

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**MINIMIZAÇÃO DO CUSTO DE SEÇÕES POLIGONAIS DE  
PILARES EM CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À  
FLEXOCOMPRESSÃO OBLÍQUA COM ALGORITMO QPSO**

**LUCAS CORONA DE OLIVEIRA**

PORTO ALEGRE  
2021

LUCAS CORONA DE OLIVEIRA

**MINIMIZAÇÃO DO CUSTO DE SEÇÕES POLIGONAIS DE  
PILARES EM CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À  
FLEXOCOMPRESSÃO OBLÍQUA COM ALGORITMO QPSO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia.

PORTO ALEGRE  
2021

### CIP - Catalogação na Publicação

Corona de Oliveira, Lucas  
MINIMIZAÇÃO DE CUSTOS DE SEÇÕES POLIGONAIS DE  
PILARES EM CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À  
FLEXOCOMPRESSÃO OBLÍQUA COM ALGORITMO QPSO /  
Lucas Corona de Oliveira. -- 2021.  
132 f.

Orientador: Herbert Martins Gomes.

Coorientador: Felipe Schaedler de Almeida.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,  
BR- RS, 2021.

1. Concreto armado. 2. Flexão composta oblíqua. 3.  
Minimização de custos. 4. Otimização Estrutural. 5. QPSO.  
I. Gomes, Herbert Martins, orient. II. Schaedler de  
Almeida, Felipe, coorient. III. Título.

LUCAS CORONA DE OLIVEIRA

**MINIMIZAÇÃO DO CUSTO DE SEÇÕES POLIGONAIS DE  
PILARES EM CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À  
FLEXOCOMPRESSÃO OBLÍQUA COM ALGORITMO QPSO**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 12 de abril de 2021

Prof. Herbert Martins Gomes  
Dr. pela Univ. Federal do Rio Grande do Sul  
Orientador

Prof. Felipe Schaedler de Almeida  
Dr. pela Univ. Federal do Rio Grande do Sul  
Coorientador

Prof. Nilo Cesar Consoli  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Inácio Benvegnu Morsch (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Paula Manica Lazzari (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Moacir Kripka (UPF)**  
Dr. pela Universidade de São Paulo

Dedico este trabalho aos meus pais, João Luis e Débora, e  
à minha noiva Fernanda, pelo apoio ao longo do período  
de seu desenvolvimento.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais, Débora Corona de Oliveira e João Luis de Oliveira, pelo exemplo, amor, carinho e incentivo à educação, sempre me proporcionando todo o suporte necessário para realizar os meus objetivos.

Agradeço a minha noiva, Fernanda Zwierzinski, pela paciência e apoio durante essa trajetória e por todo o amor e companheirismo ao longo da vida.

Agradeço aos meus orientadores, Prof. Herbert Martins Gomes e Prof. Felipe Schaedler de Almeida, pelos conhecimentos transmitidos e pela enorme dedicação demonstrada ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos colegas e amigos que fizeram parte desta conquista e tornaram a caminhada mais fácil e divertida.

O mundo está nas mãos daqueles que têm a coragem de  
sonhar e correr o risco de viver seus sonhos.

*Paulo Coelho*

## RESUMO

DE OLIVEIRA, L. C. **Minimização do custo de seções poligonais de pilares em concreto armado submetidas à flexocompressão oblíqua com algoritmo QPSO**. 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O dimensionamento de estruturas em concreto armado usualmente se dá por meio de processos iterativos a partir de uma geometria pré-definida. Dificilmente a solução mais econômica para o projeto será encontrada desta forma devido à complexidade do processo e ao número de possíveis soluções. A busca por soluções que atendam o máximo desempenho e segurança, aliado ao mínimo custo é um objetivo cada vez mais presente nos projetos de engenharia. Este objetivo pode ser alcançado por meio da utilização de técnicas de otimização, cuja finalidade é encontrar a melhor solução entre as inúmeras possibilidades. Este trabalho consiste no desenvolvimento de uma metodologia de dimensionamento ótimo de seções transversais de pilares em concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua, integrando o algoritmo de otimização QPSO (*Quantum Particle Swarm Optimization*) à uma rotina de dimensionamento e verificação de pilares, conforme os preceitos da norma ABNT NBR 6118:2014. A formulação do problema inclui os custos do concreto, da armadura e das fôrmas. As variáveis de projeto do problema foram as dimensões da seção de concreto, a quantidade e os diâmetros das barras de armaduras, bem como a classe de resistência do concreto. O objetivo da otimização é encontrar as melhores dimensões da seção e distribuição das barras de armadura de forma que o custo seja minimizado. A análise se aplica a seções poligonais, que incluem a seção retangular, retangular vazada e seção em “L”. A fim de comprovar a eficiência do programa desenvolvido, os resultados foram comparados com soluções conhecidas na literatura, dimensionadas de maneira convencional ou de trabalhos que fazem uso de outras técnicas de otimização. Foi realizada uma análise sobre a influência do posicionamento das barras de armadura no custo da seção transversal. Além disso, foi feito um estudo sobre a influência do tamanho da população e o número de chamadas da função objetivo no desempenho do algoritmo de otimização QPSO. O método de otimização QPSO mostrou-se eficiente na busca por soluções ótimas, apresentando soluções coerentes e que confirmam a importância do uso da otimização estrutural no dimensionamento de estruturas em concreto armado.

**Palavras-chave:** *Otimização estrutural, QPSO, Minimização de custos, Pilares em concreto armado, Seção transversal, Flexocompressão oblíqua, NBR 6118:2014.*

## ABSTRACT

DE OLIVEIRA, L. C. **Cost minimization of reinforced concrete columns with polygonal sections subjected to compression and biaxial bending with QPSO algorithm.** 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The design of reinforced concrete structures is usually achieved through iterative processes in which the cross-section dimensions are previously established. Due to the large number of solutions, this method hardly ever finds the most economical solution. The search for solutions that comply performance and safety with minimal cost design is one of the primary objectives in engineering projects. This goal can be achieved through the use of optimization techniques, whose purpose is to find the best solution among the countless possibilities. This thesis deals with the development of a methodology that integrates the optimization algorithm Quantum Particle Swarm Optimization (QPSO) with a routine for structural design of reinforced concrete columns under compression and biaxial bending, according to the design criteria of Brazilian Standards ABNT NBR 6118:2014. The problem formulation takes into account the costs of concrete, reinforcement and formwork. The design variables used were the cross-section dimensions, the number and diameter of rebar and the concrete strength. The objective is to find the best combination of variables that result in a minimum cost design. This methodology applies to polygonal cross sections, such as rectangular section, rectangular hollow section and L-section. To evaluate the efficiency of the methodology, the optimal solutions obtained in this work were compared to results reported by other authors using conventional methods or alternative optimization techniques. The effect of rebar positioning on the cross-section costs was studied. Additionally, an analysis about the influence of population size and the number of generations on the algorithm QPSO was performed. The proposed optimization method proved to be efficient in the search for optimal solutions, presenting consistent results that confirm the importance of using optimization techniques in design of reinforced concrete structures.

**Key-words:** *Structural Optimization, QPSO, Cost minimization, Reinforced Concrete Columns, Cross-section, Biaxial Bending, NBR 6118:2014.*

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	21
1.1	Justificativa.....	22
1.2	Objetivo .....	23
1.2.1	Objetivos Específicos.....	23
1.3	Estrutura da dissertação.....	24
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	25
2.1	Pilares submetidos à flexão composta normal e oblíqua .....	25
2.2	Otimização de estruturas em concreto armado .....	26
3.	PILARES EM CONCRETO ARMADO .....	32
3.1	Considerações iniciais .....	34
3.1.1	Domínios de deformação .....	35
3.1.2	Diagramas tensão-deformação .....	37
3.2	Seção transversal de pilares.....	39
3.2.1	Esforços atuantes de cálculo .....	41
3.2.2	Esforços resistentes de cálculo.....	41
3.2.3	Dimensionamento e verificação de uma seção .....	44
3.2.4	Algoritmo de dimensionamento da seção por Newton-Raphson.....	46
3.2.5	Algoritmo de verificação da seção por Newton-Raphson .....	47
3.2.6	Método Nelder-Mead .....	48
4.	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	50
4.1	Conceitos fundamentais .....	50
4.2	Otimização por enxame de partículas .....	53
4.2.1	Inteligência de enxame ( <i>Swarm Intelligence</i> ).....	53
4.2.2	Algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas (PSO).....	54
4.2.3	<i>Global Best</i> PSO.....	56

4.2.4	<i>Local Best PSO</i> .....	57
4.3	<i>Quantum Particle Swarm Optimization (QPSO)</i> .....	58
4.3.1	Fundamentos do QPSO .....	59
4.3.2	Algoritmo QPSO .....	61
5.	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO .....	64
5.1	Parâmetros fixos e variáveis de projeto.....	64
5.1.1	Seção Retangular.....	64
5.1.2	Seção Retangular Vazada.....	66
5.1.3	Seção “L” .....	68
5.2	Função Objetivo .....	69
5.2.1	Seção Retangular.....	70
5.2.2	Seção Retangular Vazada.....	70
5.2.3	Seção “L” .....	71
5.3	Funções de Restrição.....	71
5.3.1	Critérios de segurança .....	71
5.3.2	Limites geométricos .....	72
5.4	Função de Penalização .....	75
5.5	Fluxograma do algoritmo .....	76
6.	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	78
6.1	Exemplo 1 – Seção Retangular: Dimensionamento Ótimo x Convencional.....	78
6.2	Exemplo 2 – Seção Retangular: Estudo de parâmetros do algoritmo QPSO .....	83
6.2.1	Descrição do problema e soluções conhecidas .....	84
6.2.2	Análise de desempenho do algoritmo QPSO .....	86
6.2.3	Seções otimizadas .....	97
6.3	Exemplo 3 – Seção Retangular: Flexocompressão Reta.....	99
6.4	Exemplo 4 – Seção Retangular: Flexocompressão Oblíqua .....	104

6.5	Estudo sobre a influência do posicionamento das barras em seções retangulares.....	108
6.6	Exemplo 5 – Seção Retangular Vazada .....	116
6.7	Exemplo 6 – Seção Transversal em “L” .....	119
7.	CONCLUSÕES .....	123
	REFERÊNCIAS .....	126
	ANEXO A – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA SOBRE UM DOMÍNIO PLANO ARBITRÁRIO ATRAVÉS DE INTEGRAIS DE CONTORNO.....	130

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Pilares usuais de edifícios de concreto armado (Fonte: FUSCO, 1981).	32
Figura 3.2 – Situações de flexão composta oblíqua (Fonte: CAMPOS FILHO, 2014).	33
Figura 3.3 – Domínios de estado-limite último de uma seção transversal (ABNT, 2014).	35
Figura 3.4 – Diagrama tensão-deformação do concreto à compressão (ABNT, 2014).	37
Figura 3.5 – Diagrama tensão-deformação do aço (Fonte: CAMPOS FILHO, 2014).	38
Figura 3.6 – Exemplo da definição da seção de concreto (Fonte: adaptado de CAMPOS FILHO, 2014).	39
Figura 3.7 – Esforços atuantes de cálculo (Fonte: adaptado de CAMPOS FILHO, 2014).	41
Figura 3.8 – Superfícies de interação (Fonte: adaptado de FUSCO, 1981).	42
Figura 3.9 – Sistema de coordenadas ( $\xi, \eta$ ) (Fonte: CAMPOS FILHO, 2014).	43
Figura 3.10 – Profundidade da linha neutra (Fonte: CAMPOS FILHO, 2014).	43
Figura 4.1 – Modelo de estrela (Fonte: ENGELBRECHT, 2007).	56
Figura 4.2 – Modelo de anel (Fonte: ENGELBRECHT, 2007).	58
Figura 5.1 – Variáveis de projeto para problemas de otimização de seção retangular (Fonte: autor).	65
Figura 5.2 – Variáveis de projeto para problemas de otimização de seção retangular vazada (Fonte: autor).	67
Figura 5.3 – Variáveis de projeto seção vazada (Fonte: autor).	68
Figura 5.4 - Fluxograma do algoritmo de otimização (Fonte: autor).	77
Figura 6.1 – Dimensões e excentricidades da seção, em centímetros (Fonte: Pinheiro, Baraldi e Porem, 2009)	79
Figura 6.2 – Ábaco 16A (Fonte: adaptado de Pinheiro, Baraldi e Porem, 2009)	80
Figura 6.3 – Seção dimensionada segundo os ábacos (Fonte: Pinheiro, Baraldi e Porem, 2009)	81
Figura 6.4 – Detalhamento das seções obtidas nas otimizações no exemplo 1.	82
Figura 6.5 – Detalhamento das seções do exemplo 2 dimensionadas por Bastos	84

(2004).

Figura 6.6 – Detalhamento da seção do programa empregado por Bastos (2004). (Fonte: Bastos, 2004)	86
Figura 6.7 – Gráfico das soluções do algoritmo QPSO para geometria variável.	90
Figura 6.8 – Tempo médio normalizado, por $N_f$ e $n^\circ$ de partículas.	92
Figura 6.9 – Número de iterações vs tempo de processamento.	94
Figura 6.10 – Número de iterações Médio vs Geração, por tamanho da população (10, 20 e 40 partículas).	95
Figura 6.11 – Número de iterações Médio vs Geração, por tamanho da população (50, 100 e 200 partículas).	96
Figura 6.12 – Detalhamento das seções ótimas utilizando o QPSO	98
Figura 6.13 – Ábaco de interação (Fonte: adaptado de Montoya, Meseguer e Cabré, 1994)	100
Figura 6.14 – Detalhamento das seções otimizadas do exemplo 3 (Fonte: adaptado de Medeiros, 2012).	101
Figura 6.15 – Detalhamento das seções otimizadas pelo QPSO.	103
Figura 6.16 – Dimensões da seção e excentricidades totais (Fonte: Carvalho e Pinheiro, 2009)	104
Figura 6.17 – Solução adotada (Fonte: Carvalho e Pinheiro, 2009).	105
Figura 6.18 – Detalhamento das seções otimizadas do exemplo 3 (Fonte: adaptado de Sias, 2014).	106
Figura 6.19 – Detalhamento das seções otimizadas pelo QPSO.	107
Figura 6.20 – Variáveis de projeto da seção retangular com a nova configuração das barras.	109
Figura 6.21 – Soluções ótimas Exemplo 1 com novas configurações de barras de armadura.	111
Figura 6.22 – Soluções ótimas Exemplo 2 com novas configurações de barras de armadura.	112
Figura 6.23 – Soluções ótimas Exemplo 3 com novas configurações de barras de armadura.	113
Figura 6.24 – Soluções ótimas Exemplo 4 com novas configurações de barras de armadura.	115

Figura 6.25 – Seção a ser dimensionada (Fonte: adaptado de Lima (2018))	117
Figura 6.26 – Seção dimensionada com 32 $\phi$ 25	117
Figura 6.27 – Detalhamento das seções otimizadas do exemplo 5.	118
Figura 6.28 – Detalhamento da seção original, com 16 barras de 12,5 mm. (Fonte: adaptado de Lima, 2018).	120
Figura 6.29 – Detalhamento das seções do exemplo 6.	121

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Pseudo-código do algoritmo Nelder-Mead.	49
Tabela 4.1 – Pseudo-código do Algoritmo PSO.	57
Tabela 4.2 – Pseudo-código do algoritmo QPSO.	62
Tabela 6.1 – Soluções ótimas do exemplo 1.	82
Tabela 6.2 – Soluções de Bastos (2004) para o exemplo 2.	85
Tabela 6.3 – Soluções do algoritmo QPSO para geometria fixa.	88
Tabela 6.4 – Soluções do algoritmo QPSO para geometria variável.	89
Tabela 6.5 – Tempo médio de processamento do algoritmo QPSO de acordo com o $N_f$ .	92
Tabela 6.6 – Tempo médio de processamento do algoritmo QPSO de acordo com $N_{pop}$ .	92
Tabela 6.7 – Número total de iterações do algoritmo de verificação.	93
Tabela 6.8 – Soluções ótimas do exemplo 2.	98
Tabela 6.9 – Soluções ótimas do exemplo 3.	103
Tabela 6.10 – Soluções ótimas do exemplo 4.	107
Tabela 6.11 – Soluções ótimas do exemplo 1 com novas configurações de barras de armadura.	111
Tabela 6.12 – Soluções ótimas do exemplo 2 com novas configurações de barras de armadura.	113
Tabela 6.13 – Soluções ótimas do exemplo 3 com novas configurações de barras de armadura.	114
Tabela 6.14 – Soluções ótimas do exemplo 4 com novas configurações de barras de armadura.	115
Tabela 6.15 – Soluções ótimas do exemplo 5.	119
Tabela 6.16 – Soluções ótimas do exemplo 6.	122

## LISTA DE SÍMBOLOS

### I – LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

A	Área da seção
$A_C$	Área de concreto
$A_F$	Área de fôrmas
$A_S$	Área de aço
$A_{S,min}$	Área mínima de armadura
$C_C$	Custo unitário do concreto, por unidade de volume
$C_F$	Custo unitário das fôrmas, por unidade de área
$C_S$	Custo unitário do aço, por unidade de massa
CV	Coefficiente de variação percentual
$E_c$	Módulo de elasticidade do concreto
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço
G	Melhor experiência do enxame
$G_{jk}$	Polinômios de integração derivados da aplicação do teorema de Green
J	Momento de inércia
[K]	Matriz de derivadas parciais do esforços resistentes
L	Comprimento característico da partícula no potencial $\delta$
$MA_d$	Momento fletor atuante de cálculo
$MR_d$	Momento fletor resistente de cálculo
$MS_d$	Momento solicitante de cálculo
$NA_d$	Esforço Normal atuante de cálculo
$NR_d$	Esforço Normal resistente de cálculo
$N_f$	Número de avaliações da função objetivo
$N_{ger}$	Número de avaliações da função objetivo
$N_{pop}$	Tamanho da população

$N_{sd}$	Carga axial solicitante de cálculo
$P$	Melhor experiência da partícula
$Q$	Função densidade de probabilidade
$S$	Momento estático
$V_C$	Volume de concreto

## II – LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

$b$	Curvatura da deformação na fibra correspondente ao centróide da seção
$b$	Largura da seção transversal
$c$	Valor da deformação na fibra correspondente ao centróide da seção
$c$	Constante de aceleração, associadas a contribuição dos componentes cognitivos e sociais
$c$	Cobrimento da armadura
$d$	Altura da seção transversal
$d'$	Distância do eixo das barras à borda da seção
$e$	Espaçamento entre as barras de aço
$e_{max}$	Espaçamento máximo entre as barras de aço
$e_{min}$	Espaçamento mínimo entre as barras de aço
$e_x$	Excentricidade aplicada no eixo $x$
$e_y$	Excentricidade aplicada no eixo $y$
$f(x)$	Função objetivo
$f_{cd}$	Resistência de cálculo à compressão do concreto
$f_{ck}$	Resistência característica à compressão do concreto
$f_{max}$	Valor máximo que $f(x)$ pode assumir
$f_p$	Nível de violação das restrições
$f_y$	Tensão de escoamento da armadura
$f_{yd}$	Resistência de cálculo ao escoamento do aço

$f_{yk}$	Resistência característica ao escoamento do aço
$g_i$	Restrições de desigualdade do problema de otimização
$h_i$	Restrições de igualdade do problema de otimização
$h$	Altura da seção transversal
$n$	Número de iterações ou tamanho da população
$\{\Delta p\}$	Vetor de desequilíbrio
$p$	Parâmetro randômico entre 0 e 1
$r$	Parâmetro randômico entre 0 e 1
$t$	tempo
$v$	Velocidade da partícula
$x$	Profundidade da linha neutra
$x$	Posição da partícula
$\bar{x}$	Média
$x_i$	Variáveis de projeto
$x_{lim}$	Profundidade limite da linha neutra
$y$	Melhor posição conhecida da partícula
$z$	Vértices do sistema simplex

### III – LETRAS GREGAS

$\alpha$	Ângulo de inclinação da linha neutra em relação ao eixo x
$\gamma$	Fator de penalização
$\gamma_c$	Coefficiente de minoração da resistência do concreto
$\gamma_n$	Coefficiente adicional de majoração de esforços solicitantes de cálculo
$\gamma_s$	Coefficiente de minoração da resistência do aço
$\gamma_s$	Peso específico do aço
$\delta$	Potencial quântico delta

$\epsilon_c$	Deformação específica do concreto em compressão
$\epsilon_{c2}$	Deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico
$\epsilon_{cu}$	Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura
$\epsilon_s$	Deformação específica do aço
$\epsilon_s$	Deformação da fibra extrema superior da seção transversal de concreto
$\epsilon_i$	Deformação da fibra extrema inferior da seção transversal de concreto
$\epsilon_u$	Deformação específica do aço na ruptura
$\epsilon_{yd}$	Deformação específica de cálculo de escoamento do aço
$\eta$	Coordenada vertical no sistema de coordenadas tendo como origem o centro de gravidade da seção transversal
$\lambda$	Fator de proporcionalidade entre os esforços atuantes e resistentes
$\mu_x$	Momento fletor reduzido adimensional em torno do eixo x
$\mu_y$	Momento fletor reduzido adimensional em torno do eixo y
$\nu$	Esforço Normal reduzido adimensional
$\xi$	Coordenada horizontal no sistema de coordenadas tendo como origem o centro de gravidade da seção transversal
$\rho_j$	Percentual da barra de armadura em relação à área total de aço
$\sigma$	Desvio padrão
$\sigma_c$	Tensão no concreto em compressão
$\sigma_{cd}$	Tensão normal do concreto
$\sigma_{sd}$	Tensão normal em uma barra de aço
$\phi$	Diâmetro nominal das barras de aço
$\Psi_{(x,t)}$	Função de onda
$\omega$	Taxa mecânica de armadura

## 1. INTRODUÇÃO

Projetos de engenharia, de forma geral, buscam soluções otimizadas nas mais variadas áreas do conhecimento, seja o menor custo para atender determinada condição, o menor tempo de execução, a menor massa, ou ainda uma combinação de dois ou mais objetivos, geralmente unindo máximo desempenho e segurança com o menor custo. A melhor solução pode ser pesquisada de diversas formas: experiências anteriores, comparação entre simulações e a utilização de ferramentas matemáticas, abordadas em destaque nesse trabalho.

A era eletrônica elevou a exigência das normas quanto aos procedimentos e requisitos de cálculo, tornando o dimensionamento de estruturas em concreto armado inviável sem o uso de recursos computacionais. Alguns autores elaboraram métodos para facilitar estes cálculos, como por exemplo os ábacos de Venturini e Rodrigues (1996) e Pinheiro, Baraldi e Porem (2009). Diversos programas de análise estrutural e verificação de seções também foram desenvolvidos para auxiliar os profissionais em suas atividades, tanto nas áreas de pesquisa, quanto no mercado de trabalho.

Mesmo com estas ferramentas, o projeto de estruturas em concreto armado usualmente é desenvolvido de maneira intuitiva com base em projetos anteriores semelhantes. O dimensionamento convencional visa obter o detalhamento de uma seção, cujos esforços resistentes sejam capazes de suportar os esforços atuantes e que satisfaça os requisitos e prescrições normativas. No entanto, para um mesmo carregamento existem diversas configurações possíveis e aceitáveis que satisfaçam tais requisitos.

O dimensionamento se dá por meio de processos iterativos, a partir de uma geometria pré-definida, onde é feito o dimensionamento da armadura e verificam-se os requisitos de resistência considerando o Estado Limite Último (ELU), além de outros critérios construtivos e geométricos previstos em norma. O processo é repetido até que o projetista entenda ter encontrado uma boa solução. Este procedimento exige muito tempo e dificilmente a solução mais econômica para o projeto será encontrada desta forma, devido à grande quantidade de variáveis relacionadas ao processo e ao elevado número de possíveis soluções.

A capacidade computacional está em constante evolução, processos numéricos que anteriormente seriam inviáveis hoje podem ser executados em cada vez menos tempo. Este avanço da tecnologia permitiu investigar um maior número de variáveis e restrições

simultaneamente em um projeto, reduzindo as simplificações e tornando o modelo matemático mais próximo do modelo real. Com isso, foi possível desenvolver métodos de otimização para alcançar um projeto ótimo, onde o consumo de materiais e recursos pode ser reduzido, diminuindo custos e viabilizando economicamente o projeto.

Na otimização estrutural, geralmente busca-se a minimização da quantidade de material, e por consequência dos custos, que satisfaça princípios arquitetônicos, de segurança e demais imposições normativas. A partir de algoritmos de otimização, pode-se encontrar o ponto ótimo de uma função, que pode ser definido como o conjunto de valores das variáveis de projeto utilizadas que resultam no valor mínimo da função em estudo. A utilidade dos resultados obtidos no processo de otimização está diretamente relacionada à fidelidade com que a função objetivo representa a situação real de projeto. Assim, para um resultado satisfatório deve-se empregar funções que descrevem todos os fatores associados ao resultado final.

Este trabalho propõe um algoritmo computacional que incorpora o método de otimização QPSO (*Quantum Particle Swarm Optimization*) ao dimensionamento e verificação da seção transversal de pilares em concreto armado. A função objetivo a ser minimizada no processo de otimização é definida em termos do custo por unidade de comprimento do pilar de concreto armado. Essa função é formulada em termos das variáveis de projeto que afetam a resistência e o custo do elemento estrutural e está sujeita a restrições, de segurança e construtivas, que inviabilizam soluções indesejadas.

## 1.1 Justificativa

Atualmente, com a alta competitividade do mercado e a escassez de recursos, há a necessidade crescente de se diminuir os custos das construções. Assim, torna-se fundamental a obtenção de um detalhamento estrutural onde o consumo de materiais seja o menor possível, sem comprometer a segurança da estrutura. Este objetivo pode ser alcançado por meio da utilização de técnicas de otimização, cuja finalidade é encontrar a melhor solução entre as inúmeras possibilidades.

A otimização estrutural aliada à programação computacional é uma opção viável e eficaz como ferramenta de auxílio na solução de problemas práticos de engenharia, pois traduz matematicamente o problema físico em estudo, permite que o dimensionamento das estruturas seja feito de forma automática e fornece como resultado a melhor solução possível para o

problema. Assim, elimina o processo de tentativa e erro e, conseqüentemente, diminui as incertezas e reduz o custo e o tempo de projeto.

## 1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho consiste em propor uma metodologia para o dimensionamento ótimo de seções transversais de pilares em concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua e reta e implementar um programa computacional para sua aplicação.

### 1.2.1 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo deste trabalho, destacam-se alguns objetivos específicos, citados a seguir:

- a) Elaborar formulação matemática para minimização dos custos de pilares em concreto armado para formatos específicos de seção transversal, seguindo critérios de resistência e as diretrizes da ABNT NBR 6118:2014, tendo como variáveis de projeto as dimensões da seção transversal, a resistência característica do concreto e o diâmetro e a disposição das barras de aço;
- b) Implementar a metodologia proposta em um programa no software Matlab R2012a, integrando o algoritmo de otimização QPSO a uma rotina de verificação e dimensionamento de pilares submetidos à flexão composta oblíqua;
- c) Estudar a influência do tamanho da população, do número de avaliações da função objetivo e do tempo de processamento na eficiência do algoritmo de otimização QPSO na busca por soluções ótimas;
- d) Avaliar a eficiência da metodologia desenvolvida, por meio de comparação com soluções conhecidas na literatura, dimensionadas de maneira convencional ou de trabalhos que fazem uso de outras técnicas de otimização, e contribuir cientificamente no processo de otimização de estruturas em concreto armado.

### 1.3 Estrutura da dissertação

O presente capítulo trouxe uma introdução ao assunto em estudo, a justificativa e os objetivos da dissertação.

O capítulo dois apresenta uma revisão bibliográfica sobre os estudos realizados na área de dimensionamento de pilares submetidos à flexão composta reta e oblíqua e na área de otimização estrutural de estruturas em concreto armado.

O capítulo três discorre sobre as hipóteses básicas do dimensionamento de estruturas em concreto armado, mais especificamente sobre pilares.

No capítulo quatro é abordado a otimização estrutural e apresenta-se o método de otimização utilizado no trabalho.

O capítulo cinco descreve a formulação do problema de otimização, as variáveis de projeto, as restrições e a função objetivo que se deseja otimizar.

O capítulo seis traz exemplos de aplicação da metodologia desenvolvida, através de análises comparativas dos resultados produzidos pelo processo de otimização.

O capítulo sete apresenta as conclusões obtidas e sugestões para trabalhos futuros.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta uma revisão sobre os temas abordados nesta pesquisa, servindo como embasamento teórico para o desenvolvimento do trabalho. A seção 2.1 aborda trabalhos sobre o dimensionamento e verificação de estruturas em concreto armado e a seção 2.2 expõe pesquisas sobre a otimização de estruturas em concreto armado.

### 2.1 Pilares submetidos à flexão composta normal e oblíqua

Fusco (1981) apresentou um modelo para avaliação de pilares em concreto armado submetidos a solicitações normais e oblíquas, onde são estudados o Método Geral e o Pilar padrão e suas variações. O autor faz uso de um processo de carregamento progressivo e excentricidade progressiva para a verificação da estabilidade do pilar. Avalia-se a carga crítica de uma peça e o equilíbrio é definido mediante comparação com as solicitações. O autor apresenta formas para determinar a posição e inclinação da linha neutra com base nos esforços solicitantes, fundamentais para a aplicação do método de equilíbrio na verificação de uma seção.

Araújo (1984) desenvolveu rotinas para o dimensionamento e verificação de pilares submetidos à flexão composta reta através do Método Geral. Seu código determina a curvatura da seção por meio de um processo iterativo onde parte-se de um valor inicial de curvatura e encontra-se a posição da linha neutra. Definidos estes valores, calcula-se o momento resistente da seção e o compara com o momento solicitante. O valor da curvatura é incrementado e o processo é repetido até que o momento resistente alcance o valor do momento solicitante. A ruptura da seção é encontrada pela limitação da curvatura aos domínios de deformação que caracterizam o Estado Limite Último. O trabalho apresenta tabelas que auxiliam de forma prática no dimensionamento de peças sujeitas a efeitos de segunda ordem e também na verificação de estabilidade.

Araújo (2011) apresenta um programa computacional capaz de verificar e realizar o dimensionamento de pilares em concreto armado em situações de flexão composta oblíqua. A formulação faz uso da aplicação de elementos finitos ao pilar, que é considerado como uma barra com dois nós. O equilíbrio da seção é resolvido com o auxílio do teorema de Green. O autor valida o seu programa por meio de comparações com resultados experimentais obtidos por diversos autores.

Campos Filho (2014) propôs um algoritmo computacional para o dimensionamento e verificação de seções poligonais de concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua. O procedimento envolve o cálculo de integrais de superfície, que são resolvidas através da aplicação do teorema de Green e o dimensionamento envolve a resolução de um sistema de equações não-lineares, por um processo iterativo, através do método de Newton-Raphson.

Cardoso (2014) criou um programa computacional em linguagem Java, chamado PCalc, para a verificação de pilares de concreto armado. O programa suporta casos de flexão composta normal e oblíqua e faz uso dos modelos apresentados pela NBR 6118:2014 para análise não linear física, onde a rigidez equivalente é obtida pelo diagrama momento curvatura da seção e é considerada constante ao longo da peça.

Silva (2015) apresenta um programa livre para análises e verificações de estados-limite último e de serviço de seções de concreto armado e protendido, com forma poligonal, submetidas à flexão composta oblíqua, de acordo com os critérios da norma brasileira NBR 6118:2014. Dada a geometria da seção, as propriedades dos materiais e a armadura passiva e/ou ativa, o programa realiza a análise de Estado Limite Último, em que se obtém a envoltória de momentos fletores resistentes, a análise momento-curvatura e de estado-limite de serviço, onde encontra-se a relação momento-curvatura e as deformações na seção diante de esforços normais.

Freire (2016) verifica a estabilidade de pilares em concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua, considerando as não linearidades física e geométrica. O problema é dividido em duas partes. A primeira analisa a seção em um plano, e através da variação da curvatura, profundidade e inclinação da linha neutra são calculados os esforços resistentes. A segunda etapa consiste na verificação da barra, onde o pilar é segmentado e para cada seção é avaliada a curvatura no equilíbrio, que fornece uma excentricidade adicional, e esta, somada à inicial, resulta em um novo conjunto de solicitações. O processo é repetido até que se atinja um critério de convergência e desta forma pode-se definir os esforços finais da peça.

## 2.2 Otimização de estruturas em concreto armado

Em geral, o objetivo de trabalhos sobre otimização de estruturas em concreto armado é minimizar os custos de seções transversais, de forma a atender restrições normativas e critérios de resistência. Serão descritas as características do problema, o método de otimização empregado, os objetivos e os resultados obtidos.

Bastos (2004) apresenta um programa para cálculo otimizado de seções retangulares de concreto armado submetidas a esforços de flexocompressão oblíqua por meio da técnica de algoritmos genéticos. O algoritmo foi escolhido por ser robusto e eficiente e por possibilitar o uso de variáveis discretas e contínuas, mas demanda um elevado custo computacional. Com isso, o autor busca retratar um detalhamento prático de armadura utilizando diâmetros comerciais, dividindo a seção em camadas verticais e camadas horizontais. As camadas superior e inferior são obrigatoriamente iguais, assim como as camadas laterais. O programa foi implementado de maneira que os melhores indivíduos da última geração sejam armazenados, produzindo um conjunto de soluções. Assim, o engenheiro pode escolher entre a solução ótima global ou outra solução também viável, que apresente um custo ligeiramente superior, de forma a padronizar o detalhamento das seções em busca de uma economia global do empreendimento e não apenas de um elemento estrutural isolado. Além disso, foi realizado um estudo de sensibilidade onde evidenciou-se que, para as situações estudadas, o custo ótimo da seção é mais influenciado pela variação do preço da fôrma.

Rodrigues Júnior (2005) propôs uma formulação para o projeto ótimo de pilares de edifícios altos de concreto armado. O problema de otimização é resolvido empregando técnicas de programação matemática, sendo a função objetivo o custo total das colunas do edifício. Os edifícios são modelados como pórticos espaciais e a não-linearidade geométrica é considerada na análise estrutural. De forma a reduzir o tamanho do problema, o autor o subdividiu em um problema global – onde são determinadas as dimensões da seção transversal de todos os pilares e a resistência característica do concreto – e em subproblemas individuais, onde são determinadas as armaduras longitudinais dos pilares. Basicamente, o processo consiste em buscar as dimensões das seções e a resistência característica do concreto de modo que, quando a estrutura for otimizada com relação às armaduras de cada membro, o custo total da estrutura seja reduzido.

Com base nos resultados obtidos, Rodrigues Júnior (2005) concluiu que a solução ótima de pilares retangulares tende a apresentar dimensões robustas, com  $b$  e  $h$  muito próximas, apresentam baixas taxas de armadura em função do elevado custo do aço em comparação com o concreto. Entretanto, o projeto ótimo pode levar a estruturas muito flexíveis, apresentando elevados efeitos de 2ª ordem. Ainda, o autor entende que um processo eficiente de redução de seção deve envolver reduções no volume de concreto dos lances superiores considerando a transferência dos mesmos para os lances inferiores, de forma a manter a rigidez da estrutura mesmo com significativas reduções no volume do concreto.

Argolo (2000), Bordignon (2010) e Medeiros (2012) estudaram a otimização do custo da seção transversal de pilares de concreto armado submetidos à flexocompressão reta. Argolo (2000) utilizou o método heurístico dos Algoritmos Genéticos para a otimização das seções de concreto armado. O problema considerou como variáveis de projeto as dimensões da seção transversal, o número de camadas de aço da seção, o número de barras em cada camada e o diâmetro dessas barras. O algoritmo desenvolvido obteve economias de 7% a 30% em comparação com o dimensionamento convencional feito por ábacos de interação. Verificou-se, nos exemplos do trabalho, que a elevação do preço da fôrma é o item que mais afeta o custo ótimo das seções.

Bordignon (2010) estudou o dimensionamento seguindo os preceitos normativos, com o objetivo de sistematizar o processo de dimensionamento ótimo. A formulação matemática foi desenvolvida tendo como variáveis as dimensões da seção de concreto, o número e a disposição das barras de aço. O método heurístico *Simulated Annealing* foi escolhido em função da facilidade de implementação computacional e da possibilidade de fuga dos mínimos locais. O autor conclui que as seções ótimas utilizam concretos de classes de resistência maiores e tendem a apresentar baixas taxas de armadura, aproximando-se dos valores mínimos estipulados pela norma. Nestas seções, a parcela representada pela fôrma apresenta a maior contribuição no custo total da seção, seguida pelo concreto e finalmente pelo aço. Ainda, a possibilidade de a seção ser composta por diversos diâmetros comerciais de armadura possibilita uma maior redução no custo final.

Medeiros (2012) utilizou o método heurístico da Busca Harmônica para otimizar as seções de pilares retangulares de concreto armado submetidos à flexocompressão reta. As variáveis de projeto foram as dimensões da seção de concreto, a quantidade e o diâmetro das barras de aço.

Os três autores utilizaram o mesmo exemplo de dimensionamento ótimo de seção transversal. O processo de otimização pelo *Simulated Annealing* de Bordignon (2010) apresentou uma economia de 3,35% em comparação com a mesma seção otimizada por Algoritmos Genéticos estudada por Argolo (2000). Quando as dimensões da seção transversal são tomadas como variáveis de projeto, a redução chegou a 6,85%. É importante salientar que a análise realizada por Argolo (2000) não leva em consideração algumas disposições construtivas exigidas pela norma NBR 6118, como por exemplo o espaçamento máximo entre as barras. Portanto, naturalmente houve diferenças nas soluções encontradas.

Com o método da Busca Harmônica, Medeiros (2012) obteve resultados muito semelhantes aos

de Bordignon (2010). Entretanto, o autor constatou que o método da Busca Harmônica encontrou a solução ótima em um número consideravelmente menor de iterações em relação ao *Simulated Annealing*. Concluiu-se que quanto maior a resistência característica do concreto, maior a economia obtida, e ainda que as taxas de armadura das soluções ótimas tenderam ao valor mínimo.

Sias (2014) realizou um estudo de otimização no dimensionamento de pilares de concreto armado de acordo com a NBR 6118:2014, com o intuito de reduzir os custos de pilares com índice de esbeltez menor que 90, de forma a utilizar o cálculo simplificado presente na norma brasileira. Foi desenvolvido um programa de dimensionamento ótimo de pilares no *software* MatLab, onde o algoritmo calcula o resultado otimizado da seção transversal de pilares retangulares e circulares, dados os esforços solicitantes. Para desenvolver o programa, os autores avaliaram os critérios de resistência para carga axial e momento fletor, limites máximo e mínimo de armadura, limites geométricos e critério de esbeltez. O autor revisou diversos métodos de otimização – probabilísticos e determinísticos – e definiu, através de comparação com exemplo de dimensionamento conhecido na literatura, qual o método mais indicado para resolver o problema de otimização utilizando variáveis contínuas. Para o exemplo do estudo, os métodos determinísticos da programação quadrática linear e pontos interiores apresentaram resultados melhores do que o método probabilístico dos algoritmos genéticos. Além disso, o tempo de processamento dos métodos matemáticos foi menor do que o método heurístico. Em todas as situações, os algoritmos de otimização apresentaram resultados menores, conseguindo reduções de custo de até 20%, quando comparados com o método tradicional.

Pires (2014) estudou a otimização da seção transversal de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexão oblíqua, considerando as não linearidades física e geométrica, pelo método dos algoritmos genéticos. A autora entende que os métodos simplificados da norma para a consideração da não linearidade geométrica levam a projetos antieconômicos ou inseguros. Ainda, o dimensionamento de pilares esbeltos exige o estudo da estabilidade do elemento, isto implica em uma análise mais cuidadosa na qual os efeitos de segunda ordem devem ser considerados. Desta forma, justifica-se esta abordagem no tratamento do problema.

O trabalho de Pires (2014) desenvolveu um procedimento sistematizado que seleciona, dentro de uma gama de soluções, o pilar com as melhores dimensões da seção transversal e distribuição de armadura, que atenda a determinados critérios de resistência, estabilidade e normativas, no qual o custo seja minimizado. A verificação da resistência à flexão oblíqua é calculada pelo

teorema de Green. Os deslocamentos são calculados pelo Método dos Elementos Finitos, e as não linearidades físicas e geométricas são introduzidas por meio de um processo iterativo. O procedimento é aplicado a pilares de seção retangular, com distribuição de armadura simétrica e concreto de resistência normal (C20 a C50). Concluiu-se que à medida que aumenta a esbeltez do pilar, a área de concreto permanece praticamente constante e a área de aço aumenta consideravelmente. Devido ao aumento da flexão causado pelos efeitos de segunda ordem provocado pelo aumento na esbeltez do pilar, o aço torna-se importante para manter o equilíbrio da estrutura. Com isso, pilares mais esbeltos refletem em custos maiores.

Por meio do método dos Algoritmos Genéticos, Nascimento (2017) analisou o dimensionamento ótimo de seções retangulares de concreto armado submetidos à flexo-compressão reta. A otimização se deu em duas etapas. Inicialmente, considerou-se a base fixa, tendo como variável de projeto a altura do pilar, área de aço e profundidade da linha neutra. Posteriormente, a base do pilar também foi considerada como variável de projeto. A partir do estudo realizado, o autor concluiu que, em comparação com o método tradicional, a estrutura otimizada apresentou dimensões maiores, com área de aço significativamente menor. O resultado considerando a base variável foi substancialmente melhor do que com a base fixa.

No mesmo estudo, Nascimento (2017) empregou a técnica *Design of Experiments* (DOE) para avaliar qual variável tem maior influência no custo total do pilar. Concluiu-se que a altura da seção transversal, seguido da base da seção e da área de aço, exercem, nesta ordem, as maiores influências no custo total do pilar. A linha neutra, isoladamente, não influi no custo da estrutura. Porém, quando analisada em conjunto com a área de aço, esta combinação se mostrou tão influente quanto às dimensões da seção, especialmente quando os efeitos de segunda ordem são considerados.

Souza (2017) desenvolveu um programa no *software* Matlab para o dimensionamento otimizado de pilares utilizando o Método dos Pontos Interiores. O programa abrange seções retangulares, circulares, hexagonais e em “U” moderadamente esbeltas e considera pilares com dimensões de 14 cm a 3,0 m. O programa é desenvolvido através de interface gráfica, onde o usuário define os dados de entrada relativos à peça estrutural e determina quais parâmetros serão otimizados. A autora utiliza os mesmos exemplos de seções retangulares e circulares de Sias (2014), ampliando a resistência característica do concreto para os grupos I e II, entre 20 e 90 MPa. Os resultados foram muito semelhantes aos de Sias (2014), concluindo que o dimensionamento ótimo é obtido com uma seção com maior volume de concreto, resistência

característica do concreto elevada e redução no consumo de aço, próximo do mínimo permitido pela norma. Pode-se perceber que, quanto maior o número de parâmetros livres para a otimização, melhor o resultado ótimo obtido em termos de redução de custo.

Sánchez-Olivares e Tomas (2017) minimizaram o custo no dimensionamento de pilares retangulares de concreto armado submetidos à flexocompressão oblíqua, utilizando algoritmos meta-heurísticos. O algoritmo *Firefly* foi escolhido por sua eficiência já ter sido comprovada por Yang (2009). O autor adapta o algoritmo de Yang e realiza uma comparação com o método dos algoritmos genéticos. Verifica-se que o programa proposto é capaz de obter a solução ótima global com menos esforço computacional. A formulação do problema compreende concretos com alta resistência, restrições normativas do ACI318 e EC2, além da profundidade da linha neutra para atender critérios de ductilidade. As variáveis de projeto incluem a profundidade e o ângulo da linha neutra, altura e largura da seção transversal, o diâmetro e o número de barras para cada lado da seção. O autor entende que para este tipo de carregamento, a simplificação utilizando armadura simétrica não trará a solução ótima do problema. Desta forma, a discretização do número e diâmetro das barras para cada lado da seção torna-se importante.

Afzal et al (2020) realizou um estudo holístico a respeito das pesquisas sobre otimização de estruturas em concreto armado, reunindo 348 artigos publicados no período entre 1974 e 2018. O trabalho é uma extensa revisão bibliográfica sobre o tema, classificando os trabalhos desenvolvidos em quatro categorias: 1) eficiência de material; 2) eficiência de material e de custos; 3) eficiência de material associado ao desempenho ambiental; 4) projeto sustentável. Segundo o levantamento, a segunda categoria retém a grande maioria das publicações sobre o tema com 67%, enquanto que as demais possuem entre 9% e 12%. O trabalho também indica quais as peças estruturais mais estudadas, com pórticos em primeiro lugar, seguido de lajes, vigas, paredes de cisalhamento e pilares. Pontes, paredes de contenção e fundações encontram-se nos últimos lugares da lista. Quanto ao método de otimização, algoritmos genéticos é o método mais empregado na otimização de estruturas em concreto armado, com ampla vantagem sobre os demais. Busca harmônica, PSO e *Simulated Annealing* completam a lista dos métodos heurísticos mais estudados. Os métodos matemáticos mais adotados são *Optimality Criteria* (OC), Programação Não Linear (NLP) e Programação Quadrática Sequencial (SQP). O trabalho sintetiza a produção literária sobre o assunto, servindo como grande fonte de informação na revisão bibliográfica de otimização de estruturas de concreto armado.

### 3. PILARES EM CONCRETO ARMADO

As seções transversais de pilares de edifícios de concreto armado normalmente estão submetidas às solicitações de esforço normal de compressão e momento fletor. Quando o pilar está submetido apenas à aplicação de força normal, considera-se que o pilar está submetido a uma compressão centrada. Esta situação corresponde ao caso de um pilar intermediário em um pórtico, onde há continuação das vigas nas duas direções principais da seção transversal. Os momentos gerados de um lado são compensados pelos momentos do outro lado.

Quando o pilar é submetido a um momento aplicado segundo um dos eixos principais centrais da seção transversal, tem-se a flexocompressão normal. Neste caso, a linha neutra é perpendicular a este eixo. Esta condição ocorre em pilares de extremidade, onde não há continuação das vigas em uma direção, resultando em um momento fletor que gera excentricidade na aplicação da força normal de compressão.

Na situação em que ocorre a aplicação de momentos fletores em torno de seus dois eixos principais centrais, ocorre a flexão composta oblíqua. Nestes casos, o plano de atuação do momento fletor não coincide com o eixo de simetria da seção transversal. É o caso de pilares de canto, que recebem contribuições das duas vigas que chegam a ele. Portanto, deve-se considerar duas excentricidades na aplicação da carga normal, uma em cada direção. Nesta situação, a inclinação da linha neutra é desconhecida, sendo necessário calculá-la através de processos iterativos. A figura 3.1 apresenta os casos citados de pilares usuais de edifícios.

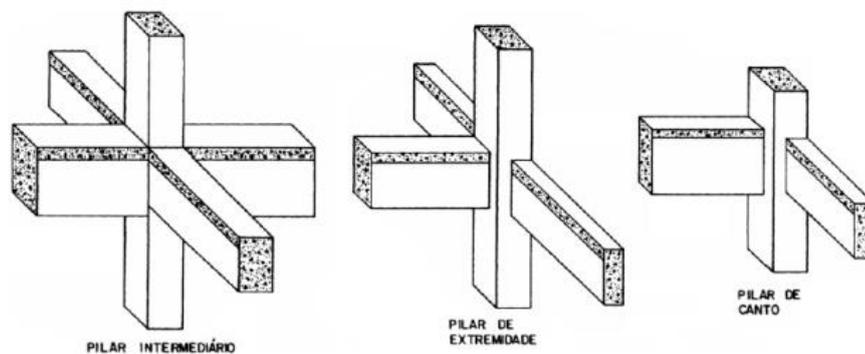


Figura 3.1 – Pilares usuais de edifícios de concreto armado (Fonte: FUSCO, 1981).

De acordo com Santos (1994), uma flexão é considerada composta quando em uma seção atuam coincidentemente uma força axial, de tração ou compressão, e um momento fletor. Nas situações onde o plano de ação do momento fletor corta a seção segundo uma reta que não coincide com um eixo de simetria, ou ainda quando a seção não possui um eixo de simetria,

ocorre a flexão composta oblíqua. A figura 3.2 representa estas situações.

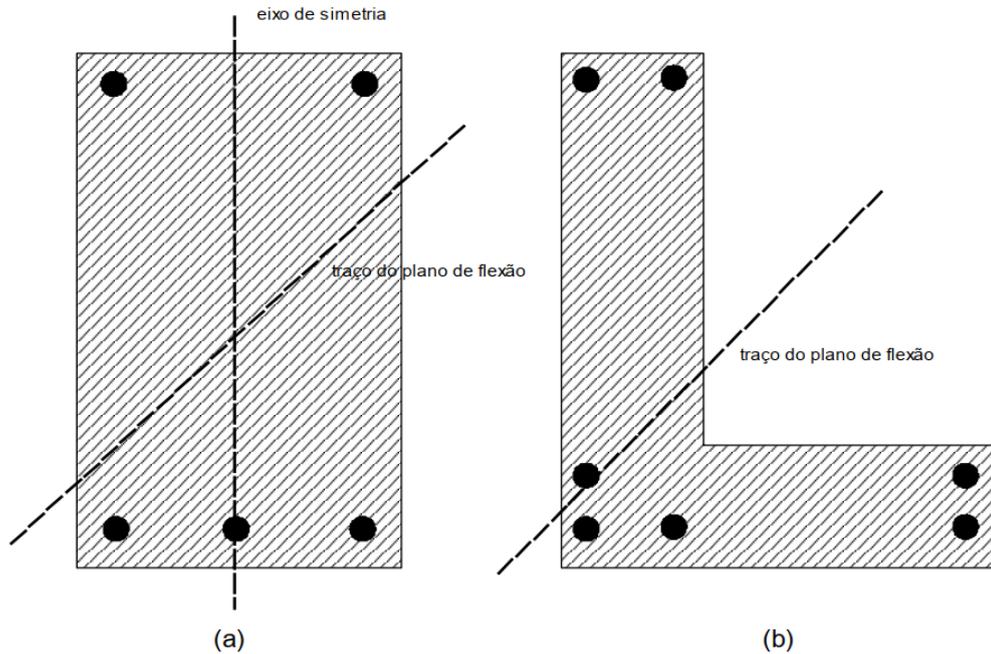


Figura 3.2 – Situações de flexão composta oblíqua (Fonte: CAMPOS FILHO, 2014).

Em estruturas de concreto armado, a flexão composta oblíqua aparece no cálculo de pilares, usualmente em pilares de canto da estrutura ou em pilares que sustentam lajes armadas em duas direções. Este cálculo possui um alto grau de dificuldade, pois a posição da linha neutra não é perpendicular ao plano de solicitação. A posição da linha neutra e o ângulo de inclinação desta em relação ao eixo horizontal são desconhecidos *a priori*. Com isso, além da profundidade da linha neutra, tem-se também como incógnita a sua direção. Conforme Araújo (2003), o cálculo da resistência destas estruturas consiste em determinar estes parâmetros em conjunto com a área total de aço  $A_s$ .

Normalmente, o dimensionamento de seções submetidas a tais carregamentos é feito de forma indireta, através de diagramas de interação, por tentativa ou por processos aproximados. Diversos ábacos foram confeccionados para auxiliar calculistas no processo de dimensionamento. Marino (1979) e Fusco (1981) desenvolveram um procedimento que parte das condições de equilíbrio presentes nas equações 3.1, 3.2 e 3.3. Denomina-se a carga axial como  $N$  e o momento fletor como  $M$ , dados por suas componentes  $M_x$  e  $M_y$ . Ao aplicar as solicitações, a seção encontra-se sujeita a tensões e deformações. Essas tensões são responsáveis pelos esforços que surgem em oposição ao carregamento atuante, de modo a garantir o equilíbrio da seção. A parcela da integral representa a contribuição do concreto e o somatório é a contribuição das armaduras na seção. Faz-se uma varredura das tensões em

diferentes possibilidades de carregamento, o problema é resolvido percorrendo a seção aplicando as equações.

$$N_d = F_d = \iint_{A_c} \sigma_{cd} \cdot dX \cdot dY + \sum_{i=1}^m A_{si} \cdot \sigma_{sdi} \quad (3.1)$$

$$M_{xd} = F_d \cdot e_x = \iint_{A_c} \sigma_{cd} \cdot X \cdot dX \cdot dY + \sum_{i=1}^m A_{si} \cdot \sigma_{sdi} \cdot X_{si} \quad (3.2)$$

$$M_{yd} = F_d \cdot e_y = \iint_{A_c} \sigma_{cd} \cdot Y \cdot dX \cdot dY + \sum_{i=1}^m A_{si} \cdot \sigma_{sdi} \cdot Y_{si} \quad (3.3)$$

Onde:

$A_c$  = área de concreto da seção transversal;

$e_x$  e  $e_y$  = excentricidades aplicadas no eixo x e y;

$\sigma_{cd}$  = tensão normal do concreto;

$\sigma_{sd}$  = tensão normal em uma barra de aço;

$A_{si}$  = área de aço;

$m$  = número de barras de aço.

De forma a automatizar o processo de cálculo, Campos Filho (2014) apresenta um procedimento para o dimensionamento e verificação de seções poligonais de concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua por meio de um algoritmo computacional. O procedimento será descrito a partir da seção 3.2 e servirá como embasamento para o dimensionamento realizado neste trabalho. Carregamentos mais simples, como a flexão simples e a flexão normal composta, são casos particulares da flexão oblíqua composta. Portanto, o procedimento de cálculo também abrange estas situações.

### 3.1 Considerações iniciais

Para analisar as seções de concreto armado, a NBR 6118 (ABNT, 2014) estabelece hipóteses de cálculo sobre as deformações no estado limite último:

a) O estado limite último é caracterizado ao se alcançar valores máximos de deformação, do concreto na borda mais comprimida e do aço na borda mais tracionada. Na seção 3.1.1 é apresentado com detalhes os domínios de deformação;

- b) As seções transversais permanecem planas do início de seu carregamento até sua ruptura, seguindo a hipótese de Bernoulli de que as deformações em cada ponto são proporcionais à sua distância até a linha neutra;
- c) O aço e o concreto são considerados idealmente solidários, ou seja, as barras de armadura apresentam deformações iguais ao do concreto adjacente;
- d) A resistência à tração do concreto é desprezada;
- e) A distribuição de tensões do concreto no estado limite último deve ser estimada pelo diagrama tensão-deformação, descrito na seção 3.1.2;
- f) o alongamento máximo permitido ao longo da armadura de tração é de 10‰.

### 3.1.1 Domínios de deformação

A ruína de uma seção transversal para qualquer tipo de flexão no estado-limite último é caracterizada pelas deformações específicas de cálculo do concreto e do aço, que atingem, um deles ou ambos, os valores últimos de deformações específicas desses materiais. (CARVALHO; FIGUEIREDO, 2014).

A NBR 6118:2014, no item 17.2, estabelece critérios para a determinação dos esforços resistentes das seções de estruturas submetidas à força normal e momentos fletores. Dentre as hipóteses admitidas na análise está que o estado-limite último é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios definidos na figura 3.3.

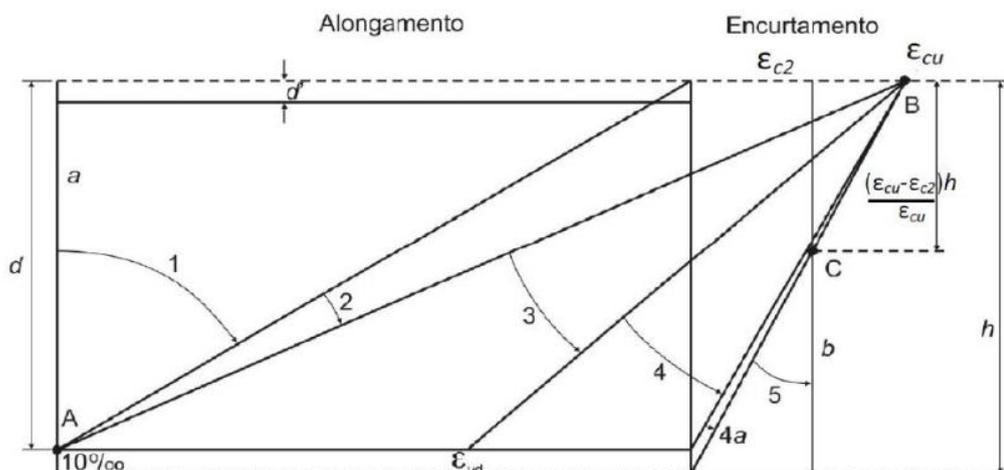


Figura 3.3 – Domínios de estado-limite último de uma seção transversal (ABNT, 2014).

Onde:

$\varepsilon_c$  – deformação específica do concreto;

$\varepsilon_{c2}$  – deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico;

$\varepsilon_{cu}$  – deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura;

$\varepsilon_s$  – deformação específica do aço;

$\varepsilon_u$  – deformação específica do aço na ruptura;

$\varepsilon_{yd}$  – deformação específica de escoamento do aço.

Os domínios são representações da distribuição de deformações que ocorrem nas seções transversais de estruturas de concreto armado, quando submetidos a tensões normais. As deformações são de alongamento (tração) ou de encurtamento (compressão). Definem-se os limites de deformação como:

a) Reta a: tração uniforme. A força normal de tração é aplicada no centro de gravidade da seção transversal. Todos os pontos da seção estão com deformação de alongamento igual a máxima permitida ( $\varepsilon = 10\text{‰}$ );

b) Domínio 1: tração não uniforme, sem compressão. A força normal de tração não está aplicada no centro de gravidade da seção transversal. A deformação de alongamento na armadura mais tracionada ( $\varepsilon_s$ ) é fixa, com o valor de  $10\text{‰}$ . A linha neutra é externa a seção transversal e a seção resistente é composta por aço, não havendo participação do concreto, que se encontra totalmente tracionado;

c) Domínio 2: flexão simples ou composta, sem ruptura à compressão do concreto com o máximo alongamento permitido na armadura. A linha neutra corta a seção transversal e a seção resistente é composta por aço tracionado e concreto comprimido;

d) Domínio 3: flexão simples (seção subarmada) ou composta. Ambos os materiais atingem sua capacidade resistente máxima, pois a ruptura à compressão do concreto ocorre simultaneamente ao escoamento da armadura. O estado-limite último é caracterizado pela deformação fixa em  $\varepsilon_{cu}$  no concreto na borda mais comprimida e a deformação de alongamento na armadura tracionada  $\varepsilon_s$  varia de  $\varepsilon_{yd}$  até o valor máximo de  $10\text{‰}$ . A ruína ocorre com avisos, devido às grandes deformações;

e) Domínio 4: flexão simples (seção superarmada) ou composta. A tensão na armadura é menor

que a máxima permitida, ou seja, varia de zero até  $\epsilon_{yd}$ . Ocorre ruptura frágil, pois o concreto se rompe sem aviso antes que a armadura atinja sua deformação de escoamento;

f) Domínio 4a: flexão composta com ambas as armaduras comprimidas. Ocorre ruptura frágil, pois o concreto rompe sem aviso antes que a armadura atinja sua deformação de escoamento;

g) Domínio 5: compressão não uniforme, sem tração. A deformação de encurtamento na borda mais comprimida varia de  $\epsilon_{c2}$  a  $\epsilon_{cu}$  e na borda menos comprimida varia de zero a  $\epsilon_{c2}$ . A linha neutra não corta a seção transversal, que está totalmente comprimida. Ocorre ruptura frágil.

h) Reta b: compressão uniforme. Todos os pontos da seção estão com deformação de alongamento igual a  $\epsilon_{c2}$ . Ocorre ruptura frágil.

### 3.1.2 Diagramas tensão-deformação

A NBR 6118:2014 determina que no estado limite último a distribuição das tensões do concreto é determinada pelo diagrama de tensão-deformação, mostrado na figura 3.4.

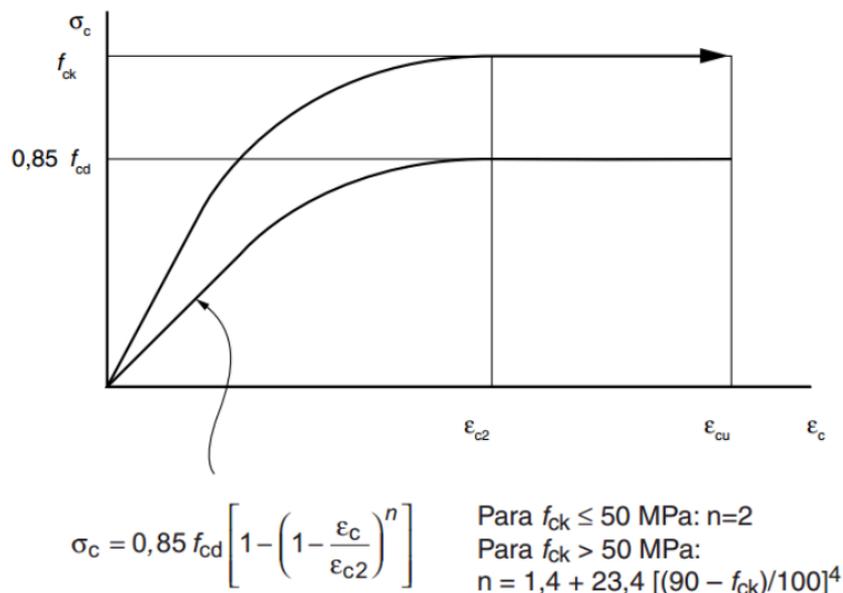


Figura 3.4 – Diagrama tensão-deformação do concreto à compressão (ABNT, 2014).

Os valores adotados para os parâmetros  $\epsilon_{c2}$  (deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico e  $\epsilon_{cu}$  (deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura) para concretos de classes até C50 são de  $\epsilon_{c2} = 2,0\%$  e  $\epsilon_{cu} = 3,5\%$ .

A resistência de cálculo do concreto à compressão é determinada por

$$f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c \quad (3.4)$$

onde  $f_{ck}$  é a resistência característica do concreto à compressão e  $\gamma_c$  é o coeficiente de minoração da resistência, usualmente utilizado com o valor de 1,4 para combinações normais.

Para o aço, o diagrama tensão-deformação é obtido conforme figura 3.5. A resistência de cálculo é dada por

$$f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s \quad (3.5)$$

onde  $f_{yk}$  é a resistência característica do aço e  $\gamma_s$  é o coeficiente de minoração da resistência, usualmente tomado como 1,15.

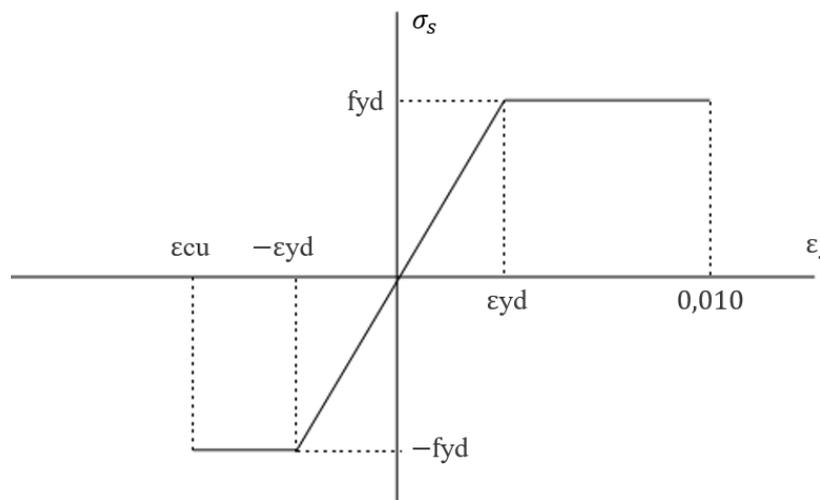


Figura 3.5 – Diagrama tensão-deformação do aço (Fonte: CAMPOS FILHO, 2014).

O módulo de deformação longitudinal do aço  $E_s$  é igual a 210000 MPa. Assim, o diagrama tensão deformação é determinado por

$$\begin{aligned} \sigma_s(\varepsilon) &= -f_{yd} & \text{para} & \quad \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon \leq -\varepsilon_{yd} \\ \sigma_s(\varepsilon) &= E_s \varepsilon & \text{para} & \quad -\varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{yd} \\ \sigma_s(\varepsilon) &= f_{yd} & \text{para} & \quad \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq 0,010 \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $\varepsilon_{yd}$  é a deformação específica de escoamento de cálculo do aço, determinada pela expressão:

$$\varepsilon_{yd} = f_{yd}/E_s \quad (3.7)$$

### 3.2 Seção transversal de pilares

No programa desenvolvido por Campos Filho (2014), a seção de concreto é definida por uma poligonal fechada, cujos vértices são definidos em função de um sistema global de coordenadas (X,Y) e numerados no sentido anti-horário. No caso de haver vazios no interior da seção, os seus vértices são numerados no sentido horário, como apresentado na figura 3.6. As barras de armadura são definidas como pontos no interior da seção, atribuindo a cada barra um percentual da área total de armadura.

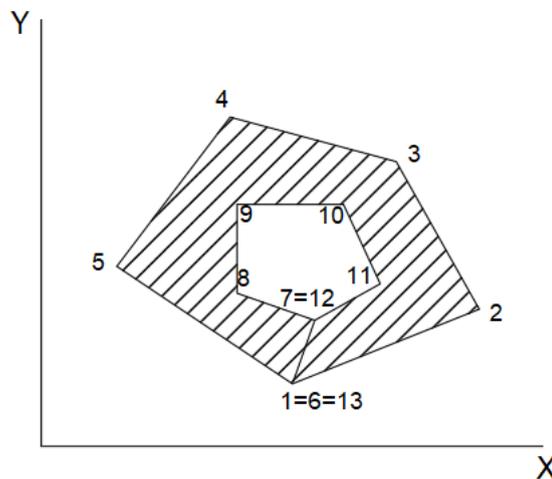


Figura 3.6 – Exemplo da definição da seção de concreto (Fonte: adaptado de CAMPOS FILHO, 2014).

Um sistema local de eixos (x,y) é utilizado para definir os esforços atuantes no baricentro da seção de concreto armado. Desta forma, torna-se necessária uma translação das coordenadas do eixo global para o sistema de eixos local. Calcula-se as propriedades da seção em relação ao sistema global de coordenadas, conforme as expressões a seguir:

Área da seção:

$$A = \int_A dA = \sum_{i=1}^n G_{00} \quad (3.8)$$

Momento estático em relação aos eixos X e Y:

$$S_X = \int_A Y dA = \sum_{i=1}^n G_{01} \quad (3.9)$$

$$S_Y = \int_A X dA = \sum_{i=1}^n G_{10} \quad (3.10)$$

Momento de inércia em relação aos eixos X e Y:

$$J_X = \int_A Y^2 dA = \sum_{i=1}^n G_{02} \quad (3.11)$$

$$J_Y = \int_A X^2 dA = \sum_{i=1}^n G_{20} \quad (3.12)$$

Produto de inércia em relação aos eixos X e Y:

$$J_{XY} = \int_A XY dA = \sum_{i=1}^n G_{11} \quad (3.13)$$

Onde  $n$  = número de segmentos da poligonal fechada e  $G_{jk}$  = polinômios de integração derivados da aplicação do teorema de Green. Estes polinômios encontram-se no anexo A deste trabalho.

As coordenadas  $(X_G, Y_G)$  do centróide da seção, referidas ao sistema de eixos global  $(X, Y)$ , são dadas por:

$$X_G = S_Y / A \quad (3.14)$$

$$Y_G = S_X / A \quad (3.15)$$

É feita a translação das coordenadas do sistema global para o local, através das relações:

$$x = X - X_G \quad (3.16)$$

$$y = Y - Y_G \quad (3.17)$$

Finalmente, as propriedades geométricas da seção de concreto em relação ao sistema local  $(x, y)$  são definidas por:

Momento de inércia em relação aos eixos x e y:

$$J_x = J_X - A \cdot Y_G^2 \quad (3.18)$$

$$J_y = J_Y - A \cdot X_G^2 \quad (3.19)$$

Produto de inércia em relação aos eixos x e y:

$$J_{xy} = J_{XY} - A \cdot X_G \cdot Y_G \quad (3.20)$$

### 3.2.1 Esforços atuantes de cálculo

Os esforços de cálculo atuantes na seção são estabelecidos de acordo com o sistema local de coordenadas (x,y). Atuam na seção de concreto armado os momentos fletores  $MA_{xd}$ ,  $MA_{yd}$  e o esforço normal  $NA_d$ . Por convenção de sinais, os momentos fletores serão positivos quando tiverem o mesmo sentido dos eixos, o esforço Normal será positivo quando for de tração e negativo quando for de compressão, como indicado na figura 3.7.

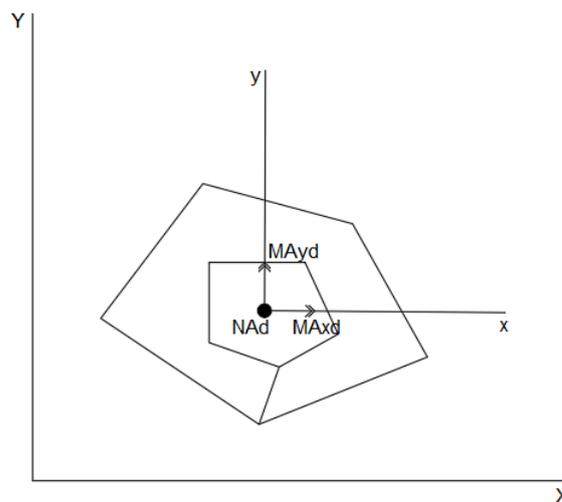


Figura 3.7 – Esforços atuantes de cálculo (Fonte: adaptado de CAMPOS FILHO, 2014).

### 3.2.2 Esforços resistentes de cálculo

Conhecidas as características físicas e geométricas da seção, além dos carregamentos atuantes, calculam-se os esforços resistentes da seção em cada direção. Os esforços resistentes de cálculo  $MR_{xd}$ ,  $MR_{yd}$  e  $NR_d$  seguem a convenção de sinais aplicada para os esforços atuantes. Gera-se uma envoltória de possibilidades de esforços solicitantes nos quais a seção poderá resistir em estado limite último de deformação. A figura 3.8 a seguir auxilia a visualização do problema.

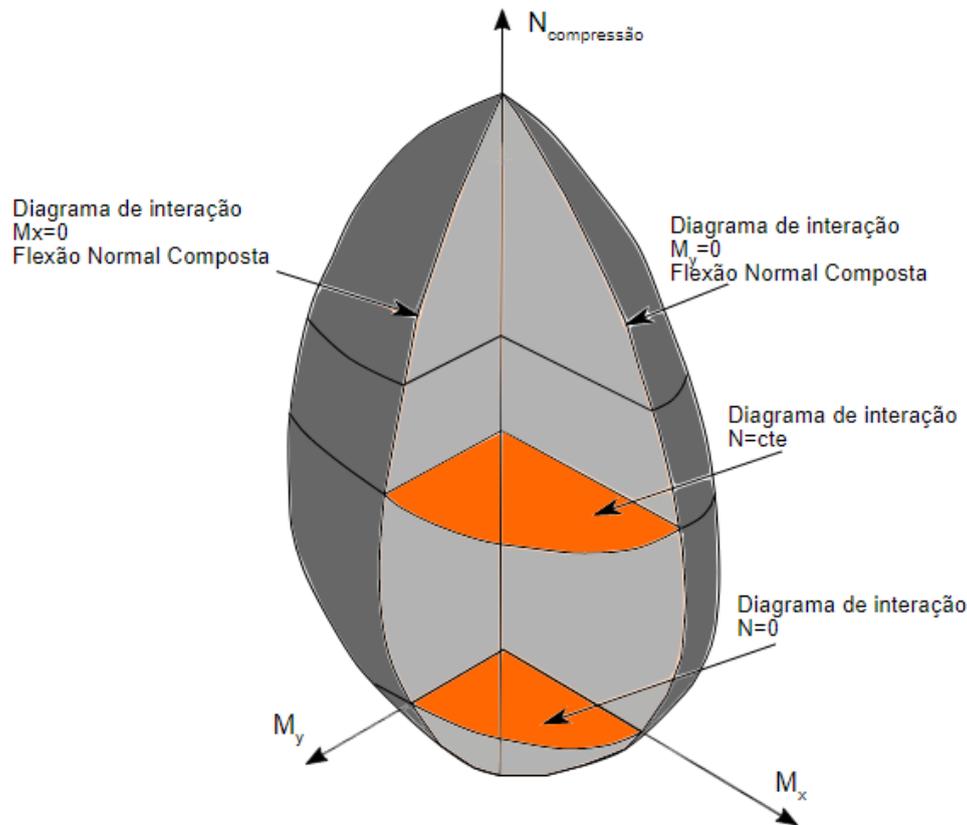


Figura 3.8 – Superfícies de interação (Fonte: adaptado de FUSCO, 1981).

Segundo Santos (1994), ao fixar um diagrama de deformações, conhece-se  $\varepsilon$  e pode-se calcular  $\sigma$ , constante em cada linha paralela à linha neutra da peça. Supondo uma seção poligonal qualquer, com o centro de ordenadas no centro geométrico desta, varia-se o ângulo  $\alpha$ , girando a seção em torno do seu centro geométrico. O estado de deformação da seção é caracterizado pela inclinação  $\alpha$  da linha neutra em relação ao eixo  $x$  e pelas deformações das fibras extremas superior ( $\varepsilon_s$ ) e inferior ( $\varepsilon_i$ ) da seção, de acordo com figura 3.9. A inclinação  $\alpha$  da linha neutra é definida como o ângulo de giro necessário para que o eixo  $x$  fique paralelo à linha neutra, enquanto que o semi-eixo positivo dos  $y$  aponte no sentido da fibra mais comprimida da seção. É conveniente mover o sistema de coordenadas para que o eixo das abscissas seja paralelo ao eixo da linha neutra. Com isso, estabelece-se um terceiro sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$ , tendo como origem o centro de gravidade da seção.

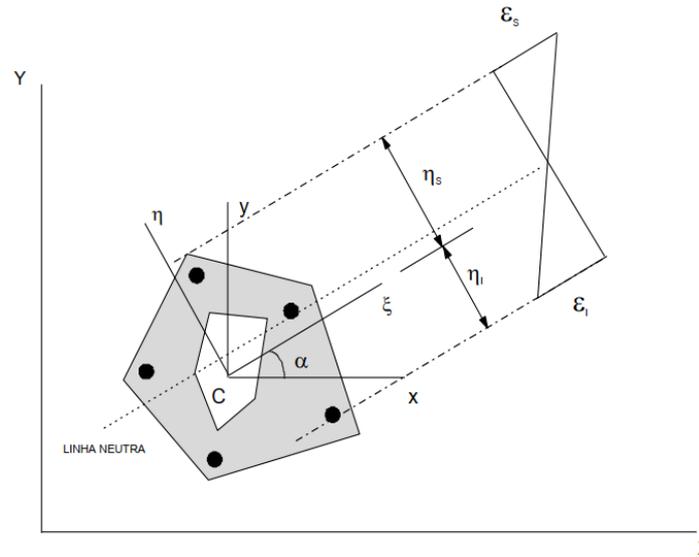


Figura 3.9 – Sistema de coordenadas ( $\xi, \eta$ ) (Fonte: CAMPOS FILHO, 2014).

As coordenadas dos vértices da seção são transformadas para o sistema de coordenadas  $\xi, \eta$  pelas seguintes relações:

$$\xi = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \quad (3.21)$$

$$\eta = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \quad (3.22)$$

As hipóteses iniciais apresentadas pela NBR 6118:2014 introduzem uma relação de dependência entre  $\epsilon_s$  e  $\epsilon_l$  e o estado de deformação pode ser determinado a partir de duas variáveis: a inclinação e a profundidade da linha neutra. A profundidade da linha neutra é representada pela letra  $x$ , medida paralelamente ao eixo  $\eta$ , com origem na fibra de maior encurtamento da seção, com sentido contrário ao de  $\eta$ , como indicado na figura 3.10.

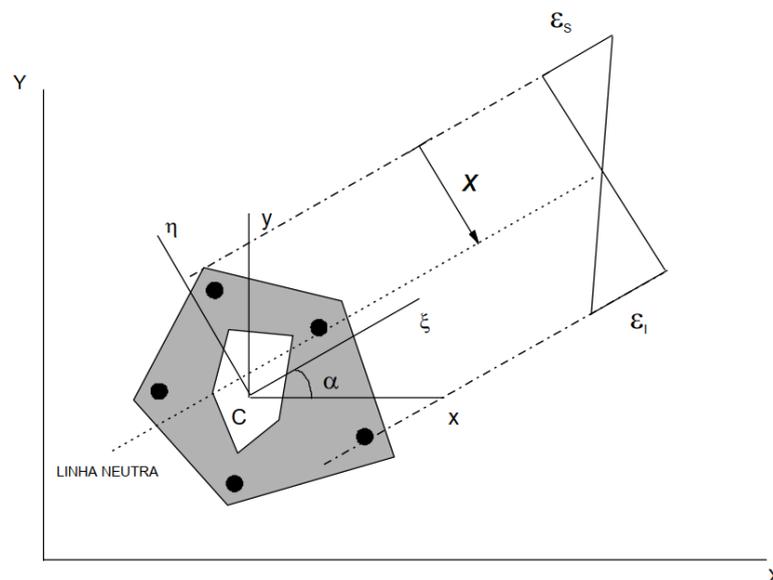


Figura 3.10 – Profundidade da linha neutra (Fonte: CAMPOS FILHO, 2014).

Conhecidos  $x$  e  $\alpha$ , obtém-se a deformação  $\varepsilon(\xi, \eta)$ , de um ponto da seção através da expressão:

$$\varepsilon(\xi, \eta) = b\eta + c \quad (3.23)$$

onde:

$$b = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_l}{\eta_s - \eta_l} \quad (3.24)$$

$$c = \varepsilon_s - b\eta_s \quad (3.25)$$

Sendo  $b$  a curvatura e  $c$  o valor da deformação na fibra correspondente ao centróide da seção.  $\eta_s$  e  $\eta_l$  são as ordenadas dos pontos extremos superior e inferior da seção, que correspondem as barras de armadura.

Os esforços resistentes de cálculo são obtidos por integração das tensões, a partir de uma dada condição de deformação relativa a  $x$  e  $\alpha$  e área de armadura  $A_s$ , para o sistema de eixos  $\xi, \eta$  e após, transformada para o sistema  $x, y$  através das expressões abaixo.

$$MR_{xd} = MR_\xi \cdot \cos \alpha - MR_\eta \cdot \sin \alpha \quad (3.26)$$

$$MR_{yd} = MR_\xi \cdot \sin \alpha + MR_\eta \cdot \cos \alpha \quad (3.27)$$

$$MR_\xi = \int_{Ac} \sigma_c(\varepsilon) \cdot \eta \, dA + \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot \sigma_s(\varepsilon_j) \cdot \eta_j \quad (3.28)$$

$$MR_\eta = - \int_{Ac} \sigma_c(\varepsilon) \cdot \xi \, dA + \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot \sigma_s(\varepsilon_j) \cdot \xi_j \quad (3.29)$$

$$NR = \int_{Ac} \sigma_c(\varepsilon) \, dA + \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot \sigma_s(\varepsilon_j) \quad (3.30)$$

Onde  $\rho_j$  é o percentual da armadura total  $A_s$  correspondente a cada barra,  $m$  é o número total de barras e  $A_c$  é a área de concreto comprimida.

### 3.2.3 Dimensionamento e verificação de uma seção

O dimensionamento de uma seção de concreto armado consiste em determinar a área e a posição da armadura que corresponde a uma situação de equivalência entre os esforços atuantes e os esforços resistentes. Já a verificação de uma seção de concreto armado busca estabelecer um fator de proporcionalidade  $\lambda$  entre os esforços atuantes e os esforços resistentes para uma dada

área de armadura. Ambos os casos são realizados para o estado-limite último da seção, como preconiza a NBR 6118:2014. No dimensionamento, o problema a ser resolvido é:

$$\begin{cases} f(x, \alpha, A_s) = MR_{xd}(x, \alpha, A_s) - MA_{xd} = 0 \\ g(x, \alpha, A_s) = MR_{yd}(x, \alpha, A_s) - MA_{yd} = 0 \\ h(x, \alpha, A_s) = NR_d(x, \alpha, A_s) - NA_d = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

onde  $MA_{xd}$ ,  $MA_{yd}$  e  $NA_d$  são os esforços atuantes de cálculo e  $MR_{xd}$ ,  $MR_{yd}$  e  $NR_d$  são os esforços resistentes de cálculo, determinados em função dos parâmetros  $x$ ,  $\alpha$  e  $A_s$ . A matriz  $[K]$  é composta pelas derivadas parciais dos esforços resistentes em relação aos parâmetros  $x$ ,  $\alpha$  e  $A_s$ , visto que os esforços atuantes são constantes. Assim, o sistema a ser resolvido a cada iteração é:

$$[K] \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta A_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial MR_{xd}}{\partial x} & \frac{\partial MR_{xd}}{\partial \alpha} & \frac{\partial MR_{xd}}{\partial A_s} \\ \frac{\partial MR_{yd}}{\partial x} & \frac{\partial MR_{yd}}{\partial \alpha} & \frac{\partial MR_{yd}}{\partial A_s} \\ \frac{\partial NR_d}{\partial x} & \frac{\partial NR_d}{\partial \alpha} & \frac{\partial NR_d}{\partial A_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta A_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_{xd} - MR_{xd} \\ MA_{yd} - MR_{yd} \\ NA_d - NR_d \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Na verificação, a armadura total  $A_s$  é conhecida e o sistema a ser resolvido é do tipo:

$$\begin{cases} f(x, \alpha, \lambda) = \lambda \cdot MR_{xd}(x, \alpha) - MA_{xd} = 0 \\ g(x, \alpha, \lambda) = \lambda \cdot MR_{yd}(x, \alpha) - MA_{yd} = 0 \\ h(x, \alpha, \lambda) = \lambda \cdot NR_d(x, \alpha) - NA_d = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Neste caso, os esforços resistentes de cálculo da seção são determinados em função de dois parâmetros:  $x$  e  $\alpha$ . O fator de proporcionalidade ( $\lambda$ ) é a razão entre os esforços atuantes e resistentes, da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{MA_{xd}}{MR_{xd}} = \frac{MA_{yd}}{MR_{yd}} = \frac{NA_d}{NR_d} \quad (3.34)$$

O sistema de equações lineares a ser resolvido em cada iteração passa a ser:

$$\begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial MR_{xd}}{\partial x} & \lambda \frac{\partial MR_{xd}}{\partial \alpha} & MR_{xd} \\ \lambda \frac{\partial MR_{yd}}{\partial x} & \lambda \frac{\partial MR_{yd}}{\partial \alpha} & MR_{yd} \\ \lambda \frac{\partial NR_d}{\partial x} & \lambda \frac{\partial NR_d}{\partial \alpha} & NR_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_{xd} - \lambda \cdot MR_{xd} \\ MA_{yd} - \lambda \cdot MR_{yd} \\ NA_d - \lambda \cdot NR_d \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Originalmente, estes sistemas de equações foram resolvidos em Campos Filho (2014) por um processo iterativo através do método de Newton-Raphson, conforme apresentado por Dumont e Musso Jr. (1987). Em função das configurações atípicas que são geradas no processo de otimização, algumas soluções apresentaram dificuldade de convergência com o método de Newton-Raphson. Por este motivo, além do método citado foi implementado também neste trabalho o método de otimização Nelder-Mead, introduzido por Nelder e Mead (1965), explicado em detalhes no item 3.2.6. O método foi escolhido como uma alternativa para resolver o sistema de equações por meio de um algoritmo robusto onde não há a necessidade de calcular as derivadas da função. Desta forma, evita-se problemas de derivadas não definidas em funções com falta de suavidade e continuidade, como acontece na mudança dos Estádios em seções de concreto armado. Devido a sua abordagem robusta, o método Nelder-Mead pode ser usado para encontrar o ponto ótimo de uma vasta gama de funções e atinge a convergência mesmo na presença de ruído aleatório.

### 3.2.4 Algoritmo de dimensionamento da seção por Newton-Raphson

Inicialmente, para o dimensionamento da seção de concreto armado, deve-se definir a geometria da seção, as propriedades do concreto e do aço, os esforços atuantes, a posição de cada barra de armadura e o seu percentual em relação à área total de aço. Com estes valores definidos, o procedimento para o dimensionamento tem os seguintes passos:

- Arbitram-se valores para  $x$ ,  $\alpha$  e  $A_s$ ;
- Determinam-se  $MR_{xd}$ ,  $MR_{yd}$ ,  $NR_d$  e a matriz de derivadas parciais  $[K]$ ;
- Calcula-se o vetor de desequilíbrio

$$\{\Delta p\}_i = \begin{Bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_{xd} - MR_{xd} \\ MA_{yd} - MR_{yd} \\ NA_d - NR_d \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

- Verifica-se a convergência por

$$\left[ \frac{\Delta M_x^2 + \Delta M_y^2 + \Delta N^2}{MA_{xd}^2 + MA_{yd}^2 + NA_d^2} \right]^{1/2} \leq \text{tolerância} \quad (3.38)$$

- Caso a convergência seja satisfeita, segue-se para o passo (i), caso contrário para (f);
- Resolve-se o sistema de equações lineares

$$\{\Delta u\}_i = [K]^{-1}\{\Delta p\}_i \quad (3.39)$$

g) Determinam-se  $x$ ,  $\alpha$  e  $A_s$

$$\{\Delta u\}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ A_s \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ A_s \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta A_s \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

h) Retorna-se ao passo (b);

i) Final do dimensionamento: valores de  $x$ ,  $\alpha$  e  $A_s$  conhecidos.

Em geral, o método possui uma convergência muito rápida. Entretanto, o processo pode divergir dependendo das características da seção e dos valores iniciais arbitrados. No caso de haver divergência, o programa deve reiniciar o processo arbitrando novos valores.

### 3.2.5 Algoritmo de verificação da seção por Newton-Raphson

Na verificação de uma seção de concreto armado, além dos valores definidos no dimensionamento, deve-se conhecer a área total de armadura  $A_s$ . O objetivo da verificação é determinar o fator de proporcionalidade  $\lambda$  entre os esforços atuantes e resistentes. Se o valor de  $\lambda$  for superior a 1, indica que a seção não possui a segurança exigida pela norma.

A partir dos dados iniciais, o procedimento para a verificação possui as seguintes etapas:

a) Arbitram-se valores para  $x$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$ .

b) Determinam-se  $MR_{xd}$ ,  $MR_{yd}$ ,  $NR_d$  e a matriz de derivadas parciais  $[K]$ .

c) Calcula-se o vetor de desequilíbrio

$$\{\Delta p\}_i = \begin{Bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_{xd} - \lambda \cdot MR_{xd} \\ MA_{yd} - \lambda \cdot MR_{yd} \\ NA_d - \lambda \cdot NR_d \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

d) Verifica-se a convergência por

$$\left[ \frac{\Delta M_x^2 + \Delta M_y^2 + \Delta N^2}{MA_{xd}^2 + MA_{yd}^2 + NA_d^2} \right]^{1/2} \leq \text{tolerância} \quad (3.42)$$

e) Caso a convergência seja satisfeita, segue-se para o passo (i), caso contrário segue-se para (f).

f) Resolve-se o sistema de equações lineares

$$\{\Delta u\}_i = [K]^{-1} \{\Delta p\}_i \quad (3.43)$$

g) Determinam-se  $x$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$ .

$$\{\Delta u\}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ \lambda \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ \lambda \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

- h) Retorna-se ao passo (b).
- i) Final do dimensionamento: valores de  $x$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$  conhecidos.

### 3.2.6 Método Nelder-Mead

O Método Nelder-Mead é um método numérico de otimização livre de derivadas bastante popular, introduzido por Nelder e Mead (1965). É um método classificado como método de reflexão Simplex. O algoritmo guarda  $n + 1$  pontos de interesse, em um problema de otimização com  $n$  variáveis de projeto, no espaço  $\mathbb{R}^n$ . Assim, estes  $n + 1$  pontos formam um casco convexo (Simplex). Assumindo um Simplex cujos vertex (vértices) são  $S = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{n+1}\}$  e  $\mathbf{z}_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , é possível encontrar uma matriz  $V(S)$  tal que contenha  $n$  das diferenças de um dos vertex para os restantes. Por exemplo, para o vertex escolhido  $\mathbf{z}_1$ ,  $V(S) = [\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{z}_1]$ . Espera-se que o simplex seja não degenerado, ou seja, não contenha  $n + 1$  vertex alinhados.

No caso deste trabalho, a função objetivo a ser minimizada é o vetor de desequilíbrio  $\{\Delta p\}_i$  apresentado nas equações 3.37 e 3.41. O algoritmo procura remover o vertex que contenha o pior valor da função objetivo e então o troca por outro com um valor melhor através de uma série de operações de reflexão, expansão ou contração. Estas operações ocorrem na linha que une o pior vertex com o centroide dos vertex restantes. Na possibilidade de não conseguir trocar aquele pior vertex por um melhor, mantém-se o melhor e os restantes sofrem uma retração na direção deste melhor vertex.

O centroide dos  $n$  melhores vertex restantes pode ser obtido por:  $\bar{z} = \sum_{i=1}^n z_i$ . Os vertex do Simplex são colocados em ordem crescente,  $f(\mathbf{z}_1) \leq f(\mathbf{z}_2) \leq f(\mathbf{z}_{n+1})$  no caso de minimização. A linha que une  $\bar{z}$  com o pior vertex do simplex  $\mathbf{z}_{n+1}$  fica dada por:

$$\bar{z}(t) = \bar{z} + t(\mathbf{z}_{n+1} - \bar{z}) \quad (3.36)$$

onde  $t$  é o parâmetro livre para descrever a reta no espaço  $\mathbb{R}^n$ .

Segundo Nocedal e Wright (2000), a performance do algoritmo Nelder-Mead é frequentemente razoável, embora possa ocorrer estagnação em pontos que sejam ótimos locais dependendo do

ponto inicial do processo iterativo. Isto pode ser aliviado, procedendo-se ao uso de múltiplos pontos de partida. Pela lógica envolvida no método, garante-se que, no caso de funções convexas, a média dos valores da função objetivo avaliada nos vertex diminuirá a cada iteração, entretanto não há garantia de obtenção de ótimo global. Em Nocedal e Wrigth (2000) é descrito um passo genérico em pseudo-código do algoritmo Nelder-Mead como segue na tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Pseudo-código do algoritmo Nelder-Mead.

<p>1. Avalie o ponto de reflexão <math>\bar{z}(-1)</math> e o correspondente valor da função objetivo <math>f_{-1} = f(\bar{z}(-1))</math></p> <p>2. Se <math>f(\mathbf{z}_1) \leq f_{-1} &lt; f(\mathbf{z}_n)</math>  O vertex refletido é melhor ou pior que o pior vertex do novo simplex:  Troque <math>\mathbf{z}_{n+1}</math> por <math>\bar{z}(-1)</math> e vá para a próxima iteração  Caso contrário, se <math>f_{-1} &lt; f(\mathbf{z}_1)</math>  O vertex refletido é melhor que o melhor atual, tentar ir mais longe nesta direção:  Avalie o vertex de expansão <math>\bar{z}(-2)</math> e sua função objetivo <math>f_{-2} = f(\bar{z}(-2))</math>  Se <math>f_{-2} &lt; f_{-1}</math>  Troque <math>\mathbf{z}_{n+1}</math> por <math>\mathbf{z}_{-2}</math> e vá para a próxima iteração  Caso contrário  Troque <math>\mathbf{z}_{n+1}</math> por <math>\mathbf{z}_{-1}</math> e vá para a próxima iteração  Caso contrário, se <math>f_{-1} \geq f(\mathbf{z}_n)</math>  O vertex refletido é ainda pior que <math>\mathbf{z}_n</math>, faça uma contração  Se <math>f(\mathbf{z}_n) \leq f_{-1} &lt; f(\mathbf{z}_{n+1})</math>  Tente fazer uma contração externa:  Avalie <math>f_{-1/2} &lt; f(\bar{z}(-1/2))</math>  Se <math>f_{-1/2} &lt; f_{-1}</math>  Troque <math>\mathbf{z}_{n+1}</math> por <math>\mathbf{z}_{-1/2}</math> e vá para a próxima iteração  Caso contrário  Tente fazer uma contração interna:  Avalie <math>f_{1/2} &lt; f(\bar{z}(1/2))</math>  Se <math>f_{1/2} &lt; f_{n+1}</math>  Troque <math>\mathbf{z}_{n+1}</math> por <math>\mathbf{z}_{1/2}</math> e vá para a próxima iteração</p> <p>3. Se tanto a contração interna ou externa não resultarem em melhoria, contraia o simplex na direção de <math>\mathbf{z}_1</math>:  Troque <math>\mathbf{z}_i</math> por <math>0.5(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_i)</math> para os vertex restantes <math>i = 2, 3, \dots, n + 1</math></p>
--

## 4. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Entende-se por otimização o ato de obter o melhor resultado possível diante de determinadas circunstâncias. No dimensionamento, construção ou manutenção de qualquer sistema de engenharia, é necessário tomar diversas decisões ao longo do processo. A principal finalidade destas decisões é minimizar o esforço necessário para alcançar um objetivo, ou então maximizar os resultados desejados ao final do processo (RAO, 2009).

Em um projeto de engenharia, almeja-se a melhor qualidade possível com os recursos disponíveis, onde o sucesso do projeto é alcançado ao conciliar a segurança com um baixo custo em um tempo hábil. A otimização visa alcançar esse sucesso pela busca da melhor solução para uma operação enquanto certas restrições são satisfeitas, determinando as condições mais favoráveis para obter o rendimento ótimo ou ideal (VANDERPLAATS, 1984).

Em situações práticas, os objetivos podem ser expressos como uma função, onde as decisões são traduzidas em forma de variáveis. Logo, a otimização pode ser definida como o processo de obtenção das condições que resultam no menor ou maior valor de uma função, desta forma obtém-se a melhor solução para o problema dado (RAO, 2009).

Na otimização de estruturas em concreto armado geralmente busca-se a maior eficiência dos materiais utilizados de modo a reduzir os custos da estrutura e ao mesmo tempo satisfazer os princípios arquitetônicos e de segurança, respeitando os Estados Limites e demais imposições normativas. Sias (2014) destaca que a capacidade de traduzir fielmente a situação real para a função objetivo é fundamental para a qualidade do resultado final da otimização. Cabe salientar que quanto mais complexo for o problema computacional, mais lenta será sua convergência. Portanto, cabe ao projetista determinar quais são as informações relevantes que devem ser consideradas.

### 4.1 Conceitos fundamentais

Um problema de otimização possui conceitos e definições fundamentais, que serão apresentados a seguir (RAO, 2009):

a) Função objetivo ( $f$ ): função a qual se quer minimizar ou maximizar. Representa alguma medida quantitativa de desempenho do sistema alvo da otimização.

b) Variáveis de projeto ( $x$ ): são aquelas que alteram o valor final da função objetivo. Podem ser contínuas, inteiras ou discretas. Se  $x$  representa o conjunto de variáveis independentes, então  $f(x)$  quantifica a qualidade da solução candidata.

c) Restrições: Funções de igualdade ou desigualdade que caracterizam situações de projeto que não são desejadas. Podem ser relacionadas às variáveis de projeto, limitando seus valores, ou condicionadas a valores limites, como deslocamentos, tensões, etc.

d) Espaço de busca: Conjunto ou região que compreende as possíveis soluções do problema de otimização, delimitado pelas funções de restrição.

e) Solução ótima global: solução que, dentro do espaço de busca, possui o melhor valor para a função objetivo em estudo.

De forma geral, um problema matemático de otimização pode ser expresso como

$$\text{Encontrar } \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \text{ que minimize } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

sujeito às restrições

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.2)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (4.3)$$

onde  $x$  é o vetor de variáveis  $n$ -dimensional,  $f(x)$  é a função objetivo do problema,  $g_j(x)$  e  $h_j(x)$  são as restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente. As variáveis de projeto também estão sujeitas às restrições laterais, que limitam seus valores mínimos e máximos, da forma  $x_{i,min} \leq x_i \leq x_{i,max}$ .

Conforme discutido na seção 2.2, existem diversos métodos que podem ser aplicados para resolver problemas de otimização, sendo classificados como métodos clássicos ou métodos heurísticos.

Os métodos clássicos, também chamados de determinísticos, utilizam formulações matemáticas para obtenção da solução no problema de otimização. Na maioria das vezes, necessitam que a função objetivo e as funções de restrição sejam contínuas e diferenciáveis, pois demandam o

cálculo de derivadas de primeira e segunda ordem na busca pela solução ótima. Em geral, são muito rápidos e eficientes na minimização de funções mais simples com menor quantidade de variáveis, mas apresentam algumas dificuldades em problemas de maior complexidade. Em problemas multimodais, muitas vezes os métodos determinísticos convergem para o extremo local mais próximo da direção de busca determinada pelas derivadas, limitando a procura de soluções globais. Além disso, também se mostram inadequados para tratar problemas que envolvem variáveis discretas, pela descontinuidade inerente à função objetivo e de restrições nesses casos (RAO, 2009).

Podem ser citados como métodos largamente utilizados na otimização estrutural o Método de Newton, Programação Quadrática Sequencial, Método Simplex, Método dos Multiplicadores de Lagrange, Método dos Pontos Interiores, entre outros (YANG, 2010).

Os métodos heurísticos ou probabilísticos baseiam-se na probabilidade de eventos e no refinamento dos possíveis conjuntos de soluções. As vantagens destes em relação aos métodos clássicos são que não requerem que a função objetivo seja contínua e diferenciável, trabalham adequadamente com variáveis contínuas, discretas e também com uma combinação delas. Os métodos heurísticos baseados em populações otimizam um grande número de variáveis e realizam buscas simultâneas dentro de todo o espaço de solução, desta forma não se prendem facilmente a extremos locais (YANG, 2010).

Entretanto, são considerados algoritmos computacionalmente caros, pois exigem um grande número de avaliações do valor da função objetivo e das restrições. Por isso, os métodos possuem parâmetros para definir o número de vezes que o algoritmo deve ser executado. Deve-se buscar um equilíbrio entre a quantidade de avaliações e a qualidade dos resultados obtidos.

Os métodos heurísticos mais utilizados na área da otimização estrutural são Algoritmos Genéticos, Busca Harmônica, *Simulated Annealing* e Enxame de Partículas (AFZAT et. al., 2020).

Este trabalho utiliza o método *Quantum Particle Swarm Optimization* (QPSO), desenvolvido por Sun et al. (2004), que é uma variação do Enxame de Partículas original. A próxima seção traz os fundamentos teóricos do método e a sua aplicação através de um algoritmo de otimização.

## 4.2 Otimização por enxame de partículas

### 4.2.1 Inteligência de enxame (*Swarm Intelligence*)

Inteligência de enxame, ou inteligência coletiva, é um ramo da inteligência artificial que estuda o comportamento social coletivo de sistemas complexos, descentralizados e auto-organizados, sejam eles naturais ou artificiais. O termo foi introduzido no contexto de sistemas de robótica celular e foi posteriormente desenvolvido como um método meta-heurístico para resolver problemas de otimização (SUN, LAI e WU, 2012).

A principal inspiração por trás do desenvolvimento da inteligência de enxame origina-se diretamente da natureza. O comportamento dos cardumes de peixes, bandos de pássaros, colônias de formigas e rebanhos de animais, por exemplo, produzem comportamentos coletivos complexos de organização que não podem ser explicados analisando individualmente o comportamento de cada membro do grupo. (PARSOPOULOS; VRAHATIS, 2010).

Um enxame pode ser definido como um grupo de indivíduos que se comunicam entre si, direta ou indiretamente, em um dado ambiente. Cada indivíduo possui estrutura relativamente simples, mas comportamento coletivo complexo. Individualmente, cada agente movimenta-se com certo grau de aleatoriedade em um pequeno campo de ação onde a interação é baseada na exploração de informações locais que os indivíduos próximos trocam entre si e com o ambiente em que se encontram. O seu comportamento e o da sua vizinhança pode mudar afetando o comportamento do enxame como um todo (PARSOPOULOS; VRAHATIS, 2010; SUN, LAI e WU, 2012).

Apesar de cada indivíduo possuir uma capacidade de ação limitada e de não haver um controle central ditando o seu comportamento, o enxame possui traços de inteligência com capacidade de reagir a mudanças e de tomar decisões. O cerne da inteligência de enxames é a cooperação entre seus indivíduos, que auxilia no refinamento do conhecimento e experiência do ambiente. (PARSOPOULOS; VRAHATIS, 2010). A principal propriedade de um sistema de inteligência de enxame é a habilidade de agir de forma sincronizada sem a necessidade de um indivíduo coordenador (SUN, LAI e WU, 2012).

Desta forma, um enxame pode ser visto como uma coleção estruturada de agentes capazes de interagir entre si e com o ambiente em que se encontram (PARSOPOULOS; VRAHATIS,

2010). Este conceito pode ser ampliado para os mais variados grupos organizados e tornou-se frequentemente utilizado nos algoritmos de inteligência coletiva para modelar problemas reais. De forma geral, um sistema de inteligência coletiva consiste em uma população de muitos indivíduos, relativamente homogêneos, interagindo localmente entre si e com o ambiente. O comportamento geral do sistema é resultado da interação entre os indivíduos próximos. A interação entre estes indivíduos resulta em estratégias coletivas capazes de solucionar problemas (SUN, LAI e WU, 2012).

Estes fenômenos da natureza motivaram uma série de pesquisas nas mais diversas áreas de conhecimento que ajudaram no desenvolvimento da inteligência de enxame. Apesar de algumas diferenças físicas e estruturais, os sistemas possuem propriedades em comum, conhecidas como princípios básicos da inteligência de enxame (MILLONAS, 1994):

- a) Proximidade: capacidade de interagir no tempo e espaço;
- b) Qualidade: capacidade de responder a fatores ambientais;
- c) Diversidade: capacidade de produzir diferentes respostas a situações inesperadas;
- d) Estabilidade: capacidade de manter o seu comportamento apesar de mudanças no ambiente;
- e) Adaptabilidade: capacidade de mudar de comportamento devido a fatores externos.

Ainda, o compartilhamento de informações entre os indivíduos em uma população pode produzir uma vantagem evolutiva. Estes ideais constituem a ideia central por trás do desenvolvimento do algoritmo de otimização por enxame de partículas.

#### 4.2.2 Algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas (PSO)

O estudo do comportamento de enxames tem sido utilizado nas mais diversas áreas de conhecimento através de modelos computacionais que imitam o comportamento coletivo de indivíduos. Baseados nestes conceitos, Eberhart e Kennedy (1995) desenvolveram o algoritmo estocástico de otimização por enxame de partículas (do termo em inglês *Particle Swarm Optimization* - PSO).

O PSO é baseado em conceitos extremamente simples, que podem ser implementados em apenas algumas linhas de código computacional. Necessita apenas operadores matemáticos básicos e exige inexpressivos requisitos de memória e velocidade (EBERHART; KENNEDY, 1995).

O algoritmo possui similaridades com as técnicas de computação evolutiva, como por exemplo o algoritmo genético (GA). O PSO necessita uma população inicial de soluções randômicas, assim como em outros sistemas baseados em população. A busca pela solução ótima é obtida atualizando as posições das partículas, analogamente às gerações, mas neste caso sem a necessidade de operadores evolutivos, como os cruzamentos e mutações utilizados no GA. O PSO é comparável em eficiência e pode ser considerado um método alternativo ao algoritmo genético (SUN, LAI e WU, 2012).

No PSO, cada elemento da população é chamado de partícula. As partículas se movimentam estocasticamente no espaço de busca e ocasionalmente é encontrada uma solução. A melhor posição obtida por cada partícula é armazenada na memória, também chamada de experiência. Esta informação é compartilhada com parte ou toda a população. O nível de compartilhamento de informações entre as partículas é um parâmetro importante para a convergência do algoritmo (EBERHART; KENNEDY, 1995). As partículas seguem um comportamento básico, que é tentar imitar o sucesso de seus vizinhos. Este comportamento social guia as partículas em torno das regiões mais promissoras descobertas no espaço de busca e desta forma é capaz de descobrir regiões ótimas em um espaço de busca de alta dimensionalidade (ENGELBRECHT, 2007).

Há duas equações básicas que determinam o funcionamento do PSO: a atualização da velocidade da partícula e a atualização da posição da partícula no espaço de resposta. Denota-se por  $x_i(t)$  a posição da partícula  $i$  no espaço de busca, na iteração  $t$ . A posição da partícula é modificada adicionando uma velocidade  $v_i(t)$  à sua posição atual.

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + v_i(t + 1) \quad (4.4)$$

O vetor velocidade comanda o processo de otimização e reflete a experiência da partícula e a interação social da mesma com sua vizinhança. O ajuste de velocidade determina o equilíbrio entre as capacidades de exploração global e de exploração local. Exploração global é a habilidade de um algoritmo explorar diferentes regiões do espaço de busca. Por sua vez, exploração local é a habilidade de concentrar a busca ao redor de uma área promissora, com o objetivo de refinar a solução. Portanto, o ajuste do tamanho do passo na velocidade da partícula é um fator determinante na eficiência e precisão do PSO (ENGELBRECHT, 2007).

Usualmente, a experiência da partícula é chamada de componente cognitivo e refere-se a distância da partícula até a sua melhor posição conhecida, enquanto que a interação social, chamada de componente social do vetor velocidade, representa a colaboração entre as partículas

(SHI e EBERHART, 1998). Originalmente, foram desenvolvidos dois algoritmos PSO, *gbest* e *lbest*, que se diferenciam pela maneira como é feita a interação entre as partículas. A seguir será exposto uma breve descrição dos métodos e a diferença entre eles.

#### 4.2.3 Global Best PSO

Neste modelo, também chamado de *gbest*, a vizinhança de cada partícula é o enxame inteiro. A rede de interação empregada consiste no modelo topológico de estrela, conforme figura 4.1, onde uma partícula pode se comunicar com todas as partículas da população.

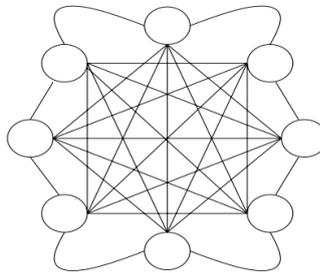


Figura 4.1 – Modelo de estrela (Fonte: ENGELBRECHT, 2007).

O componente social da velocidade da partícula reflete as informações obtidas pelo enxame inteiro, ou seja, a melhor posição encontrada pelo enxame até então. Neste caso, todas partículas são atraídas para a melhor solução dentre todas as soluções conhecidas, indicada por  $\hat{y}(t)$ . (ENGELBRECHT, 2007). A velocidade da partícula é calculada pela expressão a seguir.

$$v_{ij}(t + 1) = v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t)[y_{ij}(t) - x_{ij}(t)] + c_2 r_{2j}(t)[\hat{y}_j(t) - x_{ij}(t)] \quad (4.5)$$

Onde:

$v_{ij}(t)$  é a velocidade da partícula  $i$  na dimensão  $j = 1, \dots, n$  no tempo  $t$  (iteração);

$x_{ij}(t)$  é a posição da partícula  $i$  na dimensão  $j = 1, \dots, n$  no tempo  $t$  (iteração);

$y_{ij}(t)$  é a melhor posição que a partícula  $i$  visitou até o momento da iteração.

$c_1$  e  $c_2$  são constantes de aceleração, associadas a contribuição dos componentes cognitivo e social, respectivamente;

$r_1$  e  $r_2$  são valores randômicos, entre 0 e 1. Estes parâmetros introduzem o elemento estocástico ao algoritmo.

O algoritmo gbest PSO pode ser resumido da seguinte forma:

Tabela 4.1 – Pseudo-código do Algoritmo PSO.

Algoritmo básico <i>gbest</i> PSO
<pre> Inicialize enxame de dimensão <math>n</math> <b>Enquanto</b> condição de parada não atingida <b>faça</b>   <b>para</b> partícula <math>i = 1, \dots, n</math> <b>faça</b>     defina a melhor posição da partícula     <b>se</b> <math>f(x_i) &lt; f(y_i)</math> <b>então</b>       <math>y_i = x_i</math>     <b>fim se</b>     defina a melhor posição do enxame     <b>se</b> <math>f(y_i) &lt; f(\hat{y})</math> <b>então</b>       <math>\hat{y} = y_i</math>     <b>fim se</b>   <b>fim</b> <b>fim</b>   <b>para</b> partícula <math>i = 1, \dots, n</math> <b>faça</b>     Atualize velocidade da partícula pela equação (4.5)     Atualize posição da partícula pela equação (4.4)   <b>fim</b> <b>devolve</b> <i>gbest</i> </pre>

Este método tem como característica a rápida convergência. O alto grau de interação faz com que todas as partículas sejam direcionadas em poucas iterações para o espaço de busca próximo da melhor posição encontrada até então, chamada de *gbest*. Contudo, isto pode não ser desejado. Este método limita a diversidade do enxame e sua capacidade de exploração global. No caso de a solução ótima global não estar próxima ao *gbest*, o enxame será direcionado para o *gbest* e ficará preso nesta região, levando o algoritmo à convergência prematura de um mínimo local.

#### 4.2.4 Local Best PSO

O modelo Local, conhecido como *lbest*, utiliza a topologia de rede social conhecida como anel, de acordo com figura 4.2. Desta forma, vizinhanças de tamanhos menores são definidas para cada partícula. O componente social retrata a troca de informações dentro de uma mesma vizinhança, produzindo o conhecimento local do ambiente. Neste caso, a contribuição local para a velocidade da partícula é proporcional à distância entre a partícula e a melhor posição encontrada na sua vizinhança.

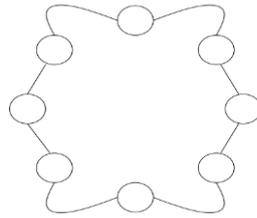


Figura 4.2 – Modelo de anel (Fonte: ENGELBRECHT, 2007).

O algoritmo *lbest* é similar ao *gbest*, tendo como única diferença a equação de velocidade da partícula, onde troca-se  $\hat{y}_j(t)$  por  $\hat{y}_{i_j}(t)$ , ou seja, ao invés da melhor posição do enxame, utiliza-se a melhor posição encontrada na vizinhança da partícula  $i$  na dimensão  $j$ .

Neste modelo, cada partícula procura imitar o comportamento do seu melhor vizinho, denominado *lbest*. A varredura do espaço de busca é mais ampla, pois alguns grupos de partículas separam-se do resto do enxame e exploram diferentes regiões. Desta forma, a solução dificilmente ficará presa a um mínimo local, logo possibilita soluções melhores para problemas multimodais. Entretanto, o alcance de cada partícula é menor, a propagação de informações é mais lenta e consequentemente a convergência também.

A fim de aprimorar o algoritmo original, diversos estudos foram feitos e alguns parâmetros foram implementados, tais como a introdução de um peso de inércia ao vetor velocidade em Shi e Eberhart (1998) e a adição de um fator de constrição em Clerc (1999). Estes estudos foram a base para o aprimoramento do PSO e o desenvolvimento de variações do método.

Conforme visto acima, o equilíbrio entre a exploração global e local é vital para o desempenho do algoritmo PSO. Embora as técnicas de aceleração apresentadas permitam soluções aproximadas eficientes para diversos problemas, o algoritmo ainda está propenso a atingir uma convergência prematura ao solucionar problemas complicados (SUN et al. 2012).

### 4.3 *Quantum Particle Swarm Optimization (QPSO)*

O QPSO (*Quantum Particle Swarm Optimization*) é um algoritmo probabilístico, proposto por Sun et al. (2004) como um método alternativo ao PSO clássico. O método foi motivado pela mecânica quântica e a análise da trajetória das partículas, feito por Clerc e Kennedy (2002). O algoritmo não utiliza vetores de velocidade para as partículas e possui menos parâmetros de ajuste. De acordo com Sun et al. (2012), o QPSO é mais simples de ser implementado e oferece desempenho satisfatório na resolução de uma gama de problemas de otimização.

O estudo da trajetória de Clerc e Kennedy (2002) demonstrou que cada partícula no PSO oscila em torno e converge para o seu ponto de atração local. Isto significa que cada partícula possui uma trajetória cíclica ou converge para um foco. Essa propriedade garante a convergência do enxame em encontrar uma solução ótima ou subótima. Para isto ocorrer, cada partícula deve estar em um estado ligado (*bound state*), ou seja, confinada a uma região do espaço, durante o processo. No QPSO, assume-se que a partícula tem um comportamento quântico e permanece em um estado ligado. A partícula movimenta-se em um campo de atração, provocado por um potencial quântico centrado em um ponto de atração local. Assim, cada iteração produz uma nova equação de atualização estocástica para sua posição. Diferentemente do PSO que atualiza a velocidade das partículas, o QPSO expressa diretamente a posição posterior conforme a experiência do enxame (SUN et al. 2004).

#### 4.3.1 Fundamentos do QPSO

Na estrutura quântica, o estado de cada partícula é descrito por uma função de onda  $\Psi_{(x,t)}$ . No espaço tridimensional, a função de onda de uma partícula satisfaz a seguinte relação

$$|\Psi|^2 dx dy dz = Q dx dy dz \quad (4.6)$$

onde  $Q dx dy dz$  é a probabilidade de uma partícula aparecer em um volume infinitesimal sobre o ponto  $(x, y, z)$ . Portanto,  $|\Psi|^2 = Q$  representa a função densidade de probabilidade que satisfaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx dy dz = \int_{-\infty}^{+\infty} Q dx dy dz = 1 \quad (4.7)$$

Aplicando o conceito de estado quântico ao sistema PSO, assume-se que cada partícula se movimenta em um potencial  $\delta$  no espaço de busca, com o centro no ponto  $p$ . A função de onda pode ser descrita como

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-\frac{|p-x|}{L}} \quad (4.8)$$

onde  $L$  é o comprimento característico do potencial  $\delta$ . Assim, é possível estimar a probabilidade do surgimento da partícula em determinada posição pela função densidade de probabilidade

obtida pela equação 4.9.

$$Q(x) = |\Psi(x)|^2 = \frac{1}{L} e^{-\frac{2|p-x|}{L}} \quad (4.9)$$

Utilizando o método de simulação estocástico de Monte Carlo à função densidade de probabilidade, a posição da partícula pode ser definida por

$$x = p + \frac{L}{2} \ln(1/u), \quad u \sim U(0,1) \quad (4.10)$$

onde  $p$  é uma variável randômica expressa pela equação 4.11. O parâmetro  $L$  caracteriza a criatividade ou imaginação da partícula, conforme equação 4.12.

$$p = \varphi P + (1 - \varphi)G, \quad \varphi \sim U(0,1) \quad (4.11)$$

$$L = 2\alpha|x - mbest| \quad (4.12)$$

$P$  e  $G$  correspondem a melhor experiência da partícula e do enxame, respectivamente. O parâmetro  $\alpha$  é o coeficiente da expansão e contração ( $\alpha$ ) e  $mbest$  é a média da melhor posição de cada partícula do enxame de  $Np$  indivíduos, expressa por

$$mbest = \frac{1}{Np} \sum_{i=1}^{Np} P_i \quad (4.13)$$

A equação 4.10 pode ser generalizada para o espaço  $N$ -dimensional, onde, para cada dimensão, a posição da partícula está ligada ao potencial  $\delta$  e é atualizada de forma independente. Assume-se que a intensidade do potencial  $\delta$  progride com o tempo, com isso o foco local, a posição da partícula, o comprimento característico  $L$  e a variável randômica  $u$  evoluem com o número  $n$  de iterações. Logo, a equação 4.10 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x_{i,n+1}^j = p_{i,n}^j \pm \frac{L_{i,n}^j}{2} \ln\left(\frac{1}{u_{i,n+1}^j}\right), \quad u_{i,n+1}^j \sim U(0,1) \quad (4.14)$$

### 4.3.2 Algoritmo QPSO

As medidas de performance de um algoritmo baseado em população consistem na habilidade global de busca, velocidade de convergência, precisão na solução e robustez. Diversas estratégias foram propostas para aprimorar o algoritmo QPSO e evitar sua convergência prematura. Mutações e seleção natural são operadores comuns nos algoritmos evolucionários. São frequentemente utilizados no aprimoramento do QPSO, aumentando sua diversidade populacional e o processo de busca com o intuito de explorar espaços de busca ainda desconhecidos. Liu et al. (2005) introduziu o operador de mutação ao QPSO para melhorar a habilidade de busca do algoritmo, Wang e Zhou (2007) propuseram o QPSO local (LQPSO) como um operador de busca local e o incorporaram ao QPSO, criando um operador híbrido com alta capacidade de busca. Coelho (2008) mostrou que uma mutação caótica pode diversificar a população do QPSO e melhorar a performance do algoritmo. Xi et al. (2008) aprimorou a velocidade de convergência do algoritmo ao introduzir a posição média ponderada ao algoritmo.

Contudo, a maneira mais simples e efetiva de desenvolver o QPSO sem aumentar a sua complexidade e custo computacional consiste na seleção e controle dos seus parâmetros. Além do tamanho do enxame de partículas, dimensão do problema e número máximo de iterações, o parâmetro mais importante do QPSO é o coeficiente de contração-expansão ( $\alpha$ ), presente na equação 4.12, fundamental para a convergência do algoritmo. O coeficiente controla o comportamento individual da partícula no QPSO de forma semelhante ao peso de inércia e os coeficientes de aceleração no PSO (SUN et al., 2012). Os autores sugerem que a partícula converge quando  $\alpha < 1,78$  e diverge com  $\alpha > 1,80$ . O método mais utilizado para determinar o coeficiente é definir  $\alpha_{inicial}$ , e diminuir este valor linearmente a cada iteração, conforme equação 4.15. Pode-se também utilizar um valor fixo para o coeficiente.

$$\alpha_n = \frac{(\alpha_{final} - \alpha_{inicial}) \cdot n}{n_{iter}} + \alpha_{inicial} \quad (4.15)$$

Assim, a expressão que representa a atualização da posição de cada partícula  $i$ , na dimensão  $j$ , na iteração  $n$ , é expressa pela seguinte expressão

$$x_{i,n+1}^j = p_{i,n}^j \pm \alpha |mbest_n^j - x_{i,n}^j| \ln\left(\frac{1}{u_{i,n+1}^j}\right), \quad u_{i,n+1}^j \sim U(0,1) \quad (4.16)$$

O procedimento do algoritmo QPSO é similar ao PSO, exceto que eles possuem diferentes equações de evolução. O PSO atualiza a posição das partículas através da equação de velocidade, enquanto que o QPSO expressa diretamente a posição posterior conforme a experiência do enxame, de acordo com a equação 4.16.

O algoritmo QPSO inicializa com uma população aleatória, onde a posição inicial de cada partícula é considerada a sua melhor posição. O processo iterativo de atualização da posição das partículas é feito a partir da equação 4.16. A cada iteração, a média da melhor posição do enxame é computada e a posição atual de cada partícula é atualizada. Após cada partícula atualizar sua posição, seu valor de aptidão é avaliado juntamente com a atualização da melhor posição local e global. O processo é repetido até que algum critério de parada seja atingido. O pseudocódigo do algoritmo é descrito a seguir na tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Pseudo-código do algoritmo QPSO.

Algoritmo QPSO
<p>Inicialize  Dimensão <math>j</math>, partícula <math>i</math>, iteração <math>n</math>.  População inicial aleatória <math>x_{i,0}^j</math> com <math>N_P</math> partículas.  Posição inicial: melhor de cada partícula, <math>P_{i,0}^j = x_{i,0}^j</math> e melhor do enxame, <math>G_0</math>.</p> <p><b>Enquanto</b> condição de parada não atingida <b>faça</b>  <math>n = n + 1</math>  Calcula <math>mbest_n^j</math> pela Equação (3.10)  Calcula <math>\alpha</math> pela Equação (3.12) ou valor fixo.  <b>para</b> <math>i = 1</math> até <math>N_P</math>  <b>para</b> <math>j = 1</math> até <math>N_{VAR}</math>  <math>\varphi_{i,n}^j = rand(0,1)</math>;  <math>p_{i,n}^j = \varphi_{i,n}^j P_{i,n}^j + (1 - \varphi_{i,n}^j) G_n^j</math>;  <math>u_{i,n}^j = rand(0,1)</math>;  <b>se</b> <math>rand(0,1) &lt; 0,5</math> <b>faça</b>:  <math>x_{i,n+1}^j = p_{i,n}^j + \alpha  mbest_n^j - x_{i,n}^j  \ln(1/u_{i,n+1}^j)</math>  <b>senão, faça</b>:  <math>x_{i,n+1}^j = p_{i,n}^j - \alpha  mbest_n^j - x_{i,n}^j  \ln(1/u_{i,n+1}^j)</math>  <b>finaliza</b> em <math>j</math> variáveis;  Calcula aptidão das novas partículas e compara com a anterior;  Atualiza pontos <math>P_{i,n}</math> e <math>G_n</math>;  <b>finaliza</b> em <math>i</math> partículas;  <b>Finaliza</b> algoritmo.</p>

Para Sun et al. (2012), o QPSO supera as deficiências do PSO original pelo fato de se basear no princípio da superposição de estados. Um sistema quântico é um sistema de incertezas. Isto significa que uma partícula pode aparecer em qualquer posição de acordo com uma distribuição de probabilidade. Desta forma a partícula não possui uma trajetória definida. No PSO as partículas devem estar ligadas para garantir a coletividade do enxame, o que proporciona restrições às partículas, mantendo-as em uma zona finita. Já no QPSO, a partícula possui a probabilidade de aparecer em qualquer posição do estado de busca, mesmo longe da melhor posição global conhecida, ampliando a varredura do espaço de busca.

Tanto o PSO quanto o QPSO são originalmente desenvolvidos para tratar problemas irrestritos (sem funções de restrição). Para contornar esta limitação, o tratamento das restrições é feito a partir da técnica de penalização, descrita na seção 5.4. Ainda, os métodos se aplicam a formulações baseadas em variáveis contínuas. Neste trabalho, as variáveis de projeto são consideradas discretas. Assim, utiliza-se uma aproximação dos valores das variáveis para o valor inteiro mais próximo.

## 5. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo é definido o problema de otimização, que engloba as variáveis de projeto, a função objetivo, as funções de restrição e o espaço de busca. O algoritmo computacional foi desenvolvido no *software* Matlab 2019 e utiliza o método QPSO como ferramenta de otimização no dimensionamento de seções poligonais de concreto armado submetidas à flexão composta reta e oblíqua. Serão abordadas seções retangulares, vazadas e seção “L”. A determinação da capacidade resistente da seção, e por consequência a segurança em relação ao esforço solicitante, é feita conforme exposto no capítulo 3.

### 5.1 Parâmetros fixos e variáveis de projeto

Para definir matematicamente o problema de otimização, é necessário estabelecer quais são os parâmetros fixos e variáveis do problema. Os parâmetros fixos são as características inalteradas durante o processo de otimização, dentre eles estão o esforço axial e momento fletor solicitante, o cobrimento da armadura (distância entre a borda externa da seção à face externa do estribo), as características dos materiais e os custos unitários do volume de concreto, peso de aço e área de fôrma. Estes valores são definidos antes do início da otimização e permanecem os mesmos ao longo do processo.

Os parâmetros variáveis são as características de projeto que serão alteradas durante o processo de otimização, com o objetivo de minimizar o valor da função objetivo. Cada formato geométrico de seção transversal possui uma configuração própria de variáveis de projeto. A seguir, serão descritas cada uma delas.

#### 5.1.1 Seção Retangular

Para seções retangulares considerou-se oito variáveis ( $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ ). As duas primeiras ( $x_1$  e  $x_2$ ) representam as dimensões da seção de concreto. A configuração das barras longitudinais de armadura é determinada pelas variáveis  $x_3$  a  $x_7$  e a classe de resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) é representada por  $x_8$ . Esta definição foi baseada no trabalho de Medeiros (2012) por representar a prática usual de projetos executados em escritórios de cálculo de forma realista. A figura 5.1 apresenta a seção de concreto com as variáveis de projeto consideradas.

É importante destacar que a figura 5.1 não representa o detalhamento de projeto, serve apenas para facilitar a visualização das variáveis de projeto consideradas e o posicionamento das barras de armadura. Alguns detalhes construtivos não estão apresentados, como por exemplo o detalhamento dos estribos principais e suplementares, pois não é o objetivo deste trabalho dimensionar a armadura transversal. Estas considerações são válidas também para os casos de seção retangular vazada e seção “L”, que são apresentados nas figuras 5.2 e 5.3 na sequência do trabalho.

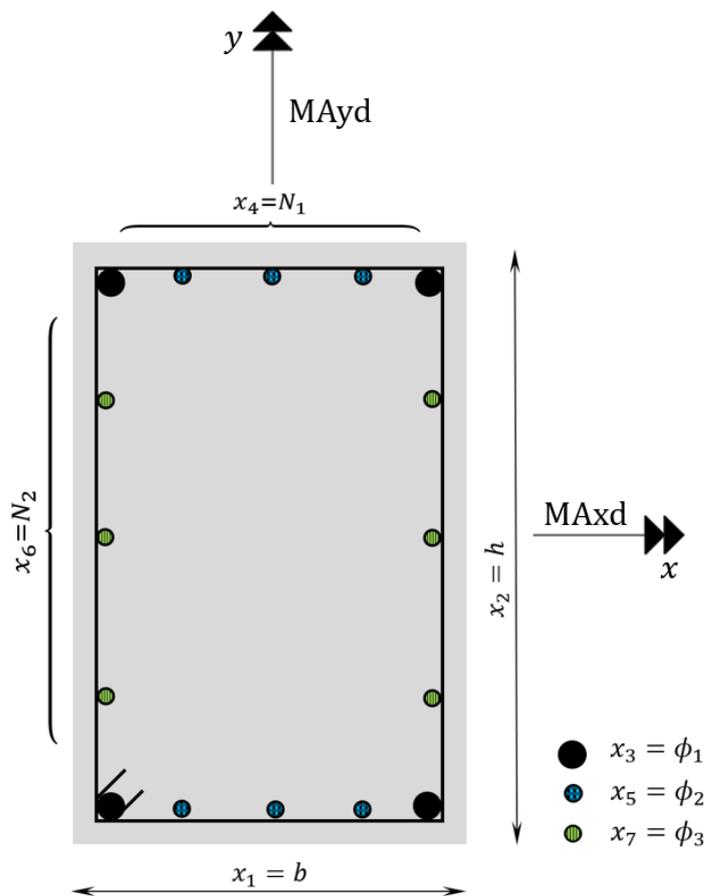


Figura 5.1 –Variáveis de projeto para problemas de otimização de seção retangular (Fonte: autor).

Onde:

$x_1$  = base da seção transversal ( $b$ );

$x_2$  = altura da seção transversal ( $h$ );

$x_3$  = diâmetro comercial das quatro barras dos cantos;

$x_4$  = número de barras na camada paralela ao eixo  $x$  da seção transversal ( $N_1$ );

$x_5$  = diâmetro comercial das barras na camada paralela ao eixo  $x$  da seção transversal ( $\phi_1$ );

$x_6$  = número de barras na camada paralela ao eixo  $y$  da seção transversal ( $N_2$ );

$x_7$  = diâmetro comercial das barras na camada paralela ao eixo  $y$  da seção transversal ( $\phi_2$ );  
 $x_8$  =  $f_{ck}$  do concreto.

Alguns problemas estudados não consideram todas as variáveis apresentadas acima na otimização. Nesses casos, as variáveis excluídas da otimização são tomadas com valor fixo, como ocorre nos parâmetros como custo unitário e espessura de cobrimento. Optou-se por tratar todas as variáveis como discretas. Somente é permitido utilizar números inteiros, em centímetros, nas dimensões  $x_1$  e  $x_2$  da seção transversal, limitando os valores ao intervalo de  $14 \text{ cm} \leq x_1, x_2 \leq 200 \text{ cm}$ . Os valores das variáveis  $x_4$  e  $x_6$  variam de 0 até o valor máximo permitido pelas restrições de espaçamento, apresentados na seção 5.3. A configuração das barras é sempre simétrica, de forma a tornar a estrutura otimizada compatível com a prática de projeto. Também limitou-se as barras de armadura aos diâmetros comerciais usualmente utilizados na execução de peças estruturais em concreto armado. Ainda, a NBR 6118:2014 estabelece que o diâmetro das barras longitudinais de pilares não pode ser inferior a 10 mm, nem superior a 1/8 da menor dimensão transversal. Com isso, definiu-se que as barras de armadura apenas podem assumir os valores contidos no conjunto a seguir:

$$x_3, x_5, x_7 \in \{10; 12,5; 16; 20; 25\}, \text{ em mm} \quad (5.1)$$

A variável referente à classe de resistência do concreto pode assumir valores do grupo I de resistência, entre C20 e C50, conforme classificação da NBR 8953:2015, por abranger a maioria das situações usuais de dimensionamento. Assim, optou-se por não considerar concretos de alta resistência, pertencentes ao grupo II, entre C55 e C90.

Assim,  $x_8$  pode assumir os seguintes valores:

$$x_8 \in [20; 25; 30; 35; 40; 45; 50] \quad (5.2)$$

As considerações sobre o tratamento das variáveis de projeto, os diâmetros utilizados e a resistência característica do concreto são válidas também para os casos de seção vazada e seção “L” apresentados a seguir.

### 5.1.2 Seção Retangular Vazada

Para as seções vazadas seguiu-se o mesmo padrão da seção retangular, com o acréscimo de algumas variáveis. Neste caso considerou-se catorze variáveis, onde as dimensões da seção de

permanecem  $x_1$  e  $x_2$ , a configuração das barras longitudinais de armadura são compostas por  $x_3$  até  $x_{12}$ , a espessura  $e$  da parede de concreto é definida por  $x_{13}$  e a classe de resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) é representada por  $x_{14}$ . A figura 5.2 a seguir apresenta a seção retangular vazada de concreto com as variáveis de projeto consideradas.

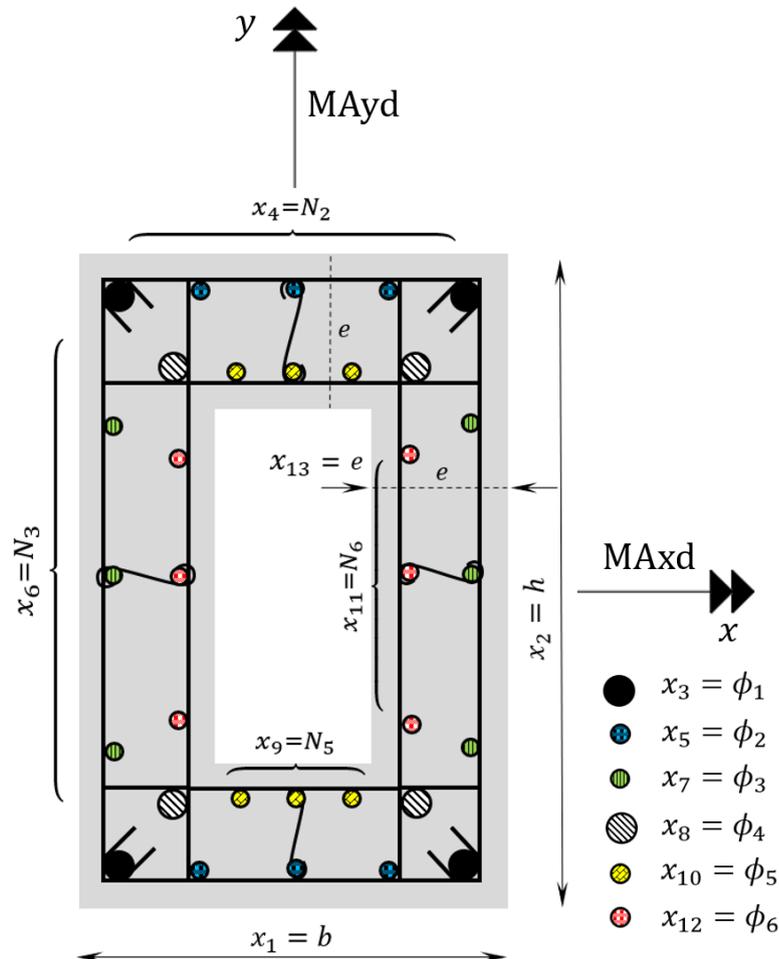


Figura 5.2 – Variáveis de projeto para problemas de otimização de seção retangular vazada

(Fonte: autor).

Onde:

$x_1$  = base da seção transversal ( $b$ );

$x_2$  = altura da seção transversal ( $h$ );

$x_3$  = diâmetro comercial das quatro barras dos cantos externos ( $\phi_1$ );

$x_4$  = número de barras externas na camada paralela ao eixo  $x$  da seção transversal ( $N_2$ );

$x_5$  = diâmetro comercial das barras externas na camada paralela ao eixo  $x$  da seção transversal ( $\phi_2$ );

$x_6$  = número de barras externas na camada paralela ao eixo  $y$  da seção transversal ( $N_3$ );

$x_7$  = diâmetro comercial das barras externas na camada paralela ao eixo  $y$  da seção transversal ( $\phi_3$ );

$x_8$  = diâmetro comercial das quatro barras dos cantos internos ( $\phi_4$ );

$x_9$  = número de barras internas na camada paralela ao eixo  $x$  da seção transversal ( $N_5$ );

$x_{10}$  = diâmetro comercial das barras internas na camada paralela ao eixo  $x$  da seção transversal ( $\phi_5$ );

$x_{11}$  = número de barras internas na camada paralela ao eixo  $y$  da seção transversal ( $N_6$ );

$x_{12}$  = diâmetro comercial das barras internas na camada paralela ao eixo  $y$  da seção transversal ( $\phi_6$ );

$x_{13}$  = espessura da parede da seção transversal ( $e$ );

$x_{14}$  =  $f_{ck}$  do concreto.

### 5.1.3 Seção “L”

A seção “L” possui dezesseis variáveis de projeto. As dimensões de base e altura da seção de permanecem  $x_1$  e  $x_2$ , a configuração das barras longitudinais de armadura são representadas de  $x_3$  até  $x_{14}$ , a espessura  $e$  da parede de concreto é definida por  $x_{15}$  e a classe de resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) é representada por  $x_{16}$ . A figura 5.3 a seguir apresenta a seção “L” de concreto com as variáveis de projeto consideradas.

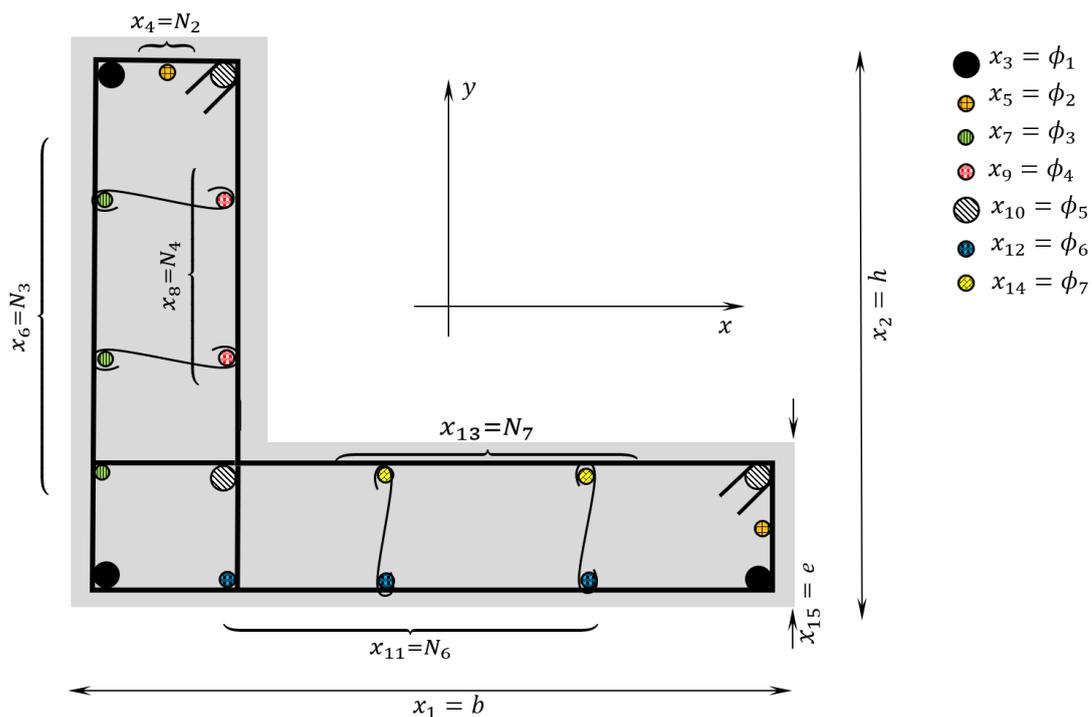


Figura 5.3 – Variáveis de projeto seção vazada (Fonte: autor).

Em que:

$x_1$  = dimensão externa da seção transversal paralela ao eixo  $x$  ( $b$ );

$x_2$  = dimensão externa da seção transversal paralela ao eixo  $y$  ( $h$ );

$x_3$  = diâmetro comercial das três barras dos cantos externos ( $\phi_1$ );

$x_4$  = número de barras da camada superior paralela ao eixo  $x$  da seção transversal ( $N_2$ );

$x_5$  = diâmetro comercial das barras da camada superior paralela ao eixo  $x$  da seção transversal ( $\phi_2$ );

$x_6$  = número de barras da camada paralela ao eixo  $y$  da seção transversal na lateral esquerda ( $N_3$ );

$x_7$  = diâmetro comercial das barras da camada paralela ao eixo  $y$  da seção transversal na lateral esquerda ( $\phi_3$ );

$x_8$  = número de barras da camada paralela ao eixo  $y$  da seção transversal na lateral direita ( $N_4$ );

$x_9$  = diâmetro comercial das barras nas camadas paralelas ao eixo  $y$  da seção transversal na lateral direita ( $\phi_4$ );

$x_{10}$  = diâmetro comercial das três barras dos cantos internos ( $\phi_5$ );

$x_{11}$  = número de barras externas da camada inferior paralela ao eixo  $x$  da seção transversal ( $N_6$ );

$x_{12}$  = diâmetro comercial das barras externas da camada inferior paralela ao eixo  $x$  da seção transversal ( $\phi_6$ );

$x_{13}$  = número de barras internas da camada inferior paralela ao eixo  $x$  da seção transversal ( $N_7$ );

$x_{14}$  = diâmetro comercial das barras internas da camada inferior paralela ao eixo  $x$  da seção transversal ( $\phi_7$ );

$x_{15}$  = espessura da parede da seção transversal ( $e$ );

$x_{16}$  =  $f_{ck}$  do concreto.

## 5.2 Função Objetivo

O propósito da metodologia de projeto baseada em otimização desenvolvida neste trabalho é minimizar o custo de produção de um pilar de concreto armado. Portanto, a função objetivo expressa o custo da seção transversal por unidade de comprimento do pilar (em R\$/m), que engloba o custo do concreto, do aço e das fôrmas utilizadas.

### 5.2.1 Seção Retangular

O custo do pilar por unidade de comprimento é expresso matematicamente nesse problema pela seguinte função objetivo:

$$f(x) = V_C \cdot C_C + \gamma_S \cdot A_S \cdot C_S + A_F \cdot C_F \quad (5.3)$$

$C_C$ ,  $C_S$  e  $C_F$  são parâmetros fixos e representam os custos unitários do concreto, por unidade de volume, do aço, por unidade de massa, e das fôrmas, por unidade de área, respectivamente.  $\gamma_S$  é o peso específico do aço, adotado como 7,85 kg/m<sup>3</sup>.

O custo do concreto é determinado pelo volume de concreto ( $V_C$ ) por unidade de comprimento do pilar, dado por:

$$V_C = x_1 \cdot x_2 \cdot 1 \quad (5.4)$$

$A_S$  diz respeito a área de armadura utilizada, de acordo com a distribuição das barras longitudinais, calculada pela seguinte equação:

$$A_S = \pi \cdot (x_3^2 + 0,5 \cdot x_4 \cdot x_5^2 + 0,5 \cdot x_6 \cdot x_7^2) \quad (5.5)$$

O custo das fôrmas, por metro linear, é definido pela área da fôrma utilizada em 1 metro linear da seção, definido por:

$$A_F = 2 \cdot (x_1 + x_2) \quad (5.6)$$

### 5.2.2 Seção Retangular Vazada

A função objetivo para a seção vazada é a mesma utilizada para a seção retangular, com exceção das formulações do volume de concreto ( $V_C$ ), da área de aço ( $A_S$ ) e da área das fôrmas ( $A_F$ ), que são modificadas devido às diferenças geométricas e de disposição de barras. As equações 5.7 a 5.9 expressam o volume de concreto, a área de aço e a área de formas, respectivamente, para esse problema.

$$V_C = x_1 \cdot x_2 - (x_1 - 2e) \cdot (x_2 - 2e) \quad (5.7)$$

$$A_S = \pi \cdot (x_3^2 + 0,5 \cdot x_4 \cdot x_5^2 + 0,5 \cdot x_6 \cdot x_7^2 + x_8^2 + 0,5 \cdot x_9 \cdot x_{10}^2 + 0,5 \cdot x_{11} \cdot x_{12}^2) \quad (5.8)$$

$$A_F = 2 \cdot (x_1 + x_2 + (x_1 - 2e) + (x_2 - 2e)) \quad (5.9)$$

### 5.2.3 Seção “L”

A função objetivo utilizada na otimização do pilar com seção transversal "L" também é expressa pela equação 5.3, com modificação no cálculo do volume de concreto, área de aço e área de formas, que são definidos pelas eq. 5.10 a 5.12, respectivamente, conforme segue:

$$V_C = x_1 \cdot x_2 - (x_1 - e) \cdot (x_2 - e) \quad (5.10)$$

$$A_S = \pi \cdot (0,75 \cdot x_3^2 + 0,5 \cdot x_4 \cdot x_5^2 + 0,25 \cdot x_6 \cdot x_7^2 + 0,25 \cdot x_8 \cdot x_9^2 + 0,75 \cdot x_{10}^2 + 0,25 \cdot x_{11} \cdot x_{12}^2 + 0,25 \cdot x_{13} \cdot x_{14}^2) \quad (5.11)$$

$$A_F = x_1 + x_2 + (x_1 - e) + (x_2 - e) + 2e \quad (5.12)$$

## 5.3 Funções de Restrição

As restrições são condições que descrevem situações de projeto que devem ser atendidas. Incluem os critérios estabelecidos por norma e limitações arquitetônicas e construtivas de acordo com o problema a ser otimizado. As restrições são traduzidas em funções de igualdade ou desigualdade das variáveis de projeto, que definem os limites viáveis na busca da solução ótima. A seguir serão apresentadas as restrições inerentes ao problema de otimização em estudo.

### 5.3.1 Critérios de segurança

A principal restrição quando se trata do dimensionamento de estruturas é o critério de resistência. Segundo a NBR 6118:2014, a estabilidade da estrutura é verificada quando os esforços solicitantes impostos à estrutura são menores que os esforços resistentes. Assim, tem-se a segurança garantida quando

$$\frac{NR_d}{NA_d} > 1 \quad (5.13)$$

$$\frac{MRx_d}{MAx_d} > 1 \quad (5.14)$$

$$\frac{MRy_d}{MAy_d} > 1 \quad (5.15)$$

Nos casos de flexocompressão oblíqua a segurança deve ser avaliada quanto à ação simultânea dos esforços elencados nas equações 5.13 a 5.15, o que muitas vezes é realizado por procedimento de norma através de equações de interação. Nesse trabalho, a verificação de segurança é realizada através da metodologia apresentada na seção 3.2.3, em que o parâmetro  $\lambda$  define a proporção entre os esforços atuantes e a capacidade resistente da seção.

Logo, a restrição associada ao critério de segurança pode ser traduzida matematicamente como:

$$g_1 = \lambda - 1 \leq 0 \quad (5.16)$$

### 5.3.2 Limites geométricos

Inicialmente, são apresentadas as restrições utilizadas para a seção retangular. As variações para os demais casos serão comentadas ao final desta seção. Estabeleceu-se que a altura da seção deve ser maior ou igual à dimensão da base e no máximo cinco vezes maior que a mesma, pois o elemento se enquadra como pilar-parede para proporções superiores a essa. Assim, as restrições geométricas relacionadas às dimensões da seção transversal são expressas pelas seguintes inequações:

$$g_2 = 1 - \frac{x_2}{x_1} \leq 0 \quad (5.17)$$

$$g_3 = 1 - \frac{5x_1}{x_2} \leq 0 \quad (5.18)$$

A NBR 6118:2014, no item 13.2.3, impõe que a seção transversal de pilares não pode apresentar dimensão menor que 19 cm. Em casos especiais, a norma permite dimensões entre 14 cm e 19 cm, desde que os esforços solicitantes de cálculo sejam majorados por um coeficiente adicional  $\gamma_n$ , de acordo com a expressão

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05x_1 \quad (5.19)$$

Assim, os limites inferiores das variáveis de projeto que definem as dimensões da seção sempre respeitam o limite  $x_1, x_2 \geq 14$  cm. Adicionalmente, a restrição relativa à segurança ( $g_1$ , ver equação 5.16) é avaliada considerando os esforços majorados pelo coeficiente  $\lambda$  quando  $x_1$  ou  $x_2$  assumem um valor entre 14 e 19 cm.

A NBR 6118:2014 também exige que a área da seção transversal seja superior a 360 cm<sup>2</sup>, o que é incorporado à formulação do problema de otimização através da inequação 5.14, onde  $A_{min} = 360$  cm<sup>2</sup>.

$$g_4 = 1 - \frac{x_1 \cdot x_2}{A_{min}} \leq 0 \quad (5.20)$$

Também são considerados os valores limites máximos e mínimos para a área das armaduras longitudinais de pilares, conforme item 17.3.5.3 da referida norma. A área da armadura longitudinal não pode ultrapassar 8% da área da seção transversal de concreto ( $A_c$ ), ou 4% em regiões em que houver emenda por traspasse. A área mínima deve ser:

$$A_{s,min} = \frac{0,15N_d}{f_{yd}} \geq 0,004A_c \quad (5.21)$$

Essas restrições são expressas por:

$$g_5 = 1 - \frac{A_s}{A_{s,min}} \leq 0 \quad (5.22)$$

$$g_6 = 1 - \frac{0,04A_c}{A_s} \leq 0 \quad (5.23)$$

A distribuição transversal das barras de armadura também deve respeitar critérios de espaçamento mínimo e máximo, disposto no item 18.4.2.2 da norma brasileira. O espaçamento máximo ( $e_{max}$ ) entre eixos de barras adjacentes deve ser menor ou igual a duas vezes a menor dimensão da seção transversal, sem exceder 400 mm. O espaçamento mínimo livre entre as faces das barras longitudinais adjacentes deve atender ao espaçamento mínimo ( $e_{min}$ ) dado por:

$$e_{min} \geq \begin{cases} 20 \text{ mm} \\ \text{diâmetro da barra} \\ 1,2 \text{ vezes a dimensão máxima do agregado graúdo} \end{cases} \quad (5.24)$$

Em todos os exemplos, a dimensão máxima característica do agregado graúdo foi considerada como 19 mm, o que poderia ser alterado de acordo com a necessidade do problema. Assim, as

restrições associadas ao espaçamento entre as barras são dadas pelas equações

$$g_7 = 1 - \frac{e}{e_{min}} \leq 0 \quad (5.25)$$

$$g_8 = 1 - \frac{e^*}{e_{max}} \leq 0 \quad (5.26)$$

onde  $e$  é a distância entre as faces das barras adjacentes e  $e^*$  consiste na distância entre eixos das barras. Estes espaçamentos são fragmentados em  $e_x$  e  $e_y$ , calculados separadamente para a camada de barras paralelas ao eixo  $x$  e ao eixo  $y$ , respectivamente, considerando o número de barras e o diâmetro utilizado em cada direção.

Conforme exposto na seção 5.1.1, a NBR 6118:2014 estabelece que o diâmetro das barras longitudinais de pilares não pode ser inferior a 10 mm, nem superior a 1/8 da menor dimensão transversal. O conjunto de barras proposto (ver eq. 5.2) garante que o diâmetro mínimo será respeitado. As restrições dos diâmetros máximos podem ser traduzidas matematicamente como:

$$g_9 = 1 - \frac{x_1}{8 \cdot \max(x_3, x_5, x_7)} \leq 0 \quad (5.27)$$

Ainda, por uma questão construtiva, adicionou-se a imposição de que as barras intermediárias não tenham um diâmetro superior ao das barras de canto, levando à equação de restrição:

$$g_{10} = 1 - \frac{x_3}{\max(x_5, x_7)} \leq 0 \quad (5.28)$$

As restrições  $g_1$  a  $g_{10}$  também se aplicam à seção retangular vazada e à seção “L”, com adaptações em função das características dessas seções. Deve-se tomar alguns cuidados adicionais em relação ao espaçamento entre as barras internas e externas (seção retangular vazada) e entre as barras inferiores e superiores (seção “L”). Assim, o espaçamento é fragmentado em mais componentes, de forma a incluir as camadas adicionais de barras de cada situação. Além disso, nas restrições  $g_9$  e  $g_{10}$  que envolvem os diâmetros (eq. 5.27 e 5.28) as novas variáveis de projeto referentes a esses diâmetros também são inseridas nas equações de restrição. Em todas as situações de dimensionamento será utilizada armadura transversal CA-60 de 5 mm apenas como forma de representação, pois não é o objetivo deste trabalho dimensionar a armadura transversal.

## 5.4 Função de Penalização

A abordagem mais comum em problemas de otimização com restrições em que se emprega um método de otimização para problemas irrestritos é o uso de uma função de penalização. O propósito dessa abordagem é transformar o problema original em um problema sem restrições, com apenas uma função objetivo, onde as soluções que violam alguma restrição sejam penalizadas por um fator, aumentando o valor da solução. Caso a solução não infrinja nenhuma das restrições, o valor da penalização será nulo e o valor da função objetivo não será afetada. A formulação das funções de restrição de maneira adimensional, como na equação 5.29, evita a priorização de restrição quando as mesmas têm unidades ou representam grandezas diversas entre si (tensões, dimensões, áreas, frequências, etc.).

A maior vantagem do tratamento das soluções com penalizações é a possibilidade do algoritmo de otimização explorar regiões inviáveis que permitam atingir regiões viáveis melhores, algo não possível com métodos rígidos de tratamento de restrições em problemas onde o espaço de procura seja disjunto.

O uso de métodos de penalidade requer cuidados no grau de penalização escolhido. Caso a penalização adotada seja muito pequena, o menor valor da função penalizada pode estar associado a uma solução inviável, comprometendo o resultado da otimização. Em contrapartida, se a penalização for muito grande, limitará a busca do algoritmo e o problema poderá convergir para um mínimo local. De acordo com Siedlecki e Sklansky (1989), a solução ótima frequentemente encontra-se na fronteira da região viável. Portanto, penalizar severamente soluções próximas à fronteira pode inviabilizar a busca nesta região, direcionando o algoritmo para outros locais.

Uma forma bastante usual de impor esta penalização é somar à função objetivo original um percentual de um valor fixo máximo da penalização. Através de análises preliminares, pode-se ter uma estimativa do valor máximo que a função objetivo pode assumir (por exemplo avaliando a função objetivo nos limites do espaço de procura das variáveis de projeto). Utiliza-se este valor multiplicado pelo nível de violação para avaliar a penalização a ser somada para obter a nova função objetivo penalizada  $f'(x)$ , como indicado na equação 5.30.

$$f'(x) = f(x) + f_{max} \cdot f_p \quad (5.29)$$

Onde:

$f_{max}$  = valor máximo que  $f(x)$  pode assumir;

$f_p$  = nível de violação das restrições, definida por  $\sum_j \max(g_j, 0)$ .

Utiliza-se o somatório das restrições violadas em  $f_p$  de forma que uma solução com múltiplas restrições violadas terá penalização maior do que outra com apenas uma restrição violada.

É possível também gerar a função de penalização a partir do fator de penalização aplicado diretamente ao valor da função objetivo e proporcional ao grau de violação, resultando numa transformação convexa para a função objetivo. A vantagem de utilizar esta metodologia reside no fato de que não há necessidade de previamente avaliar o valor constante  $f_{max}$ . Também resulta em uma função objetivo penalizada proporcional ao grau de violação e ao próprio valor da função objetivo. A cada iteração no processo de otimização é obtido uma solução para a função objetivo. As soluções que violam alguma restrição são multiplicadas pelo fator de penalização, conforme a equação

$$f(x) = f(x) \cdot \gamma^{f_p} \quad (5.30)$$

em que o grau de penalização pode ser controlado pelo fator  $\gamma > 1$ . Valores típicos variam de  $\gamma = 3$  a 10. Com isso, o fator utilizado depende do nível da violação. Soluções próximas a região viável são levemente penalizadas, permitindo que a busca prossiga naquela direção, enquanto que soluções muito distantes da região viável são rapidamente descartadas.

## 5.5 Fluxograma do algoritmo

A figura 5.2 a seguir representa um fluxograma básico do funcionamento do algoritmo de otimização desenvolvido.

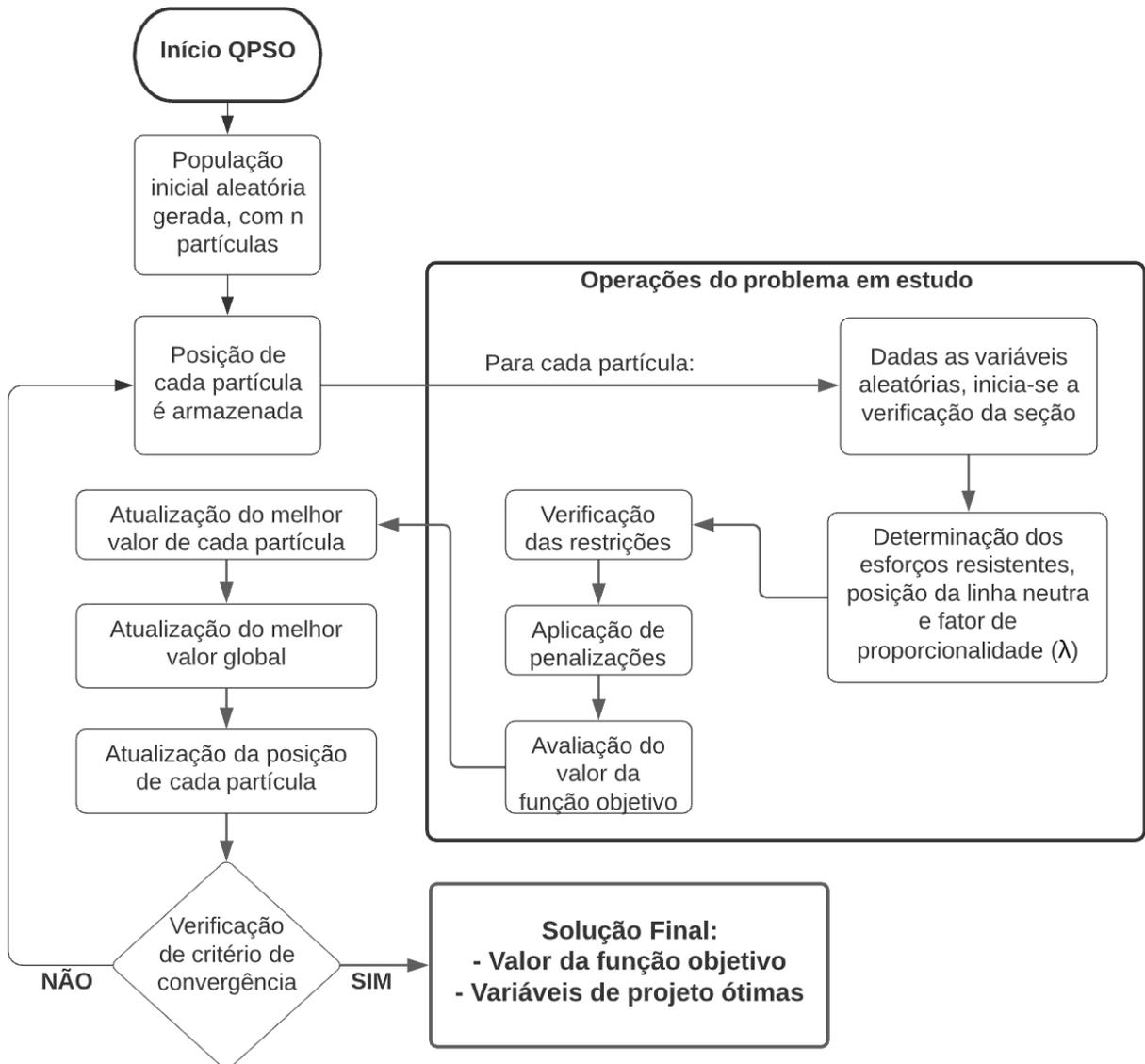


Figura 5.4 - Fluxograma do algoritmo de otimização (Fonte: autor).

## 6. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Este capítulo apresenta exemplos de aplicação da metodologia baseada em otimização no dimensionamento de seções transversais de pilares submetidos à flexocompressão reta e oblíqua. Os quatro primeiros exemplos estudam pilares com seção transversal retangular. O primeiro exemplo deste capítulo tem a intenção de validar a formulação proposta neste trabalho e comprovar a sua eficiência. O segundo traz uma análise do comportamento do algoritmo QPSO em função de seus parâmetros de entrada. Os exemplos 3 e 4 são comparações com soluções encontradas a partir de outros métodos de otimização. A seção 6.5 propõe uma nova parametrização da distribuição de barras para os pilares de seção retangular e compara com os resultados obtidos nos exemplos anteriores. Finalmente, os exemplos 5 e 6 tratam da aplicação da metodologia ao dimensionamento de pilares com seção vazada e seção “L”, respectivamente. As soluções de todos os exemplos foram encontradas com o método de otimização, empregando os parâmetros ajustados de acordo com o estudo feito no exemplo 2, onde define-se o número total de avaliações da função objetivo em 10000, com população de 40 partículas e 250 gerações. Em cada otimização, são realizadas 30 reproduções independentes do exemplo e a melhor solução encontrada é considerada a solução ótima para o problema.

### 6.1 Exemplo 1 – Seção Retangular: Dimensionamento Ótimo x Convencional

O exemplo trata do dimensionamento da seção transversal de um pilar com seção transversal retangular submetido a esforços de flexão composta oblíqua. Este exemplo foi utilizado por Pinheiro, Baraldi e Porem (2009) na aplicação dos ábacos para flexão oblíqua propostos.

O pilar, com seção transversal retangular de lados  $b = 20$  cm e  $h = 40$  cm, está submetido à força normal de compressão com valor de cálculo  $N_d = 860$  kN, com excentricidades no ponto de aplicação desta força de  $e_x = 5$  cm e  $e_y = 13,5$  cm nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, como indicado na figura 6.1.

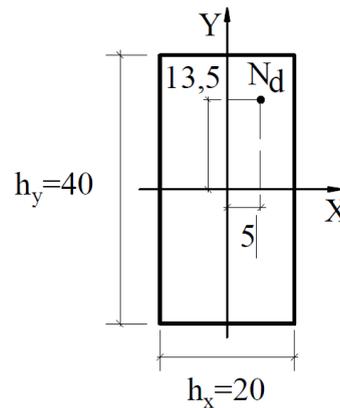


Figura 6.1 – Dimensões e excentricidades da seção, em centímetros (Fonte: Pinheiro, Baraldi e Porem, 2009)

Desta forma, os momentos solicitantes de cálculo em relação a cada um dos eixos principais centrais da seção são dados por

$$M_{xd} = N_d * e_y = 116,10 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (6.1)$$

$$M_{yd} = N_d * e_x = 43 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (6.2)$$

Os dados utilizados para o dimensionamento foram: concreto com  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ , aço CA-50, peso específico do aço  $\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$  e a distância do eixo das barras à borda da seção ( $d'$ ) igual a 4,0 cm. O trabalho de referência (Pinheiro, Baraldi e Porem, 2009) não considerou armadura transversal.

No trabalho de referência, foram propostas três alternativas diferentes de distribuição de barras para a seção. O dimensionamento a seguir ilustrará a melhor solução obtida. O ábaco utilizado foi o 16A (Pinheiro, Baraldi e Porem, 2009), apresentado na figura 6.2. Aplica-se as equações para o dimensionamento segundo os ábacos (6.3, 6.4 e 6.5) e obtém-se os esforços reduzidos adimensionais  $v = 0,6$ ,  $\mu_x = 0,15$  e  $\mu_y = 0,2$ .

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} \quad (6.3)$$

$$\mu_x = \frac{M_{yy}}{A_c \cdot h_x \cdot f_{cd}} \quad (6.4)$$

$$\mu_y = \frac{M_{xx}}{A_c \cdot h_y \cdot f_{cd}} \quad (6.5)$$

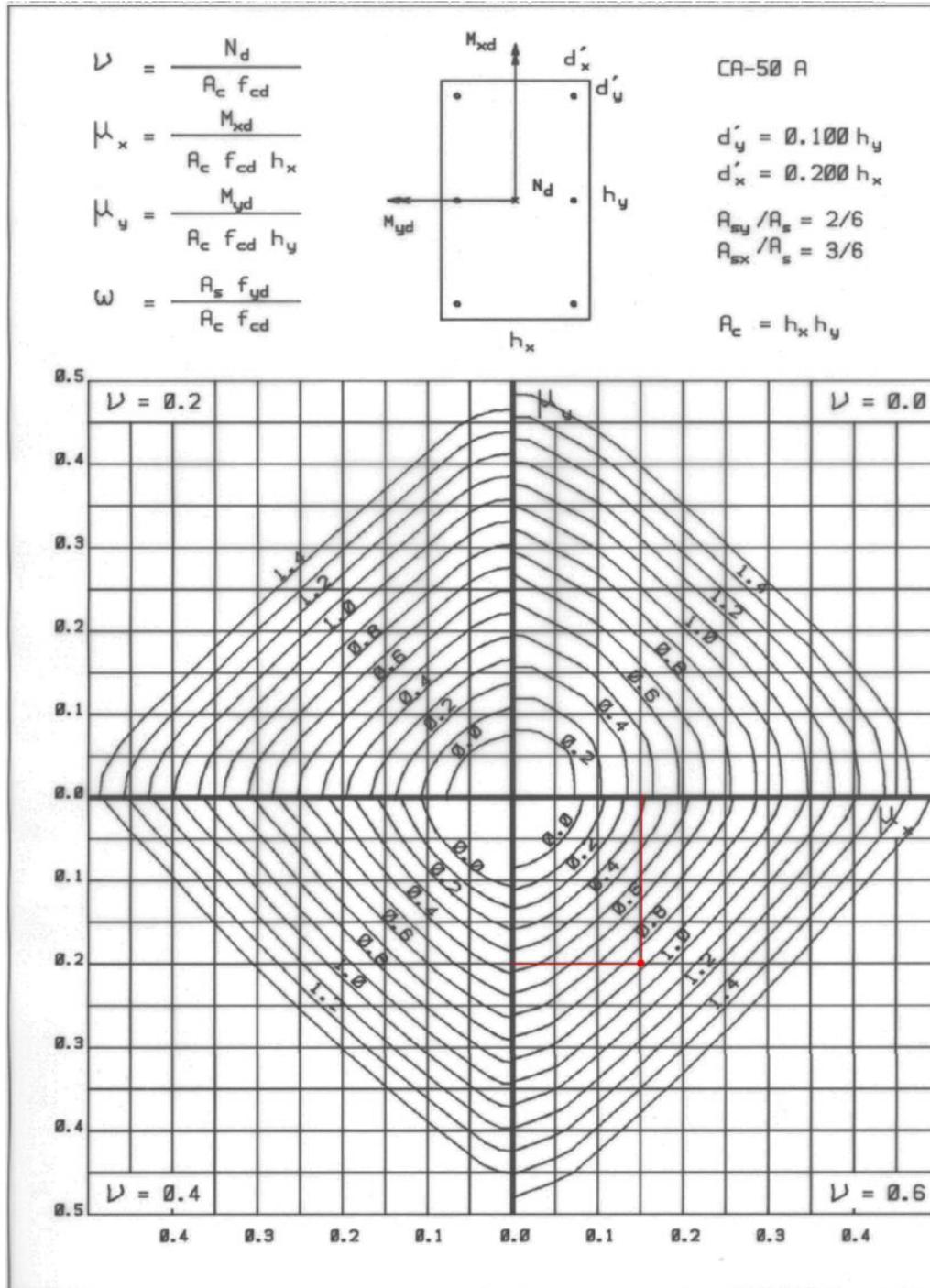


Figura 6.2 – Ábaco 16A (Fonte: adaptado de Pinheiro, Baraldi e Porem, 2009)

Através do ábaco, encontra-se a taxa mecânica de armadura  $\omega = 0.87$ , que corresponde aos esforços adimensionais  $v$ ,  $\mu_x$  e  $\mu_y$  e com isso pode-se obter a área de aço pela seguinte expressão:

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}} \rightarrow A_s = \frac{\omega \cdot A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,87 \cdot 800 \cdot 1,7857}{43,478} = 28,585 \text{ cm}^2 \quad (6.6)$$

A seção dimensionada necessita 6 barras com área de 4,764 cm<sup>2</sup>. Portanto, adotou-se 6  $\phi$  25mm, com área de 4,91cm<sup>2</sup> cada, conforme figura 6.3.

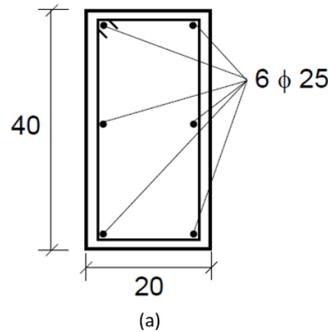


Figura 6.3 – Seção dimensionada segundo os ábacos (Fonte: Pinheiro, Baraldi e Porem, 2009)

A solução encontrada pelo método demonstrado acima foi analisada pelo algoritmo de verificação empregado neste trabalho. Para isso, as variáveis foram adotadas com valores fixos  $x = \{20 \ 40 \ 25 \ 0 \ 0 \ 1 \ 25 \ 25\}^T$ , conforme arranjo descrito na seção 5.1. Segundo a verificação do algoritmo, esta seção obtém um fator de proporcionalidade entre os esforços atuantes e resistentes de  $\lambda = 0,98$ . Quando  $\lambda \leq 1$ , significa que os esforços atuantes são menores ou iguais aos resistentes e a seção passa nos critérios de resistência. Quanto mais próximo de 1, o fator de proporcionalidade indica que a seção está dimensionada de forma que os esforços atuantes sejam muito próximos dos esforços resistentes, ou seja, não há superdimensionamento da estrutura. A proximidade de resultados do algoritmo e do ábaco indica a eficácia do algoritmo na verificação de seções de pilares de concreto armado.

A seguir, serão apresentadas soluções ótimas encontradas ao utilizar algoritmo QPSO no dimensionamento da seção transversal deste exemplo. Para isso, é necessário determinar o custo dos materiais utilizados na estrutura. Os custos unitários utilizados são referentes à tabela SINAPI para o mês de Julho/2020, no estado do Rio Grande do Sul. O custo do concreto em R\$/m<sup>3</sup> varia de acordo com cada resistência característica, logo para os concretos de resistência de C20 até C50, variando de 5 em 5 MPa, temos  $C_c = [320,00; 330,15; 340,31; 350,47; 360,63; 376,81; 402,60]$ . Para o aço foi utilizado  $C_s$  (R\$/kg) = 5,19 e para as fôrmas  $C_f$  (R\$/m<sup>2</sup>) = 23,39.

Para comparação com a solução obtida por Pinheiro, Baraldi e Porem (2009), referida adiante como solução (a), foram estudados três casos de otimização para o dimensionamento da seção. A primeira solução ótima (b) tem como variáveis de projeto apenas a distribuição e os diâmetros das barras da armadura, mantendo as dimensões fixas da seção transversal (definidas na figura 6.1) e  $f_{ck} = 25$  MPa. A solução (c) otimiza as dimensões da seção transversal e a configuração

das barras da armadura, mantendo o valor fixo de  $f_{ck} = 25$  MPa. Finalmente, a solução (d) considera na otimização todas as variáveis de projeto definidas na seção 5.1, que incluem as dimensões da seção, a distribuição das barras de aço e a resistência característica do concreto. Em todos os casos, foi utilizado cobrimento nominal (distância entre as bordas da seção à face externa do estribo) de 2,5 cm e estribos de 5 mm. Desta forma, aproxima-se de  $d' = 4$  cm, utilizado no trabalho de referência de Pinheiro, Baraldi e Porem (2009).

As seções ótimas obtidas nos casos de dimensionamento (b), (c) e (d) encontram-se na figura 6.4.

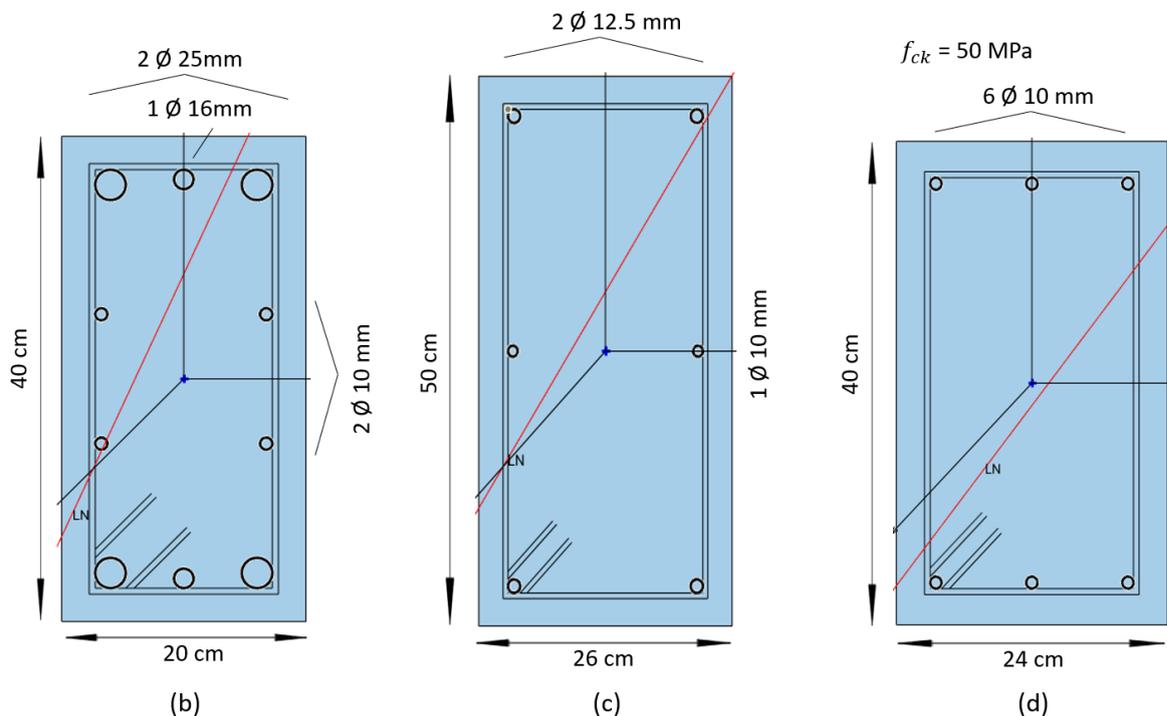


Figura 6.4 – Detalhamento das seções obtidas nas otimizações no exemplo 1.

A tabela 6.1 apresenta a quantidade de material utilizado e o custo total obtido pela função objetivo em cada situação.

Tabela 6.1 – Soluções ótimas do exemplo 1.

Método	$V_C$ ( $\text{cm}^3$ )	$A_S$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_F$ ( $\text{cm}^2$ )	Taxa de armadura (%)	Custo Total (R\$)	Varição (%)
(a) Ábacos de interação (Pinheiro, Baraldi e Porem, 2009)	800	29,45	120	3,68%	174,47	
<b>(b) QPSO geometria fixa</b>	<b>800</b>	<b>26,80</b>	<b>120</b>	<b>3,35%</b>	<b>163,66</b>	<b>-6,20%</b>
<b>(c) QPSO geometria variável</b>	<b>1300</b>	<b>6,48</b>	<b>152</b>	<b>0,50%</b>	<b>104,87</b>	<b>-39,89%</b>
<b>(d) QPSO geometria e <math>f_{ck}</math> variável</b>	<b>960</b>	<b>4,71</b>	<b>128</b>	<b>0,49%</b>	<b>87,79</b>	<b>-49,68%</b>

No primeiro caso estudado, onde otimiza-se apenas a disposição das barras, foi possível reduzir a área de aço de 29,45cm<sup>2</sup> para 26,80 cm<sup>2</sup>, gerando uma economia de custo de 6,20% em relação ao caso (a), como indicado na tabela 6.1. Nos demais casos, a variação foi ainda mais significativa. Ao incluir na otimização as dimensões da seção transversal, obteve-se uma redução de custo de 39,89% em relação à seção (a). Por fim, ao incluir também como variável a resistência característica do concreto, a redução foi ainda maior. A solução (d) atingiu 49,68% de economia utilizando  $f_{ck} = 50$  MPa. Percebe-se que as soluções ótimas são encontradas com a redução da área de aço, com taxas de armadura próximas ao valor mínimo permitido pelas restrições, de 0,40%. Neste exemplo, o custo do aço é o fator dominante na otimização dos custos da seção.

As seções (b), (c) e (d) apresentaram um fator de proporcionalidade ( $\lambda$ ) entre os esforços atuantes e resistentes de 0,990, 0,994 e 0,972, respectivamente, indicando que geralmente as soluções ótimas são encontradas ao reduzir ao máximo o material utilizado a ponto de que os esforços resistentes se tornem iguais ou muito próximos aos esforços atuantes.

No exemplo em estudo, nota-se uma significativa redução de custo na seção transversal ao utilizar o método de otimização proposto, principalmente nos casos (c) e (d). Este resultado é esperado, visto que quanto mais variáveis de projeto na otimização, mais possibilidades de solução são permitidas. Estas soluções ilustram a vantagem de utilizar métodos de otimização como auxílio no dimensionamento de seções de concreto armado.

## 6.2 Exemplo 2 – Seção Retangular: Estudo de parâmetros do algoritmo QPSO

Esse exemplo trata de um problema de dimensionamento de um pilar submetido à flexocompressão oblíqua, introduzido e solucionado através de otimização baseada em algoritmos genéticos por Bastos (2004), que também incluiu uma comparação com os resultados do dimensionamento convencional por ábacos de interação de Montoya, Meseguer e Cabré (1994).

O exemplo será apresentado em três subseções: a seção 6.2.1 descreve o problema e apresenta as soluções obtidas por Bastos (2004). A seção 6.2.2 traz um estudo sobre os parâmetros utilizados no algoritmo QPSO e a influência em encontrar os mesmos resultados em rodadas independentes. Por fim, a seção 6.2.3 compara as soluções ótimas obtidas neste trabalho com as soluções ótimas de Bastos (2004).

### 6.2.1 Descrição do problema e soluções conhecidas

O exemplo considera uma seção transversal retangular de 40 x 60 cm sujeita a um esforço normal solicitante com valor de cálculo  $N_d = 855$  kN e momentos fletores com valor de cálculo  $M_{xd} = 490$  kNm e  $M_{yd} = 230$  kNm. Os dados utilizados para o dimensionamento foram: concreto com  $f_{ck} = 25$  MPa, tensão de escoamento do aço  $f_y = 420$  MPa, peso específico  $\rho_s = 7850$  kg/m<sup>3</sup> e o cobrimento nominal de 2,5 cm. Os custos unitários dos materiais utilizados foram, respectivamente, para o concreto, aço e fôrmas:  $C_c = 390$  R\$/m<sup>3</sup>,  $C_s = 7,6$  R\$/kg e  $C_f = 78$  R\$/m<sup>2</sup>, valores indicados no trabalho de Bastos (2004). O trabalho não fornece informações sobre o estribo utilizado.

Para fins de comparação, os resultados apresentados em Bastos (2004) são reproduzidos nesta seção. São comparadas soluções para a estrutura dimensionada de três formas diferentes. A primeira solução utilizou os ábacos de Montoya, Meseguer e Cabré (1994), com dimensões pré-definidas de 40 x 60 cm. A segunda solução foi dimensionada de acordo com programa desenvolvido por Bastos (2004) baseado nos algoritmos genéticos, mantendo a geometria fixa em 40 x 60 cm. Finalmente, a terceira solução toma as dimensões da seção também como variável de projeto no programa de otimização. A figura 6.5 a seguir apresenta as soluções obtidas no trabalho de Bastos (2004), onde:

- (a) Solução por ábaco de interação;
- (b) Solução ótima com geometria fixa;
- (c) Solução ótima com geometria variável.

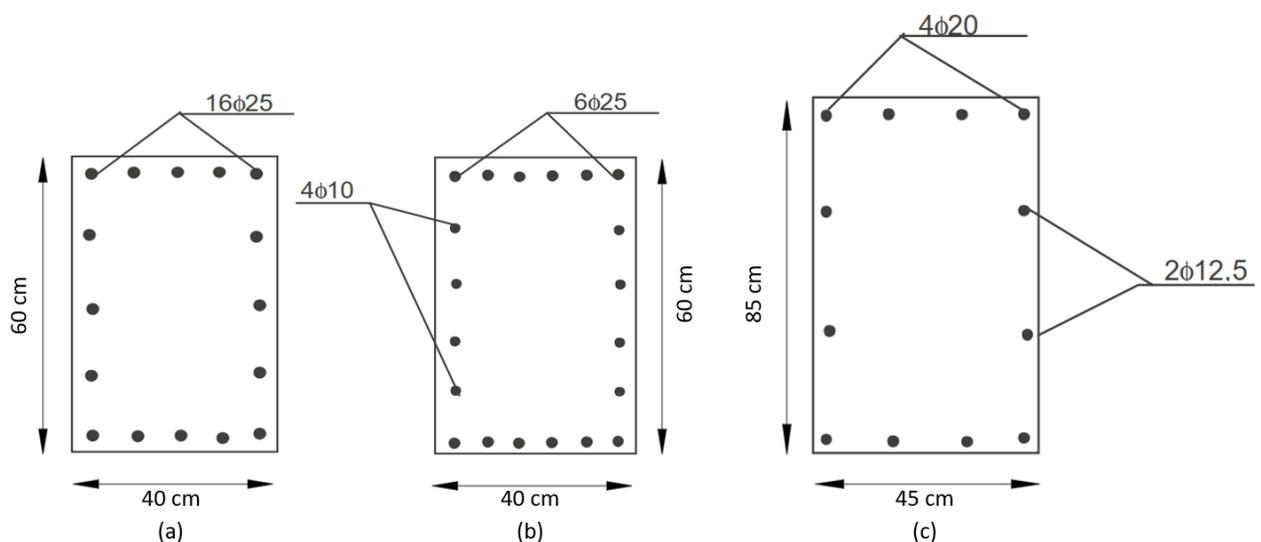


Figura 6.5 – Detalhamento das seções do exemplo 2 dimensionadas por Bastos (2004).  
(fonte: adaptado de Bastos, 2004)

A tabela 6.2 a seguir apresenta a quantidade de material utilizado e o custo total obtido para cada uma das soluções.

Tabela 6.2 – Soluções de Bastos (2004) para o exemplo 2.

Método	V <sub>C</sub> (cm <sup>3</sup> )	A <sub>S</sub> (cm <sup>2</sup> )	A <sub>F</sub> (cm <sup>2</sup> )	Taxa de armadura (%)	Custo Total (R\$)	Variação (%)
(a) Ábacos de interação (Bastos, 2004)	2400	78,54	200	3,27%	718,14	
(b) A.G. geometria fixa (Bastos, 2004)	2400	65,18	200	2,72%	638,49	-11,09%
(c) A.G. geometria variável (Bastos, 2004)	3825	30,06	260	0,79%	530,06	-26,20%

As três soluções foram analisadas pelo algoritmo de verificação de seções poligonais deste trabalho. A solução (a) obteve um fator de proporcionalidade  $\lambda = 0,8855$ , bem abaixo de 1, o que indica que a seção pode estar superdimensionada. Este resultado é indesejado, porém comum, pois o dimensionamento através de ábacos de interação é suscetível ao uso subótimo de material. A seção (b) obteve  $\lambda = 1,0001$ , considerada segura dentro dos limites de tolerância numérica. Finalmente, a seção (c) possui  $\lambda = 1,011$ . Os esforços resistentes são levemente inferiores aos esforços atuantes. Por esse motivo, esta solução seria penalizada pela metodologia desenvolvida neste trabalho por considerar que a seção não se encontra dentro dos limites de segurança, tornando-a inviável como solução ótima.

É importante destacar que a disposição de barras proposta por Bastos (2004) em sua otimização é ligeiramente diferente da distribuição proposta neste trabalho na seção 5.1. Conforme figura 6.6, o autor determinou que toda a camada horizontal de barras possui o mesmo diâmetro. Assim, há apenas dois diferentes diâmetros de barra em sua seção transversal, uma para as camadas horizontais e uma para as verticais. Na otimização deste trabalho, esta diferença será alinhada de forma que a variável do diâmetro das barras horizontais  $x_5$  seja igual ao diâmetro das barras de canto  $x_3$ . Desta forma, é possível replicar exatamente a mesma distribuição de armadura utilizada por Bastos (2004). As soluções de Bastos (2004) serão comparadas com as soluções encontradas neste trabalho na seção 6.2.3.

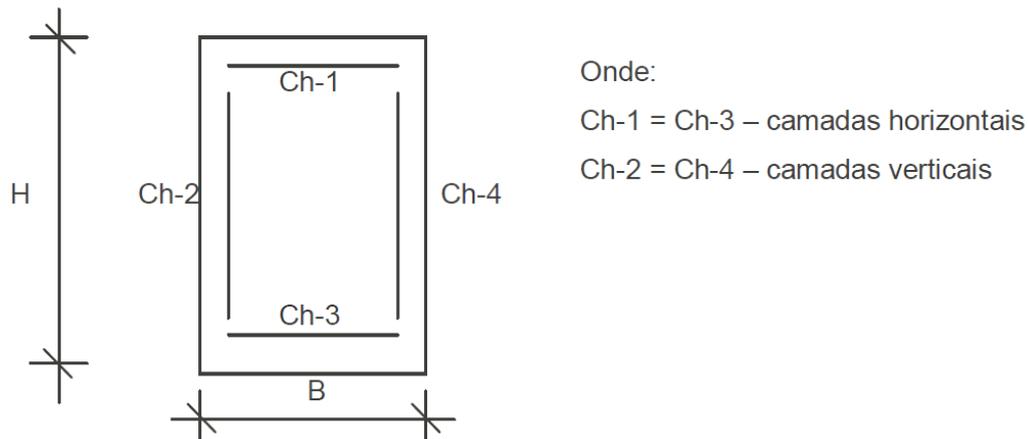


Figura 6.6 – Detalhamento da seção do programa empregado por Bastos (2004). (Fonte: Bastos, 2004)

### 6.2.2 Análise de desempenho do algoritmo QPSO

Esta seção apresenta uma análise sobre a influência dos parâmetros utilizados no algoritmo QPSO, principalmente com relação ao número de partículas da população e ao número total de avaliações da função objetivo em cada otimização. O número total de avaliações da função objetivo consiste no número de vezes que o algoritmo de otimização soluciona a função objetivo. No caso específico deste trabalho, esta solução representa o custo da seção transversal. Nesta seção, o número total de avaliações da função objetivo será definido como  $N_f$ . O valor adotado de  $N_f$  é fundamental para determinar o nível de precisão da solução ótima que se deseja obter. Porém, tem como contrapartida o aumento no tempo de processamento do algoritmo, sendo necessário encontrar um ponto de equilíbrio entre o tempo de processamento e a qualidade final da solução. O estudo do número de partículas, definido como  $N_{pop}$ , visa encontrar o tamanho da população ideal, que resulte em soluções mais confiáveis, com menor média e desvio padrão.

O mesmo exemplo foi reproduzido diversas vezes pelo algoritmo QPSO, alterando o número de partículas ( $N_{pop}$ ) e também o número de avaliações da função ( $N_f$ ), este último tornando-se o critério de parada. Ou seja, ao atingir o  $N_f$  predeterminado o algoritmo é interrompido. As simulações foram feitas para  $N_f = 1000, 2000, 5000, 10000$  e  $15000$ . Para cada situação, considerou-se populações com  $N_{pop} = 10, 20, 40, 50, 100$  e  $200$ . O número de gerações do algoritmo de otimização é determinado por

$$N_{ger} = \frac{N_f}{N_{pop}} \quad (6.7)$$

onde:

$N_{ger}$  = número de gerações da otimização;

$N_f$  = número de avaliações da função objetivo;

$N_{pop}$  = tamanho da população.

O estudo dos efeitos de cada combinação de parâmetros foi realizado com base em 30 repetições independentes do problema, a partir das quais se determina a solução ótima, a média, o desvio padrão e o valor máximo da função. A partir destes dados, pode-se determinar o Coeficiente de Variação Percentual (CV), conforme equação 6.8.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (6.8)$$

Onde  $\sigma$  representa o desvio padrão e  $\bar{x}$  representa a média.

O tempo de processamento do algoritmo em cada simulação também foi computado. Como este resultado é muito particular e varia de acordo com o equipamento computacional utilizado, optou-se por normalizar o tempo usando como referência o primeiro caso com 10 partículas.

O exemplo foi estudado de duas formas, primeiramente manteve-se as dimensões da seção transversal original de 40 x 60 cm, variando apenas a disposição das barras de aço. Em seguida, as dimensões tornaram-se livres para serem otimizadas. O primeiro caso, por ser menos complexo, encontrou soluções bastante confiáveis com  $N_f$  menor. Portanto, o foco do estudo será mais voltado para o caso 2, com geometria variável. A tabela 6.3, a seguir, apresenta os resultados obtidos para cada simulação do caso 1, com as dimensões da seção transversal fixas.

Tabela 6.3 – Soluções do algoritmo QPSO para geometria fixa.

<b>CASO 1 - DIMENSÕES FIXAS</b>						
<b>N<sub>f</sub> = 1000</b>						
nº de partículas ( $N_{pop}$ )	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>200</b>
Número de gerações ( $N_{ger}$ )	100	50	25	20	10	5
Melhor solução (em R\$)	631,95	627,71	627,71	627,71	627,71	627,71
Média ( $\bar{x}$ )	644,75	637,19	636,09	636,27	634,83	633,93
Razão Média/Melhor solução	1,02	1,015	1,013	1,014	1,011	1,01
Desvio Padrão ( $\sigma$ )	10,46	7,32	5,46	6,45	3,49	5,7
Solução máxima de $f(x)$	678,57	660,44	650,23	652,94	646,52	656,84
Coefficiente de Variação (CV)	1,62%	1,15%	0,86%	1,01%	0,55%	0,9%
<b>N<sub>f</sub> = 2000</b>						
nº de partículas ( $N_{pop}$ )	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>200</b>
Número de gerações ( $N_{ger}$ )	200	100	50	40	20	10
Melhor solução (em R\$)	633,12	627,71	627,71	627,71	627,71	627,71
Média ( $\bar{x}$ )	652,68	636,89	635,75	634,66	631,47	633,81
Razão Média/Melhor solução	1,031	1,015	1,013	1,011	1,006	1,01
Desvio Padrão ( $\sigma$ )	18,08	10,44	6,04	6,64	4,18	6,98
Solução máxima de $f(x)$	695,7	660,66	659,47	654,63	646,52	657,44
Coefficiente de Variação (CV)	2,77%	1,64%	0,95%	1,05%	0,66%	1,1%
<b>N<sub>f</sub> = 5000</b>						
nº de partículas ( $N_{pop}$ )	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>200</b>
Número de gerações ( $N_{ger}$ )	500	250	125	100	50	25
Melhor solução (em R\$)	627,71	627,71	627,71	627,71	627,71	627,71
Média ( $\bar{x}$ )	640,6	636,73	634,29	634,21	631,59	631,28
Razão Média/Melhor solução	1,021	1,014	1,01	1,01	1,006	1,006
Desvio Padrão ( $\sigma$ )	11,87	7,55	5,27	5,72	3,74	4,5
Solução máxima de $f(x)$	691,93	652,83	652,19	652,19	641,23	641,23
Coefficiente de Variação (CV)	1,85%	1,19%	0,83%	0,9%	0,59%	0,71%

Nos dois primeiros cenários, com  $N_f = 1000$  e  $2000$ , somente com 10 partículas não foi encontrada a solução ótima, todos os demais tamanhos de população obtiveram a mesma solução. Para  $N_f = 5000$ , a mesma solução ótima foi encontrada em todos os tamanhos de população. Portanto, para situações de geometria fixa entende-se que 5000 avaliações da função objetivo é o suficiente para obter um resultado satisfatório.

A média e o desvio padrão diminuem conforme aumenta o número de partículas, consequentemente o coeficiente de variação tem o mesmo comportamento. Entretanto, a maior população, com 200 partículas, apresentou piora nos resultados em relação às demais. Em situações com poucas avaliações da função objetivo, utilizar 200 partículas acarreta em uma otimização com poucas gerações, sendo insuficiente para o algoritmo convergir. O algoritmo é interrompido precocemente e produz soluções ruins, com o consequente aumento do desvio padrão e em alguns casos, da média.

A seguir, a tabela 6.4 traz as soluções obtidas referentes ao caso 2, com geometria variável, e a figura 6.7 apresenta os gráficos comparativos entre os indicadores estudados para este caso.

Tabela 6.4 – Soluções do algoritmo QPSO para geometria variável.

<b>CASO 2 - DIMENSÕES VARIÁVEIS</b>						
<b>N<sub>f</sub> = 2000</b>						
nº de partículas ( $N_{pop}$ )	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>200</b>
Número de gerações ( $N_{ger}$ )	200	100	50	40	20	10
Melhor solução	523,38	526,97	523,69	523,34	526,29	531,34
Média ( $\bar{x}$ )	541,17	538,46	533,23	534,6	535,09	539,43
Razão Média/Melhor solução	1,034	1,022	1,018	1,022	1,017	1,015
Desvio Padrão ( $\sigma$ )	11,17	9,94	5,25	5,82	5,04	5,18
Solução máxima de $f(x)$	577,66	583,7	543,07	548,97	547,07	552,62
Coeficiente de Variação (CV)	2,06%	1,85%	0,98%	1,09%	0,94%	0,96%
Tempo (s)	3241,2	3276,6	3355,9	3396,1	3642,8	4157,9
Tempo normalizado (s)	1.00	1,01	1,04	1,05	1,12	1,28
<b>N<sub>f</sub> = 5000</b>						
nº de partículas ( $N_{pop}$ )	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>200</b>
Número de gerações ( $N_{ger}$ )	500	250	125	100	50	25
Melhor solução	526,87	522,42	518,6	523,08	518,83	519,25
Média ( $\bar{x}$ )	541,34	532,19	532,64	530,58	528,79	531,12
Razão Média/Melhor solução	1,027	1,019	1,027	1,014	1,019	1,023
Desvio Padrão ( $\sigma$ )	9,78	7,19	6,49	4,36	4,7	5,37
Solução máxima de $f(x)$	566,05	561,39	547,4	538,83	537,95	538,57
Coeficiente de Variação (CV)	1,81%	1,35%	1,22%	0,82%	0,89%	1,01%
Tempo (s)	7350,7	7110,1	7396,7	7360,1	7759,7	8223,9
Tempo normalizado (s)	1.00	0,97	1,01	1.00	1,06	1,12
<b>N<sub>f</sub> = 10000</b>						
nº de partículas ( $N_{pop}$ )	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>200</b>
Número de gerações ( $N_{ger}$ )	1000	500	250	200	100	50
Melhor solução	518,48	518,83	518,48	518,6	518,48	518,48
Média ( $\bar{x}$ )	534,43	534,79	530,36	529,76	529,65	524,96
Razão Média/Melhor solução	1,031	1,031	1,023	1,022	1,022	1,013
Desvio Padrão ( $\sigma$ )	7,53	8,85	5,13	5,55	5,2	4,54
Solução máxima de $f(x)$	554,9	561,5	539,56	541,13	538,55	536,18
Coeficiente de Variação (CV)	1,41%	1,65%	0,97%	1,05%	0,98%	0,86%
Tempo (s)	14519	14547	14293	14275	14547	15414
Tempo normalizado (s)	1.00	1.00	0,98	0,98	1.00	1,06
<b>N<sub>f</sub> = 15000</b>						
nº de partículas ( $N_{pop}$ )	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>200</b>
Número de gerações ( $N_{ger}$ )	1500	750	375	300	150	75
Melhor solução	518,83	520,08	519,38	519,38	520,2	518,48
Média ( $\bar{x}$ )	528,38	531,29	532,66	531,74	527,48	525,05
Razão Média/Melhor solução	1,018	1,022	1,026	1,024	1,014	1,013
Desvio Padrão ( $\sigma$ )	5,69	5,82	6,34	6,59	4,07	4,06
Solução máxima de $f(x)$	545,97	542,73	547,74	543,35	536,9	534,83
Coeficiente de Variação (CV)	1,08%	1,1%	1,19%	1,24%	0,77%	0,77%
Tempo (s)	24350	23518	22726	22877	23228	23747
Tempo normalizado (s)	1.00	0,97	0,93	0,94	0,95	0,98

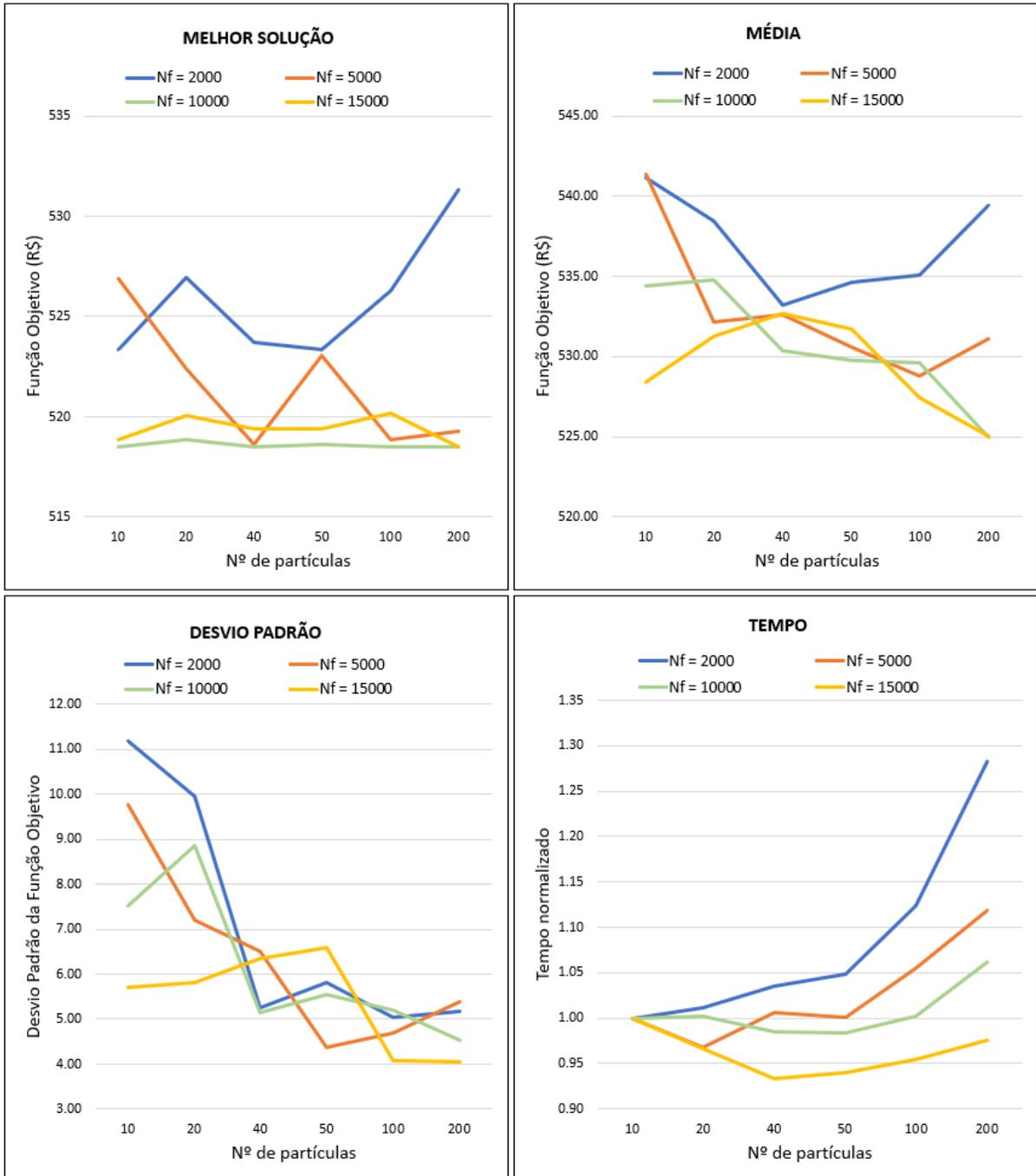


Figura 6.7 – Gráfico das soluções do algoritmo QPSO para geometria variável.

A partir dos dados obtidos, podem ser estabelecidas algumas conclusões sobre o comportamento do algoritmo. Em situações simples de dimensionamento, como no caso 1 com dimensões fixas, a variação dos parâmetros possui uma influência pequena no comportamento do algoritmo, visto que em todas as situações os resultados encontrados foram satisfatórios. Já no caso 2 com geometria variável, percebe-se que nas situações com  $N_f < 5000$  as soluções oscilaram bastante. Mesmo com 30 soluções para cada cenário, a solução ótima foi diferente em todas as simulações com diferentes tamanhos de população. A partir de  $N_f = 10000$ , as soluções encontradas começaram a convergir para a mesma solução ótima ou para soluções

muito próximas da ótima. Logo, entende-se que para obter uma solução aceitável para o exemplo estudado é necessário utilizar pelo menos 10000 avaliações da função objetivo.

O coeficiente de variação (CV) foi considerado baixo em todas as simulações, ficando próximo a 1% na maioria das simulações. O pior cenário no caso 2 encontrou  $CV = 2,06\%$ , com  $N_f = 2000$  e 10 partículas, e o melhor foi  $CV = 0,77\%$ , com  $N_f = 15000$  e 200 partículas. Os resultados indicam a tendência de que o aumento do  $N_f$  em conjunto com o aumento do tamanho da população resulta em uma maior homogeneidade das soluções.

A média e o desvio padrão tendem a diminuir conforme o aumento do número de partículas, mas somente até certo ponto. Em simulações com poucas avaliações da função objetivo, percebe-se que estes valores voltam a subir em determinado momento. Uma das razões para este efeito é que as simulações com muitas partículas possuem um número menor de gerações até o critério de parada e com isso não conseguem convergir a tempo para o ponto ótimo. Nota-se também que quanto maior o  $N_f$ , menor é a influência do número de partículas, pois todos os tamanhos de população encontram soluções confiáveis, com menor variação. Nas simulações com tamanho de população intermediária (40 e 50 partículas) os indicadores de eficiência tendem a estabilizar e sofrer uma variação menor em comparação com populações maiores. Além disso, são menos sensíveis ao número de chamadas da função, apresentando desempenho satisfatório em todas as simulações propostas.

Em geral, o tempo de processamento do algoritmo cresce de acordo com o aumento do número de partículas. Quanto menor o número total de avaliações da função objetivo, maior a influência do número de partículas no tempo total de processamento. Para  $N_f = 2000$ , a variação chegou a 28% entre os extremos (10 e 200 partículas). Para  $N_f = 5000$  e 10000 esta variação foi de 12% e 6%, respectivamente. O comportamento com 15000 chamadas foi diferente, o tempo de processamento foi bastante próximo nos extremos (10 e 200 partículas), e inferior nas situações intermediárias (40 e 50 partículas), com uma variação máxima de 8%. Em relação ao número total de avaliações da função objetivo, o tempo de processamento aumenta de forma próxima à linear. Desta forma, a escolha deste parâmetro depende da complexidade do problema.

A tabela 6.5 apresenta o tempo médio de processamento do algoritmo para resolver as 30 reproduções independentes do exemplo de acordo com o número de avaliações da função objetivo ( $N_f$ ), considerando todos os tamanhos de população. O tempo foi normalizado usando como referência o primeiro caso, com  $N_f = 2000$ .

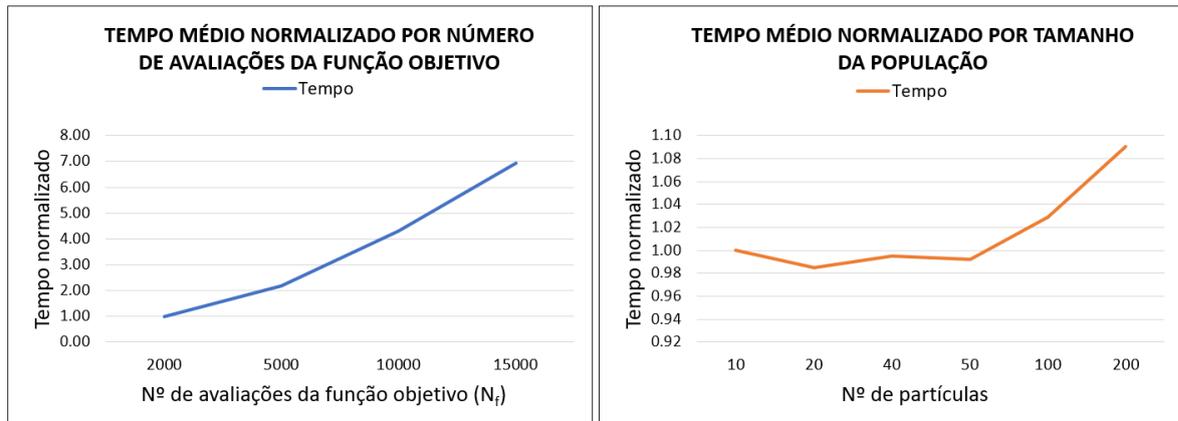
Tabela 6.5 – Tempo médio de processamento do algoritmo QPSO de acordo com o  $N_f$ .

$N_f$	2000	5000	10000	15000
Tempo médio (s)	3376.00	7378.40	14533.00	23373.00
Tempo normalizado	1.00	2.19	4.30	6.92

A tabela 6.6 apresenta o tempo médio normalizado de processamento do algoritmo de acordo com o tamanho da população. Ou seja, o tempo total de cada simulação foi normalizado e agrupado de acordo com o tamanho da população ( $N_{pop}$ ). Então calculou-se o tempo médio referente à cada  $N_{pop}$  estudado. O tempo foi normalizado utilizando como referência o primeiro tamanho de população, de 10 partículas. A figura 6.8 apresenta graficamente os dados apresentados nas tabelas 6.5 e 6.6.

Tabela 6.6 – Tempo médio de processamento do algoritmo QPSO de acordo com  $N_{pop}$ .

nº de partículas	10	20	40	50	100	200
Tempo médio normalizado	1.000	0.985	0.995	0.992	1.029	1.090

Figura 6.8 – Tempo médio normalizado, por  $N_f$  e nº de partículas.

O tempo de processamento do algoritmo QPSO é determinado majoritariamente pelo número total de avaliações da função objetivo, que cresce de forma próxima à linear. Entretanto, dentro de um número igual de avaliações da função objetivo ( $N_f$ ), o tempo variou de acordo com o número de partículas ( $N_{pop}$ ) adotado. A fim de investigar as razões deste fato, fez-se uma simulação computando também o número de iterações necessárias para a convergência do algoritmo de verificação da seção transversal, conforme seção 3.2. As simulações foram feitas para  $N_f = 2000$  e  $15000$ , que são os casos extremos onde houve maior e menor variação do tempo, respectivamente. A tabela 6.7 apresenta o número total de iterações (NIT) para a convergência do algoritmo Nelder-Mead, que trata da avaliação dos esforços resistentes da seção transversal, e o tempo de processamento necessário.

Tabela 6.7 – Número total de iterações do algoritmo de verificação.

<b>N<sub>f</sub> = 2000</b>						
nº de partículas ( $N_{pop}$ )	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>200</b>
Número de gerações ( $N_{ger}$ )	200	100	50	40	20	10
NIT Total	30708212	32604549	35247409	34699904	38218794	41640360
NIT Médio por partícula	512	543	587	578	637	694
NIT Normalizado	1.00	1.07	1.16	1.15	1.23	1.37
Tempo (s)	2808.3	3090.4	3187	3205.4	3463.7	3829.7
Tempo Normalizado	1	1.10	1.13	1.14	1.23	1.36
<b>N<sub>f</sub> = 15000</b>						
nº de partículas ( $N_{pop}$ )	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>200</b>
Número de gerações ( $N_{ger}$ )	1500	750	375	300	150	75
NIT Total	242856647	231682638	236387000	240127347	247310619	255868701
NIT Médio por partícula	540	515	525	534	550	569
NIT Normalizado	1.00	0.95	0.97	0.99	1.02	1.05
Tempo (s)	22049	20328	21036	22249	23137	24029
Tempo Normalizado	1	0.92	0.95	1.01	1.05	1.09

Onde o NIT total é o número total de iterações, em determinado  $N_f$ , para reproduzir 30 soluções independentes do algoritmo de otimização. O NIT Médio por partícula pode ser definido como

$$NIT \text{ médio} = \frac{NIT \text{ Total}}{30 \cdot N_{pop} \cdot N_{ger}} \quad (6.9)$$

Nota-se uma correlação muito evidente entre o número de iterações do algoritmo de verificação com o tempo de processamento, conforme figura 6.9. O NIT médio cresce associadamente ao número de partículas e resulta no aumento do tempo de processamento. Desta forma, percebe-se que a variação do tempo não está relacionada ao algoritmo de otimização, e sim à convergência do algoritmo de verificação da seção.

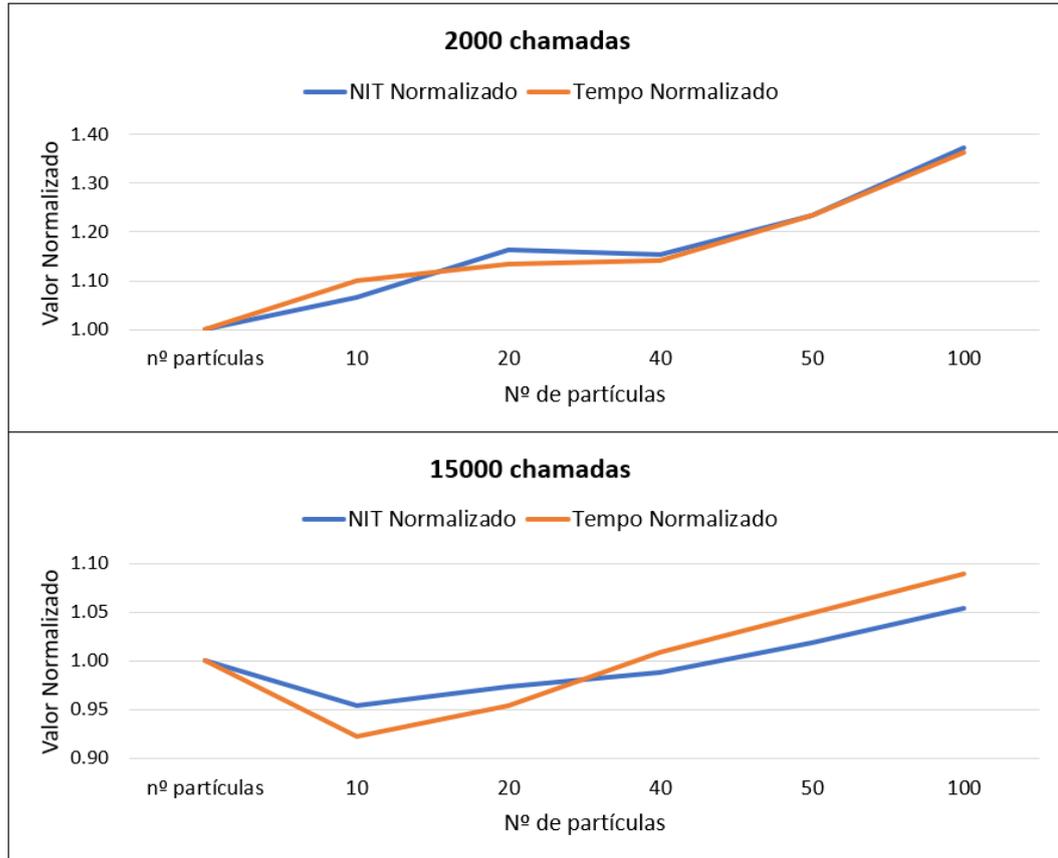


Figura 6.9 – Número de iterações vs tempo de processamento.

De acordo com a figura 6.10 e 6.11 apresentadas a seguir, percebe-se também uma tendência a um número médio de iterações mais alto nas primeiras gerações, em que ocorre uma maior oscilação do NIT. Ao longo das gerações, o NIT médio tende a estabilizar, visto que o algoritmo começa a convergir para uma única solução. As figuras abaixo apresentam o NIT médio ao longo das gerações, para cada tamanho de população estudado. A simulação a seguir foi realizada com  $N_f = 2000$  e levou em consideração as três primeiras soluções dentre as 30 estudadas.

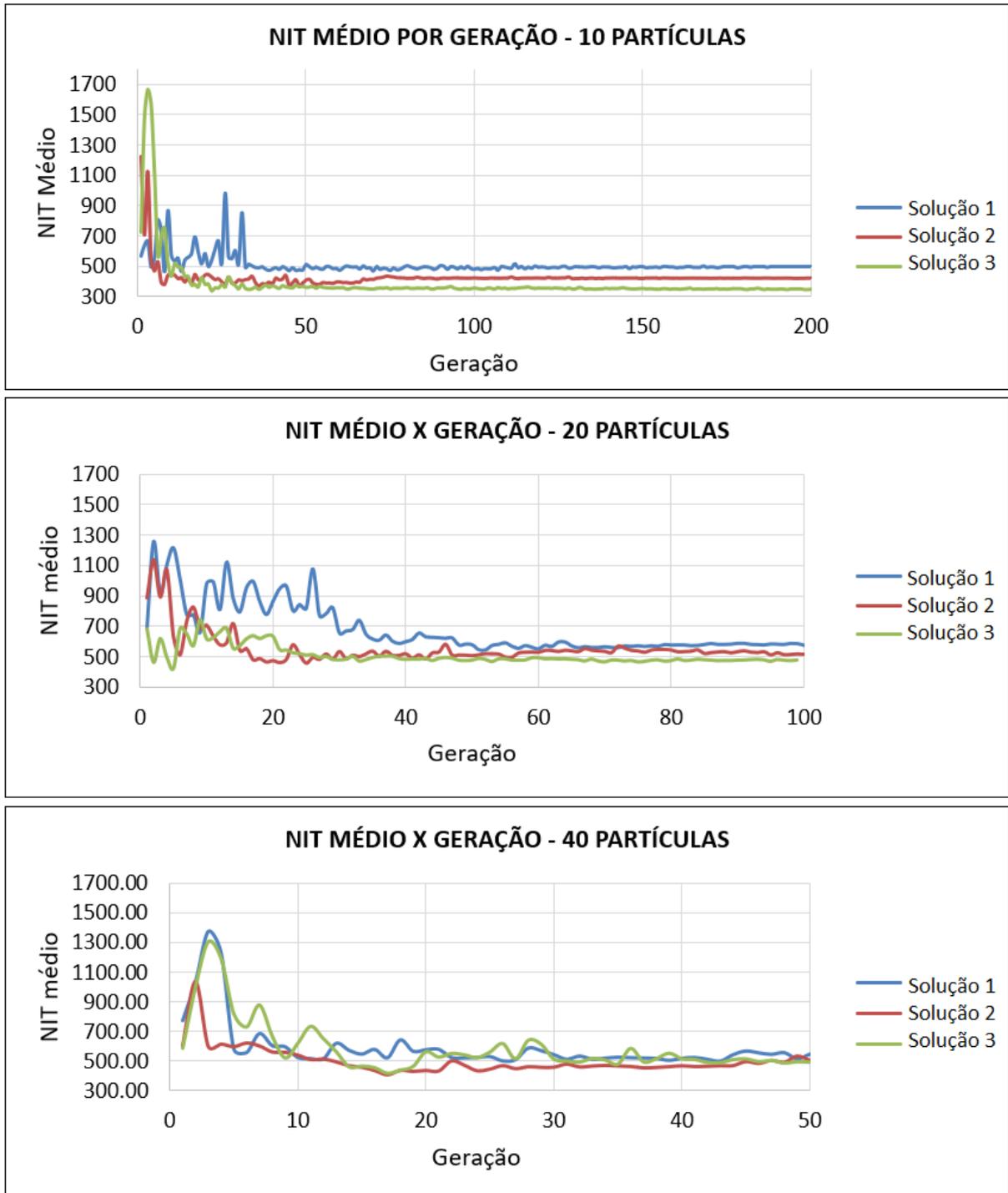


Figura 6.10 – Número de iterações Médio vs Geração, por tamanho da população (10, 20 e 40 partículas).

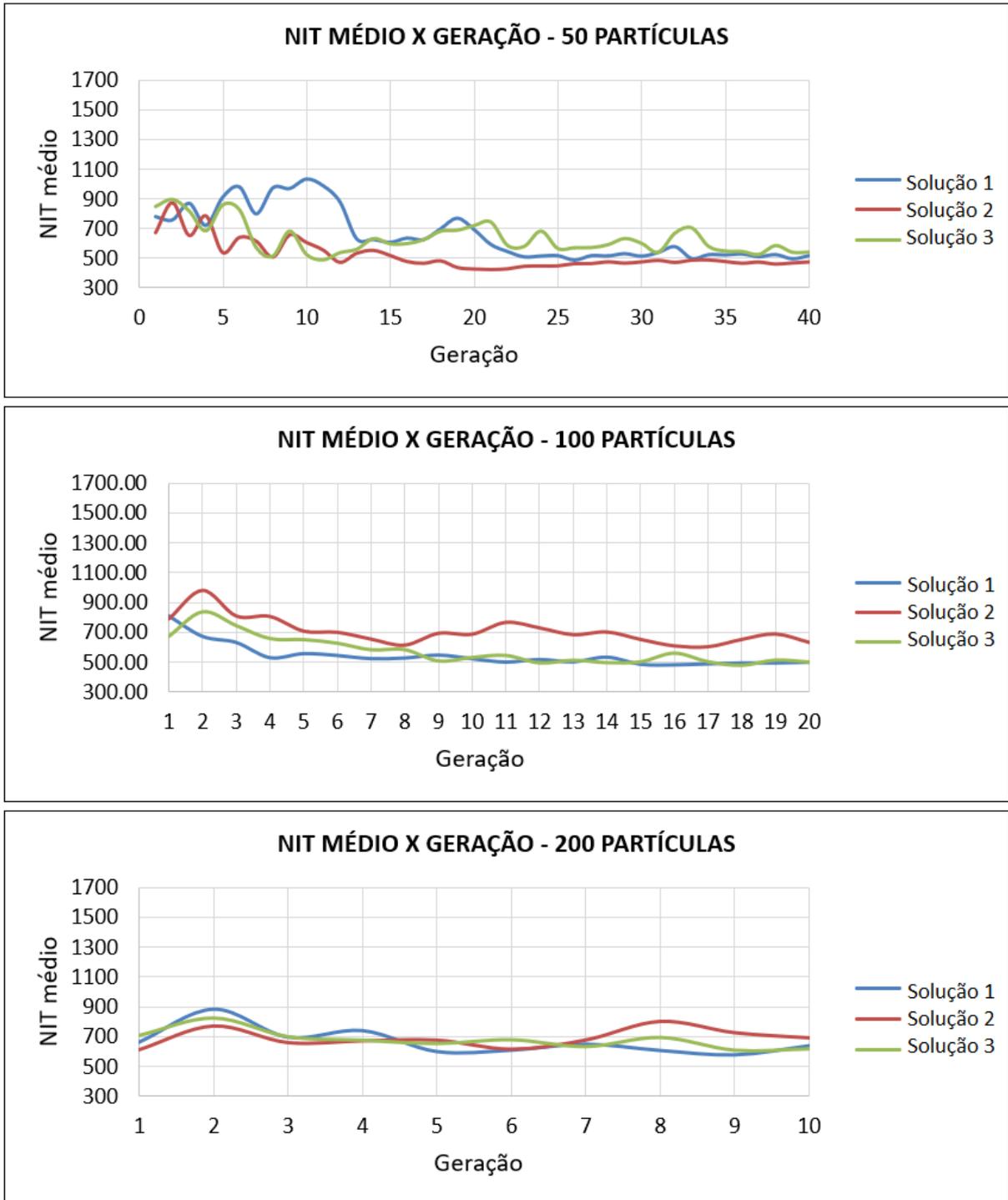


Figura 6.11 – Número de iterações Médio vs Geração, por tamanho da população (50, 100 e 200 partículas).

Conclui-se que populações maiores tendem a exigir mais iterações do algoritmo de verificação, e conseqüentemente consomem um maior tempo computacional. Uma das razões para este fenômeno é que grandes populações apresentam uma vasta gama de soluções aleatórias iniciais. Desta forma, há uma maior probabilidade de que as tentativas de solução se encontrem em regiões inviáveis, onde o algoritmo de verificação apresenta dificuldades para encontrar a

posição e inclinação da linha neutra que resulte na convergência da solução proposta. O fato de que as primeiras gerações apresentam um NIT com oscilações maiores, e nas gerações seguintes este valor estabiliza, corroboram a ideia de que o número de iterações está associado à essas soluções inviáveis. Não foi possível identificar um padrão para as características da seção que apresentam dificuldade de convergência. Este assunto poderá ser investigado mais profundamente em trabalhos futuros de forma a prevenir que esta situação ocorra.

Para o exemplo em estudo, entende-se que o equilíbrio entre eficiência e tempo de processamento do algoritmo foi alcançado com 10000 avaliações da função objetivo, população de 40 partículas e 250 gerações. Com estes parâmetros, o algoritmo se comportou de forma eficiente em todas as simulações propostas e obteve a solução ótima, com média e desvio padrão bastante próximas às encontradas nas simulações com tempo de processamento maior. Assim, para todos os exemplos numéricos estudados neste trabalho, a solução ótima foi obtida ao reproduzir o algoritmo configurado para reproduzir 30 soluções independentes, com  $N_f = 10000$ ,  $N_{pop} = 40$  e  $N_{ger} = 250$ .

### 6.2.3 Seções otimizadas

Esta seção apresenta as soluções obtidas pelo algoritmo deste trabalho e as compara com as soluções de Bastos (2004). Os dados de entrada do problema seguem as informações fornecidas em 6.2.1 e são estudadas as situações com geometria fixa e geometria variável. São consideradas duas distribuições de barras diferentes para o problema, sendo a primeira uma reprodução da disposição de barras utilizado em Bastos (2004), conforme figura 6.6, e a segunda segue a mesma distribuição proposta no item 5.1 deste trabalho. A figura 6.12, a seguir, apresenta as soluções obtidas pelo algoritmo QPSO, onde:

- (d) Solução ótima com geometria fixa, seguindo a distribuição de Bastos (2004);
- (e) Solução ótima com geometria fixa, seguindo a distribuição deste trabalho;
- (f) Solução ótima com geometria variável.

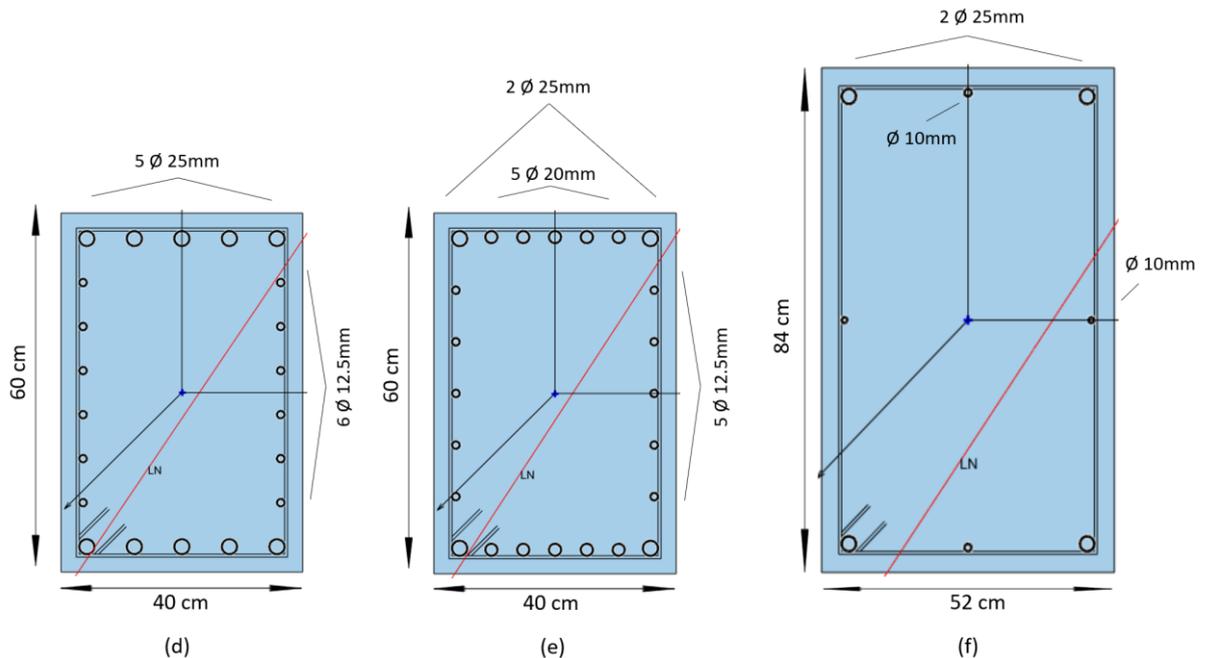


Figura 6.12 – Detalhamento das seções ótimas utilizando o QPSO

A tabela 6.8 a seguir apresenta a quantidade de material utilizado e o custo total obtido para cada uma das soluções obtidas pelo algoritmo QPSO.

Tabela 6.8 – Soluções para o exemplo 2.

Método	$V_C$ ( $\text{cm}^3$ )	$A_s$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_F$ ( $\text{cm}^2$ )	Taxa de armadura (%)	Custo Total (R\$)	Varição (%)
(a) Ábacos de interação (Bastos, 2004)	2400	78,54	200	3,27%	718,14	-
(b) A.G. geometria fixa (Bastos, 2004)	2400	65,18	200	2,72%	638,49	-11,09%
(c) A.G. geometria variável (Bastos, 2004)	3825	30,06	260	0,79%	530,06	-26,19%
<b>(d) QPSO geometria fixa 1</b>	<b>2400</b>	<b>63,81</b>	<b>200</b>	<b>2,66%</b>	<b>630,31</b>	<b>-12,23%</b>
<b>(e) QPSO geometria fixa 2</b>	<b>2400</b>	<b>63,32</b>	<b>200</b>	<b>2,64%</b>	<b>627,38</b>	<b>-12,64%</b>
<b>(f) QPSO geometria variável</b>	<b>4368</b>	<b>22,78</b>	<b>272</b>	<b>0,52%</b>	<b>518,40</b>	<b>-27,81%</b>

A partir dos resultados apresentados observa-se que as seções ótimas encontradas pelo algoritmo QPSO possuem um custo ligeiramente menor que as soluções de Bastos (2004). Nas seções com geometria fixa foi possível reduzir a área de aço e com isso diminuir o custo da seção em torno de 1,5%, com leve vantagem para a solução (e) que permite um arranjo de barras com mais possibilidades. A seção ótima com geometria variável apresentou uma redução de 2.20% em comparação com a solução de Bastos (2004). A área de concreto é consideravelmente maior e houve redução na área de aço. A taxa de armadura encontra-se novamente próxima do valor mínimo permitido, de 0,40%. Mais uma vez nota-se que o custo do aço é dominante no processo.

Em comparação com a seção original dimensionada por meio de ábacos de interação, todas as soluções otimizadas apresentaram uma redução de custo bastante significativa. Nos casos com geometria fixa houve uma economia acima de 12% e nas soluções com a geometria otimizada esta redução chegou a 27.81%.

### 6.3 Exemplo 3 – Seção Retangular: Flexocompressão Reta

Este exemplo foi estudado inicialmente por Argolo (2000) e trata o caso de um pilar retangular submetido à flexocompressão reta, onde atuam um esforço normal  $N_s = 2142,86$  kN e um momento fletor  $M_s = 375$  kNm. O autor parte de uma seção fixa em 30 x 70 cm, dimensionada por meio de Ábacos de Interação, e propõe uma nova configuração utilizando o método de otimização dos Algoritmos Genéticos. As variáveis do problema são as dimensões da seção de concreto e a distribuição das barras de armadura.

Posteriormente, Bordignon (2010) e Medeiros (2012) reproduziram o exemplo, empregando os métodos heurísticos de *Simulated Annealing* e Busca Harmônica, respectivamente. Em todas as soluções, foi adotado  $f_{ck}$  de 25 MPa,  $f_{yk}$  de 500 MPa e cobrimento nominal de 4 cm. Nestes trabalhos não há informações sobre o estribo utilizado. Desta forma, para efeito de comparação, no presente trabalho é utilizado cobrimento nominal de 3,5 cm e estribos com diâmetro de 5 mm para tornar o posicionamento das barras longitudinais equivalentes. Os dados de custo unitário utilizados são os mesmos do trabalho de Argolo (2000), referentes a março de 2000. Assim, os valores adotados são  $C_c$  (R\$/m<sup>3</sup>) = 125,00,  $C_s$  (R\$/kg) = 1,27 e  $C_f$  (R\$/m<sup>2</sup>) = 16,49.

No trabalho de Argolo (2000), a seção dimensionada por ábaco de interação utiliza os esforços apresentados acima como esforços característicos, que são majorados para obter seus valores de cálculo e utilizá-los no ábaco. Porém, as soluções ótimas geradas tanto no trabalho original, quanto nos trabalhos posteriores que estudaram este exemplo, utilizam estes esforços diretamente como valores de cálculo. Devido à esta diferença, optou-se por utilizar os esforços de cálculo como  $N_{sd} = 2142,86$  kN e  $M_{sd} = 375$  kNm, assim como os demais autores, e refazer a seção original dimensionada por meio de ábacos de interação. Desta forma, todas as soluções apresentam os mesmos valores de cálculo  $N_{sd}$  e  $M_{sd}$ .

O ábaco utilizado foi o de Montoya, Meseguer e Cabré (1994), apresentado na figura 6.13. Para uma seção de 30 x 70 cm, aplica-se as equações para o dimensionamento apresentadas no exemplo 1 (Eq. 6.3 e 6.4) e obtém-se os esforços reduzidos adimensionais  $v = 0,57$  e  $\mu_x =$

0,15. Encontra-se a taxa mecânica de armadura  $\omega = 0.35$  e com isso pode-se obter a área de aço pela seguinte expressão:

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}} \rightarrow A_s = \frac{\omega \cdot A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,35 \cdot 30 \cdot 70 \cdot 1,7857}{43,478} = 30,2 \text{ cm}^2 \quad (6.10)$$

A seção dimensionada necessita 15,10 cm<sup>2</sup> em cada camada, superior e inferior. Portanto, adotou-se 5  $\phi$  20 mm, com área de 3,142 cm<sup>2</sup> em cada barra, totalizando 15,71 cm<sup>2</sup> em cada camada.

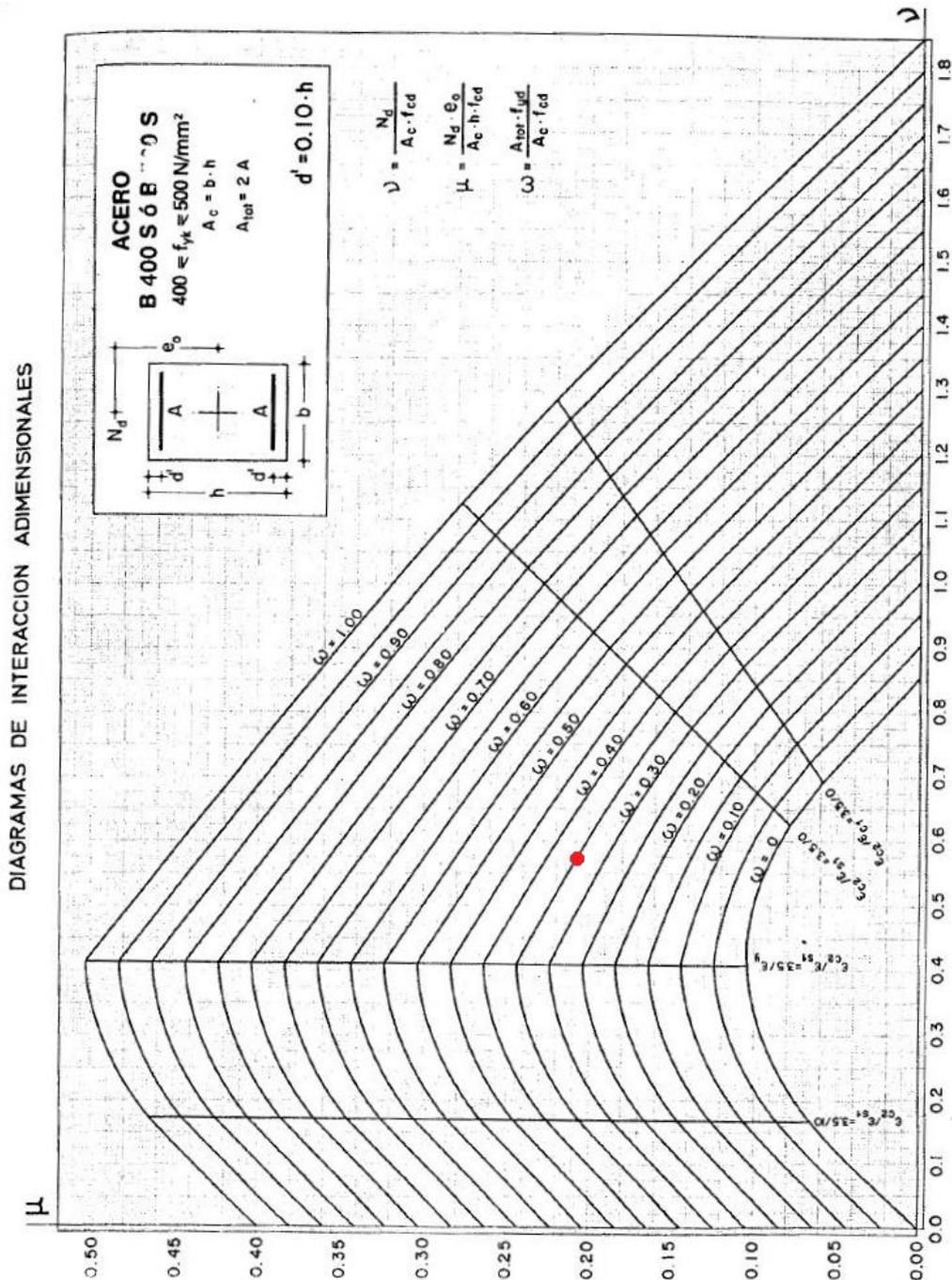


Figura 6.13 – Ábaco de interação (Fonte: adaptado de Montoya, Meseguer e Cabré, 1994)

O detalhamento das soluções obtidas encontra-se na figura 6.14, onde:

- (a) solução inicial por ábaco de interação;
- (b) solução ótima por algoritmos genéticos (ARGOLO, 2000);
- (c) solução ótima por *Simulated Annealing* (BORDIGNON, 2010);
- (d) solução ótima por Busca Harmônica (MEDEIROS, 2012).

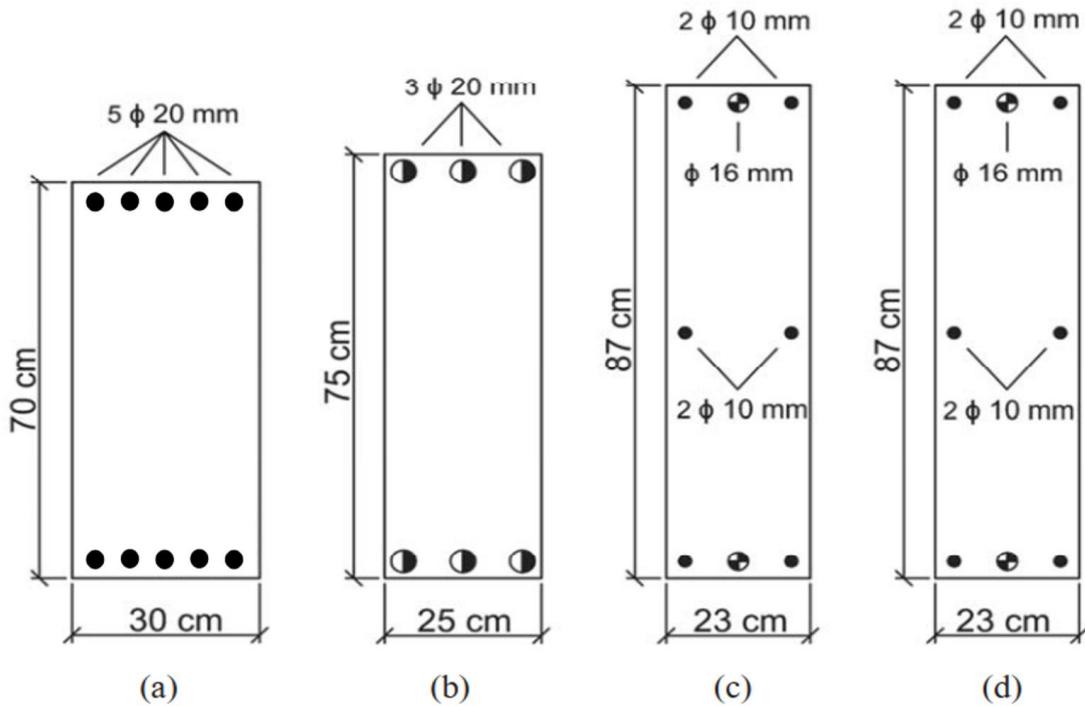


Figura 6.14 – Detalhamento das seções otimizadas do exemplo 3  
(Fonte: adaptado de Medeiros, 2012).

A mesma análise de verificação do algoritmo feita no exemplo 1 foi realizada para a solução ótima encontrada por Bordignon (2010) e Medeiros (2012). Ao inserir os dados da seção dimensionada, o algoritmo realiza a verificação da sua estabilidade. Entretanto, para esta configuração de seção, o programa verificou que a seção se encontra sem segurança segundo os critérios de resistência do método.

Ao verificar a seção, obteve-se  $\lambda = 1,0192$ . Quando  $\lambda > 1$ , significa que os esforços atuantes são maiores do que os resistentes e a seção não passa nos critérios de resistência. Assim, o algoritmo de otimização impõe uma penalização a esta solução, de modo que ela seja desconsiderada na busca pela solução ótima do algoritmo QPSO.

Esta discordância na verificação da solução pode ocorrer devido às diferenças no método de dimensionamento utilizado. Bordignon (2010) e Medeiros (2012) utilizaram os textos de Araújo

(2003) para o processo iterativo de verificação das capacidades resistentes, que apresenta um procedimento para análise de seções retangulares submetidas à flexocompressão reta. Neste trabalho, utiliza-se as considerações descritas por Campos Filho (2014) para seções poligonais submetidas à flexocompressão oblíqua, que também são válidas para flexocompressão reta. Além disso, neste trabalho a distribuição de tensões no concreto foi feita de acordo com o diagrama parábola-retângulo demonstrado na figura 3.4, enquanto que os outros autores utilizaram o diagrama retangular simplificado de tensões. A NBR 6118 (ABNT, 2014) diz que as diferenças de resultados obtidos por esses dois diagramas são pequenas e aceitáveis, sem necessidade de coeficiente de correção adicional. Entretanto, este conjunto de diferenças nas formulações empregadas pode ter ocasionado esta discordância entre as soluções, visto que soluções ótimas em geral estão muito próximas dos limites impostos pelas restrições de Estado Limite Último da seção.

Destaca-se também o fato de que as soluções (a) e (b) foram dimensionadas sem levar em consideração algumas disposições construtivas presentes nas normas mais recentes, como o espaçamento máximo permitido, logo estas soluções não seriam viáveis seguindo às restrições utilizadas neste trabalho. Ainda, as soluções (c) e (d) não apresentam a restrição  $g_{10}$ , que impede o diâmetro das barras intermediárias de ser maior do que o diâmetro das barras de canto. Por esta razão, para efeito de comparação são dimensionadas duas seções, uma mantendo esta restrição e a outra removendo-a.

A seguir, são apresentadas as soluções ótimas encontradas pelo algoritmo QPSO utilizando os parâmetros descritos anteriormente. A figura 6.15 apresenta a solução utilizando as condições de restrição e disposição das barras de armaduras conforme expostas no capítulo 5 deste trabalho, em que a solução (e) remove a restrição  $g_{10}$  e a solução (f) mantém. A tabela 6.9 apresenta a quantidade de material utilizado e o custo total obtido pela função objetivo em cada situação.

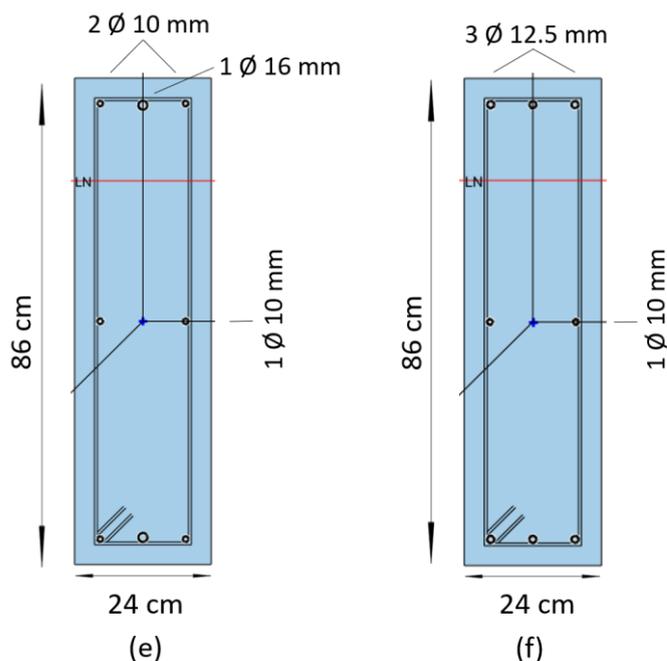


Figura 6.15 – Detalhamento das seções otimizadas pelo QPSO.

Tabela 6.9 – Soluções ótimas do exemplo 3.

Método	$V_C$ ( $\text{cm}^3$ )	$A_S$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_F$ ( $\text{cm}^2$ )	Taxa de armadura (%)	Custo Total (R\$)	Varição (%)
(a) Ábaco de Interação (Argolo, 2000)	2100	31,42	200	1,50%	90,55	-
(b) Algoritmos Genéticos (Argolo, 2000)	1875	18,85	200	1,01%	75,21	-16,9%
(c) <i>Simulated Annealing</i> (Bordignon, 2010)	2001	8,73	220	0,44%	70,00	-22,7%
(d) Busca Harmônica (Medeiros, 2012)	2001	8,73	220	0,44%	70,00	-22,7%
<b>(e) QPSO 1</b>	<b>2064</b>	<b>8,73</b>	<b>220</b>	<b>0,42%</b>	<b>70,78</b>	<b>-21,8%</b>
<b>(f) QPSO 2</b>	<b>2064</b>	<b>8,93</b>	<b>220</b>	<b>0,43%</b>	<b>70,98</b>	<b>-21,6%</b>

A partir dos resultados obtidos, pode-se observar que o QPSO alcançou um resultado muito próximo aos métodos da Busca Harmônica e *Simulated Annealing* para o exemplo proposto. Mantendo a mesma distribuição de barras dos trabalhos anteriores, a solução ótima (e) resultou em uma seção com  $b = 24$  cm e  $h = 86$  cm, com variação de apenas 1 cm em comparação com as soluções ótimas pelos métodos estudados em Bordignon (2010) e Medeiros (2012), que obtiveram  $b = 23$  cm e  $h = 87$  cm. A disposição encontrada para as barras de armadura foi exatamente igual, com uma pequena redução na taxa de armadura devido ao aumento no volume total do concreto. Este pequeno aumento de volume resultou em uma solução ótima com o custo total da seção em torno de 1% superior em comparação com as seções ótimas citadas. Inserindo a restrição do diâmetro das barras na solução (f), a seção apresentou as mesmas dimensões da solução (e), com um pequeno acréscimo de 0,2%, resultado compreensível devido à limitação da disposição das barras imposto pela restrição  $g_{10}$ .

Em comparação com a seção dimensionada por ábaco de interação (a), nota-se uma grande redução do custo total. O custo das soluções (e) e (f) foram 21,8% e 21,6% menor, enquanto que as soluções (c) e (d) chegaram a 22,7% de redução. A solução (b) de Argolo (2000) obteve uma redução de 16,90% em relação à seção original. Porém, esta seção foi dimensionada sem levar em consideração o espaçamento máximo permitido, portanto esta solução seria penalizada seguindo às restrições utilizadas neste trabalho.

É importante ressaltar que o método de dimensionamento de seções utilizado neste trabalho difere do utilizado por Bordignon (2010) e Medeiros (2012). Estes trabalhos estudaram casos de flexocompressão reta, com formulação específica para estas situações de carregamento, enquanto que no presente trabalho utiliza-se formulação mais genérica para flexocompressão oblíqua, em que também é possível dimensionar para casos mais simples e particulares de carregamento. Desta forma, é compreensível que métodos de dimensionamento diferentes encontrem soluções diferentes, visto que soluções ótimas em geral estão muito próximas dos limites impostos pelas restrições de segurança. Neste exemplo, as soluções (c) e (d) foram penalizadas devido às restrições de resistência, logo tornaram-se soluções inferiores à solução (e) no algoritmo de otimização deste trabalho.

#### 6.4 Exemplo 4 – Seção Retangular: Flexocompressão Oblíqua

Este exemplo foi apresentado originalmente por Carvalho e Pinheiro (2009). A partir dos esforços solicitantes, os autores propuseram previamente qual seria a geometria do pilar e então dimensionaram a área de aço necessária para resistir ao carregamento por meio de ábacos. A figura 6.16 indica as dimensões da seção para este problema.

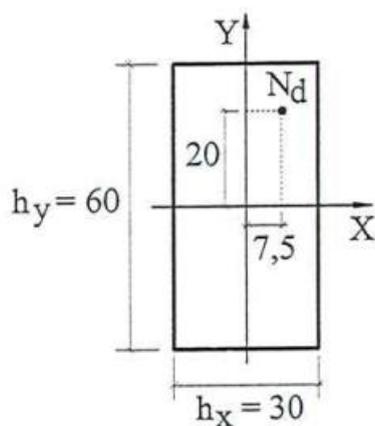


Figura 6.16 – Dimensões da seção e excentricidades totais (Fonte: Carvalho e Pinheiro, 2009)

O problema trata do dimensionamento à flexão oblíqua de uma seção transversal de um pilar submetido à força normal com valor de cálculo  $N_d = 1550$  kN com excentricidades no ponto de aplicação desta força de  $e_x = 7,5$  cm e  $e_y = 20,0$  cm. Desta forma, considera-se para os momentos fletores:

$$M_{xd} = N_d * e_y = 310 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (6.7)$$

$$M_{yd} = N_d * e_x = 116,25 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (6.8)$$

Foi utilizado concreto com  $f_{ck} = 20$  MPa, aço CA-50 com peso específico de  $\rho_s = 7850$  kg/m<sup>3</sup> e distância de 3,0 cm entre a borda da seção e a face externa das barras. Os autores adotaram seção transversal fixa, com  $b = 30$  cm e  $h = 60$  cm e encontraram como solução uma área de aço necessária de 39,6 cm<sup>2</sup>. A solução adotada em Carvalho e Pinheiro (2009) é composta de uma barra em cada canto e uma no centro de cada borda, com 8  $\phi$  25 ( $A_s = 40$  cm<sup>2</sup>), indicada na figura 6.17.

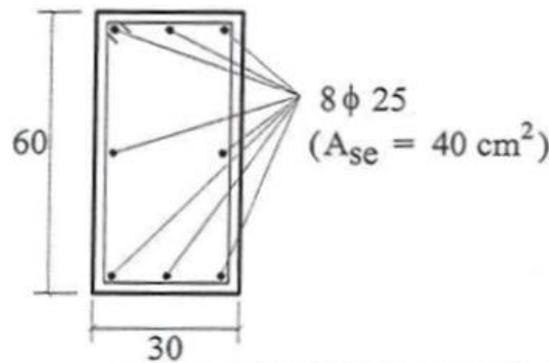


Figura 6.17 – Solução adotada (Fonte: Carvalho e Pinheiro, 2009).

Segundo a verificação de dimensionamento do algoritmo deste trabalho, esta seção obtém um fator de proporcionalidade entre os esforços atuantes e resistentes de  $\lambda = 1,076$ . Quando  $\lambda > 1$ , os esforços atuantes são maiores do que os resistentes e a seção não passa nos critérios de resistência. Cabe salientar que neste exemplo os autores apresentam algumas divergências na forma como a área de aço de cada barra é determinada. Conforme a NBR 7480, tem-se que cada barra de 25 mm possui 4,91 cm<sup>2</sup>. Esta é a maneira com que o algoritmo proposto neste trabalho define as áreas de armadura e determina a segurança da seção. Desta forma, a seção verificada pelo algoritmo possui uma área de aço total de  $A_s = 39,27$  cm<sup>2</sup>, valor inferior ao dimensionado. Neste exemplo, Carvalho e Pinheiro (2009) optam por utilizar valores arredondados de áreas de aço. Desta forma, tem-se que cada barra de 25 mm representa 5,0 cm<sup>2</sup>. Assim, a seção dimensionada com 8  $\phi$  25 mm teria  $A_s = 40$  cm<sup>2</sup> resultado que garantiria os critérios de segurança.

Sias (2014) utilizou o programa desenvolvido em seu trabalho para otimizar a seção estudada neste exemplo, adotando para a otimização os métodos determinísticos dos pontos interiores e da programação quadrática linear. O dimensionamento foi realizado pelo cálculo simplificado presente na NBR 6118:2014.

Os custos unitários utilizado por Sias (2014) foram retirados do índice SINAPI, para o mês de Junho/2014, referente à cidade de Vitória – ES. Para o concreto, os custos variam de acordo com a resistência característica. Logo, para os custos unitários do concreto C20 até C50 variando de 5 em 5 MPa, em R\$/m<sup>3</sup>, temos que  $C_c = [311,27; 322,32; 331,53; 341,66; 351,7; 387,27; 445,00]$ . Para o aço foi utilizado  $C_s$  (R\$/kg) = 6,43 e para as fôrmas  $C_f$  (R\$/m<sup>2</sup>) = 45,00.

As seções obtidas nos trabalhos anteriores encontram-se na figura 6.18, onde:

- (a) representa a solução inicial por ábaco de interação (CARVALHO; PINHEIRO, 2009) e otimizada com geometria fixa (SIAS,2014);
- (b) representa a solução ótima com geometria otimizada (SIAS, 2014);
- (c) representa a solução ótima com geometria otimizada e  $f_{ck}$  variável (SIAS, 2014).

O autor não especifica os diâmetros de armadura utilizada em cada caso, considera apenas a área total de aço ( $A_s$ ), apresentada na tabela 6.10.

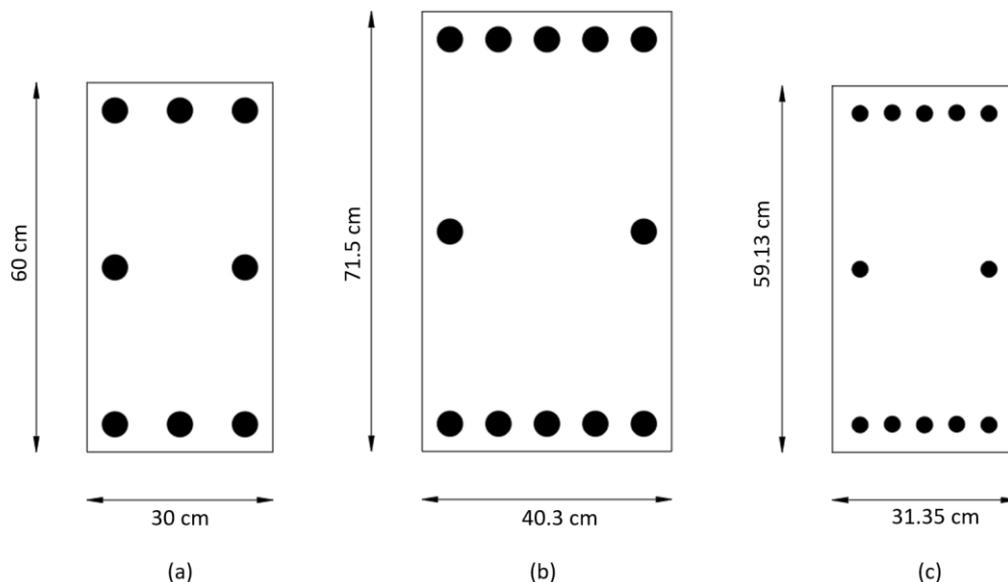


Figura 6.18 – Detalhamento das seções otimizadas do exemplo 3 (Fonte: adaptado de Sias, 2014).

A seguir, na figura 6.19 serão apresentadas as soluções ótimas obtidas pelo algoritmo QPSO desenvolvido neste trabalho, considerando em (d) geometria fixa, (e) geometria variável, e (f) geometria e  $f_{ck}$  variável.

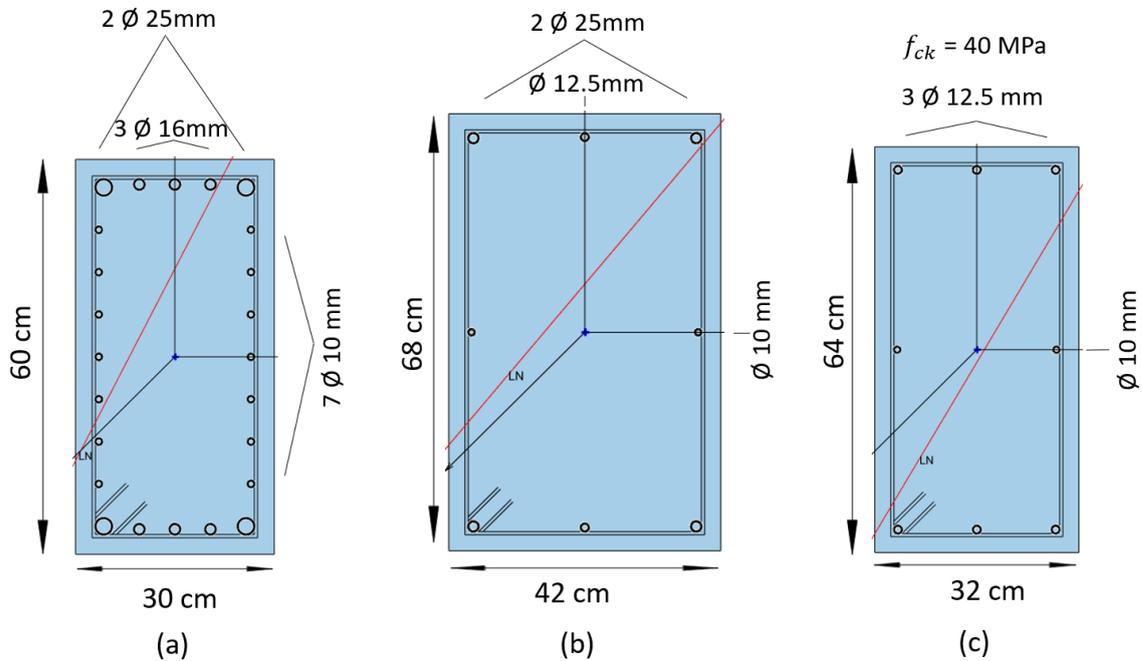


Figura 6.19 – Detalhamento das seções otimizadas pelo QPSO.

A tabela 6.10 apresenta a quantidade de material utilizado e o custo total obtido pela função objetivo em cada situação.

Tabela 6.10 – Soluções ótimas do exemplo 4.

Método	$V_C$ ( $\text{cm}^3$ )	$A_s$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_F$ ( $\text{cm}^2$ )	Taxa de armadura (%)	Custo Total (R\$)	Variação (%)
(a) Ábacos (Carvalho & Pinheiro, 2009)	1800	39,6	180	2,20%	336,91	-
(a) Geometria fixa (Sias, 2014)	1800	40,3	180	2,24%	340,44	1,05%
(b) Geometria ótima (Sias, 2014)	2882	11,5	224	0,40%	248,55	-26,23%
(c) Geometria ótima; $f_{ck}$ variável (Sias, 2014)	1854	7,42	181	0,40%	190,70	-43,40%
<b>(d) Geometria fixa (QPSO)</b>	<b>1800</b>	<b>42,69</b>	<b>180</b>	<b>2,37%</b>	<b>352,53</b>	<b>4,64%</b>
<b>(e) Geometria ótima (QPSO)</b>	<b>2856</b>	<b>12,07</b>	<b>220</b>	<b>0,42%</b>	<b>248,81</b>	<b>-26,15%</b>
<b>(f) Geometria ótima, <math>f_{ck}</math> variável (QPSO)</b>	<b>2048</b>	<b>8,93</b>	<b>192</b>	<b>0,44%</b>	<b>203,52</b>	<b>-39,59%</b>

Neste exemplo, assim como nos anteriores, foram estudadas três situações de dimensionamento, aumentando o número de variáveis livres em cada situação. Como citado anteriormente, Carvalho e Pinheiro (2009) adotaram uma área de aço para o diâmetro comercial das barras diferente do utilizado neste trabalho. Assim, a seção é considerada inviável pelo método de solução apresentado nesta dissertação. Ainda, Sias (2014) utiliza métodos matemáticos de

otimização com variáveis contínuas. As dimensões da seção transversal podem apresentar números com casas decimais e o programa utiliza apenas uma variável para a área de aço. Assim, ao converter esta área em diâmetros comerciais, é razoável que ocorram diferenças entre as soluções.

No primeiro caso, manteve-se as dimensões da seção fixa, conforme a solução original de Carvalho e Pinheiro, com  $b = 30$  cm e  $h = 60$  cm. Assim, a otimização consiste apenas em determinar a melhor disposição das barras de aço para esta geometria. O custo da solução ótima (d) encontrada pelo algoritmo QPSO foi 4,64% maior do que seção original (a) e 3,55% maior em relação à seção ótima (b) de Sias (2014).

O segundo caso inclui como variáveis as dimensões da seção transversal, além da disposição das barras de aço. Neste caso, a redução de custo da solução ótima (e) em relação à seção original é bastante significativa, alcançando 26,15%. Em relação à solução ótima (c) de Sias (2014), o resultado foi levemente pior, com diferença de apenas 0,1%.

O último cenário estudado incluiu também a resistência característica do concreto como variável de projeto. A solução ótima foi alcançada com  $f_{ck} = 45$  MPa em Sias (2014) e  $f_{ck} = 40$  MPa nesta dissertação. A redução de custo da solução (f) em relação à seção original foi de 39,59%, resultado bastante expressivo. Em comparação com a seção de Sias (2014), o algoritmo QPSO obteve uma solução 6,72% inferior.

## 6.5 Estudo sobre a influência do posicionamento das barras em seções retangulares

Ao longo do trabalho, foi visto que existem inúmeras soluções possíveis para um mesmo problema. Até aqui teve-se principalmente à otimização das dimensões das seções retangulares em que a disposição das barras de aço manteve sempre a mesma configuração, conforme explicitado em 5.1.1. Nesta seção, uma nova distribuição de barras será proposta com o intuito de verificar a influência do posicionamento das barras na quantidade necessária de aço e a consequente influência no custo total da seção transversal.

A nova proposta procura permitir que novas barras, mais próximas às barras de canto, sejam adicionadas pelo algoritmo de otimização. Estas barras estão espaçadas de acordo com o espaçamento mínimo estipulado, a partir das barras de canto. Para isso, acrescentam-se duas

variáveis ao problema da seção retangular anteriormente estudada. Conforme a figura 6.20,  $x_9$  e  $x_{10}$  representam o número de barras das camadas paralelas a  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, distantes entre si pelo espaçamento mínimo. As barras são simétricas e espelhadas, ou seja, quando  $x_9$  for igual a 1, significa que existem 4 barras na seção. O diâmetro destas barras pode ser igual ao diâmetro das barras de canto ou igual ao diâmetro das barras intermediárias. São apresentadas as soluções considerando estas duas possibilidades. A figura 6.20 a seguir apresenta a seção retangular com a nova configuração de barras.

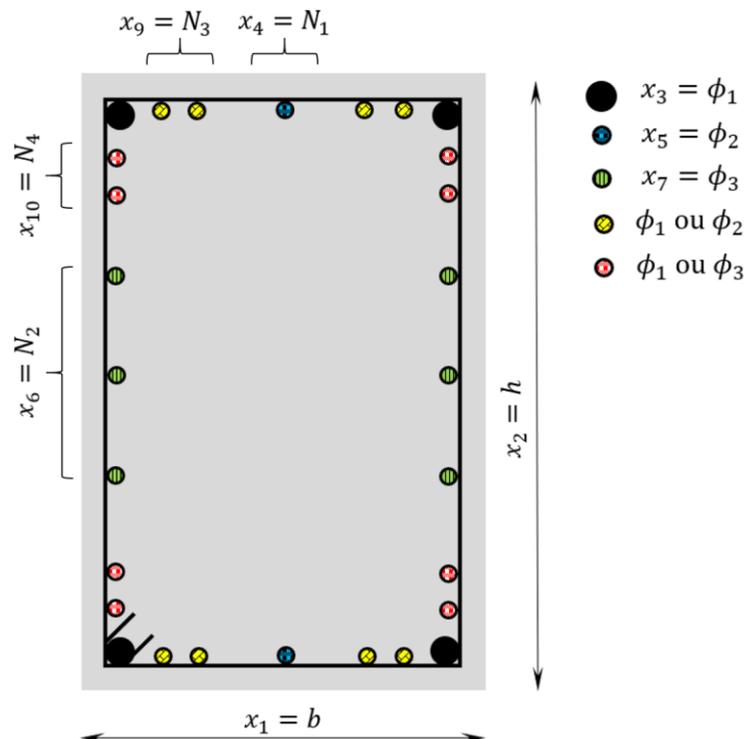


Figura 6.20 –Variáveis de projeto da seção retangular com a nova configuração das barras.

Sendo:

$x_1$  = base da seção transversal ( $b$ );

$x_2$  = altura da seção transversal ( $h$ );

$x_3$  = diâmetro comercial das quatro barras dos cantos ( $\phi_1$ );

$x_4$  = número de barras na camada paralela a  $x_1$  ( $N_1$ );

$x_5$  = diâmetro comercial das barras na camada paralela a  $x_1$  ( $\phi_2$ );

$x_6$  = número de barras na camada paralela a  $x_2$  ( $N_2$ );

$x_7$  = diâmetro comercial das barras na camada paralela a  $x_2$  ( $\phi_3$ );

$x_8$  =  $f_{ck}$  do concreto;

$x_9$  = número de barras próximas à de canto na camada paralela a  $x_1$  ( $N_3$ );

$x_{10}$  = número de barras próximas à de canto na camada paralela a  $x_2$  ( $N_4$ );

Além disso, também é utilizada uma configuração mais simples, apresentada por Bastos (2004), de acordo com figura 6.6, onde há apenas dois possíveis diâmetros diferentes, um para as camadas verticais e outro para as camadas horizontais.

Os quatro exemplos de seção retangular apresentados anteriormente são estudados, as soluções obtidas são comparadas com a nova configuração das barras de armadura. A análise é feita mantendo a geometria fixa original de cada um dos exemplos, de forma que apenas o posicionamento das barras influencie no custo final da seção transversal. A seguir, são apresentadas as soluções ótimas encontradas, onde, em cada um dos exemplos:

- (a) representa a solução inicial apresentada nos trabalhos anteriores;
- (b) representa a solução ótima com geometria fixa encontrada pelo algoritmo QPSO com a configuração de Bastos (2004), conforme figura 6.6;
- (c) representa a solução ótima com geometria fixa encontrada pelo algoritmo QPSO com a configuração original, apresentada em 5.1;
- (d) representa a solução ótima com geometria fixa encontrada pelo algoritmo QPSO com a nova configuração de barras, considerando as novas barras com o diâmetro das barras intermediárias ( $x_5$  e  $x_7$ );
- (e) representa a solução ótima com geometria fixa encontrada pelo algoritmo QPSO com a nova configuração de barras, considerando as novas barras com o diâmetro das barras de canto ( $x_3$ ).

As soluções obtidas para o Exemplo 1 encontram-se na figura 6.21 a seguir.

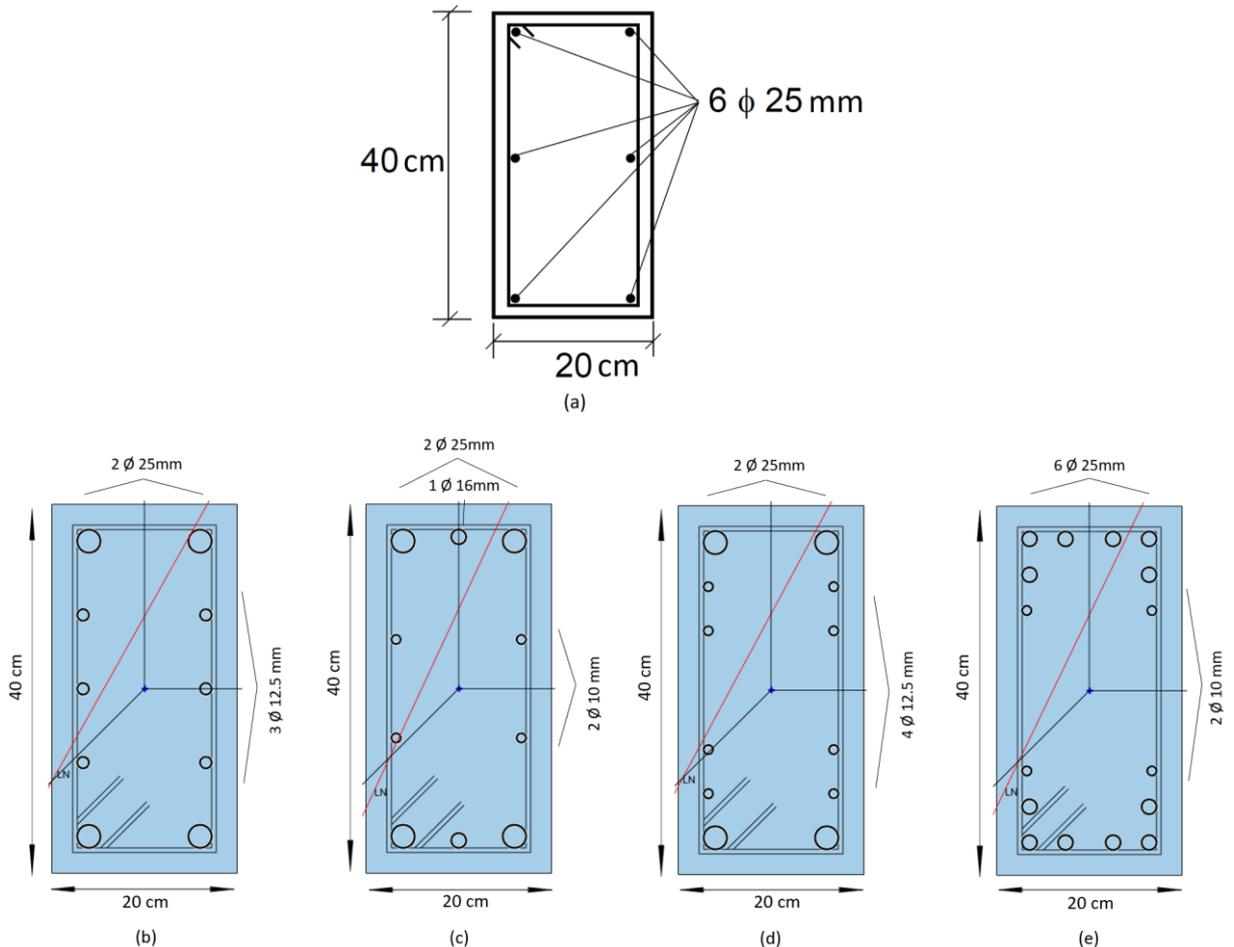


Figura 6.21 – Soluções ótimas Exemplo 1 com novas configurações de barras de armadura.

A tabela 6.11 apresenta a quantidade de material utilizado e o custo total obtido pela função objetivo em cada situação para o Exemplo 1. As duas últimas colunas da tabela representam a variação entre as soluções, onde a primeira toma como referência a solução original (a) e a segunda toma como referência a solução ótima com o caso mais simples de parametrização (b).

Tabela 6.11 – Soluções ótimas do exemplo 1 com novas configurações de barras de armadura.

Método	$V_C$ ( $\text{cm}^3$ )	$A_S$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_F$ ( $\text{cm}^2$ )	Taxa de armadura (%)	Custo Total (R\$)	Varição (a) (%)	Varição (b) (%)
(a) Ábacos de interação (Pinheiro, Baraldi e Porem, 2009)	800	29,45	120	3,68%	174,47	-	-
(b) QPSO configuração Bastos (2004)	800	27,00	120	3,37%	164,47	-5,73%	-
(c) QPSO configuração original	800	26,80	120	3,35%	163,66	-6,20%	-0,49%
(d) QPSO nova configuração 1	800	25,92	200	3,24%	160,07	-8,25%	-2,68%
(e) QPSO nova configuração 2	800	27,27	200	3,41%	165,58	-5,10%	0,67%

Neste exemplo, percebe-se que, ao permitir novas possibilidades de configuração, o algoritmo obteve uma solução (d) com uma economia de 2,68% em comparação com a solução mais simples (b). Porém, este aumento da complexidade não refletiu em economia na solução (e), que encontrou o pior resultado entre as soluções ótimas estudadas. A variação entre todas as soluções QPSO foi bastante pequeno, de aproximadamente 3.4% entre a melhor e a pior solução.

A seguir, foi realizado o mesmo estudo com o Exemplo 2. A figura 6.22 apresenta as soluções ótimas encontradas.

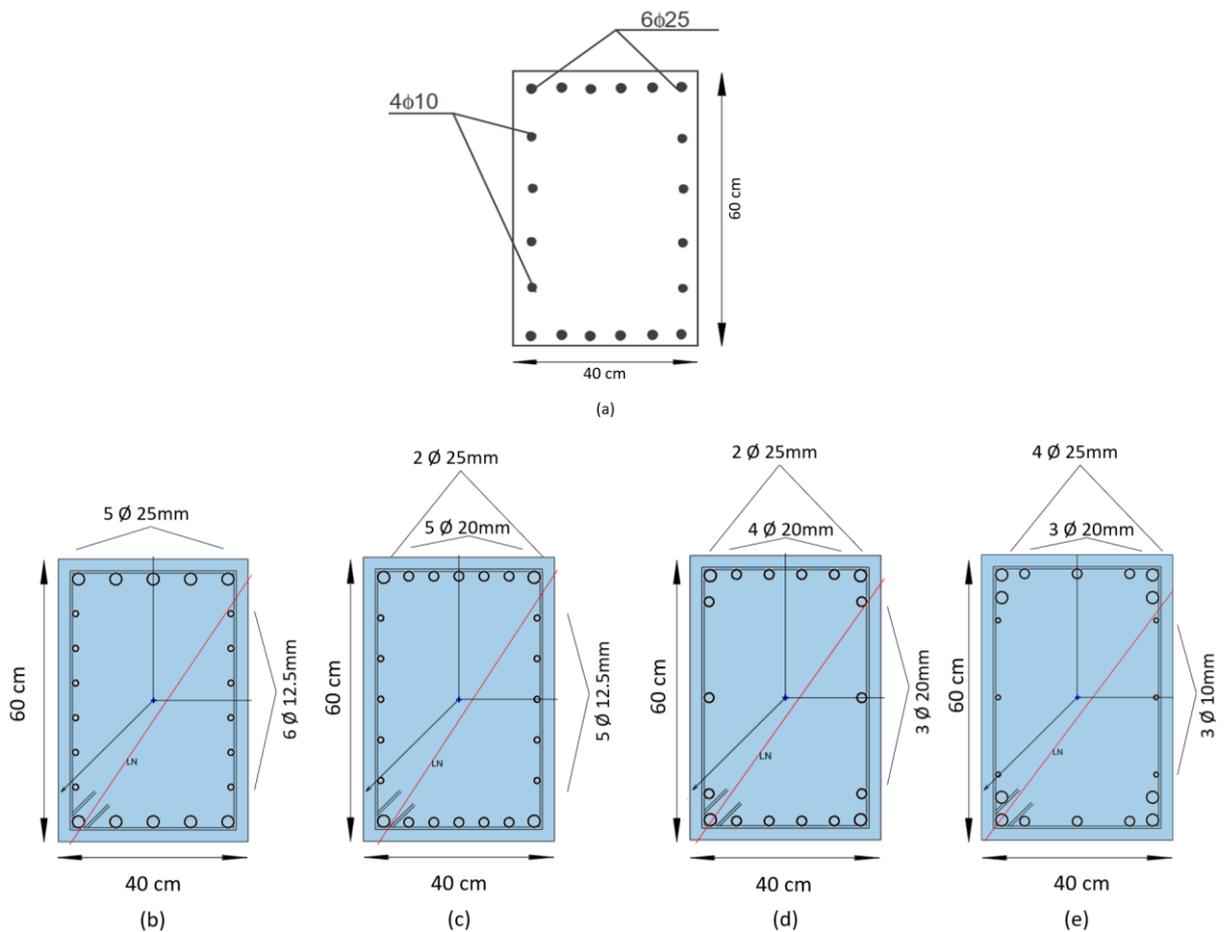


Figura 6.22 – Soluções ótimas Exemplo 2 com novas configurações de barras de armadura.

A tabela 6.12 apresenta a quantidade de material utilizado e o custo total obtido pela função objetivo em cada situação para o Exemplo 2. As duas últimas colunas que dizem respeito às variações seguem a mesma relação apresentada no exemplo anterior.

Tabela 6.12 – Soluções ótimas do exemplo 2 com novas configurações de barras de armadura.

Método	$V_C$ ( $\text{cm}^3$ )	$A_S$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_F$ ( $\text{cm}^2$ )	Taxa de armadura (%)	Custo Total (R\$)	Varição (a) (%)	Varição (b) (%)
(a) Solução original (Bastos, 2004)	2400	65,18	200	2,72%	638,49	-	-
(b) QPSO configuração Bastos (2004)	2400	63,81	200	2,66%	630,31	-1,28%	-
(c) QPSO configuração original	2400	63,32	200	2,64%	627,38	-1,74%	-0,46%
(d) QPSO nova configuração 1	2400	63,62	200	2,65%	629,14	-1,46%	-0,19%
(e) QPSO nova configuração 2	2400	62,83	200	2,62 %	624,45	-2,20%	-0,93%

No exemplo 2, como já demonstrado anteriormente na seção 6.2.3, a solução (c) apresentou uma pequena vantagem em relação à solução com a configuração simplificada (b). Para as novas configurações propostas, o caso (d) foi levemente pior do que a solução com a configuração original (c) e a melhor solução para este exemplo foi a solução (e), que permite mais possibilidades diferentes de diâmetros comerciais. A variação de custo entre a melhor e a pior solução foi de 0,93%, valor considerado muito pequeno. Portanto, considerando também as questões construtivas, entende-se que o ganho em redução de custo não compensa devido ao aumento na complexidade para armar esta seção.

O estudo realizado para o Exemplo 3 permitiu também a otimização das dimensões da seção, pois mesmo com dimensões variáveis as soluções ótimas encontradas apresentaram dimensões muito semelhantes. A figura 6.23 apresenta as soluções encontradas.

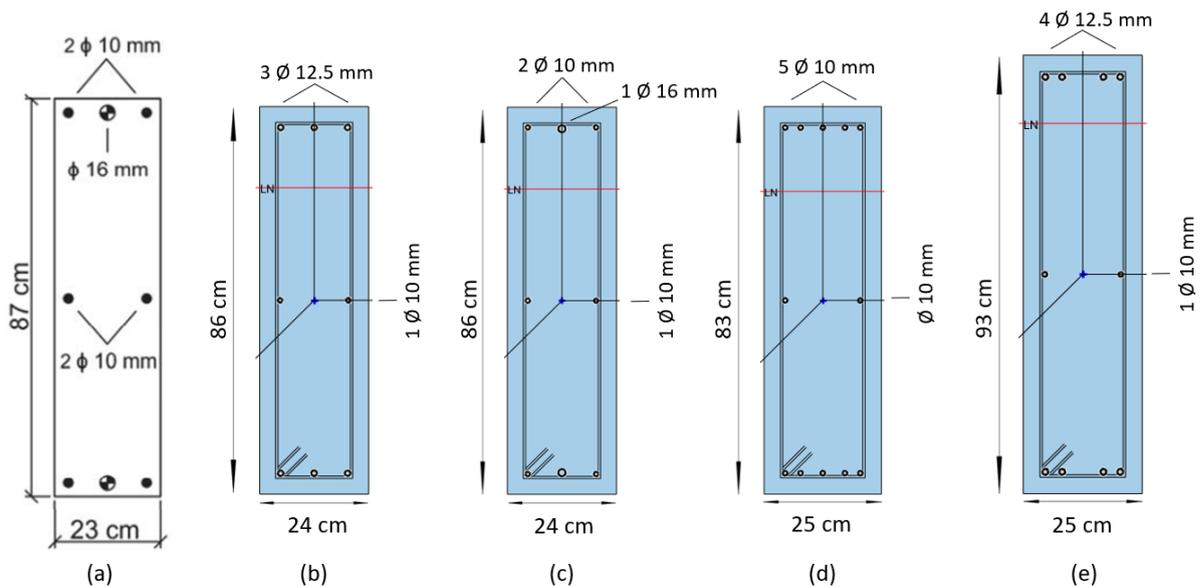


Figura 6.23 – Soluções ótimas Exemplo 3 com novas configurações de barras de armadura.

A tabela 6.13 apresenta a quantidade de material utilizado e o custo total obtido pela função objetivo em cada situação para o Exemplo 3.

Tabela 6.13 – Soluções ótimas do exemplo 3 com novas configurações de barras de armadura.

Método	$V_C$ ( $\text{cm}^3$ )	$A_S$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_F$ ( $\text{cm}^2$ )	Taxa de armadura (%)	Custo Total (R\$)	Varição (a) (%)	Varição (b) (%)
(a) Solução original (Bordignon, 2010 e Medeiros, 2012)	2001	8,73	220	0,44%	70,00	-	-
(b) QPSO configuração Bastos (2004)	2064	8,93	220	0,43%	70,98	1,11%	-
(c) QPSO configuração original	2064	8,73	220	0,42%	70,78	1,40%	-0.28%
(d) QPSO nova configuração 1	2075	9,42	220	0,45%	70,95	1,36%	-0.04%
(e) QPSO nova configuração 2	2325	11,39	236	0,49%	75,84	8,34%	6.85%

Assim como nos exemplos anteriores, o aumento da complexidade das barras de armadura não apresentou redução de custo. A variação entre as soluções encontradas pelo QPSO foi irrelevante, com exceção da última solução que foi muito inferior às demais. Mesmo permitindo otimizar as dimensões da seção, o algoritmo não encontrou nenhuma solução melhor do que já havia encontrado anteriormente com a disposição mais simples. A solução original de Bordignon (2010) e Medeiros (2012) apresenta a melhor solução dentre as soluções estudadas. Por isso, a variação percentual da tabela 6.13 possui o valor positivo. Porém, como discutido na seção 6.3, esta solução foi penalizada pelo método desenvolvido neste trabalho, de forma a não ser considerada pelo algoritmo de otimização QPSO estudado neste trabalho.

A seguir, a figura 6.24 traz as soluções encontradas para o Exemplo 4.

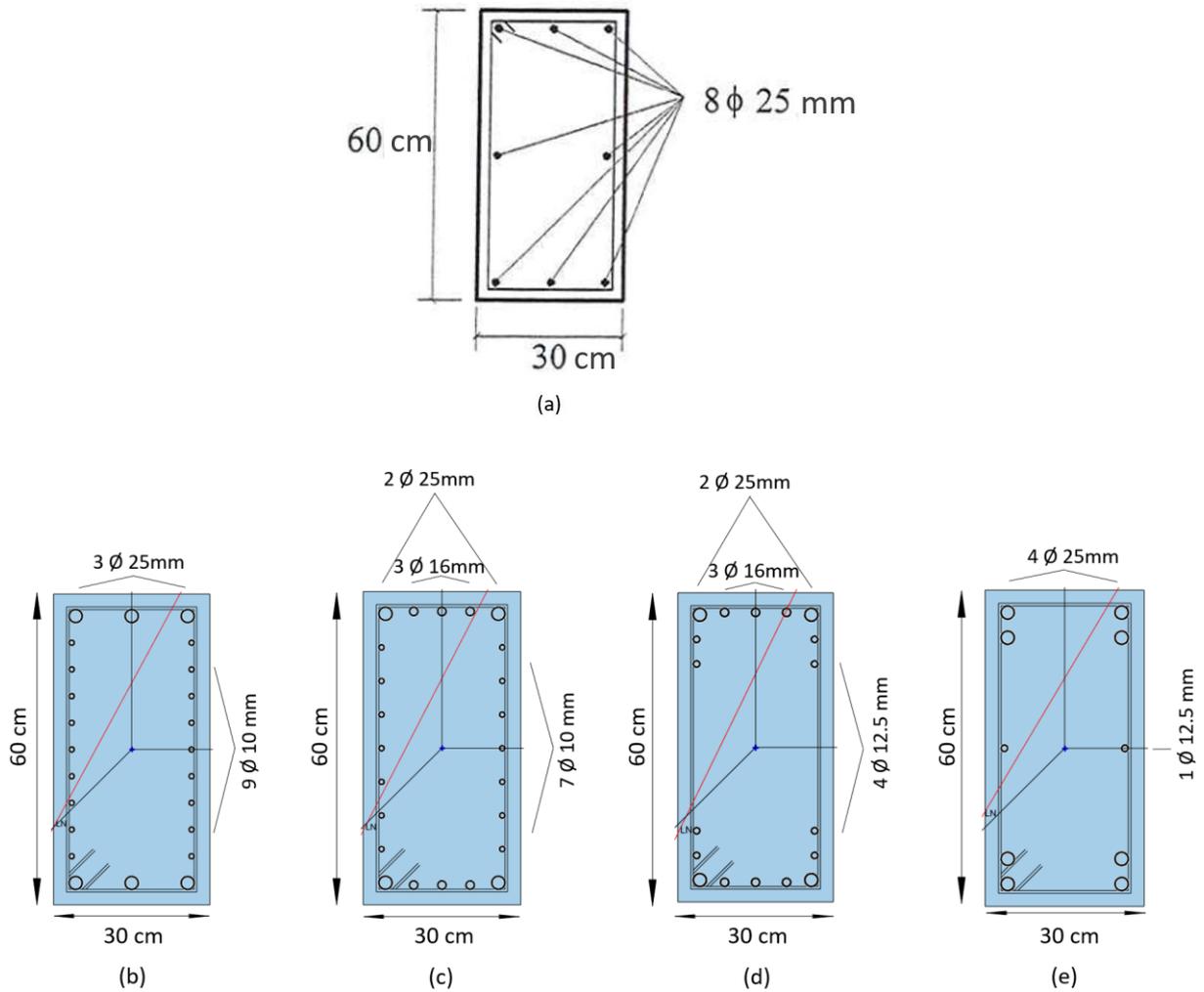


Figura 6.24 – Soluções ótimas Exemplo 4 com novas configurações de barras de armadura.

A tabela 6.14 apresenta a quantidade de material utilizado e o custo total obtido pela função objetivo em cada situação para o Exemplo 4.

Tabela 6.14 – Soluções ótimas do exemplo 4 com novas configurações de barras de armadura.

Método	$V_C$ ( $\text{cm}^3$ )	$A_S$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_F$ ( $\text{cm}^2$ )	Taxa de armadura (%)	Custo Total (R\$)	Varição (a) (%)	Varição (b) (%)
(a) Solução original (Sias, 2014)	1800	40,30	180	2,24%	340,44	-	-
(b) QPSO configuração Bastos (2004)	1800	43,59	180	2,42%	357,05	4,88%	-
(c) QPSO configuração original	1800	42,69	180	2,37%	352,53	3,55%	-1.27%
(d) QPSO nova configuração 1	1800	41,52	180	2,31%	346,58	1,80%	-2.93%
(e) QPSO nova configuração 2	1800	41,72	180	2,32%	347,63	2,11%	-2.64%

Dentre os exemplos estudados, o Exemplo 4 foi o que apresentou as maiores variações de custo entre as diferentes configurações de armadura. A solução ótima mais simples (b) foi a que encontrou o pior resultado, enquanto que as soluções (d) e (e) com a nova configuração apresentaram reduções próximas a 3% em comparação com a solução (b). Cabe ressaltar que, conforme discutido na seção 6.4, a solução (a) apresentada por Sias (2014) é considerada sem segurança e por isso penalizada pelo método desenvolvido neste trabalho. Todas as soluções encontradas pelo algoritmo de otimização QPSO foram piores do que esta solução. Neste exemplo, a complexidade da seção não foi significativamente afetada pelo aumento do número de variáveis na configuração da armadura, sendo viável de ser executada. Entretanto, a implementação de uma configuração mais complexa, com mais variáveis de projeto, exige mais esforço do algoritmo. Logo, é importante analisar mais profundamente se esta pequena redução de custo compensa o esforço computacional.

Conclui-se que, nos exemplos estudados, a configuração das barras de armadura possui uma contribuição bastante pequena nos custos finais da seção transversal de concreto armado. Em muitas situações, configurações mais complexas não trouxeram resultados melhores do que disposições mais simples das barras. Portanto, entende-se que não é necessário despender muito esforço neste assunto. A configuração adotada por Medeiros (2012) e que foi reproduzida ao longo deste trabalho mostrou-se eficiente na obtenção de soluções ótimas, da mesma forma que outras configurações também poderiam ser adotadas e trariam resultados muito semelhantes.

## 6.6 Exemplo 5 – Seção Retangular Vazada

O exemplo 5 estuda o dimensionamento ótimo de um pilar com seção retangular vazada, submetida a um esforço normal solicitante  $N_d = 4957,68$  kN e momentos fletores  $M_{xd} = 1400$  kNm e  $M_{yd} = 2100$  kNm. Os dados utilizados para o dimensionamento são: concreto com  $f_{ck} = 25$  MPa, tensão de escoamento do aço  $f_y = 500$  MPa, peso específico  $\rho_s = 7850$  kg/m<sup>3</sup> e a distância entre as bordas da seção à face externa do estribo de 2,5 cm. Os custos unitários dos materiais utilizados são os mesmos do exemplo 1, em que tem-se para o concreto, aço e fôrmas:  $C_c = 330,15$  R\$/m<sup>3</sup>,  $C_s = 5,19$  R\$/kg e  $C_f = 23,39$  R\$/m<sup>2</sup>, respectivamente. Este exemplo foi estudado por Lima (2018), em que a solução inicial foi proposta para uma seção de 80 x 100 cm, com espessura  $e = 20$  cm, conforme figura 6.25.

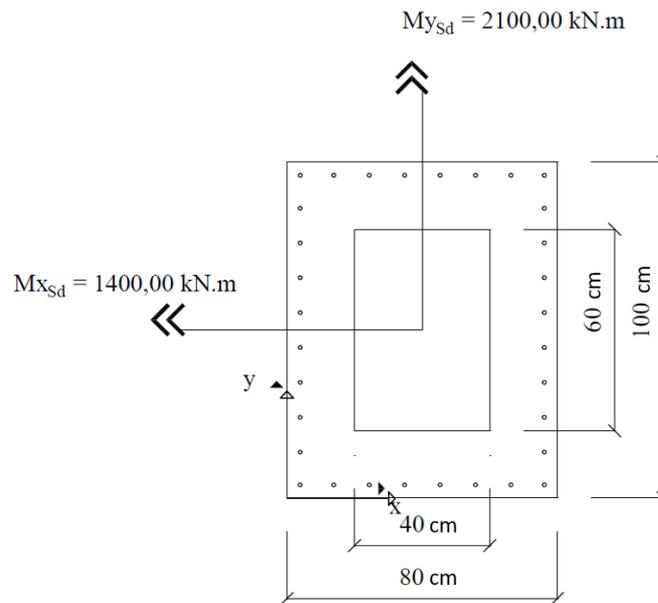


Figura 6.25 – Seção a ser dimensionada (Fonte: adaptado de Lima (2018)).

O valor encontrado de armadura necessária pelo programa de Lima (2018) foi de  $155,83 \text{ cm}^2$ . O autor dimensionou a seção com 32 barras de 25 mm, totalizando  $157,09 \text{ cm}^2$ . Entretanto, o autor utiliza apenas uma camada de barras, de forma que não é possível reproduzir com exatidão esta seção no algoritmo de verificação desenvolvido no presente trabalho. Contudo, respeitando os espaçamentos mínimos e máximos necessários, buscou-se reproduzir a solução do autor, com 32 barras de 25 mm, referida como solução (a), conforme figura 6.26. Esta seção obteve um fator de proporcionalidade  $\lambda = 1,007$ , considerado aceitável devido à diferença no posicionamento das barras. Ao concentrar as barras nas bordas externas da seção, o fator de proporcionalidade caiu para 0,973, porém desta forma não seriam respeitados os espaçamentos máximos da parte interna da seção.

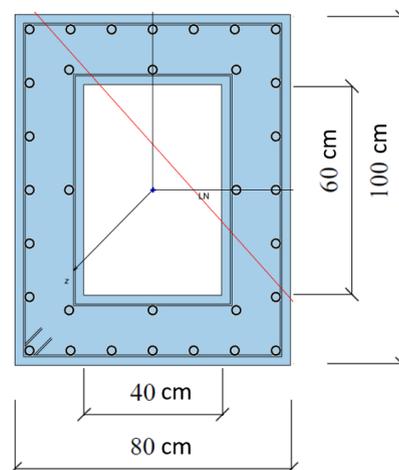


Figura 6.26 – Seção dimensionada com 32  $\phi$  25.

Assim como nos exemplos anteriores, a seção transversal foi otimizada considerando situações distintas. A primeira solução mantém a geometria e a espessura da seção fixa, otimizando apenas a disposição e o diâmetro das barras da armadura. A segunda solução permite a otimização da geometria da seção, da espessura da parede de concreto, com intervalo entre 15 e 30 cm, e a disposição das barras. A terceira solução, além das demais variáveis anteriores, inclui também a otimização da resistência característica do concreto. Ainda, a título de comparação de custos entre diferentes tipos de seção, a situação de carregamento deste exemplo foi aplicada considerando a seção retangular “cheia”, considerando o  $f_{ck}$  original de 25 MPa. Em todos os casos, foi utilizado cobrimento nominal de 2,5 cm e estribos de 5 mm.

As seções ótimas obtidas encontram-se na figura 6.27, onde:

- (b) solução ótima QPSO com geometria e espessura fixa;
- (c) solução ótima QPSO com geometria e espessura variável;
- (d) solução ótima QPSO com geometria, espessura e  $f_{ck}$  variável;
- (e) solução ótima QPSO considerando a seção retangular cheia, com geometria variável e  $f_{ck}$  constante.

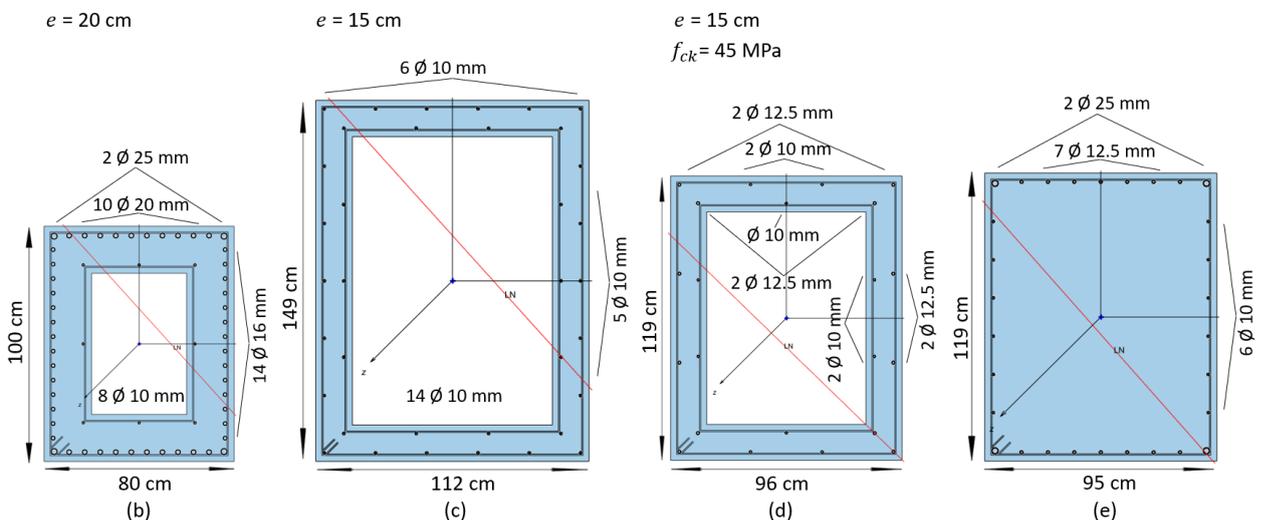


Figura 6.27 – Detalhamento das seções otimizadas do exemplo 5.

A tabela 6.15 apresenta a quantidade de material utilizado e o custo total obtido pela função objetivo em cada situação.

Tabela 6.15 – Soluções ótimas do exemplo 5.

Método	$V_C$ (cm <sup>3</sup> )	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$A_F$ (cm <sup>2</sup> )	Taxa de armadura (%)	Custo Total (R\$)	Variação (%)
(a) Solução original adaptada de Lima (2018)	5600	157.09	560	2.80%	991,42	-
(b) QPSO geometria e espessura fixa	5600	145.05	560	2.59%	901,13	-9.11%
(c) QPSO geometria e espessura variável	6930	28.27	924	0.41%	560,11	-43.50%
(d) QPSO geometria ótima e $f_{ck}$ variável	5550	22.58	740	0.41%	474,21	-47.38%
(e) QPSO seção retangular geometria variável	11305	46.24	428	0.41%	661,73	-33.25%

Os resultados apresentam a mesma tendência vista nos exemplos de seção retangular cheia em que as seções otimizadas buscam a máxima redução da área de aço, com taxas de armadura muito próximas à mínima. A solução (b) com geometria pré-definida diminuiu a área de aço de 157,09 cm<sup>2</sup> para 145,05 cm<sup>2</sup>, gerando uma economia de 9,11%. Ao otimizar as dimensões da seção e a espessura da parede, as soluções (c) e (d) resultaram em uma economia de custo maior do que 40% em relação à solução original, sendo a solução (d) com  $f_{ck}$  variável cerca de 15% mais econômica em relação à solução (c). Nota-se que estas seções ótimas possuem dimensões significativamente maiores do que a solução original, com uma redução expressiva da área de aço utilizada. Novamente, o melhor resultado foi encontrado com a resistência característica do concreto elevada, de 45 MPa. Ambas as soluções encontraram a espessura  $e$  mínima permitida, de 15 cm.

A última solução (e), com seção retangular cheia, apresentou um resultado superior à seção original, porém bastante inferior à solução ótima com seção vazada. Nota-se um grande aumento no volume de concreto e na área de aço necessária, provocando acréscimo de aproximadamente 18% no custo da seção. A comparação entre diferentes tipos de seção não é o escopo principal deste trabalho, mas é um tema interessante que pode ser investigado. No exemplo em questão, com cargas que resultam em seções de grandes dimensões, a diferença foi bastante significativa.

## 6.7 Exemplo 6 – Seção Transversal em “L”

O exemplo 6 trata do dimensionamento ótimo de um pilar com seção transversal em “L”, com dimensões pré-definidas de 40 x 60 cm e espessura da parede  $e = 20$  cm, submetida a um esforço normal solicitante  $N_d = 980$  kN e momentos fletores  $M_{xd} = 95,20$  kNm e  $M_{yd} = 109,20$  kNm, conforme figura 6.28. Foram utilizados para o dimensionamento a resistência característica do concreto  $f_{ck} = 25$  MPa, tensão de escoamento do aço  $f_y = 500$  MPa e peso específico  $\rho_s = 7850$

kg/m<sup>3</sup>. O exemplo foi estudado por Lima (2018), que utiliza a distância  $d' = 4$  cm entre o eixo das barras à borda da seção. Para adaptar ao problema em questão, nas soluções otimizadas foi utilizado a distância de 2,5 cm da borda da seção até a face externa do estribo, de forma que ao inserir o estribo e a barra, o valor de  $d'$  se aproxime de 4 cm. Os custos unitários dos materiais utilizados são os mesmos do exemplo 1, em que tem-se para o concreto, aço e fôrmas:  $C_c = 330,15$  R\$/m<sup>3</sup>,  $C_s = 5,19$  R\$/kg e  $C_f = 23,39$  R\$/m<sup>2</sup>, respectivamente. A figura 6.28 apresenta o detalhamento da seção apresentada em Lima (2018), referida como solução (a).

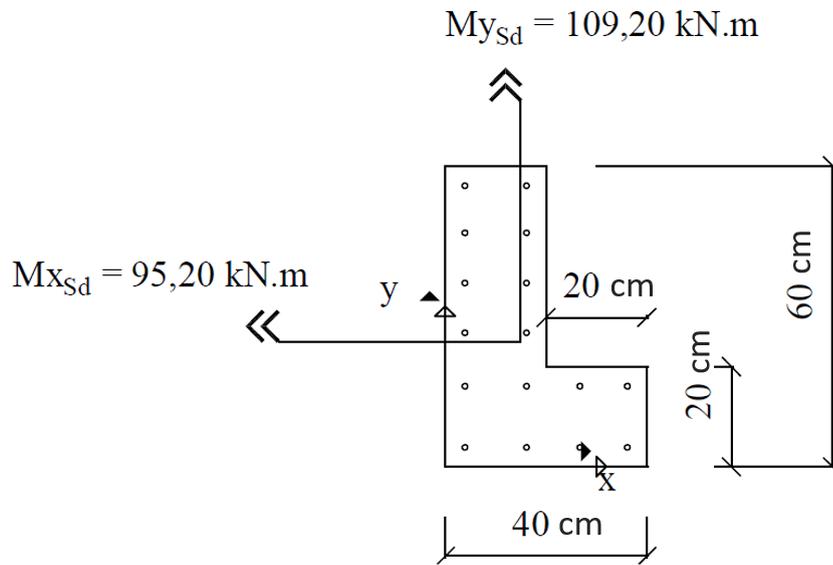


Figura 6.28 – Detalhamento da seção original, com 16 barras de 12,5 mm. (Fonte: adaptado de Lima, 2018).

Neste exemplo, Lima (2018) verifica a seção proposta utilizando 16 barras de 12,5 mm, totalizando  $A_s = 19,63$  cm<sup>2</sup>. Para facilitar a entrada de dados no programa, o autor faz uso apenas de barras com o mesmo diâmetro. Segundo o autor, a área necessária para o exemplo em questão, com esta distribuição de barras de aço, é de 20,74 cm<sup>2</sup>. Ou seja, a área de aço da seção proposta está ligeiramente abaixo do necessário. Da mesma forma, o algoritmo de verificação deste trabalho apresentou para esta seção um fator de proporcionalidade  $\lambda = 1,004$ , corroborando o resultado encontrado por Lima (2018).

A seguir são apresentadas as seções otimizadas pelo algoritmo de otimização. A primeira solução mantém a geometria e a espessura da seção fixa, otimizando apenas a disposição e o diâmetro das barras da armadura. A segunda solução permite a otimização da base e altura da seção, além da disposição das barras. A terceira solução, além das variáveis anteriores, inclui a espessura das paredes de concreto com intervalo entre 10 e 30 cm. A quarta solução permite

que a resistência característica do concreto também seja otimizada junto com as demais. Da mesma forma que foi feito no exemplo anterior, a situação de carregamento deste exemplo foi aplicada considerando a seção retangular “cheia”, considerando o  $f_{ck}$  original de 25 MPa. Em todos os casos, foi utilizado cobrimento nominal de 2,5 cm e estribos de 5 mm.

As seções ótimas obtidas encontram-se na figura 6.29, onde:

- (b) solução ótima QPSO com geometria e espessura fixa;
- (c) solução ótima QPSO com geometria variável e espessura fixa;
- (d) solução ótima QPSO com geometria e espessura variável;
- (e) solução ótima QPSO com geometria, espessura e  $f_{ck}$  variável;

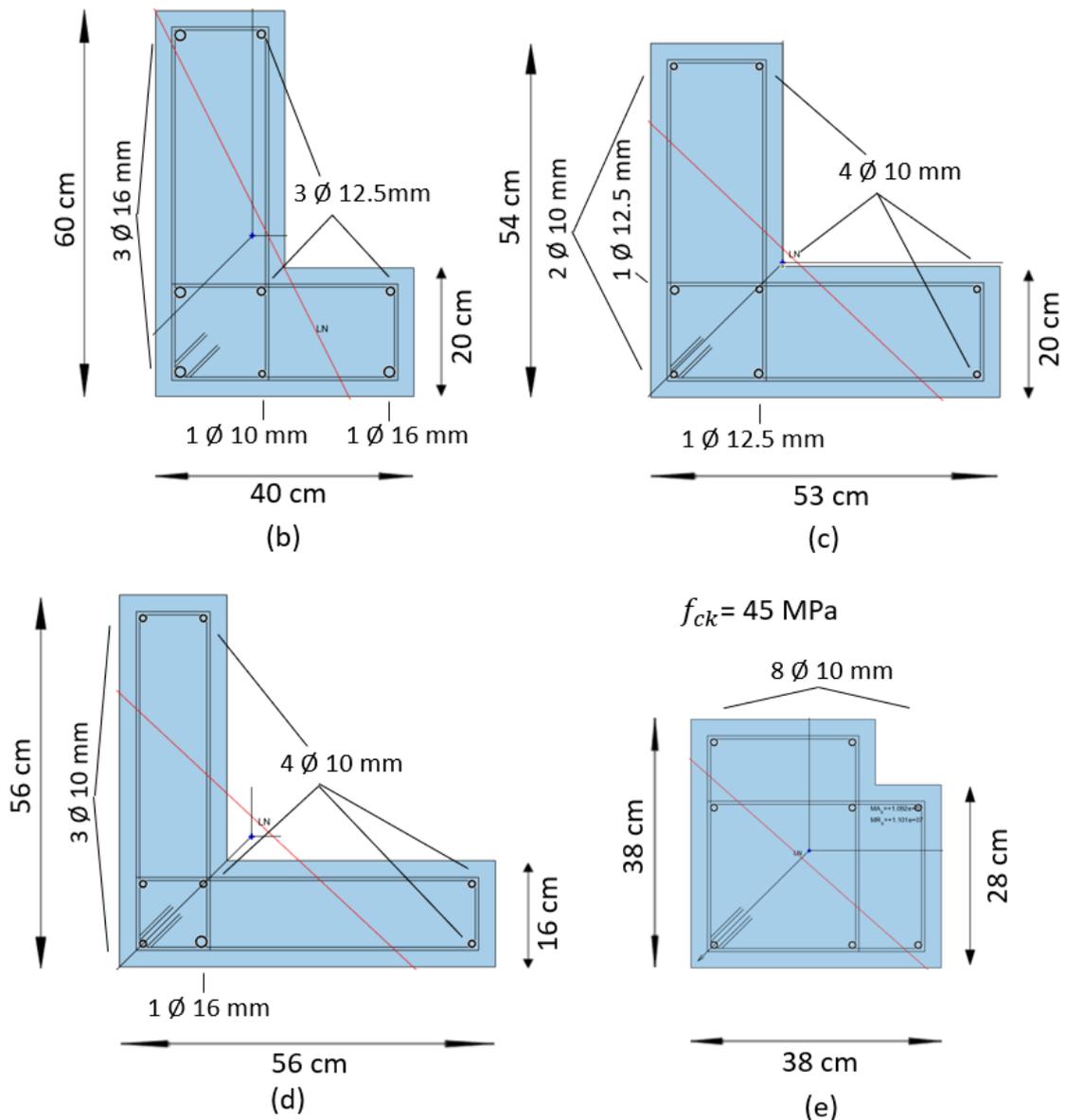


Figura 6.29 – Detalhamento das seções do exemplo 6.

A tabela 6.16 apresenta a quantidade de material utilizado e o custo total obtido pela função objetivo em cada situação.

Tabela 6.16 – Soluções ótimas do exemplo 6.

Método	$V_C$ (cm <sup>3</sup> )	$A_S$ (cm <sup>2</sup> )	$A_F$ (cm <sup>2</sup> )	Taxa de armadura (%)	Custo Total (R\$)	Variação (%)
(a) Solução original adaptada de Lima (2018)	1600	19.63	200	1.23%	179,60	-
(b) QPSO geometria e espessura fixa	1600	12.51	200	0.78%	150,57	-16.16%
(c) QPSO geometria variável e espessura fixa	1740	7.17	214	0.41%	136,70	-23.89%
(d) QPSO geometria e espessura variável	1536	7.51	224	0.49%	133,70	-25.56%
(e) QPSO geometria, espessura e $f_{ck}$ variável	1344	6.28	152	0.47%	111,79	-37.76%

Neste exemplo todas as soluções ótimas resultaram em uma grande redução de custo. Mesmo a solução (b) otimizando apenas a quantidade e o diâmetro das barras de aço, foi possível uma diminuição de 16,16% em comparação com a seção original. As soluções (c) e (d) que permitiram otimizar as dimensões resultaram em seções 23,89% e 25,56% mais econômicas, sendo que a espessura variável ocasionou uma economia de aproximadamente 2% em relação a seção com espessura fixa. A situação (e) com a resistência característica do concreto variável obteve a melhor solução com  $f_{ck} = 45$  MPa, espessura próxima da máxima permitida e dimensões que se aproximam de uma seção retangular. Como de costume, a solução com mais variáveis livres obteve o melhor valor da função objetivo, com economia de 37,76%. Outra vez percebe-se uma tendência do algoritmo a buscar uma taxa de armadura mínima, fato que se deve provavelmente à composição dos custos utilizados.

## 7. CONCLUSÕES

Ao longo do trabalho foram realizados estudos sobre o dimensionamento ótimo de seções retangulares de pilares em concreto armado submetidos à flexão composta reta e oblíqua, seguindo as prescrições da norma ABNT NBR 6118:2014, e empregando como método de otimização o QPSO. Os resultados foram comparados com soluções de dimensionamento convencional conhecidos na literatura e também com outros trabalhos de otimização desenvolvidos na mesma área, com métodos de otimização diferentes.

De acordo com os resultados, percebe-se que o processo de otimização implementado mostrou ser uma ferramenta útil e eficiente no dimensionamento ótimo de pilares, capaz de auxiliar o projetista na tomada de decisões e eliminar incertezas acerca do dimensionamento, que conduz a projetos mais econômicos.

O tempo de processamento do algoritmo de otimização QPSO é definido pelo número total de chamadas da função objetivo, que é uma combinação entre o tamanho da população e o número de gerações da otimização. De forma geral, populações maiores tendem a apresentar resultados melhores, porém nos casos em que o aumento da população ocasiona uma otimização com poucas gerações o algoritmo não consegue convergir a tempo para a solução ótima. Logo, é importante encontrar um equilíbrio entre o tamanho da população e o número de gerações da otimização quando se fixa o número de avaliações da função objetivo. Quanto mais complexo o problema, com mais variáveis de projeto, é necessário um maior número de avaliações da função objetivo para encontrar uma solução ótima confiável. Consequentemente, o tempo de processamento é maior.

Nas situações de otimização onde as dimensões são fixas e somente otimiza-se a disposição das barras de aço, em alguns casos não houve redução de custo significativa, porém em outros a economia chegou a 10%. O estudo feito sobre a influência da configuração das barras de armadura demonstrou que para os exemplos propostos a variação de custo foi muito pequena. Em muitos casos, aumentar a complexidade do posicionamento das barras e permitir diferentes diâmetros não trouxe benefícios ao custo da seção. Apenas aumentou o esforço computacional e tornou a seção mais difícil de ser executada na prática. Neste caso outros fatores podem ser determinantes na escolha da melhor solução. Pensando em termos construtivos, seções mais simples, com menos barras e com menor diversidade de diâmetros podem ser mais interessantes e compensar a diferença no custo de material. Estes critérios também podem ser incluídos no

algoritmo de forma a facilitar a execução da seção.

Ao permitir o algoritmo otimizar as dimensões da seção e também a resistência característica do concreto, é possível obter soluções expressivamente melhores que impactam significativamente no custo total. Quando comparado ao dimensionamento convencional com o auxílio de ábacos de interação, as soluções ótimas encontradas foram consideravelmente mais econômicas, com reduções de custo maiores do que 30% em quase todos os exemplos estudados. Em comparação com outros métodos de otimização, o programa proposto também se mostrou eficiente, obtendo soluções muito similares.

Para os exemplos estudados, as soluções ótimas tendem a apresentar seções com baixas taxas de armadura, próximas da mínima permitida. Ainda, quando permite-se otimizar a resistência característica do concreto, as melhores soluções foram obtidas com  $f_{ck}$  alto, dimensões menores e baixas taxas de armadura. Isto deve-se ao fato de que o custo do concreto é relativamente mais baixo que o do aço, ou seja, o custo do aço é o fator dominante na busca pela solução ótima. Com isso, as soluções ótimas geralmente apresentam seções com maior volume de concreto, menor área de aço e conseqüentemente baixas taxas de armadura. Logo, os resultados obtidos poderão modificar-se em função de flutuações dos custos dos materiais ao longo do tempo.

Neste trabalho o principal objeto de estudo é o dimensionamento de pilares. Entretanto, métodos de otimização podem ser amplamente utilizados para dimensionar outros tipos de estrutura, pois o objetivo de todo o dimensionamento é obter estruturas com o menor custo, peso, ou demais fatores que podem ser maximizados ou minimizados por meio da otimização estrutural. É importante destacar que as seções transversais podem estar sujeitas às limitações arquitetônicas. Logo, as dimensões da seção devem ser limitadas de forma a tornarem-se compatíveis com o projeto arquitetônico. Além disso, a estrutura otimizada deve ser analisada em conjunto com os demais elementos estruturais para verificar a rigidez global da estrutura.

Por fim, é possível afirmar que o presente trabalho atingiu o objetivo de estudar o dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado. Os resultados apresentados confirmam a expectativa de redução de custos com o uso de algoritmos de otimização no dimensionamento de seções e evidenciam o efeito positivo que o dimensionamento ótimo produz em estruturas em concreto armado. Percebe-se que quanto mais variáveis otimizadas, melhor será a solução encontrada. Entretanto, cabe frisar que o aumento do número de variáveis gera um problema que demanda um esforço computacional maior.

Como continuidade deste estudo, seguem sugestões de pesquisas futuras:

- a) Implementar outros métodos de otimização à rotina de verificação, de forma a comparar diretamente o desempenho do algoritmo QPSO com outros métodos;
- b) Identificar um padrão para as características das seções transversais que apresentam dificuldade de convergência e exigem maior esforço do algoritmo de verificação, para mitigar a ocorrência deste fenômeno;
- c) Realizar uma análise de sensibilidade sobre a influência do custo unitário dos materiais e o efeito que a oscilação dos preços afeta o custo final da estrutura.
- d) Ampliar a aplicação do programa para pórticos planos e/ou para dimensionar de forma conjunta todos pilares de uma edificação.

## REFERÊNCIAS

- AFZAL, M.; LIU, Y.; CHENG, J. C. P.; GAN, V. J. L. **Reinforced concrete structural design optimization: A critical review**. Journal of Cleaner Production, Volume 260. The Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, July 2020.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:2014**. Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7480:2007**. Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado – Especificação. Rio de Janeiro, 2014.
- ARAÚJO, J.M. **Curso de Concreto Armado – Calculando com o PACON**. Ed. Dunas, Rio Grande, 1ª edição, 2006.
- ARAÚJO, J. M. **Dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1984.
- ARAÚJO, J. M. **Pilares esbeltos de concreto armado. Parte 1: Um modelo para análise e dimensionamento**. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.18, p.81-93, 2011.
- ARGOLO, W. P. **Otimização de seções de concreto armado submetida à flexocompressão reta utilizando algoritmos genéticos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.
- BALLING, R.; YAO, X. **Optimization of reinforced concrete frames**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 123, n.2, p. 193-202, Feb. 1997.
- BASTOS, E. A. **Otimização de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexocompressão oblíqua utilizando algoritmos genéticos**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.
- BORDIGNON, R. **Otimização de pilares retangulares em concreto armado submetidos à flexocompressão reta**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade de Passo Fundo, 2010.
- CAMPOS FILHO, A. **Dimensionamento e verificação de seções poligonais de concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua**. Porto Alegre: PPGE/UFRGS, 2014. Caderno de Engenharia.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO Fº, J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: Segundo a NBR 6118:2014**. – 4ª ed. – São Carlos: EdUFSCar, 2014. 416p.
- CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto**. São Paulo: PINI, 2009, 589 p., Volume 2.
- CLERC, M. **The swarm and the queen: Towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization**. Congress on Evolutionary Computation, Washington, DC, vol. 3, pp. 1951–1957, 1999.

CLERC, M., KENNEDY, J. **The particle swarm-explosion, stability and convergence in a multidimensional complex space.** IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 6(2):58–73. 2002.

COELHO, L. **A quantum particle swarm optimizer with chaotic mutation operator.** Chaos, Solitons & Fractals, 37(5):1409–1418. 2008.

DUMONT, N. A., MUSSO JR, F. **Dimensionamento e verificação de seções de concreto armado e protendido e verificações da estabilidade de vigas-colunas no estado limite último com o uso de microcomputadores.** Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil da PUC/RJ, 1987.

EBERHART, R., KENNEDY, J. **Particle swarm optimization.** IEEE International Joint Conference on Neural Networks, IEEE Press, p. 1942–1948, 1995.

ENGELBRECHT, A. P. **Computational intelligence: An introduction**, 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, Ltd. 2007.

FARIA, F. C. **Otimização de seções poligonais de concreto armado sujeitas à flexão composta.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Ouro Preto, 2017.

FREIRE, R. G. **Análise computacional da estabilidade de pilares em concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua.** Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal de Pernambuco, 2016.

FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto: solicitações normais.** Rio de Janeiro: LTC, 1981.

G. BENI; J. WANG. **Swarm intelligence in cellular robotic systems.** Proceedings of the NATO Advanced Workshop on Robots and Biological Systems, Tuscany, Italy, June 26–30, 1989.

LIMA, D. A. **Dimensionamento automático de pilares de concreto armado.** Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2018.

LIU, J., XU, W., SUN, J. **Quantum-behaved particle swarm optimization with mutation operator.** 17th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence, pp. 237–240, 2005

MARINO, M. A. **Seções transversais de concreto armado sujeitas a solicitações normais.** Curitiba: COPEL, 1979.

MATLAB, “MATrix LABoratory, R2012a”. The MathWorks Inc., Natick, MA, 2000. <[www.mathworks.com/](http://www.mathworks.com/)>. Acessado em 01/06/2020.

MEDEIROS, G. F. **Método da busca harmônica aplicado na otimização de seções de pilares retangulares em concreto armado considerando custos econômicos e ambientais.** Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade de Passo Fundo, 2012.

MILLONAS, M. M. **Swarms, phase transitions, and collective intelligence**. C.G. Langton (Ed.), *Artificial Life III* (p. 417-445). Reading, MA: Addison-Welsey, 1994.

MONTOYA, P.J., MESEGUER, A. G., e CABRÉ, F. M., **Hormigón Armado**, v.2, 13a ed., Editorial Gustavo Gili S. A., Barcelona, Espanha, 1994.

NASCIMENTO, K. M. B. **Dimensionamento otimizado de pilares de concreto armado utilizando algoritmo genético**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Pernambuco, 2017.

NELDER, J. A.; MEAD, R. **A simplex method for function minimization**. *The Computer Journal*, 8, pp. 308–313, 1965.

NOCEDAL, J., WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization**, 2nd. Edition. Springer Series in Operations Research. 2000.

PARSOPOULOS, K. E.; VRAHATIS, M. N. **Particle Swarm Optimization and Intelligence: Advances and Applications**. Information Science Reference, 2010.

PINHEIRO, L. M; BARALDI, L. T; POREM, M. E. **Estruturas de concreto: ábacos para flexão oblíqua**. Departamento de Engenharia de Estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

PIRES, S. L. **Otimização por Algoritmos Genéticos de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexão oblíqua**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo - UNICAMP, 2014.

RAO, S. S. **Engineering Optimization: Theory and Practice**, 4<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons, Inc. New Jersey, 2009.

RODRIGUES JUNIOR, S. J. **Otimização de pilares de edifícios altos de concreto armado**. 2005. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2005.

SANCHEZ-OLIVARES, G., TOMAS, A. **Improvements in meta-heuristic algorithms for minimum cost design of reinforced concrete rectangular sections under compression and biaxial bending**. *Engineering Structures*, 2017, 130:162-179.

SANTOS, L. M. **Sub-rotinas básicas do dimensionamento de concreto armado**. V.1. São Paulo: Thot Editora, 1994.

SIAS, F. M. **Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Espírito Santo, 2014.

SILVA, L. M. **Programa computacional para análise e verificação de seções de concreto armado e protendido com flexão oblíqua composta**. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade Federal de São Carlos, 2015.

SIEDLECKI W., SKLANSKY J. **Constrained genetic optimization via dynamic reward-penalty balancing and its use in pattern recognition**. Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms, 1989.

SHI, Y., EBERTHART, R. **A modified particle swarm optimizer**. IEEE International Conference on Evolutionary Computation Proceedings. IEEE World Congress on Computational Intelligence, 1998.

SOUZA, P. M. S. **Dimensionamento otimizado de pilares de concreto armado de acordo com a NBR 6118:2014**. Dissertação, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Vitória. Espírito Santo. Vitória, 2007.

SUN, J.; LAI C.; WU, X.; **Particle Swarm Optimization: Classical and Quantum Perspectives**. Chapman & Hall/CRC, 419 p. 2012.

SUN, J., FANG, B., XU, W. **Particle Swarm Optimization with Particles Having Quantum Behavior**. Proceedings of the 2004 Congress on Evolutionary Computation (IEEE), pp 325-331, 2004.

SUN, J., FANG, W., WU, X., PALADE, V., XU, W. **Quantum-behaved particle swarm optimization: Analysis of the individual particle and parameter selection**. Evolutionary Computation, vol. 20, no. 3, pp. 349-393, 2012.

VANDERPLAATS, G., **Numerical optimization technique for engineering design – with applications**. McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.

VENTURINI, W. S., RODRIGUES, R. O., **Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitadas à flexão reta**. Apostila da Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos, 1996.

WANG, J., ZHOU, Y. **Quantum-behaved particle swarm optimization with generalized local search operator for global optimization**. In Proceedings of International Conference on Intelligent Computing, pp. 344–352, 2007.

XI, M., SUN, J., XU, W. **An improved quantum-behaved particle swarm optimization algorithm with weighted mean best position**. Applied Mathematics and Computation, 205(2):751–759, 2008.

YANG, X-S., DEB, S. **Cuckoo search via Lévy flights**, in: Proceedings of the world congress on nature & biologically inspired computing, NABIC 2009, 210-214, 2009.

YANG, X-S., **Engineering Optimization: An Introduction with Metaheuristic Applications**. John Wiley & Sons, Inc. New Jersey, 2010.

## ANEXO A – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA SOBRE UM DOMÍNIO PLANO ARBITRÁRIO ATRAVÉS DE INTEGRAIS DE CONTORNO

O procedimento apresentado neste trabalho envolve o cálculo de integrais de superfície, que são resolvidas através da aplicação do teorema de Green, conforme apresentado por Dumont e Musso Jr. (1987). O teorema de Green transforma integrais de superfície sobre um domínio plano em integrais de linha ao longo de um contorno C, conforme figura A.1 (CAMPOS FILHO, 2014).

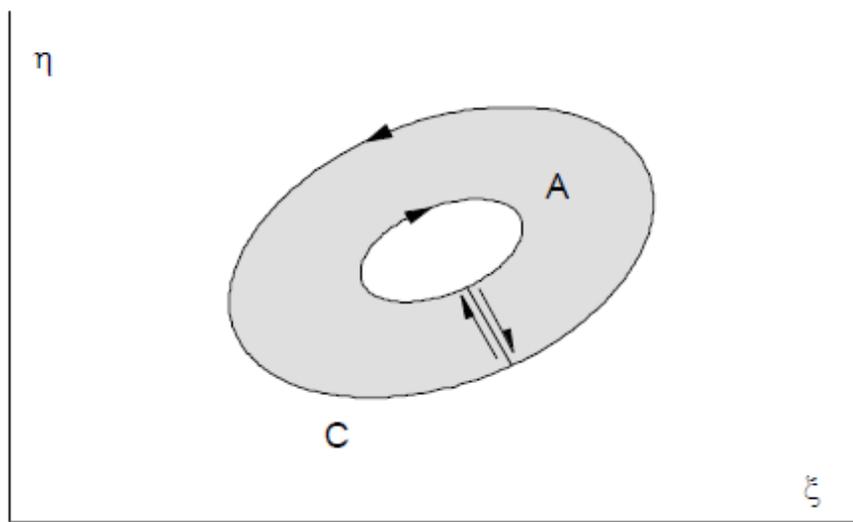


Figura A.1 – Domínio plano A com contorno C

A integral de superfície de um termo genérico de um polinômio, com um sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$ , é transformada em uma integral de contorno por

$$\int_A \xi^k \eta^m dA = \oint_C \frac{\xi^{k+1} \eta^m}{k+1} d\eta \quad (\text{A.1})$$

Sendo o plano A limitado por uma poligonal fechada, a integral da expressão (A.1) pode ser substituída por um somatório:

$$\int_A \xi^k \eta^m dA = \sum_{i=1}^n G_{km} \quad (\text{A.2})$$

onde

$$G_{km} = \frac{1}{k+1} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \xi^{k+1} \eta^m d\eta \quad (\text{A.3})$$

em que  $n$  é o número de segmentos da poligonal e  $\eta_i$  e  $\eta_{i+1}$  são as ordenadas do seu  $i$ -ésimo

segmento.

As coordenadas  $(\xi, \eta)$  podem ser definidas por

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_i + w \\ \xi &= \xi_i + \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}w\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

onde  $\Delta\xi = \xi_{i+1} - \xi_i$  e  $\Delta\eta = \eta_{i+1} - \eta_i$  e  $w$  varia de 0 a  $\Delta\eta$ , de acordo com figura A.2

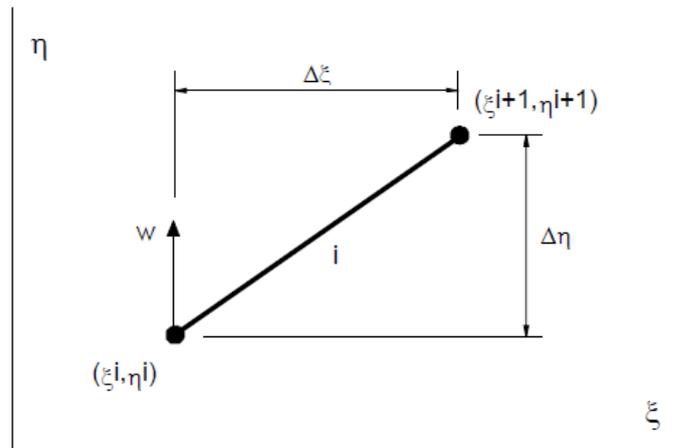


Figura A.2 – Definição de  $w$

Substituindo as expressões (A.4) em (A.3), temos

$$G_{km} = \frac{1}{k+1} \int_0^{\Delta\eta} \left[ \xi_i + \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} w \right]^{k+1} [\eta_i + w]^m dw \quad (\text{A.5})$$

Pela expressão A.5, pode-se obter os polinômios que são empregados no desenvolvimento deste trabalho:

$$G_{00} = \left( \xi_i + \frac{\Delta\xi}{2} \right) \Delta\eta \quad (\text{A.6})$$

$$G_{01} = \left[ \xi_i \left( \eta_i + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \Delta\xi \left( \frac{\eta_i}{2} + \frac{\Delta\eta}{3} \right) \right] \Delta\eta \quad (\text{A.7})$$

$$G_{02} = \left\{ \xi_i \left[ \eta_i (\Delta\eta + \eta_i) + \frac{\Delta\eta^2}{3} \right] + \Delta\xi \left[ \eta_i \left( \frac{\eta_i}{2} + \frac{2\Delta\eta}{3} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{4} \right] \right\} \Delta\eta \quad (\text{A.8})$$

$$G_{03} = \left\{ \xi_i \left[ \eta_i \left( \Delta\eta^2 + \eta_i \left( \frac{3\Delta\eta}{2} + \eta_i \right) \right) + \frac{\Delta\eta^3}{4} \right] + \Delta\xi \left[ \eta_i \left( \frac{3\Delta\eta^2}{4} + \eta_i \left( \Delta\eta + \frac{\eta_i}{2} \right) \right) + \frac{\Delta\eta^3}{5} \right] \right\} \Delta\eta \quad (\text{A.9})$$

$$G_{10} = \left[ \xi_i(\xi_i + \Delta\xi) + \frac{\Delta\xi^2}{3} \right] \frac{\Delta\eta}{2} \quad (\text{A.10})$$

$$G_{11} = \left\{ \xi_i \left[ \xi_i \left( \eta_i + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \Delta\xi \left( \eta_i + \frac{2\Delta\eta}{3} \right) \right] + \Delta\xi^2 \left[ \frac{\eta_i}{3} + \frac{\Delta\eta}{4} \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{2} \quad (\text{A.11})$$

$$G_{12} = \left\{ \xi_i \left[ \xi_i \left( \eta_i(\eta_i + \Delta\eta) + \frac{\Delta\eta^2}{3} \right) + \Delta\xi \left( \eta_i \left( \eta_i + \frac{4\Delta\eta}{3} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{2} \right) \right] \right. \\ \left. + \Delta\xi^2 \left[ \eta_i \left( \frac{\eta_i}{3} + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{5} \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{2} \quad (\text{A.12})$$

$$G_{20} = \left\{ \frac{\Delta\xi^3}{4} + \xi_i \left[ \Delta\xi^2 + \xi_i \left( \frac{3\Delta\xi}{2} + \xi_i \right) \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{3} \quad (\text{A.13})$$