construída justamente considerando a não homogeneidade da equação).



O problema de interação entre duas espirais de cargas opostas é equivalente à interação de uma espiral com uma parede plana. Suponhamos que as espirais estejam colocadas nas posições  $(-X, 0)$  e  $(X, 0)$  e que a linha de choque entre elas seja a linha  $x = 0$ . As condições de contorno serão determinadas pelo problema. Para o caso de cargas opostas, tem-se uma assimetria em  $y$ :  $A(x, y) = A(x, -y)$ . Tal assimetria pode ser verificada numericamente (figura 4.2 - b).



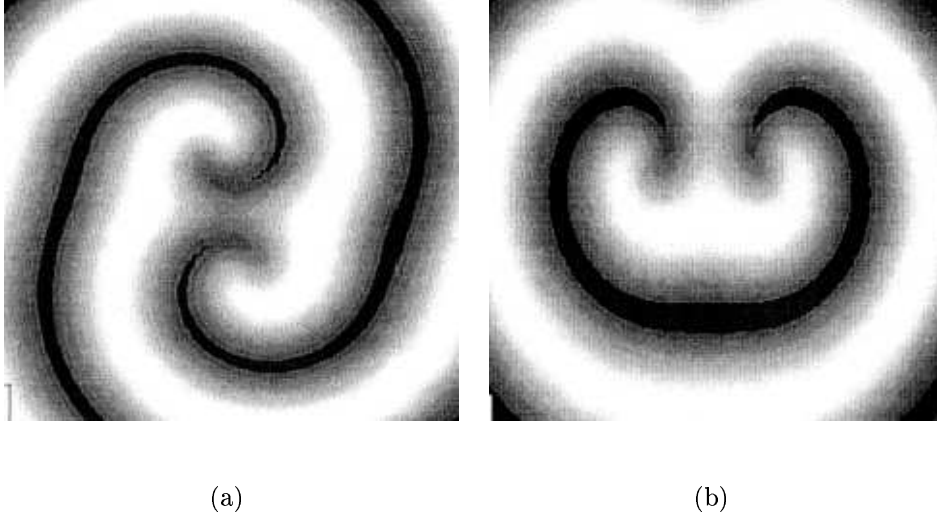
**Fig. 4.1:** Duas espirais vizinhas nas posições  $X$  e  $-X$

Os chamados *estados ligados* (*bound states*) ocorrem quando  $v_{1x} = v_{2x} = 0$ . As espirais podem se mover na direção  $y$  com uma velocidade de deriva, mas este estado significa que a distância entre os centros das espirais (em  $x$ ) se mantém em equilíbrio. A questão da estabilidade deste estado ligado será debatida um pouco adiante.

As condições de contorno, neste caso, são tais que  $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$ . As velocidades das espirais serão  $v_{1x} = v_{2x}$  e  $v_{1y} = -v_{2y}$ .

No caso de espirais de mesma carga, a simetria existente é  $A(x, y) = A(-x, -y)$  (observe resultados numéricos na figura 4.2 - a). As velocidades obedecerão, portanto, à relação  $v_{1x} = -v_{2x}$  e  $v_{1y} = -v_{2y}$ , fazendo com que elas girem uma em torno da outra. Esta simetria complica um pouco o problema, porque não pode-

mos mais supor a mesma condição de fronteira. Porém, para grandes distâncias, os autores argumentam que a interação é do mesmo tipo e as equações continuam válidas [23].



**Fig. 4.2:** Estados ligados para os casos onde as cargas são iguais (à esquerda) e opostas (à direita). A parte real de  $A(x,y) - \Re(A(x,y))$  – está representado em escala cinza: máximo do campo em preto e o mínimo em branco. (figuras extraídas de [23])

O procedimento para obtenção das equações de velocidade segue com aproximações que simplificam a equação para  $W(r, \theta, t)$  - (4.5). Estas suposições são importantes porque definirão os limites da teoria:

- velocidade de deriva da espiral é pequena  $\rightarrow$  aproximação válida quando as espirais estão suficientemente distantes  $\Rightarrow$  matematicamente:  $vX \ll 1$ ;
- a perturbação  $W$  independe do tempo  $\Rightarrow W_t = 0$ ;
- os termos da ordem  $\sim vW$  são desprezados. Eles são pequenos no caso geral  $c \neq b$ , o qual é considerado aqui e

- $b = 0$ , para simplificar as expressões. As transformações de similaridade garantem que isto não implica perda de generalidade [23].

Usando estas suposições, escrevendo  $W$  como uma parte real mais uma parte imaginária ( $W = A + iB$ ) e propondo que estas soluções possam ser expressas em séries de Fourier:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} A_n(r) \\ B_n(r) \end{pmatrix} e^{(in\theta)}, \quad (4.5)$$

com as condições de contorno  $A_n = A_{-n}^*$  e  $B_n = B_{-n}^*$ , chega-se ao sistema de equações:

$$\Delta_r A_n - \frac{n^2}{r^2} A_n - 2F^2 A_n - \frac{\Delta_r F}{F} A_n - 2[\psi' F \frac{\partial}{\partial r} (\frac{B_n}{F}) + \frac{in}{r^2} B_n] = \frac{vn}{2i} F' \delta_{\pm 1, n} e^{(inn)} \quad (4.6a)$$

$$\Delta_r B_n - \frac{n^2}{r^2} B_n - 2cF^2 A_n - \frac{\Delta_r F}{F} B_n + 2[\psi' F \frac{\partial}{\partial r} (\frac{A_n}{F}) + \frac{in}{r^2} A_n] = \frac{v}{2} F (-in\psi' + \frac{1}{r}) \delta_{\pm 1, n} e^{(inn)} \quad (4.6b)$$

No artigo [23], os autores provam que o número de termos dominantes desta expansão em série aumentam com a raiz quadrada da distância das espirais às linhas de choque ( $|n| \leq n_c$ , sendo  $n_c \sim \sqrt{X}^\dagger$  – olhar apêndice B). A  $\delta_{\pm 1, n}$  surge devido à presença das funções  $\sin(\theta + \eta)$  e  $\cos(\theta + \eta)$  na equação (4.5), já que a expansão em série de potências destas funções só contém os termos em ordem 1 em  $\theta$  e  $\eta$ . A presença desta  $\delta_{\pm 1, n}$  implica que a não homogeneidade em velocidade apenas aparecerá para  $n = \pm 1$ . Os autores consideram limites assintóticos (próximo do centro,  $r \rightarrow 0$ , e distante dele,  $r \rightarrow \infty$ ). Nestes casos,

<sup>†</sup> A distância à linha de choque está definida na figura (4.1).

há soluções aproximadas analíticas para (A,B). A partir destas soluções e das condições de fronteira, a proposta é construir uma solução geral que seja uma combinação linear destas duas soluções particulares. Este procedimento está colocado em linhas gerais no apêndice B.

Para o caso oscilatório (definido no capítulo 3 como sendo a região à direita da linha OR do diagrama (3.1), onde  $c > c_{cr}$ ), as equações diferenciais ordinárias para as velocidades dos centros são dadas por:

$$v_x = \text{Im}\left(\frac{-Q\sqrt{1-Q^2}\exp(-pX)}{C_y\delta\sqrt{2\pi pX}}X^{-\mu}\right)/\text{Im}(C_x/C_y) \quad (4.7a)$$

$$v_y = \text{Re}\left(\frac{-Q\sqrt{1-Q^2}\exp(-pX)}{C_y\delta\sqrt{2\pi pX}}X^{-\mu}\right) - v_x\text{Re}(C_x/C_y) \quad (4.7b)$$

As constantes complexas  $C_{x,y}$ ,  $C_0$ ,  $C_{10}$  são obtidas numericamente linearizando-se a EGLC. O parâmetro  $p$  é a taxa de decaimento da perturbação à espiral isolada, a qual é complexa <sup>‡</sup>.

Estas equações foram obtidas supondo-se que a linha de choque entre duas espirais é localizada no ponto médio entre elas. Ocorre, no entanto, que esta simetria não é observada nas simulações para o caso de interação oscilatória; observa-se que as espirais possuem domínios diferentes. Se fizermos uma perturbação na linha de choque, as freqüências das espirais serão alteradas. A espiral com maior freqüência  $\omega$  irá dominar a dinâmica (observe as simulações feitas usando-se a EGLC na figura 4.3).

A partir desta observação feita com a EGLC, é necessário considerar um termo de correção na fase das espirais para saber como a interação com a espiral vizinha a altera na tentativa de reproduzir o fenômeno. A proposta de solução de espiral perturbada agora conterá o termo  $\phi(t)$ :

---

<sup>‡</sup> Para melhor compreensão de cada constante, olhar apêndice B.



**Fig. 4.3:** Evolução de um par de espirais com cargas opostas (parte real do campo  $A$ ). Observa-se o domínio de uma sobre a outra. A segunda espiral não desaparece devido às condições de contorno periódicas. (figura extraída de [24])

$$A_{\text{rp}}(\mathbf{r}, t) = (F(r) + W(r, \theta, t)) \exp[i(m\theta + \psi(r) + \omega t + \phi(t))], \quad (4.8)$$

Todos os termos existentes nesta solução já foram explicados anteriormente, exceto a correção de fase que não existia na proposta anterior (4.3). Substituindo-se a proposta de solução com fase perturbada (4.8) na EGLC (2.9), a equação (4.5) fica alterada pela presença de dois novos termos:  $iW\dot{\phi}(t)$  e  $F\dot{\phi}(t)$ . Usando-se as mesmas suposições feitas para deduzir as equações (4.7) onde a correção na fase não era considerada e fazendo-se todos os cálculos feitos no referido caso permitindo que a fase varie, chega-se a uma expressão para a correção na frequência  $\partial_t \phi$  [24]:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\text{Im}(C_{10}C_0^*)} \text{Im} \left( \frac{-Q\sqrt{1-Q^2} \exp(-pX)}{\delta\sqrt{2\pi pX}} X^{-\mu} C_0^* \right) \quad (4.9)$$

Como as expressões de velocidade dos centros das espirais são dependentes da distância à linha de choque entre elas (4.7), a diferença de fase entre duas espirais vizinhas influencia diretamente no cálculo destas grandezas. Se  $X$  não

é mais o ponto médio da distância entre as duas espirais, é necessário encontrar uma expressão para a distância de cada uma das espirais à linha de choque.

A distância ao choque é obtida pela condição de que a fase total de duas espirais deve ser igual num dado ponto do espaço (condição de continuidade do campo  $A$ ). Se a fase total da  $j$ -ésima espiral é dada por  $\Phi_j = \psi(r) + \phi_j$  e, no limite em que se está distante do centro ( $r \rightarrow \infty$ ), a onda emitida é aproximadamente uma onda plana (e portanto  $\psi(r) \approx |Q|r$ ), então, a fase total desta espiral será:  $\Phi_j \approx |Q|r_j + \phi_j$ . Fazendo-se  $\Phi_j - \Phi_i = 2|Q|X$  chega-se a (4.10).

$$X = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|/2 - (\phi_i - \phi_j)/2|Q| \quad (4.10)$$

No caso em que  $c < c_{cr}$  (à esquerda da linha OR no diagrama de fases), a interação entre as espirais é dita *monotônica*. As equações para este caso foram obtidas como um caso limite em que  $c \rightarrow 0$ <sup>§</sup>. Neste regime, tem-se:

$$\frac{dz}{dt} = 2c^2\pi Q(im - cB') \frac{\exp(-2|cQ|X)}{\sqrt{\pi|cQ|X}} \quad (4.11a)$$

$$\dot{\phi} = 2cQ^2\pi \frac{\exp(-2|cQ|X)}{\sqrt{\pi|cQ|X}} \quad (4.11b)$$

Sendo  $z = x + iy$  a posição (complexa) de cada espiral,  $\frac{dz}{dt} = v_x + iv_y$  são as equações para as velocidades de seus centros e  $\dot{\phi}$  dará a evolução da fase. O parâmetro  $m$  é a carga topológica,  $B' \approx 0.48$  (foi deduzida num artigo de 1982 – [15]) e  $X$  é a distância ao choque, como no caso anterior.

Neste regime monotônico, foi possível fazer um (re)escalamento nas variáveis, o qual se mostrou extremamente conveniente. As transformações efetuadas sobre as variáveis são dadas por:

---

<sup>§</sup> O procedimento desenvolvido pelos autores, em [24], para chegar às equações no caso monotônico, está colocado em linhas gerais no apêndice B.

$$\begin{aligned} r &\rightarrow 2c|Q|r \\ t &\rightarrow 4\sqrt{2\pi}c^3Q^2t \end{aligned} \quad (4.12)$$

Substituindo-se estas definições nas equações (4.11), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{dz_j}{dt} &= \sum_l (-cB' + im_l) \frac{z_l - z_j}{|z_l - z_j|} \frac{\exp(-X_l)}{\sqrt{X_l}}, \\ \dot{\phi}_j &= \sum_l \frac{\exp(-X_l)}{2c^2\sqrt{X_l}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

A expressão para a distância ao choque também ficou alterada com este reescalamamento:

$$X_l = |z_l - z_j|/2 + c(\phi_j - \phi_l)$$

Este reescalamamento das variáveis confere ao tratamento reduzido (assim nos referimos ao tratamento com as equações diferenciais) uma grande vantagem sobre o estudo feito com a EGLC. Notemos que as expressões para as velocidades não contêm “ $Q$ ” (o número de onda da onda plana assintótica) e isto é uma imensa vantagem computacional!

Com esta mudança, a escala de tempo ultralenta apresentada pela EGLC devido ao desaparecimento de  $Q$  no limite em que  $c \rightarrow 0$  não existirá. Portanto, as limitações existentes neste limite para a EGLC não existirão para o tratamento com o CEEDOs. Esta é uma das grandes vantagens deste tratamento reduzido, pois permite estudar sistemas dinâmicos em limites que a EGLC não responde de maneira razoável.

Na seção seguinte, abordaremos alguns aspectos destas equações. Algumas de suas características e comportamentos assintóticos são comentados para entendermos as razões responsáveis pelo acordo entre os resultados obtidos com as CEEDOs e observados com a EGLC.

## 4.2 Algumas características do CEEDOs

Uma importante característica do sistema na fase chamada *vortex glass* observada nas simulações com a EGLC e reproduzida pelas equações ordinárias no caso oscilatório é a existência de estados ligados: estados para os quais a velocidade radial das espirais é nula ( $v_x = 0$ ). Ou seja, quando a distância radial entre elas se mantém. Este estado ligado desloca-se com velocidade  $v_y$ , a qual é chamada velocidade de deriva.

A partir do CEEDOs, podemos encontrar as distâncias de equilíbrio entre elas fazendo  $v_x = 0$ . Estas distâncias são dadas pela equação:

$$\text{Im}\left(\frac{-Q\sqrt{1-Q^2}\exp(-pX_e)}{C_y\delta\sqrt{2\pi pX_e}}X_e^{-\mu}\right) = 0$$

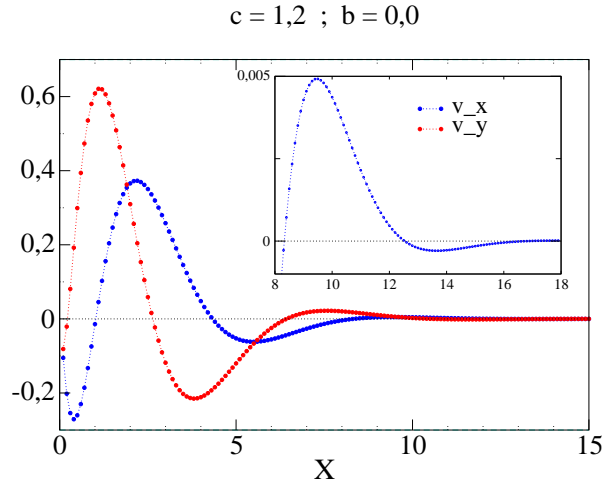
Sendo todas variáveis reais, exceto  $p$  e  $\mu$ , a condição anterior implica:

$$\begin{aligned} \text{Im}(pX_e + \mu \ln(X_e)) &= -\phi + \pi * l && \text{com } l=0, 1, 2 \dots, \\ \phi &= -\text{arg}\left(\frac{1}{C_y\delta p^{1/2}}\right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

A figura das velocidades  $v_x$  e  $v_y$  (4.4) explicita a razão pela qual esta região e interação é chamada de “oscilatória”. Observemos que as velocidades oscilam com a distância entre as espirais. Ou seja, dependendo da distância na qual elas estão, a interação será atrativa ou repulsiva. A questão seria saber se estes estados ligados (representados no gráfico pelos pontos onde a curva  $v_x$  toca o eixo  $x$  ( $y = 0$ )) são estáveis ou não.

Substituindo-se a relação da distância ao choque (4.10) em (4.7), descobre-se que os estados ligados são instáveis frente à quebra de simetria no regime oscilatório [24]. Note-se que toda a nossa análise é feita considerando a interação de apenas duas espirais. De posse disto, a interação de muitas delas é tratada com simulações. As simulações com a EGLC indicam que os estados assimétricos





**Fig. 4.4:** Velocidades radial ( $v_x$ ) e tangencial ( $v_y$ ) como função da separação das espirais. Os estados ligados são  $x_{e0} \approx 1,023$  (para  $l = 0$ ),  $x_{e1} \approx 4,33$  ( $l = 1$ )  $x_{e2} \approx 8,32$  ( $l = 2$ ),  $x_{e3} \approx 12,53$  ( $l = 3$ ),  $x_{e4} \approx 16,84$  ( $l = 4$ ) e  $x_{e5} \approx 21,19$  ( $l = 5$ ). Inset: ampliação da região entre  $x = 8$  e  $x = 18$

existem e “sobrevivem” na dinâmica por todo o tempo possível de simular com a equação completa. Portanto, é importante salientarmos que, embora os estados ligados sejam instáveis frente à quebra de simetria, existem *redes* de espirais assimétricas (com domínios de tamanhos diferentes) que são estáveis [24].

No referido artigo [24], os autores reescrevem a expressão para a fase de maneira aproximada, como  $\partial_t \phi \approx \xi \phi^\ddagger$ . Desta maneira, fica explícita uma correção de fase exponencial, cujo crescimento é dado pela constante  $\xi$ . A determinação desta constante numericamente indica que ela é positiva para o primeiro estado ligado e portanto ele é instável com relação a  $\phi$ . É por isto que quando a frequência de uma das espirais é maior que a da outra, uma delas dominará, reproduzindo, portanto, a *quebra de simetria* observada utilizando-se a EGLC. Esta constante

<sup>‡</sup> Esta expressão é obtida considerando-se, na expressão para a correção da fase (4.9), que a diferença de fase é pequena e portanto a expansão do termo  $e^{-p(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|/2 - (\phi_i - \phi_j)/2|Q|)}$  é possível:  $e^{-p(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|/2)} e^{p(\phi_i - \phi_j)/2|Q|} \approx e^{-p|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|/2} p \frac{(\phi_i - \phi_j)}{2|Q|}$ .

é, no entanto, muito pequena. Isto possibilita que o estado ligado persista por longo tempo.

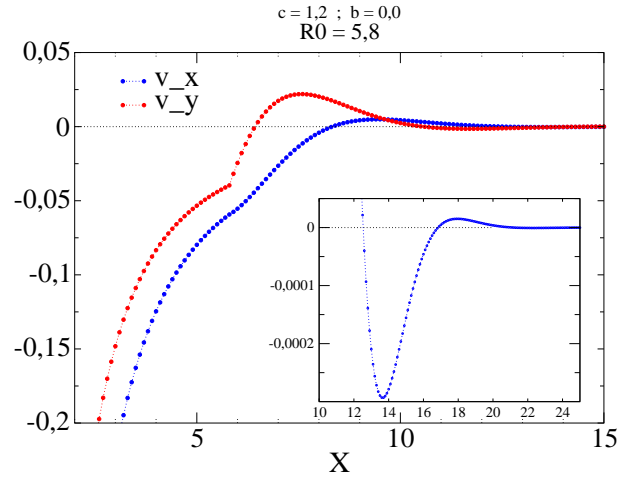
Por outro lado, o mesmo tipo e análise, mas no limite  $c < c_{cr}$  mostra que a diferença de fases sempre tende a zero. Portanto, qualquer perturbação feita nas linhas de choque será restaurada, de tal maneira que os domínios de cada espiral se mantêm os mesmos: não há quebra de simetria.

Estes estados ligados colocados anteriormente (figura 4.4) são valores extraídos da teoria diretamente. Na prática, para as simulações numéricas, as equações de velocidade foram alteradas quando a distância entre as espirais é pequena. Como é possível observar pela figura (4.4), para pequenas distâncias, as velocidades podem ser muito grandes (primeiro pico da velocidade) e isto causa problemas numéricos. Para contornar tal problema, usamos uma aproximação para o caso oscilatório.

Numericamente, quando dois vórtices se aproximam abaixo de uma distância  $R_0$ , as equações de velocidade são alteradas pela presença de um termo quadrático  $((\frac{R_0}{R})^2)$  e, em lugar de  $X$ , substituímos por  $R_0$ . Notemos que esta alteração implica repulsão dos vórtices a pequenas distâncias. Isto impede a aniquilação dos mesmos. Embora tal aniquilação seja observada com a equação completa (EGLC), o método numérico usado por nós exige que contornemos a divergência numérica. Ao final do trabalho, discutiremos uma maneira de considerarmos a aniquilação sem haver divergência numérica.

O gráfico desta aproximação (as equações de velocidade modificadas pela referida aproximação) está expresso na figura (4.5). Notemos que os estados ligados são alterados. Estes valores serão encontrados nas simulações. No capítulo de resultados, voltaremos a esta discussão.

Com relação ao regime monotônico, as equações apresentam um decaimento exponencial sem qualquer “modulação”, ao contrário do observado no caso oscilatório. A interação entre duas espirais decai rápida e *monotonicamente* com o aumento da distância entre elas. Quando se aproximam, há um forte repulsão en-

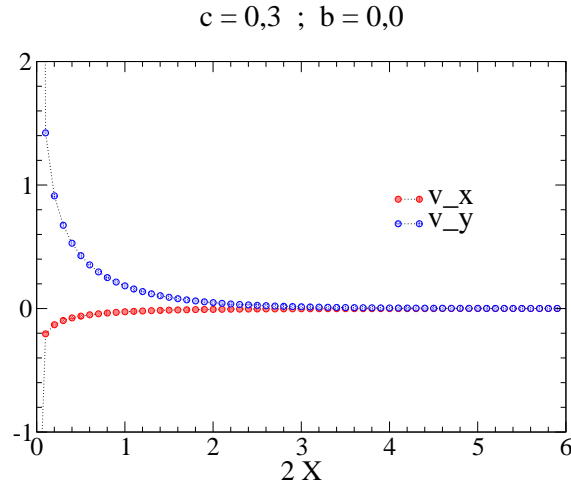


**Fig. 4.5:** Velocidades radial ( $v_x$ ) e tangencial ( $v_y$ ) como função da separação das espirais. Os estados ligados são  $x_{e0} \approx 8,4$  (para  $l = 0$ ),  $x_{e1} \approx 12,5$  ( $l = 1$ ),  $x_{e2} \approx 16,9$  ( $l = 2$ ),  $x_{e3} \approx 21,1$  ( $l = 3$ ),  $x_{e4} \approx 25,6$  ( $l = 4$ ) e  $x_{e5} \approx 30,0$  ( $l = 5$ ). Inset: ampliação da região entre  $x = 10$  e  $x = 25$ .

tre elas, evitando a aniquilação destes defeitos. De fato, a aniquilação de defeitos não é observada com as simulações usando a EGLC para o regime monotônico. Observe o gráfico (4.6).

Tendo sido apresentada a nossa proposta de abordagem para o tratamento da interação dos defeitos espirais e feito um rápido estudo das equações (o CEEDOs), acreditamos ter subsídios suficientes para começarmos a estudar, de fato, a região de parâmetros da EGLC de nosso interesse.

Até o presente trabalho, acreditava-se que as espirais “rodeadas” por choques eram estruturas celulares estáticas. Falava-se a respeito de dinâmicas vitrosas. Tais estruturas são *congeladas* em escalas de tempo usuais, as quais são possíveis de simular com a EGLC. As nossas simulações apresentam, no entanto, um



**Fig. 4.6:** Velocidades radial ( $v_x$ ) e tangencial ( $v_y$ ) como função da separação das espirais para o caso monotônico ( $c = 0,3$ )

cenário diferente: elas evoluem em escalas muitíssimo lentas de tempo.

Esta diferença entre as abordagens foi a grande motivação do nosso trabalho. Notemos que a observação de uma dinâmica intermitente em lugar a uma estrutura aparentemente bloqueada é uma promessa muito interessante. Ela “abre portas” a diversas questões interessantes. Por exemplo, a existência de uma dinâmica vitrosa puramente determinista é uma questão bastante discutida e ainda hoje não elucidada [38].

No entanto, esta mesma diferença que nos estimula a investigar a dinâmica, é a mesma que levanta dúvidas a respeito da abordagem. Ou seja, por que razões acreditar que as equações por nós utilizadas (CEEDOs) descrevem corretamente a dinâmica? Por que não acreditar que, se fosse possível simular a EGLC em intervalos de tempo maiores não continuaríamos a observar estes estados “congelados”? Ou seja, o que nos faz acreditar que nossas simulações estão corretas, embora mostrem resultados diferentes dos propostos até o presente momento?

Na tentativa de suplantar tais dúvidas e certificarmos-nos que a tentativa de redução da dinâmica ao caso discreto é razoável enquanto ferramenta para descre-

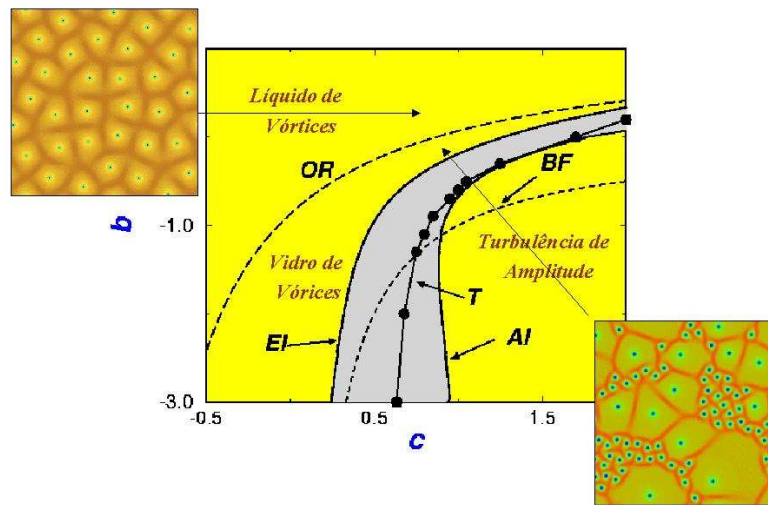
ver sistemas dinâmicos, fizemos um estudo comparativo entre as duas formas de abordagens (EGLC e CEEDOs). Este estudo comparativo está apresentado na primeira parte do capítulo seguinte (cap.5). Veremos que, nos intervalos onde o CEEDOs e a EGLC respondem igualmente bem, encontramos ótima concordância entre as abordagens. Após verificarmos tais concordâncias, apresentaremos alguns resultados do nosso estudo da dinâmica usando as equações reduzidas. Esta segunda parte do nosso trabalho estará apresentada após o estudo comparativo no capítulo seguinte.

## 5. Resultados: análise comparativa e estudo da dinâmica

Nosso trabalho está diretamente voltado ao estudo de uma região de parâmetros no espaço de fases onde a solução de espiral única é estável. Neste intervalo, também se observam estruturas desordenadas de multi-espirais quase bloqueadas. Existem espirais com grandes e pequenos “domínios”. Elas são rodeadas por redes de choques, os quais são linhas formadas no encontro destas espirais.

Este cenário foi descrito em capítulos anteriores (capítulos 2 e 3) e brevemente caracterizado. Até este momento, introduzimos conceitos e modelos adequados ao tratamento de sistemas dinâmicos. Apresentamos a EGLC, explicando a razão pela qual ela é um modelo geral para descrever meios oscilatórios no limiar de uma bifurcação. Seu diagrama de fases foi explicado com o objetivo de explicitar as diversas estruturas apresentadas pela equação, destacando, portanto, o potencial da equação em descrever, pelo menos em nível qualitativo, as muitas fases possíveis de um sistema dinâmico. A região de nosso interesse foi apresentada como uma das fases descritas pela equação. Colocamos as dificuldades de tratamento desta região com a EGLC e propusemos uma alternativa: as equações reduzidas (as EDOs). Este capítulo visa apresentar nossos resultados utilizando este método alternativo proposto por nós.

Estas estruturas são bastante comuns em modelos de meios excitáveis e em experimentos em meios oscilatórios. Embora sejam facilmente encontradas, muito pouco se sabe sobre elas e sobre o tipo de transição capaz de formá-las. A



**Fig. 5.1:** Em destaque no Diagrama de Fases as regiões onde os Líquido e Vidros de Vórtices aparecem como solução.

ignorância sobre tais estruturas se deve à dificuldade de tratá-las analítica e numericamente.

Um caráter vítreo foi proposto a elas, tendo em vista seus comportamentos de dinâmica ultralenta. Elas parecem estar bloqueadas em escalas de tempo usuais possíveis de simular com a EGLC.

A redução da dinâmica ao tratamento dos centros destes defeitos e de suas fases, permite que nos estudemos tais estruturas em escalas de tempo muito maiores. Além das escalas de tempo poderem ser radicalmente aumentadas, as escalas espacial e de número de espirais em interação também podem ser estudadas em intervalos impossíveis com a EGLC.

Esta dinâmica *turbulenta mediada por defeitos* ocorre em duas fases muito distintas. Na primeira delas, observa-se a difusão normal de cada espiral individualmente. Inspirados neste fato, o nome dado a esta fase foi *Líquido de Vórtices* (*Vortex Liquid*). A outra fase contém espirais com domínios de tamanhos di-

ferentes e uma dinâmica intermitente que evolui muito lentamente. Devido a esta dinâmica lenta e à observação de alguns fenômenos que parecem apresentar características tipo *aging*, o nome atribuído a ela foi *Vidros de Vórtice (Vortex Glass)*.

Conforme já comentado, esta fase intermitente apresenta uma escala de evolução temporal muito lenta. Foi justamente para tentar compreender mais claramente o que ocorre neste limite é que a nossa abordagem foi proposta. De fato, nossas simulações mostram resultados bastante diferentes se comparados com as previsões feitas utilizando-se somente a EGLC. Nós observamos que tais estruturas evoluem em escalas de tempo bastante lentas, mas elas não estão paradas.

A credibilidade à nossa proposta reside na concordância de nossos dados com os dados da EGLC nas regiões em que ambas as abordagens podem ser feitas com sucesso.

Existem regiões onde podemos verificar concordâncias qualitativas e quantitativas entre as duas formas de abordar o problema. Assim sendo, podemos assumir que o modelo responde bem nos limites já conhecidos e que, portanto, ele é capaz de fazer previsões em regiões onde a EGLC não pode responder [20, 34].

Na tentativa de convencer-lhes de que nosso tratamento retorna resultados concordantes com a EGLC, iremos, num primeiro momento, relatar as características observadas em cada uma das fases e comparar dados encontrados usando as duas “abordagens”.

Uma vez que conseguimos estabelecer este comparativo e mostrar que as maneiras de tratamento são equivalentes, podemos assumir que o CEEDOs é uma tentativa feliz de redução do problema a um estudo mais compacto e eficaz. Neste momento, pretendemos mostrar alguns resultados utilizando este modelo, apresentando algumas dificuldades, vantagens desta abordagem e idéias a serem ainda implementadas.



## 5.1 Medidas comparativas entre EGLC e o CEEDOs

Antes de começarmos a caracterizar as fases e comparar resultados, há a necessidade de explicar como tratamos o problema e quais as medidas podemos efetuar sobre ele.

Na EGLC, o que se faz é resolver a equação numericamente e monitorar as posições  $\vec{r}_j(t)$  das  $N$  espirais. Os valores típicos destas integrações numéricas são para um sistema de área tipicamente igual a  $S = 512 \times 512$  e o tempo de integração da ordem de  $10^7$  \*. Foram usadas condições periódicas de contorno.

Monitorando-se as posições das espirais, é possível medir o que chamamos de “atividade” ( $T = S^{-1} \int_S d\vec{r} |d\vec{r}| |A|$ ), o desvio quadrático médio das posições de cada espiral (medida que nos permitirá definir o Coeficiente de Difusão  $D = \frac{1}{Nt} \sum_{j=1}^N \langle |\vec{r}_j(t) - \vec{r}_j(0)|^2 \rangle$ ). Podemos medir a distribuição de posição destas espirais. Isto nos permitirá extrair informações da distância média que as espirais estão umas das outras. Também medimos as distribuições de velocidades das espirais. Cada uma destas medidas nos conduz a conclusões bastante distintas para cada fase (comentários em seções posteriores). Ao longo destas caracterizações de cada uma das fases, explicaremos alguns problemas que surgiram e nos levaram a construir outras maneiras de enxergar os fenômenos.

O interessante neste momento é mostrar como, na prática, transformamos o problema de um sistema contínuo para uma aproximação onde apenas tratamos os centros dos defeitos e suas fases. Quais as grandezas que medimos em cada uma das abordagens de maneira que elas sejam equivalentes e, portanto, comparáveis.

A abordagem com o CEEDOs suprime a necessidade de representar o campo “A” por todo o espaço. Esta supressão possibilita que muito tempo computaci-

---

\* tempo medido em unidade da EGLC; não é número de passos de integração. A unidade deve ser dada em termos de  $\frac{1}{\mu}$ , tendo vista que  $\mu$  é a ordem de grandeza do termo de instabilidade linear da equação (2.9).

onal seja poupado. Por outro lado, algumas adaptações devem ser feitas para que as duas maneiras de tratar o problema sejam equivalentes. Uma importante observação para que esta tarefa seja feita com êxito é que, neste regime de interesse, o módulo da amplitude é praticamente constante no tempo. A variação mais relevante ocorre justamente próximo aos centros dos defeitos. Portanto, a medida da atividade é praticamente toda referente a esta região (aos centros), porque as demais regiões das espirais mantêm o módulo das amplitudes praticamente constante; não alterando substancialmente a medida. Assim sendo, no caso discreto (abordagem feita com o CEEDOs), a medida de atividade se traduz em somar os módulos das velocidades destes defeitos:  $T = \sum_{j=1}^N |\vec{v}|_j$

De maneira geral, as medidas com o CEEDOs são mais fáceis de serem implementadas, já que o tratamento é feito justamente com os centros dos defeitos, enquanto que a EGLC trabalha com as espirais completas, de maneira contínua. Este processo é muito mais custoso computacionalmente e os dados obtidos são feitos com uma precisão bem menor. Uma consequência é que as medidas possuem mais “ruído” no caso da equação completa (EGLC) do que quando usamos o CEEDOs.

Nosso estudo foi restrito aos casos  $b = 0$  e  $c > 0$ . Esta restrição não implica perda de generalidade, já que é possível fazer uma mudança de variáveis e recair casos de interesse [12].

Comentados alguns detalhes técnicos, acreditamos ser possível passar a explicar nossas medidas e, com elas, algumas observações e conclusões.

### 5.1.1 Caso Monotônico ( $c < c_{cr} = 0,845$ )

Antes de começarmos a apresentar nossas análises comparativas, alguns comentários são importantes. Neste regime de interação monotônica, há, conforme mostramos no capítulo anterior, uma transformação de variáveis, a qual é reponsável por grande parte da eficácia computacional do CEEDOs. Para compararmos as

duas abordagens (com a EGLC e com o CEEDOs), é necessário que utilizemos as seguintes relações (com base nas transformações (4.13)):

$$L_{CEEDOs} = 2c|k|L_{EGLC} \quad (5.1a)$$

$$t_{CEEDOs} = 4\sqrt{2\pi}c^3k^2t_{EGLC} \quad (5.1b)$$

$$D_{CEEDOs} = \frac{D_{EGLC}}{\sqrt{2\pi}c} \quad (5.1c)$$

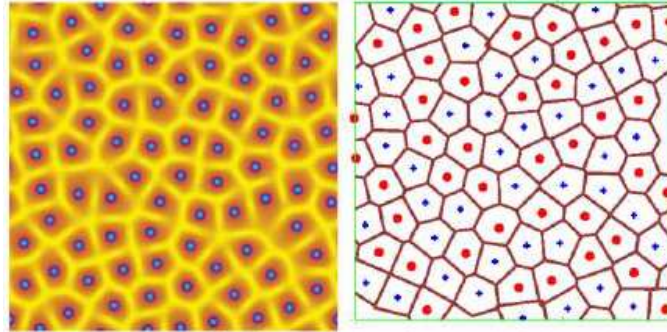
As comparações entre as abordagens aqui expostas são feitas já considerando estas relações. Quando falamos em *sistemas análogos*, estamos nos referindo a elas. Os sistemas usados nas duas abordagens não possuem mesmos valores absolutos; eles devem ser *iguais* após terem sofridos as alterações impostas pelas relações (5.1).

No presente trabalho, mostraremos que há inúmeras medidas no caso monotônico que credibilizam os resultados obtidos com as equações reduzidas [38].

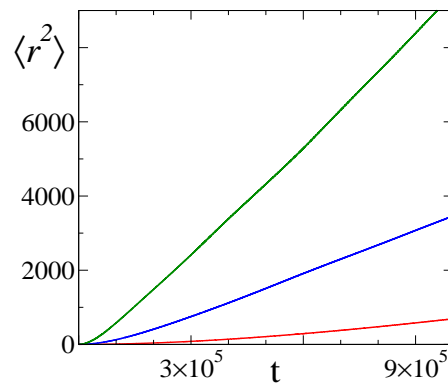
Qualitativamente, podemos observar uma figura da distribuição instantânea dos vórtices. De maneira a possibilitar a comparação, a figura seguinte (5.2) contém a imagem instantânea para sistemas equivalentes tratados com as diferentes abordagens.

Notemos que o CEEDOs, conforme já foi dito, suprimem a representação do campo “A” por todo o espaço. O tratamento se limita aos centros dos defeitos e às linhas de choque entre eles. A semelhança entre os domínios das espirais, tanto em formato como em tamanhos, é visível.

Os centros das espirais realizam difusão normal para um sistema de tamanho suficientemente grande. Considerando-se este fato e observando-se que o número de espirais se mantém constante nesta fase, podemos atribuir a este “*líquido de vórtices*” uma viscosidade, a qual é inversamente proporcional ao coeficiente de difusão ( $\nu \propto D^{-1}$ ).



**Fig. 5.2:** Imagem instantânea de  $|A|$  – módulo do campo complexo – para uma solução típica da EGLC (à esquerda) para  $c = 0.6$ ,  $L = 512$  e  $N = 82$  espirais. À direita, os centros das espirais e as linhas de choque soluções das equações reduzidas para um sistema análogo.



**Fig. 5.3:** Desvio Quadrático Médio ( $\langle r^2 \rangle$ ) dos vórtices como função do tempo obtidos com a EGLC para  $L = 256$  e  $N = 28, 22, 18$  ( $c = 0,7$ )

Tentamos encontrar a dependência analítica de “ $D$ ” com a densidade de vórtices ( $\rho = \frac{N}{S}$  no caso da EGLC e  $\rho = N/L^2$  – onde “ $L$ ” é o tamanho do sistema – no caso do CEEDOs) e a dependência em “ $c$ ”.

Neste ponto, o tratamento com o CEEDOs apresenta uma imensa vantagem sobre o tratamento com a EGLC. Neste último caso, há problemas numéricos no limite em que  $c \rightarrow 0$ , devido ao valor quase nulo do comprimento de onda  $k$ . Com o tratamento contínuo, é impossível fazer as simulações para “ $c$ ” neste limite. No caso do CEEDOs, graças ao reescalamto das variáveis (4.13) é possível contornar absolutamente esta divergência.

Nos intervalos onde as duas abordagens respondem bem, há uma excelente concordância numérica entre os dois métodos. Para um sistema  $L = 512$  e  $N = 46$  espirais ( $c = 0.6$ ), o coeficiente de difusão obtido foi  $D_{EGLC} = 0.0033 \pm 0.00013$ , enquanto que, para um sistema análogo<sup>†</sup> simulado com as equações reduzidas, o resultado obtido foi  $D_{CEEDOs} = 0.0036 \pm 0.0002$ . Outro exemplo de concordância numérica é para um sistema de mesmo tamanho (e mesmo valor de “ $c$ ”), porém com  $N = 52$  espirais. Neste caso,  $D_{EGLC} = 0.00489 \pm 0.00017$   $D_{CEEDOs} = 0.0053 \pm 0.0005$

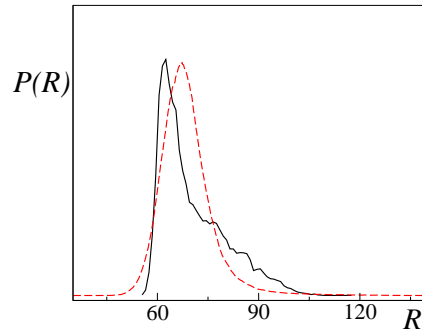
Esta concordância numérica nos encoraja a acreditar nesta proposta de tratamento do problema (o CEEDOs) e a testar, com ela, limites onde a EGLC não permite investigações [38].

A concordância entre as duas formulações não se resume a esta medida, é claro. Obtivemos excelentes acordos numéricos na distribuição de distância ao primeiro vizinho e na distribuição de velocidades.

A primeira medida – distribuição de distância ao primeiro vizinho – apresenta um pico centrado em  $R \approx 70$ . Este comportamento é típico de uma distribuição média homogênea (facilmente verificável na figura (5.2)) e característico de um sistema líquido. Sendo que os vórtices possuem domínios de aproximadamente o

---

<sup>†</sup> por “análogo” entende-se que já foi aplicado o “reescalamto” das variáveis; portanto, embora sejam valores absolutos diferentes, os sistemas são equivalentes.



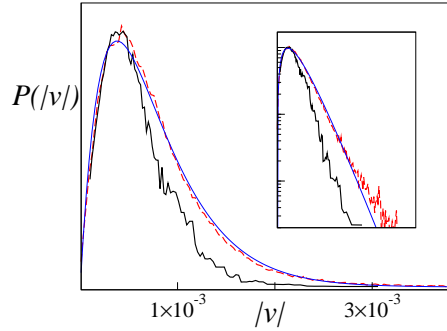
**Fig. 5.4:** Histograma de distância aos primeiros vizinhos para  $c = 0.6$ ,  $N = 82$  e  $L = 512$  para a EGLC (linha contínua) e para o CEEDOs (linha tracejada).

mesmo tamanho, o resultado está em acordo com a distribuição esperada.

A concordância com os dados da EGLC é ótima, excetuando-se a cauda observada neste segundo caso. Esta cauda é explicada pela dificuldade da medida e pela pouca estatística. O fator limitante para a melhora desta estatística reside, novamente, na dificuldade numérica das simulações com a EGLC completa.

Observemos o gráfico comparativo entre as medidas de distribuição de velocidades (figura (5.5)) nos dois casos. A concordância entre as medidas é clara (exceção dada, novamente, à cauda). A distribuição obtida é exponencial ( $P \propto |v|xp(-ctex|v|)$ ). O grande desvio em relação a uma distribuição Maxwelliana é interpretado por nós como a manifestação de que o sistema está fora do equilíbrio termodinâmico.

Embora a distribuição de velocidades em um sistema líquido seja dada por uma Maxwelliana, o vortex líquido não é um sistema em equilíbrio termodinâmico e, portanto, embora possua algumas características de líquido (razão pela qual lhe foi atribuído tal nome), apresenta uma distribuição exponencial de velocidades.



**Fig. 5.5:** Histograma das velocidades instantâneas dos centros das espirais para  $c = 0.7$ ,  $N = 118$  e  $L = 512$  para a EGLC (linha contínua) e para o CEEDOs (linha tracejada). A linha fina é um “fit” de  $P \propto |v| \exp(-cte|v|)$ . No *inset*: mesmos dados em escala lin-log.

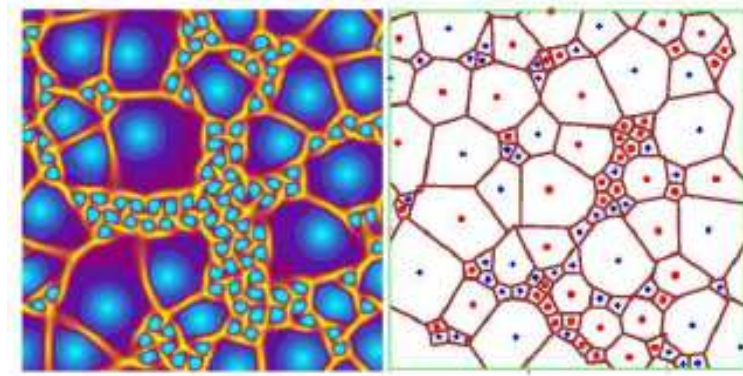
### 5.1.2 Caso Oscilatório ( $c > c_{cr} = 0,845$ )

Nesta fase, a confiabilidade no tratamento com o CEEDOs foi atestada, inicialmente, porque elas descrevem com fidelidade fenômenos fundamentais ocorridos com os vórtices nesta região: a quebra de simetria e aparecimento de estados ligados (ambas as características são explicadas no capítulo anterior).

Até esta tentativa de redução do problema [30, 31], nunca antes um modelo conseguira reproduzir, juntamente, a quebra de simetria (representada pelos diferentes tamanhos de domínios dos vórtices) e a formação de estados (instáveis) ligados (velocidade radial  $-v_x$  - nula). A atividade intermitente do sistema a baixas densidades e a própria formação da estrutura de *vortex glass* foram fatores que atestaram a validade do modelo.

Qualitativamente, a concordância é explicitada nas figuras de posições instantâneas. Com a EGLC, é possível observar os níveis de centros que representam o valor do módulo do campo complexo “A” ( $|A|$ ). Visualizamos uma variação contínua desta grandeza. Utilizando-se o CEEDOs todo este espaço é suprimido. É exatamente este cenário que nós podemos encontrar na figura (5.6) à direita. É

possível distinguir as espirais grandes das pequenas pela existência dos tamanhos variados de domínios.

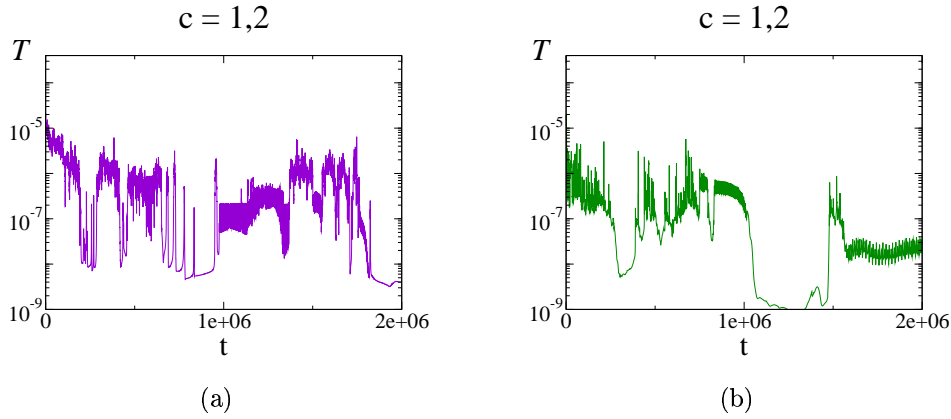


**Fig. 5.6:** Imagem instantânea de  $|A|$  – módulo do campo complexo – para uma solução típica da CGLE (à esquerda) para  $c = 1.2$ ,  $L = 256$  e  $N = 124$  espirais. À direita, os centros das espirais e as linhas de choque soluções das equações reduzidas para um sistema análogo.

Observemos os gráficos das atividades em função do tempo para a abordagem com a EGLC e com o CEEDOs (figura (5.7)). Estas medidas de atividade denunciam a característica de intermitência do sistema. Observa-se claramente que os vórtices possuem longos períodos de tempo onde estão em baixa “atividade” (movimentam-se pouco) e há períodos de grande movimentação (“*bursts*” de atividade).

A existência destes períodos de intensa atividade é explicada pela fração líquida existente neste sistema de Vidros de Vórtice. Neste intervalo de interação (caso oscilatório), após um período de tempo, as populações de vórtices segregam para duas fases distintas: espirais grandes (grandes domínios) e praticamente imobilizadas e agrupamentos de pequenas espirais que ficam confinadas entre es-





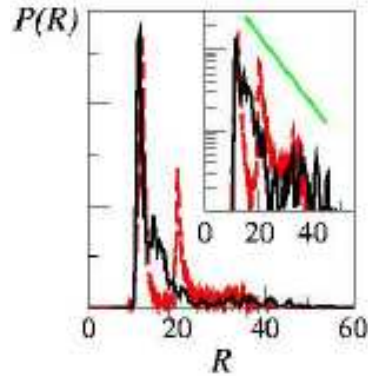
**Fig. 5.7:** Séries temporais de Atividade ( $T$ ) para um sistema  $L = 256$  e  $N = 100$  usando-se a equação completa (à esquerda) e para um sistema de densidade análoga usando-se o CEEDOs (à direita).

tas maiores. Estes agrupamentos de pequenas espirais comportam-se como na fase líquida.

Portanto, estes períodos de maior atividade do sistema são atribuídos a esta fração líquida existente nesta fase. Dependendo do quão grande é esta porção líquida, o sistema passará maiores períodos de grande atividade.

A distribuição de posição neste regime apresenta alguns picos. Os histogramas comparativos mostrados na seqüência (figura 5.8) registram a distribuição de posição dos vórtices em relação aos seus primeiros vizinhos.

O primeiro pico do histograma é referente à fração líquida existente. Os vórtices referentes a esta fração possuem menores domínios. Os demais picos (neste histograma comparativo entre as duas abordagens não está com uma boa resolução, mas serão colocados melhores exemplos na seção onde estão explicados os resultados obtidos com o tratamento com o CEEDOs) são referentes aos vórtices grandes e praticamente imóveis. Esta distribuição de picos independe da densidade de vórtices existente no sistema, pois a distância de entre eles é relacionada à distância de equilíbrio, a qual depende apenas dos parâmetros “b” e “c” da



**Fig. 5.8:** Histograma de distância ao primeiro vizinho para um sistema  $L = 512$  e  $N \approx 400$  usando a EGLC (linha contínua preta) e o CEEDOs (linha tracejada vermelha). Inset: mesmos dados com escala lin-log

equação (olhar explicação no capítulo anterior, na seção onde são comentadas algumas características do CEEDOs ).

Além da boa concordância quantitativa entre as duas abordagens, este histograma nos permite observar que a população de espiral em cada um destes picos parece estar decaindo exponencialmente (ver gráfico em escala lin-log no *inset*). Este decaimento exponencial permite a existência de espirais com um domínio realmente bastante grande. Ou seja, a probabilidade de existência de uma espiral com um domínio enorme é não nula, e ela determinaria a escala de tempo ultralenta do sistema. Se as velocidades dos centros dependem exponencialmente da distância entre as espirais (observar as expressões do CEEDOs), dependendo do quão grande for esta distância, a escala de tempo deste movimento pode ser, de fato, extremamente pequena. Portanto, observando-se as expressões de velocidade, o CEEDOs nos permite uma explicação para a existência desta dinâmica ultralenta apresentada neste regime de parâmetros.

Com base nestas análises da dinâmica, podemos inferir que a transição de *líquidos de vórtices* para *vidros de vórtices* possui características de uma transição de fases de primeira ordem. A coexistência das duas fases dentro da fase vítrea (os pequenos vórtices difundem-se entre os vórtices de grande domínio, comportando-se como o sistema na fase líquida) é uma característica típica de uma transição de primeira ordem em sistemas isolados em equilíbrio. Tentativas de mensurar esta transição para confirmar nossas observações serão feitas no decorrer deste capítulo, em seções seguintes.

Colocadas algumas medidas comparativas entre a equação completa (EGLC) e as equações reduzidas (CEEDOs), acreditamos ter subsídios suficientes para dar credibilidade ao método por nós proposto. Portanto, reconhecendo a reprodução dos resultados extraídos com a EGLC usando as equações reduzidas, a nossa proposta é estudar os sistemas líquido e vítreo no contexto do CEEDOs.

As vantagens desta proposta são inúmeras. As mais diretas são a economia de tempo computacional e a possibilidade de explorar regiões do sistema que são impossíveis com o uso da equação completa. As dúvidas com relação a esta abordagem já foram explicitadas. Esperamos, no entanto, termos sido suficientemente convincentes nas comparações para que possamos, no passo seguinte, explorar as duas fases com maior riqueza de detalhes.

No que segue, portanto, está o estudo do sistema usando as equações reduzidas. As extrapolações que nos permitem certas conclusões são feitas supondo a veracidade do método proposto por nós.

## 5.2 Estudo dos sistemas Líquido e Vidro

Esta segunda parte do capítulo de resultados está organizada de forma a expor nosso estudo da dinâmica nas fases distintas. A possibilidade de explorar os sistemas em limites onde a EGLC não responde usando o CEEDOs nos confere uma excelente ferramenta para a investigação da dinâmica. A maneira como esta

investigação é proposta é bastante simples: variamos parâmetros do sistema para tentar entender como as grandezas medidas são alteradas quando tais parâmetros são modificados.

As medidas feitas são as mesmas anteriores: séries temporais de atividade dos vórtices, coeficiente de difusão, distribuições de posição e velocidades. Neste momento, no entanto, não estamos mais interessados em comparar as abordagens para comprovar a validade das equações reduzidas [38], mas fazer um estudo sistemático das grandezas que caracterizam os sistemas.

É importante salientar que o nosso estudo, além de investigativo, tenta, por vezes, analogias com modelos existentes. A idéia de comparação surge porque as semelhanças entre modelos auxiliam na intuição a respeito de alguns fenômenos.

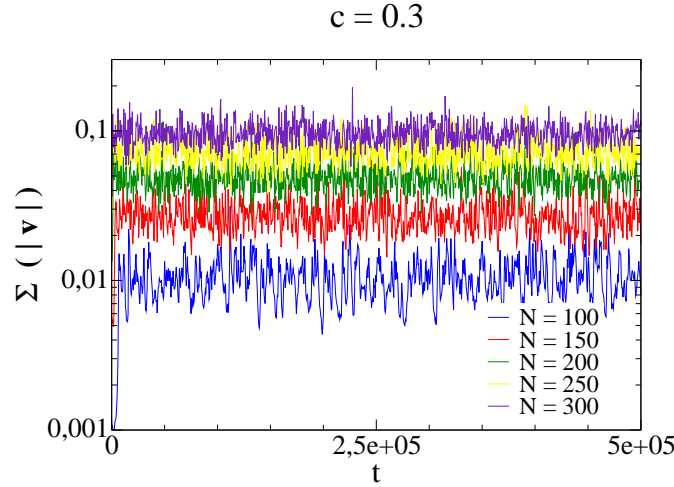
Algumas idéias a respeito desta tentativa de analogia serão colocadas no capítulo de discussões e conclusões. Neste capítulo, estamos apenas apresentando nosso estudo e explicando nossas medidas. A seção seguinte é dedicada ao estudo sistemático de sistemas na fase líquida e o posterior dedica-se ao estudo de sistemas na região de interação oscilatória.

### 5.2.1 Fase Líquida

Nesta seção, estaremos expondo os resultados obtidos com as equações reduzidas. Mesmo não fazendo comparações diretas com os resultados obtidos com a EGLC, as transformações (5.1) serão aqui consideradas. Todas as medidas serão dadas em unidades do CEEDOs e, quando considerarmos importante, faremos a devida transformação e informaremos que estaremos tratando do sistema em unidades da EGLC.

As medidas de séries de atividade nos mostram que, neste sistema, os vórtices se movem constantemente, sem intervalos de quiescência. O gráfico (5.9) mostra a atividade para um sistema de tamanho  $L=120$  em diferentes densidades.

É possível calcular um valor médio de Atividade para cada uma das densi-



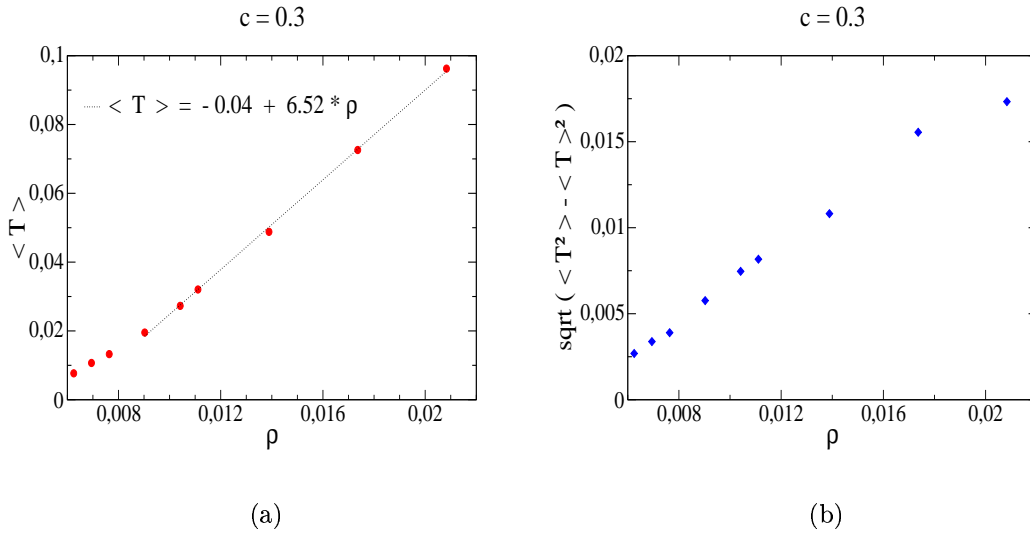
**Fig. 5.9:** Séries temporais da Atividade ( $T$ ) dos vórtices para um sistema de tamanho  $L=120$ . São mostradas as séries temporais para diversos valores de densidade.

dades. Além destes valores médios, estas distribuições nos permitem encontrar como se comportam a variância (ou o desvio padrão) com a densidade de vórtices ( $\rho$ ) (figura 5.10). O nosso objetivo principal com estas medidas era a busca de uma lei de variação destas grandezas com a densidade para que pudéssemos vislumbrar alguma analogia com um modelo já existente.

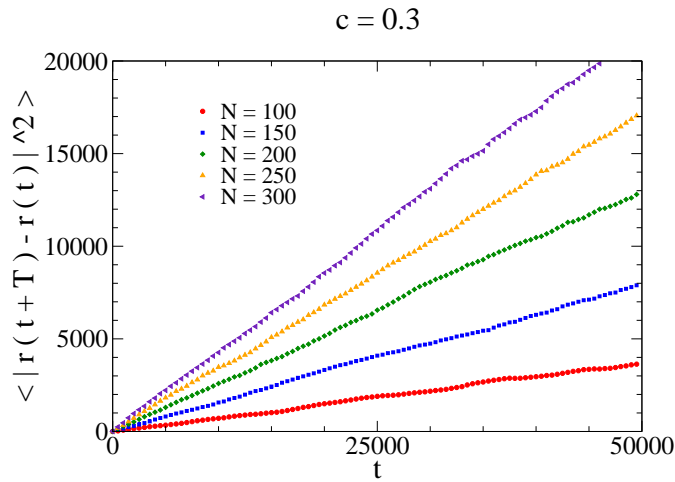
Os gráficos mostram um claro aumento da atividade (média) dos vórtices quando a densidade aumenta, bem como uma maior variação desta atividade em relação a este valor médio.

Outra medida importante deste sistema é o coeficiente de difusão ( $D$ ). Cada vórtice individual realiza um movimento caótico, e todos eles realizam difusão normal. Este comportamento está explicitado na figura (5.11).

Calculamos o coeficiente de difusão ( $D$ ) para cada valor de densidade para encontrar seu comportamento como função da densidade. Considerando-se que a distância inter-espiral é da ordem  $R \approx 1/\sqrt{\rho}$ , podemos derivar, a partir das equações de velocidade para o caso monotônico (4.11) que  $D \approx \exp(-\xi c|k|/\sqrt{\rho})$ ,

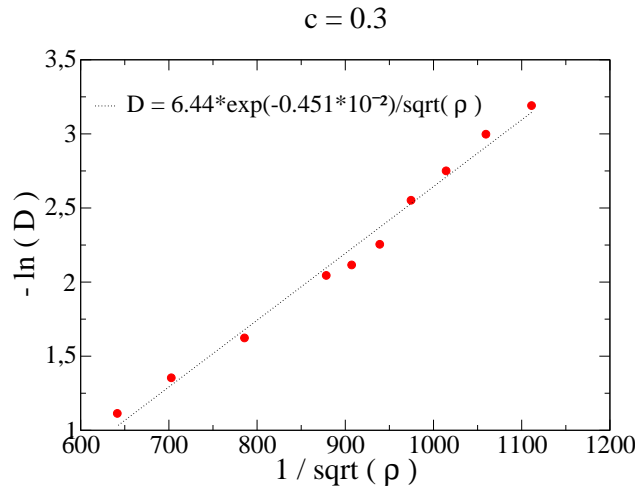


**Fig. 5.10:** Distribuição do valor médio da Atividade - (a) - e do desvio padrão - (b) - como função da densidade de vórtices do sistema ( $L = 120$ )



**Fig. 5.11:** Desvio quadrático médio da posição dos centros dos vórtices. Os coeficientes angulares das retas são os coeficientes de difusão ( $D$ ) de cada sistema. Observa-se uma regularidade nos valores de  $D$  quando a densidade de vórtices é variada ( $L = 120$ ).

com  $\xi$  entre 1 e 2. O gráfico  $D \times \rho$  ajustou perfeitamente esta função com  $\xi \approx 1$  ‡(gráfico 5.12). É importante salientar que este ajuste foi feito transformando as variáveis. Como o valor de “ $c|k|$ ” foi deduzido usando-se a EGLC, transformamos todas as grandezas em unidades da equação completa. Portanto, o citado gráfico está nas unidades da EGLC (com  $\rho_{EGLC}$  e  $D_{EGLC}$ ).

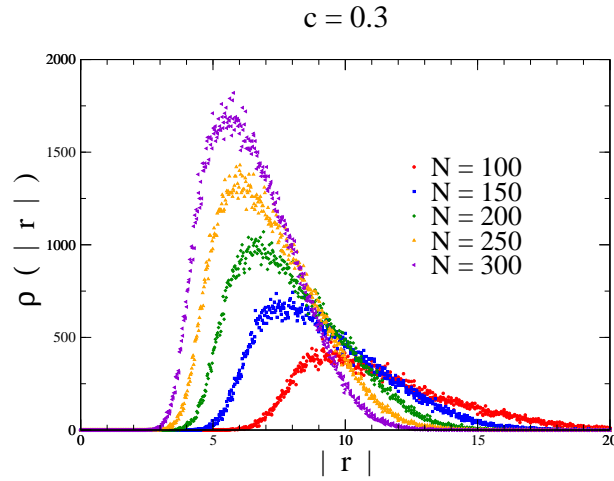


**Fig. 5.12:** Ajuste da função  $D \approx \exp(-\xi c|k|/\sqrt{\rho})$  para os dados numéricos obtidos com o CEEDOs.

A respeito dos histogramas de distância, já foi dito que a distribuição de distância aos primeiros vizinhos possuem um único pico, cujo valor médio dependerá da densidade de vórtices existentes no sistema. A figura (5.13) apresenta as distribuições de posição para 5 densidades diferentes em um sistema de tamanho  $L=120$ . Há um deslocamento do valor médio da distribuição para a esquerda à medida em que a densidade aumenta.

A partir destas distribuições de distância (5.13), podemos saber como se comporta a distância média ao primeiro vizinho quando variamos a densidade de vórtices. Para tanto, calculamos o valor médio de cada uma das distribuições e construímos um gráfico de  $\langle |r| \rangle$  vs  $\rho$  (figura 5.14 - a). De maneira análoga,

‡ o valor de  $c|k|$  é obtido numericamente e é aproximadamente 0.054 para  $c=0.3$



**Fig. 5.13:** Histograma de distância dos vórtices aos seus primeiros vizinhos para um sistema  $L = 120$

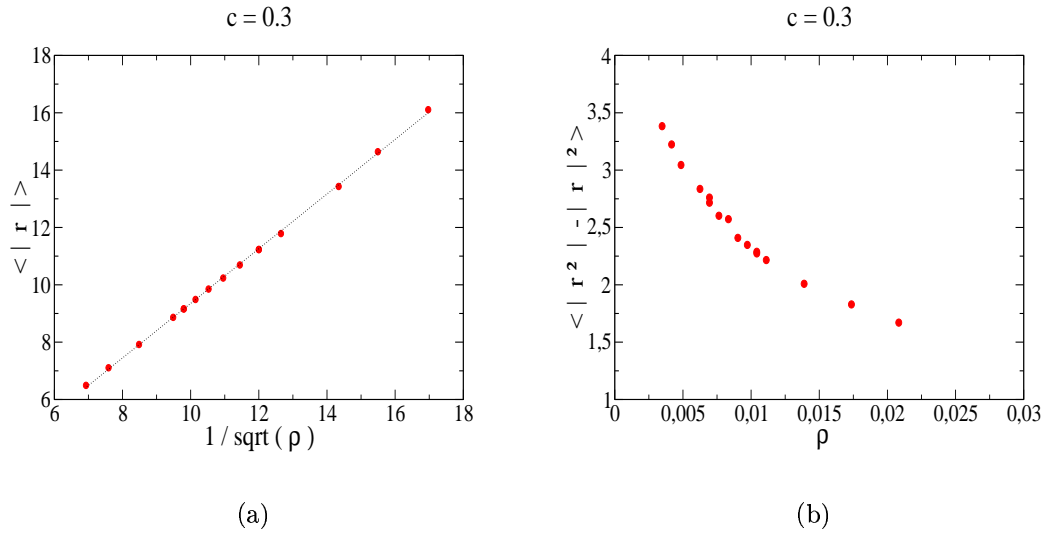
calculamos o desvio padrão destas distribuições (figura 5.14 - b)

A primeira medida (5.14 - a), indica que a densidade média dos vórtices obedece a uma distribuição homogênea neste regime. Quando nos referimos à *distribuição homogênea*, não estamos falando sobre uma medida instantânea da posição dos vórtices; nos referimos a uma média. Se esta medida for realizada em diversos tempos, veremos que os vórtices “varrem” todo o sistema. Então, a média sobre medidas instantâneas de distribuição de densidade retornará uma distribuição homogênea. Temos  $\rho \approx N/L^2$  e, portanto, para um dado valor fixo de  $L$ , a distância média ao primeiro vizinho é dada por  $\langle |r| \rangle \approx 1/\sqrt{N}$ .

O gráfico do desvio padrão de cada distribuição de posição como função da densidade mede o quanto a distribuição de posição aos primeiros vizinhos desvia em relação a esta distribuição homogênea. Nós observamos que, quanto maior a densidade de vórtices, menor é este desvio; ou seja, mais próximos de uma distribuição homogênea o sistema está. Este resultado é esperado, já que os vórtices possuem menor mobilidade quando a densidade é maior.

As medidas de distribuição instantânea de velocidade apresentam claramente



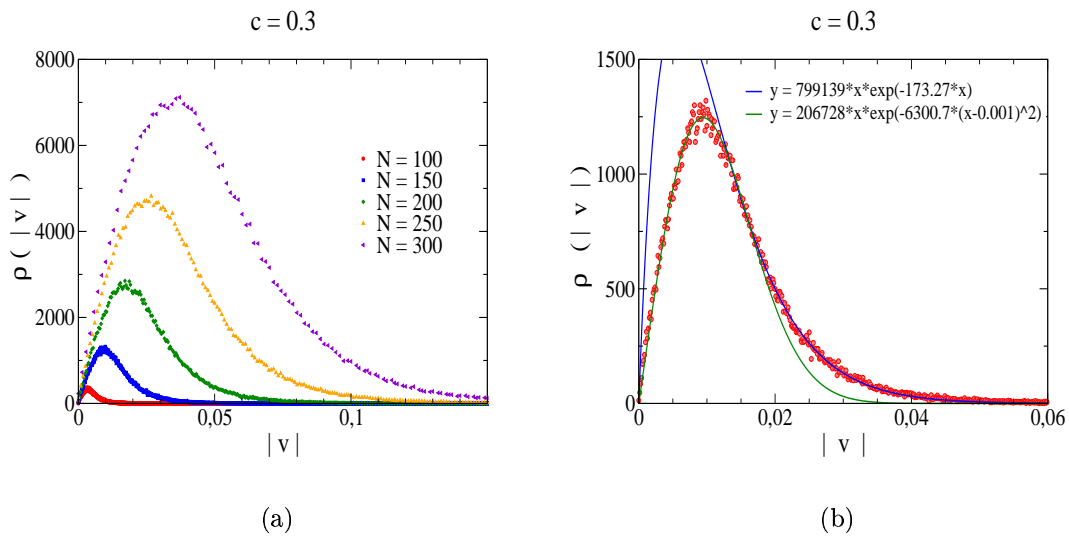


**Fig. 5.14:** Valor médio – (a) – e o segundo momento – (b) – da distribuição de distância ao primeiro vizinho como função da densidade.

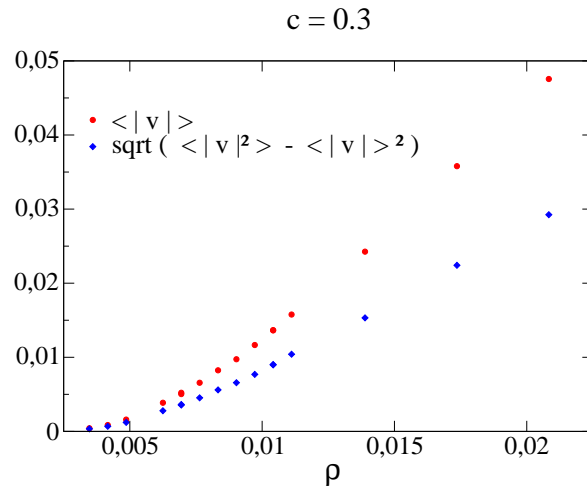
uma distribuição não Maxwelliana; o ajuste da cauda é exponencial. A interpretação para o desvio desta distribuição com relação a uma distribuição Maxwelliana foi dada na seção anterior.

Conforme já foi dito, ajustamos uma função exponencial (na cauda) tanto utilizando a EGLC como simulando com o CEEDOs. Independentemente da distribuição obtida, acreditamos que uma melhor compreensão da dinâmica pode ser obtida observando-se a variação desta distribuição com o parâmetros do sistema. Desta maneira, o procedimento assumido por nós foi o mesmo que em medidas anteriores: “varremos” um intervalo de parâmetros e, para cada um dos casos, medimos o valor médio da distribuição, o primeiro e o segundo momentos.

Podemos observar que as velocidades médias dos centros dos vórtices aumentam com o aumento da densidade, bem como o desvio padrão desta medida. Este resultado já era esperado a partir da figura (5.15 - a), pois é possível enxergar que os valores médios de cada distribuição (para cada  $\rho$ ) deslocam-se para direita e que elas ficam mais largas. O que não conseguimos saber apenas olhando para as



**Fig. 5.15:** Algumas distribuições de velocidades e o ajuste da distribuição para um valor de densidade ( $N = 150$ ). Ambas as figuras foram feitas para um sistema de tamanho  $L = 120$ .



**Fig. 5.16:** Valor médio (em vermelho) e desvio padrão (azul) das distribuições de velocidades como função da densidade de vórtices ( $L = 120$ ).

distribuições é a maneira como elas crescem. Se elas saturam ou se o valor médio da velocidade cresce indefinidamente. O que estas funções (figura 5.16) retornam é um crescimento monotônico de  $\langle |v| \rangle$  com a densidade, mas, acreditamos, isto satura. A saturação não foi observada nas nossas simulações por razões de limitações computacionais. Acreditamos, porém, que existe uma saturação neste crescimento. Esta expectativa de saturação existe porque, acima de uma dada densidade, a mobilidade dos vórtices deve diminuir. Eles possuem menos espaço para movimentarem-se e, portanto, espera-se que suas velocidades médias diminuam. Como nossa previsão não foi confirmada nas simulações, acreditamos que esta densidade acima da qual a mobilidade dos vórtices diminui não foi atingida por nós.

Toda a análise da dinâmica no regime monotônico foi feita para um tamanho de sistema não muito grande ( por razões práticas ). O custo computacional de uma análise extensa para um sistema no limite termodinâmico<sup>§</sup> é enorme. Tendo em vista que uma análise preliminar para um sistema de tamanho razoável nos permitiria adquirir alguns conhecimentos sobre a dinâmica, entender alguns comportamentos e até mesmo entender em qual (quais) tipo(s) de medida(s) os efeitos de tamanho finito se fariam realmente relevantes, acreditamos que escolha de um sistema de menores dimensões foi conveniente para nossos objetivos iniciais.

Portanto, embora a análise não seja feita para um sistema de grandes proporções, faz-se fundamental uma estimativa de quão importante são os efeitos de tamanho finito. Neste sentido, fizemos algumas medidas para sistemas com diferentes tamanhos. Ou seja, mantivemos a densidade e fomos, gradativamente, aumentando o tamanho do sistema. Espera-se que os problemas de tamanho

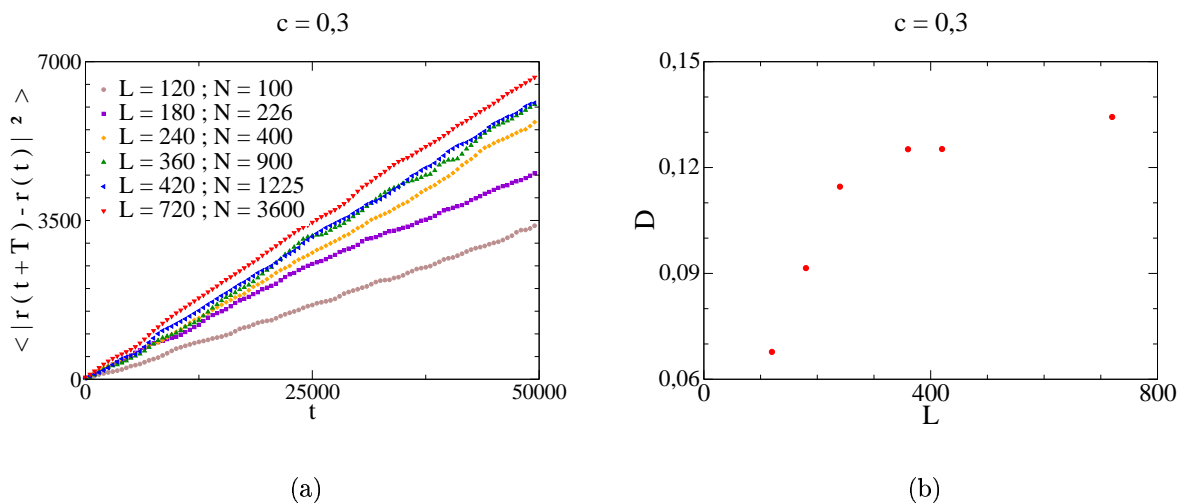
---

<sup>§</sup> *limite termodinâmico* é a denominação que atribuímos às dimensões de um sistema acima das quais as diferenças entre as medidas não são mais significativas. Ou seja, onde os efeitos de tamanho finito não são importantes.

finito sejam reduzidos à medida em que o tamanho do sistema aumenta.

Com isto, o nosso critério para considerar que a nossa análise estaria livre de problemas deste tipo e que, portanto, são dados confiáveis, é observar a partir de qual tamanho de sistema os valores medidos convergem. Deve existir um tamanho de sistema  $L^*$  acima do qual não faz diferença significativa o tamanho do sistema. Neste limite, podemos considerar que estamos praticamente isentos dos problemas inerentes às medidas feitas em sistemas não reais. Nesta dimensão, dizemos que estamos no *limite termodinâmico*.

As figuras seguintes (5.17) mostram a medida do coeficiente de difusão para sistemas com mesma densidade e tamanhos diferentes. O gráfico à direita indica que “D” atinge um valor assintótico para L acima de  $L^* \approx 360$ .



**Fig. 5.17:** À esquerda, algumas medidas da difusão para sistemas com mesma densidade e tamanhos diferentes. À direita, o coeficiente de difusão para cada um dos sistemas como função de seus tamanhos.

Notemos que a maior parte de nossas análises foram feitas para um sistema menor que este valor limite  $L^*$ . Elas não estão, portanto, isentas de problemas de

tamanho finito. No entanto, conforme comentado anteriormente, foi uma escolha conveniente, tendo em vista a vantagem computacional e a possibilidade de entendermos, pelo menos em nível qualitativo, a dinâmica. Certamente, conclusões quantitativas exigem uma análise utilizando sistemas com dimensões na ordem de  $L = L^*$ .

### 5.2.2 Fase Vitrosa

O estudo deste sistema “vitroso” utilizando o CEEDOs nos permite, conforme já foi salientado, conhecer alguns limites onde a EGLC não pode ser simulada. Uma diferença essencial é que, usando a EGLC, não existe controle do número de espirais que interagem. A aniquilação de espirais de cargas opostas é um fenômeno intrínseco à dinâmica (no caso de interação oscilatória).

Num primeiro momento, o nosso estudo com as equações reduzidas não considera a possibilidade de aniquilação entre elas. Toda a dinâmica se passa com o controle do número de vórtices que interagem e este valor foi mantido fixo. Com isto, foi possível observar como a dinâmica se comportaria caso fosse possível manter uma densidade grande de vórtices interagindo num sistema real.

Valendo-nos desta possibilidade de controle, o nosso estudo encontrou uma transição de fases, cujo o parâmetro de ordem é a densidade de vórtices.

A primeira fase foi chamada *Fase Congelada (Frozen Phase)*, porque os vórtices movem-se durante um certo período de tempo e depois cessam o movimento. Eles ficam absolutamente bloqueados. Será mostrado em breve que esta fase é, na verdade, um efeito de tamanho finito do sistema.

Na medida em que aumentamos a densidade de vórtices, temos a *Fase Inter-*

*mitente*. Esta fase é aquela que comentamos em seções anteriores ao comparar os resultados obtidos utilizando-se o CEEDOs e a EGLC. Para grandes densidades de vórtices, encontramos uma *Fase Líquida*. Esta fase não conseguimos observar com a EGLC, pois não conseguimos manter um número de vórtices interagentes suficiente para atingi-la.

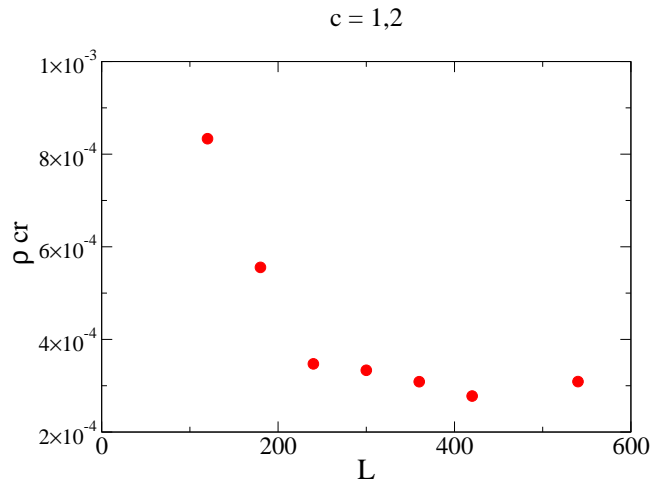
Mais tarde, ao final desta análise onde mantivemos o número e vórtices interagentes fixo, alguns aprimoramentos no nosso estudo são propostos. Entre eles, a inclusão de uma possibilidade de aniquilação de vórtices com cargas opostas. Alguns resultados preliminares já existem, mas os comentários serão feitos posteriormente.

### As fases da dinâmica no caso oscilatório

A respeito da primeira fase, já comentamos que ela não existe para sistemas grandes. Estudamos qual seria a densidade crítica abaixo da qual os vórtices ficariam bloqueados e descobrimos que, quanto maior o tamanho do sistema, menor é a densidade para a qual isto ocorre. Ou seja, no limite termodinâmico, não existirá densidade de vórtices abaixo da qual o sistema fica bloqueado. A figura (5.18) indica que o valor da densidade crítica tende a zero, mostrando que esta fase não pode ser observada neste limite.

A fase intermitente possui algumas características já descritas anteriormente: as séries de atividade oscilam entre períodos onde os vórtices movem-se bastante e períodos quiescentes, o histograma de distância ao primeiro vizinho apresenta mais de um pico, a distribuição de velocidades também apresenta mais de um pico (**ainda tenho que fazer o resultado de um grafico do  $\log(v)$  para encontrar estes picos**).

A terceira fase é a líquida. O comportamento dos vórtices a esta densidade é tipicamente o comportamento que eles tinham no caso monotônico. Salvo que o coeficiente de difusão, no caso monotônico, comportava-se sempre de maneira



**Fig. 5.18:** Densidade crítica ( $\rho_{cr}$ ) como função do tamanho do sistema.

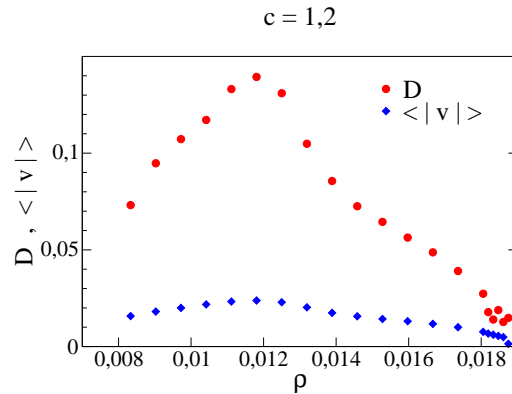
crecente com a densidade (figura 5.12) e aqui, há uma saturação (figura 5.19). O coeficiente de difusão ( $D$ ) cresce até um certo valor e depois começa a diminuir. Esta saturação ocorre porque, com o aumento da densidade, os vórtices possuem menos espaço para se locomoverem.

De fato, deveríamos esperar um comportamento análogo no caso monotônico. No entanto, na prática, não encontramos tal saturação. Acreditamos que seja puramente um problema numérico; ou seja, não conseguimos atingir uma densidade para a qual esta saturação vai ocorrer no caso monotônico. Ocorrem problemas numéricos antes<sup>¶</sup>.

A transição da fase intermitente para a líquida é bastante fácil de ser visualizada. Podemos detectá-la por meio da análise de diversas grandezas.

Observemos as figuras (5.20). São os gráficos de valores médios das séries de

<sup>¶</sup> No caso oscilatório, é possível simular com grandes valores de densidade em razão do comportamento intermitente; nem todas as espirais movem-se o tempo todo. No caso monotônico, os problemas numéricos ocorrem porque a difusão destas espirais atinge valores muito grandes. É por esta razão que, proporcionalmente, é possível simular mais vórtices no caso oscilatório do que no monotônico, permitindo, assim, enxergarmos a saturação que não foi possível obter no regime monotônico



**Fig. 5.19:** Coeficiente de Difusão ( $D$ ) e velocidade média ( $\langle v \rangle$ ) dos vórtices como função da densidade ( $L = 120$ ).

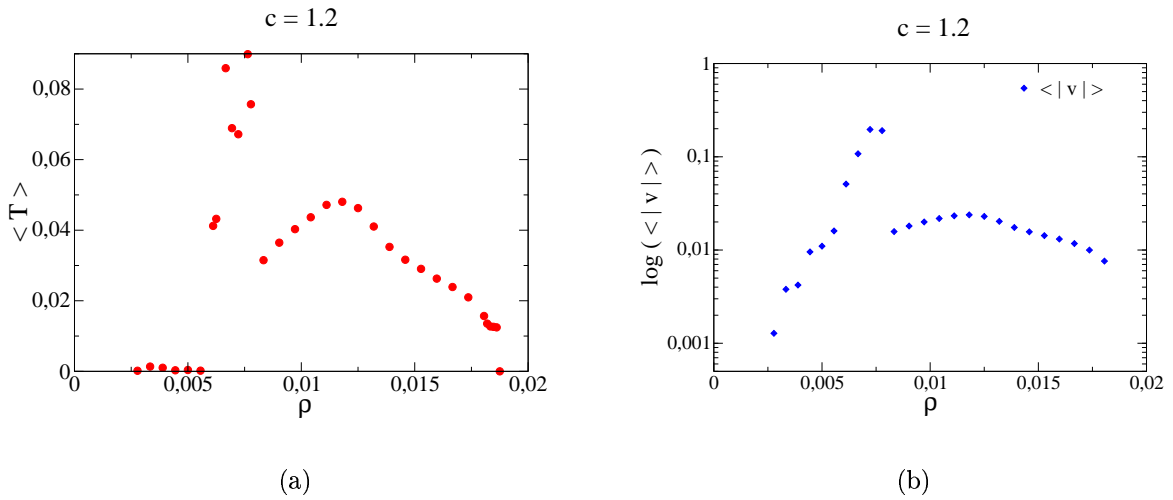
atividade como função da densidade e os valores médios das velocidades. Como se esperaria, a flutuação das grandezas aumenta muito próximo à transição e isto está bem explícito em ambas as figuras.

Na fase intermitente, observamos que os valores das atividades e das velocidades médias são bem menores que na fase líquida. Este comportamento é bem compreendido, tendo em vista que na fase intermitente temos grandes vórtices praticamente imóveis e uma fração líquida confinada entre estes domínios. Portanto, suas atividades ficam mesmo reduzidas.

Os valores destas grandezas na fase líquida são visivelmente maiores e mais “bem comportados”; ou seja, é possível observar um comportamento sistemático.

A questão seria descobrir para qual densidade esta transição ocorre. Qual seria a *densidade crítica* ( $\rho_c$ )? Deveríamos escolher um critério quantitativo bem definido. Notemos que os gráficos anteriores (5.20) não nos possibilitam extrair uma densidade crítica, porque a flutuação dos valores de “atividade média” e velocidades médias é bastante grande próxima à transição. Como definir um critério objetivo?



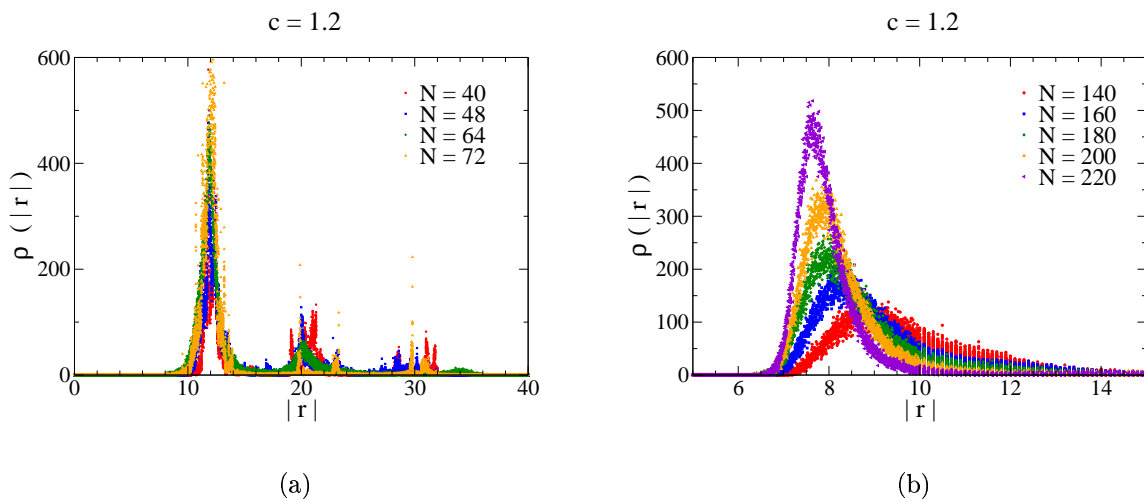


**Fig. 5.20:** (a) Média da Atividade do sistema como função da densidade de vórtices ; (b) Valores de primeiro momento da distribuição de velocidades como função da densidade de vórtices (sistema de tamanho  $L = 120$ )

Existe uma medida que determina de forma bastante transparente a transição de uma fase à outra. Visualmente, a transição é percebida quando começam a se formar grandes vórtices circundados por alguns pequenos. Esta distribuição é medida quantitativamente pelos histogramas de posição (distância ao primeiro vizinho).

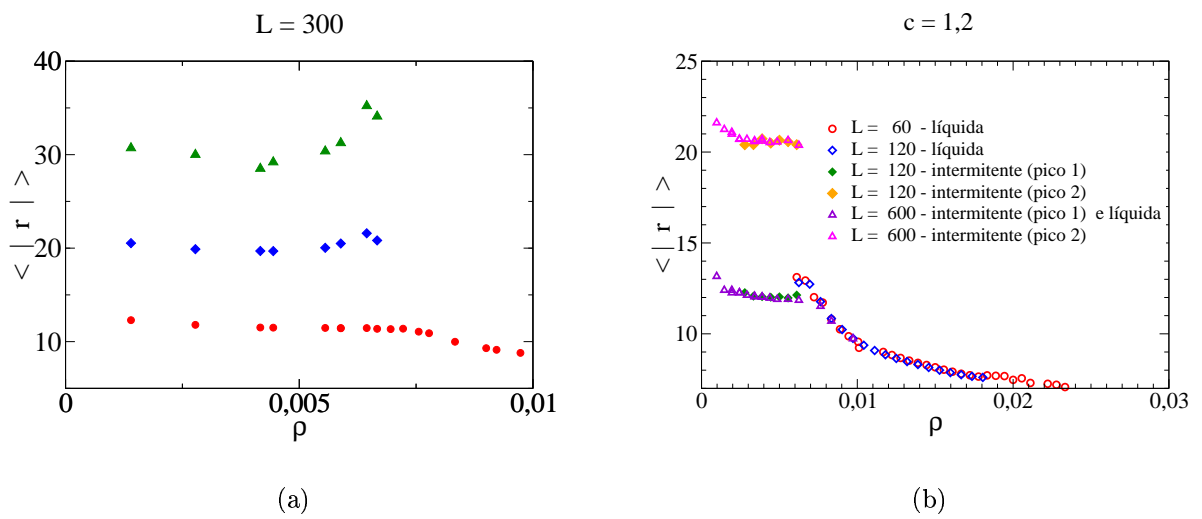
A figura (5.21) apresenta alguns histogramas típicos para um sistema de tamanho  $L = 120$  com diferentes densidades.

A partir destas medidas, podemos calcular os valores médios de cada uma destas distribuições. No caso onde existe mais de um pico, o cálculo deste valor médio foi feito para cada um deles. O resultado disto pode ser colocado em um único gráfico para enxergarmos como se comporta a distância ao primeiro vizinho como função da densidade de vórtices existentes na dinâmica.



**Fig. 5.21:** Distribuição de posição dos vórtices em função da densidade do sistema na fase Intermitente - (a) e na fase Líquida - (b). No primeiro caso, as posições dos picos são as mesmas, independentemente do número de vórtices. No segundo, observa-se um deslocamento do pico para esquerda na medida que a densidade do sistema é aumentada ( $L = 120$ ).

Apresentamos dois gráficos que explicitam a transição de fases. O primeiro deles (5.22 - (a)) foi feito para um sistema razoavelmente grande e por isto permite a visualização do terceiro pico. O segundo (5.22 - (b)) foi feito para tamanhos diferentes de sistema, mas com densidades iguais. Ele mostra que a densidade crítica na qual a dinâmica sofre uma transição da fase intermitente para a líquida independe do tamanho do sistema.



**Fig. 5.22:** (a) - Sistema de tamanho  $L=300$ . É possível visualizar o terceiro pico. Observa-se que há uma maior flutuação próximo ao ponto da transição. (b) - Distância média entre os vórtices para as diferentes densidades. A *densidade crítica* é definida como sendo o ponto onde há a mudança qualitativa no comportamento do sistema (desaparecimento do segundo pico no histograma de posição). A figura apresenta três tamanhos diferentes de sistemas.

Estes gráficos reservam muitas informações. Na região de baixa densidade, observamos a existência de três posições médias (três distâncias médias com relação ao primeiro vizinho). Na figura (5.22 - (b)) não está expressa esta terceira

posição média porque as medidas estão estatisticamente ruins e o ruído associado compromete a clareza de informações.

A existência destes três valores médios estão representados nos três picos encontrados nos histogramas (5.21 - a). Quando a densidade é aumentada, este segundo pico desaparece e, além disso, a distância média com relação ao primeiro vizinho passa a depender da densidade de vórtices (da mesma maneira que no caso monotônico -  $\langle |r| \rangle \approx 1/\sqrt{\rho}$ ). O ponto onde o segundo pico desaparece é a densidade para a qual o sistema se torna definitivamente um líquido. Esta é a densidade crítica.

Se calcularmos a distância média entre os vórtices na densidade crítica típica ( $\rho_{cr} \approx 6,5 \times 10^{-3}$ ), veremos que ela fica em torno de  $\langle |r| \rangle \approx 12$  <sup>||</sup>, a qual é justamente o valor do primeiro pico no histograma (5.21-b). Este primeiro pico é a distância média entre os vórtices pequenos; os vórtices que pertencem à fração líquida. Os dois outros picos, correspondem aos três primeiros estados ligados mostrados na figura (4.5). Se o referido gráfico mostra os estados ligados como função da distância ao choque ( $X_i$ ) e a figura (5.21-b) apresenta a distância média entre dois vórtices ( $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ ), o que devemos encontrar nos histogramas é a soma das distâncias de cada vórtice à linha de choque. Os três primeiros valores de estados ligados são  $x_1 \approx 8,4$ ,  $x_2 \approx 12,5$  e  $x_3 \approx 16,9$ . As distâncias médias entre dois vórtices são (valores médios dos picos no histograma (5.21-b)):  $\langle |r| \rangle_{\text{pico2}} \approx x_1 + x_2 \approx 20,5$  e  $\langle |r| \rangle_{\text{pico3}} \approx x_1 + x_2 \approx 30$ .

### 5.3 Comentários a respeito do método numérico

Existe uma questão importante a ser comentada. Baseados na observação no caso monotônico de que uma análise quantitativa necessita o estudo de sistemas maiores, o caso oscilatório foi feito com mais cuidado. Especialmente porque ele possui uma fase intermitente e toda a dinâmica com este caráter exige um cuidado

<sup>||</sup> supondo distribuição homogênea (válida na fase líquida)  $\langle |r| \rangle \approx 1/\sqrt{\rho}$ .

especial com relação aos efeitos ditos de *tamanho finito*. Neste caso, portanto, fizemos análises em sistemas maiores (com  $L$  na ordem de  $L=600$ ).

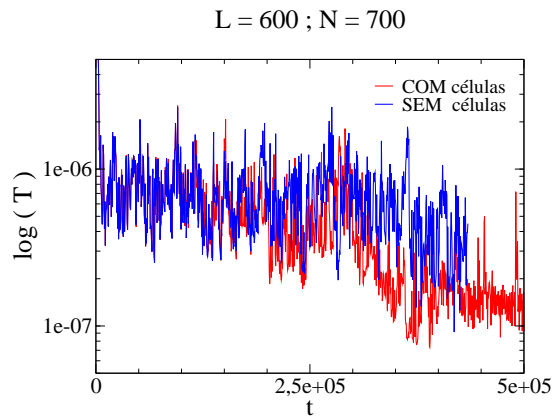
No entanto, para mantermos a densidade constante, é necessário aumentarmos consideravelmente o número de vórtices interagindo\*\*. Sendo o nosso método numérico baseado em *dinâmica molecular*, quadruplicar o número de vórtices interagindo implica elevar em 16 vezes o custo computacional, já que cada centro de vórtice interage com todos os outros.

A alternativa para contornar este problema e tornar possível a análise destes sistemas, foi o uso de *células* (ou o Método de Caixas, como alguns livros denominam). Neste método, corta-se a interação em uma dada distância, supondo-se que a interação entre os centros a esta dada distância é desprezível (no nosso caso o decaimento destas interações é exponencial, o que viabiliza o procedimento). A cada interação, divide-se o sistema em “células” e todos os centros de vórtices contidos dentro de uma dada caixa interage com todos os centros desta mesma e com as 8 caixas vizinhas. Este método permite que o tempo computacional escale de acordo com  $t \approx \frac{N^4}{n^2}$  (onde  $n$  é o número de caixas), ao invés de  $t \approx N^4$  quando o método não é implementado.

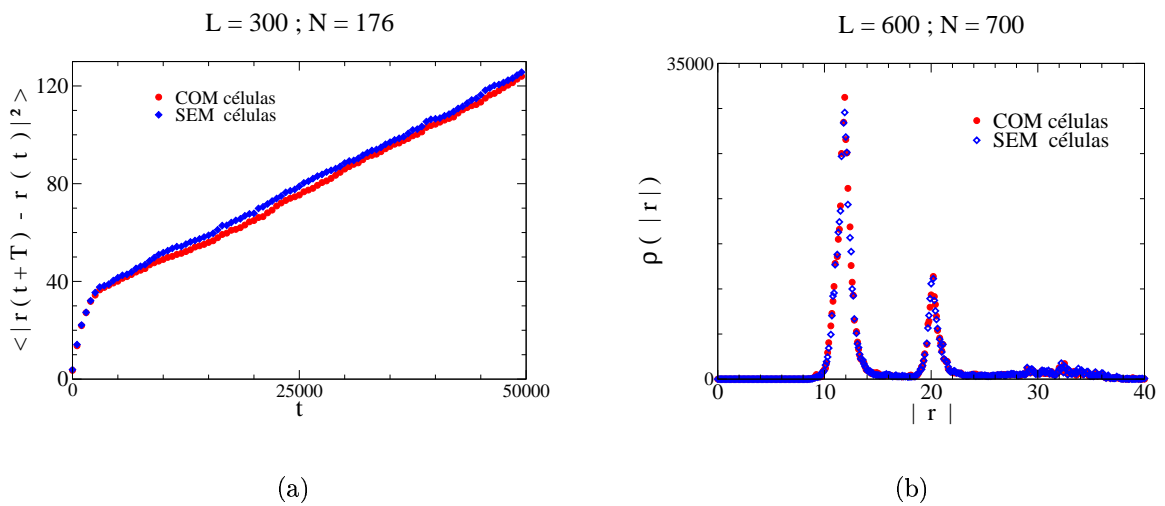
Fizemos alguns testes para verificar e a inclusão destas caixas não altera os resultados da análise. Um exemplo de sistema  $L = 600$  e  $N = 700$  está exposto nas figuras (5.23) e (5.24). Foram usadas células de tamanho  $l = 60$ . Sendo que a distância média ao primeiro vizinho é em torno e  $R \approx 30$  (terceiro pico no histograma de posição – figura 5.24 - (b)), estamos cortando a interação numa posição em média três vezes este valor (já que um vórtice em uma caixa interage com todos os das caixas vizinhas, o valor máximo de distância é que 1,5 vezes a largura “ $l$ ” da caixa).

---

\*\* para cada duplicação no tamanho “ $L$ ” do sistema, implica um aumento de quatro vezes em “ $N$ ” para manter fixa a densidade.



**Fig. 5.23:** Séries de atividade. Há mudanças quantitativas, as quais são entendidas em razão do comportamento intermitente da dinâmica. Não há, no entanto, alterações qualitativas entre as medidas.

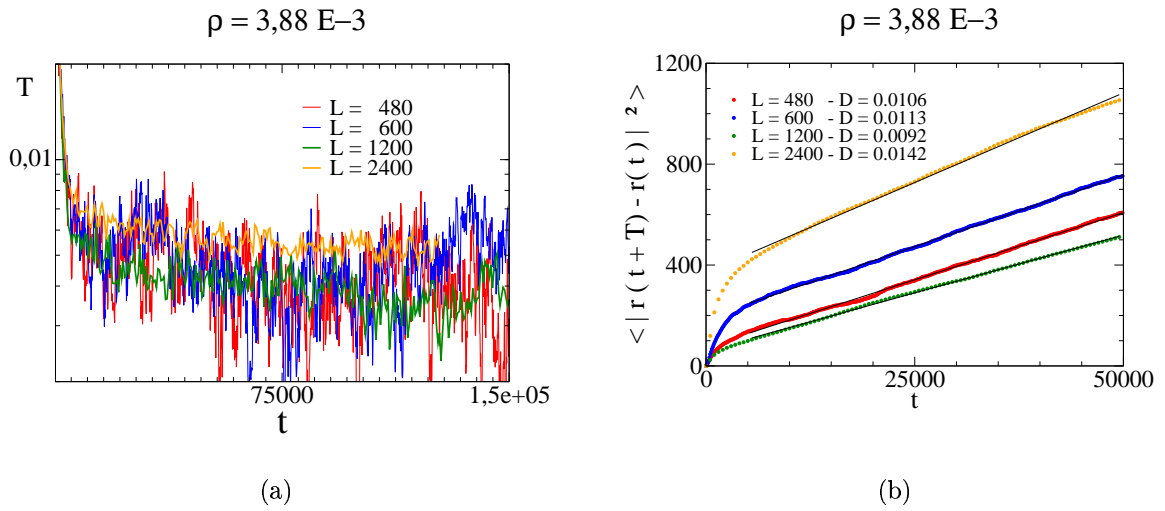


**Fig. 5.24:** As difusões – (a) – e os histogramas – (b) – mostram que não há alteração qualitativa entre as medidas usando-se células e sem elas.

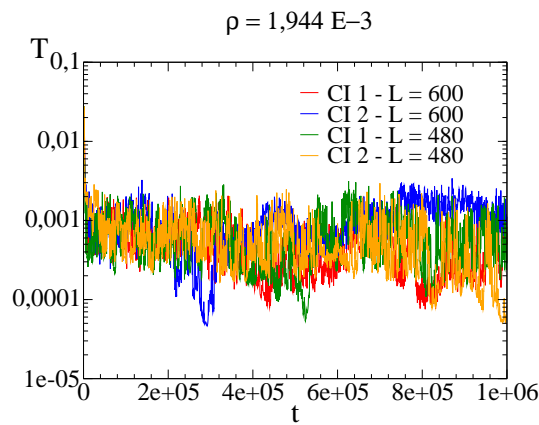
Os gráficos mostram equivalências qualitativa (no caso da série temporal de atividade) e quantitativas (difusão e distribuição de posição). A diferença na série temporal se deve ao caráter intermitente da dinâmica. Acreditamos que a inserção das células não altera os resultados das nossas medidas.

Como a utilização deste método permite muita economia computacional, foi possível estudarmos sistemas de tamanhos bem maiores. Esta economia tornou possível o estudo do quão importante são os efeitos de tamanho finito. Calculamos a difusão e a atividade para sistemas de mesma densidade e tamanhos diferentes. Pelos gráficos (5.25), é possível observar que os valores das medidas mudam muito pouco; variam apenas dentro dos intervalos de flutuação esperados para as diferentes condições. Desta maneira podemos assumir que, a partir de  $L=480$ , estamos no limite termodinâmico.

Este aumento nas dimensões dos sistemas estudados nos permitiu observar uma mudança qualitativa interessante em nossas medidas, porque algumas das características que obtivemos com sistemas de tamanho  $L=120$ , não se mantiveram para dimensões maiores. As séries de temperaturas, por exemplo, não atingiam um valor médio assintótico para diferentes condições iniciais. Cada condição inicial evoluía para diferentes estados. O aumento destas dimensões mostrou que as medidas como a atividade e a difusão atingem um valor assintótico médio para todas as diferentes condições impostas inicialmente (observar figura (5.26)). Neste sentido, o sistema apresenta um caráter *auto mediável*, o que está em desacordo com a proposta de que estes *vidros de vórtice* seriam um sistema com caráter de vidro de spin [33].



**Fig. 5.25:** Séries de Atividade ( $T$ ) para quatro tamanhos de sistema diferentes com mesma densidade (à esquerda) e a difusão dos centros dos vórtices nos quatro casos (à direita).



**Fig. 5.26:** Séries de Atividade para dois tamanhos diferentes de sistemas de mesma densidade. Para cada tamanho, duas diferentes condições iniciais. Observemos que os valores médios assintóticos das atividades são iguais.



## 6. Conclusões, discussões e perspectivas

Na tentativa de atribuir um único objetivo principal ao trabalho, diríamos que a “espinha dorsal” da nossa proposta foi a redução da dinâmica de meios oscilatórios, em princípio descrita por uma equação diferencial parcial, a uma dinâmica discreta. A idéia base desta tentativa é que a turbulência existente nestes sistemas é descrita de maneira satisfatória pelos defeitos que nele existem. Esta idéia de *turbulência mediada por defeitos* foi proposta no início da década de 80 [12, 32, 34]. Muitos trabalhos foram feitos para provar que esta redução seria possível e algumas propostas de equações foram encontradas [30, 31]. A redução proposta por Aranson e colaboradores e apresentada neste trabalho foi a primeira tentativa que obteve êxito [23, 24].

A promessa deste tipo de abordagem reduzida é a possibilidade de descrição de meios oscilantes, onde os defeitos espirais estão presentes e formam padrões espaço-temporais, de maneira eficiente. O método dispensa os grandes custos computacionais e torna-se uma proposta rápida e sistemática para entender a dinâmica.

Mostramos que, com uma análise a partir de primeiros princípios, o estudo da dinâmica de sistemas que apresentam uma bifurcação caracterizada macroscopicamente pela mudança qualitativa de comportamento \*, é, em termos práticos, inviável. A alternativa apresentada foi o estudo de tais sistemas usando-se uma equação de amplitude: a EGLC [1]. Argumentamos algumas razões pelas quais

---

\* Voltando ao nosso exemplo, os rolos de convecção observados no experimento de RB são a manifestação macroscópica da bifurcação sofrida pelo sistema do estado condutivo homogêneo para o estado convectivo, onde existe transporte de massa.

esta equação fornece uma abordagem de relativa simplicidade [10, 16] e de grande generalidade para uma vasta gama de sistemas aparentemente muito diferentes [4, 5, 6, 7, 8, 9]. Explicamos que a EGLC já foi bastante estudada e é capaz de descrever comportamentos distintos do sistema, mostrando-se, portanto, muito rica para o tratamento dos mesmos.

Tendo como base diversos trabalhos na área [12, 13, 20, 21], exploramos seu diagrama de fases a fim de explicitar as diversas estruturas espaço-temporais possíveis de serem descritas com a equação. Apresentamos uma região deste diagrama onde as estruturas parecem estar congeladas, possuem alguns comportamentos interessantes e sobre as quais muito pouco se sabe. Nesta mesma região, a presença de defeitos é uma característica fundamental e capaz, inclusive, de permitir a redução do estudo da dinâmica ao estudo da interação destes defeitos. Foi a partir desta idéia de descrição de um estado turbulento mediado por defeitos que a proposta de Aranson foi colocada [23, 24]. Colocamos algumas idéias gerais da dedução do método e explicamos algumas características das equações encontradas.

Tendo sido colocados os problemas relacionados ao tratamento de espirais interagente usando a EGLC, apresentamos a nossa proposta (CEEDOs) como uma promessa para contornar tais dificuldades e impossibilidades. Argumentamos as vantagens do método e as diferenças encontradas com relação ao que se observava usando a EGLC. Neste ponto, surge a questão sobre a credibilidade e/ou importância de nossos dados em limites onde a EGLC não pode ser testada. O que seria uma grande vantagem desta nova proposta é, portanto, questionada.

Para suplantar tais dúvidas, a primeira parte do capítulo de resultados (cap. 5), foi dedicada a apresentar as semelhanças encontradas por nós, nos dois regimes de parâmetros, quando ambas as abordagens são utilizadas. Acreditando no êxito desta tarefa [38], valemo-nos das equações reduzidas para estudar os sistemas varrendo uma região de parâmetros antes impossível com a pretensão de conhecer, explicar alguns fenômenos e construir um estudo mais sistemático da dinâmica.

No caso monotônico, mostramos algumas medidas quantitativas em intervalos onde as duas abordagens respondem igualmente bem para comprovar a validade do CEEDOs. Buscamos analogias para construir modelos e tentar entender nossas medidas usando alguns fenômenos já bem estabelecidos. Em princípio, pensamos no modelo mais simples possível: buscamos uma analogia com o modelo de gás ideal. A idéia de analogia com o modelo de gases ideais foi, no entanto, abandonada. Basicamente porque o princípio básico do modelo de gases ideais é a inexistência de interações entre as partículas (em primeira aproximação). O modelo é uma aproximação razoável em situações onde estas interações são praticamente desprezíveis. Esta condição primária não é obedecida no nosso sistema, pois na verdade, o movimento dos vórtices ocorre unicamente em decorrência da interação entre eles. Então, não é razoável supor um modelo onde apenas exista energia cinética quando, na realidade, é um potencial efetivo entre as espirais que torna a dinâmica possível.

É bastante complicado extrairmos conclusões a respeito de medidas no sentido de construir relações entre elas e montar nossas próprias “*equações de estado*”<sup>†</sup>. As dificuldades são inúmeras: primeiro porque o nosso sistema de análise não está em equilíbrio<sup>‡</sup> e, portanto, uma analogia com sistemas termodinâmicos bem estabelecidos deve ser feita com muito cuidado. O segundo problema é que não temos claro exatamente a definição de algumas grandezas macroscópicas do sistema. Não sabemos, por exemplo, como definiremos uma grandeza análoga a pressão. Gostaríamos de poder manter fixa uma grandeza para variar duas a duas e entender como uma se comporta frente a outra. Embora não saibamos,

---

<sup>†</sup> Esta expressão deve ser usada com cuidado. Nossas fases são dinâmicas. Equações de estado são definidas para sistemas em equilíbrio termodinâmico. Rigorosamente, as equações que buscamos deveriam descrever o sistema a partir de algumas variáveis macroscópicas, as quais devemos ainda definir.

<sup>‡</sup> A EGLC é “deduzida” pensando-se em sistemas dinâmicos num limiar de instabilidade. Se o CEEDOs é deduzido a partir dela, os sistemas descritos pelas equações reduzidas não estão no seu estado de equilíbrio (equilíbrio dinâmico).

por exemplo, como definiremos “pressão”, intuitivamente acreditamos que a variação do número de vórtices implica diretamente a alteração da pressão sobre as paredes do sistema. Além disso, devido a existência da transformação de variáveis (4.13), há um acoplamento delas aos parâmetros. Por estas expressões, observamos que, ao mudarmos o valor de “ $c$ ”, alteramos o “fator de conversão” entre as abordagens (com o CEEDOs e EGLC). Se alteramos o fator de conversão na escala espacial e temporal, estamos alterando, por exemplo, a densidade e o valor do coeficiente de difusão. Neste sentido, a alteração de um parâmetro não está descorrelacionada à modificação de outro, complicando a compreensão de como uma variável se comporta frente a outra. Portanto, alguma conclusão plausível ainda está em construção para que possamos propor equações análogas a equações de estado para a dinâmica.

No caso oscilatório, a credibilidade nas equações reduzidas também foi atestada qualitativa e quantitativamente. O CEEDOs reproduz a quebra de simetria, a atividade intermitente a baixas densidades e a formação de Vidros de Vórtices observada com a EGLC.

O CEEDOs nos fornece uma interessante forma de abordar o problema de maneira a entender a intermitência resultante da coexistência dos dois tipos de vórtices no caso oscilatório. A partir do histograma de posição dos vórtices (figura 5.8), observa-se que a população de espirais parece estar decaindo exponencialmente. Comentamos anteriormente que a possibilidade de existência de espirais com domínios enormes possibilita uma explicação para a existência da dinâmica ultralenta apresentada neste regime. Gostaríamos de explicar mais claramente esta idéia.

As equações reduzidas geralmente não possuem a solução estacionária  $\vec{v}_j = 0$  e  $\dot{\phi} = 0$  para todos os  $j$ . Como consequência, é impossível satisfazer às duas condições simultaneamente; ou seja, as espirais movimentam-se. O movimento delas altera a forma de seus domínios (as linhas de choques). As distâncias às linhas de choque são usadas no cálculo das velocidades dos centros e estas velocidades serão

usadas para calcular a distância a tais linhas. Em algum momento, a diferença de fases entre duas espirais vizinhas se tornará grande o suficiente a ponto de que as linhas de choque precisarão rearranjar-se. Como as velocidades dos centros dependem exponencialmente da distância entre as espirais, dependendo do quão grande for esta distância, a escala de tempo deste movimento pode ser, de fato, extremamente grande. Por esta razão, infere-se que as espirais com grandes domínios são as responsáveis pela escala de tempo lenta existente na dinâmica.

Esta mesma coexistência dos dois tipos de vórtices no caso oscilatório nos permite concluir que a transição do estado de Líquido de Vórtice para Vidros de Vórtice possui características de uma transição de primeira ordem, já que as duas fases estão presentes. Há uma fração líquida entre os grandes vórtices quase imóveis, o que nos faz acreditar que esta fase é uma transição para um estado onde existirão somente os grandes vórtices. O estado final deste sistema seria uma estrutura onde somente as grandes espirais existiriam? Seria este estado correspondente a uma “verdadeira” dinâmica de Vidro de Spin?

O parâmetro de ordem desta transição é a constante “ $c$ ”, já que a linha que separa os dois tipos de interação (monotônica e oscilatória) depende dos parâmetros “ $c$ ” e “ $b$ ”. Sendo que este último é suposto nulo na nossa análise, “ $c$ ” determina o regime de interação. No caso oscilatório, nossas simulações foram feitas usando  $c = 1, 2$ . O problema em questão seria saber se, com o aumento de “ $c$ ”, esta fração líquida diminui, fazendo com que este estado onde as duas fases coexistem fosse apenas transitório. Nosso atual conhecimento da dinâmica ainda não nos permite afirmar este comportamento.

A comprovação desta idéia traria duas importantes conseqüências. A primeira delas é que a transição entre as duas fases seria, de fato, tipicamente de primeira ordem, tendo como estado transitório as estruturas encontradas e relatadas no presente trabalho (grandes espirais circundadas por linhas de choque e pequenas espirais comportando-se como na fase líquida). A segunda conseqüência é a idéia de uma verdadeira dinâmica tipo Vidros de Spin.

Até o presente momento, observamos algumas características bastante interessantes a respeito da dinâmica do sistema. Para algumas grandezas medidas, a condição inicial a partir da qual o sistema evolui pode alterar muito seu estado final. Para outras medidas, o estado final alcança regime assintótico **auto mediável** <sup>§</sup>. Esta característica está em desacordo com o comportamento dos sistemas tipo vidros de spin, onde esta média é impossível de ser feita em tempos finitos. Já descrevemos também a observação do fenômeno de *aging* neste sistema (capítulo 3) [20, 36] .

Se o estado final desta transição fosse realmente composto apenas por grandes vórtices quase imóveis, será que este comportamento auto-mediável ainda seria observado? Sendo que os grandes vórtices são praticamente imóveis, é muito razoável concluir que suas contribuições nas medidas de atividade, velocidade média e difusão sejam desprezíveis frente à contribuição dos vórtices no estado líquido, os quais se movem bastante. Portanto, o comportamento predominante medido é o das pequenas espirais (líquidas) e isto lança a pergunta com relação ao comportamento de um estado onde esta fração não exista.

Esta idéia de um limite (aumentando “c”) onde apenas existam grandes vórtices juntamente com a observação de alguns fenômenos característicos de dinâmicas vitrosas para o sistema que estudamos, abrem perspectivas para o estudo de um verdadeiro **Vidro de Vórtice** [33] numa dinâmica completamente determinista (não existem parâmetros estocásticos no nosso sistema) e sem ruídos. Tal perspectiva representa um desafio para a modelagem de sistemas que apresentam comportamentos vitrosos em mecânica estatística [36, 35] .

Com respeito às nossas perspectivas de aprimorar o modelo que busca descrever a dinâmica por meio da interação de espirais e torná-lo mais próximo da realidade (já que a aniquilação das espirais é observada em experimentos reais e descrita pela EGLC), estamos implementando a possibilidade de *aniquilação de*

---

<sup>§</sup> do inglês, *self averaging*

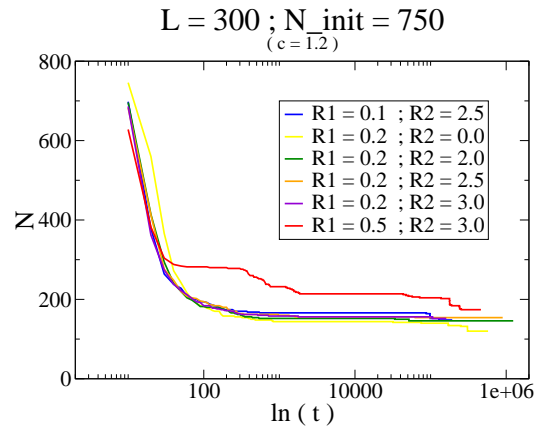
*vórtices*. Conforme já foi dito anteriormente, a EGLC permite a aniquilação de espirais com cargas opostas. Esta possibilidade de aniquilação não está incluída nas equações reduzidas, porque a aproximação das espirais causa uma divergência numérica e foi necessário usar um “artifício numérico” para contornar este problema (aproximação explicada na seção onde explicamos algumas características das equações reduzidas (no cap. 4)).

Consideramos que espirais de cargas opostas, quando estão separadas por uma distância menor que um dado valor por nós estabelecido, aniquilam-se. Notemos que é um critério *ad hoc*; esta possibilidade não é extraída diretamente das equações reduzidas.

Introduzida esta probabilidade de aniquilação, nossas análises preliminares da dinâmica mostram um resultado bastante interessante: a fase líquida dentro da região oscilatória não existirá para longos tempos. Ou seja, mesmo se iniciarmos o sistema com uma densidade tal que seja equivalente à fase líquida ( $\rho \gtrsim 5.5 \times 10^{-3}$ , pelo gráfico 6.1), os vórtices irão se aniquilar até atingirem uma densidade correspondente à densidade da fase intermitente. De fato, a fase líquida não chega a ser observada com a EGLC.

Uma análise mais minuciosa desta medida (número de vórtices no decorrer do tempo) é necessária para confirmar algumas expectativas causadas com a simulação usando a EGLC. Até onde é possível simular com a equação completa, esta medida parece sofrer um comportamento do tipo *aging*. Pela dificuldade de ter domínio sobre as medidas feitas com a EGLC, é muito difícil confirmar esta idéia. Precisamos fazer muitas medidas sobre diferentes condições iniciais e medir após deixar o sistema evoluir em diferentes escalas de tempo para confirmar tais idéias e inferir características deste tipo.

As equações reduzidas se mostraram uma excelente ferramenta de descrição da dinâmica dos sistemas dinâmicos em meios oscilantes na região onde a solução de espiral única é estável (região destacada na figura (5.1)). O sucesso do CE-EDOs em descrever a dinâmica reduzindo-a ao estudo dos centros dos defeitos



**Fig. 6.1:** Número de vórtices como função do tempo para um sistema de tamanho  $L=300$  e número inicial de vórtices  $N = 750$ . Observa-se que o valor assintótico de  $N$  é tal que  $\rho = N/L^2 \approx 1.62 \times 10^{-3}$ , valor de densidade típico da fase intermitente. As diversas curvas correspondem às diversas variações de parâmetros nos nossos critérios.

e suas fases deve-se à importância da existência destes defeitos para o estado final do sistema. Sendo eles estáveis neste intervalo de parâmetros, os vórtices desempenham um papel fundamental na existência e manutenção da dinâmica turbulenta. Esta descrição da dinâmica suprimindo-se a necessidade do campo contínuo  $A$  e usando-se apenas as coordenadas dos centros dos defeitos espirais representa a primeira tentativa feliz de descrição de uma dinâmica *turbulenta mediada por defeitos*.



# Apêndice

# A. Análise de Instabilidade Linear da Equação de Ginzburg Landau

A solução do problema perturbado:

$$A = (A_0 + a)exp(i(\vec{Q} \cdot \vec{r} - \omega(Q)t + \phi)), \quad (A.1)$$

onde:

$$a = a_0exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + \lambda(k)t), \quad (A.2)$$

Substituindo-se a expressão (A.1) na CGLe (2.9) e manipulando-se algebricamente a expressão encontrada (é necessário substituir as expressões para  $\omega(Q)$  e  $A_0$  dadas por (3.2)), chega-se a uma equação algébrica linear em “ $a$ ”:

$$\lambda a = -(1 + ic)A_0^2(a + \bar{a}) - (1 + ib)(\vec{k}^2 a + 2a\vec{Q}\vec{k}) \quad (A.3)$$

Analogamente, temos a equação para o complexo conjugado:

$$\bar{\lambda}\bar{a} = -(1 - ic)A_0^2(a + \bar{a}) - (1 - ib)(\vec{k}^2\bar{a} + 2\bar{a}\vec{Q}\vec{k}) \quad (A.4)$$

Tendo este sistema de equações algébricas, podemos representá-lo de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \lambda a \\ \bar{\lambda} \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \bar{a} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Onde:

$$\begin{cases} m_{11} = -(1 + ic)A_0^2 - (1 + ib)((\vec{k})^2 + 2\vec{k} \cdot \vec{Q}) \\ m_{12} = -(1 + ic)A_0^2 \\ m_{21} = -(1 - ic)A_0^2 \\ m_{22} = -(1 - ic)A_0^2 - (1 - ib)((\vec{k})^2 - 2\vec{k} \cdot \vec{Q}) \end{cases}$$

Sendo este um sistema homogêneo, a única maneira de haver solução não-trivial é tomando os valores de  $\lambda$  para os quais o determinante é nulo. Este critério define o que chamamos *Equação Secular*:

$$\det(M) = 0 \Rightarrow (m_{11} - \lambda)(m_{22} - \lambda) - m_{12}m_{21} = 0 \quad (\text{A.6})$$

A solução desta equação de segundo grau em  $\lambda$  são os auto-valores da matriz:

$$\lambda_{\pm} = \frac{Tr(M)}{2} \pm \sqrt{\frac{(Tr(M))^2}{4} - \delta} \quad (\text{A.7})$$

Onde:

$$\begin{cases} Tr(\mathbf{M}) = m_{11} + m_{22} \\ \delta = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \end{cases}$$

Portanto:

$$\lambda_{\pm} = -A_0^2 - 2ibQ_k k - k^2 \pm \sqrt{\Delta} \quad (\text{A.8})$$

onde  $\Delta = \frac{(Tr(M))^2}{4} - \delta$ .

Para encontrarmos  $\lambda_{\pm}$  é necessário uma aproximação. Precisamos expandir o termo acima definido em potências de  $k$ :

$$\Delta = \frac{(Tr(M))^2}{4} - \delta = A_0^4 + 4ibk^2 \vec{k} \cdot \vec{Q} - 2bcA_0^2 k^2 + 4icA_0^2 \vec{k} \cdot \vec{Q} + 4(\vec{k} \cdot \vec{Q})^2 - b^2 k^4 \quad (\text{A.9})$$

Observemos o produto escalar:

$$\vec{k} \cdot \vec{Q} = kQ \cos \theta, \quad (\text{A.10})$$

sendo  $\theta$  é ângulo formado entre os vetores de onda  $\vec{k}$  e  $\vec{Q}$ . Portanto,  $Q_k = kQ \cos(\theta)$  é a componente de  $\vec{Q}$  paralela ao vetor de onda  $\vec{k}$ .

Utilizando (A.10), podemos trabalhar com a expressão (A.9) de forma a simplificá-la e visualizar a aproximação com maior clareza:

$$\Delta^{1/2} = A_0^2 \left\{ 1 + \frac{4ibk^2 Q_k}{A_0^2} k + \left( 4 \frac{Q_k^2}{A_0^4} - \frac{2bc}{A_0^2} \right) k^2 + \frac{4ibQ_k}{A_0^4} k^3 - \frac{b^2}{A_0^4} k^4 \right\}^{1/2} \quad (\text{A.11})$$

Considerando-se a expansão em Séries de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2 + f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \quad (\text{A.12})$$

com:

$$f^n(x_0) \equiv \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \Big|_{x=x_0}$$

Sendo  $f(x) = (1 - x)^n$ , expandindo-se em torno do ponto  $x_0 = 0$  e tomando  $n = \frac{1}{2}$ , temos:

$$(1 - x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{15}{16}x^4 + \dots \quad (\text{A.13})$$

Onde:

$$x = \frac{4ibk^2Q_k}{A_0^2}k + \left(4\frac{Q_k^2}{A_0^4} - \frac{2bc}{A_0^2}\right)k^2 + \frac{4ibQ_k}{A_0^4}k^3 - \frac{b^2}{A_0^4}k^4 \quad (\text{A.14})$$

Mantendo a expansão até a quarta ordem em  $k$ , manipulando-a de forma a agrupar os termos em ordens de  $k$ , podemos, considerando a expressão para os autovalores (A.7), escrevê-la da seguinte forma:

$$\lambda_{\pm} = C_{l\pm}k^0 - iV_{g\pm}k - D_{2\pm}k^2 + i\Omega_{g\pm}k^3 - D_{4\pm}k^4 + O(k^5) \quad (\text{A.15})$$

Sendo:

$$C_{l\pm} = -A_0 \pm A_0 \quad (\text{A.16a})$$

$$V_{g\pm} = 2(b \mp c)Q_k \quad (\text{A.16b})$$

$$D_{2\pm} = 1 \mp \left(\frac{2Q_k^2 - bcA_0^2 + 2c^2Q_k^2}{A_0^2}\right) \quad (\text{A.16c})$$

$$\Omega_{g\pm} = \pm \frac{2[b(1 - Q^2) - 2cQ_k^2](1 + c^2)Q_k}{(1 - Q^2)^2} \quad (\text{A.16d})$$

$$D_{4\pm} = \pm \frac{1 + c^2}{2(1 - Q^2)^3} [b^2(1 - Q^2)^2 - 12bc(1 - Q^2)Q_k^2 + 4(1 + 5c^2)Q_k^4]$$

## B. Determinação das equações de velocidade - apresentação do método em linhas gerais

Conforme explicado no capítulo 4, a partir do sistema (4.6), buscam-se soluções analíticas para os limites assintóticos  $r \rightarrow 0$  e  $r \rightarrow \infty$ . Tais soluções aplicadas a condições de fronteira apropriadas resultam expressões que dependem apenas da distância à linha de choque. Veremos que será possível, a partir de soluções numéricas para o referido conjunto de equações em certos limites, encontrar uma expressão para as velocidades dos centros das espirais.

### B.1 Limite $r \rightarrow \infty$

Neste limite, a onda assintótica emitida pelas espirais são ondas planas, o que nos permite usar as expressões para a amplitude e fase (4.2):  $F = \sqrt{1 - Q^2}$  e  $\psi' = Q$ . Além disso, os termos  $\Delta_r F$ ,  $1/r$  e  $1/r^2$  são desprezíveis. Considera-se a solução homogênea das equações (4.6) ( $v = 0$ ) argumentando-se que o resultado será válido no caso em que  $v \neq 0$ , porque a solução homogênea relevante diverge e, portanto, domina neste limite. Assim, tem-se o sistema de equações que descreve perturbações às ondas planas emitidas assintoticamente pelas espirais:

$$A_n'' - 2(1 - Q^2)A_n - 2QB_n' = 0 \quad (\text{B.1a})$$

$$B_n'' - 2c(1 - Q^2)A_n + 2QA_n' = 0 \quad (\text{B.1b})$$

Se supusermos perturbações do tipo  $A_n, B_n \sim e^{pr}$ , encontraremos uma equação característica:

$$p(p^3 - 2p(1 - 3Q^2) - 4ck(1 - Q^2)) = 0 \quad (\text{B.2})$$

Esta equação foi obtida também no capítulo 3 considerando-se uma perturbação estacionária em uma onda plana. Em última análise, é exatamente o que temos aqui, mas deduzido de outra maneira. Se o sistema (B.1) descreve as perturbações às ondas planas assintóticas emitidas pelas espirais,  $p$  é a taxa de crescimento espacial da perturbação e seu “*caráter*” definirá o regime de interação entre as espirais: se ele for complexo, estaremos no regime definido como *oscilatório*. Para valores reais, o regime de interação assintótico entre as espirais é *monotônico*.

Os autores supõem uma solução para (A,B) com base em correções da ordem de  $O(r^{-1})$ :

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = r^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix} e^{(pr)} \quad (\text{B.3})$$

Com:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{p^2 - 2(1 - Q^2)}{2pQ} \\ \mu = \frac{4Q^2 - 2p^2 + 6Qp/c}{3p^2 + 6Q^2 - 2} \end{cases}$$

Claramente, esta proposta de solução é bastante complexa e é resultado de muitas tentativas e intuições dos autores. O fato interessante a ser destacado

é que ela surge a partir de correções de ordem  $O(r^{-1})$ . Estávamos supondo  $W$  pequena o suficiente para podermos usar teoria de perturbação com aproximação *linear*, argumentando que a aproximação era válida para espirais com uma distância razoavelmente grande. A inclusão de termos nesta ordem, melhora a aproximação, pois os efeitos que ocorrem mais próximos ao centro passam a ser considerados.

Usando (B.3), (4.5) e considerando-se o caso  $c < c_{cr}$  (portanto  $p$  possui raízes complexas), obtém-se a solução para (A, B):

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix} C_{1n} r^\mu e^{(pr)} + \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^* \end{pmatrix} C_{2n} (r^\mu)^* e^{(p^*r)} \right] e^{(in\theta)}, \quad (\text{B.4})$$

com  $C_{1,n} = C_{2,-n}^*$  e  $p = p_1$ .

Os coeficientes  $C_{1n}$  e  $C_{2n}$  são determinados pela condição contorno (para o caso de cargas opostas, a condição é de que não existe fluxo, a qual é matematicamente expressa por  $\frac{\partial A_{\mathbf{fp}}}{\partial x} = 0$ ):

$$\frac{\partial A_{\mathbf{fp}}}{\partial x} = (F_x + W_x + i(F + W)(\psi_x + \theta_x))e^{i(\theta + \psi + \omega t)} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Considerando o limite assintótico  $r \gg 1$  (distante do centro do defeito), termos de ordem  $F_x$  e  $\theta_x$  podem ser desprezados. A equação (B.5) fica radicalmente simplificada:

$$i(F + W)(\psi_x) + W_x = 0.$$

Usamos 4.2 e escrevemos  $W_x \approx W' \cos(\theta)$ ,  $\psi_x \approx k \cos(\theta)$  \*:

$$W' + iQkW = -iQ\sqrt{1 - Q^2}.$$

---

\* estas maneiras de escrever  $W_x$  e  $\psi_x$  podem ser extraídas a partir de argumentos geométricos.



Escrevendo-se novamente  $W = A + iB$ , obtém-se um sistema de equações para  $A$  e  $B$ :

$$A' - QB = 0 \quad (\text{B.6a})$$

$$B' + QA = -Q\sqrt{1 - Q^2}. \quad (\text{B.6b})$$

Substituindo-se a solução (B.4) em (B.6), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} p - Q\gamma \\ p\gamma - Q \end{pmatrix} C_{1n} r^\mu e^{(pr)} + \begin{pmatrix} p^* - Q\gamma^* \\ p^*\gamma^* + Q \end{pmatrix} C_{2n} (r^\mu)^* e^{(p^*r)} \\ 0 \\ -Q\sqrt{1 - Q^2} \end{bmatrix} e^{(in\theta)} = \quad (\text{B.7})$$

A constante  $C_{2n}$  pode ser encontrada a partir da solução anterior (B.7), isolando-a na primeira equação:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{1n} e^{(in\theta)} = -Q \frac{\sqrt{1 - Q^2}}{\delta} r^\mu e^{(pr)}, \quad (\text{B.8})$$

com  $\delta = p\gamma + Q - (p^*\gamma^* + Q) \frac{p - Q\gamma}{p^* - Q\gamma^*}$ .

Podemos expandir  $r^\mu e^{(pr)}$  em Série de Fourier. Supondo que a linha de choque entre duas espirais é uma reta, a fronteira de raio  $r$  depende do ângulo  $\theta$ :  $X = \cos(\theta)r(\theta)$ , para  $\pi/2 < \theta < \pi/2$ . Fora deste limite ( $|\theta| > \pi/2$ ),  $r(\theta) = \infty$ . Com isto, teremos:

$$r(\theta)^\mu e^{(pr(\theta))} = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \cos(n\theta), \quad (\text{B.9})$$

sendo  $Z_n$  o coeficiente da expansão de Fourier:

$$Z_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-p \frac{X}{\cos(\theta)}} \cos(n\theta) \left( \frac{X}{\cos(\theta)} \right)^{-\mu} d\theta. \quad (\text{B.10})$$

Substituindo-se (B.9) em (B.8), tem-se que  $C_{1,n} = C_{1,-n}$ , porque o cosseno é uma função par, mantendo, portanto, a expressão de  $C_{1,n}$  invariante frente à troca  $n \rightarrow -n$ . A partir da condição  $C_{1,n} = C_{2,-n}^*$  (B.4), sabe-se que  $C_{1,n} = C_{2,n}^*$ . Para  $X \ll 1$ , o valor de  $\theta$  será muito pequeno e o termo  $r(\theta) = X/\cos(\theta)$  pode ser expandido em torno de  $\theta \approx 0$ :  $\cos(\theta) \approx (1 - \theta^2/2)$ . Então:  $X/\cos(\theta) \approx X(1 + \theta^2/2)$ . Substituindo-se esta expansão em (B.10), tem-se:

$$Z_n = \frac{2}{\pi} e^{-pX} X^{-\mu} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{-pX}{2}\theta} \cos(n\theta) \left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right) d\theta. \quad (\text{B.11})$$

Neste ponto, podemos usar duas aproximações e a propriedade de paridade da função a ser integrada para calcular o coeficiente  $Z_n$ . A primeira aproximação é que o termo  $\frac{\theta^2}{2} \ll 1$  e que, portanto, pode ser desprezado. Assim, chega-se a uma integral definida existente nas tabelas [37] mas com outros limites de integração. Na tabela, os limites são de 0 até  $\infty$ , enquanto (B.11) deve ser feita entre  $-\pi$  e  $\pi$ . Como a função a ser integrada é par, podemos mudar o limite inferior e fazer a integral duas (2) vezes entre zero e  $\pi$ . Com a observação de que a função é praticamente nula para valores de  $\theta$  maiores que 2, é muito razoável assumir que a integral nestes limites é igual à integral entre 0 e  $\infty$ , recaindo na expressão existente nas tabelas. Com isto, o cálculo da integral é possível:

$$Z_n = \frac{e^{-pX}}{\sqrt{\pi p X / 2}} X^{-\mu} e^{-n^2/2pX}. \quad (\text{B.12})$$

Considerando-se as expressões (B.8), (B.9) e a anterior, tem-se para  $C_{1,n}$ :

$$C_{1,n} = C_{2,n}^* = \frac{Q \sqrt{1 - Q^2} e^{-pX}}{\delta \sqrt{2\pi p X}} X^{-\mu} e^{-n^2/2pX} \quad (\text{B.13})$$

Observando-se a expressão (B.13), pode-se inferir que os termos em  $n$  significativos são os  $n^2 < 2pX$ . Para  $n$  acima deste valor, este termo passa a ser desprezível. Por esta razão afirma-se que os termos significativos na expansão em série são  $n < n_c \sim \sqrt{X}$ . Os autores afirmam terem resolvido a integral numericamente e que os resultados não mudam significativamente se todas estas aproximações que tornam a integral (B.10) solúvel analiticamente não forem feitas.

## B.2 Limite $r \rightarrow 0$

Iremos considerar apenas  $n = 1$ . Consideremos as soluções da equação para o caso em que  $r \rightarrow 0$ . O objetivo é encontrar uma solução para o sistema (4.6) e impor, quando solução não homogênea (com  $v \neq 0$ ) for considerada, que as soluções encontradas em diferentes limites varram todo o espaço. Para tanto, precisamos conhecer como se comporta cada limite da solução.

Neste limite, tem-se  $F \sim r$  e  $\psi' \sim r$  (4.2). Então,  $\frac{\Delta F}{F} \sim \frac{1}{r^2}$ . Todos os termos proporcionais a  $r^2$  podem ser desprezados. Desta maneira, os sistema de equações para (A,B) (4.6) pode ser bastante simplificado:

$$A'' + \frac{1}{r}A' - \frac{2}{r^2}A - \frac{2i}{r^2}B = 0, \quad (\text{B.14a})$$

$$B'' + \frac{1}{r}B' - \frac{2}{r^2}B + \frac{2i}{r^2}A = 0. \quad (\text{B.14b})$$

Para este tipo de sistema, é intuitivo supor solução polinomial:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} r^m. \quad (\text{B.15})$$

Substituindo-se esta proposta de solução (B.15) em (B.14), encontramos o sistema de equações que define os valores possíveis para  $m$ :

$$a_m(m^2 - 2) - 2ib_m = 0 \quad (\text{B.16a})$$

$$b_m(m^2 - 2) + 2ia_m = 0 \quad (\text{B.16b})$$

Portanto, os possíveis valores de  $m$  são  $m = \pm 2$  (raízes simples) e  $m = 0$  (raiz dupla). Com isto, a solução para o sistema de equações (B.14) é dado por:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \ln(r) \\ b_0 + b_1 \ln(r) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.17})$$

se  $m = 0$ . E:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_2 r^2 + a_{-2} r^{-2} \\ b_2 r^2 + b_{-2} r^{-2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

se  $m = \pm 2$ .

Os argumentos físicos eliminam algumas das soluções matemáticas: para  $m = 0$ , a solução não é possível, porque estamos considerando o caso  $r \rightarrow 0$  e a função  $\ln(r)$  não é definida neste limite. Restaria a solução constante mas esta é limitada quando  $r \rightarrow \infty$  e, portanto, não domina a dinâmica. Para  $m = \pm 2$ , as constantes  $a_{-2}$  e  $b_{-2}$  devem ser nulas para evitar a divergência do termo  $\frac{1}{r^2}$  neste limite de interesse. Resta apenas a solução polinomial com  $m = +2$ .

Esperamos que as soluções para o sistema (4.6) se comportem como (B.4) quando  $r \rightarrow \infty$  e que seu comportamento seja do tipo polinomial ((B.18) com

$m=+2$ ) no limite  $r \rightarrow 0$ . Conhecendo (aproximadamente) as soluções homogêneas nos casos limites, precisamos tentar uma solução não homogênea para o sistema (4.6). Esta busca pela solução geral do referido sistema nos levará às equações para as velocidades. O procedimento é descrito na seção seguinte.

### B.3 Determinação das velocidades

Em busca da solução geral do sistema (4.6) (solução homogênea mais a solução particular), precisamos propor alguma solução particular a ele. Em geral, a proposta de solução particular contém o termo da não homogeneidade (neste caso, o  $v$ ). A solução geral proposta será a solução homogênea com os coeficientes da série dependentes de  $\vec{v}$ :  $C_n = C_n(\vec{v})$ .

Para determinar os valores dos coeficientes da expansão (4.6), é necessário satisfazer às condições de fronteira (B.13) e também fazer com que as soluções numéricas da EGLC tenham um comportamento análogo à solução (B.18) para o limite  $r \rightarrow 0$ . Estas condições determinam, portanto, a solução do sistema (4.6). Como a não homogeneidade é linear em  $v$ , qualquer superposição de soluções particulares é também solução da equação. Então, consideram-se duas soluções particulares para o referido sistema: com  $v_x = 1$ ,  $v_y = 0$  e  $v_x = 0$ ,  $v_y = 1$ . Uma terceira solução seria, portanto, a soma destas duas soluções particulares. Para o limite  $r \rightarrow \infty$ , o sistema deve se comportar como a solução (B.4). Com isto, determinam-se dois pares de constantes:  $C_{1x}$ ,  $C_{2x}$  (para  $v_x = 1$ ,  $v_y = 0$ ) e  $C_{1y}$ ,  $C_{2y}$  (para  $v_x = 0$ ,  $v_y = 1$ ). As condições de contorno nulas  $A(0) = B(0) = A'(0) = B'(0) = 0$  levam à solução  $(A, B) = 0$  quando  $r = 0$ , respeitando, portanto, o comportamento previsto pela solução (B.18).

Em geral, a condição  $C_{1,n} = C_{2,n}^*$  (B.13) não é satisfeita. O que se faz para contornar o problema é calcular uma solução particular homogênea no limite  $r \rightarrow 0$  com  $m = -2$  e encontrar as constantes assintóticas  $C_1$  e  $C_2$ . Desta maneira, pode-se superpor as soluções para que a condição (B.13) seja satisfeita:

$$C_x = C_{1,x} + \xi_x C_1 = C_{2,x}^* + \xi_x^* C_2^* \quad (\text{B.19})$$

$$C_y = C_{1,y} + \xi_y C_1 = C_{2,y}^* + \xi_y^* C_2^*, \quad (\text{B.20})$$

onde  $\xi_x, \xi_y$  são chamados *fatores de mistura*. Notemos que as constantes  $C_x$  e  $C_y$  podem se absolutamente determinadas dado um valor de  $c$ . Todas as soluções particulares foram obtidas utilizando-se a EGLC. Portanto, determinando-se  $c$ , os coeficientes da solução são unicamente determinados. Conforme dissemos recentemente, a proposta de solução geral é que a não homogeneidade seja incluída nos coeficientes da solução homogênea:

$$C(\vec{v}) = v_x C_x + v_y C_y = -\frac{-Q\sqrt{1-Q^2}\exp(-pX)}{\delta\sqrt{2\pi pX}} X^{-\mu}. \quad (\text{B.21})$$

Manipulando-se esta expressão:

$$\left(\Re\left(\frac{C_x}{C_y}\right) + \Im\left(\frac{C_x}{C_y}\right)\right) v_x + v_y = \Re\left(\frac{M}{C_y}\right) - \Im\left(\frac{M}{C_y}\right), \quad (\text{B.22})$$

onde  $M = \frac{-Q\sqrt{1-Q^2}\exp(-pX)}{\delta\sqrt{2\pi pX}} X^{-\mu}$ , chega-se às quações procuradas (4.7).

## B.4 Caso $c < c_{cr}$

Comentamos anteriormente que as raízes da equação característica (B.2) definem o regime de interação entre as espirais. Para  $c < c_{cr} \approx 0.845$ , os valores de  $p$  são reais e está-se no intervalo de interação monotônica. A solução para o sistema (4.6) é dada por (B.7), agora com  $p_{1,2}$  reais no lugar da taxa complexa que tínhamos no caso oscilatório:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} C_{1n} r^{\mu_1} e^{(p_1 r)} + \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} C_{2n} (r^{\mu_2})^* e^{(p_2 r)} \right] e^{(in\theta)}, \quad (\text{B.23})$$

onde  $\mu_{1,2}$  e  $\delta_{1,2}$  são definidos de maneira análoga ao caso oscilatório.

Seguindo os passos feitos anteriormente para o caso oscilatório, chega-se a condições de fronteira que leva à uma equação para os coeficientes da expansão:

$$C_{i,n} = \frac{Q\sqrt{1-Q^2}e^{-|p_i|X}}{\delta_i\sqrt{2\pi p_i X}} X^{-\mu_i} e^{-n^2/2p_i X} \quad (\text{B.24})$$

Como é muito difícil simular a EGLC para valores de  $c$  pequenos, o procedimento utilizado para encontrar as equações de velocidade do caso oscilatório não pode ser aplicado aqui. Por esta razão as equações neste limite são deduzidas para o caso limite  $c \rightarrow 0$ . A expressão fica simplificada e há solução analítica.

Neste limite, o comprimento de onda da onda plana assintótica emitida pelas espirais tende a zero ( $Q \rightarrow 0$ ). Então, podemos desprezar termos na equação característica (B.2) da ordem  $Q^2$  e encontrar as raízes:

$$\begin{aligned} p_1 &\approx -2cQ \\ p_2 &\approx \sqrt{2} \end{aligned} \quad (\text{B.25a})$$

Observemos a expressão (B.24). O termo exponencial indica que a raiz dominante na solução será  $p_1$ , porque  $|p_1| \approx 2|cQ| \ll 1$  e  $p_2 \approx \sqrt{2}$ . Como a exponencial é negativa, o termo  $e^{-\sqrt{2}}$  decai muito mais rapidamente que  $e^{-2|cQ|}$ . Podemos, portanto, desprezar o termo  $C_{2n}$  na expressão (B.23).

Tendo o valor de  $p_1$ , podemos calcular os valores das constantes  $\mu_1$  e  $\delta_1$  existentes na equação (B.23) e definidas por analogia aos procedimentos anteriores:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{p_{1,2}^2 - 2(1 - Q^2)}{2p_{1,2}Q} \\ \mu &= \frac{4Q^2 - 2p_{1,2}^2 + 6Qp_{1,2}/c}{3p_{1,2}^2 + 6Q^2 - 2} \\ \delta &= p_1\gamma_1 + Q - (p_2\gamma_2 + Q)\frac{p_1 - Q\gamma_1}{p_2 - Q\gamma_2}. \end{aligned}$$

A partir destas expressões, tem-se que  $\mu \rightarrow 0$  e  $\delta \rightarrow -\frac{1}{2k}$  e, portanto, o valor do coeficiente da expansão:

$$\begin{aligned} C_{1,n} &= Q^2 \frac{e^{-2|ck|X}}{\sqrt{\pi|ck|X}} \\ C_{2,n} &= 0 \end{aligned} \tag{B.26}$$

Se supusermos novamente que a solução geral inclui a não homogeneidade nos coeficientes da solução homogênea ( $C = C(\vec{v})$ ), teremos:

$$C(\vec{v}) = c_x v_x + c_y v_y = Q^2 \frac{e^{-2|ck|X}}{\sqrt{\pi|ck|X}} \tag{B.27}$$

A partir desta solução assintótica, os autores calculam soluções numéricas para cada valor de  $c$  abaixo o valor crítico. Com estes resultados numéricos, estimam-se os coeficientes que definirão as velocidades.



## Referências

- [1] CROSS, M. C.; HOHENBERG, P. C. Pattern formation outside of equilibrium. *Reviews of Modern Physics*, Woodbury, v. 65, n. 3, p. 851-1112, July 1993.
- [2] LEGA, J. *Defaults topologiques associes a la brisure de l'invariance de translation dans le temps*. 1989. 221f. These (Doctorat en Physique) - Université de Nice, Nice, 1989.
- [3] REICHL, L. E. *A modern course in statistical physics* 2.ed. Wiley-Interscience Publication, 1998.
- [4] ARECCI, F. T.; GIACOMMELLI, G.; RAMAZZA, P. L.; RESIDORI, S. Experimental evidence of chaotic and spatiotemporal chaos in optics. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 65, n. 20, p. 2531-2534, Nov. 1990.
- [5] DAVIDENKO, J. M.; KENT, P.; JALIFE, J. Spiral waves in normal isolated ventricular muscle. *Physica D*, Amsterdam, v. 49, n. 1&2, p. 182-197, Apr. 1991.
- [6] MÜLLER, C.; PLESSER, T.; HESS, B. Two-dimensional spectroscopy of spiral wave propagation in the Belousov-Zhabotinski reaction. *Physica 24D*, Amsterdam, p. 71-86, June 1987.
- [7] OUYANG, Q.; FLESSELLES, J. -M. Transition from spirals to defect turbulence driven by a convective instability. *Nature*, Londres, v. 379, n. 6561, p. 143-146, Jan. 1996.
- [8] HAWLEY, M.; RAISTRICK, I. D.; BEERY, J. G.; HOULTON, R. J. Growth mechanism of sputtered films of  $YBa_2Cu_3O_7$  studied by scanning tunneling microscopy. *Science*, Washington, v. 251, p. 1537-1642, Mar. 1991.

- [9] WU, X. G.; KAPRAL, R. Chemical turbulence and phase resetting dynamics. *J. Chem. Phys.*, Woodbury, v. 94, n. 2, p. 1441-1419, Jan. 1990.
- [10] SAARLOS, van W. *The complex Ginzburg-Landau Equation for beginners*. 1995. *SFI Studies in the Sciences of Complexity*, Addison-Wesley, p. 19-31, 1995.
- [11] MANNENVILLE, P. *Structures dissipatives, chaos et turbulence* 2.ed.
- [12] ARANSON, I. S.; KRAMER, L. The world of complex Ginzburg-Landau equation. *Reviews of Modern Physics*, Melville, v. 74, n. 1, p. 99-143, Jan. 2002.
- [13] ARANSON, I. S.; ARANSON, L.; KRAMER, L.; WEBER, A. Stability limits of spiral and traveling waves in nonequilibrium media. *Physical Review A*, Woodbury, v. 46, n. 6, p. 2992-2995, Sept. 1992.
- [14] COHEN, D. S.; NEU, J. C.; ROSALES R. R. Rotating spiral wave solution os reaction-difusion equations. *SIAM J. Appl. Math*, Philadelphia, v. 35, n. 3, p. 536-547, Nov. 1978.
- [15] HAGAN, P. S. *SIAM J. Appl. Math*, Philadelphia, v. 42, n. 3, p. 762-772, Nov. 1982.
- [16] MONTAGNE, RAÚL. *Dynamics of disordered regimes in spatially extended systems: The Complex Ginzburg Landau Equation*. 1996. 178f. Thesis (PHD in Physics) - Univ. de les Illes Balears, Balears, 1996.
- [17] DIPRIMA, R. C.; ECKHAUS, W.; SEGEL, L. A. Non-linear wave-number interaction in near-critical two dimensional flows. *J. Fluid. Mech*, Great Britain, v. 49, n. 4, p. 705-744, Mar. 1971.

- [18] NEWELL, A. C.; WHITEHEAD, J. A. Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid. Mech*, Great Britain, v. 38, n. 2, p. 279-303, Mar. 1969.
- [19] STEWARTSON, K.; STUART, J. T. A non-linear instability theory for a wave system in a plane Poiseuille flow. *J. Fluid. Mech*, Great Britain, v. 48, n. 3, p. 529-545, Oct. 1970.
- [20] CHATÉ, H.; MANNENVILLE, P. Phase diagram of the two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. *Physica A*, Amsterdam, v. 224, p. 348-368, 1996.
- [21] MANNENVILLE, P.; CHATÉ, H. Phase turbulence in the two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. *Physica D*, Amsterdam, v. 216, p. 30-46, 1996.
- [22] BRAUN, R.; FEUDEL, F. Supertransient chaos in the two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. *Physical Review E*, Woodbury, v. 53, n. 6, p. 6562-6565, Jan. 1996.
- [23] ARANSON, I. S.; KRAMER, L.; WEBER, A. Theory interaction and bound states of spiral waves in oscillatory media. *Physical Review E*, Woodbury, v. 47, n. 5, p. 3231-3241, May 1993.
- [24] ARANSON, I. S.; KRAMER, L.; WEBER, A. Formation of asymmetric states of spiral waves in oscillatory media. *Physical Review E*, Woodbury, v. 48, R9, May 1993.
- [25] MORSE, P. M.; FESHBACH, H. *Methods of theoretical physics*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [26] CHURCHILL, R.V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1975.

- [27] MERMIN, N. D. The topological theory of defects in ordered media. *Reviews of Modern Physics*, New York, v. 51, n. 3, p. 591-648, July 1979.
- [28] LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. *Physique statistique*. 2.ed. MOscou: Mir, 1967.
- [29] ARANSON, I. S.; KRAMER, L.; WEBER, A. Core Instability and Spatiotemporal Intermittency of Spiral Waves in Oscillatory Media. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 72, n. 15, p. 2316-2319, Apr. 1994.
- [30] PISMEN, L. M.; NEPOMNYASHCHY, A. A. On Interaction of Spiral Waves. *Physica D*, Amaterdam, v. 54, n. 3, p. 183-193, Jan. 1992.
- [31] RICA, S.; TIRAPEGUI, E. Analytical Description of a State Dominated by Spiral Defects in two-dimensional Extended Systems . *Physica D*, Amsterdam, v. 48, n. 2-3, p. 396-424, Mar. 1991.
- [32] COULLET, P.; GIL, L.; LEGA, J. Defect Mediated Turbulence. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 62, n. 14, p. 1619-1622, Apr. 1989.
- [33] HUBER, G; ALSTRØM, P.; BOHR, T. Nucleation and transients at the onset of vortex turbulence. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 69, n. 16, p. 2380-2383, Feb. 1992.
- [34] BRAUN, R.; FEUDEL, F. Supertransient chaos in the two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. *Physical Review E*, Woodbury, v. 53, n. 6, p. 6562-6565, Jan. 1996.
- [35] DEBENEDETTI, P. G.; STILLINGER, F. H. Supercooled liquids and the glass transition. *Nature*, Londres, v. 410, p. 259-267, Mar. 2001.
- [36] ANGEL, C. A. Formation of glasses from liquids and biopolymers. *Science*, Washington, v. 267, p. 1877-2056, Mar. 1995.

- 
- [37] DWIGHT, H. B. *Tables of integrals and other athenatical data* 3.ed. New York: The Macmillan Company, 1947.
- [38] BRITO, C.; ARANSON, I. S.; CHATÉ, H. Vortex Glass and Vortex Liquid in Oscillatory Media. Aceito para publicação no *Physical Review Letters*.