

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jonas Francisco de Medeiros

Processos a Tempo Contínuo com Longa Dependência

Porto Alegre

2017

Jonas Francisco de Medeiros

Processos a Tempo Contínuo com Longa Dependência

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Pura, com ênfase em Probabilidade e Estatística Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Sílvia Regina Costa Lopes

Porto Alegre

2017

Jonas Francisco de Medeiros

Processos a Tempo Contínuo com Longa Dependência/ Jonas Francisco de Medeiros. – Porto Alegre, 2017-

81 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Profa. Dra. Sílvia Regina Costa Lopes

Dissertação (Mestrado) – UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA , 2017.

1. Equações Diferenciais Estocásticas. 2. Processos Estocásticos a Tempo Contínuo. 3. Longa Dependência. 4. Estimação. I. Sílvia Regina Costa Lopes. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. III. Instituto de Matemática. IV. Processos a tempo contínuo com longa dependência.

CDU 00:000:000.0

Jonas Francisco de Medeiros

Processos a Tempo Contínuo com Longa Dependência

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Pura, com ênfase em Probabilidade e Estatística Matemática.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Sílvia Regina Costa Lopes
Orientadora

Professor
Dr. Ary Vasconcelos Medino (UnB)

Professor
Dr. Cleber Bisognin (UFRGS)

Professora
Dra. Josiane Stein (IFSul)

Porto Alegre
2017

Agradecimentos

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela qualidade de ensino.

A todos os professores que já tive nesta minha jornada acadêmica. Em particular, à minha orientadora pela paciência e por ter me apresentado os processos estocásticos a tempo contínuo com longa dependência.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

Aos colegas do Laboratório Computacional de Pesquisas em Matemática (LPCM).

Aos meus amigos, que me deram apoio para eu nunca desistir de ser um mestre.

À minha família, que diz ter orgulho de mim, mas sou eu que tenho orgulho deles.

*“Não é sobre ter todas as pessoas do mundo pra si.
É sobre saber que, em algum lugar, alguém zela por ti.
É sobre cantar e poder escutar mais do que a própria voz.
É sobre dançar na chuva de vida que cai sobre nós.
É saber se sentir infinito
Num universo tão vasto e bonito, é saber sonhar.
Então fazer valer a pena
Cada verso daquele poema sobre acreditar.
Não é sobre chegar no topo do mundo e saber que venceu.
É sobre escalar e sentir que o caminho te fortaleceu.
É sobre ser abrigo e também ter morada em outros corações,
E assim ter amigos contigo em todas as situações.
A gente não pode ter tudo,
Qual seria a graça do mundo se fosse assim?
Por isso eu prefiro sorrisos
E os presentes que a vida trouxe para perto de mim.
Não é sobre tudo que o seu dinheiro é capaz de comprar.
E sim sobre cada momento, sorriso a se compartilhar.
Também não é sobre correr contra o tempo pra ter sempre mais.
Porque quando menos se espera, a vida já ficou pra trás.
Segura teu filho no colo,
Sorria e abraça os teus pais enquanto estão aqui.
Que a vida é trem-bala, parceiro
E a gente é só passageiro prestes a partir...”*

Ana Vilela.

Resumo

Neste trabalho, estudamos dois processos estocásticos a tempo contínuo que advêm de uma classe de processos baseada na solução da equação de Langevin generalizada. Consideramos para o ruído um processo de Lévy α -estável. Apresentamos um estudo de algumas medidas de dependência que possam substituir a função de autocovariância, no caso α -estável. As medidas de dependência consideradas foram: função de covariação, função de codiferença e função de covariância espectral. Além disso, propomos um processo estocástico que pertence à classe dos processos média móvel fracionariamente integrados, obtido a partir das integrais de Riemann-Liouville. Para os processos estudados neste trabalho, apresentamos propriedades e resultados teóricos, especialmente, provamos que estes processos possuem ou não a propriedade de longa dependência. Encontrado um processo que possui a propriedade de longa dependência, apresentamos um estudo de simulações para este processo, mostrando a sua geração e outras propriedades, no caso em que o ruído é o movimento Browniano. Por fim, apresentamos um estudo sobre a estimação dos parâmetros do processo que possui a propriedade de longa dependência.

Palavras-chaves: Processos estocásticos a tempo contínuo; Longa dependência; Medidas de dependência; Processos do Tipo Ornstein-Uhlenbeck Generalizados; Processos Fracionariamente Integrados do Tipo Média Móvel.

Abstract

In this work we study two continuous-time processes arising from the class of processes based on solution of the generalized Langevin equation. We consider α -stable Lévy motion as the noise. We present a study of some dependence measures in order to replace the autocovariance function in the α -stable context. We consider three different dependence measures: covariation, coddifference and spectral covariance. We also present a study of a stochastic process that belongs to the class of the fractionally integrated moving average processes. We use the Riemann-Liouville fractional integral to construct this process. We prove theoretical properties for the processes under study, especially, we show if these process have or not the long-range dependence associated. After finding a process that has the property of long-range dependence, we present a simulation study for this process. We restrict the noise as Brownian motion for simulation purposes. Lastly, we present a study about the estimation of the process parameters that has the long-range property.

Key-words: Continuous-time processes. Long-range Dependence. Dependence Measures. Generalized Ornstein-Uhlenbeck Type processes. Fractionally Integrated Moving Average processes.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	12
3	PROCESSOS ADVINDOS DA CLASSE GOUT	19
3.1	Processo Particular (Klebaner, 2005)	19
3.1.1	Definição do processo	19
3.1.2	Propriedades	20
3.2	Medidas de Dependência	28
3.2.1	Função de Covariação	28
3.2.2	Função de Codiferença	33
3.2.3	Função de Covariância Espectral	36
3.3	Processo Quadrático do Tipo OU	37
3.3.1	Definição do Processo	37
3.3.2	Propriedades	41
4	PROCESSO DO TIPO MÉDIA MÓVEL FRACIONARIAMENTE INTEGRADO	47
4.1	Definição do Processo	54
4.2	Longa Dependência	57
5	SIMULAÇÃO E ESTIMAÇÃO	65
5.1	Simulação	65
5.2	Estimação do parâmetro d	69
5.3	Estimação do parâmetro λ	72
6	CONCLUSÕES	74
	REFERÊNCIAS	76

1 Introdução

Neste trabalho, estudamos três processos estocásticos a tempo contínuo. Dois destes processos advêm da solução da equação de Langevin Generalizada. Enquanto o outro processo pertence à classe de processos média móvel fracionalmente integrados. O interesse no estudo por estes processos, surgiu da busca de novos modelos que apresentassem a propriedade de longa dependência. Os processos com propriedade de longa dependência caracterizam-se por persistente dependência entre as observações, ainda que distantes no tempo.

O primeiro estudo relatado com as características de longa dependência em uma série temporal foi apresentado por Hurst (1951) em um artigo sobre a famosa série dos níveis do Rio Nilo. Somente na década de 80 esse tipo de processo passou a ser considerado em aplicações na área de Economia, bem como em diversas áreas atualmente. Desde então, a longa dependência é objeto de estudo de diversos autores, como Hosking (1984), Lopes (2008), Lévy e Taqqu (1994), entre outros.

A fim de encontrar um processo estocástico que possua a propriedade de longa dependência, consideramos, em um primeiro momento, processos estocásticos em que o ruído é dado por um processo de Lévy α -estável. Os dois processos estocásticos considerados para o estudo são advindos da classe de processos do tipo Ornstein-Uhlenbeck generalizado. O primeiro processo apresentado surgiu de um exemplo de Klebaner (2005), enquanto o segundo processo foi apresentado inicialmente por Stein *et al.* (2016).

A longa dependência pode ser caracterizada pelo decaimento lento da função de autocovariância do processo, desde que esta função esteja bem definida. Sabe-se que, para processos estocásticos onde o ruído é dado por um processo α -estável, a função de autocovariância não pode ser definida, já que os momentos de segunda ordem são infinitos nesta classe, exceto quando α é igual a 2. Então, estudamos outras medidas de dependência: a função de covariação, a função de codiferença e a função de covariância espectral. As medidas de dependência apresentadas neste trabalho são baseadas nos estudos de Samorodnitsky e Taqqu (1994), Paulauskas (1976) e Rosadi e Deistler (2009). Ainda, foi necessário buscar outras definições para a propriedade de longa dependência. Para definir a propriedade de longa dependência para estes processos, referenciamos os autores Beran (2010), Heyde e Yang (1997), Samorodnitsky e Taqqu (1994) e Maejima e Yamamoto (2003).

Após concluído alguns resultados teóricos sobre estes dois processos, iniciamos o estudo dos processos média móvel fracionalmente integrados. Baseado no artigo de Marquardt (2006), propomos um novo processo estocástico que apresenta a propriedade

de longa dependência. Este processo, a ser definido, surgiu a partir de um modelo similiar ao Processo Quadrático do Tipo OU, proposto em Stein *et al.* (2016). Criamos, então, um processo estocástico média móvel, cujo núcleo coincide com o do Processo Quadrático do Tipo OU, porém considerando o processo ruído como um processo Lévy de segundo momento finito. A partir da teoria sobre as integrais fracionárias de Riemann-Liouville, dadas em Samko *et al.* (1993), propomos um processo média móvel fracionalmente integrado, para o qual destacamos alguns resultados e provamos que este processo possui a propriedade de longa dependência.

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta preliminares e definições básicas para o estudo realizado. O Capítulo 3 inicia com o estudo do processo estocástico a tempo contínuo criado a partir do exemplo apresentado em Klebaner (2005). Após a definição deste processo, estudamos algumas de suas propriedades como, por exemplo, o fato de não ser estacionário, mas ser *self-similar*. Propomos, ainda, um processo estacionário baseado na transformação de Lamperti para processos que são *self-similar*. Após isto, apresentamos três discretizações para o processo, exemplificando algumas trajetórias para determinados casos.

Na segunda seção do Capítulo 3, definimos as medidas de dependência consideradas, obtendo as expressões destas funções para o processo definido na primeira seção. Através da função de covariação, será possível provar que o primeiro processo estudado não apresenta a propriedade de longa dependência.

Na terceira seção do Capítulo 3, definimos e estudamos o Processo Quadrático do Tipo OU. Após apresentarmos uma discretização para ele, provamos algumas propriedades do processo relativo às suas medidas de dependência. Estes resultados nos fornecerão um embasamento para concluir que este processo também não apresenta a propriedade de longa dependência.

No Capítulo 4, propomos e estudamos um processo média móvel fracionalmente integrado. Este capítulo é iniciado com o estudo de um processo estocástico média móvel estacionário. Após, utilizando a integral de Riemann-Liouville, desenvolvemos a técnica de Marquardt (2006) para se obter um processo média móvel fracionalmente integrado. Definido o processo, apresentamos alguns resultados, especialmente, provamos que o processo obtido possui a propriedade de longa dependência.

No Capítulo 5, apresentamos um estudo de simulações para exemplos do processo estudado no capítulo anterior e abordamos a estimação dos dois parâmetros do processo. Na primeira seção, após obtermos uma aproximação para o processo e provarmos que tal aproximação é convergente, apresentamos algumas trajetórias para determinados casos. Na segunda seção, realizamos a estimação de um dos parâmetros do processo, enquanto na terceira seção, fazemos alguns comentários sobre a dificuldade de se realizar a estimação do outro parâmetro.

As conclusões finais são apresentadas no Capítulo 6. Alguns dos resultados obtidos, encontram-se no Apêndice A deste trabalho.

2 Preliminares

Neste primeiro capítulo apresentamos alguns conceitos básicos pertinentes aos estudos que serão desenvolvidos na dissertação. Além disto, partimos do suposto de que o leitor possua um conhecimento prévio sobre a teoria de probabilidades e estatística matemática.

Uma série temporal é uma sequência de realizações - observações - de uma variável aleatória ao longo do tempo. Do ponto de vista probabilístico, uma série temporal nada mais é do que uma realização de um processo estocástico. Esta área possui uma vasta importância por sua aplicação em estudos econômicos, biológicos, físicos, entre outros.

Definição 2.1. Um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in T}$ definidas de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ em um espaço mensurável (S, \mathcal{G}) . As variáveis X_t são indexadas por um parâmetro $t, t \in T$, que representa o parâmetro temporal do processo. Se T for contínuo, temos um processo estocástico a tempo contínuo.

Neste trabalho apresentamos um estudo realizado com alguns processos estocásticos a tempo contínuo, onde consideramos que $T = \mathbb{R}^+$ ou $T = \mathbb{R}$. A seguir, definimos algumas propriedades referentes aos processos estocásticos.

Definição 2.2. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ é dito ser *fracamente estacionário* se:

- i. $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$, para todo $t \in T$.
- ii. $\mathbb{E}[X_t] = \mu$, com μ constante independente de t , para todo $t \in T$.
- iii. $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + t, s + t)$, para quaisquer $r, s, t \in T$.

Observe que o último item da definição anterior satisfaz $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r - s, 0)$ para quaisquer $r, s \in T$. É natural, então, redefinir a *função de autocovariância de ordem h* de um processo fracamente estacionário como

$$\gamma_X(h) \equiv \gamma_X(h, 0) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}), \quad \forall t, h \in T.$$

A estacionaridade definida anteriormente também é comumente referida como *estacionariedade de segunda ordem*.

Ainda sobre estacionariedade, temos a seguinte definição:

Definição 2.3. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ é dito ser *fortemente estacionário* se, e somente se, $(X(t + s), t \geq 0) \stackrel{d}{=} (X(t), t \geq 0)$ para todo $s \geq 0$.

Intuitivamente, a estacionariedade forte indica que os gráficos sobre duas partes em igual intervalo de tempo de uma realização de um processo estocástico exibem as mesmas características estatísticas. Observamos sobre a estacionariedade de processos estocásticos que um processo fortemente estacionário com segundo momento finito também é fracamente estacionário. Porém, o contrário não é verdadeiro.

Exemplo 2.4. Seja $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ um processo estocástico formado por variáveis aleatórias independentes, tais que

$$X(t) = \begin{cases} Y(t) \sim \mathcal{E}(1), & \text{se } t \in \mathbb{N}, \\ Z(t) \sim \mathcal{N}(1, 1), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\mathcal{E}(\lambda)$ denota uma distribuição exponencial de parâmetro λ e $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ uma distribuição normal de média μ e variância σ^2 .

É fácil ver que $\mathbb{E}(X(t)) = 1$ e $\mathbb{E}((X(t))^2) = 2$, para todo $t \geq 0$. Além disto, pela independência de $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, temos que

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} 1, & \text{se } h = 0. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, o processo $\{X_t\}_{t \geq 0}$ é fracamente estacionário com segundo momento finito.

Observe, porém, que este mesmo processo não é fortemente estacionário, pois X_t e X_{t+h} podem assumir distribuições diferentes para alguns valores de t e h . Por exemplo, considere $t \in \mathbb{N}$ e $h \in (0, 1)$. \square

Ressaltamos que quando nos referirmos a processos estocásticos estacionários, estamos tratando de estacionariedade no sentido forte, conforme a última definição apresentada.

Iniciamos esta dissertação estudando dois processos advindos da Equação de Langevin Generalizada. Esta equação surgiu em 1965 com Hazime Mori e ficou conhecida como tal em 1966 por Ryogo Kubo. A Equação de Langevin Generalizada é dada por

$$dV(t) = - \int_0^t \psi(t-s)V(s)dsdt + dL(t), \quad (2.1)$$

onde $V(0) = V_0$ e $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo ruído dado por algum processo estocástico a tempo contínuo, com V_0 variável aleatória independente de $L(t)$. Na equação (2.1), $\psi(\cdot)$ é chamada de *função memória*.

Observe que definindo a função memória como $\psi(t-s) = \theta\delta(t-s)$ na equação anterior, onde $\delta(t-s)$ é a *função delta de Dirac* no ponto $t-s$ e $\theta > 0$, então obtemos a Equação de Langevin Clássica

$$dV(t) = -\theta V(t)dt + dL(t), \quad (2.2)$$

que foi apresentada por Langevin (1908).

Se $L(\cdot)$ for o Movimento Browniano, então esta equação pode ser resolvida utilizando a Fórmula de Itô (veja p. 111 de Klebaner, 2005). Introduzimos a seguir a definição do Movimento Browniano.

Definição 2.5. O processo estocástico $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ é chamado de *Movimento Browniano* se satisfaz as seguintes condições:

- i. $B(0) = 0$.
- ii. Para todo $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ os incrementos $B(t_n) - B(t_{n-1}), \dots, B(t_2) - B(t_1)$ são variáveis aleatórias independentes.
- iii. Se $0 \leq s \leq t$, o incremento $B(t) - B(s)$ tem distribuição normal $\mathcal{N}(0, t - s)$.
- iv. O processo $\{B(t)\}$ possui trajetórias contínuas.

Considerando então $L(\cdot) = B(\cdot)$ na equação (2.2) e utilizando a Fórmula de Itô para resolver esta equação diferencial estocástica, obtemos que a solução é dada por

$$V(t) = V_0 e^{-\theta t} + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB(s), \quad (2.3)$$

para todo $t \geq 0$. O processo apresentado em (2.3) é denominado de *processo Ornstein-Uhlenbeck* (OU).

Quando $B(\cdot)$ é o processo Browniano Padrão, vários autores já estudaram o processo OU (veja seção 3.1 de Stein, 2015). Mostrou-se que este processo é Gaussiano com trajetórias contínuas, possui a propriedade de Markov e é estacionário quando $V_0 \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2\theta})$.

Apresentamos, agora, a classe dos *processos tipo OU generalizado*, onde consideramos o ruído como um processo de Lévy. É a partir de um processo do tipo GOUT (*Generalized Ornstein-Uhlenbeck Type process*) que iniciamos os estudos de processos que possuam a propriedade de longa dependência.

Definição 2.6. Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ um processo estocástico e $\rho(\cdot)$ uma função determinística. Dizemos que o par (V, ρ) representa uma solução da *Equação de Langevin Generalizada* se

$$V(t) = V_0 \rho(t) + \int_0^t \rho(t-s) dL(s) \quad (2.4)$$

e a função determinística $\rho(\cdot)$ satisfaz a seguinte equação integro-diferencial

$$\begin{cases} \rho'(t) = - \int_0^t \rho(s) d\mu_t(s), \\ \rho(0) = 1, \end{cases}$$

onde $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ é uma família de medidas com sinal, $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Lévy e V_0 é independente de $\{L(t)\}_{t \geq 0}$. Dizemos, ainda, que o processo definido em (2.4) é um *processo tipo OU generalizado* e denotamos por GOUT.

Os processos que são apresentados na Definição 2.6 pertencem a uma classe daqueles que se baseiam na solução em média quadrática, proposta por Kannan (1977), para a Equação Generalizada de Langevin, considerando que o processo ruído tenha segundo momento finito. Neste caso, a referida solução é dada por

$$V(t) = V_0\rho(t) + \int_0^t \rho(t-s)dL(s), \quad (2.5)$$

onde $V_0 \equiv V(0)$, $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é o processo ruído, independente de V_0 , e $\rho(\cdot)$ é uma função determinística satisfazendo a equação integro-diferencial de Volterra

$$\begin{cases} \rho'(t) = -\int_0^t \psi(t-s)\rho(s)ds, \\ \rho(0) = 1. \end{cases}$$

Nas condições anteriores, a integral estocástica apresentada em (2.4) pode ser considerada no sentido de convergência em probabilidade, se $\rho(\cdot)$ for uma função contínua (Lukacs, 1975). Applebaum (2009) mostra que, de forma geral, esta integral pode ser considerada via integração estocástica com respeito a semimartingais. Além disto, Mingarelli (1983) apresenta um estudo sobre as equações integro-diferenciais, tal como a apresentada na definição anterior.

Stein (2015) apresentou outra versão para a equação íntegro diferencial a ser considerada no processo definido anteriormente em (2.4). Essa nova interpretação considera que o *processo tipo OU generalizado* deve satisfazer a equação diferencial

$$\begin{cases} \rho''(t) + \rho(t)f(t) = 0, \\ \rho(0) = 1 \text{ e } \rho'(0) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $d\mu(s) = f(s)ds$.

Consideramos em nosso trabalho o processo ruído $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ como da classe dos processos de Lévy. A definição destes processos é apresentada a seguir.

Definição 2.7. Um processo estocástico $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é dito *processo de Lévy* se satisfazer as seguintes condições:

- i. $L(0) \equiv 0$, quase certamente;
- ii. $L(\cdot)$ possui incrementos independentes e estacionários, isto é, para todo $n > 0$ e $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ as variáveis aleatórias $L(t_0), L(t_1) - L(t_0), \dots, L(t_n) - L(t_{n-1})$ são independentes e $L(t+h) - L(t)$ tem a mesma distribuição que $L(h)$, para todo $h > 0$;
- iii. $L(\cdot)$ é contínuo em probabilidade, ou seja, dado $t \geq 0$ e $\epsilon > 0$, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}[|L(t+h) - L(t)| > \epsilon] = 0.$$

Observação 2.8. Nas condições acima, a função característica da variável aleatória $L(1)$ pode ser escrita como

$$\varphi(x) = e^{-\zeta(x)} \quad (2.7)$$

onde $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é dito ser o *expoente característico* de $L(1)$.

Definição 2.9. Um processo estocástico $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é dito *infinitamente divisível* se, para qualquer número natural $k > 2$, existirem k variáveis aleatórias $Y_1(t), \dots, Y_k(t)$ independentes e identicamente distribuídas, tais que $Y_1(t) + \dots + Y_k(t) = X(t)$, para todo $t \geq 0$.

Em outras palavras, podemos dizer que uma função de densidade de probabilidade é infinitamente divisível se, e somente se, a sua função característica $\varphi(t)$ for, para cada número natural k , dada por $[\varphi_k(t)]^k$, onde $\varphi_k(0) = 1$ e $\varphi_k(\cdot)$ é contínua.

Exemplo 2.10. A distribuição Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ é infinitamente divisível.

De fato, a função característica de uma variável $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ é dada por

$$\varphi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right).$$

Observe que podemos reescrever a função característica como

$$\varphi_X(t) = \left[\exp\left(i\frac{\mu}{k}t - \frac{t^2\sigma^2}{2k}\right)\right]^k,$$

e, portanto, a função de densidade de probabilidade de X é infinitamente divisível. \square

Utilizando os itens da Definição 2.7, é fácil mostrar que o processo Lévy é infinitamente divisível. Além disto, Sato (1999) mostra que um processo de Lévy pode ser escrito utilizando a *representação de Lévy-Khintchine*, onde a distribuição do processo é gerada por uma tripla (γ, σ^2, ν) , denominada *tripla geradora de um processo de Lévy*. Isto é, o expoente característico dado em (2.7) pode ser escrito como

$$\zeta(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbb{1}_{(|x| < 1)}(x)\right) \nu(dx) - i\gamma\theta, \quad (2.8)$$

onde a tripla geradora (γ, σ^2, ν) é única.

No Capítulo 3, utilizamos um caso particular do processo de Lévy como ruído, chamado de *processo de Lévy α -estável*. Antes de definir este processo, definimos uma variável aleatória α -estável.

Definição 2.11. Uma variável aleatória X possui uma *distribuição α -estável* se existem parâmetros $\alpha \in (0, 2]$, $\sigma \geq 0$, $\beta \in [-1, 1]$ e δ real tal que a sua função característica possui a seguinte forma:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha |x|^\alpha \left(1 - i\beta \text{sign}(x) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) + i\delta x\}, & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \exp\{-\sigma |x| \left(1 + \frac{2}{\pi} i\beta \text{sign}(x) \ln|x|\right) + i\delta x\}, & \text{se } \alpha = 1, \end{cases}$$

onde α é o índice de estabilidade (ou índice caudal), σ é o parâmetro de escala, β é o parâmetro de simetria e δ é o parâmetro de locação. Estes parâmetros são únicos. Neste caso, denotamos $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \delta)$.

Define-se, então, um processo de *Lévy α -estável* como a seguir.

Definição 2.12. Seja $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Lévy. O processo $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é dito *Lévy α -estável* se $L(1) \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$.

Observação 2.13. (a) Um processo de *Lévy padrão α -estável* apresenta o parâmetro $\beta = 0$. Se $X \sim S_\alpha(1, 0, 0)$, então X é dita ser uma variável aleatória α -estável padrão.

(b) Dizemos que X é uma variável aleatória α -estável *simétrica*, se $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$.

(c) Podemos determinar a função característica $\varphi_t(\cdot)$ da variável aleatória $L(t)$ pelo Teorema 4.9 em Papapantoleon (2008), sendo esta dada por

$$\varphi_t(x) = (\varphi_1(x))^t = \begin{cases} \exp\{-(t^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha} |x|^{\alpha} \left(1 - i\beta \text{sign}(x) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\}, & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \exp\{-(t) |x| \left(1 + \frac{2}{\pi} i\beta \text{sign}(x) \ln|x|\right)\}, & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Logo, $L(t) \sim S_\alpha(t^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, 0)$. Além disto, por ser um processo de incrementos estacionários, é fácil ver que $L(t) - L(s) \sim S_\alpha((t - s)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, 0)$, para $0 \leq s < t < \infty$.

(d) A variável aleatória α -estável possui, em apenas três casos, uma função de distribuição com fórmula fechada e conhecida. Se uma variável aleatória X é Gaussiana com média δ e variância σ^2 , então $X \sim S_2(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}, 0, \delta)$. Da mesma forma, uma distribuição Cauchy $\mathcal{C}(\sigma, \delta)$ é estável $S_1(\sigma, 0, \delta)$ e uma distribuição de Lévy $\mathcal{L}(\sigma, \delta)$ é também estável $S_{0.5}(\sigma, 1, \delta)$. Nos demais casos, torna-se necessário a utilização de integração numérica para determinar as funções de distribuições e densidades de variáveis α -estáveis.

(e) Um dos grandes problemas dos estudos envolvendo as variáveis α -estáveis está relacionado com a inexistência de momentos de primeira e segunda ordem finitos para estas variáveis. Conforme Samorodnitsky e Taqqu (1994), se $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \delta)$, então $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$, para $0 < p < \alpha$, e $\mathbb{E}(|X|^p) = \infty$, para $p \geq \alpha$. Portanto, para $\alpha < 1$, as variáveis α -estáveis não possuem momentos finitos, enquanto que para $\alpha \in (1, 2)$ apenas o momento de primeira ordem é finito. O processo Gaussiano, quando $\alpha = 2$, é o único caso estável que apresenta média e variância, pelo fato de ser o único com momentos de primeira e segunda ordem finitos.

A pesquisa desenvolvida nesta dissertação tem como objetivo estudar um processo estocástico que possua a *propriedade de longa dependência*. A seguir definimos a esta propriedade para processos estocásticos estacionários.

Definição 2.14. Seja $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ um processo estocástico estacionário e $\gamma_X(h), h > 0$, a sua função de autocovariância. Se existem $0 < d < \frac{1}{2}$ e uma constante $c_\gamma > 0$, tal que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\gamma_X(h)}{c_\gamma h^{2d-1}} = 1, \quad (2.9)$$

então $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é um *processo estacionário com longa dependência*.

Ressaltamos que esta definição não se aplica para processos estocásticos α -estáveis com $\alpha \in (0, 2)$, pois a função de autocovariância não está definida para estes processos, dado que não existem momentos de segunda ordem finitos. No próximo capítulo, estudamos outras medidas de dependência, as quais poderão ser utilizadas, segundo Samorodnitsky e Taqqu (1994), para analisar a longa dependência destes processos.

Quando o processo estocástico for não estacionário ou possuir variância infinita referenciamos o trabalho de Heyde e Yang (1997) que aborda a longa dependência para estes processos.

No capítulo a seguir, estudamos dois processos advindos da classe GOUT.

Demais definições serão apresentadas a medida que forem necessárias, de modo que o leitor sintá-se confortável e localizado no trabalho subsequente.

3 Processos Advindos da Classe GOUT

Neste capítulo, estamos interessados em estudar dois processos a tempo contínuo advindos dos processos tipo OU generalizado (GOUT). Além de mostrar propriedades que caracterizem estes processos estocásticos, o objetivo deste capítulo é analisar se eles possuem ou não a *propriedade de longa dependência*.

Na primeira seção, apresentamos um processo particular do caso GOUT que se diferencia por apenas não satisfazer a condição inicial da equação diferencial dada em (2.6). Na segunda seção, desenvolvemos o estudo de três medidas de dependência, as quais poderão ser utilizadas para processos α -estáveis que possuem segundo momento infinito. Já na terceira seção, estudamos um processo estocástico que pertence à classe dos processos GOUT.

3.1 Processo Particular (Klebaner, 2005)

Nesta seção, estamos interessados em estudar os processos a tempo contínuo advindos da integral estocástica dada por

$$\int_0^t (t-s)^d dL(s), \quad \forall t \in [0, \infty),$$

onde d é uma constante real, definida à priori para tentarmos obter a propriedade de longa dependência do processo, e $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é o ruído α -estável.

Este processo foi considerado parcialmente por Stein (2015). O processo foi inspirado em um exemplo apresentado por Klebaner (2005) (veja exemplo 8.1, item 6, página 212), onde o autor apresenta o processo

$$X(t) = \int_0^t (t-s)^{-d} dB(s),$$

quando o ruído na integral do processo é o Movimento Browniano e $0 < d < \frac{1}{2}$. Este referido processo servia de exemplo de um processo estocástico que não é semimartingal.

Apresentamos nesta seção algumas propriedades do processo a ser definido, bem como algumas discretizações que poderão ser utilizadas para simulações.

3.1.1 Definição do processo

A definição a seguir apresenta o processo estudado nesta seção.

Definição 3.1. O processo estocástico $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é dado por

$$V(t) = V_0 t^d + \int_0^t (t-s)^d dL(s), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

onde $V_0 \equiv V(0)$, $d \in \left(-\frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}\right) \setminus 0$ e $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo ruído Lévy α -estável padrão, com $\alpha \in (0, 2)$. Além disto, V_0 é independente de $\{L(t)\}_{t \geq 0}$.

Considerando a função $\rho(t) = t^d$ no processo apresentado em (2.4), obtemos o processo definido em (3.1).

Observe que esta função $\rho(\cdot)$ satisfaz a equação diferenciável dada em (2.6) com $f(t) = -\frac{d(d-1)}{t^2}$. Pois, dado que

$$\rho''(t) = (t^d)'' = (dt^{d-1})' = d(d-1)t^{d-2},$$

temos que

$$\rho''(t) + f(t)\rho(t) = d(d-1)t^{d-2} - \frac{d(d-1)}{t^2} \cdot t^d = 0.$$

Entretanto, apesar de $\rho'(0) = 0$, já que $\rho'(t) = dt^{d-1}$, esta função $\rho(t) = t^d$ não satisfaz a condição inicial apresentada em (2.6), pois $\rho(0) \neq 1$. Este processo, inspirado no exemplo de Klebaner (2005), assemelha-se e muito aos processos GOUT, por isso o interesse em estudá-lo.

Mostramos a seguir que o processo apresentado em (3.1) está bem definido.

Teorema 3.2. *O processo $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ dado em (3.1) está bem definido, no sentido de que a integral estocástica está bem definida, isto é, $\int_0^t |(t-s)^d|^\alpha ds < \infty$.*

Prova. Para todo $s, t \in [0, \infty)$, com $0 \leq s < t < \infty$, temos que,

$$\int_0^t |(t-s)^d|^\alpha ds = \int_0^t (t-s)^{d\alpha} ds.$$

Fazendo a mudança de variável $u = t - s$, temos

$$\int_0^t (t-s)^{d\alpha} ds = \int_0^t u^{d\alpha} du = \frac{u^{d\alpha+1}}{d\alpha+1} \Big|_0^t = \frac{t^{d\alpha+1}}{d\alpha+1} < \infty,$$

pois $d\alpha + 1 > 0$, para $d \in \left(-\frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}\right) \setminus 0$. Portanto, a integral estocástica do processo (3.1) está bem definida. \square

3.1.2 Propriedades

Apresentamos nesta subseção algumas propriedades do processo introduzido na Definição 3.1, sob determinadas condições.

Teorema 3.3. *Se $V_0 \sim S_\alpha(\sigma_0, 0, 0)$, então o processo definido em (3.1) é não estacionário.*

Prova. Consideremos que o processo definido em (3.1) pode ser escrito como $V(t) = A(t) + B(t)$, onde $A(t) = V_0 t^d$ e $B(t) = \int_0^t (t-s)^d dL(s)$, para $t \geq 0$.

Dado $t \geq 0$, note que, pela proposição 1.2.3 em Samorodnitsky e Taqu (1994), temos que $A(t) \sim S_\alpha(\sigma_A, 0, 0)$, com $\sigma_A^\alpha = |t^{d\alpha}| \sigma_0^\alpha = t^{d\alpha} \sigma_0^\alpha$. Além disto, pela proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqu (1994) vem que $B(t) \sim S_\alpha(\sigma_B, 0, 0)$, onde

$$\sigma_B^\alpha = \int_0^t |(t-s)^d|^\alpha ds = \int_0^t (t-s)^{d\alpha} ds = \frac{t^{d\alpha+1}}{d\alpha+1}.$$

Como V_0 e $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ são independentes por definição, pela proposição 1.2.1 em Samorodnitsky e Taqu (1994), conclui-se que $V(t) = A(t) + B(t) \sim S_\alpha(\sigma_V, 0, 0)$, onde

$$\sigma_V^\alpha = \sigma_A^\alpha + \sigma_B^\alpha = t^{d\alpha} \sigma_0^\alpha + \frac{t^{d\alpha+1}}{d\alpha+1}.$$

Portanto, $V(t)$ tem sua lei de distribuição dependendo de t . Logo, o processo é não estacionário. \square

Podemos também estudar a estacionariedade quando a distribuição inicial é constante. O Teorema 3.4 aborda esta questão.

Teorema 3.4. *Se $V_0 = c$, com c uma constante real, então o processo definido em (3.1) é não estacionário.*

Prova. Neste caso, o processo dado em (3.1) pode ser reescrito como

$$V(t) = ct^d + \int_0^t (t-s)^d dL(s).$$

Pela proposição 1.2.2 em Samorodnitsky e Taqu (1994), temos que $V(t) \sim S_\alpha(\sigma_V, 0, ct^d)$, onde $\sigma_V^\alpha = \frac{t^{d\alpha+1}}{d\alpha+1}$.

Logo, a lei do processo depende de t e, portanto, é não estacionário. \square

O fato do processo ser não estacionário sob as condições propostas, além de não existirem momentos de segunda ordem finitos, leva-nos a procurar outras medidas de dependência, diferentes da função de autocovariância. Três outras medidas de dependência são estudadas na próxima seção.

A seguir, definimos os processos estocásticos *self-similar*.

Definição 3.5. Um processo estocástico $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é dito *self-similar* com parâmetro H , se, para todo $a > 0$, as distribuições finito-dimensionais de $\{V(at), t \geq 0\}$ são iguais às distribuições finito-dimensionais de $\{a^H V(t), t \geq 0\}$.

O Teorema 3.6 apresenta a propriedade de *self-similar* para o processo de interesse dado em (3.1).

Teorema 3.6. *O processo definido em (3.1), com $V(0) = 0$, é self-similar com parâmetro $H = d + \frac{1}{\alpha}$.*

Prova. Observe, inicialmente, que $V(at) = \int_0^{at} (at - s)^d dL(s)$. Pela proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), temos que $V(at) \sim S_\alpha(\sigma_{V_a}, 0, 0)$, onde

$$\sigma_{V_a}^\alpha = \int_0^{at} |(at - s)^d|^\alpha ds = \int_0^{at} (at - s)^{d\alpha} ds = a^{d\alpha+1} \frac{t^{d\alpha+1}}{d\alpha + 1}.$$

Sabemos que $V(t) \sim S_\alpha(\sigma_V, 0, 0)$, onde $\sigma_V^\alpha = \frac{t^{d\alpha+1}}{d\alpha+1}$. Pois basta considerar $c = 0$ no Teorema 3.4.

Então, pela proposição 1.2.3 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), considerando $H = d + \frac{1}{\alpha}$, temos que $a^H V(t) = a^{d+\frac{1}{\alpha}} V(t) \sim S_\alpha(\sigma_H, 0, 0)$, onde

$$\sigma_H^\alpha = |a^H|^\alpha \sigma_V^\alpha = |a^{d+\frac{1}{\alpha}}|^\alpha \sigma_V^\alpha = a^{d\alpha+1} \frac{t^{d\alpha+1}}{d\alpha + 1} = \sigma_{V_a}^\alpha.$$

Portanto, temos que $V(at) \stackrel{d}{=} a^H V(t)$, com $H = d + \frac{1}{\alpha}$, o que prova o teorema. \square

Observação 3.7. (a) Note que

$$\frac{1}{\alpha} < H < 1 \iff d \in \left(0, 1 - \frac{1}{\alpha}\right) \quad (3.2)$$

e

$$0 < H < \frac{1}{\alpha} \iff d \in \left(-\frac{1}{\alpha}, 0\right), \quad (3.3)$$

para $\alpha \in (1, 2)$.

(b) Quando $\alpha \in (0, 1]$, observe que se $-\frac{1}{\alpha} < d < 0$, então $0 < H < \frac{1}{\alpha}$.

Visto que o processo dado em (3.1) é não estacionário sob a condição do Teorema 3.4 e que é *self-similar* de acordo com o Teorema 3.6, podemos construir um processo estocástico estacionário a partir do processo dado em (3.1), considerando $V(0) = 0$. Este processo a ser apresentado no próximo teorema é obtido através da Transformação de Lamperti, dada por Lamperti (1962).

Teorema 3.8. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo estocástico definido em (3.1), com $V(0) = 0$. Então o processo estocástico $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$ dado por*

$$Y(t) = e^{-tH} V(t) = e^{-tH} \int_0^{e^t} (e^t - s)^d dL(s), \quad (3.4)$$

é estacionário, onde H é o parâmetro self-similar de $\{V(t)\}_{t \geq 0}$.

Prova. Observe, inicialmente, que o processo dado em (3.4) possui igualdade em distribuição com uma variável aleatória α -estável simétrica $S_\alpha(\sigma_H, 0, 0)$, onde

$$\sigma_H^\alpha = \int_0^{e^t} \left| e^{-tH} (e^t - s)^d \right|^\alpha ds = \int_0^{e^t} e^{-tH\alpha} (e^t - s)^{d\alpha} ds.$$

Fazendo a mudança de variável $u = e^t - s$, para cada $t \geq 0$ fixo, temos que

$$\sigma_H^\alpha = e^{-tH\alpha} \int_0^{e^t} u^{d\alpha} du = e^{-tH\alpha} \left(\frac{u^{d\alpha+1}}{d\alpha+1} \right) \Big|_0^{e^t} = \frac{e^{-tH\alpha} \cdot e^{t(d\alpha+1)}}{d\alpha+1}.$$

Mas como o processo dado em (3.1) é *self-similar* com parâmetro $H = d + \frac{1}{\alpha}$, temos que

$$\sigma_H^\alpha = \frac{e^{-tH\alpha} \cdot e^{t(d\alpha+1)}}{d\alpha+1} = \frac{e^{-t(d+\frac{1}{\alpha})\alpha} \cdot e^{t(d\alpha+1)}}{d\alpha+1} = \frac{e^{-t(d\alpha+1)} \cdot e^{t(d\alpha+1)}}{d\alpha+1} = \frac{1}{d\alpha+1} = \frac{1}{\alpha H}.$$

Portanto, como a lei do processo $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$ não depende de t , temos que o processo é estacionário. \square

Observação 3.9. A transformação de Lamperti, dada por Lamperti (1962), estabelece que dado um processo estocástico *self-similar* $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ com parâmetro H , então o processo estocástico $Y(t) = e^{-tH} X(e^t)$, para $t \geq 0$, é um processo estacionário, pois a distribuição não depende de t .

Para realizar as simulações do processo dado em (3.1), precisamos de alguma discretização para este processo. A seguir apresentamos três discretizações para o processo particular desta seção, sendo a primeira discretização proposta por Stein (2015).

Proposição 3.10. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido pela expressão (3.1). Uma forma discreta para este processo é dada por*

$$V(kh) = V_0(kh)^d + \varepsilon_{k,h},$$

onde $k \in \{1, \dots, n\}$, n é o tamanho amostral, h é o tamanho da discretização do processo e $\varepsilon_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_{k,h}, 0, 0)$, tal que $\sigma_{k,h}^\alpha = \frac{(kh)^{d\alpha+1}}{d\alpha+1}$.

Prova. Ver Stein (2015). \square

Propomos abaixo uma nova discretização para o mesmo processo.

Proposição 3.11. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido pela expressão (3.1). Uma forma discreta para este processo é dada por*

$$V(kh) = V_0 \left[(kh)^d - ((k-1)h)^d \right] + V((k-1)h) + \xi_{k,h}, \quad (3.5)$$

onde $k \in \{1, \dots, n\}$, n é o tamanho amostral, h é o tamanho da discretização do processo e $\xi_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_{k,h}, 0, 0)$, tal que

$$\sigma_{k,h}^\alpha = \frac{h^{d\alpha+1}}{d\alpha+1} + \int_0^{(k-1)h} \left| (x+h)^d - x^d \right|^\alpha dx.$$

Prova. Do processo apresentado em (3.1), temos que

$$\begin{aligned} V(kh) &= V_0(kh)^d + \int_0^{kh} (kh - s)^d dL(s) \\ &= V_0(kh)^d - V_0((k-1)h)^d + V_0((k-1)h)^d + \int_0^{(k-1)h} ((k-1)h - s)^d dL(s) \\ &\quad - \int_0^{(k-1)h} ((k-1)h - s)^d dL(s) + \int_0^{kh} (kh - s)^d dL(s). \end{aligned}$$

Colocando V_0 em evidência e repartindo a última integral estocástica em intervalos convenientes, decorre que

$$\begin{aligned} V(kh) &= V_0 \left[(kh)^d - ((k-1)h)^d \right] + V((k-1)h) - \int_0^{(k-1)h} ((k-1)h - s)^d dL(s) \\ &\quad + \int_0^{(k-1)h} (kh - s)^d dL(s) + \int_{(k-1)h}^{kh} (kh - s)^d dL(s) \\ &= V_0 \left[(kh)^d - ((k-1)h)^d \right] + V((k-1)h) \\ &\quad + \int_0^{(k-1)h} \left[(kh - s)^d - ((k-1)h - s)^d \right] dL(s) + \int_{(k-1)h}^{kh} (kh - s)^d dL(s). \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$V(kh) = V_0 \left[(kh)^d - ((k-1)h)^d \right] + V((k-1)h) + \xi_{k,h},$$

onde $\xi_{k,h} = A_{k,h} + B_{k,h}$, com

$$A_{k,h} = \int_0^{(k-1)h} \left[(kh - s)^d - ((k-1)h - s)^d \right] dL(s) \quad \text{e} \quad B_{k,h} = \int_{(k-1)h}^{kh} (kh - s)^d dL(s).$$

Pelo fato dos intervalos das integrais estocásticas serem disjuntos em $A_{k,h}$ e $B_{k,h}$ e $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ ser um processo de incrementos independentes, conclui-se que $A_{k,h}$ e $B_{k,h}$ são independentes. Temos, então, que $A_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_A, 0, 0)$, onde

$$\sigma_A^\alpha = \int_0^{(k-1)h} \left| (kh - s)^d - ((k-1)h - s)^d \right|^\alpha ds = \int_0^{(k-1)h} \left| (x+h)^d - x^d \right|^\alpha dx,$$

e $B_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_B, 0, 0)$, onde

$$\sigma_B^\alpha = \int_{(k-1)h}^{kh} (kh - s)^{d\alpha} ds = \int_0^h u^{d\alpha} du = \frac{h^{d\alpha+1}}{d\alpha+1}.$$

Segue, pela proposição 1.2.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), que $\xi_{k,h}$ possui uma distribuição $S_\alpha(\sigma_{k,h}, 0, 0)$, onde

$$\sigma_{k,h}^\alpha = \sigma_A^\alpha + \sigma_B^\alpha = \frac{h^{d\alpha+1}}{d\alpha+1} + \int_0^{(k-1)h} \left| (x+h)^d - x^d \right|^\alpha dx,$$

como queríamos demonstrar. \square

Apresentamos a seguir uma última discretização para este processo.

Proposição 3.12. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido pela expressão (3.1). Uma forma discreta para este processo é dada por*

$$V(kh) = V((k-1)h) \cdot \left(\frac{k}{k-1}\right)^d + \xi_{k,h}, \quad (3.6)$$

onde $k \in \{1, \dots, n\}$, n é o tamanho amostral, h é o tamanho da discretização do processo e $\xi_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_{k,h}, 0, 0)$ é tal que

$$\sigma_{k,h}^\alpha = \int_0^{(k-1)h} \left| (kh - s)^d - \left(kh - \frac{sk}{k-1} \right)^d \right|^{d\alpha} ds + \frac{h^{d\alpha+1}}{d\alpha+1}.$$

Prova. Observe inicialmente que o processo (3.1) descrito no passo de discretização $(k-1)h$ é dado por

$$V((k-1)h) = V_0((k-1)h)^d + \int_0^{(k-1)h} ((k-1)h - s)^d dL(s), \quad (3.7)$$

de onde vem que

$$V_0 h^d = \frac{1}{(k-1)^d} \left[V((k-1)h) - \int_0^{(k-1)h} ((k-1)h - s)^d dL(s) \right]. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) na expressão

$$V(kh) = V_0(kh)^d + \int_0^{kh} (kh - s)^d dL(s),$$

temos que

$$\begin{aligned} V(kh) &= \left(\frac{k}{k-1}\right)^d \left[V((k-1)h) - \int_0^{(k-1)h} ((k-1)h - s)^d dL(s) \right] \\ &\quad + \int_0^{kh} (kh - s)^d dL(s). \end{aligned}$$

Podemos, então, escrever $V(kh)$ como sendo

$$\begin{aligned} V(kh) &= \left(\frac{k}{k-1}\right)^d V((k-1)h) - \left(\frac{k}{k-1}\right)^d \int_0^{(k-1)h} ((k-1)h - s)^d dL(s) \\ &\quad + \int_0^{kh} (kh - s)^d dL(s) \\ &= \left(\frac{k}{k-1}\right)^d V((k-1)h) - \int_0^{(k-1)h} \left(kh - \frac{sk}{k-1} \right)^d dL(s) \\ &\quad + \int_0^{kh} (kh - s)^d dL(s) \\ &= \left(\frac{k}{k-1}\right)^d V((k-1)h) - \int_0^{(k-1)h} \left(kh - \frac{sk}{k-1} \right)^d dL(s) \\ &\quad + \int_0^{(k-1)h} (kh - s)^d dL(s) + \int_{(k-1)h}^{kh} (kh - s)^d dL(s). \end{aligned}$$

Reorganizando os termos obtemos $V(kh) = V((k-1)h) \cdot \left(\frac{k}{k-1}\right)^d + \xi_{k,h}$, onde

$$\begin{aligned}\xi_{k,h} &= \int_{(k-1)h}^{kh} (kh-s)^d dL(s) - \int_0^{(k-1)h} \left(kh - \frac{sk}{k-1}\right)^d dL(s) \\ &\quad + \int_0^{(k-1)h} (kh-s)^d dL(s) \\ &= \int_{(k-1)h}^{kh} (kh-s)^d dL(s) + \int_0^{(k-1)h} \left[(kh-s)^d - \left(kh - \frac{sk}{k-1}\right)^d \right] dL(s).\end{aligned}$$

Por um raciocínio análogo ao utilizado na demonstração da Proposição 3.11, temos, por fim, que $\xi_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_{k,h}, 0, 0)$, onde

$$\sigma_{k,h}^\alpha = \int_0^{(k-1)h} \left(\left| (kh-s)^d - \left(kh - \frac{sk}{k-1}\right)^d \right|^\alpha \right) ds + \frac{h^{d\alpha+1}}{d\alpha+1},$$

como queríamos demonstrar. \square

Sobre as discretizações apresentadas, temos os seguintes comentários a destacar.

Observação 3.13. (a) Nas simulações deste processo utilizamos a discretização apresentada na Proposição 3.10 para a geração da série temporal. A Proposição 3.10 apresenta uma discretização com uma expressão para $\xi_{k,h}$ mais simples do que as demais, o que facilita a simulação do processo durante a geração de dados.

(b) A discretização do processo apresentada na Proposição 3.11 nos permite escrevê-lo como um passeio aleatório com *drift* ν_k para determinado tamanho de discretização h , pois pode ser escrito sob a forma

$$X_h(k) = \nu_{k,h} + X_h(k-1) + \xi_{k,h},$$

onde $\nu_{k,h} = V_0 \left[(kh)^d - ((k-1)h)^d \right]$ e $\xi_{k,h}$ é dado na Proposição 3.11.

(c) A discretização do processo apresentada na Proposição 3.12 nos permite escrevê-lo, para cada valor de k fixo, como um AR(1) com $d \in \left(-\frac{1}{\alpha}, 0\right)$ e uma discretização de tamanho h . Isto é, um processo autorregressivo de ordem 1, não estacionário, onde

$$X_h(k) = \phi_1 X_h(k-1) + \xi_{k,h},$$

onde $\phi_1 = \left(\frac{k}{k-1}\right)^d$. Note que $|\phi_1| < 1$, porém assintoticamente este valor tende a 1.

Na Figura 3.1, que é apresentada logo a seguir, podemos observar três exemplos de trajetórias para o processo dado em (3.1). Nestes exemplos, consideramos $d = 0.2$ e $h = 1$. Escolhemos estes valores de d e h à priori; uma interpretação destes valores será dada mais a frente.

Segundo Nolan (2017), as distribuições α -estáveis são caracterizadas pela assimetria, caudas pesadas e suas propriedades matemáticas. Observe que para $\alpha \in (1, 2]$, temos a

existência do momento de primeira ordem, o qual, segundo Samorodnitsky e Taqqu (1994), coincide com o valor de δ , parâmetro de locação da variável α -estável, isto é, $\mathbb{E}[X(t)] = \delta$.

Como o processo descrito em (3.1), com $V(0) = 0$, possui igualdade em distribuição com uma variável aleatória $S_\alpha(\sigma_{k,h}, 0, 0)$, conforme a Proposição 3.10, temos que $\delta = 0$. Portanto, temos que estas trajetórias possuem média zero. Este resultado é perceptível nas trajetórias apresentadas na Figura 3.1.

Além disto, Nolan (2017) comenta que o parâmetro α controla o grau de concentração em torno da média. No caso Gaussiano, $\alpha = 2$, temos os dados mais próximos ao valor médio, enquanto conforme o valor de α diminui, possuímos os picos observados na Figura 3.1, indicando caudas mais pesadas, característica notória das variáveis α -estáveis.

Observemos estes comentários nas trajetórias apresentadas na Figura 3.1 a seguir.

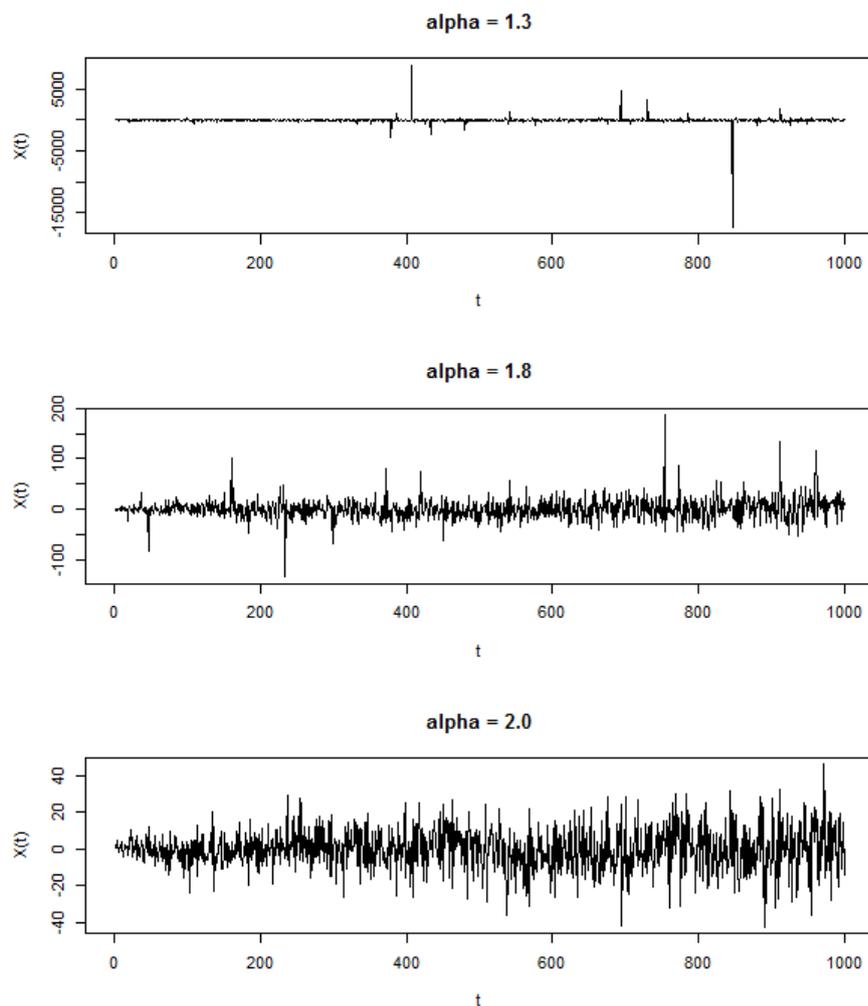


Figura 3.1: Exemplos de trajetórias para o processo definido em (3.1), considerando a discretização apresentada na Proposição 3.10, onde $n = 1000$, $V(0) = 0$, $d = 0.2$ e $h = 1$, com $\alpha \in \{1.3, 1.8, 2.0\}$.

Como os processos estocásticos dados na forma (3.1) não possuem segundo momento finito, não podemos utilizar a função de autocovariância para eles. Estudamos, então, três outras medidas de dependência que nos dão suporte para analisar o processo quanto à propriedade de longa dependência.

3.2 Medidas de Dependência

Nesta seção apresentamos três medidas de dependência que podem ser utilizadas para processos estocásticos que não possuem segundo momento finito. Inicialmente, aplicamos estas medidas de dependência para o processo estudado na seção anterior, porém recorreremos ao uso destas medidas nos estudos apresentados ao longo deste trabalho.

Conforme já comentado, na classe das distribuições α -estáveis não possuímos momentos de segunda ordem finitos para $\alpha \in (0, 2)$, fazendo-se então necessária a busca por novas medidas de dependência para estes processos.

As medidas de dependência selecionadas para este trabalho são a *função de covariação*, a *função de codiferença*, a *função de covariação espectral*.

3.2.1 Função de Covariação

A primeira medida de dependência que utilizamos em nosso trabalho é a *função de covariação*. Os estudos sobre a função de covariação foram introduzidos por Miller (1978) e posteriormente estudada por alguns autores, como, por exemplo, Samorodnitsky e Taqqu (1994).

Apresentamos abaixo uma definição, segundo Samorodnitsky e Taqqu (1994), para a função de covariação de processos estocásticos sob determinadas condições, a qual nos interessa neste estudo.

Definição 3.14. Considere um processo $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ qualquer, dado na sua forma integral por

$$X(t) = \int_E f_t(s) dL(s), \quad (3.9)$$

onde $E \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto, $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é o processo de Lévy α -estável e $\{f_t(\cdot)\}_{t \geq 0}$ é uma função determinística tal que $\int_E |f_t(s)|^\alpha ds < \infty$, onde $\alpha \in (1, 2]$. A *função de covariação* do processo $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é dada por

$$[X(t), X(s)]_\alpha = \int_E f_t(x) f_s(x)^{\langle \alpha-1 \rangle} dx, \quad (3.10)$$

para todo $t, s \geq 0$, onde $a^{\langle p \rangle} = |a|^p \text{sign}(a)$.

Observação 3.15. (a) A função de covariação é utilizada especificamente para processos α -estáveis com $\alpha \in (1, 2]$. Segundo Samorodnitsky e Taqqu (1994), esta medida de

dependência apresenta melhores propriedades neste intervalo, além do que esta função pode não estar definida para alguns processos com $\alpha \leq 1$.

(b) Quando $\alpha = 2$, a função de covariação é igual à metade da função de autocovariância entre $X(t)$ e $X(s)$, isto é, $[X(t), X(s)]_\alpha = \frac{1}{2}\gamma_X(t, s)$.

(c) Uma das desvantagens do uso da função de covariação, em geral, é que esta medida não é simétrica. Outras propriedades sobre esta medida podem ser encontradas na seção 2.7 em Samorodnitsky e Taqqu (1994).

(d) Esta medida de dependência é muito utilizada em regressões lineares e em filtrações, como pode-se notar nos estudos realizados por Miller (1978) e Cambanis e Miller (1981).

A seguir, determinamos a função de covariação para o processo dado em (3.1) na seção anterior.

Proposição 3.16. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo estocástico definido em (3.1), com $V_0 = 0$ e $\alpha \in (1, 2]$. Então tem-se que a função de covariação do processo é dada por*

$$[X(t), X(t+k)]_\alpha = \int_0^t x^d (x+k)^{d(\alpha-1)} dx, \quad (3.11)$$

para $k, t \geq 0$.

Prova. Dados $k, t \geq 0$, considerando $f_t(s) = \mathbb{1}_{[0,t]}(s)(t-s)^d$ na Definição 3.14, obtemos que

$$[X(t), X(t+k)]_\alpha = \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,t]}(s)(t-s)^d \cdot \mathbb{1}_{[0,t+k]}(s)(t+k-s)^d ds. \quad (3.12)$$

Como $[0, t] \cap [0, t+k] = [0, t]$, a integral definida em (3.12) reduz-se a

$$\begin{aligned} [X(t), X(t+k)]_\alpha &= \int_0^t (t-s)^d |(t+k-s)^d|^{\alpha-1} ds \\ &= \int_0^t (t-s)^d (t+k-s)^{d(\alpha-1)} ds. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $x = t - s$, obtemos que

$$[X(t), X(t+k)]_\alpha = \int_0^t x^d (x+k)^{d(\alpha-1)} dx.$$

□

Provamos, a seguir, um resultado que permite caracterizar o comportamento da função de covariação do processo definido em (3.1).

Teorema 3.17. *Dado o processo apresentado em (3.1), com $\alpha \in (1, 2]$ e $t \in (0, \infty)$ fixo, tem-se que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [X(t), X(t+k)]_\alpha = 0,$$

quando $d \in \left(-\frac{1}{\alpha}, 0\right)$, para $k, t \geq 0$.

Prova. Desejamos provar que, para $d \in \left(-\frac{1}{\alpha}, 0\right)$, tem-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t f_k(x) dx = 0,$$

onde $f_k(x) = x^d(x+k)^{d(\alpha-1)}$, dados $k, t \geq 0$.

Note, primeiramente que $|f_k(x)| < g(x)$, onde $g(x) = x^{d\alpha}$, dado que

$$\left|x^d \cdot (x+k)^{d(\alpha-1)}\right| = x^d \cdot (x+k)^{d(\alpha-1)} < x^d \cdot x^{d(\alpha-1)} = x^{d\alpha},$$

para $d \in \left(-\frac{1}{\alpha}, 0\right)$.

Além disto, é fácil ver que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$, pois $d < 0$, por hipótese. Logo, pelo teorema da convergência dominada, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t f_k(x) dx = \int_0^t \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = 0,$$

como queríamos demonstrar. \square

Na Figura 3.2 apresentamos os gráficos da função de covariação, considerando $t = 1$ fixo e $d \in \left(-\frac{1}{\alpha}, 0\right)$. É possível observar o resultado demonstrado teoricamente no Teorema 3.17 através dos gráficos da Figura 3.2.

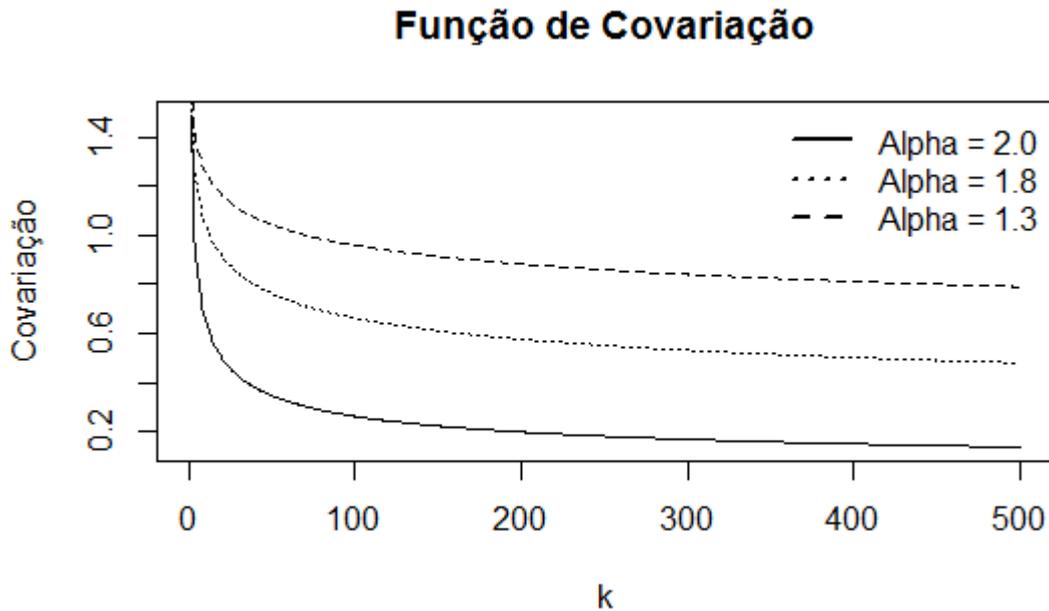


Figura 3.2: Função de covariação teórica do processo dado em (3.1), onde $d = -0.4$, $t = 1$, $h = 1$, $n = 500$ e $\alpha \in \{1.3, 1.8, 2.0\}$.

Observação 3.18. Observe que o resultado do Teorema 3.17 nos garante, sob as condições impostas, que a função de covariação do processo dado em (3.1) tende a zero, quando

k tende ao infinito. Porém este limite nem sempre ocorre desta maneira. Veremos no Teorema 3.20 que, para valores de $d \in \left(0, 1 - \frac{1}{\alpha}\right)$, o mesmo processo tem a sua função de covariação tendendo a infinito.

Nas condições da Figura 3.2, é possível observar que, conforme o valor de α aumenta, o decaimento da função de covariação do processo é mais acelerado. Este resultado é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 3.19. *Dado o processo apresentado em (3.1), com $\alpha_1, \alpha_2 \in (1, 2]$, com $\alpha_1 < \alpha_2$, $t \in (0, \infty)$ fixo e $k > 0$, tem-se que $[X(t), X(t+k)]_{\alpha_1} > [X(t), X(t+k)]_{\alpha_2}$, quando $d \in \left(-\frac{1}{\alpha}, 0\right)$.*

Prova. De fato, para $\alpha_1, \alpha_2 \in (1, 2]$, com $\alpha_1 < \alpha_2$, e k e t fixos, temos que

$$x^d \cdot x^{d(\alpha_1-1)} > x^d \cdot x^{d(\alpha_2-1)},$$

pois $d < 0$.

Naturalmente, segue que

$$\int_0^t x^d \cdot x^{d(\alpha_1-1)} dx > \int_0^t x^d \cdot x^{d(\alpha_2-1)} dx \implies [X(t), X(t+k)]_{\alpha_1} > [X(t), X(t+k)]_{\alpha_2},$$

como queríamos demonstrar. \square

Entretanto, observe agora que, quando $d \in \left(0, 1 - \frac{1}{\alpha}\right)$, o processo dado em (3.1) apresenta uma característica indesejável, isto é, a função de covariação do processo tende a infinito, quando $k \rightarrow \infty$. Este resultado é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 3.20. *Dado o processo apresentado em (3.1), com $\alpha \in (1, 2]$, $t \in (0, \infty)$ fixo e $k > 0$, tem-se que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [X(t), X(t+k)]_{\alpha} = \infty,$$

quando $d \in \left(0, 1 - \frac{1}{\alpha}\right)$.

Prova. Nas condições enunciadas e considerando $t > 0$ fixo, temos, pelo teorema do valor médio que existe $c \in (0, t)$ tal que

$$\int_0^t f_k(x) dx = \int_0^t x^d \cdot (x+k)^{d(\alpha-1)} dx = f_k(c) = c^d \cdot (c+k)^{d(\alpha-1)}.$$

Como $d > 0$ e $\alpha \in (1, 2]$, temos, então, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t x^d \cdot (x+k)^{d(\alpha-1)} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} c^d \cdot (c+k)^{d(\alpha-1)} = \infty,$$

já que $d(\alpha-1) > 0$. \square

Este último resultado demonstra que, para valores de $d \in \left(0, 1 - \frac{1}{\alpha}\right)$, o processo dado em (3.1) apresenta uma função de covariação crescente entre $X(t)$ e $X(t+k)$, conforme o valor de k aumenta. Esta característica não nos interessa em termos de investigação, visto que buscamos processos estocásticos cuja medida de dependência tenda a zero, quando k tende a infinito, e que possuam a propriedade de longa dependência.

Em um primeiro momento, acreditávamos que o processo definido em (3.1) possuía a propriedade de longa dependência para valores de $H \in \left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$, conforme (3.2), por analogia aos estudos realizados por Samorodnitsky e Taqqu (1994) com o *well-balanced linear fractional stable motion*. Porém com o resultado apresentado no Teorema 3.20, concluímos que o referido processo não é de longa dependência, visto que sua medida de dependência tende a infinito, quando $d \in \left(0, 1 - \frac{1}{\alpha}\right)$.

A Figura 3.3 apresenta os gráficos da função de covariação, considerando $t = 1$ fixo e $d \in \left(0, 1 - \frac{1}{\alpha}\right)$. Podemos constatar pelos gráficos desta figura o resultado apresentado no Teorema 3.20, isto é, conforme o valor de k aumenta, a covariação do processo cresce, tendendo ao infinito.

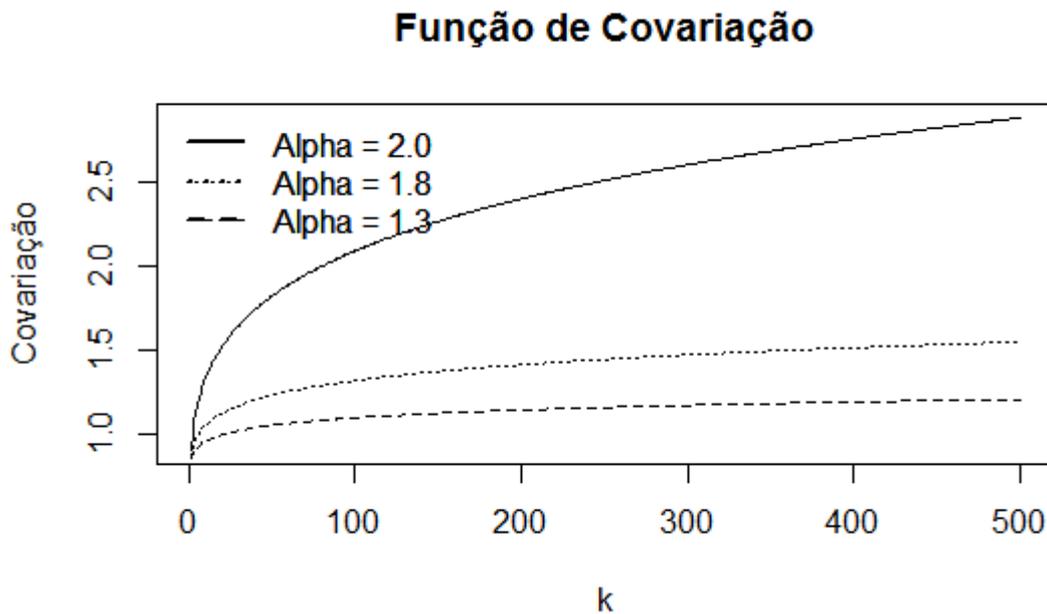


Figura 3.3: Função de covariação teórica do processo dado em (3.1), onde $d = 0.2$, $t = 1$, $h = 1$, $n = 500$ e $\alpha \in \{1.3, 1.8, 2.0\}$.

Como a função de covariação está bem definida para valores de $\alpha \in (1, 2]$, nas próximas duas subseções estudamos outras duas medidas de dependência definidas para $\alpha \in (0, 2]$, que podem ajudar no estudo de processos estocásticos que não possuem função

de autocovariância.

3.2.2 Função de Codiferença

A função de codiferença foi introduzida por Astraukas (1983) e utilizada novamente por Astraukas et al. (1991). Inicialmente, definimos a *função de codiferença* para duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 .

Definição 3.21. A *função de codiferença* entre duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 é dada como

$$\tau(X_1, X_2) = \ln \left(\frac{\mathbb{E}[\exp(i(X_1 - X_2))]}{\mathbb{E}[\exp(iX_1)] \mathbb{E}[\exp(-iX_2)]} \right). \quad (3.13)$$

A função de codiferença possui a vantagem de estar bem definida para $\alpha \in (0, 2]$, além de estar bem definida para processos em que os momentos de primeira e de segunda ordem sejam infinitos. Mais estudos para esta função para processos lineares foram apresentados em Kokoszka e Taqqu (1994 e 1995). Além disto, Samorodnitsky e Taqqu (1994) apresentam uma outra definição equivalente a esta.

Observação 3.22. (a) Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias Gaussianas, então $\tau(X_1, X_2)$ é equivalente à função de autocovariância entre X_1 e X_2 , isto é, $\tau(X_1, X_2) = \gamma_{X_1, X_2}$.

(b) A função de codiferença é uma função simétrica, isto é, $\tau(X_1, X_2) = \tau(X_2, X_1)$, para variáveis aleatórias X_1 e X_2 α -estáveis simétricas.

(c) Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $\tau(X, Y) = 0$.

Definimos agora a função de codiferença para processos estocásticos.

Definição 3.23. Se $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo estocástico, então a *função de codiferença* do processo $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é dada por

$$\tau_X(k, t) = \tau(X(k), X(t)), \quad \forall k, t \geq 0. \quad (3.14)$$

Além dessa definição para a função de codiferença de um processo estocástico, uma outra, mais geral, foi proposta por Rosadi e Deistler (2009), onde os autores consideraram uma parametrização da função de codiferença dada em (3.14). A seguir apresentamos uma definição proposta por Rosadi e Deistler (2009).

Definição 3.24. A *função de codiferença* de um processo $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é dada por

$$\begin{aligned} \tau_X(s; k, t) &= \ln\{\mathbb{E}[\exp(is(X(t+k) - X(t)))]\} - \ln\{\mathbb{E}[\exp(is(X(t+k)))]\} \\ &\quad - \ln\{\mathbb{E}[\exp(-is(X(t)))]\} \\ &= \ln \left[\frac{\mathbb{E}[\exp(is(X(t+k) - X(t)))]}{\mathbb{E}[\exp(is(X(t+k)))] \cdot \mathbb{E}[\exp(-is(X(t)))]} \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $s \in \mathbb{R}$ e $k, t \geq 0$.

Observação 3.25. (a) Quando $s = 1$, a expressão (3.15) equivale a (3.14).

(b) Se $\{X_t\}_{t \geq 0}$ é um processo estacionário, então a expressão (3.15) não depende de t . Neste caso, a função de codiferença é denotada por $\tau_X(s; k)$.

(c) Processos α -estáveis estacionários que apresentam a propriedade de *mixing* (ver Gross, 1994) devem satisfazer

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_X(s; k) = 0,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disto, *processos α -estáveis estacionários de média móvel*, isto é, os processos dados na forma

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)dL(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

para função $f(\cdot)$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^\alpha < \infty$, também têm a função de codiferença tendendo à zero quando $k \rightarrow \infty$ (ver Samorodnitsky e Taqqu, 1994).

(d) Segundo a propriedade 2.10.7, em Samorodnitsky e Taqqu (1994), dado um vetor aleatório α -estável (X_1, \dots, X_d) , a matriz de codiferença $\{\tau_{X_i, X_j}, i, j = 1, \dots, d\}$ é definida não-negativa.

(e) Algumas propriedades e comentários referentes a função de codiferença teórica e empírica para processos estacionários podem ser encontrados em Stein (2015).

A seguir, enunciamos uma proposição de Stein (2015) que nos permitirá calcular a função de codiferença para o processo estudado neste capítulo.

Proposição 3.26. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo estocástico definido na expressão (2.4). Então valem as seguintes afirmações:*

i. A função de codiferença de $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é dada por

$$\tau_V(s; k, t) = \ln \left[\frac{\varphi_{V_0}(s(\rho(t+k) - \rho(t)))}{\varphi_{V_0}(s(\rho(t+k))\varphi_{V_0}(-s\rho(t)))} \right] + \tau_{I_\rho}(s; k, t), \quad (3.17)$$

onde $\varphi_{V_0}(\cdot)$ é a função característica da variável aleatória V_0 e

$$I_\rho(t) = \int_0^t \rho(t-s)dL(x),$$

dados $k, t \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$.

ii. Seja $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Lévy padrão α -estável e $V_0 \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. Então a função de codiferença de $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é dada por

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, t) &= |s|^\alpha \sigma^\alpha [|\rho(t+k)|^\alpha + |\rho(t)|^\alpha - |\rho(t+k) - \rho(t)|^\alpha] \\ &\quad + |s|^\alpha \int_0^t (|\rho(t-x+k)|^\alpha + |\rho(t-x)|^\alpha - |\rho(t-x+k) - \rho(t-x)|^\alpha) dx, \end{aligned} \quad (3.18)$$

dados $k, t \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$.

Prova. Ver Stein (2015). □

Podemos agora calcular a função de codiferença para o processo dado em (3.1).

Proposição 3.27. *Considere o processo estocástico $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ definido em (3.1).*

i. Se $V_0 \sim S_\alpha(\sigma_0, 0, 0)$, então a função de codiferença do processo é dada por

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, t) &= |s|^\alpha \sigma_0^\alpha \left[(t+k)^{d\alpha} + t^{d\alpha} - |(t+k)^d - t^d|^\alpha \right] \\ &\quad + |s|^\alpha \int_0^t \left((t+k-x)^{d\alpha} + (t-x)^{d\alpha} - |(t+k-x)^d - (t-x)^d|^\alpha \right) dx, \end{aligned} \quad (3.19)$$

dados $k, t \geq 0$.

ii. Se $V_0 = 0$, então a função de codiferença do processo é dada por

$$\tau_V(s; k, t) = |s|^\alpha \int_0^t \left((u+k)^{d\alpha} + u^{d\alpha} - |(u+k)^d - u^d|^\alpha \right) du, \quad (3.20)$$

dados $k, t \geq 0$.

Prova. Para provar o item *i.*, utilizamos a Proposição 3.26 (item *ii.*), considerando a função $\rho(t) = t^d$, de onde, fazendo $u = t - x$, obtemos que

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, t) &= |s|^\alpha \sigma_0^\alpha \left[(t+k)^{d\alpha} + t^{d\alpha} - |(t+k)^d - t^d|^\alpha \right] \\ &\quad + |s|^\alpha \int_0^t \left((t+k-x)^{d\alpha} + (t-x)^{d\alpha} - |(t+k-x)^d - (t-x)^d|^\alpha \right) dx, \end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e $t, k \geq 0$.

Para provar o item *ii.*, utilizamos a Proposição 3.26 (item *i.*), segue que, se $V_0 = 0$ no processo definido em (3.1), então a sua função de codiferença é dada por

$$\tau_V(s; k, t) = |s|^\alpha \int_0^t \left((u+k)^{d\alpha} + u^{d\alpha} - |(u+k)^d - u^d|^\alpha \right) du, \quad (3.21)$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e $t, k \geq 0$. □

Esta medida de dependência pode ser utilizada para caracterizar processos de longa dependência conforme a definição abaixo, formulada de maneira análoga à definição encontrada em Maejima e Yamamoto (2003).

Definição 3.28. Um processo estocástico $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ possui a propriedade de *longa dependência* se a sua função de codiferença, dada por (3.14), satisfaz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_X(t, t+k) = 0 \quad (3.22)$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\tau_X(t, t+k)| = \infty, \quad (3.23)$$

para todo $t \geq 0$.

Um exemplo muito interessante de aplicação desta definição pode ser encontrado no teorema 4.3 em Maejima e Yamamoto (2003).

3.2.3 Função de Covariância Espectral

A última medida de dependência que consideramos é a *função de covariância espectral*. Esta medida de dependência foi apresentada por Paulauskas (1976) e estudada com maior ênfase em Damarackas e Paulauskas (2014). A vantagem em utilizar a função de covariância espectral está no fato de que a sua definição não é baseada na função característica do vetor do processo (X_1, \dots, X_n) . Isto facilita a generalização desta medida de dependência para vetores aleatórios α -estáveis (veja Damarackas e Paulauskas (2014)) e para outras classes de distribuições.

Apresentamos a seguir a definição de *função de covariância espectral* introduzida por Damarackas e Paulauskas (2014) para processos estocásticos.

Definição 3.29. Considere um processo $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ qualquer, dado na sua forma integral

$$X(t) = \int_E f_t(s) dL(s), \quad (3.24)$$

onde $E \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto, $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é o processo de Lévy α -estável e $\{f_t(\cdot)\}_{t \geq 0}$ é uma função determinística tal que $\int_E |f_t(s)|^\alpha ds < \infty$. A *função de covariância espectral* do processo $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é dada por

$$\varrho(X(t), X(t+k)) = \int_E f_t(s) f_{t+k}(s) \| \bar{f}(s) \|^{\alpha-2} ds, \quad (3.25)$$

onde $\| \bar{f}(\cdot) \|^2 = f_t^2(\cdot) + f_{t+k}^2(\cdot)$, para todo $t, k \geq 0$.

A seguir, enunciamos uma proposição de Stein (2015) que apresenta uma fórmula geral para a função de covariância espectral do processo estocástico definido em (2.4).

Proposição 3.30. *Seja $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ o processo de Lévy α -estável e $V_0 = 0$. Nestas condições, a função de covariância espectral de $\{V(t)\}_{t \geq 0}$, definido na expressão (2.4), é dada por*

$$\varrho(V(t), V(t+k)) = \int_0^t \rho(t-s) \rho(t+k-s) \left[\rho^2(t-s) + \rho^2(t+k-s) \right]^{\frac{\alpha-2}{2}} ds. \quad (3.26)$$

dados $k, t \geq 0$.

Prova. Ver Stein (2015). □

Podemos agora obter a função de covariância espectral para o processo particular que estamos estudando neste capítulo.

Proposição 3.31. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo estocástico definido em (3.1), com $V_0 = 0$. Então tem-se que a função de covariância espectral deste processo é dada por*

$$\varrho(V(t), V(t+k)) = \int_0^t x^d (x+k)^d \left[x^{2d} + (x+k)^{2d} \right]^{\frac{\alpha-2}{2}} dx, \quad (3.27)$$

para todo $k, t \geq 0$.

Prova: Dados $k, t \geq 0$, aplicando a Proposição 3.30, com $\rho(t) = t^d$ e fazendo a mudança de variável $x = t - s$ obtém-se o resultado desejado. \square

Observação 3.32. (a) Segundo Damarackas e Paulauskas (2014), a função de covariância espectral possui uma vantagem no que diz respeito ao fato de que esta pode ser estendida naturalmente para vetores aleatórios α -estáveis em \mathbb{R}^d ou para um espaço separável de Banach, o que não ocorre para as funções de codiferença e de covariação.

(b) Damarackas e Paulauskas (2014) provam que para um processo média móvel α -estável qualquer $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ definido em (3.16), temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho_X(k) = 0,$$

onde $\varrho_X(k) = \varrho(X(t), X(t+k))$.

(c) Ressaltamos que, segundo Samorodnitsky e Taquq (1994), os processos média móvel α -estáveis são estacionários (veja o exemplo 3.6.2 na página 138). Neste caso,

$$\varrho(X(t), X(t+k)) = \varrho(X(0), X(k)).$$

(d) Dado um vetor aleatório α -estável (X_1, \dots, X_d) , a matriz de covariância espectral $\{\varrho_{X_i, X_j}, i, j = 1, \dots, d\}$ é definida não-negativa, segundo Damarackas e Paulauskas (2014).

3.3 Processo Quadrático do Tipo OU

Nesta seção, estudamos um processo estocástico que pertence à classe GOUT. O Processo Quadrático do Tipo OU (*Quadratic OU Type Process*), a ser definido a seguir, foi apresentado em Stein *et al.* (2016).

3.3.1 Definição do Processo

Definição 3.33. Seja o processo estocástico $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ dado por

$$V(t) = V_0 e^{-at^2} + \int_0^t e^{-a(t-s)^2} dL(s), \quad t \geq 0, \quad (3.28)$$

onde $a > 0$ e o ruído $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Lévy α -estável com $\alpha \in (0, 2]$. Este processo é denominado de Processo Quadrático do Tipo OU (*Quadratic OU Type Process*).

Observe, inicialmente, que o processo dado em (3.28) pertence à classe dos processos GOUT. De fato, basta considerar $\rho(t) = e^{-at^2}$ na Definição 2.6. Além disto, note que $\rho(0) = 1$ e

$$\rho'(0) = -2at \cdot e^{-at^2} \Big|_{t=0} = 0.$$

Considerando $f(t) = 2a(1 - 2at^2)$, verifica-se a equação diferenciável dada em (2.6) e as suas condições.

Teorema 3.34. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo dado em (3.28). Então, o processo está bem definido.*

Prova. Sabemos que o processo dado em (3.28) está bem definido se

$$\int_0^t |e^{-a(t-s)^2}|^\alpha ds < \infty. \quad (3.29)$$

Observe, então, que

$$\int_0^t |e^{-a(t-s)^2}|^\alpha ds = \int_0^t e^{-a\alpha(t-s)^2} ds.$$

Fazendo a mudança de variável $u = t - s$, segue que

$$\int_0^t e^{-a\alpha(t-s)^2} ds = \int_0^t e^{-a\alpha u^2} du. \quad (3.30)$$

Como $e^{-a\alpha u^2} > 0$, para todo $u \in (0, \infty)$ e $a > 0$, da expressão dada em (3.30), tem-se que

$$\int_0^t e^{-a\alpha u^2} du < \int_0^\infty e^{-a\alpha u^2} du. \quad (3.31)$$

Sabemos, da função de distribuição de uma variável aleatória Gaussiana, que, se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, então

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx = \frac{1}{2}. \quad (3.32)$$

Considerando uma variável aleatória $X \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2a\alpha})$, concluímos da sua função de distribuição que

$$\int_0^\infty e^{-a\alpha u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a\alpha}}.$$

Conseqüentemente, da expressão dada em (3.31), concluímos que

$$\int_0^t |e^{-a(t-s)^2}|^\alpha ds = \int_0^t e^{-a\alpha u^2} du < \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a\alpha}}.$$

Logo (3.29) se verifica, isto é, o processo dado em (3.28) está bem definido. \square

O Teorema 3.35 a seguir apresenta a distribuição do processo.

Teorema 3.35. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido em (3.28), considerando $V_0 \equiv 0$. Temos então que o $V(kh) \sim S_\alpha(\sigma_{a,k,h}, 0, 0)$, onde*

$$\sigma_{a,k,h}^\alpha = \int_0^{kh} e^{-a\alpha u^2} du,$$

para $k \in \{1, \dots, n\}$ e h o tamanho da discretização.

Prova. Para $k \in \{1, \dots, n\}$ e h o tamanho da discretização, obtemos da proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), que $V(kh) \sim S_\alpha(\sigma_{a,k,h}, 0, 0)$, onde

$$\sigma_{a,k,h}^\alpha = \int_0^{kh} e^{-a\alpha(kh-s)^2} ds.$$

Fazendo a mudança de variável $u = kh - s$, obtemos

$$\sigma_{a,k,h}^\alpha = \int_0^{kh} e^{-a\alpha u^2} du.$$

□

Para calcular o parâmetro escala na distribuição dada no Teorema 3.35 necessitamos realizar o cálculo via integração numérica. A fim de dar outra opção para simular o processo dado em (3.28), apresentamos a seguir uma discretização para o processo, que nos permite escrevê-lo sob a forma de um processo AR(1) não estacionário.

Teorema 3.36. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido pela expressão dada em (3.28). Uma forma discreta para este processo é dada por*

$$V((k+1)h) = e^{-a(2k+1)h^2} V(kh) + W_{k,h}, \quad (3.33)$$

em que $k \in \{1, \dots, n\}$, n é o tamanho amostral e $W_{k,h}$ é uma variável aleatória α -estável simétrica, denotada por $S_\alpha(\sigma_W, 0, 0)$, onde

$$\sigma_W^\alpha = \int_0^h e^{-a\alpha u^2} du + \int_0^{kh} \left[e^{-a((k+1)h-s)^2} - e^{-a((2k+1)h^2+(kh-s)^2)} \right]^\alpha ds.$$

Prova. Para $k \in \mathbb{N}$ e h o tamanho da discretização do processo, temos, por definição, que

$$V(kh) = V_0 e^{-a(kh)^2} + \int_0^{kh} e^{-a(kh-s)^2} dL(s), \quad (3.34)$$

de onde segue que

$$V_0 e^{-a(kh)^2} = V(kh) - \int_0^{kh} e^{-a(kh-s)^2} dL(s). \quad (3.35)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} V((k+1)h) &= V_0 e^{-a((k+1)h)^2} + \int_0^{(k+1)h} e^{-a((k+1)h-s)^2} dL(s) \\ &= e^{-a(2k+1)h^2} V_0 e^{-a(kh)^2} + \int_0^{(k+1)h} e^{-a((k+1)h-s)^2} dL(s). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Substituindo (3.35) em (3.36), temos que

$$\begin{aligned} V((k+1)h) &= e^{-a(2k+1)h^2} \left[V(kh) - \int_0^{kh} e^{-a(kh-s)^2} dL(s) \right] \\ &\quad + \int_0^{(k+1)h} e^{-a((k+1)h-s)^2} dL(s). \\ &= e^{-a(2k+1)h^2} V(kh) - \int_0^{kh} e^{-a((2k+1)h^2+(kh-s)^2)} dL(s) \\ &\quad + \int_0^{(k+1)h} e^{-a((k+1)h-s)^2} dL(s). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Note agora, que podemos reescrever

$$\int_0^{(k+1)h} e^{-a((k+1)h-s)^2} dL(s) = \int_0^{kh} e^{-a((k+1)h-s)^2} dL(s) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-a((k+1)h-s)^2} dL(s). \quad (3.38)$$

Substituindo (3.38) em (3.37), segue que

$$\begin{aligned} V((k+1)h) &= e^{-a(2k+1)h^2} V(kh) - \int_0^{kh} e^{-a((2k+1)h^2+(kh-s)^2)} dL(s) \\ &\quad + \int_0^{kh} e^{-a((k+1)h-s)^2} dL(s) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-a((k+1)h-s)^2} dL(s) \\ &= e^{-a(2k+1)h^2} V(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-a((k+1)h-s)^2} dL(s) \\ &\quad + \int_0^{kh} \left[e^{-a((k+1)h-s)^2} - e^{-a((2k+1)h^2+(kh-s)^2)} \right] dL(s) \\ &= e^{-a(2k+1)h^2} V(kh) + W_{k,h}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde $W_{k,h} = X_{k,h} + Y_{k,h}$, com

$$X_{k,h} = \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-a((k+1)h-s)^2} dL(s)$$

e

$$Y_{k,h} = \int_0^{kh} \left[e^{-a((k+1)h-s)^2} - e^{-a((2k+1)h^2+(kh-s)^2)} \right] dL(s).$$

Como os intervalos das integrais estocásticas são disjuntos em $X_{k,h}$ e $Y_{k,h}$ e $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de incrementos independentes, conclui-se que $X_{k,h}$ e $Y_{k,h}$ são independentes.

Temos, então, pela proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), que $X_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_X, 0, 0)$, onde

$$\sigma_X^\alpha = \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-a\alpha((k+1)h-s)^2} ds. \quad (3.40)$$

Fazendo a mudança de variável $u = (k+1)h - s$, obtemos que

$$\sigma_X^\alpha = \int_0^h e^{-a\alpha u^2} du. \quad (3.41)$$

Ainda, pela proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), segue que a variável $Y_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_Y, 0, 0)$, onde

$$\sigma_Y^\alpha = \int_0^{kh} \left[e^{-a((k+1)h-s)^2} - e^{-a((2k+1)h^2+(kh-s)^2)} \right]^\alpha ds. \quad (3.42)$$

Por fim, pela proposição 1.2.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), e das expressões encontradas em (3.41) e (3.42), conclui-se que $W_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_W, 0, 0)$, onde

$$\sigma_W^\alpha = \sigma_X^\alpha + \sigma_Y^\alpha = \int_0^h e^{-a\alpha u^2} du + \int_0^{kh} \left[e^{-a((k+1)h-s)^2} - e^{-a((2k+1)h^2+(kh-s)^2)} \right]^\alpha ds,$$

como queríamos demonstrar. \square

Observação 3.37. Em Stein *et. al* (2016), simulações para as trajetórias do processo dado em (3.28) são apresentadas considerando o ruído Lévy como o ruído Browniano, e também considerando o ruído como um processo de Lévy α -estável.

A seguir, determinamos as três medidas de dependência definidas na Seção 3.2 para o processo dado em (3.28).

3.3.2 Propriedades

Nesta subseção apresentamos as medidas de dependência para o Processo Quadrático do Tipo OU e provamos que este processo não possui a propriedade de longa dependência.

Teorema 3.38. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o Processo Quadrático do Tipo OU dado em (3.28), considerando $V_0 \equiv 0$. Tem-se, então, que a função de covariação do processo é dada por*

$$[X(t), X(t+k)]_\alpha = \int_0^t e^{a(k(2x+k) - \alpha(x+k)^2)} dx, \quad (3.43)$$

para $k, t \geq 0$ e $\alpha \in (1, 2]$.

Prova. Observe, inicialmente, que podemos reescrever o processo como

$$V(t) = \int_0^\infty e^{-a(t-s)^2} \mathbf{1}_{(0,t)}(s) dL(s). \quad (3.44)$$

Pela Definição 3.14, temos, dados $k, t \geq 0$, que

$$[X(t), X(t+k)]_\alpha = \int_0^\infty e^{-a(t-u)^2} \mathbf{1}_{(0,t)}(u) \cdot e^{-a(t+k-u)^2(\alpha-1)} \mathbf{1}_{(0,t+k)}(u) du, \quad (3.45)$$

para $\alpha \in (1, 2]$. E, como $(0, t) \cap (0, t+k) = (0, t)$, temos que

$$[X(t), X(t+k)]_\alpha = \int_0^t e^{-a(t-u)^2} \cdot e^{-a(t+k-u)^2(\alpha-1)} du. \quad (3.46)$$

Fazendo a mudança de variável $x = t - u$ em (3.46), obtemos que

$$[X(t), X(t+k)]_\alpha = \int_0^t e^{-ax^2} \cdot e^{-a(x+k)^2(\alpha-1)} dx. \quad (3.47)$$

Note que

$$\begin{aligned} -ax^2 - a(x+k)^2(\alpha-1) &= -ax^2 - a(x^2 + 2xk + k^2)(\alpha-1) \\ &= -ax^2 - a\alpha x^2 - 2a\alpha xk - a\alpha k^2 + ax^2 + 2axk + ak^2 \\ &= -a\alpha(x+k)^2 + ak(2x+k) \\ &= a(k(2x+k) - \alpha(x+k)^2). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Temos, então, que a expressão da função de covariação dada em (3.47) pode ser reescrita como

$$[X(t), X(t+k)]_\alpha = \int_0^t e^{a(k(2x+k)-\alpha(x+k)^2)} dx, \quad (3.49)$$

como queríamos demonstrar. \square

O Teorema 3.39 apresenta uma propriedade da função de covariação encontrada.

Teorema 3.39. *Seja $[X(t), X(t+k)]_\alpha$ a função de covariação dada em (3.43). Tem-se, então, que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [X(t), X(t+k)]_\alpha = 0. \quad (3.50)$$

Prova. Dado $t \geq 0$ e $a > 0$ fixo, considere a função de autocovariação dada em (3.43) escrita na forma $\int_0^t f_k(x) dx$, onde $f_k(x) = e^{a(k(2x+k)-\alpha(x+k)^2)}$.

Note que $|f_k(x)| < 1$, pois

$$|f_k(x)| = \left| e^{a(k(2x+k)-\alpha(x+k)^2)} \right| = \frac{e^{ak(2x+k)}}{e^{a\alpha(x+k)^2}} = \frac{e^{a \cdot 1 \cdot (2kx+k^2)}}{e^{a\alpha(x^2+2xk+k^2)}} < 1,$$

pois $\alpha > 1$ e $x^2 + 2xk + k^2 > 2xk + k^2$.

Ainda, dado $x \in (0, t)$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} e^{a(k(2x+k)-\alpha(x+k)^2)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} e^{a(-\alpha x^2 + (1-\alpha)(2xk+k^2))} \\ &= e^{-a\alpha x^2} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} e^{a(1-\alpha)(2xk+k^2)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $(1-\alpha) < 0$.

Portanto, pelo teorema da convergência dominada, concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [X(t), X(t+k)]_\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t f_k(x) dx = \int_0^t \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = 0.$$

\square

O resultado obtido no Teorema 3.39 apresentada o comportamento desejado para o processo, isto é, a função de covariação tende a zero conforme o *lag* aumenta entre as variáveis do processo. A fim de concluir algo sobre a dependência do Processo Quadrático do Tipo OU, estudamos a seguir a função de codiferença e a função de covariância espectral.

Teorema 3.40. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o Processo Quadrático do Tipo OU dado em (3.28). Temos que:*

i. Se $V_0 \sim S_\alpha(\sigma_0, 0, 0)$, então a sua função de codiferença é dada por

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, t) &= |s| \sigma_0^\alpha \left[e^{-a(t+k)^2\alpha} + e^{-at^2\alpha} - \left| e^{-a(t+k)^2} - e^{-at^2} \right|^\alpha \right] \\ &\quad + |s|^\alpha \int_0^t \left(e^{-a(u+k)^2\alpha} + e^{-au^2\alpha} - \left| e^{-a(u+k)^2} - e^{-au^2} \right|^\alpha \right) du. \end{aligned} \quad (3.51)$$

para $s \in \mathbb{R}$ e $k, t \geq 0$.

ii. Se $V_0 \equiv 0$, então a sua função de codiferença é dada por

$$\tau_V(s; k, t) = |s|^\alpha \int_0^t \left(e^{-a(u+k)^2\alpha} + e^{-au^2\alpha} - \left| e^{-a(u+k)^2} - e^{-au^2} \right|^\alpha \right) du. \quad (3.52)$$

para $s \in \mathbb{R}$ e $k, t \geq 0$.

Prova. Iniciamos provando o item *i*. Sabendo que o processo estocástico dado em (3.28) pertence à classe GOUT, utilizamos, então, o item *ii*. da Proposição 3.26.

Considerando $\rho(t) = e^{-at^2}$ em (3.18), obtemos que

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, t) &= |s| \sigma_0^\alpha \left[e^{-a(t+k)^2\alpha} + e^{-at^2\alpha} - \left| e^{-a(t+k)^2} - e^{-at^2} \right|^\alpha \right] \\ &\quad + |s|^\alpha \int_0^t \left(e^{-a(t+k-x)^2\alpha} + e^{-a(t-x)^2\alpha} - \left| e^{-a(t+k-x)^2} - e^{-a(t-x)^2} \right|^\alpha \right) dx. \end{aligned} \quad (3.53)$$

para $s \in \mathbb{R}$ e $k, t \geq 0$.

Fazendo a mudança de variável $u = t - x$, obtemos a expressão dada em (3.51).

Para provar o item *ii.*, basta considerar $\sigma_0 = 0$ na expressão dada em (3.51). \square

O Teorema 3.41 a seguir apresenta a função de covariância espectral para o processo dada em (3.28).

Teorema 3.41. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o Processo Quadrático do Tipo OU dado em (3.28), com $V_0 \equiv 0$. Tem-se, então, que a sua função de covariância espectral é dada por*

$$\varrho(X(t), X(t+k)) = \int_0^t e^{-au^2} \cdot e^{-a(u+k)^2} \left[e^{-2au^2} + e^{-2a(u+k)^2} \right]^{\frac{\alpha-2}{2}} du. \quad (3.54)$$

para $k, t \geq 0$, $a > 0$ e $\alpha \in (0, 2]$.

Prova. Seja $k, t \geq 0$ e $\alpha \in (0, 2]$. Pela Proposição 3.30 em (3.26), utilizando $\rho(t) = e^{-at^2}$, obtemos que

$$\varrho(X(t), X(t+k)) = \int_0^t e^{-a(t-x)^2} \cdot e^{-a(t+k-x)^2} \left[e^{-2a(t-x)^2} + e^{-2a(t+k-x)^2} \right]^{\frac{\alpha-2}{2}} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $u = t - x$, temos que

$$\varrho(X(t), X(t+k)) = \int_0^t e^{-au^2} \cdot e^{-a(u+k)^2} \left[e^{-2au^2} + e^{-2a(u+k)^2} \right]^{\frac{\alpha-2}{2}} du,$$

como queríamos demonstrar. \square

Nos próximos dois teoremas, apresentamos funções que são cotas superiores em k para a função de covariância espectral do Processo Quadrático do tipo OU, quando $k \geq 0$, para os casos de $\alpha \in (0, 1]$ e $\alpha \in (1, 2]$.

Teorema 3.42. *Seja $\varrho(X(t), X(t+k))$ a função de covariância espectral no lag k dada em (3.54). Se $\alpha \in (0, 1]$, então*

$$\varrho(X(t), X(t+k)) < te^{-ak^2}, \quad (3.55)$$

para todo $k \geq 0$, dado $t \geq 0$ fixo e $a > 0$.

Prova. Seja $u \in [0, t]$ e $k \geq 0$. Observe inicialmente que

$$e^{-2au^2} < e^{-2au^2} + e^{-2a(u+k)^2} \implies \left[e^{-2au^2} \right]^{\frac{\alpha-2}{2}} > \left[e^{-2au^2} + e^{-2a(u+k)^2} \right]^{\frac{\alpha-2}{2}},$$

pois $\frac{\alpha-2}{2} < 0$ para $\alpha \in (0, 2]$. Lembrando que $a > 0$, por definição do processo dado em (3.28).

Temos, então, de (3.54) e desta desigualdade, que

$$\begin{aligned} \varrho(X(t), X(t+k)) &< \int_0^t e^{-au^2} \cdot e^{-a(u+k)^2} \left[e^{-2au^2} \right]^{\frac{\alpha-2}{2}} du \\ &= \int_0^t e^{-au^2} \cdot e^{-a(u+k)^2} \cdot e^{-au^2(\alpha-2)} du \\ &= \int_0^t e^{-au^2} \cdot e^{-au^2-2auk-ak^2} \cdot e^{-a\alpha u^2+2au^2} du \\ &= \int_0^t e^{-a\alpha u^2} \cdot e^{-ak(2u+k)} du. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Note que a cota superior desta integral é dada quando $u = 0$, para o intervalo de tamanho t fixo, pois $f(x) = e^{-mx}$ e $g(x) = e^{-nx^2}$ são funções decrescentes, para m e n constantes.

Concluimos, então, que

$$\varrho(X(t), X(t+k)) < (t-0) e^{-a\alpha u^2} \cdot e^{-ak(2u+k)} \Big|_{u=0} = te^{-ak^2}, \quad (3.57)$$

para todo $k \geq 0$, dado $t \geq 0$ fixo e $a > 0$. □

Teorema 3.43. *Seja $\varrho(X(t), X(t+k))$ a função de covariância espectral no lag k dada em (3.54). Se $\alpha \in (1, 2]$, então*

$$\varrho(X(t), X(t+k)) < 2^{\frac{\alpha-2}{2}} te^{-a(\alpha-1)k^2}, \quad (3.58)$$

para todo $k \geq 0$, dado $t \geq 0$ fixo.

Prova. Observe inicialmente, dado $a > 0$, que

$$\begin{aligned} e^{-2au^2} > e^{-2a(u+k)^2} &\implies e^{-2au^2} + e^{-2a(u+k)^2} > 2e^{-2a(u+k)^2} \\ &\implies \left[e^{-2au^2} + e^{-2a(u+k)^2} \right]^{\frac{\alpha-2}{2}} < \left[2e^{-2a(u+k)^2} \right]^{\frac{\alpha-2}{2}} = 2^{\frac{\alpha-2}{2}} e^{-a(u+k)^2(\alpha-2)}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

pois $\frac{\alpha-2}{2} < 0$ para $\alpha \in (0, 2]$.

Aplicando na expressão (3.54) a desigualdade obtida em (3.59), temos que

$$\begin{aligned} \varrho(X(t), X(t+k)) &< \int_0^t e^{-au^2} \cdot e^{-a(u+k)^2} \left(2^{\frac{\alpha-2}{2}} e^{-a(u+k)^2(\alpha-2)} \right) du \\ &< 2^{\frac{\alpha-2}{2}} \int_0^t e^{-a(u+k)^2(1+(\alpha-2))} du \\ &= 2^{\frac{\alpha-2}{2}} \int_0^t e^{-a(u+k)^2(\alpha-1)} du, \end{aligned} \quad (3.60)$$

pois $e^{-au^2} < 1$ para $u \in [0, t]$.

De modo anterior à demonstração do Teorema 3.42, considerando a cota superior da integral dada em (3.60) em relação à variável $u \in [0, t]$, obtemos que

$$\varrho(X(t), X(t+k)) < 2^{\frac{\alpha-2}{2}} t e^{-a(u+k)^2(\alpha-1)} \Big|_{u=0} = 2^{\frac{\alpha-2}{2}} t e^{-a(\alpha-1)k^2}.$$

para $\alpha \in (1, 2]$. □

Beran (2010) afirma que, para processos estocásticos não estacionários com segundo momento infinito, é necessário utilizar outras medidas de dependência para a análise de longa dependência, citando, por exemplo, a função de codiferença como uma medida de dependência válida. Apresentamos a seguir uma definição para a longa dependência, similar à apresentada para a função de codiferença, segundo Samorodnitsky e Taqqu (1994).

Definição 3.44. Um processo estocástico $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ possui a propriedade de *longa dependência em relação à função de covariância espectral* se a sua função de covariância espectral satisfaz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(X(t), X(t+k)) = 0 \quad (3.61)$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varrho(X(t), X(t+k)) = \infty. \quad (3.62)$$

Podemos então concluir que o Processo Quadrático do Tipo OU não apresenta a propriedade de longa dependência, resultado este apresentado a seguir.

Teorema 3.45. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo estocástico dado em (3.28), com $V_0 \equiv 0$. Então, $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ não possui a propriedade de longa dependência em relação à função de covariância espectral.*

Prova. Para provarmos este resultado, analisamos dois casos.

Caso I: $\alpha \in (0, 1]$.

Dado $t \geq 0$ fixo, temos, do Teorema 3.42 que

$$0 \leq \varrho(X(t), X(t+k)) < t e^{-ak^2}.$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} te^{-ak^2} = 0$, segue pelo teorema do confronto, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(X(t), X(t+k)) = 0. \quad (3.63)$$

Ainda, note que, para $t \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} te^{-ak^2} = t \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^a}\right)^{k^2} < \infty, \quad (3.64)$$

pois $\frac{1}{e^a} < 1$. Portanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varrho(X(t), X(t+k)) < \infty.$$

Logo, o processo dado em (3.28) não possui longa dependência para $\alpha \in (0, 1]$.

Caso II: $\alpha \in (1, 2]$.

Dado $t \geq 0$ fixo, temos, do Teorema 3.43 que

$$0 \leq \varrho(X(t), X(t+k)) < 2te^{-a(\alpha-1)k^2}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} 2te^{-a(\alpha-1)k^2} = 0$, segue, novamente pelo teorema do confronto, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(X(t), X(t+k)) = 0. \quad (3.65)$$

Por fim, basta observar que, dado $t \geq 0$, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2te^{-a(\alpha-1)k^2} = 2t \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{a(\alpha-1)}}\right)^{k^2} < \infty. \quad (3.66)$$

Portanto, o processo dado em (3.28) não possui longa dependência para $\alpha \in (1, 2]$, como queríamos demonstrar. \square

Concluimos este capítulo salientando que ambos os processos apresentados aqui não possuem a propriedade de longa dependência. O Capítulo 4 apresenta outra teoria com o objetivo de definirmos um processo estocástico que possua a propriedade de longa dependência.

4 Processo do Tipo Média Móvel Fracionariamente Integrado

Neste capítulo desejamos apresentar um processo estocástico a tempo contínuo com a propriedade de longa dependência.

O processo a ser apresentado neste capítulo surgiu a partir do artigo de Marquardt (2006), onde são estudados os processos estocásticos estacionários do tipo média móvel, que definimos a seguir.

Definição 4.1. Um processo estocástico *média móvel estacionário* $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um processo dado na forma

$$Y(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t-u) dL(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

onde a *função núcleo* $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável e o processo ruído $\{L(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um processo de Lévy em \mathbb{R} .

Observação 4.2. Salientamos ao leitor que neste capítulo utilizamos a notação $L(\cdot)$ para indicar um processo de Lévy qualquer, cuja média é zero e o segundo momento é finito.

Marquardt (2006) mostra que o processo dado em (4.1) está bem definido se o núcleo $g(\cdot)$ e a tripla geradora (γ, σ^2, ν) do processo de Lévy $\{L(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, dada segundo (2.8), satisfazem a condição de que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_0} (|g(t-u)x|^2 \wedge |g(t-u)x|) \nu(dx) du < \infty, \quad (4.2)$$

com $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{0\}$.

Consideramos, então, o processo média móvel estacionário apresentado como a seguir.

Definição 4.3. Seja o processo $\{Y_\lambda(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dado por

$$Y_\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(t-u)^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t-u) dL(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

onde $\lambda > 0$ e o processo ruído $\{L(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um processo de Lévy em \mathbb{R} com $\mathbb{E}[L(1)] = 0$ e $\mathbb{E}[L(1)^2] < \infty$. O processo dado em (4.3) é um processo média móvel estacionário, onde $g_\lambda(t) = e^{-\lambda t^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$. A expressão dada para este processo pode ser reescrita como

$$Y_\lambda(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-u)^2} dL(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

pois $\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t-u) = \mathbb{1}_{(-\infty,t)}(u)$.

Vamos agora provar que o processo dado em (4.3) está bem definido.

Teorema 4.4. *O processo estocástico dado em (4.3) está bem definido, isto é, a função núcleo $g_\lambda(t) = e^{-\lambda t^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$ satisfaz a expressão dada em (4.2).*

Prova. Substituindo $g_\lambda(t) = e^{-\lambda t^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$ em (4.2), temos que

$$A = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_0} \left(\left| e^{-\lambda(t-u)^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t-u)x \right|^2 \wedge \left| e^{-\lambda(t-u)^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t-u)x \right| \right) \nu(dx) du,$$

o que equivale a

$$A = \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}_0} \left(\left| e^{-\lambda(t-u)^2} x \right|^2 \wedge \left| e^{-\lambda(t-u)^2} x \right| \right) \nu(dx) du, \quad (4.5)$$

pois $\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t-u) = \mathbb{1}_{(-\infty,t)}(u)$.

Note que $e^{-2\lambda(t-u)^2} < e^{-\lambda(t-u)^2}$, para $\lambda > 0$ e $t-u > 0$. Além disto, para $|x| \leq 1$, temos que $|x|^2 \leq |x|$. Ora, então $e^{-2\lambda(t-u)^2} |x|^2 < e^{-\lambda(t-u)^2} |x|$, para $|x| \leq 1$.

Ainda, para $t-u \in (0, \infty)$, observe que

$$\min_{|x|>1} \{e^{-2\lambda(t-u)^2} |x|^2, e^{-\lambda(t-u)^2} |x|\} \leq \min_{|x|>1} \{e^{-\lambda(t-u)^2} |x|^2, e^{-\lambda(t-u)^2} |x|\} = e^{-\lambda(t-u)^2} |x|,$$

pois $|x|^2 > |x|$, para $|x| > 1$.

Temos então, da expressão (4.5), que

$$A \leq \int_{-\infty}^t \left(e^{-2\lambda(t-u)^2} \int_{|x|\leq 1} x^2 \nu(dx) + e^{-\lambda(t-u)^2} \int_{|x|>1} |x| \nu(dx) \right) du. \quad (4.6)$$

Segundo Sato (1999), temos, pelo Teorema de Lévy-Itô que $\int_{|x|\leq 1} x^2 \nu(dx) < \infty$. Ainda, pelo teorema 25.3 de Sato (1999), decorre que $\int_{|x|>1} |x| \nu(dx) < \infty$, pois o processo dado em (4.1) possui segundo momento finito. Podemos então reescrever (4.6) como

$$A < \int_{-\infty}^t \left(e^{-2\lambda(t-u)^2} .C_1 + e^{-\lambda(t-u)^2} .C_2 \right) du, \quad (4.7)$$

onde $C_1 = \int_{|x|\leq 1} x^2 \nu(dx) < \infty$ e $C_2 = \int_{|x|>1} |x| \nu(dx) < \infty$.

Considerando a integral da expressão dada em (4.7) e fazendo a mudança de variável $x = t-u$, obtemos

$$\int_{-\infty}^t \left(e^{-2\lambda(t-u)^2} .C_1 + e^{-\lambda(t-u)^2} .C_2 \right) du = C_1 \int_0^\infty e^{-2\lambda x^2} dx + C_2 \int_0^\infty e^{-\lambda x^2} dx. \quad (4.8)$$

Considerando então uma variável aleatória $Z \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{4\lambda})$, obtemos, da expressão dada em (3.32), que

$$\int_0^\infty e^{-2\lambda x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\lambda}}. \quad (4.9)$$

Analogamente, considerando uma variável aleatória $Y \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2\lambda})$, podemos concluir que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}. \quad (4.10)$$

Utilizando as expressões das integrais acima em (4.8) concluímos que

$$C_1 \int_0^\infty e^{-2\lambda x^2} dx + C_2 \int_0^\infty e^{-\lambda x^2} dx = \frac{C_1 \sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\lambda}} + \frac{C_2 \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}. \quad (4.11)$$

Portanto, da inequação dada em (4.7) e do resultado obtido em (4.11), concluímos que a expressão (4.5) é finita, isto é, o processo dado em (4.1) está bem definido. \square

Observação 4.5. (a) Note que, a partir das expressões dadas em (4.9) e (4.10) é possível concluir que $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ e $g_\lambda \in L^2(\mathbb{R})$, isto é, $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, onde a função núcleo é dada por $g_\lambda(t) = e^{-\lambda t^2} \mathbb{1}_{(0, \infty)(t)}$.

(b) Salientamos, ainda, que a função núcleo $g(\cdot)$ do processo dado em (4.1) deve ser de memória curta, caso contrário a teoria subsequente não se aplica.

Para o estudo, vamos considerar as duas condições a seguir:

- **Condição 1.** $g_\lambda(t) = 0$, para todo $t < 0$ (casualidade).
- **Condição 2.** $|g_\lambda(t)| \leq C e^{-ct}$, para algumas constantes $C > 0$ e $c > 0$.

Observação 4.6. Antes de provarmos que a função núcleo estudada nesta seção satisfaz as **Condições 1 e 2** descritas acima, observemos o gráfico da função $f_\lambda(t) = e^{\lambda - \lambda t} - e^{-\lambda t^2}$, para todo $t > 0$ e para um valor de λ fixo.

De fato, para valores de $C = e^\lambda$ e $c = \lambda$, a **Condição 2** é satisfeita, considerando $\lambda = 1$. No lema a seguir, generalizamos este resultado.

Lema 4.7. *Seja $g_\lambda(t)$ a função núcleo dada no processo (4.3). Então são válidas as seguintes afirmações:*

- i.* $g_\lambda(t)$ satisfaz a **Condição 1**, isto é, $g_\lambda(t) = 0$, para todo $t < 0$.
- ii.* $g_\lambda(t)$ satisfaz a **Condição 2** para $C = e^\lambda$ e $c = \lambda$.

Prova. Para demonstrar o item *i*, é fácil ver que a função núcleo $g_\lambda(t) = e^{-\lambda t^2} \mathbb{1}_{(0, \infty)(t)}$ satisfaz a **Condição 1**, pois, para todo $t \leq 0$, temos que $\mathbb{1}_{(0, \infty)(t)} = 0$.

A fim de demonstrar o item *ii*, desejamos provar que a desigualdade apresentada na **Condição 2** é sempre válida para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $C = e^\lambda$ e $c = \lambda$. Para isto, observe que basta provar que $e^{-\lambda t^2} \leq e^{\lambda - \lambda t}$, para todo $t > 0$.

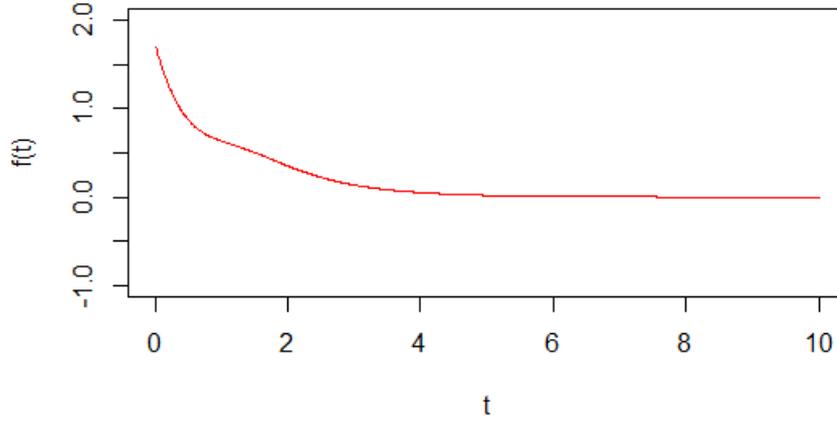


Figura 3.3: Gráfico da função $f_\lambda(t) = e^{\lambda-\lambda t} - e^{-\lambda t^2}$, $t > 0$, para $\lambda = 1$.

De fato, esta desigualdade ocorre para todo $t > 0$, já que

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t^2} \leq e^{\lambda-\lambda t} &\iff \ln(e^{-\lambda t^2}) \leq \ln(e^{\lambda-\lambda t}) \iff -\lambda t^2 \leq \lambda - \lambda t \\ &\iff \lambda t^2 - \lambda t + \lambda \geq 0 \\ &\iff \lambda(t^2 - t + 1) \geq 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Porém o polinômio $p(t) = \lambda t^2 - \lambda t + \lambda$ não possui raízes reais e $p(t) > 0$, para todo t . Temos, então, que a desigualdade (4.12) se verifica para todo $t > 0$, isto é, este núcleo $g(\cdot)$ satisfaz as **Condições 1 e 2**. \square

Para criar um *processo estocástico fracionariamente integrado média móvel*, vamos utilizar a função núcleo de um processo média móvel estacionário (ver Marquardt, 2006). Utilizando a *integral de Riemann-Liouville à direita* para a função núcleo dada em (4.3), obtemos o processo desejado.

Para isto, definimos a seguir as *integrais fracionárias de Riemann-Liouville*.

Definição 4.8. Para $0 < r < 1$, as *integrais fracionárias de Riemann-Liouville* $(I_\pm^r f)(\cdot)$ à esquerda e à direita da função f , são, respectivamente, definidas por

$$(I_-^r f)(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_x^\infty f(t)(t-x)^{r-1} dt, \quad (4.13)$$

e

$$(I_+^r f)(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-\infty}^x f(t)(x-t)^{r-1} dt, \quad (4.14)$$

para funções $f \in L^p(\mathbb{R})$, se $1 \leq p < \frac{1}{r}$.

Podemos, então, introduzir as *derivadas fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita* conforme a Definição 4.9 a seguir.

Definição 4.9. Seja $I_{\pm}^r(L^p)$ a classe de funções $\phi \in L^p(\mathbb{R})$ que podem ser representadas como uma integral fracionária de Riemann-Liouville de alguma função $f \in L^p(\mathbb{R})$. Então existe uma única função $f \in L^p(\mathbb{R})$ tal que $\phi = I_{\pm}^r f$. Dizemos que f é a *derivada de Riemann-Liouville à esquerda ou à direita de ϕ de ordem r* e coincide, respectivamente, com $\mathcal{D}_{\pm}^r \phi(\cdot)$, definidas por

$$(\mathcal{D}_-^r \phi)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-r)} \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \phi(t)(t-x)^{-r} dt, \quad (4.15)$$

e

$$(\mathcal{D}_+^r \phi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-r)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \phi(t)(x-t)^{-r} dt. \quad (4.16)$$

Definimos, então, o *núcleo fracionariamente integrado* de um núcleo $g(\cdot)$ através da integral fracionária de Riemann-Liouville à direita deste núcleo.

Definição 4.10. O *núcleo fracionariamente integrado* de um núcleo $g(\cdot)$ é dado por

$$g_d(t) := (I_+^d g)(t) = \int_0^t g(t-s) \frac{s^{d-1}}{\Gamma(d)} ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.17)$$

onde $0 < d < \frac{1}{2}$.

O Teorema 4.11, a seguir, apresenta o núcleo fracionariamente integrado da função $g_{\lambda,d}(\cdot)$ dada em (4.3).

Teorema 4.11. *Seja a função núcleo dada por $g_{\lambda,d}(t) = e^{-\lambda t^2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)$, com $\lambda > 0$. Então o núcleo fracionariamente integrado de $g_{\lambda,d}(t)$ é dado por*

$$g_{\lambda,d}(t) = \frac{t^d}{\Gamma(d+1)} \cdot {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda t^2\right), \quad t > 0, \quad (4.18)$$

onde $d \in (0, \frac{1}{2})$ e ${}_2F_2(x, y; z, w; v)$ é a função hipergeométrica generalizada nos parâmetros x, y, z, w e v , dada por

$${}_2F_2(x, y; z, w; v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)_n (y)_n}{(z)_n (w)_n} \cdot \frac{v^n}{n!},$$

em que $(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$.

Prova. Por definição, considerando $g_{\lambda}(t) = e^{-\lambda t^2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)$ em (4.17), temos que

$$g_{\lambda,d}(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)^2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t-s) \cdot \frac{s^{d-1}}{\Gamma(d)} ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.19)$$

Observe inicialmente que, para $s \in (0, t)$, naturalmente temos que $(t-s) \in (0, \infty)$. Tem-se, então, que a expressão dada em (4.19) se reduz a

$$g_{\lambda,d}(t) = (I_+^d g)(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)^2} \cdot \frac{s^{d-1}}{\Gamma(d)} ds.$$

Fazendo a mudança de variável $x = t - s$, obtemos que

$$g_{\lambda,d}(t) = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^t e^{-\lambda x^2} (t-x)^{d-1} dx.$$

Utilizamos, então, a fórmula 3.478(4) de Gradshteyn e Ryzhik (1980), considerando $u = t, \nu = 1 > 0, \mu = d > 0, n = 2$ e $\beta = -\lambda$, para obter que

$$g_{\lambda,d}(t) = \frac{t^d}{\Gamma(d)} \cdot \mathcal{B}(d, 1) \cdot {}_2F_2 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda t^2 \right) \quad (4.20)$$

onde $\mathcal{B}(a, b)$ é a função Beta nos parâmetros a e b , dada por

$$\mathcal{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Reorganizando os termos na expressão (4.20), para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$\begin{aligned} g_{\lambda,d}(t) &= \frac{t^d}{\Gamma(d)} \cdot \mathcal{B}(d, 1) \cdot {}_2F_2 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda t^2 \right) \\ &= \frac{t^d}{\Gamma(d)} \cdot \frac{\Gamma(d) \cdot \Gamma(1)}{\Gamma(d+1)} \cdot {}_2F_2 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda t^2 \right) \\ &= \frac{t^d}{\Gamma(d+1)} \cdot {}_2F_2 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda t^2 \right), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. \square

A seguir, apresentamos no Teorema 4.12 um resultado que nos possibilita provar o resultado da Proposição 4.13.

Teorema 4.12. *Uma função $f(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ se, e somente se, existe constante $C > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |h(u)f(u)| du \leq C \|h\|_{L^2}$, para toda função $h(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$.*

Prova. A demonstração no sentido \Rightarrow é trivial, basta considerar $h(\cdot) = f(\cdot)$. Para provar a volta \Leftarrow , basta verificar que vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz, onde $C = \|f\|_{L^2}$, senão teríamos um absurdo. \square

Proposição 4.13. *Seja $g_{\lambda,d}(\cdot)$ o núcleo fracionariamente integrado dado em (4.17). Então, $g_{\lambda,d} \in L^2(\mathbb{R})$.*

Prova. Pelo Teorema 4.12, basta provar que

$$\int_{\mathbb{R}} |h(u)g_{\lambda,d}(u)| du \leq K \|h\|_{L^2},$$

para toda função $h(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$, com K constante positiva.

De (4.17), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |h(u)g_{\lambda,d}(u)| du &= \int_0^\infty \int_0^u |h(u)| g(u-s) \frac{s^{d-1}}{\Gamma(d)} ds du \\ &= \frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^\infty \int_0^\infty |h(u)| g(u-s) s^{d-1} ds du, \end{aligned} \quad (4.21)$$

pois $g(t) = 0$ para $t < 0$.

Reescrevendo a expressão obtida em (4.21), temos que

$$\int_{\mathbb{R}} |h(u)g_{\lambda,d}(u)| du = \frac{1}{\Gamma(d)} (I_1 + I_2), \quad (4.22)$$

onde

$$I_1 = \int_0^\infty \int_0^1 |h(u)| g(u-s) s^{d-1} ds du \quad (4.23)$$

e

$$I_2 = \int_0^\infty \int_1^\infty |h(u)| g(u-s) s^{d-1} ds du. \quad (4.24)$$

Utilizando o teorema de Fubini e a desigualdade Hölder, temos que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 s^{d-1} \int_0^\infty |h(u)| g(u-s) du ds \\ &\leq \int_0^1 s^{d-1} \|h\|_{L^2} \|g\|_{L^2} ds \\ &= \frac{1}{d} \|h\|_{L^2} \|g\|_{L^2}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

pois já sabemos que $g_\lambda \in L^2(\mathbb{R})$.

Em I_2 , dada em (4.24), utilizando o teorema de Fubini e fazendo a mudança de variável $t = u - s$, obtemos que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty g(t) \int_1^\infty |h(t+s) s^{d-1}| ds du \\ &\leq \int_0^\infty |g(t)| \|h\|_{L^2} \left(\int_1^\infty s^{2(d-1)} ds \right)^{\frac{1}{2}} dt, \end{aligned} \quad (4.26)$$

pela desigualdade de Hölder.

Temos, então, de (4.26), que

$$I_2 = \int_0^\infty |g(t)| \|h\|_{L^2} \frac{1}{\sqrt{1-2d}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{1-2d}} \|g\|_{L^1} \|h\|_{L^2}, \quad (4.27)$$

pois também já vimos que $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$.

Aplicando os resultados obtidos em (4.25) e (4.27) na igualdade dada em (4.22), concluímos que

$$|h(u)g_{\lambda,d}(u)| du \leq \frac{1}{\Gamma(d)} \left(\frac{1}{d} \|g\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{1-2d}} \|g\|_{L^1} \right) \|h\|_{L^2},$$

e, portanto, $g_{\lambda,d} \in L^2(\mathbb{R})$. □

Com estes resultados, podemos definir o processo que apresenta a característica de *longa dependência*.

4.1 Definição do Processo

O processo apresentado neste capítulo advém da classe de processos média móvel fracionariamente integrados (*FIMA - fractionally integrated moving average*), apresentada em Marquardt (2006).

Definição 4.14. Seja $0 < d < \frac{1}{2}$. O processo *FIMA* $\{Y_{\lambda,d}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ para o núcleo fracionário integrado $g_{\lambda,d}(\cdot)$, dado em (4.18) é definido por

$$Y_{\lambda,d}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{(t-u)^d}{\Gamma(d+1)} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda(t-u)^2\right) dL(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.28)$$

onde $\{L(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um processo de Lévy com $\mathbb{E}[L(1)] = 0$ e $\mathbb{E}[L(1)^2] < \infty$.

No Teorema 4.15, dado a seguir, mostramos que o processo está bem definido. Após, no Teorema 4.16 apresentamos algumas propriedades do processo dado na Definição 4.14.

Teorema 4.15. *Seja $\{Y_{\lambda,d}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ o processo dado em (4.28). Então, esse processo estocástico está bem definido.*

Prova. Como $g_{\lambda,d} \in L^2(\mathbb{R})$, podemos aplicar a proposição 2.1 de Marquardt (2006) e obtemos que o processo dado em (4.28) está bem definido. \square

Teorema 4.16. *Seja $\{Y_{\lambda,d}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ o processo dado em (4.28). Então, esse processo estocástico é estacionário e, para todo $t \in \mathbb{R}$, a distribuição de $Y_{\lambda,d}(t)$ é infinitamente divisível.*

Prova. Este resultado segue diretamente do teorema 6.1 de Marquardt (2006). \square

A seguir, apresentamos as expressões para a função de autocovariância e a função de densidade espectral do processo dado em (4.28).

Teorema 4.17. *Seja $\{Y_{\lambda,d}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ o processo dado em (4.28). Então, verificam-se as seguintes afirmações:*

i. A função de autocovariância do processo é dada por

$$\gamma_{Y_{\lambda,d}}(h) = \frac{\mathbb{E}[L(1)^2]}{(\Gamma(d+1))^2} \int_0^\infty (u+h)^d u^d \cdot \psi_d(u) \cdot \psi_d(u+h) du, \quad (4.29)$$

para $h \geq 0$, onde $\psi_d(x) = {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}, -\lambda x^2\right)$.

ii. A função densidade espectral $f_{Y_{\lambda,d}}(\cdot)$ é dada por

$$f_{Y_{\lambda,d}}(\omega) = \frac{\mathbb{E}[L(1)^2]}{2\pi(\Gamma(d+1))^2} |F_{\lambda,d}(\omega)|^2, \quad (4.30)$$

para $\omega \in \mathbb{R}$, onde $F_{\lambda,d}(\omega) = \int_0^\infty x^d e^{ix\omega} \psi_d(x) dx$, com $\psi_d(\cdot)$ dado como no item i.

Prova. Para provar o item *i.*, temos da definição de função de autocovariância espectral e, como $\mathbb{E}[L(1)] = 0$, que

$$\begin{aligned}\gamma_{Y_{\lambda,d}}(h) &= \text{Cov}[Y_{\lambda,d}(t+h), Y_{\lambda,d}(t)] = \mathbb{E}[Y_{\lambda,d}(t+h)Y_{\lambda,d}(t)] \\ &= \text{Var}[L(1)] \int_{-\infty}^t \frac{(t+h-s)^d}{\Gamma(d+1)} \psi_d(t+h-s) \cdot \frac{(t-s)^d}{\Gamma(d+1)} \psi_d(t-s) ds.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $u = t - s$, obtemos que

$$\gamma_{Y_{\lambda,d}}(h) = \frac{\mathbb{E}[L(1)^2]}{(\Gamma(d+1))^2} \int_0^\infty (u+h)^d u^d \cdot \psi_d(u) \cdot \psi_d(u+h) du.$$

Para provar o item *ii.*, utilizamos o fato de que a função densidade espectral de um processo estacionário é a transformada de Fourier Inversa da função de autocovariância (ver teorema de Herglotz em Brockwell e Davis (2002)).

Obtemos, então, do item *i.* já provado, que, para $\omega \in \mathbb{R}$ e $h \geq 0$,

$$f_{Y_{\lambda,d}}(\omega) = \frac{\mathbb{E}[L(1)^2]}{2\pi(\Gamma(d+1))^2} \int_0^\infty e^{-ih\omega} \int_0^\infty (u+h)^d u^d \psi_d(u+h) \psi_d(u) du dh. \quad (4.31)$$

Aplicando o teorema de Fubini e fazendo a mudança de variável $v = u + h$ para a integral em h na expressão (4.31), obtemos que

$$f_{Y_{\lambda,d}}(\omega) = \frac{\mathbb{E}[L(1)^2]}{2\pi(\Gamma(d+1))^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-i(v-u)\omega} v^d u^d \psi_d(v) \psi_d(u) dv du. \quad (4.32)$$

Reescrevendo a expressão dada em (4.32), temos que

$$\begin{aligned}f_{Y_{\lambda,d}}(\omega) &= \frac{\mathbb{E}[L(1)^2]}{2\pi(\Gamma(d+1))^2} \left(\int_0^\infty v^d e^{-iv\omega} \psi_d(v) dv \right) \left(\int_0^\infty u^d e^{iu\omega} \psi_d(u) du \right) \\ &= \frac{\mathbb{E}[L(1)^2]}{2\pi(\Gamma(d+1))^2} \cdot F_{\lambda,d}(-\omega) \cdot F_{\lambda,d}(\omega) \\ &= \frac{\mathbb{E}[L(1)^2]}{2\pi(\Gamma(d+1))^2} |F_{\lambda,d}(\omega)|^2,\end{aligned}$$

para $\omega \in \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar. \square

No Teorema 4.18 apresentamos a distribuição do processo dado em (4.28) para um caso particular, quando o processo $\{L(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o movimento Browniano.

Teorema 4.18. *Seja $\{Y_{\lambda,d}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ o processo estocástico dado em (4.28), onde o processo ruído é o movimento Browniano, isto é, $L(\cdot) = B(\cdot)$. Então,*

$$Y_{\lambda,d}(t) \stackrel{d}{=} X \sim \mathcal{N}\left(0, 2\sigma_{\lambda,d}^2\right),$$

onde

$$\sigma_{\lambda,d}^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{2d}}{(\Gamma(d+1))^2} \cdot \left({}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda x^2\right) \right)^2 dx.$$

Prova. Considerando a medida de controle quando $\alpha = 2$, obtemos que o processo estocástico dado por

$$Y_{\lambda,d}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{(t-u)^d}{(\Gamma(d+1))^2} {}_2F_2 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda(t-u)^2 \right) dB(u)$$

segue uma distribuição $S_2(\sigma_{\lambda,d}, 0, 0)$ onde

$$\sigma_{\lambda,d}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \frac{(t-u)^{2d}}{(\Gamma(d+1))^2} \cdot \left({}_2F_2 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda(t-u)^2 \right) \right)^2 du, \quad (4.33)$$

pela proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994). Fazendo a mudança de variável $x = t - u$ em (4.33), obtemos que

$$\sigma_{\lambda,d}^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^{2d}}{(\Gamma(d+1))^2} \cdot \left({}_2F_2 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda x^2 \right) \right)^2 dx.$$

Além disto, temos que uma variável aleatória α -estável $S_2(\sigma, 0, 0) \stackrel{d}{=} Z \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$. Segue, então, o resultado deste teorema. \square

Demonstramos agora o resultado que nos permite afirmar que a função hipergeométrica dada na expressão (4.28) está bem definida.

Teorema 4.19. *A função hipergeométrica*

$${}_2F_2 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda x^2 \right)$$

é absolutamente convergente, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $d \in (0, 1 - \frac{1}{\alpha})$.

Prova. Por definição, temos, para $d \in (0, 1 - \frac{1}{\alpha})$, que

$$\begin{aligned} {}_2F_2 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda x^2 \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)\Gamma(1 + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(\frac{d+1}{2} + n)\Gamma(\frac{d+2}{2} + n)} \cdot \frac{(-\lambda x^2)^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)\Gamma(1 + n)}{\Gamma(\frac{d+1}{2} + n)\Gamma(\frac{d+2}{2} + n)} \cdot \frac{(-\lambda x^2)^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde

$$a_n = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)\Gamma(1 + n)}{\Gamma(\frac{d+1}{2} + n)\Gamma(\frac{d+2}{2} + n)} \cdot \frac{(-\lambda x^2)^n}{n!}. \quad (4.35)$$

Dado $x \in \mathbb{R}$ fixo, temos que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + (n+1))\Gamma(1 + (n+1))}{\Gamma(\frac{d+1}{2} + (n+1))\Gamma(\frac{d+2}{2} + (n+1))} \cdot \frac{(-\lambda x^2)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)(\frac{1}{2} + n)\Gamma(1 + n)(1 + n)}{\Gamma(\frac{d+1}{2} + n)(\frac{d+1}{2} + n)\Gamma(\frac{d+2}{2} + n)(\frac{d+2}{2} + n)} \cdot \frac{(-\lambda x^2)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

pois $\Gamma(r + 1) = r\Gamma(r)$.

De (4.35) e (4.36), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)(\frac{1}{2} + n)\Gamma(1 + n)(1 + n)}{\Gamma(\frac{d+1}{2} + n)(\frac{d+1}{2} + n)\Gamma(\frac{d+2}{2} + n)(\frac{d+2}{2} + n)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2} + n)\Gamma(\frac{d+2}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2} + n)\Gamma(1 + n)} \cdot \frac{(-\lambda x^2)^{n+1}n!}{(-\lambda x^2)^n(n+1)!} \\ &= \frac{(\frac{1}{2} + n)(1 + n)}{(\frac{d+1}{2} + n)(\frac{d+2}{2} + n)} \cdot \frac{(-\lambda x^2)}{(n+1)}. \end{aligned}$$

Temos, então que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{2} + n)(1 + n)}{(\frac{d+1}{2} + n)(\frac{d+2}{2} + n)} \cdot \frac{(-\lambda x^2)}{(n+1)} = 0,$$

pois as potências n no numerador e denominador são da ordem, respectivamente, de n^2 e n^3 .

Logo, pelo Teste da Razão, concluímos que a série hipergeométrica dada em (4.34) é absolutamente convergente, para todo $x \in \mathbb{R}$. \square

Observação 4.20. Consideramos neste capítulo o caso em que $\alpha = 2$ no Teorema 4.19, apesar de demonstrado para $d \in (0, 1 - \frac{1}{\alpha})$ e $\alpha \in (0, 2]$.

Na próxima seção, estudamos a principal propriedade do processo dado em (4.28).

4.2 Longa Dependência

Um dos principais objetivos desta dissertação é estudar um processo estocástico que possua a *propriedade de longa dependência*.

Utilizando um núcleo fracionário integrado de memória curta na teoria da seção anterior, obtivemos o processo dado em (4.28). Provamos nesta seção que o referido processo possui a *propriedade de longa dependência*, como desejamos. Antes disto, é necessário ressaltar alguns resultados.

Teorema 4.21. *Considere o processo dado em (4.28), sob as condições da Definição 4.14. Então $\{Y_{\lambda,d}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ pode ser representado como*

$$Y_{\lambda,d}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)^2} dM_d(s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.37)$$

onde

$$M_d(\cdot) = \frac{1}{\Gamma(d+1)} \int_{\mathbb{R}} \left[(t - \cdot)_+^d - (-\cdot)_+^d \right] L(ds)$$

é um processo de Lévy fracionário, com o processo de Lévy $\{L(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ como ruído, tal que $\mathbb{E}[L(1)] = 0$ e $\mathbb{E}[L(1)^2] < \infty$.

Prova. Pelo teorema 6.2 de Marquardt (2006), temos que o processo dado em (4.28) pode ser reescrito como

$$Y_{\lambda,d}(t) = \int_{-\infty}^t g(t-s) dM_d(s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.38)$$

onde

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-d)} \frac{d}{dx} \int_0^x g_d(s)(x-s)^{-d} ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.39)$$

isto é, $g(\cdot)$ é a derivada positiva de Riemann-Liouville do núcleo fracionário $g_d(\cdot)$.

Então temos que

$$g_\lambda(x) = \left(\mathcal{D}_+^d g_d \right) (x) = e^{-\lambda x^2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x),$$

pela definição de derivada positiva de Riemann-Liouville, dada em (4.16).

Aplicando este resultado em (4.38), obtemos, para todo $t \in \mathbb{R}$, que

$$Y_{\lambda,d}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)^2} \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t-s) dM_d(s) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)^2} dM_d(s),$$

pois $t-s > 0$, para todo $s < t$. □

Demonstramos agora duas proposições que apresentam resultados sobre os momentos de primeira e segunda ordem do processo dado em (4.37).

Proposição 4.22. *Considere o processo estocástico $\{Y_{\lambda,d}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dado na expressão (4.37). Então, $\mathbb{E}[Y_{\lambda,d}(t)] = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Prova. Temos, dado $t \in \mathbb{R}$, que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{\lambda,d}(t)] &= \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)^2} dM_d(s) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^t \frac{(t-u)^d}{\Gamma(d+1)} {}_2F_2 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda(t-u)^2 \right) dL(u) \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

pois podemos escrever a expressão (4.40) na forma $\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k (L(s_{k+1}) - L(s_k)) \right]$, para $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e $-\infty < s_0 < \dots < s_n = t$ apropriados. Como o processo de Lévy $\{L(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um processo de incrementos estacionários e $\mathbb{E}[L(1)] = 0$, concluímos que esta média é igual a 0. □

Proposição 4.23. *Considere o processo estocástico $\{Y_{\lambda,d}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dado na expressão (4.37). Então,*

$$\begin{aligned} &Cov[Y_{\lambda,d}(t+k), Y_{\lambda,d}(t)] \\ &= \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \cdot \mathbb{E}[L(1)^2] \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+k} e^{-\lambda(t+k-s)^2} e^{-\lambda(t-u)^2} |s-u|^{2d-1} ds du, \end{aligned} \quad (4.41)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k > 0$.

Prova. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Y_{\lambda,d}(t+k), Y_{\lambda,d}(t)] &= \mathbb{E}[Y_{\lambda,d}(t+k) \cdot Y_{\lambda,d}(t)] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{t+k} e^{-\lambda(t+k-s)^2} dM_d(s) \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-u)^2} dM_d(u)\right], \end{aligned} \quad (4.42)$$

pela Proposição 4.22.

Pela Observação 4.5, podemos utilizar a propriedade da isometria dada no teorema 5.3 em Marquardt (2006), obtendo de (4.42) que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{\lambda,d}(t+k) \cdot Y_{\lambda,d}(t)] &= \frac{\mathbb{E}[L(1)^2]}{(\Gamma(d))^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{\infty} \int_x^{\infty} e^{-\lambda(t+k-s)^2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t+k-s) \\ &\quad e^{-\lambda(t-u)^2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t-u) \cdot (s-x)^{d-1} (u-x)^{d-1} ds du dx, \end{aligned}$$

para $k > 0$.

Aplicando o teorema de Fubini, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{\lambda,d}(t+k) \cdot Y_{\lambda,d}(t)] &= \frac{\mathbb{E}[L(1)^2]}{(\Gamma(d))^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(t+k-s)^2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t+k-s) \cdot e^{-\lambda(t-u)^2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t-u) \\ &\quad \left(\int_{-\infty}^{\min(u,s)} (s-x)^{d-1} (u-x)^{d-1} dx \right) ds du \\ &= \frac{\mathbb{E}[L(1)^2]}{(\Gamma(d))^2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+k} e^{-\lambda(t+k-s)^2} \cdot e^{-\lambda(t-u)^2} \\ &\quad \left(\int_{-\infty}^{\min(u,s)} (s-x)^{d-1} (u-x)^{d-1} dx \right) ds du. \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que, segundo Gripenberg e Norros (1996),

$$\int_{-\infty}^{\min(u,s)} (s-x)^{d-1} (u-x)^{d-1} dx = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(d)}{\Gamma(1-d)} |s-u|^{2d-1}, \quad s, u \in \mathbb{R},$$

obtemos que

$$\mathbb{E}[Y_{\lambda,d}(t+k) \cdot Y_{\lambda,d}(t)] = C_1 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+k} e^{-\lambda(t+k-s)^2} \cdot e^{-\lambda(t-u)^2} \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(d)}{\Gamma(1-d)} |s-u|^{2d-1} ds du,$$

onde $C_1 = \frac{\mathbb{E}[L(1)^2]}{(\Gamma(d))^2}$.

Reorganizando os termos, temos que

$$\mathbb{E}[Y_{\lambda,d}(t+k) \cdot Y_{\lambda,d}(t)] = C_2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+k} e^{-\lambda(t+k-s)^2} \cdot e^{-\lambda(t-u)^2} |s-u|^{2d-1} ds du,$$

onde $C_2 = \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \cdot \mathbb{E}[L(1)^2]$, como queríamos demonstrar. \square

Podemos agora calcular a função de autocovariância do processo estudado neste capítulo dado na expressão (4.37).

Teorema 4.24. *Considere o processo estocástico $\{Y_{\lambda,d}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dado em (4.37). Então a sua função de autocovariância é dada por*

$$\gamma_{Y_{\lambda,d}}(k) = \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \cdot \mathbb{E}[L(1)^2] \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(x^2+y^2)} \cdot |k-x+y|^{2d-1} dx dy, \quad (4.43)$$

para $k > 0$.

Prova. Dado $t \in \mathbb{R}$, pela definição da função de autocovariância e utilizando os resultados das Proposições 4.22 e 4.23, obtemos que

$$\begin{aligned} \gamma_{Y_{\lambda,d}}(k) &= \text{Cov}[Y_{\lambda,d}(t+k), Y_{\lambda,d}(t)] = \mathbb{E}[Y_{\lambda,d}(t+k) \cdot Y_{\lambda,d}(t)] \\ &= \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \cdot \mathbb{E}[L(1)^2] \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+k} e^{-\lambda(t+k-s)^2} e^{-\lambda(t-u)^2} |s-u|^{2d-1} ds du, \end{aligned} \quad (4.44)$$

para $k > 0$.

Fazendo as mudanças de variáveis $x = t+k-s$ e $y = t-u$ na expressão (4.44), concluímos que

$$\begin{aligned} \gamma_{Y_{\lambda,d}}(k) &= \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \cdot \mathbb{E}[L(1)^2] \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x^2} e^{-\lambda y^2} |k-x+y|^{2d-1} dx dy \\ &= \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \cdot \mathbb{E}[L(1)^2] \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(x^2+y^2)} |k-x+y|^{2d-1} dx dy, \end{aligned}$$

para $k > 0$. □

Esse resultado poderia ter sido obtido a partir do Teorema 4.23, dado que o processo é estacionário.

Dando prosseguimento, relembramos que o objetivo desta seção é provar que o processo dado em (4.28) possui a *propriedade de longa dependência*. Para isto, já provamos que o referido processo pode ser expresso na forma dada em (4.37), obtendo a sua função de autocovariância. O Teorema 4.25 apresenta o resultado que nos permite concluir o objetivo desta seção.

Teorema 4.25. *Considere o processo estocástico $\{Y_{\lambda,d}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dado em (4.37). Então, a sua função de autocovariância $\gamma_{Y_{\lambda,d}}(\cdot)$, apresentada em (4.43), possui um decaimento dado por*

$$\gamma_{Y_{\lambda,d}}(k) \sim \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \cdot \mathbb{E}[L(1)^2] \left(\frac{\pi}{4\lambda}\right) |k|^{2d-1}, \quad (4.45)$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Prova. Para provar o resultado deste teorema, iniciamos provando que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(x^2+y^2)} |k-x+y|^{2d-1} dx dy \sim \left(\int_0^\infty e^{-\lambda x^2} dx\right)^2 |k|^{2d-1}, \quad (4.46)$$

quando $h \rightarrow \infty$.

Observe, inicialmente, que é possível escrever

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(x^2+y^2)} |k-x+y|^{2d-1}}{|k|^{2d-1}} dx dy &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(x^2+y^2)} \left|1 - \frac{x}{k} + \frac{y}{k}\right|^{2d-1} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(x^2+y^2)} dx dy + I \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(x^2+y^2)} \left(\left|1 - \frac{x}{k} + \frac{y}{k}\right|^{2d-1} - 1 \right) dx dy. \quad (4.48)$$

Então, pelo item *ii.* do Lema 4.7, temos, para dado $\epsilon > 0$, que

$$\begin{aligned} |I| &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \left| e^{-\lambda(x^2+y^2)} \left| \left|1 - \frac{x}{k} + \frac{y}{k}\right|^{2d-1} - 1 \right| \cdot \mathbf{1}_{\{|y-x| \leq \epsilon k\}} \right| dx dy \\ &\quad + \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\lambda(1-x)} \cdot e^{\lambda(1-y)} \left| \left|1 - \frac{x}{k} + \frac{y}{k}\right|^{2d-1} - 1 \right| \cdot \mathbf{1}_{\{|y-x| > \epsilon k\}} dx dy. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Para $|y-x| \leq \epsilon k$, temos que

$$\left| \left|1 - \frac{x}{k} + \frac{y}{k}\right|^{2d-1} - 1 \right| \leq \max\{(1-\epsilon)^{2d-1} - 1, 1 - (1+\epsilon)^{2d-1}\} \leq (1-\epsilon)^{2d-1} - 1. \quad (4.50)$$

Aplicando a desigualdade (4.50) em (4.49), obtemos que

$$|I| \leq \left((1-\epsilon)^{2d-1} - 1 \right) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(x^2+y^2)} dx dy + R(k) \quad (4.51)$$

onde

$$R(k) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\lambda(2-(x+y))} \left| \left|1 - \frac{(x-y)}{k}\right|^{2d-1} - 1 \right| \cdot \mathbf{1}_{\{|y-x| > \epsilon k\}} dx dy. \quad (4.52)$$

Fazendo a mudança de variável $u = x+y$ e $v = x-y$, temos que $x = \frac{u+v}{2}$ e $y = \frac{u-v}{2}$ e o Jacobiano desta transformação é dado por

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Como $u \geq |v|$, pois $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, obtemos de (4.52), que

$$\begin{aligned} R(k) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{|v|}^\infty e^{\lambda(2-u)} du \left| \left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} - 1 \right| \mathbf{1}_{\{|v| > \epsilon k\}} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{|v| > \epsilon k} \int_{|v|}^\infty e^{\lambda(2-u)} du \left| \left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} - 1 \right| dv \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon k} \int_{-v}^\infty e^{\lambda(2-u)} du \left| \left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} - 1 \right| dv + \int_{\epsilon k}^\infty \int_v^\infty e^{\lambda(2-u)} du \left| \left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} - 1 \right| dv \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon k} \frac{e^{\lambda(2+v)}}{\lambda} \left| \left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} - 1 \right| dv + \int_{\epsilon k}^\infty \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left| \left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} - 1 \right| dv \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon k} \frac{e^{\lambda(2+v)}}{\lambda} \left(\left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} + 1 \right) dv + \int_{\epsilon k}^\infty \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left(\left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} + 1 \right) dv \right). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Observe agora que, para $v < -\epsilon k$, temos que

$$\left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} \leq 1, \quad (4.54)$$

pois $2d - 1 < 0$.

Utilizando (4.54) em (4.53), obtemos que

$$R(k) \leq \int_{-\infty}^{-\epsilon k} \frac{e^{\lambda(2+v)}}{\lambda} dv + \frac{1}{2} \int_{\epsilon k}^{\infty} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left(\left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} + 1\right) dv. \quad (4.55)$$

De onde, calculando a primeira integral, temos que

$$\begin{aligned} R(k) &\leq \frac{e^{\lambda(2+v)}}{\lambda^2} \Big|_{-\infty}^{-\epsilon k} + \frac{1}{2} \int_{\epsilon k}^{\infty} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left(\left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} + 1\right) dv \\ &= \frac{e^{\lambda(2-\epsilon k)}}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \int_{\epsilon k}^{\infty} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left(\left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} + 1\right) dv \\ &= \frac{e^{\lambda(2-\epsilon k)}}{\lambda^2} + \frac{I_1(k)}{2}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde

$$I_1(k) = \int_{\epsilon k}^{\infty} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left(\left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} + 1\right) dv.$$

Para calcular a integral $I_1(k)$, dividimos o intervalo de integral de forma que

$$\begin{aligned} I_1(k) &= \int_{\epsilon k}^{2k} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left(\left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} + 1\right) dv + \int_{2k}^{\infty} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left(\left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} + 1\right) dv \\ &= I_2(k) + I_3(k), \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde

$$I_2(k) = \int_{\epsilon k}^{2k} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left(\left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} + 1\right) dv \text{ e } I_3(k) = \int_{2k}^{\infty} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left(\left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} + 1\right) dv.$$

Como $\left|1 - \frac{v}{k}\right|^{2d-1} \leq 1$, para $v > 2k$, obtemos, então

$$I_3(k) \leq 2 \int_{2k}^{\infty} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} dv = \left(-\frac{2e^{\lambda(2-v)}}{\lambda^2}\right) \Big|_{2k}^{\infty} = \frac{2e^{2\lambda(1-k)}}{\lambda^2}. \quad (4.58)$$

Portanto, de (4.57), temos que

$$I_1(k) \leq I_2(k) + \frac{2e^{2\lambda(1-k)}}{\lambda^2}. \quad (4.59)$$

Por fim, para determinar uma majoração para I_2 , observe que a integral desta expressão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 I_2(k) &= \int_{\epsilon k}^{2k} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left| 1 - \frac{v}{k} \right|^{2d-1} dv + \int_{\epsilon k}^{2k} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} dv \\
 &= \int_{\epsilon k}^k \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left(1 - \frac{v}{k} \right)^{2d-1} dv + \int_k^{2k} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} \left(\frac{v}{k} - 1 \right)^{2d-1} dv + \int_{\epsilon k}^{2k} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} dv \\
 &\leq \int_{\epsilon k}^k \frac{e^{\lambda(2-\epsilon k)}}{\lambda} \left(1 - \frac{v}{k} \right)^{2d-1} dv + \int_k^{2k} \frac{e^{\lambda(2-k)}}{\lambda} \left(\frac{v}{k} - 1 \right)^{2d-1} dv + \int_{\epsilon k}^{2k} \frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda} dv \\
 &= \frac{e^{\lambda(2-\epsilon k)}}{\lambda} \left(-\frac{k}{2d} \right) \left(1 - \frac{v}{k} \right)^{2d} \Big|_{\epsilon k}^k + \frac{e^{\lambda(2-k)}}{\lambda} \left(\frac{k}{2d} \right) \left(\frac{v}{k} - 1 \right)^{2d} \Big|_k^{2k} + \left(-\frac{e^{\lambda(2-v)}}{\lambda^2} \right) \Big|_{\epsilon k}^{2k} \\
 &= \frac{e^{\lambda(2-\epsilon k)}}{\lambda} \left(\frac{k}{2d} \right) (1 - \epsilon)^{2d} + \frac{e^{\lambda(2-k)}}{\lambda} \left(\frac{k}{2d} \right) - \frac{e^{\lambda(2-2k)}}{\lambda^2} + \frac{e^{\lambda(2-\epsilon k)}}{\lambda^2}. \tag{4.60}
 \end{aligned}$$

Substituindo o resultado de (4.60) em (4.59), concluímos de (4.56) que

$$\begin{aligned}
 R(k) &\leq \frac{e^{\lambda(2-\epsilon k)}}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2e^{2\lambda(1-k)}}{\lambda^2} + \frac{e^{\lambda(2-\epsilon k)}}{\lambda} \left(\frac{k}{2d} \right) (1 - \epsilon)^{2d} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\lambda(2-k)}}{\lambda} \left(\frac{k}{2d} \right) - \frac{e^{2\lambda(1-k)}}{\lambda^2} + \frac{e^{\lambda(2-\epsilon k)}}{\lambda^2} \right). \tag{4.61}
 \end{aligned}$$

O que nos permite concluir que

$$R(k) \leq \frac{e^{\lambda(2-\epsilon k)}}{2\lambda^2} \left(3 + \left(\frac{\lambda k}{2d} \right) (1 - \epsilon)^{2d} \right) + \frac{e^{2\lambda(1-k)}}{2\lambda^2} + \frac{k e^{\lambda(2-k)}}{4\lambda d}. \tag{4.62}$$

Escolhemos então $\epsilon > 0$, tal que

$$((1 - \epsilon)^{2d} - 1) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(x^2+y^2)} dx dy \leq \frac{K}{2},$$

para algum $K > 0$. Temos, para $\epsilon > 0$ fixo, que, dado (4.62), $R(k) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Isto implica que podemos assumir $|I|$ tão pequeno quanto se queira em (4.47). Portanto, a aproximação dada em (4.46) é válida.

Então, da função de autocovariância dada em (4.43) e do resultado provado em (4.46), obtemos que

$$\begin{aligned}
 \gamma_{Y_d}(k) &\sim \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \mathbb{E} [L(1)^2] \left(\int_0^\infty e^{-\lambda u^2} du \right)^2 |k|^{2d-1} \\
 &= \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \mathbb{E} [L(1)^2] \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} \right)^2 |k|^{2d-1} \\
 &= \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \mathbb{E} [L(1)^2] \left(\frac{\pi}{4\lambda} \right) |k|^{2d-1},
 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. \square

O Teorema 4.26 conclui que o processo estudado nesta seção apresenta a *propriedade de longa dependência*.

Teorema 4.26. *Seja $\{Y_{\lambda,d}(t)\}_{t \geq 0}$ o processo dado em (4.37), com $0 < d < \frac{1}{2}$. Então o referido processo possui a propriedade de longa dependência.*

Prova: Pelo Teorema 4.25, temos que

$$\gamma_{Y_{\lambda,d}}(h) \sim \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \mathbb{E}[L(1)^2] \left(\frac{\pi}{4\lambda}\right) |h|^{2d-1},$$

quando $h \rightarrow \infty$.

Então, considerando c_γ dada por

$$c_\gamma = \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \mathbb{E}[L(1)^2] \left(\frac{\pi}{4\lambda}\right) > 0,$$

obtemos que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{Y_{\lambda,d}}(h)}{c_\gamma |h|^{2d-1}} = 1.$$

Portanto, de acordo com a Definição 2.14, o processo possui a propriedade de longa dependência. \square

Concluimos este Capítulo 4 com o objetivo alcançado, isto é, encontramos um processo estocástico a tempo contínuo que possui a *propriedade de longa dependência*.

No próximo capítulo, abordamos a simulação e a estimação dos parâmetros deste processo.

5 Simulação e Estimação

Neste capítulo, simulamos o processo estocástico FIMA estudado no Capítulo 4 com o objetivo de estimar os parâmetros do processo. Dado o processo estocástico $\{Y_{\lambda,d}(t)\}$ definido em (4.37), buscamos estimadores para o vetor de parâmetros $\eta' = (d, \lambda)$, para valores de $d \in (0, \frac{1}{2})$ e $\lambda > 0$.

Na primeira seção, apresentamos uma forma de simular o processo $\{Y_{\lambda,d}(t)\}$, dado em (4.37), através de uma aproximação por somas de Riemann. Já na segunda e terceira seções, discutimos métodos para se obter a estimação dos parâmetros deste processo.

5.1 Simulação

Nesta seção, apresentamos simulações realizadas, utilizando uma aproximação para o processo dado em (4.37) através de somas de Riemann. Nas simulações apresentadas, consideramos como ruído o movimento Browniano fracionário. A definição deste processo ruído é apresentada a seguir, segundo Mishura (2008).

Definição 5.1. O movimento Browniano fracionário com parâmetro de Hurst $H \in (0, 1)$ é um processo Gaussiano $B_H = \{B^H(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ que possui as seguintes propriedades:

- i. $B^H(0) = 0$;
- ii. $\mathbb{E}[B^H(t)] = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$;
- iii. $\mathbb{E}[B^H(t).B^H(s)] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$, para $s, t \in \mathbb{R}$.

Observação 5.2. (a) Pela Definição 5.1, temos que $B^H(t) \sim \mathcal{N}(0, t^{2H})$.

(b) O processo $\{B^H(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um processo de Lévy fracionário.

(c) Conforme já comentamos no Capítulo 3, o parâmetro de Hurst H está diretamente relacionado ao parâmetro d . A relação é dada por $H = d + \frac{1}{2}$.

Sobre o movimento Browniano fracionário, é importante ressaltar que este processo apresenta a propriedade de longa dependência quando $\frac{1}{2} < H < 1$ (veja Mishura (2002)), isto é, para $0 < d < \frac{1}{2}$. Logo, o estudo realizado encontra-se neste caso.

Consideramos, então, o processo dado em (4.37) com o ruído $M_d(\cdot) = B^H(\cdot)$. O processo $\{Y_{\lambda,d}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, estudado nesta seção é dado por

$$Y_{\lambda,d}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)^2} dB^H(s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

onde $\lambda > 0$, $0 < d < \frac{1}{2}$ e $H = d + \frac{1}{2}$.

De acordo com o estudo realizado no Capítulo 3, temos que o processo dado em (5.1) pode ser dado na versão

$$Y_{\lambda,d}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{(t-u)^d}{\Gamma(d+1)} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{d+1}{2}, \frac{d+2}{2}; -\lambda(t-u)^2\right) dB(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

onde $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o movimento Browniano.

Para gerar as observações do processo dado em (5.1), utilizamos a aproximação dada por

$$Y_{\lambda,d}(t) \sim \sum_{k=-n^2}^{nt} e^{-\lambda(t-\frac{k}{n})^2} \left[B^H\left(\frac{k}{n}\right) - B^H\left(\frac{k-1}{n}\right) \right], \quad (5.3)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Os Teoremas 5.3 e 5.4, apresentados a seguir, nos garantem que a aproximação dada em (5.3) é convergente.

Teorema 5.3. *Seja a sequência de funções $\phi_n(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e a função $g_\lambda(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por*

$$\phi_n(s) = \sum_{k=-n^2}^{nt} e^{-\lambda(t-\frac{k}{n})^2} \mathbf{1}_{\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)}(s) \quad (5.4)$$

e

$$g_\lambda(s) = e^{-\lambda(t-s)^2} \mathbf{1}_{(-\infty, t)}(s), \quad (5.5)$$

para t fixo e $n \in \mathbb{N}$. Então, $\|\phi_n(s) - g_\lambda(s)\|_H \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, onde

$$\|\cdot\|_H = \left(\mathbb{E}[L(1)^2] \int_{\mathbb{R}} (I_-^d(\cdot))^2(u) du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prova. Sabemos, de Marquardt (2006) que

$$\|\phi_n(s) - g_\lambda(s)\|_H \leq C [\|\phi_n(s) - g_\lambda(s)\|_{L^1} + \|\phi_n(s) - g_\lambda(s)\|_{L^2}]. \quad (5.6)$$

Provamos, então, que

$$\|\phi_n(s) - g_\lambda(s)\|_{L^1} + \|\phi_n(s) - g_\lambda(s)\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Observe, inicialmente, que

$$\begin{aligned} \|\phi_n(s) - g_\lambda(s)\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=-n^2}^{nt} e^{-\lambda(t-\frac{k}{n})^2} \mathbf{1}_{\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)}(s) - e^{-\lambda(t-s)^2} \mathbf{1}_{(-\infty, t)}(s) \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=-n^2}^{nt} e^{-\lambda(t-\frac{k}{n})^2} \mathbf{1}_{\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)}(s) ds - \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)^2} ds, \end{aligned} \quad (5.7)$$

de onde, fazendo a mudança de variável $i = \frac{k}{n}$, temos que

$$\|\phi_n(s) - g_\lambda(s)\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=-n}^t e^{-\lambda(t-i)^2} \mathbf{1}_{(i-\frac{1}{n}, i)}(s) ds - \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)^2} ds. \quad (5.8)$$

Logo, quando $n \rightarrow \infty$ temos que

$$\|\phi_n(s) - g_\lambda(s)\|_{L^1} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=-\infty}^t e^{-\lambda(t-i)^2} \mathbf{1}_{(i)}(s) ds - \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)^2} ds$$

e, portanto,

$$\|\phi_n(s) - g_\lambda(s)\|_{L^1} \rightarrow \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)^2} ds - \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)^2} ds = 0. \quad (5.9)$$

Note, agora, que

$$\phi_n(s) = \sum_{i=-n}^t e^{-\lambda(t-i)^2} \mathbf{1}_{(i-\frac{1}{n}, i)}(s) \leq e^\lambda e^{-\lambda t} (t+n) \cdot \frac{1}{n}, \quad (5.10)$$

pelo item *ii.* do Lema 4.7. Podemos, então, limitar a função $\phi_n(s)$ por

$$\phi_n(s) \leq e^\lambda e^{-\lambda t} (t+1), \quad (5.11)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo teorema da convergência dominada temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n(s) - g(s)\|_{L^2} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\phi_n(s) - g(s)|^2 ds = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n(s) - g(s)|^2 ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(s) - g(s)|^2 ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois, já vimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(s) = g(s)$.

Concluimos, então, de (5.6) que $\|\phi_n(s) - g_\lambda(s)\|_H \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. \square

Teorema 5.4. *Nas condições do Teorema 5.3, temos que a aproximação dada em (5.3) é convergente.*

Prova. Pelo Teorema 5.3, podemos utilizar o teorema 5.3 de Marquardt (2006), o qual nos garante que tal aproximação é convergente e independe da sequência de funções simples $\phi_n(\cdot)$, desde que convergente para $g(\cdot)$.

Maiores detalhes sobre a integração à respeito ao movimento Browniano fracionário podem ser encontrados em Pipiras e Taqqu (2000).

Observação 5.5. Note que

$$Y_{\lambda,d}(t) \sim \sum_{k=-n^2}^{nt} e^{-\lambda(t-\frac{k}{n})^2} \left[B^H \left(\frac{k}{n} \right) - B^H \left(\frac{k-1}{n} \right) \right] = \sum_{k=-n^2}^{nt} e^{-\lambda(t-\frac{k}{n})^2} \left[B^H \left(\frac{1}{n} \right) \right], \quad (5.12)$$

quando $n \rightarrow \infty$, onde utilizamos o fato de que $B^H(\cdot)$ é um processo de incrementos estacionários.

Para simular, então, algumas trajetórias do processo dado em (5.1), utilizamos a aproximação (5.12). Após algumas simulações, constatamos que a aproximação é convergente para valores pequenos de n . Em um estudo inicial, utilizamos na próxima seção valores de $n \in (10, 20, 30)$.

A Figura 5.1 a seguir apresenta três trajetórias para o processo dado em (5.1) para alguns valores específicos de d e λ , com $H = d + \frac{1}{2}$.

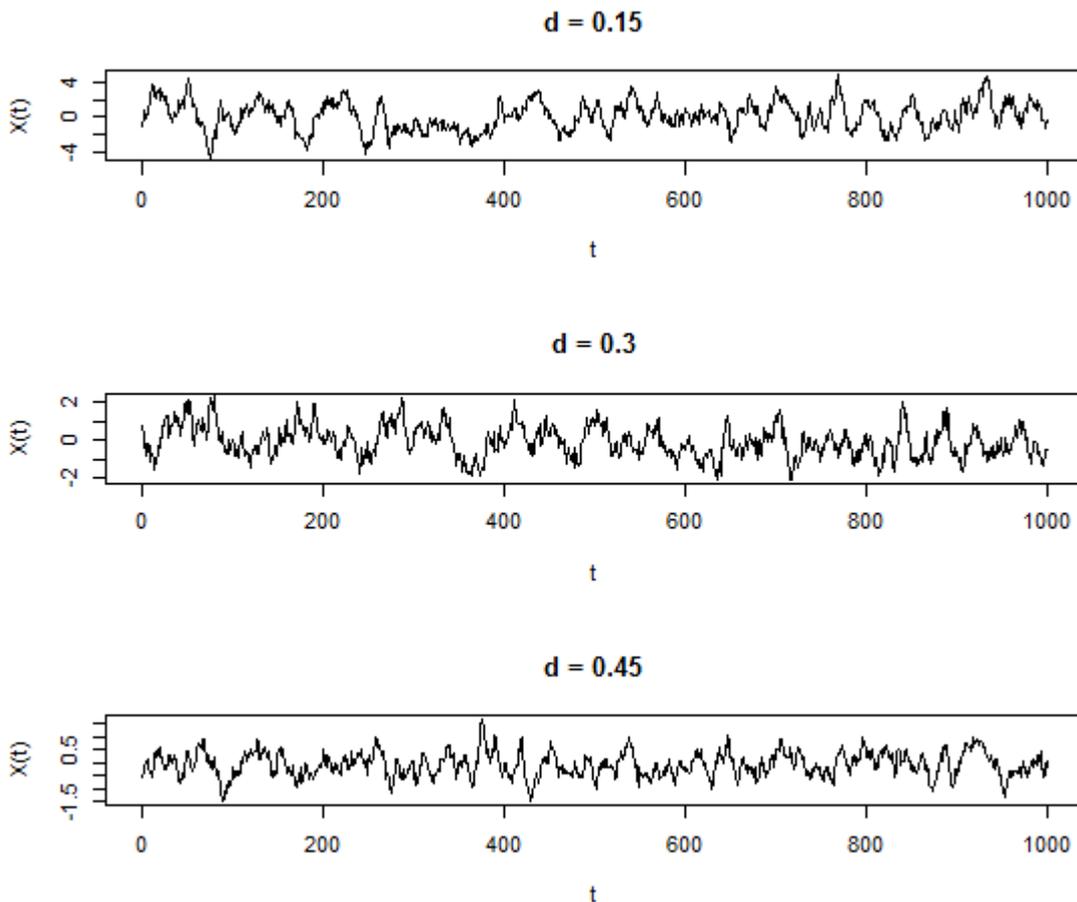


Figura 5.1: Exemplos de trajetórias para o processo definido em (5.1), considerando a aproximação dada em (5.12), onde $n = 30$, $d \in (0.15, 0.30, 0.45)$ e $\lambda = 0.001$.

Podemos observar na Figura 5.1 indícios do resultado apresentado no Teorema 4.18, isto é, o processo simulado apresenta um comportamento semelhante ao Gaussiano e

possui a média em torno de zero. Ainda, observamos que, conforme o valor de d está mais próximo de 0.5, a variabilidade do processo diminui.

Na próxima seção, apresentamos um estudo sobre a estimação do parâmetro d do processo dado em (5.1).

5.2 Estimação do parâmetro d

Para estimar o parâmetro d do processo definido em (5.1), utilizamos o ruído da aproximação (5.12), considerado na geração dos dados da série temporal. Observe que o ruído da aproximação dada em (5.12) possui distribuição $\mathcal{N}\left(0, \left(\frac{1}{n}\right)^{2d+1}\right)$, pois $H = d + \frac{1}{2}$.

O Teorema 5.6 apresenta o estimador para o parâmetro d do processo estudado.

Teorema 5.6. *Seja $d \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ um parâmetro do processo definido em (5.1). Então, o estimador*

$$\hat{d} = \frac{1}{2} \left(\frac{\log(\hat{S}^2)}{\log\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right) \quad (5.13)$$

é um estimador não-viciado de d , onde \hat{S}^2 é a variância amostral corrigida do ruído $B^H\left(\frac{1}{n}\right) \sim \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{1}{n}\right)^{2d+1}\right)$, para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Prova. Sabemos que $\mathbb{E}(\hat{S}^2) = \text{Var}\left(B^H\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^{2d+1}$. Então, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{d}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\log(\hat{S}^2)}{\log\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right)\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\log(\mathbb{E}(\hat{S}^2))}{\log\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\log\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{2d+1}\right)}{\log\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(2d+1) \log\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\log\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} (2d+1-1) = d. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Logo, o estimador é não-viciado. \square

Para escolher uma situação para realizar as estimações do parâmetro d , estudamos em três casos diferentes, considerando $d = 0.3$. As Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 apresentam os resultados destas estimações. Para cada um destes casos de estudos, apresentamos na Tabela 5.1 informações sobre a variância, a média e o vício dos estimadores.

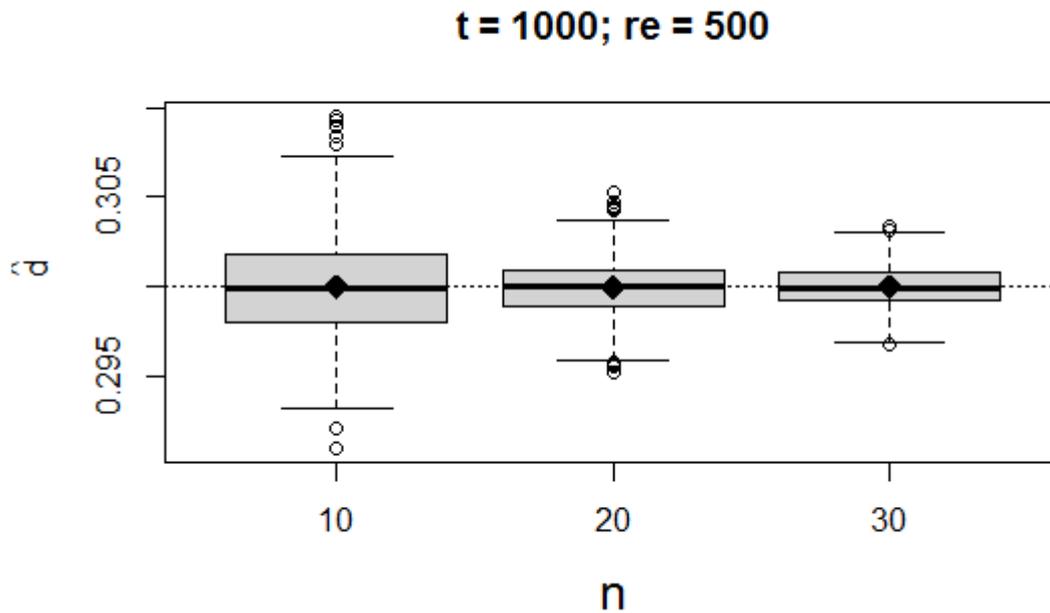


Figura 5.2: Estimação do parâmetro d do processo definido em (5.1), considerando (5.12), onde $t = 1000$, $re = 500$, $\lambda = 0.001$, $n \in (10, 20, 30)$ e $d = 0.30$.

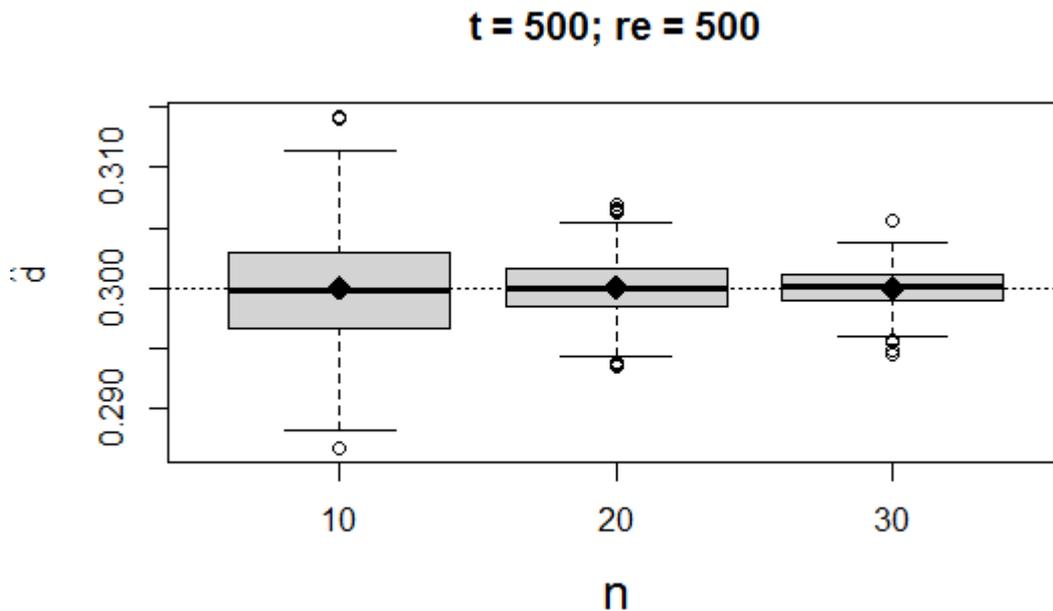


Figura 5.2: Estimação do parâmetro d do processo definido em (5.1), considerando (5.12), onde $t = 500$, $re = 500$, $\lambda = 0.001$, $n \in (10, 20, 30)$ e $d = 0.30$.

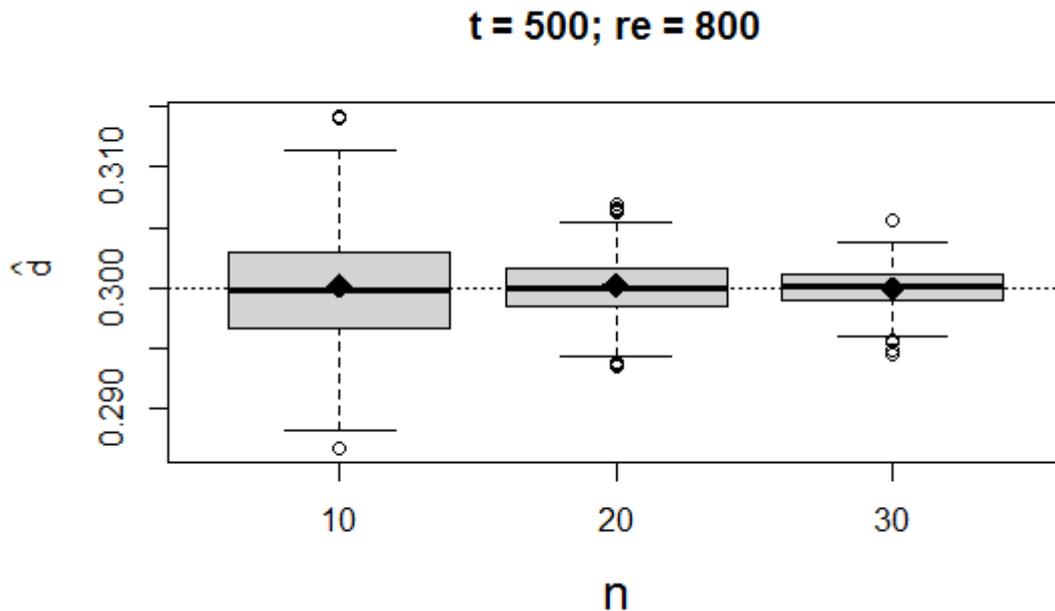


Figura 5.4: Estimação do parâmetro d do processo definido em (5.1), considerando (5.12), onde $t = 500, re = 800, \lambda = 0.001, n \in (10, 20, 30)$ e $d = 0.30$.

Tabela 5.1: Resultados da estimação quando $d = 0.30, n \in (10, 20, 30)$ para três casos, com valores aproximados para a média.

$t = 500; re = 500$			
n	10	20	30
d	0.30		
média	0.29998	0.30004	0.30002
variância	$1.93 \cdot 10^{-5}$	$5.42 \cdot 10^{-6}$	$2.57 \cdot 10^{-6}$
vício	-0.00002	0.00004	0.00002
$t = 1000; re = 500$			
n	10	20	30
d	0.30		
média	0.30002	0.29999	0.30001
variância	$9.02 \cdot 10^{-6}$	$2.83 \cdot 10^{-6}$	$1.36 \cdot 10^{-6}$
vício	0.00002	-0.00001	0.00001
$t = 500; re = 800$			
n	10	20	30
d	0.30		
média	0.30017	0.30024	0.29995
variância	$2.04 \cdot 10^{-5}$	$5.42 \cdot 10^{-6}$	$2.80 \cdot 10^{-6}$
vício	0.00017	0.00024	-0.00005

Após a análise destes resultados, optamos por realizar as estimações considerando o caso em que $t = 1000, re = 500$ e $n = 30$, considerando a aproximação dada em (5.12).

Pois, neste caso, a estimação apresenta melhores resultados quanto à média do estimador e à baixa variância do mesmo.

Os resultados das estimações para o parâmetro d , quando $d \in (0.15, 0.30, 0.45)$, estão no Apêndice A deste trabalho.

5.3 Estimação do parâmetro λ

Para a estimação do parâmetro λ do processo definido em (5.1) tentamos duas abordagens. Porém, nenhuma delas apresentou resultados satisfatórios.

Em um primeiro momento, após a simulação de algumas trajetórias do processo, obtemos a função de autocovariância do processo gerado (um exemplo pode ser visto na Figura 5.5 a seguir). Através do decaimento da função de autocovariância dada no Teorema 4.25, tentamos obter um estimador de λ pela expressão

$$\hat{\lambda} \sim \frac{\Gamma(1 - 2\hat{d})}{\Gamma(\hat{d})\Gamma(1 - 2\hat{d})} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{k^{2\hat{d}-1}}{\hat{\gamma}_{Y,\hat{d}}(k)}, \quad (5.15)$$

para k suficientemente grande.

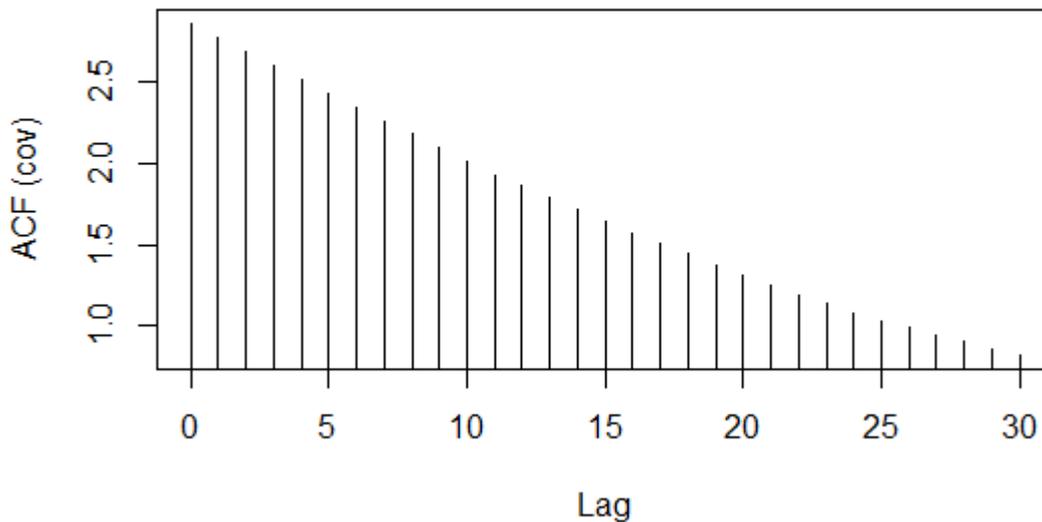


Figura 5.5: Exemplo de função de autocovariância de uma simulação do processo dado em (5.1), onde $t = 1000$, $\lambda = 0.001$ e $d = 0.30$.

Para os valores apresentados na Figura 5.5 e no estudo de outros casos, a estimação através da expressão dada em (5.15) não apresentou resultados satisfatórios, possivelmente pelo fato de que para o valor de $t = 1000$ tal aproximação do decaimento não é suficiente.

Em busca de outras maneiras para estimar o parâmetro λ , testamos utilizar as expressões dadas nos Teoremas 4.18 e 4.24, considerando o estimador de λ como o valor que minimiza a diferença entre a variância real e a variância amostral do processo simulado. Porém, computacionalmente, não encontramos forma de aplicar este método.

Portanto, deixamos em aberto a estimação deste parâmetro do processo.

6 Conclusões

Neste trabalho abordamos alguns pontos importantes na área da probabilidade e da análise de séries temporais, tais como processos estocásticos a tempo contínuo, medidas de dependência para processos α -estáveis e a propriedade de longa dependência. O ponto principal deste trabalho encontra-se no quarto capítulo, onde foi definido um processo estocástico que possui a propriedade de longa dependência e que ainda não foi estudado por nenhum outro autor.

Em um primeiro momento, o projeto de pesquisa desta dissertação tinha como objetivo o estudo do processo baseado no exemplo de Klebaner (2005), pois acreditava-se que este processo possuía a propriedade de longa dependência. Porém, após estudos mais intensificados, provamos que isto não ocorria. Estes resultados foram provados fazendo o uso das medidas de dependência, pois consideramos o processo ruído como um processo de Lévy α -estável. As funções de covariação, de codiferença e de covariância espectral foram estudadas e apresentadas no terceiro capítulo deste trabalho.

Apesar do processo baseado em Klebaner (2005) não possuir a propriedade de longa dependência e não ser estacionário, encontramos um novo processo estocástico obtido pela transformação de Lamperti. Este processo pode ser futuramente estudado com maior aprofundamento, sendo que já sabemos que este processo possui a propriedade da estacionariedade.

Na busca por encontrar um processo estocástico com a propriedade de longa dependência, estudamos o Processo Quadrático do Tipo OU. Obtivemos as medidas de dependência para este processo e, conseqüentemente, concluímos que este também não possui a propriedade de longa dependência. Após alguns estudos, chamou-nos a atenção o estudo realizado por Maejima e Yamamoto (2003). Existe a possibilidade de que um estudo semelhante a este feito pelos autores, possa ser realizado com o Processo Quadrático do Tipo OU, e resulte em um processo de longa dependência. Este seria outro projeto futuro levantado pelos nossos estudos.

Após a leitura de alguns artigos referentes a processos estocásticos com a propriedade de longa dependência, deparamo-nos com o artigo de Marquardt (2006), o qual foi publicado a partir de sua tese de doutorado. O artigo apresenta uma técnica para a construção de processos que possuem a característica de longa dependência, a partir de processos do tipo média móvel estacionário com um núcleo que satisfaça determinadas condições.

A ideia, então, foi utilizar um processo do tipo média móvel com um núcleo que advém do processo Quadrático do Tipo OU. A partir deste núcleo, obtivemos um núcleo fracionalmente integrado através da Integral de Riemann-Liouville. Após, definimos um

novo processo estocástico em (4.37), cujo núcleo era dado por este núcleo fracionalmente integrado, o qual é um processo Média Móvel Fracionariamente Integrado (FIMA). Provamos, então, algumas propriedades para este processo e no Teorema 4.25, um dos principais resultados deste trabalho, obtivemos o decaimento da função de autocovariância do processo, o qual nos possibilitou provar que este processo encontrado possui a propriedade de longa dependência.

No último capítulo deste trabalho, buscamos, inicialmente, uma forma de simular algumas trajetórias para o processo. Para isto, consideramos o ruído como o movimento Browniano, caso mais simples de um processo de Lévy. O processo então foi simulado através de uma aproximação por somas de Riemann, sendo que provamos que esta aproximação é convergente para o processo estudado.

Apesar de estarmos considerando um processo ruído simples, o processo FIMA estudado possui complexidade em sua distribuição, o que dificultou as estimações dos parâmetros do processo. Uma das opções foi realizar a estimação do parâmetro d através do ruído. Em caso de analisar uma aplicação real, tal estimação pode ser complicada, caso não seja possível isolar o ruído do processo.

Para estimar o parâmetro λ do processo (4.37), encontramos dificuldades na parte computacional para lidar com a complexidade das expressões. Ficando esta estimação em aberto.

Por fim, conclui-se que o ponto principal deste trabalho foi a apresentação de um novo processo estocástico que possui a propriedade de longa dependência, o que tem grande importância na área da probabilidade e se espera que tenha aplicabilidade.

Para trabalhos futuros, além dos já destacados, destacamos a extensão dos estudos de Marquardt (2006) para processos de Lévy α -estáveis. A autora faz breves comentários sobre esta classe de processos, porém não se aprofunda nesta questão. Em tempo, buscaremos outras maneiras de estimar o parâmetro λ do processo dado em (4.37) e encontrar uma aplicação para o mesmo.

Referências

- Applebaum, D. (2009). *Lévy Process and Stochastic Calculus*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Astrauskas, A. (1983). “Limit Theorems for Sums of Linearly Generated Random Variables”. *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **23**(2), 127-134.
- Astrauskas, A., Lévy, J.B. e Taqqu, M.S. (1991). “The Asymptotic Dependence Structure of the Linear Fractional Lévy Motion”. *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **31**(1), 1-19.
- Beran, J. *et al.* (2010). *Long-Memory Process*. Berlin: Springer-Verlag.
- Brockwell, P.J. e Davis, R.A. (2002). *Times Series: Theory and Methods*. New York: Springer.
- Cambanis, S. e Miller, G. (1981). “Linear problems in p-th order and stable processes”. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. **41**(2), 43–69.
- Damarackas, J. e Paulauskas, V. (2014). “Properties of Spectral Covariance for Linear Processes with Infinite Variance”. *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **54**(3), 252-276.
- Gradshteyn, I.S. e Ryzhik, I.M. (1980). *Table of Integrals, Series, and Products*. California: Academic Press.
- Gripenberg, O. e Norros, I. (1996). “On the prediction of fractional Brownian motion”. *Journal of Applied Probability*, Vol. **33**, 400-410.
- Gross, A. (1994). “Some Mixing Conditions for Stationary Symmetric Stable Stochastic Processes”. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. **51**(2), 277-295.
- Heyde, C. e Yang, Y. (1997). “On defining long-range dependence”. *Journal of Applied Probability*, Vol. **34**, 939-944.
- Hosking, J.R.M. (1984). “Modelling Persistence in Hidrological Time Series Using Fractional Differencing”. *Water Resources Research*, Vol. **20**(12), 1898-1908.
- Hurst, H.E. (1951). “Long-Term Storage Capacity of Reservoirs”. *Transactions of American Society in Civil Engineers*, Vol. **116**(1), 165-167.
- Kannan, D. (1997). “On the Generalized Langevin equation”. *Journal of Mathematical and Physics Sciences*, Vol. **11**(1), 1-24.
- Klebaner, F.C. (2005). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. London: Imperial College Press.
- Kokoszka, P.S. e Taqqu, M.S. (1994). “Infinite Variance Stable ARMA Processes”. *Journal*

- of *Time Series Analysis*, Vol. **15**(2), 203-220.
- Kokoszka, P.S. e Taqqu, M.S. (1995). “Fractional ARIMA with Stable Innovations”. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. **60**, 19-47.
- Lamperti, J.W. (1962). “Semi-stable Processes”, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. **104**, 62–78.
- Langevin, P. (1908). “On the Theory of Brownian Motion (Sur La Théorie Du Mouvement Brownien)”. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, Vol. **146**, 530-533.
- Lévy, J.B. e M.S. Taqqu (2011). “The Long-Range Dependence of Linear Log-Fractional Stable Motions”. *Communications on Stochastic Analysis*, Vol. **5**(1), 187-210.
- Lopes, S.R.C. (2008). “Long-range dependence in mean and volatility: models, estimation and forecasting”. In: Sidoravicius, V., Vares, M.E. (Eds.), *In and Out of Equilibrium 2. Progress in Probability*, Vol. **60**, Birkhauser, 497-525.
- Lukacs, E. (1975). *Stochastic Convergence*. New York: Academic Press.
- Maejima, M. e Yamamoto, K. (2003). “Long-memory stable Ornstein-Uhlenbeck process”. *Electronic Journal of Probability*, Vol. **8**, 1-18.
- Marquardt, T. (2006). “Fractional Lévy process with an application to long memory moving average process”. *Bernoulli*, Vol. **12**(6), 1099-1126.
- Miller, G. (1978). “Properties of certain symmetric stable distributions”. *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. **8** (3), 346–360.
- Mingarelli, A.B. (1983). “Volterra-Stieltjes Integral Equations and Generalized Ordinary Differential Expressions”. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **989**. New York: Springer-Verlag.
- Mishura, Y. S. (2008). *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. New York: Springer.
- Nolan, J.P. (2017). *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*. Boston: Birkhäuser.
- Paulauskas, V.J. (1976). “Some Remarks on Multivariate Stable Distributions”. *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. **6**(3), 356-368.
- Papantoleon, A. (2008). “An Introduction to Lévy Process with Applications in Finance”. *Lecture Notes*. Institute of Mathematics, TU Berlin.
- Pipiras, V. e Taqqu, M.S. (2000). “Integration questions related to fractional Brownian motion”. *Probability Theory Related Fields*, Vol. **82**, 451-487.
- Rosadi, D. e Deistler, M. (2009). “Estimating the Codifference Function of Linear Time Series Models with Infinite Variance”. *Metrika*, Vol. **73**, 395-429.
- Samko, S.G. et al. (1993) *Fractional Integrals and Derivatives*. Cambridge: Cambridge

University Press.

Samorodnitsky, G. e Taqqu, M.S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. New York: Chapman & Hall.

Sato, K.I. (1999). *Lévy Process and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge: Cambridge University Press.

Stein, J. (2015). Estimação e Previsão em Processos Advindos da Solução Generalizada com Ruído Alfa-Estável. *Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade do Rio Grande do Sul*. Porto Alegre.

Stein, J., S.R.C. Lopes and A.V. Medino (2016). “A Generalization of the Ornstein-Uhlenbeck Process: Theoretical Results, Simulations and Parameter Estimation”. Submetido.

Apêndice A

Resultados das estimações do parâmetro d .

Nas Figuras A.1, A.2 e A.3, apresentamos os resultados das estimações do parâmetro d para o processo definido em (5.1), considerando a aproximação dada em (5.12), onde $t = 1000$, $re = 500$, $\lambda \in (0.001, 0.005, 0.01)$, $n = 30$ e $d \in (0.15, 0.30, 0.45)$.

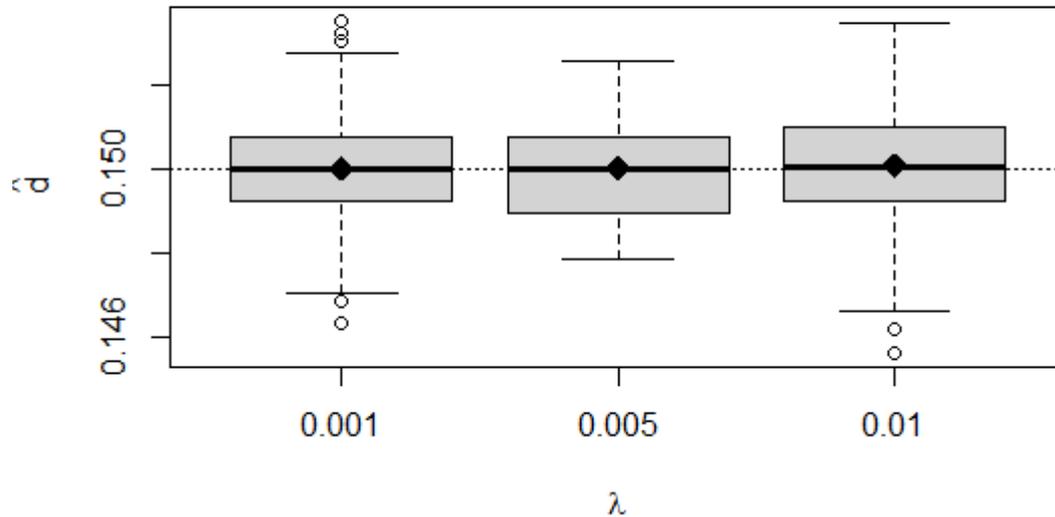


Figura A.1: Estimação do parâmetro d do processo definido em (5.1), considerando a aproximação dada em (5.12), onde $t = 1000$, $re = 500$, $\lambda \in (0.001, 0.005, 0.0001)$, $n = 30$ e $d = 0.15$.

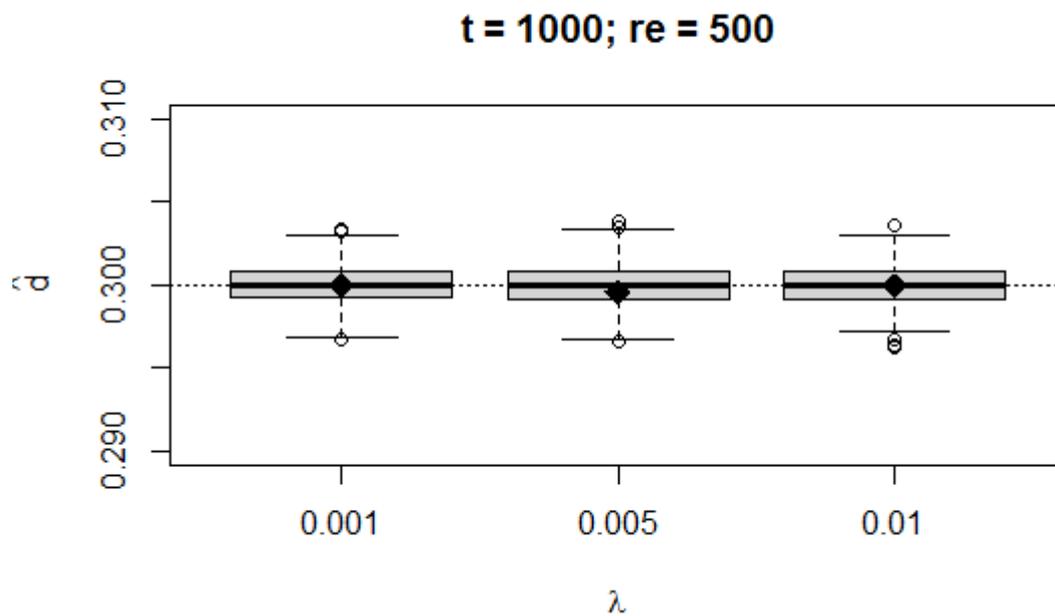


Figura A.2: Estimação do parâmetro d do processo definido em (5.1), considerando a aproximação dada em (5.12), onde $t = 1000$, $re = 500$, $\lambda \in (0.001, 0.005, 0.0001)$, $n = 30$ e $d = 0.30$.

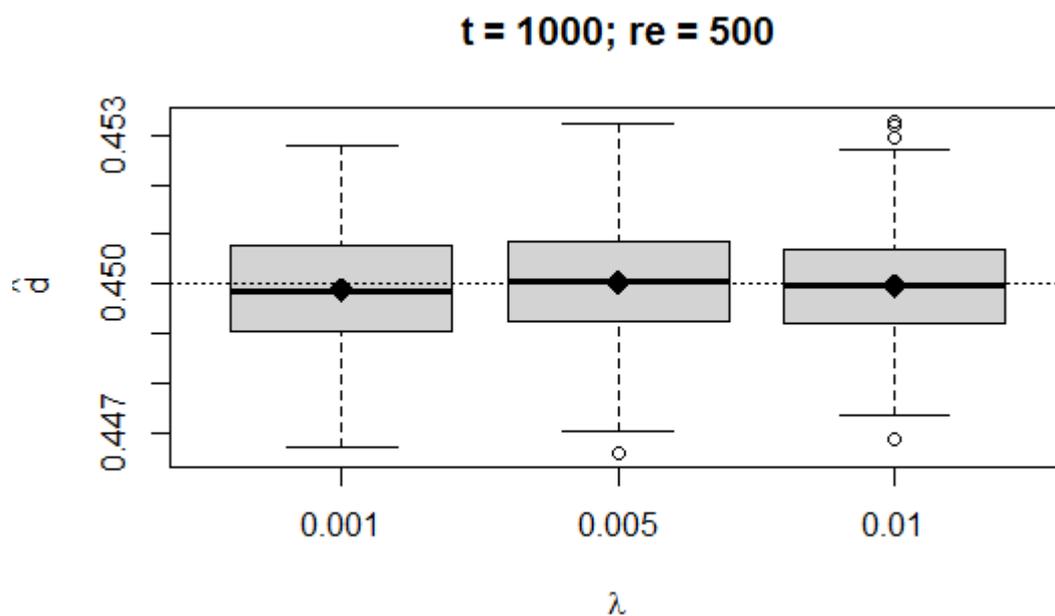


Figura A.3: Estimação do parâmetro d do processo definido em (5.1), considerando a aproximação dada em (5.12), onde $t = 1000$, $re = 500$, $\lambda \in (0.001, 0.005, 0.0001)$, $n = 30$ e $d = 0.45$.

Na Tabela A.1, apresentamos os valores para as médias, as variâncias e os bias dos estimadores nos casos estudados.

Tabela A.1: Resultados da estimação do parâmetro $d \in (0.15, 0.30, 0.45)$, quando $\lambda \in (0.001, 0.005, 0.01)$, $t = 1000$, $re = 500$, com valores aproximados para a média.

d	0.15		
λ	0.001	0.005	0.01
mean	0.14999	0.14999	0.15005
variance	$1.28 \cdot 10^{-6}$	$1.31 \cdot 10^{-6}$	$1.59 \cdot 10^{-6}$
bias	-0.00001	-0.00001	0.00005
d	0.30		
λ	0.001	0.005	0.01
mean	0.30001	0.29962	0.29996
variance	$1.36 \cdot 10^{-6}$	$4.18 \cdot 10^{-6}$	$1.52 \cdot 10^{-6}$
bias	0.00001	-0.00038	-0.00004
d	0.45		
λ	0.001	0.005	0.01
mean	0.44988	0.45002	0.44995
variance	$1.34 \cdot 10^{-6}$	$1.33 \cdot 10^{-6}$	$1.19 \cdot 10^{-6}$
bias	-0.00012	0.00002	-0.00005