

Revista Brasileira de Cartografia (2016) N^o 68/1: 63-71
Sociedade Brasileira de Cartografia, Geodésia, Fotogrametria e Sensoriamento Remoto
ISSN: 1808-0936

EXTENSÃO DO MÉTODO DE ANÁLISE DE ROBUSTEZ PARA MÚLTIPLOS OUTLIERS

Extension of Robustness Analysis Method for Multiple Outliers

Ivandro Klein^{1,2}, Marcelo Tomio Matsuoka^{1,3} & Sergio Florêncio de Souza¹

¹**Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS**
Programa de Pós Graduação em Sensoriamento Remoto – PPGSR
Av. Bento Gonçalves, 9500, CEP 91501-970, Cx. Postal 15001, Porto Alegre, RS, Brasil
{ivandroklein, tomiomatsuoka, sergioflorenciodesouza}@gmail.com

²**Instituto Federal de Santa Catarina – IFSC**
Departamento Acadêmico de Construção Civil
Av. Mauro Ramos, 950, CEP 88020-300, Florianópolis, SC, Brasil

³**Universidade Federal de Uberlândia – UFU**
Instituto de Geografia
Av. Goiás, 2000, CEP 38500-000, Monte Carmelo, MG, Brasil

Recebido em 16 de Janeiro, 2015/Aceito em 17 de Abril, 2015
Received on January 16, 2015/Accepted on April 17, 2015

RESUMO

Na análise de robustez, a “robustez” de uma rede geodésica é compreendida como a capacidade desta rede geodésica em “resistir” a deformações causadas por erros “não detectados” nas observações. A análise de robustez foi originalmente concebida combinando a análise de tensões com a teoria de confiabilidade convencional, que considera somente uma observação contaminada por erro por vez. Este artigo tem como objetivo apresentar uma extensão do método da análise de robustez para o cenário de múltiplos *outliers* (erros) nas observações, considerando medidas de confiabilidade generalizadas para estes casos. O desenvolvimento matemático do método proposto é apresentado e aplicado em um exemplo numérico envolvendo uma poligonal topográfica simulada, onde é apresentado o cálculo do potencial de deformação desta rede por meio da análise de robustez tradicional, e também por meio da análise de robustez generalizada, considerando um exemplo de dois *outliers* simultâneos. Na análise dos experimentos, verificou-se que as duas abordagens apresentaram resultados diferentes, entretanto, a abordagem generalizada para múltiplos *outliers* não necessariamente apresentou os resultados mais críticos em todos os casos, provavelmente devido ao fato da análise de robustez ser uma técnica diferencial.

Palavras chaves: Análise de Robustez, Redes Geodésicas, Múltiplos *Outliers*.

ABSTRACT

In robustness analysis, the “robustness” of a geodetic network should be understood as the ability of this network to “resist” deformations induced by “undetected errors/blunders” in the observations. The robustness analysis was originally formulated by merging strain analysis with conventional reliability theory, considering only one observation contaminated by error (blunder) at a time. The aim of this paper is to present an extension of robustness analysis method for the scenario of multiple outliers (blunders) in the observations, considering the generalized reliability measures for

these cases. The mathematical development of the proposed method is presented and applied in a numerical example involving a simulated traverse survey, where the computation of the potential of deformation of this network was shown through traditional robustness analysis, and also through the proposed generalized robustness analysis, considering an example of two simultaneous outliers (errors). It was found in the experiments that the two approaches showed different results, however, the generalized approach for multiple outliers not necessarily showed the most critical results in all cases, probably due to the fact that robustness analysis is a differential technique.

Keywords: Robustness Analysis, Geodetic Networks, Multiple Outliers.

1. INTRODUÇÃO

A análise de robustez é uma técnica diferencial que combina a análise de tensões e a teoria de confiabilidade do ajustamento, visando fornecer uma descrição completa e detalhada (ponto a ponto) do potencial de deformação de uma rede geodésica, por meio de três medidas independentes representando robustez em escala, em orientação e em configuração local (VANÍČEK *et al.*, 2001). Os parâmetros que representam a robustez da rede em escala, orientação e configuração local são obtidos por meio da confiabilidade externa das observações (ver, por exemplo, BAARDA, 1968), e portanto, a “robustez” de uma rede deve ser compreendida como a capacidade da rede em “resistir” a deformações causadas por erros “não detectados” nas observações (VANÍČEK *et al.*, 1991). No caso, a confiabilidade externa de uma observação proposta em Baarda (1968) é compreendida como a influência de um erro (*outlier*) não detectado nesta observação sobre cada parâmetro incógnito do ajustamento (no caso de redes geodésicas, nos valores das coordenadas dos vértices que compõem a rede).

Além disso, uma das vantagens da análise de robustez é que os resultados obtidos são independentes de fatores externos como o *datum* (referencial) adotado, sendo reflexos da própria geometria/configuração da rede geodésica (e, portanto, da redundância do seu ajustamento), e do tipo e qualidade (precisão) de suas observações (ver, por exemplo, VANÍČEK *et al.*, 2001; BERBER, 2006 e VANÍČEK *et al.*, 2008).

A análise de robustez vem sendo largamente investigada desde o trabalho pioneiro de Vaníček *et al.* (1991), podendo-se citar os estudos de Vaníček *et al.* (1996) em redes geodésicas de grande extensão, Seemkooei (2001a, 2001b) na etapa de planejamento, Vaníček *et al.* (2001) e Hsu e Li (2004) em redes geodésicas horizontais, Berber (2006) no campo de deslocamentos dos

vértices, Hsu *et al.* (2008) e Vaníček *et al.* (2008) em redes tridimensionais, Marjetič *et al.* (2010) sobre as propriedades estatísticas dos tensores, Yetkin *et al.* (2013) no caso de observações correlacionadas, e no âmbito nacional, Klein *et al.* (2013) sobre a acurácia de redes horizontais e Cavalheri e Chaves (2014) sobre a robustez das estações da rede GNSS-SP.

Entretanto, a análise de robustez faz uso da teoria de confiabilidade convencional do ajustamento, inicialmente proposta em Baarda (1968), e que considera somente uma observação contaminada por erro por vez. Na prática, duas ou mais observações podem conter erros (de maneira simultânea), especialmente quando o número de observações é relativamente grande, como por exemplo, em uma rede GNSS (*Global Navigation Satellite System*) envolvendo dezenas de linhas-base, ou em uma aerotriangulação.

Considerando estas questões, recentemente foram propostas medidas de confiabilidade para os cenários em que duas ou mais observações possam estar contaminadas por erros (*outliers*), de maneira simultânea, como por exemplo, nos trabalhos de Ober (1996), Angus (2006) e Knight *et al.* (2010).

Ressalta-se que o fato de considerar apenas uma observação contaminada por erro por vez não impede que a abordagem convencional seja aplicada em um caso envolvendo duas ou mais observações contaminadas por erros, em um procedimento iterativo (ver, por exemplo, KLEIN *et al.*, 2011; LEHMANN, 2013). Entretanto, a análise da influência simultânea (conjunta) de múltiplos *outliers* nas observações não pode ser determinada por meio desta abordagem.

Desta forma, este artigo tem por objetivo apresentar uma extensão da análise de robustez, para que esta técnica também possa ser empregada em um cenário geral considerando múltiplos *outliers* (simultâneos) no vetor das observações. Em outras palavras, neste trabalho, é proposta

uma maneira de se calcular os parâmetros de robustez considerando a existência, simultânea, de duas ou mais observações contaminadas por erros (*outliers*) não detectados na rede geodésica.

É importante ressaltar que, no trabalho de Yetkin e Berber (2013), é utilizada a medida de confiabilidade externa para o caso de múltiplos *outliers* (simultâneos) nas observações no cálculo da análise de robustez de redes geodésicas. Entretanto, no referido trabalho, apenas é analisada a questão dos (possíveis) deslocamentos dos pontos, via análise de robustez, neste cenário geral envolvendo duas ou mais observações contaminadas por erros (*outliers*) não detectados.

Neste trabalho, o objetivo não é investigar os (possíveis) deslocamentos dos vértices (via análise de robustez), mas sim, investigar os parâmetros de robustez neste cenário geral envolvendo dois ou mais *outliers* simultâneos. Em outras palavras, o escopo deste trabalho está no campo de tensões (*strain field*), isto é, nos parâmetros de robustez da rede, e não no campo de deslocamentos (*displacement field*), isto é, na acurácia posicional das coordenadas dos vértices.

Além da formulação teórica apresentando a extensão da análise de robustez para múltiplos *outliers*, um exemplo numérico é apresentado envolvendo uma poligonal topográfica simulada, onde é investigado o potencial de deformação desta por meio da análise de robustez tradicional, e também por meio da análise de robustez generalizada, considerando o caso de dois *outliers* simultâneos. Por fim, são apresentadas as discussões e conclusões obtidas com este estudo.

Para uma revisão teórica sobre a análise de robustez, ao leitor não familiarizado, sugere-se, por exemplo, Vaniček *et al.* (1991, 2001), Berber (2006) e Klein *et al.* (2013); e sobre as medidas de confiabilidade para múltiplos *outliers*, sugere-se Ober (1996), Angus (2006), Knight *et al.* (2010) e Klein *et al.* (2011).

2. EXTENSÃO DO MÉTODO DE ANÁLISE DE ROBUSTEZ PARA MÚLTIPLOS OUTLIERS

Considerando que, de uma amostra de n' observações, q (com $q < n'$) podem conter *outliers* (de maneira simultânea), existem $\binom{n'}{q}$ combinações possíveis envolvendo toda a

amostra selecionada (n') e as (q) observações suspeitas consideradas em cada caso.

O número de possíveis *outliers* () deve ser determinado com base no número máximo de *outliers* (não detectados) tolerado, como por exemplo, entre 1% e 10% do número total de observações realizadas (ver, por exemplo, LEHMANN, 2013). Importante ressaltar que não é possível considerar um número de *outliers* (não detectados) maior do que a redundância do problema (ver, por exemplo, TEUNISSEN, 2006).

Por exemplo, em uma triangulação topográfica envolvendo três pontos de coordenadas “conhecidas” e um ponto cujas coordenadas se deseja determinar (onde, portanto, se tem apenas uma observação redundante), pode-se detectar somente se há um erro nas medidas, mas não se pode identificar qual observação contém este erro, caso se trate de um *outlier*. Para a identificação de qual observação contém um *outlier*, é necessário a adição de mais uma observação; para a identificação de dois *outliers* (simultâneos ou via procedimento *data snooping* iterativo), é necessário a adição de mais duas observações, e assim por diante.

Para a amostra de n' observações, na análise de robustez (considerando cada ponto de uma rede geodésica individualmente), podem ser escolhidas todas as observações da rede geodésica, ou, visando reduzir o custo computacional em grandes redes, todas as observações que não estejam distantes mais do que “três níveis de ligação” do ponto em questão, dentre outros critérios (ver, por exemplo, VANÍČEK *et al.* 1996).

Desta forma, considerando uma rede geodésica horizontal (como uma poligonal topográfica, por exemplo), para cada ponto da rede (P_i), e outros k pontos adjacentes a este (podendo estes, serem os pontos conectados ao ponto de interesse por pelo menos uma observação, ver, por exemplo, VANÍČEK *et al.* 1991, 2001), pode-se formar as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \Delta x_j^q - \Delta x_i^q &= \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x} (x_j - x_i) + \frac{\partial \Delta x_i}{\partial y} (y_j - y_i) \\ \Delta y_j^q - \Delta y_i^q &= \frac{\partial \Delta y_i}{\partial x} (x_j - x_i) + \frac{\partial \Delta y_i}{\partial y} (y_j - y_i) \end{aligned} \quad (1)$$

onde na Expressão (1):

(x_i, y_i) são as coordenadas do ponto (P_i) em questão (obtidas pelo ajustamento da rede);

(x_j, y_j) são as coordenadas dos pontos adjacentes considerados (para $j = 1, 2, \dots, k$, isto é, para cada ponto “j” adjacente ao “i” ter-se-á uma Equação 1);

$\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x}, \frac{\partial \Delta x_i}{\partial y}, \frac{\partial \Delta y_i}{\partial x}$ e $\frac{\partial \Delta y_i}{\partial y}$ são os elementos da matriz de tensão (E_i) em P_i ;

Δx_i^q e Δy_i^q são os possíveis deslocamentos, respectivamente, nas coordenadas x_i e y_i de P_i , causados por erros não detectados em q observações consideradas;

Δx_j^q e Δy_j^q são os possíveis deslocamentos, respectivamente, nas coordenadas x_j e y_j de cada um dos outros k pontos adjacentes (para $j = 1, 2, \dots, k$), também causados por erros não detectados nas mesmas q observações consideradas.

Estes possíveis deslocamentos nas coordenadas dos pontos $(\Delta x_i^q, \Delta y_i^q, \Delta x_j^q, \Delta y_j^q)$, causados por erros não detectados em q observações (de maneira simultânea), podem ser determinados por meio do teorema de Rayleigh-Ritz e da teoria de confiabilidade generalizada para múltiplos *outliers*. Desta forma, considerando todas as combinações de *outliers* possíveis em um conjunto de q observações, a influência máxima destes *outliers* (confiabilidade externa), em um único parâmetro (x_k) , é dada por (OBER, 1996):

$$\Delta x_k^q = \sqrt{\lambda_0 \Delta x_k^{max}} \quad (2)$$

onde λ_0 corresponde ao parâmetro de não centralidade do modelo, obtido em função do número de *outliers* considerado (q), e dos níveis de probabilidade assumidos para os testes de detecção e identificação de erros (ver, por exemplo, BAARDA, 1968; TEUNISSEN, 2006), e Δx_k^{max} corresponde ao autovalor máximo do problema generalizado de autovalores (λ) e autovetores (v) (KNIGHT *et al.*, 2010):

$$[(C_y^T P Q_v P C_y)^{-1} C_y^T P A (A^T P A)^{-1} C_{x_k}^T C_{x_k} (A^T P A)^{-1} A^T P C_y] v = \lambda v \quad (3)$$

onde na Expressão (3):

P é a matriz peso do ajustamento;

Q_v é a matriz cofator dos resíduos ajustados;

A é a matriz *design* (ou matriz jacobiana);

c_{x_k} é um vetor canônico unitário (de dimensão u por 1), contendo a unidade na linha do k -ésimo parâmetro considerado e zero nas demais;

C_y é uma matriz (de dimensão n por q), formada por q vetores canônicos unitários, cada um referente a uma das (q) observações consideradas contaminadas por *outliers* (ver, por exemplo, ANGUS, 2006; KLEIN *et al.*, 2011).

Desta forma, a Equação (1) pode ser expressa na seguinte forma matricial:

$$\Delta u = B e_i \quad (4)$$

onde Δu é um vetor (de dimensão $2k$ por 1), contendo as diferenças de deslocamentos nas coordenadas do ponto P_i e dos outros k vértices adjacentes considerados (advindos da confiabilidade externa para múltiplos *outliers*), B é uma matriz de coeficientes (de dimensão $2k$ por 4), contendo zeros e/ou as diferenças nos valores das coordenadas do ponto P_i e dos outros k vértices adjacentes considerados, e e_i é um vetor (de dimensão 4 por 1) contendo os quatro elementos da matriz de deformação do ponto P_i , ou seja:

$$e_i^T = \left[\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x} \quad \frac{\partial \Delta x_i}{\partial y} \quad \frac{\partial \Delta y_i}{\partial x} \quad \frac{\partial \Delta y_i}{\partial y} \right]^T$$

Considerando então ($k \geq 3$) pontos adjacentes ao ponto de interesse, pode-se estimar os quatro elementos da matriz de tensão (E_i) por meio de um ajustamento por mínimos quadrados, resultando em (GAMBIN *et al.*, 2008):

$$e_i = (B^T B)^{-1} B^T \Delta u \quad (5)$$

Caso desejado, pode-se adotar uma estratégia de ponderação para os elementos do vetor de deslocamentos (Δu) , introduzindo uma matriz peso na Equação (5) em função das distâncias entre os diferentes pontos considerados (ver, por exemplo, VANÍČEK *et al.*, 1996; MARJETIČ *et al.*, 2010).

Com os elementos da matriz de tensão, estimados por meio da Equação 5, pode-se determinar as medidas (primitivas) de tensão (deformação) por meio das seguintes expressões (VANÍČEK *et al.*, 1991):

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \text{traço}(E_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x} + \frac{\partial \Delta y_i}{\partial y} \right) \\ \omega &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta y_i}{\partial x} - \frac{\partial \Delta x_i}{\partial y} \right) \\ \gamma &= \sqrt{\tau^2 + \nu^2}; \tau = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x} - \frac{\partial \Delta y_i}{\partial y} \right), \nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta x_i}{\partial y} + \frac{\partial \Delta y_i}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

onde na expressão (6), σ é a tensão ou dilatação média, ω é a rotação diferencial média, e γ é o cisalhamento total (sendo τ o cisalhamento puro e ν o cisalhamento simples). Sobre as unidades, σ e γ são grandezas adimensionais, enquanto ω é expresso em radianos.

Quanto maior o valor de uma dada primitiva de tensão, “menos robusta” é a rede geodésica no ponto em questão, e, portanto, na prática, se está interessado somente nas deformações máximas em cada ponto (denotadas por σ_{max} , ω_{max} , γ_{max}). Estes valores máximos em cada ponto da rede (neste caso, considerando todos os resultados das primitivas de tensão de todas as combinações possíveis para q outliers) são denominados parâmetros de robustez, sendo: σ_{max} – robustez em escala, ω_{max} – robustez em orientação, e γ_{max} – robustez em configuração local (VANÍČEK *et al.*, 1991).

Desta forma, é importante ressaltar que, considerando todas as n observações de uma rede geodésica, e q possíveis outliers simultâneos (não detectados), existem $\binom{n}{q}$ matrizes de tensão diferentes para cada ponto da rede, e, portanto, $\binom{n}{q}$ trios de parâmetros de robustez (σ_{max} , ω_{max} , γ_{max}) para cada um destes pontos, enquanto na análise de robustez tradicional (onde $q = 1$), existem “somente” n matrizes de tensão diferentes para cada ponto da rede, e, portanto, n trios de parâmetros de robustez (σ_{max} , ω_{max} , γ_{max}) para cada um destes.

É importante notar que esses cálculos são relativos apenas aos vértices desconhecidos que se deseja determinar. Pontos de controle na forma de injunções absolutas (isto é, os vértices “fixos”) não apresentam potencial de deformação e desta forma não são investigados na análise de robustez (ver, por exemplo, HSU e LI, 2004).

Após o cálculo dos parâmetros de robustez, é possível retornar do campo de tensões para o campo de deslocamentos, ou seja, calcular os possíveis deslocamentos dos pontos via análise de robustez. Entretanto, este procedimento não faz parte do escopo deste trabalho. Para mais detalhes sobre o cálculo dos deslocamentos

dos pontos via análise de robustez, utilizando a teoria de confiabilidade convencional, ver Berber (2006) e Klein *et al.* (2013), e, utilizando a teoria de confiabilidade generalizada para múltiplos outliers, ver Yetkin e Berber (2013).

3. EXEMPLO NUMÉRICO

Visando demonstrar na prática a aplicação do método da análise de robustez para múltiplos outliers, um exemplo numérico é apresentado nesta seção.

Arede geodésica considerada neste exemplo é uma poligonal topográfica numericamente simulada (ver a Figura 1), composta por sete vértices (sendo o vértice A ponto de controle e os demais vértices a se determinar), e dezoito observações (doze medidas de distâncias, no caso FA, AB, BC, CD, DE, EF, FB, CE, GB, GC, GE e GF, e seis medidas de ângulos, no caso, os ângulos BAF, FGB, BGC, CGE, EGF e EDC).

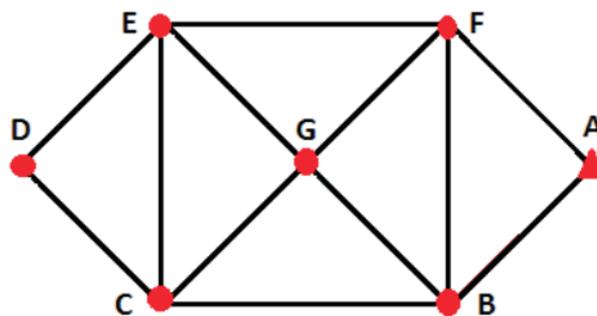


Fig. 1 - Poligonal topográfica utilizada no exemplo.

Desta forma, a rede geodésica em questão consiste de dezoito observações (doze distâncias e seis ângulos), doze parâmetros incógnitos (coordenadas planimétricas dos vértices B, C, D, E, F e G) e três injunções (coordenadas planimétricas do vértice A e o azimute do alinhamento formado pelos vértices A e B). Para mais detalhes sobre a poligonal topográfica, ver Klein *et al.* (2013).

Para a rede geodésica considerada, primeiramente, se calculou os parâmetros de robustez de cada vértice (σ_{max} , ω_{max} , γ_{max}), considerando somente $q = 1$ observação contaminada por erro por vez (para mais detalhes sobre o processo de cálculo nesta abordagem, ver, por exemplo, VANÍČEK *et al.*, 2001; HSU e LI, 2004) e, por meio da análise de robustez generalizada para múltiplos outliers, também se calculou os parâmetros de robustez de cada

vértice, porém, neste caso, considerando $q = 2$ observações contaminadas por erros (de maneira simultânea).

Importante ressaltar que, para a possibilidade de se fazer análises comparativas, foi considerado o mesmo valor para o parâmetro de não centralidade do modelo (λ_0) em ambas as abordagens ($\lambda_0 = 17,075$), o que corresponde a um teste de hipóteses com $q = 1$ outlier por vez, nível de significância de $\alpha = 0,001$ (0,1%) e poder do teste $\gamma = 0,80$ (80%) na análise tradicional, e a um teste de hipóteses com $q = 2$ outliers por vez, nível de significância $\alpha = 0,0027$ (2,7%) e poder do teste $\gamma = 0,80$ (80%) na análise generalizada (ver, por exemplo, BAARDA, 1968; KNIGHT et al., 2010; KLEIN et al., 2011).

Para o cálculo dos parâmetros de robustez para $q = 2$ outliers simultâneos, primeiramente, se calculou os valores de confiabilidade externa das observações neste cenário, por meio das Equações (2) e (3). Com estes valores de confiabilidade externa, para cada par de observações suspeitas consideradas e para cada vértice desconhecido da rede, se formou o sistema de equações em (1), considerando como vértices adjacentes todos os demais pontos desconhecidos da rede (ou seja, $k = 5$).

Por exemplo, para o vértice B, foram calculadas as confiabilidades externas de todos os $\binom{n}{q} = \binom{18}{2} = 153$ pares de observações possíveis em cada coordenada planimétrica (x,y) deste vértice, por meio das Expressões (2) e (3). Depois, com os valores obtidos para cada um dos 153 pares de observações suspeitas consideradas e cada um dos $k = 5$ vértices desconhecidos restantes da rede (C, D, E, F, e G), se formou o sistema de equações da Expressão 1, ou seja, para cada vértice da rede, tem-se 153 sistemas de equações (um para cada par de observações suspeitas considerada), cada um destes envolvendo ainda os outros $k = 5$ vértices desconhecidos restantes da rede.

Desta forma, para cada um destes cenários (ou seja, cada par de observações suspeitas consideradas e cada vértice desconhecido da rede), se estimou os elementos da matriz de tensão $(\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x}, \frac{\partial \Delta x_i}{\partial y}, \frac{\partial \Delta y_i}{\partial x}, \frac{\partial \Delta y_i}{\partial y})$ por meio da Expressão (5), e, por meio da Expressão (6), finalmente se obteve as primitivas de tensão (σ, ω, γ) relativas a cada um destes cenários.

Como para $n = 18$ observações e $q = 2$ outliers simultâneos, existem $\binom{n}{q} = \binom{18}{2} = 153$ diferentes pares (combinações) de observações consideradas como outliers, ao todo, para cada um dos seis vértices desconhecidos da rede (pontos B, C, D, E, F, G), calculou-se 153 diferentes matrizes de tensão, e, conseqüentemente, 153 trios de primitivas de tensão (σ, ω, γ), enquanto na abordagem convencional, calcula-se $n = 18$ diferentes matrizes de tensão (ou trios de primitivas de tensão) para cada um dos seis vértices desconhecidos, pois apenas uma observação é considerada suspeita por vez.

No caso da abordagem para $q = 2$ outliers simultâneos, para cada um destes 153 cenários em cada um dos 6 pontos desconhecidos da rede (totalizando $153 \times 6 = 918$ cenários ao todo), é um vetor de dimensão $2k$ por 1 (10 por 1), contendo as diferenças de deslocamentos nas coordenadas do ponto em questão e dos outros vértices adjacentes considerados (advindos da confiabilidade externa para múltiplos outliers), B é uma matriz de dimensão $2k$ por 4 (8 por 4), contendo zeros e/ou as diferenças nos valores das coordenadas de cada ponto em questão e dos outros $k = 5$ vértices adjacentes considerados, e e_i é um vetor (de dimensão 4 por 1) contendo os quatro elementos da matriz de deformação do ponto em questão em cada cenário, ou seja, os quatro elementos que se deseja estimar em cada cenário: $e_i^T = [\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x}, \frac{\partial \Delta x_i}{\partial y}, \frac{\partial \Delta y_i}{\partial x}, \frac{\partial \Delta y_i}{\partial y}]^T$.

Desta forma, por meio da a Expressão (6), a Tabela 1 apresenta os valores máximos das primitivas de tensão (ou seja, parâmetros de robustez: $\sigma_{max}, \omega_{max}, \gamma_{max}$) de cada vértice desconhecido da rede, obtidos tanto por meio da análise de robustez tradicional (com $q = 1$ observação com outlier por vez), quanto por meio da análise de robustez generalizada para múltiplos outliers simultâneos (neste caso, exemplificou-se para $q = 2$ observações com outliers por vez).

É importante ressaltar que não se tem ainda limiares ou valores classificatórios para a qualidade de uma rede geodésica por meio dos parâmetros de robustez, ou seja, estes parâmetros servem apenas para comparações relativas em diferentes cenários analisados (ver, por exemplo, BERBER et al., 2003).

Tabela 1: Parâmetros de robustez por meio da análise tradicional ($q = 1$) e da análise generalizada ($q = 2$).

Ponto	Parâmetro de robustez	Caso $q = 1$	Caso $q = 2$
B	σ máx. (ppm)	11	14,6
	ω máx. (ppm)	29,1	30,8
	γ máx. (μ rad)	19,5	24,6
C	σ máx. (ppm)	12,7	20,6
	ω máx. (ppm)	26,9	22,1
	γ máx. (μ rad)	14,1	24,4
D	σ máx. (ppm)	25,9	19,5
	ω máx. (ppm)	28,3	39,5
	γ máx. (μ rad)	44,3	35,5
E	σ máx. (ppm)	16	23,3
	ω máx. (ppm)	21,5	26,7
	γ máx. (μ rad)	18,5	30,5
F	σ máx. (ppm)	13,8	16,7
	ω máx. (ppm)	22,5	23
	γ máx. (μ rad)	26,9	30,2
G	σ máx. (ppm)	7,75	12,6
	ω máx. (ppm)	25	24,6
	γ máx. (μ rad)	19,2	26,5

Analisando a Tabela 1, nota-se que, na menor parte dos casos, os parâmetros de robustez apresentam maior valor numérico para o cenário com $q = 1$ outlier por vez, enquanto que na maior parte dos casos, apresentam maior valor numérico para o cenário com $q = 2$ outliers simultâneos, ou seja, a robustez da rede em cada vértice pode ser maior ou menor na análise generalizada em relação à análise convencional.

Este resultado é interessante, pois, a confiabilidade interna e externa das observações sempre diminui (ou seja, se torna numericamente maior), ou no melhor dos casos, permanece igual, conforme se aumenta o número de observações suspeitas consideradas. Provavelmente, pelo fato da análise de robustez ser uma técnica diferencial, embora os valores de confiabilidade externa sejam maiores na abordagem para $q = 2$ outliers simultâneos em relação à abordagem convencional com $q = 1$ outlier por vez, as diferenciações que ocorrem nestes valores de confiabilidade externa na aplicação da Equação 1 podem resultar em parâmetros de robustez maiores ou menores para os vértices, dependendo

de cada caso.

Desta forma, ao contrário das medidas de confiabilidade (ver, por exemplo, KNIGHT *et al.*, 2010; KLEIN *et al.*, 2011; KLEIN *et al.*, 2013), se forem estabelecidos valores limites para os parâmetros de robustez em uma abordagem para q outliers simultâneos, estes valores limites não serão necessariamente obedecidos para cenários envolvendo um número menor de outliers considerados.

Entretanto, ressalva-se que, na prática, o número de observações contaminadas por erros (não detectados) pode ser maior do que um, especialmente para redes geodésicas com um largo número de observações (como centenas de observações ou mais), e desta forma, tantas as medidas de confiabilidade quanto os parâmetros de robustez em cenários considerando múltiplos outliers podem apresentar resultados mais concordantes com a realidade do problema do que aqueles apresentados pelo caso simplificado de apenas um outlier por vez.

É interessante notar também que, nos estudos de Yetkin *et al.* (2013), a análise de robustez sempre apresenta descolamentos menores para os vértices da rede no caso de observações correlacionadas em relação ao caso de observações com correlações nulas. Ou seja, quando o critério analisado é a correlação das observações, os resultados da análise de robustez são sempre menores no cenário com correlações não nulas, entretanto, quando o critério analisado é o número de outliers considerados, os resultados da análise de robustez podem ser maiores ou menores do que no caso com um único outlier considerado por vez.

Além disso, ressalva-se também que, embora os parâmetros de robustez no campo de tensões possam ser maiores ou menores na abordagem generalizada (múltiplos outliers) em relação à abordagem convencional (apenas um outlier por vez), os valores dos deslocamentos dos vértices, via análise de robustez, sempre aumentam conforme se aumenta o número de outliers considerados (ver YETKIN e BERBER, 2013).

Por fim, salienta-se também que, na análise de robustez tradicional, considerando todas as observações da rede, para cada vértice desta, tem-se o cálculo de n matrizes de tensões (ou seja, uma para cada observação diferente),

enquanto na análise de robustez generalizada, para cada vértice da rede, tem-se o cálculo de $\binom{n}{q}$ matrizes de tensões diferentes, considerando todas as combinações de observações suspeitas possíveis para q *outliers* simultâneos, o que resulta em um maior custo computacional.

4. CONCLUSÕES

Neste artigo, o principal objetivo foi apresentar uma extensão do método da análise de robustez para aplicação em cenários envolvendo múltiplas observações contaminadas por erros (*outliers*), de maneira simultânea. Além da formulação teórica, um exemplo numérico de aplicação do método proposto foi apresentado, envolvendo uma poligonal topográfica simulada.

No exemplo considerado, verificou-se que os parâmetros de robustez na análise generalizada podem ser maiores ou menores do que os parâmetros de robustez na análise convencional (considerando apenas uma observação suspeita por vez). Provavelmente, isto se deve ao fato da análise de robustez ser uma técnica diferencial, e desta forma, embora os valores de confiabilidade externa sejam maiores na análise generalizada, a diferenciação destes valores para o cálculo das matrizes de tensões pode resultar em parâmetros de robustez menores do que os obtidos por meio da análise de robustez convencional.

Entretanto, ressalta-se que na prática, duas ou mais observações podem estar contaminadas por erros (não detectados), especialmente em redes geodésicas relativamente grandes, e desta forma, as medidas de confiabilidade e os parâmetros de robustez obtidos para cenários considerando múltiplos *outliers* nas observações podem ser mais realistas do que os obtidos por meio do cenário simplificado considerando apenas uma observação com erro por vez (análise tradicional).

Neste trabalho, o objetivo foi apresentar o método proposto e exemplificar numericamente a aplicação do mesmo, e desta forma, recomenda-se mais estudos sobre esta abordagem, variando, por exemplo, a geometria/configuração de uma rede geodésica, os níveis de probabilidade assumidos para a obtenção do parâmetro de não centralidade do modelo, a precisão e eventual correlação das observações, dentre outros fatores, para compreender melhor a relação entre a abordagem generalizada aqui proposta

($q > 1$) e a abordagem convencional da análise de robustez ($q = 1$).

Por fim, recomendam-se também investigações sobre o potencial de aplicação do método aqui proposto no controle de qualidade de redes geodésicas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPERGS/CAPES pelo fornecimento da bolsa de Doutorado do primeiro autor (Edital FAPERGS 2011/10), e ao CNPq pela Bolsa de Produtividade em Pesquisa (Proc.n.303306/2012-2) do segundo autor e pelo projeto Universal (Proc.n.477914/2012-8).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANGUS, J. E. RAIM with multiple faults, *Navigation*, v. 53, n. 4, pp. 249-257, 2006.

BAARDA, W. **A testing procedure for use in geodetic networks**, Publications on Geodesy, New Series, v. 2, n. 5, Delft: Netherlands Geodetic Commission, 1968.

BERBER, M.; DARE, P. J.; VANÍČEK, P.; CRAYMER, M. R. On The Application Of Robustness Analysis To Geodetic Networks. In: **Proceedings of Canadian Society for Civil Engineering**, 31 st Annual Conference, June 4-7, Moncton, NB, Canada, 2003.

BERBER, M. **Robustness Analysis of Geodetic Networks**. Ph.D. Dissertation - Department of Geodesy and Geomatics Engineering Technical Report nº 242, University of New Brunswick, New Brunswick, Canada, 2006. 121p.

CAVALHERI, E. P.; CHAVES, J. C. Análise de robustez de estações da Rede GNSS-SP. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 20, n. 2, pp. 376-387, 2014.

GAMBIN, W.; PARZYŃSKI, Z.; PRÓSZYŃSKI W. The Concept of Network Robustness based on Strain Analogy as seen in the Light of Continuum Mechanics. In: **Proceedings of FIG/IAG Symposium Measuring the Changes**, May 12-15, Lisbon, Portugal, 2008.

HSU, R.; LI, S. Decomposition of deformation primitives of horizontal geodetic networks: Application to Taiwan's GPS network, **Journal of Geodesy**, v. 78, n. 4-5, pp. 251-262, 2004.

HSU, R.; LEE, H. C.; KAO, S. P. Three-

- Dimensional Networks Are Horizontally Superior in Robustness: A Mathematical Reasoning, **Journal of Surveying Engineering**, v. 132, n. 2, pp. 61-65, 2008.
- KLEIN, I.; MATSUOKA, M. T.; SOUZA, S. F. Teoria de Confiabilidade Generalizada para Múltiplos Outliers: Apresentação, Discussão e Comparação com a Teoria Convencional, **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 17, n. 4, pp. 519-548, 2011.
- KLEIN, I.; MATSUOKA, M. T. MONICO, J. F. G. Proposta para a estimativa da acurácia de redes geodésicas horizontais integrando a análise de robustez e a de covariância, **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 19, n. 4, pp. 525-547, 2013.
- KNIGHT, N. L.; WANG, J.; RIZOS, C. Generalised Measures Of Reliability For Multiple Outliers, **Journal of Geodesy**, v. 84, n. 10, pp. 625-635, 2010.
- LEHMANN, R. On the formulation of the alternative hypothesis for geodetic outlier detection, **Journal of Geodesy**, v. 87, n. 4, pp. 373-386, 2013.
- MARJETIČ, A.; AMBROŽIČ, T.; TURK, G.; STERLE, O.; STOPAR, B. Statistical properties of Strain and Rotation Tensors in Geodetic Network, **Journal of Surveying Engineering**, v. 136, n. 3, pp. 102-110, 2010.
- OBER, P. B. New, generally applicable metrics for RAIM/AAIM integrity monitoring, In: **9th international technical meeting of The Satellite Division of The Institute of Navigation, IONGPS-96**, Kansas City, Missouri, pp. 1677-1686, 1996.
- SEEMKOOEI, A. A. Comparison of reliability and geometrical strength criteria in geodetic networks, **Journal of Geodesy**, v. 75, n. 4, pp. 227-233, 2001a.
- SEEMKOOEI, A. A. Strategy for designing geodetic networks with high reliability and geometrical strength, **Journal of Surveying Engineering**, v. 127 n.3, pp. 104-117, 2001b.
- TEUNISSEN, P. J. G. **Testing theory: an introduction** 2. ed. Ed. VSSD, 2006. 147p.
- VANÍČEK, P.; KRAKIWSKY, E. J.; CRAYMER, M. R.; GAO, Y.; ONG, P. J. **Robustness analysis**, Final contract report, Department of Surveying Engineering Technical Report No. 156, University of New Brunswick, New Brunswick, Canada, 1990. 116p.
- VANÍČEK, P.; ONG, P. J.; KRAKIWSKY, E. J.; CRAYMER, M. R. **Application of Robustness analysis to Large Geodetic Networks**, Final contract report for the Geodetic Survey Division of Geomatics Canada, Department of Geodesy and Geomatics Engineering Technical Report No. 180, University of New Brunswick, New Brunswick, Canada, 1996. 75p.
- VANÍČEK, P.; CRAYMER, M. R.; KRAKIWSKY, E. J. Robustness analysis of geodetic horizontal networks, **Journal of Geodesy**, v. 75, n. 4, pp. 199-209, 2001.
- VANÍČEK, P.; GRAFAREND, E. W.; BERBER, M. Short Note: Strain invariants, **Journal of Geodesy**, v. 82, n. 4-5, pp. 263-268, 2008.
- YETKIN, M.; BERBER, M. Robustness analysis using the measure of external reliability for multiple outliers. **Survey Review**, v. 45, n. 330, pp. 215-219, 2013.
- YETKIN, M.; BERBER, M.; INAL, C. Robustness analysis of geodetic networks in the case of correlated observations, **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 19, n. 3, pp. 434-451, 2013.