



edições urgs

curso de
**teoria da
semelhança**
victor freire motta



O Autor nasceu no Rio de Janeiro, em 1931. Formado em Engenharia Civil na Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, em dezembro de 1954. Engenheiro do Laboratório Hidrotécnico Saturnino de Brito, de 1955 a 1961. Bolsista da CAPES na Hydraulics Research Station da Grã-Bretanha, de março de 1959 a março de 1960. Assistente técnico do Instituto de Pesquisas Hidráulicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, de 1961 a 1963. Encarregado da Divisão Marítima do IPH da UFRGS, desde 1963. Professor de Hidráulica de Costas e Estuários, de Engenharia de Costas e de Simulação Física no Curso de Pós-Graduação do Centro de Hidrologia Aplicada (IPH da UFRGS), desde 1969. Membro do Comitê de Hidráulica Marítima da Associação Internacional de Pesquisas Hidráulicas no biênio 1970-71. Assessor brasileiro, para Hidráulica Marítima, do Comitê Regional Latino-Americano da mesma associação.

**CURSO DE
TEORIA DA SEMELHANÇA**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

IVO WOLFF, Reitor

HOMERO SÓ JOBIM, Vice-Reitor

WALTER OTTO CYBIS, Superintendente Acadêmico

MANOEL MARQUES LEITE, Superintendente Administrativo

Editora da URGs

BLASIO H. HICKMANN, Coordenador

Conselho Editorial

ANA IRIS DO AMARAL

FLÁVIO LOUREIRO CHAVES

FRANCISCO RIOPARDENSE DE MACEDO

JUSSARA PANSARDI DA CUNHA

LOTHAR FRANCISCO HESSEL

victor freire motta

CURSO DE TEORIA DA SEMELHANÇA



**editora da urgs
universidade federal do rio grande do sul
porto alegre/1972**

Motta, Victor Freire
Curso de teoria da semelhança.
Porto Alegre, Universidade Federal
do Rio Grande do Sul, 1972.
154 p. ilustr. 23 cm.

Bibliografia: p. 137-53

I. Título **CDU 626:530.17.01**
CDD 627.072

© de Victor Freire Motta, 1972

Para

MARIA LÚCIA

UFRGS
BIBLIOTECA IPH

SUMÁRIO

Prefácio	9
1 - Introdução à teoria da semelhança	11
2 - Análise dimensional	25
3 - Estabelecimentos das equações de previsão	51
4 - Teoria dos modelos	83
5 - Distorção	105
6 - Efeito de escala	131
7 - Bibliografia	137

PREFÁCIO

Esta publicação reproduz as aulas proferidas sobre Teoria da Semelhança no curso de pós-graduação do Centro de Hidrologia Aplicada, ministrado no Instituto de Pesquisas Hidráulicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em Porto Alegre, em convênio com a UNESCO.

O objetivo do curso consiste em apresentar aos alunos os princípios fundamentais para projetar, construir, operar, interpretar e avaliar os modelos físicos. Ainda que os alunos não se destinem à carreira de pesquisador em laboratório de hidráulica, é muito possível que, no decorrer de sua carreira profissional, venham a precisar recorrer a órgãos de tal natureza. É conveniente, portanto, que compreendam os princípios em que se assenta a utilização de modelos físicos e o que se pode fazer ou não com os mesmos.

Ressaltamos que não se deve procurar neste curso a solução para todas as aplicações práticas da teoria dos modelos físicos. O curso tem por objetivo a apresentação dos conceitos e princípios fundamentais, comuns a todos os tipos daqueles modelos. Conforme é dito e repetido no desenrolar da exposição, para que alguém se torne capaz de realizar modelos físicos em qualquer setor da tecnologia, deve em primeiro lugar conhecer os fenômenos, as gran-

dezas e as relações específicas do setor em questão. Os pormenores teóricos e práticos de cada tipo de modelos, do ponto de vista do setor de aplicação, devem ser aprendidos na matéria respectiva, correspondente ao setor. Em outras palavras, o conhecimento da Teoria da Semelhança é necessário, porém não é suficiente para conduzir estudos em modelo reduzido ou analógico. Nem existem "especialistas em modelos reduzidos". Existem especialistas em diferentes setores das ciências físicas, que, dominando também a Teoria da Semelhança e as técnicas de laboratório, tornam-se capazes de efetuar ou dirigir estudos em modelo dos problemas de sua especialidade.

Redigiu-se o curso depois de ministrá-lo. Em consequência, tornou-se possível incorporar ao texto certos esclarecimentos que a experiência com os alunos revelou serem necessários.

A exposição seguiu a orientação geral do livro Similitude in Engineering de G. Murphy, editado por The Ronald Press Company, em New York, em 1950. Entretanto, a apresentação de várias questões, bem como comentários, exemplos e aplicações práticas, refletem a experiência pessoal do autor.

1 - INTRODUÇÃO À TEORIA DA SEMELHANÇA

Todo projeto de engenharia comporta a previsão do comportamento de um sistema, a ser construído pelo homem, ou de um sistema natural com o qual ele vai interferir. Na maioria dos casos, pode-se mesmo dizer que o ato de projetar se confunde com o ato de prever o comportamento do sistema que se vai realizar. Assim, por exemplo, quando um engenheiro civil projeta um elemento estrutural, ele dimensiona o elemento a partir do cálculo das tensões que um dado carregamento despertará no elemento construído em certo material e segundo certa geometria. O cálculo das tensões e sua comparação com determinados valores críticos, ou de ruptura, não é outra coisa senão a "previsão do comportamento" do elemento estrutural em questão, sujeito ao carregamento considerado.

Constata-se, assim, que um projeto de engenharia será tanto mais seguro, quanto mais se aproximar da realidade o esquema adotado para prever o comportamento da estrutura ou da máquina, que se deseja construir, ou do sistema natural com o qual se vai interferir.

Exemplos de sistema natural seriam: um trecho de rio, um trecho de costa, um estuário ou uma embocadura, em que se vai introduzir uma alteração.

Devemos então analisar os meios de que dispomos para prever o comportamento de sistemas físicos.

O método analítico consiste em utilizar uma lei geral que permita efetuar previsões dos valores da grandeza, que nos interessa, em função dos valores das outras grandezas, com o grau desejado de precisão. A Lei de Newton, a Lei de Ohm, as fórmulas de flexão simples constituem exemplos deste primeiro meio de previsão.

A tendência geral do progresso científico consiste em alargar cada vez mais a gama de aplicações do método analítico. Quando conhecemos perfeitamente a lei que rege um determinado fenômeno físico, podemos empregar tal método. Cabe reconhecer, porém, que este método comporta limitações. Em primeiro lugar, se a grandeza, cujos valores se querem prever, depende de mais de duas outras grandezas, o número de observações necessárias para estabelecer a lei de previsão pode ser muito elevado e exigir análise muito cuidadosa. Por outro lado, muitas vezes, as necessidades do desenvolvimento econômico nos obrigam a resolver problemas cujas leis gerais ainda não são conhecidas. Em alguns campos da atividade humana, como a Hidráulica de Fundo Móvel, as aplicações tecnológicas tiveram de caminhar muito à frente dos conhecimentos científicos básicos respectivos. Em outros casos, sabemos formular uma equação diferencial para o fenômeno em consideração, mas dificuldades matemáticas insuperáveis podem surgir na integração para condições-limite particulares.

O método empírico consiste em construir o sistema de alguma maneira e prever o comportamento futuro a partir de observações apoiadas na hipótese de que as características essenciais não se alterarão. Constata-se logo que tal método não é conveniente para sistemas de grande porte, de grande custo ou complexidade. É particularmente inconveniente para os sistemas que se modificam quando o homem age so-

bre eles, de modo que a previsão realmente importante a ser feita não é a do funcionamento do sistema em estado natural, mas sim a previsão do resultado de sua interação com a intervenção humana.

O terceiro método de previsão consiste em recorrer a observações efetuadas em outro sistema, que se comporte de modo semelhante ao sistema cujo comportamento se quer prever, mas que apresente menores dimensões, no qual seja mais fácil introduzir modificações ou variar sob controle os valores das grandezas a serem consideradas. Chama-se protótipo o sistema cujo comportamento se quer prever. O modelo é o sistema a partir do qual se efetuam as previsões válidas para fins de engenharia. "Comportar-se de modo semelhante" significa que:

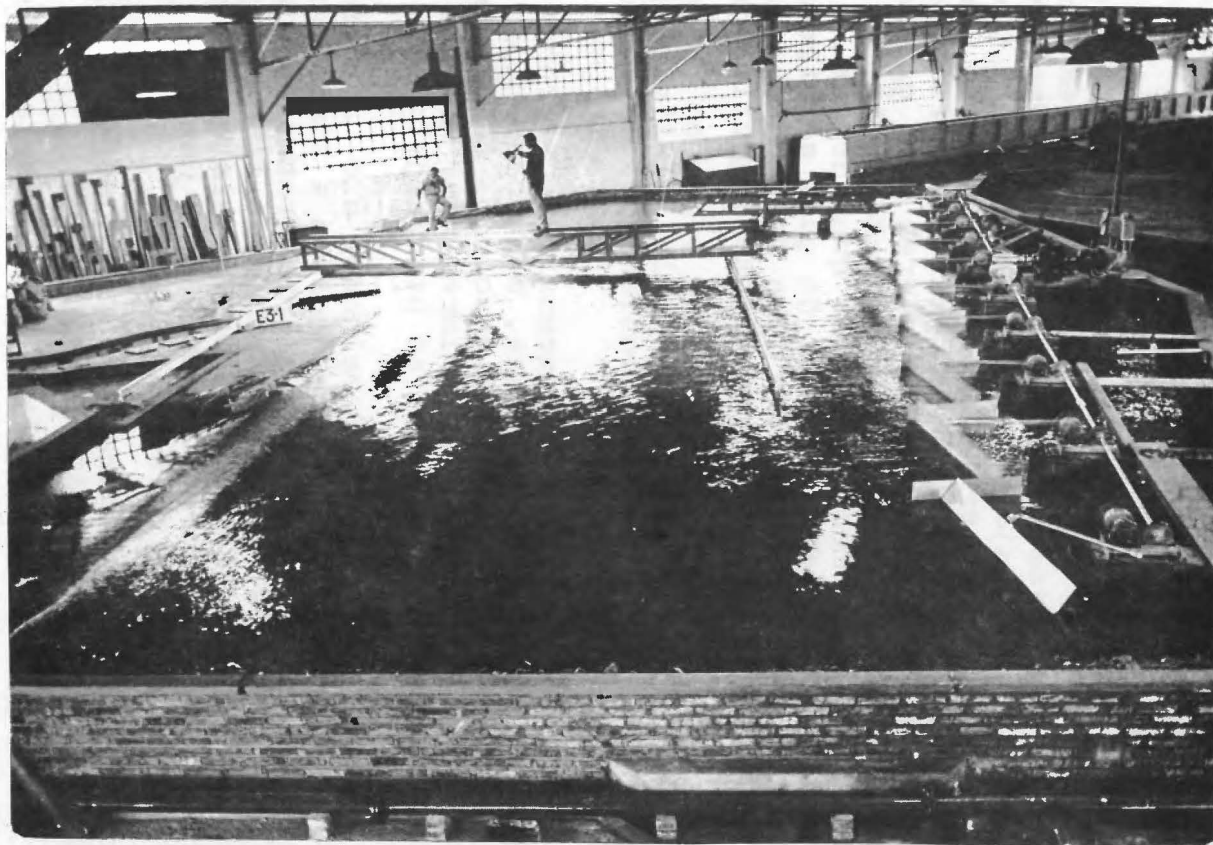
a) o mesmo fenômeno, pondo em jogo as mesmas grandezas regidas pela lei física, se passa nos dois sistemas considerados (o protótipo e o modelo);

b) para cada categoria de grandeza existem relações constantes, bem conhecidas e independentes dos valores absolutos da grandeza em questão, entre os valores nos modelos e os valores que ocorrerão no protótipo.

A Teoria da Semelhança é o conjunto dos princípios a serem obedecidos a fim de projetar, construir, operar e interpretar os sistemas (modelos) a partir dos quais se deseja prever o comportamento de outros sistemas (protótipos). Tal teoria comporta dois outros objetivos além do já citado:

a) estabelecer as relações de transferência entre modelos e protótipos;

b) estabelecer o tipo de relação entre as diversas grandezas intervenientes em qualquer fenômeno físico, a fim de poder pesquisar sistematicamente os dados mais significativos.



1 - Vista geral do modelo costeiro (1/300 e 1/50) de Tramandaí, RS (IPH da UFRGS)

O método de previsão por meio de modelos físicos também apresenta limitações. Simplesmente não se pode pensar em recurso a modelo enquanto não se identificam claramente as grandezas que intervêm no fenômeno físico de que depende a previsão a ser feita. Em outros casos constata-se que o modelo deveria obedecer a condições incompatíveis entre si. Há também casos em que a simples redução das dimensões geométricas faz aparecer forças que não se manifestam no sistema cujo comportamento se quer prever. Em certos fenômenos, como o transporte de vasa em estuários, torna-se impossível assegurar que a lei que rege o fenômeno no modelo, seja a mesma que vigora no protótipo. Finalmente, existem casos em que o tamanho do protótipo e a necessidade de permanecer acima de certos limites inferiores nas escalas de redução nos fazem recair em quase todos os inconvenientes do método empírico.

Compreende-se, pelas considerações já expostas, que a formulação da Teoria da Semelhança exige bom conhecimento da natureza das grandezas físicas e das relações de dependência que existem entre elas. Em consequência, a Teoria da Semelhança se funda na análise dimensional que nos ensina a exprimir as diferentes grandezas em função de certo número de outras tomadas como fundamentais.

Assinalemos preliminarmente que o ato de medir comporta um aspecto qualitativo e um aspecto quantitativo. Conhecemos qualitativamente um fenômeno quando sabemos distingui-lo de outras categorias de fenômenos. Em última análise, caracterizar qualitativamente um fenômeno consiste em identificar as grandezas que nele intervêm. Por sua vez, caracterizar quantitativamente um fenômeno consiste em saber distinguir o grau de intensidade, com que se manifesta, de outras ocorrências qualitativamente idênticas, mas de magnitude diferente.

A fim de conservar registros eficazes e precisos de observações, de modo a fazer previsões a partir das mesmas ou transmitir informações a quem não participou das observações, tornam-se necessários padrões de descrições. As características qualitativas de uma observação podem ser descritas em termos de operações padronizadas que identificam espécies de grandezas fundamentais, como comprimento (L), massa (M) e tempo (T). Chama-se dimensão a caracterização qualitativa da grandeza observada e sua expressão dimensional é a expressão da grandeza, em causa, em termos das espécies tomadas como fundamentais.

A descrição quantitativa de uma grandeza envolve um número e um padrão de comparação, por exemplo, 10 metros, 5 quilogramas, 37 minutos. O padrão de comparação, que se estabelece arbitrariamente, é a unidade. Uma velocidade, por exemplo, tem a dimensão LT^{-1} e se mede em unidades de metros por minuto ou pés por segundo ou milhas por hora. Medir consiste, portanto, em verificar quantas vezes uma grandeza contém outra qualitativamente idêntica e tomada como padrão ou unidade.

Desde muito tempo se compreendeu que as diversas grandezas físicas se podiam exprimir em termos de grandezas consideradas como fundamentais, por exemplo, a área como produto de dois comprimentos e a velocidade como quociente entre um comprimento e um tempo. Dá-se o qualificativo de puramente mecânicas às grandezas que se podem exprimir em função de apenas três grandezas fundamentais: massa (M), comprimento (L) e tempo (T) ou força (F), comprimento (L) e tempo (T). Algumas grandezas, que intervêm nos fenômenos comportando trocas de quantidades de calor, os fenômenos ditos térmicos, necessitam de uma quarta grandeza fundamental. Fato análogo ocorre com certas grandezas a considerar nos fenômenos elétricos.

Uma vez que já temos o conceito de expressão dimensional de uma grandeza, podemos agora definir, com mais precisão, o que seja sua dimensão em relação a qualquer das grandezas fundamentais, em termos das quais se exprime. Dimensão de uma grandeza, em relação a qualquer das grandezas fundamentais, é o expoente com que a grandeza fundamental considerada aparece na expressão dimensional da grandeza em questão. Por exemplo, a expressão dimensional da velocidade é LT^{-1} onde l é a dimensão da velocidade em relação a comprimento e -1 é a dimensão em relação a tempo.

As grandezas, que necessitam de três grandezas fundamentais para serem caracterizadas qualitativamente, são expressas em termos de massa (M), comprimento (L) e tempo (T) ou força (F), comprimento (L) e (T). Poder-se-ia, porém, escolher três outras grandezas fundamentais, por exemplo, volume, tensão e potência, desde que se introduza na combinação um número suficiente (3) de quantidades independentes. Geralmente, se prefere adotar como grandezas fundamentais a massa, o comprimento e o tempo, pelas seguintes razões:

- a) são mais fáceis de medir diretamente;
- b) são mais familiares à vida quotidiana;
- c) conduzem a expressões algébricas mais simples.

Por sua vez, a vantagem da massa sobre a força, como grandeza fundamental, reside em ser mais fácil definir padrões (unidades) de massa do que de força, de maneira a não se precisar recorrer a considerações de localização geométrica ou de altitude.

Uma vez que podemos escolher diferentes grandezas fundamentais, deve ser possível exprimir uma mesma grandeza em diferentes sis-

temas de unidades, com diferentes grandezas fundamentais. Em outras palavras, tendo-se a expressão dimensional de uma dada grandeza em um sistema de dadas grandezas fundamentais, de ve poder-se transformar tal expressão dimensional para obtê-la nos termos do outro sistema de grandezas fundamentais. Suponhamos que, conhecida a expressão dimensional de uma grandeza em sistema M, L, T, se queira sua expressão dimensional em sistema A (área), I (impulsão), W (potência). A marcha a seguir em tais problemas consiste em:

- a) escrever a expressão dimensional da grandeza em M, L, T;
- b) escrever também as expressões dimensionais das novas grandezas fundamentais em termos de M, L, T;
- c) resolver as equações, escritas na etapa anterior, em relação a M, L, T;
- d) substituir as expressões de M, L, T, obtidas em c, na expressão dimensional da grandeza em M, L, T.

Ter-se-ia:

$$[A] = L^2$$

$$[I] = MLT^{-2}T = MLT^{-1}$$

$$[W] = MLT^{-2}LT^{-1} = ML^2T^{-3}$$

$$[L] = A^{1/2}$$

$$\frac{I}{W} = L^{-1}T^2 = A^{-1/2} T^2$$

$$\dots T^2 = \frac{IA^{1/2}}{W} \dots [T] = \frac{I^{1/2}A^{1/4}}{W^{1/2}}$$

$$[M] = \frac{I}{LT^{-1}} = \frac{IT}{L} = \frac{II^{1/2}A^{1/4}}{A^{1/2}W^{1/2}} = I^{3/2}A^{-1/4}W^{-1/2}$$

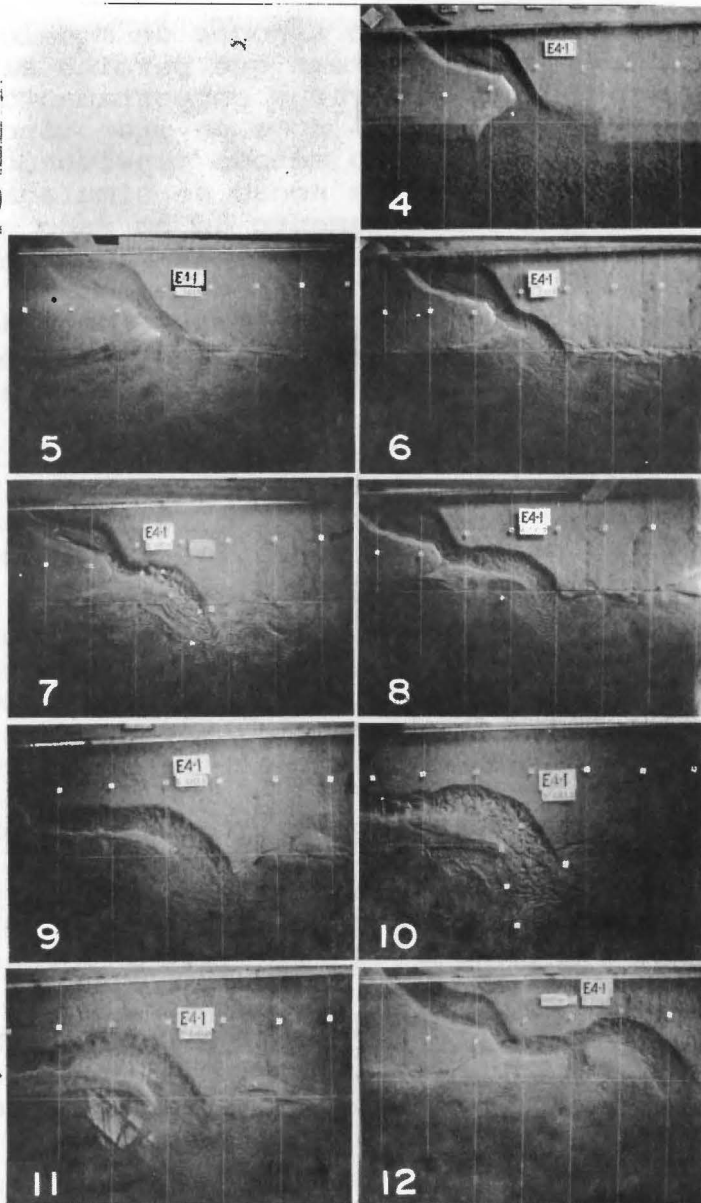
A substituição, em a, das expressões acima de M, L, T forneceria a expressão dimensional procurada.

Já possuindo a noção de modelo físico, como sendo um sistema que permite simular, e em consequência prever o comportamento de um outro, ao qual demos o nome de protótipo, podemos voltar ao primeiro método mencionado de previsão, levando esta noção de simulação. Quando prevemos o comportamento de um dado sistema a partir do manuseio de um esquema matemático constituído por um conjunto de equações que regem o funcionamento do sistema considerado, poderemos dizer, por extensão, que estamos a operar um "modelo matemático". A palavra modelo, no caso, é usada por extensão, como sinônimo de esquema, pois não estamos a trabalhar sobre outro sistema físico e sim sobre um esquema, isto é, uma representação ideal, constituído por um conjunto de conceitos e equações.

Quando queremos realizar um modelo físico de um dado protótipo, devemos formular condições para que seu comportamento seja semelhante do ponto de vista das relações, com as três grandezas fundamentais, das diversas grandezas envolvidas nos fenômenos a serem considerados. Em outras palavras, temos de considerar condições de semelhança relativas a comprimentos, massas e tempos. Concretamente, do ponto de vista da realização física, isto significa que devemos formular condições de semelhança relativas a geometria, materiais e forças presentes.

Do ponto de vista da semelhança geométrica, os modelos físicos podem ser: geometricamente semelhantes, geometricamente distorcidos ou analógicos.

Modelos geometricamente semelhantes são aqueles cuja geometria é determinada pela redução, segundo um mesmo fator, de todas as características geométricas do protótipo.



2 - A reprodução em modelo reduzido da migração da embocadura lagunar de Tramandaí, RS (IPH da UFRGS)

Modelos geometricamente distorcidos são aqueles em que se usam diferentes fatores para a redução das características geométricas do protótipo. Por exemplo, um modelo de trecho fluvial em que se usa, para a redução das alturas e profundidades, um fator diferente daquele que se utiliza para a redução dos comprimentos e das larguras. Ver-se-á, oportunamente, no decorrer deste curso, que a distorção geométrica constitui caso particular de um conceito mais geral de distorção e que um modelo não distorcido geometricamente pode ser distorcido no sentido mais geral de distorção. Ver-se-á também que a semelhança das forças presentes, ou do funcionamento físico do sistema, pode exigir distorção geométrica. Ver-se-á, enfim, que um modelo geometricamente distorcido pode conter outras distorções, além da geométrica.

Modelos analógicos são aqueles que não apresentam semelhança geométrica com os respectivos protótipos e nos quais se passem fenômenos qualitativamente diferentes daqueles que devem ser previstos para o protótipo, mas as equações, que regem os fenômenos no protótipo e no modelo analógico, apresentam a mesma estrutura formal. Consideremos, por exemplo, um fenômeno puramente mecânico, em que a aplicação de uma certa força F a um corpo de massa m a este comunica uma aceleração na direção da força. Imaginemos agora um fenômeno térmico em que a absorção ou a perda de uma quantidade de calor Q determina, em um dado sistema de massa m' e de calor específico c , portanto de capacidade calorífica igual a $M=m'c$, uma variação de temperatura Δt . Os dois fenômenos são regidos respectivamente pelas equações $F = mj$ e $Q = m' c \Delta t$. Constata-se nestas duas equações uma mesma estrutura formal: ambas traduzem relações de proporcionalidade, isto é, os segundos membros são produtos em que todas as grandezas aparecem afetadas à primeira potência. Constata-se, ademais, uma analogia física no

papel representado pelas grandezas consideradas duas a duas. Com efeito, a força no fenômeno mecânico e a quantidade de calor no fenômeno térmico constituem uma causa externa. A massa, ou inércia, no fenômeno mecânico e a capacidade calorífica no fenômeno térmico constituem a característica intrínseca do sistema, que vai determinar inversamente a amplitude da resposta. Finalmente, a aceleração no fenômeno mecânico e a variação de temperatura no fenômeno térmico caracterizam a amplitude da resposta à causa exterior. Em conseqüência, podemos conceber um modelo analógico em que um fenômeno de aplicação de uma força a uma certa massa representaria a absorção ou a perda de uma certa quantidade de calor por um certo sistema caracterizado por sua capacidade calorífica. Em tal modelo analógico, certo número de unidades de força representaria uma certa quantidade de calor, um certo número de unidades de massa representaria uma certa capacidade calorífica e uma certa aceleração equivaleria a uma certa variação de temperatura.

Os modelos analógicos são muito convenientes e efetivamente utilizados para a simulação de sistemas cujas características geométricas são tais que sua redução comportaria dificuldades de realização material ou desaparecimento da semelhança para as forças presentes. São muito utilizados, por exemplo, nos fenômenos de escoamento de fluidos em condutos de dimensões muito pequenas, por exemplo, escoamentos em meios porosos, nos quais os condutos construídos pelos interstícios entre os grãos não são redutíveis a escala, ou nos escoamentos de fluidos em organismos vivos, nos quais se depararia com a mesma dificuldade em relação aos vasos a considerar. Também se recorre a modelos analógicos para estudos em que as dimensões geométricas longitudinais são de ordem de grandeza muito diferente das dimensões geométricas transversais, acarretando inconveniênc

cia de redução segundo o mesmo fator e não se podendo recorrer à distorção por alguma razão intrínseca do problema. É o caso das redes complexas de distribuição de água, estudadas em modelos analógicos e constituídos por redes elétricas malhadas, pois as leis de perda de carga têm a mesma estrutura formal das leis de Kirschoff. Neste modelo analógico uma vazão, em metros cúbicos por segundo, é representada por uma intensidade de corrente em ampères e uma carga, ou uma perda de carga, em metros, é representada por uma diferença de potencial em volts.

EXERCÍCIOS

1) Expressar cada uma das grandezas seguintes em função de M , L e T :

- a) área
- b) volume
- c) aceleração
- d) massa
- e) tensão
- f) velocidade angular
- g) quantidade de movimento
- h) momento de inércia de área
- i) momento de inércia de massa
- j) módulo de elasticidade

2) Expressar as mesmas grandezas acima e numeradas em termos de F , L e T .

3) Expressar as mesmas grandezas acima e numeradas em termos de M , L e F .

4) Expressar as grandezas acima enumeradas em termos de M , T e F .

5) Exprimir as expressões dimensionais em M, L e T de:

- a) peso específico
- b) densidade
- c) massa específica
- d) coeficiente de viscosidade dinâmica

6) Quais são as expressões dimensionais da massa e da energia em sistema de unidades cujas grandezas fundamentais são: volume (V), tensão (L) e potência (W)?

7) Podem adotar-se área, volume e aceleração como grandezas fundamentais? Por quê?

8) Mesmas perguntas em relação a área, volume e potência.

2 - ANÁLISE DIMENSIONAL

2.1 - A análise dimensional se funda nos dois axiomas seguintes:

a) só se pode estabelecer um estado de igualdade entre duas grandezas que tenham as mesmas dimensões. Assim, por exemplo, só podemos comparar velocidades com velocidades, acelerações com acelerações, quantidades de movimento com quantidades de movimento ou com impulsões (que têm as mesmas dimensões);

b) a razão entre duas grandezas é independente da unidade em que são medidas, desde que se empregue a mesma unidade para ambas. Assim, por exemplo, a razão entre o comprimento e a largura de uma mesa terá sempre o mesmo valor, quer sejam ambas as grandezas medidas em centímetros ou em milímetros ou em metros ou em pés ou em polegadas. Apesar das duas proposições acima serem evidentes por si mesmas e muito simples, delas se extraem conclusões importantes, conforme se verá.

2.2 - A análise dimensional se presta às seguintes utilizações:

a) classificar as equações que traduzem os fenômenos físicos e verificar-lhes a generalidade;

b) passar de um sistema de unidades para outro;

c) prever a forma das relações entre as grandezas que intervêm em um dado fenômeno físico;

d) estabelecer condições de semelhança para a concepção, construção, operação e interpretação de modelos físicos.

2.3 - Do ponto de vista dimensional, as equações que regem os fenômenos físicos podem classificar-se em:

Equações	{	não homogêneas	{	restritas
		homogêneas		gerais

2.3.1 - Equações não homogêneas são aquelas em que os diferentes termos não apresentam todos as mesmas dimensões

Tais equações só são válidas em um determinado sistema de unidades e não traduzem uma lei física geral. São válidas apenas para uma determinada gama, mais ou menos estreita, de valores das grandezas intervenientes. Decorrem geralmente de experiências conduzidas empiricamente.

Por diversas razões históricas, a hidráulica, tanto a hidráulica de fundo fixo quanto a de fundo móvel, contém numerosos exemplos de equações não homogêneas, tais como:

2.3.1.1 - Na hidráulica de fundo fixo

a) As fórmulas monômias para cálculo de escoamento em condutos forçados de seção transversal circular, como por exemplo: fórmula de Scimemi para tubos de fibrocimento

$$v = 64,28 D^{0,68} S^{0,56}$$

Fórmula para tubos de ferro fundido novo

$$v = 44,15 D^{0,625} S^{0,535}$$

Fórmula para tubos novos sem soldadura

$$v = 46,3 D^{0,59} S^{0,55}$$

Fórmula para tubos de ferro galvanizado

$$v = 66,99 D^{0,752} S^{0,54}$$

Fórmula para tubos de aço soldado com rebitegem simples

$$v = 37,92 D^{0,755} S^{0,53}$$

Fórmula para cimento bem liso

$$v = 42,4 D^{0,75} S^{0,53}$$

onde v é a velocidade média do escoamento através da seção transversal do conduto, em metros por segundo, D é o diâmetro da seção transversal em metros e S é a declividade.

b) A fórmula de Bresse para dimensionamento econômico de condutos forçados $D = 1,5\sqrt{Q}$ com D em metros e Q , a vazão, em metros cúbicos por segundo.

2.3.1.2 - Na hidráulica de fundo móvel

a) As fórmulas de Lacey, da chamada Teoria do Regime, estabelecida empiricamente por engenheiros britânicos na Índia para o projeto de canais estáveis em terrenos de aluvião.

$$v = 1,151\sqrt{fR}$$

$$p = 2,67 Q^{1/2}$$

$$s = f^{5/3} / 1,788 Q^{1/6}$$

Estas fórmulas, pelo menos no aspecto acima mostrado, são utilizáveis para as características de sedimentos e as gamas de vazões encontradas nas condições particulares da Índia. Devem ser usadas no sistema inglês de unidades, com as grandezas geométricas em pés, as velocidades em pés por segundo e as vazões em pés cúbicos por segundo (cusecs). A grandeza f é o chamado "coeficiente de leito", ao qual se atribuíam valores determinados empiricamente, mas que na realidade é uma função das características dos sedimentos e dos escoamentos.

b) A fórmula de Larras para determinar condições críticas de arraste de sedimentos por ação de ondas de gravidade.

$$v_{cr} = W + 9,5 \frac{\rho'^{1/3}}{T^{1/2}}$$

onde v_{cr} é a velocidade crítica procurada em cm/s, W é a velocidade de decantação do grão em água em repouso, em cm/s.

ρ' é a densidade do grão imerso.

T é o período da onda em segundos.

c) As fórmulas empíricas de transporte litorâneo, do tipo

$$Q = KH_0^2 T \operatorname{sen} \alpha$$

onde Q é o volume de areia transportada, na zona de arrebentação e na unidade de tempo, pela onda considerada.

K um fator que na realidade constitui uma função de características da onda, da praia e dos sedimentos;

T o período da onda;

H a altura da onda antes da refração;

α o ângulo da crista da onda com a praia antes de refração.

2.3.2 - As equações homogêneas são aquelas em que todos os termos têm as mesmas dimensões, por exemplo:

$S = v_0 t + 1/2 g t^2$, a equação que fornece a distância percorrida por um corpo em queda livre, no vácuo, com velocidade inicial v_0 .

Equações homogêneas restritas são aquelas em que figuram coeficientes com dimensões. São válidas em um determinado sistema de unidades, no qual os referidos coeficientes assumem os valores particulares que figuram na fórmula. Assim, por exemplo, se escrevermos a expressão do comprimento das ondas de gravidade, em profundidade infinita, sob a forma $L_0 = 1,56 T^2$, tal equação só será válida para L_0 expresso em metros, e T o período da onda em segundos. Se a escrevermos sob a forma $L_0 = 5,13 T^2$, só poderemos utilizá-la no sistema inglês, com L_0 em pés e T em segundos.

Equações homogêneas gerais são aquelas em que todos os termos têm as mesmas dimensões e os coeficientes porventura existentes



3 - Vista geral do modelo reduzido (1/70) do sangrador da barragem de Passo Real, RS (IPH da UFRGS)

são adimensionais. A equação já vista $s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$, a expressão geral do comprimento de onda de gravidade em profundidade infinita, $L_0 = \frac{g T^2}{2\pi}$, sendo g a aceleração da gravidade, constituem exemplos de equações homogêneas gerais. Tais equações são válidas em qualquer sistema coerente de unidades. Assinalemos que a homogeneidade constitui condição necessária, porém não suficiente, para a validade de equações. Em outras palavras, todas as leis físicas são homogêneas por sua própria natureza, mas pode acontecer que se escrevam equações dimensionalmente homogêneas, traduzindo relações inexistentes na realidade objetiva, conforme veremos oportunamente.

2.4 - Uma das aplicações mais fecundas da análise dimensional consiste em converter, de um dado sistema de unidades, para outro, o valor de uma certa grandeza

Ocorre, muitas vezes, em cálculos de Engenharia, que vimos a saber, de alguma maneira, o valor de uma grandeza em um certo sistema de unidades e precisamos conhecer ou transmitir a outrem o valor da mesma grandeza em outro sistema diferente de unidades. Dois casos podem apresentar-se:

a) Os dois sistemas de unidades em consideração têm as mesmas grandezas fundamentais. Neste caso, basta escrever a expressão dimensional da grandeza, que nos interessa, nos dois sistemas e substituir cada um dos símbolos figurados em tal expressão, pelo valor da razão entre as unidades respectivas. Efetuando as operações, potenciações e produtos resultantes de tais substituições, achamos o valor da razão entre as respectivas unidades, nos dois sistemas da grandeza considerada.

Suponhamos, por exemplo, que temos uma força expressa em dinas (a unidade de força do sistema CGS) e queremos convertê-la em newtons (a unidade de força do sistema MKS). Tanto o sistema CGS quanto o MKS são do tipo LMT. Escrevemos então a expressão dimensional de força $F = MLT^{-2}$. Em seguida, substituímos F , M , L e T pelos valores das razões entre as respectivas unidades nos sistemas MKS e CGS.

Resultará:

$$\frac{\text{newton}}{\text{dina}} = \frac{\text{kilograma}}{\text{grama}} \times \frac{\text{metro}}{\text{centímetro}} \times \frac{(\text{segundo})^{-2}}{\text{segundo}}$$

ou

$$\frac{\text{newton}}{\text{dina}} = 10^3 \times 10^2 = 10^5$$

isto é, um newton equivalente a 10^5 dinas.

Por conseguinte, dividindo por 10^5 o valor conhecido da grandeza em dinas, teremos o valor correspondente em newtons.

b) Os dois sistemas em consideração têm grandezas fundamentais diferentes. A marcha a seguir é a mesma, tendo-se agora de exprimir as grandezas fundamentais de um dos sistemas em função das grandezas fundamentais do outro.

Suponhamos que se tenha um valor de coeficiente de viscosidade dinâmica no sistema inglês e se queira exprimi-lo em unidades de sistema CGS. O sistema inglês é do tipo F, L, T, com unidades fundamentais respectivas de libra, pé e segundo. O sistema CGS é do tipo L, M, T, sendo o centímetro, o grama e o segundo as unidades fundamentais.

No sistema CGS a expressão dimensional do coeficiente de viscosidade dinâmica é

$$\mu = ML^{-1} T^{-1}.$$

No sistema inglês μ tem a expressão dimensional $\mu = FL^{-2}T$. Podemos usar qualquer destas duas expressões, tendo apenas de exprimir F em função de M.

Partamos da expressão dimensional no sistema inglês, isto é, em F, L, T. Teremos:

$$\frac{(\mu) \text{ s inglês}}{(\mu) \text{ CGS}} = \frac{\text{libra}}{\text{dina}} \times \left(\frac{\text{pé}}{\text{centímetro}} \right)^{-2} \times \frac{\text{segundo}}{\text{segundo}}$$

Temos de conhecer o valor de 1 pé em centímetros. A consulta a uma tabela nos diria que 1 pé = 30.5cm. Precisaríamos também exprimir libras em dinas. Por definição, a libra é a força que imprime à massa de 1 slug a aceleração da gravidade, que no sistema inglês tem o valor de 32.2 pés por segundo ao quadrado. Então: 1 libra = 1 slug \times 32.2 ft/s². Por outro lado, também por definição, 1 dina = 1 g \times 1cm/s². Levando estes valores na última expressão precedente

$$\frac{(\mu) \text{ s.inglês}}{(\mu) \text{ CGS}} = \frac{1 \text{ slug} \times 32.2 \text{ ft/s}^2}{1 \text{ g} \times 1\text{cm/s}^2} \times \left(\frac{30.5\text{cm}}{1\text{cm}} \right)^{-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\mu) \text{ inglês}}{(\mu) \text{ CGS}} &= \frac{1 \text{ slug}}{1\text{g}} \times \frac{32.2 \times 30.5\text{cm}}{1\text{cm}} \times \frac{1}{30.5^2} = \\ &= 1.05 \frac{\text{slug}}{\text{g}} \quad (1) \end{aligned}$$

Resta-nos conhecer o valor de slug em gramas. O slug, a unidade de massa do sistema inglês, é unidade de uma grandeza derivada, pois as grandezas fundamentais daquele sistema são F, L, T. No sistema CGS (LMT) o grama é unidade de grandeza fundamental (M). Precisamos recorrer a uma lei física que relacione a força com a massa:

a 2ª lei de Newton ($F = mj$). Já vimos que 1 libra = 1 slug $\times 32.2 \text{ ft/s}^2$. Portanto 1 slug = $\frac{1 \text{ libra}}{32 \text{ ft/s}^2}$ (2). A consulta a uma tabela nos dizia que a libra = 454 g (gramas-força). Por sua vez, o grama força é a força que imprime à massa de 1 grama a aceleração de 981 cm/s^2 . Substituindo esta expressão de libra em (2) e reduzindo pés a centímetros, resulta:

$$1 \text{ slug} = \frac{454 \times 1 \text{ g} \times 981 \text{ cm/s}^2}{30.5 \times 32 \text{ cm/s}^2} = \frac{454 \times 981}{30.5 \times 32} \text{ g} = 456 \text{ g}$$

Levando agora este valor de slug em função de grama à equação (1), tira-se que o (μ) inglês = 481 (μ) CGS, isto é, a unidade de viscosidade dinâmica do sistema inglês equivale a 481 unidades de viscosidade dinâmica do sistema CGS.

2.5 - Os dois instrumentos de que a análise dimensional dispõe para prever a forma das relações entre as grandezas, que intervêm em um fenômeno físico qualquer, são o teorema de Bridgman e o teorema de Buckingham

Passamos a enunciar, demonstrar, aplicar e discutir o primeiro de tais teoremas.

Teorema de Bridgman

Toda grandeza secundária pode ser expressa por um produto de potência das grandezas primárias.

Suponhamos que uma grandeza a seja uma função das grandezas b_1, b_2, \dots, b_n . O teorema de Bridgman nos diz que se poderá escrever $a = C b_1^{c_1} b_2^{c_2} \dots b_n^{c_n}$, sendo C uma constante adimensional e c_1, c_2, \dots, c_n , ex

poentes positivos ou negativos, inteiros ou fracionários. A fim de demonstrar o teorema, chamemos a grandeza secundária de α e as grandezas primárias, de a_1, a_2, \dots, a_n .

Portanto, $\alpha = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (1), onde α é um valor qualquer da grandeza secundária e a_1, a_2, \dots, a_n são valores quaisquer das grandezas primárias. O problema a ser resolvido pelo teorema de Bridgman, consiste em estabelecer a natureza da função f .

Sejam β outro valor da mesma grandeza secundária e b_1, b_2, \dots, b_n outros valores das mesmas grandezas primárias, tais que satisfaçam a relação $\beta = f(b_1, b_2, \dots, b_n)$ (2).

A natureza da função é a mesma em (1) e (2). Apenas os valores numéricos são diferentes.

Se se mudarem as unidades das grandezas primárias, os valores numéricos mudarão para $\alpha' \beta'$. Isto é:

$$\alpha' = f(x_1 a_1, x_2 a_2, x_3 a_3, \dots, x_n a_n)$$

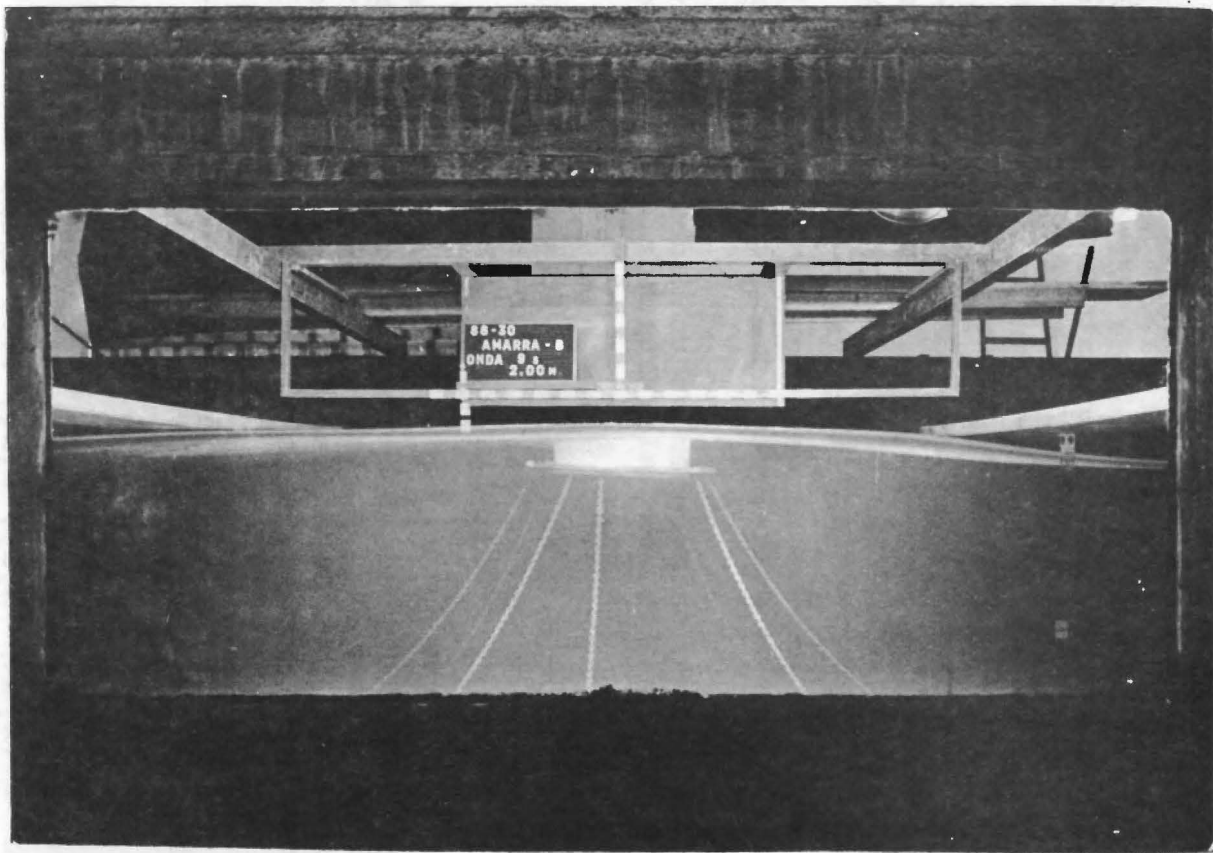
$$\beta' = f(x_1 b_1, x_2 b_2, x_3 b_3, \dots, x_n b_n)$$

onde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ representam as razões entre os tamanhos absolutos do primeiro conjunto de unidades e os tamanhos absolutos do segundo conjunto de unidades. Por exemplo, se se mede a_2 em pés e $x_2 a_2$ em polegadas, x_2 é igual a 12, ou seja o número de polegadas em um pé.

O segundo axioma fundamental da análise dimensional nos permite escrever:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \quad \text{ou} \quad \alpha' = \frac{\alpha}{\beta} \beta'$$

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad f(x_1 a_1, x_2 a_2, x_3 a_3, \dots, x_n a_n) &= \\ &= \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{f(b_1, b_2, \dots, b_n)} f(x_1 b_1, x_2 b_2, \dots, x_n b_n) \end{aligned}$$



4 - Modelo reduzido (1/30) da bóia de amarração do terminal petrolífero oceânico de Tramandaí, RS (IPH da UFRGS)

Se diferenciarmos ambos os membros da equação acima em relação a cada x_i , resultarã um conjunto de equações da forma:

$$a_i \frac{\partial f(x_1 a_1, x_2 a_2, \dots, x_n a_n)}{\partial (a_i x_i)} =$$

$$= \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{f(b_1, b_2, \dots, b_n)} b_i \frac{\partial f(x_1 b_1, x_2 b_2, \dots, x_n b_n)}{\partial (b_i x_i)}$$

Façamos todos os x iguais a 1. Fica:

$$a_i \frac{\partial f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_i}$$

$$\frac{f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{f(b_1, b_2, \dots, b_n)} b_i \frac{\partial f(b_1, b_2, \dots, b_n)}{\partial b_i}$$

$$a_i \frac{\partial f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_i} b_i \frac{\partial f(b_1, b_2, \dots, b_n)}{\partial b_i} \text{ ou}$$

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{f(a_1, a_2, \dots, a_n)} = \frac{\partial f(b_1, b_2, \dots, b_n)}{f(b_1, b_2, \dots, b_n)}$$

Esta equação deve ser válida para quaisquer valores de a_i e b_i . Para qualquer valor de b_i , o segundo membro se torna uma constante que poderemos chamar de c_i . Então

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_i} = \frac{c_i}{f(a_1, a_2, \dots, a_n)}$$

Existirá uma equação do tipo da anterior para cada valor de b_i e cada valor de a_i , cada equação sendo uma equação diferencial da relação geral entre $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e o a_i particular que se considere. Uma vez que a_1, a_2, \dots, a_n são grandezas independentes entre si, a última equação pode transformar-se em:

$$\frac{df(a_1, a_2, \dots, a_n)}{f(a_1, a_2, \dots, a_n)} = C_i \frac{da_i}{a_i}$$

que pode se integrar diretamente para

$$\ln f(a_1, a_2, \dots, a_n) = C_1 \ln a_1 + \text{constante}$$

Seguindo-se a mesma marcha para cada um dos a_i , resultará a solução geral

$$\begin{aligned} \ln(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) &= C_1 \ln a_1 + C_2 \ln a_2 + C_3 \ln a_3 + \dots \\ &+ C_n \ln a_n + \ln C = \ln a_1 C_1 + \ln a_2 C_2 + \ln a_3 C_3 + \dots + \\ &\ln a_n C_n + \ln C = \ln C a_1 C_1 a_2 C_2 a_3 C_3 \dots a_n C_n \end{aligned}$$

Donde se conclui que $f(a_1, a_2, \dots, a_n) =$
 $= C a_1 C_1 a_2 C_2 \dots a_n C_n$ ou

$$\alpha = C a_1 C_1 a_2 C_2 \dots a_n C_n$$

Chegou-se, assim, à conclusão de que uma grandeza secundária qualquer pode ser expressa pelo produto de um coeficiente adimensional por potências das grandezas primárias que a determinam, conforme queríamos demonstrar.

Em muitos casos, podem determinar-se diretamente pelo menos alguns dos expoentes das grandezas primárias. Em outros casos tais expoentes têm de ser determinados experimentalmente. Em geral, a natureza do coeficiente C tem de ser determinada experimentalmente, pois, sendo adimensional, sobre ele nada nos fornece a análise dimensional.

Conforme a dedução torna evidente, a validade do teorema não depende da adoção de força, comprimento e tempo como sendo os fatores a_1, \dots, a_n . Na realidade, pode-se exprimir

α em termos de quaisquer combinações adequadas de grandezas primárias, pelo teorema de Bridgman. Por exemplo, se α for a distância que um corpo em queda livre percorre a partir do repouso, poder-se-á exprimir α em termos de aceleração da gravidade (g) e da duração da queda (t) como

$s = Cg^{C_1} t^{C_2}$ ou, em termos de velocidade-limite v e g , como $s = Cv^{C_1} g^{C_2}$.

Notar-se-á que chamamos as grandezas a_1, a_2, \dots, a_n de primárias para distingui-las do que viemos chamando de grandezas fundamentais.

2.5.1 - Exemplos de aplicações do teorema de Bridgman

a) Suponhamos que se queira determinar a forma da relação entre a distância percorrida na vertical por um corpo em queda livre, no vácuo, a partir do repouso, e a aceleração da gravidade e a duração da queda.

O teorema de Bridgman nos autoriza a escrever: $s = Cg^{C_1} t^{C_2}$. Trata-se de determinar os valores dos expoentes C_1 e C_2 pela análise dimensional. Sendo C adimensional, seu valor só poderá ser determinado experimentalmente.

Para tal fim, escrevamos as expressões dimensionais de s , g e t .

Temos:

$$\begin{aligned} [s] &= L \\ [g] &= LT^{-2} \\ [t] &= T \end{aligned}$$

Substituamos as grandezas, na expressão fornecida pelo teorema de Bridgman, pelas respectivas expressões adimensionais. Resultará:

$$L = (LT^{-2})^{C_1} T^{C_2}$$

Desenvolvendo as potenciações indicadas, fica:

$$L = L^{C_1} T^{-2C_1} T^{C_2}$$

Agrupando as diferentes potências das mesmas grandezas fundamentais, obtêm-se:

$$L = L^{C_1} T^{-2C_1+C_2}$$

Igualando, para os dois membros desta equação, os expoentes das mesmas grandezas fundamentais, resulta:

$$C_1 = 1$$

$$-2C_1 + C_2 = 0 \therefore C_2 = 2C_1 = 2$$

Assim ficaram determinados os valores dos expoentes C_1 e C_2 e temos $s = Cgt^2$. O teorema de Bridgman nos conduziu pois à conclusão de que a distância vertical percorrida por um corpo em queda livre, no vácuo, a partir do repouso, é proporcional à aceleração da gravidade e ao quadrado da duração da queda. Ensaios adequadamente conduzidos permitiriam achar o valor $1/2$ para o coeficiente C e resultaria a expressão final $s = 1/2 gt^2$.

b) Suponhamos agora que se deseje exprimir a distância vertical (l) percorrida por um corpo em queda livre, no vácuo e a partir do repouso, em função do peso (W), do tempo (T) e da aceleração da gravidade (g). Teríamos $s = Cg^{C_1} W^{C_2} t^{C_3}$. A marcha a seguir é sempre a mesma. Escrevemos

$$[s] = L$$

$$[g] = LT^{-2}$$

$$[W] = MLT^{-2}$$

$$[t] = T$$

Substituímos na expressão fornecida pelo teorema de Bridgman:

$$L = (LT^{-2})^{C_1} (MLT^{-2})^{C_2} T^{C_3}$$

Desenvolvemos as potências:

$$L = L^{C_1} T^{-2C_1} M^{C_2} T^{-2C_2} T^{C_3}$$

Agrupamos as potências das mesmas unidades fundamentais:

$$L = L^{C_1 + C_2} M^{C_2} T^{-2C_1 - 2C_2 + C_3}$$

e igualamos os expoentes de cada uma das grandezas fundamentais nos dois membros da equação:

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_2 = 0$$

$$-2C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$$

Se $C_2 = 0$, de $C_1 + C_2 = 1$, trata-se $C_1 = 1$ e, levando estes valores à terceira equação, tira-se $C_3 = 2C_1 + 2C_2 = 2$. Conclui-se que C_2 (o expoente do peso) é igual a 0 ou, em outras palavras, que a distância procurada é independente do peso do corpo, que cai, sendo dada por $s = CgT^2$.

Se, em aplicação do teorema de Bridgman, omite-se uma das grandezas primárias de que a grandeza secundária depende, todos os expoentes podem (embora não necessariamente) anular-se ou uma inequação pode aparecer ao se igualarem as dimensões membro a membro.

c) Se se supusesse que a distância percorrida por um corpo em queda livre, no vácuo e a partir do repouso, só depende da duração da queda, escrever-se-ia $s = CT^C$ e, dimensionalmente, $L = T^C$ o que acarretaria o aparecimento de:

$$1 = 0 \text{ (o que é uma inequação; isto é, um absurdo)}$$

$$C = 0$$

A primeira das duas equações acima mostraria que o raciocínio de partida continha erro e a segunda equação o confirmaria, pois está em contradição com o que se admitiu inicialmente.

2.5.2 - Nesta altura já se pode vislumbrar o seguinte fato:

A análise dimensional não pode ser considerada como uma chave mágica que nos permita estabelecer equações em qualquer assunto, sem que precisemos estudá-lo e conhecê-lo intrinsecamente. Só se pode aplicar o teorema de Bridgman a grandezas entre as quais há alguma razão teórica ou experimental para admitir-se que exista uma relação. Veremos oportunamente como se podem formular absurdos, sem qualquer realidade física, de maneira aparentemente irrepreensível do ponto de vista da análise dimensional.

O passo realmente difícil, na aplicação do teorema de Bridgman, é o primeiro a ser dado: a identificação correta das grandezas primárias. Se algum erro for cometido neste primeiro passo, há casos, conforme dois acima vistos, em que a análise dimensional permite detectá-los. Nem sempre, porém, tal coisa acontece.

2.5.3 - A limitação do teorema de Bridgman

O teorema em questão só permite determinar inteiramente os valores dos expoentes incógnitas quando o número de tais incógnitas é igual ao número de equações independentes de condição a que podemos recorrer. Se o número de incógnitas for maior que o número de equações de condição, nem todos os expoentes poderão ser determinados por via meramente dimen-

sional. Ainda neste caso, porém, a análise dimensional é útil porque ela nos permite agrupar os expoentes desconhecidos de modo a guiar e facilitar o trabalho experimental que poderá determiná-los.

a) Suponhamos que se queira determinar a forma da relação entre a distância vertical percorrida em queda livre por um corpo, no vácuo, que cai com uma velocidade inicial v_0 , a aceleração da gravidade e a duração da queda.

Ter-se-á:

$$s = f(v_0, t, g) \text{ e } s = C_1 v_0^{C_2} t^{C_3} \quad (1)$$

Escrevemos as expressões dimensionais:

$$\begin{aligned} [s] &= L \\ [g] &= LT^{-2} \\ [v] &= LT^{-1} \\ [t] &= T \end{aligned}$$

O que conduz a

$$L = (LT^{-2})^{C_1} (LT^{-1})^{C_2} T^{C_3} \quad \text{ou}$$

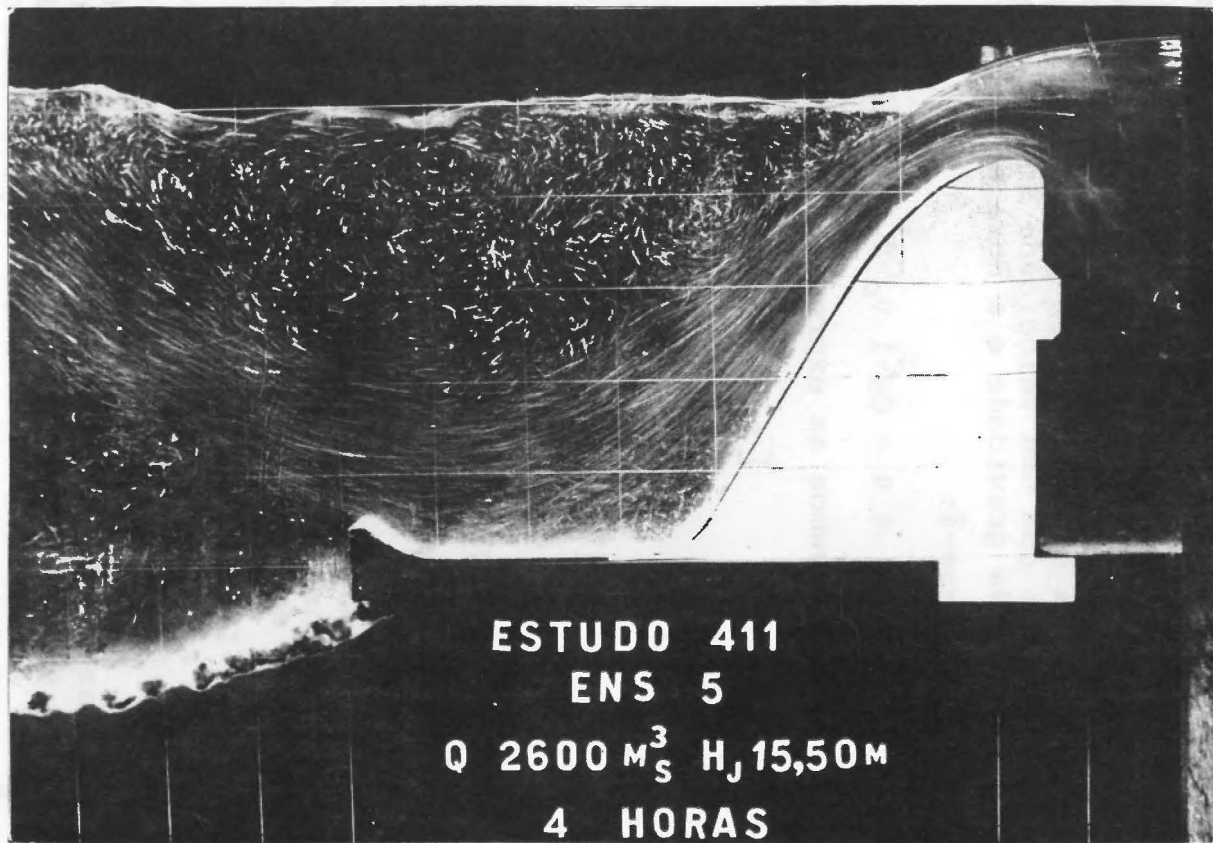
$$L = L^{C_1+C_2} T^{-2C_1-C_2+C_3}$$

Temos três incógnitas a determinar por via dimensional (C_1, C_2, C_3), mas dispomos de apenas duas equações de condição:

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$-2C_1 - C_2 + C_3 = 0$$

Não será possível, em caso como este, determinar por via dimensional os valores de todos os expoentes. O caminho a seguir, a fim de guiar e facilitar o trabalho experimental que será necessário, consiste neste caso em exprimir duas das incógnitas em função da terceira,



5 - Vista geral do escoamento sobre o modelo (1/60) do sangrador da barragem de Anel de Dom Marco, RS (IPH da UFRGS)

considerada como se fosse uma constante. Expri-
mamos C_2 e C_3 em função de C_1 :

$$C_2 = 1 - C_1$$

$$C_3 = C_2 + 2C_1 = 1 - C_1 + 2C_1 = 1 + C_1$$

Substituindo em (1), C_2 e C_3 por suas
expressões em função de C_1 , resulta:

$$s = C v_{0t} \left(\frac{gt}{v_0} \right) C_1$$

Ensaios adequadamente conduzidos re-
velariam que $C_1 = 1$ e $C = \frac{1}{2} + \frac{v_0}{gt}$. Levando a

(2) esta expressão de C , resultaria a expres-
são final

$$s = v_{0t} + \frac{1}{2} gt^2$$

A vantagem do procedimento acima ex-
posto reside em ter diminuído o número de pa-
râmetros a determinar experimentalmente. Em (1)
havia 4 incôgnitas a determinar: C, C_1, C_2, C_3 .

Em (2) tinham-se reduzido às duas in-
côgnitas a determinar experimentalmente: C e C_1 .

b) Consideremos agora o caso em que
o número das incôgnitas a determinar, na ex-
pressão resultante da aplicação do teorema de
Bridgman, supera em mais de 1 o número das e-
quações de condição.

Suponhamos que se queira determinar
a forma da relação entre a distância vertical
percorrida em queda livre por um corpo esféri-
co que cai, com uma velocidade inicial \underline{v} , não
no vácuo, mas em um meio fluido caracterizado
por uma determinada massa específica e um de-
terminado coeficiente de viscosidade dinâmica.

Temos $s = f(g, v, t, m, d, \rho, \mu)$ (1) onde
 s é a distância vertical procurada
 g é a aceleração da gravidade
 v é a velocidade inicial
 t é a duração da queda
 m é a massa do corpo
 d é o diâmetro do corpo
 ρ é a massa específica do meio fluido
 μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica.

O teorema de Bridgman nos permite escrever:

$$s = C_g^{C_1} v^{C_2} t^{C_3} m^{C_4} d^{C_5} \rho^{C_6} \mu^{C_7} \quad (1)$$

onde, além do coeficiente C , temos sete incógnitas a determinar. Entretanto, só dispomos de três equações de condição, cada uma das quais corresponde às dimensões de uma das três grandezas fundamentais L, M, T . Substituindo em (1) cada grandeza por sua expressão dimensional em L, M, T , resulta:

$$L = (L T^{-2})^{C_1} (L T^{-1})^{C_2} T^{C_3} M^{C_4} L^{C_5} (M L^{-3})^{C_6} (M L^{-1} T^{-1})^{C_7}$$

Desenvolvendo as potenciações:

$$L = L^{C_1} T^{-2C_1} L^{C_2} T^{-C_2} T^{C_3} M^{C_4} L^{C_5} M^{C_6} L^{-3C_6} M^{C_7} L^{-C_7} T^{-C_7}$$

Agrupando as potências de mesma base:

$$L = L^{C_1 + C_2 + C_5 - 3C_6 - C_7} M^{C_4 + C_6 + C_7} T^{-2C_1 - C_2 + C_3 - C_7}$$

Igualando membro a membro as dimensões das três grandezas fundamentais nos dois membros da equação anterior, resultam as três equações de condição:

$$C_1 + C_2 + C_5 - 3C_6 - C_7 = 1 \quad (2)$$

$$C_4 + C_6 + C_7 = 0 \quad (3)$$

$$-2C_1 - C_2 + C_3 - C_7 = 0 \quad (4)$$

Exprimamos três destas incôgnitas, por exemplo, C_1 , C_2 , C_7 , em função das outras quatro C_3 , C_4 , C_5 , C_6 .

De (3) tira-se: $C_7 = C_4 - C_6$ (5). Levando esta expressão de C_7 em (2), vem: $C_1 + C_2 + C_5 - 3C_6 + C_4 + C_6 = 1$ (6). De (4) e (5) tira-se $C_2 = -2C_1 + C_3 + C_4 + C_6$ (7). Substituímos em (6) C_2 por sua expressão na equação anterior: $C_1 - 2C_1 + C_3 + C_4 + C_6 + C_5 - 3C_6 + C_4 + C_6 = 1$.

Reduzindo os termos semelhantes, fica:

$$-C_1 + C_3 + 2C_4 + C_5 - C_6 = 1, \text{ donde se tira...}$$

$$C_1 = C_3 + 2C_4 + C_5 - C_6 - 1.$$

Levando agora esta expressão de C_1 em (7) e reduzindo os termos semelhantes, obtém-se: $C_2 = -2C_3 - 4C_4 - 2C_5 + 2C_6 + 2 + C_3 + C_4 + C_6 = -C_3 - 3C_4 - 2C_5 + 3C_6 + 2$

As expressões finais são portanto:

$$C_1 = C_3 + 2C_4 + C_5 - C_6 - 1$$

$$C_2 = -C_3 - 3C_4 - 2C_5 + 3C_6 + 2$$

$$C_7 = -C_4 - C_6$$

que, substituídas em (1), produzem:

$$s = C_g C_3 + 2C_4 + C_5 - C_6 - 1 - C_3 - 3C_4 - 2C_5 + 3C_6 + 2$$

$$t C_3 + m C_4 + d C_5 + p C_6 + \mu - C_4 - C_6$$

Agupando as potências de mesma base, resulta:

$$s = C \frac{v^2}{g} \frac{(gt)^{C_3}}{v} \frac{(g^2 m)^{C_4}}{\mu v^3} \frac{(gd)^{C_5}}{v} \frac{(v^2 \rho)^{C_6}}{g}$$

Das oito incógnitas iniciais reduziu-se a cinco (C, C_3, C_4, C_5, C_6) o número de incógnitas a determinar experimentalmente.

2.6 - EXERCÍCIOS

1) Transformar uma velocidade de 7 pés por segundo (7ft/s) em anos-luz por minuto.

2) Determinar, por análise dimensional, a forma da relação entre a velocidade do som (C) em um fluido, em determinado estado, a pressão (p) e a massa específica do fluido (ρ).

3) Um ponto (sem massa) se move em trajetória circular de raio r com velocidade constante v . Estabelecer por análise dimensional, a equação básica para a aceleração normal de tal ponto.

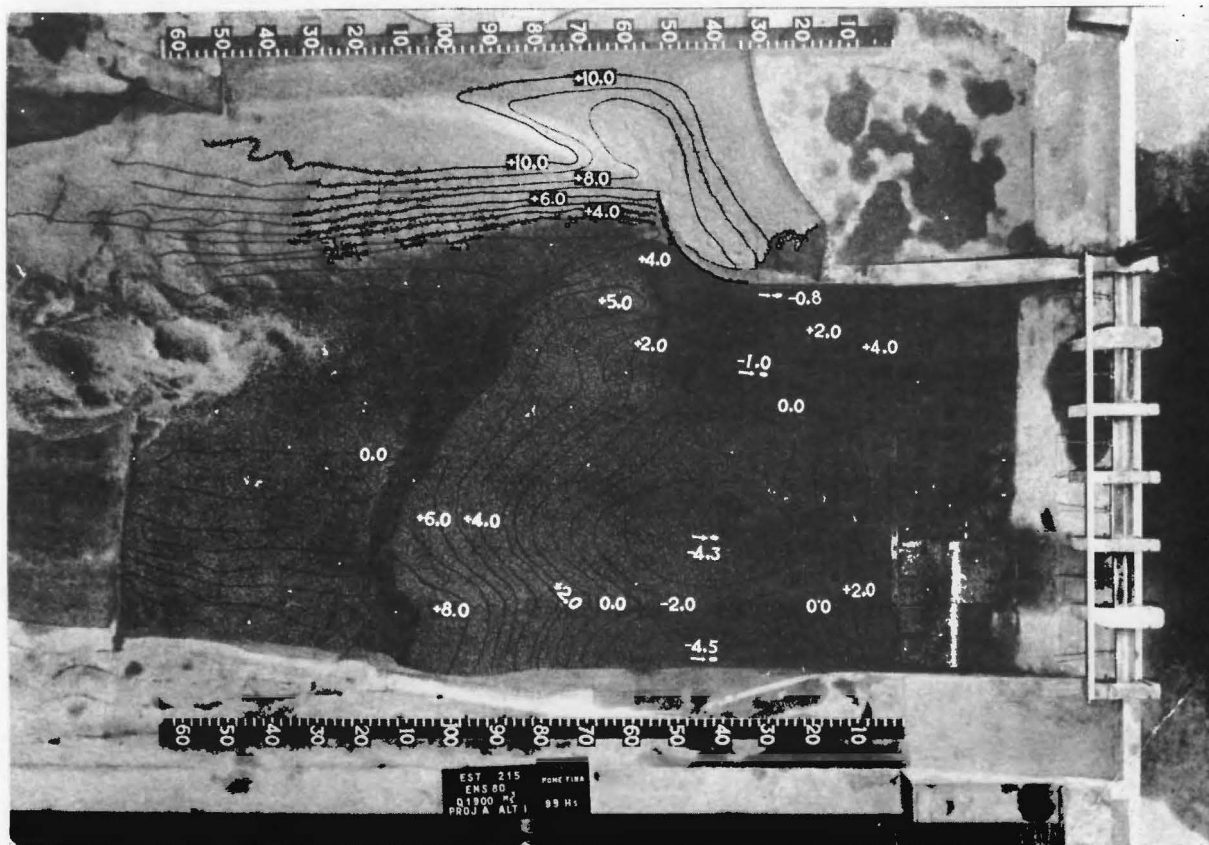
4) Determinar, por análise dimensional, a expressão da energia cinética de uma massa m que se desloca à velocidade v .

5) Uma esfera maciça e homogênea de diâmetro d e massa m gira, sem atrito, em torno de eixo horizontal, que passa por seu centro, com velocidade angular ω . Deduzir, por análise dimensional, a expressão da potência necessária para trazer tal esfera ao repouso.

6) Determinar, por análise dimensional, a expressão do trabalho necessário para a mesma finalidade.

7) Desenvolver, por análise dimensional, uma expressão para a força total (F) desenvolvida quando a massa \underline{m} , a velocidade \underline{v} , se choça com objeto perfeitamente rígido.

8) Determinar, por análise dimensional, a forma da relação entre a vazão (Q) sobre um vertedor, a carga \underline{h} e a aceleração da gravidade. Supõe-se desprezível a velocidade de chegada.



6 - Configuração de erosão a jusante de sangrador

3 - ESTABELECIMENTO DAS EQUAÇÕES DE PREVISÃO

3.1 - Nunca será demais ressaltar a importância de equações precisas de previsão em qualquer campo de Engenharia. Constituem os instrumentos que, complementados pelo julgamento e pela experiência do engenheiro, tornam-lhe possível projetar estruturas e máquinas.

Dispõe-se de dois métodos para estabelecer equações de previsão: o método experimental e o analítico. O primeiro consiste em estabelecer, por meio de observações e medidas cuidadosas, o efeito das variáveis pertinentes sobre os valores da grandeza a serem previstos. O outro método consiste em aplicar leis naturais gerais, pertinentes ao problema, a fim de estabelecer relações entre as variáveis que interessam. As leis naturais assim utilizadas são simplesmente generalizações de dados colhidos por observação e medição. A qualificação de experimental e analítico para tais métodos é, de certo modo, convencional. O método dito experimental envolve análise e o dito analítico exige ensaios para confirmação ou comprovação. A diferença está em que, no primeiro, é a própria experiência que estabelece a forma da relação de previsão, enquanto no segundo, tal forma se estabelece por via analítica e se recorre à experiência apenas em uma segunda etapa, para verificação ou comprovação.

Na lição precedente mostrou-se que a análise dimensional pode estabelecer a forma geral da equação de previsão para qualquer fenômeno físico. Entretanto, a técnica que se ensinou, constituída pelo teorema de Bridgman, não permite avaliação direta do coeficiente C e, quando o número de expoentes a determinarsu pera o número de equações de condição, nem sequer permite determinar os valores de todos os expoentes. Torna-se portanto necessário recorrer a ensaios a fim de completar a solução e determinar a equação de previsão.

Há três procedimentos possíveis a seguir.

Desenvolver-se-ã cada um deles aplicando-o ao problema já apresentado da queda livre de um corpo no vácuo, com uma velocidade inicial v_0 . Em qualquer destes processos, a primeira etapa é sempre a mesma e consiste em identificar as variáveis que interessam. Esta etapa é de muito a mais importante porque a própria validade dos resultados depende da exatidão com que se selecionam as variáveis a considerar.

a) No primeiro processo exprime-se a grandeza secundária como função das grandezas primárias:

$$s = f (v_0, t, g)$$

A seguir fazem-se observações a esmo das variáveis e comparam-se os valores da grandeza secundária (s) com os valores das grandezas primárias controláveis (v_0, t) ou traduz-se graficamente a variação de s em função da variação de v_0, t . Embora se tenha usado tal processo não-sistemático no estabelecimento de várias equações de uso corrente, conforme exemplos já vistos em hidráulica de fundo fixo e de fundo móvel, pode-se ser conduzido, ao proceder assim, a falsas conclusões e a desperdiçar

tempo. Ademais, a determinação de equações de previsão pode tornar-se muito laboriosa com mais de três variáveis independentes. Por estes motivos a acumulação de dados ao acaso nunca é recomendável.

b) No segundo processo desenvolve-se por análise dimensional a relação entre as variáveis e se chega a uma expressão da forma

$$s = C v_0^{C_1} g^{C_2} t^{C_3} \quad (1)$$

Nesta forma há quatro incógnitas: C , C_1 , C_2 , C_3 . Pode-se fazer uma série de observações ao acaso, medindo s , v , t . Substituem-se quatro conjuntos de valores na equação anterior e elimina-se C entre as equações por divisão. Uma vez que os expoentes são constantes, pode-se determiná-los a partir destas três equações resultantes. Uma vez que C é um fator adimensional, mas não necessariamente uma constante, não é necessariamente determinável a partir de qualquer uma das quatro equações obtidas por substituição dos valores experimentais. Deve-se avaliar o C por substituições sucessivas de valores experimentais ou pelo traçado de um gráfico. Isto pode apresentar algumas dificuldades quando C é uma função de todas as grandezas primárias. Um aperfeiçoamento possível consiste em sistematizar a coleta de dados mantendo todas as grandezas primárias, menos uma, constante e em variar esta última a fim de estudar seus efeitos na grandeza secundária. A seguir varia-se outra grandeza primária e assim sucessivamente. Um processo mais conveniente é o que passamos a expor.

c) Em geral, um meio mais satisfatório de avaliar C e os expoentes consiste em continuar a aplicação da análise dimensional além da forma obtida na equação (1) de modo a obter uma equação do tipo indicado no exemplo em que

mostramos a aplicação do teorema de Bridgman, caso em que o número de expoentes a determinar excede o número de equações disponíveis de condição. Se dividirmos ambos os membros de (1) pela grandeza que multiplica C e os termos elevados ao expoente desconhecido, resulta uma equação da forma

$$\frac{s}{v_0 t} = C \left(\frac{gt}{v_0}\right)^{C_1} \quad (2) \quad s = C v_0 t \left(\frac{gt}{v_0}\right)^{C_1}$$

Medindo valores de s , v_0 e t e com g conhecido, reduz-se a dois o número de incógnitas (C e C_1).

Assim, a continuação da aplicação da análise dimensional, de modo a transformar (1) em (2), elimina duas incógnitas e reduz apreciavelmente o trabalho experimental.

Se o C for uma constante, bastarão dois conjuntos de medidas para determinar C e C_1 : Se, no caso geral, C não é constante, mas sim uma função das grandezas primárias, tem-se de fazer uma série de medições. A partir destas, determinam-se valores de $s/v_0 t$ e traça-se o gráfico que traduz sua variação em função de gt/v_0 como abscissa. A curva resultante fornece ao mesmo tempo C e C_1 . No caso em consideração, de queda livre, os dados experimentais se dispõem segundo uma reta e se pode determinar facilmente a equação de tal reta. Se os dados não fornecem uma reta, e sim uma curva contínua, determinam-se valores de C e C_1 substituindo ordenadas e abscissas para dois pontos representativos e resolvendo a equação. Pode-se verificar a precisão de tais valores recalculando outras coordenadas da equação resultante e comparando-as com os valores medidos. Se a curva passar pela origem ou for assíntota dos eixos coordenados, podem determinar-se facilmente valores de C e C_1 em gráfico logarítmico.

3.2 - Já conhecemos a limitação do teorema de Bridgman. Veremos agora que a análise dimensional possui um instrumento mais poderoso para estabelecer equações de previsão. Trata-se do teorema de Buckingham, também conhecido por "teorema dos π ". Além do estabelecimento de equações de previsão, este teorema é muito fecundo em outra aplicação: a formulação de condições de semelhança a serem obedecidas por modelos físicos.

3.3 - Teorema de Buckingham

Suponhamos que um fenômeno físico qualquer se rege por uma relação entre n grandezas, cada uma das quais tem uma expressão dimensional em termos de p grandezas fundamentais. O teorema de Buckingham nos diz que se poderá exprimir tal fenômeno por uma relação entre $n-p$ grandezas adimensionais e independentes entre si.

Se se tratar de grandezas puramente mecânicas, $p = 3$. Tratando-se de grandezas puramente cinemáticas, grandezas em cujas expressões dimensionais a massa ou a força não figura, $p = 2$. Tratando-se de um fenômeno térmico ou elétrico, $p = 4$. No caso de um fenômeno termoeletrico, $p = 5$. Se o fenômeno envolve uma relação entre n grandezas, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, teremos

$f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 0$ em forma implícita

$a_1 = \phi(a_2, a_3, \dots, a_n)$ em forma explícita

O teorema de Buckingham nos diz que se poderá escrever:

$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-p}) = 0$ em forma implícita

ou

$\pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-p}) = 0$ em forma explícita.

Como o fenômeno se traduz por relação entre n grandezas, sabemos pelo teorema de Bridgman que se poderá escrever

$$a_1 = C a_2^{C_2} a_3^{C_3} \dots a_n^{C_n}$$

Dividindo ambos os membros desta última equação por a_1 , resulta:

$$1 = C a_1^{-1} a_2^{C_2} a_3^{C_3} \dots a_n^{C_n}$$

Chamando de C_1 o expoente -1 de a_1 , resulta a expressão do teorema de Bridgman, em forma implícita:

$$C a_1^{C_1} a_2^{C_2} a_3^{C_3} \dots a_n^{C_n} = 1 \quad (3)$$

a partir do qual se demonstra o teorema de Buckingham.

Com efeito, escrevamos, em forma generalizada, a expressão dimensional de qualquer dos a em termos das p grandezas fundamentais.

Ter-se-á:

$$a_i = d_1^{x_{1i}} d_2^{x_{2i}} d_3^{x_{3i}} \dots d_p^{x_{pi}} \quad (4)$$

onde x_{1i} é o expoente da primeira grandeza fundamental (d_1) na expressão dimensional da grandeza a_i , e assim por diante.

Substituindo em (3) as grandezas a_i pelas respectivas expressões dimensionais em termos das p grandezas fundamentais, resulta:

$$C (d_1^{x_{11}} d_2^{x_{21}} \dots d_p^{x_{p1}})^{C_1} \\ (d_1^{x_{12}} d_2^{x_{22}} \dots d_p^{x_{p2}})^{C_2} \dots (d_1^{x_{1n}} d_2^{x_{2n}} \dots d_p^{x_{pn}})^{C_n} \\ = 1$$

Efetuando as potenciações e agrupando as potências de mesma base, ter-se-á:

$$d_1^{C_1 x_{11} + C_2 x_{12} + \dots + C_n x_{1n}} d_2^{C_1 x_{21} + C_2 x_{22} + \dots + C_n x_{2n}} \dots d_p^{C_1 x_{p1} + C_2 x_{p2} + \dots + C_n x_{pn}} = 1$$

A homogeneidade dimensional dos dois membros desta última equação nos fornece \underline{p} equações de condição com \underline{n} incógnitas. As \underline{p} equações de condição são:

$$C_1 x_{11} + C_2 x_{12} + \dots + C_n x_{1n} = 0$$

$$C_1 x_{21} + C_2 x_{22} + \dots + C_n x_{2n} = 0$$

.....

$$C_1 x_{p1} + C_2 x_{p2} + \dots + C_n x_{pn} = 0$$

As \underline{n} incógnitas são os expoentes C_i que, nas equações acima, têm como coeficientes as dimensões x . Quaisquer \underline{p} incógnitas podem ser expressas em função das restantes $(n-p)$ incógnitas, desde que o determinante formado pelos coeficientes das \underline{p} incógnitas escolhidas seja diferente de zero. Em outras palavras, se tratarmos as $(n-p)$ incógnitas restantes como se fossem constantes, as \underline{p} equações resultantes devem ser independentes entre si.

Portanto, \underline{p} dos expoentes na equação (3) podem ser expressos em função dos $(n-p)$ expoentes restantes.

Os termos de mesmos expoentes podem ser agrupados e cada grupo resultante será adimensional porque cada expoente deve satisfazer às equações simultâneas baseadas na homogeneidade dimensional. Uma vez que o termo em C pode ser uma função das variáveis em causa, a equação resultante da substituição em (1) será da forma:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-p}) = 0$$

onde os π são as grandezas adimensionais resultantes. A única restrição imposta aos π é que sejam adimensionais e independentes entre si.

3.3.1 - Aprender-se-á a maneira prática de armar os parâmetros adimensionais (os π) ao ver a aplicação prática do teorema de Buckingham às grandezas que intervêm no caso mais geral de escoamento de um fluido. Em seguida, aplicaremos o mesmo teorema a um fenômeno de hidráulica de fundo fixo, o escoamento sobre um vertedor, e a um fenômeno de hidráulica de fundo móvel, a formação de perfil de equilíbrio de praia pela ação das ondas do mar.

3.3.2 - Apliquemos o teorema de Buckingham ao caso mais geral de escoamento de um fluido, tendo a gravidade como força motriz.

Considerado de um ponto de vista mais geral, pode-se dizer que qualquer problema de mecânica de fluidos consiste essencialmente em prever pressões ou velocidades no seio de uma massa fluida em movimento. Estas duas espécies de grandezas se ligam entre si por relações energéticas como o teorema de Bernouilli ou o princípio da conservação das quantidades de movimento.

Em geral as grandezas, a considerar em problemas de escoamento de fluidos, são as seguintes:

- p = pressões;
- v = velocidades;
- l = uma característica geométrica longitudinal, por exemplo, o comprimento de um conduto forçado ou de canal;
- λ = uma característica geométrica transversal, como diâmetro de um conduto forçado de seção transversal circular ou o raio hidráulico de uma seção de canal;

- η = uma característica geométrica das irregularidades nas paredes sólidas que delimitam o escoamento, por exemplo, uma altura média de asperezas;
- ρ = a massa específica do fluido em escoamento;
- μ = o coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido em escoamento;
- σ = o coeficiente de tensão superficial do fluido;
- ε = o coeficiente de compressibilidade volumétrica do fluido;
- g = a aceleração da gravidade.

Constata-se que precisamos de grandes características a caracterizando a dinâmica do escoamento (p, v, g), sua geometria (ℓ, λ, η) e a natureza do fluido ($\rho, \mu, \sigma, \varepsilon$).

Podemos então escrever que o caso mais geral de escoamento de fluido, tendo a gravidade como força motriz, se rege por uma relação do tipo:

$$f(p, v, \ell, \lambda, \eta, \rho, \mu, \sigma, \varepsilon, g) = 0$$

Temos dez grandezas a considerar. Suas expressões dimensionais envolvem três grandezas fundamentais (M, L, T). O teorema de Buckingham nos leva a prever sete grandezas adimensionais e independentes entre si ($10-3=7$) para exprimir a mesma relação. Ter-se-á:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7) = 0$$

Precisamos determinar cada um dos π .

Em primeiro lugar, escrevamos a expressão dimensional de cada uma das dez grandezas em consideração.

$$\begin{array}{ll} [p] = ML^{-1} T^{-2} & [\lambda] = L \\ [v] = LT^{-1} & [\eta] = L \\ [\ell] = L & [\rho] = ML^{-3} \end{array}$$

$$[\mu] = ML^{-1} T^{-1} \quad [\epsilon] = MLT^{-2} L^{-2} = ML^{-1} T^{-2}$$

$$[\sigma] = MLT^{-2} L^{-1} = MT^{-2} \quad [g] = LT^{-2}$$

Aplicando o teorema de Bridgman, em forma implícita, às grandezas consideradas, teríamos:

$$C_p^{C_1} v^{C_2} \rho^{C_3} \lambda^{C_4} \eta^{C_5} \rho^{C_6} \mu^{C_7} \sigma^{C_8} \epsilon^{C_9} g^{C_{10}} = 1$$

Substituindo-se cada uma das grandezas nesta equação, pela respectiva expressão dimensional, resultaria:

$$(ML^{-1}T^{-2})^{C_1} (LT^{-1})^{C_2} L^{C_3} L^{C_4} L^{C_5} (ML^{-3})^{C_6} \\ (ML^{-1}T^{-1})^{C_7} (ML^{-2})^{C_8} (ML^{-1}T^{-2})^{C_9} (LT^{-2})^{C_{10}} = 1$$

Desenvolvendo as potenciações, vem:

$$M^{C_1 L^{-C_2 T^{-2} C_1 L^{C_2 T^{-2} C_2 L^{C_3 L^{C_4 L^{C_5 M^{C_6 L^{-3} C_6 M^{C_7 L^{-C_7} X} \\ T^{-C_7 M^{C_8 T^{-2} C_8 M^{C_9 L^{-C_9 T^{-2} C_9 L^{C_{10} T^{-2} C_{10}} = 1$$

Agrupando as grandezas fundamentais, fica:

$$M^{C_1+C_6+C_7+C_8+C_9} L^{-C_1+C_2+C_3+C_4+C_5-3C_6-C_7-C_9+C_{10}} \\ T^{-2C_1-C_2-C_7-2C_8-2C_9-2C_{10}} = 1$$

Exprimindo a homogeneidade dimensional dos dois membros da última equação, resultam as três equações de condição:

$$C_1+C_6+C_7+C_8+C_9 = 0$$

$$-C_1+C_2+C_3+C_4+C_5-3C_6-C_7-C_9+C_{10} = 0$$

$$2C_1+C_2+C_7+2C_8+2C_9+2C_{10} = 0$$

Temos dez incógnitas e três equações de condição.

Podemos escolher três incógnitas e exprimi-las em função das sete restantes, consideradas como se fossem constantes, desde que o determinante formado pelos coeficientes das incógnitas escolhidas seja diferente de zero.

Escolhamos as incógnitas C_2, C_3, C_6 . Podemos fazê-lo porque o determinante formado pelos coeficientes respectivos é diferente de zero. Com efeito:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Arman-se os 7 parâmetros adimensionais (π) atribuindo valores arbitrários às incógnitas tratadas como constantes, substituindo tais valores nas equações de condição e determinando os respectivos valores das incógnitas escolhidas.

Tínhamos escolhido C_2, C_3, C_6 . Atribuiremos valores arbitrários a $C_1, C_4, C_5, C_7, C_8, C_9, C_{10}$. Fazemos primeiramente $C_1 = 1$ e $C_4 = C_5 = C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = 0$. Levando tais valores às equações de condição, vem:

$$1 + C_6 = 0$$

$$-1 + C_2 + C_3 - 3C_6 = 0$$

$$2 + C_2 = 0$$

A solução deste sistema nos dá:

$$C_6 = -1$$

$$C_2 = -2$$

$$C_3 = 0$$

Atribuindo tais valores, inclusive $C_1 = 1$, aos expoentes das grandezas respectivas, resulta o primeiro π . Temos

$$\pi_1 = \frac{p}{\rho v^2}$$

Façamos agora $C_4 = 1$ e $C_1 = C_5 = C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = 0$.

Levando estes valores às equações de condição resulta o sistema:

$$C_6 = 0$$

$$C_2 + C_3 + 1 - 3C_6 = 0$$

$$C_2 = 0$$

cuja solução é: $C_2 = 0$, $C_3 = -1$, $C_6 = 0$. Levando estes valores, inclusive $C_4 = 1$, aos expoentes, resulta o seguinte π :

$$\pi_2 = \frac{\lambda}{l}$$

Façamos $C_5 = 1$ e $C_1 = C_4 = C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = 0$

Ficaremos com o sistema:

$$C_6 = 0$$

$$C_2 + C_3 + 1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

cuja solução é: $C_2 = 0$, $C_3 = -1$, $C_6 = 0$

O terceiro π será $\pi_3 = \frac{\gamma_1}{l}$

Fazendo $C_7 = 1$ e $C_1 = C_4 = C_5 = C_8 = C_9 = C_{10} = 0$, resulta:

$$C_6 + 1 = 0$$

$$C_2 + C_3 - 3C_6^{-1} = 0$$

$$C_2 + 1 = 0$$

cuja solução é: $C_2 = -1$, $C_3 = -1$, $C_6 = -1$. O quarto π será:

$$\pi_4 = \frac{\mu}{\rho v \ell}$$

Fazendo $C_8 = 1$ e $C_1 = C_4 = C_5 = C_7 = C_9 = C_{10} = 0$, resulta:

$$C_6 + 1 = 0$$

$$C_2 + C_3 - 3C_6 = 0$$

$$C_2 + 2 = 0$$

cuja solução é: $C_2 = -2$, $C_3 = -1$, $C_6 = -1$. O quinto π será:

$$\pi_5 = \frac{\sigma}{\rho v^2 \ell}$$

Fazendo $C_9 = 1$ e $C_1 = C_4 = C_5 = C_7 = C_8 = C_{10} = 0$, resulta:

$$C_6 + 1 = 0$$

$$C_2 + C_3 - 3C_6 - 1 = 0$$

$$C_2 + 2 = 0$$

cuja solução é: $C_2 = -2$, $C_3 = 0$, $C_6 = -1$. O sexto π será:

$$\pi_6 = \frac{\varepsilon}{\rho v^2}$$

Fazendo, finalmente, $C_{10} = 1$ e $C_1 = C_4 = C_5 = C_7 = C_8 = C_9 = 0$, resulta:

$$C_6 = 0$$

$$C_2 + C_3 - 3C_6 + 1 = 0$$

$$C_2 + 2 = 0$$

cuja solução é: $C_2 = -2$, $C_3 = 1$, $C_6 = 0$. O sétimo π será:

$$\pi_7 = \frac{g\ell}{v^2}$$

Em forma implícita, o teorema de Buckingham nos forneceu portanto

$$F\left(\frac{p}{\rho v^2}, \frac{\lambda}{\ell}, \frac{\eta}{\ell}, \frac{\mu}{\rho v \ell}, \frac{\sigma}{\rho v^2 \ell}, \frac{\varepsilon}{v^2}, \frac{g\ell}{v^2}\right) = 0$$

Em forma explícita,

$$\frac{p}{\rho v^2} = \psi_1\left(\frac{\lambda}{\ell}, \frac{\eta}{\ell}, \frac{\mu}{\rho v \ell}, \frac{\sigma}{\rho v^2 \ell}, \frac{\varepsilon}{\rho v^2}, \frac{g\ell}{v^2}\right)$$

Desde que estes parâmetros permaneçam adimensionais e independentes entre si, podemos fazer com qualquer deles qualquer transformação, por exemplo, invertê-los, elevá-los a qualquer potência inteira ou fracionária, etc. Apenas a forma da relação mudaria, mas qualquer das formas, assim obtidas, seria válida. Podemos então transformar a função acima na seguinte:

$$\frac{p}{\rho v^2} = \psi_2\left(\frac{\lambda}{\ell}, \frac{\eta}{\ell}, \frac{\rho v \ell}{\mu}, \frac{\rho v^2 \ell}{\sigma}, \frac{v}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{v}{\sqrt{g\ell}}\right)$$

Vários dos parâmetros adimensionais, que figuram na última expressão, têm nomes particulares e significação física própria que veremos posteriormente.

O parâmetro $\frac{\rho v \ell}{\mu} = \mathfrak{R}$ é o chamado número de Reynolds e exprime uma razão entre forças de inércia e forças de viscosidade.

O parâmetro $\frac{v}{\sqrt{g\ell}} = \mathfrak{F}$ é o chamado número de Froude e exprime uma razão entre forças de inércia e forças de gravidade. Na França muitas vezes se encontra o nome de número

de Reech para o mesmo parâmetro e há quem dê o nome de número de Boussinesq ao quadrado do número de Froude ($V^2/\ell g$).

O parâmetro $\rho v^2 \ell / \sigma = W$ é o chamado número de Weber e exprime uma razão entre forças de inércia e forças de tensão superficial.

Finalmente, o parâmetro $v/\sqrt{\rho} = M$ é o chamado número de Mach. Exprime uma razão entre forças de inércia e forças de compressibilidade.

Na realidade, o fator $\sqrt{c/\epsilon}$ é a velocidade do som no estado, no sentido termodinâmico da palavra, em que se encontra o fluido. O número de Mach é pois a razão entre uma velocidade característica do fluido e a velocidade do som no fluido para o estado em que se encontra. Dá-se o nome de número de Cauchy ao quadrado do número de Mach.

Podemos então escrever, sob ainda outra forma, a relação que liga as grandezas a considerar no caso mais geral de escoamento de um fluido. Teremos:

$$\frac{p}{\rho v^2} = F \left(\frac{\lambda}{\ell}, \frac{n}{\ell}, R, F, W, M \right)$$

Em outras palavras, a função que rege o caso mais geral de escoamento de fluido é uma relação entre um termo adimensional, englobando a pressão e a velocidade, as características geométricas do escoamento e os números de Reynolds, Froude, Weber e Mach.

3.3.3 - Significado físico destes números adimensionais

Cada um destes números adimensionais é respectivamente igual a uma razão entre forças de inércia e forças de viscosidade, de gravidade, de tensão superficial e de compressibilidade, atuando sobre um elemento infinitesimal de fluido, conforme passamos a demonstrar.

a) A fim de estabelecer a significação física do número de Reynolds, consideremos o comprimento $d\ell$ de um elemento de conduto forçado de raio r . Consideremos duas superfícies fluidas, cilíndricas, concêntricas com o conduto forçado e distante de dr uma da outra. A massa fluida contida entre estas superfícies concêntricas está sujeita a uma força de viscosidade $F_1 = S_C \times 2\pi r d\ell$, na face mais próxima do centro do conduto, e a uma força de viscosidade $F_2 = S_C \times 2\pi (r + dr) d\ell$, na face mais distante. S_C é a tensão de cisalhamento despertada pela viscosidade e dada por:

$$S_C = \mu \frac{dv}{dr}$$

A resultante das forças de viscosidade, agindo sobre o volume elementar delimitado pelas duas superfícies concêntricas em questão será:

$$\begin{aligned} F_V &= F_2 - F_1 = 2\pi S_C (r+dr) d\ell - 2\pi S_C r d\ell = \\ &= 2\pi S_C dr d\ell \quad \text{ou} \end{aligned}$$

$$F_V = \mu \frac{dv}{dr} \times 2\pi dr d\ell = 2\pi\mu dv d\ell$$

Por outro lado, a força de inércia do mesmo volume elementar será:

$$\begin{aligned} F_i &= m j_r = \rho \pi [(r+dr)^2 - r^2] d\ell \frac{dv}{dt} = \rho \pi \times 2r dr dv = \\ &= 2\pi\rho r dv dr. \end{aligned}$$

Tomando a razão entre a força de inércia e a força de viscosidade, que atuam sobre o volume elementar considerado, vem:

$$\frac{F_i}{F_V} = \frac{2\pi\rho r dv dr}{2\pi\mu dv d\ell}$$

que, do ponto de vista dimensional, é idêntica a $\rho v r / \mu$. Esta razão é precisamente o número de Reynolds aplicado a escoamento em conduto forçado de seção transversal circular, tomando-se para parâmetro geométrico daquele número o raio da seção. Constata-se, pois, que o número de Reynolds exprime a razão entre a força de inércia e a força de viscosidade que atuam sobre um elemento de fluido. Pode-se, portanto, tomar o valor do número de Reynolds em um dado escoamento, isto é, um escoamento de dada geometria e de um fluido de dada natureza, como um índice da maior ou menor importância das forças de viscosidade em face das forças de inércia.

b) Consideremos agora um volume elementar de fluido, de arestas dx , dy , dz , em que da livre sob ação de seu próprio peso. O peso deste volume elementar ou, em outras palavras, a força de gravidade que sobre ele atua, é:

$$F_g = \rho g \, dx \, dy \, dz$$

A força de inércia, atuando sobre o mesmo volume, é:

$$F_i = \rho \, dx \, dy \, dz \, \frac{dv}{dt} = \rho \, dx \, dy \, \frac{dz}{dt} \, dv = \rho \, v \, dx \, dy \, dv$$

A razão entre a força de inércia e a força de gravidade presentes será:

$$\frac{F_i}{F_g} = \frac{\rho \, v \, dx \, dy \, dv}{\rho \, g \, dx \, dy \, dz} = \frac{v \, dv}{g \, dz}$$

que dimensionalmente é idêntica a $\frac{v^2}{g \ell}$,

sendo ℓ uma dimensão geométrica característica do escoamento. Esta razão é o número de Froude que, portanto, se presta a ser usado como índice de maior ou menor importância das forças de gravidade em face das forças de inércia presentes em um escoamento.

c) Consideremos agora um volume elementar fluido e esférico de raio r . A força de tensão superficial, que tende a manter solidários os dois hemisférios desta esfera fluida elementar, é:

$$F_t = 2\pi r\sigma$$

A força de inércia será, por sua vez, o produto da massa pela aceleração, isto é:

$$F_i = \rho \times \frac{2}{3} \pi r^3 \frac{dv}{dt}$$

que tem as mesmas dimensões de

$$F_i = \frac{2}{3} \pi \rho r^2 v \, dv$$

A razão entre força de inércia e força de tensão superficial terá as dimensões de:

$$\frac{F_i}{F_t} = \frac{\rho r^2 v \, dv}{r\sigma}$$

que também terá as mesmas dimensões de

$$\frac{F_i}{F_t} = \frac{\rho r v^2}{\sigma}$$

que é o número de Weber para a esfera elementar considerada. Constata-se que o número de Weber exprime uma razão entre forças de inércia e forças de tensão superficial presentes em um escoamento. Seu valor pode, portanto, ser tomado como índice da maior ou menor importância das forças de tensão superficial em face das forças de inércia presentes em um dado escoamento.

d) Consideremos, finalmente, um volume elementar dx , dy , dz submetido a uma força de compressão representada por uma pressão p que se aplica na face dx , dy . Tal força será

pois: $F_C = p dx dy$. Suponhamos que o fluido não seja incompressível, mas que sofra uma variação volumétrica dV sob a pressão p . Ter-se-á também que

$$p = \epsilon \frac{dV}{V},$$

onde ϵ é um coeficiente de compressibilidade volumétrica, e chamando de e a variação volumétrica unitária, isto é:

$$\frac{dV}{V} = e,$$

podemos escrever: $p = \epsilon e$. Portanto, a força de compressão será $F_C = \epsilon e dx dy$. A força de inércia agindo sobre o mesmo volume elementar, que se desloca à velocidade de v , no mesmo sentido em que se aplica a força de compressão, será:

$$F_i = \rho dx dy dz \frac{dv}{dt} = \rho dx dy v dv$$

A razão entre a força de inércia e a força de compressão, que atuam sobre o volume elementar, será:

$$\frac{F_i}{F_C} = \frac{\rho dx dy v dv}{\epsilon e dx dy}$$

que dimensionalmente é idêntica a

$$\frac{F_i}{F_C} = \frac{\rho v^2}{\epsilon e} = \frac{v^2}{\epsilon e / \rho}$$

Esta razão é o número de Cauchy.

Tal número é, portanto, igual à razão entre a força de compressão e a força de inércia atuando sobre um volume elementar de um fluido em escoamento e pode servir, ou sua raiz quadrada

$$\frac{v}{\sqrt{e/\rho}}$$

que é o número de Mach, como índice da maior

ou menor importância das forças de compressibilidade em face das forças de inércia presentes em um escoamento. Conforme já se assinalou, o denominador do número de Mach, $\sqrt{\epsilon e/\rho}$, é a velocidade do som no fluido, para o estado em que este se encontra. Por conseguinte, quando se diz que um avião a jato voou a Mach 1, isto significa que tal avião voou à velocidade do som.

3.3.4 - Vejamos outras duas aplicações práticas do teorema de Buckingham.

Na primeira trataremos de um problema de hidráulica de fundo fixo: um escoamento sobre vertedor. Na outra abordaremos um problema de fundo móvel: a formação de perfil de equilíbrio de praia pela ação das ondas.

A análise dimensional apenas permite determinar os π - os parâmetros adimensionais que se traduzem as grandezas a considerar no fenômeno considerado. Somente ensaios sistemáticos permitiriam estabelecer a forma da relação entre os π . Desde logo, porém, transparecem as vantagens de se colocar a busca experimental de uma lei física em termos adimensionais:

a) o número de parâmetros a pesquisar se reduz e as grandezas de mesma espécie a parecem agrupadas, o que por si só pode constituir uma orientação para o trabalho experimental;

b) os valores a considerar para cada parâmetro adimensional (cada π) se tornam independentes do tamanho absoluto do sistema físico a que se referem, o que é fundamental para o trabalho em modelo.

3.3.4.1 - Aplicação do teorema de Buckingham a escoamento sobre um vertedor

Suporemos o caso mais geral, em que se tenha de considerar a presença de forças de inércia, gravidade, viscosidade e tensão superficial. São admitiremos que o líquido é incompressível, o que acarretará na eliminação do número de Mach.

As grandezas a considerar são (com as respectivas expressões dimensionais em M, L, T):

$[\ell]$ = L uma dimensão geométrica do vertedor, transversal ao sentido do escoamento;

$[d]$ = L uma dimensão geométrica vertical, característica do vertedor (ℓ e d definem a forma do vertedor, característica do vertedor: retangular ou triangular, etc...);

$[h]$ = L carga

$[Q]$ = L^3T^{-1} vazão

$[v]$ = LT^{-1} velocidade de chegada a montante do vertedor;

$[g]$ = LT^{-2} aceleração da gravidade;

$[\rho]$ = ML^{-3} massa específica do líquido;

$[\mu]$ = $ML^{-1}T^{-1}$ coeficiente de viscosidade dinâmica do líquido;

$[\sigma]$ = MT^{-2} coeficiente de tensão superficial do líquido.

O fenômeno é, pois, regido por uma relação $f(\ell, d, h, Q, v, g, \rho, \mu, \sigma) = 0$. Temos 9 grandezas que se podem exprimir dimensionalmente em termos de três grandezas fundamentais (M, L, T). Pelo teorema de Buckingham aquela relação pode ser substituída por outra que liga entre si $9-3 = 6$ parâmetros adimensionais e independentes entre si: Ter-se-á:

$$\phi (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) = 0.$$

Resta exprimir cada um dos π em função das grandezas que interessam.

A aplicação do teorema de Bridgman ao fenômeno nos fornece:

$$c \ell^{c_1} d^{c_2} h^{c_3} Q^{c_4} v^{c_5} g^{c_6} \rho^{c_7} \mu^{c_8} \sigma^{c_9} = 1$$

Substituindo nesta equação cada grandeza por sua expressão dimensional em M, L, T, tem-se:

$$L^{c_1} L^{c_2} L^{c_3} (L^3 T^{-1})^{c_4} (L T^{-1})^{c_5} (L T^{-2})^{c_6} (M L^{-3})^{c_7} \\ (M L^{-1} T^{-1})^{c_8} (M T^{-2})^{c_9} = 1$$

Desenvolvendo as potenciações e agrupando as potências de mesma base vem:

$$L^{c_1+c_2+c_3+3c_4+c_5+c_6-3c_7-c_8} M^{c_7+c_8+c_9} \\ T^{c_4-c_5-2c_6-c_8-2c_9} = 1$$

Escrevendo a homogeneidade adimensional dos dois membros da última equação, em relação a cada uma das três grandezas fundamentais, resultam as três equações de condição:

$$c_1+c_2+c_3+3c_4+c_5+c_6-3c_7-c_8 = 0$$

$$c_7+c_8+c_9 = 0$$

$$+c_4+c_5+2c_6+c_8+2c_9 = 0$$

Temos três equações e nove incógnitas. Podemos escolher três incógnitas e exprimi-las em função das outras seis, tratando estas como se fossem constantes, desde que o determinante das incógnitas escolhidas seja dife

rente de zero. Escolhamos c_3, c_6, c_7 e atribuímos valores arbitrários às incógnitas restantes ($c_1, c_2, c_4, c_5, c_8, c_9$). Podemos fazê-lo porque o determinante formado pelos coeficientes de c_3, c_6, c_7 é diferente de zero. Com efeito

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Façamos agora $c_1 = 1$ e $c_2 = c_4 = c_5 = c_8 = c_9 = 0$.

Resulta o sistema de equações:

$$1 + c_3 + c_6 - 3c_7 = 0$$

$$c_7 = 0$$

$$2c_6 = 0$$

cuja solução é:

$$c_3 = -1, c_6 = 0, c_7 = 0$$

O primeiro π será:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{h}$$

Fazendo $c_2=1$ e $c_1=c_4=c_5=c_8=c_9 = 0$, resulta:

$$1 + c_3 + c_6 - 3c_7 = 0$$

$$c_7 = 0$$

$$2c_6 = 0$$

cuja solução é: $c_3=-1, c_6=0, c_7=0$. O segundo π será:

$$\pi_2 = \frac{d}{h}$$

Fazendo $c_4=1$ e $c_1=c_2=c_8=c_9 = 0$, vem:

$$c_3 + 3 + c_6 - 3c_7 = 0$$

$$c_7 = 0$$

$$1 + 2c_6 = 0$$

cuja solução é: $c_3=-5/2$, $c_6=-1/2$, $c_7=0$. O terceiro π será:

$$\pi_3 = \frac{Q}{h^{5/2} g^{1/2}} = \frac{Q}{\sqrt{gh^5}}$$

Fazendo $c_5=1$ e $c_1=c_2=c_4=c_8=c_9 = 0$, fica:

$$c_3 + 1 + c_6 - 3c_7 = 0$$

$$c_7 = 0$$

$$1 + 2c_6 = 0$$

cuja solução é: $c_3=-1/2$, $c_6=-1/2$, $c_7 = 0$. O quarto π será:

$$\pi_4 = \frac{v}{h^{1/2} g^{1/2}} = \frac{v}{\sqrt{gh}}$$

Fazendo $c_8=1$ e $c_1=c_2=c_4=c_9 = 0$ tem-se:

$$c_3 + c_6 - 3c_7 - 1 = 0$$

$$c_7 + 1 = 0$$

$$2c_6 + 1 = 0$$

cuja solução é: $c_3=-3/2$, $c_6=-1/2$, $c_7=-1$. O quinto π será:

$$\pi_5 = \frac{v}{h^{3/2} g^{1/2} \rho} = \frac{v}{\rho \sqrt{gh^3}}$$

Fazendo $c_9 = 1$ e $c_1=c_2=c_4=c_5=c_8 = 0$, resulta:

$$c_3 + c_6 - 3c_7 = 0$$

$$c_7 + 1 = 0$$

$$2c_6 + 2 = 0$$

cuja solução é: $c_3 = -2$, $c_6 = -1$, $c_7 = -1$. O sexto π será:

$$\pi_6 = \frac{\sigma}{\rho gh^2}$$

Um escoamento sobre vertedor se rege pois por uma relação que, em termos adimensionais mais gerais, tem a forma:

$$\phi \left(\frac{l}{h}, \frac{d}{h}, \frac{Q}{\sqrt{gh^5}}, \frac{v}{\sqrt{gh}}, \frac{\mu}{\rho \sqrt{gh^3}}, \frac{\sigma}{\rho gh^2} \right) = 0$$

Como a incôgnita, que se procura, é geralmente a vazão, poder-se-ia escrever em forma explícita:

$$\frac{Q}{\sqrt{gh^5}} = F \left(\frac{l}{h}, \frac{d}{h}; \frac{v}{\sqrt{gh}}, \frac{\mu}{\rho \sqrt{gh^3}}, \frac{\sigma}{\rho gh^2} \right)$$

Não seria difícil mostrar, mediante algum trabalho algébrico, que

$$\frac{\mu}{\rho \sqrt{gh^3}} \text{ e } \frac{\sigma}{\rho gh^2}$$

são formas particulares ou alternativas ("formas mascaradas") respectivamente dos números de Reynolds e Weber. O parâmetro adimensional v/\sqrt{gh} é um número de Froude em que a carga constitui o respectivo parâmetro geométrico. Por conseguinte, podemos escrever a expressão da vazão em um vertedor da seguinte maneira geral e adimensional:

$$\frac{Q}{\sqrt{gh^5}} = f \left(\frac{l}{h}; \frac{d}{h}, F, R, W \right)$$

3.3.4.2 - Aplicação do teorema de Buckingham ao fenômeno da formação de perfil de equilíbrio de praia pela ação das ondas:

Ver-se-á na matéria "Engenharia de Costas" que o perfil de equilíbrio de praia, que uma dada onda forma em um dado sedimento, é o lugar geométrico dos pontos para os quais ocorre equilíbrio oscilatório entre as forças presentes, que atuam sobre os grãos. Equilíbrio oscilatório significa que cada grão oscila, durante o período da onda, em torno de uma posição média, mas esta não varia no tempo.

As grandezas a considerar, com as respectivas expressões dimensionais, são as seguintes:

$\lambda = L$ uma dimensão geométrica horizontal da praia ou da onda;

$d = L$ uma dimensão geométrica vertical da praia, que é a profundidade corrente;

$T = T$ o período da onda;

$H = L$ a altura da onda, distância vertical entre a crista e o cavado a uma profundidade de d qualquer;

$\rho = ML^{-3}$ a massa específica da água;

$\rho_s = ML^{-3}$ a massa específica do sedimento da praia;

$D = L$ um diâmetro característico do tamanho dos grãos do sedimento, como o diâmetro médio ou o diâmetro mediano, tirado de uma curva granulométrica;

$g = LT^{-2}$ a aceleração da gravidade que constitui, em última análise, a força motriz dos movimentos oscilatórios das águas do mar.

Temos portanto uma função do tipo:

$$f(\ell, d, T, H, \rho, \rho_s, D, g) = 0$$

Em termos adimensionais será:

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = 0$$

pois temos 8 grandezas que se exprimem em termos de 3 grandezas fundamentais e $8 - 3 = 5$.

A aplicação do teorema de Bridgman fornece:

$$\ell^{c_1} d^{c_2} T^{c_3} H^{c_4} \rho^{c_5} \rho_s^{c_6} D^{c_7} g^{c_8} = 1$$

Substituindo as grandezas, na equação acima, pelas respectivas expressões dimensionais e efetuando as potenciações, tem-se:

$$L^{c_1} L^{c_2} T^{c_3} L^{c_4} (ML^{-3})^{c_5} (ML^{-3})^{c_6} L^{c_7} (LT^{-2})^{c_8} = 1$$

Agrupando as potências das mesmas grandezas fundamentais, vem:

$$L^{c_1+c_2+c_4-3c_5-3c_6+c_7+c_8} M^{c_5+c_6} T^{c_3-2c_8} = 1$$

Escrevendo as expressões de homogeneidade dimensional entre os dois membros da última equação, resulta o sistema:

$$c_1+c_2+c_4-3c_5-3c_6+c_7+c_8 = 0$$

$$c_5+c_6 = 0$$

$$c_3-2c_8 = 0$$

Escolhamos c_1, c_3, c_8 como incógnitas principais e atribuamos valores arbitrários a c_2, c_4, c_5, c_6, c_7 . Podemos fazê-lo porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Atribuindo, como nos dois exemplos anteriores, o valor 1 (um) a uma das incôgnitas tratadas como constante e o valor 0 (zero) às restantes, resultaria cada um dos π procurados.

$$\phi\left(\frac{d}{\ell}, \frac{H}{\ell}, \frac{\rho s}{\rho}, \frac{D}{\ell}, \frac{T^2 g}{\ell}\right) = 0$$

O parâmetro d/ℓ é a declividade corrente de perfil de equilíbrio da praia. Conhecido seu valor, em função das outras grandezas presentes, poderíamos atribuir valores arbitrários a ℓ , obter os valores correspondentes de d , a partir do plano horizontal de referência que se tivesse adotado, e traçar o perfil. É interessante pois que escrevamos d/ℓ em função dos outros parâmetros adimensionais, pondo a função anterior em forma explícita. Teremos:

$$\frac{d}{\ell} = \psi\left(\frac{H}{\ell}, \frac{\rho s}{\rho}, \frac{D}{\ell}, \frac{T^2 g}{\ell}\right)$$

O parâmetro H/ℓ é um parâmetro adimensional característico da forma da onda. Como parâmetro geométrico horizontal, característico da onda, podemos tomar L_0 , o comprimento da onda em profundidade infinita. Como parâmetro vertical, característico da onda, podemos tomar H_0 , a altura da onda em profundidade infinita. O parâmetro H/ℓ se transforma assim em H_0/L_0 que é a chamada esbeltez da onda. A aplicação do teorema de Buckingham nos permite, portanto, antes de qualquer ensaio, salientar a importância da esbeltez da onda no processo de formação de perfil de equilíbrio de praia pelas ondas do mar. Não seria difícil mostrar, jogando com equações da teoria das ondas, que o parâmetro $T^2 g/\ell$ é uma forma mascarada de número de Froude em termos de cinemática do movimento ondulatório.

A expressão, que se deduziu, apresenta grande valor para caracterizar as distorções necessárias a realizar um modelo físico do processo de formação de perfil de equilíbrio de praia.

3.5 - Falácias a evitar no emprego da análise dimensional

Já se disse que não se deve encarar a análise dimensional como uma chave mágica que nos permita estabelecer equações em qualquer terreno da Física, sem dispor de conhecimento intrínseco do mesmo.

Quem nunca estudou, de alguma maneira, um dado terreno da Física, dificilmente resolveria com sucesso a primeira etapa, sempre a mais difícil, na aplicação dos teoremas de Bridgman e Buckingham: a enumeração das grandezas a considerar. O uso indiscriminado, sem fundamento no conhecimento físico, constitui pois a primeira falácia a evitar no emprego da análise dimensional.

Uma outra é a tentativa de estabelecer relações que não existem na natureza, o que modernamente se tem chamado de "correlações espúrias". Por si mesma a análise dimensional nem sempre dispõe de meios para verificar se um dado conjunto de grandezas, a que se apliquem os teoremas de Bridgman ou de Buckingham, se ligam entre si por uma relação realmente existente na natureza. Esta questão só pode ser esclarecida por via experimental.

Damos a seguir um exemplo do estabelecimento inteiramente insensato de uma lei inexistente na natureza, mas irrepreensível do ponto de vista formal da análise dimensional.

Suponhamos que se pesquise a forma de uma lei física relacionando as velocidades (v)

dos automóveis, que transitam na Estrada de Viamão, com as vazões (Q) em escoamento nos modelos do IPH e as distâncias (ℓ) percorridas pelo professor de Teoria da Semelhança, quando vai dar aula. Um espírito menos avisado escreveria $v = f(Q, \ell)$ ou $v = CQ^{c_1} \ell^{c_2}$.

Substituindo as grandezas, aparecendo na última equação, pelas respectivas expressões dimensionais, viria:

$$LT^{-1} = (L^3T^{-1})^{c_1} L^{c_2}$$

Efetuada as potenciações e agrupando as mesmas grandezas fundamentais:

$$LT^{-1} = L^{3c_1+c_2} T^{-c_1}$$

Escrevendo as expressões de homogeneidade dimensional para ambos os membros da última equação:

$$3c_1 + c_2 = 1$$

$$-c_1 = -1$$

Achar-se-ia $c_1 = 1$ e $c_2 = -2$. O espírito menos avisado afirmaria então que

$$v = CQ\ell^{-2} = C \frac{Q}{\ell^2} \quad \text{ou,}$$

em português fluente, que as velocidades dos automóveis em trânsito na Estrada de Viamão são proporcionais às vazões em escoamento nos modelos do IPH e inversamente proporcionais aos quadrados das distâncias percorridas pelo professor de Teoria da Semelhança quando vai dar aula.

O nosso personagem imaginário julgaria ter descoberto uma nova lei física. Entretanto, é evidente que não existe qualquer relação de causalidade entre, de um lado, as razões e distâncias consideradas e, de outro, as velocidades dos automóveis em trânsito na Estrada de Viamão. Quem se desse ao trabalho de manter constantes os valores das razões e distâncias consideradas e observar os valores das referidas velocidades, facilmente constataria que podem ocorrer os mais disparatados valores para as últimas. Em outras palavras, a experiência desmascararia a falácia.

Ao apresentarmos a aplicação do teorema de Buckingham à concepção de modelos reduzidos, teremos ocasião de apontar uma terceira falácia a evitar.

3.6 - Uma consequência prática de o conhecimento da Teoria da Semelhança não prescindir do conhecimento intrínseco de cada assunto, a que se pode aplicar tal ferramenta, reside no fato de que não existem "especialistas em modelos reduzidos" e sim especialistas em Hidráulica Geral, em Hidráulica Fluvial, em Hidráulica Marítima, em Engenharia Aeronáutica, etc, que sabem conceber e operar modelos a fim de estudar problemas específicos de suas especialidades. A fim de projetar um modelo costeiro, por exemplo, não basta conhecer a Teoria da Semelhança. É preciso conhecer também Hidráulica Marítima e Regime de Costas.

Outra conclusão consiste em que um laboratório de Hidráulica - um local em que se fazem modelos - ou se especializa apenas em um determinado assunto, por exemplo, Hidráulica Geral ou Fluvial, ou sua organização precisa comportar diferentes divisões, cada uma das quais reúne especialistas no assunto correspondente. Assim, por exemplo, o IPH da UFRGS contém uma Divisão Marítima, uma Divisão Fluvial,

uma Divisão de Pesquisa Básica em Morfologia Fluvial e uma Divisão Hidroelétrica, além da Divisão de Ensino e das divisões auxiliares.

3.7 - EXERCÍCIOS

1) Estabelecer uma função adimensional relacionando o período de um pêndulo, que consiste em uma haste circular pivotada na extremidade superior, com um peso que se lhe adiciona na extremidade inferior.

2) Estabelecer uma função adimensional relacionando a força exercida por um jato fluido que incide sobre uma placa plana, perpendicular ao plano do jato, com a massa específica do líquido, a aceleração da gravidade, uma velocidade característica e a área de seção transversal do jato.

4 - TEORIA DOS MODELOS

4.1 - Já vimos que surgem problemas, em vários campos da Engenharia, para os quais não há solução possível por método analítico. Posteriormente, aprendemos as técnicas fornecidas pela análise dimensional para prever a forma das relações, que regem os fenômenos físicos, ou pelo menos para orientar o método experimental que seja capaz de estabelecer tal forma. Entretanto, há casos em que é simplesmente inviável aplicar o método experimental a sistemas em verdadeira grandeza, seja porque as variáveis não são controláveis pelo homem, seja porque a previsão a ser feita se refere aos efeitos da interação entre um sistema natural e uma obra a ser construída no futuro.

Assim, por exemplo, há alguns anos coube ao IPH estabelecer o traçado das obras de regularização da embocadura lagunar de Tramandaí, no Rio Grande do Sul. As profundidades sobre a barra em frente à embocadura são uma função de grande número de variáveis. Era impossível estabelecer uma equação de previsão a partir de observações na natureza, por duas razões:

a) os agentes naturais (ondas, vazões fluviais, etc) não variam sob controle humano e, em consequência, levaria tempo muito longo a coleta de valores significativos para o estabelecimento de uma equação de previsão;

b) a profundidade, que interessava realmente prever, não era a profundidade sobre a barra em seu estado natural, determinada a partir das observações acima mencionadas, e sim a que resultaria da construção das obras que se tinham em vista.

4.2 - O estudo de problemas deste tipo exige o recurso a modelo reduzido.

Em geral, há duas espécies de casos em que se precisa recorrer a modelos:

a) a equação de previsão contém grande número de variáveis e seria difícil ou laborioso, do ponto de vista matemático, efetuar a previsão por meios analíticos. Depois do advento dos computadores eletrônicos, restringiu-se o número de casos em que se precisava recorrer a modelos físicos porque a solução analítica era simplesmente laboriosa, embora possível por se dispor de equação adequada. Problemas de propagação de maré em estuário, por exemplo, podem ser postos em equação de solução mais ou menos laboriosa. Tais problemas hoje podem ser resolvidos de modo relativamente rápido em computador, a não ser que surjam dificuldades relativas a condições-limite, difíceis de formular em termos matemáticos;

b) a função ligando as variáveis de interesse é desconhecida e seria inviável, na prática, determiná-la experimentalmente a partir de observações em verdadeira grandeza.

É em geral o caso dos problemas envolvendo transporte de sedimentos e, em particular, era o caso da embocadura anteriormente mencionada. Em tais problemas conhecem-se as grandezas a considerar, mas ignora-se a função que as liga entre si.

4.3 - Nestas espécies de problemas e fetuam-se as observações, que interessam, sobre um outro sistema físico, de menores dimensões que o sistema cujo comportamento se quer prever, mas de comportamento semelhante. Chama-se protótipo o sistema físico cujo comportamento se quer prever. O modelo reduzido é o sistema de menores dimensões e de comportamento semelhante, no qual se efetuam observações e se fazem previsões válidas para fins de Engenharia. Em muitos casos não é necessário estabelecer a forma da relação geral entre as variáveis em jogo. Basta um resultado global para caracterizar os efeitos da realização de um dado projeto, dentro de uma gama mais ou menos estreita de valores das variáveis cuja consideração é importante. Conforme se verá oportunamente, podem existir diferentes espécies de modelos reduzidos, mas todas satisfazem à definição acima.

4.4 - Na primeira lição viu-se o que se deve compreender por comportamento semelhante. Agora retomaremos mais pormenorizadamente a análise de tal conceito.

Assim como o conceito de medida, o conceito de semelhança física também comporta um aspecto qualitativo e um aspecto quantitativo. O aspecto qualitativo consiste no fato de que o mesmo fenômeno, envolvendo as mesmas grandezas relacionadas pela mesma lei, se passa tanto no modelo quanto no protótipo. O aspecto quantitativo está em que existem relações constantes, bem conhecidas e independentes dos valores particulares das grandezas, entre os valores que ocorrem no modelo e os que ocorrem no protótipo.

Existe um meio mnemônico simples para compreender e gravar tal conceito. Basta lembrar a primeira noção de semelhança que se te-

ve na vida escolar: a semelhança puramente geométrica e, em particular, a semelhança de triângulos. Diz-se que dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são respectivamente iguais e os lados homólogos são proporcionais. A igualdade dos ângulos correspondentes constitui de certo modo o análogo geométrico do aspecto qualitativo da semelhança física em geral. A proporcionalidade entre os lados homólogos constituiria o análogo geométrico do aspecto quantitativo da semelhança. Inclusive, viu-se desde logo que a semelhança consiste na igualdade, entre os sistemas semelhantes, de números adimensionais: as razões entre os lados homólogos, no caso dos triângulos semelhantes.

4.5 - Chama-se de escala a razão entre cada valor que uma dada grandeza assume no modelo e o valor correspondente que a mesma grandeza assume no protótipo. Assim, podemos falar em escalas geométricas, isto é, escalas de comprimentos, larguras, alturas ou profundidades, de áreas e de volumes - escala de massas, de forças, de tempos, de velocidades, de aceleração, de vazões, etc.

Exprimem-se, geralmente, as diferentes escalas por meio de frações cujo numerador é igual a 1. Adotaremos como símbolo, para cada escala, o símbolo da grandeza respectiva com acento circunflexo. Assim, sendo l o símbolo de comprimento, o símbolo da escala de comprimentos será \hat{l} . A fim de se assegurarem os dois aspectos - qualitativo e quantitativo - da semelhança, entre o sistema-modelo e o sistema-protótipo, as escalas das diferentes grandezas precisam guardar entre si certas relações. Tais relações constituem o que se chama de condições de semelhança.

4.6 - Ao realizar um modelo reduzido, devem formular-se condições de semelhança para todas as relações que as diversas grandezas a considerar guardam com as três grandezas fundamentais, em função das quais se exprimem dimensionalmente. Isto significa que se devem formular condições de semelhança relativas à geometria, a materiais e às forças presentes.

4.7 - Já vimos que o aspecto qualitativo da semelhança consiste no mesmo fenômeno, regido pela mesma lei que relaciona entre si as mesmas grandezas, se passar no modelo e no protótipo. Também vimos que podemos exprimir a lei em questão em termos dimensionais, seja por dedução analítica seja por aplicação do teorema de Bridgman, ou em termos adimensionais, pela aplicação do teorema de Buckingham. Temos, portanto, dois caminhos para estabelecer condições de semelhança:

a) Aplicar uma dada lei, em termos dimensionais, ao modelo e ao protótipo. Resultam duas equações que, divididas membro a membro uma pela outra, fornecem as condições de semelhança porque estabelecem as relações que as escalas das diferentes grandezas devem guardar entre si. Assim, por exemplo, suponhamos que se queiram estabelecer as condições de semelhança para um modelo de escoamento uniforme e turbulento em canal, a partir de uma lei dimensional, no caso a equação que rege o escoamento uniforme em canal, a chamada fórmula de Manning. Poder-se-ia arbitrar uma escala geométrica que seria a mesma para comprimentos, larguras e alturas ou profundidades porque todas estas grandezas têm a mesma expressão dimensional

$$[l] = [b] = [d] = L \therefore \hat{l} = \hat{b} = \hat{d}$$

A igualdade do número de Froude entre o modelo e o protótipo permitiria deduzir o valor da escala de velocidade:

$$F_m = F_p \dots \frac{v_m}{\sqrt{\ell_m g}} = \frac{v_p}{\sqrt{\ell_p g}} \dots \frac{v_m}{v_p} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell_p}} \dots \hat{v} = \hat{\ell}^{1/2}$$

Ter-se-ia desde logo um condicionamento físico a obedecer: o valor arbitrado para $\hat{\ell}$ deveria ser suficientemente grande para que a aplicação do valor da escala de velocidades \hat{v} , que se deduziu, acarretasse velocidades v_m no modelo suficientemente elevadas para que permanecesse válida a hipótese inicial, consistindo em desprezar o papel das forças de viscosidade (expressas pelo número de Reynolds). Em vez de recorrer à igualdade dos números de Froude entre modelo e protótipo, também se poderia deduzir o valor da escala de velocidade a partir do fato de que a aceleração da gravidade é a mesma no modelo e no protótipo e que, portanto, a escala de aceleração é igual a 1. Ter-se-ia:

$$j = 1 \text{ e } \hat{\ell} \hat{t}^{-2} = 1 \dots \hat{t}^2 = \hat{\ell} \dots \hat{t} = \hat{\ell}^{1/2}$$

$$\hat{v} = \hat{\ell} \hat{t}^{-1} = \hat{\ell} \hat{\ell}^{-1/2} = \hat{\ell}^{1/2}$$

A aplicação, ao modelo e ao protótipo, da lei que rege escoamento uniforme em canal, permitiria estabelecer as relações que as escalas das diferentes grandezas deveriam guardar entre si. Escrever-se-ia:

$$\frac{v_m}{v_p} = \frac{K_m}{K_p} \frac{R_m}{R_p}^{2/3} \frac{S_m}{S_p}^{1/2}$$

ou $\hat{v} = \hat{K} \hat{R}^{2/3} \hat{S}^{1/2}$, que é no caso a condição de semelhança.

A partir desta equação, podemos determinar o valor da escala de coeficientes de rugosidade para que o escoamento no modelo seja semelhante ao protótipo, de maneira a que as perdas de carga no modelo apareçam reduzidas corretamente à escala geométrica. Em outras palavras, não se poderia tomar um valor arbitrário para o coeficiente de rugosidade no modelo. A escala de coeficientes de rugosidade é portanto, em última análise, a natureza do revestimento e do acabamento das paredes sólidas do escoamento no modelo teria de satisfazer uma determinada condição compatível com os valores das escalas das outras grandezas que influem nas perdas de carga. Ter-se-ia:

$\hat{R} = \hat{\lambda}$ porque R é uma grandeza geométrica;

$\hat{S} = 1$ porque $S = d/\lambda$. $\hat{S} = \hat{d}/\hat{\lambda} = \hat{\lambda}/\hat{\lambda} = 1$;

e já vimos que $\hat{v} = \hat{\lambda}^{1/2}$. Portanto:

$$\hat{\lambda}^{1/2} = \hat{K} \hat{\lambda}^{2/3}$$

ou $\hat{K} = 1/\hat{\lambda}^{1/6}$. Uma vez arbitrado, conforme se viu anteriormente, o valor de $\hat{\lambda}$, haveria apenas um valor da escala de coeficientes de rugosidade que seria compatível. Uma vez conhecido tal valor da escala de coeficientes de rugosidade, bem como o valor K dos coeficientes de rugosidade no protótipo, estaria definido o valor que o coeficiente de rugosidade do modelo deveria ter. Entrando com tal valor em tabela de coeficientes de rugosidade, achar-se-ia o tipo conveniente de acabamento ou de revestimento a dar às paredes sólidas do escoamento no modelo.

b) O caminho adimensional para formular condições de semelhança consiste em aplicar o teorema de Buckingham às grandezas que

intervêm no fenômeno que se deve passar no modelo e no protótipo, e em igualar cada número adimensional (cada π) característico do modelo ao número adimensional correspondente do protótipo. De tais igualdades resultam as condições de semelhança a obedecer. Imaginemos um fenômeno ao qual a aplicação do teorema de Buckingham teria resultado em relação entre um certo número (n) de números adimensionais. Ter-se-ia uma relação adimensional do tipo

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n) = 0$$

Escrever-se-ia tal relação para o modelo e para o protótipo. Ficar-se-ia com:

$$f(\pi_{1m}, \pi_{2m}, \pi_{3m}, \dots, \pi_{nm}) = 0$$

e

$$f(\pi_{1p}, \pi_{2p}, \pi_{3p}, \dots, \pi_{np}) = 0$$

Uma vez que π é um número adimensional, cujo valor independe do tamanho absoluto do sistema a que se refere, cada π tem o mesmo valor no modelo e no protótipo. O aspecto qualitativo da semelhança se traduz pelo fato da mesma função adimensional valer para o modelo e o protótipo. A igualdade de cada π entre modelo e protótipo assegura o aspecto quantitativo da semelhança, permitindo formular as relações a que as escalas das diferentes grandezas devem obedecer.

Já vimos que a aplicação do teorema de Buckingham a escoamento sobre vertedor fornece a seguinte relação entre números adimensionais, característicos do fenômeno:

$$\frac{h}{d} = f\left(\frac{h}{\lambda}, \frac{Q}{\sqrt{gh^5}}, \frac{v}{\sqrt{gh}}, \frac{\mu}{\rho\sqrt{gh^3}}, \frac{\sigma}{\rho gh^2}\right)$$

Suponhamos que o escoamento sobre o vertedor-modelo se faça sob cargas suficientemente grandes para que se possam desprezar os efeitos das forças de viscosidade e de tensão superficial. A relação adimensional acima se simplifica para:

$$\frac{h}{d} = f \left(\frac{h}{\ell}, \frac{Q}{\sqrt{gh^5}}, \frac{v}{\sqrt{gh}} \right)$$

Escrevamos esta função para o modelo e o protótipo:

$$\frac{h_m}{d_m} = f \left(\frac{h_m}{\ell_m}, \frac{Q_m}{\sqrt{gh_m^5}}, \frac{v_m}{\sqrt{gh_m}} \right)$$

$$\frac{h_p}{d_p} = f \left(\frac{h_p}{\ell_p}, \frac{Q_p}{\sqrt{gh_p^5}}, \frac{v_p}{\sqrt{gh_p}} \right)$$

Igualando os números adimensionais, dois a dois, para o modelo e o protótipo, virá:

$$\frac{h_m}{d_m} = \frac{h_p}{d_p}$$

$$\frac{Q_m}{\sqrt{gh_m^5}} = \frac{Q_p}{\sqrt{gh_p^5}}$$

$$\frac{v_m}{\sqrt{gh_m}} = \frac{v_p}{\sqrt{gh_p}}$$

e, cumpridas estas condições, resultará:

$$\frac{h_m}{d_m} = \frac{h_p}{d_p}$$

Das igualdades acima deduz-se:

$$\frac{h_m}{h_p} = \frac{\ell_m}{\ell_p} \therefore \hat{h} = \hat{\ell}$$

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \sqrt{\frac{(h_m)^5}{h_p}} \therefore \hat{Q} = \hat{h}^{5/2}$$

$$\frac{v_m}{v_p} = \sqrt{\frac{h_m}{h_p}} \therefore \hat{v} = \hat{h}^{1/2}$$

$$\frac{h_m}{h_p} = \frac{d_m}{d_p} \therefore \hat{h} = \hat{d}$$

ou em resumo, $\hat{h} = \hat{d} = \hat{\ell}$, $\hat{Q} = \hat{\ell}^{5/2}$ e $\hat{v} = \hat{\ell}^{1/2}$

Isto significa que, se o vertedor-modelo e respectivo canal de chegada forem geometricamente semelhantes ao vertedor-protótipo e respectivo canal de chegada ($\hat{d} = \hat{\ell}$) e se introduzirmos sobre o vertedor-modelo vazões cujos valores sejam os das vazões-protótipo reduzidas à escala $\hat{\ell}^{5/2}$, as respectivas cargas sobre o vertedor-modelo aparecerão reduzidas segundo a escala geométrica ($\hat{h} = \hat{\ell}$) e as velocidades de chegada aparecerão reduzidas à escala $\hat{\ell}^{1/2}$. Em outras palavras, para que as cargas apareçam reduzidas à escala geométrica, não se podem reduzir arbitrariamente os valores das vazões-protótipo. É necessário reduzi-las segundo uma certa escala cujo valor é a potência 5/2 da escala geométrica.

4.8 - No capítulo seguinte deste curso, mostrar-se-á que cada um dos dois caminhos possíveis para formular condições de semelhança apresenta vantagens e desvantagens e que nem sempre podemos escolher indiferentemente um ou outro. Já apareceu claramente uma vantagem do caminho adimensional. Este nos permite formular condições de semelhança para fenômenos regidos por leis de forma desconhecida. Basta conhecer as grandezas que intervêm no fenômeno, aplicar-lhes o teorema de Buckingham, definindo os números adimensionais (os π) que as traduzem, e a igualdade dos respectivos números adimensionais entre modelo e protótipo nos fornece as condições de semelhança que as diferentes escalas devem obedecer. Tais condições nos permitem realizar o modelo físico, ainda que não conheçamos a forma da lei que rege o fenômeno reproduzido no modelo.

Evidentemente não podemos deduzir condições de semelhança a partir da aplicação, ao modelo e ao protótipo, de uma lei em termos dimensionais nos casos em que desconhecemos tal lei.

Caracteriza-se, assim, a vantagem de se formularem condições de semelhança a partir da aplicação do teorema de Buckingham ao modelo e ao protótipo. Entretanto, quando no próximo capítulo introduzirmos o conceito de distorção, ver-se-á que o caminho adimensional não nos permite estabelecer coeficientes de previsão, em função de coeficientes de distorção, se não conhecemos a forma da lei que rege o fenômeno. Para tal fim, temos de recorrer ou a uma lei em termos dimensionais ou à experiência.

4.9 - Chegou agora a oportunidade de alertar contra um terceiro perigo a evitar no emprego da análise dimensional. Quando se formulam condições de semelhança a partir da apli

cação do teorema de Buckingham ao modelo e ao protótipo, ao igualarmos os números dimensionais para os dois sistemas e deduzirmos valores de escalas, a análise dimensional nada nos diz, por si mesma, se, ao proceder assim, continuamos ou não dentro dos limites de validade da lei que rege o fenômeno. Por conseguinte, ao deduzirmos valores de escalas a partir das igualdades dos números adimensionais, precisamos estar alerta para não sair dos limites de validade da lei.

Um exemplo permite concretizar a advertência. Vimos, na lição anterior, que o fenômeno da formação de perfil de equilíbrio de praia, pela ação das ondas do mar, se traduz por relação adimensional do tipo:

$$\underline{d} = f \left(\frac{H}{\ell}, \frac{\ell s}{\ell}, \frac{D}{\ell}, \frac{T^2 g}{\ell} \right)$$

As condições de semelhança, para um modelo perfeito, seriam:

$$\frac{H_m}{\ell_m} = \frac{H_p}{\ell_p} \text{ ou } \frac{H_m}{H_p} = \frac{\ell_m}{\ell_p} \text{ ou } \hat{H} = \hat{\ell}$$

$$\frac{\rho_{sm}}{\rho_m} = \frac{\rho_{sp}}{\rho_p} \text{ ou } \frac{\rho_{sm}}{\rho_{sp}} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \text{ ou } \hat{\rho}_s = \hat{\rho}$$

$$\frac{D_m}{\ell_m} = \frac{D_p}{\ell_p} \text{ ou } \frac{D_m}{D_p} = \frac{\ell_m}{\ell_p} \text{ ou } \hat{D} = \hat{\ell}$$

$$\frac{T_m^2 g}{\ell_m} = \frac{T_p^2 g}{\ell_p} \text{ ou } \left(\frac{T_m}{T_p} \right)^2 = \frac{\ell_m}{\ell_p} \text{ ou } \hat{T}^2 = \hat{\ell} \text{ ou } \hat{T} = \ell^{1/2}$$

e resultaria

$$\frac{d_m}{\lambda_m} = \frac{d_p}{\lambda_p} \text{ ou } \frac{d_m}{d_p} = \frac{\lambda_m}{\lambda_p} \text{ ou } \bar{d} = \bar{\lambda}$$

Vemos que uma das condições de semelhança seria $\bar{D} = \bar{\lambda}$ ou, em outras palavras, a escala de diâmetros de grão teria de ser igual à escala geométrica. Suponhamos que o diâmetro representativo do diâmetro dos grãos de sedimento de praia, no protótipo, seja $D_p = 0,20\text{mm}$, um valor bem representativo das praias do Rio Grande do Sul. Suponhamos ainda que a escala geométrica, que se tivesse escolhido, fosse $\bar{\lambda} = 1/100$. Resultaria para a escala de diâmetros de grão: $\bar{D} = \bar{\lambda} = 1/100$. O diâmetro de grão no modelo seria $D_m = D_p \bar{\lambda} = 0,20\text{mm} \times 1/100 = 0,002\text{mm}$. Tal sedimento-modelo teria seu transporte pelas ondas regido por lei diferente da que rege o transporte dos grãos de areia no protótipo ($D_p = 0,20\text{mm}$). Sedimentos com diâmetros inferiores a $0,06\text{mm}$ não são areia e sim silte ou argila, cujo comportamento hidráulico é diferente da areia. Estes grãos mais finos são coesivos, isto é, sujeitos a forças de natureza diferente das forças de gravidade, inércia e viscosidade que comandam o transporte dos grãos de areia. A aplicação às cegas do teorema de Buckingham acarretaria, portanto, neste caso, a perda do aspecto qualitativo da semelhança e o que pareceria ser um modelo perfeito na realidade não proporciona semelhança para as forças presentes. Tal fato se deve a que para $D = 0,06\text{mm}$ ocorre mudança qualitativa da lei de transporte.

A solução de problemas deste tipo, a reprodução de diâmetros e massas específicas de sedimentos, para os quais a realização de um modelo "perfeito" acarretaria a perda do aspecto qualitativo da semelhança, exige a in-

trodução de um novo conceito: o conceito de distorção. No próximo capítulo deste curso apresentar-se-á e discutir-se-á este novo conceito.

4.10 - Tipos de modelos físicos do ponto de vista da Teoria da Semelhança. No primeiro capítulo deste curso viu-se que, do ponto de vista da semelhança puramente geométrica, os modelos físicos podem ser geometricamente semelhantes, distorcidos ou analógicos. Do ponto de vista da semelhança física em geral, os modelos físicos se classificam em: verdadeiros, adequados, distorcidos ou analógicos.

Modelos verdadeiros são aqueles cuja geometria - incluindo todos os pormenores geométricos - resultam da redução das dimensões geométricas homólogas do protótipo segundo uma única escala de redução e nos quais há semelhança para todos os tipos de forças presentes no protótipo, quaisquer que sejam os valores das grandezas presentes no fenômeno reproduzido.

Modelos adequados são aqueles nos quais não há semelhança para todos os tipos de força presentes no protótipo, mas que são capazes de fornecer previsões válidas para fins de Engenharia porque os tipos de força, para os quais não se tem semelhança no modelo, desempenham um papel desprezível ou secundário no protótipo. É, em geral, o caso dos modelos reduzidos dos hidráulicos.

Modelos distorcidos são aqueles nos quais se usam escalas diferentes para grandezas de mesma expressão dimensional. No capítulo seguinte deste curso expor-se-á pormenorizadamente o conceito e o uso da distorção. Vê-se desde logo que a distorção geométrica é um caso particular de distorção, pois consiste em adotar, para comprimentos e larguras, escala diferente da que se adota para alturas ou profun-

didades, embora todas estas grandezas tenham a mesma expressão dimensional (L).

Modelos analógicos, conforme já se viu bastante pormenorizadamente na primeira lição, são aqueles que não são semelhantes geometricamente aos respectivos protótipos, nos quais se passa fenômeno qualitativamente diferente do que se passa no protótipo, mas as equações, que regem o fenômeno no protótipo e no modelo analógico, apresentam a mesma estrutura formal. É, como já se viu, o caso de uma rede elétrica malhada representando uma rede complexa de abastecimento d'água porque as leis de Kirschhoff e as fórmulas de perda de carga apresentam a mesma estrutura formal.

4.11 - A impossibilidade de modelos perfeitos em mecânica dos fluidos. No terceiro capítulo deste curso viu-se que a aplicação do teorema de Buckingham ao caso mais geral de escoamento de fluido conduzia a função adimensional do tipo:

$$\frac{P}{\rho v^2} = f \left(\frac{\lambda}{\ell}, \frac{\eta}{\ell}, \mathbb{R}, \mathbb{F}, W, M \right)$$

Um modelo perfeito de escoamento de fluido seria aquele para o qual se tivesse:

$$\frac{\lambda_m}{\ell_m} = \frac{\lambda_p}{\ell_p} \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda_m}{\lambda_p} = \frac{\ell_m}{\ell_p} \quad \text{ou} \quad \tilde{\lambda} = \tilde{\ell}$$

$$\frac{\eta_m}{\ell_m} = \frac{\eta_p}{\ell_p} \quad \text{ou} \quad \frac{\eta_m}{\eta_p} = \frac{\ell_m}{\ell_p} \quad \text{ou} \quad \tilde{\eta} = \tilde{\ell}$$

$$\mathbb{M}_m = \mathbb{M}_p \text{ ou } \frac{\rho_m v_m l_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p v_p l_p}{\mu_p}$$

e, supondo

$$\rho_m = \rho_p, \mu_m = \mu_p,$$

$$v_m l_m = v_p l_p \text{ ou } \frac{v_m}{v_p} = \frac{l_p}{l_m} \text{ ou } \hat{v} = \hat{l}^{-1}$$

$$\mathbb{F}_m = \mathbb{F}_p \text{ ou } \frac{v_m^2}{g l_m} = \frac{v_p^2}{g l_p} \text{ ou } \left(\frac{v_m}{v_p}\right)^2 = \frac{l_m}{l_p} \text{ ou } \hat{v} = \hat{l}^{1/2}$$

$$\mathbb{W}_m = \mathbb{W}_p \text{ ou } \frac{\rho_m v_m^2 l_m}{\sigma_m} = \frac{\rho_p v_p^2 l_p}{\sigma_p}$$

e, supondo

$$\rho_m = \rho_p, \sigma_m = \sigma_p,$$

$$v_m^2 l_m = v_p^2 l_p \text{ ou } \left(\frac{v_m}{v_p}\right)^2 = \frac{l_p}{l_m} = - \text{ ou } \hat{v} = \hat{l}^{-1/2}$$

$$\mathbb{M}_m = \mathbb{M}_p \text{ ou } \frac{v_m}{\sqrt{\epsilon_m/\rho_m}} = \frac{v_p}{\sqrt{\epsilon_p/\rho_p}}$$

e, supondo

$$\epsilon_m = \epsilon_p, \rho_m = \rho_p,$$

$$v_m = v_p \text{ ou } \frac{v_m}{v_p} = 1 \text{ ou } \hat{v} = 1$$

Em consequência se teria:

$$\frac{p_m}{\rho_m v_m^2} = \frac{p_p}{\rho_p v_p^2} \quad \text{mas como } \rho_m = \rho_p$$

$$\frac{p_m}{v_m^2} = \frac{p_p}{v_p^2} \quad \text{ou} \quad \frac{p_m}{p_p} = \left(\frac{v_m}{v_p}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \hat{p} = \hat{v}^2$$

Considerando as condições de semelhança acima enumeradas, constata-se que uma ($\hat{\eta} = \hat{\ell}$) é irrealizável na prática e quatro outras, relacionando a escala de velocidades com a escala geométrica, são incompatíveis entre si, se usamos no modelo o mesmo fluido do protótipo.

Com efeito, $\hat{\eta} = \hat{\ell}$ significa que se deveria reduzir cada irregularidade nas paredes sólidas do escoamento-protótipo segundo a escala geométrica. Isto é irrealizável na prática. Em matéria de semelhança de rugosidade, temos de nos contentar com uma semelhança de efeito global. Em outras palavras, precisamos que as perdas de carga, devidas à resistência de superfície, entre pontos homólogos do escoamento, apareçam reduzidas à escala conveniente, mas não podemos pensar em reduzir cada irregularidade da parede sólida do escoamento-protótipo segundo a escala geométrica. Assim, por exemplo, em um modelo fluvial, no qual seja importante reproduzir o perfil de linha d'água do protótipo, temos de jogar com a rugosidade do modelo de modo a que as diferenças de nível d'água entre pontos homólogos apareçam reduzidas à escala vertical do modelo. Entretanto, não existirá uma semelhança "microscópica" da rugosidade pela qual cada aspereza na parede sólida do leito-modelo fosse a imagem, reduzida à escala geométrica, de uma aspereza homóloga no leito-protótipo.

Por outro lado, é impossível assegurar semelhança simultânea para forças de inércia, gravidade, viscosidade, tensão superficial e compressibilidade, se tivermos no modelo o mesmo fluido do protótipo. Tal fato se deve a que resultariam condições incompatíveis a serem impostas à relação entre a escala de velocidades e a escala geométrica.

Consideremos, por exemplo, a semelhança simultânea para forças de inércia, gravidade e viscosidade com o mesmo fluido no modelo e no protótipo. Teríamos de ter ao mesmo tempo:

$$F_m = F_p \text{ e } \mathcal{R}_m = \mathcal{R}_p \text{ com } \rho_m = \rho_p, \mu_m = \mu_p, g_m = g_p$$

ou

$$\frac{v_m^2}{g_m} = \frac{v_p^2}{g_p} \text{ e } \frac{\rho_m v_m l_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p v_p l_p}{\mu_p}$$

A igualdade dos números de Froude acarretaria:

$$\frac{v_m^2}{l_m} = \frac{v_p^2}{l_p} \text{ ou } \left(\frac{v_m}{v_p}\right)^2 = \frac{l_m}{l_p} \text{ ou } \hat{v}^2 = \hat{l} \text{ ou } \hat{v} = \hat{l}^{1/2}$$

enquanto a igualdade dos números de Reynolds imporia:

$$v_m l_m = v_p l_p \text{ ou } \frac{v_m}{v_p} = \frac{l_p}{l_m} \text{ ou } \hat{v} = \hat{l}^{-1}$$

Constata-se que a igualdade dos números de Froude exige que a escala de velocidades seja a raiz quadrada da escala geométrica,

enquanto a igualdade dos números de Reynolds requer que a escala de velocidades seja o inverso da escala geométrica. Tais condições são incompatíveis entre si, a menos que se tenha $\hat{\lambda} = \bar{L}$. Esta condição $\hat{\lambda} = 1$, ou escala geométrica igual a 1, significa ser impossível um modelo reduzido, proporcionando semelhança simultânea das forças de inércia, gravidade e viscosidade, no qual se escoar o mesmo fluido do protótipo.

Chegar-se-ia a conclusões análogas se se desejasse semelhança simultânea para todos os tipos de forças consideradas no caso geral. Aconteceria o mesmo fato se se desejasse um modelo reduzido, com o mesmo fluido do protótipo, que proporcionasse semelhança simultânea de forças de inércia, gravidade (Froude), e tensão superficial (Weber) ou compressibilidade (Mach) ou qualquer outra combinação em que, além das forças de inércia, se tivesse mais de um outro tipo de forças a considerar.

Como interpretar tais conclusões? Será impossível realizar modelos reduzidos de escoamento de fluidos?

Efetivamente, é impossível realizar modelos verdadeiros no sentido matemático e estrito da palavra. Entretanto, é possível realizar modelos adequados, úteis a fins de Engenharia.

Já vimos que, para a semelhança de rugosidade, podemos nos contentar com um efeito global e abrir mão da condição $\hat{\eta} = \hat{\lambda}$.

Por outro lado, em geral há um determinado tipo de forças que predomina o tal ponto no escoamento-protótipo que podemos nos satisfazer com a semelhança apenas para o tipo de forças em questão e desprezar a influência dos outros tipos. Nos escoamentos de líquidos, por exemplo, na grande maioria dos casos temos a considerar escoamentos permanentes ou bastante lentamente variáveis para que não se precisem considerar as forças de compressibilidade.

Em outras palavras, em tais problemas consideramos sempre a água como um líquido incompressível e podemos abrir mão da igualdade dos números de Mach. Também poderemos desprezar a influência das forças de tensão superficial - e portanto abrir mão da igualdade dos números de Weber - se o tamanho físico dos escoamentos no protótipo e no modelo for suficientemente grande. Ainda mais, desde que o escoamento seja plenamente turbulento no protótipo e no modelo, podemos desprezar a influência das forças de viscosidade e abrir mão da igualdade dos números de Reynolds, bastando que os números de Reynolds do protótipo e do modelo, para condições homólogas, estejam ambos acima dos limites de transição de escoamento laminar a turbulento, embora sejam numericamente diferentes. Resulta, por conseguinte, que em geral projetam-se os modelos reduzidos hidráulicos para estudar problemas de Engenharia de modo a satisfazer:

- a) a semelhança geométrica;
- b) a semelhança do efeito global da rugosidade;
- c) a semelhança da razão entre as forças de inércia e as forças de gravidade ou, em outras palavras, a igualdade dos números de Froude entre condições homólogas no modelo e no protótipo.

É importante compreender que os modelos hidráulicos sendo adequados, mas não verdadeiros, todos eles apresentam limites de validade, fora dos quais a semelhança se perde, por não mais se poder desprezar a influência das forças que se ignoram ao projetar o modelo. Fora de tais limites não mais se podem efetuar previsões a partir do mesmo. Consideremos o que talvez seja o mais simples dos modelos hidráulicos: um modelo reduzido de vertedor. Se construímos o modelo à escala geométrica suficien

temente grande, poderemos desprezar a influência das forças de viscosidade e tensão superficial, abrir mão da igualdade dos números de Reynolds e Weber e deduzir os valores das diferentes escalas, em função da escala geométrica, a partir da igualdade dos números de Froude. Haverá, porém, em tal modelo, um limite inferior de vazões, abaixo do qual as previsões dos valores da carga no protótipo, a partir de modificações no modelo, não estariam certas porque, ou somente no modelo ou tanto no protótipo quanto no modelo, não mais seria lícito desprezar a influência das forças de tensão superficial ou de viscosidade.

Analogamente, em modelo reduzido de agitação para um porto, existe um limite inferior de comprimento de onda, abaixo do qual a influência de forças de tensão superficial se manifesta no modelo e faz desaparecer a semelhança para propagação e arrebentação das ondas. Abaixo de tal limite o modelo não proporciona previsões válidas.

É precisamente em tal fato que consiste a diferença de funcionamento entre um modelo verdadeiro e um modelo adequado. O modelo verdadeiro seria semelhante para qualquer valor particular das grandezas que intervêm no fenômeno reproduzido. O modelo adequado só é semelhante e portanto só fornece previsões válidas dentro de uma certa gama de valores das grandezas a considerar.

Só é possível completar a teoria geral dos modelos reduzidos ao se introduzirem dois outros conceitos: o de distorção e o de efeito de escala. Isto se fará nos próximos capítulos do presente curso. Tais conceitos são particularmente importantes para os modelos hidráulicos que já sabemos nunca serem verdadeiros.

4.12 - EXERCÍCIOS

1) Construiu-se à escala geométrica de 1/750 modelo reduzido do sangrador e do canal de fuga de um aproveitamento hidroelétrico. Quais eram as escalas de todas as outras grandezas a considerar?

2) Quais seriam as escalas de velocidades e vazões em modelo viscoso de um conduto com escoamento laminar, sendo λ a escala geométrica? Usa-se no modelo o mesmo líquido (água) do protótipo.

3) Pensa-se construir um modelo hidráulico à escala geométrica de 1/100 a fim de estudar o traçado do canal de acesso a um porto, através da observação do comportamento de modelos reduzidos de navios sob a ação das ondas e correntes. O porto se situa no interior de uma embocadura lagunar. Quais seriam as escalas:

- a) geométrica, para construção dos navios-modelos?
- b) de períodos das ondas?
- c) de ciclos de maré?
- d) de vazões através da embocadura?
- e) de esforços exercidos sobre o leme do navio em manobra?

5 - DISTORÇÃO

5.1 - Chama-se distorção, em sentido mais geral, a adoção de escalas diferentes para grandezas de mesma expressão dimensional. A distorção geométrica, consistindo em adotar uma escala vertical diferente - da escala horizontal, constitui caso particular de distorção, pois tanto os comprimentos e as larguras quanto as alturas ou profundidades têm a mesma expressão dimensional (L). Este caso particular de distorção pode ser chamado de exagero vertical.

5.2 - Vejamos, em primeiro lugar, como pode surgir a necessidade de distorcer modelos reduzidos.

a) No caso particular do exagero vertical, somos levados a adotar escala vertical maior que a horizontal, por exemplo, para um modelo fluvial, por considerações ao mesmo tempo de espaço, de precisão nas medidas e de assegurar que o escoamento no modelo seja turbulento, como é no protótipo. As dimensões em planta de um trecho de rio são geralmente de ordem de grandeza muito superior às profundidades e respectivas variações. Se construíssemos o modelo à escala conveniente para representar profundidades e variações de nível da água, resultaria tamanho excessivo para o mesmo, o que

não é interessante do ponto de vista econômico. Por outro lado, se o construíssemos à escala conveniente para fazer o comprimento caber em instalações disponíveis, poderia acontecer que as profundidades ou variações de nível da água resultassem tão pequenas que acarretariam imprecisão nas medidas ou até mesmo valores de número de Reynolds correspondentes a escoamento laminar.

b) Outro motivo, que pode levar a distorcer modelos, é a necessidade de permanecer, no modelo, dentro dos limites de aplicação da lei física que rege o fenômeno a reproduzir. Já vimos o caso em que a redução de diâmetros de grão de sedimentos segundo uma escala geométrica nos faria sair dos limites de validade da correspondente lei de transporte por agente hidráulico (escoamento ou ondas). Seríamos obrigados a usar no modelo um sedimento cujos diâmetros de grão do protótipo segundo a escala geométrica, no caso do modelo ser geometricamente semelhante, ou segundo uma qualquer das escalas geométricas, no caso de o modelo já ser geometricamente distorcido. A adoção de uma escala de diâmetros de grão diferente da(s) escala(s) geométrica(s) constitui uma outra distorção. Cumpre notar que muitas vezes, em se tratando de transporte de sedimentos, o modelo verdadeiro, tal como se definiu anteriormente, é uma pura abstração matemática, porque só o modelo distorcido pode assegurar o aspecto qualitativo da semelhança para o transporte.

c) Pode, finalmente, haver razões mais profundas para recorrer à distorção. A simples distorção geométrica pode ser exigida pela própria natureza da lei morfológica que rege o protótipo. Assim, por exemplo, para um dado material de praia e para esbeltez constante (H_0/L_0) das ondas incidentes, a declividade do estirâncio da praia aumenta quando o comprimento da onda diminui. Suponhamos que se queira

realizar um modelo de praia usando o mesmo sedimento do protótipo, desde que tal sedimento se movimente adequadamente sob a ação das ondas-modelo. As ondas-modelo terão a esbelteza igual às das ondas homólogas no protótipo, pois a altura e o comprimento de onda serão reduzidos segundo a escala geométrica vertical, conforme veremos oportunamente. Em virtude da lei morfológica acima enunciada, as declividades do estirâncio-modelo serão inevitavelmente mais íngremes que os da praia-protótipo. Se em vez de usar no modelo o mesmo sedimento do protótipo usarmos sedimento de menor massa específica - e geralmente de diâmetros mais graúdos - as declividades do estirâncio-modelo aumentarão ainda mais.

Só haverá um meio de fazer um perfil de praia em modelo representar um perfil-protótipo de praia de areia: admitir que a escala vertical do modelo é maior que a escala horizontal, pois tal fato acarreta que as declividades-modelos resultem aumentadas de tantas vezes quantas a escala vertical for maior que a horizontal. Com efeito

$$S = \frac{d}{\ell} \text{ ou } S = \frac{\hat{d}}{\hat{\ell}}$$

Se fizermos $\hat{d} = \alpha \hat{\ell}$, resultará: $S = \alpha \hat{\ell} / \hat{\ell} = \alpha$. É claro que o fator de exagero - o fator de distorção - não pode exceder certos limites, sob pena de o coeficiente de reflexão de praia-modelo aumentar a ponto de provocar fenômenos parassitários, inexistentes no protótipo.

Fato análogo ocorre com os modelos fluviais de fundo móvel, em que se estudam problemas de morfologia fluvial, tais como regularização de rios, prevenção de flanqueio de pontes em rios de planície aluvial, corte de meandros, etc. É fácil demonstrar, a partir de leis morfológicas como as já mencionadas equa-

ções da Teoria do Regime, que o rio-modelo precisa ter uma declividade de thalweg maior que o protótipo, pela simples razão de que nele se escoam vazões reduzidas em escala.

5.3 - Ao se distorcer a reprodução de uma qualquer das grandezas que intervêm no fenômeno a simular, este fato acarreta repercussões sobre as escalas a que se reduzem as outras grandezas. Torna-se então necessário prever ou compensar os efeitos da distorção introduzida.

5.4 - Antes de abordar tal assunto, vejamos em que consiste a distorção em termos adimensionais. Suponhamos que se aplicou o teorema de Buckingham a um fenômeno que se quer reproduzir em modelo, tendo resultado n parâmetros adimensionais. Ter-se-ia uma função adimensional do tipo: $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n)$. A igualdade dos números adimensionais correspondentes, entre modelo e protótipo, estabeleceria as condições de semelhança à que as escalas das diferentes grandezas deveriam obedecer. Escrever-se-ia:

$$\pi_{2m} = \pi_{2p}$$

$$\pi_{3m} = \pi_{3p}$$

.....

$$\pi_{nm} = \pi_{np}$$

e, nestas condições, $\pi_{1m} = \pi_{1p}$.

Introduzir uma distorção qualquer significa infringir uma das igualdades acima. Suponhamos que se introduza uma distorção, afetando o termo adimensional de ordem i . Resulta

ria: $\pi_{im} \neq \pi_{ip}$. É o caso, por exemplo, da distorção geométrica. Vimos que, ao aplicar o teorema de Buckingham a fenômenos hidráulicos, sempre aparecem números adimensionais característicos da geometria do escoamento, tais como d/ℓ , sendo d uma dimensão geométrica vertical, uma altura ou profundidade, e ℓ um comprimento. Distorcer geometricamente significa fazer:

$$\frac{d_m}{\ell_m} \neq \frac{d_p}{\ell_p} \text{ ou } \frac{d_m}{d_p} \neq \frac{\ell_m}{\ell_p} \text{ ou } \tilde{d} \neq \tilde{\ell}$$

Continuemos a raciocinar em termos gerais. Se fazemos $\pi_{im} \neq \pi_{ip}$, poderemos definir um coeficiente α de distorção tal que: $\pi_{im} = \alpha \pi_{ip}$. O coeficiente de distorção é o coeficiente de exagero vertical, isto é, o número de vezes que a escala vertical é maior que a escala horizontal. Ter-se-á $\tilde{d} = \alpha \tilde{\ell}$. Assim, por exemplo, em modelo de trecho fluvial a escala horizontal $\tilde{\ell} = 1/200$ e vertical $\tilde{d} = 1/50$, o fator de distorção geométrica ou de exagero vertical é igual a 4, pois se tem: $1/50 = 4 \times 1/200$.

Uma vez que se introduziu uma distorção em qualquer um dos números adimensionais característicos do modelo, resultará que não mais se terá a igualdade, entre modelo e protótipo, para o número adimensional referente à grandeza para a qual se quer efetuar a previsão. Isto é: se $\pi_{im} \neq \pi_{ip}$, também $\pi_{lm} \neq \pi_{lp}$.

Temos então dois caminhos possíveis a seguir, a fim de prever ou eliminar o efeito da distorção:

a) Pode-se simplesmente prever seu efeito, definindo um coeficiente de previsão δ , tal que $\pi_{lp} = \delta \pi_{lm}$. Então, conhecido o valor de δ e medindo π_{lm} no modelo distorcido, poder-se-á prever o valor que π_{lp} assumirá no

protótipo. A fim de determinar o valor δ , precisamos conhecer a forma da função que liga o coeficiente de distorção e as outras grandezas que intervêm no fenômeno. Em outras palavras, precisamos conhecer a função $\delta = f(\pi_{2m}, \pi_{3m}, \dots, \alpha, \dots, \pi_{mn})$ a fim de prever o valor de δ ;

b) Outro caminho a seguir, depois de introduzida uma distorção $\pi_{im} = \alpha \pi_{ip}$, consiste em introduzir também outra distorção $\pi_{pm} = \beta \pi_{pp}$, tal que na função $\delta = f(\pi_{2m}, \pi_{3m}, \dots, \alpha, \beta, \pi_{mn})$, os efeitos dos coeficientes de distorção α e β se cancelem mutuamente e acarretem $\delta = 1$. Este é o chamado método das distorções múltiplas.

5.5 - Antes de ver exemplos da aplicação dos métodos acima expostos a modelos reduzidos hidráulicos, cumpre advertir e ressaltar que certos problemas, por sua própria natureza, não admitem distorção, nem mesmo a simples distorção geométrica.

A distorção é usual e, como já vimos, pode ser necessária em problemas de morfologia de sistemas naturais (rios, estuários, costas e embocaduras). Como regra geral, porém, não é permitida nos seguintes tipos de problemas hidráulicos:

a) funcionamento de estruturas hidráulicas, tais como determinação de coeficientes de vazão em vertedor, determinação de curva de vazões de sangrador de barragem, dissipação de energia a jusante de quedas, funcionamento hidráulico de tomadas de água, defesa contra erosões locais, etc;

b) medições de esforços exercidos por escoamentos de qualquer natureza (inclusive ondulatórios) sobre elementos estruturais, tais como medições das forças exercidas sobre pilares ou comportas, estudos de vibrações em

barragens móveis, ação de ondas sobre estruturas marítimas ou sobre embarcações e suas amarras, etc;

c) todos os problemas de mecânica da onda, a não ser que o comprimento de onda possa ser considerado muito pequeno ou muito grande em face das profundidades, pois o exagero vertical acarreta a perda da semelhança de reflexão e de difração; é o caso, por exemplo, de estudos de agitação em portos, pesquisas básicas sobre reflexão e difração, determinação de coeficientes de reflexão, etc.

Em cada um dos problemas indicados, há razões intrínsecas e específicas que excluem a possibilidade de distorção. Assim, por exemplo, ao se estudar um problema de erosão local em torno de um pilar de ponte ou no sopé de um sangrador de barragem, a simples distorção geométrica acarretaria condicionamentos contraditórios para a reprodução das respectivas crateras de erosão (scour holes). As dimensões longitudinais das crateras deveriam aparecer reduzidas à escala longitudinal. Entretanto, tais crateras são produzidas por fenômenos hidráulicos, como vórtices e turbilhões de eixo vertical ou horizontal, que são funções das velocidades reproduzidas segundo a raiz quadrada da escala vertical em modelo distorcido. As dimensões geométricas de tais fenômenos aparecem pois reduzidas à escala vertical, ainda que se trate de dimensões longitudinais. Como, em modelo geometricamente distorcido, as escalas longitudinal e vertical são diferentes, as dimensões longitudinais das crateras de erosão não podem aparecer reduzidas à escala longitudinal, o que lhes falseia completamente a geometria.

Quando se têm elementos estruturais a considerar, se as escalas geométricas longitudinal e vertical forem diferentes, não se terão escalas únicas de áreas e pressões, pois

tais escalas serão função da inclinação, em relação ao plano horizontal, das áreas consideradas. A escala de áreas, por exemplo, variará entre $\hat{A}_h = \hat{l}^2$ para área horizontal e $\hat{A}_v = \hat{l}d$ para área vertical.

No caso das ondas, conforme veremos oportunamente, a própria natureza da relação entre celeridade ou comprimento de onda, períodos e profundidades - a não ser em profundidade infinita ou muito pequena - impossibilita a distorção geométrica, se se quiser obter semelhança de difração e reflexão.

Encontra-se aqui mais uma indicação de fato já salientado. Antes de mais nada, o engenheiro de laboratório precisa ter um bom conhecimento dos fenômenos, das grandezas e das relações que manuseia, a fim de decidir se a distorção é aceitável ou não e, em caso afirmativo, em que condições e com que repercussões. O conhecimento da Teoria da Semelhança é necessário, porém não é suficiente.

5.6 - A exposição dos dois métodos, destinados respectivamente a prever ou eliminar os efeitos de distorção, nos faz compreender também certas vantagens e desvantagens dos métodos possíveis para formular condições de semelhança:

a) aplicação, ao modelo e ao protótipo, de lei dimensional;

b) aplicação, às grandezas em jogo no modelo e no protótipo, do teorema de Buckingham.

A aplicação do teorema de Buckingham nos permite formular condições de semelhança, desde que saibamos identificar as grandezas presentes no fenômeno a reproduzir, mas não exige que conheçamos a natureza ou forma da função. Entretanto, se for necessário distorcer alguma

das escalas, sô poderemos prever ou compensar o efeito da distorção introduzida, se conhecermos a forma da função que relaciona as grandezas presentes. Para este fim, o teorema de Buckingham é impotente e se tem de recorrer à via experimental.

Por outro lado, a formulação de condições de semelhança a partir da aplicação de lei dimensional ao modelo e ao protótipo sô é evidentemente possível nos casos em que conhecemos a lei em questão. Entretanto, no caso de se distorcer alguma escala, será relativamente fácil prever os efeitos da distorção introduzida ou cancelá-los através da introdução de outras distorções.

Em consequência, os problemas mais difíceis, do ponto de vista da Teoria da Semelhança, são aqueles em que simultaneamente:

- a) desconhece-se a forma da função que relaciona as grandezas presentes;
- b) a distorção é necessária.

É o caso dos problemas relativos à morfologia de sistemas naturais, que se estudam em modelos de fundo móvel, reproduzindo erosão, transporte e depósito de sedimentos. A complexidade se agrava quando o agente hidráulico causador do transporte é de regime variável (ondas ou correntes de maré). Nestes casos, a própria determinação de coeficiente de previsão ou o cancelamento mútuo das distorções introduzidas, que podem ser numerosas, tem de ser efetuada por métodos experimentais. Tais métodos exigem conhecimentos específicos de morfologia marítima ou fluvial e não serão discutidos aqui, mas nas matérias respectivas, embora citeamos abaixo alguns exemplos.

5.7 - Começaremos os exemplos do emprego da distorção, considerando dois casos práticos de aplicação do método das distorções múltiplas. Em outras palavras, uma vez introduzida uma distorção, introduz-se outra de maneira a que os respectivos efeitos se cancelem mutuamente. A escolha dos valores dos coeficientes de distorção a adotar, para que os respectivos efeitos se anulem, se efetua pela utilização de lei conhecida que rege o fenômeno. Consideraremos um exemplo tirado de hidráulica fluvial e outro de hidráulica marítima.

5.7.1 - Suponhamos que se tenha distorcido geometricamente um modelo de trecho fluvial e se queira compensar tal distorção, jogando com a rugosidade, de maneira que a escala de perdas de carga não seja afetada e esta grandeza apareça corretamente reproduzida à escala vertical do modelo.

Esclarecemos preliminarmente que a escala geométrica vertical do modelo é a escala adequada para perdas de carga em consequência das seguintes razões:

a) a perda de carga, sendo por definição a perda de energia por unidade de peso do líquido escoado, tem a mesma dimensão (L) de uma grandeza geométrica linear:

$$[h] = \text{MLT}^{-2}\text{L}/\text{MLT}^{-2} = \text{L};$$

b) tal grandeza geométrica linear deve estar reproduzida à escala das alturas ou profundidades, e não à dos comprimentos ou larguras, porque, ao traçar-se a linha energética, a perda de carga é uma grandeza geométrica vertical.

Em escoamento turbulento, as perdas de carga são proporcionais aos quadrados das velocidades. Portanto tem-se:

$$\bar{h} = \bar{d} \bar{v}^2 \quad \text{ou} \quad \bar{d} = \bar{v}^2$$

A partir desta última consideração deduz-se imediatamente a escala de velocidades para modelo distorcido geometricamente: $\bar{v} = \bar{d}^{1/2}$. A escala de velocidades tem de ser a raiz quadrada da escala geométrica vertical.

Se o modelo é geometricamente distorcido, tem-se $\bar{d} \neq \bar{l}$ ou $\bar{d} = \alpha \bar{l}$ sendo α o fator de distorção geométrica ou fator de exagero vertical. Em consequência, a escala de declividades de linha de água - que são as perdas de carga por unidade de comprimento do rio - não mais será igual a 1, como é em modelo geometricamente semelhante. Haverá uma escala de declividades de linha de água, dada por:

$$\bar{S} = \bar{d}/\bar{l} \quad \text{mas} \quad \bar{d} = \alpha \bar{l} \quad \text{e} \quad \bar{S} = \alpha \bar{l}/\bar{l} = \alpha$$

Constata-se que, em modelo verticalmente exagerado, a escala de declividades de linha de água é igual ao próprio fator de distorção. Como este é um número positivo e usualmente inteiro, as declividades de linha de água no modelo precisam ser tantas vezes maiores que as declividades homólogas no protótipo quantas vezes a escala vertical é maior que a horizontal.

Entretanto, a declividade de linha de água é a perda de carga por unidade de comprimento e portanto constitui uma grandeza secundária, uma função da velocidade, do raio hidráulico e da natureza das paredes. O nosso problema consiste em, jogando com a rugosidade, assegurar que, ao longo de comprimentos reproduzidos à escala horizontal, a perda de carga

apareça corretamente reproduzida à escala vertical. Ou, em outras palavras, temos de assegurar que a condição $\hat{s} = \alpha$ se cumpra fisicamente, pois, uma vez obedecida tal condição, $\hat{s}\hat{\lambda} = \alpha\hat{\lambda} = \hat{h} = \hat{d}$.

A lei relacionando a velocidade com a geometria da seção, a rugosidade e a perda unitária é uma lei de escoamento uniforme em canal. Utilizemos a fórmula de Manning, escrevendo-a para o modelo e o protótipo:

$$v_m = k_m R_m^{2/2} S_m^{2/2}$$

$$v_p = K_p R_p^{2/3} S_p^{1/2}$$

Dividindo membro a membro:

$$\frac{v_m}{v_p} = \frac{K_m}{K_p} \frac{R_m^{2/3}}{R_p} \frac{S_m^{1/2}}{S_p}$$

ou, aplicando nossa convenção para representar as escalas:

$$\hat{v} = \hat{R} \hat{R}^{2/3} \hat{S}^{1/2} \quad (a)$$

Admitamos que o rio-protótipo seja suficientemente largo para que se possa considerar o raio hidráulico como igual à profundidade média na seção e que tal hipótese permaneça válida no modelo apesar da distorção geométrica. Ter-se-á:

$$R = d \quad \text{ou} \quad \hat{R} = \hat{d}$$

Já sabemos que:

$$\hat{v} = \hat{d}^{1/2} \quad \hat{R} = \hat{d} \quad \text{e} \quad \hat{S} = \alpha$$

Falta-nos determinar a escala \hat{R} de coeficientes de rugosidade de tal modo que, com a escala de declividades distorcida segundo o fator α , se tenham as perdas de carga reduzidas à escala vertical. Isto é: temos de determinar uma escala de rugosidade que, com $\hat{v} = \hat{d}^{1/2}$ e $\hat{R} = \hat{d}$, cumpra fisicamente a condição $\hat{S} = \alpha$ porque então $\hat{S}\hat{\ell} = \alpha\hat{\ell} = \hat{h} = \hat{d}$.

De (a) tira-se a condição que a escala de declividades ou perdas de carga unitárias deve satisfazer:

$$\hat{R} = \frac{\hat{v}}{\hat{R}^{2/3} \hat{S}^{1/2}}$$

Substituindo na última equação as diferentes escalas pelas respectivas expressões em função das escalas geométricas, obtém-se:

$$\hat{R} = \frac{\hat{d}^{1/2}}{\hat{d}^{2/3} \alpha^{1/2}} = \hat{d}^{-1/6} \alpha^{-1/2}$$

Esta seria a escala de rugosidades que compensaria o efeito da distorção geométrica no caso em apreço. É uma escala distorcida de rugosidade, porque, se deduzirmos a expressão da escala \hat{R} para modelo geometricamente semelhante, acharemos expressão diferente.

Conhecidos os valores K_p para certos estágios de escoamento no protótipo, os correspondentes valores K_m do coeficiente de rugosidade no modelo seriam determinados por $K_m = K_p \hat{R}$. Entrando com tais valores em tabela de coeficientes de rugosidade, seria possível, em princípio, determinar o acabamento ou o revestimento das paredes do escoamento no modelo para que uma distorção da rugosidade compensasse os efeitos, sobre a perda de carga, da distorção geométrica.

Este exemplo que se acaba de ver ocorre na prática dos laboratórios de hidráulica ao se estudarem problemas como defesa contra inundações, ou propagação de maré em estuários. Geralmente, a fim de provocar no modelo declividades de linha de água, tantas vezes mais íngremes que no protótipo, quantas vezes a escala vertical do modelo é maior que a horizontal, torna-se necessário introduzir rugosidade artificial no modelo.

5.7.2 - Vejamos agora um exemplo de aplicação do método das distorções múltiplas em hidráulica marítima.

A semelhança de reflexão é incompatível com a distorção geométrica porque as declividades das superfícies refletoras tornam-se tantas vezes maiores quantas vezes a escala vertical é maior que a horizontal, e, em consequência, os coeficientes de reflexão não ficam sendo os mesmos no modelo e no protótipo. Já vimos que a distorção geométrica acarreta $S = \alpha$. Em outras palavras, a reflexão é comandada por valores absolutos de parâmetros do tipo d/l e, portanto, é necessário reduzir d e L a mesma escala.

Entretanto, é possível obter semelhança de refração em modelos marítimos verticalmente exagerados, desde que se compense a distorção geométrica por uma segunda distorção, consistindo em reproduzir o comprimento da onda, que é uma grandeza geométrica linear-horizontal, segundo a escala geométrica vertical, em vez da horizontal. Isto equivale, como se verá abaixo, a reproduzir os períodos e as celeridades das ondas segundo a raiz quadrada da escala geométrica vertical. Obter semelhança de refração significa que, a profundidades homogêneas, as cristas das ondas-modelo giram de ângulos numericamente iguais aos ângulos de que giram as cristas das ondas-protótipo.

A refração é um fenômeno regido pela lei de Snell, segundo a qual os senos dos ângulos, de que as cristas (ou as ortogonais) giram a diferentes profundidades, são proporcionais às celeridades da onda às profundidades respectivas. Ter-se-á:

$$\frac{\text{sen } a_1}{\text{sen } a_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

onde os a são os ângulos de rotação das cristas (ou das ortogonais) a duas profundidades quaisquer e os c são as celeridades às respectivas profundidades.

Por sua vez, a expressão geral da celeridade, em função dos comprimentos de onda e das profundidades, é dada pela fórmula de Airy:

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \text{tg } h \frac{2\pi d}{L}}$$

onde c é a celeridade,
 g a aceleração da gravidade,
 d a profundidade,
 L o comprimento da onda à profundidade d ,
 $\text{tg } h$ significa tangente hiperbólica.

Escrevamos a fórmula de Airy para o modelo e o protótipo. Virá:

$$c_m = \sqrt{\frac{gL_m}{2\pi} \text{tg } h \frac{2\pi d_m}{L_m}}$$

$$c_p = \sqrt{\frac{gL_p}{2\pi} \text{tg } h \frac{2\pi d_p}{L_p}}$$

Dividindo membro a membro:

$$\frac{c_m}{c_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} \frac{\operatorname{tg} h \frac{2 \pi d_m}{L_m}}{\operatorname{tg} h \frac{2 \pi d_p}{L_p}} \quad (b)$$

Suponhamos que o modelo é distorcido $\frac{d_m}{d_p} = \hat{d} = \alpha \hat{\ell}$, mas que fazemos $\hat{L} = \hat{d}$ em vez de $\hat{L} = \hat{\ell}$. Então $\hat{L} = \frac{L_m}{L_p} = \hat{d}$ ou $L_m = L_p \hat{d}$

Substituamos em (b) d_m por sua expressão $d_m = d_p \hat{d}$ e L_m por $L_m = L_p \hat{d}$.

Teremos:

$$\frac{c_m}{c_p} = \sqrt{\frac{L_p \hat{d}}{L_p}} \frac{\operatorname{tg} h \frac{2 \pi d_p \hat{d}}{L_p \hat{d}}}{\operatorname{tg} h \frac{2 \pi d_p}{L_p}}$$

As tangentes hiperbólicas no numerador e no denominador se simplificam e resta:

$$\frac{c_m}{c_p} = \sqrt{\hat{d}} \text{ ou } \hat{c} = \hat{d}^{1/2}$$

Uma vez que $L = cT$, isto é, o comprimento de onda é o espaço percorrido pela crista durante um período, podemos escrever

$$L = \hat{c}\hat{T} \text{ mas, se } \hat{L} = \hat{d} \text{ e } \hat{c} = \hat{d}^{1/2}, \hat{T} = \frac{\hat{L}}{\hat{c}} = \frac{\hat{L}}{\hat{d}^{1/2}} = \hat{d}^{1/2}$$

Concluimos, portanto, que obteremos a semelhança de refração em modelo geometricamente distorcido, se compensarmos a distorção geométrica pela introdução de uma segunda distorção, consistindo em reduzir o comprimento de onda segundo a escala vertical, em vez da escala horizontal, o que equivale a reduzir as celeridades e os períodos segundo a raiz quadrada da escala vertical.

Nos problemas de regime de costa, geralmente o que importa é a semelhança de refração e então pode-se distorcer o modelo e abrir mão da semelhança de reflexão e de difração.

Entretanto, é preciso não perder de vista que um modelo marítimo distorcido não proporciona semelhança de reflexão e difração, embora nele as ondas se refratem de modo semelhante ao protótipo. Por conseguinte, se tivermos operado um modelo, que terá de ser distorcido, para estudar em fundo móvel a manutenção ou o aprofundamento do canal de acesso a um porto, não poderemos utilizar o mesmo modelo para estudar a proteção do porto contra a agitação ou para estudar as condições de navegação de modelos de navios ou para estudar a estabilidade das obras de regularização ou proteção. Cada um destes outros problemas exigiria um outro modelo não-distorcido geometricamente.

Vejamos, em primeiro lugar, por que a distorção geométrica faz desaparecer a semelhança de difração. A difração é fenômeno comandado pelo parâmetro $\frac{r}{L}$, sendo r a distância

do ponto considerado ao obstáculo causador da difração e L o comprimento de onda à profundidade no ponto em causa. Se a escala vertical for diferente da escala horizontal, o parâmetro acima não terá o mesmo valor no modelo e no protótipo, pois $\hat{r} = \hat{l}$, $\hat{L} = \hat{d}$ mas $\hat{d} \neq \hat{l}$.

Os estudos de agitação, provocada por ondas curtas ($T \leq 20$ segundos), em recinto portuário, não podem ser efetuados em modelos verticalmente exagerados. Já vimos que modelo em tal condição não proporciona semelhança de difração e de reflexão. Ora, o que se chama de agitação em um recinto portuário consiste na superposição de ondas refratadas, difratadas e refletidas. Em particular, as posições dos nós e dos ventres das ondas estacionárias, resultantes da superposição de ondas incidentes com ondas refletidas, não aparecem nos lugares certos do modelo distorcido e com os comprimentos de onda reduzidos segundo a escala vertical. Em modelo nestas condições, tudo se passa como se o fundo do modelo (à escala \hat{l}) estivesse comprimido em relação à configuração das cristas de onda (pois $\hat{L} = \hat{d} = \alpha \hat{l}$). Em consequência, os nós e ventres dos Clapotis não podem aparecer nos locais certos.

5.8 - O exemplo mais comum, em laboratório de hidráulica, de determinação de coeficiente de previsão para modelos distorcidos consiste na determinação experimental da escala de tempos de transporte sólido, para modelos de fundo móvel. Neste tipo de modelos introduzem-se numerosas distorções, que podem chegar a 10 ou 12, conforme veremos oportunamente em exemplo, e um dos efeitos globais deste procedimento consiste em ter-se uma escala de vazões sólidas diferente da escala de vazões líquidas. Deste fato resulta que se tem, também, uma escala de tempos de transporte sólido - há quem prefira falar em escala de tem-

pos morfológicos - diferente da escala dos tempos relativa aos outros fenômenos hidráulicos, que se chama de "escala dos tempos hidráulicos". Com efeito, sendo \hat{V} a escala de volumes do modelo, tem-se de ter:

$$\hat{V} = \hat{Q}_s \hat{t}_s \quad (c)$$

onde \hat{Q}_s é a escala de vazões sólidas (ou de transporte sólido) e \hat{t}_s é a escala de tempos de transporte sólido, ou de tempos morfológicos.

Se $\hat{Q}_s \neq \hat{Q}$, isto é, se a escala de vazões sólidas for diferente da escala de vazões líquidas, ter-se-á forçosamente $\hat{t}_s \neq \hat{t}$ ou uma escala de tempos morfológicos diferente da escala de tempos hidráulicos, uma vez que a escala de volumes fica univocamente determinada pelas escalas geométricas vertical e horizontal. Com efeito, $\hat{V} = \hat{x}^2 \hat{d}$.

Vê-se portanto que, por definição, a escala de tempos morfológicos é a razão entre os tempos, no modelo e no protótipo, durante os quais os volumes transportados de sedimentos estão entre si segundo a escala dos volumes.

A menos que se conheça com segurança uma lei de transporte sólido aplicável ao modelo e ao protótipo, o que não costuma ser o caso quando o sedimento-protótipo é areia com uma certa curva granulométrica, não é possível em geral calcular a priori os valores das escalas de vazão sólida e de tempos morfológicos. Determina-se esta última escala experimental mediante a comparação das durações de processos homólogos no modelo e no protótipo. Assim, por exemplo, no modelo costeiro de fundo móvel, em que se estudou no IPH da UFRGS a regularização da embocadura lagunar de Tramandaí, determinou-se a escala de tempos de transporte sólido pela comparação das durações de migração da embocadura.

cadura livre no modelo e no protótipo. Tal escala surgiu, pois, como a razão entre os tempos-modelo e os tempos-protótipo em que os deslocamentos da embocadura livre ficavam entre si segundo a escala horizontal do modelo.

Uma vez conhecida esta escala de tempos morfológicos, é fácil tirar da equação (c) acima a escala de vazões sólidas. Em modelo de embocaduras, onde se tem transporte sólido devido a ondas e a escoamentos, as duas escalas de transporte sólido - para vazões e tempos - têm de ser as mesmas para ondas e escoamentos, o que também se consegue por via teórico-experimental, mas sobretudo experimental.

5.9 - A fim de elucidar bem o conceito, nem sempre simples, de distorção, vejamos quais e quantas distorções estavam presentes no já mencionado modelo costeiro de fundo móvel em que se estudou a regularização da embocadura lagunar de Tramandaí.

O modelo estava construído à escala horizontal de 1/300 e vertical de 1/50. Reproduzia-se o período das ondas à raiz quadrada da escala vertical. O fundo móvel era constituído pela própria areia fina do protótipo, com diâmetro médio de 0,19mm, e assegurava-se a movimentação da areia pelas ondas às profundidades convenientes, provocando inicialmente a formação de ripple marks sobre toda a extensão do fundo móvel, de maneira a tornar sempre turbulento o regime da camada-limite oscilatória das ondas-modelo. A escala de velocidades dos escoamentos fluviais, através da embocadura, era o dobro da escala froudiana correspondente - raiz quadrada da escala vertical - de modo a assegurar que fossem as mesmas as escalas de transporte relativas a ondas e a escoamentos. Determinou-se experimentalmente, da maneira já descrita, uma escala de tempos de transporte sô

lido, tendo-se chegado ao resultado de que cinco ciclos de operação do modelo, cada um com duração de três horas e vinte e sete minutos, representavam dois anos no protótipo. O modelo, nestas condições, reproduziu com notável sucesso:

- a) os perfis de praia;
- b) as profundidades sobre a barra em frente à embocadura
- c) as posições do pontal sul ainda livre;
- d) a migração da embocadura quando estava livre, quer dizer, antes da construção de qualquer obra.

As distorções foram ao todo em número de onze. A primeira consistiu no exagero vertical, ou seja, $\hat{d} \neq \hat{l}$.

A segunda distorção consistiu em reproduzir o comprimento de onda, grandeza linear-horizontal, segundo a escala geométrica vertical, ou seja $\hat{L} \neq \hat{l}$. Vimos que, ao proceder assim, preservamos a semelhança de refração, que era o fenômeno realmente importante para gerar ações sobre a morfologia da praia e o transporte litorâneo.

A terceira e a quarta distorções consistiram em adotar uma escala de diâmetro de grão que não era nem a escala geométrica vertical nem a horizontal, ou seja $\hat{D} \neq \hat{d}$ e $\hat{D} \neq \hat{l}$.

A quinta distorção consistiu em adotar, para as velocidades fluviais, uma escala que era o dobro da raiz quadrada da escala vertical em vez de simplesmente igual à raiz quadrada, isto é:

$$\hat{v} = 2 \hat{d}^{1/2} \neq \hat{d}^{1/2}$$

A sexta distorção consistiu, por conseguinte, em ter para velocidades fluviais, uma

escala diferente da escala de celeridades de ondas, embora velocidades e celeridades tenham a mesma expressão dimensional (LT^{-1}). Com efeito $\hat{v} = 2 \hat{d}^{1/2}$ e $\hat{c} = \hat{d}^{1/2}$, logo $\hat{v} \neq \hat{c}$.

A sétima distorção consistiu em ter escalas diferentes para escalas de velocidades fluviais e de velocidades no movimento orbital das partículas líquidas sob as ondas. Chamando de \hat{v} esta última escala e sendo $\hat{L} = \hat{d}$ ou $\hat{T} = \hat{d}^{1/2}$, $\hat{v}_{osc} = \hat{d}^{1/2}$, mas como $\hat{v} = 2\hat{d}^{1/2}$, $\hat{v}_{osc} \neq \hat{v}$.

A oitava distorção consistiu em ter uma escala de períodos diferentes da escala de tempos a que, por exemplo, se teriam cronometrado deslocamentos de flutuadores no modelo e no protótipo. Com efeito, $\hat{T} = \hat{d}^{1/2}$ mas

$$\hat{t} = \frac{\hat{\lambda}}{2\hat{d}^{1/2}}, \text{ logo } \hat{T} \neq \hat{t}$$

A nona distorção consistiu em ter uma escala de tempos morfológicos diferente da escala de tempos a que se reduziam os períodos, ou seja $\hat{t}_s = \hat{T}$.

A décima distorção consistiu em ter uma escala de tempos morfológicos diferente da já mencionada escala de tempos de escoamentos, isto é:

$$t_s \neq \hat{t} = \frac{\hat{\lambda}}{2\hat{d}^{1/2}}$$

A undécima distorção consistiu em ter uma escala de vazões sólidas diferente da escala de vazões líquidas $\hat{Q}_s \neq \hat{Q}$.

Se examinarmos o conjunto dos fenômenos hidráulicos e processos sedimentológicos, produzidos no estudo de Tramandaí, veremos que se utilizou várias vezes o método das distorções múltiplas e pelo menos uma vez o método de determinar experimentalmente um coeficiente de previsão.

Aplicou-se este segundo método, como já se disse, na determinação da escala de tempos de transporte sólido.

De saída recorreu-se à distorção geométrica para obter a semelhança dos perfis de praia, segundo a já mencionada lei morfológica.

Compensou-se o efeito da distorção geométrica sobre a refração, distorcendo o comprimento das ondas e conseqüentemente os períodos em relação aos tempos de escoamento.

Distorceu-se o diâmetro de grão para permanecer dentro dos limites de validade das leis de transporte e para obter a semelhança dos perfis de praia. Tal distorção acarretou a perda da semelhança das condições críticas de arraste, mas em parte desprezou-se tal perda e em parte compensou-se-a pelo artifício do enrugamento inicial e por outra distorção consistindo no exagero das velocidades dos escoamentos fluviais.

A prova de que estas distorções se compensaram está em que as profundidades sobre a barra, expressão global da interação entre as ondas e os escoamentos, sempre apareceram certas.

Entretanto, a distorção das velocidades fluviais acarretou duas outras:

- a) a desigualdade entre escalas de velocidades fluviais e de celeridades de ondas;
- b) a desigualdade entre escalas de velocidades fluviais e velocidades oscilatórias.

A comparação entre a morfologia de embocadura no modelo e no protótipo revelou que estas duas distorções não tiveram efeitos nocivos.

Finalmente, a escala de tempos morfológicos resultou diferente das escalas de tem-

pos para períodos de ondas e para escoamentos fluviais, acarretando uma escala de vazões sólidas diferente da escala de vazões líquidas. A escala de tempos morfológicos foi determinada experimentalmente enquanto a escala de vazões sólidas foi deduzida do valor experimental achado e da escala de volumes.

A prova de que as escalas de transporte para ondas e para escoamentos eram as mesmas também reside na reprodução correta da morfologia da embocadura e da praia.

5.10 - Sempre que se introduzem distorções, é absolutamente vital que se verifique experimentalmente o efeito global das distorções introduzidas. Tal verificação se faz pela reprodução da situação atual ou de processo característico da história do protótipo. É o que se chama a etapa de regulação do modelo.

No caso, por exemplo, de um modelo distorcido de trecho fluvial, é necessário reproduzir perfis de linha de água para vazões homólogas a fim de verificar se se obedeceu adequadamente à escala de rugosidade. Note-se, aliás, que o desenvolvimento teórico anteriormente exposto apenas fornece uma orientação geral, na maioria dos casos, e é por tentativas no próprio modelo que se consegue ajustar a rugosidade adotada. Esta última observação também é válida para modelos geometricamente semelhantes, em que seja necessário reproduzir adequadamente os perfis de linha de água, como o caso de um modelo fluvial, destinado a estudar um aproveitamento hidroelétrico, em que, antes de introduzir no modelo as estruturas em projeto, seja necessário estudar as fases de construção das mesmas.

Nos modelos de fundo móvel, é essencial que se reproduzam os traços característicos pelo menos da morfologia atual do protóti-

po. Nem sempre se pode determinar uma escala de tempos de transporte sólido porque nem sempre a história do protótipo comporta processo suficientemente definido e sistemático para tal fim. Há casos, até, em que a própria natureza do protótipo exclui a possibilidade de determinar uma escala de tempos morfológicos, como se dá, por exemplo, para modelos de praias de enseada.

Em virtude do caráter ainda bastante falho ou limitado das leis de transporte sólido atualmente conhecidas, não inspira confiança um modelo de fundo móvel que, antes de responder a perguntas, não tenha reproduzido uma situação ou processo característico do protótipo, por melhor que seja sua fundamentação teórica. Se a primeira tentativa de reprodução não é bem sucedida, alteram-se os valores adotados para os coeficientes de distorção ou as condições de operação do modelo até se conseguir a reprodução desejada.

Ao receber as conclusões de um estudo de fundo móvel, a primeira indagação de quem o encomendou deve ser: como e com que resultados se efetuou a regulação do modelo ?

5.11 - EXERCÍCIOS

1) Estudou-se um problema de defesa contra inundação em modelo reduzido, a fundo fixo, de trecho fluvial. O modelo estava construído à escala horizontal de 1/200 e vertical de 1/50. Quais eram as escalas das outras grandezas a considerar ?

2) Estudou-se um problema de dissipação de energia a jusante de queda em modelo geometricamente semelhante à escala de 1/100. O material de fundo no estirão de jusante do protótipo era uma areia fina com diâmetro médio de

0,20mm. No modelo procurou-se obter semelhança geométrica das crateras de erosão que se formariam no protótipo. Pelo critério da semelhança das velocidades de decantação adotou-se, como indicador de erosão no modelo, um material de massa específica e de diâmetro médio diferentes da areia. Pergunta-se:

- a) Este modelo era distorcido?
- b) Em caso afirmativo, quais e quantas distorções havia?

3) No texto do presente capítulo caracterizaram-se as condições de construção e operação do modelo costeiro de fundo móvel de Tra mandáí. Quais eram os valores numéricos de todas as escalas mencionadas, se as escalas geométricas eram 1/300 e 1/50 ?

4) Estudou-se um problema de evitar franqueio (outflanking) de ponte, sobre rio em planície aluvial, em modelo fluvial de fundo móvel à escala horizontal de 1/300 e vertical de 1/45. A escala de vazões líquidas era 1/90 700. A regulação do modelo revelou a necessidade de reduzir a escala de declividades para um valor de 3:1 e permitiu determinar uma escala de tempos morfológicos pela qual 1 dia no modelo representava um ano no protótipo. O material de fundo móvel no modelo era uma areia com diâmetro médio de 0,17mm. Quais e quantas distorções estavam presentes no modelo?

6 - EFEITO DE ESCALA

6.1 - Em capítulo anterior deste curso viu-se que, em modelo reduzido de escoamento de fluidos, não é possível obter semelhança para mais de um tipo de forças, além das forças de inércia. Quando, no protótipo, um determinado tipo de forças - digamos as forças de gravidade - prepondera a ponto de ser realmente desprezível a influência dos outros tipos de força - viscosidade, tensão superficial e compressibilidade - a semelhança para o tipo de forças dominantes no caso, a igualdade dos números de Froude - permite projetar um modelo adequado, desde que as escalas geométricas escolhidas tenham valores suficientemente grandes.

Assim, por exemplo, desde que se construa, a escala geométrica suficientemente grande, um modelo reduzido de agitação para um porto, tal modelo poderá ser perfeitamente adequado para reproduzir as ondas que realmente precisam ser consideradas no protótipo.

6.2 - Existem casos, porém, em que, apesar de haver um tipo de forças preponderantes, a influência dos outros tipos de força não é inteiramente desprezível. Nestes casos as previsões extraídas do modelo, que se projetar a fim de proporcionar semelhança para o tipo de forças preponderantes, serão afetadas de um certo erro.

Em outros casos, embora haja no conjunto do fenômeno um tipo de forças amplamente preponderante, pode haver aspectos particulares ou certos pontos particulares no protótipo em que não sejam totalmente desprezíveis os efeitos de outros tipos de força. Também nestes casos as previsões obtidas no modelo, que se projetar tendo em vista a semelhança das forças preponderantes, serão afetadas de certo erro.

Numa terceira categoria de casos, no protótipo a influência de todos menos um tipo de forças é totalmente desprezível; mas pode acontecer que seja irrealizável, na prática, o modelo à escala suficientemente grande para que também no modelo a influência de todos os restantes tipos de força seja realmente desprezível. Ainda neste caso as previsões obtidas no modelo serão afetadas de certo erro.

6.3 - Em qualquer uma destas três categorias de casos chama-se de efeito de escala o erro contido nas previsões do modelo, em consequência do fato de não ser possível semelhança simultânea para todos os tipos de força.

6.4 - Vejamos um exemplo concreto de efeito de escala em modelo reduzido hidráulico. Será um caso de terceira categoria acima exposta.

Suponhamos que se pretenda determinar o traçado mais conveniente, do ponto de vista das condições de navegação, para um canal de acesso a um porto situado no interior de uma embocadura lagunar pela qual se escoam vazões fluviais importantes. Pretende-se efetuar tal determinação através da observação do comportamento de modelos telecomandados de navios em modelo hidráulico de fundo fixo, geometricamente semelhante, no qual se reproduzam as ondas, correntes litorâneas e escoamentos fluviais.

Tendo em vista a extensão da área-protótipo a representar, escolheu-se o valor de 1/100 para a escala geométrica. Julgou-se satisfatório o valor resultante de 1/10 para a escala de tempos a que terão de reduzir-se os tempos de manobra dos navios. A escala de 1/100 também é aceitável para reproduzir o navio de projeto do canal de acesso com os respectivos órgãos de propulsão e governo. No protótipo, as vazões a reproduzir pela embocadura são da ordem de $5000\text{m}^3/\text{s}$ e no modelo as vazões correspondentes acarretam números de Reynolds bem acima do limiar de escoamento turbulento.

Com a escala adotada de 1/100 o modelo resulta enorme. É em planta um quadrado com 100 metros de lado, que não caberia em nenhum dos laboratórios de hidráulica existentes no Brasil e tem de ser construído ao ar livre, apesar dos inconvenientes que tal fato possa acarretar.

Entretanto, neste modelo tão grande, em que os escoamentos fluviais são tão seguramente turbulentos, o escoamento local em torno do leme do navio será inevitavelmente laminar e só deixaria de sê-lo se se construísse o modelo a uma escala da ordem de 1/30, que a extensão da área-protótipo a reproduzir torna proibitiva e inviável.

Em conseqüência, no modelo, os deslocamentos, que o navio em manobra venha a sofrer sob influência de ondas e correntes, serão exagerados pela influência de forças de viscosidade inexistentes no protótipo. As previsões quantitativas de tais deslocamentos no protótipo, resultantes da aplicação das escalas correspondentes a valores medidos no modelo, estariam afetadas no erro.

Neste caso particular, tais erros não prejudicariam o objeto do estudo. Com efeito, o que realmente interessa é a comparação entre

os diferentes traçados de canal de acesso, para as mesmas condições hidráulicas, não a previsão de valores absolutos dos deslocamentos do navio. Como a influência das forças de viscosidade é a mesma para todos os traçados a serem ensaiados, a comparação é possível. A influência da viscosidade é a mesma para todos os traçados porque depende da escala geométrica, para as mesmas condições hidráulicas, e tal escala no modelo em consideração permanece constante quando variam os traçados do canal de acesso.

6.5 - A maneira de pesquisar a existência ou não de efeito de escala na simulação física de um dado sistema consiste em se fazerem diferentes modelos, a diferentes escalas geométricas, do mesmo protótipo. Para as condições representativas, nos diferentes modelos, de uma mesma situação no protótipo aplicam-se as escalas respectivas aos valores medidos, nos diferentes modelos, da grandeza suspeita de estar afetada de efeito de escala. Se os diversos valores, em termos - protótipo da grandeza em questão - coincidirem dentro da precisão em que se fazem as medidas, poder-se-á afirmar não ter ocorrido efeito de escala. Se variarem, poder-se-á traçar o gráfico da variação da grandeza considerada, em termos-protótipo, em função dos valores da escala geométrica. O valor da última, a partir do qual os valores-protótipo passam a coincidir a menos do erro experimental, define o limite abaixo do qual ocorria efeito de escala e acima do qual tal efeito desapareceu.

Suponhamos que se construa um modelo de sangrador de barragem à escala de 1/100. No protótipo é totalmente desprezível a influência de forças de tensão superficial sobre a veia líquida que se escoar, em situação de cheia, entre os pilares existentes na crista do sangrador. Suponhamos, porém, que tivessem surgi-

do dúvidas sobre possíveis influências de forças de tensão superficial nas veis líquidas que se escoam, para vazões correspondentes, pelo sangrador-modelo. Pode ter acontecido, por exemplo, que se tenha suspeitado de que os valores absolutos dos espaçamentos entre os pilares na crista do sangrador-modelo, à escala de 1/100, não fossem suficientemente grandes para assegurar a ausência de influência das forças de tensão superficial.

O procedimento a seguir, para pesquisar tal efeito de escala, consistiria em construir vários modelos do mesmo sangrador a diferentes escalas. Digamos que se construíssem tais modelos às escalas de $\lambda_1 = 1/75$, $\lambda_2 = 1/50$, $\lambda_3 = 1/40$, $\lambda_4 = 1/30$. Supondo sempre a mesma posição das comportas, a um dado nível de água a montante e a uma dada carga sobre a crista do sangrador - corresponde unicamente uma vazão protótipo. Suponhamos agora que se impusesse a carga correspondente a cada um dos modelos às escalas acima enumeradas e se medisse, para cada um, a vazão modelo que mantém em regime permanente a carga em questão. A cada escala geométrica corresponderia um valor de vazão-modelo, Q_{1m} , Q_{2m} , Q_{3m} , Q_{4m} . Aplicando a cada um destes valores o respectivo valor da escala de vazões, ter-se-ia um valor protótipo. Ter-se-ia pois o conjunto de valores Q_{1p} , Q_{2p} , Q_{3p} , Q_{4p} .

Não teria havido efeito da escala se $Q_{1p} = Q_{2p} = Q_{3p} = Q_{4p}$ dentro da precisão com que se efetuam as medidas.

Se tiver ocorrido efeito de escala, os valores-protótipos da vazão em causa não serão iguais. Poder-se-á traçar um gráfico de tais valores em função dos respectivos valores da escala geométrica. O limite de valor da escala geométrica, acima do qual o efeito de escala desaparece, é aquele além do qual o gráfico se torna uma reta paralela ao eixo em que se representarem os valores da escala geométrica.

7 - BIBLIOGRAFIA

7.1 - GENERALIDADES SOBRE ANÁLISE DIMENSIONAL E TEORIA DA SEMELHANÇA

1. BEAUJOINT, N. Similitude et théorie des modèles. Chatou, Electricité de France, Centre de Recherches et d'Essais de Chatou, 1960.
2. CELESTE, P. Théorie généralisée d'analyse dimensionnelle et de similitude. Separata de JOURNÉES INTERNATIONALES DE CALCUL ANOLOGIQUE, 2., Strasbourg, 1958. Actes. Bruxelles, Presses Académiques Européennes, 1950.
3. GUPTA, S.N. "Applications of dimensional analysis and similitude principle." In: GOLDEN JUBILEE SYMPOSIUM OF THE CENTRAL WATER AND POWER RESEARCH STATION, Poona, 1966. Proceedings. Poona, 1966. v.1, p. 77-82.
4. LANGHAR, H. L. Dimensional analysis and theory of models. New York, 1962.
5. MARTINOT-LAGARDE, A. Similitude physique; exemples d'applications à la mécanique des fluides. Paris, Gauthier-Villars, 1960.
6. MURPHY, G. Similitude in engineering. New York, Ronald Press, 1950.

7. PALACIOS, J. Analisis dimensional. Madrid, Espasa-Calpe, 1956.
 8. SEDOV, L. I. Similarity and dimensional methods in mechanics. New York, Academic Press, 1959.
 9. WANNOCK, J. E. "Hydraulic similitude." In: ROUSE, H., comp. Engineering hydraulics. 6. ed. New York, Miley, 1967.
- 7.2 - EXPOSIÇÕES GERAIS SOBRE MODELOS REDUZIDOS HIDRÁULICOS E SUAS APLICAÇÕES
1. ALLEN, F. H. Hydraulic model techniques. London, Institution of Civil Engineers, 1959.
 2. ALLEN, F. H. & RUSSEL, R. C. H. Discourse on hydraulic models as an aid to solving river, estuary and harbour problems. London, Institution of Civil Engineers, 1958.
 3. ALLEN, J. Scale models in hydraulic engineering. London, Longmans Green, 1952.
 4. FREEMAN, J. Hydraulic-laboratory practice. New York, American Society of Mechanical Engineers, 1929.
 5. HYDRAULICS RESEARCH STATION, Wallingford. Hydraulics research. London, Her Majesty's Stationery Office, 1951-1967. Relatórios anuais do diretor do Hydraulics Research Station.
 6. INGLIS, Claude C. The behaviour and control of rivers and canals with the aid of models. Poona, Central Water Power, irrigation and Navigation Station, 1949. (Publication, 13)
 7. IPPEN, A. T. "Los modelos hidraulicos y Osborne Reynolds." In: CONGRESO LATINO AMERICANO DE HIDRAULICA, 3., Buenos Aires, 1968. Buenos Aires, Facultad de Ingenieria, 1968. v.4, p. 61-108.

8. LOPES, M. O. Simões. Relatório do Estágio de Aperfeiçoamento no Centre de Recherches et d'Essais de Chatou (França) e de Visitas a Laboratórios de Hidráulica Europeus. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Pesquisas Hidráulicas, 1963.
9. MOTTA, V. F. Report on visits to european hydraulics laboratories. Porto Alegre, Gráfica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1962, (Publicação, 383)
10. REZENDE, B. S. Visitas a Laboratórios de Hidráulica na Europa e África Portuguesa. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Pesquisas Hidráulicas, 1965.
11. SILVEIRA, R. L. da. Relatório do Estágio de Aperfeiçoamento na Divisão de Portos e Praias do Laboratório Nacional de Engenharia Civil de Lisboa e das Visitas a Laboratórios de Hidráulica Europeus e a Obras de Engenharia Hidráulica na Europa e na África Portuguesa. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Pesquisas Hidráulicas, 1965.

7.3 - COMPARAÇÃO ENTRE FUNCIONAMENTO DE MODELOS E DE PROTÓTIPOS; DISTORÇÃO E EFEITOS DE ESCALAS

1. BERGE, H. "Some examples of model-prototype conformity". In: GOLDEN JUBILEE SYMPOSIUM OF THE CENTRAL WATER AND POWER RESEARCH STATION, Poona, 1966. Proceedings. Poona, 1966. v.1, p. 67-71.
2. BIJKER, E. W.; STAPEL, D.R.; VRIES, M.de. "Some scale effects in models with bed load transportation". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 7., General Meeting, Lisboa, 1957. Transactions. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1957. v.1, p. A1 1-16.

3. CHITALE, S. V. "Modelling for open-channel flow problems". In. GOLDEN JUBILEE SYM - POSIUM OF THE CENTRAL WATER AND POWER RESEARCH STATION, Poona, 1966. Proceedings. Poona, 1966. v.2, p. 5-9.
4. ESTADOS UNIDOS. Army. Engineer Waterways Experimental Station. Hydraulic effects of model distortion; triangular-flume study of distortion effects. Vicksburg, 1957.
5. GRESLOU, L. "Effects d'echelle dans les etudes maritimes". In. INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 7., General Meeting, Lisboa, 1957. Transactions. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1957. v.1, p.A7 1-18.
6. JOGLEKAR, D. V. et alii. "Scale effect in hydraulic research". General Meeting, Lisboa. Transactions, Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1957. v.1, p. A4 1-10.
7. JOHNSON, J. W. Scale effects in hydraulic models involving wave motion. Transaction of American Geophysical Union, Washington, D. C., 30 (4): 517-25, 1949.
8. LUTRA, S. D. L. "Some examples of model and prototype conformity in hydraulic structures". In: GOLDEN JUBILEE SYMPOSIUM OF THE CENTRAL WATER AND POWER RESEARCH STATION, Poona, 1966. Proceedings. Poona, 1966. v.1, p. 72-6.
9. McDOWELL, D. M. "Scale effect in hydraulic models with distorted vertical scale." In: GOLDEN JUBILEE SYMPOSIUM OF THE CENTRAL WATER AND POWER RESEARCH STATION, Poona, 1966. Proceedings. Poona, 1966. v.2, p. 15-20.

10. MOTTA, V. F. O Efeito da Escala na Ação Corrosiva ou Engordante das Ondas; Modelo sobre os Perfis de Praia. Trabalho apresentado ao 1º Congresso Brasileiro de Transportes Marítimos e Construção Naval, Rio de Janeiro, 1963.
11. PENDTSE, Y. D. "Model-prototype conformity, an aid to hydraulic design criteria." In: GOLDEN JUBILEE SYMPOSIUM OF THE CENTRAL WATER AND POWER RESEARCH STATION, Poona, 1966. Proceedings. Poona, 1966.v.2,p.273-7.
12. PETERKA, A. J. Performance tests on prototype and model. Transactions of the American Society of Civil Engineers, New York, N. Y., 121: 385-409, 1956.
13. REINALDA, R. "Scale effects in models with littoral drift". In. CONFERENCE ON COASTAL ENGINEERING, 7., La Hague, 1960. Proceedings. Berkeley, University of California, Council on Wave Research, 1961. p. 318-25.
14. SAVILLE JUNIOR, T. "Scale effects in two-dimensional beach studies". In. INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 7., General Meeting, Lisboa, 1957. Transactions. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1957. v.1, p.A3 1-10.
15. SUPINO, G. "On the scale effect in hydraulic models". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 7. General Meeting, Lisboa, 1957. Transactions. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1957. v.1, p.A2 1-6.
16. THOMAS, C. W. "Velocity scour and pressure measurements from three models of the same structure". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 7., General Meeting, Lisboa, 1957. Transactions. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1957. v.1, p.A8 1-16.

7.4 - MODELOS FLUVIAIS DE FUNDO FIXO

1. ACKERS, P. Charts for the hydraulic design of channels and pipes. London, Her Majesty's Stationery Office, 1958. (Hydraulics Research Paper, 2)
2. ACKERS, P. Resistance of fluids flowing in channels and pipes. London, Her Majesty's Stationery Office, 1958. (Hydraulics Research Paper, 1)
3. ENGELUND, F. Flow resistance and hydraulic radius. Copenhagen, Technical University of Denmark, Hydraulic Laboratory, 1964. (Bulletin, 7)
4. HYDRAULICS RESEARCH STATION, Wallingford. Burton upon Trent; report on the model investigation of river Trent at Burton-upon-Trent. Wallingford, 1960. Relatório não publicado.
5. HYDRAULICS RESEARCH STATION, Wallingford. Newark By-Pass; report on the model investigation of a proposed viaduct over river Trent. Wallingford, 1959. Relatório não publicado.
6. LABORATOIRE NATIONAL D'HYDRAULIQUE, Chatou. Project d'elargissement du bras de la Monnaie; etude sur modèle réduit. Chatou, 1956. Relatório não publicado.
7. SAYRE, W. W. & ALBERTSON, M. L. Roughness spacing in rigid open channels. Transactions of the American Society of Civil Engineers, New York, N.Y., 128: 343-427, 1963.
8. SELLIN, R. H. J. A laboratory investigation into the interaction between the flow in the channel of a river and that over its flood plain. La Houille Blanche, Grenoble, 19 (7): 793-802, 1964.

9. THIJSSSE, J. Formules de perte de charge le long des parois en écoulement turbulent. Chatou, Electricité de France, Direction des Etudes e Recherches, Service des Etudes Hydrauliques, 1950. Tradução, 791.
10. THIRRIOT, C. Reflexion sur la recherche de similitude hyperdistordue pour l'etude des écoulements à surface libre dans les canaux. La Houille Blanche, Generoble, 19 (5): 575-80, 1954.
11. UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Porto Alegre. Usina de Salto Grande da CEEE; Estudo em Modelo Reduzido da Casa de Máquinas. Porto Alegre, 1959. Relatório não publicado.
12. WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM, Delf. La rugosité dans le modèles à fond fixe fortement distordu. Delf, 1949.

7.5 - MODELOS FLUVIAIS DE FUNDO MÓVEL

1. ACKERS, P. Experiments on small streams in alluvium. Proceedings of the American Society of Civil Engineers; Journal of the Hydraulic Division, New York, N. Y., 90 (HY4): 1-37, 1964.
2. ACKERS, P. "A study of the effects of flood hydrograph on training works in the meaderin Kadema River". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 11., Congress, Lenigrad, 1965. Proceedings. Lenigrad, 1967. v.3, paper 343.
3. BIDJKER, E. W. "Determination of scales of movable-bed models". In. GOLDEN JUBILEE SYMPOSIUM OF THE CENTRAL WATER AND POWER RESEARCH STATION, Poona, 1966. Proceedings. Poona, 1966. v.2, p. 1-4.

4. BLENCH, T. Mobile-bed fluviology; a regime theory treatment of rivers for engineers and hydrologists. Edmonton, University of Alberta, 1966.
5. BLENCH, T. Regime behaviour of canals and rivers. London, Butterworths, 1957.
6. BLENCH, T. "Regime formulas for bed load transportation". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 6., General Meeting, La Hague, 1955. Proceedings. Delf, 1955. v.2, p. D1 1-11.
7. BLENCH, T. & ERB, R. B. La théorie du régime appliquée à l'analyse des résultats expérimentaux concernant les transports de fond. La Houille Blanche, Grenoble, 12 (2): 132-47, 1957.
8. BORELLI, M. & BRUCK, S. "Critical analysis of river model similarity". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 7., General Meeting, Lisboa, 1957. Transactions. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1957. v.2, p. D4 1-26.
9. CHABERT, J. & REMILLIEUX, R. Etude de l'amélioration des conditions de navigabilité du Niges dans la République du Mali. La Houille Blanche, 15 (B): 123-35, 1960.
10. CHATLEY. H. "The distortion of scales in models with loose beds". In. INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 2., Meeting, Stockholm, 1948. Proceedings. Stockholm, 1948. p. 107-11.
11. CHAUVIN, J. L. Similitude des modèles de cours d'eau à fond mobile. Chatou, Centre du Recherches et d'Essais de Chatou, 1962. (Bulletin, 1)
12. CHIEN, N. A concept of the regime theory. Transactions of the American Society of Civil Engineers. New York, 122: 785-805, 1957.

13. CRISTIAN, H.E.; MELLENA, W. J.; LINDER, W. M. Movable-bed model for river structure design. Proceedings of the American Society of Civil Engineers; Journal of Waterways and Harbors Division, New York, N. Y., 92 (WW3): 45-68, Aug. 1966.
14. EGUIAZAROV, Z. V. Etude sur modèle des phénomènes concernant le lit des rivières. Chatou, Electricité de France, Service des Etudes Hydrauliques, s.d. Tradução, 500, de memória apresentada à Academia de Ciências da União Soviética.
15. EGUIAZAROV, Z. V. "Stable channels and generalized criteriou of sediment mobility" In: GOLDEN JUBILEE SYMPOSIUM OF THE CENTRAL WATER AND POWER RESEARCH STATION, Poona, 1966. Proceedings. Poona, 1966. v.2, p. 21-8
16. EINSTEIN, H. A. & BARBAROSSA, N. L. River channel roughness. Transactions of the American Society of Civil Engineers, New York, N. Y., 117: 1121-46, 1952.
17. EINSTEIN, H. & CHIEN, N. Similarity of distorted river models with movable beds. Transactions of the American Society of Civil Engineers, New York, N.Y., 121: 440-62, 1956.
18. FRIJLINK, H. Discussion des formules de débit solide de Kalinske, Einstein et Meyer-Peter et Mueller, compte tenu des mesures recents de transport solide dans les rivières Neerlandaises. Delf, Waterloopkundig Laboratorium, 1952.
19. HINCU, S. Estudo dos Fenômenos Morfológicos dos Leitões dos Rios em Modelos Aerodinâmicos. Rio de Janeiro, 1963. Traduzido do Original Rumeno, por T. Oniga em 1963, publicado em Bucarest em 1959.

20. JOGLEKAR, D. V. "The effects of Weirs and Dams on the regime of rivers". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 4., Meeting, Bombaim, 1951. Proceedings. New Delhi, Central Board of Irrigation and Power, 1953. p. 349-63.
21. LACEY, G. "Models scales and regime concepts". In: GOLDEN JUBILEE SYMPOSIUM OF THE CENTRAL WATER AND POWER RESEARCH STATION, Poona, 1966. Proceedings. Poona, 1966. v.2, p. 10-4.
22. LEVIN, L. "Considération sur la similitude des écoulements à fond mobile". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 4., Meeting, Bombaim, 1951. Proceedings. New Delhi, Central Board of Irrigation and Power, 1953. p.605-15.
23. LI, Wen Hsiung. "Criteria for similitude of scour below hydraulic structures". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 6., General Meeting, La Hague, 1955. Proceedings. Delf, 1955. v.3, p.C4 1-6.
24. MAZA ALVARES, J. A. & STRINGALL GALINDO, R. "Calibración de modelos fluviales de fondo móvil". In: CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRAULICA, 3., Buenos Aires, 1968. Anais. Buenos Aires, Facultad de Ingeniería, 1968. v.2, p. HFL1-10.
25. MOTTA, V. F. A Reprodução em Modelo Reduzido de Erosão a Jusante de Queda. Revista do Clube de Engenharia, Rio de Janeiro, (296): 11-9, abr. 1961.
26. PETERSEN, M. S. Laboratory contributions to channel stabilization. Proceedings of the American Society of Civil Engineers; Journal of Waterways and Harbors, New York, N. Y., 92 (WW1): 87-108, Feb. 1966.

27. ROCHA FELICES, A & LESCANO RIVERO, M. "Sobre la determinación del coeficiente de rizados". In. CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRAULICA, 3., Buenos Aires. 1968. Anais, Buenos Aires, Facultad de Ingenieria, 1968. v.2, p. HFL11-20.
28. STUDIENITCHNIKOV, B. J. Cálculo e Reproduções em Modelo das Erosões Locais e Jusantes de Sangradores. Rio de Janeiro, Instituto Brasileiro de Bibliografia e Documentação, 1965. Tradução do original russo, publicado nos Anais do Laboratório de Hidráulica do Instituto Pan-Soviético de Pesquisas Científicas da Academia de Construção e Arquitetura da União Soviética, Moscou, 1959, Publicação 7.
29. VRIES, M. de & SYBESMA, R. Computation of boundary conditions of a river model with movable bed. Delf, Waterloopkundig Laboratorium, 1961.
30. YALIN, M. S. An expression for bed load transportation. Proceedings of the American Society of Civil Engineers; Journal of Hydraulics Division, New York, N. Y., 89 (HY3): 221-4, 1963.
31. YALIN, M. S. "A theoretical study of stable alluvial systems". In: GOLDEN JUBILEE SYMPOSIUM OF THE CENTRAL WATER AND POWER RESEARCH STATION, Poona, 1966. Proceedings. Poona, 1966. v.2, p. 326-9.
32. ZWAMBORN, J. Reproducibility in hydraulic models of prototype river morphology. La Houille Blanche, Grenoble, 21 (3):291-8, 1966.
- 7.6 - MODELOS MARÍTIMOS DE FUNDO FIXO
E DE FUNDO MÓVEL
1. ABECASSIS, F. M.; CASTANHO, J. P.; NEVES, A.B. Ondes de longue période dans les

- ports. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1958, (Memória, 119)
2. ASSOCIATION INTERNATIONALE PERMANENTE DES CONGRES DE NAVIGATION, Bruxelles. "Section II, Subjet 4." In: INTERNATIONAL NAVIGATION CONGRESS, 22., Paris, 1969. Proceedings. Bruxelles, 1969.
 3. BIESEL, M. Le filtre à houles. Grenoble, Houille Blanche, 1949. Separata de Houille Blanche, Grenoble, v.4, n.A, 1949.
 4. BIESEL, M. "Wave machines". In: CONFERENCE ON SHIPS AND WAVES, Hoboken, 1954. Proceedings. Berkeley, University of California, Council on Wave Research, 1955. p. 288-304.
 5. BIJKER, E.W. et alii. "Dutch report". In: INTERNATIONAL NAVIGATION CONGRESS, 22., Paris, 1969. Proceedings. Bruxelles, Association Internationale Permanente des Congrès de Navigation, 1969. p. 181-202.
 6. CASTANHO, J.P. O Estudo da Agitação das Águas dos Portos por meio de Modelos Reduzidos. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1953. (Memória, 39)
 7. HUDSON, R. Y. & MOORE, L. F. "The hydraulic model as an aid in break water design". In: CONFERENCE ON COASTAL ENGINEERING, Long Beach, 1950. Proceedings. Berkeley, University of California, Council on Wave Research, 1951. p. 205-12.
 8. HYDRAULICS RESEARCH STATION, Wallingford. Hydraulics research. London, Her Majesty's Stationery Office, 1955-8. Relatórios anuais do diretor do Hydraulics Research Station.
 9. IPPEN, A. T.; RAICHEN, F.; SULLIVAN JUNIOR, R. K. Wave-induced oscillations in harbors: effect of energy dissipators in cou

- pled basin systems. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, Hydrodynamics Laboratory, 1962.
10. MÉHAUTÉ, B. Le. Theory of wave agitation in a harbour. Proceedings of the American Society of Civil Engineers; Journal of the Hydraulics Division, New York, N.Y., 77 (HY2): 31-50, Mar. 1951.
 11. MOTTA, V. F. "Alguns Resultados de Medições de Transporte Litorâneo em Modelo Costeiro Esquemático". In: SIMPÓSIO SOBRE OCEANOGRAFIA DO ATLÂNTICO SUL-OCIDENTAL, Rio de Janeiro, 1964. Anais. Rio de Janeiro, Academia Brasileira de Ciências, 1965. p. 109-30.
 12. MOTTA, V. F. "A Correlação entre a Esbeltez das Ondas do Mar e o Tipo de Perfil de Equilíbrio Formado em Praia sem Maré por Ondas Monocromáticas". In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO DE HIDRÁULICA. Porto Alegre, 1964. Anais. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Pesquisas Hidráulicas, 1966. v.2, memória, 2.
 13. MOTTA, V. F. "Ensaio do Efeito do Transporte Litorâneo com uma Única Direção sobre uma Costa Arenosa em que se Construiu um Molhe". In: CONGRESSO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA, 3., Buenos Aires, 1968. Anais. Buenos Aires, Facultad de Ingeniería, 1968. v.2, p. HML19-30.
 14. MOTTA, V. F. O Estudo em Modelo Reduzido da Regularização da Embocadura Lagunar de Tramandaí. Trabalho apresentado ao 2º Congresso Brasileiro de Transportes Marítimos e Construção Naval, Rio de Janeiro, 1967.

15. MOTTA, V. F. Fórmulas para Revisão de Ocorrência de Movimento de Materiais de Fundo Móvel sob Ação de Ondas Progressivas em Modelo Reduzido; Comparação com Resultados Experimentais. Trabalho apresentado ao 1º Congresso Brasileiro de Transportes Marítimos e Construção Naval, Rio de Janeiro, 1963.
16. MOTTA, V. F. "Observações sobre a Reprodução do Regime de uma mesma Embocadura; Protótipo em Dois Materiais Diferentes de Fundo Móvel". In: CONGRESSO LATINOAMERICANO DE HIDRAULICA, 3., Buenos Aires, Facultad de Ingenieria, 1968. v.1, p. HML1-18.
17. RAICHEN, F. "Harbor resonance". In: IPPEN, A. T., ed. Estuary and coastline hydrodynamics. New York, Mc Graw Hill, 1966. cap. 7, p. 281-340.
18. RAICHEN, F. & IPPEN, A. T. Wave-induced oscillations in harbors. Proceedings of the American Society of Civil Engineers; Journal of Hydraulic Division, New York, N. Y., 91 (HY2): 1-26, Mar. 1965.
19. REID, W. J. Eymouth harbour: a tidal model investigation. Bulletin de l'Association Internationale Permanente des Congrès de Navigation, Bruxelas, (48):39-58, 1958.
20. REID, W. J. "Surf beats at Taranaki, New Zeland". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 10., Congress, London, 1963. Proceedings. London, 1963. v.1 p. 93-100.
21. REINALDA, R.; VINJE, K.; AARENTS, J.W. Kust modellen. De Voorst, Waterloopkundig Laboratorium, 1960. (Memória, 855-I) Traduzido pelo Instituto Brasileiro de Bibliografia e Documentação.

22. SILVEIRA, R. L. da. "Estudo em Modelo Reduzido do Comportamento de um Terminal Marítimo em Mar Aberto, Tipo Bóia Única". In: CONGRESSO LATINOAMERICANO DE HIDRAULICA, 3., Buenos Aires. Anais. Buenos Aires, Facultad de Ingenieria, 1968. v.1, p. HM40-8.
23. YALIN, M. S. "Method for selecting scales for models with movable bed involving wave motion and tidal currents". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 10., Congress, London, 1963. Proceedings. London, 1963. v.1, p. 221-30.
24. YALIN, M. S. "A model shingle beach with permeability and drag forces reproduced". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 10., Congress, London, 1963. Proceedings. London, 1963. v.1, p.169-76.
25. YALIN, M. S. & RUSSELL, R. C. H. "Similarity in sediment transport due to waves". In: CONFERENCE ON COASTAL ENGINEERING, 8., México, 1962. Proceedings. Berkeley, University of California, Council on Wave Research, 1963. p. 151-67.
26. WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM, Delf. Escravos river entrance; report on a model investigation. Delf, 1957.
27. WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM, Delf. Port d'Abidjan. Delf, 1946.

7.7 - MODELOS DE ESTUÁRIO DE FUNDO FIXO OU MÓVEL

1. ALLEN, F. H. & INGLIS, Claude C. The regimen of the Thames as affected by currents, salinities and river flow. Proceedings of the Institution of Civil Engineers. London, 7:827-78, Aug. 1957.

2. BIJKER, E. W. "Tidal models". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 6., General Meeting, Le Hague, 1955. Proceedings. Delf, 1955. v.1, p.A14 1-10.
3. BLENCH, T. "Régime theory equations applied to a tidal river estuary". In: MINNESOTA INTERNATIONAL HYDRAULICS CONVENTION, Minneapolis, 1953. Proceedings. Minneapolis, Saint Anthony Falls Hydraulic Laboratory, 1953. p. 77-83.
4. FARLEIGH, D. R. P. & INGLIS, Claude C. The behaviour and control of the Karnafuli estuary, East Pakistan. London, Institution of Civil Engineers, 1962.
5. KENLEGAN, G. H. "Model laws for coastal and estuarine models". In: IPPEN, A. T., ed. Estuary and shoreline hydrodynamics. New York, Mc Graw Hill, 1966. cap. 17, p.691-710.
6. LAVETOULLE, J. "Principaux problèmes soulevés par les modèles à marée". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 6., General Meeting, Le Hague, 1955. Proceedings. Delf. 1955. v.1, p.A13 1-7.
7. MIGNIOT, G. Etude des propriétés physiques de différents sédiments très fins et de leur comportement sous des actions hydrodynamiques. La Houille Blanche, Grenoble, 23 (7): 591-620, 1968.
8. ORBERON, G. Etude sur modèle réduit de la sédimentation dans l'estuaire de la Vienne après construction du Barrage d'Arazat. La Houille Blanche, Grenoble, 23 (7): 621-30, 1968.
9. PRICE, W. A. Field and model investigation into the reason for siltation in the Mersey estuary. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London, 24:473-518, 1963.

10. PRICE, W. A. & KENDRICK, M. K. Density currents in estuary models. La Houille Blanche, Grenoble, 17 (5): 611-28, 1962.
11. WALLET, A. "L'etude de l'estuaire de la Seine sur modèle réduit". In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDRAULIC RESEARCH, 6., General Meeting, Le Hague, 1955. Proceedings. Delf, 1955. v.1, p.All 1-11.



**Composto e impresso na
Editora Meridional EMMA
para a Editora da URGs
em setembro de 1972**

**Ano Internacional do Livro,
por Resolução da UNESCO,
e 200º da fundação da cidade de Porto Alegre**

OUTRAS OBRAS DO AUTOR

- 1 - A Reprodução em Modelo Reduzido de Erosão a Jusante de Quedas. Revista do Clube de Engenharia. Rio de Janeiro, 1961.
- 2 - Report on Visits to European Hydraulics Laboratories. Gráfica da UFRGS, Porto Alegre, 1961.
- 3 - "Fórmulas para Prever Ocorrência de Movimento de Materiais de Fundo, sob Ação de Ondas Progressivas em Modelo Reduzido. Comparação com Resultados Experimentais". 1.º Congresso Nacional de Transportes Marítimos e Construção Naval. Rio de Janeiro, 1963.
- 4 - "O Efeito de Escala na Ação Erosiva ou Engordamento das Ondas - Modelo s/ os Perfis de Praia". Idem, idem, idem.
- 5 - "A Questão da Correlação entre a Esbelteza das Ondas do Mar e o Tipo de Perfil de Equilíbrio Formado em Praia sem Maré por Ondas Monocromáticas". Anais do 1.º Congresso Latino-Americano de Hidráulica. Porto Alegre, 1964.
- 6 - "Resultados de Algumas Medições de Transporte Litorâneo em Modelo Costeiro Esquemático". Anais do Simpósio sobre Oceanografia do Atlântico Sul-Occidental. Academia Brasileira de Ciências, Rio de Janeiro, 1964.
- 7 - "O Estudo em Modelo Reduzido para Regularização da Embocadura Lagunar de Tramandai". 2.º Congresso Nacional de Transportes Marítimos e Construção Naval. Rio de Janeiro, 1967.
- 8 - "O Efeito do Transporte Litorâneo Unidirecional sobre Costa Arenosa em que se Construiu um Molhe". Anais do 3.º Congresso Latino-Americano de Hidráulica. Buenos Aires, 1968.
- 9 - "A Reprodução do Comportamento de uma mesma Embocadura - Protótipo em dois Materiais Diferentes de Fundo Móvel". Idem, idem, idem.
- 10 - "Rio Grande Bar. The Case History of a Lagoon Outlet into a Tideless Sea". Proceedings of the 12th Conference on Coastal Engineering. Washington, 1970.
- 11 - "A Barra de Rio Grande. O Caso Clínico de uma Embocadura Lagunar em Mar sem Maré". 3.º Congresso Nacional de Transportes Marítimos e Construção Naval. Porto Alegre, 1970.