

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

MODELAGEM DE SITUAÇÕES DE PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO
ARMADO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Marina Martinelli

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de
Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
para obtenção do título de *Mestre em Engenharia*.

Área de concentração: Estruturas

Porto Alegre

Março, 2003

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Programa de Pós-Graduação.

Prof. Américo Campos Filho
Orientador

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

BANCA EXAMINADORA

- Prof. Guilherme Sales Soares de Azevedo Melo (UnB/DF)
Ph.D. pela Polytechnic of Central London
- Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG/RS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul
- Prof. Roberto Domingo Rios (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre
Março, 2003

Dedico esta dissertação aos meus queridos pais, Ursula e Ivonir, ao meu irmão, Marcos, e ao meu amor Luiz Alberto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Américo Campos Filho pela orientação, dedicação e paciência durante o período de trabalho.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS pelos ensinamentos ministrados durante o curso, e aos funcionários pelo auxílio e colaboração.

À família de meu noivo pela paciência, apoio e carinho.

Aos meus pais, por terem me apoiado e me incentivado durante toda minha vida e em todas as minhas escolhas. Ao meu irmão, pela amizade e apoio. A minha avó pelos pensamentos positivos.

De forma muito especial, agradeço ao meu noivo, que ilumina o meu caminho e traz amor e paz ao meu coração.

E, a Deus, pela Sua presença em minha vida.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um programa computacional, elaborado através do método dos elementos finitos, para análise tridimensional de situações de punção em lajes de concreto armado com e sem armadura de cisalhamento.

São utilizados modelos constitutivos elasto-viscoplásticos para representar o comportamento do concreto. Para a simulação do concreto submetido a um carregamento de longa duração, empregou-se o modelo de camadas superpostas. Este modelo admite que o concreto é constituído por um número conveniente de camadas com a mesma deformação, porém características materiais diferentes. A tensão total é obtida pela soma das contribuições de cada camada.

A armadura é introduzida no modelo como uma linha de material mais rígido no interior do elemento de concreto. Considera-se aderência perfeita entre o concreto e o aço. Assim, os deslocamentos ao longo das barras de aço são determinados a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto. Desta forma, a matriz de rigidez da armadura tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto, as quais são somadas para a obtenção da matriz de rigidez total.

Para representar o comportamento após à fissuração do concreto, é utilizado o modelo de fissuras distribuídas, onde apenas as propriedades dos materiais são modificadas e a malha de elementos finitos não necessita de atualização. Sugerem-se duas formulações para a consideração da contribuição do concreto entre fissuras e da redução na capacidade de transferência de corte devido ao aumento da abertura da fissura. Este último é incluído através de uma simplificação, que consiste em atribuir ao módulo de elasticidade transversal, correspondente ao plano fissurado, um valor reduzido.

Para comprovar a validade do programa computacional desenvolvido, comparam-se os resultados numéricos com valores experimentais de ensaios realizados por Coelho (1999), Trautwein (2001) e Fusco (1988). Obtiveram-se boas aproximações para lajes com e sem armadura de cisalhamento. Desta forma, o programa computacional desenvolvido pode ser empregado para generalizar resultados experimentais em lajes cogumelo com variação na resistência do concreto, na bitola das barras de armadura, no espaçamento entre as barras e no número de camadas de armadura de cisalhamento.

ABSTRACT

This study aims to develop a computational model for the three dimensional numerical punching analysis of reinforced concrete slabs with or without shear reinforcement, using the finite element method.

Concrete behavior is represented through elasto-viscoplastic constitutive models. An overlay model is included to provide an adequate representation of concrete behavior during time. Thus, a concrete representation arranged by a suitable number of layers, which present the same strain, is adopted. The total stress is the sum of the contribution of each layer.

The reinforcement is inserted into the model as a stiffer material line inside the concrete element. The displacements along the reinforcement are referred to the nodal displacements of the concrete element. Therefore, the stiffness matrix for the reinforcement has the same dimension of the concrete element stiffness matrix. The stiffness matrix of the reinforced concrete element is the sum of both matrices.

A smeared crack model is used for concrete cracking. In this case, only the material properties are modified and the finite element mesh does not need to be updated.

Two formulations are suggested considering the contribution of concrete between cracks (tension stiffening) and the shear transfer capacity reduction due to the increase in crack openings. This reduction is considered by applying a reductor factor to the transversal elasticity modulus.

The results obtained through this computational program are compared with experimental data published by Coelho (1999), Trautwein (2001) e Fusco (1988), to validate the mathematical model and the numerical methodology. The examples demonstrate that the program is suitable to analyze reinforced concrete slabs without shear reinforcement, with orthogonal reinforcement and inclined stirrups, wich leads to the conclusion that the program can be also applied to generalize the experimental results for flat slabs by varying the concrete strength, rebar diameter and spacing between bars and the number of shear reinforcement layers.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	GENERALIDADES	1
1.2	MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	4
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	4
2	MODELO PARA UM MATERIAL ELASTO-VISCOPLÁSTICO	5
2.1	MODELOS REOLÓGICOS	5
2.1.1	<i>Modelo Elástico</i>	5
2.1.2	<i>Modelo Plástico</i>	6
2.1.3	<i>Modelo Viscoso</i>	6
2.1.4	<i>Modelo Elastoplástico</i>	7
2.1.5	<i>Modelo Viscoelástico</i>	7
2.1.6	<i>Modelo Elasto-viscoplástico</i>	8
2.2	TEORIA DE SÓLIDOS ELASTO-VISCOPLÁSTICOS.....	9
2.2.1	<i>Expressões Básicas</i>	9
2.2.2	<i>Incremento de Deformação Viscoplastica</i>	10
2.2.3	<i>Incrementos de Tensão</i>	11
2.2.4	<i>Equações de Equilíbrio</i>	11
2.3	MÉTODO DE CAMADAS SUPERPOSTAS	13
2.3.1	<i>Expressões Básicas do Conceito de Camadas Superpostas</i>	13
2.4	IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO PARA UM MATERIAL ELASTO-VISCOPLÁSTICO	14
3	MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA CONCRETO ARMADO.....	17
3.1	ELEMENTO FINITO PARA O CONCRETO	17
3.1.1	<i>Hexaedro Quadrático</i>	17
3.1.2	<i>Integração Numérica</i>	18
3.2	ELEMENTO FINITO PARA A ARMADURA	20
3.2.1	<i>Modelos de Elementos Finitos para Armadura</i>	20
3.2.2	<i>Funções de Forma para a Armadura</i>	22
3.2.3	<i>Formulação Geométrica</i>	23
3.2.4	<i>Segmentos de Armadura que ficam no interior de um Elemento de Concreto</i>	26
3.2.5	<i>Matriz de Rigidez para a Armadura</i>	32
4	MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS.....	34
4.1	MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA O CONCRETO	35
4.1.1	<i>Modelo para o Concreto Comprimido</i>	35
4.2	MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO	42
4.3	MODELO VISCOELÁSTICO PARA O CONCRETO	44

4.3.1	<i>Fluência</i>	46
4.3.2	<i>Retração</i>	47
5	MODELO DE FISSURAÇÃO DO CONCRETO	48
5.1	CRITÉRIO DE FISSURAÇÃO	50
5.2	COLABORAÇÃO DO CONCRETO ENTRE FISSURAS	51
5.3	RIGIDEZ TRANSVERSAL DO CONCRETO FISSURADO	57
5.4	DEFINIÇÃO DOS MODELOS DE FISSURAÇÃO DO CONCRETO	59
5.4.1	<i>Modelo 1</i>	59
5.4.2	<i>Modelo 2</i>	60
6	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	62
6.1	INTRODUÇÃO	62
6.2	EXEMPLOS	63
6.2.1	<i>Lajes ensaiadas por Coelho (1999)</i>	63
6.2.2	<i>Lajes ensaiadas por Trautwein (2001)</i>	90
6.2.3	<i>Laje ensaiada por Fusco (1988)</i>	117
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	121
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123
	APÊNDICE A	126
	APÊNDICE B	143

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

Letras romanas maiúsculas:

A	área
A_c	área da seção transversal do concreto
A_s	área da seção transversal da armadura
B	matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de concreto
B_s	vetor que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de aço
D	matriz constitutiva
E	módulo de elasticidade longitudinal
E_c	módulo de elasticidade longitudinal do concreto
E_s	módulo de elasticidade longitudinal do aço
E_μ	módulo de elasticidade longitudinal da camada de concreto
F	força; superfície de plastificação
G	módulo de elasticidade transversal do concreto
G_c	módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado
G_f	energia de fratura
H	função de interpolação para o elemento de armadura
H'	taxa de endurecimento do concreto
I_1	1° invariante do tensor de tensão
I_1'	1° invariante do tensor de deformação
J	matriz jacobiana
J	função de fluência
J_2	2° invariante do tensor desviador de tensão
J_2'	2° invariante do tensor desviador de deformação
K	matriz de rigidez do elemento de concreto armado
K_c	matriz de rigidez do concreto
K_s	matriz de rigidez do aço
N	função de forma para o elemento de concreto
P	vetor de cargas nodais equivalentes
Q_s	vetor de forças nodais equivalentes para a armadura
R	matriz de rotação
V	volume

Letras romanas minúsculas:

a	vetor de fluxo plástico que define a direção do escoamento viscoplástico
e	espessura total do elemento de concreto
e_i	espessura da camada de concreto
f_{cm}	resistência média à compressão do concreto
f_{tm}	resistência média à tração do concreto
f_y	tensão de escoamento da armadura
h	espessura fictícia da seção de concreto
m	número de nós da barra de armadura
n	número de nós do elemento de concreto
ng	número de pontos de integração de Gauss
s	constante que depende do tipo de cimento
t	tempo
u	campo de deslocamento
x	coordenada cartesiana
y	coordenada cartesiana
z	coordenada cartesiana
w	fator de peso

Letras gregas maiúsculas:

Δ	incremento
Σ	somatório
Π	produtório

Letras gregas minúsculas:

α	parâmetro do critério de Ottosen; coeficiente para o Modelo 2 de fissuração; ângulo
β	parâmetro do critério de Ottosen; coeficiente para o Modelo 2 de fissuração; ângulo
γ	coeficiente para o Modelo 1 de fissuração; coeficiente de fluidez do concreto; distorção
γ_s	coeficiente de fluidez do aço
δ	variação

ε	deformação específica total
ε_{cs}	deformação por retração do concreto
ε_e	deformação elástica
ε_{vp}	deformação viscoplástica do concreto
$\varepsilon_{s,vp}$	deformação viscoplástica do aço
η	coeficiente de viscosidade; coordenada normalizada
λ	parâmetro do critério de Ottosen; coeficiente para o Modelo 1 de fissuração
ν	coeficiente de Poisson
ξ	coordenada normalizada
σ	tensão normal no concreto
σ_{ef}	tensão efetiva no concreto
σ_o	tensão uniaxial de plastificação inicial
σ_s	tensão normal na armadura
τ	tensão tangencial no concreto
ϕ	diâmetro da barra de armadura; coeficiente de fluência
χ	coordenada normalizada
ξ	coordenada normalizada
φ	forças residuais

Símbolos:

T	matriz transposta
$^{-1}$	matriz inversa

ÍNDICE DE FIGURAS

	pág.
FIGURA 1.1 – Estrutura com laje cogumelo em construção.....	1
FIGURA 1.2 – Soluções para sistemas laje-pilar desenvolvidas por Turner, 1900.....	2
FIGURA 1.3 – Solução de Maillart, 1910.....	2
FIGURA 1.4 – Indústria de algodão em Roma, Nervi e Bartoli, 1957.....	2
FIGURA 2.1 – Modelo elástico.....	6
FIGURA 2.2 – Modelo plástico.....	7
FIGURA 2.3 – Modelo viscoso.....	7
FIGURA 2.4 – Modelo elastoplástico perfeito (a) e Modelo elastoplástico com endurecimento linear (b).....	8
FIGURA 2.5 – Modelo de Maxwell.....	9
FIGURA 2.6 – Modelo Elasto-viscoplástico.....	9
FIGURA 2.7 – Modelo de camadas superpostas.....	14
FIGURA 2.8 – Fluxograma do programa.....	16
FIGURA 3.1 – Elemento quadrático isoparamétrico.....	18
FIGURA 3.2 – Elemento de concreto tridimensional com 20 nós e 15 pontos de integração.....	21
FIGURA 3.3 – Modelo discreto.....	22
FIGURA 3.4 – Modelo distribuído.....	23
FIGURA 3.5 – Modelo Incorporado.....	23
FIGURA 3.6 – Barra de armadura no interior do elemento de concreto.....	26
FIGURA 3.7 – Coordenada ao longo do eixo da armadura.....	27
FIGURA 3.8 – Curva de definição da barra de aço.....	30
FIGURA 3.9 – P_1 dentro do elemento de concreto.....	32
FIGURA 3.10 – P_1 e P_{np} dentro do elemento de concreto.....	32
FIGURA 3.11 – Segmento que liga P_1 e P_{np} intercepta o elemento.....	33
FIGURA 3.12 – Segmento que liga P_1 e P_{np} não intercepta o elemento	33
FIGURA 3.13 – Segmento de armadura dentro do elemento de concreto.....	34
FIGURA 4.1 – Diagrama carga-deslocamento típico de uma peça fletida de concreto armado.....	37

FIGURA 4.2a – Meridianos da superfície de ruptura.....	41
FIGURA 4.2b – Seções transversais da superfície de ruptura.....	41
FIGURA 4.3 – Superfícies de plastificação e ruptura.....	42
FIGURA 4.4 – Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido.....	43
FIGURA 4.5 – Diagrama tensão-deformação para o aço tipo A.....	46
FIGURA 4.6 – Diagrama tensão-deformação para o aço tipo B.....	47
FIGURA 4.7 – Evolução da deformação por fluência para tensão constante aplicada em t'	48
FIGURA 4.8 – Curva de deformação por retração.....	49
FIGURA 4.9 – Modelo de cadeias Maxwell.....	50
FIGURA 5.1 – Modelos alternativos para modelar a fissuração.....	53
FIGURA 5.2 – Comprimento característico em um volume de concreto.....	57
FIGURA 5.3 – Curva tensão-deformação para concreto tracionado sugerida por Hinton (1988).....	58
FIGURA 5.4 – Curva tensão-deformação para concreto tracionado sugerida por Prates Junior (1992).....	59
FIGURA 5.5 – Curva tensão-deformação para concreto tracionado (Modelo 1).....	64
FIGURA 5.6 – Deslocamentos no centro da laje.....	64
FIGURA 5.7 – Curva tensão-deformação para concreto tracionado (Modelo 2).....	65
FIGURA 5.8 – Deslocamentos no centro da laje.....	66
FIGURA 6.1 – Esquema de Ensaio – punção centrada.....	67
FIGURA 6.2 – Geometria da laje analisada.....	68
FIGURA 6.3 – Malha adotada para $\frac{1}{4}$ da laje.....	69
FIGURA 6.4 – Deflexões no centro da laje.....	70
FIGURA 6.5 – Configuração deformada da laje ampliada em 15 vezes (valores em mm obtidos através do Modelo 1).....	71
FIGURA 6.6 – Tensões na armadura de flexão (em kN/cm^2) para os incrementos de carga 1, 3 e 9 (Modelo 1).....	71
FIGURA 6.7 – Posicionamento dos estribos verticais.....	72
FIGURA 6.8 – Deflexões no centro da laje.....	73
FIGURA 6.9 – Tensões na armadura de flexão (em kN/cm^2) para o último incremento de carga (Modelo 1).....	74
FIGURA 6.10 – Posicionamento dos extensômetros.....	74

FIGURA 6.11 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 2.....	75
FIGURA 6.12 – Deflexões no centro da laje.....	76
FIGURA 6.13 – Posicionamento dos extensômetros.....	77
FIGURA 6.14 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1.....	77
FIGURA 6.15 – Deflexões no centro da laje.....	78
FIGURA 6.16 – Posicionamento dos extensômetros.....	79
FIGURA 6.17 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1.....	79
FIGURA 6.18 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 2.....	80
FIGURA 6.19 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 3.....	80
FIGURA 6.20 – Tensões no concreto (em kN/cm ²) para os incrementos de carga 1, 2 e 4 (Modelo 1).....	81
FIGURA 6.21 – Modelo do estribo adotado.....	82
FIGURA 6.22 – Posicionamento dos estribos inclinados.....	82
FIGURA 6.23 – Deflexões no centro da laje.....	83
FIGURA 6.24 – Posicionamento dos extensômetros.....	84
FIGURA 6.25 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1.....	84
FIGURA 6.26 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 2.....	85
FIGURA 6.27 – Tensões na armadura de flexão e de cisalhamento (em kN/cm ²) para o incremento de carga 7 (Modelo 1).....	85
FIGURA 6.28 – Deflexões no centro da laje.....	87
FIGURA 6.29 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1.....	88
FIGURA 6.30 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 2.....	88
FIGURA 6.31 – Deflexões no centro da laje.....	89
FIGURA 6.32 – Posicionamento dos extensômetros.....	90

FIGURA 6.33 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1.....	90
FIGURA 6.34 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 2.....	91
FIGURA 6.35 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 3.....	91
FIGURA 6.36 – Deflexões no centro da laje.....	93
FIGURA 6.37 – Posicionamento dos extensômetros.....	93
FIGURA 6.38 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1.....	94
FIGURA 6.39 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 2.....	94
FIGURA 6.40 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 3.....	95
FIGURA 6.41 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 4.....	95
FIGURA 6.42 – Tensões na armadura de flexão e de cisalhamento (em kN/cm ²) para o incremento de carga 7 (Modelo 2).....	96
FIGURA 6.43 – Geometria da laje analisada.....	97
FIGURA 6.44 – Modelo do estribo adotado.....	97
FIGURA 6.45 – Posicionamento em cruz dos estribos (medidas em mm).....	98
FIGURA 6.46 – Deflexões no centro da laje.....	99
FIGURA 6.47 – Posicionamento dos extensômetros.....	100
FIGURA 6.48 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 e 12.....	100
FIGURA 6.49 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15 e 16.....	101
FIGURA 6.50 – Deflexões no centro da laje.....	102
FIGURA 6.51 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 e 12.....	103
FIGURA 6.52 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15 e 16.....	104

FIGURA 6.53 – Distribuição radial dos estribos (medidas em mm).....	105
FIGURA 6.54 – Deflexões no centro da laje.....	106
FIGURA 6.55 – Posicionamento dos extensômetros.....	106
FIGURA 6.56 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1, 2, 3 e 4.....	107
FIGURA 6.57 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 5, 6, 7 e 8.....	107
FIGURA 6.58 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 9 e 10.....	108
FIGURA 6.59 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 11 e 12.....	108
FIGURA 6.60 – Visualização de tensões na armadura de cisalhamento.....	109
FIGURA 6.61 – Distribuição radial dos estribos (medidas em mm).....	110
FIGURA 6.62 – Modelo de estribo adotado na direção da diagonal à área carregada e perpendicular à mesma.....	110
FIGURA 6.63 – Deflexões no centro da laje.....	111
FIGURA 6.64 – Posicionamento dos extensômetros.....	112
FIGURA 6.65 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1, 2, 3, 4, 5 e 6.....	113
FIGURA 6.66 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 7, 8, 9, 10, 11 e 12.....	113
FIGURA 6.67 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 13, 14, 15, 16, 17 e 18.....	114
FIGURA 6.68 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 19, 20, 21, 22, 23 e 24.....	114
FIGURA 6.69 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 25 e 26.....	115
FIGURA 6.70 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 27 e 28.....	115
FIGURA 6.71 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 30, 31 e 32.....	116
FIGURA 6.72 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 33 e 34.....	116

FIGURA 6.73 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 35 e 36.....	117
FIGURA 6.74 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 37 e 38.....	117
FIGURA 6.75 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 39.....	118
FIGURA 6.76 – Deflexões no centro da laje.....	119
FIGURA 6.77 – Posicionamento dos extensômetros.....	120
FIGURA 6.78 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1, 2, 3 e 4.....	120
FIGURA 6.79 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 5, 6, 7 e 8.....	121
FIGURA 6.80 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 9 e 10.....	121
FIGURA 6.81 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 11 e 12.....	122
FIGURA 6.82 – Tensões na armadura de flexão e de cisalhamento (em kN/cm ²) para o incremento de carga 8 (Modelo 2).....	122
FIGURA 6.83 – Deflexões no centro da laje.....	124
FIGURA 6.84 – Geometria da laje analisada.....	125
FIGURA 6.85 – Malha adotada para ¼ da laje.....	125
FIGURA 6.86 – Visualização da armadura.....	126
FIGURA 6.87 – Tensão na armadura externa.....	127
FIGURA 6.88 – Tensão na armadura interna.....	127
FIGURA A.1 – Exemplo de laje carregada em seu centro.....	134
FIGURA A.2 – Informação das coordenadas.....	135
FIGURA A.3 – Retângulos iniciais para formar a geometria.....	135
FIGURA A.4 – Área formada com os retângulos iniciais.....	136
FIGURA A.5 – Copiando superfícies.....	136
FIGURA A.6 – Montagem dos volumes.....	137
FIGURA A.7 – Duas vistas da área finalizada.....	137
FIGURA A.8 – Duas vistas dos volumes finalizados.....	138

FIGURA A.9 – Entrada do número de elementos em cada direção.....	138
FIGURA A.10 – Número de elementos gerados.....	139
FIGURA A.11 – Malha adotada.....	139
FIGURA A.12a – Janelas de entrada de dados criadas através do arquivo .PRB.....	140
FIGURA A.12b – Janelas de entrada de dados criadas através do arquivo .PRB.....	141
FIGURA A.13 – Janelas personalizada para os dados do programa.....	142
FIGURA A.14 – Especificação das cargas concentradas nos nós.....	143
FIGURA A.15 – Aplicação das condições de contorno.....	143
FIGURA B.1 – Exemplo de solução descontínua e tensões suavizadas.....	151
FIGURA B.2 – Exemplo de visualização através do arquivo conferearm.flavia.msh..	155
FIGURA B.3 – Comando para visualização dos resultados.....	156
FIGURA B.4 – Resultado de tensões.....	156
FIGURA B.5 – Visualização das tensões na armadura através dos arquivos arm.res e arm.msh.....	157

ÍNDICE DE TABELAS

	pág.
TABELA 3.1 – Valores dos coeficientes.....	21
TABELA 6.1 – Propriedades do concreto.....	69
TABELA 6.2 – Propriedades do aço.....	70
TABELA 6.3 – Propriedades do concreto.....	73
TABELA 6.4 – Propriedades do concreto.....	76
TABELA 6.5 – Propriedades do concreto.....	83
TABELA 6.6 – Propriedades do concreto.....	86
TABELA 6.7 – Propriedades do concreto.....	92
TABELA 6.8 – Propriedades do concreto.....	98
TABELA 6.9 – Propriedades do aço.....	98
TABELA 6.10 – Propriedades do concreto.....	102
TABELA 6.11 – Propriedades do concreto.....	105
TABELA 6.12 – Propriedades do concreto.....	111
TABELA 6.13 – Propriedades do concreto.....	119
TABELA 6.14 – Propriedades do concreto.....	123
TABELA 6.15 – Propriedades do aço.....	126
TABELA 6.16 – Propriedades do concreto.....	126

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

Lajes apoiadas diretamente sobre pilares são um modelo estrutural conhecido como lajes cogumelo (Fig.1.1) e tem recebido considerável atenção nas últimas décadas devido ao aumento de sua utilização, cuja conveniência se justifica por fatores como economia de custos e tempo de execução, flexibilidade arquitetônica e possibilidade de melhor ventilação e iluminação.

Apesar da simples aparência, essas lajes apresentam um complexo comportamento ao cisalhamento, podendo haver ruptura transversal (punção) em torno de regiões da laje submetidas a altas tensões junto ao pilar. Neste caso, uma fissura inclinada forma-se ao redor do pilar e, por fim, o pilar e o cone de punção separam-se da laje.



FIGURA 1.1 - Estrutura com laje cogumelo em construção.

No início do século passado, já se procuravam soluções para suavizar as tensões presentes em ligações diretas entre lajes e pilares. As primeiras estruturas foram desenvolvidas nos Estados Unidos por Turner (1900) e Maillart (1910), como mostram as Fig. 1.2 e Fig. 1.3.

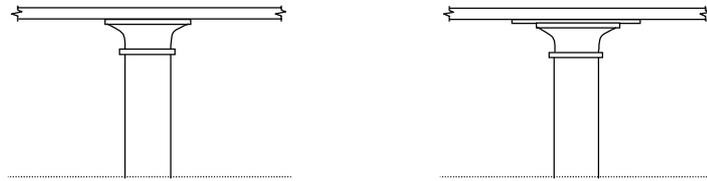


FIGURA 1.2 – Soluções para sistemas laje-pilar desenvolvidas por Turner, 1900 (apud FIB - Boletim 12, 2001).

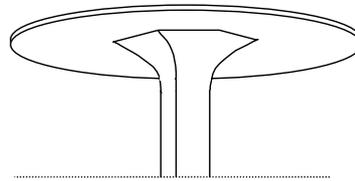


FIGURA 1.3 – Solução de Maillart, 1910.

Na Europa, em 1957, Nervi/Bartoli desenvolveram um projeto inovador para uma indústria de algodão, para a qual adotaram a solução de lajes apoiadas sobre pilares ilustrada na Fig. 1.4, o que proporcionou maior leveza e espaço interno para a edificação (apud FIB - Boletim 12, 2001).



FIGURA 1.4 – Indústria de algodão em Roma, Nervi e Bartoli, 1957.

Os primeiros estudos teóricos sobre punção foram realizados por Talbot, em 1913, com ensaios de 197 sapatas sem armadura de cisalhamento, observando a ruína por punção em vinte delas. Em 1936, Graff e Wheller iniciaram o uso de armadura de cisalhamento para prevenir esse tipo de ruptura e, em 1960, foi publicada por Kinnunen e Nylander a primeira teoria racional sobre puncionamento (apud Takeya, 1981).

Ao longo dos últimos anos, diversas pesquisas experimentais têm sido conduzidas com os objetivos de aprimorar o conhecimento sobre as superfícies de ruptura na região de conexão entre laje e pilar, analisar cargas últimas e obter indicações para a elaboração de um projeto seguro de peças submetidas à punção com e sem armadura de cisalhamento.

Mais recentemente, simulações numéricas realizadas através do Método de Elementos Finitos tornaram-se uma importante ferramenta para avaliar e prever o comportamento de estruturas em concreto armado. Análises por Elementos Finitos de lajes em concreto armado são desenvolvidas desde o início dos anos 70s. Apesar do significativo progresso que há no desenvolvimento de métodos computacionais sofisticados, a apurada previsão das características da deformabilidade de lajes em concreto armado e de suas cargas últimas permanece sendo uma difícil tarefa (Jiang e Mirza, 1997).

No caso particular de simulações numéricas de lajes cogumelo, existem estudos que empregam sistemas diferentes de modelagem. Menétrey (1994) e Hallgren (1996) utilizaram elementos axissimétricos e concluíram que o modelo de elementos bidimensionais é apropriado para representar a ruptura por punção, porém, não pode ser empregado para situações com armadura de cisalhamento. Polak (1998) adotou elementos de cascas degenerados e comprovou sua eficiência mesmo para análises de grandes estruturas com exigência computacional significativa. Ozbolt et al. (1999), Beutel (1998) e Staller (2000) aplicaram elementos tridimensionais e demonstraram a grande flexibilidade e precisão destes elementos na modelagem de estruturas em concreto armado, inclusive para diferentes tipos de armadura de cisalhamento.

Na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, existem pesquisas desenvolvidas para a modelagem tridimensional de peças de concreto armado através do Método dos Elementos Finitos, destacando-se as dissertações de Cloure (1994) e Aurich (2001). O presente trabalho segue a mesma linha de pesquisa, sendo pioneiro na modelagem da situação de punção em lajes de concreto armado.

1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

O objetivo principal da pesquisa é a construção de rotinas computacionais para a análise com não-linearidade física de lajes apoiadas diretamente sobre pilares através do Método de Elementos Finitos, utilizando-se elementos da família Serendipity isoparamétricos quadráticos com 20 (vinte) nós.

Pretende-se definir modelos que permitam a devida avaliação da deformabilidade das lajes e de esforços de cisalhamento, tensões que podem causar a ruptura da laje por punção.

Como ponto de partida foi adotado o programa para análise não-linear dinâmica e estática de estruturas tridimensionais em concreto armado apresentado por Hinton (1988) e modificado por Claire (1994).

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O texto deste trabalho é composto por 7 capítulos.

No capítulo 2, apresenta-se o modelo reológico empregado para análise de estruturas compostas por material elasto-viscoplástico. Apresenta-se o funcionamento do algoritmo de solução incremental para problemas não-lineares e o método das camadas superpostas adotado.

No capítulo seguinte, aborda-se a formulação do elemento finito empregado para o concreto armado e para a armadura, descrevendo-se, inclusive, as diversas formas de sua consideração no interior do elemento de concreto.

No capítulo 4, são descritos os modelos constitutivos utilizados para o concreto e o aço. Destaca-se a forma como foi realizada a modelagem do comportamento do concreto comprimido, bem como as propriedades da armadura.

O 5º capítulo abrange os modelos de fissuração adotados e ajustados para a representação do comportamento do concreto tracionado.

A comparação entre os resultados obtidos pelo programa implementado e resultados experimentais de lajes submetidas à punção centrada é abordada no capítulo 6, com a finalidade de validar os modelos implementados.

O capítulo 7 encerra a presente dissertação com considerações finais e comentários sobre perspectivas para a continuidade da pesquisa.

2 MODELO PARA UM MATERIAL ELASTO-VISCOPLÁSTICO

2.1 MODELOS REOLÓGICOS

Para uma análise computacional de estruturas em concreto armado, é necessário obter um modelo teórico que represente adequadamente o seu complexo comportamento, visto que dois materiais (concreto e aço) o constituem. Para representar o concreto armado, utiliza-se o conhecimento proporcionado por um ramo da Física, chamado de Reologia, que estuda o comportamento dos materiais através de suas relações constitutivas.

A Reologia fornece três tipos básicos de modelos reológicos: o elástico, o plástico e o viscoso. Através da combinação entre esses modelos, é possível representar materiais reais de comportamento bastante complexo.

No presente capítulo, apresentam-se os modelos básicos e a combinação entre eles para a obtenção de um modelo destinado a um material elasto-viscoplástico (modelo que será apresentado no item 2.1.6), como o concreto armado é considerado.

2.1.1 Modelo Elástico

Elasticidade é o fenômeno do aparecimento de deformações instantâneas e reversíveis. As deformações aparecem simultaneamente com as tensões correspondentes e permanecem constantes no tempo se as tensões também permanecerem. As deformações elásticas se anulam ao se anularem as tensões que as originaram.

Para um caso de estado uniaxial de tensões, o comportamento elástico pode ser representado por uma mola, conforme ilustrado na Fig. 2.1.



FIGURA 2.1 – Modelo elástico.

Para um material elástico linear, as tensões são proporcionais às deformações, seguindo a lei de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (2.1)$$

onde σ é a tensão, E , o módulo de elasticidade e ε , a deformação específica.

2.1.2 Modelo Plástico

Plasticidade é a propriedade de um material apresentar deformações imediatas e não-reversíveis. Ou seja, as deformações não desaparecem ao serem removidas as forças que lhe deram origem. A tensão de plastificação é o limite, a partir do qual surgem deformações permanentes.

Este comportamento pode ser representado por um bloco sobre uma superfície com atrito (“*slider*”), conforme a Fig. 2.2.

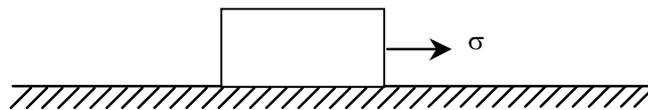


FIGURA 2.2 – Modelo Plástico.

2.1.3 Modelo Viscoso

Viscosidade é o fenômeno do aparecimento de deformações não imediatas. O material deforma-se ao longo do tempo quando submetido a uma força. Este comportamento pode ser representado por um amortecedor, como ilustrado na Fig. 2.3. Neste caso, no instante em que é aplicada uma tensão aparece uma velocidade de deformação.

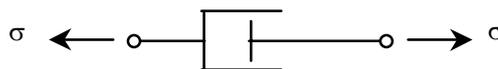


FIGURA 2.3 – Modelo Viscoso.

2.1.4 Modelo Elastoplástico

Por combinações dos modelos elástico e plástico, obtém-se o modelo elastoplástico. Este apresenta um comportamento elástico para tensões menores que a tensão de plastificação e um comportamento plástico após ser atingida esta tensão.

Neste modelo, chama-se endurecimento por deformação plástica, o aumento da tensão de plastificação com a deformação plástica ε_p , sendo caracterizado por sua taxa:

$$H'(\varepsilon_p) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p}. \quad (2.2)$$

Se H' for nulo, o material é dito elastoplástico perfeito. Caso H' seja uma constante, tem-se um material com endurecimento linear. Ambos materiais são representados pelos modelos mecânicos da Fig. 2.4.

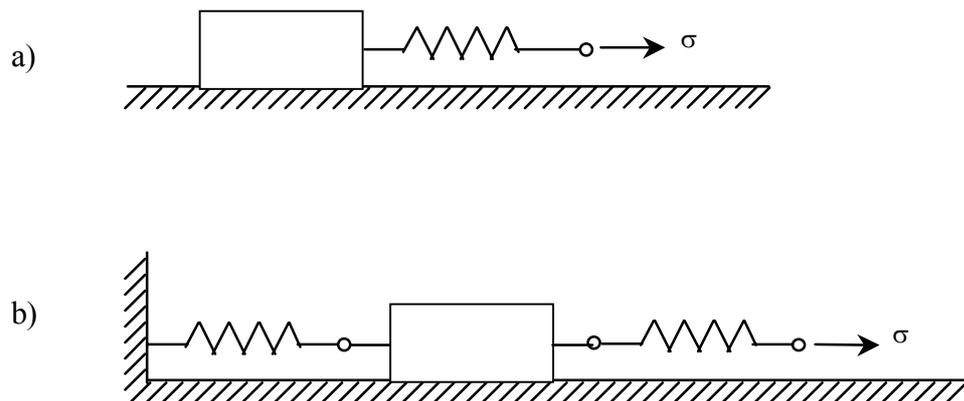


FIGURA 2.4 – Modelo elastoplástico perfeito (a) e Modelo elastoplástico com endurecimento linear (b).

2.1.5 Modelo Viscoelástico

Combinando-se elementos elásticos e viscosos, obtém-se o comportamento viscoelástico, que se caracteriza por apresentar tanto deformações imediatas, como não imediatas. Este trabalho enfoca, em particular, o modelo viscoelástico de Maxwell, representado por uma mola em série com um amortecedor, como pode ser observado na Fig. 2.5.

Um conjunto de elementos de Maxwell em paralelo possibilita a representação do comportamento do concreto sob cargas de serviço.

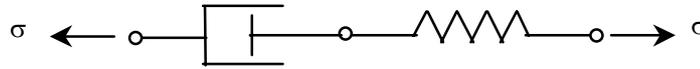


FIGURA 2.5 - Modelo de Maxwell

2.1.6 Modelo Elasto-viscoplástico

O comportamento de um material elasto-viscoplástico pode ser representado pelo modelo reológico unidimensional mostrado na Fig. 2.6.

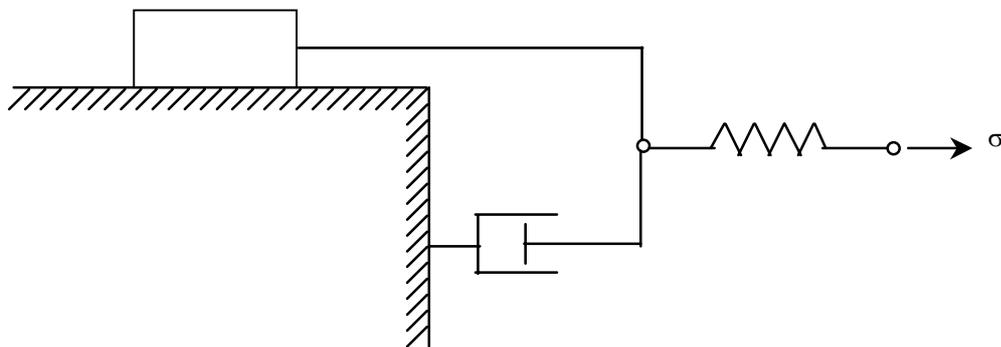


FIGURA 2.6 - Modelo Elasto-viscoplástico

A resposta elástica instantânea é proporcionada pela mola linear. Tendo em vista que o amortecedor não sofre deformação instantânea, o elemento de atrito também apresentará deformação nula, pois ambos estão conectados em paralelo. O elemento de atrito torna-se ativo somente se a tensão corrente σ for maior que a tensão de plastificação σ_0 . Este excesso de tensão ($\sigma - \sigma_0$) é absorvido gradativamente pelo amortecedor, caracterizando desta maneira, o comportamento elasto-viscoplástico do material.

2.2 TEORIA DE SÓLIDOS ELASTO-VISCOPLÁSTICOS

Neste item, são apresentados os fundamentos para a formulação matemática de elementos finitos, considerando análise tridimensional não-linear e admitindo o material como sendo isotrópico, homogêneo, de comportamento elasto-viscoplástico, conforme o modelo reológico da Fig. 2.6.

O programa básico para solução deste problema encontra-se apresentado em Hinton (1988). A partir deste programa, foram implementados por Claire (1994) diversos modelos utilizados para representação dos materiais deste estudo.

2.2.1 Expressões Básicas

Para problemas contínuos não-lineares admite-se, geralmente, que a deformação total ε pode ser separada em uma componente elástica ε_e e uma viscoplástica ε_{vp} . Então, a taxa de deformação total pode ser expressa como:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_{vp}, \quad (2.3)$$

onde $(\dot{})$ representa diferenciação com relação ao tempo. A taxa de tensão total depende unicamente da taxa de deformação elástica:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} \dot{\varepsilon}_e, \quad (2.4)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva do material. O início do comportamento viscoplástico é governado pela superfície de plastificação expressa por:

$$F(\sigma, \varepsilon_{vp}) - F_0 = 0, \quad (2.5)$$

onde F_0 é um valor que define a posição da superfície de plastificação, sendo uma função do parâmetro de endurecimento κ . Se $F < F_0$, tem-se um comportamento elástico, se $F = F_0$, plástico, e se $F > F_0$, admite-se que há comportamento viscoplástico.

Nesse instante, é necessário escolher uma lei específica que defina as deformações viscoplásticas. A mais simples opção é aquela na qual a taxa de deformação viscoplástica depende somente da tensão corrente, ou seja:

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = f(\sigma). \quad (2.6)$$

Uma forma explícita para esta lei, com extensa aplicabilidade, segundo Hinton (1988), é obtida através da seguinte equação:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \text{ para } F > F_0, \quad (2.7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} = 0, \text{ para } F \leq F_0,$$

na qual

$\gamma = 1 / \eta$ é o coeficiente de fluidez;

$Q = Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}, \kappa)$ é a função de potencial plástico.

A expressão $\langle \Phi(F) \rangle$ é igual a $\Phi(F)$ para valores positivos de F , e é nula para os demais.

Limitando-se ao caso de plasticidade associada, na qual $F \equiv Q$, a Eq. 2.7 fica:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \langle \Phi \rangle \mathbf{a}, \quad (2.8)$$

onde \mathbf{a} é o vetor de fluxo plástico que define a direção do escoamento viscoplástico.

2.2.2 Incremento de Deformação Viscoplastica

Através da taxa de deformação apresentada na Eq. 2.8, pode-se definir o incremento de deformação $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^n$ que ocorre em um intervalo de tempo $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ empregando um esquema de passo de tempo implícito, como:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^n = \Delta t_n [(1-\theta) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^n + \theta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^{n+1}]. \quad (2.9)$$

Desse modo, o incremento de deformação viscoplastica dentro de um intervalo é definido em termos da regra de escoamento viscoplastico nas extremidades do intervalo. Para $\theta = 0$ obtém-se o esquema de integração explícito de Euler, onde apenas a regra de escoamento viscoplastico, no início do intervalo, é relevante:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^n = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^n \cdot \Delta t_n \quad (2.10)$$

Nesta dissertação, utilizou-se este esquema de integração.

2.2.3 Incrementos de Tensão

Usando a forma incremental da Eq. 2.4 tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^n = \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e^n = \mathbf{D} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^n - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^n) \quad (2.11)$$

Expressando o incremento de deformação total em termos de incrementos de deslocamentos, tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^n = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}^n, \quad (2.12)$$

onde \mathbf{B} é a matriz de relações deformações-deslocamentos e $\Delta \mathbf{u}^n$ é o vetor de incrementos de deslocamentos nas direções ortogonais x, y e z.

Para a solução de problemas elásticos lineares, usando o esquema explícito ($\theta = 0$), tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^n = \mathbf{D}^n (\mathbf{B} \Delta \mathbf{u}^n - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^n \Delta t_n). \quad (2.13)$$

2.2.4 Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio a serem satisfeitas em qualquer instante de tempo t_n são:

$$\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^n dV + \mathbf{P}^n = \mathbf{0}, \quad (2.14)$$

onde \mathbf{P}^n é o vetor de cargas nodais equivalentes devido às forças de superfície e de volume. Durante um incremento de tempo, as equações de equilíbrio que devem ser satisfeitas são dadas através da forma incremental da Eq. 2.14, como apresentado a seguir:

$$\int_V \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}^n dV + \Delta \mathbf{P}^n = \mathbf{0}, \quad (2.15)$$

na qual $\Delta \mathbf{P}^n$ representa a variação nas cargas durante o intervalo de tempo Δt_n . Na maioria dos problemas de engenharia, os incrementos de cargas são aplicados como passos discretos e então, $\Delta \mathbf{P}^n = \mathbf{0}$ para todos os outros passos de tempo, exceto para o primeiro dentro de um incremento.

O incremento de deslocamento que ocorre durante o passo de tempo Δt_n pode ser calculado como:

$$\Delta \mathbf{u}^n = \mathbf{K}^{n-1} \Delta \mathbf{P}^n, \quad (2.16)$$

onde \mathbf{K}^n é a matriz de rigidez tangente global, com a seguinte forma:

$$\mathbf{K}^n = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^n \mathbf{B} dV; \quad (2.17)$$

onde $\Delta \mathbf{u}^n$ é o vetor que contém os incrementos dos deslocamentos nodais e $\Delta \mathbf{P}^n$ é o vetor de incrementos de cargas nodais equivalentes de toda a estrutura no passo n .

Os incrementos de deslocamentos $\Delta \mathbf{u}^n$, quando substituídos novamente na Eq. 2.13, fornecem os incrementos de tensão $\Delta \boldsymbol{\sigma}^n$, logo:

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^n + \Delta \boldsymbol{\sigma}^n, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u}^n. \quad (2.19)$$

Empregando as Eq. 2.11 e 2.12 tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^n = \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{u}^n - \mathbf{D}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}^n, \quad (2.20)$$

e então

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^n, \quad (2.21)$$

As condições de estado estacionário podem ser controladas pela avaliação da variação dos deslocamentos nodais. A convergência é atingida assim que essa quantidade torna-se adequadamente pequena (Owen e Hinton, 1980).

O cálculo do incremento de deslocamento está baseado em uma forma linearizada das equações incrementais de equilíbrio (Eq. 2.16). Portanto, torna-se necessário efetuar correções iterativas sobre $\Delta \mathbf{u}$, a fim de alcançar o equilíbrio no tempo $t + \Delta t$. Há vários procedimentos de solução disponíveis para realizar as correções necessárias. Neste trabalho, utiliza-se um procedimento iterativo, que consiste em calcular as forças não equilibradas em cada iteração, e em seguida reaplicá-las na iteração subsequente (Claire, 1994).

2.3 MÉTODO DE CAMADAS SUPERPOSTAS

Em geral, o comportamento de uma material real ao longo do tempo não pode ser precisamente representado por um modelo viscoplástico tão simples, quanto o modelo apresentado no item 2.1. Uma resposta de um material mais elaborado pode ser modelada através da utilização do Método das Camadas Superpostas (Fig. 2.7), no qual supõe-se que o sólido a ser analisado é composto de várias camadas superpostas, cada uma delas apresentando a mesma deformação. O campo de tensões totais é obtido através da soma da contribuição das diferentes camadas.

Por meio da adoção de um número conveniente de camadas, cada uma delas com atribuições diferentes de características materiais, pode-se reproduzir fielmente o comportamento observado experimentalmente de materiais complexos, como o concreto.

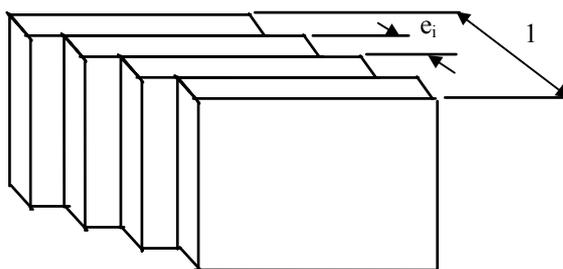


FIGURA 2.7 - Modelo de camadas superpostas.

2.3.1 Expressões Básicas do Conceito de Camadas Superpostas

No Modelo de Camadas Superpostas cada camada pode ter espessura diferente e comportamento material distinto. Como os nós de cada camada são coincidentes, a mesma deformação é produzida em cada uma delas. Isto fornece um campo de tensão σ_i diferente para cada camada, que contribui para o campo de tensão total σ conforme a sua espessura e_i . Dessa forma tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\sigma}_i e_i, \quad (2.22)$$

onde k é o número total de camadas do modelo, e

$$\sum_{i=1}^k e_i = 1. \quad (2.23)$$

A equação de equilíbrio (Eq. 2.14) que deve ser satisfeita em qualquer estágio, torna-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^{nT} \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\sigma}_i^n t_i d\Omega + \mathbf{P}^n = 0. \quad (2.24)$$

Da mesma forma, a matriz de rigidez do elemento corresponde à soma da contribuição de cada camada:

$$\mathbf{K}_c = \sum_{i=1}^k \int_{\nu} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_i \mathbf{B} d\nu, \quad (2.25)$$

onde \mathbf{D}_i é a matriz constitutiva de cada camada. A matriz \mathbf{D}_i será diferente para cada uma das camadas, dependendo das propriedades materiais.

O processo de solução é idêntico ao descrito anteriormente com os termos de deformação e tensão sendo calculados para cada camada individualmente. Deve-se observar que as deformações viscoplásticas em cada camada serão, geralmente, diferentes devido aos diferentes valores do coeficiente de fluidez e do módulo de elasticidade, porém, a deformação total deve ser a mesma (Owen e Hinton, 1980).

2.4 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO PARA UM MATERIAL ELASTO-VISCOPLÁSTICO

Devido à falta de dados disponíveis para calibrar um modelo elasto-viscoplástico como um todo, o programa é dividido em duas etapas distintas.

Uma primeira etapa, viscoelástica, consiste na determinação da resposta da estrutura ao longo do tempo. Calcula-se o estado de deformação da estrutura após um intervalo de tempo de aplicação da carga. Há um processo de incremento no tempo real,

onde ocorrem os efeitos ao longo do tempo na estrutura (fluência e retração do concreto). Esta resposta representa um comportamento viscoelástico dos materiais.

A segunda, elastoplástica, busca determinar a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo. Isto se faz mediante a aplicação de um artifício, no qual se supõe que a estrutura é elasto-viscoplástica e procura-se o seu estado de deformação quando o tempo (fictício) tende ao infinito. Quando o tempo cresce indefinidamente e há endurecimento, a diferença de tensão ($\sigma - \sigma_0$), que seria gradativamente absorvida pelo amortecedor, diminui, ou seja, a influência do amortecedor desaparece e o elemento de atrito torna-se cada vez mais rígido. Como a parcela de tensão absorvida pelo amortecedor é proporcional à velocidade de deformação viscosa, conseqüentemente há uma diminuição dessa deformação, a qual adquire um comportamento assintótico. Esse estado estável corresponde à resposta de uma estrutura de comportamento elastoplástico, submetida a um carregamento instantâneo (Claure, 1994).

O programa permite a aplicação de diversos carregamentos, em datas distintas, entre as quais ocorrem os fenômenos decorrentes do tempo. Deste modo, as etapas 1 e 2 são executadas de forma sucessiva, à medida que são aplicadas as cargas nas datas especificadas pelo usuário. A seqüência computacional do programa é apresentada no fluxograma da Fig. 2.8.

Na implementação da etapa 1, viscoelástica, adota-se o modelo de cinco camadas idealizado por Bazant (1974) e utilizado por Claure (1994), para a representação dos efeitos de fluência e retração. Nesta etapa, não se considera o efeito de endurecimento e a tensão de plastificação inicial do modelo é tomada como zero, desconsiderando o elemento de atrito do modelo da Fig. 2.6, item 2.1.6. Para os pontos de integração, onde atuam tensões de tração, admite-se que não surjam novas fissuras.

Na etapa 2, elastoplástica, determina-se o endurecimento do ponto de integração em que a tensão efetiva exceder a tensão de plastificação inicial. Utiliza-se uma única camada neste fase de carregamento instantâneo. Quando se passa da etapa 1 para etapa 2, calcula-se, para cada ponto de integração, uma tensão equivalente em função das cinco tensões determinadas no final da etapa 1. Nesta fase, são verificados os pontos de integração quanto ao critério de fissuração, que será visto no capítulo 5.

É importante ressaltar ainda que, na etapa 1, as premissas para a consideração dos efeitos dependentes do tempo só permitem resultados confiáveis para as cargas em serviço, enquanto que, na etapa 2, pode-se analisar estruturas até a carga de ruptura.

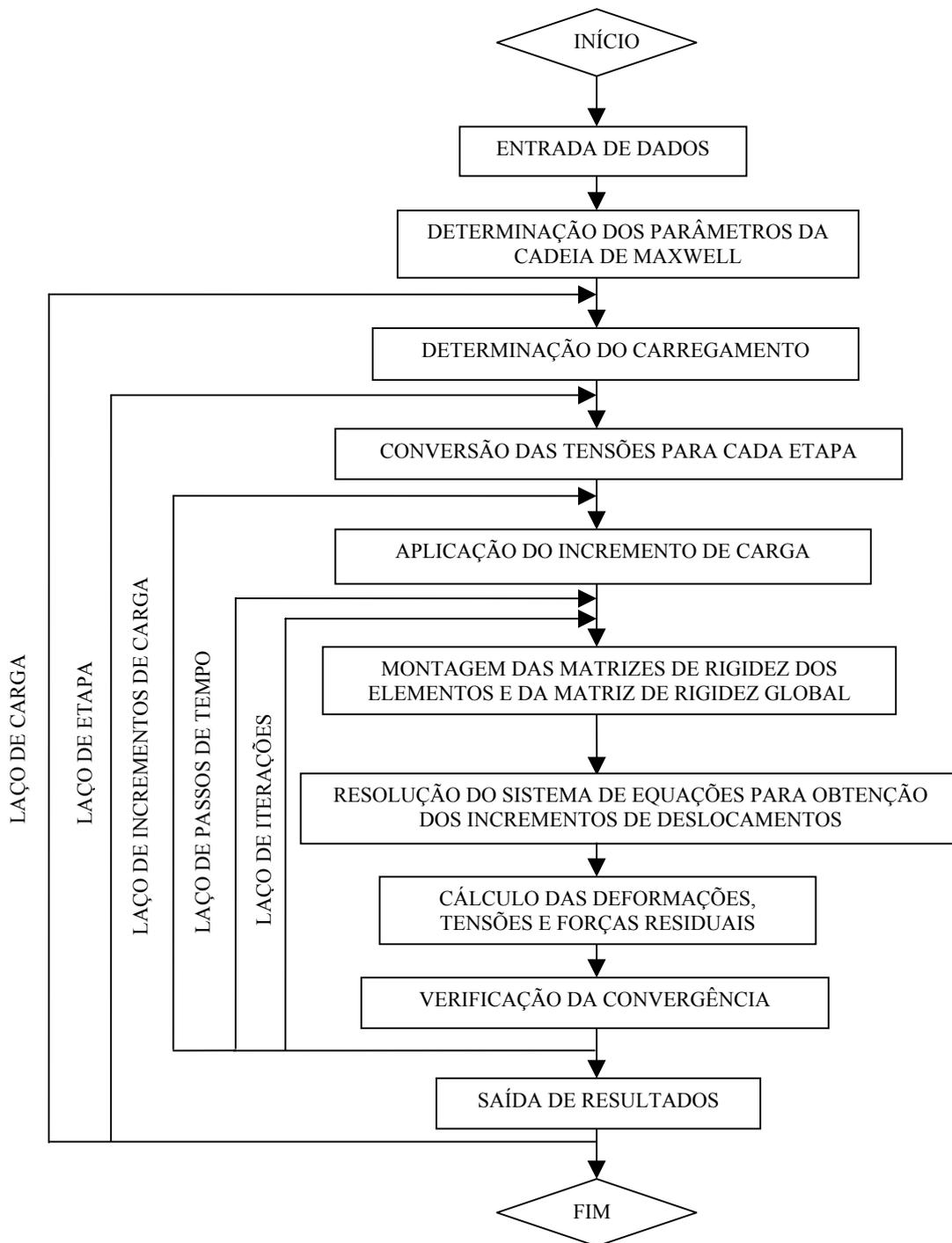


FIGURA 2.8 – Fluxograma do programa.

3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA CONCRETO ARMADO

3.1 ELEMENTO FINITO PARA O CONCRETO

3.1.1 Hexaedro Quadrático

Nesse trabalho, utiliza-se o elemento finito isoparamétrico quadrático da família Serendipity, com 20 nós (Fig. 3.1), com 3 graus de liberdade por nó.

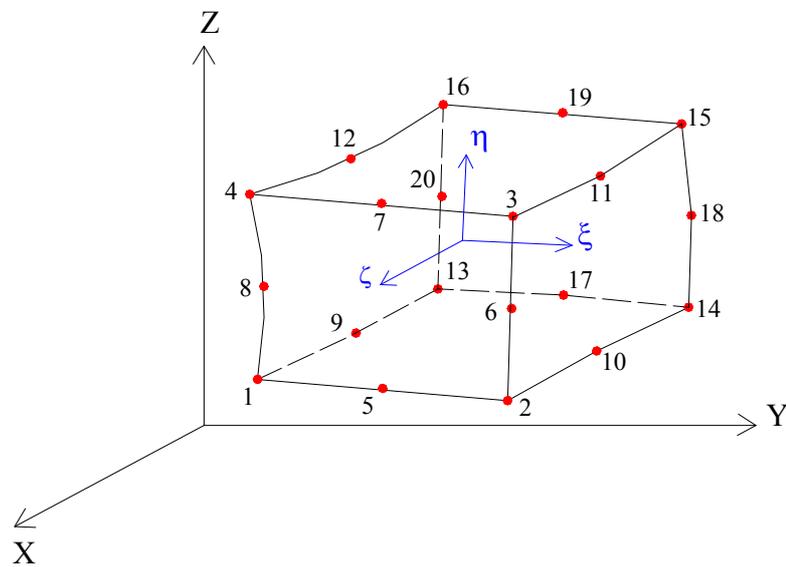


FIGURA 3.1 – Elemento quadrático isoparamétrico.

Neste elemento, o campo de deslocamentos possui variação quadrática e os campos de tensões e deformações, variações lineares. São, portanto, empregadas funções de interpolação do tipo quadrática. Sendo ξ , η , ζ as coordenadas normalizadas (coordenadas naturais do elemento), as funções de forma são:

a) para nós de canto

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2), i = 1,3,6,8,13,15,18,20 \quad (3.1)$$

b) para nós intermediários

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_0)(1+\zeta_0), i = 2,7,14,19 \quad (3.2)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi_0)(1+\zeta_0), i = 4,5,16,17 \quad (3.3)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi_0)(1+\eta_0), i = 9,10,11,12 \quad (3.4)$$

onde $\xi_0 = \xi \cdot \xi_i$, $\eta_0 = \eta \cdot \eta_i$, $\zeta_0 = \zeta \cdot \zeta_i$ e (ξ_i, η_i, ζ_i) são as coordenadas naturais do nó em consideração.

As funções de interpolação são utilizadas para incógnitas e geometria a partir dos respectivos valores nodais. Consequentemente, para funções quadráticas ou de ordem superior, o elemento poderá representar superfícies curvas.

Utilizando elementos isoparamétricos, pode-se representar as coordenadas cartesianas (x, y, z) , de um ponto no interior deste elemento, como:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

onde, N_i é a função de forma correspondente ao nó i do elemento de coordenadas cartesianas (x_i, y_i, z_i) e n é o número de nós do elemento.

3.1.2 Integração Numérica

A adequada escolha de um esquema de integração, que seja computacionalmente eficiente, é de extrema importância. Os pontos de integração são os pontos onde são avaliados os estados de tensão do material. Esses pontos são utilizados na determinação das forças internas resistentes. O uso de poucos pontos de integração reduz substancialmente o tempo computacional. No entanto, o emprego de mais pontos de integração para o cálculo das tensões fornece uma informação aprimorada dos estados de tensão em todo o elemento.

A integração reduzida é computacionalmente atrativa pela grande redução no número de operações a serem realizadas para o cálculo das forças internas e das matrizes de rigidez tangente.

Entretanto, é importante saber que ao utilizar-se integração reduzida, podem-se desenvolver mecanismos internos associados a modos de deformação nula (modos espúrios). Estes mecanismos se formam quando o campo de deslocamentos nodais gera outro campo de deformações que se anula nos pontos de integração numérica. A condição que leva à existência de modo espúrios é a deficiência de posto (*rank*) da matriz de rigidez do elemento. Quando elementos com posto (*rank*) deficiente são usados, a matriz de rigidez do sistema frequentemente será singular ou aproximadamente singular (Bathe, 1996).

No presente trabalho, optou-se pela integração reduzida, com a utilização de apenas 15 pontos de integração no elemento. Segundo Hinton (1988), a regra adotada para a integração da matriz de rigidez de um elemento de 20 nós não apresenta deficiência de posto (*rank deficiency*). Entretanto, o uso dessa regra alivia o comportamento de sobrerigidez observado quando emprega-se a quadratura completa de Gauss-Legendre (3×3×3).

A regra pode ser expressa na forma:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y, z) dx dy dz = \tag{3.6}$$

$$= A f(0,0,0) + \tag{1 Termo}$$

$$+ B [f(-b,0,0) + f(b,0,0) + f(0,-b,0) + \dots] + \tag{6 termos}$$

$$+ C [f(-c,-c,-c) + f(c,-c,-c) + \dots] \tag{8 termos}$$

Os coeficientes na Eq. 3.5 são apresentados na tabela 3.1.

TABELA 3.1 – Valores dos coeficientes.

A	B	C	b	c
1.564444	0.355556	0.537778	1.000000	0.674100

A distribuição dos pontos de integração sobre um elemento de 20 nós pode ser visualizada através da Fig. 3.2:

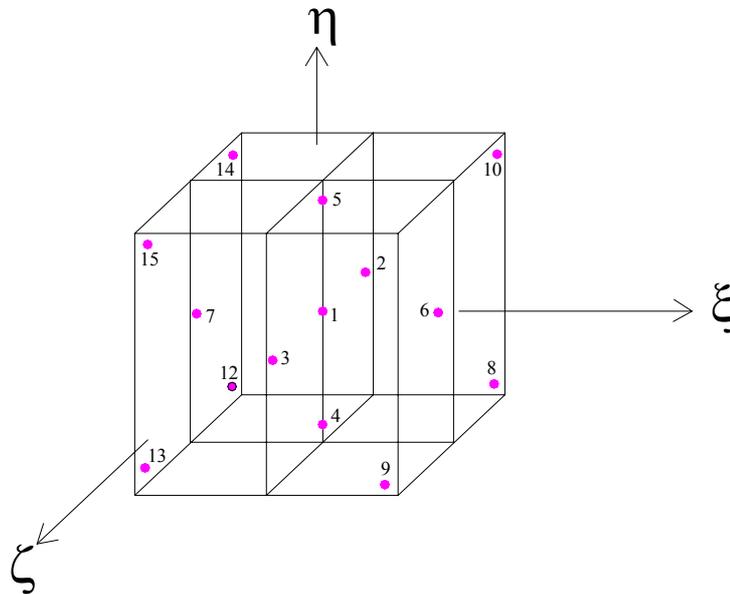


FIGURA 3.2 –Elemento de concreto tridimensional com 20 nós e 15 pontos de integração.

Segundo Hinton (1988), essa regra apresenta a vantagem de haver um ponto de amostragem no centro das faces do elemento. Essa localização é conveniente para valores máximos de tensão. Além disso, a igualdade entre valores de tensão nesses pontos comuns entre dois elementos adjacentes fornece uma estimativa da exatidão da malha a ser adotada.

3.2 ELEMENTO FINITO PARA A ARMADURA

3.2.1 Modelos de Elementos Finitos para Armadura

Em um modelo de elementos finitos para análise de peças de concreto armado, existem três formas para a inclusão das barras de armadura: a discreta, a distribuída e a incorporada.

Na forma discreta, utilizam-se elementos de barra para representar a armadura, com nós coincidentes com os da malha de elementos finitos de concreto (Fig. 3.3). A

armadura é representada por elementos unidimensionais tipo treliça. Este modo de representação da armadura tem a desvantagem de oferecer uma limitação na escolha da malha de elementos de concreto.

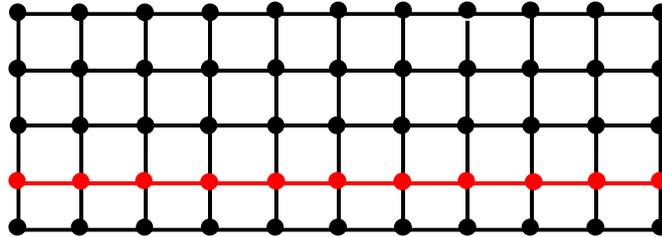


FIGURA 3.3 –Modelo discreto.

Na forma distribuída, considera-se o aço distribuído uniformemente no elemento de concreto (Fig. 3.4). Cada conjunto de barras de armadura é substituído por uma camada bi-dimensional de espessura e área equivalente. Admite-se aderência perfeita entre o aço e o concreto. É um modelo conveniente quando a armadura está densamente distribuída, como no caso de placas e cascas.

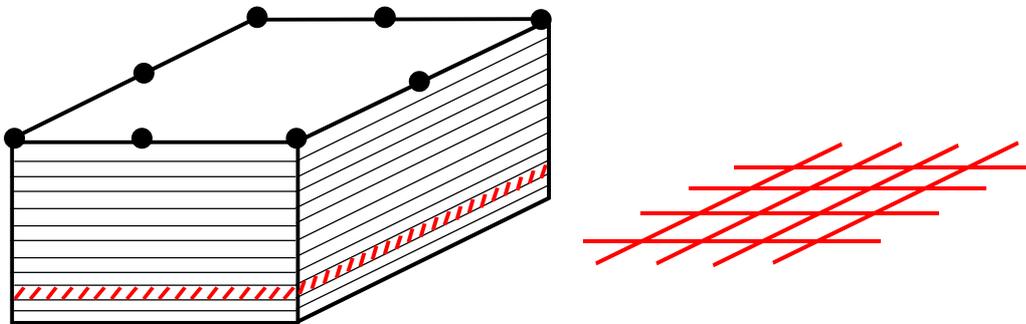


FIGURA 3.4 – Modelo distribuído.

Na forma incorporada, considera-se que as barras de armadura são linhas de um material mais rígido no interior dos elementos de concreto. A geometria das armaduras é consistente com a geometria do elemento isoparamétrico em que se encontra disposta, resultando em um campo de deslocamentos único no domínio do elemento. Admite-se ainda, que a armadura resista apenas a tensões axiais atuantes na direção da barra. Desta forma, as barras de aço podem ser arbitrariamente colocadas no interior de um elemento de concreto, sem que novas incógnitas sejam introduzidas no sistema de equações de

equilíbrio (Fig. 3.5). Os deslocamentos ao longo dos segmentos de armadura são referenciados aos deslocamentos nodais do elemento finito de concreto. Admite-se aderência perfeita entre o aço e o concreto.

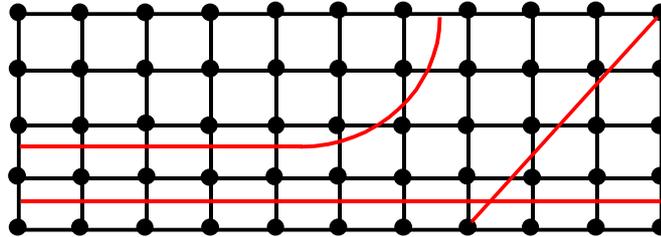


FIGURA 3.5 – Modelo incorporado.

Tendo em vista as vantagens acima citadas, no presente estudo optou-se pela implementação computacional do modelo incorporado de armadura.

Neste modelo, as barras de armadura são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos, permitindo a modelagem de barras retas e curvas. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que, para as barras curvas, são necessários três pontos para a sua definição.

3.2.2 Funções de Forma para a Armadura

As funções de interpolação para o elemento de armadura são polinômios de Lagrange, conforme proposto por Zienkiewicz (1986). São funções unidimensionais $H(\chi)$, que são expressas em termos de uma coordenada normalizada independente χ .

Estas funções de forma são geradas pela seguinte expressão:

$$H_k^m(\chi) = \frac{(\chi - \chi_1) \cdots (\chi - \chi_{k-1})(\chi - \chi_{k+1}) \cdots (\chi - \chi_n)}{(\chi_k - \chi_1) \cdots (\chi_k - \chi_{k-1})(\chi_k - \chi_{k+1}) \cdots (\chi_k - \chi_n)} \quad (3.7)$$

Esta função é um polinômio de grau $m = n - 1$ em χ , e tem valor unitário em $\chi = \chi_k$ e nulo para $\chi = \chi_1, \dots, \chi_{k-1}, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n$, onde n é o número de nós do elemento.

Desta forma, para um elemento de 2 nós:

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{(1-\chi)}{2}, \\ H_2(\chi) &= \frac{(1+\chi)}{2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para um elemento de 3 nós:

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{(\chi^2 - \chi)}{2}, \\ H_2(\chi) &= (1 - \chi^2), \\ H_3(\chi) &= \frac{(\chi^2 + \chi)}{2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

O grau destas funções de interpolação e, conseqüentemente, o número de pontos nodais, dependerá da complexidade da geometria do elemento de armadura, bem como da compatibilidade requerida com o elemento de concreto.

3.2.3 *Formulação Geométrica*

Apresenta-se, a seguir, a formulação para incorporar as barras de armadura ao elemento tridimensional de concreto. As barras de armadura são posicionadas em coordenadas globais cartesianas, independentemente da malha de elementos finitos.

Durante a integração da expressão do trabalho virtual, para a determinação das matrizes de rigidez, é necessário utilizar coordenadas naturais locais, como será visto mais adiante.

O elemento de concreto, mostrado na Fig. 3.6, é descrito usando coordenadas globais (x, y, z). As coordenadas naturais do elemento são (ξ, η, ζ). A geometria no interior e bordos dos elementos de concreto é representada em função dos valores nodais das coordenadas, empregando as mesmas funções de interpolação usadas para as variáveis incógnitas, ou seja:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^n N_i x_i, \\
 y &= \sum_{i=1}^n N_i y_i, \\
 z &= \sum_{i=1}^n N_i z_i.
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Os correspondentes diferenciais são:

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix}
 \tag{3.11}$$

onde

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \right\rangle.
 \tag{3.12}$$

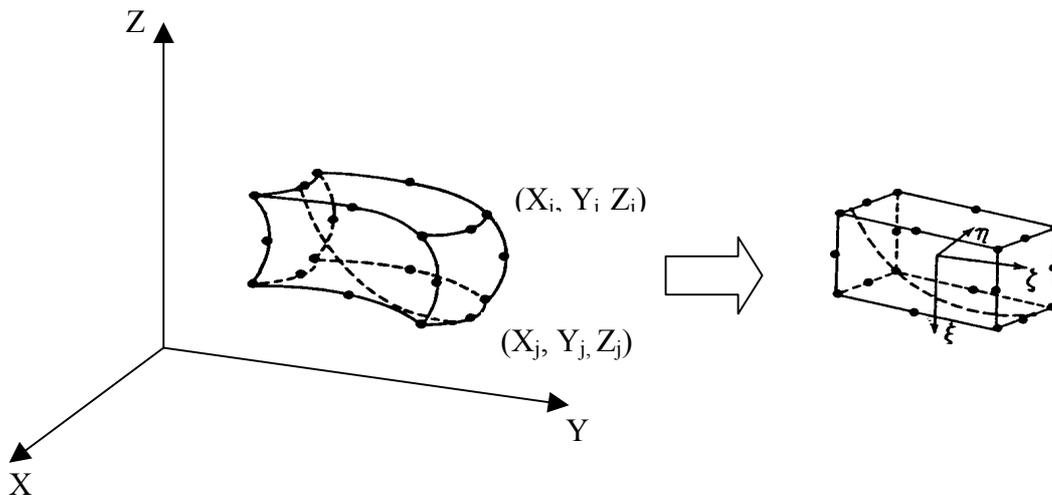


FIGURA 3.6 - Barra de armadura no interior do elemento de concreto.

Uma importante vantagem da presente formulação é que a malha global de elementos finitos pode ser gerada sem se considerar previamente a localização e geometria da barra de armadura. Uma vez estabelecida a malha de elementos de concreto, a armadura deve ser especificada por um conjunto de pontos nodais. As coordenadas dos nós da barra de aço, entre os nós de definição da mesma, são obtidas

por interpolação. Desta forma, nós adicionais são colocados dentro do elemento de concreto.

Sendo $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ e $\{z_j\}$ os vetores que contêm as coordenadas globais dos nós da barra, associados a um único elemento, as coordenadas de qualquer outro ponto na barra são dadas pela expressão abaixo, onde $H(\chi)$ são as funções de interpolação do elemento de armadura:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} H_j & 0 & 0 \\ 0 & H_j & 0 \\ 0 & 0 & H_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix}. \quad (3.13)$$

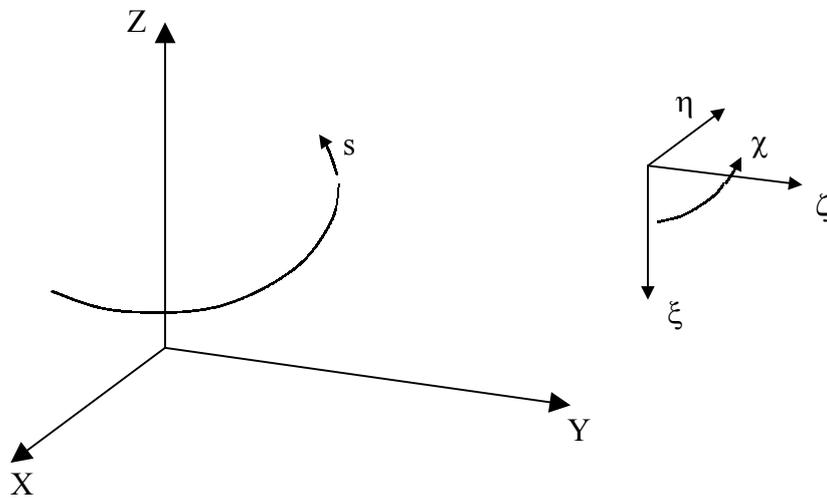


FIGURA 3.7 - Coordenada ao longo do eixo da armadura.

Os vários termos da rigidez associada com a armadura requerem integrações ao longo da mesma. Para tanto, necessita-se de um elemento diferencial de comprimento ds , disposto ao longo da armadura, que pode ser obtido a partir da Eq. (3.12), conforme ilustra a Fig. 3.7. A orientação da tangente à barra é dada pelos ângulos α , β , γ , onde:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\chi} \frac{d\chi}{ds}, \\ \cos \beta &= \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\chi} \frac{d\chi}{ds}, \\ \cos \gamma &= \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\chi} \frac{d\chi}{ds}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Segue que:

$$\frac{ds}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\chi}\right)^2}, \quad (3.15)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx}{d\chi} \\ \frac{dy}{d\chi} \\ \frac{dz}{d\chi} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} \frac{dH_j}{d\chi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\chi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dH_j}{d\chi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix}. \quad (3.16)$$

Deste modo, os cossenos diretores da reta tangente, em qualquer ponto ao longo da armadura, bem como o fator de mapeamento $ds/d\chi$, podem ser facilmente calculados usando as equações desenvolvidas anteriormente.

Um elemento diferencial de volume dV_s da barra de aço, pode ser expresso em termos de ds e da área da seção transversal da barra, resultando:

$$dV_s = A_s \cdot ds. \quad (3.17)$$

Usando o fator de mapeamento descrito na Eq. (3.15), integrais envolvendo elementos de volume e de área da superfície ao longo da armadura podem ser escritas em termos da coordenada normalizada χ como:

$$\int_{V_s} C \cdot dV_s = \int_{\chi} C \cdot A_s \cdot \frac{ds}{d\chi} d\chi, \quad (3.18)$$

na qual C é uma função de posição ao longo da barra de armadura.

3.2.4 Segmentos de Armadura que ficam no interior de um Elemento de Concreto

As barras de armadura são posicionadas pelas coordenadas globais (x,y,z) de seus pontos de extremidade. Para a obtenção da matriz de rigidez total (concreto e aço) de um determinado elemento, precisa-se saber quais barras interceptam este elemento.

O programa computacional implementado, neste trabalho, calcula de forma automática os segmentos destas barras que ficam situados no interior do elemento de concreto.

Como primeira etapa, deve-se proceder a transformação de coordenadas globais $P_j(x, y, z)$, dos pontos que definem as extremidades da barra, para coordenadas naturais locais $P_j(\xi, \eta, \zeta)$ dos mesmos. A relação entre estas coordenadas para elementos isoparamétricos é dada por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}, \quad (3.19)$$

onde (x, y, z) são as coordenadas globais de um ponto qualquer, (x_i, y_i, z_i) são as coordenadas globais dos nós do elemento de concreto e $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ suas funções de forma.

A forma explícita para a relação inversa a (Eq. 3.19), em geral, não é facilmente encontrada. Entretanto, o mapeamento inverso pode ser feito numericamente usando o algoritmo de Newton-Raphson, como sugerem Elwi e Hrudey (1989). Desta forma, a determinação aproximada das coordenadas (ξ_p, η_p, ζ_p) está baseada no fato de que estas coordenadas são as raízes do seguinte sistema de equações não lineares:

$$\{f(\xi, \eta, \zeta)\}_p = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_p - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.20)$$

Usando o método de Newton-Raphson, tem-se, após $k+1$ iterações:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}_p^k + \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\zeta \end{Bmatrix}_p^{k+1}, \quad (3.21)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\zeta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = \mathbf{J}^{kT^{-1}} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_p - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i^k & 0 & 0 \\ 0 & N_i^k & 0 \\ 0 & 0 & N_i^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}, \quad (3.22)$$

com $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta)$ sendo a matriz Jacobiana e $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i(\xi, \eta, \zeta)$, as funções de forma do elemento de concreto na iteração k .

Determinadas as coordenadas naturais dos pontos de definição da geometria da barra, referenciadas ao sistema natural do elemento de concreto em análise, parte-se

para uma segunda etapa de definição da curva que passa por estes pontos, como ilustrado pela Fig. 3.8.

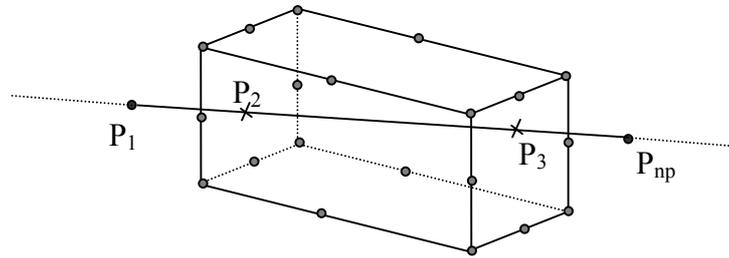


FIGURA 3.8- Curva de definição da barra de aço.

Esta etapa consiste, mais especificamente, em determinar as coordenadas naturais da intersecção do plano que contém a face do elemento de concreto com a barra de armadura. Os lados do elemento de concreto são definidos fixando-se uma das coordenadas naturais como 1 ou -1. Portanto, cada lado é definido por uma coordenada natural fixa e as outras podendo assumir valores entre -1 e 1.

Segundo Zienkiewicz (1986), quando a coordenada ξ é conhecida, calculam-se η e ζ pelas expressões:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n_p} f_i(\xi) \eta_i, \quad (3.23)$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n_p} f_i(\xi) \zeta_i.$$

De forma análoga, quando a coordenada η é conhecida, ξ e ζ são determinados por:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n_p} g_i(\eta) \xi_i, \quad (3.24)$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n_p} g_i(\eta) \zeta_i.$$

E, finalmente, quando a coordenada ζ é conhecida, ξ e η são dados por:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n_p} h_i(\zeta) \xi_i, \quad (3.25)$$

$$\eta = \sum_{i=1}^{n_p} h_i(\zeta) \eta_i.$$

As funções f , g , h , que aparecem nas Eqs. (3.23), (3.24), (3.25), são calculadas pelas seguintes expressões (onde n_p é o número de pontos que definem a barra de armadura):

$$f_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} \frac{(\xi - \xi_i)}{(\xi_i - \xi_j)}, \quad (3.26)$$

$$g_i(\eta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} \frac{(\eta - \eta_i)}{(\eta_i - \eta_j)}, \quad (3.27)$$

$$h_i(\zeta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} \frac{(\zeta - \zeta_i)}{(\zeta_i - \zeta_j)}. \quad (3.28)$$

A terceira etapa consiste em verificar se existe intersecção da curva P_1, P_2, \dots, P_{n_p} , com cada uma das seis faces que definem o elemento de concreto. Para tal, fixa-se a coordenada $\xi = \pm 1$ do elemento de concreto e calculam-se as coordenadas η e ζ da intersecção face do concreto-curva da barra. Caso $-1 \leq \eta \leq 1$ e $-1 \leq \zeta \leq 1$ implica dizer que a barra intercepta esta face do elemento. Define-se, então, um elemento unidimensional representativo da parte de armadura situada no interior deste elemento de concreto. Repete-se o procedimento de maneira análoga, fixando-se a coordenada $\eta = \pm 1$ ou $\zeta = \pm 1$ e verificando os limites das coordenadas que variam na face em análise do elemento de concreto.

Neste estágio do programa, considera-se a possibilidade de existir um único ponto de intersecção com o elemento de concreto. Esta situação corresponde ao caso em que a barra intercepta somente um vértice do elemento. Neste caso, o programa considera que a barra não intercepta o elemento de concreto.

A quarta etapa consiste na verificação do trecho de armadura efetivamente contido no elemento de concreto. Destacam-se os seguintes casos possíveis:

a) Um dos nós, que definem as extremidades do elemento de armadura, encontra-se localizado dentro do elemento de concreto. Isto se evidencia quando as coordenadas naturais de P_1 ou P_{np} , em módulo, são menores que 1.

Neste caso, o programa se encarrega de distinguir a intersecção verdadeira da falsa e assim obter, de forma correta, o comprimento real do segmento de armadura contido no interior do elemento de concreto. A Fig. 3.9 ilustra esta situação onde I_v é a intersecção verdadeira e I_f é a falsa.

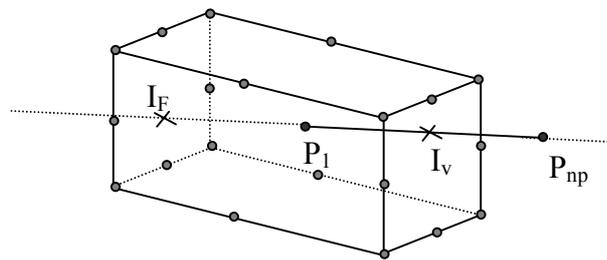


FIGURA 3.9 – P_1 dentro do elemento de concreto.

b) Os dois nós que definem a geometria da barra encontram-se localizados no interior do elemento de concreto. Neste caso, o programa toma, para as coordenadas naturais dos pontos de intersecção, as mesmas coordenadas naturais dos pontos P_1 e P_{np} já obtidas anteriormente. A Fig. 3.10 ilustra esta situação.

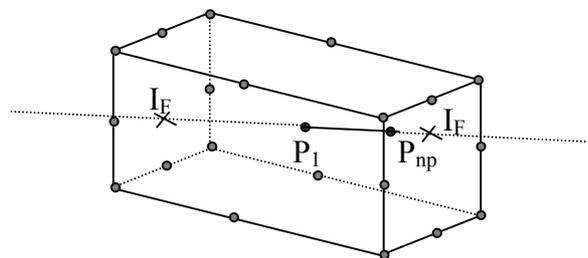


FIGURA 3.10 - P_1 e P_{np} dentro do elemento de concreto.

- c) Nenhum dos nós de definição da barra está situado dentro do elemento de concreto. Neste caso cabe salientar duas possibilidades: a primeira, quando o segmento que liga os dois pontos P_1 e P_{np} intercepta o elemento (Fig. 3.11) e a segunda, em caso contrário (Fig. 3.12).

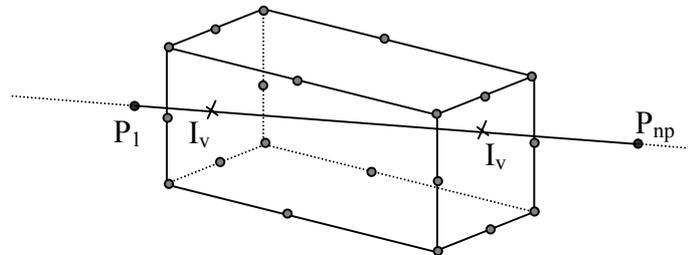


FIGURA 3.11 - Segmento que liga P_1 e P_{np} intercepta o elemento.

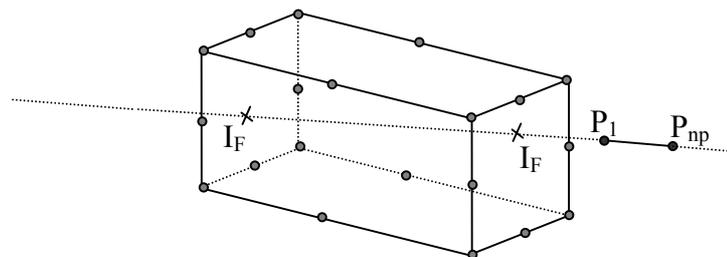


FIGURA 3.12 - Segmento que liga P_1 e P_{np} não intercepta o elemento.

A quinta etapa consiste na criação, quando o elemento utilizado for o quadrático, de um nó intermediário no segmento de armadura contido no interior do elemento de concreto e posterior determinação das coordenadas globais e naturais dos nós extremos do segmento, bem como do nó intermediário. Quando o elemento isoparamétrico em análise for o linear, não se processa a geração do nó intermediário. A Fig. 3.13 ilustra esta etapa.

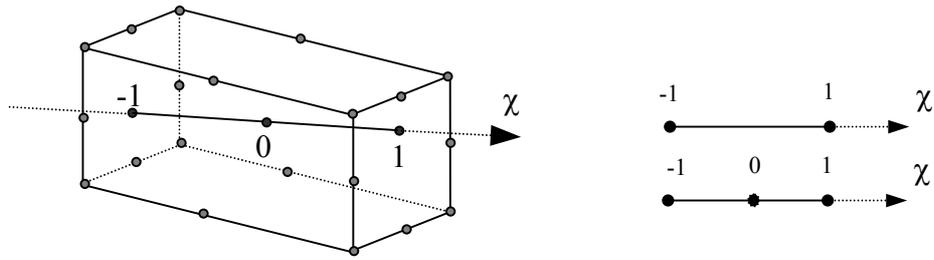


FIGURA 3.13 - Segmento de armadura dentro do elemento de concreto

A sexta e última etapa, consiste em verificar se a barra se encontra disposta ao longo de uma face ou ao longo de uma aresta, num determinado elemento.

3.2.5 Matriz de Rigidez para a Armadura

O campo de deformações, dentro de um elemento de armadura, pode ser definido de diversas maneiras. Segundo Zienkiewicz e Philips (1974), a deformação ao longo da barra de aço é igual à deformação normal, no elemento de concreto, na direção tangente ao segmento de armadura. Sendo assim, considerando aderência perfeita entre o concreto e o aço, a expressão para a deformação, em uma forma incremental, conforme proposto por Elwi e Hrudey (1989), fica:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_s = & \Delta \varepsilon_x \cdot \cos^2 \alpha + \Delta \varepsilon_y \cdot \cos^2 \beta + \Delta \varepsilon_z \cdot \cos^2 \gamma + \\ & \Delta \gamma_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + \Delta \gamma_{xz} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \Delta \gamma_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \end{aligned} \quad (3.29)$$

Os incrementos de deformações $\Delta \varepsilon_x$, $\Delta \varepsilon_y$, $\Delta \varepsilon_z$, $\Delta \gamma_{xy}$, $\Delta \gamma_{xz}$, $\Delta \gamma_{yz}$ são obtidos diretamente do campo de incremento de deslocamentos do elemento de concreto. Da Eq. (3.29) segue que o incremento de deformação na armadura pode ser descrito como:

$$\Delta \varepsilon_s = \mathbf{B}_s \Delta \mathbf{u}, \quad (3.30)$$

onde $\Delta \mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento de concreto. O vetor das relações deformações-deslocamentos para a armadura, \mathbf{B}_s , pode ser dado por:

$$\mathbf{B}_s = \begin{Bmatrix} \cos^2 \alpha \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \cos \alpha \cos \beta \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} + \cos \alpha \cos \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \\ \cos^2 \beta \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} + \cos \alpha \cos \beta \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \cos \beta \cos \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \\ \cos^2 \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} + \cos \alpha \cos \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \cos \beta \cos \gamma \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \end{Bmatrix}. \quad (3.31)$$

As derivadas das funções de forma em relação às coordenadas cartesianas x , y e z são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \sum \mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}. \quad (3.32)$$

Aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, determina-se que a variação do incremento de trabalho interno para a armadura é dada por:

$$\delta \Delta W = \int_{V_s} (\sigma_s + \Delta \sigma_s) \cdot \delta \Delta \varepsilon \cdot dV, \quad (3.33)$$

na qual σ_s é a tensão normal na armadura e V_s o seu volume.

A forma incremental das relações constitutivas para a armadura pode ser escrita como:

$$\Delta \sigma_s = E_s \cdot \Delta \varepsilon_s, \quad (3.34)$$

onde E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço. Assim,

$$\delta \Delta W = \int_s (\delta \Delta \varepsilon_s \cdot E_s \cdot \Delta \varepsilon_s \cdot A_s) \cdot ds + \int_s (\delta \Delta \varepsilon_s \cdot \sigma_s \cdot A_s) \cdot ds, \quad (3.35)$$

ou

$$\delta \Delta W = \delta \Delta \mathbf{u} \mathbf{K}_s \Delta \mathbf{u} + \mathbf{Q}_s \delta \Delta \mathbf{u}, \quad (3.36)$$

onde

$$\mathbf{Q}_s = \int \mathbf{B}_s \sigma_s \frac{dS}{d\chi} A_s d\chi \quad (3.37)$$

é o vetor de forças nodais equivalentes e

$$\mathbf{K}_s = \int_{\chi} \mathbf{B}_s E_s \mathbf{B}_s \frac{dS}{d\chi} A_s d\chi \quad (3.38)$$

é a matriz de rigidez para a armadura.

A integração da Eq. (3.38) é realizada numericamente, de forma semelhante à utilizada nos elementos de concreto.

4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

Os estados característicos do comportamento de uma peça fletida de concreto armado podem ser ilustrados por um diagrama carga-deslocamento típico, conforme a Fig. 4.1. Este comportamento, altamente não-linear, pode ser dividido em três fases: uma etapa elástica-linear, com o concreto não fissurado, uma etapa de formação de fissuras e uma fase plástica.

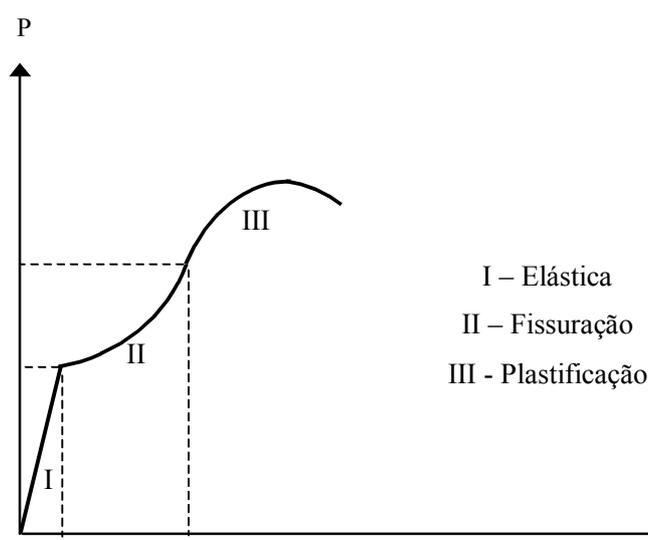


FIGURA 4.1 – Diagrama carga-deslocamento típico de uma peça fletida de concreto armado.

A resposta não-linear é causada principalmente, por dois efeitos físicos: a fissuração do concreto e a plastificação do aço e do concreto comprimido.

Independentemente do tempo, outras não-linearidades surgem nos materiais, como o deslizamento das barras de aço na matriz do concreto, o engrenamento dos agregados e o efeito de pino das barras de aço no concreto fissurado. Os efeitos dependentes do tempo, como fluência e retração do concreto, também contribuem significativamente na resposta não-linear.

4.1 MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA O CONCRETO

Evidências experimentais indicam que a deformação não-linear do concreto é basicamente de natureza inelástica e, portanto, o comportamento tensão-deformação pode ser separado em uma componente recuperável e outra irrecuperável. A componente de deformação irrecuperável deve ser tratada no contexto da teoria clássica da plasticidade.

Neste estudo foi empregado um modelo elastoplástico com endurecimento para descrever o comportamento do concreto comprimido. Este modelo corresponde à solução estável do modelo elasto-viscoplástico, descrito no capítulo 2. Para o concreto sob tensões de tração, considera-se um comportamento elástico-linear até a ruptura. Após a ruptura admite-se uma colaboração do concreto entre fissuras, devido às forças de aderência entre o concreto e o aço, possibilitando uma análise mais realista da estrutura.

A seguir serão descritos os modelos constitutivos utilizados para representar o concreto.

4.1.1 Modelo para o Concreto Comprimido

Para representar o comportamento do concreto não fissurado, adotou-se um modelo elastoplástico com endurecimento, composto por um critério de ruptura, por um critério de plastificação e por uma regra de endurecimento.

4.1.1.1 Critério de Ruptura

O critério de ruptura adotado por Cloure (1994) foi o de Ottosen (1977), dado pela seguinte expressão:

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0, \quad (4.1)$$

onde f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto e α , β são parâmetros.

A função λ depende do ângulo θ , de acordo com:

$$\lambda = c_1 \cos \left[\frac{1}{3} \cdot \arccos(-c_2 \operatorname{sen} 3\theta) \right], \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta \leq 0 \text{ e} \quad (4.2)$$

$$\lambda = c_1 \cos \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(c_2 \operatorname{sen} 3\theta) \right], \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta > 0.$$

Com

$$\operatorname{sen} 3\theta = -\frac{3\sqrt{3} J_3}{2 J_2^{3/2}} \quad (4.3)$$

e

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$J_2 = (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2],$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m), \quad (4.4)$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3}.$$

As Eqs. (4.1) e (4.2), que definem o critério de ruptura, contêm quatro parâmetros α , β , c_1 e c_2 . Estes parâmetros são determinados a partir da resistência média à compressão uniaxial do concreto f_{cm} e da resistência média à tração uniaxial do concreto f_{tm} , dada por:

$$f_{tm} = \bar{\alpha} \left[\frac{f_{cm} - 8}{10} \right]^{2/3}, \text{ em MPa.} \quad (4.5)$$

sendo $0,95 \leq \bar{\alpha} \leq 1,85$.

De acordo com o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), a resistência à tração do concreto é mais variável que a sua resistência à compressão e pode ser reduzida substancialmente por efeitos ambientais. Desta forma, o valor médio proposto é por demais cauteloso e, em virtude de comparações com valores experimentais, preferiu-se adotar $\bar{\alpha} = 1,85$ (Claire, 1994). Concomitantemente, a diferença de 8 MPa entre f_{cm} e f_{ck} , proposta pelo Código Modelo, é exagerada para concretos de baixa resistência. Achou-se mais conveniente adotar para este valor, uma fração de f_{cm} (20%). Sendo assim, a resistência média à tração adotada no modelo foi:

$$f_{tm} = 1,85 \left(\frac{0,8f_{cm}}{10} \right)^{2/3}. \quad (4.6)$$

Os parâmetros do critério de Ottosen são, então, calculados conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), como:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{9k^{1,4}}, \\ \beta &= \frac{1}{3,7k^{1,1}}, \\ c_1 &= \frac{1}{0,7k^{0,9}}, \\ c_2 &= 1 - 6,8 [k - 0,07]^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde

$$k = \frac{f_{tm}}{f_{cm}}. \quad (4.8)$$

Para se estudar a superfície de ruptura de um material, em um espaço tridimensional de tensões, analisam-se as suas seções transversais nos planos desviadores e seus meridianos nos planos meridianos (Fig. 4.2a). As seções transversais da superfície de ruptura (Fig. 4.2b) são as curvas de intersecção entre a superfície de ruptura e um plano desviador, que é perpendicular ao eixo hidrostático, com ξ constante. Os meridianos da superfície de ruptura são as curvas de intersecção entre a superfície de ruptura e um plano meridiano, que contém o eixo hidrostático, com θ constante. Os meridianos determinados por valores de θ iguais a 0° , 30° , e 60° são chamados, respectivamente, de meridiano de tração, de cisalhamento e de compressão.

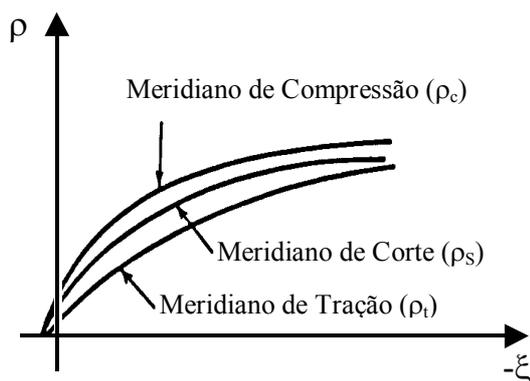


FIGURA 4.2a - Meridianos da superfície de ruptura

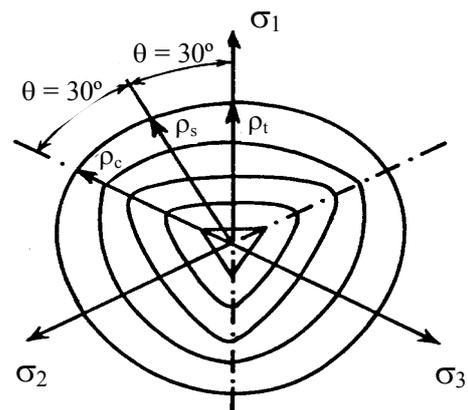


FIGURA 4.2b – Seções transversais da superfície de ruptura

Se o material for isotrópico, os índices 1, 2, 3, associados aos eixos coordenados, são arbitrários. Isto resulta na tríplice simetria, que representa a superfície de ruptura. Assim, torna-se necessário estudar apenas o setor compreendido entre $\theta = 0^\circ$ e 60° , ficando os demais setores conhecidos por simetria.

A superfície de ruptura do concreto, segundo evidências experimentais, apresenta as seguintes características em um plano desviador:

- * a superfície de ruptura é suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- * os meridianos são parabólicos e abrem no sentido do eixo hidrostático negativo;
- * a curva de ruptura é, aproximadamente, triangular para tensões de tração e baixas tensões de compressão, ficando mais circular à medida que as tensões de compressão aumentam.

4.1.1.2 Critério de Plastificação para o Concreto

Admite-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha um endurecimento isotrópico e que as superfícies de plastificação tenham a mesma forma da superfície de ruptura. Considerando a tensão efetiva ou uniaxial equivalente $\sigma_{ef} = f_{cm}$ e manipulando a Eq. (4.1), obtém-se a seguinte expressão para a superfície de plastificação:

$$F = \left[\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1 + \sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2} \right] / 2 = \sigma_{ef}. \quad (4.9)$$

O domínio elástico, para o concreto comprimido, é definido para tensões efetivas menores que 30% da tensão de ruptura. Para superfícies de carregamento subsequentes à superfície de plastificação inicial ($0,3f_{cm} \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$) ocorre o domínio plástico, onde o material possui um comportamento elastoplástico com endurecimento, conforme visto na Fig. 4.3.

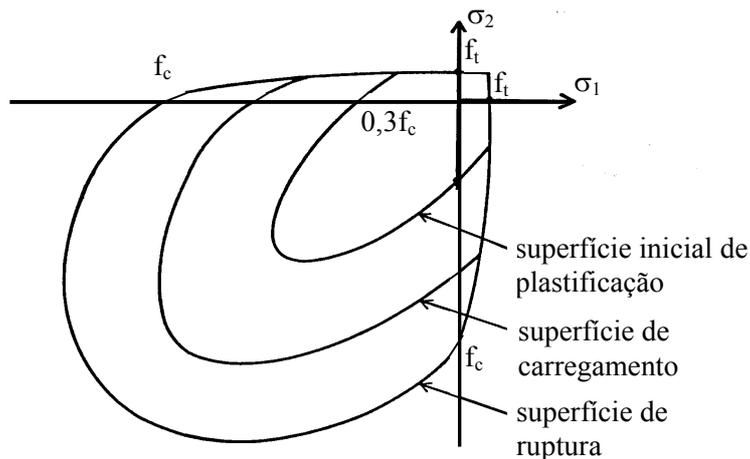


FIGURA 4.3 – Superfícies de plastificação e ruptura.

4.1.1.3 Regra de Endurecimento

A regra de endurecimento define o movimento das superfícies de plastificação subsequentes (superfícies de carregamento) durante a deformação plástica. É determinada pela relação entre a tensão efetiva e a deformação plástica acumulada ou deformação plástica. Através de conceitos de tensão efetiva e deformação plástica efetiva é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

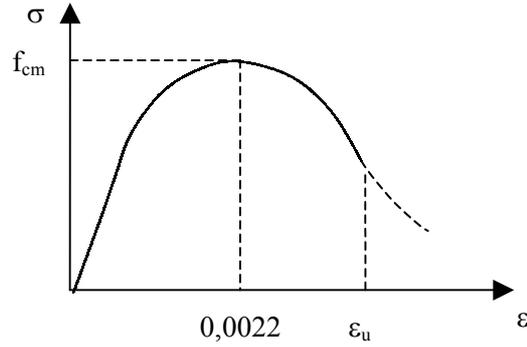


FIGURA 4.4 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido.

Neste trabalho, adotou-se a curva tensão-deformação proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), conforme visto na Fig. 4.4, para representar o comportamento do concreto sob compressão uniaxial, de acordo com a seguinte expressão:

$$\sigma = - \frac{-\frac{E}{f_{cm}}\varepsilon - \left[\frac{\varepsilon}{0,0022}\right]^2}{1 + \left[\frac{E}{f_{cm}}0,0022 - 2\right] \frac{\varepsilon}{-0,0022}} f_{cm}. \quad (4.10)$$

Considerando-se que a componente de deformação elástica é σ/E obtém-se, para $0,3f_{cm} \leq \sigma \leq f_{cm}$, a partir da Eq. (4.10), uma relação $\sigma = \sigma(E, f_{cm}, \varepsilon_p)$.

4.1.1.4 Vetor de Fluxo Plástico

Na relação tensão-deformação, para o domínio plástico, é comum considerar o vetor taxa de deformação plástica normal à superfície de plastificação. Esta regra de fluxo é considerada para o concreto, predominantemente por razões de ordem prática, uma vez que há pouca evidência experimental disponível sobre a validade da mesma. Sendo assim, pela Eq. (2.8):

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \gamma \Phi(F) \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \gamma \Phi(F) \mathbf{a}, \quad (4.11)$$

onde \mathbf{a} é um vetor gradiente, perpendicular à superfície de plastificação, que define a direção do incremento de deformação plástica. A função tensão efetiva F é a condição

de plastificação ou as funções de carregamento subsequentes no modelo de plasticidade com endurecimento. O vetor de fluxo plástico é dado por:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.12)$$

com

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}. \quad (4.13)$$

O vetor $\{\mathbf{a}\}$ pode ser transformado em:

$$\mathbf{a} = C_1 \mathbf{a}_1 + C_2 \mathbf{a}_2 + C_3 \mathbf{a}_3, \quad (4.14)$$

onde,

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\},$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{S_x, S_y, S_z, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}, 2\tau_{xy}\}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \left(S_y S_z - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left(S_x S_z - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left(S_x S_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \right. \\ \left. 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - S_x \tau_{yz}), 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - S_y \tau_{xz}), 2(\tau_{yz} \tau_{xz} - S_z \tau_{xy}) \right\}$$

Os valores s_x , s_y e s_z são as tensões desviadoras dadas por:

$$s_x = \frac{(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)}{3}, \\ s_y = \frac{(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)}{3}, \\ s_z = \frac{(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)}{3}. \quad (4.16)$$

Os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 são:

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1}, \\ C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \\ C_3 = - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(\sqrt{J_2})^3} \frac{\partial F}{\partial \theta}. \quad (4.17)$$

As derivadas da função de plastificação F em relação aos invariantes de tensão I_1 , J_2 e θ são:

$$\frac{\partial F}{\partial I_1} = \frac{\beta}{2} \left[1 + \frac{\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}} \right], \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} = \frac{1}{2} \left[\lambda + \frac{\lambda(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1) + 4\alpha \sqrt{J_2}}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}} \right], \quad (4.19)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}. \quad (4.20)$$

Para $\sin 3\theta \leq 0$:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{c_1 c_2 \cos 3\theta \sin [1/3 \arccos (-c_2 \sin 3\theta)]}{\sin [\arccos (-c_2 \sin 3\theta)]}. \quad (4.21)$$

Para $\sin 3\theta > 0$:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{c_1 c_2 \cos 3\theta \sin [\pi/3 - 1/3 \arccos (c_2 \sin 3\theta)]}{\sin [\arccos (c_2 \sin 3\theta)]}. \quad (4.22)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{J_2}}{2} \left[1 + \frac{\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}} \right]. \quad (4.23)$$

4.2 MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO

Nas estruturas de concreto armado, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços na sua direção. Desta forma, necessita-se apenas de um modelo uniaxial para descrever seu comportamento.

No modelo implementado, o aço é representado por um diagrama tensão-deformação bilinear. O aço é considerado um material elastoplástico com endurecimento. Admite-se que o aço possui o mesmo comportamento em tração e compressão.

O valor do módulo de elasticidade longitudinal adotado para o aço, E_s , é tomado como sendo igual a 210.000 MPa. Para o aço de classe A, com dureza natural, adotou-se um diagrama elastoplástico perfeito, onde o material possui um comportamento elástico

linear até atingir a tensão de escoamento f_y , conforme visto na Fig. 4.9. Após este limite, o aço deforma-se plasticamente até atingir a ruptura, com tensão $\sigma_s = f_y$ e endurecimento nulo ($H'_s = 0$).

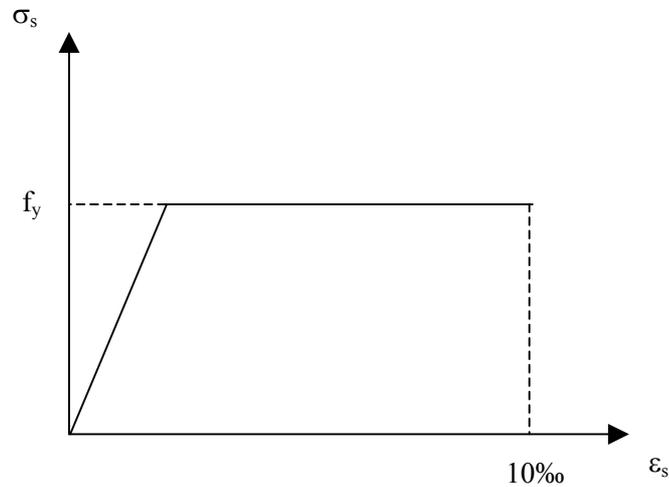


FIGURA 4.5 – Diagrama tensão-deformação para o aço tipo A.

O aço da classe B, encruado a frio, possui comportamento elastoplástico com endurecimento. Por simplificação, adotou-se um diagrama tensão-deformação com endurecimento linear, conforme ilustra a Fig. 4.10.

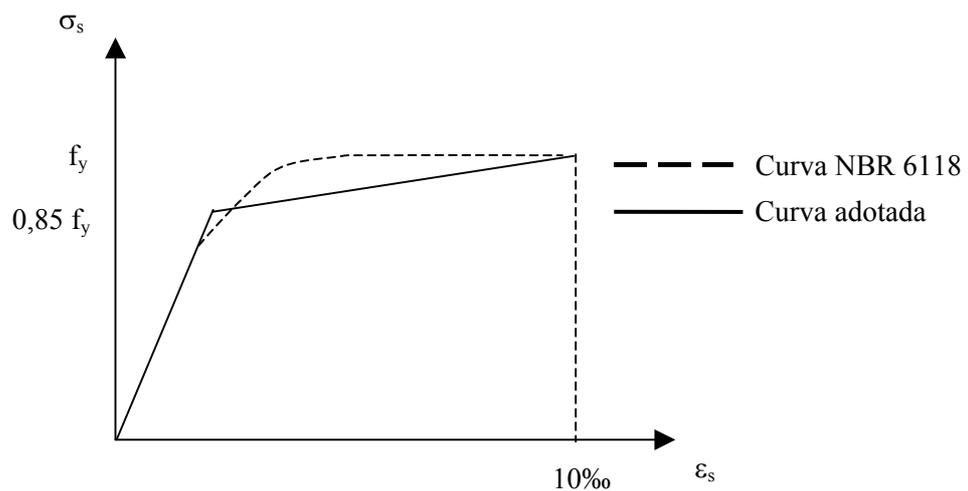


FIGURA 4.6 – Diagrama tensão-deformação para o aço tipo B.

Deste modo, após atingir o limite de escoamento, admite-se que as deformações no aço têm um endurecimento definido por:

$$H'_s = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon_p} = \frac{\Delta\sigma_s}{\Delta\varepsilon_p} = \frac{0,15f_y}{\left(10\text{‰} - \frac{0,85f_y}{E_s}\right) - \frac{0,15f_y}{E_s}}, \quad (4.39)$$

$$H'_s = \frac{0,15f_y}{10\text{‰} - \frac{f_y}{E_s}}.$$

4.3 MODELO VISCOELÁSTICO PARA O CONCRETO

O concreto submetido a cargas de longa duração, sofre uma deformação instantânea, seguida por uma deformação devida à fluência (creep), que se desenvolve ao longo do tempo. Desta forma, mesmo sob tensões constantes, as deformações no concreto aumentam no decorrer do tempo, conforme ilustrado na Fig. 4.11.

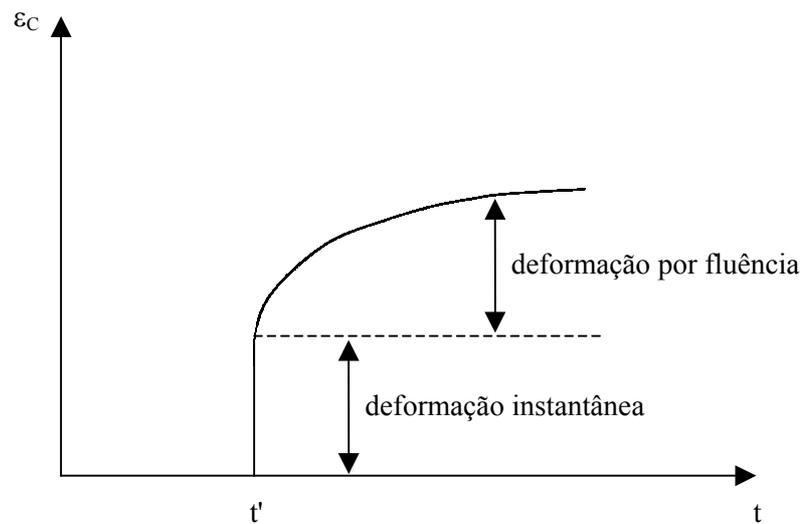


FIGURA 4.7 – Evolução da deformação por fluência para tensão constante aplicada em t'.

Este fenômeno manifesta-se mais acentuadamente nas idades imediatamente posteriores ao aparecimento das tensões, estando ligado a fenômenos de diversos tipos, relacionados com a circulação de água na massa de concreto e sua dissipação para o exterior. Por isto, em sua magnitude e desenvolvimento no tempo, influem fundamentalmente a umidade e temperatura ambiente, a idade de carregamento e o

tempo transcorrido após sua aplicação, as dimensões da peça, as condições de cura, a composição do concreto e a velocidade de endurecimento do cimento.

Após a concretagem e a cura do concreto, pode-se encontrar água em seu interior, alojada em pequenos vasos capilares. Essa água é o resíduo da reação de hidratação do cimento, resíduo esse que sempre irá existir, uma vez que a relação água-cimento necessária para realizar a reação é menor que a relação água-cimento mínima adotada para que o concreto seja trabalhável. Com o tempo, essa água irá evaporar e os vasos capilares, sem a pressão interna da mesma, serão esmagados, provocando uma perda de volume denominada retração (*shrinkage*), conforme visto na Fig. 4.12.

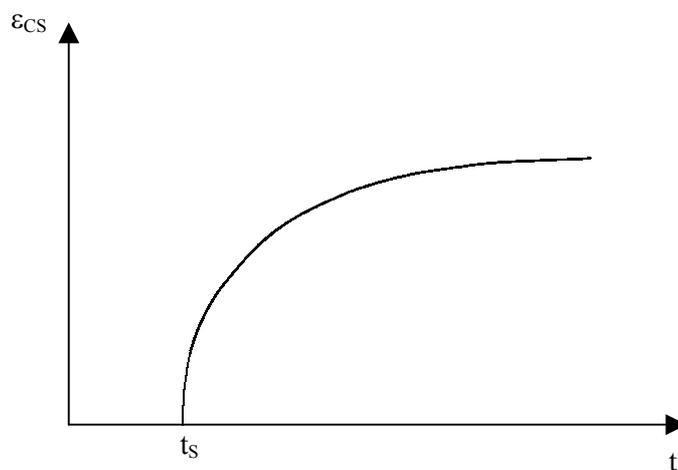


FIGURA 4.8 – Curva de deformação por retração

Esta deformação ao longo do tempo é independente da tensão aplicada e está ligada a fenômenos semelhantes aos da fluência, relacionados com a água que, em parte, hidrata os componentes do cimento e, em parte, fica livre dentro da massa de concreto.

No estudo de estruturas de concreto, a consideração das deformações por fluência e retração é de indiscutível relevância, pois seus valores são da mesma ordem de grandeza das deformações imediatas, para níveis usuais de tensão. A seguir, discute-se com maiores detalhes como foram considerados estes fenômenos.

4.3.1 Fluência

No domínio das tensões de serviço, as deformações por fluência, devidas a tensões aplicadas em dois instantes diferentes, são consideradas como aditivas (hipótese da superposição de efeitos). Desta hipótese, tem-se que a deformação por fluência, sob tensão constante, está ligada linearmente à tensão.

De acordo com o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), a superposição linear é normalmente aceita para níveis de tensões menores que $0,4f_{cm}$ (resistência à compressão média do concreto). Neste estudo, por trabalhar-se nesta faixa de tensões, adotou-se este comportamento linear.

A inclusão da fluência no modelo computacional e sua respectiva formulação, bem como a determinação dos parâmetros necessários, foram apresentadas por Clauere (1994), que adotou um modelo reológico tomado por uma cadeia de elementos Maxwell para representar o comportamento dependente do tempo do concreto (Fig. 4.13).

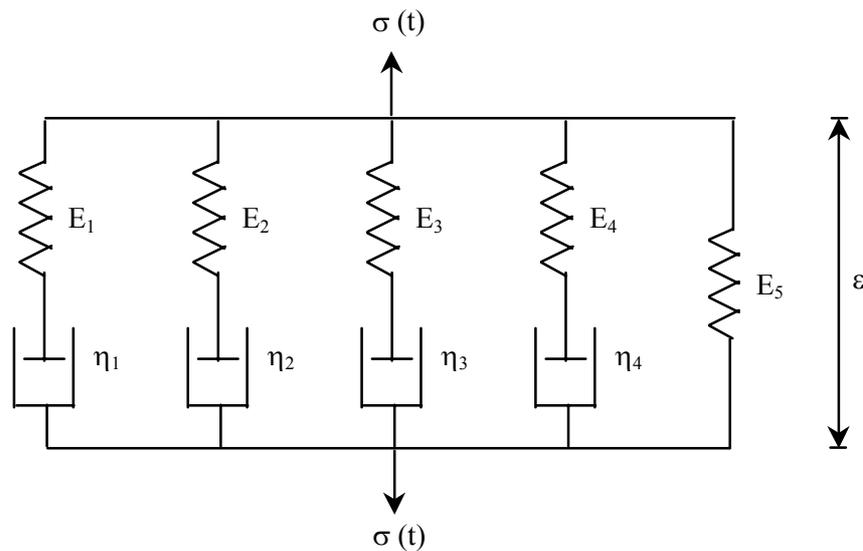


FIGURA 4.9 – Modelo de cadeias Maxwell.

Esta cadeia é constituída por uma associação, em paralelo, de elementos compostos por uma mola em série com um amortecedor viscoso.

Este modelo pode ser obtido, como um caso particular do modelo elasto-viscoplástico (Fig 2.6), admitindo-se que todos os elementos de atrito possuam tensão de plastificação nula.

4.3.2 *Retração*

A redução de volume do concreto, provocada pela perda gradual de umidade por evaporação, depende de diversos fatores, sendo os mais importantes o tipo de cimento, as dimensões do elemento, a umidade e a temperatura ambientes, e a estrutura de poros.

O valor da retração varia consideravelmente com o tamanho e a forma das peças, porque a evaporação ocorre na superfície do concreto, sendo uma função da relação área/volume. A retração diminui com o aumento das dimensões.

As deformações por retração do concreto são tratadas como deformações impostas à estrutura. A exemplo da fluência, a retração não produz diretamente tensões no concreto. Por isso, para avaliação da tensão no concreto, desconta-se do valor da deformação total, obtida a partir do vetor de deslocamentos, a parcela de deformação que foi originada diretamente pela retração.

A determinação dos parâmetros de retração pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), bem como sua formulação para a implementação computacional, encontram-se descritas por Clautre (1994).

5 MODELO DE FISSURAÇÃO DO CONCRETO

Em geral, nas estruturas de concreto armado, as fissuras aparecem já em condições de serviço. Isto ocorre pelo fato de que a resistência à tração do concreto é muito inferior à resistência à compressão. A fissuração do concreto é importante para uma análise precisa de uma estrutura de concreto armado, pois induz a um acentuado comportamento não-linear.

Os modelos para descrever o funcionamento do concreto armado fissurado, geralmente consideram uma perda da capacidade de carga do concreto causada pela fissuração. No contexto do método dos elementos finitos, basicamente duas aproximações são usadas para representar a fissuração: o modelo de fissuras discretas e o modelo de fissuras distribuídas.

O modelo de fissuras discretas representa cada fissura individualmente, como uma descontinuidade real na malha de elementos finitos. Esta aproximação foi, primeiramente, empregada por Ngo e Scordelis (1967) para analisar uma viga de concreto armado simplesmente apoiada. Nesse estudo, as fissuras foram modeladas por separação de nós, que inicialmente ocupavam a mesma posição no espaço. Uma restrição óbvia a este modelo é que as fissuras deveriam se formar ao longo da borda dos elementos. Desta forma, a resposta é fortemente dependente da malha de elementos finitos. Além disso, após a formação da fissura, a topologia da malha varia, exigindo procedimentos para sua atualização que demandam muito tempo computacional. Mais recentemente, adotaram-se refinamentos de malha através de métodos auto-adaptativos, de forma que novos elementos de fronteira são inseridos ao longo da propagação das fissuras.

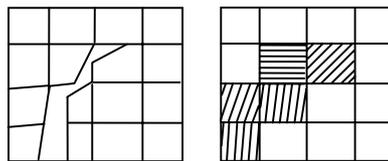
Simultaneamente observa-se a sofisticação do modelo, que leva a resultados que sejam suficientemente precisos, e a necessidade de tempo de processamento para a análise do sistema, o que pode tornar o modelo inexequível. Por isso, o modelo de fissuras discretas é apropriado apenas para problemas onde poucas fissuras dominantes aparecem.

Já o modelo de fissuras distribuídas, não leva em conta a descontinuidade real da malha. Pelo contrário, o concreto fissurado permanece contínuo e as propriedades materiais são modificadas para considerar o dano devido à fissuração. O concreto é, inicialmente, isotrópico, porém, a fissuração induz-lhe anisotropia. Depois de fissurado,

admite-se que o concreto torna-se ortotrópico, com os eixos materiais principais orientados no sentido das direções de fissuração. As propriedades materiais variam dependendo do estado de deformação e de tensão. O módulo de elasticidade longitudinal reduz-se na direção perpendicular ao plano da fissura e o efeito de Poisson é usualmente desprezado. O módulo de elasticidade transversal, paralelo ao plano da fissura, também é reduzido.

O modelo de fissuras distribuídas (*smearred crack*) é atrativo do ponto de vista computacional, uma vez que a topologia da malha não muda no decorrer da análise, e só a relação tensão-deformação deve ser atualizada quando ocorre a fissuração.

A Fig. 5.1 ilustra os dois modelos alternativos descritos para modelar as fissuras numa direção não conhecida "a priori".



I – fissuras discretas

II – fissuras distribuídas

FIGURA 5.1 - Modelos alternativos para modelar a fissuração.

Foi adotado, neste trabalho, um modelo de fissuras distribuídas. Sua descrição abrange os seguintes itens:

- a) critério de fissuração;
- b) regra para consideração da colaboração do concreto entre fissuras (*tension stiffening*);
- c) modelo para transferência de tensões de corte (*shear transfer*).

5.1 CRITÉRIO DE FISSURAÇÃO

Antes de fissurar, o concreto tracionado é um material elástico-linear e sua lei constitutiva é dada pela versão isotrópica da relação $\sigma = \mathbf{D} \cdot \varepsilon$.

A avaliação da fissuração do concreto no programa desenvolvido neste trabalho é feita através do nível de tensões dos pontos de integração dos elementos de concreto. Verifica-se, deste modo, se o estado de tensão correspondente a cada ponto de integração alcançou a superfície de ruptura, apresentada no item 4.1.1.1.

A tensão principal σ_1 de tração é determinada utilizando os invariantes de tensões I_1 , J_2 e o ângulo de similaridade θ :

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3}. \quad (5.1)$$

Para distinguir se o ponto atingiu a superfície de ruptura por fissuração ou por esmagamento do concreto, adotou-se o critério proposto pelo boletim nº 156 do CEB (1983):

se $\sigma_1 \geq \frac{f_{tm}}{2}$, o ponto de integração fissurou;

se $\sigma_1 < \frac{f_{tm}}{2}$, o ponto de integração esmagou.

Caso o ponto de integração tenha fissurado, admite-se que uma fissura tenha se formado num plano ortogonal à tensão σ_1 . Portanto, o comportamento do concreto não é mais isotrópico e sim ortotrópico, e os eixos materiais locais coincidem com as direções principais de tensões.

Para carregamentos posteriores, uma fissura secundária pode ocorrer no ponto de integração que estava previamente fissurado em uma direção. Neste caso, utiliza-se o procedimento da fissura fixa, onde se mantém a direção do primeiro conjunto de fissuras fixo e determina-se a tensão de tração na direção perpendicular ao plano da fissura. Se esta tensão exceder a resistência do concreto à tração, então um novo conjunto de fissuras será formado, perpendicular ao já existente, e todas as componentes de tensão serão zeradas.

5.2 COLABORAÇÃO DO CONCRETO ENTRE FISSURAS

O comportamento carga-deslocamento do concreto armado é fortemente influenciado pela interação de seus dois componentes: o concreto e o aço. A aderência entre estes materiais é que torna possível a transmissão de esforços.

O efeito da aderência evidencia-se a partir da fissuração do concreto. No estado não-fissurado, o carregamento produz tensões principais de tração e compressão nos materiais. Com o aumento da carga, atinge-se a resistência à tração do concreto. Neste momento, ocorre uma ruptura local do material e a fissura se forma. Após a fissuração, o concreto entre as fissuras continua resistindo a esforços de tração. Estes esforços são transmitidos ao concreto pelos mecanismos de aderência. Negligenciar esta capacidade de resistência implica subestimar significativamente a rigidez pós-fissuração em níveis de carga de serviço. Este fenômeno é conhecido como "efeito da rigidez à tração" (*tension stiffening effect*). Portanto, na análise de estruturas de concreto armado sob cargas de serviço, é fundamental a consideração da capacidade resistente do concreto entre as fissuras.

A qualidade da aderência é decisiva para a distribuição e para a abertura das fissuras. Ela depende das características das barras da armadura (conformação superficial e diâmetro), da história de carga (especialmente se ocorrerem carregamentos cíclicos), da resistência do concreto e das tensões normais à superfície da barra.

A possibilidade de incorporação da aderência nos cálculos, através do método dos elementos finitos, depende da forma de conectar os elementos de aço aos de concreto. Existem duas formas distintas para se modelar esta ligação.

Na primeira alternativa, utilizam-se elementos especiais de aderência. Neste caso, as propriedades de aderência são modeladas por suas relações tensões-deslocamentos.

Na segunda forma, os elementos de concreto e aço são ligados diretamente. Admite-se completa compatibilidade de deformações entre o aço e o concreto e modifica-se a lei do material (concreto ou aço), para considerar os mecanismos de interação.

A escolha do modelo de representação da aderência depende do problema específico a ser analisado. O uso de elementos especiais de aderência requer intenso esforço computacional. Portanto, seu emprego só se justifica nos casos em que a

determinação das tensões de aderência não possa prescindir de um estudo minucioso (por exemplo, análise de zonas de ancoragem).

Neste trabalho, considera-se aderência perfeita entre o concreto e o aço. Em geral, a degradação da aderência é considerada indiretamente, modificando-se a lei constitutiva do material para o concreto ou o aço. Este efeito foi modelado indiretamente pela introdução de um ramo descendente suave na curva tensão-deformação do concreto tracionado. Desse modo, admite-se que a perda de resistência à tração do concreto ocorre gradualmente depois da fissuração. Isto é equivalente a considerar o concreto como um material com amolecimento em tração.

Para a definição do modelo da curva tensão-deformação do concreto tracionado, devem ser considerados dois aspectos: a forma da curva a ser adotada e os valores dos parâmetros necessários para definí-la, pois diferentes formas do ramo descendente podem ser empregadas.

Admitindo-se que a tensão σ , transmitida através da fissura, é uma função de sua abertura de fissura w , a energia de fratura é definida como:

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma(w) dw, \quad (5.2)$$

onde G_f representa a energia necessária para propagar uma fissura de tração de área unitária.

O modelo de fissuras distribuídas não é adequado para representar fissuras individuais. Sendo assim, a abertura de fissura w deve ser distribuída, ao longo de um certo comprimento, na forma de uma deformação de fissura equivalente, ϵ_c . Esta deformação está relacionada com o quociente da abertura de fissura física pelo seu comprimento característico, l_c . Obtém-se esta relação idealizando um volume de controle V contendo uma fissura com área S , conforme ilustrado na Fig. 5.2.

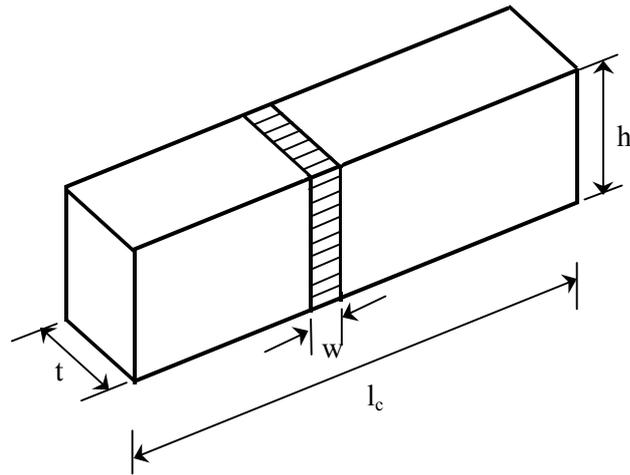


FIGURA 5.2 – Comprimento característico em um volume de concreto.

Admite-se que, uma vez formada a fissura, toda deformação inelástica, sob o volume de controle, ocorre na fissura e o resto do volume mantém-se elástico.

A taxa de energia dissipada na fissura é dada por:

$$\dot{\pi}_s = \int_s \sigma \dot{w} ds. \quad (5.3)$$

Pela hipótese de que o volume de controle fica submetido ao mesmo estado de tensões que a fissura, mas afetado pela deformação equivalente ε_c , a taxa de dissipação de energia no volume é:

$$\dot{\pi}_v = \int_v \sigma \dot{\varepsilon}_c dv. \quad (5.4)$$

Supõe-se que a tensão e as taxas de deformação e de abertura de fissura são constantes no volume a considerar. Então, as equações da taxa de energia dissipada na fissura e no volume de controle fornecem a relação entre a taxa de abertura de fissura e a taxa de deformação de fissura:

$$\dot{w}s = \dot{\varepsilon}_c v \Rightarrow dw = (v/s) d\varepsilon_c = l_c d\varepsilon_c. \quad (5.5)$$

Esta relação define o comprimento característico como o quociente entre o volume de controle e a superfície da fissura:

$$l_c = \frac{v}{s}. \quad (5.6)$$

Hinton (1988) sugere uma função exponencial para simular o efeito de amolecimento (*strain-softening*), dada por:

$$\sigma = E_0 \varepsilon_0 \left(\exp \left(- \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\alpha'} \right) \right), \text{ para } \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m, \quad (5.7)$$

onde:

E_0 é o módulo de elasticidade longitudinal;

ε é a deformação na fissura; α' é o parâmetro de amolecimento e;

$\varepsilon_0 = f_t / E_0$ é a deformação de tração nominal na zona fissurada.

A curva que representa a Eq. 5.7 é mostrada na Fig. 5.3.

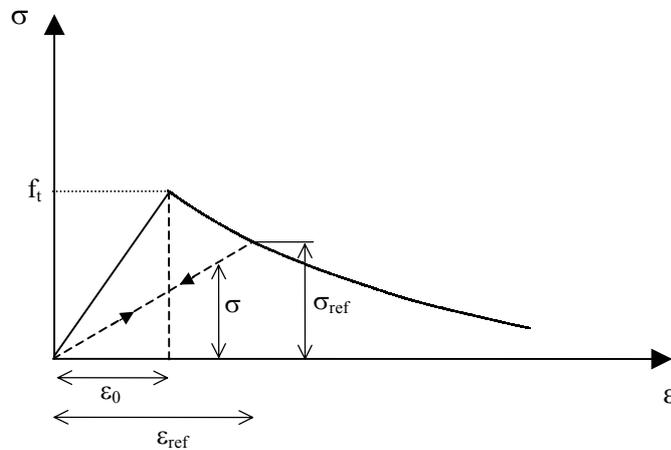


FIGURA 5.3 – Curva tensão-deformação para concreto tracionado sugerida por Hinton (1988).

Segundo Hinton (1988), o parâmetro de amolecimento α' fica determinado pelo cálculo da integral da Eq. (5.2) e pela introdução da relação entre a abertura de fissura w e a deformação de fissura ε_c . Isto conduz à expressão:

$$\alpha' = \frac{\left(G_f - \frac{E_0 \varepsilon_0^2 l_c}{2} \right)}{E_0 \varepsilon_0 l_c} > 0. \quad (5.8)$$

No cálculo por elementos finitos, o volume de controle, correspondente à fissura, é o volume associado ao ponto de integração em um dado elemento. O comprimento característico é determinado, para cada ponto de integração, por $l_c = dV^{1/3}$, onde dV é o volume de concreto representado pelo ponto de integração.

Neste trabalho, adota-se a Eq. (5.7), introduzindo-se dois coeficientes, γ e λ , para permitir um melhor ajuste com resultados experimentais. Após análise paramétrica, adotou-se o valor de 0,5 para os coeficientes γ e λ . A Eq. (5.9) mostra a função sugerida.

$$\sigma = \gamma \cdot E_0 \varepsilon_0 \left(\exp \left(- \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\lambda \cdot \alpha'} \right) \right), \text{ para } \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m. \quad (5.9)$$

Prates Júnior (1992) utiliza a equação apresentada na Eq. (5.10) para simular a colaboração do concreto entre as fissuras.

$$\sigma = \alpha \cdot E_0 \varepsilon_0 \cdot \left(1,0 - \frac{\varepsilon}{\beta} \right), \quad (5.10)$$

onde:

α é o coeficiente de redução da tensão de fissuração e;

β é um coeficiente que foi ajustado no presente estudo.

A Fig. 5.4 ilustra a relação tensão-deformação empregada por Prates Júnior (1992):

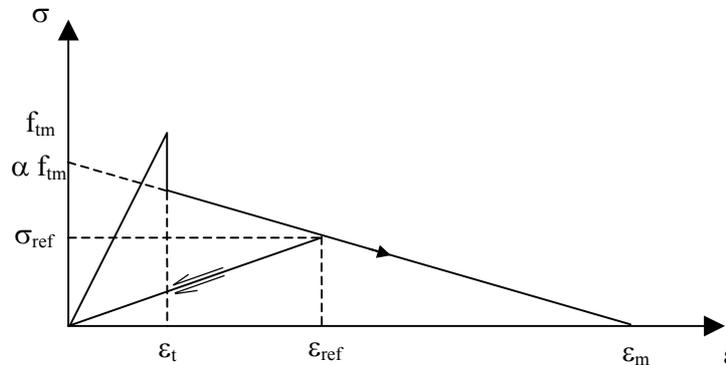


FIGURA 5.4 – Curva tensão-deformação para concreto tracionado utilizada por Prates Júnior (1992).

Prates Júnior (1992) adotou o valor de 0,8 para o coeficiente α e 0,002 para β , na Eq. (5.10). No presente estudo, os coeficientes empregados para α e β foram 0,6 e 0,001, respectivamente.

A redistribuição de tensões, devido à fissuração em outros pontos de integração ou carregamentos posteriores, pode, eventualmente, forçar algum ponto previamente fissurado a fechar total ou parcialmente. Esta possibilidade é considerada neste trabalho.

Se a deformação atual ε é pequena em relação à deformação ε_{ref} armazenada como a deformação de tração máxima alcançada transversalmente à fissura em questão, a tensão normal à fissura, σ , é calculada por:

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{ref}}}{\varepsilon_{\text{ref}}} \varepsilon, \quad (5.11)$$

onde σ_{ref} é a tensão interpolada correspondente à deformação ε_{ref} . A trajetória desta "descarga" secante é visualizada pela Fig. 5.4 ou Fig. 5.5 (item 5.4.1), dependendo do modelo adotado. A reabertura da fissura segue a mesma trajetória até ε_{ref} ser excedida. Depois a tensão é calculada pela Eq. (5.9) ou (5.10).

No processo computacional, as componentes de tensão e deformação para um ponto no interior de uma peça de concreto são expressas em função do sistema de coordenadas x, y, z . Para obtenção da tensão no concreto fissurado, deve-se determinar as direções principais de deformações, visto que as Eq. (5.9) e (5.10) são válidas somente no sistema local dos eixos materiais. Torna-se, portanto, necessária a rotação para a direção da fissura. Determinam-se as deformações principais através de:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{I_1}{3}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} (\theta) + \frac{I_1}{3}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{I_1}{3}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ J_2 &= (\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x) - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2, \\ J_3 &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \\ \theta &= \frac{1}{3} \operatorname{arcsen} \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Calcula-se então, a direção da máxima deformação principal de tração.

Nesse instante, é possível determinar, a partir das componentes de tensão referidas ao sistema x, y, e z, as componentes de tensão para a direção da fissura, através da matriz de rotação do sistema global para o sistema local:

$$\boldsymbol{\sigma}^L = \mathbf{R}^L \boldsymbol{\sigma}^G, \quad (5.14)$$

onde o índice L denota o sistema local e o índice G denota o global.

No sistema local, aplicam-se as Eqs. (5.9) ou (5.10) e a Eq. (5.11) para calcular as tensões normais ao plano da fissura. A componente de tensão tangencial local é $\tau^L = G_c \gamma^L$, onde G_c é o módulo de elasticidade transversal reduzido e será definido no próximo item.

Com as tensões do ponto fissurado ajustadas, retomam-se as componentes de tensões no sistema global de coordenadas através da expressão:

$$\boldsymbol{\sigma}^G = \mathbf{R}^G \boldsymbol{\sigma}^L. \quad (5.15)$$

5.3 RIGIDEZ TRANSVERSAL DO CONCRETO FISSURADO

Como uma regra geral, as primeiras fissuras que aparecem no concreto submetido a um carregamento são perpendiculares à direção da mais alta tensão principal de tração do concreto. As direções principais se modificam por mudanças no carregamento ou por não-linearidades da estrutura, produzindo deslocamentos relativos das faces rugosas da fissura. Isto causa o surgimento de tensões de corte no plano da fissura. O valor destas tensões de corte depende das condições locais na fissura. O principal mecanismo de transferência de esforços transversais é o engrenamento dos agregados e as principais variáveis envolvidas são o tipo e a granulometria dos mesmos. Além disto, o efeito de pino da armadura que cruza a fissura (*dowell effect*) tem também importância nesta transferência de esforços, sendo as principais variáveis envolvidas: o diâmetro das barras, a taxa de armadura e a inclinação das barras em relação ao plano de fissura. Ambos mecanismos são controlados pela abertura da fissura. A capacidade de transferência de corte é reduzida com o aumento da abertura da fissura.

A inclusão direta destes mecanismos num modelo de fissuras distribuídas é complexa. Emprega-se, geralmente, uma aproximação simplificada para levar em conta a capacidade de transferência de corte no concreto fissurado. O processo sugerido por

Hinton (1988) consiste em atribuir ao módulo de elasticidade transversal correspondente ao plano fissurado um valor reduzido G_c :

$$G_c = \beta G_0, \quad (5.16)$$

onde G_c é o módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado e β é um fator de redução compreendido entre 0 e 1. Se a fissura fechar, o módulo G_0 é adotado novamente.

Um valor constante para o fator de redução foi usado em diversas análises. Contudo, Hinton (1988) sugere relacionar o valor de β com uma medida distribuída da abertura da fissura, ou seja, com a deformação de tração normal ao plano da fissura, na forma:

$$\beta = 1 - \left(\frac{\varepsilon_t}{0,005} \right)^{k_1}, \quad (5.17)$$

onde ε_t é a deformação de tração fictícia normal ao plano da fissura e k_1 é um parâmetro que, segundo Cervenka (1985), varia de 0,3 até 1,0. Nas aplicações do trabalho de Claire (1994), foi utilizado o valor mínimo para k_1 .

Prates Júnior (1992) adota a mesma equação para a representação da capacidade de transferência de corte do concreto após a fissuração.

Nesta dissertação, sugerem-se duas equações distintas para o coeficiente β , que correspondem aos dois modelos para a colaboração do concreto entre fissuras. Estas duas equações para o coeficiente de redução de corte β se assemelham às Eqs. (5.9) e (5.10) e são dadas por:

$$\beta = 0,5 \cdot \left(\exp \left(- \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{0,5 \cdot \alpha'} \right) \right), \quad (5.18)$$

onde:

ε é a deformação na fissura;

$\varepsilon_0 = f_t / E_0$ é a deformação de tração nominal na zona fissurada, e;

α' é o parâmetro de amolecimento apresentado na Eq. (5.8),

e

$$\beta = 0,6 \cdot \left(1,0 - \frac{\varepsilon}{0,01} \right), \quad (5.19)$$

onde ε é a deformação na fissura.

5.4 DEFINIÇÃO DOS MODELOS DE FISSURAÇÃO DO CONCRETO

Através das equações apresentadas nos itens 5.2 e 5.3, para a representação da colaboração do concreto entre fissuras e da rigidez ao corte do concreto fissurado, definem-se dois modelos de fissuração do concreto, os quais são descritos na seqüência.

5.4.1 Modelo 1

Para a colaboração do concreto entre fissuras, o Modelo 1 considera a Eq. (5.20) dada por:

$$\sigma = 0,5 \cdot E_0 \varepsilon_0 \left(\exp \left(- \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{0,5 \cdot \alpha'} \right) \right), \text{ para } \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m. \quad (5.20)$$

A curva que representa a Eq. 5.20 é mostrada na Fig. 5.3.

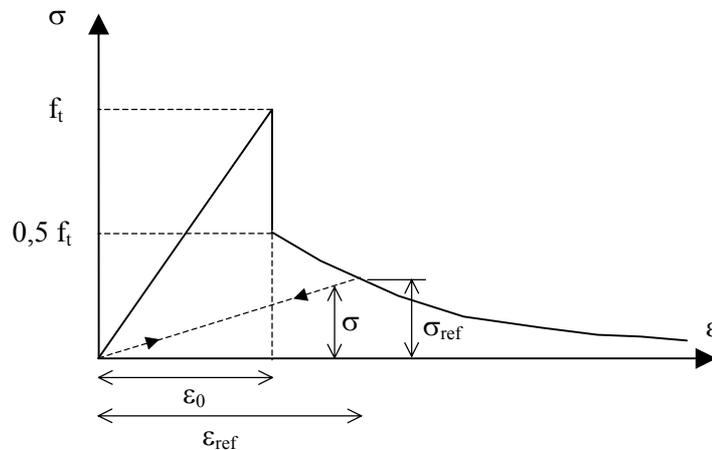


FIGURA 5.5 – Curva tensão-deformação para concreto tracionado (Modelo 1).

A capacidade de transferência de corte do concreto fissurado é representada, no Modelo 1, pela Eq. (5.18):

$$\beta = 0,5 \cdot \left(\exp \left(- \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{0,5 \cdot \alpha'} \right) \right). \quad (5.18)$$

A Fig. 5.6 apresenta o desempenho para o parâmetro deslocamento no centro da laje, justificando a escolha das equações para o Modelo 1.

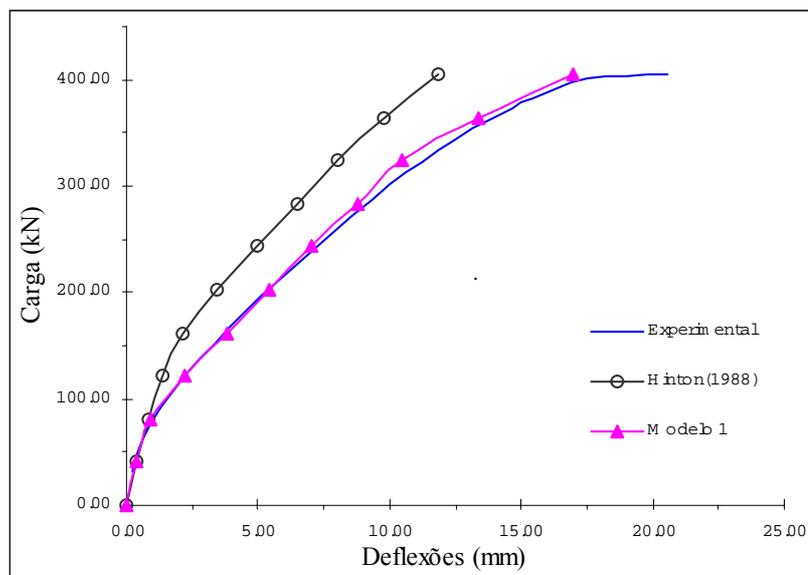


FIGURA 5.6 – Deslocamentos no centro da laje.

5.4.2 Modelo 2

O Modelo 2 utiliza a Eq. (5.21) para simular a colaboração do concreto entre as fissuras:

$$\sigma = 0,6 \cdot E_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(1,0 - \frac{\varepsilon}{0,01}\right), \quad (5.21)$$

onde:

E_0 é o módulo de elasticidade longitudinal;

ε é a deformação na fissura;

$\varepsilon_0 = f_t / E_0$ é a deformação de tração nominal na zona fissurada.

A curva tensão-deformação que representa a Eq. 5.21 é mostrada na Fig. 5.7.

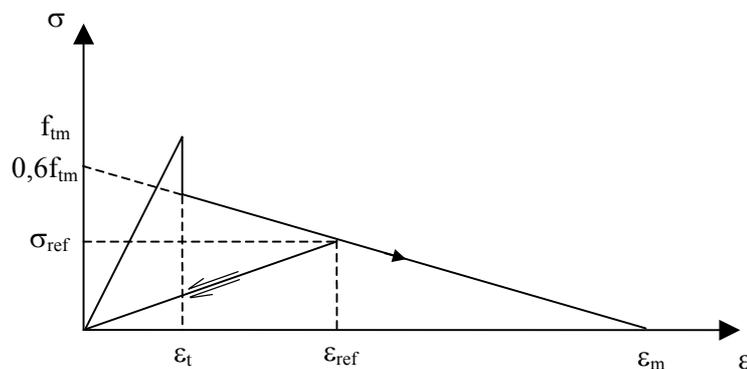


FIGURA 5.7 – Curva tensão-deformação para concreto tracionado (Modelo 2).

Através da Eq. 5.19 considera-se a redução da rigidez transversal do concreto no Modelo 2:

$$\beta = 0,6 \cdot \left(1,0 - \frac{\varepsilon}{0,01} \right), \quad (5.19)$$

onde ε é a deformação na fissura.

A Fig. 5.8 apresenta o desempenho para o parâmetro deslocamento no centro da laje, justificando a escolha das equações para o Modelo 2.

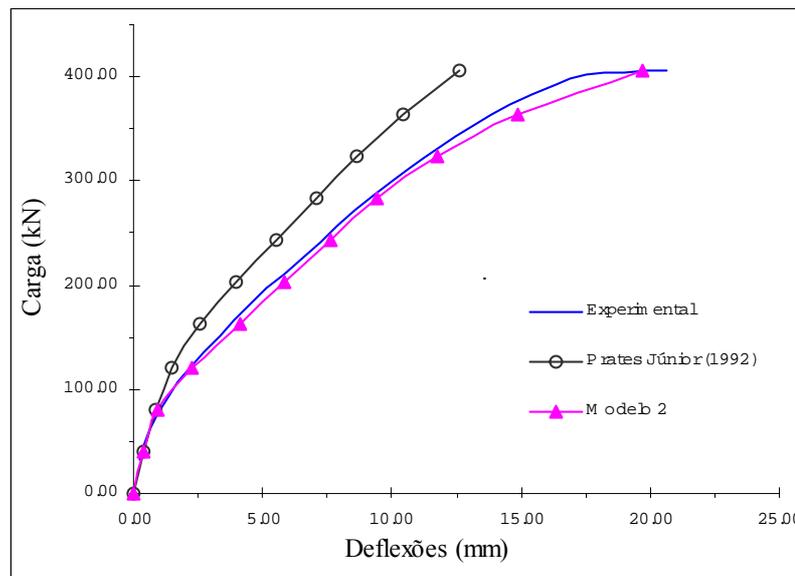


FIGURA 5.8 – Deslocamentos no centro da laje.

6 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

6.1 INTRODUÇÃO

As pesquisas experimentais, que têm como objetivo o estudo de punção em lajes, fundamentam-se, em geral, em ensaios de lajes apoiadas nas quatro bordas, submetidas a cargas centradas, aplicadas de baixo para cima, como é mostrado na Fig. 6.1.

Neste trabalho, a eficiência do programa computacional desenvolvido foi testada através de comparações entre os resultados obtidos numericamente e em ensaios experimentais realizados em laboratório.

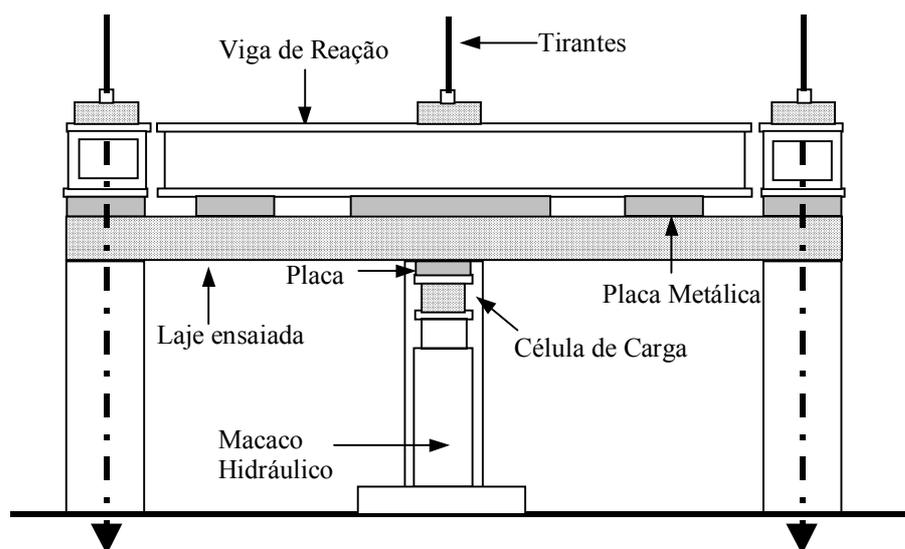


FIGURA 6.1 – Esquema de Ensaio – punção centrada.

São apresentados exemplos de lajes sem armadura de cisalhamento, lajes com estribos verticais e também lajes com estribos inclinados. Nestes exemplos, considera-se ainda a variação do número de camadas de estribos, dos seus diâmetros e do ângulo de inclinação dos estribos.

O pré e pós-processamento dos exemplos analisados foram realizados através do software GiD[®] (Ribó et al., 1999). Para a descrição da malha adotada, utilizam-se três parâmetros ($P1 \times P2 \times P3$), sendo que os dois primeiros representam o número de

elementos no plano e o terceiro indica o número de elementos na direção da espessura da estrutura. Para os exemplos de lajes ensaiadas por Coelho (1999) e por Trautwein (2001) foram utilizados três elementos na espessura para facilitar a determinação das deformações nos estribos.

6.2 EXEMPLOS

6.2.1 Lajes ensaiadas por Coelho (1999)

O trabalho de Coelho (1999) apresenta os resultados de ensaios de dez lajes de concreto armado realizados no Laboratório de Estruturas da Universidade de Brasília. A investigação envolveu testes com lajes sem armadura de cisalhamento e dotadas de armadura do tipo estribo vertical retangular e inclinado.

6.2.1.1 Laje sem armadura de cisalhamento

Neste exemplo, a laje sujeita a uma carga centrada (Fig. 6.2) é analisada utilizando-se uma malha de $5 \times 5 \times 3$ elementos, conforme Fig. 6.3. Observa-se que a malha é mais refinada próximo ao ponto de aplicação da carga devido à concentração de tensões nessa região. Em função da simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da estrutura é modelado. Considera-se a laje simplesmente apoiada.

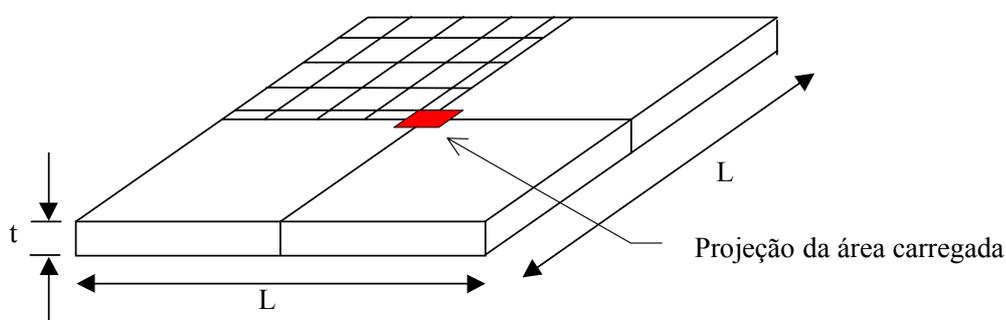


FIGURA 6.2 – Geometria da laje analisada.

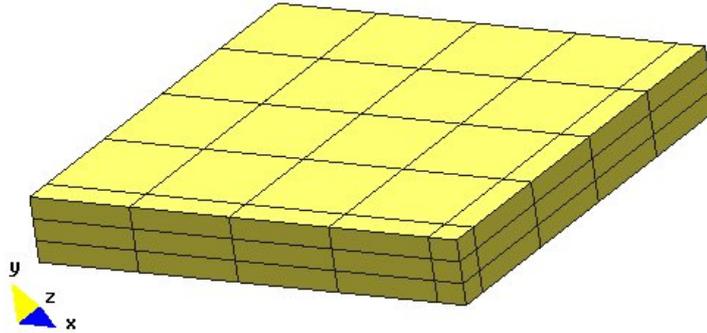


FIGURA 6.3 – Malha adotada para $\frac{1}{4}$ da laje.

Conforme dados dos ensaios experimentais realizados por Coelho (1999), utiliza-se uma armadura de flexão superior na laje constituída por 20 barras de diâmetro de 12,5mm em cada direção, espaçadas de 94mm, enquanto 12 barras de diâmetro de 6,3mm em cada direção, com espaçamento de 163mm, compõem a armadura de flexão inferior. O cobrimento adotado foi de 2cm.

A laje de lado $L = 180\text{cm}$ e espessura $t = 13\text{cm}$ apresenta uma área central de $12 \times 12\text{cm}$ carregada com uma força de 316kN, correspondente à carga última encontrada nos ensaios experimentais realizados por Coelho (1999). A carga é aplicada de forma incremental, atingindo-se o valor total ao final de 10 incrementos.

Adotam-se, como características dos materiais, os valores encontrados em ensaios experimentais realizados por Coelho (1999). As tabelas 6.1 e 6.2 apresentam estes valores, correspondentes às propriedades do concreto e do aço.

TABELA 6.1 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	20,75 GPa
$f_c =$	28,7 MPa
$f_t =$	1,9 MPa

TABELA 6.2 – Propriedades do aço

ϕ (mm)	f_y (MPa)	E_s (GPa)
5,0	850	210
6,3	730	210
12,5	630	210

A Fig. 6.4 apresenta as deflexões obtidas para o centro da laje, juntamente com valores de ensaios experimentais de duas lajes iguais realizados por Coelho (1999). Percebe-se que o programa numérico apresenta desempenho bastante satisfatório para esta laje sem armadura de cisalhamento. A concordância com os resultados obtidos experimentalmente indica que os modelos foram adequadamente implementados.

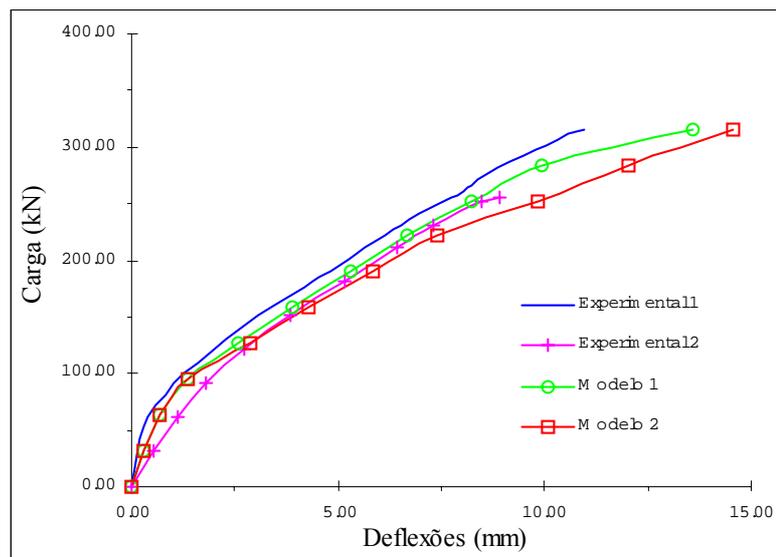


FIGURA 6.4 – Deflexões no centro da laje.

A Fig. 6.5 mostra a configuração deformada da laje na direção da espessura (direção y), ampliada em 15 vezes.

As tensões na armadura de flexão da laje, para diferentes incrementos de carga, podem ser observadas na Fig. 6.6.

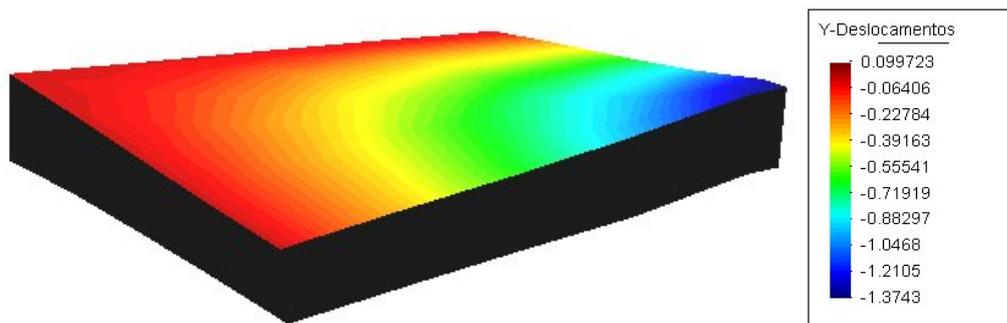


FIGURA 6.5 – Configuração deformada da laje ampliada em 15 vezes (valores em mm obtidos através do Modelo 1).

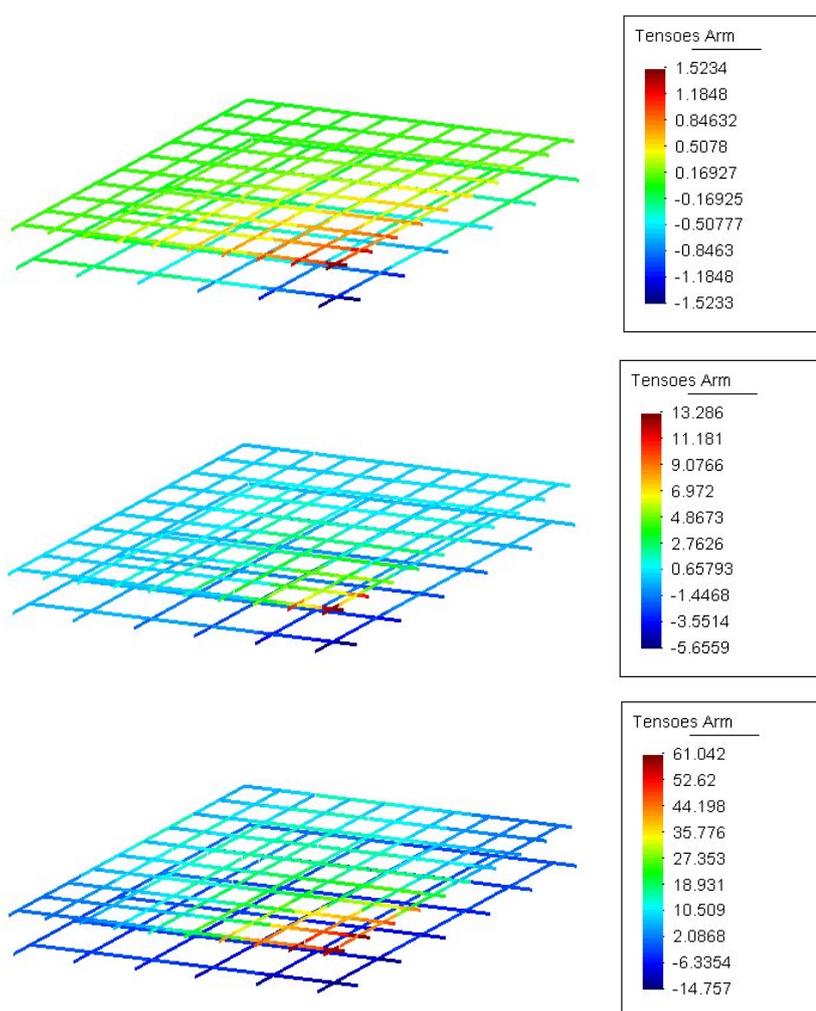


FIGURA 6.6 – Tensões na armadura de flexão (em kN/cm²) para os incrementos de carga 1, 3 e 9 (Modelo 1).

Os resultados de deslocamentos e tensões obtidos através do Modelo 2, para esse exemplo, são semelhantes aos apresentados para o Modelo 1.

6.2.1.2 Laje com 2 camadas de estribos verticais de diâmetro 5.0mm

O presente exemplo apresenta as mesmas características de geometria e malha de elementos finitos do exemplo descrito em 6.2.1.1. A armadura de flexão permanece a mesma, porém, há 2 camadas de estribos verticais de diâmetro 5,0 mm, com diferentes dimensões em cada direção, conforme empregado experimentalmente por Coelho (1999), e posicionados como mostra a Fig. 6.7.

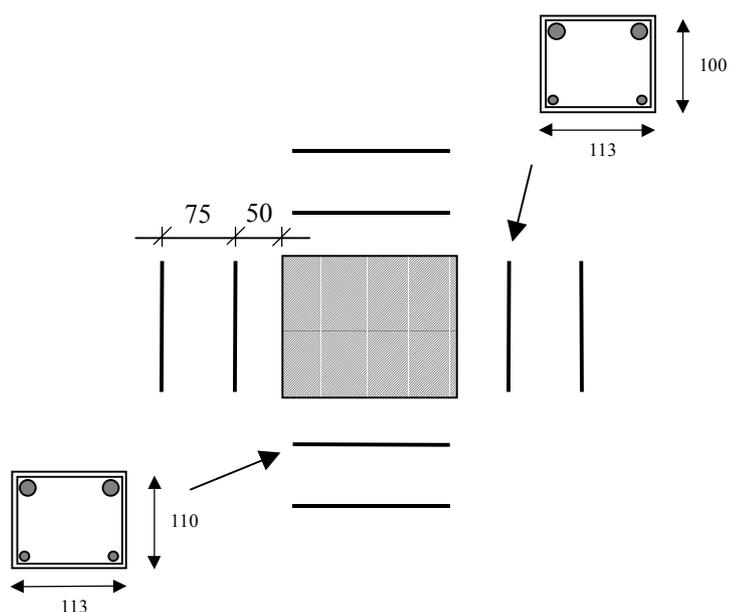


FIGURA 6.7 – Posicionamento dos estribos verticais.

A laje é submetida à carga de 337,3kN, valor correspondente à carga de ruptura encontrada nos ensaios experimentais realizados por Coelho (1999), aplicada em 10 incrementos de 33,73kN.

As propriedades do concreto são apresentadas na tabela 6.3 e as propriedades do aço correspondem àquelas descritas na tabela 6.2 do item 6.2.1.1.

TABELA 6.3 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	27,41 GPa
$f_c =$	30,8 MPa
$f_t =$	1,8 MPa

A Fig. 6.8 mostra a comparação entre deflexões no centro da laje obtidas através do programa numérico, e de ensaios experimentais realizados por Coelho (1999), comprovando a eficiência dos modelos implementados.

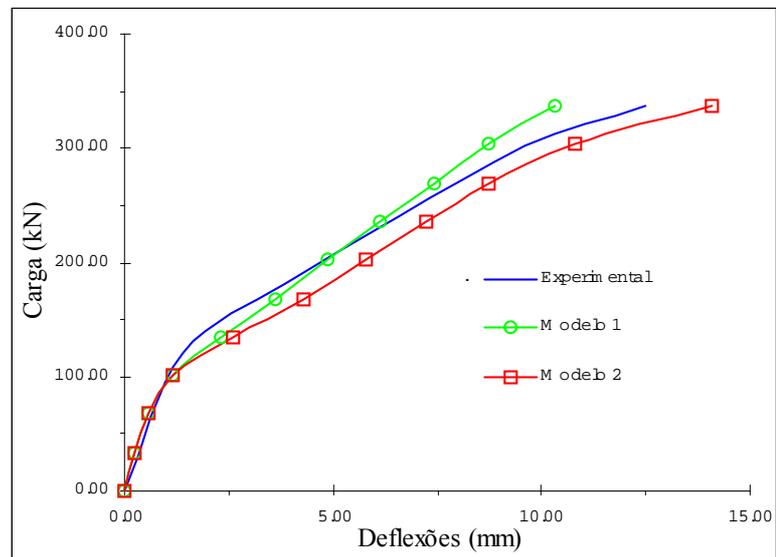


FIGURA 6.8 – Deflexões no centro da laje.

As tensões na armadura de flexão e cisalhamento da laje são mostradas na Fig. 6.9.

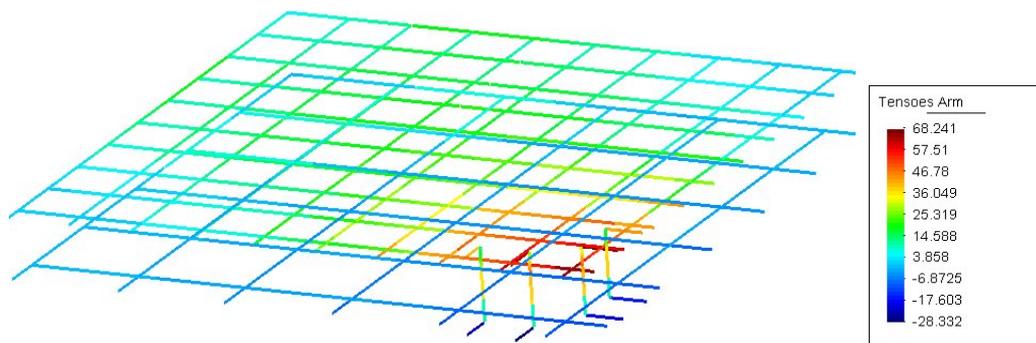


FIGURA 6.9 –Tensões na armadura de flexão e de cisalhamento (em kN/cm²), para o último incremento de carga (Modelo 1).

Neste exemplo, além das deflexões no centro da laje, são medidas as deformações na armadura de cisalhamento, conforme Coelho (1999). O extensômetro está localizado à meia altura da perna do estribo, e a sua posição na armadura está indicada na Fig. 6.10. O controle das deformações é realizado para as duas camadas de estribos, porém os dados das deformações do primeiro extensômetro não são apresentados, pois as informações estão incompletas no trabalho de Coelho (1999), e as leituras no segundo extensômetro são apresentadas somente até a carga de 299,40kN.

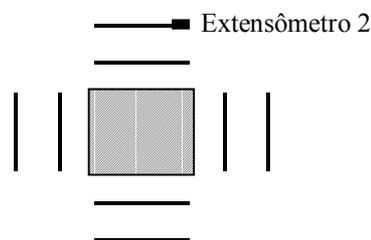


FIGURA 6.10 – Posicionamento do extensômetro.

A comparação entre o resultado experimental e numérico, apresentada na Fig. 6.11, evidencia que os modelos implementados acompanham os valores experimentais até um certo nível de carga. Deve-se observar, entretanto, que os valores experimentais correspondem a deformações medidas em único ponto da armadura. Naturalmente, existe uma variação significativa dos resultados, dependendo da posição do ponto de leitura, se coincidente com uma fissura ou se intermediário entre fissuras. Os valores numéricos expressam uma deformação média ao longo de certo comprimento do estribo.

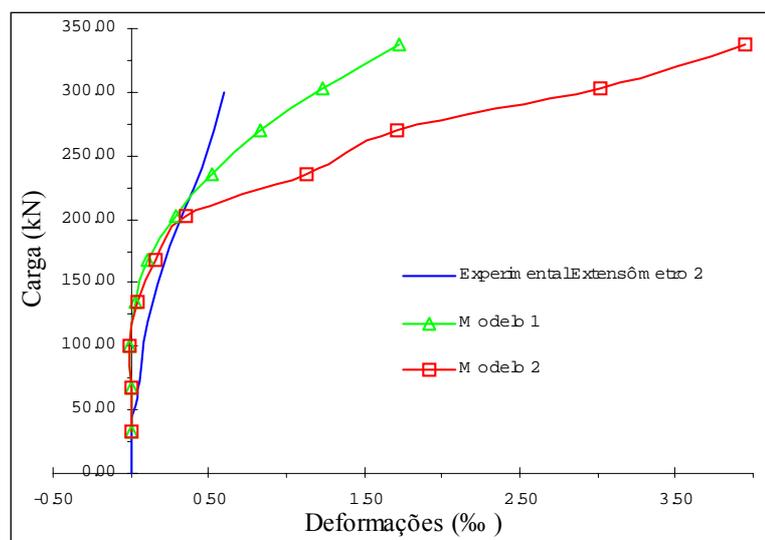


FIGURA 6.11 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 2.

6.2.1.3 Laje com 2 camadas de estribos verticais de diâmetro 6,3mm

Este exemplo é semelhante àquele descrito em 6.2.1.2, alterando-se apenas o diâmetro da armadura de cisalhamento. A laje é submetida à carga de 326,3kN, aplicada em 10 incrementos de 32,63kN. O valor da carga total corresponde à carga de ruptura encontrada nos ensaios experimentais realizados por Coelho (1999).

A tabela 6.4 apresenta as propriedades do concreto e as propriedades do aço correspondem àquelas descritas na tabela 6.2 do item 6.2.1.1.

TABELA 6.4 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	27,41 GPa
$f_c =$	32,0 MPa
$f_t =$	2,3 MPa

A Fig. 6.12 apresenta as deflexões no centro da laje. Novamente, os resultados fornecidos pelos modelos implementados estão próximos aos experimentais, realizados por Coelho (1999).

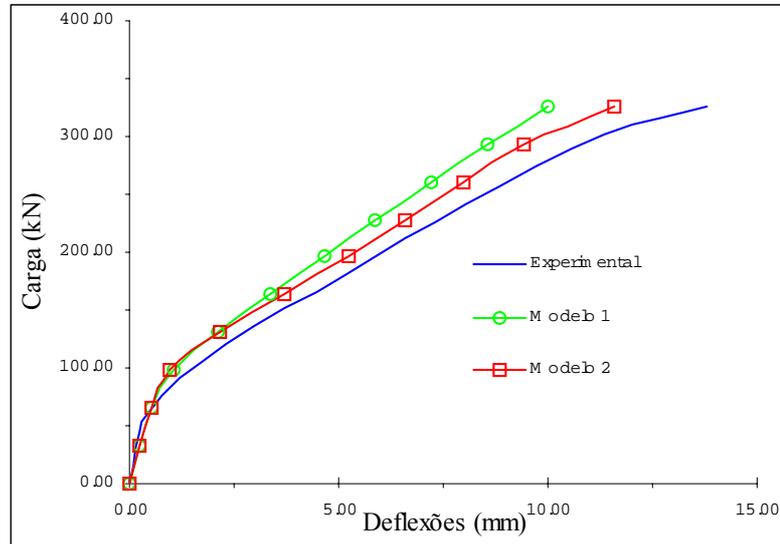


FIGURA 6.12 – Deflexões no centro da laje.

Conforme Coelho (1999), o controle das deformações na armadura de cisalhamento é realizado para a primeira camada de estribo (Fig. 6.13), através de um extensômetro colocado à meia altura da perna do estribo.

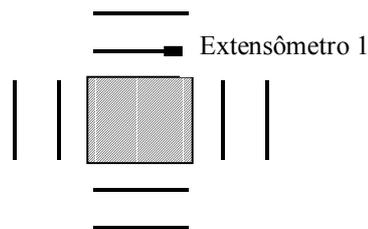


FIGURA 6.13 – Posicionamento do extensômetro.

Os resultados das deformações na armadura de cisalhamento, apresentados na Fig. 6.14, mostram que os modelos numéricos acompanham razoavelmente bem o resultado experimental, até valores próximos à carga de 300kN.

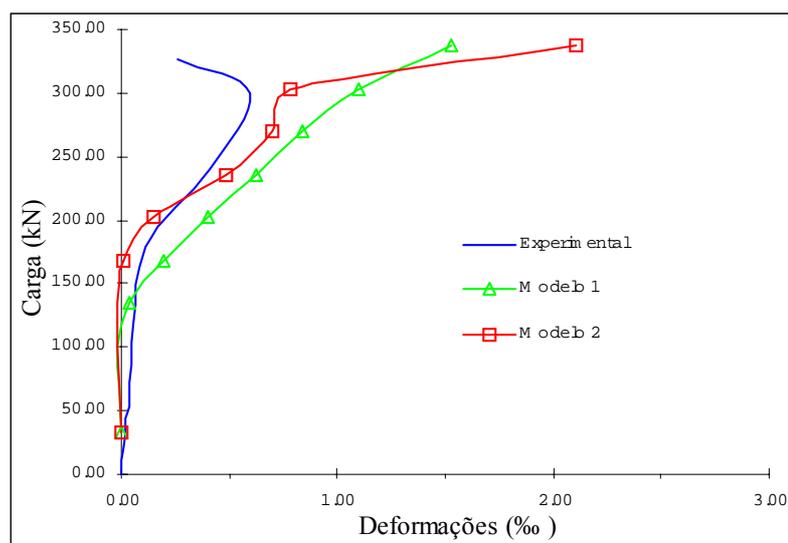


FIGURA 6.14 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1.

6.2.1.4 Laje com 3 camadas de estribos verticais de diâmetro 6,3mm

À semelhança do exemplo descrito em 6.2.1.3, empregando porém, 3 camadas de estribos verticais, a laje é submetida à carga de 330,5kN, sendo aplicada em 10 incrementos de 33,05kN. O valor da carga total corresponde à carga de ruptura encontrada nos ensaios experimentais realizados por Coelho (1999).

A tabela 6.4 do item 6.2.1.3 e a tabela 6.2 do item 6.2.1.1 apresentam as propriedades do concreto e do aço, respectivamente.

A Fig. 6.15 apresenta as deflexões no centro da laje, com resultados numéricos próximos aos obtidos experimentalmente por Coelho (1999). Neste caso, o Modelo 2 acompanha melhor o resultado experimental.

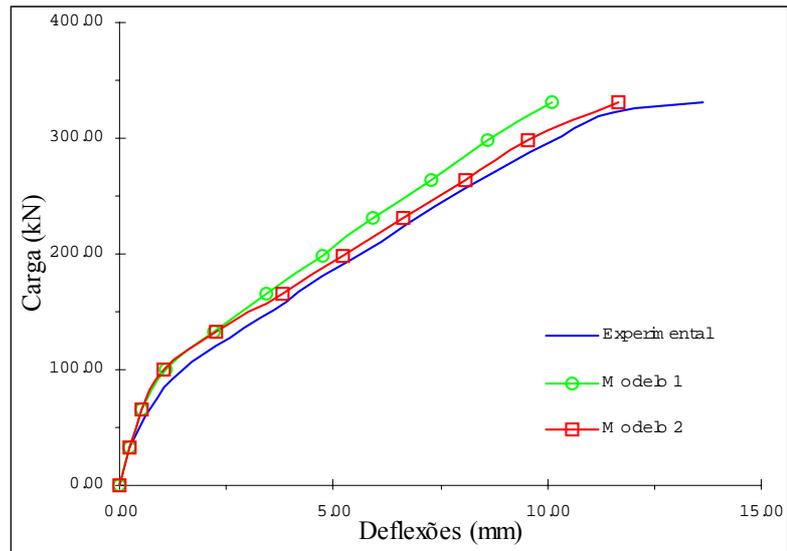


FIGURA 6.15 – Deflexões no centro da laje.

O controle das deformações na armadura de cisalhamento é realizado por 4 extensômetros localizados à meia altura da perna do estribo e posicionados de acordo com a Fig. 6.16. Como dois extensômetros estão em posições simétricas, apresentam-se três gráficos (Fig. 6.17, 6.18 e 6.19), considerando que os resultados de deformações no estribo da segunda camada devam coincidir com os dados das leituras dos extensômetros 2 e 4, obtidos por Coelho (1999).

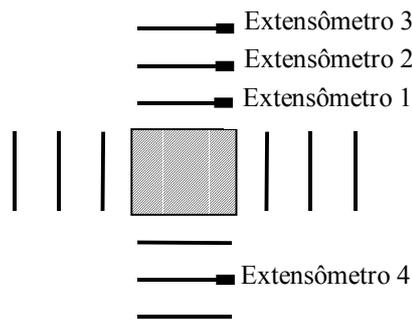


FIGURA 6.16 – Posicionamento dos extensômetros.

Para o exemplo da laje com três camadas de estribos verticais de diâmetro 6.3mm, ensaiada por Coelho (1999), os estribos mais afastados da área carregada apresentam comportamentos semelhantes sem grandes deformações, enquanto no estribo da primeira camada (Fig. 6.17), observam-se deformações maiores.

Observa-se na Fig. 6.18 que os dados experimentais obtidos para os dois extensômetros simétricos (extensômetros 2 e 4), apresentam comportamentos distintos a partir de cerca de 9% da carga de ruptura da laje.

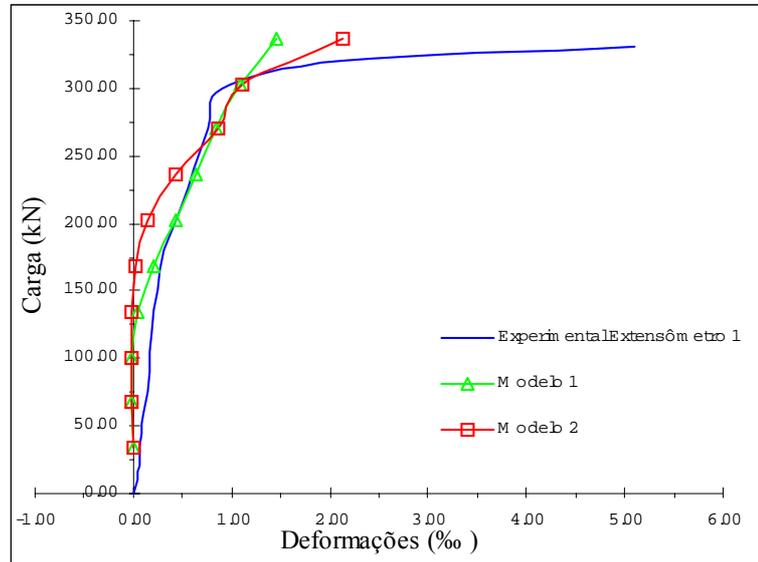


FIGURA 6.17 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1.

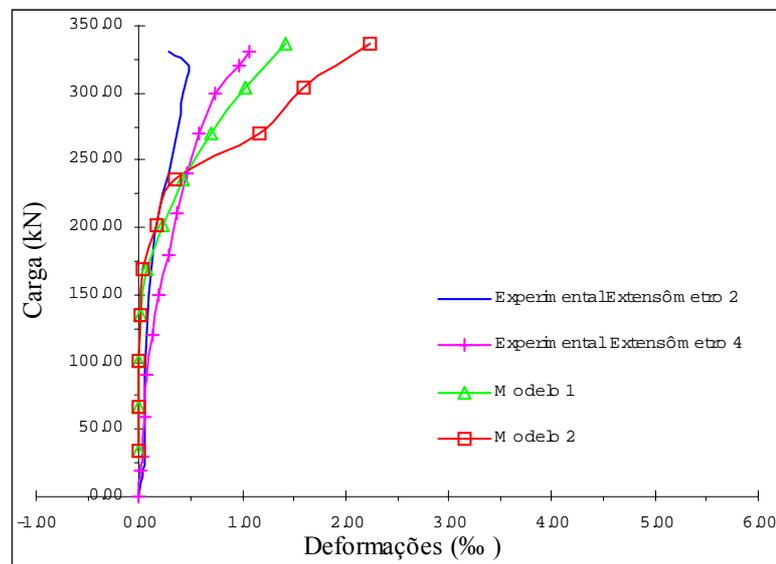


FIGURA 6.18 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 2 e 4.

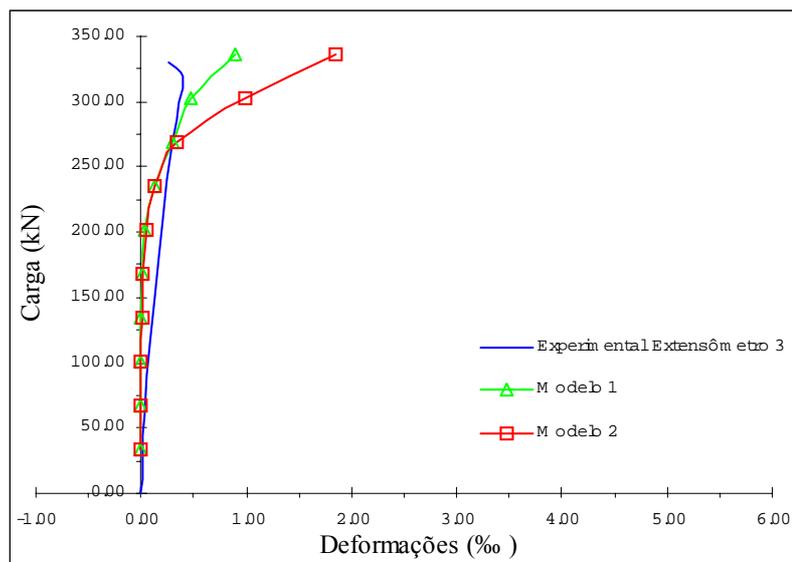
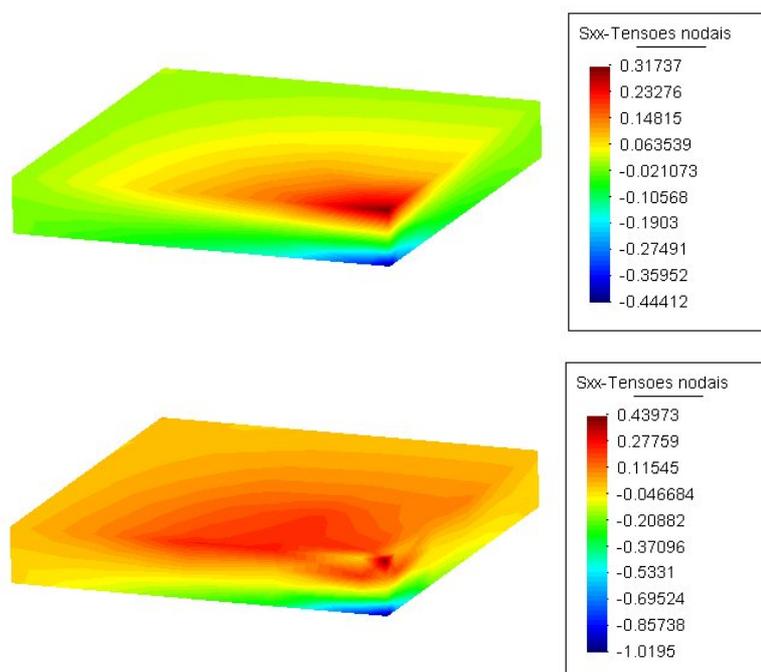


FIGURA 6.19 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 3.

As imagens apresentadas na Fig. 6.20 mostram o comportamento das tensões no concreto para os incrementos 1, 2, e 4. Observa-se a existência de altas tensões de compressão na região de aplicação da carga, representada em azul. Na face contrária, o esforço de tração aumenta a cada incremento e, para o último incremento, essa face está quase inteiramente tracionada em valor constante.



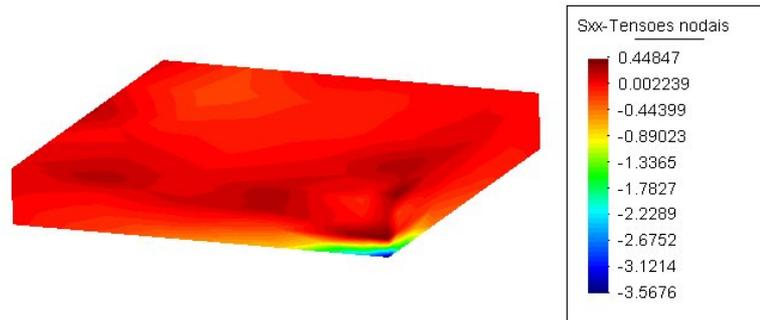


FIGURA 6.20 – Tensões no concreto (em kN/cm²), para os incrementos 1, 2, 4.

6.2.1.5 *Laje com 2 camadas de estribos inclinados de diâmetro 5,0mm*

Este exemplo apresenta as mesmas características de geometria, malha de elementos finitos e armadura de flexão descritas em 6.2.1.1.

A armadura de cisalhamento é do tipo inclinada aberta dobrada a 60° (Fig. 6.21). As camadas dos estribos são posicionadas conforme Fig. 6.22, sendo a primeira delas posicionada faceando a área carregada.

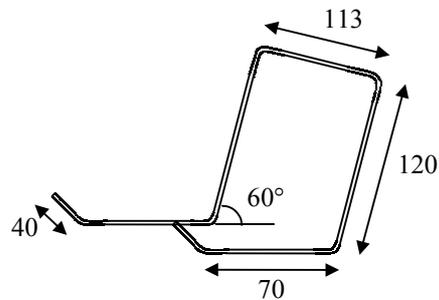


FIGURA 6.21 – Modelo do estribo adotado.

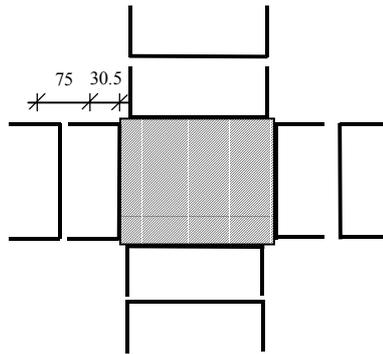


FIGURA 6.22 – Posicionamento dos estribos inclinados.

A laje é submetida à carga de 342,4kN, valor correspondente à carga de ruptura encontrada nos ensaios experimentais realizados por Coelho (1999), aplicada em 10 incrementos de 34,24kN.

As propriedades do concreto e do aço encontram-se nas tabelas 6.5 deste item, e 6.2 do item 6.2.1.1, respectivamente.

TABELA 6.5 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	20,75 GPa
$f_c =$	27,6 MPa
$f_t =$	2,2 MPa

A Fig. 6.23 mostra a comparação entre deflexões no centro da laje resultantes do programa numérico e de ensaios experimentais realizados por Coelho (1999), comprovando a eficiência dos modelos implementados. A curva do Modelo 1 está sobreposta à curva experimental.

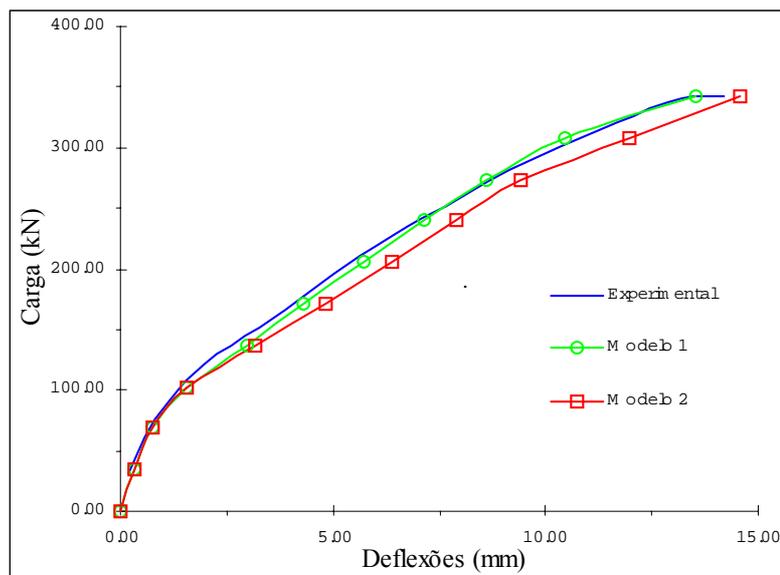


FIGURA 6.23 – Deflexões no centro da laje.

No ensaio experimental realizado por Coelho (1999), o controle das deformações na armadura de cisalhamento é realizado por 2 extensômetros localizados à meia altura da perna do estribo e posicionados conforme a Fig. 6.24.

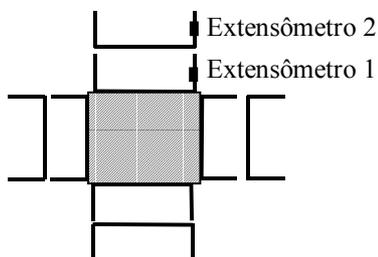


FIGURA 6.24 – Posicionamento dos extensômetros.

As Fig. 6.25 e 6.26 apresentam as deformações na armadura de cisalhamento. Verifica-se que as curvas obtidas numericamente para os estribos da primeira camada acompanham bem o resultado experimental. O estribo da segunda camada atinge o escoamento no último incremento na análise numérica, enquanto o ensaio experimental aponta escoamento com cerca de 76% da carga de ruptura da laje.

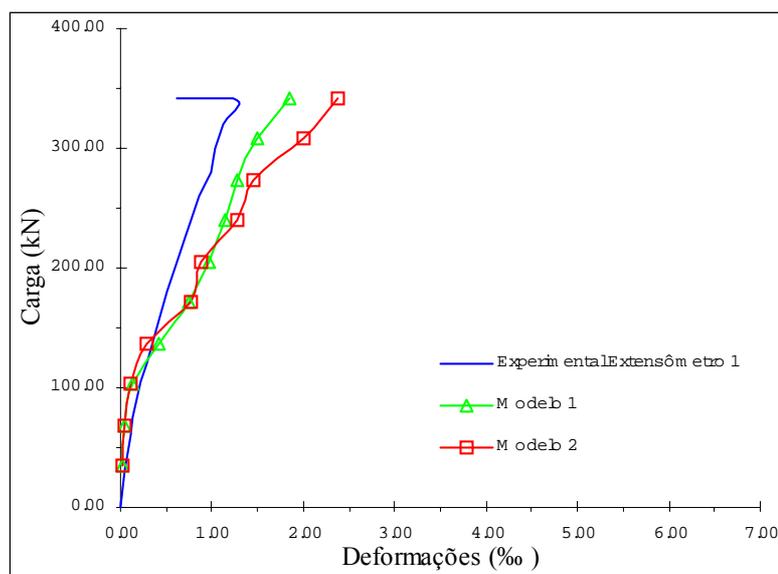


FIGURA 6.25 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1.

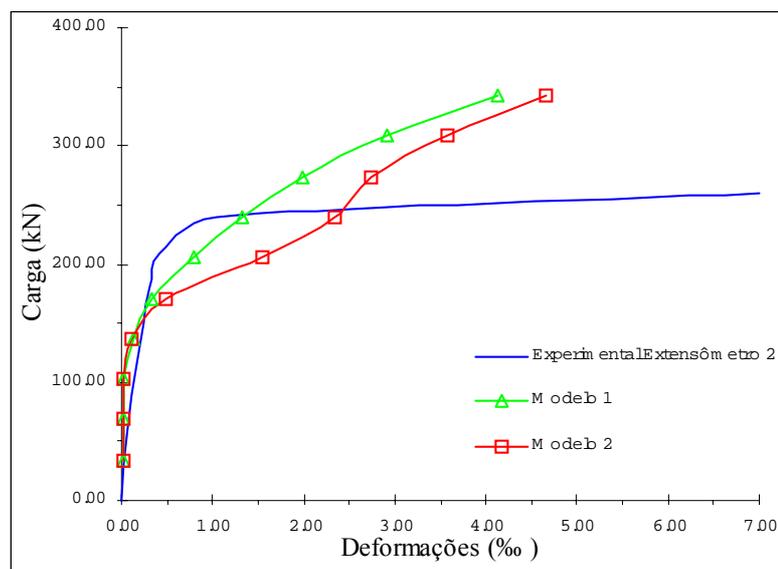


FIGURA 6.26 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 2.

As tensões na armadura de flexão e de cisalhamento da laje podem ser visualizadas na Fig. 6.27, na qual são apresentados os resultados para o incremento 7, referente à carga de, aproximadamente, 240kN. Para esse nível de carga, observa-se que algumas barras de armadura começam a plastificar.

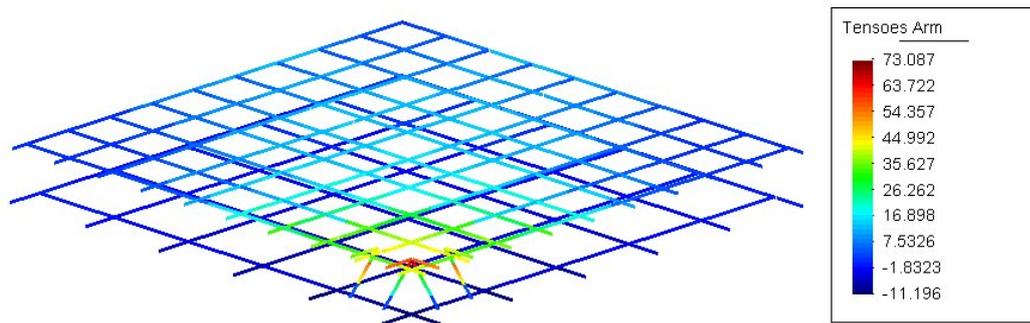


FIGURA 6.27 –Tensões na armadura de flexão e de cisalhamento (em kN/cm²) para o incremento de carga 7 (Modelo 1).

6.2.1.6 Laje com 2 camadas de estribos inclinados de diâmetro 6,3mm

O presente exemplo assemelha-se àquele do item 6.2.1.5, com alteração apenas do diâmetro das barras dos estribos. A laje é submetida à carga de 361,1kN, aplicada em 10 incrementos de 36,11kN. O valor da carga total corresponde à carga de ruptura encontrada nos ensaios experimentais realizados por Coelho (1999).

As propriedades do concreto são apresentadas na tabela 6.6 e as propriedades do aço correspondem àquelas descritas na tabela 6.2 do item 6.2.1.1.

TABELA 6.6 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	20,75 GPa
$f_c =$	29,4 MPa
$f_t =$	2,5 MPa

A Fig. 6.28 apresenta as deflexões no centro da laje. Novamente, os resultados fornecidos pelos modelos implementados estão próximos aos experimentais realizados por Coelho (1999).

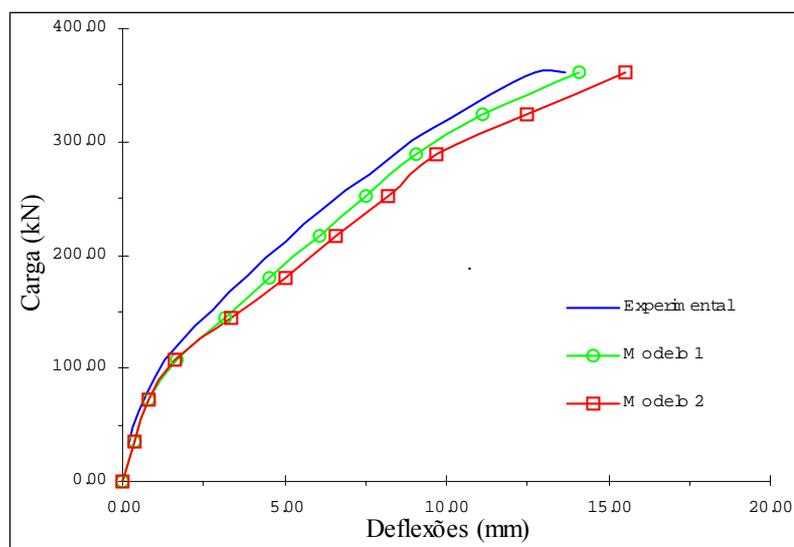


FIGURA 6.28 – Deflexões no centro da laje.

Os resultados das deformações na armadura de cisalhamento são apresentados na Fig. 6.29 e 6.30. Observa-se que os modelos numéricos acompanham razoavelmente bem a curva experimental obtida através do extensômetro 1. No estribo da segunda camada, verificam-se deformações bem maiores e para o último incremento de carga, a armadura atinge o escoamento, o que não é observado experimentalmente.

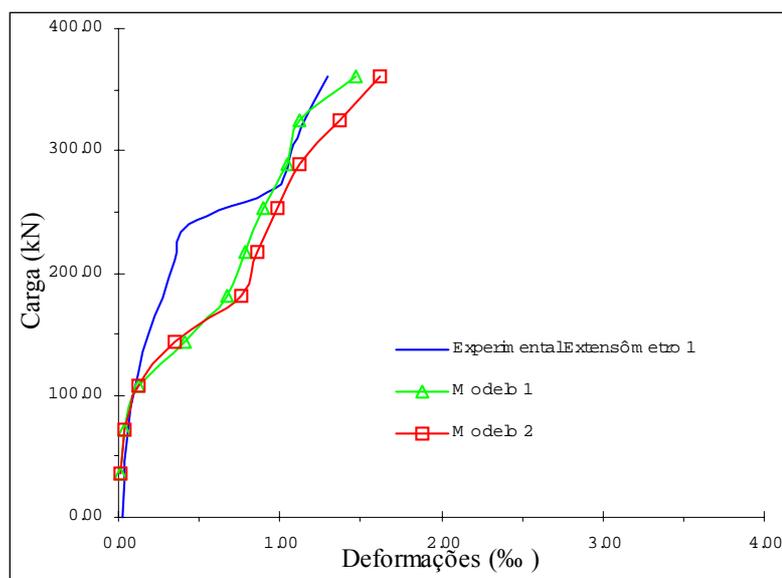


FIGURA 6.29 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1.

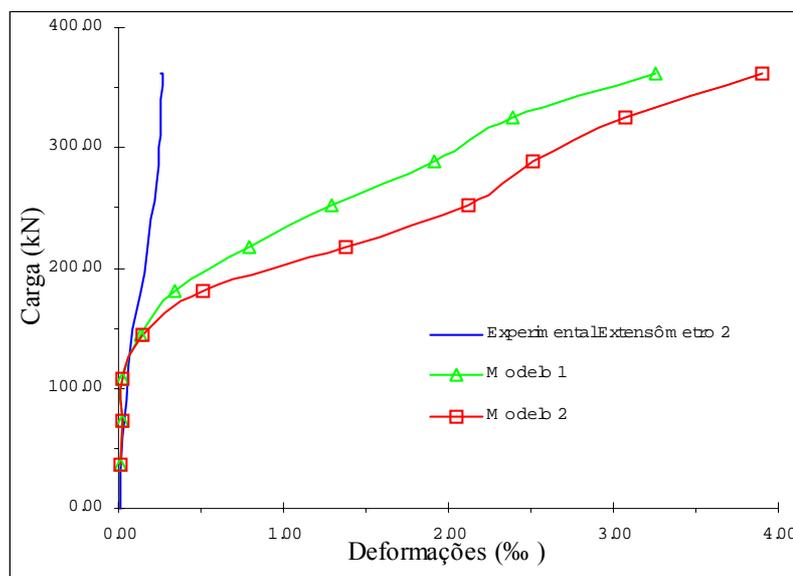


FIGURA 6.30 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 2.

6.2.1.7 Laje com 3 camadas de estribos inclinados de diâmetro 6,3mm

Este exemplo assemelha-se àquele apresentado no item 6.2.1.6, porém apresenta uma camada de estribos a mais. Aplica-se na área central uma carga de 405,1kN em 10 incrementos de 40,51kN. O valor da carga total corresponde à carga de ruptura encontrada nos ensaios experimentais realizados por Coelho (1999).

As propriedades do concreto e do aço correspondem àquelas descritas na tabela 6.6 do item 6.2.1.6, e na tabela 6.2 do item 6.2.1.1, respectivamente.

A Fig. 6.31 apresenta as deflexões no centro da laje. Neste caso, os resultados fornecidos pelos dois modelos implementados estão bem próximos aos ensaios experimentais realizados por Coelho (1999).

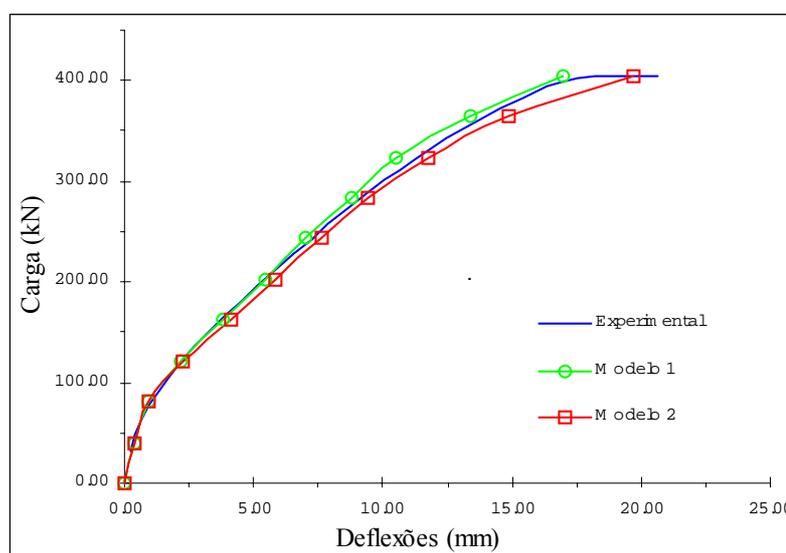


FIGURA 6.31 – Deflexões no centro da laje.

No ensaio experimental realizado por Coelho (1999), o controle das deformações na armadura de cisalhamento é realizado por 3 extensômetros localizados à meia altura da perna do estribo, e posicionados conforme a Fig. 6.32.

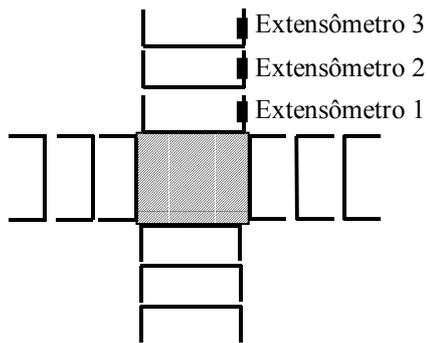


FIGURA 6.32 – Posicionamento dos extensômetros.

A comparação entre os resultados experimentais e numéricos pode ser observada nas Fig. 6.33, 6.34, 6.35. Observa-se um bom comportamento do programa numérico para as três camadas de estribos, obtendo-se valores coerentes com os ensaios realizados por Coelho (1999). O estribo da terceira camada escora no último incremento.

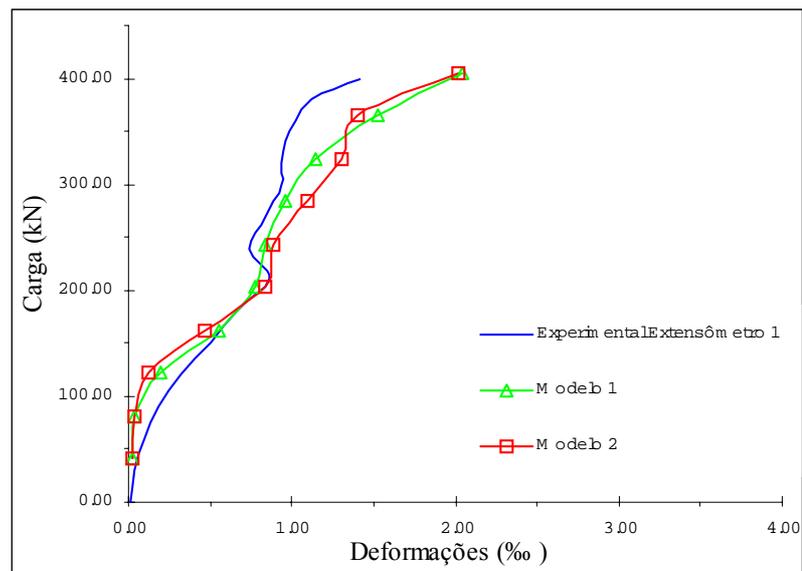


FIGURA 6.33 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1.

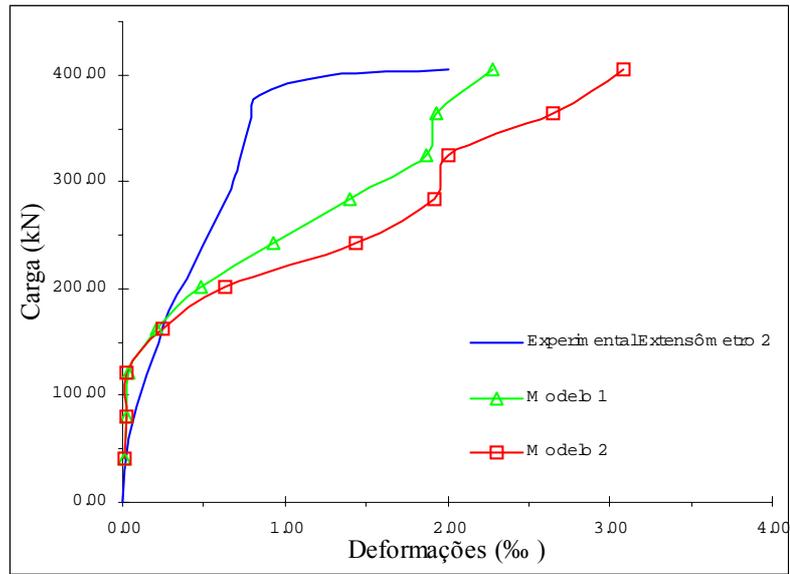


FIGURA 6.34 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 2.

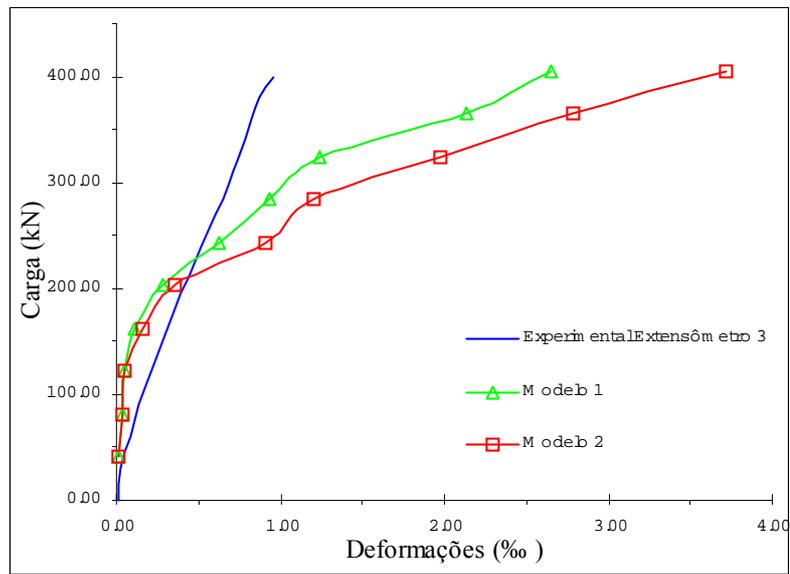


FIGURA 6.35 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 3.

6.2.1.8 Laje com 4 camadas de estribos inclinados de diâmetro 6,3mm

Em relação ao exemplo descrito no item 6.2.1.7, altera-se aqui, somente o número de camadas de estribos, que passa a ser quatro.

A laje é carregada com uma força de 425,4kN, correspondente à carga última encontrada no ensaios experimentais realizados por Coelho (1999), sendo aplicada de forma incremental, atingindo-se o valor total ao final de 10 incrementos.

A tabela 6.7 apresenta as propriedades do concreto, sendo que as propriedades do aço correspondem àquelas descritas na tabela 6.2 do item 6.2.1.1.

TABELA 6.7 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	27,41 GPa
$f_c =$	32,3 MPa
$f_t =$	1,9 MPa

A comparação das deflexões no centro da laje obtidas numericamente e experimentalmente é mostrada na Fig. 6.36. A concordância entre os resultados indica que os modelos foram adequadamente ajustados. A curva fornecida pelo Modelo 2 está sobreposta à curva experimental.

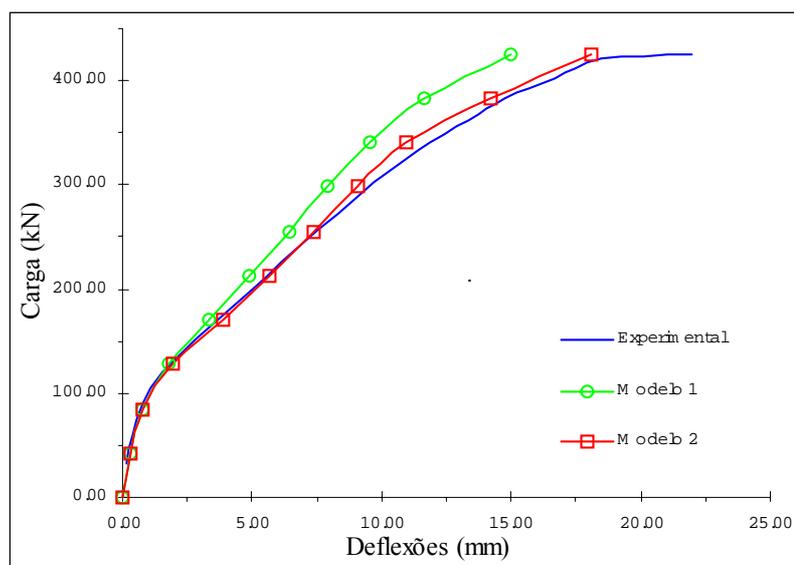


FIGURA 6.36 – Deflexões no centro da laje.

Segundo Coelho (1999), neste exemplo as deformações na armadura de cisalhamento são monitoradas por extensômetros fixados à meia altura da perna do estribo, localizados conforme a Fig. 6.37.

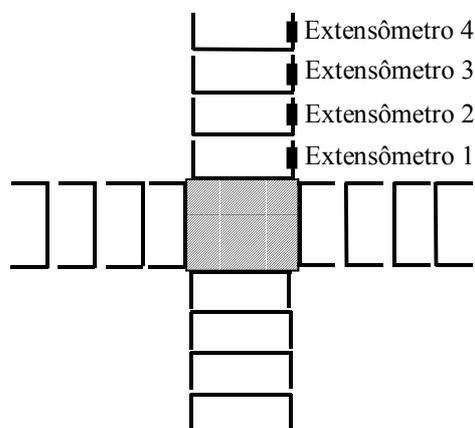


FIGURA 6.37 – Posicionamento dos extensômetros.

Através da comparação entre os resultados numéricos e experimentais apresentados nas Fig. 6.38, 6.39, 6.40 e 6.41, pode-se observar a eficiência do programa no que se refere às deformações na armadura de cisalhamento nas diferentes posições dos extensômetros. Verifica-se que o Modelo 1 apresenta melhor desempenho na representação das deformações nos estribos.

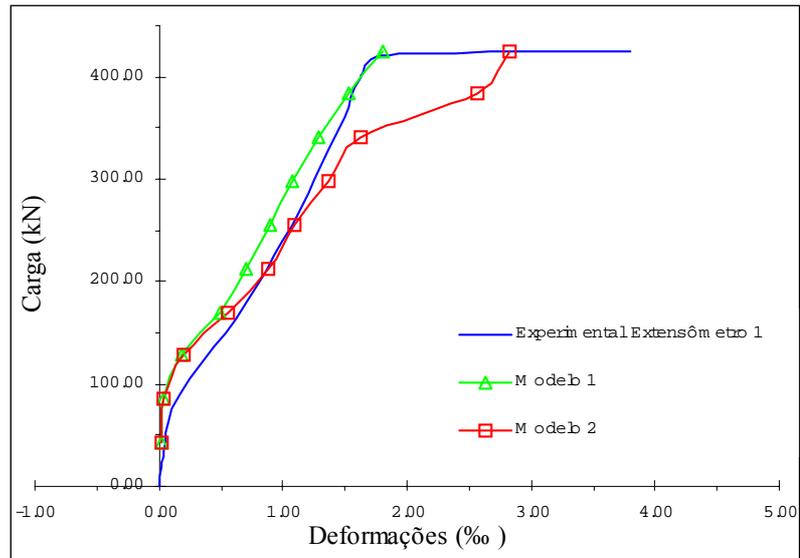


FIGURA 6.38 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 1.

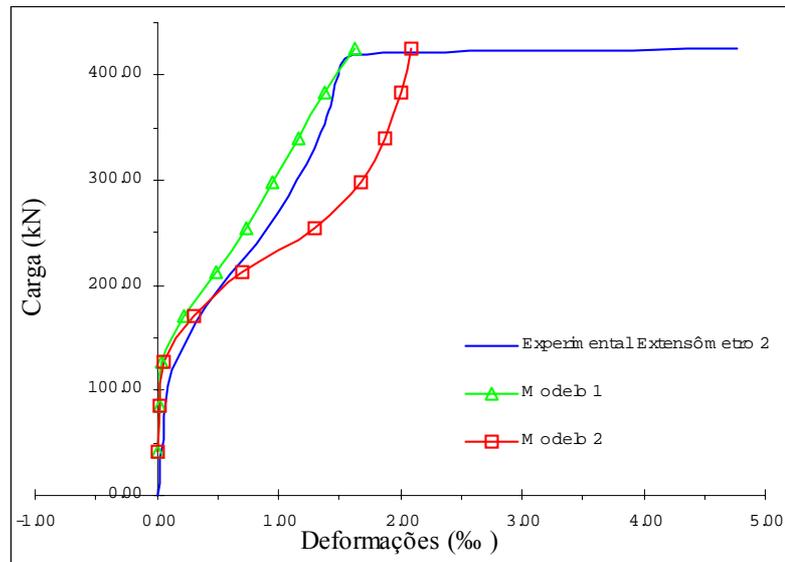


FIGURA 6.39 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 2.

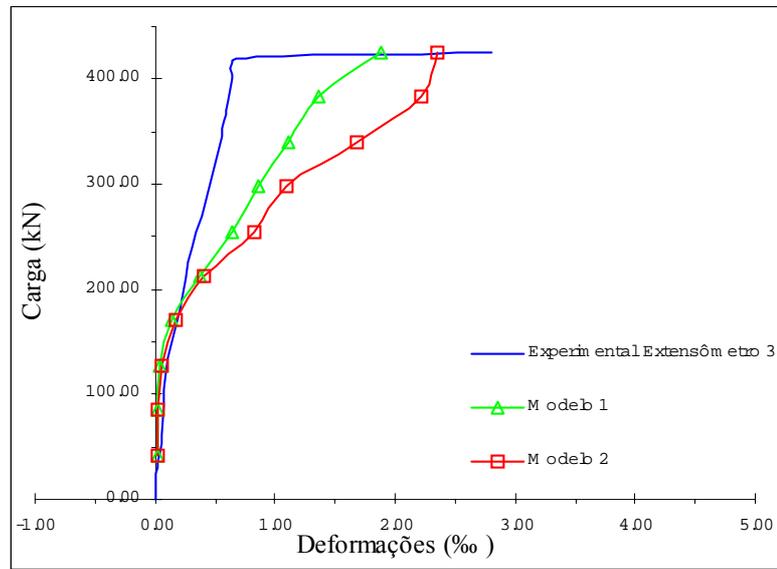


FIGURA 6.40 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 3.

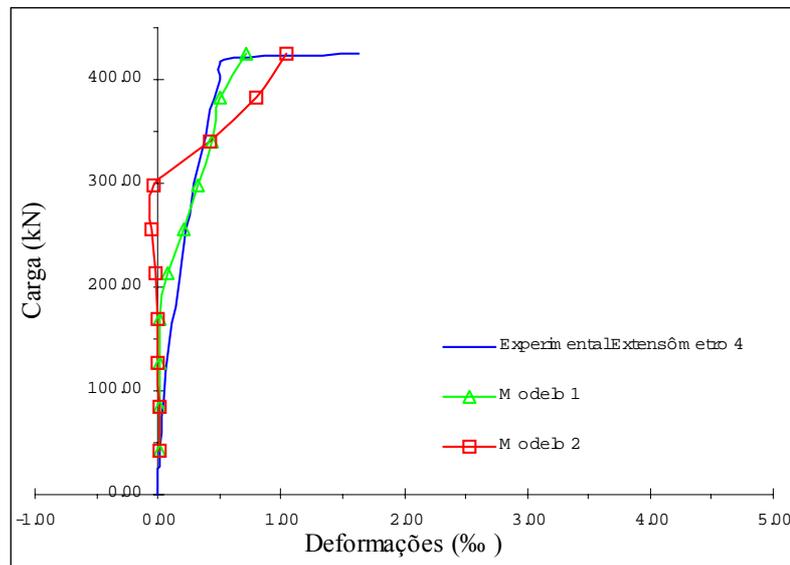


FIGURA 6.41 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição do extensômetro 4.

As tensões na armadura de flexão e de cisalhamento da laje podem ser visualizadas na Fig. 6.42. São apresentados os resultados para o incremento 6. Para esse nível de carga, observa-se que algumas barras de armadura começam a plastificar.

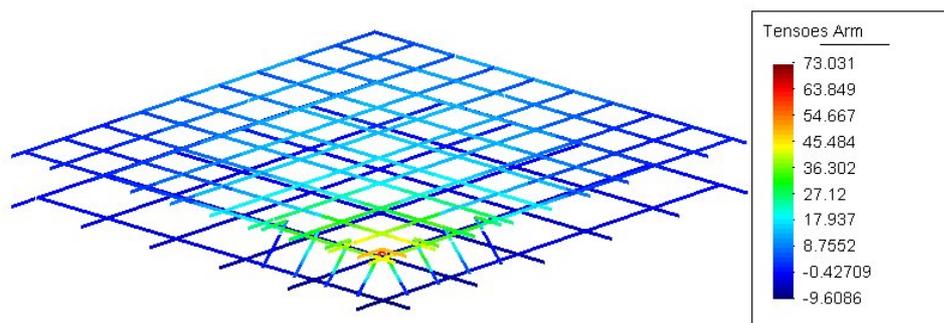


FIGURA 6.42 –Tensões na armadura de flexão e de cisalhamento (em kN/cm²) para o incremento de carga 6 (Modelo 2).

6.2.2 Lajes ensaiadas por Trautwein (2001)

O trabalho de Trautwein (2001), da Universidade de Brasília, apresenta os resultados de ensaios de lajes de concreto armado realizados no Laboratório do Centro Tecnológico em Engenharia Civil de Furnas Centrais Elétricas S.A. em Aparecida de Goiânia, Goiás. As lajes com estribos tipo inclinado com distribuição em cruz e radial foram analisadas numericamente.

6.2.2.1 Laje com 3 camadas de estribos inclinados de diâmetro 6,3mm

Trata-se de uma laje sujeita a uma carga centrada (Fig. 6.43) e discretizada em uma malha de $5 \times 5 \times 3$, semelhante àquela utilizada nos exemplos anteriores, apresentando-se mais refinada próximo ao ponto de aplicação da carga devido à concentração de tensões nessa região. Devido à simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da estrutura é modelado. Considera-se a laje simplesmente apoiada.

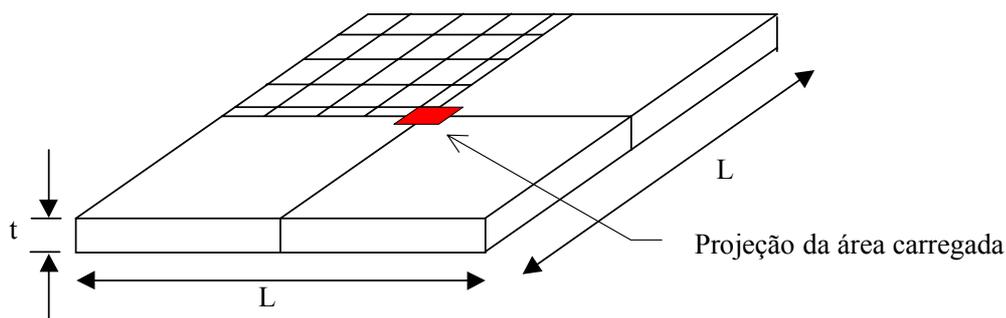


FIGURA 6.43 – Geometria da laje analisada.

A laje de lado $L = 300\text{cm}$ e espessura $t = 20\text{cm}$ apresenta uma área de $20 \times 20\text{cm}$ carregada com uma força de 650kN , correspondente à carga última encontrada no ensaios experimentais realizados por Trautwein (2001). A carga é aplicada de forma incremental, atingindo-se o valor total ao final de 10 incrementos.

A armadura de flexão superior da laje é constituída por 31 barras de diâmetro de $16,0\text{mm}$ em cada direção, espaçadas de 10cm , enquanto 21 barras de diâmetro de $8,0\text{mm}$ em cada direção, com espaçamento de 15cm , compõem a armadura de flexão inferior. A armadura de cisalhamento é composta por estribos inclinados a 60° em relação ao plano da laje, conforme mostra a Fig. 6.44. O cobrimento adotado foi de 2cm .

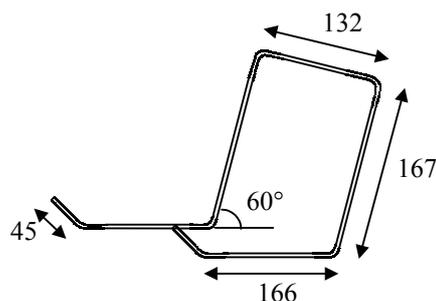


FIGURA 6.44 – Modelo do estribo adotado.

A Fig. 6.45 apresenta o posicionamento das camadas de estribos inclinados. A primeira delas é colocada faceando a área carregada.

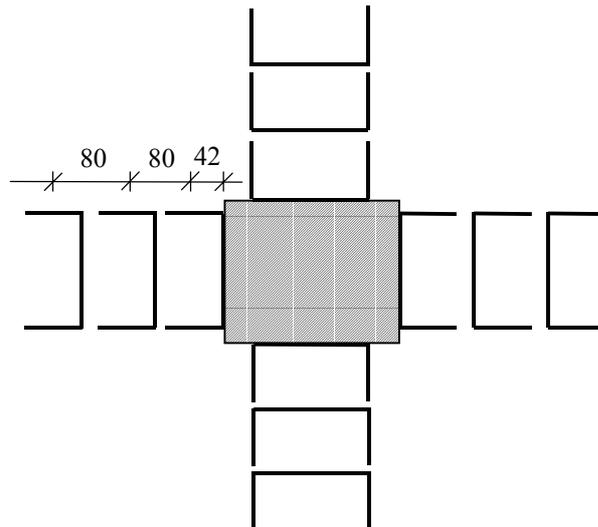


FIGURA 6.45 – Posicionamento em cruz dos estribos (medidas em mm).

Adotam-se como características dos materiais, os valores encontrados em ensaios experimentais realizados por Trautwein (2001). As tabelas 6.8 e 6.9 apresentam as propriedades para o concreto e para o aço, respectivamente.

TABELA 6.8 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	21,06 GPa
$f_c =$	41,1 MPa
$f_t =$	3,6 MPa

TABELA 6.9 – Propriedades do aço

ϕ (mm)	f_y (MPa)	E_s (GPa)
5,0	793,9	183,2
6,3	636,4	207,2
8,0	616,0	220,5
10,0	576,9	214,7
12,5	658,0	182,8
16,0	560,7	228,1

A Fig. 6.46 mostra a comparação entre deflexões no centro da laje obtidas numericamente e em ensaios experimentais realizados por Trautwein (2001).

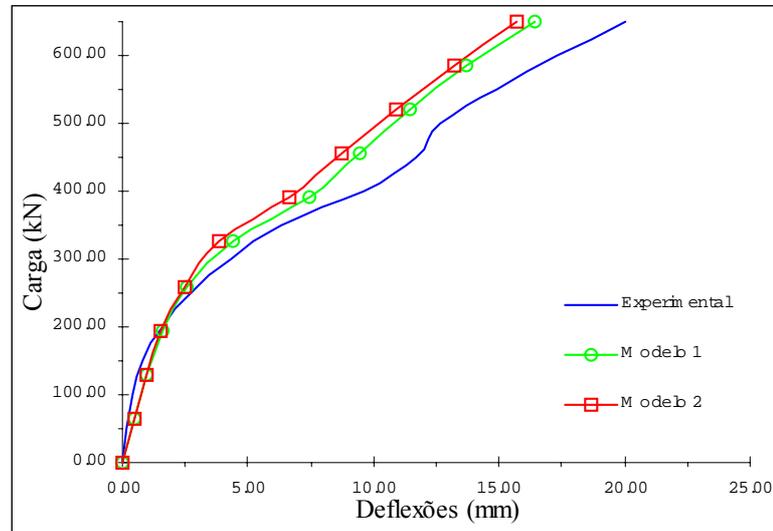


FIGURA 6.46 – Deflexões no centro da laje.

No ensaio experimental realizado por Trautwein (2001), há monitoramento dos estribos para o controle das deformações. A cada ponto monitorado, colocam-se dois extensômetros à meia altura da perna do estribo, posicionados conforme a Fig. 6.47.

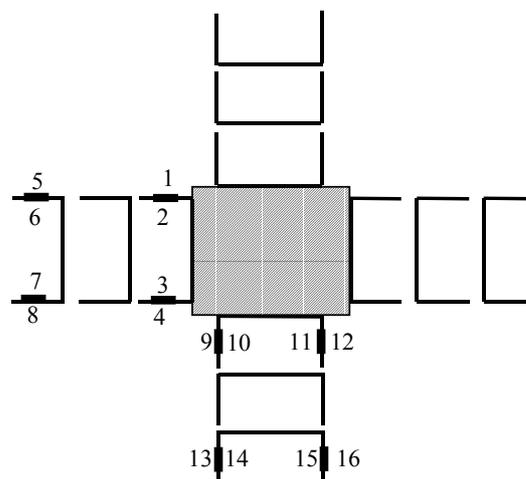


FIGURA 6.47 – Posicionamento dos extensômetros.

São apresentados apenas 2 gráficos com resultados de deformações na armadura de cisalhamento (Fig. 6.48 e 6.49), considerando que os extensômetros estão em

posições simétricas. Para ambas as camadas de estribos, o programa numérico apresenta bons resultados até a carga de, aproximadamente, 450kN. Observa-se que os resultados experimentais apresentam diferenças para leituras em extensômetros simétricos.

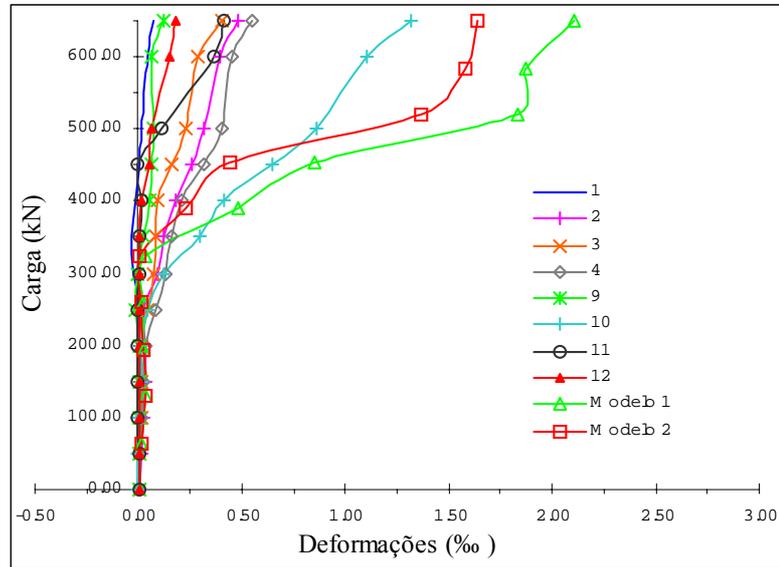


FIGURA 6.48 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 e 12.

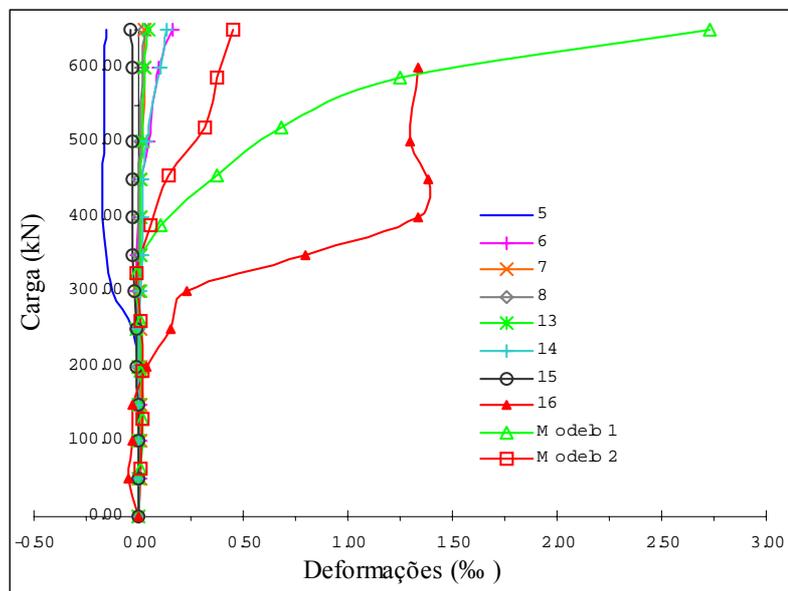


FIGURA 6.49 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15 e 16.

6.2.2.2 Laje com 3 camadas de estribos inclinados de diâmetro 8,0mm

O presente exemplo apresenta as mesmas características de geometria e malha do exemplo descrito em 6.2.2.1. A armadura de flexão permanece a mesma, porém adotam-se estribos inclinados com diâmetro de 8,0mm, posicionados conforme a Fig. 6.47.

A laje é submetida a uma carga de 999kN, valor correspondente à carga de ruptura encontrada nos ensaios experimentais realizados por Trautwein (2001), aplicada em 10 incrementos de 99,9kN.

A tabela 6.10 apresenta as propriedades para o concreto e as propriedades do aço correspondem às apresentadas na tabela 6.9 do item 6.2.2.1.

TABELA 6.10 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	21,78 GPa
$f_c =$	45,7 MPa
$f_t =$	3,3 MPa

A Fig. 6.50 apresenta os resultados das deflexões no centro da laje obtidos numericamente, e por ensaios experimentais. Observa-se que a leitura no ensaio é realizada somente até a carga de 800kN e, até esse nível de carregamento, o programa numérico apresenta bom desempenho.

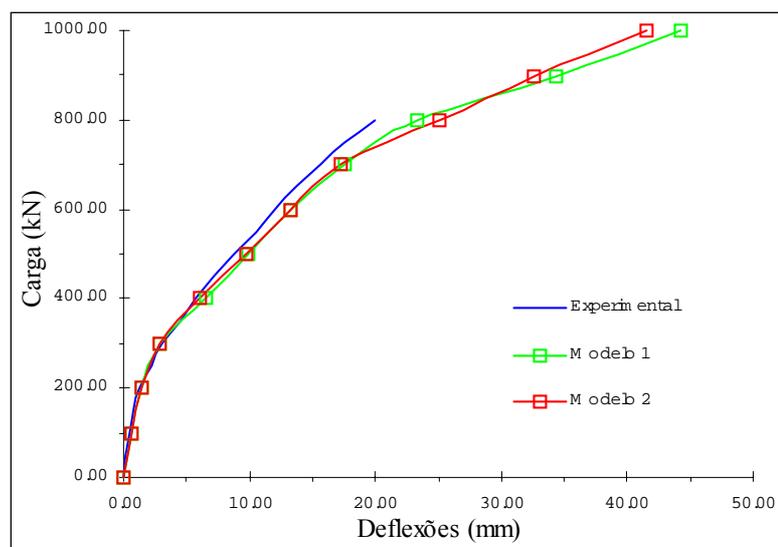


FIGURA 6.50 – Deflexões no centro da laje.

O controle das deformações nos estribos é realizado, na análise numérica, em estribos com dados experimentais obtidos em ensaios realizados por Trautwein (2001), por extensômetros posicionados conforme a Fig. 6.47. As Fig. 6.51 e 6.52 apresentam os resultados numéricos e experimentais das deformações na armadura de cisalhamento. Verifica-se que, para ambas as posições dos extensômetros, o programa numérico indica escoamento das barras a partir do incremento 8, o que não é observado nos ensaios experimentais.

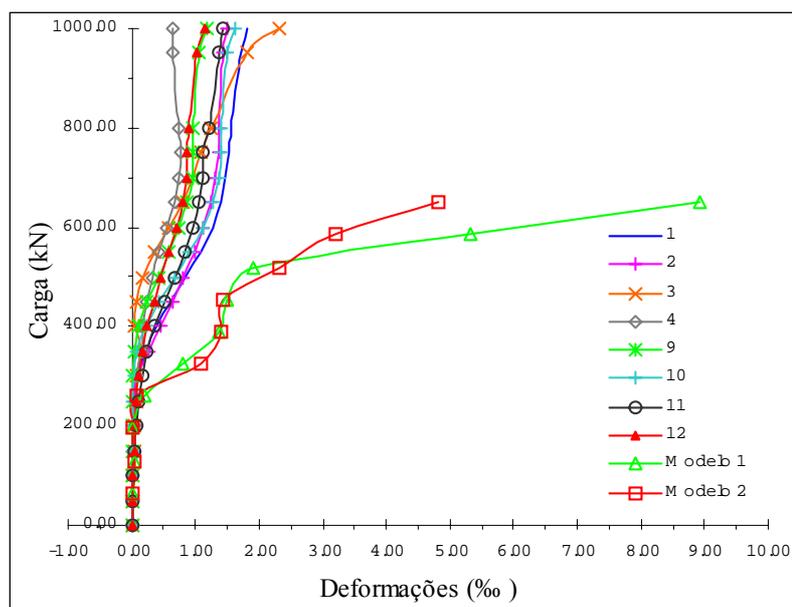


FIGURA 6.51 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 e 12.

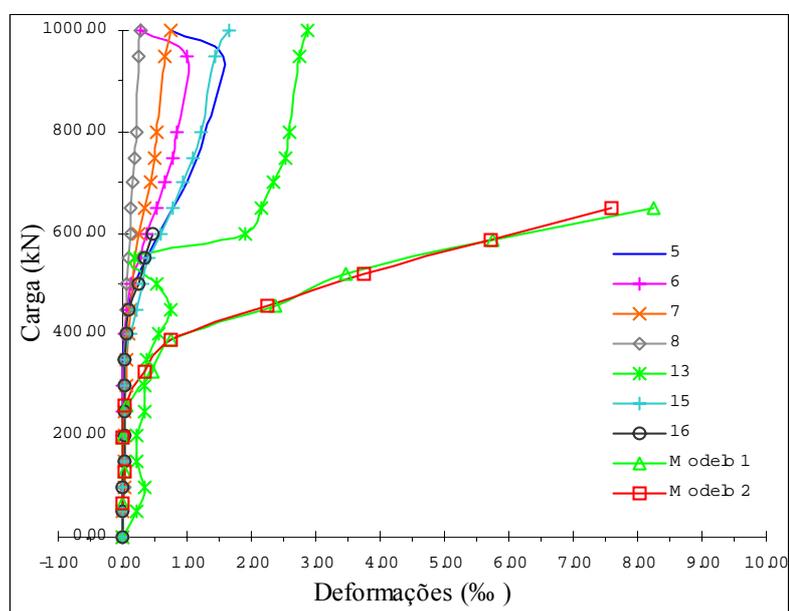


FIGURA 6.52 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 5, 6, 7, 8, 13, 15 e 16.

Em Trautwein (2001), não há dados de leituras do extensômetro 14 (Fig. 6.47).

6.2.2.3 Laje com 4 camadas de estribos inclinados distribuídos de forma radial de diâmetros 6,3mm e 8,0mm

Este exemplo possui as mesmas características de geometria e malha do exemplo descrito em 6.2.2.1. A armadura de flexão permanece a mesma, e para a armadura de cisalhamento, adota-se uma distribuição radial e utilizam-se dois diâmetros diferentes. Para camadas perpendiculares à área carregada empregam-se estribos de diâmetro 8,0mm e para camadas na direção diagonal à área carregada adotam-se barras de diâmetro 6,3mm, conforme mostra a Fig. 6.53.

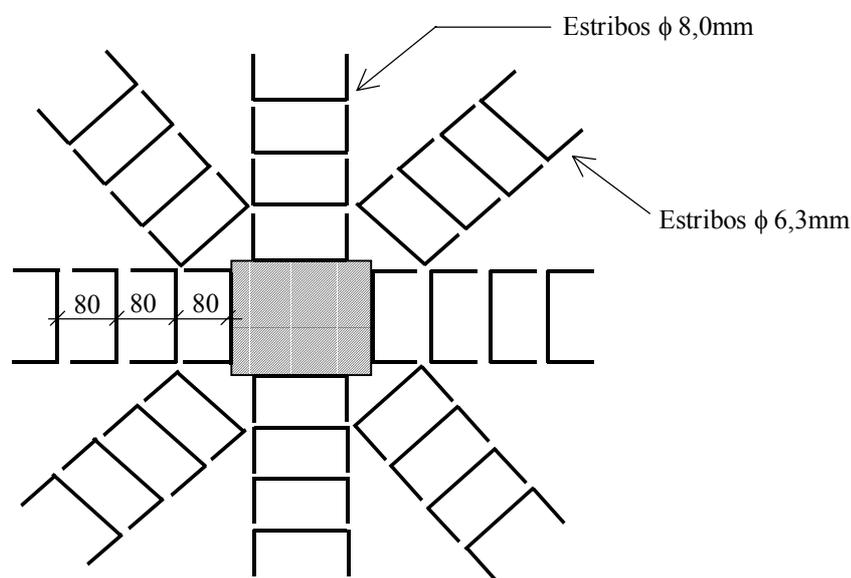


FIGURA 6.53 – Distribuição radial dos estribos (medidas em mm).

A laje é submetida a uma carga de 979kN, valor correspondente à carga de ruptura encontrada nos ensaios experimentais realizados por Trautwein (2001), aplicada em 10 incrementos de 97,9kN.

A tabela 6.11 apresenta as propriedades para o concreto e as propriedades do aço correspondem àquelas descritas no item 6.2.2.1, tabela 6.9.

TABELA 6.11 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	21,69 GPa
$f_c =$	43,4 MPa
$f_t =$	3,6 MPa

A Fig. 6.54 mostra a comparação entre resultados das deflexões no centro da laje obtidos numericamente e em ensaios experimentais. Novamente, a leitura das deflexões nos ensaios experimentais é realizada somente até a carga de 900kN. Observa-se que os dois modelos fornecem curvas sobrepostas à curva de referência.

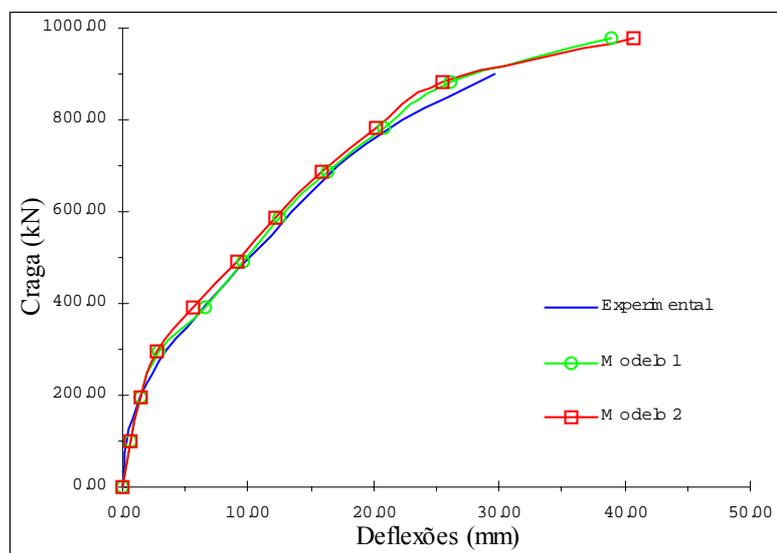


FIGURA 6.54 – Deflexões no centro da laje.

No presente exemplo, a cada ponto da armadura de cisalhamento monitorado experimentalmente nos ensaios realizados por Trautwein (2001), colocam-se dois extensômetros para medir as deformações, fixados à meia altura da perna do estribo, e localizados conforme a Fig. 6.55.

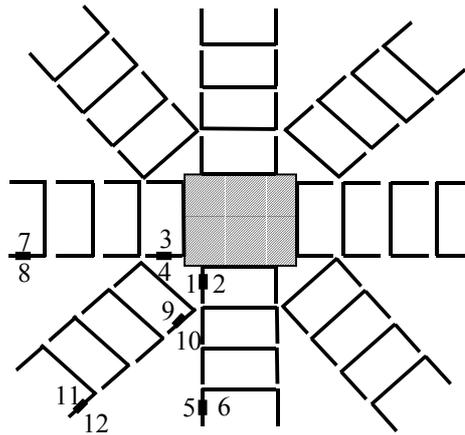


FIGURA 6.55 – Posicionamento dos extensômetros.

As Fig. 6.56, 6.57, 6.58 e 6.59 apontam a concordância entre os resultados numéricos e experimentais para o parâmetro deformação na armadura de cisalhamento, comprovando a eficiência dos modelos implementados.

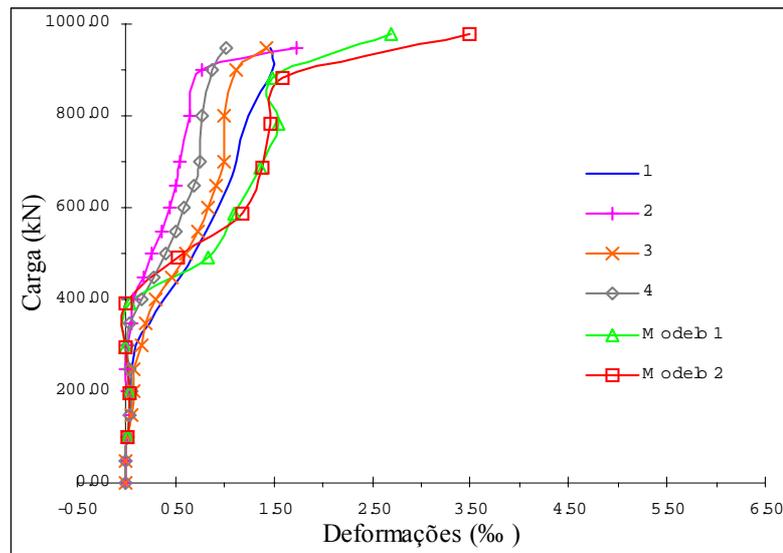


FIGURA 6.56 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 1, 2, 3, 4.

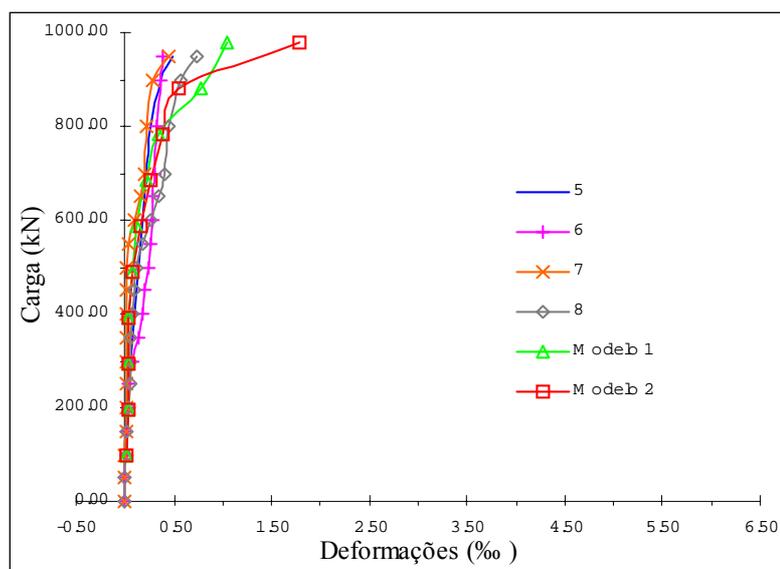


FIGURA 6.57 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 5, 6, 7, 8.

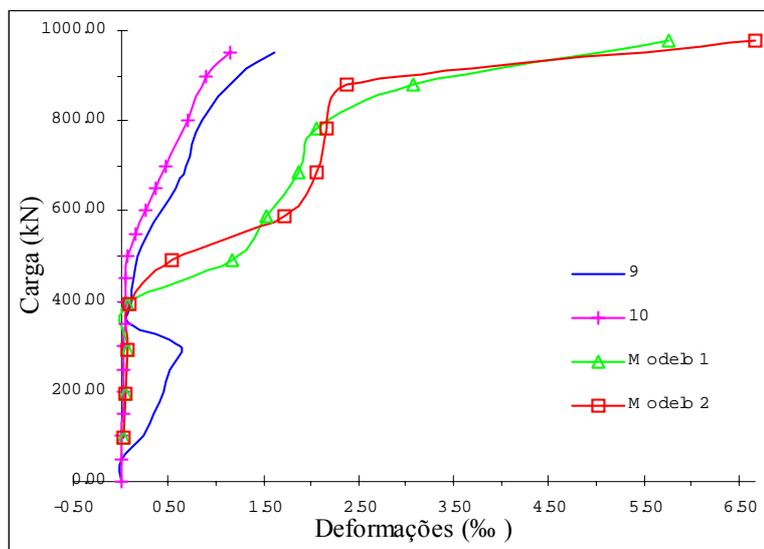


FIGURA 6.58 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 9, 10.

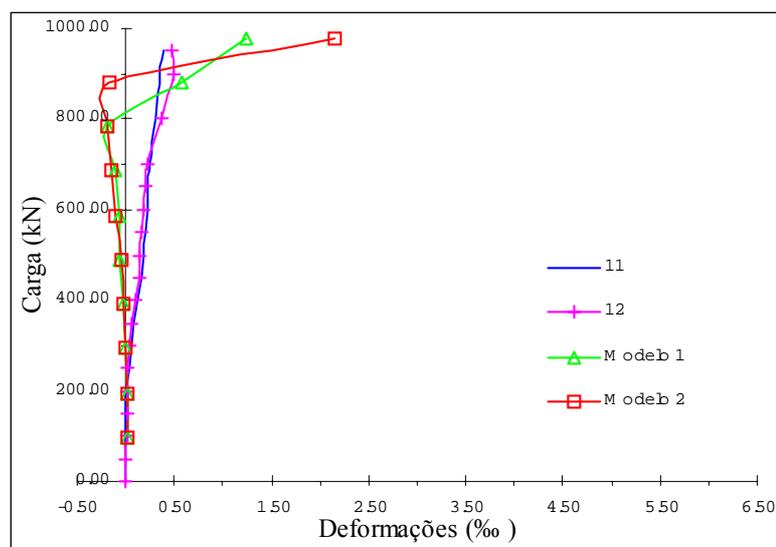


FIGURA 6.59 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 11, 12.

As tensões na armadura de cisalhamento da laje podem ser observadas na Fig. 6.60. São apresentados os resultados para o incremento 8. Para esse nível de carga, observa-se que as duas primeiras camadas de estribos na direção diagonal estão plastificadas.

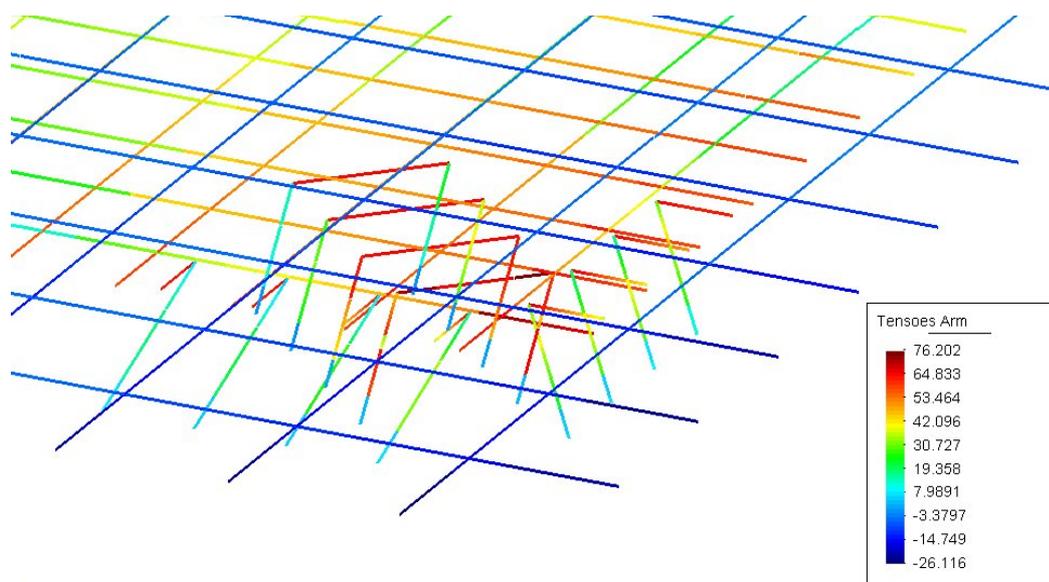


FIGURA 6.60 – Visualização de tensões na armadura de cisalhamento.

6.2.2.4 Laje com 7 camadas de estribos inclinados distribuídos de forma radial de diâmetro 8,0mm

Este exemplo mantém as características de geometria e malha de elementos finitos do item 6.2.2.1. A armadura de flexão permanece a mesma, porém, adotam-se 7 camadas de estribos de 8,0mm distribuídas de forma radial, conforme mostra a Fig. 6.61.

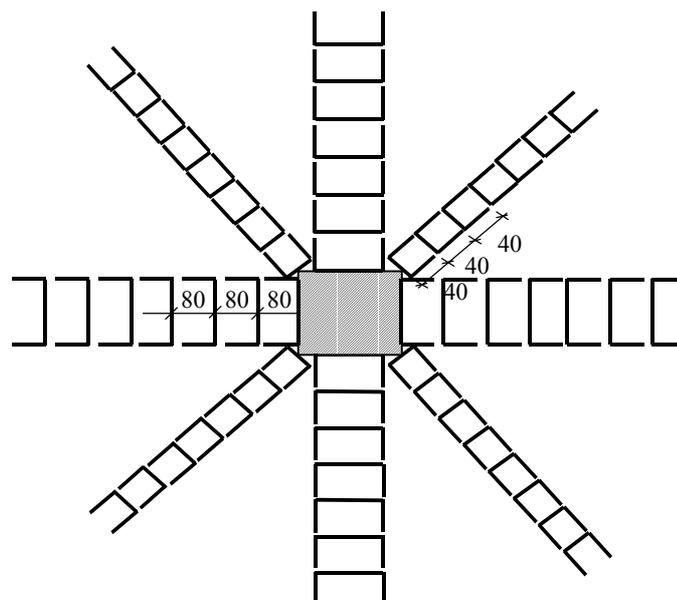


FIGURA 6.61 – Distribuição radial dos estribos. (medidas em mm).

Segundo Trautwein (2001), adota-se a largura de 132mm para os estribos posicionados perpendicularmente à área carregada, e a largura de 40mm para os estribos posicionados na direção diagonal à área carregada (Fig. 6.62).

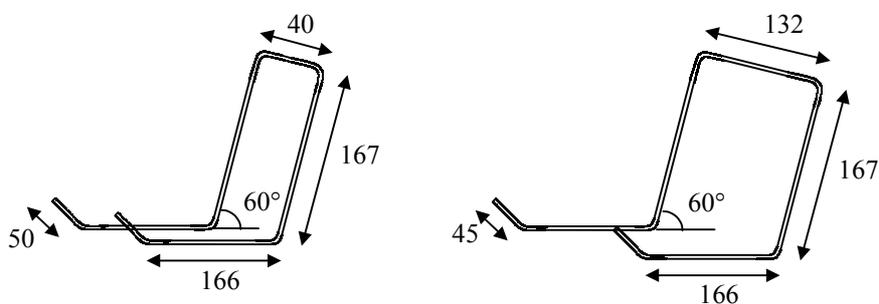


FIGURA 6.62 – Modelo do estribo adotado na direção da diagonal à área carregada e perpendicular à mesma.

A laje é submetida a uma carga de 1087kN, valor correspondente à carga de ruptura encontrada nos ensaios experimentais realizados por Trautwein (2001), aplicada em 10 incrementos de 108,7kN.

A tabela 6.12 do presente item e a tabela 6.9 do item 6.2.2.1, apresentam as propriedades para o concreto e o aço, respectivamente.

TABELA 6.12 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	20,97 GPa
$f_c =$	47,9 MPa
$f_t =$	3,7 MPa

As deflexões no centro da laje, obtidas numericamente e experimentalmente são apresentadas na Fig. 6.63. Novamente, a leitura no ensaio realizado por Trautwein (2001), foi realizada somente até a carga de 900kN, e com a curva experimental existente, verifica-se o bom desempenho dos modelos implementados.

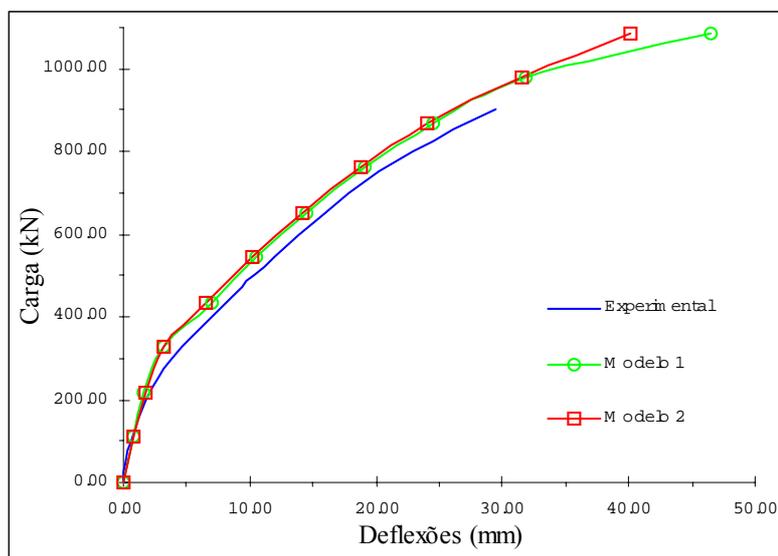


FIGURA 6.63 – Deflexões no centro da laje.

Para medir experimentalmente as deformações na armadura de cisalhamento da laje com 7 camadas de estribos inclinados, distribuídos de forma radial e com diâmetro

de 8,0mm, Trautwein (2001) utiliza dois extensômetros, fixados à meia altura da perna do estribo, a cada ponto monitorado, localizados conforme a Fig. 6.64. Com o objetivo de comparar os resultados do programa numérico e dos ensaios experimentais, são apresentados 11 gráficos de deformações em estribos (da Fig. 6.65 à 6.75), visto que vários extensômetros estão em posições simétricas. Em todos eles, verifica-se concordância entre as curvas, comprovando a eficiência do programa.

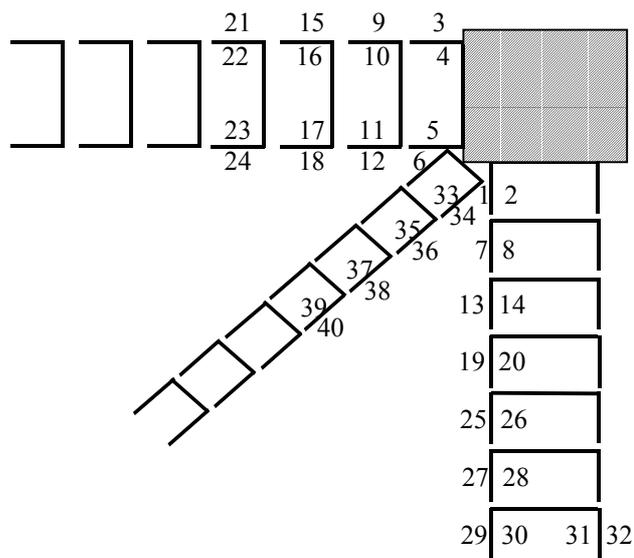


FIGURA 6.64 – Posicionamento dos extensômetros.

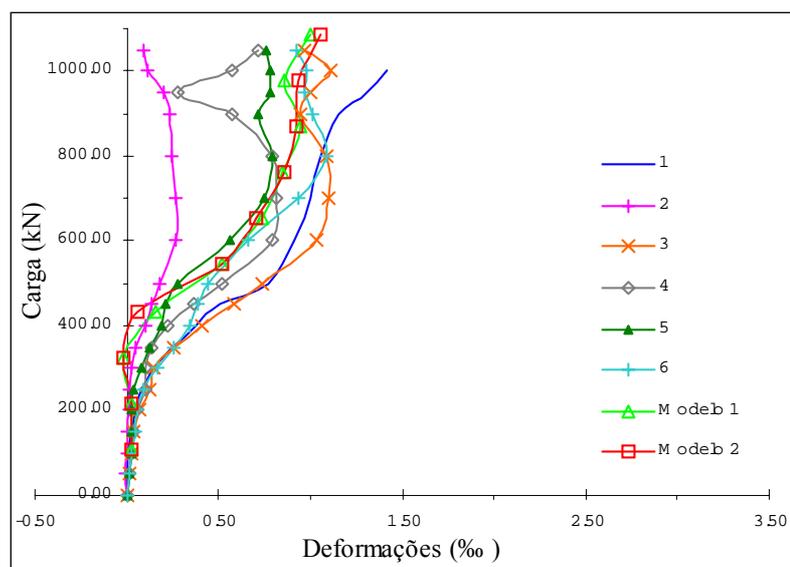


FIGURA 6.65 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 1, 2, 3, 4, 5, 6.

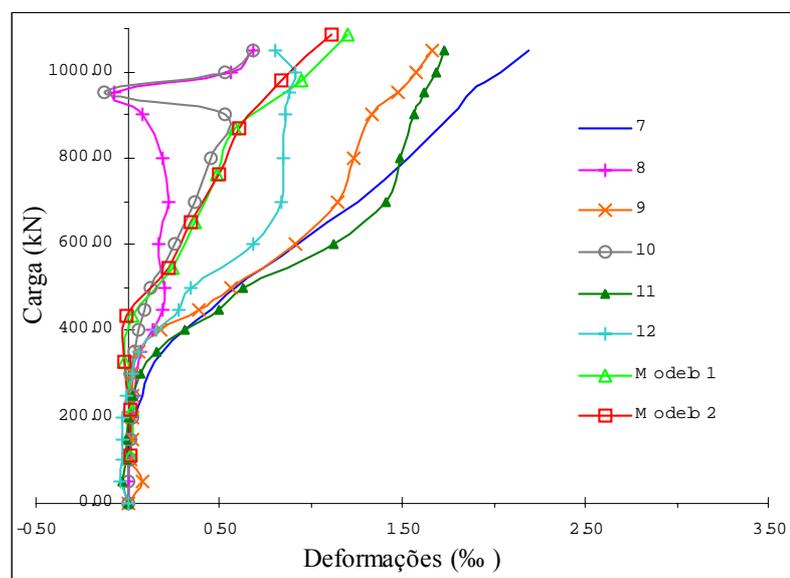


FIGURA 6.66 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 7, 8, 9, 10, 11, 12.

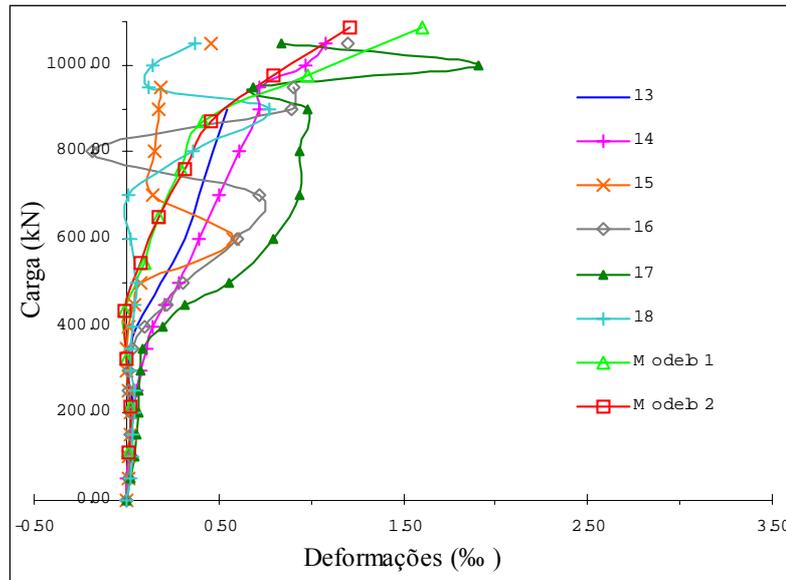


FIGURA 6.67 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 13, 14, 15, 16, 17, 18.

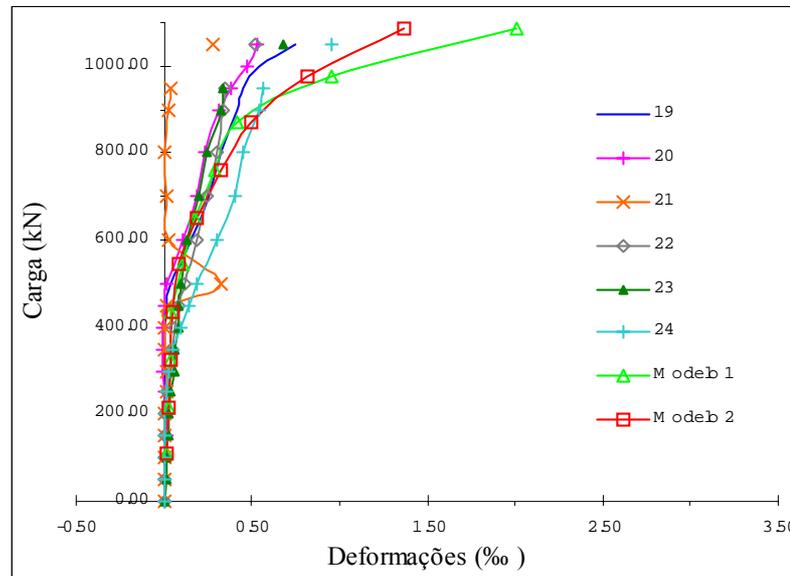


FIGURA 6.68 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 19, 20, 21, 22, 23, 24.

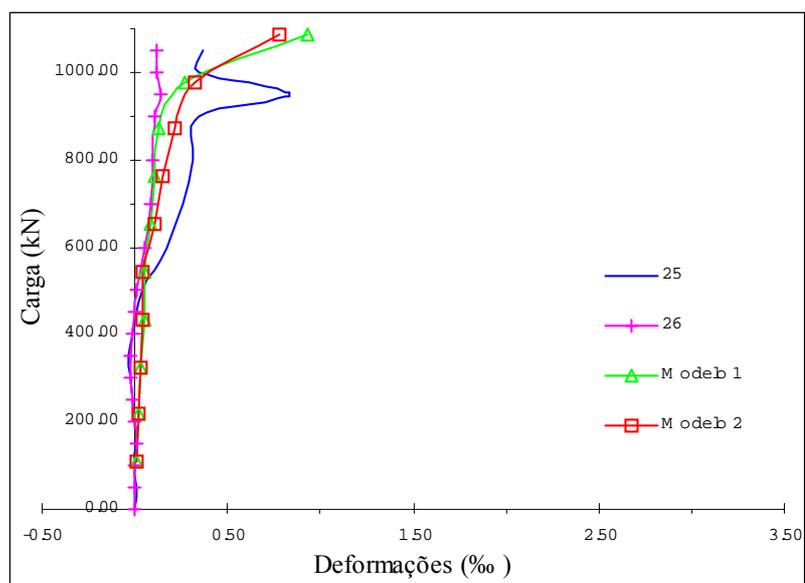


FIGURA 6.69 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 25, 26.

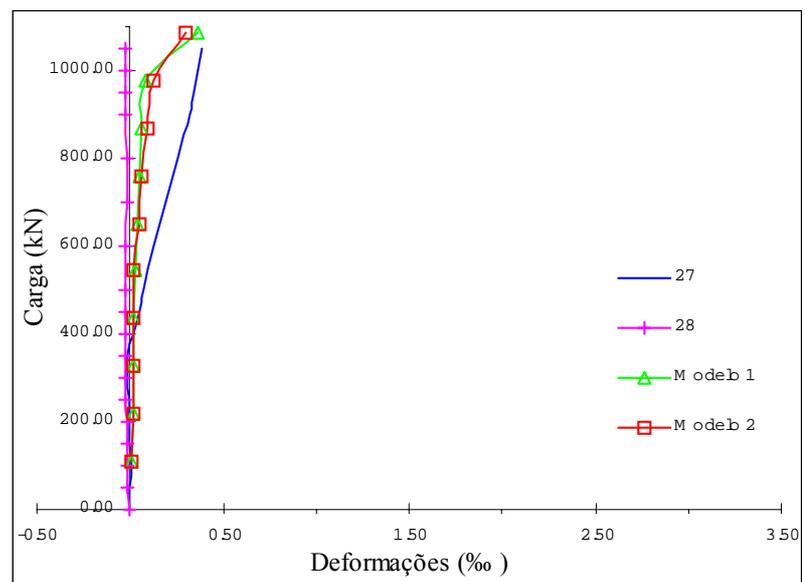


FIGURA 6.70 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 27, 28.

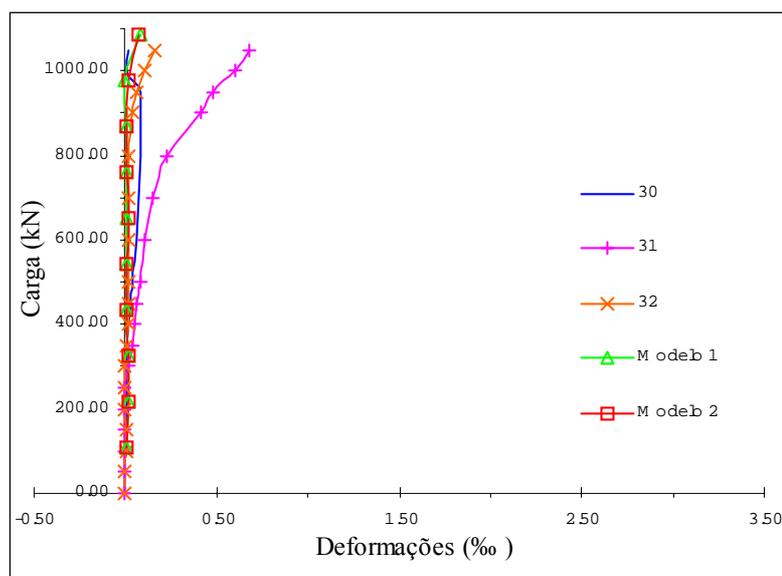


FIGURA 6.71 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 30, 31, 32.

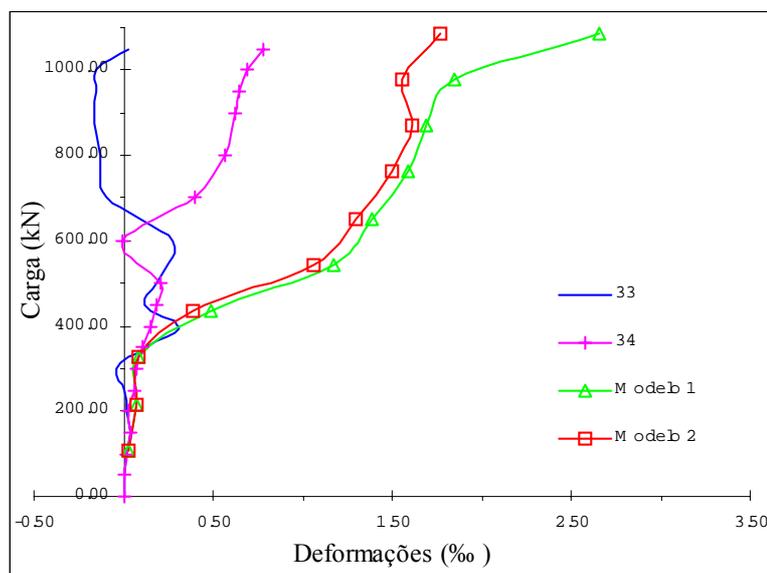


FIGURA 6.72 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 33, 34.

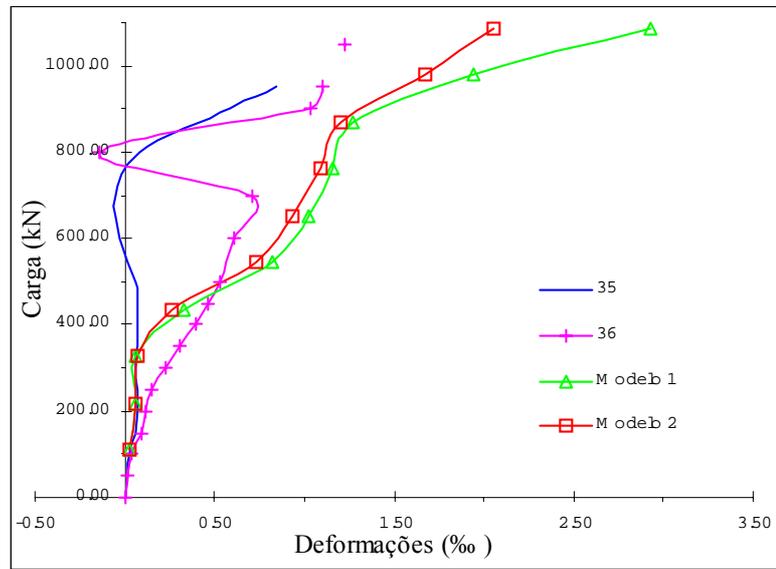


FIGURA 6.73 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 35, 36.

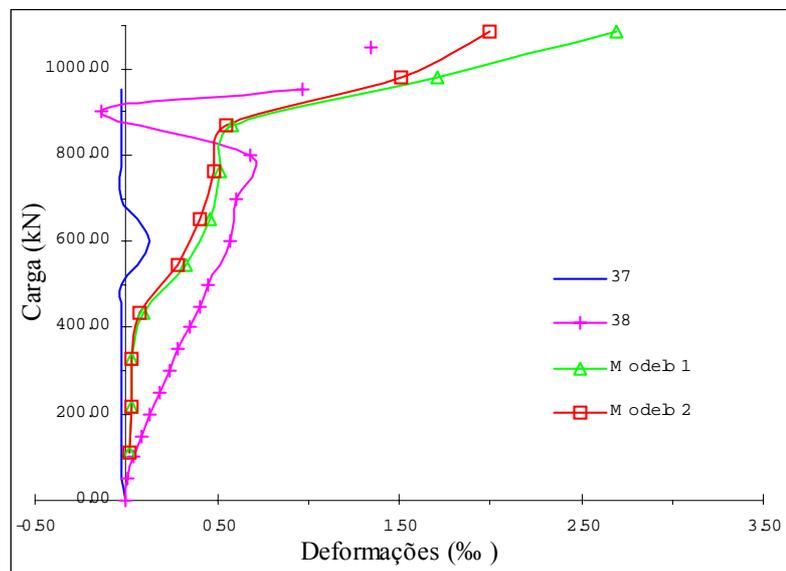


FIGURA 6.74 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 37, 38.

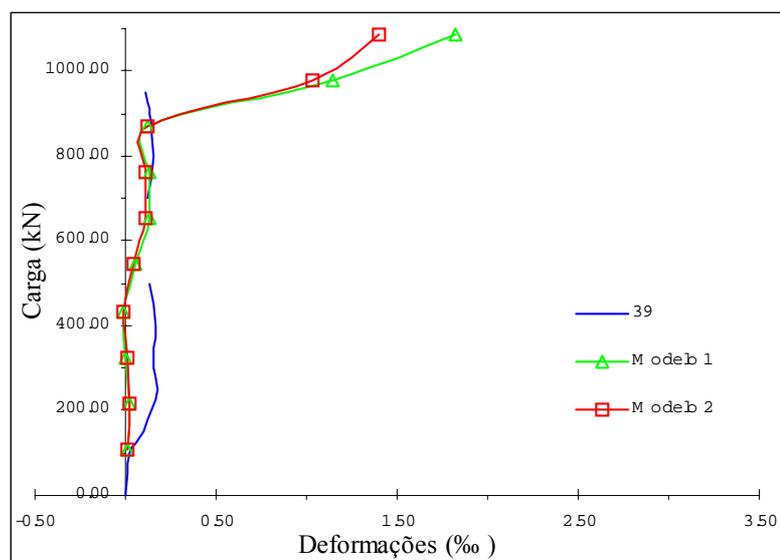


FIGURA 6.75 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 39.

6.2.2.5 Laje com 7 camadas de estribos inclinados distribuídos de forma radial de diâmetro 5,0mm

Esta situação é semelhante àquela descrita no item 6.2.2.4, porém altera-se o diâmetro das barras de armadura de cisalhamento para 5,0mm.

A laje é submetida a uma carga de 975kN, valor correspondente à carga de ruptura encontrada nos ensaios experimentais realizados por Trautwein (2001), aplicada em 10 incrementos de 97,5kN.

A tabela 6.13 apresenta as propriedades para o concreto e as propriedades do aço correspondem àquelas apresentadas na tabela 6.9.

TABELA 6.13 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	21,24 GPa
$f_c =$	40,6 MPa
$f_t =$	4,0 MPa

A comparação dos resultados, numéricos e experimentais, das deflexões no centro da laje está na Fig. 6.76. Observa-se que a leitura no ensaio foi realizada somente até a carga de 900kN e, até esse nível de carregamento, o programa numérico apresenta bom desempenho.

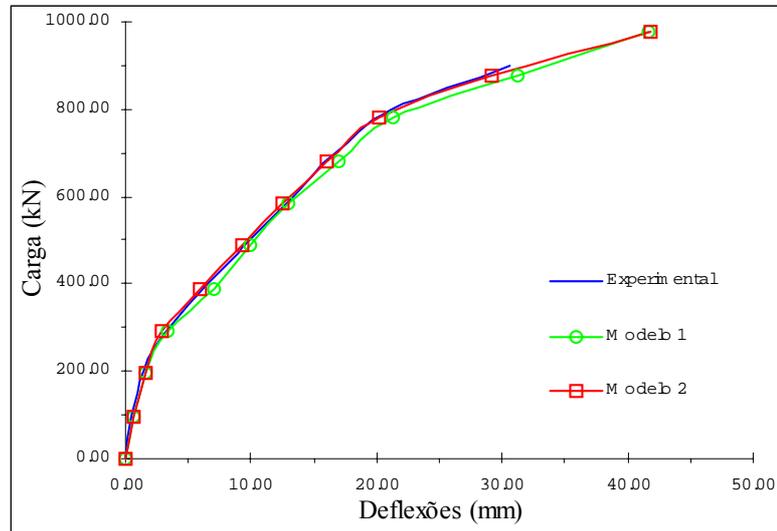


FIGURA 6.76 – Deflexões no centro da laje.

No presente exemplo, a cada ponto da armadura de cisalhamento monitorado experimentalmente nos ensaios realizados por Trautwein (2001), colocam-se dois extensômetros para medir as deformações, fixados à meia altura da perna do estribo, e localizados conforme a Fig. 6.77.

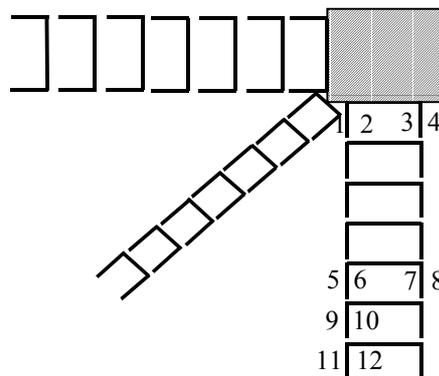


FIGURA 6.77 – Posicionamento dos extensômetros.

As deformações na armadura de cisalhamento medidas nos extensômetros e obtidas no programa numérico podem ser observadas nas Fig. 6.78, 6.79, 6.80 e 6.81. A concordância entre os resultados comprova a eficiência dos modelos implementados.

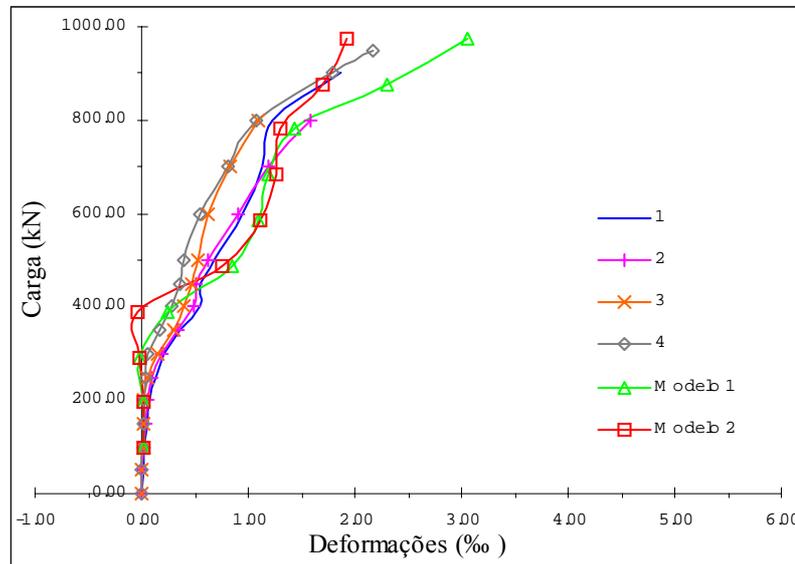


FIGURA 6.78 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 1, 2, 3, 4.

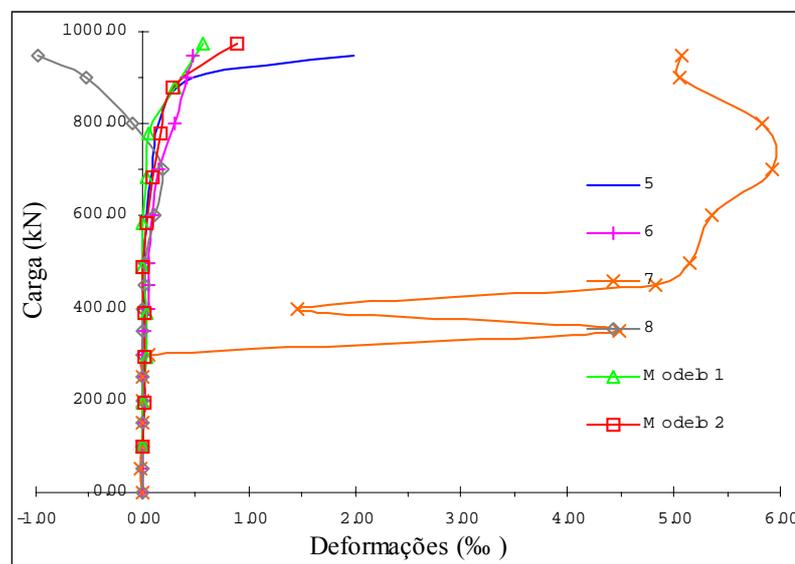


FIGURA 6.79 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 5, 6, 7, 8.

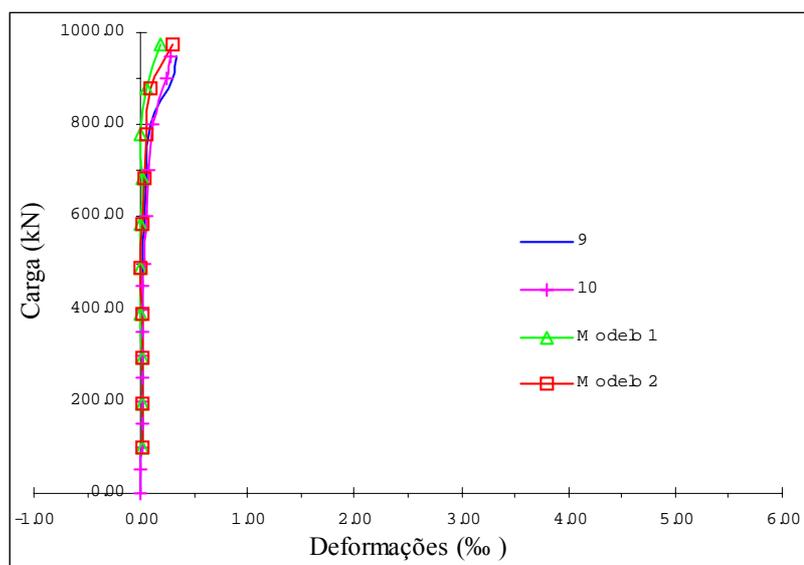


FIGURA 6.80 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 9, 10.

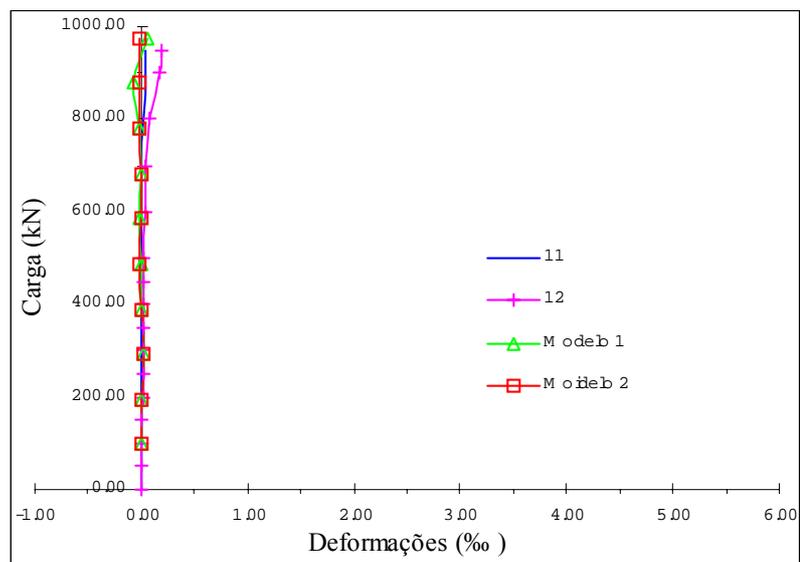


FIGURA 6.81 – Deformações na armadura de cisalhamento na posição dos extensômetros 11, 12.

As tensões na armadura de flexão e de cisalhamento da laje podem ser visualizadas na Fig. 6.82. São apresentados os resultados para o incremento 8. Para esse nível de carga, observa-se que algumas barras de armadura começam a plastificar.

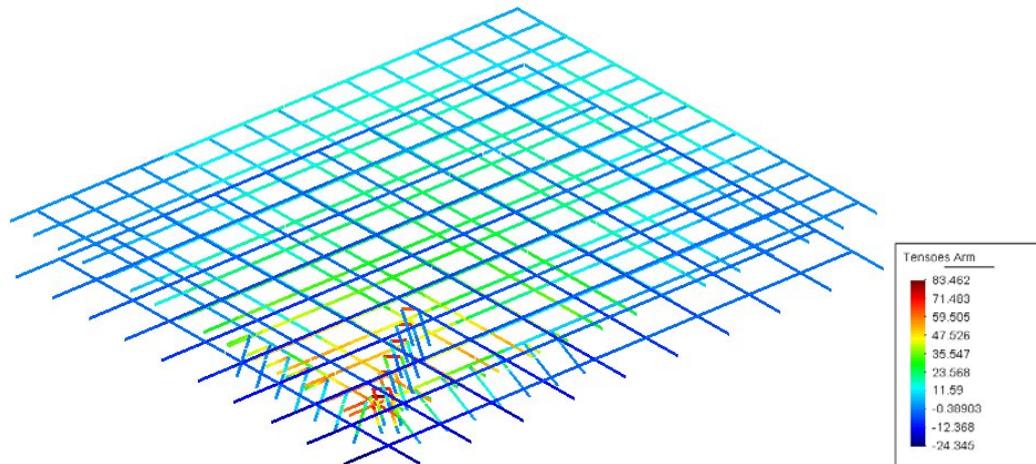


FIGURA 6.82 –Tensões na armadura de flexão e de cisalhamento (em kN/cm²) para o incremento de carga 8 (Modelo 2).

6.2.2.6 Laje com 9 camadas de estribos inclinados distribuídos de forma radial de diâmetro 8,0mm

Este exemplo é similar àquele descrito no item 6.2.2.4, alterando-se porém, o número de camadas de estribos, que passa a ser nove.

A laje é submetida a uma carga de 1160kN, valor correspondente à carga de ruptura encontrada nos ensaios experimentais realizados por Trautwein (2001), aplicada em 10 incrementos de 116,0kN.

A tabela 6.14 apresenta as propriedades para o concreto, sendo que as propriedades do aço correspondem àquelas apresentadas na tabela 6.9.

TABELA 6.14 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	21,96 GPa
$f_c =$	42,6 MPa
$f_t =$	4,2 MPa

Segundo Trautwein (2001), a laje com 9 camadas de estribos inclinados distribuídos de forma radial e com diâmetro de 8,0mm não foi instrumentada para controle das deformações. Apenas as leituras das deflexões foram realizadas. De posse desses dados, comparam-se através da Fig. 6.83 os resultados numéricos e experimentais das deflexões no centro da laje. Observa-se que a leitura nos ensaios foi realizada somente até a carga de 1000kN e, até esse nível de carregamento, os modelos implementados apresentam bons resultados.

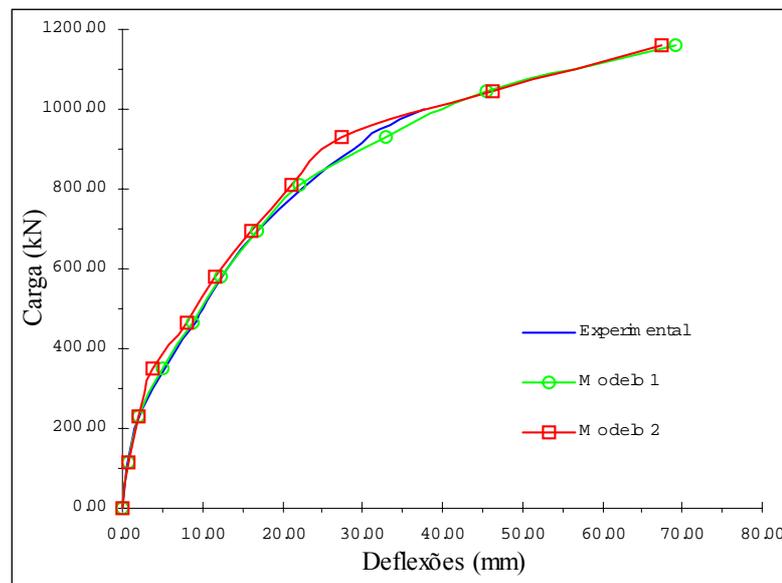


FIGURA 6.83 – Deflexões no centro da laje.

6.2.3 Laje ensaiada por Fusco (1988)

A laje analisada neste item é uma laje ensaiada por Fusco (1988). Para a análise experimental, utilizam-se os cantos chanfrados para facilitar a fabricação do pórtico de reação e para simplificar as operações de instalação da laje neste pórtico. Para a análise numérica, a laje é considerada quadrada.

6.2.3.1 Laje sem armadura de cisalhamento

Neste exemplo, a laje sujeita a uma carga centrada (Fig. 6.2) é analisada utilizando-se uma malha de 5x5x4 elementos, conforme Fig. 6.3. Em função da simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da estrutura é modelado. Considera-se a laje simplesmente apoiada.

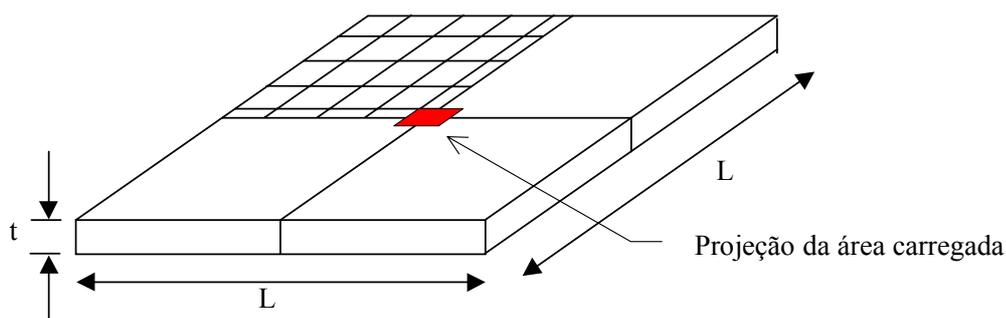


FIGURA 6.84 – Geometria da laje analisada.

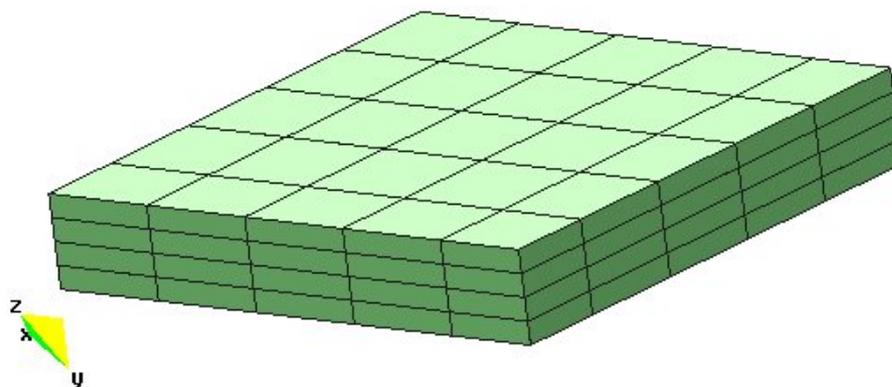


FIGURA 6.85 – Malha adotada para $\frac{1}{4}$ da laje.

A laje de lado $L = 130\text{cm}$ e espessura $t = 10\text{cm}$ apresenta uma área central de $20 \times 20\text{cm}$ carregada com uma força de 150kN . Para esse nível de carregamento observa-se experimentalmente o escoamento de barras de armadura. A carga é aplicada de forma incremental, atingindo-se o valor total ao final de 10 incrementos.

Conforme dados do ensaio experimental realizado por Fusco (1988), utiliza-se uma armadura de flexão superior da laje constituída por barras de diâmetro de 10mm em cada direção, espaçadas de 10cm . A armadura em uma das direções, referenciada por armadura externa, apresenta uma distância de 2cm entre o seu eixo e a superfície tracionada da laje, enquanto a armadura interna, na outra direção, apresenta 3cm entre os mesmos pontos citados.

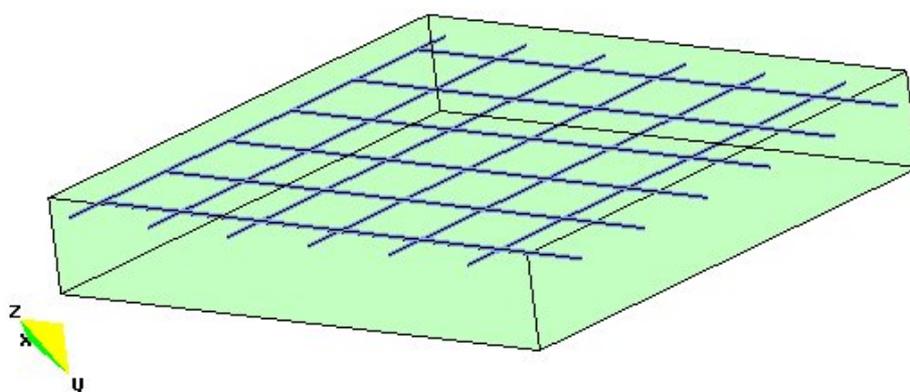


FIGURA 6.86 – Visualização da armadura.

Adotam-se como características dos materiais, os valores encontrados em ensaios experimentais realizados por Fusco (1988), e apresentados nas tabelas 6.15 e 6.16, que consideram as propriedades para o concreto e o aço.

TABELA 6.15 – Propriedades do concreto

Propriedades do concreto	
$E_c =$	$36,50 \text{ GPa}$
$f_c =$	$28,7 \text{ MPa}$
$f_t =$	$2,3 \text{ MPa}$

TABELA 6.16 –Propriedades do aço.

ϕ (mm)	f_y (MPa)	E_s (GPa)
10,0	540	210

As Fig. 6.87 e 6.88 apresentam as tensões nas armaduras externa e interna, no centro da laje segundo os modelos implementados e o ensaio experimental. Em cada figura aparecem duas curvas experimentais, que correspondem a barras em posições simétricas.

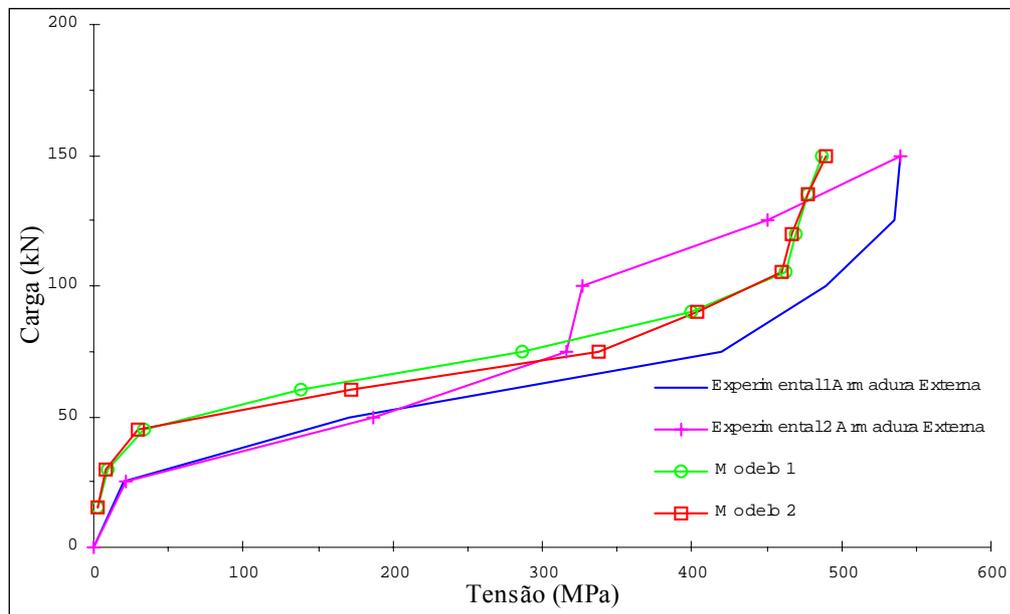


FIGURA 6.87 – Tensão na armadura externa.

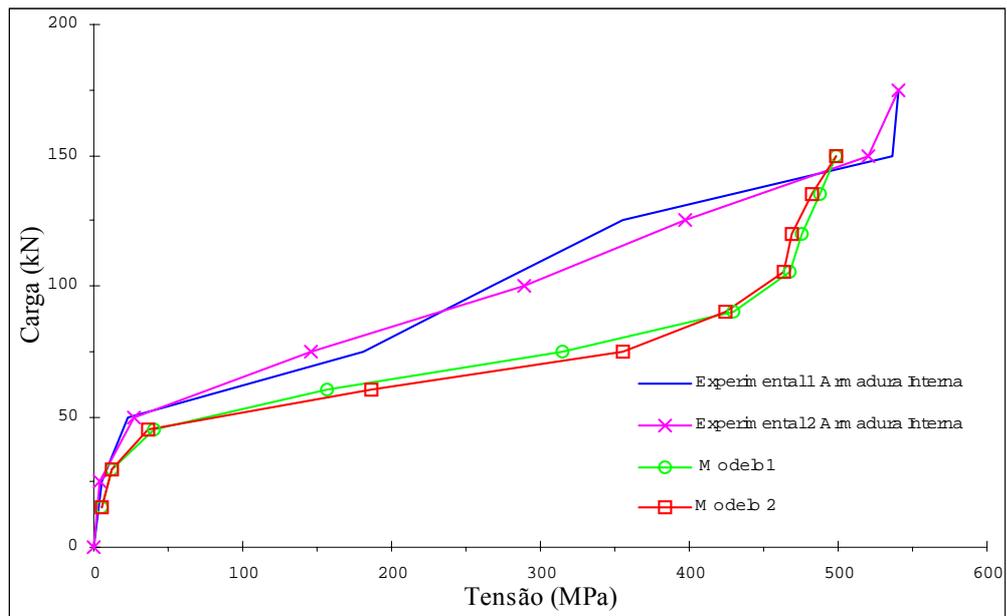


FIGURA 6.88 – Tensão na armadura interna.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento de trabalhos com a finalidade de modelar estruturas em concreto armado, empregando o Método dos Elementos Finitos, tem sido tema constante de pesquisas recentes. Seguindo esta tendência de pesquisa, o presente trabalho teve como objetivo principal a modelagem de situações de punção em lajes tipo cogumelo de concreto armado.

Como ponto de partida para o desenvolvimento do programa computacional dessa dissertação foi adotado o programa para análise não-linear dinâmica e estática de estruturas tridimensionais em concreto armado, apresentado por Hinton (1988), e modificado por Claire (1994).

Neste trabalho, foram propostos dois modelos de fissuração para a consideração da colaboração do concreto entre fissuras e para a representação da capacidade de transferência de corte do concreto fissurado.

Durante a análise numérica realizada, observou-se que ambos os modelos sugeridos fornecem resultados bastante precisos, apresentando uma ótima aproximação com os ensaios experimentais. Os deslocamentos no centro da laje foram adequadamente representados, enquanto os valores numéricos para as deformações nos estribos apresentaram uma certa divergência em relação aos valores experimentais. Isto era de se esperar, pois os valores numéricos expressam uma deformação média ao longo de certo comprimento do estribo. Os valores experimentais, por sua vez, correspondem a deformações medidas em um único ponto da armadura. Desta forma, existe uma variação significativa dos resultados, dependendo da posição do ponto de leitura, se coincidente com uma fissura ou se intermediário entre fissuras. Porém, isso não impede que se possa afirmar que o programa computacional desenvolvido pode ser empregado para generalizar resultados experimentais em lajes cogumelo com variação na resistência do concreto, na bitola das barras de armadura, no espaçamento entre as barras e no número de camadas de armadura de cisalhamento do tipo vertical retangular e inclinada.

Assim, é possível afirmar que o programa computacional permite uma devida avaliação da deformabilidade das lajes e dos esforços de cisalhamento, e que, portanto, os objetivos do trabalho foram alcançados.

Como sugestões para continuação da pesquisa, podem-se citar os seguintes itens:

- desenvolver um modelo de fissuração mais preciso para simular a transferência de esforços através das fissuras, levando em consideração granulometria do concreto, sua resistência característica, diâmetro das barras de armadura, taxa de armadura, inclinação das fissuras em relação às barras de armadura, espaçamento entre as barras e número de camadas de estribos;
- implementar a determinação numérica da carga de ruptura da laje;
- empregar o modelo computacional para estudar a confiabilidade de formulações recomendadas em normas;
- analisar situações de punção em lajes submetidas a cargas de longa duração.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **NBR 6118 (NB1/80) – Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado**. Rio de Janeiro, 1980.
2. AURICH, M. **Modelo da ligação entre concreto e armadura na análise de estruturas de concreto pelo método dos elementos finitos**. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 2001. 132p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.
3. BATHE K. J. **Finite element procedures**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1996. 1037p.
4. BAZANT, Z. P., W.E, S.T. Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell chain. *Matériaux et Constructions*, v.7, n.37, p.45-60, 1974.
5. BEUTEL, R. **Brief review of other numerical studies**. Bulletin 12 CEB – *fib*, p. 105-107, 1998.
6. CERVENKA, V. **Constitutive Model for Cracked Reinforced Concrete**. Journal of American Concrete Institute, v. 82, n. 6, p. 877-882, 1985.
7. CLAURE, J. D. **Análise tridimensional elasto-viscoplástica de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1994. 145p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.
8. COELHO A. E. G. **Puncionamento em lajes cogumelo de concreto armado com resistência de 30 MPa e armadura de cisalhamento vertical e inclinada**. Brasília: Departamento de Engenharia Civil/UNB, 1999. 139p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.
9. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **Concrete under multiaxial states of stress constitutive equations for practical design**. Paris, 1983. (Bulletin d'Information, 156)
10. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **Application of the finite element method to two-dimensional reinforced concrete structures**. Paris, 1983. (Bulletin d'Information, 159)
11. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990**. Lausanne, 1993. (Bulletin d'Information, 213/214)
12. ELWI, A. E. & HRUDEY, T. M. **Finite element model for curved embedded reinforcement**. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, v.115, n.4, p. 740-745, Apr. 1989.

13. FUSCO, P. B. **Investigação sobre cisalhamento em lajes de concreto armado.** Boletim EPUSP, v. 1, Fascículo IA, 1988.
14. HALLGREN, M. **Studies with the FE-Program ABAQUS.** Bulletin 12 CEB – *fib*, p. 104-105, 1996.
15. HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells.** Swansea: Pineridge Press, 1988. 550p.
16. HINTON, E; CAMPBELL, J. S. **Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 8, p. 461-480, 1974.
17. JANG, J. & MIRZA, A. **Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs by a discrete finite element approach.** Computers and Structures, Vol.65, n.4, p. 585-592, 1997.
18. MENÉTREY, Ph. **Axisymmetric simulation of punching failure.** Bulletin 12 CEB – *fib*, p. 86-94, 1994.
19. NGO, D. & SCORDELIS, A. C. **Finite element analysis of reinforced concrete beams.** Journal of the American Institute, v.64, n.3, p. 152-163, Mar. 1967.
20. OÑATE, E. **Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos – Análisis estático lineal.** Barcelona, Espanha. Artes Gráficas Torres, 1995.838p.
21. OTTOSEN, N. S. **A failure criterion for concrete.** Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, v. 103, n. 4, p. 527-535, Aug. 1977.
22. OŽBOLT, J. E VOCKE, H. **Thee-dimensional Numerical Analysis of Punching Failure.** Bulletin 12 CEB – *fib*, p. 71-78, 1999.
23. OWEN, D. R. J. & HINTON, E. **Finite elements in plasticity – Theory and Practice.** Swansea: Pineridge Press, 1980. 594p.
24. POLAK, M. A. **Shell Finite Elements For Punching Analysis Of Reinforced Concrete Slabs.** Bulletin 12 CEB – *fib*, p. 95-102, 1998.
25. PRATES JÚNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 1992. 130 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
26. PUNCHING OF STRUCTURAL CONCRETE SLABS – CEB-*fib*, **Technical report.** Boletim 12, April 2001.

27. RIBÓ R., PASENAU M. A. R., ESCOLANO E., “**GiD Reference Manual – Pre and post processing system for F.E.M. calculations**”. Web-site: <http://gid.cimne.upc.es>, Centre Internacional de Mètodes Numèrics en la Enginyria – CIMNE, Barcelona, 1999.
28. STALLER, M. **Numerical analysis with the finite element program MARC**. Bulletin 12 CEB – *fib*, p. 103-104, 2000.
29. TRAUTWEIN L.M. **Punção em lajes cogumelo de concreto armado com armadura de cisalhamento tipo “stud” interno e tipo estribo inclinado**. Brasília: Departamento de Engenharia Civil e Ambiental/UnB, 2001. 168p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.
30. ZIENKIEWICZ, O. C., PHILLIPS, D. V., OWEN, D. J. R. **Finite element analysis of some concrete non-linearities: theory and examples**. Seminar on concrete structures subjected to triaxial stresses. Papers. Bergamo: IABSE, 1974. p. 1-21

APÊNDICE A

O programa numérico apresentado no presente trabalho foi desenvolvido na linguagem FORTRAN. Para o processamento dos exemplos, adotou-se a entrada de dados através de um arquivo de texto, no qual as informações devem estar devidamente ordenadas.

A princípio, esse arquivo pode ser criado manualmente pelo usuário, sem a utilização de um programa para pré-processamento. Porém, a facilidade e agilidade proporcionadas por esse tipo de ferramenta computacional foram itens decisivos para o emprego do programa de pré e pós-processamento GiD[®]. No pré-processamento, o programa GiD[®] permite que se defina graficamente a geometria da peça e a malha empregada. Da mesma forma, aplicam-se as condições de contorno e o carregamento. Além disso, há a vantagem de se personalizar o programa através de janelas com dados específicos a serem preenchidos.

Uma vez criada a geometria da peça, os dados podem ser alterados e redefinidos a qualquer momento.

Ao final, o programa de pré-processamento fornece o arquivo de texto com extensão .DAT ordenado e personalizado para posterior leitura no FORTRAN, contendo as coordenadas dos nós, as conectividades e os demais dados especificados nas janelas. Os únicos dados que não são listados automaticamente pelo programa desenvolvido na interface do GiD[®] são as coordenadas e conectividades da armadura. Considerou-se mais prático a inserção destes dados manualmente. Entretanto, desenvolveram-se arquivos de saída de dados dentro do programa numérico (FORTRAN), para posterior visualização das armaduras consideradas e conferência das posições no ambiente de pós-processamento do GiD[®].

É conveniente, portanto, apresentar no presente anexo um exemplo com a entrada de dados realizada através da implementação no programa GiD[®]. A visualização através de telas facilitará a explanação.

A.1 CARACTERÍSTICAS DO EXEMPLO

Trata-se de uma laje carregada em seu centro, conforme mostrado na Fig. A.1. Apenas $\frac{1}{4}$ da laje é discretizado.

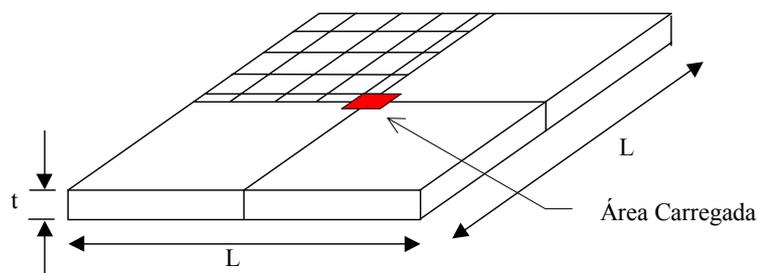


FIGURA A.1 – Exemplo de laje carregada em seu centro.

A.2 GEOMETRIA DA LAJE

A entrada de dados gráfica da geometria de uma laje deve ser realizada seguindo alguns passos, de modo que as conectividades sejam fornecidas de acordo com a leitura no programa numérico. Em caso contrário, há incompatibilidade de dados.

O lançamento da geometria é realizado através dos valores das coordenadas dos vértices da peça. Salienta-se que as coordenadas devem ser lançadas de forma que a espessura da laje fique na direção do eixo y.

Para esse exemplo, é interessante delimitar a área de aplicação da carga (centro da laje). Por isso, utiliza-se uma malha mais refinada neste ponto. A forma de lançamento da geometria do presente exemplo se dá em função disso.

Inicialmente, seleciona-se o comando *Utilites - Graphical - Coordinates Window*. Na janela que surge (Fig. A.2), deve-se informar as coordenadas dos nós que definem a geometria da laje.

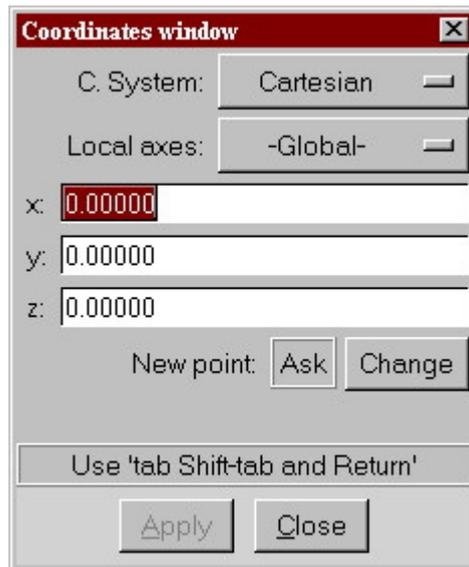


FIGURA A.2 – Informação das coordenadas.

Mantém-se a janela ativa e seleciona-se o comando *line* . Pode-se aceitar que a primeira coordenada seja $P(0,0,0)$, clicando em *Apply*. Para o próximo ponto, informam-se as coordenadas e clica-se em *Apply* novamente. Esses passos são repetidos até que se obtenham os retângulos ilustrados na Fig A.3.

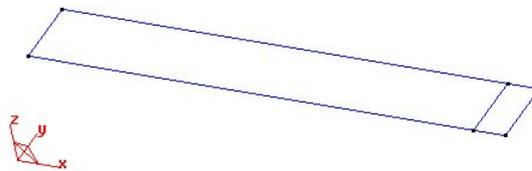


FIGURA A.3 – Retângulos iniciais para formar a geometria

Acessando-se o comando *surface* através do ícone:  e selecionando-se os quatro lados de cada um dos retângulos, formam-se duas superfícies (Fig. A.4).

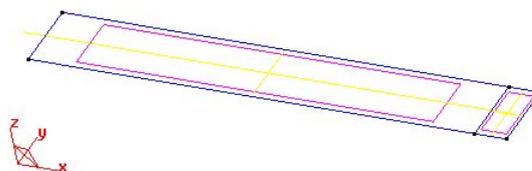


FIGURA A.4 – Área formada com os retângulos iniciais.

A partir das áreas obtidas, é possível transladá-las na direção z, copiando as superfícies. Para isso, utiliza-se o comando *Utilities - Copy* (Fig. A.5).

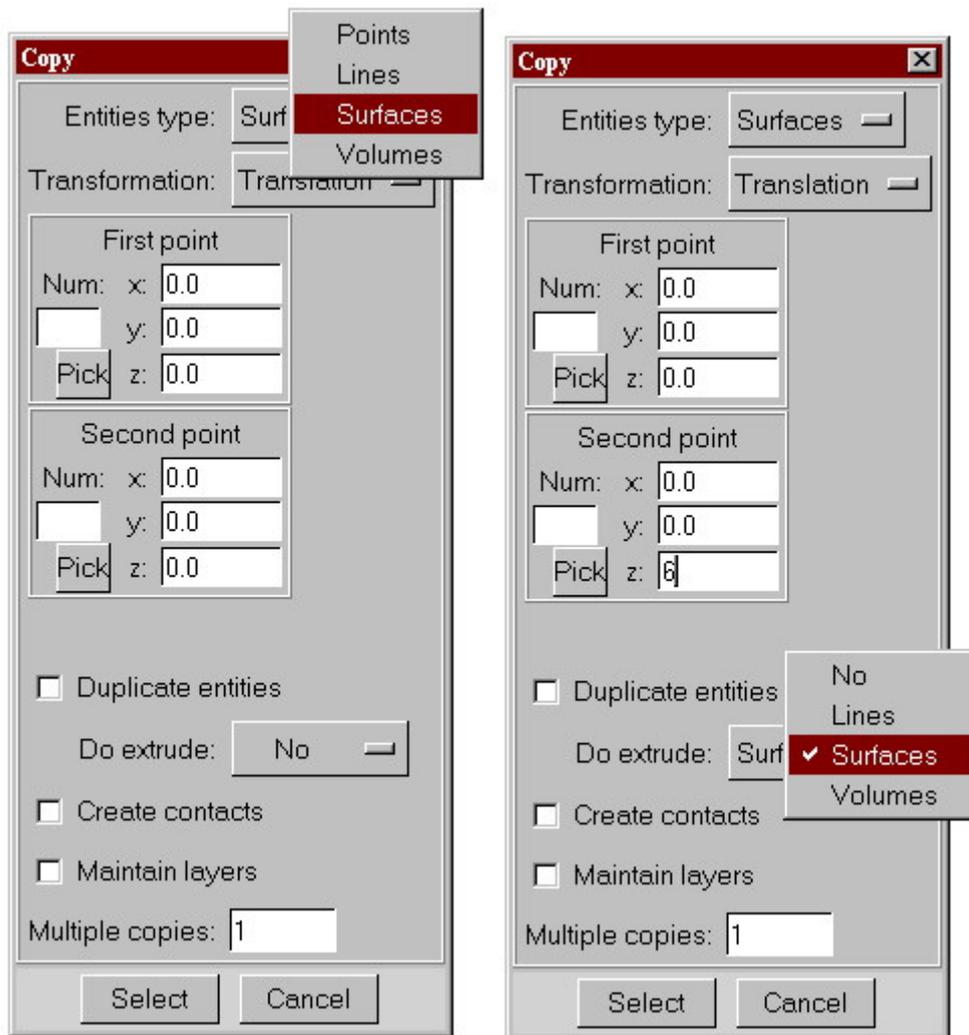


FIGURA A.5 – Copiando superfícies.

Na janela que surge, opta-se por *Extrude Surfaces*, para que todas as faces sejam copiadas.

Finaliza-se a cópia clicando em *Select* e selecionado as duas áreas.

Assim, o desenho passa a ter a forma indicado na Fig. A.6.

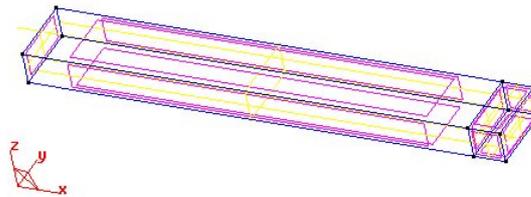


FIGURA A.6 – Montagem dos volumes.

Para gerar as demais áreas, procede-se da mesma maneira e completa-se a geometria (Fig. A.7).

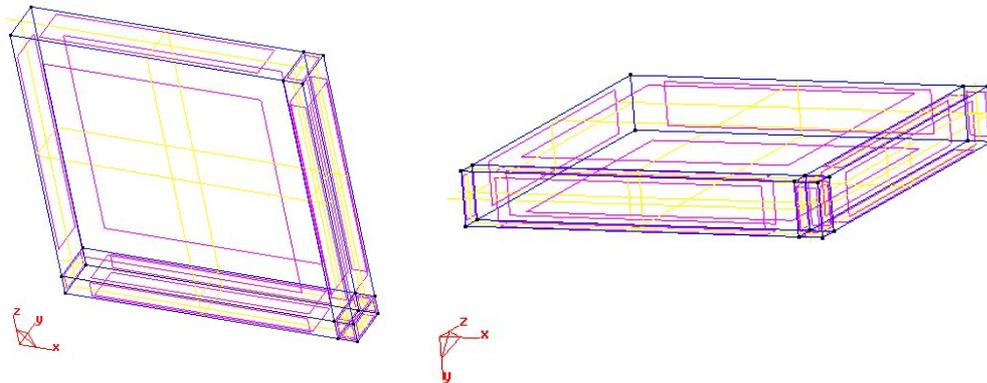


FIGURA A.7– Duas vistas da área finalizada.

Por fim, seleciona-se o comando *Geometry - Create - Volum - By Contour* e, para cada volume a ser criado, indicam-se os seis lados que o compõem. Repetindo-se o comando 4 vezes, formam-se os 4 volumes indicados na Fig. A.8.

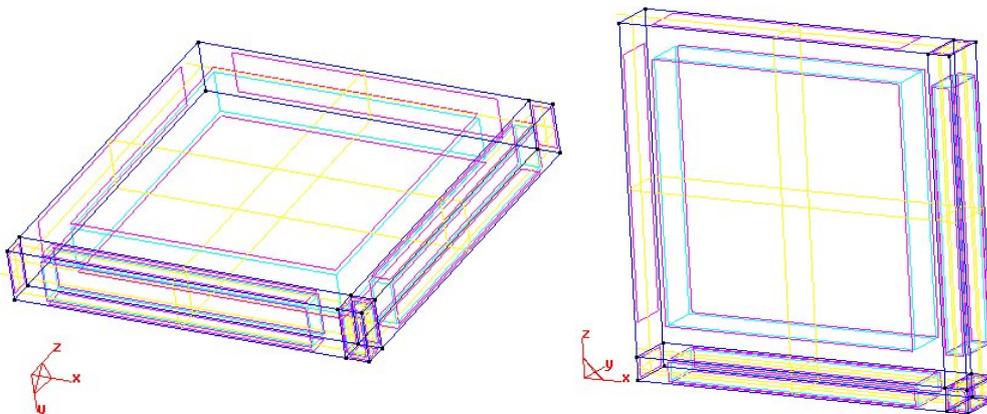


FIGURA A.8 – Duas vistas dos volumes finalizados.

A.3 MALHA DA LAJE

Optou-se por criar uma malha 5x5x3, sendo que o último valor indica o número de elementos na espessura. Portanto, a malha adotada é composta por 75 elementos. Para indicar que as funções de forma são quadráticas (hexaedro de 20 nós), utiliza-se o comando *Meshing - Quadratic elements - Quadratic*. Da mesma forma, *Meshing - Element type - Hexahedra* indica o tipo de elemento. Selecionado-se *Meshing - Structured - Volumes* e clicando em todos os volumes, indica-se que utiliza-se malha estruturada. Aparece a tela mostrada na Fig.A.9.

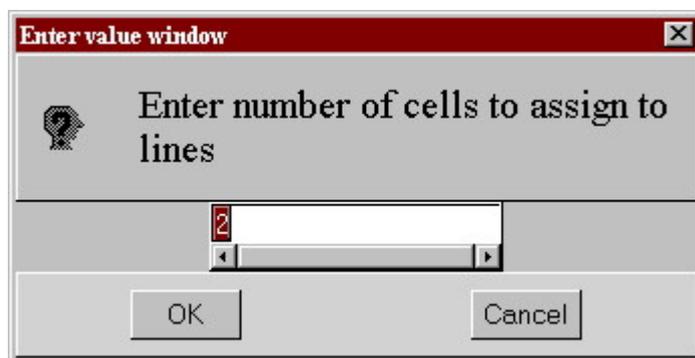


FIGURA A.9 – Entrada do número de elementos em cada direção.

Através das linhas da geometria, indica-se o número de elementos adotado em cada direção. Assim, para esse exemplo, digita-se 3 e seleciona-se uma linha na direção y (direção da espessura). Da mesma forma, digita-se 1 para criar uma fileira de elementos na linha da área carregada e digita-se 4 para criar 4 elementos na região restante. O comando *Meshing - Generate* gera a malha solicitada. Aparece a janela ilustrada na Fig. A.10, indicando o número total de elementos e o número total de nós.

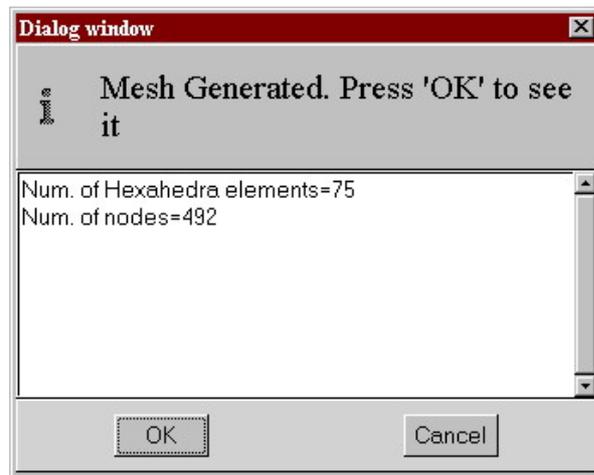


FIGURA A.10 – Número de elementos gerados.

Enfim, o resultado final da malha é apresentado na Fig. A.11.

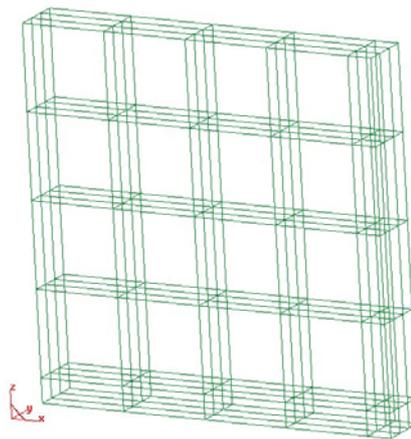


FIGURA A.11 – Malha adotada.

A.4 DEFINIÇÃO DOS DADOS ESPECÍFICOS

Todas as informações programadas pelo usuário no ambiente do GiD[®], com o objetivo de personalizar a entrada de dados, são implementadas através de 3 arquivos de mesmo nome (Darc3Laje) com extensões .PRB, .CND e .BAS. O arquivo de extensão .PRB é utilizado para criar as janelas com os dados específicos (Fig. A.12). A segunda extensão refere-se a um arquivo para organizar os comandos de aplicação de carga e condições de contorno. O último arquivo, de extensão .BAS, é empregado para

organizar a saída das informações (arquivo .DAT) na seqüência de leitura do programa numérico.

Esses arquivos devem estar reunidos em uma pasta de nome ‘Darc3Laje.gid’ e esta pasta deve estar localizada no diretório GiDWin/problemtypes.

Para se ter acesso às janelas com as devidas informações a serem preenchidas, utiliza-se o comando *Data - Problem Type - Darc3Laje*.

Inicia-se a entrada de dados com o preenchimento de dados específicos através da opção *Data - Problem Data*. Alguns dados apresentam um valor “default”, definido na implementação (ver Fig. A.12a e Fig. A.12b).

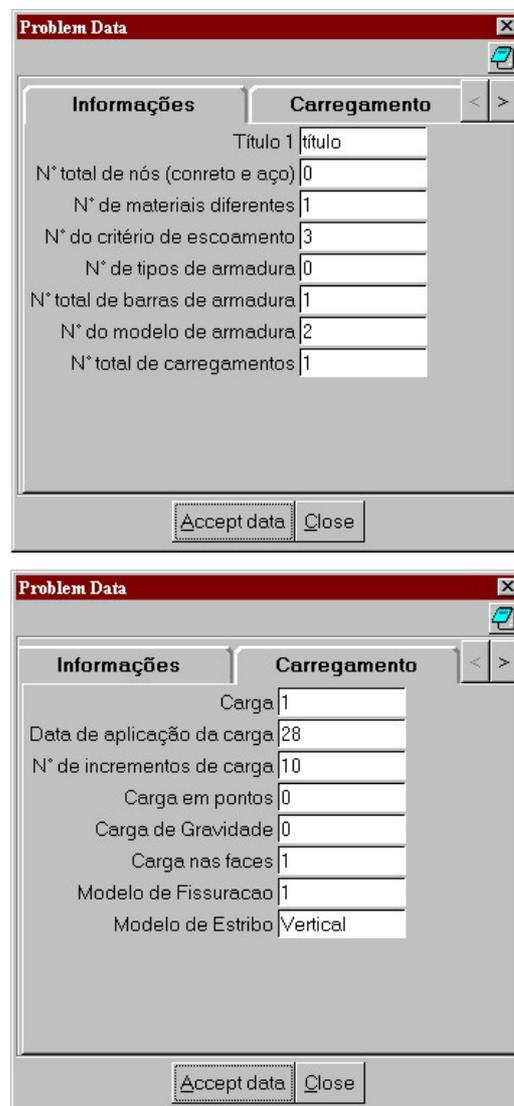


FIGURA A.12a – Janelas de entrada de dados criadas através do arquivo .PRB.

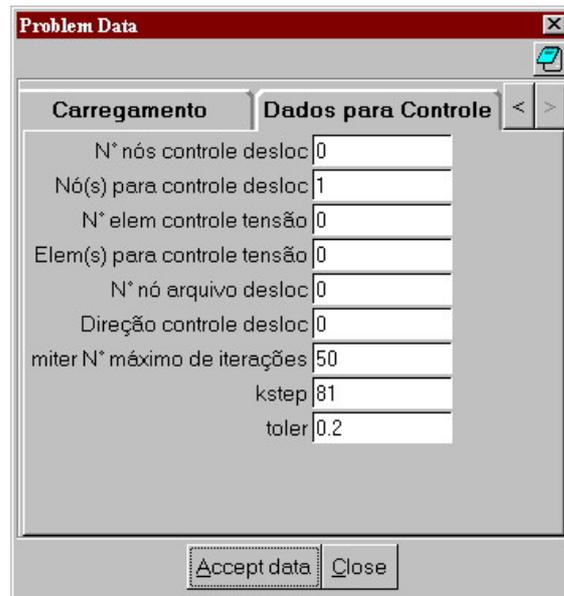


FIGURA A.12b – Janelas de entrada de dados criadas através do arquivo .PRB.

Da mesma forma, selecionando-se *Data - Interval Data*, definem-se, para cada conjunto de propriedades, as características dos materiais. Para um novo conjunto clica-se no botão *New* (Fig. A.13).

Property Name	Value
N° do Conjunto de Propriedades	1
Young Modulus	1.0
Poisson Ratio	0.20
Compression Flow Stress	3.37
Cracking Stress	25
Crushing Strain	0.0035
Fracture Energy	0.6E-03
Factor for shear reduction	0.0
ALFA (Tipo de cimento)	0.0
Material Density	0.25E-05
Factor for end of elasticity	1.0
A0 for fluidity parameter	0.0
A1 for fluidity parameter	0.0
ALFA-C for strain-softening	10
BETA-0 for monitoring surface	1.84
BETA-1 for monitoring surface	1.09
Bar diameter	0.0
Tipo de aço (A=1 B=2)	0.0
Taxa de endurecimento do aço	0.0
Largura do reforço	0.0
Espessura do reforço	0.0
Diagr Tensão/Aderência/Deslizam	0.0

FIGURA A.13 – Janela personalizada para os dados do programa.

A.5 DEFINIÇÃO DO CARREGAMENTO E CONDIÇÕES DE CONTORNO

O programa numérico permite a aplicação de cargas nodais, cargas de volume e carregamento na face de um elemento, porém, no programa GiD[®] foi implementado apenas a possibilidade de aplicação de cargas nodais. Para a aplicação de cargas na face ou de gravidade, a visualização gráfica da numeração dos nós e dos elementos pode facilitar o processo manual.

No caso de cargas nodais, utiliza-se o comando *Data - Conditions – Cargas*. Na tela surge a janela mostrada na Fig. A.14.



FIGURA A.14 – Especificação das cargas concentradas nos nós.

Fornecem-se os dados do carregamento e clica-se em *Assign* para seleccionar os nós carregados.

De maneira semelhante, aplicam-se as condições de contorno utilizando-se *Data -Conditions - Condições de Contorno* (Fig. A.15).

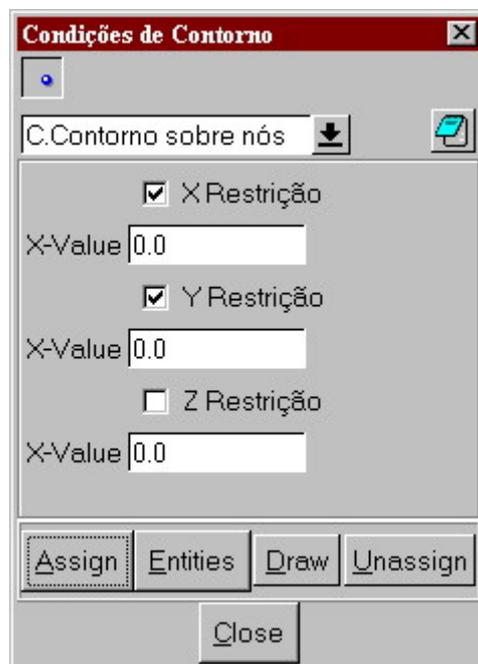


FIGURA A.15 –Aplicações da condições de contorno.

A.6 GERANDO O ARQUIVO .DAT

Finalizada a entrada gráfica de dados, gera-se o arquivo de texto com extensão .DAT, com todas as informações preenchidas no programa para pré-processamento (GiD®). Cabe ressaltar que, posteriormente, deve-se completar alguns dados manualmente, para que o exemplo possa ser processado no programa numérico.

Acessando *Calculate – calculate* gera-se o arquivo .DAT, que será gravado na pasta do exemplo.

A.7 FINALIZANDO O ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS

Para finalizar a entrada de dados, indicam-se manualmente as informações não geradas automaticamente.

Os dados sobre armadura devem seguir o padrão abaixo:

Conectividades dos Nós dos Elementos de Armadura

<i>Barra</i>	<i>Nºconj propr da barra</i>	<i>Nºde nós</i>	<i>Conectividade</i>		<i>Retração</i>
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>493</i>	<i>494</i>	<i>0</i>
<i>2</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>495</i>	<i>496</i>	<i>0</i>
<i>3</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>497</i>	<i>498</i>	<i>0</i>
<i>4</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>499</i>	<i>500</i>	<i>0</i>
<i>5</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>501</i>	<i>502</i>	<i>0</i>
...					

No caso de carregamento na face ou de gravidade, pode-se utilizar a visualização gráfica de programa GiD® como auxílio. A conectividade dos 8 nós da face a ser aplicado o carregamento deve seguir a mesma ordem da conectividade dos elementos de concreto.

A.8 FORMATO FINAL DO ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS

A seguir, apresentam-se todas as partes do arquivo de dados com extensão .DAT. Cabe salientar que a leitura dos dados é não-formatada, portanto, independe do espaçamento existente entre eles.

Inicialmente, é descrito o título do exemplo.

Laje 1 com 75 elementos (3 na espessura)

Em seguida, aparecem os dados iniciais que referem-se ao número de elementos da malha, número de nós, número de barras de armadura, número de carregamentos, condições de contorno, etc. A descrição que segue ao lado de cada número é opcional.

572 Número total de pontos nodais (concreto+aço)

492 Número total de pontos nodais do concreto

75 Número total de elementos

136 Número de nós com condições de contorno

20 Número de nós por elemento

4 Número de materiais diferentes

3 Número do critério de escoamento

0 Controle de saída de dados

0 Número de tipos de armadura

44 Número total de barras de armadura

2 Número do modelo de armadura

1 Número total de carregamentos

Os dois dados seguintes são: a inclinação dos estribos (Inclinado ou Vertical) e o Modelo de Fissuração adotado (Modelo1 ou Modelo2).

Modelo de Estribo adotado

Inclinado

Modelo de Fissuração adotado

1

Na seqüência, aparecem as conectividades dos elementos de concreto. Os três primeiros números indicam, respectivamente, o número do elemento, o conjunto de propriedades que contém as características do elemento de concreto corrente e o tipo de armadura.

Conectividades dos Elementos de Concreto

1	1	1	305	298	289	336	382	390	394	340	311	306
			395	398	339	335	331	366	411	414	416	379
2	1	1	289	286	284	333	374	378	382	336	306	300
			391	395	331	324	322	356	408	410	411	366
3	1	1	284	283	280	329	369	371	374	333	300	295
			388	391	322	321	318	350	403	405	408	356
4	1	1	280	278	277	327	363	364	369	329	295	293
			383	388	318	316	314	348	399	402	403	350
5	1	1	339	335	331	366	411	414	416	379	386	375
			442	443	433	431	430	458	486	489	491	462
...												

As conectividades dos elementos de armadura são listadas manualmente. Na ordem apresentada, os números indicam: o número da barra, o conjunto de propriedades que contém as características do elemento de barra corrente, o número de nós, a conectividade da barra e consideração de retração.

Conectividades dos Nós dos Elementos de Armadura

<i>Barra</i>	<i>Nºconj propr da barra</i>	<i>Nºde nós</i>	<i>Conectividade</i>		<i>Retração</i>
1	2	2	625	626	0
2	2	2	627	628	0
3	2	2	629	630	0
4	2	2	631	632	0
5	2	2	633	634	0
...					

* Esse bloco de informações não é gerado automaticamente pelo GiD[®], assim como as coordenadas dos nós de armadura.

As coordenadas dos pontos nodais dos elementos de concreto e dos elementos de armadura são os próximos dados.

Coordenadas dos Pontos Nodais (Concreto e Armadura)

1	0.00000	0.00000	90.00000	
2	0.00000	1.62500	90.00000	<i>Coordenadas dos elementos de concreto</i>
3	0.00000	3.25000	90.00000	
4	0.00000	4.87500	90.00000	
5	0.00000	6.50000	90.00000	
...				
493	77.9	11.5	6.0	
494	76.5	1.5	0.0	<i>Coordenadas dos elementos de armadura</i>
495	76.5	1.5	6.0	

Em seguida, são fornecidas as condições de contorno. O primeiro algarismo indica o número do nó restringido. Nos três algarismos seguintes aparece “0” ou “1” nas direções x, y e z, respectivamente, apontando restrição no caso do número “1” e livre para “0”. Finalmente, aparece o valor que foi indicado para um deslocamento prescrito nas direções x, y e z, respectivamente.

Condições de Contorno

1	0	1	0	0.0	0.0	0.0
8	0	1	0	0.0	0.0	0.0
9	0	1	0	0.0	0.0	0.0
...						

Os próximos dados referem-se aos conjuntos de propriedades, os quais contêm as diferentes características dos materiais.

1 Número do Conjunto

2770d0	.20	.294E+01	.25	.35E-02
0.6E-03	0.2	.90	.250E-05	0.1E+01
0.0	0.0	0.1E+02	.184E+01	.109E+01
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0				

2 Número do Conjunto

0.21E+05	.00	.63E+02	0.1E+10	0.3E+03
0.1E+04	.00000	0.0	0.1E+01	0.1E+01
.1000E-02	.971E+00	0.1E+10	0.1E+10	0.1E+10
1.25	1	0.0	0.0	0.0
1.0				

Em seguida, outros dados devem ser definidos para a saída de resultados.

Parâmetros

1 Número de nós para controle dos deslocamentos

5 Número de elementos para controle de tensão

20 Número máximo de iterações

81 Número máximo de passos

0.2 Tolerância

Listagem dos nós para controle dos deslocamentos

616

Listagem dos elementos para controle de tensão

17 69 72 20 86

616 Número do nó para saída no arquivo '-Desloc'

2 Direção do deslocam. do nó para saída no arquivo '-Desloc'

0 Número de nós com desloc. inicial

0 Número de nós com veloc. Inicial

Finalmente, são fornecidas as características do carregamento.

- 1 Carga*
- 28 Data de aplicação da carga*
- 10 Número de incrementos de carga*
- 0 Carga em Pontos*
- 0 Carga de Gravidade*
- 1 Carga nas Faces*

Para os últimos três dados, o número 1 indica o tipo de carregamento que está caracterizado. Para o exemplo que está sendo apresentado, optou-se por carregamento em uma das faces, na direção y. Para informar esses dados procede-se indicando o número de faces carregadas, os nós pertencentes a essa face (com a ordem da conectividade semelhante àquela que foi dada nos elementos de concreto) e o valor do carregamento nas direções x, y e z, respectivamente.

- 1 Número de faces com carregamento*
- 17 577 586 605 614 624 615 604 587*
- 0. 0. -0.25076388888889*
- 0. 0. -0.25076388888889*
- 0. 0. -0.25076388888889*
- 0. 0. - 0.25076388888889*
- 0. 0. -0.25076388888889*
- 0. 0. -0.25076388888889*
- 0. 0. -0.25076388888889*
- 0. 0. -0.25076388888889*

APÊNDICE B

Para facilitar a interpretação dos resultados no programa de pré e pós processamento utilizado (GiD[®]), foi conveniente obter os valores de tensão em cada nó da estrutura. Como os pontos ótimos para o cálculo das tensões são os pontos de Gauss, é necessário fazer uma extrapolação dos valores encontrados nos pontos de integração para os nós dos elementos e uma suavização posterior, como explicado a seguir.

O cálculo das tensões em um nó i pode ser realizado diretamente a partir dos deslocamentos nodais:

$$\sigma_i = \mathbf{DB}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \delta^{(e)}, \quad (\text{B.1})$$

onde $\mathbf{B}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ indica que os termos da matriz de deformação são particularizados para as coordenadas do nó em questão.

A Eq. B.1 fornece valores nodais descontínuos das tensões entre elementos adjacentes (Fig. B.1). Isso certamente é consequência da formulação empregada, na qual os requisitos de continuidade são exigidos para os deslocamentos e não para as tensões. Um refinamento progressivo da malha tende a eliminar essas discontinuidades, que obviamente desaparecem no limite de uma malha infinitamente refinada. Na prática é interessante obter-se um só valor de tensão para cada nó, o que pode ser alcançado através do processo de suavização das tensões.

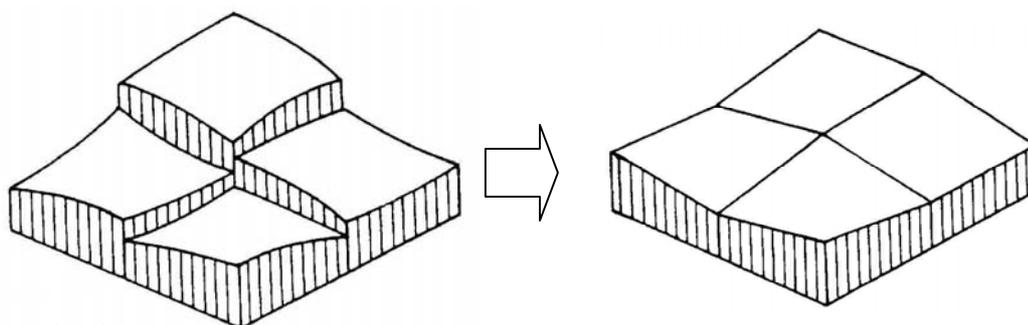


FIGURA B.1 – Exemplo de solução descontínua e tensões suavizadas.

B.1 EXTRAPOLAÇÃO E SUAVIZAÇÃO GLOBAL DAS TENSÕES

Através desse procedimento se faz diretamente a extrapolação para os nós dos valores das tensões em todos os pontos de Gauss. Desta forma, obtém-se diretamente uma solução suavizada em toda a malha (Oñate, 1995).

B.1.1 Introdução

Neste trabalho, utiliza-se o processo de suavização proposto por Hinton e Campbell (1974), onde a função de suavização é definida como:

$$g(x,y,z) = a_{000} + a_{100} x + a_{010} y + a_{001} z + a_{011} xy + \dots = \sum a_{ijk} x^i y^j z^k$$
$$\begin{cases} i=0, p \\ j=0, q \\ k=0, r \end{cases} \quad (B.2)$$

onde g é uma função de ordem p em x , e uma função de ordem q em y e uma função de ordem r em z .

Se a função não suavizada é dada por $\sigma(x, y, z)$, então o problema resume-se em encontrar os coeficientes a_{ijk} que minimizem o funcional:

$$\chi = \iiint (\sigma - g)^2 dV. \quad (B.3)$$

Consequentemente, para χ ser um valor mínimo,

$$\frac{\partial \chi}{\partial a_{ijk}} = 0. \quad (B.4)$$

B.1.2 Formulação de elementos finitos

Neste problema, as incógnitas são tomadas como as tensões nodais suavizadas σ_i^* e estas tensões podem ser obtidas usando-se as funções de forma. Desta maneira, a função de suavização $g(\xi, \eta, \zeta)$ é dada pela expressão:

$$g(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1, n} N_i \sigma_i^*, \quad (B.5)$$

onde N_i , a função de forma no nó i , é uma função de coordenadas (ξ, η, ζ) e σ_i^* é a tensão nodal suavizada no nó i e n é o número de nós por elemento.

O erro entre as tensões suavizadas e não suavizadas em qualquer ponto dentro do elemento é dado por:

$$e(\xi, \eta, \zeta) = \sigma(\xi, \eta, \zeta) - \mathbf{g}(\xi, \eta, \zeta), \quad (\text{B.6})$$

onde as tensões não suavizadas $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$, em qualquer ponto dentro do elemento, podem ser obtidas pela relação usual tensão-deslocamento (Eq. B.1).

O problema agora é encontrar as tensões nodais suavizadas σ_1^* , σ_2^* , ..., σ_p^* que minimizem o funcional

$$\chi = \sum_{j=1, ne} \iiint e(\xi, \eta, \zeta)^2 dV = \sum_{j=1, ne} \iiint [\sigma(\xi, \eta, \zeta) - \mathbf{g}(\xi, \eta, \zeta)]^2 \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{B.7})$$

onde $\det \mathbf{J}$ é o determinante da matriz Jacobiana.

Para χ ser um mínimo

$$\frac{\partial \chi}{\partial \sigma_i^*} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p. \quad (\text{B.8})$$

Portanto, para cada elemento, a matriz de suavização do elemento é dada por:

$$\mathbf{S}^e = \begin{bmatrix} \iiint N_1 N_1 \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta & \dots & \iiint N_1 N_n \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \\ \vdots & & \vdots \\ \iiint N_n N_1 \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta & \dots & \iiint N_n N_n \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \end{bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

E o vetor de “forças” é dado por:

$$\mathbf{F}^e = \left\{ \begin{array}{c} \iiint N_1 \sigma \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \\ \vdots \\ \iiint N_n \sigma \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \end{array} \right\} \quad (\text{B.10})$$

O vetor de “forças” global \mathbf{F} e a matriz de suavização global \mathbf{S} são obtidos reunindo-se o vetor de “forças” de cada elemento \mathbf{F}^e e a matriz de suavização de cada elemento \mathbf{S}^e , respectivamente.

As tensões nodais suavizadas σ_1^* , σ_2^* , ..., σ_p^* são obtidas resolvendo-se o sistema:

$$\mathbf{F} = \mathbf{S} \sigma \quad (\text{B.11})$$

onde σ é o vetor formado pelas tensões nodais suavizadas.

B.2 SAÍDA GRÁFICA DAS TENSÕES NO PROGRAMA GiD[®]

O programa numérico desenvolvido em FORTRAN gera arquivos para conferência dos dados de entrada e para visualização de resultados (tensões nodais suavizadas e deslocamentos) através do programa para pré e pós-processamento GiD[®].

Essa possibilidade se mostrou bastante útil, uma vez que as coordenadas das armaduras são listadas manualmente. Além disso, a visualização gráfica dos resultados permite melhor avaliação do desempenho do programa e do comportamento da peça analisada.

São gerados 5 arquivos distintos com extensões .MSH e .RES. Os arquivos com a primeira extensão contém informações da malha e os arquivos .RES apresentam resultados de tensões e deslocamentos. Nesse anexo são descritos o objetivo de cada arquivo gerado e a sua forma de utilização no programa GiD[®].

B.2.1 CONFEREARM.FLAVIA.MSH

Esse arquivo tem o objetivo de possibilitar a conferência da listagem das coordenadas e conectividades da armadura, realizada manualmente. Nele estão impressas as coordenadas e conectividades dos elementos de concreto e dos elementos de barras de armadura.

Para sua visualização no programa GiD[®], seleciona-se o comando *Files - Import/Export - Mesh Read*.

Ou, clica-se no botão de transferência entre e pré e pós-processamento  (*File - posprocess*) para trabalhar no ambiente de pós-processamento. Em seguida, abre-se o arquivo selecionando-se o comando *Open*  (*File - Open*). Um exemplo de arquivo é apresentado no Fig. B.2. Nesse ambiente, há vários recursos que permitem modificar as cores e/ou estilo de visualização, como o comando *Windows - View style*.

É possível também, desativar uma das malhas (de concreto ou de armadura) para obter maior clareza do desenho.

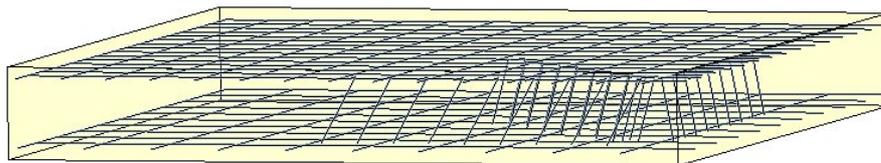


FIGURA B.2 – Exemplo de visualização através do arquivo conferearma.flavia.msh.

B.2.2 CONCRETO.FLAVIA.MSH e CONCRETO.FLAVIA.RES

Esses dois arquivos são utilizados em conjunto para a visualização gráfica de tensões e deslocamentos nos elementos de concreto. Ambos devem estar em uma mesma pasta do computador para que seja possível visualizar a malha e os resultados, simultaneamente.

Nesse caso, deve-se trabalhar no ambiente de pós-processamento do programa GiD[®]. Seleciona-se o comando *Open*  e abre-se um dos arquivos (não importa a extensão, pois os arquivos estão vinculados). Para visualizar os resultados, utiliza-se o comando *Windows - View Results*. Seleciona-se *View - Contour Fill* (Fig. B.3) e em seguida opta-se por *Results - Deslocamentos* ou *Results - Tensões nodais* e determina-se a direção ou tensão desejada. Através do comando *Windows - Animate* é possível realizar uma animação dos resultados e observar o comportamento da estrutura para cada incremento de carga (Fig. B.4).

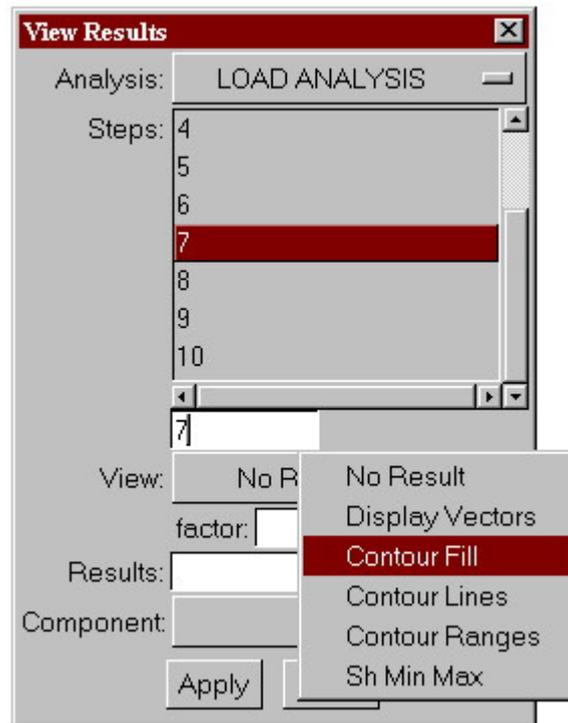


FIGURA B.3 – Comando para visualização dos resultados.

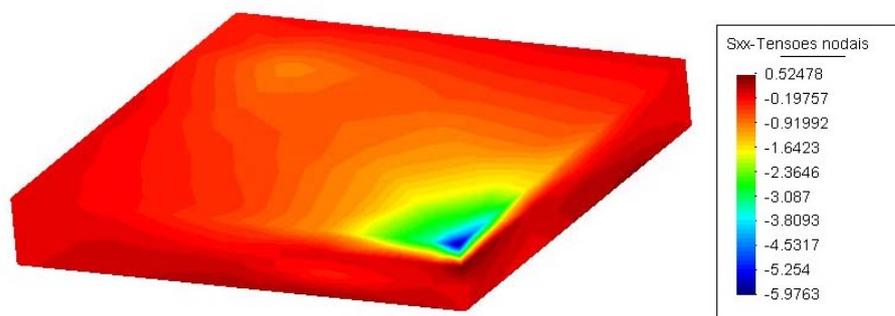


FIGURA B.4 – Resultados de tensões.

B.2.3 ARM.FLAVIA.MSH e ARM.FLAVIA.RES

Esses dois arquivos são utilizados em conjunto para a visualização gráfica de tensões e deslocamentos nos elementos da armadura, da mesma forma que o conjunto anterior. A visualização dos resultados se realiza de maneira semelhante, porém no caso das armaduras só há a opção *Results - Tensões Arm*, para cada incremento de carga. A Fig. B.5 ilustra um exemplo de resultado de tensões na armadura.

Através do comando *Windows - Animate* é possível realizar uma animação dos resultados e observar o comportamento das tensões nas barras cada incremento de carga.

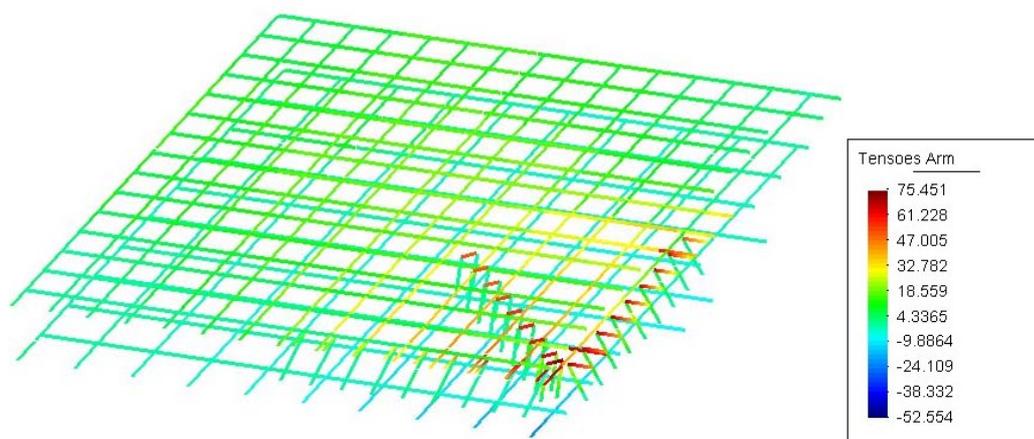


FIGURA B.5 – Visualização das tensões na armadura através dos arquivos arm.res e arm.msh.