

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

MESTRADO ACADÊMICO

**LINHA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E NOVAS
TENDÊNCIAS**

YASMIN BARBOSA CAVALHEIRO

**COMPREENSÕES E USOS DAS NOÇÕES TOPÓLOGICAS DURANTE O
MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA**

**Porto Alegre
2021**

YASMIN BARBOSA CAVALHEIRO

COMPREENSÕES E USOS DAS NOÇÕES TOPOLÓGICAS DURANTE O
MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Andreia Dalcin.

Porto Alegre

2021

"Se queres prever o futuro, estuda o passado."

Confúcio.

Agradecimentos

“A educação tem raízes amargas, mas os seus frutos são doces.”

(Aristóteles).

Assim como as raízes da educação, o plantio de uma dissertação também é, por vezes, amargo. O que torna sua “amargura” suportável são as pessoas que participam desse processo conosco. Aquelas que me acompanham desde que a ideia deste trabalho era uma pequena sementinha em meio a tantas possibilidades de germinar e crescer, meu profundo agradecimento!

Agradeço a minha família, por sempre me dar a liberdade de escolher o meu caminho. Com apoio e amor incondicional sempre acreditaram que eu poderia fazer e conquistas grandes coisas. Com certeza minha mãe e familiares entendem da amargura desse processo, que acabou por amargar meu humor durante longos períodos de escrita. Obrigada pela compreensão!

Agradeço ao meu noivo por me incentivar a nunca desistir, planejando nosso futuro de sucesso juntos. Obrigada por cada aula que praticamente me obrigou a ir e por me lembrar que eu precisava escrever mesmo aos finais de semana, os quais eu só queria dormir e por aguentar meu mau humor diário!

Agradeço aos amigos conquistados nesses oito anos de UFRGS, a família que construí e escolhi para caminhar comigo durante essa jornada. Dividiram comigo não só as amarguras, em meio a extensas conversas de “reclamações” no whatsapp e bloqueios criativos, mas também doces momentos de pequenas conquistas e expectativas. O plantio desse trabalho com certeza se tornou menos amargo pela compreensão e apoio de vocês!

Agradeço à minha orientadora por participar de todo esse processo comigo. Orientadora de iniciação a docência, iniciação científica, trabalho de conclusão de curso, dissertação de mestrado e da vida acadêmica. Sou profundamente grata por nunca desistir de mim, nem me deixar desistir. Não seria exagero dizer que não estaria concluindo mais essa etapa sem o seu apoio. Obrigada por acreditar nesse trabalho e contribuir com toda sua experiência e ideias mirabolantes.

Agradeço às professoras Anna Regina Laner de Moura, Cristina Cavalli Bertolucci, Elisabete Zardo Búrigo e Virgínia Cardia Cardoso por aceitarem o convite de ler e contribuir com esse trabalho. Obrigada pelas sugestões e pelo tempo que dedicaram a esta pesquisa.

Agradeço a Deus por me iluminar com sabedoria, para tomar decisões, força nos momentos amargos e esperança por dias melhores. Graças a Ele, pessoas iluminadas cruzaram meu caminho, me ajudando e acompanhando nesse processo.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de mestrado concedida durante esta pesquisa.

Por fim, agradeço a mim mesma, por não ter desistido ao longo do caminho e por ter chegado tão longe. A conclusão deste trabalho não é o fim, mas apenas mais um passo que avanço.

Que eu consiga continuar colhendo doces frutos, que me inspirem a cultivar novas sementinhas para ver crescer e se desenvolverem lindos trabalhos, como esse, do qual me orgulho de ter escrito. A História da Educação Matemática é um grande solo a ser explorado e investigado, que esse trabalho possa de alguma forma inspirar outras pessoas a se aventurarem nesse solo também.

RESUMO

A pesquisa tem como problemática investigar “*Que compreensões e usos das noções topológicas emergiram durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil?*”. Trata-se de uma pesquisa no campo da História da Educação Matemática que dialoga com autores da História Cultural, em especial, Ginzburg (1989) e Le Goff (1990). Como objetivo geral, busca-se identificar os usos e compreensões que emergiram a respeito das noções topológicas, durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM), principalmente a partir da análise de documentos escolares do acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha, localizado na cidade de Porto Alegre (RS), livros didáticos de matemática que circularam pelo Brasil durante o MMM e narrativas de professores que vivenciaram ou estudaram o movimento em questão. A pesquisa apontou uma pluralidade de usos e compreensões sobre as noções topológicas, mas, principalmente uma aproximação entre tais noções e o estudo da Geometria pelas Transformações e da Geometria Euclidiana, como necessárias para a compreensão das estruturas matemáticas.

Palavras-chave: noções topológicas; matemática moderna; livro didático de matemática; História da Educação Matemática. Ensino primário.

ABSTRACT

The research has as a problem to investigate "What understandings and uses of topological notions emerged during the Modern Mathematics Movement in Brazil?". This is a research in the field of the History of Mathematics Education that dialogues with authors of Cultural History, especially Ginzburg (1989) and Le Goff (1990). As a general objective, we seek to identify the uses and understandings that emerged regarding topological notions during the Modern Mathematics Movement (MMM), mainly from the analysis of school documents from the collection of the Mathematics Laboratory of the Instituto de Educação General Flores da Cunha, located in the city of Porto Alegre (RS), mathematics textbooks that circulated throughout Brazil during the WMM and narratives of teachers who experienced or studied the movement in question. The research pointed to a plurality of uses and understandings of topological notions, but mainly an approximation between such notions and the study of Geometry through Transformations and Euclidean Geometry, as necessary for the understanding of mathematical structures.

Keywords: topological notions; modern mathematics; math textbook; History of Mathematics Education. Primary school.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Escrita dos números	18
Figura 2 – Mesmo sentido ou sentidos contrários	18
Figura 3 – Professora Rute da Cunha	47
Figura 4 – Professora Neuza Bertoni Pinto	48
Figura 5 – Professora Mônica Bertoni dos Santos	50
Figura 6 – Professora Esther Pillar Grossi	51
Figura 7 – Professora Dione Lucchesi de Carvalho	52
Figura 8 – Professora Lucília Bechara Sanchez	53
Figura 9 – Diagrama das sete pontes de Königsberg	58
Figura 10 – Faixa de Möbius	58
Figura 11 – Geometria	59
Figuras 12 – Lista “Sugestões de atividades Topologia”	73
Figura 13 – Lista “Sugestões de atividades Topologia”	74
Figura 14 – Atividade “O chefe manda”	75
Figuras 15 – Estudo nº 12	76
Figura 16 – Estudo nº 12	77
Figura 17 – Topologia	78
Figura 18 – Topologia “Ficha 1”	79
Figura 19 – Topologia “Ficha 2”	80
Figura 20 – Alongamento de figuras	81
Figura 21 – Curvatura de figuras	81
Figura 22 – Nova Iniciação à Geometria	82
Figura 23 – Fronteiras simples e não simples	84
Figura 24 – Nova Série 1º Grau – Matemática 1ª série	85
Figura 25 – Interior e exterior de figuras fechadas	87
Figura 26 – Curso Moderno de Matemática Para o Ensino de 1º grau	88
Figura 27 – Curvas	90
Figura 28 – Curvas e Regiões	91
Figura 29 – Regiões e Fronteiras	91
Figura 30 – Curvas simples e não simples	92
Figura 31 – Regiões	93
Figura 32 – Atividades com curvas	93

Figura 33 – Curvas Fechadas	94
Figura 34 – Segmentos de retas	95
Figura 35 – Curvas e Vizinhança	96
Figura 36 – Interior das Figuras	96

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
1. CONTEXTUALIZANDO O TEMA DA PESQUISA	17
1.1. Pesquisas relacionadas ao tema	24
2. PERCURSO TEÓRICO-METODOLÓGICO DA PESQUISA	33
2.1 Documentos Escolares como Fontes Históricas	36
2.2 Livros Didáticos como Fontes Históricas	39
2.3 Entrevista Narrativa e Memória	43
2.3.1 As entrevistadas	46
2.3.2 Protocolo das entrevistas	54
3. COMPREENSÕES ACERCA DAS NOÇÕES TOPOLÓGICAS	56
3.1. Apontamentos sobre Topologia	56
3.2. Movimento da Matemática Moderna – MMM	61
3.3. As noções topológicas no ensino e aprendizado da matemática durante o MMM	69
4. USOS DAS NOÇÕES TOPOLÓGICAS	73
4.1. As noções topológicas nos livros didáticos do MMM	81
4.2. Aproximações dos usos das noções topológicas	98
CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
REFERÊNCIAS	106
ANEXOS	112
Anexo I – Protocolo das entrevistas	112
Anexo II – Entrevista com Rute da Cunha Pires	116
Anexo III – Entrevista com Neuza Bertoni Pinto	130
Anexo IV – Entrevista com Mônica Bertoni dos Santos	155
Anexo V – Entrevista com Esther Pillar Grossi	172
Anexo VI – Entrevista com Dione Lucchesi de Carvalho	181
Anexo VII – Entrevista com Lucília Bechara Sanchez	188

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa teve início durante o desenvolvimento do trabalho de conclusão de curso *“Um estudo sobre a presença dos conceitos topológicos na formação de professores: ressonâncias da matemática moderna”*, apresentado no ano de 2018, como requisito para a conclusão da Licenciatura em Matemática. Aquele trabalho foi motivado, inicialmente, pela proximidade com o Instituto de Educação General Flores da Cunha (IE), localizado na cidade de Porto Alegre (RS) e as atividades que foram desenvolvidas naquele momento. No período de 2013 a 2017 fui bolsista de iniciação à docência no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), projeto em que desenvolvi atividades no IE, sob a supervisão das professoras Andreia Dalcin e Lisete Regina Bampi. Foi neste projeto que a ideia da pesquisa teve início.

Durante essa experiência no PIBID conheci o Laboratório de Matemática (LM) do IE e toda a riqueza de documentos, traduções, registros de planos de aula das normalistas, além de livros e materiais didáticos que o espaço abrigava, a maioria datados dos anos de 1950, 1960 e 1970, período em que se desenvolveu o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Como bolsista de iniciação à docência, participei do projeto de revitalização deste espaço. Em 2016 o prédio do IE entrou em processo de restauro e todos os materiais do acervo do LM foram realocados para a sala B123 do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS, sob a supervisão das professoras-pesquisadoras Andreia Dalcin, Maria Cecília Bueno Fisher e Elisabete Zardo Búrigo.

Com o intuito de inventariar, higienizar e digitalizar o acervo documental do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha, as professoras propuseram o projeto *“Práticas e Saberes Matemáticos na Formação de Professores do Instituto de Educação General Flores da Cunha: Aprender para ensinar (1889-1979)”*, do qual participei desde 2017, inicialmente como voluntária, depois como bolsista de iniciação científica e por último, novamente, como voluntária, até 2020. O projeto tem por objetivo investigar e estudar as práticas e saberes matemáticos envolvidos na formação de professores, no Curso Normal, durante o período de 1889 a 1970, do Instituto de Educação General Flores da Cunha de Porto Alegre.

Como algumas das ações deste projeto realizamos a higienização dos materiais e documentos, a catalogação e a digitalização do acervo do Laboratório de Matemática. Este projeto integra um projeto mais amplo, coordenado pela professora Elisabete Zardo Búrigo, com apoio do CNPQ intitulado “*Estudar para ensinar: práticas e saberes matemáticos nas escolas normais do Rio Grande do Sul (1889-1970)*”¹, sendo o Instituto de Educação General Flores da Cunha uma das instituições estudadas.

Atuando como bolsista de iniciação científica e desenvolvendo minha pesquisa para o trabalho de conclusão de curso, comecei a refletir e entender a importância de conhecer mais sobre História da Educação Matemática.

Miguel e Miorim (2002) têm a História da Educação Matemática não só como um produto, ou um conjunto de resultados, mas como um “processo ou atividade”, eles a consideram um campo de investigação. Assim, incluem nesse campo de investigação:

“(...) todo estudo de natureza histórica que investiga (...) a atividade matemática na história, exclusivamente em suas práticas pedagógicas de circulação e apropriação do conhecimento matemático e em práticas sociais de investigação em educação matemática” (MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 187).

De acordo com estes autores, o campo da História da Educação Matemática, ao olhar para uma atividade matemática “se preocupa exclusivamente em investigar processos sociais, intencionais de circulação, recepção, apropriação e transformação dessa atividade” (MIGUEL; MIORIM 2002, p. 187).

Realizando estudos nos materiais e documentos do acervo do LM, constatei que as noções topológicas eram abordadas com certa frequência pelas normalistas, havendo indícios de que eram consideradas importantes na sua formação. Como a maioria dos materiais encontrados era do MMM, durante o trabalho de conclusão de curso olhei principalmente para este movimento. Ao longo do desenvolvimento do trabalho, surgiram algumas questões, como por exemplo: de que formas esses conceitos eram abordados

¹ A coleção digital construída ao longo deste projeto, com os documentos do Acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha, pode ser acessada em <https://cedap.ufrgs.br/xmlui/handle/20.500.11959/1211>.

anteriormente à matemática moderna? Eles ainda são abordados nos dias de hoje? Se sim, de que forma?

Dando continuidade aos estudos acerca das noções topológicas, deparei-me com a presença delas também em livros didáticos. Fiz uma análise inicial de dez livros recomendados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2019 para o primeiro ano do Ensino Fundamental. Com essa análise pude constatar que a presença das noções topológicas ainda é significativa, considerando a frequência com que são abordadas nos livros. Entretanto, não há nos livros uma explicação para a presença destas noções e nem qual a finalidade da sua abordagem atualmente. Em alguns livros tais noções aparecem associadas às noções básicas de matemática, como parte do processo de construção da ideia de número, em outros estão relacionadas à localização do aluno no espaço, ou como elementos introdutórios ao estudo da geometria.

Dando voz às minhas inquietações, busquei algumas das orientações voltadas para o conteúdo de Matemática na escola básica, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e foi possível perceber a presença de tais noções, recomendadas principalmente no primeiro ano do ensino fundamental. Novamente, não há explicações sobre o porquê de estas noções serem abordadas, entretanto, parecem estar associadas aos conceitos básicos da geometria euclidiana, conforme os indícios encontrados.

Motivada pela pesquisa iniciada durante o Trabalho de Conclusão de Curso, pelos questionamentos levantados e pela percepção da presença das noções topológicas ainda nos dias de hoje, dei seguimento as minhas inquietações durante o mestrado.

Após várias discussões sobre as possibilidades de encaminhamentos, optei por desenvolver uma pesquisa de natureza histórica, no campo da História da Educação Matemática, tomando como referenciais autores da História Cultural, em especial Carlo Ginzburg e Jaques Le Goff. Como pano de fundo, situo o Movimento da Matemática Moderna, sem, no entanto, desconsiderar a presença das noções topológicas no tempo presente, por meio da permanência destas nos livros didáticos, pois como lembra Le Goff (1990) o passado e o presente estão interligados:

Sabemos agora que o passado depende parcialmente do presente. Toda a história é bem contemporânea, na medida em que o passado é apreendido no presente e responde, portanto, aos seus interesses, o que não é só inevitável como legítimo. Pois que a história é duração, o passado é ao mesmo tempo passado e presente (LE GOFF, 1990, p. 51).

Sendo assim, as noções topológicas permeiam o passado e o presente, cabendo-nos estabelecer relações possíveis entre os modos de uso, as concepções e percepções que se fazem sobre tais noções. Seriam hoje as atividades que abordam noções topológicas nos livros didáticos ressonâncias de ideias que permearam o MMM? Ou outros significados estão sendo atribuídos a tais noções no tempo presente? Esta e outras questões poderiam ser respondidas no processo de análise e diálogo com as fontes históricas. Diante do exposto, elencou-se como questão norteadora para a pesquisa “*Que compreensões e usos das noções topológicas emergiram durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil?*”.

Como objetivo geral da pesquisa, buscou-se: Na perspectiva da fala de formadores de professores que vivenciaram o MMM, e no processo de diálogo com fontes documentais escolares e livros didáticos, identificar os usos e compreensões que emergiram a respeito das noções topológicas durante o MMM.

Como objetivos específicos da pesquisa foram elencados:

- Conhecer os diferentes usos atribuídos às noções topológicas no ensino primário, durante o MMM, a partir da análise de atividades e textos da época, a exemplo dos livros de Zoltan Dienes, planos de aula e fichas de atividades e livros didáticos localizados, principalmente, no acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha;
- Identificar e analisar as diferentes compreensões sobre a presença das noções topológicas no ensino primário a partir da análise das narrativas, oriundas de entrevistas realizadas com professoras-pesquisadoras que vivenciaram este movimento como professoras-estudantes de Curso Normal ou de licenciatura em Matemática ou Pedagogia.

Para a constituição e análise das fontes houve uma aproximação da metodologia proposta por Carlo Ginzburg (1989) e sua ideia de paradigma indiciário. Segundo Ginzburg, a produção histórica se dá no processo de busca por vestígios, rastros, pequenos detalhes e sinais considerados pelo autor como indícios. Ginzburg (1989) acredita que estes indícios constituem “zonas privilegiadas”, que permitem decifrar uma realidade opaca e pouco conhecida, tornando-se fontes (GINZBURG, 1989, p. 177).

A produção das fontes ocorreu principalmente de três formas: levantamento de documentos escritos escolares, análise de livros didáticos e entrevistas narrativas. Um primeiro olhar para os documentos trouxe questionamentos e dúvidas que não foram respondidas somente analisando-os, daí a necessidade de se buscar livros didáticos da época, além de pessoas que vivenciaram o MMM e que pudessem de alguma forma auxiliar na compreensão sobre as noções topológicas e seus usos nos processos de ensino e aprendizado da matemática no primário. Nesta perspectiva, a pesquisa aproximou-se, em especial, das entrevistas narrativas.

Autores como Schutze (2011), defendem a entrevista narrativa como um bom dispositivo de produção de dados em investigações focadas na trajetória de formação dos professores. Neste tipo de entrevista, o entrevistado tem espaço para se expressar, pensar no contexto histórico, social e cultural em questão, além de acessar suas memórias relacionadas ao tema em questão.

Para as entrevistas, foram escolhidas pessoas que vivenciaram e/ou estudaram o MMM. Buscou-se nomes relacionados à formação de professores neste período, professores tanto do primário, como do Curso Normal, assim como pesquisadores que estudam sobre a matemática moderna, ou que tenham produzido estudos sobre as noções topológicas no ensino primário. Alguns dos nomes foram sugeridos pelas próprias entrevistadas ou localizados a partir da análise de alguns materiais.

A partir do processo de análise, entendido como o diálogo com as fontes, e cruzamento entre elas, foi construída uma narrativa histórica que expressa os percursos da pesquisa e as compreensões desenvolvidas, de modo a responder à pergunta norteadora. O percurso teórico-metodológico da pesquisa será abordado com mais detalhes no segundo capítulo.

Esta dissertação está organizada em quatro capítulos, além da introdução, considerações finais e anexos. O primeiro capítulo contém uma contextualização a respeito do tema em questão, justificando essa escolha e os acontecimentos que levaram ao desenvolvimento desta pesquisa.

No segundo capítulo está descrito o percurso teórico-metodológico da pesquisa. O trabalho apoia-se, principalmente, na produção e análise de documentos escolares, livros didáticos e entrevistas narrativas.

As compreensões das noções topológicas durante o MMM são apresentadas no terceiro capítulo, que foi escrito com base em textos e livros que abordam tais noções, além da fala das entrevistadas e dos indícios encontrados nos documentos escolares.

No quarto capítulo, são apresentados os usos que eram feitos das noções topológicas durante o Movimento da Matemática Moderna, tomando como referência os elementos que emergiram do processo de diálogo estabelecido entre as falas das entrevistadas, os livros didáticos e os documentos escolares localizados e analisados ao longo da pesquisa.

As considerações finais retomam os objetivos e a questão norteadora da pesquisa, apresentando os resultados de forma sintética e apontando possíveis novos encaminhamentos, além de apresentar novas questões e indagações acerca das noções topológicas na relação com os processos de ensinar e aprender a matemática escolar.

Por fim, nos anexos, é explicitado o protocolo utilizado para as entrevistas e as narrativas produzidas por cada entrevistada. Buscou-se tomar os cuidados éticos próprios da pesquisa com seres humanos, e as participantes preencheram e assinaram o termo de autorização para a publicação das transcrições das entrevistas e fotografias das entrevistadas.

1. CONTEXTUALIZANDO O TEMA DA PESQUISA

Durante minha experiência na graduação como bolsista de iniciação à docência, já relatada anteriormente, aproximei-me do Acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha e da História da Educação Matemática. Inicialmente, decidi que desenvolveria meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) neste campo de investigação, estudando algum material ou assunto relacionado a este acervo.

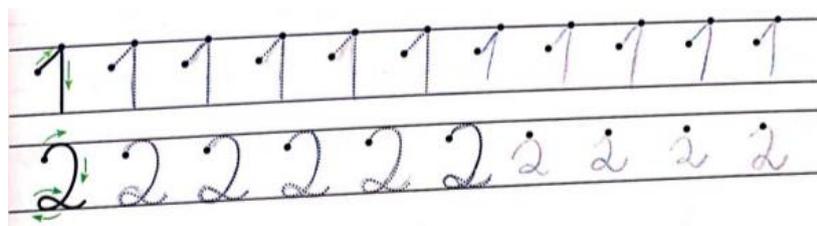
Dentre a variedade de materiais encontrados, deparei-me com uma caixa de papel intitulada “*conceitos topológicos*”. Esta caixa continha listas de atividades, traduções e fichas, materiais organizados pelas normalistas do Instituto de Educação, provavelmente entre os anos de 1960 e 1970. Nunca havia ouvido falar sobre tais conceitos, conversando com minha orientadora, decidi que gostaria de estudá-los e entender melhor do que se tratava.

Iniciei então meu Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, voltado ao estudo dos conceitos topológicos², em especial, me detive a analisar um caderno de Didática da Matemática de uma ex-aluna do Curso Magistério do Instituto de Educação General Flores da Cunha, dos anos 1980 e que indicava a presença de tais conceitos. Com o desenvolvimento daquele trabalho, estudei não só sobre os conceitos topológicos, terminologia que na presente pesquisa foi alterada para noções topológicas, mas também fiz algumas leituras sobre o Movimento da Matemática Moderna, com o intuito de poder estabelecer algumas relações com o caderno em questão.

Durante esse estudo, buscando materiais que abordassem os conceitos topológicos, encontrei muito pouco material, tanto de livros como artigos online. A maioria dos materiais localizados eram datados da época do MMM. Entretanto, ao olhar para alguns livros didáticos de Matemática, voltados para o primeiro ano do Ensino Fundamental, do ano vigente (2018), deparei-me com atividades abordando tais conceitos (Figuras 1 e 2).

² Durante o desenvolvimento do TCC e partes desta pesquisa, ainda era utilizado este termo, posteriormente, optou-se por “noções topológicas”. Esta escolha será explicada no capítulo 3.

Figura 1 – Escrita dos números.



Fonte: Projeto Ápis – Alfabetização Matemática (v. 1), editora Ática, 2016.

Figura 2 – Mesmo sentido ou sentidos contrários.



Fonte: Projeto Ápis – Alfabetização Matemática (v. 1), editora Ática, 2016.

Fiz uma análise inicial de 10 livros didáticos de matemática do primeiro ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo PNLD para o ano de 2019. Com isso, pude constatar que as noções topológicas ainda estão presentes nas atividades apresentadas pelos livros, entretanto, sem o termo noções topológicas, nem conceitos topológicos, ou nada explicitamente relacionado a topologia em nenhum dos exemplares. A forma com que as noções aparecem diverge em alguns livros, assim como a unidade em que são abordadas, mas, apenas em um livro tais noções são pouco trabalhadas, nos demais, elas estão presentes de forma significativa, considerando a quantidade e frequência com que aparecem.

Nos livros didáticos não há informações sobre o objetivo de tais atividades. Também foram encontrados poucos textos escritos atualmente que se referiam a noções topológicas ou a estudos que as situam no ensino da Matemática nos dias de hoje, disponíveis online. Então, porque elas permanecem presentes nos livros didáticos?

Durante uma entrevista realizada para o TCC, com Luciane Cardoso de Freitas³, professora de Matemática do Ensino Fundamental, ela já havia

³ Luciane foi entrevistada para o Trabalho de Conclusão de Curso, em 2018. Ela é professora de Matemática na rede privada de Porto Alegre e cursou o Magistério no Instituto de Educação General Flores da Cunha (CAVALHEIRO, 2018).

manifestado em sua fala a presença dos conceitos topológicos⁴ na sala de aula atual, principalmente na escola em que trabalha, afirmando que desde os cinco anos as crianças trabalham noções topológicas e, também, com noções de conjuntos. Entretanto, demonstrou certa inquietação pelo fato de que, segundo ela, algumas escolas deixam estes conceitos de lado, *“têm escolas que já tiraram, deixaram de trabalhar, em função de não entenderem, o objetivo e nem que isso vai dar base para o aluno seguir adiante”* (FREITAS, 2018).

Em alguns momentos de sua fala Luciane ressalta que os conceitos topológicos, assim como com os conjuntos, devem ser trabalhados com os alunos desde cedo, para dar sequência e fundamentar o que, segundo ela, viria depois, a construção do número. Assim, ela dá a entender que os conceitos auxiliariam na construção do conceito de número. Já em outros momentos, Luciane associa os conceitos topológicos ao processo de construção da escrita, a grafia de números e letras, e também à introdução à geometria euclidiana:

(...) é fundamental na alfabetização até hoje eu falo pras professoras que trabalham com os pequenos, que essa questão da topologia tem que estar presente nas atividades diárias da sala de aula, na hora de cantar uma música, na hora de fazer educação física, porque é um diferencial dos alunos que trabalham isso depois pra tudo. Na escrita do número, na escrita deles e também na parte da matemática, na geometria, é o que vai vir depois (FREITAS, 2018).

Com isso, Luciane parece acreditar que os conceitos topológicos tenham diversas finalidades no ensino, não só na Matemática, mas em outras práticas e disciplinas, na vida da criança de um modo geral. Porém, ela sinalizou para o fato de que muitos professores, embora abordem de alguma forma os conceitos topológicos em suas aulas, provavelmente porque estão presentes nos livros didáticos, não sabem o porquê de eles estarem ali:

Tem alguns livros, antigamente tinha mais, dos pequeninhos do primeiro ano, livros de matemática do primeiro ano, a parte inicial do livro era assim né, tinha bastante do estudo de topologia, mas nada tinha o nome de topologia e nem a professora sabe que tá sendo trabalhado isso. E ela nem sabe por que se trabalha isso, as professoras não sabem. Se tu fores perguntar pra elas o porquê, elas

⁴ Todas as pesquisas realizadas durante o Trabalho de Conclusão de Curso ainda usam o termo “conceitos topológicos”.

não sabem te dizer, nem sabem esse nome. Elas dizem “por que ta trabalhando isso aqui? Eles já sabem disso”. (FREITAS, 2018).

Na fala de Luciane já é possível perceber essa divergência sobre as finalidades de se trabalhar com os conceitos topológicos, em alguns momentos ela aponta para a importância no desenvolvimento matemático da criança, mas em outros faz associações entre os conceitos e o processo de escrita, considerando-os um diferencial no momento da escrita do número e até mesmo das letras do alfabeto, ao citar que *“a parte de aberta, fechada (...) só quem trabalha com criança pequena sabe a dificuldade que eles têm de escrever os números”* (FREITAS, 2018).

Movida pelas indagações iniciais e por essas dúvidas que surgiram a partir da entrevista com Luciane, além da pequena quantidade de informações e materiais encontrados sobre os conceitos topológicos, dei continuidade a esses estudos na pesquisa de mestrado.

Os conceitos topológicos aparecem de forma significativa durante o MMM, tanto em planos de aula como em livros didáticos destinados aos primeiros anos escolares e pré-escolares, mas, por quê? Será que os conceitos topológicos são oriundos das ideias escolanovistas, devido a alguns indícios de que eles já eram trabalhados neste período? Com qual finalidade eles eram abordados em sala de aula? Por aparecerem principalmente como conteúdos do ensino primário, quais as conexões com o processo de construção do número? Quais as relações com a construção do pensamento matemático da criança?

No campo da Educação, mais precisamente no ensino de matemática, os estudos sobre topologia ganharam ênfase a partir de Jean Piaget. Piaget e Inhelder (1993) defendem que o desenvolvimento pela criança começa a partir de intuições topológicas e somente depois torna-se euclidiano (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 12). Estes autores consideram as relações topológicas elementares fundamentais para o desenvolvimento da noção de espaço na criança e escreveram sobre isso no livro *“A representação do espaço na criança”* (1993).

Neste livro, os autores discutem sobre o percurso que a criança faz para desenvolver as noções espaciais, dividindo-o em etapas, que vão desde o desenvolvimento de habilidades visuais e motoras da criança, envolvendo as

relações topológicas, até a criança conseguir compreender o espaço em que está inserido e desenvolver as relações euclidianas.

Piaget (1993) destaca que há cinco relações espaciais elementares, dadas a partir da percepção primitiva das crianças, quando se inicia a construção do espaço. Estas relações, segundo ele, seriam uma parte da geometria, denominada “topologia”, que Piaget (1993) acredita ser a mais primitiva, anterior à geometria euclidiana.

Dentre essas relações, para Piaget (1993), a mais elementar é a de “vizinhança”, sendo a condição mais simples de toda a estrutura perceptiva. Ele define vizinhança como a “proximidade dos elementos percebidos num mesmo campo” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 21). A segunda relação espacial considerada elementar por Piaget (1993) é a de “separação”. A separação consiste em conseguir distinguir dois elementos vizinhos. A criança olha para o todo e a partir da separação consegue diferenciar os elementos observados.

A terceira relação espacial, considerada por Piaget (1993) é a relação de “ordem”. Segundo ele, essa relação se estabelece entre elementos, “ao mesmo tempo vizinhos e separados, quando distribuídos em sequência” (PIAGET; INHELDER, 1993 p. 22). A quarta relação elementar, segundo Piaget (1993), é a de “circunscrição”, de envoltório. Seria a capacidade da criança de perceber um objeto “entre” outros elementos, como por exemplo, um objeto dentro de uma caixa fechada, ou até mesmo o nariz, que é enquadrado, envolto, pelo resto do rosto.

Por fim, após as relações perceptivas de “vizinhança”, “separação”, “ordem” e “circunscrição”, Piaget (1993) traz a relação de “continuidade”. Para ele o mais importante é que a criança consiga “saber em que sentido o conjunto de um campo perceptivo constitui um campo espacial contínuo” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 23).

Inspirado nas idéias de Piaget (DIENES, 1967), os estudos do pesquisador Zoltan Paul Dienes nortearam ações e percepções sobre a formação de professores durante o MMM, dando ênfase às noções topológicas.

Dienes, assim como Piaget, acreditava que as noções topológicas, desenvolvidas pela criança a partir da exploração do espaço a sua volta, antecediam os processos de contagem e do número em si, sendo anteriores as noções euclidianas. Estes autores defendiam que o estudo das relações

topológicas era necessário desde cedo, para que as crianças compreendessem o espaço, utilizando noções presentes no seu dia a dia.

Atualmente, ainda é possível encontrar resquícios das noções topológicas, tanto em orientações e normativas como nos livros didáticos de Matemática. Silva (2018) destaca que devido à conexão existente entre a Geometria e a Topologia, é possível aliar o ensino de conceitos topológicos ao estudo da geometria durante toda a formação básica, sem afastar-se das normativas vigentes (SILVA, 2018).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) é possível identificar a presença das noções topológicas, mesmo que este termo e nenhum outro relacionado à topologia seja mencionado, a exemplo do fragmento a seguir.

[...] estimular os alunos a progredir na capacidade de estabelecer pontos de referência em seu entorno, a situar-se no espaço, deslocar-se nele, dando e recebendo instruções, compreendendo termos como esquerda, direita, distância, deslocamento, acima, abaixo, ao lado, na frente, atrás, perto, para descrever a posição, construindo itinerários (BRASIL, 1997, p. 49).

Na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) da Educação Infantil é possível perceber a presença das noções topológicas, destacadas nos Campos de Experiências: “Corpo, Gestos e Movimentos” e “Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações”. Em ambos os campos as noções são recomendadas nos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para faixa etária de crianças “bem pequenas” (1 ano e 7 meses a 3 anos e 11 meses).

(EI02CG02) Deslocar seu corpo no espaço, orientando-se por noções como em frente, atrás, no alto, embaixo, dentro, fora etc., ao se envolver em brincadeiras e atividades de diferentes naturezas (BNCC – EI, 2018, p. 47).

(EI02ET04) Identificar relações espaciais (dentro e fora, em cima, embaixo, acima, abaixo, entre e do lado) e temporais (antes, durante e depois) (BNCC – EI, 2018, p. 51).

Nas orientações da Base Nacional Comum Curricular (2018) de Matemática para o primeiro ano do Ensino Fundamental também é possível reconhecer a presença das noções topológicas, principalmente na unidade

temática “Geometria”, nos Objetos de Conhecimento “Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado”, em que são associadas principalmente a ideia de localização de pessoas e de objetos no espaço.

A presença, de atividades que explorem noções topológicas nos livros didáticos atuais e em documentos, como a BNCC, nos provoca a olhar para o passado buscando por respostas sobre o porquê da permanência de tais atividades e quais os possíveis argumentos para justificar a inserção das noções topológicas nos currículos dos primeiros anos escolares. Nesta perspectiva, é importante compreender as ideias que caracterizaram o Movimento da Matemática Moderna no Brasil e aprofundar os estudos sobre a construção do número pela criança.

Assim como entender o MMM é importante para essa pesquisa, compreender as ideias de Zoltan Paul Dienes, pesquisador matemático amplamente reconhecido por seus trabalhos durante o Movimento da Matemática Moderna e tido como referência pelas normalistas do IE neste período, também se faz necessário. Dienes define a topologia como “o estudo das propriedades do espaço não afetadas por deformações contínuas” (DIENES; GOLDING, 1969, p. 2). Esta foi a única definição estrita encontrada sobre topologia/noções topológicas da época do MMM durante o desenvolvimento dessa pesquisa, o que não significa que não haja outras, a que não tive acesso. No mesmo livro que traz esta definição, Dienes (1969) apresenta uma série de atividades que abordam os conceitos topológicos, entretanto, não explicita ou avança na discussão sobre sua finalidade, ou mesmo sobre a importância destas atividades.

Há indícios, analisando a documentação do acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha, de que as ideias de Dienes e deste livro serviram como inspiração para as normalistas durante o MMM, na produção de fichas de atividades e de planos de aula. Mas, será que elas tinham a mesma concepção que Dienes, acerca das noções topológicas?

Diante do exposto, realizou-se uma busca por pesquisas de dissertações e teses que pudessem auxiliar no desenvolvimento desse estudo, apresentado na próxima seção.

1.1 Pesquisas relacionadas ao tema

Como um dos passos desta pesquisa, buscou-se trabalhos que abordassem as noções topológicas, a fim de conhecer o que já havia sido produzido sobre o tema e quais concepções outros autores têm acerca de tais noções. Realizei uma busca na Plataforma de Teses e Dissertações da Capes, obtendo dez resultados para o termo “conceitos topológicos” (Quadro 1) e nove na busca pelo termo “noções topológicas” (Quadro 2), entretanto, um dos resultados repetiu-se nas duas buscas. Ao todo, encontrei 18 trabalhos, sendo quatro teses de doutorado e quatorze dissertações de mestrado.

Quadro 1 – Busca por “conceitos topológicos”.

Título	Autor	Tipo e ano da defesa	Instituição De Ensino
Some Algebraic Topological Concepts In Critical Point Theory	Não Informado	Dissertação – 1987	Universidade Federal de Pernambuco
Construção automática de operadores morfológicos por aprendizagem computacional	Hae Yong Kim	Tese – 1997	Universidade de São Paulo
A "Carta De Preste João": Análise Topológica	Luiz Gonzaga Teixeira	Tese – 1999	Universidade de São Paulo
Busca da Topologia do Universo usando Fontes Cósmicas Discretas	Germán Ignacio Gomero Ferrer	Tese – 2000	Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Estudo de defeitos Topológicos em Cristais Líquidos do ponto de vista Cosmológico	Fernando José Antônio	Dissertação – 2009	Universidade Estadual de Maringá
Sistemas Dinâmicos de Eventos Discretos com aplicação ao Fluxo Geodésico em Superfícies Heperbólicas	Daniel Pedro Bezerra Chaves	Tese – 2011	Universidade Estadual de Campinas
Uma introdução a Análise Real: Funções Contínuas Não Diferenciáveis e Fractais	Henrique Carvalho Rodrigues	Dissertação – 2016	Universidade Federal de Goiás
O Lema De Sperner como uma ferramenta para realizar divisões	Julio Cesar Santos Da Fonseca	Dissertação – 2017	Universidade Federal da Bahia
Descobrimo a Topologia: Um compêndio de fundamentos teóricos e atividades lúdicas	Camila Tolin Santos Da Silva	Dissertação – 2018	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita

para auxiliar na formalização de conceitos topológicos no Ensino Básico.			Filho
Prevenção de dificuldades na construção do espaço topológico por meio de intervenção pedagógica com ênfase na área psicomotora e tomada de consciência com alunos da Educação Infantil	Lilian Alves Pereira	Dissertação – 2009	Universidade Estadual de Maringá

Fonte: autoral.

Quadro 2 – Busca por “noções topológicas”.

Título	Autor	Tipo e ano da defesa	Instituição de Ensino
O Desenho das Crianças de 6 a 8 Anos: Os aspectos cognitivos das primeiras noções topológicas e suas representações	Fernanda Scaciota Simões Da Silva	Dissertação – 2004	Universidade Federal Do Paraná
O desenvolvimento de habilidades de orientação espacial pela mediação pedagógica do software Logo: Possibilidades e limites para a Educação Geográfica no ensino fundamental	Vandeir Robson Da Silva Matias	Dissertação – 2005	Universidade Federal De Minas Gerais
Prevenção de dificuldades na construção do espaço topológico por meio de intervenção pedagógica com ênfase na área psicomotora e tomada de consciência com alunos da educação infantil	Lilian Alves Pereira	Dissertação – 2009	Universidade Estadual De Maringá
Conhecimentos Geométricos na Educação Infantil: O que conhece o professor?	Cristiane Murakami	Dissertação – 2009	Universidade Estadual de Maringá
Dienes eos Guias Curriculares de Matemática de São Paulo na década de 1970: Um estudo sobre as influências	Leyla Chiste Fietta	Dissertação – 2010	Universidade Anhanguera de São Paulo
Visualização Espacial Na Perspectiva Da Epistemologia Genética	Carmen Machermer De Vasconcelos Moniz	Dissertação – 2013	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Matemática, Geografia e Cidadania: Contribuições de um jogo educativo interdisciplinar para o desenvolvimento de habilidades no 3º ano do ensino fundamental	Ceres De Oliveira Jendrieck	Dissertação – 2017	Universidade Federal do Paraná
A construção de conhecimentos Cartográficos e Geográficos: Um estudo acerca da representação do espaço e sua relação com o conhecimento social na perspectiva piagetiana	Guilherme Aparecido de Godói	Dissertação – 2018	Universidade Estadual de Londrina
Noções de topologia nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Uma possibilidade investigativa por meio software Scratch	Priscilla Frida Salles Tojeiro	Dissertação – 2019	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Fonte: autoral.

Dentre os dezoito trabalhos obtidos como resultado na busca, oito deles não foram localizados. Nos demais, foram lidos os resumos, feito uma verificação dos itens do sumário e a leitura dos tópicos que poderiam ter algo relacionado à presente pesquisa. Seis trabalhos foram desconsiderados, por aparentarem ter pouca, ou nenhuma, relação com a pesquisa, não contribuindo com o tema em questão. Assim, permaneceram quatro trabalhos para uma leitura mais pormenorizada.

A dissertação *“Descobrimo a Topologia: um compêndio de fundamentos teóricos e atividades lúdicas para auxiliar na formalização de conceitos topológicos no Ensino Básico”* (SILVA, 2018), apresenta elementos sobre a história do conteúdo matemático “Topologia”, descrevendo-a como um “ramo da matemática, sutilmente entrelaçado com a Geometria”. Segundo a autora, a topologia teve maior destaque nas escolas durante as décadas de 1960 e 1970, com o Movimento da Matemática Moderna.

Silva (2018) tem como objetivo principal do seu trabalho montar um compêndio de informações acerca da Topologia, de modo a fornecer um suporte para sua abordagem no ensino básico. Para isso, a autora parte de fatos históricos, formalizações de conceitos, como espaços topológicos, e apresenta sugestão de atividades que abordam a topologia para o ensino básico. Tais atividades, segundo a autora, podem ser trabalhadas em conjunto

com o ensino da geometria e envolvem principalmente a confecção de dobraduras e origamis. Dentre as atividades apresentadas, a maioria é direcionada para os anos finais do Ensino Fundamental, havendo pouca discussão sobre os anos iniciais.

O trabalho de Silva (2018) contribui para a pesquisa no que diz respeito aos elementos históricos sobre o início da disciplina de Topologia e o seu desenvolvimento. Entretanto, como o foco de sua pesquisa é sobre a Topologia como uma disciplina do Ensino Superior, este trabalho acaba por distanciar-se do que se está a investigar.

O estudo intitulado “*O desenho das crianças de 6 a 8 anos: os aspectos cognitivos das primeiras noções topológicas e suas representações*” (SILVA, 2004) tem como tema central “a apropriação cognitiva de noções matemáticas topológicas, suficientes para engendrar geometricamente o pensamento acerca do espaço e a construção de significativas relações espaciais: de vizinhança, de separação, de ordem, de circunscrição ou envoltório e de continuidade” (SILVA, 2004, p. 8). Para isso, a autora focou seu estudo em desenhos infantis e nas duas descrições dos desenhos, baseando-se na epistemologia genética de Jean Piaget.

Para a produção dos dados, Silva (2004) realizou quatro sessões, com 25 encontros no total, com crianças da primeira e segunda série⁵ do Ensino Fundamental, selecionadas de forma aleatória. As tarefas das sessões foram discutidas de modo coletivo, mas cada criança produziu seus materiais de forma individual.

Ao longo dos encontros, os alunos formaram figuras geométricas com massinha de modelar, desenhando com lápis e papel, utilizando palitos de fósforos, palitos de churrasco, interação com o software logo, realizaram a leitura de um livro e a representação de elementos do mesmo com lápis e papel, relacionando seus desenhos com figuras geométricas planas e suas relações topológicas, ao explicarem suas construções. Para a análise dos dados a autora teve como objetivo categorizar as primeiras noções topológicas e a representação no espaço, descritas pelos alunos em seus desenhos.

⁵ Em 2004 ainda se falava em séries escolares e não anos.

Devido a alguns dos resultados do estudo, Silva (2004) percebeu que durante o processo de construção dos desenhos as crianças desenvolveram a compreensão das noções topológicas, por meio de tentativas e levantamento de hipóteses. Ela também identificou a presença das noções topológicas através das representações de “linhas fronteiriças”, além da abordagem das noções de vizinhança e separação, ao determinarem as fronteiras de cada elemento desenhado.

Este trabalho tem aproximações com essa pesquisa, no sentido que aborda as mesmas noções que foram estudadas nas atividades desenvolvidas com os alunos. A autora associa tais noções ao ensino da Geometria, o que fornece indícios do papel que ela acredita que eles tenham no ensino da Matemática.

A dissertação de mestrado “*Visualização espacial na perspectiva da epistemologia genética*” (MONIZ, 2013) tem como problema central da pesquisa buscar compreender “*Como promover a construção da visualização espacial, na disciplina de Geometria Descritiva, fundada em estudos de Epistemologia Genética?*”. Para responder tal questão, Moniz (2013) realizou uma sequência didática durante aulas de Geometria Descritiva do Curso Técnico em Edificações da Escola Técnica Parobé, de Porto Alegre - RS.

Em suma, o trabalho “descreve uma proposta de ensino para Geometria Descritiva, com o objetivo de desenvolver a visualização espacial, elaborada com base na Epistemologia Genética, e analisa sua prática” (MONIZ, 2013, p. 11). A sequência didática proposta pela autora se apoia inicialmente em noções topológicas, para então seguir na direção da construção das noções euclidianas.

A pesquisadora realizou 11 encontros com as turmas, em que abordou conteúdos da Geometria Descritiva, trabalhando de modo, segundo ela, contrário ao tradicional, seguindo uma ordem inversa da que normalmente os professores utilizam. A autora parte do estudo dos sólidos geométricos para chegar às noções de plano, reta e ponto.

Moniz (2013), apoiada em Piaget (1993), defende que as noções topológicas “são as primeiras noções a se constituírem em operações mentais” (MONIZ, 2013, p. 25), sendo assim, ela considera estas noções como elementares. A autora situa as noções topológicas como o ponto de partida

para o entendimento das noções representativas, que devem ser seguidas pelas noções projetivas para então estudarem-se as euclidianas.

Após a realização da sequência didática, Moniz (2013) relata que todos os alunos apresentaram um significativo crescimento acerca de suas representações das noções espaciais, em comparação às representações realizadas no início da sequência. Segundo ela, o desenvolvimento e o êxito dos alunos já puderam ser percebidos ao longo do semestre, durante a realização da sequência, o que tornou desnecessário realizar uma prova final, característica da disciplina em anos anteriores.

Como um dos resultados de sua pesquisa, Moniz (2013) destaca então que é possível, tomando como referência a Epistemologia Genética, a promoção e a construção da visualização espacial na disciplina Geometria Descritiva. Ela defende que com a sequência didática apresentada é possível aumentar as possibilidades apresentadas na disciplina, além de desafiar a aprendizagem dos alunos, aumentando suas capacidades de aprender. Este trabalho deixa clara a concepção que a autora tem acerca dos conceitos topológicos, relacionando-os ao estudo da Geometria.

A dissertação *“Matemática, Geografia e Cidadania: Contribuições de um Jogo Educativo Interdisciplinar para o Desenvolvimento de Habilidades no 3º Ano do Ensino Fundamental”* (JENDREIECK, 2017) apresenta um jogo interdisciplinar criado pela autora, o *“Localiza-se”*. A questão que norteia este estudo é *“Que contribuições o jogo interdisciplinar “Localize-se” pode proporcionar para o desenvolvimento de habilidades das disciplinas de matemática e geografia para estudantes de 3º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Curitiba?”*.

A autora discorre sobre as funções do jogo no ensino e aprendizagem dos alunos e defende que os jogos são instrumentos capazes de oportunizar uma aprendizagem mais significativa do que as aulas tradicionais.

Como já está descrito na questão norteadora, o jogo foi aplicado com uma turma do terceiro ano do Ensino Fundamental. Criado pela autora, o jogo tem como objetivo principal auxiliar no desenvolvimento de habilidades das disciplinas de Geografia e de Matemática. Segundo Jendrieck (2017), a escolha destas habilidades ocorreu a partir da leitura dos cadernos de alfabetização matemática do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade

Certa - PNAIC (BRASIL, 2014), do plano curricular preliminar de Curitiba (CURITIBA, 2016c), e do documento “Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental” (BRASIL, 2012).

Dentre as habilidades pretendidas por Jendrieck (2017) no desenvolvimento do jogo “*Localiza-se*”, a princípio, é possível perceber a presença das noções topológicas especificamente em uma delas:

Utilizar noções topológicas – utilizar noções de “para frente” e “para trás” para movimentar o carrinho adequadamente no tabuleiro, obedecendo às situações do jogo (como um sinal de trânsito do tabuleiro ou o sorteio de uma direção no dado, por exemplo). Utilizar noções como “mais próximo” e “mais distante” para tomar decisões sobre trajetos (JENDRIECK, 2017, p. 59).

O jogo contém um tabuleiro com pontos de uma cidade, cartas, dados e carrinhos que representam as pessoas que estão jogando. O objetivo é que o jogador colete dez “Cartas Estrela” diferentes e então entre no estacionamento da cidade. Não me atarei a descrever o jogo, mas é importante destacar a presença das noções topológicas que se dá principalmente na forma com que o jogador deve orientar-se no tabuleiro e também no dado a ser jogado, que possui em suas faces conceitos como “para frente” e “para trás”.

Como um dos resultados desta pesquisa, Jendrieck (2017) destaca que a partir dela, foi possível explorar a interdisciplinaridade entre Geografia e Matemática durante todo o jogo, segundo ela,

“(…) tanto pelos conteúdos e objetivos que são copropriedade entre as duas disciplinas, quanto porque cada jogada dá origem a situações que envolvem conhecimentos e habilidades das duas disciplinas ao mesmo tempo” (JENDRIECK, 2017, p.140).

Com isso, a autora enfatiza que em situações como as decisões tomadas a cada jogada o pensamento interdisciplinar era explorado. Sendo assim, para a tomada de decisão a cada jogada, era possível, segundo a autora, fazer uso do pensamento interdisciplinar.

O trabalho de Jendrieck (2017) cita as noções topológicas e atenta para o fato de que tais noções estão presentes em diversas normativas de sua região, em Curitiba (PR). Entretanto, a autora não discorre sobre a utilização

das noções, mais precisamente sobre o papel delas na Matemática, apenas faz uso das mesmas durante o jogo. Outra contribuição desta pesquisa é a associação das noções topológicas com outras disciplinas, como a Geografia, por exemplo.

A dissertação de mestrado *“Noções de Topologia nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Uma possibilidade investigativa por meio do software Scratch”* (TOJEIRO, 2019) apresenta uma sequência de atividades que abordam noções introdutórias de Topologia. A autora acredita que é a partir das noções topológicas que a criança inicia o processo de construção do espaço. A questão norteadora desta pesquisa é *“Como os estudantes se aproximaram de características descritas pelos teoremas desenvolvidos por Leonard Euler que deram origem à Teoria dos Grafos por meio de tarefas investigativas utilizando o software Scratch?”*.

A sequência consiste em nove tarefas desenvolvidas no software Scratch, divididas em 5 encontros. O objetivo principal da autora é realizar a abordagem de noções topológicas com alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a partir da utilização do software Scratch, de modo a observar como estes alunos se aproximam dos teoremas que sustentam a “Teoria dos Grafos” por meio da Investigação Matemática. Em suma, Tojeiro (2019) apresentou aos alunos 8 grafos, em que os estudantes deveriam traçar percursos, buscando o melhor trajeto.

A autora traz ainda um apanhado acerca do ensino da Topologia nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, considerando-a como um ramo da Geometria destinada a estudar as características qualitativas, além daquelas referentes às formas que não se alteram ao serem deformadas, mantendo as suas propriedades originais. Segundo Tojeiro (2019) as primeiras noções que as crianças desenvolvem são topológicas, e ela cita Lorenzato (2008) para defini-las: noções de vizinhança, interior e exterior, continuidade, ordem, separação e fronteira (LORENZATO, 2008). Tojeiro (2019) ainda embasa e explica cada uma destas noções a partir das explicações dadas por Piaget (1993) sobre elas.

Tojeiro (2019) pretendeu, com as atividades escolhidas, que os alunos se aproximassem de elementos e características abordados em Teoremas desenvolvidos por Euler, como estudo de vértices e arestas e paridade dos

números. Como alguns dos resultados deste estudo, a autora destaca que os alunos “traçaram itinerários, exploraram as noções espaciais, investigaram, testaram suas hipóteses diversas vezes na busca de regularidades e se aproximaram de características dos Teoremas” (TOJEIRO, 2019, p. 9).

Segundo Tojeiro (2019), atividades como os “Passeios de Euler”, que consistem em traçar caminhos pelos grafos, podem trazer contribuições para os alunos, no sentido que faz com que eles, ao traçarem os itineraries, realizem discussões sobre os movimentos dos personagens, como para a direita/esquerda, para frente/para trás. Tais atividades ainda permitem que os alunos “façam relações com a Geometria Euclidiana quanto ao estudo das formas, vértices, arestas e faces e ainda conceitos numéricos como números pares/ímpares” (TOJEIRO, 2019, p. 115). Ou seja, permitem que os alunos desenvolvam conhecimentos matemáticos previstos como conteúdos a serem ensinados para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Ao olhar para as pesquisas de dissertações e teses localizadas é possível evidenciar a intenção dos pesquisadores de associarem o estudo das noções topológicas à Geometria. Mais precisamente, os autores definem as noções topológicas como sendo as primeiras noções desenvolvidas pelas crianças e que levam ao desenvolvimento da Geometria Euclidiana. No entanto, em nenhum dos trabalhos foi possível perceber alguma conexão entre as noções topológicas apresentadas e mobilizadas com o Movimento da Matemática Moderna.

Chama atenção o fato de somente dezoito trabalhos desenvolverem o tema, e as abordagens se dão em diferentes níveis de ensino e abrangência dos conceitos, o que leva a crer que realmente pouco se estuda sobre tais noções. Assim, trabalhos que abordem esta discussão, tornam-se relevantes para a área da Educação Matemática. Considerando também que não foi localizado nenhum trabalho que aborde as noções topológicas, ou ideias próximas, no contexto do Movimento da Matemática Moderna, há aqui uma brecha interessante para um estudo no campo da História da Educação Matemática.

2. PERCURSO TEÓRICO-METODOLÓGICO DA PESQUISA

A pesquisa desenvolvida situa-se no campo da História da Educação Matemática. Sendo que:

A História da Educação Matemática visa a compreender as alterações e permanências nas práticas relativas ao Ensino e à aprendizagem de Matemática; a estudar como as comunidades se organizavam no que diz respeito à necessidade de produzir, usar e compartilhar conhecimentos matemáticos e como, afinal de contas, as práticas do passado podem – se é que podem – nos ajudar a compreender, projetar, propor e avaliar as práticas do presente. (GARNICA; SOUZA, 2012, p. 40)

Gomes (2010) traz à tona uma discussão sobre a falta de conhecimento das pessoas acerca da História da Educação Matemática. Segundo a autora, os pesquisadores referem-se a ela de forma tão natural, enquanto possivelmente, a maioria das pessoas que não circulam por ambientes acadêmicos nunca refletiu sobre a história das práticas educativas em matemática, chegando até a desconhecer sua existência.

Na verdade, o universo da educação, o mundo escolar e o ensino da matemática estão (ou estiveram) de tal modo presentes em nosso cotidiano, que parecem mesmo naturais, e é muito difícil imaginar que nem sempre eles existiram ou tiveram a mesma aparência com que se apresentam a nós (GOMES, 2010, p. XIX).

Com isso, boa parte das pessoas acredita que a matemática escolar, ensinada nas escolas, não sofre modificações ao longo dos anos, ou sofre influência dos lugares, ensinando-se sempre as mesmas coisas do mesmo jeito. Gomes (2010) chama a atenção ao fato de que pessoas, ditas por ela como “comuns”, e até mesmo alguns professores de matemática, têm dificuldade em perceber as alterações sofridas nos conteúdos, abordagens, concepções e finalidades da educação matemática ao longo do tempo. Olhando para livros didáticos, por exemplo, à primeira vista realmente pode parecer que ao longo dos anos são apresentados os mesmos conceitos, conteúdos e até os mesmos exercícios, é preciso um olhar mais atento e crítico para perceber as alterações, sejam elas inserções, silenciamentos ou abordagens que se alteram com diferentes intencionalidades.

Matos (2006) atenta ainda para o fato de que esse desconhecimento acerca da História da Educação Matemática propaga estereótipos e crenças sobre a matemática, até mesmo, como nos diz o autor, “diabolizações” de certos conceitos, como por exemplo, do “ensino tradicional”. Segundo Matos (2006), quem se dispuser a pesquisar os “documentos educativos históricos” e sobre a escola do passado irá perceber que existem diversas posturas pedagógicas e que “nem os bons velhos tempos eram tão bons como por vezes ouvimos afirmar, nem a escola tradicional utilizaria exclusivamente métodos desadequados” (MATOS, 2006, p. 13).

Mortatti (1999) destaca que abordar historicamente a educação não se trata somente de apresentar uma sucessão de acontecimentos passados, de modo linear e temporal. Para a autora, abordar a educação numa perspectiva histórica significa:

(...) apreender e problematizar, por meio de configurações textuais - as lidas e as produzidas pelo pesquisador -, a simultaneidade entre continuidade e descontinuidade de sentidos a respeito do fenômeno educativo em suas diferentes facetas, simultaneidade essa que caracteriza o movimento histórico e as "temporalidades múltiplas" que nele coexistem. Trata-se, portanto, de uma tendência teórico-metodológica (...) (MORTATTI, 1999, p. 75).

Assim, em todas as fases de uma pesquisa de natureza histórica o papel do pesquisador consiste em um ato de interpretar, de produzir significados e sentidos que vão “desde os processos de recuperação, reunião, seleção e análise de fontes documentais até a produção do texto final da pesquisa” (MORTATTI, 1999, p. 72). Cabe ao pesquisador ler, interpretar, investigar e fazer perguntas a cada um dos textos produzidos durante a pesquisa, a partir de seus objetivos e das fontes constituídas.

Alguns dos passos de uma pesquisa histórica consistem na “recuperação, reunião, seleção e análise de fontes documentais, como mediadoras na produção do objeto de investigação” (MORTATTI, 1999, p. 73). Neste sentido, considera-se os documentos como fragmentos da história, que carregam indícios sobre a sociedade e a época em que foram produzidos e das épocas e lugares pelos quais tais documentos circularam. A natureza desses documentos varia desde textos escritos, normativas, fotografias, recortes de jornais, livros didáticos, planos de aulas, até mesmo narrativas orais de

personalidades envolvidas na história de interesse em questão. Estes documentos compõem as fontes de investigação do pesquisador.

Diante da pergunta “*Para que a História da Educação*” proposta por Nóvoa (2005, p. 10 - 11), Gomes (2010) sintetiza as respostas apresentadas pelo autor, destacando ainda que, apesar de serem voltadas à História da Educação, de modo mais geral, ao refletir sobre elas, o leitor deve levar em consideração as particularidades da História da Educação Matemática:

- 1) é importante o desenvolvimento de uma atitude crítica face aos modismos pedagógicos e a História da Educação, sendo “um dos meios mais eficazes para cultivar um saudável ceticismo”;
- 2) em uma época como a atual, marcada simultaneamente pela globalização, pela circulação de ideias e pela exacerbação de identidades étnicas, culturais, locais ou religiosas, a História pode contribuir para analisarmos melhor o jogo de identidades no espaço educativo;
- 3) a reflexão histórica serve antes para inscrevermos nosso percurso pessoal e profissional entre os criadores da História e compreendermos criticamente “quem fomos” e “como somos” do que para descrever o passado;
- 4) a História é importante para que se compreenda que mudanças são feitas a partir de pessoas e lugares concretos: o aniquilamento da história, seja pela mistificação dos valores do passado, seja pela glorificação de um futuro transformado em prospectiva e em tecnologia contribuiria para o sucesso de políticas conservadoras revestidas de tradição ou inovação; o conhecimento histórico valeria também para que se entenda que mudanças se fazem sempre a partir de pessoas e lugares concretos. (GOMES, 2010, p. XXI e XXII).

Pensando nestas particularidades e nos objetivos desta pesquisa, trabalhou-se com diferentes tipos de fontes: documentos escolares, livros didáticos e entrevistas narrativas. Como documentos escolares, foram considerados documentos e normativas vigentes no período de interesse da pesquisa (MMM), livros e textos produzidos por autores considerados referência durante este período, além de planos e registros de aulas. Os livros didáticos analisados foram escolhidos dentre aqueles que mais circulavam no período e dos autores que aparecem com maior destaque na literatura já produzida sobre o Movimento da Matemática Moderna e o Ensino primário. As entrevistas narrativas foram realizadas com professoras que vivenciaram o período da Matemática Moderna ou que já realizaram estudos acerca das noções topológicas no ensino primário.

O trabalho do pesquisador no processo investigativo não se esgota nos procedimentos de recuperação, reunião, seleção e análise dos documentos,

mas também é necessário que haja a produção de um texto final, uma narrativa histórica. Neste sentido, busquei produzir uma narrativa histórica, construída como o produto do amadurecimento das ideias desenvolvidas ao longo da pesquisa e da trajetória percorrida enquanto pesquisadora em formação.

Para a produção dessa narrativa, tomou-se como ponto de partida responder à questão norteadora, “*Que compreensões e usos das noções topológicas emergiram durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil?*”, e contemplar os objetivos específicos da pesquisa:

- Conhecer os diferentes usos atribuídos às noções topológicas no ensino primário, durante o MMM, a partir da análise de atividades e textos da época, a exemplo dos livros de Zoltan Dienes, planos de aula e fichas de atividades e livros didáticos localizados, principalmente, no acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha;
- Identificar e analisar as diferentes compreensões sobre a presença das noções topológicas no ensino primário a partir da análise das narrativas, oriundas de entrevistas realizadas com professoras-pesquisadoras que vivenciaram este movimento como professoras-estudantes de Curso Normal ou de licenciatura em Matemática ou Pedagogia.

Com essa finalidade, debruicei-me principalmente sobre três tipos de fontes: documentos escolares, livros didáticos e entrevistas narrativas.

2.1 Documentos escolares como fontes históricas

Um dos tipos de fontes consideradas nesta pesquisa são os documentos escolares. De acordo com Kripka, Scheller e Bonotto (2015) é considerada uma pesquisa documental aquela que se utiliza dos documentos, dos mais variados tipos, para extrair informações, a fim de compreender um determinado fenômeno. Seguindo a perspectiva de Le Goff (1999), considerou-se documento histórico como materiais da memória e escolhas do historiador.

Segundo Tozoni-Reis (2009), a pesquisa documental é “uma análise que o pesquisador faz de documentos que tenham certo significado para a organização da educação ou do ensino” (TOZONI - REIS, 2009, p. 42). Neste

sentido, é fundamental primeiro definir o que está sendo considerado como documento.

O dicionário traz como definição para a palavra documento “qualquer objeto ou fato que serve de prova, confirmação ou testemunho: documentos fotográficos” (DICIO, 2020⁶). De forma mais geral, Cellard (2008) entende documento como:

Tudo que é vestígio do passado, tudo o que serve de testemunho [...] pode tratar-se de textos escritos, mas também de documentos de natureza iconográfica e cinematográfica, ou qualquer outro tipo de testemunho registrado do cotidiano, elementos folclóricos (CELLARD, 2008, p. 297).

Para esta pesquisa, em especial, olhei para documentos escolares, como materiais escritos, relacionados à escola, que pudessem fornecer informações, servindo como fontes históricas, sejam elas físicas ou online. Foram escolhidos documentos que pudessem fornecer mais informações sobre quais conteúdos matemáticos eram trabalhados neste período, com o intuito de tentar identificar a presença das noções topológicas, como elas eram compreendidas e abordadas.

Dentre os documentos escolhidos, que serão apresentados no capítulo quatro, selecionei: “Lista de sugestões de atividades Topologia” (figuras 12 e 13); “Estudo nº 12” (figuras 15 e 16); “Topologia” (figura 17); “Topologia – Ficha 1” (figura 18); “Topologia – Ficha 2” (figura 19); além de traduções dos primeiros tópicos do livro “*Topology – The Rubber – Sheet Geometry*” de Johnson e Gleen (1964) (figuras 20 e 21).

Barcellar (2005) lembra que é fundamental contextualizar o documento que se está tomando como fonte, conhecer sua história, sob quais condições foi elaborado e com quais propósitos. Segundo o autor, é extremamente necessário entender “o texto no contexto de sua época” (BARCELLAR, 2005, p. 63). Ginzburg (2002) também destaca que as fontes documentais apresentam um ponto de vista da realidade, condicionado às relações em que foram elaborados e ao contexto de sua época.

Os documentos escritos podem ser considerados uma fonte de dados rica e estável. Além disso, como eles perduram ao longo do tempo, acabam por

⁶ Disponível em <https://www.dicio.com.br/documentos/>.

se tornar a “mais importante fonte de dados em qualquer pesquisa de natureza histórica” (GIL, 2002, p. 45). Apesar disso, Barcellar (2005) chama a atenção para o fato de que “documentos do passado não foram elaborados para o historiador, mas sim para atender a necessidades específicas do momento” (BARCELLAR, 2005, p. 68). No caso dos documentos escolares, foram elaboradas para a realidade da escola, cumprindo finalidades acadêmicas, mas, nesta pesquisa, se tornaram fonte histórica.

Com isso, o historiador precisa investigar suas fontes, a fim de conhecer seus contextos e suas potencialidades. No caso dos documentos escolares, eles tornam-se fontes de uma pesquisa histórica a partir do movimento do historiador, de constituí-los como uma fonte histórica. Segundo Ginzburg (1989) é necessário seguir “sinais, indícios, fios que permitem decifrar zonas privilegiadas dessa realidade” (GINZBURG, 1989, p. 177).

Segundo Funari (2005) a noção de fonte surgiu com o cientificismo do século XIX, devido às preocupações com as descobertas dos fatos verdadeiros.

Fonte é uma metáfora, pois o sentido primeiro da palavra designa uma bica d'água, significado esse que é o mesmo nas línguas que originaram esse conceito, no francês, source, e no alemão, Quell. Todos se inspiraram no uso figurado do termo fons (fonte) em latim, da expressão "fonte de alguma coisa", no sentido de origem, mas com um significado novo (FUNARI, 2005, p. 85).

Pensando nessa metáfora, das fontes documentais “jorriam informações a serem usadas pelo historiador” (FUNARI, 2005, p. 85), assim como jorra água das fontes de água. Mas, essas informações não “jorram” do nada, cabe ao historiador buscá-las e compreendê-las. É preciso a intervenção do pesquisador/historiador para tornar um documento escolar em uma fonte histórica, para compreender não somente o que está ali no papel, mas também a elaboração do documento, que pode contribuir para a construção do historiador.

Assim, ao olhar para os documentos escolares, os quais foram localizados principalmente no acervo do Laboratório de Matemática do IE, busquei olhar não somente para os textos, mas para o período em que foram elaborados, o uso dos conteúdos ali presentes e os possíveis desdobramentos

que eles tiveram ao longo da história. É preciso olhar para além do papel e não apenas se limitar ao que está explícito, assim como nos traz Ginzburg (2002), “(...) o que está fora do texto, está também dentro dele, abriga-se entre as suas dobras: é preciso descobri-lo e fazê-lo falar” (GINZBURG, 2002, p. 42).

2.2 Livros Didáticos como Fontes Históricas

Pensando no papel do livro didático em sala de aula e na sua utilização pelo professor como um instrumento, olhar para ele nos permite vislumbrar uma parte da sala de aula, ou do que deveria ser trabalhado nela. O livro pode servir como um guia do professor, mostrando qual caminho ele segue. Com isso, a análise de livros didáticos permite criar conjecturas e encontrar indícios do trabalho realizado em sala de aula.

Valente (2008) sugere que talvez “(...) a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos” (VALENTE, 2008, p. 141). O autor levanta essa hipótese, pois a trajetória da matemática escolar pode ser lida nos livros didáticos, desde a origem do ensino de matemática como um saber técnico militar, quando, ao que tudo indica, foram escritos os primeiros livros didáticos de matemática no Brasil: *Exame de Artilheiros*, em 1744 e *Exame de Bombeiros*, em 1748 (VALENTE, 1999), até a consolidação da matemática escolar no Brasil como é hoje.

Com isso, Valente (2008) acredita que existe uma dependência dos cursos de matemática, do ensino de matemática, aos livros didáticos e que esta dependência ocorre desde as primeiras aulas que originaram a matemática que é ensinada atualmente na escola básica. Sendo assim, a História Cultural coloca os livros didáticos como uma fonte de pesquisa para a história dos saberes escolares.

Bittencourt (1993), em sua tese, uma das primeiras a ganhar destaque no estudo de livros didáticos e que “representou o impulso inicial da vasta produção das décadas seguintes” (MUNAKATA, 2012, p. 183), traz que o livro didático está vinculado ao poder instituído. Segundo a autora, “A articulação entre a produção didática e o nascimento do sistema educacional estabelecido pelo Estado distingue essa produção cultural dos demais livros” (BITTENCOURT, 1993, p.16). Em relação aos demais livros, os didáticos

sofriam, e ainda sofrem, maior interferência de agentes externos, como das políticas públicas, por exemplo.

Desde o seu surgimento, o livro didático passou por diversas modificações, tanto em suas concepções, como em sua estrutura, acompanhando as transformações da sociedade em que estava inserido. Segundo Bittencourt (1996), o livro didático “sofreu mutações a partir da ampliação da rede de ensino, passando a envolver um público leitor heterogêneo em gênero, condições sociais e culturais” (BITTENCOURT, 1996, p. 5). Essas mutações tinham origem não somente nas transformações sofridas pelo ensino, mas também mudanças políticas e religiosas. Os autores e editores precisavam se adequar ao momento que a sociedade vivenciava.

De acordo com Bittencourt (1996), inicialmente o livro didático desempenhava um papel de homogeneizador do saber escolar, além de servir para reforçar os métodos de ensino, baseando-se na memorização, num cenário em que a escola era vista como um meio de transmitir conhecimento das disciplinas (BITTENCOURT, 1996, p. 18). Com o passar do tempo o método intuitivo, baseado na valorização da intuição, dos sentidos e da observação, passou a ganhar espaço e a vigorar nas escolas, assim os livros precisaram ser adaptados.

Os autores e editores realizaram transformações nos livros, principalmente visuais, buscando uma linguagem capaz de aproximar-se dos alunos de forma a motivá-los para o domínio da leitura e da escrita. Mas, ao que tudo indica, essas mudanças eram principalmente visuais, através de imagens e ilustrações, e não de fato nas práticas de ensino:

A aprendizagem continuou sendo entendida como a capacidade de retenção pela memória, dos conhecimentos escolares. Para facilitar esse processo os livros didáticos foram sendo acrescidos de exercícios e questionários que passaram, igualmente, a ser “decorados” pelos alunos (BITTENCOURT, 1996, p. 19).

Assim, ao longo dos anos o livro didático seguiu sofrendo transformações e adaptações. Segundo Munakata (2012), ele é uma mercadoria produzida especificamente para a escola. Esta por sua vez, “(...) institui um espaço e uma temporalidade que não se reduz, como espelho ou reflexo, à sociedade que a contém, mas inaugura práticas e cultura que lhe são

específicas” (MUNAKATA, 2012, p. 185). Desse modo, o livro didático precisa se adequar ao mercado para o qual se destina: a escola. Sendo assim, está é a responsável por determinar os usos específicos do livro didático e o seu papel no ensino.

Segundo Choppin (2004) os livros didáticos possuem quatro funções consideradas essenciais por ele. Estas funções sofrem variações, dependendo de elementos como o ambiente sociocultural, a época, das disciplinas e dos níveis de ensino, além dos métodos e formas de utilização do livro didático. As quatro funções são:

1. Referencial: em que o livro didático “(...) constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações.” (CHOPPIN, 2004, p. 553). Neste sentido, podemos encontrar em um livro didático aquilo que a comunidade escolar acredita que seus alunos precisem aprender.

2. Instrumental: em que o livro didático aborda “(...) métodos de aprendizagem, propõe exercícios ou atividades que (...) visam a facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências disciplinares.” (CHOPPIN, 2004, p. 553). O livro seria um “facilitador” da aprendizagem, um instrumento que funciona propondo técnicas que favoreçam a aprendizagem.

3. Ideológica e cultural: “(...) Instrumento privilegiado de construção de identidade, geralmente ele é reconhecido, assim como a moeda e a bandeira, como um símbolo da soberania nacional.” (CHOPPIN, 2004, p. 553). Assim o livro passa a ter um papel político, tendo função de aculturar, ou até mesmo doutrinar os alunos, as novas gerações.

4. Documental: o livro didático pode fornecer “(...) um conjunto de documentos, textuais ou icônicos, cuja observação ou confrontação podem vir a desenvolver o espírito crítico do aluno.” (CHOPPIN, 2004, p. 553). Neste caso temos o livro didático com a função de auxiliar a desenvolver a cidadania dos alunos, entretanto, tal função só é exercida pelo livro em ambientes pedagógicos propícios, que estimulem a autonomia da criança.

Choppin (2004) destaca ainda que as pesquisas com livros didáticos se dividem ainda em duas categorias:

- aquelas que, concebendo o livro didático apenas como um documento histórico igual a qualquer outro, analisam os conteúdos em uma busca de informações estranhas a ele mesmo (...), ou as que só se interessam pelo conteúdo ensinado por meio do livro didático (história das categorias gramaticais, por exemplo);
- aquelas que, negligenciando os conteúdos dos quais o livro didático é portador, o consideram como um objeto físico, ou seja, como um produto fabricado, comercializado, distribuído ou, ainda, como um utensílio concebido em função de certos usos, consumido — e avaliado — em um determinado contexto (CHOPPIN, 2004, p. 554).

Pensando nas funções descritas por Choppin e nestas categorias, a pesquisa em questão considerou a função referencial do livro didático e se aproximou da primeira categoria, no sentido que buscou-se olhar principalmente para um conteúdo específico dos livros didáticos. Os livros analisados abordam os conceitos que os autores e estudiosos da época acreditavam serem importantes para a construção do pensamento matemático das crianças. Também foi considerado o contexto e os usos dos livros didáticos. De modo geral, buscou-se observar os usos que os autores estão fazendo das noções topológicas em seus livros didáticos e analisando possíveis conexões entre eles e as demais fontes consideradas.

Para desenvolver essa pesquisa foi levada em consideração, principalmente, a “*Função Referencial*” do livro didático (CHOPPIN, 2004), acredita-se que o livro didático forneça indícios de quais e como conteúdos (e de que forma) a comunidade escolar considera relevante que os alunos aprendam.

Bittencourt (1993) reforça essa ideia, ao afirmar que o professor faz uso do livro didático, independente do seu uso em sala de aula, na preparação de suas aulas, no planejamento do ano letivo, na sistematização dos conteúdos escolares, ou até mesmo na elaboração de exercícios e questionários (BITTENCOURT, 1993). Desse modo, o livro didático constitui-se em uma rica fonte de pesquisa histórica.

Foram utilizados nessa pesquisa os seguintes livros: “*Nova Iniciação à Geometria: uma introdução à topologia do plano*” (GROSSI, 1971); coleção “*Nova Série 1º Grau - Matemática*” (SANGIORGI, s.d.); “*Coleção Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau*” (LIBERMAN et. al, 1974).

Os livros são apresentados com maiores detalhes na seção 4.1, na discussão dos usos das noções topológicas nos livros didáticos do MMM.

A escolha destes livros em especial ocorreu devido a importância que seus autores tiveram para o Movimento da Matemática Moderna. Todos eles eram envolvidos com movimentos de reformulação da Matemática e grupos de pesquisa como o GEEM e o GEEMPA, assim como, com cursos de atualização e formação de professores. Estes livros eram referência no Ensino de Matemática na época.

2.3 Entrevista Narrativa e Memória

Moura e Nacarato (2017) trazem a entrevista narrativa como um meio que permite conhecer e identificar as estruturas sociais presentes nas experiências dos entrevistados. Estes autores, inspirados em pesquisadores como Schutze (2011), acreditam que a entrevista narrativa é um bom dispositivo de produção de dados em investigações focadas na trajetória de formação dos professores, por exemplo, visto que o ato de narrar para eles é humano e social. Neste tipo de entrevista, o entrevistado tem espaço para se expressar, pensar no contexto histórico, social e cultural em questão.

Segundo Schutze (2011), esta produção de dados ocorre por meio da reconstrução de acontecimentos sociais, a partir do olhar dos entrevistados, os narradores. Além disso, o pesquisador deve agir de modo a incentivar que o entrevistado produza essa narrativa.

A entrevista narrativa, de acordo com Moura e Nacarato (2017) possui um grande potencial de reconstruir vivências, experiências, tanto profissionais, como pessoais dos entrevistados, sobretudo de maneira reflexiva. Ela abre espaço para que o narrador selecione as características de suas vivências que gostaria de narrar. Ainda segundo estes autores, o uso desse tipo de entrevista é favorável em pesquisas que possuem variadas versões, combinam histórias de vida e contextos sócio-históricos e/ou investigam acontecimentos específicos. Neste sentido, acreditou-se que as entrevistas narrativas foi o modo mais adequado de conduzir essa pesquisa, visto que cada professor entrevistado possuía sua versão sobre as noções topológicas, suas próprias vivências, além de histórias de vida diferentes, contextos sociais variados em

suas universidades de atuação, sendo assim, possivelmente, diferentes concepções sobre tais noções.

Segundo Weller e Zardo (2013) a entrevista narrativa é composta por etapas ordenadas, dentre as quais há três principais, que buscou-se seguir nesta pesquisa. A primeira seria a realização da pergunta narrativa orientada autobiograficamente, que deve ser elaborada de modo que aborde toda a trajetória do entrevistado, ou parte dela, dependendo do interesse da pesquisa. Pensando nessa etapa, durante as entrevistas narrativas, o ponto de partida foi questionar sobre a trajetória acadêmica das entrevistadas. Buscou-se conhecer e compreender a relação delas com o MMM.

A etapa seguinte consiste na exploração do potencial narrativo dos temas transversais e dos detalhes narrados de forma secundária na primeira etapa. É nesta fase que o pesquisador deve intervir, de modo a instigar que o entrevistado narre mais sobre esses pormenores. Schutze (2011) sugere que o pesquisador utilize algumas expressões para incentivar o entrevistado a falar mais, como: “sim, e, então, não consegui acompanhar o restante. Será que poderia, a partir deste ponto, contar mais uma vez?” (SCHUTZE, 2011, p. 212). Seguindo essa etapa, foram esmiussadas falas das entrevistadas que remetessem sobre suas trajetórias com o MMM, suas participações em grupos de pesquisas e outros acontecimentos que vivenciaram, relacionados ao período de interesse dessa pesquisa.

A terceira etapa deve ser destinada a descrição mais abstrata dos detalhes que se repetem ao longo da narrativa, sejam situações, percursos ou contextos. Neste momento o pesquisador pode intervir fazendo questionamentos que instiguem o entrevistado a explicar melhor alguns eventos narrados. Estas três etapas guiaram superficialmente as entrevistas. Com relação as entrevistas realizadas, esta foi a etapa com maior duração, em que as entrevistadas foram convidadas a explicar melhor suas relações e concepções acerca das noções topológicas.

Weller e Zardo (2013) evidenciam a relação entre a experiência e a linguagem no processo da entrevista narrativa, de modo que, segundo Weller (2009), o intuito da criação desse método seria “compreender os contextos em que essas biografias foram construídas e os fatores que produzem mudanças e motivam as ações dos portadores da biografia” (WELLER, 2009, p. 5). Por

meio da entrevista narrativa pode-se ter acesso às experiências vivenciadas por outras pessoas, da forma que elas as perceberam ou interpretaram.

O entrevistado narra um fato ocorrido no passado, mas, com os elementos adquiridos em suas novas vivências, conhecimentos adquiridos ao longo dos anos, ele conta os acontecimentos “a partir de novas reflexões sobre a experiência passada” (QUEIROZ, 2017, p. 474). Desse modo, cada narrativa torna-se única. Entretanto, esse método não foi criado com a finalidade de reconstruir a história do entrevistado/narrador em si, mas sim de compreender os contextos que os fatos narrados foram construídos, além de acessar as memórias do narrador.

Segundo Portelli (2010) “os conteúdos da memória são evocados e organizados verbalmente no diálogo interativo entre fonte e historiador, entrevistado e entrevistador” (PORTELLI, 2010, p. 19). Assim, o entrevistador/pesquisador também contribui para a narrativa, sendo o responsável por provocar o narrador, instigá-lo a reviver suas memórias a partir de questões, comentários e reações, de modo a produzir um sentido para as memórias do passado.

Schutze (2011) trata a entrevista narrativa não só como um dispositivo de produção de dados, mas também de análise desses dados produzidos. Com isso, para tratamento das entrevistas realizadas, me baseio em suas ideias, utilizando também a triangulação dos dados, a fim de complementar as narrativas.

As entrevistas narrativas ocorreram de forma online, em ambientes virtuais como Mconf, GoogleMeet e Skype, com professores/pesquisadores que vivenciaram o período da Matemática Moderna. Tais entrevistas foram realizadas a fim de investigar as concepções que estes professores/pesquisadores têm sobre as noções topológicas no MMM, buscando compreender que conexões eles fazem entre as noções e o processo de construção do pensamento matemático, neste período.

Algumas entrevistas ocorreram com a presença da orientadora dessa pesquisa, que já possuía certa proximidade com algumas entrevistadas, o que poderia facilitar suas narrativas. Infelizmente ela não pôde estar presente em todas, mas, não por uma questão de escolha, apenas por já ter outros

compromissos agendados. As entrevistas com as professoras Rute, Neuza, Esther e Dione foram realizadas pela pesquisadora e sua orientadora.

No início da entrevista foi pedido para que cada professor narrasse um pouco da sua trajetória acadêmica e profissional e contasse um pouco sobre suas pesquisas na linha de formação de professores e sua aproximação com o MMM. Pelas narrativas das experiências dos professores sobre as noções topológicas e suas memórias, buscou-se compreender que papel tais noções tinham no ensino de matemática, durante o MMM.

A escolha dos professores a serem entrevistados ocorreu a partir das leituras realizadas e indicações de pessoas envolvidas com pesquisas nesta área. Foram realizadas seis entrevistas, entre os anos de 2020 e 2021, todas com pesquisadoras mulheres, apesar de não haver nenhuma intencionalidade prévia nesse fato.

Dentre as entrevistadas, temos professoras que lecionaram no Curso Normal e em escolas, especialmente nos primeiros anos de escolarização, durante o MMM, realizaram pesquisas acadêmicas sobre o Movimento, o Grupo Nicolas Bourbaki e a História da Educação Matemática. Além disso, todas participaram de grupos de estudo que discutiam melhorias e atualizações para o ensino de Matemática, por consequência, discutiam sobre as noções topológicas também.

Algumas das professoras lecionaram também em cursos de graduação, pós-graduação e são autoras de livros didáticos que abordavam as ideias da MMM, assim como as noções topológicas. De modo geral, as seis entrevistadas são referência por seus diferentes envolvimento com o MMM e seus estudos no campo da História da Educação Matemática.

2.3.1 As entrevistadas

Ao todo foram entrevistadas seis professoras (e pesquisadoras) da área da Educação Matemática. A escolha dessas seis professoras deu-se através das pesquisas iniciais e de indicações. Todas possuem alguma ligação, em especial, com o Movimento da Matemática Moderna, em diferentes partes do Brasil, seja pesquisando, estudando ou atuando no movimento.

Um dos intuítos da realização dessas entrevistas, considerado secundário, foi compreender melhor o MMM, seus ideais, as mudanças que ele trouxe para o ensino da Matemática, a partir das vivências das entrevistadas. O objetivo principal consistiu em entender as concepções dessas professoras sobre as noções topológicas e os usos que elas faziam deles. Ouvir o que elas consideram por noções topológicas, as conexões que realizam, ou não, com outros conceitos matemáticos e a importância que elas acreditam que tais conceitos tinham naquela época.

Na sequência, tem-se uma breve apresentação de cada uma das entrevistadas, que prontamente se dispuseram a compartilhar suas memórias, histórias e vivências, contribuindo, não só com essa pesquisa, mas também servindo de inspiração, pelos papéis que desempenharam ao longo da História da Educação Matemática, como professoras e pesquisadoras.

Rute da Cunha

A primeira entrevista, tida como entrevista piloto, foi realizada no dia 04 de junho de 2020, via Google Meet, com a professora Rute da Cunha (Figura 3), responsável pela tese “*A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo (2006)*”. Sua tese foi um dos motivos que levaram à escolha dela como entrevistada, assim como sua trajetória acadêmica e de pesquisa, que foi de grande contribuição para esta pesquisa.

Figura 3 – Professora Rute da Cunha.



Fonte: Disponibilizada pela entrevistada (2020).

Rute, natural do Estado de São Paulo, é graduada em Matemática (1972), pelo Centro Universitário de Santo André e em Pedagogia (1979), pela Faculdade de São Bernardo do Campo. Ela possui mestrado em Educação (1998), pela Universidade de São Paulo e doutorado em Educação Matemática (2006), pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, além de outros cursos de especialização e aperfeiçoamento. Rute atuou na Universidade Federal de Mato Grosso, onde aposentou em 2019.

Rute participou de diversos grupos de pesquisa e estudos. Dentre esses, ela cita o Grupo Momento como “um divisor de águas” (DALCIN; CUNHA, 2020, p. 116). Segundo Rute, nesse grupo paulista os participantes discutiam formas de melhorar o ensino da Matemática. Tais discussões tiveram destaque nos anos de 1970, durante o MMM. Rute também teve contato com diversos pesquisadores reconhecidos no campo da Educação Matemática, como Dienes, que também era inspiração nas discussões do Grupo Momento.

Neuza Bertoni Pinto

A entrevista com a professora Neuza Bertoni Pinto (Figura 4) foi a segunda entrevista, realizada no dia 12 de junho de 2020, via Mconf. O nome da professora Neuza apareceu na autoria de trabalhos pesquisados relacionados à Matemática Moderna que chamaram a atenção por situarem o ensino de Matemática durante o movimento. Em sua entrevista, Neuza apresentou um caderno da época de sua graduação, referente à disciplina de Topologia, que muito agregou à pesquisa.

Figura 4 – Professora Neuza Bertoni Pinto.



Fonte: Disponibilizada pela entrevistada (2020).

Nascida no Estado de São Paulo, Neuza possui Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Umuarama – Paraná (1975) e graduação em Pedagogia pela Universidade Federal do Paraná (1980). Ainda na UFPR concluiu seu Mestrado em Educação (1990). Ela possui também Doutorado em Educação, pela Universidade de São Paulo (1998) e Pós-Doutorado pela Universidade Nova de Lisboa - Portugal (2005), além de outros cursos e especializações.

Neuza foi docente em universidades do Paraná, Mato Grosso e São Paulo, lecionando para cursos de Pedagogia, Licenciatura em Matemática, além de cursos de Pós-Graduação. Além de suas experiências em Cursos de Ensino Superior, como Neuza nos relatou, trabalhou também na Educação Básica, lecionando, os primeiros anos de escolarização.

Como pesquisadora, Neuza atuou em diversos grupos, como o Grupo Grupo de Pesquisa História das Disciplinas Escolares – GPHDE e atualmente integra o Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática – GHEMAT. Além de suas experiências na área da Educação, suas pesquisas voltadas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática e para História da Educação Matemática, principalmente voltadas para o Movimento da Matemática Moderna, são referência para os estudos no campo da História da Educação Matemática.

Mônica Bertoni dos Santos

A terceira entrevista realizada foi com a professora Mônica Bertoni dos Santos (Figura 5), via Mconf, no dia 11 de dezembro de 2020. Além de contribuir com a pesquisa por meio de sua narrativa, Mônica também fez questão de emprestar uma pasta, que guarda com muito zelo, recheada de atividades, listas, planos de aula e documentos de curso, datados dos anos de 1960 e 1970, a maioria ligado ao Instituto de Educação General Flores da Cunha. Inclusive, boa parte dos materiais da pasta pode ser localizada no Acervo do Laboratório de Matemática do IE também.

Figura 5 – Professora Mônica Bertoni dos Santos.



Fonte: Disponibilizada pela entrevistada (2021).

Natural do Rio Grande do Sul, a professora Mônica graduou-se em Licenciatura em Matemática na Faculdade Porto Alegre de Educação Ciências e Letras (1977). Na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS concluiu seu Mestrado em Educação Em Ciências e Matemática (2005), onde já havia feito uma especialização em Educação Matemática (1993). Além disso, também possui diversos cursos de capacitação docente e formação.

Como pesquisadora, Mônica já publicou diversos trabalhos, principalmente relacionados à Educação Matemática. Além de sua trajetória acadêmica, suas pesquisas e sua proximidade com a Matemática Moderna e com o Instituto de Educação General Flores da Cunha foram alguns dos motivos que levaram a escolha do seu nome como uma das entrevistadas.

Esther Pillar Grossi

A quarta entrevista foi realizada com a professora Esther Pillar Grossi (Figura 6), via Mconf, no dia 13 de janeiro de 2021. O nome da professora Esther foi um dos primeiros a ser cogitado e, inclusive, indicado pelas entrevistadas anteriores.

Natural de Santa Maria – RS, Esther formou-se em Matemática na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras na Pontifícia Universidade Católica (PUCRS) no ano de 1958. Em 1970 ela concluiu seu Mestrado em Matemática

na Université de Paris V (França) e tornou-se Doutora em Psicologia Cognitiva pela *École des hautes études en sciences sociales*, EHESS (França) no ano de 1985.

Figura 6 – Professora Esther Pillar Grossi.



Fonte: Facebook (2021).

Além de participar de diversos congressos nacionais e internacionais, Esther também esteve envolvida em diversos projetos e pesquisas voltadas à educação, inclusive a formação do GEEMPA, do qual foi a primeira presidente, no ano de 1970. Suas pesquisas relacionadas à educação e ao ensino da Matemática, além de sua aproximação com Zoltan Paul Dienes, foram alguns dos motivos pelos quais desde o início desta dissertação seu nome foi considerado para compor o grupo de entrevistadas.

Além disso, a professora Esther é autora do livro “*Nova Iniciação à Geometria: uma introdução à topologia do plano - Curso Fundamental (1971)*”, o qual teve grande circulação no Estado e no Brasil, servindo como referência para o estudo de Topologia da época. Este livro foi escrito após sua passagem pela França, possivelmente com influência das ideias de Dienes e Piaget.

Dione Lucchesi de Carvalho

A quinta entrevistada foi a Professora Dione Lucchesi de Carvalho (Figura 7), que concedeu a sua entrevista juntamente com seu marido, Paulo, que também fez contribuições com alguns detalhes e gentilmente enviou

materiais por ele escaneados. A entrevista ocorreu no dia 25 de janeiro de 2021, via Mconf.

Figura 7 – Professora Dione Lucchesi de Carvalho.



Fonte: Disponibilizada pela entrevistada (2021).

Dione nasceu no Estado de São Paulo, onde frequentou o Curso Normal no Colégio Santana, graduou-se em Licenciatura e Bacharelado em Matemática (1970), na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, concluiu seu Mestrado em Educação na Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, mesmo local em que cursou o Doutorado em Educação (1995). Dione ingressou como docente na UNICAMP em 1996, onde lecionou até 2014, quando se aposentou.

Antes de atuar como docente da UNICAMP, a professora Dione já lecionava em cursos de Pedagogia e licenciatura, bem como em cursos de formação continuada. Também atuou na escola básica e na coordenação do Ensino de Matemática em escolas regulares.

Como pesquisadora, Dione participou de grupos de estudo e pesquisas em Educação Matemática, como o Centro de Educação Matemática (CEM) e o Grupo de Sábado (GdS – UNICAMP), além de ter colaborado com a estruturação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Assim como a professora Rute, Dione também participou do Grupo Momento.

Dione foi indicada como uma possível entrevistada pela professora Rute. Seu engajamento nas discussões acerca do ensino de Matemática, sua

experiência acadêmica e vivências da época, foram alguns dos motivos que levaram à escolha da professora Dione como uma das entrevistadas.

Lucília Bechara Sanchez

A professora Lucília Bechara Sanchez (Figura 8) foi a sexta entrevistada. Sua entrevista ocorreu no dia 04 de fevereiro de 2021, via Mconf. Apesar de ter sido a última entrevistada, o nome de Lucília foi um dos primeiros a ser cogitado, devido à sua participação na autoria da coleção “*Coleção Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau*”, que foi utilizada como uma das fontes desta pesquisa. Além disso, o nome da professora Lucília também foi indicado pelas entrevistadas anteriores.

Figura 8 – Professora Lucília Bechara Sanchez.



Fonte: Disponibilizada pela entrevistada (2021).

A professora Lucília é natural do Estado de São Paulo, onde concluiu toda sua formação acadêmica. Licenciou-se em Matemática, na Pontifícia Universidade Católica de Campinas – PUCAMP (1957), tornou-se mestre em Didática da Matemática na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo – USP (1991) e Doutora em Educação (1997), na mesma universidade. Sua trajetória acadêmica também inclui cursos de especialização e atualização, além da participação em congressos e eventos relacionados à área da Educação Matemática.

Lucília, como ela mesma relatou, era responsável por trazer às salas de aula a “Metodologia Dienes”, por meio de cursos de formação relacionados ao Grupo de Estudos de Ensino de Matemática – GEEM, o qual teve grande destaque por sua atuação. Ela esteve no foco das discussões das mudanças desenvolvidas durante o MMM, inclusive, a “*Coleção Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau*”, escrita em coautoria com as professoras Anna Franchi e Manhúcia Liberman, foi a primeira coleção de livros didáticos a incluir as ideias da matemática moderna.

2.3.2 Protocolo das entrevistas

Como a entrevista narrativa não segue a ideia da dinâmica pergunta e resposta, ao invés de roteiro, ou questionário, foi elaborado um “protocolo de entrevistas” (QUEIROZ, 2015), com as informações que guiam o processo. O protocolo contém algumas perguntas e tópicos para as entrevistadas refletirem antes das suas narrativas, além de exemplos de atividades envolvendo noções topológicas encontradas em documentos do IE, livros de Dienes e livros didáticos da época do MMM. O protocolo foi um instrumento utilizado para incentivar as entrevistadas a falarem sobre suas experiências e concepções acerca das noções topológicas.

Antes da pergunta desencadeadora, as entrevistadas eram convidadas a falarem sobre sua formação acadêmica e, quando fosse o caso, sobre as pesquisas produzidas relacionadas ao Movimento da Matemática Moderna e a formação de professores. Ao término dessa primeira intervenção, era apresentada a pergunta diretriz que direcionava a narrativa para o tema em questão e o objetivo principal: compreender o papel das noções topológicas na formação de professores, em tempos de MMM. As questões centrais apresentadas foram: “O que entende por noções topológicas?” e “Que conexões enxerga entre as noções topológicas e o Movimento da Matemática Moderna?”.

As perguntas do protocolo serviram para guiar as entrevistas, mas, as entrevistas não ficaram amarradas a um roteiro. Ao longo das narrativas emergiram outros assuntos e temas, que foram sendo explorados pela pesquisadora e pelas entrevistadas.

Vale ressaltar que se buscou ao longo das entrevistas não interromper as entrevistadas. A ideia foi deixar que as entrevistadas narrassem suas experiências acerca das suas aproximações com o MMM e das questões centrais e após concluírem, verificar-se, ou não, a necessidade de retornar aos eixos elencados, caso já não estivessem incluídos nas narrativas, ou ainda houvesse o desejo de explorá-los mais.

Inicialmente, foi realizada uma entrevista piloto, de modo a “testar” se a pergunta condizia com o que estava sendo buscado e se os eixos abrangiam o que se desejava compreender. A entrevista piloto serviu para verificar se o protocolo fornecia informações suficientes para responder à questão norteadora da pesquisa, *“Que compreensões e usos das noções topológicas emergiram durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil?”*. Após, pôde-se complementar o protocolo (Anexo I) e aperfeiçoar a condução das entrevistas.

3. COMPREENSÕES ACERCA DAS NOÇÕES TOPOLÓGICAS

Neste capítulo apresento e analiso as compreensões das noções topológicas que emergiram durante a pesquisa. A primeira grande discussão a respeito das compreensões gira em torno do termo “conceitos topológicos”. Ao iniciar a pesquisa, era utilizado esse termo, após a constatação de seu uso em materiais do Acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha. No entanto, no decorrer da trajetória, essa terminologia foi colocada em discussão, ao me deparar com o termo “noções topológicas”. Com isso, em alguns momentos deste texto é feita referência a conceitos topológicos e, em outros, a noções topológicas.

No dicionário tem-se como definição da palavra conceito “compreensão que alguém tem de uma palavra” (DICIO, 2021), é colocado ainda como uma “concepção ou a caracterização de algo”. Mas, alguns dicionários associam a palavra conceito à noção. Já para a palavra noção, tem-se no dicionário como definição “conhecimento imediato, intuitivo, de algo; ideia, consciência” (DICIO, 2021).

Entendo como *noção* um conhecimento superficial, intuitivo, enquanto *conceito* seria um conhecimento mais aprofundado de um assunto. Assim, a partir dos termos encontrados nos documentos, livros didáticos e citados pelos entrevistados, optei por utilizar o termo “noções topológicas” e não mais “conceitos topológicos”, por compreender que por aparecerem nos primeiros anos da escolarização, ainda sejam abordados como noções e não como conceitos elaborados ou construídos.

Ao pesquisar sobre as noções topológicas, percebeu-se que, de certa forma, elas estão atreladas à disciplina de “Topologia”, convergindo em alguns pontos. Assim, tornou-se necessário buscar mais sobre essa disciplina, ainda que de forma introdutória.

3.1 Apontamentos sobre Topologia

Inicialmente chamada de “Analysis Situs”, traduzido como “Análise de posição”, a Topologia surgiu no século XVII (SILVA, 2018). Trata-se de um ramo da Matemática, entrelaçado com a Geometria, e com aplicação em

diversas áreas do conhecimento. Nas escolas brasileiras, ganhou destaque de forma mais expressiva entre as décadas de 1960 e 1970, durante o Movimento da Matemática Moderna.

A Topologia também é conhecida como "geometria da folha da borracha", por se utilizar dos mesmos objetos da Geometria, mas independer da distância, medida dos ângulos e configuração dos pontos. Desde que seja possível realizar a transformação desses objetos em outros por meio de funções contínuas reversíveis, eles serão considerados equivalentes e indistinguíveis (VILCHES, 2000).

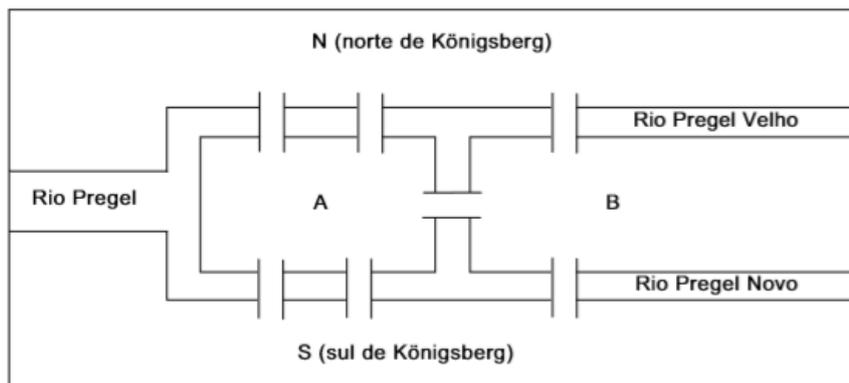
Este ramo da Matemática preocupa-se em analisar as propriedades das figuras geométricas que não se alteram perante transformações, como deformações contínuas através de alongamento, torção, compressão, etc. (COURANT; ROBBINS, 2000). Segundo Borges (2005) a Topologia "é um ramo bem recente da Geometria. (...) ela se preocupa com o aspecto qualitativo dos objetos e nesse sentido ela independe do número" (BORGES, 2005, p. 19).

Durante as entrevistas, a maioria das entrevistadas realizou esta conexão entre as noções topológicas e a disciplina de Topologia, chamando-a inclusive de Geometria da Borracha e retomando suas propriedades. Também foram recorrentes os relatos do grau de dificuldade dessa disciplina durante a graduação, sendo de difícil entendimento e relação com os conteúdos ensinados posteriormente na escola.

Ao longo dos anos, pesquisadores têm estudado a Topologia e os seus conceitos. Segundo Vilches, Leibniz, em 1679, foi o primeiro a estudar sobre as propriedades topológicas. Euler, em 1736, solucionou o famoso problema das "Pontes de Königsberg", um dos primeiros problemas conhecidos sobre Topologia e que deu início à Teoria de Grafos (VILCHES, 2000).

Königsberg era uma cidade da antiga Prússia. Na parte central de Königsberg, fluíam vertentes do rio Pregel, formando uma ilha. Sete pontes, interligando partes da cidade, foram construídas, conforme a Figura 9.

Figura 9 - Diagrama das sete pontes de Königsberg.

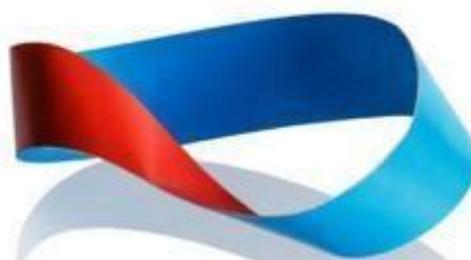


Fonte: Sampaio (2002, p. 1).

Os habitantes de Königsberg lançaram um desafio, “se era possível fazer um passeio, passando pelas sete pontes, porém apenas uma vez sobre cada ponte?” (SAMPAIO, 2002, p. 1). Euler, em 1736 solucionou o problema, chegando à conclusão de que seria impossível realizar esse passeio. Para resolvê-lo, Euler considerou duas possibilidades: um caminho fechado, que definiu como aquele que começa e termina no mesmo ponto e um caminho aberto, definindo-o como aquele que começa e termina em pontos diferentes (SILVA, 2018).

Listing, em 1847, foi o primeiro a usar o termo “Topologia” em seu livro “*Vorstudien zur Topologie*”. August Möbius, por volta de 1858, realizou estudos sobre a Faixa de Möbius: um espaço topológico obtido pela colagem das duas extremidades de uma faixa após sua torção (SILVA, 2018). Conhecida como “uma superfície de um lado só”. A estrutura da Faixa de Möbius (Figura 10) inspirou pesquisadores e profissionais de diversas áreas, como o artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972), que fez vários trabalhos conhecidos mundialmente.

Figura 10 - Faixa de Möbius.



Fonte: BBC NEWS Brasil.

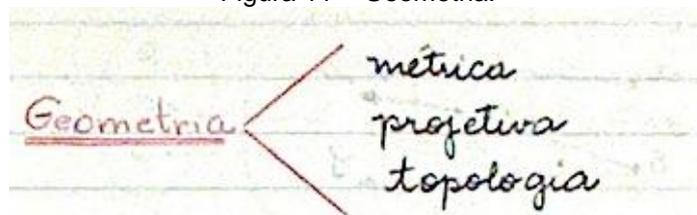
Henri Poincaré, em 1895, publicou “*Analysis Situs*”, em que forneceu o primeiro tratamento rigoroso a respeito da topologia, que levou ao desenvolvimento da topologia algébrica. Assim como estes pesquisadores, outros seguiram estudando sobre a Topologia, em diversas áreas da matemática, principalmente na Matemática aplicada. Segundo Silva (2018), na Topologia:

(...) podemos destacar o estudo das funções contínuas definidas em conjuntos chamados espaços topológicos. Para isso é preciso que existam estruturas que possibilitem estabelecer ideias a respeito de distância e vizinhança entre pontos (SILVA, 2018, p. 34).

A professora Neuza Bertoni Pinto trouxe durante sua entrevista um caderno da época da sua graduação em Licenciatura em Matemática, em que cursou a disciplina de Topologia. Nesse caderno é possível observar os conceitos que eram trabalhados nessa disciplina e certa similaridade com as noções topológicas que estamos estudando. Neuza, ao olhar as atividades apresentadas no protocolo da entrevista, as coloca como uma “aplicação” dos conceitos do caderno, as quais ela, até então, achava que “não existiam nos programas da escola primária”.

O primeiro escrito do caderno de Neuza é um esquema com a palavra Geometria (Figura 11) que se desdobra em 3 tópicos: métrica, projetiva e topologia. Com isso, é possível observar a relação da topologia como um tipo de geometria.

Figura 11 – Geometria.



Fonte: Caderno de Topologia (PINTO, 1974).

Em seguida, o caderno aborda noções de conjuntos e funções, trazendo definições e exemplos matemáticos. Na sequência, são abordadas as relações de equivalência, ordem, limites, corpos, grupos, anel, espaço vetorial, bem como as propriedades de cada conceito descrito.

Dentre um dos títulos do caderno, temos “Espaços Topológicos” seguido do subtítulo “Conjuntos abertos num espaço métrico M ”, dando a entender que esta seria uma definição para Espaços Topológicos. Poucas páginas à frente há um novo título, “Definição para Topologia”, seguido da seguinte explicação:

Tomando um conjunto X , um conjunto T (tal) que é um conjunto de X , então diz-se que T define em X uma topologia se as três condições abaixo forem verificadas:

- a) X e \emptyset (vazio) são abertos.
- b) A união de uma família de abertos de X é um aberto de X .
- c) A interseção de um conjunto finito de abertos é um aberto.

Logo: Espaço topológico é um conjunto X munido de uma topologia T . (PINTO, 1984).

Assim como Neuza comentou, a Matemática presente em seu caderno é bem complexa de ser compreendida, utilizando conceitos relacionados a Matemática Pura. Ainda há outros conceitos como “Topologia Discreta”, “Topologia Caótica”, “Topologia Induzida”, dentre outros que não são objetos de estudo dessa pesquisa, entretanto, o que chama a atenção é que na abordagem destes tópicos são utilizadas noções topológicas, como aberto, fechado, dentro e fora para definir conceitos.

Também há um título “Interior – Vizinhança – Fronteira” em que cada um destes conceitos é definido, utilizando a linguagem de conjuntos. É interessante observar como as noções topológicas estão presentes em conteúdos de Matemática Pura, em uma disciplina da graduação, considerada com alto grau de dificuldade, e também na escola, no ensino de Matemática básica para Educação Infantil e para os Anos Iniciais.

Em todas as entrevistas foi realizada a associação das noções topológicas com o Movimento da Matemática Moderna, sendo comentado pelas entrevistadas que foi nesse período em que mais ouviram falar sobre tais noções. Com isso, tornou-se essencial buscar conhecer e entender mais sobre esse período, para compreender as compreensões que se tinham sobre as noções topológicas dentro do Movimento e no período em questão.

3.2 Movimento da Matemática Moderna - MMM

O Movimento da Matemática Moderna (MMM) caracteriza-se como um movimento que impactou o ensino da matemática no Brasil entre os anos de 1960 e 1970, quando suas ideias foram difundidas através de grupos de pesquisa, orientações educacionais e livros didáticos. Segundo Ferreira e Carvalho (1971) a Matemática Moderna surgiu “da necessidade da criação de novos métodos de ensino que tornassem a aprendizagem da matemática mais interessante, racional e significativa” (FERREIRA; CARVALHO, 1971, p. 11).

Búrigo (1989) apresenta o MMM como “uma experiência importante de iniciativa de professores e de esforço de renovação do ensino, entendida como melhoria do ensino” (BÚRIGO, 1989, p. 2). Segundo Wielewski (2008) era um movimento que tinha como objetivo realizar uma aproximação entre a Matemática trabalhada na escola básica e a Matemática produzida por pesquisadores da área.

Além disso, o MMM ocorreu em um momento considerado histórico: pós II Guerra Mundial (CLARAS; PINTO, 2008). O mundo passava por grandes transformações culturais, sociais, políticas e econômicas. Assim, com o crescimento do capitalismo, ocorreu um grande avanço tecnológico, além da expansão das indústrias, com necessidade de atualização principalmente dos trabalhadores, aumentando a demanda por mão de obra qualificada. Isso tudo implicava na necessidade de uma atualização na educação também, era necessária uma reestruturação que suprisse essa nova realidade.

Segundo Claras e Pinto (2008), no período de 1930 a 1950 ocorriam diversos debates e discussões centradas na preocupação com a matemática escolar, em meios de torná-la mais contextualizada, acessível aos alunos, diminuindo sua complexidade, em especial na escola secundária aqui no Brasil.

Paralelamente, um grupo de matemáticos, principalmente franceses, uniram-se para estudar e desenvolver trabalhos com o intuito de modernizar a matemática, surgindo assim o Grupo Nicolás Bourbaki (CLARAS; PINTO, 2008, p. 2). Pires (2006) destaca a influência que o grupo exerceu em diversos países, inclusive no Brasil, eles (os membros do grupo Bourbaki) tinham uma preocupação com os “meios matemáticos”, e faziam parte de “um momento

histórico onde alguns importantes matemáticos se detinham sobre as questões da produção em matemática” (PIRES, 2006, p. 67).

De acordo com Pires (2006) o Grupo Bourbaki iniciou sua história por volta de 1920, quando cinco dos seus nove fundadores se conheceram na École Normal Supérieure, em Paris: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné e André Weil. Oficialmente, o grupo foi fundado em 10 de dezembro de 1934, em um café parisiense. A autora destaca que as ações de Henri Cartan e André Weil foram fundamentais para a fundação do grupo, movidos pela insatisfação das obras existentes relacionadas à Matemática. Segundo eles, as obras traziam muitas falhas, além de serem insuficientes. Assim, decidiram redigir um livro próprio (PIRES, 2006, p. 15 e 16).

O objetivo principal do grupo, de acordo com Pires (2006), era de reconstruir toda a matemática, seguindo os trabalhos relacionados às estruturas algébricas, teoria de conjuntos e axiomas, além de pesquisadores como Galois, Dedekind, Cantor e Hilbert. O Grupo Bourbaki queria modificar tanto a matemática clássica como a moderna, unificando-a como um só estudo, “tentando obter a inteligibilidade da Matemática, apresentou uma nova organização da Matemática, onde a ideia de estrutura, método axiomático e unidade eram essenciais” (PIRES, 2006, p. 1). Os Bourbaki publicaram diversos trabalhos abordando essa Matemática, definida por eles como “rigorosa, simples, axiomática e independente” (CLARAS; PINTO, 2008, p. 5). A proposta apresentada pelo Grupo Bourbaki teve um grande impacto no mundo, sendo referência na elaboração da proposta do MMM.

Todas as entrevistadas mencionaram o Grupo Bourbaki, associando de certa forma o MMM com as ideias do Grupo, seja de modo direto ou indiretamente, através das suas ideias de modernização da Matemática. Também foi unânime entre as entrevistadas o fato de que esse grupo não tinha como preocupação o ensino, ou mudar a escola, mas sim com a Matemática Pura. Rute traz que o Grupo Bourbaki considerou que na Matemática há três tipos de estruturas: *“as estruturas algébricas, cujo principal era noção de grupo. As estruturas topológicas, cujo principal são as noções de proximidade, continuidade e de limite, e as de ordem, cujo protótipo é a rede”* (CUNHA,

2020). Para Lucília, *“eles tentaram reunir toda a Matemática e unificá-la, encontrar o que há de comum na Matemática”* (SANCHEZ, 2021).

Assim, o grupo Bourbaki apoiou-se principalmente nas estruturas algébricas, na teoria de conjuntos e no método axiomático na elaboração da nova organização da matemática (PIRES, 2006, p. 129). Entretanto, segundo Dieudonné (1962), mesmo com os rumores da rigidez do grupo, eles eram abertos às mudanças, sendo assim, a matemática propagada por eles nos anos de 1950 – 1970, pautada nos elementos acima, passou por mudanças nos anos seguintes (DIEUDONNÉ, 1952, apud PIRES, 2006, p. 130), mas devido ao foco de interesse deste trabalho, esse período inicial é o que está sendo discutido aqui.

Apesar do primeiro livro do grupo ser datado de 1939, suas ideias acerca do estruturalismo matemático passaram a ser amplamente divulgadas após a Segunda Guerra Mundial, nos anos de 1950. Essas ideias ganharam ainda mais destaque e notoriedade ao longo dos anos de 1960 e 1970, período em que surgiram grupos de estudo empenhados em modernizar o ensino de matemática em diversos países (PIRES, 2006).

Jean Dieudonné, integrante que desempenhou importante papel no Grupo Bourbaki, define que um matemático pode ser professor de Matemática, um utilizador da matemática ou um matemático criador. Entretanto, ele destaca que para ele um matemático precisa ser “alguém que publicou pelo menos a demonstração de um teorema não trivial” (DIEUDONNÉ, 1990, p. 21 apud PIRES, 2006, p. 69).

Segundo Pires (2006) as escolhas primordiais de Bourbaki foram “o método axiomático, as estruturas mães e a unidade da matemática” (PIRES, 2006, p. 137). Escolhas estas baseadas em fatores associados ao desenvolvimento da matemática até o período, por exemplo. A organização tradicional da matemática escolar, dividida em quatro ramos principais (Aritmética, Álgebra, Geometria e Análise) considerados fechados e distintos não agradava mais ao grupo, que não viam justificativa para a separação destes assuntos.

A descoberta de Cantor acerca da teoria dos conjuntos, o formalismo de Hilbert e o ponto de vista estrutural desenvolvido pelos Bourbaki foram o estopim para que novos pontos de vista acerca das relações entre os ramos

clássicos da matemática fossem considerados, “demolindo as fundações da matemática clássica” (PIRES, 2006, p. 138). Inicia-se então um novo ponto de vista estrutural na organização dos conteúdos da matemática, que caracterizava os ideais do grupo Bourbaki.

O grupo pretendia reconstruir a Matemática como um todo, tendo uma base geral. Eles acreditavam na importância da comunicação entre os matemáticos e os conteúdos, valorizando as relações entre os conteúdos e os objetos matemáticos:

Bourbaki crê que a evolução interna ocorrida na matemática, estreitou mais do que nunca a unidade de suas diversas partes, criando um núcleo central mais coerente, sendo que o essencial desta evolução consistiu entre as diversas teorias matemáticas e se resume em uma tendência que se conhece geralmente por método axiomático (PIRES, 2006, p. 141 e 142).

Os Bourbaki baseavam-se em uma “hierarquia de estruturas”, a qual variava desde o simples até o complexo, das generalidades até as particularidades de cada estrutura. No centro estariam as estruturas consideradas por eles como estruturas mães, que seriam as algébricas, de ordem e topológicas. Neste sentido, as estruturas algébricas tinham como protótipos as ideias de grupo, as estruturas de ordem a ideia de rede, enquanto as estruturas topológicas eram fundadas nas noções de proximidade, continuidade e limite (PIRES, 2006, p. 145 e 147).

De modo geral, para Matos e Valente (2010), o Grupo Nicolas Bourbaki realizava um trabalho de unificação dos conhecimentos matemáticos, fundamental para a centralização dos conteúdos nas grandes estruturas. Além disso, os autores chamam a atenção para as similaridades entre os trabalhos de Jean Piaget sobre os processos de aprendizagem com as estruturas bourbakistas:

As estruturas-mãe: algébricas, de ordem e topológicas, que segundo Bourbaki estariam na base de todo o conhecimento matemático, encontravam muitas similitudes com as estruturas básicas da cognição teorizadas por Piaget (MATOS; VALENTE, 2010, p. 1).

Neste novo cenário pós Guerra, predominado pela ciência e pela técnica, a matemática passa a desempenhar um papel fundamental na

formação dos indivíduos, precisando atualizar-se ao mundo moderno. Com isso, os representantes de movimentos da época:

(...) trabalham com duas grandes metas: modificar os programas escolares desde a escola primária até a secundária, dando um lugar importante à teoria dos conjuntos e às relações; utilizar novos métodos pedagógicos, dando um lugar especial à atividade dos alunos. Para construir a nova base do edifício matemático era fundamental agrupar noções, antes dispersas no programa (PINTO, 2010, p. 34).

Pinto (2010), afirma que esse foi o motivo que aproximou Jean Piaget do Grupo Bourbaki. O pesquisador destaca em suas pesquisas o parentesco entre as estruturas matemáticas e as estruturas de inteligência. Além disso, ele descreve como ligar essas estruturas da inteligência da criança (estruturas operatórias piagetianas) com as estruturas básicas da Matemática (as “estruturas mães” dos Bourbaki), através de estágios sucessivos.

No ano de 1955 foi realizado o primeiro Congresso Nacional de Ensino de Matemática no Brasil, seguido por outros dois em 1957 e 1959. Pinto (2005) afirma que foi durante estes congressos na década de 1950 que começou-se a perceber a necessidade de uma mudança profunda na educação matemática no Brasil. Segundo Búrigo (1989), apesar do MMM ter sido parte do tema destes congressos, sendo discutido cada vez mais ao longo deles e inclusive terem sido aprovadas propostas para a realização de experiências relacionadas ao movimento, “as iniciativas mais importantes de introdução do movimento no Brasil foram articuladas em outras instâncias” (BÚRIGO, 1989, p. 25). Mesmo assim, havia relação entre os Congressos e essas iniciativas, principalmente no interesse por uma renovação do ensino de matemática, sendo uma iniciativa dos professores, em especial, em nível do curso secundário.

A necessidade de um projeto global, de uma invenção sistemática na realidade do ensino durante o governo de Juscelino Kubitschek, na verdade já perdurava desde o governo de Getúlio Vargas, sendo um problema em ambos (BÚRIGO, 1989 p. 30). Neste cenário, o ensino secundário ganhava destaque nas preocupações, ele representava um status social, uma oportunidade de ascensão na sociedade, como um meio de acesso do ensino primário para o

ensino superior. Sendo assim, sua renovação e melhoria era também uma preocupação política e não só educacional.

Durante os anos 1950 a situação do ensino de Matemática no país não era boa. Em 1951 passou a vigorar um programa nacional elaborado pela Congregação do Colégio Pedro II, que segundo Búrigo (1989) “era um programa fragmentado, sem articulação entre os vários tópicos” (BÚRIGO, 1989, p. 40). Além disso, as aulas expositivas vigoravam, os alunos realizavam poucas resoluções de exercícios em sala e somente eram abordados exercícios padronizados, em que suas resoluções seguiam um modelo, eram apenas repetições.

Búrigo (1989) traz algumas mudanças que D’Ambrósio destaca como consequências positivas do MMM:

(...) a diminuição da ênfase na memorização e prática exaustiva de exercícios repetitivos, uma preocupação maior com os processos de pensamento das crianças, o surgimento de lideranças na área da educação matemática, o contato entre profissionais da área da educação matemática e da psicologia e mudanças na concepção dos programas de atualização dos professores no sentido de uma maior atenção ao trabalho realizado em sala de aula (BÚRIGO, 1989, p. 9).

No final dos anos 1950, Búrigo (1989) relata que já havia três teses que tratavam explicitamente sobre Matemática Moderna. Em sua tese o professor Ubiratan D’Ambrósio propunha o uso de jogos, passatempos e experimentações, além da valorização da intuição matemática como método de ensino. O professor Osvaldo Sangiorgi demonstrava maior cautela em sua tese, defendendo a importância tanto da matemática clássica, aquela mais expositiva que perdurava até o momento, quanto da matemática moderna, que a modernização do ensino deveria ocorrer de forma gradual, sem radicais transformações. Segundo Búrigo (1989) Sangiorgi trazia em sua tese uma diferenciação entre a matemática clássica e a matemática moderna: a primeira tinha como base elementos simples, enquanto a segunda baseava-se em um sistema operatório, em estruturas, seguindo a ideia de estruturas matemáticas do Grupo Bourbaki.

Enquanto isso, o Major Professor Jorge Emanuel Barbosa defendia a Matemática Moderna em sua tese, destacando a necessidade de uma atualização do ensino. Conforme Búrigo (1989) o Major defendia essa

atualização principalmente em prol da formação de cientistas e matemáticos, que deveria ter início já no secundário. Além disso, ele acreditava que a Matemática Moderna favorecia a psicologia da aprendizagem (BÚRIGO, 1989).

Tanto as três teses abordando a Matemática Moderna, como os três primeiros congressos brasileiros sobre educação matemática foram de grande importância para a consolidação do movimento. Pode-se destacar o terceiro congresso como palco de importantes resoluções: como algumas das recomendações deste congresso tem-se o desenvolvimento de cursos de aperfeiçoamento para professores, com a função de prepará-los para a Matemática Moderna, além da incorporação das ideias da Matemática Moderna nas Faculdades de Filosofia e a realização de experiências no secundário voltadas a introdução de noções de Matemática Moderna (BÚRIGO, 1989).

Miorim (1998) destaca a importância dos grupos de estudos voltados ao ensino da Matemática na propagação da Matemática Moderna:

Apesar das novas idéias terem sido apresentadas e discutidas nesses dois congressos, não seriam elas que desencadeariam o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Isso seria conseguido, especialmente, por meio das atividades desenvolvidas pelo grupo de Estudos do ensino da Matemática – GEEM (...) (MIORIM, 1998, p. 11).

Algumas das ações destes grupos consistiram na realização de congressos, cursos de atualização de professores, além de publicações e traduções de livros. Tais ações, segundo Pires (2006) tinham por objetivo evidenciar o estruturalismo matemático do grupo Bourbaki, de forma a promover a reformulação do ensino de matemática (PIRES, 2006, p. 2).

O GEEM (Grupo de Estudo do Ensino de Matemática), criado em 1961, sediado na Universidade Mackenzie em São Paulo, sob a presidência do professor Osvaldo Sangiorgi, teve grande destaque na divulgação e disseminação das ideias do MMM. O grupo foi o primeiro em São Paulo a realizar cursos de aperfeiçoamento de professores com enfoque na Matemática Moderna (WIELEWSKI, 2008, p. 3).

Em parceria com o Ministério da Educação e Cultura (MEC) e com as Secretarias de Educação do Estado e Município de São Paulo, o GEEM desenvolveu cursos de formação com o conteúdo da Matemática Moderna, voltados para professores secundários e primários (LIMA, 2006, p. 30). Além

disso, o GEEM desenvolveu ações disseminadoras do MMM com a elaboração de livros didáticos.

Osvaldo Sangiorgi foi um dos responsáveis pela parte da Matemática presente no primeiro livro denominado “*Matemática Moderna para o Ensino Secundário*”, lançado em 1962 pela Companhia Editora Nacional, escrito de forma coletiva pelo GEEM. O livro teve grande repercussão tanto entre os alunos, como entre os professores, chegando a se tornar referência na época. Em seguida, Sangiorgi ainda publicou uma série de livros voltados para a Matemática Moderna, difundindo o movimento não só no estado de São Paulo, como por todo o Brasil. Mesmo tendo entre seus colaboradores professores do ensino primário e secundário, inicialmente o grupo era mais voltado ao ensino secundário (WIELEWSKI, 2008, p. 4).

Outro grupo importante para a difusão do MMM no Brasil foi o GEEMPA (Grupo de Estudos sobre o Ensino de Matemática de Porto Alegre), situado aqui no estado do Rio Grande do Sul, fundado em 1970 nas dependências do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha e tendo como presidente a professora Esther Pillar Grossi. A maioria dos seus colaboradores eram professores primários. O grupo contou também com a colaboração de personalidades de outros países, ligadas ao MMM, como o pesquisador Zoltan Paul Dienes.

Segundo Wielewski (2008), o GEEMPA aproveitou-se, e inspirou-se, nas experiências do GEEM, da sua preocupação com os conteúdos em detrimento da metodologia, além da preocupação com o ensino e a aprendizagem dos alunos. Assim, à exemplo do GEEM, o GEEMPA priorizava em seus cursos de formação voltados a Matemática Moderna “os aspectos metodológicos da renovação do ensino de Matemática” (WIELEWSKI, 2008, p. 6).

Como algumas de suas ações voltadas para a implementação do movimento no Rio Grande do Sul, o grupo realizou formações de professores, cursos, seminários, palestras, reuniões de estudo, além de experiências com classes-piloto, direcionadas para o ensino da Matemática Moderna no primeiro grau. Segundo Wielewski (2008), essas experiências baseavam-se nos estudos sobre aprendizagem de Dienes, que teve grande influência nas ideias que circulavam no estado e no IE neste período.

3.3 As noções topológicas no ensino e aprendizado da matemática durante o MMM

Ao mencionar as noções topológicas no período em questão, não se pode deixar de citar a importância de Dienes neste período e, principalmente, para o entendimento destas noções. As ideias de Dienes nortearam diversas ações durante o MMM, inclusive suas concepções sobre as noções topológicas.

Em sua entrevista, Rute traz à tona uma conexão entre o Grupo Bourbaki e Dienes, colocando-o como um “*tradutor da matemática contemporânea, do Bourbaki*” (CUNHA, 2020). Com isso, Dienes estaria traduzindo para o Ensino as ideias dos Bourbaki, principalmente aquelas relacionadas às estruturas-mãe e dentre elas, as noções de Topologia. Ela coloca as noções topológicas exploradas por Dienes como uma forma de “*querer se adaptar à Matemática contemporânea do Grupo Bourbaki*” (CUNHA, 2021).

Zoltan Paul Dienes, húngaro, nascido em 1917. Realizou seus estudos primários na França e aos 15 anos se mudou para o Reino Unido, onde posteriormente tornou-se doutor em Matemática e Psicologia. Na Universidade de Londres, no ano de 1939, recebeu seu Ph.D. No ano de 2014, em 11 de janeiro, Dienes faleceu, com 97 anos de idade.

O pesquisador teve suas ideias amplamente divulgadas durante o MMM, tornando-se referência nas discussões sobre o assunto. Ele valorizava a construção de conceitos matemáticos pela criança, inspirado em ideias de Piaget, ficando conhecido internacionalmente por defender:

“(…) uma metodologia de ensino que valorizava o uso de materiais didáticos, tais como os Blocos Lógicos e os Blocos Multibásicos, com a intenção de criar situações de aprendizagem de conceitos matemáticos às crianças” (DALCIN; SILVA, 2014, p. 1148).

Dienes investigou o processo de aprendizado da criança e identificou que a aprendizagem matemática ocorre em seis etapas. Na primeira delas, o “jogo livre”, etapa em que o aluno deve se familiarizar com o conteúdo a ser aprendido. Seria uma fase de adaptação ao meio, que conduzirá o aluno em

direção à aprendizagem. A segunda etapa, denominada como “jogos estruturados”, é onde são colocadas as restrições, as regras do “jogo”. Durante a terceira etapa, “jogo de dicionário” ou “jogo de isomorfismo”, é quando o aluno inicia a percepção das estruturas comuns dos jogos estruturados e a realizar abstrações. A etapa quatro é a das representações. Nesta etapa, o aluno ainda não tem condições de utilizar as abstrações, então as estruturas comuns lhes são representadas de forma visual e/ou auditiva. Na quinta etapa é quando as representações e suas propriedades são estudadas. É nesta fase que a criança consegue criar uma linguagem para a descrição das representações. A sexta e última etapa é o espaço em que é inventado um sistema mais formal, com axiomas e “as regras do jogo”, usando as descrições da etapa anterior. Para Dienes a manipulação de um sistema formal é o objetivo final da aprendizagem matemática de uma estrutura (DIENES, 1972).

As noções topológicas estão presentes em seus estudos, em especial em dois livros: a *Exploração do espaço e a prática de medição* e no primeiro volume da trilogia *Geometria pelas Transformações*. No livro “*Exploração do espaço e prática da medição*” de autoria de Dienes e Golding (1969), é definido Topologia como sendo “o estudo das propriedades do espaço não afetadas por deformações contínuas” (DIENES; GOLDING, 1969, p. 2).

Neste livro são sugeridas diversas atividades envolvendo os conceitos topológicos, como noções de espaço, dentro e fora, fronteiras, domínios, dentre outras. O livro é basicamente composto por sugestões de atividades, provavelmente para os professores dos anos iniciais desenvolverem com seus alunos. É possível perceber indícios da influência deste livro nas listas e fichas de atividades encontradas no acervo do LM do IE, pela semelhança das atividades.

Também no Livro *A Geometria pelas Transformações: volume I: Topologia, Geometria Projetiva e Afim*, publicado em 1967, Dienes e Golding apresentam uma série de jogos e atividades que vão desde o estudo de fronteiras, regiões, interior e exterior ao estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes por transformações topológicas, como deformações que não produzem nenhum tipo de ruptura da figura.

Em relação à Geometria Projetiva, propõem o estudo das propriedades descritivas das figuras que permanecem invariantes por projeções obtidas por fontes puntiformes, particularmente, o estudo da perspectiva. A Geometria Afim é abordada pelo estudo das propriedades invariantes por projeções a partir do infinito (projeções paralelas), particularmente, o estudo das semelhanças (DALCIN; CUNHA, 2018, p. 750).

Dienes ministrou cursos de formação de professores, inspirados nas ideias da Matemática Moderna. No Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha foram localizados documentos indicando a presença dos trabalhos e das ideias do pesquisador. No próximo capítulo, são explorados alguns destes documentos, e outros materiais inspirados neles, na busca por investigar e evidenciar os usos que eram feitos das noções topológicas.

Sobre as concepções das entrevistadas acerca das noções topológicas parece ser unânime a associação de tais conceitos ao estudo da Geometria. Além disso, algumas delas não enxergam uma relação significativa entre processo de construção do número e as noções topológicas, mas sim com o estudo da Geometria e do Espaço.

Rute destaca a relação entre a Topologia e as noções topológicas, segundo ela, o objetivo na década de 1970 de se estudar a Topologia era chegar ao estudo das estruturas, logo, a “tradução” feita por Dienes pode ser vista também como uma forma de trabalhar as estruturas no Ensino, através das noções topológicas. Ela ainda vai além, ao colocar que o objetivo de se ensinar as estruturas-mãe nos anos de 1970 era que o aluno reunisse todos esses conhecimentos e aprendesse “uma matemática” mais avançada, a nível de um cientista, o que era uma necessidade no mundo pós Segunda Guerra.

Neuza, em sua narrativa, tem lembranças de tais noções já se fazerem presentes no período anterior ao auge do MMM, na Escola Nova. Ela tem algumas recordações de exercícios com noções topológicas em manuais didáticos que circulavam durante a Escola Nova, principalmente que trabalhavam questões de continuidade e caminhos.

Outras entrevistadas também recordam vagamente da presença das noções topológicas em atividades anteriores ao MMM, embora reconheçam que o auge dos estudos relacionados a elas e das discussões tenha sido durante o MMM. Para a professora Mônica,

“a Matemática Moderna trouxe (...) as estruturas matemáticas pra dentro do ensino. Quem trouxe essas coisas foi a Matemática Moderna, os matemáticos eles não criaram a topologia, mas compreendem que a topologia é importante pra construção do pensamento matemático” (SANTOS, 2021).

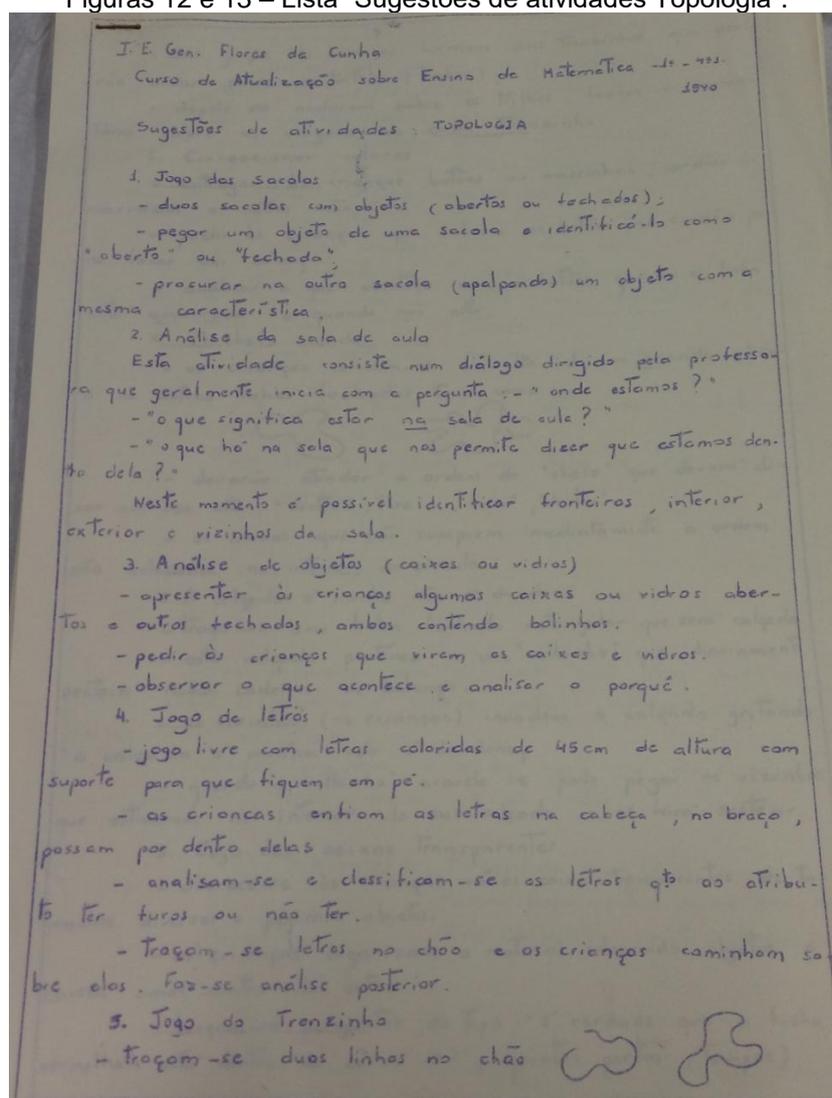
Também foi frequente durante as narrativas a associação entre as noções topológicas e outras disciplinas, ressaltando que elas eram exploradas na escola de forma interdisciplinar. A professora Lucília cita inclusive seu marido, professor de educação física, que trabalhava conceitos de fronteiras, limites, em regras de jogos e brincadeiras.

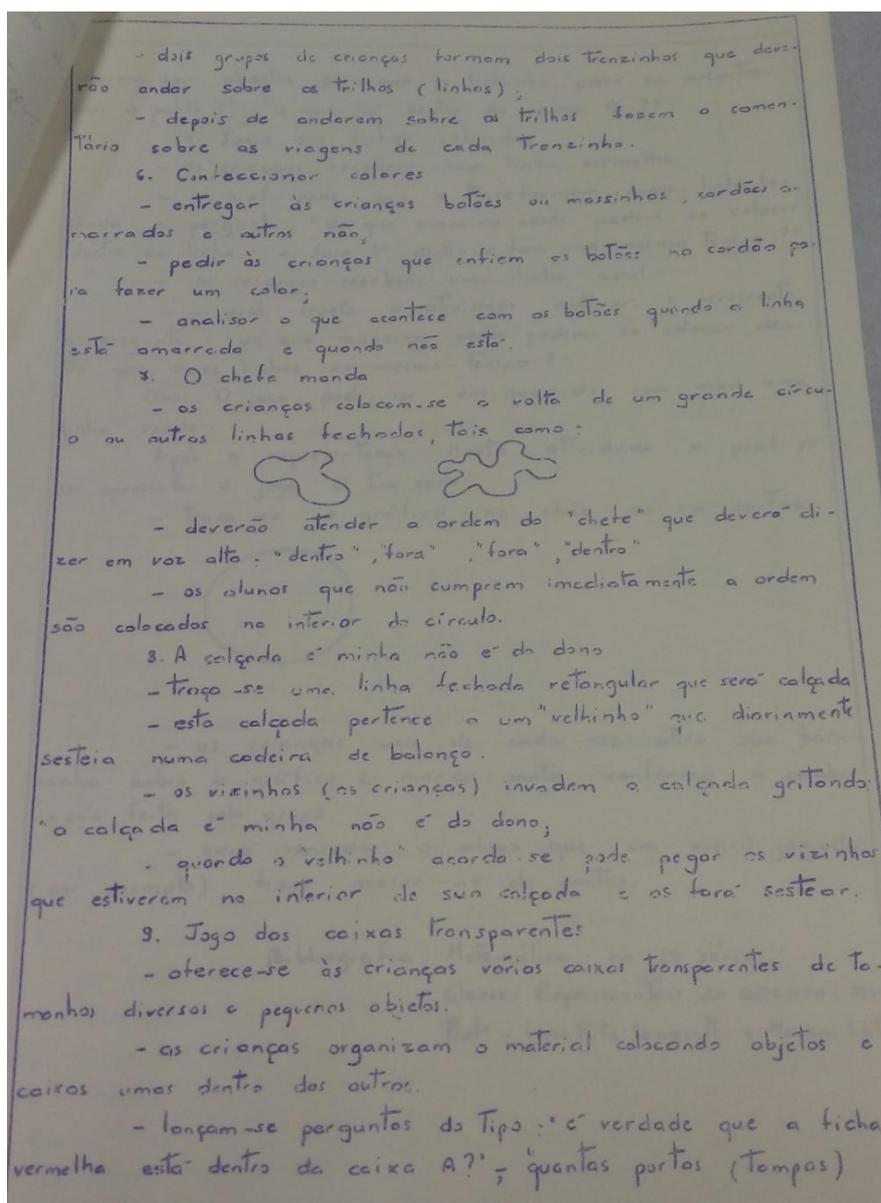
4. USOS DAS NOÇÕES TOPOLÓGICAS

Como já foi explicitado ao longo do texto, noções topológicas aparecem com maior ênfase no MMM, assim, buscou-se observar em documentos escolares do acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha e documentos fornecidos pelas entrevistadas, livros e livros didáticos, os usos que eram feitos de tais noções nesse momento. Neste capítulo são apresentadas algumas atividades presentes nos materiais citados, que abordam as noções topológicas.

Dentre os documentos encontrados no LM, e já citados anteriormente, destaco a lista “Sugestões de atividades Topológicas” (Figuras 12 e 13) datada de 1974.

Figuras 12 e 13 – Lista “Sugestões de atividades Topologia”.





Fonte: Coleção digital do acervo do Laboratório de Matemática do IE (Tombo 656').

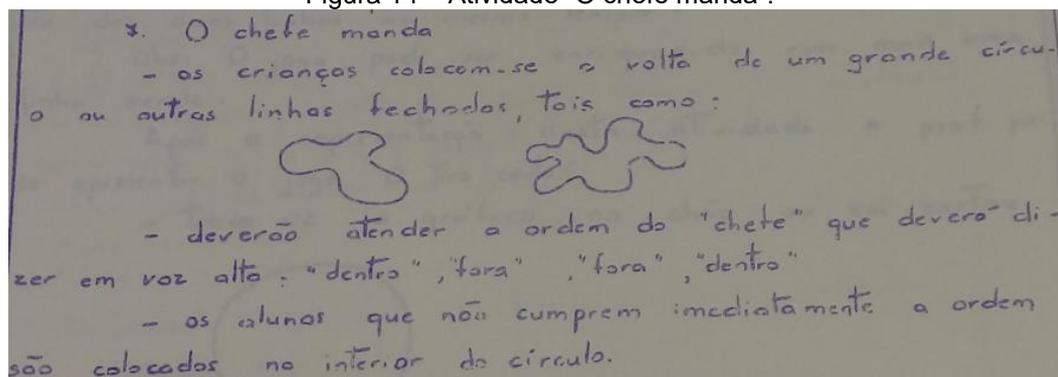
A lista, escrita provavelmente pelas professoras Lena Rita Lanzotti e Marlene Leite, traz atividades semelhantes às apresentadas por Dienes no livro *"Exploração do Espaço e Prática da Medição"* (1969). Assim como no livro, as atividades desta lista abordam principalmente as noções topológicas de fronteiras, dentro, fora, linhas/curvas aberta e fechadas.

A atividade 7 (Figura 14), intitulada como "O chefe manda", é um exemplo de atividade semelhante às do livro de Dienes. Ela aborda principalmente as noções de dentro e fora. Em seu livro, Dienes apresenta a atividade "Fronteiras e Domínios", que consiste em movimentos similares à

⁷ Disponível em: <https://cedap.ufrgs.br/xmlui/handle/20.500.11959/10000000656>.

atividade da lista. Sugere-se dividir a turma em dois grupos: meninos e meninas, os meninos têm dois campos fechados e as meninas apenas um. A ideia é que, ao sinal do professor, os meninos mudem de um dos seus campos para o outro, sem serem pegos pelas meninas enquanto estiverem do lado de fora dos seus campos. Dienes utiliza-se das noções de fronteiras e domínios para delimitar regiões abertas e fechadas.

Figura 14 – Atividade “O chefe manda”.



Fonte: Coleção digital do acervo do Laboratório de Matemática do IE (Tombo 656).

No geral, as atividades parecem ser bem iniciais, envolvendo tarefas possivelmente destinadas a crianças pequenas, que estariam iniciando seu processo de escolarização. Não há maiores informações sobre os objetivos das atividades, nem associação a algum conteúdo matemático específico.

Durante as entrevistas, Neuza, ao observar atividades semelhantes, comenta que essas trazem usos de noções que a criança já possuía antes de entrar na escola. Diante dessa colocação é possível inferir que tais atividades pudessem servir como uma revisão, ou tentativa de organização das experiências das crianças com as noções topológicas em suas atividades visando uma sistematização de conceitos matemáticos.

As noções abordadas nessa lista ainda aparecem em diversas outras atividades e fichas encontradas no Acervo do LM do IE, como as Figura 15 e 16, intituladas “Estudo nº 12”, que abordam principalmente as noções topológicas de curva fechada, fronteiras, regiões de interior e exterior de curvas fechadas. Estas atividades, assim como outros materiais encontrados no acervo não possuem data, nem autoria.

Figura 15 e 16 – Estudo nº 12.

Estudo nº 12 - Conjuntos de Pontos Determinados pelas Curvas

As curvas fechadas simples determinam no plano três conjuntos de pontos:

- 1º. o conjunto dos pontos interiores à curva.
- 2º. o conjunto dos pontos da própria curva, ou fronteira.
- 3º. o conjunto dos pontos exteriores à curva.

No diagrama ao lado:

os pontos p e q são interiores da curva.

os pontos r e s são exteriores da curva.

o ponto t está na curva, ou fronteira.



As curvas fechadas simples determinam no plano duas regiões:

- 1ª a região interior que é formada pelos pontos interiores à curva.
- 2ª a região exterior que é formada pelos pontos exteriores à curva.



Exercício 1. Observe a figura e curvas com um eixo e responda certas:

- () os pontos a, b, c pertencem ao interior da figura.
- () os pontos a, b, c pertencem ao exterior da figura.
- () os pontos d, e, f pertencem ao interior da figura.
- () os pontos d, e, f pertencem ao exterior da figura.



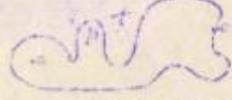
2. Tomando uma curva fechada simples e desenhando ao longo dela, os conjuntos de pontos que esta curva determina.

3. Liste de verde a região interior e de amarelo a região exterior das curvas



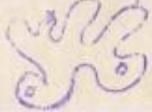
4. Coloque V ou F, de acordo com o Corolário

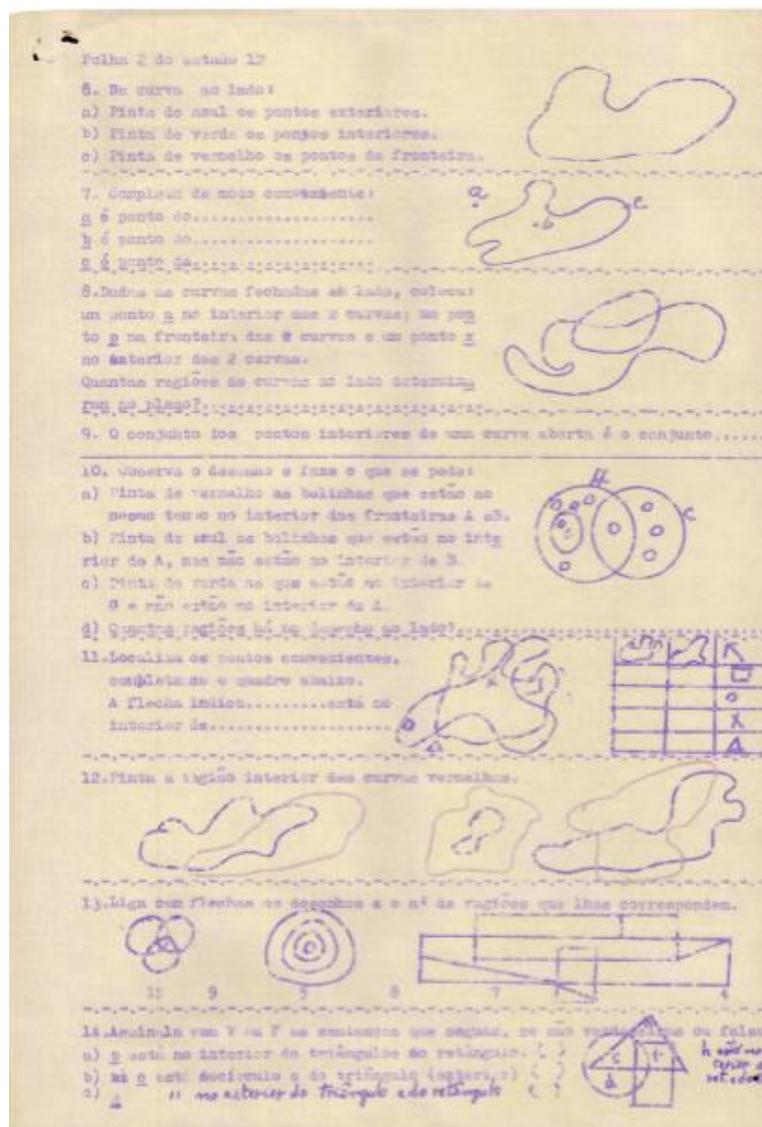
- () p não é ponto da fronteira.
- () q não é ponto do interior.
- () r não é ponto do interior.
- () s é ponto da fronteira.



5. Complete com I , O , A ou X .

- I conjunto dos pontos da fronteira.
- O conjunto dos pontos exteriores.
- A conjunto dos pontos interiores.
- X conjunto dos pontos da fronteira.



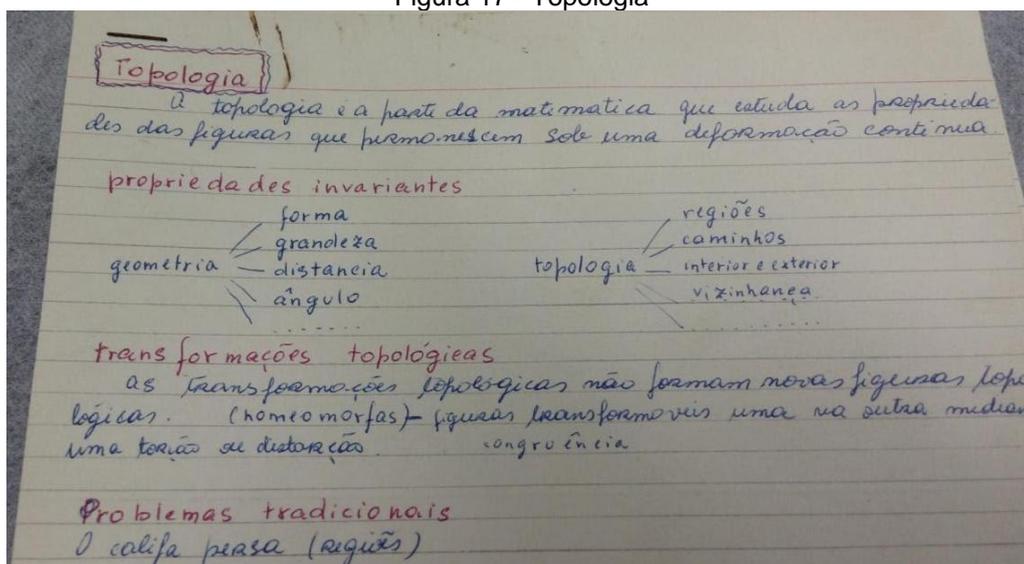


Fonte: Acervo do Laboratório de Matemática do IE (Tombo 659⁸).

Junto com as listas e materiais relacionados às noções topológicas, foi encontrada uma ficha intitulada “Topologia” (Figura 17), em que a topologia é definida como “a parte da matemática que estuda as propriedades das figuras que permanecem sob uma deformação contínua”. Também faz uma distinção das propriedades invariantes que são características da geometria e as que correspondem a topologia, como “regiões, caminhos, interior e exterior, vizinhança...”.

⁸ Disponível em: <https://cedap.ufrgs.br/xmlui/handle/20.500.11959/1000000659>.

Figura 17 - Topologia



Fonte: Coleção digital do acervo do Laboratório de Matemática do IE.

No final da primeira página da ficha e também no seu verso, há exemplos de problemas tradicionais da Topologia, inclusive alguns que já foram citados anteriormente, como o problema da Ponte de Königsberg e a Faixa de Moebius. Diferente do material apresentado nas figuras 12 e 13, esses últimos (Figuras 15, 16 e 17) claramente associam as noções topológicas ao estudo da Geometria e, conseqüentemente à Topologia em si, como uma das Geometrias não Euclidianas.

Aqui destaco o uso das noções topológicas não mais como apenas noções iniciais ou uma retomada de noções já pertencentes às crianças, mas como “uma parte” do estudo da Geometria. Como já foi citado em outros momentos ao longo deste texto, no período do MMM a Geometria Euclidiana não era considerada como a primeira Geometria a ser estudada pelas crianças, o que corrobora à ideia de que tais noções, associados à Geometria, seriam abordados nos primeiros anos da escolarização das crianças.

Em sua entrevista, Mônica cita as ideias discutidas por Dienes em seus livros, de que a topologia seria uma geometria sem métrica, uma geometria de transformações no plano. Ela destaca ainda que:

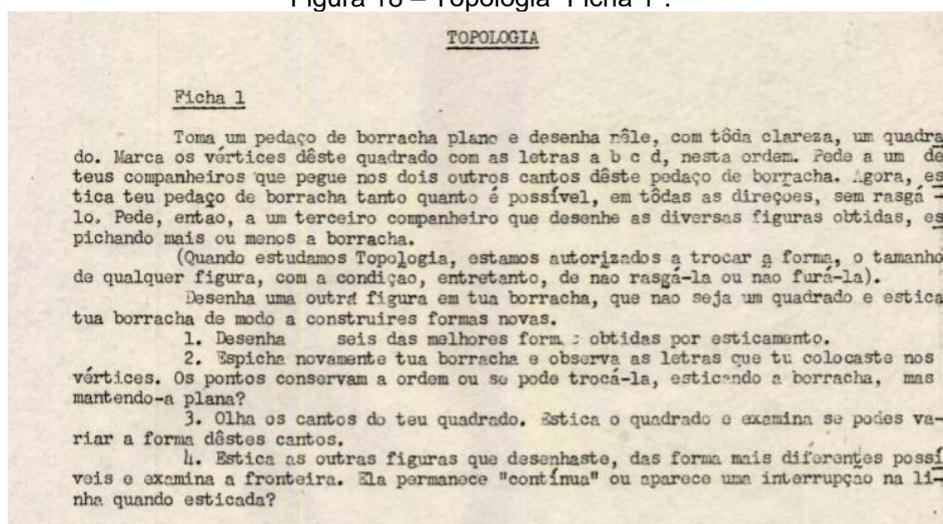
“(…) toda a linguagem que a criança usa, em cima, embaixo, ao lado, as formas que ela percebe, toda essa construção do espaço, que é extremamente importante na construção do pensamento geométrico, pensamento algébrico, pensamento lógico-matemático, das representações, a topologia é fundamental” (SANTOS, 2021).

Ainda sobre essa relação entre a Geometria e as noções topológicas, Esther discorre um pouco em sua entrevista ao citar que:

“(...) a topologia veio se concentrar em propriedades bem amplas, que acompanham o ser humano. Por exemplo, um bebê, a primeira experiência dele espacial é sair do útero materno. Pra sair do útero materno tem que haver uma abertura, ou pela cesárea, ou pela vagina. Então a topologia estuda as propriedades bem amplas, que seriam o aberto, fechado... Quando tem um fechado é porque tem o interior, tem o exterior e tem uma fronteira, porque pra alguma coisa ser fechada é preciso que... Esse fecho, ele delimita um interior e um exterior. Agora, com mais de um fechado a gente tem várias regiões, e entra toda a problemática que derivou Yasmin, lá do Jorge Cantor, de toda a possibilidade dos diagramas, fazendo intersecções de fechados, de linhas fechadas” (GROSSI, 2021).

Também foram encontradas outras fichas com explicações acerca da Topologia e que fazem menção à geometria. Nas Fichas 1 e 2 (Figuras 18 e 19), por exemplo, há sugestões de dinâmicas a serem realizadas, explicando algumas propriedades topológicas que a caracterizam como a “Geometria da Borracha”. Assim como está descrito na ficha, ao estudarmos Topologia, é possível mudar a forma de um objeto (Figura 18), seu tamanho, realizando alongamentos e compressões, torções, dentre outros movimentos e, desde que não haja rasgos nem furos, ele permanece o mesmo.

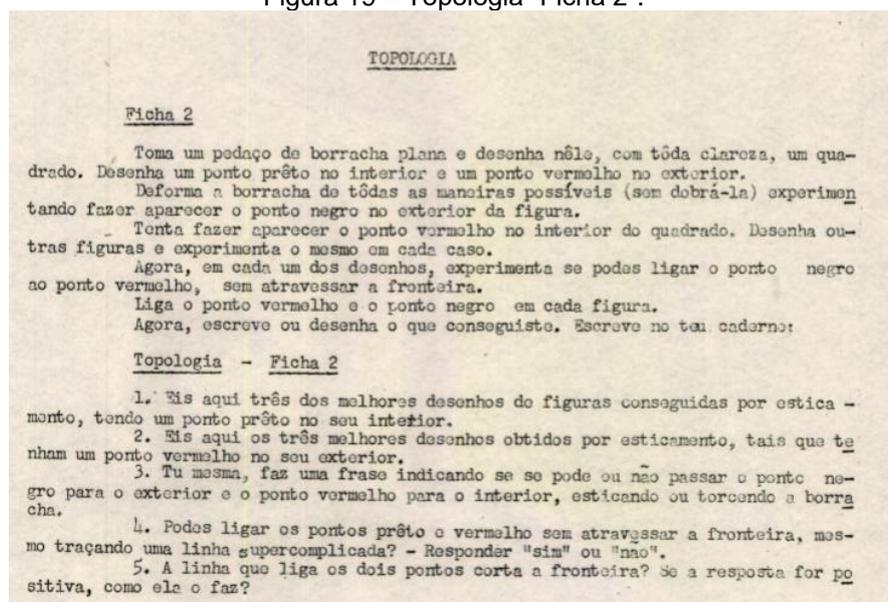
Figura 18 – Topologia “Ficha 1”.



Fonte: Coleção digital do acervo do Laboratório de Matemática do IE (Tombo 660⁹).

⁹ Disponível em: <https://cedap.ufrgs.br/xmlui/handle/20.500.11959/10000000660>.

Figura 19 – Topologia “Ficha 2”.

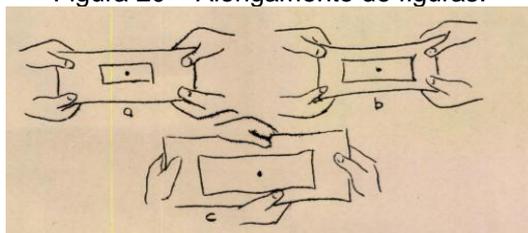


Fonte: Coleção digital do acervo do Laboratório de Matemática do IE (Tombo 660).

Foram localizadas também trechos das transcrições de um livro que explica com mais detalhamento as noções desenvolvidas nas fichas. As traduções são dos primeiros tópicos do livro “*Topology – The Rubber – Sheet Geometry*” de Johnson e Gleen (1964). Os tópicos do livro foram traduzidos pela professora Zilá Maria Guedes Pain e revisados pelas professoras Leda Sperb Lopes e Nara Santos.

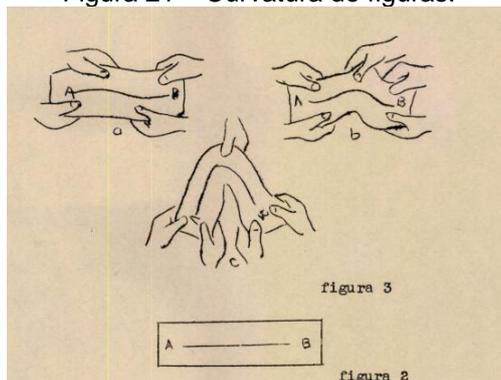
De acordo com estas traduções, no estudo da Topologia são realizadas perguntas do tipo “onde”, “entre o que?”, “dentro ou fora?”, em geral não há preocupação com distâncias ou comprimentos, mas sim com o sentido e a direção dos deslocamentos, por exemplo. Além disso, neste material é comentado novamente que a Topologia é conhecida como “tira de borracha geométrica”, ao diferenciá-la da Geometria (Euclidiana) por ser possível mudar a forma e o tamanho das figuras (Figura 20). Assim, linhas retas podem facilmente tornarem-se curvas (Figura 21) e terem seu comprimento modificado.

Figura 20 – Alongamento de figuras.



Fonte: Coleção digital do acervo do Laboratório de Matemática do IE (Tombo 1947¹⁰).

Figura 21 – Curvatura de figuras.



Fonte: Coleção digital do acervo do Laboratório de Matemática do IE (Tombo 1947).

Estes são apenas alguns dos documentos escolares encontrados no acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha, que abordam as noções topológicas e propriedades topológicas. Assim como é possível ver nas atividades apresentadas, as ideias de Dienes estão presentes, não só no IE, mas, no Estado do Rio Grande do Sul, inclusive na produção de livros didáticos, como será visto a seguir.

4.1 As noções topológicas nos livros didáticos do MMM

Ainda próximo às ideias presentes no LEM, temos o livro da professora Esther Pillar Grossi, como já mencionado antes, primeira presidente do GEEMPA. Seu livro didático: *“Nova Iniciação à Geometria: uma introdução à topologia do plano”* - Curso Fundamental (Figura 22) circulou no Brasil durante o período do MMM. Segundo Esther, o livro foi escrito após sua passagem pela França, para fazer mestrado. Lá ela realizou um curso de Topologia.

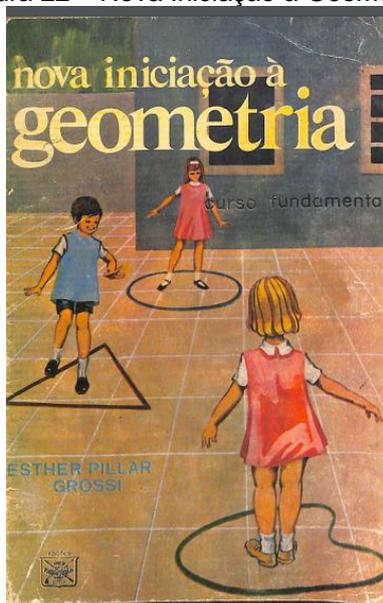
Esther comenta também que o livro foi escrito *“na onda da tal da instrução programada, mas ele funciona. As pessoas fazem e gostam. Apesar*

¹⁰ Disponível em: <https://cedap.ufrgs.br/xmlui/handle/20.500.11959/1000001947>.

de que a instrução programada não é nenhuma genialidade, mas o livrinho funciona” (GROSSI, 2021). Na época em que foi convidada para escrevê-lo ela trabalhava tanto com professores como com crianças, o que lhe forneceu experiências que contribuíram para com a escrita do livro.

Ele foi publicado no ano de 1971, pela Edições Tabajara. Como o GEEM descreve na apresentação do livro, o subtítulo “Introdução à Topologia do Plano” descreve perfeitamente o livro, visto que aborda as noções topológicas em todo seu interior, segundo eles, “um tópico de matemática até pouco tempo conhecido apenas por especialistas”.

Figura 22 – Nova Iniciação à Geometria.



Fonte: Grossi (1971).

O objetivo do livro é apresentar essas noções aos professores primários, com uma abordagem simples, de modo que possam trabalhá-los com seus alunos. A capa do livro chama atenção, pois as crianças estão não em sala de aula, mas no pátio, provavelmente da escola, pois vestem uniforme escolar. Estão em ação, movimentando-se, caminhando ou pulando, entrando e saindo das formas desenhadas no chão, esta cena remete as fotografias que compõem os livros de Dienes, em especial o “*Geometria pelas transformações*”. Nas primeiras páginas do livro Grossi (1971) deixa claro que o livro aborda as estruturas topológicas em geometria, pois acredita que a partir delas, de modo informal, as crianças iniciem a construção da geometria. As crianças fazem essa construção desde cedo, ao se depararem com fronteiras,

noções de aberto, fechado, dentre outros aspectos topológicos e o fazem brincando.

A leitura deste livro não se dá de modo linear. A condução da leitura depende das respostas do leitor às perguntas propostas no final de cada página. Se acertar, o leitor é conduzido a uma nova página, em que é dado seguimento aos conteúdos. Se errar, é levado a uma página com mais explicações do conceito ou noção que ele aparentemente não entendeu. É como se o livro interagisse com o leitor, auxiliando-o na construção das noções e não somente apresentando-as.

Inicialmente é pedido que o leitor já siga para a página 16, onde é abordado o espaço. Como pergunta inicial, pede-se que o leitor responda se um balão cheio e um ovo delimitam porções do espaço bem determinadas. Dependendo de sua resposta o leitor é direcionado a uma nova página. Na página correspondente a resposta certa (sim), encontra-se uma explicação e novos desdobramentos, dando seguimento ao conteúdo.

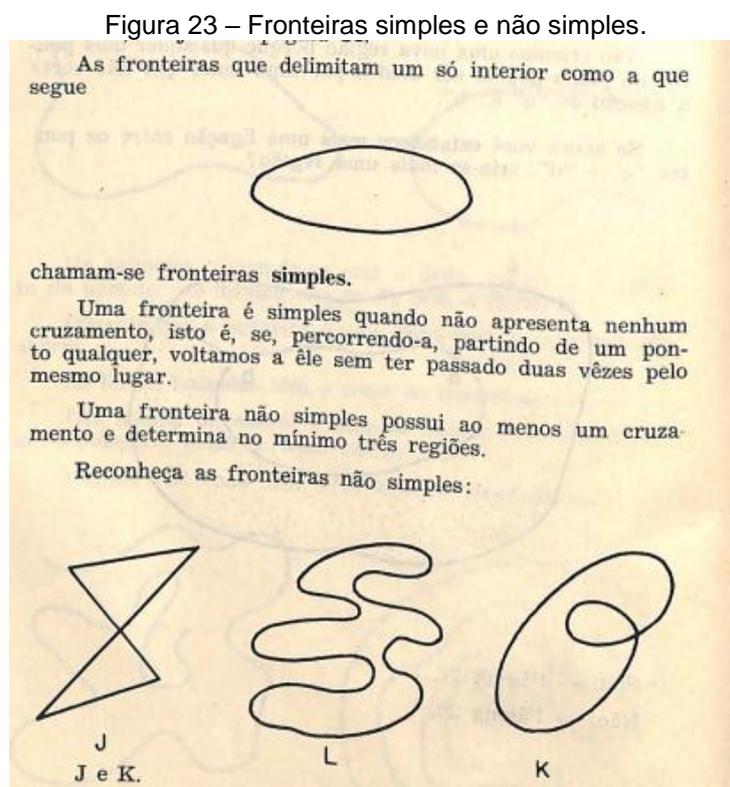
Os conteúdos do livro iniciam-se com a abordagem do espaço e vão evoluindo, conforme as questões apresentadas, seguindo com explicações, exemplos e atividades relacionadas, nesta ordem, com delimitações de um espaço, números de faces delimitadas pelo espaço. Em seguida, chega-se à definição de plano e de linha, como “um caminho traçado de um só golpe de lápis” (GROSSI, 1971, p. 21) e também como um conjunto de pontos no plano.

Partindo do trabalho com as linhas, é feita a distinção entre linhas abertas e fechadas, que também são chamadas pela autora como fronteiras. Grossi destaca que as noções de aberto e fechado são muito importantes na topologia e que delas derivam outras noções.

A partir da ideia de fronteiras (linhas fechadas) a autora parte para a ideia de regiões, como “um subconjunto de pontos situados no interior da linha fechada e um subconjunto de pontos situados no exterior da fronteira” (GROSSI, 1971, p. 33). Assim, conclui-se que uma fronteira determina pelo menos duas regiões.

Em seguida, são abordadas as noções de fronteira simples, como aquelas que delimitam um só interior, que não possuem “cruzamentos”, isto é, “percorrendo-a partindo de um ponto qualquer, voltamos a ele sem ter passado duas vezes pelo mesmo lugar” (GROSSI, 1971, p. 24). Já a fronteira não

simples é definida como aquela que possui ao menos um cruzamento e determina pelo menos três regiões.



Fonte: Grossi (1971, p. 24).

Os conceitos do livro avançam para fronteiras desconexas e conexas. Segundo a autora, uma fronteira é conexa quando “podemos percorrê-la inteiramente sem saltar em nenhum ponto” (GROSSI, 1971, p. 14). São apresentados uma série de exercícios para o leitor refletir sobre fronteiras conexas e desconexas, simples e não simples.

Dando continuidade aos conceitos, a autora começa a abordar traçados de ligação entre pontos da fronteira, de modo que aumente o número de regiões delimitadas por essa fronteira. Assim, sempre que é estabelecida uma ligação numa fronteira conexa, é delimitada uma nova região. Ao fim, Grossi (1971) chega à regra “o número de ligações que se pode estabelecer entre fronteiras que não se tocam, tais que não aumentem o número de regiões, é sempre inferior de 1 ao número de fronteiras” (GROSSI, 1971, p. 36).

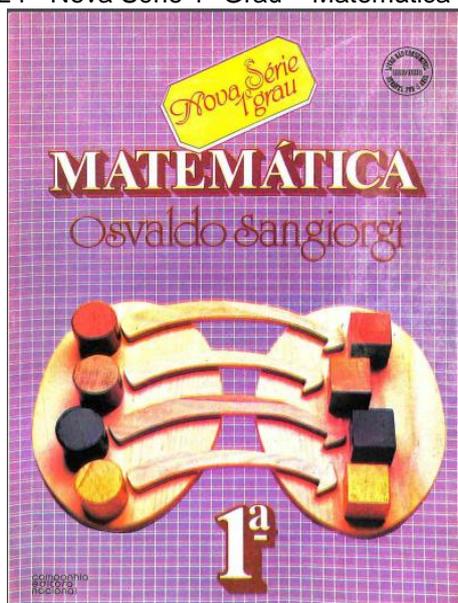
Partindo então desde as noções iniciais de espaço, a autora aborda noções de aberto, fechado, fronteiras, até chegar ao estudo de regiões. Como é apresentado no subtítulo, este livro é uma introdução à topologia do plano,

não dando conta de percorrer todas as noções topológicas, entretanto, serve como base para diversas delas.

Além desse livro da professora Esther Grossi, localizei mais dois que apresento a seguir, dentre as coleções voltadas para o ensino de Matemática no 1º grau que circularam com os ideais da Matemática Moderna no Brasil, observei duas com mais atenção. A escolha destas duas em especial, deu-se pelo papel que os seus autores representaram durante o movimento e pela popularidade das obras.

A coleção “Nova Série 1º Grau - Matemática” (Figura 24) de Osvaldo Sangiorgi, de grande circulação no Brasil e indicada pela professora Neuza como uma das obras que abordam as noções topológicas, conta com quatro volumes destinados às quatro primeiras séries do Primeiro Grau. Os livros foram publicados pela Companhia Editora Nacional. Os quatro volumes foram localizados no Repositório Institucional da UFSC, assim como os manuais dos professores referentes aos volumes 1, 3 e 4. Nos livros não aparecem a data de publicação e, na descrição dos livros no repositório, há um comentário de que provavelmente teriam sido escritos na década de 1960, entretanto, como o ensino de primeiro grau foi instituído por lei em 1971 e implementado somente a partir de 1972, é mais provável que a coleção seja dos anos 1970.

Figura 24 - Nova Série 1º Grau – Matemática 1ª série.



Fonte: Sangiorgi (s.d.).

Na introdução ao primeiro Manual do Professor (s.d.), Sangiorgi destaca que os estágios de desenvolvimento mental da criança não estão relacionados apenas a sua idade, mas com a maturação do seu sistema nervoso e principalmente, com as experiências que a criança adquire a partir da interação com meios físicos e sociais. Assim, Sangiorgi separa a Matemática a ser ensinada nas séries iniciais em dois níveis: Nível I, que abrange a 1ª e a 2ª série, e Nível II, que abrange a 3ª e a 4ª série.

Sangiorgi descreve então os assuntos matemáticos que devem ser estudados no nível I – 1ª série e dentre eles o primeiro a ser citado são as “Noções topológicas”, as quais ele coloca como exemplo “tamanho, posição, forma...”. Com isso, o autor dá a entender que ele considera estas características como noções topológicas. Neste manual também são apresentados os objetivos de se trabalhar cada um dos assuntos escolhidos, sendo os referentes às noções topológicas: “diferenciar tamanhos; determinar fronteiras; identificar formas semelhantes e adquirir acuidade visual” (SANGIORGI, s.d., p. 8).

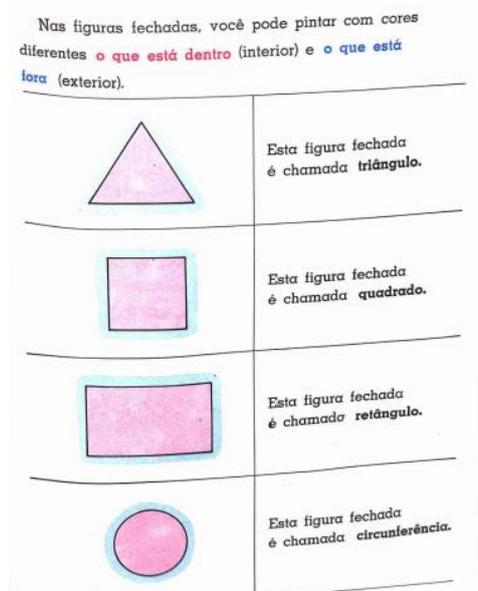
Ainda no primeiro manual, destinado à 1ª série, Sangiorgi atenta para o fato de que tais assuntos escolhidos possuem relação com as estruturas topológicas e de ordem do sistema mental da criança. O autor complementa ainda que “assim, o conceito de número está, subjacentemente, presente quando o aluno relaciona comprimentos e tamanhos de objetos” (SANGIORGI, s.d., p. 4).

A partir dessas explicações de Sangiorgi, compreendo que ele associa noções topológicas a questões referentes a tamanho, posição e forma dos objetos e que a partir da manipulação destes objetos e das relações com estas noções a criança desenvolve a compreensão do conceito de número.

No livro da 1ª série, destinado aos alunos, as primeiras noções abordadas são referentes à classificação de objetos quanto ao tamanho (maior, menor igual) e a forma (diferente). A partir disso, trabalham-se as quantidades para chegar então ao número. Esta organização condiz com a ideia que Sangiorgi apresenta no Manual do Professor, de se trabalhar primeiro as noções consideradas por ele topológicas e em seguida, desenvolver o conceito de número.

Ao fim deste primeiro volume, encontram-se atividades voltadas à geometria, onde são exploradas as noções topológicas de interior e exterior por meio de figuras geométricas fechadas (Figura 25).

Figura 25 – Interior e exterior de figuras fechadas.



Fonte: Sangiorgi (s.d., p. 55).

Infelizmente, não foi localizado o Manual do Professor referente ao segundo volume, destinado à 2ª série. Neste volume, há mais atividades envolvendo figuras geométricas e noções topológicas, principalmente diferenciando figuras e curvas geométricas abertas e fechadas e interior e exterior de figuras e curvas fechadas.

Nos manuais do professor referentes ao Nível II (3ª e 4ª série) o termo noções topológicas não é mais abordado, mas, é possível encontrar alguns indícios da sua presença nos livros destinados aos alunos, principalmente associadas ao estudo da geometria.

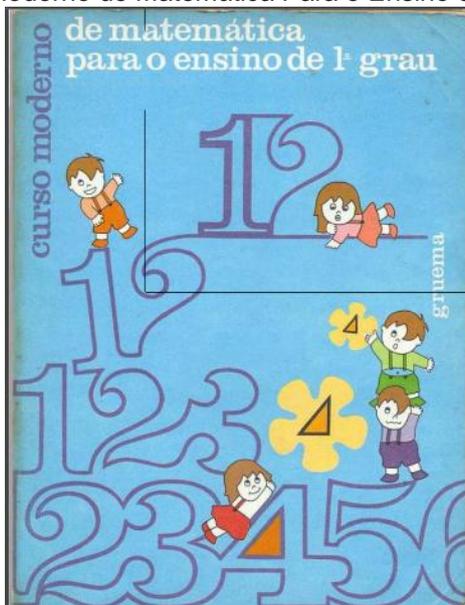
Por exemplo, no livro da 3ª série, o autor retoma as noções de aberto e fechado, interior e exterior ao falar sobre curvas geométricas abertas e fechadas, além de regiões e pontos interiores e exteriores a curvas fechadas. Na mesma seção, Sangiorgi aborda ainda polígonos e perímetro destes polígonos.

No livro da 4ª série, o autor retoma as noções topológicas na seção “Figuras Geométricas”, ao distinguir linhas poligonais abertas e fechadas e definir polígono como uma “linha poligonal fechada” (SANGIORGI, s.d., p. 61).

A partir disso e dos indícios encontrados no livro da 3ª série, parece que Sangiorgi fez uso também das noções topológicas para chegar à Geometria Euclidiana, em especial, ao estudo dos polígonos.

Seguindo na busca por materiais que evidenciassem os usos das noções topológicas durante o MMM, encontrei a “*Coleção Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau*” (Figura 26), publicada no Brasil pela Companhia Editora Nacional durante o período do Movimento da Matemática Moderna. As autoras da coleção faziam parte do Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (GRUEMA). Ela foi publicada entre março de 1972 e agosto de 1980, contando com oito volumes, destinados às oito séries do ensino de primeiro grau (VILLELA, 2009).

Figura 26 - Curso Moderno de Matemática Para o Ensino de 1º grau (1ª série).



Fonte: Liberman et al. (1974).

Foram consultados os quatro primeiros volumes desta coleção, destinados da primeira até a quarta série do primeiro grau. O primeiro e o segundo volume contam com a autoria de Anna Franchi, Lucília Bechara Sanchez (uma das entrevistadas) e Manhucia Perelberg Libermnan, enquanto que o terceiro e o quarto volume foram inscritos apenas por Anna Franchi e Lucília Bechara Sanchez. Foram consultados tanto os exemplares voltados para os alunos como os Guias do Professor referentes a esses volumes. Tanto os livros como as autoras foram citados pela professora Rute como possibilidades de fontes para esta pesquisa.

Em sua entrevista, Lucília relatou que na época ela e a professora Manhúcia eram as professoras mais chamadas para ministrarem cursos relacionados à matemática moderna para o primário, com isso, surgiu o interesse da Editora Nacional em convidá-las para escreverem livros didáticos de Matemática, que incluíssem a matemática moderna. As duas convidaram para ser co-autora a professora Anna Franchi, que trabalhava com as Escolas Experimentais, e que fazia parte de outro grupo.

Além dos seus livros terem sido os primeiros a incluírem as ideias da matemática moderna, Lucília ainda destaca que:

“(...) outro ponto muito importante, até então quem escrevia livros de Matemática para o Curso Primário eram pedagogos, não eram matemáticos. A Matemática começava no ginásio, especialista. Então nós fomos às primeiras autoras de livro para o Primário, que tínhamos formação de Matemática” (SANCHEZ, 2021).

No segundo volume, a presença das noções topológicas, diferente do primeiro volume, consiste principalmente em atividades (Figura 27) que abordam conceitos de curvas abertas e fechadas, fronteiras e regiões. As curvas são inseridas a partir do traçado de um caminho, com uma linha unindo dois objetos ou personagens.

Figura 27 – Curvas.

Zezinho pode percorrer vários caminhos de A até B.
Trace outros caminhos para Zezinho.

Zezinho pode percorrer vários caminhos partindo de A e chegando a A.
Desenhe outros caminhos para Zezinho.

Cubra com VERDE as CURVAS FECHADAS e com AZUL as CURVAS ABERTAS.

Curvas fechadas simples
Trace caminhos para Zezinho.
Zezinho deve sair de A e voltar para A sem passar duas vezes pelo mesmo lugar.

Zezinho deve sair de B e voltar para B passando por C e D sem passar duas vezes por um mesmo ponto.

Curvas fechadas não simples
Zezinho deve sair de A e voltar para A, passando duas vezes por B.

Juquinha deve sair de R e voltar para R passando duas vezes por Q e duas por A.

Juquinha deve sair de E e voltar para E passando três vezes por A e uma por C.

Fonte: Liberman, Sanchez & Franchi (1975, p. 72 e 73).

Após algumas atividades que exploram essas noções, são inseridos exercícios que abordam as regiões interiores e exteriores às curvas, assim como as fronteiras que delimitam essas regiões (Figuras 28 e 29). No próprio exercício são definidas algumas noções: “Toda curva fechada simples é uma fronteira” e “A fronteira separa regiões” (Liberman et al., 1975, p. 75). A ordem em que estes exercícios estão dispostos parece seguir certa lógica, formando um percurso suave para a construção dessas noções.

Figura 28 – Curvas e Regiões.

Pinte de **vermelho** o interior das curvas fechadas simples

Toda curva fechada simples é uma fronteira.
A fronteira separa regiões.
Assinale em que casos Zezinho pode ir de a para b sem atravessar fronteiras.

Complete

Na figura (1) a e b estão na mesma região.
 Na figura (2) a e b não estão na mesma região.
 Na figura (3) _____
 Na figura (4) _____
 Na figura (5) _____

Fonte: Liberman et al. (1975, p. 75).

Figura 29 – Regiões e Fronteiras.

O quadro indica a região em que a figura deve ficar

Desenhe as figuras

	↑	T	H	▲▲	●
○	Sim	Não		Não	
○			Sim		Sim

Desenhe: →

- △ No interior da fronteira vermelha
- No interior da fronteira azul
- No exterior da fronteira azul
- ▭ No exterior da fronteira vermelha

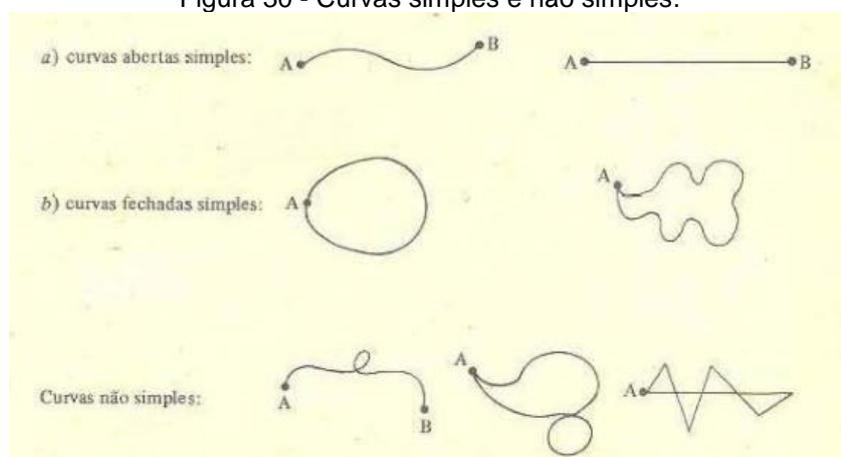
Desenhe: →

- △ No interior da fronteira vermelha
- No interior da fronteira azul
- No interior das duas fronteiras
- ▭ No interior da fronteira vermelha e no exterior da fronteira azul

Fonte: Liberman et al. (1975, p. 76).

No Guia do Professor, destinado ao segundo volume, os conceitos topológicos aparecem na seção “Geometria: Curvas e Regiões”, em que são apresentadas algumas definições. Por exemplo, curva como “um conjunto de pontos que se obtém deslocando com continuidade o lápis de um ponto A até outro ponto B” (Lieberman et al., 1975, p. 25). Ainda é explicitada a definição de curva fechada como “um conjunto de pontos que se obtém ao deslocar um lápis de um ponto A e voltando ao mesmo ponto A” (Lieberman et al., 1975, p.25). As autoras trazem figuras para exemplificar os tipos de curvas (Figura 30).

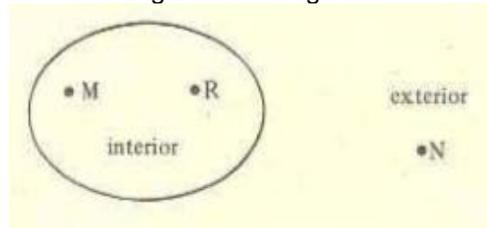
Figura 30 - Curvas simples e não simples.



Fonte: Lieberman et al. (1975, p. 25).

Também neste volume do Guia do Professor, as autoras apresentam uma definição para Região interna (interior) e Região externa (exterior), “uma curva fechada simples permite dividir o plano em três conjuntos de pontos: pontos do interior, pontos do exterior e pontos das curvas (contorno). O mesmo não ocorre com as curvas fechadas não simples” (Lieberman et al., 1975, p. 26). Elas ainda complementam (Figura 31), explicitando pontos pertencentes à região interior e exterior. As autoras finalizam observando que as curvas fechadas não simples não têm o mesmo comportamento, pois determinam mais de três conjuntos.

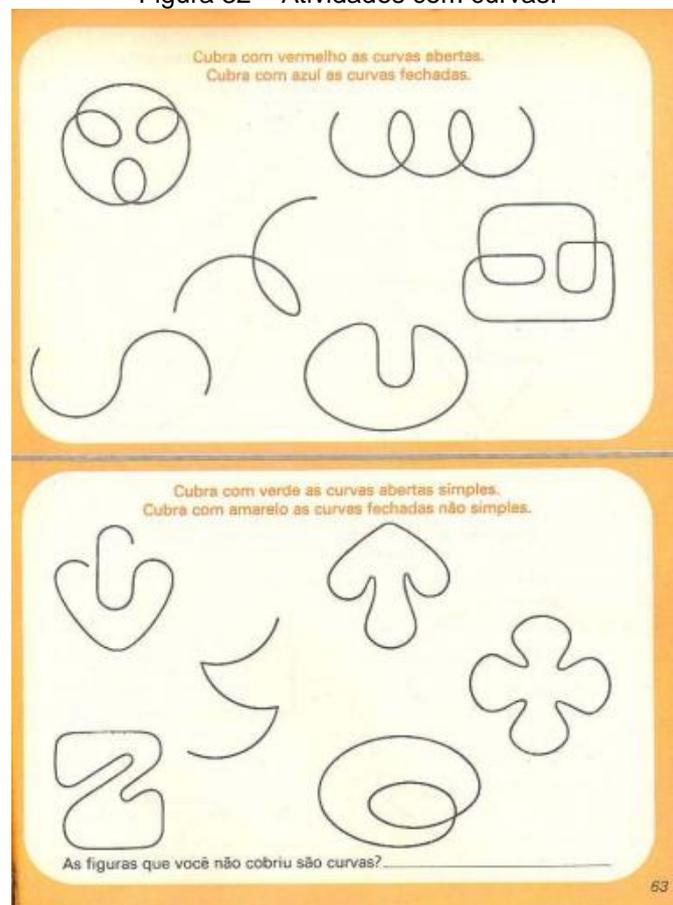
Figura 31 – Regiões.



Fonte: Liberman et al. (1975, p. 26).

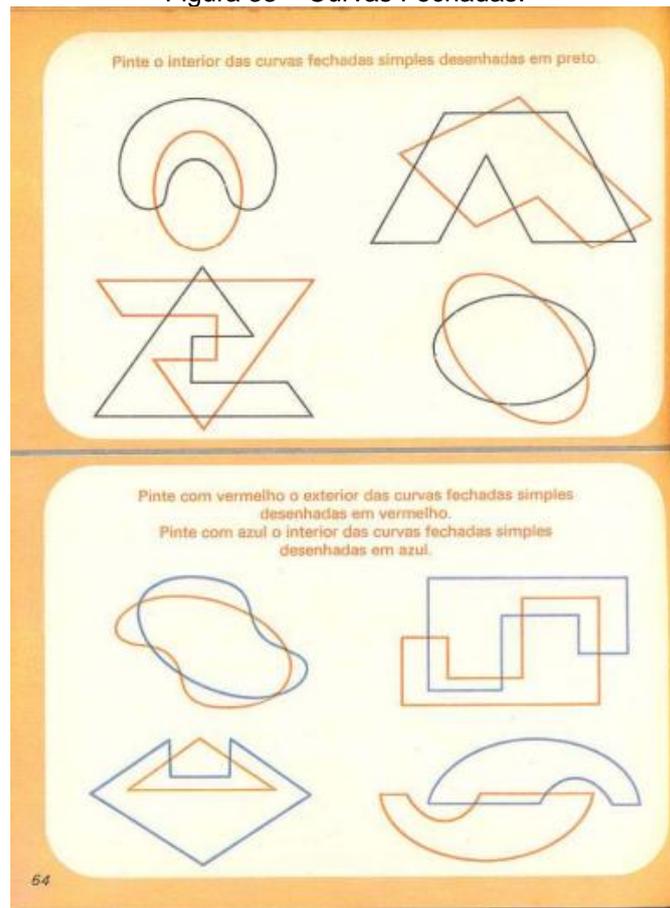
No terceiro volume, novamente é na seção “Geometria” que as noções topológicas aparecem com maior frequência. Inicialmente, são inseridos exercícios que abordam as noções de curva aberta, curva fechada e simples/não simples, de forma a retomá-las (Figuras 32 e 33).

Figura 32 – Atividades com curvas.



Fonte: Liberman & Sanchez (1974, p. 63).

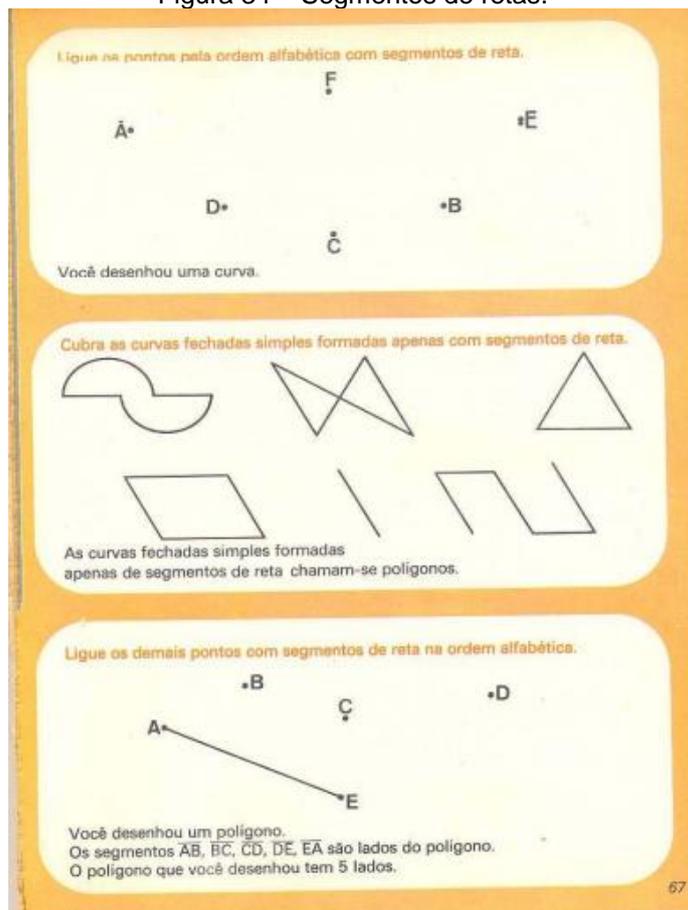
Figura 33 – Curvas Fechadas.



Fonte: Liberman et al. (1974, p. 64).

Após essa retomada, ainda abordando as noções topológicas de curvas, as autoras começaram a explorar a ideia de pontos sobre as curvas, para então chegarem a noções, não mais topológicas, como segmentos de retas. Pelos enunciados dos exercícios (Figura 34), é possível perceber que as autoras tratam uma curva como a ligação de diversos segmentos de retas e que as curvas fechadas simples formadas apenas de segmentos de retas chamam-se polígonos (Liberman et al., 1974, p. 67). Assim, a partir das noções topológicas, chega-se ao estudo dos polígonos.

Figura 34 – Segmentos de retas.



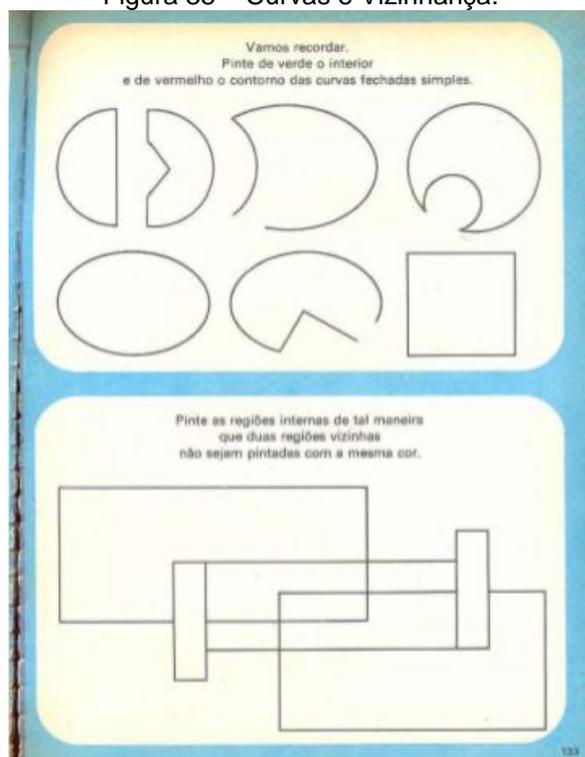
Fonte: Liberman et al. (1974, p. 67).

Na seção “Geometria” do Guia do Professor deste volume, são destacados os objetivos desta seção: formar as noções de curvas (fechadas, abertas, fechadas simples e não simples), regiões (interior e exterior), segmentos de retas, polígonos, retas (paralelas e concorrentes), além de classificar quadriláteros. A partir da ordem em que as autoras elencaram estes objetivos e dispuseram as noções a serem construídas, é possível inferir que inicialmente elas acreditam que seja necessário desenvolver as noções topológicas, para então chegar-se ao estudo da Geometria Euclidiana.

No quarto volume, é possível perceber uma diferença em relação aos dois volumes anteriores, agora a seção referente à Geometria não tem início com a abordagem das noções topológicas, mas já com o estudo dos polígonos e segmentos de reta. Com isso, é possível concluir que supunha-se que tais noções já foram trabalhadas nos volumes anteriores e que o aprendizado aconteceu.

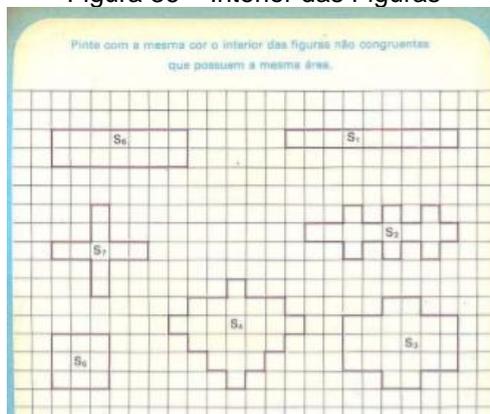
Entretanto, as noções topológicas ainda são abordadas neste volume, um pouco mais á frente (Figura 35), quando as autoras realizam atividades na malha quadriculada. Os alunos precisam identificar principalmente as regiões internas (interior) de figuras. O objetivo destas atividades parece ser introduzir noções de área, por meio de noções topológicas, como interior (Figura 36). A noção topológica de vizinhança também aparece, mas não é explorada com profundidade.

Figura 35 – Curvas e Vizinhança.



Fonte: Liberman et al. (1976, p. 133).

Figura 36 – Interior das Figuras



Fonte: Liberman et al. (1976, p. 135).

No Guia do Professor deste volume as noções topológicas aparecem dentre os primeiros objetivos elencados pelas autoras para a seção “Geometria, ângulos e perpendicularidades”, em: “identificar curvas abertas e fechadas, simples e não-simples, interior e exterior” (Lieberman et al., 1976, p. 9). Ainda no primeiro tópico dos objetivos, consta reconhecer elementos da Geometria Euclidiana trabalhados nos volumes anteriores, como segmentos de retas, retas, ângulos. Diferente dos Guias referentes ao segundo e terceiro volume, as definições das noções topológicas de curvas e regiões não são explicitadas novamente, o que corrobora a ideia de que tais noções já foram construídas nos volumes anteriores.

De modo semelhante ao percebido no livro do aluno, no Guia do Professor as noções topológicas aparecem também na seção “Medidas de Superfície”, quando as autoras sugerem que a partir das noções de curvas fechadas e interior de curvas fechadas sejam introduzidas as noções de área.

Nos quatro primeiros volumes desta coleção, parece ficar evidente a intencionalidade das autoras de utilizar as noções topológicas com o intuito de preparar os alunos para o estudo da Geometria Euclidiana. Assim, pode-se inferir que elas associam tais noções à Geometria.

Grossi (1971) deixa claro o seu objetivo em trabalhar as estruturas topológicas de modo a abordar a geometria, enquanto que na coleção de Sangiorgi (s.d.) tem-se indícios de que ele associe as noções à compreensão do conceito de número, devido a associação das noções topológicas com elementos referentes ao processo da construção do número pela criança.

Na coleção GRUEMA, também não é dito de forma explícita, como no livro de Grossi, o objetivo da abordagem das noções topológicas. Entretanto, pelo desenrolar das atividades e pela forma com que as noções são apresentadas, a sequência seguida, fica clara uma possível intenção das autoras de fazerem uso das noções topológicas para se chegar à Geometria Euclidiana.

O livro de Grossi e a Coleção Gruema parecem “se complementar”, enquanto o primeiro foca na teoria e em exemplos simples, apresentando as noções, a Coleção faz o uso delas nos exercícios, atividades, avançando nas noções. Os dois seguem no caminho em direção a Geometria. Já o livro de

Sangiorgi não parece seguir a mesma linha, mas ainda assim faz uso de tais noções, de modo mais superficial, conduzindo ao estudo dos números.

4.2 Aproximações dos usos das noções topológicas

Observando as fontes analisadas, documentos escolares, fichas de atividades do Instituto de Educação, livros didáticos, atividades de Dienes, dentre outras explicitadas ao longo da pesquisa, é possível perceber que a abordagem das noções topológicas realmente teve ênfase durante o MMM. Dentre as noções que mais aparecem estão as de aberto, fechado, dentro, fora, associadas às ideias de fronteiras e regiões (Quadro 3).

Grande parte das noções não são estritamente definidas, mas são utilizadas em atividades, exemplos e até mesmo para definir outras noções, o que fornece indícios de suas finalidades. As relações topológicas vão se entrelaçando ao longo dos materiais, conectando os documentos, os livros didáticos e as falas das entrevistadas.

Quadro 3 – Noções topológicas mais exploradas.

Noções Topológicas	Aberto/Fechado	Dentro/Fora Interior/Exterior	Regiões e Fronteiras
Definições identificadas nos materiais consultados	Não são definidas, mas são utilizadas para definir outras noções.	Não são definidas, mas são utilizadas para definir outras noções.	Região é “(...) um subconjunto de pontos situados no interior da linha fechada e um subconjunto de pontos situados no exterior da fronteira” (GROSSI, 1971, p. 33). “Toda curva fechada simples é uma fronteira” e “A fronteira separa regiões” (Lieberman et al., 1975, p. 75).

<p>Fontes observadas</p>	<p>Fichas do LEM</p> <p>Exploração do Espaço e Prática da Medição (DIENES;GOLDING)</p> <p>Caderno de Topologia (PINTO)</p> <p>Nova Iniciação à Geometria (GROSSI)</p> <p>Nova Série 1º Grau – Matemática 1ª série (SANGIORGI)</p> <p>Coleção Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau (LIBERMAN, et al.)</p>	<p>Fichas do LEM</p> <p>Exploração do Espaço e Prática da Medição (DIENES;GOLDING)</p> <p>Caderno de Topologia (PINTO)</p> <p>Nova Iniciação à Geometria (GROSSI)</p> <p>Nova Série 1º Grau – Matemática 1ª série (SANGIORGI)</p> <p>Coleção Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau (LIBERMAN, et al.)</p>	<p>Fichas do LEM</p> <p>Exploração do Espaço e Prática da Medição (DIENES;GOLDING)</p> <p>Caderno de Topologia (PINTO)</p> <p>Nova Iniciação à Geometria (GROSSI)</p> <p>Nova Série 1º Grau – Matemática 1ª série (SANGIORGI)</p> <p>Coleção Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º Grau (LIBERMAN, et al.)</p>
<p>Associações das noções com conteúdos matemáticos e outras noções</p>	<p>Usada na definição para Espaço Topológico: “Conjuntos abertos num espaço métrico” (Caderno de Topologia, Pinto, 1974).</p> <p>Usada na ideia de linha fechada para chegar a noção de região (linhas fechadas) (GROSSI, 1971).</p> <p>Usada para definir polígono como uma “linha poligonal fechada” (SANGIORGI, s.d., p. 61).</p>	<p>Usada para inserir a ideia de área do interior de figuras planas (LIBERMAN, et al., 1976).</p>	<p>Fronteiras são associadas a linhas abertas e fechadas (GROSSI, 1971).</p> <p>Associação entre regiões e vizinhanças (LIBERMAN, et al., 1976).</p>
<p>Exemplo de abordagem</p>	<p>Atividade “Jogo da sacola”, em que os alunos devem identificar dentro de uma sacola, apenas apalpando, se o objeto é aberto ou fechado. (Figura 12).</p> <p>Definição e exemplificação de curvas simples abertas e fechadas (Figuras 30</p>	<p>Identificar interior e exterior de figuras fechadas, utilizando a ideia do que está dentro e o que está fora. (Figura 25).</p> <p>Atividade “O chefe manda”, em que os alunos devem alternar entre dentro e fora de</p>	<p>Desenhar figuras nas regiões indicadas a partir da leitura de informações em tabelas (Figura 29).</p> <p>Identificar regiões vizinhas (Figura 35).</p>

	e 32).	um círculo. (Figura 14). Atividade “Fronteiras e Domínios” em que os alunos entram e saem de regiões delimitadas por fronteiras antes de serem capturados (DIENES; GOLDING, 1969).	
--	--------	---	--

Fonte: autoral.

O Quadro 3 traz um apanhado das noções encontradas com maior frequência nas fontes consultadas ao longo da pesquisa. Essas, em especial, aparecem em quase todos os materiais. São explicitadas também algumas conexões que os autores fazem entre essas noções e com outros conceitos matemáticos, o que acaba por deixar mais claro a conexão entre as noções topológicas e a geometria.

Inicialmente, pensava que tais noções estivessem atreladas principalmente ao processo de construção do número pela criança, a partir das leituras iniciais nos textos de Piaget, entretanto, o desenrolar da pesquisa, apontou para outra direção. A conexão das noções topológicas com a Geometria aparece de forma significativa, principalmente, nos livros didáticos.

Ficou evidenciado que a abordagem das noções topológicas não aparenta ter uma única finalidade, ou conduzir a um único conteúdo matemático. Seus usos foram atrelados ao processo de construção do número, a noções de localização, a conceitos geométricos, à escrita dos algarismos e até mesmo a escrita das letras do alfabeto.

Além disso, as noções topológicas não eram trabalhadas exclusivamente na disciplina de Matemática. Elas poderiam ser exploradas nas aulas de Português, para traçar as letras do alfabeto, nas aulas de Geografia, ao explorarmos um mapa, nas aulas de Educação Física, para estimular as crianças a se movimentarem a partir de algumas regras e combinações. Os usos das noções topológicas permeavam diferentes disciplinas escolares.

As fontes analisadas mostram essa diversidade de usos e concepções que se tem dessas noções. Enquanto os materiais do acervo e o livro de Sangiorgi apontam para o processo de construção do número, as falas da

professora Luciane (CAVALHEIRO, 2018) e de algumas das entrevistadas nos levam a associar as noções topológicas ao aprendizado do processo de escrita, mas o livro da professora Esther e a Coleção Gruema fazem uma associação clara com a Geometria Euclidiana.

Já os textos de Dienes e as atividades propostas por ele, e inspiradas nas suas ideias, aproximam as noções topológicas da Geometria pelas transformações e do aprendizado das estruturas matemáticas, o que podemos relacionar às ideias do grupo Bourbaki. É interessante observar como as diferentes fontes utilizadas nessa pesquisa se complementam e ressaltam a multiplicidade de usos que podem ser feitos das noções topológicas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para responder a questão norteadora desta pesquisa “*Que compreensões e usos emergiram das noções topológicas durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil?*” foram consideradas três fontes principais: documentos escolares, livros didáticos e entrevistas narrativas. Buscou-se analisar documentos escolares datados do MMM, como planos de aula, listas de atividades, obras literárias, traduções, bem como produções de dissertações e teses e documentos mais recentes, procurando também ressonâncias dos usos das noções topológicas nos dias de hoje, como a Base Comum Curricular (2018), livros didáticos autorizados pelo Plano Nacional do Livro Didático (2019) e textos atuais acerca do assunto.

Como objetivo geral, buscou-se, na perspectiva da fala de formadores de professores que vivenciaram o MMM, e no processo de diálogo com fontes documentais escolares e livros didáticos, identificar os usos e compreensões que emergiram a respeito das noções topológicas durante o MMM. Para auxiliar na discussão da questão norteadora dessa pesquisa, também foram elencados dois objetivos específicos:

- Conhecer os diferentes usos atribuídos às noções topológicas no ensino primário, durante o MMM, a partir da análise de atividades e textos da época, a exemplo dos livros de Zoltan Dienes, planos de aula e fichas de atividades e livros didáticos localizados, principalmente, no acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha;
- Identificar e analisar as diferentes compreensões sobre a presença das noções topológicas no ensino primário a partir da análise das narrativas, oriundas de entrevistas realizadas com professoras-pesquisadoras que vivenciaram este movimento como professoras-estudantes de Curso Normal ou de licenciatura em Matemática ou Pedagogia.

Os documentos escolares serviram como o ponto inicial dessa pesquisa, mas se mostraram insuficientes para compreendermos como as noções topológicas eram utilizadas. Eles forneceram alguns indícios e pistas, que levaram às entrevistas narrativas e aos livros didáticos, como uma forma de tentar compor uma narrativa mais detalhada das compreensões e usos das

noções topológicas. Neste sentido, as três fontes se complementam na busca por entender melhor essas noções e seus usos.

A partir do diálogo entre essas três fontes foi construída uma narrativa com a ajuda das seis entrevistadas: Rute da Cunha, Neuza Bertoni Pinto, Mônica Bertoni dos Santos, Esther Pillar Grossi, Dione Lucchesi e Lucília Bechara Sanchez, que contribuíram não somente com suas experiências e percepções, mas também com suas pesquisas e produções didáticas.

Ao dar início a essa pesquisa, associava as noções topológicas principalmente aos processos de construção do número, entretanto, ao longo das leituras e narrativas, percebi uma grande aproximação dessas noções com o estudo da Geometria. Sem dúvida, a maioria das fontes apontou para essa direção.

Foi possível perceber que o estudo das noções topológicas não está atrelado a somente um conteúdo matemático, ou um período, tão pouco seja trabalhado com somente um objetivo. Tais noções podem ser associadas a conteúdos da Geometria, da Aritmética, na escrita dos algarismos, no movimento da criança de se localizar no espaço e no desenvolvimento da motricidade, dentre outros.

No contexto da Matemática Moderna, essas noções aparecem como fundamentais, desde a educação infantil, até a graduação, como pode-se ver pelos livros didáticos e pelo caderno de Topologia da professora Neuza. As crianças realizam relações topológicas desde o momento do seu nascimento, como nos coloca Piaget (1993). Essas relações vão sendo aprimoradas ao longo do seu desenvolvimento, chegando a noções mais complexas que podem ser trabalhadas em disciplinas de graduação, envolvendo outros conteúdos, mas ainda assim, fazendo relação com as noções que a criança desenvolveu na sua fase inicial.

Compreender as noções topológicas demanda um olhar atento aos detalhes, aos indícios de cada fonte e narrativa, que nos remetem a memórias e lembranças, associadas não somente à Matemática, mas a todo um contexto histórico-cultural. Apesar do estudo de Topologia ser “datado”, como foi colocado pelas entrevistadas, a partir de estudos iniciais em livros didáticos, as noções topológicas parecem ser atemporais, se mostrando presentes desde a Escola Nova, até os dias de hoje.

Como foi evidenciado ao longo do texto, estudos sobre as noções topológicas ainda são escassos, apesar da presença delas serem frequentes no ensino de Matemática, tanto nos anos anteriores, como atualmente, principalmente nos anos iniciais da escolarização. Como professora e pesquisadora, busquei olhar para o passado, por meio da História da Educação Matemática, para compreender o papel dessas noções, primeiramente no período em que demonstraram ter maior destaque e como uma das conseqüências, posteriormente, tentar compreender as suas ressonâncias, os vestígios encontrados nos dias de hoje.

Essa pesquisa abriu diversos caminhos, que não são possíveis de abarcar no espaço de uma dissertação, entretanto, deixam brechas para novas indagações. Foram explicitadas ao longo da narrativa possíveis concepções e usos das noções topológicas, focando na disciplina de Matemática, mas, e se sairmos das “caixinhas” das disciplinas, o que mais poderemos descobrir sobre as noções topológicas?

Apesar de parecerem noções tão simples, abordadas em anos iniciais da escolarização, são noções que servem como base para diversas áreas, mas, muitas vezes não nos damos conta, por pensar que são fáceis e que os alunos já desenvolvem tais noções antes mesmo de entrarem na escola. Mas, e se explorássemos ainda mais essas noções dentro da escola, não poderíamos instigar ainda mais nossos alunos? E se ao invés de pensar nessas noções somente como da Matemática, e fizéssemos um trabalho interdisciplinar, dialogando com diversas disciplinas, não potencializaríamos ainda mais nosso ensino?

Olhar para o passado não deve nos levar a comparações, entre melhor ou pior, mas sim, a explorar possibilidades, nos instigar a pensar em soluções e melhorias. Compreender tais noções, desde o princípio, nos auxilia a pensar em formas de utilizá-las nos dias de hoje, de forma a beneficiar nossos alunos, buscar soluções para suas dificuldades e enriquecer nossas aulas.

A História da Educação Matemática não tem somente o papel de nos ajudar a desvendar acontecimentos do passado, mas de nos instigar a olhar para o presente e o futuro, com uma bagagem de conhecimento maior, nos inspirar no passado para construir um ensino melhor para o presente e para o futuro.

O estudo apresentado nessa dissertação é apenas um passo na busca por compreender melhor as noções topológicas e sua relação com o ensino de Matemática. Ainda há muito a ser investigado, como a relação entre as noções topológicas e a Escola Nova, compreender melhor as concepções de Piaget e Dienes sobre tais noções, as relações entre elas e o processo de construção do número. Além de investigar mais à fundo as ressonâncias dessas noções nos dias atuais, nos livros didáticos de Matemática da atualidade e nas salas de aula.

Os próximos passos desse estudo seguirão em direção à investigação dos livros didáticos atuais, dos resquícios das noções topológicas nessas produções. Buscaremos evidenciar as ressonâncias das noções topológicas e compreender as possíveis finalidades delas nos dias de hoje.

REFERÊNCIAS

- BARCELLAR, C. **Fontes documentais - uso e mau uso dos arquivos**. In: Fontes Históricas. Carla Bassanezi Pinski (org.). São Paulo: Contexto, 2005.
- BITTENCOURT, C. M. F. **Livro didático e conhecimento histórico: Livro didático e conhecimento histórico uma história do saber escolar**. 369 p. Tese (Doutorado em História Social) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.
- BITTENCOURT, C. M. F. **Práticas de leituras em livros didáticos**. Revista da Faculdade de Educação da USP, n. 01, jan./jun. 1996.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** para o Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BÚRIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60**. 285 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.
- CAVALHEIRO, Y. B. **Um estudo sobre a presença dos conceitos topológicos na formação de professores: Ressonâncias da Matemática Moderna**. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.
- CELLARD, A. **A análise documental**. In: J. Poupart, et al. (Orgs.). A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis: Vozes. 2008.
- CHOPPIN, A. **História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte**. Educação e Pesquisa — FEUSP, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.
- CLARAS, A. F.; PINTO, N. B. **O Movimento da Matemática Moderna e as Iniciativas de Formação Docente**. Educere-PUC, 2008.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** 5. ed. Rio de Janeiro, RJ: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.
- DALCIN, A.; CUNHA, R. **AS FOTOGRAFIAS NA OBRA “A GEOMETRIA PELAS TRANSFORMAÇÕES” EM TEMPOS DE MATEMÁTICA MODERNA: diálogos possíveis**. Revista Eventos Pedagógicos, Mato Grosso. v. 9, n. 2, ago./out., 2018. p. 743-766.
- DALCIN, A.; CUNHA, R. da. **Entrevista com Rute da Cunha: eternizando momentos**. In: DALCIN, A.; GOUVEIA, C. T. G.; GOUVEIA, S. C. (Orgs.).

Memórias da Educação Matemática no Brasil. Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2020, p. 111 - 127.

DALCIN, A. SILVA, S. R. da. **A presença de Zoltan Dienes em Porto Alegre nos anos de 1970.** In: II ENAPHEM, Encontro Nacional de Pesquisas em História da Educação Matemática. Bauru, 2014, SP. Anais do 2º Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática: fontes, temas, metodologias e teorias: a diversidade na escrita da história da educação matemática no Brasil. Bauru: Faculdade de Ciências, 2014, p. 1.146-1.157, 2014.

DANTE; BIANCHINI, N. **Projeto Ápis – Alfabetização Matemática.** v. 1. Editora Ática, 2016.

DIENES, Z. P. **A Matemática Moderna no Ensino Primário.** Biblioteca Fundo Universal de Cultura. Rio de Janeiro/São Paulo: Editora Fundo de Cultura, 1967.

DIENES, Z. P.; GOLDING, E.W. **Exploração do espaço e prática da mediação.** São Paulo: Herder, Coleção Os primeiros passos em matemática, 1969.

DIENES, Z. P. **As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática.** Tradução de Maria Pio de Macedo Chartier e René François Joseph Chartier. São Paulo, SP: Helder, 1972.

DOCUMENTOS. In: DICIO, **Dicionário Online de Português.** Porto: 7Graus, 2020. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/documentos/>. Acesso em: 15/06/2020.

FERREIRA, T.; CARVALHO, H. **Curso completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário.** 1º ano. ENFAS: Encadernadora Fascículo LTDA. São Paulo, 1971.

FREITAS, L. C. **Caderno de Didática da Matemática.** Curso Magistério, RS. Porto Alegre: 1985. Não publicado.

FREITAS, L. C. **Entrevista concedida a Yasmin Barbosa Cavalheiro,** em 05 de novembro de 2018 em Porto Alegre. Não publicada.

FUNARI, P. P. A. **Fontes arqueológicas: os historiadores e a cultura material.** In: Fontes Históricas. Carla Bassanezi Pinski (org.). São Paulo: Contexto, 2005, p. 82 - 110.

GARNICA, A. V. M.; SOUZA, L. A. **Elementos de História da Educação Matemática.** São Paulo: Cultura Acadêmica/ Editora Unesp, 2012.

GIL, A. C. **Como classificar as pesquisas?** In: Gil, AC. Como elaborar projetos de pesquisa. 4ª edição. São Paulo: Atlas, 2002. p. 41-58.

- GINZBRUG, C. **Sinais: raízes de um paradigma indiciário**. In: Mitos, Emblemas e Sinais: morfologia e história. São Paulo: Cia das Letras, 1989, p. 143-275.
- GINZBURG, C. **Relações de força: história, retórica, prova**. São Paulo: Companhia das Letras, 2002.
- GOMES, M. L. M. **História da Educação Matemática: a propósito da edição temática do BOLEMA** (Editorial). BOLEMA, Rio Claro, v. 23, n. 35a, p. vii-xxvii, 2010.
- GROSSI, E. P. **Nova Iniciação à Geometria: uma introdução à topologia do plano** - Curso Fundamental. Porto Alegre/São Paulo: Edições Tabajara, 1971.
- JENDREIECK, C. O. **Matemática, Geografia E Cidadania: Contribuições De Um Jogo Educativo Interdisciplinar Para O Desenvolvimento De Habilidades No 3º Ano Do Ensino Fundamental**. 175 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.
- KRIPKA, R. L.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. de L. **Pesquisa documental na pesquisa qualitativa: conceitos e caracterização**. Revista de investigaciones UNAD, Bogotá, v. 14, n. 2, p. 55-73, jul./dez. 2015.
- LE GOFF, J. **História e memória**. Campinas: UNICAMP, 1990.
- LIMA, F. R. **Grupo de Estudo do Ensino de Matemática – GEEM: Formação de Professores e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil**. 170 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.
- LORENZATO, S. **Educação infantil e percepção Matemática**. 2 ed. Campinas: Autores Associados, 2008.
- LIBERMAN, M. P.; SANCHEZ, L. B. & FRANCHI, A. **Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau**. 2ª série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975a.
- LIBERMAN, M. P.; SANCHEZ, L. B. & FRANCHI, A. **Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau**. 2ª série. Guia do Professor. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975b.
- LIBERMAN, M. P. & SANCHEZ, L. B. **Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau**. 3ª série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1974.
- LIBERMAN, M. P. & SANCHEZ, L. B. **Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau**. 4ª série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1976a.

LIBERMAN, M. P. & SANCHEZ, L. B. **Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau**. 4ª série. Guia do Professor. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1976b.

MATOS, J. M. **História do ensino de matemática em Portugal: constituição de um campo de investigação**. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 6, n. 18, p. 11-18, 2006.

MATOS, J. M.; VALENTE, W. R. **Estudos comparativos sobre a reforma da Matemática Moderna**. In: MATOS, J. M.; VALENTE, W. R. (Org.). A reforma da matemática moderna em contextos ibero-americanos. Lisboa: UIED, 2010. p. 1-7.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História da Matemática: uma prática social de investigação em construção**. Educação em Revista, Belo Horizonte, n. 36, p. 177 - 203, dez., 2002.

MIORIM, M. Â. **Introdução à história da Educação Matemática**. São Paulo, SP: Atual, 1998.

MONIZ, C. M. de V. **Visualização espacial na perspectiva da epistemologia genética**. 87 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

MORTATTI, M. do R. L. **Notas sobre linguagem, texto e pesquisa histórica em educação**. História da educação. Pelotas, v. 6, p. 69-77, out. 1999.

MOURA, J.F; NACARATO, A. M. **A entrevista narrativa: dispositivo de produção e análise de dados sobre trajetórias de professoras**. Caderno de Pesquisas, v. 24, n. 1, jan./abr., 2017.

MUNAKATA, K. **O livro didático: alguns temas de pesquisa**. Revista Brasileira de História da Educação, Campinas: SBHE, v. 12, n. 30, 2012, p. 179-197.

NÓVOA, A. Apresentação. In: STEPHANOU, M.; BASTOS, M. H. **Histórias e memórias da educação no Brasil**, 2 ed, v. 1: séculos XVI-XVIII. Petrópolis: Vozes, 2005, p. 9-13.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PINTO, N. B. **Caderno de Topologia**. Disciplina de Topologia do Curso de Matemática, da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Umuarama, PR. Umuarama (PR): 1974.

PINTO, N. B. **Marcas históricas da Matemática Moderna no Brasil**. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 5, n. 16, set./dez., 2005.

PINTO, N. B. **O impacto da Matemática Moderna na cultura da escola primária brasileira**. In: MATOS, J. M.; VALENTE, W. R. (Org.). A Reforma da

Matemática Moderna em contextos Ibero-Americanos. Lisboa: UIED, 2010. p. 9 – 40.

PIRES, R. da C. **A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo.** 577 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PORTELLI, A. **Ensaio de história oral.** Tradução de F. L. Cássio e R. Santhiago. São Paulo: Letras e Voz, 2010.

QUEIROZ, A. M. **Experiências formativas de jovens instrumentalistas: um estudo a partir de entrevistas narrativas.** 144 p. Dissertação (Mestrado em Música). Universidade de Brasília, UnB: Brasília, DF, 2015.

QUEIROZ, A. M. **Experiências formativas em música na construção dos projetos de vida dos jovens: um estudo a partir de entrevistas narrativas.** Revista Brasileira de Pesquisa (Auto) Biográfica, Salvador, v. 2, n. 5, p. 470-482, maio/ago., 2017.

SAMPAIO, J. C. V. **Passeios de Euler e as Pontes de Königsberg.** Belo Horizonte: UFMG, Anais da I Bienal da SBM, 2002.

SANGIORGI, O. **Nova Série 1º Grau – Matemática.** 1ª série. Manual do Professor. Companhia Editora Nacional, (s.d.).

SANGIORGI, O. **Nova Série 1º Grau – Matemática.** 1ª série. Companhia Editora Nacional, (s.d.).

SANGIORGI, O. **Nova Série 1º Grau – Matemática.** 4ª série. Companhia Editora Nacional, (s.d.).

SCHÜTZE, F. **Pesquisa biográfica e entrevista narrativa.** In: WELLER, W.; PFAFF, N. (Org.). Metodologias da pesquisa qualitativa em educação: teoria e prática. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2011. p. 210-222.

SILVA, C. T. S. da. **Descobrimos a Topologia: Um compêndio de fundamentos teóricos e atividades lúdicas para auxiliar na formalização de conceitos topológicos no Ensino Básico.** 130 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Presidente Prudente, 2018.

SILVA, F. S. S. da. **O desenho das crianças de 6 a 8 anos: os aspectos cognitivos das primeiras noções topológicas e suas representações.** 99 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal Do Paraná, Curitiba, 2004.

TOJEIRO, P. F. S. **Noções de Topologia nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Uma possibilidade investigativa por meio do software Scratch.** 138 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

TOZONI-REIS, M. F. de C. **Metodologia da Pesquisa**. 2 ed. Curitiba, IESDE Brasil S.A, 2009.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730- 1930**. São Paulo: Annablume/Fapesp, 1999.

VALENTE, W. R. **Livro didático e educação matemática: uma história inseparável**. Zetetike (UNICAMP), v. 16, p. 139-161, 2008.

VILCHES, M. A. **Topologia Geral**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática e Estatística - UERJ, 2000.

VILLELA, L. M. A. **“GRUEMA”**: uma contribuição para a história da **Educação Matemática no Brasil**. 223 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009.

WELLER, W. **Tradições hermenêuticas e interacionistas na pesquisa qualitativa: a análise das narrativas segundo Fritz Schütze**. In: 32ª Reunião anual da Anped, Caxambu, MG, 2009.

WELLER, W.; ZARDO; S. P. **Entrevista narrativa com especialistas: aportes metodológicos e exemplificação**. Revista da Faeeba: Educação e Contemporaneidade, v. 22, n. 40, p. 131-143, 2013.

WIELEWSKI, G. D. **O movimento da matemática moderna e a formação de grupos de professores de matemática no Brasil**. In: ProfMat2008, 2008, Elvas-Portugal. ProfMat2008 Actas. Lisboa-Portugal: Copyright 2008 Associação de Professores de Matemática, 2008. p. 1-10.

Anexo I - Protocolo das entrevistas

- Conte sobre sua trajetória profissional ligada a formação de professores.
- Comente sobre a sua relação com o Movimento da Matemática Moderna (estudos, formações...), como se aproximou do movimento.
- O que entende por noções topológicas?
- Que conexões enxerga entre as noções topológicas e o Movimento da Matemática Moderna?
- Considera as noções topológicas importantes para serem trabalhadas na formação de professores? Por quê?
- Qual o papel dessas noções no ensino de matemática?
- Por que considera importante (ou não) que os alunos da educação básica desenvolvam atividades que abordem tais noções?
- Quais recordações tem das atividades abaixo? Acredita que elas abordem noções topológicas e qual papel elas tem no ensino de matemática?

Seleção de atividades:

- Atividade localizada na Lista “*Sugestões de atividades Topologia*” (1970) do acervo do LM do IE (Tombo 656¹¹):

Jogo do trenzinho:

- traçam-se duas linhas no chão.
- dois grupos de crianças formam dois trenzinhos que deverão andar sobre os trilhos (linhas).
- depois de andarem sobre os trilhos fazem o comentário sobre as viagens de cada trenzinho.

- Atividade localizada no livro “Exploração do Espaço e Prática da Medição” (Dienes; Golding, 1969):

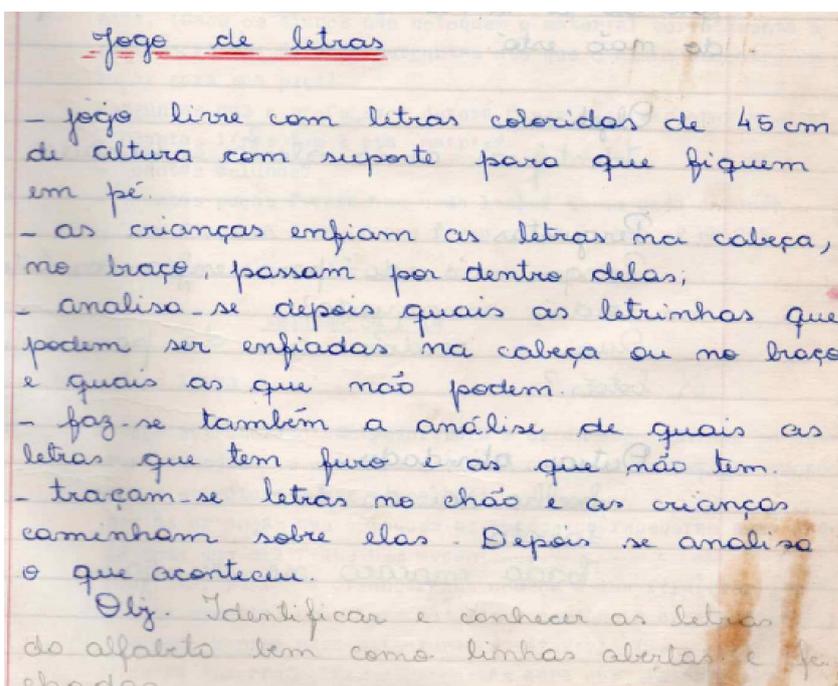
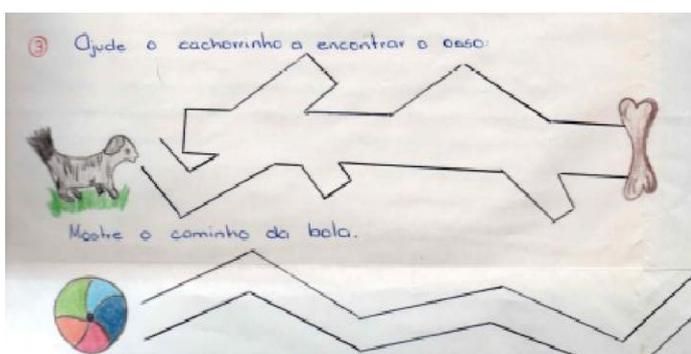
Fronteiras e Domínios: Convém realizarmos este jogo no pátio. Dividimos a classe em dois grupos, talvez em meninos e meninas. Os meninos têm dois campos, situados a alguma distância um do outro, cercados cada um por uma

¹¹ Disponível em: <https://cedap.ufrgs.br/xmlui/handle/20.500.11959/1000000656>.

fronteira, e as meninas tem um único campo, também cercado por sua fronteira. As meninas entram em seu campo e os meninos, em um dos seus. Ao sinal convencional, os meninos mudam de campo, mas se uma menina conseguir pegar um menino tocando-o, quando ainda fora do campo, este menino deverá se juntar as meninas e ajudar a pegar os outros meninos. A partida termina no momento em que todos os meninos forem pegos. Depois podemos permutar equipes e campos, passando os meninos a pegar as meninas.

Durante esses jogos, falamos sempre em “fronteira”, em “domínio ou campo”.

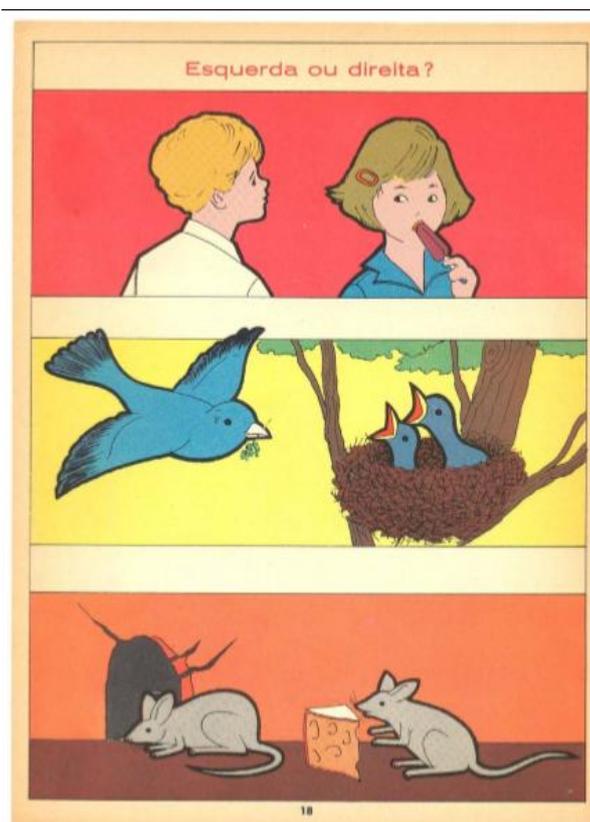
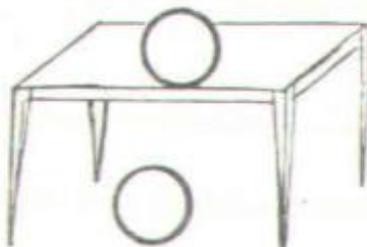
- Atividades localizadas no caderno de Luciane Cardoso de Freitas, ex aluna do Curso Magistério do IE (Anos 1980):



0 $\vec{1}$ $\vec{2}$ $\vec{3}$ $\frac{A+B}{3}$ $\frac{\vec{A}}{5}$ $\vec{6}$ $\vec{7}$ $\vec{8}$ $\vec{9}$

- Atividades localizadas em livros didáticos utilizados durante o MMM:

8 — Pintar de vermelho a bola que está em cima da mesa e de azul a que está em baixo.



Anexo II – Entrevista com Rute da Cunha

Entrevista narrativa concedida a Andreia Dalcin e Yasmin Barbosa Cavalheiro pela professora Rute da Cunha, realizada no dia 04 de junho de 2020, as 15h30, via GoogleMeet.

Yasmin: Rute, primeiro gostaríamos que você contasse um pouquinho da sua trajetória profissional ligada à formação de professores e as suas pesquisas relacionadas à Matemática Moderna.

Rute: Como professora eu comecei em 1969 e só me aposentei recentemente, em 2019. E sobre a Matemática Moderna, na realidade desde os anos 1980 eu pesquiso, só que a minha tese de doutorado só vai aparecer em 2006, que apresenta a influência do grupo Bourbaki na matemática superior no Brasil, intitulada “*A presença do grupo Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo*” e que é importante para entender quando o Movimento da Matemática Moderna começa a se fazer presente no Brasil.

Yasmin: E com relação a tua trajetória profissional, tu chegou a trabalhar com formação de professores?

Rute: No final dos anos 1970 eu já trabalhava no Curso Normal. Eu era professora efetiva de um Instituto e desde aquela época eu trabalhei no Curso Normal. Eu ganhei um projeto! Eu mandei um projeto, no governo Franco Montoro , no início de 1980 e pude montar nesse Instituto um Laboratório de Matemática em que o Claude Gaulin me ajudou muito.

Andreia: Qual é o Instituto que tu trabalhavas Rute?

Rute: Era Instituto de Educação Dr. Américo Brasiliense, em Santo André, São Paulo. Ai depois, eu fui coordenadora de Matemática e eu orientava os professores que iriam dar aula no Colégio Gávea. Depois, sem atuar na sala de aula, eu fui assessora de primeiro grau em Matemática da Escola Vera Cruz,

em São Paulo. O Gávea era em São Paulo, escola Vera Cruz era em São Paulo. E fora os cursos fora...

Andreia: Acho que tu pode talvez lembrar um pouco como é que tu te aproximaste da Matemática Moderna, da Ana Franchi, do pessoal que tu trabalhaste, como é que tu chegaste nesse movimento.

Rute: Eu era professora efetiva do Instituto e eu fui chamada pra participar do grupo em São Paulo que ainda não tinha nome, mas onde estavam a Lucilia Bechara Sanchez, a Anna Franchi, a Dulce Satiko Onaga, o Antonio José Lopes Bigode, Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão, a Veronica Resende, Cecilia Donnet, Maria Antonieta Moreira Leita, Manhúcia, Dione Luchesi, Ana Regina Moura, Oriosvaldo Moura, entre outros, depois eu posso completar os nomes né?

Então todas essas pessoas faziam parte. Ou eram donos, ou eram coordenadores, ou eram professores de escolas particulares. Inicialmente, poucos eram professores da escola pública. A Anna Franchi, que era professora de escola pública e professora da PUCSP, queria que tivessem professores da escola pública nesse grupo, e daí eu fui num desses convites. Eu acho que quem me leva é Anna Franchi, mas quem me leva é a Cristina Maranhão, que era minha amiga. E daí eu fui nesse grupo.

O Bigode, Antonio José Lopes Bigode, era estudante da USP, acho que o Rômulo Lins também foi em alguma reunião, mas não era fixo. O Bigode ia em todas. E daí eu fui participar desse grupo. Muitos já teriam pertencido ao GEEM, de São Paulo. O GEEM de São Paulo, eu acho que fechou suas atividades em 1971 (precisa verificar a data) e no novo grupo muita gente já participaram do GEEM. E daí montam esse grupo.

E numa das reuniões a Lucília achou que o nome desse grupo deveria ser "*Momento*", porque era o momento, para a gente arregaçar as mangas e modificar o ensino de matemática em São Paulo, na nossa região, a ideia era essa! E assim que eu comecei nesse grupo, era maravilhoso. Foi um divisor de águas, e eu aprendi muito. Esse grupo trazia pessoas importantes do cenário mundial para cursos. A gente discutia e se reunia normalmente no Colégio

Madre Alix todos os sábados. Às vezes, na escola Vera Cruz, às vezes na casa da Lucilia Bechara, às vezes na casa da Resende É... e ia, entendeu.

Tínhamos muitas reuniões e você aprende muito, porque lá você, além da Matemática que rolava, você aprende que com equipe, você aprende mais rápido. Você aprende que com equipe você larga o seu acho, porque, você tem que ter argumento, você tem que ter estudo sobre. Não é eu acho, eu acho... Não tem eu acho, entendeu? Tudo era fundamentado.

E eu lembro muito que na época, no início, era muito fundamentado, também em Piaget, entendeu? Lembro essas coisas, lia-se todos os livros de Piaget. Eu tinha coleção toda, eu acho que eu dei toda. Porque chegou uma época que ele é tão pesado para ler, aí uma amiga “nossa eu tenho interesse”. Leva, pode levar! E daí o livro não volta. Mas tinha vários, acho que eram uns oito. Eu comprei todos. Porque a gente lia tudo, que o Piaget pensava, como adequar, tudo que era exatamente pela primeira fase das seis etapas do Dienes, que era o espontâneo. Que é você primeiro lidar com o material, ver. Então tinha essas atividades. Foi bem bom.

Você tem interesse em saber mais alguma coisa? O que eu deixo de dúvida? Assim, eu vivi, então eu tenho dúvidas em nomes completos, essas coisas eu tenho. Não sei o RG nem o CPF de ninguém, mas você tem interesse em saber mais alguma coisa?

Yasmin: Tu comentaste em algum momento que o grupo trouxe algumas personalidades pra fazer palestras, coisas assim, tu lembraria algum desses nomes que vieram?

Rute: Claude Gaulin. O Claude Gaulin era um matemático do Canadá, pertencente à Organização Mundial da Matemática (OMM). Ele esteve várias vezes aqui no Brasil, conhecia todo mundo. E ele trazia vários materiais para gente e eu tenho vários materiais dele. E eu lembro assim, eu tenho, mas não vou achar, eu tenho o diploma do curso que eu fiz com ele. E também o Vergnaud, conheci a esposa do Vergnaud. Tudo era muito na amizade, eu não sei se você vai entender.

Por exemplo, o Claude, eu lembro que a gente o levou, eu a Anna Franchi, acho que a Cristina e o Bigode também foram, nós o levamos assistir

no teatro da PUCSP, o Sivuca! Um show do Sivuca. Eu lembro que o Vergnaud a gente saía para jantar, sabe, ele trazia a esposa, ele era mais formal. Lembro também que no curso do Vergnaud, o Jakubo (José Jakubovic) foi, o Luis Marcio Imenes foi, quer dizer, o Imenes eu não tenho muito certeza. O Jakubo estava com alguém, se era o Lellis, se era o Imenes eu já não sei. Então era uma coisa assim, os grupos em São Paulo, eles se visitavam e se avisavam. O Rolando Garcia que é o parceiro do livro História das Ciências com o Piaget, veio dar uma palestra na USP; também fomos todos nós. O Frank Lester, que era sobre resolução de problemas veio na USP, eu acho que quem trouxe foi o Seiji mas se convidava todo mundo entendeu, porque eram alguns grupos. Tinha o grupo de resolução de problemas do Seiji Hariki na USP, onde estavam o Marcelo, Vinícios, o Bigode e o Rômulo. Tinha esse grupo chamado Momento.

E tinha esse grupo, que mais ou menos fazia parte dos escritos da CENP, que é Coordenadoria Estadual de Normas Pedagógicas, porque naquele momento estavam lançando subsídios para implementação do curso, agora eu não lembro o nome, se era Primeiro Grau, Segundo Grau, entendeu? E desse grupo fazia parte o Jakubo, o José Carlos Fernandes, o Lellis, o Imenes, a Renate Watanabe e ainda tinha um grupo que era da Olimpíada de Matemática.

O da Olimpíada de Matemática é quase equivalente, porque é o grupo que é do Jakubo, da Renata Watanabe, Shiguelo Watanabe, da Cristina Maranhão, do Lellis, do Imenes, agora eu não lembro. Acho que estava um dos donos do Etapa, então, você entende que era muito movimento? Não era um grupo, eram os grupos que trocavam informações.

O Jakubo, Lellis, Imenes, Trotta, Chico Nery escreveram livros maravilhosos na época. Jakubo morreu muito jovem de câncer, nós sentimos muito. E a gente era muito amigo! Às vezes a gente sentava no bar e ficava falando de Matemática, era uma reunião entendeu? Escrevia no guardanapo, resolvia no guardanapo. Eu lembro que na praça Panamericana a gente sentava lá no Senzala e ficava até tarde da noite, discutindo Matemática. Assim, Matemática como ensinar, entendeu? Como facilitar, que atividade seria boa para aluno! Então todos esses fazem parte de uma mesma época, que iam

aos congressos! A gente se encontrava nos congressos, um avisava o outro, entendeu? E era muito bom! É isso que eu lembro.

Yasmin: Então a principal preocupação de vocês, do grupo, era discutir mesmo como ensinar a Matemática? Pensando no aluno?

Rute: Isso. A grande preocupação de todos era o melhor aprendizado da Matemática. Nada tão dogmático, nada tão formal. A gente chegava à formalização, mas antes tinha uma preocupação com a brincadeira, com o jogo, sabe? Para ele chegar à formalização, não é como no formal. No formal tinha-se uma definição, as propriedades e “manda bala”. Teoremas e vai.. Não! Mais ou menos a gente fazia o caminho inverso. Mais ou menos. Era uma discussão diferente. Havia vários caminhos!

No livro Matemática Aplicada, acho que é do José Jakubovic, Fernando Trotta e Luís Marcio Pereira Imenes, eles discutem questões práticas. Questões práticas, assim, qual a melhor forma de fazer uma ponte, entre tal e tal? O que seria melhor, qual o menor caminho, questões assim, entendeu? Agora eu não estou lembrando outra, mas tem várias no livro. Esse livro foi muito criticado porque ele não é um livro texto. O professor tem de fazer os arranjos, fazer acréscimos conceituais. Mas o livro é espetacular em atividades. São três volumes e a maioria são problemas, são atividades, problematizações! E um pouco de teoria, que dá densidade a essa problematização. Mas não tem a teoria toda, como o professor gosta, da definição, etc. Não tem esse caminhar. Mas depois eles publicaram livros didáticos bons, que não são fáceis, com problemas menores. Acho que pela Atual Editora. O Jakubo, o Imenes, o Léllis e o Chico Nery, acho. É isso que eu lembro!

Também na época, na questão de didáticos, tinha o Gelson lezzi, que é meu amigo, aliás, eu estou preocupada porque com troca de e-mail, troca de celular, troca de tudo, todo mundo se perde. É impressionante, o Gelson lezzi a gente sempre conversava e agora... Ele me falou uma coisa interessante, quando eu falei: “Gelson, deixa eu te entrevistar?”, “Ahh, me conhece!” Mas, ele me falou uma coisa interessante!

Sabe os Fundamentos da Matemática Elementar (vários autores)? Vocês conhecem esse livro? É utilizado em tudo que é faculdade de

Matemática, nos anos iniciais da graduação. Na UFMT era. Ele tem mais de 40 anos. Se a gente for pegar a primeira versão dele, ele é de sessenta e pouco, ele tem quantos anos? E está no mercado! Certo? Só que o Gelson me confessou uma coisa, que é interessante.

Nos anos 80 tinha uma coleção do Gelson e outros, porque é uma coleção com vários autores, que a gente chamava de Pretinho. E o Pretinho durou dos anos 80 aos 90. O Gelson era um dos donos da Atual Editora. Ele me falou que até hoje a venda dos Fundamentos da Matemática Elementar não bateu o resultado dos dez anos do Pretinho. O Pretinho vendeu tanto, tanto, que você veja, até hoje o Fundamentos não bate o número de vendas. E que foi dez anos, foi década de 80. Interessante, né?

Andreia: Rute, direcionando então, para preocupação da Yasmin, que é olhar pros conceitos topológicos, e outra hora tu falou desses livros, a gente quer saber duas coisas: Primeiro o que tu entende quando tu ouves esse termo “conceitos topológicos”? E qual é a relação desses conceitos topológicos com a construção do número, da criança, lá na Matemática Moderna?

Rute: Não! Não tem essa ligação. Vamos começar! Essa topologia, esses conceitos topológicos, que o Dienes é que brilhantemente vai colocar, mas tem na SMSG, tem em vários livros algumas atividades. Na realidade, tudo isso é querer se adaptar a Matemática contemporânea do Grupo Bourbaki. Por quê? Porque o Grupo Bourbaki vai, naquela época, ele começa em 1939, então, logo depois ele começa com as estruturas. Ele vai definir que, na Matemática vão ter três estruturas.

As estruturas algébricas, cuja principal era a noção de grupo. As estruturas topológicas, cujo principal são as noções de proximidade, continuidade e de limite, e as de ordem, cujo protótipo é a rede. Rede do jeito que a gente entende. Rede! Sabe Andreia? Por quê? Porque ele vai pegar essas três estruturas e ele vai combinar! Entendeu? Então tem varias combinações dessas três.

Então, o Grupo Bourbaki é que propõe isso. Porque o que acontece com o Grupo Bourbaki, eles eram matemáticos puros, de primeira. Muitos ganharam medalha Fields! Eu estudei Topologia no terceiro ano da graduação. Um ano

de Topologia. Já nessa visão do Grupo Bourbaki. Mas a visão do Grupo Bourbaki ninguém sabia, ninguém conseguia aqui no Brasil aplicar. Porque ele tira totalmente o Cálculo Diferencial Integral, já começa com Análise. E com Topologia, com a questão do limite, da continuidade, entenderam?

O Omar Catunda na minha tese esta. O Omar Catunda, que era professor da USP, vai tentar fazer a introdução do pensamento do Bourbaki em Análise Matemática. Então, tira o Cálculo! Bom, não durou um ano, o Omar Catunda falou “não, não tenho aluno para isso”. Porque eles pesavam muito alto! Para eles era fácil, era facilmente vista a configuração entendeu? Mas para o estudante, se Cálculo Diferencial Integral I é difícil, imagina no primeiro ano, entrando na universidade, Análise I?

Andreia: Tá, mas qual é a conexão que tem entre essas ideias topológicas, essas estruturas do Bourbaki com a Matemática Moderna e o Dienes?

Rute: É, porque o Dienes era um tradutor da matemática contemporânea, do Bourbaki. A Matemática Moderna, o termo não foi cunhado pelos Bourbaki. Eles sempre chamavam de Contemporânea. Esse Movimento da Matemática Moderna acho que eu não sei quem cunhou. Pode ser OCDE, mas era Melhoria para o Ensino de Matemática, não era Movimento da Matemática Moderna. Eu nesse momento eu não sei datar.

Mas todo esse ensino de Topologia é datado, tanto é que ele não existe mais em nível de ensino fundamental e mesmo na graduação.. Ele era datado por quê? Porque o Dienes ele era um perfeito tradutor das coisas que os matemáticos de mão cheia, porque eu acho que precisa ter mão cheia para fazer as traduções que fez para o ensino, né? De uma Matemática pura lá em cima, ele colocou no ensino. Então, de repente, eu não sei... Ele, o Dienes, conseguia compreender, ele conseguia fazer as atividades para o ensino. Só que é datado, Andreia.

Se a Yasmin vai fazer um trabalho, o trabalho que ela vai fazer é histórico. Se ela quer saber, ela pode inferir que essas atividades ainda são apropriadas para se aplicar no ensino das séries iniciais, o que ela quiser opinar, entendeu? Mas, quais são os objetivos hoje? Entendeu? Essas atividades atendem os objetivos de hoje? Porque os objetivos dos 1970 eram

ensinar Topologia, era ensinar estrutura algébrica, nem que fosse por atividades, mas era para aparecer.

Então, esse trabalho, ele tem, eu acho que ele tem que mostrar que é datado, mas que vê a possibilidade. Entendeu? E daí ter argumento de ser aplicado. É lógico, não precisa nem de argumento! É fácil ser aplicado nos dias de hoje, mas qual a intenção? Qual é a finalidade? Qual é o objetivo? Compreendeu? Porque naquela época, eles não tinham muita... o Grupo Bourbaki nem ligava para ensino! Eles só ligavam para Matemática, altas matemáticas. As questões de ensino não interessam. Eles queriam pesquisadores. Eles trabalhavam só com pesquisadores.

O que acontece é que quem pega o Grupo Bourbaki, a Matemática do Bourbaki é o OCDE, que naquela época era OECE, e começa a investir num grupo e fazer reunião, e o qual Piaget fez parte. Eu acho que Dieudonné, que era o historiador do grupo também foi lá dar uma olhada, mas ele não podia ter opinião nenhuma, porque o grupo era dureza. Então, eu acho que o estudo da Topologia para aplicar nas crianças das primeiras séries, ou mais adiante, é uma coisa assim, se você tiver tempo, sobrando tempo, você vai fazer.

Eu acho que o seu trabalho pode ter valor na hora que você data ele, entendeu? Você pode até inferir que pode fazer as atividades. Mas ele é datado, porque veja só, eu estudei na graduação no terceiro ano, hoje, Topologia é apresentada no mestrado.

Eu estudei Teoria de Galois na graduação, também. Hoje, Teoria de Galois só é apresentada no mestrado. Mas, na minha época, época da Matemática Moderna, então eles apresentavam tudo. E Topologia é uma matéria que de uma classe de 50 de mestrado, são aprovados de 5 a 8 alunos. Principalmente em universidades que querem ser fortes. Já limpa todo mundo, é o primeiro curso dado. Se o aluno escolher, ele vai ter que fazer. Porque a Topologia ela está ligada a Análise Matemática. Então, esse cálculo que a gente aprende, Cálculo Diferencial Integral, é pré-primário, entendeu? É pré-primário para um matemático. Então, nem dá, mas é o que é possível, e é o que forma engenheiro e está bom! Formar professor de Matemática, matemático mesmo, é difícil.

Forma professor com doutorado em Matemática, mas isso não quer dizer que ele é um matemático! Ele é um professor de nível superior de

Matemática pura. O Grupo Bourbaki explicitou isso. Que é bom na universidade terem doutores, professores doutores para mandar alunos bons para pesquisa. Mas não que esses professores doutores são bons e que tenham nível matemático. Você não lê um livro de Matemática pura atual. A linguagem é outra! Você não lê, você nem domina a linguagem. É um livro grego. Vide Teoria das Categorias do Charles Ehresmann, bourbakista, medalha Fields.

Andreia: Tu achas Rute, que isso não pode ter acontecido com os professores lá na época da Matemática Moderna, de terem recebido esses livros, esses textos do Dienes, do Piaget, ou mesmo essa discussão das estruturas topológicas e ter sido muito novo ou muito difícil pra eles na época, pra vocês, no caso?

Rute: É, para mim não foi porque eu adorava pesquisar e até hoje eu não tenho problema com nada, nem com o que eu sei, nem com o que eu não sei. Eu não tenho problema com o que eu sei, se está errado eu corrijo, amplio, troco, não tem problema nenhum. E com o que eu não sei, também não sei! O que eu vou fazer, entendeu? Não sou gênio. O gênio também sabe uma parte.

Andreia: O que a gente observou, os livros antes da Matemática Moderna não traziam essas discussões das estruturas e nem dos conceitos topológicos. Como é que é receber, esse professor formado nos anos 60, de repente começa a ter contato com essa matemática toda e ela entrando pra ser ensinada?

Rute: Na realidade ela nos anos 60 já é ensinada para todos que quisessem ser bacharel ou licenciado em Matemática. Era pesadíssima, pesadíssima! Reprovava... Hoje, você imagina, a gente tem de formandos 2, 5, 0, não é? Na época era a mesma coisa!

Andreia: E os conceitos topológicos chegaram à Escola Normal?

Rute: Chegaram! Os livros para ensino de primeiro grau como os da Lucilia Bechara e outros (GRUEMA), o SMSG e outros, apresentavam as

propriedades nas estruturas algébricas, algumas transformações na topologia. Da Cristina Maranhão, Lisbete Madsen, Dione Luckesi, o livro delas, eu acho que também tem. Todos tinham uma iniciação sabe? Conceitos de vizinhança, fronteira, convexidade.

É interessante, são interessantíssimas as atividades. Quer dizer, eu não sei se cabe esses conceitos hoje na escola. E é uma coisa que vocês vão ter que informar bem, que é datado. Datado porque ele morre logo no começo dos 80, acho. Quando a USP começa a reformular seus currículos, em decorrência há mudança nos livros didáticos em São Paulo. Ah e tem, quer dizer, entra com força os vetores. Com Bourbaki entra, com maior força com os vetores.

E pra Bourbaki, a Geometria Euclidiana constitui um estudo à parte, tanto é que eles diziam: “Abaixo Euclides!” Porque, com a Álgebra Linear, com a linearização do espaço, com os vetores, com as matrizes, eles não precisam da Geometria Euclidiana. Não interessa, entendeu? Eles querem alguma coisa formal. E também estão pouco preocupados. Eles acham que se a criança é inteligente quando chegar às mãos deles ela vai aprender tudo rapidamente. Um gênio aprende mesmo né, pessoas com alto QI aprendem.

Então, quando você pensa, Nelson Freire, nunca tinha visto um piano, aos três anos sentou e tocou. Eu trabalhei um pouco na Olimpíada de Matemática, eu vi alguns gênios. Cada ano tinha um e demorava tinha outro, mas apareciam e eram gênios mesmo. É uma coisa inconfundível, como eles sabem muito mais matemática do que você e apenas com 14 anos. Eles têm uma clareza! E o Bourbaki, eu acho que se interessava pela elite intelectual. Da para entender? O resto era resto.

O que interessa para ciência? Interessa a elite intelectual, essa vai chegar até o pós-graduação. Essa vai enunciar teorema, vai demonstrar teorema, criar novas teorias, fazer associações entre teorias. Então, isso tudo que eu estou falando é datado. Por quê? Porque nem bem eles começaram os trabalhos, apareceu a teoria das categorias de Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane que se apresentava com um constructo diverso do de Bourbaki. Samuel Eilenberg fará parte do Grupo Bourbaki. Mas, é outro bourbakista, Charles Ehresmann, quem vai publicar um livro intitulado a Teoria das Categorias. Como já dito, numa linguagem muito específica, grego. E você não tem nenhuma familiaridade com essa nova linguagem.

Então, onde está a Topologia hoje, se você me perguntar? Eu sei que quando eu estudei eram essas questões, de convexidade, continuidade, limite, proximidade, fronteira, disco aberto, disco fechado, transformações. Eu lembro tudo assim, vem na minha cabeça. E me perdoa, faz 50 anos que eu estudei isso. Há 50 anos! Então, pratiquei um pouco enquanto na época ainda se chamava atenção para a Topologia, por causa das estruturas topológicas, mas depois todo mundo abandonou. Porque tem tanta coisa para aprender que você tem que fazer escolhas. É como Teoria dos Conjuntos.

A Teoria dos Conjuntos, que dizem que não é teoria, hoje tem várias teorias dos conjuntos. Mas a teoria dos conjuntos em Bourbaki, foi adaptada para a escola de primeiro e segundo grau na época e era introdução para qualquer livro de ensino superior. Quando você manda escrever os múltiplos de 2, a criança coloca como conjunto, o professor ainda não perdeu o hábito de colocar como conjunto. O conjunto dos múltiplos de 2, o conjunto dos divisores de 30. Ainda permanece, é engraçado! Tiraram a cabeça, mas não tiraram a alma, tiraram o corpo e não tiraram a alma, sabe? É uma coisa engraçada!

Yasmin: Dos conceitos topológicos que tu comentaste na Matemática Moderna, aquela ideia de proximidade, de vizinhança, até próximo das ideias que a gente te enviou, que papel tu acredita que essas atividades tinham naquela época da Matemática Moderna, para os alunos? No que contribuía no ensino dos alunos?

Rute: Ah, eles aprendiam esses conceitos, discutiam. Aprendiam, gostavam, entendeu? Mas a finalidade, a finalidade do ensino era outra! Era desembocar na Matemática Moderna com todos os instrumentos, topológicos, de grupo, algébrico e de ordem. Maior, menor, estar entre. Toda essa coisa apoiada ainda pela Teoria dos Conjuntos, que era uma linguagem. Era tomada como linguagem.

Mas hoje, é essa finalidade? Hoje a finalidade é que o aluno aprenda tabuada? Quanto que é essencial, aprender tabuada ou aprender alguma coisa mais tecnológica? Fazer programas, que eu acho difícil, mas tudo bem, tem essa ideia rondando por aí, entendeu? Quanto dessa programação naturalmente eles vão saber fazer? Eu não sei! Para hoje precisa analisar bem

qual é o momento e qual é a finalidade do ensino. Porque nos anos 70 era essa! Eu vou dar estruturas topológicas, eu vou dar estruturas algébricas e de ordem, porque lá na frente ele vai reunir tudo e vai aprender uma alta matemática! Porque o mundo, ao sair da Segunda Guerra Mundial, queria cientistas. É assim! É isso!

Andreia: E qual é o papel do Piaget nisso tudo, lá atrás, nos anos 70?

Rute: Ah, o Piaget foi, como se diz, pela, espontaneidade das descobertas! Então o papel dele era esse. E era interessante! Ele observava que se você botar três balas juntas e botar três separadas, a crianças vai falar que tem mais onde estão as três separadas. Eras coisas que a gente, até então, não tinha observado!

Estudar mesmo a crianças, Piaget nesse aspecto estudou. Lógico que ele fez umas afirmações, como eu faria, como você faria, diante do que tinha, da data, entendeu? Diante do que é datado. Aí todo mundo fala “ah Piaget falou bobagem...”. Por favor, olha a data, não tinha nenhum trabalho inédito desse tipo, não tinha ninguém que tivesse proposto a isso. E ele mostra várias coisas. Ai falam das fases, que não é bem assim... Ah, você pega uma obra gigante e fica achando pelo em ovo. Em vez de você datar, falar “olha, naquela época ele pensava, fazia...”. Não! Acho que o ser humano gosta de diminuir o outro. Acho que é isso.

Andreia: Uma das dúvidas que a gente tem quando lê os textos do Piaget é que hora nos parece que os conceitos topológicos estão vinculados e necessários pra criança construir o conceito de número, e hora ele parece que, sinaliza que os conceitos topológicos estão mais vinculados a questão da Geometria e do espaço. Embora uma coisa tenha a ver com a outra, ok. Como é que tu vê isso, essa relação, conceitos topológicos, construção do número, Geometria?

Rute: Pra mim isso é relacionado. É a mesma coisa que eu te falei, se você juntar 10 balas e espalhar 10, a criança vai achar que, por ocupar uma maior

área, tem mais balas. São esses estudos que vão na “finesse” das problematizações de ensino.

Eu só acho que você entrar em Piaget é uma coisa complicada. Porque cada pedacinho leva anos para você entender. Pode entrar, suavemente. Não queira discutir profundamente. Eu acho que vocês têm um grande trabalho! E o trabalho melhor de vocês é datar. Falar “oh que maravilha, olha a intenção! Olha...”, entendeu? Há muitos críticos da Matemática Contemporânea, de Bourbaki. Um dia eu falei, para um deles: “que bom né, que tem pessoas que querem mudar”! Pode não dar certo, uma tentativa ou outra, mas deixou muita herança, deixou bastante herança. Pode muita coisa não dar certo. Mas você querer se atualizar em conhecimento, nem que depois você fale “não foi bom, não é assim”. Só essa predisposição, para você se atualizar, sabe; sem ficar repetindo, repetindo uma coisa, já é maravilhoso.

Yasmin: No geral, nós queríamos entender mais o que tu tinhas, dessa ideia do que eram os conceitos topológicos, da finalidade deles e se tu associavas à construção do número, ou à Geometria... O porquê de eles serem ensinados. Tu gostaria de complementar mais alguma coisa sobre isso? Sobre o estudo dos conceitos topológicos, se tu te lembra de ter trabalhado eles em algum momento?

Rute: Trabalhei! Trabalhei essas atividades que todo mundo conhece. Que estão no Dienes. Eu acho elas sempre boas. E acho que toda festa de aniversário deveria ter delas, sabe? Não precisa ser na escola. Pode ser também na escola. Às vezes falta um professor, se a escola tem alguma organização, pode dar assim, coisas diferentes, que não seja dito que é matemática. É uma atividade matemática que aparentemente parece não ser. Não tem número!

Andreia: Rute você gostaria de falar mais alguma coisa, pra gente fazer um fechamento?

Rute: Eu acho importante esse trabalho. Eu acho que ele é um trabalho de História da Matemática, mas que você pode fazer inferências hoje. Inferências

cuidando das finalidades do ensino hoje. Você vê, mudou o rumo, mudou. Ninguém mais fala de determinadas coisas que eram obrigatórias, hoje não são. São outras que são obrigatórias. Então, isso se chama evolução, mas, não perde a beleza, não perde a aprendizagem. Não perde nada disso, é muito interessante. Eu, particularmente, aprendi a gostar de história, em todos os campos por isso. Dá para gente uma lucidez de ações. Porque tal coisa foi feita assim, porque tal outra... E a gente vai criando cultura e criando um olhar novo e tudo mais. Por isso que a história ela é necessária. Ela não é suficiente, mas ela é necessária! Eu ainda não acho suficiente.

Andreia: Então tá, a gente agradece!

Yasmin: Agradecemos novamente! Nos desculpe por toda a confusão também. E eu vou transcrever tudo e te mandamos pra ti analisar e marcar o que tu gostarias de tirar e daí a gente faz uma nova versão. Te mandamos novamente para conferir e assim que estiver tudo certo, te mandamos um termo que tu permite que a gente use tua entrevista. E ela vai ficar anexada na dissertação!

Rute: Tudo bem!

Anexo III – Entrevista com Neuza Bertoni Pinto

Entrevista narrativa concedida a Andreia Dalcin e Yasmin Barbosa Cavalheiro pela professora Neuza Bertoni Pinto, realizada dia 12 de junho de 2020, às 16h, via Skype.

Yasmin: Queria iniciar já agradecendo por a senhora aceitar o nosso convite assim tão rápido!

Neuza: Então, Yasmin, eu até fiquei indecisa se aceitaria participar, por sou de uma formação, lá do século XX, meados dos anos de 1970 em plena circulação das ideias da Matemática Moderna. Eu tinha formação de normalista, e como residia numa cidade pequena, do interior do Paraná, e lá faltava professor, então eu tive que assumir aula de Matemática na primeira série, do antigo ginásio, que equivaleria à 5ª. série hoje.

Fui ministrando aulas de Matemática, com minha formação de normalista até que foi criada naquela região, uma faculdade e eu aproveitei para fazer uma Licenciatura em Matemática. Era o único meio que eu tinha de continuidade dos estudos. Era na cidade de Umuarama e eu morava em Palotina, a 100 km de distância. Eu e algumas colegas íamos, duas ou três vezes por semana. Um curso cursavam Letras, outras História e eu, e mais uma colega, cursávamos Matemática. E tinha dias que assistíamos aulas à noite, e também no fim de semana, pernoitávamos lá na sexta-feira e, no sábado, tínhamos aulas o dia todo. Foi um curso muito bom, os professores vinham de São Paulo e de outras cidades maiores do Paraná. Eu não sei se você viu aquele caderno que eu mencionei, e que você poderá encontrar no repositório digital do Ghemat.

Yasmin: Sim, eu dei uma olhada nele sim! Achei bem interessante.

Neuza: Sobre o caderno de Topologia, aquilo era uma abstração só! E eu, quando tive essa matéria, até transcrevia, naquele caderno, todos os exercícios dados na aula, fazia tudo na hora, caprichadinho. Depois, com esse material eu estudava para a prova, mas era um conhecimento meio imediato, e eu não

conseguia fazer relação com o que ministrava nas aulas de Matemática que dava no curso ginásial.

Até na 5ª série, e depois para a 6ª, 7ª e 8ª, adotamos um livro didático que era de um autor do Paraná, Professor Osny Antonio Dacol. Ele foi um representante da Matemática Moderna, aqui no Paraná. Ele era professor na Universidade Federal do Paraná – UFPR e também Diretor do maior colégio estadual do estado, o Colégio Estadual do Paraná, instalado em Curitiba. Professor responsável pela criação e coordenação de um grupo de estudos da Matemática (Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática - NEDEM) que marcou forte presença na História da educação matemática do Paraná, nas décadas de 1960 e 1970.

Queria dar uma formação mais aproximada daquilo que se discutia naquele período sobre Matemática Moderna. Na época (década de 1960), a maioria dos professores que lecionava Matemática no ensino secundário, ainda não possuía curso superior. Muitos, como eu, tinham Escola Normal, mas ainda não tinham curso superior.

Naquela época havia poucas faculdades no Paraná, as que haviam, estavam em cidades maiores. Nessa época, fui convocada pela Secretaria da Educação para vir à Curitiba fazer um curso intensivo, que se chamava “CADES”- Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário. O lugar que eu morava era muito distante, mas eu vim, fiquei um mês aqui em Curitiba, fazendo este curso.

Era um curso, tipo de Aperfeiçoamento. Então, nesse curso, que era intensivo, trabalhamos durante um mês, com a Matemática Moderna, e o material de base era justamente o 1º volume da coleção de livros que Osny A. Dacol, com mais uma equipe de professores, estavam produzindo. Os professores desse curso eram bem preparados, o Professor Osny, professora Yolanda Brandt, dentre outros, eram integrantes do grupo já mencionado que fora criado em Curitiba para estudar Matemática Moderna e cujos participantes eram professores da UTFPR, do Colégio Estadual, da Escola Normal, da escola Tiradentes, importantes instituições do ensino da capital do Paraná.

Eles mantinham contato com o grupo de São Paulo, o GEEM, coordenado pelo professor Osvaldo Sangiorgi, também autor de uma coleção de livros de Matemática Moderna. Mas só que o livro aqui do Paraná era

bastante teórico, ele não era muito didático como o de Sangiorgi, porque ficava muito na teoria e tinha poucos exercícios.

Eu me lembro que tinha as funções, injetora, bijetora, conjunto vazio... Toda aquela teoria de conjuntos, que eu aprendi mais até nesse curso, do que na faculdade. Ainda mais que eu conseguia trabalhar com os alunos. Tinha coisas muito difíceis e desconhecidas que ainda não tínhamos conhecimento.

Na verdade, no Brasil, essa Matemática Moderna foi chegando meio que de repente e atropelando o conhecimento que os professores, grande parte dos que ministravam aulas no ensino secundário, não tinha formação, eram médicos, advogados, engenheiros etc., categorizados como professores de notório saber! Porque eram raros os que tinham cursos de Licenciatura. Até muitos dos professores formadores, depois que eu fui fazer pesquisar, historicamente, o Movimento da Matemática Moderna, quando participei de um grande projeto de Cooperação Internacional Brasil e Portugal percebi que, os próprios professores, de São Paulo que coordenavam grupos de pesquisa, foram para os Estados Unidos, para entender melhor esses novos saberes que eram, no início, discutidos um restrito grupo de matemáticos, o grupo Bourbaki.

Yasmin: E como que a senhora se aproximou desse movimento, da Matemática Moderna, das pesquisas?

Neuza: Então, na época que eu estava lecionando para o antigo ginásio, que hoje seria o segundo ciclo do Ensino Fundamental, o Fundamental II. Eu me apropriei bastante do que foi trabalhado nesse curso CADES. Foi um curso de extensão, que trabalhou só a Matemática Moderna para os professores poderem mesmo ensiná-la a alunos da escola secundária. Porque, eu me formei normalista, lá em São Paulo, na metade do século passado, no finalzinho dos anos de 1950. Época que meus pais tinham comprado terras no Paraná, e eu vim com eles enfrentar, meio que desbravar o sertão aqui do Paraná!

Enfim, essa mudança que a minha família fez, em 1957, do estado de São Paulo para o estado do Paraná, para Palotina, uma cidadezinha que nascia no oeste do Paraná, na verdade apenas um distrito que pertencia à

Comarca de Guaíba e que na época contava aproximadamente com 3000 habitantes, A única escola que havia era uma escola primária (Escola Mater Ter Admirabilis), dirigida por freiras (Irmãs de Maria). A escola, chamada pelos habitantes de Colégio das Irmãs, estava instalada em um prédio recém construído, até muito confortável, a uma quadra da Igreja.

Também havia, nesse distrito, escolas isoladas, denominadas escolas rurais. E eu, era a única professora que ali chegara e que possuía formação de Escola Normal Secundária. Havia outras professoras que tinham uma formação de Escola Normal Complementar, e que tinham vindo de Santa Catarina, outras vieram do interior do Rio Grande do Sul, outras eram leigas mesmo, não tinham nenhuma formação para magistério e lecionavam em escolas instaladas na zona rural.

Enfim, tive que assumir, já no dia seguinte de minha chegada, pois no mesmo dia que cheguei (num domingo) fui convidada para participar de uma reunião no referido Colégio das Irmãs, onde me solicitaram para assumir uma turma de 1º ano, de alunos adiantados! E eu permaneci quatro anos ali, dando aulas para as crianças que frequentavam aquela escola. Mas fui mudando de série porque os pais exigiam que eu acompanhasse aquela turma até a quarta série. E, quando completei o quarto ano de magistério naquela escola, em 1960, foi criado um curso ginásial na cidade que, na época, foi denominado de Escola Normal Regional “Santo Agostinho”, que era constituído de quatro séries de ginásio e um quinto ano que ofertava uma formação muito breve de professores.

O ano dedicado à formação só ofertava disciplinas pedagógicas, mas não tinha, especificamente, nada da matemática. Era preparação para alunas do ginásio que já exerciam o magistério, como professoras leigas, assumirem aulas anos iniciais do Curso Primário, de forma legal. E eu fiquei um ano lecionando Matemática na 1ª série desse curso e atuando como Secretária. No ano seguinte, a diretora que viera de Curitiba, mudou-se para outra cidade (o marido dela era delegado, ele foi transferido), e eu tive que assumir a Direção e ainda no final de 1960, me passaram essa incumbência, imagina! Eu tinha vinte e um anos. Tive que assumir a direção e nessa função e também, como professora de Matemática, permaneci nessa instituição até 1977, quando solicitei transferência para Curitiba.

Na época que eu assumi tinha trinta alunos e as aulas eram numa casa alugada. E nessa escola que eu assumi eu tive que dar aula de Matemática também, porque não tinha professores. Naquela época não tinha faculdade de Licenciatura, de Filosofia, na região, só tinha na capital, em centros maiores. Então quem teve que assumir aulas das disciplinas de ginásio, eram pessoas, por exemplo, advogados, médicos, agrônomos, engenheiros, eram profissionais que moravam na cidade. E eu era normalista, gostava muito de matemática, mas só havia lecionado nas séries iniciais e ali teria que lecionar para 5ª série. Trabalhava quase que uma ampliação daquela Aritmética, daquela matemática da escola primária.

Então, eu fui assumindo, fui estudando. E nesse meio tempo, recebia livros, doados por editoras que divulgavam a Matemática Moderna. Ai eu vi toda aquela ilustração, de Sputnik, de nave espacial, e eu fiquei meio apavorada! Eu falei “Meu Deus, que matemática é essa?” Eu não tinha visto nenhum livro de Matemática com aquelas ilustrações. Ainda não tínhamos faculdade na região, apenas em grandes centros.

Nos anos de 1960, abriu um curso CADES. Me convidaram para vir a Curitiba, eram 700 quilômetros de distância onde eu estava. Era estrada de terra, era uma dificuldade! Fiquei um mês aqui (Curitiba) participando deste curso. Era um curso de Aperfeiçoamento para professores que estavam atuando, numa precariedade enorme, quase ninguém era formado para dar aula em ginásio, naquela época. E ali, naquele curso, aprendia principais conceitos da Matemática Moderna para ensinar no curso ginásial, com integrantes do grupo NEDEM (Núcleo de Difusão do Ensino de Matemática) Osni Antonio Dacol, Maria Josefina Franco de Souza, Yolanda Brand.

Eram professores que escreveram o Volume 1 da coleção de livros de Matemática Moderna. Tinham contato direto com o grupo de São Paulo, o GEEM, que era coordenado por Osvaldo Sangiorgi. Então, eu aprendi, nesse curso, muita coisa de Matemática Moderna, e de volta à minha cidade, passei a adotar esse livro do Paraná, que fora publicado pela Editora do Brasil. Ele deve também estar disponível no repositório também.

Mas, posteriormente, trocamos pelo livro de Sangiorgi ao verificar este era muito mais didático, trazia mais exercícios para os alunos, apesar de considerar que teoria apresentada continuava bastante estranha para nós

professores. Nós tínhamos uma formação ainda daquele livro do Ari Quintela, daquela matemática mais de definição, de conceitos, etc. E, daí abriu também uma faculdade na região, abriu em Cascavel e Umuarama. Eram cidades um pouco maiores e eu fui fazer, junto com umas colegas que também trabalhavam nesse ginásio, onde eu era diretora e professora de Matemática, como já foi relatado anteriormente.

Foi um sacrifício danado! E nós tivemos muita sorte porque vieram professores de São Paulo ministrar as aulas daquela faculdade. Então nós tivemos uma boa formação, pelo menos na época, eu entendia que era uma boa formação. Só que relação com a minha prática não tinha nada! Até estava falando para Yasmin do caderno, com registro dos exercícios que a gente tinha. Eram muito boas as aulas. Eu entendia, mas naquele momento percebia que aprendia para fazer as provas. Mas não sabia aplicar nada daquilo nas aulas que ministrava no ginásio.

Alguma relação a gente conseguia ver, que aí no livro de Sangiorgi, a medida que foram avançando as séries apareciam conceitos mais avançados da Matemática Moderna. Bom, desde o começo o livro apresentava noções de vários tipos de conjuntos, incluindo o conjunto vazio, função injetora, bijetora. Mas, depois foram aparecendo alguns termos como: fronteira, exterior etc. Porque lá nas aulas tinha coisas que o professor falava, bola fechada, bola aberta, e eu não entendia nada, não sabia do que estava se tratando.

E também, o fato de nunca ter assumido disciplina de matemática pura, na faculdade, quando eu comecei a dar aula em faculdade já formada, já com mestrado, com doutorado, sempre trabalhei com Didática da Matemática e outras disciplinas pedagógicas! Então a gente tinha que se preocupar bastante porque o pessoal fazia Bacharelado e complementava com Licenciatura. Essa área mais pedagógica e didática, estava relacionada ao “onde” eles iriam atuar...

Considero muito interessante essa pesquisa que vocês estão fazendo, até para ver a apropriação de conceitos topológicos, ensinados em nível superior, ver aqui, no ensino da época, denominado ensino de primeiro grau. Principalmente para quem está cursando Licenciatura em Matemática.

Yasmin: Tu chegastes a ver aquelas atividades que a gente te mandou no protocolo da entrevista (anexo I)?

Neuza: Eu vi! Até eu deixei aberta aqui numa tela maior, porque muita coisa até eu não entendi bem. É o que eu falei no começo, como a minha trajetória ela não foi, tipo disciplinar, dentro de Curso de Matemática, ela foi mais próxima da parte didática, pedagógica, em curso de Licenciatura, voltado para o ensino. Então o que a gente chama de “saberes para ensinar”.

Andreia: Mas Neuza, começa a olhar justamente é pro ensino primário. O que tu entende por conceitos topológicos e qual a relação que tu faria com a Matemática Moderna naquela época, ou hoje, enfim, a gente quer te ouvir?

Neuza: Então, eu gostaria de ter lido Dienes lá naquela época. Eu fui ler o Dienes já como pesquisadora, muito tempo depois, orientando trabalhos. Eu orientei um trabalho de doutorado em que a aluna estudou a numeração decimal, a Elenir Terezinha Paluch Soares ela fez um bom trabalho sobre Zoltan Paul Dienes e o Sistema de Numeração Decimal, na cultura escolar paranaense (1960 - 1989), disponível no Banco de Teses e Dissertações, do PPGE da PUCPR.

Esta aluna havia feito um trabalho de Mestrado, no qual entrevistou professores que fizeram Licenciatura na cidade de Guarapuava, naquela faculdade que tem lá, no Sudoeste. Ela tinha até caderno daqueles professores, quando eram alunos do curso de Licenciatura. Na época eles aprenderam Matemática Moderna, mais ou menos como eu, com ajuda da Licenciatura e também com ajuda livros didáticos. Não era muito da cultura da formação, a gente fazer muitas leituras em manuais pedagógicos. Era muito de copiar nos cadernos o que o professor escrevia no quadro.

O uso da biblioteca, especialmente a literatura de Didática da Matemática, era muito precário na década de 1960, 1970. Então, na época me faltou essa leitura do Dienes. Porque ali, realmente, ele entra com a aplicação de vários dos conceitos da matemática moderna, no ensino elementar.

Um dia eu estava aqui trabalhando, eu recebi um e-mail de um engenheiro que estava na Bélgica, que dizia ter lido alguns textos que eu

escrevi sobre Matemática Moderna e que ficou muito interessado em saber se eu conhecia uma professora que deu aula no Colégio Estadual de Curitiba. Eu respondi que não conhecia, ele respondeu que graças a Matemática Moderna que aprendera com ela, ele estava muito bem sucedido profissionalmente lá na Bélgica.

E eu me admirei porque, geralmente, os alunos odiavam a Matemática Moderna e as professoras também falavam que não entendiam nada. Até inventaram um nome, diziam que a matemática moderna era uma “conjuntivite”, dado o excesso de conteúdos sobre conjuntos. E ele falou que ele era um engenheiro e que graças ao que ele tinha aprendido de Matemática Moderna no ginásio que havia feito no Colégio Estadual de Curitiba, ele conseguiu se dar muito bem na profissão que escolheu.

Então eu fiquei imaginando quanta importância que tinha aquilo e que nós não soubemos valorizar por conta de uma separação de teoria e prática. O emblemático Seminário sobre Matemática Moderna, promovido pela OECE (Organização Europeia de Cooperação Econômica) e sediado em Royaumont (França), em 1959 onde se reuniram delegações de 18 países, matemáticos e psicólogos, discutiram um programa para a matemática, contando com a participação de Howard Fehr que defendeu ideias de Piaget, sobre as estruturas-mãe, mostrando relações entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria. Destacando o conceito de estrutura, uma estrutura moderna para se trabalhar matemática a partir dessas relações. Ele queria mostrar, as relações entre as diferentes partes da matemática, e essas não deveriam ser mais trabalhadas separadamente.

Aqui no Brasil, a Reforma Francisco Campos, já tinha recomendado a fusão das disciplinas que antes eram separadas nos programas. Não tinha Álgebra, Aritmética e Geometria como disciplinas separadas. Todas ficaram integradas numa só disciplina: Matemática, pelo menos nos programas começaram a constar com essa nomenclatura. Os diferentes ramos da matemática juntaram-se, numa só disciplina chamada Matemática, a partir dos anos 1950. E ela continuava depois, nos anos seguintes, no secundário, também com esse nome, Matemática.

Nessa Matemática tinha momentos que você estava estudando o desenho geométrico, outra hora estava estudando uma geometria, então

tinham relações entre si e com a Aritmética, era uma teoria relacional. Então, você trabalhava Álgebra, mas ali dentro tinha Aritmética, às vezes tinha Geometria, que você fazia construções geométricas, o desenho também. Mas, naquela época não conseguíamos ver muito isso. Eu só fui ver depois, quando estava pesquisando o movimento, numa perspectiva histórica. Eu li muita coisa lá da França. A gente teve um projeto de cooperação internacional com Portugal, então eu fiz pós doutorado nessa época por lá.

Faltou muita leitura, mas eu vejo ali na concepção do Dienes, que tem esses conceitos topológicos, de dentro, fora, interior, exterior, fronteira, continuidade, trabalhando com os Blocos Lógicos, material construído a partir de categorias, cores, tamanho, forma e que facilita o entendimento pela criança. Uma série de coisas que agora, olhando esses desenhos aqui, eu vi que tem. Que é uma aplicação disso, daqueles conceitos que eu considerava tão abstratos, que eu achava que não existiam nos programas da escola primária.

Porque, quando eu assumi quatro anos de escola primária, trabalhei mais com as ideias da Escola Nova, sempre do fácil para o difícil, e eu acredito que trazia, sim, esses conceitos topológicos, por exemplo nas relações entre Aritmética e a Geografia, porque a gente fazia muito mapa, nós calculávamos fração, acho que relacionado também as questões de Estatística, mas muito diferente do que é hoje. E, o grande mentor, o mestre disso, pra clarear o assunto, foi Piaget, que também foi mal lido no Brasil, pelo menos na minha época.

Quando eu me formei na Escola Normal, meados de 1950, suas ideias estavam começando a circular no Brasil e mais adiante, ele foi melhor trabalhado. E em Piaget nós temos muita coisa relacionada aí. Penso que a formação daquela época, momento que chegava o Movimento da Matemática Moderna, faltou muito fundamento, muita leitura, isso veio depois. Eu não vou encomprar muito, vou deixar vocês perguntarem mais coisa! Não sei se eu respondi alguma coisa aí.

Andreia: Sim! Só esclarece pra nós o seguinte, você comentou que você trabalhou mais durante a Escola Nova, essas atividades, então, de dentro, fora,

longe, perto, essas atividades elas já existiam naquela época da Escola Nova, ou não, elas só passaram mesmo a aparecer com a Matemática Moderna?

Neuza: Não, já existia! Você traçava caminho, sabe? Só que você não tinha noção do que depois essa Matemática Moderna traz, dentro, fora, no sentido de bola aberta ou fronteira, o que está no interior, exterior. Sabe aquelas noções mais abstratamente elaboradas. Que aí eu lembro que tínhamos isso em exercícios e atividades. No repositório é possível verificar nos livros de Matemática para a Escola Primária, dos anos 50 e 60 do século XX.

Andreia: E qual era a função dessas atividades então lá na Escola Nova?

Neuza: Eu penso que já fazia essa relação interdisciplinar. Servia pra orientação nas aulas de Geografia, na aula de Educação Física. Achar direita, esquerda, norte, sul, a orientação. Eu penso que esses conceitos já eram trabalhados, porque algumas obras de Piaget demoraram muito para serem divulgadas no Brasil.

Quando estive visitando os Archives Jean Piaget, em Genebra, ao entrar, deparei-me com foto ampliada na parede de Piaget, sentado ao lado de sua mesa de trabalho, com livros amontoados. Ao olhar surpreendida para aquela imagem, na parede a minha frente, a coordenadora que me recebia, perguntou: “o que você está entendendo?” Eu falei “nossa, ai parece que está toda teoria do Piaget, nessa foto!”. Ela deu uma risadinha, demonstrando interesse em conversar comigo.

Estava com um pouco de dificuldade, porque ela falava um pouco de espanhol, um pouco de francês, mas acabamos nos entendendo. Ela pediu para explicar o que estava entendendo da foto. Eu falei: “essa mesa desorganizada, com livros desordenados, me parece que é relação com a natureza. Porque a natureza se desorganiza, mas ela tem um fio condutor, no dia seguinte a uma tempestade, volta o nascer o sol, vem a tarde, a noite. Então tem um movimento que é rotineiro, que ele é contínuo. Mas, tem outro, como a tempestade, que vem desorganizando tudo, muda o esquema, mas depois a natureza volta ao normal. Então existe um fio condutor aí no meio. Acho que esse foi um conceito que Piaget explorou muito em todos os estudos

dele. Principalmente em relação ao espaço”. Até achei um livro dele aqui, do espaço. Vou tentar mostrar pra vocês, não sei se vai dar pra ver, vou ligar a câmera aqui.

Andreia: A gente ta vendo.

Yasmin: Estamos vendo, é só levantar um pouquinho ele...

Andreia: Ah, a gente está trabalhando com esse livro também (“*A representação do espaço na Criança*¹²”).

Neuza: Sobre este livro, na visita aos Archives Jean Piaget, como estava relatando, fui recebida pela coordenadora, Silvia Parrat- Dayan, uma professora vinda da Argentina, que me informou que esse livro havia sido difundido na Suíça, na década de 1940, e publicado em 1ª edição, em 1948. Eu falei “nossa, esse livro acabou de sair no Brasil!”.

Eu vi agora, foi publicado em 1993, aqui no Brasil. E eu não conhecia essa literatura, achava que era alguma publicação mais recente de Piaget, porque ele tinha falecido na década de 1980. E no livro, Piaget e Inhelder, sua colaboradora, trazem a noção de espaço e de conceitos topológicos. Lembro-me que ela (a Silvia) falou disso! Como observar essa percepção espacial no desenvolvimento da inteligência da criança.

Um dia, quando meu neto era ainda bebê (hoje ele tem 17 anos), vi minha filha fazendo movimentos circulares que ele ia acompanhando com os olhos (Neuza faz movimentos circulares com o dedo), fazendo esse movimento. Eu falei “porque você está fazendo isso?” E ela respondeu: “estou ensinando movimento pra ele, ele tem que entender o espaço”. Ela parecia entender o que estava fazendo, como arquiteta e designer sabia bem da importância de reconhecer o espaço.

Hoje, noto que ele tem muita facilidade de orientação no espaço, lembra com de caminhos percorridos, memoriza com facilidade localização e detalhes

¹² PIAGET, J.; INHELDER, B. *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

de lugares. Outra ajuda foi da escola onde estudou que trabalhava com etapas para a escrita, até chegar na letra manuscrita, a escola Waldorf, deve ter aí em Porto Alegre. Eles faziam tudo por etapas, nunca usavam caderno de linha, era tudo em folha sem linha, aprendiam a explorar o espaço em branco, da página. Faziam tudo retinho. Hoje ele tem a facilidade pra relações, conexões. Por isso penso que o currículo escolar ainda precisa avançar muita coisa, pra criança não sofrer tanto para aprender alguns conceitos matemáticos.

Yasmin: Então, tu enxergas relação desses conceitos topológicos com o que o Piaget trabalhava nesse livro que tu nos mostrou?

Neuza: Eu não li o livro! Eu tenho o livro aqui, comprei e dei uma olhada superficial, por falta de tempo. Agora me desliguei da academia, mas não da pesquisa, que eu continuo fazendo. É assim, você está sempre com vontade de aprofundar alguma coisa. Mas, deixei ele separado aqui.

Andreia: Esse livro é um dos que a Yasmin tá olhando, porque, até tu pode nos ajudar a entender um pouco, nos parece que o Piaget aproxima mais os conceitos topológicos das noções de espaço, como tu mesma falaste, pra chegar à noção de número, de quantidade... Primeiro espaço, depois quantidade e depois número, mas, pela Matemática Moderna a gente fica na dúvida se era essa a ideia também, a mesma do Piaget, ou se tem mais alguma coisa aí, do Dienes, que ele passa daí mais a relação, não tanto com a geometria, mas com as estruturas, principalmente pelo pensamento mais algébrico e não tanto geométrico... E hoje quando a gente olha os livros e vê o que sobrou a impressão que a gente tem é que não sobrou nada, nem um e nem o outro. E o que está nos livros é simplesmente pra eles treinarem a escrita, a escrita dos números, então... Tem um vácuo aqui no meio, que a gente quer entender, não sei se tu já pensaste sobre isso?

Neuza: As ideias do Piaget foram levadas à discussão naquele Congresso que ocorreu em Royaumont, na França, em 1959, e depois, em Dubrovnik, em 1961. Desse último, saíram orientações para ensinar Matemática Moderna, que

depois foram difundidas internacionalmente. A ideia de Piaget era que as estruturas interligassem os ramos da Matemática que se apresentavam separados: a Álgebra, a Geometria e a Aritmética.

Ele comparava esses ramos da Matemática com as estruturas mães do nosso pensamento, afirmando que essas estruturas matemáticas eram as mesmas estruturas que compõem a inteligência, o nosso raciocínio. Então, se essa matemática colocasse em relação o que estava fragmentado, teríamos nessa representação, a matriz do raciocínio, da inteligência humana.

Porque aí que ele entra com aquelas etapas, aqueles estágios, que as crianças passam em seu desenvolvimento: do sensório-motor, pré - operatório, ao concreto até chegar à etapa da abstração. Li uma entrevista do Piaget, falando da Matemática Moderna, que foi um fiasco porque os professores, na hora de ensinar essa nova matemática para a criança, não respeitaram sua linguagem, nem a fase de desenvolvimento em que se encontrava. Ao permanecer naquela linguagem de conjuntos, ao que parece não souberam estabelecer relação dos conceitos modernos com linguagem do cotidiano da criança.

E o que era fundamental e mais convencional, advindo do grupo Bourbaki, parece ter perdido o sentido. É isso que eu acho que você está querendo saber. Quer dizer, qual o sentido? Então, aquele livro do Morris Kline, intitulado “O fracasso da matemática moderna”, faz uma grave denúncia sobre as implicações dessa reforma nos Estados Unidos. Também, falando do lado ruim dessa reforma, denuncia falta de concretude no ensino, considerando que o excessivo rigor e abstração trazida pela reforma, era algo que não tinha nada a ver com a realidade das crianças, ao abandonar os problemas do cotidiano e ficarem naquela linguagem dos conjuntos que acabou, segundo aquele autor, não trazendo benefícios nenhum.

Mas, me parece que foi a forma que hoje, por exemplo, quando estudamos saberes profissionais do professor que ensina matemática nos anos iniciais da escolarização, os denominados “saberes para ensinar”, do ponto de vista do matemático, concebe uma didática apenas fundamentada na ciência matemática, disso resultando que basta saber os conteúdos para ensinar matemática. Sem respeitar a ambiência pedagógica, então o ensino fica meio complicado mesmo, porque apresenta o raciocínio do matemático para a

criança, sem o necessário processo de adequação ao nível em que a criança se encontra, sem considerar a criança real.

No momento da Matemática Moderna, o currículo trouxe uma mudança radical em relação aos avanços que o movimento da Escola Nova já havia conquistado com as contribuições da Psicologia, em que o aluno passa a ser respeitado em seu ritmo próprio e individualidade. Porque quando se trata de ensino, você não pode só fundamentar-se na ciência disciplinar, no caso a Matemática, você tem que chegar nos conceitos da pedagogia. No momento venho estudando a relação entre a Didática Geral e a Didática da Matemática.

Bem no momento da Matemática Moderna essa transformação da Didática teve grande impulso com a profusão de livros de Matemática Moderna, entretanto nem todos os autores conseguiram expressar esse processo, ou seja, o diálogo entre duas ciências que se cruzam para tratar da matemática escolar. Então, na licenciatura, quando se prioriza só as matérias de cultura geral, a Álgebra, a Geometria Analítica, o Cálculo, dentre outras, sem fazer a relação entre conhecimentos matemáticos e didático-pedagógicos, a formação do licenciando parece ficar devendo alguma coisa.

Certa vez, me pediram pra elaborar uma proposta inovadora para as Licenciaturas e o que sugeri era essa necessidade de diálogo entre as ciências disciplinares com as ciências da educação. Até sugerimos uma dupla de professores atuando nas disciplinas denominadas de pedagógicas, um especializado em Matemática e outro em Pedagogia. A ideia era manter um diálogo e ver como resultaria dessa parceria, um novo saber, uma proposta inovadora para cada disciplina pedagógica, mais adequada para formar futuros professores. E saíram excelentes programas, mais condizentes para os licenciandos atuarem na educação básica, bem distanciado da programação do curso de Bacharelado.

Infelizmente, por se tratar de instituição particular, a proposta não seguiu em frente, dadas as dificuldades de implementação, os gestores alegavam gastos desnecessários para manter dois professores numa mesma disciplina. Parece que os dirigentes ainda não se deram conta que educação de qualidade precisa de investimentos.

Andreia: Então Neuza, quando tu olhas um livro didático, olhando essa questão da didática, um livro didático pro ensino primário hoje, pros anos iniciais, primeiro, segundo, terceiro ano, ou educação infantil, e a gente vê aqueles exercícios então, de conceitos topológicos, os mesmos que tu ta falando da Matemática Moderna e de antes... Uma mesa, ta em cima, ta embaixo, ta longe, ta perto... Qual é o sentido? Tu achas que hoje isso faz sentido manter esse tipo de atividade e se faz por quê?

Neuza: Bom, eu penso que, por exemplo, a noção de fração, a gente pensa que é algo que vai estar só lá na terceira série, na quarta série, não sei... Na verdade uma criança pequena, ela sabe o que é metade, ela tem esse conceito. Dê um chocolate pra ela e fala: vamos dividir esse chocolate com o amiguinho? Ela diz que vai dar metade para o amiguinho, só que ao repartir, a metade maior é dela, metade não, pedaço maior, que ela entende como a metade dela, que ela é muito egocêntrica, individualista.

Então, essas noções para Piaget sendo formadas desde muito cedo na criança, como a representação do espaço que comentei sobre o movimento que a filha fazia para meu neto ainda bebê. Me parece que o livro que comentei vai tratar do desenvolvimento dessas estruturas.

Eu, ainda tenho muito que aprender sobre essas estruturas perceptivas das diferentes fases da criança. Como se trata de um processo que vai ocorrendo ao longo do desenvolvimento da criança, penso que os livros didáticos simplificam demais sua didática, principalmente os estímulos para provocar avanços na aprendizagem dos conceitos matemáticos. Trata-se de conhecimentos de natureza mais complexa.

Com o Movimento da Escola Nova, o ensino que caminhava do fácil para o difícil, com a chegada da Matemática Moderna, fez uma mudança radical na programação, nos levando para um conhecimento mais complexo, em que o conceito de número passa a ser considerado uma propriedade que não existe separadamente, mas sim a partir de um sistema de numeração organizado. E nessa lógica, em que primeiro se valoriza as relações, o conceito de estrutura passa ser o fio condutor da teoria que doravante iria organizar os saberes elementares matemáticos, ou seja, a teoria dos conjuntos.

Mas o problema é que a escola não fez a relação com o que a criança já sabia. A criança já sabia muitas coisas, trazia do seu cotidiano muitas noções que a escola precisava transformar em conceitos. A gente chama de noção o que ainda não está objetivado em conceito. Transformar em conceito é mais complexo. Ela já vem com todas as noções. De longe, distante, em cima, embaixo, a direita....

Só que na escola ela precisa avançar. Que nem o Paulo Freire falava, você tá no nordeste no ensino, não tinha plantação de uva, como que vai dar cartilha lá, a Eva viu a uva... Pessoal usava lá essa cartilha, Caminho Suave (que de suave não tinha nada para aquela criança que na época não conhecia uma uva). Mas você tem que falar a linguagem da criança, é o que o Piaget também defende. Você tem que começar lá de onde a criança está e seguir em direção ao convencional.

Mas a escola parece fazer o caminho contrário, começa pelo difícil para chegar ao fácil. A criança às vezes não consegue relacionar aqueles conceitos tão abstratos com as coisas do seu cotidiano. Considero sim uma perda de tempo quando se omite essa relação nos livros didáticos. Tem muita coisa que a escola cobra nas provas, na avaliação, e que não foi nem ela que ensinou, a criança aprendeu na sua vida, na sua família, no dia a dia dela. E a escola põe isso na prova como se fosse um conteúdo ensinado por ela.

Yasmin: Então, tu acreditas que eles são importantes ainda de estarem no livro didático, tu acha que eles ainda tem alguma importância?

Neuza: Depende da forma como é abordado. Se não tem nenhuma relação com o cotidiano do aluno, eu acho que é sim uma perda de tempo, porque não provoca o raciocínio da criança, ou seja, que a estimule a reconhecer, fazer relação com o que ela conhece.

Eu penso que isso começou a mudar, essas linguagens valorizadas nos PCN's né? Que eles começaram a trabalhar com várias linguagens. Eu inventava umas coisas pra ensinar as propriedades. Chamava dois, três alunos pra ensinar a propriedade reflexiva, aquela outra simétrica... A gente se virava nos 30, ainda mais no interior.

A gente tinha que usar a criatividade e a imaginação. Um dia eu estava dando aula, acho que era na quarta série ginásial, me lembro, sobre o teorema de Pitágoras. Eu tinha mandado fazer no marceneiro, nem tinha pra comprar, sabe aquele triângulo pra desmontar, montar, pra explicar o que era hipotenusa, o que era cateto e fazer aquela montagem da equação do primeiro grau. Eu estava tão entusiasmada, estavam e os alunos tão atentos. Tinha 40 alunos, naquela época tudo de camisa branca de manga comprida, de gravatinha, um calor infernal!

Bom, aí teve o intervalo, acabou aquela aula e eles ficaram aglomerados na porta e não saíam, estavam me esperando sair, achei que queriam falar comigo, mas eram muito tímidos. E eu perguntei o que era, porque eles não iam para o recreio. Aí um disse “professora, eu queria saber uma coisa, a senhora estava falando em catetos, a senhora estava falando daqueles porcos que o meu pai e o pai do fulano criam lá na colônia?” Eles chamavam o sítio, chácara de colônia. “O que que é isso?”, “Não, porque tem uns porcos que chamam de cateto!”.

Nem eu sabia, porque eu tinha vindo de São Paulo, não entendia muito o linguajar deles. Olha a relação que eles fizeram, eles não entenderam nada do que eu estava falando, por conta da linguagem. Quando você fala duma bolinha, você fala de um círculo, a criança pensa numa rodinha, que seria a representação de uma circunferência. Tem uma superfície, uma dimensão, ta entendendo? Então, é muito difícil você acertar ali o que a criança está pensando naquele momento que você está usando aqueles termos, com o que ela está relacionando.

Por isso, que essa manipulação de materiais e visuais, etc, é muito importante para explorar bem os sentidos do conceito. Não é fácil não, você trabalhar essa matemática dentro de uma perspectiva assim, do saber para ensinar, pois envolve uma transformação aí, uma objetivação, que passa por uma alquimia, pra sair de um lugar, da fonte que é a matemática pura, para transformar-se em algo diferente, ou seja, num saber ensinável, num formato que o aluno entenda.

Andreia: Pra gente já ir encaminhando então, já viu que são 17h... Fala um pouquinho do teu caderno. Porque o teu caderno ele está nos abrindo várias

ideias, varias possibilidades... O que tu se lembra desse caderno, o que tu gostarias de chamar atenção desse caderno?

Neuza: Então, eu tenho esse caderno guardado e eu tenho de outras disciplinas lá também. Esse caderno, eu fazia lá direto na aula. Mas, eram exercícios daqueles conceitos, tudo na forma algébrica, que ia deduzindo, aquelas equações e tudo. Eu não entendia muito a aplicação, mas ia muito bem na disciplina. Eu entendia o processo, como ia revolvendo aquilo, mas não fazia relação possível com as questões das aulas que ministrava nas séries iniciais do Ensino de 1º Grau, como era chamado o atual Ensino Fundamental.

Mais tarde, quando avancei lá para as terceira, quarta série ginásial, fui vendo que tinha sim relação. No livro do Sangiorgi tinha aquelas figuras deformadas pra olhar fronteira... Ai que eu fui entender que fronteira tinha espaços abertos que podia transitar, entre o interior e o exterior. Eu fui entender também a questão do limite, que é fechado... Então, eram coisas que eu, por exemplo, quando fazia Licenciatura em Matemática, eu queria saber muito, muito o que significava alguns daqueles símbolos, como aquele símbolo da raiz quadrada que nem os professores sabiam me dizer.

Sabe aquele símbolo $\sqrt{\quad}$ (raiz)? (naquele tempo não tínhamos internet/google). Só depois de muito tempo, eu encontrei num livro que comprei em Portugal, explicação sobre a origem daquele símbolo, que dizia ter sido empregado pela primeira vez em 1525, no livro de álgebra do matemático alemão Christoff Rudolf. O termo raiz significa base e provém do substantivo latino radix que significa a parte inferior de uma árvore, sua base, fundamento.

Muitos desses símbolos matemáticos nós não sabemos. Precisaríamos conhecer um pouco mais de suas histórias. Penso que a matéria do caderno poderia ter sido ilustrada com um pouco de história. Aquele caderno, na verdade eu fazia para estudar, deixava a matéria organizada para ser consultada antes das provas. Também consultávamos livros onde tinha conceitos mais desenvolvidos ou outros tipos de exercícios que estudávamos para as provas e era assim.

Mas como já mencionei, eu não conseguia naquele momento, que eu também atuava lá no ensino do primeiro grau, eu não sabia fazer a relação de tudo aquilo com a disciplina que lecionava. Mas, como a matemática ela tem

várias funções, uma delas é quase que uma ginástica mental. Quanto mais você raciocina, parece que você vai trabalhando o movimento no cérebro, que aí você aplica aquela agilidade mental em outras situações.

E eu acreditei nisso quando eu li um livro também que veio dos Estados Unidos, falando de uma época em que os currículos escolares pareceriam ter enfraquecido a matemática, pararam de colocar raciocínios, problemas. Ficou como uma cortina de fumaça, com o exagero do “conjuntivismo”. O autor fala desse momento onde cresceu a formação de psicólogos e as pessoas começaram a ir também procurar curandeiros para resolver seus problemas. O autor John Allen Paulos, falava que estava faltando raciocínio matemático, mesmo que não tivesse uma aplicabilidade, toda aquela Álgebra, aquela abstração toda ajudava a resolver os seus problemas, sem necessidade de procurar ajuda de outras pessoas. Então, voltando lá, acho que eu me perdi um pouquinho, qual era a pergunta, essa última?

Andreia: Fala sobre o teu caderno...

Neuza: Quer dizer, por menos que eu tenha visto essa relação prática pra minha atuação profissional, aquele conteúdo, mais tarde como pesquisadora, eu considere assim importante e necessário para formação num nível superior de conhecimento, porque tem uma função que talvez a gente não consiga explicar totalmente, mas ela tem uma finalidade formativa, matemática.

Yasmin: E sobre o teu caderno, aquela topologia que tu falaste que tem lá, tu enxerga alguma relação dela com esses conceitos topológicos, dessas atividades, ou tu acha que é uma coisa muito mais abstrata?

Neuza: Eu fui até lá no repositório ver se estava lá, mas esta lá e daí eu dei uma folhadinha rápida, que eu estava aqui com muita coisa pra dar conta, mas tem sim. Falando de fronteira, interior, exterior... Aí eu parei pra olhar aquelas equações que formavam lá da bola aberta, bola fechada, que eu falei agora. Aquele conjunto vazio sabe? Aqueles funções, injetora, bijetora. Acho que tem relação sim.

Andreia: E esse caderno foi da licenciatura... No Curso Normal, tu falaste que fez o Curso Normal também, tu não tinhas visto nada disso? Isso tudo foi depois?

Neuza: No Curso Normal nós tínhamos umas aulas de Prática de Ensino. Porque a matéria de Matemática do Curso Normal, que eu tive foi quase que uma revisão daqueles conteúdos da escola primária, sabe? Mas a Geometria era muito trabalhada não, era mais a Aritmética, as operações, aqueles problemas envolvendo frações, sistema métrico decimal, um pouco de percentagem.

Dentro dessa matéria de Matemática da Escola Normal eu lembro de termos trabalhado com o livro do Sangiorgi para a Escola Normal que também tinha um pouco de Estatística. Eu aprendi um pouco de Estatística na Escola Normal e posteriormente também no Curso de Pedagogia que fiz na UFPR. Mas na Escola Normal, aplicávamos o conteúdo estudado também, para ver o percentual de alunos menos favorecidos socialmente, por exemplo. Porque tinha a Escola de Aplicação onde eu estudei e nós íamos lá toda semana, tínhamos atividades para realizar com as crianças.

Mas os livros, eu não me recordo, mas até posso verificar lá no repositório, parece que nos manuais didáticos, na parte de Matemática, tinha alguma sim exercícios ainda na concepção escolanovista, da Escola Nova, que trabalhava com essa questão de continuidade, de caminho, sabe? Que eu vi ai nesses exercícios, esse movimento das letras, contínuo... Aquele traçado de letras e números, por exemplo, preciso verificar. Também isto aparecia muito na matéria Cartografia que compunha o currículo da escola primária, ao fazer relação com os mapas, escala, aspectos geográficos.

Andreia: Será que tem relação com a Montessori, que trabalhava lá com as lixas de passar o dedo...

Neuza: Eu não sou muito conhecedora da Montessori, mas deve ter sim...

(olhando para as atividades do protocolo da entrevista)

Olha, esses números aqui tem umas quebras, então tem uma descontinuidades aqui, no quatro, cinco, diferente do seis, diferente do sete... O

sete também tem descontinuidade, porque vai cortar o sete... Você levanta o lápis do papel. Quer dizer, isso tudo era Escola Nova, era aquele momento do primário, que eu trabalhei, sabe? Tinha isso. Esse do caminho olha a relação aqui do cachorro, tá vendo? Ele está fora, ele não está dentro, ele tem que sair pela linha de baixo, está entendendo? Ele sai aqui pela linha de baixo e vai acompanhando a linha debaixo, pra chegar ao osso, ele está no exterior, é um conceito topológico que tem aqui. Aquele primeiro da bola, aquela questão da bola é em cima e embaixo... A criança vai entender perfeitamente, porque ela já tem esse conhecimento. Em que série estão esses exercícios?

Yasmin: Eles estão recomendados pro primeiro ano. Acho que a maioria deles e os dois últimos que eu te enviei eles são do caderno de uma normalista, ali do Instituto de Educação aqui de Porto Alegre.

Neuza: Tem um programa de currículo que foi feito aqui no Paraná da época de 1980, depois da Matemática Moderna, por aqui se falou tanto mal da Matemática Moderna, que a Secretaria da Educação do Estado formou uma equipe para elaborar um novo programa. A professora Maria Tereza Carneiro Soares, da UFPR, Maria Tereza juntamente com outros professores trabalhou com isso.

E quando vi as atividades que estavam sendo propostas pensei: “nossa, mas está voltando tudo o que era antes?” de quando, antes da Matemática Moderna, eu comecei a trabalhar com ideias da Escola Nova, Voltou sabe, parecia estar resgatando o básico da matemática para os primeiros anos escolares. Tive acesso a um material vindo lá dos Estados Unidos e quando fui olhar, vi que era lá que estavam explorando todos esses conceitos, tentando religar aquela matemática da escola, com a matemática da criança, do cotidiano. Tipo assim, vamos rever o que a criança sabe e a partir disso avançar. Tem que ter um porque estar lá no livro. Não é só jogar assim, às vezes a pessoa nem sabe qual o sentido daquilo.

Andreia: É um pouco isso que a gente quer discutir nessa dissertação, que é pra gente ajudar talvez os professores dos anos iniciais, e a gente também a

pensar um pouco isso na história né? Porque praticamente a gente não vê essa discussão...

Neuza: Penso que se vocês entrarem no repositório vocês vão poder examinar livros de primeira a quarta e da Didática da Matemática. Tem uma Didática lá, da Irene de Albuquerque, onde ela irá explicar, com base teórica, o que dessas atividades e outras, como que entra isso no programa, certo?

Andreia: Tu lembras de algum trabalho que já se aproximou dessa ideia que a gente ta trabalhando, ou não?

Neuza: Não lembro, tem muito trabalho da Matemática Moderna, mas esse especificamente, desses conceitos topológicos eu não lembro.

Andreia: Tu sugeririas alguém pra gente entrevistar, alguém que poderia nos ajudar nessa discussão?

Neuza: Sugiro que consultem o Wagner Rodrigues Valente, acho que vai ser uma contribuição muito boa. O Wagner que tem uma leitura mais completa de toda essa parte pedagógica. E, que ele tem se dedicado muito a estudar saberes elementares e formação. Tem muitos orientandos, muitos já concluíram... Esses saberes aí, das normalistas... Eu acho que ele vai dar uma grande contribuição pra vocês.

Outra pessoa também que poderia dar essa contribuição é a Célia que trabalhou bastante com Geometria. Porque quando você vê esse espaço aí, topológico, tem essa questão da forma e da ocupação do espaço, das dimensões, se é plano ou se é dimensional, enfim. A Célia Leme da Silva, da Unifesp, ela também está no nosso grupo. Eu acho que são pessoas que podem trazer mais contribuição que eu. A Célia porque atua nos cursos de Licenciatura em disciplinas, essas de Cálculo.

Penso que Wagner, porque além de olhar de um ponto de vista histórico, irá trazer dados sobre essa lacuna que os professores tiveram na sua formação em relação aos saberes elementares matemáticos para os primeiros anos escolares, considerando os projetos que coordenou e também coordena no

GHEMAT Brasil, também porque ele é engenheiro, pedagogo, historiador da educação matemática, campos férteis para lidar com os “saberes a ensinar” e “saberes para ensinar” matemática, nos primeiros anos escolares, principalmente porque ele tem uma visão bem ampla dos diferentes momentos históricos da matemática escolar. Então ele vai saber contribuir muitíssimo com esse estudo! É mestrado ou doutorado?

Andreia: Mestrado!

Neuza: Ah, mestrado! Pode fazer uma parte agora e depois...

Andreia: É, tem pano né...

Neuza: Porque essa pesquisa é muito interessante!

Andreia: É, está difícil, porque assim, é bem... A gente cada vez ta costurando, encaminhando. Agora ta conseguindo fechar mais o foco para o mestrado. Mas é que ele abre muita discussão paralela, muita coisa ainda pra estudar!

Neuza: Penso que tem que delimitar bastante, contextualizar mais alguns fatos históricos... Umas fotos históricas aí pelo caminho... Vocês tem aquele arquivo da Matemática Moderna, não é? Como que chama o arquivo?

Andreia: É Acervo do Instituto de Educação, do Laboratório de Matemática. E a Yasmin foi uma das que trabalhou comigo lá na escola ainda, começou esse acervo. Ela já fez o TCC dela nessa linha e agora ta continuando no mestrado.

Neuza: Essa figura aqui, que me chamou atenção das crianças, a menina... (olhando para o protocolo da entrevista) É direita ou esquerda o que? A partir do que?

Yasmin: Ela é de um livro didático da Matemática Moderna. E ela não tem enunciado nem nada. É como se fossem várias folhas de atividades unidas e ela está só assim, esquerda ou direita? Sem nenhuma orientação, nada...

Neuza: A apresentação dessa questão aqui, dessa matéria, está muito mal formulada! Você não sabe o que se está perguntando... No primeiro quadro, se a menina está à esquerda ou direita do menino, se o menino está à esquerda da menina... Não é mesmo? A mesma coisa o passarinho, está perguntando se o que está levando o alimento está à direita ou à esquerda, ou se aqueles que estão no ninho estão... Embaralha a cabeça da criança, nossa!

Eu, uma vez comprei uns livros baratinhos pra levar pro meu neto, que ele era criancinha, e eu falei, “vai fazendo aqui os exercícios de circular, de relacionar...”. E ele, “o que foi vó? Esse livro, pra que isso? Não vale pra nada...”. Eu falei, “como que não vale?”, ele tinha acho que uns três, quatro aninhos. Ele falou assim pra mim, “vó, aqui ta mandando ligar o fogão, com meus brinquedinhos... Pra começar eu não sou menina, eu não cozinho... E outra, a minha mãe falou que eu não posso cozinhar, chegar perto do fogão, que é perigoso...”. Tava ali, exercício, atividade pra criança. Eu falei, “nossa menino, vamos ver se saramos teu preconceito com as meninas... Você vai aprender a cozinhar sim...”. Bom, mas aqui a gente não sabe, do ratinho se está à direita ou esquerda o que? Pra quem? Isso está no livro, na atividade de Matemática?

Yasmin: Isso... E tem várias outras nesse estilo. Folhas assim com a imagem, um título chave e sem nenhuma orientação.

Andreia: É e isso nos chamou atenção... Está ocupando um baita de um espaço nos livros didáticos e umas coisas sem...

Neuza: Coloridos... É como os jogos, que às vezes as professoras colocam a criança pra jogar, no final da aula só pra matar o tempo. Nossa como eu insistia que tem que ser um jogo que vai desenvolver algum conhecimento, que tem um conceito ali matemático pra trabalhar. Não é assim, jogar só por jogar.

Andreia: Mas Neuza, são 17h20, a gente não quer tomar mais teu tempo...

Yasmin: Queria agradecer a tua disponibilidade, agradecer também o caderno, que agora a gente vai estudar ele com mais calma. Também se tu te lembrar de alguma outra coisa que possa nos ajudar, algum livro ou nome, pode nos contatar por email também, que de repente a gente marca uma nova conversa, se for necessário. Agora a gente vai transcrever a entrevista e assim que possível a gente te reenvia pra ti ver se precisa editar, se tu gostarias de retirar alguma coisa ou complementar.

Neuza: Eu acho ali eu vou poder complementar, porque agora eu entrei mais no assunto, quando a gente está falando perde um pouco o foco... Poder contribuir com mais alguma coisa. Mas me desculpem, também, eu não sei se consegui contribuir porque estou bastante afastada de sala de aula e pesquisando outros temas.

Andreia: Foi muito importante, contribuiu até pra, justamente ver o que você pensa sobre isso!

Anexo IV – Entrevista com Mônica Bertoni dos Santos:

Entrevista narrativa concedida a Yasmin Barbosa Cavalheiro pela professora Mônica Bertoni dos Santos, realizada dia 11 de dezembro de 2020, às 16h, via Mconf.

Mônica: Um dos materiais que eu te enviei é o planejamento do curso. Então dentro desse planejamento, a topologia é um dos temas tratados. E dentro desse tema topologia, tem toda a metodologia usada e aqui tem uma série de fichas, usadas no curso e jogos. Tem jogos bem importantes aqui, são jogos de topologia, que eu já te mandei algumas coisas... O jogo das sacolas, o jogo do trenzinho, que eu acho que tu tem também. Depois tem as didáticas, alguma coisa de teoria... Eu te mandei algumas coisas, mas se eu procurar mais, eu vou achar mais, então o que eu queria ver é qual é o rumo que está tomando tua pesquisa, se tu vai analisar os jogos, se tu vai analisar fichas didáticas...

Pausa para Mônica atender ao telefone.

Mônica: Se tu quiseres, eu posso tirar fotos, mas eu acho assim muito desmaiadinho... Onde que tu moras Yasmin?

Yasmin: Eu moro perto de Porto Alegre, em Alvorada.

Mônica: Ah tu mora em Alvorada?

Yasmin: Mas é pertinho. A senhora mora em Porto Alegre?

Mônica: Eu moro no centro. Eu moro aqui na frente da Faculdade de Economia aqui da UFRGS. Então, qualquer coisa se tu quiseres, com todo prazer, o que eu tiver eu posso te emprestar.

Yasmin: Para semana que vem a senhora conseguiria achar esse material, ou ficaria muito em cima?

Mônica: Não, eu posso. Muita coisa está aqui dentro, mas eu posso esse fim de semana dar uma outra pesquisada. Eu tenho portaria, posso deixar o material na portaria e daí... Tu só quer sobre topologia né?

Yasmin: Isso. A gente pode marcar de eu passar aí na semana que vem pra buscar. Pra mim é tranquilo, só não quero lhe apressar.

Mônica: Não, não! É que eu vou viajar dia 18 e a ideia minha era voltar dia 10 de janeiro. Mas, uma filha minha que vinha dos EUA não vem mais, porque ficou com medo né? Foi desaconselhada pelos médicos. Então eu vou ficar na praia dezembro, janeiro e fevereiro.

Yasmin: É o melhor né!

Mônica: Eu tenho uma casa boa, no meio do arvoredo. Eu to há nove meses sem colocar o pé no elevador, já to “por aqui assim”. Desculpe a franqueza, mas... E como eu acho que não vai ter problema eu estar aqui ou estar lá, eu só trabalho via plataformas, então é isso aí. Mas por isso eu me apressei, tu me disseste *“ah quem sabe a gente trabalha outro dia”*, eu digo *“não”!*

Se tu quiseres, eu posso separar o material e tu pega, pesquisa o que tu quiseres e daí depois qualquer coisa via online, uma explicação do material, alguma coisa, daí é só marcar, eu tô lá. Eu tenho uma excelente internet lá, não tem problema nenhum.

Yasmin: Tá bem. Então de repente a gente combina depois algum dia da semana que vem e eu passo aí pra buscar.

Mônica: Tá certo, ok.

Yasmin: Eu queria avisar que a senhora que eu estou gravando (áudio e imagem), mas, só depois pra eu transcrever a entrevista, a gravação com as imagens não vai ser publicada, somente a transcrição, não precisa se preocupar, só eu e a Andreia iremos olhar.

Mônica: Ok, eu não me importo. Pode gravar, eu to acostumada. Já dei entrevista pra muitas dissertações e teses de doutorado, não só pra alunos da Andreia, mas alunos da PUC também. Trabalhei muitos anos na PUC.

Yasmin: Primeiro, eu gostaria de lhe agradecer, em meu nome e da professora Andreia por aceitar nosso convite e por se dispor totalmente para nos ajudar. A senhora quer que eu fale um pouquinho antes da minha pesquisa, pra lhe situar?

Mônica: Eu gostaria.

Yasmin: Eu comecei sendo bolsista de Iniciação Científica no projeto que a senhora já conheceu, palestrou no nosso evento, que foi aonde eu me aproximei do acervo do Laboratório do IE General Flores da Cunha. Conversando com a professora Andreia, que como a senhora sabe é bastante próxima da História da Educação Matemática, a gente descobriu uma caixa de topologia, de conceitos topológicos.

Então, a minha pesquisa ela é basicamente procurar entender como que esses conceitos topológicos eram trabalhados na Matemática Moderna. Por isso que nos queríamos materiais daquela época, exercícios, atividades que mostrem o que as professoras entendiam por conceitos topológicos, porque que elas ensinavam isso, qual a importância no ensino. Hoje em dia, pelo menos na minha formação, na faculdade, eu não vi nada sobre isso. Eu nunca nem tinha ouvido falar sobre conceitos topológicos, noções topológicas até encontrar esse material no Instituto.

Mônica: Teu curso é de Matemática?

Yasmin: Isso, é Licenciatura em Matemática.

Mônica: Mas nem nas disciplinas, vamos dizer, superiores do curso, mais específicas, tu fizeste alguma disciplina de Topologia?

Yasmin: Não, nada. Ouvi falar de uma Topologia, mais rigorosa, daquela Matemática mais pura, mas nunca chegamos a abordar em nenhuma disciplina isso.

Mônica: Sim...

Yasmin: Então, a gente quer saber tudo que puder sobre Matemática Moderna e topologia.

Mônica: Tá, mas assim, só pra te dizer Yasmin... Eu entrei em contato com a topologia porque eu fui muito atuante no Movimento da Matemática Moderna no Rio Grande do Sul. Primeiro, como eu falei aquele dia, porque eu casei muito moça. Esses dias fez mais de 60 anos, então tu imagina, eu tenho 82 anos, eu com 21 já tinha filho. Então a minha carreira mesmo, dentro da sala de aula, ela começou um pouco mais tarde. Mas nesse período que eu criava os meus filhos, antes de todos irem para o colégio, eu tenho quatro mulheres, eu fiz muitos (*falha no áudio*). Era um tipo de trabalho, que eu trabalhava muito em casa, porque eu tinha muitos alunos particulares, mas muito...

Problemas na conexão.

Mônica: Então assim Yasmin, eu entrei em contato com a Matemática Moderna quando eu fiz o curso, depois eu posso olhar a data, no Instituto de Educação, que era a minha escola de origem, onde estava a professora Janice, a professora Esther Grossi, a professora Léa Fagundes... Que era Atualização dos Conceitos Matemáticos a partir do Movimento da Matemática Moderna. E entre esses conceitos e sistemas, veio a topologia.

Daí quando eu fui pro GEEMPA, que eu trabalhei e fui inclusive presidente por dois mandatos, digamos assim, eu me aprofundei bastante. E eu vou te ser muito sincera, eu não consigo entender como é que as Faculdades de Educação, principalmente as que trabalham com Anos Iniciais, inclusive com Educação Infantil, não compreendem a importância da topologia, dos conceitos de topologia na construção do pensamento matemático.

Porque, por exemplo, como diz o Dienes aqui nesse livro, a topologia ela é uma geometria que não tem métrica. Então, ela é anterior a geometria que tem métrica, que é uma geometria de transformações no plano. Então, toda a linguagem que a criança usa, em cima, embaixo, ao lado, as formas que ela percebe, toda essa construção do espaço, que é extremamente importante na construção do pensamento geométrico, pensamento algébrico, pensamento lógico-matemático, das representações, a topologia é fundamental.

Aqui, por exemplo, diz assim ó, *o que é a Geometria?* Exploração do espaço. *As primeiras noções da Geometria não tem medida.* Então, as primeiras noções da geometria, são da topologia. E o que que é a topologia? É o estudo das propriedades do espaço não afetadas por deformações que rompem, que furam, então é manter as vizinhanças dos pontos do plano no espaço. É trabalhar com fronteiras, com regiões. Então pensa, todos aqueles diagramas, das representações, de gráficos, tu não usa métrica, tu usa são os conceitos de topologia. Então como é que um sujeito entende, por exemplo, um diagrama de Venn, que trabalha com inclusão.

Por exemplo, o diagrama de Venn de três regiões, as pessoas usam sem nem entender as vezes o que estão trabalhando. Um diagrama com inclusões, tu faz círculos, que não necessariamente são concêntricos, e as pessoas não entendem que aquilo ali é um diagrama de inclusão, a linha mais exterior, tudo o que está dentro, está dentro dessa exterior... Mas isso é uma construção que é feita como uma construção da lógica, o pensamento lógico-matemático das estruturas mentais.

É uma coisa que começa a trabalhar quando a criança engatinha. Isso tem que estar no intencional, na intencionalidade do professor, pra que ele proporcione jogos, não é uma fase predicativa, é uma fase operacional. O professor propõe jogos topológicos, representações topológicas porque ele sabe que isso é importante na construção do pensamento matemático de uma criança, de um individuo. Então por isso que eu não entendo... Sai logo pra Geometria, mas esquece que tem uma geometria anterior.

Depois essa geometria vai trabalhar com a simetria, com as reflexões, com as homotetias, que as simetrias são as translações, as reflexões e as translações, elas trabalham depois congruência. Enquanto que as homotetias trabalham as semelhanças. Isso tudo é anterior, como que eu vou trabalhar

relações métricas, trigonométricas, no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico, se eu não tenho o embasamento desse tipo de pensamento, que trabalha com essa geometria que não tem métrica.

Yasmin: A senhora enxerga então a topologia como a base do ensino da Matemática?

Mônica: Eu diria que... Se eu entendo a construção do pensamento matemático como uma espiral, a primeira ponta da espiral é trabalhar com a topologia. Depois, baseado nisso, eu vou entrando nas métricas, eu vou entrando nas... E daí eu vou pra outra... Outra complexidade, é uma questão de complexidade do pensamento.

Não quero dizer que uma pessoa que nunca trabalhou com topologia não possa retomar esse conceito, não é isso. Eu mesma, na minha caminhada, quando eu comecei a ver o que era topologia, eu reconstruí a minha caminhada de aprendizagem.

Mas claro que esse conceito, quem trabalha com a alfabetização matemática, tem claro que esse conceito de fronteira, de região, do espaço tridimensional, se a pessoa tem isso no seu rol de conhecimento, digamos assim, ela tem condições de dar essa... Esse embasamento, através dos jogos que ela proporciona para os alunos.

Aí tu tem às vezes até um pouco de... A minha visão da Matemática Moderna é uma visão um pouco diferente de muitas pessoas Yasmin. Eu acho que a Matemática Moderna, os conteúdos introduzidos pela Matemática Moderna, vieram pra ficar.

Tu vê o estudo das Funções. Quando eu aprendi, eu sei que eu sou do século passado, mas eu aprendi sem trabalhar com funções. Quando eu fiz minha faculdade de Matemática, que foi a segunda faculdade que eu fiz, eu tive que entender tudo isso de função, porque eu não tinha. Mas as funções são trabalhadas até hoje, porque elas são um conceito estruturante de todo o pensamento algébrico. Então, o que eu quero dizer é isso. Eu não entendo muito bem porque quem trabalha, por exemplo, com Pedagogia, nas faculdades de Pedagogia, que é onde a Matemática tem que ser muito bem trabalhada, que são conceitos pra toda a vida, não entendem isso.

Yasmin: As vezes nem ouviram falar também né, sobre topologia, nem conhecem...

Mônica: É! Até outra coisa que eu vejo que não trabalham é a geometria das transformações e isso é importantíssimo. Não só para os conceitos matemáticos, mas pra vida da gente. Por exemplo, o artista, pega Esher, pega Golding e tantos outros, eles usam esses conceitos de simetria, de translações, de reflexões, porque isso é a harmonia da forma. São movimentos nas formas geométricas e eles entendem disso e criam maravilhas. Não como matemáticos, mas como um artista, que vê o mundo de uma forma diferente.

Então, mais ou menos é isso. Eu li o teu protocolo, eu fui falando de acordo com o protocolo que tu me mandaste. Hoje quando eu fui me preparar pra conversar contigo eu olhei esses meus materiais que estavam mais a mão, por exemplo, esse livro eu sei que tu tem, tu me falastes agora. Ali já tem um capítulo que dá pra entender bem o porquê da Geometria, não é iniciar, mas trabalhar com topologia pra construção do pensamento matemático, das representações, tu não ensina Matemática pra um indivíduo sem as representações.

A etapa das representações é uma etapa muito importante na construção do pensamento, do raciocínio lógico, do pensamento matemático. Inclusive agora, não sei se tu conhece, um autor (*falhas no áudio*), que trabalha com a criança que investigue, cria, ele trabalha com isso, tem um ciclo de aprendizagem matemática muito interessante, e uma das coisas é a representação.

Então, como que tu vai fazer essas representações sem trabalhar com regiões, com fronteiras, com regiões que não se entrelaçam, que se inclui, que não se... Isso é muito importante! Tu não vai ensinar desse jeito, não vai colocar no quadro “conceito de região”, não. Através dos jogos, das brincadeiras, a criança vai... Ela cria suas próprias teorias do que é uma região, do que é uma fronteira.

Se eu tenho um quadrado numa superfície de um balão e eu puxo esse quadrado, eu posso transformar ele numa elipse, por exemplo. Eu posso pensar que um retângulo pode se transformar numa elipse, num quadrado

também. Mas por que o que está dentro, está dentro e o que está fora, está fora o que está em cima da linha está em cima da linha. Isso é topologia.

E vê assim que eu não posso furar esse quadrado, porque se eu furo tem os pontos que estavam dentro e que agora não estão mais. Mas tu não precisa dizer isso, mas ela (a criança) precisa criar uma teoria pessoal sobre isso, o que depois vai se transformando em conceitos que ajudam a viver, a descobrir, a criar, a inovar. Hoje em dia, numa educação do século 21, não é definições que entendem, é como esses conceitos matemáticos ou das ciências te ajudam a viver num século acelerado.

Eu estava aqui localizando no meu celular o protocolo que tu mandaste... Deixa eu ver se eu acho...

Yasmin: Sim... A gente localizou que os conceitos topológicos, essas noções topológicas, estão associados principalmente a Matemática Moderna. Nós queríamos saber se essas noções surgiram na Matemática Moderna ou elas já vinham de antes e ganharam destaque no movimento... Se a senhora tem alguma ideia do por quê?

Mônica: Eu diria pra ti o seguinte, esses conceitos da topologia eles foram se desenvolvendo ao longo da evolução histórica da Matemática. E isso vai muito do conceito que a gente tem de Matemática né. É uma ciência (*falhas no áudio*), das necessidades do homem, uma ciência eterna da evolução. Há 140 anos falava-se em Fractal, hoje Fractal é uma teoria que está dentro da Matemática.

Então, eu acredito em... Eu não fui nos acervos históricos da topologia, certo, tu pode pensar nisso, mas antes da Matemática Moderna esses conceitos da topologia já estavam... Já tinham definidos e trabalhados pelos matemáticos.

Mas, o meu entender do que a Matemática Moderna trouxe, e às vezes é criticada por isso, ela trouxe as estruturas matemáticas pra dentro do ensino. Quem trouxe essas coisas foi a Matemática Moderna, os matemáticos eles não criaram a topologia, mas compreendem que a topologia é importante pra construção do pensamento matemático. Toda uma ideia de que aprender

matemática não é aprender definições, memorizar definições e aplicar em exercícios semelhantes.

Aprender matemática é construir um pensamento matemático baseado em habilidades e competências, no conhecimento, usando uma terminologia baseada na BNCC, que tu mobiliza para resolver problemas. Então quando tu mobilizas, tu aprendeste. Nem tão categórico assim, mas por aí.

Então a Matemática, vamos dizer, da lógica-simbólica, se tu queres fazer uma construção do pensamento algébrico, do pensamento lógico-matemático, tu tem que trabalhar com jogos de conjunção, de disjunção, que é o próprio tema que a Matemática Moderna trouxe pra dentro da escola da educação básica. Agora, porque falam que o Movimento da Matemática Moderna foi fracassado? Porque trouxeram esses conceitos pros professores sem trabalhar efetivamente com os professores o porquê esses conceitos são importantes. Então os professores na época, “qual a coisa mais fácil de trabalhar?” Conjuntos! Então a Matemática Moderna virou uma conjuntivite. Brincando aqui, porque eu jamais diria isso numa palestra.

Yasmin: Já ouvi falar nesse termo...

Mônica: O que que acontece, essa conjuntivite... Conjunto é uma parte... Que foi criada por Cantor, como uma linguagem comum a todos as matemáticas. Porque quando tu diz assim “a Matemática é uma área?” Ela é uma área. Eu poderia separar álgebra, geometria, aritmética, a probabilidade e estatística, são os campos que a gente fala, como se fossem quatro componentes curriculares. Mas a linguagem de conjuntos pertence aos quatro. Mas foi a mais fácil dos professores entenderem. Então era só isso que trabalhavam.

Mas se tu olhares, nisso aqui, que deve ter lá no Laboratório de Matemática, tudo isso... Isso aqui eu ganhei de uma... Tem coisas minhas, mas tem coisas de uma professora muito minha amiga que faleceu, que a família dela me deu esse material. Daí eu colecionei há anos. Olha como está essa pasta aqui, que é uma vergonha até, mas eu nem quero me desfazer dela, que eu olho na prateleira e eu identifico onde é que está o meu material. Eu acho importante. Por exemplo, tem coisas que vocês tem lá no laboratório que são

jogos, que tem muito pouca gente que domina porque que aqueles jogos existem.

No ano passado teve um aluno da Andreia, se não me falha a memória Luciano, que eu mostrei pra ele tudo, como é que ele trabalharia o Quadrimath. Eu gostaria de escrever tudo que eu tenho na cabeça, a Esther também tem. Não tem muito mais gente que está lúcida, eu graças a Deus tenho 82 anos, mas estou muito lúcida ainda.

E botar num papel tudo isso, porque, esses nossos cursos, que nós fizemos com o Dienes, por exemplo, é uma visão que não pode ser mais moderna do que é. São 40 anos isso, mas ele estava tão adiante no seu tempo, e não foi possível pros professores absorverem tudo aquilo que, não é absorverem, mas conhecerem tudo aquilo e entender a importância pra construção matemática do sujeito, entende?

Yasmin: Aproveitando que a senhora está falando do Dienes, que relação que a senhora vê do Dienes com os conceitos topológicos? Ele estudava sobre isso, a senhora sabe o que ele pensava sobre esses conceitos?

Mônica: Exatamente! Por exemplo, esse livro aqui ó, não sei se tu tem lá no laboratório?

Yasmin: Eu já olhei ele, é o Geometria pelas Transformações né?

Mônica: Isso aqui o Dienes trouxe e olha aqui, ó, pêra aí, cada página desse livro e uma ficha didática. E aqui ele trabalha com a topologia e trabalha com toda a Geometria das Transformações. Então, o Dienes tinha claro, absolutamente claro, que, por exemplo, trabalhar esses conceitos de transformação no plano, é muito importante pra construção do pensamento matemático, pra aprender Matemática. Infelizmente, eu tenho aqui o 2 e o 3, eu não to achando o 1.

Esse é de uma outra coleção. Nessa coleção aqui, que tu já vistes o azul, nessa coleção dele aqui, o 1 trabalha com lógica e jogos lógicos. O 2 trabalha com conjuntos, números e potencias e o 3 trabalha não com geometria, mas com exploração do espaço. No entendimento que a geometria

métrica ela é posterior a uma geometria que não tem métrica, que é a topologia e as transformações no plano. Não sei se eu to sendo clara, se eu to falando muita coisa...

Yasmin: Não, está falando bem sobre o que a gente queria entender mesmo! E o Dienes, a gente tem alguns registros que ele se inspirava nas ideias do Piaget. A senhora faz alguma relação do Piaget, Dienes, conceitos topológicos?

Mônica: Querida, assim oh, não é que ele faça alguma relação. Em Genebra tinha o laboratório dos... lá de Genebra. O Piaget criou uma teoria, mas ele não foi pra sala de aula. Então, se tu pensar num cientista que se chama Rolando Garcia, ele pegou esses conceitos do Piaget e trabalhou nas ciências. A Emilia Ferreiro trabalhou os conceitos de Piaget na métrica escrita. O Dienes trabalhou na Matemática. Mas, claro que eles trabalharam com construtivismo e como cientista, cada um na sua área eles foram (*falhas no áudio*).

Então o Dienes ele criou teorias... Por exemplo, ele criou a teoria de aprendizagem que é as Seis Etapas de conhecimento matemático. Num determinado momento ele diz que ele se equivocou um pouco. Mas faz parte da ciência também. Mas agora, os jogos de lógica, os jogos de topologia, os jogos de conjuntos, os jogos de estruturas métricas, todos eles são básicos pra construção do pensamento matemático, então essa é a relação que eu vejo. Mas não é só o Dienes... Eles também trabalharam sobre isso.

O Vavá que é outro autor húngaro, pesquisador húngaro, trabalhou com a probabilidade e estatística, porque que é importante trabalhar com probabilidade e estatística, como que tu trabalhas esses conceitos. Então são todos esses autores que trouxeram a Matemática Moderna. Uma teoria construtivista veio junto com isso aí.

Eu vou dizer assim oh, eu já andei muito, mas eu tenho muito mais isso como vivência, por isso que eu falo assim, bem tranquilamente, porque eu vivi todo esse processo e eu sou uma pessoa que continuei trabalhando a Matemática com crianças, com adolescentes. Criando currículos de Matemática e eu nunca deixei de trabalhar com essas coisas.

Por exemplo, os blocos lógicos. Eu uso os blocos lógicos tanto na Educação Infantil como na Universidade. Durante anos eu tive uma disciplina que se chamava “Introdução ao Pensamento Lógico-Matemático” no primeiro ano da faculdade de Matemática. Sempre trabalhei através de jogos. A coisa que Dienes trabalha nesse livro aqui, no 1, é o dos caminhos lógicos, que é impressionante como os caminhos lógicos são importantes pro conhecimento lógico-matemático e ninguém sabe trabalhar, porque é difícil. Tem que estudar muito e tem que fazer...

São as sortes da vida, eu me considero uma pessoa de muita sorte. Eu tive sorte de trabalhar com ele 5 anos e aprender muito. Mas não parei por aí! A partir de tudo que eu aprendi com ele hoje em dia eu tenho outros teóricos que fundamentam a minha prática pedagógica. Por exemplo, um deles é o Devlim, que eu acho que ele fez um avanço nessa compreensão de como a gente ensina matemática desde a pré escola.

Yasmin: Sobre o Piaget, a senhora conhece aquele livro dele “*A Representação do Espaço na Criança*”? Que ele escreveu com a Inhelder?

Mônica: Exatamente, com a Inhelder. Conheço sim, trabalhei bastante com ele. Esse é um material que eu não sei nem onde está, porque eu emprestei pra alguém e não tive retorno. Eu não tenho mais esse livro. Eu tenho quase todos os livros dele, mas, por exemplo, o 1 dessa coleção eu não sei onde está.

Yasmin: E a senhora tem algum comentário sobre a Topologia que ele fala nesse livro? Alguma relação, com Dienes? Eu entendi que basicamente o que eles defendem é o que a senhora acredita né, como eles enxergavam a topologia?

Mônica: Exatamente, agora eu gostaria de dar uma relida no livro até, mas eu não tenho mais.

Yasmin: Ele é um livro bem difícil de conseguir, eu sei por que eu já tentei procurar na internet, mas eu não localizei.

Mônica: Eu nem sei, eu tinha. Eu posso até ver se a Esther tem. Eu acho que ela tem, porque lá no GEEMPA tem. Pena que eu não posso ir até o GEEMPA agora, porque como eu estou trancada aqui, eu não posso. Mas eu acredito que se eu vou lá eu acho.

Yasmin: Eu vou tentar contato com a Esther, na semana que vem ela me disse pra tentar ligar pra ela pra gente agendar também.

Mônica: Eu e a Esther temos uma ideia um pouco diferente da Matemática Moderna, mas eu acho importante tu ouvires as duas ideias.

Yasmin: Claro, a gente quer ouvir o máximo de pessoas que conseguirmos, que tiverem lembranças, que vivenciaram esse momento e todo mundo tem a sua visão né, não é única.

Mônica: Eu entendo que tem coisas como as Seis Etapas, que o Dienes concorda que ele estava equivocado, principalmente na quinta ou sexta etapa. Mas, os jogos e os temas que ele aborda, não são os únicos. Como eu te digo, eu já trabalhei com Devlim, eu já trabalhei com vários outros pesquisadores, que eu concordo, mas, por exemplo, a Kamii.

A Kamii tem uma linha que também é construtivista, mas ela trabalha com outras questões da construção. Também eu uso a Kamii e muito. E daí cada professor vai fazer a sua forma de trabalho. Eu ainda estava vendo outro dia, eu acho que o que faz a beleza da gente ser professor é isso. É tu acreditar em determinadas coisas e usar no teu trabalho. Eu sempre usei no meu trabalho e eu acredito que quem foi meu aluno aprendeu muita Matemática.

Yasmin: A senhora chegou a ser professora do Curso Normal?

Mônica: Nunca fui. Eu me formei no Magistério, mas eu fui muitos anos professora de Ensino Médio e 28 anos de Metodologia do Ensino de

Matemática e Lógica, Prática de Ensino e Estágio, na PUC. Ai eu criei uma escola e ajudei um grupo a criar as Escolas do Sesi, não sei se tu conhece?

Yasmin: Conheço sim.

Mônica: Aquele projeto eu trabalhei nele, todo ele. E toda a parte de Matemática que está naquele projeto foi criada por mim.

Yasmin: E lá no Instituto de Educação, então a senhora não chegou a ser professora?

Mônica: Não, nunca fui professora lá. Lá foi a origem da minha formação, mas não do meu trabalho.

Yasmin: Entendi. Agora, fugindo um pouquinho, mas não tanto, sobre o Grupo Bourbaki, a topologia do Grupo Bourbaki, a senhora tem alguma familiaridade?

Mônica: Não. Mas assim, eu trabalho com outro autor, que eu tenho um livro aqui até, que é o Gaba, não sei se tu conheces?

Yasmin: Ainda não ouvi falar.

Mônica: O Bourbaki, a Esther que conta bastante. É quase que uma sociedade que pra dar lugar as suas ideias, usou esse pseudônimo, digamos assim.

Mas a origem da Matemática Moderna, ela vem com os Bourbakis. Então, esse grupo de trabalho. Eu nunca peguei assim um material dos Bourbaki mesmo, mas eu acredito que eles trabalhassem com a Topologia. Mas eu tenho esse livro do Gaba... Eu levanto assim porque está aqui em algum lugar das minhas prateleiras. Eu vou dar uma investigada, mas eu acho que ali tem alguma coisa boa sobre topologia. Foi bom tu falar pra mim. Se eu achar, eu não juro que eu ache, mas se eu achar eu deixo também pra ti.

Yasmin: Tudo que a senhora achar com certeza eu vou olhar e aproveitar. Tem mais alguma coisa que a senhora gostaria de falar sobre topologia, Matemática Moderna, sua formação?

Mônica: Eu acho que eu te falei tudo que tinha pensado aqui. Acho que inclusive eu já venci aquele protocolo que tu me mandaste, o protocolo eu achei interessante. Espera aí que eu estou procurando aqui no meu celular...

Yasmin: Eu acho que a senhora acabou abordando um pouco de tudo sim. Agora eu vou olhar com a professora Andreia, olhar os seus materiais e daí ver se surge alguma dúvida e de repente a gente conversa depois de novo.

Mônica: Assim Yasmin, até se tu quiseres um texto, se quiseres que eu leia e te dê um palpite. Eu sei que a tua orientadora é a Andreia, mas nós nos respeitamos muito, se tu quiseres algum palpite, alguma coisa. Eu tenho ajudado, eu tenho feito com muitas pessoas isso.

Yasmin: Claro!

Mônica: Deixa eu ver aqui o protocolo, acho que a minha trajetória profissional deu, a minha relação com a Matemática Moderna, o que eu entendo por conceitos topológicos... Que conexões eu vejo da topologia com a Matemática Moderna.

Pausa para Mônica atender ao telefone.

Mônica: O que é o papel desses conceitos na Matemática eu acho que já falei também... Porque eu considero importante que os alunos da Educação Básica desenvolvam atividades eu também já falei, e essas atividades que tu tem aqui, tem nesse livro, tem... E eu te mandei uma porção de outras, jogos e tal... Tem um pouco mais, eu posso separar pra ti, e daí tu usa, tu digitaliza, tu pode fazer o que tu quiser. A única coisa que eu quero é que tu me devolva os originais.

Yasmin: Claro!

Mônica: Eu não vou te dar a pasta, porque na pasta tem coisas de lógica, tem coisas de... Mas eu vou te dar os materiais e eu boto aqui da onde eu tirei. Eu vou ver se eu acho mais coisas pra ti.

Yasmin: E a senhora acha que consegue esses materiais pra qual dia da semana que vem, antes da senhora viajar?

Mônica: Eu vou viajar sexta, mas acho que até quinta tem o material pra ti. Daí eu te mando um whats, avisando quando estiver a tua disposição na portaria.

Yasmin: Ta bom, ai me passa o endereço certinho.

Mônica: Meus porteiros são maravilhosos! Meu edifício é grande, mas como tem até o nodo andar três apartamentos e a partir do décimo só tem dois, então não é muita gente. Eles entregam, não tem restrições nesse sentido.

Yasmin: Depois a gente combina se eu lhe devolvo quando voltar da praia ou se eu deixo com alguém.

Mônica: Não, não, quando eu voltar da praia... Não importa o tempo que tu fiques, mas importa assim, quando tu terminar de usar, tu me devolver. Só isso. Não é só porque é precioso pra mim, ou porque são as minhas recordações de vida, mas porque tem ajudado muita gente. Por exemplo, nessa pasta faltam alguns materiais que se perdeu porque eu emprestei. Então eu quero preservar, até nem é tanto pra mim, mas porque é uma forma de...

Yasmin: Claro, é importante pra História da Matemática, pra História da Educação Matemática.

Mônica: Exato!

Yasmin: Pode ficar tranqüila, com certeza eu lhe devolvo.

Mônica: Não quis ser indelicada contigo viu.

Yasmin: Não, a senhora está certa, tem que cuidar mesmo. Se a senhora tiver também algum livro que localizar, algum material, alguma atividades pra emprestar, eu agradeço também. Tudo o que a senhora tiver pode mandar!

Mônica: Tá certo.

Yasmin: Então, novamente gostaria de lhe agradecer pelo seu tempo, sua disponibilidade, em meu nome e da professora Andreia, que infelizmente a reunião dela se estendeu demais e não conseguiu participar, mas teremos outras oportunidades ainda, com certeza.

Mônica: Espero que tu tenhas muito sucesso no teu trabalho!

Yasmin: Muito obrigada.

Anexo V – Entrevista com Esther Pillar Grossi

Entrevista narrativa concedida a Andreia Dalcin e Yasmin Barbosa Cavalheiro pela professora Esther Pillar Grossi, no dia 13 de janeiro de 2021, às 16h pela plataforma Mconf.

Esther: Em primeiro lugar vamos esclarecer, Matemática não é a ciência da realidade. Matemática é ciência construída pelo pensamento humano, com lógica. A única condição é de que não haja incoerência interna na construção. Tanto que um conjunto, não existe matematicamente pronto. É alguém que tem que pensar, o conjunto é criado por alguém. Então, eu acho que são ideias fundamentais da Matemática.

Quer dizer, a Matemática é como a filosofia, a construção do pensamento humano, não é uma ciência da realidade. Mas o que é muito interessante, é que o nosso pensamento ele é tão bom que os matemáticos, por exemplo, inventam uma coisa, inventam com lógica, e de repente, a realidade coincide com o pensamento. Uma delas foram as teorias espaciais.

Então, o espaço, a Geometria não é um estudo do espaço real. A Geometria é um tratado, digamos, intelectual, sobre o espaço. Então, onde a gente considera que o espaço é constituído de pontos e que o ponto não tem dimensão. Então, isso ai parece uma loucura, porque no concreto qualquer pontinho tem dimensão. Se for um pontinho de lápis, um pontinho de tinta, sempre terá dimensão, e, no entanto, é graças a essa concepção da densidade dos números reais que a gente conquistou isso, em primeiro lugar a internet né e tantas outras áreas da realidade humana.

Então o espaço, a Geometria, é o estudo do espaço construído pela cabeça de alguém. A primeira construção foi lá com Euclides, era de que o espaço ele estava comprometido também com uma visão, com a Terra plana. Então, se construiu uma teoria, com algumas premissas, e depois as conseqüências nunca poderiam contrariar essas premissas. E foi a Geometria métrica, em que uma das coisas fundamentais que duas paralelas não se encontram, só no infinito.

E, depois disso, é que veio a compreensão de que existia uma... Na métrica todas as dimensões se equivalem, se conservam... São consideradas

dimensões, mas depois havia uma Geometria que não considerava a dimensão, mas considerava certos outros aspectos, como os ângulos, como a proporcionalidade, que é a Geometria projetiva, ela surgiu depois.

Depois disso, Rimann e Bourbaki resolveram criar uma Geometria na qual as paralelas se encontrassem e criaram com todo o rigor exigido pela Matemática, ou seja, não pode haver incoerência interna. Casualmente, é essa a Geometria que nos serve, porque, duas retas que saem do Equador se encontram no Polo, porque a Terra não é plana. A Terra... Tem um Geóide, não é uma... uma esfera.

Ai o que aconteceu? Considerando o estudo do espaço, depois da Geometria projetiva, descobriu-se, em geral as coisas mais simples são as mais difíceis da gente entender. A ideia de que existem propriedades espaciais que não tem nada nem que ver com a métrica, nem com a projetiva, que tem que ver com propriedades mais gerais do espaço, que são as questões do aberto, do fechado, as questões das regiões...

A Geometria tem 3 grandes, na verdade 3 pra começar, três dimensões: uma dimensão que é a linear, duas dimensões que são as superfícies e três dimensões que são os volumes. Justamente, nós sabemos que, no concreto nós esbarramos nesse limite do volume, mas inteligentemente nós podemos ter geometria de n -dimensões.

No meu trabalho, da minha Tese, aquelas maquetes que a gente constrói representando os divisores dos números, é fantástico. Ali a gente percebe como ela está associada a uma figura espacial, mas a gente percebe que os espaços não são só tri-dimensionais, eles podem ser quadri-dimensionais, com cinco, seis dimensões, com infinitas. Mas, a topologia veio se concentrar em propriedades bem amplas, que acompanham o ser humano. Por exemplo, um bebê, a primeira experiência dele espacial é sair do útero materno. Pra sair do útero materno tem que haver uma abertura, ou pela cesárea, ou pela vagina.

Então a topologia estuda as propriedades bem amplas, que seriam o aberto, fechado... Quando tem um fechado é porque tem o interior, tem o exterior e tem uma fronteira, porque pra alguma coisa ser fechada é preciso que... Esse fecho, ele delimita um interior e um exterior. Agora, com mais de um fechado a gente tem várias regiões, e entra toda a problemática que

derivou Yasmin, lá do Jorge Cantor, de toda a possibilidade dos diagramas, fazendo intersecções de fechados, de linhas fechadas.

Quando eu fui fazer o meu mestrado lá em Paris, eu fiz um curso de Topologia, que eu gostei, e quando voltei que eu escrevi aquele livro. Ele era na onda da tal da instrução programada, mas ele funciona. As pessoas fazem e gostam. Apesar de que a instrução programada não é nenhuma genialidade, mas o livrinho funciona. E o que a gente sabe é isso.

Eu quando fiz esse livrinho eu fui convidada... Eu trabalhava com professores e com crianças. É interessante que há propriedades topológicas que uma criança chega antes dos adultos, quer dizer, dos adultos que não foram, digamos assim, ensinados ou que não se valorizou esse conhecimento quando...

Por exemplo, se nós temos um Diagrama de Venn, com várias linhas fechadas, várias fronteiras, se tu fores mandar as crianças colocarem símbolos no interior de tal, no exterior de tal... Eu fiz uma verificação entre um grupo grande de adultos, um deles era um grupo de professores da Pedagogia da UFRGS, que eu dava aula naquela ocasião, e as crianças do Jardim de Infância do Instituto de Educação. A mesma tarefa, as crianças do Instituto acertavam mais do que os professores, os adultos. Quer dizer, essas noções bem primitivas, a criança é mais sensível.

Maria Montessori, ela dizia isso, que há coisas que, de acordo com a idade, há mais possibilidade de interessar o sujeito do que outras. Por exemplo, ela disse que arrumar os brinquedos, até os seis anos, eles tem prazer em fazer isso, mas as mães não exigem que eles façam isso, porque eles são pequenos. Quando eles chegam com 6, 7 anos, que eles estão com outros interesses, a mãe começa a pedir que eles guardem, e aí eles não gostam de guardar.

Eu fiz essa, claro que não tem nada de científico nisso, porque foi um caso só. Eu tive três filhos, quer dizer, tive quatro, mas eu perdi um. Os dois primeiros eu não sabia disso e não insisti que eles guardassem os brinquedos, e o Gabriel, que é o último que tem 7 anos de diferença do Beto, eu aproveitei isso. O Gabriel é super organizado, bem diferente dos outros dois.

Essas noções topológicas elas interessam muito uma criança pequena. Por exemplo, um bebê, quando ele chora no berço ele já olha pra porta. Ele

sabe que mãe não vai vir da parede. Que a mãe virá pela porta. Sabe que ela não virá pela janela também, mesmo que na janela tenha um buraco. Então, essas noções do aberto, do fechado, elas são existenciais.

Por exemplo, eu me lembro de crianças argumentando assim, que... Os pais querendo até bater neles porque eles fugiram. Eles fugiram do jardim, que naquele tempo não tinha grade, e que podia saltar por cima da cerca, e a criança dizia podia sair, porque estão brabos comigo? Não estava fechado, tinha a possibilidade de sair.

O fecho de um volume é realmente uma superfície e tem que ter três dimensões pra poder fechar esse volume, esse espaço a três dimensões. Eu sinceramente acho isso muito interessante. E o Dienes trabalhou bastante isso com as crianças, ele fez várias fichas didáticas, jogos.

Andreia: Então Esther, é isso que a gente quer tentar entender, porque me parece que o Dienes ele trabalhava muito disso da Geometria projetiva, Geometria da sombras, a Geometria pelas transformações, tudo isso antes de chegar na Euclidiana, nos parece. E isso meio que a gente perdeu ao longo do tempo, as atividades dos anos 80, 90, mesmo os livros didáticos... Essa topologia, essas outras geometrias, elas não estão aparecendo mais. Elas aparecem muito forte na Matemática Moderna. E aí a nossa questão é procurar entender porque que naquele momento elas aparecem e porque que depois elas vão desaparecendo... E qual é a conexão que o Dienes faz, junto com o Piaget, o Bourbaki, como é que esses três elementos conversam...

Esther: Eu acho que deu-se o seguinte, realmente essas noções são importantes. Mas, o que aconteceu com a Matemática Moderna? A Matemática Moderna, ele usou esses conteúdos, mas de forma convencional, de forma antiga, sem levar em conta essas coisas hoje tão claras, tão profundas, da Teoria dos Campos Conceituais, ou seja, que leva em conta o processo do aluno e não a lógica da ciência Matemática.

Então, quando a gente trabalhou anos com Matemática Moderna, por exemplo, nós em Porto Alegre nós fizemos um trabalho com Matemática Moderna em todas as turmas, as Classes Experimentais do Ensino Fundamental. E nós tivemos excelentes resultados, mas lógico, nós fazíamos

acompanhando os professores e com psicanalista nos ajudando, psicóloga com a gente, com... E acompanhando o processo dos alunos. Mas, aqueles que não tinham esse tipo de cuidado, eles aprenderam menos Matemática do que os anteriores, e com isso, as pessoas, eu digo que... Jogaram a água do banho com a criança dentro.

Por exemplo, o livro do Gerard, *A Criança, a Realidade e a Matemática*, ele retoma essas noções, não todas, da Topologia não me lembro se ele trata. Mas, eu acho que nós temos que voltar a trabalhar. Por exemplo, eu trabalho com as Relações Binárias, para os professores do GEEMPA, porque é uma lástima que, mesmo nos cursos de Matemática, não se tratou mais disso. Olha aqui, indiscutivelmente, equivalências, ordens e funções, são os três instrumentos de bem pensar, é preciso saber essa relação. Só que, a forma como ela foi estudada, principalmente por Papi, ele vai direto pra uma formalização que afasta as pessoas, as pessoas não entendem e se aborrecem, fogem. Então eu to tentando fazer uma nova modernidade.

Eu fiz uma live que se chama "*Pensar e tecer relações*" (...). Eu simplifiquei, eu concretizei muito, mas ainda assim acho que as pessoas não captaram. As pessoas não se dão conta que a gente está continuamente classificando, ordenando e correspondendo.

Então, a matemática, ou ela tem que ver com a vida, ou ela perde o sentido. Por exemplo, a noção de conjunto é uma noção muito importante. Olhar aqui, os meus dois filhos mais velhos um dia eles estavam de carro comigo, tínhamos ido numa loja no centro e o Beto ganhou um chaveiro na loja, só ele, a Miriam não ganhou. Ai quando os dois estavam atrás no carro e a Miriam disse: Beto, me da esse chaveiro. E ele disse: Não, não te dou. Mas ela disse, não, me da, me da que eu vou fazer uma coleção de chaveiros. E o Beto disse que também ia fazer. E ela disse, não, mas eu vou fazer e vou vender pra tia Nenê. Tia Nenê é uma tia minha que gostava muito de valorizar o que as crianças estavam fazendo e dava as vezes um dinheirinho pra eles.

E o Beto disse, eu também vou vender pra ela, então eu não vou te dar. E os dois ficavam falando da sua coleção. Então eu perguntei: escuta aqui, que história é essa de coleção de chaveiros? Vocês já tem coleção? E os dois responderam, temos. Eu disse, mas como? Quantos chaveiros tem a tua coleção? O Beto disse: minha coleção já tem 1 chaveiro e a Miriam deu uma

risada e disse assim: E a minha não tem nenhum chaveiro, mas ela já existe porque eu decidi criar. Isso é conjunto, do ponto de vista matemática e que umas crianças de 5 e 4 anos já tem essa ideia.

Eu não tenho dúvida de que nós temos que voltar bem a trabalhar a Teoria de Conjuntos, os atributos, os conetivos lógicos, as relações binárias, as operações e as suas propriedades... Nós temos que voltar para aí, não tem, é realmente algo essencial pra que a Matemática faça sentido.

Andreia: Esther, o que tu acha desses conceitos na perspectiva como Dienes trabalhou?

Esther: Eu estou me lembrando justamente de fichas didáticas para as crianças, com relação a aberto, fechado, delimitação do numero de regiões, numero de pontos de intersecção das fronteiras também que é bem topológico. A questão das extremidades, porque as linhas abertas tem extremidades, uma linha tem sempre duas extremidades, uma linha aberta. Então o numero de extremidades de um conjunto de linhas... Tem...

Andreia: E o que essas atividades tem a ver com o que Piaget falava de construção do número?

Esther: O Piaget, eu fui aluna dele, estive lá três vezes estudando com ele. O Piaget não se preocupava com escola, com ensino. Ele é um artista, embora ainda seja um construtivista, mas achava que a vida vai ensinando para os alunos. Ele até criticava a escola, dizia: a escola sempre ta mal, ou ela super exige, ou ela hipoexige, não exige o suficiente dos alunos. Mas na Geometria (...).

Quando ele faz as invariâncias, ele mostra que as invariâncias de comprimento... E anterior a transitividade, ele mostra que a transitividade dos comprimentos é anterior a dos pesos e é anterior a dos volumes. Eu teria que ver...

Andreia: Algumas pessoas dizem que a Topologia entrou na Matemática Moderna com Piaget, mas nos parece que não, que foi pelo Bourbaki, e o

Dienes transita nos dois... A gente quer entender como essa Topologia chega na escola... E aí aparece o teu livro...

Esther: Eu acho que é via Bourbaki... Que o Dienes explorou, porque ele era um didático da Matemática e o Piaget não. O Piaget era muito mais voltado para a Álgebra. A fascinação que ele tinha sobre a Teoria de Grupos. Ele não era... O espaço não ocupava... Porque Piaget acha que a lógica era operatória e... O Dienes que era um bom matemático e ao mesmo tempo era um cientólogo...

Escuta uma coisa, vocês tem o livro Maverick do Dienes? Ele tem um livro autobiográfico, eu tenho esse livro, posso emprestar para vocês. Nesse livro ele faz uma retrospectiva da vida dele... Eu tive três meses lá com ele e como o Claude era assistente dele e depois eu tive essa relação com o Claude, então muitas coisas a gente reviu, reconversou sobre as coisas do Dienes, mas é uma história linda (...).

Andreia: Quando tu escreveu o teu livro, tu já estavam em contato com o Dienes, ou tu escreveu antes?

Esther: Eu sou péssima pra essa localização espacial do passado (...). Eu já tinha estado sim com Dienes... Eu fui pra França em 1968 fazer o mestrado, e quando eu voltei em 1970 que a gente fundou o GEEMPA... E o livro é de 1970/1971...

Claro! Quando eu fui a França pela primeira vez em 1968 já me inundei de Dienes por lá, porque eu fui trabalhar com Madame Picard e ela trabalhava super Dienes. Eu fui trabalhar na escola Bilíngüe, então eu trabalhei muito com Dienes lá. E depois, olhem bem, em 1969 foi o primeiro Congresso Internacional em Lion, e o Dienes foi a esse congresso e eu também. Talvez lá que eu tenha conhecido ele, e depois em 1971 foi que nós o conhecemos pessoal em São Paulo e o convidamos para vir a Porto Alegre. E daí ele veio durante cinco anos aqui a Porto Alegre. E eu conheci alguns Bourbakis, dentre eles o Adrian Ade (...).

Andreia: Fala um pouco mais sobre o teu livro...

Esther: Eu gostei muito da Topologia, fiquei muito encantada. As propostas de atividades do Dienes elas não analisavam a teoria, então o meu livro é um pouco... Ele é simples, mas é teórico. Eu vi todas aquelas atividades, que até tem no final do meu livro, sobre os campos, terrenos... Eram embasadas nas atividades, que não eram só do Dienes, na França haviam duas professoras que trabalhavam com Jardim da Infância. Como me interessava essa área também dos pequenos, porque eu tinha professoras no IE onde eu trabalhava, que eram do Jardim.

Por isso que me interessei por essa Geometria, porque eu sabia que as crianças se interessavam por isso. E quando eu me dei conta de que as crianças tinham um desenvolvimento superior aos adultos nessa área, eu realmente... Eu acho que deve ter uma correlação com esse curso que eu dei na UFRGS... A minha primeira vinculação com a Matemática Moderna veio por intermédio da Vera Regina, que foi diretora do Colégio de Aplicação... A Vera fez um estágio na França e ela me trouxe os Blocos Lógicos e os três livros do Dienes, me trouxe de presente, e a partir dali que eu comecei a interessar por isso. Os livros são... A Teoria de Conjuntos, Espaço e as Relações... São os três que ele aborda (...).

No meu livro é só Topologia, não entra nada nem de Métrica nem de Projetiva, nem a Geometria das Transformações, porque as Transformações é outro jeito da gente compreender o espaço... De teorizar o espaço.

Será que o Rubem (ou Nubem)... Porque eu tenho uma falta... Eu esqueço muito, inclusive as coisas que eu mesma escrevi, eu não identifico... Talvez o Rubem, ou a Mônica... Talvez eles localizem melhor...

Eu fico com pena, tantas pessoas do GEEMPA que já morreram (...) eu acho isso uma lástima, porque essas pessoas sabiam perfeitamente, mas morreram (...). A gente perde a cadeia compreensiva.

Eu acho esse trabalho muito importante, de fazer isso... O espaço é super importante, um autor disse que o espaço configura o pensamento, todos, o Adrian mesmo, que era um Bourbaki disse, Esther, é impossível a gente pensar sem representação e a representação mais fácil de fazer é a espacial, porque a temporal é muito complicada. A espacial é a representação mais fácil que a gente tem. Nós matemáticos por mais que nós digamos depois que nós

abstraímos, nós começamos com... O ponto de acumulação... Não, a gente faz um monte de desenho pra representar aquilo que a gente está descobrindo... O estudo da Geometria ele é fundamental, por isso que a Topologia tem que voltar a ser estudada sim, e tem que voltar a ser aproveitada pelas crianças. Ainda mais as crianças de hoje, que estão uns aviões, estão ótimas. Então, não explorar isso é uma lástima. (...)

Eu queria dizer pra vocês o seguinte, eu fiquei bem impressionada com a capacidade dos professores de construírem atividades didáticas na nossa experiência online, com jogos, aproveitando inclusive esses jogos que já existem na internet e tal. Eu fiquei encantada de vê-las, como foram capazes de passar pra parte, digamos (...) da alfabetização... Mas tá bom gente...

Andreia: Nós te agradecemos Esther e se tu se lembrar de coisas que achas que pode nos ajudar...

Yasmin: Se a senhora tiver também algum material, livros, textos, qualquer coisa que a senhora ache que pode nos ajudar, pode acrescentar também, me avisa que nós combinamos de buscar.

Anexo VI – Entrevista com Dione Lucchesi de Carvalho

Entrevista narrativa concedida a Andreia Dalcin e Yasmin Barbosa Cavalheiro, no dia 25 de janeiro de 2021, às 16h, via Mconf, por Dione Lucchesi de Carvalho, com participação de seu esposo, Paulo.

Andreia: Obrigada por nos atender, essa solicitação minha e da Yasmin, minha orientanda de mestrado, da Matemática aqui da UFRGS. Gostaríamos muito de te agradecer, por estar disposta a conversar um pouquinho com a gente. Fica bem à vontade para falar sobre aquilo que tu acha importante.

Dione: Bom, o Dienes veio pro Brasil só para dar cursos para professores, embora ele fizesse algumas atividades. No cinema, por exemplo, levava as crianças pra lá e fazia com elas, ele propunha as atividades. Nunca vi ele trabalha em livro, nada disso, trabalho com Topologia.

Eu vira e mexe levantava com meus colegas quando estava fazendo Matemática como será que a Topologia, se dava conta, Topologia se era um conceito simples, fora, dentro, na linha... Dava conta de passar um pensamento quantitativo que...

Eu trabalhei muito com as crianças pequenas. Elas adoravam fazer desenhos com as duas mãos no mesmo desenho, fazer um problema atrás da outra. Eu que estava promovendo, os professores tomavam conta, mas eu era a orientadora de Matemática e explicava pra elas e elas nunca tinha ouvido falar, sobre fora, dentro, essas coisas na aula de Matemática. Elas achavam que essas coisas não era Matemática.

E algumas pessoas até hoje eu acho que pensam assim. Porque Dienes era muito estruturalista e aí ele tinha um pensamento caucado em estruturas. Ele achava que objetivo, pelo menos do jeito que ele trabalhava, o objetivo era que as crianças construíssem estruturas.

Agora, que eu me lembre, desses trabalhos com Topologia, eu não me lembro de nenhum que eu tenha ficado muito feliz. Eu lembro, por exemplo, do trabalho quando nós fizemos a construção do anel dos inteiros... Mas foi uma beleza, teve uma discussão do porque a multiplicação era positivo vezes

positivo da positivo e positivo vezes negativo da negativo e não era ao contrário.

Então eu me lembro dessas discussões que eram altamente matemáticas, e eu ouvi depois, encontro meus alunos por aí, a Matemática era dada de um jeito que a gente sabia que tinha que aprender, não era difícil, pois eles tocaram assim até a oitavo série.

Eu acho que depois foram... Alguns colegas meus também falaram “Ah Dione, deixa que a gente ...”. Porque eu tinha falado para os alunos de logaritmo... Então, tem essa... E daí quando eu cheguei na UNICAMP, eu e a Ângela Miorim pensamos em dar um curso de Álgebra, que a gente nunca deu, porque a gente tinha muitas aulas na Educação, então a gente não tinha tempo pra dar os cursos no Instituto de Matemática.

E aí, eu acho que a Topologia é a parte mais interessante que o Dienes fazia de Geometria, fazia coisas de danças com simetria, rotação, que eram muito mais animadas as crianças. E eu me lembro que quando as crianças chegavam no Jardim II, que eram as crianças de 5, 5 anos e meio, elas já não queriam mais pintar dentro e fora, dentro e fora já era muito... O problema não era interessante. E quando elas iam jogar, o dentro e fora da linha, aqueles limites todos que tinham, eram coisas do jogo, não eram da Matemática.

Então eu nunca pude também fechar, porque com meus alunos da quinta a oitava série eu fechei com eles algumas ideias Matemáticas...

Mas eu não sei se eu tenho muito mais a dizer... Agora, os livros de Dienes eram muito interessantes e muito difíceis. Nunca vi nada de Topologia nos livros dele.

(...)

O Piaget falava que a primeira noção que a criança tinha... Agora também não sei onde eu li isso, que as primeiras noções de Geometria que a criança tem eram dentro e fora, o Piaget fala isso.

Então, tinha uma equipe que trabalhava com Dienes, que eu também não sei que fim levou. Porque o Dienes parou de vir pra cá, acho que ele ficou muito velhinho...

(...)

Não sei se nesse material que vocês tem aí tem esses livrinhos... Tem uns livrinhos de pré-escola, que tinha desenho assim, do que a criança deveria

fazer, na escola mesmo, tinha muitos trabalhos de Topologia, mas não explicava o objetivo.

Paulo: Todo o material do Dienes que a gente tinha aqui, em abril quando nos mudamos, eu Mandei pra Esther (Grossi), eu fiz um pacotão, com todo o material e tinha esses livrinhos que a Dione está falando...

(...)

Dione: O Dienes tinha um livrinho dele que era azul, de capa azul e branca. Esse livrinho era a teoria dele muito bem colocada e de uma maneira mais convincente do que tinha alguns textos... Tem dois teóricos que estudavam também, um deles é o Bruner.

Foi interessante, o Bruner e do Dienes compraram uma briga, mais o Bruner do que o Dienes, eles compraram uma briga com a Secretaria de Educação dos Estados Unidos e ele foram proibidos de publicar livros, pra alunos e professores, eles não podiam mais publicar livros. Então tem as restrições que teve nesse tempo, quando será que foi? O material do Bruner acho que é de 1966, 1967... Não sei. Mas ele era uma pessoa muito interessante e o Dienes trabalhou com ele, não sei se foi na Itália...

(...)

O Grupo Bourbaki era um grupo de Matemática. Tinha o Eduardo Sebatiane que foi meu colega, ele era do Grupo Bourbaki. Ele sempre foi da Etnomatemática... Mas ele conhecia esse material do Bruner com o Dienes.

(...)

O conceito de topologia, eu sei que tem cursos de Genética que dão aula de conceitos de topologia, por causa dos óvulos e explicações...

Andreia: Essa coisa da topologia parece tão forte nessa época, a Neuza Bertoni, por exemplo, disse que teve disciplina de Topologia na licenciatura...

Dione: Eu tive curso também. Na época todo mundo tinha curso. Não me lembro quem foi que me deu o curso de Topologia...

Andreia: A Neuza chegou a guardar o caderno...

Dione: Eu joguei tudo fora... Porque eu acho que no livro está melhor...

Andreia: Mas a questão que começou a história toda, que a Yasmin me procurou pra gente estudar, lá no TCC dela ainda, que chama a atenção é a presença desses conceitos nos livros didáticos de hoje, que ainda trazem quando vão trabalhar com as crianças, mas tudo muito solto... Parece que algo foi se perdendo e sobraram algumas atividades soltas nos livros...

Dione: É que como eram atividades de crianças, a gente dava para as crianças para depois aparecer nos livros... Eu acho que foi assim... A gente dava para as crianças e o resto das outras pessoas deixavam por menos...

Paulo: Você sabe que a Dione tem um livro didático de Matemática para crianças? Chama-se o “Jogo da Matemática”.

Dione: Eu tenho só uma coleção... Tem atividades bem interessantes e tem atividades bem chatinhas também...

Andreia: E tem Topologia dentro?

Dione: Não me lembro, mas acho que deve ter um pouquinho...

Paulo: Foi publicado pela Editora Abril, pela FUNDEC, que apoiou. São quatro volumes, mais quatro volumes do professor, chama-se “No Jogo da Matemática”. Depois a Editora Abril vendeu a divisão de livros didáticos, acho que pra Editora Moderna, não tenho certeza... Nunca foi reeditado.

Dione: É provável que tenha na internet.

Paulo: Ele é de 1984...

Dione: É capaz de ter alguma coisa de Topologia, deixa eu ver... É, tem umas coisas sim de Topologia.

Andreia: Ai vem a pergunta, porque tem essas coisas de Topologia aí?

Dione: Aí, você sabe que o programa desses livros foi montado em cima de uma escola que eu trabalhava, então eu montei de acordo com... Tem uma atividade ou outra que as minhas colegas que escreveram o livro junto comigo, acharam essas coisas... Mas em geral foi de acordo com a escola que eu trabalhava.

Paulo: E o programa ela mesmo que fez...

Dione: Eu mesma que fiz... Mas foi em cima das ideias do Dienes. Mas é que o Dienes tinha um buraco, que era uma coisa de contato com a realidade... As crianças estavam constantemente fazendo festa, e era verdade, quando ele dava aula era a mesma coisa.

Andreia: Da pra dizer que ele manteve essa ideia da Escola Nova, da criança ativa?

Dione: Eu acho que manteve. Não sei quem é que me falou que o Dienes, depois acabou ficando na Itália, nem sei pra onde ele foi depois disso, porque ele não queria trabalhar com computador. E chegou uma hora que era uma coisa inevitável. Mas me disseram, isso é fofoca, não foi ele que disse.

Andreia: E tu chegou a ouvir dele, porque ele não queria essa aproximação com o computador?

Dione: Não, isso acho que ele falou em reservado. Aliás, ele não era muito freqüente em congressos, então... Quando ele vinha era pra fazer um encontro... Ele dizia uma coisa que achava tão autoritária, que quem não sabe como fazer, faz como eu mando... (*Sobre os 6 passos de Dienes*).

Dione: Houve uma época que era assim, Ah você pulou o segundo passo... Eu nunca vi ele vindo dar curso para dar isso e o livrinho era muito simplesinho.

Pra ensinar isso, ele precisava pegar os fundamentos, eu acho, mas daí também nunca fui chamada para dar palpite nos livros do Dienes...

Andreia: Esses fundamentos, tu acha que ele construiu isso com a relação com o Bruner e o Piaget?

Dione: Eu não sei... Não sei de nada escrito, só sei que teve uma época que o Bruner teve uns problemas com a Secretária de Educação dos EUA, então ele foi proibido de publicar e daí ele tinha alguns textos, mas era muito pesado... Não tinha esclarecimento do Bruner e depois ele ficou quase um sociólogo... Eu sou muito preguiçosa pra escrever, então tem umas coisas que tenho assim, meio perdidas na cabeça...

Andreia: Antes da Matemática Moderna, tu acha que havia essa preocupação de trazer algumas estruturas matemáticas pra escola?

Dione: Que eu saiba não. Eu nunca vi isso antes da Matemática Moderna. Me parece que começou a ter o curso de Teoria dos Conjuntos na Matemática depois que alguns professores já estavam transformando a sua sala de aula. Tinha pouca gente trabalhando com os pequenos, estavam trabalhando mais com quinta a oitava. E eu trabalhava com os pequenos desde os 3 anos de idade.

Andreia: Tem alguma coisa ainda que tu acha interessante, que tu gostaria de nos falar Dione?

Dione: Olha, vou falar alguma coisa pra vocês poderem aproveitar, uma tese orientada pelo Dário, que é... Ela entrevistou uma série de pessoas, e eu não me lembro se entrevistou gente de pré-escola. A gente dá entrevista e as vezes esquece!

Paulo: Se ela lembrar eu te passo o nome da tese depois.

Yasmin: Depois vamos pedir também por email o nome do livro do Dienes, se vocês lembram, ou de algum outro que possa nos ajudar. Obrigada aos dois por conversarem e dividirem suas histórias com a gente.

Anexo VII – Entrevista com Lucília Bechara Sanchez

Entrevista narrativa concedida a Yasmin Barbosa Cavalheiro pela professora Lucília Bechara Sanchez, dia 04 de fevereiro de 2021 às 16h30, pela plataforma Mconf.

Yasmin: A senhora chegou a dar uma olhadinha no protocolo que lhe enviei?

Lucília: Sim, posso segui-lo.

Yasmin: Eu gostaria de saber tudo o que a senhora lembrar sobre conceitos topológicos, do seu livro, sua intencionalidade ao usar esses conceitos. Nós estamos buscando compreender como esses conceitos eram utilizados na Matemática Moderna, com qual finalidade. Também as possíveis relações com Piaget, Dienes e o Grupo Bourbaki. A senhora pode ficar bem à vontade para seguir aquele protocolo, vou lhe perguntando mais alguma coisinha e nós vamos conversando.

Lucília: Eu vou tentar seguir seu protocolo. Primeiro você perguntou sobre minha trajetória ligada à formação de professores e pediu para comentar sobre a minha relação com o Movimento da Matemática Moderna.

Eu diria que essas duas trajetórias, de formadora de professores e militante da Matemática Moderna caminharam juntas. Na verdade, a formação de professores eu comecei exatamente dentro do Movimento da Matemática Moderna e praticamente todo meu trabalho com formação de professores foi relacionado com a Matemática Moderna.

E como isso aconteceu? Em 1961 eu estava dando aulas no interior do Estado de São Paulo como professora de Matemática, concursada pelo Estado de São Paulo, para alunos principalmente do curso científico e também das últimas séries do então ginásio. Eu comecei a dar aulas em 1959 e durante este ano e em 1960 eu ministrei as aulas na cidade de Tanabi – perto de São José do Rio Preto. Em 1961 consegui transferência para a cidade de Conchas, mais perto de São Paulo.

No primeiro semestre de 1961 vi anunciado um curso de Matemática Moderna que seria ministrado pelo professor americano George Springer. O Curso estava sendo convocado pela Secretária de Educação de São Paulo, coordenado pelo professor Osvaldo Sangiorgi, que foi um grande líder do Movimento da Matemática Moderna em São Paulo. Quando vi o anúncio do curso me interessei em assisti-lo, também porque poderia vir comissionada pela secretária de Educação de São Paulo, que estava convidando.

Este curso foi ministrado pelo professor Jorge Springer e, se bem me lembro, pelos professores: L.H. Jaci Monteiro (Álgebra Moderna). Alésio de Carolli (Teoria de Conjuntos); Benedito Castrucci (Geometria) e pelo Jorge Springer Lógica Matemática. Então o curso era: Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos, Geometria e Álgebra Moderna. O curso demorou um semestre onde nos reuníamos vários professores de Matemática do ensino básico, que na ocasião era o Ginásio e o Científico e Clássico.

Durante um semestre eu fiquei em São Paulo participando do curso e entrando em contato com professores e colegas como a Manhúcia Liberman, que foi depois coautora comigo, a Ana Franchi, que também foi coautora, a Renata Watanabe, que se dedicou mais ao Ensino Médio, Elza Babá e outros. Ficamos então muito amigas e colegas.

Ocorreu que, no mesmo semestre, além deste curso de matemática, que acontecia no período da manhã no Instituto Makenzie, a Secretária de Educação também convidou professores para um curso de seleção para os Ginásios Vocacionais. Era um curso para formação de professores interessados em dar aula nos Ginásios Vocacionais, que começaria em 1962. Isso aconteceu muito junto na minha vida, a Matemática Moderna e os Ginásios Vocacionais e então, quando terminei o curso, fui também classificada para dar aulas no Ginásio Vocacional Osvaldo Aranha, de São Paulo.

Em 1962 comecei então a dar aula de Matemática no Ginásio Vocacional que era uma escola de base construtivista, fundamentada em Piaget e onde aprofundávamos os estudos de psicologia do Piaget e aprendíamos mais do construtivismo. Eu iria dar Matemática Moderna e então as coisas se juntaram, porque a Matemática Moderna era muito propícia ao construtivismo, pois trabalhava mais com conceitos, relações, lógica, estruturas matemáticas e menos com algoritmos, formulas, regras e memorização.

Na década de oitenta a matemática moderna foi muito criticada pelo excesso de formalismo e simbolismo, mas, sabemos que toda inovação tem seus enganos e excessos. Eu tive a sorte, pelo fato de trabalhar no vocacional, de muito contato com professores de outras disciplinas, pois, havia muita integração entre elas.

Os Ginásios Vocacionais trabalhavam a formação integral e de forma integrada. Para você ter uma ideia, quando fui dar aulas de Geometria, caminhei com os alunos pelo bairro do entorno do Vocacional e os alunos a partir do passeio procuravam desenhar um mapa do bairro e depois, comparávamos este mapa feito pela observação, com o mapa do atlas (na época não tinha Google). Eles olhavam então o mapa da cidade pra procurar lugares como a igreja, a prefeitura e tentavam traçar os caminhos, afinal era uma escola ativa, onde os alunos participavam.

Outro exemplo que eu costumo dar, das muitas vantagens de trabalhar no Vocacional, escola de tempo integral, eram as atividades de Artes Industriais, Práticas Comerciais e Economia Doméstica. Por exemplo, eu acompanhava os meus alunos na aula de Artes Industriais pra olhar o desenho que eles faziam e procurava através destes desenhos reconhecer e nomear figuras como: quadrado, triângulo, pentágono, paralelas, concorrentes, curvas abertas e fechadas, superfícies etc..

Eu estou te contando isso pra mostrar que a minha trajetória teve uma série de coincidências entre a matemática moderna, o construtivismo, a escola renovada e a inovação de uma escola integrada.

Você pergunta também da minha relação com a formação de professores. O fato de eu ter feito parte da turma do primeiro Curso de Matemática Moderna em São Paulo e participado da criação do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), onde um dos objetivos era divulgar as ideias da Matemática Moderna fui frequentemente convidada a dar cursos não só em São Paulo, mas também fora de São Paulo, para professores.

E ocorreu que eu e Manhúcia Liberman, professoras de Matemática, também, éramos frequentemente demandadas para dar aulas de matemática moderna para professores primários, embora não fôssemos professoras do primário, mas procurávamos ensinar noções da Matemática Moderna pra esses

professores do Ensino Primário (hoje anos Iniciais do Ensino Fundamental, ou seja, de 7 aos 10 anos).

Os professores de Curso Primário conheciam pouca Matemática, eles eram formados no Curso Normal onde a Matemática não era ministrada e os professores tinham bastante dificuldade para ensinar mesmo as operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão. Então, ministrávamos as aulas focando nos conceitos e nos porquês das regras da Matemática e os professores se entusiasmavam, pois a Matemática Moderna trabalhava os conceitos e significados dos algoritmos, que eles ensinavam mecanicamente, sem entenderem. Assim na soma o vai 1, ou na subtração empresta 1 (ou cai 1), mas por quê? Afinal o que isso significa quando se trabalha no sistema decimal de numeração? A mesma coisa na Geometria que era essencialmente métrica, só com formulas e regras. Começamos também a trabalhar um pouco de Topologia e de geometria pelas transformações, depois eu falo um pouco mais da Topologia.

Eu e a Manhúcia fomos muito chamadas, para ministrar cursos para os professores Primários. Este fato levou à Editora Nacional a nos convidar para escrever livros de matemática moderna para o curso primário. A Editora tinha interesses comerciais de fazer livros de Matemática para o Ensino Primário, era uma grande editora que editava os livros do Professor Sangiorgi que já era autor de livros do 6º ao 9º ano, que na época era o Ginásio. Essa mesma Editora Nacional convidou inicialmente a Manhúcia que me chamou para juntas fazermos um livro de MM para o Curso Primário. Este é outro ponto muito importante, porque até então quem escrevia livros de Matemática para o Curso Primário eram pedagogos, não matemáticos. A Matemática começava no ginásio, com especialista, neste sentido nós fomos às primeiras autoras de livro para o Primário, com formação de Matemática.

Procuramos a ajuda da Ana Franchi, que trabalhava com as Escolas Experimentais na Lapa no primário. Nós três fizemos o primeiro livro de Matemática Moderna para Escola Primária. Considerando que quem ensina aprende e quem aprende ensina, ao fazermos o livro e ao ensinar para professores primários, aprendíamos e quem da aula sabe disso, muita coisa você acaba aprendendo quando você da aula.

Você não tem o domínio do conhecimento da disciplina escolar tão grande como quando você prepara uma aula, quando você enfrenta a pergunta de um aluno. Então, o que acontecia é que a gente nesse contato com os professores, a gente também foi aprendendo muito. Não só aprendendo a Matemática, com a transposição didática, mas também como aqueles conteúdos matemáticos poderiam ser trabalhados com crianças de 7, 8, 9 e 10 anos.

Yves Chevallard, estudioso francês, chama de “transposição didática” a transformação de um conteúdo científico em um conhecimento possível de ser compreendido por alunos da escola primária ou secundária e no caso para os professores primários.

A minha experiência com formação de professores primários começou aí e continuou além, quando em 1971 minha primeira filha nascida em 1969 foi estudar numa escola que me chamou para implantar a matemática desenvolvida por Dienes. (Veja que meu quarto filho nasceu em 1974 e, então em 5 anos eu tive 4 filhos, foi um período denso: filhos, livros, aulas etc.).

Em 1969 eu já tinha uma grande experiência nos Ginásios Vocacionais, onde eu trabalhei não só com alunos de ginásio e também formando professores.

Eu fui a primeira professora dos Vocacionais e continuei, acumulando com a formação de professores, quando abriram outros vocacionais: em Americana, Rio Claro Barretos e Batatais e fui nomeada supervisora de Matemática. Nesta função eu visitava os professores de Matemática de todas as unidades e trocava ideias, fichas de trabalho e construímos a Matemática dos Vocacionais, sem livros didáticos.

É verdade que no Vocacional os professores tinham um contrato de tempo integral e era contratado por 40h e dava 18 ou 20 aulas. O restante do tempo ele se ocupava preparando suas aulas, suas fichas de trabalho, reunindo com colegas, participando de reunião, fazendo integração com outras disciplinas etc.. Então, o trabalho era possível com essa disponibilidade de tempo que aconteceu entre 1962 e 1969, tempo que durou os Vocacionais. Não sei se você conhece a história do Vocacional, mas se não conhece vale a pena assistir o filme “Uma aventura humana” cujo diretor é um ex-aluno - Tony Venturi – onde você pode conhecer o que foi o Vocacional.

O Vocacional que durou até 1969, foi fechado pela Ditadura Militar, que o considerava uma escola que “abria” muito a cabeça dos alunos, portanto uma escola subversiva. É claro que naquela época eu diria que não era uma escola subversiva, tinha alguns profissionais de esquerda, outros não porque o pensamento libertário numa Escola Vocacional tinha lugar. O AI5 foi final de 1968, quando, ainda eu estava no Vocacional, você não imagina o que foi aquilo, assista ao filme que vale a pena.

1968 foi o ano em que eu me casei, e em 1969 tive minha primeira filha. Quando o Vocacional fechou eu fui dar aulas em Escola Pública, porque eu era professora concursada, efetiva, mas, o Movimento da Matemática Moderna continuou, o GEEM também continuou, com a Ditadura Militar.

Em 1971 recebemos no Brasil o Dienes a convite do GEEM, e ele fez uma palestra no Makenzie. Nesta palestra foi interessante, estavam presentes duas coordenadoras da escola que eu tinha acabado de colocar minha filha, mais velha, então com 2 anos e meio. A coordenadora da escola quando me viu com o Dienes, me chamou e disse: “Lucília você tem uma filha que estuda no Vera Cruz não é? Eu queria muito que você fosse formar os professores do Vera Cruz para a metodologia do Dienes”.

Então veja, mais uma vez eu me envolvi com a formação de professores, agora de uma Escola. Trabalhei no Vera Cruz com formação de professores durante muitos anos e implantamos a metodologia do Dienes para o ensino da matemática no primário e no ginásio (já Ensino Fundamental).

Dienes tinha um pensamento aberto e criativo, criticava o formalismo da Matemática Moderna e trabalhava com jogos. Ele tem um livro de Geometria onde trabalha noções de Topologia. Ele foi um dos poucos na Matemática Moderna que propuseram situações de Topologia para o Ensino Fundamental.

Yasmin: A senhora lembra o nome desse livro?

Lucília: Acho que é A Geometria...

Yasmin: A Geometria das Transformações?

Lucília: Ah, exatamente Geometria pelas Transformações!

Yasmin: Esse eu já dei uma olhadinha também.

Lucília: Neste livro tem situações incríveis sobre a Topologia. Se você entrar no GHEMAT, vai encontrar todo o meu acervo, inclusive os meus livros. Quando procurei os primeiros livros do Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar eu não os encontrei em casa porque doei todos para o GHEMAT. Lá deve estar o livro e você o consegue abrir inclusive, eu entrei para olhar um pouquinho e lembrar o que foi trabalhado de topologia no livro Curso Moderno de Matemática. Então, já falei um pouquinho da minha história dentro da Matemática Moderna e formação de professores.

Quando eu trabalhava no Vera Cruz, diretamente com formação de professores, para implementar a metodologia Dienes, eu também estava trabalhando com as coautoras, escrevendo o livro didático. Fazendo as duas coisas ao mesmo tempo, além de criar quatro filhos, não foi fácil. Eu brincava que eu tinha quatro filhos e quatro empregos.

Agora, em relação à topologia, que você pergunta: o que eu entendo por Topologia? E as conexões entre a Topologia e a Matemática Moderna? Vou falar um pouco. Estão muito relacionadas, porque o MMM estava relacionado ao Grupo Bourbaki que reuniu toda a Matemática, do início do século XX, mais ou menos, e além de reunir toda a Matemática eles tentaram unificá-la, criando uma linguagem e uma lógica qual seja: a Teoria dos Conjuntos e a Lógica Matemática buscando o que há de comum no conhecimento da Matemática.

Na verdade a Teoria dos Conjuntos e a Lógica Matemática é como se fossem, as linguagens e através delas o grupo Bourbaki encontrou uma maneira de integrar: a álgebra; a análise, a geometria e a topologia enfim toda a Matemática e nesta junção a Topologia foi incluída, tanto assim que o MMM e você deve ter ouvido, teve o chamado “abaixo Euclides”. Até então, no ensino se trabalhava a Geometria Euclidiana com espaços métricos e conceitos como, comprimento, largura, altura, área, volume assim como as formas geométricas, as fórmulas das áreas, ou seja predominantemente os aspectos quantitativos da geometria.

A Topologia era um ramo recente da matemática, tanto assim que eu não tive Topologia no meu bacharelado além do que a Topologia é um campo

muito complexo e extenso. É uma das áreas que eu diria, mais difíceis da Matemática. A topologia entra na Análise, na Álgebra, na Geometria (alguns chamam de Geometria qualitativa e fazem uma comparação da Topologia, como Geometria qualitativa, versus a Geometria Euclidiana, como Geometria quantitativa) Mais ou menos isso.

Na matemática Moderna falávamos em Geometria Euclidiana, geometrias não euclidianas e Topologia que estava nesse conjunto de geometrias. No Vocacional a gente trabalhou um pouco das geometrias não euclidianas, como Geometria de Rieman, Geometria de Lobatchwski, Geometria dos Fractais...

A Topologia é uma área muito extensa, ela trabalha com conceitos de vizinhança, fronteira, conexidade, interior, exterior, aberto, fechado, longe, perto, contínuo, descontínuo, antes, depois, entre, dentro, fora, em cima, embaixo. São também noções topológicas: adjacência, conectividades, espaços conexos, não conexos e assim a Análise, por exemplo, que trabalha com a continuidade esta subsidiada pela topologia. A palavra Topologia significa lugar ou estudo dos lugares. Alguns chamam a Topologia de Geometria da Borracha, porque as transformações topológicas são aquelas que se mantêm sem rupturas, sem cortes onde você pode transformar um quadrado em uma circunferência e um cubo em uma esfera mantendo a correlação dos lugares.

A bola balão é uma maravilha pra ensinar Topologia e se você desenha um quadrado e incha a bola balão, aquele quadrado se transforma em uma circunferência e então, o que há de comum entre a circunferência e o quadrado? Ambos separam, uma superfície em dois espaços, o interno e o externo com uma fronteira...

Então essas ideias são trabalhadas na Geometria escolar, por exemplo você dá um conjunto de curvas emaranhadas para a criança procurar caminhos possíveis, como no jogo do labirinto, sem romper as fronteiras que é a conhecida questão: como você faz pro cachorrinho pegar o osso? Ou, será que o osso está no interior desta fronteira?

É possível trabalhar topologia na Pré Escola e nos primeiros anos. No “Grueminha”, por exemplo, que você encontra lá no repositório do GHEMAT tem muitas situações de topologia como o jogo do labirinto e outros.

Yasmin: Eu já dei uma olhadinha nele, tem no repositório do GHEMAT né...

Lucília: Exatamente! Esse livro se você olhar tem várias páginas de Topologia, que procura localizar espaços internos, espaços externos, como você faz pra ir de um lugar ao outro, se o menino pode encontrar com a menina. Tem um pouquinho a ver com aquele jogo do Dienes que você mostra, os meninos que estão numa região e as meninas em outra e ali tem uma serie de questões para atravessar ou não a fronteira. O barrabol por exemplo é um jogo de lugar e fronteiras ou seja daqui você não pode passar, aqui é o seu campo. O professor pode explorar estas questões através de desenhos e gráficos.

Meu marido era professor de Educação Física, e costumo dizer que acabei casando com professor de Educação Física de tanto assistir aulas de Educação Física para ver os alunos localizarem as fronteiras e os limites nas regras dos jogos e depois representar em papel. Se você observar o livro do Dienes, tem muitas situações deste tema. Eu encontrei nos meus livros do Curso Moderno, do Primário, algumas situações de localização: perto, longe, em cima, embaixo, fronteira, mais complexas, dependendo da idade.

Yasmin: Essas atividades envolvendo conceitos topológicos, a senhora acha que elas eram desenvolvidas no Primário com algum objetivo, alguma relação, de levar a compreensão do conceito de número?

Lucília: É uma boa pergunta, porque, a correspondência um a um, por exemplo, que leva a compreensão do número natural, pode de certa forma levar a fazer trajetórias, correspondências entre espaços e lugares ... No livro colocamos algumas atividades onde o aluno observa as letras do alfabeto e descobrem quais são topologicamente equivalentes ou seja que você consegue esticando uma borracha escrevê-las. Com a escrita dos números a mesma coisa.

Eu não diria que a Topologia tenha uma relação tão direta com os números, com as quantidades, simplesmente algumas atividades de Topologia podem ajudar em localizações e transformações. .

Yasmin: Seria mais associado com o espaço, com a localização então?

Lucília: Sim com a localização, exatamente. Tanto que a palavra Topologia significa - estudos dos lugares. Existe um exemplo famoso 'as Pontes de Koenisberg' (mostrando ilustração) que dizem ter sido o berço da topologia com a questão: posso atravessar todas as pontes, passando uma vez só por todos os lugares? A resposta é não, mas isso leva um tempo para se descobrir. Existem brincadeiras com figurinhas onde o desafio é: passar por todos os pontos, sem passar duas vezes pelo mesmo ponto. São exercícios muito interessantes para observar o espaço, os lugares, as conexões, os limites, as fronteiras e em geometria é incrível eles promovem muitos jogos e atividades. Eu vi uma vez um comentário neste sentido, acho que do Piaget que esteve muito ligado ao estudo da Matemática Moderna, diretamente.

Os trabalhos de Piaget acontecem mais ou menos da mesma época da Matemática Moderna. É interessante observar que historicamente, a Topologia é a área da Geometria mais recente, ela começou a ser estudada no século XVIII, XIX, e se bem me lembro, só no século XX ela se organizou, como ciência. No entanto, observando os testes de Piaget, as primeiras noções que aparecem nas crianças são as topológicas, quando ela consegue fechar uma curva, quando ela percebe o que é uma curva aberta, fechada, quando ela percebe a fronteira. As noções topológicas são as mais elementares, as primeiras a aparecer na criança e, no entanto, como ciência a topologia aparece mais tarde.

A topologia é uma área difícil e tem conexão com várias áreas do conhecimento, como a Biologia, a topografia e outras. Se você perguntar agora para os biólogos se na pandemia a topologia ajuda na explicação das ocorrências, eles vão dizer que sim, para avaliar as conexões no pulmão. O pessoal que trabalha com Genética, onde aparece a questão de conectividade também vai dizer o mesmo assim como quem trabalha com redes de metrô ou programação.

Tem uma frase que eu selecionei aqui porque eu gostei muito, vou ler "Assim para a Geometria Euclidiana um mapa é uma figura geométrica, enquanto que para a Topologia um mapa, como por exemplo, o mapa do

metrô, é um grafo topológico, onde o que importa não são as dimensões reais, mas a ordem das estações e os entroncamentos”.

Importa por exemplo, o que vem antes, o que vem depois, qual estação conecta com tal? Você olha um mapa de metrô, é uma loucura, muito mais do que as distâncias, você quer saber o que conecta com o que, se você consegue ir daqui até ali. Um mapa do metrô é um grafo topológico, então é um exercício de Topologia. São lugares, conexões, proximidades antes, depois, etc. .

Yasmin: A senhora falou um pouco sobre as atividades do Dienes, em relação a Topologia, a gente tem buscado se existe uma relação do Dienes ou Piaget, se por acaso ele teria se inspirado nos trabalhos de Piaget, a senhora sabe alguma coisa sobre essa relação na Topologia?

Lucília: Com certeza. O Dienes tem a sua base no Construtivismo Piagetiano, ele procurou ser menos formalista que outros estudiosos na Matemática Moderna, ou melhor, ele não era formalista embora estruturalista. O Piaget trabalha com estruturas matemáticas e mais tarde ele começou uma experiência funcionalista, mas eu não conheço esta fase do Dienes. Eu tenho um artigo que está lá no GHEMAT desta fase funcionalista, onde ele trabalhava as funções e relações, mais do que conjuntos e estruturas.

O Dienes com certeza tem uma forte conexão com Piaget. A metodologia dele é bastante construtivista e ele parte muito de jogos, base de Piaget. Ele tem um conceito que eu gosto muito, que é de variabilidade perceptiva, ou seja, você trabalha o mesmo conhecimento com jogos, espaços e conteúdos diferentes e o objetivo desta variabilidade é buscar a generalização.

Yasmin: E com relação ao Grupo Bourbaki, a gente sabe que eles não tinham uma preocupação com o Ensino, que eles eram voltados mais pra uma Matemática Pura, mas a gente percebeu que tanto Piaget, como Dienes também parecem conversar com algumas ideias desse grupo. A senhora acha que é possível que o Dienes tenha trazido alguma coisa dos Bourbakis para o Ensino?

Lucília: Com certeza. O Dienes trabalhou com a Matemática Moderna e os fundamentos da Matemática Moderna era a teoria dos conjuntos, a lógica e as estruturas e quem organizou a Matemática com estas noções foi o Bourbaki. Então tem uma conexão com certeza. O Dienes tem os fundamentos na Matemática Moderna e Matemática Moderna é Bourbaki.

Yasmin: Nós percebemos também estudando os livros e os textos que os conceitos topológicos aparecem no Ensino com certa frequência na Matemática Moderna, mas antes disso, a senhora já percebia o estudo dessas noções topológicas, essa valorização da Topologia, no período anterior, por exemplo, na Escola Nova?

Lucília: Penso que não, a topologia apareceu com a Matemática Moderna. Mas, uma coisa interessante que me chamou a atenção foi o fato que não encontrei noções de topologia, nos livros de Ginásio nem de Ensino Médio, embora tenha encontrado experiências de Topologia, mas não em livros didáticos. Os didáticos que trabalham um pouco de Topologia são do primário e da Educação Infantil.

Tem uma situação que aparece bastante onde se trabalha Topologia. Você oferece aos alunos um mapa e pede para eles pintarem as regiões de maneira que duas regiões vizinhas nunca tivessem a mesma cor, e a questão é: qual o número mínimo de cores que você precisa? Qualquer mapa você pode pintar nestas condições com até quatro cores.

Existem problemas interessantes que podem ser trabalhados no Fundamental II e no Ensino Médio onde você consegue trabalhar noções de topologia um pouco mais avançadas como a faixa de Moebius - uma faixa que tem uma única superfície e outras. São experiências pontuais de topologia para alunos de Ensino Médio, mas não aparecem em livros didáticos e não me lembro de ter visto no currículo (...)

Observo que o pessoal que trabalha Topologia no Fundamental II ou no Ensino Médio é aquele que está dentro de uma linha de Ensino inovador olhando o Ensino além dos conteúdos. Os conteúdos são a matéria prima mas Ensino é muito mais, é a visão de mundo, quando você considera os conceitos relacionados entre si e na vida e não ficam fechados na escola. Observo que a

Topologia realmente não aparece nos Cursos de Licenciatura. Talvez se você olhar os Guias Curriculares do Estado de São Paulo, feitos na década de 1970, vai aparecer o termo Topologia mas pouco.

Yasmin: Normalmente o que a gente encontra de textos, artigos, eles até citam o termo, mas não explicam sobre ele, não explicam o que são esses conceitos, a teoria por trás.

Lucília: Realmente, tem toda a razão não tem mesmo, nem na licenciatura. A topologia foi muito negligenciada e, é muito negligenciada ainda. Você pergunta por que considero importante que os alunos da Educação Básica estudem sobre esses conceitos, eu penso que abre a visão do mundo por exemplo, a ideia de localização, de como funciona uma malha de metrô, de como você consegue ir de um ponto ao outro sem passar duas vezes na mesma estação enfim de analisar um sistema de lugares assim na biologia o funcionamento de um pulmão, de uma corrente sanguínea ou mesmo do cérebro.

Eu acho que a Topologia permite atividades muito ligadas a uma visão de mundo, mais ampla e é uma conexão entre a álgebra, a análise e a geometria, porque ela trabalha com os espaços, os lugares, as relações entre os pontos

Yasmin: E a senhora lembra de alguma outra pessoa que vivenciou esse período, que tenha estudado sobre isso e possa nos ajudar?

Lucília: Eu posso ver. Você conhece o Bigode? Talvez ele possa lhe ajudar. Não sei se respondi todas suas perguntas. Acho a Topologia muito importante.

Yasmin: Respondeu sim, foi muito bom conversar com a senhora.

Lucília: Parabéns pelo tema! Muito bom ver gente da Matemática interessado na Matemática Moderna e na Educação Infantil.

Yasmin: Muito obrigada!