

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

DANIELE VARGAS OLIVEIRA

**VISUALIZAÇÃO ESPACIAL NO ENSINO FUNDAMENTAL:
ROTAÇÕES NO GEOGEBRA**

PORTO ALEGRE

2021

CIP - Catalogação na Publicação

Vargas Oliveira, Daniele
VISUALIZAÇÃO ESPACIAL NO ENSINO FUNDAMENTAL:
ROTAÇÕES NO GEOGEBRA / Daniele Vargas Oliveira. --
2021.
142 f.
Orientador: Vandoir Stormowski.

Dissertação (Mestrado Profissional) -- Universidade
Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática
e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Ensino de
Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2021.

1. Geometria Espacial. 2. GeoGebra Classroom;. 3.
Visualização. 4. Rotação. 5. Registros de
Representação Semiótica.. I. Stormowski, Vandoir,
orient. II. Título.

DANIELE VARGAS OLIVEIRA

**VISUALIZAÇÃO ESPACIAL NO ENSINO FUNDAMENTAL:
ROTAÇÕES NO GEOGEBRA**

Produto técnico de mestrado elaborado como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós – Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Vandoir Stormowski

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dra. Carmen Vieira Mathias
(DEPMAT-PPGEMEF-UFSM)

Prof^a. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
(IME-PPGEMAT-UFRGS)

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
(IME-PPGEMAT-UFRGS)

RESUMO

O presente trabalho visa analisar as contribuições do software GeoGebra no processo de visualização espacial no Ensino Fundamental, por meio de uma sequência didática que aborda atividades envolvendo rotação e superfícies de revolução. Para tanto, foram elaboradas seis atividades que foram aplicadas em seis encontros remotos com alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada de Porto Alegre. Esta sequência didática é apresentada como o produto educacional desta dissertação. A coleta de dados se deu por meio de um diário de campo, atividades e construções produzidas pelos alunos no GeoGebra Classrom. Trata-se de uma pesquisa de caráter qualitativo fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval bem como a construção do processo de visualização para Angel Gutiérrez. As análises sinalizaram que, por meio dos diferentes registros de representação envolvidos e das habilidades de visualização exigidas no contexto do GeoGebra, os alunos apresentaram avanços acerca da visualização espacial e da compreensão dos conceitos geométricos abordados.

Palavras-chave: Geometria Espacial; GeoGebra Classrom; Visualização; Rotação; Registros de Representação Semiótica.

Abstract

The present work aims to analyze the contributions of the GeoGebra software in the spatial visualization process, through a didactic sequence that addresses activities involving rotation and surfaces of revolution. To this end, six activities were developed that were applied in six remote meetings with students from the 8th and 9th grade of elementary school at a private school in Porto Alegre. This didactic sequence is presented as the educational product of this dissertation. Data collection took place through a notebook, activities and constructions produced by students in GeoGebra Classroom. It is a qualitative research based on Raymond Duval's Theory of Registers of Semiotic Representation Records as well as the construction of the visualization process for Angel Gutiérrez. The preliminary analyzes indicated that, through the different representation records involved in the activities, the students presented advances regarding the spatial visualization and the understanding of the geometric concepts approached.

Keywords: Geometria Espacial; GeoGebra Classroom; Visualização; Rotação; Registros de Representação Semiótica.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de tratamento	17
Figura 2– Exemplo de conversão	17
Figura 3 - Interface do software GeoGebra	22
Figura 4 - Diagrama Gutiérrez.....	23
Figura 5 – Tutorial do GeoGebra Classroom	33
Figura 6 – Exemplo de como salvar arquivo.....	34
Figura 7 Exemplo de como criar sala.	34
Figura 8 – Exemplos do compartilhamento de sala.....	35
Figura 9 – Espaço para acompanhamento das atividades no GeoGebra Classroom.....	36
Figura 10 – Exemplo de <i>Applet</i> de uma atividade do GeoGebra Classroom.	36
Figura 11 - Atividade 1 – Encontro 1	39
Figura 12 – Atividade 2 – Encontro 1	40
Figura 13 – Atividade 3 – Encontro 1	41
Figura 14 - Atividade 1 – Encontro 2.....	43
Figura 15 – Atividade 2 – Encontro 2	44
Figura 16 - Atividade 3 – Encontro 2.....	45
Figura 17 – Atividade 1, 2 e 3 – Encontro 3.....	47
Figura 18 – Atividade 4 – Encontro 3	48
Figura 19 – Atividades 1 e 2 – Encontro 4.....	49
Figura 20 -Atividades 1, 2 e 3 – Encontro 5.....	51
Figura 21 – Atividade 1 – Encontro 6	52
Figura 22 – Atividade 2 – Encontro 6	53
Figura 23 – Applet Atividade 1 – Encontro 1	57
Figura 24 – Resposta aluno 3.	57
Figura 25 – Resposta alunas 5 e 6.	58
Figura 26 - Applet aluna 2.....	59
Figura 27 - Applet Atividade 2 - Encontro 1.....	60
Figura 28 – Resposta aluno 3.	60
Figura 29 – Resposta aluna 2.....	61
Figura 30 – Applet aluna 1.	62
Figura 31 – Resposta aluno 4.	63
Figura 32 – Resposta aluno 6.	63
Figura 33 – Applet Atividade 3 – Encontro 1	64
Figura 34 – Resposta aluno 3.	65
Figura 35 – Resposta aluno 4.	66
Figura 36 - Applet Aividade 1 - Encontro 2.....	68
Figura 37 – Resposta aluno 4	68
Figura 38 – Resposta aluna 6.....	69
Figura 39 – Resposta aluna 5.....	69
Figura 40 – Resposta aluno 3	70
Figura 41 – resposta aluno 3.....	71
Figura 42 – Resposta aluna 6.....	71

Figura 43 – Resposta aluna 6.....	72
Figura 44 – Applet atividade 2 – Encontro 2.....	72
Figura 45 – Resposta aluna 5.....	73
Figura 46 – Construção aluno 4.....	73
Figura 47 – Resposta aluno 4.....	74
Figura 48 – Construção aluna 6.....	75
Figura 50 – Applet Atividade 3 – Encontro 2.....	76
Figura 51 – Solução da construção da atividade 3 – Encontro 2.....	76
Figura 53 – Construção aluna 1.....	77
Figura 54 – Recorte da construção da aluna 1.....	77
Figura 55 - Construção aluno 3 – Rotação eixo Z.....	80
Figura 56 – Resposta aluno 3.....	81
Figura 57 – Resposta aluna 5.....	81
Figura 58 – Construção aluna 5.....	82
Figura 60 – Solução da atividade 4 – Encontro 3.....	83
Figura 61 – Resposta aluno 4.....	84
Figura 62 - Resposta aluno 4.....	85
Figura 63 – Construção aluna 1.....	85
Figura 64 – Construção I– Encontro 4.....	87
Figura 65 – Solução da construção I – Encontro 4.....	88
Figura 66 – Resposta aluna 2.....	88
Figura 67 – Construção II – Encontro 4.....	90
Figura 68 – Solução Construção II – Encontro 4.....	90
Figura 69 – Resposta aluno 4.....	91
Figura 70 – Construção aluno 4.....	91
Figura 71 – Construção aluna 1.....	94
Figura 72 – Resposta aluna 1.....	94
Figura 73 – Construção aluno 4.....	95
Figura 74 – Resposta aluno 4.....	95
Figura 75 – Construção aluna 6.....	96
Figura 76 – Resposta aluna 6.....	96
Figura 77: construção aluna 5.....	97
Figura 78 – Resposta aluna 5.....	97
Figura 79 – Resposta aluna 6.....	98
Figura 80 – Construção aluna 2.....	99
Figura 81 – Resposta aluna 2.....	99
Figura 82 – Construção aluno 4.....	100
Figura 83 – Resposta aluno 4.....	100
Figura 84 – Construção aluna 6.....	101
Figura 85 – Resposta aluna 6.....	101
Figura 86 – Primeira Superfície de Revolução – Encontro 6.....	103
Figura 87 – Resposta aluno 3.....	103
Figura 88 – Construção aluno 6.....	104
Figura 89 – Resposta aluna 2.....	104

Figura 90 – Construção aluna 2.....	105
Figura 91 - Segunda Superfície de Revolução – Encontro 6.....	105
Figura 92 – Resposta aluno 3.	106
Figura 93 – Construção aluno 3.....	106
Figura 94 – Resposta aluna 1.....	107
Figura 95 – Construção aluna 1.....	107
Figura 96 – Resposta aluna 2.....	108
Figura 97 – Construção aluna 2.....	108
Figura 98 – Resposta aluno 3.	109
Figura 99 – Construção aluno 3.....	109
Figura 100 – Construção aluno 4.....	110
Figura 101 – Construção aluna 5.....	111
Figura 102 – Nova construção aluna 5.	112
Figura 103 – Possibilidade de construção de abajur.....	112
Figura 104 – Resposta aluna 6.....	113
Figura 105 – Construção aluna 6.....	113

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Trabalhos Relacionados.....	24
Quadro 2- Planejamento das Atividades	37
Quadro 3 – Objetivos Encontro 1	56
Quadro 4 - Objetivos Encontro 2.....	67
Quadro 5 – Objetivos Encontro 3	78
Quadro 6 - Objetivos Encontro 4.....	86
Quadro 7 – Objetivos Encontro 5	93
Quadro 8 – Objetivos Encontro 6	102

LISTA DE SIGLAS

AMD	Ambientes de Matemática Dinâmica
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ENEM	XI Encontro Nacional de Educação Matemática
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	15
2.1 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.....	15
2.2 VISUALIZAÇÃO NA MATEMÁTICA E OS AMBIENTES DE MATEMÁTICA DINÂMICA COMO RECURSO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL	19
2.3 TRABALHOS RELACIONADOS	24
3 METODOLOGIA E SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	30
3.1 CONTEXTO DA PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS	30
3.2 GEOGEBRA CLASSROOM	32
3.2.1 Criando um GeoGebra Classroom	33
3.2.2 Utilizando o GeoGebra Classroom	35
3.3 PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES.....	37
3.3.1 Encontro 1	39
3.3.2 Encontro 2	43
3.3.3 Encontro 3	46
3.3.4 Encontro 4	49
3.3.5 Encontro 5	50
3.3.6 Encontro 6	52
4 RELATO E ANÁLISE.....	55
4.1 RELATO E ANÁLISE ENCONTRO 1	56
4.1.2 Atividade 2 – Eixos x, y e z	59
4.1.3 Atividade 3 – Controle Deslizante	64
4.2 RELATO E ANÁLISE ENCONTRO 2	66
4.2.1 Atividade 1 – Rotações de Pontos.....	67
4.2.2 Atividade 2 – Rotações de Segmentos de Retas	72
4.2.3 Atividade 3 – Construção.....	75
4.3 RELATO E ANÁLISE ENCONTRO 3	78
4.3.1 Atividades 1, 2 e 3 – Rotações nos eixos X, Y e Z.....	79
4.3.2 Atividade 4 – Construção.....	82
4.4 RELATO E ANÁLISE ENCONTRO 4	86
4.4.1 Atividade 1 – Construção I.....	87

4.4.2 Atividade 2 – Construção II	89
4.5 RELATO E ANÁLISE ENCONTRO 5	92
4.5.1 Atividade 1- Rotações de Segmentos de Retas I.....	93
4.5.2 Atividade 2 - Rotações de Segmentos de Retas II	96
4.5.3 Atividade 3 - Rotações de Segmentos de Retas III.....	98
4.6 RELATO E ANÁLISE ENCONTRO 6	102
4.6.1 Atividade 1 - Superfícies de Revolução.....	102
4.6.2 Atividade 2 – Construção	106
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	115
APÊNDICE A	122
APÊNDICE B.....	123
APÊNDICE C	124
APÊNDICE D	125

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho apresenta uma sequência didática com foco na habilidade de visualização espacial no Ensino Fundamental, e foi aplicada para um grupo de alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental da rede privada da cidade de Porto Alegre/RS.

Nesta sequência buscamos inserir a utilização do software de matemática dinâmica GeoGebra, por meio do exercício da visualização espacial. Tal proposra visou trabalhar com atividades envolvendo a rotação de objetos geométricos e superfícies de revolução. Considerando as diferentes representações de objetos geométricos presentes nas atividades e nas possibilidades de representações gráficas bidimensionais e tridimensionais, assim como representações algébricas que o software permite, encontramos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval bem como no processo de visualização para Angel Gutiérrez, o aporte teórico para a presente pesquisa.

Tal temática de pesquisa tem base em minha atuação como professora do Ensino Fundamental e Médio, pois tenho observado a dificuldade dos meus alunos frente às construções de conceitos geométricos. A cada ano, busco aprimorar minhas estratégias e diversificar minhas abordagens, nem sempre conseguindo resultados satisfatórios, uma vez que, diante do gradual aumento da dificuldade dos exercícios, os alunos apresentavam dificuldade no desenvolvimento da resolução destas atividades, indicando muitas vezes que esta dificuldade estava enraizada na deficiente compreensão dos conceitos geométricos envolvidos e na sua visualização em diferentes perspectivas. Também observei que parte desta dificuldade se apresentava como o resultado de um emaranhado entre as relações geométricas envolvidas e suas representações, e então surgiu minha inquietação: que estratégias eu poderia utilizar em minhas aulas para que os alunos pudessem compreender de maneira mais abrangente os conceitos geométricos envolvidos e suas respectivas representações? Busquei, em algumas estratégias, a utilização de recursos tecnológicos que pudessem contribuir para este objetivo. O primeiro contato que tive com estes recursos se deu no meu primeiro semestre da graduação na UFRGS, em 2009, com o software SuperLogo, que me surpreendeu pela interface simples que contrapõe as infinitas possibilidades de atividades que o programa permite. No segundo semestre, na disciplina de Geometria, conheci o software GeoGebra, no qual trabalhávamos a construção de conceitos geométricos por meio de atividades que permitiam discussões e elaboração de conjecturas com os colegas.

No semestre seguinte, iniciei as atividades como bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID/UFRGS), no qual tive a oportunidade de trabalhar mais

com estes recursos. Por meio do PIBID, participei da organização, juntamente com demais bolsistas, de um minicurso intitulado “Contribuições do SuperLogo na geometria plana e na trigonometria”, que foi realizado em 2013, no XI Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), em Curitiba. Também tive a oportunidade de realizar no mesmo ano, juntamente com meus colegas do programa, uma formação continuada para professores da Rede Básica de Ensino, aplicada na Escola Rio de Janeiro, localizada no bairro Cidade Baixa, na cidade de Porto Alegre, com oficinas que ofereciam propostas de atividades envolvendo os softwares SuperLogo e GeoGebra.

Na sequência da graduação, durante a disciplina de Educação Matemática e Tecnologias, conheci os softwares GrafEq e Winplot, que utilizei em minhas atividades como bolsista do PIBID. Na escola Dolores Alcaraz Caldas, também localizada em Porto Alegre, desenvolvemos uma atividade com alunos do Ensino Médio em que os mesmos construíam bandeiras de países no software GrafEq, e em outro momento desenvolvemos uma atividade com superfícies de revolução no Software Winplot. Em ambas atividades, percebi avanços na visualização e abordagem dos conceitos matemáticos envolvidos, pois os alunos tinham a oportunidade de aprender com seus erros, dada a interação com estes recursos. Neste momento, já no final da minha graduação, eu tinha inserido em minhas práticas a utilização de recursos tecnológicos e pretendia seguir, ao longo da minha carreira como professora, utilizando tais recursos em minhas aulas.

Durante o primeiro ano do mestrado, ao realizar as disciplinas do curso, embora todas tenham contribuído significativamente para minha formação, foi na disciplina de Tecnologias Digitais na Educação Matemática que tive maior identificação. Nesta disciplina tive a oportunidade de me aproximar de forma mais específica do software Geogebra, e pude observar as possibilidades que o software permite, sendo assim, no final do ano de 2018, eu já havia decidido que o utilizaria em minha pesquisa.

Inicialmente tive a intenção de trabalhar com geometria espacial no Ensino Médio, em que atuo numa rede particular na cidade de Gravataí. No entanto, a escola não permite atividades de pesquisa em suas dependências. Sendo assim voltei-me para a outra instituição privada em que atuo que se localiza na cidade de Porto Alegre, em que leciono para os 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, no entanto, os conteúdos de geometria abordados nestas séries não estavam amplamente relacionados com meu questionamento, sendo assim optei por trabalhar com as turmas de 8º e 9º anos, em que eu poderia abordar conceitos de geometria espacial.

Na sequência, com a definição do meu orientador, tivemos as primeiras discussões sobre a temática da pesquisa e minhas inquietações. Concluímos que o trabalho abordaria atividades de rotação e superfícies de revolução que não costumam ser abordadas no Ensino Fundamental, o que nos permitiria analisar a inclusão destes aspectos neste nível de ensino. Na sequência formulamos a pergunta norteadora do presente trabalho, que teve ajustes e adequações durante a estruturação da pesquisa, e que acaba por se configurar da seguinte forma:

Quais as contribuições do GeoGebra no processo de desenvolvimento da habilidade de visualização espacial, quando se faz uso de atividades envolvendo rotação?

Para responder tal questionamento, a presente dissertação apresenta os seguintes objetivos de pesquisa:

- Analisar as potencialidades dos recursos do GeoGebra que emergirem das atividades desenvolvidas.
- Realizar a análise dos resultados da aplicação da sequência didática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval bem como o processo de visualização matemática para Angel Gutiérrez.

E o seguinte objetivo procedimental:

- Planejar, justificar, construir e aplicar uma sequência didática e materiais de ensino utilizando o GeoGebra.

Devido à pandemia do Covid – 19, a sequência didática que havia sido planejada para ser aplicada de maneira presencial, precisou ser adaptada para a aplicação de modo remoto. Sua adaptação se deu no GeoGebra on-line, mais precisamente no seu novo recurso: o GeoGebra Classroom. Tal recurso permitiu o acompanhamento do desenvolvimento das atividades por aluno em tempo real, sendo de grande valia para a realização desta pesquisa.

A dissertação está organizada em seis capítulos, visando responder à pergunta norteadora da pesquisa e tratar dos três objetivos elencados acima. Neste capítulo introdutório, o capítulo 1, apresentei minha trajetória profissional e, em linhas gerais, o contexto e objetivos da pesquisa.

O capítulo 2 comporta a fundamentação teórica que embasa o presente trabalho, bem como uma revisão de literatura nacional em que buscamos estabelecer relações com a presente pesquisa frente à sua temática e à fundamentação teórica.

O capítulo 3 aborda a metodologia de pesquisa utilizada nesta investigação bem como a apresentação da sequência didática implementada. Também apresentamos o contexto e sujeitos envolvidos na pesquisa bem como o GeoGebra Classroom e seus recursos.

O capítulo 4 apresenta a análise dos dados coletados ao longo da pesquisa, por meio de um diário de campo, produções escritas e construções dos alunos na plataforma GeoGebra Classroom.

O capítulo 5 traz as considerações finais e reflexões acerca da pesquisa.

Após as Referências, há cinco Apêndices (A, B, C, D e E) em que respectivamente apresentamos a Carta de Apresentação destinada a Escola em que foram selecionados os alunos, o Termo de Assentimento e Termo de Consentimento entregue aos envolvidos, os links com o Produto da dissertação unificado e por encontro e por fim, o produto didático na íntegra.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo abordamos as teorias que darão suporte à pesquisa. Na primeira seção temos uma breve discussão embasada pela Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Na segunda seção temos uma discussão, embasada principalmente por Angel Gutiérrez, acerca da habilidade de visualização matemática, por meio dos ambientes de matemática dinâmica como alternativa para o ensino de geometria espacial e, finalmente na última seção, temos a apresentação de alguns trabalhos que possuem temas relacionados com o presente trabalho.

2.1 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

No processo de aprendizagem de matemática, as representações semióticas são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático, sendo a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval umas das principais referências para pesquisas que tratam das representações matemáticas e sua relação com a aprendizagem de conceitos matemáticos, como veremos a seguir.

Duval (2012) explicita que na matemática, os objetos estudados, como por exemplo figuras geométricas, não são palpáveis, concretos, como em diversas outras áreas do conhecimento, sendo assim, as representações tornam-se um recurso para o desenvolvimento de seu estudo. Conforme Duval (2010), as representações semióticas são fundamentais, visto que, historicamente, o pensamento matemático se desenvolveu por meio dessas representações. Flores também enfatiza tal importância:

Não obstante, as representações no domínio da matemática são consideráveis, já que os objetos matemáticos, não sendo acessíveis pela percepção, só podem sê-lo por sua representação, lembrando que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso. (FLORES, 2006, p.3)

Ou seja, as representações semióticas são o meio em que é possível compreender um conceito ou um objeto matemático. Estas representações se fazem distintas conforme o contexto matemático em que estão inseridas. Duval (2012) nos traz que as representações semióticas são constituídas de signos que pertencem a um sistema específico que tem um funcionamento próprio, por exemplo, para que se possa trabalhar com o conceito de circunferência, necessita-se de sua representação, que pode ser algébrica, com sua respectiva equação, ou gráfica, com perspectivas bidimensionais ou tridimensionais. Isso se difere do que o autor chama de representações mentais, que “recobrem o conjunto de imagens e, mais

globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado” (DUVAL, 2012, p. 269).

No entanto, é fundamental não confundir o objeto analisado com uma de suas possíveis representações, embora isso seja um paradoxo cognitivo, uma vez que, como salienta Duval: “como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas?” (2012, p. 268). O autor ainda nos traz que tal confusão acarreta posteriormente numa perda para aprendizagem, já que em outros contextos os alunos acabam por não conseguir reaplicar o conhecimento adquirido, em função dos conceitos trabalhados não terem sido bem consolidados, muitas vezes em função de serem confundidos com uma representação restrita de um objeto que pode ter diversas representações.

De acordo com Duval (2012), este paradoxo não é amplamente observado ou até mesmo reconhecido no processo de ensino, em função da ampla importância dada as representações mentais em contrapartida a dada às representações semióticas. Ou seja, as representações semióticas acabam sendo reconhecidas como um mero meio de exteriorização das representações mentais, o que não é verdadeiro, visto que as representações semióticas são fundamentais para a atividade cognitiva de pensamento.

Neste sentido, para contribuir para a não identificação de apenas uma representação do objeto estudado, o autor salienta a importância da mobilização de muitos registros de representação semiótica:

[...] o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações. (DUVAL, 2012, p. 270).

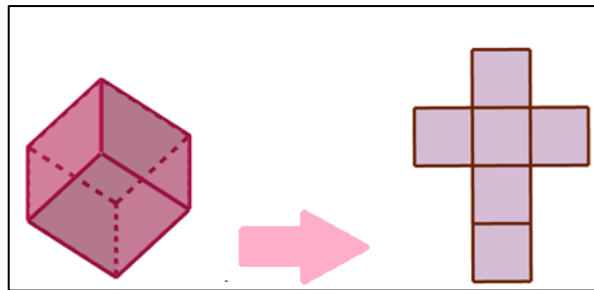
Sendo assim, Duval (2012) enfatiza a grande variedade de representações disponíveis para a utilização da matemática, tais como figuras geométricas, língua natural, escritas formais e algébricas entre outros. Duval (2012) define esses sistemas como registro de representação semiótica quando permitem as três atividades cognitivas a seguir: formação, tratamento e conversão. A formação refere-se à representação de algum conceito matemático em um sistema específico, por meio de uma representação identificável, como, por exemplo, a representação de um quadrado.

Já no que se refere aos tratamentos e conversões, Duval (2010) classifica-os como transformações e salienta que ambos são extremamente diferentes e não costumam ser analisados durante o processo de ensino e de observação do desenvolvimento de atividades dos alunos. Conforme o autor, temos as seguintes características para cada caso:

- Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.
- As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2010, p. 16)

Sendo assim, para o autor os tratamentos são transformações que ocorrem de forma interna, ou seja, dentro do mesmo registro. Para contribuir para a compreensão do conceito de tratamento dentro da perspectiva da geometria, podemos observar o exemplo a seguir na figura 1, com uma planificação de um cubo:

Figura 1 – Exemplo de tratamento

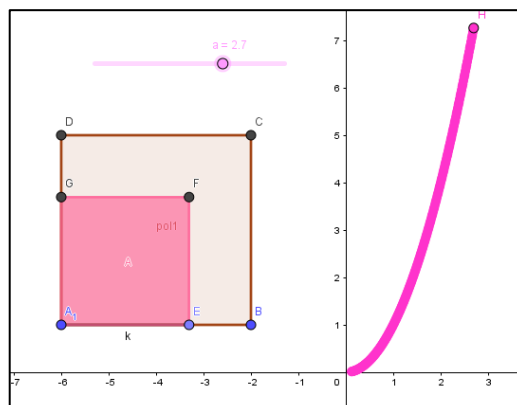


Fonte: Elaborada pela autora.

Tal transformação é um tratamento, pois permanece dentro do mesmo registro semiótico: o registro geométrico. Cabe destacar, no entanto, que este é um tratamento que envolve aspectos de visualização e percepção visual.

Já no que se refere a conversão, Duval (2010) especifica que são transformações que ocorrem de forma externa, fora do registro semiótico utilizado. Para a compreensão do conceito de conversão dentro da perspectiva da geometria, podemos observar o exemplo a seguir, na figura 2, em que temos a representação da área de um quadrado por meio de uma função:

Figura 2– Exemplo de conversão



Fonte: Elaborada pela autora.

Tal transformação é uma conversão, pois há uma mudança na representação do objeto, que passa de representação geométrica para representação gráfica.

A mudança de um sistema de representação para outro (conversão) nem sempre é evidente para os alunos, e a dificuldade em trabalhar com tais mudanças de sistemas de representação é uma das causas da dificuldade de alguns alunos em matemática:

A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não têm nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e dos estudantes. (DUVAL, 2010, p. 18)

Tal dificuldade encontra base no fato de que os alunos constantemente não encontram relações entre diferentes representações de um mesmo objeto, como por exemplo, uma função algébrica e sua representação gráfica, assim como um sólido geométrico e seu volume representado por uma função. Embora no processo de ensino possam ter sido abordadas diversas representações semióticas, ainda assim uma dificuldade de identificação destas diferentes representações persiste por parte dos alunos.

É válido salientar que, conforme Duval (2010, p.14) “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”. Desta forma, tal mobilização contribui para a não identificação do objeto estudado com uma restrita representação, como salienta Flores:

A contribuição de Duval para o processo de ensino/aprendizagem em matemática está em apontar a restrição de se usar um único registro semiótico para representar um mesmo objeto matemático. Isso porque uma única via não garante a compreensão, ou seja, a aprendizagem em matemática. Permanecer num único registro de representação significa tomar a representação como sendo de fato o objeto matemático. (2006, p. 4).

Nesta seção apresentamos os principais aspectos da teoria dos Registros de Representação Semiótica que irão nortear as análises realizadas nesta pesquisa. Acreditamos que tal apresentação permite ressaltar a importância dos registros para o ensino de matemática, assim como esclarece alguns aspectos referentes à natureza das mobilizações das representações e cuidados com a identificação restrita a apenas um registro de representação. É válido salientar que tais aspectos foram considerados no desenvolvimento das atividades desta pesquisa.

Na seção seguinte pretendemos seguir com a discussão teórica com Raymond Duval bem como abordar o processo de visualização pela perspectiva de Angel Gutiérrez, relacionando com a aprendizagem de geometria nos ambientes de matemática dinâmica.

2.2 VISUALIZAÇÃO NA MATEMÁTICA E OS AMBIENTES DE MATEMÁTICA DINÂMICA COMO RECURSO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

É válido salientar a importância da inserção de recursos tecnológicos como alternativas para o desenvolvimento da educação, como salienta Basso e Gravina (2012, p.12), “Nossas rotinas de sala de aula também deveriam incorporar, cada vez mais, as tecnologias, pois elas também influenciam nas nossas formas de pensar, de aprender, de produzir”. Essa inserção também está abordada como uma das competências específicas para matemática na Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados (BRASIL, 2017, p. 267).

Diante das possibilidades que estes recursos permitem, torna-se interessante refletir acerca dos avanços possíveis nas abordagens que envolvem ensino e aprendizagem de matemática, enquanto embasadas no aproveitamento destas tecnologias:

Com as tecnologias digitais, novas possibilidades de criação, produção e veiculação de conhecimento se descortinam – agora é a possibilidade de interagir com sistemas dinâmicos de representação, que externalizam e internalizam novos pensamentos, em contínuo processo de ação/reação entre sujeito e ferramenta. (GRAVINA, 2015, p. 238).

No entanto, ainda estamos no caminho para que esta inserção ocorra de maneira efetiva no ramo educacional, haja vista as dificuldades para essa inserção, pois, segundo Gravina (2015), estes recursos nos exigem um tipo de pensamento e de raciocínio diferente dos exigidos pelas tecnologias que geralmente dominamos, como lápis e papel.

Diante dessas possibilidades, no que se refere ao ensino e aprendizagem de geometria, temos como opção as tecnologias chamadas Ambientes de Matemática Dinâmica (AMD), que permitem a construção de diferentes representações de objetos matemáticos. Tais ambientes possuem uma série de recursos interessantes ao processo de aprendizagem de conceitos geométricos:

As características fundamentais destas aplicações são a função de arrastamento, que permite o movimento, e a manipulação direta, que admite a mudança de posição, de forma e de medidas da figura (SALAZAR, ALMOULOU, 2015, p. 924).

Segundo Chaachoua (1997, apud Salazar e Almouloud, 2015), os ambientes de matemática dinâmica permitem a validação de conceitos geométricos por meio experimental. Sendo assim, o autor deixa claro que alguns fatores tem relação direta com as possíveis contribuições destes ambientes: os modos de representação abordados, as convenções admitidas, os tratamentos permitidos e as ações e modificações realizáveis. Chaachoua (1997,

apud Salazar e Almouloud, 2015) também salienta três aspectos que precisam ser abordados para a verificação das reais contribuições destes ambientes:

[...] é necessário efetuar uma análise didática do ambiente que contemple pelo menos três aspectos, compreendidos entre a manipulação direta, a escolha da representação e os primitivos geométricos, visto que se podem construir e explorar figuras geométricas complexas, além de verificar conjecturas e realizar transformações que facilitam aos estudantes o acesso a representações de objetos geométricos dificilmente seriam possíveis com lápis e papel, visto que permitem um domínio de funcionamento mais extenso (possibilita realizar ações que com o lápis e papel seriam difíceis ou até impossíveis). (Apud SALAZAR E ALMOULOU, 2015, p. 924).

Ou seja, é importante compreender que uma das principais justificativas para a inserção destes recursos no processo de ensino é o alcance que eles permitem no que se refere à manipulação e exploração de figuras e construções geométricas, que não seriam possíveis com outras ferramentas e tecnologias comumente utilizadas. Nesta perspectiva Gravina (2001) também enfatiza que estes ambientes permitem uma ação investigatória por parte dos alunos, pois permitem livre acesso a exploração e experimentação, via sua face interativa. Ou seja, a manipulação direta no computador possibilita o questionamento, por parte dos alunos, de suas ações e construções, sendo assim possível realizar conjecturas e testá-las por meio de seus experimentos. Isto é, estes ambientes têm como um de seus pontos fortes a interatividade, que permite uma imediata relação entre os alunos e as representações dos objetos geométricos estudados. Ainda no que se refere a essa interatividade, é importante salientar o recurso de *arrastamento* que esses ambientes permitem. Olivero (2003, apud Salazar e Almouloud, 2015) salientam este recurso possui três aspectos importantes:

Retroalimentação, como o sujeito tem controle das construções que realiza, o arrastamento oferece um meio poderoso de retroalimentação que auxilia no desenvolvimento de estratégias de resolução de uma situação problema [...] **Mediador entre figura e desenho**, visto que permite invalidar construções errôneas [...] **Modo de análise ou de busca**, o arrastamento permite que o sujeito examine sua construção e procure, por meio da exploração da figura, suas propriedades invariantes (Apud SALAZAR E ALMOULOU, p. 925, tradução dos autores).

Ou seja, podemos entender a *retroalimentação* como o recurso que permite que o aluno consiga observar suas construções e isso contribui para a reformulação de estratégias na resolução de problemas, uma vez que o recurso de arrastamento permite a constante reconstrução das figuras. Já o *mediador entre a figura e desenho* entendemos como um recurso atua como um facilitador para a verificação de construções. E por fim o *modo de análise ou de busca* é percebido como a possibilidade que o aluno tem de explorar e observar as propriedades geométricas do objeto estudado, por meio da manipulação da representação no software.

Neste sentido, podemos observar que os AMD permitem uma série de possibilidades de conjecturas e ambientes propícios a consolidação da aprendizagem de geometria, como salienta Gravina e Barreto:

Vê-se que o dinamismo das representações veiculadas na tela computador, associado à possibilidade de manipulação direta, torna-se um suporte que propicia a fluidez dos processos mentais, de forma incomparável àquela que se consegue com o texto e desenho estático, quer impresso ou feito com giz no quadro negro. Nesta concretização dinâmica tem-se até mesmo a possibilidade de construção de conceitos que, em princípio, estariam fora do alcance cognitivo de sujeitos em idade escolar [...]. (GRAVINA, BARRETO, 2010, p. 3)

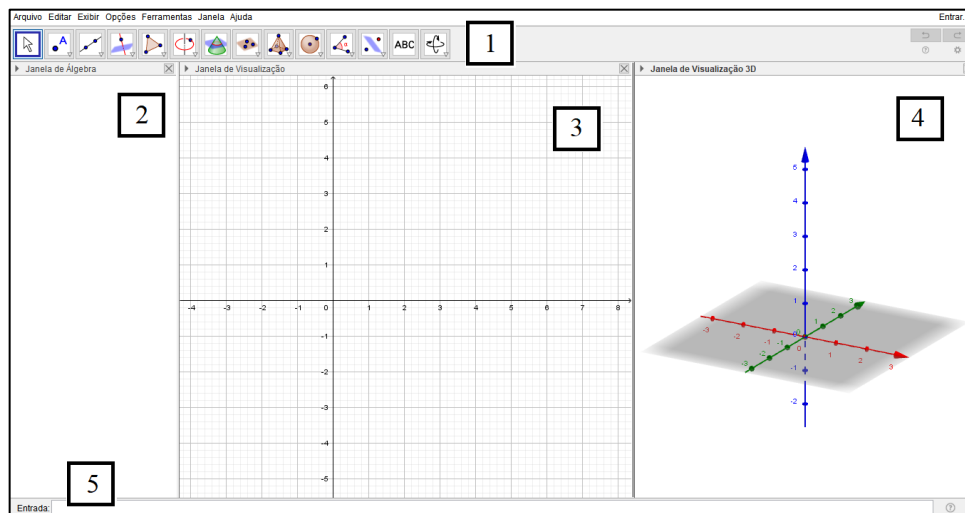
Conforme Salazar e Almouloud (2015), Duval entende os AMD como um espaço em que as representações não são diferentes das produzidas com lápis e papel, então o grande diferencial destes recursos seria a velocidade com que ocorrem os tratamentos, permitindo ao aluno representações variadas de um mesmo objeto estudado, o que contribui para a observação das propriedades e conceitos envolvidos. Por exemplo, um triângulo retângulo construído no GeoGebra, pode ter os vértices movidos, alterando os segmentos catetos e hipotenusa, de modo que inúmeros triângulos retângulos distintos podem ser formados no software, mas todos possuem uma propriedade que se preserva, que é o ângulo reto. Sendo assim, é possível nestes ambientes com um tipo diferente de representação: o registro dinâmico de representação semiótica.

O registro dinâmico de representação semiótica, ou apenas registro dinâmico, diferencia-se dos demais registros por permitir uma observação de propriedades do objeto estudado que outros registros não são capazes de permitir, pelo menos não na mesma velocidade. Além disso, a constante manipulação das figuras construídas nos AMD apresenta-se como um contínuo tratamento dentro do registro geométrico. Cabe ressaltar que tal classificação de registro semiótico está conforme Salazar e Almouloud (2015) visto que ela não faz parte das classificações de registros de Duval.

Diante de tais possibilidade e entre as opções de softwares de geometria dinâmica como alternativa para o ensino/aprendizagem de conceitos geométricos, abordaremos neste trabalho o software GeoGebra, que é bastante representativo dentro das possibilidades de recursos tecnológicos deste ramo. O software GeoGebra possui uma interface interativa com diversos recursos e janelas que serão ilustradas na figura 3: (1) temos a barra de ferramentas do software; (2) temos a janela algébrica, (3) a janela 2D; (4) a janela 3D e finalmente (5) o campo de entrada para os comandos. As três janelas sempre apresentam simultaneamente as relações entre construções geométricas realizadas e suas propriedades, suas representações algébricas e visualizações plana e tridimensional. Ou seja, o software permite a visualização

simultânea de diferentes representações de mesmo objeto. A versão do software utilizada no presente trabalho é a versão disponível na plataforma do GeoGebra on-line.

Figura 3 - Interface do software GeoGebra



Fonte: Elaborada pela autora.

O recurso 3D que esta versão oferece é muito interessante para o desenvolvimento do conteúdo de geometria espacial, conforme salienta Gutiérrez (1992), pois, de acordo com o autor, o trabalho apenas com duas dimensões acarreta uma perda de informações. No GeoGebra é possível abordar imagens em mais de uma dimensão, visto que é possível trabalhar com as três janelas disponíveis simultaneamente, em que um mesmo objeto pode ser visto de maneira estática ou ser movimentado pelos recursos que o software oferece. Todas essas possibilidades abrangem diferentes formas de visualizar os objetos matemáticos e suas características. Sobre visualização, Gutiérrez nos traz que:

Por isso, considero a “visualização” na matemática como o tipo de raciocínio atividade baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizada para resolver problemas ou provar propriedades. A visualização é integrada por quatro principais elementos: imagens mentais, representações externas, processos de visualização, e habilidades de visualização. (GUTIÉRREZ, 1996, pág. 7, tradução nossa)

Ou seja, uma *imagem mental* para o autor nada mais é que uma representação cognitiva de uma propriedade ou um conceito por meio de elementos visuais ou espaciais. O autor salienta que entende as imagens mentais como uma base para a construção de uma visualização.

No que se refere à *representação externa*, Gutiérrez explicita que pode ser quaisquer representações por meio de gráficos, diagramas, desenhos, ou até mesmo expressões verbais tais que tenham relação com a visualização, visando permitir construção ou a relação com imagens mentais para que seja possível operar/trabalhar com elas.

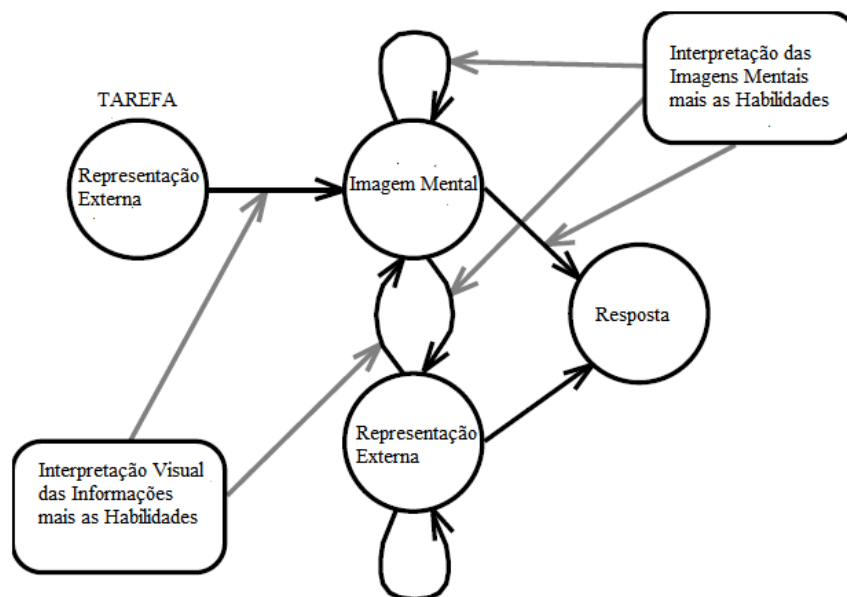
Os *processos de visualização* o autor explica que é uma ação que pode ser tanto mental quanto física, e que tem relação direta com a imagem mental. Neste item temos dois processos específicos: primeiramente a interpretação visual da informação visando a criação de imagens mentais, ou a interpretação de imagens visando a formação de informações.

Agora, no que se refere a *habilidades de visualização*, há alguns pontos a se considerar, visto que dependendo do problema a ser resolvido, as habilidades exigidas serão diferentes. A seguir as principais delas conforme Gutiérrez:

- *Percepção do fundo da figura*: A habilidade de observar a figura mesmo que isolada em um fundo complexo.
- *Constância perceptual*: a habilidade de não confundir as características e propriedades de um objeto mediante sua movimentação ou espessura do traço de sua representação, cor ou tamanho.
- *Rotação mental*: a habilidade de construir imagens mentais dinâmicas e imaginá-las em movimento.
- *Percepção de posições espaciais*: a habilidade de construir relações entre objetos observados e o próprio observador.
- *Percepção de relações espaciais*: a habilidade de construir as relações entre os objetos observados.
- *Discriminação visual*: é a habilidade de observar as diferenças ou semelhanças entre objetos, imagens ou imagens mentais. (GUTIÉRREZ, 1996, p.10, tradução nossa)

Para contribuir para compreender tais elementos podemos observar o diagrama a seguir, que é uma relação entre habilidades para a resolução de uma tarefa de matemática.

Figura 4 - Diagrama Gutiérrez



Fonte: Gutiérrez 1996, pág. 9. Tradução da nossa.

Podemos compreender que, para Gutiérrez, o processo de visualização interpassa as relações entre a construção de imagens mentais, com suas representações internas, para as

representações externas, e tal relação permeia-se nas habilidades de visualização aqui já apresentados. Acreditamos que tal teoria relaciona-se com o GeoGebra e seu recurso 3D da seguinte forma: o uso deste recurso tridimensional permite a resolução de uma tarefa matemática, que inicia-se por meio da interpretação que o aluno faz, no primeiro contato com a atividade, utilizando-se da representação de um objeto na janela 3D, construindo-se assim uma imagem mental. Na sequência, a partir de tal imagem mental o aluno inicia um processo de estratégias para a resolução do problema em que ele vem a utilizar as habilidades que ele possui, para finalmente poder resolver o problema. Neste sentido, reafirmamos a possibilidade do uso do GeoGebra na perspectiva teórica de Gutiérrez, pois, ainda segundo o autor, é fundamental o desenvolvimento de habilidades que possibilitem construir, mover, transformar e analisar imagens mentais de objetos 3D, que derivem de uma representação plana, o que é perfeitamente funcional a partir dos recursos disponíveis pelo software.

Nesta seção apresentamos uma breve discussão acerca dos estudos de Gutiérrez sobre a construção da visualização matemática bem como uma apresentação do software GeoGebra. Também foram apresentadas relações entre tais estudos e possibilidades do software. Na próxima seção temos a apresentação de alguns trabalhos que possuem temas relacionados com a presente pesquisa.

2.3 TRABALHOS RELACIONADOS

Nesta seção serão descritos trabalhos que vêm ao encontro da mesma temática da pesquisa desenvolvida nesta dissertação, aproximações e principais diferenças com o presente trabalho, assim como suas respectivas conclusões.

No banco de teses e dissertações da CAPES foram utilizados os seguintes termos para pesquisa: ensino de matemática, geometria espacial, rotação e posteriormente GeoGebra. Os trabalhos foram selecionados no período de 2010 a 2019. Dos 127 trabalhos resultantes, foram escolhidos 5 trabalhos que acreditamos serem relevantes para análise, visando a colaboração com o desenvolvimento da presente pesquisa. Os trabalhos selecionados constam no quadro 1 a seguir:

Quadro 1 – Trabalhos Relacionados.

Autor	Título do Trabalho	Programa	Universidade
Borsoi (2016),	GeoGebra 3D no	Programa de	Universidade

	Ensino Médio: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial.	Mestrado Profissional em Ensino de Matemática	Federal do Rio Grande do Sul
Palles (2013)	Um estudo do icosaedro a partir da visualização em geometria dinâmica.	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica – SP
Carvalho (2011)	Ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria espacial em um ambiente dinâmico e interativo.	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática.	Universidade Federal de Goiás
Ritter (2011)	A visualização no ensino de geometria espacial.	Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Vieira (2010)	Reinventando a geometria no Ensino Médio: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a teoria de Van Hiele.	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática	Universidade Federal de Ouro Preto - MG

Fonte: Elaborado pela autora.

O primeiro trabalho identificado foi Borsoi (2016), uma dissertação desenvolvida no Programa de Pós- Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, em que a autora desenvolveu uma pesquisa com atividades de geometria espacial em crescente nível de dificuldade, para o Ensino Médio. O objetivo desta pesquisa foi responder a pergunta: “De que forma o software de geometria dinâmica GeoGebra pode contribuir no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial e na melhor compreensão de conceitos relativos à Geometria Espacial?” (BORSOI, 2016, p.13).

A metodologia de pesquisa para o desenvolvimento da sequência didática se deu por meio da engenharia didática e as atividades dos alunos foram analisadas à luz das teorias de Van Hiele, Duval e Gutiérrez. A autora concluiu que a utilização do software contribuiu para a compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos de geometria envolvidos assim como para o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial, conforme salienta a seguir:

[...] podemos dizer que o uso do software GeoGebra contribuiu no desenvolvimento de diversas habilidades espaciais e na melhor compreensão de conceitos relativos à Geometria Espacial. Esta afirmação fundamenta-se na observação do amadurecimento dos argumentos e conhecimentos dos alunos no decorrer da proposta; na percepção e exploração de diferentes registros de representação dos objetos geométricos; na utilização de transformações de registros de representação de forma dinâmica (tanto tratamentos, quanto conversões); na atuação do aluno em atividades que privilegiaram tanto a interpretação de informações para gerar imagens mentais, quanto o aspecto inverso; e principalmente, nas interações via software, que permitiram ao aluno um constante diálogo entre representações externas e imagens mentais. (BORSOI, 2016, p. 107).

O trabalho Borsoi (2016) aproximou-se da presente dissertação em três aspectos principais: a utilização do recurso 3D do software GeoGebra, a abordagem de superfícies de revolução em suas atividades e a fundamentação teórica embasada em Duval e Gutiérrez. Já no que se refere ao distanciamento entre os trabalhos, o da autora apresenta outro público alvo, no caso, Ensino Médio, enquanto o do presente trabalho é destinado ao Ensino Fundamental.

O segundo trabalho identificado foi Palles (2013), realizado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, em que a autora visava responder a seguinte questão: “Quais elementos essenciais para o desenvolvimento da visualização estão presentes em uma sequência didática para a construção da fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro por meio do software Cabri – 3D?” (PALLES, 2013, p.30). Para tanto, a autora realizou uma análise de resultados da aplicação de uma sequência didática que trabalhava o cálculo do volume do icosaedro.

O procedimento técnico da pesquisa se deu por meio de um estudo de caso e a fundamentação teórica para a análise das atividades baseou-se em na teoria de Duval sobre

Registros de Representação Semiótica. A autora concluiu que tal sequência didática não permitiu a visualização necessária em parte em razão de a sequência didática ter atividades passo a passo:

Na análise da sequência de Possani (2012), percebemos que o papel heurístico da figura, em grande parte das atividades, poderia ter sido melhor explorado se as atividades não fossem restritas a um passo a passo, ou seja, se os alunos tivessem a oportunidade de explorar a figura para encontrar soluções. [...] Portanto, o conjunto das atividades que compõe a sequência não permite o desenvolvimento da visualização. (PALLES, 2012, p. 69)

A autora recomenda uma metodologia de engenharia didática para aperfeiçoar a sequência didática no intuito de contribuir para a visualização desejada. Palles (2012) aproxima-se do presente trabalho na fundamentação teórica utilizada para análise da sequência de atividades, que se baseia nos Registros de Representação Semiótica de Duval, assim como na utilização de recursos 3D para o ensino de geometria, mas difere-se na metodologia, visto que Palles (2012) foi elaborado em um estudo de caso. Os trabalhos também se diferenciam na abordagem de conceitos geométricos, visto que Palles (2012) trabalha com volume e o presente trabalho tem enfoque na visualização espacial.

O próximo trabalho a ser descrito é Carvalho (2011), que foi desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da UFG, em que o autor visou responder a pergunta” Que ações podem ser mobilizadas pelo professor e alunos do nono ano do Ensino Fundamental ao utilizarem o software Cabri 3D e Lousa Digital durante a resolução de problemas de geometria espacial?” (CARVALHO, 2011, p. 24): Para tanto, o autor analisou os resultados da aplicação de problemas que envolviam prismas, à luz das teorias de Polya e Vygotsky.

A abordagem da pesquisa foi qualitativa e o autor concluiu que algumas ações que podem ser mobilizadas são a mediação do professor com os alunos no decorrer das atividades, as anotações dos alunos fora do contexto digital, e as trocas de ideias e de estratégias de resolução de problemas entre os alunos. Além das conclusões, frente à pergunta norteadora da pesquisa, o autor conclui o trabalho fazendo novos questionamentos que podem gerar novas pesquisas:

A partir disso podemos propor novas indagações, novas reflexões, novos problemas: De que forma a Lousa Digital pode facilitar o ensino de matemática? Quais os saberes docentes necessários à utilização da Lousa Digital nas aulas de matemática? Que novos saberes são necessários para que os professores trabalhem tecnologias de modo conjugado? (CARVALHO, 2011, pág. 115).

Nesta perspectiva o autor também contribui com reflexões acerca da formação de professores e de alunos para que ambos possam ter condições de trabalhar com novas

tecnologias. O trabalho de Carvalho (2011) aproximou-se da presente pesquisa em sua abordagem qualitativa assim como na abordagem de recursos 3D para o ensino de geometria espacial no Ensino Fundamental. Já na fundamentação teórica utilizada, visto o trabalho do autor distanciou-se da presente pesquisa uma vez que Carvalho (2011) baseou sua fundamentação teórica em Polya e Vygotsky.

O próximo trabalho que foi analisado é Ritter (2011), trabalho desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, em que a autora visa observar se é válido o trabalho com softwares de geometria dinâmica assim como qual a forma de melhorar a capacidade de visualização dos alunos. Para tanto, a autora aplicou atividades envolvendo construções de sólidos e planificações em crescente nível de dificuldade para a 3ª série do Ensino Médio.

A metodologia de pesquisa foi a de engenharia didática e as análises de resultados se deram por meio das teorias de Van Hiele, Gutiérrez e Duval. A autora conclui que o trabalho com softwares de geometria dinâmica têm sua importância e contribui de maneira efetiva para o desenvolvimento de habilidades de visualização dos alunos:

Sinto-me muito satisfeita com os resultados quanto a aprendizagem dos meus alunos. Observei uma melhora significativa na visualização dos sólidos envolvidos nos exercícios que foram resolvidos após a sequência didática realizada na sala de informática e, como consequência, nas avaliações posteriores os erros dos alunos tiveram origem, sobretudo, na falta de atenção, nos cálculos básicos, e principalmente no equacionamento dos problemas. (RITTER, 2011, p. 100)

A autora também nos traz a importância de se associar novas práticas as práticas já preestabelecidas, como, por exemplo, o uso de maquetes, construções com materiais manipulativos entre outros. Ritter (2011) aproxima-se da presente pesquisa por meio da fundamentação teórica, baseada em Gutiérrez e Duval, assim como na abordagem de planificações. Os trabalhos diferenciam-se na metodologia, visto que Ritter (2011) trabalha com engenharia didática, assim como no público alvo, uma vez que a autora trabalha com Ensino Médio.

Finalmente temos Vieira (2010), desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto – MG, que visou responder a pergunta: “Que contribuições o software GeoGebra e materiais concretos oferecem à aprendizagem do conteúdo Áreas de Figuras Planas e Espaciais, avaliadas segundo a teoria de van Hiele, para alunos do Ensino Médio?” (Vieira, 2010, p.8). Para tanto, a autora aplicou uma atividade envolvendo alunos dos três anos que compõe o Ensino Médio. A

fundamentação teórica do trabalho foi embasada principalmente nos estudos de Van Hiele sobre pensamento geométrico.

A autora conclui em sua pesquisa que foi possível observar contribuições acerca do aumento da capacidade de argumentação e dedução dos alunos, assim como do desenvolvimento da linguagem geométrica e dos níveis de pensamento geométrico:

Pôde-se concluir que o software GeoGebra constituiu um ambiente fértil que permitiu ao aluno a construção e manipulação de figuras, levantando hipóteses, criando conjecturas a respeito das regularidades percebidas, que eram ou não comprovadas. Numa construção com régua e compasso, a figura se mantém estática, o que não possibilita que se façam testes com ela. (VIEIRA, 2010, p. 123).

Vieira (2010) apresenta uma pesquisa que se aproxima do presente trabalho na abordagem de figuras espaciais por meio do GeoGebra, embora a autora não utilize o recurso 3D que o software oferece, pois neste ano ainda não havia esta opção. Também apresenta distanciamentos quanto ao público alvo, assim como na utilização de materiais concretos, recursos não utilizados no presente trabalho.

Podemos observar nos trabalhos descritos que os autores apresentam perguntas pertinentes ao ensino de Geometria com ênfase na visualização, em diferentes contextos e focos da geometria, que é muito ampla. Neste sentido, o presente trabalho também visa contribuir para este estudo. No próximo capítulo, será apresentada a metodologia de pesquisa utilizada no desenvolvimento desta dissertação assim como o desenvolvimento das atividades envolvidas.

3 METODOLOGIA E SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Este capítulo visa apresentar a metodologia de pesquisa que embasa o presente trabalho, para tanto, serão discutidas ideias acerca da pesquisa qualitativa, inspiradas principalmente na obra de Bogdan e Biklen (1991). Também são apresentados o detalhamento acerca do desenvolvimento da sequência didática e sua aplicação, bem como uma breve apresentação do GeoGebra Classroom e seus recursos. Na sequência temos a apresentação do contexto da pesquisa, sujeitos envolvidos e coleta de informações que irão compor o conjunto de dados a serem analisados posteriormente.

3.1 CONTEXTO DA PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS

A coleta de dados para essa pesquisa foi realizada com alunos de uma escola particular localizada no bairro Cidade Baixa da cidade de Porto Alegre, que atende do 1º a 9º ano do Ensino Fundamental, em que a autora do presente trabalho atua como docente. O período de aplicação das tarefas se deu durante os meses de agosto e setembro de 2020 e ocorreu de maneira remota por meio do Google Meet e da plataforma GeoGebra Classroom, do GeoGebra on-line. A escola permitiu a participação dos alunos mediante carta de apresentação conforme apêndice A e autorização conforme apêndice B. Os alunos participantes foram convidados e posteriormente selecionados mediante interesse e disponibilidade de trabalho por computador e acesso à internet. Dos seis alunos selecionados, quatro eram do 9º ano e dois eram do 8º ano do Ensino Fundamental e eles organizam-se em duplas para a realização das atividades. Embora a professora pesquisadora atue na escola em questão, todos os alunos envolvidos tinham outro professor titular. Os alunos foram autorizados pelos seus responsáveis a participar da pesquisa mediante um Termo de Consentimento Informado, disponibilizado no apêndice C.

A coleta de dados para a pesquisa ocorreu através de instrumentos diversos tais como a transcrição das gravações dos encontros, diário de campo, produção escrita e construções desenvolvidas pelos alunos no decorrer das atividades no GeoGebra Classroom, que foram salvas na plataforma para posterior análise.

No que se refere ao caráter da investigação, André e Ludke (2015) nos trazem que uma pesquisa deve ser fruto de uma relação construída por meio dos dados coletados, indícios, informações sobre o objeto de estudo e estudos teóricos sobre assuntos que abordam

este objeto. A presente pesquisa baseia-se nestes aspectos e inspira-se na abordagem qualitativa, que conforme Bogdan e Biklen (1991), possui cinco características principais:

1) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;

Conforme os autores, independente do recurso utilizado no momento da coleta de dados, que podem ser vídeos, áudios, cadernos de campos entre outros, parte da composição destes dados se dará por meio das informações que se obtém através do contato direto. Ou seja, um investigador qualitativo sempre buscar deslocar-se ao espaço da investigação, pois reconhece a importância de observar as ações a serem investigadas em seu ambiente natural de ocorrência. Sendo assim, os investigadores qualitativos “assumem que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre, deslocando-se, sempre que possível, ao local de estudo” (BOGDAN E BIKLEN ,1991, p. 48).

2) A investigação qualitativa é descritiva;

Aqui os autores salientam que os dados que compõe a pesquisa qualitativa não são números, e sim compostos de imagens, fotografias, palavras, notas de campo, memorando entre outros. Neste sentido, cabe ao investigador qualitativo analisar os dados da maneira mais fidedigna possível, considerando e respeitando a maneira com que foram colhidos ou transcritos. Conforme os autores, um investigador qualitativo precisa estar atento ao todo, uma vez que “nada é trivial, tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo.” (BOGDAN E BIKLEN ,1991, p. 49).

3) Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.

Neste caso os autores enfatizam a importância de se observar os diversos fatores que compõe um cenário de pesquisa. As relações interpessoais tem sua relevância no processo de definições estabelecidas em uma determinada situação. Bogdan e Biklen (1991) exemplificam tal fato por meio de uma situação em que um grupo de alunos é dividido em duas partes em função de sua situação socioeconômica. Neste contexto, fica estabelecido que a interação da professora com cada grupo se deu de maneira diferente baseada neste critério de separação. Os alunos mais favorecidos recebiam da professora mais privilégios. Sendo assim a investigação qualitativa visa considerar o processo como parte da produção de resultados, compreendendo sua relevância, visto que “este tipo de estudo foca-se no modo como as definições (as definições que os professores têm dos alunos, as definições que os alunos têm de si próprios e dos outros) se formam” (BOGDAN E BIKLEN ,1991, p. 50).

4) Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.

Ou seja, um investigador qualitativo não busca confirmar suas hipóteses por meio da análise de seus dados, ele vai formando sua teoria durante o processo da coleta de dados e por meio da observação dos sujeitos envolvidos. O investigador não supõe saber qual resultado esperar, compreendendo que diversos fatores influenciam a construção de sua teoria sobre seu objeto de estudo. Isto é, “o processo de análise é dos dados é como um funil: as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão se tornando mais fechadas e específicas no extremo.” (BOGDAN E BIKLEN, 1991, p. 50).

5) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Mais uma vez os autores salientam a importância de, do ponto de vista da investigação qualitativa, se perceber e observar a série de fatores e significados que permeiam um contexto de pesquisa. Isto é, por meio da troca de perspectiva, o investigador visa entender os significados produzidos pelos diferentes sujeitos envolvidos na investigação. Para exemplificar esta situação, Bogdan e Biklen (1991) nos trazem a situação em que pais de um determinado grupo de alunos são questionados sobre quais as razões de seus filhos terem baixo rendimento escolar. Neste sentido, acaba-se descobrindo que os pais sentiam-se pouco valorizados pelos professores em razão de seu baixo nível de escolarização, fator esse que eles acreditavam ter influência em como o professor via seus filhos. Tal mudança de perspectiva permite observar com maior clareza a dinâmica das relações entre os sujeitos, e isto não é possível se o investigador mantém uma postura de observador exterior. Sendo assim, “os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador” (BOGDAN E BIKLEN, 1991, p. 51).

É válido salientar que os autores entendem que uma pesquisa qualitativa não necessariamente apresentará essas cinco características apresentadas. Algumas pesquisas serão de caráter qualitativo e não abordarão todas elas. A presente pesquisa trata-se de uma investigação qualitativa e norteia-se pelas características citadas.

3.2 GEOGEBRA CLASSROOM

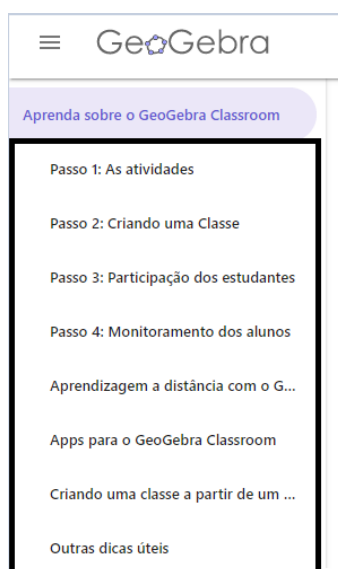
Devido à pandemia do Covid-19, foi necessário realizarmos uma adaptação frente à aplicação da atividade, pois não seria possível aplicá-la presencialmente. A alternativa encontrada foi a adaptação para a plataforma virtual GeoGebra Classroom.

O GeoGebra Classroom é um novo recurso do aplicativo GeoGebra on-line, incorporado à plataforma em 2020, como uma alternativa para os professores ministrarem atividades em tempo real. Há diversos recursos disponíveis, tais como:

- atribuir tarefas interativas e envolventes para os alunos;
- visualizar o progresso dos alunos, de maneira síncrona, ao realizarem uma tarefa específica;
- ver quais tarefas os alunos iniciaram (ou não);
- realizar perguntas para toda a turma e visualizar as respostas de todos os alunos instantaneamente;
- ocultar os nomes dos alunos ao exibir as respostas dos alunos às perguntas.
- realizar discussões ricas e interativas entre todos os alunos, grupos de alunos e alunos individuais.¹

A plataforma está em constante atualização e não apresentou problemas durante todo o processo de aplicação da atividade da presente pesquisa. O software é bastante intuitivo e há um tutorial com todos os detalhes para sua utilização.

Figura 5 – Tutorial do GeoGebra Classroom



Fonte: Página do GeoGebra²

Embora este tutorial esteja disponível na página do GeoGebra Classroom, optamos por apresentar um breve resumo de sua utilização a seguir.

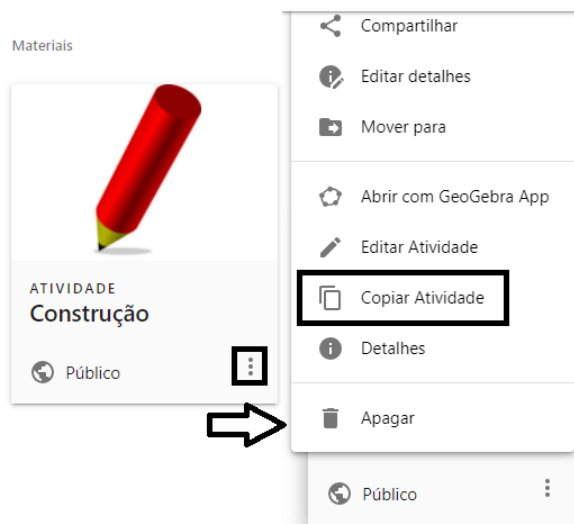
3.2.1 Criando um GeoGebra Classroom

¹ Fonte: Página do GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/a4dujady> . Acesso em: 15. Dez. 2020.

² Fonte: Página do GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/a4dujady>. Acesso em: 15. Dez. 2020.

Primeiramente deve-se construir a atividade desejada ou pesquisar uma atividade no banco de atividades do GeoGebra. Em seguida deve-se salvar uma cópia desta atividade selecionada para que seja possível editar o arquivo sem perdê-lo.

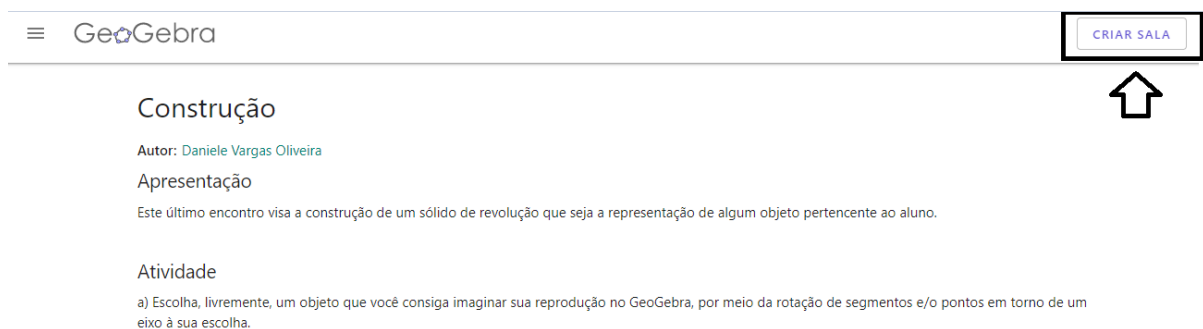
Figura 6 – Exemplo de como salvar arquivo.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Em seguida deve-se entrar na atividade selecionada e criar a sala no canto superior direito da tela:

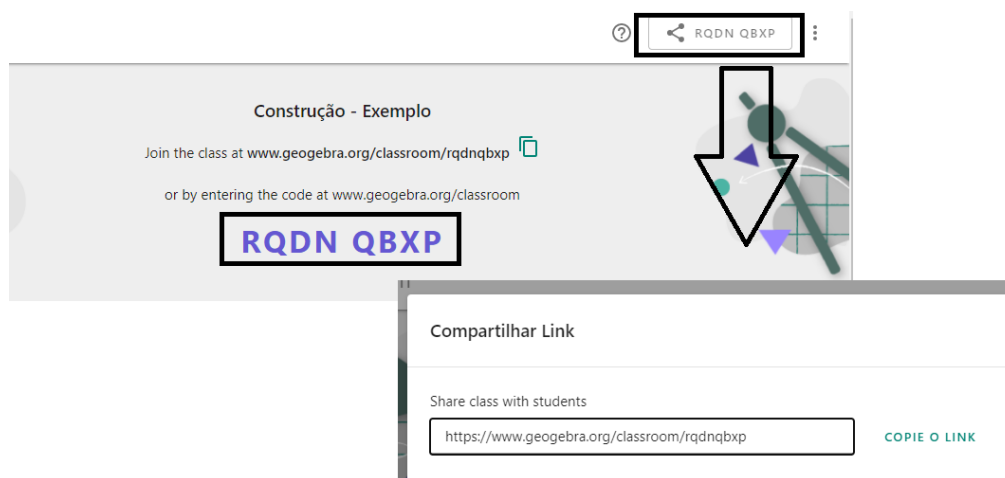
Figura 7 Exemplo de como criar sala.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Depois se deve escolher um nome para a atividade e criar a sala. Assim que a sala for criada ficarão disponíveis duas formas de compartilhá-la com os alunos: um código e um link que pode ser gerado no canto superior direito da tela.

Figura 8 – Exemplos do compartilhamento de sala.



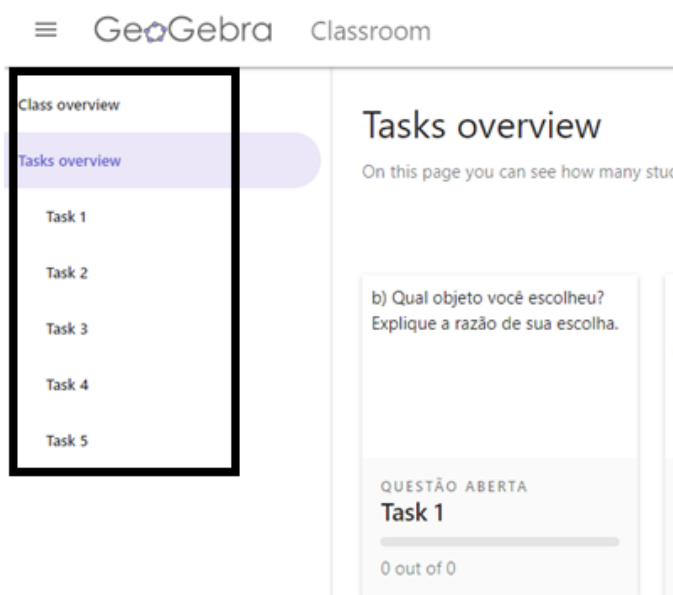
Fonte: acervo da pesquisadora.

Quando os alunos entrarem na sala eles colocarão seus respectivos nomes e ficará disponível para o professor quais os alunos que já entraram.

3.2.2 Utilizando o GeoGebra Classroom

No decorrer da atividade o professor poderá acompanhar todo o desenvolvimento individual de cada aluno em tempo real. É possível saber quais alunos já estão respondendo e os que ainda não começaram. Isso permite que o professor acompanhe de perto a construção de cada aluno, podendo dar feedback específico para cada aluno (ou para todos) ao longo da atividade. Todas as respostas e construções dos alunos ficarão salvas automaticamente em um arquivo que ficará nos materiais do perfil do GeoGebra do professor. O professor tem a alternativa de deixar os participantes em anonimato, caso desejar. Cada atividade é separada na janela de visualização do professor, conforme ilustração 9.

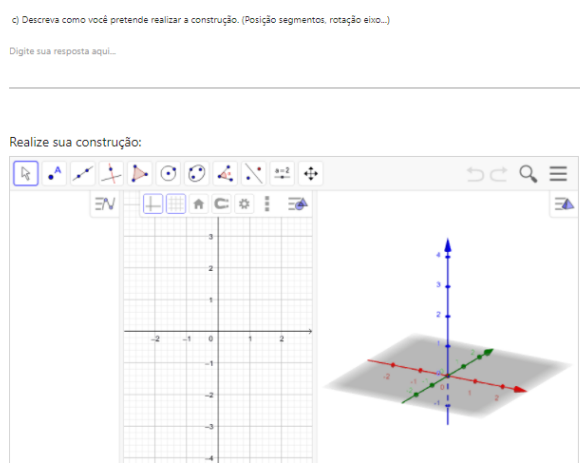
Figura 9 – Espaço para acompanhamento das atividades no GeoGebra Classroom



Fonte: acervo da pesquisadora.

Cada aluno recebe as atividades separadamente e o professor pode inserir os *applets* do GeoGebra nos itens das atividades para que os alunos realizem suas construções, ou acrescentem elementos na construção inicialmente apresentada. O software permite que o professor ajuste os recursos dos *applets* conforme o ideal para a atividade desenvolvida, podendo inclusive restringir algumas funcionalidades, tais como as ferramentas do software.

Figura 10 – Exemplo de *Applet* de uma atividade do GeoGebra Classroom.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Encerramos nossa breve apresentação do GeoGebra Classroom reafirmando seu uso como uma possibilidade para o ensino de matemática através não só do ensino remoto, como aqui será abordado, mas também em outros contextos como ensino à distância ou presencial.

3.3 PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES

A sequência didática deste trabalho aborda conceitos de geometria plana e espacial, tais como rotação bidimensional e tridimensional, posições relativas entre retas, ângulo e visualização espacial no plano cartesiano e por meio da construção de superfícies de revolução, no contexto do GeoGebra.

A sequência didática aplicada na presente pesquisa é composta por 12 horas no total. As atividades estão agrupadas por encontros – numerados de 1 a 6 – de acordo com o tema principal de estudo.

As atividades foram desenvolvidas com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, bem como os estudos sobre a visualização matemática de Gutiérrez.

No quadro 2 a seguir consta uma breve apresentação da proposta de cada atividade por encontro, e em seguida, cada uma das atividades será abordada com maior detalhamento.

Quadro 2- Planejamento das Atividades

	Conceitos abordados	Objetivos Pesquisa	Objetivos Pedagógicos
Encontro1	<ul style="list-style-type: none"> - Conceitos 2D e 3D; - Plano cartesiano; - Coordenada X, Y e Z; 	<ul style="list-style-type: none"> - Oportunizar e observar se há compreensão das relações entre as janelas algébricas, 2D e 3D; - Oportunizar e observar se há compreensão da conversão entre os registros gráfico e algébrico; - Oportunizar e observar se há compreensão do tratamento entre os registros gráficos; - Observar se as atividades contribuem para a aplicação das habilidades de visualização de Gutiérrez; 	<ul style="list-style-type: none"> - Construir com os alunos o conceito de coordenada do sistema cartesiano; - Familiarizar os alunos com o software; - Retomar com os alunos eixos X e Y e apresentar o eixo Z; - Construir com os alunos o conceito de coordenada do sistema cartesiano (abscissa, ordenada e cota). - Apresentar o recurso controle deslizante.
Encontro 2	<ul style="list-style-type: none"> - Rotação; - Ângulo; -Raio Circunferência; - Noções de área e perímetro. 	<ul style="list-style-type: none"> - Oportunizar a compreensão da conversão entre os registros gráfico e algébrico; - Observar se há a realização do tratamento durante a construção solicitada; - Observar se a atividade envolvendo rotação contribui para a aplicação das habilidades de visualização de Gutiérrez; 	<ul style="list-style-type: none"> - Observação e compreensão visual do raio de uma circunferência; - Trabalhar com a habilidade de visualização espacial;
Encontro 3	-Perímetro de uma	- Oportunizar a compreensão	- Trabalhar com a habilidade de

	<p>circunferência</p> <ul style="list-style-type: none"> - Visualização tridimensional - Rotação 	<p>da conversão entre os registros gráfico e algébrico;</p> <ul style="list-style-type: none"> - Oportunizar a compreensão dos tratamentos entre os registros bidimensionais e tridimensionais. - Observar se na atividade envolvendo rotação os alunos apresentam habilidades de visualização que compõe o processo de visualização de Gutiérrez. 	<p>visualização espacial;</p> <ul style="list-style-type: none"> - Consolidação da coordenada Z de um ponto.
Encontro 4	<ul style="list-style-type: none"> - Visualização tridimensional - Rotação - Superfície de revolução; 	<ul style="list-style-type: none"> - Oportunizar e observar se os alunos realizam a conversão entre os registros gráfico e algébrico; - Observar se a atividade envolvendo rotação contribui para a realização dos tratamentos entre os registros 2D e 3D; - Consolidar, através da construção de superfícies de revolução, a compreensão e visualização espacial das imagens produzidas por rastros na rotação de pontos e segmentos de reta. - Observar se as construções solicitadas contribuem para o exercício de habilidades de visualização que compõe o processo de visualização de Gutiérrez. 	<ul style="list-style-type: none"> - Exercício da habilidade de visualização espacial; - Exercício da compreensão das coordenadas de um ponto em espaço tridimensional.
Encontro 5	<ul style="list-style-type: none"> -Perpendicularidade; - paralelismo; - Rotação - Visualização tridimensional 	<ul style="list-style-type: none"> - Observar as habilidades de visualização dos alunos por meio de rotações de segmentos de retas em diferentes angulações; - Observar se a atividade envolvendo rotação permite a compreensão dos tratamentos entre os registros 2D e 3D. 	<ul style="list-style-type: none"> - Exercício da visualização espacial; - Aplicação de conceitos de geometria de posição. (posição entre retas)
Encontro 6	<ul style="list-style-type: none"> - Rotação - Superfície de revolução; 	<ul style="list-style-type: none"> - Observar as habilidades de visualização dos alunos por meio de construção de superfícies de revolução; - Observar se estas habilidades de visualização se desenvolvem melhor por meio dos registros dinâmicos de representação semiótica realizados; - Observar se a atividade contribui para a compreensão dos tratamentos entre os registros 2D e 3D. 	<ul style="list-style-type: none"> - Exercício da visualização espacial; - Aplicação de conceitos de geometria de posição. (posição entre retas)

Fonte: elaborado pela autora

Todas as atividades foram elaboradas visando contemplar os objetivos apresentados no Quadro 2. Apresentamos os objetivos em duas colunas visando deixarem claras as diferenças entre os objetivos da pesquisa, voltados a fundamentação teórica, e os objetivos do encontro, que são operacionais. As atividades foram produzidas no GeoGebra on-line e depois, para cada atividade, foi criado um GeoGebra Classroom separadamente. Optamos em separar as atividades para que os alunos pudessem concentrar-se inteiramente e unicamente em cada uma das etapas do encontro. No entanto, todas as atividades que serão apresentadas a seguir fazem parte do produto³ desta dissertação, que será apresentado em forma de um único geogebraobook contendo todas as atividades. Os links, com as atividades separadas, estão disponíveis na sequência, por encontro e agrupados no apêndice D. O Produto, na íntegra, está disponível no apêndice E.

3.3.1 Encontro1

Neste encontro pretendemos trabalhar conceitos de coordenada e plano cartesiano, com a apresentação da coordenada z, até então desconhecida pelos alunos. Também apresentaremos o controle deslizante, em que os alunos devem relacionar sua atuação com as coordenadas de um ponto.

O encontro está subdividido em três atividades denominadas:

- Atividade 1⁴: 2D e 3D;
- Atividade 2⁵: Eixos X, Y e Z;
- Atividade 3⁶: Controle Deslizante;

A seguir o detalhamento de cada uma dessas atividades respectivamente nas figuras 11, 12 e 13.

Figura 11 - Atividade 1 – Encontro 1

ATIVIDADE 1

- a) Com suas palavras, explique o que você entende como a diferença entre 2D e 3D.
- b) Faça uma pesquisa na internet e responda novamente

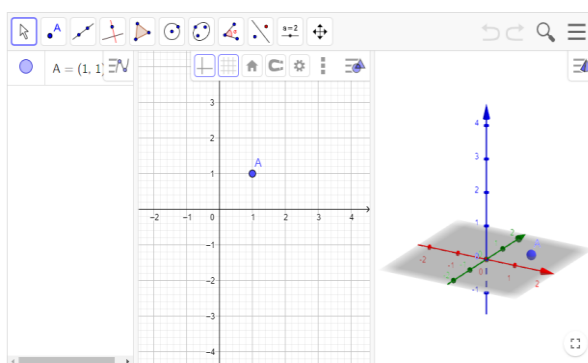
³ Este produto está disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ek592e2g>. Acesso em: 20 nov. 2020.

⁴ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/gnqur4jh>. Acesso em: 20 nov. 2020.

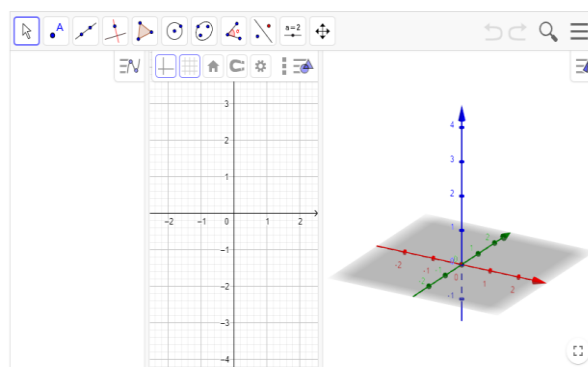
⁵ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/bm3cdppa>. Acesso em: 20 de nov. 2020.

⁶ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/mfuyjhmv>. Acesso em: 20 de nov. 2020.

Movimente o ponto a seguir na janela 2D (é a janela de visualização do meio) e observe as três janelas de visualização (algébrica, 2D e 3D) em relação aos movimentos deste ponto.



- c) Primeiramente, vamos pensar no que você observou na janela algébrica durante o movimento. O que mudava nesta janela conforme você trocava a posição do ponto?
- d) A partir das suas observações referentes aos sinais dos números na janela algébrica, você consegue relacionar estes sinais com a posição do ponto? Explique esta relação que você observou.
- e) Utilizando as informações que você verificou, construa um ponto na janela 2D na posição $(-1, -1)$, habilite rastro com o botão direito do mouse sobre o ponto e depois movimente-o até chegar na posição $(-2, 3)$.



- f) Como se chama a posição de cada número dentro dos parênteses e com qual eixo ele está relacionado? Pesquise na internet, e explique com suas palavras.

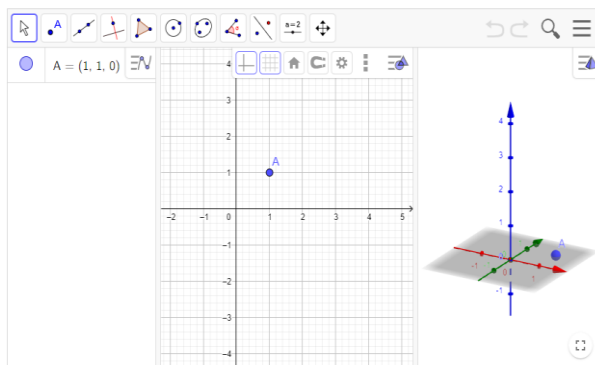
Fonte: acervo da pesquisadora

Nesta primeira atividade do Encontro 1, buscaremos trabalhar os conceitos de coordenada e eixos X e Y, bem como suas representações nas dimensões 2D e 3D. Os movimentos do ponto deverão ser realizados na janela de visualização 2D. Esperamos que os alunos iniciem a visualização das relações entre os tratamentos dos registros 2D e 3D bem como identifiquem a conversão simultânea entre os registros algébrico e gráfico bidimensional.

Figura 12 – Atividade 2 – Encontro 1

Atividade 2

Movimente o ponto na janela 3D, sempre observando seu movimento no espaço e suas relações com as janelas algébrica e 2D.



- Primeiramente, vamos pensar no que você observou na janela algébrica durante o movimento. O que você notou de diferente em relação à atividade anterior com o ponto na janela 2D? O que mudava nesta janela conforme você trocava a posição do ponto?
- Pense em todas as situações que você observou que os números na janela algébrica mudaram de sinal. Você consegue relacionar estes sinais com a posição do ponto? Explique esta relação que você observou.
- A partir das informações que você verificou, utilizando apenas a janela 3D, construa um ponto, habilite rastro e depois coloque-o na coordenada $(-2, 1, 0)$.
- Observe cada número dentro do parênteses e responda: qual eixo (cor) ele está relacionado?
- Pesquise e registre aqui o nome dos três eixos (verde, vermelho e azul) que aparecem na janela 3D e também o nome de cada um dos números que compõe a coordenada do ponto.
- Vamos nos atentar as suas observações em relação à janela 2D. Quais são os eixos que aparecem ao mesmo tempo nas duas janelas gráficas?
- Como você explicaria a ausência do terceiro eixo na janela 2D? Qual o nome deste eixo?

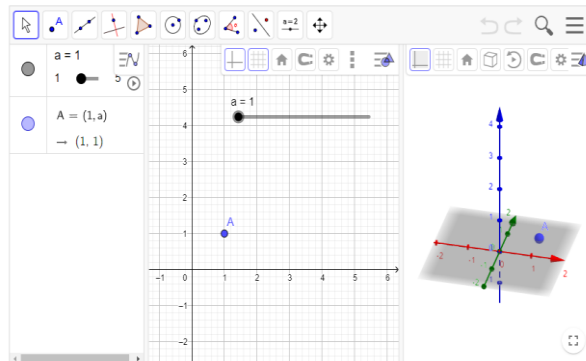
Fonte: acervo da pesquisadora.

Nesta segunda atividade, seguiremos com trabalho com coordenadas e eixos, introduzindo o eixo Z. Neste momento os movimentos do ponto passarão a ser realizados na janela de visualização 3D. Esperamos que os alunos identifiquem e estabeleçam relações ao visualizarem os tratamentos entre as janelas 2D e 3D, bem como as conversões entre os tratamentos algébrico e gráfico, agora tridimensional. Na identificação do eixo z, espera-se que os alunos apliquem a habilidade de construir as relações entre os objetos observados.

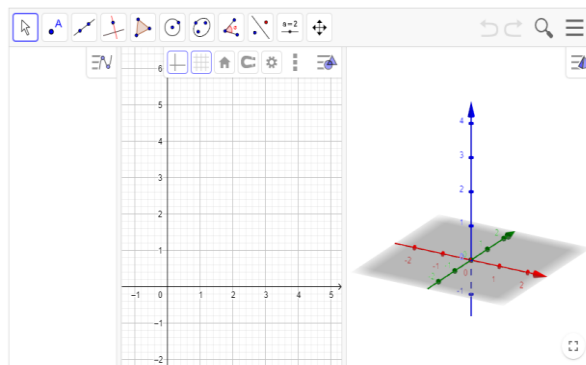
Figura 13 – Atividade 3 – Encontro 1

Atividade 3

Nesta etapa, vamos conhecer e trabalhar com o **controle deslizante** (ou seletor), um recurso do GeoGebra muito interessante. A seguir, temos um exemplo de uma possibilidade de utilização do controle deslizante. Movimente-o e observe sua atuação.



- Pensando nos limites do controle deslizante, qual é o valor máximo? E o valor mínimo?
- Movimente novamente o controle deslizante e observe o ponto e as janelas 2D e 3D. O que se mantém sempre constante? O que muda?
- Observe a janela 2D e a algébrica durante o movimento do controle. Onde você consegue perceber a atuação do controle deslizante?
- Crie, na janela de visualização 2D, um ponto A e um controle deslizante(ou seletor), de nome b, com valor mínimo 0 e máximo 5. Em seguida troque as duas coordenadas do ponto A por b. Movimente o controle deslizante e observe o movimento do ponto a.



- Registre o movimento que você observou. Como o movimento ficou? Alguma coisa se mantém?
- Como você explicaria o funcionamento do controle deslizante?

Fonte: acervo da pesquisadora.

Nesta última atividade, buscaremos trabalhar os conceitos matemáticos envolvidos nas atividades anteriores por meio do uso de um novo recurso: o controle deslizante. Este recurso também será utilizado nos encontros posteriores.

3.3.2 Encontro2

Este encontro abordará duas atividades iniciais compostas de movimentos de rotação de pontos e segmentos de reta, com o objetivo de trabalhar a visualização tridimensional. Na atividade final será solicitada uma construção que exige as habilidades exercitadas nas atividades anteriores.

O encontro está subdividido em três atividades denominadas:

- Atividade 1⁷: Rotações de pontos;
- Atividade 2⁸: Rotações de segmentos de reta;
- Atividade 3⁹: Construção

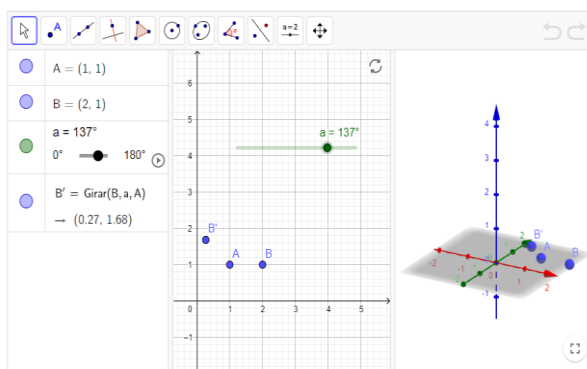
A seguir o detalhamento de cada uma dessas atividades respectivamente nas figuras 14, 15 e 16.

Figura 14 - Atividade 1 – Encontro 2

Atividade 1

Nesta primeira parte do encontro, vamos continuar trabalhando com o controle deslizante (ou seletor), com algumas modificações, e iniciaremos o trabalho com o recurso **rotação em torno de um ponto** que o GeoGebra tem.

Movimente e observe o deslocamento dos pontos a seguir.



a) Qual ponto está sendo rotacionado e em torno do que? Este movimento forma qual figura?

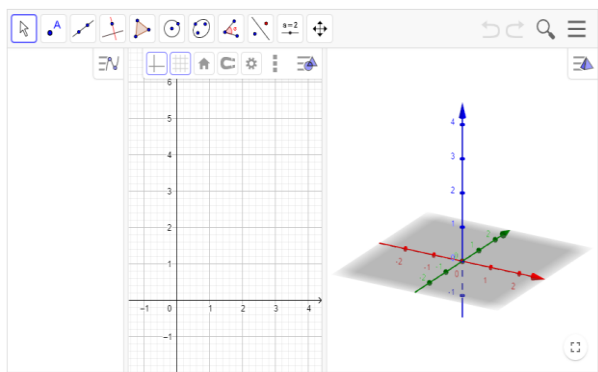
b) Quais são os limites do controle deslizante, ou seja, seu valor máximo e seu valor mínimo? Em que unidade de medida estão esses limites?

Reproduza esta situação, com o ponto B dando uma volta completa em torno do ponto A, por meio de um controle deslizante (ou seletor). Todos os próximos itens serão respondidos com base nesta construção.

⁷ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/xsnvfh32>. Acesso em: 20 de nov. 2020.

⁸ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/gz3dbt6v>. Acesso em: 20 de nov. 2020.

⁹ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/vgdbhrub>. Acesso em: 20 de nov. 2020.



e) Qual o nome da figura que a trajetória do ponto faz ao movimentarmos o controle deslizante? Após responder, clicando com o botão direito do mouse no ponto que se movimenta, selecione habilitar rastro para observar melhor a figura.

f) Com o movimento do controle deslizante, observe a distância do ponto que está se movendo para o ponto que está no centro. O que é possível concluir em relação a esta distância?

g) Explore as ferramentas do GeoGebra e crie, na janela de visualização 2D, um segmento com uma extremidade no centro e a outra extremidade no ponto que se movimenta. Com base nos seus conhecimentos, como se chama essa distância representada por esse segmento, em relação a circunferência?

h) Vamos pensar no perímetro desta figura. Você lembra o que significa perímetro? Você consegue perceber uma relação entre o comprimento do segmento e o perímetro da figura?

i) Na figura que você construiu como você faria para descobrir o tamanho do raio? E qual é o tamanho?

j) Habilite rastro no segmento construído e movimente. Explique o que há de diferente entre esta nova figura e a figura do item anterior.

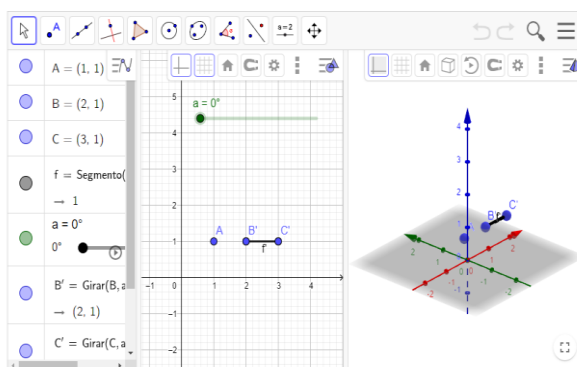
Fonte: acervo da pesquisadora.

Nesta atividade iniciaremos o trabalho com o controle deslizante em graus e com sua atuação associada ao recurso de rotação em torno de um ponto. Buscamos com esta atividade verificar se emergem indícios de identificação da conversão (DUVAL, 2010) entre os registros algébrico e gráfico simultaneamente realizadas pelo GeoGebra.

Figura 15 – Atividade 2 – Encontro 2

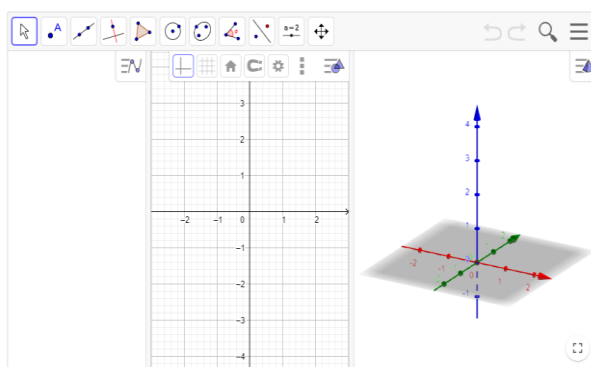
Atividade 2

Movimente o controle deslizante (seletor) e observe o deslocamento da construção a seguir.



a) Qual a figura que o movimento forma? Que diferença tem da figura formada na atividade anterior?

b) Reproduza a construção, com o segmento dando uma volta completa em torno do ponto A, por meio de um controle deslizante (seletor). Respondam os itens a seguir (d, e, f e g) com base nesta construção.



c) Qual a figura que o movimento forma? Que diferença tem da figura formada no item a? (habilite rastro para verificar a figura)

d) Modificando o segmento em relação ao alinhamento dos pontos A, B, C, descreva a mudança que você imagina que vai acontecer na figura.

e) Habilite o rastro e descreva o que você observou. A figura resultante tem semelhança com o que você desenhou? Se não, descreva as diferenças.

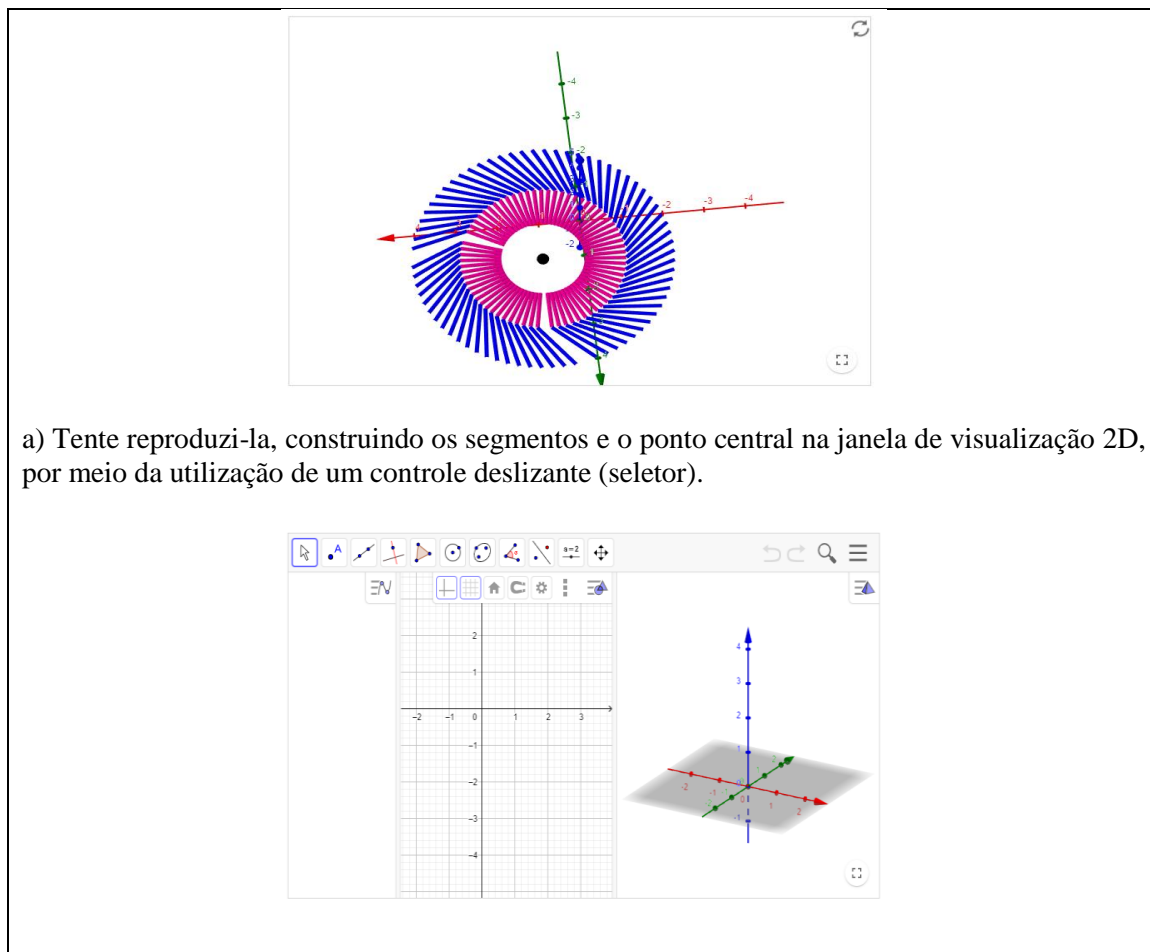
Fonte: acervo da pesquisadora.

Na atividade 2 deste encontro focaremos na rotação de segmentos de reta com reflexões acerca do registro da figura resultante de seu movimento. Em seguida trabalharemos com mudanças posição do segmento inicial visando novas reflexões relativas à imagem resultante. Esperamos verificar indícios das habilidades de rotação mental e discriminação visual.

Figura 16 - Atividade 3 – Encontro 2

Atividade 3

Observe a construção realizada no GeoGebra.



a) Tente reproduzi-la, construindo os segmentos e o ponto central na janela de visualização 2D, por meio da utilização de um controle deslizante (seletor).

Fonte: acervo da pesquisadora.

Nesta última atividade será exigida a reprodução de uma construção que estava exposta apenas na janela de visualização 3D, mas deveria ser construída na janela de visualização 2D. Para tanto, esperamos que os alunos apliquem as habilidades exercitadas nas duas atividades anteriores, tais como constância perceptual, rotação mental e discriminação visual, bem como sejam protagonistas na realização e identificação do tratamento entre os registros das janelas de visualização 3D e 2D.

3.3.3 Encontro3

O encontro 3 consistirá em atividades iniciais que envolvem rotação de pontos em torno dos 3 eixos (x, y e z), com cada eixo separado por atividade. Na sequência o encontro será finalizado com a solicitação de uma reprodução de uma construção que foi exposta em uma imagem estática.

O encontro está subdividido em quatro atividades denominadas:

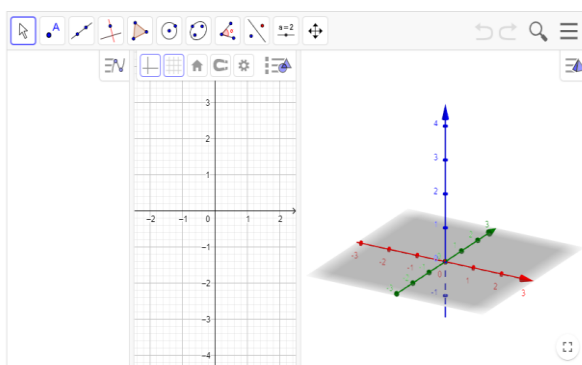
- Atividade 1¹⁰: Rotações no eixo x;
- Atividade 2¹¹: Rotações no eixo y;
- Atividade 3¹²: Rotações no eixo z;
- Atividade 4¹³: Construção

Considerando que as três primeiras atividades deste encontro são muito similares, diferenciando-se apenas nos eixos em que serão rotacionados os pontos, decidimos unificá-las em apenas uma imagem, como consta na figura 17. Em seguida temos a figura 18 em que consta a atividade 4.

Figura 17 – Atividade 1, 2 e 3 – Encontro 3

ATIVIDADE 1, 2 e 3

Crie um ponto A e um controle deslizante (seletor) de 0° a 360° na janela de visualização 2D. Troque o nome do controle deslizante para uma letra a sua escolha. Depois, Rotacione este ponto em torno do eixo (atividade 1 – eixo x; atividade 2 – eixo y; atividade 3 – eixo z), na janela de visualização 3D, utilizando o recurso girar em torno de uma reta. (ou rotação objeto, eixo)



- a) Observando o movimento do ponto na janela de visualização 3D, observe a janela algébrica e analise o ponto que está sendo rotacionado. O que você observa com as três coordenadas desse ponto na janela algébrica?
- b) Movimente o controle deslizante e observe como isto reflete na janela de visualização 2D. Como você explica o que está acontecendo nesta janela?
- c) Descreva o que você observa na janela 3D ao movimentar o controle deslizante. Qual a diferença em comparação ao que você estava visualizando na janela 2D? Habilite rastro para verificar melhor.

Fonte: acervo da pesquisadora.

¹⁰ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/g6vc7hjk>. Acesso: 20 de nov. 2020.

¹¹ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/s5ssmjpn>. Acesso: 20 de nov. 2020.

¹² Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qwmayy27>. Acesso: 20 de nov. 2020.

¹³ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/cff6jdka>. Acesso: 20 de nov. 2020.

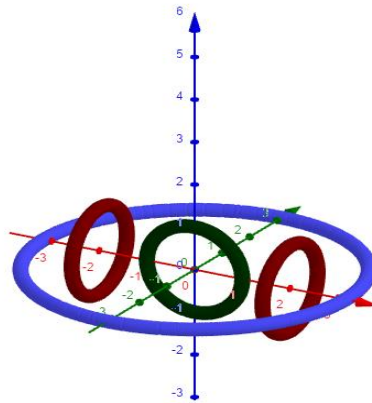
Conforme a figura 17, os movimentos de rotação serão solicitados pela primeira vez na janela de visualização 3D. Durante essas atividades, os alunos serão incentivados à realizar reflexões acerca das coordenadas do ponto e das figuras resultantes dos movimentos dos pontos em ambas as janelas de visualização (2D e 3D). Para tanto, esperamos que os alunos identifiquem as conversões e tratamentos realizados pelo software, estabelecendo relações entre suas representações, bem como exercitem as habilidades de rotação mental e percepção de relações espaciais.

Figura 18 – Atividade 4 – Encontro 3

Atividade 4

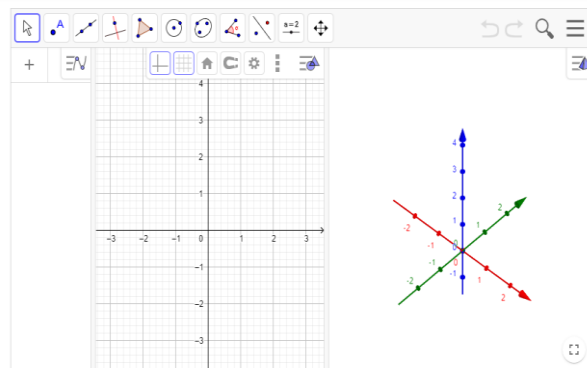
Construção

Observe a imagem a seguir:



a) Registre todas as informações que você conseguir observar, tais como: eixos envolvidos, objetos geométricos utilizados na construção e demais informações que você conseguir verificar.

b) Pensando em tudo que você construiu e aprendeu nas atividades anteriores deste encontro, tente reproduzir a construção:



c) Durante a construção, o que você teve mais facilidade para visualizar?

d) E o que você teve mais dificuldade em visualizar?

Fonte: acervo da pesquisadora.

Esta atividade exigirá a 2º construção da sequência de tarefas da presente pesquisa, sendo que neste caso, ao contrário da primeira construção solicitada, os alunos deverão trabalhar com uma imagem estática da construção, sem poder movimentá-la para observar por outras perspectivas. Além disso, a partir desta construção, sempre será solicitada aos alunos a apresentação de como foram observadas as informações necessárias para a construção, bem como suas facilidades e dificuldades em realizá-la. Buscamos com essa atividade que os alunos realizem o tratamento entre os registros gráficos bem como as conversões entre os registros algébrico e gráfico, por meio das habilidades de rotação mental, percepção do fundo da figura constância perceptual.

3.3.4 Encontro 4

Este encontro consistirá na solicitação de duas construções, em que esperamos que os alunos apliquem as habilidades exercitadas nas atividades anteriormente realizadas que envolviam rotações de pontos e segmentos de reta.

O encontro está subdividido em duas atividades denominadas:

- Atividade 1¹⁴: Construção 1

- Atividade 2¹⁵: Construção 2

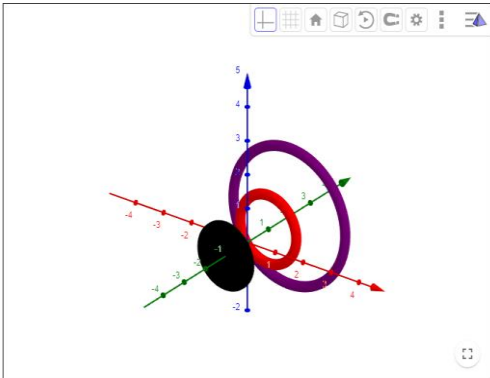
Considerando que ambas as atividades diferenciavam-se apenas na construção solicitada, decidimos unificá-las em uma única imagem, que consta na figura 19 a seguir.

Figura 19 – Atividades 1 e 2 – Encontro 4

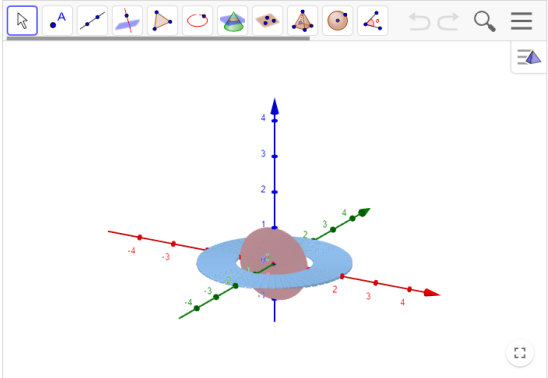
Atividades 1 e 2

Observe a construção a seguir:

ATIVIDADE 1



ATIVIDADE 2



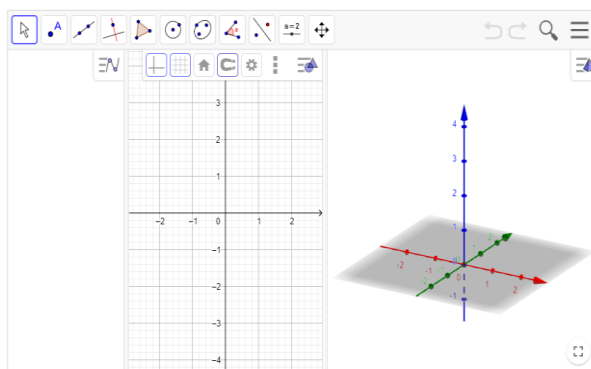
a) Registre todas as informações que você conseguir observar, tais como: eixos envolvidos,

¹⁴ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/fzycekeq>. Acesso em: 20 de nov. 2020.

¹⁵ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/rfewztbe>. Acesso em: 20 de nov. 2020.

objetos geométricos utilizados na construção e demais informações que você conseguir verificar.

b) Pensando em tudo que você construiu e aprendeu nas atividades anteriores deste encontro, tente reproduzir a construção:



c) Durante a construção, o que você teve mais facilidade para visualizar?

d) E o que você teve mais dificuldade em visualizar?

Fonte: acervo da pesquisadora.

Na primeira construção esperamos que os alunos observem que a figura é gerada pela rotação de dois pontos e de um segmento de reta, todos em torno do eixo y . Na segunda, que é gerada por rotações de segmentos de reta, sendo que uma estava em torno de eixo y e a outra do eixo z . Nesta atividade, retomamos a exposição da construção, sempre restrita à janela de visualização 3D, para que os alunos possam movimentá-la e observá-la de diferentes perspectivas. Nestas construções buscamos identificar conversões e tratamentos realizadas pelos alunos, associadas às habilidades de rotação mental e percepção de relações espaciais.

3.3.5 Encontro 5

Este encontro consistirá na solicitação de construções de segmentos de reta em específicas posições relativas aos eixos, para posterior rotação em torno dos três eixos (x , y e z).

O encontro está subdividido em três atividades denominadas:

- Atividade 1¹⁶: Rotações de segmentos 1
- Atividade 2¹⁷: Rotações de segmentos 2
- Atividade 3¹⁸: Rotações de segmentos 3

¹⁶ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/dkyy4ec5> Acesso em: 20 de nov.2020.

¹⁷ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/eccxsjqe> Acesso em: 20 de nov. 2020.

¹⁸ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qxdmzss7> Acesso em: 20 de nov. 2020.

Como as três atividades diferenciam-se apenas na posição do segmento de reta, apresentaremos as três na mesma imagem da figura 20.

Figura 20 -Atividades 1, 2 e 3 – Encontro 5

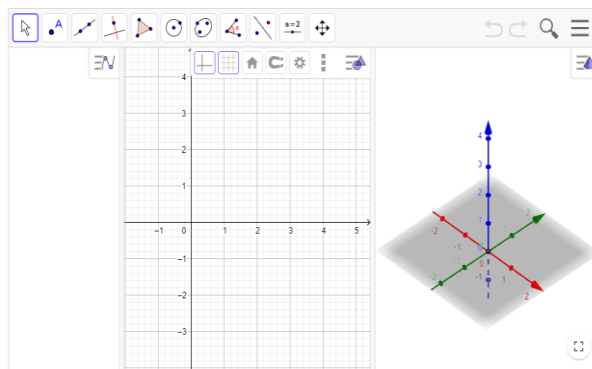
Atividades Encontro 5

Construa um segmento, na janela 2D:

Atividade 1: paralelo ao eixo y e não concorrente ao eixo x.

Atividade 2: perpendicular ao eixo y.

Atividade 3: concorrente ao eixo y.

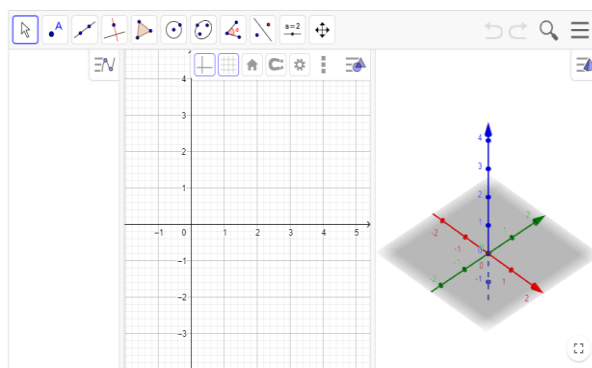


a) Imagine este segmento sendo rotacionado em torno do eixo x. Que figura você imagina que se formará na janela de visualização 2D? E na 3D?

b) Agora realize a rotação e habilite rastro para verificar a figura construída. Foi a que você imaginou? Se não o que ficou diferente?

c) Imagine este mesmo segmento sendo rotacionado em torno do eixo y. Que figura você imagina que se formará na janela de visualização 2D? E na 3D?

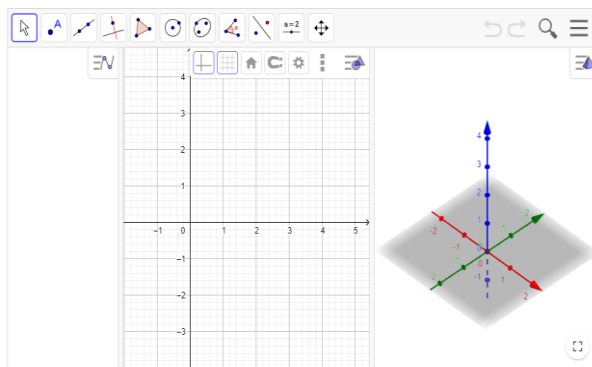
Construa o segmento, realize a rotação em torno do eixo y e habilite rastro para verificar a figura.



d) Foi a que você imaginou? Se não o que ficou diferente?

e) Finalmente imagine este segmento sendo rotacionado em torno do eixo z. Que figura você imagina que se formará na janela de visualização 2D? E na 3D?

Construa o segmento, realize a rotação em torno do eixo z e habilite rastro para verificar a figura.



f) Foi a que você imaginou? Se não o que ficou diferente?

Fonte: acervo da pesquisadora.

Na primeira atividade será solicitada a construção de um segmento de reta paralelo ao eixo y e não concorrente ao eixo x, na segunda um segmento perpendicular ao eixo y e finalmente, na terceira atividade, um segmento concorrente ao eixo y. Nas três atividades, será pedido que os alunos realizem a rotação destes segmentos em torno dos três eixos, um de cada vez, em um applet único para cada rotação. Esperamos que os alunos façam reflexões acerca das figuras geradas pelas rotações nas janelas de visualização 2D e 3D. Nas três atividades, buscaremos identificar as habilidades de rotação mental e percepção de relações espaciais associadas ao tratamento entre os registros gráficos.

3.3.6 Encontro 6

Neste último encontro abordaremos um fechamento que esperamos englobar as habilidades que buscamos exercitar com os alunos ao longo dos encontros anteriores. O encontro 6 está subdividido em duas atividades:

- Atividade 1¹⁹: Superfícies de Revolução
- Atividade 2²⁰: Construção

Na atividade 1, referente à figura 21, unificamos as etapas que a compõe visto que diferenciam-se apenas pelas construções solicitadas. A atividade 2 corresponde à figura 22.

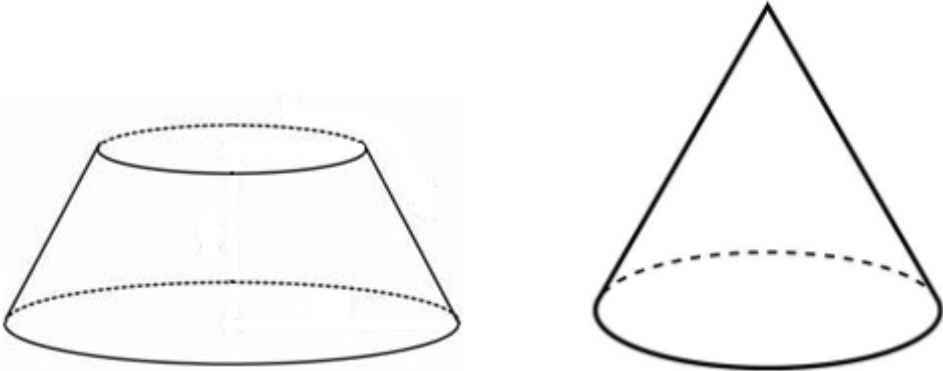
Figura 21 – Atividade 1 – Encontro 6

Atividade 1

Observe as figuras a seguir:

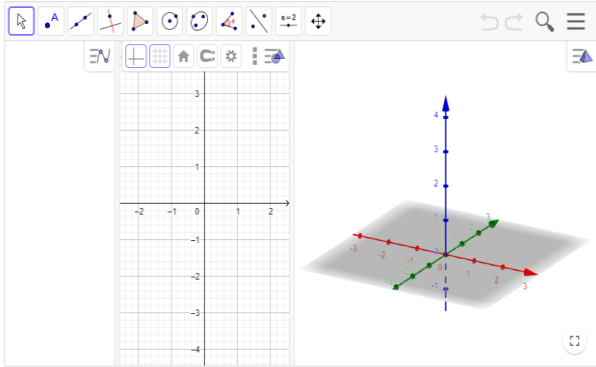
¹⁹ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/djmarhh6>. Acesso em: 20 de nov.2020.

²⁰ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/kqnmgtww>. Acesso em: 20 de nov.2020.



a) Para a construção das imagens acima, por meio da rotação, como você imagina que deveriam estar posicionados os segmentos? Descreva a posição dos segmentos.

Construa-os.



b) Sua primeira tentativa de construção deu certo? Se não, o que você teve que mudar para corrigir?

Fonte: acervo da pesquisadora.

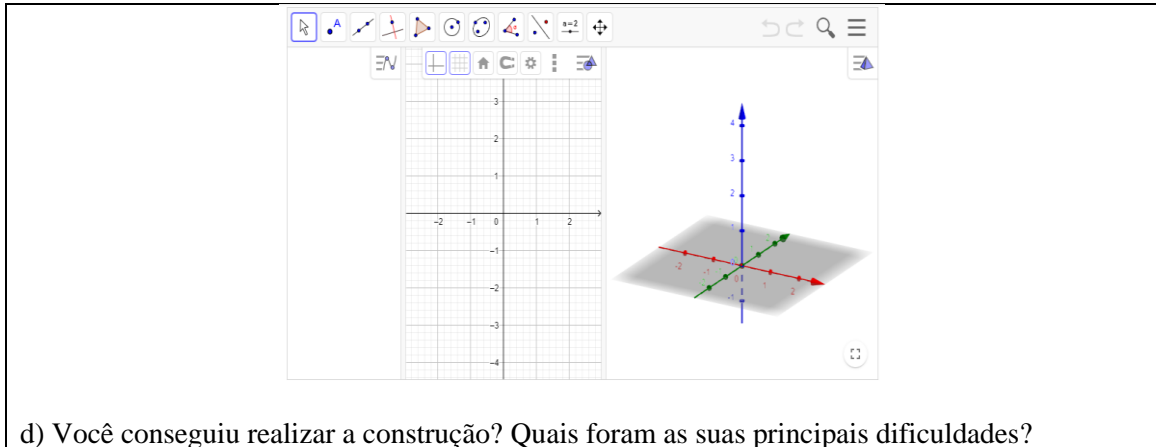
Nesta primeira etapa do encontro 6 esperamos que os alunos reproduzam as duas superfícies de revolução apresentadas, por meio da rotação de segmentos de reta e/ou pontos em torno de eixos à sua escolha. Para tanto, visamos observar a realização de tratamentos entre os registros nas janelas de visualização 3D para 2D associados às habilidades de rotação mental, percepção do fundo da figura, habilidade de percepção de relações espaciais.

Figura 22 – Atividade 2 – Encontro 6

Atividade 2

- Escolha, livremente, um objeto que você consiga imaginar sua reprodução no GeoGebra, por meio da rotação de segmentos e/ou pontos em torno de um eixo à sua escolha.
- Qual objeto você escolheu? Explique a razão de sua escolha.
- Descreva como você pretende realizar a construção. (Posição segmentos, rotação eixo...)

Realize sua construção:



d) Você conseguiu realizar a construção? Quais foram as suas principais dificuldades?

Fonte: acervo da pesquisadora.

Pretendemos, nesta última etapa, solicitar aos alunos que escolham um objeto qualquer que eles pensem ser possível representar, por meio da rotação de segmentos de reta e/ou pontos. Esperamos que os alunos apliquem todos os recursos e estratégias previamente desenvolvidos nos encontros anteriores bem como as habilidades de visualização e transformações necessárias à realização da atividade.

Assim encerramos a apresentação da sequência didática que será aplicada no presente trabalho. Conforme discutido no capítulo 2, espera-se que a união das atividades com os recursos disponíveis no software GeoGebra, possam contribuir para o desenvolvimento desta pesquisa.

No próximo capítulo seguimos com o relato e as análises da aplicação das atividades que compõe a sequência didática aqui apresentada.

4 RELATO E ANÁLISE

Neste capítulo apresentaremos o relato e análise dos seis encontros realizados neste trabalho, que colocaram em prática a sequência didática apresentada no capítulo 3. Cada um desses seis encontros teve em torno de 2h de duração. Utilizaremos como fonte de informações para análise as anotações do diário de campo da professora pesquisadora, as transcrições das gravações realizadas das aplicações, assim como as produções escritas e construções via plataforma GeoGebra Classroom, realizadas pelos alunos participantes desta pesquisa.

Nas análises aqui apresentadas, pretendemos trazer observações frente à produção dos alunos, com ênfase na análise das atividades em que os alunos atingiram os objetivos propostos e também das que apresentaram dificuldades, buscando observar as suas razões, sempre tendo como base o aporte teórico apresentado no capítulo 2. Por meio destas análises, pretendemos responder à questão norteadora da presente pesquisa, delimitada no capítulo 1:

Quais as contribuições do GeoGebra no processo de desenvolvimento da habilidade de visualização espacial, quando se faz uso de atividades envolvendo rotação?

Lembramos que foram selecionados seis alunos para participarem da presente pesquisa e eles foram incentivados a trabalhar em duplas, que se mantiveram as mesmas em todos os encontros. As duplas foram estimuladas a compartilhar estratégias e soluções das questões entre si por meio do recurso de compartilhamento de tela do Google Meet. Os participantes das duplas serão identificados numericamente. Para facilitar o acompanhamento do leitor, serão retomados, brevemente, os respectivos objetivos e atividades referente ao encontro analisado em cada seção, conforme já apresentados no capítulo 3.

Em todos os encontros, a professora pesquisadora visou manter uma postura de mediadora com interferência mínima, buscando responder as indagações dos alunos envolvidos com novas perguntas, que permitissem reflexões e que pudessem contribuir para a trabalhar com as dúvidas dos alunos. Todos os encontros foram finalizados com um momento de retomada e consolidação dos conceitos abordados e, a partir do segundo encontro, todos iniciavam com uma breve retomada do que havia sido trabalhado no encontro anterior.

A análise terá foco em situações relevantes à luz do aporte teórico para serem detalhadas e se houverem soluções semelhantes nas atividades, será escolhido um exemplo para a representação de todos. Ao final da análise de cada encontro, será realizado um breve fechamento com foco na verificação do alcance dos objetivos.

Considerando a suspensão das aulas presenciais e a implementação do ensino remoto para frear a pandemia do Covid-19, achamos importante salientar que tanto o GeoGebra Classroom quanto o Google Meet foram aliados na aplicação da atividade da presente pesquisa, pois, por meio deles, foi possível fazer a observação em tempo real do desenvolvimento das atividades dos alunos. Tais recursos permitiram à professora pesquisadora um maior acompanhamento das estratégias dos alunos, neste contexto de ensino remoto.

4.1 RELATO E ANÁLISE ENCONTRO 1

Neste primeiro momento, os alunos tiveram um tempo destinado para a exploração livre do software, momento este dedicado a ambientação com interface do software assim como alguns de seus recursos.

Após esta breve exploração, os alunos receberam a atividade dividida em três etapas:

- Atividade 1: 2D e 3D
- Atividade 2: Eixos X, Y e Z
- Atividade 3: Controle Deslizante

Este primeiro encontro teve um caráter introdutório, com atividades que contemplaram coordenadas no plano cartesiano e controle deslizante. No quadro 3, retomamos os objetivos gerais do encontro:

Quadro 3 – Objetivos Encontro 1

Objetivos da Pesquisa	Objetivos Pedagógicos
<ul style="list-style-type: none"> - Oportunizar e observar se há compreensão das relações entre as janelas algébricas, 2D e 3D; - Oportunizar e observar se há compreensão da conversão entre os registros gráfico e algébrico; - Oportunizar e observar se há compreensão do tratamento entre os registros gráficos; - Observar se as atividades contribuem para a aplicação das habilidades de visualização de Gutiérrez. 	<ul style="list-style-type: none"> - Construir com os alunos o conceito de coordenada do sistema cartesiano; - Familiarizar os alunos com o software; - Retomar com os alunos eixos X e Y e apresentar o eixo Z; - Construir com os alunos o conceito de coordenada do sistema cartesiano (abscissa, ordenada e cota). - Apresentar o recurso controle deslizante.

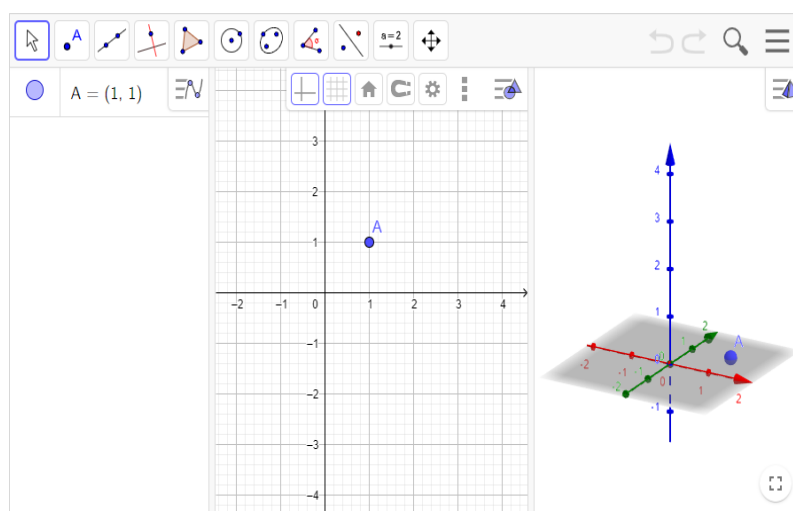
Fonte: elaborado pela autora

Tais objetivos permearão a análise a seguir deste encontro.

4.1.1 Atividade 1 – 2D e 3D

Nesta primeira etapa buscamos trabalhar e consolidar os conceitos de coordenada e eixos X e Y, bem como suas representações nas dimensões 2D e 3D. Inicialmente, os alunos trabalharam com um applet que permitia a movimentação de um ponto, na janela 2D. Os alunos foram orientados a observar como este movimento refletia nas três janelas (algébrica, 2D e 3D). A seguir, apresentamos o applet que os alunos receberam nesta atividade:

Figura 23 – Applet Atividade 1 – Encontro 1



Fonte: Elaborado pela autora

Com o applet ilustrado na figura 23, solicitamos aos alunos que observassem como o movimento do ponto A refletia nas três janelas (algébrica, 2D e 3D). O objetivo era incentivar a verificação das relações algébrica e gráficas que poderiam ser observadas por meio do movimento do ponto.

No que se refere à observação do movimento do ponto e sua relação com a janela algébrica, apresentamos um exemplo de resposta, semelhante às dos demais alunos, na figura 24.

Figura 24 – Resposta aluno 3.

observei que a janela algébrica
serve como um guia de
coordenadas para o usuário se
localizar na janela 2d

Fonte: Acervo da pesquisadora

A partir da resposta do aluno 3, entendemos que, através da manipulação direta que o Geogebra permite, os alunos reconheceram que as mudanças representavam as coordenadas do ponto conforme o movimento dele na janela 2D. No decorrer desta atividade, os alunos deveriam atentar para os sinais das componentes de cada coordenada do ponto em cada quadrante. A seguir o exemplo de uma dupla que apresentou dificuldade neste item.

- Aluna 5: *Tudo que fica acima da linha horizontal fica com o y positivo...*

- Professora: *Ok. Mas e o x?*

- Aluna 6: *huum... o x muda. Mas acho que temos que olhar área por área.*

Neste caso, percebemos que a aluna concluiu precipitadamente o sinal da coordenada, confundindo-se com os sinais da abscissa e da ordenada, fazendo-se necessária uma reflexão incentivada pela professora, para que ela analisasse novamente a situação e repensasse sua conclusão. Tal equívoco corrobora com Duval (2010), que nos traz que essas transformações não são evidentes para os alunos, em particular a conversão, representada neste caso pela relação entre os registros gráfico e algébrico. Por meio do recurso de arrastar do software, a aluna pôde observar novamente os sinais e reformular sua verificação. Após essa nova análise, a dupla verificou cada um dos quadrantes e em seguida concluiu da seguinte forma:

Figura 25 – Resposta alunas 5 e 6.

Na primeira área- O x ficou negativo e o y positivo;
 Na segunda área- O x e o y ficaram positivos;
 Na terceira área- O x e o y ficaram negativos;
 Na quarta área- O x fica positivo e o y negativo.

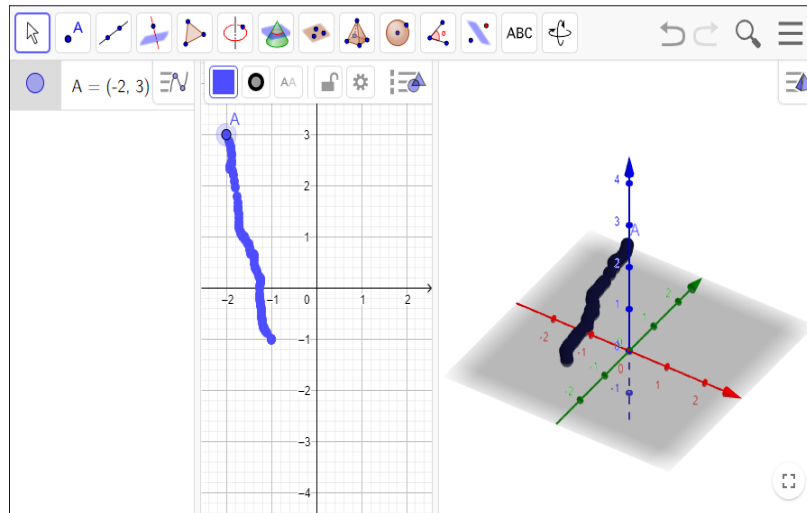
Fonte: Acervo da pesquisadora

Sendo assim, embora a dupla tenha conseguido verificar as alterações nos sinais das coordenadas, a relação com a nomenclatura dos quadrantes não está adequada, pois houve a troca do primeiro pelo segundo quadrante. No entanto, compreendemos tal equívoco restrito à nomenclatura dos quadrantes, e não na dificuldade de interpretação da conversão do registro gráfico para o algébrico, uma vez que, corrigida a nomenclatura, a conclusão das alunas está coerente.

Para verificarmos, na prática, se os alunos tinham conseguido consolidar os conceitos abordados nos itens anteriores, os alunos tiveram que construir um ponto na janela 2D na

posição $(-1,-1)$ e depois deslocá-lo, habilitando rastro, até a posição $(-2,3)$. A seguir, na figura 26, o applet da aluna 2, representando do desempenho geral dos alunos.

Figura 26 - Applet aluna 2



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Solicitamos a habilitação do rastro para poder observar o movimento dos alunos, e verificar se eles estavam ou não indo diretamente para a posição solicitada. Nenhum aluno apresentou dificuldade, o que nos permitiu interpretar que os conceitos abordados até este momento foram entendidos. Os alunos pesquisaram e relacionaram os números das coordenadas com os eixos e seus respectivos nomes.

Ao final desta primeira etapa, concluímos que os alunos identificaram as relações da posição do ponto com suas coordenadas, no contexto bidimensional, bem como o reflexo do movimento do ponto no contexto tridimensional.

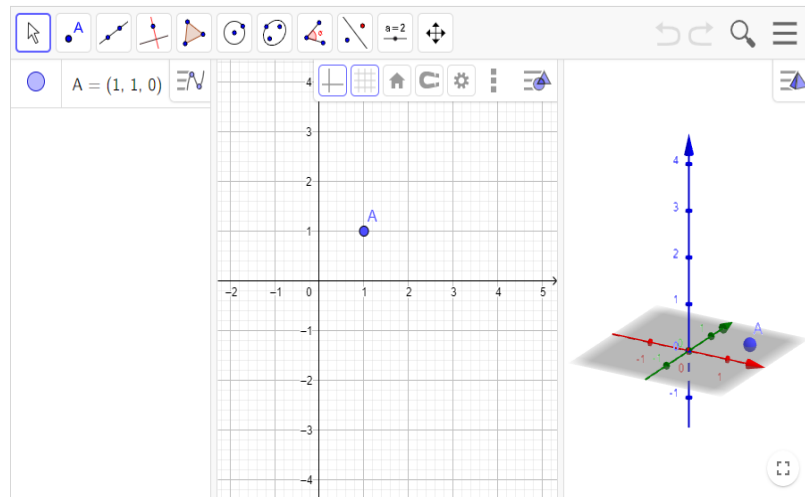
4.1.2 Atividade 2 – Eixos x, y e z

Nesta segunda atividade, seguimos com o trabalho com coordenadas e eixos, introduzindo o eixo Z. Nesta etapa, ao contrário da atividade 1, a construção do ponto e seus movimentos foram realizados na janela de visualização 3D.

Inicialmente os alunos trabalharam com um applet que permitia a movimentação de um ponto, na janela 3D. Os alunos novamente foram orientados a observar como este movimento refletia nas três janelas (algébrica, 2D e 3D). Novamente o objetivo era incentivar

a verificação das relações algébrica e gráficas referente ao deslocamento do ponto, mas agora por uma perspectiva tridimensional. A seguir, na figura 27, o applet do encontro.

Figura 27 - Applet Atividade 2 - Encontro 1



Fonte: Acervo da Pesquisadora.

Pretendíamos que os alunos observassem que tinha uma nova coordenada na janela algébrica (coordenada Z). Os alunos conseguiram perceber esta nova coordenada. A seguir um breve diálogo da professora pesquisadora com uma dupla, referente a esta terceira coordenada:

- Aluno 4: *Sora, sempre fica zero no terceiro número dentro dos parênteses... Ele não deveria mudar também, se eu estou mexendo o ponto?*

- Professora: *Por que você acha que isso acontece?*

- Aluno 3: *eu acho que isso acontece porque nós não estamos mexendo na altura do ponto. É sempre a mesma.*

- Professora: *Concorda? (referindo-se ao aluno 4)*

- Aluno 4: *Sim é isso! Agora estou mexendo na altura também.*

Tal verificação por parte do aluno teve base em sua capacidade de percepção de relações espaciais como salienta Gutierrez (1996). Este reconhecimento associado ao tratamento (Duval, 2010) que o aluno conseguiu observar entre as informações expostas nas janelas 2D e 3D, permitiu que ele compreendesse o motivo da coordenada Z inicialmente ser sempre nula. A seguir a resposta do aluno 3, após o breve diálogo.

Figura 28 – Resposta aluno 3.

Na janela 3D é adicionado um novo plano, que permite trocar a altura da bolinha, é possível fazer isso apenas clicando na bolinha, assim mudando a direção onde a bolinha vai se deslocar no espaço 3D

Fonte: acervo da pesquisadora.

Observando a resposta do aluno, compreendemos que ele apresentou sua interpretação da situação no registro escrito coerente com o seu registro língua natural, visto que ambas as respostas apresentam a mesma ideia.

Também buscamos observar se os alunos conseguiriam perceber as relações entre os sinais das três coordenadas e a posição do ponto. Eles não apresentaram dificuldades no que se referiam as relações bidimensionais, pois já haviam verificado esta relação na atividade 1 deste encontro. No entanto, referente ao eixo Z, os alunos apresentaram dúvidas. A seguir temos o exemplo de uma aluna que apresentou uma dificuldade comum a todos os alunos:

Figura 29 – Resposta aluna 2.

O eixo Z sempre ficará nulo já os eixos X e Y variam de acordo com a posição do ponto.

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Analisando a resposta, entendemos que a aluna 2 não explorou as possibilidades de mudança na coordenada z, verificando as relações de sinais apenas a nível bidimensional, mantendo sempre fixa a coordenada Z do ponto. Novamente percebemos que as conversões não são transformações evidentes para os alunos. Neste caso, a aluna não conseguiu observar a conversão do registro algébrico para o registro gráfico do ponto, enquanto observava as modificações que ocorriam quando o ponto era movimentado no espaço.

Ao final deste item, a professora retomou com os alunos o movimento do ponto com foco na coordenada z, e fez levantamentos que ajudaram os alunos a ampliar suas conclusões. No entanto, foi solicitado pela professora, que os alunos mantivessem suas respostas tal qual tinham registrado inicialmente, para posterior análise.

Na solicitação da construção de um ponto na janela 3D, orientamos aos alunos que habilitassem rastro e apenas depois o colocassem na coordenada $(-2, 1, 0)$. Esperávamos

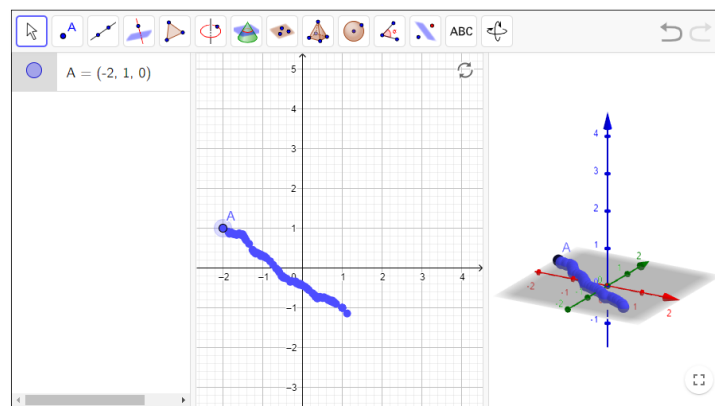
observar se o aluno colocaria o ponto imediatamente na posição correta, mostrando entendimento dos conceitos trabalhados ou se ainda tinham dúvidas quanto a eles. Os alunos não apresentaram dificuldades em posicionar o ponto corretamente, e para a realização do item, utilizaram-se das informações expostas nas 3 janelas simultaneamente.

- *Aluna 1: Como é que eu vou saber onde colocar o ponto?*

- *Aluna 2: Vamos mexendo nele devagarinho e cuidando na primeira janela a coordenada dele e na janela do meio a posição que ele está indo.*

Na sequência, na figura 30, a resposta da aluna 1.

Figura 30 – Applet aluna 1.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Interpretamos, pelo breve diálogo apresentado e pela imagem da resposta, que esta atividade permitiu que os alunos observassem os tratamentos (DUVAL, 2010) entre as janelas 2D e 3D, bem como a conversão (DUVAL, 2010) entre o registro algébrico e gráfico. Tais observações foram possíveis por meio do dinamismo do GeoGebra, que apresenta o reflexo do movimento nas três janelas simultaneamente. Tal dinamismo está conforme (SALAZAR E ALMOULOUD, 2015), corresponde a uma das características dos AMD que justificam seu uso no ensino de matemática.

Tendo em vista a consolidação das relações entre os eixos nas janelas 2D e 3D, os alunos tiveram que identificar os eixos em ambas as janelas de visualização. Este item exigiu que os alunos exercitassem sua capacidade de percepção de relações espaciais, conforme Gutiérrez (1996), por meio do tratamento entre as informações gráficas nas janelas 2D e 3D. Ou seja, por meio da observação das duas janelas de visualização, os alunos tiveram que exercitar a “habilidade de construir as relações entre os objetos observados” (GUTIÉRREZ, 1996, p.10). As estratégias das duplas para a realização deste item foram similares, se dando

por meio da construção de objetos geométricos (pontos e segmentos de retas) na janela 3D e realizando o movimento do objeto para observá-lo nas duas janelas gráficas simultaneamente.

Figura 31 – Resposta aluno 4.

eixo x: vermelho eixo y: verde
eixo z: azul

Fonte: acervo da pesquisadora.

A análise de tal estratégia confirmou a ação investigatória salientada por Gravina (2001), pois a face interativa do software permitiu aos alunos realizarem o tratamento entre as janelas gráficas para verificar os eixos envolvidos.

Buscando identificar a habilidade de percepção de posições espaciais, descrita por Gutierrez (1996), convidamos os alunos a refletir sobre a ausência do eixo Z, na janela de visualização 2D. Apenas uma dupla apresentou dificuldades em compreender o eixo Z em relação à janela de visualização 2D. Para resolver a questão, a dupla resolveu movimentar os eixos na janela 3D para verificação:

- *Aluna 6: Ai sora, sei que o z não aparece na janela 2D, mas não sei explicar o porquê.*

- *Professora: Pensa um pouco... Como ele apareceria se estivesse ali na janela 2D?*

- *Aluna 6: Hum... Posso deixar os eixos da janela 3D na mesma posição dos eixos da 2D para tentar ver?*

- *Professora: Pode.*

- *Aluna 6: Aaah ta, ele seria um pontinho.*

- *Aluna 5: Sim, mas daí ele não teria altura... e se altura dele for “grande”?*

- *Aluna 6: Daí acho que ele estaria atravessando a tela.*

Após essa breve discussão de estratégia, a dupla conseguiu interpretar a situação do terceiro eixo. A seguir a resposta de uma aluna da dupla.

Figura 32 – Resposta aluno 6.

Se ele estivesse na janela 2D ele estaria atravessando a tela. O nome é eixo z, cota.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Aqui reforçamos o papel dos AMD como um facilitador para a compreensão deste item, para a dupla que apresentou dificuldade na habilidade de percepção de posições espaciais. Pois, foi por meio do reposicionamento dos eixos e da observação simultânea do movimento, que as alunas interpretaram a situação apresentada.

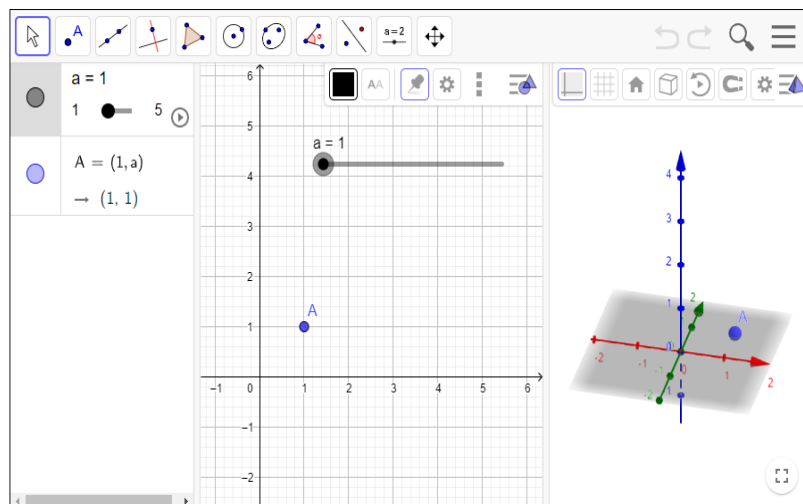
Ao final desta segunda etapa, entendemos que os alunos identificaram as relações da posição do ponto construído na janela 3D com suas coordenadas x e y , no entanto, no que se refere à coordenada z , apenas alguns alunos exploraram a janela de visualização 3D, concluindo que a coordenada z nem sempre seria nula. Também concluímos que os alunos identificaram os reflexos bidimensionais e tridimensionais do movimento do ponto, bem como a posição do eixo z na janela de visualização 2D.

4.1.3 Atividade 3 – Controle Deslizante

Nesta última etapa visamos a apresentação de um novo recurso: o controle deslizante. Recurso este fundamental para o desenvolvimento dos encontros posteriores.

Os alunos trabalharam em um applet com um controle deslizante e um ponto na janela 2D para verificar a atuação do controle, como ilustrado na figura 33.

Figura 33 – Applet Atividade 3 – Encontro 1



Fonte: acervo da pesquisadora.

Ao realizarem observações frente aos limites do controle deslizante (valores máximo e mínimo), incentivamos os alunos a refletir sobre o que se mantinha constante e o que mudava com o movimento do controle. Para esta reflexão os alunos tiveram que observar o movimento refletido em ambas as janelas 2D e 3D, por meio do tratamento das informações.

Os alunos conseguiram compreender que apenas o movimento vertical se alterava. Segue o exemplo de resposta do aluno 3.

Figura 34 – Resposta aluno 3.

a bolinha sempre se mantem em cima do numero da linha horizontal, e fica mudando com forme a configuração do controle, os números da linha vertical

Fonte: acervo da pesquisadora.

Ao mudarem o foco de observação, os alunos tiveram que trabalhar com a conversão entre o registro algébrico e o registro gráfico para verificar que apenas a coordenada X se mantinha enquanto a Y acompanhava o movimento do controle. A seguir uma breve discussão frente à este aspecto:

- *Aluna 1: Sora, como assim atuação do controle?*

- *Professora: Pensa na relação do movimento do controle com a janela algébrica.*

“Movimenta ele” com calma e olha as duas janelas ao mesmo tempo.

- *Aluna 1: “ah, ta”. Só um dos números muda. O outro fica sempre igual.*

- *Professora: Qual exatamente que muda?*

- *Aluna 1: o segundo número, o primeiro é sempre o mesmo.*

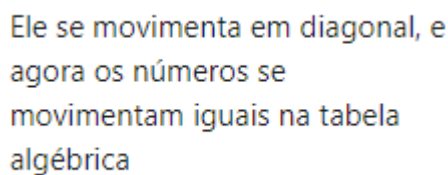
- *Professora: Lembra quem são esses números?*

- *Aluna 1: Sim, o primeiro é o x e o segundo é o y. Então o controle muda só o y, que é a altura do pontinho.*

Como podemos perceber pelo diálogo, a movimentação simultânea dos dois registros, assim como enfatiza Duval (2010), contribui para a compreensão da relação entre as janelas algébrica e 2D, permitindo ao aluno verificar, por meio da manipulação direta, que o controle deslizante atuava diretamente na coordenada Y do ponto.

Por meio da construção de um controle deslizante em um novo applet, esperávamos que os alunos praticassem o exercício da conversão entre os registros algébrico e gráfico e tratamento entre as janelas 2D e 3D que foi exigido simultaneamente, como orientado por Duval (2010), que enfatiza a importância de no mínimo dois registros de representação. Os alunos deveriam observar que as coordenadas x e y se mantinham sempre as mesmas resultando em um movimento diagonal. Os alunos não apresentaram dificuldades.

Figura 35 – Resposta aluno 4.



Ele se movimenta em diagonal, e
agora os números se
movimentam iguais na tabela
algébrica

Fonte: acervo da pesquisadora.

Ao final deste encontro, a professora pesquisadora fez um breve fechamento com os alunos, retomando os principais conceitos matemáticos abordados nesta atividade e abrindo um espaço para possíveis dúvidas dos alunos.

Embora os alunos tenham realizado as atividades, foi possível observar que todos conseguiam verbalizar suas interpretações de maneira muito mais clara do que quando eram incentivados a escrevê-la, ou seja, no registro língua natural os alunos expressavam-se bem, demonstrando domínio sobre a situação trabalhada, no entanto quando incentivados a realizar o registro escrito não conseguiam organizar suas ideias com tantos detalhes. Também foi possível verificar que os tratamentos e conversões realizados e descritos neste encontro contribuíram para o processo de visualização dos objetos geométricos e das informações solicitadas, bem como dos conceitos matemáticos envolvidos, tais como: eixos X, Y e Z e coordenada do sistema cartesiano.

Achamos válido salientar que todos os tratamentos e conversões analisados neste encontro foram realizados pelo GeoGebra, sendo assim, coube aos alunos a interpretação destas transformações. No entanto, entendemos que, embora as transformações não sejam realizadas pelos alunos, cabe a eles estabelecer relações entre as representações que são importantes para reconhecer as múltiplas formas de representação de um ente matemático, bem como o fato de que cada representação trabalhada fornece informações distintas sobre esse ente.

4.2 RELATO E ANÁLISE ENCONTRO 2

No primeiro momento deste encontro, a professora retomou verbalmente com os alunos um resumo dos conceitos trabalhados no encontro anterior e em seguida eles receberam a atividade do encontro 2, dividida em três etapas, denominadas:

- Atividade 1: Rotações de pontos
- Atividade 2: Rotações de Segmentos de Reta

- Atividade 3: Construção

Este segundo encontro reuniu atividades que envolveram: rotações de segmentos de reta e pontos na janela de visualização 2D, noções de ângulo em graus, bem como uma reprodução de uma construção previamente elaborada pela pesquisadora.

As duplas novamente foram incentivadas a compartilharem estratégias e soluções das questões entre si. Neste encontro, as atividades envolvidas exigiram as habilidades e conhecimentos trabalhados no encontro anterior para o desenvolvimento dos novos conceitos abordados, tais como: uso do controle deslizante e eixos X, Y e Z.

A seguir, no quadro 4, os objetivos gerais do encontro.

Quadro 4 - Objetivos Encontro 2

Objetivos da Pesquisa	Objetivos Pedagógicos
<ul style="list-style-type: none"> - Oportunizar a compreensão da conversão entre os registros gráfico e algébrico; - Observar se há a realização do tratamento durante a construção solicitada; - Observar se a atividade envolvendo rotação contribui para a aplicação das habilidades de visualização de Gutiérrez. 	<ul style="list-style-type: none"> - Observação e compreensão visual do raio de uma circunferência; - Trabalhar com a habilidade de visualização espacial;

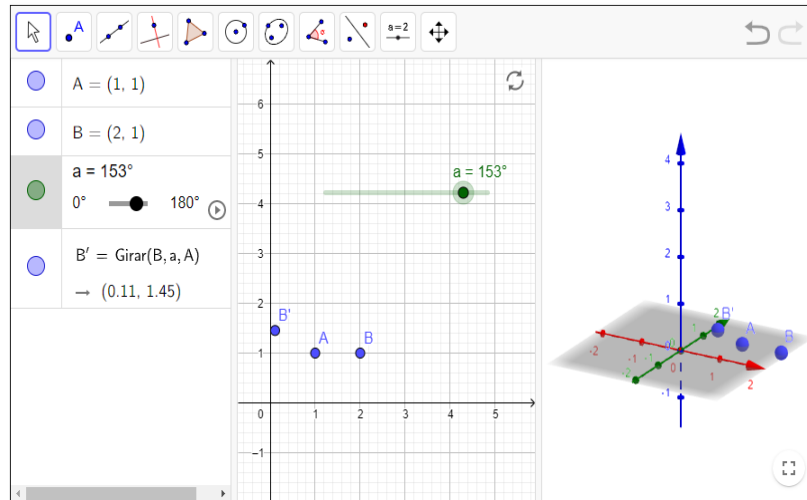
Fonte: Acervo da pesquisadora.

Tais objetivos permearão a análise deste encontro.

4.2.1 Atividade 1 – Rotações de Pontos

Nesta primeira etapa buscamos trabalhar a visualização espacial por meio de atividades envolvendo rotação de pontos na janela de visualização 2D. Convidamos os alunos a explorar um applet, conforme figura 36, em que o controle deslizante permitia a rotação de um ponto em torno de outro entre 0° e 180° .

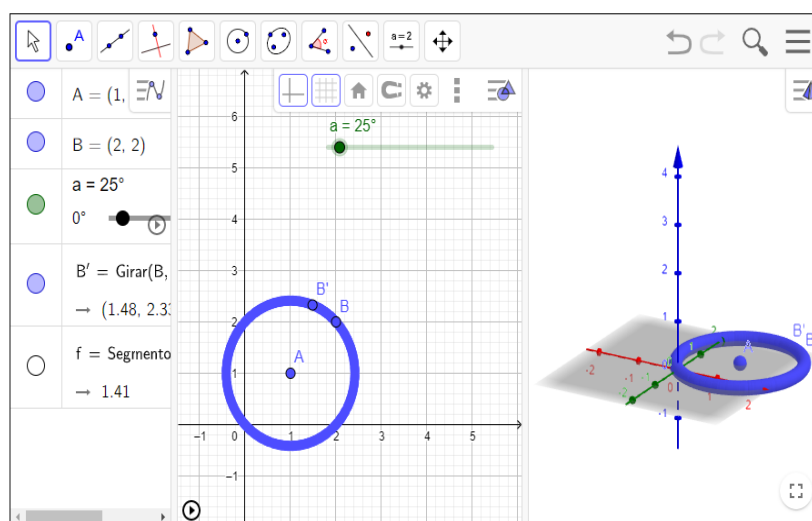
Figura 36 - Applet Aividade 1 - Encontro 2



Fonte: acervo da pesquisadora.

Realizamos perguntas bem conceituais para verificar e compreender todos os aspectos envolvidos na atuação do controle deslizante. Os questionamentos abordaram questões referentes ao movimento que estava sendo observado, qual ponto que estava em movimento e qual que estava fixo e em qual a unidade de medida estavam os limites deste controle deslizante, em que os alunos não apresentaram dificuldade para verificar que estavam em graus e especificamente entre 0° e 180° . Ao reproduzirem a situação, solicitamos aos alunos que o fizessem com o ponto dando uma volta completa em torno do outro. Permitimos a livre exploração do GeoGebra para a construção do controle deslizante e incentivamos que as duplas discutissem entre si suas dúvidas e estratégias de construção.

Figura 37 – Resposta aluno 4



Fonte: acervo da pesquisadora.

Ao iniciarem as observações referentes à construção que fizeram, questionamos aos alunos acerca da figura que era formada pela trajetória do ponto, ao utilizarem o controle deslizante. Solicitamos que a habilitação do rastro fosse realizada somente após essa verificação para que os alunos pudessem exercitar a rotação mental, conforme Gutiérrez (1996), e interpretar a figura formada:

Figura 38 – Resposta aluna 6.

A figura que o ponto faz a trajetória é um círculo.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Como podemos perceber pela resposta da aluna 6, ela equivocou-se chamando a circunferência de círculo. Neste momento, a professora pesquisadora não interferiu na conclusão da aluna, visto que na sequência tal conceito seria retomado. Embora tenha ocorrido tal equívoco, percebemos que a habilidade de rotação mental foi adequadamente aplicada.

Os alunos também realizaram verificações frente à distância do centro da circunferência ao ponto que estava se movendo. Neste momento esperávamos que eles concluíssem, sem a utilização de recursos de construção do GeoGebra, que essa distância se mantinha a mesma:

Figura 39 – Resposta aluna 5

Não importa a posição a distancia sera igual.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Tal verificação aconteceu sem a necessidade de interferência da professora, visto que os alunos apresentaram a habilidade de Constância perceptual, Gutiérrez (1996), mantendo a percepção da distância, sem confundir-se com o movimento. Aqui é válido salientarmos que tal situação corroborou com Gravina (2001), para reforçar as possibilidades de um AMD como um recurso que possui como um de seus pontos fortes a interatividade entre os alunos e as representações envolvidas.

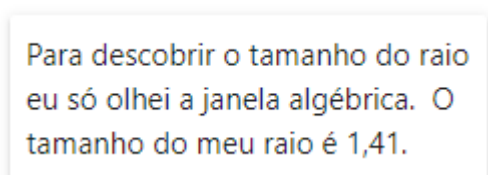
Ao construírem um segmento, com uma extremidade no centro e a outra extremidade no ponto que estava sendo movimentado, pretendíamos perceber se os alunos identificariam que a referida distância se tratava do raio da circunferência. Eles não apresentaram

dificuldades e tal habilidade está de acordo com a percepção de fundo da figura salientada por Gutiérrez (1996), em que um objeto geométrico consegue ser observado em um contexto.

Quando os alunos foram incentivados a ponderar sobre a relação entre o perímetro e o raio de uma circunferência, alguns se lembraram do conceito de perímetro e outros pesquisaram para lembrar. A estratégia dos alunos foi construir duas circunferências com raios diferentes e comparar visualmente seus perímetros, aproveitando-se do dinamismo do software, conforme salientam Salazar e Almouloud (2015), no que se refere à manipulação e exploração de figuras e construções geométricas que este tipo de software permite.

Já durante a verificação do raio da circunferência que os alunos construíram, buscávamos constatar em qual janela os alunos verificariam o raio da construção deles. Apenas uma aluna verificou o tamanho na própria janela 2D, por meio da malha quadriculada presente na janela de visualização, ou seja, ela optou pela verificação dentro do próprio registro de representação, na janela de visualização 2D. Os demais verificaram na janela algébrica, conseguindo observar a conversão entre os registros gráfico e algébrico apresentada pelo software. A seguir, na figura 40, temos a resposta do aluno 3 como exemplo.

Figura 40 – Resposta aluno 3

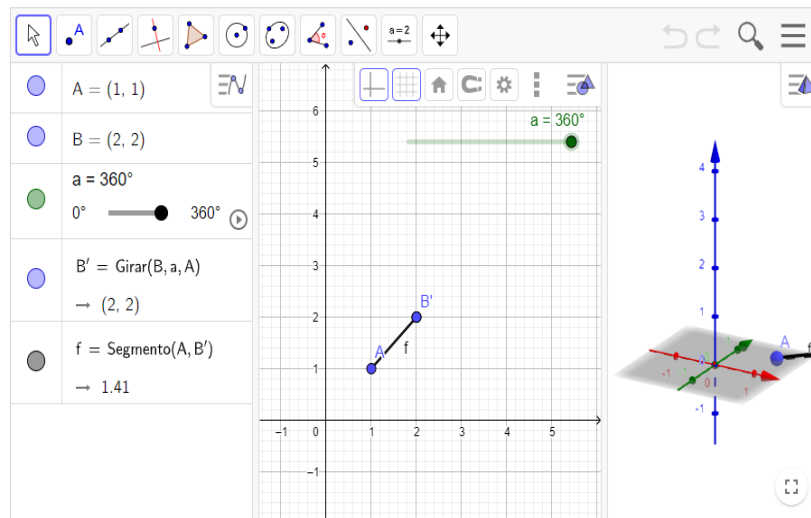
A screenshot of a text box from a software interface. The text inside the box is: "Para descobrir o tamanho do raio eu só olhei a janela algébrica. O tamanho do meu raio é 1,41." The text is in a blue font and is centered within a white rectangular box with a thin border.

Para descobrir o tamanho do raio eu só olhei a janela algébrica. O tamanho do meu raio é 1,41.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Na sequência na figura 41, confirmamos que a identificação do tamanho do raio que o aluno apresentou está de acordo com sua construção, sendo assim ele conseguiu identificar a conversão (DUVAL, 2010) entre as informações.

Figura 41 – resposta aluno 3

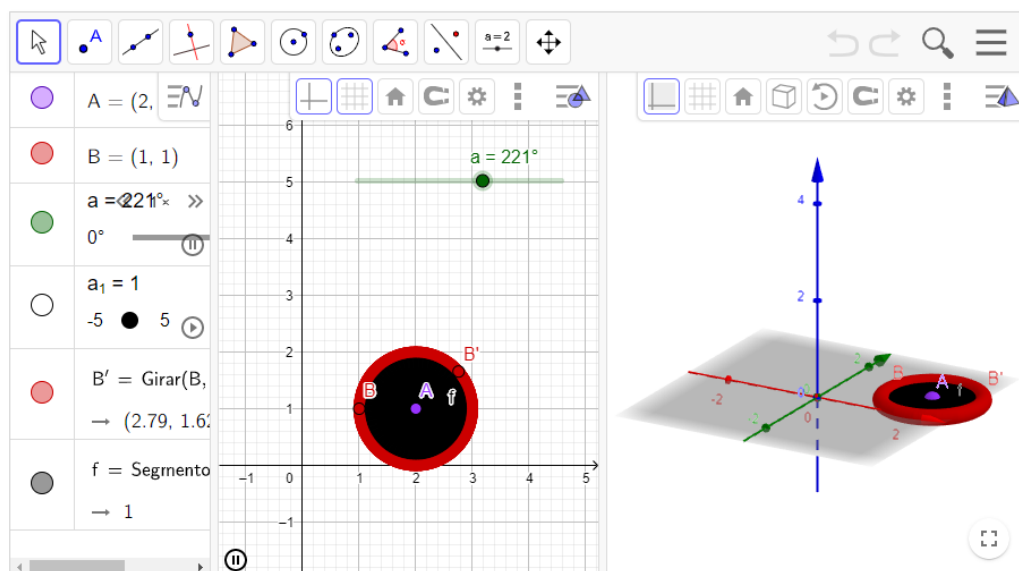


Fonte: acervo da pesquisadora.

A resolução deste item permitiu-nos concluir que os alunos começaram a consolidar as relações entre os três tipos de representação que o software apresenta, (algébrico, 2D e 3D), através da ação investigatória exercitada nas atividades.

Após verificarem o comprimento do raio, pedimos aos alunos que habilitassem o rastro do raio e verificassem, através do movimento do controle deslizante, a nova figura formada. Trabalharemos com o exemplo a seguir:

Figura 42 – Resposta aluna 6



Fonte: acervo da pesquisadora.

Conforme o exemplo da aluna 6, ilustrado na figura 42, a ideia era verificar as concepções de perímetro e área dos alunos, por meio da observação na janela 2D, através da habilidade de discriminação visual, de Gutiérrez (1996), que, neste contexto, refere-se a

habilidade de observar as diferenças entre objetos geométricos. A seguir, a resposta da aluna, na figura 43.

Figura 43 – Resposta aluna 6.

Agora a figura é um círculo completo, e contém a área. Antes era apenas uma circunferência, só com o perímetro.

Fonte: acervo da pesquisadora.

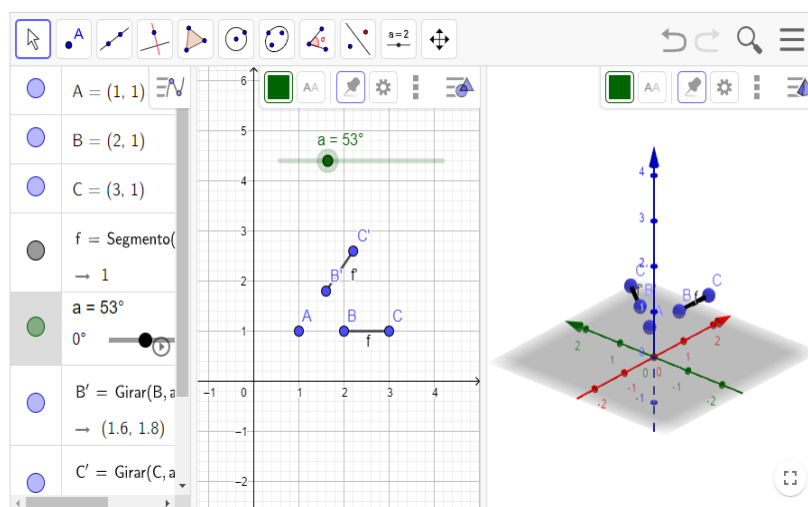
Compreendemos que neste item foram resgatadas as diferenças entre circunferência e círculo, por meio da observação da nova figura formada. Também foi possível perceber que a aluna apresentou a habilidade de discriminação visual, de Gutiérrez (1996), que, neste contexto, refere-se à habilidade de observar as diferenças entre objetos geométricos.

4.2.2 Atividade 2 – Rotações de Segmentos de Retas

Nesta segunda etapa buscamos trabalhar a visualização espacial por meio de atividades envolvendo rotação de segmentos de retas na janela de visualização 2D.

Os alunos exploraram um applet em que o controle deslizante permitia a rotação de um segmento de reta em torno de um ponto entre 0° e 180° , como ilustrado na figura 44.

Figura 44 – Applet atividade 2 – Encontro 2



Fonte: acervo da pesquisadora.

Novamente, como na atividade 1 deste encontro, os alunos responderam questionamentos conceituais para verificar e compreender todos os aspectos envolvidos na atuação do controle deslizante e na movimentação do segmento. Pedimos aos alunos que comparassem o applet fornecido com primeiro applet da atividade 1, tendo em vista o exercício da habilidade de discriminação visual descrita por Gutiérrez (1996). Ou seja, os alunos precisavam observar as diferenças entre as imagens dos dois applets. Os alunos conseguiram especificar suas interpretações do movimento por meio do registro língua natural, como podemos observar pelo diálogo a seguir e a resposta ilustrada na figura 45:

- Aluna 5: vai formar tipo um arco-íris.
- Professora: e o que tem de diferente da atividade anterior?
- Aluna 5: Agora fica pintado a parte do segmento também. Antes só pintava o pontinho.

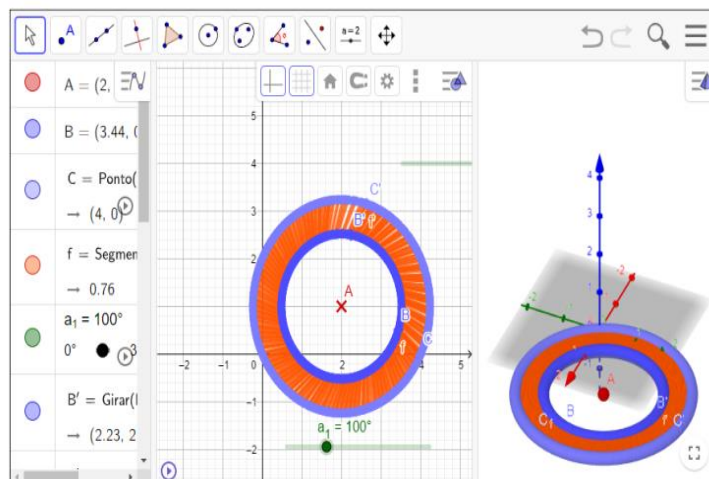
Figura 45 – Resposta aluna 5.

Forma um arco-íris. Antes pintava apenas um pontinho agora o segmento todo.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Os alunos receberam um applet em que deveriam reproduzir a mesma situação do primeiro applet apresentado, mas com um segmento dando uma volta completa em torno do ponto. A professora deixou-os explorar o controle deslizante livremente e incentivou que as duplas discutissem entre si suas dúvidas e estratégias de construção. Nesta etapa da atividade os alunos já haviam dominado a construção do controle deslizante. A seguir um exemplo de construção de um aluno, na figura 46:

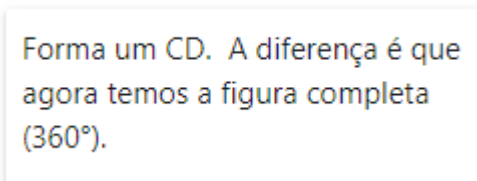
Figura 46 – Construção aluno 4.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Todas as demais questões envolvidas nesta segunda etapa do encontro tiveram relação com esta construção realizada pelos alunos. Eles descreveram qual figura formaria e a compararam com a figura do applet inicial, sem utilizar o recurso de habilitar rastro do software, para que fosse possível verificar suas capacidades de visualização espacial.

Figura 47 – Resposta aluno 4.



Forma um CD. A diferença é que agora temos a figura completa (360°).

Fonte: acervo da pesquisadora.

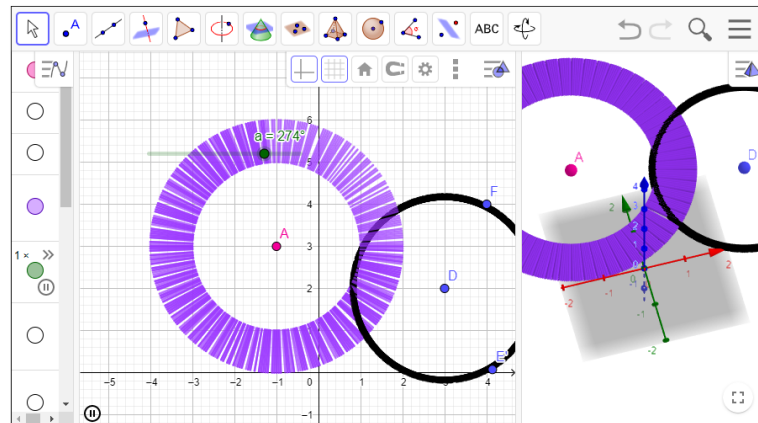
Com o exemplo da figura 47, que representa bem as respostas das duplas, podemos perceber que os alunos não apresentaram dificuldades em imaginar a imagem que se formaria, tal facilidade entendemos como um reflexo da prática realizada na atividade 1 deste encontro, que foi similar.

Pedimos aos alunos que modificassem o alinhamento dos três pontos da construção buscando imaginar qual figura formaria, para identificarmos se eles apresentariam indícios da habilidade de Rotação mental mencionada por Gutiérrez (1996). Os alunos apresentaram dificuldade em expor o que imaginaram que seria formado, pois, embora eles tenham compreendido como posicionar de maneira não alinhada os pontos, ficaram inseguros quanto à explicação de quais mudanças seriam possíveis. Os alunos responderam de maneira não detalhada:

- Aluna 6: *ai sora, eu não tenho certeza do que vai acontecer...*
- Professora: *Não tem problema, pode falar. O que tu acha que vai acontecer?*
- Aluna 6: *Vai ser um círculo ainda.*
- Professora: *E o que ficará diferente?*
- Aluna 6: *Acho que ele vai ficar menor...*
- Professora: *Menor? Em que sentido?*
- Aluna 6: *No tamanho “todo” dele.*

A seguir, na figura 48, temos a construção da aluna 6 como representante dos alunos.

Figura 48 – Construção aluna 6.



Fonte: acervo da pesquisadora.

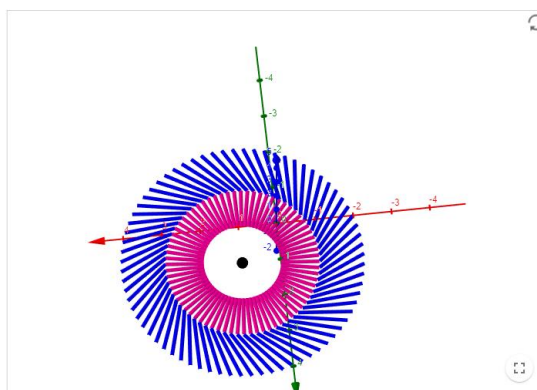
Analisando a construção da aluna, podemos observar que, embora a ela tenha verificado que a inclinação do raio permaneceria gerando uma figura circular, ela não realizou todas as observações possíveis, visto que ela não abordou como esta inclinação refletiria na espessura da nova figura formada. Sendo assim, não foi possível verificar a habilidade de rotação mental (Gutiérrez, 1996) como esperado, pela dificuldade dos alunos em expressar suas ideias em língua natural.

4.2.3 Atividade 3 – Construção

Nesta terceira etapa visamos consolidar as habilidades de visualização trabalhadas nas etapas anteriores, por meio da construção de uma figura gerada por rotações na janela de visualização 2D. Para tanto, os alunos tiveram que realizar o tratamento da janela de visualização 3D para a 2D, bem como exercitar a habilidade de discriminação visual e constância perceptual (Gutiérrez, 1996) para observar as informações necessárias para a construção.

Os alunos receberam uma construção em um applet com visualização restrita a janela 3D, como consta na figura 51, e deveriam reproduzi-la na janela 2D em um novo applet que estava disponível.

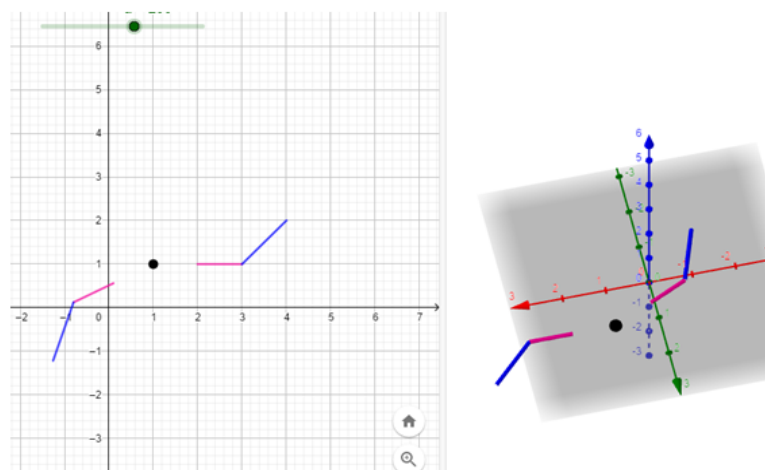
Figura 49 – Applet Atividade 3 – Encontro 2.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Esta construção se dava pela rotação de dois segmentos, em inclinações diferentes, em torno de um ponto central, no primeiro quadrante. A janela de visualização 2D, bem como a janela algébrica, ambas com a solução do problema, estavam suprimidas, ficando exposta apenas a janela de visualização 3D. Visando facilitar para o leitor o acompanhamento da análise desta atividade, seguimos com a solução da construção na figura 50:

Figura 50 – Solução da construção da atividade 3 – Encontro 2.



Fonte: acervo da pesquisadora.

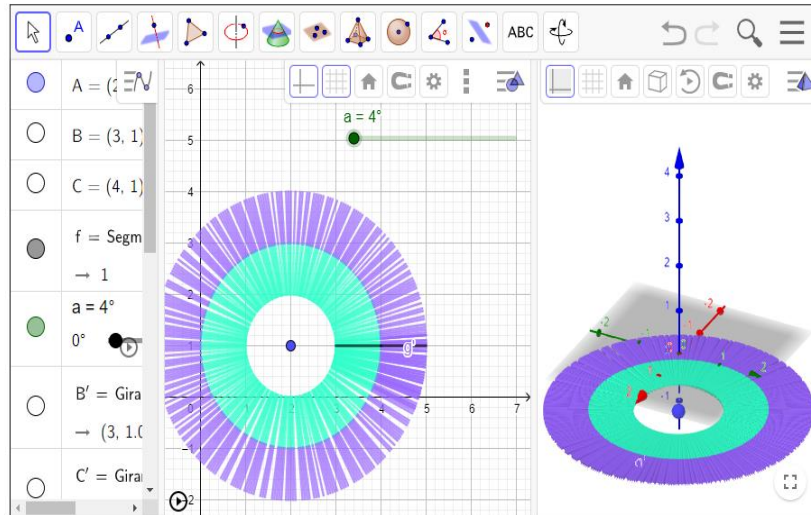
Embora os alunos tenham apresentado ideias iniciais promissoras, também apresentaram algumas dificuldades na interpretação da posição dos segmentos envolvidos. Seguimos com um exemplo de diálogo que representa bem esta situação e as discussões das demais duplas:

- Aluna 1: *sabe como começar? (perguntando para sua dupla)*
- Aluna 2: *Acho que sim, vou começar pelo ponto e depois vou por dois segmentos grudados.*

- Aluna 1: Tá. Vou fazer isso também.

A aluna 2 conseguiu identificar a angulação necessária entre os segmentos, de modo que sua construção ficou conforme solicitado. Seguimos com a construção da aluna 1, na figura 53, para análise.

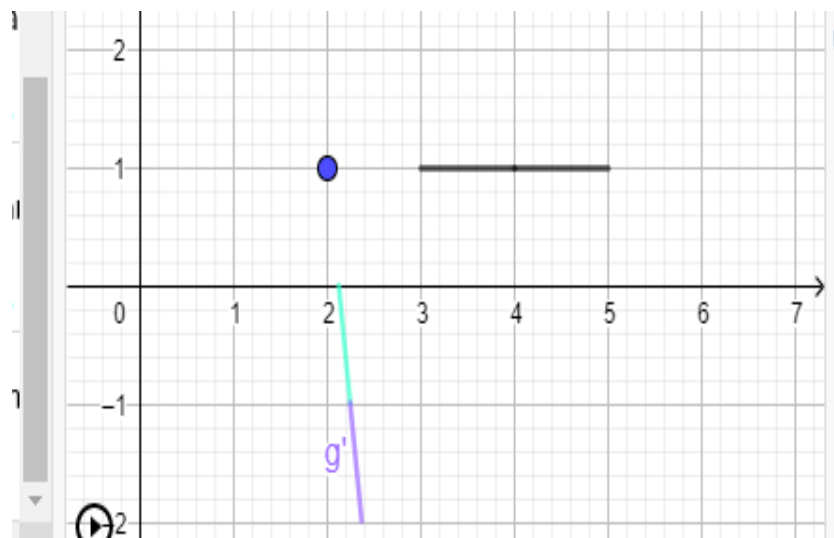
Figura 51 – Construção aluna 1.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Percebemos que, embora a dupla tenha concordado na estratégia, isto não refletiu na mesma construção. Enquanto a aluna 2 conseguiu perceber que existia uma troca na inclinação no segundo segmento, a aluna 1 ligou duas semirretas na mesma angulação, como podemos perceber na figura 55.

Figura 52 – Recorte da construção da aluna 1.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Sendo assim, verificamos que a aluna 1 apresentou dificuldades no que se refere a constância perceptual, ou seja, não conseguiu discernir sobre o objeto mediante sua

movimentação, apresentando equívoco na construção da figura. Também foi possível perceber que, embora o tratamento, conforme Duval (2010), seja um pouco mais comum de ser compreendido pelos alunos do que a conversão, neste caso em que ela aconteceu da visão tridimensional para a bidimensional, não foi intuitiva, conforme a dificuldade apresentada no exemplo. Acreditamos ser válido salientar que tal dificuldade pode ter relação com o fato de que até então coube aos alunos a observação e a interpretação dos tratamentos que eram realizados pelo GeoGebra, no entanto, nesta construção, os alunos tiveram que realizar este tratamento, deixando de ser coadjuvantes para serem os protagonistas das transformações necessárias na atividade.

Este encontro 2 buscou trabalhar com a mobilização de diferentes registros, o que segundo Duval (2010), não costuma ser uma prática evidente para os alunos, muitas vezes gerando dificuldades. Um exemplo dessas dificuldades se deu na construção da atividade 3 já aqui analisada, em que, além do tratamento exigido entre as janelas de visualização 3D e 2D, que foi um tratamento inverso aos realizados no encontro anterior, (Encontro 1), os alunos tiveram que exercitar suas habilidades de visualização para realizar uma desconstrução mental da figura fornecida, para poder identificar sua base geradora.

Entendemos que tais dificuldades de alguns alunos podem ter base no fato de que estas habilidades de visualização não são comumente exigidas no Ensino Fundamental. Neste sentido, buscaremos observar se, ao exercitarem tais habilidades ao longo dos encontros, os alunos apresentem avanços no desempenho.

4.3 RELATO E ANÁLISE ENCONTRO 3

Realizamos uma breve retomada verbal com os alunos do que foi feito nos encontros anteriores e eles receberam a atividade do encontro 3, dividida em quatro etapas, denominadas:

- Atividade 1: Rotação no eixo x;
- Atividade 2: Rotação no eixo y;
- Atividade 3: Rotação no eixo z;
- Atividade 4: Construção.

A seguir os objetivos gerais do encontro.

Quadro 5 – Objetivos Encontro 3

Objetivos Pesquisa	Objetivos Pedagógicos
---------------------------	------------------------------

<ul style="list-style-type: none"> - Oportunizar a compreensão da conversão entre os registros gráfico e algébrico; - Oportunizar a compreensão dos tratamentos entre os registros bidimensionais e tridimensionais; - Observar se na atividade envolvendo rotação os alunos apresentam habilidades de visualização que compõe o processo de visualização de Gutiérrez. 	<ul style="list-style-type: none"> - Trabalhar com a habilidade de visualização espacial; - Consolidação da coordenada Z de um ponto.
--	---

Fonte: acervo da pesquisadora.

Nas três primeiras atividades deste encontro visamos trabalhar a visualização espacial por meio da rotação de um ponto em torno de cada um dos três eixos, de modo que o relato e a análise destas três etapas se darão simultaneamente. Em seguida temos o relato e a análise da atividade 4 em que os alunos foram desafiados a aplicar os conceitos abordados nas três atividades realizadas, por meio da reprodução de uma construção. Na análise em seguida apresentada buscaremos verificar se os objetivos apresentados no quadro 5 foram alcançados.

4.3.1 Atividades 1, 2 e 3 – Rotações nos eixos X, Y e Z

Nestas três atividades, visamos desenvolver as habilidades de visualização que dariam suporte para a construção que solicitamos na atividade 4.

Os alunos receberam um applet para cada eixo, em que deveriam construir um ponto na janela de visualização 3D e um controle deslizante. Com o movimento do ponto por meio do controle, eles realizaram observações e refletiram sobre os registros observados.

Os alunos conseguiriam realizar a construção, explorando o software e compartilhando suas telas, em que discutiam estratégias com sua dupla.

Nesta primeira etapa da atividade, os alunos focaram nas janelas de visualização 3D e algébrica. Quando questionados sobre as coordenadas do ponto, nos casos da rotação em torno do eixo X e eixo Y, os alunos conseguiram observar a conversão entre os registros algébrico e gráfico, de modo que seus acertos não serão detalhados nesta análise.

Quando a rotação solicitada se deu em torno do eixo Z, inicialmente eles ficaram confusos do por que o ponto ter apenas duas coordenadas. A seguir o exemplo de um diálogo:

- *Aluna 1: Sora, não era para ter três números na coordenada do ponto?*

- *Professora: Por quê?*

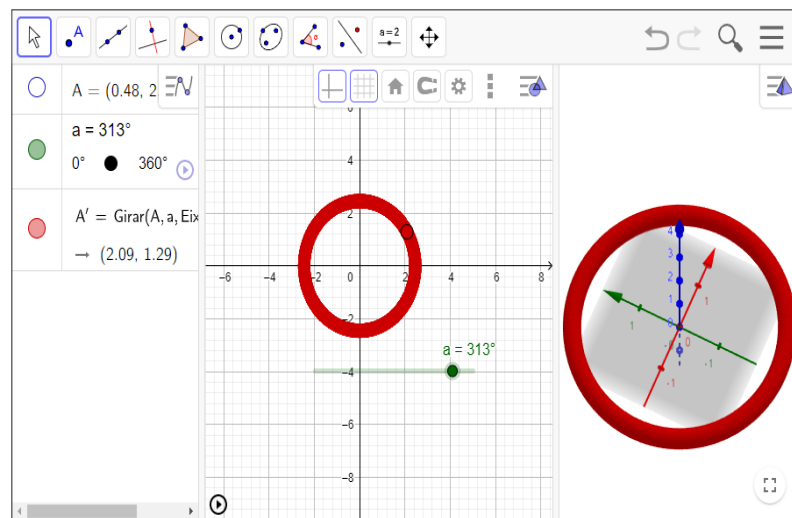
- *Aluna 1: Por que quando a rotação aconteceu nos outros dois eixos, sempre era fixa a coordenada de cada um deles.*

- Professora: *aluna 2, tu concorda com a aluna 1 de que tinham que ter três números nesta coordenada?*

- Aluna 2: *Acho que nesta é diferente por que é o EIXO Z, e nós construímos o ponto na 2D, em que ele não aparece.*

Pelo diálogo apresentado, percebemos que há dificuldades frente à observação da conversão entre os registros, o que corrobora com Duval (2010), que aponta que a mobilização simultânea de vários sistemas de representação não é evidente para os alunos. Seguimos com o applet do aluno 3, com a rotação em torno do eixo z.

Figura 53 - Construção aluno 3 – Rotação eixo Z



Fonte: acervo da pesquisadora.

Por meio da observação do posicionamento similar dos eixos em ambas as janelas de visualização, ilustrada na figura 53, salientarmos que os alunos contaram sempre com o dinamismo do software para realizar suas verificações, visto que esta capacidade de manipulação direta contribui para a percepção de relações espaciais (Gutiérrez, 1996), uma vez que foi através da observação dos movimentos que os alunos concluíram suas respostas. A seguir a resposta do aluno nas figuras 54.

Figura 54 – Resposta aluno 3

Agora aparecem apenas 2 coordenadas, dos eixos X e Y, que se mexem conforme o movimento do ponto A, a coordenada do eixo Z não aparece porque a altura se mantém a mesma.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Analisando a resposta do aluno, podemos verificar que ele conseguiu identificar a relação entre a imagem da janela de visualização 3D e a janela algébrica, ou seja, ele conseguiu interpretar adequadamente a conversão entre os registros destas duas janelas, pois ele especificou que a altura se mantém a mesma.

Em seguida os alunos deveriam focar nas janelas de visualização 2D e 3D para observar o registro formado pelo movimento do controle deslizante. Esta questão tinha por objetivo verificar como os alunos iriam compreender um tratamento tridimensional para uma janela bidimensional. No caso em que as rotações se deram nos eixos X e Y, eles conseguiriam perceber que os rastros não estariam completos na janela 2D. Segue um exemplo de resposta que representam o desenvolvimento geral das duplas.

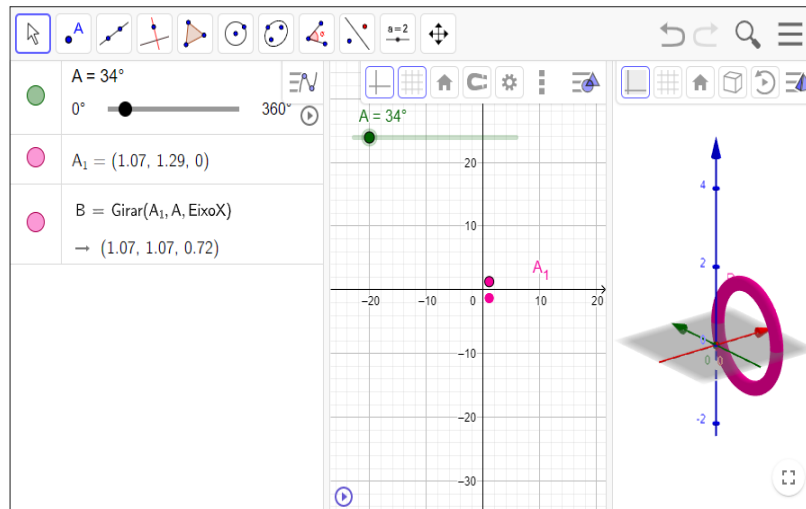
Figura 55 – Resposta aluna 5.

Na 2D o ponto não aparece, pois, se ele aparecesse iria estar saindo da tela. O ponto só aparece no ângulo de 180 porque completou meia volta.

Fonte: acervo da pesquisadora.

A seguir o applet, na figura 56, que está conforme a resposta da aluna na figura 55.

Figura 56 – Construção aluna 5.



Fonte: acervo da pesquisadora.

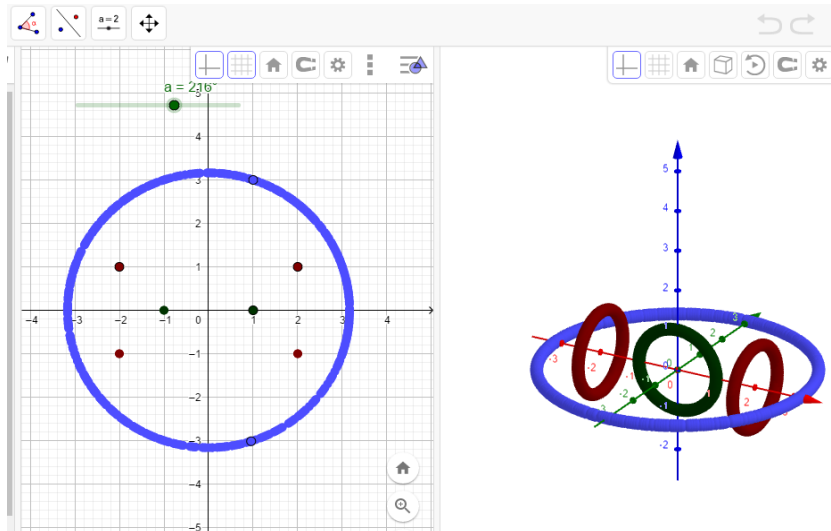
No que se refere ao eixo Z, as duplas recorreram ao dinamismo do software, realizando movimentos na janela 3D para confirmar que o rastro apareceria completo. Os alunos habilitaram rastro apenas após suas respostas terem sido registradas e comprovaram que apenas no caso do eixo Z que as imagens do rastro eram completas nas duas janelas de visualização (2D e 3D). Nas demais o rastro era completo apenas na 3D como eles já haviam notificado.

4.3.2 Atividade 4 – Construção

Nesta etapa buscamos exercitar as habilidades de visualização trabalhadas nas etapas anteriores, por meio da construção de uma figura gerada por rotações na janela de visualização 2D.

Os alunos receberam uma imagem de uma construção, conforme a figura 57, restrita a janela 3D para que eles pudessem observar e depois reproduzir em um applet disponível na sequência. Para facilitar para o leitor acompanhamento da análise deste encontro, segue a construção com sua solução.

Figura 57 – Solução da atividade 4 – Encontro 3



Fonte: acervo da pesquisadora.

Ao contrário da construção solicitada no Encontro 2, eles tiveram que deduzir informações de uma situação estática, bem como explicitar suas observações. Para tanto, os alunos deveriam exercitar a percepção do fundo da figura, o que segundo Gutiérrez (1996, pág. 10, tradução nossa) é “a habilidade de observar a figura mesmo que isolada em um fundo complexo”, bem como a habilidade de constância perceptual, que também segundo o autor (1996, pág. 10, tradução nossa) é “a habilidade de não confundir as características e propriedades de um objeto mediante sua movimentação ou espessura do traço de sua representação, cor ou tamanho”.

Também é importante ressaltar que se fazia necessária a realização dos tratamentos dos registros tridimensionais para as bidimensionais, bem como das conversões entre as janelas de visualização e a janela algébrica, através da habilidade de rotação mental: “a habilidade de construir imagens mentais dinâmicas e imaginá-las em movimento”. (GUTIÉRREZ, 1996, pág 10, tradução nossa)

Em seguida da construção, os alunos apresentaram suas facilidades e dificuldades nesta atividade. Após a observação da imagem, solicitamos aos alunos que registrassem suas observações detalhadamente, considerando objetos geométricos envolvidos, rotações e eixos. O objetivo deste detalhamento era permitir a compreensão de todo o processo de visualização e interpretação do aluno referente à imagem. Eles foram incentivados novamente a compartilhar suas visualizações e estratégias de construção entre si.

De maneira geral, a figura em que eles mais apresentaram dificuldade de imaginar a origem de sua rotação foi a circunferência verde, em que eles ficaram inseguros em relação a

qual eixo de rotação estava sendo usado. Na sequência seguimos com o exemplo de uma dupla:

- *Aluno 4: Sora, parece que o círculo verde está girando em todos os eixos...*

- *Professora: O que você acha que gerou ele?*

- *Aluno 4: Acho que um pontinho... Como no exercício que fizemos antes.*

- *Professora: Então imagina esse pontinho... Ele tem que girar em volta de quem para formar esta circunferência?*

- *Aluno 5: Eu sei, do eixo verde.*

- *Aluno 4: É verdade!*

Como podemos observar, a dupla conseguiu, por meio de reflexões incentivadas pela professora, realizar a rotação mental do objeto (GUTIÉRREZ, 1996), concluindo adequadamente a rotação observada. A seguir a resposta de um dos alunos da dupla após este diálogo.

Figura 58 – Resposta aluno 4.

Geral: São utilizados 4 pontos.

Círculo azul: Está rodando em torno do eixo z no ponto 3;

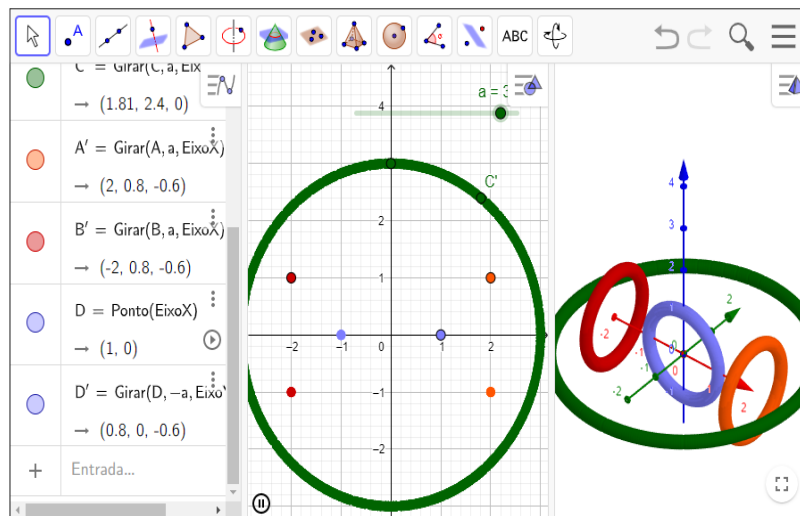
Círculos Vermelhos: Estão rotacionando em torno do eixo x, não se encostam e esta no ponto 2;

Círculo verde: Está rotacionando em torno do eixo y, no ponto 1.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Podemos observar, pela resposta que está na figura 58, que o aluno conseguiu identificar as rotações em torno dos eixos, no entanto, não especificou as coordenadas dos pontos. Entendemos que o aluno realizou o tratamento entre os registros das rotações nas janelas 3D e 2D, mas não apresentou informações suficientes para verificarmos se ele realizou a conversão entre o registro gráfico e algébrico. Sendo assim, seguimos na análise de sua construção para verificar se tal conversão foi realizada. Na sequência, a figura 59 ilustra a construção do aluno 4:

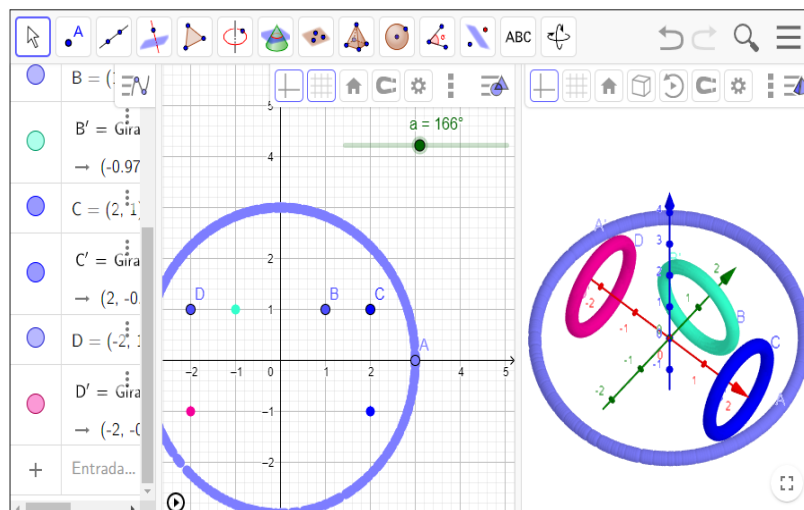
Figura 59 - Resposta aluno 4.



Fonte: Acervo da Pesquisadora.

Observando a imagem, verificamos que o aluno realizou a construção conforme a construção solicitada, conseguindo realizar as rotações dos objetos corretamente em relação aos eixos envolvidos, respeitando também suas posições no plano cartesiano. Sendo assim, entendemos que ele realizou a conversão entre os registros gráfico e algébrico adequadamente, embora não tenha apresentado tal informação no registro escrito. A seguir temos o exemplo da aluna 1, que apresentou dificuldade na construção da circunferência verde, especificamente sobre sua posição no eixo.

Figura 60 – Construção aluna 1.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Na imagem é possível observar que, embora a aluna tenha conseguido compreender que o ponto estava sendo rotacionado em torno do eixo Y, ela não conseguiu localizar-se corretamente no espaço, equivocando-se sobre a posição do ponto em relação ao eixo Y.

Compreendemos que tal dificuldade está englobada em duas vertentes: dificuldade na conversão do registro gráfico para o algébrico bem como a fragilidade da habilidade de percepção de relações espaciais (GUTIÉRREZ, 1996), considerando que a aluna não conseguiu ter exatidão na posição do ponto.

É válido enfatizarmos que neste encontro, especificamente nesta última atividade, os alunos foram protagonistas dos tratamentos e conversões envolvidos, para que fosse possível extrair as informações necessárias para realizar a construção exigida. Neste contexto, o GeoGebra atuou como meio facilitador para que essas transformações (DUVAL, 2012) ocorressem e fosse possível realizar constatações. Também percebemos que o processo de retroalimentação (SALAZAR E ALMOULOUD, 2015) foi útil para a realização desta atividade, uma vez que os alunos puderam construir e reconstruir por meio da tentativa e erro que o dinamismo do software permite.

4.4 RELATO E ANÁLISE ENCONTRO 4

Neste encontro os alunos receberam duas construções, cada uma em um applet diferente, para analisá-las em movimento e de diferentes perspectivas, por meio do recurso de rotação de tela do GeoGebra. Após estas observações, os alunos tiveram que registrar suas observações para então tentar reproduzir as construções em seus respectivos applets.

Os principais conceitos abordados neste encontro foram: Rotação, ângulo de rotação e visualização espacial. Os alunos receberam uma atividade dividida em duas etapas, denominadas:

- Atividade 1: Construção I
- Atividade 2: Construção II

A seguir os objetivos gerais do encontro.

Quadro 6 - Objetivos Encontro 4

Objetivos Pesquisa	Objetivos Pedagógicos
<ul style="list-style-type: none"> - Oportunizar e observar se os alunos realizam a conversão entre os registros gráfico e algébrico; - Observar se a atividade envolvendo rotação contribui para a realização dos tratamentos entre os registros 2D e 3D; - Consolidar, através da construção de superfícies de revolução, a compreensão e visualização espacial das 	<ul style="list-style-type: none"> - Exercício da habilidade de visualização espacial. - Exercício da compreensão das coordenadas de um ponto em espaço tridimensional.

imagens produzidas por rastros na rotação de pontos e segmentos de reta;

- Observar se as construções solicitadas contribuem para o exercício das habilidades de visualização que compõem o processo de visualização de Gutiérrez.

Fonte: acervo da pesquisadora.

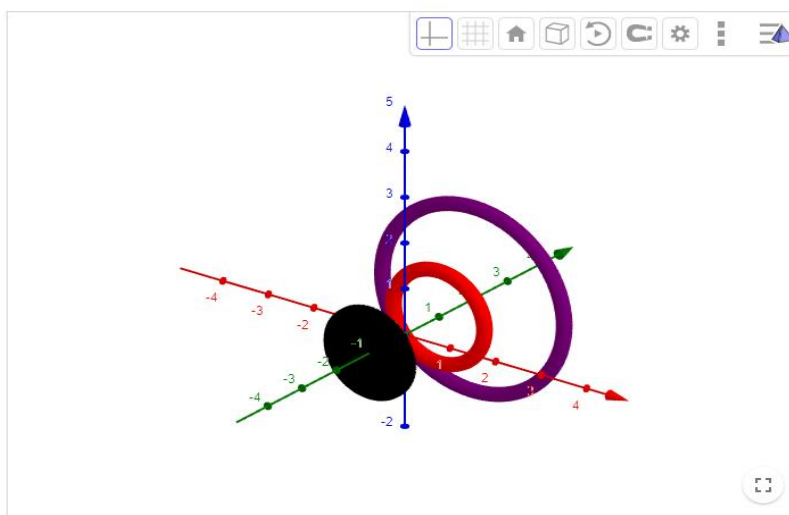
Seguimos com a análise do encontro baseada nos objetivos expostos no quadro 6.

4.4.1 Atividade 1 – Construção I

Esta atividade buscou aplicar as habilidades visuais exercitadas nos encontros anteriores (encontros 2 e 3), por meio de construções na janela 2D, geradas por rotações de dois pontos e de um segmento de reta na janela de visualização 3D.

Os alunos receberam um applet, com uma construção ilustrada na figura 61, com sua visualização restrita a janela 3D, em que eles deveriam realizar observações e registrá-las frente aos objetos geométricos envolvidos e suas respectivas posições e eixos utilizados na rotação:

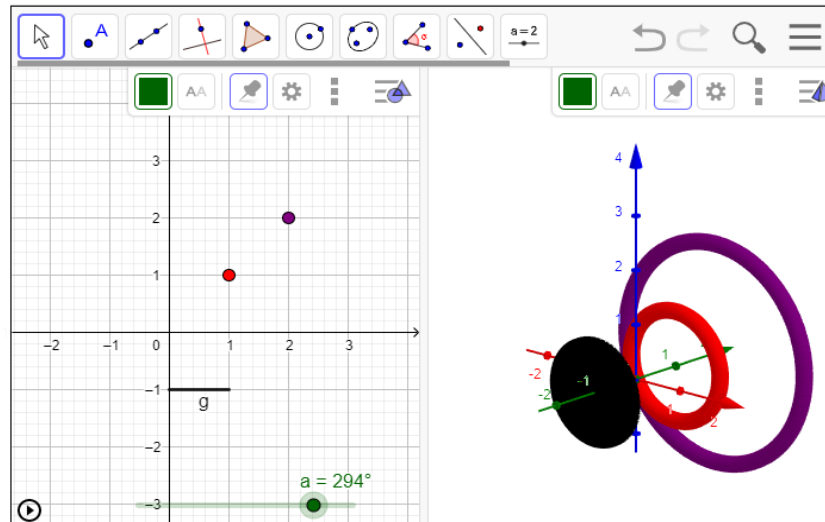
Figura 61 – Construção I– Encontro 4.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Essa construção é originada pela rotação de um segmento de reta e de dois pontos em torno do eixo y. Visando facilitar para o leitor o acompanhamento da análise desta atividade, seguimos com a solução da construção conforme figura 62.

Figura 62 – Solução da construção I – Encontro 4



Fonte: acervo da pesquisadora.

Após o espaço para observação da construção, os alunos realizaram seus registros frente às informações que eles observaram. A seguir, a resposta da aluna 2, que representa as duplas.

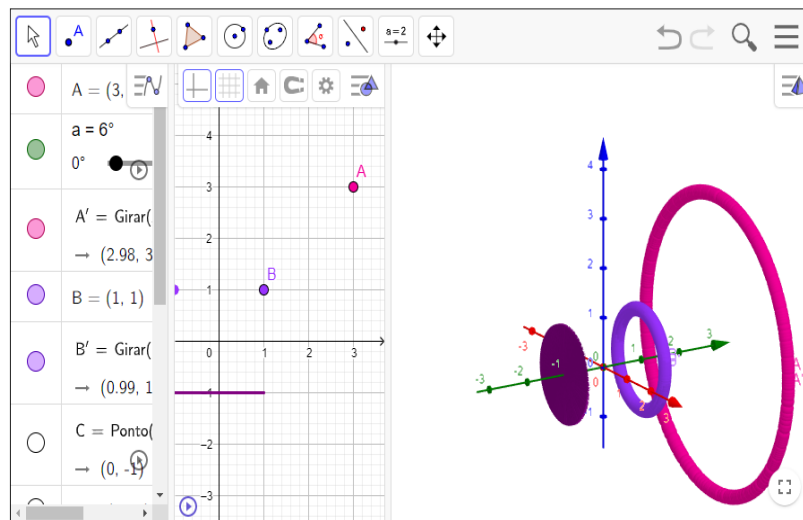
Figura 63 – Resposta aluna 2

- O círculo vermelho: É criado no ponto 1, girando em torno do eixo y.
- O círculo roxo: É criado no ponto 3, gira também em torno do eixo y.
- Círculo preto: É criado no ponto 1, é construído a partir de um segmento e gira em torno do eixo y.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Observando a resposta da aluna 2, percebemos que ela realizou o tratamento dos registros entre as janelas de visualização 3D e 2D, pois conseguiu identificar em torno de qual eixo estavam acontecendo as rotações. Contudo, ela não especificou adequadamente as coordenadas dos objetos, não sendo possível verificar se ela realizou a conversão dos registros gráfico e algébrico. Seguimos com sua primeira construção para análise:

Figura 67 – Construção final aluna 2.



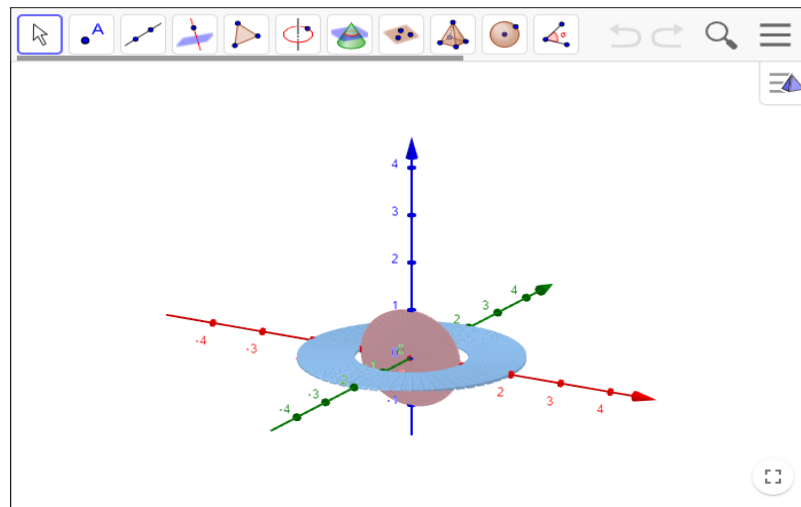
Fonte: acervo da pesquisadora.

Pela construção ilustrada na figura 67, percebemos que a aluna realmente não realizou a conversão adequadamente, uma vez que ela não identificou o posicionamento do ponto que, rotacionado, geraria a circunferência maior. Tal equívoco entendemos que está associado à dificuldade da conversão associada ao tratamento que a observação desta informação exige, uma vez que o aluno deve perceber a rotação do ponto em torno do eixo ao mesmo tempo que as possibilidades de coordenada deste ponto. Também entendemos que estas transformações (DUVAL, 2012) dependem de habilidades descritas por Gutiérrez (1996), primeiramente a habilidade de rotação mental, em que o aluno precisava imaginar o movimento do objeto (ponto e segmento) em torno do eixo, e depois da habilidade de percepção de relações espaciais, uma vez que por meio de relações entre os objetos, seria possível trabalhar com as coordenadas deles.

4.4.2 Atividade 2 – Construção II

No início desta atividade, os alunos receberam um applet com uma nova construção com sua visualização também restrita a janela 3D, conforme figura 64, em que eles deveriam realizar observações e registrá-las frente aos objetos geométricos envolvidos e suas respectivas posições e eixos utilizados na rotação:

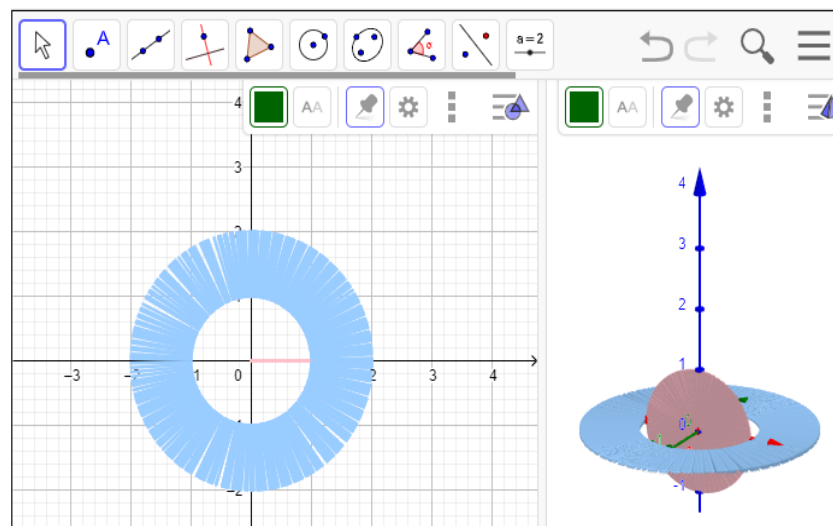
Figura 64 – Construção II – Encontro 4.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Esta atividade buscou aplicar as habilidades visuais exercitadas nos encontros anteriores (encontros 2 e 3), por meio de construções na janela 2D, geradas pelas rotações de dois segmentos de retas na janela de visualização 3D. Visando facilitar para o leitor o acompanhamento da análise, segue a solução da construção II:

Figura 65 – Solução Construção II – Encontro 4.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Os alunos não apresentaram dificuldades na realização dessa construção. Baseados na construção I realizada anteriormente, as duplas iniciaram suas observações e registros conforme solicitado. Segue um exemplo de discussão:

- *Aluno 4: Vamos fazer como na outra vez, primeiro vamos olhar os eixos, depois vemos em que ponto que está.*

- Aluno 3: *Ta. O disco azul é fácil... Está em torno do eixo z. Mas o disco rosa não sei, parece que está em torno de todos os eixos.*

- Aluno 4: *Não, ele se parece com o disco preto da outra figura. Volta lá para ver. (aqui ele se refere à construção I).*

- Aluno 3: *Sim. Só que está bem no meio. Então é em torno do eixo y.*

Podemos perceber pelo diálogo apresentado que os alunos identificaram relações entre a atividade anteriormente realizadas e as habilidades já exercitadas. Também percebemos que o GeoGebra Classroom atuou como um facilitador, uma vez que os alunos puderam verificar suas construções já feitas para analisar e comparar com a que eles estavam construindo, em busca de soluções. Na sequência, seguimos com a resposta completa de um dos alunos da dupla, na figura 66.

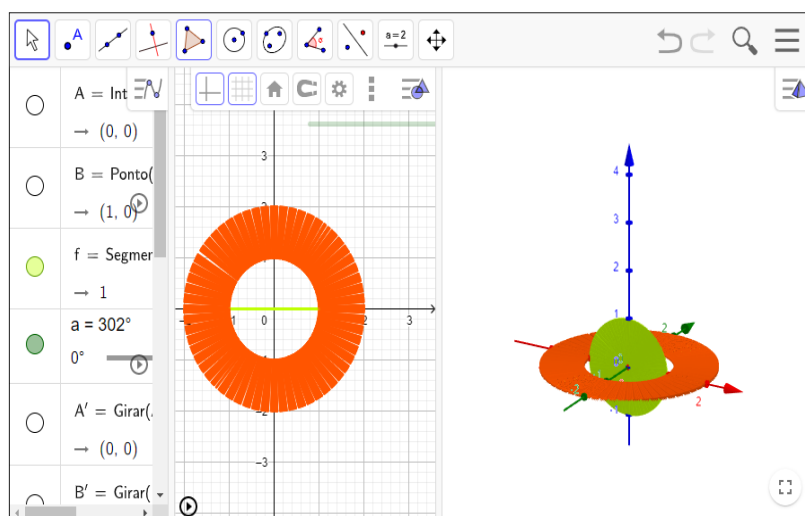
Figura 66 – Resposta aluno 4

A figura azul está girando em torno do eixo Z.
 A figura rosa está em torno do eixo Y.
 A figura rosa é formada por um segmento que vai de 0 a 1.
 A figura azul é formada por um segmento que vai de 1 a 2.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Pela resposta do aluno, notamos que ele observou tanto os eixos de rotação quanto o comprimento dos segmentos. É válido salientar que esta identificação do aluno não é a única possível, visto que por se tratar de rotação poderia estar na parte negativa do eixo. Seguimos com sua construção na figura 67.

Figura 67 – Construção aluno 4.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Por meio da análise de sua construção concluímos que o aluno aplicou corretamente suas observações e registros, construindo a figura solicitada adequadamente. Ressaltamos que todos os alunos conseguiram realizar essa construção. Acreditamos que tal resultado seja reflexo de todas as atividades até este encontro desenvolvidas, em que gradualmente os alunos foram exercitando as habilidades de visualização solicitadas bem como as transformações (DUVAL, 2012) exigidas. Nesta atividade, em particular, os alunos conseguiram realizar os tratamentos dos registros tridimensionais para bidimensionais, ao mesmo tempo em que realizavam as conversões necessárias para identificar possibilidades de coordenadas para os segmentos que, ao serem rotacionados, gerariam a figura solicitada. Tais transformações foram realizadas por meio das habilidades de rotação mental e percepção de relações espaciais, ambas descritas por Gutiérrez (1996). A aplicação dessas habilidades permitiu aos alunos imaginar as figuras resultantes das rotações dos segmentos, bem como identificar possíveis posições para os segmentos por meio das relações entre os objetos espaciais, tais como eixos e posições dos segmentos em relação à esses eixos.

Destacamos que as construções solicitadas no decorrer das atividades nem sempre ocorrem de maneira direta, sendo muitas vezes o resultado de uma sequência de tentativas baseadas no erro e no acerto. Nesta perspectiva, entendemos que essas ações são permeadas de registro dinâmico de representação (SALAZAR E ALMOULOUD, 2015), pois são o reflexo de uma manipulação direta das construções, como um constante tratamento realizado no registro gráfico. Esse tipo de registro salienta-se como uma característica dos AMD pela velocidade com que ocorrem, sendo mais uma das possibilidades destes recursos que achamos importante ressaltar.

4.5 RELATO E ANÁLISE ENCONTRO 5

Este encontro consistiu em três atividades que envolviam rotações de segmentos de retas em angulações diferentes, com foco na observação e visualização do rastro destas rotações em torno dos três eixos da janela 3D e de seus reflexos na janela 2D. Em todas as etapas que compõe esta atividade, incentivamos os alunos a explicitar o que eles imaginavam que seria construído com o rastro do movimento, para só então realizar o movimento de fato. Tal incentivo visou à observação da habilidade de visualização espacial dos alunos, por meio de observações e comparações sobre os registros em ambas as janelas gráficas (2D e 3D). Ao final de todos os registros de suas percepções sobre as figuras, os alunos habilitaram rastro do segmento em movimento para fazer verificações frente suas respostas.

Os principais conceitos abordados neste encontro foram: Posições relativas entre retas, ângulo de rotação e visualização espacial. Neste encontro, os alunos receberam uma atividade dividida em três etapas intituladas:

- Atividade 1: Rotações de Segmentos de Retas I
- Atividade 2: Rotações de Segmentos de Retas II
- Atividade 3: Rotações de Segmentos de Retas III

A seguir os objetivos gerais do encontro.

Quadro 7 – Objetivos Encontro 5

Objetivos Pesquisa	Objetivos Pedagógicos
<ul style="list-style-type: none"> - Observar as habilidades de visualização dos alunos por meio de rotações de segmentos de retas em diferentes angulações; - Observar se a atividade envolvendo rotação permite a compreensão dos tratamentos entre os registros 2D e 3D; 	<ul style="list-style-type: none"> - Exercício da visualização espacial; - Aplicação de conceitos de geometria de posição. (posição entre retas)

Fonte: acervo da pesquisadora.

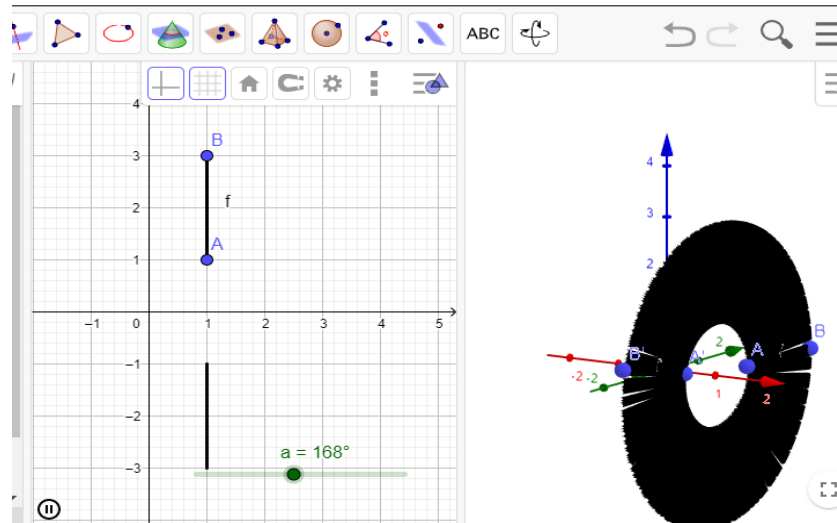
A análise das atividades a seguir será focada nos objetivos conforme quadro 7.

4.5.1 Atividade 1- Rotações de Segmentos de Retas I

Esta atividade envolveu a construção de um segmento de reta paralelo ao eixo y e não concorrente ao eixo x . Aos alunos que não lembravam o conceito de paralelismo e concorrência entre retas, permitimos que pesquisassem na internet. Optamos por não restringir a posição do segmento por meio da coordenada ou quadrante em razão desta informação não interferir na figura resultante pela rotação. Em seguida pedimos aos alunos para imaginarem qual figura seria formada pela rotação deste segmento em torno dos três eixos envolvidos (x , y e z). Após o registro das respostas dos alunos, eles realizaram as rotações na janela 3D, uma de cada vez, em applets específicos para cada eixo.

Para facilitar ao leitor o acompanhamento da análise, ilustraremos, na figura 68, o resultado final da rotação completa do segmento em torno do eixo x , realizado pela aluna 1, mas retomamos que primeiramente os alunos foram orientados a imaginar a rotação:

Figura 68 – Construção aluna 1



Fonte: acervo da pesquisadora.

Nesta primeira etapa do encontro, os alunos conseguiram verificar que na janela de visualização 3D a figura formada seria um disco, de modo que principais dificuldades que os alunos apresentaram envolveram a janela de visualização 2D. A seguir temos o exemplo de resposta da aluna 1, sobre as imagens resultantes, antes de ela realizar a rotação:

Figura 69 – Resposta aluna 1.

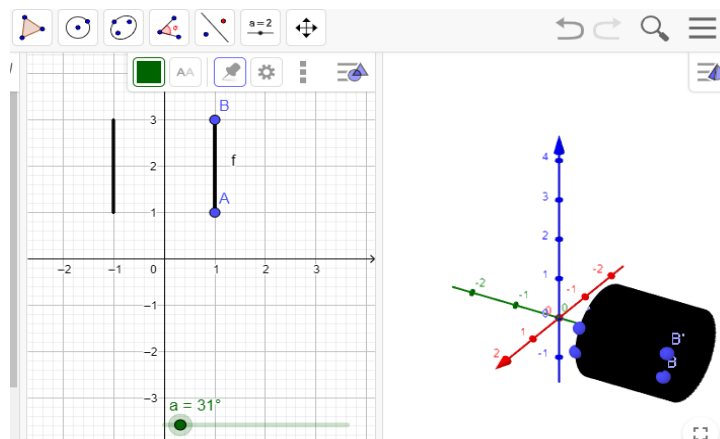
Na janela 3D ficaria um formato de arco-íris, só que completo, em 360 graus. Na janela 2D acho que ficaria também um círculo, com apenas um espaço no meio (distância do ponto B até o eixo X).

Fonte: acervo da pesquisadora.

Analisando a resposta da aluna na figura 68 e sua construção na figura 69, entendemos que ela conseguiu verificar, por meio da habilidade de rotação mental (Gutiérrez, 1996), qual a figura que seria gerada na janela de visualização 3D. No entanto, tal habilidade não foi aplicada adequadamente quando a aluna verificou a possibilidade de figura na janela 2D. Acreditamos que essa dificuldade se deu na necessidade de associação entre a rotação mental e o tratamento (Duval 2012) entre os registros tridimensionais para bidimensionais.

Na sequência trabalhamos com a rotação em torno do eixo y. Embora fosse outro eixo, o movimento de rotação teria uma figura resultante diferente apenas na janela 3D, mantendo-se como apenas um novo segmento de reta na janela 2D, como consta na imagem 70 a seguir:

Figura 70 – Construção aluno 4



Fonte: acervo da pesquisadora.

Imaginávamos que nesta segunda etapa, se os alunos apresentassem dificuldades, seriam apenas na janela 3D, em razão da semelhança de habilidade com a primeira etapa desta atividade. No entanto, novamente alguns alunos que conseguiram realizar a rotação mental na janela 3D, apresentaram equívocos na janela 2D.

Figura 71 – Resposta aluno 4.

Na janela 2D vai ficar um retângulo, na 3D um túnel.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Como a professora realizava o acompanhamento das respostas em tempo real no GeoGebra Classrom, ela questionou o aluno 4 sobre sua resposta, ilustrada na figura 71:

- Professora: Por que você acha que vai ser um retângulo na janela 2D?

- Aluno 4: Porque se na 3D ele ficar um túnel, como eu acho que vai ficar, na 2D tem que ser um retângulo.

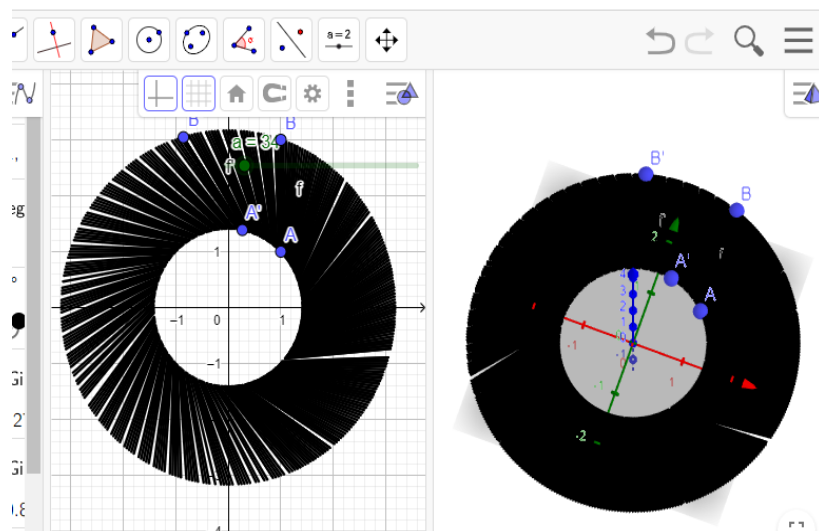
- Professora: Por que?

- Aluno 4: Por que um retângulo “dobradinho” em 3D volta a ser um túnel.

Entendemos, pela fala do aluno, que ele realizou mentalmente uma planificação do túnel. Embora a planificação que ele fez esteja correta, no contexto da janela de visualização 2D ela não está adequada. Pensamos que a visualização espacial do aluno não abordou a habilidade de percepção de relações espaciais (GUTIÉRREZ, 1996), visto que o aluno não adequou o tratamento entre as janelas de visualização 3D e 2D com a associação das relações entre os eixos.

Finalmente trabalhamos com a rotação em torno do eixo z. A seguir, ilustrada na figura 72, a rotação completa do segmento em torno do eixo z, pela aluna 6:

Figura 72 – Construção aluna 6.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Embora os alunos até então não tivessem habilitado rastro, pois orientamos para habilitarem apenas depois de registrem suas respostas, pensamos que os exercícios das duas etapas anteriores desta atividade atuaram como facilitadoras para a visualização deste último item, considerando o desempenho favorável dos alunos. A seguir um exemplo de resposta:

Figura 73 – Resposta aluna 6.

Janela 2D: A figura irá aparecer completa, igual na janela 3D;
 Janela 3D: Vai formar um CD também.

Fonte: Acervo da pesquisadora.

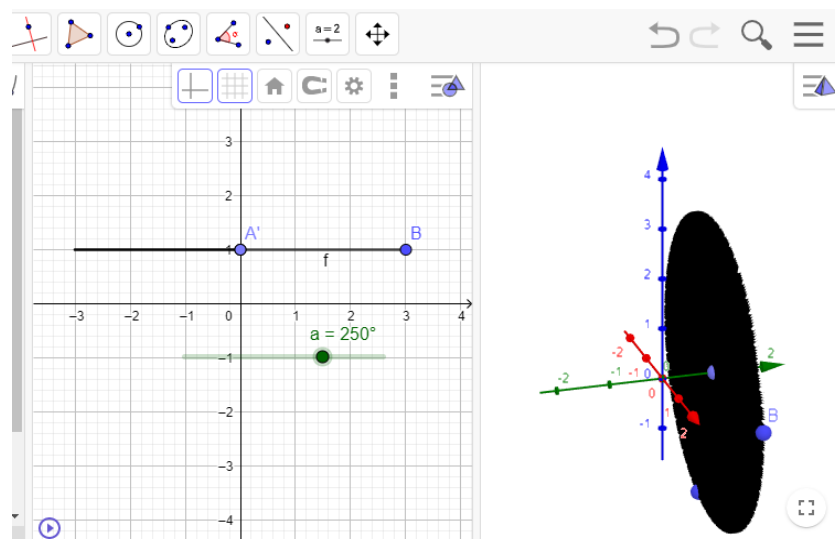
Acreditamos também que tal desempenho se deu pelo reflexo da atividade 2 do encontro 1, já aqui analisado, em que os alunos trabalharam com o eixo z, e observaram o tratamento entre ambas janelas de visualização 2D e 3D para compreender como o eixo z pode ser entendido em contexto bidimensional. Retomamos que as habilidades de percepção de relações espaciais e de rotação mental também foram necessárias neste item.

4.5.2 Atividade 2 - Rotações de Segmentos de Retas II

Esta atividade envolveu a construção de um segmento de reta perpendicular ao eixo y . Aos alunos que não lembravam o conceito de perpendicularidade, permitimos uma pesquisa na internet. Novamente deixamos livre a construção do segmento em termos de sua posição e quadrante em razão desta informação não interferir na figura resultante pela rotação. Na sequência, seguimos com os alunos imaginando as figuras resultantes em ambas as janelas 2D e 3D, por meio das rotações em torno dos três eixos envolvidos (x , y e z).

Visando facilitar ao leitor o acompanhamento da análise, segue o applet da aluna 5, com sua rotação completa em torno do eixo y , que foi o primeiro eixo de rotação:

Figura 74: construção aluna 5.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Os alunos não apresentaram dúvidas frente a figura que seria formada em ambas as janelas 2D e 3D. Segue resposta da aluna 5:

Figura 75 – Resposta aluna 5.

Na 2D eu acho que vai aparecer apenas um risco, e na 3D acho que vai formar uma pizza.

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Considerando que a resposta da aluna é um exemplo geral das respostas dos alunos, entendemos que tal visualização teve base na semelhança que esta primeira etapa tinha com a atividade 1 deste encontro.

Na sequência partimos para a rotação em torno do eixo x , em que os alunos conseguiram realizar este item com sucesso. A seguir o exemplo de uma conversa entre uma das duplas:

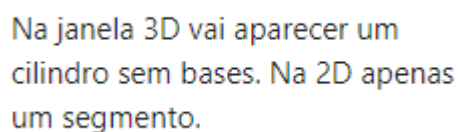
- Aluna 5: *na 2D sei que vai ter só um risquinho de novo... mas na 3D acho que é um círculo completo ne?*

- Aluna 6: *Acho que na 3D não vai ser um círculo... já que é todo o segmento fazendo a volta no eixo, não vai ser um tunelzinho?*

- Aluna 5: *aaah ta certo.*

Após esse diálogo o registro de uma das alunas da dupla:

Figura 76 – Resposta aluna 6.



Na janela 3D vai aparecer um cilindro sem bases. Na 2D apenas um segmento.

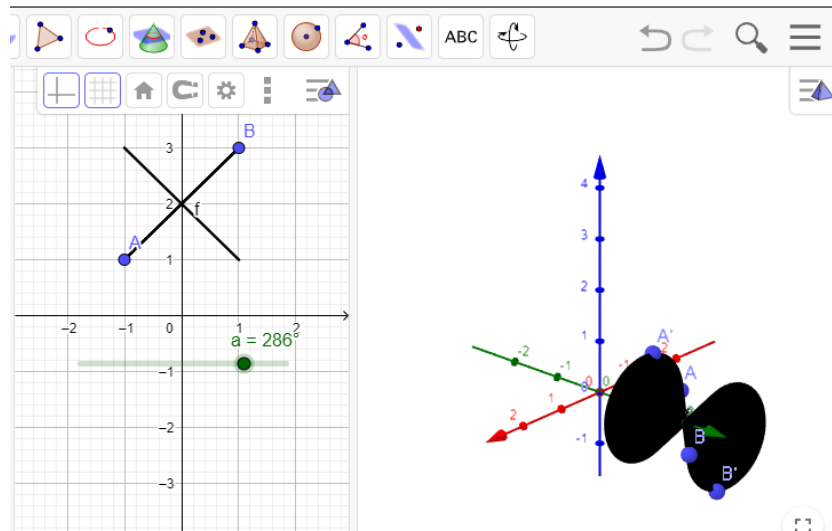
Fonte: acervo da pesquisadora.

Observando o diálogo e a resposta ilustrada na figura 76, compreendemos que as rotações neste contexto dos eixos x e y estavam sendo consolidadas. Percebemos também, ao analisar os registros da rotação em torno do eixo z, que se mantiveram adequadas tais quais apresentadas na etapa 1 deste encontro, de modo que não serão expostas aqui visto sua similaridade.

4.5.3 Atividade 3 - Rotações de Segmentos de Retas III

Esta atividade envolveu a construção e rotação de um segmento de reta concorrente ao eixo y e em torno dos três eixos envolvidos (x, y e z). Seguimos a mesma contextualização das duas etapas anterior visto a semelhança entre a proposta das atividades. Os alunos iniciaram com a rotação mental em torno do eixo y. Segue ilustração da rotação completa conforme figura 77:

Figura 77 – Construção aluna 2.



Fonte: acervo da pesquisadora.

De todas as rotações solicitadas neste encontro, esta foi a que os alunos mais apresentaram dificuldades. Seguiremos com o exemplo da aluna 2 para análise:

Figura 78 – Resposta aluna 2.

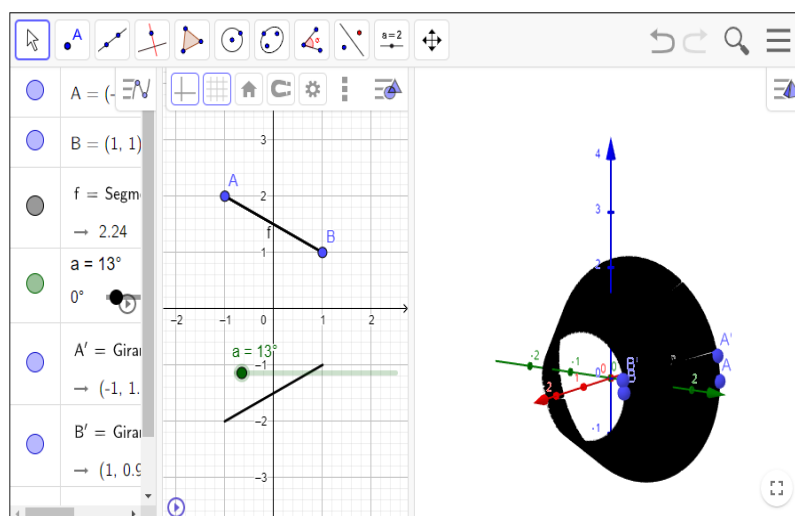
Na 3D acho que vai ficar uma casquinha de sorvete. Na janela 2D acho que vai ficar do mesmo jeito.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Como podemos perceber pela resposta ilustrada na figura 78, na janela 3D a aluna compreendeu que o movimento de rotação geraria um cone, mas não conseguiu compreender que como o segmento era concorrente ao eixo y, a outra parte dele também geraria um, totalizando dois cones. Já na janela de visualização 2D, a aluna não observou que o movimento de rotação teria reflexos bidimensionais, como em todas as atividades realizadas anteriormente. Entendemos que, além das habilidades aqui já mencionadas, como de rotação mental e percepção de relações espaciais, tal dificuldade de visualização teve uma nova fragilidade: a da habilidade de constância perceptual (Gutiérrez, 1996). Tal habilidade, neste contexto, permitiria ao aluno não confundir o segmento e suas características quando em movimento, sendo possível perceber quais reflexos sua perpendicularidade teria na figura gerada por sua rotação.

Na sequência a próxima rotação mental deveria ser em torno do eixo x. A seguir a rotação completa, ilustrada na figura 79, para acompanhamento:

Figura 79 – Construção aluno 4.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Os alunos conseguiriam concluir adequadamente o resultado da figura gerada pela rotação, embora tivessem dificuldade em expressar qual figura estavam imaginando na janela 3D:

-Aluno 3: Acho que na 3D vai formar um cilindro...

- Aluno 4: Acho que não pode ser um cilindro, a reta está meio inclinada.

- Aluno 3: hum... então vai formar tipo um cilindro, só que com um lado maior que outro.

- Aluno 4: tipo um funil?

- Aluno3: isso.

Após o breve diálogo, o aluno 4 respondeu da seguinte maneira:

Figura 80 – Resposta aluno 4.

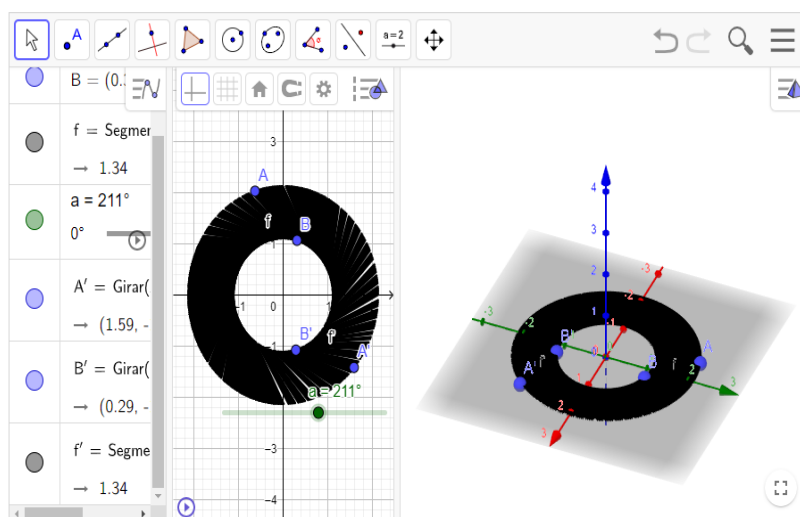
Acho que na janela 2D vai aparecer apenas o segmento nos ângulos 0° e 180° , e na janela 3D vai ficar como um cilindro, mas em formato de funil.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Achamos interessante salientar a especificação que o aluno ressaltou referente aos ângulos em que o segmento resultante aparecerá na janela de visualização 2D, pois ele conseguiu padronizar os ângulos em que o segmento é refletido na janela de visualização 2D.

Finalmente partimos para a rotação em torno do eixo z, conforme a construção da aluna 6, ilustrada na figura 81:

Figura 81 – Construção aluna 6



Fonte: acervo da pesquisadora.

Novamente os alunos apresentaram uma visualização adequada em relação ao eixo z nas perspectivas bidimensionais e tridimensionais. A seguir a resposta da aluna 6:

Figura 82 – Resposta aluna 6.

Girando a linha no eixo (Z)
teremos um disco circular de 360
graus, passa pelos eixos (X e Y)
portanto é possível visualizá-lo
na janela 2D e 3D

Fonte: acervo da pesquisadora.

Ao analisarmos a resposta da aluna 6, entendemos que os alunos perceberam que, independente da posição do segmento de reta em relação aos eixos na janela de visualização 2D, sua rotação geraria uma figura semelhante em ambas as janelas.

Ao final deste encontro, consideramos que os alunos obtiveram avanços no que se refere à capacidade de visualização espacial, mediante a análise de seus registros aqui expostos. Acreditamos que as atividades que compuseram este encontro contribuíram para que os alunos trabalhassem com habilidades de rotação mental, percepção de relações

espaciais e de constância perceptual, sempre por meio da associação dessas habilidades à realização dos tratamentos dos registros tridimensionais para bidimensionais.

4.6 RELATO E ANÁLISE ENCONTRO 6

Este encontro consistiu em duas atividades que envolviam a construção de superfícies de revolução. Na primeira atividade, os alunos deveriam reproduzir inicialmente um cone e na sequência um tronco de cone. Na segunda atividade, os alunos deveriam realizar a construção de uma superfície de revolução de sua autoria, aplicando as habilidades exercitadas ao longo de todas as atividades realizadas nos encontros anteriores.

Os principais conceitos abordados neste encontro foram: posições relativas entre retas e visualização espacial.

No primeiro momento, os alunos receberam uma atividade divididas em duas etapas, intituladas:

- Atividade 1: Superfícies de Revolução;
- Atividade 2: Construção.

A seguir os objetivos gerais do encontro.

Quadro 8 – Objetivos Encontro 6

Objetivos Pesquisa	Objetivos Pedagógicos
<ul style="list-style-type: none"> - Observar as habilidades de visualização dos alunos por meio de construção de superfícies de revolução; - Observar se estas habilidades de visualização se desenvolvem melhor por meio dos registros dinâmicos de representação semiótica realizados; - Observar se a atividade contribui para a compreensão dos tratamentos entre os registros 2D e 3D. 	<ul style="list-style-type: none"> - Exercício da visualização espacial; - Aplicação de conceitos de geometria de posição. (posição entre retas)

Fonte: acervo da pesquisadora.

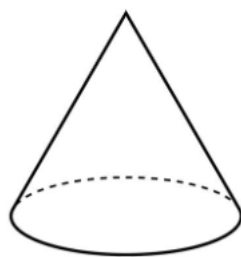
Retomamos que a análise do encontro a seguir será baseada nos objetivos expostos no quadro 8.

4.6.1 Atividade 1 - Superfícies de Revolução

Esta atividade consistiu na construção de duas superfícies de revolução geradas pela rotação de segmentos de reta. Deixamos a possibilidades de posicionamento das figuras de maneira livre, sem especificarmos quadrante ou eixo de rotação.

Primeiramente os alunos fizeram registros frente às suas hipóteses de posição de segmentos para só depois partirem para a tentativa de construção. A primeira imagem que os alunos receberam foi a de um cone conforme figura 83:

Figura 83 – Primeira Superfície de Revolução – Encontro 6



Fonte: acervo da pesquisadora.

Para a construção desta superfície, consideramos duas possibilidades de rotação: dois segmentos de reta, um para a superfície lateral e outro para a base, ou apenas com um segmento de reta para a superfície lateral. Entendemos que essas são duas possibilidades adequadas visto que ambas comportam as habilidades de visualização que pretendemos observar.

Ressaltamos que esta primeira etapa deste encontro exigiu um exercício contrário aos realizado no encontro 5. No encontro 5, os alunos rotacionaram mentalmente segmentos para imaginar a figura resultante e agora, nesta atividade, eles receberam uma figura em que são solicitados os segmentos geradores por meio de sua reprodução. Para a análise desta primeira parte da atividade 1, trabalharemos com duas respostas que representam o desenvolvimento dos alunos. A seguir a primeira resposta, do aluno 6, conforme figura 84:

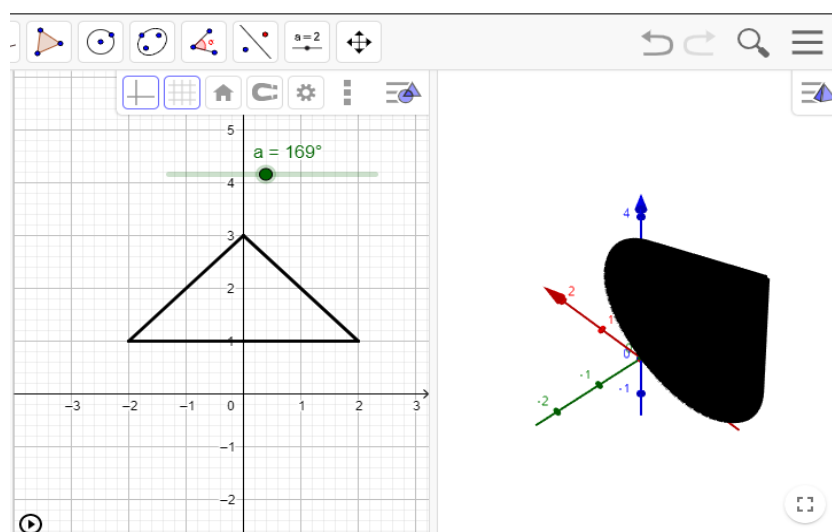
Figura 84 – Resposta aluno 3

Um segmento perpendicular no y
e um na diagonal.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Observando a resposta do aluno, entendemos que seu registro teve reflexos da atividade aplicada no encontro anterior, encontro 5, uma vez que o aluno utilizou o conceito de perpendicularidade para especificar o posicionamento da reta. No entanto, também entendemos que ele poderia ter denominado como concorrente o segmento que ele considerou estar na diagonal. A seguir a construção do aluno 6, ilustrada na figura 85:

Figura 85 – Construção aluno 6.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Ao observarmos a construção do aluno, percebemos que ele posicionou os segmentos de acordo com seu registro escrito e em conformidade com a reprodução solicitada. Entendemos que tal construção se deu pela habilidade de percepção do fundo da figura, que é a habilidade de “observar a figura mesmo que isolada em um fundo complexo” (GUTIÉRREZ, 1996, p.10), visto que o aluno precisou enxergar os segmentos presentes na base da reprodução do cone. Também compreendemos que tal habilidade teve que estar associada à habilidade de rotação mental e da capacidade de realizar o tratamento entre os registros tridimensionais para bidimensionais. Tal associação se deu na necessidade do aluno em visualizar os segmentos geradores da superfície de revolução e imaginar suas posições na janela de visualização 2D.

Na sequência analisaremos a resposta da aluna 2, conforme figura 89:

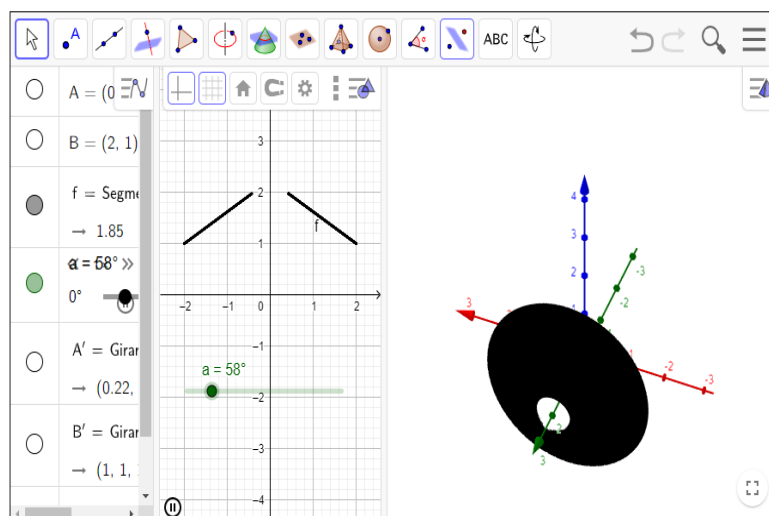
Figura 86 – Resposta aluna 2.

O segmento devia estar um pouco inclinadinho.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Ao analisarmos a resposta da aluna 2, que respondeu em registro língua natural, entendemos que, embora o conceito de posicionamento do segmento pareça estar adequado, ela não fez seu registro por meio dos posicionamento entre retas, que seriam concorrentes, não ficando claro para análise se ela visualizou ou não esta concorrência. A seguir sua construção para a sequência da análise:

Figura 87 – Construção aluna 2.

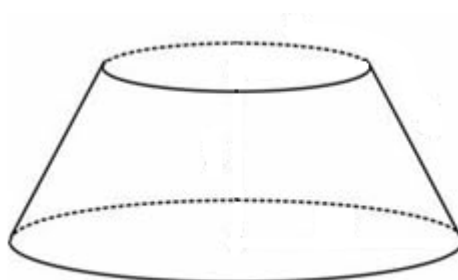


Fonte: acervo da pesquisadora.

Ao observarmos sua construção, conforme ilustrado na figura 87, entendemos que a aluna não estava se referindo ao conceito de concorrente quando registrou que o segmento deveria estar inclinado, visto que seu cone teve uma abertura que não constava na superfície de revolução solicitada. Compreendemos que tal equívoco teve base principalmente na associação da habilidade de percepção de fundo da figura (GUTIÉRREZ, 1996) ao tratamento entre os registros nas janelas de visualização 3D para 2D, uma vez que a aluna realizou uma visualização superficial da figura, sem considerar a concorrência do segmento ao eixo escolhido para rotação.

Em seguida os alunos receberam a segunda superfície de revolução, conforme figura 88.

Figura 88 - Segunda Superfície de Revolução – Encontro 6



Fonte: acervo da pesquisadora.

Para a construção desta superfície, consideramos duas possibilidades de rotação: apenas um segmento de reta, ou três segmentos de reta ligados formando a metade de um trapézio. Entendemos que essas são duas possibilidades adequadas visto que ambas comportam as habilidades de visualização que pretendemos observar.

Todos os alunos trabalharam com apenas um segmento. A seguir a resposta do aluno 3.

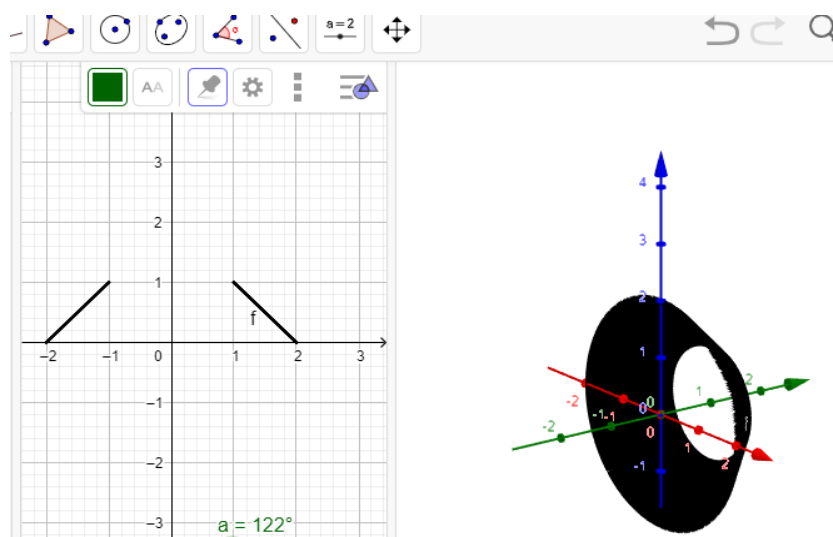
Figura 89 – Resposta aluno 3.

Dessa vez vai ser criado um segmento em diagonal, mas não encostando no eixo.

Fonte: acervo da pesquisadora.

A resposta do aluno 3 equivale a resposta de todos os alunos, que não apresentaram dificuldades na reprodução desta superfície de revolução. A seguir a construção do aluno 3:

Figura 90 – Construção aluno 3.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Compreendemos que tal desenvoltura dos alunos teve relação com a consolidação das habilidades de visualização abordadas na análise da primeira superfície de revolução e ao tratamento entre as janelas de visualização 3D e 2D.

4.6.2 Atividade 2 – Construção

Nesta última atividade foi solicitada aos alunos a reprodução de um objeto, à livre escolha, por meio da rotação de segmentos de reta e/ou pontos, explicitando a razão de sua escolha e descrevendo o processo de construção. Esta atividade teve um caráter de encerramento da sequência de atividades desenvolvida até aqui, numa perspectiva de dar

autonomia aos alunos, para que seja possível observar quais habilidades serão aplicadas espontaneamente por eles, na realização da atividade.

Nas atividades analisadas até o momento, sempre selecionamos exemplos que representassem o desenvolvimento geral dos alunos, no entanto, no caso desta etapa, consideraremos para análise todas as construções dos alunos, dado a riqueza de observações possíveis tendo em vista à liberdade de criação oportunizada aos alunos.

No que se refere à justificativa para a escolha do objeto, salientamos que todos os alunos se referiram à facilidade na construção do objeto selecionado.

Na primeira construção que analisaremos, a da aluna 1, a aluna escolheu a reprodução de uma casquinha de sorvete. A seguir o registro de sua estratégia de construção:

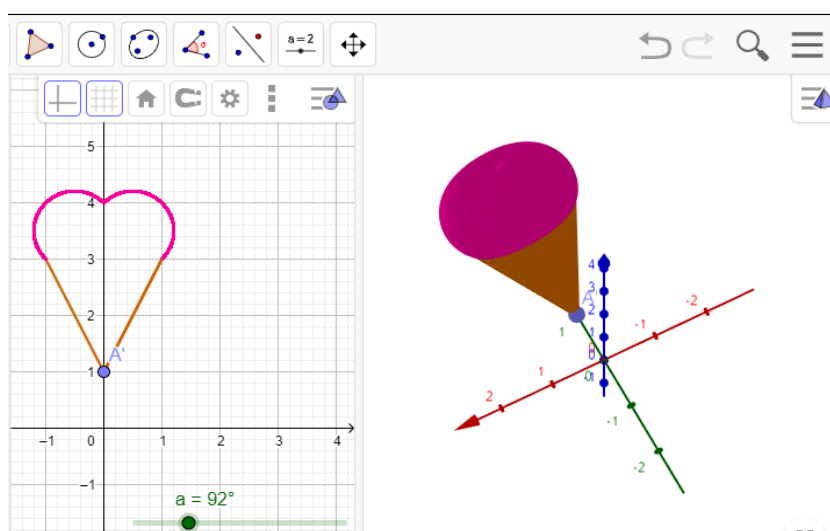
Figura 91 – Resposta aluna 1.

Uma curva e um segmento
concorrente a um eixo Y.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Salientamos que até a análise de seu registro, conforme figura 91, entendemos que a aluna estava reproduzindo um cone, cuja construção já havia sido abordada na atividade 1 deste encontro, não sendo então uma iniciativa original. A seguir sua construção para sequência da análise:

Figura 92 – Construção aluna 1.



Fonte: acervo da pesquisadora.

No entanto, ao observamos a construção ilustrada na figura 92, percebemos que a aluna foi além das propostas de atividades até então realizadas, que envolveram rotações de pontos e segmentos de retas. Para a construção do sorvete, acima da casquinha, a aluna

abordou em sua construção uma curva ligada ao segmento de reta, de tal forma que, ao rotacionar ambas suas construções, em torno do eixo y, ela obteve figura completa. Para tanto, enfatizamos que a aluna assumiu uma postura investigatória, por meio do livre acesso à exploração, o que conforme Gravina (2001), foi possível por meio da face interativa que o GeoGebra, como os demais AMD, oportuniza. Além disso, entendemos que para realizar sua construção, a aluna aplicou as habilidades de rotação mental, e percepção de relações espaciais, ambas descritas por Gutiérrez (1996), atreladas ao tratamento entre os registros da janela 3D para a 2D.

Na segunda construção que analisaremos, a da aluna 2, ela escolheu a reprodução de uma árvore. A seguir, na figura 93, sua estratégia de construção:

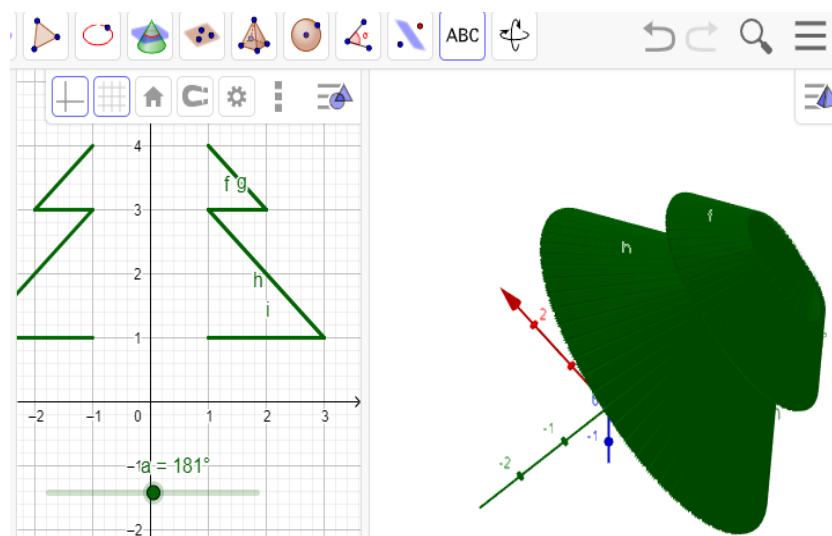
Figura 93 – Resposta aluna 2.

Segmentos em zig-zag.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Percebemos pela resposta da aluna que ela escolheu trabalhar apenas com segmentos de reta. A seguir sua construção.

Figura 94 – Construção aluna 2.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Analisando sua construção, conforme figura 94, percebemos que a aluna trabalhou com sua estratégia de construção, que envolvia segmentos de reta em zig-zag, em estrutura conforme a figura planejada. No entanto, ao posicionar os segmentos em torno do eixo y, o mesmo eixo escolhido para rotação, a aluna não os posicionou para que quando ocorresse a rotação, o topo da árvore fosse completo. Analisando o contexto deste detalhe na construção, entendemos que ele tem base especificamente na habilidade de rotação mental associada ao

tratamento dos registros da janela 2D para 3D, visto que a aluna não conseguiu visualizar a abertura do topo da árvore resultante do posicionamento dos segmentos.

A próxima construção que analisaremos é a do aluno 3, que optou pela construção de uma lanterna. Seguimos com sua estratégia de construção:

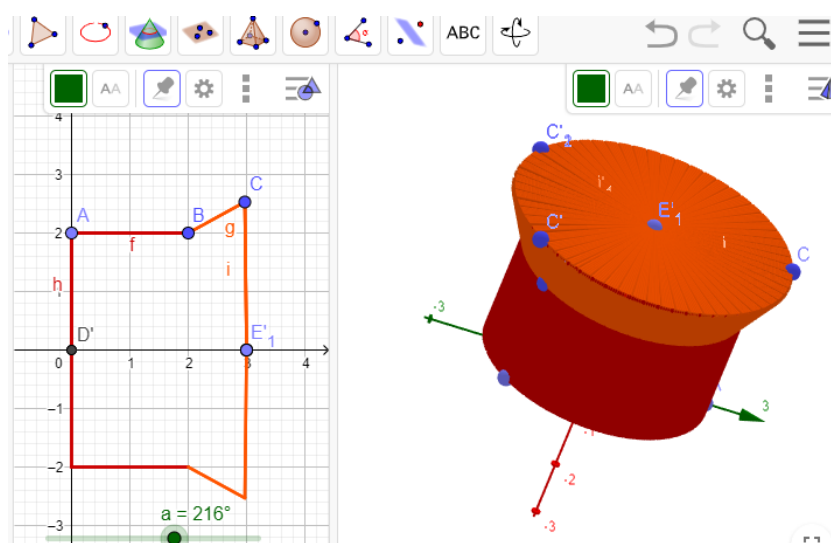
Figura 95 – Resposta aluno 3.

Formando uma meia lanterna
com segmentos na janela 2D, e
habilitar o rastro na 3D.

Fonte: acervo da pesquisadora.

Embora tenha sido solicitado aos alunos que especificassem as posições de seus segmentos de reta e/ou pontos para rotação, o aluno 3 não apresentou informações frente à sua estratégia de construção que nos permitissem compreender detalhes. Seguimos com sua construção para análise:

Figura 96 – Construção aluno 3.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Ao analisarmos a construção do aluno, ilustrada na figura 96, percebemos que embora ele não tenha deixado especificado no seu registro escrito, sua estratégia de construção envolveu um segmento de reta coincidente com o eixo y, ligado a um segmento de reta paralelo ao eixo x, que por sua vez estava ligado a um segmento de reta inclinado que finalizava se ligando a um segmento de reta paralelo ao eixo y. Tal estratégia de construção, por meio da rotação em torno do eixo x, resultou na figura planejada pelo aluno. Percebemos que para a construção desta superfície de revolução, o aluno aplicou os conceitos de posições relativas entre retas, condizente com seu objetivo, bem como apresentou as habilidades de

visualização necessárias para construir mentalmente seu objeto e reproduzi-lo no GeoGebra. Achamos importante ressaltar que o aluno percebeu a necessidade de rotacionar os segmentos em torno do eixo x, ao invés do y, para gerar a figura desejada. Acreditamos que tal percepção por parte do aluno se deu em sua capacidade de realizar o tratamento entre as janelas de visualização 2D para 3D associada a sua habilidade de percepção de relações espaciais, que é a “habilidade de construir as relações entre os objetos observados” (GUTIÉRREZ, 1996, p.10), neste caso entre os eixos e os segmentos de reta que seriam rotacionados.

Na sequência temos a construção do aluno 4, que não fez seu registro escrito, sendo assim trabalharemos com o registro em língua natural de sua estratégia:

- Professora: o que tu vais construir?

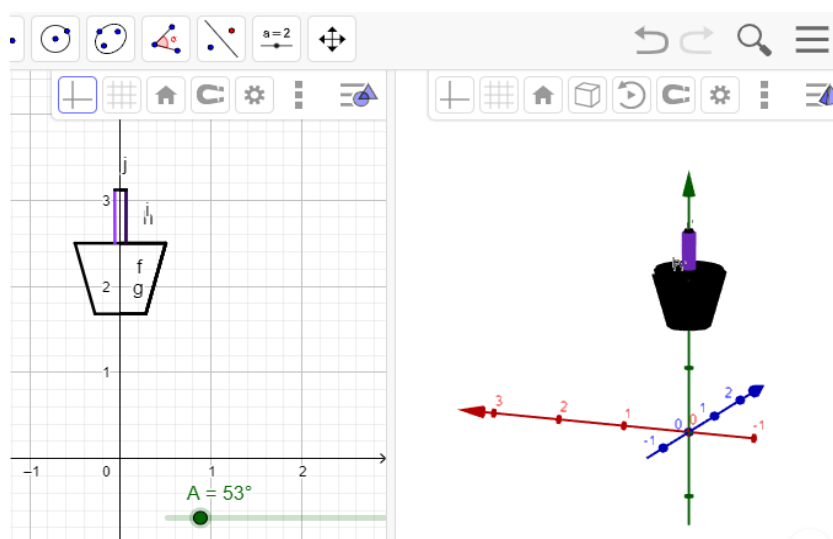
- Aluno 4: o meu copo que ta aqui.

- Professora: Sabes como fazer?

- Aluno 4: sei sim, vou ligar segmentos de reta para girar em torno do eixo y, com a base do copo menor, mas vou por um canudinho para ficar mais fácil de entender o desenho.

Pelo diálogo entendemos que o aluno trabalhará com segmentos de reta rotacionados em torno do eixo y, no entanto, ele não informa detalhes sobre o posicionamento destes. A seguir sua construção:

Figura 97 – Construção aluno 4.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Ao observarmos sua construção, conforme figura 97, percebemos que o aluno trabalhou com as posições relativas entre retas, de modo que ligou os segmentos conforme o necessário para gerar o objeto escolhido para reprodução. A escolha do eixo de rotação bem como a posição escolhida para os segmentos de reta, acreditamos que são reflexos das

habilidades de visualização desenvolvidas nos encontros realizados até este momento bem como a capacidade de realizar os tratamentos entre as janelas de visualização.

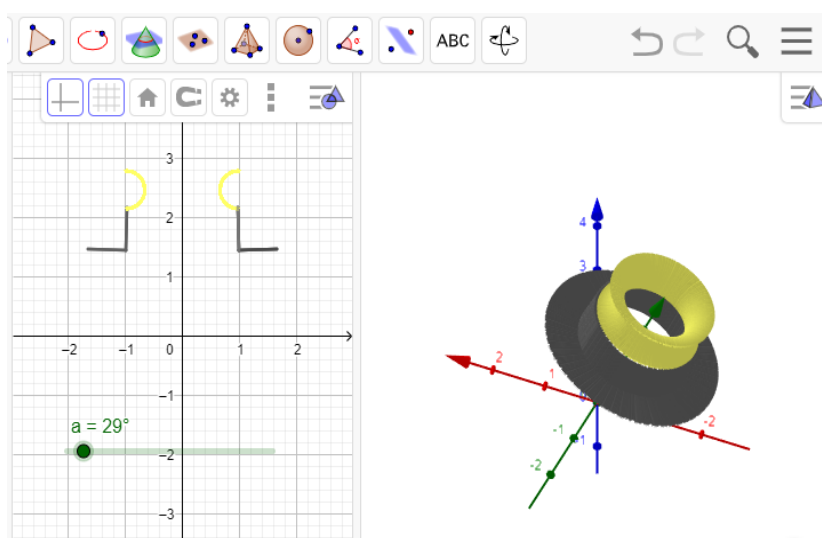
A aluna 5 escolheu um abajur e também não nos deu informações relevantes para análise em seu registro escrito, de modo que optamos por apresentar um recorte da transcrição do encontro, em que ela apresenta sua ideia:

- Professora: como tu pretendes fazer teu abajur?

- Aluna 5: eu vou usar meia bolinha e dois segmentos de reta em torno do y. (eixo)

Seguimos com sua construção para a sequência da análise

Figura 98 – Construção aluna 5.

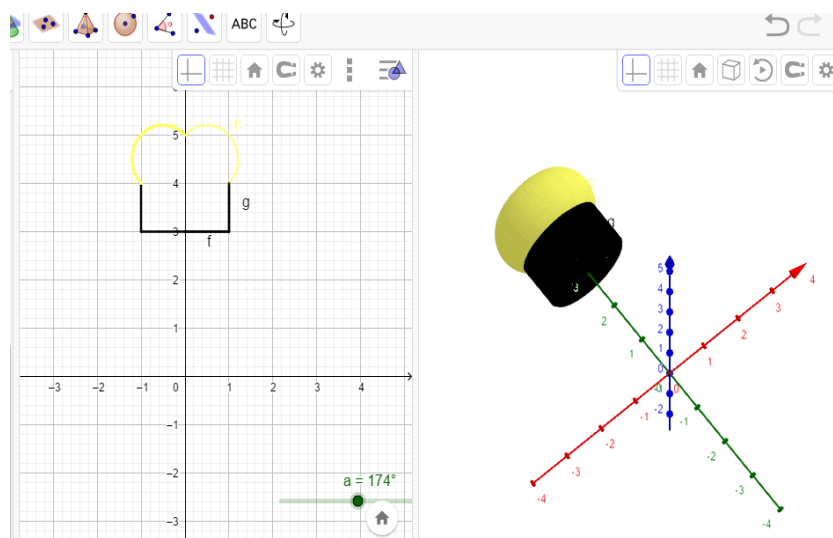


Fonte: acervo da pesquisadora.

Embora a aluna também tenha, como a aluna 1, abordado outras possibilidades de objetos geométricos para rotação, e tenha, por meio da livre exploração do software e de seus recursos, encontrado o que tinha se proposto a utilizar, ela apresentou equívocos frente à sua proposta. De fato a rotação tinha que ser em torno do eixo y, para gerar um abajur como planejado, no entanto, a posição dos segmentos de reta não está condizente com o objetivo, uma vez que, na posição que a aluna construiu os segmentos, a figura gerada ficou aberta ao invés de formar um abajur. Entendemos que esta situação está embasada na dificuldade da habilidade de rotação mental associada ao tratamento das janelas 2D para 3D. Isso se justifica pelo fato da aluna não ter conseguido pré-visualizar a rotação dos segmentos na posição em que ela os construiu. Embora a professora pesquisadora sempre tenha solicitado aos alunos manter os seus registros tal qual foram criados, para posterior análise, mesmo nos casos em que eles não tenham sido finalizados como desejado, a aluna solicitou nova tentativa para esta construção. Após o arquivamento de sua primeira tentativa, a aluna realizou uma nova

construção, adaptando sua construção anterior, por meio do reposicionamento dos segmentos e do semicírculo, conforme figura 99 a seguir:

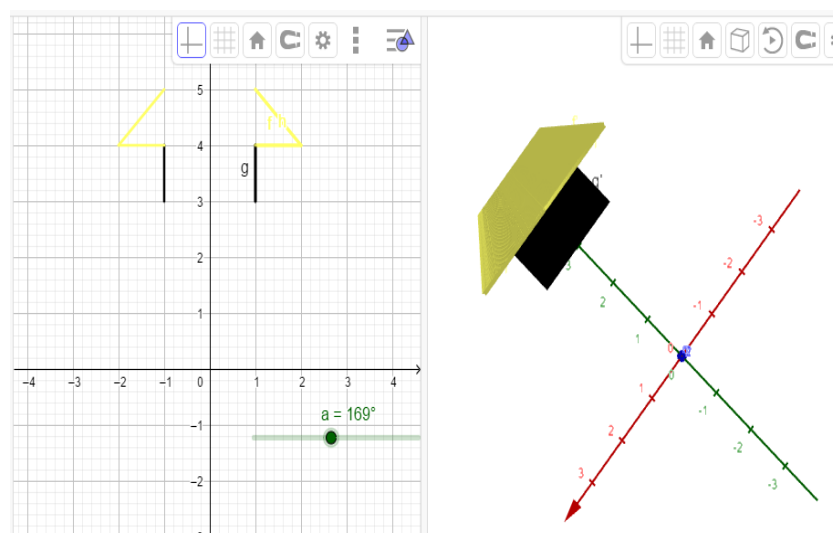
Figura 99 – Nova construção aluna 5.



Fonte: acervo da pesquisadora.

Achamos importante apresentar essa nova tentativa da aluna 5, pois entendemos que este contexto aborda o registro dinâmico de representação, pois, ao readaptar as posições dos segmentos e do semicírculo, a aluna observou o contínuo tratamento dentro do registro gráfico. No entanto, de acordo com a proposta da aluna de reproduzir um abajur, apresentamos a construção a seguir com uma alternativa possível:

Figura 100 – Possibilidade de construção de abajur.



Fonte: acervo da pesquisadora

Achamos importante ressaltar que o tronco de pirâmide utilizado para a parte superior do abajur da figura 100 já havia sido trabalhado neste encontro na atividade 1 e poderia ter sido utilizado pela aluna.

Por fim temos a construção da aluna 6, em que o objeto escolhido foi uma estrela. Seu registro de proposta de construção consta na figura 101 a seguir:

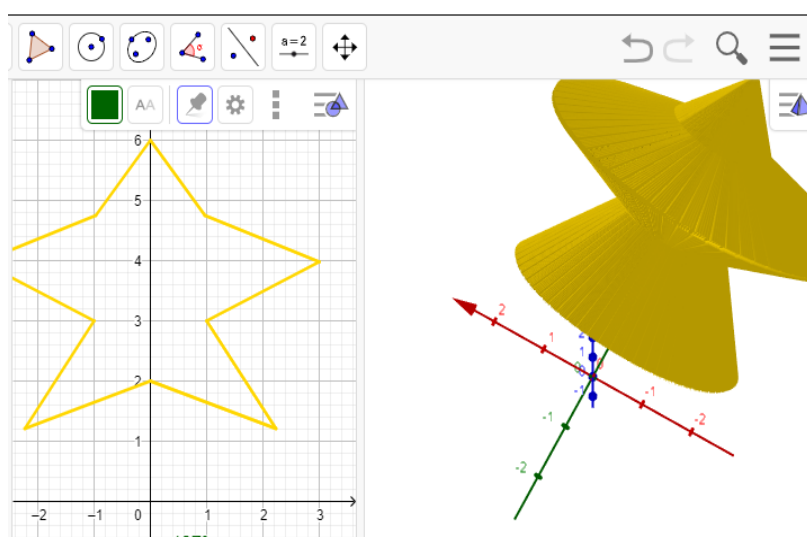
Figura 101 – Resposta aluna 6.

Vou fazer 3 segmentos, tirar as "bolinhas", mudar a cor e fazer está estrela girar em torno do eixo Y.

Fonte: acervo da pesquisadora.

O conceito de estrela bidimensional é bem plausível para a janela de visualização 2D, no entanto, em um contexto tridimensional, a aluna obteve o resultado a seguir:

Figura 102 – Construção aluna 6.



Fonte: acervo da pesquisadora.

No momento em que a aluna realizou a rotação gerando a superfície ilustrada na figura 105, entendemos que a aluna não demonstrou as habilidades de rotação mental, percepção de relações espaciais e constância perceptual, todas descritas por Gutiérrez (1996). Entendemos que a aluna não apresentou as habilidades citadas visto que ela não conseguiu pré-visualizar que a rotação dos segmentos posicionados não geraria na janela 3D uma estrela como ela havia planejado. Entendemos também que é possível que a aluna não tivesse a compreensão de como seria uma estrela num espaço tridimensional, e por isso tenha pensando ser possível construir a figura desejada na janela de visualização 2D e que isso bastaria para reproduzi-la na janela 3D, por meio da rotação dos segmentos. Nossa interpretação sobre este aspecto corrobora com Duval (2010), que enfatiza que os alunos apresentam dificuldades em verificar relações entre diferentes representações de um mesmo objeto, nesse caso, uma estrela.

Buscamos contemplar neste último encontro um fechamento da nossa sequência de atividades, na perspectiva de tentar, por meio de sua análise, identificar se os alunos haviam obtido avanços em sua habilidade de visualização espacial. Para tanto, abordamos atividades que exigiam simultaneamente as habilidades de visualização exercitadas nos encontros até então realizados, associadas aos constantes tratamentos entre os registros da janela de visualização 2D para 3D. Acreditamos ter sido possível observar tais avanços em alguns casos, conforme explicitado na análise deste encontro.

Ao longo dos encontros, apresentamos atividades introdutórias que viabilizassem a ambientação do software e, posteriormente, as atividades em que buscávamos identificar os aspectos norteadores deste trabalho. As atividades de rotação abordaram, de maneira geral, a necessidade de rotação mental de algum objeto e/ou da observação/construção de uma superfície de revolução. A análise destas atividades nos permitiu verificar que os alunos apresentaram um desenvolvimento gradual da habilidade de visualização espacial. Para tanto, identificamos que os alunos trabalharam com habilidades de visualização de Gutiérrez (1996), em particular com as habilidades de rotação mental, constância perceptual, percepção de relações espaciais e percepção de fundo da figura.

Também destacamos que, associadas a estas habilidades, faziam-se necessárias transformações (Duval, 2010) para a realização de algumas atividades. Os tratamentos entre as janelas de visualização 2D e 3D foram constantes e também se fizeram necessárias conversões entre os registros gráfico e algébrico. Embora nem sempre essas transformações tenham sido realizadas pelos alunos nos primeiros encontros, eles sempre tiveram que identificar as relações entre os registros e no decorrer dos encontros, tornaram-se protagonistas destas conversões.

Achamos importante ressaltar que as atividades de rotação e visualização espacial envolvidas nesta sequência não são comuns na matemática abordada no Ensino Fundamental. Sendo assim, é possível que essa possa ser uma das razões para as dificuldades que alguns alunos apresentaram inicialmente. Tal proposição baseia-se no fato de que no decorrer dos encontros, os alunos mostraram maior autonomia e melhor desempenho na realização das atividades, o que entendemos ser um indício de incorporação das habilidades de visualização.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos este capítulo retomando que o presente trabalho é fruto de uma adaptação frente às sugestões da banca de qualificação, bem como à pandemia do Covid-19. No que se refere às sugestões da banca de qualificação, salientamos que adaptamos e reaplicamos a sequência de atividades previamente elaborada, redirecionando o foco para atividades que envolviam rotação. No tocante à pandemia do Covid-19, realizamos uma nova adaptação das atividades, visto o isolamento para conter o vírus, buscando meios para aplicar a atividade de maneira remota. Para tanto, desenvolvemos as atividades no GeoGebra on-line e as aplicamos pelo GeoGebra Classroom, por meio do Google Meet.

Não podemos deixar de mencionar o quão oportuno foi o surgimento do GeoGebra Classroom, em meados de junho de 2020, para a aplicação em modalidade remota da sequência de atividades. Embora a plataforma ainda esteja em atualização, sempre foi possível executar os encontros sem nenhum problema técnico. Além disso, o acompanhamento em tempo real do desenvolvimento dos alunos foi primordial para que a coleta de dados fosse o mais semelhante possível com uma aplicação presencial, como já salientado no capítulo 3.

Retomamos que ficaram estabelecidos como objetivos desta pesquisa: planejar, justificar, construir e aplicar uma sequência didática e materiais de ensino utilizando o GeoGebra; analisar as potencialidades dos recursos do GeoGebra que emergirem das atividades desenvolvidas; realizar a análise dos resultados da aplicação da sequência didática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval bem como o processo de visualização na matemática para Angel Gutiérrez.

Buscamos, nas atividades que compuseram a sequência didática da presente pesquisa, contemplar tarefas que permitissem observar se emergiam as habilidades de visualização descritas por Gutiérrez (1996) bem como as transformações descritas por Duval (2010).

O presente trabalho consiste em uma pesquisa em Educação Matemática que se baseou na Teoria de Registros de Representação de Duval associada ao processo de visualização da matemática para Gutiérrez. O foco principal desta pesquisa foi responder à pergunta: **Quais as contribuições do GeoGebra no processo de desenvolvimento da habilidade de visualização espacial, quando se faz uso de atividades envolvendo rotação?**

Ao final desta pesquisa, ressaltamos que encontramos contribuições do GeoGebra para o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial. Tal conclusão se deu pelas

análises realizadas frente à produção dos alunos. Ao longo das atividades, percebemos que os alunos gradualmente foram se apropriando das habilidades de visualização descritas por Gutiérrez (1996), em particular das habilidades de rotação mental e percepção de relações espaciais, que foram exigidas a partir do 2º encontro. No avanço da sequência, também percebemos o exercício das habilidades de constância perceptual e percepção do fundo da figura, conforme iniciaram os trabalhos com rotações de objetos geométricos e superfícies de revolução.

Em relação às transformações que Duval (2010) descreve, percebemos que desde o primeiro encontro são realizados tratamentos e conversões. Achamos importante retomar que, em algumas atividades, cabia aos alunos a interpretação das transformações (tratamentos e conversões) que o GeoGebra realizava e apresentava dinamicamente, porém, em outros momentos, foram os alunos que atuaram como protagonistas de tais transformações, conforme salientamos nas análises realizadas no capítulo 4. Os tratamentos foram exigidos entre ambas as janelas de visualização: ora ocorriam da janela 2D para 3D e em outros momentos da janela 3D para a 2D. As conversões ocorreram entre os registros gráficos e algébrico, especificamente entre as coordenadas dos objetos e suas posições nas janelas de visualização, e também ocorreram alternadamente. Esta constante mobilização de registros está de acordo com o que Duval (2010) enfatiza para que ocorra a aprendizagem de matemática.

Consideramos que o desenvolvimento das habilidades de visualização mencionadas nesta pesquisa esteve intimamente ligado aos tratamentos realizados pelos alunos. Tal consideração tem base nas análises das atividades, em que foi possível perceber que era por meio dos tratamentos entre as janelas de visualização 2D e 3D, realizados de maneira alternada conforme a particularidade da tarefa, que os alunos conseguiam exercitar as habilidades, como por exemplo ao realizar a rotação mental de um segmento, ou identificar quais segmentos estavam por trás de uma superfície de revolução. Por meio desta constatação, reforçamos as contribuições do GeoGebra para o desenvolvimento da visualização espacial, pois seu dinamismo presente na associação entre suas janelas de visualização 2D e 3D, permite a verificação de relações entre objetos geométricos que não seriam fáceis, ou até mesmo possíveis, com outras tecnologias, como lápis e papel. Sendo assim, retomamos que o GeoGebra é um recurso que não restringe o trabalho com registros bidimensionais, o que de acordo com Gutiérrez, (1996), é fundamental para que não haja perda de informações.

Salientamos também que a utilização dos recursos do GeoGebra teve relevância para o desenvolvimento das atividades, visto que a sua interatividade permitiu aos alunos construir e reconstruir objetos e superfícies de revolução, observando a suas posições relativas as demais

figuras geométricas que estavam sendo trabalhadas. Também salientamos que em algumas atividades, o registro dinâmico de representação se fez presente como um contínuo tratamento entre as janelas de visualização 2D e 3D no decorrer das construções dos alunos, este tipo de representação é particular dos AMD. Tais possibilidades do GeoGebra contribuíram para que os alunos pudessem dinamicamente repensar suas estratégias, o que se mostrou positivo, visto que no decorrer do encontro os alunos tinham discussões entre si, em suas duplas, sobre a resolução das atividades, compartilhando suas telas e estratégias, por meio do trabalho com o GeoGebra Classroom.

Ao final deste trabalho, por meio dos aspectos já citados, consideramos que foi possível identificar o desenvolvimento da visualização espacial dos alunos no contexto das atividades desta pesquisa. Este desenvolvimento, conforme já salientado, se deu de maneira gradual e conforme o avanço das atividades. Tal identificação nos permitiu interpretar que este tipo de exercício poderia ser mais frequentemente abordado na matemática do Ensino Fundamental, pois os alunos apresentaram maturidade para exercitar este tipo de visualização.

Considerando a importância das reflexões acerca da prática em uma pesquisa, e tendo em vista que adaptações e reformulações nas sequências didáticas fazem parte desse processo, sugerimos, em futuras implementações, a solicitação de desenhos dos alunos com prévias das imagens que seriam frutos das rotações solicitadas. Estes desenhos poderiam permitir que fosse possível analisarmos com maior riqueza de detalhes a rotação mental e demais processos de visualização dos alunos. Para esta adaptação, pensamos em dois modelos de aplicação: presencial e remoto. No caso da presencial, poderiam ser entregues materiais impressos com espaços para estes desenhos. Esta ideia teria sido aplicada à nossa sequência se não estivéssemos em pandemia. E no caso de aplicação remota, temos a sugestão do recurso de notas²¹ do GeoGebra, que permitiria desenhos e rascunhos simples, mas ainda sim válidos para maiores detalhes para análise.

Encerramos este capítulo enfatizando o quanto foi importante para a professora pesquisadora a oportunidade de desenvolver este trabalho, além de toda a aprendizagem construída ao longo do estudo nas disciplinas cursadas no decorrer do mestrado. Tal oportunidade permitiu a professora pesquisadora perceber a importância do constante aperfeiçoamento profissional, tendo em vista que, como educadora, as demandas de atualização, principalmente tecnológicas, se dão constantemente. Esperamos que este

²¹ Disponível em: <https://www.geogebra.org/notes>. Acesso em: 20 jan. 2021

trabalho venha a contribuir para a pesquisa em educação matemática, assim como à prática da pesquisadora e dos demais professores que se interessarem pela temática aqui abordada.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A. **Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos.** In: MACHADO, S,D,A. Aprendizagem em Matemática. Registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus editora. 2010.
- ANDRÉ, M.; LÜDKE, M. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 2015.
- BORSOI, C. **Geogebra 3D no Ensino Médio: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial.** 159 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática (IM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS), 2016.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Porto: Porto Editora, 1991
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Brasília: MEC. 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf Acesso 20 julho de 2019.
- CARVALHO, F. P. S. **Ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria espacial em um ambiente dinâmico e interativo.** 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática), Universidade Federal de Goiás, Goiânia (GO), 2011.
- CHAACHOUA, H. **Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace étude d'un cas: la vie des problèmes de construction et rapports des enseignement à ces problèmes.** 1997. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Universidade Joseph Fourier, Grenoble, 1997.
- DUVAL, R. **A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning oh mathematics.** p. 1 – 29. 2008. Disponível em: http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/5semiotic.pdf Acesso em: 20 de jul. 2019
- DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In: MACHADO, S,D,A. Aprendizagem em Matemática. Registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus editora. 2010.
- DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Florianópolis, v.07, n.2, p.266-297, 2012.
Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>
Acesso em: 18 jul. 2019
- FLORES, C. R. **Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem.** Boletim de Educação Matemática, vol. 19, núm. 26, 2006, pp. 1-22 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil.

FREITAS, J.L.M.. **Registros de representação na produção de provas na passagem de aritmética para a álgebra.** In: MACHADO, S,D,A. Aprendizagem em Matemática. Registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus editora. 2010.

GRAVINA, M. A., BASSO, M. V. A., **Mídias Digitais na Educação Matemática.** In: GRAVINA, M. A., BÚRIGO, E. Z., BASSO, M.V.A., GARCIA, V.C.V. (org.) Matemática, Mídias Digitais e Didática - tripé para formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

GRAVINA, M. A; BARRETO, M.M. **Geometria através de hipertextos com animações interativas.** CINTED – UFRGS. V. 8 N° 2, julho, 2010

GRAVINA, M. A. **O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa.** Revista Eletrônica VIDYA. v. 35, n.2, p. 237-253, jul./dez. 2015 - Santa Maria.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de Geometria Dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo.** 2001. 277f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GUTIÉRREZ, A. **Procesos y habilidades en visualización espacial.** Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría, p. 44-59, 1992. Disponível em <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>
Acesso: 25 de julho de 2019

GUTIÉRREZ, A. **Children's ability for using different plane representations of space figures.** IN: Batturo, A.R. (ed.), New directions in geometry education (Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T.: Brisbane, Australia), p. 33-42, 1996. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>
Acesso: 26 de julho de 2019.

GUTIÉRREZ, A. **Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework.** Proceedings of the 20th PME Conference 1, p. 3-19, 1996. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>
Acesso em 26 de julho de 2019.

GUTIÉRREZ, A. **Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial.** Revista EMA 3.3, p. 193-220, 1998. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>
Acesso: 27 de julho de 2019.

MARANHÃO, M.C.S.A; IGLIORI, S.B.C. **Registros de representação e números racionais.** In: MACHADO, S,D,A. Aprendizagem em Matemática. Registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus editora. 2010.

NOTARE, M. R; FIOREZE, L, A. HALBERSTADT, F. **O software GrafEq e os registros de representação semiótica: uma análise de trabalhos com ilusão de ótica** XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

PALLES, C. M. **Um estudo do icosaedro a partir da visualização em geometria dinâmica.** 2013. 74 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

RITTER, A.M. **A visualização no ensino de geometria espacial.** 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática (IM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS), 2011.

SALAZAR, J.V.F; ALMOULOUD, S.A. **Registro figural no ambiente de geometria dinâmica.** São Paulo. v17. n5. Pp. 919 – 941, 2015.

VIEIRA, C. R. **Reinventando a geometria no Ensino Médio: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a teoria de Van Hiele.** 151 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB), Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto (MG), 2010.

APÊNDICE A

Porto Alegre, 30 de abril de 2019.

Prezado Professor Marcelo Figueiró
Diretor da Escola La - Salle Pão dos Pobres

A professora Daniele Vargas Oliveira atualmente é mestranda regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEMat) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do PPGEMat, o mestrando está desenvolvendo a pesquisa intitulada: **Movimentos de Rotação no GeoGebra: Visualização Espacial no Ensino Fundamental**, para a conclusão de sua dissertação, na qual é exigida para que possa adquirir o título de Mestre em Educação Matemática.

A dissertação produzida deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto orientadora responsável, reiteramos nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixamos à disposição o seguinte telefone de contato: (51)3308.6212 (Secretaria do PPGEMat), e o seguinte e-mail: vandoir.stormowski@ufrgs.br.

Agradecemos a sua atenção.
Cordialmente,

VandoirStormowski
Professor do PPGEMat

APÊNDICE B

TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, aluno(a) da turma _____, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada: **Movimentos de Rotação no GeoGebra: Visualização Espacial no Ensino Fundamental**, desenvolvida pela pesquisadora **Daniele Vargas Oliveira**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por **VandoirStormowski**, professor acadêmico da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação, a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Aprimorar a aprendizagem de matemática dos alunos a partir do software GeoGebra;
- Construir conceitos de Geometria a partir das ações do programa.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de meu nome ou nome fictício e pela idade.

A minha colaboração se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina, em que serei observado(a) e minha produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Porém, para que não ocorram constrangimentos, estou ciente de que será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, estou ciente de que poderei deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, é esperado desde estudo, produzir informações importantes sobre Tecnologias Digitais na Educação Matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes à educação.

Ciente também, de que minha colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Porto Alegre, _____ de _____ de _____.

Assinatura do aluno:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE C

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, R.G. _____, responsável pelo(a) aluno(a) _____, da turma _____, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada: **Movimentos de Rotação no GeoGebra: Visualização Espacial no Ensino Fundamental**, desenvolvida pela pesquisadora **Daniele Vargas Oliveira**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por VandoirStormowski, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, pelo e-mail vandoir.stormowski@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Aprimorar a aprendizagem de matemática dos alunos a partir do software GeoGebra;
- Construir conceitos de Geometria a partir das ações do programa.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre Tecnologias Digitais na Educação Matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, ____ de _____ de _____.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE D

Produto final organizado em um livro da plataforma GeoGebra: disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ek592e2g>. Acesso em: 20 nov. 2020

Links com as atividades que compõe o livro:

Encontro 1:

- Atividade 1: disponível em: <https://www.geogebra.org/m/gnqur4jh>. Acesso em: 10 jul. 2020.
- Atividade 2: disponível em: <https://www.geogebra.org/m/bm3cdppa>. Acesso em: 20 de nov. 2020.
- Atividade 3: disponível em: <https://www.geogebra.org/m/mfuyjhmy>. Acesso em: 20 de nov. 2020.

Encontro 2

- Atividade 1: disponível em: <https://www.geogebra.org/m/xsnvf32>. Acesso em: 20 de nov. 2020.
- Atividade 2: disponível em: <https://www.geogebra.org/m/gz3dbt6v> Acesso em: 20 de nov. 2020.
- Atividade 3: disponível em: <https://www.geogebra.org/m/vgdbhrub>. Acesso em: 20 de nov. 2020.

Encontro 3

- Atividade 1: Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/g6vc7hjk>. Acesso: 20 de nov. 2020.
- Atividade 2: Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/s5ssmjpn>. Acesso: 20 de nov. 2020.
- Atividade 3: Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qwmayy27>. Acesso: 20 de nov.2020.
- Atividade 4: Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/cff6jdka> . Acesso: 20 de nov. 2020.

Encontro 4

- Atividade1: Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/fzycekeq>. Acesso em: 20 de nov. 2020.
- Atividade 2: Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/rfewztbe>. Acesso em: 20 de nov. 2020.

Encontro 5

- Atividade 1: disponível em: <https://www.geogebra.org/m/dkyy4ec5> Acesso em: 20 de nov.2020.
- Atividade 2: Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/eccxsjqe> Acesso em: 20 de nov. 2020.
- Atividade 3: Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qxdmzss7> Acesso em: 20 de nov. 2020.

Encontro 6

- Atividade 1: Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/djmarhh6>. Acesso em: 20 de nov.2020.

- Atividade 2: Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/kqnmgtww>. Acesso em: 20 de nov.2020.

APÊNDICE E

Produto Didático

O produto técnico desta dissertação consiste no conjunto de atividades da sequência didática que foi aplicada na presente pesquisa.

A sequência didática deste trabalho aborda conceitos de geometria plana e espacial, tais como rotação bidimensional e tridimensional, posições relativas entre retas, ângulo e visualização espacial no plano cartesiano e por meio da construção de superfícies de revolução, no contexto do GeoGebra. As atividades estão agrupadas por encontros – numerados de 1 a 6 – de acordo com o tema principal de estudo.

Encontro 1

Neste encontro trabalham-se conceitos de coordenada e plano cartesiano, com a apresentação da coordenada z. Também é abordado o controle deslizante, em que os alunos devem relacionar sua atuação com as coordenadas de um ponto.

Objetivos
<ul style="list-style-type: none"> - Construir com os alunos o conceito de coordenada do sistema cartesiano; - Familiarizar os alunos com o software; - Retomar com os alunos eixos X e Y e apresentar o eixo Z; - Construir com os alunos o conceito de coordenada do sistema cartesiano (abscissa, ordenada e cota). - Apresentar o recurso controle deslizante.

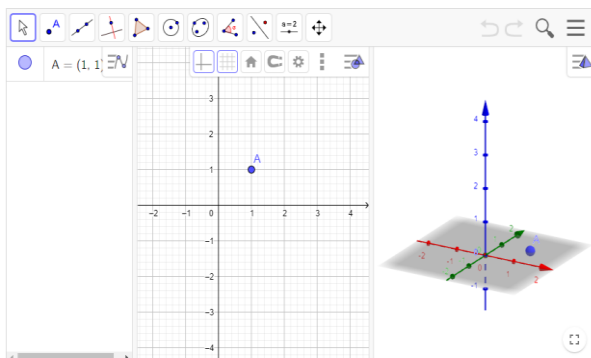
O encontro está subdividido em três atividades denominadas:

- Atividade 1: 2D e 3D;
- Atividade 2: Eixos X, Y e Z;
- Atividade 3: Controle Deslizante;

ATIVIDADE 1

- a) Com suas palavras, explique o que você entende como a diferença entre 2D e 3D.
- b) Faça uma pesquisa na internet e responda novamente

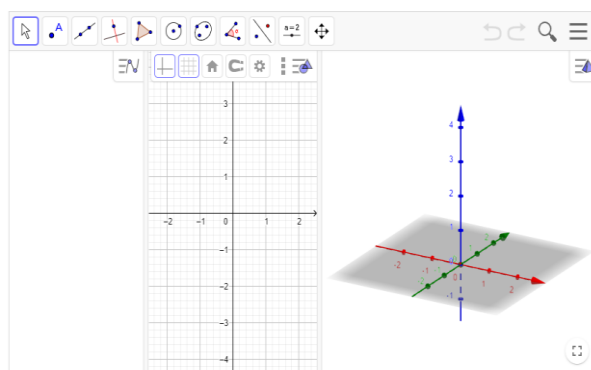
Movimente o ponto a seguir na janela 2D (é a janela de visualização do meio) e observe as três janelas de visualização (algébrica, 2D e 3D) em relação aos movimentos deste ponto.



c) Primeiramente, vamos pensar no que você observou na janela algébrica durante o movimento. O que mudava nesta janela conforme você trocava a posição do ponto?

d) A partir das suas observações referentes aos sinais dos números na janela algébrica, você consegue relacionar estes sinais com a posição do ponto? Explique esta relação que você observou.

e) Utilizando as informações que você verificou, construa um ponto na janela 2D na posição (-1,-1), habilite rastro com o botão direito do mouse sobre o ponto e depois movimente-o até chegar na posição (-2,3).



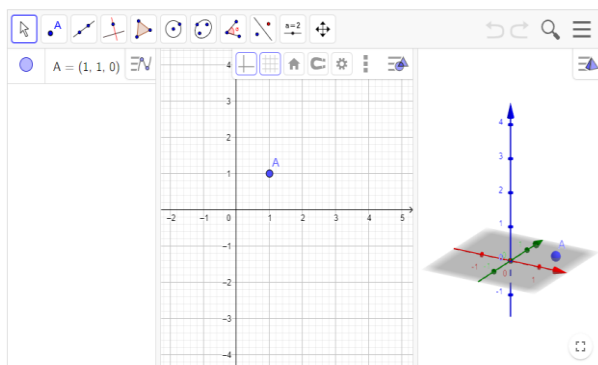
f) Como se chama a posição de cada número dentro dos parênteses e com qual eixo ele está relacionado? Pesquise na internet, e explique com suas palavras.

Nesta primeira atividade do Encontro 1, busca-se trabalhar os conceitos de coordenada e eixos X e Y, bem como suas representações nas dimensões 2D e 3D. Os movimentos do ponto deverão ser realizados na janela de visualização 2D. Também propõe-se que os alunos iniciem a visualização das relações entre os tratamentos dos registros 2D e

3D bem como identifiquem a conversão simultânea entre os registros algébrico e gráfico bidimensional.

ATIVIDADE 2

Movimente o ponto na janela 3D, sempre observando seu movimento no espaço e suas relações com as janelas algébrica e 2D.



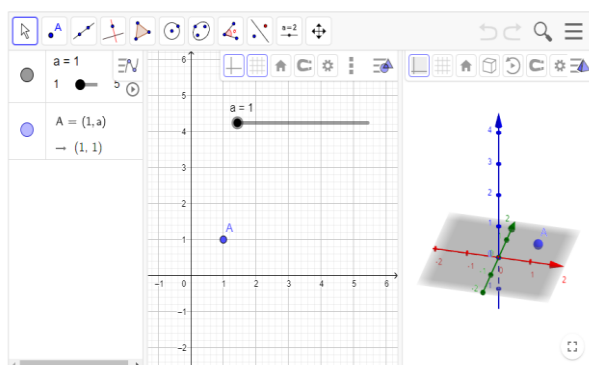
- Primeiramente, vamos pensar no que você observou na janela algébrica durante o movimento. O que você notou de diferente em relação à atividade anterior com o ponto na janela 2D? O que mudava nesta janela conforme você trocava a posição do ponto?
- Pense em todas as situações que você observou que os números na janela algébrica mudaram de sinal. Você consegue relacionar estes sinais com a posição do ponto? Explique esta relação que você observou.
- A partir das informações que você verificou, utilizando apenas a janela 3D, construa um ponto, habilite rastro e depois coloque-o na coordenada $(-2, 1, 0)$.
- Observe cada número dentro do parênteses e responda: qual eixo (cor) ele está relacionado?
- Pesquise e registre aqui o nome dos três eixos (verde, vermelho e azul) que aparecem na janela 3D e também o nome de cada um dos números que compõe a coordenada do ponto.
- Vamos nos atentar as suas observações em relação à janela 2D. Quais são os eixos que aparecem ao mesmo tempo nas duas janelas gráficas?
- Como você explicaria a ausência do terceiro eixo na janela 2D? Qual o nome deste eixo?

Nesta segunda atividade, segue o trabalho com coordenadas e eixos, com a introdução do eixo Z. Neste momento os movimentos do ponto passarão a ser realizados na janela de visualização 3D. Esperamos que os alunos identifiquem e estabeleçam relações ao visualizarem os tratamentos entre as janelas 2D e 3D, bem como as conversões entre os

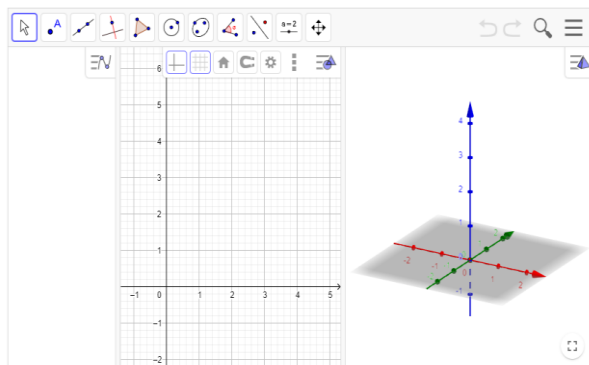
tratamentos algébrico e gráfico, agora tridimensional. Na identificação do eixo z, espera-se que os alunos apliquem a habilidade de construir as relações entre os objetos observados.

Atividade 3

Nesta etapa, vamos conhecer e trabalhar com o **controle deslizante** (ou seletor), um recurso do GeoGebra muito interessante. A seguir, temos um exemplo de uma possibilidade de utilização do controle deslizante. Movimente-o e observe sua atuação.



- Pensando nos limites do controle deslizante, qual é o valor máximo? E o valor mínimo?
- Movimente novamente o controle deslizante e observe o ponto e as janelas 2D e 3D. O que se mantém sempre constante? O que muda?
- Observe a janela 2D e a algébrica durante o movimento do controle. Onde você consegue perceber a atuação do controle deslizante?
- Crie, na janela de visualização 2D, um ponto A e um controle deslizante(ou seletor), de nome b, com valor mínimo 0 e máximo 5. Em seguida troque as duas coordenadas do ponto A por b. Movimente o controle deslizante e observe o movimento do ponto a.



- Registre o movimento que você observou. Como o movimento ficou? Alguma coisa se mantém?

f) Como você explicaria o funcionamento do controle deslizante?

Nesta última atividade, busca-se trabalhar os conceitos matemáticos envolvidos nas atividades anteriores por meio do uso de um novo recurso: o controle deslizante. Este recurso também será utilizado nos encontros posteriores.

Encontro 2

Este encontro aborda duas atividades iniciais compostas de movimentos de rotação de pontos e segmentos de reta, com o objetivo de trabalhar a visualização tridimensional. Na atividade final é solicitada uma construção que exige as habilidades exercitadas nas atividades anteriores.

Objetivos

- Observação e compreensão visual do raio de uma circunferência;
- Trabalhar com a habilidade de visualização espacial;

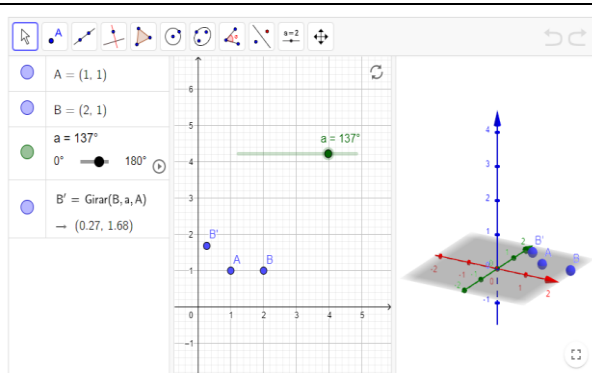
O encontro está subdividido em três atividades denominadas:

- Atividade 1: Rotações de pontos;
- Atividade 2: Rotações de segmentos de reta;
- Atividade 3: Construção

Atividade 1

Nesta primeira parte do encontro, vamos continuar trabalhando com o controle deslizante (ou seletor), com algumas modificações, e iniciaremos o trabalho com o recurso **rotação em torno de um ponto** que o GeoGebra tem.

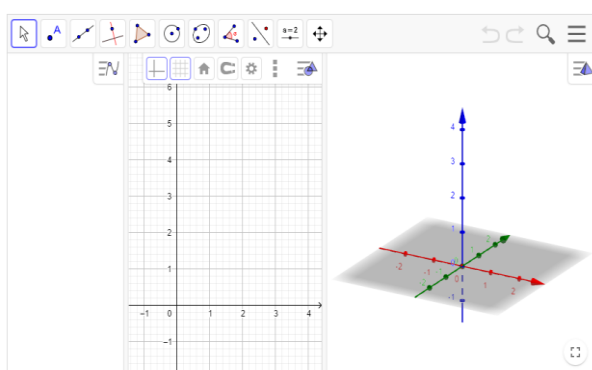
Movimente e observe o deslocamento dos pontos a seguir.



a) Qual ponto está sendo rotacionado e em torno do que? Este movimento forma qual figura?

b) Quais são os limites do controle deslizante, ou seja, seu valor máximo e seu valor mínimo? Em que unidade de medida estão esses limites?

Reproduza esta situação, com o ponto B dando uma volta completa em torno do ponto A, por meio de um controle deslizante (ou seletor). Todos os próximos itens serão respondidos com base nesta construção.



e) Qual o nome da figura que a trajetória do ponto faz ao movimentarmos o controle deslizante? Após responder, clicando com o botão direito do mouse no ponto que se movimenta, selecione habilitar rastro para observar melhor a figura.

f) Com o movimento do controle deslizante, observe a distância do ponto que está se movendo para o ponto que está no centro. O que é possível concluir em relação a esta distância?

g) Explore as ferramentas do GeoGebra e crie, na janela de visualização 2D, um segmento com uma extremidade no centro e a outra extremidade no ponto que se movimenta. Com base nos seus conhecimentos, como se chama essa distância representada por esse segmento, em relação a circunferência?

h) Vamos pensar no perímetro desta figura. Você lembra o que significa perímetro? Você consegue perceber uma relação entre o comprimento do segmento e o perímetro da figura?

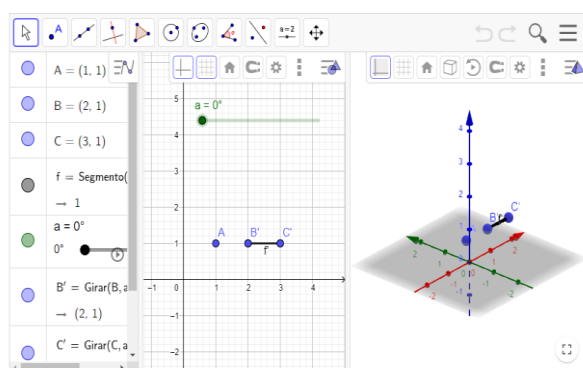
i) Na figura que você construiu como você faria para descobrir o tamanho do raio? E qual é o tamanho?

j) Habilite rastro no segmento construído e movimente. Explique o que há de diferente entre esta nova figura e a figura do item anterior.

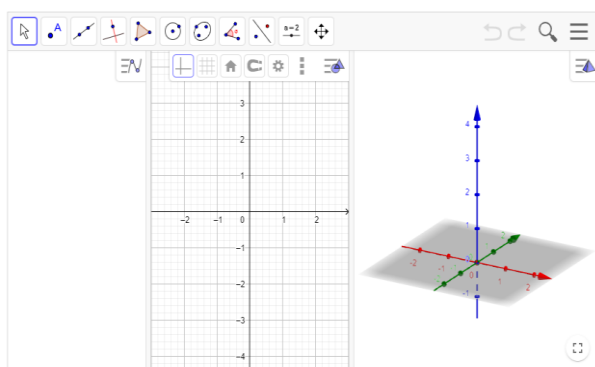
Nesta atividade inicia-se o trabalho com o controle deslizante em graus e com sua atuação associada ao recurso de rotação em torno de um ponto.

ATIVIDADE 2

Movimente o controle deslizante (seletor) e observe o deslocamento da construção a seguir.



- a) Qual a figura que o movimento forma? Que diferença tem da figura formada na atividade anterior?
- b) Reproduza a construção, com o segmento dando uma volta completa em torno do ponto A, por meio de um controle deslizante (seletor). Respondam os itens a seguir (d, e, f e g) com base nesta construção.



- c) Qual a figura que o movimento forma? Que diferença tem da figura formada no item a? (habilite rastro para verificar a figura)
- d) Modificando o segmento em relação ao alinhamento dos pontos A, B, C, descreva a mudança que você imagina que vai acontecer na figura.
- e) Habilite o rastro e descreva o que você observou. A figura resultante tem semelhança com o que você desenhou? Se não, descreva as diferenças.

Nesta última atividade exige-se a reprodução de uma construção que estava exposta apenas na janela de visualização 3D, mas deveria ser construída na janela de visualização 2D.

Encontro 3

O encontro 3 consiste em atividades iniciais que envolvem rotação de pontos em torno dos 3 eixos (x, y e z), com cada eixo separado por atividade. Na sequência o encontro será finalizado com a solicitação de uma reprodução de uma construção que foi exposta em uma imagem estática.

Objetivos

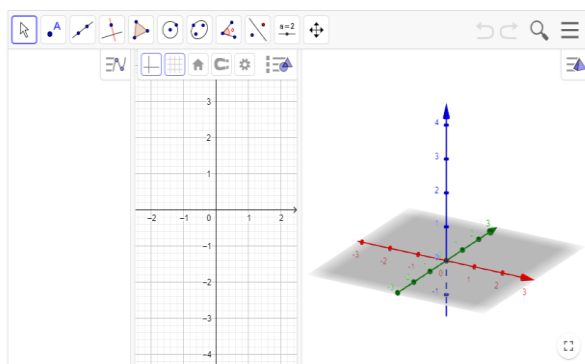
- Trabalhar com a habilidade de visualização espacial;
- Consolidação da coordenada Z de um ponto.

O encontro está subdividido em quatro atividades denominadas:

- Atividade 1 : Rotações no eixo x;
- Atividade 2: Rotações no eixo y;
- Atividade 3: Rotações no eixo z;
- Atividade 4: Construção

ATIVIDADE 1, 2 e 3

Crie um ponto A e um controle deslizante (seletor) de 0° a 360° na janela de visualização 2D. Troque o nome do controle deslizante para uma letra a sua escolha. Depois, Rotacione este ponto em torno do eixo (atividade 1 – eixo x; atividade 2 – eixo y; atividade 3 – eixo z), na janela de visualização 3D, utilizando o recurso girar em torno de uma reta. (ou rotação objeto, eixo)



a) Observando o movimento do ponto na janela de visualização 3D, observe a janela algébrica e analise o ponto que está sendo rotacionado. O que você observa com as três coordenadas desse ponto na janela algébrica?

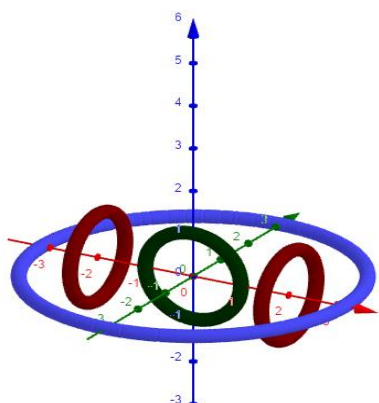
b) Movimente o controle deslizante e observe como isto reflete na janela de visualização 2D. Como você explica o que está acontecendo nesta janela?

c) Descreva o que você observa na janela 3D ao movimentar o controle deslizante. Qual a diferença em comparação ao que você estava visualizando na janela 2D? Habilite rastro para verificar melhor.

ATIVIDADE 4

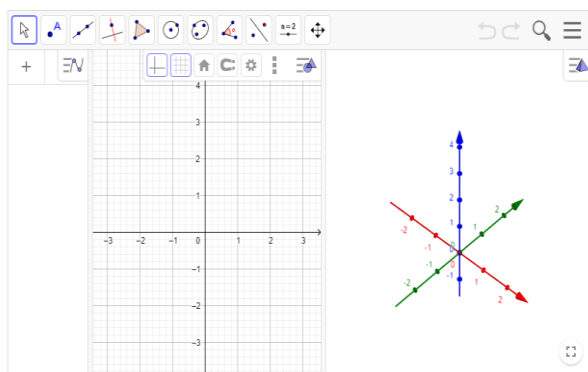
Construção

Observe a imagem a seguir:



a) Registre todas as informações que você conseguir observar, tais como: eixos envolvidos, objetos geométricos utilizados na construção e demais informações que você conseguir verificar.

b) Pensando em tudo que você construiu e aprendeu nas atividades anteriores deste encontro, tente reproduzir a construção:



c) Durante a construção, o que você teve mais facilidade para visualizar?

d) E o que você teve mais dificuldade em visualizar?

Os movimentos de rotação serão solicitados pela primeira vez na janela de visualização 3D e, a partir desta construção, sempre será solicitada aos alunos a apresentação de como foram observadas as informações necessárias para a construção, bem como suas facilidades e dificuldades em realizá-la.

Encontro 4

Este encontro consiste na solicitação de duas construções, em que espera-se que os alunos apliquem as habilidades exercitadas nas atividades anteriormente realizadas que envolviam rotações de pontos e segmentos de reta.

Objetivos

- Exercício da habilidade de visualização espacial.
- Exercício da compreensão das coordenadas de um ponto em espaço tridimensional.

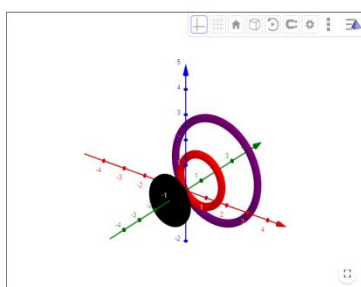
O encontro está subdividido em duas atividades denominadas:

- Atividade 1 : Construção 1
- Atividade 2: Construção 2

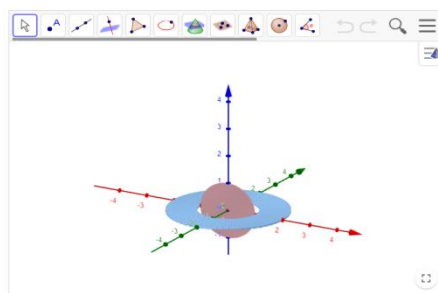
Atividades 1 e 2

Observe a construção a seguir:

ATIVIDADE 1

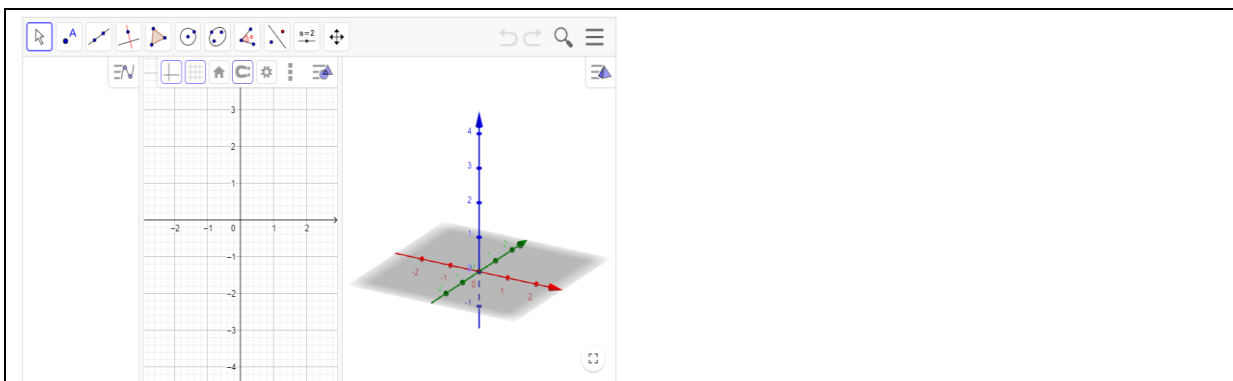


ATIVIDADE 2



a) Registre todas as informações que você conseguir observar, tais como: eixos envolvidos, objetos geométricos utilizados na construção e demais informações que você conseguir verificar.

b) Pensando em tudo que você construiu e aprendeu nas atividades anteriores deste encontro, tente reproduzir a construção:



- c) Durante a construção, o que você teve mais facilidade para visualizar?
- d) E o que você teve mais dificuldade em visualizar?

Na primeira construção espera-se que os alunos observem que a figura é gerada pela rotação de dois pontos e de um segmento de reta, todos em torno do eixo y . Na segunda, que é gerada por rotações de segmentos de reta, sendo que uma estava em torno de eixo y e a outra do eixo z . Nesta atividade, retoma-se a exposição da construção, sempre restrita à janela de visualização 3D, para que os alunos possam movimentá-la e observá-la de diferentes perspectivas.

Encontro 5

Este encontro consiste na solicitação de construções de segmentos de reta em específicas posições relativas aos eixos, para posterior rotação em torno dos três eixos (x , y e z).

Objetivos

- Exercício da visualização espacial;
- Aplicação de conceitos de geometria de posição. (posição entre retas)

O encontro está subdividido em três atividades denominadas:

- Atividade 1: Rotações de segmentos 1
- Atividade 2: Rotações de segmentos 2
- Atividade 3: Rotações de segmentos 3

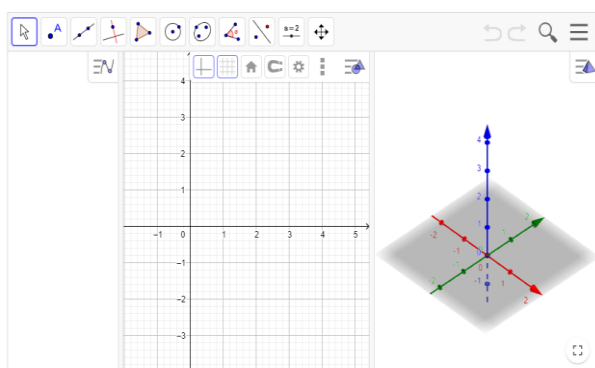
ATIVIDADES ENCONTRO 5

Construa um segmento, na janela 2D:

Atividade 1: paralelo ao eixo y e não concorrente ao eixo x .

Atividade 2: perpendicular ao eixo y .

Atividade 3: concorrente ao eixo y .

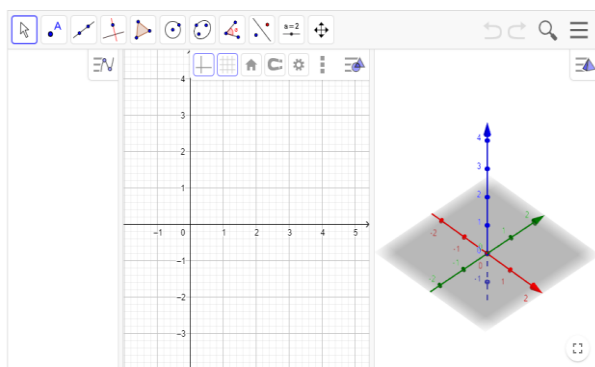


a) Imagine este segmento sendo rotacionado em torno do eixo x . Que figura você imagina que se formará na janela de visualização 2D? E na 3D?

b) Agora realize a rotação e habilite rastro para verificar a figura construída. Foi a que você imaginou? Se não o que ficou diferente?

c) Imagine este mesmo segmento sendo rotacionado em torno do eixo y . Que figura você imagina que se formará na janela de visualização 2D? E na 3D?

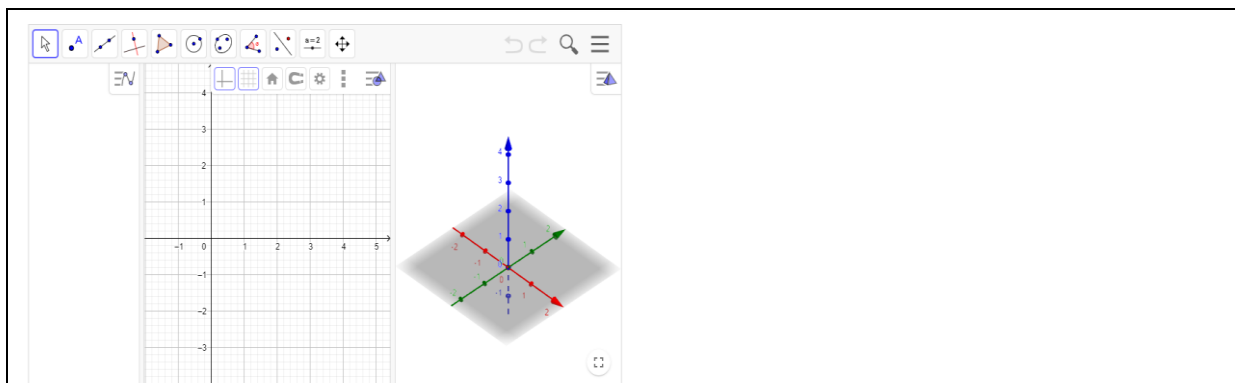
Construa o segmento, realize a rotação em torno do eixo y e habilite rastro para verificar a figura.



d) Foi a que você imaginou? Se não o que ficou diferente?

e) Finalmente imagine este segmento sendo rotacionado em torno do eixo z . Que figura você imagina que se formará na janela de visualização 2D? E na 3D?

Construa o segmento, realize a rotação em torno do eixo z e habilite rastro para verificar a figura.



f) Foi a que você imaginou? Se não o que ficou diferente?

Na primeira atividade é solicitada a construção de um segmento de reta paralelo ao eixo y e não concorrente ao eixo x , na segunda um segmento perpendicular ao eixo y e finalmente, na terceira atividade, um segmento concorrente ao eixo y . Nas três atividades, é pedido aos alunos que realizem a rotação destes segmentos em torno dos três eixos, um de cada vez, em um applet único para cada rotação.

Encontro 6

Neste último encontro aborda-se um fechamento que busca englobar as habilidades exercitadas ao longo dos encontros anteriores.

Objetivos

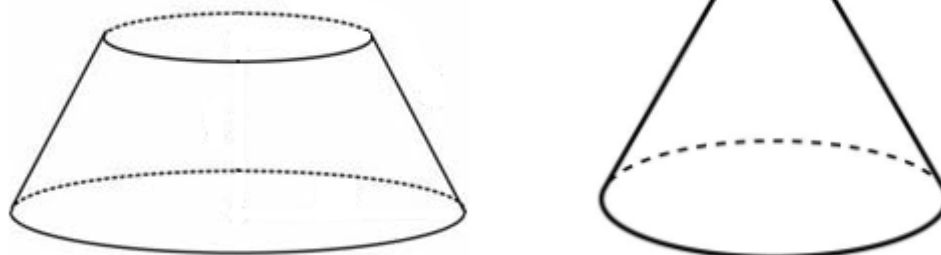
- Exercício da visualização espacial;
- Aplicação de conceitos de geometria de posição. (posição entre retas)

O encontro 6 está subdividido em duas atividades:

- Atividade 1: Superfícies de Revolução
- Atividade 2: Construção

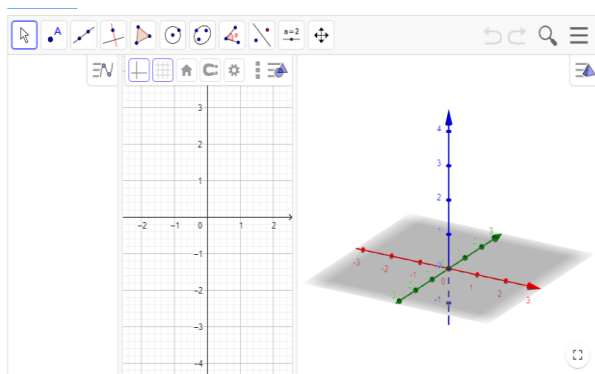
Atividade 1

Observe as figuras a seguir:



a) Para a construção das imagens acima, por meio da rotação, como você imagina que deveriam estar posicionados os segmentos? Descreva a posição dos segmentos.

Construa-os.



b) Sua primeira tentativa de construção deu certo? Se não, o que você teve que mudar para corrigir?

Nesta primeira etapa do encontro 6 espera-se que os alunos reproduzam as duas superfícies de revolução apresentadas, por meio da rotação de segmentos de reta e/ou pontos em torno de eixos à sua escolha.

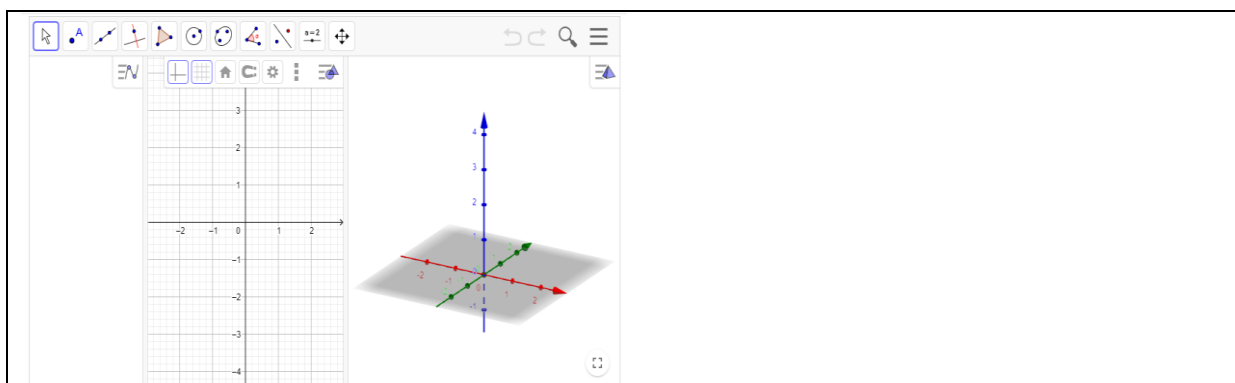
ATIVIDADE 2

a) Escolha, livremente, um objeto que você consiga imaginar sua reprodução no GeoGebra, por meio da rotação de segmentos e/ou pontos em torno de um eixo à sua escolha.

b) Qual objeto você escolheu? Explique a razão de sua escolha.

c) Descreva como você pretende realizar a construção. (Posição segmentos, rotação eixo...)

Realize sua construção:



d) Você conseguiu realizar a construção? Quais foram as suas principais dificuldades?

Nesta última etapa solicita-se aos alunos que escolham um objeto qualquer que eles pensem ser possível representar, por meio da rotação de segmentos de reta e/ou pontos.