UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dimensão Métrica Média de Deslocamentos de Tipo Finito em Alfabetos Compactos

Dissertação de Mestrado

Gustavo Sperotto Pessil

Porto Alegre, 06/09/2021

Dissertação submetida por Gustavo Sperotto Pessil[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Alexandre Tavares Baraviera (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:

Dr. Artur Oscar Lopes (PPGMat-UFRGS)

Dr. Lucas da Silva Oliveira (PPGMat-UFRGS)

Dr. Paulo Cesar Rodrigues Pinto Varandas (FCT-CMUP)

[1]Bolsista da Coordenacão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Agradecimentos

Os que me conhecem sabem o quão incomum é que minhas expressões de afeto venham em forma de palavras. Aqui trago uma breve, mas verdadeira, mensagem aos que fizeram parte da minha jornada...

Em primeiro lugar, agradeço à minha família pelo amor incondicional e todo o suporte em uma escolha de carreira tão peculiar. Mesmo sem ter uma pista do que eu estava trabalhando nesses últimos anos, sempre me apoiaram e vibraram com as minhas conquistas como se fossem suas, e são.

Agradeço à todos os amigos do Leonardo da Vinci. Muitos comigo desde 2003, passamos por diversas fases da vida, crescemos e nos mantivemos juntos.

Em minha vida, tive maravilhosos mentores. Agradeço ao prof. Alexandre Baraviera por todo o trabalho, parceria e conversas descontraidas que fizeram esse mestrado ter um ar tão leve. Em minha graduação, tive 3 pilares principais. Agradeço ao prof. Eduardo Brietzke por ser um exemplo de humildade e disponibilidade em sala de aula: és o modelo de professor que quero me tornar. Agradeço à prof. Sílvia Lopes por acreditar em mim e me motivar a antecipar meus estudos em temas mais avançados. Agradeço ao prof. Artur Lopes que me ensinou, acima de tudo, a ver a matemática de uma forma muito mais heurística e intuitiva. Por fim, meu agradecimento mais especial vai para a "sora Miriam", da quinta série. Fostes sempre uma fonte de alegria para todos os alunos e, em especial para mim, a primeira pessoa à sugerir, em uma de minhas provas, que deveria seguir este caminho. Estás para sempre em meu coração.

Agradeço a todas as pessoas incríveis que tive a oportunidade de conviver dentro do PPGMat-UFRGS e que me proporcionaram aprendizados muito além da matemática. Em especial agradeço ao meu grande amigo Guilherme, com quem compartilhei a maior parte dessa jornada.

Agradeço à minha segunda família durante a pandemia: Yuri, Renata, Pokemon e Yubel - Pesadelo Supremo foram essenciais para a minha estabilidade emocional durante esse período instavel no qual escrevi esta dissertação.

Por fim, agradeço às agências de fomento CNPq e Capes por todo o suporte à ciência no Brasil e, em particular, ao meu projeto. Durante o momento obscuro em que vivemos, no qual tais entidades foram fortemente desestimuladas, a conta não demorou a chegar. Sonho com um Brasil livre de negacionismo e com forte investimento tanto nas ciências aplicadas quanto nas de base. Viva a ciência! Viva o SUS!

Resumo

Deslocamentos de tipo finito são uma classe de sistemas, com entropia topológica conhecida, definidos em determinados subespaços invariantes de $\{1,...,d\}^{\mathbb{K}}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. No presente texto, substituimos o alfabeto finito por um métrico compacto X para estudar deslocamentos com transições dadas por um conjunto fechado $\Gamma \subset X \times X$. Em geral, tais deslocamentos terão entropia infinita, conduzindo ao estudo da sua dimensão métrica média. Provamos que a dimensão de sistemas unilaterais e bilaterais induzidos por um mesmo Γ coincidem, como é o caso da entropia, calculamos explicitamente o seu valor em uma classe de exemplos e mostramos uma aplicação do modelo em ações de semi-grupos finitamente gerados.

Para mostrar tais resultados, antes obtemos uma prova simples e análoga ao caso da entropia de que para qualquer $f : X \to X$ contínua num métrico compacto, sua restrição a $\cap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$ tem dimensão métrica média total.

Os resultados originais do texto são: Corolário 5.6, Teorema 6.2, Teorema 6.5, Corolário 6.6 e o Teorema 7.2.
Palavras-chave: Deslocamento de tipo finito, entropia topológica, dimensão métrica média.

Abstract

Subshifts of finite type are a class of systems, with known topological entropy, defined on certain invariant subspaces of $\{1,...,d\}^{\mathbb{K}}$, where $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ or $\mathbb{Z}$. In the present text, we replace the finite alphabet by a compact metric one X in order to study subshifts with transitions described by a closed subset $\Gamma \subset X \times X$. In general, such systems will have infinite topological entropy, leaning towards the study of its metric mean dimension. We prove that the dimension of unilateral and bilateral systems induced by the same Γ coincide, as it is the case of entropy, calculate its value explicitly on a class of examples and show an application of the model to finitely generated semi-group actions.

To show such results, before we obtain a simple proof, analogous to the entropy case, that for any continuous $f : X \to X$ on a compact metric space, its restriction to $\cap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$ has full metric mean dimension.

The original results of the text are Corollary 5.6, Theorem 6.2, Theorem 6.5, Corollary 6.6 and Theorem 7.2.
Keywords: Subshift of finite type, topological entropy, metric mean dimension.

Sumário

1 Introdução

Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma aplicação contínua. No presente texto, um sistema dinâmico é dado pelo par (X, f). A teoria de sistemas dinâmicos se baseia em entender as trajetórias, ou órbitas, dos elementos $x \in X$ que evoluem no tempo ao iterarmos a função f, que deve ser pensada como a lei que descreve o movimento de cada ponto ao avançarmos uma unidade de tempo. Assim, a órbita de um ponto $x \in X$ é o conjunto

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\}$$

que descreve por onde o ponto x transita ao longo de todos os tempos positivos.

Diferentes sistemas podem ter propriedades muito distintas, como existência de órbitas periódicas, densas, entre outras. Assim, é útil para a teoria associar quantidades e propriedades que sejam invariantes entre sistemas que queremos entender por equivalentes em algum sentido. Dizemos que os sistemas (X, f) e (Y, g) são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que

$$f = h^{-1} \circ g \circ h,$$

ou seja, se a menos de uma mudança de coordenadas, que preserva propriedades topológicas, os sistemas são o mesmo. Certas quantidades, que podem depender das métricas dos espaços, por exemplo, podem requerir regularidade adicional em h para serem preservadas.

As duas tais quantidades de maior interesse no presente texto são a entropia topológica e a dimensão métrica média. Como os nomes sugerem, a primeira depende apenas da topologia gerada enquanto a segunda depende, também, da métrica geradora. Essas duas noções são semelhantes e suas propriedades podem ser mais claramente visualizadas quando temos em mente um terceiro conceito, não dinâmico: a dimensão de Minkowski. Os capítulos referentes a tais quantidades tem como objetivo a exposição dessas interações.

Da conexão entre as quantidades mencionadas, surge o objeto fundamental do texto. Partindo de um modelo conhecido e bem desenvolvido, os deslocamentos de tipo finito, onde se sabe explicitamente o valor da entropia, vem a seguinte questão: Se considerarmos, ao invés de um alfabeto finito, um métrico compacto (onde a entropia será quase sempre infinita) que tipo de informação temos sobre sua dimensão métrica média? O objetivo do texto é calcular uma classe de exemplos explicitamente, mostrar, qualitativamente, que a dimensão é a mesma ao considerarmos sequências unilaterais ou bilaterais, assim como é o caso da entropia [1] e exibir uma aplicação em ações de semi-grupos.

A estrutura geral do texto é a seguinte:

- O capítulo 2, sobre dimensão de Minkowski, é uma adaptação para o caso métrico compacto dos resultados em [4];
- O capítulo 3, de entropia topológica, segue [2] com algumas demonstrações sendo omitidas, por estarem presentes no anterior;
- Os capítulos 4 e 5, tratando de dimensão métrica média, herdam diversas propriedades dos anteriores, adicionando um Princípio Variacional de [3] que usamos para provar um corolário e o resultado sobre sequências unilaterais e bilaterais;
- Tratamos no capítulo 6 o modelo específico, como em [1], onde provamos os resultados mencionados;
- No capítulo 7, exibimos relações simples entre a noção de entropia e dimensão métrica média, proveniente do modelo, para ações de semi-grupos com outra noção de tais quantidades, que tem sido objeto de interesse em [10] e [11].
- Por fim, uma seção curta sobre ideias em desenvolvimento que, quem sabe, podem vir a ser úteis para formular uma expressão geral para a dimensão métrica média no modelo.

2 Dimensão de Minkowski

A geometria fractal é um ramo da matematica cujo interesse principal é a obtenção e entendimento da ideia de dimensão para diferentes tipos de conjuntos. Dimensões fractais estendem a ideia de que pontos tem dimensão zero, retas e curvas suaves tem dimensão 1, superfícies tem dimensão 2 e assim por diante. Inicialmente definida para conjuntos limitados em $\mathbb{R}^n$ e mais tarde adaptada para espaços métricos compactos, uma dessas dimensões é a chamada **dimensão de Minkowski** ou **box-counting dimension**.

Definição 2.1. Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $\epsilon > 0$. Denotando por $N(\epsilon) := N(X, d, \epsilon)$ a menor cardinalidade de uma $\epsilon-$cobertura aberta de X, ou seja, uma cobertura aberta cujos elementos tem diâmetro menor ou igual a ϵ, definimos a **dimensão de Minkowski inferior** e a **dimensão de Minkowski superior** por

$$\underline{dim}_M(X, d) = \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|} \qquad \overline{dim}_M(X, d) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|}.$$

Quando as quantidades acima coincidem, o limite obtido é chamado de **dimensão de Minkowski** e é denotado por

$$dim_M(X, d) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|}$$

No caso da dimensão estar definida, ela representa a quantidade β tal que

$$N(\epsilon) \approx \epsilon^{-\beta}$$

<u>Obs:</u> Se não houver confusão quanto à metrica, denotaremos simplesmente $dim_M(X)$.
<u>Obs:</u> Como citado anteriormente, a dimensão de Minkowski foi definida inicialmente para conjuntos limitados, não necessariamente compactos, de $\mathbb{R}^n$. A definição acima também vale para tais casos pois, como veremos a seguir, dim_M não difere conjuntos de seus fechos.

Definição 2.2. Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Dizemos que um conjunto $E \subset X$ é ϵ-separado se $d(x, y) > \epsilon$ para quaisquer $x, y \in E$.

Definição 2.3. Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Dizemos que um conjunto $E \subset X$ é ϵ-gerador se para qualquer $x \in X$ existe $y \in E$ tal que $d(x, y) < \epsilon$.

Obs: A compacidade do espaço sempre garante a existencia de conjuntos $\epsilon-$geradores finitos.

Teorema 2.4. *As dimensões de Minkowski superior e inferior são equivalentemente definidas se $N(\epsilon)$ for trocado por qualquer uma das seguintes quantidades*

- $N_1(\epsilon) =$ *O menor número de bolas fechadas de raio (ou diâmetro) ϵ que cobrem X*
- $N_2(\epsilon) =$ *O menor número de bolas abertas de raio (ou diâmetro) ϵ que cobrem X*
- $N_3(\epsilon) =$ *A menor cardinalidade de um conjunto $\epsilon-$ gerador contido em X*
- $N_4(\epsilon) =$ *A maior cardinalidade de um conjunto $\epsilon-$ separado contido em X*

Obs: A distinção entre raio e diâmetro em N_1 e N_2 não tem efeito prático nenhum no cálculo da dimensão, dado que a única coisa que, a princípio, mudaria entre os dois casos é o denominador que passaria a ser $|\log 2\epsilon|$. Nesse caso, multiplicando por $1 = \frac{|\log \epsilon|}{|\log \epsilon|}$, o denominador fica $|\log \epsilon|$ e o termo que sobra multiplicando é $\frac{|\log \epsilon|}{|\log 2\epsilon|} \to 1$. A prova abaixo é feita com o raio e, portanto, já temos $N(\epsilon) = N_2(2\epsilon)$

Prova.

- Claramente $N_1(\epsilon) \leq N_2(\epsilon)$

- Se $E \subset X$ é um conjunto $\epsilon-$gerador então $X = \bigcup_{x \in E} B(x, \epsilon)$, logo $N_2(\epsilon) \leq N_3(\epsilon)$

- Se E é um conjunto $\epsilon-$ separado maximal então dado qualquer $y \notin E$, $E \cup \{y\}$ não é $\epsilon-$separado e, portanto, existe $x \in E$ tal que $d(x, y) < \epsilon$, logo E é $\epsilon-$gerador. Logo $N_3(\epsilon) \leq \#E = N_4(\epsilon)$

- Se E é $\epsilon-$separado, as bolas fechadas $\overline{B(x, \epsilon/3)}, x \in E$ são disjuntas, logo $N_4(\epsilon) \leq N_1(\epsilon/3)$

Portanto,

$$\frac{\log N_1(\epsilon)}{|\log \epsilon|} \leq \frac{\log N_2(\epsilon)}{|\log \epsilon|} \leq \frac{\log N_3(\epsilon)}{|\log \epsilon|} \leq \frac{\log N_4(\epsilon)}{|\log \epsilon|} \leq \frac{\log N_1(\epsilon/3)}{|\log \epsilon|}.$$

Tomando os limites, vemos que todos os N_i definem as mesmas quantidades. $\square$

2.1 Propriedades Básicas

Nessa seção, listaremos algumas propriedades da dimensão de Minkowski. Além de sua relevância própria, o interesse aqui é motivar e intuir propriedades de um análogo dinâmico desta dimensão que veremos futuramente, a chamada dimensão métrica média.

Fixemos (X, d) espaço métrico compacto.

Teorema 2.5 (**Monotonicidade**). *Se $Y \subset X$ então*

$$\underline{dim}_M(Y) \leq \underline{dim}_M(X) \qquad e \qquad \overline{dim}_M(Y) \leq \overline{dim}_M(X)$$

Prova. $Y \subset X$ implica $N(Y, \epsilon) \leq N(X, \epsilon)$ pois toda cobertura de X cobre Y. $\square$

Teorema 2.6. *Sejam (X,d) espaço métrico compacto, (Y,d') espaço métrico e $F : X \to Y$ Lipschitz com constante L. Então*

$$\underline{dim}_M(F(X)) \leq \underline{dim}_M(X) \qquad e \qquad \overline{dim}_M(F(X)) \leq \overline{dim}_M(X).$$

Além disso, se f for Bi-Lipschitz valem as igualdades.

Prova. Seja $\{U_j\}$ uma $\epsilon-$cobertura de X. Então $\{F(U_j)\}$ é uma $L\epsilon-$cobertura de $F(X)$. De fato,

$$diam(F(U_j)) = \sup_{x,y \in X} d'(F(x),F(y)) \leq L \sup_{x,y\in X} d(x,y) = L\ diam(U_j) \leq L\epsilon.$$

Então,

$$N(F(X),d',L\epsilon) \leq N(X,d,\epsilon)$$

e portanto,

$$\frac{\log N(X,d,\epsilon)}{|\log \epsilon|} \geq \frac{\log N(F(X),d',L\epsilon)}{|\log \epsilon|} = \frac{\log N(F(X),d',L\epsilon)}{|\log L\epsilon|}\frac{|\log L + \log \epsilon|}{|\log \epsilon|}.$$

Tomando os limites, o resultado segue. Para o caso Bi-Lipschitz o cálculo é análogo. □

Corolário 2.7. *Se X é espaço metrizável compacto e d, d' são métricas em X que geram a topologia tais que $d'(x,y) \leq C\ d(x,y)$ para quaisquer $x,y \in X$ então*

$$\underline{dim}_M(X,d') \leq \underline{dim}_M(X,d) \qquad e \qquad \overline{dim}_M(X,d') \leq \overline{dim}_M(X,d).$$

Além disso, se $C_1\ d(x,y) \leq d'(x,y) \leq C_2\ d(x,y)$ então valem as igualdades

Teorema 2.8. *Se $Y, Z \subset X$ então*

$$\overline{dim}_M(Y \cup Z) = \max\{\overline{dim}_M(Y), \overline{dim}_M(Z)\}$$

Prova. Note que

$$N(Y \cup Z, \epsilon) \leq N(Y, \epsilon) + N(Z, \epsilon) \leq 2 \max\{N(Y, \epsilon), N(Z, \epsilon)\},$$

logo

$$\overline{dim}_M(Y \cup Z) \leq \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log 2 \max\{N(Y, \epsilon), N(Z, \epsilon)\}}{|\log \epsilon|}$$

$$= \limsup_{\epsilon \to 0} \max\{\frac{\log N(Y, \epsilon)}{|\log \epsilon|}, \frac{\log N(Z, \epsilon)}{|\log \epsilon|}\} = \max\{\overline{dim}_M(Y), \overline{dim}_M(Z)\}$$

A outra desigualdade segue de $Y, Z \subset Y \cup Z$ e da monotonicidade. □

Por indução, obtemos o seguinte

Corolário 2.9 (**Estabilidade aditiva da dimensão de Minkowski superior**). *Sejam* $X_i \subset X, i = 1, ..., n$ *tais que* $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$. *Então*

$$\overline{dim}_M(X) = \max_{i=1,...,n} \overline{dim}_M(X_i)$$

Teorema 2.10. *Se* $F \subset X$ *é finito então* $dim_M(F) = 0$.

Prova. Pelo resultado anterior, basta mostrar para o caso $F = \{x\}$. Para qualquer $\epsilon > 0$, $N(\{x\}, \epsilon) = 1$. Portanto

$$0 \leq \underline{dim}_M(\{x\}) \leq \overline{dim}_M(\{x\}) = 0.$$

□

Teorema 2.11. *Se* $\overline{F}$ *denota o fecho de* $F \subset X$ *então*

$$\underline{dim}_M(\overline{F}) = \underline{dim}_M(F) \qquad e \qquad \overline{dim}_M(\overline{F}) = \overline{dim}_M(F)$$

Prova. Considerando a definição das dimensões que leva em conta coberturas por bolas fechadas, qualquer de tais coberturas de F também cobre $\overline{F}$, ou seja, F e $\overline{F}$ possuem as mesmas coberturas. Logo as igualdades seguem. □

2.2 Exemplos

Agora, calcularemos alguns casos que dão uma boa noção do estilo de argumento que aparecerá ao longo do texto.

Exemplo 2.12. Seja $X = [0,1]^k$ com a norma euclidiana usual $|\cdot|$. Note que, denotando por d a métrica do máximo em X,

$$d(x,y) \leq |x-y| \leq \sqrt{k}\ d(x,y).$$

Então obtemos a mesma dimensão se considerarmos a norma do máximo. Em $[0,1]$ a menor cardinalidade de uma cobertura por intervalos de diâmetro ϵ é $\lceil 1/\epsilon \rceil$. Como as bolas da métrica d em X são produtos de bolas em $[0,1]$, temos $N(\epsilon) = \lceil 1/\epsilon \rceil^k$, ou seja,

$$\frac{1}{\epsilon^k} \leq N(\epsilon) \leq (\frac{1}{\epsilon} + 1)^k$$

Logo

$$\underline{dim}_M([0,1]^k) \geq \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\log \epsilon^{-k}}{|\log \epsilon|} = k$$

e

$$\overline{dim}_M([0,1]^k) \leq \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{k \log(\epsilon^{-1} + 1)}{|\log \epsilon|} = k$$

Portanto

$$dim_M([0,1]^k) = k$$

<u>Obs:</u> O exemplo acima implica que o conjunto enumerável $(\mathbb{Q} \cap [0,1])^k$ tem dimensão k, pois seu fecho é o próprio $[0,1]^k$. Isso mostra que a dimensão de Minkowski superior não goza da estabilidade enumerável, uma vez que qualquer conjunto enumerável pode ser escrito como uma união de seus conjuntos unitários, todos estes com dimensão nula.

Exemplo 2.13. Seja $X = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ com a métrica usual $|\cdot|$. Dado $\epsilon > 0$, tome $k \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{k(k+1)} \leq \epsilon < \frac{1}{(k-1)k}.$$

Se $diam(U) \leq \epsilon$, então U pode cobrir no máximo um ponto de $X_k := \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}\}$, uma vez que

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} = \frac{1}{(k-1)k} > \epsilon.$$

Logo, são necessários k conjuntos de diâmetro ϵ para cobrir X_k Em particular, $N(\epsilon) \geq k$ e, portanto,

$$\underline{dim}_M(X) = \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|} \geq \liminf_{k \to \infty} \frac{\log k}{\log k(k+1)} = \frac{1}{2}.$$

Usando a mesma relação entre k e ϵ, com $k+1$ intervalos de tamanho ϵ, cobrimos o intervalo $[0, 1/k]$. Cobrindo cada um dos outros $k-1$ pontos com um $\epsilon-$intervalo para si, obtemos $N(\epsilon) \leq 2k$. Assim,

$$\overline{dim}_M(X) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|} \leq \limsup_{k \to \infty} \frac{\log 2k}{\log k(k-1)} = \frac{1}{2}.$$

E, portanto,

$$dim_M(X) = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 2.14 (Conjunto de Cantor)**.** Comecemos pela construção do conjunto. A ideia é obter uma sequência de conjuntos compactos encaixados cuja interseção, não vazia, será o conjunto que queremos. Seja $C_0 = [0,1]$. Para obter C_1, divida o intervalo em 3 partes iguais e retire o intervalo (aberto) do meio. Assim, $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Indutivamente, definimos C_{k+1} considerando cada intervalo que compõe C_k e retirando seu terço médio. Assim, cada C_k é uma união de 2^k intervalos fechados de diâmetro 3^{-k} e vale $C_0 \supset C_1 \supset ... \supset C_k \supset ...$. Definimos

$$C := \bigcap_{k \geq 0} C_k.$$

Em particular, cada C_k é uma 3^{-k} cobertura de C. Com isso em mãos, vamos calcular a dimensão:

Dado $\epsilon > 0$, tome $k \geq 1$ tal que $3^{-k} < \epsilon \leq 3^{-k+1}$. Então os 2^k intervalos de C_k fornecem uma $\epsilon-$ cobertura, ou seja, $N(\epsilon) \leq 2^k$. Logo

$$\overline{dim}_M(C) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|} = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon^{-1}} \leq \limsup_{k \to \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Por outro lado, qualquer intervalo de comprimento ϵ com $3^{-k-1} < \epsilon \leq 3^{-k}$ intersecta no máximo um dos 2^k intervalos de comprimento 3^{-k} pertencentes a C_k, dado que todos os intervalos nesse conjunto distam pelo menos seu comprimento entre si. Como existem 2^k de tais intervalos, todos eles contendo elementos de C. Então $N(\epsilon) \geq 2^k$, obtemos

$$\underline{dim}_M(C) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|} = \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon^{-1}} \geq \liminf_{k \to \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k+1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Concluimos

$$dim_M(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

<u>Obs:</u> Lembre que o conjunto de Cantor pode ser visto como o conjunto dos pontos cuja representação em base 3 contém apenas $0's$ e $2's$.

Exemplo 2.15. Sejam (X,d) espaço métrico compacto, (Y,d') espaço métrico e $g : X \to Y$ um mapa Lipschitz com constante L. Vamos "calcular" a dimensão de Minkowski do gráfico $G := \{(x, g(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$, onde a métrica do espaço $X \times Y$ é dada por

$$D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, x_2) + d'(y_1, y_2).$$

Definimos a função auxiliar

$$F : X \to X \times Y, \qquad F(x) = (x, g(x)).$$

Note que

$$d(x,y) \leq D(F(x), F(y)) = d(x,y) + d'(g(x), g(y)) \leq (1+L)d(x,y),$$

ou seja, F é Bi-Lipschitz. Logo, como $G = F(X)$,

$$dim_M(G, D) = dim_M(X, d)$$

Obs: O argumento acima funciona analogamente se tomarmos D como a métrica do máximo ou a métrica p ($D_p = \sqrt[p]{d^p + d'^p}$) para $p > 1$.

O próximo exemplo ilustra o fato de que a dimensão de Minkowski, de fato, depende da métrica escolhida. Mesmo gerando a mesma topologia, métricas distintas podem prover dimensões distintas.

Exemplo 2.16. Fixemos o espaço $X = \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ com a topologia produto. Essa topologia pode ser gerada por qualquer uma das métricas

$$d(x, y) = \sum_{i \geq 1} \frac{|x_i - y_i|}{2^{i+1}} \qquad e \qquad d'(x, y) = \sum_{i \geq 1} \frac{|x_i - y_i|}{3^i}.$$

Para verificar que as métricas acima induzem dimensões distintas, exibiremos isometrias

$$\phi : (X, d) \to ([0, 1], |\cdot|) \qquad e \qquad \psi : (X, d') \to (C, |\cdot|)$$

e assim,

$$dim_M(X, d) = 1 \qquad e \qquad dim_M(X, d') = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Na verdade, como precisamos que ϕ e ψ sejam injetivas, restringiremos os contradomínios. Isso não será um problema, pois o conjunto de pontos que retiraremos tem interior vazio, logo seu complementar é denso e, portanto, tem dimensão total.

Definimos

$$\phi(x) = 0, \frac{x_1}{2}\frac{x_2}{2}\frac{x_3}{2}... \text{ em base 2}$$

e

$$\psi(x) = 0, x_1 x_2 x_3 ... \text{ em base 3},$$

onde os contradomínios de ϕ e ψ são

$$[0, 1] - \{m/2^n : m = 0, ..., 2^n - 1; n \in \mathbb{N}\}$$

e

$$C - \{m/3^n : m = 0, ..., 3^n - 1; n \in \mathbb{N}\},$$

respectivamente.

Então, ϕ e ψ são bijetivas,

$$|\phi(x) - \phi(y)| = \sum_{i \geq 1} \frac{|(\phi(x))_i - (\phi(y))_i|}{2^i} = \sum_{i \geq 1} \frac{|x_i - y_i|/2}{2^i} = d(x, y)$$

e

$$|\psi(x) - \psi(y)| = \sum_{i \geq 1} \frac{|(\psi(x))_i - (\psi(y))_i|}{3^i} = \sum_{i \geq 1} \frac{|x_i - y_i|}{3^i} = d'(x, y).$$

3 Entropia Topológica

Considere X espaço métrico compacto e $f : X \to X$ contínua. A **entropia topológica** é a taxa de crescimento exponencial do número de órbitas distinguíveis dentro de um certo grau de precisão, arbitrariamente pequeno. Essa entropia está definida em diferentes contextos e no caso métrico compacto possui ótimas propriedades.

Primeiramente, precisamos de um importante lema.

Lema 3.1. *Se $(a_n)_n \in [-\infty, \infty)$ é uma sequência sub-aditiva, ou seja,*

$$a_{m+n} \leq a_n + a_m$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n} \in [-\infty, \infty).$$

Prova. Se $a_m = -\infty$ para algum m, então, pela sub-aditividade, $a_n = -\infty$ para todo $n > m$ e a prova acaba aqui. Suponhamos agora que $a_n \in \mathbb{R}$ para todo n. Seja $L = \inf_n (a_n/n) \in [-\infty, \infty)$ e seja B qualquer número real maior que L. Então existe k tal que

$$\frac{a_k}{k} < B.$$

Para $n > k$, podemos escrever $n = kp + q$, onde p e q são inteiros tais que $p \geq 1$ e $1 \leq q \leq k$. Então

$$a_n \leq a_{kp} + a_q \leq pa_k + a_q \leq pa_k + \alpha,$$

onde $\alpha = \max\{a_i : 1 \leq i \leq k\}$. Logo,

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{pk}{n}\frac{a_k}{k} + \frac{\alpha}{n}.$$

Note que $pk/n \to 1$ e $\alpha/n \to 0$ quando $n \to \infty$. Então

$$L \leq \frac{a_n}{n} < B$$

para todo n suficientemente grande. Fazendo $B \to L$ obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = L = \inf_n \frac{a_n}{n}.$$

$\square$

3.1 Definição para Espaços Topológicos Compactos

A definição que veremos aqui não necessita que o espaço possua uma métrica, bastando ser compacto. A adição da métrica, mais tarde, nos proverá definições equivalentes e melhores ferramentas para computar a entropia em exemplos concretos. Por hora, consideremos apenas a estrutura topológica do espaço X.

Dada uma cobertura aberta α de X, denotamos por $M(\alpha)$ a menor cardinalidade de uma subcobertura sua. Pela compacidade, essa quantidade é sempre finita. Definimos a entropia da cobertura α por

$$H(\alpha) := \log M(\alpha).$$

Dizemos que outra cobertura β refina α, e denotamos $\alpha \prec \beta$, se todo elemento de β está contido em algum elemento de α.

Denotaremos a cardinalidade de uma cobertura α por $|\alpha|$.

Lema 3.2. *Se $\alpha \prec \beta$ então $H(\alpha) \leq H(\beta)$.*

Prova. Tome $\{U_1, ..., U_{M(\beta)}\}$ subcobertura minimal de β. Então, para $i = 1, ..., M(\beta)$, existe $W_i \in \alpha$ tal que $U_i \subset W_i$. Logo$\{W_i\}_i$ também cobre X. Então $M(\alpha) \leq |\{W_i\}_i| = M(\beta)$ e, portanto, $H(\alpha) \leq H(\beta)$. $\square$

Dadas coberturas abertas $\alpha_1, ..., \alpha_n$, definimos a sua soma por

$$\alpha_1 \vee ... \vee \alpha_n := \{A_1 \cap ... \cap A_n : A_j \in \alpha_j\}$$

e note que $\alpha_j \prec \alpha_1 \vee ... \vee \alpha_n$ para todo j.

Como $f : X \to X$ é contínua, dada uma cobertura aberta α e $j \geq 0$,

$$f^{-j}(\alpha) = \{f^{-j}(A) : A \in \alpha\}$$

também é cobertura aberta. Assim, para $n \geq 1$, denotamos

$$\alpha^n := \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee ... \vee f^{-n+1}(\alpha).$$

Lema 3.3. *Se α e β são coberturas abertas de X e $f : X \to X$ é contínua então*

$$H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta) \qquad e \qquad H(f^{-1}(\beta)) \leq H(\beta).$$

Ainda, se f é sobrejetiva vale $H(f^{-1}(\beta)) = H(\beta)$

Prova. Sejam $\{U_1, ..., U_{M(\alpha)}\}$ e $\{V_1, ..., V_{M(\beta)}\}$ subcoberturas minimais de α e β, respectivamente. Então $\gamma = \{U_i \cap V_j\}_{i,j}$ é subcobertura de $\alpha \vee \beta$ e

$$M(\alpha \vee \beta) \leq |\gamma| \leq M(\alpha)M(\beta),$$

Logo,

$$H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta).$$

Agora, pela continuidade de f, $\{f^{-1}(V_j)\}_j$ é cobertura aberta de X e, portanto, $M(f^{-1}(\beta)) \leq M(\beta)$. Logo,

$$H(f^{-1}(\beta)) \leq H(\beta).$$

Se f é sobrejetiva, suponhamos que vale a desigualdade estrita. Então existe uma subcobertura $\{W_j\}_{j=1}^{M(\beta)-1} \subset f^{-1}(\beta)$. Para cada j, existe $\overline{W_j} \in \beta$ tal que $f^{-1}(\overline{W_j}) = W_j$

$$\implies X = \cup_j W_j = \cup_j f^{-1}(\overline{W_j}) = f^{-1}(\cup_j \overline{W_j})$$

$$\implies X = f(X) = \cup_j \overline{W_j},$$

o que é absurdo, pois $|\{\overline{W_j}\}_j| < M(\beta)$. $\square$

Corolário 3.4. *A sequência* $(H(\alpha^n))_n$ *é sub-aditiva.*

Prova.

$H(\alpha^{m+n}) = H(\alpha^m \vee f^{-m}(\alpha^n)) \leq H(\alpha^m) + H(f^{-m}(\alpha^n)) \leq H(\alpha^m) + H(\alpha^n)$

$\square$

Com isso em mãos, faz sentido a seguinte

Definição 3.5. A entropia de f com respeito à cobertura α é o limite

$$h(f,\alpha) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n) = \inf_n \frac{1}{n} H(\alpha^n)$$

Obs: $\alpha \prec \beta \implies h(f,\alpha) \leq h(f,\beta)$. Em particular, se β é subcobertura de α então $h(f,\alpha) \leq h(f,\beta)$ e podemos definir

Definição 3.6. A **entropia topológica** de f é dada por

$$h(f) := \sup\{h(f,\alpha) : \alpha \text{ é cobertura aberta finita de } X\}$$

Uma importante característica da entropia topológica é ser um invariante topológico:

Definição 3.7. Sejam $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ contínuas nos espaços topológicos compactos X e Y. Chamamos g de fator topológico de f se existir $\theta : X \to Y$ contínua e sobrejetiva tal que $\theta \circ f = g \circ \theta$. Chamamos θ de semi-conjugação topológica. Se θ for homeomorfismo, o chamaremos de conjugação topológica e diremos que f e g são topologicamente conjugados.

Proposição 3.8. *Se g é fator topológico de f então $h(g) \leq h(f)$. Em particular, se f e g são topologicamente conjugados então $h(f) = h(g)$.*

Prova. Seja $\theta : X \to Y$ semi-conjugação. Dada qualquer cobertura aberta α de Y, temos uma cobertura aberta de X dada por

$$\theta^{-1}(\alpha) := \{\theta^{-1}(A) : A \in \alpha\}.$$

Afirmação: $\theta^{-1}(\alpha^n) = (\theta^{-1}(\alpha))^n$.

Prova. Note que

$$\alpha^n = \{\bigcap_{j=0}^{n-1} g^{-j}(A_j) : A_1, ..., A_{n-1} \in \alpha\}$$

e

$$(\theta^{-1}(\alpha))^n = \{\bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\theta^{-1}(A_j)) : A_1, ..., A_{n-1} \in \alpha\}.$$

Mas,

$$\bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\theta^{-1}(A_j)) = \bigcap_{j=0}^{n-1} \theta^{-1}(g^{-j}(A_j)) = \theta^{-1}(\bigcap_{j=0}^{n-1} g^{-j}(A_j)),$$

provando a afirmação. $\square$

Agora, pela sobrejetividade de θ, um subconjunto $\gamma \subset \alpha^n$ cobre Y se, e só se, sua pré-imagem $\theta^{-1}(\gamma)$ cobre X. Logo

$$H(\theta^{-1}(\alpha)^n) = H(\theta^{-1}(\alpha^n)) = H(\alpha^n).$$

Assim, $h(f, \theta^{-1}(\alpha)) = h(g, \alpha)$ e, finalmente,

$$h(g) = \sup_{\alpha} h(g, \alpha) = \sup_{\alpha} h(f, \theta^{-1}(\alpha)) \leq h(f).$$

Caso θ seja homeomorfismo, f também é fator de g e o resultado segue. $\square$

<u>Obs:</u> Se a topologia de X for metrizável, dadas quaisquer duas métricas d, d' que geram a topologia, $\theta : (X, d) \to (X, d'), \theta(x) = x$ é conjugação topológica e, portanto, independente da métrica que escolhermos, a entropia é a mesma.

3.2 Definição para Espaços Métricos Compactos

Nessa seção começarão a aparecer semelhanças entre a entropia e algumas quantidades usadas na dimensão de Minkowski. Isso ficará mais claro quando falarmos da dimensão métrica média que, além de ser um análogo dinâmico da dimensão de Minkowski, está diretamente relacionada com a entropia topológica.

Fixemos (X, d) espaço métrico compacto e $f : X \to X$ contínua. Para cada $n \geq 1$, definimos em X a métrica

$$d_n(x, y) = \max_{i=0,...,n-1} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Pela continuidade de f, d_n gera a mesma topologia que d.

Definição 3.9. Dado $\epsilon > 0$, dizemos que $E \subset X$ é $(n, \epsilon)-$separado se é $\epsilon-$separado com relação à métrica d_n, ou seja, dados $x, y \in E$,

$$d(f^i(x), f^i(y)) > \epsilon \text{ para algum } i \in \{0, ..., n-1\}.$$

Definição 3.10. Dado $\epsilon > 0$, dizemos que $E \subset X$ é $(n, \epsilon)-$gerador se é $\epsilon-$gerador com relação à métrica d_n, ou seja, para qualquer $y \in X$ existe $x \in E$ tal que

$$d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon \text{ para } i = 0, ..., n-1.$$

Denotemos por $g(n, \epsilon)$ a menor cardinalidade de um conjunto (n, ϵ)-gerador e por $s(n, \epsilon)$ a maior cardinalidade de um conjunto (n, ϵ)-separado. Também,

$$g(\epsilon) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log g(n, \epsilon) \qquad e \qquad s(\epsilon) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon).$$

Note que $\epsilon \mapsto g(\epsilon)$ é não crescente, uma vez que, dados $\epsilon_1 < \epsilon_2$, todo conjunto $(n, \epsilon_1)-$gerador também é $(n, \epsilon_2)-$gerador. Logo, $g(n, \epsilon_2) \leq g(n, \epsilon_1)$. Assim, existe o limite

$$g(f) := \lim_{\epsilon\to 0} g(\epsilon).$$

Por outro lado, se $\epsilon_1 < \epsilon_2$ então todo conjunto $(n, \epsilon_2)-$separado também é $(n, \epsilon_1)-$separado. Logo, $\epsilon \mapsto s(\epsilon)$ é não decrescente e existe

$$s(f) := \lim_{\epsilon \to 0} s(\epsilon)$$

Lembre que, dado $n \geq 1$, $N(X, d_n, \epsilon)$ é a menor cardinalidade de uma cobertura aberta de diâmetro d_n menor ou igual a ϵ. Note que se $diam(\alpha, d_n) \leq \epsilon$ e $diam(\beta, d_m) \leq \epsilon$ então

$$diam(\alpha \vee f^{-n}(\beta), d_{m+n}) \leq \epsilon,$$

ou seja,

$$N(X, d_{m+n}, \epsilon) \leq |\alpha \vee f^{-n}(\beta)| \leq |\alpha||f^{-n}(\beta)| \leq |\alpha||\beta|.$$

Logo $(\log N(X, d_n, \epsilon))_n$ é sub-aditiva e podemos definir

$$S(f, \epsilon) := S(X, f, d, \epsilon) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N(X, d_n, \epsilon) \qquad e \qquad S(f) := \lim_{\epsilon \to 0} S(f, \epsilon).$$

Note que, para cada $n \geq 1$, aplicando a prova do Teorema 6.2 com a métrica d_n, obtemos

$$N(X, d_n, \epsilon) \leq g(n, \epsilon) \leq s(n, \epsilon) \leq N(X, d_n, \epsilon/3).$$

Assim,

$$S(f, \epsilon) \leq g(\epsilon) \leq s(\epsilon) \leq S(f, \epsilon/3) \implies S(f) = g(f) = s(f).$$

Mais ainda, isso implica que obtemos as mesmas quantidades se considerarmos $\liminf$ ao invés de $\limsup$ nas definições de $g(\epsilon)$ e $s(\epsilon)$.

Antes de relacionar tais quantidades com a entropia, precisamos do seguinte

Lema 3.11. *Sejam (X, d) espaço métrico compacto e α cobertura aberta. Então existe $\epsilon > 0$ tal que qualquer bola de raio ϵ está contida em algum elemento de α. Denominamos tal ϵ de número de Lebesgue de α.*

Prova. Para qualquer $x \in X$, existe $A_x \in \alpha$ tal que $x \in A_x$. Como A_x é aberto, existe $r(x)$ tal que $B(x, 2r(x)) \subset A_x$. Então $\{B(x, r(x))\}_{x \in X}$ é cobertura aberta de X. Por compacidade existe $F \subset X$ finito tal que $\{B(x, r(x))\}_{x \in F}$ cobre X.

<u>Afirmação:</u> $\epsilon := \min_{x \in F} r(x)$ satisfaz o que queremos.

Dado $y \in X$, existe $x \in F$ tal que $y \in B(x, r(x))$. Então

$$B(y, \epsilon) \subset B(y, r(x)) \subset B(x, 2r(x)) \subset A_x.$$

□

Teorema 3.12. *Seja $f : X \to X$ contínua num espaço métrico compacto. Então $h(f) = s(f) = g(f) = S(f)$*

Prova. Basta mostrar $s(f) \leq h(f) \leq g(f)$.

Comecemos por $s(f) \leq h(f)$. Fixemos $\epsilon > 0$ e $n \geq 1$. Seja $E \subset X$ um conjunto $(N, \epsilon)-$separado maximal e seja α qualquer cobertura aberta de X com diâmetro menor que ϵ. Se x e y estão no mesmo elemento de α^n, então

$$d(f^i(x), f^i(y)) \leq diam(\alpha) < \epsilon \text{ para todo } i = 0, ..., n-1.$$

Em particular, cada elemento de α^n contém no máximo um elemento de E. Logo, $s(n, \epsilon) \leq M(\alpha^n)$ para todo $n \geq 1$. Consequentemente,

$$s(\epsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log M(\alpha^n) = h(f, \alpha) \leq h(f)$$

$$\implies s(f) \leq h(f).$$

Resta mostrar $h(f) \leq g(f)$. Dada uma cobertura aberta α, seja $\epsilon > 0$ um número de Lebesgue para α. Seja $E \subset X$ um conjunto $(n, \epsilon)-$gerador minimal. Para cada $x \in E$ e $i \in \{0, ..., n-1\}$, existe $A_{x,i} \in \alpha$ tal que $B(f^i(x), \epsilon)$ está contida em $A_{x,i}$. Então

$$B_N(x, \epsilon) \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_{x,i}).$$

Como E é gerador, $\gamma := \{\cap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_{x,i}) : x \in E\} \subset \alpha^n$ é cobertura de X. Então $M(\alpha^N) \leq \#E = g(N, \epsilon)$. Então

$$h(f, \alpha) = \lim \frac{1}{n} \log M(\alpha^n) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log g(n, \epsilon) = g(\epsilon).$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos $h(f, \alpha) \leq g(\epsilon)$. Como a escolha de α foi arbitrária, vale

$$h(f) \leq g(\epsilon).$$

□

3.3 Propriedades Básicas

Lema 3.13. *Seja X espaço topológico compacto, $f : X \to X$ contínua e sobrejetiva e α uma cobertura aberta de X. Então $h(f, \alpha) = h(f, f^{-1}(\alpha))$. Ainda, se f é homeomorfismo, $h(f, \alpha) = h(f, f(\alpha))$*

Prova. Segue do Lema 3.2 que $H(f^{-1}(\alpha)) = H(\alpha)$. Note que, para qualquer $n \geq 1$,

$$f^{-1}(\cap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(U_j)) = \cap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(f^{-1}(U_j)).$$

Assim, $f^{-1}(\alpha^n) = (f^{-1}(\alpha))^n$ e, portanto,

$$h(f, f^{-1}(\alpha)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H((f^{-1}(\alpha))^n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H((f^{-1}(\alpha^n))) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n) = h(f, \alpha).$$

Se f é homeomorfismo, basta aplicar a conta anterior para f^{-1}.

□

Lema 3.14. *Seja X espaço topológico compacto, $f : X \to X$ contínua, α uma cobertura aberta de X e $n, k \geq 1$. Então*

- *α^{n+k-1} é subcobertura de $(\alpha^k)^n$. Em particular, $(\alpha^k)^n \prec \alpha^{n+k-1}$;*
- *para qualquer subcobertura β de $(\alpha^k)^n$ existe uma subcobertura γ de α^{n+k-1} tal que $|\gamma| \leq |\beta|$ e $\gamma \prec \beta$.*

Prova. Por definição, todo elemento de α^{n+k-1} é da forma $B = \cap_{l=0}^{n+k-2} f^{-l}(B_l)$, $B_l \in \alpha$. Escrevendo $B = \cap_{i=0}^{n-1} f^{-i}\Big(\cap_{j=0}^{k-1} f^{-j}(B_{i+j})\Big)$ segue o primeiro item.

Seja β subcobertura de $(\alpha^k)^n$. Todo elemento de β é da forma

$$A = \cap_{i=0}^{n-1} f^{-i}\Big(\cap_{j=0}^{k-1} f^{-j}(A_{i,j})\Big) = \cap_{l=0}^{n+k-2} f^{-l}(\cap_{i+j=l} A_{i,j})$$

com $A_{i,j} \in \alpha$. Considere $B = \cap_{l=0}^{n+k-2} f^{-l}(B_l)$, onde $B_l = A_{i,j}$ para um par qualquer (i,j) tal que $i+j = l$. Então $A \subset B \in \alpha^{n+k-1}$. Tomando γ como a coleção de tais $B's$, concluimos o lema. $\square$

Proposição 3.15. *Seja X espaço topológico compacto, $f : X \to X$ contínua e α uma cobertura aberta de X. Então*

$$h(f, \alpha) = h(f, \alpha^k)$$

para todo $k \geq 1$. Ainda, se f for homeomorfismo, denotando $\alpha^{\pm k} := \vee_{j=-k}^{k-1} f^{-j}(\alpha)$, temos

$$h(f, \alpha) = h(f, \alpha^{\pm k}).$$

Prova. Segue diretamente do lema anterior e e do Lema 3.2 que

$$H(\alpha^{n+k-1}) = H((\alpha^k)^n).$$

Logo

$$h(f,\alpha^k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H((\alpha^k)^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha^{n+k-1}) = h(f,\alpha).$$

Quando f é homeomorfismo, por definição, $\alpha^{\pm k} = f^k(\alpha^{2k})$. Pelo Lema 3.13 temos

$$h(f,\alpha^{\pm k}) = h(f, f^k(\alpha^{2k})) = h(f,\alpha^{2k}) = h(f,\alpha)$$

□

Proposição 3.16. *Seja (X,d) espaço métrico compacto, $f : X \to X$ contínua e $(\alpha_k)_k$ uma sequência de coberturas abertas de X cujos diâmetros vão a zero. Então,*

$$h(f) = \sup_k h(f,\alpha_k) = \lim_{k\to\infty} h(f,\alpha_k).$$

Prova. Dada qualquer cobertura aberta β, seja $\epsilon > 0$ um número de Lebesgue. Tome $n \geq 1$ tal que $diam(\alpha_k) < \epsilon$ para todo $k \geq n$. Então todo elemento de α_k está contido em algum elemento de β ($\beta \prec \alpha_k$). Logo, $h(f,\beta) \leq h(\alpha_k)$ e, assim,

$$h(f) \leq \liminf_{k\to\infty} h(f,\alpha_k).$$

Por outro lado, como a entropia é um supremo sobre todas as coberturas abertas, temos

$$h(f) \geq \sup_k h(f,\alpha_k) \geq \limsup_{k\to\infty} h(f,\alpha_k).$$

□

Juntando as duas últimas proposições, obtemos o importante

Corolário 3.17. *Seja (X, d) espaço métrico compacto e $f : X \to X$ contínua. Se α é uma cobertura aberta satisfazendo algum dos itens abaixo*

- *o diâmetro de $\alpha^k = \vee_{j-0}^{k-1} f^{-j}(\alpha)$ vai a zero quando $k \to \infty$;*
- *f é homeomorfismo e o diâmetro de $\alpha^{\pm k} = \vee_{j=-k}^{k-1} f^{-j}(\alpha)$ vai a zero quando $k \to \infty$,*

então
$$h(f) = \lim_{k\to\infty} h(f, \alpha^k) = h(f, \alpha).$$

Proposição 3.18. *Seja (X, d) espaço métrico compacto, $f : X \to X$ contínua e $k \geq 1$. Então*
$$h(f^k) = k\ h(f).$$

Prova. Sejam $n \geq 1$ e $\epsilon > 0$. Se um conjunto $E \subset X$ é $(nk, \epsilon)-$gerador para f então é $(n, \epsilon)-$gerador para f^k, uma vez que a segunda leva em conta apenas os iterados múltiplos de k fazendo com que as bolas tenham menos restrição, contendo as primeiras. Então
$$g(f^k, n, \epsilon) \leq g(f, nk, \epsilon)$$
$$\implies g(f^k, \epsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log g(f^k, n, \epsilon)$$
$$\leq k \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{nk} \log g(f, nk, \epsilon) \leq k\ g(f, \epsilon).$$
$$\implies h(f^k) \leq k\ h(f).$$

Obs: Como já comentado, a definição de $g(\epsilon)$ pode ser considerada, equivalentemente em termos de entropia, como lim sup ou lim inf. Não será feita distinção na notação para evitar poluição desnecessária.

Por outro lado, como f é contínua num compacto, f é uniformemente contínua. Seja $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $d(f^j(x), f^j(y)) < \epsilon$ para todo $j \in \{0, ..., k-1\}$. Se $E \subset X$ é $(n, \delta)-$gerador para f^k, então E é $(nk, \epsilon)-$gerador para f. Logo

$$g(f, nk, \epsilon) \leq g(f^k, n, \delta)$$

$$\Longrightarrow \ g(f, \epsilon) = \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log g(f, n, \epsilon) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{nk} \log g(f, nk, \epsilon)$$
$$\leq \frac{1}{k} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log g(f^k, n, \delta) = \frac{1}{k} g(f^k, \delta).$$

Fazendo $\delta \to 0$ e depois $\epsilon \to 0$ obtemos

$$h(f) \leq \frac{1}{k} h(f^k).$$

□

Obs: Um detalhe que pode ter passado despercebido, mas que tem grande importância é o seguinte: na prova da primeira desigualdade, os limites em ϵ são tomados simultaneamente nos dois lados, diferentemente da segunda. Isso significa que, quando estivermos interessado na velocidade da convergência em ϵ, no próximo capítulo, o argumento utilizado na primeira desigualdade ainda valerá enquanto o outro a princípio não. De fato, veremos que o análogo da segunda desigualdade é falso.

Proposição 3.19. *Seja (X, d) espaço métrico compacto e $f : X \to X$ homeomorfismo. Então*

$$h(f) = h(f^{-1}).$$

Consequentemente, $h(f^n) = |n| \ h(f)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Prova. Seja α uma cobertura aberta de X. Para $n \geq 1$ denotemos

$$\alpha_+^n := \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \ldots \vee f^{-n+1}(\alpha) \qquad e \qquad \alpha_-^n := \alpha \vee f(\alpha) \vee \ldots \vee f^{n-1}(\alpha).$$

Note que $\alpha_-^n = f^{n-1}(\alpha_+^n)$. Mais ainda, γ é subcobertura finita de α_+^n se, e somente se, $f^{n-1}(\gamma)$ é subcobertura finita de α_-^n. Como as duas subcoberturas tem a mesma cardinalidade, segue que $H(\alpha_+^n) = H(\alpha_-^n)$. Logo

$$h(f, \alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\alpha_+^n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\alpha_-^n) = h(f^{-1}, \alpha).$$

Tomando o supremo em α obtemos

$$h(f) = h(f^{-1}).$$

$\square$

Proposição 3.20. *Se $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ são contínuas em métricos compactos com métricas d e d', respectivamente e existe $\psi : X \to Y$ contínua e injetiva tal que $\psi \circ f = g \circ \psi$ então $h(f) \leq h(g)$*

Prova. Primeiro, note que, como ψ é contínua, $\psi^{-1} : \psi(X) \to X$ tem domínio compacto.
Afirmação: ψ^{-1} é contínua. De fato, seja $x_n \to x$ em $\psi(X)$. Então $(\psi^{-1}(x_n))_n$ tem um ponto de acumulação $y \in X$. Como ψ é contínua,

$$x_{n_k} = \psi(\psi^{-1}(x_{n_k})) \to \psi(y).$$

Então $x = \psi(y)$, ou seja, $(\psi^{-1}(x_n))_n$ se acumula unicamente em $\psi^{-1}(x)$, portanto, $\psi^{-1}(x_n) \to y = \psi^{-1}(x)$, concluindo a afirmação.

Mais ainda, como o domínio é compacto, ψ^{-1} é uniformemente contínua: Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d'(\psi(x), \psi(y)) < \delta \implies d(x, y) < \epsilon.$$

Logo, se $E \subset X$ é $(n, \epsilon)-$separado, ou seja, para quaisquer $x, y \in E$

$$\epsilon < d_n(x, y) = \max_{0 \leq k < n} d(f^k(x), f^k(y)),$$

então

$$\begin{aligned} d'_n(\psi(x), \psi(y)) &= \max_{0 \leq k < n} d'(g^k \circ \psi(x), g^k \circ \psi(y)) \\ &= \max_{0 \leq k < n} d'(\psi \circ f^k(x), \psi \circ f^k(y)) > \delta, \end{aligned}$$

isso é, $\psi(E)$ é $(n, \delta)-$separado e tem a mesma cardinalidade. Logo

$$s(f, n, \epsilon) \leq s(g, n, \delta) \implies s(f, \epsilon) \leq s(g, \delta).$$

Fazendo $\delta \to 0$ e depois $\epsilon \to 0$ o resultado segue. □

Corolário 3.21. *Se $Z \subset X$ métrico compacto é um fechado invariante por f, ou seja, $f(Z) \subset Z$, então*

$$h(f|_Z) \leq h(f).$$

Prova. A inclusão $i : Z \to X$ satisfaz o que queremos. □

Corolário 3.22. *Se $Y, Z \subset X$ métrico compacto são fechados invariantes então*

$$h(f|_{Y \cup Z}) = \max\{h(f|_Y), h(f|_Z)\}$$

Prova. Para cada $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} N(Y \cup Z, d_n, \epsilon) &\leq N(Y, d_n, \epsilon) + N(Z, d_n, \epsilon) \\ &\leq 2 \max\{N(Y, d_n, \epsilon), N(Z, d_n, \epsilon)\}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} S(Y \cup Z, f, d, \epsilon) &\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log 2 \max\{N(Y, d_n, \epsilon), N(Z, d_n, \epsilon)\} \\ &= \max\{S(Y, f, d, \epsilon), S(Z, f, d, \epsilon)\}, \end{aligned}$$

e obtemos $\leq$. A outra desigualdade segue do corolário anterior. □

Repare nas semelhanças entre os últimos dois corolários e as propriedades de monotonicidade e estabilidade finita da dimensão de Minkowski.

Para concluir, veremos que existem subconjuntos aos quais a restrição da dinâmica tem entropia total. Chamamos de **conjunto não-errante** o seguinte:

$$\Omega(f) := \{x \in X : \forall U \text{ vizinhança de } x, \text{ existe } n \text{ tq } f^n(U) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Note que esse conjunto é fechado e invariante. De fato, se $(x_n)_n$ é sequência em $\Omega(f)$ convergindo para algum $x \in X$, dada qualquer vizinhança U de x, existe n_0 tal que $x_{n_0} \in U$ e, portanto, existe m_0 tal que $f^{m_0}(U) \cap U \neq \emptyset$. Para ver que é invariante, sejam $x \in \Omega(f)$ e U vizinhança de $f(x)$. Então $f^{-1}(U)$ é vizinhança de x e, portanto existe n_0 tal que

$$f^{-1}(f^{n_0}(U) \cap U) = f^{n_0}(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset.$$

Logo $f^{n_0}(U) \cap U \neq \emptyset$.

Proposição 3.23. *Sejam (X, d) espaço métrico compacto e $f : X \to X$ contínua. Então*

$$h(f|_{\Omega(f)}) = h(f).$$

Prova. Basta mostrar $\geq$. Dado $\epsilon > 0$, seja $A \subset \Omega(f)$ $(n, \epsilon)-$gerador minimal. Denotemos

$$U := \{x \in X : d_n(x, y) < \epsilon \text{ para algum } y \in A\} = \bigcup_{y \in A} B_n(y, \epsilon).$$

Então U^c é compacto e, portanto existe $0 < \beta \leq \epsilon$ tal que

$$f^m(B(y, \beta)) \cap B(y, \beta) = \emptyset \qquad \forall y \in U^c, m \in \mathbb{N}.$$

Considere B conjunto $(n, \epsilon)-$gerador minimal para U^c. Seja $C = A \cup B$, que é $(n, \epsilon)-$gerador para todo o conjunto X.

Para cada $l \in \mathbb{N}$, podemos definir

$$\phi_l : X \to C^l, \qquad x \mapsto (y_0, ..., y_{l-1}),$$

onde

- Se $f^{in}(x) \in U$, tome $y_i \in A$ tal que $d_n(f^{in}(x), y_i) < \epsilon$.
- Se $f^{in}(x) \in U^c$, tome $y_i \in B$ tal que $d_n(f^{in}(x), y_i) < \beta \leq \epsilon$.

Afirmação: Se $\phi_l(x) = (y_0, ..., y_{l-1})$ então $y_i \in B$ não se repete na l-upla. De fato, suponha $y_{i_1} = y_{i_2} := y$. Então

$$d_n(f^{i_1 n}(x), y) < \beta \qquad e \qquad d_n(f^{i_2 n}(x), y) < \beta.$$

Supondo s.p.g. $i_1 < i_2$ obtemos

$$f^{(i_2 - i_1)n}(B(y, \beta)) \cap B(y, \beta) \neq \emptyset,$$

contradizendo que $y \in U^c$.

Afirmação: ϕ_l é $1-1$ para pontos $(m, 2\epsilon)-$separados, onde $ln \geq m$. De fato, suponha que $\phi_l(x) = \phi_l(x')$. Então

$$d_n(x, y_0) < \epsilon \text{ e } d_n(x', y_0) < \epsilon \implies d_n(x, x') < 2\epsilon$$

$$d_n(f^n(x), y_1) < \epsilon \text{ e } d_n(f^n(x'), y_1) < \epsilon \implies d_n(f^n(x), f^n(x')) < 2\epsilon$$

$$\vdots$$

$$d_n(f^{(l-1)n}(x), y_{l-1}) < \epsilon \qquad e \qquad d_n(f^{(l-1)n}(x'), y_{l-1}) < \epsilon$$
$$\implies d_n(f^{(l-1)n}(x), f^{(l-1)n}(x')) < 2\epsilon$$

Logo

$$d_m(x, x') \leq d_{ln}(x, x')$$
$$= \max\{d_n(x, x'), d_n(f^n(x), f^n(x')), ..., d_n(f^{(l-1)n}(x), f^{(l-1)n}(x')\} < 2\epsilon$$

Afirmação: Denotando $q = g(n, \beta, U^c)$ e $p = g(n, \epsilon, \Omega(f))$, para qualquer conjunto $(m, 2\epsilon)-$ separado vale

$$\#E \leq (q+1)! l^q p^l$$

Prova. (Afirmação) Seja I_j o conjunto das $l-$uplas em $\phi_l(E)$ tais que existem exatamente j dos $y_i{}'$s em B. Como $y_i \in B$ não se repete, é necessário que $j \leq q$.

Para I_j existem $\binom{q}{j}$ modos de escolher j pontos $y_i \in B$ e $\frac{l!}{(l-j)!}$ modos de arranjar a escolha de tais posições.

Finalmente, existem no máximo

$$g(n, \epsilon, \Omega(f))^{l-j} = p^{l-j} \leq p^l$$

modos de escolher os termos restantes. Usando que

- $\binom{q}{j} \leq q!$
- $\frac{l!}{(l-j)!} \leq l^j \leq l^q$

obtemos

$$\#I_j \leq \binom{q}{j} \frac{l!}{(l-j)!} p^l \leq q! l^q p^l.$$

E assim,

$$\#\phi_l(E) = \sum_{j=0}^{q} \#I_j \leq \sum_{j=0}^{q} q! l^q p^l = (q+1)! l^q p^l.$$

Como E é $(m, 2\epsilon)-$separado (onde $m \leq ln$), temos $\#E = \#\phi_l(E)$. $\square$

Finalmente, escolhendo $(l-1)n \leq m \leq ln$, obtemos

$$g(2\epsilon) = \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log g(m, 2\epsilon, X) \leq \limsup_{l\to\infty} \frac{1}{n(l-1)} \log(q+1)! l^q p^l$$

$$\limsup_{l\to\infty} \Big(\frac{1}{n(l-1)} \log(q+1)! + \frac{q}{n(l-1)} \log l + \frac{l}{n(l-1)} \log p \Big)$$

$$= \frac{1}{n} \log g(n, \epsilon, \Omega(f)) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$g(2\epsilon, X) \leq g(\epsilon, \Omega(f))$$

e, portanto,

$$h(f) \leq h(f|_{\Omega(f)})$$

$\square$

3.4 Exemplos

Exemplo 3.24. Seja $f : S^1 \to S^1$ homeomorfismo e fixe α cobertura formada por finitos intervalos. Denotemos por $\partial\alpha$ o conjunto formado pelos pontos extremos desses intervalos. Para cada $n \geq 1$ os extremos dos seus intervalos estão em

$$\partial\alpha^n = \partial\alpha \cup f^{-1}(\partial\alpha) \cup ... \cup f^{-n+1}(\partial\alpha).$$

Note que $|\alpha^n| \leq \#\partial\alpha^n \leq n\#\partial\alpha$. Então

$$h(f, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|\alpha^n| \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log n = 0.$$

Para cada $k \geq 1$, tomamos α_k cobertura por intervalos de diâmetro menor que $1/k$. Assim, $h(f, \alpha_k) = 0$ e $diam(\alpha_k) \to 0$. Logo

$$h(f) = 0.$$

Exemplo 3.25. Seja $X = \{1, ..., d\}^{\mathbb{N}}$ e $\sigma : X \to X$ dado por

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...).$$

O espaço X é compacto, pois está munido da topologia produto gerada pelo espaço base $M = \{1, ..., d\}$ (cuja topologia é a discreta). Isso significa que os geradores da topologia de X, chamados cilindros, são da forma

$$U_1 \times ... \times U_n \times M \times M \times M \times ...$$

onde os U_j são abertos em M e $n \geq 1$. Como conjuntos unitários sâo abertos em M, os geradores da topologia de X são

$$[x_1, x_2, ..., x_n] := \{y \in X : y_1 = x_1, ..., y_n = x_n\}, \qquad x_j \in M \text{ e } n \geq 1.$$

Com essa topologia, σ, chamada de **deslocamento**, é contínua, uma vez que

$$\sigma^{-1}[x_1, x_2, ..., x_n] = \cup_{j=1}^{d} [j, x_1, x_2, ..., x_n].$$

Além disso, essa topologia é metrizável. Considere

$$d(x, y) = 2^{-\min\{n : x_n \neq y_n\}},$$

ou seja, dois pontos estão perto se concidem em uma grande, porém finita, quantidade de coordenadas perto de zero.

Considere a cobertura $\alpha = \cup_{j=1}^{d} [j]$. Para cada $n \geq 1$, α^n é composta pelos cilindros de tamanho n:

$$\alpha^n = \{[x_1, x_2, ..., x_n] : x_j = 1, ..., d\}.$$

Como essa cobertura é também uma partição, $H(\alpha^n) = \log |\alpha^n| = \log d^n = n \log d$ e, assim,

$$h(\sigma, \alpha) = \log d$$

Para finalizar, basta observar que $diam(\alpha^n) = 2^{-(n+1)} \to 0$, logo

$$h(\sigma) = \log d.$$

Contas análogas podem ser feitas para o caso das sequências bilaterais $\{1, ..., d\}^{\mathbb{Z}}$

Exemplo 3.26 (**Deslocamento de tipo finito**). Seja $M = \{1, ..., d\}$ e $A = (A_{i,j})_{i,j}$ uma matriz $d \times d$ com entradas 0 e 1 tal que toda linha possui pelo menos uma entrada 1. Chamamos A de matriz de transição. Considere o subconjunto $X_A \subset M^{\mathbb{N}}$ dado pelas sequências $(x_n)_n$ tais que

$$A_{x_n, x_{n+1}} = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Afirmação: X_A é fechado e invariante pelo deslocamento. De fato, se $x = (x_1, x_2, ...) \notin X_A$ então existe algum n tal que $A_{x_n, x_{n+1}} = 0$. Então todo elemento do cilindro (aberto) $[x_1, ..., x_{n+1}]$ também não está em X_A. A invariância é imediata da definição.

Denotamos por σ_A a restrição do deslocamento a X_A e o chamamos de **deslocamento unilateral de tipo finito** associado a A. Analogamente podemos definir o caso bilateral, mas precisamos da hipótese adicional de que toda coluna também possua ao menos um 1.

Associamos a A o grafo orientado

$$\Gamma_A := \{(x, y) : A_{x,y} = 1\}.$$

Chamamos de caminho de comprimento $l \geq 1$ no grafo Γ_A qualquer sequência $x_0 x_1 ... x_l$ tal que $A_{x_i, x_{i+1}} = 1$ para todo i. Dados $x, y \in M$, queremos contar qual o número $A^l_{x,y}$ de caminhos de comprimento l começando em x e terminando em y, e somando essas quantidades em x e y, quantos cilindros de tamanho $l + 1$ precisamos para cobrir X_A. Note que

- $A^1_{x,y} = 1$ se existe aresta ligando x e y e $A^1_{x,y} = 0$ caso contrário. Então $A^1_{x,y} = A_{x,y}$ para todo x, y.

- Os caminhos de comprimento $l + m$ começando em x e terminando em y são concatenações dos caminhos de comprimento l começando em x e terminando em algum z com os caminhos de comprimento m começando em z e terminando em y. Logo

$$A^{l+m}_{x,y} = \sum_{z=1}^{d} A^l_{x,z} A^m_{z,y} \text{ para todos } x, y \in M \text{ e todos } l, m \geq 1.$$

Assim, $A^l_{x,y}$ é exatamente a entrada (x,y) da matriz A^l.

Obs:O **raio espectral** $r(B)$ de uma aplicação linear $B : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, ou seja, o maior módulo de seus autovalores, é dado por

$$r(B) = \lim_{n\to\infty} ||B^n||^{1/n},$$

onde $||\cdot||$ é qualquer norma no espaço das matrizes, que tem dimensão (de espaço vetorial) finita e portanto tem todas as normas equivalentes.

Note que para qualquer matriz de transição A, todas as linhas de A^n são também não nulas e, portanto,

$$||A^n|| \geq \frac{||A^n(1,...,1)||}{||(1,...,1)||} \geq 1.$$

Logo $r(A) \geq 1$.

Fixando a notação $||\cdot||_s$ para a norma da soma, vamos calcular a entropia de $\sigma_A : X_A \to X_A$ para o caso unilateral, sendo o bilateral análogo.

Seja α a cobertura aberta de X_A dada por

$$[a]_A := \{(x_n)_n \in X_A : x_1 = a\}$$

Para cada $n \geq 1$, a cobertura α^n é formada por

$$[a_1, a_2, ..., a_n]_A := \{(x_n)_n \in X_A : x_1 = a_1, ..., x_n = a_n\}$$

que são restrições dos cilindros de tamanho n. Em particular, seu diâmetro vai a zero. Como esses conjuntos são disjuntos dois a dois, $M(\alpha^n)$ é igual ao número de caminhos de comprimento $n-1$ no grafo Γ_A, ou seja,

$$M(\alpha^n) = \sum_{i,j=1}^{d} A^{n-1}_{i,j} = ||A^{n-1}||_s.$$

Assim,

$$h(\sigma_A, \alpha) = \lim_{n\to\infty \frac{1}{n}} \log M(\alpha^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||A^{n-1}||_s = \log r(A).$$

Como $diam(\alpha^n) \to 0$,

$$h(\sigma_A) = \log r(A).$$

No caso $A_{i,j} = 1$ para todo (i, j), $r(A) = d$ e caimos no exemplo anterior.

Exemplo 3.27. Seja M um espaço métrico compacto infinito, $X = M^{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ e $\sigma : X \to X$. Fixe $(x_n)_n \subset M$ sequência de elementos distintos. Para cada $d \geq 1$, definimos

$$\psi : Z = \{1, ..., d\}^{\mathbb{K}} \to X, \qquad \psi(j_1, j_2, ...) = (x_{j_1}, x_{j_2}, ...)$$

Como ψ é contínua, sobrejetiva e $\psi \circ \sigma_Z = \sigma_X \circ \psi$, a Proposição 3.20 nos dá

$$h(\sigma_X) \geq \log d$$

para todo $d \geq 1$. Logo

$$h(\sigma_X) = \infty.$$

Em particular, isso mostra que $\sigma : ([0, 1]^d)^{\mathbb{N}} \to ([0, 1]^d)^{\mathbb{N}}$ tem entropia infinita para qualquer $d \geq 1$, ou seja, ela não consegue diferir tais sistemas.

4 Dimensão Métrica Média

A entropia topológica é uma ferramenta muito útil para descobrir se dois sistemas não são conjugados ou se um pode ser fator de outro: se f e g são conjugados, necessariamente têm mesma entropia e se g é fator de f, necessariamente $h(g) \leq h(f)$. No Exemplo 3.25 vimos que alfabetos com quantidades distintas (porém finitas) de elementos induzem deslocamentos com diferentes entropias e, portanto, não conjugados. Mas no Exemplo 3.27 vimos que alfabetos infinitos geram deslocamentos de entropia infinita. Será que são todos conjugados?

Em [5], Gromov definiu um análogo dinâmico da dimensão topológica, a chamada dimensão topológica média, que distingue sistemas com entropia infinita. Contudo, esta quantidade é, em geral, difícil de ser computada. Assim, em [6], Lindenstrauss e Weiss definiram a **dimensão métrica média**, que pode ser pensada como uma dimensão de Minkowski média, dependente da métrica, que serve como cota superior para a dimensão topoógica média.

Lembre que a dimensão de Minkowski é uma noção de tamanho que associamos a conjuntos, não há dinâmica. Porém, dada uma função contínua num espaço métrico compacto $f : (X, d) \to (X, d)$, as quantidades usadas na definição de entropia $S(\epsilon), g(\epsilon), s(\epsilon)$ nada mais são do que médias ao longo da dinâmica das quantidades usadas na definição da dimensão de Minkowski.

Definição 4.1. Seja (X, d) espaço métrico compacto e $f : X \to X$ contínua. Chamamos de **dimensão métrica média inferior** e **dimensão métrica média superior** de (X, d, f) as quantidades

$$\underline{mdim}_M(X, f, d) := \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{S(X, f, d, \epsilon)}{|\log \epsilon|}$$

e

$$\overline{mdim}_M(X, f, d) := \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{S(X, f, d, \epsilon)}{|\log \epsilon|}.$$

Se os valores acima coincidem, chamamos o limite de **dimensão métrica média** e denotamos

$$mdim_M(X, f, d) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{S(X, f, d, \epsilon)}{|\log \epsilon|}.$$

Como vimos anteriormente, obtemos as mesmas quantidades se substituirmos S por s ou g.

Quando não houver confusão, omitiremos alguns dos parâmetros na notação de $S(\cdot)$.

Obs: Segue diretamente da definição que se $h(f) < \infty$ então

$$mdim_M(X, f, d) = 0$$

para qualquer métrica d que gere a topologia.

Uma grande diferença entre a entropia e a dimensão métrica média é a dependência, de fato, na métrica. A entropia diz para onde $S(X, f, d, \epsilon)$ está convergindo, o que, como vimos, depende apenas da topologia. Quando essa convergência é para infinito, a escolha da métrica dita a velocidade em que isso acontece, o que é quantificado pela dimensão métrica média. Isso é natural de se esperar uma vez que a dimensão de Minkowski mede a velocidade em que a cardinalidade de $\epsilon-$coberturas aumenta quando ϵ diminui. Essa dependência ficará mais clara a seguir.

Dados (X, d) espaço métrico compacto e $\rho > 1$, considere em $X^{\mathbb{N}}$ a métrica d_ρ dada por

$$d_\rho(x, y) := d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) := \sup_{i \geq 1} \frac{d(x_i, y_i)}{\rho^{i-1}}$$

Se não houver confusão, simplificaremos a notação denotando d_ρ apenas por d.

Teorema 4.2 ([13]). *Nas condições anteriores,*

$$\underline{mdim}_M(X^{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho) = \underline{dim}_M(X, d)$$

e

$$\overline{mdim}_M(X^{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho) = \overline{dim}_M(X, d).$$

Prova. Dado $\epsilon > 0$, fixemos $l = l(\epsilon)$ tal que $diam(X)/\rho^l < \epsilon$. Seja $N = N(\epsilon)$ o menor número de abertos $U_1, ..., U_N$ de diâmetro menor ou igual a ϵ necessários para cobrir X. Para cada $n \geq 1$, considere a seguinte cobertura de $X^{\mathbb{N}}$

$$\alpha_n = \{U_{j_1} \times ... \times U_{j_{l+n}} \times X \times X \times ... : j_i = 1, ..., N\}.$$

Note que $diam(\alpha_n, d_n) \leq \epsilon$. Logo

$$N(X^{\mathbb{N}}, d_n, \epsilon) \leq |\alpha_n| = N(\epsilon)^{l+n}.$$

Então

$$\begin{aligned} S(X^{\mathbb{N}}, \sigma, d, \epsilon) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(X^{\mathbb{N}}, d_n, \epsilon) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{n+l}{n} \log N(\epsilon) = \log N(\epsilon). \end{aligned}$$

Dividindo por $|\log \epsilon|$ e tomando os limites, obtemos $\leq$.

Para a outra desigualdade, seja $E = \{x_1, ..., x_{N(\epsilon)}\}$ um conjunto $2\epsilon-$separado maximal em X. Para $n \geq 1$, note que o conjunto

$$E_n = \{(y_i)_i \in X^{\mathbb{N}} : y_i \in E, \forall i \in \{1, ..., n\} \text{ e } y_k = x_1, \forall k > n\} \subset X^{\mathbb{N}}$$

é $(\sigma, n, \epsilon)-$ separado, uma vez que dois elementos distintos $x, y \in E_n$ diferem em 2ϵ em alguma coordenada $j \in \{1, ..., n\}$ e, assim, $d(\sigma^{j-1}(x), \sigma^{j-1}(y)) = 2\epsilon > \epsilon$.
Então,

$$s(\sigma, \epsilon) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |E_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(\epsilon)^n = \log N(\epsilon).$$

Logo,
$$\frac{s(\sigma,\epsilon)}{|\log\epsilon|}\geq\frac{\log N(\epsilon)}{|\log\epsilon|}=\frac{\log N(\epsilon)}{|\log 2\epsilon|}\frac{|\log 2\epsilon|}{|\log\epsilon|}.$$
Tomando os limites, obtemos $\geq$.

$\square$

Com isso em mãos, a dependência na métrica da dimensão métrica média segue imediatamente da dependência na métrica da dimensão de Minkowski, como visto no Exemplo 2.16.

4.1 Propriedades Básicas

A dimensão métrica média, pela semelhança com a entropia topológica e a dimensão de Minkowski, herda diversas propriedades das anteriores com pequenas regularidades adicionais necessárias. Assim, os resultados desta seção são pequenas adaptações de propriedades clássicas.

Teorema 4.3. *Sejam $f:(X,d)\to(X,d)$ e $g:(Y,d')\to(Y,d')$ contínuas em espaços métricos compactos. Se existe $\theta:X\to Y$ Lipschitz com constante L sobrejetiva tal que $\theta\circ f=g\circ\theta$, ou seja, g é fator topológico de f por uma semi-conjugação Lipschitz, então*
$$\underline{mdim}_M(Y,g,d')\leq\underline{mdim}_M(X,f,d)$$
e
$$\overline{mdim}_M(Y,g,d')\leq\overline{mdim}_M(X,f,d).$$
Ainda, se θ for Bi-Lipschitz, valem as igualdades.

Prova. Comecemos por fixar $n\geq 1$. Dada qualquer $(n,\epsilon)-$cobertura α de X, $\theta(\alpha)$ é $(n,L\epsilon)-$cobertura de Y. De fato, é cobertura pela sobrejetividade de θ e, dados $U\in\alpha$ e $0\leq j<n$,
$$diam(g^j(\theta(U)))=\sup_{x,y\in U}d'(g^j\circ\theta(x),g^j\circ\theta(y))$$

$$= \sup_{x,y\in U} d'(\theta \circ f^j(x), \theta \circ f^j(y)) \leq L \sup_{x,y\in U} d(f^j(x), f^j(y)) \leq L\epsilon.$$

Então,

$$N(Y, d_n, L\epsilon) \leq N(X, d_n, \epsilon) \implies S(Y, g, L\epsilon) \leq S(X, f, \epsilon).$$

E assim,

$$\frac{S(Y, g, L\epsilon)}{|\log L\epsilon|}\frac{|\log L\epsilon|}{|\log \epsilon|} \leq \frac{S(X, f, \epsilon)}{|\log \epsilon|}.$$

Tomando os limites em ϵ concluimos a prova. No caso Bi-lipschitz, basta inverter os papeis de f e g que obtemos as outras desigualdades. □

Isso mostra que a dimensão métrica média, mesmo não sendo um invariante topológico, é um invariante por conjugações Bi-Lipschitz e, em particular, por conjugações isométricas.

Proposição 4.4. *Se $f : (X, d) \to (X, d)$ é contínua num espaço métrico compacto X e $Y \subset X$ é $f-$invariante então*

$$\underline{mdim}_M(Y, f|_Y, d) \leq \underline{mdim}_M(X, f, d)$$

e

$$\overline{mdim}_M(Y, f|_Y, d) \leq \overline{mdim}_M(X, f, d).$$

Prova. Como qualquer cobertura de X também cobre Y, temos

$$N(Y, d_n, \epsilon) \leq N(X, d_n, \epsilon)$$

para todo $n \geq 1$ e $\epsilon > 0$ e o resultado segue. □

Corolário 4.5. *Se $Y, Z \subset X$ métrico compacto são fechados invariantes então*

$$\overline{mdim}_M(Y \cup Z, f|_{Y \cup Z}, d) = \max\{\overline{mdim}_M(Y, f|_Y, d), \overline{mdim}_M(Z, f|_Z, d)\}.$$

Prova. Para cada $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} N(Y \cup Z, d_n, \epsilon) &\leq N(Y, d_n, \epsilon) + N(Z, d_n, \epsilon) \\ &\leq 2 \max\{N(Y, d_n, \epsilon), N(Z, d_n, \epsilon)\}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} S(Y \cup Z, f, d, \epsilon) &\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log 2 \max\{N(Y, d_n, \epsilon), N(Z, d_n, \epsilon)\} \\ &= \max\{S(Y, f, d, \epsilon), S(Z, f, d, \epsilon)\}. \end{aligned}$$

Dividindo por $|\log \epsilon|$ e tomando o $\limsup$ obtemos $\leq$. A outra desigualdade segue da proposição anterior. □

No caso de uma união infinita $X = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ vale apenas a desigualdade $\geq$. O Exemplo 4.9 possui uma decomposição invariante $J_1, J_2, ...$ de $[0, 1]$, todos com dimensão métrica media nula.

Proposição 4.6. *Seja (X, d) espaço métrico compacto. Então, para qualquer $f : X \to X$ contínua, vale*

$$\underline{mdim}_M(X, f, d) \leq \underline{dim}_M(X, d) \qquad e \qquad \overline{mdim}_M(X, f, d) \leq \overline{dim}_M(X, d).$$

Prova. Considere $\psi : X \to X^{\mathbb{N}}$ dado por

$$\psi(x) = (x, f(x), f^2(x), ...).$$

Note que $\psi \circ f = \sigma \circ f$. Então $Y = \psi(X)$ é fechado e invariante em $X^{\mathbb{N}}$. Defina a métrica d_ψ em X por

$$d_\psi(x, y) = \tilde{d}(\psi(x), \psi(y)).$$

Claramente $d(x,y) \leq d_\psi(x,y)$ para quaisquer $x,y \in X$. Então qualquer conjunto $(n,f,\epsilon,d)-$separado é $(n,f,\epsilon,d_\psi)-$separado. Logo,

$$\underline{mdim}_M(X,f,d) \leq \underline{mdim}_M(X,f,d_\psi) = \underline{mdim}_M(Y,\sigma|_Y,\tilde{d})$$

$$\leq \underline{mdim}_M(X^{\mathbb{N}},\sigma,\tilde{d}) = \underline{dim}_M(X,d).$$

Para as dimensões superiores, as desigualdades são análogas. $\square$

Obs: Como veremos no Exemplo 4.9, existem funções que atingem a igualdade.

Proposição 4.7. *Seja (X,d) espaço métrico compacto, $f: X \to X$ contínua e $k \geq 1$. Então*

$$\underline{mdim}_M(X,f^k,d) \leq k\ \underline{mdim}_M(X,f,d)$$

e

$$\overline{mdim}_M(X,f^k,d) \leq k\ \overline{mdim}_M(X,f,d)$$

Prova. Vamos repetir a primeira parte da prova da Proposição 3.18. Sejam $n \geq 1$ e $\epsilon > 0$. Se um conjunto $E \subset X$ é $(nk,\epsilon)-$gerador para f então é $(n,\epsilon)-$gerador para f^k, uma vez que a segunda leva em conta apenas os iterados múltiplos de k fazendo com que as bolas tenham menos restrição, contendo as primeiras. Então

$$g(f^k,n,\epsilon) \leq g(f,nk,\epsilon)$$

$$\implies g(f^k,\epsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log g(f^k,n,\epsilon)$$

$$\leq k \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{nk} \log g(f,nk,\epsilon) \leq k\ g(f,\epsilon).$$

Dividindo por $|\log\epsilon|$ e tomando os limites o resultado segue. $\square$

Obs: Como veremos no Exemplo 4.9, pode valer a desigualdade estrita.

Já vimos que podem haver conjuntos invariantes que atingem a entropia total de um sistema. O conjunto não-errante funciona de maneira equivalente para a dimensão métrica média.

Proposição 4.8. *Seja (X, d) espaço métrico compacto e $f : X \to X$ contínua. Então*

$$\underline{mdim}_M(X, f, d) = \underline{mdim}_M(\Omega(f), f|_{\Omega(f)}, d)$$

e

$$\overline{mdim}_M(X, f, d) = \overline{mdim}_M(\Omega(f), f|_{\Omega(f)}, d)$$

Prova. Basta mostrar $\geq$. Repetindo a prova usada para entropia obtemos

$$g(2\epsilon, X) \leq g(\epsilon, \Omega(f))$$

e, portanto,

$$\frac{g(2\epsilon, X)}{|\log 2\epsilon|} \leq \frac{g(\epsilon, \Omega(f))}{|\log \epsilon|} \frac{|\log \epsilon|}{|\log 2\epsilon|}.$$

Tomando os limites, concluimos a prova. □

Exemplo 4.9 ([13])**.** Já vimos que para qualquer $\phi \in C^0[0,1]$ vale

$$\overline{mdim}_M([0,1], \phi, |\cdot|) \leq \overline{dim}_M([0,1], |\cdot|) = 1.$$

Agora, vamos construir um exemplo que atinge esse valor.

Sejam $g : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$g(x) = |1 - |3x - 1||,$$

$a_0 := 0$ e, para $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} 1/k^2.$$

Para cada $n \geq 1$, denotemos por

$$T_n : J_n := [a_{n-1}, a_n] \to [0,1]$$

o único mapa afim crescente entre J_n (que tem comprimento $6/\pi^2 n^2$) e $[0,1]$.

Considere $\phi : [0,1] \to [0,1]$ contínua dada por

$$\phi|_{J_n} = T_n^{-1} \circ g^n \circ T_n.$$

Essa é a função que dará o que queremos.

Fixado $n \geq 1$, J_n pode ser dividido em 3^n intervalos de mesmo comprimento $J_n(1), ..., J_n(3^n)$ tais que

$$\phi(J_n(i)) = J_n \qquad \text{para todo } i \in \{1, ..., 3^n\}.$$

A seguir, $J_n(i)$ pode ser dividido em 3^n intervalos de mesmo comprimento $J_n(i,1), ..., J_n(i, 3^n)$ tais que

$$\phi^2(J_n(i,j)) = J_n \qquad \text{para todo } i, j \in \{1, ..., 3^n\}.$$

Indutivamente, para todo $k \geq 1$ e $(i_1, ..., i_k)$ tal que $i_j \in \{1, ..., 3^n\}$, podemos dividir $J_n(i_1, ..., i_k)$ em 3^n intervalos de mesmo comprimento $J_n(i_1, ..., i_k, 1), J_n(i_1, ..., i_k, 2), ..., J_n(i_1, ..., i_k, 3^n)$ tais que

$$\phi_n^{k+1}(i_1, ..., i_k, i) = J_n \qquad \text{para todo } i \in \{1, ..., 3^n\}.$$

Cada $J_n(i_1, ..., i_k)$ tem comprimento $|J_n|/3^{kn}$ para $k \geq 1$. Seja

$$\epsilon_n := |J_n|/3^n = 6/\pi^2 n^2 3^n.$$

Se $x \in J_n(i_1, ..., i_k)$ e $y \in J_n(j_1, ..., j_k)$, onde $(i_1, ..., i_k) \neq (j_1, ..., j_k)$ e os i's e j's são todos ímpares, em no máximo k iterados suas imagens vivem em $J(i_l)$ e $J(j_l)$, respectivamente que distam pelo menos ϵ_n, ou seja,

$$d_k(x, y) \geq \epsilon_n.$$

Para cada $k \geq 1$ existem ao menos $(3^n/2)^k$ escolhas diferentes de $J_n(i_1, ..., i_k)$ com todos os índices ímpares. Assim

$$s(k, \epsilon_n) \geq (3^n/2)^k$$

Logo

$$s(\epsilon_n) = \lim_{k \to \infty} \frac{\log s(k, \epsilon_n)}{k} \geq \log(3^n/2).$$

Finalmente,

$$\overline{mdim}_M([0,1], \phi, |\cdot|) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\log(3^n/2)}{|\log \epsilon_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\log 3 + \log 2}{\log \pi^2 n^2/6 + n\log 3} = 1.$$

Foi referenciado ao final da Proposição 4.7 que este exemplo atinge a desigualdade estrita. Isso ocorre pois, para qualquer $k > 1$,

$$\overline{mdim}_M([0,1], \phi^k, |\cdot|) \leq \overline{dim}_M([0,1], |\cdot|) = 1$$

e, assim,

$$\overline{mdim}_M([0,1], \phi^k, |\cdot|) < k = k\ \overline{mdim}_M([0,1], \phi, |\cdot|).$$

5 Princípio Variacional

Nessa seção veremos uma expressão equivalente para a dimensão métrica média através de um princípio variacional. Essa formulação conecta o objeto que vimos até agora com as medidas de probabilidade definidas na sigma-álgebra de Borel, gerada pela topologia, que ficam invariantes pela função f.

5.1 Medidas invariantes

Definição 5.1. Seja $f : (X, d) \to (X, d)$ função contínua num espaço métrico compacto. Diremos que uma medida de probabilidade $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, 1]$ é invariante por f, ou $f-$invariante, se para qualquer conjunto Borel-mensurável A temos,

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Denotamos o conjunto das probabilidades $f-$invariantes por $M_f(X)$.

O conjunto $M(X)$ das probabilidades borelianas é compacto na topologia fraca*, ou seja, a topologia na qual

$$\mu_n \to \mu \iff \int \phi d\mu_n \to \int \phi d\mu, \forall \phi \in C^0(X).$$

A prova desse resultado não será apresentada e pode ser encontrada com detalhes em [2].

Uma maneira construtiva de obter medidas invariantes é através da aplicação **push-forward**

$$f_* : M(X) \to M(X), \qquad (f_*(\nu))(E) := \nu(f^{-1}(E)).$$

Segue da definição de f_*, da linearidade da integral e do fato das funções contínuas serem uniformemente aproximadas por funções simples, que para qualquer $\phi \in C^0(X)$

$$\int \phi d(f_*(\nu)) = \int \phi \circ f d\nu.$$

Pela continuidade de f e da relação acima segue a continuidade de f_*.

Lema 5.2. *Seja* $(\nu_n)_n$ *sequência qualquer em* $M(X)$. *Se*

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j \nu_n$$

então qualquer ponto de acumulação de $(\mu_n)_n$*, que sempre existe por compacidade, é* $f-$*invariante.*

<u>Obs:</u> Uma probabilidade é invariante se, e somente se, é ponto fixo de f_*.

Prova. Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ contínua e $n \geq 1$. Então

$$\int \phi d(f_*(\mu_n)) = \int \phi \circ f d\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \int \phi \circ f^j d\nu_n$$

$$= \int \phi d\mu_n + \frac{1}{n}\Big(\int \phi \circ f^n d\nu_n - \int \phi d\nu_n \Big)$$

Assim,

$$| \int \phi d(f_*(\mu_n)) - \int \phi d\mu_n | \leq \frac{2 \sup |\phi|}{n}.$$

Logo, se $(\mu_{n_j}) \to \mu$ então $\int \phi d(f_*(\mu)) = \int \phi d\mu$ para qualquer ϕ contínua e, portanto, $f_*(\mu) = \mu$. □

A seguir, veremos que alguns conjuntos dinamicamente interessantes têm boas relações com medidas invariantes. Isso será usado mais tarde para obter tanto uma prova simplificada do resultado sobre o conjunto não-errante quanto a obtenção de outro conjunto tal que a restrição da dinâmica a este tem dimensão métrica média total.

Proposição 5.3. *Seja* (X, d) *métrico compacto e* $f : X \to X$ *contínua. Então para qualquer probabilidade invariante* $\mu \in M_f(X)$*, vale*

$$\mu(Y) = 1,$$

onde $Y = \Omega(f)$ *ou* $Y = \bigcap_{n\geq 0} f^n(X)$.

Prova. Comecemos pelo caso $Y = \Omega(f)$. Seja $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma base da topologia de X. Então $X - \Omega(f)$ é a união dos U_j tais que os conjuntos

$$U_j,\ f^{-1}(U_j),\ f^{-2}(U_j)\ ...\ f^{-n}(U_j)\ ...$$

são dois a dois disjuntos. Mas para qualquer tal U, vale

$$1 \geq \sum_{n\geq 0} \mu(f^{-n}(U)) = \sum_{n\geq 0} \mu(U).$$

Assim, $\mu(U) = 0$, pois, caso contrário, a soma acima divergiria. Assim, $\mu(X - \Omega(f)) = 0$ e, portanto, $\mu(\Omega(f)) = 1$.

Agora, consideremos $Y = \bigcap_{n\geq 0} f^n(X)$. Como μ é invariante temos, para qualquer $n \geq 0$,

$$\mu(f^n(X)) = \mu(f^{-n}(f^n(X))) = \mu(X) = 1.$$

Portanto,

$$\mu(\bigcap_{n\geq 0} f^n(X)) = 1.$$

□

5.2 O princípio variacional

Fixados (X, d, f) e dada uma probabilidade invariante $\mu \in M_f(X)$, seja $N_\mu(n, \epsilon, \delta)$ a menor quantidade de $(n, \epsilon)-$ bolas dinâmicas, isso é, bolas de raio ϵ na métrica d_n, necessária para cobrir algum conjunto de medida μ maior que $1 - \delta$, ou seja,

$$N_\mu(n, \epsilon, \delta) = \inf_B N(B, \epsilon, d_n)$$

onde o ínfimo pode ser tomado sobre as uniões finitas de $(n, \epsilon)-$bolas $B := \cup_{i=1}^k B_k$ tais que $\mu(B) > 1 - \delta$, pois dado qualquer conjunto Borel-mensurável B', obtemos o mesmo $N(\cdot, \epsilon, d_n)$ se considerarmos a própria cobertura como sendo o conjunto. Denotando

$$h_\mu(\epsilon, f, \delta) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N_\mu(n, \epsilon, \delta),$$

foi provado em [3] o seguinte

Teorema 5.4. *Seja (X, d) espaço métrico compacto e $f : X \to X$ contínua . Então,*

$$\overline{mdim}_M(X, f, d) = \lim_{\delta\to 0} \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\sup_{\mu\in M_f} h_\mu(\epsilon, f, \delta)}{|\log \epsilon|}.$$

e, caso $\overline{mdim}_M(X, f, d) < \infty$,

$$\underline{mdim}_M(X, f, d) = \lim_{\delta\to 0} \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{\sup_{\mu\in M_f} h_\mu(\epsilon, f, \delta)}{|\log \epsilon|}.$$

Note que as desigualdades $\geq$ seguem da definição pois, para toda μ e todo δ, o infimo na definição de N_μ sempre considera o conjunto X e, portanto, $N_\mu(n, \epsilon, \delta) \leq N(X, \epsilon, d_n)$.

A parte principal da prova é o seguinte

Lema 5.5. *Seja* (X, f, d) *como anteriormente. Então para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\mu_\epsilon \in M_f(X)$ *tal que*

$$h_{\mu_\epsilon}(\epsilon, f, \delta) \geq s(2\epsilon) - 3\delta S(f, \epsilon).$$

Prova. Seja $E_n = \{x_1, x_2, ..., x_{s(n,\epsilon)}\}$ um conjunto (n, ϵ)-separado maximal em X. Em cada E_n defina a probabilidade uniforme

$$\nu_n := \frac{1}{|E_n|} \sum_{x \in En} \delta_x$$

e defina

$$\overline{\nu_n} := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_*^k \nu_n.$$

Tome uma subsequência $(n_k)_k$ tal que

$$s(\epsilon) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} \log N(n_k, \epsilon)) \qquad \textit{and} \qquad \overline{\nu_{n_k}} \longrightarrow \mu \in M_f$$

Podemos supor $n_k/k \to \infty$. Seja K aberto tal que

$$\mu(K) > 1 - \delta \qquad e \qquad N(K, \epsilon/2, d_n) = N_\mu(n, \epsilon/2, \delta).$$

Então existe k_0 tal que

$$\overline{\nu_{n_k}}(K) > 1 - \delta$$

para $k \geq k_0$.

Denote por (L_n) a matriz de $0's$ e $1's$, onde $i = 0, ..., n-1$ e $j = 1, ..., s(n, \epsilon)$, dada por

$$(L_n)_{i,j} = 1 \iff f^i x_j \in K.$$

Então

$$(1 - \delta) < \overline{\nu_{n_k}}(K) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k - 1} f_*^i \nu_{n_k}(K) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k - 1} \frac{1}{|E_{n_k}|} \sum_{x \in En_k} \delta_{f^i(x)}(K)$$

implica que

$$(1-\delta)n_k s(n_k,\epsilon) < \sum_{i=0}^{n_k-1} \sum_{x\in En_k} \delta_{f^i(x)}(K) = \#\{1 \in L_{n_k}\}.$$

Para $s > 1$ definimos a submatriz $L_{n_k}(s)$, onde

$$i \in [\lfloor n_k/k \rfloor, n_k - \lfloor n_k/s \rfloor - 1].$$

Então

$$\#\{1 \in L_{n_k}(s)\} = \#\{1 \in L_{n_k}\} - \#\{1 \in L_{n_k}, i < \lfloor n_k/k \rfloor\}$$

$$-\#\{1 \in L_{n_k}, i > n_k - \lfloor n_k/s \rfloor \ -1\}$$

$$\geq \#\{1 \in L_{n_k}\} - s(n_k,\epsilon)\lfloor n_k/k \rfloor \ - s(n_k,\epsilon)\lfloor n_k/s \rfloor$$

implica que

$$\#\{1 \in L_{n_k}(s)\} \geq s(n_k,\epsilon)n_k(1-\delta-1/k-1/s)$$

Iremos supor $s > \frac{1}{1-2\delta-1/k}$, ou seja, $1-\delta-1/k-1/s > \delta$. Então

$$\#\{1 \in L_{n_k}(s)\} \geq s(n_k,\epsilon)n_k\delta.$$

Como $L_{n_k}(s)$ tem $n_k - \lfloor n_k/s \rfloor - \lfloor n_k/k \rfloor$ linhas, existe um índice m_k satisfazendo

$$\#\{1 \text{ na linha } m_k\} \geq \frac{s(n_k,\epsilon)n_k\delta}{n_k - \lfloor n_k/s \rfloor - \lfloor n_k/k \rfloor}$$

e

$$\lfloor n_k/k \rfloor \leq m_k < n_k - \lfloor n_k/s \rfloor.$$

Isso significa que existe $J \subset \{1, ..., s(n,\epsilon)\}$ tal que

$$f^{m_k}(x_j) \in K, \forall j \in J \qquad e \qquad |J| \geq \frac{s(n_k,\epsilon)n_k\delta}{n_k - \lfloor n_k/s \rfloor - \lfloor n_k/k \rfloor} \geq s(n_k,\epsilon)\delta.$$

Note que, por definição, X pode ser coberto por $N(m_k, \epsilon/2)$ $(m_k, \epsilon/2)-$ bolas dinâmicas. Então X pode ser coberto por $N(m_k, \epsilon/2)$ conjuntos de diâmetro menor que ϵ na métrica d_{m_k}. Em particular, existe um subconjunto $A' \subset \{x_j\}_{j \in J}$ tal que

$$diam_{d_{m_k}}(A') \leq \epsilon \qquad e \qquad |A'| \geq \frac{s(n_k, \epsilon)\delta}{N(m_k, \epsilon/2)}$$

Alem disso, se $i \neq j$ e $d_{m_k}(x_i, x_j) \leq \epsilon$ então

$$\epsilon \leq d_{n_k}(x_i, x_j) = \max\{d(f^{m_k}(x_i), f^{m_k}(x_j)), d(f^{m_k+1}(x_i), f^{m_k+1}(x_j)),$$
$$..., d(f^{n_k-1}(x_i), f^{n_k-1}(x_j))\} = d_{n_k-m_k}(f^{m_k}(x_i), f^{m_k}(x_j)).$$

Então obtemos $A := f^{m_k}(A') \subset K$ satisfazendo

$$|A| \geq \frac{s(n_k, \epsilon)\delta}{N(m_k, \epsilon/2)} \qquad e \qquad d_{n_k}(a_i, a_j) \geq d_{n_k-m_k}(a_i, a_j) \geq \epsilon, \forall a_i, a_j \in A$$

Logo, $A \subset K$ é $(n_k, \epsilon)-$ separado e, portanto,

$$B_{n_k}(a_i, \epsilon/2) \cap B_{n_k}(a_j, \epsilon/2) = \emptyset.$$

Assim,

$$N_\mu(n_k, \epsilon/2, \delta) = N(K, \epsilon/2, d_{n_k}) \geq \frac{s(n_k, \epsilon)\delta}{N(m_k, \epsilon/2)}$$

Já estávamos assumindo $\frac{1}{1-2\delta-1/k} < s$. Para $k > 1/\delta$, podemos também assumir

$$\frac{1}{1-2\delta-1/k} < s < \frac{1}{1-3\delta}.$$

Lembre que

- $\lfloor n_k/k \rfloor \leq m_k \implies m_k \to \infty$
- $m_k < n_k - n_k/s + 1 \implies m_k/n_k < 1 - 1/s + 1/n_k$

- $s < \frac{1}{1-3\delta} \implies 1 - 1/s < 3\delta$

Finalmente,

$$\begin{aligned} h_\mu(\epsilon/2, f, \delta) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N_\mu(n, \epsilon/2, \delta) \\ &\geq \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \log s(n_k, \epsilon) - \frac{m_k}{n_k}\frac{1}{m_k} \log N(m_k, \epsilon/2) \\ &\geq \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \log s(n_k, \epsilon) - (1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{n_k})\frac{1}{m_k} \log N(m_k, \epsilon/2) \\ &\geq \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \log s(n_k, \epsilon) - (3\delta + \frac{1}{n_k})\frac{1}{m_k} \log N(m_k, \epsilon/2) \\ &= s(\epsilon) - 3\delta S(\epsilon/2). \end{aligned}$$

□

Prova. (Teorema)
Pelo Lema,

$$\frac{\sup_{\mu\in M_f(X)} h_\mu(\epsilon, f, \delta)}{|\log \epsilon|} \geq \frac{s(2\epsilon)}{|\log \epsilon|} - 3\delta\frac{S(f, \epsilon)}{|\log \epsilon|}.$$

No caso $\overline{mdim}_M(X, f, d) < \infty$, basta tomar os limites.
Se $\overline{mdim}_M(X, f, d) = \infty$, usamos que $\lim_\delta \limsup_\epsilon \geq \limsup_\epsilon \lim_\delta$

□

<u>Obs:</u> Note que, com os cálculos feitos acima, podemos reescrever o princípio variacional invertendo os limites em ϵ e δ, de modo a abandonar a hipótese de finitude no caso da dimensão inferior. Assim, obtemos, para qualquer $f : X \to X$ contínua num métrico compacto,

$$\overline{mdim}_M(X, f, d) = \limsup_{\epsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \frac{\sup_{\mu\in M_f} h_\mu(\epsilon, f, \delta)}{|\log \epsilon|}.$$

e

$$\underline{mdim}_M(X,f,d) = \liminf_{\epsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \frac{\sup_{\mu\in M_f} h_\mu(\epsilon,f,\delta)}{|\log\epsilon|}.$$

A seguir, provaremos um corolário importante e simples do princípio variacional. É um resultado equivalente ao que já existe para a entropia e a prova é análoga à encontrada em [15] onde se faz uso do Princípio Variacional clássico da entropia.

Corolário 5.6. *Seja (X,d) métrico compacto e $f: X\to X$ contínua. Se $Y=\Omega(f)$ ou $Y=\bigcap_{n\geq 0} f^n(X)$ então*

$$\overline{mdim}_M(Y,f|_Y,d) = \overline{mdim}_M(X,f,d)$$

e

$$\underline{mdim}_M(Y,f|_Y,d) = \underline{mdim}_M(X,f,d)$$

Prova. Pela Proposição 5.3, Y tem medida total para qualquer probabilidade invariante μ. Portanto,

$$\mu(B) > 1-\delta \iff \mu(B\cap Y) > 1-\delta$$

Assim, para qualquer $\mu\in M_f(X)$,

$$N_\mu(n,\epsilon,\delta) = \inf_B N(B,\epsilon,d_n) = \inf_{B\cap Y} N(B\cap Y,\epsilon,d_n) = N_{\mu|_Y}(n,\epsilon,\delta)$$

$$\implies h_\mu(\epsilon,f,\delta) = h_{\mu|_Y}(\epsilon,f|_Y,\delta)$$

e o resultado segue do princípio variacional. $\square$

6 Deslocamentos de Tipo Finito em Alfabetos Métricos Compactos

O modelo de principal interesse desse texto, tratado inicialmente em [1], é inspirado em deslocamentos de tipo finito. Antes de abordarmos o objeto em si, algumas observações:

- Já vimos que a entropia de um deslocamento de tipo finito é dada pelo logaritmo do raio espectral da matriz de transição. Em particular, a entropia é sempre finita e, portanto, tem dimensão métrica média nula;

- Deslocamentos completos, ou seja, deslocamentos cujo espaço é da forma $X^{\mathbb{N}}$ ou $X^{\mathbb{Z}}$, tem entropia infinita quando o alfabeto X é infinito. Mais ainda, sabemos calcular sua dimensão métrica média, que é dada pela dimensão de Minkowski do alfabeto (com respeito às métricas vistas anteriormente).

Com isso em mente, parece natural o estudo da dimensão métrica média de deslocamentos semelhantes aos de tipo finito, mas em alfabetos infinitos. Isso é, deslocamentos em espaços compostos por sequências, unilaterais ou bilaterais, cujas entradas adjacentes têm transição permitida por um conjunto previamente definido. Mais ainda, a dimensão de Minkowski do alfabeto é uma cota superior natural, uma vez que tais deslocamentos agem em subespaços invariantes do espaço produto, que atinge esse valor. Precisaremos tudo isso em seguida.

6.1 O modelo

Sejam (X, d) espaço métrico compacto de diâmetro D e $\Gamma \subset X \times X$ fechado. Denotemos, para cada $l \geq 0$ e $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$,

$$\Gamma_l := \{(x_1, ..., x_l) : (x_i, x_{i+1}) \in \Gamma\}$$

$$\Gamma_{\mathbb{K}} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{K}} : (x_i, x_{i+1}) \in \Gamma\}$$

Assumiremos sempre que os conjuntos acima são não vazios. Denotamos, também

$$\Gamma^T := \{(y,x) : (x,y) \in \Gamma\}$$

A topologia produto, ou topologia Tychonoff, nos espaços $X^{\mathbb{K}}$ é metrizável: dado qualquer $\rho > 1$, temos a métrica compatível

$$d_\rho(x,y) := \sup_{i\in\mathbb{K}} \frac{d(x_i,y_i)}{\rho^{|i|-1}}.$$

Quando estiver claro, omitiremos ρ da notação.

Como queremos considerar deslocamentos em $\Gamma_{\mathbb{K}}$, precisamos do seguinte

Lema 6.1. $\Gamma_{\mathbb{K}} \subset X^{\mathbb{K}}$ *é fechado e invariante pelo deslocamento.*

Prova. A invariância segue do fato de que as condições impostas sobre uma sequência para que pertença a $\Gamma_{\mathbb{K}}$ depende apenas de relações entre termos adjacentes de cada coordenada, que são preservados pelo deslocamento. Para ver que é fechado, tomemos uma sequência em $X^{\mathbb{K}} - \Gamma_{\mathbb{K}}$. Então existem coordenadas $(x_i, x_{i+1}) \notin \Gamma$. Como Γ é fechado em $X \times X$, existem vizinhanças U de x_i e V de x_{i+1} tais que

$$(U \times V) \cap \Gamma = \emptyset.$$

Assim, qualquer sequência suficientemente próxima de x, possui coordenadas i em U e $i+1$ em V, e, portanto, não pertence a $\Gamma_{\mathbb{K}}$. $\square$

Assim, fica bem definido o deslocamento

$$\sigma : \Gamma_{\mathbb{K}} \to \Gamma_{\mathbb{K}}, \qquad \sigma((x_i)_{i\in\mathbb{K}}) = (x_{i+1})_{i\in\mathbb{K}}.$$

Para cada $A \subset \mathbb{K}$, denotemos a projeção em A por

$$\pi_A((x_i)_i) = (x_a)_{a\in A}$$

No caso de conjuntos unitários $A = \{a\}$, denotamos apenas por π_a.

6.2 $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$

Nessa subseção, provaremos que a dimensão métrica média induzida por Γ no modelo acima é a mesma se considerarmos sequências unilaterais ou bilaterais.

Seja $X_l := \pi_l(\Gamma_l)$, ou seja, o conjunto dos elementos ao final de uma palavra de tamanho l permitida por Γ. Denotamos $X' := \cap_{l\geq 0} X_l$ e $\Gamma' := (X' \times X') \cap \Gamma$. Então

$$\Gamma'_{\mathbb{Z}} = \Gamma_{\mathbb{Z}} \qquad e \qquad \pi_{\mathbb{N}}(\Gamma_{\mathbb{Z}}) = \pi_{\mathbb{N}}(\Gamma'_{\mathbb{Z}}) = \Gamma'_{\mathbb{N}} \subset \Gamma_{\mathbb{N}}.$$

No teorema a seguir, omitiremos ρ, fixo e igual, na notação das métricas. Ainda, para distingui-las, denotaremos

$$d^{\mathbb{N}}(x,y) := \sup_{i\geq 1} \frac{d(x_i,y_i)}{\rho^{i-1}} \qquad e \qquad d^{\mathbb{Z}}(x,y) := \sup_{i\in\mathbb{Z}} \frac{d(x_i,y_i)}{\rho^{|i|-1}}$$

Teorema 6.2. *Sejam (X,d) espaço métrico compacto, $\rho > 1$ e $\Gamma \subset X \times X$ fechado. Então*

$$\overline{mdim}_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma_{\mathbb{N}}, d^{\mathbb{N}}) = \overline{mdim}_M(\Gamma_{\mathbb{Z}}, \sigma_{\mathbb{Z}}, d^{\mathbb{Z}})$$

e

$$\underline{mdim}_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma_{\mathbb{N}}, d^{\mathbb{N}}) = \underline{mdim}_M(\Gamma_{\mathbb{Z}}, \sigma_{\mathbb{Z}}, d^{\mathbb{Z}})$$

Prova. Os argumentos abaixo valem para ambas as dimensões, inferior e superior. Não haverá distinção na notação.

Observe que $\Gamma'_{\mathbb{N}} = \bigcap_{n\geq 0} \sigma^n_{\mathbb{N}}(\Gamma_{\mathbb{N}})$. Então, pelo Corolário 5.6,

$$mdim_M(\Gamma'_{\mathbb{N}}, \sigma_{\mathbb{N}}, d^{\mathbb{N}}) = mdim_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma_{\mathbb{N}}, d^{\mathbb{N}}).$$

Resta mostrar

$$mdim_M(\Gamma'_{\mathbb{N}}, \sigma_{\mathbb{N}}, d^{\mathbb{N}}) = mdim_M(\Gamma_{\mathbb{Z}}, \sigma_{\mathbb{Z}}, d^{\mathbb{Z}}),$$

então podemos supor que $X' = X$.

A desigualdade $\leq$ segue do Teorema 4.3, pois $\pi_{\mathbb{N}}$ é uma semi-conjugação Lipschitz sobrejetiva.

Para a outra desigualdade, considere as seguintes observações

- Como já comentado anteriormente, o ínfimo na definição de $N_\mu(n,\epsilon,\delta)$ pode ser tomado sobre uniões finitas de $(n,\epsilon)-$bolas dinâmicas. Em particular, nesse modelo, tais bolas são cilindros. Então consideraremos o ínfimo tomado sobre o conjunto dos cilindros com medida superior a $1-\delta$;

- Todo cilindro em $\Gamma_{\mathbb{N}}$ com medida $\mu' = (\pi_{\mathbb{N}})_*\mu$ maior que $1-\delta$ tem como pré-imagem um cilindro em $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ com medida μ maior que $1-\delta$.

- Para cada $\epsilon > 0$, seja $l = l(\epsilon)$ tal que $\rho^{-l}D < \epsilon$ e seja $U = \{U_1, ..., U_{M(\epsilon)}\}$ uma cobertura aberta qualquer de X satisfazendo $\mathrm{diam}(U,d) < \epsilon$. Dada uma cobertura aberta α de um conjunto $A \subset X^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathrm{diam}(\alpha, d_n^{\mathbb{N}}) \leq \epsilon$, podemos construir uma cobertura aberta de $\pi_{\mathbb{N}}^{-1}(A) \subset X^{\mathbb{Z}}$ dada por

  $$\beta = \{... \times X \times X \times U_{j_{-l}} \times ... \times U_{j_0} \times V : V \in \alpha, j_i = 1, ..., M(\epsilon)\}.$$

  Note que $\mathrm{diam}(\beta, d_n^{\mathbb{Z}}) \leq \epsilon$ e $|\beta| = M(\epsilon)^{l+1}|\alpha|$. Então

  $$N(\pi_{\mathbb{N}}^{-1}(A), \epsilon, d_n^{\mathbb{Z}}) \leq M(\epsilon)^{l+1} N(A, \epsilon, d_n^{\mathbb{N}});$$

Portanto, dada $\mu \in M_{\sigma_{\mathbb{Z}}}(\Gamma_{\mathbb{Z}})$,

$$N_\mu^{\mathbb{Z}}(n,\epsilon,\delta) = \inf_{B \text{ em } \Gamma_{\mathbb{Z}}, \mu(B) > 1-\delta} N(B, \epsilon, d_n^{\mathbb{Z}})$$

$$\leq \inf_{A \text{ in } \Gamma_{\mathbb{N}}, \mu'(A) > 1-\delta} N(\pi_{\mathbb{N}}^{-1}(A), \epsilon, d_n^{\mathbb{Z}})$$

$$\leq M(\epsilon)^{l+1} \inf_{A \text{ in } \Gamma_{\mathbb{N}}, \mu'(A)>1-\delta} N(A, \epsilon, d_n^{\mathbb{N}}) = M(\epsilon)^{l+1} N_{\mu'}^{\mathbb{N}}(n, \epsilon, \delta).$$

Logo,

$$h_\mu(\epsilon, \sigma_{\mathbb{Z}}, \delta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N_\mu^{\mathbb{Z}}(n, \epsilon, \delta)$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M(\epsilon)^{l+1} N_{\mu'}^{\mathbb{N}}(n, \epsilon, \delta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N_{\mu'}^{\mathbb{N}}(n, \epsilon, \delta)$$

$$= h_{\mu'}(\epsilon, \sigma_{\mathbb{N}}, \delta).$$

Assim,

$$\sup_{\mu \in M_{\sigma_{\mathbb{Z}}}} h_\mu(\epsilon, \sigma_{\mathbb{Z}}, \delta) \leq \sup_{\nu \in M_{\sigma_{\mathbb{N}}}} h_\nu(\epsilon, \sigma_{\mathbb{N}}, \delta)$$

e o resultado segue do princípio variacional. □

Obs: A demonstração anterior funciona analogamente se considerarmos, ao invés de $d^{\mathbb{K}}$, as métricas

$$d'^{\mathbb{K}}(x, y) := \sum_{i \in \mathbb{K}} \frac{d(x_i, y_i)}{\rho^{|i|-1}}.$$

6.3 Cotas para a dimensão métrica média

Nessa subseção, veremos algumas estimativas para a dimensão métrica média no modelo em questão. Comecemos pela mais simples.

Lema 6.3. *Seja (X, d) espaço métrico compacto, $\Gamma \subset X \times X$ fechado e $\rho > 1$. Então*

$$\overline{mdim}_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho) \leq \overline{dim}_M(\Gamma, d \times d).$$

Prova. Como π_1 é Lipschitz, $\Gamma \subset \Gamma' := \pi_1(\Gamma \cup \ \Gamma^T) \times \pi_1(\Gamma \cup \ \Gamma^T)$ e $\Gamma'_{\mathbb{N}} = (\pi_1(\Gamma \cup \ \Gamma^T))^{\mathbb{N}}$, temos

$$\overline{mdim}_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho) \leq \overline{mdim}_M(\Gamma', \sigma, d_\rho) = \overline{mdim}_M((\pi_1(\Gamma \cup \Gamma^T))^{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho)$$

$$= \overline{dim}_M(\pi_1(\Gamma \cup \ \Gamma^T), d) \leq \overline{dim}_M(\Gamma \cup \ \Gamma^T, d \times d)$$
$$= \overline{dim}_M(\Gamma, d \times d).$$

□

A seguir veremos outra cota superior, obtida em [1], mas com uma prova menos carregada em notação quanto a original.

Dado $\epsilon > 0$, seja $U(\epsilon) = \{U_1, ..., U_{N(\epsilon)}\}$ uma $\epsilon-$cobertura minimal de X. Consideremos Γ^ϵ uma matriz $N(\epsilon) \times N(\epsilon)$ dada por

$$\Gamma^\epsilon_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } U_i \times U_j \cap \Gamma \neq \emptyset \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pelos mesmos argumentos de contagem do deslocamento de tipo finito, o número de caminhos de elementos de $U(\epsilon)$ de tamanho k permitido por Γ é

$$||(\Gamma^\epsilon)^k||_s,$$

onde $|| \cdot ||_s$ é a norma da soma no espaço das matrizes $N(\epsilon) \times N(\epsilon)$.

Lema 6.4. $S(\Gamma^{\mathbb{N}}, \sigma, d, \epsilon) \leq \log r(\Gamma^{\epsilon})$

Prova. Para $\epsilon > 0$, seja $l = l(\epsilon)$ tal que $D\rho^{-l} < \epsilon$. Definimos

$$\alpha_{\epsilon}^{n} = \{U_{j_1} \times ... \times U_{j_{l+n-1}} \times X \times X... : \text{intersecta } \Gamma_{\mathbb{N}}, U_j \in U(\epsilon)\}.$$

e note que, para cada elemento de α_{ϵ}^{n}, existe um caminho de tamanho $l+n-1$ como anteriormente, ou seja,

$$|\alpha_{\epsilon}^{N}| \leq ||(\Gamma^{\epsilon})^{l+n-1}||_s.$$

Além disso, $\text{diam}(\alpha_{\epsilon}^{n}, d_n) \leq \epsilon$. Assim,

$$S(\Gamma^{\mathbb{N}}, \sigma, d, \epsilon) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\log ||(\Gamma^{\epsilon})^{l+n-1}||_s}{n} = \log(r(\Gamma^{\epsilon}))$$

$\square$

Utilizando as ideias do Lema anterior, podemos obter uma classe de exemplos nos quais calculamos explicitamente a dimensão métrica média. Isso será dado no próximo resultado, que é uma generalização do Teorema 4.2, no qual podíamos interpretar $\Gamma = F \times F$, ou seja, todo o conjunto F tinha transições permitidas para voltar a si mesmo em um passo. No que segue, tomaremos Γ que permita o retorno do conjunto F a si mesmo em $k \in \mathbb{N}$ passos.

Teorema 6.5. *Sejam (X, d) espaço métrico compacto, $F \subset X$ fechado, $\rho > 1$ e $a_1, ..., a_{k-1} \in X$ distintos. Se Γ é dado por*

$$\Gamma = (F \times \{a^1\}) \cup \{(a^1, a^2), (a^2, a^3), ..., (a^{k-2}, a^{k-1})\} \cup (\{a^{k-1}\} \times F),$$

então,

$$\underline{mdim}_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho) = \frac{\underline{dim}_M(F)}{k}$$

e

$$\overline{mdim}_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho) = \frac{\overline{dim}_M(F)}{k}.$$

Obs: Todas as contas feitas a seguir valem para ambas as dimensões, superior e inferior. Não haverá distinção na notação.

Prova. Considere $h : F^{\mathbb{N}} \to \Gamma_{\mathbb{N}}$ dado por

$$h(x_1, x_2, ...) = (x_1, a^1, a^2, ..., a^{k-1}, x_2, a^1, a^2, ..., a^{k-1}, x_3, ...).$$

Note que $h \circ \sigma = \sigma^k \circ h$ e

$$d_\rho(h(x), h(y)) = \sup\{d(x_1, y_1), \frac{d(x_2, y_2)}{\rho^k}, \frac{d(x_3, y_3)}{\rho^{2k}}, \frac{d(x_4, y_4)}{\rho^{3k}}, ...\}$$

$$= d_{\rho^k}(x, y),$$

ou seja, $h : (F^{\mathbb{N}}, d_{\rho^k}) \to (\Gamma_{\mathbb{N}}, d_\rho)$ é isometria com sua imagem. Logo

$$dim_M(F) = mdim_M(F^{\mathbb{N}}, \sigma, d_{\rho^k})$$

$$= mdim_M(h(F^{\mathbb{N}}), \sigma^k, d_\rho) \leq mdim_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma^k, d_\rho) \leq k\ mdim_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho)$$

e obtemos

$$\frac{dim_M(F)}{k} \leq mdim_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho).$$

Para a outra desigualdade, como vamos obter uma cota por cima, podemos supor que $a^1, ..., a^{k-1} \in F$. Se nao fosse esse o caso, tal Γ estaria contido em Γ' obtido ao considerar $F' = F \cup \{a^1, ..., a^{k-1}\}$ que tem a mesma dimensão de Minkowski.

Dado $\epsilon > 0$, seja $I_1, ..., I_N$ $\epsilon-$cobertura aberta minimal de F. Para ϵ suficientemente pequeno, podemos supor que nenhum dos I's contém mais de um dos a^j. Mais ainda, podemos supor que $a^j \in I_j$ unicamente. De fato, se algum $a \in I_i \cap I_j$, tome $\delta > 0$ pequeno tal que $\overline{B(a, \delta)} \subset I_i \cap I_j$. Substituindo, por exemplo, I_j por $I_j \cap \overline{B(a, \delta)}^c$, resolvemos esse problema.

Vamos construir uma cobertura dada por cilindros formados pelos I's acima e precisamos contá-los. Denote, para $j = 1, ..., k-1$,

$$x_n^0 = \#\{\text{cilindros tamanho n com última coord } \neq I_1, ..., I_{k-1}\}$$

$$x_n^j = \#\{\text{cilindros tamanho n com última coord } = I_j\}$$

Note que

$$\begin{cases} x_{n+1}^0 = x_n^{k-1}(N-k+1) \\ x_{n+1}^1 = x_n^0 + ... + x_n^{k-1} \\ x_{n+1}^j = x_n^{j-1} + x_n^{k-1}, j \in \{2, ..., k-1\}. \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^0 \\ x_{n+1}^1 \\ \vdots \\ x_{n+1}^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N-k+1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^0 \\ x_n^1 \\ \vdots \\ x_n^{k-1} \end{pmatrix}$$

Denotemos a relaçao acima por $v_{n+1} = Av_n, A = A(\epsilon)$, onde $v_1 = (N-k+1, 1, 1, ..., 1)$. Como queremos estimar a totalidade de tais cilindros, queremos x_{n+1}^1. Note que

$$|x_{n+1}^1| \leq |v_{n+1}| \leq ||A^n|||v_1|$$

Agora, tomamos $l \geq 1$ tal que $D\rho^{-l} < \epsilon$ e, para $n \geq 1$, definimos a cobertura aberta

$$\alpha_n = \{I_{j_1} \times ... \times I_{j_{l+n}} \times X \times X... : \text{o cilindro intersecta } \Gamma_{\mathbb{N}}\}$$

e note que $\text{diam}(\alpha_n, d_n) \leq \epsilon$. Logo,

$$S(\Gamma_{\mathbb{N}}, \epsilon, d) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\alpha_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |x_{l+n+1}^1| \leq \log r(A).$$

Para concluir, vamos analisar a relação entre autovalores de A e $N(\epsilon)$ para interpretar o raio espectral como a quantidade que queremos.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N-k+1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$\implies \det(A - \lambda I) = -\lambda \det A_1 + (-1)^{k-1}(N-k+1) \det A_2$, onde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

e

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como A_2 é triangular superior com termos diagonais iguais a 1, temos $\det A_2 = 1$. Logo, se λ é autovalor de A,

$$0 = \det(A - \lambda I) = (-1)^k \lambda^k + b_{k-1}\lambda^{k-1} + ... + b_1\lambda + (b_0 + (-1)^{k-1}N),$$

onde a escolha dos $b's$ independe de N. Assim,

$$N = \lambda^k \big(1 + (-1)^k (\frac{b_{k-1}}{\lambda} + ... + \frac{b_0}{\lambda^k})\big) = |\lambda|^k |1 + (-1)^k (\frac{b_{k-1}}{\lambda} + ... + \frac{b_0}{\lambda^k})|$$

$$\implies \log N = k \ \log|\lambda| + \log|1 + (-1)^k (\frac{b_{k-1}}{\lambda} + ... + \frac{b_0}{\lambda^k})|$$

Finalmente,

$$mdim_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho) \leq \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log r(A_\epsilon)}{|\log \epsilon|}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(1/k)\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|} - \frac{(1/k)\log|1 + (-1)^k (\frac{b_{k-1}}{\lambda} + ... + \frac{b_0}{\lambda^k})|}{|\log \epsilon|} = \frac{dim_M(F)}{k}$$

$\square$

O resultado acima também fornece um cota inferior nos casos em que Γ é simétrico, ou seja, $\Gamma = \Gamma^T$.

Corolário 6.6. *Sejam (X, d) métrico compacto, $\rho > 1$ e $\Gamma \subset X \times X$ fechado tal que $\Gamma = \Gamma^T$. Então, denotando $\Gamma_x := \{y : (x, y) \in \Gamma\}$, temos*

$$\sup_{x \in X} \frac{\underline{dim}_M(\Gamma_x, d)}{2} \leq \underline{mdim}_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho)$$

e

$$\sup_{x \in X} \frac{\overline{dim}_M(\Gamma_x, d)}{2} \leq \overline{mdim}_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho)$$

Prova. Como Γ é simétrico, para qualquer $x \in X$,

$$Y(x) := \{(x, \Gamma_x), (\Gamma_x, x)\} \subset \Gamma.$$

Então $Y(x)_{\mathbb{N}} \subset \Gamma_{\mathbb{N}}$ é um fechado invariante e o resultado segue do teorema. $\square$

O comportamento descrito no Teorema 6.5 também pode ser observado no caso finito.

Exemplo 6.7. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e tomemos a matriz de transição A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, as passagens permitidas são

$$\{2, 3, 4\} \to 5 \to 6 \to 7 \to 1 \to \{2, 3, 4\}.$$

Se valer algo semelhante ao que provamos no deslocamento induzido, deve se esperar que a entropia seja

$$h(\sigma_A) = \frac{\log 3}{5}.$$

Note que a matriz A satisfaz

$$A^6 = 3A.$$

Então
$$A^{6n} = 3^n A^n \implies ||A^{6n}|| = 3^n ||A^n||$$
e portanto
$$r(A) = \lim_n ||A^{6n}||^{1/6n} = \lim_n (3^n)^{1/6n} ||A^n||^{1/6n} = 3^{1/6} (\lim_n ||A^n||^{1/n})^{1/6}$$
$$= 3^{1/6} r(A)^{1/6}.$$
Assim,
$$r(A) = 3^{1/5}$$
e portanto
$$h(\sigma_A) = \log r(A) = \frac{\log 3}{5}.$$

7 Aplicação: dinâmica de semi-grupos finitamente gerados

Em [1], o modelo Friedland foi introduzido com o objetivo de obter uma definição de entropia para gráficos, semi-grupos e grupos. Analogamente, podemos tratar da dimensão métrica média. O objetivo dessa seção é relacionar tais objetos com outra definição, mais recente, de entropia e dimensão métrica média que vem sendo objeto de interesse em [10] e [11].

Seja G uma coleção de m mapas contínuos em X. Queremos estudar a ação de semi-grupo $\mathbb{S}$ gerada por G, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbb{S} : G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

Assim, seguindo [1], definimos a entropia e dimensão métrica média de G por

$$h(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma) \qquad e \qquad mdim_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_2),$$

onde $\Gamma = \cup_{g \in G} \operatorname{graph}(g)$.

Agora, introduziremos as noções utilizadas em [10] e [11]:

Denotemos $Y := \{1, 2, ..., m\}$. Um passeio aleatório $\mathbb{P}$ em $Y^{\mathbb{N}}$ é uma probabilidade invariante pelo deslocamento. Para cada $g = g(w)$,$w \in Y^{\mathbb{N}}$ e $n \geq 1$, definimos a métrica em X dada por

$$d_{g,n}(x, y) := \max_{0 \leq j \leq n} d(g_j g_{j-1} ... g_1(x), g_j g_{j-1} ... g_1(y)).$$

Denotamos por

$$s(g, n, \epsilon) \qquad e \qquad r(g, n, \epsilon)$$

a maior cardinalidade de um conjunto ϵ-separado e a menor cardinalidade de um conjunto ϵ-gerador com respeito à metrica $d_{g,n}$, respectivamente.

As $\epsilon-$entropias da ação $\mathbb{S}$ com relação ao passeio aleatório $\mathbb{P}$ são dadas por

$$h(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \epsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \int_{Y^{\mathbb{N}}} s(g_w, n, \epsilon) d\mathbb{P}(w)$$

e

$$h^r(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \epsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \int_{Y^{\mathbb{N}}} r(g_w, n, \epsilon) d\mathbb{P}(w).$$

Como temos

$$h^r(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \epsilon) \leq h(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \epsilon) \leq h^r(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \epsilon/3),$$

ambas as quantidades definem a mesma entropia topológica e dimensão métrica média. Assim, definimos

$$h(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} h(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0^+} h^r(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \epsilon),$$

$$\underline{mdim}_M(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P}) = \liminf_{\epsilon \to 0^+} \frac{h(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \epsilon)}{|\log \epsilon|} = \liminf_{\epsilon \to 0^+} \frac{h^r(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \epsilon)}{|\log \epsilon|}$$

e

$$\overline{mdim}_M(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P}) = \limsup_{\epsilon \to 0^+} \frac{h(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \epsilon)}{|\log \epsilon|} = \limsup_{\epsilon \to 0^+} \frac{h^r(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \epsilon)}{|\log \epsilon|}.$$

Observe que as quantidades acima dependem da escolha G de geradores do semi-grupo feita inicialmente. Em [1], a entropia do semi-grupo/grupo é dada pelo ínfimo sobre as possiveis escolhas de geradores. Aqui, manteremos fixada a escolha e, se for de interesse, pode-se tomar o infimo no final.

Definição 7.1. Dizemos que uma probabilidade μ num espaço métrico M é homogênea se existe $L > 0$ tal que $\forall x, y \in M$ e $\epsilon > 0$

$$\mu(B(x,\epsilon)) \leq L\ \mu(B(y,\epsilon/2)).$$

Considerando a métrica em $Y^{\mathbb{N}}$ dada por

$$d'(x,y) = 2^{-\min\{n\geq 1: x_n \neq y_n\}},$$

note que para qualquer passeio aleatório homogêneo $\mathbb{P}$, $x \in Y^{\mathbb{N}}$ e $k \geq 1$ temos

$$B(x, 2^{-k+1}) = \overline{x_1 ... x_k}$$

e, portanto,

$$\mathbb{P}(\overline{x_1 ... x_k}) = \mathbb{P}(B(x,2^{-k+1})) \geq (1/L)\ \mathbb{P}(B(x,2^{-k+2})) \geq ...$$

$$\geq (1/L)^k\ \mathbb{P}(B(x,1/2)) = (1/L)^k\ \mathbb{P}(Y^{\mathbb{N}}) = (1/L)^k$$

<u>Obs:</u> O conjunto dos passeios aleatórios homogêneos acima é não vazio: dada qualquer probabilidade ν em Y com suporte total, $\mathbb{P} = \nu^{\mathbb{N}}$ é um exemplo.

Teorema 7.2. *Seja (X,d) métrico compacto, G uma coleção de m mapas contínuos em X e $\rho > 1$. Então, tomando $\Gamma = \cup_{g\in G} \operatorname{graph}(g)$,*

$$\underline{mdim}_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho) = \sup_{\mathbb{P}} \underline{mdim}_M(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P})$$

e

$$\overline{mdim}_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho) = \sup_{\mathbb{P}} \overline{mdim}_M(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P}).$$

Além disso, o supremo é atingido por qualquer passeio aleatório homogêneo.

Prova. Comecemos por $\geq$.

Dado qualquer $w \in Y^{\mathbb{N}}$, tome $E \subset X$ um conjunto $(g(w), n, \epsilon)-$separado maximal. Então para quaisquer $x, y \in E$ temos

$$\epsilon < \max\{d(x,y), d(g_{w_1}(x), g_{w_1}(y)), ..., d(g_{w_n}...g_{w_1}(x), g_{w_n}...g_{w_1}(y))\}.$$

Assim, os elementos

$$(x, g_{w_1}(x), \cdots, g_{w_n}...g_{w_1}(x)), \text{qqr coisa})$$

e

$$(y, g_{w_1}(y), \cdots, g_{w_n}...g_{w_1}(y)), \text{qqr coisa})$$

de $\Gamma_{\mathbb{N}}$ são (σ, n, ϵ) separados. Logo, para todo $w \in Y^{\mathbb{N}}$,

$$s(g(w), n, \epsilon) \leq N(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, n, \epsilon).$$

Portanto, para qualquer $\mathbb{P}$,

$$\begin{aligned} h(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \epsilon) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_{Y^{\mathbb{N}}} s(g_w, n, \epsilon) d\mathbb{P}(w) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, n, \epsilon) = S(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, \epsilon). \end{aligned}$$

Concluimos dividindo por $|\log \epsilon|$ e tomando os limites.

Agora, vamos verificar que o supremo é atingido por $\mathbb{P}$ homogêneas.

Seja $E = \{x_1, x_2, ..., x_{N(n,\epsilon)}\}$ um conjunto $(n, \epsilon)-$separado maximal em $(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho)$. Tome $l = l(\epsilon)$ tal que $\text{diam}(X)/\rho^l \leq \epsilon$. Note que a propriedade de ser separado depende apenas das primeiras $n + l$ coordenadas dos elementos de E. Por continuidade, podemos supor que as primeiras coordenadas dos elementos de E são todas distintas. Pelo princípio dos pombos, existe um subconjunto $A \subset E$ tal que

- todas as transições até a coordenada $n+l$ são dadas pela mesma $(n + l)$-upla $(g_1, g_2, ..., g_{n+l})$;

- $a := |A| \geq \frac{N(n,\epsilon)}{m^{n+l}}$.

Reordenando se necessário, temos

$$x_1 = (x^1, g_1(x^1), g_2 g_1(x^1), \cdots, g_{n+l}...g_1(x^1), \text{qqr coisa})$$

$$x_2 = (x^2, g_1(x^2), g_2 g_1(x^2), \cdots, g_{n+l}...g_1(x^2), \text{qqr coisa})$$

$$\vdots$$

$$x_a = (x^a, g_1(x^a), g_2 g_1(x^a), \cdots, g_{n+l}...g_1(x^a), \text{qqr coisa}).$$

Assim, $\{x^1, ..., x^a\}$ é $(n+l, \epsilon)-$separado em X na métrica

$$(g_1, g_2, ..., g_{n+l}, \text{qqr coisa}),$$

ou seja, para qualquer sequência g no cilindro $\overline{g_1 g_2 ... g_{n+l}}$, existe um conjunto $(n+l, \epsilon)-$separado de cardinalidade maior ou igual a $\frac{N(n,\epsilon)}{m^{n+l}}$.

Por outro lado, se tal conjunto é $(n+l, \epsilon)-$separado nessas métricas, temos

$$B_{g,n+l}(x^i, \epsilon/3) \cap B_{g,n+l}(x^j, \epsilon/3) = \emptyset.$$

Assim, para qualquer sequência $g \in \overline{g_1 g_2 ... g_{n+l}}$ temos

$$r(g, n+l, \epsilon/3) \geq a \geq \frac{N(n,\epsilon)}{m^{n+l}}.$$

Portanto, para cada $\mathbb{P}$ homogênea,

$$\int_{Y^{\mathbb{N}}} r(g(w), n+l, \epsilon/3) d\mathbb{P}(w) \geq \int_{\overline{g_1 g_2 \cdots g_{n+l}}} r(g(w), n+l, \epsilon/3) d\mathbb{P}(w)$$

$$\geq \frac{N(n,\epsilon)}{(Lm)^{(n+l)}}$$

$$\implies h^r(X,\mathbb{S},\mathbb{P},\epsilon/3) \geq S(\Gamma_{\mathbb{N}},\sigma,\epsilon) - \log Lm.$$

Concluimos dividindo por $|\log \epsilon|$ e tomando os limites.

$\square$

Observe que na prova anterior, foi visto que para qualquer passeio aleatório $\mathbb{P}$,

$$h(X,\mathbb{S},\mathbb{P},\epsilon) \leq S(\Gamma_{\mathbb{N}},\sigma,\epsilon),$$

e assim,

$$h(X,\mathbb{S},\mathbb{P}) \leq h(\sigma_\Gamma) \qquad e \qquad mdim_M(X,\mathbb{S},d,\mathbb{P}) \leq mdim_M(\Gamma_{\mathbb{N}},\sigma,d_\rho).$$

Por outro lado, denotando o skew-product por

$$\begin{array}{c} S : Y^{\mathbb{N}} \times X \to Y^{\mathbb{N}} \times X \\ (g,x) \mapsto (\sigma(g), g_1(x)) \end{array},$$

podemos definir

$$\phi : (Y^{\mathbb{N}} \times X, d' \times d) \to (\Gamma_{\mathbb{N}}, d_2)$$

dada por

$$\phi(g,x) = (x, g_1(x), g_2g_1(x), ...).$$

Essa aplicação é sobrejetiva, Lipschitz e semiconjuga o deslocamento com o skew-product:

$$d_2((g,x),(g',x')) = \sup\{d(x,x'), \frac{d(g_1(x),g_1'(x'))}{2},$$

$$
\begin{aligned}
&...\frac{d(g_n...g_2g_1(x), g'_n...g'_2g'_1(x'))}{2^n}, ...\} \\
&\leq \sup\{d(x,x'), \frac{\text{diam}(X)\mathbb{1}_{g_1\neq g'_1}}{2}, \frac{\text{diam}(X)\mathbb{1}_{g_2\neq g'_2}}{4}, ...\} \\
&= \sup\{d(x,x'), \text{diam}(X)d'(g,g')\} \\
&\leq (1+\text{diam}(X))\max\{d(x,x'), d'(g,g')\} \\
&= (1+\text{diam}(X))[d'\times d]((g,x),(g',x')))
\end{aligned}
$$

e

$$\sigma \circ \phi(g,x) = (g_1(x), g_2g_1(x), ...) = \phi(\sigma(g), g_1(x)) = \phi \circ S(g,x).$$

Assim, as quantidades provenientes do modelo Friedland satisfazem

$$\sup_{\mathbb{P}} h(X,\mathbb{S},\mathbb{P}) \leq h(\sigma_\Gamma) \leq h(S)$$

e

$$\sup_{\mathbb{P}} mdim_M(X,\mathbb{S},d,\mathbb{P}) \leq mdim_M(\Gamma_{\mathbb{N}},\sigma,d_2) \leq mdim_M(X\times Y^{\mathbb{N}}, S, d\times d').$$

8 Ideias em desenvolvimento: Operadores integrais

Essa seção será mais informal, apenas para expor algumas possibilidades e desenvolver ideias. Os termos que aqui aparecerão pela primeira vez no texto podem ser encontrados e detalhadamente explicados em [16].

Quando pensamos no raio espectral de uma matriz $A_{d\times d}$, estamos nos referindo à aplicação $\varphi_A : v \mapsto Av$, ou seja,

$$(\varphi_A v)_i = \sum_{j=1}^{d} A_{i,j} v_j = \int A_{i,j} v_j d(contagem)$$

$$= d\int A_{i,j} v_j d(\text{prob uniforme}) := d(\psi_A v)_i.$$

Assim, $r(\varphi_A) = dr(\psi_A)$ e, portanto,

$$\log r(\varphi_A) = \log d + \log r(\psi_A). \tag{$\star$}$$

No nosso contexto, quando Γ é finito, podemos vê-lo como uma matriz ($\Gamma(x,y) = 1 \iff (x,y) \in \Gamma$) e sua entropia é o log acima. A ideia é adaptar essa igualdade para obter uma expressão para $mdim_M$:

- O lado esquerdo da equação (entropia) deve fazer o papel da dimensão métrica média;
- O primeiro termo à direita deve representar o tamanho (dim_M) do conjunto ambiente onde as coordenadas das sequências vivem. Possivelmente o conjunto X' definido anteriormente seja o candidato;
- O último termo deve ter relação com raios espectrais de operadores integrais com núcleo Γ com respeito à alguma(s) medida(s) de probabilidade.

No que segue, pode haver uma certa dualidade ou ambiguidade ao nos referirmos a Γ como conjunto ou como sua função indicadora.

O espaço onde tais operadores atuariam é uma questão a ser considerada. Temos um núcleo Γ que atinge apenas os valores zero e um, ou seja, em geral não temos continuidade. O que sabemos é que Γ é fechado e, portanto, Borel-mensurável.

Para fixar as ideias, consideremos, para cada probabilidade μ em X, o espaço

$$L^2(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} : \int |f|^2 d\mu < \infty\}.$$

Denotemos

$$K_\mu := K : L^2(\mu) \to L^2(\mu), \qquad (Kf)(x) := \int \Gamma(x,y) f(y) d\mu(y).$$

Tal operador é compacto no espaço de Hilbert $L^2(\mu)$ e, portanto, seu espectro é, a menos possivelmente de zero, o conjunto dos autovalores e seus conjugados. Assim, para calcular seu raio espectral basta analisar os autovalores.

Uma observação possivelmente util é a seguinte: Dados $x, y \in X$, se $\Gamma_x = \Gamma_y$ (x e y passam via Γ para os mesmos pontos) então para qualquer medida μ e $f \in L^2(\mu)$ temos

$$(Kf)(x) = \int \Gamma(x,z) f(z) d\mu(z) = \int \Gamma(y,z) f(z) d\mu(z) = (Kf)(y).$$

Em particular, as autofunçoes de K sao constantes em cada conjunto

$$E(x) := \{y \in X : \Gamma_x = \Gamma_y\},$$

mais precisamente,

$$Kf = \lambda f \qquad \Longrightarrow \qquad f|_{E(x)} \equiv \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_x} f(z) d\mu(z)$$

A seguir, alguns exemplos exibirão como essas relações se dão em casos que sabemos por outros meios (Teorema 6.5) o valor da dimensão. As escolhas das medidas a serem utilizadas abaixo é motivada pela uniformidade da probabilidade usada no caso finito ($\star$).

Exemplo 8.1. Sejam $F \subset X$, $x_0 \in X$ e $\Gamma = (\{x_0\} \times F) \cup (F \times \{x_0\})$. Então,

$$mdim_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d) = \frac{dim_M(F)}{2}.$$

Sobre o outro lado de ($\star$), o primeiro termo deve significar o tamanho do ambiente onde se impõe as restriçoes que, nesse caso, é

$$dim_M(F \cup \{x_0\}) = dim_M(F).$$

Para valer a analogia, precisamos fazer uso de operadores integrais com respeito a medidas de probabilidade e ver se obtemos algo que faz sentido:

Dado $\epsilon > 0$ tomemos $\{x_1, ..., x_{N(\epsilon)}\}$ ϵ-separado maximal em F e a probabilidade

$$\mu_\epsilon = \frac{1}{N(\epsilon)+1} \sum_{i=0}^{N(\epsilon)} \delta_{x_i}.$$

Pelo formato de Γ temos, para $i \geq 1$,

$$(Kf)(x_0) = \frac{1}{N(\epsilon)+1} \sum_{i=0}^{N(\epsilon)} f(x_i) \qquad (Kf)(x_i) = \frac{1}{N(\epsilon)+1} f(x_0)$$

Obs: Na 1 igualdade acima, é suposto que $x_0 \in F$ ($\implies (x_0, x_0) \in \Gamma$), caso contrário a soma começaria em 1.

Sejam f e $\lambda := \lambda_\epsilon$ tais que $Kf = \lambda f$. Essa igualdade so precisa valer em $\{x_0, ..., x_{N(\epsilon)}\} = \text{supp}(\mu_\epsilon)$.

Note que se $f(x_0) = 0$ então $f(x_i) = (1/\lambda)(Kf)(x_i) = 0$, ou seja, $f = 0$. Suponhamos, $f(x_0) > 0$. Então

$$\lambda f(x_0) = (Kf)(x_0) = \frac{1}{N(\epsilon)+1}\sum_{i=0}^{N(\epsilon)} f(x_i)$$

$$= \frac{f(x_0)}{N(\epsilon)+1} + \frac{1}{\lambda(N(\epsilon)+1)^2}\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} f(x_0)$$

$$\implies \lambda = \frac{1}{N(\epsilon)+1}\big(1 + \frac{N(\epsilon)}{\lambda(N(\epsilon)+1)}\big)$$

que é um polinomio de grau 2 em λ que tem como maior solução

$$\lambda_\epsilon = \frac{N(\epsilon) + (N(\epsilon)+1)\sqrt{4N(\epsilon)+1}+1}{2(N(\epsilon)+1)^2} \approx o(N(\epsilon)^{-1/2}).$$

Obs: No caso $x_0 \notin F$, $\lambda_\epsilon^2 = \frac{N(\epsilon)}{(N(\epsilon)+1)^2} \implies \lambda_\epsilon \approx o(N(\epsilon)^{-1/2})$
Logo

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\log\lambda_\epsilon}{|\log\epsilon|} = -\frac{dim_M(F)}{2}$$

e a soma das três quantidades vale.

Observe que, para cada $\epsilon > 0$, foi escolhida uma medida diferente e a normalização utilizada foi a mesma da dimensão de Minkowski. Parece essencial para seguir esse caminho que se entenda mais claramente que tipo de imposição cada ϵ impõe na escolha da medida.

Seguimos com mais alguns exemplos para ilustrar.

Exemplo 8.2. X métrico compacto, $F \subset X$ fechado e $\Gamma = F \times F$. Sabemos que

$$mdim_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d) = dim_M(F).$$

Nesse caso, o primeiro termo à direita em $(\star)$ deve valer

$$dim_M(F).$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $\{x_1, ..., x_{N(\epsilon)}\}$ ϵ-separado maximal em F e consideremos a probabilidade

$$\mu_\epsilon = \frac{1}{N(\epsilon)} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \delta_{x_i}.$$

Tomando K, λ e f como anteriormente, obtemos

$$\lambda f(x_i) = (Kf)(x_i) = \frac{1}{N(\epsilon)} \sum_{j=1}^{N(\epsilon)} f(x_j), \forall i \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_i) = f(x_j), \forall i, j.$$

Para que f não seja nula, suponhamos $f(x_1) > 0$. Então

$$\lambda_\epsilon = \frac{1}{f(x_1)N(\epsilon)} \sum_{j=1}^{N(\epsilon)} f(x_1) = 1, \qquad \text{para todo } \epsilon > 0$$

Logo,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log \lambda_\epsilon}{|\log \epsilon|} = 0.$$

Exemplo 8.3. $F \subset X$, $a, b \in X$ e $\Gamma = \{(a, b)\} \cup (\{b\} \times F) \cup (F \times \{a\})$
Obs: Abaixo é feito o cálculo quando $a, b \in F$. Os outros 3 possiveis casos sao simplificações deste e em todos obtemos o mesmo valor.
Temos

$$mdim_M(\Gamma_{\mathbb{N}}, \sigma, d_\rho) = \frac{dim_M(F)}{3}$$

e o tamanho do "ambiente" vale

$$dim_M(F).$$

Dado $\epsilon > 0$, tome $\{x_1, ..., x_N\}$ ϵ separado maximal em F, diferentes de a e b. Para reduzir as contas, denote $M = N + 2$. Defina

$$\mu_\epsilon = \frac{1}{M}\left(\delta_a + \delta_b + \sum_i \delta_{x_i}\right)$$

Tomando K definido por μ_ϵ temos

$$(Kf)(x_i) = \frac{f(a)}{M} \qquad (Kf)(a) = \frac{f(a) + f(b)}{M}$$

$$e \qquad (Kf)(b) = \frac{f(a) + f(b) + \sum_i f(x_i)}{M}$$

Se $Kf = \lambda f$, então

$$f(a) = \frac{(Kf)(a)}{\lambda} = \frac{f(a) + f(b)}{\lambda M} \implies f(a) = \frac{f(b)}{\lambda M - 1}$$

e

$$f(x_i) = \frac{(Kf)(x_i)}{\lambda} = \frac{f(a)}{\lambda M}, \forall i.$$

Para que f não seja nula, podemos supor $f(b) > 0$. Então

$$\lambda f(b) = (Kf)(b) = \frac{1}{M}\left(f(a) + f(b) + \sum_i f(x_i)\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(\frac{f(b)}{\lambda M - 1} + f(b) + (M-2)\frac{f(a)}{\lambda M}\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(\frac{f(b)}{\lambda M - 1} + f(b) + \frac{M-2}{\lambda M}\frac{f(b)}{\lambda M - 1}\right)$$

Logo

$$\lambda = \frac{1}{M}\left(1 + \frac{1}{\lambda M - 1}(1 + \frac{M-2}{\lambda M})\right)$$

que é um polinomio de grau 3 em $\lambda = \lambda_\epsilon$ cujas soluções satisfazem

$$\lambda_\epsilon \approx o(M^{-2/3}) = o(N^{-2/3}),$$

ou seja,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log \lambda_\epsilon}{|\log \epsilon|} = -\frac{2}{3} dim_M(F).$$

References

[1] S. Friedland. Entropy of graphs, semigroups and groups. Ergodic Theory of Z^d-Actions, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 228, 319-343, Cambridge Univ. Press, 1996.

[2] M. Viana and K. Oliveira Fundamentos da Teoria Ergódica, Sociedade Brasileira de Matemática (2019), ISBN: 9788583370178

[3] A. Velozo and R. Velozo Rate distortion theory, metric mean dimension and measure theoretic entropy. arXiv 1707.05762 Preprint, 2017.

[4] K. Falconer. Fractal geometry: Mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, 1990.

[5] M. Gromov. Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps. Math. Phys. Anal. Geom. vol. 2 pp. 323-415, 1999.

[6] E. Lindenstrauss and B. Weiss. Mean topological dimension. *Israel J. of Math.* 115 (2000) 1–24.

[7] E. Lindenstrauss. Mean dimension, small entropy factors and an embedding theorem. *Publ. Math. IHES* 89:1 (1999) 227–262.

[8] E. Lindenstrauss and M. Tsukamoto. From rate distortion theory to metric mean dimension: variational principle. *IEEE Trans. Inform. Theory* 64:5 (2018) 3590–3609.

[9] E. Lindenstrauss and M. Tsukamoto. Double variational principle for mean dimension. *Geom. Funct. Anal.* 29 (2019) 1048–1109.

[10] M. Carvalho, F. Rodrigues and P. Varandas. A variational principle for free semigroup actions. *Adv. Math.* 334 (2018) 450–487.

[11] M. Carvalho, F. Rodrigues and P. Varandas. A variational formula for the metric mean dimension of free semigroup actions. *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 2021, DOI: 10.1017/etds.2020.143

[12] M. Carvalho , F. Rodrigues and P. Varandas. Generic homeomorphisms have full metric mean dimension. *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 2020, DOI: 10.1017/etds.2020.130

[13] F. Rodrigues and J. Acevedo. Mean Dimension and Metric Mean Dimension for Non-autonomous Dynamical Systems *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2021, DOI:10.1007/s10883-021-09541-6

[14] M. Tsukamoto and M. Shinoda. Symbolic dynamics in mean dimension theory. Ergodic Theory and Dynamical Systems, Cambridge University Press 1–19 (2020).

[15] P. Walters. An Introduction to Ergodic Theory, Springer (1982).

[16] J.B. Conway. A course in Functional Analysis, Springer (1990).