

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ESTUDO PARAMÉTRICO DE UMA BASE DE ACIONAMENTO TUBULAR EM AÇO
SOB CARREGAMENTOS DINÂMICOS.

por

Matheus Botega

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Novembro de 2021.

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO

CIP - Catalogação na Publicação

Botega, Matheus
ESTUDO PARAMÉTRICO DE UMA BASE DE ACIONAMENTO
TUBULAR EM AÇO SOB CARREGAMENTOS DINÂMICOS / Matheus
Botega. -- 2021.
27 f.
Orientador: Ignacio Iturrioz.

Coorientador: Charlie Gross Azevedo.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto
Alegre, BR-RS, 2021.

1. Análise dinâmica. 2. Base de acionamento. 3.
Análise paramétrica. 4. Perfis tubulares. I. Iturrioz,
Ignacio, orient. II. Gross Azevedo, Charlie,
coorient. III. Título.

Matheus Botega

ESTUDO PARAMÉTRICO DE UMA BASE DE ACIONAMENTO TUBULAR EM AÇO
SOB CARREGAMENTOS DINÂMICOS.

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Cirilo Seppi Bresolin
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Co-orientador: Eng. Charlie Gross Azevedo

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Prof. Rodrigo Rossi

Prof. Edson Hikaro Aseka

Porto Alegre, Novembro de 2021

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Valdir e Lori, por terem me proporcionado toda a educação e condições para poder estudar.

Aos meus irmãos, que estiveram comigo unidos em todos os momentos da minha vida, em especial ao meu irmão mais velho, Fábio Botega (*in memoriam*), que foi um excelente engenheiro mecânico e irmão, que certamente sempre será lembrado pelos seus feitos e pelos seus ensinamentos.

À minha namorada, Kathleen, pelo companheirismo, amor e por toda compreensão durante esta etapa final da graduação.

Ao meu orientador, Prof. Ignacio, pela ajuda e orientação no desenvolvimento desse trabalho.

Ao grande amigo Charlie, pela paciência e orientação durante grande parte do meu estágio e também no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas e amigos, por toda ajuda e companheirismo, das incontáveis madrugadas em claro durante este período árduo, mas também das muitas risadas e momentos marcados de pura resenha.

Botega, Matheus. **Estudo paramétrico de uma base de acionamento tubular em aço sob carregamentos dinâmicos**. 2021. 28f. Monografia de Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

Resumo.

O emprego de unidades motrizes em aplicações industriais é de fundamental importância na engenharia moderna, em particular no transporte de materiais granulares em portos, que exigem funcionamento intermitentes e grandes solicitações dos equipamentos. Para dimensionamento de estruturas complexas, ferramentas de simulação numérica possibilitam que o engenheiro tenha ciência da resposta dinâmica frente aos carregamentos periódicos que serão aplicados, possibilitando, dessa forma, a realização de estudos paramétricos visando a melhor configuração da estrutura. No presente texto, avalia-se o comportamento dinâmico de uma base de acionamento tubular em aço, buscando minimizar ao máximo os níveis de vibração com o distanciamento das frequências naturais da frequência de operação. Foram exploradas várias configurações geométricas avaliando a sensibilidade da resposta de cada alteração. Para isso, utilizou-se de uma análise modal e harmônica do modelo, possibilitando extrair os modos de vibração e suas respectivas frequências naturais, como também as amplitudes de vibrações. Os resultados obtidos evidenciaram que mudanças geométricas da estrutura permitiram aumentar em até 70 % a frequência natural do primeiro modo de vibração da estrutura.

PALAVRAS-CHAVE: análise dinâmica, base de acionamento, estudo paramétrico, perfil tubular.

Botega, Matheus. **Parametric study of a tubular steel drive base under dynamic loads.** 2021. 28p. Mechanical Engineering End of Course Monography – Mechanical Engineering degree, The Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

Abstract.

The use of motor units in industrial applications is of fundamental importance in modern engineering, in particular in the transport of granular materials in ports, which have intermittent operation and large equipment requirements. In order to design complex structures, numerical simulation tools make it possible for the engineer to be aware of the dynamic response to the periodic loads that will be applied, thus enabling the performance of parametric studies aiming at the best configuration of the structure. In the present context, the dynamic behavior of a tubular steel drive base is evaluated, seeking to minimize vibration levels as much as possible by distancing the natural frequencies from the operating frequency. Some geometric manipulations were explored evaluating the response sensitivity of each change. For this, a modal and harmonic analysis of the model was used, making it possible to extract the vibration modes and their respective natural frequencies, as well as the vibration amplitudes. The results obtained showed that the geometric changed of the structure allowed increase the natural frequencies by up to 70% the natural frequencies in first structure's lowest mode.

KEYWORDS: dynamic analysis, drive base, parametric study, tubular profile.

LISTA DE SÍMBOLOS

CG	Centro de gravidade	[-]
f	Frequência generalizada	[Hz]
ω	Frequência natural de vibração não amortecida	[rad/s]
Ω	Frequência de excitação	[rad/s]
P_o	Carga desbalanceada	[N]
$(e\Omega)$	Grau da qualidade de balanceamento de rotores	[mm/s]
m_r	Massa do rotor	[kg]
t	Tempo generalizado	[s]
θ	Ângulo de fase entre forças de excitação	[rad]
φ	Ângulo de fase entre amplitude de resposta	[rad]
MEF	Método de elementos finitos	[-]
RMP	Rotações por minuto	[min^{-1}]
RPS	Rotações por segundo	[s^{-1}]
[M]	Matriz de massa generalizada (n x n)	[kg]
[C]	Matriz de amortecimento generalizada (n x n)	[N.s/mm]
[K]	Matriz de rigidez generalizada (n x n)	[N/mm]
{ $F(t)$ }	Matriz-coluna de cargas nodais para n graus de liberdade (n x 1)	[N]
{ $\ddot{U}(t)$ }	Matriz-coluna de aceleração nodal para n graus de liberdade (n x 1)	[mm/s ²]
{ $\dot{U}(t)$ }	Matriz-coluna de velocidade nodal para n graus de liberdade (n x 1)	[mm/s]
{ $U(t)$ }	Matriz-coluna de deslocamentos para n graus de liberdade (n x 1)	[mm]
[Φ]	Matriz modal (n x n)	[-]
ϕ_i	Autovetor correspondente ao i-ésimo modo de vibrar	[-]
Y_i	Fator de participação do i-ésimo modo de vibrar	[-]
r	Razão entre frequência de excitação e frequência natural	[-]
χ	Fator de amplificação dinâmica	[-]
ζ	Fator de amortecimento	[-]
k	Rigidez generalizada	[N/m]
m	Massa generalizada	[Kg]
c	Coef. amortecimento generalizado	[N.s/mm]
C_c	Coef. Amortecimento crítico generalizado	[N.s/mm]
$U(t)$	Amplitude de deslocamento generalizada	[m]
U_0	Amplitude máxima de deslocamento generalizada	[mm]
$F(t)$	Força de excitação generalizada	[N]
F_0	Força de excitação máxima generalizada	[N]

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 ESTRUTURA DO PRESENTE TRABALHO.....	2
2. FUNDAMETAÇÃO TEÓRICA.....	2
3. METODOLOGIA.....	3
3.1 NORMAS UTILIZADAS.....	3
3.2 MODELOS NUMÉRICOS.....	3
4. ESTUDO DE CASO.....	5
4.1 DESCRIÇÃO DO MODELO FÍSICO.....	5
4.2 DESCRIÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS.....	6
4.3 VALIDAÇÃO DO MODELO.....	6
4.4 ANÁLISE PARAMÉTRICA.....	7
4.5 ANÁLISE HARMÔNICA.....	9
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	10
5.1 ANÁLISE PARAMÉTRICA.....	10
5.1.1 Acréscimo de contenções no apoio B.....	10
5.1.2 Incremento da espessura do perfil tubular principal.....	11
5.1.3. Alteração da geometria do perfil tubular principal.....	11
5.2 ANÁLISE HARMÔNICA.....	13
6. CONCLUSÕES.....	13
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	15
APÊNDICE A – APRESENTAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS.....	16
APÊNDICE B – REVISÃO DOS CONCEITOS DE VIBRAÇÕES APLICADOS.....	17
ANEXO A – REFERENCIAL NORMATIVO.....	19

1. INTRODUÇÃO

O transporte de materiais granulares no Brasil, em 2021, segundo o indicador de comércio exterior (Icomex; fonte: <https://portalibre.fgv.br>), é responsável por cerca de 70% do volume total de exportação. Nos portos marítimos esse material é transportado até os armazéns e navios por intermédio das correias transportadoras, que comportam quilômetros de extensão e são colocadas em movimento por unidades de acionamento de grande porte. Essas unidades, como pode ser observado na Figura 1, são estruturas que consistem basicamente de uma base metálica, um motor de indução, um redutor e um acoplamento hidráulico.

Figura 1 – Unidades de acionamento de uma correia transportadora.



As unidades de acionamento exigem grande precisão de alinhamento entre eixos e baixos níveis de vibração para o correto funcionamento. Nesse caso, é imprescindível uma análise mais apurada do conjunto no dimensionamento das bases metálicas, pois além dos carregamentos estáticos, são significativos os carregamentos dinâmicos resultantes das forças de inércia produzidas pelo desbalanceamento de rotores e possíveis desalinhamentos entre acoplamento, podendo causar danos à estrutura e aos equipamentos ao operar em frequências similares às frequências naturais e modos de vibração da estrutura, fenômeno conhecido como ressonância.

Atualmente, o uso de ferramentas de análise numérica tem sido uma grande aliada no estudo da resposta dinâmica das estruturas, pois permite, considerando as simplificações das condições de contorno do modelo discretizado, que o engenheiro tenha ciência do comportamento dinâmico e das frequências críticas da estrutura antes de construí-la. De certa forma, partindo-se de modelos numéricos confiáveis, a importância está na possibilidade de explorar métodos de distanciar as frequências naturais das frequências de excitação por meio de um estudo paramétrico, localizando pontos de baixa rigidez e aplicando as devidas vinculações. Dessa maneira, possibilita-se dimensionar de forma segura a estrutura, minimizando os níveis indesejáveis de vibrações, como também os custos ao evitar o superdimensionamento da estrutura, ampliando a segurança e confiabilidade em projetos.

Procurando avaliar o desempenho estrutural em termos de tolerâncias máximas de deslocamento e dos estados limites de serviço do sistema estrutural, Kamei et al (2010a) analisou o comportamento de uma estrutura metálica que comporta duas estações de acionamento de transportadores de correia frente às excitações dinâmicas típicas. A mesma afirma a importância da precisão no balanceamento e alinhamento dessas bases para o correto funcionamento dos componentes, bem como da análise dos efeitos dinâmicos produzidos pela vibração harmônica derivada do desbalanceamento de rotores de máquinas rotativas.

Sampaio (2018) formulou em seu trabalho um modelo numérico capaz de analisar o comportamento dinâmico de uma base de máquinas rotativa frente à ação transversal de uma carga dinâmica. Os resultados da análise numérica, em comparação aos *softwares* comerciais

de MEF, refletem bem as distorções previstas para a estrutura. O autor destaca a importância de se obter modelos numéricos confiáveis para analisar estruturas sujeitas às cargas dinâmicas, bem como da manipulação das propriedades do sistema físico como massa, rigidez e coeficiente de amortecimento.

Em seu artigo, Qiu, M et al (2018) explora a influência das diferentes condições de restrições, bem como da variação de espessuras das chapas da estrutura suporte sobre as frequências naturais, buscando evitar o fenômeno de ressonância em uma base de motorização. Partindo de 3 casos distintos de restrições, o autor conclui seu trabalho mostrando que a rigidez dinâmica pode ser melhorada otimizando a matriz de rigidez estática a partir do aumento do número de nervuras em locais críticos.

Busca-se então, como objetivo geral, explorar configurações geométrica em uma base de acionamento, como também a sensibilidade de resposta de cada alteração, buscando minimizar ao máximo os níveis de vibração, distanciando as frequências naturais da frequência de operação. Como objetivos específicos, pode-se citar: a) validar o modelo em elementos finitos a partir de um modelo de vigas unifilar, b) verificar a performance de várias configurações mensurando a sua eficácia, de forma quantitativa, na redução das vibrações c) Para uma das configurações estudadas avaliar a redução da resposta frente ao acionamento do equipamento sobre a base de acionamento.

1.1 ESTRUTURA DO PRESENTE TRABALHO

Após a presente introdução, na seção 2 é apresentada a fundamentação teórica deste estudo. Posteriormente, na seção 3, são descritas as ferramentas utilizadas para construção do trabalho. Na seção 4 são descritas as análises realizadas e na seção 5 os resultados obtidos nesta análise. Finalmente, na seção 6, se enunciam as conclusões do trabalho. Dois apêndices complementam informações do trabalho aqui desenvolvido.

2. FUNDAMETAÇÃO TEÓRICA

O problema de uma estrutura submetida a excitações dinâmicas pode ser formulado como um sistema de equações diferenciais, no qual o campo de deslocamentos, o tensor de tensões e deformações dependentes do tempo sejam suas incógnitas. Estratégias de discretização espacial, como o método dos elementos finitos, podem reduzir o problema a um sistema de equações diferenciais no domínio do tempo, que traduzem o equilíbrio dinâmico em um sistema de N graus de liberdade. A equação, chamada de equação de movimento, escrita na forma matricial, é apresentada pela Equação 1.

$$[M].\{\ddot{U}(t)\} + [C].\{\dot{U}(t)\} + [K].\{U(t)\} = \{F(t)\} \quad (1)$$

Onde [M] [C] e [K] representam a matriz de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. $\{U(t)\}$ representa o vetor de deslocamentos, $\{F(t)\}$ o vetor de força de excitação e $[\dot{\cdot}]$ a derivada temporal. Detalhes de como proceder para chegar a esta expressão pode ser visto com mais detalhes em Alves (2008, p.35), como também em outros excelentes livros disponíveis.

Existem basicamente dois métodos para resolver a equação 1 no domínio temporal: O primeiro, chamado de método da integração direta, consiste em integrar diretamente a expressão no domínio do tempo, respeitando o acoplamento e amarração entre os elementos. Esta forma de proceder é em geral adequada quando o sistema é não linear. Detalhes das diversas formas de proceder se encontram descritas em livros clássicos como o Bathe (2014) e o Clough e Penzien (2003). O segundo método, chamado de método da superposição modal, é

baseado na premissa do sistema ser linear, permitindo transformar um sistema de n graus de liberdade acoplados em n sistemas de 1 GDL desacoplados. Assim, pode-se superpor a resposta dos n sistemas de 1 GDL em um determinado instante t e obter a resposta de interesse.

Após ter o problema reduzido a um grau de liberdade, pode-se diretamente integrar a Equação 1 no domínio do tempo, isto é, mesma forma usada no método da integração direta, porém num sistema de um grau de liberdade. Mas em geral, em sistemas lineares de um grau de liberdade, há outras formas de proceder mais convenientes descritas em livros clássicos de vibrações, entre eles podemos citar o RAO (2010). Essencialmente, em sistemas lineares de um grau de liberdade, há duas metodologias a serem utilizadas: uma consiste em resolver o problema no domínio do tempo, estratégia conveniente quando a excitação aplicada é transiente. E a outra é resolver o problema no domínio da frequência, estratégia comumente aplicada quando a excitação é periódica. Cabe salientar que quando a excitação é periódica ela pode ser decomposta por séries de Fourier numa somatória de excitações harmônicas.

Os conceitos fundamentais de vibrações que regem as análises aplicadas, bem como os conceitos sobre os métodos de análise numérica utilizados para desenvolvimento deste trabalho, são equacionados e detalhados no Apêndice B.

3. METODOLOGIA

Pelo fato de não haver um modelo físico do equipamento para validação do modelo numérico, foram construídos dois modelos do mesmo equipamento, um utilizando elementos finitos de casca e outro elementos de viga unifilares. Posteriormente, utilizando do modelo mais complexo, se realizou um estudo paramétrico analisando como diversas configurações propostas mudam as frequências de vibração. Por fim, para a geometria da base de acionamento com melhor resposta ao objetivo desse estudo, realizou-se uma análise harmônica, que consiste essencialmente em aplicar sobre o sistema excitações harmônicas do tipo $A_i(t) = A_{0i} \cdot \text{sen}(\Omega t + \varphi_{0i})$ onde Ω varia dentro de um intervalo de valores $[\Omega_{ini}, \Omega_f]$. A excitação harmônica, neste caso, se origina pelo desbalanceamento da massa dos equipamentos rotativos, que pode ser calculado pela metodologia proposta por Kamei (2010). A seguir se explicam brevemente as ferramentas que permitiram fazer o estudo aqui descrito.

3.1 NORMAS UTILIZADAS

As normas referentes à análise de estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos utilizadas são: Petrobras N-1848, que propõe equações para o cálculo das cargas derivadas do desalinhamento de rotores e a ISO 1940-1 (1986), que estabelece o grau da qualidade de balanceamento de equipamentos rotativos. Os conteúdos utilizados nas normas são citados no desenvolvimento do texto e no anexo A.

3.2 MODELOS NUMÉRICOS

Para elaboração do modelo unifilar, foi utilizado o *software* Strap 2019, que permite a simulação deste tipo de estruturas empregando o método matricial. Os modos e frequências naturais de vibração são obtidos empregando o método de interação por subespaços. (STRAP, 2019).

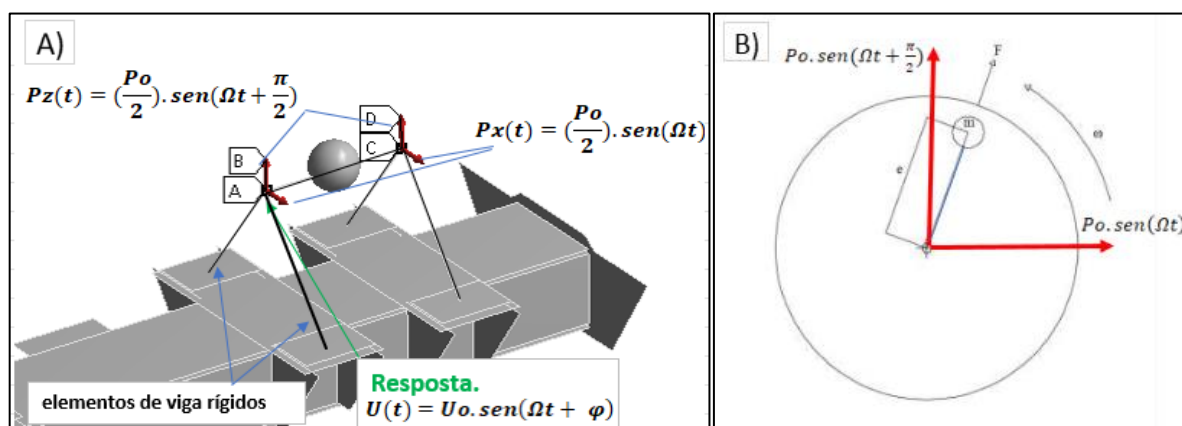
Na discretização do modelo em elementos finitos de casca foi utilizado o sistema comercial de elementos finitos da Ansys. Para a construção do modelo neste sistema foi utilizado o elemento Shell 281 baseado na hipótese das cascas finas de 8 nos considerando 6 graus de liberdade por nó, visando maior acurácia das respostas e um menor custo de

processamento do modelo. O nível de discretização foi tal que não foram utilizados elementos maiores que 15mm de lado. Para achar os modos e frequências naturais de vibração no sistema Ansys, foi resolvido um problema de autovalores empregando também o método de integração por subespaço. Na união das chapas com o perfil principal foram utilizados contatos lineares do tipo *Bonded*, que permitem a restrição em todas as direções, podendo representar uniões contínuas e/ou soldadas, neste caso. Finalmente, para avaliar a resposta dinâmica derivada do desbalanceamento dos equipamentos rotativos que estão apoiados sobre a base em estudo, foi realizada uma análise harmônica, sobre o sistema de n graus de liberdade processado com o método de superposição modal que permite desacopla-lo em N sistemas de um grau de liberdade.

Para avaliar a resposta dinâmica da base devido à carga periódica desbalanceada derivada do desbalanceamento de rotores, foi realizada uma análise harmônica, a qual consiste em aplicar excitações harmônicas com distribuição espacial e amplitude e fase definida pelo usuário. A resposta é apresentada em termos de sua amplitude e sua fase em relação à excitação. Este tipo de simulação permite visualizar como uma excitação com um conteúdo de frequência determinado interage com o sistema, magnificando ou minimizando a resposta.

Para aplicação dos vetores de força e medição de deslocamentos, foram utilizados elementos de viga rígidos, como pode ser visto na Figura 2(a). As condições de amortecimento e rigidez do conjunto carcaça, estator e eixo foram desconsiderados.

Figura 2 – (a) Condições de contorno da análise harmônica; (b) Representação da massa excêntrica de rotores de máquinas rotativas.



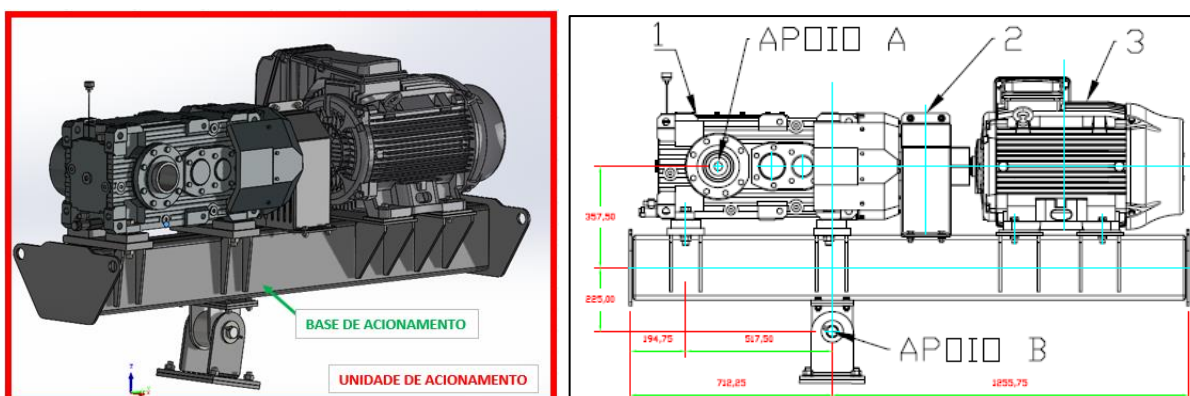
A Figura 2(b) apresenta esquematicamente a massa “m” fora do centro geométrico do rotor, que produz as forças de inércia derivada do grau de desbalanceamento, representada pelos vetores de força $p(t)$ com diferença de fase $\theta = \pi/2$, o equivalente a $1/4$ do período de um ciclo. Já na figura 2(a), observa-se a posição das forças aplicadas $P(t)$ como excitação em cada extremo do eixo do motor, onde foi medida a resposta em termo dos deslocamentos na direção x e z, como indica o teorema de preservação da frequência, que em sistemas lineares, a resposta a uma excitação harmônica vai ser também harmônica e de igual frequência que a excitação.

4. ESTUDO DE CASO

4.1 DESCRIÇÃO DO MODELO FÍSICO

O modelo a ser estudado trata de uma base de acionamento tubular em aço ASTM A36 com seção retangular de 230 mm x 160 mm x 7,94 mm, como ilustrada na Fig. 3. Segundo Branco et al (1999, p.398), a utilização de perfis tubulares permite a confecção de estruturas com elevados módulos de resistência à flexão e à torção, unidos à versatilidade de fabricação e leveza da estrutura. No entanto, pode-se resultar em estruturas mais esbeltas, menos rígidas e com baixo amortecimento, sendo mais suscetíveis a problemas como fadiga, ruídos e níveis indesejáveis de vibração

Figura 3 – (a) Modelo 3D da unidade de acionamento com uma base tubular; (b) Layout do modelo físico.



A base de acionamento suporta um redutor (1), um acoplamento (2) e um motor de indução (3) com rotação nominal de 1800 RPM. Para descobrir a frequência de operação, parte-se da relação apresentada na Equação (10) abaixo:

$$f = 1 \times \frac{RPM}{60} = \frac{1800}{60} = 30Hz \quad (2)$$

Os apoios da estrutura estão localizados nos pontos A e B, também indicados na Figura 2, e que são designados, respectivamente, ao eixo de saída do redutor e à uma ligação do tipo pino e bucha no apoio de base. Os equipamentos e componentes do modelo, bem como seus respectivos pesos próprios, podem ser verificados na Tabela 1.

Tabela 1 – Peso próprio da estrutura e equipamentos mecânicos

COMPONENTES	MASSA
Estrutura Tubular com nervuras	180,35 Kg
Motor WEG 75 CV 4 polos, carcaça 225 S/M W22XTB IR3	430,00 Kg
Redutor eixos ortogonais SEW X3KH11e/HU/B	350,00 Kg
Acoplamento de alta rotação Antares AT 70 + proteção	40,00 Kg
Massa total da estrutura	1000,35 Kg

4.2 DESCRIÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS

Se descrevem as condições de contorno, de forma sucinta, para os dois modelos numéricos utilizados nas análises. As condições de contorno aplicadas aos modelos negligenciam fenômenos reais de um modelo físico como deformações, flexibilidade e folgas resultantes das condições do sistema de acoplamento do redutor ao eixo, podendo gerar distorções nos valores das frequências naturais. Como o estudo se detém a evidenciar a sensibilidade de diferentes configurações frente às frequências naturais, bem como das amplitudes na frequência de operação em relação às amplitudes das frequências críticas, a simplificação das condições são aceitáveis.

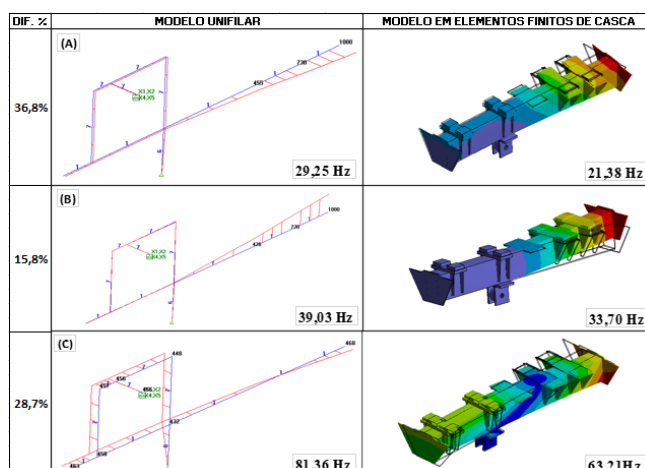
Modelo com elementos de casca: O modelo foi construído com 12027 elementos de casca. As condições de contorno são apresentadas na Figura A.2 do Apêndice A. No apoio A, $u_y=u_z=R_y=R_z=0$, já o apoio B possui como restrições $u_x=u_y=u_z=R_z=R_y=0$. As massas dos equipamentos foram aplicadas como massas pontuais nos CG de cada equipamento.

Modelo Unifilar: O modelo unifilar é composto por 10 elementos de viga em pórtico espacial com 6 graus de liberdade por nó. Conforme pode ser observado na vista isométrica da Fig. A.1 do Apêndice A, são apresentadas as restrições dos apoios, bem como as massas dos equipamentos aplicada pontualmente nos nós e da estrutura distribuída em kg/m. A massa da estrutura foi multiplicada por 1,15x para se igualar ao modelo em elementos de casca, que considera uma série de nervuras e acaba por agregar maior massa em comparação ao modelo unifilar simplificado. Além disso, o redutor foi modelado com elementos rígidos.

4.3 VALIDAÇÃO DO MODELO

A validação do modelo de elementos finitos de casca foi realizada comparando os três primeiros modos e suas respectivas frequências naturais de vibração com os do modelo unifilar, como apresentado na figura 4. O ideal, neste caso, seria validar o modelo comparando o mesmo com medições experimentais, mas não foi possível ter acesso ao equipamento, por isso se optou por comparar os resultados em termos de modos e frequências entre os dois modelos, para verificar se frequências e modos eram similares. Muitas características tiveram que ser simplificadas no modelo unifilar, mas ainda assim, modos e frequências dos modos de interesse para esta análise (próximos à frequência da excitação é de 30Hz) obtiveram semelhança aceitável.

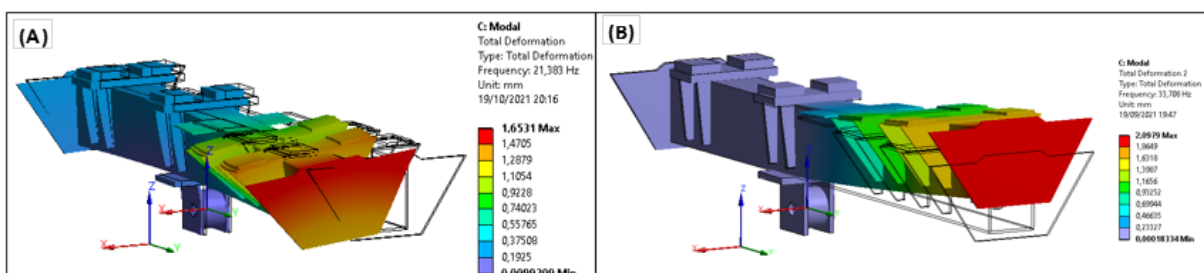
Figura 4 – Comparação dos modelos em termos dos modos de vibração; (A) Primeiro modo de vibração; (B) Segundo modo de vibração; (C) Terceiro modo de vibração.



4.4 ANÁLISE PARAMÉTRICA

Macedo (2020, p.23), afirma que é de se esperar que os primeiros modos e frequências naturais de vibração possuam maior participação na resposta global da estrutura. Além disso, Alves (2008, p.283) ressalta que as frequências de vibração devem evitar os modos mais baixos de vibrar das estruturas analisadas, pois estes podem ser ativados com menos energia e em geral, são os que apresentam menor amortecimento. Na estrutura objeto de estudo, a excitação dos equipamentos está em torno dos 30Hz, razão pela qual somente as frequências naturais até essa faixa de frequências foram monitoradas na análise aqui apresentada.

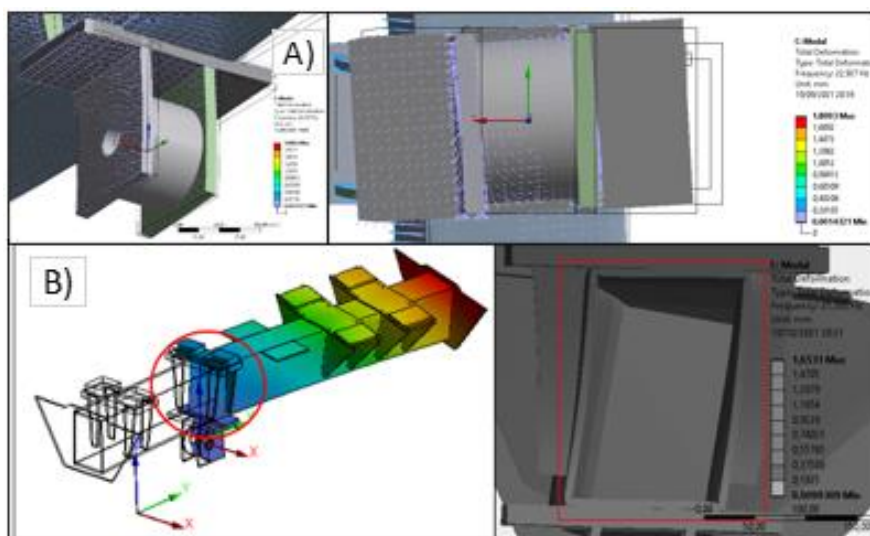
Figura 5 – (A) Primeiro modo de vibração; (B) Segundo modo de vibração.



Analisando a Figura 5, pode-se observar que o primeiro modo de vibração a 21,38 Hz configura uma flexo torção da estrutura principal da base de acionamento, enquanto o segundo modo tem uma frequência de 33,70 Hz apresentando uma clara flexão na direção vertical. Vale ressaltar que o segundo modo de 33,70 Hz está próximo da frequência de operação do equipamento, sendo que a distribuição espacial da excitação coincide com a distribuição espacial do modo.

Com base na resposta dinâmica da estrutura para os dois primeiros modos de vibração, é possível identificar dois pontos que necessitam ser manipulados afim de aumentar a rigidez. O primeiro, localizado na região do apoio B, é indicado na Figura 6(a). Já o segundo, que é próximo da região do apoio B, está na seção transversal do perfil tubular da base, que é possível ser visto com detalhes na figura 6(b).

Figura 6 – Pontos localizados na região do apoio B.

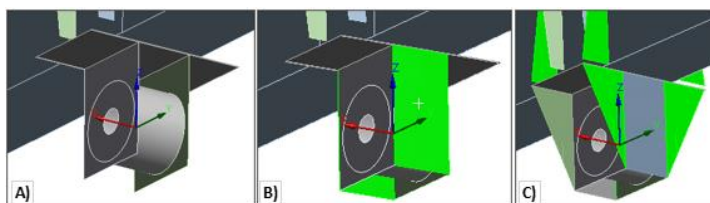


No primeiro ponto localizado na região de apoio B, de acordo com a Figura 6(a), fica evidente uma torção em torno do eixo Z e uma flexão na direção do eixo X com base na configuração indeformada e nos vetores de deslocamento, que são resultantes do primeiro modo de vibração. Já para o segundo ponto, observa-se também a resposta do perfil ao primeiro modo de vibração, conforme a Figura 4(b), que deforma sob ação da flexo torção. Dessa forma, três modificações na estrutura são propostas para aumentar a rigidez e diminuir a resposta a essas deformações, mantendo as características de resistência mecânica dos perfis tubulares. São elas: (i) Acréscimo de contenções no apoio B, (ii) incremento da espessura do perfil tubular principal, (iii) Alteração na geometria do perfil tubular principal.

(i) Acréscimo de contenções no apoio B: Para este caso, foram estudadas 2 restrições partindo da configuração original, que também é apresentada na Figura 7(a) para facilitar a comparação com as outras duas configurações propostas. A **configuração 1**, representada pela Figura 7(b), tem por objetivo aumentar a rigidez à torção do apoio. Já na **configuração 2**, apresentada pela Figura 7(c), são utilizadas nervuras para aumentar a rigidez a flexão da viga na direção do eixo X. Nas configurações (a), (b) e (c) com 9,5mm, também foram variadas as espessuras para 12,7 mm e 16 mm.

Em ambas as configurações procura-se elevar as duas primeiras frequências naturais de vibração da estrutura, em especial a do primeiro modo, já que a resposta a essa deformação em questão é derivado do mesmo. Além disso, devido a esse fato, a sensibilidade das mudanças será avaliada partindo da frequência do primeiro modo de vibração.

Figura 7 – (a) Configuração original do apoio B; (b) Configuração 1; (c) Configuração 2.



(ii) incremento da espessura do perfil tubular principal: Para esta alteração foi proposta a variação de espessura do perfil tubular, que considera 7,94 mm na configuração original, para tubos com espessuras de [12,7 mm; 16mm; 19mm e 25,4mm]. Os valores considerados são espessuras comerciais disponíveis no mercado.

(iii) Alteração na geometria do perfil tubular principal: Para este caso, foram propostas e analisadas 5 alterações partindo do perfil original e utilizando a configuração 1 da Figura 5(b), todas executadas em etapas ordenadas até a confecção do modelo final. Assim, é possível comparar e discutir qual o grau de influência de cada manipulação sobre as frequências naturais do primeiro e segundo modo de vibração, como também o impacto da alteração em relação ao perfil tubular original. As alterações são descritas a seguir:

I) Rotação do perfil tubular 230mm x 160mm x 7,94mm em 90°. Ver Figura 8(b).

II) Configuração de dois perfis U dobrados posicionados de lados opostos com duas chapas soldadas em suas mesas, ambos com 7,94 mm de espessura. Dessa forma, é possível manter um perfil tubular reduzido e acrescentar enrijecedores em forma de plaquetas nas regiões crítica do perfil. Ver Figura 8(c)

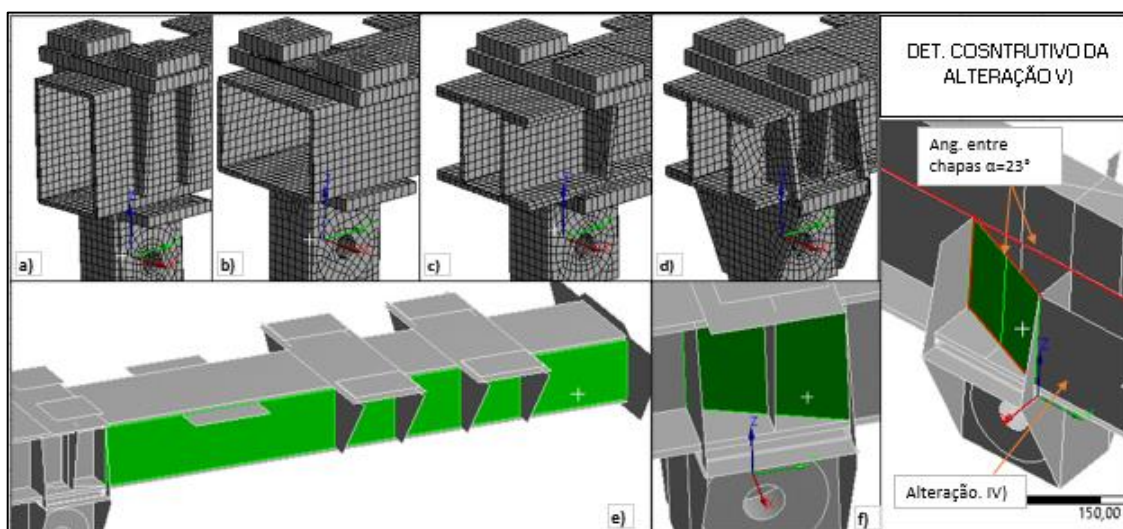
III) Acréscimo de nervuras da região crítica ao apoio. Ver Figura 8(d)

IV) Acréscimo de placas de fechamento lateral de 7,94 mm de espessura do ponto de apoio B ao final do balanço. Ver Figura 8(e)

V) Acréscimo de nervuras em diagonal com 23° em relação ao plano lateral da base. Assim, pretende-se aumentar a rigidez à flexão do balanço na menor inércia imposta pelo primeiro modo de vibração livre. Ver Figura 8(f).

Vale ressaltar que não foi estudada a influência da espessura das placas de nervuras para este caso, restringindo-se apenas ao impacto de cada contenção. A configuração final do perfil, bem como as espessuras de cada elemento, pode ser observada na Figura B.6 do Apêndice B.

Figura 8 – (a) Original; (b) Alteração I; (c) Alteração II; (d) Alteração III; (e) Alteração IV; (f) Alteração V.



4.5 ANÁLISE HARMÔNICA

Este tipo de análise foi realizada sobre a forma final da estrutura que é resultante das 5 alterações estudadas na seção anterior da Figura 8, que pode ser observada na Figura A.3 do Apêndice A. Seguindo as premissas apresentadas na metodologia deste trabalho, foi introduzida uma razão de amortecimento crítico de $\zeta = 0,03$, que segundo Alves (2008, p.45), é um valor usual para estruturas metálicas. Além disso, foram consideradas as seguintes hipóteses:

-Desconsiderada as ações dinâmicas oriundas do redutor, pois pelo fato da frequência de operação ser em torno de 3 Hz, as ações podem ser consideradas estáticas, já que a rotação não é suficiente para produzir forças de inércia.

-Massa do rotor com valor equivalente a 18% da massa total do motor. Boas práticas sugeridas pela norma da Petrobras N-1848 (2008, p.45) quando não há informação por parte do fabricante.

-Desconsiderado regime transiente da partida até a velocidade nominal do motor.

-Conjunto carcaça, rotor e estator considerados rígidos

A aplicação das cargas de excitação harmônica resultantes do desbalanceamento do rotor segue a metodologia proposta por Kamei (2010). Segundo a autora, as cargas são modeladas da seguinte forma: Para uma força desbalanceada girando em torno de um eixo, o procedimento para que se tenha esta força atuando no plano vertical, de modo a apontar “todas” as direções é aplicar esta força em duas direções ortogonais entre si, uma na direção horizontal com fase $\theta_0 = 0$ e outra na direção vertical com fase $\theta_0 = 1/4$ do período de vibração desta força

desbalanceada. O vetor de força de excitação com as componentes de carga pode ser apresentado na Equação 3, como também sua representação esquemática na Figura 2(b).

$$\vec{P}(t) = \begin{cases} Px(t) = P_o \cdot \text{sen}(\Omega t) \\ 0 \\ Pz(t) = P_o \cdot \text{sen}(\Omega t + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (3)$$

Segundo a norma da Petrobras N-1848 2008, a carga resultante do desbalanceamento do rotor pode ser calculada pela Equação 4.

$$P_o = m_r \cdot e \Omega \cdot \Omega \quad (4)$$

A tabela disposta na Figura A.4 do Anexo A, estabelece o grau de qualidade de balanceamento ($e\Omega$) para motores elétricos com valor igual a 2,5 mm/s. Aplicando os valores na Equação 12 temos:

$$P_o = (0,18 * 430)kg * (0,0025) \frac{m}{s} * (2 \cdot \pi * 30) \frac{rad}{s} = 36,45 N$$

A Figura 2(a) evidencia o ponto de aplicação das cargas sobre elementos de viga rígidos, que simulam, de forma simplificada, as condições do motor. As forças são aplicadas nos extremos do eixo cada com um valor de $P_o/2$ em cada extremo na análise harmônica se aplicaram as cargas harmônicas num intervalo de [0, 100Hz] em incrementos de 2Hz. A resposta foi medida em termos da amplitude dos deslocamentos na direção de X e Z.

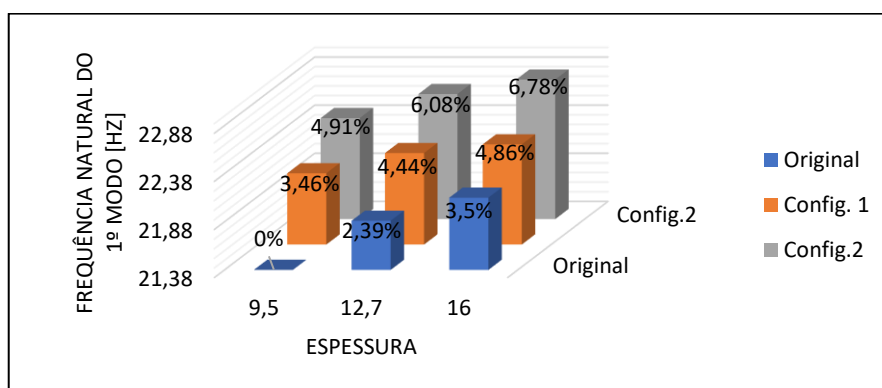
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 ANÁLISE PARAMÉTRICA

5.1.1 Acréscimo de contenções no apoio B.

Os resultados quantitativos das alterações na região do apoio B apresentadas na Figura 7(a) e 7(b) para o primeiro modo de vibração podem ser analisadas no gráfico da Figura 9 abaixo.

Figura 9 – Resultado quantitativo da variação das frequências naturais em função da configuração e espessuras.

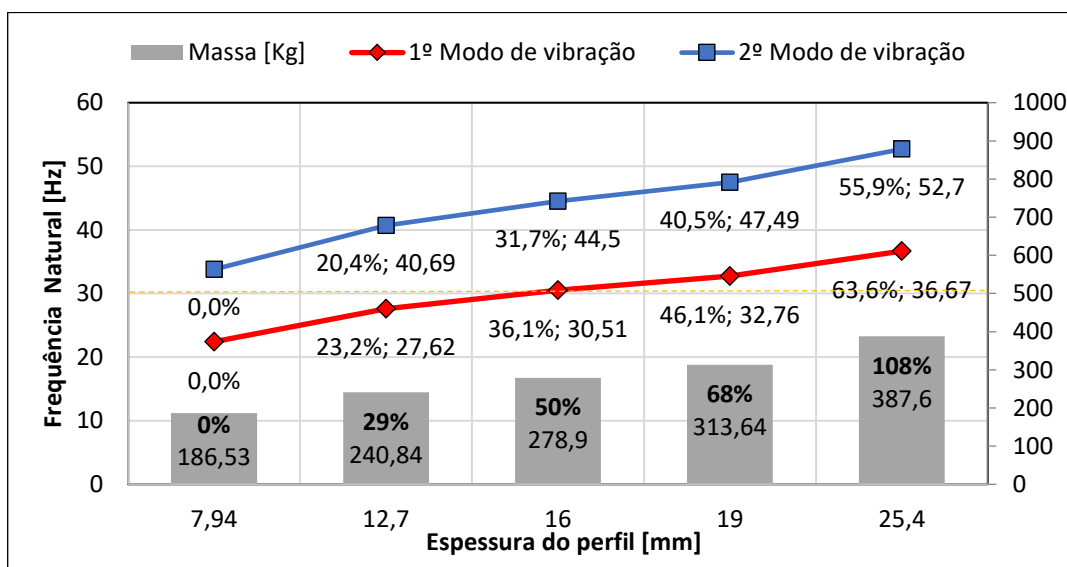


Observando o gráfico, percebe-se que o aumento da espessura das chapas do apoio original para 12,7 e 16, em azul, influenciam no enrijecimento do perfil, mas não mais que a manipulação geométrica visando aumento dos módulos resistentes de acordo com a solicitação imposta. A configuração 1 e 2 com espessura das chapas de 9,5 mm é mais efetiva do que o aumento demasiado da espessura no apoio original. No entanto é possível observar que nem a contenção 1 e 2, nem o aumento das espessuras das chapas para os 3 casos produziu um impacto significativo na variação na variação da frequência fundamental de vibração.

5.1.2 Incremento da espessura do perfil tubular principal

O incremento das espessuras do perfil tubular contrastou, de forma quantitativa, o efeito que a variação da rigidez global da estrutura tem frente ao aumento das frequências naturais, e consequentemente no aumento de massa. Com base no gráfico da Figura 10, podemos observar os resultados do estudo paramétrico em termos da variação das frequências naturais para o primeiro e segundo modo de vibração.

Figura 10 – Variação das frequências naturais em função da espessura do perfil tubular.

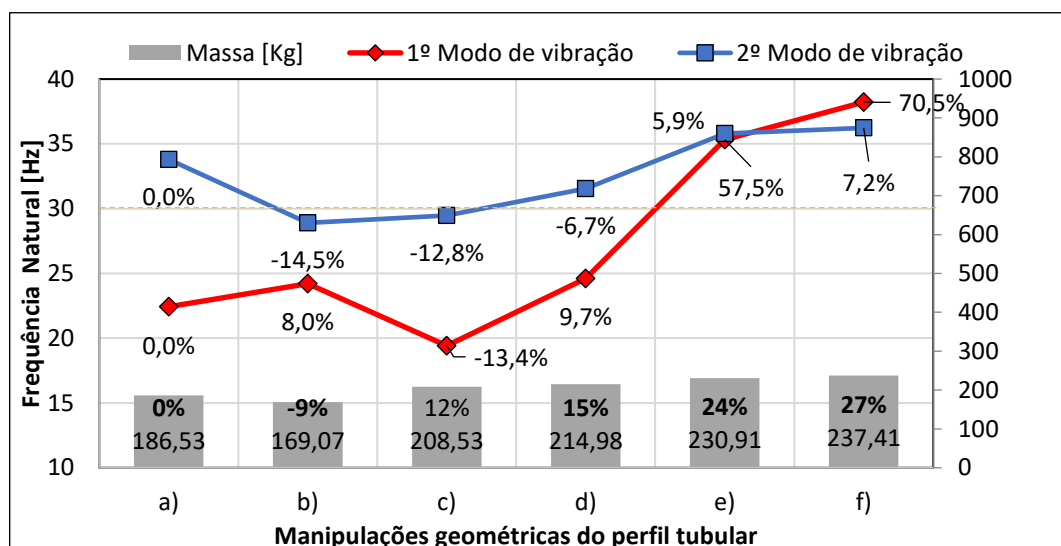


O gráfico em linha vermelha corresponde às frequências naturais do primeiro modo de vibração da estrutura. Já o gráfico em azul, corresponde às frequências do segundo modo de vibração. Observa-se que o aumento da espessura tem produzido um incremento significativo nas frequências de vibração da estrutura. Mas este aumento tem sido suave relacionado ao aumento da massa. Note que os dois modos têm crescido praticamente na mesma proporção. Cabe salientar que esta alteração produz o aumento significativo do peso da estrutura (indicado em valor absoluto e em porcentagem nas barras grises na parte inferior do gráfico).

5.1.3. Alteração da geometria do perfil tubular principal

Os resultados das modificações I) à V) são apresentadas no gráfico da Figura 11 a seguir. Nas ordenadas, estão as 5 alterações partindo da configuração original, apresentada na Fig 8.a), que é considerada como referência. Desta forma é possível avaliar a influência que cada modificação produz nas frequências naturais do primeiro e segundo modo de vibração.

Figura 11 – Variação das frequências naturais em função da alteração geométrica do perfil tubular



Na modificação (b) o aumento da frequência no primeiro modo se deve ao fato de ter o tubo uma restrição maior à torção no apoio B, sendo que agora ele apoia no lado maior do mesmo. Já o segundo modo tem uma diminuição da frequência devido a este modo ser governado pela flexão vertical. Como a modificação implementada diminui a inércia da seção transversal, a rigidez a flexão se torna menor.

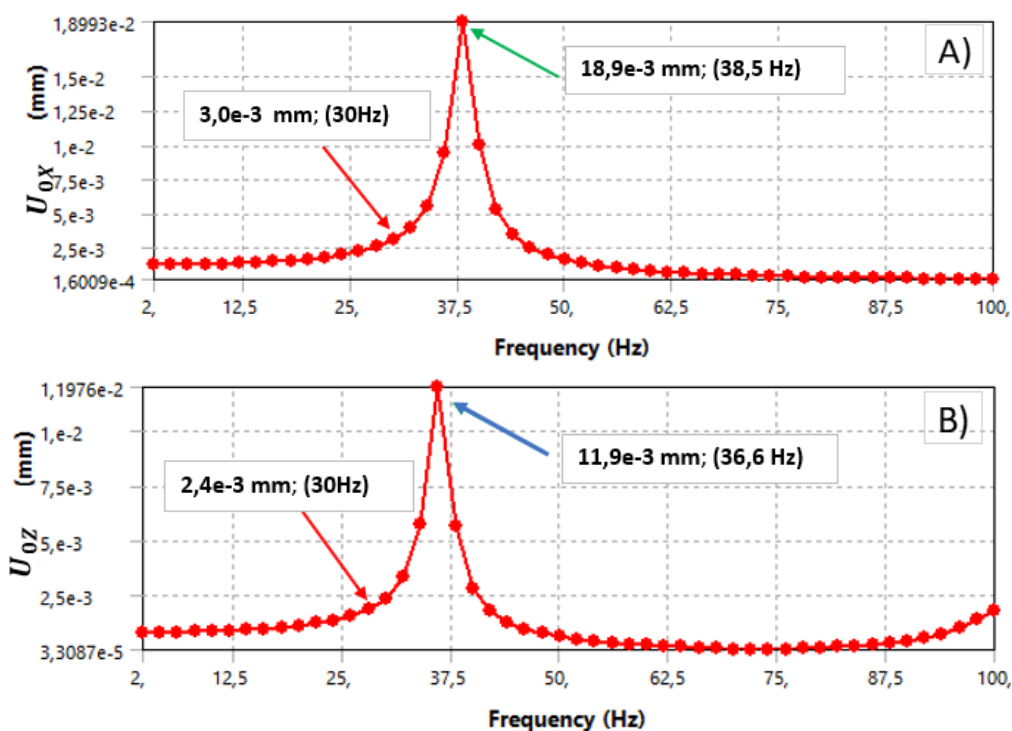
Já a alteração (c) tem mostrado redução da rigidez a torção e um leve aumento da rigidez a flexão vertical em relação ao caso (b), mas não à situação original na configuração (a). O leve aumento em comparação a b) se deve ao fato da soma das espessuras do perfil U com a chapa na região das mesas dobrar a espessura e como consequência, aumentar a rigidez. Ademais, a alteração (d), que tem por objetivo elevar a resistência à flexibilidade da seção transversal do perfil, não se mostrou tão efetiva quando desconsiderada as características de resistência a torção do perfil na região de balanço. Como a utilização da configuração c) do perfil principal resultou em uma queda acentuada da resistência a torção, das nervuras em (d) e o acréscimo do fechamento lateral aplicado em (e) assegurou que a rigidez do perfil tubular à essa deformação fosse elevada, resultando em um aumento em mais de 60% na variação da frequência natural do primeiro modo de vibração em comparação ao caso (c), onde não há nenhuma contenção à torção. Nesse caso, observa-se que os enrijecedores aplicados na configuração 2 da região do apoio B auxiliaram para que as contenções aplicadas em d) fossem efetivas.

Por fim, a contenção em diagonal aplicada em (f) assegurou o aumento da rigidez à flexão do primeiro modo, causando o cruzamento das curvas e consequentemente a inversão do primeiro modo com o segundo. Nesse caso, o primeiro modo passou a resultar em uma flexão pura na direção Z e o segundo modo uma flexo torção X com as duas frequências naturais em torno de 37 Hz e 39 Hz, aproximadamente.

5.2 ANÁLISE HARMÔNICA

A amplitude de resposta ao carregamento periódico aplicado na estrutura pode ser vista a seguir. Os gráficos da Figura 12(a) e 12(b) mostram a amplitude de vibração no domínio da frequência para as direções X e Z, respectivamente.

Figura 12 – Amplitude de resposta num dos extremos do eixo (ver. Fig.2), (a) na direção do eixo global X; (b) na direção do eixo global Z.



Pode-se observar, nesta última figura, que a configuração selecionada permite trabalhar abaixo da primeira frequência de vibração da estrutura, a qual tem a vantagem de não passar por estas frequências naturais no período transiente do acionamento, ou seja, da partida até a velocidade nominal.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho se realizou uma análise dinâmica computacional de uma base de acionamento, propondo várias alterações na estrutura, como também a análise da sensibilidade de resposta de cada alteração, buscando minimizar ao máximo os níveis de vibração com o distanciamento das frequências naturais da frequência de operação. No transcurso do trabalho se pode concluir que:

A calibração realizada comparando o modelo de elementos finitos de casca com um modelo unifilar em termos das três primeiras frequências e modos de vibração associados, tem fornecido resultados consistentes para os fins de desenvolvimento deste estudo.

Para o primeiro ponto analisado na região do apoio B, o estudo paramétrico de várias alternativas para aumentar a rigidez à deformação indicou que as modificações propostas não foram tão eficientes no aumento das duas frequências naturais de vibração da estrutura, quando

aplicadas de forma isolada. Já na região da seção transversal do perfil principal próxima ao apoio B, na qual foram efetuados dois estudos, pode-se chegar as seguintes conclusões:

O primeiro estudo paramétrico de todo o tubo principal, mantendo sua forma original e modificando a espessura das chapas utilizadas, tem produzido uma mudança significativa no incremento das frequências naturais dos dois primeiros modos de vibração, entre 50-60%, afastando as frequências naturais da frequência de operação, mas com um incremento da massa da nova configuração que ultrapassa os 100% de aumento. Já no segundo estudo, observa-se que a configuração do perfil tubular em dois perfis U contrapostos, que permita a utilização de enrijecedores, diminuindo a flexibilidade da seção transversal, foram extremamente eficientes para aumento das frequências naturais, desde que mantida as características de resistência a torção na região em balanço. Além disso, foi possível observar que o estudo paramétrico, visando a identificação de pontos de baixa rigidez, é capaz de mudar drasticamente a resposta dinâmica da estrutura, permitindo, ate nos casos mais críticos, distanciar as frequências naturais das frequências de operação sem agregar massa de forma demasiada.

Conclui-se então, considerando as condições físicas da estrutura analisada, que a utilização de perfis abertos sem as devidas contenções e vinculações nos locais críticos, como por exemplo de perfis C e U em forma de longarina, podem ser um grande problema para casos em que há massas concentradas em balanços com cargas dinâmicas. Uma vez que a baixa rigidez à torção propiciou, neste caso, que o primeiro modo de vibração resultasse em frequências de baixa ordem, podendo ser ativados com menor energia, e que em geral, são os que possuem menor amortecimento e apresentam maiores amplitudes de vibração. Assim, a utilização de geometrias e restrições que visem o aumento da resistência à flexão + torção do perfil principal, em resposta à análise dinâmica, se mostrou efetivo para aumento das frequências naturais e também da redução dos níveis de vibração com base na resposta das amplitudes no domínio da frequência.

Este trabalho contribuiu para o entendimento do comportamento da estrutura frente às diferentes configurações. Modelos físicos de bases de acionamento semelhantes a essa poderão tomar como base as configurações já estudadas neste trabalho para fundamentar outros casos de estudo. Como trabalhos futuros, sugere-se a calibração experimental do modelo numérico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS, INC. **ANSYS Verification Manual**. Ansys Release 9.0. Canonsburg, 2004.

ALVES Filho, A. **Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE / Análise dinâmica** /Avelino Alves Filho. 2. ed, São Paulo, Etica, 2008.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. 2 th ed Pearson Prentice Hall. 2014

BRANCO, C. M.; Fernandes, A. A.; Castro, P. M. S. T. **Fadiga de Estruturas Soldadas**. 2. ed. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1999

CLOUGH, R.W; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 3 th. ed Computers & Structures, Inc. Berkley, CA, USA, University Ave, 1995

FERRO, R. M.; **Análise dinâmica de estruturas de aço suportes de máquinas rotativas (Mestrado em Engenharia de estruturas)**. Vitória, ES, UFES, 2014.

ISO, International Standard Organization. 1940-1. **Mechanical vibration - Balance quality requirements of rigid rotors - Part 1**: Determination of permissible residual unbalance. 1986.

KAMEI, C. M.; FERREIRA, W.G.; SILVA, J.S.; Análise dinâmica de uma estrutura em aço submetida às vibrações provenientes do desbalanceamento de equipamentos mecânicos. Mecânica computacional Vol. XXIX, p. 7353-7365, **Asociación Argentina de Mecânica Computacional**. Buenos Aires, Argentina, 2010. Disponível em:
< <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/3529>>

KAMEI, C. M.; **Análise dinâmica de plataformas industriais submetidas a carregamentos dinâmicos de equipamentos rotativos**. Vitória, ES, UFES, 2010.

MACEDO, L. S.; **Análise modal & Método da superposição modal**, PME 3543 - Estruturas mecânicas e de Veículos, [s. l.], p. 5-24, 2020. Notas de aula. Disponível em:
<<https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=3191225&forceview=1>>. Acesso em 06 de Setembro de 2021.

Manual STRAP **Structural Analysis Program** - Versão 2019, ATIR Engineering Software Ltd.& SAE, 2019.

PETROBRAS – PETRÓLEO BRASILEIRO S.A., N-1848, Rev. C – **Projeto de Fundações de Máquinas**. Rio de Janeiro, Brasil, 2011.

QIU, M.; WANG, D.; WEI, H.; LIANG, X.; YUE, M.; Vibration modal analysis and optimization of the motor base. **MATEC Web of Conferences**, v.175, p. 1-4. Harbin Institute of Technology, Weihai, China, 2018. Available at:
< <https://doi.org/10.1051/mateconf/201817503046> >

RAO, Singiresu S. **Mechanical Vibrations**. 5 th.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010

SAMPAIO, I. O; **Análise dinâmica de base em aço de máquinas rotativas horizontais através do método dos elementos finitos (Mestrado em mecânica computacional)**. Curso de pós graduação em Engenharia de estruturas, Universidade Federal da Bahia, Salvador, BA, 2018.

APÊNDICE A – APRESENTAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS

Fig. A.1 – Condições de contorno do modelo em elementos de viga unifilares.

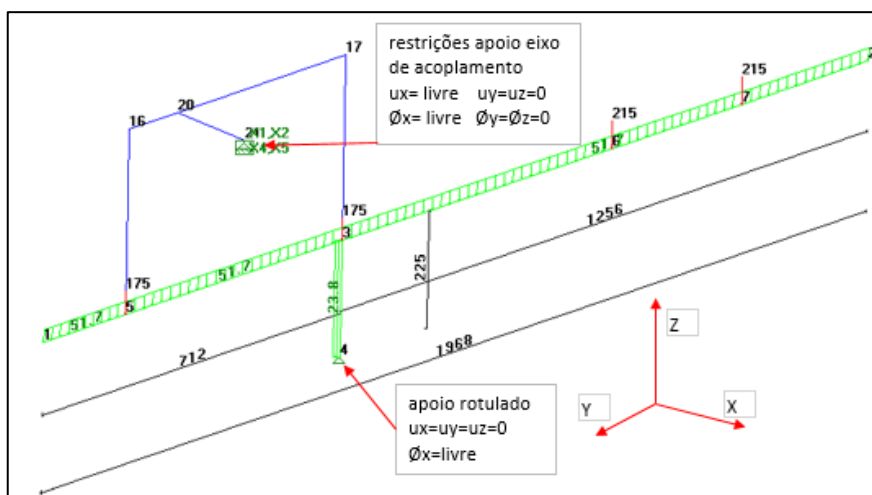


Fig. A.2 – Modelo discretizado em elementos finitos de casca.

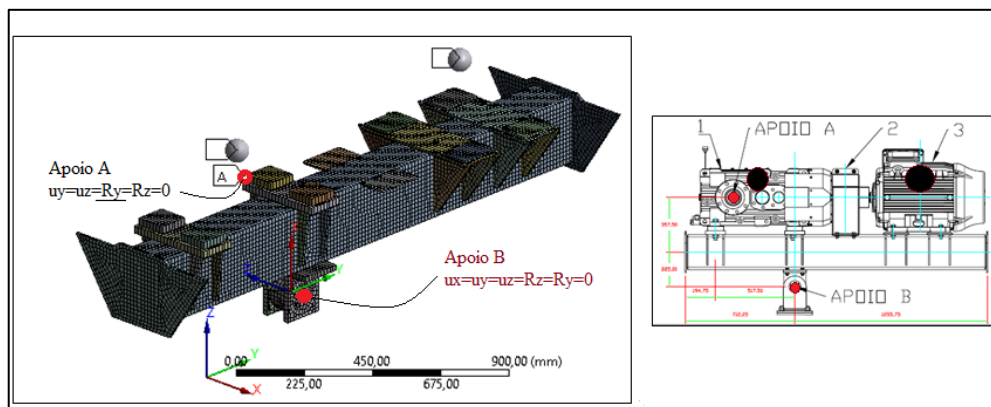
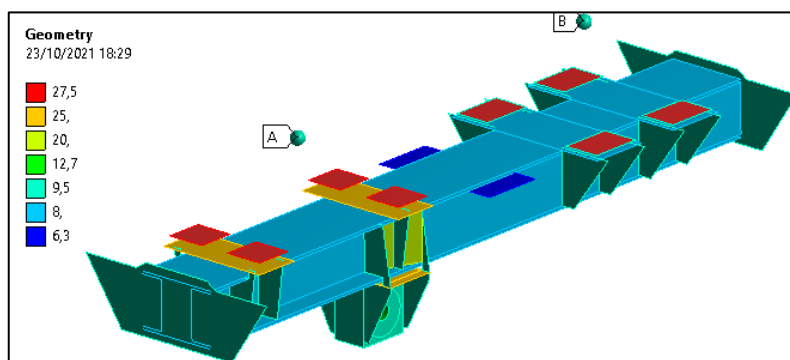


Fig. A.3 – Conceito final da estrutura derivada das modificações apresentadas na Fig.6.



APÊNDICE B – REVISÃO DOS CONCEITOS DE VIBRAÇÕES APLICADOS.

B.1. Frequências naturais:

Após cessar a força que induziu o movimento, a frequência natural é considerada a taxa com que a estrutura irá oscilar livremente. Considerando um sistema massa-mola, sendo a massa e rigidez constantes, tem-se a Equação 5

$$m.\ddot{u} + k.u = 0 \quad (5)$$

Admitindo-se que a solução geral pode ser escrita na forma

$$u(t) = A.\text{sen}(\omega.t) + B.\text{cos}(\omega.t) \quad (6)$$

Partindo das condições iniciais, pode-se encontrar a solução na frequência circular natural como:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7)$$

B.2. Amortecimento:

Conforme mencionado por Alves (2008), todos os sistemas reais apresentam amortecimento no seu comportamento dinâmico. O fator de amortecimento pode ser definido pela relação unidimensional a seguir:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2.m.\omega} \quad (8)$$

Sendo classificados em:

- $\zeta > 1$ (Amortecimento supercrítico) => Não ocorrem vibrações

- $\zeta = 1$ (Amortecimento crítico) => Não ocorrem vibrações

- $\zeta < 1$ (Amortecimento subcrítico) => Ocorrem vibrações

Apesar do amortecimento ser bem pequeno para estruturas em geral $\zeta < 1$. O mesmo tem grande influência na variação da amplificação dinâmica.

B.3. Análise dinâmica:

Este tipo de análise é utilizado para modelar situações sob excitações dinâmicas com respostas também obtidas em função do tempo. Nesse tipo de análise, as forças de inércia e o amortecimento não podem, na maioria dos casos, serem desconsiderados. A equação do movimento para um sistema de 1 GDL pode ser escrita da seguinte forma.

$$m.\ddot{u} + c.\dot{u} + k.u = F(t) \quad (9)$$

De acordo com o princípio de d'Alembert, com base na Equação 9, o equilíbrio dinâmico se dá quando o somatório de todas as forças atuantes no corpo, incluindo as forças externas, de amortecimento e de inércia, são iguais a força elástica da estrutura.

$$F(t) - m.\ddot{u} - c.\dot{u} = k.u \quad (10)$$

$$\sum \text{forças} = k.u \quad (11)$$

Segundo Alves (2008), esse princípio constitui o mesmo da análise estática, porém, considerando que em cada instante do intervalo de solução, na força aplicada são contabilizadas as forças de amortecimento e de inércia. De acordo com RAO (2010), a força harmônica aplicada em um sistema linear pode ser representada pela função complexa da Equação 12.

$$F(t) = F_0 \cdot e^{i\Omega t} \quad (12)$$

Onde $e^{i\Omega t} = \cos(\Omega \cdot t) + i \cdot \sin(\Omega \cdot t)$

Já, a solução particular da equação do movimento, isto é, como a massa se desloca ao longo do tempo ao ser submetida à força senoidal, pode ser representada pela Equação 13.

$$u_p(t) = U \cdot e^{i\Omega t} \quad (13)$$

Derivando duas vezes no tempo e substituindo na Equação 9, temos que o movimento, considerando um amortecimento subcrítico, em resposta à excitação harmônica em regime permanente, pode ser apresentada conforme a solução particular da Equação 14.

$$u_p(t) = \frac{F_0}{[(k-m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2]^{1/2}} \cdot e^{i(\Omega t - \varphi)} \quad (14)$$

Onde:

$$U = \frac{F_0}{[(k-m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2]^{1/2}} \quad (15)$$

$$\varphi = \left(\frac{c\Omega}{k-m\Omega^2} \right) \quad (16)$$

Reescrevendo a Equação 15, da forma absoluta, exprimindo a relação de frequências r , obtemos o fator de amplificação dinâmica.

$$\left| \frac{kU}{F_0} \right| = \chi = \frac{1}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \quad (17)$$

Onde:

$$r = \frac{\Omega}{\omega}$$

Análise Modal: As frequências naturais e os modos de vibração livre são considerados primordiais para obtenção da resposta dinâmica de uma estrutura mediante um agente de excitação externo, pois revelam a tendência que a estrutura tem de vibrar sob um determinado carregamento periódico. Para um sistema de N graus de liberdade, cada grau de liberdade descreverá em cada modo de vibrar um movimento dado pela função horária da Equação 18.

$$U = U_0 \cdot \text{sen}\omega t \quad (18)$$

De acordo com Avelino (2008, p.158), considera-se que todos os pontos nodais do modelo em elementos finitos vibram com a mesma frequência, podendo ser representado pela Equação 19 abaixo.

$$\{U(t)\} = \begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{01}(t) \cdot \text{sen}\omega t \\ U_{02}(t) \cdot \text{sen}\omega t \\ \vdots \\ U_{0n}(t) \cdot \text{sen}\omega t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{01}(t) \\ U_{02}(t) \\ \vdots \\ U_{0n}(t) \end{Bmatrix} \cdot \text{sen}\omega t \quad (19)$$

Derivando duas vezes e no tempo, considerando vibrações livres não amortecidas $\{F(t)\} = 0$ $[C] = 0$, e substituindo na equação do movimento, tem-se:

$$([K] - \omega^2 [M]) \cdot \{U_0\} = 0 \quad (20)$$

Para a solução não trivial da Equação 4, o determinante deve ser nulo. Desta maneira, os N valores serão encontrados para as frequências circulares naturais ω_i , que dependem do número de graus de liberdade do sistema. Como os autovalores ($\lambda_i = \omega_i^2$) associados aos autovetores são linearmente independentes, ou seja, ortogonais entre si, um qualquer autovetor não pode ser obtido por combinação linear dos demais. O autovetor $\{U_0\}_i$ define a forma de vibrar da estrutura com uma frequência natural ω_i .

Método da superposição modal: O método da superposição modal permite o desacoplamento da equação do movimento, sendo efetuado a partir da extração dos modos naturais de vibração e suas respectivas frequências. Como comentado anteriormente, esse método é válido apenas para sistemas lineares. A resposta da estrutura sob um carregamento dinâmico pode ser obtida pela superposição das respostas de cada modo, conforme a Equação 5.

$$\{U\} = \sum_{j=1}^N \{\phi_j\} Y_j \quad (21)$$

Onde N são os modos de vibrar da estrutura. Fazendo a substituição das coordenadas geométricas na equação diferencial do movimento, temos:

$$[M] \cdot \sum_{i=1}^N \{\phi_i\} \ddot{Y}_i + [C] \cdot \sum_{i=1}^N \{\phi_i\} \dot{Y}_i + [K] \cdot \sum_{i=1}^N \{\phi_i\} Y_i = \{F(t)\} \quad (22)$$

Fazendo a pré multiplicação dos N modos, obtemos uma Equação da forma matricial como:

$$[\Phi]^T [M][\Phi] \{\ddot{Y}\} + [\Phi]^T [C][\Phi] \{\dot{Y}\} + [\Phi]^T [K][\Phi] \{Y\} = [\Phi]^T \{F(t)\} \quad (23)$$

Sendo a Equação 8 a rigidez generalizada para o modo i e a Equação 9 a massa generaliza.

$$k_i = [\Phi]^T [K][\Phi] \quad (24)$$

$$m_i = [\Phi]^T [M][\Phi] \quad (25)$$

Desta forma, um sistema de N equações acopladas pode ser reduzido a um sistema de N equações desacopladas de apenas 1GDL, onde as incógnitas serão cada componente do vetor $\{Y\}$, sendo possível encontrar o vetor $\{U\}$.

ANEXO A – REFERENCIAL NORMATIVO.

Fig. A.4 – Grau da qualidade de balanceamento de rotores, ISO 1940-1 (1986).

Grau de qualidade de balanceamento	Excentricidade x frequência, mm/s	Tipo de máquina
G 4000	4000	Dieseis marítimos pesados com numero impar de cilindros
G 1600	1600	Motores de 2 cilindros pesados
G 630	630	Motores de 4 cilindros pesados
G 250	250	Dieseis rápidos com 4 cilindros
G 100	100	Dieseis com 3 ou mais cilindros (carros, caminhões e locomotivas)
G 40	40	Rodas de carros e motores rápidos de 6 ou mais cilindros
G 16	16	Máquinas de moer, máquinas agrícolas
G 6.3	6,3	Partes de máquinas industriais, Turbinas marítimas, cilindros de máquinas de papel, ventiladores, rotores de bombas, rotores Elétricos médios e grandes
G 2.5	2,5	Turbinas a gás e vapor, discos de computadores, turbo-compressores, motores elétricos
G 1	1	Gravadores de fita e toca discos, Motores pequenos
G 0.4	0,4	Giroscópios