

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Soluções analíticas de equações integrais de  
Cauchy e de Hadamard em dois intervalos  
disjuntos**

por

Marcos Rondiney dos Santos Ferreira

Tese submetida como requisito parcial  
para a obtenção do título de  
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Leandro Farina  
Orientador

Porto Alegre, outubro de 2021

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Ferreira, Marcos Rondiney dos Santos

Soluções analíticas de equações integrais de Cauchy e de Hadamard em dois intervalos disjuntos / Marcos Rondiney dos Santos Ferreira.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2021.

100 p.: il.

Tese (doutorado)— Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2021.

Orientador: Farina, Leandro

Tese: Matemática Aplicada: Mecânica de Fluidos; Ondas Oceânicas; Computação Científica, Equações integrais de Cauchy, Equações integrais de Hadamard, Integrais elípticas, Método espectral

# Soluções analíticas de equações integrais de Cauchy e de Hadamard em dois intervalos disjuntos

por

Marcos Rondiney dos Santos Ferreira  
Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial  
para a obtenção do título de

## **Doutor em Matemática Aplicada**

Científica  
Linha de Pesquisa: Mecânica de Fluidos; Ondas Oceânicas; Computação

Orientador: Prof. Dr. Leandro Farina

Banca examinadora:

Profa. Dra. Juliana Sartori Ziebell  
PPGMAp / UFRGS

Prof. Dr. Karl Peter Burr  
CECS / UFABC

Prof. Dr. Francisco Duarte Moura Neto  
IPRJ / UERJ

Tese defendida e aprovada em  
13 de agosto de 2021.

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira  
Coordenador

*“Tudo que é preciso para o triunfo do mal  
é que os homens de bem não façam nada.”*

*(Edmund Burke)*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda minha família pelo apoio, incentivo e orações. Em especial aos meus pais, *Geraldo Lamarão Ferreira* e *Áurea Sueli dos Santos Ferreira*, por serem meu suporte, e que mesmo nas adversidades sempre incentivaram os meus estudos e dos meus irmãos.

Agradeço aos meus amigos do Amapá, que mesmo de longe torcem por minhas conquistas.

Agradeço aos amigos que conheci na pós-graduação, pelas contribuições, conversas descontraídas e parcerias ao longo dessa jornada.

Agradeço ao meu Orientador, professor *Leandro Farina*, pelo incentivo e pela grande ajuda na elaboração desta tese.

Agradeço a Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), ao Instituto de Matemática e Estatística (IME) e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicado (PPGMAp) por me oferecerem toda a infraestrutura e recursos para minha formação e pesquisa.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro para a elaboração deste trabalho.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS . . . . .	viii
LISTA DE TABELAS . . . . .	xi
RESUMO . . . . .	xii
ABSTRACT . . . . .	xiii
<b>1 INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>2 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CAUCHY PARA DOIS INTERVA-</b>	
<b>LOS DISJUNTOS . . . . .</b>	<b>4</b>
2.1 Definições preliminares . . . . .	4
2.1.1 Integral do tipo Cauchy . . . . .	4
2.1.2 Valor limite da integral de Cauchy para intervalos sobre o eixo real . . . . .	6
2.1.3 A fórmula de Sokhotski . . . . .	7
2.2 A equação integral de Cauchy sobre o intervalo $G_\kappa$ . . . . .	9
2.2.1 Solução analítica em termos da Parte Principal . . . . .	12
2.2.2 Solução analítica para o caso $\tilde{\psi}(x) = -T_n(x)$ . . . . .	14
2.2.3 Fórmula de Recorrência . . . . .	16
2.3 Solução analítica da equação integral de Cauchy sobre $(-1, 1)$ . . . . .	18
2.4 Experimento Computacional . . . . .	19
2.4.1 Comportamento geral . . . . .	19

2.4.2	Comportamento nas extremidades . . . . .	23
<b>3</b>	<b>EQUAÇÃO INTEGRAL DE HADAMARD PARA DOIS INTER- VALOS DISJUNTOS . . . . .</b>	<b>37</b>
3.1	A equação integral de Hadamard sobre $G_\kappa$ . . . . .	37
3.2	Integrais elípticas: definições e relações fundamentais . . . . .	39
3.2.1	Funções elípticas Jacobianas . . . . .	40
3.2.2	Formas canônicas das integrais elípticas . . . . .	41
3.2.3	Integrando envolvendo $\sqrt{a^2 - t^2}$ e $\sqrt{t^2 - b^2}$ . . . . .	43
3.2.4	Fórmulas de recorrência para integrais de funções elípticas . . . . .	44
3.3	Solução analítica da equação integral de Hadamard sobre $G_\kappa$ em ter- mos de integrais elípticas e funções elementares . . . . .	45
3.3.1	Solução analítica para o caso $\psi(x) = T_n(x)$ . . . . .	47
3.3.2	Solução analítica para o caso $\psi(x) = U_n(x)$ . . . . .	48
3.4	Método de avaliação numérica direta da solução da equação integral de Hadamard sobre $G_\kappa$ . . . . .	50
3.5	Solução analítica da equação integral hipersingular sobre $(-1, 1)$ . . . . .	52
3.6	Resultados numéricos para $\psi(x) = T_n(x)$ e $\psi(x) = U_n(x)$ . . . . .	54
<b>4</b>	<b>DISCUSSÕES, APLICAÇÕES E PERSPECTIVAS . . . . .</b>	<b>67</b>
4.1	Problemas de Riemann-Hilbert . . . . .	67
4.2	Métodos espectrais para as equações integrais de Cauchy e de Hada- mard generalizadas sobre $G_\kappa$ . . . . .	69

4.3	Aplicação ao espalhamento de ondas de água por uma placa submersa com uma abertura . . . . .	71
4.3.1	Formulação diferencial . . . . .	71
4.3.2	Formulação integral . . . . .	73
4.4	Prespectivas . . . . .	74
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>76</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>80</b>

## APÊNDICES

## APÊNDICES

<b>A</b>	. . . . .	<b>81</b>
<b>B</b>	. . . . .	<b>86</b>
<b>C</b>	. . . . .	<b>90</b>
C.1	Solução da equação integral hipersingular no intervalo $(\kappa, 1)$ . . . . .	92
C.2	Solução da equação integral hipersingular no intervalo $(-1, -\kappa)$ . . . . .	93
C.3	Solução analítica para o caso $\psi(t) = T_n(t)$ . . . . .	97

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_0(x)$ , $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ e $\kappa = 0, 4$ , $\kappa = 0, 3$ , $\kappa = 0, 2$ , $\kappa = 0, 1$ e $\kappa = 0, 05$ . . . . .	20
2.2	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_1(x)$ , $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ e $\kappa = 0, 4$ , $\kappa = 0, 3$ , $\kappa = 0, 2$ , $\kappa = 0, 1$ e $\kappa = 0, 05$ . . . . .	21
2.3	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_2(x)$ , $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ e $\kappa = 0, 4$ , $\kappa = 0, 3$ , $\kappa = 0, 2$ , $\kappa = 0, 1$ e $\kappa = 0, 05$ . . . . .	21
2.4	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_3(x)$ , $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ e $\kappa = 0, 4$ , $\kappa = 0, 3$ , $\kappa = 0, 2$ , $\kappa = 0, 1$ e $\kappa = 0, 05$ . . . . .	22
2.5	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_5(x)$ , $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ e $\kappa = 0, 4$ , $\kappa = 0, 3$ , $\kappa = 0, 2$ , $\kappa = 0, 1$ e $\kappa = 0, 05$ . . . . .	22
2.6	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_0(x)$ e $\kappa = 0, 01$ . . . . .	25
2.7	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_1(x)$ e $\kappa = 0, 01$ . . . . .	26
2.8	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_2(x)$ e $\kappa = 0, 01$ . . . . .	27
2.9	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_3(x)$ e $\kappa = 0, 01$ . . . . .	28
2.10	Ampliação das soluções próximo à origem para $\tilde{\psi}(x) = T_3(x)$ e $\kappa = 0, 01$	29
2.11	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_4(x)$ e $\kappa = 0, 01$ . . . . .	30
2.12	Ampliação das soluções próximo a origem para $\tilde{\psi}(x) = T_4(x)$ e $\kappa = 0, 01$	30
2.13	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_{40}(x)$ e $\kappa = 0, 01$ . . . . .	31
2.14	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_0(x)$ , $\tilde{C}_{1,\kappa} = \frac{\pi}{2}$ , $\tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ e $\kappa = 0, 01$ . . . . .	34
2.15	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_1(x)$ , $\tilde{C}_{1,\kappa} = 0$ , $\tilde{C}_{2,\kappa} = -\frac{\pi}{2}$ e $\kappa = 0, 01$ . . . . .	35

2.16	Soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_2(x)$ , $\tilde{C}_{1,\kappa} = -\frac{\pi}{4}$ , $\tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ e $\kappa = 0,01$ . . . . .	36
3.1	Soluções da EIH para $\kappa = 0, 1$ e $\psi(x) = T_0(x)$ . . . . .	55
3.2	Soluções da EIH para $\kappa = 0, 1$ e $\psi(x) = T_1(x)$ . . . . .	55
3.3	Soluções da EIH para $\kappa = 0, 1$ e $\psi(x) = T_2(x)$ . . . . .	56
3.4	Soluções da EIH para $\kappa = 0, 1$ e $\psi(x) = T_3(x)$ . . . . .	56
3.5	Soluções da EIH para $\kappa = 0, 1$ e $\psi(x) = T_4(x)$ . . . . .	57
3.6	Soluções da EIH para $\kappa = 0, 1$ e $\psi(x) = U_0(x)$ . . . . .	57
3.7	Soluções da EIH para $\kappa = 0, 1$ e $\psi(x) = U_1(x)$ . . . . .	58
3.8	Soluções da EIH para $\kappa = 0, 1$ e $\psi(x) = U_2(x)$ . . . . .	58
3.9	Soluções da EIH para $\kappa = 0, 1$ e $\psi(x) = U_3(x)$ . . . . .	59
3.10	Soluções da EIH para $\kappa = 0, 1$ e $\psi(x) = U_4(x)$ . . . . .	59
3.11	Soluções da EIH para $\kappa = 0, 1$ e $\psi(x) = U_5(x)$ . . . . .	60
3.12	Soluções da EIH com diferentes valores de $\kappa$ e $\psi(x) = T_0(x)$ . . . . .	60
3.13	Soluções da EIH para diferentes valores de $\kappa$ e $\psi(x) = T_1(x)$ . . . . .	61
3.14	Ampliação da Figura 3.13 próximo à origem. . . . .	61
3.15	Soluções da EIH com diferentes valores de $\kappa$ e $\psi(x) = T_2(x)$ . . . . .	62
3.16	Soluções da EIH com diferentes valores de $\kappa$ e $\psi(x) = T_3(x)$ . . . . .	62
3.17	Ampliação da Figura 3.16 próximo a origem.. . . .	63
3.18	Soluções da EIH para diferentes valores de $\kappa$ e $\psi(x) = T_4(x)$ . . . . .	63

3.19	Soluções da EIH para diferentes valores de $\kappa$ e $\psi(x) = U_0(x)$ . . . . .	64
3.20	Soluções da EIH para diferentes valores de $\kappa$ e $\psi(x) = U_1(x)$ . . . . .	64
3.21	Soluções da EIH para diferentes valores de $\kappa$ e $\psi(x) = U_2(x)$ . . . . .	65
3.22	Soluções da EIH para diferentes valores de $\kappa$ e $\psi(x) = U_3(x)$ . . . . .	65
3.23	Soluções da EIH para diferentes valores de $\kappa$ e $\psi(x) = U_5(x)$ . . . . .	66
4.1	Perfil de uma placa com um furo. . . . .	72

## LISTA DE TABELAS

2.1	Erro na norma $L_2$ da solução $\tilde{f}_{n,\kappa}$ , calculada pelas séries (2.17) e (2.18) e pelas fórmulas de recorrência (2.23) e (2.24). . . . .	23
2.2	Comparação das soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_0(x)$ e $\kappa = 0,01$ . . . . .	25
2.3	Comparação das soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_1(x)$ e $\kappa = 0,01$ . . . . .	26
2.4	Comparação das soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_2(x)$ e $\kappa = 0,01$ . . . . .	27
2.5	Comparação das soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_3(x)$ e $\kappa = 0,01$ . . . . .	28
2.6	Comparação das soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_4(x)$ e $\kappa = 0,01$ . . . . .	29
2.7	Comparação das soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_{40}(x)$ e $\kappa = 0,01$ . . . . .	31
2.8	Comparação das soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_0(x)$ , $\tilde{C}_{1,\kappa} = \frac{\pi}{2}$ , $\tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ e $\kappa = 0,01$ . . . . .	34
2.9	Comparação das soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_1(x)$ , $\tilde{C}_{1,\kappa} = 0$ , $\tilde{C}_{2,\kappa} = -\frac{\pi}{2}$ e $\kappa = 0,01$ . . . . .	35
2.10	Comparação das soluções para $\tilde{\psi}(x) = T_2(x)$ , $\tilde{C}_{1,\kappa} = -\frac{\pi}{4}$ , $\tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ e $\kappa = 0,01$ . . . . .	36

## RESUMO

Neste trabalho, apresentamos soluções analíticas alternativas para a equação integral de Cauchy (*equação do aerofólio*) e a equação integral de Hadamard (*equação hipersingular*) sobre dois intervalos disjuntos. Alguns conceitos e resultados importantes em teoria de análise complexa são empregados para embasar a construção destas soluções. No caso particular da função de entrada (lado direito da equação integral) ser um polinômio de Chebyshev, são apresentadas soluções para a equação do aerofólio na forma de uma série finita e uma relação de recorrência, enquanto que a solução da equação hipersingular é expressa em termos de integrais elípticas. Experimentos numéricos foram feitos para mostrar a eficiência e acurácias destas soluções. Além do mais, métodos espectrais são propostos para ambas as equações integrais generalizadas, com destaque à aplicação da equação integral hipersingular em um problema de espalhamento de ondas de água.

## ABSTRACT

In this work, we present alternative analytical solutions for the Cauchy integral equation (airfoil equation) and the Hadamard integral equation (hypersingular equation) over two disjoint intervals. Some important concepts and results in complex analysis theory are used to support the construction of these solutions. In the particular case when the input function (right side of the integral equation) is a Chebyshev polynomial, solutions for the airfoil equation are presented in the form of a finite series and a recurrence relation, while the solution of the hypersingular equation is expressed in terms of elliptic integrals. Numerical experiments are done to show the efficiency and accuracy of these solutions. Furthermore, spectral methods are proposed for both generalized integral equations, with emphasis on the application of the hypersingular integral equation in a water wave scattering problem.

# 1 INTRODUÇÃO

Equações integrais surgem naturalmente em vários ramos da matemática e física matemática. Muitos problemas de valor inicial e de contorno associados a equações diferenciais, quer parciais, quer ordinárias lineares, podem ser convertidos em equações integrais, e.g., o problema de espalhamento de ondas de água através de uma barra vertical fina (teoria linear de ondas de água), o problema de fraturas (teoria de elasticidade) e o escoamento de um fluido por um aerofólio [3] resultam em equações integrais com singularidade do tipo Cauchy [14]. Vários outros problemas de valor de fronteira bidimensionais envolvendo corpos finos podem ser formulados através de uma equação integral de Hadamard, também chamada de hipersingular [14], e.g., o escoamento tridimensional através de uma placa fina em um fluido [19]. Martin [15] apresenta alguns exemplos em teoria potencial, acústica, hidrodinâmica e elastostática. No entanto, as equações integrais singulares mencionadas estão definidas para um domínio contínuo (“sem salto”). Tricomi [23] foi o primeiro a apresentar uma solução analítica para equação integral de Cauchy (equação do aerofólio) para dois intervalos disjuntos. Mais recentemente, Dutta e Banerjea [6] apresentaram uma solução analítica para equação integral hipersingular em dois intervalos disjuntos. Essa solução foi posteriormente utilizada por Piroli e Calabrese [20] em seu trabalho sobre gás de Bose. Contudo, ainda são poucos os trabalhos envolvendo soluções analíticas de equações integrais singulares e hipersingulares em domínios disjuntos.

Deste modo, um estudo envolvendo soluções analíticas para as equações integrais com singularidades do tipo Cauchy (*equação do aerofólio*) e de Hadamard (*equação hipersingular*) é proposto neste trabalho. Com o intuito de resolver futuramente equações integrais generalizadas através de um método espectral, apresentaremos soluções analíticas alternativas em termos da *parte principal da densidade da integral de Cauchy* e de *integrais elípticas*, particularmente para os casos em que

a função de entrada (lado direito da equação integral) são polinômios de Chebyshev do primeiro tipo ( $T_n$ ) e do segundo tipo ( $U_n$ ). Deduzimos uma generalização de uma identidade integral clássica que relaciona  $T_n$  com  $U_{n-1}$  através de uma integral de Cauchy sobre o intervalo  $(-1, 1)$ . Em nossa versão para uma integral de Cauchy sobre dois intervalos disjuntos, a função no integrando é um polinômio que pode ser calculado através de relações de recorrência de três termos. Esta identidade integral, conjuntamente com a hipótese sobre as funções de entrada, nos permite estabelecer um método espectral para solução numérica de equações integrais singulares generalizadas (em que o núcleo possui uma componente regular) em intervalos disjuntos.

Comparações são feitas entre a solução analítica para dois intervalos disjuntos representadas por uma série finita, uma relação de recorrência e a solução analítica da equação integral correspondente sobre um intervalo único. No caso hipersingular apresentaremos uma aplicação da equação integral hipersingular no espalhamento de ondas de água sobre uma placa com uma abertura. A seguir, delinearemos o processo de obtenção das soluções, assim como o método espectral proposto e as possíveis aplicações e as perspectivas deste trabalho.

No capítulo 2, primeiramente são fornecidas algumas definições da teoria de análise complexa, fundamentais no estudo da solução da equação do aerofólio em dois intervalos disjuntos. Em seguida, a partir da solução apresentada por [23] é analisado o caso no qual as constantes arbitrárias presentes na solução são nulas, possibilitando escrevê-la em termos da *parte principal* da densidade da integral de Cauchy. Particularmente, é analisado o caso no qual o polinômio de Chebyshev  $T_n$  é uma função de entrada, que resultará em soluções analíticas (série finita e relação de recorrência) para a equação do aerofólio. Alguns experimentos numéricos são feitos para validar e verificar a acurácia e eficiência das soluções obtidas para os intervalos disjuntos  $(-1, -\kappa) \cup (1, \kappa)$ , as comparando com a solução no domínio contínuo  $(-1, 1)$ . Além disso, é investigado o comportamento dessas soluções para constantes

arbitrárias não nulas, deduzidas a partir da solução particular quando reduzimos o “salto” entre os intervalos disjuntos.

No capítulo 3, buscamos uma solução analítica alternativa para a equação integral hipersingular em dois intervalos disjuntos. Utilizando como base a solução obtida por [6], inspirada no artigo de [23], é possível aproveitar os resultados do capítulo 2 e expressar a solução  $f_\kappa$  e a constante  $C_{1,\kappa}$  em termos da *parte principal* e *integrais elípticas* (definições e resultados preliminares são apresentados para esse tipo de integral). Além disso, são apresentadas soluções analíticas em séries finitas de *integrais elípticas* para os casos particulares da solução quando temos os polinômios  $T_n$  e  $U_n$  como funções de entrada. Resultados interessantes são obtidos comparando essas soluções com a solução para o intervalo simples  $(-1, 1)$ .

No capítulo 4, são discutidas as relações das equações do aerofólio e integral hipersingular com *problemas de Riemann-Hilbert*. A variedade das aplicações desse tipo de problema, nos permite aventar outras possibilidades, por exemplo, aplicações sobre múltiplos domínios e diferentes geometrias. Além disso, dois métodos espectrais são sugeridos, utilizando as relações (2.20) e (4.7) obtidas nos capítulos 2 e 3, respectivamente, para resolver as equações generalizadas (4.4) e (4.5). No que se refere a aplicações, na seção 4.3, é elaborado um problema em espalhamento de ondas de água sobre uma placa submersa com uma abertura, inspirada no trabalho de [19] em uma placa contínua. Com isso, pretende-se utilizar as soluções analíticas obtidas no capítulo 3. Ao final do capítulo, são levantadas algumas perspectivas futuras do trabalho, com aplicações no problema 3D para um anel circular.

Por fim, no capítulo 5, apresentamos as principais contribuições deste trabalho, destacando as relações obtidas tanto para a equação do aerofólio, quanto para a equação integral hipersingular, ambas definidas sobre um intervalo disjunto.

## 2 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CAUCHY PARA DOIS INTERVALOS DISJUNTOS

Neste capítulo, investigamos uma solução analítica para equação do aerofólio em dois intervalos disjuntos  $G_\kappa = (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1)$ ,  $\kappa > 0$ , dada por

$$\frac{1}{\pi} \int_{G_\kappa} \frac{\tilde{f}_\kappa(t)}{x-t} dt = -\tilde{\psi}(x), \quad x \in G_\kappa,$$

para caso em que a função prescrita (função de entrada)  $\tilde{\psi}(x)$  seja um polinômio de Chebyshev e  $\tilde{f}_\kappa(t)$  a função incógnita. Antes, apresentamos algumas definições importantes para o entendimento do trabalho e para isto seguiremos a abordagem de [8]).

### 2.1 Definições preliminares

#### 2.1.1 Integral do tipo Cauchy

**Definição 2.1** (Integral do tipo Cauchy). Seja  $L$  um contorno fechado suave<sup>1</sup> no plano de variável complexa  $z = x + iy$ . O domínio dentro do contorno  $L$  é chamado *domínio interior* e é denotado por  $\Omega^+$  e o complemento, por  $\Omega^+ \cup L$ . O domínio que contém os pontos no infinito, é chamado o *domínio exterior* e é denotado por  $\Omega^-$ .

Se uma função  $f(z)$  é analítica em  $\Omega^+$  e contínua em  $\Omega^+ \cup L$ , então de acordo com a *fórmula de Cauchy* da teoria de funções de uma variável complexa temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(z) & \text{para } z \in \Omega^+, \\ 0 & \text{para } z \in \Omega^-. \end{cases} \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>Por contorno suave entendemos aqui como uma linha simples (i.e. sem pontos de intersecção em si mesma), fechada ou aberta com variação contínua da reta tangente, não tendo pontos recorrentes (cúspides).

Se uma função  $f(z)$  é analítica em  $\Omega^-$  e contínua em  $\Omega^- \cup L$ , então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(\infty) & \text{para } z \in \Omega^+, \\ -f(z) + f(\infty) & \text{para } z \in \Omega^-, \end{cases} \quad (2.2)$$

em que  $f(\infty)$  é o valor da função numa vizinhança do infinito. Como usual, a direção positiva em  $L$  é definida como a direção na qual o domínio  $\Omega^+$  fique à esquerda do contorno.

A fórmula de Cauchy permite calcular os valores de uma função em qualquer ponto do domínio fornecido, desde que os valores na fronteira do domínio sejam conhecidos, ou seja, a fórmula de Cauchy resolve o problema de valor de fronteira para funções analíticas. A integral à esquerda de (2.1) e (2.2) é conhecida como *integral de Cauchy* (cf. [8]).

**Definição 2.2.** Considere  $L$  um contorno suave fechado ou aberto situado inteiramente no plano complexo. Seja  $\tau$  a coordenada complexa em  $L$  e  $\varphi(\tau)$  uma função contínua de posição no contorno. Então, a integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (2.3)$$

escrita da mesmo modo que uma integral de Cauchy, é chamada *integral do tipo Cauchy*. A função  $\varphi(\tau)$  é chamada de *densidade* e  $\frac{1}{\tau - z}$  o *núcleo* (cf. [8]).

Se  $L$  é um contorno aberto, então  $\Phi(z)$  é uma função analítica em todo plano complexo, menos em  $L$ .

A definição 2.2 nos permite dividir  $\Phi(z)$  em duas funções independentes.  $\Phi^+(z)$  definida em  $\Omega^+(z)$  e  $\Phi^-(z)$  definida em  $\Omega^-(z)$ . Essas funções não necessariamente são continuação analítica uma da outra.

**Definição 2.3** (Condição de Hölder). Seja  $L$  uma contorno suave e  $\varphi(\tau)$  uma função de posição sobre. Dizemos que a função  $\varphi(\tau)$  satisfaz a condição de Hölder em  $L$  (condição  $H$ ), se para dois pontos arbitrários sobre a curva

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A|t_2 - t_1|^\lambda,$$

no qual  $A$  e  $\lambda$  são números reais positivos.  $A$  é chamado de *constante de Hölder* e  $\lambda$  o *índice de Hölder*.

**Definição 2.4** (Valor principal de Cauchy). A integral em (2.3) é interpretada no sentido de *valor principal de Cauchy*, i.e.,

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx \right], \quad (a < c < b)$$

em que  $\varphi(x) \in [a, b]$  satisfaz a condição de Hölder (cf. [21]).

Em uma integral de Cauchy com densidade  $\varphi(\tau)$  contínua, os únicos pontos em que o integrando deixa de ser analítico na variável  $z$  estão sobre o contorno  $L$ .

### 2.1.2 Valor limite da integral de Cauchy para intervalos sobre o eixo real

**Lema 2.1.1.** *Se a densidade  $\varphi(\tau)$  satisfaz as condições de Hölder e o ponto  $t$  não coincide com um dos extremos do contorno, então a função*

$$\psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau$$

*ao passar pelo ponto  $z = t$  do contorno, comporta-se como uma função contínua, i.e., essa função tem um valor limite definido quando  $z$  se aproxima de  $t$  de qualquer lado do contorno, ao longo de qualquer caminho:*

$$\lim_{z \rightarrow t} \psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau = \psi(t).$$

*Demonstração.* [8, seção 4.1].

### 2.1.3 A fórmula de Sokhotski

Considere a função

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

em que a densidade da integral  $\varphi(\tau)$  é Hölder contínua.

Assuma que  $L$  é um contorno fechado. Em caso de ser um contorno aberto, podemos completá-lo por uma curva arbitrária tal que se torne fechado, impondo a curva adicional  $\varphi(\tau) = 0$ .

**Notação 2.1.** *Os valores limites das funções analíticas  $\Phi(z)$ ,  $\psi(z)$  serão denotados por:*

- $\Phi^+(t)$ ,  $\psi^+(t)$ , quando  $z$  tende ao ponto  $t$  do contorno por dentro;
- $\Phi^-(t)$ ,  $\psi^-(t)$ , quando  $z$  tende ao ponto  $t$  do contorno por fora;

*Para um contorno aberto, isso corresponde aos valores limites da esquerda e da direita, respectivamente.*

*Denotaremos  $z \rightarrow t^+$  ou  $z \rightarrow t^-$  para enfatizar a direção de passagem do limite.*

*Os valores das funções correspondentes no ponto  $t$  do contorno denotaremos simplesmente por  $\Phi(t)$ ,  $\psi(t)$ .*

Da teoria de análise complexa, temos as relações:

$$\int_L \frac{1}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} 2\pi i & , z \in \Omega^+, \\ 0 & , z \in \Omega^- \\ \pi i & , z \in L, \end{cases}$$

donde, obtemos:

$$\psi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t^+} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - z} d\tau \right] = \Phi^+(t) - \varphi(t),$$

$$\psi^-(t) = \lim_{z \rightarrow t^-} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - z} d\tau \right] = \Phi^-(t),$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - t} d\tau = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t).$$

De acordo com o lema 2.1.1, a função  $\psi$  é contínua. Então, segue que

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t).$$

Por fim, obtemos as fórmulas de Sokhotski:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2.4)$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2.5)$$

sendo as integrais acima definidas no sentido de *valor principal*. Uma versão alternativa e mais usual das fórmulas de Sokhotski é obtida somando e subtraindo as equações (2.4) e (2.5), resultando em:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t),$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

**Teorema 2.1.2.** *Suponha que em uma curva fechada suave  $L$  uma função complexa  $\varphi(t)$  Hölder contínua é dada. De modo que essa função seja o valor limite de uma função analítica no domínio interior  $\Omega^+$ , é necessário e suficiente que a condição*

$$-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0$$

seja satisfeita. De modo que  $\varphi(t)$  seja o valor limite de uma função analítica no domínio exterior  $\Omega^-$  e assuma no infinito o valor  $\Gamma$ , é necessário e suficiente que a condição

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \Gamma = 0 \quad (\Gamma = \varphi(\infty)) \quad (2.6)$$

seja satisfeita.

Considere agora que  $\varphi(t)$  seja o valor de fronteira de uma função analítica no domínio  $\Omega^-$ , exceto no infinito, onde a função tem um polo de ordem  $n$  cuja parte principal é dada pelo polinômio

$$\gamma(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n. \quad (2.7)$$

Um argumento similar ao do Teorema 2.1.2 leva a uma equação com a mesma forma de (2.6) (cf. [8, p 28]), sendo a constante  $\Gamma$  substituída pelo polinômio (2.7) em  $t$  ( $\gamma(t)$ ). O Teorema 2.1.2 é um resultado importante que combinado com as fórmulas de Sokhotski resulta no Lema 2.2.1, a seguir, crucial para avaliar analiticamente uma integral de Cauchy em intervalos disjuntos.

## 2.2 A equação integral de Cauchy sobre o intervalo $G_\kappa$

Considere a equação integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-\kappa} \frac{\tilde{f}_\kappa(t)}{x - t} dt + \frac{1}{\pi} \int_\kappa^1 \frac{\tilde{f}_\kappa(t)}{x - t} dt = -\tilde{\psi}(x), \quad x \in G_\kappa. \quad (2.8)$$

na qual  $\tilde{\psi}(x)$  é uma função conhecida e  $G_\kappa = (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1)$  é um *intervalo* com uma abertura de comprimento  $2\kappa$  ( $\kappa > 0$ ).

Sabemos de Tricomi [23] que a solução da equação (2.8) é dada por:

$$\tilde{f}_\kappa(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R_\kappa(x)} [\tilde{C}_{1,\kappa} + \tilde{C}_{2,\kappa}x + \Psi_\kappa(x)] , & x \in (-1, -\kappa) \\ -\frac{1}{\pi R_\kappa(x)} [\tilde{C}_{1,\kappa} + \tilde{C}_{2,\kappa}x + \Psi_\kappa(x)] , & x \in (\kappa, 1) \end{cases} \quad (2.9)$$

em que  $\Psi_\kappa$  é dada em termos de integrais de Cauchy

$$\Psi_\kappa(x) = \int_{-1}^{-\kappa} \frac{\tilde{\psi}(t)R_\kappa(t)}{x-t} dt - \int_{\kappa}^1 \frac{\tilde{\psi}(t)R_\kappa(t)}{x-t} dt ,$$

$\tilde{C}_{1,\kappa}$  e  $\tilde{C}_{2,\kappa}$  são duas constantes arbitrárias, e

$$R_\kappa(x) = \sqrt{(1-x^2)(x^2-\kappa^2)} , \quad x \in G_\kappa .$$

A princípio, para a simplicidade na solução e validação dos resultados, assumimos as constantes  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ . Na seção 2.4 mostramos alguns casos para outros valores dessas constantes. Então, a solução (2.9) se reduz a:

$$\tilde{f}_\kappa(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R_\kappa(x)} \Psi_\kappa(x) , & x \in (-1, -\kappa) \\ -\frac{1}{\pi R_\kappa(x)} \Psi_\kappa(x) , & x \in (\kappa, 1). \end{cases} \quad (2.10)$$

No artigo de Farina et al. [7] foram comparadas numericamente a solução (2.10) com a solução da equação do aerofólio no intervalo  $(-1, 1)$  e boas aproximações foram obtidas para  $\kappa \ll 1$ . Tendo isso em mente, em seções futuras pretendemos comparar as soluções analíticas obtidas no caso particular em que a função de entrada é um polinômio de Chebyshev do primeiro tipo ( $\tilde{\psi}(t) = -T_n(t)$ ) com a solução da equação do aerofólio sobre o intervalo simples  $(-1, 1)$ .

Observe que a solução (2.10) depende do termo  $\Psi_\kappa(x)$ , que por sua vez é formado por integrais de Cauchy, cuja densidade depende da função conhecida  $\tilde{\psi}(x)$ . Aqui, buscamos trabalhar com os casos em que a função conhecida é um polinômio, pois esta é uma condição necessária para o uso do lema 2.2.1, a seguir. Particularmente, investigaremos a solução para  $\tilde{\psi}(x) = -T_n(x)$ , pois além de tratar-se de um polinômio bastante estudado, com várias propriedades importantes, uma

conjunto deles pode compor bases ortogonais. Isso nos permitirá estabelecer um método espectral para soluções de equações integrais generalizadas (seção 4.3).

O lema 2.2.1 foi apresentado por Gakhov [8, p. 81] e mais tarde por Khvedelidze [12, p. 374-375] em problemas de valor de fronteira da teoria de funções holomórficas de uma variável complexa, também conhecidos como *problemas de Riemann-Hilbert*. Ele será crucial para o desenvolvimento deste trabalho e repetidamente empregado. O lema nos fornece um método que permite avaliar analiticamente integrais do tipo Cauchy.

**Lema 2.2.1.** *Seja  $L = \sum_{k=1}^m L_k$  um contorno consistindo de  $m$  curvas abertas simples não tendo pontos finais em comum. As coordenadas dos pontos finais são denotadas por  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{2m}$  nessa ordem. Seja  $p$  um inteiro,  $0 \leq p \leq 2m$ , e  $P(z)$  um polinômio.*

Então, a integral

$$I(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^p (\tau - c_k)^{1/2}}{\prod_{j=p+1}^{2m} (\tau - c_j)^{1/2}} \cdot \frac{P(\tau)}{\tau - t} d\tau = -P^*(t), \quad (2.11)$$

no qual  $P^*(z)$  é um polinômio que representa a parte principal da expansão da densidade da integral do tipo Cauchy, na vizinhança do infinito, i.e., um polinômio que obedece a condição

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{\prod_{k=1}^p (z - c_k)^{1/2}}{\prod_{j=p+1}^{2m} (z - c_j)^{1/2}} \cdot P(z) - P^*(z) \right] = 0.$$

Para fins computacionais podemos situar o resultado acima para avaliarmos a integral de Cauchy na forma da equação (2.11); expandimos sua densidade em série de Taylor, centrada em 0. Em seguida, passamos o limite com  $x \rightarrow \infty$ ,

obtendo assim uma expressão polinomial chamada de *parte principal da expansão da densidade da integral* e denotada por PP.

### 2.2.1 Solução analítica em termos da Parte Principal

Nesta seção, apresentamos a solução (2.10) em termos da *parte principal da expansão da densidade da integral de Cauchy* numa vizinhança do infinito. Mas antes é preciso escrever a integral de Cauchy presente na solução na forma do lema 2.2.1.

Observe que

$$\begin{aligned}\Psi_{\kappa}(x) &= \int_{\kappa}^1 \sqrt{(1-t^2)(t^2-\kappa)} \left[ \frac{\tilde{\psi}(-t)}{x+t} - \frac{\tilde{\psi}(t)}{x-t} \right] dt \\ &= \int_{\kappa}^1 \sqrt{(1-t^2)(t^2-\kappa)} \left[ \frac{\tilde{\psi}(-t)(x-t) - \tilde{\psi}(t)(x+t)}{x^2-t^2} \right] dt \\ &= \int_{\kappa}^1 \sqrt{(1-t^2)(t^2-\kappa)} \left[ \frac{x(\tilde{\psi}(-t) - \tilde{\psi}(t)) - t(\tilde{\psi}(-t) + \tilde{\psi}(t))}{x^2-t^2} \right] dt.\end{aligned}$$

Separamos os dois casos a seguir.

**Caso 1.** Se  $\tilde{\psi}(t)$  é uma função par, então

$$\Psi_{\kappa}(x) = \int_{\kappa}^1 \sqrt{(1-t^2)(t^2-\kappa)} \left[ \frac{-2t\tilde{\psi}(t)}{x^2-t^2} \right] dt.$$

Fazendo as mudanças de variáveis  $x^2 = u$  e  $t^2 = v$  temos

$$\begin{aligned}\Psi_{\kappa}(\sqrt{u}) &= \int_{\kappa^2}^1 \sqrt{(1-v)(v-\kappa^2)} \tilde{\psi}(\sqrt{v}) \frac{dv}{v-u} \\ &= \frac{\pi i}{\pi i} \int_{\kappa^2}^1 \sqrt{(1-v)(v-\kappa^2)} \tilde{\psi}(\sqrt{v}) \frac{dv}{v-u} \\ &= \pi \left( \frac{1}{\pi i} \int_{\kappa^2}^1 \sqrt{(v-1)(v-\kappa^2)} \tilde{\psi}(\sqrt{v}) \frac{dv}{v-u} \right).\end{aligned}$$

Aplicando o lema 2.2.1 e invertendo as mudanças de variáveis, segue que

$$\begin{aligned}\Psi_\kappa(\sqrt{u}) &= -\pi \text{PP} \left\{ \sqrt{(u-1)(u-\kappa^2)} \tilde{\psi}(\sqrt{u}) \right\}_{u \rightarrow \infty} \\ \Psi_\kappa(x) &= -\pi \text{PP} \left\{ \sqrt{(x^2-1)(x^2-\kappa^2)} \tilde{\psi}(x) \right\}_{x \rightarrow \infty}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Logo, reescrevemos a solução (2.10) como

$$\tilde{f}_\kappa(x) = \frac{\text{sgn}(x)}{R_\kappa(x)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(x^2-1)(x^2-\kappa^2)} \tilde{\psi}(x) \right\}_{x \rightarrow \infty}.\quad (2.13)$$

**Caso 2.** Se  $\tilde{\psi}(t)$  é um função ímpar, então

$$\Psi_\kappa(x) = \int_\kappa^1 R_\kappa(t) \left[ \frac{-2x\tilde{\psi}(t)}{x^2-t^2} \right] dt.$$

Fazendo as mudanças de variáveis  $x^2 = u$  e  $t^2 = v$ , temos

$$\begin{aligned}\Psi_\kappa(\sqrt{u}) &= \sqrt{u} \int_{\kappa^2}^1 \sqrt{(1-v)(v-\kappa^2)} \frac{\tilde{\psi}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} \frac{dv}{v-u} \\ &= \sqrt{u} \frac{\pi i}{\pi i} \int_{\kappa^2}^1 \sqrt{(1-v)(v-\kappa^2)} \frac{\tilde{\psi}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} \frac{dv}{v-u} \\ &= \sqrt{u} \pi \left( \frac{1}{\pi i} \int_{\kappa^2}^1 \sqrt{(v-1)(v-\kappa^2)} \frac{\tilde{\psi}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} \frac{dv}{v-u} \right)\end{aligned}$$

Aplicando o lema 2.2.1 e invertendo as mudanças de variáveis, segue que

$$\begin{aligned}\Psi_\kappa(\sqrt{u}) &= -\pi \sqrt{u} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u-1)(u-\kappa^2)} \frac{\tilde{\psi}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} \right\}_{u \rightarrow \infty} \\ \Psi_\kappa(x) &= -\pi x \text{PP} \left\{ \sqrt{(x^2-1)(x^2-\kappa^2)} \frac{\tilde{\psi}(x)}{x} \right\}_{x \rightarrow \infty}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Logo, reescrevemos a solução (2.10) como

$$\tilde{f}_\kappa(x) = \frac{\text{sgn}(x)x}{R_\kappa(x)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(x^2-1)(x^2-\kappa^2)} \frac{\tilde{\psi}(x)}{x} \right\}_{x \rightarrow \infty}.\quad (2.15)$$

## 2.2.2 Solução analítica para o caso $\tilde{\psi}(x) = -T_n(x)$

Aqui, apresentamos as soluções analíticas da equação do aerofólio em dois intervalos disjuntos (2.8) para a função de entrada

$$\tilde{\psi}(x) = -T_n(x),$$

sendo  $T_n(x)$  o polinômio de Chebyshev do primeiro tipo. Para isso, utilizamos a representação (cf. [22, p. 13] e [1])

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} t_{n-2k}^k x^{n-2k}, \quad (2.16)$$

em que  $\lfloor n/2 \rfloor$  corresponde a parte inteira de  $n/2$  e  $t_{n-2k}^k$  os coeficientes do polinômio de Chebyshev obtidos por

$$t_i^j = 2^{i-1}(-1)^j \left\{ \begin{matrix} i+2j \\ i+j \end{matrix} \right\} \binom{i+j}{j}.$$

A equação (2.16) evidencia que  $T_n(x)$  tem grau  $n$ . Se separarmos os polinômios em pares e ímpares temos respectivamente as fórmulas

$$T_{2m}(x) = \sum_{k=0}^m t_{2k}^{m-k} x^{2k}$$

e

$$T_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^m t_{2k+1}^{m-k} x^{2k+1}$$

sendo  $m$  a parte inteira de  $n/2$ .

Substituindo  $\tilde{\psi}(x) = -T_{2m}(x)$  e  $\tilde{\psi}(x) = -T_{2m+1}(x)$  em (2.13) e (2.15) respectivamente, obtemos as soluções (cf. o apêndice A para mais detalhes)

$$\tilde{f}_{2m,\kappa}(x) = -\frac{\text{sgn}(x)}{R_\kappa(x)} \left\{ \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) x^{2(m-(l-1))} + t_{2l}^{m-l} \frac{s_\kappa^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right] \right\} \quad (2.17)$$

e

$$\tilde{f}_{2m+1,\kappa}(x) = -\frac{\operatorname{sgn}(x)x}{R_\kappa(x)} \left\{ \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) x^{2(m-(l-1))+} + t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_\kappa^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right] \right\}, \quad (2.18)$$

As soluções (2.17) e (2.18) podem ser escritas resumidamente como

$$f_{n,\kappa}(x) = -\frac{\operatorname{sgn}(x)}{R_\kappa(x)} E_n(x), \quad (2.19)$$

no qual  $E_n(x)$  é um polinômio de grau  $n$ , dado por

$$E_{2m}(x) = \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) x^{2(m-(l-1))} + t_{2l}^{m-l} \frac{s_\kappa^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right]$$

e

$$E_{2m+1}(x) = \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) x^{2(m-(l-1))+1} + t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_\kappa^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} x \right],$$

em que  $s_\kappa(w) = \sqrt{(1-w)(1-\kappa^2 w)}$ ,  $s_\kappa^{(n)}(w)$  é a  $n$ -ésima derivada de  $s_\kappa(w)$  e  $s_\kappa^{(0)}(w) = s_\kappa(w)$ .

*Observação 2.1.* No apêndice A, por comodidade, trabalhamos nas contas sem o sinal de negativo presente na função  $\psi$ , sendo adicionado apenas nos resultados finais (2.17) e (2.18).

*Observação 2.2.* O termo com raiz presente em (2.19) poderia ser considerado como uma função peso no qual a equação do aerofólio (2.8) seria lida como

$$\frac{1}{\pi} \int_{G_\kappa} \frac{\tilde{f}_\kappa(t)}{x-t} w(t) dt = -\psi(x), \quad x \in G_\kappa,$$

em que  $w(t) = \operatorname{sgn}(t) \frac{1}{R_\kappa(t)}$ . Vemos que  $E_n$  é uma solução puramente polinomial da equação do aerofólio com peso e a seguinte relação integral é válida.

$$\frac{1}{\pi} \int_{G_\kappa} \frac{E_n(t)}{x-t} w(t) dt = T_n(x). \quad (2.20)$$

A equação (2.20) é provavelmente uma das principais contribuições deste trabalho e generaliza a identidade integral clássica:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{U_{n-1}(t)}{x-t} \sqrt{1-t^2} dt = T_n(x). \quad (2.21)$$

Na próxima seção, mostramos que  $E_n(x)$ , e conseqüentemente também  $f_{n,\kappa}(x)$ , pode ser fácil e eficientemente calculada por meio de uma relação de recorrência generalizada, o que significa, uma relação de recorrência de três termos, sendo um termo residual, quando  $n$  é par, e por uma relação de recorrência de três termos, quando  $n$  é ímpar.

### 2.2.3 Fórmula de Recorrência

Na seção anterior, apresentamos uma solução analítica da equação do aerofólio para o caso particular  $\tilde{\psi}(x) = -T_n(x)$  com constantes  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ . Com o objetivo de otimizar o emprego computacional, desenvolvemos também uma lei de recorrência usando a relação  $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$  para polinômios de Chebyshev do primeiro tipo. Aqui, vamos suprimir alguns detalhes na obtenção da solução de recorrência, para evitar que o texto fique carregado, mas disponibilizamos todas as etapas no apêndice B.

Considere a expressão  $E_{2m}$  para o polinômio de grau par  $T_{2m}(x)$ ,

$$E_{2m} = \text{PP} \left\{ T_{2m}(x) \sum_{k=0}^{m+1} \frac{s_{\kappa}^{(k)}(0)}{k!} x^{2(1-k)} \right\}_{x \rightarrow \infty}. \quad (2.22)$$

Substituindo  $T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$  em (2.22) segue que

$$\begin{aligned} E_{2m} &= \text{PP} \left\{ (2x T_{2m-1}(x) - T_{2m-2}(x)) \sum_{k=0}^{m+1} \frac{s_{\kappa}^{(k)}(0)}{k!} x^{2(1-k)} \right\}_{x \rightarrow \infty} \\ &= \text{PP} \left\{ 2x T_{2m-1}(x) \sum_{k=0}^{m+1} \frac{s_{\kappa}^{(k)}(0)}{k!} x^{2(1-k)} - T_{2m-2}(x) \sum_{k=0}^{m+1} \frac{s_{\kappa}^{(k)}(0)}{k!} x^{2(1-k)} \right\}_{x \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

Multiplicando os polinômios  $T_{2m-1}(x)$  e  $T_{2m-2}(x)$  pelos somatórios acima, eliminando os termos quando  $x \rightarrow \infty$  e rearranjando os resultados, chegamos a

$$E_{2m} = 2x (xE_{2m-1}) - E_{2m-2} + \left( 2 \sum_{k=0}^{m-1} t_{2k+1}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k+2)}(0)}{(k+2)!} \right).$$

Daí, substituindo a expressão acima em (2.19) obtemos a lei de recorrência

$$\tilde{f}_{2m,\kappa}(x) = 2x\tilde{f}_{2m-1,\kappa}(x) - \tilde{f}_{2m-2,\kappa}(x) + \frac{\text{sgn}(x)}{R_{\kappa}(x)} \left( 2 \sum_{k=0}^{m-1} t_{2k+1}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k+2)}(0)}{(k+2)!} \right) \quad (2.23)$$

Aplicando procedimentos análogos para o polinômio de grau ímpar  $T_{2m+1}(x)$  (cf. o apêndice B), obtemos

$$\tilde{f}_{2m+1,\kappa}(x) = 2x\tilde{f}_{2m,\kappa}(x) - \tilde{f}_{2m-1,\kappa}(x). \quad (2.24)$$

Os termos iniciais são dados por

$$\tilde{f}_{0,\kappa}(x) = -\frac{\text{sgn}(x)}{R_{\kappa}(x)} \left( x^2 - \frac{1 + \kappa^2}{2} \right)$$

e

$$\tilde{f}_{1,\kappa}(x) = -\frac{\text{sgn}(x)}{R_{\kappa}(x)} x \left( x^2 - \frac{1 + \kappa^2}{2} \right).$$

## 2.3 Solução analítica da equação integral de Cauchy sobre

$(-1, 1)$

A equação integral de Cauchy, ou do aerofólio, na sua forma original é escrita como

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{x-t} dt = g(x), \quad x \in (-1, 1). \quad (2.25)$$

Se restringirmos  $g(x)$  a funções Hölder contínuas em  $[-1, 1]$ , a solução geral de (2.25) pode ser escrita como (cf. [24, pg. 173-180] ou [16])

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-x^2}} \frac{g(t)}{x-t} dt + \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2.26)$$

em que  $A$  é uma constante arbitrária. Isso quer dizer que (2.26) possui infinitas soluções dependendo de  $A$ . Uma interpretação física para essa constante é a circulação  $\Gamma_\infty$  em torno do aerofólio (cf. [3, pg. 70]). Por uma questão de simplicidade, adotamos  $A = 0$ . Logo, (2.26) reduz-se a

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-x^2}} \frac{g(t)}{x-t} dt. \quad (2.27)$$

Se tomarmos  $g(t) = T_n(t)$  em (2.27), teremos

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-x^2}} \cdot \frac{T_n(t)}{x-t} dt \\ &= -\frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{(U_n(t) - U_{n-2}(t))}{2} \frac{dt}{x-t} \\ &= -\frac{1}{2\pi \sqrt{1-x^2}} \left[ \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_n(t) \frac{dt}{x-t} - \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{n-2}(t) \frac{dt}{x-t} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi \sqrt{1-x^2}} [\pi T_{n+1}(x) - \pi T_{n-1}(x)]. \end{aligned}$$

Acima utilizamos as relações

$$T_n(t) = \frac{1}{2} [U_n(t) - U_{n-2}(t)] \quad (\text{cf. [1]})$$

e

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_n(t) \frac{dt}{x-t} = T_{n+1}(x) \quad (\text{cf. [16]}),$$

em que  $U_n(t)$  é o polinômio de Chebyshev do segundo tipo.

Portanto,

$$f(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} [T_{n+1}(x) - T_{n-1}(x)]. \quad (2.28)$$

Na seção 2.2, quando escolhermos as constantes  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  na solução (2.9) definida sobre os intervalos disjuntos  $G_\kappa = (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1)$ , tínhamos o objetivo de compará-la com solução (2.27) da equação do aerofólio sobre o intervalo contínuo  $(-1, 1)$ . Sendo assim, na próxima seção, buscamos validar os resultados obtidos até o momento, fazendo a comparação entre as soluções analíticas e de recorrência sobre  $G_\kappa$  e a solução (2.28). Além disso, desejamos mostrar também o bom comportamento dessas soluções para  $\kappa$  não muito pequeno.

## 2.4 Experimento Computacional

Nesta seção apresentamos as soluções da equação do aerofólio em dois intervalos disjuntos e também as comparamos com a solução sobre um intervalo simples.

### 2.4.1 Comportamento geral

A solução  $\tilde{f}_{n,\kappa}$ , obtida anteriormente, não é válida apenas para  $\kappa$  pequeno. Nesta subseção temos dois objetivos: testar a acurácia da solução numérica e exibir o comportamento geral da solução  $\tilde{f}_{n,\kappa}$  para vários valores de  $\kappa$ .

Nas Figuras 2.1 – 2.5, buscamos observar a tendência geral da solução  $\tilde{f}_{n,\kappa}$  para as funções de entrada de  $T_0$  a  $T_5$ , respectivamente, com  $\kappa \in \{0, 05; 0, 1; 0, 2;$

$0, 3; 0, 4\}$ . Para gerar os gráficos de  $\tilde{f}_{n,\kappa}$ , foram utilizadas as fórmulas de recorrência (2.23) e (2.24), pois mostrarem-se mais estáveis computacionalmente, além de calcular a solução em vários pontos do intervalo em poucos segundos. Incluímos também o gráfico de  $f$ , a solução da equação do aerofólio no domínio contínuo  $(-1, 1)$ , avaliada pela fórmula (2.28).

Claramente percebemos uma divergência entre as soluções  $\tilde{f}_{n,\kappa}$  e  $f$ , não apenas nos extremos do intervalo  $G_\kappa$  ( $x = \pm 1$  e  $x = \pm \kappa$ ), em que  $\tilde{f}_{n,\kappa}$  não está definida. Tal comportamento já era esperado, pois tanto a escolha das constantes arbitrárias  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ , o valor de  $\kappa$ , quanto o grau baixo do polinômio  $T_n$  na função de entrada influenciam o termo residual presente na solução de recorrência. Isso explica o deslocamento vertical sofrido pelo gráfico de  $\tilde{f}_{n,\kappa}$  para os graus menores 0, 1 e 2.

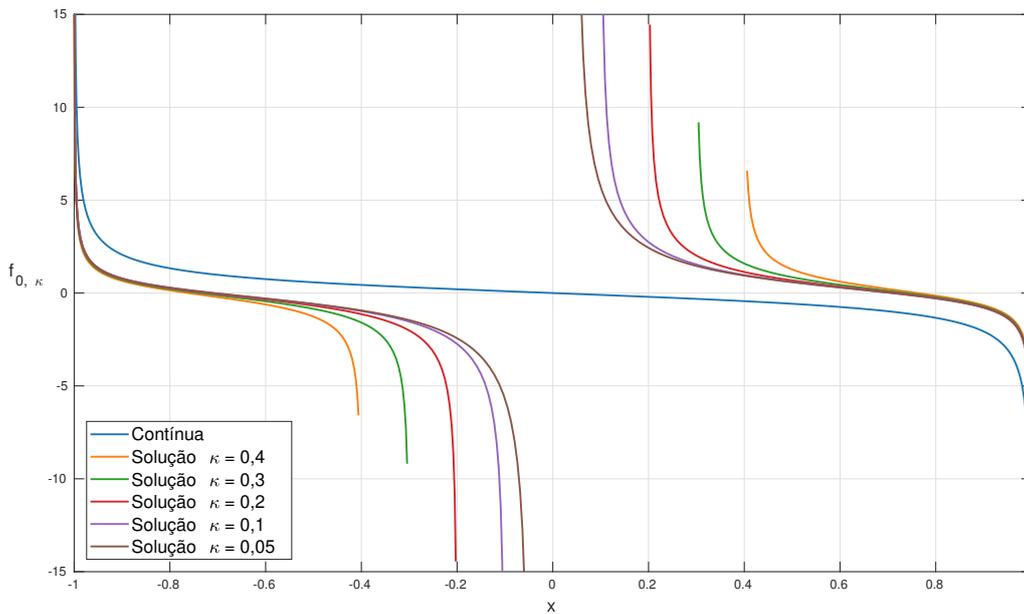


Figura 2.1: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_0(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  e  $\kappa = 0, 4$ ,  $\kappa = 0, 3$ ,  $\kappa = 0, 2$ ,  $\kappa = 0, 1$  e  $\kappa = 0, 05$

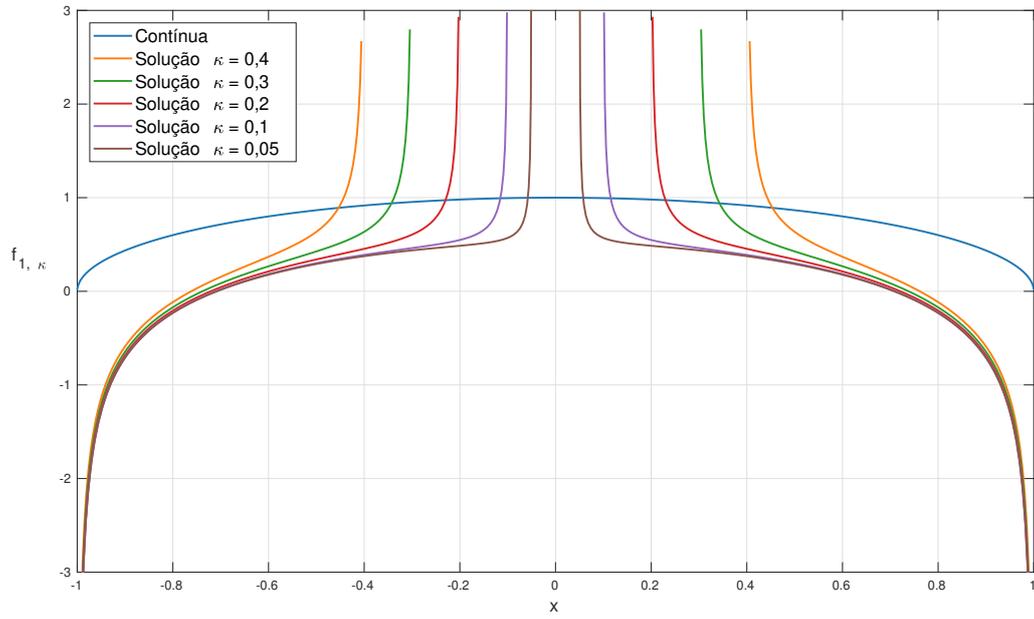


Figura 2.2: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_1(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  e  $\kappa = 0,4$ ,  $\kappa = 0,3$ ,  $\kappa = 0,2$ ,  $\kappa = 0,1$  e  $\kappa = 0,05$

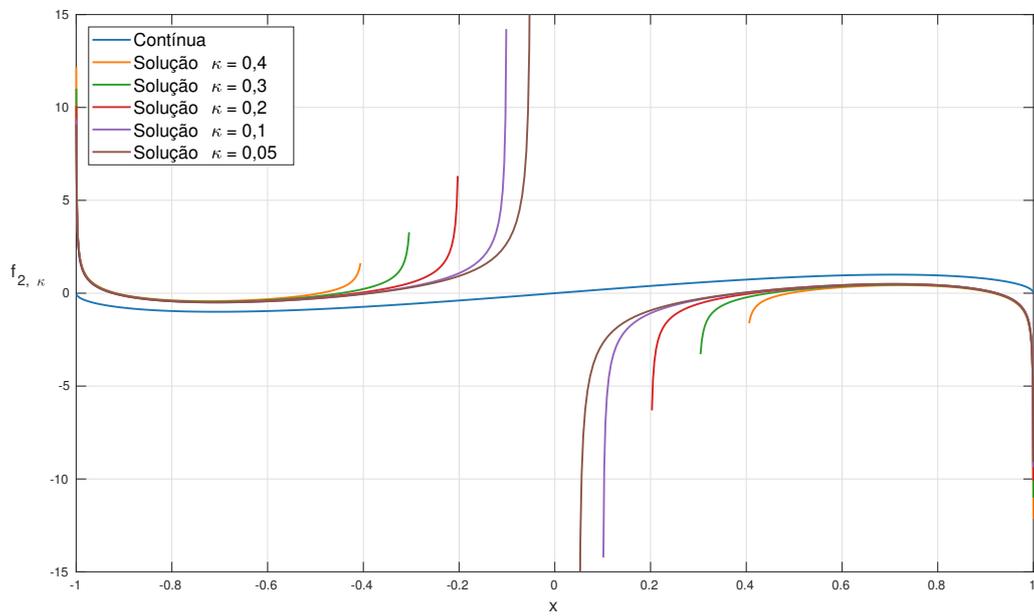


Figura 2.3: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_2(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  e  $\kappa = 0,4$ ,  $\kappa = 0,3$ ,  $\kappa = 0,2$ ,  $\kappa = 0,1$  e  $\kappa = 0,05$

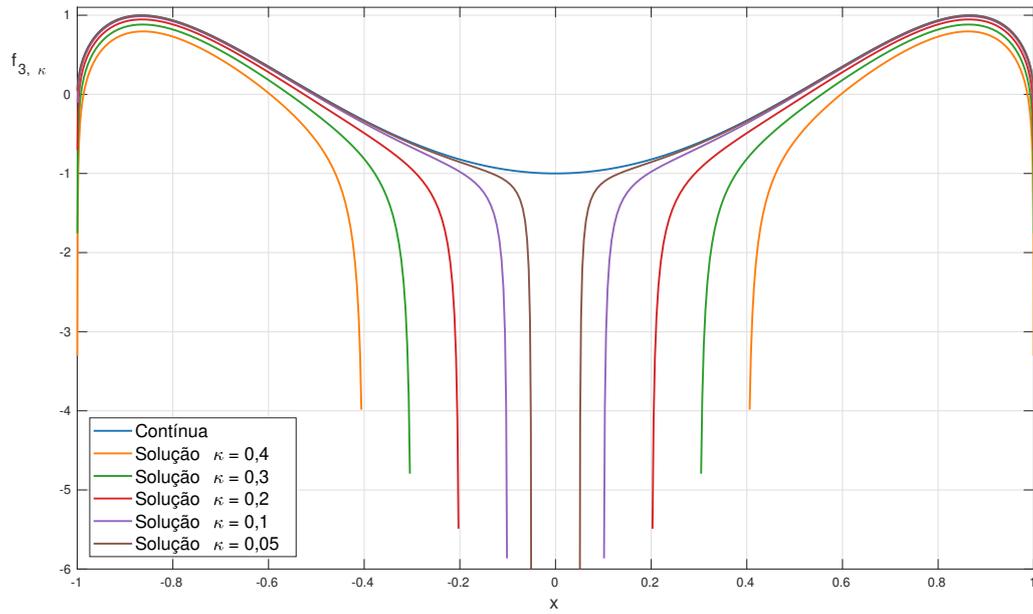


Figura 2.4: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_3(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  e  $\kappa = 0,4$ ,  $\kappa = 0,3$ ,  $\kappa = 0,2$ ,  $\kappa = 0,1$  e  $\kappa = 0,05$

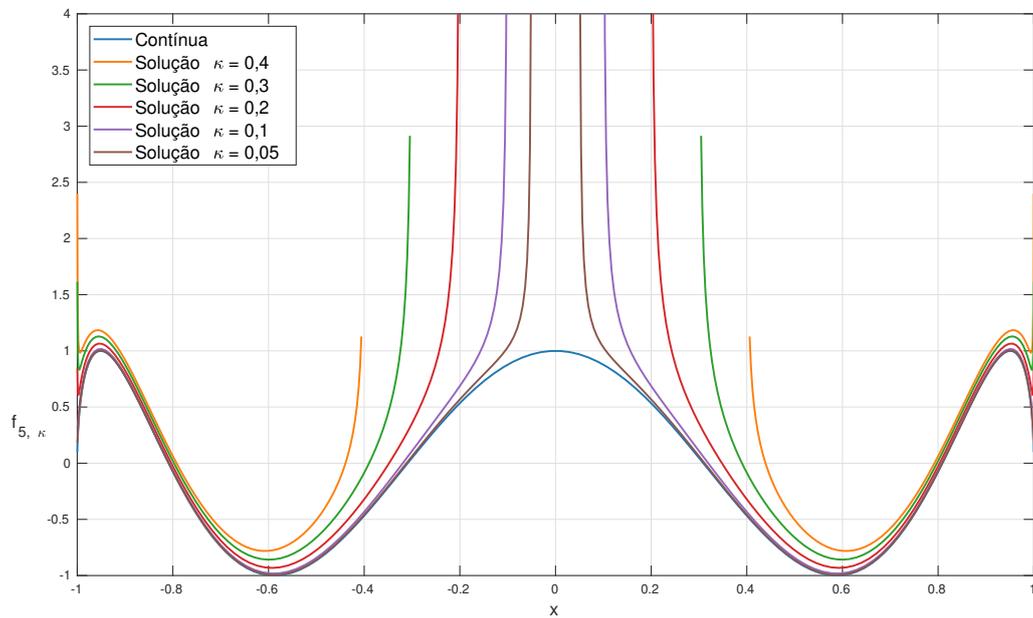


Figura 2.5: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_5(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  e  $\kappa = 0,4$ ,  $\kappa = 0,3$ ,  $\kappa = 0,2$ ,  $\kappa = 0,1$  e  $\kappa = 0,05$

A solução  $f_{n,\kappa}$  também pode ser calculada na forma das séries (2.17) e (2.18). Sendo assim, na Tabela 2.1 apresentamos a diferença entre esses dois tipos de cálculos, expressando o erro pela norma  $L_2$ , para  $\kappa = 0,01$ . O fato do erro ser tão pequeno nos mostra que podemos utilizar a fórmula de recorrência para o cálculo da solução, tendo como benefício, resultados rápidos e acurados.

$\psi$	$\  \text{série} - \text{recorrência} \ _2$
$T_0$	-
$T_1$	-
$T_2$	9.80632415e-15
$T_3$	1.71891178e-14
$T_4$	2.83788189e-14
$T_5$	5.01361495e-14

Tabela 2.1: Erro na norma  $L_2$  da solução  $\tilde{f}_{n,\kappa}$ , calculada pelas séries (2.17) e (2.18) e pelas fórmulas de recorrência (2.23) e (2.24).

Vimos que  $\tilde{f}_{n,\kappa}$  diverge de  $f$  nas extremidades dos intervalos disjuntos. Na próxima seção, vamos olhar de perto esse comportamento e as condições para atenuar essa divergência.

## 2.4.2 Comportamento nas extremidades

Vamos examinar agora mais detalhadamente o comportamento de  $\tilde{f}_{n,\kappa}$  nas extremidades do intervalo  $G_\kappa$ , para  $\kappa$  pequeno. Mostramos nas Figuras 2.6–2.11 as soluções para  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  e a solução  $f(x)$ , para a equação do aerofólio no domínio  $(-1, 1)$ . Nesses resultados, tomamos  $\kappa = 0,01$  e as soluções sobre os intervalos disjuntos foram calculadas pelas expansões (2.17) e (2.18) e as relações de recorrência (2.23) e (2.24). De modo a tornar mais explícita a diferença entre  $f$  e  $\tilde{f}_{n,\kappa}$ , exibimos nas Tabelas 2.2–2.6 parte dos dados numéricos utilizados na construção dos gráficos 2.6–2.11. Vemos que para  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$  a divergência entre as soluções

nos domínios conexos e disjuntos é muito clara, particularmente próximo à origem  $x = 0$ . À medida que o grau  $n$  cresce, para  $n > 3$ , as soluções quase coincidem longe dos extremos  $x = \pm 1$  e  $x = \pm \kappa$  com um erro na ordem de  $10^{-8}$ , como vemos na Figura 2.11, para  $n = 4$ . Na Tabela 2.6, podemos ver, contudo, o ponto que  $f_{4, 0,01}$  começa a divergir de  $f$  próximo a  $x = 0$ . O comportamento mencionado acima é esperado devido às singularidades presentes no denominador das soluções (2.17), (2.18) e (2.23) em intervalos disjuntos, com  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \tilde{C}_{2,\kappa} = 0$ .

Os códigos utilizados para gerar os gráficos abaixo estão escritos em *MatLab*, pela sua facilidade em efetuar manipulações simbólicas (essencial no cálculo das séries presentes em  $\tilde{f}_{n,\kappa}$ ), por possuir funções internas estáveis, além de ter um bom pós-processamento gráfico. No entanto, seu algoritmo interno permite calcular com precisão dupla até  $21!$ , sendo que para números maiores a acurácia é reduzida a 15 dígitos significativos. Acreditamos que essa limitação nos leva a um problema de natureza numérica, que se reflete nas soluções (2.17) e (2.18) e a de recorrência (2.23), pois têm presente um termo com fatorial. Isso quer dizer que as soluções para graus  $n \geq 40$  ficam um pouco comprometidas pelos erros acumulados no cálculo do fatorial, e agravados particularmente nos extremos  $x = \pm 1$  do intervalo  $G_\kappa$ , que correspondem às singularidades na solução (vide Figura 2.13), notamos nesses casos que a relação de recorrência apresenta-se mais estável à medida que o valor de  $n$  aumenta.

Nas Tabelas 2.2–2.10, comparamos as soluções da equação do aerofólio  $f$  no intervalo  $(-1, 1)$  e a solução  $\tilde{f}_{n,\kappa}$  no intervalo disjunto  $G_\kappa$ , calculada de duas formas (série e fórmula de recorrência). Como as soluções apresentam uma simetria ou anti-simetria em relação ao eixo  $y$ , apresentamos apenas alguns valores para que se note a proximidade entre as soluções ou até mesmo a coincidência entre elas.

- $\tilde{\psi}(x) = T_0(x)$  e  $\kappa = 0,01$ :

$x$	$(-1, 1)$	Série $G_\kappa$	Recorrência $G_\kappa$
-0.9996	35.7335148473	17.8518701973	17.8518701973
-0.9938	8.9028619780	4.3950410446	4.3950410446
-0.9809	5.0489738780	2.4253205904	2.4253205904
-0.9614	3.4927453222	1.6031165700	1.6031165700
-0.9353	2.6434728000	1.1325049146	1.1325049146
-0.9031	2.1034823278	0.8139610473	0.8139610473
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-0.1315	0.1326421882	-3.7143593139	-3.7143593139
-0.0955	0.0959227831	-5.1936516084	-5.1936516084
-0.0653	0.0654397767	-7.6994784147	-7.6994784147
-0.0414	0.0414018565	-12.4258042541	-12.4258042541
-0.0240	0.0240306122	-22.8726082000	-22.8726082000
-0.0135	0.0135196589	-54.9561387965	-54.9561387965

Tabela 2.2: Comparação das soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_0(x)$  e  $\kappa = 0,01$

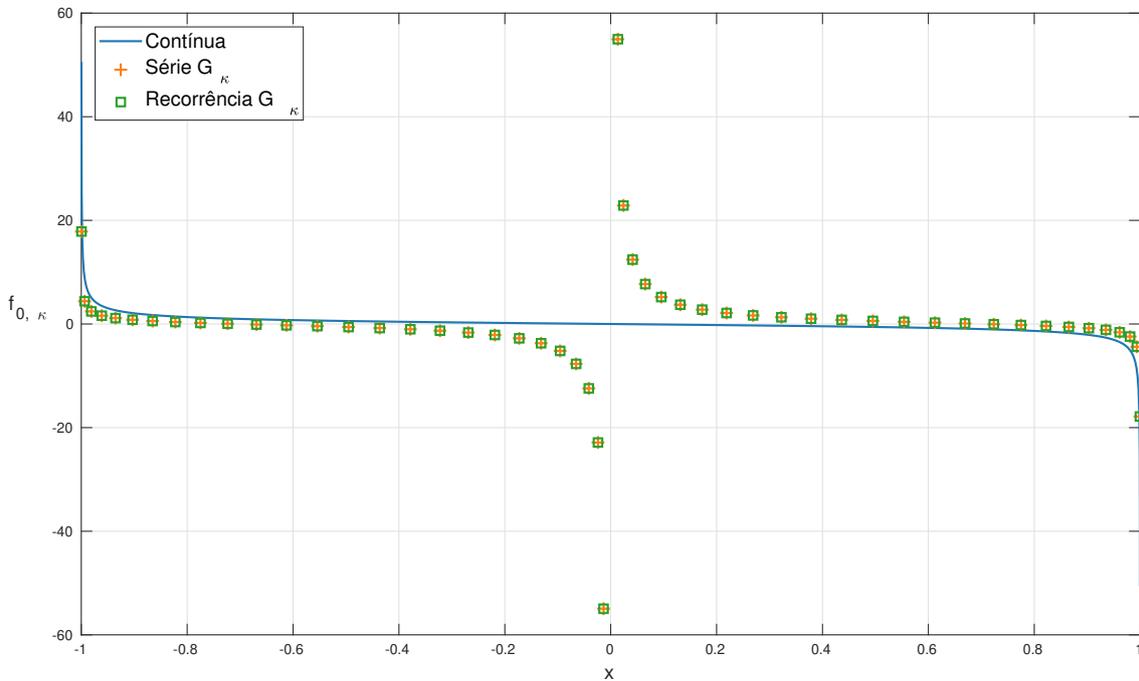


Figura 2.6: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_0(x)$  e  $\kappa = 0,01$

- $\tilde{\psi}(x) = T_1(x)$  e  $\kappa = 0,01$ :

$x$	$(-1,1)$	Série $G_\kappa$	Recorrência $G_\kappa$
-0.9996	0.0279739806	-17.8448838970	-17.8448838970
-0.9938	0.1116214984	-4.3675755289	-4.3675755289
-0.9809	0.1942859978	-2.3791059311	-2.3791059311
-0.9614	0.2752485536	-1.5411931435	-1.5411931435
-0.9353	0.3538199961	-1.0592471761	-1.0592471761
-0.9031	0.4293531198	-0.7351180940	-0.7351180940
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-0.1315	0.9913174290	0.4884030117	0.4884030117
-0.0955	0.9954309165	0.4959132472	0.4959132472
-0.0653	0.9978656704	0.5027767619	0.5027767619
-0.0414	0.9991440434	0.5140110172	0.5140110172
-0.0240	0.9997113898	0.5494841442	0.5494841442
-0.0135	0.9999086219	0.7429203591	0.7429203591

Tabela 2.3: Comparação das soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_1(x)$  e  $\kappa = 0,01$

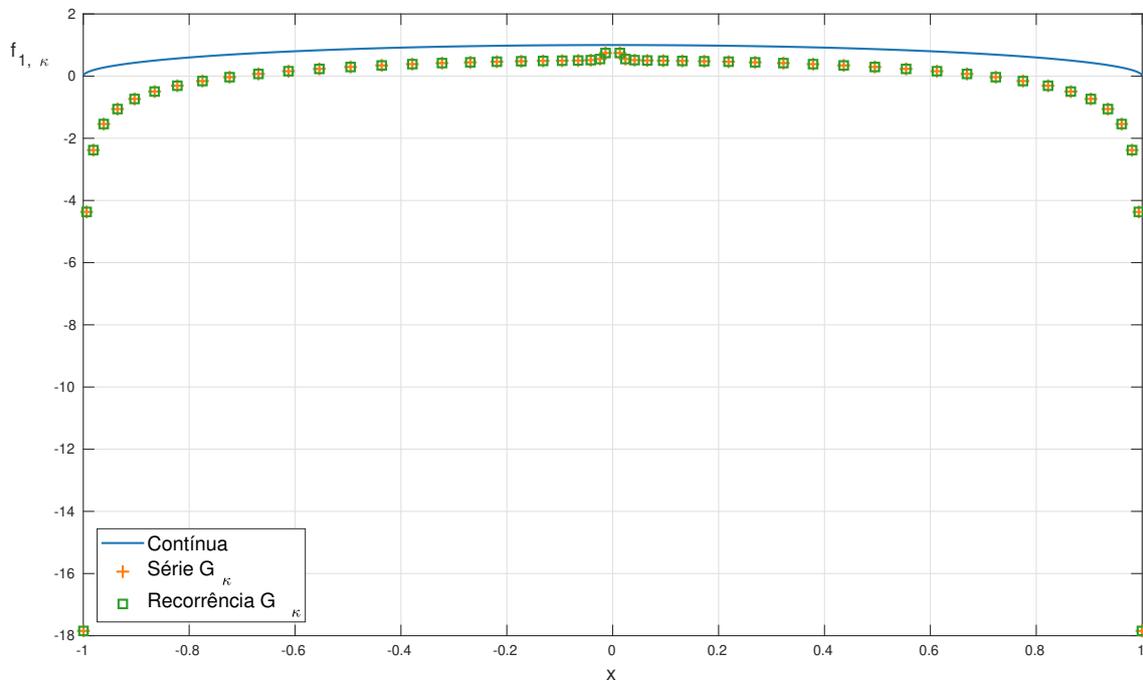


Figura 2.7: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_1(x)$  e  $\kappa = 0,01$

- $\tilde{\psi}(x) = T_2(x)$  e  $\kappa = 0,01$ :

$x$	$(-1, 1)$	Série $G_\kappa$	Recorrência $G_\kappa$
-0.9996	-0.0559260661	8.8848961918	8.8848961918
-0.9938	-0.2218479054	2.0320625442	2.0320625442
-0.9809	-0.3811677281	0.9306589055	0.9306589055
-0.9614	-0.5292331095	0.4155812590	0.4155812590
-0.9353	-0.6618652633	0.0936186729	0.0936186729
-0.9031	-0.7755291193	-0.1307684850	-0.1307684850
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-0.1315	-0.2606976746	1.6628022397	1.6628022397
-0.0955	-0.1900964544	2.4546885538	2.4546885538
-0.0653	-0.1303214695	3.7521307167	3.7521307167
-0.0414	-0.0826620210	6.1509128859	6.1509128859
-0.0240	-0.0480334864	11.4001226776	11.4001226776
-0.0135	-0.0270343765	27.4561827301	27.4561827301

Tabela 2.4: Comparação das soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_2(x)$  e  $\kappa = 0,01$

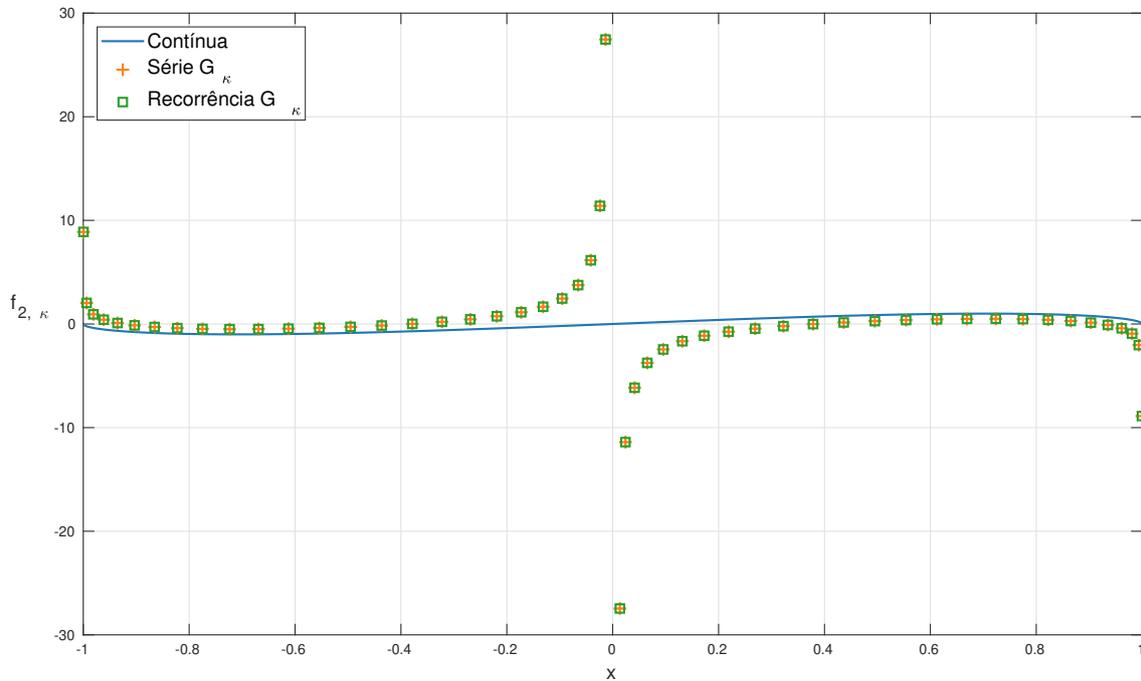


Figura 2.8: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_2(x)$  e  $\kappa = 0,01$

- $\tilde{\psi}(x) = T_3(x)$  e  $\kappa = 0,01$ :

$x$	$(-1, 1)$	Série $G_\kappa$	Recorrência $G_\kappa$
-0.9996	0.0838343784	0.0820456927	0.0820456927
-0.9938	0.3293015660	0.3288479944	0.3288479944
-0.9809	0.5535231011	0.5532556657	0.5532556657
-0.9614	0.7423323945	0.7421358586	0.7421358586
-0.9353	0.8842830831	0.8841215521	0.8841215521
-0.9031	0.9714644990	0.9713217300	0.9713217300
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-0.1315	-0.9227588870	-0.9256884508	-0.9256884508
-0.0955	-0.9591283852	-0.9646826848	-0.9646826848
-0.0653	-0.9808456586	-0.9928058342	-0.9928058342
-0.0414	-0.9923051799	-1.0228934886	-1.0228934886
-0.0240	-0.9974035079	-1.0972298669	-1.0972298669
-0.0135	-0.9991776976	-1.4852489718	-1.4852489718

Tabela 2.5: Comparação das soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_3(x)$  e  $\kappa = 0,01$

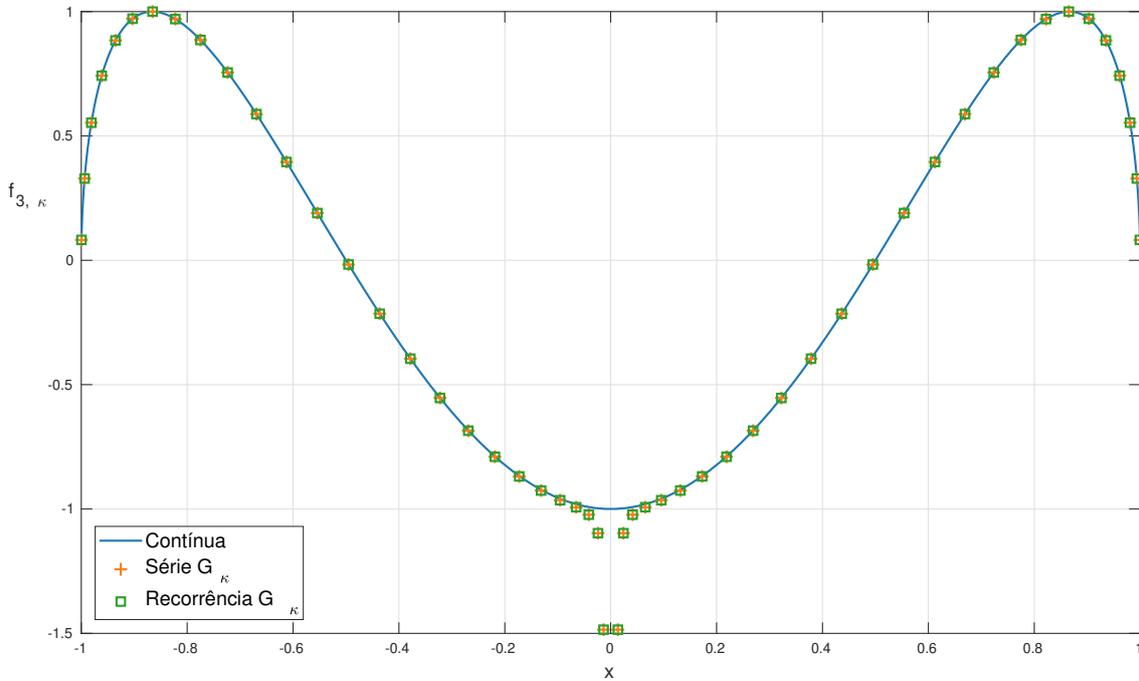


Figura 2.9: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_3(x)$  e  $\kappa = 0,01$

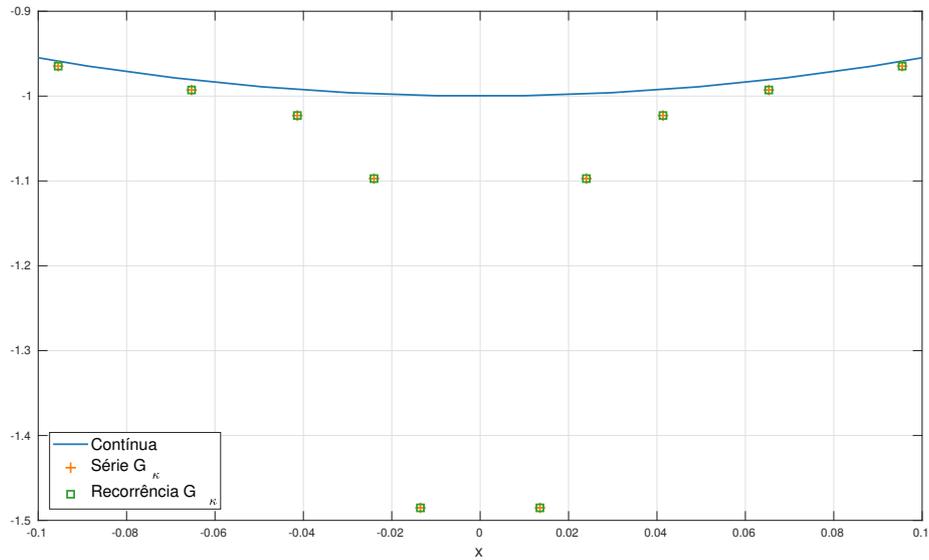


Figura 2.10: Ampliação das soluções próximo à origem para  $\tilde{\psi}(x) = T_3(x)$  e  $\kappa = 0,01$

- $\tilde{\psi}(x) = T_4(x)$  e  $\kappa = 0,01$ :

$x$	$(-1, 1)$	Série $G_\kappa$	Recorrência $G_\kappa$
-0.9996	-0.1116770738	-0.1116768949	-0.1116768949
-0.9938	-0.4326394802	-0.4326394345	-0.4326394345
-0.9809	-0.7047836286	-0.7047836013	-0.7047836013
-0.9614	-0.8980836784	-0.8980836579	-0.8980836579
-0.9353	-0.9922986111	-0.9922985938	-0.9922985938
-0.9031	-0.9792013640	-0.9792013482	-0.9792013482
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-0.1315	0.5033657535	0.5033679846	0.5033679846
-0.0955	0.3732602505	0.3732660834	0.3732660834
-0.0653	0.2584201218	0.2584385457	0.2584385457
-0.0414	0.1647582434	0.1648332995	0.1648332995
-0.0240	0.0959560852	0.0963913602	0.0963913602
-0.0135	0.0540489910	0.0583475875	0.0583475875

Tabela 2.6: Comparação das soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_4(x)$  e  $\kappa = 0,01$

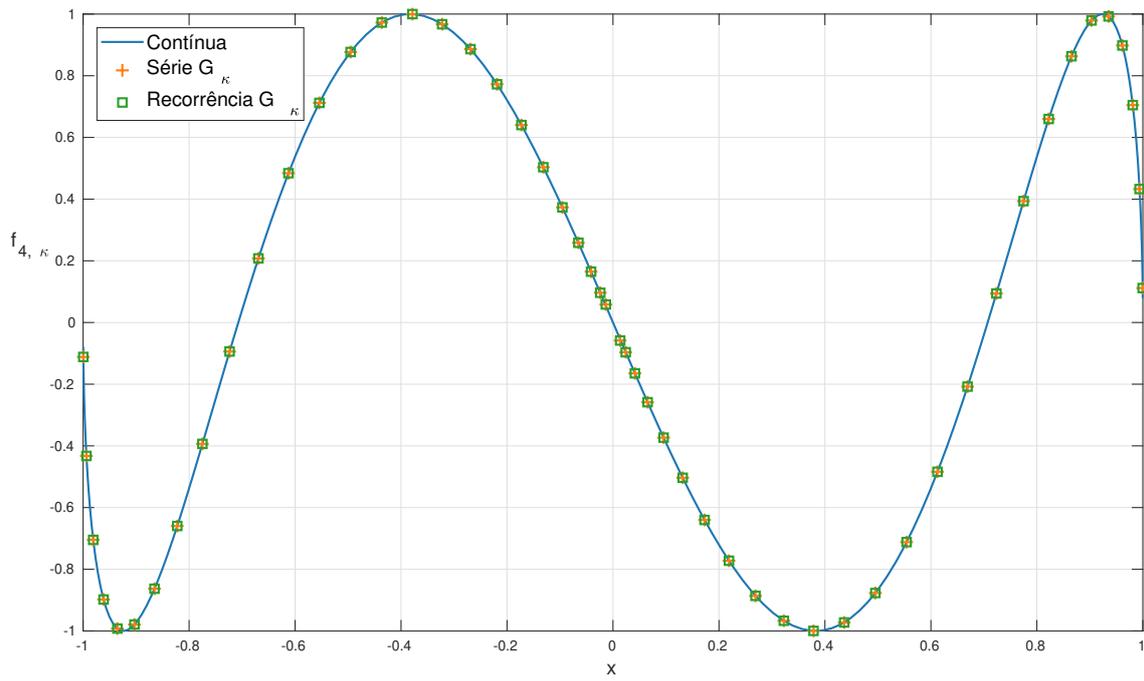


Figura 2.11: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_4(x)$  e  $\kappa = 0,01$

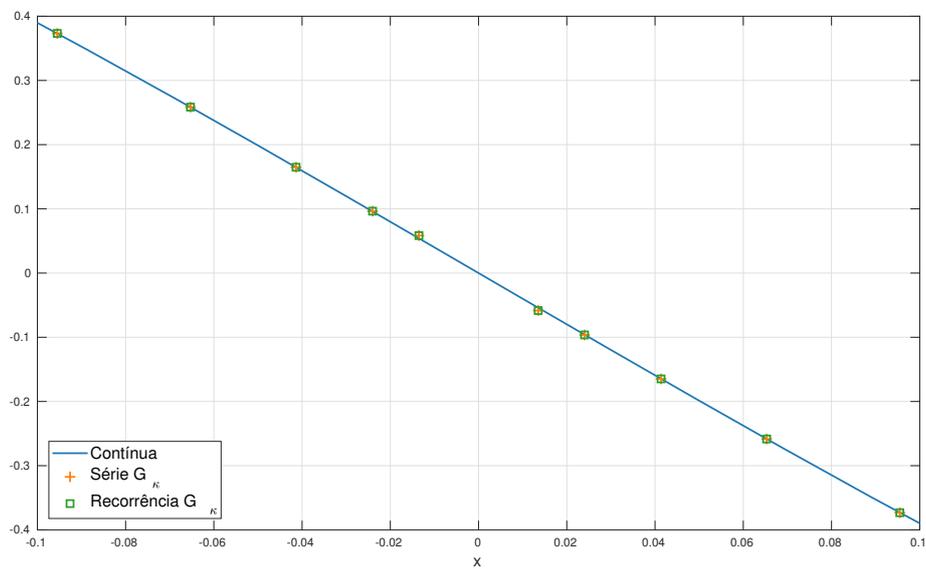


Figura 2.12: Ampliação das soluções próximo a origem para  $\tilde{\psi}(x) = T_4(x)$  e  $\kappa = 0,01$

- $\tilde{\psi}(x) = T_{40}(x)$  e  $\kappa = 0,01$ :

$x$	$(-1, 1)$	Série $G_\kappa$	Recorrência $G_\kappa$
-0.9996	-0.8997102398	0.5555953828	-0.8969343989
-0.9938	0.9717630570	1.7838370765	0.9724652595
-0.9809	-0.9994621084	-0.6768609949	-0.9990499129
-0.9614	0.9874880205	1.1005528343	0.9877893301
-0.9353	-0.9463920290	-0.9291411564	-0.9461458231
-0.9031	0.8905260115	0.8999148576	0.8907420371
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-0.1315	-0.8459207935	-0.8454114429	-0.8448022798
-0.0955	-0.6315999716	-0.6309802308	-0.6300183634
-0.0653	0.5035721771	0.5048759355	0.5060058529
-0.0414	0.9964461071	0.9990178138	1.0008147942
-0.0240	0.8197873135	0.8279134627	0.8307549349
-0.0135	0.5147820535	0.5650539862	0.5731785207

Tabela 2.7: Comparação das soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_{40}(x)$  e  $\kappa = 0,01$

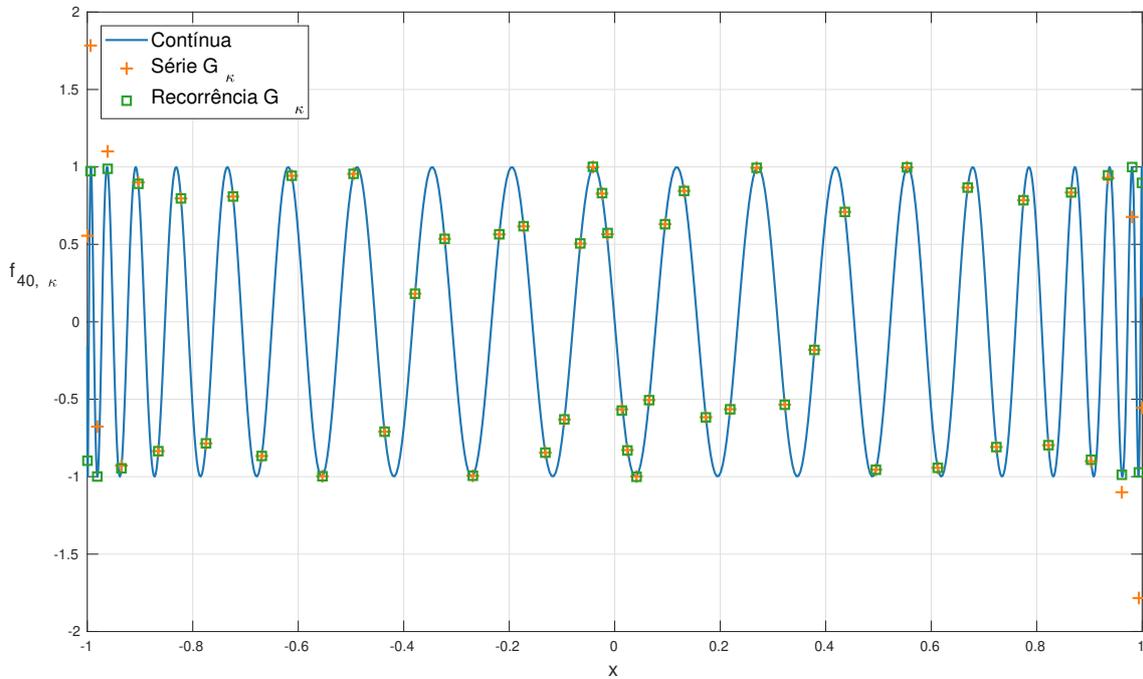


Figura 2.13: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_{40}(x)$  e  $\kappa = 0,01$

Como já mencionado anteriormente, a diferença entre as soluções nos intervalos  $(-1, 1)$  e  $G_\kappa$  para os graus do polinômio  $n = 0, 1$  e  $2$  está relacionada à escolha das constantes  $\tilde{C}_{1,\kappa}$  e  $\tilde{C}_{2,\kappa}$  nulas em  $\tilde{f}_\kappa$ . As figuras 2.14 – 2.16 mostram que um ajuste adequado nessas constantes modifica o comportamento da solução  $\tilde{f}_{n,\kappa}$  nas extremidades  $x = \pm\kappa$  e  $x = \pm 1$ , além de melhorar a proximidade à solução  $f(x)$ . As escolhas de  $\tilde{C}_{1,\kappa}$  e  $\tilde{C}_{2,\kappa}$  são justificadas algebricamente.

Por exemplo, se tomarmos  $g(x) = T_0(x)$  em (2.27) temos

$$f(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} dt,$$

que resulta em

$$f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Por outro lado, de (2.9), temos

$$f_{0,\kappa}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R_\kappa(x)} [C_{1,\kappa} + C_{2,\kappa}x] + \frac{1}{R_\kappa(x)} \left( x^2 - \frac{(1+\kappa^2)}{2} \right), & x \in (-1, -\kappa) \\ -\frac{1}{\pi R_\kappa(x)} [C_{1,\kappa} + C_{2,\kappa}x] - \frac{1}{R_\kappa(x)} \left( x^2 - \frac{(1+\kappa^2)}{2} \right), & x \in (\kappa, 1) \end{cases}$$

Fazendo  $\kappa \rightarrow 0$  e tomando  $\tilde{C}_{1,0} = \frac{\pi}{2}$  e  $\tilde{C}_{2,0} = 0$ , obtemos

$$f_{0,0}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 0) \\ -\frac{x^2}{|x|\sqrt{1-x^2}}, & x \in (0, 1), \end{cases}$$

e, usando  $\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$  permite escrever

$$f_{0,0}(x) = \begin{cases} \frac{\text{sgn}(x)x}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 0] \\ -\frac{\text{sgn}(x)x}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in [0, 1). \end{cases}$$

Portanto,

$$f_{0,0} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

De modo geral, podemos escolher  $\tilde{C}_{1,\kappa}$  e  $\tilde{C}_{2,\kappa}$  comparando as soluções dos problemas contínuo e disjunto para um  $\kappa$  pequeno. Em outras palavras, isso é feito usando

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} f_{n,\kappa}(x) = f(x).$$

Esse procedimento gera  $\tilde{C}_{1,\kappa} = 0$ ,  $\tilde{C}_{2,\kappa} = -\frac{\pi}{2}$  e  $\tilde{C}_{1,\kappa} = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  para  $n = 1$  e  $n = 2$ , respectivamente. As Figuras 2.14, 2.15 e 2.16 mostram os resultados das soluções com as constantes não nulas. Em particular, é notável que as soluções sobre os intervalos disjuntos se aproximam mais da solução no intervalo contínuo nos pontos extremos  $x = \pm\kappa$  e  $x = \pm 1$ . Comparações entre as tabelas 2.2 e 2.8, por exemplo, deixa isso mais evidente.

- $\tilde{\psi}(x) = T_0(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  e  $\kappa = 0,01$ :

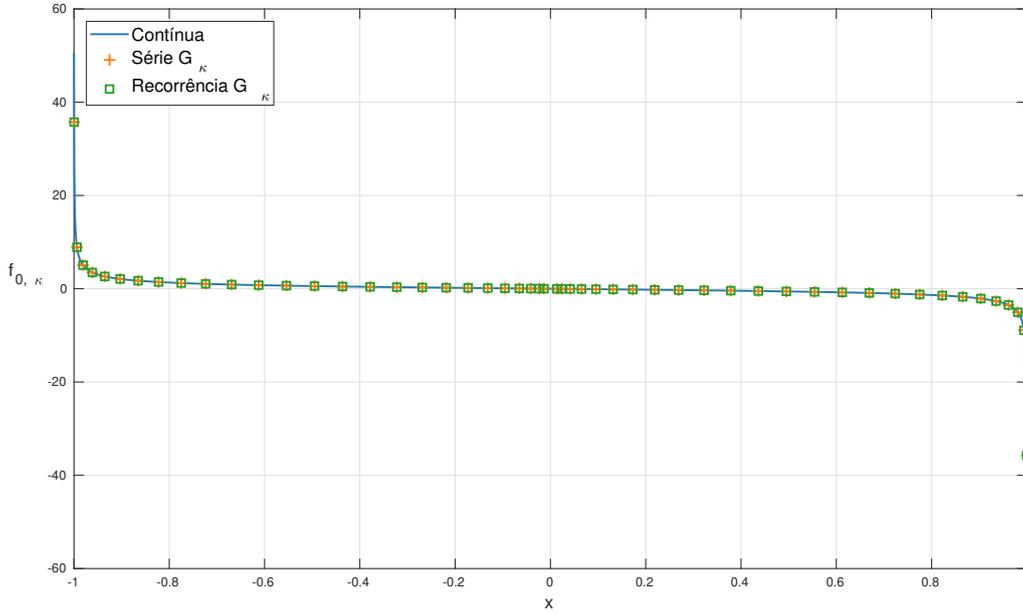


Figura 2.14: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_0(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  e  $\kappa = 0,01$

$x$	$(-1, 1)$	Série $G_\kappa$	Recorrência $G_\kappa$
-0.9996	35.7335148473	35.7335148920	35.7335148920
-0.9938	8.9028619780	8.9028619894	8.9028619894
-0.9809	5.0489738780	5.0489738848	5.0489738848
-0.9614	3.4927453222	3.4927453273	3.4927453273
-0.9353	2.6434728000	2.6434728043	2.6434728043
-0.9031	2.1034823278	2.1034823317	2.1034823317
⋮	⋮	⋮	⋮
-0.1315	0.1326421882	0.1326427461	0.1326427461
-0.0955	0.0959227831	0.0959242415	0.0959242415
-0.0653	0.0654397767	0.0654443834	0.0654443834
-0.0414	0.0414018565	0.0414206234	0.0414206234
-0.0240	0.0240306122	0.0241394476	0.0241394476
-0.0135	0.0135196589	0.0145944850	0.0145944850

Tabela 2.8: Comparação das soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_0(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  e  $\kappa = 0,01$

- $\tilde{\psi}(x) = T_1(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = 0$ ,  $\tilde{C}_{2,\kappa} = -\frac{\pi}{2}$  e  $\kappa = 0,01$ :

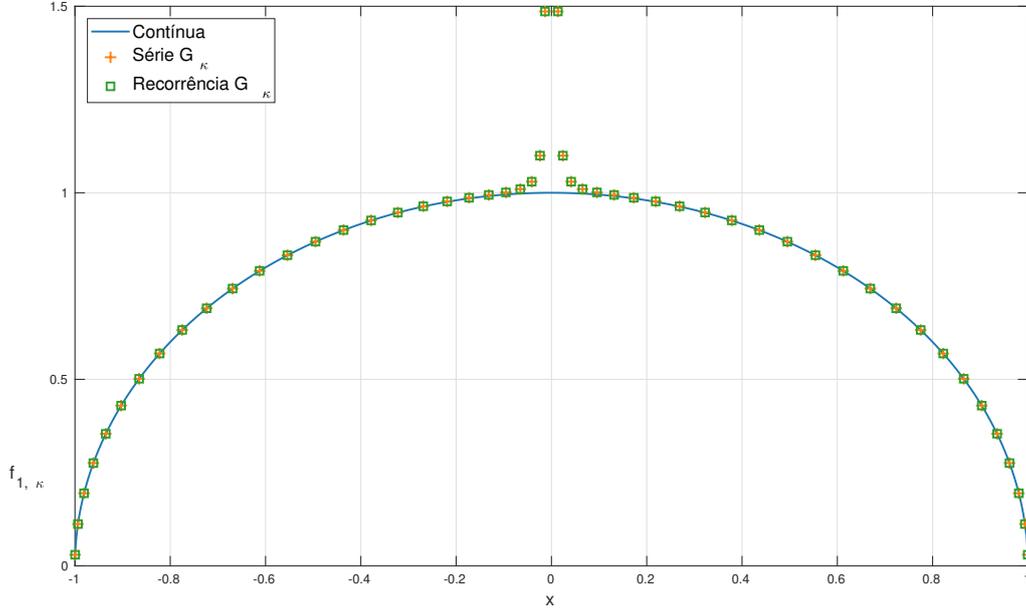


Figura 2.15: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_1(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = 0$ ,  $\tilde{C}_{2,\kappa} = -\frac{\pi}{2}$  e  $\kappa = 0,01$

$x$	$(-1, 1)$	Série $G_\kappa$	Recorrência $G_\kappa$
-0.9996	0.0279739806	0.0297628452	0.0297628452
-0.9938	0.1116214984	0.1120751154	0.1120751154
-0.9809	0.1942859978	0.1945534599	0.1945534599
-0.9614	0.2752485536	0.2754451092	0.2754451092
-0.9353	0.3538199961	0.3539815434	0.3539815434
-0.9031	0.4293531198	0.4294959031	0.4294959031
⋮	⋮	⋮	⋮
-0.1315	0.9913174290	0.9942472862	0.9942472862
-0.0955	0.9954309165	1.0009857730	1.0009857730
-0.0653	0.9978656704	1.0098270491	1.0098270491
-0.0414	0.9991440434	1.0297354572	1.0297354572
-0.0240	0.9997113898	1.0995482067	1.0995482067
-0.0135	0.9999086219	1.4860380127	1.4860380127

Tabela 2.9: Comparação das soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_1(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = 0$ ,  $\tilde{C}_{2,\kappa} = -\frac{\pi}{2}$  e  $\kappa = 0,01$

- $\tilde{\psi}(x) = T_2(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  e  $\kappa = 0,01$ :

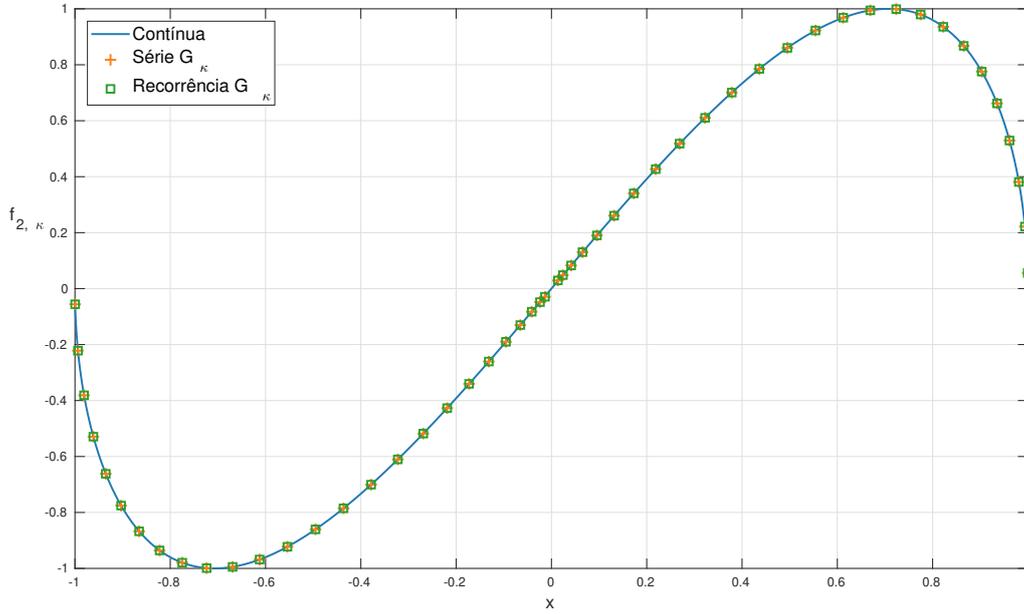


Figura 2.16: Soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_2(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  e  $\kappa = 0,01$

$x$	$(-1, 1)$	Série $G_{\kappa}$	Recorrência $G_{\kappa}$
-0.9996	-0.0559260661	-0.0559261556	-0.0559261556
-0.9938	-0.2218479054	-0.2218479283	-0.2218479283
-0.9809	-0.3811677281	-0.3811677417	-0.3811677417
-0.9614	-0.5292331095	-0.5292331197	-0.5292331197
-0.9353	-0.6618652633	-0.6618652719	-0.6618652719
-0.9031	-0.7755291193	-0.7755291272	-0.7755291272
⋮	⋮	⋮	⋮
-0.1315	-0.2606976746	-0.2606987903	-0.2606987903
-0.0955	-0.1900964544	-0.1900993712	-0.1900993712
-0.0653	-0.1303214695	-0.1303306824	-0.1303306824
-0.0414	-0.0826620210	-0.0826995528	-0.0826995528
-0.0240	-0.0480334864	-0.0482511462	-0.0482511462
-0.0135	-0.0270343765	-0.0291839106	-0.0291839106

Tabela 2.10: Comparação das soluções para  $\tilde{\psi}(x) = T_2(x)$ ,  $\tilde{C}_{1,\kappa} = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\tilde{C}_{2,\kappa} = 0$  e  $\kappa = 0,01$

### 3 EQUAÇÃO INTEGRAL DE HADAMARD PARA DOIS INTERVALOS DISJUNTOS

Neste capítulo, investigamos uma solução analítica alternativa da equação integral do tipo Hadamard, ou equação integral hipersingular (EIH), no intervalo disjunto  $G_\kappa = (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1)$ . Além do mais, como estamos interessados em propor um método espectral para a EIH generalizada, necessitamos trabalhar com polinômios ortogonais para a construção do método, portanto, particularmente, examinaremos soluções quando a função de entrada é um polinômio de Chebyshev do primeiro tipo ( $T_n(x)$ ) ou do segundo tipo ( $U_n(x)$ ).

#### 3.1 A equação integral de Hadamard sobre $G_\kappa$

Considere a equação integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-\kappa} \frac{f_\kappa(t)}{(x-t)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\kappa}^1 \frac{f_\kappa(t)}{(x-t)^2} dt = \psi(x), \quad x \in G_\kappa. \quad (3.1)$$

em que  $f_\kappa(x) \in C^{1,\alpha}(G_\kappa)$  e  $\psi \in C^{0,\alpha}(G_\kappa)$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Com condições de fronteira

$$f_\kappa(\pm 1) = f_\kappa(\pm \kappa) = 0 \quad (3.2)$$

e integral definida no sentido da *Parte Finita de Hadamard*<sup>1</sup>.

Sob as condições de fronteira (3.2), Dutta e Banerjea [6] apresentaram uma solução para (3.1) ao resolver a equação equivalente

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-\kappa} \frac{f'_\kappa(t)}{x-t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\kappa}^1 \frac{f'_\kappa(t)}{x-t} dt = -\psi(x), \quad x \in G_\kappa. \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>Uma integral é interpretada no sentido de *parte finita de Hadamard* de ordem 2 quando

$$\int_a^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^2} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^2} dt + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^2} dt - \frac{\varphi(x+\varepsilon) + \varphi(x-\varepsilon)}{\varepsilon} \right],$$

em que  $a < t < b$  e  $\varphi$  tem derivada Hölder contínua, i.e.,  $\varphi \in C^{1,\alpha}(a, b)$  (cf. [14]).

Note que (3.3) corresponde a equação integral do tipo Cauchy, já estudada no capítulo anterior, cuja solução foi obtida por Tricomi [23], a saber,

$$f'_\kappa(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R_\kappa(x)} [C_{1,\kappa} + C_{2,\kappa}x + \Psi_\kappa(x)] , & x \in (-1, -\kappa) \\ -\frac{1}{\pi R_\kappa(x)} [C_{1,\kappa} + C_{2,\kappa}x + \Psi_\kappa(x)] , & x \in (\kappa, 1), \end{cases} \quad (3.4)$$

em que

$$\Psi_\kappa(x) = \int_{-1}^{-\kappa} \frac{\psi(t)R_\kappa(t)}{x-t} dt - \int_{\kappa}^1 \frac{\psi(t)R_\kappa(t)}{x-t} dt ,$$

$C_{1,\kappa}$  e  $C_{2,\kappa}$  são constantes arbitrárias e

$$R_\kappa(x) = \sqrt{(1-x^2)(x^2-\kappa^2)} , \quad x \in G_\kappa .$$

Ao integrarmos (3.4) com respeito a  $x$ , obtemos

$$f_\kappa(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{1}{R_\kappa(u)} [C_{1,\kappa} + C_{2,\kappa}u + \Psi_\kappa(u)] du + k_1 , & x \in (-1, -\kappa) \\ \frac{1}{\pi} \int_x^1 \frac{1}{R_\kappa(u)} [C_{1,\kappa} + C_{2,\kappa}u + \Psi_\kappa(u)] du + k_2 , & x \in (\kappa, 1), \end{cases} \quad (3.5)$$

sendo  $k_1$  e  $k_2$  duas constantes arbitrárias.

Impondo as condições de fronteira  $f_\kappa(\pm 1) = 0$  a (3.5) obtemos

$$k_1 = k_2 = 0,$$

enquanto que as condições  $f_\kappa(\pm \kappa) = 0$  fornecem

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-\kappa} \frac{1}{R_\kappa(u)} [C_{1,\kappa} + C_{2,\kappa}u + \Psi_\kappa(u)] du &= 0, \\ \int_{\kappa}^1 \frac{1}{R_\kappa(u)} [C_{1,\kappa} + C_{2,\kappa}u + \Psi_\kappa(u)] du &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Do sistema (3.6), obtém-se as constantes  $C_{1,\kappa}$  e  $C_{2,\kappa}$  dadas por:

$$C_{1,\kappa} = \frac{P_1(\kappa)}{F(q)} \quad \text{e} \quad C_{2,\kappa} = 0,$$

no qual

$$P_1(\kappa) = \int_{\kappa}^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \int_{\kappa}^1 \frac{tR_{\kappa}(t)}{u^2 - t^2} (\psi(-t) + \psi(t)) dt du, \quad (3.7)$$

e

$$F(q) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-q^2x^2)}}, \quad q = \sqrt{1-\kappa^2}$$

é uma integral elíptica completa do primeiro tipo. Note que se  $\psi(t)$  é uma função ímpar,  $C_{1,\kappa} = 0$  (cf. [6]).

De modo geral, a solução da equação integral hipersingular (3.1) sujeita às condições (3.2), é dada por:

$$f_{\kappa}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{1}{R_{\kappa}(u)} [C_{1,\kappa} + \Psi_{\kappa}(u)] du, & x \in (-1, -\kappa), \\ \frac{1}{\pi} \int_x^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} [C_{1,\kappa} + \Psi_{\kappa}(u)] du, & x \in (\kappa, 1). \end{cases} \quad (3.8)$$

A investigação por uma solução analítica mais explícita para (3.8), nos conduziu ao estudo de integrais elípticas. Essas integrais especiais já foram muito estudadas e são bem conhecidas em aplicações de física e engenharia (cf. [4]) e nos permitirão escrever uma nova versão para (3.8). Sendo assim, na próxima seção definiremos e apresentamos algumas relações e resultados importantes para a continuidade deste trabalho.

## 3.2 Integrais elípticas: definições e relações fundamentais

**Definição 3.1.** A integral

$$I = \int R \left[ t, \sqrt{a_0t^4 + a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4} \right] dt \quad (3.9)$$

é chamada de *integral elíptica* se a equação

$$a_0t^4 + a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4 = 0, \quad (a_0 \text{ e } a_1 \text{ não são ambos nulos}),$$

não tem raízes múltiplas e se  $R$  é uma função racional de  $t$  e da raiz quadrada

$$\sqrt{a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4}$$

(cf. [4]).

### 3.2.1 Funções elípticas Jacobianas

Ao invés de investigar uma solução direta para a integral elíptica

$$u(y_1, k) \equiv \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = F(\varphi, k),$$

*Abel* e *Jacobi* resolveram atacar primeiro o problema envolvendo a inversa dessa integral (cf. [4]). Desse modo, funções inversas <sup>2</sup> foram definidas por  $y_1 = \sin \varphi = \operatorname{sn}(u, k)$  e  $\varphi = \operatorname{am}(u, k)$ , ou simplesmente  $y_1 = \operatorname{sn} u$  e  $\varphi = \operatorname{am} u$  quando não houver a necessidade de enfatizar o *módulo*<sup>3</sup>  $k$ ; Elas são lidas, respectivamente, como *seno amplitude* de  $u$  e *amplitude* de  $u$ . Outras duas funções podem ser definidas:

$$\operatorname{cn}(u, k) = \sqrt{1 - y_1^2} = \cos \varphi$$

e

$$\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 y_1^2} = \Delta \varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

em que  $\operatorname{sn}(0, k) = 0$ ,  $\operatorname{cn}(0, k) = 1$  e  $\operatorname{dn}(0, k) = 1$ .

**Definição 3.2.** O número  $k'$  é chamado de *módulo complementar* e se relaciona com o *módulo* por  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ .

---

<sup>2</sup>Isso tem uma analogia com funções trigonométricas. A função periódica simples  $y = \sin u$ , por exemplo, define a inversa da integral

$$u = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (y \leq 1).$$

<sup>3</sup>O *módulo* pode ser real ou imaginário em investigações teóricas. No entanto, nas aplicações de física e engenharia geralmente são empregados valores entre 0 e 1.

**Definição 3.3.** As funções  $\operatorname{sn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$  e  $\operatorname{dn} u$  são chamadas de *funções elípticas Jacobianas*, definidas como as inversas da integral elíptica do primeiro tipo e são univariadas para o argumento  $u$ .

**Definição 3.4.** Os quocientes e recíprocos de  $\operatorname{sn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$  e  $\operatorname{dn} u$  são representados na notação de Glaisher por:

$$\begin{aligned} \operatorname{ns} u &= \frac{1}{\operatorname{sn} u}; & \operatorname{tn} u &= \operatorname{sc} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}; & \operatorname{sd} u &= \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}; \\ \operatorname{nc} u &= \frac{1}{\operatorname{cn} u}; & \frac{1}{\operatorname{tn} u} &= \operatorname{cs} u = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}; & \operatorname{cd} u &= \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}; \\ \operatorname{nd} u &= \frac{1}{\operatorname{dn} u}; & \operatorname{ds} u &= \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}; & \operatorname{dc} u &= \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}; \end{aligned}$$

### 3.2.2 Formas canônicas das integrais elípticas

A equação (3.9) sempre pode ser escrita em termos de funções elementares <sup>4</sup> e das três integrais fundamentais seguintes:

1. *Integral elíptica do primeiro tipo:*

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} &= \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} \\ &= \int_0^{u_1} du = u_1 \equiv \operatorname{sn}^{-1}(y, k) \equiv F(\varphi, k), \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que  $y = \operatorname{sen} \varphi$  e  $\varphi = \operatorname{am} u_1$  (amplitude).

2. *Integral elíptica do segundo tipo:*

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta} d\theta = \int_0^{u_1} \operatorname{dn}^2 u du \\ &= E(u_1) \equiv E(\operatorname{am} u_1, k) \equiv E(\varphi, k), \end{aligned} \quad (3.11)$$

em que  $\operatorname{dn} u = \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}$  (dnoidal).

---

<sup>4</sup>Funções elementares são algébricas, trigonométricas, inversas trigonométricas, logarítmicas e exponenciais.

3. *Integral elíptica do terceiro tipo:*

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{dt}{(1-\alpha^2 t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} &= \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta)\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \\ &= \int_0^{u_1} \frac{du}{1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} = \Pi(u_1, \alpha^2) \\ &\equiv \Pi(\operatorname{am} u_1, \alpha^2, k) \equiv \Pi(\varphi, \alpha^2, k), \quad (3.12) \end{aligned}$$

em que  $-\infty < \alpha < \infty$ .

**Notação 3.1.** *A segunda forma, nos lados direitos de (3.10), (3.11) e (3.12), em cada uma das integrais acima é escrita na notação de Legendre, enquanto que a primeira e terceira forma estão na notação de Jacobi.*

Aqui, vamos nos focar principalmente nas integrais elíptica do primeiro e segundo tipo, pois elas serão importantes na construção de uma solução analítica para (3.8).

**Definição 3.5.** A variável limite  $y$  ou  $\varphi$  que aparece nas integrais (3.10)–(3.12) é chamada de *argumento*.

O *argumento* pode ser real ou complexo, mas é usualmente empregado no intervalo  $0 < y \leq 1$  ou  $0 < \varphi \leq \pi/2$ .

**Definição 3.6.** Quando  $y = 1$  ou  $\varphi = \pi/2$ , as integrais (3.10)–(3.12) são ditas *completas*.

A integral elíptica do primeiro tipo pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \\ &= \int_0^K du = F(\pi/2, k) = F(k) \equiv K(k) \equiv K. \end{aligned}$$

### 3.2.3 Integrando envolvendo $\sqrt{a^2 - t^2}$ e $\sqrt{t^2 - b^2}$

Integrais elípticas, a depender do tipo de integrando, podem ser convertidas a forma canônica, desde estas atendam alguns critérios. Por exemplo, para:

- ( $a > y \geq b > 0$ )

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 u &= \frac{a^2 - t^2}{a^2 - b^2}, & k^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2}, & g &= \frac{1}{a}, \\ \varphi = \operatorname{am} u_1 &= \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{a^2 - b^2}}, & \operatorname{sn} u_1 &= \operatorname{sen} \varphi. \end{aligned}$$

$$\int_y^a \frac{dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)(t^2 - b^2)}} = g \int_0^{u_1} du = gu_1 = g \operatorname{sn}^{-1}(\operatorname{sen} \varphi, k) \quad (3.13)$$

$$= gF(\varphi, k).$$

(cf. [4, eq. 218.00 ])

$$\int_y^a \frac{t^{2m} dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)(t^2 - b^2)}} = ga^{2m} \int_0^{u_1} \operatorname{dn}^{2m} u du. \quad (3.14)$$

(cf. [4, eq. 218.06 ])

- ( $a \geq y > b > 0$ )

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 u &= \frac{a^2(t^2 - b^2)}{t^2(a^2 - b^2)}, & k^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2}, & g &= \frac{1}{a}, \\ \varphi = \operatorname{am} u_1 &= \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\frac{a^2(y^2 - b^2)}{y^2(a^2 - b^2)}}, & \operatorname{sn} u_1 &= \operatorname{sen} \varphi. \end{aligned}$$

$$\int_b^y \frac{dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)(t^2 - b^2)}} = g \int_0^{u_1} du = gu_1 = g \operatorname{sn}^{-1}(\operatorname{sen} \varphi, k)$$

$$= gF(\varphi, k). \quad (\text{cf. [4, eq. 217.00]})$$

$$\int_b^y \frac{t^{2m} dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)(t^2 - b^2)}} = b^{2m} g \int_0^{u_1} \text{nd}^{2m} u \, du.$$

$$(\text{cf. [4, eq. 217.05]})$$

### 3.2.4 Fórmulas de recorrência para integrais de funções elípticas

$$\begin{aligned} G_m &= - \int \frac{t^m dt}{\sqrt{(1 - t^2)(t^2 - k'^2)}} = \int (1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi)^{(m-1)/2} d\varphi \\ &= \int \text{dn}^m u \, du, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$(t = \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi} = \text{dn} u) \quad (\text{cf. [4, eqs. 314.00-3.15.16]})$$

$$G_0 = \int du = u = F(\varphi, k), \quad (\varphi = \text{am} u).$$

$$G_1 = \int \text{dn} u \, du = \text{am} u = \text{sen}^{-1}(\text{sn} u).$$

$$G_2 = \int \text{dn}^2 u \, du = E(u) = E(\varphi, k) \quad (E(u) = E(\varphi, k), \varphi = \text{am} u)$$

$$G_3 = \int \text{dn}^3 u \, du = \frac{1}{2} [(1 + k'^2) \text{am} u + k^2 \text{sn} u \text{cn} u].$$

$$G_4 = \int \text{dn}^4 u \, du = \frac{1}{3} [k^2 \text{sn} u \text{cn} u \text{dn} u - k'^2 u + 2(1 + k'^2)E(u)]$$

$$G_{2m+2} = \frac{k^2 \text{dn}^{2m-1} u \text{sn} u \text{cn} u + (1 - 2m)k'^2 G_{2m-2} + 2m(2 - k^2)G_{2m}}{2m + 1}$$

$$G_{2m+3} = \frac{k^2 \operatorname{dn}^{2m} u \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u - 2m k'^2 G_{2m-1} + (2m+1)(2-k^2) G_{2m+1}}{2(m+1)}$$

$$I_m = \int \frac{t^m dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2 t^2)}} = \int \frac{d\varphi}{((1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi))^{(m+1)/2}} = \int \operatorname{nd}^m u du,$$

$$(t = 1/\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = \operatorname{nd} u) \quad (\text{cf. [4, eqs. 315.00-3.15.06]})$$

$$I_0 = \int du = u = F(\varphi, k), \quad (\varphi = \operatorname{am} u)$$

$$I_1 = \int \operatorname{nd} u du = \frac{1}{k'} \tan^{-1} \left[ \frac{k' \operatorname{sn} u - \operatorname{cn} u}{k' \operatorname{sn} u + \operatorname{cn} u} \right]$$

$$I_2 = \int \operatorname{nd}^2 u du = \frac{1}{k'^2} [E(u) - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cd} u], \quad (E(u) = E(\varphi, k), \varphi = \operatorname{am} u)$$

$$I_3 = \int \operatorname{nd}^3 u du = \frac{1}{2k'^3} \left[ (2-k^2) \tan^{-1} \left( \frac{k' \operatorname{sn} u - \operatorname{cn} u}{k' \operatorname{sn} u + \operatorname{cn} u} \right) - k' k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{nd}^2 u \right]$$

$$I_4 = \int \operatorname{nd}^4 u du = \frac{1}{3k'^4} [2(2-k^2)E(u) - k'^2 u - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cd} u (k'^2 \operatorname{nd}^2 u + 4 - 2k^2)]$$

$$I_{2m+2} = \frac{2m(2-k^2)I_{2m} + (1-2m)I_{2m-2} - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{nd}^{2m+1} u}{(2m+1)k'^2}$$

$$I_{2m+3} = \frac{(2m+1)(2-k^2)I_{2m+1} - 2mI_{2m-1} - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{nd}^{2m+2} u}{2(m+1)k'^2}.$$

### 3.3 Solução analítica da equação integral de Hadamard sobre $G_\kappa$ em termos de integrais elípticas e funções elementares

Como já dito anteriormente, a investigação por uma solução analítica mais explícita para a equação integral hipersingular (3.1) nos fez perceber a possibi-

lidade de escrevê-la em termos de integrais elípticas. Essas integrais, além de estarem presentes em muitas aplicações de física e engenharia, já possuem uma teoria amplamente desenvolvida, além de rotinas computacionais implementadas e validadas em linguagens como *MatLab* e *C*. Desse modo, nesta seção, apresentaremos uma versão alternativa da solução da EIH (3.8) combinando a *parte principal* da integral de Cauchy, vista no capítulo 2, com resultados sobre integrais elípticas.

Tanto a solução (3.8) quanto a constante  $C_{1,\kappa}$  podem ser expressas em termos de integrais elípticas e da parte principal da integral de Cauchy. Vejamos a constante  $C_{1,\kappa}$  primeiramente.

Note que a integral interna em (3.7) é do tipo Cauchy, logo, pelo Lema 2.2.1, ela resulta na *parte principal* da expansão da densidade da integral (cf. apêndice C).

Daí, temos:

$$C_{1,\kappa} = \frac{\pi}{F(q)} \int_{\kappa}^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} du$$

sendo  $q = \sqrt{1 - \kappa^2}$  e  $F(q)$  uma integral elíptica do primeiro tipo completa.

Agora, olhando a solução (3.8), nota-se que seu primeiro termo também é uma integral elíptica do primeiro tipo. Logo, a reescrevemos abaixo de acordo com a paridade da função de entrada  $\psi(u)$  (cf. apêndice C). Segue que:

**Se  $\psi(u)$  é par:**

$$f_{\kappa}(x) = \frac{C_{1,\kappa}}{\pi} F(\varphi(|x|), q) - \int_{|x|}^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} du \quad \text{d}\mathfrak{A}.16)$$

$$x \in (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1).$$

sendo  $q = \sqrt{1 - \kappa^2}$ ,  $F(\varphi(x), q)$  uma integral elíptica do primeiro tipo e

$$\varphi(x) = \text{sen}^{-1} \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - \kappa^2}}.$$

Se  $\psi(u)$  é ímpar:

$$C_{1,\kappa} = C_{2,\kappa} = 0$$

e

$$f_\kappa(x) = -\text{sgn}(x) \int_{|x|}^1 \frac{u}{R_\kappa(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2-1)(u^2-\kappa^2)} \frac{\psi(u)}{u} \right\}_{u \rightarrow \infty} du, \quad (3.17)$$

$$x \in (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1).$$

### 3.3.1 Solução analítica para o caso $\psi(x) = T_n(x)$

Nesta seção, apresentamos uma solução particular da equação integral (3.1), quando a função de entrada é um polinômio de Chebyshev do primeiro tipo ( $\psi = T_n$ ). Mostraremos a possibilidade de escrever tanto a solução (3.8) da EIH quanto sua constante  $C_{1,\kappa}$  em termos de um série finita envolvendo *integrais elípticas*.

Dividimos em dois casos de acordo com a paridade do polinômio  $T_n$  (cf. apêndice C).

Se  $T_n(x)$  tem grau par:

$$C_{1,\kappa} = \frac{\pi}{F(q)} \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) I_{2(m-(l-1))} + t_{2l}^{m-l} \frac{s_\kappa^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} I_0 \right]$$

e

$$C_{2,\kappa} = 0,$$

A solução é dada por:

$$f_{2m,\kappa}(x) = \frac{C_{1,\kappa}}{\pi} F(\varphi(|x|), q) - \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) G_{2(m-(l-1))}(|x|) \right] -$$

$$- \left( \sum_{l=0}^m t_{2l}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right) G_0(|x|), \quad x \in (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1), \quad (3.18)$$

sendo  $\varphi(x) = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\kappa^2}}$ ,  $q = \sqrt{1-\kappa^2}$ ,  $s_{\kappa}(w) = \sqrt{(1-w)(1-\kappa^2 w)}$ ,  $m$  a parte inteira de  $n/2$  e  $t_i^j$  os coeficientes do polinômio  $T_n$ .  $I_p$  e  $G_p$  são umas das 12 integrais de funções elípticas de Jacobi definida na seção 3.2.4.

**Se  $T_n(x)$  tem grau ímpar:**

$$C_{1,\kappa} = C_{2,\kappa} = 0.$$

A solução é dada por:

$$\begin{aligned} f_{2m+1,\kappa}(x) = & - \operatorname{sgn}(x) \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) G_{2(m-(l-1))+1}(|x|) \right] \\ & - \operatorname{sgn}(x) \left( \sum_{l=0}^m t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right) G_1(|x|), \quad x \in (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1) \end{aligned} \quad (3.19)$$

no qual  $s_{\kappa}(w) = \sqrt{(1-w)(1-\kappa^2 w)}$ ,  $m$  é a parte inteira de  $n/2$ ,  $t_i^j$  são os coeficientes do polinômio de Chebyshev do primeiro tipo  $T_n$  e  $G_p$  é uma das 12 integrais de funções elípticas de Jacobi definida na seção 3.2.4.

### 3.3.2 Solução analítica para o caso $\psi(x) = U_n(x)$

Podemos utilizar ainda o polinômio de Chebyshev do segundo tipo  $U_n$  na função de entrada  $\psi$ , para isso laçamos mão de sua fórmula explícita (cf. [1])

$$U_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} u_{n-2k}^k x^{n-2k}$$

em que  $\lfloor n/2 \rfloor$  é a parte inteira da divisão  $n/2$  e  $u_{n-2k}^k$  são os coeficientes do polinômio calculados por

$$u_{n-2k}^k = (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}.$$

Separando os polinômios em pares e ímpares temos, respectivamente:

$$U_{2m} = \sum_{l=0}^m u_{2l}^{m-l} x^{2l}$$

e

$$U_{2m+1} = \sum_{l=0}^m u_{2l+1}^{m-l} x^{2l+1}.$$

Veja que os polinômios  $U_n$  e  $T_n$  são diferenciados apenas por seus coeficientes, isto quer dizer que o processo de obtenção da solução quando  $\psi = U_n$  será análogo ao mostrado no Apêndice C para  $\psi = T_n$ . Logo, é possível aproveitar as fórmulas obtidas na seção anterior, trocando apenas os coeficientes  $t_i^j$  por  $u_i^j$ . Portanto, obtemos as soluções:

**Se  $U_n(x)$  tem grau par:**

$$C_{1,\kappa} = \frac{\pi}{F(q)} \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m u_{2k}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) I_{2(m-(l-1))} + u_{2l}^{m-l} \frac{s_\kappa^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} I_0 \right]$$

e

$$C_{2,\kappa} = 0,$$

A solução é dada por:

$$\begin{aligned} f_{2m,\kappa}(x) = & \frac{C_{1,\kappa}}{\pi} F(\varphi(|x|), q) - \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m u_{2k}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) G_{2(m-(l-1))}(|x|) \right] - \\ & - \left( \sum_{l=0}^m u_{2l}^{m-l} \frac{s_\kappa^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right) G_0(|x|), \quad x \in (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1), \end{aligned} \quad (3.20)$$

sendo  $\varphi(x) = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\kappa^2}}$ ,  $q = \sqrt{1-\kappa^2}$ ,  $s_\kappa(w) = \sqrt{(1-w)(1-\kappa^2 w)}$ ,  $m$  a parte inteira de  $n/2$  e  $u_i^j$  os coeficientes do polinômio  $U_n$ .  $I_p$  e  $G_p$  são umas das 12 integrais de funções elípticas de Jacobi definida na seção 3.2.4.

Se  $U_n(x)$  tem grau ímpar:

$$C_{1,\kappa} = C_{2,\kappa} = 0.$$

A solução é dada por:

$$\begin{aligned} f_{2m+1,\kappa}(x) = & -\operatorname{sgn}(x) \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m u_{2k+1}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) G_{2(m-(l-1))+1}(|x|) \right] \\ & - \operatorname{sgn}(x) \left( \sum_{l=0}^m u_{2l+1}^{m-l} \frac{s_\kappa^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right) G_1(|x|), \quad x \in (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

no qual  $s_\kappa(w) = \sqrt{(1-w)(1-\kappa^2w)}$ ,  $m$  é a parte inteira de  $n/2$ ,  $u_i^j$  são os coeficientes do polinômio de Chebyshev do primeiro tipo  $U_n$  e  $G_p$  é uma das 12 integrais de funções elípticas de Jacobi definida na seção 3.2.4.

### 3.4 Método de avaliação numérica direta da solução da equação integral de Hadamard sobre $G_\kappa$

Além de podermos avaliar a solução da equação integral hipersingular pela expressões analíticas das seções 3.3.1 e 3.3.2, para critério de validação, podemos também fazer isto de uma forma mais direta e *numérica*, usando as soluções (3.8) de [6], reescrita abaixo:

$$f_\kappa(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{1}{R_\kappa(u)} [C_{1,\kappa} + \Psi_\kappa(u)] du, & x \in (-1, -\kappa), \\ \frac{1}{\pi} \int_x^1 \frac{1}{R_\kappa(u)} [C_{1,\kappa} + \Psi_\kappa(u)] du, & x \in (\kappa, 1), \end{cases} \quad (3.22)$$

em que

$$\Psi_\kappa(x) = \int_{-1}^{-\kappa} \frac{\psi(t)R_\kappa(t)}{x-t} dt - \int_{\kappa}^1 \frac{\psi(t)R_\kappa(t)}{x-t} dt,$$

$C_{1,\kappa}$  é uma constante calculada por

$$C_{1,\kappa} = \frac{\pi}{F(q)} \int_{\kappa}^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} du$$

e

$$R_{\kappa}(x) = \sqrt{(1 - x^2)(x^2 - \kappa^2)}, \quad x \in G_{\kappa}.$$

Substituindo  $\Psi_{\kappa}(x)$  em (3.22), tem-se:

$$f_{\kappa}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-1}^x \frac{C_{1,\kappa}}{R_{\kappa}(u)} du + \int_{-1}^x \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \left( \int_{-1}^{-\kappa} \frac{\psi(t)R_{\kappa}(t)}{u-t} dt - \int_{\kappa}^1 \frac{\psi(t)R_{\kappa}(t)}{u-t} dt \right) du \right] \\ \quad x \in (-1, -\kappa), \\ \\ \frac{1}{\pi} \left[ \int_x^1 \frac{C_{1,\kappa}}{R_{\kappa}(u)} du + \int_x^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \left( \int_{-1}^{-\kappa} \frac{\psi(t)R_{\kappa}(t)}{u-t} dt - \int_{\kappa}^1 \frac{\psi(t)R_{\kappa}(t)}{u-t} dt \right) du \right] \\ \quad x \in (\kappa, 1). \end{cases}$$

$$f_{\kappa}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-1}^x \frac{C_{1,\kappa}}{R_{\kappa}(u)} du + \int_{-1}^x \int_{-1}^{-\kappa} \frac{\psi(t)R_{\kappa}(t)}{(u-t)R_{\kappa}(u)} dt du \right. \\ \quad \left. - \int_{-1}^x \int_{\kappa}^1 \frac{\psi(t)R_{\kappa}(t)}{(u-t)R_{\kappa}(u)} dt du \right] \quad , x \in (-1, -\kappa), \\ \\ \frac{1}{\pi} \left[ \int_x^1 \frac{C_{1,\kappa}}{R_{\kappa}(u)} du + \int_x^1 \int_{-1}^{-\kappa} \frac{\psi(t)R_{\kappa}(t)}{(u-t)R_{\kappa}(u)} dt du \right. \\ \quad \left. - \int_x^1 \int_{\kappa}^1 \frac{\psi(t)R_{\kappa}(t)}{(u-t)R_{\kappa}(u)} dt du \right] \quad , x \in (\kappa, 1) \end{cases}$$

$$f_\kappa(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-1}^x \frac{C_{1,\kappa}}{R_\kappa(u)} du + \int_{-1}^x \int_{-1}^{-\kappa} \frac{\psi(t)R_\kappa(t)}{(u-t)\sqrt{(1-u)(u^2-\kappa^2)}} dt \frac{du}{\sqrt{1+u}} \right. \\ \left. - \int_{-1}^x \int_\kappa^1 \frac{\psi(t)R_\kappa(t)}{(u-t)R_\kappa(u)} dt du \right], & x \in (-1, -\kappa), \\ \frac{1}{\pi} \left[ \int_x^1 \frac{C_{1,\kappa}}{R_\kappa(u)} du + \int_x^1 \int_{-1}^{-\kappa} \frac{\psi(t)R_\kappa(t)}{(u-t)R_\kappa(u)} dt du \right. \\ \left. - \int_x^1 \int_\kappa^1 \frac{\psi(t)R_\kappa(t)}{(u-t)\sqrt{(1+u)(u^2-\kappa^2)}} dt \frac{du}{\sqrt{1-u}} \right], & x \in (\kappa, 1). \end{cases} \quad (3.23)$$

A maior dificuldade encontrada ao avaliar numericamente a solução (3.23) foram as integrais duplas, pois dependendo do intervalo no qual  $x$  pertence, a integral interna será do tipo Cauchy. Então, utilizamos uma combinação de quadraturas numéricas, que nos permitiu contornar um pouco esse problema. Para as integrais de Cauchy utilizamos uma quadratura numérica própria desenvolvida por Hui e Shia [9], já à integral externa foi aplicada a quadratura de Gauss-Jacobi para  $x \in (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1)$ , os pesos em evidência sob os diferenciais  $du$  indicam onde aplicamos essa combinação. Nas demais integrais não tivemos outros problemas, uma quadratura numérica Gaussiana para cada tipo de integral (simples ou dupla) foi suficiente para resolvê-las.

### 3.5 Solução analítica da equação integral hipersingular sobre $(-1, 1)$

De modo a validar as soluções apresentadas para os casos particulares  $\psi(x) = T_n(x)$  e  $\psi(x) = U_n(x)$ , iremos, nesta seção, comparar as soluções (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21) a uma versão de (3.8) calculada numericamente. Além disso, para cada função de entrada, avaliaremos seu comportamento em relação a solução

da EIH definida sobre o intervalo  $(-1, 1)$ , ou seja, a solução de

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{(x-t)^2} dt = \psi(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (3.24)$$

em que  $f(t)$  é Hölder contínua, sujeita as condições de fronteira  $f(\pm 1) = 0$  (c.f. [19]).

Primeiro, vamos determinar uma solução para (3.24) quando temos a função de entrada  $T_n(x)$ , i.e.,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{(x-t)^2} dt = T_n(x), \quad x \in (-1, 1). \quad (3.25)$$

Da conhecida relação

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{U_n(t) \sqrt{1-t^2}}{(x-t)^2} dt = -(n+1)U_n(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (3.26)$$

para  $n \geq 0$ , em que  $U_n$  é o polinômio de Chebyshev do segundo tipo (cf. [19] e [24]), obtemos

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 -\frac{U_n(t) \sqrt{1-t^2}}{n+1} \frac{1}{(x-t)^2} dt = U_n(x), \quad \text{para } n \geq 0 \text{ e } x \in (-1, 1).$$

e

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 -\frac{U_{n-2}(t) \sqrt{1-t^2}}{n-1} \frac{1}{(x-t)^2} dt = U_{n-2}(x), \quad \text{para } n \geq 2 \text{ e } x \in (-1, 1).$$

Subtraindo as equações anteriores e aplicando  $T_n(t) = \frac{U_n(x) - U_{n-2}(x)}{2}$

(cf. [1]), temos:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( -\frac{U_n(t)}{n+1} + \frac{U_{n-2}(t)}{n-1} \right) \frac{\sqrt{1-t^2}}{(x-t)^2} dt = U_n(x) - U_{n-2}(x)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left( -\frac{U_n(t)}{n+1} + \frac{U_{n-2}(t)}{n-1} \right) \frac{\sqrt{1-t^2}}{(x-t)^2} dt = T_n(x), \quad \text{para } n \geq 2 \text{ e } x \in (-1, 1).$$

Portanto, a solução de (3.25) será dada por

$$f(t) = \frac{1}{2} \left( -\frac{U_n(t)}{n+1} + \frac{U_{n-2}(t)}{n-1} \right) \sqrt{1-t^2}, \quad \text{para } n \geq 2 \text{ e } x \in (-1, 1).$$

Para  $n = 0$  e  $n = 1$ , temos, respectivamente:

$$f(t) = -\sqrt{1-t^2}$$

e

$$f(t) = -\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}.$$

No caso  $\psi(x) = U_n(x)$  é imediato de (3.26) que

$$f(t) = -\frac{U_n(t)}{n+1}\sqrt{1-t^2}.$$

### 3.6 Resultados numéricos para $\psi(x) = T_n(x)$ e $\psi(x) = U_n(x)$

Nesta subseção, buscamos validar as soluções da EIH em  $G_\kappa$ , comparando os diferentes métodos adotados (série e numérica) e a solução contínua  $f$  da equação EIH sobre  $(-1, 1)$ . Nas Figuras 3.1–3.5 temos os gráficos das soluções numérica (3.23) e as séries (3.18)–(3.19) para  $\psi(x) = T_n(x)$  e  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , eles deixam claro a coincidência entre as soluções, além disso,  $f$  indica a tendência das soluções em  $G_\kappa$ . O mesmo tipo de comportamento é notado nos gráficos das Figuras 3.6–3.11 referente soluções (3.20) e (3.21) para  $\psi(x) = U_n(x)$ .

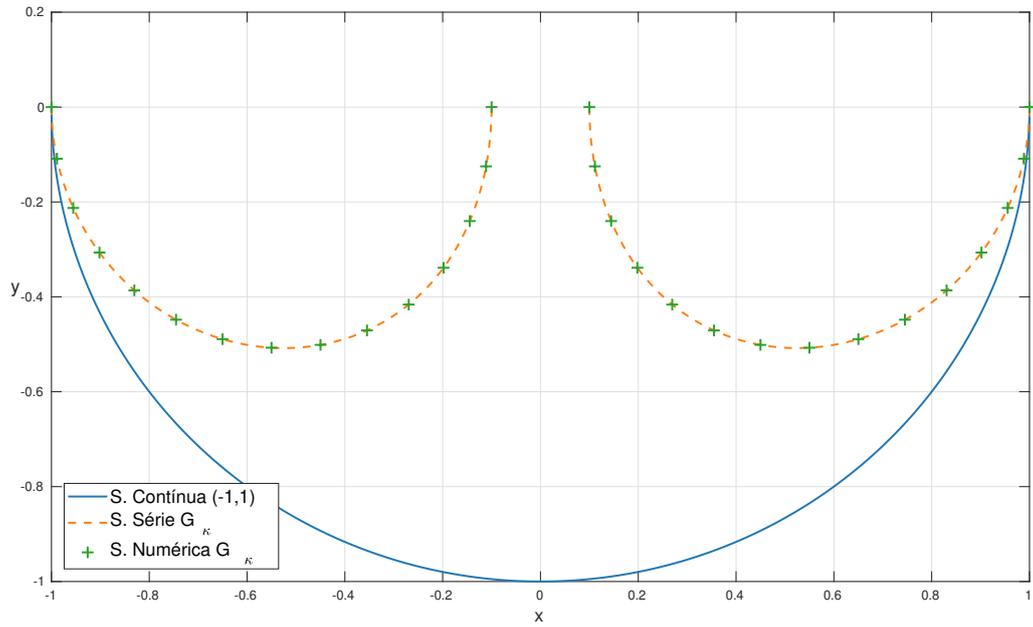


Figura 3.1: Soluções da EIH para  $\kappa = 0, 1$  e  $\psi(x) = T_0(x)$ .

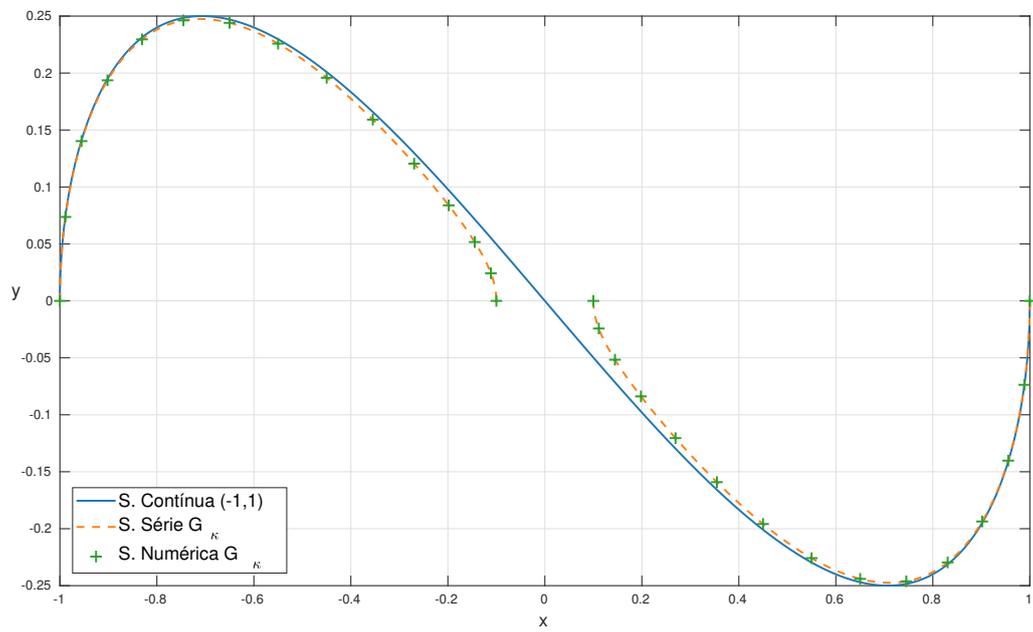


Figura 3.2: Soluções da EIH para  $\kappa = 0, 1$  e  $\psi(x) = T_1(x)$ .

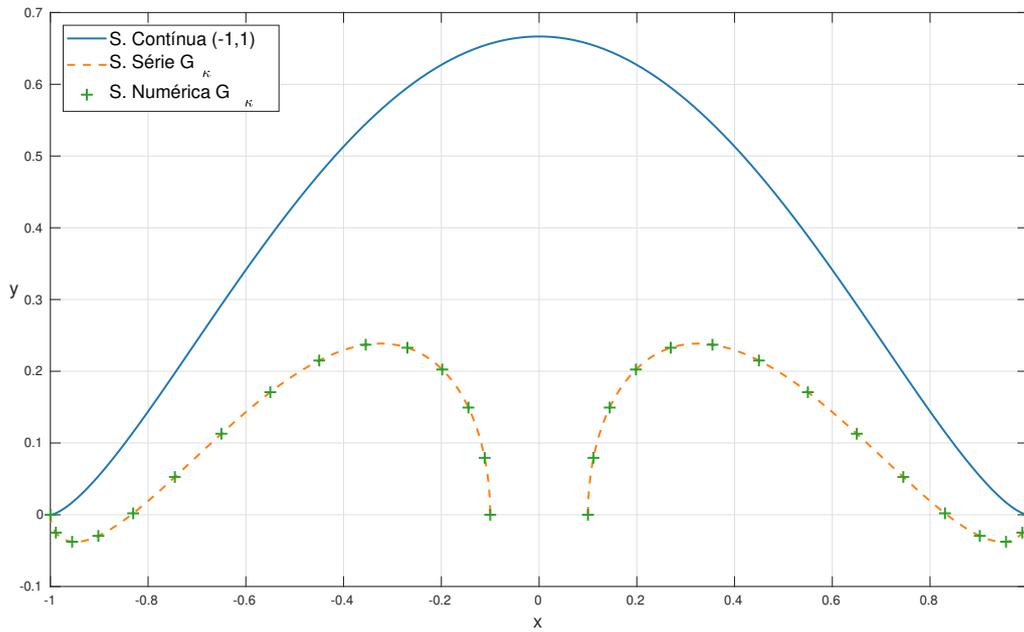


Figura 3.3: Soluções da EIH para  $\kappa = 0, 1$  e  $\psi(x) = T_2(x)$ .

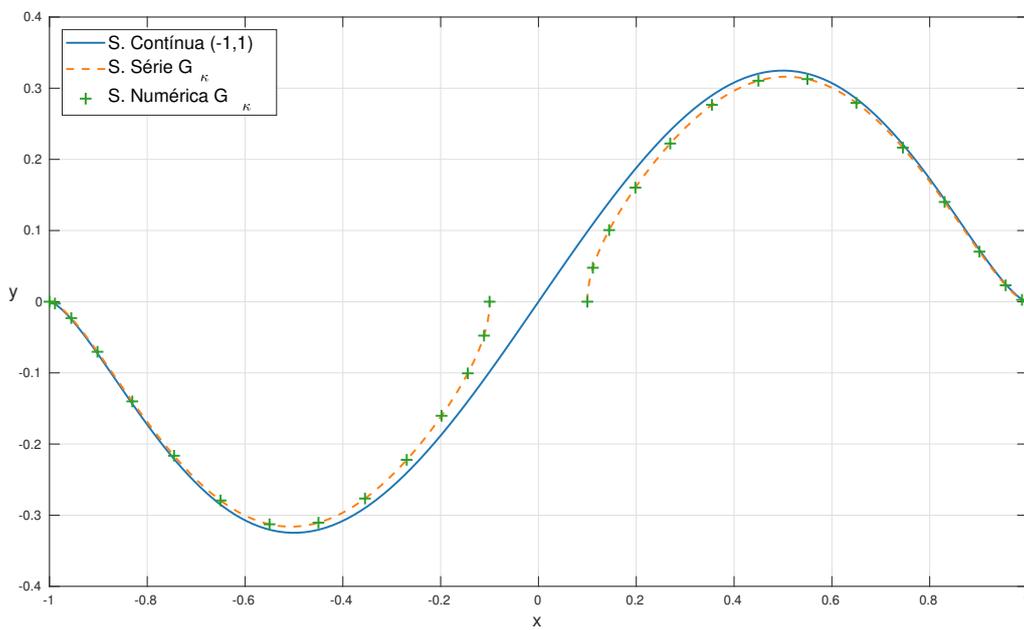


Figura 3.4: Soluções da EIH para  $\kappa = 0, 1$  e  $\psi(x) = T_3(x)$ .

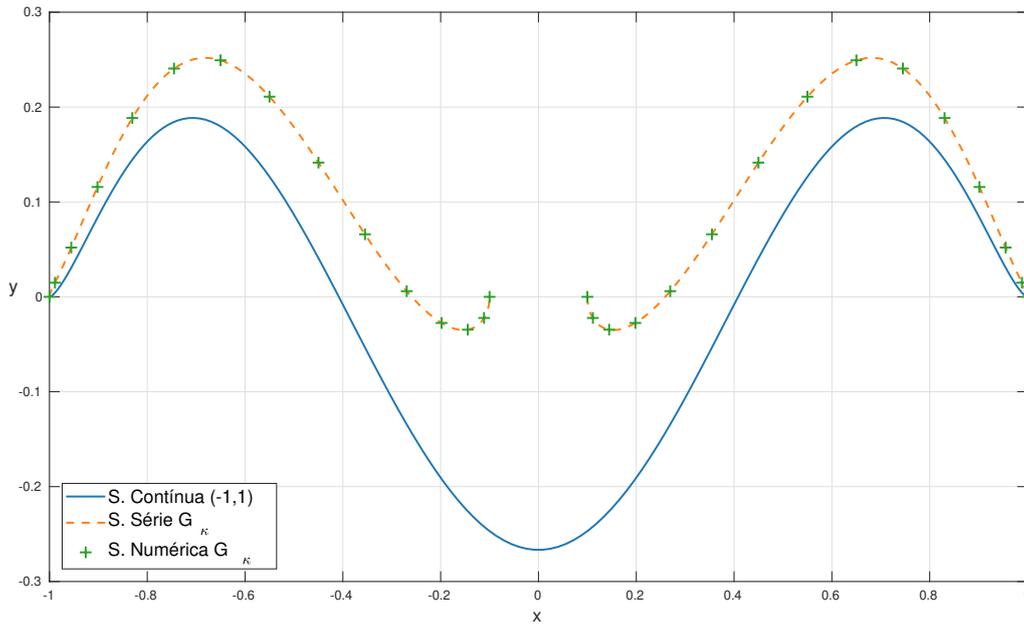


Figura 3.5: Soluções da EIH para  $\kappa = 0, 1$  e  $\psi(x) = T_4(x)$ .

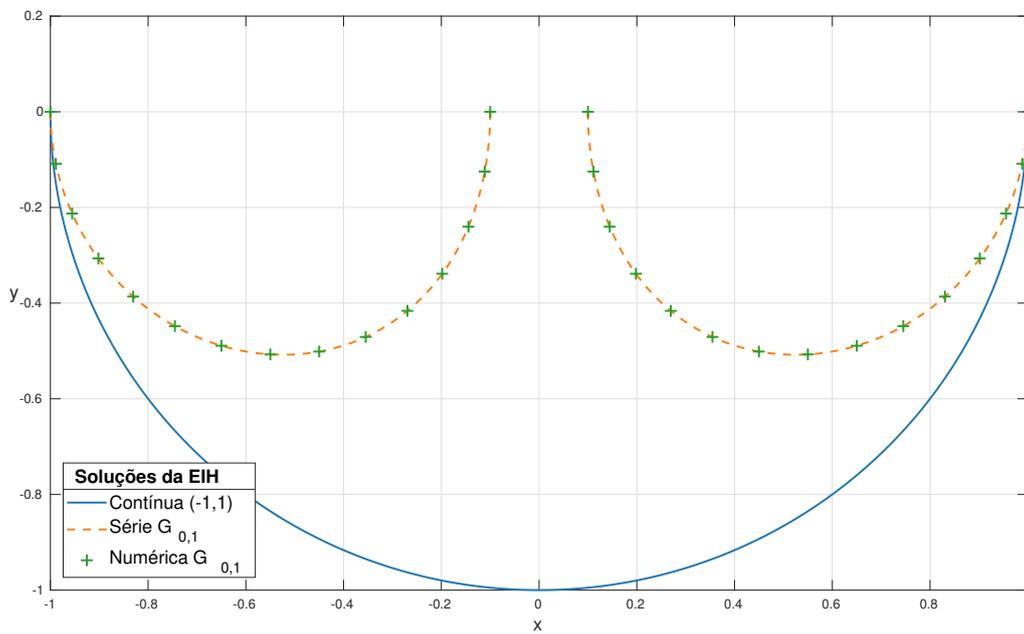


Figura 3.6: Soluções da EIH para  $\kappa = 0, 1$  e  $\psi(x) = U_0(x)$ .

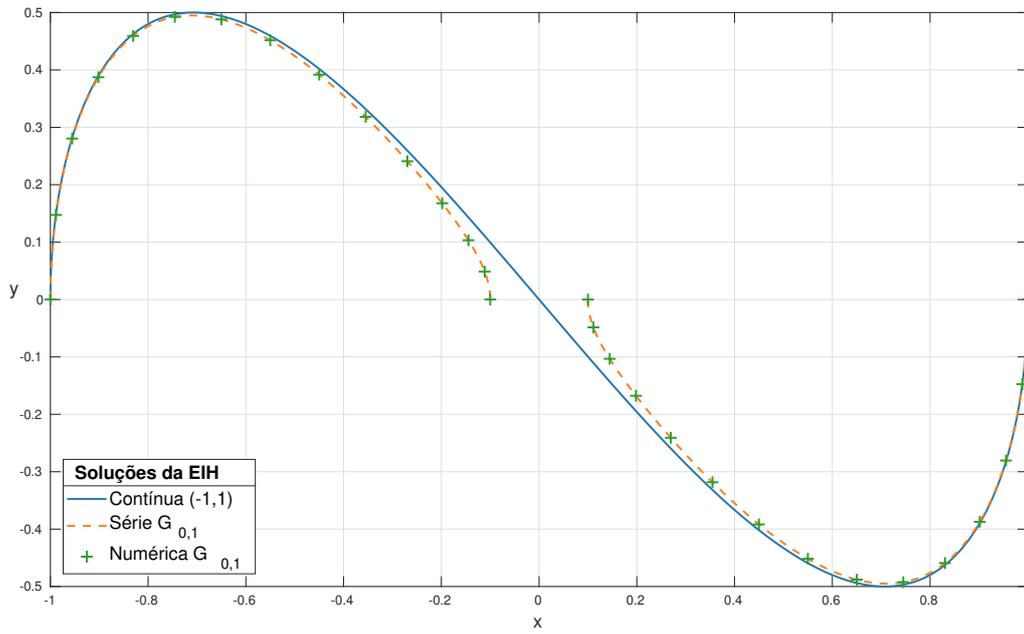


Figura 3.7: Soluções da EIH para  $\kappa = 0, 1$  e  $\psi(x) = U_1(x)$ .

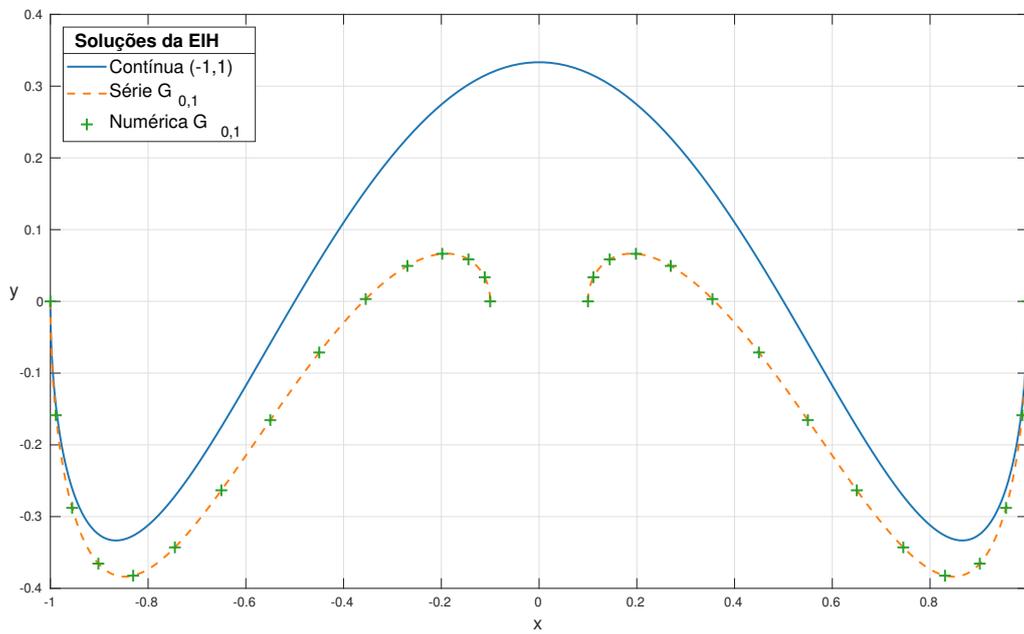


Figura 3.8: Soluções da EIH para  $\kappa = 0, 1$  e  $\psi(x) = U_2(x)$ .

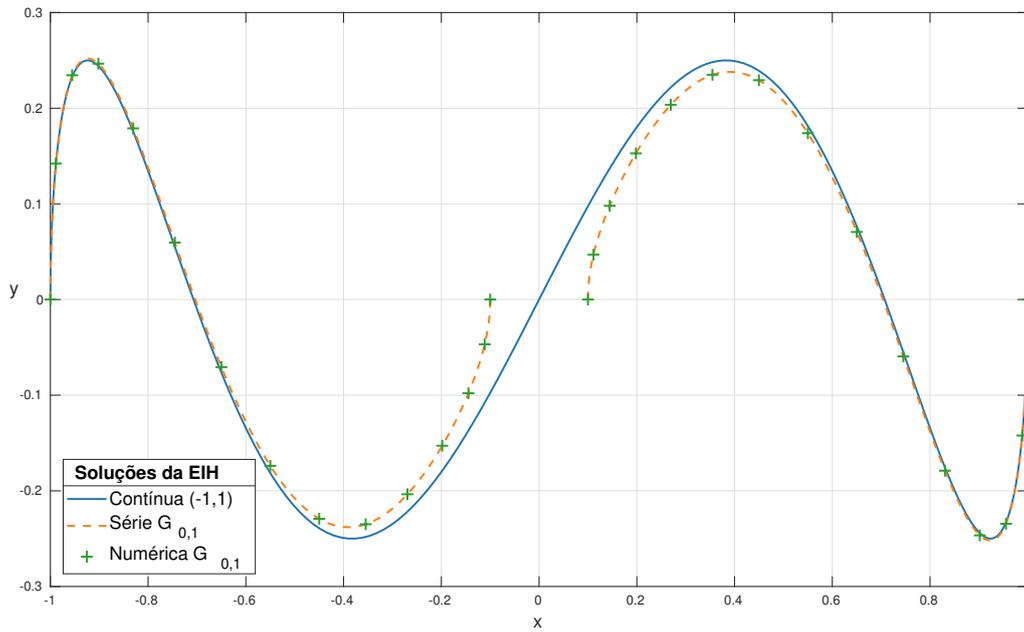


Figura 3.9: Soluções da EIH para  $\kappa = 0, 1$  e  $\psi(x) = U_3(x)$ .

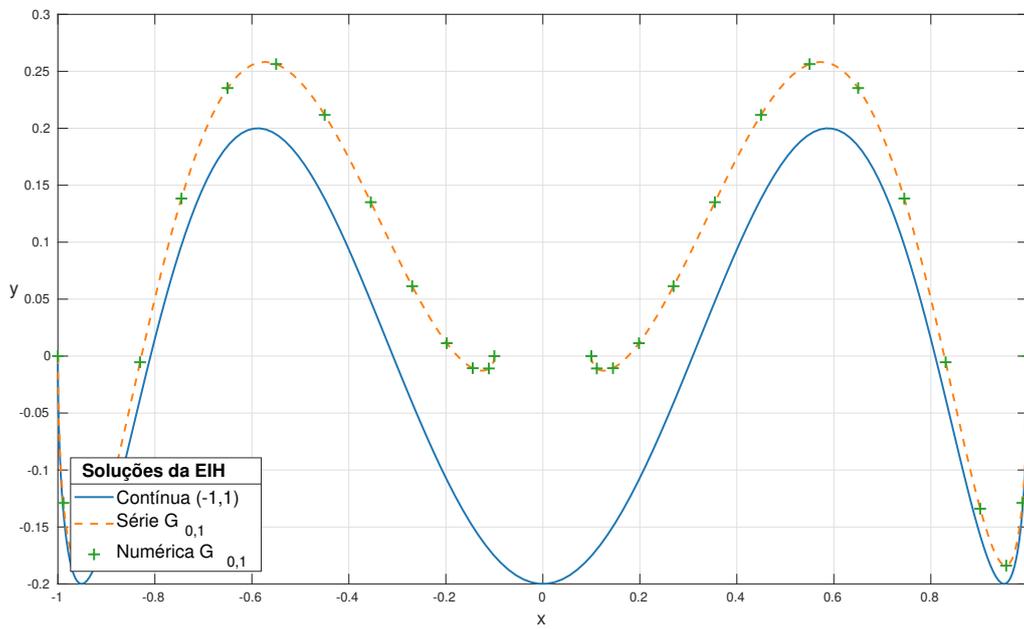


Figura 3.10: Soluções da EIH para  $\kappa = 0, 1$  e  $\psi(x) = U_4(x)$ .

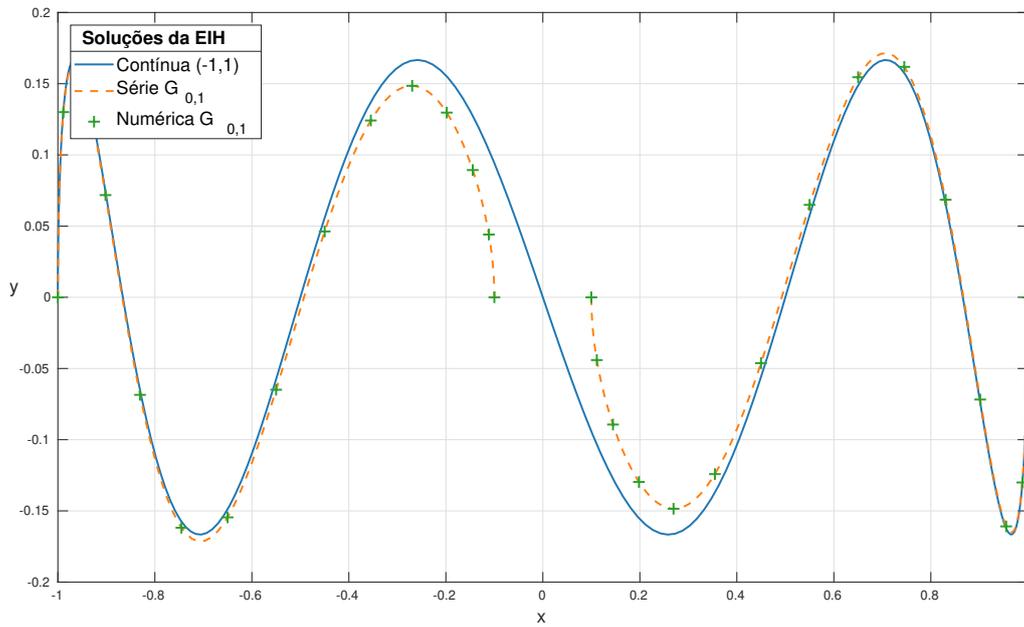


Figura 3.11: Soluções da EIH para  $\kappa = 0,1$  e  $\psi(x) = U_5(x)$ .

Gráficos das soluções da EIH para diferentes valores de  $\kappa$ .

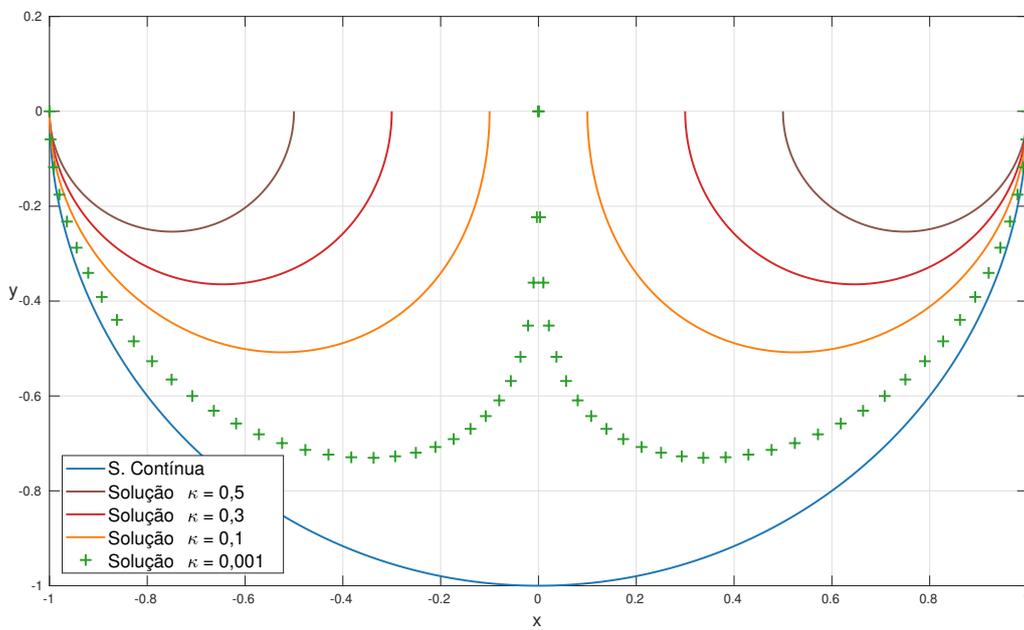


Figura 3.12: Soluções da EIH com diferentes valores de  $\kappa$  e  $\psi(x) = T_0(x)$ .

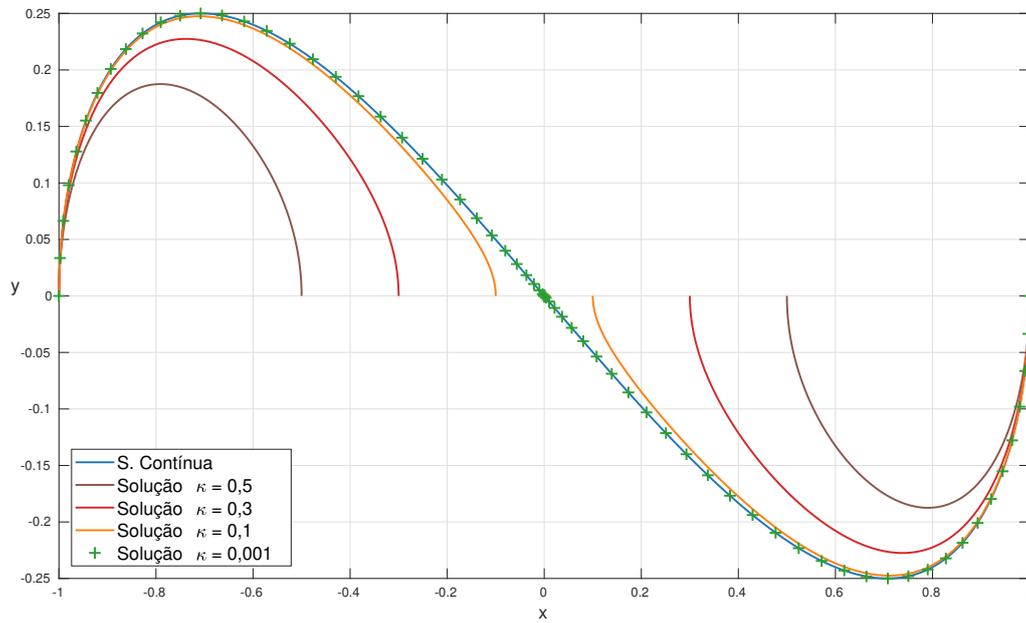


Figura 3.13: Soluções da EIH para diferentes valores de  $\kappa$  e  $\psi(x) = T_1(x)$ .

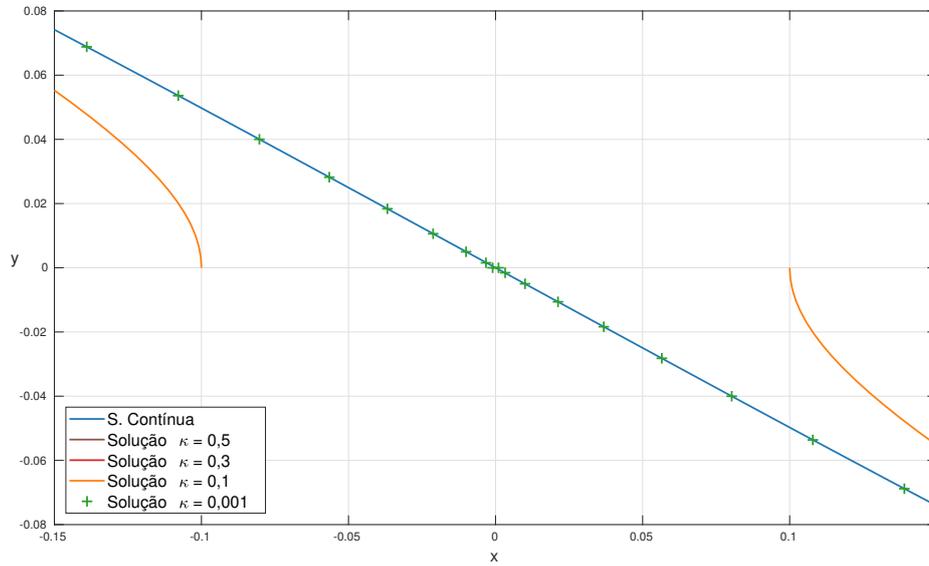


Figura 3.14: Ampliação da Figura 3.13 próximo à origem.

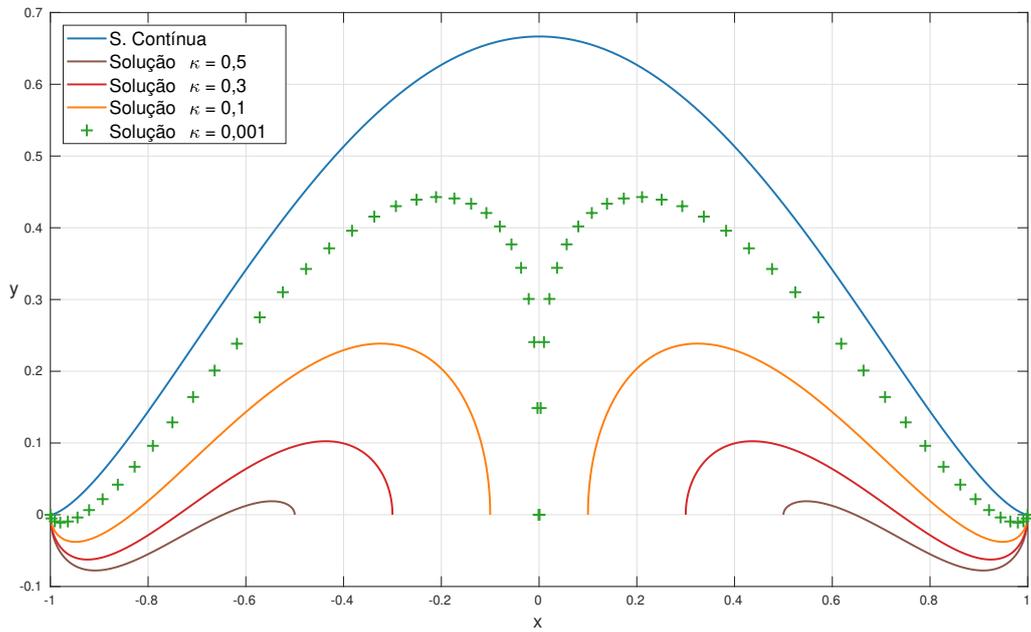


Figura 3.15: Soluções da EIH com diferentes valores de  $\kappa$  e  $\psi(x) = T_2(x)$ .

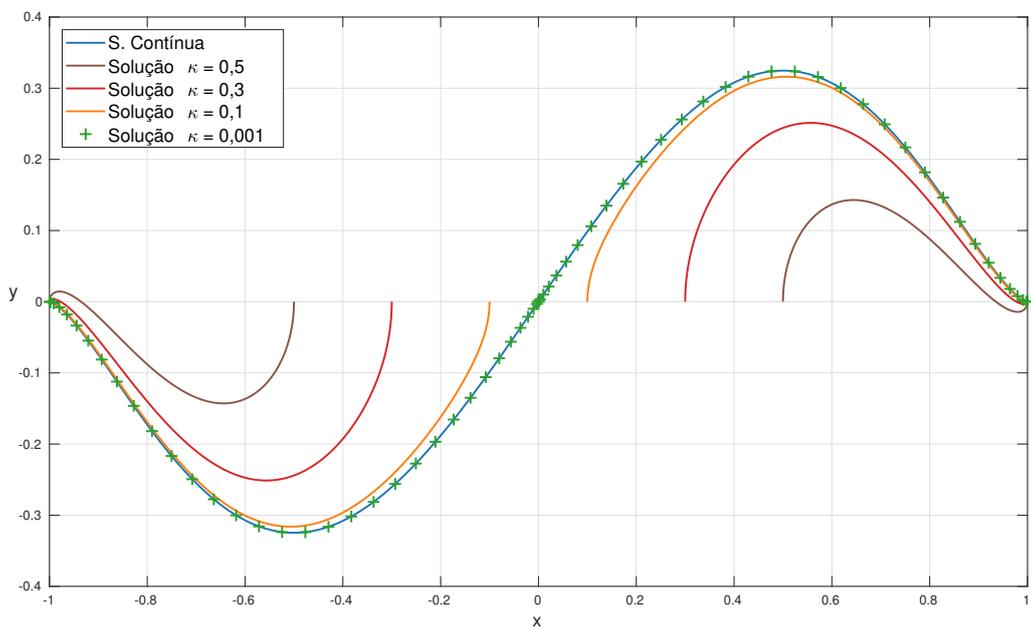


Figura 3.16: Soluções da EIH com diferentes valores de  $\kappa$  e  $\psi(x) = T_3(x)$ .

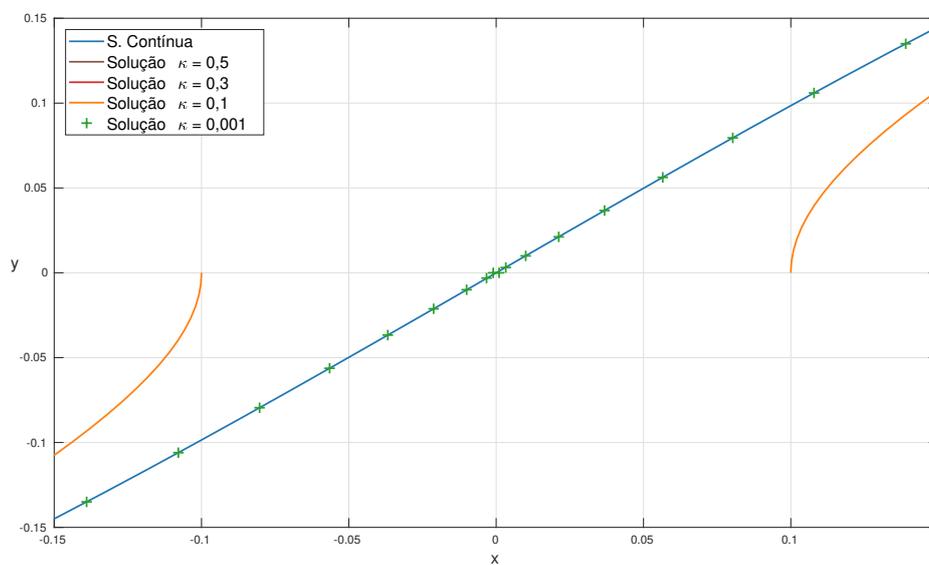


Figura 3.17: Ampliação da Figura 3.16 próximo a origem..

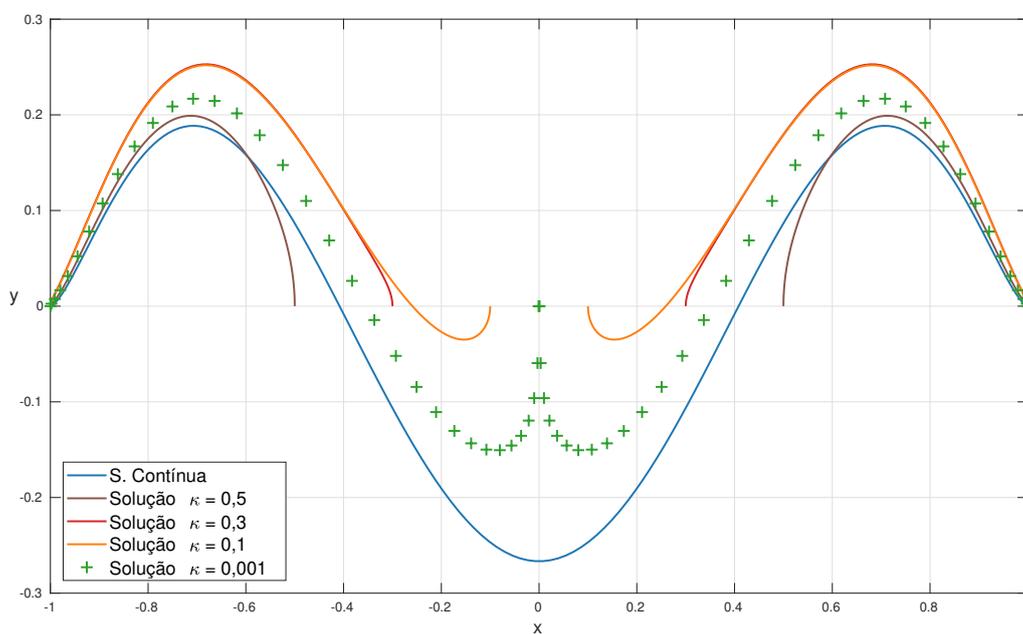


Figura 3.18: Soluções da EIH para diferentes valores de  $\kappa$  e  $\psi(x) = T_4(x)$ .

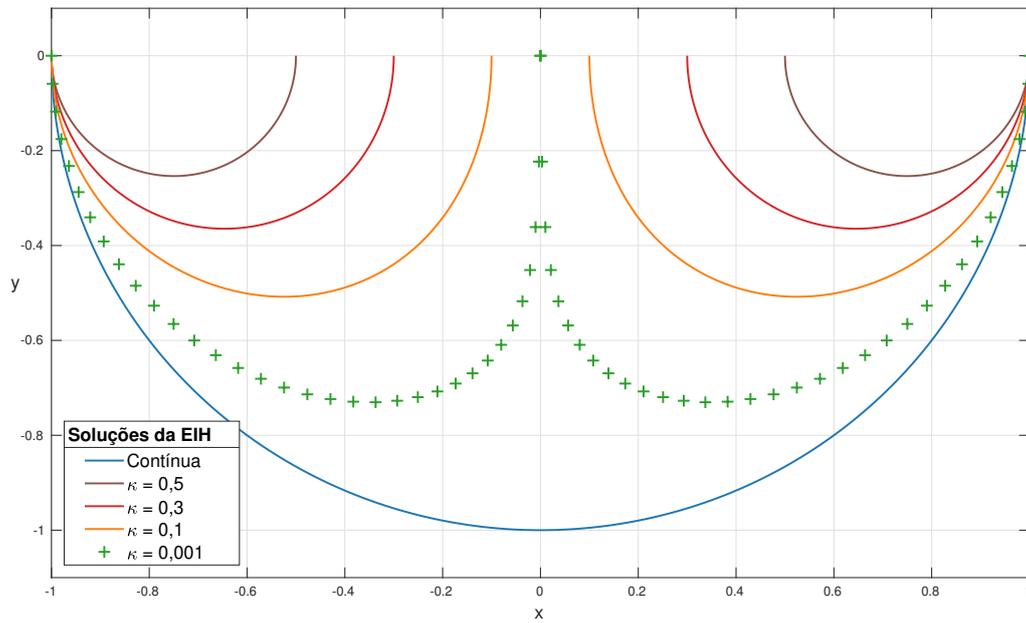


Figura 3.19: Soluções da EIH para diferentes valores de  $\kappa$  e  $\psi(x) = U_0(x)$ .

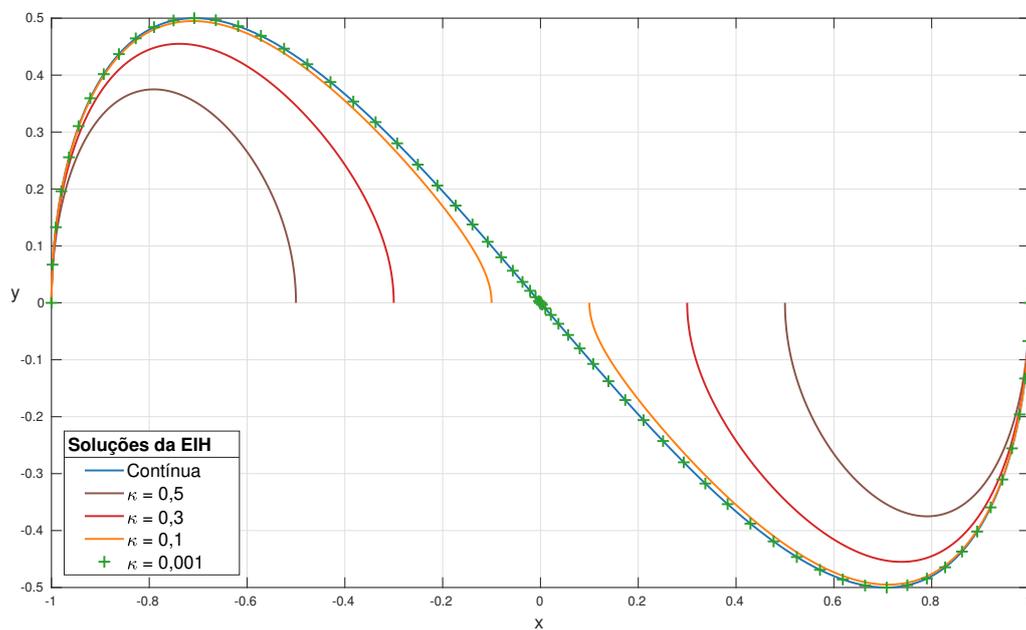


Figura 3.20: Soluções da EIH para diferentes valores de  $\kappa$  e  $\psi(x) = U_1(x)$ .

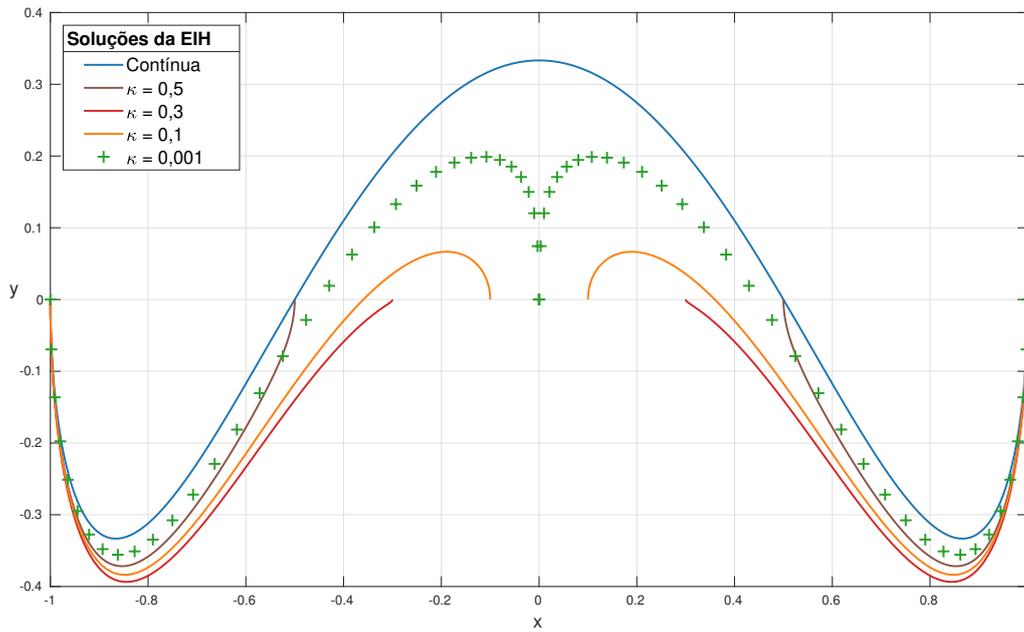


Figura 3.21: Soluções da EIH para diferentes valores de  $\kappa$  e  $\psi(x) = U_2(x)$ .

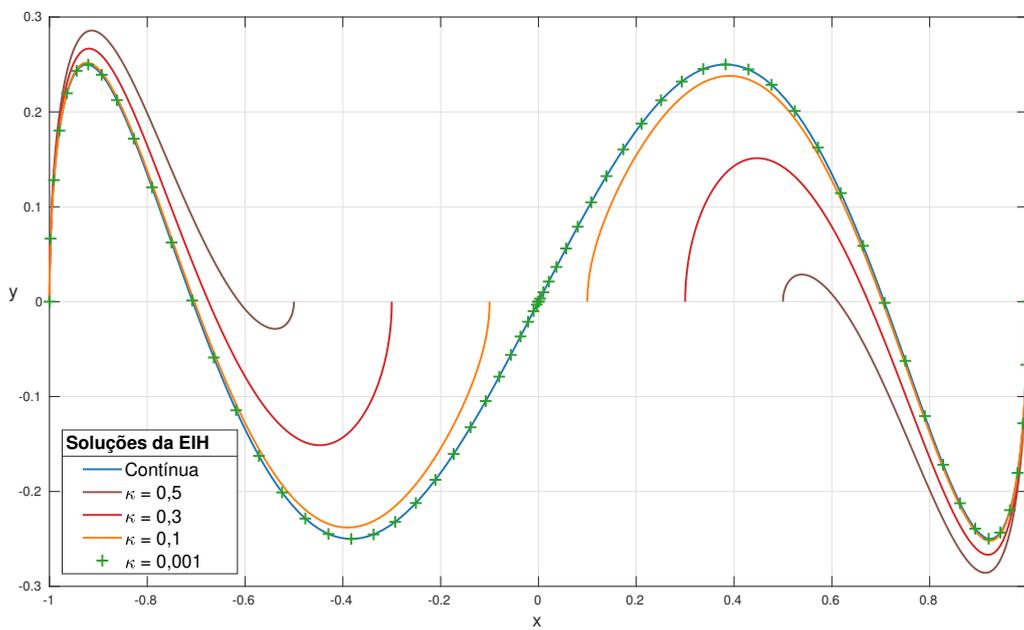


Figura 3.22: Soluções da EIH para diferentes valores de  $\kappa$  e  $\psi(x) = U_3(x)$ .

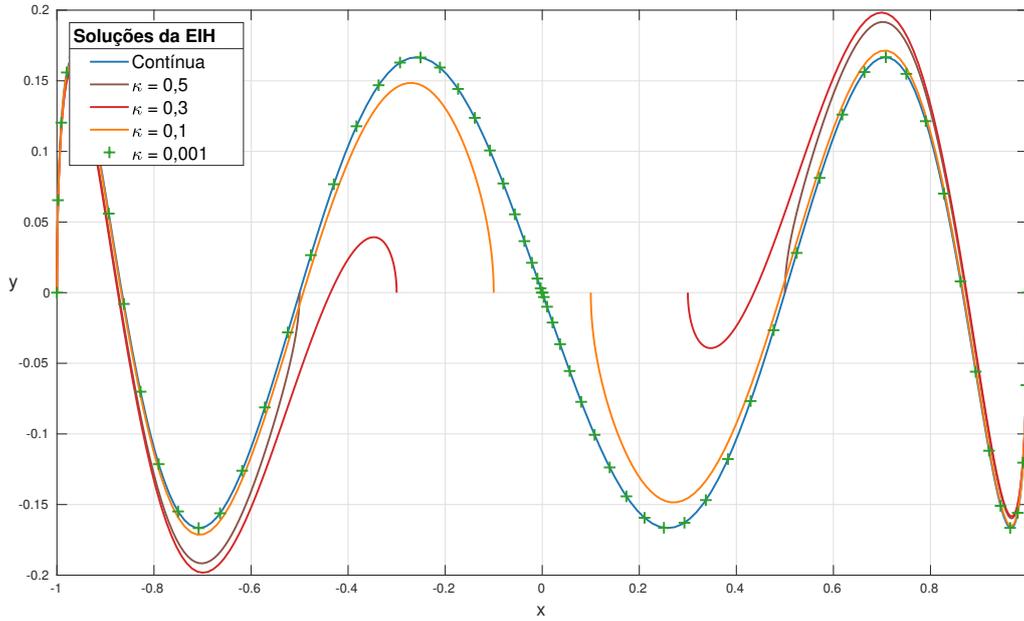


Figura 3.23: Soluções da EIH para diferentes valores de  $\kappa$  e  $\psi(x) = U_5(x)$ .

É importante destacar a vantagem computacional obtida utilizando as soluções na forma de série (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21), pois em nossas simulações, ao avaliar a solução da EIH por métodos de quadratura, tivemos de escolher 15 pontos em cada intervalo de  $G_\kappa$  para ter uma boa ideia do comportamento da solução, o que já foi penoso computacionalmente, haja vista que todo o processo levava alguns minutos para ser finalizado, enquanto que utilizando as soluções (3.18)–(3.21), que são constituídas internamente por relações de recorrência de integrais elípticas, leva pouquíssimos segundos para varrer todo o intervalo com mais de 100 pontos, todos avaliados simultaneamente.

## 4 DISCUSSÕES, APLICAÇÕES E PERSPECTIVAS

### 4.1 Problemas de Riemann-Hilbert

Muitos problemas envolvendo teoria de ondas de água (Parsons e Martin [19]), aerodinâmica (Breslin e Andersen [3]), rachaduras em teoria da elasticidade (Mandal e Chakrabarti [14]), gás de Bose (Piroli e Calabrese [20]), acústica (Martin [15]), mecânica estatística, dentre outros, são reduzidos ao estudo de funções especiais não lineares, que incluem as soluções de equações diferenciais parciais integráveis. Essas funções especiais, por sua vez, também são obtidas a partir da solução de um *problema de Riemann-Hilbert* (PRH).

A equação do aerofólio (2.25), por exemplo, é resolvida como um PRH mediante a comparação com a equação singular canônica (47.1) em Muskhelishvili [18]:

$$A(x)f(x) + \frac{B(x)}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-x} dt = \psi(x), \quad (4.1)$$

tomando  $A(x) = 0$  e  $B(x) = -i$ .

A equação (4.1) está sujeita as condições:

1.  $L$  consiste de um número finito de contornos suaves que não se intersectam. No caso da equação (2.25) temos um contorno aberto simples de  $-1$  a  $1$  sobre o eixo real;
2.  $A(x)$  e  $B(x)$  devem ser funções Hölder contínuas;
3. As funções soma e a diferença, respectivamente,  $S(x) = A(x) + B(x)$  e  $D(x) = A(x) - B(x)$  não se anulam em nenhuma parte de  $L$ .

Considerando

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

a equação integral (4.1) é resolvida como um PHR ao ser reduzida a equação da forma:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (4.2)$$

em que  $G(t)$  e  $g(t)$  são funções Hölder contínuas e  $\Phi^\pm$  obtemos das fórmulas de Sokhotski (2.4) e (2.5). O problema envolvendo (4.2) e  $\Phi$  é chamado de *Problema de Riemann-Hilbert* (cf. [14]).

A equação (4.1) pode ser estendida para o caso de uma equação integral hipersingular, usando uma versão das fórmulas de Sokhotski para singularidades de maior ordem.

**Definição 4.1.** A seguinte integral é uma integral singular de parte finita:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{(t - z)^\mu} dt, \quad \mu \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

em que  $L$  é uma contorno suave no plano da variável complexa  $z$ ,  $t$  é a coordenada complexa de seus pontos e  $f(t)$  uma função Hölder contínua de  $t$  em qualquer domínio  $D$  contendo o intervalo  $L$  (cf. [13]).

**Teorema 4.1.1.** *Considere um contorno suave fechado ou aberto  $L$  e uma função Hölder contínua  $f(t)$  de posição em  $L$ . Então, a integral singular de parte finita (4.3) tem os valores limites  $\Phi^{(\mu-1)^+}(x)$  e  $\Phi^{(\mu-1)^-}(x)$  em todos os pontos do contorno  $L$  não coincidindo com suas extremidades, ao se aproximar do contorno pela esquerda ou pela direita ao longo de um caminho arbitrário, e esses valores limitantes são dado pelas relações:*

$$\Phi^{(\mu-1)^+}(x) - \Phi^{(\mu-1)^-}(x) = f^{(\mu-1)}(x),$$

$$\Phi^{(\mu-1)^+}(x) + \Phi^{(\mu-1)^-}(x) = \frac{\Gamma(\mu)}{\pi i} \int \frac{f(t)}{(t - x)^\mu} dt.$$

em que  $\mu \in \mathbb{N}$  e  $\Gamma(\mu)$  é a função Gama.

## 4.2 Métodos espectrais para as equações integrais de Cauchy e de Hadamard generalizadas sobre $G_\kappa$

Com os resultados obtidos neste trabalho, propomos dois métodos espectrais: Um para a *equação do aerofólio generalizada*

$$\frac{1}{\pi} \int_{G_\kappa} \left\{ \frac{1}{x-t} + \mathcal{K}(x,t) \right\} \tilde{f}_\kappa(t) \omega(t) dt = h(x), \quad x \in G_\kappa, \quad (4.4)$$

sendo  $\omega(t) = \frac{\text{sgn}(t)}{R_\kappa(t)}$  uma função peso; e outro para a *equação integral hipersingular generalizada*

$$\int_{G_\kappa} \left\{ \frac{1}{(x-t)^2} + \mathcal{K}(x,t) \right\} f_\kappa(t) dt = h(x) \quad x \in G_\kappa. \quad (4.5)$$

Em ambas equações  $\mathcal{K}$  é um núcleo regular (não fortemente singular) e  $h(x)$  é uma função fornecida. Essas equações integrais possuem uma versão definida sobre um domínio contínuo e são bem estudadas do ponto de vista físico e numérico (cf. [2, 17, 25, 11]).

A escolha dos polinômios ortogonais  $T_n(x)$  e  $U_n(x)$  como função de entrada para as equações integrais sobre intervalos disjuntos é essencial na aplicação do método espectral, suas características e propriedades nos permitiram obter as relações

$$\frac{1}{\pi} \int_{G_\kappa} \frac{E_n(t)}{x-t} w(t) dt = T_n(x), \quad x \in G_\kappa, \quad (4.6)$$

e

$$\frac{1}{\pi} \int_{G_\kappa} \frac{f_{n,\kappa}(t)}{(x-t)^2} dt = U_n(x) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\pi} \int_{G_\kappa} \frac{f_{n,\kappa}(t)}{(x-t)^2} dt = T_n(x), \quad x \in G_\kappa, \quad (4.7)$$

que estão entre os principais resultados desta tese e estendem as relações (2.21) e (3.26), respectivamente, definidas sobre o intervalo contínuo  $(-1, 1)$ .

Assim, expandimos as soluções como

$$\tilde{f}_\kappa(t) \approx \sum_{n=0}^N a_n E_n(t), \quad (4.8)$$

e

$$f_\kappa(t) \approx \sum_{n=0}^N b_n f_{n,\kappa}(t) \equiv f_{N,\kappa}(t), \quad (4.9)$$

Substituindo (4.8) em (4.4) e (4.9) em (4.5) e trocando a ordem de integração com o somatório, obtemos

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^N a_n \left( \oint_{G_\kappa} \frac{E_n(t)}{x-t} dt + \int_{G_\kappa} \mathcal{K}(x,t) E_n(t) dt \right) \omega(t) = h(x), \quad x \in G_\kappa.$$

e

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^N b_n \left( \oint_{G_\kappa} \frac{f_{n,\kappa}(t)}{(x-t)^2} dt + \int_{G_\kappa} \mathcal{K}(x,t) f_{n,\kappa}(t) dt \right) = h(x), \quad x \in G_\kappa.$$

Usando as relações (4.6) e (4.7), seguem os somatórios

$$\sum_{n=0}^N a_n [T_n(x) + \mathcal{K}(E_n)(x)] = h(x), \quad (4.10)$$

e

$$\sum_{n=0}^N b_n [U_n(x) + \mathcal{K}(f_{n,\kappa})(x)] = h(x), \quad (4.11)$$

sendo  $\mathcal{K}$  o operador integral dado por:

$$\mathcal{K}(g) = \frac{1}{\pi} \int_{G_\kappa} K(x,t) g(t) \omega(t) dt,$$

com  $\omega(t) = 1$  para o caso da equação hipersingular.

As equações (4.10) e (4.11) podem ser resolvidas pelos métodos de Galerkin ou de Colocação. Os métodos espectrais para a solução das equações integrais (4.4) e (4.5) ficam caracterizados por (4.8) e (4.10) (equação do aerofólio); (4.9) e (4.11) (equação hipersingular).

## 4.3 Aplicação ao espalhamento de ondas de água por uma placa submersa com uma abertura

Nos capítulos anteriores, obtivemos uma solução analítica da *equação integral de Cauchy* em dois intervalos disjuntos com o lado direito em termos do polinômio de Chebyshev que em seguida auxiliou na construção da solução da *equação integral hipersingular* em termos de *integrais elípticas*.

Nesta parte da tese, indicamos uma aplicação para as soluções obtidas no capítulo 3 em um problema físico de espalhamento de ondas de água para uma placa submersa com uma abertura. Esse problema foi estudado por [19], mas para o caso de uma única placa plana submersa. Eles investigaram o espalhamento causado por uma onda incidente sobre a placa, no qual foi possível determinar os *coeficientes de transmissão e reflexão*. Esse artigo foi a base da formulação do problema proposto, de modo que a maioria das equações são aproveitadas.

### 4.3.1 Formulação diferencial

Considere um sistema de coordenadas cartesianas onde  $y$  está direcionado verticalmente para baixo no fluido e a superfície livre da água não perturbada está em  $y = 0$ . O eixo  $z$  é perpendicular à direção de propagação do trem de ondas incidente. Uma placa com uma abertura, paralela à crista da onda incidente, é posicionada abaixo da superfície livre do fluido (Figura 4.1). Assumimos o problema bidimensional considerando uma placa infinitamente longa na direção de  $z$ . Além disso, consideramos o movimento harmônico simples no tempo.

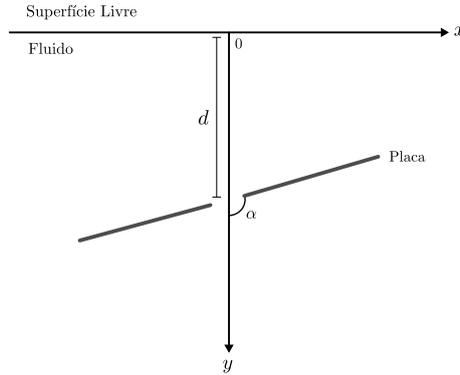


Figura 4.1: Perfil de uma placa com um furo.

Assumimos um fluido não-viscoso, incompressível e irrotacional, o que implica que existe uma função escalar  $\phi(x, y)$  tal que o campo de velocidades  $\mathbf{u}(x, y)$  do fluido é dado por  $\mathbf{u} = \nabla\phi$ . Além disso, supondo o movimento harmônico simples no tempo, o problema é formulado para o potencial de velocidade  $Re\{\phi(x, y)e^{-i\omega t}\}$ . Assim,  $\phi(x, y)$  satisfaz o seguinte problema.

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi(x, y) &= 0, \quad \text{no fluido} \\ K\phi + \frac{\partial\phi}{\partial y} &= 0, \quad \text{em } y = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= 0 \quad \text{em } \Gamma, \end{aligned}$$

onde  $K = \omega^2/g$  e  $g$  é a aceleração devido à gravidade e a placa submersa com uma abertura é representada por  $\Gamma$ .

Como usual em problemas lineares de espalhamento de ondas, separamos o potencial em duas componentes:

$$\phi = \phi_{sc} + \phi_{inc}$$

em que  $\phi_{inc}$  é o potencial incidente conhecido e  $\phi_{sc}$  é o potencial espalhado [19]. Assim, podemos formular o problema alternativamente como:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi_{sc}(x, y) &= 0 \text{ no fluido,} \\
K \phi_{sc} + \frac{\partial \phi_{sc}}{\partial y} &= 0 \text{ em } y = 0 \\
\frac{\partial \phi_{sc}}{\partial n} &= -\frac{\partial \phi_{inc}}{\partial n} \text{ em } \Gamma
\end{aligned}$$

O problema de espalhamento é completado com a condição de radiação de Sommerfeld, dada por

$$\frac{\partial \phi_{sc}}{\partial r} - iK \phi_{sc} \rightarrow 0 \text{ quando } r = (x^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty. \quad (4.18)$$

### 4.3.2 Formulação integral

A solução do problema apresentado acima pode ser escrita, usando o teorema de Green, como

$$\phi_{sc}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [\phi_{sc}(\boldsymbol{\xi})] \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} dS, \quad (4.19)$$

onde  $\mathbf{x} = (x, y)$  é um ponto no fluido,  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$  representa um ponto na placa e  $[\phi]$  é a descontinuidade através da placa no ponto  $\boldsymbol{\xi}$ .  $G$  é a função de Green de superfície livre (cf. [10]) dada por

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2} \log \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} - 2 \int_0^{\infty} e^{-k(y+\eta)} \cos k(x - \xi) \frac{dk}{k - K} \quad (4.20)$$

que satisfaz as equações (4.15) e (4.16). O caminho de integração em (4.20) passa abaixo do polo  $k = K$ , e isto garante que  $G$  também satisfaz a condição de radiação no infinito (4.18) (cf. [10]).

O potencial definido em (4.19) satisfaz as equações (4.15), (4.16) e (4.18). Impondo agora a condição de fronteira na placa (4.17), temos

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\Gamma} [\phi_{sc}(\boldsymbol{\xi})] \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} dS = -\frac{\partial \phi_{inc}}{\partial n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (4.21)$$

Trocando a ordem entre a integral e a derivada normal na equação (4.21), obtemos a equação integral

$$\frac{1}{2\pi} \rlap{-}\int_{\Gamma} [\phi_{sc}(\boldsymbol{\xi})] \frac{\partial^2}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}} \partial n_x} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS = -\frac{\partial \phi_{inc}}{\partial n_x}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (4.22)$$

onde a integral deve ser interpretada como parte finita de Hadamard.

Fisicamente, pelo fato da placa estar totalmente submersa, é esperado que a descontinuidade na pressão ao longo da placa tenda a zero a medida que se aproxima das extremidades de  $\Gamma$ . Assim, impomos a condição

$$[\phi_{sc}] = 0 \quad \text{nas extremidades da placa } \Gamma.$$

para a solução de (4.22). Parametrizando  $\Gamma$ , pode-se mostrar (cf. [19]) que o núcleo desta equação integral tem uma hipersingularidade e que (4.22) é da forma (4.5). Logo, podemos aplicar o método espectral apresentado na seção 4.2, para a sua solução. Quantidades físicas de interesse na engenharia oceânica, no problema descrito nesta subseção são os coeficientes de transmissão e reflexão (cf. [19]) que podem ser prontamente calculados através de integrais sobre  $\Gamma$  que envolvem a solução  $[\phi_{sc}]$ .

## 4.4 Prespectivas

Como vimos anteriormente, as equações integrais estudadas nesta tese decorrem dos *problemas de Riemann-Hilbert*. Esses problemas, já muito estudados ao longo dos anos, possuem uma teoria bem desenvolvida no estudo de funções analíticas. O seu grau de relevância permite que ainda estejam presentes em muitos problemas cotidianos, como aqueles relacionados a teoria de ondas de água, dentre outros já citados. A variedade em suas aplicações nos permite explorar uma gama de possibilidades, incluindo problemas envolvendo geometrias mais complexas, como contornos cúspides ou múltiplas curvas, conforme Muskhelishvili [18] e Gakhov [8] mostram em seus livros. Tendo isso em mente, acreditamos que é possível seguir nesse caminho, ampliando mais nossa investigação.

A partir das contribuições deste trabalho sobre a equação integral do aerofólio sobre dois intervalos disjuntos, conseguimos dar mais um passo num caminho promissor, ainda com poucos resultados na literatura. Estamos seguros que isso nos dá suporte para investigar soluções com constantes não nulas, que satisfaçam as condições de fronteira  $f(\pm 1) = f(\pm \kappa) = 0$  em  $G_\kappa$ , uma vez que estas soluções possuem uma maior aplicabilidade.

Em se tratando da equação integral hipersingular sobre dois intervalos disjuntos, com os resultados apresentados, poderemos apurar o problema de espalhamento de ondas de água em duas placas planas submersas, discutido na seção (4.3), para diferentes ângulos de inclinação. Como foi possível observar, a solução sobre o intervalo descontínuo  $G_\kappa$  tem um comportamento similar a solução sobre o intervalo contínuo  $(-1, 1)$  à medida que  $\kappa \rightarrow 0$ . Desse modo, comparar tais soluções a resultados conhecidos em domínios contínuos, abre uma perspectiva para outros trabalhos de pesquisa.

O problema de espalhamento de ondas por uma placa com uma abertura, em duas dimensões físicas descrito na seção 4.3 tem uma natural extensão para o caso 3D, que é o problema da interação de ondas de água com um anel circular submerso. Este problema foi analisado experimentalmente por Carter e Ertekin [5]. Assim, buscar soluções analíticas polinomiais para uma EIH sobre um domínio bi-dimensional descontínuo constitui um outro interessante problema de matemática aplicada a ser investigado.

## 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O emprego da teoria de funções analíticas é notável neste trabalho. Nosso primeiro resultado fundamental depende do Lema 2.2.1 encontrado em Gakhov [8] e Khvedelidze [12]. Esse resultado foi crucial para o desenvolvimento das soluções em série (2.17) e (2.18) e conseqüentemente as relações de recorrência (2.23) e (2.24), quando temos uma função de entrada  $\tilde{\psi}(x) = -T_n(x)$ . Ele nos forneceu um método de avaliar integrais de Cauchy através da *parte principal expansão densidade da integral*. Nesse caso, utilizamos a expansão em série de Taylor na construção da solução da equação do aerofólio sobre dois intervalos disjuntos. Percebemos com isso a dependência clara dos coeficientes das expressões  $E_n$  dos extremos do intervalo  $G_\kappa$ . Alcançamos excelentes resultados comparando as soluções  $\tilde{f}_{n,\kappa}$  para intervalos disjuntos e a solução  $f$  para o intervalo  $(-1, 1)$ . Os experimentos numéricos deixaram evidente a estabilidade das soluções, especialmente a relação de recorrência para polinômios de grau elevado ( $n = 40$ ). Como a principal contribuição do capítulo 2, para além das soluções assinaladas, temos a relação

$$\frac{1}{\pi} \int_{G_\kappa} \frac{E_n(t)}{x-t} w(t) dt = T_n(x),$$

que é um caso generalizado da identidade integral (2.21) e nos permitiu propor na seção 4.2 um método espectral para a equação do aerofólio generalizada.

No capítulo 3, investigamos as soluções analíticas alternativas para a equação integral hipersingular sobre dois intervalos disjuntos (3.1). Empregamos as expressões  $E_{2m}$  e  $E_{2m+1}$  obtidas no capítulo 2, quando percebemos nas integrais duplas da solução (3.8) e da constante  $C_{1,\kappa}$ , integrais internas do tipo Cauchy. Com isso, foi possível reescrever as soluções em termos da *parte principal* conseguindo (3.16) e (3.17). No caso particular das funções de entrada  $\psi(x) = T_n(x)$  ou  $\psi(x) = U_n(x)$ , apresentamos resultados promissores com as soluções (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21) como série de *integrais elípticas*. Os experimentos computacionalmente mostram que tais soluções são acuradas e estão de acordo com a solução numérica direta. Nota-

mos uma convergência para a solução no intervalo simples  $(-1, 1)$ , quando  $\kappa \rightarrow 0$ , principalmente para polinômios de graus ímpares, mas ainda não demonstrado matematicamente. Além disso, das contribuições mais importantes desse capítulo, no estudo da equação integral hipersingular sobre dois intervalos disjuntos, foi a obtenção da relação

$$\frac{1}{\pi} \oint_{G_\kappa} \frac{f_{n,\kappa}(t)}{(x-t)^2} dt = \psi(x), \quad x \in G_\kappa,$$

com  $\psi(x) = T_n(x)$  ou  $\psi(x) = U_n(x)$  (generalizando da equação (3.26) sobre o intervalo  $(-1, 1)$ ). A partir da relação acima, pudemos estabelecer um método espectral apresentado na seção 4.2 para resolver a equação hipersingular generalizada sobre dois intervalos disjuntos, cuja aplicação prática foi sugerida na seção 4.3.

Em se tratando de trabalhos futuros, os resultados apresentados nesta tese nos conduz a investigar ainda mais a equação integral singular (equação do aerofólio) (2.8) e a equação integral hipersingular (4.7) para dois ou mais intervalos disjuntos, além de domínios envolvendo geometrias cúspides ou curvas. Na equação (2.8), podemos trabalhar nos caso de constantes arbitrárias nulas que atendam as condições de fronteira  $\tilde{f}_k(\pm 1) = \tilde{f}_k(\pm \kappa) = 0$ . Já na equação (4.7) poderíamos aplicar as soluções aos problemas de ondas de água a partir do método espectral proposto.

Um trabalho mais ambicioso, trata-se do problema  $3D$  para um anel circular submerso. Esse problema está diretamente relacionado a uma equação integral hipersingular em intervalos disjuntos devido a característica do objeto submerso. Carter e Ertekin [5] já têm um estudo experimental nesse sentido, no artigo publicado eles relatam experimentos no qual aplicam ondas verticais sobre um grande disco horizontal perfurado concetricamente posicionado próximo da superfície livre. Resultados numéricos e experimentais são apresentados. Esta seria uma oportunidade interessante de testar as soluções obtidas no capítulo 3 e comparar com os resultados apresentados no artigo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. A., Eds. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover: New York, 1972.
- [2] BERTHOLD, D., HOPPE, W., AND SILBERMANN, B. A fast algorithm for solving the generalized airfoil equation. *Journal of computational and applied mathematics* 43, 1-2 (1992), 185–219.
- [3] BRESLIN, J. P., AND ANDERSEN, P. *Hydrodynamics of ship propellers*, vol. 3 of *Cambridge Ocean Technology Series*. Cambridge University Press, 1994.
- [4] BYRD, P. F., AND FRIEDMAN, M. D. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, second ed. ed. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1971.
- [5] CARTER, R. W., AND ERTEKIN, R. C. Focusing of wave-induced flow through a submerged disk with a tubular opening. *Applied Ocean Research* 47 (2014), 110–124.
- [6] DUTTA, B., AND BANERJEA, S. Solution of a hypersingular integral equation in two disjoint intervals. *Appl. Math. Lett.* 22, 8 (2009), 1281–1285.
- [7] FARINA, L., FERREIRA, M. R. S., AND PÉRON, V. The airfoil equation on near disjoint intervals: Approximate models and polynomial solutions. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 298 (2016), 97–104.
- [8] GAKHOV, F. D. *Boundary value problems*, vol. 85 of *International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics*. Pergamon Press, 1966. Translation by I. N. Sneddon.
- [9] HUI, C.-Y., AND SHIA, D. Evaluations of hypersingular integrals using gaussian quadrature. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 44 (1999), 205–214.

- [10] JOHN, F. On the motion of floating bodies ii. simple harmonic motions. *Communications on pure and applied mathematics* 3, 1 (1950), 45–101.
- [11] JUNGHANN, P., AND KAISER, R. A note on Kalandiya’s method for a crack problem. *Applied Numerical Mathematics* 149 (2020), 52–64.
- [12] KHVEDELIDZE, B. V. The method of Cauchy-type integrals in the discontinuous boundary value problems of the theory of holomorphic functions of a complex variable. *Journal of Soviet Mathematics* 7, 3 (1977), 309–415.
- [13] LADOPOULOS, E. G. New aspects for the generalization of the Sokhotski-Plemelj formulae for the solution of finite-part singular integrals used in fracture mechanics. *International Journal of Fracture* 54 (1992), 317–328.
- [14] MANDAL, B. N., AND CHAKRABARTI, A. *Applied singular integral equations*. Science Publishers, 2011.
- [15] MARTIN, P. A. End-point behaviour of solutions of hypersingular integral equations. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 432 (1991), 301–320.
- [16] MARTIN, P. A. Exact solution of a simple hypersingular integral equation. *J. Integral Equations Appl.* 4, 2 (1992), 197–204.
- [17] MONEGATO, G., AND SLOAN, I. H. Numerical solution of the generalized airfoil equation for an airfoil with a flap. *SIAM journal on numerical analysis* 34, 6 (1997), 2288–2305.
- [18] MUSKHELISHVILI, N. I. *Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*. P. Noordhoff N. V., Groningen, 1953. Translation by J. R. M. Radok.
- [19] PARSONS, N. F., AND MARTIN, P. A. Scattering of water waves by submerged plates using hypersingular integral equations. *Applied Ocean Research* 14 (1992), 313–21.

- [20] PIROLI, L., AND CALABRESE, P. Local correlations in the attractive one-dimensional Bose gas: From Bethe ansatz to the Gross-Pitaevskii equation. *Phys. Rev. A* *94* (Nov 2016), 053620.
- [21] POLYANIN, A. D., AND MANZHIROV, A. V. *Handbook of Integral Equations*. CRC Press, 1998.
- [22] SNYDER, M. A. *Chebyshev Methods in Numerical Approximation*. Prentice-Hall, Inc., 1966.
- [23] TRICOMI, F. G. The airfoil equation for a double interval. *ZAMP* *2*, 5 (1951), 402–406.
- [24] TRICOMI, F. G. *Integral equations*. Pure and Applied Mathematics. Vol. V. Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
- [25] VAINIKKO, G. M., AND LIFANOV, I. K. Modeling of aerodynamic and wave diffraction problems and extensions of cauchy type integral operators on closed and open curves. *Differential Equations* *36*, 9 (2000), 1310–1322.

## APÊNDICE A

Aqui explicamos com mais detalhes como obtemos a solução analítica da equação (2.8) para o caso  $\psi(x) = T_n(x)$ . Para encontrar essa solução temos que determinar a parte principal da densidade da integral de Cauchy a partir de uma expansão em série de Taylor centrada em 0 nas equações (2.12) e (2.14). Dividimos em dois casos.

**Caso 1.**  $\tilde{\psi}(x) = T_{2m}(x)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

O polinômio  $T_{2m}$  tem a representação

$$T_{2m}(x) = \sum_{k=0}^m t_{2k}^{m-k} x^{2k} \quad (\text{A.1})$$

ou seja,

$$T_{2m}(x) = t_0^m + t_2^{m-1}x^2 + t_4^{m-2}x^4 + \dots + t_{2m-4}^2x^{2m-4} + t_{2m-2}^1x^{2m-2} + t_{2m}^0x^{2m}$$

em que

$$t_i^j = 2^{i-1}(-1)^j \left\{ \frac{i+2j}{i+j} \right\} \binom{i+j}{j}$$

são os coeficientes do polinômio de Chebyshev (cf.[22, p. 14]).

Considere o termo  $\Psi_\kappa(x)$  em (2.12) para o caso par,

$$\Psi_\kappa(x) = -\pi \text{PP} \left\{ \sqrt{(x^2-1)(x^2-\kappa^2)} \psi(x) \right\}_{x \rightarrow \infty}.$$

Aplicando a mudança de variável  $x^2 = \frac{1}{w}$  e usando  $\psi(x) = T_{2m}(x)$  na equação acima, temos:

$$\Psi_\kappa \left( \sqrt{\frac{1}{w}} \right) = -\pi \text{PP} \left\{ \frac{s_\kappa(w)}{w} T_{2m} \left( \sqrt{\frac{1}{w}} \right) \right\}_{w \rightarrow 0},$$

sendo  $s_\kappa(w) = \sqrt{(1-w)(1-\kappa^2w)}$ . Definindo

$$E_{2m} = -\Psi/\pi$$

e expandindo em série de Taylor  $s_\kappa(w)$ , temos

$$E_{2m} = \text{PP} \left\{ T_{2m}(x) \sum_{i=0}^{m+1} \frac{s_\kappa^{(i)}(0)}{i!} x^{2(1-i)} \right\}_{x \rightarrow \infty}. \quad (\text{A.3})$$

Usando (A.1), expressamos (A.3) como

$$E_{2m} = \text{PP} \left\{ \sum_{k=0}^m t_{2k}^{m-k} x^{2k} \sum_{i=0}^{m+1} \frac{s_\kappa^{(i)}(0)}{i!} x^{2(1-i)} \right\}_{x \rightarrow \infty}. \quad (\text{A.4})$$

Note que em (A.3), expandimos  $s_\kappa(w)$  apenas até grau  $m$ , pois para termos de ordem maiores anulam-se quando fazemos o limite de  $x \rightarrow \infty$  ( $w \rightarrow 0$ ). Os termos não nulos restantes correspondem a *parte principal* da expansão. Reorganizando aos termos em (A.4), podemos determinar os coeficientes para cada potência de  $x$  como

$$\begin{aligned} E_{2m} &= t_{2m}^0 s_\kappa(0) x^{2m+2} + (t_{2m}^0 s'_\kappa(0) + t_{2m-2}^1 s_\kappa(0)) x^{2m} \\ &+ \left( t_{2m}^0 \frac{s''_\kappa(0)}{2!} + t_{2m-2}^1 s'_\kappa(0) + t_{2m-4}^2 s_\kappa(0) \right) x^{2m-2} \\ &+ \left( t_{2m}^0 \frac{s_\kappa^{(3)}(0)}{3!} + t_{2m-2}^1 \frac{s''_\kappa(0)}{2!} + t_{2m-4}^2 s'_\kappa(0) + t_{2m-6}^3 s_\kappa(0) \right) x^{2m-4} + \dots \\ &+ \left( t_{2m}^0 \frac{s_\kappa^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \dots + t_4^{m-2} s'_\kappa(0) + t_2^{m-1} s_\kappa(0) \right) x^4 \\ &+ \left( t_{2m}^0 \frac{s_\kappa^{(m)}(0)}{m!} + t_{2m-2}^1 \frac{s_\kappa^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + t_{2m-4}^2 \frac{s_\kappa^{(m-2)}(0)}{(m-2)!} + \dots \right. \\ &\left. \dots + t_4^{m-2} \frac{s''_\kappa(0)}{2!} + t_2^{m-1} s'_\kappa(0) + t_0^m s_\kappa(0) \right) x^2 \\ &+ t_{2m}^0 \frac{s_\kappa^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} + t_{2m-2}^1 \frac{s_\kappa^{(m)}(0)}{m!} + t_{2m-4}^2 \frac{s_\kappa^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \dots \\ &\dots + t_4^{m-2} \frac{s_\kappa^{(3)}(0)}{3!} + t_2^{m-1} \frac{s''_\kappa(0)}{2!} + t_0^m s'_\kappa(0). \end{aligned}$$

Rearranjando os termos, obtermos  $E_{2m}$  como

$$\begin{aligned}
E_{2m} &= \left( \sum_{k=m}^m t_{2k}^{m-k} \frac{S_{\kappa}^{(k-m)}(0)}{(k-m)!} \right) x^{2m+2} + \left( \sum_{k=m-1}^m t_{2k}^{m-k} \frac{S_{\kappa}^{(k-(m-1))}(0)}{(k-(m-1))!} \right) x^{2m} \\
&+ \left( \sum_{k=m-2}^m t_{2k}^{m-k} \frac{S_{\kappa}^{(k-(m-2))}(0)}{(k-(m-2))!} \right) x^{2m-2} + \left( \sum_{k=m-3}^m t_{2k}^{m-k} \frac{S_{\kappa}^{(k-(m-3))}(0)}{(k-(m-3))!} \right) x^{2m-4} + \dots \\
&+ \left( \sum_{k=1}^m t_{2k}^{m-k} \frac{S_{\kappa}^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \right) x^4 + \left( \sum_{k=0}^m t_{2k}^{m-k} \frac{S_{\kappa}^{(k)}(0)}{k!} \right) x^2 + \left( \sum_{k=0}^m t_{2k}^{m-k} \frac{S_{\kappa}^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \right)
\end{aligned}$$

De um forma mais compacta, temos

$$E_{2m} = \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{S_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) x^{2(m-(l-1))} \right] + \left( \sum_{k=0}^m t_{2k}^{m-k} \frac{S_{\kappa}^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \right), \quad (\text{A.5})$$

ou ainda

$$E_{2m} = \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{S_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) x^{2(m-(l-1))} + t_{2l}^{m-l} \frac{S_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right]$$

Portanto, a solução para  $\tilde{\psi}(x) = T_{2m}(x)$  será dada por:

$$\tilde{f}_{2m,\kappa}(x) = \frac{\text{sgn}(x)}{R_{\kappa}(x)} \left\{ \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{S_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) x^{2(m-(l-1))} + t_{2l}^{m-l} \frac{S_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right] \right\} \blacksquare$$

**Caso 2.**  $\tilde{\psi}(x) = T_{2m+1}(x)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

O polinômio de Chebyshev de grau ímpar é expresso pela soma

$$T_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^m t_{2k+1}^{m-k} x^{2k+1}. \quad (\text{A.6})$$

Por extenso,

$$T_{2m+1}(x) = t_1^m x^1 + t_3^{m-1} x^3 + t_5^{m-2} x^5 + \dots + t_{2m-3}^2 x^{2m-3} + t_{2m-1}^1 x^{2m-1} + t_{2m+1}^0 x^{2m+1}.$$

Para o caso ímpar, consideramos  $\Psi_\kappa(x)$  em (2.14):

$$\Psi_\kappa(x) = -\pi x \text{PP} \left\{ \sqrt{(x^2 - 1)(x^2 - \kappa^2)} \frac{\psi(x)}{x} \right\}_{x \rightarrow \infty}.$$

Pela mudança de variável  $x^2 = \frac{1}{w}$  e fazendo  $\psi(x) = T_{2m+1}(x)$  na equação, temos

$$\Psi_\kappa \left( \frac{1}{\sqrt{w}} \right) = -\pi \frac{1}{\sqrt{w}} \text{PP} \left\{ \frac{s_\kappa(w)}{w} T_{2m+1} \left( \frac{1}{\sqrt{w}} \right) \sqrt{w} \right\}_{w \rightarrow 0},$$

em que  $s_\kappa(w) = \sqrt{(1-w)(1-\kappa^2 w)}$ .

Analogamente ao caso par, expandimos em série de Taylor o termo  $s_\kappa(w)$  centrado em 0, temos

$$E_{2m+1} = \text{PP} \left\{ T_{2m+1}(x) \sum_{i=0}^{m+1} \frac{s_\kappa^{(i)}(0)}{i!} x^{2(1-i)} \right\}_{x \rightarrow \infty}. \quad (\text{A.8})$$

Usando (A.6), escrevemos (A.8) como

$$E_{2m+1} = \text{PP} \left\{ \sum_{k=0}^m t_{2k+1}^{m-k} x^{2k} \sum_{i=0}^{m+1} \frac{s_\kappa^{(i)}(0)}{i!} x^{2(1-i)} \right\}_{x \rightarrow \infty} \quad (\text{A.9})$$

Reorganizando os termos com mesmo expoente de  $x$ , temos

$$\begin{aligned} E_{2m+1} &= \left( \sum_{k=m}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-m)}(0)}{(k-m)!} \right) x^{2m+2} + \left( \sum_{k=m-1}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-1))}(0)}{(k-(m-1))!} \right) x^{2m} \\ &+ \left( \sum_{k=m-2}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-2))}(0)}{(k-(m-2))!} \right) x^{2m-2} + \left( \sum_{k=m-3}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-3))}(0)}{(k-(m-3))!} \right) x^{2m-4} + \dots \\ &\dots + \left( \sum_{k=1}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \right) x^4 + \left( \sum_{k=0}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k)}(0)}{k!} \right) x^2 + \left( \sum_{k=0}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \right). \end{aligned}$$

Podemos reescrevermos  $E_{2m+1}$  como:

$$E_{2m+1} = \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) x^{2(m-(l-1))} \right] + \left( \sum_{k=0}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_\kappa^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \right)$$

ou ainda,

$$E_{2m+1} = \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) x^{2(m-(l-1))} + t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right]. \quad (\text{A.10})$$

Portanto, a solução para  $\psi(x) = T_{2m+1}(x)$  será dada por:

$$\tilde{f}_{2m+1,\kappa}(x) = \frac{\text{sgn}(x) x}{R_{\kappa}(x)} \left\{ \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) x^{2(m-(l-1))} + t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right] \right\} \blacksquare$$

## APÊNDICE B

Aqui mostramos de forma mais detalhada a obtenção das fórmulas de recorrência apresentadas na seção 2.2.3. Dividimos em dois casos.

**Caso**  $\tilde{\psi}(x) = T_{2m}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

Considere a expressão  $E_{2m}$  para o polinômio  $T_n$  dada no apêndice A,

$$E_{2m} = \text{PP} \left\{ T_{2m}(x) \left( s_{\kappa}(0)x^2 + s'_{\kappa}(0) + \frac{s''_{\kappa}(0)}{2!} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{s_{\kappa}^{(m)}(0)}{m!} \frac{1}{x^{2m-2}} + \frac{s_{\kappa}^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \frac{1}{x^{2m}} \right) \right\}_{x \rightarrow \infty}$$

Substituindo a fórmula de recorrência  $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$  para polinômio de Chebyshev do primeiro tipo, temos:

$$E_{2m} = \text{PP} \left\{ (2xT_{2m-1}(x) - T_{2m-2}(x)) \times \left( s_{\kappa}(0)x^2 + s'_{\kappa}(0) + \frac{s''_{\kappa}(0)}{2!} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{s_{\kappa}^{(m)}(0)}{m!} \frac{1}{x^{2m-2}} + \frac{s_{\kappa}^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \frac{1}{x^{2m}} \right) \right\}_{x \rightarrow \infty}$$

$$E_{2m} = \text{PP} \left\{ 2x T_{2m-1}(x) \left( s_{\kappa}(0)x^2 + s'_{\kappa}(0) + \frac{s''_{\kappa}(0)}{2!} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{s_{\kappa}^{(m)}(0)}{m!} \frac{1}{x^{2m-2}} + \frac{s_{\kappa}^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \frac{1}{x^{2m}} \right) - T_{2m-2}(x) \left( s_{\kappa}(0)x^2 + s'_{\kappa}(0) + \frac{s''_{\kappa}(0)}{2!} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{s_{\kappa}^{(m)}(0)}{m!} \frac{1}{x^{2m-2}} + \frac{s_{\kappa}^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \frac{1}{x^{2m}} \right) \right\}_{x \rightarrow \infty}$$

Aplicando a fórmula (A.1) e (A.6) em  $T_{2m-2}(x)$  e  $T_{2m-1}(x)$ , respectivamente, segue

$$E_{2m} = \text{PP} \left\{ 2x (t_1^{m-1} x^1 + t_3^{m-2} x^3 + t_5^{m-3} x^5 + \dots + t_{2m-3}^1 x^{2m-3} + t_{2m-1}^0 x^{2m-1}) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( s_{\kappa}(0)x^2 + s'_{\kappa}(0) + \frac{s''_{\kappa}(0)}{2!} \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{s_{\kappa}^{(m)}(0)}{m!} \frac{1}{x^{2m-2}} + \frac{s_{\kappa}^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \frac{1}{x^{2m}} \right) \\
& - (t_0^{m-1} + t_2^{m-2}x^2 + t_4^{m-3}x^4 + \cdots + t_{2m-4}^1x^{2m-4} + t_{2m-2}^0x^{2m-2}) \times \\
& \times \left( s_{\kappa}(0)x^2 + s'_{\kappa}(0) + \frac{s''_{\kappa}(0)}{2!} \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{s_{\kappa}^{(m)}(0)}{m!} \frac{1}{x^{2m-2}} + \frac{s_{\kappa}^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \frac{1}{x^{2m}} \right) \Bigg\}_{x \rightarrow \infty}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{2m} = \text{PP} \{ & (2t_1^{m-1}x^2 + 2t_3^{m-2}x^4 + 2t_5^{m-3}x^6 + \cdots + 2t_{2m-3}^1x^{2m-2} + 2t_{2m-1}^0x^{2m}) \times \\
& \times \left( s_{\kappa}(0)x^2 + s'_{\kappa}(0) + \frac{s''_{\kappa}(0)}{2!} \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{s_{\kappa}^{(m)}(0)}{m!} \frac{1}{x^{2m-2}} + \frac{s_{\kappa}^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \frac{1}{x^{2m}} \right) \\
& - (t_0^{m-1} + t_2^{m-2}x^2 + t_4^{m-3}x^4 + \cdots + t_{2m-4}^1x^{2m-4} + t_{2m-2}^0x^{2m-2}) \times \\
& \times \left( s_{\kappa}(0)x^2 + s'_{\kappa}(0) + \frac{s''_{\kappa}(0)}{2!} \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{s_{\kappa}^{(m)}(0)}{m!} \frac{1}{x^{2m-2}} + \frac{s_{\kappa}^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \frac{1}{x^{2m}} \right) \Bigg\}_{x \rightarrow \infty}
\end{aligned}$$

Efetuada as multiplicações, aplicando o limite com  $x \rightarrow \infty$  e agrupando os termos de mesma potência, obtemos

$$\begin{aligned}
E_{2m} = & 2x \left( \sum_{k=m-1}^{m-1} t_{2k+1}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-1))}(0)}{(k-(m-1))!} \right) x^{2m+1} + 2x \left( \sum_{k=m-2}^{m-1} t_{2k+1}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-2))}(0)}{(k-(m-2))!} \right) x^{2m-1} \\
& + 2x \left( \sum_{k=m-3}^{m-1} t_{2k+1}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-3))}(0)}{(k-(m-3))!} \right) x^{2m-3} + \cdots + 2x \left( \sum_{k=0}^{m-1} t_{2k+1}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k)}(0)}{k!} \right) x^3 \\
& + 2x \left( \sum_{k=0}^{m-1} t_{2k+1}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \right) x + 2 \left( \sum_{k=0}^{m-1} t_{2k+1}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k+2)}(0)}{(k+2)!} \right) \\
& - \left( \sum_{k=m-1}^{m-1} t_{2k}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-1))}(0)}{(k-(m-1))!} \right) x^{2m} - \left( \sum_{k=m-2}^{m-1} t_{2k}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-2))}(0)}{(k-(m-2))!} \right) x^{2m-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \sum_{k=m-3}^{m-1} t_{2k}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-3))}(0)}{(k-(m-3))!} \right) x^{2m-4} - \left( \sum_{k=m-4}^{m-1} t_{2k}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-4))}(0)}{(k-(m-4))!} \right) x^{2m-6} - \dots \\
& - \left( \sum_{k=1}^{m-1} t_{2k}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \right) x^4 - \left( \sum_{k=0}^{m-1} t_{2k}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k)}(0)}{k!} \right) x^2 - \left( \sum_{k=0}^{m-1} t_{2k}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \right).
\end{aligned}$$

De (A.9) e (A.4),

$$E_{2m} = 2x \cdot (x \cdot E_{2m-1}) - E_{2m-2} + \left( 2 \sum_{k=0}^{m-1} t_{2k+1}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k+2)}(0)}{(k+2)!} \right)$$

Substituindo a equação acima em (2.13) concluímos que

$$\tilde{f}_{2m,\kappa}(x) = 2x \tilde{f}_{2m-1,\kappa}(x) - \tilde{f}_{2m-2,\kappa}(x) + \frac{\operatorname{sgn}(x)}{R_{\kappa}(x)} \left( 2 \sum_{k=0}^{m-1} t_{2k+1}^{m-1-k} \frac{s_{\kappa}^{(k+2)}(0)}{(k+2)!} \right) \blacksquare$$

**Caso**  $\psi(x) = T_{2m+1}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

De (A.6) e (A.9) podemos escrever

$$E_{2m+1} = \operatorname{PP} \left\{ \frac{T_{2m+1}(x)}{x} \sum_{i=0}^{m+1} \frac{s_{\kappa}^{(i)}(0)}{i!} x^{2(1-i)} \right\}_{x \rightarrow \infty}. \quad (\text{B.1})$$

Substituindo a fórmula de recorrência  $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ ,

temos

$$\begin{aligned}
E_{2m+1} &= \operatorname{PP} \left\{ \frac{2x T_{2m}(x) - T_{2m-1}(x)}{x} \sum_{i=0}^{m+1} \frac{s_{\kappa}^{(i)}(0)}{i!} x^{2(1-i)} \right\}_{x \rightarrow \infty} \\
&= \operatorname{PP} \left\{ 2 T_{2m}(x) \sum_{i=0}^{m+1} \frac{s_{\kappa}^{(i)}(0)}{i!} x^{2(1-i)} - \frac{T_{2m-1}(x)}{x} \sum_{i=0}^{m+1} \frac{s_{\kappa}^{(i)}(0)}{i!} x^{2(1-i)} \right\}_{x \rightarrow \infty} \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

De (A.3) e (B.1), segue que

$$E_{2m+1} = 2E_{2m} - E_{2m-1} \quad (\text{B.3})$$

Observe que os termos em (B.2) correspondem à  $E_{2m}$  e  $E_{2m-1}$  respectivamente, obtidas das fórmulas em (A.5) e (A.10). Substituindo a equação (B.3) em (2.15), temos

$$\tilde{f}_{2m+1,\kappa}(x) = 2x \cdot \tilde{f}_{2m,\kappa}(x) - \tilde{f}_{2m-1,\kappa}(x) \blacksquare$$

## APÊNDICE C

Neste apêndice mostramos como expressar a constante  $C_{1,\kappa}$  e a solução da equação integral hipersingular (3.8), a saber

$$f_\kappa(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{1}{R_\kappa(u)} [C_{1,\kappa} + \Psi_\kappa(u)] du, & x \in (-1, -\kappa), \\ \frac{1}{\pi} \int_x^1 \frac{1}{R_\kappa(u)} [C_{1,\kappa} + \Psi_\kappa(u)] du, & x \in (\kappa, 1), \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

em termos de integrais elípticas, da parte principal da densidade da integral e funções elementares. Separamos em dois casos de acordo com a paridade de  $\psi(t)$ .

**Se  $\psi(t)$  é par.**

De acordo com [6], se  $\psi(t)$  temos na solução (C.1):

$$C_{1,\kappa} = \frac{P_1(\kappa)}{F(q)} \quad \text{e} \quad C_{2,\kappa} = 0,$$

em que

$$P_1(\kappa) = \int_\kappa^1 \frac{1}{R_\kappa(u)} \int_\kappa^1 \frac{tR_\kappa(t)}{u^2 - t^2} (\psi(-t) + \psi(t)) dt du,$$

e

$$F(q) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-q^2x^2)}}, \quad q = \sqrt{1-\kappa^2}$$

é uma integral elíptica completa do primeiro tipo.

Note que a integral interna em  $P_1(\kappa)$  é uma integral de Cauchy. De fato, chamando

$$p_1(u^2) = \int_\kappa^1 \frac{tR_\kappa(t)}{u^2 - t^2} (\psi(-t) + \psi(t)) dt$$

e aplicando as mudanças de variáveis  $u^2 = \nu$  e  $t^2 = \tau$ , temos:

$$p_1(\nu) = \int_{\kappa^2}^1 R_\kappa(\sqrt{\tau}) \psi(\sqrt{\tau}) \frac{d\tau}{\nu - \tau}$$

$$= - \int_{\kappa^2}^1 \sqrt{(1-\tau)(\tau-\kappa^2)} \psi(\sqrt{\tau}) \frac{d\tau}{\tau-\nu}.$$

Por ser uma integral de Cauchy podemos utilizar a proposição 2.2.1 e reescrevê-la em termos da parte principal densidade da integral. Assim,

$$\begin{aligned} p_1(\nu) &= - \frac{\pi i}{\pi i} \int_{\kappa^2}^1 \sqrt{(1-\tau)(\tau-\kappa^2)} \psi(\sqrt{\tau}) \frac{d\tau}{\tau-\nu} \\ &= - \pi \frac{1}{\pi i} \int_{\kappa^2}^1 \sqrt{(\tau-1)(\tau-\kappa^2)} \psi(\sqrt{\tau}) \frac{d\tau}{\tau-\nu} \\ &= \pi \text{PP} \left\{ \sqrt{(\nu-1)(\nu-\kappa^2)} \psi(\sqrt{\nu}) \right\}_{\nu \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

Desfazendo as mudanças de variáveis e substituindo em  $P_1(\kappa)$ , obtemos:

$$C_{1,\kappa} = \frac{\pi}{F(q)} \int_{\kappa}^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2-1)(u^2-\kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} du.$$

A solução fica

$$f_{\kappa}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \left[ C_{1,\kappa} - \pi \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2-1)(u^2-\kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} \right] du, & x \in (-1, -\kappa), \\ \frac{1}{\pi} \int_x^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \left[ C_{1,\kappa} - \pi \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2-1)(u^2-\kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} \right] du, & x \in (\kappa, 1). \end{cases}$$

**Se  $\psi(t)$  é ímpar.**

Segundo [6], se  $\psi(t)$  é uma função ímpar temos:

$$C_{1,\kappa} = C_{2,\kappa} = 0.$$

A solução fica

$$f_{\kappa}(x) = \begin{cases} - \int_{-1}^x \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2-1)(u^2-\kappa^2)} \frac{\psi(u)}{u} \right\}_{u \rightarrow \infty} du, & x \in (-1, -\kappa), \\ - \int_x^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2-1)(u^2-\kappa^2)} \frac{\psi(u)}{u} \right\}_{u \rightarrow \infty} du, & x \in (\kappa, 1). \end{cases}$$

## C.1 Solução da equação integral hipersingular no intervalo

$(\kappa, 1)$

Vamos analisar a solução (C.1) para  $x \in (\kappa, 1)$ , i.e.,

$$f_\kappa(x) = \frac{1}{\pi} \int_x^1 \frac{1}{R_\kappa(u)} [C_{1,\kappa} + \Psi_\kappa(u)] du, \quad x \in (\kappa, 1), \quad (\text{C.2})$$

em que

$$\Psi_\kappa(u) = \int_{-1}^{-\kappa} \frac{\psi(t)R_\kappa(t)}{u-t} dt - \int_\kappa^1 \frac{\psi(t)R_\kappa(t)}{u-t} dt$$

e

$$R_\kappa(u) = \sqrt{(1-u^2)(u^2-\kappa^2)}.$$

Denotaremos as integrais em (C.2) como segue:

$$f_\kappa(x) = \frac{C_{1,\kappa}}{\pi} \underbrace{\int_x^1 \frac{du}{R_\kappa(u)}}_{A_{1,\kappa}(x)} + \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_x^1 \frac{1}{R_\kappa(u)} \Psi_\kappa(u) du}_{B_{1,\kappa}(x)}.$$

Veja que

$$A_{1,\kappa}(x) = \int_x^1 \frac{dt}{R_\kappa(t)} = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-\kappa^2)}}$$

é uma integral elíptica do primeiro tipo. Logo, utilizando a equação (3.13) podemos reescrevê-la a forma canônica, i.e.,

$$A_{1,\kappa}(x) = g \int_0^{u_1} du = g u_1 = g \operatorname{sn}^{-1}(\operatorname{sen} \varphi, q) = g F(\varphi(x), q),$$

donde

$a = 1, \quad y = x, \quad b = \kappa, \quad (a > y \geq b > 0)$ $\operatorname{sn}^2 u = \frac{1-t^2}{1-\kappa^2}, \quad q^2 = 1-\kappa^2, \quad g = 1$ $\varphi = \operatorname{am} u_1 = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\kappa^2}}, \quad \operatorname{sn} u_1 = \operatorname{sen} \varphi.$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$\therefore A_{1,\kappa}(x) = F(\varphi(x), q).$$

Quanto a integral  $B_\kappa(x)$ , separamos em casos de acordo com a paridade de  $\psi(u)$  em  $\Psi_\kappa(u)$ . Vimos na seção 2.2.1 que:

**Caso 1.** Se  $\psi(t)$  é uma função par, então

$$\Psi_\kappa(u) = -\pi \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty}.$$

Daí,

$$B_{1,\kappa}(x) = -\pi \int_x^1 \frac{1}{R_\kappa(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} du.$$

**Caso 2.** Se  $\psi(t)$  é uma função ímpar, então

$$\Psi_\kappa(u) = -\pi u \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \frac{\psi(u)}{u} \right\}_{u \rightarrow \infty}$$

Daí,

$$B_{1,\kappa}(x) = -\pi \int_x^1 \frac{u}{R_\kappa(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \frac{\psi(u)}{u} \right\}_{u \rightarrow \infty} du.$$

Portanto, a depender da função de entrada  $\psi(u)$  ser par ou ímpar temos respectivamente as soluções:

$$f_\kappa(x) = \frac{C_{1,\kappa}}{\pi} F(\varphi(x), q) - \int_x^1 \frac{1}{R_\kappa(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} du$$

e

$$f_\kappa(x) = - \int_x^1 \frac{u}{R_\kappa(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \frac{\psi(u)}{u} \right\}_{u \rightarrow \infty} du.$$

## C.2 Solução da equação integral hipersingular no intervalo

$(-1, -\kappa)$

Vamos investigar agora a solução (C.1) para  $x \in (-1, -\kappa)$ , i.e.,

$$f_\kappa(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{1}{R_\kappa(u)} [C_{1,\kappa} + \Psi_\kappa(u)] du.$$

Trocando o sinal da integral e efetuando a mudança de variável  $u = -\nu$ ,  $\nu \in (\kappa, 1)$ , temos:

$$\begin{aligned} f_\kappa(x) &= \frac{-1}{\pi} \int_x^{-1} \frac{1}{R_\kappa(u)} [C_{1,\kappa} + \Psi_\kappa(u)] du \\ f_\kappa(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-x}^1 \frac{1}{R_\kappa(-\nu)} [C_{1,\kappa} + \Psi_\kappa(-\nu)] d\nu \\ f_\kappa(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-x}^1 \frac{1}{R_\kappa(\nu)} [C_{1,\kappa} + \Psi_\kappa(-\nu)] d\nu \end{aligned} \quad (C.3)$$

Vamos denotar as integrais em (C.3) como segue:

$$f_\kappa(x) = \underbrace{\frac{C_{1,\kappa}}{\pi} \int_{-x}^1 \frac{d\nu}{R_\kappa(\nu)}}_{A_{2,\kappa}(x)} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-x}^1 \frac{1}{R_\kappa(\nu)} \Psi_\kappa(-\nu) d\nu}_{B_{2,\kappa}(x)}.$$

Note que

$$A_{2,\kappa}(x) = \int_{-x}^1 \frac{d\nu}{R_\kappa(\nu)} = \int_y^1 \frac{d\nu}{R_\kappa(\nu)} = A_{1,\kappa}(y), \text{ sendo } -x = y \in (\kappa, 1).$$

Para a integral  $B_{2,\kappa}(x)$ , dividimos em dois casos:

**Caso 1.** Se  $\psi(u)$  é par, então  $\Psi_\kappa(u)$  é par. De fato,

$$\begin{aligned} \Psi_\kappa(-u) &= -\pi \text{PP} \left\{ \sqrt{((-u)^2 - 1)((-u)^2 - \kappa^2)} \psi(-u) \right\}_{u \rightarrow \infty} \\ &= -\pi \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} \\ &= \Psi_\kappa(u). \end{aligned}$$

Da igualdade acima e tomando  $y = -x$ , temos:

$$\begin{aligned} B_{2,\kappa}(x) &= \int_{-x}^1 \frac{1}{R_\kappa(\nu)} \Psi_\kappa(-\nu) d\nu \\ &= \int_y^1 \frac{1}{R_\kappa(\nu)} \Psi_\kappa(\nu) d\nu \\ &= -\pi \int_y^1 \frac{1}{R_\kappa(\nu)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(\nu^2 - 1)(\nu^2 - \kappa^2)} \psi(\nu) \right\}_{\nu \rightarrow \infty} d\nu \\ &= B_{1,\kappa}(y), \quad y \in (\kappa, 1). \end{aligned}$$

**Caso 2.** Se  $\psi(u)$  é ímpar, então  $\Psi_\kappa(u)$  é ímpar. De fato,

$$\begin{aligned}\Psi_\kappa(-u) &= -\pi(-u) \text{PP} \left\{ \sqrt{((-u)^2 - 1)((-u)^2 - \kappa^2)} \frac{\psi(-u)}{-u} \right\}_{u \rightarrow \infty} \\ &= \pi u \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \frac{\psi(u)}{u} \right\}_{u \rightarrow \infty} \\ &= -\Psi_\kappa(u).\end{aligned}$$

Da igualdade acima e tomando  $y = -x$ , temos:

$$\begin{aligned}B_{2,\kappa}(x) &= \int_{-x}^1 \frac{1}{R_\kappa(\nu)} \Psi_\kappa(-\nu) \, d\nu \\ &= - \int_y^1 \frac{1}{R_\kappa(\nu)} \Psi_\kappa(\nu) \, d\nu \\ &= \pi \int_y^1 \frac{\nu}{R_\kappa(\nu)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(\nu^2 - 1)(\nu^2 - \kappa^2)} \frac{\psi(\nu)}{\nu} \right\}_{u \rightarrow \infty} \, d\nu \\ &= -B_{1,\kappa}(y), \quad y \in (\kappa, 1).\end{aligned}$$

Portanto, as soluções para os casos par e ímpar são, respectivamente:

$$f_\kappa(x) = \frac{C_{1,\kappa}}{\pi} F(\varphi(-x), q) - \int_{-x}^1 \frac{1}{R_\kappa(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} \, du$$

e

$$f_\kappa(x) = \int_{-x}^1 \frac{u}{R_\kappa(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \frac{\psi(u)}{u} \right\}_{u \rightarrow \infty} \, du.$$

**Em resumo:**

**Se  $\psi(u)$  é par.**

$$f_{\kappa}(x) = \begin{cases} \frac{C_{1,\kappa}}{\pi} F(\varphi(-x), q) - \int_{-x}^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} du, & x \in (-1, -\kappa) \\ \frac{C_{1,\kappa}}{\pi} F(\varphi(x), q) - \int_x^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} du, & x \in (\kappa, 1) \end{cases}$$

ou ainda,

$$f_{\kappa}(x) = \frac{C_{1,\kappa}}{\pi} F(\varphi(|x|), q) - \int_{|x|}^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty} du$$

$$x \in (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1).$$

**Se  $\psi(u)$  é ímpar.**

$$f_{\kappa}(x) = \begin{cases} \int_{-x}^1 \frac{u}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \frac{\psi(u)}{u} \right\}_{u \rightarrow \infty} du, & x \in (-1, -\kappa) \\ - \int_x^1 \frac{u}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \frac{\psi(u)}{u} \right\}_{u \rightarrow \infty} du, & x \in (\kappa, 1). \end{cases}$$

ou ainda,

$$f_{\kappa}(x) = -\text{sgn}(x) \int_{|x|}^1 \frac{u}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \frac{\psi(u)}{u} \right\}_{u \rightarrow \infty} du,$$

$$x \in (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1).$$

### C.3 Solução analítica para o caso $\psi(t) = T_n(t)$

No caso particular em que  $\psi(t) = T_n(t)$ , conseguimos expressar a constante  $C_{1,\kappa}$  e a solução da equação integral hipersingular (3.5) em termos séries finitas de integrais elípticas. Novamente, separamos em dois casos de acordo com a paridade do polinômio  $T_n(t)$ , que está associada ao grau do polinômio.

**Caso 1.**  $T_n(t)$  tem grau par  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

No apêndice A, vimos que  $E_{2m} = \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty}$  e que no caso particular de  $\psi(u) = T_{2m}(u)$

$$E_{2m} = \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) u^{2(m-(l-1))} + t_{2l}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right].$$

Como  $\Psi_{\kappa}(u) = -\pi E_{2m}$ , obtemos:

$$\Psi_{\kappa}(u) = -\pi \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) u^{2(m-(l-1))} + t_{2l}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right].$$

Da seção anterior, temos

$$C_{1,\kappa} = \frac{\pi}{F(q)} \int_{\kappa}^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \psi(u) \right\}_{u \rightarrow \infty}.$$

Substituindo  $E_{2m}$  em  $C_{1,\kappa}$ , temos:

$$C_{1,\kappa} = \frac{\pi}{F(q)} \int_{\kappa}^1 \frac{1}{R_{\kappa}(u)} \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) u^{2(m-(l-1))} + t_{2l}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right] du$$

$$C_{1,\kappa} = \frac{\pi}{F(q)} \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) \int_{\kappa}^1 \frac{u^{2(m-(l-1))}}{R_{\kappa}(u)} du + \right. \\ \left. + t_{2l}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \int_{\kappa}^1 \frac{du}{R_{\kappa}(u)} \right]$$

$$C_{1,\kappa} = \frac{\pi}{F(q)} \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) I_{2(m-(l-1))} + t_{2l}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} I_0 \right],$$

sendo  $q = \sqrt{1 - \kappa^2}$ ,  $t_i^j$  os coeficientes do polinômio  $T_{2m}$  e  $I_p$  é a integral de uma das 12 funções elípticas de Jacobi (cf. [4]). Temos:

$$f_{2m,\kappa}(x) = \begin{cases} \frac{C_{1,\kappa}}{\pi} F(\varphi(-x), q) - \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) G_{2(m-(l-1))}(-x) \right] - \\ - \left( \sum_{l=0}^m t_{2l}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right) G_0(-x), & x \in (-1, -\kappa), \\ \frac{C_{1,\kappa}}{\pi} F(\varphi(x), q) - \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) G_{2(m-(l-1))}(x) \right] - \\ - \left( \sum_{l=0}^m t_{2l}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right) G_0(x), & x \in (\kappa, 1) \end{cases}$$

ou

$$f_{2m,\kappa}(x) = \frac{C_{1,\kappa}}{\pi} F(\varphi(|x|), q) - \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) G_{2(m-(l-1))}(|x|) \right] - \\ - \left( \sum_{l=0}^m t_{2l}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right) G_0(|x|), \quad x \in (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1).$$

**Caso 2.**  $T_n(t)$  é de grau ímpar  $n = 2m + 1$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

No caso em  $T_n(t)$  é ímpar vimos que  $C_{1,\kappa} = C_{2,\kappa} = 0$ . Agora, do apêndice A, temos

$$E_{2m+1} = \text{PP} \left\{ \sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - \kappa^2)} \frac{\psi(u)}{u} \right\}_{u \rightarrow \infty},$$

e no caso particular de  $\psi(u) = T_{2m+1}(u)$

$$E_{2m+1} = \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) u^{2(m-(l-1))} + t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right]$$

Como  $\Psi_{\kappa}(u) = -\pi u E_{2m+1}$ , segue:

$$\Psi_{\kappa}(u) = -\pi u \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) u^{2(m-(l-1))} + t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right].$$

Logo,

$$f_{\kappa}(x) = \begin{cases} \int_{-x}^1 \frac{u}{R_{\kappa}(u)} \left\{ \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) u^{2(m-(l-1))} + \right. \right. \\ \left. \left. + t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right] \right\} du, & x \in (-1, -\kappa) \\ - \int_x^1 \frac{u}{R_{\kappa}(u)} \left\{ \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) u^{2(m-(l-1))} + \right. \right. \\ \left. \left. + t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right] \right\} du, & x \in (\kappa, 1) \end{cases}$$

Passando a integral para dentro dos somatórios, segue que

$$f_{\kappa}(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) \int_{-x}^1 \frac{u^{2(m-(l-1))+1}}{R_{\kappa}(u)} du \right] + \\ + \sum_{l=0}^m t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \int_{-x}^1 \frac{u}{R_{\kappa}(u)} du, & x \in (-1, -\kappa) \\ - \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) \int_x^1 \frac{u^{2(m-(l-1))+1}}{R_{\kappa}(u)} du \right] - \\ - \sum_{l=0}^m t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \int_x^1 \frac{u}{R_{\kappa}(u)} du, & x \in (\kappa, 1) \end{cases}$$

Portanto,

$$f_{2m+1,\kappa}(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) G_{2(m-(l-1))+1}(-x) \right] + \\ + \left( \sum_{l=0}^m t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right) G_1(-x), & x \in (-1, -\kappa), \\ \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) G_{2(m-(l-1))+1}(x) \right] + \\ + \left( \sum_{l=0}^m t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right) G_1(x), & x \in (\kappa, 1) \end{cases}$$

ou ainda,

$$f_{2m+1,\kappa}(x) = -\operatorname{sgn}(x) \sum_{l=0}^m \left[ \left( \sum_{k=m-l}^m t_{2k+1}^{m-k} \frac{s_{\kappa}^{(k-(m-l))}(0)}{(k-(m-l))!} \right) G_{2(m-(l-1))+1}(|x|) \right] \\ - \operatorname{sgn}(x) \left( \sum_{l=0}^m t_{2l+1}^{m-l} \frac{s_{\kappa}^{(l+1)}(0)}{(l+1)!} \right) G_1(|x|), \quad x \in (-1, -\kappa) \cup (\kappa, 1)$$

em que  $G_{2(m-(l-1))+1}$  é uma das 12 integrais de funções elípticas de Jacobi (c.f. as equações (3.14) e (3.15)).