Reflexão e Pesquisa na Formação de Professores de Matemática

Ministério da Educação - MEC

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES

Diretoria de Educação a Distância – DED

Universidade Aberta do Brasil – UAB

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Reitor Carlos Alexandre Netto
Vice-Reitor Rui Vicente Oppermann
Pró-Reitor de Pós-Graduação Aldo Bolten Lucion
Secretário de Educação a Distância Sérgio Roberto Kieling Franco
Coordenador da UAB/UFRGS Luis Alberto Segovia Gonzalez

Comitê Editorial da SEAD

Presidente Sérgio Roberto Kieling Franco
Lovois de Andrade Miguel
Mára Lúcia Fernandes Carneiro
Silvestre Novak
Sílvio Luiz Souza Cunha

Apoio em Publicações da SEAD

Deise Mazzarella Goulart
Laura Wunsch
Marleni Nascimento Matte
Michelle Donizeth Euzébio

Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática

Diretor do Instituto de Matemática Rudinei Dias da Cunha
Coordenadora do Curso Maria Alice Gravina
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Revisão Textual

Revisor de Língua Portuguesa Zuleica Oprach de Souza (Evangraf)

Projeto Gráfico

Projeto Gráfico e Diagramação Rafael Marczal de Lima (Evangraf)
Capa Bibiana Carapeços de Lima

Reflexão e Pesquisa na Formação de Professores de Matemática

Organizadores

Vera Clotilde Vanzetto Garcia
Elisabete Zardo Búrigo
Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Maria Alice Gravina

Evangraf
Porto Alegre | 2011

CAPES
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UFRGS SEAD Educação a Distância
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS
ppgemat INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS

1 edição

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

R332 Reflexão e pesquisa na formação de professores de matemática / organizadores Vera Clotilde Vanzetto Garcia … [et al.]- Porto Alegre : Evangraf: UFRGS, 2011.
230 p. : il.

ISBN: 978-85-7727-327-0

1. Matemática - Ensino. 2. Professor - Formação. I.Garcia, Vera Clotilde Vanzetto. II.Búrigo, Elisabete Zardo. III.Basso, Marcus Vinicius de Azevedo. IV. Gravina, Maria Alice.

CDU – 51:37

Elaborada pela Biblioteca Central da
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Este livro traz parte da produção dos alunos/professores do Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática para Educação Básica, apresentando exemplos de diferentes caminhos trilhados na formação de professores pesquisadores e reflexivos, com o uso e para o uso das tecnologias no ensino.

Entendemos "professor pesquisador" como aquele que, no seu cotidiano, mantém uma atitude de questionamento, de investigação e de reflexão, na busca da compreensão e da melhoria dos processos de aprendizagem e desenvolvimento de seus alunos. A "pesquisa do professor" nasce da sua prática e para ela é dirigida, sem pretensões de ser classificada ou avaliada como pesquisa acadêmica.

O professor pesquisador é reflexivo e essa reflexão reveste-se de caráter sistemático, vale-se de contribuições teóricas e deve ser bem organizada por referenciais específicos. Desse modo, a pesquisa pode ir além de interpretações e soluções baseadas exclusivamente no senso comum e, quando publicada, pode servir de importante instrumento aos demais professores, como um exemplo de produção para a sala de aula, fundamentada e experimentada.

Este Curso de Especialização foi planejado para contribuir na formação do professor, incentivando-o a desenvolver essa atitude de pesquisa e de reflexão.

Questionar, investigar e refletir são princípios básicos para propostas de formação que visem obter mudanças na ação docente e na escola. Um caminho para desencadear essas mudanças é a criação de oportunidades e espaços, para o aluno/professor estabelecer relações entre atividades que lhe são propostas, no contexto em que atua como aluno, e o seu próprio trabalho docente, na escola em que atua como professor.

Nesse Curso, o projeto de organização do Trabalho de Conclusão (TCC) teve como objetivo criar essas oportunidades e esses espaços. O aluno-professor produz o TCC, refletindo sobre sua própria prática, planejando e experimentando novas ações didáticas com seus alunos, a partir das vivências proporcionadas no Curso. O TCC é constituído pela pesquisa do professor, produção construída durante o processo de formação.

Essa produção é denominada "engenharia didática", termo tomado emprestado para traduzir uma adaptação do conceito de Engenharia Didática, com origem na Didática das Matemáticas francesa. É um termo com duplo sentido: por um lado, um referencial, uma sequência de etapas, definidas para orientar a pesquisa; por outro lado, o produto obtido. Uma engenharia mostra o esforço do professor para a compreensão do que deve ser mudado e para a elaboração de uma proposta de mudança; e, também, descreve o desenvolvimento dessas propostas, o plano pedagógico, as hipóteses prévias, a sequência didática, a seleção de recursos – sempre incluindo recursos da mídia – o relato da prática, as análises posteriores e a avaliação final.

Neste livro, no Capítulo 2, "**Reflexão e Pesquisa na Formação de Professores de Matemática"**, faz-se a discussão da formação do professor, do modo como foi pensada no plano pedagógico do Curso, e uma revisão bibliográfica da fundamentação teórica, apresentando os conceitos de base: formação contextualizada para o uso das tecnologias, reflexão e pesquisa do professor e engenharia didática.

Os capítulos seguintes são artigos originados de TCCs que foram elaborados em parceria pelo aluno/professor e seu orientador. Tais artigos foram escolhidos com base na relevância do tema; na seriedade do autor em seus estudos; na coerência da proposta de ensino, entre objetivos e ações; e na profundidade das reflexões. São trabalhos diferentes, entre si, implementados em diversas escolas e municípios, com distintos alunos, objetivos e metodologias, e, ainda, com foco em conteúdos variados. No entanto, existe uma linha central que os une: todos os trabalhos partem das inquietações de professores que veem cada vez mais dificuldades em ensinar, já que percebem o aluno distante, desinteressado, com imensas dificuldades para aprender; por isso, todos os artigos trazem expectativas de melhoria no cenário crítico da escola e buscam opções da mídia como recursos. São trabalhos que resultam da problematização e da reflexão do professor sobre sua própria prática, que contêm acertos e erros, sucessos e insucessos, hipóteses validadas e outras não validadas, análise final crítica e ideias para a correção de rumos. Não pretendem oferecer "belas" e definitivas soluções para o ensino deste ou daquele conteúdo, mas, sim, exemplos do esforço do professor em seu papel fundamental, que é buscar possíveis e provisórias soluções.

Pensando na dedicação dos mais de cem alunos/professores do Curso, fazemos questão de apresentar aqueles que contribuíram para este livro, como especiais representantes do grupo.

Os Capítulos de 3 a 6 dizem respeito ao Ensino Fundamental e tratam de números e Geometria, conteúdos centrais neste nível.

O Capítulo 3, intitulado "**O Conceito de Multiplicação, no Primeiro Ano de Escolarização de uma Criança**", relata uma engenharia desenvolvida com 25 alunos do primeiro ano do Ensino Fundamental, na faixa etária de seis e sete anos. Resulta do Trabalho de Conclusão de Curso da Professora Marcia Erondina Dias de Souza, orientada pela Professora Dra. Lucia Helena Marques Carrasco. Marcia tem 27 anos e é professora de séries iniciais há dez anos. Cursou o magistério, na modalidade normal e, por ter uma grande afinidade com a área de matemática, optou pela Licenciatura em Matemática, concluída na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), em 2008. Atualmente, leciona no Centro Municipal de Educação Básica Maria Lygia Andrade Haack, situada na periferia da cidade de Esteio, que atende alunos, em sua grande maioria, em situação de vulnerabilidade social. O trabalho destaca a importância da problematização e da contextualização, no ensino de Matemática, nesta etapa inicial de escolarização: é essencial partir dos conhecimentos que cada criança traz consigo para construir as bases da alfabetização numérica. As autoras também discutem condições de aprendizagem e possibilidades de novas abordagens dos conteúdos em sala de aula.

O Capítulo 4, intitulado "**Ensino de Frações com Ênfase nas Concepções Parte/Todo, Quociente e Medida**", relata uma engenharia desenvolvida com uma turma de 18 alunos, na faixa etária de onze a doze anos, da quinta série do Ensino Fundamental. Resulta do Trabalho de Conclusão de Curso da Professora Helena Massignam Breitenbach, orientada pela Professora Dra. Elisabete Zardo Búrigo. Helena tem 23 anos e é professora licenciada em Matemática pela UFRGS, diplomada em 2007. Leciona, desde 2008, na Escola Municipal Guerino Somavillano, município de Nova Prata. A escola atende, em média, 600 alunos, de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Educação de Jovens e Adultos (EJA). Os alunos que frequentam a escola são filhos de classe média trabalhadora, a grande maioria do bairro Santa Cruz, onde a escola está localizada, e alguns de outros bairros e localidades do interior. Nesse trabalho, as autoras têm como objetivo promover a compreensão da necessidade de um novo tipo de número – a fração – que se apresenta em diferentes contextos e modos. É usual conceber e ensinar fração como uma parte do todo, mas as concepções de fração como quociente e como medida, pouco destacadas, têm grande importância na matemática escolar, no cotidiano e nas mais diversas áreas do conhecimento.

O Capítulo 5, intitulado "**Perímetro e Área: uma engenharia usando composição e decomposição de figuras**", relata uma engenharia desenvolvida com 25 alunos da sexta série do Ensino Fundamental, com idades entre doze e quatorze anos. Resulta do Trabalho de Conclusão de Curso da Professora Grasciele Fabiana Casagrande Centenaro, orientada pelo Professor Dr. Rogério Ricardo Steffenon. Grasciele tem 26 anos e é professora licenciada em Matemática pela UFRGS, diplomada em 2007. Iniciou a vida profissional em 2008 e leciona, desde 2009, na Escola Estadual de Ensino Fundamental William Richard Schisler, em Porto Alegre. A escola atende cerca de 600 estudantes, desde a Educação Infantil até o Ensino Fundamental, e caracteriza-se por seu empenho no resgate da autoestima dos alunos, por meio da integração entre a escola e a família. O trabalho teve o objetivo principal de investigar como os conceitos de perímetro e área de figuras planas podem ser apresentados, de maneira significativa e motivadora, utilizando para isso diferentes recursos, tecnológicos e manipulativos, e trazendo a ideia de composição e decomposição de figuras.

O Capítulo 6, intitulado "**Estudando a Geometria Elementar de Maneira mais Significativa**", relata uma engenharia desenvolvida com 13 alunos, do oitavo ano do Ensino Fundamental, em contexto experimental, extraclasse. Resulta do Trabalho de Conclusão de Curso da Professora Deise Guder, orientada pela Professora Dra. Márcia Rodrigues Notare. Deise tem 28 anos de idade e é licenciada em Matemática, pela Universidade do Vale dos Sinos (UNISINOS – São Leopoldo), diplomada em 2008. Atualmente, nomeada pela rede municipal de Bom Princípio, leciona a disciplina de Matemática para as séries finais do Ensino Fundamental. O objetivo maior desse planejamento foi proporcionar um ensino com aprendizagem mais significativa da Geometria Elementar. As autoras descrevem e avaliam uma sequência didática com o uso do *software* Poly, envolvendo os quatro processos fundamentais para a construção do conhecimento geométrico: percepção, construção, representação e concepção.

Os Capítulos de 7 a 9 dizem respeito ao Ensino Médio e tratam do ensino de Estatística, de Trigonometria e de Geometria.

O Capítulo 7, intitulado "**O Ensino de Procedimentos Estatísticos num Contexto Interdisciplinar**", traz uma engenharia desenvolvida com 20 alunos do primeiro ano do Ensino Médio, na faixa etária de dezessete a vinte e cinco anos, do período noturno. Resulta do Trabalho de Conclusão de Curso da Professora Joseane Gandin Hettwer, orientada pela Professora Dra. Luciana Neves Nunes. Joseane tem 35 anos e é professora licenciada em Matemática pela Universidade de Ijuí (UNIJUI – Campus Santa Rosa), diplomada em 1999. Leciona há 11 anos e trabalha, atualmente, na Escola Estadual de Ensino Médio Dr. Sílvio Ribeiro, no município de Santana do Livramento. A escola está localizada na periferia da cidade e possui 980 alunos, matriculados no Ensino Fundamental, no Ensino Médio e na Educação de Jovens e Adultos. O corpo discente apresenta muitas dificuldades afetivas e cognitivas; além disso, há muitos anos enfrenta problemas de reprovação em massa e de evasão escolar, principalmente no turno da noite, em que dos 90 alunos matriculados apenas 47 frequentavam as aulas, no período dessa experiência. O objetivo da engenharia foi favorecer o início do letramento estatístico, com atividades que fizeram parte de um projeto interdisciplinar para estudos sobre a AIDS, incluindo busca de informações, tratamento estatístico de dados e análise da evolução da doença, em municípios da fronteira sul do Brasil com o Uruguai (Santana do Livramento – Rivera).

O Capítulo 8, intitulado "**A Música Contribuindo para o Ensino da Matemática**", apresenta uma engenharia desenvolvida em contexto experimental, em dois momentos diferentes, envolvendo primeiramente nove alunos do terceiro ano do Ensino Médio e, após correções de rumos, uma nova aplicação com apenas dois alunos voluntários. Resulta do Trabalho de Conclusão de Curso do Professor Fabio Gomes Linck, orientado pela Professora Dra. Vera Clotilde Garcia. Fabio tem 24 anos e é professor licenciado em matemática pela UNISINOS, diplomado em 2007. Obteve experiência profissional participando de estágios no ensino de nível Fundamental e Médio, em cursos preparatórios para o ingresso nas Escolas Militares e em projetos de extensão de universidades da região do município de Santana do Livramento. Sua proposta foi implementada com alunos da Escola Estadual de Ensino Médio Dr. Sílvio Ribeiro, na sala de aula da colega Professora Joseane Gandin. O trabalho teve como objetivo principal o ensino, com aprendizagem significativa, das funções trigonométricas, a partir das relações entre a Música e a Matemática. Os autores estabelecem comparações entre as características do som e das ondas sonoras e as representações gráficas das curvas senoides, utilizando diferentes recursos da mídia.

O Capítulo 9, intitulado **"Ensino de Áreas e Volumes: articulação do mundo físico com objetos geométricos e suas representações",** apresenta uma engenharia com 19 alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Resulta do Trabalho de Conclusão de Curso da Professora Cleuci Andreazza Vuelma, orientada pelos Professores Dr. Vilmar Trevisan e Dra. Vera Clotilde Garcia. Cleuci tem 29 anos, é licenciada pela Universidade de Passo Fundo – UPF, diplomada em 2004. Leciona na Escola Estadual Luiz Isaias Zuchetti, localizada na zona rural do município de Nova Araçá, há cinco anos. A escola acolhe alunos do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos, conta com 392 alunos e 27 professores. O objetivo geral da proposta de ensino, neste trabalho, foi minimizar as dificuldades dos discentes em relação aos conteúdos de áreas e volumes, proporcionando aprendizagem mais significativa, com a articulação do mundo físico com o mundo matemático.

É preciso comentar os três trabalhos que enfocam a Geometria, já que eles têm traços em comum, como a inclusão dos conceitos de perímetro, área e volume; a opção pelo uso de material concreto e pelo uso de *softwares*; e o recurso das ideias de composição e decomposição de figuras e de planificação de sólidos. Contudo, os planos de ensino e as sequências didáticas são singulares, assim como os relatos e as avaliações trazem cenários diferentes. Os autores referem-se a resultados de pesquisas que revelam dificuldades no ensino e na aprendizagem de Geometria, esquecida e pouco valorizada nos programas escolares. Neste livro, as três engenharias que tratam do tema foram escolhidas justamente para enfatizar a importância dessa área da Matemática e da sua inclusão no currículo escolar.

É interessante destacar dois outros pontos, comuns à maioria dos trabalhos. Um deles é o entusiasmo do professor, que compartilha o "brilho dos olhos" do aluno, isso é o que mais compensa no trabalho docente. Os alunos respondem, não apenas às atividades interessantes que foram propostas, mas à dedicação do professor que, ao refletir sobre sua prática, pensa prioritariamente no seu aluno e o envolve na busca da melhoria da sala de aula, incluindo melhorias na interação, na comunicação, na participação e no empenho de todos. Outro ponto em comum é a constatação da precariedade das escolas, com relação aos laboratórios de recursos computacionais que, quando existem, têm poucas máquinas com condições de uso ou são encontrados fechados, o que inviabiliza a proposta de incluir as mídias como recurso para o ensino e para a aprendizagem. Por outro lado, é possível observar nos relatos o esforço da direção, em algumas escolas, reformando, consertando e investindo, ou seja, unindo-se ao entusiasmo de professores e alunos e criando espaços para uso das mídias, adequados para uma salutar mudança nas práticas de ensino.

Eis o principal objetivo deste livro: evidenciar um projeto de formação criado para causar mudanças nas práticas e na cultura escolar.

Capítulo 2

REFLEXÃO E PESQUISA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

VERA CLOTILDE VANZETTO GARCIA

Introdução

Este artigo oferece um panorama dos fundamentos, adotados no projeto do Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática para Educação Básica, visando a formação de professores.

Inicialmente, o projeto do Curso é exposto, norteado pela ideia de proporcionar aos alunos/professores uma formação contextualizada. Após, apresentam-se aportes teóricos a respeito dos conceitos de "professor pesquisador" e de "professor reflexivo", e explica-se a opção pela "engenharia didática" como referencial para a produção docente. Em alguns momentos, podem-se "ouvir" as vozes de alunos/professores, que permitiram a divulgação de seus depoimentos.

> O curso, em linhas gerais, tem contribuído muito para a minha formação e prática docente. Revi conteúdos que há algum tempo não trabalhava em sala de aula, fiz leituras e produções que não estava mais habituada, o que foi muito bom e, principalmente, comecei a

> desenvolver uma postura reflexiva quanto a minha prática. [...] questiono cada vez mais sobre como? Por quê? e de que maneira ensinar determinados conteúdos?(Aluna/Professora Marcia Loureiro – Polo Sapucaia do Sul).

Contextualização: o projeto do Curso

No momento em que o desenvolvimento tecnológico tem efeitos em todas as áreas, causando transformações nos processos de trabalho e de produção e, até mesmo, nos modos de ser e de viver socialmente, diferentes autores (ALMEIDA, 1999, 2000; COSTA, 2004; FREITAS *et al.*, 2005; FIORENTINI; NACARATO, 2005; RICHIT; MALTEMPI, 2005; FIORENTINI, 2008; RICHT, 2010) propõem uma necessária revisão nos papéis da escola e do professor e salientam a importância da educação e do trabalho docente, na formação de um novo profissional, com competências para atuar em um mundo informatizado e globalizado. Richt (2010, p 18) destaca as implicações do crescimento tecnológico no contexto educacional, nas dinâmicas de aprendizagem e nas formas de produzir conhecimento.

> A apropriação do uso pedagógico e social das tecnologias digitais propicia formas distintas de promover a prática docente, modifica os processos de ensino e aprendizagem e, principalmente, torna-se condição essencial à adaptação do professor à nova cultura escolar, que é modificada com a presença desses recursos [...].

Nesse cenário, a formação continuada de professores é tema de especial relevância no plano político e educacional, estando vinculada à qualificação do ensino, à reestruturação social e ao desenvolvimento cultural e econômico. Muitas iniciativas são planejadas e implementadas, no sentido de capacitar os professores para o uso das mídias digitais. As grandes universidades já estão equipadas e agem, nesse sentido, na formação inicial, mas as ações visando à formação continuada, na sua maioria, estão restritas a atividades de pesquisa ou de extensão, desenvolvidas nas capitais e nos centros em que as instituições de ensino superior se localizam, com isso, atingindo poucas pessoas. Existem dificuldades em levar projetos de formação de professores para locais mais longínquos, em um Brasil tão grande; por outro lado, existe o problema de fazer com que novas ideias, resultados de investigações na área de Educação Matemática, cheguem à escola e sejam postas em prática.

Nessa realidade, o Ensino a Distância (EaD) aparece como uma possível solução. Nesse sistema, o Curso de Especialização em Matemática Mídias Digitais e Didática foi desenvolvido no período 2009-2010, promovido pela Universidade Aberta do Brasil e pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, oferecido para professores que atuam na disciplina Matemática, em diferentes locais do Estado. São sete municípios polos[1], centros de atendimento presencial, mas sua penetração vai muito além, pois os alunos/professores fazem parte de uma extensa rede, cobrindo mais de 50 municípios e mais de 100 escolas[2].

O Curso foi criado com o objetivo de promover a atualização dos conhecimentos dos professores de matemática, integrando nisso o uso de mídias digitais[3] na sala de aula, e a implementação de práticas-pedagógicas inovadoras nas escolas, contemplando um papel ativo do aluno no processo de aprendizagem.

Com relação à formação continuada de professores, o fundamento está na ideia de formação contextualizada.

Para Almeida (2000, p. 2), as necessidades de formação emergem do contexto educacional em que desejamos desenvolver "[...] uma cultura profissional que permita ao educador tornar-se um agente de mudança".

Para a autora:

> Questionar, investigar e refletir sempre, eis o princípio e a necessidade a destacar em qualquer proposta de formação contextualizada voltada para a mudança na prática profissional e a construção da mudança na escola. Assim, compreendemos que as atividades educacionais são

---

1 Municípios polos : Sapucaia, Novo Hamburgo, Sapiranga, Vila Flores, Jaguarão, Rosário do Sul e São Sepé.

2 Canoas, Xangrilá, Guaíba, Três Cachoeiras, Paraí, Porto Alegre, Nova Araçá, Arroio Grande, Campo Bom, Pelotas, Dois Irmãos, Esteio, Taquara, Parobé, Soledade, Bom Princípio, Igrejinha, Nova Hartz, Santiago, Alvorada, Cachoeirinha, Nova Prata, Cotiporã, Alegrete, São Jerônimo, Nicolau Vergueiro, Lagoa Vermelha, Uruguaiana, Cacequi e outros.

3 Softwares, planilhas, calculadoras, simuladores, jogos, vídeos, sites interativos e tudo o que se define como TIC (Tecnologia da Informação e Comunicação).

> inseparáveis entre si e comportam a integração entre teoria e prática, formação e ação, formador e formando, ensino e aprendizagem. (ALMEIDA, 2000, p. 3).

Coincidindo com essa ideia, Guérios (2005) relata uma investigação sobre professores que vivenciaram experiências formativas e conclui que não foram as modalidades didáticas ou propostas metodológicas que desencadearam o desenvolvimento profissional, mas, sim, um conjunto de espaços abertos para a ação; o trabalho coletivo e colaborativo; a articulação entre a formação docente e a prática pedagógica; a busca de novos referenciais teóricos e práticos; a aventura de arriscar novas experiências didáticas; e a reflexão permanente e sistemática sobre a prática.

Richt (2010), também, adota o conceito de formação contextualizada, aquela que inclui e valoriza as experiências e dificuldades específicas, enfrentadas no exercício da docência, de modo que o professor encontre oportunidades para repensar sua prática pedagógica, buscando qualificá-la ou modificá-la.

Seguindo essa linha, o currículo do Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática, foi construído em torno de um eixo transversal, constituído pela prática docente. Disciplinas que priorizam práticas pedagógicas reflexivas atravessam o Curso e constituem o Trabalho de Conclusão (TCC); disciplinas finais, de inovação curricular, completam o ciclo de reflexão e enfatizam o papel do professor como agente de mudanças na escola.

O Curso considera "[...] como ponto de partida e de chegada, da formação continuada, a prática docente cotidiana dos professores, convertendo-a em problema e objeto principal de estudo e reflexão" (FIORENTINI; NACARATO, 2005, p. 8). A estrutura curricular inclui oportunidades para que o aluno desenvolva contínua reflexão sobre sua ação docente e sobre os conhecimentos adquiridos – em matemática, em didática e no uso de mídias – relacionando-os, experimentando-os, questionando sua viabilidade e seu potencial. A ideia é formar professores que tomem os problemas da sua própria prática como problema de pesquisa, desenvolvendo aquilo que definimos como "pesquisa do professor" (GARCIA, 2008).

Professor Pesquisador e Reflexivo

É preciso entender o significado dos conceitos de "professor pesquisador", "pesquisa do professor", "professor reflexivo" e "prática pedagógica reflexiva".

A relação entre docência e pesquisa – mais detalhes em Ludke (2001) – foi iniciada na década de 70, com propostas relativas à atividade do professor. A sala de aula poderia ser considerada um laboratório, onde seriam desenvolvidas atividades experimentais e testadas as melhores maneiras de atingir os alunos no processo de ensino/aprendizagem. Na década de 80, Schön (1983; 1987) auxiliou na criação do conceito de "professor reflexivo". A "prática pedagógica reflexiva" é definida como o exame contínuo que o profissional faz da própria prática, valendo-se do conhecimento que possui sobre ela, de tal modo que, no contexto educacional, o conhecimento pedagógico seja composto também por interrogações a respeito dele. A reflexão do professor sobre sua própria prática, seguida pela problematização e não aceitação da realidade cotidiana da escola, é considerada o início do processo de compreensão e de melhoria do ensino.

O processo reflexivo ocorre em ciclos: reflexão prévia, reflexão durante e reflexão após a ação. A reflexão prévia corresponde aos estudos prévios do problema – o que, como e porque ensinar tal conteúdo ou habilidade – e envolve formulação de hipóteses, busca de recursos didáticos e planejamento. A reflexão na ação desenvolve-se quando o professor vai ao encontro do aluno, implementando sua proposta didática. Durante esse processo, o professor pode reformular suas ações, levantar e testar novas hipóteses. Posteriormente, o professor realiza uma reflexão sobre a ação, analisando, avaliando, tentando compreender e reconstruir sua prática, para modificar, mudar rumos e planejar as próximas ações.

A partir da década de 90, o componente da reflexão passou a ser considerado imprescindível para o trabalho e para a formação do bom professor. Foi firmada, também, a ideia da pesquisa associada ao trabalho do professor e do próprio professor como pesquisador. Nos Estados Unidos, Zeichner (1998) defende o exercício de uma pesquisa próxima à realidade do professor que atua em sala de aula, ou na escola, o *practitioner*.

Mais recentemente, no Brasil, a Proposta de Diretrizes para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica em Nível Superior (BRASIL , 2000, p. 45), define "pesquisa do professor", intimamente relacionada com a prática docente, mas, por outro lado, diferente de "pesquisa acadêmica":

> A pesquisa que se desenvolve no âmbito do trabalho do professor não pode ser confundida com pesquisa acadêmica ou científica. Refere-se, antes de mais nada, a uma atitude cotidiana na busca da compreensão dos processos de aprendizagem e desenvolvimento de seus alunos e à autonomia na interpretação da realidade e dos conhecimentos que constituem seus objetos de estudo.

Perez (2005, p. 42) relaciona "pesquisa do professor" com prática e reflexão sobre a prática:

> [...] a chave da competência profissional é a capacidade de equacionar e resolver problemas da prática [...]. É preciso estudo, trabalho, pesquisa para renovar e, sobretudo, reflexão para não ensinar apenas "o que" e "como" lhe foi ensinado.

Nesse espírito entendemos "professor pesquisador" como aquele que explicita as inquietudes que emergem da sua prática, e as toma como problema de pesquisa, procurando soluções, bem fundamentadas, com objetivo de propor e implementar mudanças concretas na sala de aula e/ou na instituição. O professor pesquisador é um professor reflexivo: reflete sobre a sua própria prática pedagógica, passando a buscar subsídios que ajudem a compreender e a enfrentar os problemas e os desafios do trabalho docente; a reflexão reveste-se de caráter sistemático e vale-se de contribuições teóricas que permitem ultrapassar as interpretações e soluções baseadas exclusivamente no senso comum.

Garcia (2008) caracteriza a "pesquisa do professor" como aquela com caráter instrumental e utilitário, o tema diz respeito às inquietudes pessoais no exercício da profissão, é a própria prática, é a própria ação docente. Os objetivos incluem a compreensão do ensino usual e das dificuldades de aprendizagem e desenvolvimento de seus alunos e o conhecimento da realidade, para transformá-la, sempre com um objetivo mais geral que é a melhoria das práticas pedagógicas e a melhoria do ensino na área específica. A produção esperada consiste em relatos de atividades descrevendo o desenvolvimento de processos ou produtos de natureza educacional – propostas curriculares e propostas de ensino, sequências didáticas, recursos pedagógicos e tecnológicos – capazes de terem algum impacto na prática.

No entanto, o professor, em geral, não tem qualquer experiência em pesquisa, por isso a importância de um referencial[4], ou seja, um programa orientador, com etapas bem definidas: que localize o ponto de partida, que traga consigo informações teóricas e indicações para estudos apropriados (outras produções com o mesmo referencial) e que organize tanto a ação didática como sua validação, proporcionando segurança e racionalização no processo.

Engenharia Didática: um referencial para a pesquisa

A Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996; GARCIA, 2005) parte da análise do funcionamento do ensino habitual de um determinado conteúdo, com objetivo de propor uma intervenção que o modifique para melhor. Desenvolve-se a partir da questão geradora: quais são os pontos frágeis do ensino tradicional deste(s) conceito(s) e quais são as opções para modificá-lo e aperfeiçoá-lo?

Uma pesquisa que adote esse referencial percorre quatro etapas: 1) análises prévias; 2) concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas; 3) implementação da experiência; 4) análise *a posteriori* e validação da experiência.

A etapa das análises prévias é estruturada para analisar o funcionamento do ensino habitual de um determinado conteúdo e inclui três dimensões: 1) dimensão epistemológica, associada às características do saber em jogo; 2) dimensão didática, associada às características do funcionamento do sistema de ensino; 3) dimensão cognitiva, associada às características do público ao qual se dirige o ensino.

A análise *a priori* envolve escolhas efetuadas para a intervenção, já que são formuladas hipóteses que serão comparadas com os resultados finais, contribuindo para a validação da Engenharia, que é essencialmente interna.

A Engenharia Didática tem sua fundamentação teórica na Didática das Matemáticas Francesa, sistema de conceitos formulado para a compreensão

---

[4] Foram encontrados os termos “referencial para a pesquisa”, “referencial metodológico”, “proposta metodológica”, “modelo de pesquisa” e “programa de pesquisa”. Escolhemos referencial de pesquisa por considerá-lo um sistema de referência, um trajeto que pode servir de referência para o professor pesquisador novato.

das múltiplas conexões entre teoria e prática. Alguns deles são: campos conceituais, situações didáticas, contrato didático e transposição didática (mais detalhes em Pais (2002)).

Esse referencial contribui para a formação do "professor pesquisador", na medida em que organiza a reflexão em diferentes níveis: o ensino; a aprendizagem; o conteúdo.

O termo "engenharia" tem duplo significado: um referencial, com etapas que sugerem um caminho para reflexão, investigação e construção de uma prática inovadora; e o próprio produto dessa reflexão, ou seja, a sequência didática proposta e a experimentação desenvolvida.

Neste Curso, ocorreu uma adaptação no conceito original de engenharia, restringindo-a a uma tarefa que envolve prática com reflexão, de tal modo que as práticas pedagógicas dos professores/alunos são denominadas "engenharias"[5]. Em particular, o TCC[6] consiste em uma ou mais engenharias.

A prática pedagógica, seguindo as etapas de uma "engenharia didática", contempla os ciclos de reflexão, já descritos. Na escolha e justificativa do tema e nas análises prévias, estão presentes as reflexões anteriores à ação didática, que exigem leituras e buscas teóricas. A reflexão aprofunda-se na concepção de uma proposta de ensino, com formulação de hipóteses a respeito do que é esperado, em termos de conhecimentos, atitudes, habilidades e desempenho dos alunos. O plano de ensino exige reflexão sobre objetivos, ações didáticas, recursos disponíveis e a construção de uma sequência didática. A ação didática é documentada, para ser relatada. A reflexão aula a aula, muitas vezes, exige mudança nos rumos. Ao final, no relato e na análise das hipóteses, é necessário refletir sobre o que foi feito e pensar em mudanças.

Considerações Finais

Este texto apresentou conceitos básicos para a construção do currículo do Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática para Educação Básica, desenvolvido na modalidade EAD, pela UFRGS e pela UAB.

---

5 Com ênfase nas "aspas", para indicar que houve uma adaptação para este contexto.

6 Sobre TCCs, consulte: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/tcc/>. Acesso em: 23 fev. 2011.

O currículo, com eixo nas práticas pedagógicas, situa a formação no contexto da escola e favorece tanto o processo de reflexão sobre a prática como o desenvolvimento de pesquisas baseadas na prática. Engenharia didática, como referencial, auxilia no processo, possibilitando sistematizar as análises do cenário do ensino usual e das dificuldades de aprendizagem e as propostas de ações didáticas alternativas. A prática é o ponto de partida e de chegada para as "engenharias", produzidas com objetivo de qualificá-las ou modificá-las, atendendo anseios dos alunos/professores.

> O tema do curso: Matemática – Mídias Digitais – Didática foi muito bem escolhido, pois a tecnologia é um fato incontestável no mundo atual e os professores precisam aprender a usar estes recursos para tornar as aulas mais produtivas e interessantes. As atividades contextualizadas nos fazem refletir sobre a prática pedagógica, diminuindo a distância entre o conteúdo formal que ensinamos nas escolas e a vida real dos alunos. (Aluna /Professora Mara Rosete Fantinel, Polo Rosário do Sul).

O Trabalho de Conclusão (TCC) é produzido durante o Curso, desde o início, garantindo forte relacionamento interno, das disciplinas entre si e das disciplinas com o próprio TCC. Entre esses trabalhos foram selecionadas algumas engenharias para comporem o presente livro, como exemplo das produções dos alunos/professores que podem ser classificadas como "pesquisa do professor".

> [...] proponho uma reflexão acerca dos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de multiplicação no primeiro ano do Ensino Fundamental. Partindo da descrição e da análise de uma experiência de prática de ensino, fundamentada na metodologia Engenharia Didática, desenvolvida com uma turma de primeiro ano, destaco a importância de que o ensino da matemática, nesta etapa de escolarização, seja problematizado e contextualizado, considerando os conhecimentos que cada criança traz consigo. Também pretendo discutir as condições de aprendizagem das crianças e as possibilidades de novas abordagens dos conteúdos em sala de aula, destacando que a proposição e implementação de mudanças na escola dependem,

> em grande parte, do comprometimento e da atitude de investigação do professor. (Aluna/ Professora Márcia Erondina Dias de Souza, Polo Novo Hamburgo).

O projeto foi desenvolvido pensando-se nas demandas dos professores e da sociedade, em geral, no sentido da necessária introdução e aplicação das mídias na escola e na educação para a cidadania. Para isso, com a modalidade EaD, conseguiu atingir professores dos municípios mais longínquos do interior do Estado do Rio Grande do Sul.

> Penso que (o Curso) é de grande importância para os professores [...] os professores não fazem uso das tecnologias em suas aulas, senti muitos deles acomodados, desestimulados,enfim... o curso é uma grande oportunidade para professores, principalmente os que residem no interior do Estado, estudarem novas formas de desenvolverem o ensino e a aprendizagem em sala de aula.(Aluno/ Professor Fábio Gomes Linck, Polo Rosário do Sul).

Além disso, foram atendidos os anseios dos professores por novos caminhos para a sua prática, por novas possibilidades profissionais e, principalmente, por novos desafios, com potencial para fazer (re)nascer o prazer de aprender e de ensinar.

> [...] com a tecnologia avançando a cada dia não podemos ficar parados no tempo. Os alunos acompanham esta tecnologia e nós devemos nos especializar também para ter um melhor aprendizado, fazendo com que o aluno trabalhe em sala de aula entusiasmado com uma nova estratégia de ensino. (Aluna/Professora Sabrina Carvalho Mota, Polo São Sepé).

Ao final, podemos lembrar três sucessos obtidos com essa proposta de formação continuada: 1) levar atualização nos conteúdos de Matemática e para o ensino de Matemática, introduzindo as mídias na sala de aula dos municípios mais longínquas do interior do Estado do Rio Grande do Sul; 2) atender a demandas dos professores por novos caminhos para a sua prática, por novas possibilidades profissionais e, principalmente, por novos desafios que tenham potencial para trazer de volta o prazer de aprender e de ensinar;

3) favorecer mudanças positivas e necessárias na didática da Matemática, que somente ocorrerá a partir da ação reflexiva do professor e do acolhimento da escola.

> Enfim, o curso me fez refletir sobre a minha prática pedagógica, aperfeiçoou a maneira de ensinar matemática, mostrando-me que é possível trabalhar matemática em sala de aula utilizando recursos de mídia, deixando de lado a forma tradicional de ensinar e assim possibilitando melhor qualidade no processo de ensino. (Aluna/ Professora Rose Grochot Gayeski, Polo Vila Flores).

Referências

ALMEIDA, M. E. **Informática e formação de professores**. Coleção Informática para a Mudança na Educação. MEC/ SEED/ Proinfo – Brasília, 1999. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me003148.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2011.

______. **O conviver e o aprender em uma formação de professores contextualizada.** Projeto Práxis – Rede Telemática para Formação de Educadores: Implantação da Informática na educação e de mudanças nas escolas de países da América Latina, 2000. Disponível em: <http://www.nied.unicamp.br/oea//mat/beth_puc_formacao1.pdf>. Acesso em: 07 fev. 2011.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996. p.193-217.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Proposta de diretrizes para a formação inicial de professores da educação básica em nível superior:** 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/sesu/arquivos/pdf/ ed_basdire. pdf >. Acesso em: 15 jul. 2007.

COSTA, G. L. **O Professor de Matemática e as Tecnologias de Informação e Comunicação**: abrindo caminho para uma nova cultura profissional. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2004. Disponível em: <http://cutter.unicamp.br/document/?code=vtls000321206>. Acesso em: 7 fev. 2011.

FIORENTINI, D. A Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas. **Boletim de Educação Matemática** (BOLEMA), Rio Claro, v. 21, n. 29, p. 43-70, 2008. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1718/1495>. Acesso em: 07 fev. 2011

FIORENTINI, D. ; NACARATO, A. M. **Cultura, Formação e Desenvolvimento Profissional de Professores que ensinam Matemática**: investigando e teorizando sobre a prática. São Paulo: Musa, 2005.

FREITAS, M. T. et al. O desafio de ser Professor de Matemática hoje no Brasil. *In*: FIORENTINI, Dario; NACARATO, Adair Mendes (Org.). **Cultura, Formação e Desenvolvimento Profissional de Professores que ensinam Matemática**: investigando e teorizando sobre a prática. São Paulo: Musa, 2005. p. 89-105.

GARCIA, V. C. Contribuições para a Formação do Professor de Matemática Pesquisador nos Mestrados Profissionalizantes na Área de Ensino. **Boletim de Educação Matemática** (BOLEMA), Rio Claro (SP), ano 21, n. 29, p.199-222, 2008. Disponível em: <http://143.54.226.61/~vclotilde/publicacoes/mar172008revisadoVeraClotilde.pdf> Acesso em: 7 fev. 2011.

______. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike,** Campinas, SP, v. 13, n. 23, p. 85-118, 2005. Disponível em: <http://143.54.226.61/~vclotilde/publicacoes/ENGENHARIA%20ZETEIKE2005.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2011.

GUÉRIOS, E. Espaços Intersticiais na Formação Docente: indicativos para a formação continuada de professores que ensinam matemática. In: FIORENTINI, Dario; NACARATO, Adair Mendes. **Cultura, Formação e Desenvolvimento Profissional de Professores que ensinam Matemática**: investigando e teorizando sobre a prática. São Paulo: Musa, 2005, p.128-151.

LUDKE, M. O professor, seu saber e sua pesquisa. **Educação e Sociedade**, São Paulo, v. 22, n. 74, p. 77-96, 2001. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/es/v22n74/a06v2274.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2011.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PEREZ, G. Prática reflexiva do professor de matemática. In: BICUDO, M. A.; BORBA, M. (Org.) **Educação matemática, pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, 2005. p. 250-263.

RICHIT, A. **Apropriação do conhecimento pedagógico-tecnológico em Matemática e a formação continuada de professores**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/tese%20adriana%20_richit.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2011.

RICHT, A. ; MALTEMPI, M. V. A Formação Profissional Docente e as Mídias Informáticas: Reflexões e Perspectivas. **Boletim do GEPEM**, n. 47. p. 73-90, 2005.

SCHÖN, D. **The Reflective Practitioner:** how professionals think in action. London: Temple Smith, 1983.

______. **Educating the Reflective Practitioner**. San Francisco: Jossey-Bass, 1987.

ZEICHNER, K. Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. In: GERALDI, C.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. (Org.) **Cartografia do trabalho docente:** professor(a)-pesquisador(a). Campinas, SP: Mercado de Letras, 1998. p. 207-236. Disponível em: <http://200.17.236.243:8080/artes/documentos/outros-textos/Para%20alem%20da%20divisao%20entre%20professor-pesquisador%20e%20pesquisador%20academico.pdf/view>. Acesso em: 7 fev. 2011.

Capítulo 3

CONCEITO DE MULTIPLICAÇÃO NO PRIMEIRO ANO DE ESCOLARIZAÇÃO DE UMA CRIANÇA

MÁRCIA ERONDINA DIAS DE SOUZA[1]
LUCIA HELENA MARQUES CARRASCO[2]

Introdução

Neste artigo propomos uma reflexão acerca dos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de multiplicação no primeiro ano do Ensino Fundamental. Partindo da descrição e da análise de uma experiência prática, fundamentada na metodologia Engenharia Didática e desenvolvida com uma turma de primeiro ano, destacamos a importância de que o ensino da matemática, nesta etapa de escolarização, seja problematizado e contextualizado, considerando os conhecimentos que cada criança traz consigo. Também pretendemos discutir as condições de aprendizagem das crianças e as possibilidades de novas abordagens dos conteúdos em sala de aula, destacando que a proposição e implementação de mudanças na escola dependem, em grande parte, do comprometimento e da atitude de investigação do professor.

---

[2] marciaerondina@gmail.com.

[3] luciahmc@mat.ufrgs.br.

Apresentação do Tema e Justificativa

Consideramos que seja possível inventar, experimentar novas soluções e mostrar possibilidades de superação de formas convencionais de atuação, desde que ocorra alguma inquietação ou questionamento do professor.

Desenvolvemos trabalhos com crianças do primeiro ano do Ensino Fundamental e temos preocupação com o processo de alfabetização, visto que o enfoque dado é sempre para o ensino e aprendizagem das letras. Destacamos esse fato porque, nessa etapa, também é grande a quantidade de conceitos matemáticos a serem experienciados pelos alunos. Naturalmente que esses campos teóricos não podem ser tomados isoladamente, pois, como destaca Grossi (2010), nos primeiros anos de escolarização de uma criança é importante que se preserve o lugar de integração entre a matemática e a alfabetização, entendendo a alfabetização como aprendizagem de leitura e escrita na língua materna.

Mais recentemente, no decorrer do Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática para Educação Básica, tivemos a oportunidade de conhecer um pouco da teoria Engenharia Didática, que, segundo Garcia (2008, p. 218), "[...] é adequada para os professores que desejam buscar os caminhos possíveis para melhorar sua prática de ensino num certo conteúdo [...]".

O professor que utiliza a engenharia didática para planejar as ações de sala de aula, realiza continuamente práticas reflexivas na análise do que foi positivo e do que precisa ser reestruturado, para que a aprendizagem de determinado conteúdo realmente aconteça. Assim, o professor inevitavelmente precisa repensar os processos de ensino e de aprendizagem nos quais ele e seus alunos estão envolvidos, avaliando as possibilidades de aprimoramento.

Em 2010, elaboramos uma engenharia didática, com uma turma do primeiro ano do Ensino Fundamental, no Centro Municipal de Educação Básica (CMEB) Maria Lygia Andrade Haack, no município de Esteio. Consideramos a proposta um tanto ousada para o primeiro ano, pois envolvia o ensino de multiplicação, assunto com o qual, geralmente, os alunos começam a ter contato somente no terceiro ano. Iniciamos a abordagem do assunto utilizando um vídeo sensibilizador que tratava de uma situação do cotidiano infantil – festas de aniversário. Nossa intenção, desde o início do trabalho, foi justamente problematizar e contextualizar o uso das operações matemáticas, em particular, da operação de multiplicação.

Pretendemos, no decorrer deste artigo, analisar essa engenharia didática, estabelecendo relações entre essa prática e outras, que consideramos mais mecanizadas e formais e que normalmente são utilizadas nas aulas do ensino básico. Dessa forma, pretendemos sinalizar alguma(s) alternativa(s) para a promoção do ensino e da aprendizagem do conceito de multiplicação durante a primeira etapa de escolarização das crianças.

Reflexões Prévias: ensinando multiplicação no primeiro ano do Ensino Fundamental

As crianças, geralmente com seis anos de idade, chegam à escola com muita energia e vontade de aprender. Trazem consigo uma imensa bagagem de conhecimentos matemáticos do cotidiano, pois suas vivências até então permitiram quantificar e, inclusive, realizar operações matemáticas, mesmo não tendo o conhecimento formal desses conteúdos. Tais experiências são relevantes nos processos iniciais de alfabetização matemática. Assim, destacamos a posição assumida pelos teóricos que, junto ao Ministério de Educação (MEC), apresentam norteadores aos professores da rede pública de educação básica.

> A abordagem da Matemática, nessa fase de escolarização, precisa valorizar, portanto, de forma articulada, a construção do conhecimento matemático, as brincadeiras infantis, os jogos, as experimentações, as histórias infantis, para permitir uma introdução da criança ao pensar matemático, com motivação e sem rupturas. (BRASIL, 2009, p. 26).

Nessa perspectiva, o ensino de matemática prioriza a contextua-lização e, principalmente, a experimentação de situações do cotidiano infantil, como embasamento para a compreensão dos conceitos matemáticos a serem desenvolvidos. Em consequência, as atividades propostas aos alunos colocam em relevância o simbolismo infantil, visando a sua integração aos contextos escolares, num processo de aprendizagem significativa.

É importante considerar a bagagem que o aluno traz consigo das vivências anteriores à escolarização, pois ela contribui para que a criança relacione o mundo com a escola. No entanto, muitas vezes, as práticas escolares não garantem o estabelecimento de relações entre os conteúdos disciplinares e os conhecimentos do cotidiano.

Para refletir sobre o ensino da multiplicação, buscamos como suporte teórico duas teses de doutorado que tratam de conceitos matemáticos trabalhados nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Golbert (2005) observa que para muitos estudantes o insucesso na matemática chega quando começam a estudar a multiplicação. Analisando os dados pesquisados, a autora conclui que ainda hoje estamos muitas vezes ensinando simplesmente o cálculo mecânico, de maneira que o aluno não consegue relacionar esse ensino com situações da sua vida. Sendo assim, as crianças não conseguem sair dos esquemas multiplicativos rudimentares para os esquemas complexos.

No trabalho de Ewbank (2002), aparecem indícios das razões dos alunos não avançarem para esses esquemas complexos. O primeiro dado é que muitos educadores não levam em consideração o nível cognitivo das crianças. O ensino do algoritmo é feito no quadro com a explicação dos professores que, na sua grande maioria, ensinam o processo da multiplicação já como uma soma de parcelas iguais, o que deveria ser deixado como estratégia para o aluno descobrir. Segundo Ewbank (2002, p. 214):

> Os professores concebem a multiplicação como uma simplificação da adição e todas as demais propriedades da mesma são entendidas como estratégias para exercício e variações desta adição reiterada de parcelas iguais. Conhecendo com mais profundidade os procedimentos multiplicativos, têm a possibilidade de compreender as relações lógico-matemáticas que o aluno realiza na tentativa de compreender este conteúdo.

Nesses dois trabalhos, nas considerações finais, as autoras trazem uma grande contribuição para o ensino da matemática ao proporem que possibilitemos (nós professores) aos alunos a experiência dos significados da multiplicação, mostrando as diferenças entre multiplicandos e multiplicadores, priorizando a manipulação de situações do cotidiano e permitindo que os alunos confrontem seus resultados.

Pensando nas possibilidades de ensino e de aprendizagem do conceito de multiplicação e considerando a curta experiência que tivemos com alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental, conversamos com colegas da escola acerca das metodologias utilizadas para abordar os processos multiplicativos e também acerca das principais dificuldades dos alunos nesse campo teórico.

Segundo os relatos, inicia-se o ensino da multiplicação através da formação de conjuntos, utilizando material de contagem (geralmente explora-se as unidades do material dourado) e fazendo a associação com a adição. Após essa construção apresenta-se o algoritmo da tabuada, para somente então propor aos alunos a resolução de situações-problema. Quanto às dificuldades apontadas, foi destacado que os alunos demoram a entender o processo de repetir "tantas vezes" uma determinada coisa (indicada por quantidade específica) e, em fase posterior, que é difícil para eles utilizarem o algoritmo ou a tabuada na resolução de problemas. Além disso, foi pontuado por uma professora que muitos alunos não têm construído o valor posicional do número, pois é comum, na hora de utilizar o algoritmo da multiplicação, eles escreverem a unidade no lugar da dezena.

Também conversamos com alguns alunos da quinta série sobre o domínio da multiplicação. Alguns disseram "não entender as contas", outros ainda falaram que não sabiam "o que fazer com os números da tabuada".

Partimos para análise de alguns livros didáticos, procurando identificar as possibilidades de ensino desse conteúdo. Sendo o livro didático uma das principais fontes de pesquisa do professor, é importante investigar de que forma os autores apresentam o conteúdo e que tipo de atividades propõem aos alunos.

Escolhemos três livros didáticos para o segundo ano do Ensino Fundamental, antiga primeira série, visando a fazer uma análise de como os autores iniciam a abordagem do conteúdo Multiplicação com Números Naturais. A seguir apresentamos uma síntese desse estudo:

1) Luiz Roberto Dante. Matemática 1 – Vivência & Construção. São Paulo: Editora Ática, 2001.

O Capítulo 9 deste livro é dedicado ao ensino da Multiplicação. Apresenta situações que possibilitam ao aluno construir o pensamento da multiplicação, fazendo a relação de muitos para um; desenvolve o conceito da multiplicação como uma adição de parcelas iguais; inicia a construção da tabuada do número 2 com o conceito de dobro, e a do número 3 com o conceito de triplo; e, logo depois, faz a construção da tabuada dos números 4 e 5. Propõe alguns problemas para os alunos resolverem.

2) Ana Lúcia Bordeaux; Cléa Rubinstein; Elizabeth França; Elizabeth Ogliari e Vânia Miguel; Alfabetização Matemática – 2º Ano – Coleção Novo Bem – Me – Quer. São Paulo: Editora do Brasil, 2008.

O título do Capítulo 10 deste livro é Multiplicação: ideia de adição de parcelas iguais. As autoras iniciam o trabalho com um exemplo de uma situação problema, logo a seguir apresentam um algoritmo de adição de parcelas iguais. Utilizam desenhos para ilustrar e somente depois da ideia fixada é que mostram o algoritmo da multiplicação como sendo uma equivalência de operações. Na sequência deste capítulo, as autoras desenvolvem o conceito da multiplicação como organização retangular, utilizando a mesma sistemática anterior e, na continuação do trabalho, constroem as tabuadas dos números 2, 3, 4 e 5 e desenvolvem o conceito de dobro e triplo.

3) Daniela Padovan; Isabel Cristina Guerra e Ivonildes Milan. Projeto Prosa – Matemática – 2º Ano. São Paulo: Editora Saraiva, 2008.

As autoras desenvolvem o conteúdo de adição com várias parcelas, estimulando o uso do cálculo mental. Enfatizam a construção do número através de situações do cotidiano e priorizam o trabalho com jogos e situações-problemas, mas apenas envolvendo as operações de soma e de subtração. Como, neste volume, elas não abordam a multiplicação, analisamos o livro do terceiro ano, das mesmas autoras. Continuam a construção iniciada no ano anterior, sempre dando ênfase à construção do conhecimento. Dedicam o último capítulo do livro aos conceitos de multiplicação e de divisão, apresentando uma situação para as crianças contarem a quantidade de pessoas que estão brincando em cada brinquedo do parque de diversão. Aqui entra a situação de contar de 1 em 1, de 2 em 2, e assim por diante. Logo após, mostram que isso é multiplicação, apresentam todas as tabuadas e ainda trazem alguns relatos de crianças fazendo observações relacionadas a esse processo.

De modo geral, a análise acabou reforçando a hipótese de que a abordagem utilizada por autores de livros didáticos segue uma metodologia que não facilita a evolução do aluno em seus esquemas multiplicativos[3], ou seja, abordam, quase que exclusivamente, a multiplicação como soma de parcelas iguais.

Projeto Pedagógico para Ensinar Multiplicação

Descreveremos aqui a engenharia didática desenvolvida no período de 11 a 15 de julho de 2010, compreendendo um total de dez horas/aula, em uma escola situada na periferia da cidade de Esteio, com 25 crianças de seis a sete anos, sendo que menos de 25% dos alunos frequentaram a Educação Infantil. Exploramos o conceito da multiplicação através de situações relacionadas a um vídeo infantil.

Com a intenção de sensibilizar as crianças para o trabalho, escolhemos a história "O Aniversário do Arthur", *software* produzido pela Broderbond[4], chamado de Livro Vivo, pois tem a configuração de um livro e os personagens têm "vida". Esse *software* foi apresentado às crianças como um vídeo e, no texto, muitas vezes, é assim referido: o vídeo do Aniversário do Arthur.

O objetivo nessa engenharia foi a construção (pelos alunos) do conceito de multiplicação por meio de uma abordagem lúdica, em que eram apresentadas situações-problemas envolvendo os personagens da história, que podiam ser resolvidas prioritariamente com o uso de material concreto.

Permitir que o aluno experiencie[5] os conceitos contribui para a aprendizagem das crianças e, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), para as séries iniciais, temos que:

> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte

---

[3] Os "Esquemas multiplicativos" estão sendo entendidos segundo a classificação apresentada por Golbert (2005), relativa às etapas do pensamento da criança: esquema de sequências numéricas, esquema de unidades compostas, esquema pré-multiplicativo e esquema multiplicativo.

[5] O software "O Aniversário do Arthur" pode ser adquirido em livrarias e/ou pela internet.

[6] Experiência será entendida, ao longo do texto, como "[...] arrancar o sujeito de si próprio, de fazer com que não seja mais ele próprio ou que seja levado a seu aniquilamento ou à sua dissolução. É uma empreitada de dessubjetivação" (FOUCAULT, 2010, p. 291).

> de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos. (BRASIL, 1997, p. 33).

Escolhemos este vídeo por trazer uma história com desenho animado e também porque festa de aniversário é um assunto de que toda criança de seis anos gosta. Além disso, vislumbramos a possibilidade de abordar, a partir da situação retratada, a operação matemática de multiplicação, permitindo o estudo de um conteúdo que raramente é falado no primeiro ano do Ensino Fundamental e, principalmente, contribuindo para a elaboração do raciocínio lógico.

A seguir apresentamos o projeto pedagógico de ensino que consiste no planejamento de uma proposta a ser executada em sala de aula, com características problematizadoras e (inter)disciplinares.

Nesse plano de ensino procuramos desenvolver uma abordagem interdisciplinar do conceito de multiplicação, ou seja, focalizamos a integração da matemática com as demais áreas de conhecimento, sempre tendo em vista as particularidades do desenvolvimento infantil. Nesse sentido, nos ocorreu a ideia de iniciar o estudo com uma história (filme), como uma maneira lúdica e integrada de tratar o assunto.

Pensamos em propor uma maneira diferente para ensinar a multiplicação, pois, conforme já foi dito, na maioria das vezes, esse conteúdo é ensinado como soma de parcelas iguais. Para Golbert (2005), significa ignorar o poderoso algoritmo das crianças, ou seja, ir direto ao algoritmo padrão, numa estratégia que pode criar descontinuidade entre os procedimentos e os conceitos da criança. Portanto, o objetivo principal, neste projeto pedagógico, consistiu em possibilitar aos alunos a compreensão do conceito de multiplicação, de modo que eles pudessem resolver problemas, partindo de procedimentos não formais (sem uso do algoritmo convencional), nos quais o total de agrupamentos com uma mesma quantidade de elementos estivesse indicado.

No Quadro a seguir apresentamos a sequência didática que foi utilizada para desenvolver esse projeto.

Quadro 1: Sequência didática para o ensino da Multiplicação

Objetivo	Atividades	Estratégias e recursos
1º) Relatar a história, fazendo menção a detalhes e a todos os personagens envolvidos.	Assistir vídeo. Listar todos os personagens do vídeo.	Vídeo: O Aniversário do Arthur. Registro em cartaz, tendo a Professora como a escriba da turma.
2º) Introduzir discussão sobre o conceito da multiplicação, utilizando uma situação-problema concreta.	Quantos doces serão necessários a vovó do Arthur fazer, se cada convidado comer: • 1 docinho? • 2 docinhos? • 3 docinhos?	Confeccionar com a turma massinha de modelar caseira, para então fazer os doces. Dramatizar algumas das situações propostas com a turma.
3º) Solucionar situações-problema contextualizadas e apropriadas para a faixa etária dos alunos.	Fazer, em todas as atividades propostas nesta etapa, o registro escrito, para, no final, tentarmos uma generalização do procedimento matemático utilizado.	Propor situações para serem resolvidas em pequenos grupos e depois discutir as respostas no grande grupo. Depois dessa etapa de atividades coletivas, propor algumas situações para serem resolvidas individualmente e depois discutir as respostas.
4º) Utilizar o conceito construído para resolver situações similares, também contextualizadas.	Propor aos alunos situações-problema diferentes da situação inicial, nas quais seja necessário utilizar os conceitos da multiplicação, de forma concreta ou através de representações pictóricas	Atividades individuais, registradas através de desenhos, para logo após debatermos no grande grupo as possíveis soluções.

Fonte: Elaborado pelas autoras

Relato da Prática

Após cada prática, elaboramos um breve relato das experiências vivenciadas em sala de aula, transcrito a seguir.

No primeiro momento, assistimos ao vídeo em sala de aula, utilizando o projetor (*data-show*) como recurso. Os alunos se envolveram na história do Aniversário do Arthur e, depois de assistirmos ao filme, conseguiram contar a história, listando os principais personagens, inclusive fazendo associações com situações ocorridas no cotidiano. Um aluno disse, por exemplo, *"[...] essa história é como o meu aniversário, a festa vai ser na casa da ..., e todos vão cantar parabéns para eu e ela juntos"*. Outro aluno reforçou dizendo que isso também aconteceu quando ele e o tio assopraram as velas do bolo juntos, pois os dois estavam de aniversário. Depois da escrita da história, os alunos desenharam o aniversário do Artur.

No segundo momento, quando fizeram a massinha de modelar caseira, foi colocada a quantidade de farinha (oito copos) e depois questionamos a turma acerca de quanto se deveria colocar de sal, considerando que na receita constava que é a metade da farinha. Um aluno disse que se 4 + 4 é 8, então, a metade é quatro copos, os demais alunos não conseguiram chegar a essa conclusão tão rapidamente. Todos fizeram o registro dessas quantidades, mas alguns ainda não conseguiam organizar a escrita na folha.

Depois da produção dos docinhos, feitos com a massinha, solicitamos que cada grupo de alunos contasse quantos doces fizeram. A quantidade variou porque alguns grupos fizeram doces grandes e outros fizeram doces pequenos. Nesse momento, foi possível observar a dificuldade de alguns alunos em trabalhar com números maiores do que 30. Um aluno dizia que tinha 25 doces e o outro (de grupo diferente) contrapôs dizendo que era impossível, pois ele já tinha contado até 50 e não tinha contado todos. Perguntamos aos alunos como poderíamos solucionar esse problema e qual número era maior. O aluno que contara 50 docinhos rapidamente disse que o 50 era maior, o outro disse que já não estava entendendo mais esses números.

Fizemos a contagem da quantidade total de docinhos produzidos por cada grupo. Foi demorado, mas os alunos ficaram atentos e acompanharam a contagem. Anotamos esses dados em uma tabela, no quadro, e, no final, os alunos queriam saber quantos doces tinha ao todo na sala, então somamos todas essas quantidades.

Quadro 2: Quantidade de doces

Grupo	Quantidade de Doces
Grupo 1	120
Grupo 2	59
Grupo 3	121
Grupo 4	159
Grupo 5	78
Grupo 6	183
Total	720

Fonte: Elaborado pela Prof[a]. Márcia Erondina de Souza

Distribuímos para os grupos bandejas de aniversário com o desenho e o nome de cada amigo do Artur, para que eles colocassem um doce para cada convidado. Perguntei quantos doces foram necessários. Somente um aluno conseguiu dizer a resposta certa. Então pedimos para ele explicar aos colegas como tinha feito, ele disse que contou todos os doces juntos. Fomos aumentando a quantidade para dois, três, até cinco, e registrando, em um cartaz, os valores para três e cinco doces.

Como as crianças não conseguiram compreender a noção de "ao todo", passamos de grupo em grupo, auxiliando a fazerem a contagem total dos doces. Levamos uma tarde de aula nessa atividade. Para finalizar, solicitamos que fizessem o desenho dos pratos com os doces dentro. Alguns fizeram a correspondência de muitos para um, mas somente o aluno que expressou, desde o início das atividades, total clareza e compreensão do processo conseguiu sistematizar as quantidades corretamente, inclusive escrevendo os números em cada conjunto. Quando questionado sobre o que significavam os números escritos, ele disse: *"Tenho sete convidados e três doces para cada, então preciso de 21 doces ao todo, e aqui tenho sete convidados e cinco doces para cada, então preciso de 35 doces ao todo".*

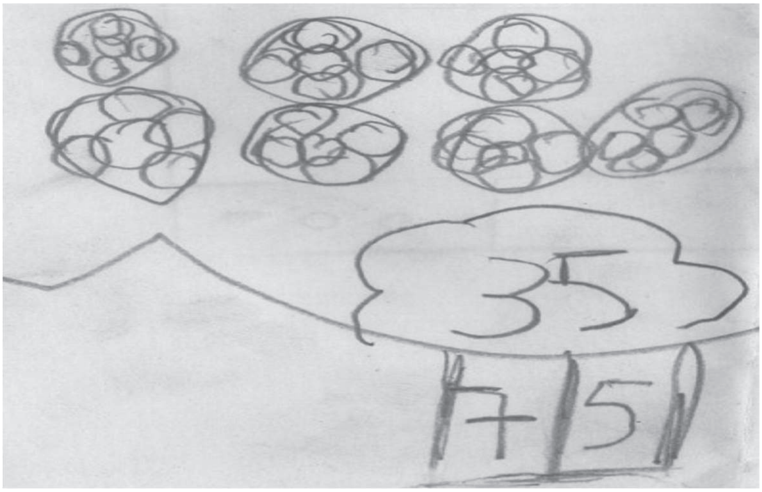


Figura 1: Representação das quantidades
Fonte: Aluno A, 1ª série, (2010)

No terceiro momento apresentamos uma situação-problema que continha a proposta de calcular a quantidade de doces necessária para o seu próprio grupo. Então, cada aluno escreveu o nome dos colegas do grupo na sua folha e fez os desenhos das quantidades solicitadas, calculando o total de doces. Nessa atividade, foi possível discutir com os alunos os diferentes resultados, pois tínhamos grupos com quantidades diferentes de alunos. Quando questionados a respeito do porquê de um grupo precisar de menos doces do que o outro, as repostas foram imediatas, *"porque lá tem menos crianças do que aqui"*.

No quarto momento, propusemos aos alunos a seguinte situação-problema: qual a quantidade de balões necessária, se quatro amigos do Arthur levassem um balão, dois, três ou quatro balões, cada um. Os alunos discutiram a atividade em grupo, mas responderam individualmente. Aproveitamos para fazer, em cada grupo, perguntas do tipo: quando cada amigo levou um balão, quantos balões foram necessários? E quando cada um levou dois? Em todos os grupos, os alunos conseguiram responder corretamente. A maioria deles demonstrou estar fazendo a associação de muitos para um corretamente. Fizeram a representação das quantidades através de desenhos e escreveram o número correspondente ao total das quantidades. Novamente surgiu a dificuldade, já mencionada, relativa à escrita de números grandes (nesse caso, maiores do que 9). Os alunos contavam corretamente a quantidade, mas não conseguiam escrever esses números, por não terem aprendido isso anteriormente.

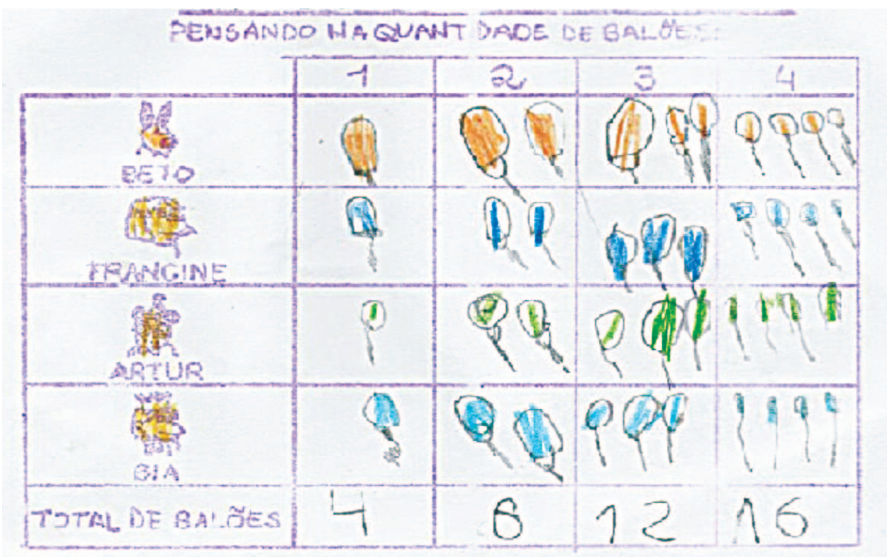


Figura 2: Atividade dos balões
Fonte: Aluno B, 1ª série, (2010)

Análise das Hipóteses Previamente Formuladas

A partir do trabalho desenvolvido e dos registros obtidos, foi possível analisar as hipóteses que, segundo a metodologia da engenharia didática, foram elaboradas antes da realização das atividades. Da mesma forma, a metodologia propõe que seja investigado se as estratégias escolhidas estavam adequadas aos objetivos da proposta ou se ainda precisavam ser melhoradas. Para realização dessa etapa do trabalho utilizamos como instrumentos de análise da prática de ensino os registros de trabalhos dos alunos; as fotos obtidas durante a realização das atividades em sala de aula; as anotações, após cada aula, relativas aos principais fatos ocorridos; os registros de falas dos alunos que evidenciassem o envolvimento com as atividades propostas, em particular, o modo como ocorria a construção do conceito da multiplicação.

Das hipóteses formuladas inicialmente, foi possível validar a de que os alunos demonstrariam interesse e entusiasmo em realizar as atividades propostas, participando e contribuindo para o que o processo de aprendizagem realmente fosse significativo, pois, mesmo que as atividades desenvolvidas durassem toda tarde, os alunos participavam e empolgavam-se com elas. Também validamos a hipótese de que os alunos iriam conservar as informações trabalhadas em uma aula, aplicando-as, quando necessário, às aulas seguintes. De fato, verificamos isso, por exemplo, através dos registros dos alunos, quando solicitamos que contassem a história do Aniversário e relatassem o que tínhamos feito na aula anterior com as massinhas de modelar.

Outra hipótese referia-se às possíveis dificuldades dos alunos em contar e fazer o registro de números maiores do que 20, mas sem que isso afetasse a construção do conceito da multiplicação. Como verificamos em algumas situações já relatadas, isso, de fato, ocorreu. Destacamos a conversa entre os dois meninos acerca de qual quantidade era maior (25 ou 50) e a atividade de escrever a quantidade de balões, exemplificada na Figura 2. Em ambas as situações, a dificuldade de lidar com números grandes não impediu os alunos de pensarem e argumentarem a respeito de "muitos" doces ou balões, assim como, de fazerem relações de muitos para um. Como podemos ver na figura a seguir, eles não se intimidavam diante de muitos elementos, mesmo não sabendo escrever o número correspondente.

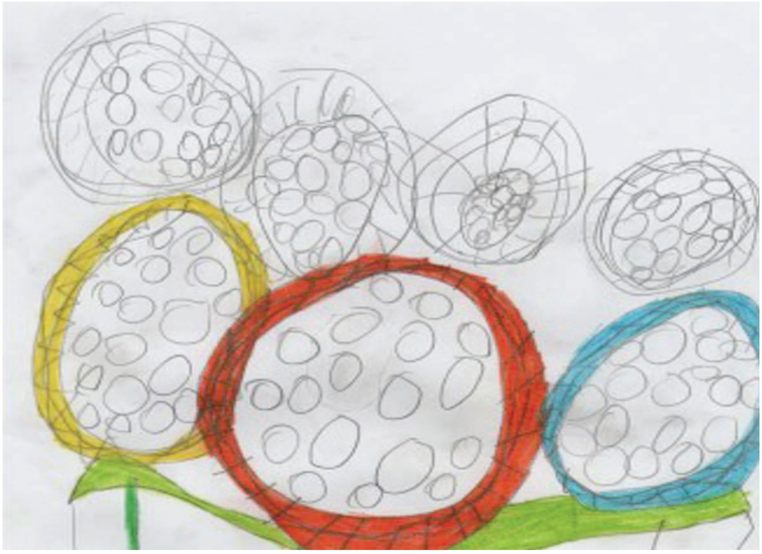


Figura 3: Atividade de representação de quantidades
Fonte: Aluno C, 1ª série, (2010)

Avaliando a hipótese de que as atividades planejadas conduziriam à aquisição do conceito da multiplicação, pudemos observar que somente dois alunos conseguiram expressar claramente a ideia de multiplicação. Por outro lado, a relação de "muitos para um", importante para a compreensão desse conceito, foi significativa para a maioria, por exemplo, todos tiveram facilidade de fazer a associação de quatro doces para cada aluno.

Por último, com relação à hipótese de que as atividades propostas provocariam os alunos a fazerem questionamentos sobre as operações matemáticas envolvidas, avaliamos que ela não foi validada, pois ao tentar provocá-los a falar sobre o assunto, questionando-os com relação ao que estávamos estudando, respondiam que estávamos "aprendendo a ler". Suponho que isso decorra do fato de que nessa idade as crianças chegam à escola com a expectativa de aprender a ler. Outros alunos respondiam que estávamos "aprendendo os números". Como no primeiro ano não diferenciamos as disciplinas escolares, acreditamos que esses alunos não tenham trabalhado anteriormente com nenhuma sistematização das operações matemáticas. Além disso, eles não problematizam suas atividades no sentido de questionar o campo das operações matemáticas, porque sempre foram estimulados à leitura dos símbolos, entendendo essa leitura como simples decodificação.

Assim, refletimos, a partir dessa experiência pedagógica, que o plano de ensino precisaria ser reformulado em alguns aspectos, para corresponder aos objetivos iniciais. Como diz Golbert (2005), para que os alunos possam construir e evoluir nos esquemas multiplicativos é necessário terem desenvolvido alguns outros esquemas matemáticos. Nesse sentido, consideramos que a proposta estaria mais ajustada aos alunos do segundo e do terceiro ano do Ensino Fundamental, apesar da grande aceitação expressa pelos nossos alunos e das aprendizagens realizadas com sucesso. Particularmente, destacamos a dificuldade das crianças em expressarem, ainda que na linguagem oral, a operação matemática que estava sendo utilizada. Por outro lado, entendemos que a organização de abordagens teóricas, no primeiro ano, que envolvam números maiores do que 10, auxiliaria na ampliação do campo numérico e, consequentemente, na compreensão de novos conceitos.

Reflexões Posteriores: a experiência de ensinar multiplicação

São longos anos de trabalho com crianças de séries iniciais, nos quais tivemos a oportunidade de estar em constante reflexão sobre a prática em sala de aula. Particularmente, desenvolvemos essa engenharia didática, relativa ao processo de ensino da multiplicação, utilizando como recurso didático o *software* (vídeo) “O aniversário do Arthur”, com a intenção de pensar outras formas de abordagem desse conteúdo.

Para elaborar o plano de ensino sobre a multiplicação foi necessário estudar como os alunos aprendem esse conteúdo e, como destacamos anteriormente, encontramos apoio nos trabalhos de Golbert e de Ewbank. Ambos os estudos teóricos apresentam relações com a prática de sala de aula, quando apontam a maneira de ensinar a multiplicação como uma soma de parcelas iguais. Segundo Golbert (2005), isso não auxilia o aluno a evoluir nos esquemas multiplicativos mas, ainda assim, muitos professores ensinam a multiplicação exclusivamente por esse caminho. Outro aspecto importante, ressaltado pelas autoras, é a possibilidade de fazer a relação da teoria com a prática, exemplificada pela construção do conceito de “muitos para um”, o que contribui para que o aluno compreenda o processo da multiplicação.

Esse conceito de “muitos para um” pode ser trabalhado desde a Educação Infantil. Kamii (1990) alerta que as crianças estimuladas a desenvolver pensamento crítico e autonomia aprendem mais do que as crianças solicitadas a atingir as competências mínimas, dentro dos padrões escolares. E, como o que esperamos dos alunos é que aprendam, cada vez mais torna-se necessária a elaboração de estratégias que vão além desses critérios mínimos.

Apoiadas nessa abordagem entendemos que os alunos participantes da engenharia didática descrita conseguiram desenvolver a noção de multiplicação, mesmo que não tenham se apropriado do algoritmo correspondente. Essa prática de ensino possibilitou a utilização de um *software* ("O Aniversário do Arthur") que em momento algum abordava a multiplicação, mas foi base para iniciar a discussão com os alunos sobre o assunto. Foi possível identificar mudanças positivas. Os alunos evoluíram em seus pensamentos lógico-matemáticos e ampliaram a noção de número, tudo de uma maneira contextualizada e dinâmica.

Com essa experiência, também reforçamos a ideia de que uma proposta para ensinar multiplicação no primeiro ano do Ensino Fundamental, bem como tantos outros conteúdos de matemática, deve possibilitar que as crianças se integrem a uma situação significativa e que explorem objetos concretos, sempre com a finalidade de criarem suas próprias estratégias para organizar e expressar o pensamento.

Aprofundando o Estudo: contextualização e problematização no ensino da matemática

Já vem de muitos anos a discussão sobre o ensino da matemática em todas as modalidades de ensino. No texto de apresentação da matemática, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), consta uma observação relevante acerca desse tema:

> O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à sua aprendizagem. (BRASIL,1997, p. 15).

De modo geral, os professores reconhecem a importância da matemática na vida de seus alunos, apesar de muitas vezes não conseguirem fazer com que essa matéria tenha o devido significado para eles, quando ensinam.

É necessário, portanto, fazer uma reflexão acerca dos fatores que prejudicam os processos de ensino e de aprendizagem do conhecimento matemático. Da mesma forma, é importante avançar na direção de outras possibilidades para o ensino ou, quem sabe, retomar algo do passado, que esteja em desuso atualmente, mas que ainda possa contribuir.

No entanto, pensar em mudanças na escola representa provocação e inquietação para a maioria dos professores, pois isso nos desloca de um patamar de detentor do saber, para outro, no qual cresce a exigência de estudo, de planejamento e, principalmente, de experiência e vivência de situações novas.

Antes de entrar em contato com a matemática formal da escola, as crianças já a utilizam, em situações bem concretas. Os PCNs apontam isso: "Os alunos trazem para a escola conhecimentos, idéias e intuições, construídos através das experiências que vivenciam em seu grupo sociocultural". (BRASIL, 1997, p. 30).

O ensino de matemática pode proporcionar diversas situações aos alunos, nas quais seja possível problematizar e contextualizar o uso dos conceitos matemáticos no cotidiano. Um ensino com esses propósitos, apesar de demandar grande esforço, abre espaço para a experimentação e para a busca de conhecimento e isso, sem dúvida, vale para alunos e professores. Provocando à vivência da experiência, Carrasco (2010, p. 132) destaca a dificuldade de tal empreendimento:

> Apesar do fascínio que possa causar o convite à experiência, ainda assim é preciso que se reconheça o quanto é difícil vivê-la numa sociedade como a nossa, na qual dispositivos de assujeitamento proliferam intensamente.

Assim, os professores precisariam empenhar o máximo de esforços para que os alunos pudessem vivenciar experiências, visto estarmos inseridos em uma sociedade que favorece, cada vez mais, que as pessoas deixem de ser sujeitos de sua própria história.

Na escola, podemos começar a vivenciar a experiência e a busca do conhecimento por meio de situações contextualizadas, de modo que os alunos consigam fazer a relação entre o conteúdo em estudo e o contexto de aplicação. Como diz Silva (2010, p. 4) sobre a contextualização da matemática:

> A aprendizagem contextualizada preconizada pelos PCN's visa que o aluno aprenda a mobilizar competências para solucionar problemas com contextos apropriados, de maneira a ser capaz de transferir essa capacidade de resolução de problemas para os contextos do mundo social e, especialmente, do mundo produtivo. Em matemática, a contextualização é um instrumento bastante útil, desde que interpretada numa abordagem mais ampla e não empregada de modo artificial e forçado, e que não se restrinja apenas ao cotidiano do aluno.

O significado da palavra contexto no português é "[...] conjunto, o todo ou totalidade, argumento, assunto"(FERREIRA, 2009, p. 536) . Então contextualizar o ensino da matemática é trabalhar envolvendo a totalidade, argumentando e buscando procedimentos para solucionar as questões colocadas.

Dessa forma, é possível problematizar situações com os alunos, criando um espaço de argumentação e discussão, transformando os processos de ensino e de aprendizagem em experiências, com significado e sentido para esses alunos.

Problema é uma "[...] questão não resolvida e que é objeto de discussão em qualquer domínio do conhecimento" (FERREIRA, 2009, p. 1633) . Por isso, a problematização no ensino da matemática supõe o acréscimo de um leque de possibilidades para a que a aprendizagem ocorra.

Possibilitar a vivência da experiência nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática exige do professor um planejamento coeso, mas jamais fechado ou restrito a um campo apenas matemático. É necessário buscar alternativas diferenciadas para desenvolver assuntos a serem estudados. E, a cada aula, replanejar a próxima ação, considerando as problemáticas e as possibilidades que surgiram.

Para auxiliar suas ações em sala de aula, o professor pode usar diversos recursos, pois não existe uma única maneira de ensinar. Os PCNs trazem estas contribuições sobre o ensino da matemática:

> É consensual a idéia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer

> diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. (BRASIL, 1997, p. 42).

A utilização de diferentes recursos possibilita novas abordagens dos conteúdos, ampliando as perspectivas para que os processos de ensino e de aprendizagem sejam bem-sucedidos, ou seja, para que os alunos realmente aprendam, compreendam e façam a relação da matemática da escola com a matemática da vida.

Os recursos didáticos são fundamentais no ensino da matemática, mas no primeiro ano do Ensino Fundamental, essa importância é ampliada, porque nessa faixa etária o lúdico, os desafios e as descobertas são elementos que estão intensamente presentes nas e com as crianças. O material publicado pelo Ministério da Educação (MEC) sobre o uso de acervos complementares (livros de histórias infantis) na sala de aula diz que:

> O uso de recursos didáticos oferece contextos em que conceitos e procedimentos matemáticos podem ser explorados. Alguns dos recursos, como os materiais didáticos de manipulação, oferecem "concretizações" que permitem o aluno realizar, na realidade, os procedimentos matemáticos. (BRASIL, 2009, p. 24).

No primeiro ano as crianças chegam à escola com diferentes bagagens de conhecimento, pois passaram por diversas experiências em suas vidas, em que foi necessário utilizar alguns conceitos matemáticos, embora ainda que de formas rudimentares, sem o formalismo que costumamos usar na escola. Por não estarem ainda "enquadradas" nos padrões escolares e por utilizarem a matemática em situações contextualizadas e problematizadas, acabam por experimentar coisas que, na sua grande maioria, contribuem para o início da elaboração do pensamento lógico matemático.

Nessa etapa escolar os professores (nós) podem(os) considerar e utilizar essas informações que os alunos trazem consigo. Essa é uma das considerações que o MEC faz, no manual de obras complementares:

> Nos anos iniciais de escolarização, a escola assume o papel de introduzir a criança em outra instituição, diferente da família, e fazer o elo entre a sua cultura e a cultura escolar. Nesse contexto, os conhecimentos sociais e extraescolares assumem, portanto, papel importante. A

> abordagem da Matemática, nessa fase de escolarização, precisa valorizar, portanto, de forma articulada, a construção do conhecimento matemático, as brincadeiras infantis, os jogos, as experimentações, as histórias infantis, para permitir uma introdução da criança ao pensar matemático, com motivação e sem rupturas. (BRASIL, 2009, p. 24).

Pensar um trabalho sem rupturas bruscas para as crianças de seis anos tem sido uma das nossas principais preocupações. E, com a oportunidade de elaborar essa engenharia didática, buscamos uma abordagem diferente das usuais, visando conduzir as crianças a pensarem em termos de agrupamentos multiplicativos, a partir de experiências que se assemelhassem às vivenciadas por elas. Kamii (1990, p. 118) evidencia que:

> [...] os educadores da educação pré-primária frequentemente definem seus objetivos dizendo que as crianças devem aprender os chamados "conceitos", tais como os de números, letras, cores, formas geométricas, em cima, embaixo, entre, da esquerda para a direita, mais comprido, [...] primeiro, segundo e terceiro, etc. Eu me oponho a esta maneira de definir objetivos porque conduz o professor a ensinar uma palavra desconexa depois da outra, em vez de encorajar as crianças a construírem o conhecimento em relação com o que já conhecem.

Assim, tentamos oportunizar aos alunos a compreensão de um determinado campo teórico, permitindo que eles realmente tivessem uma experiência e não ficassem apenas centrados no conteúdo. O fato de permitir essas vivências aos alunos tornou possível perceber que as crianças aos seis anos, de maneira implícita, se dão conta de objetos matemáticos que normalmente não são explorados em práticas escolares. Sem dúvida, a metodologia na qual fundamentamos nossa prática nos conduziu a ações didáticas bem planejadas e a objetivos bem definidos, de modo que grande esforço foi despendido na tentativa de propor situações de aprendizagem em que os alunos realmente compreendessem os conceitos estudados e avançassem de maneira consistente na direção da sistematização do conhecimento.

Vale ressaltar, ainda, que, em matemática, é discutível a ideia de que os conteúdos devem ser abordados de forma linear, em função da sua complexidade e da faixa etária do aluno. Nesse sentido, trazemos a contribuição de Lara (2005, p. 33) com a afirmação de que "[...] acreditar que conceitos matemáticos só poderão ser abordados mediante a chegada do aluno a determinado estágio de desenvolvimento cognitivo é um erro sério".

Com relação ao ensino da multiplicação nos anos iniciais do Ensino Fundamental, Lara (2005, p. 17) diz que:

> É preciso compreendermos que toda a construção das relações lógicas elementares ocorre principalmente na Educação Infantil e Séries Iniciais. Os esquemas de pensamento que estão envolvidos nas estruturas aditivas e multiplicativas já podem ser desenvolvidas desde a Educação Infantil. E, quando não bem construídos, causam efeitos muito sérios na aprendizagem não só de outros conceitos matemáticos, como também de outras áreas do conhecimento.

Utilizando esse princípio, elaboramos a sequência didática com a finalidade de oportunizar aos alunos o contato com as estruturas multiplicativas, ou seja, permitindo aos educandos a vivência do conceito de agrupamentos: muitos elementos para um. E, esse conceito, a maioria das crianças conseguiu elaborar.

O ensino de matemática, principalmente nos anos iniciais, poderia ser tratado, pelo professor, a partir deste enfoque – priorizar a contextualização e a problematização –, gerando possibilidades aos alunos de viverem experiências de aprendizagem que, no mínimo, se diferenciem das informações e mecanizações próprias das práticas escolares. Carrasco (1999, p. 87) diz que:

> Nosso compromisso, na escola, é promover condições para o desenvolvimento intelectual do aluno, ajudando-o a estabelecer relações lógico-matemáticas e a construir conceitos e, em muitas situações, fornecendo informações sobre conhecimentos estruturados, segundo convenções ou outras regras formais.

Assim, fica, para nós, professores, a proposta de oferecer aos alunos um ensino de matemática caracterizado por vivências ricas e desafiadoras que promovam a ampliação de suas aprendizagens e que os provoquem a superar seus próprios limites.

Considerações Finais

Neste trabalho desencadeamos muitas reflexões acerca dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, algumas abrangendo todas as etapas escolares e outras relacionadas com o desenvolvimento da engenharia didática, mais restritas ao primeiro ano do Ensino Fundamental.

Com relação à etapa de escolarização aqui ressaltada, gostaríamos ainda de alertar para o fato de os professores, de modo geral, enfatizarem o processo de alfabetização, deixando de abordar o conhecimento matemático com a relevância devida. Como diz Lara (2005, p. 31):

> Procuro mostrar que a maior importância dada à Leitura e à Escrita, tanto na Educação Infantil como na 1ª série, deixando a Matemática em segundo plano, deve ser repensada urgentemente. Isso porque os objetivos da Matemática desde a Educação Infantil são pré-requisitos essenciais para o desenvolvimento de qualquer pensamento analítico, dedutivo e geométrico e o não desenvolvimento de determinadas relações matemáticas podem ocasionar sérios problemas de aprendizagem em outras disciplinas.

Isso mostra que a matemática aprendida nos anos iniciais tem uma importância imensa em todo processo de desenvolvimento intelectual de uma pessoa. Dorneles (2008, p. 45) afirma que:

> Sabe-se que, a longo prazo, o sucesso da aprendizagem e do desenvolvimento das crianças requer experiências de qualidade durante os primeiros anos de escolarização, além de um ensino fortemente voltado para a aprendizagem de conceitos e processos matemáticos com compreensão.

Para que possamos contribuir no processo de aprendizagem, temos que estar sempre refletindo acerca do processo de ensino, ou seja, sobre o nosso planejamento. Aqui não podemos deixar de referenciar Paulo Freire (1996), quando ele fala sobre a importância da reflexão sobre a prática, entendendo que é a partir dessa reflexão "crítica" que poderá ocorrer a melhoria da próxima prática. E, com certeza, uma experiência de ensino fundamentada na Engenharia Didática propicia essa constante reflexão, justamente porque essa metodologia visa orientar os professores na proposição de novas abordagens para os conteúdos escolares, incluindo os princípios da análise, da avaliação e da reformulação da prática.

Na finalização deste trabalho, reforçamos o importante lugar e/ou papel que o ensino da matemática ocupa/representa, nos anos inicias, em todo o processo de desenvolvimento dos alunos. Assim, é urgente que os professores dessas etapas escolares tomem consciência da extraordinária importância que seu trabalho tem na formação dos alunos.

Referências

BORDEAUX. A. L. et al. **Alfabetização Matemática** – 2º ano. São Paulo: Editora do Brasil, Coleção Novo Bem-Me-Quer, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Secretaria de Educação Básica. **Acervos complementares:** as áreas do conhecimento nos dois primeiros anos do Ensino Fundamental/Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC/SEB, 2009.

CARRASCO, L. H. M. Matemática nas séries iniciais. **Teoria & Fazeres**: Caminhos da Educação Popular, Gravataí, v. 4, p. 85-90, 1999.

______ **Dizer e experienciar o ser/estar professor na formação inicial de professores de matemática**. Porto Alegre, 2010. 200 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Porto Alegre, 2010.

DANTE. L. R. **Matemática 1**: vivência & construção. São Paulo: Editora Ática, 2001.

DORNELES, B. V. Dificuldades em Matemática. **Pátio Revista Pedagógica**, Porto Alegre, n. 48, p.44-46, trimestral, nov. 2008.

EWBANK. M. S. **O ensino da multiplicação para crianças e adultos**: conceitos, princípios e metodologias – Tese (Doutorado) – Unicamp, 2002. Disponível em: <http://cutter.unicamp.br/document/?code=vtls000257433>. Acesso em: 3 dez. 2010.

FERREIRA, A. B. H. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa.** 4. ed. Curitiba: Positivo, 2009.

FOUCAULT, M. Conversa com Michel Foucault. In:______. **Repensar a Política**. Organização e seleção de textos Manoel Barros da Motta. Tradução Ana Lúcia Paranhos Pessoa. 1. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, p. 289-347, 2010. (Ditos & Escritos VI).

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessário à prática educativa. 8. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GARCIA. V. C. Contribuições para a Formação do Professor de Matemática Pesquisador nos Mestrados Profissionalizantes na Área de Ensino. **Bolema**, Rio Claro (SP), ano 21, n. 29, p. 199-222, 2008.

GOLBERT, C. S. **Esquemas multiplicativos: as origens da multiplicação em alunos do Ensino Fundamental**. 2005. 279 f. Tese (Doutorado) – Departamento de Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/5001>. Acesso em: 10 jan. 2011.

GROSSI, E. P. **Didática dos níveis pré-silábicos**. 10. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2010.

KAMII, C. **A criança e o número**: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos. 32. ed. Campinas: Papirus, 1990.

LARA, I. C. M. **Jogando com a matemática na Educação Infantil e Séries Inicias.** São Paulo: Editora Rêspel, 2005.

PADOVAN, D. ; GUERRA, I. C. ; MILAN, I. **Projeto Prosa – Matemática –** 2º ano. São Paulo: Editora Saraiva, 2008.

______. **Projeto Prosa – Matemática –** 3º ano. São Paulo: Editora Saraiva, 2008.

SILVA, V. B. **A contextualização da matemática no ensino das quatro operações fundamentais**. 2010. Disponível em: <http://www.webartigos.com/articles/48493/1/A-CONTEXTUALIZACAO-DA-MATEMATICA-NO-ENSINO-DAS-QUATRO-OPERACOES-FUNDAMENTAIS/pagina1>. Acesso em: 6 dez. 2010.

Capítulo 4

ENSINO DE FRAÇÕES COM ÊNFASE NAS CONCEPÇÕES PARTE/TODO, QUOCIENTE E MEDIDA

HELENA MASSIGNAM BREITENBACH[1]
ELISABETE ZARDO BÚRIGO[2]

Introdução

Este trabalho apresenta o relato e a discussão da implementação de uma proposta de ensino de frações que teve como objetivo promover a compreensão, pelos alunos, da necessidade desse novo tipo de número e de seus diferentes significados.

A escolha do tema foi motivada pela importância das frações na matemática escolar, no cotidiano e nas mais diversas áreas do conhecimento, e pela constatação da dificuldade dos alunos em aceitá-las e compreendê-las como números, mesmo depois de tê-las estudado, no quinto ou sexto ano do Ensino Fundamental. Estamos nos referindo às frações como representações de números racionais (positivos) na forma a/b, sendo a e b números naturais, e b diferente de zero. Dentre os vários significados que as frações podem assumir, e que são mencionados na literatura que trata do tema, escolhemos priorizar, na proposta de ensino

[1] professora.helena@yahoo.com.br .

[2] elisabete.burigo@ufrgs.br .

aqui apresentada, as concepções de fração como relação parte/todo, quociente e medida.

A metodologia adotada na construção e na avaliação da proposta de ensino é inspirada na ideia de Engenharia Didática, construída no âmbito da Didática da Matemática francesa. Inicialmente, identificamos alguns traços do ensino usual das frações e dificuldades enfrentadas no seu processo de ensino-aprendizagem. A partir dessa avaliação, planejamos e implementamos uma sequência didática, com o objetivo de contribuir para a melhoria do ensino do tema. A sequência foi desenvolvida com uma turma de 18 alunos da quinta série do Ensino Fundamental da Escola Municipal Guerino Somavilla, de Nova Prata, Rio Grande do Sul. Construímos, antes da implementação da prática, um conjunto de hipóteses sobre os conhecimentos prévios e as aprendizagens dos alunos; analisando a prática, a partir dos registros coletados, reexaminamos as hipóteses previamente formuladas e concluímos pela validação da maioria delas.

A Importância e as Dificuldades no Ensino-Aprendizagem das Frações

A importância do ensino-aprendizagem das frações deve ser situada no campo mais amplo do estudo dos números racionais e de suas representações. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), a construção do conceito de número racional pressupõe uma organização do ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações (BRASIL, 1998). Devem ser apresentadas aos alunos situações-problemas cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão, medida) e de suas representações, fracionária e decimal.

Na nossa cultura, a representação decimal dos números racionais é mais frequente e familiar do que a representação fracionária. Usamos, em geral, números decimais para expressar comprimentos, áreas, volumes, massas e capacidades: o próprio sistema métrico, adotado para a quantificação dessas grandezas, foi criado na França, no final do Século XVIII, já tendo em vista o uso do sistema decimal (EVES, 2004). A notação decimal também é utilizada no nosso sistema monetário, e até mesmo para medir o tempo usamos décimos e centésimos quando queremos nos referir a partes de um segundo. Representações decimais estão presentes nos mostradores de bombas de combustível e, nas balanças eletrônicas, os números decimais substituíram as frações que antes eram frequentes nas balanças analógicas.

As frações ainda estão presentes em muitas situações do cotidiano, como, por exemplo, em receitas culinárias, nos visores dos mostradores de combustível dos automóveis, nos quóruns estabelecidos para votações em regimentos de diversos níveis, em situações de partilha de bens, em cálculos de indenizações, entre outras. Também usamos frações na expressão de medidas em polegadas e em outras unidades do chamado Sistema Inglês de Medidas.

No entanto, a importância das frações não advém apenas, ou sobretudo, de seu uso no cotidiano. A compreensão das frações é fundamental na construção do raciocínio proporcional, que por sua vez é crucial para o desenvolvimento do pensamento geométrico, algébrico, funcional e das noções de probabilidade, taxa de variação, razão de semelhança, entre muitas outras. Além disso, as frações estão presentes nos mais antigos documentos matemáticos e também em grande parte dos conteúdos relacionados na grade curricular das séries finais do Ensino Fundamental. A capacidade de lidar com as frações aumenta a capacidade dos alunos de entender e manusear uma série de problemas e situações dentro e fora da escola.

Antes do início dos estudos, em um primeiro momento, já era possível identificar, na nossa própria experiência[3] nas escolas do município de Nova Prata, algumas dificuldades dos alunos com esse tema. Percebemos que muitos leem as frações como dois números naturais, sem estabelecer relações entre eles, e optam pelo numerador ou pelo denominador para comparar sua grandeza. Ao usar frações para representar partes de uma figura, empregam um tipo de procedimento de dupla contagem (contar o total de partes em que a figura foi dividida e depois contar as partes pintadas), sem considerar o tamanho dessas partes. Acreditamos que, em geral, os alunos usam a linguagem das frações sem entendê-la:

> [...] o ensino de fração pela apresentação de "todos" divididos em "partes" onde algumas destas são diferenciadas das demais, encoraja os alunos a

[3] Estamos nos referindo à experiência docente da Prof[a]. Helena Breitenbach nas escolas de Nova Prata.

> empregar um tipo de procedimento de dupla contagem (contar o total de partes e depois contar as partes pintadas) sem entender o significado desse novo tipo de número. (SILVA, 1997, p. 5).

Dessa forma, a simples contagem de partes leva à linguagem correta para indicar a fração, em situações cujas figuras são divididas em partes exatamente iguais, sem que o aluno interprete, necessariamente, a fração como uma relação entre a parte e o inteiro, enquanto unidade. Essas dificuldades, também mencionadas por autores como Nunes e Bryant (1997), indicam que muitos alunos não entendem as frações como expressões de quantidades. Segundo Lopes (2008, p. 7): “Os professores deveriam ter atenção para as complexidades que envolvem conceito tão delicado. Os obstáculos à aprendizagem são muitos e de várias naturezas”.

Para estudar em detalhe as principais dificuldades de aprendizagem dos alunos, aplicamos um questionário em alunos da escola, já citada, local dessa prática. Esses alunos frequentavam, naquele momento, a sexta série, e já haviam estudado o conteúdo no ano anterior, quando frequentavam a quinta série. Comentamos aqui as questões em que pudemos notar as maiores dificuldades.

A primeira questão solicitava que os alunos calculassem 1/5 de 15, 2/3 de 9, 3/4 de 20... Poucos alunos souberam resolver essa questão. Dos 19 alunos que responderam o questionário, oito erraram e cinco deixaram a questão em branco; acreditamos que não a resolveram pelo fato de não apresentar nenhum desenho que pudesse ajudá-los.

Na terceira questão, foram apresentadas três figuras, como mostrado a seguir, para que os alunos identificassem as frações associadas a cada caso.

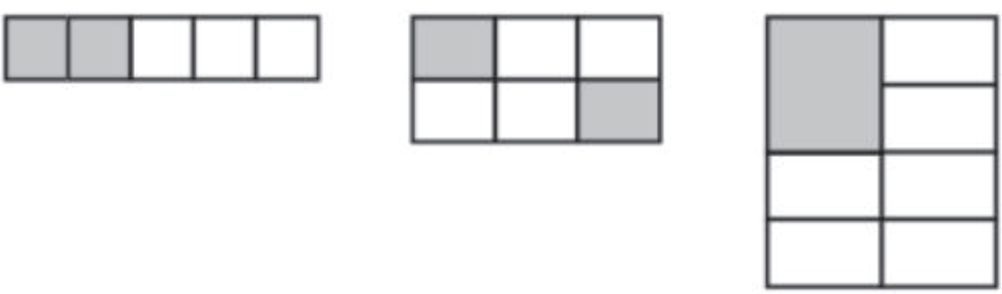


Figura 1: Figuras apresentadas na terceira questão do questionário
Fonte: Elaborada pela Prof. Helena Breitenbach

Os alunos deram respostas corretas para os dois primeiros retângulos, mas, no terceiro retângulo, dez alunos – mais de metade da turma – respondeu 1/7, outros cinco responderam 2/8 e quatro deles responderam 1/4. Eles acertaram as frações associadas aos dois primeiros retângulos porque esses retângulos já estavam divididos em partes iguais. Enquanto no último retângulo a maioria não se deu conta da necessidade da divisão em partes de mesmo tamanho, provavelmente porque, até então, haviam recebido todas as figuras divididas em partes iguais – não havia necessidade de raciocinar a respeito, bastando contar as partes pintadas e o total de partes.

A quarta questão envolvia comparação de frações. Os alunos consideraram a tarefa difícil, principalmente quando o numerador tinha valor diferente de um, por exemplo, verificar quem é maior, dentre 3/4 e 3/8. Os nove alunos que erraram associaram a resposta ao maior denominador, porque não compreendem frações como uma quantidade, e sim como dois números isolados. Como o numerador era igual, compararam os denominadores.

Como as Frações são Tratadas na Escola

Refletindo sobre algumas maneiras usuais de ensinar o conteúdo escolhido – as frações – , observamos que habitualmente se faz uma revisão do que já foi visto sobre o tema nas séries anteriores e se vai adiante, apresentando as operações com frações. Não é dado tempo para que os alunos se familiarizem com a ideia de um novo tipo de número que está associado às frações, eles apenas memorizam a definição e as regras, sem compreensão.

O ensino de frações frequentemente se caracteriza por uma ênfase na linguagem matemática e no simbolismo, na aplicação mecânica de algoritmos e no uso de ilustrações que representam um todo dividido em partes iguais (o denominador corresponde ao número de partes em que o todo foi dividido e o numerador ao número de partes pintadas): "Verifica-se [...] que as metodologias mais comumente usadas na introdução desses números envolvem figuras geométricas divididas e pintadas e conjuntos discretos". (BERTONI, 2008, p. 214).

Consideramos que os livros têm muita influência na prática pedagógica dos professores, visto que eles oferecem modelos de abordagens dos conteúdos e de atividades que são frequentemente tomados como referência e organizam o espaço da sala de aula. Aqui surge um obstáculo para o ensino de frações, já que muitas vezes, ao invés de servir para estimular os alunos à investigação e à descoberta, os livros didáticos têm limitado a aprendizagem. Segue um breve comentário sobre a abordagem das frações em três coleções didáticas.

Na obra "Matemática e Realidade", dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado (2000), no volume destinado à quinta série do Ensino Fundamental, o desenvolvimento da ideia de fração inicia com o Tangram[4] e uma análise das peças que o compõem: cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo. Em seguida vem a questão: que parte da unidade (o quadrado maior do Tangram) cada um dos triângulos maiores representa? O livro mostra que com quatro triângulos daqueles é possível cobrir todo o quadrado maior, portanto, cada triângulo representa 1/4 da unidade. Depois vem a pergunta sobre outro tamanho de triângulo; como, usando oito deles, é possível cobrir exatamente todo o quadrado, conclui-se que a parte representada é 1/8, e assim por diante. A ideia de relação parte/todo está adequadamente ilustrada, mas o ponto negativo que vemos aqui é o fato de que a concepção de divisão de uma figura torna-se a única responsável pela aquisição do novo conceito. Na mesma obra, no desenvolvimento das "frações impróprias", elas são definidas como sendo as frações que possuem a característica de ter o numerador maior do que o denominador. Porém, do modo como essa definição é apresentada, os alunos podem encontrar uma incoerência. Como poderão existir frações impróprias se uma fração é o mesmo que dividir a unidade em b partes iguais e tomar a dessas partes? Para os alunos, não tem sentido dividir uma unidade em cinco partes iguais e tomar oito dessas partes. A apresentação de fração restrita aos casos de figuras divididas em partes iguais induz os alunos ao erro, posteriormente.

Na obra "Matemática em Construção", do autor Oscar Guelli (2004), o capítulo de frações equivalentes é desenvolvido de maneira formal, seguindo regras e modelos convencionais, com poucas alusões à segmentação de objetos. Após as explicações, segue uma sequência de exercícios de aplicação de técnicas adquiridas. Exemplo: "Escreva uma fração equivalente à fração

[4] Tangram é um quebra-cabeça chinês formado por sete peças (cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo).

dada, com denominador 12, com numerador 10”... Os alunos que possuem facilidade para memorizar e aplicar técnicas de resolução podem até obter o resultado desejado, mas pensamos que a efetiva aprendizagem não é adquirida com essa abordagem.

Já no livro “Projeto Araribá – Matemática” (Barroso *et al.*, 2006), da Editora Moderna, a partir das páginas de abertura da unidade sobre frações aparecem questões que oferecem situações de contextualização envolvendo os conceitos que serão trabalhados na unidade, possibilitando a verificação e a exploração dos conhecimentos prévios. Segundo os autores, em séries anteriores os alunos já lidaram com situações em que os números naturais não foram suficientes para representar a medida de uma grandeza ou o resultado de uma divisão. Perceberam que os números racionais surgiram então para que novos problemas passassem a ter respostas. Para retomar e ampliar esses conhecimentos, o livro traz desafios com situações em que os números racionais estão relacionados às ideias de fração como parte de uma figura ou de um objeto, fração como quociente e fração para comparação. Assim, são construídos novos significados para os números racionais a partir de sua utilização no contexto social, analisando, interpretando, formulando e resolvendo situações-problema do cotidiano; e a partir da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção, encontrados em antigos documentos egípcios, como o papiro de Rhind.

Sobre as Concepções de Fração

Silva (1997) apresenta uma dissertação em que trata da introdução do “conceito de número fracionário”[5] junto a um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental. O objetivo do trabalho foi introduzir esse

[5] Em sua tese de doutorado, Silva (2005) discute os diversos significados atribuídos por diferentes autores às noções de “fração” e “número fracionário”, definindo frações como representações do tipo a/b onde a e b são pertencentes a um anel de integridade e b é não nulo, e número fracionário como aquele que pode ser representado por uma classe de frações. Portanto, número fracionário, para Silva (2005), não é necessariamente um número racional. Entretanto, observamos que, em sua dissertação, as frações a que Silva (1997) se refere são sempre representações de números racionais positivos e por isso acreditamos que, nesse texto, “números fracionários” podem ser considerados como sendo números racionais.

conceito através das concepções das frações como relação parte/todo, medida e quociente, de modo que os professores refletissem sobre essas diferentes abordagens e dessem sentido ao conceito. A questão que dá origem ao trabalho de Silva (1997) é o fato de que pesquisas, segundo a autora, mostram que os futuros professores não trabalham com as diferentes concepções do conceito e não têm o domínio necessário para lidar com as concepções espontâneas de seus alunos, impondo, dessa maneira, modelos nem sempre adequados.

Embora reconheça a existência de outras concepções de fração, como as de operador e razão, Silva (1997)) justifica a opção pelas concepções parte/todo, medida e quociente como as mais convenientes para a introdução do conteúdo e apresenta uma sequência de atividades propostas aos futuros professores.

Segundo a autora, a origem das frações se deu no modelo parte/todo no contínuo (divisão de terras). A concepção da fração como representação de uma porção de um "todo" – tomado como uma unidade – é, ainda hoje, em geral tratada como "[...] origem das demais concepções e como geradora da linguagem e das representações [das frações]" (SILVA, 1997, p. 105). Ela observa que a concepção parte/todo depende da divisão de um inteiro – poderíamos também dizer uma unidade – "[...] em partes ou séries iguais, equivalentes como quantidades de superfície ou quantidade de objetos" (SILVA, 1997, p. 106).

A ideia de medida também está na origem das frações e, para Crump (1994), a medida é um recurso conceitual que nos permite comparar, em termos numéricos, duas entidades diferentes de mesma grandeza. Caraça (1952, p. 29-30) observa que para medir é necessário que haja um termo de comparação único para todas as "grandezas de mesma espécie"; estabelecida uma unidade, a medida expressa "[...] o número de vezes que a unidade escolhida cabe naquilo que se quer medir". No que se refere à concepção da fração como medida, Silva (1997) assinala que a fração ${}^{a}\!/_{b}$ envolve a ocorrência da subunidade ${}^{1}\!/_{b}$, a vezes; sendo que a unidade corresponde a b vezes a subunidade ${}^{1}\!/_{b}$.

A concepção de fração como medida envolve implicitamente a concepção parte/todo, pois o "todo" pode ser tomado como a unidade de referência, e parte e todo podem ser quantificados segundo a mesma grandeza (seja ela comprimento, superfície, capacidade...). Mas, além de permitir a comparação de objetos distintos, a concepção da fração como medida, lembra Silva (1997), remete a outras possibilidades de trabalho, como as frações maiores do que um, a percepção da fração efetivamente como um número e o aprofundamento da noção de equivalência.

O tratamento da fração "efetivamente como um número" fica favorecido na concepção medida, já que, fixada uma unidade, a comparação de medidas permite estabelecer, diretamente, a comparação entre os objetos medidos. Além disso, é razoável somar (ou diminuir) comprimentos, superfícies, volumes, intervalos de tempo, enquanto em muitos contextos utilizados para ilustrar a relação parte/todo, a soma e a subtração de frações são artificiais, pois não faz sentido comparar ou "juntar" partes de "todos" distintos. No caso das medidas, podemos ir além, ainda, lembrando que o produto de comprimentos também pode ser interpretado como medida de área, desde que sejam escolhidas as unidades apropriadas.

Na concepção da fração como quociente, a fração é o resultado de uma divisão. Silva (1997) observa que nas situações de quociente, o numerador e o denominador podem representar objetos ou grandezas distintas – ela dá o exemplo de chocolates a serem repartidos igualmente entre crianças – enquanto nas situações parte/todo e medida, a parte referida ou o objeto medido são da mesma natureza.

Ao final do trabalho, Silva (1997) conclui que o objetivo foi atingido, na medida em que os professores que participaram da experiência reconhecem as concepções abordadas e refletem sobre elas ao elaborar novas situações-problema.

A Concepção da Sequência Didática

A sequência didática apresentada neste trabalho foi concebida tendo em vista sua aplicação em uma turma de quinta série do Ensino Fundamental. Com o intuito de experimentar uma abordagem alternativa para o ensino do conceito de frações, usamos um vídeo como recurso didático sensibilizador e adaptamos as atividades elaboradas por Silva (1997). A idéia foi colocar os alunos em situações que os permitissem fazer experiências e reflexões sobre as frações, envolvendo as concepções parte/todo, medida e quociente. Os critérios que orientaram a escolha de tais atividades foram a viabilidade de contribuir para a construção do conhecimento relativo ao conteúdo escolhido e a possibilidade de que os alunos compreendessem de forma clara o significado das frações. Uma das preocupações foi a de que eles compreendessem esse "novo tipo de número", as frações, como uma quantidade e não como números naturais escritos um acima do outro.

O vídeo escolhido foi: *Vídeo do Novo Telecurso – Ensino Fundamental – Matemática – Aula 23*[6], sobre Frações. Essa escolha foi feita considerando a abordagem das frações apresentada, e a possibilidade de motivar os alunos para o estudo, já que o vídeo introduz a discussão sobre o tema estimulando a reflexão e a participação em diferentes momentos.

As primeiras atividades foram concebidas com o objetivo de levar os alunos a perceberem as diferenças entre situações que envolvem quantidades discretas e quantidades contínuas. Para isso, em grupos, os alunos teriam que dividir ao meio, três vezes seguidas, uma fita com 12 cm de comprimento e um conjunto com 12 botões, seguindo o roteiro constante do Quadro 1.

Quadro 1: Roteiro de questões da Atividade 1

1. "Quantificar significa determinar a quantidade ou o valor de alguma coisa. Essa quantidade pode ser expressa pelo número de objetos de um conjunto ou pela medida que possui." Vocês receberam um pedaço de fita e alguns botões. Quantifiquem-nos.
2. O que vocês fizeram para associar a cada uma dessas figuras uma quantidade?
3. Distribuam igualmente as fitas e os botões entre duas costureiras. Quanto cada uma vai receber?
4. Apareceram mais duas costureiras. Dividam de novo em dois o que estava com as outras. Quanto cada uma vai receber?
5. Se aparecessem mais quatro costureiras e as costureiras anteriores tivessem que dividir em dois o que elas receberam, seria possível redistribuir a fita e os botões igualmente entre elas? Justifiquem a sua resposta.

Fonte: Anexo 4 de Silva (1997)

6 Disponível em: <http://novotelecurso.blogspot.com/2009/02/fracoes.html>. Acesso em: 2 jun. 2010.

O segundo objetivo foi o de, a partir da representação de uma fração do inteiro, reconstituir esse inteiro, por meio da concepção de medida. Para isso, em trios, teriam que dividir um retângulo em quatro partes, fazendo isso de três maneiras diferentes, através de instruções dadas conforme o Quadro 2.

Quadro 2: Roteiro para a divisão das folhas de papel

Vocês receberam 3 folhas de papel. Cada um irá pegar uma das folhas e fazer a seguinte divisão: O primeiro irá dobrar a folha na direção das diagonais e depois irá cortar nessas diagonais. O segundo irá dividir a folha ao meio no sentido do comprimento de depois irá dividir uma das partes na diagonal e a outra parte ao meio no sentido da largura. O terceiro irá dividir a folha ao meio no sentido da largura e depois irá dividir uma das partes ao meio no sentido da largura e a outra ao meio no sentido do comprimento. a) Podemos falar que dividimos cada retângulo em quatro partes iguais? Por quê? b) Podemos associar a cada uma das partes uma fração? Qual? c) Comparem as partes dos três retângulos e digam que relação existe entre elas. d) Representem no verso da folha os três retângulos divididos.

Fonte: Anexo 5 de Silva (1997).

Em seguida, os alunos resolveriam problemas de divisão de figuras, então, reproduzimos alguns desses problemas na Figura 2.

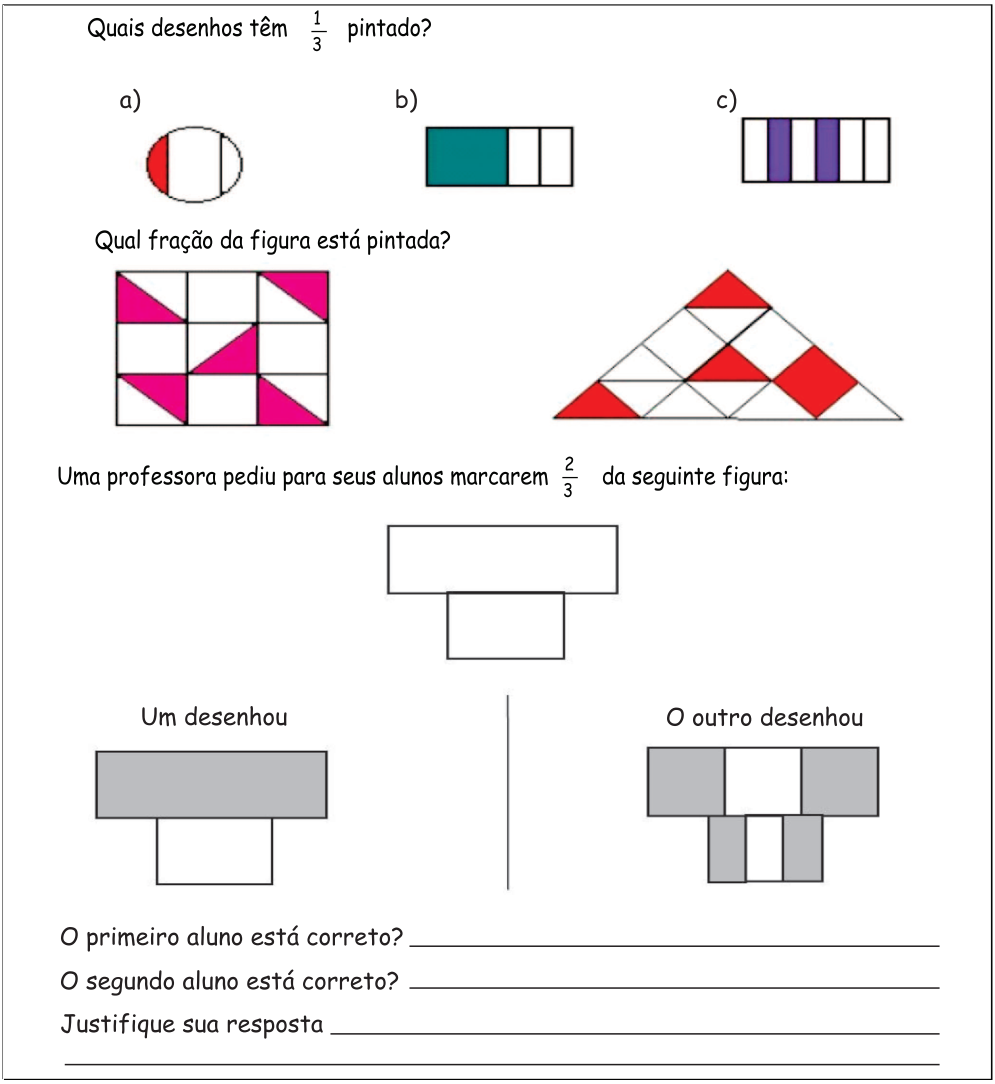


Figura 2: Exemplos de questões constantes da Atividade 2
Fonte: Anexo 5 de Silva (1997).

Outro objetivo da sequência didática, foi o de que os alunos, a partir da representação de uma fração do inteiro, reconstituíssem esse inteiro, através da concepção de medida. Para isso, resolveriam individualmente atividades em que deveriam representar as medições através de números fracionários. Pretendíamos, também, que os alunos percebessem que na concepção de fração como quociente, o numerador pode ser maior, menor ou igual ao denominador e que podem estar representando objetos diferentes. Para isso, em duplas, deveriam encontrar solução para alguns problemas. Ao final de cada atividade, as respostas seriam discutidas no grande grupo.

Posteriormente, a fim de avaliar se a sequência aplicada teve bons resultados, foi aplicado um teste (Anexo A).

Antes do inicio da prática, foram elaboradas algumas hipóteses, seguindo a metodologia da Engenharia Didática:

Hipótese A: Pressupõe que os alunos compreenderiam que alguns problemas podem ser resolvidos com os números naturais, mas alguns apenas podem ser resolvidos com as frações.

Hipótese B: Pressupõe que os alunos contariam os botões e mediriam a fita para quantificar os objetos.

Hipótese C: Pressupõe que os alunos perceberiam que, apesar das formas diferentes, cada uma das partes do retângulo, após duas bipartições sucessivas, tem o mesmo tamanho e, portanto, podem ser representadas pela fração 1/4.

Hipótese D: Pressupõe que os alunos encontrariam maiores dificuldades nas tarefas com medições.

Hipótese E: Pressupõe que os alunos aprenderiam que, a partir de uma quantidade que representa uma parte do conjunto inicial, é possível descobrir a quantidade de elementos que o conjunto possui.

Hipótese F: Pressupõe que os alunos notariam que a partir de uma fração de uma figura original é possível reconstruí-la, obtendo várias soluções para esse inteiro procurado.

A Implementação da Sequência Didática

A sequência didática foi implementada com uma turma de quinta série da Escola Municipal Guerino Somavilla, em Nova Prata, Rio Grande do Sul, de 8 a 18 de junho, de 2010, durante 8 horas/aula. Para coletar dados, foi recolhido material escrito pelos alunos, fotografada a realização das atividades e elaborado um relato das aulas.

Iniciou-se então a prática introduzindo a discussão sobre o tema "frações" ao assistir ao vídeo com os alunos. Os personagens principais do vídeo foram dois candidatos ao cargo de presidente do time de futebol do bairro ansiosos pelo resultado da eleição. Para um candidato ser eleito, é necessário obter dois terços dos votos de um total de 6.570 associados que votaram.

Eles querem saber qual é o número mínimo de votos que precisam alcançar, mas não sabem como calcular. Depois disso, explicou-se no vídeo que fração é um todo que foi dividido em partes exatamente iguais e foram dados alguns exemplos, como a metade (1/2) e a quarta parte (1/4) de uma laranja. Para resolver o problema, os candidatos desenham um retângulo dividido em três partes exatamente iguais e afirmam que precisam de duas delas, mas querem uma solução melhor do que dividir todos os pedacinhos de papel com os votos em três montes e contar quantos votos há em cada monte. Nesse momento, o vídeo foi interrompido para que os alunos pudessem refletir e tentar encontrar uma solução. Eles ficaram bastante atentos e queriam descobrir como calcular os dois terços dos votos que os candidatos do vídeo precisavam obter para ganhar as eleições. Depois de uma conversa no grande grupo, eles chegaram à conclusão de que deveriam dividir 6.570 por 3 e, em seguida, multiplicar o resultado por 2. Alguns alunos foram ao quadro resolver o problema,e depois, quando assistiram à parte final do vídeo e perceberam que suas contas estavam certas, ficaram muito empolgados e motivados para o estudo das frações.

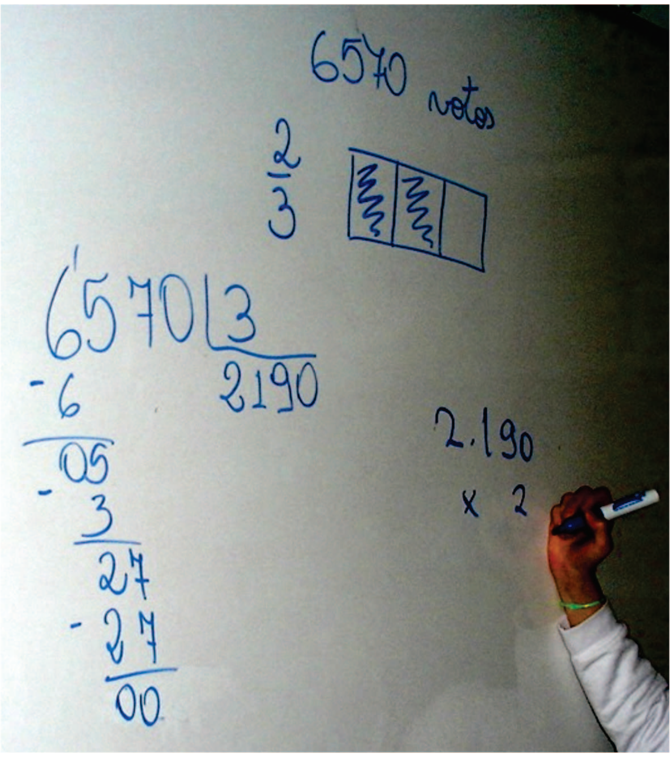


Figura 3: Resolução dos alunos para o problema proposto no vídeo
Fonte: Prof[a]. Helena Breitenbach (2010)

Figura 4: Os 12 botões e a fita de tecido sendo medida
Fonte: Prof[a]. Helena Breitenbach (2010)

Os alunos responderam em grupos a ficha de questões sobre essa situação, mas alguns responderam que receberam uma fita e 12 botões, sem perceber que poderiam quantificar a fita medindo-a. Quando questionados sobre o quanto cada costureira receberia após distribuírem a fita igualmente, responderam com coerência, usando frações: 1/2, 1/4 e 1/8 da fita. Além de terem visto a linguagem das frações no vídeo, eles já tinham aprendido essa linguagem, na série anterior, quando o conteúdo foi introduzido de maneira mais simplificada.

Posteriormente, em trios, os alunos dividiram uma folha retangular em quatro partes, fazendo isso de três maneiras diferentes, através de instruções que receberam em uma ficha juntamente com algumas questões envolvendo divisão de figuras. A primeira folha devia ser dobrada na direção das diagonais e depois cortada nessas diagonais. A segunda folha deveria ser dividida ao meio no sentido do comprimento e, depois, uma das partes deveria ser dividida na diagonal e a outra parte ao meio, no sentido da largura. E, por fim, a terceira folha deveria ser dividida ao meio, no sentido da largura, e, depois, uma das partes deveria ser dividida ao meio, no sentido da largura, e a outra, ao meio, no sentido do comprimento O objetivo dessa atividade era o de que percebessem que a definição de igualdade das partes refere-se à área e não à forma das partes. Depois de discutir bastante com os colegas que integravam seu trio, a grande maioria conseguiu associar partes de um inteiro divididas em formas diferentes, mas com mesma área, a uma mesma fração. Em seguida, durante o debate geral com a turma, todos concordaram que cada parte da folha que eles tinham dividido, independente da forma, correspondia a 1/4 da folha.

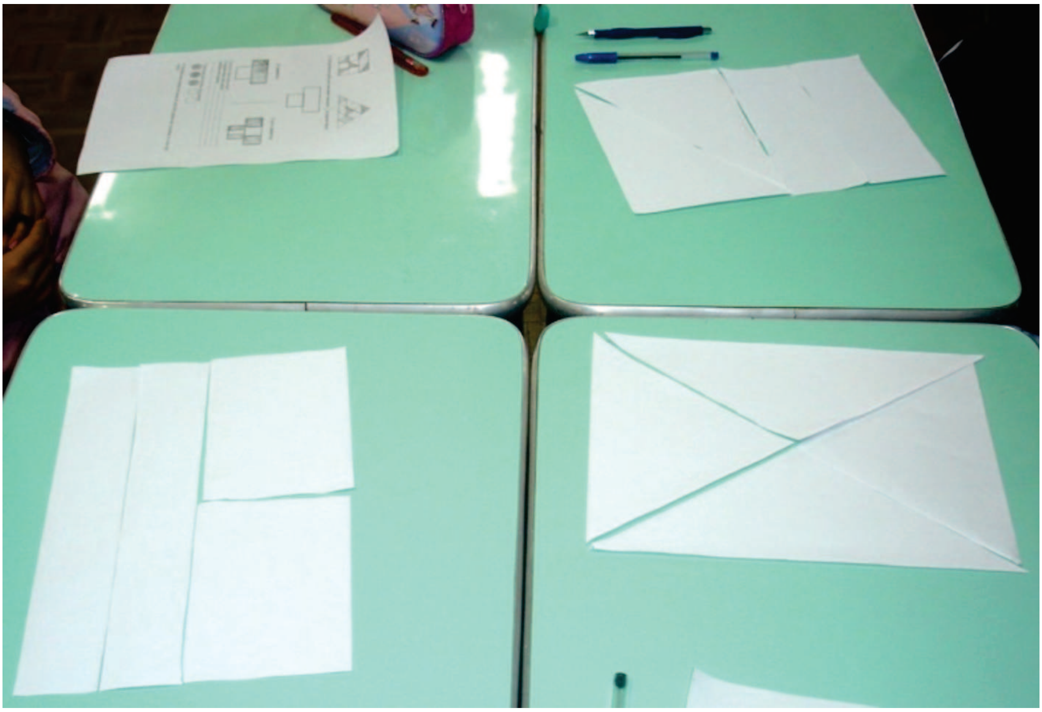


Figura 5: Folhas divididas pelos alunos
Fonte: Profª. Helena Breitenbach (2010)

Na Atividade 3, os alunos deveriam, a partir da representação de uma fração do inteiro, reconstituir esse inteiro. Seguem, no Quadro 3, alguns exemplos dessas atividades.

Quadro 3: Exemplos de questões constantes da Atividade 3

1. Se a figura abaixo é um terço do inteiro, represente o inteiro.

2. Se $\frac{2}{7}$ das bolinhas de Sérgio são brancas e ele tem 12 bolinhas brancas, qual o total de bolinhas que Sérgio possui?

3. Desenhe a unidade a partir do segmento abaixo.

Fonte: Anexo 6 de Silva (1997).

Eles encontraram bastante dificuldade nessas atividades, pois esse tipo de questão não é comumente trabalhado em sala de aula. A dificuldade maior foi desenhar a unidade, a partir de um segmento que representava 2/3 do inteiro, mas os objetivos foram alcançados na discussão final: alguns alunos apresentaram suas soluções no quadro para os colegas, mostrando que era preciso dividir os 2/3 ao meio, obtendo 1/3, e daí, juntando essa medida aos 2/3, apareceriam 3/3, que era a unidade.

Depois disso, em duplas, resolveram uma ficha com problemas (Quadro 4).

Quadro 4: Roteiro de questões da Atividade 1

1. Temos quatro barras de chocolate para reparti-las igualmente entre cinco crianças. Qual a fração que representa a cota de chocolate de cada criança?
2. Uma professora deu o seguinte problema: "Se distribuirmos duas tortas de tal forma que cada criança receba $\frac{2}{5}$ de uma torta, para quantas crianças podemos distribuir as tortas?"
Um aluno respondeu imediatamente: "É claro que serão cinco crianças."
Como vocês acham que ele raciocinou para chegar a essa resposta?

3. Se distribuirmos igualmente 5 chocolates para um grupo de 8 crianças e 5 chocolates para outro grupo de 6 crianças. As crianças de qual grupo comerão mais chocolate?
4. Se distribuirmos igualmente 3 chocolates para um grupo de 5 crianças e 9 chocolates para um outro grupo de 15 crianças. Qual é o grupo em que as crianças vão comer mais?
5. Se distribuirmos igualmente 3 tortas entre 4 crianças e 4 tortas iguais às primeiras entre outras 5 crianças, quem comerá mais?
6. Distribuam 9 bolinhos entre quatro crianças. Qual a fração que representa a cota de bolinhos de cada criança?

Fonte: Anexo 8 de Silva (1997)

O objetivo dessa atividade era o de que percebessem que o numerador pode ser maior, menor ou igual ao denominador, e que podem estar representando objetos diferentes, como, por exemplo, chocolates e crianças. A solução que eles encontraram para as situações de comparação foi representar as situações por figuras.

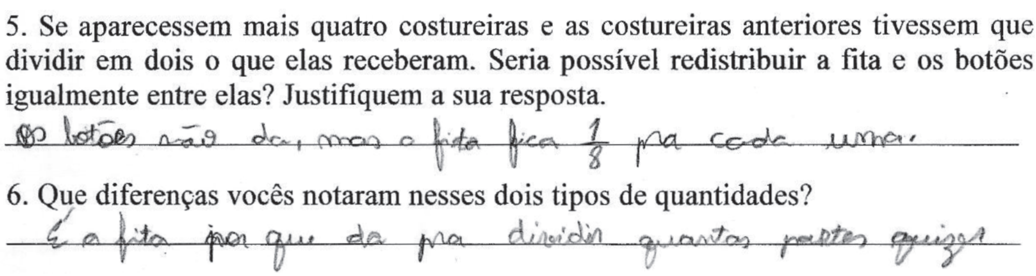
Finalmente, foi aplicado um teste final (Anexo A) para avaliar se a sequência aplicada teve bons resultados. Em resposta à Questão 1, os alunos afirmaram que esse trabalho foi uma boa experiência na aprendizagem de frações. A Questão 4 permitiu verificar que os alunos perceberam que, na concepção parte/todo, no contínuo, é preciso preocupar-se com a área de cada parte e não com a sua forma. Com a Questão 7, observamos que os alunos conseguiram reconstituir um inteiro no contínuo a partir de uma fração do mesmo. Percebemos também que, após a sequência, todos os alunos procuraram respostas objetivas por meio de frações, deixando de se referirem a "pedacinhos" ou "restos" como faziam anteriormente. Além disso, pudemos perceber que eles adquiriram uma nova maneira de ver os números, a partir das três concepções trabalhadas: parte/todo, de medida e como quociente.

Análise das Hipóteses

Depois de realizadas todas as atividades e o teste final, pudemos então analisar as hipóteses enunciadas anteriormente:

Hipótese A: os alunos compreenderiam que alguns problemas podem ser resolvidos com os números naturais, mas alguns apenas podem ser resolvidos com as frações.

Essa hipótese foi confirmada. A princípio, refletiram sobre o que é quantificar e sobre as duas possibilidades de quantificação: medir e contar. Com isso, perceberam que as quantidades discretas surgem da contagem e, portanto, são representadas pelo conjunto dos números naturais. E que nas grandezas contínuas podemos efetuar as divisões dos objetos sem que eles percam suas características, utilizando, além da divisão euclidiana, os números fracionários. Por exemplo, uma fita pode ser dividida em várias partes, e continuará sendo uma fita e poderá ainda ser utilizada, ao contrário do que ocorre com um botão, que, após ser dividido, deixa de ser um botão, e não pode mais ser utilizado.


5. Se aparecessem mais quatro costureiras e as costureiras anteriores tivessem que dividir em dois o que elas receberam. Seria possível redistribuir a fita e os botões igualmente entre elas? Justifiquem a sua resposta.

Os botões não dá, mas a fita fica $\frac{1}{8}$ pra cada uma.

6. Que diferenças vocês notaram nesses dois tipos de quantidades?

É a fita porque dá pra dividir quantas partes quiser

Figura 6: Resposta de alunos às Questões 5 e 6 da Atividade 1
Fonte: Aluno A, 5ª série (2010),

Este grupo percebeu que não seria possível redistribuir os botões igualmente entre as costureiras, mas que a fita sim, e utilizaram a fração 1/8 na resposta. Ainda justificaram que a fita poderia ser dividida em quantas partes quiséssemos, indicando a compreensão de que existem diferenças entre trabalhar com as quantidades discretas e as quantidades contínuas.

6. Que diferenças vocês notaram nesses dois tipos de quantidades?

Em cada pergunta das atividades tem uma fração diferente.
Que os botõezinhos da pra dividir por 12, e a fita por quanto quiser

Figura 7: Resposta de alunos à Questão 6 da Atividade 1
Fonte: Aluno B, 5ª série (2010).

Este outro grupo também afirmou que o conjunto de botões poderia ser dividido no máximo entre 12 costureiras, e a fita por quantas desejássemos.

Hipótese B: os alunos contariam os botões e mediriam a fita para quantificar os objetos.

Essa hipótese foi parcialmente confirmada, já que todos os alunos contaram os botões para quantificar os objetos, porém alguns não mediram a fita. Acreditamos que alguns não sentiram a necessidade de medir por não estarem habituados com representações envolvendo unidades de medida convencionais, e então não perceberam que algumas quantidades devem ser medidas e outras devem ser contadas, para que possam ser particularizadas e ter um número associado a elas. Isso pode ter ocorrido também pelo fato de que, nesse contexto, eles não tinham nenhum motivo para se preocupar com o tamanho da fita. Talvez aqui a sequência devesse ser reformulada, a fim de introduzir um problema que os levasse a pensar nisso.

1. "Quantificar significa determinar a quantidade ou o valor de alguma coisa. Essa quantidade pode ser expressa pelo número de objetos de um conjunto ou pela medida que possui." Vocês receberam um pedaço de fita e alguns botões. Quantifiquem-nos.

12 botões e 1 fita.

2. O que vocês fizeram para associar a cada uma dessas figuras uma quantidade?

Contamos.

Figura 8: Resposta de alunos às Questões 1 e 2 da Atividade 1
Fonte: Aluno C, 5ª série (2010).

Um grupo respondeu 12 botões e uma fita, quantificando a fita como um pedaço qualquer, o que não expressaria o tamanho real daquele pedaço de fita.

Hipótese C: os alunos perceberiam que, apesar das formas diferentes, cada uma das partes do retângulo tem o mesmo tamanho e, portanto, podem ser representadas pela fração 1/4.

Essa hipótese foi confirmada. Os alunos perceberam que, apesar das formas diferentes, cada uma das partes do retângulo tem o mesmo tamanho, pois tomando quatro de cada tipo é possível retornar à unidade, e, portanto, podem ser representadas pela fração ¼; e que a definição de igualdade das partes não se refere à forma e sim à área das partes, o que permite associar partes de um inteiro com formas diferentes a uma mesma fração. A atividade de divisão das folhas foi, de certa forma, simples, pois a divisão de quadriláteros pôde ser feita apenas com régua. Se tivessem sido utilizados círculos, acreditamos que a identificação das frações teria ficado bem mais difícil, dependendo dos cortes.

1. Vocês receberam 3 folhas de papel. Cada um irá pegar uma das folhas e fazer a seguinte divisão:

O primeiro irá dobrar a folha na direção das diagonais e depois irá cortar nessas diagonais.

O segundo irá dividir a folha ao meio no sentido do comprimento de depois irá dividir uma das partes na diagonal e a outra parte ao meio no sentido da largura.

O terceiro irá dividir a folha ao meio no sentido da largura e depois irá dividir uma das partes ao meio no sentido da largura e a outra ao meio no sentido do comprimento.

a) Podemos falar que dividimos cada retângulo em quatro partes iguais? Por quê?

Sim, pois medimos e recortamos em pedaços exatamente iguais.

b) Podemos associar a cada uma das partes uma fração? Qual?

Sim, pois cada pedaço é 1/4 de uma fração

c) Comparem as partes dos três retângulos e digam que relação existe entre elas.

Elas são uma fração da folha inteira.

Figura 9: Resposta de alunos à Questão 1 da Atividade 2
Fonte: Aluno D, 5ª série (2010).

O grupo de alunos percebeu que, apesar das formas diferentes, cada uma das partes de um retângulo, e todas as partes (dos três retângulos) têm a mesma área, pois as folhas fornecidas eram iguais e cada um dos retângulos foi dividido em partes iguais. Por isso, essas partes podem ser representadas pela fração 1/4 ou 1/12 (considerando as partes dos três retângulos).

Outro grupo de alunos apresentou respostas diferentes, porém também utilizando um raciocínio correto, eles responderam o seguinte:

a) "Sim, porque cada vez dividíamos a folha ao meio".

b) "Um quarto da folha ou 1/12 do total".

c) "Mesmo sendo cortadas diferentes, todas são um quarto".

Hipótese D: os alunos encontrariam maiores dificuldades nas tarefas com medições.

Essa hipótese foi confirmada, porque eles perceberam que uma unidade pode ser dividida em partes iguais, mas, como a grande maioria não fez uso de régua nessa atividade, as partes encontradas pelos alunos não eram exatamente iguais.

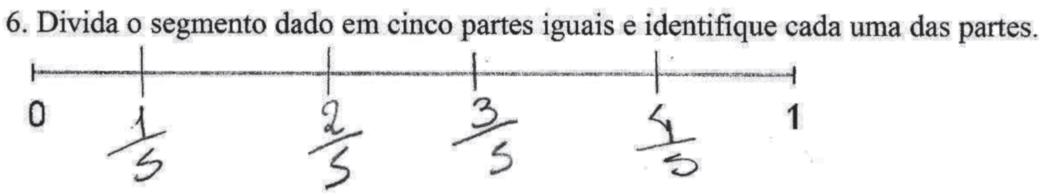


Figura 10: Resposta de um aluno à Questão 6 da Atividade 3
Fonte: Aluno E, 5ª série (2010).

O aluno percebeu que cada parte é um quinto, e que quando marca dois quintos, três quintos e quatro quintos, ele está se referindo a todas as partes à esquerda do marcador. Porém, como esse aluno não dividiu o segmento em partes iguais, as frações encontradas por ele não estão corretas.

É provável que esse aluno não tenha desenvolvido o conceito de medida, talvez porque o conteúdo não tenha sido efetivamente trabalhado na escola. Os professores muitas vezes supervalorizam alguns conteúdos enquanto muitas questões práticas ficam esquecidas, impossibilitando que os alunos construam o significado das medidas, a partir de situações-problemas que expressem seu uso no cotidiano.

Hipótese E: os alunos iriam adquirir o conhecimento de que, a partir de uma quantidade que representa uma parte do conjunto inicial, podemos descobrir a quantidade de elementos que possuímos.

Essa hipótese foi confirmada, eles conseguiram descobrir as quantidades de elementos que o conjunto possuía a partir de uma quantidade que representa uma parte do conjunto inicial.

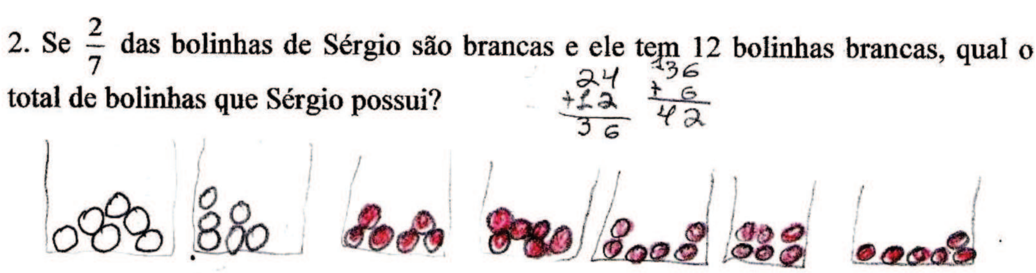
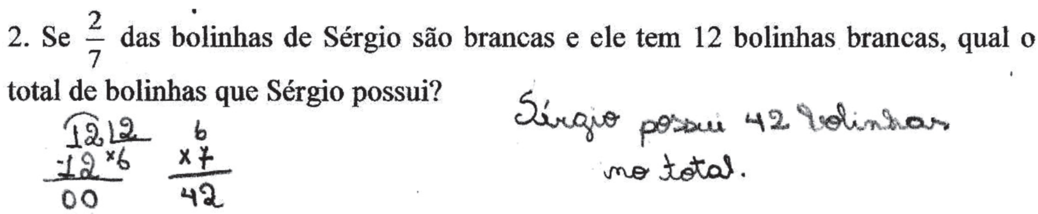


Figura 11: Resposta de um aluno à Questão 2 da Atividade 3
Fonte: Aluno F, 5ª série (2010).

Esse aluno desenhou as bolinhas para visualizar a situação, inicialmente distribuindo as 12 bolinhas brancas em dois subconjuntos e depois obtendo cada um dos subconjuntos de bolinhas vermelhas. Usou um raciocínio aditivo e a noção do todo como soma das partes para chegar ao resultado final: 2/7 são 12 bolinhas, 4/7 são 24 bolinhas, 6/7 são 24 + 12 = 36 bolinhas e o todo são 7/7, isto é, 36 + 6 = 42 bolinhas.


2. Se $\frac{2}{7}$ das bolinhas de Sérgio são brancas e ele tem 12 bolinhas brancas, qual o total de bolinhas que Sérgio possui?

12 | 2
-12 ×6
00

6
×7
42

Sérgio possui 42 bolinhas no total.

Figura 12: Resposta de um aluno à Questão 2 da Atividade 3
Fonte: Aluno G, 5ª série (2010).

Esse aluno raciocinou que se 2/7 eram bolinhas brancas, então cada subconjunto continha seis bolinhas. Depois multiplicou a quantidade de bolinhas pelo número de subconjuntos, e concluiu que o conjunto inicial era composto por 42 bolinhas. Nessa resposta, prevaleceu o raciocínio multiplicativo: o tamanho do todo é o mesmo que sete vezes o tamanho de cada sétimo.

Hipótese F: os alunos notariam que a partir de uma fração da figura original é possível reconstruí-la obtendo várias soluções para esse inteiro procurado.

Essa hipótese foi confirmada, os alunos receberam uma figura, foram informados que ela era um terço do inteiro, e eles deviam representar esse inteiro. Eles perceberam que a figura original deveria ser uma composição de três figuras iguais à fração apresentada a eles, imaginando a forma que teria e a desenhando.

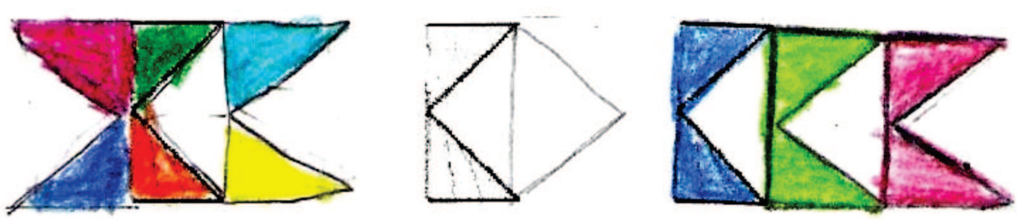


Figura 13: Resposta de alunos à Questão 1 da Atividade 3
Fonte: Alunos H, G e I, 5ª série (2010).

Foram encontradas várias soluções na reconstituição do inteiro, como a ilustrada na Figura 13.

Considerações Finais

Este trabalho tratou do ensino de frações, voltado para os alunos da quinta série do Ensino Fundamental, e utilizou como recursos didáticos um vídeo do *Novo Telecurso – Ensino Fundamental*, sobre frações, objetos manipulativos (fita, botões, folhas A4 para recortar) e fichas de questões.

Inicialmente, foram identificados vários problemas na aprendizagem do conceito de fração, entre eles o tratamento dado pelos alunos como se fossem números naturais e, especialmente, a ausência de significação da fração como quantificador ou número. Essas dificuldades foram relacionadas ao modo como as frações são comumente ensinadas nas escolas, sem variação de situações que permitam aos alunos dar realmente um significado ao que estão aprendendo. Para tentar obter uma melhoria nesse cenário, foi desenvolvido um plano de ensino cujo principal objetivo foi a introdução do conceito de fração através das concepções parte/todo, medida e quociente.

Antes de iniciar-se a prática, foram formuladas hipóteses. Os dados coletados na prática validaram algumas delas, as que pressupunham que os alunos: compreenderiam que alguns problemas podem ser resolvidos com os números naturais, mas alguns somente podem ser resolvidos com as frações; perceberiam que, apesar das formas diferentes, cada uma das metades das metades do retângulo tem o mesmo tamanho e, portanto, pode ser representada pela fração 1/4; encontrariam maiores dificuldades nas tarefas com medições; aprenderiam que, a partir de uma quantidade que representa uma parte do conjunto inicial, podemos descobrir a quantidade de elementos que possuímos; e notariam que a partir de uma fração da figura original, podemos reconstruí-la obtendo várias soluções para esse inteiro procurado. No entanto, não validaram a hipótese de que os alunos contariam os botões e mediriam a fita para quantificar os objetos.

O plano de ensino precisa ser reformulado, nos seguintes aspectos, para corresponder aos objetivos: proporcionar mais tempo para que os alunos possam refletir sobre o novo enfoque dado às frações, discutir mais sobre as soluções encontradas pelos alunos e compará-las, para que reconheçam a equivalência de seus procedimentos, visto que os exercícios que fizeram fogem do que é habitualmente trabalhado e, em alguns casos, foram encontradas maneiras diferentes de se resolver um mesmo problema. Além disso, deveriam ser criadas atividades para serem resolvidas em casa, entre uma aula e outra, com o objetivo de propiciar mais alguns momentos de reflexão sobre os novos conhecimentos adquiridos.

Queremos ressaltar aqui que a compreensão das frações não se esgota na quinta série, pois mais adiante os alunos vão retomar o tema ao estudarem proporcionalidade e outros conteúdos. Os significados também vão se alargando e/ou esclarecendo conforme os alunos vão lidando com frações em diferentes contextos, inclusive algébricos, geométricos etc. O trabalho trata de uma introdução às frações, e a compreensão construída nessa introdução deverá ser retomada mais adiante pelos professores nas séries seguintes.

Com a prática, desenvolvemos uma compreensão melhor do conteúdo. Percebemos as diferenças de tratamento entre as situações que envolvem o conceito de fração, nas concepções parte/todo, medida e quociente, refletimos e obtivemos uma nova visão, um novo ponto de vista, sobre o assunto. Também desenvolvemos uma compreensão melhor a respeito das possibilidades de utilização das mídias digitais, vimos que o vídeo motivou os alunos a estudar e os estimulou a participar das atividades. Por fim, percebemos que dificuldades comuns dos alunos, nestes conteúdos, foram solucionadas, já que eles mostraram um domínio razoável do conteúdo trabalhado no teste final. Nesse teste, os alunos entenderam que, na concepção parte/todo, no contínuo, é preciso se preocupar com a área de cada parte e não com a sua forma; conseguiram reconstituir um inteiro no contínuo a partir de uma fração do mesmo. No teste surgiu também uma preocupação por parte dos alunos em dar respostas objetivas através de frações, deixando de se referirem a "pedacinhos" ou a "restos" como faziam anteriormente. Além disso, adquiriram uma nova maneira de ver as frações, a partir das três concepções trabalhadas.

Referências

BARROSO, J. M. et al. **Projeto Araribá:** matemática (5ª série). São Paulo: Moderna, 2006.

BERTONI, N. E. A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionário. **Bolema**, Rio Claro (SP), n. 31, p. 209-237, 2008. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/viewArticle/2111>. Acesso em: 2 out. 2010.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (5ª a 8ª série): Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1952.

CRUMP, T. **La antropología de los números.** Madrid: Alianza Editorial, 1994.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas: UNICAMP, 2004.

GUELLI, O. . **Matemática em construção** (5ª série). São Paulo: Ática, 2004.

IEZZI, G. et al. **Matemática e realidade** (5ª série). 4. ed. São Paulo: Atual, 2000.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**, Rio Claro (SP), n. 31, p. 1-22, 2008. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/ viewArticle/2102>. Acesso em: 10 nov. 2010.

NOVO TELECURSO. **Matemática**: Ensino Fundamental, Aula 23, Frações. Disponível em: <http://novotelecurso.blogspot.com/2009/02/fracoes.html>. Acesso em: 2 jun. 2010.

NUNES, T. ; BRYANT, P. . **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

SILVA, M. J. F. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 1997. 208f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1997. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/SILVA_maria_jose.html>. Acesso em: 28 abr. 2010.

______. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série.** 2005. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/SILVA_maria_jose_ferreira.html>. Acesso em: 10 jan. 2011.

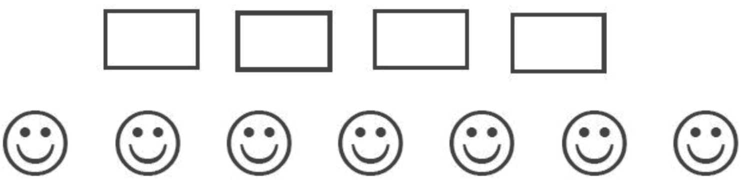
Anexo A

Fonte: Silva(1997) – Frações: atividades finais

Nome:____

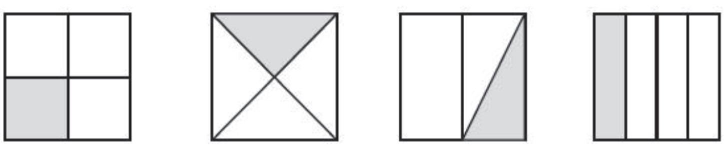
1. Que boa experiência você teve durante esta sequência de trabalho com frações?

2. Divida as quatro tortas entre as sete crianças. Quanto cada criança vai receber?

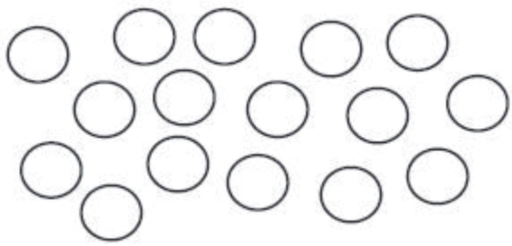


3. Se dividirmos 8 tortas entre seis crianças, que fração das tortas cada criança vai receber?

4. O que você pode falar sobre as partes pintadas das figuras a seguir?



5. Pinte $\frac{3}{4}$ das bolinhas.



6. Pinte $\frac{1}{3}$ da metade do retângulo a seguir. Que fração do retângulo você pintou?

7. Se a figura a seguir é $\frac{3}{8}$ da figura inteira, qual é a figura?

8. Crie dois problemas envolvendo a fração $\frac{3}{5}$.

Capítulo 5

PERÍMETRO E ÁREA: UMA ENGENHARIA USANDO COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS

GRASCIELE FABIANA CASAGRANDE CENTENARO[1]
ROGÉRIO RICARDO STEFFENON[2]

Introdução

O presente trabalho tem como foco o ensino de perímetro e área de figuras planas, por meio de ladrilhamento, composição e decomposição. O objetivo principal consiste em investigar como os conceitos de perímetro e de área de figuras planas podem ser apresentados aos alunos da sexta série do Ensino Fundamental de maneira significativa[3] e motivadora, utilizando para isso diferentes recursos: tecnológicos e manipulativos.

A investigação foi desenvolvida utilizando, como base, a metodologia da Engenharia Didática, realizada em diferentes etapas: estudos e reflexões prévias sobre perímetro e área, ensino usual e dificuldades de aprendizagem, plano de ensino, implementação e relato de prática pedagógica. A prática

1 grasci.eu@gmail.com

2 steffenonenator@gmail.com

3 O termo “significativo” é usado como sinônimo de “fazer sentido”.

foi desenvolvida com alunos da sexta série da Escola Estadual de Ensino Fundamental William Richard Schisler de Porto Alegre – RS, no ano de 2010. As reflexões posteriores apresentam críticas e sugestões para a revisão do plano de ensino, com análise da prática e do desempenho dos alunos.

Apresentação do Tema e Justificativa

Atualmente, o ensino de Matemática é tema de diversas pesquisas, pois não está ocorrendo de forma satisfatória. Por um lado, educadores constatam que essa é uma área de conhecimento importante; por outro lado, esses mesmos educadores encontram-se insatisfeitos diante dos resultados do ensino e da aprendizagem. A constatação da importância da Matemática apoia-se no fato de que essa ciência desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona também como instrumento fundamental para a construção de conhecimentos em outras áreas. Além disso, influencia na estrutura do pensamento organizado e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.

A insatisfação diante dos resultados obtidos na aprendizagem da Matemática nos revela que existem problemas a serem corrigidos, e um deles é o ensino centrado em procedimentos mecânicos, sem significados para o aluno. Por isso, um olhar especial foi direcionado ao ensino de conceitos-chave, do nível fundamental – perímetro e área – em uma abordagem significativa.

A escolha dessa parte da Geometria deu-se após algumas experiências em sala de aula a partir das quais se constatou que, a partir da quinta série do Ensino Fundamental, os alunos são muitas vezes colocados diante de situações em que necessitam aplicar a Geometria. Porém, nas sétimas e oitavas séries, os alunos não demonstram conhecimento, quando esses conceitos-chave se apresentam vinculados a outros conteúdos, como produtos notáveis e equação do segundo de grau. Ocorre, também, que alguns professores deixam esses temas básicos para o ensino na oitava série, o que prejudica a compreensão de muitos outros. Por isso, entendemos que eles deveriam ser abordados mais cedo.

Motivação

Buscando dar mais sentido ao ensino da Matemática, vários autores – Chiummo (1998), Secco (2007), Facco (2003) – vêm apresentando propostas didáticas que são baseadas na construção do conhecimento pelo aluno. Pesquisas revelam que o ensino de perímetro e de área é abordado, por muitos professores, de forma a não favorecer as relações dos conceitos com as suas diferentes representações. Outros resultados sugerem a importância de propostas de ensino nas quais o aluno possa desempenhar um papel ativo na construção do seu conhecimento, não atuando apenas como um receptor de informações.

Entre os caminhos para um processo de ensino e aprendizagem significativos, encontram-se os recursos tecnológicos.

Textos acadêmicos como os de Gravina (1996) promovem o aprendizado da geometria baseado na utilização de *softwares* de geometria dinâmica, que permitem a construção de objetos geométricos – a partir das propriedades que os definem – e a manipulação desses objetos.

Moran (1995) propõe a utilização do vídeo na sala de aula, como instrumento para introduzir um novo assunto, despertar a curiosidade do aluno e motivá-lo para novos temas. Ele demonstrou, em suas análises, que o vídeo pode incitar o desejo pela pesquisa, para obter mais informações sobre o que está sendo apresentado.

Esses trabalhos impulsionaram e deram subsídios para a elaboração de uma sequência didática sobre os conceitos de perímetro e de área, utilizando estratégias diferenciadas e a inserção de recursos tecnológicos.

Objetivos do Trabalho

Mediante a problemática de se ter um ensino de perímetro e área que não apresenta resultados satisfatórios, foi planejada e experimentada uma sequência didática, visando o aprendizado desses conceitos, de forma a incorporá-los aos conhecimentos do aluno.

Com objetivo de investigar o processo, partimos das seguintes questões: o estudo de perímetro e de área de figuras planas torna-se mais significativo quando é feito uso de ladrilhamento, composição e decomposição das figuras? Uma sequência de atividades que trabalhe detalhadamente a diferença entre os conceitos de perímetro e de área apresenta resultados significativos no aprendizado desses conceitos? Ao final do processo, a generalização e o uso de fórmulas são favorecidos pelo trabalho empírico realizado inicialmente?

Para desenvolver essa investigação, utilizamos, como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática, criada na área de Didática das Matemáticas, na França, na década de 1980, por Artigue (1996). Este trabalho faz uma adaptação muito simplificada dessa metodologia, tomando-a uma espécie de roteiro para as reflexões sobre a ação, no desenvolver da ação, e após a ação.

Análises Prévias: o ensino usual e os livros didáticos

Para realizar esta análise, foram considerados relatos de outros professores sobre suas experiências e estratégias no ensino de perímetro e de área. Os relatos revelaram preocupação com relação ao ensino de geometria no nível fundamental, pois ele tem pouco destaque nas aulas de Matemática.

O ensino de perímetro e de área geralmente ocorre na sétima (ou oitava) série, com a resolução de problemas. Inicia-se com o conceito de perímetro, quando são propostas questões que envolvem figuras poligonais. O estudo de área parte de questões que, em geral, envolvem um retângulo. Uma das estratégias para tratar a área do retângulo é pelo ladrilhamento: utilizando uma unidade de medida, como metro ou centímetro, é feita a contagem das unidades de área. Em seguida, é apresentada aos alunos uma sequência de exercícios, com esse modelo. Para outras figuras, como triângulo e trapézio, o cálculo da área é feito diretamente através do uso de fórmulas dadas. Na oitava série, área e perímetro estão vinculados a outros conteúdos, como por exemplo, a Equação do 2º grau.

Para melhor fundamentar a análise, buscamos também verificar o que é proposto nos livros didáticos utilizados pelos alunos. Para tanto, foram analisadas as coleções *Matemática na medida certa* (JAKUBOVIC, 2002) e *Tudo é Matemática* (DANTE, 2008).

A coleção *Matemática na medida certa* foi estudada por ser utilizada pelos alunos que participaram da proposta didática desenvolvida. Constatamos que os autores introduzem o conteúdo no livro da quinta série, a partir dos conceitos, definindo-os e propondo exercícios com diferentes figuras poligonais.

Ao longo da coleção, retomam o assunto como sendo uma revisão, apresentam novas unidades de medida e as fórmulas para o cálculo da área do triângulo, trapézio e losango. Nos livros de sétima e oitava séries, o cálculo de áreas é integrado ao cálculo de produtos notáveis. Em nenhum momento faz-se referência ao uso de tecnologias como *softwares* de geometria dinâmica, e o aluno está sempre colocado na função de receptor de conteúdos, não sendo instigado a investigar ou construir seus conhecimentos por meios próprios.

Já a coleção *Tudo é Matemática* foi analisada, por ser, atualmente, considerada uma boa coleção pelos especialistas da área. O autor apresenta os conceitos e vai aprofundando-os aos poucos, retomando e ampliando-os ao longo das quatro séries. Ele introduz os conceitos através de situações do dia a dia e, com os resultados dos exercícios, apresenta as definições e fórmulas para o cálculo do perímetro e da área de diferentes figuras. Relaciona o conteúdo com outras áreas, como Geografia e Ciências, e apresenta textos contextualizados historicamente. Utiliza o ladrilhamento e a decomposição como métodos para o cálculo da área. As fórmulas das principais figuras são apresentadas no livro da quinta série, contudo situações que envolvem composição e decomposição são apresentadas ao longo da coleção, aprofundando e exigindo mais do aluno, conforme a série em que se encontra. Além disso, o autor tem um cuidado muito grande ao apresentar situações em que tenta mostrar ao aluno que não é necessária a memorização de fórmulas, mas, sim, a compreensão dos conceitos que estão sendo apresentados.

Com essa análise, percebemos que os livros didáticos, ferramentas fundamentais para muitos professores, se apresentam com abordagens diferenciadas. Alguns não desenvolvem os conteúdos de forma a promover uma compreensão satisfatória do que está sendo estudado. Outros, mais recentes, refletem resultados de investigações da área de Educação Matemática, mostrando a tendência atual para ensino de área e de perímetro com utilização de ladrilhamento, composição e decomposição de figuras. Recursos tecnológicos, como *softwares* e vídeos, raramente são apresentados como ferramentas a serem utilizadas nas aulas de Matemática.

Análises Prévias: dificuldades de aprendizagem dos alunos

Para esta análise, alguns colegas que atuam como professores do Ensino Fundamental foram questionados sobre quais são os erros que geralmente os alunos cometem, quando os assuntos em estudo são perímetro e área de figuras planas. As respostas destacam o mesmo erro: os alunos confundem os conceitos.

Esses mesmos professores assumem sua responsabilidade diante desta e de outras dificuldades: nem sempre é possível preparar uma aula que demande mais tempo com atividades práticas, permitindo ao aluno explorar situações que envolvam o uso de instrumentos de medida, desenhos, representações gráficas, criando oportunidades para uma melhor compreensão.

Para saber as dificuldades do ponto de vista dos alunos, uma turma de sétima série foi convidada a responder um questionário (Anexo A) que foi utilizado para identificar os aspectos dos conceitos de perímetro e de área ainda não apropriados. As questões foram preparadas com o propósito de explorar esses conceitos, aplicando-os corretamente, sem a necessidade de utilizar fórmulas para encontrar a solução .

O grupo era constituído por 22 alunos de sétima série do Ensino Fundamental da Escola Estadual William Richard Schisler de Porto Alegre. Por meio desse questionário buscamos descobrir qual a concepção do aluno sobre perímetro e área e quais estratégias de resolução eles utilizariam para descobrir o perímetro e a área das figuras apresentadas. Essa série foi escolhida, considerando que, na série anterior, os alunos já tiveram contato com o conteúdo abordado.

Analisando as respostas obtidas no questionário aplicado, constatamos que os alunos, em sua maioria, não conseguiram relacionar perímetro com a medida da linha que circunda um objeto bidimensional, e área com a quantidade de espaço utilizada por uma figura.

Trabalhos Correlatos

Pela análise de algumas pesquisas já realizadas sobre essa temática, pudemos perceber que o ensino de perímetro e área está sendo repensado e novas propostas estão sendo desenvolvidas.

Conforme destacam os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, 1997), a geometria tem pouca presença nas aulas de Matemática e, muitas vezes, seu ensino é confundido com o ensino de medidas. Para o ensino de medidas, os PCNs sugerem que o aluno deve obter e expressar resultados – tanto quanto de medidas de comprimento, como de massa, tempo, capacidade, superfície, volume, densidade e velocidade – e resolver situações-problema.

Sugerem, também, que o ensino da área seja abordado a partir de atividades que explorem a composição de figuras, como ladrilhamento ou tangrans, salientando que o recobrimento de uma superfície pode ser feito por outras figuras, como triângulos equiláteros, quadrados, retângulos e hexágonos regulares. Para facilitar o cálculo de área, podemos proporcionar ao aluno atividades que o levem a descobrir que toda figura poligonal pode ser composta por outras ou decomposta em outras. Decomposição e composição de figuras geométricas são processos que envolvem a operação de reconfiguração. O aluno pode entender os conceitos de perímetro e área utilizando a comparação entre diferentes figuras.

Chiummo (1998), em seu estudo desenvolvido com professores de Matemática do Ensino Fundamental, aplica uma proposta didática para o ensino-aprendizagem do conceito de área. O objetivo do trabalho é propor uma sequência didática que auxilie professores na construção de situações de ensino-aprendizagem do conceito de área. O autor segue a ideia de levar os alunos a desenvolverem a noção de superfície e de área trabalhando com ladrilhamento, composição e decomposição.

Outro trabalho estudado foi o de Secco (2007). Esse autor propôs-se a investigar como o processo de reconfiguração através do uso da composição e decomposição de figuras planas contribui na apropriação do conceito de área de um polígono e se esse processo favorece a passagem do empírico para o dedutivo. Para o desenvolvimento de uma sequência didática, ele baseou-se na metodologia da engenharia didática e recorreu a pressupostos teóricos da geometria dinâmica com a utilização do *software* Cabri-Géomètre.

Projeto Pedagógico: recursos didáticos

O objetivo principal deste trabalho consistiu em investigar como os conceitos de perímetro e de área de figuras planas poderiam ser apresentados aos alunos da sexta série do Ensino Fundamental, de maneira significativa e motivadora, utilizando recursos tecnológicos e manipulativos.

Nessa perspectiva, a proposta didática inicia com um vídeo, como instrumento sensibilizador, denominado *As coisas têm área, volume e forma*, do *Novo Telecurso*[4]. O vídeo apresenta uma situação em que são comparadas figuras de diferentes formatos e perímetros, porém com mesma área.

Em seguida, foram utilizados diferentes textos extraídos de um livro didático intitulado *Projeto Araribá: Geografia* (AOKI, 2006) e de alguns *sites*[5]. Esses textos foram utilizados pelos alunos, como material de pesquisa, para que percebessem a aplicação de conhecimentos matemáticos em diferentes situações.

Foram utilizados, também, material concreto e instrumentos de medidas, em uma sequência de atividades, seguindo a ideia básica de desenvolver os conceitos através da decomposição e composição de figuras e de procedimentos de contagem, com o uso de ladrilhamento e de papel quadriculado.

Também foi utilizado o *software* Geogebra, que é um *software* de geometria dinâmica que permite a construção de objetos geométricos – através das propriedades que os definem – e a manipulação desses objetos.

Objetivos da Proposta Didática e das Hipóteses

A experiência didática foi desenvolvida com um grupo de 25 alunos da sexta série da Escola Estadual de Ensino Fundamental William Richard Schisler de Porto Alegre , em 13 aulas, cada uma com duração de 50 minutos, ao longo de três semanas.

---

4 Disponível em: <http://novotelecurso.blogspot.com/2009/01/matemtica-e-fundamental-aula-14-1-de-2.html>. Acesso em: 24 maio 2011.

5 Sites consultados: <http://www.sosmatatlantica.org.br>; <http://www.ibama.gov.br>; <http://www.brasilescola.com/brasil/rio-amazonas.htm>; < http://www.brasilazul.com.br/riograndedosul.asp>; < http://www.fne.org.br/fne/index.php/fne/noticias/20_da_area_devastada_da_amazonia_tem_floresta_em_fase_de_regeneracao>. Acessos em: 23 maio 2011.

O principal objetivo da prática foi favorecer a aprendizagem de perímetro e de área de figuras planas, construindo os conceitos de perímetro – como comprimento do contorno de uma região plana – e o de área – como o “tanto” de superfície de uma região plana.

Antes de ser desenvolvida a experiência didática, foram elaboradas algumas hipóteses.

1. Sobre conhecimentos prévios, foi pressuposto que os alunos:
   a) já possuíssem conhecimentos sobre grandezas, de comprimento, massa, capacidade, temperatura e unidade de tempo;
   b) percebessem as grandezas presentes em diversos contextos;
   c) conhecessem alguns termos e definições, como por exemplo: **figuras planas, diagonal e lado de uma figura**; e
   d) pouco soubessem utilizar recursos, como esquadro, transferidor, e compasso. Seria novidade para muitos alunos.
2. Em relação ao *software* Geogebra, foi pressuposto que seria necessário um tempo para que os alunos se familiarizassem com as ferramentas e com a área de trabalho.
3. Sobre a apropriação de conhecimentos, foi pressuposto que os alunos estabelecessem relações entre a área do triângulo e do retângulo, do trapézio e do retângulo e do paralelogramo e do retângulo.
4. Sobre postura e comunicação, foi pressuposto que:
   a) os momentos de discussão e exposição de ideias seriam de extrema importância, para entender o que os alunos estavam pensando e quais conhecimentos já possuíam; e
   b) com a necessidade de realizar as tarefas em pequenas equipes, houvesse colaboração de todos, participação efetiva nas discussões e construções, e que esse convívio aproximasse os alunos que geralmente se mantêm mais isolados.
5. Sobre os resultados, ao final da sequência didática, foi pressuposto que seriam obtidas as seguintes conclusões sobre a investigação:
   a) o estudo de perímetro e de área de figuras poligonais torna-se mais fácil quando se faz uso de ladrilhamento, composição e decomposição de figuras;

b) uma sequência de atividades que trabalhe detalhadamente a diferença entre os conceitos de perímetro e de área contribui efetivamente para a aprendizagem; e

c) a generalização e o uso de fórmulas são favorecidos pelo trabalho empírico realizado inicialmente, como, por exemplo, no cálculo da área do retângulo.

Quadro 1: Síntese do conjunto de atividades da sequência didática

Plano de Ensino			
Etapas	**Objetivo**	**Ação**	**Recursos**
Etapa1	Introduzir a discussão sobre os conceitos de perímetro e de área.	Assistir ao vídeo.	Vídeo *As coisas têm forma, volume e área.*
Etapa1	Introduzir a discussão sobre os conceitos de perímetro e de área.	Discutir sobre o assunto, levantando conceitos prévios dos alunos sobre grandezas.	Material de escrita.
Etapa1	Introduzir a discussão sobre os conceitos de perímetro e de área.	Pesquisar em diferentes textos o que eles apresentam em relação a quantidades que representam perímetro e área.	Textos extraídos de diferentes fontes. Material de escrita.
Etapa 2	Refletir sobre a unidade de medida ideal para tratar os conceitos.	No *software* Geogebra, recobrir uma superfície com diferentes formas geométricas. Discutir sobre qual a melhor forma para se recobrir uma superfície.	*Software* Geogebra.
Etapa 3	Permitir que o aluno elabore o significado de área como o "tanto" de superfície e o de perímetro como o de contorno da figura.	Montar figuras diferentes com a mesma quantidade de unidades de área. Analisar diferentes figuras e comparar sua área e seu perímetro. Discutir no pequeno grupo e registrar as conclusões no questionário sobre o perímetro e área de cada uma das figuras formadas.	Material de escrita. Tesoura. Quadrados de EVA.
Etapa 4	Mostrar ao aluno que, mesmo as figuras sendo compostas por unidades diferentes (quadrado de lado 2 cm e triângulo isósceles que tem área igual à metade da área do quadrado), a área será igual e o perímetro, dependendo da organização das unidades, poderá ser igual ou diferente.	Utilizar os quadrados de 2 cm de lado e triângulos isósceles que têm área igual à metade da área do quadrado para compor figuras de mesma área. Discutir sobre a área e o perímetro de cada uma das figuras considerando as duas unidades de área diferentes.	Quadrados e triângulos em EVA. *Software* Geogebra.

Etapa 5	Levar o aluno a realizar: • o cálculo do perímetro do retângulo como sendo medida do comprimento mais medida da largura vezes dois. • o cálculo da área do retângulo como sendo o produto da medida do comprimento pela medida da largura. • a reconhecer a necessidade de se observar a unidade de medida.	Cálculo do perímetro e da área de um retângulo utilizando duas unidades diferentes.	Papel A4. Material de escrita. Tesoura.
Etapa 6	Verificar o uso correto da unidade de medida que está sendo utilizada.	Desenho de retângulos diferentes para o cálculo do perímetro e da área de cada um.	*Software* Geogebra.
Etapa 7	Estabelecer uma relação entre os dois triângulos idênticos e o retângulo construído a partir da decomposição deles.	Desenhar dois triângulos idênticos, decompor um deles e compor, com as três figuras, um retângulo.	Material de escrita. Compasso. Papel A4.
Etapa 8	Levar o aluno a descobrir a relação entre o cálculo da área do paralelogramo e a do retângulo.	Decompor dois paralelogramos de maneiras diferentes e compor com as partes um retângulo.	Material de escrita. Régua. Compasso. Esquadro. Paralelogramos desenhados em EVA.
Etapa 9	Levar o aluno a perceber como calcular a área do trapézio através da área do retângulo.	Desenhar e decompor dois diferentes trapézios de tal forma a obter com cada um deles um retângulo.	Material de escrita. Régua. Compasso. Esquadro. Paralelogramos desenhados em EVA.

Fonte: Elaborado pela Prof[a]. Grasciele Centenaro

Sequência Didática

Estas atividades foram elaboradas com o objetivo de fazer com que os alunos construíssem, através da experimentação, os conceitos de perímetro e de área e tivessem clareza das diferenças entre esses conceitos. Algumas atividades foram extraídas do trabalho desenvolvido por Secco (2007), outras inspiradas nas atividades desenvolvidas por Chiummo (1998) e ainda outras, criadas pela aluna/professora que elaborou esta pesquisa[6].

6 Primeira autora deste trabalho.

Etapa 1

- Recurso: vídeo *As coisas têm área, volume e forma*, textos extraídos de livros didáticos de outras áreas e de *sites*.
- Descrição da atividade: assistir ao vídeo; discutir sobre o assunto levantando os conhecimentos prévios dos alunos. Discutir as noções de grandeza de que os alunos dispõem; realizar a discussão em pequenos grupos, anotar as conclusões e expor ao grande grupo; procurar nos textos extraídos de livros e da internet o que se relaciona à área e ao perímetro; preparar um pequeno painel com as informações; discutir sobre os textos e sobre o uso de cada uma das grandezas e unidades que neles constam.

Etapa 2

- Recurso: *software* geogebra.
- Descrição da atividade: no geogebra, abrir o arquivo "*recobrindo.ggb*" e utiliz*ar as formas ge*ométricas coloridas para recobrir a figura desenhada, com formato em "T" utilizando um tipo de polígono por vez, sem sobreposição de peças. Em seguida, refletir e responder às questões propostas: que forma recobre melhor a figura? Por quê?

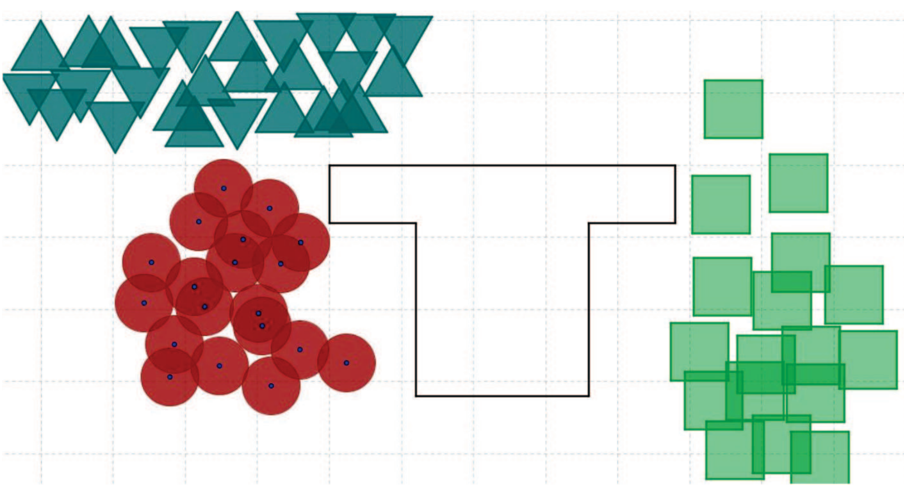


Figura 1: Captura de tela do *software* geogebra, arquivo "recobrindo.ggb".
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Grasciele Centenaro

Etapa 3

- Recursos: lápis, régua de 30 cm, esquadro, tesoura, folha de EVA.
- Descrição da atividade: na folha de EVA, desenhar um quadrado de 20 cm de lado; dividi-lo em 100 quadradinhos, cada um com 2 cm de lado; recortá-los; montar cinco figuras diferentes, utilizando, para cada uma, 20 quadradinhos que deverão ser dispostos um ao lado do outro, sem sobreposição de peças. Responder às questões:
  1. O que você pode dizer sobre as cinco figuras?
  2. Elas têm o mesmo formato?
  3. Quantas unidades formam o seu contorno?
  4. Elas têm a mesma área?

Observações:

Quando o número de quadradinhos (iguais) que cabem em duas figuras é o mesmo, dizemos que as figuras são equivalentes, ou que as figuras têm a mesma área.

Quando o número de unidades (iguais) que formam o contorno das figuras é o mesmo, dizemos que as figuras têm o mesmo perímetro.

Agora, observe as figuras a seguir:

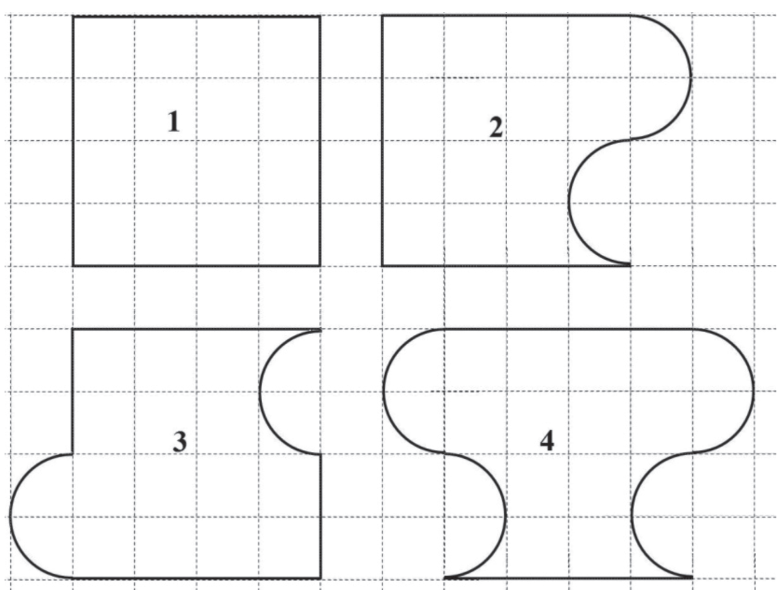


Figura 2: Regiões planas de mesma área e perímetros diferentes
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Grasciele Centenaro

Comparando as figuras:

1. O que você pode constatar sobre o perímetro das figuras?
2. O que você pode constatar sobre a área das figuras?

Etapa 4

- Recursos: lápis, régua, tesoura, os quadradinhos da Atividade 3, *software* Geogebra.

  Descrição da atividade: utilizar os quadradinhos da Etapa 3; traçar e recortar as diagonais de 20 quadradinhos transformando-os em 40 triângulos; montar cinco figuras diferentes utilizando oito triângulos e dez quadrados, dispondo-os um ao lado do outro sem sobreposição de peças. No *software* Geogebra, utilizando a malha quadriculada 1 cm por 1 cm, desenhar uma das figuras que você montou.

Responder às questões:

1. O que você pode constatar sobre o perímetro das cinco figuras?
2. O que você pode constatar sobre a área das cinco figuras?
3. Considerando o quadrado como unidade de medida, qual é a área de cada uma das figuras?
4. Considerando o triângulo como unidade de medida, qual é a área de cada uma das figuras?

Verifique suas respostas, comparando o perímetro encontrado na montagem com o desenho no *software* Geogebra.

Etapa 5

- Recursos: lápis, régua, esquadro, tesoura, folha A4.
- Descrição da atividade: desenhar e recortar um retângulo de 14 cm de comprimento por 6 cm de largura. Utilizando como unidade de medida de área os quadradinhos da Atividade 3, quantos quadradinhos cabem no retângulo?
  1. Qual é o perímetro da figura?
  2. E se for utilizada outra unidade de área, por exemplo, um

quadrado de 1 cm de lado, ou seja 1 cm^2, qual será a área do retângulo?

3. Qual será o novo perímetro?
4. Como você fez para calcular?

Etapa 6

No *software* Geogebra, utilizar a malha 1 cm por 1 cm; desenhar os retângulos com medidas: 2 cm por 4 cm; 1 cm por 5 cm; 3 cm por 3 cm; 7 cm por 4 cm. Calcule separadamente a área e o perímetro de cada figura. Você consegue generalizar um procedimento para o cálculo do perímetro e da área?

Etapa 7

- Recursos: lápis, régua de 30 cm, tesoura, folha EVA, compasso.
- Descrição da atividade: construir e recortar dois triângulos iguais como mostra a figura a seguir:

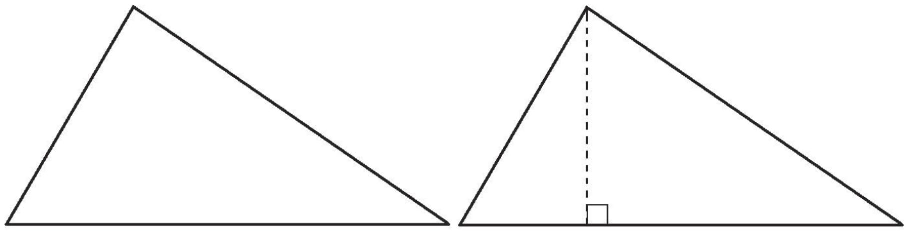


Figura 3 - Modelo do triângulo usado na decomposição.
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Grasciele Centenaro

Recortar um dos triângulos no segmento tracejado. Montar um retângulo utilizando as três figuras.

1. Qual a relação entre a área do triângulo e a do retângulo?
2. Como você calcularia a área do triângulo sem fazer o corte?
3. Qual a relação entre o perímetro do triângulo e do retângulo?

Etapa 8

- Recursos: lápis, régua de 30 cm, tesoura, folha de EVA, compasso, esquadro.
- Descrição da atividade: desenhar e recortar um paralelogramo qualquer, como mostra a figura a seguir. Lembre-se de que um paralelogramo é um quadrilátero de lados paralelos dois a dois. Traçar e recortar no segmento pontilhado como mostra a figura.

Figura 4: Modelo do paralelogramo usado na decomposição.
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Grasciele Centenaro

Montar um retângulo com as duas figuras.

1. Qual a relação entre a área do paralelogramo e a do retângulo?
2. Como você calcularia a área do paralelogramo sem fazer este recorte?
3. Qual a relação entre o perímetro do paralelogramo e o do retângulo?

Agora, desenhe e recorte um paralelogramo qualquer, como mostra a figura a seguir.

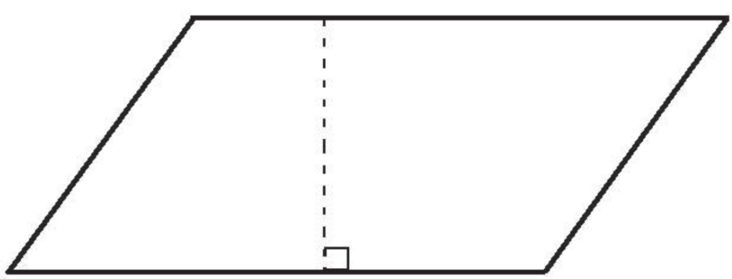


Figura 5: Modelo do paralelogramo usado na decomposição.
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Grasciele Centenaro

Recorte a figura no segmento tracejado. (A posição do segmento pontilhado pode ser qualquer uma, desde que seja perpendicular à base do paralelogramo). Depois, componha um retângulo com as duas figuras e responda novamente ao questionário.

Etapa 9

- Recursos: lápis, régua de 30 cm, tesoura, uma folha de EVA.
- Descrição da atividade: desenhe o trapézio como mostra a figura a seguir.

Figura 6 : Modelo do trapézio usado na decomposição.
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Grasciele Centenaro

Recorte a figura nos segmentos tracejados. Montar um retângulo com as peças.

1. Qual a relação com a área do trapézio e a do retângulo?
2. Como você calcularia a área do trapézio sem fazer este recorte?
3. Qual a relação entre o perímetro do trapézio e o do retângulo?

Agora, desenhe dois trapézios idênticos, como mostra a figura a seguir. Recorte as figuras nos segmentos tracejados. Componha, com as peças, um retângulo. Depois, responda novamente às questões.

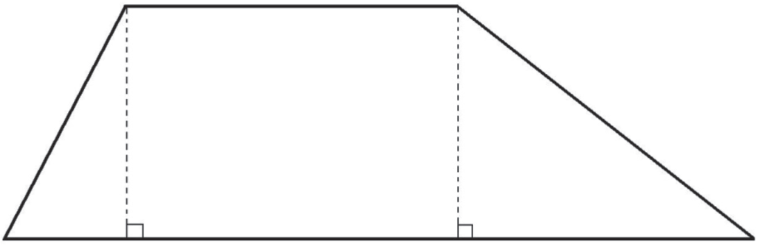


Figura 7: Modelo do trapézio usado na decomposição.
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Grasciele Centenaro

Relato da Prática

A prática teve duração de 13 horas e foi desenvolvida em horário normal, utilizando a sala de aula, a sala de vídeo e o laboratório de informática. Na primeira etapa da experiência didática foi realizada uma discussão inicial sobre os conceitos de perímetro e área, utilizando como ponto de partida o vídeo *As coisas têm área, volume e forma*. Os alunos assistiram ao vídeo e posteriormente discutiram em pequenos grupos a situação ali apresentada. Cada grupo escolheu um representante para explicar a proposta apresentada pelo vídeo. Mesmo sem saber ao certo o significado de todos os termos apresentados nas falas, os alunos conseguiram explicar que a proposta do vídeo era realizar a medição de um terreno que foi dividido em quatro partes de mesma área e formatos diferentes.

Posterior ao vídeo deu-se encaminhamento à segunda etapa desta atividade que trazia como proposta a discussão sobre os conceitos prévios dos alunos sobre grandezas. Os exemplos dados por eles não tratavam exatamente de grandezas, mas de unidades que são utilizadas para medi-las.

Em seguida, os alunos pesquisaram, em textos extraídos de livros didáticos e de alguns *sites*, os valores que eram utilizados para expressar perímetro e área. As unidades de medida encontradas nestes textos foram m^2, hectare, km e km^2.

Quadro 2: Texto extraído de livro didático

"O gigante da Amazônia" Em meio a toda a devastação da região amazônica, o Amapá resiste como um modelo de preservação: cerca de 95% de seu território ainda corresponde à mata virgem e lá está situada a maior reserva de floresta tropical do planeta. Vamos conhecer esse patrimônio ambiental no texto a seguir, extraído da revista Os caminhos da Terra. "É possível que não se encontre esforço para preservação da Floresta Amazônica maior do que - ao menos em termos dimensionais - ao Parque Nacional Montanhas do Tumucumaque, no Amapá. A área de preservação, sozinha, representa 1% de toda a Amazônia e ocupa mais do que 26% do Amapá, além de ser a maior unidade de conservação do Brasil e a maior área protegida de floresta tropical do mundo. O contorno aproximado do parque é de 1.750 quilômetros, uma metragem maior do que a que marca a distância entre Brasília e Florianópolis. A área total é de 3,8 milhões de hectares (ou 38 mil km^2), quase o território inteiro da Holanda ou duas vezes o estado de Sergipe. [...].

Fonte: Aoki (2006, p.43)

Quadro 3: Textos extraído da internet

20% da área devastada da Amazônia têm floresta em fase de regeneração
Dados preliminares de estudo inédito do Inpe/Embrapa apontam o que ocorre nos 700 mil km² já desmatados. Pela primeira vez desde que começou a monitorar o desmatamento da Amazônia, em 1988, o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe) vai "tirar a máscara" da floresta e ver o que está acontecendo nos 700 mil quilômetros quadrados já desmatados da região. Um estudo preliminar, baseado numa amostra de 26 imagens de satélite, indica que 19,4% dessa área total desmatada possui florestas secundárias em processo de regeneração. A expectativa de vida dessas novas florestas, porém, é curta - cerca de cinco anos, até serem derrubadas novamente.[...]

Fonte: < *http://www.fne.org.br/fne/index.php/fne/noticias/20_da_area_devastada_da_amazonia_tem_floresta_em_fase_de_regeneracao*> . Acesso em: 13 jun. 2010.

Os alunos relataram já terem utilizado as unidades, porém, sem saber ao certo o significado de cada uma delas. A surpresa maior foi em relação ao hectare, medida que poucos conheciam e que, no entanto, é frequentemente empregada em textos relacionados à demarcação de terras. Um grupo analisou o texto *O Gigante da Amazônia* (Quadro 2) e realizou a conversão de 3,8 milhões de hectares, área de mata ainda preservada, para m². Depois de feito o cálculo, um dos alunos exclamou: *"Não sei nem ler este número, de tantos zeros que ele tem!"*. A descoberta serviu para salientar que algumas unidades são inadequadas para certas situações, por isso, a existência de outras unidades maiores, para facilitar a manipulação de dados.

Outro grupo, que analisou o texto *20% da área devastada da Amazônia têm floresta em fase de regeneração* (Quadro 3), destacou a área da mata amazônica já desmatada que, neste caso, é apresentada em km².

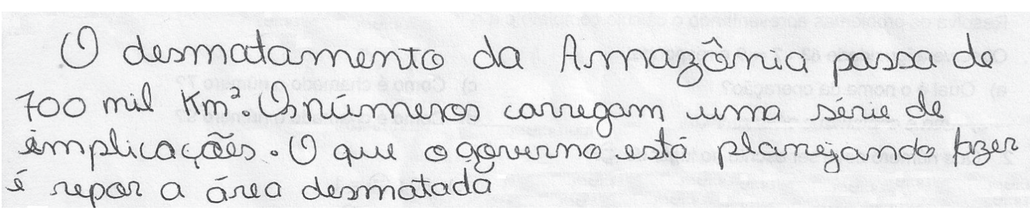

O desmatamento da Amazônia passa de 700 mil Km². Os números carregam uma série de implicações. O que o governo está planejando fazer é repor a área desmatada

Figura 8: Análise do texto feita por um grupo de alunos. Transcrição: "O desmatamento da Amazônia passa de 700 mil km². Os números carregam uma série de implicações. O que o governo está planejando fazer é repor a área desmatada".
Fonte: Aluno A, 6ª série (2010)

Terminada a escolha e a análise dos textos, cada grupo expôs aos colegas o assunto abordado no texto escolhido, a unidade encontrada nele e, também, se a unidade estava sendo utilizada para quantificar área ou comprimento.

Na Etapa 2, foi proposto utilizar o *software* geogebra, em uma atividade que exigia do aluno que recobrisse uma superfície plana com diferentes formas geométricas (quadrado, triângulo e círculo), e refletisse sobre a figura ideal para medir área de uma figura.

Os alunos não apresentaram dificuldades em realizar a atividade e alguns grupos, antes de terminarem, já haviam concluído que a figura ideal seria o quadrado, justificando que, ao utilizar outras figuras, sobrariam mais espaços não preenchidos.

Na Etapa 3, o objetivo era o de que o aluno elaborasse o significado de perímetro como o "comprimento do contorno da figura" e o significado de área como o "tanto de superfície desta figura". Na primeira parte da atividade, os alunos deveriam desenhar no EVA um quadrado com 20 cm de lado e dividi-lo em 100 quadradinhos menores, cada um com 2 cm de lado. Cada um desses quadradinhos deveria ser considerado com uma unidade de área.

Alguns grupos apresentaram dificuldades para desenhar o retângulo: não conseguiam obter a precisão necessária quanto aos ângulos retos por não saberem utilizar adequadamente o esquadro.

Ao final da primeira parte da atividade, a grande maioria mostrou ter compreendido com clareza cada um dos conceitos. Escreveram que, apesar de as figuras construídas por eles não terem o mesmo formato e em algumas não terem o mesmo perímetro, a área seria sempre a mesma, pois essa foi uma condição pré-estabelecida: de que cada figura fosse desenhada com 20 quadradinhos.

Na segunda parte da atividade, os alunos deveriam elaborar estratégias para verificar a área e o perímetro de cada uma das figuras e comparar o perímetro e área das quatro figuras.

Todos os grupos responderam sem dificuldades que as quatro figuras apresentadas poderiam ser transformadas em quadrados de mesma área, decompondo a figura dada e compondo um quadrado. Também, em relação ao perímetro, eles perceberam sem dificuldades que havia valores diferentes entre o perímetro das figuras.

Na Etapa 4, o objetivo era fazer com que o aluno percebesse que unidades de medida diferentes modificam o valor numérico atribuído ao perímetro e à área. Os alunos deveriam dividir 20 quadradinhos, dos utilizados na etapa 3, em uma das diagonais, transformando-os em triângulos, depois, desenhar cinco figuras diferentes, utilizando oito triângulos e dez quadradinhos em cada uma, e comparar o perímetro e a área entre elas.

A maior parte do grupo percebeu que, considerando os quadradinhos da etapa 3 como unidade de medida, o perímetro e a área teriam valores diferentes daqueles obtidos quando o triângulo foi considerado como unidade de medida. Alguns alunos perceberam ainda que, quando utilizavam o triângulo como unidade de medida, deveriam considerar a diferença existente entre a medida dos catetos e a medida da hipotenusa no cálculo do perímetro.

A outra etapa da atividade – conferir os resultados utilizando os recursos de perímetro e área no *software* geogebra – não foi realizada, pois no dia em que essa atividade foi desenvolvida o laboratório de informática estava indisponível para uso pelos alunos.

Quando o projeto pedagógico foi proposto, a escola dispunha de um laboratório de informática com seis computadores, todos obsoletos. Passados alguns dias do início das atividades, a direção comunicou que, por tempo indeterminado, o laboratório estaria indisponível, em função de uma reestruturação, já que seriam instalados dez novos computadores e colocados climatizadores de ambiente. O laboratório permaneceu fechado por muitos dias, o que prejudicou o andamento das ações, porém, depois de terminada a reestruturação, professores e alunos passaram a dispor de um ambiente adequado para estudo e pesquisa com computadores modernos.

Na Etapa 5, o objetivo era o de levar o aluno a perceber o cálculo do perímetro do retângulo como sendo o dobro da soma da medida do comprimento com a medida da largura; e o cálculo da área como sendo o produto da medida do comprimento pela medida da largura. Também se esperava que o aluno reconhecesse a necessidade de observar a unidade de medida.

O aluno deveria desenhar um retângulo de 14 cm por 6 cm, calcular seu perímetro e sua área utilizando os quadrados das atividades anteriores – com 2 cm de lado – conforme mostra a Figura 9.

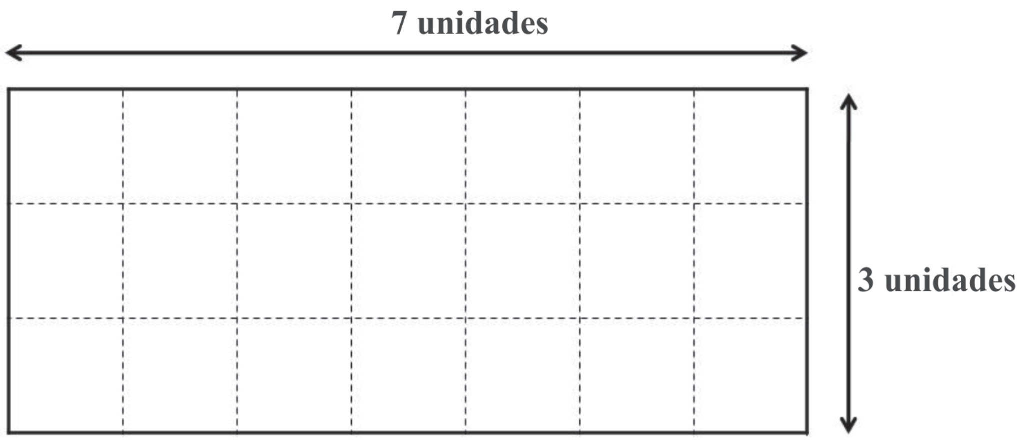


Figura 9: Ladrilhamento do retângulo usando 4 cm² como unidade de medida.
Fonte: Elaborada pela Profª. Grasciele Centenaro

Em seguida, os alunos deveriam realizar os mesmos cálculos utilizando 1 cm² como unidade de medida, conforme mostra a Figura 10.

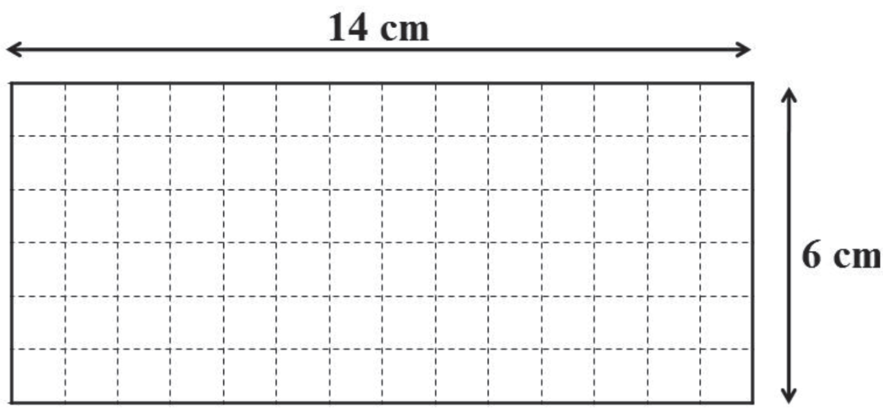


Figura 10: Ladrilhamento do retângulo usando 1 cm² como unidade de medida
Fonte: Elaborada pela Profª. Grasciele Centenaro

O desenho do retângulo deu-se com mais facilidade em relação à etapa 3. No cálculo do perímetro e da área, utilizando como unidade de medida os quadrados das atividades anteriores, nenhum grupo apresentou dificuldades, respondendo com clareza que o perímetro é igual a 20 unidades e a área é igual a 21 unidades. Na outra parte da atividade, em que deveriam considerar o 1 cm² como unidade de medida, algumas das respostas foram intuitivas, mas interessantes: "*Como o quadrado inicial foi dividido em 4 quadradinhos menores, então a área inicial deve ser multiplicada por 4 e o perímetro deve ser multiplicado por 2, já que o lado do quadrado inicial havia sido dividido em duas partes*".

Nem todos os alunos responderam desse modo, utilizando ainda a contagem das unidades para a obtenção do resultado.

Na etapa 6 não foi possível novamente utilizar o *software* Geogebra. Como alternativa, os alunos realizaram a atividade em papel quadriculado.

Para a elaboração de uma estratégia generalizada para o cálculo do perímetro e da área do retângulo, os alunos tiveram dificuldades em organizar e dar nomes às variáveis envolvidas, largura e comprimento.

Alguns dos registros mostram que, apesar de não relacionarem como comprimento e largura, utilizaram outros termos, chegando a uma generalização satisfatória. Por exemplo, para o cálculo da área: "*Multiplicar a quantidade de quadradinhos da vertical pela quantidade de quadradinhos da horizontal*". Para o cálculo do perímetro: "*Somar a quantidade de quadradinhos da vertical com a quantidade de quadradinhos da horizontal e multiplicar esse resultado por 2*".

A Etapa 7 tinha por objetivo fazer com que os alunos estabelecessem uma relação entre a área do retângulo construído com a do triângulo. Na Figura 11, apresentamos uma sequência do que deveria ser feito pelos alunos.

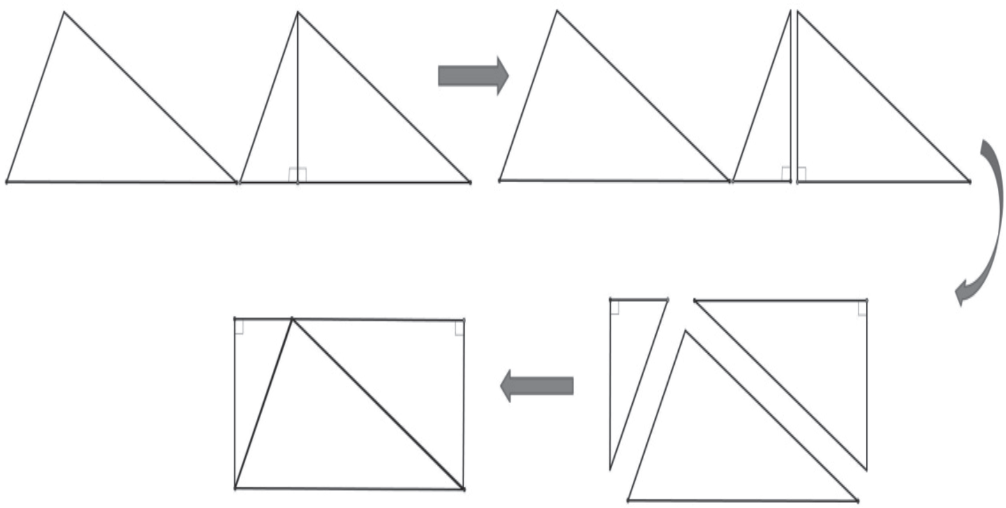


Figura 11: Sequência de passos para a decomposição do triângulo.
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Grasciele Centenaro

Primeiro, os alunos deveriam transferir as medidas do desenho fornecido para o EVA, com o auxílio do compasso, o que representou uma grande dificuldade, pois não estavam habituados a utilizá-lo; depois, cortar o segundo triângulo no segmento tracejado e, com as peças, compor um retângulo.

Praticamente todos os grupos perceberam com facilidade que a área de um triângulo é igual à metade da área do retângulo. Também concluíram que não é possível calcular o perímetro do triângulo utilizando o perímetro do retângulo, pois algumas linhas que formam o contorno do triângulo são partes internas no retângulo.

Na Etapa 8, a proposta era a de que os alunos estabelecessem uma relação entre a área do retângulo composto a partir da decomposição do paralelogramo. Na Figura 12 é apresentada a sequência de passos que deveria ser realizada pelos alunos.

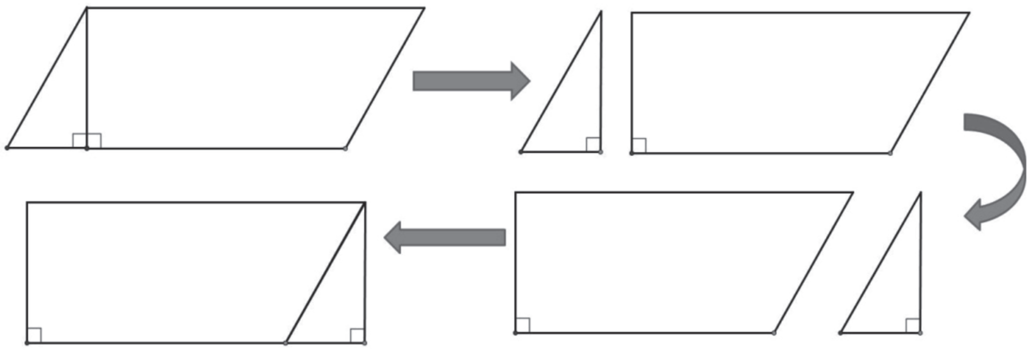


Figura 12: Sequência de passos para a decomposição do paralelogramo (1)
Fonte: Elaborada pela Prof. Grasciele Centenaro

Antes de iniciar a atividade, porém, foi necessária a introdução de novas definições: a de retas paralelas e retas perpendiculares, pois os desenhos não estavam sendo feitos de acordo com as propriedades que definem um paralelogramo.

Na primeira parte da atividade, os alunos foram orientados a desenharem a altura do paralelogramo, utilizando esquadro, e a cortar neste local, tendo assim duas novas figuras para compor um retângulo. Ao estabelecerem a relação entre a área das duas figuras, alguns alunos equivocaram-se utilizando um dos lados do paralelogramo como altura do retângulo. Reconheceram então que a altura do retângulo equivalia à linha pontilhada no paralelogramo. Posterior a isso, todos os grupos conseguiram estabelecer que a área do paralelogramo equivale à área do retângulo de mesmo comprimento e de mesma altura e que, portanto, a área do paralelogramo é o comprimento vezes a altura, apresentando algumas generalizações para esse cálculo, como por exemplo, Ap=PxL , em que P representa comprimento e L representa altura.

Para o cálculo do perímetro, os alunos concluíram que dois dos lados que compunham o perímetro do paralelogramo não fariam parte do perímetro do retângulo e que, portanto, não era possível estabelecer uma relação.

Na segunda parte da atividade, o que a diferenciava da primeira era a posição da altura do paralelogramo. A sequência de passos que se esperava que os alunos fizessem é apresentada na Figura 13.

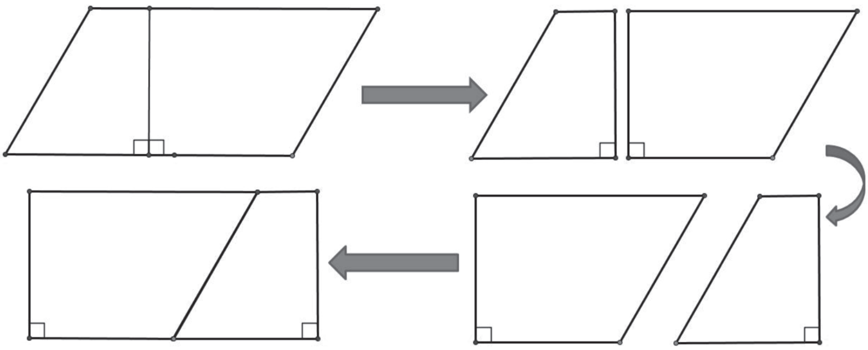


Figura 13: Sequência de passos para a decomposição do paralelogramo (2)
Fonte: Elaborada pela Profª. Grasciele Centenaro

Não foi necessária nenhuma intervenção, pois os alunos perceberam com facilidade a equivalência entre as áreas do paralelogramo e do retângulo. Como exemplo, o relato de um dos grupos: "*Se pegarmos a primeira parte do paralelogramo recortada e colocarmos do outro lado, ficará um retângulo. Calculamos a área fazendo comprimento vezes pontilhado* (altura)*, o perímetro não tem como calcular sem saber as medidas dos lados do paralelogramo*".

Na Etapa 9, o objetivo era o de que os alunos estabelecessem uma relação entre a área do trapézio decomposto e a área do retângulo composto e que fizessem o mesmo em relação ao perímetro. Na Figura 14 é apresentada uma sequência de passos através da qual é possível entender como o trapézio é decomposto.

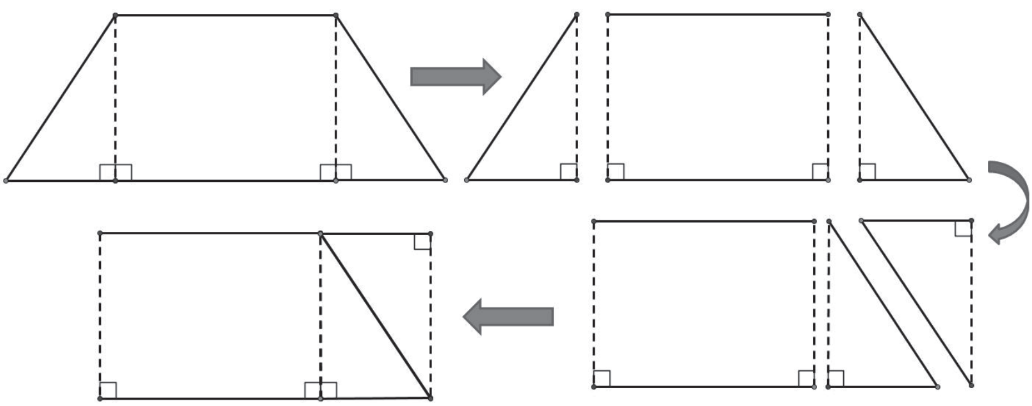


Figura 14: Decomposição do trapézio (1)
Fonte: Elaborada pela Profª. Grasciele Centenaro

Na primeira parte da atividade, os alunos não tiveram dificuldades em perceber que não seria possível obter o perímetro do trapézio através do perímetro do retângulo. Alguns destacaram que os lados não paralelos do trapézio acabam não compondo o perímetro do retângulo. Quanto à área do trapézio e à área do retângulo, eles responderam que deveriam possuir o mesmo valor, pois a decomposição não estava alterando a área da superfície. Apresentaram dificuldades somente ao tentarem escrever uma fórmula para obtenção de um valor numérico para o cálculo da área. Foi necessário dar um exemplo para explicar que a parte da base maior do trapézio que é retirada da figura, é colocada para completar a base menor da figura e, com esse procedimento, encontramos um valor médio entre os comprimentos das bases.

A segunda parte da atividade exigia a composição de um retângulo a partir de dois trapézios, conforme sequência na Figura 15.

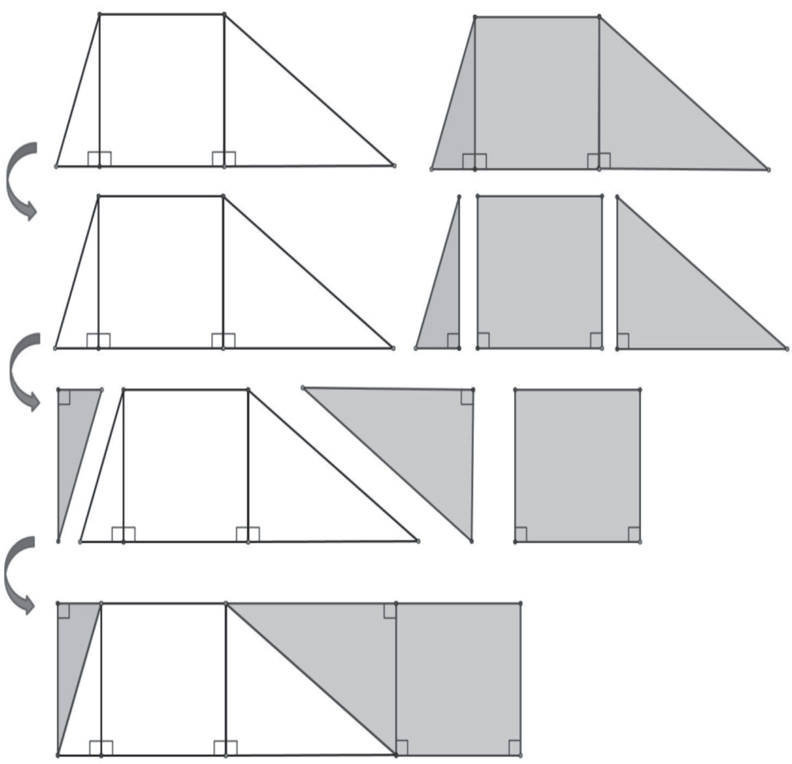


Figura 15: Decomposição do trapézio (2)
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Grasciele Centenaro

Com o mesmo objetivo que a primeira, essa atividade foi resolvida ainda com mais dificuldades, pois os alunos não conseguiram visualizar e entender o que acontecia com as partes recortadas de cada um dos trapézios. Conseguiram perceber, sim, com um pouco mais de facilidade, que a área do trapézio deveria ser metade da área do retângulo, pois estavam utilizando dois trapézios iguais para formar um retângulo, mas não conseguiram entender como calcular a área desse retângulo composto. Foi necessário auxílio, para mostrar que o lado maior do retângulo seria formado pela soma entre a base maior e a base menor do trapézio, e como são dois trapézios compondo um retângulo, a área de um trapézio deveria ser metade da área do retângulo composto.

Análises Posteriores

As hipóteses que haviam sido formuladas antes da elaboração do plano de ensino e da sequência didática são aqui retomadas e, mediante os dados obtidos na prática pedagógica, são validadas ou não.

Em relação aos conhecimentos prévios, os alunos relataram que várias grandezas fazem parte de sua vida, apesar de não saberem, em muitos casos, expressá-las de forma correta, como por exemplo, não citaram objetos que podem ser medidos e sim unidades de medida, como o metro e seus múltiplos e submúltiplos. Foram citados exemplos de situações em que aparecem unidades como polegada, milha, ano-luz, não conhecidas dos alunos: a altitude de um avião, o tamanho da tela de uma televisão ou vídeo do computador, a distância que há do Sol à Terra.

A utilização de termos e de definições supostamente conhecidos dos alunos foi verificada em parte. Os alunos mostraram saber, por exemplo, identificar o que é um quadrado e o que é um retângulo com definições rudimentares, elaboradas com base na visualização do desenho dessas figuras e não tomando como base as propriedades que as definem.

Recursos como o esquadro, o transferidor e o compasso foram utilizados ao longo das atividades, porém constatamos, frente às dificuldades, que o uso desses recursos não faz parte da rotina dos alunos.

Já em relação ao *software* Geogebra, diferente daquilo que esperávamos, os alunos realizaram a atividade sem dificuldades. Inicialmente, foram orientados a conhecer o *software*, colocar na área de trabalho alguns elementos utilizando as ferramentas e, em seguida, foi proposta a atividade, que foi desenvolvida sem percalços.

O principal objetivo desta proposta didática foi favorecer a aprendizagem de perímetro e de área de figuras planas, por meio de situações que utilizam o ladrilhamento, a decomposição, e a composição de figuras em outras. Durante o processo, foi possível constatar que os alunos conseguiram estabelecer relações entre a área de um triângulo e a do retângulo composto a partir da decomposição do triângulo, mas houve dificuldades nas relações entre paralelogramo e retângulo, assim como entre trapézio e retângulo.

Outra hipótese era de que a discussão e a exposição de ideias seriam de extrema importância para que a professora compreendesse o modo de pensar dos alunos. O diálogo ocorreu, porém, a forma de alguns alunos se expressarem não foi clara o suficiente para que fossem compreendidos. Foi necessário fazer intervenções para levar o aluno a pensar mais em suas respostas, reformulando o que estava querendo dizer.

Ao final da prática, esperávamos poder concluir que o estudo de perímetro e de área de figuras poligonais torna-se mais fácil quando se faz uso de ladrilhamento, de composição e de decomposição de figuras. Isso pode ser constatado ao compararmos as respostas dadas nas etapas iniciais – quando os alunos estavam fazendo uso da contagem para o cálculo da área – com as respostas das etapas 6 em diante – quando já estavam estabelecendo relações e escrevendo fórmulas para esse cálculo.

Constatamos também que a diferenciação entre os conceitos de perímetro e de área realmente se faz necessária, pois, apesar de serem colocados diante de questões que a todo o momento exigiam essa diferenciação, nas últimas etapas da sequência didática alguns alunos ainda apresentaram respostas incorretas, confundindo os termos.

O trabalho empírico realizado inicialmente favoreceu a generalização e o uso da fórmula para o cálculo de áreas. A partir de repetidas atividades em que os alunos utilizaram a contagem, tornou-se mais clara a utilização de um procedimento que facilitasse a obtenção do valor numérico para o cálculo da área do retângulo e, igualmente, para o cálculo do perímetro do retângulo.

Considerações Finais

Para tentar obter uma melhoria no cenário do ensino e da aprendizagem, foi desenvolvido um plano de ensino cujo principal objetivo foi construir junto com os alunos os conceitos de perímetro como comprimento do contorno de uma região plana, e o de área como o "tanto" de superfície de uma região plana, através do ladrilhamento e do uso da composição e decomposição de uma figura em outras.

Nenhuma hipótese foi totalmente invalidada, porém, foi observado que o plano de ensino precisa ser reformulado em alguns itens para que as constatações sejam reforçadas com maior evidência.

Os aspectos a serem melhorados dizem respeito ao tempo destinado a cada uma das atividades; ao menor número de alunos nos grupos; e à necessidade de se rever, previamente, alguns conceitos que precisariam realmente já ser de conhecimento dos alunos, como perpendicularismo, paralelismo, polígonos, aresta, vértice e ângulo. A presença de um observador também aumentaria a precisão dos resultados. O plano também poderia ser mais amplo, incluindo outras figuras planas nas atividades, como por exemplo, triângulos de diferentes tamanhos e tipos, losangos e outros quadriláteros.

A prática permitiu perceber que é possível desenvolver em sala de aula um trabalho mais vinculado a outras disciplinas que utilizam conceitos matemáticos, além de poder incluir recursos digitais, como vídeo e *softwares* educativos, pois eles se apresentam como novas possibilidades em relação ao ensino.

O vídeo foi explorado na sua totalidade, porém, o Geogebra não pôde ser mais amplamente utilizado, conforme o planejado, devido às circunstâncias da escola.

Em relação ao vídeo, foi realizada uma pesquisa prévia e constatamos a existência de uma série de opções, algumas excelentes e disponíveis na internet, sobre assuntos os mais variados. Elaborar uma prática didática utilizando essa ferramenta requer pesquisa e estudo, mas traz resultados mais significativos se comparados a uma aula com apenas lápis e papel. Além disso, os alunos estão muito atentos às novas tecnologias, passam muitas horas do seu dia utilizando computador e outras mídias, portanto, trazer as mídias para a sala de aula e utilizá-las como atrativo e recurso didático pode ser um caminho para a melhoria do ensino e da aprendizagem.

Para a construção das figuras foi utilizado o *software* Geogebra. Esse programa, assim como outros de geometria dinâmica, pode contribuir de forma significativa no estudo da geometria, pois apresenta ferramentas para as construções planas, proporcionando compreensão dos conceitos e das propriedades geométricas. O uso desse *software*, neste trabalho, auxiliou não só na evolução dos alunos, mas também da professora, co-autora deste texto, uma vez que apenas a manipulação contínua e a pesquisa sobre modos de utilização da ferramenta tornam possível adquirir domínio sobre ela. Nesse sentido, a elaboração da sequência didática exigiu competências sobre determinadas funcionalidades do *software*, que, embora já conhecidas, foram apreendidas nas suas sutilezas e limitações.

No desenvolver do trabalho, foram encontradas respostas para as questões de pesquisa, e a prática demonstrou que: o estudo de perímetro e de área de figuras planas torna-se mais significativo quando se faz uso de ladrilhamento, composição e decomposição das figuras; uma sequência de atividades que trabalhe detalhadamente a diferença entre os conceitos de perímetro e de área apresenta resultados positivos no aprendizado desses conceitos; a generalização e o uso de fórmulas são favorecidos pelo trabalho empírico realizado inicialmente, nos casos mais simples, do retângulo e do triângulo. Ao final, ficou evidente a dificuldade para os alunos obterem fórmulas como generalizações para cálculo de área e de perímetro de figuras mais complexas, com dificuldades, na construção, em identificar as medidas componentes das fórmulas. Dessa maneira, destacamos que é preciso mais tempo e mais atividades nessa direção para obter melhores resultados.

Mas houve outros ganhos, em relação ao conhecimento, já que observamos evolução em diferentes aspectos: no uso de instrumentos de medida e de desenho; no uso da linguagem matemática correta; na escrita mais elaborada e com linguagem mais formal.

Esperamos que os resultados desta pesquisa contribuam para o ensino dos conceitos de perímetro e de área, assim como para a utilização de recursos de mídias digitais em sala de aula, tornando o aprendizado mais significativo para os alunos. E que, assim como percebemos que é possível desenvolver novas estratégias de ensino, outros educadores se sintam encorajados a repensar a sua prática, estudando, planejando e experimentando outras formas de ensinar Matemática em suas diferentes áreas.

Referências

AOKI, V. Projeto Araribá, 7º ano/6ª série, 1ª edição, Editora Moderna, 2006.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

CHIUMMO, A. **O conceito de áreas de figuras planas: capacitação para professores do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1998. Disponível em: < http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/ana_chiummo.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2010.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática, 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries.** São Paulo: Ática, 2008.

FACCO, S. R. **Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003. Disponível em < http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/sonia_facco.pdf >. Acesso em: 16 abr. 2010.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, 1996, Belo Horizonte, 1996.

JAKUBOVIC, J. **Matemática na medida certa, 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries**. São Paulo: Scipione, 2002.

MORAN, J. M. O vídeo na sala de aula. **Revista Comunicação & Educação**. São Paulo, ECA-Ed. Moderna, [2]: 27 a 35, jan./abr., 1995.

NOVO TELECURSO. **As coisas têm área, volume e forma**. Disponível em: <http://novotelecurso.blogspot.com/2009/01/matemtica-e-fundamental-aula-14-1-de-2.html>. Acesso em: 26 abr. 2010.

SECCO, A. **Conceito de Área: da composição e decomposição de figuras até fórmulas**. 2007. 198p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). PUC/SP, 2007. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/SECCO_anderson.html>. Acesso em: 16 abr. 2010.

Anexo A
Questionário para identificar conhecimentos sobre Frações

1) Para você, o que significa área de uma superfície geométrica? Dê um exemplo de unidade de medida utilizada para o cálculo de área.

2) Para você, o que significa perímetro de uma superfície geométrica? Dê um exemplo de unidade de medida utilizada para o cálculo de perímetro.

3) Sabendo que cada quadrado do quadriculado abaixo tem 1 u. a. (unidade de área), quantas unidades cabem em cada figura abaixo? Qual é o perímetro de cada figura?

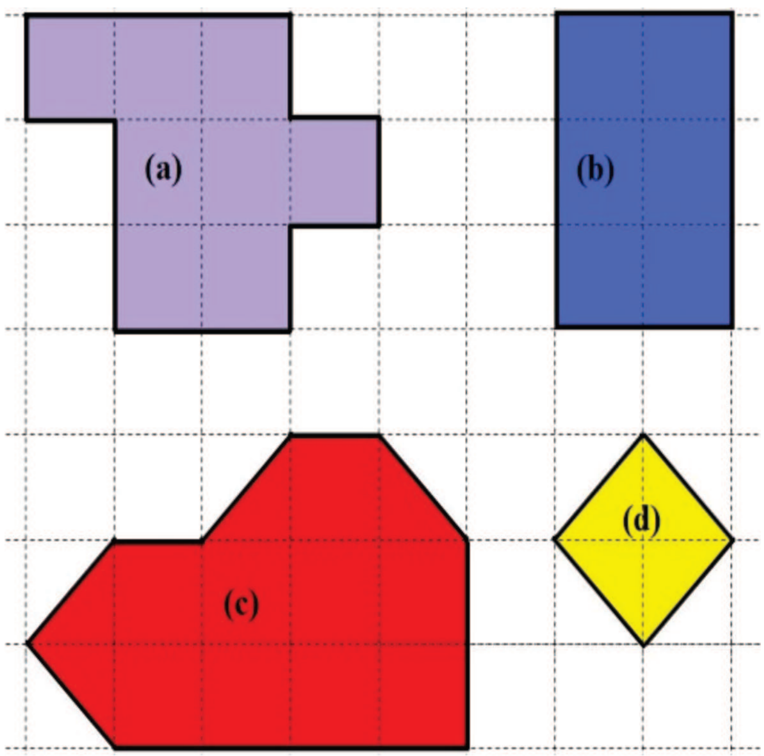


Figura 1 - Regiões planas para contagem de área e perímetro.
Fonte: Elaborada pela Profª. Grasciele Centenaro.

4) Quais das figuras abaixo possuem a mesma área? Justifique a sua resposta.

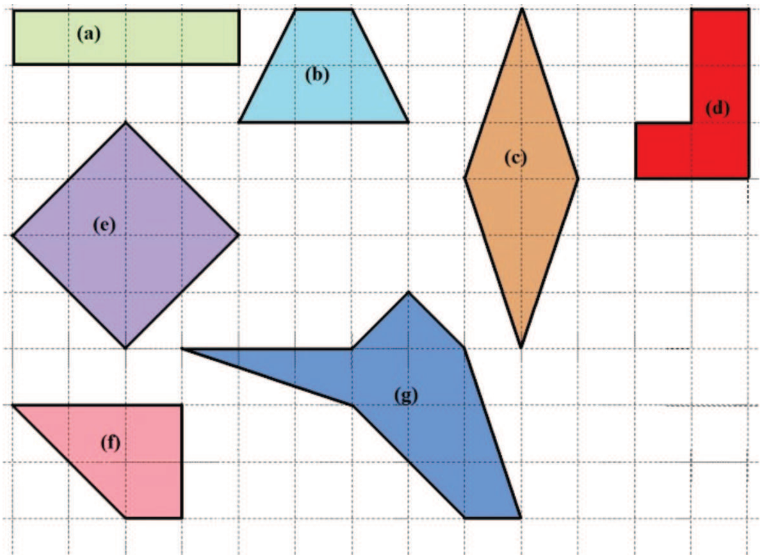


Figura 2 - Regiões planas para comparação das áreas.
Fonte: Elaborada pela Profª. Grasciele Centenaro.

5) Das figuras que possuem a mesma área, quais possuem o mesmo perímetro?

6) Calcule o perímetro e a área da figura abaixo:

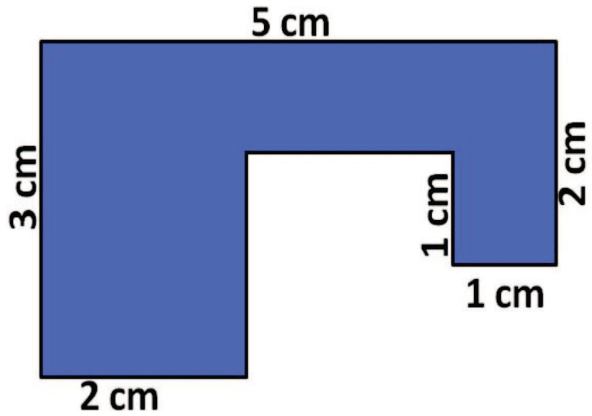


Figura 3 - Região plana para o cálculo do perímetro e da área.
Fonte: Elaborada pela Profª. Grasciele Centenaro

Capítulo 6

ESTUDANDO GEOMETRIA DE MANEIRA MAIS SIGNIFICATIVA

DEISE GUDER[1]
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE[2]

Introdução

O presente trabalho relata o desenvolvimento de uma engenharia didática para o ensino de Geometria. A escolha desse conteúdo foi motivada pelo fato de ser observado, em nossas escolas, nos diferentes níveis de ensino, que os alunos apresentam conhecimentos deficientes e equivocados sobre o assunto. Como pesquisa, o trabalho busca identificar os motivos que dificultam o ensino e a aprendizagem da Geometria, a partir de reflexões sobre a prática docente e dos resultados de investigações da área de Educação Matemática. O texto inclui a concepção e a implementação de um plano de ensino e de uma sequência didática, que pretende ser rica e significativa para os estudantes. Segue com o relato e a análise da prática pedagógica desenvolvida, que utilizou materiais concretos, lúdicos, mídias digitais, vídeos e *softwares*.

Apresentação do Tema e Justificativa

A pesquisa realizada enfocou o ensino de algumas noções básicas da Geometria: ponto, reta, plano e ângulo, figuras bidimensionais e

1 deiseguder@hotmail.com

2 marcia.notare@gmail.com

tridimensionais, identificação de polígonos e sólidos, cálculo da área de figuras geométricas planas e do volume de alguns sólidos simples. A prática foi desenvolvida com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma Escola do Vale do Caí, Rio Grande do Sul.

Na nossa experiência docente, foi possível observar que a Geometria, muitas vezes, é esquecida nas escolas, ou, quando ensinada, não se dá a devida ênfase a esse tema. Como é um assunto que está incluído nos objetivos específicos da maioria das séries, os conteúdos acabam sendo deixados para o final do ano, e, às vezes, sequer são trabalhados.

A professora titular da turma em que se realizou a prática sugeriu que fossem abordados os conceitos e os cálculos de área e de volume, pois observou que os alunos ou não se lembravam, ou não compreenderam, ou simplesmente não haviam tido ainda contato com esse assunto, anteriormente.

Nessa prática pedagógica, foram utilizados recursos midiáticos, uso de vídeos e o *software* Poly, pois acreditamos que as mídias digitais devem ser um recurso cada vez mais presente nas salas de aula, já que podem contribuir para enriquecer o trabalho pedagógico e auxiliar no processo de construção do conhecimento matemático, além de serem atraentes para os alunos.

Para iniciar a pesquisa, desenvolvemos análises prévias sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria.

O Ensino de Geometria: uma conversa com os professores

Para compreender melhor como se encontra o ensino de Geometria nas escolas, foram realizadas conversas com professores que atuam na área de Matemática. Eles relataram que realmente não dão a devida atenção a esse assunto. Assumiram que, exceto no oitavo ano (sétima série) do Ensino Fundamental, quando a Geometria é um dos principais objetivos do currículo, deixam esse tema para o final do ano letivo e acabam não tendo tempo de apresentá-lo aos alunos de maneira produtiva. Alegam que a grade curricular é extensa e exigente e, como os conteúdos de Geometria podem ser tratados em qualquer série, são deixados para mais adiante. Percebemos, também, que a Geometria, quando lembrada nas escolas, costuma ser trabalhada de maneira muito abstrata, pouco natural, embora ela esteja presente em praticamente tudo o que está à nossa volta. A Geometria tem relação com as primeiras imagens que temos do mundo, figuras tridimensionais, no entanto, os professores iniciam as atividades com figuras bidimensionais, que não são os melhores exemplos para associar a Matemática com o mundo físico.

O Ensino de Geometria: os livros didáticos

Para analisar o ensino usual de Geometria, foi realizada a análise de alguns livros didáticos do oitavo ano (sétima série) comumente usados nas escolas. As obras selecionadas foram: *A conquista da Matemática: a + nova* (GIOVANNI *et al*, 2002); *Matemática hoje é feita assim* (BIGODE, 2002); *Tudo é matemática* (DANTE, 2007); *Novo Praticando Matemática* (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2006).

Foram verificados os seguintes aspectos: como o livro introduz e apresenta o assunto Geometria? Trata sobre área e volume? Que conteúdos de Geometria o livro aborda? Entre outros.

O livro *A conquista da Matemática: a + nova* apresenta situações práticas do nosso cotidiano em que a Geometria está presente, para dar mais sentido ao estudo. Além disso, logo na introdução, é explicado um pouco sobre a história da Geometria, o que é bastante interessante. Também mostra a relação entre Álgebra e Geometria, ao apresentar os conteúdos Monômios, Polinômios e Cálculo Algébrico.

O livro é bem completo, tratando de: retas, ângulos, polígonos e seus elementos, triângulos (classificação e propriedades), quadriláteros (classificação e propriedades), circunferência e círculo. Porém, quanto aos conceitos e aos cálculos de área e de volume, a obra apresenta esses conteúdos como já estudados, ou seja, não mostra a explicação detalhada, somente retoma o assunto com atividades e exercícios. Além disso, neste livro, a Geometria é deixada para o final, sendo abordada nos últimos capítulos.

No livro *Matemática hoje é feita assim*, de Antonio Bigode, é dada especial ênfase à Geometria, que é abordada em quase todos os capítulos do livro. A apresentação é criativa e interessante, sendo estabelecidas relações com os demais conteúdos. Bigode (2002) centra sua apresentação em uma Geometria mais intuitiva, explorando o mundo real.

O livro apresenta a Geometria de maneira bem completa, tratando de: medidas de capacidade e de volume, representação de sólidos, área de figuras planas, relações entre Álgebra e Geometria, curvas, ângulos, triângulos e quadriláteros, polígonos e poliedros, simetrias, etc. O autor parte de exemplos concretos e propõe atividades práticas, como a construção de sólidos geométricos que pode ser feita pelos alunos. Ele também explora o Tangram e os mosaicos.

O livro *Tudo é matemática*, de Luiz Roberto Dante, dedica quatro, dos dez capítulos, ao assunto e, ainda, estabelece relações com a Álgebra, ao tratar de Cálculo Algébrico. A obra traz exemplos e exercícios, nesta área, em diferentes momentos, ou seja, a Geometria é abordada ao longo do livro, não estando colocada somente ao final, como em outros exemplares. Entre os conteúdos, estão: representação de figuras geométricas espaciais no plano; ângulos, polígonos, triângulos, quadriláteros e circunferências (elementos, características e propriedades); perímetros, áreas (inclusive cálculo de áreas através da decomposição e composição de figuras) e volumes. Podemos perceber que os conteúdos são bem aprofundados, sendo necessária uma análise cuidadosa do professor ao escolher os itens que irá trabalhar com seus alunos.

O livro *Novo Praticando Matemática*, de Andrini e Vasconcelos, trata apenas de ângulos, polígonos, circunferência e círculo, no que se refere à Geometria. Além disso, apresenta o conteúdo nos últimos capítulos. Quanto à área e ao volume, a obra apresenta esses conteúdos como já estudados, abordando-os apenas em exemplos e exercícios. Nos capítulos dedicados à Álgebra, os autores estabelecem relações entre Geometria e Álgebra.

Dos livros analisados, este último é o que dá menor atenção à Geometria. Contudo, é justamente o livro didático adotado na sétima série (oitavo ano) na escola em que foi aplicada a prática docente desta pesquisa. Não pretendemos, com isso, dizer que o livro não é adequado, pelo contrário, o consideramos um bom livro, pois aborda os conteúdos em geral de maneira satisfatória e completa, mas, em relação à Geometria, a obra poderia explorar mais e melhorar a abordagem do assunto.

O Ensino de Geometria: conhecimento prévio dos alunos

Os alunos das séries finais do Ensino Fundamental, em geral, apresentam poucos conhecimentos sobre Geometria, algumas vezes até lembram das fórmulas e dos conceitos, porque memorizaram, mas apresentam muitas dificuldades para resolver situações-problemas.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, 1998), no terceiro ciclo do Ensino Fundamental (quinta e sexta séries) é importante trabalhar a Geometria considerando "Espaço e Forma" e "Grandezas e Medidas". Com relação a Espaço e Forma, os PCNs sugerem distinção de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria; classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos; composição e decomposição de figuras planas; identificação de diferentes planificações de alguns poliedros; e construção da noção de ângulo associada à ideia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas. Com relação a Grandezas e Medidas, os PCNs sugerem compreensão da noção de medida de superfície e de equivalência de figuras planas por meio da composição e decomposição de figuras; cálculo da área de figuras planas pela decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas, ou por meio de estimativas; e cálculo do volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo, pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior.

Porém, como professores, sabemos que, na maior parte das escolas, os alunos chegam às sétima e oitava séries sem terem vivenciado essas experiências com a Geometria.

Podemos verificar alguns dos conceitos e procedimentos, relacionados à Geometria, apontados pelos PCNs (BRASIL, 1998) como indicados para o quarto ciclo do Ensino Fundamental (sétima e oitava séries). Sugerem representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas; estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro; desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções; cálculo da área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações; construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas; cálculo da área da superfície total de alguns sólidos geométricos; e cálculo do volume de alguns prismas retos e suas composições.

Da nossa experiência, entendemos pouco provável que os alunos concluam o Ensino Fundamental com todos esses conceitos suficientemente claros.

Com o objetivo de verificar como os alunos saem preparados da sétima série (oitavo ano) do Ensino Fundamental, tendo em vista que a pesquisa e a prática de ensino referem-se a estudantes dessa série, foi aplicado um questionário sobre Geometria, com alunos da oitava série (nono ano).

Foram propostas, neste questionário, questões básicas sobre Geometria, relacionadas principalmente aos conteúdos de área e de volume, bem como definições sobre figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais, conceitos que já deveriam ter sido trabalhados no terceiro ciclo (quinta e sexta séries). Não foram apresentadas questões sobre ângulo, bissetriz, mediatriz, círculo e outros que são estudados na sétima série, apenas questionamentos simples, aos quais esperávamos que alunos de oitava série teriam facilidade para responder.

O questionário foi aplicado em uma turma composta por 23 alunos. Eles tiveram que responder às questões durante a aula de Matemática, individualmente e sem consulta a colegas, professores ou materiais, com o objetivo de verificar o que de fato sabiam.

Houve um índice muito pequeno de respostas totalmente corretas e um alto índice de questões que sequer foram resolvidas pelos alunos, sob a justificativa de que ou não lembravam, ou não estudaram ou não sabiam o conteúdo.

Dessa forma, a pesquisa mostrou resultados alarmantes, já que mais da metade da turma não soube dizer o que é Geometria, qual a diferença entre uma figura geométrica bidimensional e uma tridimensional, o que é a área de uma superfície geométrica, qual é a diferença entre área e perímetro e qual a origem (o porquê) da fórmula da área do triângulo.

É possível obter o diagnóstico de que os alunos, ao menos os dessa escola, possuem conhecimentos muito vagos sobre a Geometria. As experiências de aprendizagem anteriores que tiveram em relação a esse conteúdo foram pouco significativas[3], pois, do contrário, eles se lembrariam do assunto e apresentariam uma linguagem geométrica mais rica em suas respostas.

---

[3] A expressão "experiências de aprendizagem significativas" refere-se a experiências com mais sentido, com mais qualidade. Não apresenta nenhuma relação com a Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel.

Buscando Entender porque a Geometria Costuma Ser Deixada em Segundo Plano

Pavanello (1989) apresenta uma dissertação em que aborda o abandono do ensino de Geometria e oferece uma visão histórica sobre como e por que isso vem acontecendo. O objetivo de seu trabalho é verificar por que, quando e como o ensino de Geometria foi relegado a um segundo plano e que prejuízos isso pode acarretar à formação do aluno.

Embora a pesquisa de Pavanello (1989) tenha sido desenvolvida há duas décadas, muitas conclusões que ela apresenta ainda são verificáveis nos dias atuais: os alunos apresentam poucos conhecimentos sobre Geometria, saindo das escolas despreparados nessa área, e muitos professores não dão a devida atenção ao ensino desse conteúdo.

A autora apresenta argumentos, trazidos pelos matemáticos, para justificar a diminuição do espaço reservado à geometria nos currículos dos vários níveis de ensino e a substituição da geometria pela álgebra e pelo cálculo:

> [...] as explicações dos matemáticos sobre os motivos que teriam levado à desenfatização do ensino de geometria – basicamente a euclidiana – nos diferentes graus de ensino concentram-se em torno de questões geralmente relacionadas com o rigor, a visualização e o que se poderia chamar de subordinação da geometria à álgebra. (PAVANELLO, 1989, p.11)

Quanto ao rigor, alega-se que o tratamento dado à geometria euclidiana não é suficientemente rigoroso; em relação à visualização, critica-se o tratamento da geometria baseada em aspectos visuais, pois isso, por um lado, pode induzir a serem consideradas como óbvias certas asserções sobre os entes geométricos, não derivadas dos axiomas, e, por outro lado, porque tal tratamento acaba limitando a geometria a duas ou três dimensões. Já a “subordinação” da geometria à álgebra passou a acontecer com a descoberta das geometrias não euclidianas e com a abstração e algebrização da geometria.

Para a pesquisadora, esses argumentos podem ser contestados, já que ela acredita que essa questão tem motivos históricos e faz um estudo sobre como o ensino, a matemática e a geometria foram tratados ao longo da história, tanto no Brasil, como no restante do mundo. Conclui que a luta pelo conhecimento pode também ser vista como uma luta pelo poder e que as decisões relativas ao ensino estão vinculadas ao contexto histórico, político e social. O ensino de certas disciplinas, importantes para a formação do indivíduo, como a geometria, foi negligenciado ao longo da história para determinados grupos sociais, e não foi por acaso.

> [...] o problema com o ensino da geometria surge e se avoluma à medida que as escolas de nível médio passam a atender um número crescente de alunos das classes menos favorecidas. A geometria é praticamente excluída do currículo escolar ou passa a ser, em alguns casos restritos, desenvolvida de uma forma muito mais formal a partir da introdução da Matemática Moderna, a qual se dá justamente quando se acirra a luta pela democratização das oportunidades educacionais, concomitante à necessidade de expansão da escolarização a uma parcela mais significativa da população. (PAVANELLO, 1989, p. 180).

Em relação à importância do ensino da geometria, a autora destaca que

> A geometria apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível – que é um dos objetivos do ensino da matemática – oferecendo condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados. (PAVANELLO, 1989, p. 182-183).

Como Trabalhar o Conceito de Área de Maneira mais Significativa?

Secco (2007) apresenta um trabalho que trata especificamente do ensino do conceito de área, por meio do uso da composição e decomposição de figuras planas, no nível fundamental. O objetivo do trabalho é investigar como o conceito de área pode ser apresentado de maneira mais significativa para alunos da oitava série do Ensino Fundamental.

O autor desenvolveu uma prática em sala de aula com alunos de oitava série do Ensino Fundamental e concluiu que o processo de reconfiguração de figuras poligonais planas contribui para que os alunos se apropriem melhor do conceito de área de um polígono e favorece a passagem do empírico para o dedutivo.

Percebeu, após a análise das atividades, que os alunos possuíam, inicialmente, uma noção deficitária em relação ao conceito essencial da proposta e identificou nos alunos a necessidade de resolverem os problemas através de fórmulas matemáticas. Porém, ao longo do processo, essa maneira de visualizar os problemas foi gradativamente sendo alterada, sendo que o enfoque no cálculo de área passou a dar-se através de comparações, estimativas, medições por contagem e cálculo através de soma e subtração de partes elementares (reconfiguração).

O autor concluiu que

> [...] pensar no caso da reconfiguração de figuras geométricas planas, no ensino de matemática, como possibilidade heurística na resolução de problemas significou, para os alunos, conhecer novas formas de resolver uma mesma atividade matemática, ampliando, assim, as possibilidades de solução das mesmas. (SECCO, 2007, p. 177).

Secco (2007, p. 177) avalia "[...] que esse fato propiciou ao aluno uma maior desenvoltura tanto na sua forma de pensar como na sua forma de olhar e, além de tudo, de raciocinar".

Observou ainda que este "novo olhar", exercitado durante a sequência didática proposta, pode ser o fator que justifica a facilidade de resolução, observada durante a realização das atividades do terceiro bloco, relacionadas ao uso das fórmulas, inclusive na demonstração e justificativa das fórmulas, que foram encontradas facilmente através de curtas deduções. Além disso, essas demonstrações, partindo do processo de reconfiguração, proporcionaram aos alunos a visualização da importância do uso correto das fórmulas para o cálculo da medida de área das figuras planas.

Os Quatro Processos do Ensino da Geometria: Percepção, Construção, Representação e Concepção

Lauro (2007) apresenta uma dissertação em que sugere uma proposta de ensino com a articulação entre os quatro processos necessários para construir o conhecimento geométrico: a percepção, a construção, a representação e a concepção (tetraedro metafórico). O objetivo de seu trabalho foi propor o ensino da Geometria de uma forma em que coexistam os quatro processos, pois a Geometria não pode ser trabalhada de maneira "esquartejada", privilegiando os extremos em detrimento dos meios.

Conforme a autora, nas aulas de Geometria das séries iniciais, de modo geral, as atividades propostas somente envolvem a percepção, isto é, a observação e a manipulação de objetos materiais e a caracterização das formas mais frequentes no mundo à nossa volta, por meio de atividades empíricas. Já nas séries finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e também no Superior, as atividades relacionadas à Geometria são direcionadas à concepção: à sistematização, ao exercício da lógica, dos elementos conceituais, com predomínio das definições formais e dos enunciados precisos das propriedades, proposições e teoremas com suas demonstrações.

Nesse contexto, o ensino de Geometria é feito de maneira linear, obedecendo a uma ordem hierárquica, partindo das atividades empíricas (percepção) em direção às de sistematização (concepção).

A pesquisadora baseia-se em estudos que sugerem a articulação entre a percepção e a concepção, estabelecendo caminhos convenientes que permitam um trânsito natural entre ambas, com mão dupla de direção. Desse ponto de vista, na dinâmica da construção do conhecimento geométrico, em vez de uma polarização percepção/concepção, é fundamental a caracterização de quatro processos: a percepção, a construção (elaboração de objetos em sentido físico, ou seja, a produção de materiais que possam ser manipulados), a representação (reprodução, através de desenhos, de objetos percebidos ou construídos) e a concepção. Quatro processos que, metaforicamente, constituem as faces de um tetraedro, com elementos comuns e articulados.

> [...] a Geometria pode e deve ser iniciada por meio de atividades empíricas, visando a percepção, mas tais atividades estão diretamente relacionadas com a construção de objetos em sentido físico, bem como com a representação de objetos por meio de desenhos, onde suas propriedades e características possam ser concretizadas. A sistematização conceitual torna-se possível nas ações de representação e construção. (LAURO, 2007, p. 24)

Nos dias atuais, segundo a autora, os livros didáticos em geral procuram articular os quatro processos de construção do conhecimento geométrico, pois baseiam-se nas recomendações dos PCNs, que estão em vigor e que estimulam o desenvolvimento e o trânsito entre eles. Mas, apesar disso, os alunos continuam chegando ao Ensino Superior praticamente sem noção dos conteúdos geométricos elementares.

Considerando essa preocupação com a transição entre as quatro faces do tetraedro metafórico, cabe aos professores, em suas práticas em sala de aula, também desenvolver a Geometria evitando o tratamento isolado de qualquer uma das faces. É possível propor atividades em Geometria que estejam de acordo com os PCNs e que possibilitem o trânsito natural entre os quatro processos, e esta tarefa cabe em especial ao professor.

Projeto Pedagógico de Ensino, Objetivos, Hipóteses

O objetivo maior desse planejamento foi proporcionar um ensino com aprendizagem mais significativa da Geometria, além de ajudar a sanar dúvidas e dificuldades dos alunos em relação ao tema.

Foram abordados os seguintes conteúdos de Geometria: ponto, reta, plano e ângulo, figuras bidimensionais e tridimensionais, identificação de polígonos e sólidos, cálculo da área de figuras geométricas planas e do volume de alguns sólidos simples.

Elaboramos um plano de ensino (Quadro 1), com o objetivo de atingir as metas propostas nesta Engenharia Didática. Na construção desse planejamento, buscamos utilizar resultados dos estudos desenvolvidos em produções da área de Educação Matemática, empregando algumas das ideias ali propostas. Muitas das atividades propostas foram extraídas da obra de Secco (2007).

Quadro 1: Plano de ensino

Objetivo	Atividades	Estratégias e recursos
Introduzir discussão sobre o tema Geometria.	Assistir ao vídeo sensibilizador.	- Vídeo "Pato Donald no País da Matemágica" (parte 3). - Questões propostas em aula para o acompanhamento do vídeo.
Compreender o que é a Geometria e que ela está presente nas diversas situações do dia a dia.	- Conversar e discutir no grande grupo sobre o vídeo assistido. - Apresentar, em grupos, para os colegas uma definição de Geometria. - Tirar uma fotografia de algum lugar em que possam ser observadas várias formas geométricas.	- Discutir no grande grupo sobre o vídeo assistido, procurando uma definição para Geometria. - Em grupos pequenos, procurar em livros didáticos uma definição mais precisa e elaborada para Geometria; depois, apresentar para os colegas. - Tirar uma fotografia de algum lugar em que haja riqueza de formas geométricas e anotar numa folha quais são as formas que podem ser vistas nesta imagem, para apresentar e entregar no próximo encontro.
Assimilar alguns conceitos matemáticos, como ponto, plano, reta, semirreta, segmento de reta, ângulo, figuras bidimensionais e tridimensionais.	- Assistir ao vídeo. - Conversar sobre o filme. - Anotar os conceitos de ponto, plano, reta, ângulo, semirreta, segmento de reta, figuras bidimensionais e tridimensionais.	- Vídeo "Construindo o pensamento geométrico" (partes 1 e 2) do Novo Telecurso. - Anotar, durante o filme, todos os conceitos matemáticos que forem citados (reta, plano, figuras bidimensionais e tridimensionais...). - Conversar sobre o filme. - Aula expositiva sobre os conceitos matemáticos citados no filme e outros relacionados. - Anotar os significados dos conceitos de ponto, reta, plano, semirreta, segmento de reta, ângulo, figuras bidimensionais (ou planas) e tridimensionais (ou espaciais).
Classificar figuras geométricas tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos.	- Classificar diversas figuras e sólidos geométricos conforme acharem conveniente, estabelecendo regras de classificação. -Leitura de material fotocopiado entregue pela professora sobre a classificação das figuras planas e espaciais. - Organizar as mesmas figuras conforme classificação solicitada pela professora. - Construir alguns sólidos geométricos, a partir de material fotocopiado. - Observar a planificação de sólidos geométricos no *software* Poly.	- Classificar, em grupos, diversas figuras e sólidos geométricos conforme acharem conveniente, estabelecendo regras de classificação e apresentar para os colegas. - Aula expositiva sobre o assunto, apresentando os critérios de classificação usados na Geometria para figuras geométricas planas (bidimensionais) e espaciais (tridimensionais). - Materiais fotocopiados. - *Software* Poly.

Compreender o que é área e como se calcula a área das figuras planas.	- Assistir ao vídeo. - Discutir sobre as ideias e conceitos apresentados no vídeo. - Brincar com o Tangram para desenvolver a noção de composição de figuras a partir da decomposição de outras. - Apresentar diversas figuras planas (quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos, trapézios, triângulos) e solicitar que os alunos calculem suas áreas. - Construir, com os alunos, através do processo de decomposição e composição de figuras, as fórmulas para o cálculo das áreas das diversas figuras.	- Vídeo "As coisas tem Área, Volume e Forma" (parte 1) do Novo Telecurso. - Tangram. - Figuras planas recortadas (quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos, trapézios, triângulos). - Papel quadriculado. - Figuras recortadas em EVA (retângulo, triângulo, paralelogramo, trapézio, losango) para construir o cálculo de áreas.
Compreender o que é volume e como se calcula o volume de alguns sólidos.	- Assistir ao vídeo. - Conversar sobre o filme. - Solicitar que os alunos calculem os volumes de prismas sorteados entre eles. - Construir, com eles, a fórmula do cálculo de volume de prismas. - Realizar atividades com o Material Dourado. - Verificar, usando material concreto, que 1.000 cm³ de volume comportam 1 litro.	- Vídeo "As coisas tem Área, Volume e Forma" (parte 2) do Novo Telecurso. - Sólidos geométricos (cubos, paralelepípedos e outros prismas). - Material concreto (pilhas de livros) para demonstrar o Princípio de Cavalieri sobre volume e, a partir disso, construir a fórmula para o cálculo do volume de prismas. - Material Dourado. - Cubo de 1.000 cm³ e 1 litro de água.
Realizar atividades de sistematização sobre área e volume.	Resolver exercícios sobre área e volume.	Atividades de sistematização sobre área e volume.

Fonte: Elaborado pela Profª. Deise Guder

Como recursos didáticos, optamos pela utilização de um vídeo de sensibilização, materiais de manipulação e um *software* de Geometria, denominado *Poly*[4].

Os vídeos foram utilizados com objetivo de sensibilizar, motivar e atrair a atenção dos alunos para o tema de estudo; possibilitar que os alunos observassem que a Geometria está presente em muitas e diversas situações do nosso dia a dia; ensinar alguns termos e conceitos geométricos.

[4] O Poly é um software desenvolvido pela Pedagoguery Software, que permite a exploração e construção de poliedros, com possibilidade de manipulação dos mesmos em uma variedade de formas. Possui uma grande coleção de sólidos, platônicos e arquimedianos entre outros. Disponível em: <http://www.peda.com/poly/>. Acesso em: 26 maio 2011.

Os demais recursos didáticos, como o *software Poly* e materiais de manipulação (figuras geométricas planas e sólidas), foram escolhidos com objetivo de auxiliar os alunos a observarem e a compreenderem: a planificação de sólidos geométricos; a composição de figuras geométricas a partir da decomposição de outras; os elementos presentes nas diversas formas geométricas; e as noções de área e de volume.

O processo de decomposição e composição de figuras geométricas planas foi desenvolvido visando, também, favorecer a compreensão da noção e do cálculo de área.

Procurei propor atividades que envolvessem os quatro processos do ensino da Geometria (percepção, construção, representação e concepção), necessários e fundamentais para a construção do conhecimento geométrico. O processo da percepção está presente em diversas atividades, como na observação e no manuseio de sólidos geométricos e outras figuras, na manipulação do *software* Poly, na realização das fotografias de lugares com riqueza de formas geométricas, na composição e decomposição de figuras, na observação de vídeos sobre Geometria, entre outras. Construções foram feitas na confecção de sólidos geométricos, a partir de material fotocopiado, na composição e decomposição de figuras e na manipulação do Poly, que permite construir inúmeros sólidos a partir de sua planificação e, depois, novamente planificá-los. O processo de concepção está presente em muitas tarefas, como na compreensão e análise dos vídeos assistidos, na classificação de figuras geométricas (planas e espaciais), nas diversas atividades de sistematização propostas. No processo de representação, não foram incluídas atividades de desenho, mas as atividades de planificação realizadas no *software* Poly têm potencial para desenvolver noções de reprodução das diversas formas geométricas.

Além disso, para um estudo mais significativo da Geometria, foram adaptadas algumas das ideias de Secco (2007) na realização de atividades de decomposição e composição de figuras para a construção das fórmulas do cálculo de áreas.

Como pressuposto inicial, a engenharia deveria cumprir seus propósitos: aperfeiçoar conhecimentos sobre a Geometria, em especial, dos conceitos de ponto, de reta, de plano e de ângulo, de figuras bidimensionais e tridimensionais, identificação de polígonos e sólidos, cálculo da área de figuras geométricas planas e do volume de alguns sólidos simples.

Formulamos hipóteses anteriores à prática, para posterior validação:

a) Os alunos apresentariam poucos e vagos conhecimentos sobre Geometria, suspeita que surgiu nas análises prévias.
b) Por isso, seria necessário tratar do assunto como sendo uma novidade, sendo importante partir de situações práticas do dia a dia em que a Geometria se faz presente.
c) A aprendizagem se daria de forma significativa, trabalhando com os quatro processos do ensino da Geometria (a Percepção, a Construção, a Representação e a Concepção), seguindo as ideias apresentadas na dissertação de Lauro (2007).

A Experiência Didática

A prática de ensino foi realizada durante dez horas/aula, no turno da manhã, com um grupo formado por 13 alunos, do oitavo ano (sétima série), de uma escola do Vale do Caí/Rio Grande do Sul, voluntários para participar em minicurso, extraclasse.

Primeiro dia: 09/06/10 (1h45min de duração)
Neste primeiro dia de aplicação, trabalhamos com os seguintes objetivos:

- Introduzir discussão sobre o tema Geometria.
- Compreender o que é a Geometria e que ela está presente nas diversas situações do dia a dia;
- Assimilar alguns conceitos matemáticos, como ponto, plano, reta, semirreta, segmento de reta, ângulo, figuras bidimensionais e tridimensionais.

Inicialmente, solicitamos que os alunos respondessem a um pequeno questionário (Anexo A), como sondagem para verificar o que eles já sabiam sobre Geometria. Das suas respostas, verificamos que tinham ideias confusas e equivocadas sobre o que é a Geometria; não sabiam diferenciar as figuras planas das espaciais; não conheciam elementos básicos da Geometria como reta, ponto, plano e ângulo.

Após recolher os questionários, passamos para o vídeo, “Pato Donald no País da Matemágica” (parte 3), que apresenta, de maneira divertida e interessante, diversas descobertas e aplicações matemáticas, como o Teorema de Pitágoras, a razão áurea, as formas geométricas, entre outras[5]. Solicitamos que atendessem às seguintes questões: título do vídeo. Que formas geométricas aparecem no vídeo? Em que situações do nosso mundo real o Pato Donald observou a Geometria?

Em seguida, conversamos sobre o vídeo assistido. Discutimos sobre as formas geométricas abordadas no filme e sobre os locais onde o Pato Donald as encontrou e questionamos: “Mas, afinal, o que é a Geometria?” Sugerimos que utilizassem alguns livros didáticos, que foram previamente selecionados, para pesquisarem uma definição mais elaborada para Geometria. Essa etapa foi realizada em duplas. Depois, cada dupla apresentou para o grande grupo a sua explicação.

Vejamos, nas Figuras 1 e 2, algumas definições encontradas nos livros didáticos consultados:

gar de cada um. Daí a denominação grega *geometria* (*geo* = terra; *metria* = medida), cujo significado é *medida da terra*. Atualmente, pode-se dizer que geometria é o estudo das formas geométricas, incluindo as medidas dessas formas.

Figura 1: Trecho da explicação apresentada no livro “Tudo é matemática - 5ª série”
Fonte: Dante (2006, s.p.)

E como é que um arquiteto, engenheiro, projetista e outros profissionais conseguem criar formas bonitas e com tantas aplicações na vida prática? Entre outras coisas, utilizando a *Geometria, que é a parte da Matemática que estuda as formas.*

Na Geometria, as formas são idealizadas, perfeitas. O conhecimento geométrico é aplicado na construção do mundo real.

Figura 2: Trecho que apresenta o conceito de Geometria do livro “Novo Praticando Matemática – Volume 1”.
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2006, s.p.)

Partimos para o segundo vídeo “Construindo o pensamento geométrico” (partes 1 e 2) do Novo Telecurso[6]. Solicitamos que os alunos anotassem todos os conceitos e termos matemáticos que fossem citados, mesmo que não soubessem o seu significado.

---

5 Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=-k9f3PKUpxM>. Acesso em: 01 jun. 2010

6 Disponível em: <http://novotelecurso.blogspot.com/2009/02/construindo-o-pensamento-geometrico.html>. Acesso em: 01 jun. 2010

Assistimos ao vídeo e, depois conversamos sobre os termos matemáticos citados. Entregamos uma folha fotocopiada com um resumo sobre alguns conceitos e elementos geométricos importantes, inclusive os que são citados no vídeo. Os alunos fizeram essa leitura (silenciosa e oral). Durante a leitura oral, explicamos sobre o texto.

Por fim, solicitamos que, como tema, os alunos (em grupos de três ou quatro alunos) tirassem uma fotografia de algum lugar em que pudessem observar várias formas geométricas e anotassem numa folha quais são as formas geométricas que podem ser vistas nesta imagem, para apresentar e entregar no próximo encontro.

Segundo dia: 16/06/10 (2h de duração)

Inicialmente, fizemos a correção do tema, ou seja, a apresentação das fotografias e dos comentários sobre elas, conforme solicitado ao final do encontro anterior. A Figura 3 apresenta alguns exemplos trazidos pelos alunos. Como podemos verificar, as fotografias apresentam diferentes figuras geométricas, portanto atendem, parcialmente, ao objetivo proposto, que era selecionar imagens que apresentassem riqueza de elementos geométricos. A primeira traz objetos do cotidiano, mas a segunda é uma foto de desenhos. O objetivo original, que era encontrar formas geométricas no mundo ao nosso redor, não foi cumprido.

Figura 3: Exemplos de fotografias apresentadas pelos alunos
Fonte: Profª. Deise Guder (2010)

Em seguida, solicitamos que os alunos se organizassem em grupos de três ou quatro alunos e entregamos, para cada grupo, diversas figuras geométricas planas e espaciais. Pedimos que os alunos classificassem essas figuras como achassem mais conveniente e correto. Depois, eles tiveram que apresentar suas classificações para o grande grupo, explicando seus critérios de organização das figuras. Vejamos alguns dos resultados apresentados na Figura 4. Os alunos demonstraram muitas dúvidas e insegurança para realizar essa tarefa, sendo que apenas tinham convicção de que as figuras planas seriam um grupo e as espaciais pertenceriam a outro grupo. Mas, não conseguiram diferenciar corretamente as figuras espaciais umas das outras, colocando, por exemplo, prismas, pirâmides, cilindros e cones num mesmo grupo. Portanto, a classificação realizada pelos alunos não foi totalmente coerente e correta.

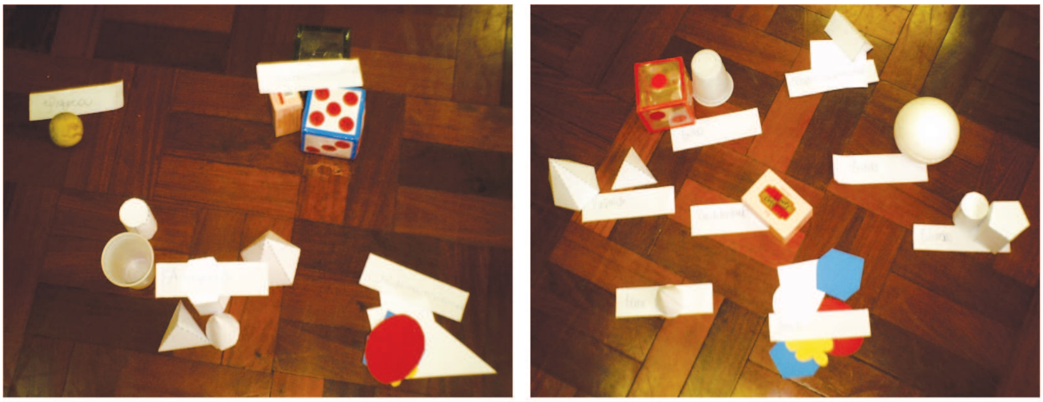


Figura 4: Classificações apresentadas pelos alunos
Fonte: Profª. Deise Guder (2010)

Entregamos então um texto fotocopiado sobre os critérios usados em Geometria para a classificação das figuras geométricas planas e espaciais, que pode ser visualizado no Anexo B. Os alunos realizaram a leitura oral e realizamos as devidas explicações.

Em seguida, solicitamos que, novamente, organizassem as figuras anteriormente classificadas, seguindo os critérios apresentados no texto lido, com o objetivo de sistematizar o assunto. A Figura 5 mostra as novas classificações realizadas pelos alunos. Os alunos perceberam, após o estudo realizado, que precisavam mudar as suas classificações, pois compreenderam que não estavam coerentes Alguns itens, na maioria dos grupos, já estavam certos, como a classificação das figuras em planas ou espaciais. Mas, além dessa classificação, classificaram novamente os grupos de figuras planas e espaciais, formando subgrupos, buscando uma organização mais criteriosa e complexa. Por exemplo, classificaram outra vez o grupo de figuras planas, formando o subgrupo dos polígonos côncavos, o dos polígonos convexos e o dos não polígonos.

Figura 5: Novas classificações realizadas pelos alunos depois do estudo
Fonte: Prof[a]. Deise Guder (2010)

Após, os alunos realizaram a confecção de alguns sólidos geométricos, conforme apresentado na Figura 6, a partir de material fotocopiado entregue por nós, com o objetivo de observar a planificação das diferentes formas. Cada aluno recebeu uma figura diferente. Deixamos os sólidos construídos expostos na sala.

Figura 6: Construção de sólidos geométricos pelos alunos
Fonte: Prof[a]. Deise Guder (2010)

Depois, fomos até o Laboratório de Informática da escola para explorar o *software* Poly, que apresenta a planificação e a construção de diversos sólidos geométricos, através de animação. A Figura 7 mostra a tela do Poly, apresentando um sólido geométrico e sua planificação.

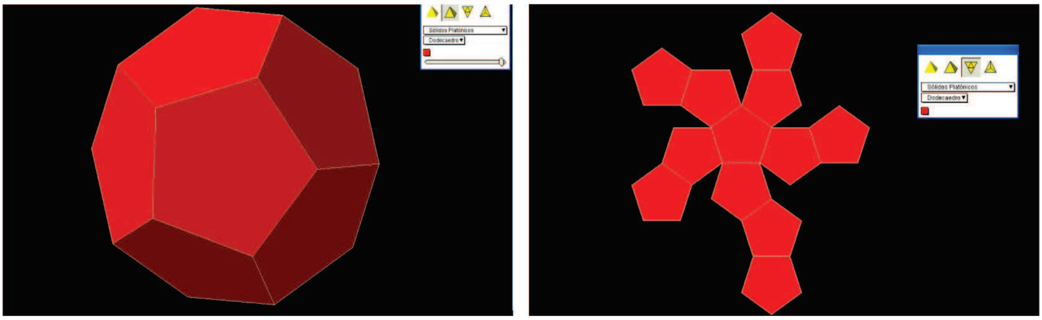


Figura 7: Tela do P*oly* (exemplo de sólido e sua planificação)
Fonte: Prof[a]. Deise Guder (2010)

Os alunos adoraram esta atividade, sendo que brincavam com as cores e formas e mostravam as construções que faziam para os colegas e para o instrutor de informática. O *software* Poly é realmente bem dinâmico e interessante, permitindo abrir e fechar a planificação dos diferentes sólidos, rotacioná-los, modificar suas cores, sendo que apresenta inúmeros tipos de sólidos geométricos.

Terceiro dia: 18/06/10 (3h15min de duração)

Neste encontro, trabalhamos com o objetivo de compreender o que é área e como se calcula a área das figuras planas. Inicialmente, entregamos aos alunos novamente um questionário de sondagem, para verificar os conhecimentos prévios que possuíam sobre o assunto. A partir do questionário, pudemos constatar que tinham poucos conhecimentos sobre os conteúdos abordados, sendo que a maioria não soube explicar o que é área, perímetro e volume e, muito menos, explicar como são calculados.

Após recolher os questionários, falamos que iríamos assistir a mais um vídeo e que eles deveriam fazer anotações, para responder questões: o que é área? O que é perímetro? Como se calcula a área de uma região retangular?

Assistimos então ao vídeo *As coisas têm Área, Volume e Forma* (parte 1) do Novo Telecurso[7].

Depois, conversamos sobre as ideias e conceitos apresentados no vídeo, definindo o que é área e perímetro e como devemos calcular a área de uma região retangular.

---

[7] Disponível em http://novotelecurso.blogspot.com/2009/01/matemtica-e-fundamental-aula-14-1-de-2.html. Acesso em: 01 jun. 2010

Para desenvolver a noção de composição de figuras a partir da decomposição de outras, pedimos para os alunos reunirem-se em duplas e realizarem o jogo do Tangram. O Tangram é um quebra-cabeça chinês antigo. O nome significa "Sete tábuas da sabedoria". O material que compõe o jogo consiste em cinco triângulos de vários tamanhos, um quadrado e um paralelogramo, como mostra a Figura 8.

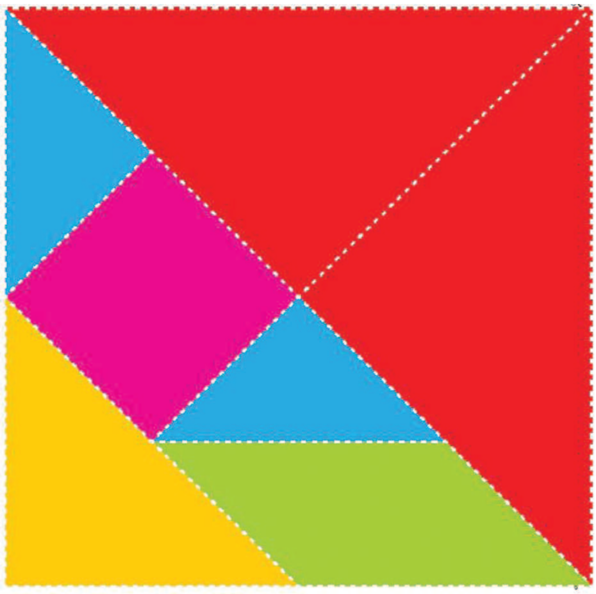


Figura 8: Peças do Tangram
Fonte: Cavalcanti; Souza; Alves (2008, CDROM).

Depois da atividade, questionamos os alunos: "Vimos que podemos construir diferentes desenhos com as peças do Tangram. Será que a parte colorida dessas figuras todas possui a mesma área, ou seja, mesmo mudando a forma, a área (da figura colorida) continua sendo a mesma? Por quê?" O objetivo é concluir que existem inúmeras figuras com diferentes formas que possuem áreas iguais.

Em seguida, entregamos aos alunos (em duplas) diferentes figuras (um retângulo, um quadrado, um triângulo, um losango, um trapézio e um paralelogramo qualquer) recortadas em papel quadriculado. Solicitamos que calculassem as áreas dessas figuras, considerando que cada quadradinho corresponderia a uma unidade quadrada de medida ($1u^2$) e que cada lado do quadradinho seria uma unidade. Em seguida, questionamos sobre como haviam feito para descobrir tais áreas. Os alunos conseguiram descobrir facilmente a área do quadrado e do retângulo, talvez porque no vídeo assistido isso era explicado claramente. Já para determinar a área das demais figuras, eles ficaram cheios de dúvidas. Não lembravam das fórmulas, assim, fizeram a contagem dos quadradinhos, mas, em algumas figuras, esse método não foi muito eficiente, pois, devido à forma da figura (como nos trapézios), os quadradinhos estavam cortados, o que dificultava a contagem. Nesse momento, tentamos mostrar que, em algumas dessas figuras, era possível juntar metades de quadradinhos, formando quadradinhos inteiros, e, assim, contar o total de unidades. Quanto às figuras que não possuíam os quadradinhos divididos exatamente ao meio, foi informado que iríamos descobrir como se faz para determinar a área nas próximas atividades que seriam trabalhadas nesta aula.

Entregamos aos alunos ainda figuras diversas (quadrados, retângulos, triângulos...) recortadas em cartoplex e não em papel quadriculado, solicitando que calculassem a área dessas figuras. Nesse momento, ficaram até sem saber ao certo como determinar a área do quadrado e do retângulo.

Então, realizamos com eles uma série de atividades práticas, com o objetivo de demonstrar e construir as fórmulas para o cálculo de áreas das diferentes figuras (retângulo, quadrado, paralelogramo qualquer, losango, triângulo, trapézio).

Primeiramente, entregamos para cada dupla um retângulo recortado em EVA e quadradinhos pequenos de $1cm^2$ (em cartoplex). Solicitamos que, utilizando os quadradinhos pequenos, eles tentassem descobrir a área do retângulo.

Os alunos não tiveram dificuldades, sendo que todos conseguiram descobrir a área corretamente. Perguntamos como haviam feito para descobrir e eles explicaram que não é necessário encher todo o retângulo com os quadradinhos, pois basta ver quantos cabem em cada lado do retângulo, ou seja, no comprimento e na largura, e multiplicar esses números. Dissemos que é assim mesmo que se calcula a área de um retângulo, fazendo a base vezes a altura ou o comprimento vezes a largura e registramos no quadro. Perguntamos: "A partir disso, como será que se faz para determinar a área de um quadrado?". Eles concluíram que também é apenas preciso multiplicar os lados. Então registramos no quadro: $A = lado \times lado$ ou $A = lado^2$.

Após, entregamos para cada dupla dois triângulos de mesmo tamanho (em EVA) e pedimos que recortassem um triângulo pela sua altura (já marcada previamente). Solicitamos que montassem um retângulo usando as três partes, como mostra a Figura 9.

Figura 9: Esquema sobre os triângulos
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Deise Guder

Questionamos: "Qual é a relação entre a área do triângulo e a do retângulo? Como podemos calcular a área de um triângulo?" Chegamos assim à fórmula do cálculo de área de um triângulo: $A = \frac{base \times altura}{2}$, a qual também foi anotada no quadro.

Então, entregamos um paralelogramo (em EVA) com a altura tracejada. Solicitamos que recortassem o paralelogramo pela altura tracejada e pedimos para tentarem formar um retângulo com essas duas partes obtidas, como mostra a Figura 10.

Figura 10: Esquema sobre o paralelogramo
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Deise Guder

Questionamos: "O que puderam perceber? Foi possível formar um retângulo decompondo o paralelogramo? O que podemos afirmar sobre as áreas do paralelogramo e do retângulo?" Concluíram que o paralelogramo e o retângulo (de bases e alturas iguais) possuem áreas iguais e que se calcula a área do paralelogramo fazendo base x altura.

Para construir a noção de área de um trapézio, entregamos aos alunos dois trapézios iguais (de EVA). Pedimos para tentarem formar um paralelogramo usando esses dois trapézios (Figura 11).

Figura 11: Esquema sobre os trapézios
Fonte: Elaborada pela Profª. Deise Guder

Em seguida, perguntamos: "Qual é a relação entre a altura desse paralelogramo e a do trapézio? Lembrando que o trapézio possui duas bases (Base maior e base menor, dos lados paralelos), como podemos calcular a área desse paralelogramo? Qual é a relação entre a área desse paralelogramo e a do trapézio? Então, como se calcula a área de um desses trapézios?" Chegamos assim à fórmula do cálculo de área de um trapézio:

$$A = \frac{\textit{(base maior + base menor) x altura.}}{2}$$

Com o objetivo de compreender o cálculo de área de um losango, foi entregue aos alunos um retângulo (de EVA) com o desenho de um losango marcado em seu interior (cujos vértices ficam sobre os pontos médios dos lados do retângulo). Pedimos aos alunos que recortassem os segmentos marcados do losango, dividindo assim o retângulo em quatro triângulos retângulos e um losango. Pedimos para montarem um losango usando os quatro triângulos (Figura 12).

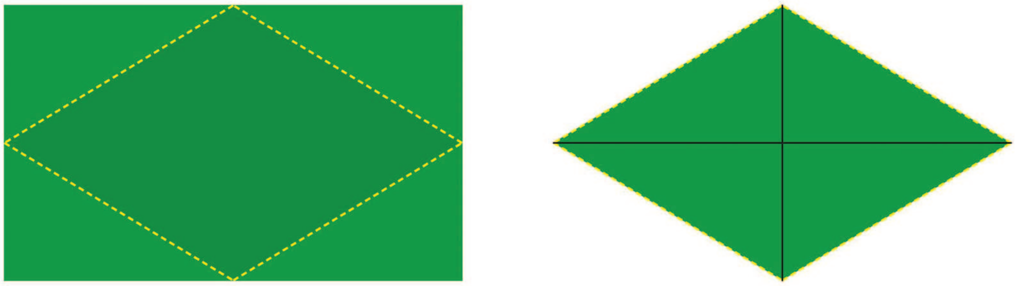


Figura 12: Esquema sobre o losango
Fonte: Elaborada pela Profª. Deise Guder

Questionamos: "O que podemos observar sobre esse novo losango montado? Ele é igual ao outro? Qual é a relação entre a área do losango e a do retângulo original? A diagonal maior (D) é igual à base do retângulo e a diagonal menor (d) é igual à altura? Como se poderia calcular a área de um losango qualquer?” Os alunos concluíram que a área do losango é exatamente igual à metade da área do retângulo cujos pontos médios são os quatro vértices do losango, sendo necessário apenas calcular a área do retângulo e dividi-la por 2. Assim, construímos a fórmula:

$$A = \frac{Diagonal\ maior \times diagonal\ menor}{2}.$$

A seguir, os alunos calcularam as áreas das figuras entregues anteriormente, usando régua para as medidas.

Quarto dia: 21/06/10 (3h de duração)

Neste encontro, trabalhamos inicialmente com o objetivo de compreender o que é volume e como se calcula o volume de alguns sólidos geométricos. Por isso, começamos a aula assistindo ao vídeo *As coisas tem Área, Volume e Forma* (parte 2) do Novo Telecurso[8]. Solicitamos que, enquanto eles assistissem ao vídeo, prestassem atenção aos seguintes itens, anotando se possível: “O que é volume? Como se calcula o volume?”

Após assistir ao vídeo, conversamos sobre as ideias apresentadas nele, buscando uma definição para volume. Entregamos para cada dupla de alunos um prisma (de base triangular ou retangular) e perguntamos: “Como será que podemos calcular o volume desses sólidos?” Eles perguntaram se poderíamos passar novamente o vídeo para que pudessem ver como se calcula.

Utilizamos uma pilha de livrinhos (todos de mesmo tamanho e espessura) para demonstrar que, quando temos um sólido em que todas as secções horizontais têm a mesma área (como é o caso dos prismas), então o volume desse sólido é igual à área da base multiplicada pela altura desse sólido. Explicamos que é assim que se calcula o volume dos prismas: V = área da base x altura.

Depois, empurramos a pilha de livrinhos para um lado, mudando um pouco a sua forma, e questionamos: “ Será que o volume dessa pilha continua sendo o mesmo, ou mudou porque modifiquei o formato?” Com isso, buscamos demonstrar, de maneira bem simples, o Princípio de Cavalieri, um princípio básico para o cálculo de volumes: dois sólidos que tiverem a

[8] Disponível em: <http://novotelecurso.blogspot.com/2009/01/matemtica-e-fundamental-aula-14-1-de-2.html>. Acesso em: 01 jun. 2010.

mesma altura e que, sempre que seccionados por um mesmo plano, gerarem áreas iguais, terão o mesmo volume. Os alunos conseguiram facilmente concluir que o volume continua sendo o mesmo, ainda que mude a forma.

Então, apresentamos o Material Dourado, entregamos para cada dupla dez cubinhos pequenos e pedimos que montassem um sólido qualquer usando essas peças. Depois, solicitamos que mostrassem suas construções para os demais colegas e respondessem a questões: "O que podemos dizer sobre o volume desses sólidos que vocês construíram? Será que os volumes são iguais ou diferentes? Qual é o volume que possuem? Quantos cubinhos mesmo havia sido entregue para cada dupla?"

Mostramos o cubo grande do Material Dourado e fizemos análises sobre o mesmo: "Quantos cubinhos pequenos cabem em um cubo grande? Então, qual é o volume do mesmo?"

Em seguida, perguntamos: "Agora vocês acham que já são capazes de calcular o volume dos prismas entregues anteriormente?"

Solicitamos então que calculassem os volumes desses prismas triangulares, paralelepípedos e cubos, usando a régua e cálculos. Após, fizemos a correção.

Conversamos com os alunos: "Vocês observaram, no vídeo, que em um cubo de 10 cm de aresta, ou seja, de 1.000 cm^3, cabe exatamente um litro. Por isso trouxemos um cubo que tem esse volume, para verificarmos se realmente isso é verdade". Mostramos o cubo e deixamos que eles o manipulassem, conferindo as medidas das arestas. Depois, solicitamos que derramassem um litro de água dentro do mesmo, usando duas garrafinhas de 500 ml de água mineral. Como o cubo era feito de material de raios X (lâminas de radiografias), ele se deformou um pouco e foi necessário que uma aluna segurasse as laterais para não mudar o volume. O ideal seria que o cubo fosse feito de algum material rígido, como vidro ou acrílico, por exemplo, mas, conseguimos observar o que desejávamos: que 1.000cm^3 de volume comportam um litro (ou 1.000ml) de capacidade.

Após, solicitamos que eles resolvessem alguns exercícios sobre área e volume, entregues em folha fotocopiada (Anexo C), com o objetivo de promover a sistematização desses conteúdos estudados. Auxiliamos os alunos em suas dúvidas, dando sugestões, mas não respostas, assim eles puderam também trocar ideias com os colegas.

Pudemos constatar, através dos exercícios realizados, que os alunos compreenderam os conteúdos, ou seja, compreenderam o que é área, o que é volume, e como se calculam áreas e volumes, pois a maioria acertou todas as questões.

No decorrer da prática, percebemos um avanço nos conhecimentos dos alunos, mas, isso foi notado em especial nesse último encontro, pois eles passaram a usar a linguagem geométrica para conversar com os colegas e com a professora. Apresentaram ótimo desempenho na realização dos exercícios, demonstrando que assimilaram conhecimentos que, antes, conforme vimos nos questionários aplicados inicialmente, não possuíam.

Considerações Finais

Com a prática, desenvolvemos uma compreensão melhor do conteúdo e do recurso principal escolhido (vídeo). Para desenvolver um ambiente interativo, dinâmico e participativo, na sala de aula, sentimos a necessidade de estudarmos mais e estarmos preparadas, seguras com relação aos conteúdos, por isso buscamos mais conhecimentos sobre o tema.

Existem relações entre a prática e o estudo teórico realizado no início da elaboração desta Engenharia Didática. Uma das relações refere-se à dissertação de Pavanello (1989), quando ela comenta que os alunos vêm apresentando cada vez menos conhecimentos sobre Geometria, o que ocorre porque a Geometria costuma ser deixada em segundo plano. Com essa prática pedagógica, pudemos fazer essa constatação, pois os alunos realmente desconheciam a Geometria, apesar de frequentarem o oitavo ano (sétima série). Outra relação que estabelecemos foi com a dissertação de Secco (2007), pois adaptamos algumas ideias desse autor, na realização de atividades de decomposição e composição de figuras para a construção das fórmulas do cálculo de áreas. Além disso, buscamos seguir a proposta de Lauro (2007), sobre os processos do ensino da Geometria (percepção – construção – representação – concepção).

Com essa Engenharia Didática, também desenvolvemos uma compreensão melhor a respeito das possibilidades de utilização das mídias digitais e dos recursos de tecnologia. Antes, nunca havíamos feito uma pesquisa mais aprofundada sobre vídeos que poderiam ser aproveitados nas aulas de Matemática. Acreditávamos ter poucas opções de vídeos para essa disciplina. Agora sabemos que existem, sabemos onde buscá-los e como baixá-los da internet.

Percebemos que muitas dificuldades comuns dos alunos sobre Geometria foram solucionadas. Conforme eles mesmos relataram no questionário de avaliação final, tinham uma ideia vaga e confusa sobre a Geometria, não sabiam o que é e nem como se calcula a área de uma região plana e o volume de um sólido geométrico. Também não sabiam classificar as diferentes formas geométricas existentes, usando critérios coerentes. Ao final da prática, pudemos constatar que essas lacunas foram preenchidas.

Foram identificadas mudanças positivas no comportamento e no conhecimento dos alunos durante a prática. Percebemos que os alunos passaram a refletir mais antes de dar uma resposta, pois, inicialmente, respondiam qualquer coisa, diziam que não sabiam nada sobre o assunto e não se importavam com isso. Ao final, foi possível perceber que estavam mais interessados e preocupados em dar respostas corretas, buscando solucionar suas dúvidas e dificuldades.

Na escola e, principalmente, com os colegas professores de Matemática foram observados possíveis efeitos desta experiência didática, pois os alunos acharam muito interessante o uso de vídeos nas aulas de Matemática, pedindo até sugestões de outros títulos e endereços. Os alunos participantes do minicurso também elogiaram os encontros e disseram para os demais colegas (que não se inscreveram) e para a sua professora de Matemática (a qual relatou isso) que aprenderam muitas coisas novas e interessantes e que o minicurso foi muito útil.

Referências

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Novo Praticando Matemática, Volume 1.** 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2006.

______. **Novo Praticando Matemática, Volume 3.** São Paulo: Editora do Brasil, 2006.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim, 7ª série.** São Paulo: FTD, 2000.

BRASIL – SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental/Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <**http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf**>. Acesso em: 5 maio 2010.

CAVALCANTI, M.; SOUZA, P.; ALVES, E. **Coleção Educação para Jovens e Adultos em foco: Matemática**, Cd-Rom. 1.ed. Belo Horizonte: FAPI, 2008.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática, 5ª série.** São Paulo: Ática, 2004.

______. **Tudo é Matemática, 7ª série.** 2. ed. São Paulo: Ática, 2007.

GIOVANNI, J. ; CASTRUCCI, B. ; JÚNIOR, J. R. G. **A conquista da Matemática:** a + nova, 7ª série**.** São Paulo: FTD, 2002.

LAURO, M. M. **Percepção – Construção – Representação – Concepção:** Os quatro processos do ensino da Geometria: uma proposta de articulação. 2007. 396 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-20042007-103710/publico/DissertacaoMairaMendiasLauro.pdf>. Acesso em: 5 maio 2010.

NOVO TELECURSO. **Construindo o pensamento geométrico** (partes 1 e 2 – aula 28 de Matemática). Disponível em: <http://novotelecurso.blogspot.com/2009/02/construindo-o-pensamento-geometrico.html>. Acesso em: 14 ago. 2010.

______. As coisas têm Área, Volume e Forma (partes 1 e 2 – aula 14 de Matemática). Disponível em: <http://novotelecurso.blogspot.com/2009/01/matemtica-e-fundamental-aula-14-1-de-2.html>. Acesso em: 14 ago. 2010.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria:** uma visão histórica. 1989. 196 f. Dissertação (Mestrado em Metodologia do Ensino) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, São Paulo, 1989. Disponível em: <http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000045423>**.** Acesso em: 2 maio 2010.

REIS, L.; CARVALHO, A. **Aplicando a Matemática,** 7º ano do Ensino Fundamental. 2.ed. São Paulo: Casa Publicadora Brasileira, 2010.

SECCO, A. **Conceito de Área:** da composição e decomposição de figuras até as fórmulas. 2007. 198 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/SECCO_anderson.html>. Acesso em: 28 abr. 2010.

VOLPINO, H. **Matemática,** 7ª série. São Paulo: IBEP, 1988**.**

Anexo A - Modelo do questionário aplicado na primeira aula da prática pedagógica

UAB/UFRGS – MATEMÁTICA, MÍDIAS DIGITAIS E DIDÁTICA
PROFESSORA/PESQUISADORA: Deise Guder
ANO (SÉRIE): 8º ano (7ª série)
DATA: ______________

QUESTIONÁRIO

1) Defina o que é Geometria.

____

____

2) Você acha que a Geometria está presente em alguma situação do nosso dia-a-dia? Em que?

____

____

3) Qual é a diferença entre uma figura geométrica plana (bidimensional) e uma espacial (tridimensional)?

____

____

4) Explique o que é: ponto, reta, segmento de reta, semirreta, plano, ângulo.

____

____

Anexo B -
Texto entregue para os alunos sobre classificação das formas geométricas

CLASSIFICAÇÃO DAS FORMAS GEOMÉTRICAS

1) FIGURAS PLANAS

As figuras planas podem ser classificadas em polígonos e não-polígonos.

Definição de Polígono: Figura plana limitada por segmentos de reta, sendo formada por uma linha poligonal fechada. Polígono pode significar tanto o contorno como a região compreendida por ele.

A seguir temos exemplos de alguns **polígonos**:

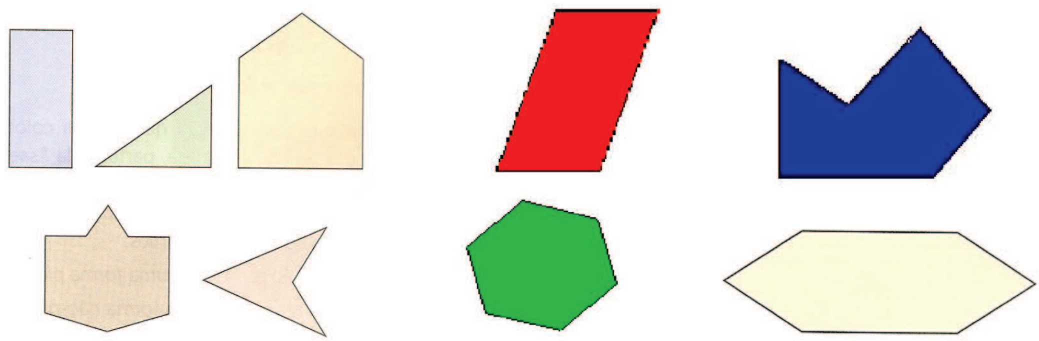


Figura 1A: Elaborada pela Prof[a]. Deise Guder

As figuras abaixo **não são polígonos**:

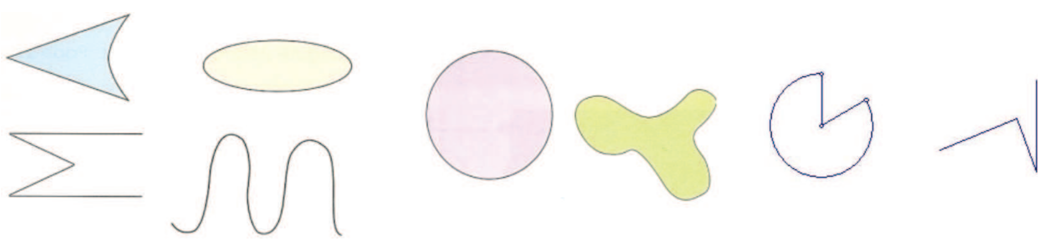


Figura 2A: Elaborada pela Prof[a]. Deise Guder

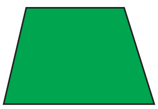
São exemplos de não-polígonos os círculos, as elipses e outras figuras que não são formadas por linhas poligonais fechadas.

De acordo com o número de lados, cada polígono recebe um nome próprio que o identifica. Veja:

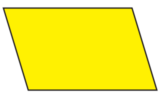
3 lados - triângulo ou trilátero	9 lados - eneágono	15 lados - pentadecágono
4 lados - quadrilátero	10 lados – decágono	16 lados - hexadecágono
5 lados - pentágono	11lados - undecágono	17 lados - heptadecágono
6 lados - hexágono	12 lados - dodecágono	18 lados - octadecágono
7 lados - heptágono	13 lados - tridecágono	19 lados - eneadecágono
8 lados - octógono	14 lados - tetradecágono	20 lados - icoságono

Polígono regular: polígono que apresenta todos os lados iguais e todos os ângulos iguais.

Alguns quadriláteros:

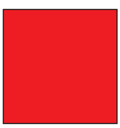


* **Trapézio** é o quadrilátero que só possui dois lados opostos paralelos com comprimentos diferentes, denominados base menor e base maior.

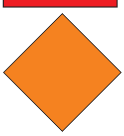


* **Paralelogramo** é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

***Retângulo:** é o paralelogramo que possui quatro ângulos retos.



* **Quadrado:** é o paralelogramo que possui quatro lados iguais e quatro ângulos retos.



***losango:** é o paralelogramo que possui os quatro lados iguais.

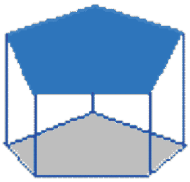
2) FIGURAS ESPACIAIS

Figuras espaciais fechadas ou maciças são chamadas de **sólidos geométricos**.

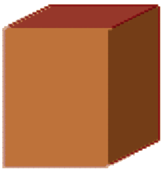
* Os **poliedros** são figuras geométricas espaciais fechadas e cujas faces são polígonos. Podem ser sólidos maciços ou apenas a casca.

Os **prismas** são poliedros cujas faces são paralelogramos e que possuem duas faces paralelas (bases) iguais. Os prismas são classificados conforme as suas bases. Exemplos de prismas:

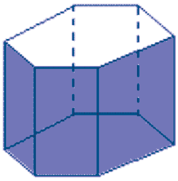
prisma triangular



prisma pentagonal



prisma quadrangular

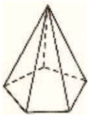


prisma hexagonal

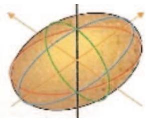
Figura 3A: Elaborada pela Profª. Deise Guder

Paralelepípedos  são os prismas cujas bases também são paralelogramos.

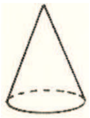
Cubos  são paralelepípedos, cujas faces são todas iguais.

As **pirâmides**  são poliedros que têm base poligonal e todas as faces laterais triangulares.

* São alguns exemplos de figuras espaciais formadas apenas de superfícies curvas:

Esfera  Elipsoide 

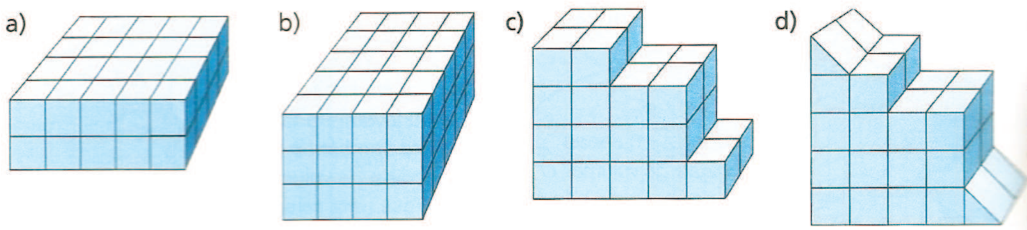
* São alguns exemplos de figuras formadas de faces planas e de superfícies curvas:

Cone  Cilindro 

Anexo C -
Atividade realizada na última aula da prática

ATIVIDADES SOBRE VOLUME E ÁREA:

1) Nas figuras abaixo, todos os cubinhos são do mesmo tamanho. Usando um deles como unidade de volume, dê o volume de cada figura:

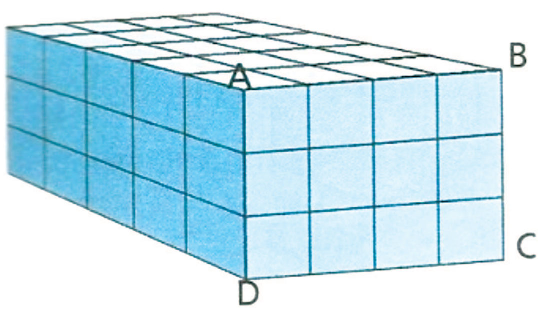


Fonte: Reis; Carvalho (2010, p. 244)

2) Cada um dos cubinhos da figura abaixo tem aresta medindo 1cm. Com base nisso, responda:

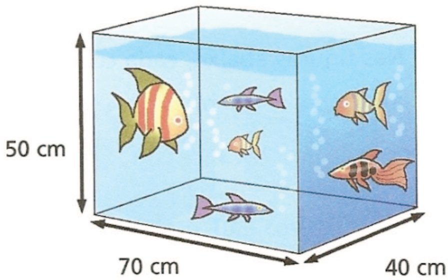
a) Qual á a área do retângulo ABCD?

b) Qual é o volume da figura?



Fonte: Reis; Carvalho (2010, p. 244)

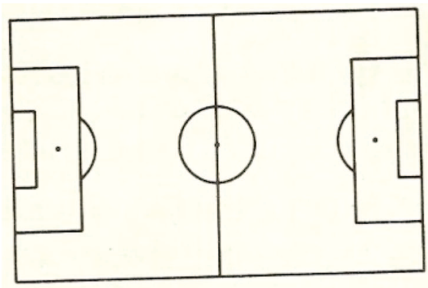
3) O aquário abaixo tem as dimensões dadas ao lado. Quantos litros de água cabem nele?



(Lembre-se: $1000cm^3 = 1dm^3 = 1$ litro)

Fonte: Reis; Carvalho (2010, p. 245)

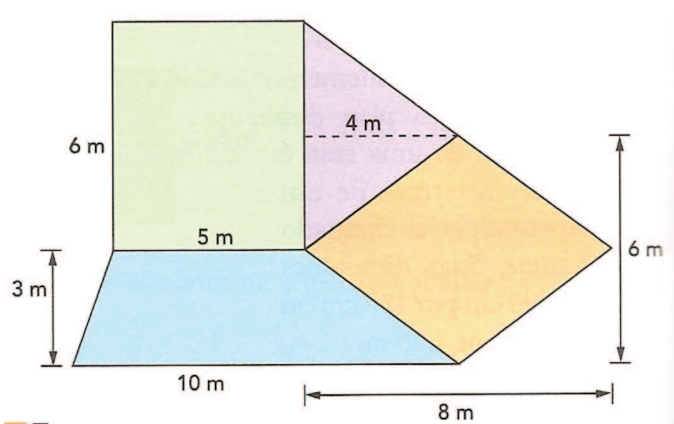
4) Sabendo que um campo de futebol tem 105m de comprimento e 70m de largura, calcule qual é a sua área e qual é o seu perímetro.



Fonte: Volpino (1988, p. 88).

5) Num trapézio, as bases medem 21cm e 15cm e a altura mede 10cm. Calcule a área do trapézio.

6) Determine a área total da região abaixo:



Fonte: Dante (2007, p. 236)

Capítulo 7

O ENSINO DE PROCEDIMENTOS ESTATÍSTICOS EM UM CONTEXTO INTERDISCIPLINAR: CASOS DE AIDS NA FRONTEIRA

JOSEANE GANDIN HETTWER[1]
LUCIANA NEVES NUNES[2]

Introdução

Nos dias de hoje tem se tornado habitual encontrar referências a dados e resultados estatísticos nas conversas cotidianas, nos jornais, revistas, documentários de televisão, na internet, em todos os meios de comunicação. É evidente que a Estatística ganhou espaço e reconhecimento das pessoas. Sendo assim, é urgente e necessário que a escola trabalhe com os conteúdos e as habilidades dessa área, proporcionando ao aluno competências para ler, interpretar informações e interagir com os problemas da sociedade. Porém, isso não está acontecendo: é dada pouca importância ao ensino da Estatística e, quando abordado, isso é feito de maneira abstrata e conteudista, desvinculado dos problemas da vida.

Este texto relata um projeto interdisciplinar que incluiu entre seus objetivos a introdução de noções de Estatística para alunos do primeiro ano

[1] josihettwer@hotmail.com.br

[2] lununes@mat.ufrgs.br

do Ensino Médio, turno noturno, na Escola Estadual Dr. Sílvio Ribeiro, município de Santana do Livramento. O projeto tratou do fenômeno da evolução dos casos de Aids na fronteira do Rio Grande do Sul. Para a realização do trabalho, foram utilizados diferentes recursos e desenvolvidas diferentes atividades, nas disciplinas de Matemática, Arte, Sociologia, Língua Portuguesa, Religião, Língua Espanhola e Química. As atividades interdisciplinares envolveram palestras sobre o tema, construção de história em quadrinhos, acrósticos e paródias, concurso de desenho e produção teatral. Em Matemática, foram utilizados vídeos e *softwares*, em uma prática de ensino cujo objetivo foi dar tratamento estatístico a dados do problema, coletados nos órgãos de saúde, na cidade. Dessa forma, o projeto descreveu e informou a comunidade escolar sobre os índices de contaminação local, as idades de risco, os óbitos registrados, o tratamento dos infectados e, principalmente, alertou sobre a prevenção. Por outro lado, a interdisciplinaridade provocou a inserção de conteúdos de Estatística, na escola, de forma significativa, como aplicação da Matemática a um problema social e a um tema transversal, a saúde.

Apresentação do Tema e Justificativa

A escola onde foi realizado o estudo está localizada na periferia da cidade de Santana do Livramento. Os alunos têm pouco interesse pelos estudos, principalmente nas ciências exatas, em que se concentra a maior dificuldade de aprendizagem. Esse problema foi detectado nas avaliações do Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Básico (SAEB), do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul (SAERS) e nas Olimpíadas de Matemática. Com os dados dessas avaliações, também é possível se verificar que o quadro crítico é comum em muitas escolas hoje em dia. Conforme Garcia (2009, p. 183), "[...] um dos indicadores dessa crise é a imagem pública da Matemática tida como um conhecimento rígido, fixo, lógico, absoluto, não humano, frio, objetivo, puro, abstrato e remoto".

Os alunos buscam na escola somente um "certificado de conclusão" de Ensino Médio, acreditando que esse diploma abrirá portas no mercado de trabalho. Eles têm dormente o sonho, a vontade de seguir os estudos ou de buscar uma condição de vida melhor.

O trabalho da disciplina de Matemática, uma parte do projeto interdisciplinar que estamos relatando, foi desenvolvido com os objetivos de detectar e descrever dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem; planejar e implementar uma experiência didática, com potencial para contribuir para a melhoria do ensino da Estatística; e refletir sobre a prática, antes, durante e após o processo para desenvolver análise crítica da proposta.

A metodologia de pesquisa utilizada é inspirada na "Engenharia Didática": um referencial para produções para o ensino; uma metodologia de pesquisa baseada na experiência em sala de aula. A construção da engenharia didática implica reflexão sobre a prática pedagógica.

O foco da engenharia foi o ensino de procedimentos estatísticos, mais especificamente, a coleta de dados, construção e análise de gráficos em um contexto interdisciplinar. O tema proposto em sala de aula foi o estudo do "problema da Aids na cidade Santana do Livramento – RS"; ou seja, um tema ligado à saúde. O conteúdo de Estatística foi mobilizado para alertar os alunos sobre o problema, debater sobre prevenção e informar a comunidade escolar.

A aplicação da Estatística em um projeto interdisciplinar sobre a doença possibilitou a compreensão de informações atuais, com a análise de dados, e a previsão de um aumento significativo no número de novos casos de pessoas contaminadas com o vírus HIV/Aids. Dessa forma, foi desenvolvido o chamado "letramento estatístico" (VASQUES, 2007), no qual o papel da Estatística é parte de um processo reflexivo.

Análises Prévias

Estatística é a Ciência que tem por objetivo orientar a coleta, o resumo, a apresentação, a análise e a interpretação dos dados. Os dois principais ramos em que a Estatística se divide são: a Estatística Descritiva e a Estatística Inferencial. A primeira trata de organizar, resumir e apresentar dados; a segunda tira as conclusões sobre uma população a partir de uma amostra. População refere-se aos itens que serão estudados em um fenômeno coletivo, seguindo algumas características; e amostra é um subconjunto da população. (BARBETTA, 2007).

A educação básica é responsável pela alfabetização em Estatística, que, segundo Vasques (2007), inclui partes da Estatística Descritiva e da Estatística

Inferencial. Caracteriza-se pelo reconhecimento da necessidade dos dados e de como eles podem ser produzidos na análise de determinado problema; familiaridade com conceitos elementares, tais como, variável, população, amostra, moda, média, mediana, razões, proporções e porcentagem; e familiaridade com representações gráficas e tabulares.

Antes do início do projeto, foi realizada uma sondagem com o objetivo de verificar se os alunos tinham alguns desses conhecimentos básicos, priorizando a habilidade para interpretar gráficos.

A sondagem foi feita a partir da análise de um problema sobre número de carros por pessoa e horas no trânsito, extraído de Vasques (2007, p.104).

> Observe os gráficos abaixo e responda a pergunta: Se você precisasse descrever esses dados para um cliente, como você analisaria? Que sugestão de melhoria você daria?

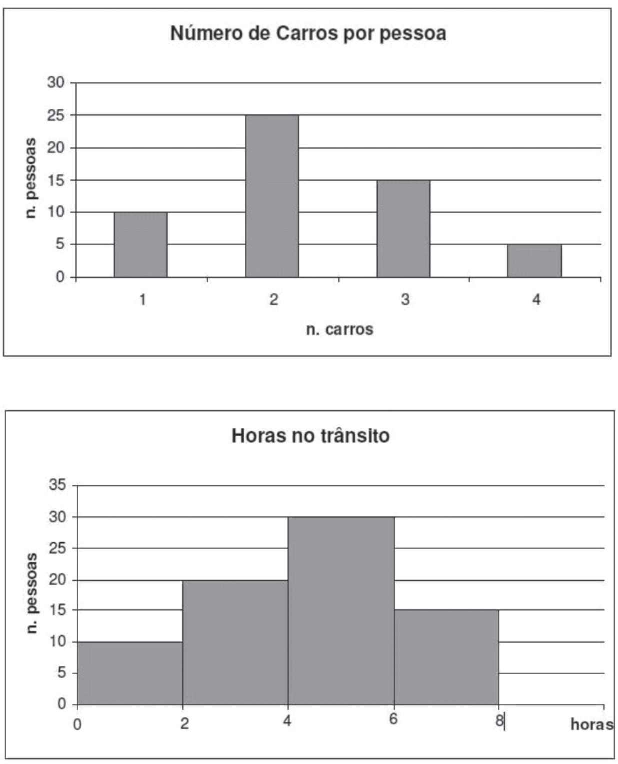


Figura 1: Gráficos usados na sondagem
Fonte: Vasques (2007, p.104)

As dificuldades apresentadas pelos alunos foram referentes à interpretação dos dados e, principalmente, em saber agir sobre o problema, já que as perguntas não eram diretas, exigiam interpretação. Quando solicitados a dar uma sugestão de melhoria do cenário, a grande maioria dos alunos respondeu que não tinha a menor ideia, somente uma dupla respondeu que era um problema do governo em melhorar as rodovias.

Esse quadro é compreensível, quando analisamos um questionário aplicado aos professores do Ensino Fundamental dessa escola. A resposta à pergunta, sobre como é trabalhado a Estatística no Ensino Fundamental, mostrou pouca atenção e dedicação dada ao assunto, presente, eventualmente, em alguns gráficos, inseridos em outras áreas da Matemática. Analisando os planos de ensino dos professores da escola, podemos notar que as competências da Estatística fazem parte dos programas das sexta, sétima e oitava séries, porém professores relatam que apenas trabalham com tabelas e gráficos relacionados com equações do primeiro e segundo grau; não buscam contextualização e aplicação em problemas; não dão ênfase à Estatística.

Os alunos dessa escola têm pouco conhecimento na área, demonstrando poucas condições de responder aos problemas com a competência sugerida por Vergnaud (1998, p. 173):

> [...] quando é colocada uma nova situação para o aluno, ou seja, um novo domínio, novos dados numéricos ou, até mesmo, novas relações, este usa o conhecimento desenvolvido em sua experiência de situações anteriores e tenta adaptá-lo à nova.

O fato de os alunos terem pouco contato com a Estatística no Ensino Fundamental, juntamente com o costume da repetição de exercícios padronizados, agrava as dificuldades quanto à interpretação, à análise e ao posicionamento crítico perante um problema.

O ensino da Estatística adquire grande importância quando percebemos como esse conteúdo está inserido no dia a dia. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, 2006), o conhecimento da Estatística básica contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que serão exigidas ao longo de sua vida social e profissional. A escola hoje não pode ficar restrita ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica, ela deve contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, comunicação, compreensão, investigação e a contextualização sociocultural.

Vasques (2007), apoiado em outros autores, define "letramento estatístico", que subentende um conhecimento mínimo de conceitos, mas vai além da alfabetização estatística. Uma pessoa adulta estatisticamente letrada possui competências para interpretar, avaliar e discutir situações do cotidiano, o que ajuda a desenvolver habilidades para fazer escolhas, frente a essas situações, a entender fenômenos e a perceber sua relevância social e pessoal. Na escola, podemos analisar fenômenos, tais como o aumento da taxa de criminalidade, os baixos índices de aproveitamento escolar, as tendências de emprego, ou os cenários políticos. Porém isso não está sendo feito, como mostraram as respostas dos alunos ao problema de sondagem: o letramento estatístico não está no programa desta escola.

A dissertação de Vasques (2007, p. 27) traz uma classificação para o "letramento estatístico" em três níveis: *Nível Cultural,* quando conseguimos ler e reconhecer informações contidas em gráficos ou tabelas; *Nível Funcional,* quando temos a capacidade de interpretar as informações contidas nos gráficos ou tabelas, organizando, identificando e considerando a variação; *Nível Científico,* quando além das capacidades anteriores, conseguimos fazer inferências e previsões, analisando e considerando a variabilidade existente.

As maneiras usuais de ensinar esse conteúdo pouco contribuem para a obtenção dos níveis de compreensão. O ensino através da interpretação de gráficos, retirados somente de livros didáticos, muitas vezes desvinculados da realidade de nossos alunos, é desinteressante, e pouco desenvolve as competências e habilidades necessárias para interpretação do mundo.

A aplicação da Estatística, em um projeto interdisciplinar, pode dar um passo nessa direção. Estudar o fenômeno da evolução da Aids, na região, pode possibilitar a compreensão de informações, com coleta e análise de dados, e previsões para o futuro.

Segundo Lopes (1998, p. 6):

> É preciso que a coleta de dados tenha um sentido, ou seja, que parta de uma problemática, já que a Estatística investiga os processos de obtenção de dados. Com isso, há um sentido em organizar dados e buscar uma representação gráfica que seja mais adequada à visualização desses dados para posterior análise.

Plano de Ensino, Objetivos, Sequência Didática, Hipóteses

O objetivo geral da proposta de ensino de Estatística, neste trabalho, foi propor atividades para favorecer o início do letramento, como definido por Vasques (2007). Para esse fim, foi construído um projeto interdisciplinar, envolvendo "saúde", um dos temas transversais, que envolveu estudos das particularidades da doença e de sua prevenção, com atividades variadas. Em Matemática, foram utilizados vídeos e *softwares*, em uma prática que exigiu dar tratamento estatístico aos dados do problema, coletados nos órgãos de saúde, na cidade e relativos às cidades da fronteira (Santana do Livramento/ Rivera), proporcionando aos alunos oportunidades para fazer inferências, previsões e análises.

O projeto foi planejado visando o ensinar e o aprender significativamente, de tal modo que os conteúdos façam sentido para o aluno. Também foi pensado para propiciar a construção coletiva do conhecimento, rompendo com passividade e fomentando a interação entre todos os participantes, entre si e com sua comunidade.

Os PCNs sugerem que o ensino por meio de projetos, além de consolidar a aprendizagem, contribui para a formação de hábitos e atitudes e para a aquisição de princípios, conceitos e estratégias que podem ser generalizados para situações alheias à vida escolar (BRASIL, 2002). Por outro lado, em projetos, os alunos trabalham em grupo, o que produz flexibilidade no pensamento e desenvolvimento da autoconfiança necessária para se engajarem em uma dada atividade, na aceitação do outro, na divisão de trabalho e na comunicação com os colegas. Uma das alternativas para promover um ensino mais contextualizado, mais interdisciplinar e menos fragmentado é utilizar metodologia baseadas em projetos.

Antes de iniciar a prática elaboramos hipóteses supondo:

a) que todas as disciplinas mantivessem seu foco no objetivo geral; ou seja, que cada uma das disciplinas envolvidas no projeto realizasse suas atividades voltadas para o projeto;
b) que as atividades desenvolvidas nas diferentes disciplinas despertassem o interesse e motivassem os alunos.

Na ocasião, foi elaborado um esquema com as atividades a serem desenvolvidas pelas disciplinas participantes.

Quadro 1: Esquema do projeto

Componente curricular	Atividades
Arte	• Concurso para criação da capa do *folder*;
Matemática	• Vídeo sensibilizador; • Vídeo como conteúdo de ensino; • Elaboração do *folder* (matéria de todas as disciplinas envolvidas); • Coleta, tabulação e construção de gráficos; • Analise crítica dos gráficos;
Língua Portuguesa	• Acróstico; • Produção textual;
Língua Espanhola	• História em quadrinhos;
Biologia	• Palestra com o grupo de controle e prevenção de Aids e DST; • Debate;
Química	• Camisinha e sua composição química;
Sociologia	• Teatro;
Religião	• Discriminação e valores;

Fonte: Elaborado pela Prof[a]. Joseane Gandin Hettwer

Após, seguimos para o planejamento das aulas de Matemática com os objetivos específicos.

Quadro 2: Plano de ensino de Estatística

Objetivos	Atividades	Recursos
1 hora aula Sensibilizar para a importância de estar informado perante dados veiculados na nossa sociedade.	Dar início ao projeto. Assistir o vídeo sensibilizador retirado do Ministério da Saúde sobre depoimentos de pessoas com o vírus HIV. Organizar debate e apresentar dados veiculados pela secretaria municipal da saúde alertando sobre o problema em nosso município. Organizar visita à Secretaria da Saúde para coletar os dados.	Sala de projeção. Relato escrito. Organização do *folder*. Coleta de dados (organizar o horário de encontro)
1 hora aula Analisar diferentes tipos de gráficos para representar as informações estatísticas; definir moda, média e mediana.	Trabalhar a representação de diferentes tipos de gráficos, através do vídeo “Gráficos na minha vida”. Trabalho em grupo. Os alunos receberão dados e deverão representá-los nos gráficos: colunas, segmentos e setores. Pesquisar, em livros didáticos, definições de moda, média e mediana, conceitos presentes no vídeo.	Vídeo como conteúdo de ensino. Livros didáticos Trabalho em grupo. Relato escrito. Relato oral.

4 horas aula Construir diferentes tipos de gráficos com os dados coletados.	Com os dados coletados na unidade sanitária da secretaria da saúde, construir gráficos de barras, linhas e setores (sexo, idades, contaminação, tratamento) no programa Excel.	Programa Excel Dados coletados secretaria de saúde
1 hora aula Analisar criticamente os gráficos construídos utilizando os valores da média, moda e mediana.	Observando os gráficos no Excel encontrar o valor da média (números de casos), moda (idades) e mediana. Observar esses valores colocando sugestões de prevenção e elaborando uma matéria para o *folder.*	Montagem do *folder* (gráficos) e comentário por escrito.
1 hora aula Divulgar informações trabalhadas durante o projeto, orientando sobre a necessidade de prevenção para se obter uma melhor qualidade de vida.	Operacionalização do projeto interdisciplinar, com exposição dos trabalhos relacionados a cada componente curricular envolvido.	Exposição dos trabalhos. Projetor multimídia. Entrega dos *Folders.*

Fonte: Elaborado pela Prof[a]. Joseane Gandin Hettwer

Relato da Prática

A primeira aula teve como objetivo sensibilizar para a importância de estar informado perante dados veiculados na nossa sociedade. Iniciou ao assistir a um vídeo sensibilizador retirado do Ministério da Saúde, com depoimentos de pessoas com o vírus HIV. Após o filme, foi realizado um debate e foram apresentado dados veiculados pela Secretaria Municipal da Saúde (SMS), alertando sobre o problema em nosso município. Uma aluna da sala de aula que participa do projeto TIM (Projeto Aids e DST nas escolas) relatou sobre o trabalho que desenvolvem com a comunidade escolar, o que desencadeou um debate.

Os alunos foram convidados a visitar a SMS para coletar os dados referentes ao nosso município e os da cidade vizinha, Rivera (por ser divisa seca, as duas cidades são interligadas). Como nem todos tinham disponibilidade de tempo, um pequeno grupo foi formado (três componentes) e estes combinaram o dia e o horário para coletarem os dados.

Ao final da aula foi solicitado um relato escrito coletivo, referente ao vídeo e ao debate. No relato, cada aluno começou a escrever um comentário sobre o vídeo e depois de alguns minutos trocou a folha com o colega do seu lado direito, o qual continuou o texto, considerando o comentário do colega anterior, dando sequência textual. O aluno autor do primeiro comentário fez a conclusão do seu texto. Depois desse encontro inicial os alunos tiveram a palestra com a SMS, sobre o tema AIDS, na disciplina de Biologia.

A seguir relato sobre o filme sensibilizador.

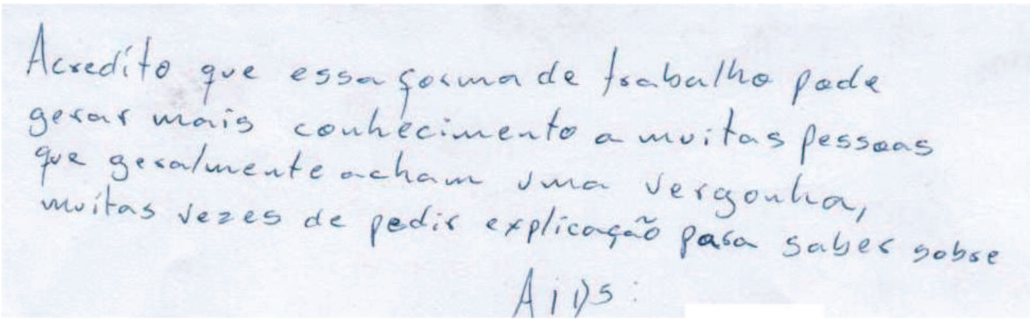

Acredito que essa forma de trabalho pode gerar mais conhecimento a muitas pessoas que geralmente acham uma vergonha, muitas vezes de pedir explicação para saber sobre Aids:

Figura 2: Depoimento de um aluno
Fonte: Aluno A, 1ª série E.M. (2010)

"Acredito que essa forma de trabalho pode gerar mais conhecimento a muitas pessoas que geralmente acham uma vergonha, muitas vezes de pedir explicação para saber sobre a Aids."

O segundo encontro teve objetivos de apresentar e analisar diferentes tipos de gráficos para representar as informações estatísticas, e de definir moda, média e mediana.

Iniciou com um vídeo com conteúdo de ensino "Os gráficos estão na vida"[3] retirado do *site* Novo Telecurso aula 29, no qual os alunos deveriam analisar diferentes tipos de gráficos para representar as informações que seriam posteriormente coletadas. O vídeo define moda, média e mediana.

Após assistir e discutir sobre o vídeo, foi realizado um trabalho em grupo, com dados sobre a Aids no Brasil e no Rio Grande do Sul, com objetivo de representá-los em diversas formas de gráficos: colunas, segmentos e setores. Esses dados foram retirados do *site* do Ministério da Saúde, do ano de 2009. As atividades foram realizadas em um pequeno cartaz, apresentado em aula, justificando a escolha do seu tipo de gráfico. A seguir um dos trabalhos.

---

[3] Disponível em: <http://novotelecurso.blogspot.com/2009/02/os-graficos-estao-na-vida.html>.

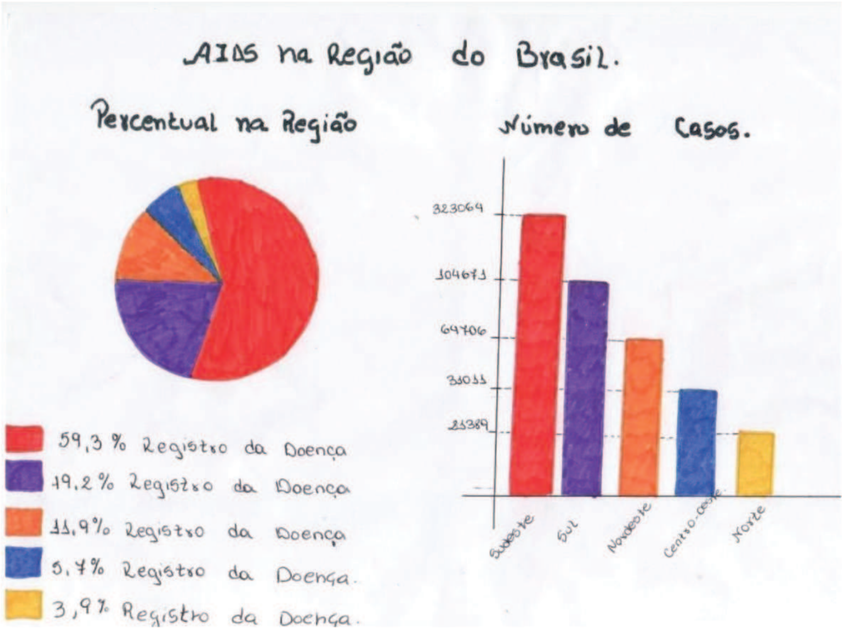


Figura 3: Gráficos feitos pelos alunos
Fonte: Aluno B, 1ª série E.M. (2010)

Neste encontro, os alunos foram desafiados a montar um *folder* e começaram criar a capa na disciplina de Arte. Concomitantemente, eles estavam trabalhando na elaboração de um texto e acróstico em Língua Portuguesa e uma história em quadrinhos em Língua Espanhola.

A seguir uma das atividades realizadas em Língua Espanhola.

Figura 4A: Atividade em Língua espanhola
Fonte: Aluno C, 1ª série E.M. (2010)

Figura 4B: Atividade em Língua espanhola
Fonte: Aluno C, 1ª série E.M. (2010)

O objetivo do próximo encontro foi construir gráficos com os dados coletados, na SMS, com o uso do *Software* Excel. Primeiramente os alunos analisaram os dados coletados e escolheram a melhor maneira de representá-los graficamente, dentre os tipos de gráficos vistos no vídeo. Após está análise, os alunos conheceram a interface do *Software* Excel e aplicaram os recursos na construção dos gráficos com dados coletados. A atividade foi em duplas, por termos poucas máquinas, funcionando improvisadamente na biblioteca (o laboratório está em reformas). As duplas, que foram terminando as atividades, passaram para a montagem do trabalho em slides e para a digitalização do *folder*. A seguir temos alguns dos gráficos produzidos pelos alunos com texto elaborado por eles.

Temos um total de 134 infectados na cidade de Livramento e 286 em Rivera. A Secretaria Municipal de Saúde estima que cada um destes infectados transmita a doença para 25 pessoas em média. Então, se analisarmos esta estimativa teremos um número aproximado de 3350 possíveis contaminados com o vírus HIV/Aids em nossa cidade. Já Rivera tem um número bem mais elevado de aproximadamente 7150. Nestes dados coletados devemos ressaltar que muitas pessoas que têm o vírus preferem mudar de cidade para realizar o tratamento, por medo do preconceito. Só em Livramento foram 3 transferidos neste ano. Além disso, temos muitos infectados que não descobriram que são portadores do vírus.

O primeiro caso de Aids registrado para as duas cidades foi em 1983, quando ocorreu o primeiro óbito na nossa cidade e em Rivera, coincidentemente no mesmo ano. A partir desse ano começaram os registros dos casos, hoje com 37 óbitos em Livramento e 64 em Rivera, conforme gráfico . Com base neste gráfico devemos alertar a sociedade que estas pessoas não morreram de Aids, mas de uma doença adquirida por ter suas imunidades baixas, acabam falecendo apesar do tratamento com o coquetel.

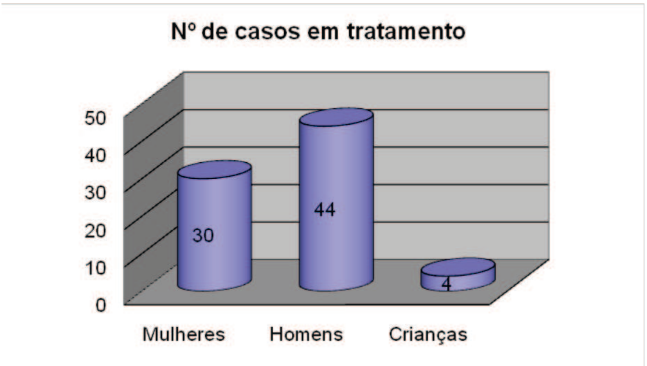


Figura 5: Gráfico produzido por alunos
Fonte: Aluno F, 1ª série E.M. (2010)

Observando o gráfico verificamos que temos atualmente 30 mulheres, 44 homens e 4 crianças em tratamento, ou seja, temos um total de 78 pessoas que fazem o tratamento tomando um dos cinco coquetéis para Aidéticos. Uma pergunta que um grupo procurou esclarecer na palestra: "Porque nem todos os contaminados tomam o coquetel? Segundo o palestrante, quem tem o vírus HIV e a doença ainda não se manifestou somente faz acompanhamento psicológico, mas quem já tem a Aids, deve tomar um dos cinco coquetéis de acordo com o seu grau de deficiência de defesa no corpo". Por esse motivo temos 78 dos infectados em tratamento com medicação e 56 somente em acompanhamento psicológico.

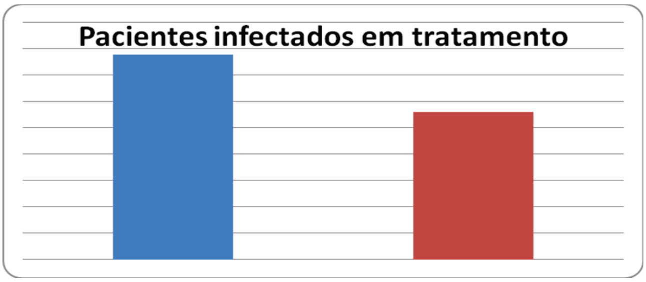


Figura 6: Gráfico produzido pelos alunos
Fonte: Aluno G, 1ª série E.M. (2010)

Estas 78 pessoas que fazem tratamento com coquetel têm um custo por mês por paciente, que varia de 3 a 4 mil reais para o Governo Federal, que manda o medicamento para ser distribuído gratuitamente. Outro dado muito triste é que, dentre estes 78 pacientes em tratamento temos 4 crianças (10 a 12 anos) que nasceram de mães portadoras do vírus que não realizaram o tratamento durante a gravidez. Essas crianças têm uma vida limitada e curta, até 25 anos em média, por causa da troca entre somente cinco coquetéis e não ter mais tratamento.

A Figura 7 mostra um gráfico elaborado no Excel, com dados da Secretaria Municipal de Saúde, indicando número de casos por idade. A Secretaria não tem registro das idades de todos doentes, foram fornecidos apenas as idades do diagnóstico do vírus de 115 pacientes, dos 134 casos existentes. A cidade de Rivera não tem esse registro. É preciso observar que essa representação gráfica não ficou clara, pois os valores não estão visíveis (o número de casos por idade e a variação de 20 em 20 anos).

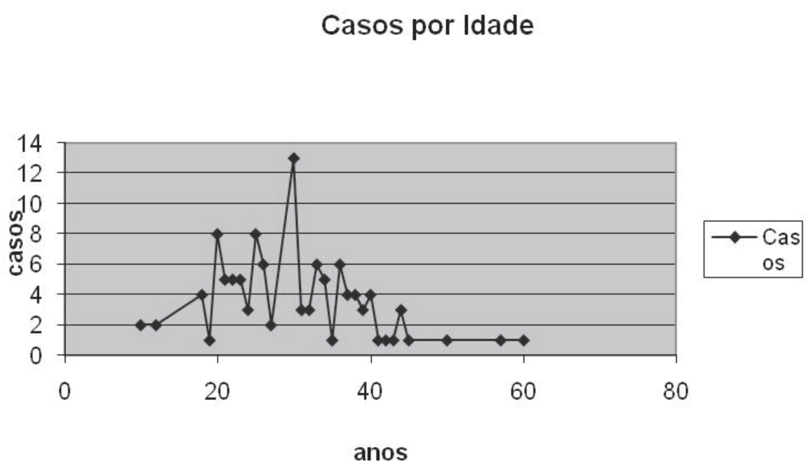


Figura 7: Gráfico produzido por alunos
Fonte: Aluno H, 1ª série E.M. (2010)

Foram solicitados análise do gráfico e cálculos de média, moda e mediana. No entanto, esses conceitos não foram devidamente enfatizados, neste planejamento. As primeiras noções estavam no vídeo, utilizado como parte do conteúdo de ensino, mas não foram suficientes: os alunos não conseguiam aplicar o conteúdo do vídeo em uma situação-problema com dados diferentes. Pesquisaram em livros didáticos, buscaram definições e tentaram fazer o cálculo da média, mas não conseguiram identificar as variáveis que deveriam participar. A Figura 8 mostra os equívocos cometidos.

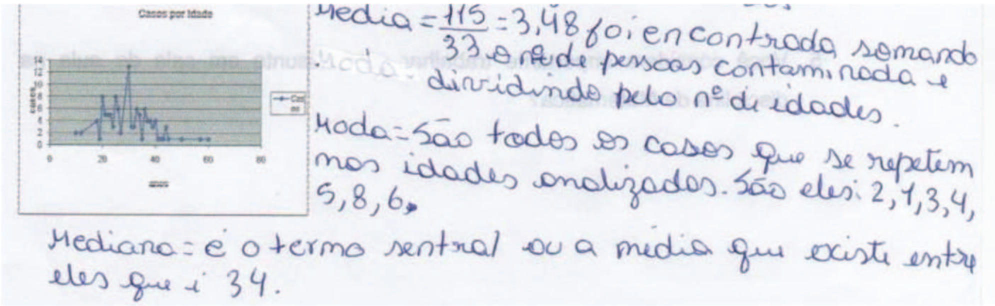


Figura 8: Cálculos da média, moda e mediana
Fonte: Aluno I, 1ª série E.M. (2010)

“Média: Foi encontrada somando o número de pessoas contaminadas e dividindo pelo número de idades.”

“Moda: São todos os casos que se repetem nas idades analisadas. São eles: 2,1,3,4,5,8,6.”

“Mediana: É o termo central ou a média que existe entre eles que é 34.”

Analisando o cálculo feito na média verificamos os erros cometidos devido à identificação da variável. O gráfico apresenta só uma variável quantitativa para ser estudada, a idade. Nesse caso, podemos descrever essa variável através de três medidas de tendência central, que são a média, moda e mediana. Então, todas as medidas devem se referir à idade.

1) Cálculo da Média

Para se calcular a média, devemos ter o seguinte cálculo: soma das idades dividido pelo número de casos. O que os alunos fizeram está errado, pois eles somaram o número de casos por idades.

2) Cálculo da Moda

Para a moda, temos que ver qual a idade mais frequente e, nesse caso, é fácil, pois basta ver qual o maior pico do gráfico, aí a idade modal é o valor da idade correspondente a esse pico. Portanto, os alunos também erraram essa análise.

3) Cálculo da Mediana

Já a mediana, eles acertaram, pois a definição (termo central) está correta. O termo central, nesse caso, é a idade central na distribuição de todas as idades ordenadas.

Esses erros têm uma origem: o conceito de variável. Nesse planejamento, houve dedicação à construção e à análise de gráficos elaborados a partir de dados numéricos, sem explicitar aos alunos as variáveis envolvidas. Esse conceito é básico para entender e calcular média, moda e mediana.

Segundo Vasques (2007, p. 31) a "variável estatística" pode ser apresentada de duas maneiras: qualitativa e quantitativa. A variável qualitativa tem apenas os dados coletados organizados de forma a utilizar os nomes, marcas ou quantidades. Já a variável quantitativa possibilita ordenar os dados coletados e calcular as medidas significativas para uma análise aprofundada. Verificamos que o vídeo utilizado na prática apresentou exemplos em que o aluno recebe os dados e calcula média, moda e mediana. A ênfase foi dada aos cálculos e não à seleção e identificação das variáveis. Pareceu aos alunos que qualquer conjunto de números dados no gráfico, em análise, poderia ser usado nas fórmulas e que o objetivo era o cálculo e não a análise que poderia ser feita do fenômeno, a partir desse cálculo.

Vasques (2007) enfatiza que o primeiro passo, para resolver um problema, é encontrar a "variável estatística". Essa foi a dificuldade, da grande maioria dos alunos, no momento que pensaram apenas em números – número de casos – como os elementos mais importantes do problema. Com essa avaliação, percebemos a necessidade de incluir, no plano de ensino, momentos específicos para desenvolver os conceitos de variável e de medida, com análise de diferentes fenômenos e de suas representações gráficas.

Finalização do Projeto

Para divulgar as informações adquiridas e elaboradas durante o projeto, visando orientar a comunidade sobre a necessidade de prevenção, no sentido de melhorar qualidade de vida, foi realizada a operacionalização do projeto interdisciplinar. Houve exposição dos trabalhos relacionados a cada componente curricular envolvido, na sala de atos (refeitório) da escola, com todos os integrantes do noturno, a direção da escola e representantes da Secretaria Municipal da Saúde. Nesse momento foi entregue aos presentes o *folder* elaborado pelos alunos.

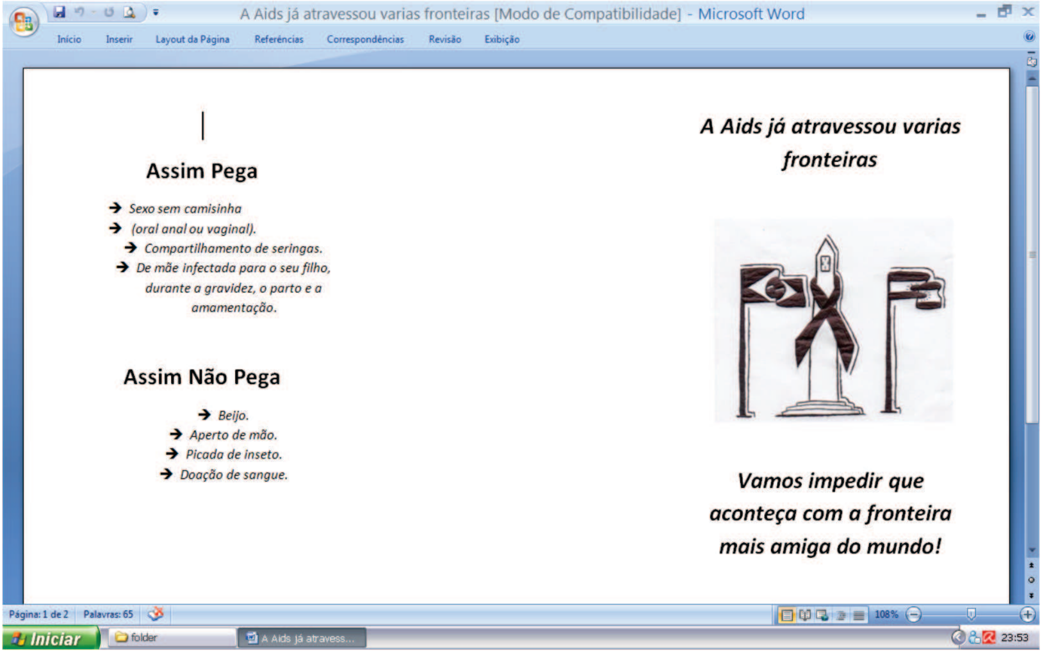


Figura 9: Parte exterior do *folder*
Fonte: Elaborado por grupo de alunos, 1ª série E.M. (2010)

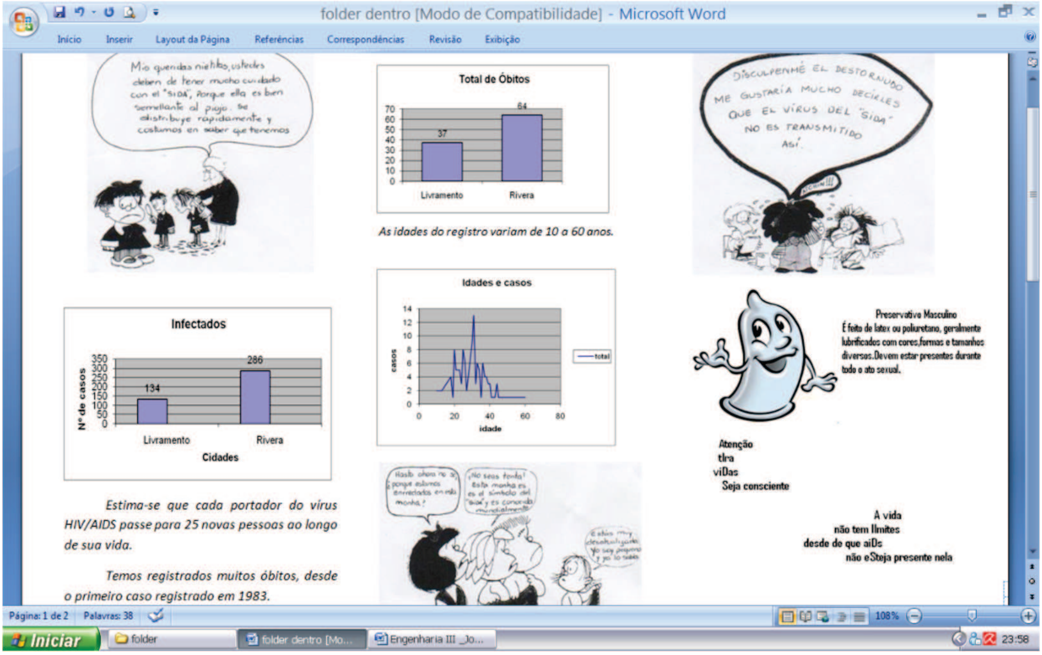


Figura 10: Interior do *folder*
Fonte: Elaborado por grupo de alunos, 1ª série E.M. (2010)

Conclusões e Reflexões Sobre a Prática

O projeto trouxe muitos ganhos: a aprendizagem de Estatística, embora muito restrita, tornou-se significativa; os alunos tiveram oportunidade para buscar novos conhecimentos e para estabelecer relações; os recursos das mídias – *softwares*, vídeos didáticos – auxiliaram nas aplicações desejadas e também serviram para incentivar o uso das tecnologias.

Entre as produções dos alunos, o *folder* foi um dos materiais que permitiu verificar os objetivos de aprendizagem e mostrar a importância dessa prática, embora encontradas algumas dificuldades, quanto à exploração dos recursos da interface do Excel e ao cálculo de média e moda.

Dessa forma, os objetivos do trabalho foram parcialmente alcançados: os alunos partiram de um problema real, da sua comunidade, dedicaram-se à coleta de dados, o que deu sentido à organização destes dados, elaboraram representações gráficas, fizeram análises e divulgaram os resultados. Porém, as análises foram bastante elementares, pois os alunos não conseguiram dar significado à média, moda e mediana.

A dificuldade na aprendizagem dessas medidas está no modo como foi iniciada a proposta de ensino: textos foram dados, as variáveis não foram questionadas, em nenhum momento foi preciso perguntar quais eram as variáveis estatísticas envolvidas. Esse é um conceito fundamental que merece ser trabalhado durante todo o processo de letramento em Estatística, pois está presente em todos os outros conceitos e habilidades que se deseja desenvolver.

Durante a prática, dificuldades frequentes e comuns apareceram, e algumas foram sanadas. Os alunos, inicialmente sem qualquer letramento estatístico, alcançaram parcialmente os dois primeiros níveis: cultural, pois eles conseguiram ler e reconhecer informações contidas em gráficos ou tabelas; e funcional, pois conseguiram interpretar algumas informações contidas nos gráficos ou tabelas, organizando-as. No entanto, eles não desenvolveram habilidades na identificação das variáveis, o que prejudicou análises mais científicas. Fizeram inferências e previsões, de uma forma intuitiva, baseada nos números e na visualização dos gráficos, alertando a sociedade para a prevenção da doença.

Foi possível identificar muitas mudanças positivas nos alunos, visíveis nos relatos escritos por eles. Em todas as atividades sugeridas, os alunos surpreenderam os professores por sua criatividade, interesse, dedicação e superação, principalmente nas dificuldades de escrita e oralidade. Abordar um conteúdo, interpretando, relacionando sua análise e sugerindo possíveis soluções embasadas em conhecimentos novos, recém adquiridos, demonstrou uma mudança no comportamento, em geral passivo e receptor, dos alunos.

Os efeitos dessa experiência ficaram evidentes, quando ao realizar as atividades de encerramento, os alunos exalavam um brilho no olhar e gratificação por um trabalho reconhecido pelos colegas do turno. Quanto aos colegas professores, a adesão inicial ao projeto foi pouca: as atividades eram planejadas e aplicadas nas aulas de Matemática e continuadas nas outras disciplinas. Por exemplo, a capa do *folder*, os acrósticos e as histórias em quadrinhos começaram a ser produzidos nas aulas de Matemática e depois os professores das disciplinas deram continuidade. Com isso, aos poucos, os colegas docentes foram se integrando ao projeto. O resultado, com toda certeza, surpreendeu a todos, que não imaginavam tamanho empenho, por parte dos alunos.

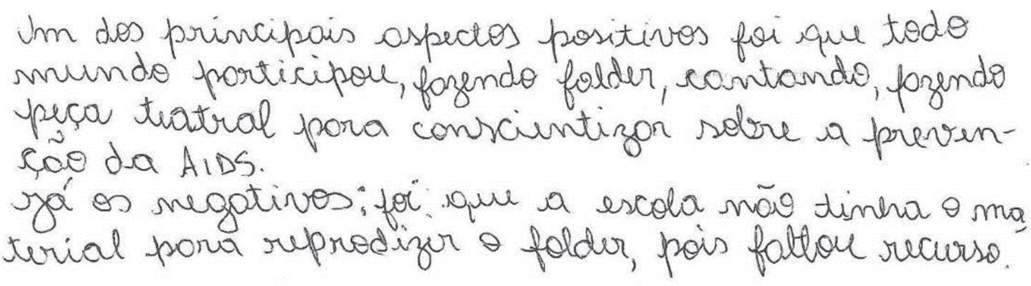

Um dos principais aspectos positivos foi que todo mundo participou, fazendo folder, cantando, fazendo peça teatral para conscientizar sobre a preven-ção da AIDS.
Já os negativos; foi que a escola não tinha o ma terial para reproduzir o folder, pois faltou recurso.

Figura 11: Relato final de um aluno
Fonte: Aluno J, 1ª série E.M. (2010)

A experiência foi gratificante para os alunos e para os professores. A direção publicou uma matéria no jornal local e convidou os alunos para apresentarem as atividades para os demais e para a comunidade escolar (pais). Além disso, receberam um convite especial da Secretaria Municipal de Saúde para apresentar o projeto, na Primeira Feira Internacional, realizada no dia 5 de dezembro na cidade. O trabalho foi apresentado com o maior sucesso, pois os alunos encantaram ao público com suas explicações, demonstrando total domínio e clareza do assunto.

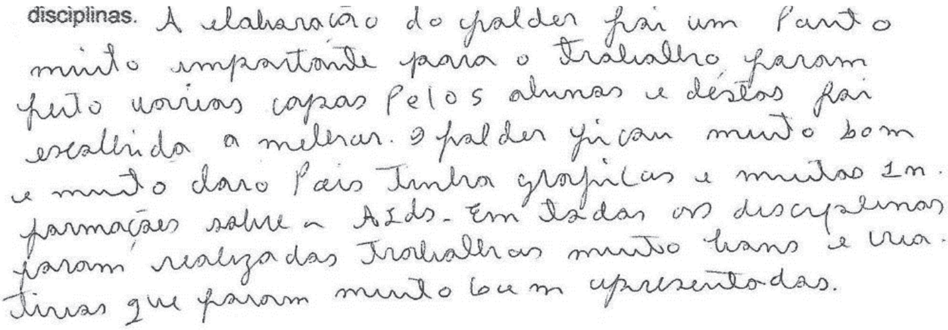

disciplinas. A elaboracão do folder foi um Ponto muito importante para o Trabalho foram feito varias capas Pelos alunos e destas foi escolhida a melhor. o folder ficou muito bom e muito claro Pois Tinha graficos e muitas in. formações sobre a AIds. Em Todas as disciplinas foram realizadas Trabalhos muito bons e cria. tivas que foram muito bem apresentadas.

Figura 12: Relato final de um aluno
Fonte: Aluno K, 1ª série E.M. (2010)

Com essa experiência, percebemos uma pequena mudança dos professores, em direção à aplicação de projetos interdisciplinares, sugeridos constantemente em reuniões pedagógicas e nos PCNs. As diferentes etapas do projeto permitiram trabalhar habilidades e atitudes que devem ser contemplados no Ensino Médio, como: saber buscar informações, se comunicar, argumentar, compreender e agir; enfrentar problemas e adquirir uma atitude de permanente aprendizado.

No decorrer da prática, ficou clara a importância das aplicações, no ensino da Estatística. O brilho nos olhos, a curiosidade dos alunos demonstrou que conhecimentos teóricos devem andar junto com atividades práticas. Sendo o professor, o agente principal dessa construção, cabe a ele pesquisar e refletir constantemente sobre a sua prática, reconhecendo erros e acertos, sempre em busca da melhoria.

Referências

BARBETTA, P. A. **Estatística Aplicada às Ciências Sociais.** 7. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

BRASIL, MEC. Secretaria de Educação Básica e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) – Parte III:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**.** Brasília: MEC/SEB, 2006. Disponível em: <http://www.cespe.unb.br/vestibular/1VEST2010/GuiaDoVestibulando/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2010 .

GARCIA, V. C**.** Fundamentação teórica para as perguntas primárias: o que é matemática? Por que ensinar? Como se ensina e como se aprende? **Educação (PUC-RS)** Porto Alegre, v. 32, n.

2, p. 176-184, 2009. Disponível em: <http://revistaseletronicas.pucrs.br/fale/ojs/index.php/faced/article/viewFile/5516/4014>. Acesso em: 20 fev. 2011.

LOPES, C. A. E. **A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental:** uma análise curricular**.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Unicamp. Campinas, 1998. Disponível em: <http://cutter.unicamp.br/document/?code=vtls000133638>. Acesso em: 20 fev. 2011.

VASQUES, R. S. B. **Mobilização dos Conceitos Estatísticos –** Um estudo diagnóstico desses conceitos, envolvendo variabilidade, com alunos do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), PUC, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/ricardo_sergio_braga_vasques.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2011.

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behaviour**, v. 17, n. 2, p. 167-181, 1998.

Capítulo 8

A MÚSICA CONTRIBUINDO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

FABIO GOMES LINCK[1]
VERA CLOTILDE GARCIA[2]

Introdução

O presente trabalho traz o relato e a discussão de uma engenharia didática para ensino de algumas funções trigonométricas, que explora as relações entre a Música e a Matemática e utiliza diferentes recursos tecnológicos. O texto se divide em etapas: estudos e reflexões prévias sobre o conteúdo matemático, o ensino usual e dificuldades de aprendizagem; plano de ensino e relato da prática pedagógica, que ocorreu com alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Dr. Silvio Ribeiro na cidade de Santana do Livramento/RS, no ano de 2010. As reflexões posteriores trazem críticas e revisões do plano, análise da prática e do desempenho dos alunos.

Apresentação do Tema e Justificativa

O objetivo maior dessa engenharia é o ensino com aprendizagem significativa das funções trigonométricas. O foco está na representação gráfica da família de funções $y = A\ sen(bx)$, sendo A e b números reais, não nulos, bons modelos para movimentos vibratórios periódicos. Curva senoide relaciona-se com onda sonora e os parâmetros A e b com características do som.

[1] fabiolick@yahoo.com.br

[2] veraclot@ufrgs.br

Segundo Moreira *et al.* (1997), o conhecimento prévio que os alunos possuem é a variável crucial para que a aprendizagem significativa ocorra. O autor introduz noções sobre a teoria da "*aprendizagem significativa*": ideias novas só podem ser aprendidas e retidas, de maneira útil, caso refiram-se a conceitos e proposições já disponíveis, que proporcionam as âncoras conceituais. Novos conhecimentos são adquiridos quando relacionam-se com o conhecimento prévio que o aluno possui.

Supondo que noções básicas sobre Música são conhecimentos já incorporados pelo aluno, partimos daí para desenvolver conhecimentos matemáticos. A ideia foi estabelecer relações entre esses dois mundos, para facilitar a compreensão das novas informações.

Por outro lado, *softwares* interativos, como o Geogebra, permitem lidar com o conceito de família de funções, na qual a "função mãe" (no caso $y = senx$) é transformada em outras funções ($y = A\ sen(bx)$), com as mudanças dos parâmetros, A e b. A tecnologia permite aos estudantes investigar rapidamente muitas funções e seus gráficos e descobrir relações entre eles. Apenas o domínio da ideia de periodicidade é necessário, antes que o estudante esteja pronto para visualizar qualquer variação da função seno.

Análises Prévias: relações da Música com a Matemática

Lazzarini (s.d.) define: som é uma onda longitudinal, que só se propaga em meios materiais (sólidos, líquidos ou gases). Não é possível perceber o som se não existir um meio material entre o corpo que vibra e o nosso ouvido. Ele é gerado pela vibração, exerce pressão sobre o ar, e propaga-se no meio em forma de ondas, até chegar aos nossos ouvidos, onde há uma estrutura que recebe essas vibrações, interpreta-as e envia-as ao cérebro, gerando a percepção que temos do som.

Para Priolli (1987, p. 63), o som tem três propriedades:

a) a altura consiste na maior ou menor elevação do som, e depende do maior ou menor número de vibrações executadas num tempo dado;
b) a intensidade consiste no grau de força com que se apresenta o som e depende da amplitude das vibrações;
c) o timbre é a personalidade do som. Se ouvirmos um mesmo som produzido por vozes ou instrumentos diferentes, é por meio do timbre que reconhecemos esta ou aquela voz, ou ainda qual o instrumento que o produziu.

Em outras palavras, a *Intensidade* é a propriedade que o som tem de ser mais forte ou mais fraco; a *Altura* é a propriedade que o som tem de ser mais grave (baixo) ou mais agudo (alto); e o *Timbre* é a qualidade do som.

Quando o som propaga-se no ar, as ondas sonoras consistem simplesmente em uma série de variações de pressão. O diafragma de um microfone pode captar estas variações[3], movendo-se em resposta às mudanças de pressão. O movimento do diafragma é, então, convertido num sinal elétrico. Usando um microfone e uma interface – o equalizador – é possível "visualizar" as ondas sonoras.

As três características do som – intensidade, altura e timbre – podem ser vistas no aspecto físico do comportamento da onda.

A amplitude da onda corresponde à intensidade do som: a pressão do ar oscila acima e abaixo de um valor médio, que é a pressão do ar do local onde nos encontramos. O módulo da variação máxima, em relação a esse valor médio, chama-se amplitude da onda de pressão; o seu valor está relacionado com o volume ou intensidade sonora. Em termos espaciais, o deslocamento das partículas da onda sonora é muito pequeno, da ordem de frações de milímetros. Para quantizar a intensidade do som, utilizamos uma medida chamada decibel (dB), que é o logaritmo da pressão exercida pela vibração no ar.

A amplitude é a intensidade do som e, graficamente, é a altura da onda com relação ao ponto médio. Quanto maior a intensidade sonora, maior será a amplitude da onda da curva que a representa. A imagem a seguir representa a diferença entre dois sons distintos.

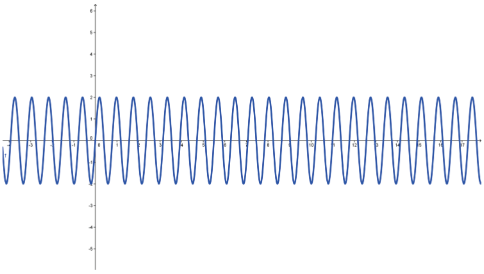


Figura 1: som 1
Fonte: Elaborada pelo Prof. Fabio Linck

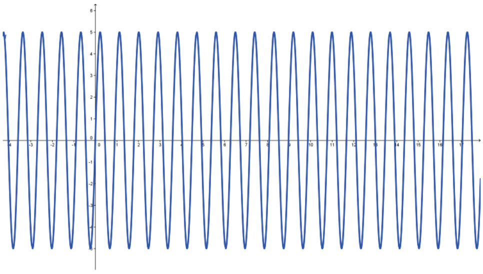


Figura 2: som 2
Fonte: Elaborada pelo Prof. Fabio Linck

[3] Parte deste estudo encontra-se disponível em: <http://education.ti.com/sites/PORTUGAL/downloads/pdf/07ondas_sonoras.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2011.

As representações gráficas mostram que o som representado na Figura 1 é um som menos intenso (mais fraco) do que o representado na Figura 2, pois sua amplitude é menor.

As partes mais altas da onda são chamadas cristas, são os pontos de maior compressão de partículas. As partes mais baixas são chamadas vales, são pontos de menor compressão de partículas.

A frequência da onda corresponde à altura do som: é o número de vezes que a partícula completa seu movimento vibratório e volta ao seu estado inicial em uma determinada unidade de tempo. A unidade de frequência mais utilizada é Hertz (Hz), ou número de ciclos por segundo. A frequência é interpretada como a altura do som. O termo altura é frequentemente confundido com volume.[4] A diferença de volume refere-se a quanto um som é mais forte ou mais fraco do que outro, enquanto a diferença de altura refere-se a quanto um som é mais agudo ou mais grave que outro.

O período é o tempo necessário para que a partícula complete seu movimento vibratório e volte ao seu estado inicial. A unidade de medida do período, na Física, é segundo. A frequência é o inverso do período, por isso 1 Hz = 1 s^{-1}.

A imagem a seguir representa graficamente ondas sonoras, conforme a nota musical, em diferentes alturas e frequências. A nota fá é mais grave e a nota sol é mais aguda.

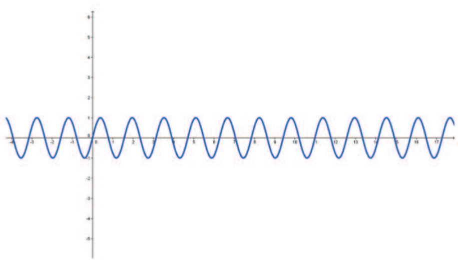


Figura 3**: nota fá**
Fonte: Elaborada pelo Prof. Fabio Linck

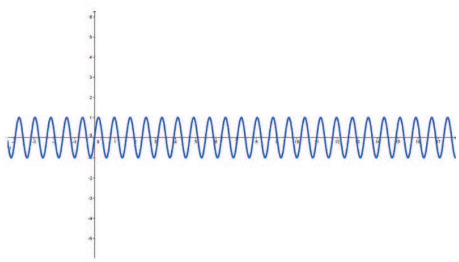


Figura 4: **nota sol**
Fonte: Elaborada pelo Prof. Fabio Linck

Quem determina a altura – mais grave ou mais agudo – é o número de oscilações por unidade de tempo, ou seja, a frequência.

O espectro de frequências da onda corresponde ao timbre: raramente um som é composto de uma única frequência, geralmente ele é uma

[4] Parte deste estudo encontra-se disponível em: < www.mtm.ufsc.br/pos/Saulo_Castilho.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2011.

combinação de vibrações em várias frequências diferentes simultaneamente. O espectro de frequências determina quais as frequências que compõem o som, e quais suas intensidades.

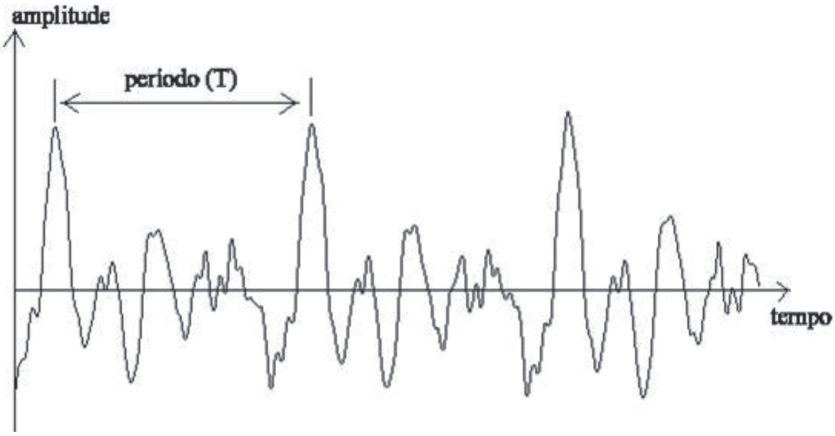


Figura 5: Representação temporal de uma onda sonora periódica produzida pela viola
Fonte:< http://www.fisica.net/ondulatoria/elementos_de_acustica.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2011

É interessante observar que esta onda complexa também mostra um movimento *periódico*, ou seja, sons se repetem em um espaço de tempo. Sons periódicos são relacionados com instrumentos *afinados,* e a frequência dos ciclos inteiros de onda, que define a altura de determinada nota, vai ser chamada de frequência fundamental. Existem, é claro, os sons, instrumentais ou não, que não têm altura definida, cuja forma de onda é *aperiódica*, ou seja, que não possui um padrão audível de repetição.

Podemos falar também sobre *ritmo*. Em uma música, são as variações do número de pulsações que determinam os diferentes ritmos musicais que conhecemos. Um frevo, por exemplo, tem um ritmo mais acelerado do que uma valsa. O número de pulsações, em um intervalo de tempo (minuto), é maior no frevo.

Os fenômenos ondulatórios podem ser estudados em sua forma mais simples, para se ganhar um entendimento dos seus constituintes básicos. A forma mais simples de onda sonora tem, como modelo matemático, funções que possuem uma característica periódica, isto é, repetem-se em um certo intervalo de tempo.

As notas puras, sem superposição de outros sons, são representadas por curvas do tipo senoidal.

A fórmula geral de uma curva senoidal é representada pela função mostrada a seguir.

$y = A\ sen\ (bx + c)$

No caso do som, que se propaga no ar como uma onda longitudinal:

a) y refere-se à variação de pressão a cada momento, com relação à pressão normal do ambiente, sem vibração. A unidade é Pascal ou Joule.

b) A é a amplitude máxima da onda, é um multiplicador simples que determina os valores máximos e mínimos entre os quais a oscilação ocorre. A equação $y = sen\ x$, corresponde a uma curva senoide, com amplitude 1.

A *amplitude* de uma onda de pressão correlaciona-se diretamente com a nossa percepção de intensidades sonoras, por exemplo, sons mais intensos serão resultado de uma maior amplitude de variação da pressão do meio (ou seja um deslocamento maior das moléculas).

c) $b = 2\pi.f$, onde f é a frequência. O modelo poderia ser reescrito como

$y = A\ sen\ (2\pi fx + c)$ *ou*

$y = A\ sen\ ((2\pi/P)x + c)$

com f de frequência e P de período, pois $f = 1/P$.

A *frequência*, e por consequência o *período* e o *comprimento de onda*, relacionam-se com a percepção de alturas (ou seja, o quão grave ou agudo um som é). O período é o tempo decorrido entre duas cristas consecutivas. Certos valores de frequências são convencionalmente equivalentes às notas musicais, por exemplo, 440 Hz é a frequência da nota lá de concerto.

d) x representa o tempo, em segundos;

e) c refere-se à fase.

A *fase* é o valor de x, em que se inicia um ciclo completo da curva senoide, isto é, fase é o valor de x para o qual $y = 0$ e a função é crescente. A fase determina a posição inicial da onda, ou a posição do começo do movimento. A unidade de fase é segundos.

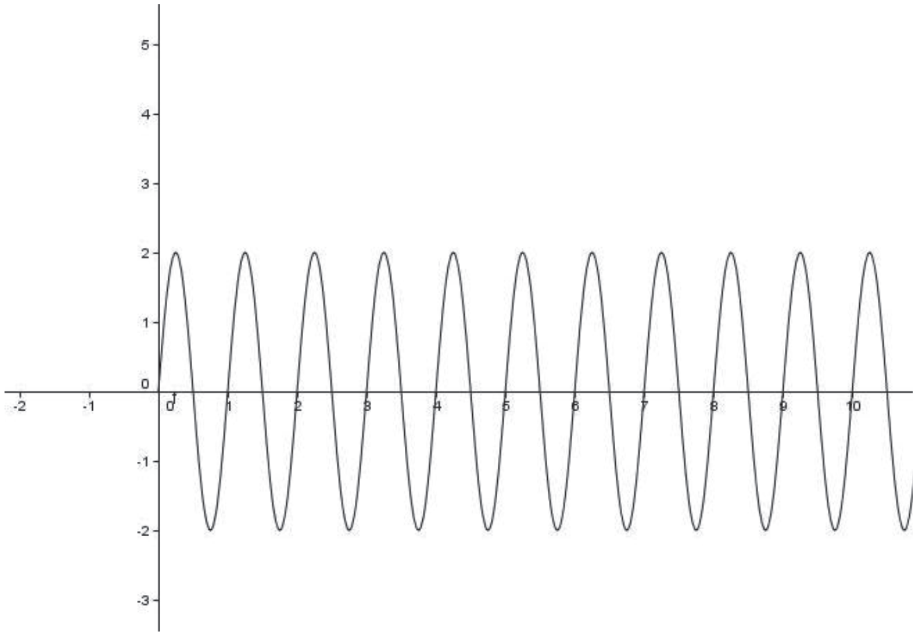


Figura 6: Gráfico da função $y = 2\ sen\ (6{,}28x)$
Fonte: Elaborada pelo Prof. Fabio Linck

Nesta figura, a fase c é zero, em $x = 0$; a amplitude é A=2, o período é o tempo decorrido entre duas cristas, P=1. Observe que 2π é aproximadamente 6,28 . Na nossa simbologia, $1/f$= P segundos e f= 1.

Portanto, vemos uma onda de pressão senoidal com *amplitude 1, frequência 1,* e desvio de *fase c= 0.*

No presente trabalho exploramos apenas o modelo ***y = A sen (bx),*** pois consideramos que as noções de altura e volume de som preexistem nos alunos, enquanto a ideia de fase é desconhecida, de difícil explicação e visualização.

Análises Prévias: ensino e aprendizagem das funções trigonométricas

Esta engenharia foi fundamentada na teoria da aprendizagem significativa e numa tendência atual, mais qualitativa, para o ensino de gráficos com auxilio de noções de modelagem matemática.

Gravina (1990) lembra que muitos alunos, ao estudar funções, ficam presos ao uso de tabelas na construção de gráficos. Isto faz com que percam a ideia mais geral sobre o comportamento da função. Com a tabela, o problema se reduz à marcação de alguns pontos do gráfico, tornando-se um exercício meramente computacional, sem muito raciocínio. A autora também sugere dar ênfase a transformações de gráficos, a partir da mudança de parâmetros, com análise das informações ali contidas.

Hirsch, Weinhold e Nichols (1991) explicam que a tecnologia permite lidar com o conceito de famílias de função, na qual a "função mãe" (no caso $y = sen\ x$) é transformada em outras funções, com mudanças de parâmetros. O uso de *softwares* permite aos estudantes investigar rapidamente muitas funções e seus gráficos e descobrir relações entre eles. Apenas o domínio da ideia de periodicidade é necessário para que o estudante possa visualizar qualquer variação da função seno da forma: $y= A.sen(bx + c)+d$, sendo A, b, c, d parâmetros dados por números reais.

Para os autores, uma aplicação extremamente importante da trigonometria é o uso das variações das funções seno e cosseno para modelar fenômenos que se desenvolvam de forma periódica, com auxílio da tecnologia.

As ondas sonoras correspondentes a notas puras são graficamente visualizadas como curvas senoides, e a família de funções $y = A\ sen(bx+c)$ é um modelo simplificado, adequado para esse fenômeno.

Segundo Menna Barreto (2007), um modelo matemático nada mais é do que uma representação na linguagem da Matemática de um fenômeno não matemático. Modelagem é um processo de tradução de um fenômeno do mundo físico em uma equação ou um sistema de equações. Uma metodologia de ensino que envolve modelos apresenta-se como uma possibilidade de intermediação entre o mundo não matemático e o matemático, e propicia a criação de ambientes de aprendizagem que valorizam as interações com o meio, assim como desenvolve a percepção da utilidade da Matemática.

Análises Prévias: escolha das mídias como recursos didáticos

Neste caso, partimos da análise do fenômeno do som, estabelecemos relação visual entre ondas sonoras e curvas senoides, com o objetivo de estudar a matemática do modelo, função seno.

A engenharia foi construída para dar significado aos gráficos da família de funções seno $y = A\ sen(bx)$, modelo das ondas sonoras.

Para alcançar esse objetivo, utilizamos diferentes mídias como recursos didáticos.

Iniciamos o trabalho com a utilização do vídeo de sensibilização "A Matemática da Música", de autoria do Ministério da Educação[5]. Esse vídeo, de forma geral, apresenta as relações entre a Matemática e os sons. Em seguida usamos o equalizador do *Windows*, para dar uma primeira visualização do som. O programa *Windows Media Player*[6] apresenta as variações, através de um gráfico, da intensidade e da altura dos diferentes sons musicais combinados. O objetivo foi mostrar que: o gráfico mostra uma superposição de ondas; quanto maior a intensidade sonora, maiores são os picos que aparecem na telinha; a composição de sons dos instrumentos diversos resulta na superposição de varias curvas senoides.

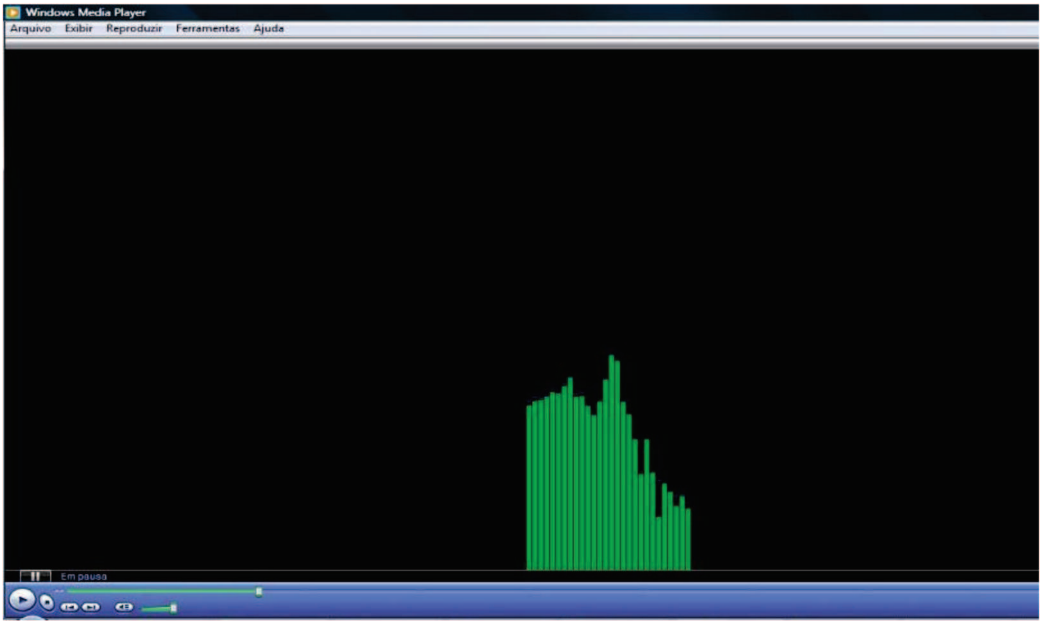


Figura 8: Interface do equalizador enquanto a Nona Sinfonia de *Beethoven* tocava
Fonte: <http://windows.microsoft.com/pt-BR/windows/products/windows-media>. Acesso em 10 ago. 2010.

---

5 Disponível em <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=20816>. Acesso em: 10 ago 2010.

6 Programa de computador que executa arquivos conteúdo multimídia em geral como: MP3, WMA, WAV, MPEG, VCDs, DVDs, etc. Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Media_player>. Acesso em: 10 ago 2010.

Utilizamos o *software* Frequency Generation[7], que cria ondas senoides, a partir da manipulação de botões que determinam a frequência, a amplitude e a fase[8]. O objetivo foi mostrar representações gráficas de notas puras, que são visualizadas como uma só onda. Aumentando a frequência, o som fica mais agudo e o período da onda diminui; da mesma forma, quando diminui a frequência, o som fica mais grave e o período aumenta, pois essas duas grandezas são inversamente proporcionais. Aumentando o volume do som, a amplitude da onda aumenta, diminuindo o volume, a amplitude diminui.

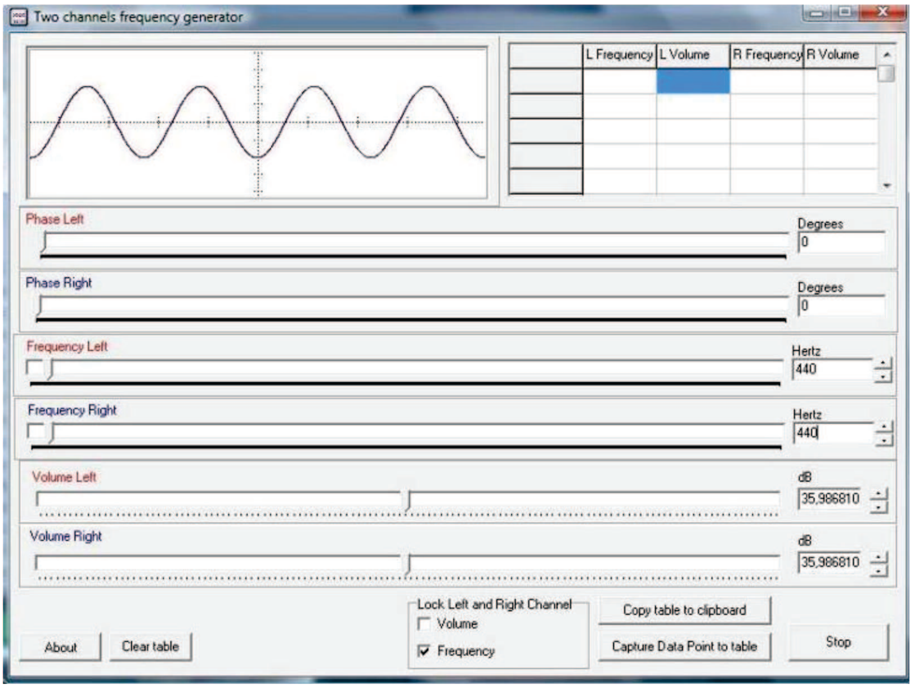


Figura 9: Interface do *Software* com uma frequência de 440 Hz
Fonte:<http://www.downv.com/Windows-software-download/sine-wave>.
Acesso em: 10 ago. 2010

[7] É um software. Existem vários disponíveis em http://www.diffusionsoftware.com/sinegen.php e http://www.downv.com/Windows-software-download/sine-wave. Acesso em 10 ago. 2010.

[8] Não tratei do conceito de fase.

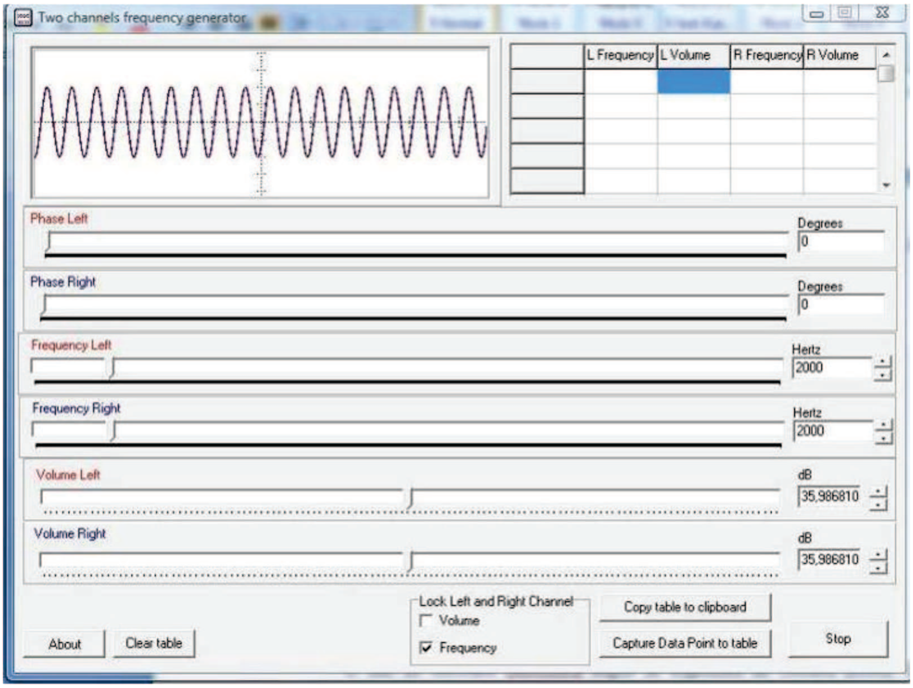


Figura 10: Interface do Software com uma frequência de 2000 Hz
Fonte: <http://www.downv.com/Windows-software-download/sine-wave>.
Acesso em: 10 ago. 2010

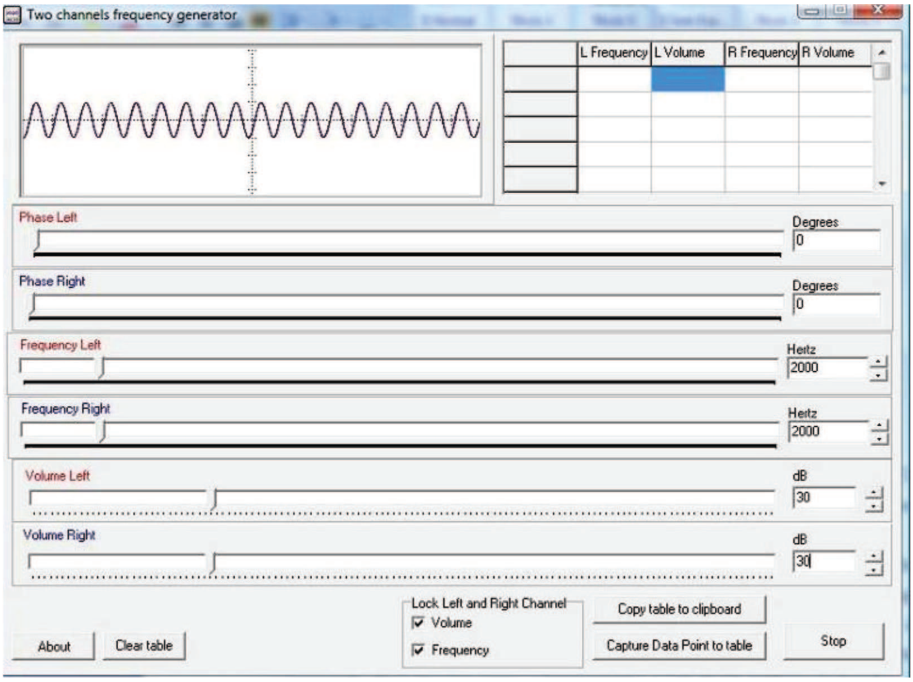


Figura 11: Interface do software com um volume de 30 decibéis (dB)
Fonte: <http://www.downv.com/Windows-software-download/sine-wave>.
Acesso em: 10 ago. 2010

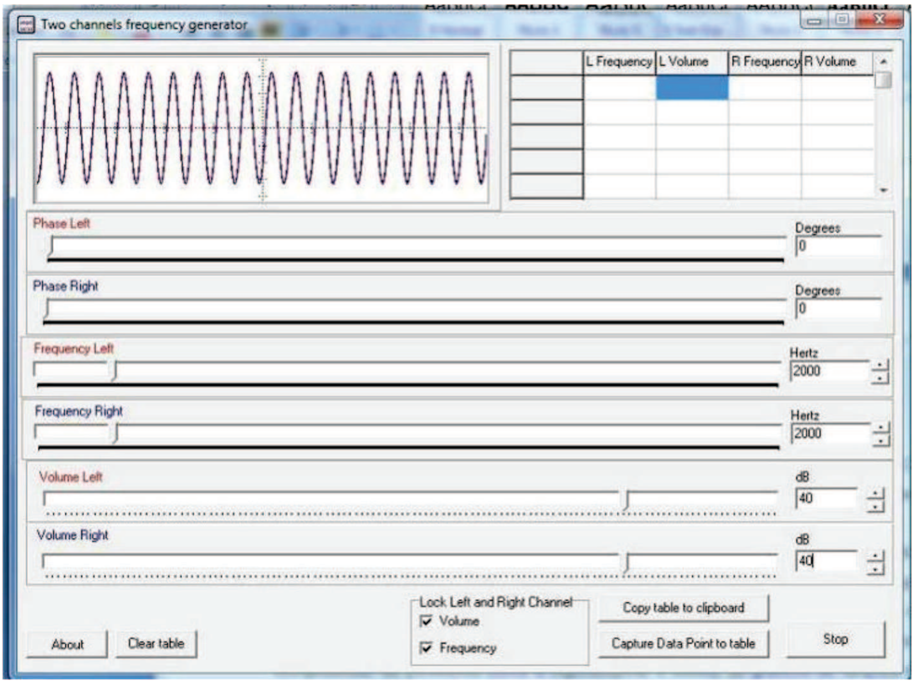


Figura 12: Interface do software com um volume de 40 decibéis (dB)
Fonte: <http://www.downv.com/Windows-software-download/sine-wave>.
Acesso em: 10 ago. 2010

O GeoGebra é um *software* de Matemática educativo. Possibilita a construção de diversas formas geométricas planas e, ainda, contribui na compreensão de conteúdos como a trigonometria, o estudo de gráficos de funções e tópicos de geometria analítica. O uso do Geogebra teve o objetivo de identificar as características da onda sonora com os parâmetros da família de funções $y = Asen\ (bx)$. A análise de diferentes gráficos, obtidos com mudanças de valores de A e b, proporciona a generalização desejada: A corresponde à amplitude; b corresponde ao período e, ao mesmo tempo, à frequência.

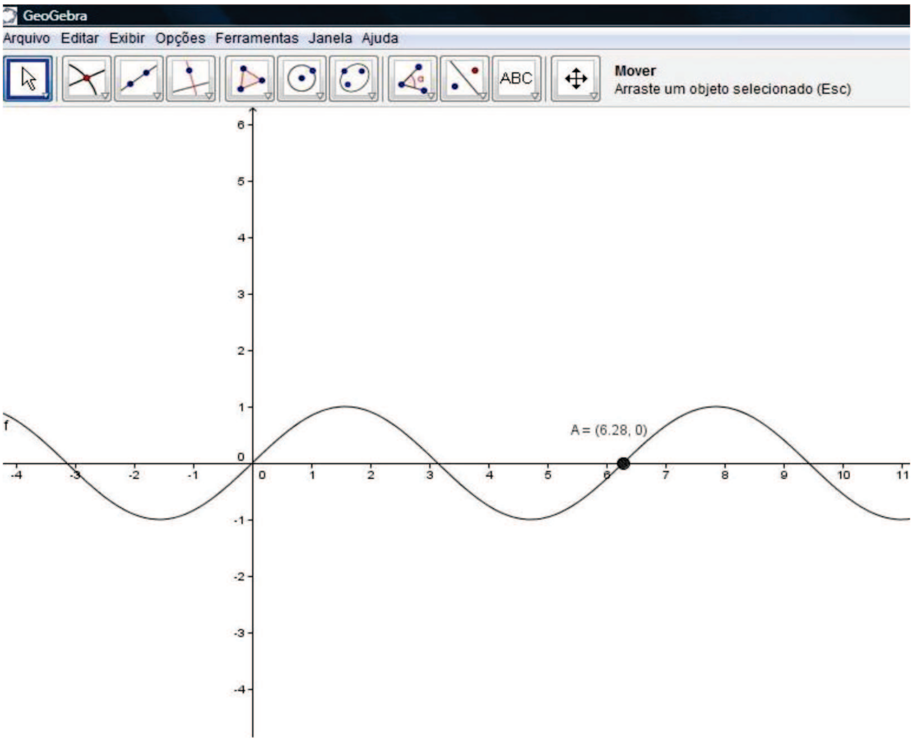


Figura 13: Interface do *software GeoGebra*, representando a função seno
Fonte: <www.geogebra.org> Acesso em: 20 fev. 2011.

Recorremos também ao aplicativo Mathlet para concretizar o conceito de seno.

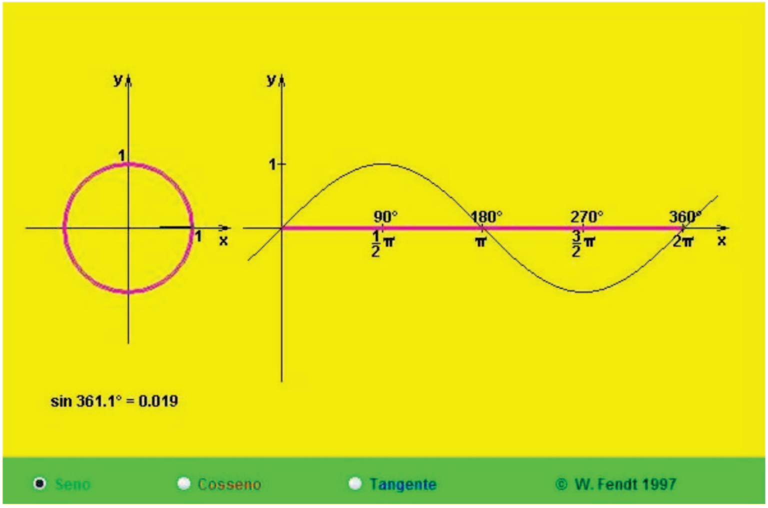


Figura 14: Interface do Aplicativo *Mathlet*
Fonte: < http://www.walter-fendt.de/m14pt/sincostan_pt.htm> Acesso em: 20 fev. 2011

Projeto Pedagógico

A experiência foi desenvolvida em dois momentos diferentes, com alunos da terceira série do Ensino Médio noturno da Escola Estadual de Ensino Médio Dr. Silvio Ribeiro no Município de Santana do Livramento.

Este relato vai focalizar atividades desenvolvidas no segundo momento, fruto da reflexão e da avaliação crítica, com correção de rumos, sobre as primeiras ações.

O objetivo maior da prática foi favorecer a construção dos gráficos da família de funções $y = A\ sen(bx)$ – traçado, variação dos parâmetros e análise do período e da frequência – a partir do estudo de conceitos relativos ao som – onda sonora, representação gráfica da onda sonora, características do som. A ideia-chave foi chegar à função seno entendendo-a como modelo matemático para representar a onda sonora.

Para isso, foram traçados alguns objetivos específicos: trabalhar com alunos que tenham noções sobre Música; discutir o fenômeno do som e analisar a onda sonora; representar graficamente sons musicais, resultantes de superposições de ondas sonoras, usando o *Windows Media Player;* relacionar características da onda sonora, de notas puras, com alterações da sua representação gráfica, usando o *software* Frequency Genetration; dar significado aos gráficos das funções $y = Asen(bx)$, apresentando-as como modelos adequados para as ondas sonoras que representam notas puras; analisar as mudanças dos parâmetros A e b, em construções de curvas senoides no *software* GeoGebra*;* relembrar o círculo trigonométrico e relacionar o período 2π com os períodos observados no Geogebra, representados por números decimais, e com a frequência.

Antes da experiência, foram elaboradas as seguintes hipóteses:

a) Sobre conhecimentos prévios: o conhecimento musical pode contribuir na aprendizagem, mas não é essencial, pois o plano inicia com o estudo do som e das ondas sonoras; assumimos que os alunos tinham noções sobre funções e gráficos, pois estes termos seriam usados normalmente, sem explicações maiores; pressupomos conhecimento do uso do Geogebra.

b) Sobre os objetivos: assumimos que os recursos midiáticos variados facilitariam a aprendizagem significativa.

Seguimos as hipóteses para a elaboração do plano de ensino e para a sequência didática.

Quadro 1: Plano de Ensino

OBJETIVO	AÇÃO	RECURSO
Observar relações entre sons e sua forma gráfica.	Analisar representações gráficas de músicas, utilizando o equalizador. **Material 1**	*Windows* Media Player
Relacionar características da onda sonora com alterações da curva que a representa.	Manipular e responder questões sobre o *software Frequency Generator;* verificar o que acontece quando aumenta ou diminui a frequência sonora, assim como quando aumenta ou diminui o volume do som. **Material 2**	*Software* Frequency Generator
Relacionar a representação gráfica da onda sonora com gráfico da função. $y = Asen\ (bx)$. Analisar gráficos com números decimais e ausência do numero π .	Traçar gráficos das funções $y = Asen\ (bx)$ com o *software GeoGebra.* **Material 3**	*Software* GeoGebra Material escrito
Relacionar os parâmetros dos gráficos das funções $y = Asen\ (bx)$ com as características da onda sonora.	Os alunos irão responder questões, utilizando o *GeoGebra.* **Material 3 – Atividade 1**	*Software* GeoGebra Material escrito
Relembrar a noção de período da função $y = Asen\,(bx)$.	Uso de um aplicativo **Material 3 – Atividade 2**	Mathlet
Encontrar período e frequência das funções $y = sen\ (bx)$. Relacionar período e frequência.	Questões com observação de gráficos. **Material 3 – Atividades 3 e 4**	Software *GeoGebra* Material escrito

Fonte: Elaborado pelos autores

Material 1 – Análise das Imagens do Equalizador
Pra começar nada mais natural que ouvir uma música. A música vai tocar no *Windows Media Player.*
Pergunta: As formas que aparecem, em movimento, no Equalizador, têm relação com a música?
O som conforme mais forte e agudo, ou mais fraco e baixo, interfere nas imagens que o equalizador nos mostra?

Material 2 – Análise do S*oftware* Frequency Generator
Nesse *software* podemos analisar o som e algumas de suas particularidades. Vamos ver como funciona.
O gráfico que vimos durante a música, no equalizador, resulta de uma superposição de sons, é uma composição de diferentes curvas.
Nosso objetivo agora é mostrar que notas musicais puras, sem superposições, resultam na imagem gráfica de uma só curva. Esta curva é uma "senoide".
A senoide é a forma mais simples de representar graficamente uma onda sonora.
As partes mais altas da onda são chamadas cristas e as partes mais baixas são chamadas vales. Estão vendo que a senoide parece estar repetindo sempre a mesma coisa (vai e vem)? Isso que ela está repetindo é um **ciclo**. O número de ciclos repetidos a cada segundo é a **frequência**.
Vamos ver, no *software,* o que acontece se aumentarmos ou diminuirmos a frequência. E o que acontece com o som, quando aumentamos ou diminuímos a frequência?
A unidade da frequência é o hertz (Hz). Comparar a nota Lá (430 Hz) com a nota Mi (320 Hz), e também a nota Dó (256 Hz) com a nota Si (480 Hz).
Vocês sabiam que o ouvido humano distingue vibrações de aproximadamente 20 ciclos por segundo (20 Hz) a 20.000 ciclos por segundo (20.000 Hz ou 20 kHz)? Vamos testar no programa?
Sons abaixo de 20 Hz são infrassons e acima de 20 kHz são ultrassons.
O *período* é o tempo gasto para que um ciclo seja completado. Vamos ver, no *software,* o que acontece quando modificamos o período.
Se o período é aumentado, a frequência diminui (menos ciclos completos em 1 segundo) e o som fica mais **grave**.
Se ao invés disso deixarmos o período menor, a frequência vai ser maior (mais ciclos completos, em 1 segundo) e o som vai ficar mais **agudo**.

Devemos observar que conforme aumentamos o período a frequência diminui e vice-versa, se diminuímos o período a frequência aumenta.
Outra característica das ondas sonoras é a **amplitude**. A amplitude é a altura da onda.
Vamos ver no *software* o que acontece quando modificamos a amplitude.
A amplitude nos dá a intensidade do som, isto é, o volume.
COMENTÁRIOS
A velocidade de propagação das ondas é constante para um determinado meio.
O timbre é a qualidade que nos permite distinguir os sons de mesma altura e de mesma intensidade, mas emitidos por fontes diferentes.
A frequência da onda depende somente da fonte que a emitiu.

Material 3 – Estudo do Som no *software* Geogebra
Modelo matemático é uma simplificação da realidade.
O som pode ser representado por uma onda e essa onda pode ser estudada usando expressões e gráficos da Matemática. Existe uma função matemática, cujo gráfico corresponde a essa curva, é o modelo matemático para o som.
Vamos estudar o *software* GeoGebra. Com ele podemos traçar diferentes gráficos de funções matemáticas, como por exemplo, $y = x$ e $y = x^2$.
Observem que estes gráficos não correspondem à onda sonora.
Vamos traçar o gráfico da função cuja equação é $y = sen\ x$.
Observe a forma desse gráfico.
Encontre o período (em números decimais) e a frequência. Essa curva chama-se senoidal ou sinusoidal.
Essa função matemática é o modelo adequado para as ondas sonoras simples.
Neste *software*, podemos fazer transformações sobre esta curva.

Atividade 1
Questão 1: Como modificar a curva para representar o som mais forte ou mais fraco, isto é, alterando o volume do som?
Questão 2: Como modificar a curva para representar frequência, tanto maior quanto menor, ou seja mudar o tom do som, para mais agudo ou mais grave?

Atividade 2

Vamos utilizar um aplicativo disponível na internet para ver o círculo trigonométrico, o que é período e relacionar o período obtido no gráfico, em números decimais, com o número 2π.

- *Mathlet,* disponível em: <http://www.walter-fendt.de/m14pt/sincostan_pt.htm>. Acesso em: 10 ago. 2010.

Exercícios

Trace o gráfico da função $y = 2\ sen\ (6{,}28x)$.

a) Qual é a amplitude?

b) Qual é o período?

c) Qual é a frequência?

Quais parâmetros podem ser mudados para que a nova curva retrate uma onda sonora com som:

a) mais grave;
b) mais agudo;
c) mais forte;
d) mais forte e mais agudo;
e) mais forte e mais grave;

Atividade 3

Análise do período e da frequência da função $y = sen\ (bx)$.

1) Trace a função $y = sen\ x$. Observe o gráfico. Qual é o período (em números decimais)? Qual é a frequência?

Atividade 4

1) Trace as funções $y = sen(2\pi x)$, $y = sen(4\pi x)$ e $y = sen\ (2/3)\ x$. Encontre o período no gráfico. Encontre a frequência.

2) Analise $y = senx$, $y = sen2x$. Observe que no primeiro caso o período é 2π e no segundo caso o período é a metade do período da função $y = senx$ Justifique.

3) Faça outro teste para $y = sen\ x/2$. Observe que neste caso o período é 4π, o dobro do período da função $y = sen\ x$

Já vimos que frequência é o número de ciclos completos da curva senoide que ocorrem num intervalo de uma unidade. Podemos deduzir que a frequência (f) é o inverso do período (P)? Analise todas as suas respostas, observe os gráficos, e conclua que $f = 1/P$.

Relato da Prática

A primeira prática, com os nove alunos da turma, ocupou 8 horas/aula. Em uma avaliação posterior, detectamos falhas, refizemos o plano e desenvolvemos outra experiência, com dois alunos voluntários, com duração total de 3 horas/aula.

Na segunda experiência, iniciamos falando do objetivo; em seguida conversamos um pouco sobre Música. Os alunos comentaram suas experiências na Banda da Escola e a motivação para participarem dessa experiência.

Em seguida começamos o trabalho com o *Windows Media Player*. Iniciamos com a observação do gráfico para a música *Vai Sacudir, Vai Abalar*, da Banda Cheiro de Amor. Após, trocamos para a *Nona Sinfonia de Beethoven*. Nesse momento, os alunos foram questionados sobre as diferenças entre cada música, e como o gráfico se comportava em cada uma delas, estabelecendo relações entre volume, altura e as formas correspondentes.

A próxima atividade se deu com o *software* Frequency Generation. Com esse programa, trabalhamos com as notas puras e foi possível relacionar a forma de ondas com diferentes sons. Com isso, abordamos o conceito de frequência, dando exemplos de notas musicais com diferentes frequências, conceituando sons graves e sons agudos, período e ciclo da onda. Também foi possível modificar a intensidade sonora, e, portanto, identificar sons mais fortes e mais fracos, abordando assim o conceito de amplitude da onda.

No *software* GeoGebra, os alunos traçaram gráficos variados e identificaram a função que melhor representa a onda sonora, a função seno. Conversamos sobre a noção de modelo matemático. Durante as atividades com o programa, identificaram os parâmetros da função $y= Asen(bx)$, que se relacionam com a frequência e com a intensidade sonora. A partir de uma função dada, os alunos criaram exemplos de funções associada a sons diferentes. Também determinaram o período, a frequência e a amplitude. Utilizamos o aplicativo *Mathlet* para rever os conceitos de círculo trigonométrico e de período e para relacionar o período obtido no gráfico, representado por números decimais, com o número 2π.

Com relação às hipóteses, em seus depoimentos, os alunos afirmaram que o que mais os motivou a participar dessa experiência foi o fato de ela ter envolvido Música.

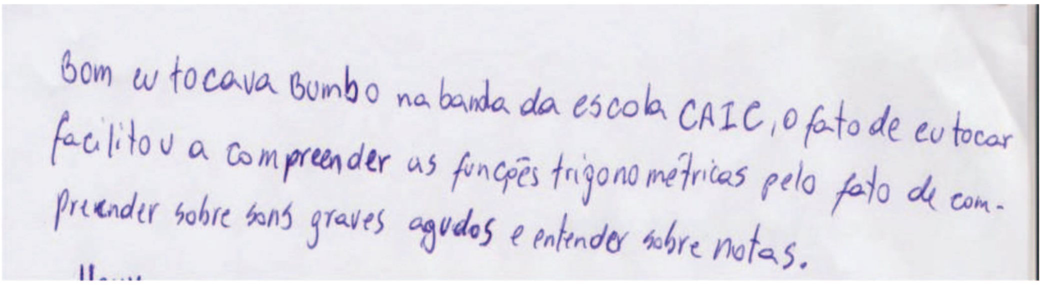

Bom eu tocava bumbo na banda da escola CAIC, o fato de eu tocar
facilitou a compreender as funções trigonométricas pelo fato de com-
preender sobre sons graves agudos e entender sobre notas.

Figura 15: Depoimento de aluno
Fonte: Aluno A, 3º série E.M. (2010)

“Bom eu tocava bumbo na banda da escola CAIC, o fato de eu tocar facilitou a compreender as funções trigonométricas pelo fato de compreender sobre sons graves agudos e entender sobre notas.”

O trabalho com o Windows Media Player contribuiu para estabelecer relações entre o som e sua representação gráfica: sons fortes correspondem a cristas altas; em sons agudos, as cristas ficam mais próximas

O trabalho com o *software* Frequency Generator favoreceu a conclusão de que a frequência (f) é inversamente proporcional ao período (P). Ou seja, aumenta-se a frequência e o período diminui. Com vários exemplos, houve uma generalização e foi adotado este conceito ($f = 1/P$).

Nas construções realizadas no *GeoGebra*, os alunos conseguiram identificar o modelo da curva que representa um som musical, conforme imagem a seguir.

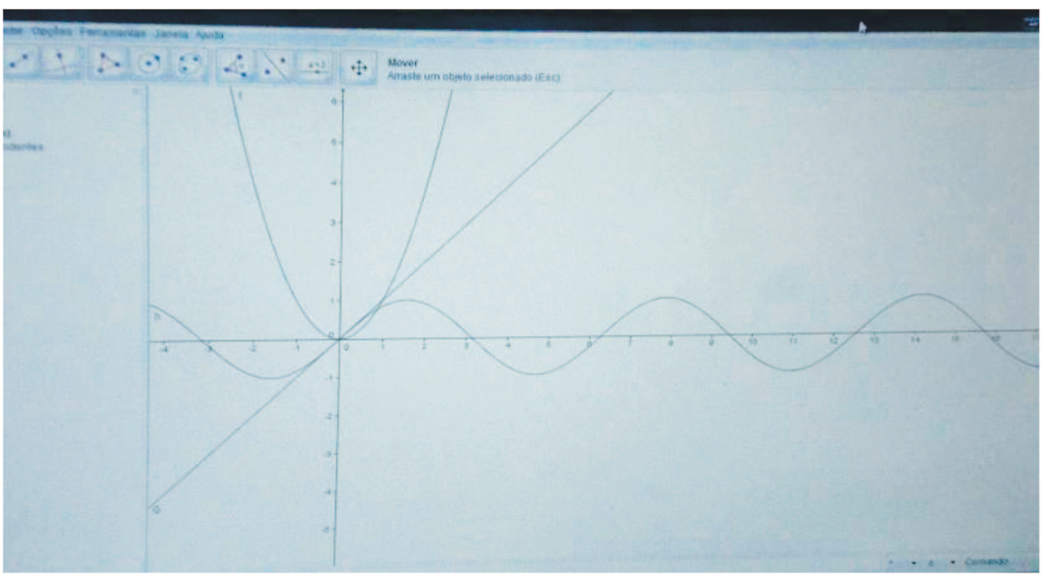


Figura 16: Curvas construídas no *GeoGebra*
Fonte: <www.geogebra.org>. Acesso em: 10 ago. 2010.

Com o Geogebra ocorreu a passagem do mundo dos sons para o mundo matemático. Nesse momento, os alunos trabalharam com o modelo matemático, em um primeiro momento, associando os parâmetros da família $y = Asen(bx)$ com as características da onda sonora, visualizadas na atividade anterior.

Posteriormente, o trabalho ficou restrito à Matemática, utilizando-se os conhecimentos anteriores. Os gráficos obtidos com o *Geogebra* têm o eixo das abscissas marcado de um em um. Construindo gráficos para funções da família $y = Asen(bx)$, os alunos visualizaram períodos em números decimais.

Após traçarem a curva $y= sen2\pi x$, eles visualizaram que o período e a frequência são iguais a 1. Após traçarem a curva $y= sen4x$, visualizaram que o período é "quase 1,5" e que a frequência pode ser obtida na calculadora, "mais ou menos 0,7".

Observamos que os períodos, no Geogebra, são representados por números decimais ou fracionários e o trabalho com o aplicativo foi importante para a formalização da Matemática que já estava sendo usada. Nesse momento, foi visto que o período 6,28 corresponde aproximadamente ao período 2π.

Conclusões e Reflexões sobre a Prática

Este trabalho trouxe sugestões para o ensino das funções trigonométricas relacionando-as com os sons musicais e utilizou diferentes recursos de tecnologia.

Na primeira experiência, iniciamos com um vídeo para introduzir o conteúdo, despertando a curiosidade e motivando os alunos. Esse recurso pôde mostrar cenários desconhecidos por eles. O vídeo, neste caso, além de sensibilizador, também foi educativo, pois aborda vários temas, como a história, a cultura, a Música e a Matemática, possibilitando, assim, um trabalho interdisciplinar e com muitas ilustrações.

Naquele momento, pressupusemos que eram necessários conhecimentos prévios sobre funções trigonométricas, porém, constatamos que esses conhecimentos não existiam. Isso nos fez interromper a experiência e voltar ao hábito tradicional de "dar aulas", usando o quadro, retomando conceitos, tais como o comportamento do seno e do cosseno no círculo trigonométrico. Essa estratégia tornou-se um problema que exigiu mudanças no plano, para uma segunda experiência: foi inserido um aplicativo que teve um efeito muito mais positivo do que a aula tradicional. Esse aplicativo contribuiu para o entendimento do conteúdo trabalhado e possibilitou retomar conteúdos anteriores.

Oliveira (2006) afirma que o aprendizado exige abstração por parte do aluno, mas pode ser facilitado com a utilização de atividades manipulativas. Nessas práticas, todas as atividades foram manipulativas, com o uso dos *softwares* citados anteriormente.

Antes de iniciar a prática, acreditávamos que, por fazer parte do cotidiano dos alunos, a Música pudesse contribuir para a aprendizagem significativa da Matemática, e que além de ser uma estratégia interessante, possibilitaria um ambiente de interação entre o objeto de estudo da aula, o professor e os alunos. Com isso, esperávamos alunos interessados durante as aulas. O interesse realmente aconteceu, mas alguns conceitos básicos sobre o som, que são necessários como âncora deste trabalho, não eram do conhecimento da maioria dos alunos, como, por exemplo, a distinção entre som alto e som forte. A utilização da música e das mídias supriu essa ausência e o gosto pela música certamente contribuiu na interação entre nós.

O estudo de Barbosa (2009) afirma que não basta apenas uma boa sequência de ensino, a interação entre alunos e professores e a participação nas atividades propostas são os principais instrumentos para que se tenha uma aprendizagem significativa em uma perspectiva construtivista. Nesse caso, nas duas experiências, houve participação ativa de todos os alunos, entre si e com o professor. .

Com relação ao planejamento, algumas inclusões poderiam ser realizadas. O vídeo trata de assuntos relacionados a várias áreas do conhecimento e poderia ter sido mais explorado. Percebemos que seria viável questionar os alunos sobre esses temas, de um modo mais amplo, para cultura geral, pois não estão ligados apenas à Matemática.

Acreditamos que também seria possível criar um ambiente de interatividade, com a criação de um *blog* com orientações sobre as atividades que realizamos. O uso de *blogs* não pode ser desprezado pela escola, pois são muitos consultados pelos alunos. Nos *blogs* dos professores, os alunos podem encontrar sugestões de *sites*, programas, leituras e avaliação das atividades e isso os tornaria mais autônomos e facilitaria a interação.

Destacamos aqui possíveis desdobramentos deste trabalho, que se encontra inserido em um projeto que propõe atividades com o uso de diferentes recursos digitais, oferecido para professores de Matemática da Rede Pública de Ensino, no município de Santana do Livramento. Tal projeto consiste na elaboração e implementação de um curso de 40 horas/aula para um público em torno de 14 professores, tendo como tema gerador o ensino de frações, das funções trigonométricas e de suas relações com a Música.

Através de ações com esse foco, pretendemos contribuir para a inserção do uso de recursos tecnológicos na prática de ensino de professores da educação básica.

Referências

BARBOSA, A. A. **Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem Relacionadas às Razões e as Funções Trigonométricas, Visando uma Perspectiva Construtivista. 161 p.** (Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009. Disponível em <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/americo_barbosa.pdf.> Acesso em: 10 ago. 2010.

GRAVINA, M. A. O quanto precisamos de tabelas na construção de gráficos de funções? **Revista do Professor de Matemática**, SBM, n. 17, p. 27-34, 1990.

HIRSCH, C. R.; WEINHOLD, M.; NICHOLS, C. Trigonometry today**. Mathematics Teacher**, v. 84, n. 2, p. 98-106, 1991.

LAZZARINI, V. **Elementos de Acústica**. Disponível em: <http://www.fisica.net/ondulatoria/elementos_de_acustica.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2010

MENNA BARRETO, M. **Matemática e Educação Sexual**: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários. 216 p. (Dissertação de Mestrado no Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto alegre, 2007. Disponível em: <http://143.54.226.61/~vclotilde/>. Acesso em: 10 set. 2010.

MOREIRA, M. A.; CABALLERO, M. C.; RODRÍGUEZ, M. L. **Actas Del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo.** Burgos, España. p. 19-44. 1997.

OLIVEIRA, F. C. . **Dificuldades no Processo Ensino Aprendizagem de Trigonometria por meio de Atividades. 74 p.** 2006. (Dissertação apresentada ao Centro de Ciências Exatas e da Terra). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2006.

PRIOLLI, M. L. **Princípios Básicos da Música para a Juventude**: 2. Vol. Rio de Janeiro: Casa Oliveira de Músicas, 1987.

Capítulo 9

ENSINO DE ÁREAS E VOLUMES: ARTICULAÇÃO DO MUNDO FÍSICO COM OS OBJETOS GEOMÉTRICOS E SUAS REPRESENTAÇÕES

CLEUCI ANDREAZZA VUELMA[1]
VERA CLOTILDE GARCIA[2]
VILMAR TREVISAN[3]

Introdução

Este trabalho traz resultados de uma pesquisa relacionada à prática docente composta por análises do ensino e das dificuldades de aprendizagem de tópicos específicos de geometria, parte do currículo do Ensino Médio, incluindo fundamentação, concepção, implementação, relato e discussão de uma proposta didática. O foco está no ensino da geometria espacial e, em especial, nos problemas que dizem respeito aos cálculos de áreas e de volumes de sólidos geométricos. O objetivo foi contextualizar e dar significado a estes cálculos.

A ideia tem por base as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Aprender Matemática de forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos, traz em si o desenvolvimento

1 cleoandreazza@hotmail.com

2 veraclot@ufrgs.br

3 trevisan@mat.ufrgs.br

> de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar soluções, para se apropriar de linguagens especificas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar [...]. (BRASIL, 2002, p. 153).

O tema "Áreas e Volumes" faz parte do currículo do Ensino Médio e é um dos poucos conteúdos de geometria que é tratado na escola, usualmente, de um modo bastante superficial, com base em uma lista de fórmulas, formas e denominações, dada e sem significado. A aprendizagem da geometria, pelos alunos do Ensino Médio, causa inquietação, pois eles não têm conhecimentos anteriores, que deveriam vir do nível fundamental, para ancorar os novos conhecimentos; estão presos às fórmulas; esqueceram os conceitos geométricos que foram ensinados. Além disso, o professor se torna um mero repetidor de uma prática tradicional, baseada em exposições feitas no quadro, na sequência definição ou fórmula, exemplo, exercício. É grande a importância da geometria, mas há um aparente descaso pelo ensino.

Esta pesquisa é pragmática, utilitária. O objetivo é refletir sobre o ensino e a aprendizagem de geometria para desenvolver uma experiência didática, reduzida no seu foco – Áreas e Volumes – mas com potencial para trazer mudanças positivas. Foi inspirada nas etapas da Engenharia Didática (ARTIGUE , 1996): parte de análises prévias que sugerem a necessidade de investir na aprendizagem significativa do tema, o que pode ser obtido na busca de relações entre as figuras geométricas planas e espaciais e os objetos encontrados no cotidiano, que podem ser manipulados. A proposta tem auxílio da tecnologia, partindo de um vídeo, e propõe atividades de análise, desconstrução e construção de embalagens, com diferentes formatos e problemas.

A prática foi desenvolvida com alunos da terceira série do Ensino Médio, em um colégio da zona rural do município de Nova Araçá, Rio Grande do Sul, em uma turma com 19 alunos, da faixa etária entre 16 e 18 anos. São alunos esforçados e ativos, no entanto, por serem trabalhadores que estudam à noite apresentam grandes dificuldades de aprendizagem, principalmente devido à falta de tempo para se dedicarem a tarefas extraclasse.

Análises Prévias: dificuldades de aprendizagem

Refletindo sobre a própria prática, percebemos que não há compreensão quando o aluno calcula áreas, na geometria plana, o que vai se refletir, mais tarde, no cálculo de volumes, na geometria espacial.

Essa constatação pôde ser verificada quando foram analisadas questões propostas a alunos do nível médio, que já haviam estudado figuras geométricas planas no início do ano e tinham consigo uma lista de figuras e fórmulas para cálculos de áreas, previamente elaborada.

É possível observar, como exemplo, a questão 1:

Determine a área da Figura 1 por dois processos diferentes:

a) Usando decomposição da figura (paralelogramo e triângulo).

b) Usando a fórmula da área do trapézio.

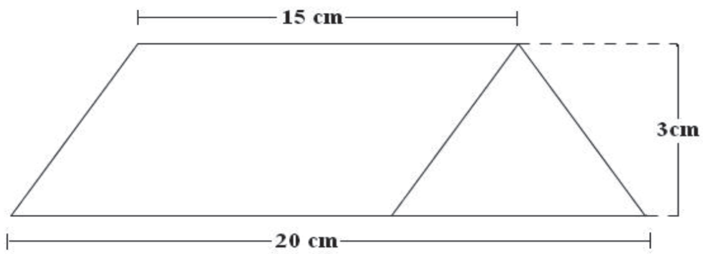


Figura 1: Trapézio decomposto em paralelogramo e retângulo
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Cleuci Vuelma

Dos 17 alunos que responderam ao questionário, apenas oito deles conseguiram decompor a figura e calcular sua área, na questão (a). O problema maior foi visualizar qual o tipo de triângulo e analisar qual a melhor fórmula a ser aplicada. A dúvida era se o triângulo era equilátero ou escaleno. O primeiro impulso dos alunos foi dizer que o triângulo era equilátero, pois todos os lados eram aparentemente iguais. Com essa interpretação, recorreram ao formulário e utilizaram a fórmula para área do triangulo equilátero, $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Alguns não aceitaram esta interpretação e usaram a régua para medir os lados, mostrando que eram medidas diferentes.

Fixados na fórmula do triângulo equilátero, dada em função da medida do lado, os alunos ficaram confusos e não conseguiram perceber que, para qualquer triângulo, basta ter base e altura para calcular a área. Um aluno respondeu sobre suas dificuldades:

"A compreensão do triângulo, pois existem várias fórmulas e vários tipos de triângulos, onde pode-se confundir".

Os alunos que calcularam a área corretamente o fizeram porque reconheceram, na lista, a figura do paralelogramo e a figura do triângulo. Para calcular a área do paralelogramo, os alunos retiraram os valores apresentados na figura dada. Já para o cálculo da área do triângulo, os alunos visualizaram que a base deveria medir cinco e a medida da altura era dada.

Os alunos acertaram a questão (b), localizando a figura do trapézio e a fórmula em sua lista.

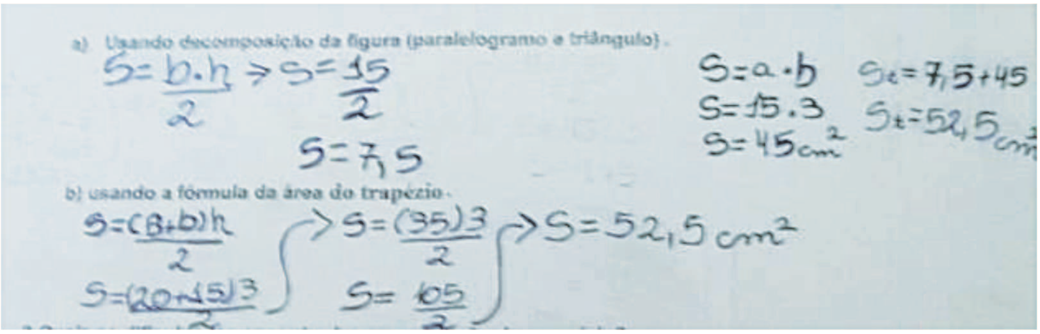


Figura 2: Solução correta de um aluno
Fonte: Aluno A, 3ª série E.M. (2010)

Percebemos que os alunos possuem poucos conhecimentos geométricos: reconhecem figuras e aplicam fórmulas com dificuldades, tanto para identificar as mais adequadas aos problemas, quanto para reconhecer, nas figuras, as medidas que têm importância para o cálculo.

Os cálculos de áreas são feitos com base numa lista de fórmulas dadas, não deduzidas, nem explicadas, e sobre figuras prototípicas. Por exemplo, no teste aplicado, ao reconhecer um trapézio, os alunos buscam a fórmula e aplicam, consultando o formulário previamente elaborado – com figura, nome da figura e correspondente fórmula da área. Com esse hábito, não conseguem visualizar figuras não pertencentes à lista, nem aplicar as fórmulas em novas situações, nem fazer relações geométricas com a realidade que os cerca, pois, em geral, no mundo, os objetos não estão na posição estática com que são representados na lista ou nos livros didáticos. Por isso, quando se trata do cálculo de volume, na geometria espacial, o aluno não consegue visualizar as diferentes figuras planas encontradas nos desenhos (estão em perspectiva, como identificá-las?) e tampouco selecionar a fórmula correta a ser aplicada. Os alunos parecem "viciados" na lista, sem qualquer autonomia na resolução dos exercícios.

O psicólogo norte-americano David Ausubel define "aprendizagem significativa" como sendo aquela que ocorre à medida que o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento existentes; os conceitos ou fórmulas da Matemática adquirem significado a partir da relação com conhecimentos prévios. Ao contrário, a aprendizagem torna-se mecânica ou repetitiva; sem ligar-se a outros conhecimentos, o novo passa a ser armazenado isoladamente ou por meio de associações arbitrárias na estrutura cognitiva (PELIZZARI *et al.*, 2002).

Neste trabalho, buscamos desencadear um processo de aprendizagem significativa dos conceitos e dos cálculos de volumes de sólidos geométricos, percebendo que as dificuldades iniciam no reconhecimento e no cálculo das áreas das figuras planas que constituem suas faces. Para buscar significados, ancoramos esses conhecimentos matemáticos em noções facilmente desenvolvidas sobre objetos do cotidiano, com a manipulação e análise de embalagens encontradas no comércio.

De acordo com Freire (1996, p. 23), "Ensinar não é transmitir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua produção ou a sua construção". No caso dessa pesquisa, a proposta consiste em sugerir novas possibilidades pedagógicas, para melhorar o processo de ensino e aprendizagem de Geometria.

Análises Prévias: o ensino usual

Iniciamos a análise do ensino usual de geometria, com foco em áreas e volumes, a partir do exame de três coleções de livros didáticos para o Ensino Médio amplamente utilizados pelos professores da rede pública estadual.

No livro didático *Matemática Completa*, volume único (GIOVANI; GIOVANI; e BONJORNO, 2002), no Capítulo "Áreas das figuras planas", os autores descrevem por meio de desenhos o conceito de áreas. Dando continuidade, eles deduzem as fórmulas das regiões poligonais indicando exercícios para que o aluno desenvolva por meio de repetição de dados. Para introduzir a discussão sobre sólidos geométricos, eles definem a relação de Euler e sugerem poucas atividades. Paralelamente, a apresentação do conteúdo geometria espacial segue os mesmos passos do que o estudo de áreas.

Revisamos a exposição do conteúdo "Áreas: medidas de superfícies" do livro didático "Matemática volume único" (DANTE, 2008), depois de uma breve introdução, o autor propõe uma noção intuitiva de áreas. Antes de partir para o estudo das fórmulas propriamente ditas, destaca a importância da compreensão dos lados e ângulos das figuras geométricas. Na exposição do conteúdo "Poliedros: prismas e pirâmides", o autor destaca o estudo dos vértices, arestas e faces dos sólidos espaciais, partindo para planificação dos mesmos. Em seguida propõe o cálculo da área da superfície e volume dos sólidos.

Já analisando o livro didático "Matemática série novo Ensino Médio", (MARCONDES; GENTIL; e SÉRGIO, 2002), verificamos que os autores tratam das principais fórmulas para o cálculo de áreas de regiões poligonais. Quanto ao estudo da geometria espacial, destacam os elementos dos sólidos (base, altura, arestas, faces) através de exposições em figuras e, em seguida, apresentam as fórmulas, raramente fazendo alguma demonstração. Finalmente, propõem uma lista de atividades que não são similares àquela feitas nos exemplos.

Percebemos que, nos livros didáticos, o cálculo das áreas de figuras poligonais é bem desenvolvido, as fórmulas são deduzidas e explicadas, mas, aparentemente, na transposição para a sala de aula, o ensino se resume à utilização de uma lista dada, como se o professor não esperasse, do aluno, compreensão, mas sim memorização. Também, observamos que o assunto colocado em primeiro lugar, nos livros, é o estudo de áreas de figuras geométricas bidimensionais, para depois tratar dos objetos tridimensionais.

Na vida, a criança primeiramente convive com o que é geral, relações espaciais, para depois interessar-se pelas noções de geometria plana. Primeiramente, a criança faz explorações sensoriais para progressivamente construir as formas de representação. A visualização e o raciocínio visual podem ser uma âncora para o pensamento matemático e também a primeira oportunidade para as crianças participarem na atividade matemática. No entanto, na escola, parte-se do específico para o geral, ao iniciar com a geometria plana, antes da espacial.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no

Ensino Fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, 1998). Os PCNs sugerem que, em sala de aula, o espaço e a forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, que é tridimensional, de modo que o aluno possa estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. É preciso lembrar sempre a articulação apropriada entre três domínios: o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas.

Para completar as análises, buscamos maior fundamentação, estudando a dissertação de Martins (2003), que forneceu muitos subsídios, pois traz um amplo material sobre o assunto. A autora trata do ensino-aprendizagem da Geometria utilizando caleidoscópios, sólidos geométricos, jogos e *softwares* educacionais, no nível fundamental. Propõe o reconhecimento dos polígonos via material concreto e, para isso, parte da utilização de caleidoscópios, advertindo para a Matemática existente nos mosaicos ornamentais e nas pavimentações do plano e do espaço.

Martins (2003) destaca que sua proposta alinha-se com objetivos propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática no Ensino Fundamental, favorecendo a integração entre Matemática e Arte, o desenvolvimento da percepção espacial e da visualização. Para a autora, as dificuldades dos alunos no estudo do conteúdo partem do abandono da Geometria por parte dos professores a partir da promulgação da Lei nº 5.692/71, que concedia liberdade às escolas quanto à escolha dos programas das diversas disciplinas. Diante disso, parece que os professores optaram por não ensinar Geometria, ou porque não possuem conhecimento suficiente ou porque os conteúdos se encontram, em geral, no final dos livros didáticos adotados, fazendo com que o professor se apoie na "falta de tempo" para não ensiná-la. Programas e propostas curriculares inábeis, tanto em nível de formação de professores como de alunos, também compõem este cenário.

Nas suas considerações finais, a autora relata que o trabalho com caleidoscópios, poliedros e *softwares* educacionais (Cabri-Géomètre II e Geometricks) proporcionou interessantes atividades educacionais. Relata que houve aprendizagem de muitos conceitos envolvidos nas construções geométricas (como ponto médio, perpendicular, paralela, bissetriz, entre outros) devido ao fato de as construções serem realizadas tanto com régua e compasso, como em *softwares* de geometria dinâmica. Seus alunos demonstraram que desenvolveram: percepção espacial; senso estético, no trabalho de coloração de padrões e das planificações; e criatividade, na construção e obtenção das bases caleidoscópicas.

Sabemos que a pedagogia tradicional ainda é prevalecente nas escolas, cabe ao professor adquirir uma postura pedagógica no sentido de inovação. Parece que, muitas vezes, o ensino tradicional da geometria limita-se a apresentações feitas pelo professor e não inclui a construção de conceitos. Nesse contexto de aprendizagem mecânica, o aluno memoriza leis e regras que facilmente são esquecidas depois da avaliação. As ideias de Martins (2003) auxiliaram nesta pesquisa, já que abrem possibilidades para ensinar de forma diferenciada.

A Engenharia Didática

A expressão "engenharia didática" abrange o referencial de pesquisa do professor e a proposta didática que é produzida com auxílio deste referencial. Neste caso, desenvolvemos uma engenharia para contribuir com o processo de ensino-aprendizagem de Áreas e Volumes, na geometria espacial, com alunos do nível médio.

O objetivo maior da proposta foi minimizar suas dificuldades na aprendizagem do cálculo de áreas laterais, áreas totais e de volumes de sólidos geométricos, proporcionando a visualização de objetos concretos, relacionando-os com sólidos geométricos e identificando suas faces como figuras geométricas planas. Utilizando diferentes recursos – vídeo de sensibilização, coleta de embalagens, análise deste material – foram criadas atividades para aproximar os conceitos matemáticos da realidade do cotidiano, com uma abordagem de ensino alternativa. Nesse processo, procurou-se seguir as sugestões dos PCNs (BRASIL, 1998), mantendo sempre a articulação entre os três domínios da Geometria: o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas.

A parte da engenharia que envolve elaboração de hipóteses e do plano de ensino foi aperfeiçoada, a partir de reflexões desenvolvidas durante e após a prática. Somente com a prática foi possível perceber que havia hipóteses implícitas que não tinham sido previamente pensadas, e que outros objetivos e ações poderiam ter sido elaborados para auxiliar na aprendizagem.

Incluímos, neste texto, o resultado dessas mudanças, para oferecer um material mais completo ao leitor/professor.

Para orientar o projeto pedagógico e a execução da pesquisa partimos de hipóteses prévias que poderiam ser confirmadas ou refutadas ao final das atividades.

Quadro 1: Hipóteses prévias

Primeira hipótese **Quanto a conhecimentos prévios -** Pressupõe-se que os discentes tenham conhecimentos limitados da Geometria Plana e Espacial, reconhecendo e calculando áreas apenas de figuras básicas: quadrado, retângulo e triângulo; pressupõe-se que, para os cálculos de áreas e volumes, recorram sempre a um formulário previamente elaborado. Pressupõe-se que consigam realizar a atividade prática proposta pelo vídeo de sensibilização, reconhecendo e denominando corretamente as figuras geométricas que surgem. Pressupõe-se que os discentes lembrem o sistema métrico decimal.
Segunda hipótese **Quanto a desempenho -** Pressupõe-se que consigam realizar a atividade prática proposta pelo vídeo de sensibilização, reconhecendo e denominando corretamente as figuras geométricas que surgem. Pressupõe-se que os discentes realizem as tarefas com entusiasmo e interesse.
Terceira hipótese **Quanto às atividades e seus objetivos -** Pressupõe-se que as atividades favoreçam a articulação entre o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas. Pressupõe-se que a manipulação dos sólidos favoreça a visualização e a identificação dos elementos dos sólidos geométricos e, consequentemente, facilite o entendimento do cálculo de áreas e volumes.
Quarta hipótese **Quanto a conhecimentos a serem adquiridos -** Pressupõe-se que os discentes, no decorrer das atividades, consigam calcular áreas laterais e totais, e volumes das embalagens estudadas, com aprendizagem significativa. Pressupõe-se que os discentes, com as atividades, adquiram a linguagem matemática correta para designar figuras geométricas planas e espaciais.

Fonte: Elaborado pelos autores

Proposta Didática

Elaboramos um plano de ensino organizado em módulos, com o intuito de tornar os conceitos de áreas e volumes dos sólidos geométricos mais significativos para os alunos. Apresentamos aqui o plano já modificado, após as reflexões posteriores à ação didática, incluindo objetivos que estavam implícitos e atividades que deveriam ter sido incluídas. No relato que segue, esclarecemos esta questão: o que realmente foi feito e o que poderia ser feito, naquele momento, em uma avaliação crítica da prática.

Quadro 2: Plano de ensino

Módulo/datas	Objetivos	Atividades	Estratégias e recursos de ensino
Módulo I 10/06/10	Introduzir a discussão sobre geometria e motivar para os estudos. Rever a nomenclatura de formas geométricas e questionar sobre para quais dessas formas saberiam efetuar os cálculos de áreas. Rever os conceitos de geometria plana – vértices, lados, figuras planas – e trabalhar a habilidade de representação geométrica.	Assistir ao vídeo e realizar a atividade prática proposta. Discutir questões propostas, sobre o vídeo. Realizar a construção proposta no vídeo com quadrados e triângulos.	Vídeo “Nas Malhas da Geometria”. Questões elaboradas para acompanhamento do vídeo. Cartolina, régua, lápis coloridos.
Módulo II 15/06/10	Estabelecer relações entre formas encontradas no cotidiano (embalagens) com formas geométricas planas e espaciais, identificando diferentes polígonos e diferentes sólidos.	Visita ao supermercado. Visualização, análise e mesa redonda para debate.	Câmera fotográfica.

Módulo III 17/06/10	Articular o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas. Identificar formas geométricas nos objetos do cotidiano. Calcular a área lateral, a área total e o volume de um prisma.	Determinar a área lateral, a área total e o volume de uma caixa/embalagem em forma de prisma quadrangular ou retangular, utilizando as medidas das arestas da caixa/embalagem obtidas com régua escolar.	Caixas Embalagens Régua. Medições e análise de dados.
Módulo IV 22/06/10	Calcular o volume e a área em situações-problema Dar significado às fórmulas de área e volume, presentes no formulário.	Resolução de exercícios. Deduzir fórmulas das áreas.	Questões elaboradas como forma de fixação dos conteúdos.
Módulo V 24/06/10	Calcular volume e área de um cilindro. Percepção do significado dos elementos e medidas que participam nas fórmulas de área e volume do prisma e do cilindro. Mostrar que o volume não é uma função da área lateral.	Confeccionar em papel cartolina um cilindro e um prisma com mesma área lateral, mas com volumes diferentes. Calcular e comparar os volumes.	Papel cartolina, régua, compasso, cola. Discussão e análise de resultados.
Módulo VI 29/06/10	Verificar a aquisição da linguagem matemática, na denominação de objetos geométricos.	Realizar testes de verificação.	Teste

Fonte: Elaborado pelos autores

Relato da Prática

Os trabalhos foram realizados com 19 alunos, sendo que em todas as aulas houve 100% de frequência. O Módulo I foi preparado para introduzir a discussão sobre o assunto e motivar para os estudos. Os alunos assistiram ao vídeo "Nas malhas da Geometria" – TV Escola, Programa 5, da Série Mão na Forma[4].

O vídeo inicia estabelecendo relações entre o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas. Professores de Arte comentam a

[4] Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=JVA5ru9yehM>. Acesso em: 10 jun 2010.

tentativa de artistas na busca de representar figuras tridimensionais, em superfícies bidimensionais. Citam artistas que tentam representar o mundo com formas geométricas e outros que tentam recriar a natureza a partir das formas geométricas. Ao final, o vídeo propõe uma tarefa prática. Trata-se de construir uma malha, numa folha de papel, utilizando apenas quadrados e triângulos equiláteros, com algumas restrições: os quadrados só podem ser unidos pelos vértices, não pelos lados; os triângulos podem ser unidos pelos lados e vértices. Ao final, é preciso marcar os centros de todas as figuras da malha, unindo-os por segmentos de reta que cruzam os lados, mas devem evitar os vértices. Essa construção composta foi relacionada com as rendas e com o trabalho das rendeiras.

O vídeo foi interessante para relembrar os conceitos de figura plana e espacial e de seus elementos lados e vértices; dar ideias sobre imagens bidimensionais e tridimensionais, e para favorecer o trabalho de articulação do espaço físico, com as figuras geométricas e suas representações gráficas.

Após assistirem ao vídeo, os alunos responderam questões, com objetivo de rever a nomenclatura de formas geométricas e questionar sobre quais dessas formas saberiam efetuar os cálculos de áreas.

Questão 1 – Quais as figuras geométricas que você visualiza no desenho?

Os alunos responderam que as figuras geométricas representavam quadrados, hexágonos, triângulos e alguns reconheceram círculos.

Discutindo as respostas, conseguimos trazer à tona algumas noções sobre as figuras geométricas planas básicas, relembrar a nomenclatura e, também, organizar as ideias para análises de figuras, identificando número de vértices e lados.

Questão 2 – Identifique formas geométricas que aparecem no seu dia a dia

Todos os prédios das cidades grandes tem formato geométrico, e a maioria são retangulares. No filme citaram um couve-flor, mas eu não vejo uma forma para ele. A minha casa, a escola, a quadra de futebol...quadrados, retângulos, triângulos, mas é difícil ver formatos diferentes. (Resposta Aluno B).

Estamos cercados principalmente de quadrados e retângulos. Na nossa escola a maioria das formas representa retângulos. Temos um canteiro na escola que tem seis lados...tem fórmula para ele? Se olhar a "bundinha do corretivo" vejo um círculo, se *olhar o quadro vejo novamente um retângulo, ou seja, em tudo existe geometria.* (Resposta Aluno C).

Olha professora no nosso mundo estamos cercados de geometria, como foi visto no vídeo, o que fica mais difícil é identificar os diferentes triângulos. Por exemplo, é fácil saber que uma pipa representa um losango, e que esse losango dividido representa dois triângulos, o difícil é achar qual tipo eles representam. (Resposta Aluno D).

As respostas mostram como, mesmo tratando-se de alunos de terceiro ano do Ensino Médio, os quadrados, retângulos e triângulos ocupam parte central das ideias sobre Geometria, por serem de fácil visualização e parte integrante das coisas do mundo. O Aluno A consegue verbalizar a articulação entre o mundo físico e as formas geométricas e suas representações, como constam no vídeo, mas reconhece apenas quadrados, retângulos e triângulos. A aluna B reconhece um hexágono, mas não conhece sua denominação e tampouco uma maneira para calcular sua área. Fixada no seu formulário, pergunta: "tem fórmula para ele?". A aluna C mostra uma preocupação com os triângulos e repete o que já foi visto, antes, no cálculo da área. No formulário para cálculo de áreas, encontram-se figuras e fórmulas diferentes para triângulos equiláteros, retângulos, acutângulos e obtusângulos. Não há ênfase especial para a fórmula geral, envolvendo base e altura e, quando esta relação é lembrada, "base" é o "lado que está embaixo". Uma lista, construída deste modo, traz muita confusão no tratamento dos triângulos, que é uma figura fundamental, na Geometria.

Questão 3 – Você sabe descrever com suas palavras o que são figuras planas e figuras espaciais?

Respostas:

(1) *Figuras planas são aquelas que só conseguimos enxergar um lado, figuras espaciais são em 3D, com volume, onde temos todos os lados.*

(2) *Figuras planas são aquelas achatadas, que a senhora consegue desenhar no quadro, figuras espaciais são aquelas que a gente consegue pegar na mão.*

(3) *Um exemplo de figura plana é a pedra da rua, o lado que aparece. Acho que espacial seria a parte de baixo da pedra, mas fica difícil entender.*

(4) *Eu sei bem das planas, são os quadrados, triângulos e os retângulos, fico na dúvida sobre o círculo, pois se parece com a circunferência.*

As respostas mostram noções de figuras bidimensionais e tridimensionais; de figuras restritas a um plano (o quadro); de relação entre sólido geométrico (pedra da rua) e sua face plana (figura plana é a pedra da rua, o lado que aparece); e, novamente, a ênfase nos quadrados, triângulos e os retângulos, a tal ponto que restam dúvidas sobre a espacialidade de figuras diferentes. O aluno da resposta 4 parece querer dizer: talvez tudo o que não for quadrado, triângulo ou retângulo, possa ser espacial, pois estas são as únicas figuras planas que eu conheço.

Questão 4 – Das figuras abaixo, assinale com um X as que você tem certeza que conhece:

( ) Quadrado ( ) Circunferência ( ) Pentágono
( ) Retângulo ( ) Hexágono ( ) Triângulo
( ) Trapézio ( ) Losango

Aqui, novamente, repetem-se a ênfase no trio quadrado, triângulo, retângulo e, o reconhecimento da circunferência, figuras reconhecidas por todos os alunos. Apenas quatro marcaram o trapézio e o losango. Surpreendentemente, todos marcaram também hexágono e pentágono.

Em uma reflexão posterior, concluímos que as respostas a essa questão não permitem conclusões. Analisando os dados obtidos, ficamos na dúvida se algumas opções não teriam sido marcadas aleatoriamente. Na ocasião, deveria ter sido solicitado a todos que desenhassem as figuras conhecidas, assim se completaria o quadro a respeito das relações entre o mundo físico, as figuras geométricas e suas representações gráficas. Sem esta solicitação, não podemos afirmar que as marcações demonstraram conhecimento.

Questão 5 – Ainda com relação às figuras acima, o que você sabe calcular sobre elas:

( ) Áreas ( ) Volume

Embora percebamos que, dentre as figuras geométricas dadas na questão 4, não seria possível calcular o volume, pois são todas planas, decidimos propor essa nova questão para ver se os alunos dariam significado ao termo "volume". Alguns alunos, corretamente, escreveram que somente sabiam calcular a área, porém a maioria respondeu que conseguia calcular áreas e volumes e escreveu um comentário, explicando que bastaria ter as fórmulas de volume destas figuras adicionadas à sua lista.

Essas respostas confirmam hipóteses sobre conhecimentos anteriores. Os alunos do Ensino Médio, quando solicitados a calcular volumes e áreas de sólidos geométricos, encontram dificuldades porque não obtiveram aprendizagem significativa da geometria plana, em especial, das figuras geométricas planas e do cálculo de áreas destas figuras. Os professores esperam que, sem este conhecimento prévio, os alunos desenvolvam habilidades na geometria espacial, baseados num formulário dado. Existe a necessidade de se criarem atividades de ensino, no nível médio, que proporcionem aos alunos oportunidades para rever a lista de fórmulas, dando significado ao que lá está e também ao que "não" está, articulando os conceitos da geometria espacial com os da geometria plana.

Este é um dos nossos objetivos: dar significado ao cálculo de áreas e volumes – com reconhecimento das figuras, de seus elementos e das medidas que participam nos cálculos - e mostrar que as figuras planas permitem o cálculo da área, enquanto o volume refere-se a figuras espaciais.

Posteriormente à discussão das questões, foi desenvolvida a atividade prática proposta no vídeo – construção da malha – com o objetivo de rever os conceitos de geometria plana – vértices, lados, figuras planas – e de trabalhar a habilidade de representação geométrica.

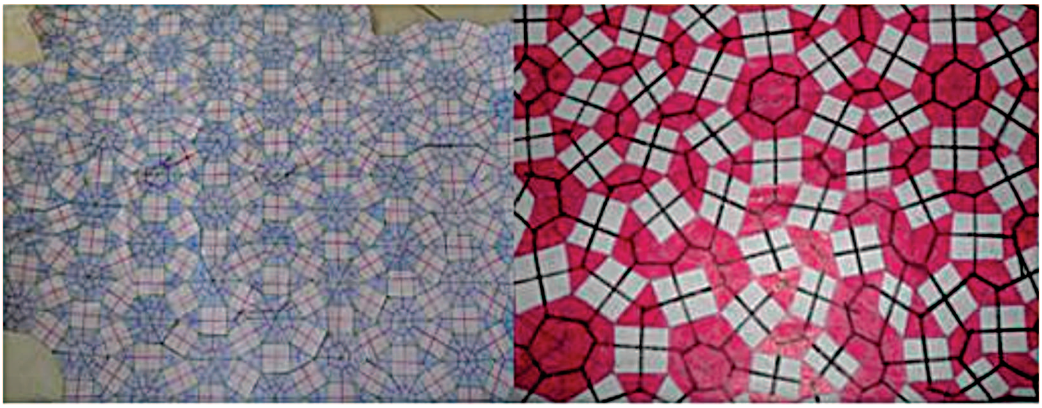


Figura 3: Malha formada por triângulos e quadrados, realizada por alunos
Fonte: Prof[a]. Cleuci Vuelma

Na malha, foi possível visualizar e nomear, para além dos triângulos e quadrados, hexágonos e losangos, ampliando o rol de figuras geométricas conhecidas.

No Módulo II, os alunos foram convidados a realizar visitas a um supermercado da cidade a fim de observar as formas das embalagens, manuseá-las, ler os rótulos, etc. O objetivo foi estabelecer relações entre formas encontradas no cotidiano com formas geométricas planas e espaciais, identificando diferentes polígonos e diferentes sólidos.

Solicitamos que fizessem anotações quanto ao seu peso, formato, tamanho, material usado para confecção e medidas. No supermercado, os alunos registraram com câmera fotográfica as embalagens analisadas e anotaram algumas considerações.

Já em sala de aula, foi proposto um debate no grande grupo e constatou-se que:

- As caixas de sabão em pó apresentam forma de paralelepípedo retângulo, com volumes iguais.
- A embalagem da batata Elma Chips é em forma de cilindro e possui duas faces circulares.
- As embalagens de óleo se apresentam com base circular, quadrada ou retangular, podendo ser confeccionadas em lata, vidro ou plástico, formam prismas ou cilindros.
- Os diferentes chocolates apresentam formas de paralelepípedo na sua grande maioria, e são embalados com papel ou plásticos, formam prismas.
- As embalagens de gelatina apresentam mesmo volume, mas são feitas na forma de prismas, com medidas diferentes.
- As latas de achocolatado Nescau apresentam-se em formatos cilíndricos, com diferentes alturas, porém com volumes iguais.

A partir do contato direto com as embalagens dos produtos, que analisaram livremente, os alunos perceberam as relações entre suas formas e a geometria estudada em sala de aula. Voltando para a escola, foi proposto um debate em mesa redonda, ressaltando aspectos significativos e de correlação com o que foi visto no vídeo.

Importante destacar que, nesta aula, foi possível estabelecer conclusões a respeito da relação entre volume e forma: diferentes sólidos geométricos, com diferentes formas e/ou diferentes medidas, podem ter mesmo volume.

O Módulo III foi planejado com objetivos de articular o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas, identificar formas geométricas nos objetos do cotidiano e calcular a área lateral, a área total e o volume de um prisma.

Os alunos selecionaram algumas embalagens da forma prismática e, em grupos, iniciaram as medições. As embalagens foram planificadas, para facilitar a medição das arestas, a fim de calcular a quantidade de papel necessária para sua fabricação.

Um grupo analisou a embalagem de tinta para cabelo Garnier Nutrisse. Os alunos concluíram que seu formato representa um paralelepípedo retângulo. Quanto ao cálculo da área total, efetuaram-no de duas formas; primeiramente o grupo utilizou a régua escolar para medições das arestas da caixa aberta, em seguida calcularam as áreas das faces, todas retangulares, e somaram as medidas encontradas para achar a área toda. De outro modo, calcularam o volume e a área total da caixa usando as fórmulas conhecidas por eles $St = 2(ab+ac+bc)$ e $V = abc$, onde a, b e c representam respectivamente comprimento, largura e altura.

Nesta atividade, ocorreu o reconhecimento das faces, dos vértices, das formas geométricas das faces e das medidas que são necessárias para cálculos de área do prisma, dando, assim, significado aos símbolos presentes nas fórmulas. A fórmula da área lateral total adquiriu significado, pois expressa as somas, efetuadas por eles, das áreas de cada face.

Para o cálculo do volume, pode-se imaginar que se uma das faces, com área $A=a.b$, pudesse ser copiada e empilhada, até chegar à altura c, sua área seria somada c vezes, chegariam ao volume $V = (ab).c$.

Ao final da aula uma aluna declarou:

Professora, basta multiplicar o comprimento, a largura e altura para encontrar o volume da tinta, e ainda com esses dados podemos encontrar o valor do papel gasto na fabricação da embalagem.

Dando continuidade ao trabalho, no Módulo IV, o objetivo foi calcular volume e a área em situações-problema. Em reflexão posterior, percebemos que esta atividade foi das mais adequadas para cumprir o objetivo de dar significado às fórmulas de área e volume, presentes na lista.

Problema 1 – O Volume de um Cubo é de 110,59cm³. Calcule a área total.

Na resolução do problema alguns alunos sugeriram que era possível encontrar o valor da aresta utilizando a fórmula do volume $V = a^3$. Então questionamos: Porque a fórmula é expressa por a^3? Um dos alunos respondeu que as arestas do cubo são iguais e, portanto, o produto (comprimento x largura x altura) é igual $a \times a \times a = a^3$. Quanto ao cálculo da área total, ficou claro para o grupo que deveriam calcular a área do quadrado e multiplicá-la por seis, que é o número de lados. Calcularam o valor da aresta usando calculadora.

Problema 2 – Um calendário de madeira tem a forma de um prisma cuja a base é um triângulo equilátero de lado 6cm e cuja altura mede 12cm. Quantos cm² de madeira foram usados para fazer o calendário?

Antes de iniciar os cálculos, solicitamos aos alunos que planificassem a figura, para melhor visualização das formas geométricas que compõem o calendário. Após algumas discussões entre o grupo, uma aluna ressaltou que existem três retângulos e dois triângulos de lados iguais, logo, fazendo 3x (comprimento x altura) para o cálculo dos lados e 2x (área do triangulo de lados iguais) para o cálculo das bases, tem-se a área toda. Depois é só somar os resultados, acrescentou ela.

No geral, a grande maioria entendeu a colocação da aluna e partiu para os cálculos mas muitos pararam, confusos, no cálculo da área do triângulo equilátero, pois não entendiam a fórmula presente na lista. Este foi um bom momento para deduzir a fórmula da área de triângulos, como (base x altura)/2.

Tomamos um triângulo qualquer e o reproduzimos (Figura 4).

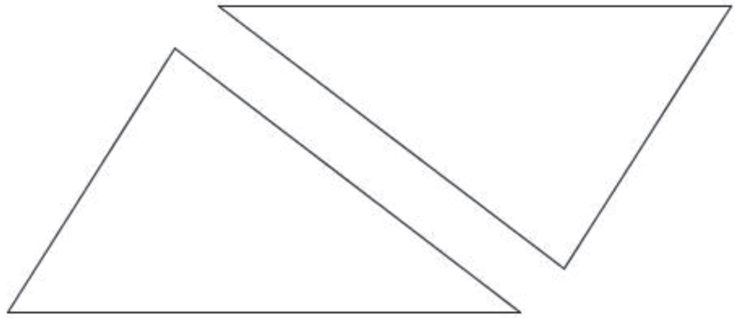


Figura 4: Dois triângulos congruentes, formando um paralelogramo
Fonte: Elaborada pela Profª. Cleuci Vuelma

Com os dois juntos, formamos um paralelogramo. A área do triângulo é a metade da área deste paralelogramo: (base x altura)/2.

Para calcular a altura, é preciso relembrar e aplicar o teorema de Teorema de Pitágoras.

É preciso esclarecer a fórmula para cálculo da área do paralelogramo, destacando uma base e a altura relativa a essa base. Tem-se a Figura 5:

Figura 5: Paralelogramo com destaque numa base e na altura correspondente
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Cleuci Vuelma

Transforma-se a Figura 5 na Figura 6:

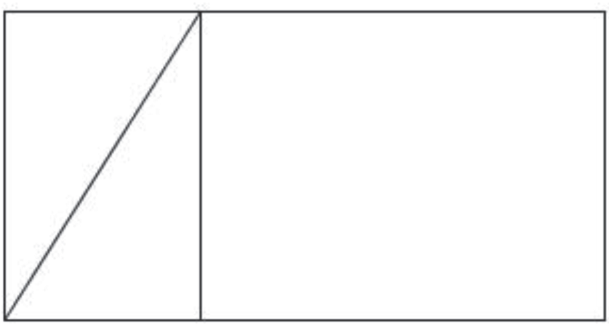


Figura 6: Retângulo gerado pelo paralelogramo
Fonte: Elaborada pela Prof[a]. Cleuci Vuelma

Podemos concluir que a área do paralelogramo é igual à área do retângulo, cujo lado maior é igual à base do paralelogramo e cujo lado menor é igual à sua altura. Área de retângulo não constitui problema. Logo, a área do paralelogramo é dada por base x altura.

Problema 3 – Calcular o volume e a área total de uma caixa em forma de paralelepípedo retângulo cujas dimensões são: 3,8 cm x 3 cm x 16,6 cm. Expresse o resultado em metros.

Na resolução deste problema, percebemos a indecisão de alguns alunos na hora de calcular a área do paralelepípedo, alguns tentando desenhar as faces, outros tentando aplicar a fórmula da lista. Embora o tenham resolvido corretamente, para o entendimento ficar mais claro, propusemos outra situação-problema: o cálculo do volume e da área de uma piscina (sem tampa). Os alunos foram "forçados" a pensar na resolução sem uso da fórmula, pois não identificaram a piscina com um paralelepípedo. Desenharam as paredes e o fundo, calcularam áreas e depois verificaram que não poderiam usar a fórmula, porque só tinham cinco termos para somar. Quanto ao cálculo do volume, todos aplicaram corretamente a fórmula Volume = comprimento x largura x altura. As transformações das unidades de medidas também foram solucionadas sem maiores dificuldades.

Problema 4 – Calcule, em litros, o volume de uma caixa d'água em forma de prisma reto, de aresta lateral medindo 6m, sabendo que a base é um losango cujas diagonais medem 7m e 10m.

Nenhum dos alunos da turma lembrou da fórmula da área do losango e tampouco de sua forma. Os grupos questionaram qual embalagem do supermercado poderia ser parecida com a caixa d'água do problema. Um aluno a comparou com o chocolate Toblerone, destacando que haveria alguma diferença na base. Foi então que uma aluna destacou a "pipa" como base, obviamente, um losango.

Os grupos desenharam o losango destacando suas diagonais, em seguida os alunos fizeram o cálculo da área. Foi um bom momento para deduzir a área do losango. Dividindo o losango em dois triângulos iguais (Figura 7), com diagonais D (maior) e d (menor), basta calcular a área de um deles: $A^1 = (d \times D/2)/2$ Logo a área do losango é o dobro de A^1, isto é:

$$A = (d \times D)/2$$

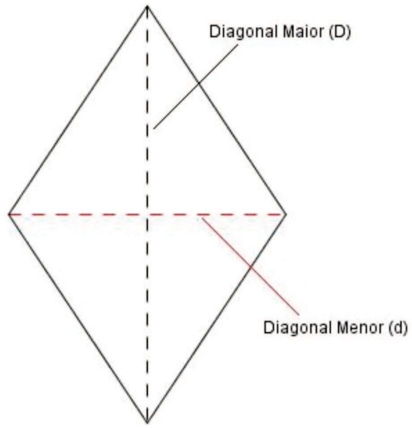


Figura 7: Losango
Fonte: Elaborada pela Profª. Cleuci Vuelma

Multiplicando o valor da área do losango pela aresta lateral, nesse caso, a altura da caixa d'água, foi obtido o volume solicitado. Não ocorreram problemas na transformação de metros cúbicos para litros.

É importante destacar, neste caso, a importância do material concreto para visualização e referência: a caixa de Toblerone, a pipa, as embalagens em geral, são objetos do cotidiano que podem ser usados na sala de aula, para dar significado à geometria.

Problema 5 – Deseja-se cimentar o quintal da escola, cujo formato é retangular, com 10m de largura e 14m de comprimento. O revestimento será feito com uma mistura de areia e cimento de 3 cm de espessura. Qual o volume da mistura utilizado nesse revestimento?

Esse problema foi resolvido com facilidade, entretanto, alguns alunos não perceberam que uma das unidades de medida precisaria ser transformada. Todos eles aplicaram a fórmula do volume $V = a \times b \times c$ para calcular o revestimento do quintal.

No Módulo V, os objetivos eram o cálculo de volume e área de um cilindro, comparando-o com o prisma, para mostrar que o volume não é uma função da área lateral. Em reflexões posteriores, percebemos que poderíamos ter mostrado que o volume não é uma função da área total.

Foi proposto um desafio: confeccionar, em papel cartolina, um cilindro e um prisma, com mesma área lateral, mas com volumes diferentes. O resultado de um dos grupos (Figura 8) foi obtido após um conjunto de decisões e muitos cálculos: construção de uma caixa em forma de paralelepípedo; opção por designar duas faces opostas como base e as outras quatro como faces laterais; cálculo da área lateral e do volume; desconstrução da caixa para obter o retângulo R constituído pelas faces laterais, em que um dos lados é a altura do paralelepípedo e o outro é o perímetro da base do paralelepípedo (é a parte central da caixa planificada, mostrada na Figura 8, composta por quatro retângulos, deve-se ignorar as abas que ali aparecem e que foram deixadas para a colagem); opção por um dos lados do retângulo R, para formar o círculo do cilindro a ser construído; cálculo do raio do círculo; construção de um cilindro C (mostrado na Figura 8), cuja face lateral é um retângulo com as medidas de R. Na Figura 8, a caixa tem base retangular com medidas 10cm por 8 cm, e altura 15 cm. Por opção dos alunos, o cilindro foi construído com altura H = 2(10 + 8) = 36 e base circular com raio r = 2,4, obtido na equação 15 = 2 πr, ou seja, os alunos escolheram a altura (15 cm) da caixa para determinar o círculo do cilindro, tornando-o assim, bem mais alto do que a caixa (36 cm) e com base menor. A área da base da caixa é A^b = 10 x 8 = 80 cm^2 e a área da base do cilindro é A^b = π. $2,4^2$ = 18 cm^2. Com estas escolhas, os dois sólidos têm mesma área lateral, o cilindro é mais alto, mas seu volume diminuiu. A área lateral da caixa é A^l= 36x15= 540 cm^2 e o volume é V=80x15=1200cm^3. A área lateral do cilindro é A^l=15 x 36 = 540 cm^2 e o volume é V= 18 x 36 = 648 cm^3, com as devidas aproximações

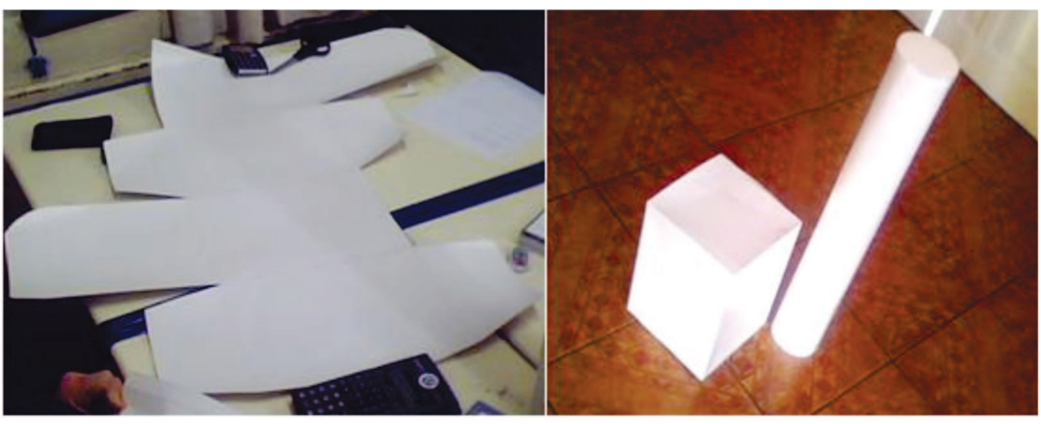


Figura 8: Caixa prismática planificada, contendo as faces e também pequenas abas para colagem, e o cilindro
Fonte: Grupo de alunos, 3ª série E.M. (2010)

Refletindo, posteriormente, percebemos que poderíamos ter solicitado que a área total fosse a mesma, pois chegaríamos, também desse modo, a volumes diferentes.

Esta atividade foi de grande valia, pois possibilitou: investigação, conjecturas e escolhas; desconstrução e construção de sólidos nas formas de prisma e de cilindro; construção do cilindro com restrições impostas pelas medidas do prisma; percepção do significado dos elementos e medidas que participam nas fórmulas de área e volume; relação entre medidas dos dois diferentes sólidos.

A aula final foi destinada a verificar se os alunos haviam ampliado seus conhecimentos sobre figuras geométricas planas e espaciais, quando apoiados em objetos do mundo físico, avaliando a aquisição da linguagem matemática na denominação de objetos geométricos.

Questão 1) A figura abaixo é uma lata de óleo. Analise atentamente e responda a questão abaixo:

Figura 9: Lata de óleo
Fonte: Profª. Cleuci Vuelma (2010)

Sua forma básica é:

a) Paralelepípedo retângulo;
b) Prisma de base quadrangular;
c) Cubo;
d) Prisma de base hexagonal;
e) Prisma de base triangular.

2) Em relação aos sólidos abaixo, podemos afirmar que:

Figura 10: Embalagens variadas
Fonte: Prof[a]. Cleuci Vuelma (2010)

I – Todos os sólidos representam prismas;

II – As respectivas bases são: quadrangular, triangular, hexagonal e quadrangular;

III – No sólido três a base é circular;

IV – Todas as suas faces laterais são retangulares.

Então a alternativa correta é:

a) I e II

b) I, II e IV

c) Apenas II

d) I e IV

e) Todas

Os alunos não tiveram dificuldades em resolver os problemas propostos, mostrando que passaram a reconhecer as formas planas, fora das páginas dos livros, e as formas espaciais e seus elementos.

Análise das hipóteses

Para validar o trabalho, foram formuladas hipóteses.

A primeira hipótese diz respeito aos c**onhecimentos prévios.**

Já observamos, no decorrer das atividades, que os alunos mostraram conhecimentos limitados da Geometria Plana e Espacial, reconhecendo e calculando áreas apenas de figuras básicas: quadrado, retângulo e triângulo (com dificuldades). São dependentes do formulário, mas, muitas vezes, não conseguem utilizá-lo, pois não dão significado aos símbolos ali presentes.

Com algumas exceções, percebi a familiaridade que os alunos têm com as transformações das unidades do sistema decimal, visto que esse assunto é muito trabalhado, tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio.

4- Calcule, em litros, o volume de uma caixa d'água em forma de prisma reto, de aresta lateral medindo 6m, sabendo que a base é um losango cujas diagonais medem 7m e 10m.

$Sb = \frac{10.7}{2} = 35m^2$

$V = Sb \cdot h$

$V = 35 . 6$

$V = 210m^3 . 1000 = 210.000 l$

$1m^3$ equivale $1000 l$

5-Deseja-se cimentar o quintal da escola cujo formato é retangular com 10m de largura e 14m de comprimento. O revestimento será feito com uma mistura de areia e cimento de 3 cm de espessura. Qual o volume da mistura utilizado nesse revestimento?

$3cm \div 100 = 0{,}03m$

$V = a . b . c$

$V = 14 . 10 . 0{,}03$

$V = 4{,}20m^3$

Figura 11: Cálculos usando transformações[5]
Fonte: Aluno E, 3ª série E.M. (2010)

A segunda hipótese refere-se ao **desempenho.**

Quanto à realização da atividade prática proposta pelo vídeo de sensibilização, num primeiro momento, percebi que os alunos observavam com cuidado as instruções para realizar a atividade, como mostra a foto abaixo. Uma das alunas da sala argumenta com a turma que, no vídeo assistido, quem fez a atividade foram crianças, por isso todos iriam conseguir fazer. Isso de fato motivou os alunos e propiciou ótimos trabalhos (Figura 12).

Já vimos que a atividade foi interessante, justamente porque permitiu reconhecer e denominar as figuras geométricas que surgem.

Considerando o entusiasmo e interesse da maioria, certamente essa hipótese foi confirmada. O "nosso projeto", assim chamado por eles, propiciou

[5] Destacamos o hábito do aluno em utilizar a linguagem matemática sem precisão, do mesmo modo como fala. O aluno calcula V = 35.6 e logo escreve V = 210 cm^3.1000, quando deveria ter escrito que V = 210 cm^3 e, em litros, V= 256.1000 l.

momentos de descobertas, simples, mas significativas, e proporcionou momentos de prazer e satisfação, de acordo com a avaliação de muitos alunos.

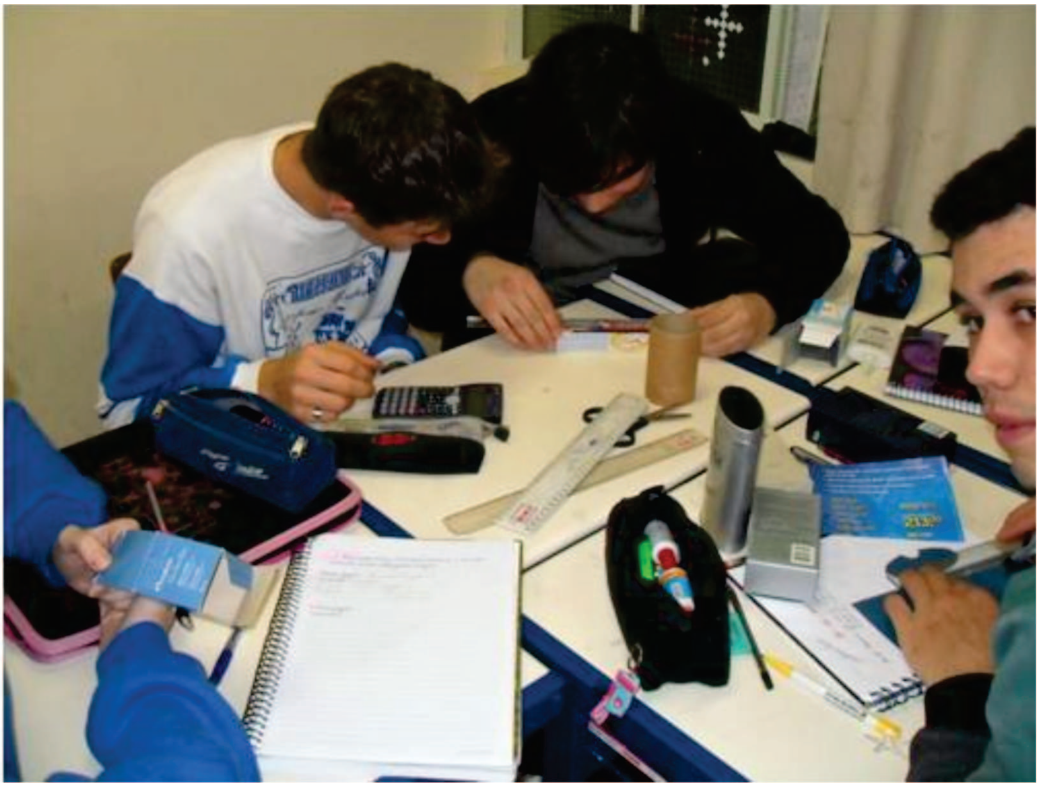


Figura 12: Alunos numa sessão de trabalho
Fonte: Prof. Cleuci Vuelma (2010)

A terceira hipótese refere-se às **atividades e seus objetivos.**

Certamente os alunos conseguiram, através da manipulação das embalagens do supermercado, identificar as arestas, as faces e os vértices de cada sólido, representaram as figuras encontradas e encontraram significado para as fórmulas da lista. O trabalho, num todo, propiciou melhor entendimento no cálculo de áreas e volumes de sólidos como mostra a apresentação final do trabalho em slides de um grupo de alunos (Figura 13), mas pensamos que somente através da manipulação não é possível minimizar todas as dificuldades.

Figura 13: Apresentação de slides de um grupo de alunos
Fonte: Grupo de Alunos, 3ª série E.M. (2010)

Também, analisando as respostas a um questionário (Figura 14) de avaliação final, vemos que os alunos não se desvincularam das fórmulas, "vício" antigo, mas agora elas fazem sentido.

Escola Estadual de Ensino Médio Luiz Isaias Zuchetti

Prezados alunos:

Você terá 6 afirmações, após ler e entender cada uma delas marque com um X a coluna que desejar.

Afirmação	Concordo	Discordo	Indiferente
O estudo da Geometria espacial está diretamente ligado com o estudo da Geometria Plana.	X		
A construção prática dos sólidos contribuiu para que eu entendesse o estudo de áreas.	X		
O uso de fórmulas trazidas pelos livros didáticos é indispensável para o cálculo de áreas e volumes.	X		
Gostei muito de trabalhar, pois aprendi com prazer e satisfação.	X		
Através do vídeo, pude despertar o gosto pela Geometria.			X
Existe Geometria em todos os lugares, no meio em que estamos inseridos.	X		

Figura 14: Avaliação de um dos alunos da turma
Fonte: Aluno F, 3ª série E.M. (2010)

Para um projeto futuro, sugerimos utilizar *softwares* de geometria dinâmica, tal como o *software Poly*, que possibilita a compreensão das figuras geométricas através do movimento, o que completaria o trabalho.

Em uma reflexão acerca do ensino de geometria através de materiais manipuláveis, Pais (2000) sugere que é preciso estimular um constante vínculo entre manipulação de materiais e situações significativas para o aluno. Dessa forma, não basta utilizar material concreto, mas é preciso utilizar materiais que fazem fazer parte do mundo do aluno, como, por exemplo, é o caso do trabalho com embalagens. Além disso, é preciso evitar "dar" resultados prontos, tentando sempre deduzir, demonstrar ou pelo menos visualmente verificar, como foi o caso das áreas não entendidas.

A última hipótese refere-se a **conhecimentos a serem adquiridos**

Os alunos conseguiram planificar a caixa e efetuar as medições com régua escolar sem maiores problemas. A Figura 15 mostra o trabalho com um objeto do cotidiano, uma embalagem. Os alunos fizeram a planificação, calcularam as medidas das arestas e calcularam áreas das faces, área lateral total e volume corretamente, entendendo quais medidas seriam usadas para encontrar a área e quais contribuem para o cálculo do volume.

Além disso, nos debates, diálogos e também nas respostas às questões finais, os alunos demonstraram que ampliaram sua linguagem matemática, conseguindo nomear as figuras geométricas planas e espaciais que foram trabalhadas.

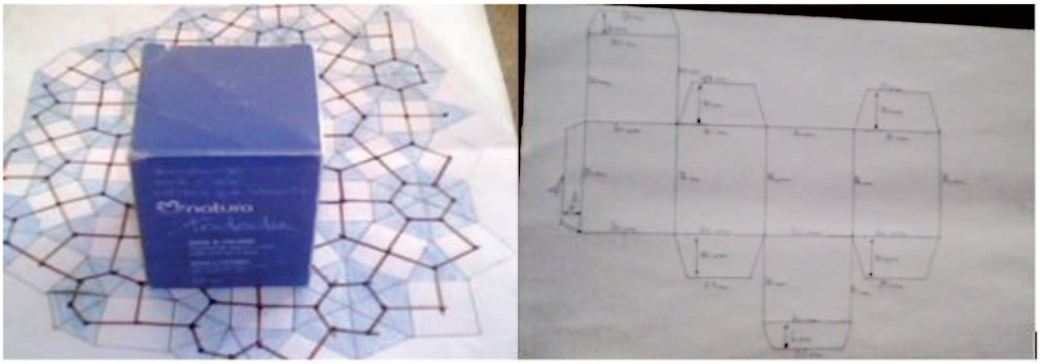


Figura 15: Embalagem original da natura, caixa planificada e medida com régua em centímetros (com a presença de abas necessárias para colagem)
Fonte: Grupo de alunos, 3ª série E.M. (2010)

Reflexões sobre a Prática

Esta engenharia tratou do estudo de áreas e volumes e foi aplicada com alunos da terceira série do nível médio. Para tentar obter uma melhoria no cenário de ensino e da aprendizagem desta turma, foi desenvolvido um plano de trabalho com base nas sugestões dos PCNs (BRASIL, 1998) sobre a articulação do mundo físico com as figuras geométricas e suas representações; e com base nas ideias a respeito de aprendizagem significativa, relacionando as fórmulas mais utilizadas nos cálculos de área e volume com conhecimentos adquiridos na manipulação de objetos do cotidiano.

O ponto de partida foi o vídeo “Nas malhas da Geometria”, que favorece essas articulações, apresentando obras de Arte com formas geométricas e, por outro lado, obras que tentam recriar a natureza a partir das formas geométricas. Ao final, o vídeo propõe a construção de uma malha, com quadrados e triângulos equiláteros, que possibilita criar outras figuras, como o hexágono e o losango, e revisa os elementos básicos das figuras geométricas planas: lados e vértices.

O comentário do vídeo e a construção da malha foram as primeiras tarefas. Para buscar objetos do cotidiano, ponto de partida para o ensino de áreas e volumes, os alunos buscaram no supermercado embalagens que se tornaram exemplos concretos dos sólidos geométricos.

O desenvolvimento da atividade proposta pelo vídeo de sensibilização favoreceu muito a qualidade da aula, despertando o interesse e contribuindo para a aprendizagem; entretanto, somente com a coleta de objetos concretos, no supermercado, e após a representação desses objetos, planificados em cartolina, os alunos passaram a se apropriar do conhecimento, com significado.

O trabalho, em um todo, proporcionou momentos de aprendizagem: os alunos entenderam o que é área lateral, área total e volume de um sólido, quais os elementos e medidas que participam no cálculo e qual o significado dos símbolos presentes nas fórmulas; também expandiram sua linguagem matemática, quanto aos elementos da geometria. Entretanto, para efetuar os cálculos, foi preciso favorecer a visualização de fórmulas que o professor considera simples, como as das áreas do paralelogramo, do triângulo e do losango.

Encontramos pontos de apoio, para a proposta, na dissertação de Martins (2003). Buscamos, como a autora, desenvolver a percepção espacial e a habilidade para visualização. Enquanto Martins utiliza caleidoscópios para alcançar tais objetivos, utilizamos objetos do cotidiano e sólidos representados e construídos pelos alunos. Adotamos também, como pergunta norteadora, a questão do interesse e da participação do aluno em relação à aprendizagem do conteúdo matemático, que é a preocupação de todos nós, professores.

De um modo geral, todos os alunos da sala apresentaram mudanças, tanto no comportamento, quanto na compreensão dos conteúdos trabalhados. Houve momentos de cooperação – alunos ajudavam-se uns aos outros – e, ao mesmo tempo, de trabalho autônomo, em um ambiente colaborativo e interativo de aprendizagem.

Destacamos a importância de abordagens alternativas que complementem as aulas de Matemática, tornando-as mais atrativas. Essa proposta poderia ter sido enriquecida com uso de *softwares*, como o Poly ou o Geogebra, mas em muitas escolas há dificuldade para acesso a computadores, por isso, acreditamos que recorrer ao mundo externo pode ser tão produtivo quanto o uso da tecnologia informática. Mesmo sem esse recurso, tivemos a possibilidade de ver os alunos apaixonados pelo assunto, envolvidos com “o nosso projeto", como diziam. Temos certeza de que todo professor tem buscado maneiras para que essa "aprendizagem apaixonante" se efetive, pois a aprendizagem somente ocorre quando existe vontade de aprender.

Os colegas professores e a direção da escola reconheceram a importância do projeto, constatando que é possível realizar atividades em que o aluno possa se interessar pelo que está aprendendo. É preciso que a escola desperte a curiosidade de conhecer e aprender ao longo da vida para que a mesmice e a monotonia não dominem alunos e professores. Nesse sentido, acreditamos que este estudo possa motivar outros educadores, para compartilhar com o nosso entusiasmo.

Referências

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 193-217

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/arquivos/PCN_CNMT.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2011.

_____ Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Terceiro e quarto ciclo do nível fundamental: matemática. Brasília: SEF/MEC, 1998. Disponível em: <http://www.slideshare.net/literatoliberato/pcn-03-matemtica>. Acesso em: 22 fev. 2011

DANTE, L. R. **Matemática, volume único.** São Paulo: Ática, 2008.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 13. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIOVANNI, J. R. GIOVANNI, Jr. J. R. ; BONJORNO, J. R. **Matemática completa, volume único.** São Paulo: FTD, 2002.

MARCONDES, C. A. ; GENTIL, N. ; SÉRGIO, E. G. **Matemática Novo Ensino Médio, volume único**. 6. ed. São Paulo: Ática, 2002.

MARTINS, A. R. **Ensino-Aprendizagem de Geometria:** uma proposta fazendo o uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais. 246 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003. Disponível em : <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/F/AGJQL74PAN9T9H7HM6XBA7YQ2G91XV73HBEQ12VL3NQ8FHM7N9-39811?func=full-set-set&set_number=035475&set_entry=000005&format=999>. Acesso em: 20 abr. 2010.

PAIS, L. C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**. Reunião: Caxambu, 2000. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1919t.PDF>. Acesso em: 13 nov. 2010.

PELIZZARI, A. *et al*. Teoria de aprendizagem significativa segundo Ausubel. **Rev. PEC**, Curitiba, v. 2, n. 1, p. 41-42, jul. 2001-jul. 2002. Disponível em: <http://www.bomjesus.com.br/publicacoes/pdf/revista_PEC/teoria_da_aprendizagem.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2011.

OS AUTORES

Cleuci Andreazza Vuelma é professora licenciada em Matemática pela Universidade de Passo Fundo (UPF), leciona no município de Nova Araçá (RS) e foi aluna do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. E-mail: cleoandreazza@hotmail.com

Deise Guder é professora licenciada em Matemática pela Universidade do Vale dos Sinos (UNISINOS), leciona no município de Bom Princípio (RS) e foi aluna do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. E-mail: deiseguder@hotmail.com

Elisabete Zardo Búrigo foi membro da equipe coordenadora e da equipe de orientadores do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutora em Educação. E-mail: elisabete.burigo@ufrgs.br .

Fabio Gomes Linck é professor licenciado em Matemática pela UNISINOS, leciona no município de Santana do Livramento (RS) e foi aluno do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. E-mail: fabiolick@yahoo.com.br

Grasciele Fabiana Casagrande Centenaro é professora licenciada em Matemática pela UFRGS, leciona no município de Porto Alegre (RS) e foi aluna do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. E-mail: grasci.eu@gmail.com

Helena Massignam Breitenbach é professora licenciada em Matemática pela UFRGS, leciona no município de Nova Prata (RS) e foi aluna do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. E-mail: professora.helena@yahoo.com.br

Joseane Gandin Hettwer é professora licenciada em Matemática pela Universidade de Ijuí (UNIJUI), leciona no município de Santana do Livramento (RS) e foi aluna do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. E-mail: josihettwer@hotmail.com

Lucia Helena Marques Carrasco foi membro da equipe de orientadores do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutora em Educação. E-mail: luciahmc@mat.ufrgs.br

Luciana Neves Nunes foi membro da equipe de orientadores do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutora em Epidemiologia. E-mail: lununes@mat.ufrgs.br

Márcia Erondina Dias de Souza é professora licenciada em Matemática pela UFRGS, leciona no município de Esteio (RS) e foi aluna do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. E-mail: marciaerondina@gmail.com

Marcia Rodrigues Notare foi membro da equipe de orientadores e professora responsável pela disciplina Mídias Digitais na Educação Matemática II do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutora em Informática na Educação. E-mail: marcianotare@gmail.com .

Rogério Ricardo Steffenon foi membro da equipe de orientadores do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutor em Matemática. steffenonenator@gmail.com

Vera Clotilde Vanzetto Garcia foi membro da equipe coordenadora, da equipe de orientadores e professora responsável pela disciplina Prática Pedagógica III, do Curso de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. Doutora em Educação. E-mail: veraclot@ufrgs.br

Vilmar Trevisan foi membro da equipe de orientadores e professor responsável pela disciplina Matemática na Escola: Novos Conteúdos, do Curso de Especialização. Doutor em Matemática Aplicada. E-mail: trevisan@mat.ufrgs.br