



Trabalho de Conclusão de Curso

**Um modelo dinâmico multivariado para  
volatilidades e correlações com aplicação em  
seleção de portfólio de ativos financeiros**

Franciele Lobo Pallaoro

2 de junho de 2021

**Franciele Lobo Pallaoro**

**Um modelo dinâmico multivariado para volatilidades e correlações com aplicação em seleção de portfólio de ativos financeiros**

Trabalho de Conclusão apresentado à comissão de Graduação do Departamento de Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Orientador(a): Prof. Dr. Hudson Torrent

Porto Alegre  
Maio de 2021

**Franciele Lobo Pallaoro**

**Um modelo dinâmico multivariado para volatilidades e correlações com aplicação em seleção de portfólio de ativos financeiros**

Este Trabalho foi julgado adequado para obtenção dos créditos da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso em Estatística e aprovado em sua forma final pela Orientador(a) e pela Banca Examinadora.

Orientador(a): \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Hudson Torrent, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS

Banca Examinadora:

Profa. Dr. Taiane Schaedler Prass, UFRGS  
Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS

Porto Alegre  
Maio de 2021

*Dedico esse trabalho à maior mulher da minha vida, minha vovó Hilda Lobo (in  
memoriam).*

# Agradecimentos

Aos meus pais, Débora e Paulo Cesar, por todo amor e dedicação, pela educação que me proporcionaram e pelo super incentivo aos estudos desde sempre.

Aos meus irmãos, João Victor, o mestre cuca da família, que faz as melhores comidas. Victória, que foi minha companheira de colégio e de universidade a vida toda. Sempre colocamos a nossa formação em primeiro lugar, e eu sou a primeira a me formar, mas logo em seguida é a sua vez. Muito obrigada, sem você esse trabalho teria menos pontuação do que as obras de Saramago.

À Michele, que sempre cuidou de nós como irmã mais velha, mas nunca sem deixar de ser parceira para tudo. Ao meu cunhado Dagoberto, que, junto com a Michele, deram os maiores e melhores presentes das nossas vidas: Antonella e Anita, que são alegria e alento em meio à tempestade das nossas vidas.

À minha vovó Hilda, o amor da minha vida, que tenho certeza que, de onde estiver, está feliz pela minha conquista.

Ao Rodrigo, por todo amor, acolhimento, paciência e companheirismo ao longo desses anos e, principalmente, nessa reta final. Obrigada por ser meu porto seguro. Aos meus sogros, Lúcia e Roberto, por toda ajuda e incentivo.

Aos amigos que fiz nesses últimos anos de estatística, vocês foram muito importantes nessa jornada. Com certeza foi muito mais fácil por ter sido com vocês: Bruna, Gabriela, Giulia, Maitê, Renan e, em especial, à Juliana, que sempre esteve presente me dando atenção mesmo quando não merecia, e que me deu sugestões e conselhos sobre tudo.

Aos professores do Departamento de Estatística da UFRGS, por todo conhecimento passado e também pela ajuda e motivação. Em especial ao meu orientador, professor Hudson, muito obrigada pela dedicação, por aceitar as minhas ideias, por me incentivar nesse trabalho e, principalmente, obrigada por me compreender nesse momento tão adverso que estamos vivendo. Por fim, agradeço à professora Taiane por ter aceitado fazer parte da banca desse trabalho e pelas considerações feitas.

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo modelar a distribuição conjunta condicional de um portfólio com alta dimensão transversal composto por 71 séries de retornos diários de ações listadas na bolsa brasileira (B3), no período de 2014-2019. A finalidade é estimar a matriz de covariância dos retornos que proporcione uma alocação ótima dos ativos, com melhor desempenho do que a estratégia de mínima variância tradicional que faz uso da matriz de covariância amostral. A modelagem é feita usando o modelo proposto por [Opschoor et al. \(2020\)](#) de cópulas fatoriais com cargas dinâmicas que evoluem com um mecanismo baseado no *score* da distribuição conjunta condicional, esse modelo apresenta forma fechada para verossimilhança. Os resultados mostram que o turnover do portfólio usando a matriz de covariância estimada pelo modelo foi maior do que usando a matriz de covariância amostral.

**Palavras-Chave:** Cópulas dinâmicas, Séries Temporais, Cópulas fatoriais, Seleção de portfólio, Alta dimensão.

# Abstract

This work aims to model the conditional joint distribution of a portfolio with a high cross-sectional dimension composed of 71 series of daily returns of the Brazilian stock exchange (B3), over the period 2014–2019. The purpose is to estimate the covariance matrix of returns that provides an optimal allocation of assets with better performance than the traditional minimum variance strategy that uses the sample covariance matrix. We used the model proposed by [Opschoor et al. \(2020\)](#) of factor copula with score-driven dynamic factor loadings, the likelihood of this model presents closed form. The results show that the portfolio turnover using the covariance matrix estimated by the model was greater than using the sample covariance matrix.

**Keywords:** Dynamic copulas, Time Series, Factor copulas, Portfolio selection, High dimension.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Cópuas</b>	<b>11</b>
2.1	Teorema de Sklar . . . . .	11
2.2	Cópuas elípticas . . . . .	11
2.2.1	Cópula Gaussiana . . . . .	12
2.2.2	Cópula $t$ . . . . .	12
2.3	Cópula em séries temporais . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Modelo cópuas fatoriais dinâmicas</b>	<b>14</b>
3.1	Especificação geral do modelo . . . . .	14
3.2	Estrutura fatorial . . . . .	15
3.3	Suposições de distribuições . . . . .	16
3.4	Dinâmica das cargas fatoriais . . . . .	16
3.5	Estimação e verossimilhança . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Modelo GARCH univariado</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Seleção de portfólio</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Análise Empírica</b>	<b>20</b>
6.1	Dados . . . . .	20
6.2	Modelos marginais univariados . . . . .	20
6.3	Modelagem da distribuição conjunta . . . . .	22
6.3.1	Otimização de portfólio . . . . .	22
<b>7</b>	<b>Resultados</b>	<b>24</b>
7.1	Análise descritiva das séries . . . . .	24
7.2	Modelos univariados GARCH(1,1) . . . . .	25
7.3	Modelos multivariados na amostra completa . . . . .	25
7.4	Otimização de Portfólio . . . . .	27
<b>8</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>28</b>
	Referências Bibliográficas	28
	APÊNDICE A	32



# 1 Introdução

A modelagem da distribuição condicional multivariada de ativos financeiros pode ser um desafio, visto que evidências empíricas indicam que as volatilidades e as correlações condicionais de séries temporais financeiras mudam ao longo do tempo. Com isso, vários modelos foram propostos para explorar essa dinâmica, em especial duas classes geralmente utilizadas na literatura: os modelos guiados por parâmetros e os modelos guiados por observações (Cox et al., 1981). A primeira classe inclui, por exemplo, os modelos de volatilidade estocástica de Chib et al. (2006). Já entre os modelos guiados por observação podemos citar os modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), propostos por Engle (1982); Bollerslev (1986), o modelo DCC (*Dynamic Conditional Correlation*), de Engle (2002) e os modelos GAS (*Generalized Autorregressive Score*), introduzidos por Creal et al. (2008), o qual propõe a criação de uma estrutura unificada que engloba vários modelos com parâmetros que variam ao longo do tempo.

Esse modelos multivariados não se apresentam como uma boa alternativa para modelar a distribuição multivariada de uma grande quantidade de ativos financeiros. A justificativa é que, ao modelar a matriz de variância e covariância de uma série temporal multivariada, o número de parâmetros aumenta exponencialmente, à medida que mais séries são introduzidas ao modelo multivariado. Podem ocorrer, portanto, problemas numéricos ao estimar o modelo (Creal et al., 2011). Dessa forma, quanto mais ativos o investidor tiver na carteira, mais difícil será a estimação do modelo.

Uma melhor opção é a introdução de cópulas para especificação do modelo multivariado, nas quais as covariâncias são estimadas em uma etapa diferente das variâncias. Como a estimação pode ser feita em duas etapas, é possível especificar qualquer modelo marginal para as séries temporais univariadas dos ativos, bem como uma função cópula qualquer. Assim, especifica-se completamente um modelo para distribuição conjunta condicional dos ativos (Patton, 2012).

As cópulas dinâmicas, que apresentam parâmetros que variam no tempo, se tornaram uma técnica importante para descrever a dependência de um modelo multivariado para séries temporais, no contexto de econometria e finanças (ver, Cherubini et al., 2011; Patton, 2009, por exemplo). Creal et al. (2011); Bernardi e Catania (2018) modelam as distribuições marginais dos ativos via modelo GAS, *t de Student* e *Skew t de Student*, respectivamente, para incorporar as características das séries temporais financeiras, como assimetria e caudas pesadas. Além disso, estabelecem a dependência entre os ativos por meio de uma função cópula *t de Student*, seguindo a mesma ideia de Patton (2009). Contudo, no contexto de seleção de portfólio, à

medida que o número de ativos aumenta, o de parâmetros também cresce. Tal característica é conhecida por "maldição da dimensionalidade" (Opschoor et al., 2020).

Oh e Patton (2017, 2018) propuseram um modelo de cópulas fatoriais para modelar a dependência em um grande número de variáveis observadas, usando um conjunto menor de variáveis latentes não observadas (fatores). Entretanto, nessa abordagem, a densidade da cópula não tem forma fechada, sendo necessários métodos numéricos para a estimativa, o que requer um grande poder computacional.

Recentemente, Opschoor et al. (2020) introduziram um novo modelo de cópula fatorial com cargas dinâmicas. Para isso, é assumido que os ativos, em um determinado momento no tempo, possam ser agrupados de acordo com outras variáveis observáveis, como o setor da empresa, sua localização, seu tamanho, entre outras. As cargas fatoriais de cada um dos fatores variam no tempo por meio da introdução da dinâmica dos modelos GAS, introduzidos por Creal et al. (2008). O número de parâmetros do modelo é reduzido, pois supõe-se que todas as variáveis em um determinado tempo, que fazem parte de um mesmo grupo, têm cargas fatoriais iguais. Ao assumir que os fatores latentes comuns e específicos de grupo, bem como os componentes idiossincráticos, seguem certas distribuições apropriadas, obtém-se um modelo com uma expressão fechada para a verossimilhança. Conseqüentemente, a estimativa e a inferência dos parâmetros são diretas ao usar máxima verossimilhança, e o poder computacional necessário é significativamente reduzido. Assim, o novo modelo fatorial pode ser implementado sem qualquer dificuldade para grandes dimensões, desde que o número de grupos permaneça pequeno ou moderado.

Neste trabalho é proposta uma aplicação empírica em dados brasileiros do modelo de Opschoor et al. (2020), sendo a carteira selecionada composta por retornos diários de 71 ativos negociados na B3, separados em nove grupos usando a classificação setorial da empresa. O modelo será estimado em duas etapas, primeiro são estimados os modelos marginais univariados e após o modelo multivariado. Essa abordagem simplifica a estimação, visto que diminui o poder computacional necessário (Joe e Xu, 1996). A modelagem univariada das séries dos retornos foi feita com modelos GARCH *Skewed t* de *Student*, que é uma distribuição assimétrica e com caudas pesadas e, portanto, mais sensível a valores extremos, comum nesse tipo de dado (Alberg et al., 2008). A estimação de toda a amostra foi realizada com todos os modelos propostos pelos autores, com cópula gaussiana e cópula *t*. No contexto de otimização de portfólio, o modelo mais geral foi o escolhido, e a abordagem de Opschoor et al. (2020) foi comparada à mínima variância, utilizando a matriz de covariância amostral.

Este trabalho está dividido em capítulos: no capítulo 2 e 5 é apresentada uma pequena revisão de cópulas e otimização de portfólio, respectivamente; no capítulo 3 o modelo proposto por Opschoor et al. (2020) é enunciado e, no capítulo 4, o modelo marginal. Por fim, nos capítulos 6, 7, 8 são apresentados a metodologia, os resultados e as considerações finais.

## 2 Cópulas

A literatura acerca da modelagem multivariada baseada em cópulas é bastante vasta. [Nelsen \(2007\)](#) e [Joe \(1997\)](#) têm trabalhos reconhecidos sobre a teoria de cópulas, nos quais introduzem os conceitos de modelagem da dependência multivariada a partir de cópulas. Na área de séries temporais, [Cherubini et al. \(2004\)](#) apresenta uma introdução a cópulas para área de finanças e [McNeil et al. \(2015\)](#) fornece uma visão geral da teoria de cópulas no contexto de gerenciamento de risco. [Chen e Fan \(2006\)](#) estudaram a estimação de modelos semiparamétricos no contexto de cópulas e [Patton \(2012\)](#) traz uma visão global de cópulas para séries temporais econômicas. [Cherubini et al. \(2011\)](#), [Oh e Patton \(2017\)](#), [Dias et al. \(2004\)](#), entre outros, estudaram as cópulas dinâmicas, com parâmetros que variam no tempo, no contexto de séries temporais.

### 2.1 Teorema de Sklar

Uma função cópula pode ser definida como uma distribuição multivariada cujas marginais são uniformemente distribuídas no intervalo  $[0, 1]$ . Segundo o Teorema de Sklar ([Sklar, 1959](#)), seja  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_k)$  um vetor aleatório e  $C : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  uma função cópula,  $F(y_1, \dots, y_k)$  uma função de distribuição conjunta e  $F_{Y_i}(y_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  as suas distribuições marginais. Então, existe uma função cópula  $C$  tal que,

$$F(y_1, \dots, y_k) = C(F_{Y_1}(y_1), \dots, F_{Y_k}(y_k)) \quad (2.1)$$

para todo  $y_i \in [-\infty, \infty]$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Dessa forma, se  $F_{Y_i}(\cdot)$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$  forem contínuas, então existe uma única função cópula que relaciona a função de distribuição conjunta com suas funções de distribuição marginais.

$$F(y_1, \dots, y_k) = C(F_{Y_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{Y_1}^{-1}(u_k)) \quad (2.2)$$

em que  $0 \leq u_i \leq 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ .

### 2.2 Cópulas elípticas

As cópulas podem ser classificadas em diferentes tipos. Nessa seção serão apresentadas a cópula Gaussiana e a cópula t de *Student* que fazem parte da família de cópulas elípticas. Essas duas funções cópulas foram utilizadas para a modelagem

nesse trabalho. Em 2.2.1 e 2.2.2 são apresentadas as funções cópulas gaussianas e t para o caso bivariado a fim de simplificações.

### 2.2.1 Cópula Gaussiana

Assumindo  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias em que  $C(u_1, u_2) = F(F_x^{-1}(u_1), F_y^{-1}(u_2))$ . Então, é possível expressar a cópula Gaussiana ( $C_G$ ) da seguinte forma (Embrechts et al., 2001)

$$C(u_1, u_2 | \rho) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$$

$$C(u_1, u_2 | \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dx dy. \quad (2.3)$$

em que  $\rho$  é parâmetro da cópula, nesse caso a correlação. Para esta cópula, os índices de cauda são iguais a zero, indicando que as variáveis aleatórias não possuem dependência em valores extremos. Entretanto, para descrever a dependência de ativos financeiros, devido as características específicas desse tipo de dados, é mais interessante uma função cópula com dependência na cauda.

### 2.2.2 Cópula t

A cópula t *Student* permite reproduzir a dependência entre os valores extremos da distribuição e essa dependência está presente na mesma magnitude em ambas as caudas. Por este motivo, a cópula t de *Student* é a mais indicada para modelagem de dados financeiros. A cópula t de *Student* é expressa por (Demarta e McNeil, 2005)

$$C(u_1, u_2 | \rho, \nu) = T_{2,\nu}(T_{1,\nu}^{-1}(u_1), T_{1,\nu}^{-1}(u_2))$$

$$C(u_1, u_2 | \rho, \nu) = \int_{-\infty}^{T_{1,\nu}^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{T_{1,\nu}^{-1}(u_2)} \frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\pi\nu)^2(1-\rho^2)}} \exp\left\{1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\nu(1-\rho^2)}\right\}^{-\frac{\nu+2}{2}} dx dy \quad (2.4)$$

em que  $T_{d,\nu}$  é a função de distribuição acumulada da t de *Student*  $\forall d = 1, 2$ ,  $\rho$  o parâmetro de correlação, e  $\nu$  o parâmetro que representa os graus de liberdade.

## 2.3 Cópula em séries temporais

O objetivo desse trabalho é modelar a distribuição conjunta condicional de ativos financeiros, dada por  $F_t(y_t)$  do vetor de ativos  $\mathbf{Y}_t = (Y_{1,t}, Y_{2,t}, \dots, Y_{N,t})'$  no período  $t$ , em que  $t = 1, 2, \dots, T$ . A distribuição conjunta  $F_t(\mathbf{y}_t)$  pode ser separada em  $N$  distribuições marginais e na cópula condicional, como visto em Patton (2006)

$$\mathbf{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim F_t \quad (2.5)$$

$$F_t(y_t) = C_t\left(F_{1,t}(y_{1,t}; \boldsymbol{\theta}_{M,1,t}), \dots, F_{N,t}(y_{N,t}; \boldsymbol{\theta}_{M,N,t}); \boldsymbol{\theta}_{C,t}\right)$$

onde  $C_t(\cdot, \boldsymbol{\theta}_{C,t})$  é a cópula condicional dado  $\mathcal{F}_{t-1}$ ,  $\boldsymbol{\theta}_{C,t}$  é o vetor de parâmetros que variam no tempo,  $F_{i,t}(y_{i,t}; \boldsymbol{\theta}_{M,i,t})$  é a distribuição marginal do ativo  $i$  dado  $\mathcal{F}_{t-1}$  e  $\boldsymbol{\theta}_{M,i,t}$  é o vetor de parâmetros que variam no tempo da distribuição marginal do ativo  $i$ .

A especificação do modelo nessa forma, decompondo a distribuição multivariada nas distribuições univariadas marginais e na cópula, é vantajosa, especialmente quando a dimensão transversal, ou seja, o número de ativos, é grande [Patton \(2009\)](#). Estimar os parâmetros em duas etapas diminui substancialmente a carga computacional, visto que os modelos marginais são relativamente mais simples ([Joe e Xu, 1996](#)). Essa especificação será usada para estimação de todos os modelos de cópulas apresentados nesse trabalho.

### 3 Modelo cópulas fatoriais dinâmicas

Nesse capítulo será apresentada a classe de modelos de cópulas fatoriais de forma fechada com cargas dinâmicas orientadas pelo *score*, introduzida por Opschoor et al. (2020). A abordagem é usada para descrever a dependência entre séries temporais financeiras, tendo em vista que essas séries apresentam características específicas, como volatilidades e correlações que variam no tempo. Nesse trabalho, em específico, serão utilizadas séries de retornos históricos de ativos financeiros, sendo que o modelo será enunciado para esse tipo de dado. As próximas seções foram baseadas no trabalho de Opschoor et al. (2020).

#### 3.1 Especificação geral do modelo

Na classe de modelos a ser apresentada a dinâmica dos parâmetros é baseada no *score*. Além disso, é assumido que os  $N$  ativos podem ser agrupados em  $G$  grupos, com ativos no mesmo grupo tendo cargas fatoriais idênticas. Então, a estrutura do modelo fica

$$\begin{aligned} u_{i,t} &= D_{\mathbf{X}}(x_{i,t}; \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{i,t}, \sigma_{i,t}, \boldsymbol{\psi}_C) & i &= 1, 2, \dots, N \\ x_{i,t} &= \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{i,t} \mathbf{z}_t + \sigma_{i,t} \epsilon_{i,t} & \mathbf{z}_t &\perp\!\!\!\perp \epsilon_{i,t} \\ \mathbf{z}_t &\stackrel{iid}{\sim} D_{\mathbf{z}}(\cdot | \boldsymbol{\psi}_C) & \epsilon_{i,t} &\stackrel{iid}{\sim} D_{\epsilon}(\cdot | \boldsymbol{\psi}_C) \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{u}_t$  é a transformação integral de probabilidade de  $\mathbf{y}_t$ , então  $u_i = F_{i,t}(y_{i,t}; \boldsymbol{\theta}_{M,i,t})$ . O vetor  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{i,t}$  é um vetor contendo as cargas fatoriais padronizadas,  $\mathbf{z}_t$  é o vetor dos fatores latentes comuns e  $\epsilon_{i,t}$  são os choques idiossincráticos e seguem as distribuições  $D_{\mathbf{z}}$  e  $D_{\epsilon}$ , respectivamente. Por último,  $\boldsymbol{\psi}_C$  é um vetor de parâmetros de forma estáticos, e  $D_{\mathbf{X}}$  é a distribuição marginal de  $X_{i,t}$ . O vetor das cargas  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{i,t}$  e o escalar  $\sigma_{i,t}$  são definidos como

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{i,t} = \frac{\boldsymbol{\lambda}_{i,t}}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\lambda}'_{i,t} \boldsymbol{\lambda}_{i,t}}}, \quad \sigma_{i,t}^2 = \frac{1}{1 + \boldsymbol{\lambda}'_{i,t} \boldsymbol{\lambda}_{i,t}} \quad (3.2)$$

para um vetor  $k \times 1$  irrestrito  $\boldsymbol{\lambda}_{i,t}$ , tal que  $x_{i,t}$  tem média zero e variância unitária. Esses elementos formam a matriz de correlação  $\mathbf{R}_t$ , de  $\mathbf{x}_t = (x_{1,t}, \dots, x_{N,t})$ . Assim  $\mathbf{R}_t$  é dada por,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t &= \tilde{\mathbf{L}}_t' \tilde{\mathbf{L}}_t + \mathbf{D}_t, \\ \tilde{\mathbf{L}}_t &= (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{1,t}, \dots, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{N,t}), \\ \mathbf{D}_t &= \text{diag}(\sigma_{1,t}^2, \dots, \sigma_{N,t}^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Essa matriz satisfaz todos os requisitos de uma matriz de correlação, ou seja, ser positiva semidefinida e ter na diagonal principal um vetor de uns. Um grande ganho computacional ao se definir a cópula como em 3.1 é que, dessa forma, a inversa e o determinante da matriz de correlação  $\mathbf{R}_t$  apresentam forma fechada

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t^{-1} &= \mathbf{D}_t^{-1} - \mathbf{D}_t^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_t' \left( \mathbf{I}_k + \tilde{\mathbf{L}}_t \mathbf{D}_t^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_t' \right)^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_t \mathbf{D}_t^{-1} \\ |\mathbf{R}_t| &= \left| \mathbf{I}_k + \tilde{\mathbf{L}}_t \mathbf{D}_t^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_t' \right| \cdot |\mathbf{D}_t| \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{I}_k$  é uma matriz identidade  $k$ -dimensional e  $\mathbf{D}_t$  uma matriz diagonal. Calcular a inversa da matriz de correlação é relativamente simples, visto que a inversa da matriz diagonal  $\mathbf{D}_t$  é direta e  $\tilde{\mathbf{L}}_t \mathbf{D}_t^{-1}$  pode ser calculada diretamente dividindo cada coluna de  $\tilde{\mathbf{L}}_t$  pelo elemento correspondente na diagonal de  $\mathbf{D}_t$ . Ainda, como o número de fatores latentes  $k$  é, em geral, menor que o número de ativos  $N$ , calcular a inversa da matriz  $\mathbf{I}_k + \tilde{\mathbf{L}}_t \mathbf{D}_t^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_t'$  é muito mais rápido computacionalmente do que calcular a inversa da matriz  $\mathbf{R}_t$ .

## 3.2 Estrutura fatorial

A estrutura fatorial do modelo é dada pela matriz  $\tilde{\mathbf{L}}_t'$ , dessa forma, os diferentes modelos apresentam diferentes matrizes. Para exemplificar, suponha um cenário em que  $G = 4$  grupos com dois ativos em cada grupo. Em todas as matrizes apresentadas,  $\tilde{\lambda}_{f,g,t}$  denota a carga do fator  $f$ , grupo  $g$  e tempo  $t$ . O modelo mais simples tem um fator com cargas iguais para todos os grupos, e a matriz  $\tilde{\mathbf{L}}_t'$ , com dimensão  $N \times 1$ , tem a seguinte forma

$$\tilde{\mathbf{L}}_t' = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_{1,t} \\ \tilde{\lambda}_{1,t} \\ \tilde{\lambda}_{1,t} \\ \tilde{\lambda}_{1,t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

em que  $\otimes$  denota o produto de Kronecker. O segundo modelo tem um fator com cargas específicas para cada grupo, e a matriz  $\tilde{\mathbf{L}}_t'$ , com dimensão  $N \times 1$ , fica

$$\tilde{\mathbf{L}}_t' = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_{1,1,t} \\ \tilde{\lambda}_{1,2,t} \\ \tilde{\lambda}_{1,3,t} \\ \tilde{\lambda}_{1,4,t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

No modelo com dois fatores, sendo um com cargas específicas para cada grupo, a matriz tem dimensão  $N \times 2$  e é dada por

$$\tilde{\mathbf{L}}_t' = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_{1,t} & \tilde{\lambda}_{2,1,t} \\ \tilde{\lambda}_{1,t} & \tilde{\lambda}_{2,2,t} \\ \tilde{\lambda}_{1,t} & \tilde{\lambda}_{2,3,t} \\ \tilde{\lambda}_{1,t} & \tilde{\lambda}_{2,4,t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Os dois últimos modelos são modelos multifatoriais. No primeiro caso são  $G + 1$  fatores, com um deles sendo comum para todos os grupos e com cargas iguais, e os outros fatores específicos para cada grupo com cargas específicas para cada grupo. Desse modo, a matriz  $\tilde{\mathbf{L}}_t'$ , com dimensão  $N \times (G + 1)$  é

$$\tilde{\mathbf{L}}_t' = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_{1,t} & \tilde{\lambda}_{2,1,t} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\lambda}_{1,t} & 0 & \tilde{\lambda}_{2,2,t} & 0 & 0 \\ \tilde{\lambda}_{1,t} & 0 & 0 & \tilde{\lambda}_{2,3,t} & 0 \\ \tilde{\lambda}_{1,t} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\lambda}_{2,4,t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

O modelo mais geral é o modelo multifatorial triangular inferior, que apresenta  $G$  fatores, sendo um comum para todos os grupos, mas com cargas específicas para cada grupo. O número de cargas fatoriais nesse caso é  $G(G+1)/2$ . A matriz  $\tilde{\mathbf{L}}_t'$  tem dimensão  $N \times G$  e, nesse caso, pode ser vista como a decomposição de Choleski de uma matriz de "quase correlação" contendo as correlações dentro e entre os grupos

$$\tilde{\mathbf{L}}_t' = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_{1,1,t} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\lambda}_{1,2,t} & \tilde{\lambda}_{2,2,t} & 0 & 0 \\ \tilde{\lambda}_{1,3,t} & \tilde{\lambda}_{2,3,t} & \tilde{\lambda}_{3,3,t} & 0 \\ \tilde{\lambda}_{1,4,t} & \tilde{\lambda}_{2,4,t} & \tilde{\lambda}_{3,4,t} & \tilde{\lambda}_{4,4,t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

### 3.3 Suposições de distribuições

O modelo proposto pelos autores apresenta forma fechada para a função de verossimilhança por dois motivos. O primeiro é devido ao mecanismo da dinâmica das cargas fatoriais, conforme visto na seção 3.4. O segundo é supor distribuições específicas para os choques aleatórios,  $\epsilon_{i,t}$ , e para os fatores comuns de grupo,  $\mathbf{z}_t$ . Assumindo uma cópula  $t$  de *Student*, a especificação do modelo dada em 3.1 fica

$$\begin{aligned} u_{i,t} &= T(x_{i,t}; \nu_C), & i &= 1, \dots, N, \\ x_{i,t} &= \sqrt{\zeta_t} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{i,t}' \mathbf{z}_t + \sigma_{i,t} \epsilon_{i,t}), & \mathbf{z}_t &\stackrel{iid}{\sim} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k) \\ \epsilon_{i,t} &\stackrel{iid}{\sim} \mathbf{N}(0, 1), & \zeta_t &\stackrel{iid}{\sim} \text{Inv-Gamma}(\nu_C/2, \nu_C/2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que  $T(\cdot; \nu_C)$  denota a função de distribuição univariada  $t$  de *Student* com  $\nu_C$  graus de liberdade, parâmetro de locação igual a zero e parâmetro de escala igual a um. A cópula Gaussiana é um caso especial em que  $\nu_C \rightarrow \infty$ , e, portanto  $\zeta_t = 1$ .

### 3.4 Dinâmica das cargas fatoriais

A dinâmica das cargas fatoriais é feita por meio de um mecanismo que usa o *score* da densidade condicional da cópula para a atualização desses parâmetros que variam no tempo. Como essa dinâmica é orientada por observação e assume que as cargas fatoriais dependem de funções de observáveis passadas, a verossimilhança do modelo está disponível na forma fechada. O vetor  $\mathbf{f}_t$  contém as cargas fatoriais únicas da matriz  $\mathbf{L}_t = (\boldsymbol{\lambda}_{1,t}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{N,t}) \in \mathbb{R}^{k \times N}$ . Com isso, a dimensão de  $\mathbf{f}_t$  depende da estrutura fatorial do modelo. Para o modelo mais simples  $f_t$  é um escalar, já que há apenas uma carga fatorial, assim como para o modelo mais geral  $\mathbf{f}_t$  tem dimensão  $1 \times G(G+1)/2$ . Pelo mesmo motivo, a equação de atualização de  $\mathbf{f}_t$  também depende da estrutura fatorial do modelo. Para a cópula multifatorial, por exemplo, a dinâmica é dada por

$$\begin{aligned} f_{1,t+1}^{eq} &= \omega^{eq} + A^{eq} s_t^{eq} + B f_{1,t}^{eq}, \\ f_{2,g,t+1}^{gr,f} &= \omega_g^{gr,f} + A^{gr,f} s_{g,t}^{gr,f} + B f_{2,g,t}^{gr,f}, \quad g = 1, \dots, G, \end{aligned} \quad (3.11)$$



onde  $A$ ,  $B$  e  $\boldsymbol{\omega}$  são parâmetros do modelo e  $\mathbf{s}_t$  é o vetor *score* que é

$$\mathbf{s}_t = \frac{\partial \log \mathbf{c}_t(\mathbf{u}_t; \mathbf{R}_t, \boldsymbol{\psi}_C)}{\partial \mathbf{f}'_t} = \frac{\partial \log \mathbf{c}_t(\mathbf{u}_t; \mathbf{R}_t, \boldsymbol{\psi}_C)}{\partial \text{vec}(\mathbf{R}_t)'} \cdot \frac{\partial \text{vec}(\mathbf{R}_t)}{\partial \text{vec}(\mathbf{L}_t)'} \cdot \frac{\partial \text{vec}(\mathbf{L}_t)}{\partial \mathbf{f}'_t} \quad (3.12)$$

onde  $\mathbf{c}_t(\mathbf{u}_t; \mathbf{R}_t, \boldsymbol{\psi}_C)$  é a densidade da cópula. Para a cópula  $t$  de *Student* e a cópula Gaussiana segue

$$\begin{aligned} \log \mathbf{c}_{\text{Stud},t}(\mathbf{u}_t; \mathbf{R}_t, \boldsymbol{\psi}_C) &= -\frac{1}{2} \log |\mathbf{R}_t| - \frac{\nu + N}{2} \log \left( 1 + \frac{\mathbf{x}'_t \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{x}_t}{\nu - 2} \right) + a_{\text{Stud}}(\nu, \mathbf{x}_t) \\ \log \mathbf{c}_{\text{Gauss},t}(\mathbf{u}_t; \mathbf{R}_t, \boldsymbol{\psi}_C) &= -\frac{1}{2} \log |\mathbf{R}_t| + -\frac{1}{2} \mathbf{x}'_t \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{x}_t + a_{\text{Gaus}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde  $a_{\text{Stud}}(\nu, \mathbf{x}_t)$  e  $a_{\text{Gaus}}$  são constantes que não dependem de  $\mathbf{R}_t$ . As duas primeiras parcelas da Eq. 3.12 são iguais para todos os modelos, enquanto  $\frac{\partial \text{vec}(\mathbf{L}_t)}{\partial \mathbf{f}'_t}$  depende da estrutura fatorial dos modelos. A derivação do score para todos os modelos pode ser encontrada no material suplementar de Opschoor et al. (2020).

### 3.5 Estimação e verossimilhança

A estimação do modelo é feita em duas etapas: primeiro são estimados os modelos para as distribuições marginais e, em seguida, é estimada a cópula. A estimação dos parâmetros da cópula condicional dado os parâmetros das distribuições marginais, seguindo algumas suposições de distribuição, tem forma fechada para a verossimilhança

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) &\equiv \sum_{t=1}^T \log \mathbf{f}_t(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\theta}_t) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \log f_{i,t}(y_{i,t}; \boldsymbol{\theta}_{M,i,t}) \\ &+ \sum_{t=1}^T \log \mathbf{c}_t(F_{1,t}(y_{1,t}; \boldsymbol{\theta}_{M,1,t}), \dots, F_{N,t}(y_{N,t}; \boldsymbol{\theta}_{M,N,t}); \boldsymbol{\theta}_{C,t}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $f_{i,t}(\cdot; \boldsymbol{\theta}_{M,i,t})$  é a densidade condicional das marginais e  $\boldsymbol{\theta}_t = (\boldsymbol{\theta}_{M,t}, \boldsymbol{\theta}_{C,t})$ .

No modelo mais geral o vetor de parâmetros do intercepto  $\boldsymbol{\omega}$  tem  $G(G+1)/2$  diferentes elementos. Nesse caso, pelo número de parâmetros ser muito grande, a cópula é estimada em dois passos. Assumindo que o processo das cargas fatoriais é fracamente estacionário, e definindo a média não condicional de  $\mathbf{f}_t$  como  $\bar{\mathbf{f}}_t$  então,

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbb{E}[\mathbf{f}_{t+1}] = \boldsymbol{\omega} + B\mathbb{E}[\mathbf{f}_t] \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{f}} = (1 - B)^{-1}\boldsymbol{\omega} \quad (3.15)$$

No primeiro passo  $\bar{\mathbf{f}}$  é estimado usando um estimador de momento. No segundo passo os demais parâmetros são estimados mantendo  $\bar{\mathbf{f}}$  fixo e definindo  $\boldsymbol{\omega} = (1 - B)\bar{\mathbf{f}}$ . Esse passo compreende maximizar a verossimilhança e é comum para todos os modelos.

## 4 Modelo GARCH univariado

Os modelos marginais são uma escolha importante, visto que são eles que irão captar as características dos dados financeiros. Para modelar a variância condicional dos modelos univariados das séries de retornos foi utilizado o modelo GARCH com erros *Skewed t* de *Student*, já que essa distribuição incorpora a possível assimetria e as caudas pesadas, características comuns em séries financeiras. O modelo GARCH(p,q) (Engle, 1982; Bollerslev, 1986) é especificado como

$$\begin{aligned} y_t &= z_t \sqrt{h_t}, \quad z_t \sim St(0, h_t, \nu, \lambda) \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_t^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $z_t$  é uma variável aleatória com média zero e segue distribuição *Skewed t* de *Student* de Hansen (1994)

$$f(z_t; \lambda, \nu) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{b_t+a}{1-\lambda}\right)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} & \text{se} \\ z_t < -\frac{a}{b} \\ bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{b_t+a}{1+\lambda}\right)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} & \text{se} \\ z_t \geq -\frac{a}{b} \end{cases} \quad (4.2)$$

com

$$a = 4\lambda c \frac{\nu-2}{\nu-1}, \quad b^2 = 1 + 3\lambda^2 - a^2, \quad \text{e} \quad c = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad (4.3)$$

tal que  $f(y_t | \mu_t, h_t, \nu, \lambda) = 1/h_t f(z_t; \lambda, \nu)$ . Além disso,  $\lambda$  é o parâmetro de assimetria e  $\nu$  são os graus de liberdade.

## 5 Seleção de portfólio

Em seu artigo seminal, [Markowitz \(1952\)](#) propôs uma nova abordagem para alocação de carteiras de investimento, introduzindo a ideia de que um investidor deve considerar o *tradeoff* entre retorno esperado e risco para a composição do portfólio. O risco da carteira, nesse caso, depende tanto da variância de cada ativo individualmente como da covariância entre eles. A estratégia de média-variância tem como conceito que, em uma carteira diversificada, ao se fixar um dado nível de aversão ao risco, há uma alocação ótima que maximiza o retorno, e que, entre todas as carteiras que proporcionam um determinado retorno, há uma que minimiza o risco. Dessa forma, a alocação na carteira é um problema de otimização.

Suponha que o investidor tenha uma carteira com  $N$  ativos para alocar sua riqueza. Cada ativo recebe um peso  $w_i$ , que representa a proporção do  $i$ -ésimo ativo da carteira. A cada ativo é associado um vetor de retorno aleatório  $\mathbf{R}_t$ , que é normalmente distribuído com média  $\mathbf{u}_t$  e matriz de variância e covariância  $\mathbf{\Sigma}_t$ . Considerando que o retorno da carteira de  $t$  a  $t + 1$  é  $R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_{i,t} R_{i,t+1}$ , então  $\mathbf{R}_{p,t} = \mathbf{w}'_t \mathbf{R}_t$  é normal com média  $u_{p,t} = \mathbf{w}'_t \mathbf{u}_t$  e variância  $\sigma_{p,t}^2 = \mathbf{w}'_t \mathbf{\Sigma}_t \mathbf{w}_t$ , em que  $\mathbf{w}_t$  é o vetor de pesos no tempo  $t$ . Supondo uma carteira totalmente investida, então  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ .

Assim, a carteira de média-variância é o seguinte problema de otimização restrita

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}' \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} + \frac{1}{\gamma} E[R_{p,t+1}] \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}' \mathbf{w} = 1 \end{aligned} \tag{5.1}$$

em que  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$  é o vetor de pesos da carteira,  $\mathbf{\Sigma}$  é a matriz de variância e covariância da carteira,  $\gamma$  é o coeficiente que mede o nível de aversão ao risco,  $E[R_{p,t+1}]$  é o excesso de retorno esperado da carteira e  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^N$  é um vetor de uns. Com isso, a restrição  $\mathbf{1}' \mathbf{w}$  garante que a soma dos pesos seja 1.

A carteira de mínima-variância é um caso particular da estratégia de média-variância, em que o coeficiente de aversão ao risco  $\gamma = \infty$ . Dessa forma, como não depende do retorno esperado do portfólio e usa apenas a matriz de covariância dos retornos para otimizar os pesos da carteira, é menos suscetível a erros de estimação ([Santos e Tessari, 2012](#)).

A estimação da matriz de covariância e do vetor de médias dos retornos pode ser feita por meio de seus estimadores amostrais. Entretanto, mesmo que esses estimadores sejam não viesados, eles apresentam muito erro de estimativa ([Ledoit e Wolf, 2004](#)).

## 6 Análise Empírica

Nas próximas seções será apresentada a metodologia usada para o desenvolvimento desse trabalho. Toda a implementação foi feita na linguagem R versão 4.0.5.

### 6.1 Dados

Os dados utilizados são retornos aritméticos diários de  $N = 71$  ativos comercializados na bolsa brasileira (B3) no período entre 01-01-2014 e 31-12-2019, um total de  $T = 1.488$  observações. As séries históricas foram coletadas do *Yahoo finance* usando o pacote `BatchGetSymbol` (Perlin, 2020). Primeiramente, foram selecionadas todas as ações listadas, com um total de 82 empresas. Entretanto algumas tiveram poucos dias comercializados e, por isso, foram excluídas da amostra. Um aspecto fundamental da abordagem utilizada nesse trabalho é a suposição de que podemos dividir os  $N$  ativos em  $G$  grupos de acordo com uma característica observada, como setor, região ou risco. Desse modo, os ativos restantes foram divididos em grupos de acordo com a classificação setorial. Na tabela 6.1 estão todas as ações da amostra e o agrupamento utilizado nos modelos. Segundo Opschoor et al. (2020) todos os ativos dentro de um grupo compartilham a mesma estrutura de dependência. A dependência entre qualquer par de ativos em dois grupos específicos e diferentes também é a mesma, e isso resulta em uma configuração flexível, mas altamente parcimoniosa.

### 6.2 Modelos marginais univariados

Séries temporais de retornos apresentam características específicas, como agrupamentos de volatilidades ao longo do tempo, assimetria, e caudas mais pesadas que a distribuição normal. Outra característica comum consiste na existência de autocorrelação nos quadrados dos retornos, enquanto as séries dos retornos não possuem autocorrelação. Brown e Warner (1985) mostram que essas características são ainda mais presentes em séries de retornos diários, principalmente quanto à presença de valores extremos e de variância heterocedástica. Dito isso, a variância condicional foi modelada com um modelo GARCH(1,1) *Skewed t* de *Student*, que é capaz de incorporar essas particularidades (Alberg et al., 2008).

A estimação da cópula é feita com as transformações integrais em probabilidade (PITs) dos resíduos padronizados dos modelos univariados marginais  $u_{i,t} = F(z_{i,t})$  (Patton, 2012). O teste de Kolmogorov-Smirnov para distribuição *Skewed t* de *Student* rejeitou somente uma série dos resíduos padronizados ao nível de significância

Tabela 6.1: Tabela do agrupamento dos ativos por setor  
 Nessa tabela constam os *tickers* das 71 ações presentes na amostra, agrupadas pelo setor, e o tamanho dos grupos

<b>Setor</b>	<b>Tamanho</b>	<b>Tickers</b>
Comunicações	2	TIMS3 VIVT3
Consumo cíclico	12	GRND3 LAME4 BTOW3 COGN3 CVCB3 CYRE3 EZTC3 LREN3 MGLU3 MRVE3 RENT3 YDUQ3
Consumo não cíclico	5	ABEV3 BRFS3 BEEF3 JBSS3 MRFG3
Bens industriais	6	CCRO3 EMBR3 GOLL4 POMO4 WEGE3 ECOR3
Financeiro	14	BBAS3 BBDC3 BBDC4 ITSA4 ITUB4 PSSA3 B3SA3 BBSE3 BRML3 CIEL3 MULT3 SANB11 SULA11
Materiais básicos	9	BRAP4 BRKM5 CSNA3 DTEX3 GGBR3 GGBR4 GOAU4 USIM5 VALE3
Utilidade pública	14	CESP6 CMIG3 CMIG4 CPLE6 EGIE3 ELET3 ELET6 LIGT3 SBSP3 TRPL4 CPFE3 ENBR3 EQTL3 TAEE11
Petróleo, gás e biocombustíveis	5	PETR3 PETR4 UGPA3 CSAN3 PRIO3
Saúde	4	FLRY3 HYPE3 QUAL3 RADL3

5%. Seguindo [Creal e Tsay \(2015\)](#) para avaliar o ajuste das distribuições marginais, as PITs foram transformadas em variáveis normais, tais que  $x_{i,t}^* = \Phi^{-1}(u_{i,t})$  para  $i = 1 \dots T$ , e cada série  $x_{i,t}^*$  foi testada para normalidade com o teste de Shapiro-Wilk e Kolmogorov-Smirnov. No primeiro teste, todos os 71 ativos não rejeitaram a hipótese nula de normalidade a 5% de significância, e, no segundo, apenas dois rejeitaram. Foi feito o teste de Ljung-Box para testar se os resíduos e o quadrado dos resíduos de cada modelo são independentes, foram usados 20 *lags* nos dois casos. Há um nível de significância de 5% a hipótese nula de independência foi rejeitada em 3 séries dos resíduos e 2 séries do quadrado dos resíduos. Nessas séries ainda há autocorrelação, assim o modelo GARCH(1,1) não é suficiente para descrever a dependência da série dos retornos. Entretanto como esse resultado foram em poucas séries e o objetivo principal é o modelo multivariado para simplificação das análises será usado o GARCH(1,1) como modelo marginal para todos os ativos. Portanto, conclui-se que os modelos marginais foram bem ajustados e são adequados para a análise.

## 6.3 Modelagem da distribuição conjunta

Na modelagem para toda a amostra, foram estimados todos os cinco modelos apresentados no capítulo 3 com os dois tipos de cópula, t e Gaussiana, bem como os coeficientes dos parâmetros estimados, o erro padrão desses estimadores e os valores da *log* verossimilhança, que são apresentados no próximo capítulo. Os erros padrão são baseados no estimador sanduíche de matriz de covariância robusta  $\hat{H}_0^{-1} \hat{G}_0 \hat{H}_0^{-1}$  em que  $\hat{H}_0$  é o inverso da Hessiana da verossimilhança, e  $\hat{G}_0$  é o produto diádico dos gradientes ([Opschoor et al., 2020](#)). Na segunda parte, a estimação *out of sample*, fora da amostra, só foi considerado o modelo mais geral, que é o modelo multifatorial triangular-inferior com cópula t.

### 6.3.1 Otimização de portfólio

O tamanho da janela considerada para a seleção de portfólio foi de 1000 observações, sendo a estimação fora da amostra feita, então, para 488 observações diárias, sempre um passo a frente. A estratégia usada no trabalho foi a de mínima variância. Assim, os pesos  $w_{t+1|t}$  são obtidos como a solução do problema seguindo ([Opschoor et al., 2020](#))

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{w}_{t+1|t}} \quad & \mathbf{w}'_{t+1|t} \left( \mathbf{H}_{t+1|t} \mathbf{R}_{t+1|t}^* \mathbf{H}_{t+1|t} \right) \mathbf{w}_{t+1|t} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}' \mathbf{w}_{t+1|t} = 1 \end{aligned} \tag{6.1}$$

em que  $\mathbf{H}_{t+1|t}$  é a predição um passo a frente das variâncias baseadas nos modelos marginais e  $\mathbf{R}_{t+1|t}^*$  a predição um passo a frente da matriz de covariância, que é obtida simulando 20.000 observações do modelo de cópula. Essa abordagem foi comparada com a estratégia de mínima variância, considerando a matriz de covariância amostral dos ativos.

## Simulação

A simulação do modelo segue a ideia da especificação em 3.3 e de que as cargas fatoriais dinâmicas evoluem de acordo com o mecanismo apresentado em 3.4. Desse modo,  $x_{i,t}$  podem ser simulados conforme a seguinte ideia apresentada por Opschoor et al. (2020)

$$\begin{aligned} x_{i,t} &= \sqrt{\zeta_t} \left( \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{i,t}' \mathbf{z}_t + \sigma_{i,t} \epsilon_{i,t} \right) \quad i = 1, \dots, N \\ \mathbf{f}_{t+1} &= \boldsymbol{\omega} + A \mathbf{s}_t + B \mathbf{f}_t \\ \boldsymbol{\omega} &= (1 - B) \bar{\mathbf{f}} \end{aligned} \tag{6.2}$$

onde  $\mathbf{f}_t$  é o vetor que contém as cargas fatoriais únicas  $\boldsymbol{\lambda}_{i,j}$ ,  $\zeta_t \sim \text{Inv-Gamma} \left( \frac{1}{2} \nu_C, \frac{1}{2} \nu_C \right)$ ,  $\mathbf{z}_t \sim \text{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{G(G+1)/2})$ ,  $\epsilon_{i,t} \sim \text{N}(0, 1)$ .

## Métricas comparação

O desempenho das diferentes técnicas de alocação de carteiras será baseado nas seguintes medidas: retorno médio, desvio padrão, índice Sharpe e *turnover* das carteiras otimizadas (Santos e Tessari, 2012). O turnover foi calculado como

$$to = \frac{1}{T - \tau - 1} \sum_{t=\tau}^{T-1} |\mathbf{w}_{t+1} - \mathbf{w}_t| \tag{6.3}$$

onde  $\mathbf{w}$  é o vetor de pesos do portfólio,  $T$  é o número de observações totais e  $\tau$  é o tamanho da janela.

## 7 Resultados

Nesse capítulo serão exibidos os resultados e discussões acerca da aplicação empírica elucidada no capítulo 6.

### 7.1 Análise descritiva das séries

Os dados usados na aplicação constituem um portfólio de 71 ativos, em que cada um desses ativos é uma série de retornos diários. As características inerentes a esse tipo de dado já foram elucidadas ao longo desse trabalho.

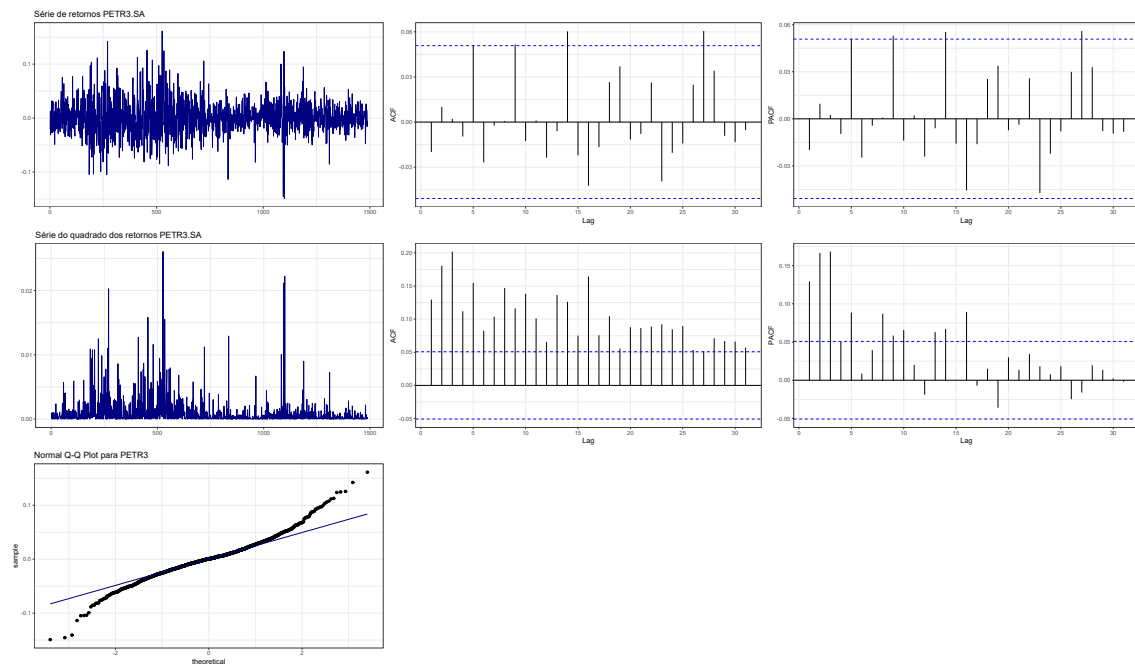


Figura 7.1: Gráficos das séries dos retornos

Gráficos da série dos retornos e dos retornos ao quadrado com suas respectivas funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, e gráfico normal qq-plot da distribuição não condicional do ativo PETR3 (Petrobrás)

A Fig. 7.1 expõe gráficos que evidenciam esses aspectos específicos, exemplificando com os retornos das ações da Petrobrás (PETR3). O primeiro e o quarto



gráficos são os gráficos das séries dos retornos e dos quadrados dos retornos, e apresentam um comportamento típico desse tipo de dado. O mesmo ocorre na função de autocorrelação e autocorrelação parcial, visto que o gráfico indica que os retornos são não correlacionados, mas que o quadrado dos retornos apresenta autocorrelação. Por fim, o gráfico qq-Plot de aderência a distribuição Normal, mostra que a distribuição incondicional dos retornos tem caudas mais pesadas do que a Normal, ou seja, é mais suscetível a valores extremos. O apêndice A contém os gráficos das séries dos retornos e dos retornos quadrados, bem como os gráficos das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial dessas séries para todos os ativos contidos na amostra.

## 7.2 Modelos univariados GARCH(1,1)

Na tabela 7.1 estão os resultados dos modelos marginais. São apresentadas as médias e quantis dos parâmetros estimados dos 71 ativos. O parâmetro  $\lambda$  é o parâmetro de assimetria, sendo que, para todas as séries, ele foi estimado maior que zero, indicando uma assimetria positiva (à direita). Já  $\nu$  é o parâmetro que representa os graus de liberdade, tendo sido a média dos coeficientes estimados para esse parâmetro de 6,980, o que indica um excesso de curtose. O coeficiente  $\hat{\beta}$  foi maior que zero em todos os modelos estimados, sendo essa uma condição para que a variância do processo seja maior do que zero e, assim, ele esteja bem definido. Ainda,  $\hat{\beta}$  é próximo de um indicando persistência na volatilidade do processo.

Tabela 7.1: Tabela resumo dos modelos marginais GARCH(1,1)

Nessa tabela são apresentados a média e os quantis dos parâmetros estimados dos modelos marginais GARCH(1,1) das 71 séries de retornos.

	Média	Mínimo	Quantil 0,25	Mediana	Quantil 0,75	Máximo
$\hat{\alpha}_0$	0,00003431	0,00000004	0,00000620	0,00001320	0,00002874	0,00044591
$\hat{\alpha}_1$	0,06958972	0,01570151	0,04791855	0,05770014	0,08208944	0,23799897
$\hat{\beta}$	0,88590447	0,46149822	0,87277025	0,91747948	0,93626821	0,98046854
$\hat{\lambda}$	1,04796818	0,93196477	1,02332829	1,04481098	1,07045211	1,17260484
$\hat{\nu}$	6,98013987	3,36693275	5,49063586	6,83439125	7,93416548	10,00000000

## 7.3 Modelos multivariados na amostra completa

Na tabela 7.2 encontram-se os resultados dos modelos multivariados. Os interceptos estimados específicos de grupo são encontrados no A. A tabela está dividida em resultados para as cópulas Gaussianas e cópulas t, respectivamente. Os modelos são:

- **1-F Eq**: modelo de um fator com cargas fatoriais idênticas;
- **1-F Gr**: modelo de um fator com cargas fatoriais específicas de grupo;
- **2-F**: modelo de dois fatores com um fator com cargas comuns de grupo e um fator com cargas específicas de grupo;

- **MF**: modelo multifatorial com um fator comum com cargas comuns de grupo e nove fatores específicos de grupo;
- **MF LT**: modelo multifatorial com matriz triangular-inferior de cargas dinâmicas.

Tabela 7.2: Tabela resumo dos modelos multivariados

Nessa tabela são apresentados os parâmetros estimados dos cinco modelos de cópulas fatoriais dinâmicas com a amostra completa, além disso, a log-verossimilhança e o critério de informação Akaike para os modelos. Período de 01-01-2014 a 31-12-2019 ( $T = 1488$ )

	$\omega^{eq}$	$A^{eq}$	$A^{gr}$	$B$	$\nu_C$	LogLik	AIC	N param
<b>Cópula Normal</b>								
1-F Eq	0,0817 (0,0256)	0,0039 (0,0006)		0,8801 (0,0375)		17.309,2	-34612	3
1-F Gr			0,0044 (0,0033)	0,9678 (0,0522)		17.992,5	-35963	11
2-F	-0,1096 (0,0135)	0,0046 (0,0006)	0,0023 (0,0018)	0,8440 (0,0193)		18.862,3	-37699	13
MF	0,0735 (0,0245)	0,0049 (0,0009)	0,0100 (0,0016)	0,8950 (0,0348)		20.264,1	-40502	13
MF LT		0,0060 (0,0023)		0,9537 (0,0359)		20.688,7	-41283	47
<b>Cópula t</b>								
1-F Eq	0,0226 (0,0156)	0,0042 (0,0014)		0,9672 (0,0229)	27,0238 (3,3359)	18.235,4	-36463	4
1-F Gr			0,0060 (0,0010)	0,8801 (0,0254)	26,1395 (2,8454)	18.877,3	-37731	12
2-F	0,0774 (0,0226)	0,0067 (0,0015)	0,0016 (0,0017)	0,8902 (0,0322)	29,3735 (3,5901)	19.697,3	-39367	14
MF	0,0315 (0,0338)	0,0057 (0,0027)	0,0084 (0,0030)	0,9548 (0,0481)	29,8221 (3,6653)	21.032,4	-42037	14
MF LT		0,0029 (0,0009)		0,9858 (0,0083)	28,7976 (3,3239)	21.510,8	-42926	48

Para o modelo 1-F Gr o parâmetro  $A$  é um escalar comum para os diferentes grupos, enquanto que os modelos 2-F e MF tem dois diferentes valores de  $A$ . No modelo de dois fatores um para cada fator e no multifatorial um valor pra o fator comum e um valor pros fatores específicos de grupo. Por fim, para os modelos MF LT e 1-F Eq assume-se um valor comum para o parâmetro  $A$ . O parâmetro  $B$  é o parâmetro autorregressivo na equação de transição e é comum para todas as cargas fatoriais. Esse parâmetro, por ter um valor alto, indica uma forte persistência nas cargas fatoriais dinâmicas, principalmente nas cópulas t. Esse resultado corresponde ao encontrado por [Opschoor et al. \(2020\)](#) e [Oh e Patton \(2018\)](#), que utilizam ativos da bolsa americana.

Quanto à performance dos modelos, observa-se que os modelos multifatoriais foram melhores que os modelos com um e dois fatores, tanto em termos da log-verossimilhança como no AIC, que leva em consideração a quantidade de parâmetros a serem estimados. Também verifica-se que as cópulas t têm um melhor desempenho que as cópulas Gaussianas, e isso era esperado, uma vez que cópulas t apresentam dependência nas caudas.

O modelo MF LT t foi o que obteve melhores resultados de acordo com os critérios de informação. Apesar disso, essa diferença não foi tão grande quanto a encontrada em Opschoor et al. (2020). Como os parâmetros da cópula são estimados em duas etapas, ainda que esse modelo tenha muito mais parâmetros a serem estimados, a carga computacional utilizada é muito menor do que a necessária para estimar o modelo MF ou 2F, por exemplo.

## 7.4 Otimização de Portfólio

O modelo MF LT t foi o escolhido para a aplicação em seleção de portfólio. Na tabela 7.3 são expostos os resultados para a abordagem usando a matriz de covariância amostral e a matriz estimada pelo modelo MF LT.

O turnover é uma métrica que mede a variação dos pesos dos ativos na carteira. Assim, quanto maior o turnover, maiores os custos de transação. Na aplicação, o turnover obtido utilizando o modelo MF LT foi muito maior do que o usando a mínima variância tradicional e o ganho no retorno excedente foi muito pequeno. Uma possível explicação é que a matriz de covariância amostral é muito menos ruidosa do que a estimada pelo modelo MF LT, e isso faz com que os pesos da carteira sejam muito mais estáveis.

Tabela 7.3: Tabela seleção de portfólio com mínima variância

Nessa tabela se encontram os resultados da estratégia de mínima variância para otimização de portfólio. Para cada abordagem são exibidas a média do excesso de retorno do portfólio, seu desvio padrão, o índice Sharpe e o turnover da carteira. O período fora da amostra foi de 488 dias.

	Média	Desvio Padrão	Índice Sharpe	Turnover
MF LT	0,000398	0,009243	0,043060	0,519219
Amostral	0,000290	0,008646	0,034100	0,040305

No trabalho de Opschoor et al. (2020) os autores comparam a estratégia de mínima variância usando a matriz de covariância estimada pelos modelos propostos por eles, com a estimada pelos modelos cDCC de Engle (2002), DECO e *block* DECO de Engle e Kelly (2012). No trabalho de Opschoor et al. (2020) o modelo cDCC teve turnover maior que os modelos de cópulas dinâmicas fatoriais e os modelos DECO e *block* DECO obtiveram um turnover muito próximo dos modelos propostos. Além disso, o turnover encontrado pelos autores é próximo ao encontrado nesse trabalho. Os autores utilizaram uma carteira de 100 ativos da S&P 500, com uma janela de 1000 observações e um período fora da amostra de 2571 observações. Entretanto, os autores não usaram a matriz de covariância amostral para a estratégia. Desse modo, não é possível traçar comparativos nesse caso.

## 8 Considerações finais

Esse trabalho apresentou uma aplicação empírica para dados brasileiros dos modelos de cópulas fatoriais dinâmicas introduzido por [Opschoor et al. \(2020\)](#). Esses modelos inovam ao apresentar forma fechada para a verossimilhança, ao incorporar uma equação de transição das cargas fatoriais dinâmicas, como a dos modelos GAS, e fazer algumas suposições sobre distribuições. O objetivo principal era modelar a distribuição conjunta condicional de uma carteira com alta dimensão transversal, com a finalidade de estimar a matriz de covariância desses ativos e aplicar numa estratégia de mínima variância para seleção de portfólio. Ainda que seja um modelo mais parcimonioso e que exige uma carga computacional menor do que outros modelos, tanto de cópulas fatoriais quanto modelos GARCH multivariados, o desempenho na aplicação de mínima variância não foi melhor do que usar a matriz de covariância amostral.

Uma contribuição desse trabalho foi a implementação do modelo na linguagem R, baseada nos códigos em MATLAB disponibilizados por [Opschoor et al. \(2020\)](#). Para trabalhos futuros, seria interessante otimizar os códigos no R para melhorar a performance computacional, além de comparar o desempenho desses modelos com outros modelos multivariados em outras aplicações, e também implementar a parte de previsão do modelo no R.

## Referências Bibliográficas

- Alberg, D., Shalit, H., e Yosef, R. (2008). Estimating stock market volatility using asymmetric garch models. *Applied Financial Economics*, 18(15):1201–1208.
- Bernardi, M. e Catania, L. (2018). Portfolio optimisation under flexible dynamic dependence modelling. *Journal of Empirical Finance*, 48:1–18.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3):307–327.
- Brown, S. J. e Warner, J. B. (1985). Using daily stock returns: The case of event studies. *Journal of financial economics*, 14(1):3–31.
- Chen, X. e Fan, Y. (2006). Estimation of copula-based semiparametric time series models. *Journal of Econometrics*, 130(2):307–335.
- Cherubini, U., Luciano, E., e Vecchiato, W. (2004). *Copula methods in finance*. John Wiley & Sons.
- Cherubini, U., Mulinacci, S., Gobbi, F., e Romagnoli, S. (2011). *Dynamic copula methods in finance*. John Wiley & Sons.
- Chib, S., Nardari, F., e Shephard, N. (2006). Analysis of high dimensional multivariate stochastic volatility models. *Journal of Econometrics*, 134(2):341–371.
- Cox, D. R., Gudmundsson, G., Lindgren, G., Bondesson, L., Harsaae, E., Laake, P., Juselius, K., e Lauritzen, S. L. (1981). Statistical analysis of time series: Some recent developments [with discussion and reply]. *Scandinavian Journal of Statistics*, pages 93–115.
- Creal, D., Koopman, S. J., e Lucas, A. (2008). A General Framework for Observation Driven Time-Varying Parameter Models. *SSRN Electronic Journal*.
- Creal, D., Koopman, S. J., e Lucas, A. (2011). A Dynamic Multivariate Heavy-Tailed Model for Time-Varying Volatilities and Correlations. *Journal of Business & Economic Statistics*, 29(4):552–563.
- Creal, D. D. e Tsay, R. S. (2015). High dimensional dynamic stochastic copula models. *Journal of Econometrics*, 189(2):335–345.
- Demarta, S. e McNeil, A. J. (2005). The t copula and related copulas. *International statistical review*, 73(1):111–129.

- Dias, A., Embrechts, P., et al. (2004). Dynamic copula models for multivariate high-frequency data in finance. *Manuscript, ETH Zurich*, 81.
- Embrechts, P., Lindskog, F., e McNeil, A. (2001). Modelling dependence with copulas. *Rapport technique, Département de mathématiques, Institut Fédéral de Technologie de Zurich, Zurich*, 14.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3):339–350.
- Engle, R. e Kelly, B. (2012). Dynamic equicorrelation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 30(2):212–228.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 987–1007.
- Hansen, B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, pages 705–730.
- Joe, H. (1997). *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC Press.
- Joe, H. e Xu, J. J. (1996). The estimation method of inference functions for margins for multivariate models.
- Ledoit, O. e Wolf, M. (2004). Honey, i shrunk the sample covariance matrix. *The Journal of Portfolio Management*, 30(4):110–119.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, page 16.
- McNeil, A. J., Frey, R., e Embrechts, P. (2015). *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools-revised edition*. Princeton university press.
- Nelsen, R. B. (2007). *An introduction to copulas*. Springer Science & Business Media.
- Oh, D. H. e Patton, A. J. (2017). Modeling dependence in high dimensions with factor copulas. *Journal of Business & Economic Statistics*, 35(1):139–154.
- Oh, D. H. e Patton, A. J. (2018). Time-varying systemic risk: Evidence from a dynamic copula model of cds spreads. *Journal of Business & Economic Statistics*, 36(2):181–195.
- Opschoor, A., Lucas, A., Barra, I., e Van Dijk, D. (2020). Closed-form multi-factor copula models with observation-driven dynamic factor loadings. *Journal of Business & Economic Statistics*, (just-accepted):1–38.
- Patton, A. J. (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International economic review*, 47(2):527–556.
- Patton, A. J. (2009). Copula-based models for financial time series. In *Handbook of financial time series*, pages 767–785. Springer.

- Patton, A. J. (2012). A review of copula models for economic time series. *Journal of Multivariate Analysis*, 110:4–18.
- Perlin, M. (2020). *BatchGetSymbols: Downloads and Organizes Financial Data for Multiple Tickers*. R package version 2.6.1.
- Santos, A. A. P. e Tessari, C. (2012). Técnicas Quantitativas de Otimização de Carteiras Aplicadas ao Mercado de Ações Brasileiro. *Brazilian Review of Finance*, 10(3):369.
- Sklar, M. (1959). Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris*, 8:229–231.

# APÊNDICE A

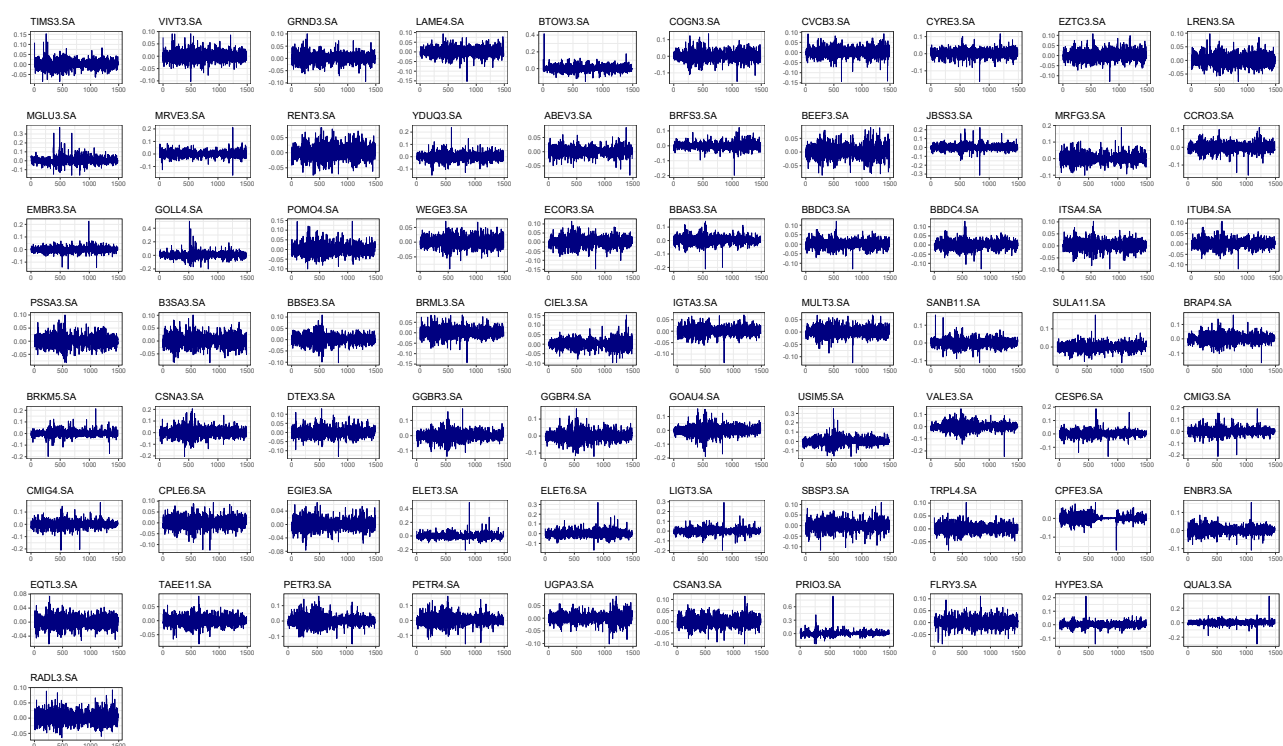


Figura A.1: Gráficos das 71 séries dos retornos. Período de 01-01-2014 a 31-12-2019 ( $T = 1488$ ).



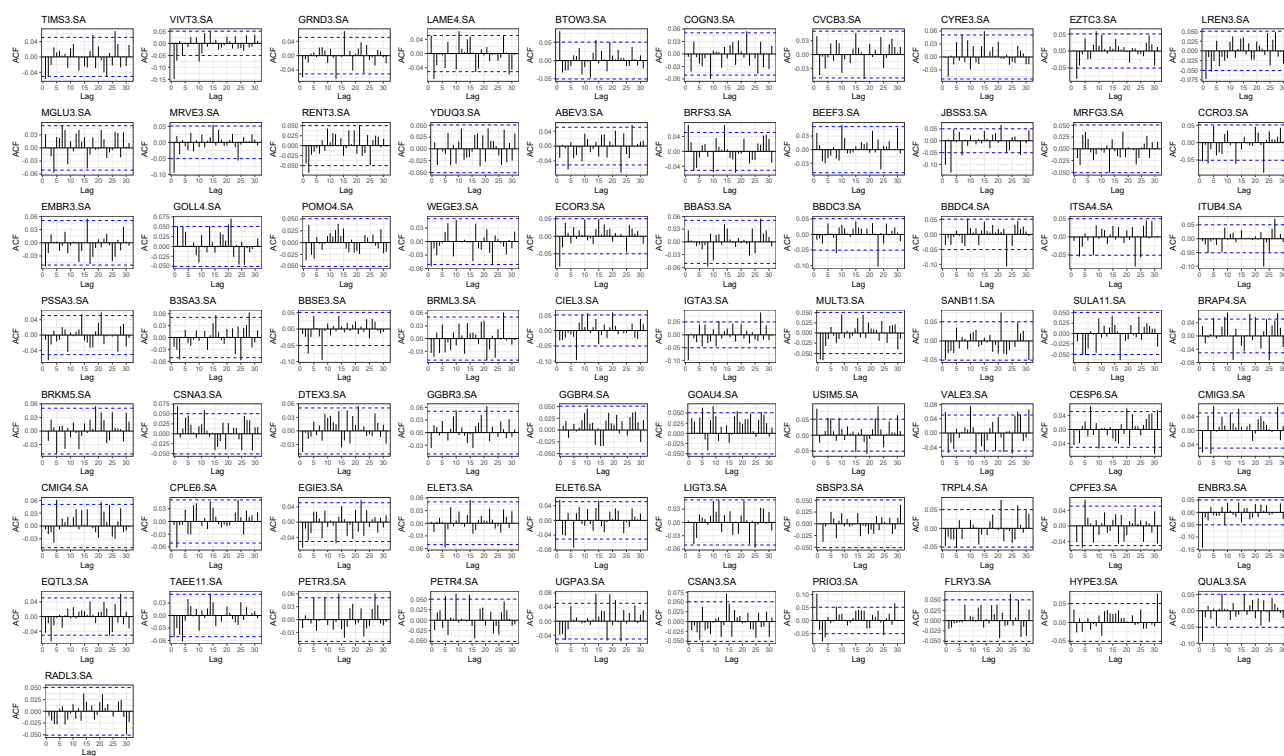


Figura A.2: Gráficos de autocorrelação das 71 séries dos retornos

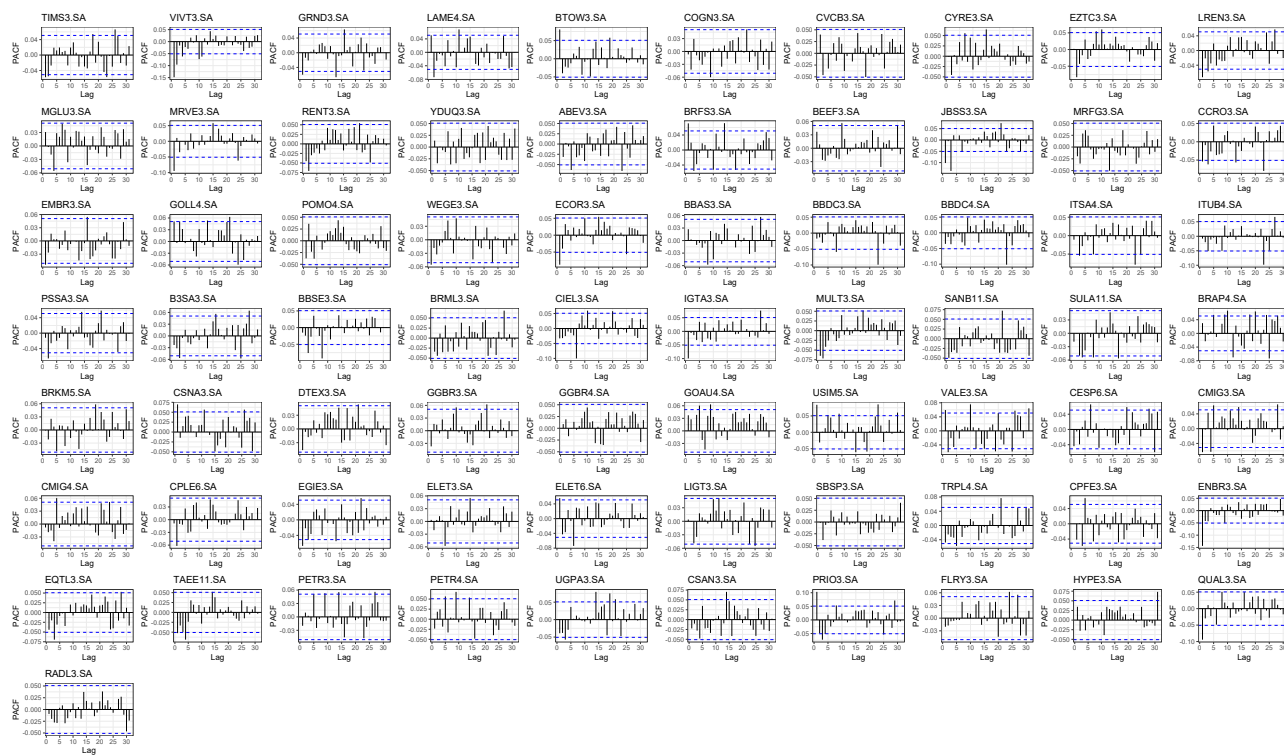


Figura A.3: Gráficos de autocorrelação parcial das 71 séries dos retornos

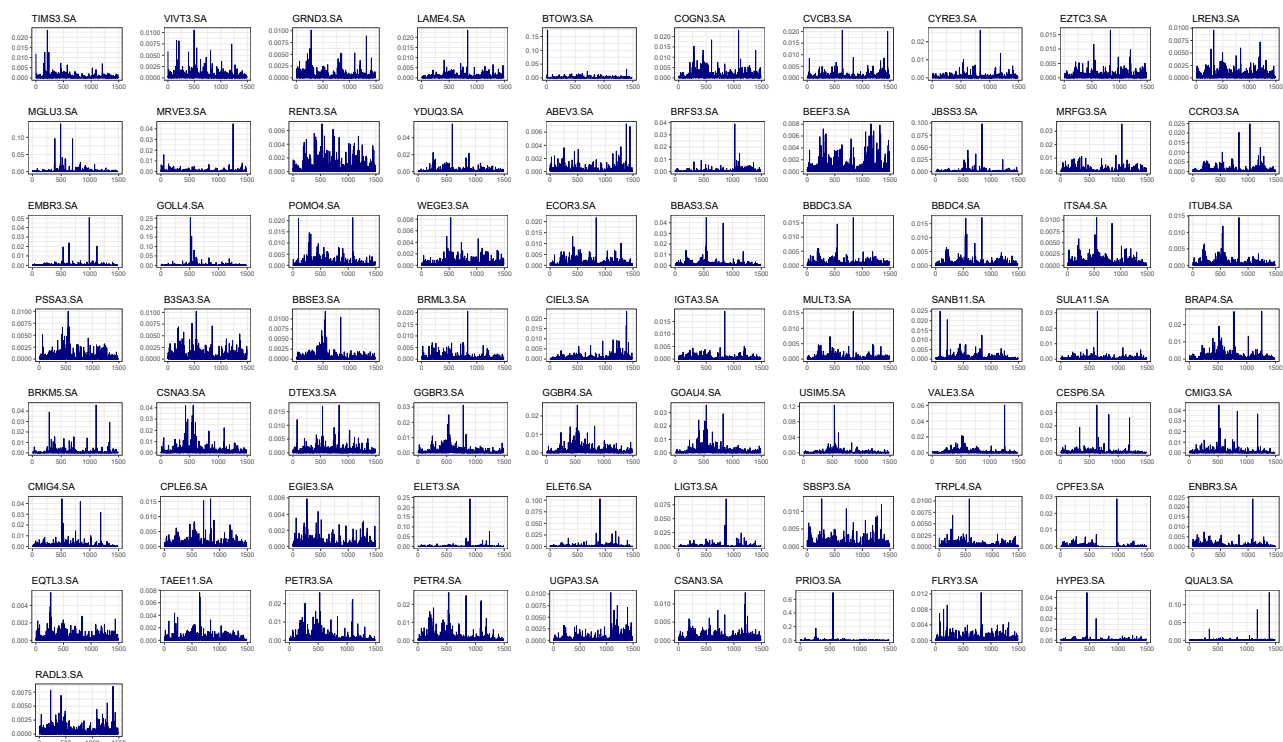


Figura A.4: Gráficos das 71 séries dos quadrados dos retornos. Período de 01-01-2014 a 31-12-2019 ( $T = 1488$ ).

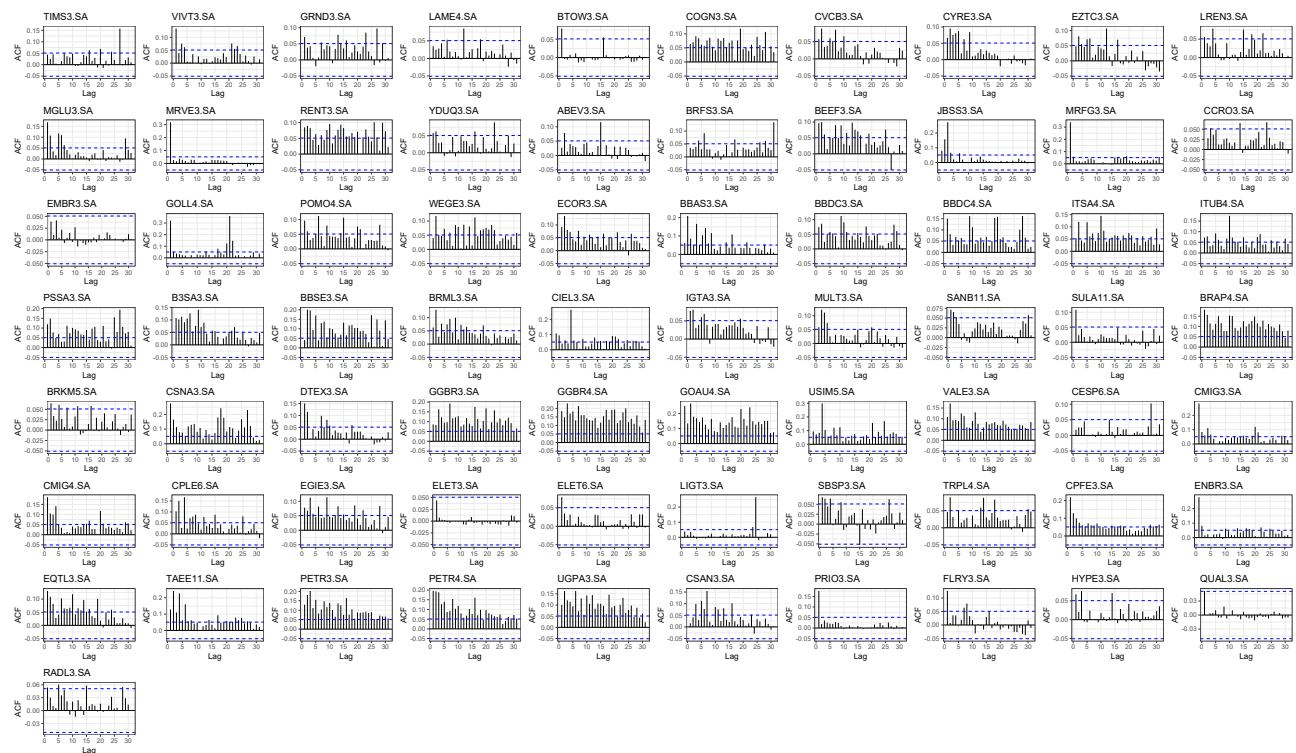


Figura A.5: Gráficos de autocorrelação das 71 séries dos quadrados dos retornos.

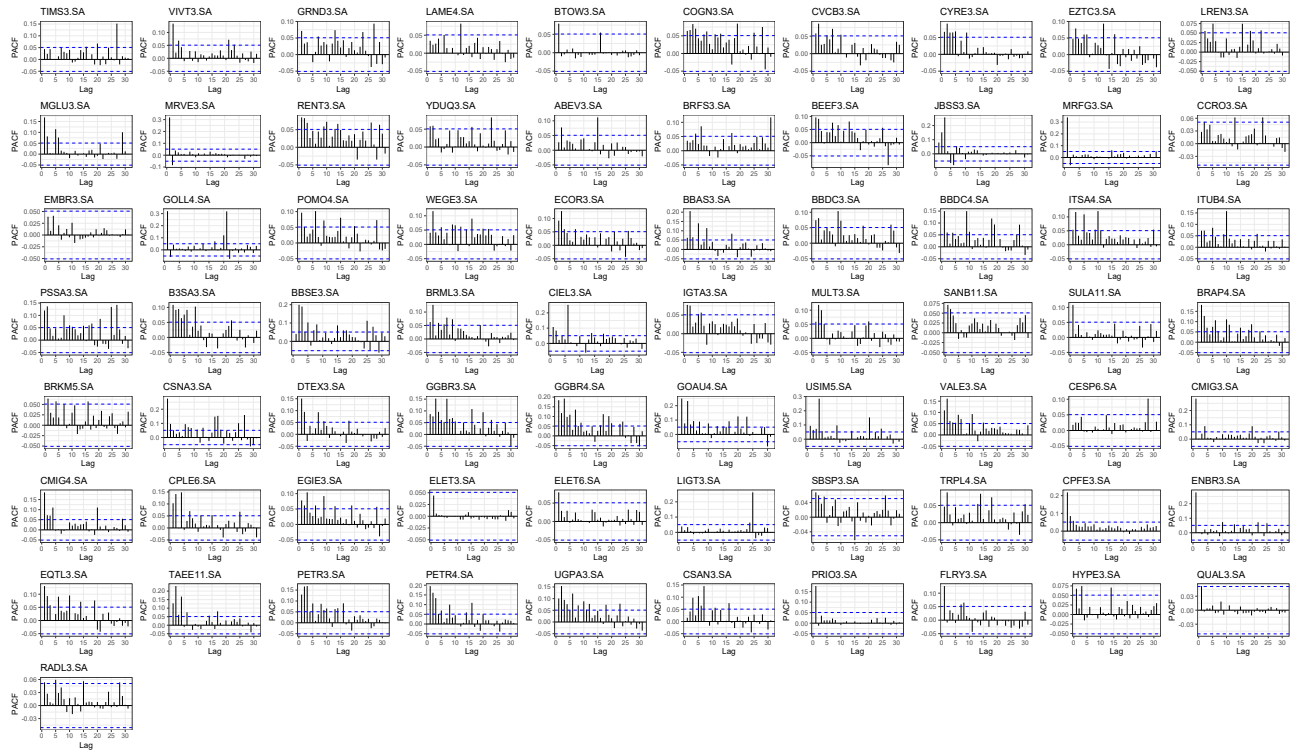


Figura A.6: Gráficos de autocorrelação parcial das 71 séries dos quadrados dos retornos.

	1-F Gr N	1-F Gr t	2-F N	2-F t	MF N	MF N
$\omega_{Com}$	0,0165 (0,0268)	-0,0617 (0,0134)	0,0001 (0,0076)	-0,0011 (0,0080)	0,0547 (0,0183)	0,0233 (0,0252)
$\omega_{CC}$	0,0223 (0,0362)	-0,0832 (0,0177)	-0,0164 (0,0090)	0,0098 (0,0090)	0,0254 (0,0086)	0,0107 (0,0114)
$\omega_{CNC}$	0,0152 (0,0253)	-0,0592 (0,0129)	0,0015 (0,0052)	-0,0020 (0,0056)	0,0430 (0,0144)	0,0186 (0,0200)
$\omega_{BI}$	0,0193 (0,0312)	-0,0723 (0,0155)	-0,0036 (0,0078)	0,0010 (0,0080)	0,0127 (0,0058)	0,0061 (0,0071)
$\omega_{Fin}$	0,0292 (0,0476)	-0,1105 (0,0235)	-0,0182 (0,0128)	0,0115 (0,0126)	0,0535 (0,0181)	0,0238 (0,0255)
$\omega_{MB}$	0,0196 (0,0318)	-0,0768 (0,0166)	0,1000 (0,0142)	-0,0730 (0,0247)	0,0747 (0,0250)	0,0325 (0,0345)
$\omega_{UP}$	0,0229 (0,0372)	-0,0863 (0,0183)	-0,0205 (0,0106)	0,0127 (0,0097)	0,0446 (0,0149)	0,0194 (0,0208)
$\omega_{PGB}$	0,0225 (0,0367)	-0,0848 (0,0181)	0,0157 (0,0084)	-0,0122 (0,0105)	0,0441 (0,0150)	0,0187 (0,0201)
$\omega_{Sau}$	0,0169 (0,0275)	-0,0630 (0,0136)	-0,0206 (0,0075)	0,0131 (0,0076)	0,0235 (0,0083)	0,0099 (0,0110)

Tabela A.1: Nessa tabela são apresentados os valores para os interceptos estimados nos modelos