

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

## **Topologia geométrica de 3-variedades**

Dissertação de Mestrado

Izabella Muraro de Freitas

Porto Alegre, 10 de outubro de 2021.

Dissertação submetida por Izabella Muraro de Freitas <sup>1</sup> como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Álvaro Kruger Ramos (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:

Francisco Vanderson Moreira de Lima (UFRGS)

Miriam Telichevesky (UFRGS)

William Hamilton Meeks III (UMass, Amherst)

Data da Apresentação: 21 de outubro de 2021.

---

<sup>1</sup>Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

# Agradecimentos

Confesso que fiquei muito tempo protelando e procurando o momento perfeito para escrever os agradecimentos da minha dissertação de mestrado. O momento perfeito nunca chegou e agora já passou da hora de agradecer, mas vou tentar fazer disso o melhor possível mesmo assim.

Gostaria de começar agradecendo meus pais, pois ambos cumpriram papéis essenciais para que eu pudesse chegar até aqui e honrosamente obter meu título de mestre (eu prefiro mestra) em matemática.

Andresa, minha mãe, sempre foi minha fã declarada e de carteirinha! Sempre teve muito orgulho de mim, em cada pequeno passo do longo caminho até aqui. Lembro que quando passei no vestibular ela ficou um dia inteiro chorando de felicidade, mas também sempre estava lá me lembrando que também é preciso descansar para conseguir ir bem nas provas. Ela sempre tentou trazer mais leveza para a minha cobrança constante e isso fez toda a diferença. Muito obrigada, mãezinha, essa conquista também é tua.

Alcides, meu pai, desde muito cedo me ensinou que as oportunidades precisam ser consideradas e devemos abraçá-las sempre que possível, Graças ao apoio incondicional e ao incentivo pra dar o meu melhor, sempre tive vontade de tentar coisas novas e abraçar todas as oportunidades ao longo do caminho. Por fora sempre foi durão, dizendo que as notas altas eram parte da minha obrigação como estudante, mas por dentro eu vejo o orgulho radiante de um pai que vê no meu sucesso o sucesso dele mesmo. Muito obrigada, pai, essa conquista também é tua.

Gostaria de estender essa parte do agradecimento a toda a minha família, pois sempre se fizeram presentes e felizes por mim, mesmo sem saber muito bem o que faz uma matemática (e quem sabe?). Um familiar em especial teve um papel de destaque no meu caminho até aqui. Meu tio André foi meu primeiro contato com alguém que faz matemática. Eu estudei cálculo usando os livros dele pra poder evitar de decorar as fórmulas para aula de física no

ensino médio. Ele também foi responsável direto no meu ingresso no Colégio Conhecer, como bolsista, e estudar lá foi uma experiência enriquecedora. Ver o quanto os alunos gostavam dele foi impressionante e inspirador.

Além da minha família consanguínea, devo estender meus agradecimentos a família da qual eu escolhi fazer parte a 15 anos atrás. O Grupo Escoteiro Charruas teve um papel importantíssimo na minha educação, me ensinando habilidades essenciais para o meu desenvolvimento, e acima de tudo me mostrou que eu poderia sempre sonhar mais alto. Enquanto no mestrado trabalhei como voluntária ajudando o Grupo mesmo durante a pandemia. O desafiador trabalho como educadora de jovens me proporciona aprendizados incomparáveis. Desta forma, deixo aqui um agradecimento aos meus amigos, colegas de chefia, e aos jovens da T.S.H.P.

Cheguei na UFRGS em 2014 e graças a ela eu pude conhecer pessoas incríveis e inspiradoras. Gostaria de destacar a importância da minha amiga Júlia, que foi minha colega de laboratório. Nos dias quentes de verão, trabalhando até no natal, e as vezes saindo cedo pra poder pegar nosso bar favorito abrindo. A Júlia é um exemplo de trabalho duro e dedicação... Faz um tempo que ela mora longe (quando fazemos amigos incríveis eles vão pra outros lugares incríveis fazer coisas incríveis) mas sempre terá um lugar especial no meu coração.

O mestrado, como vocês já sabem (ou devem imaginar) foi cansativo, por muitas vezes frustrante e difícil. Por sorte eu pude contar com amigos que surgiram ao longo do caminho e fizeram essa experiência ser muito mais leve e interessante. Gostaria de destacar meus queridos Marcus, William, Gleiciano, Guilherme, Gustavo e Josué. Eles sempre foram muito abertos a discussões matemáticas e filosóficas, além de grandes incentivadores acadêmicos e companheiros de RU. Nossos encontros no escritório a céu aberto mudaram o rumo da minha vida e ajudaram a manter a alegria nos meus dias na UFRGS. Amo todos vocês e mal posso esperar pela nossa próxima reunião.

Nesse grupo diverso de estudantes de matemática eu encontrei o Josué. Meu companheiro, amigo, parceiro de evento de matemática e maior incentivador. Além de incrivelmente inteligente e dedicado, ele tem um coração gigante e um senso de humor questionável. Viver ao lado dele tem sido um privilégio, e eu mal consigo encontrar palavras pra expressar o quão bom é tê-lo por perto. Nós já fomos tão longe, já conquistamos tantas coisas juntos, já conhecemos tantos lugares magníficos, mas tenho certeza de que esse é só o começo... Alçaremos juntos voos cada vez mais altos. Muito obrigada por acreditar em mim principalmente nos momentos em que nem eu acreditava,

e por todos os pequenos (e grandes) gestos de amor. Eu te amo muito.

Seria injusto terminar a sessão de agradecimentos sem citar alguns professores que me ajudaram a chegar até aqui. Gostaria de começar agradecendo ao professor Leandro Farina, que foi meu primeiro orientador e responsável pelo primeiro contato que tive com pesquisa. O tempo que trabalhamos juntos foi tão produtivo que recentemente publicamos um artigo com os resultados da IC.

Enquanto ainda na matemática aplicada eu conheci a professora Miriam Telichevesky, que com seu entusiasmo e paixão pela matemática me fez enxergar a beleza da geometria. Trabalhamos juntas em vários projetos, estudando geometria hiperbólica e preparando o festival da matemática. Sempre serei grata pelo apoio nas horas difíceis e pelo incentivo. Espero poder um dia ser inspiração para minhas alunas assim como a Miriam é pra mim.

Dentre os professores que eu encontrei ao longo do caminho, o professor Antônio Paques foi essencial para minha permanência na universidade. Embora eu tivesse um desempenho mediano em suas disciplinas, ele viu em mim alguém com talento e me ajudou a chegar no mestrado.

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Álvaro Ramos, que desde de antes do meu ingresso no programa de mestrado sempre me incentivou e ofereceu disciplinas maravilhosas. O Álvaro entendeu rapidamente em quais áreas eu tinha mais interesse e conseguiu me orientar na direção correta. . . Graças a ele escrever essa dissertação foi um trabalho pesadíssimo e ainda assim super divertido e interessante. Também graças a ele eu estou pronta para seguir em frente com o título de mestre no maior estilo “pé na porta e soco a cara”.

Deixo aqui também meu agradecimento ao CNPq e à CAPES pelas bolsas de fomento que recebi ao longo da minha vida acadêmica. A ciência brasileira depende da existência dessas bolsas. Graças a elas eu pude me dedicar à academia e agora sou capaz de produzir um texto científico como este.

Agora não mais no clima de agradecimento, eu gostaria de dedicar esse trabalho às minhas irmãs Manuella e Melissa. Espero que algum dia eu possa servir como inspiração para vocês duas. Não desejo que vocês sejam como eu, apenas desejo que me vejam como alguém com quem podem contar pro resto da vida. Amo vocês.

*“Last but not least, I wanna thank me  
I wanna thank me for believing in me  
I wanna thank me for doing all this hard work  
...  
I wanna thank me, for never quitting”*

- Snoop Dogg.

## Resumo

Este texto vai apresentar as partes mais interessantes, tanto matematicamente quanto historicamente, da formulação e avanços relacionados ao **teorema da geometrização**, bem como apresentar uma aplicação do mesmo.

**Palavras-chave:** Orbifolds, Espaços Fibrados de Seifert, Geometrias modelo, Geometrização, Topologia Geométrica.

## Abstract

This text will present the most interesting parts, both mathematically and historically, of the formulation and advances related to the **geometrization theorem**, as well as presenting an application of it.

**Keywords:** Orbifolds, Seifert Fibered Spaces, Model Geometry, Geometrization, Geometric Topology.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>It's dangerous to go alone, take these</b>	<b>5</b>
2.1	Geometria Riemanniana . . . . .	5
2.1.1	Curvaturas . . . . .	5
2.1.2	Fórmulas da primeira e segunda variações de área . . . . .	9
2.1.3	Estabilidade . . . . .	14
2.2	Orbifolds . . . . .	15
2.3	Espaços fibrados de Seifert . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Topologia das 3-variedades</b>	<b>35</b>
3.1	Geometrias modelo . . . . .	35
3.2	As geometrias de Thurston . . . . .	39
3.2.1	Geometrias clássicas $\mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^3$ . . . . .	39
3.2.2	Geometrias produto $S^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	41
3.2.3	Geometrias de grupos de Lie $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R}), Nil_3, Sol_3$ . . . . .	42
3.2.4	As 6 geometrias fibradas . . . . .	44
3.3	Geometrização . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Aplicando nossos conhecimentos</b>	<b>51</b>
4.1	Construção do contra-exemplo . . . . .	53
4.2	O teorema . . . . .	69
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Já se sabe há muito tempo que, em dimensão dois, existe uma ligação íntima entre a geometria e a topologia, e que a métrica de curvatura constante que podemos colocar em uma superfície fechada depende do seu número de Euler  $\chi$ . Essa classificação se dá em três casos:  $\chi < 0$ ,  $\chi = 0$ ,  $\chi > 0$ .

Existem apenas duas superfícies fechadas com  $\chi > 0$ , que são  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{R}P_2$ , que admitem métricas de curvatura constante positiva = 1. Analogamente, existem apenas duas superfícies fechadas com  $\chi = 0$ , que são o toro  $T^2$  e a garrafa de Klein, e ambas admitem métrica de curvatura constante = 0. Todas as outras superfícies fechadas possuem  $\chi < 0$  e admitem uma métrica de curvatura constante = -1. Podemos notar que de fato existem apenas três geometrias “disponíveis” em dimensão dois. A geometria das linhas retas em  $\mathbb{R}^2$  é chamada de geometria Euclideana, e as geometrias das geodésicas na esfera  $\mathbb{S}^2$  e no plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  são chamadas de não Euclidianas.

Dizemos que  $F$ , uma superfície topológica fechada, é modelada em  $X$  (uma dentre  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ ) se  $F = X/G$ , no qual  $G$  é um grupo de isometrias de  $X$  tal que  $X \rightarrow X/G$  seja um recobrimento.

**Exemplo 1.0.1.** *Tomemos  $X = \mathbb{R}^2$  e  $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  que age em  $\mathbb{R}^2$  por translações horizontais e verticais. Dado um ponto  $p = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , sua imagem por um elemento  $(g_1, g_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  é dada por  $(x_1 + g_1, x_2 + g_2) \in \mathbb{R}^2$ .*

*O quociente  $\mathbb{R}^2/G$  identifica todos os quadrados unitários com vértices de coordenadas inteiras e, além disso, como as linhas verticais  $x = c_i \in \mathbb{Z}$  são identificadas entre si e as linhas horizontais  $y = d_i \in \mathbb{Z}$  também, o espaço  $\mathbb{R}^2/G$  um toro  $T^2$ .*

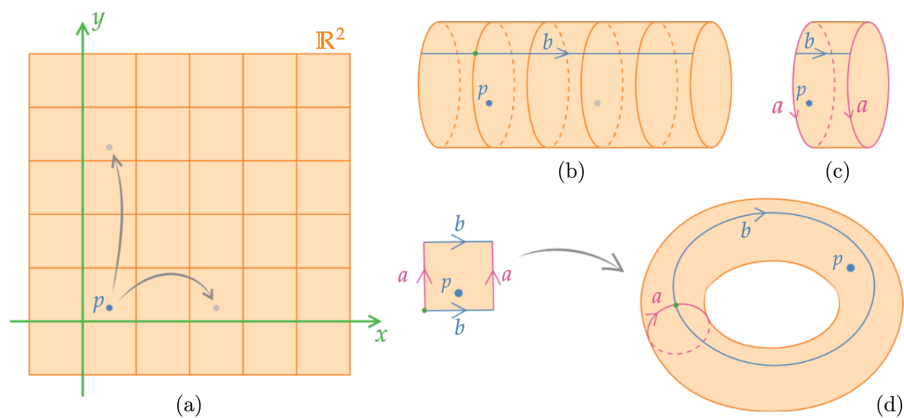


Figura 1.1: (a) Ladrilhamento de  $\mathbb{R}^2$  gerado pela ação do grupo  $G$ ;  
 (b) Cilindro gerado pela identificação das retas horizontais  $y = d_i \in \mathbb{Z}$ ;  
 (c) Cilindro com componentes de bordo  $a$ , correspondentes às retas verticais  $x = c_i \in \mathbb{Z}$ ;  
 (d) Identificação dos lados do quadrado que geram o toro,  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{T}^2$ .

**Exemplo 1.0.2.** Tomemos  $X = \mathbb{S}^2$  e  $G$  o grupo de isometrias gerado por  $\omega =$  rotação da esfera por  $\frac{2\pi}{6}$  ao longo do eixo que passa pelos polos.

O grupo  $G$  age na esfera por rotações de forma que o quociente  $X/G$  identifica as seis “fatias” da esfera e as linhas que delimitam estas “fatias”.

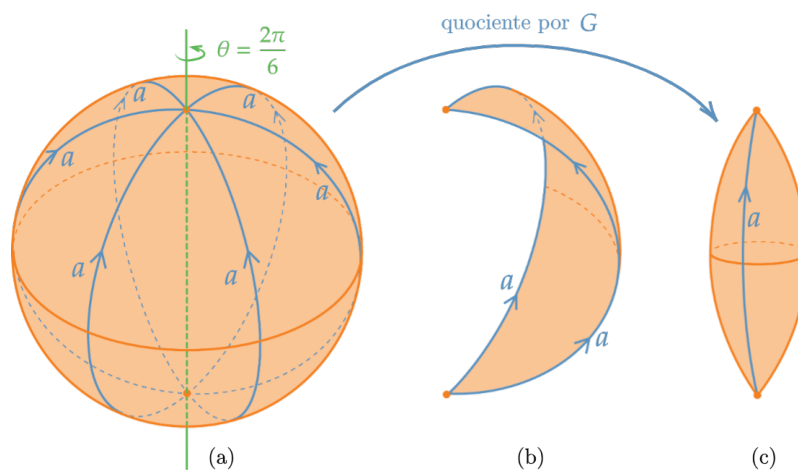


Figura 1.2: (a)  $\mathbb{S}^2$  sob a ação de  $G$ ; (b) as fatias sobrepostas e identificadas;  
 (c) o espaço quociente  $F = \mathbb{S}^2/G$ , que é modelado em  $\mathbb{S}^2$ .

Existe um resultado geral sobre as geometrias de superfícies, chamado de Uniformização, que foi enunciado por Poincaré (1882) primeiramente como conjectura e depois foi demonstrado por Poincaré[29] e Koebe [18] (de forma independente) em 1907.

**Teorema 1.0.3** (Uniformização). *Toda superfície fechada e conexa admite estrutura geométrica modelada em  $\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ .*

Uma continuação intuitiva desse resultado seria nos perguntarmos se existe um análogo em três dimensões, e o primeiro problema encontrado no caminho até a generalização é que existem mais geometrias modelo do que as naturalmente esperadas ( $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{H}^3$ ). De fato, Thurston [39] mostrou que surgem mais cinco, totalizando oito geometrias modelo 3-dimensionais:  $\mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, Sol_3, Nil_3, \widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ . Além disso, com o aumento de duas para três dimensões até uma pergunta aparentemente simples sobre a relação entre geometria e topologia ficou sem resposta por muito tempo, conhecida como:

**Conjectura 1.0.4** (de Poincaré [30]). *Toda 3-variedade fechada  $\mathcal{M}$  simplesmente conexa<sup>1</sup> é homeomorfa a 3-esfera  $\mathbb{S}^3$ .*

Não é difícil produzir 3-variedades compactas que não admitem uma única geometria dentre as oito, então para obtermos um resultado análogo à uniformização se fez necessário considerar “pedaços” da 3-variedade, ao invés da variedade inteira, e depois determinar se cada uma das partes possui estrutura geométrica. Resultados de Kneser [17] e Milnor [23] garantem a existência e unicidade de uma decomposição ao longo de esferas, mas com o avanço da teoria notou-se que 3-variedades com bordo toroidal possuem um papel importante e foi necessário considerar decomposição ao longo de toros, conhecida como decomposição JSJ (definida 3.3.10), que possibilitou a formulação da versão mais moderna da conjectura da geometrização de Thurston [40].

**Conjectura 1.0.5** (Geometrização). *O interior de toda 3-variedade fechada e orientada possui uma decomposição canônica, ao longo de toros, em componentes geométricas (veja a Definição 3.3.11).*

Thurston, além de enunciar a conjectura da geometrização também enunciou a conjectura da eliptização (que tem a conjectura de Poincaré como corolário) e a conjectura da hiperbolização, provada por Thurston em [41] para

---

<sup>1</sup>simplesmente conexa significa que  $\pi_1(\mathcal{M})$  é trivial.

o caso Haken. De fato, a geometrização dependia apenas destes dois resultados, que foram provados por Perelman [25, 26] [27] em 2002/2003 seguindo os passos indicados por Hamilton [10, 11, 12].

Este texto vai apresentar as partes mais interessantes, tanto matematicamente quanto historicamente, da formulação e avanços relacionados ao **teorema da geometrização**, bem como apresentar uma aplicação do mesmo. Para percorrermos esse caminho precisamos de alguns pré-requisitos que serão apresentados no capítulo 2, como considerações importantes sobre geometria Riemanniana, a apresentação de estruturas como orbifolds e espaços fibrados de Seifert, que serão úteis ao falamos sobre geometrias modelo.

No capítulo 3 vamos entender mais sobre o que é uma estrutura geométrica, bem como quais estruturas geométricas existem em 3 dimensões, e vamos apresentar um panorama histórico da conjectura da geometrização e os passos que foram dados na teoria até que fosse provada por Perelman. Esse texto **não** contém a demonstração da geometrização, pois tem como objetivo fazer com que o leitor entenda seu enunciado e consequências.

No capítulo 4 usaremos boa parte do que aparece nos capítulos anteriores pra construir um contra-exemplo para uma conjectura de Meeks, Perez e Ros, que foi apresentado por Lima em [19]. A demonstração usa o teorema da geometrização e esperamos que nesse ponto do texto os conceitos relacionados estejam internalizados de forma natural, a ponto do leitor se sentir confortável com a argumentação.

Como autora deste texto espero também que o tamanho não afaste quem pretende explorar-lo, isso se deu pela quantidade de imagens ilustrativas, quase todas de minha autoria, com exceção apenas da imagem 4.1 ilustrando  $(4, 4, 3)$  o ladrilhamento do modelo do disco de Poincaré, feita por Tom Ruen [32] (Isso acontece porque eu não tenho os conhecimentos necessários pra fazer uma imagem tão fiel).

# Capítulo 2

## It's dangerous to go alone, take these

Neste capítulo vamos explorar alguns pré-requisitos do texto, dentre eles temos geometria Riemanniana para entendermos o que é uma superfície mínima e como determinar se uma superfície mínima é estável ou não. Logo depois vamos passar por duas seções focadas em topologia, nas quais vamos aprender o essencial sobre orbifolds e espaços fibrados de Seifert.

### 2.1 Geometria Riemanniana

Ao longo de todo o texto vamos falar sobre variedades Riemannianas, mas vamos começar o texto assumindo que o leitor (ou leitora) possui familiaridade com conceitos “básicos” de geometria Riemanniana. Nesta seção vamos ver um pouco sobre como calcular a curvatura de variedades Riemannianas, como definir superfícies mínimas e determinar se são ou não estáveis.

#### 2.1.1 Curvaturas

Seja  $S$  uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$ , um ponto  $p \in S$  e  $n_p$  o vetor unitário normal a  $S$  no ponto  $p$ . Tomemos então um plano que passa por  $p$  e contém  $n_p$ , localmente a interseção desse plano com  $S$  é uma curva plana. Escolhendo a orientação de tal forma que  $n_p$  seja o vetor normal unitário da curva em  $p$ , podemos calcular a curvatura da curva plana, definida como  $\kappa$ .

Como o vetor normal fixa apenas uma direção do plano, é fácil ver (caso

não seja fácil ver, temos um desenho logo abaixo) que existe uma família a um parâmetro de planos que passam por  $p$  e contém  $n_p$ , que depende do ângulo  $\theta$  de rotação em torno do eixo gerado pela normal.

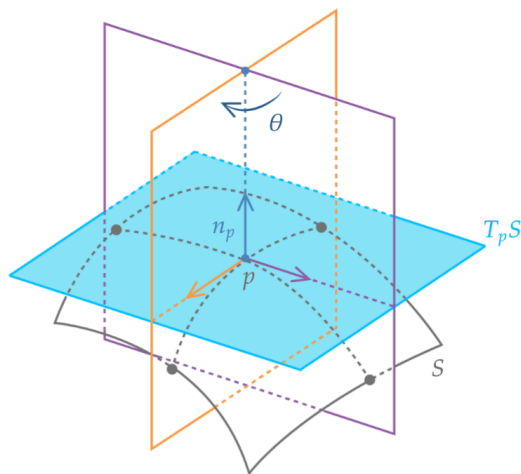


Figura 2.1: A variação dos planos ao calcularmos a curvatura média.

Definimos então a **curvatura média** de  $p \in S$  como a média das curvaturas das curvas geradas ao variar  $\theta$ :

$$H_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(\theta) d\theta.$$

Além disso,  $H_p$  é também igual a média das curvaturas principais  $H_p = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ . As curvaturas principais  $\kappa_1, \kappa_2$  são o máximo e o mínimo da curvatura  $\kappa(\theta)$ . Por um resultado de Euler [8] (1760) sabemos que as direções (vetores no plano tangente) que dão origem a  $\kappa_1, \kappa_2$  são perpendiculares, essas que são chamadas de direções principais.

Esse resultado também decorre da teoria espectral, que nos dá as direções principais como eixos principais do tensor da **segunda forma fundamental**. Além disso, usamos as curvaturas principais para definir a **curvatura Gaussiana**  $K = \kappa_1 \kappa_2$ .

Quando pensamos em geometria Riemanniana estamos pensando em objetos com dimensão  $\geq 2$  que não estão imersos em um espaço ambiente, e por causa dessa ausência de espaço ambiente, precisamos introduzir alguns

conceitos para conseguirmos definir coisas importantes como a **curvatura** de uma variedade Riemanniana. Nesta parte do texto que trata de geometria Riemanniana usamos como referência principal o livro "Geometria Riemanniana", escrito por Manfredo do Carmo [3].

Riemann descreveu uma maneira de calcular a curvatura seccional de uma variedade Riemanniana (não depende da existência de um espaço ambiente) e embora esse jeito de entender a curvatura não seja bom do ponto de vista prático, pois teríamos que conhecer todas as geodésicas que passam por um ponto  $p$  da variedade, é uma forma intuitiva de enxergar tal conceito.

Vamos começar nossa construção pela aplicação exponencial que, na maioria das vezes, é aplicada a vizinhanças abertas da origem no espaço tangente. Definimos, a partir da aplicação exponencial o conceito de vizinhança normal.

**Definição 2.1.1.** *Seja  $exp_p$  a aplicação exponencial no ponto  $p$ . Se  $exp_p$  é um difeomorfismo em uma vizinhança  $V$  da origem em  $T_p\mathcal{M}$ , então a imagem dessa vizinhança pela aplicação exponencial,  $exp_p(V) = U$ , é denominada uma **vizinhança normal** de  $p$ .*

Tomemos  $\mathcal{M}^n$ , com  $n \geq 2$ , uma variedade Riemanniana,  $p \in \mathcal{M}$  e  $\sigma \subset T_p\mathcal{M}$  um subespaço de dimensão 2 do espaço tangente a  $\mathcal{M}$  no ponto  $p$ .

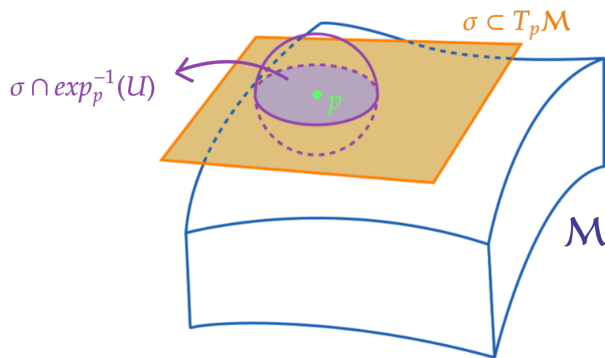


Figura 2.2: A construção da vizinhança de  $p$  em  $\sigma$  dada por  $\sigma \cap exp_p^{-1}(U)$

Consideremos o conjunto de geodésicas que passam por  $p$  e são tangentes a  $\sigma$ , e tomemos uma vizinhança normal  $U \subset \mathcal{M}$  de  $p$ . Por definição,  $exp_p^{-1}(U)$



é uma vizinhança da origem de  $T_p\mathcal{M}$ , portanto,  $\exp_p(\sigma \cap \exp_p^{-1}(U))$  determina uma subvariedade  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  de dimensão 2 que é composta por segmentos das geodésicas que passam por  $p$  e são tangentes a  $\sigma$ .

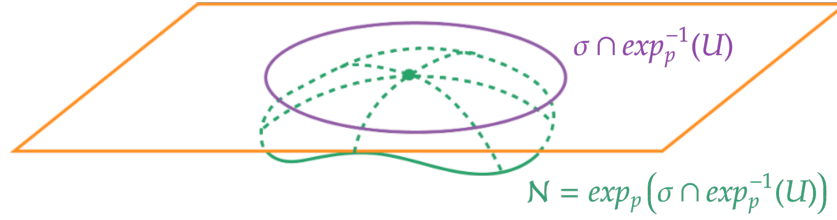


Figura 2.3: Construção de  $\mathcal{N}$ .

Claramente  $\mathcal{N}$  possui uma métrica induzida pela métrica de  $\mathcal{M}$  e é uma superfície. Podemos então calcular a curvatura Gaussiana de  $\mathcal{N}$  em  $p$ , que nesse caso depende intimamente do subespaço  $\sigma$  de  $T_p\mathcal{M}$ , e será denotada por  $K(p, \sigma)$ , denominada curvatura seccional. O conceito de curvatura seccional é importante pois ao conhecermos  $K(\sigma)$  de todos os subespaços  $\sigma \subset T_p\mathcal{M}$  podemos determinar a curvatura  $R$ .

Depois de alguns anos Christoffel [4] indicou como calcular a curvatura seccional utilizando a métrica de  $\mathcal{M}$ , criando um método mais prático para calcularmos a curvatura de variedades Riemannianas.

**Definição 2.1.2.** *A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $\mathcal{M}$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in X(\mathcal{M})$  uma aplicação*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

$Z \in X(\mathcal{M})$ , onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $\mathcal{M}$ .

Dado um espaço vetorial  $V$  e  $x, y \in V$  estabelecemos a notação

$$|x \wedge y| := \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

que representa a área do paralelogramo determinado pelos vetores  $x$  e  $y$ .

**Definição 2.1.3.** Dado um ponto  $p \in \mathcal{M}$ , um subespaço bi-dimensional  $\sigma \subset T_p\mathcal{M}$  e  $\{x, y\}$  uma base qualquer de  $\sigma^1$ , o número real

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2} = K(\sigma)$$

é chamado *curvatura seccional* de  $\sigma$  em  $p$ .

## 2.1.2 Fórmulas da primeira e segunda variações de área

A **fórmula da primeira variação de área** é, intuitivamente, uma maneira de medir localmente o quanto a área de um pedaço de uma superfície varia de acordo com um campo vetorial de deformação que depende de um parâmetro  $t$ . É uma das ferramentas que utilizamos para saber se uma superfície é mínima, pois para encontrarmos um mínimo do funcional área devemos primeiramente encontrar seus pontos críticos, e fazemos isso da forma usual: Derivando e igualando a zero.

Começamos tomando  $\Sigma^k \subset \mathcal{M}^n$  uma subvariedade  $k$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $\mathcal{M}$ . Definimos uma variação de  $\Sigma$  com suporte compacto e que fixa o bordo de  $\Sigma$  como uma função suave  $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $F(x, 0) = x, \forall x \in \Sigma$ , e para todo  $x \in \partial\Sigma$  e fora de um compacto tem-se  $F(x, t) = x, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Assim,  $F_t = \frac{\partial}{\partial t}(F(x, t))$  é um campo vetorial, que quando restrito a  $\Sigma$  em  $t = 0$  é chamado de **campo variacional**. Nosso objetivo é calcular a primeira derivada do funcional área para essa família de variações a um parâmetro, então vamos defini-lo como em [6].

Como  $\mathcal{M}$  é uma variedade Riemanniana e  $\Sigma \subset \mathcal{M}$ , em cada ponto  $x \in \Sigma$  podemos tomar coordenadas locais  $x_i$  em  $x$  (que podemos tomar como sendo ortonormais) e, desta forma, usamos a métrica Riemanniana  $g$  de  $\mathcal{M}$  para definir:

$$g_{ij}(t) = g(F_{x_i}, F_{x_j}) = \langle F_{x_i}, F_{x_j} \rangle, \quad (2.1)$$

onde  $F_{x_i}, F_{x_j}$  são derivadas nas direções  $x_i, x_j$  respectivamente.

$$\nu(t) := \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))}, \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>É possível mostrar que essa definição independe da escolha da base.

onde  $(g^{ij})$  denota a matriz inversa de  $(g_{ij})$ .

O funcional área (que chamamos volume porque  $\Sigma$  tem dimensão  $k$ ) pode ser escrito como

$$Vol(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij}(0))}.$$

Podemos fazer a derivada desse funcional área com respeito a  $t$ , obtendo a expressão:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Vol(F(\Sigma, t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{\Sigma} \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij}(0))}.$$

Como escolhemos o sistema de coordenadas locais  $\{x_i\}$  ortonormais em  $x$ , temos

$$g_{ij}(0) = g(F_{x_i}(0), F_{x_j}(0)) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Segue que,  $\sqrt{\det(g_{ij}(0))} = \sqrt{\det(I)} = 1$  e agora precisamos derivar apenas  $\nu(t)$ .

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Vol(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nu(t). \quad (2.3)$$

**Definição 2.1.4.** *A segunda forma fundamental  $A$  é definida como*

$$A(X, Y) = (\nabla_X Y)^N,$$

onde  $X, Y \in T_x \Sigma$  e o expoente  $N$  denota a componente normal.

Após fazermos algumas contas (que podem ser encontradas com mais detalhes em [6]), obtemos a seguinte expressão:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nu(t) = \operatorname{div}_{\Sigma}(F_t) = - \sum_{i=1}^k \langle F_t^N, A(F_{x_i}, F_{x_i}) \rangle + \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^T,$$

onde  $F_t = F_t^N + F_t^T$  é a decomposição de  $F_t$  nos espaços normal e tangente a  $\Sigma_t$ .

Consideramos  $\vec{H} = \sum_{i=1}^k A(E_i, E_i)$ .  $\vec{H}$  é o chamado *vetor curvatura média* de  $\Sigma$  e a sua norma se relaciona com a curvatura média de  $\Sigma$  através de  $\|\vec{H}\| = kH$ . Utilizando essa nomenclatura, temos que:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \nu(t) = -\langle F_t^N, \vec{H} \rangle + \operatorname{div}_\Sigma F_t^T.$$

Voltando à nossa integral sobre  $\Sigma$  obtemos:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \operatorname{Vol}(F(\Sigma, t)) = \int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma(F_t) = - \int_\Sigma \langle F_t^N, \vec{H} \rangle + \int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma F_t^T.$$

Usando o teorema da divergência, temos que  $\int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma F_t^T = 0$ . Então chegamos na seguinte expressão, que é denominada **fórmula da primeira variação de área**:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \operatorname{Vol}(F(\Sigma, t)) = \int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma(F_t) = - \int_\Sigma \langle F_t^N, \vec{H} \rangle.$$

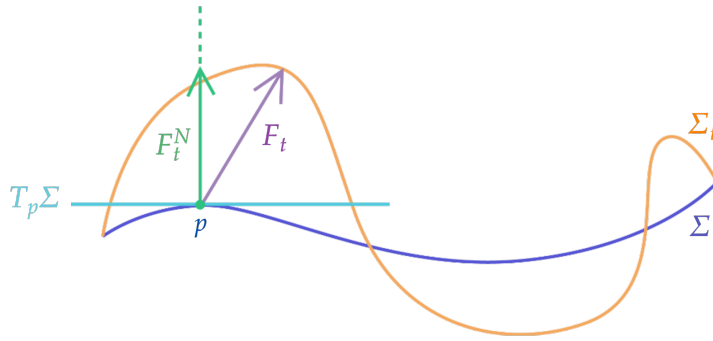


Figura 2.4: Campo variacional  $F_t$  sendo projetado na direção normal a  $\Sigma$  no ponto  $p$ .

Agora que temos essa fórmula, podemos (re)definir superfície mínima, pois vemos que  $\Sigma$  é um ponto crítico do funcional área se, e somente se, a curvatura média  $H$  é identicamente nula.

**Definição 2.1.5.** *Uma subvariedade  $\Sigma^k \subset \mathcal{M}^n$  imersa é dita **mínima** se sua curvatura média é identicamente nula.*

Agora vamos ver como surge a **fórmula da segunda variação de área**, pois nosso objetivo é encontrar superfícies que minimizam área, na verdade estamos tentando encontrar pontos de mínimo do funcional que calcula a área das variações de uma subvariedade imersa  $\Sigma^k \subset \mathcal{M}^n$  dependendo de um parâmetro  $t$  (e isso só será possível pois vamos impor como condição que o campo de variação seja normal à superfície  $\Sigma$ ). Nós já sabemos encontrar pontos críticos usando a fórmula da primeira variação de área, mas ao nos perguntarmos se o ponto crítico é um ponto de mínimo local, i.e.,  $Area(f) \leq Area(f_t), \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  precisamos computar a **segunda derivada do funcional área**.

Daí surge a necessidade da fórmula da segunda variação de área, que pode ser vista como uma fórmula que se relaciona com os invariantes geométricos da imersão da subvariedade  $\Sigma$  na variedade Riemanniana ambiente. Vamos usar uma formulação que é uma continuação das contas feitas para chegarmos na fórmula da primeira variação de área.

Tomemos novamente  $\Sigma^k \subset \mathcal{M}^n$  subvariedade mínima de dimensão  $k$  de  $\mathcal{M}^n$  variedade Riemanniana. Como anteriormente, definimos uma variação de  $\Sigma$  com suporte compacto e que fixa  $\partial\Sigma$  como uma função  $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $F(x, 0) = x, \forall x \in \Sigma$ ,  $F = Id$  fora de um compacto, e  $\forall x \in \partial\Sigma$  tem-se  $F(x, t) = x, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Mas para facilitar nosso trabalho vamos assumir, sem perda de generalidade, que  $F$  é uma variação **normal** a  $\Sigma$ , ie,  $F_t^T \equiv 0$ .

Novamente, tomamos  $g_{ij}(t)$  como definida em (2.1) e  $\nu(t)$  como definida em (2.2). Desta forma,  $Vol(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij}(0))}$  e a fórmula da segunda variação de área é dada por

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} Vol(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij}(0))}.$$

Como já calculamos a primeira derivada de  $\nu$  com respeito a  $t$ , podemos

partir dela:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\nu(t) &= \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\det(g_{ij}(t))}\sqrt{\det(g^{ij}(0))}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\det(g_{ij}(t))}\right)\sqrt{\det(g^{ij}(0))} + \sqrt{\det(g_{ij}(t))}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\det(g^{ij}(0))}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\det(g_{ij}(t))}\right)\left(\sqrt{\det(g^{ij}(0))}\right)tr\left(g^{ij}(t) \cdot \frac{d}{dt}(g_{ij}(t))\right) \\
&= \frac{1}{2}\nu(t)tr\left(g^{ij}(t) \cdot (g'_{ij}(t))\right)
\end{aligned}$$

Portanto,  $2\frac{d}{dt}\nu(t) = \nu(t)tr\left(g^{ij}(t) \cdot g'_{ij}(t)\right)$ , onde  $tr$  é o **traço** definido como  $tr(a_{ij}) = \sum_{i=1}^n(a_{ii})$ , para uma matriz  $(a_{ij})_{n \times n}$ .

Queremos calcular

$$2\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\nu(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[\nu(t)tr\left(g^{ij}(t) \cdot g'_{ij}(t)\right)\right].$$

Usamos então a fórmula de Jacobi para derivar o determinante de uma matriz que depende de  $t$ , que é dada por:

$$\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \det(A(t))tr\left(A^{-1}(t) \cdot \frac{d}{dt}(A(t))\right), \quad (2.4)$$

Devemos também lembrar que para avaliar essa expressão em um ponto  $x \in \Sigma$  podemos tomar  $\{x_i\}$  um sistema de coordenadas ortonormal em  $x$ , facilitando um pouco as contas, no ponto  $x$  temos:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\nu(t) = -|\langle A(\cdot, \cdot), F_t \rangle|^2 + |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2 - tr_{\Sigma}\left(\langle R_{\mathcal{M}}(E_i, F_t)E_i, F_t \rangle\right) + div_{\Sigma}(F_{tt}).$$

Integrando essa expressão e usando o fato de que  $\Sigma$  é mínima, obtemos a **fórmula da segunda variação de área**:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}Vol(F(\Sigma, t)) &= -\int_{\Sigma}\left[\left\langle\sum_{i,j=1}^k\langle A(E_i, E_j), F_t \rangle A(E_i, E_j) + \Delta_{\Sigma}^N F_t\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ tr_{\Sigma}(R_{\mathcal{M}}(\cdot, F_t) \cdot), F_t\right\rangle\right] \\
&= -\int_{\Sigma}\langle F_t, LF_t \rangle. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Em (2.5) o operador  $L$  é definido da seguinte maneira

$$LX = \Delta_{\Sigma}^N X + \text{tr}[R_{\mathcal{M}}(\cdot, X) \cdot] + \tilde{A}(X),$$

onde  $\tilde{A}$  é denominado **operador de Simons**, dado por

$$\tilde{A}(X) = \sum_{i,j=1}^k g(A(E_i, E_j), X) A(E_i, E_j),$$

e  $\Delta_{\Sigma}^N$  é o laplaciano no fibrado normal, definido por

$$\Delta_{\Sigma}^N X = \sum_{i=0}^k (\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} X)^N - \sum_{i=0}^k (\nabla_{(\nabla_{E_i} E_i)^T} X)^N.$$

Esse operador  $L$  é chamado de **operador de estabilidade** (ou operador de **Jacobi**) e está definido no espaço de campos vetoriais normais a  $\Sigma$ , como é o caso de  $F_t$  por construção.

Como por hipótese  $F_t^T \equiv 0$ , a variação de  $\Sigma$  (quando  $\Sigma$  é *de dois lados*) pode ser escrita como  $F_t(x) = tf(x)\eta(x)$ , onde  $\eta(x)$  é o vetor normal unitário em  $x \in \Sigma$  e  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$ . Podemos definir outro operador  $\tilde{L}$ , equivalente a  $L$ , que não é mais aplicado em campos, mas sim na função  $f$  que pode ser associada ao campo  $F_t$ .

Definimos  $\tilde{L} : C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ , como  $\tilde{L}(f) = \Delta_{\Sigma} f + |A|^2 f + \text{Ric}_{\mathcal{M}}(\eta, \eta)f$ , onde  $\text{Ric}_{\mathcal{M}}$  é o tensor de Ricci e  $\eta$  é o campo unitário normal a  $\Sigma$ , e a identificação  $L(F_t) = \tilde{L}(f)\eta$  pode ser vista com mais detalhe em [6].

Por simplicidade, vamos identificar  $\tilde{L}$  a  $L$ , o leitor (ou leitora) será capaz de entender de qual das duas estamos falando pelo contexto.

### 2.1.3 Estabilidade

**Definição 2.1.6.** *Seja  $\Sigma$  uma subvariedade mínima de dois lados de  $\mathcal{M}$ . Dados  $u, v \in C_0^\infty(\Sigma)$  o operador bilinear  $Q : C_0^\infty \times C_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  é definido da seguinte maneira:*

$$Q(u, v) = - \int_{\Sigma} u \tilde{L} v$$

onde  $L$  é o operador de Jacobi definido acima e  $Q$  é denominado **operador de estabilidade**.

**Definição 2.1.7.** *Se  $Q(u, u) \geq 0, \forall u \in C_0^\infty(\Sigma)$ , dizemos que  $\Sigma$  é estável.*

Portanto, se  $u\tilde{L}u \geq 0$  e  $u\tilde{L}u > 0$  em algum ponto para  $u \in C_0^\infty(\Sigma)$ , teremos  $\Sigma$  instável.

## 2.2 Orbifolds

Nessa seção vamos estudar **orbifolds**, que são estruturas utilizadas para entender de forma mais efetiva a ação de um grupo (que age propriamente descontinuamente, mas não necessariamente livremente) sobre uma variedade. Consideremos então o quociente desse espaço pela ação do grupo ao invés da imagem do espaço pela ação do grupo. Esse tipo específico de **espaço quociente** é usado, por exemplo, para provar a existência de estruturas hiperbólicas em 3-variedades.

Um conceito muito utilizado ao longo das duas próximas seções é o de espaço quociente. Para facilitar o trabalho vamos começar definindo e construindo nossa intuição com respeito a esses espaços.

**Definição 2.2.1.** *Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico, e  $\sim$  uma relação de equivalência em  $X$ . O conjunto quociente  $Y = X / \sim$  é o conjunto das classes de equivalência dos elementos de  $X$ . A classe de equivalência de um ponto  $x \in X$  é denotada por  $[x]$ . O mapa de projeção/quociente é:*

$$\begin{aligned} q : X &\rightarrow X / \sim & (2.6) \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

Saímos de um espaço topológico e obtivemos um **conjunto**, mas para transformá-lo em espaço topológico precisamos muni-lo de **topologia**. Por sorte, existe uma topologia natural para  $Y$  induzida por  $\tau_X$ .

**Definição 2.2.2.** *O espaço quociente gerado pela relação  $\sim$  é o conjunto  $Y$  munido da **topologia quociente**. A topologia quociente é a topologia cujos abertos são subconjuntos  $U \subseteq Y = X / \sim$  tais que  $\{x \in X : [x] \in U\} = \cup_{u \in U} u$  é um aberto de  $(X, \tau_X)$ . Portanto, a topologia de  $Y$ ,  $\tau_Y$  é caracterizada como segue:*

$$\tau_Y = \{U \subseteq Y : \{x \in X : [x] \in U\} \in \tau_X\}$$

Depois destas definições é natural perguntarmos como se parecem os espaços quocientes. Nada melhor que um exemplo.



**Exemplo 2.2.3.** Tomemos o espaço topológico  $D^2$  e a relação de equivalência  $\sim$  identifica todos os pontos de  $\partial D^2$ .

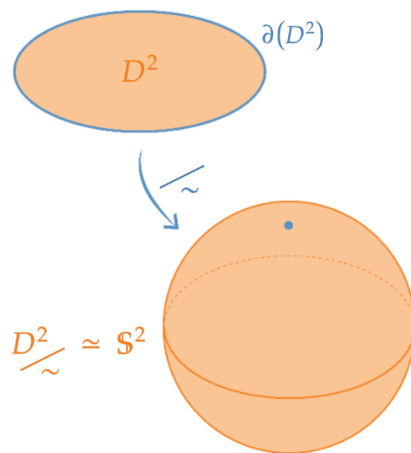


Figura 2.5: Ao colpsarmos  $\partial D^2$  em um único ponto através da relação de equivalência  $\sim$  obtemos uma esfera  $\mathbb{S}^2$

No caso em que a relação de equivalência  $\sim$  é a ação de um grupo  $\Gamma$  no espaço topológico  $X$ , o quociente  $X/\Gamma$  identifica os abertos com suas **imagens** pela ação  $\Gamma$ , como pode ser visto nos exemplos 1.0.1 e 1.0.2.

**Definição 2.2.4.** O quociente de um espaço  $X$  por um grupo  $G$ , cuja representação é  $X/G$ , é o conjunto das órbitas com a topologia quociente.

Vamos primeiramente definir o que significa um grupo agir propriamente descontinuamente sobre um espaço topológico:

**Definição 2.2.5.** Seja  $\Gamma$  um grupo agindo em um espaço topológico localmente compacto  $X$ , dizemos que a ação de  $\Gamma$  é propriamente descontínua se para todo conjunto compacto  $K \subset X$ , existe apenas um número finito de  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma K \cap K \neq \emptyset$ .

Vamos ver alguns exemplos de orbifolds antes de apresentarmos uma versão formal da sua definição. Essa inversão da ordem usual tem como objetivo treinar a intuição antes de vermos a definição formal (que é um pouco complicada).

**Exemplo 2.2.6.** Dado um retângulo  $R$ , tomamos  $G$  como sendo o grupo de isometrias de  $\mathbb{R}^2$  geradas pelas reflexões ao longo dos quatro lados do retângulo  $R$ .

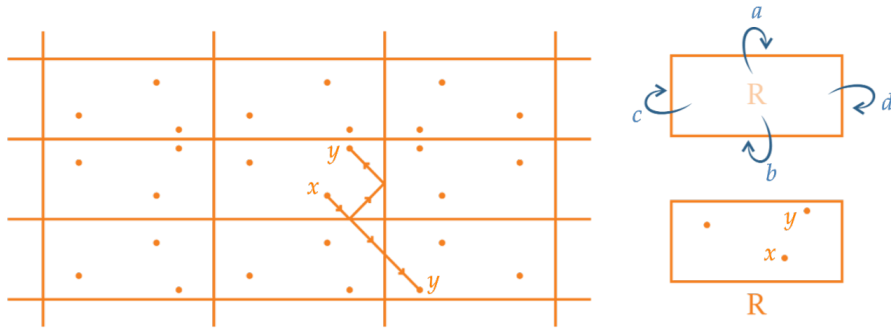


Figura 2.6: Ladrilhamento de  $\mathbb{R}^2$  gerado pelas reflexões  $a, b, c, d$  ao longo dos lados de  $R$ .

As reflexões em lados paralelos  $a, b$  e  $c, d$  dão origem a dois grupos diedrais  $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  (produto livre entre duas cópias de  $\mathbb{Z}_2$ , que é o grupo cíclico com dois geradores). Desta forma, temos  $G = D_\infty \times D_\infty$ . O espaço quociente  $\mathbb{R}^2/G$  é o próprio retângulo  $R$ .

Chamamos esse espaço de bilhar retangular porque se pensarmos nos pontos como bolas de bilhar e quisermos acertar  $x$  em  $y$ , basta mirar em qualquer outra  $y$  dentro das reflexões de  $R$ , como mostra a imagem 2.2.6.

**Exemplo 2.2.7.** Tomando um subgrupo  $H$  de  $G$  do exemplo anterior, como sendo o subgrupo de isometrias que preservam orientação (subgrupo de índice 2 de  $G$ ). O espaço quociente  $\mathbb{R}^2/H$  é que chamamos de “travesseiro”.

O espaço quociente  $\mathbb{R}^2/H$  é topologicamente uma esfera com 4 pontos de singularidade.

Com estes exemplos frescos em nossas mentes podemos olhar para a definição formal do que é orbifold. Uma **orbifold**  $\mathcal{O}$  é um espaço modelado localmente em  $\mathbb{R}^n$  quocientado por finitas ações de grupos com uma estrutura adicional. Ao leitor (ou a leitora) que estiver disposto(a) a entender orbifolds mais formalmente, segue a definição dada por Thurston em [38], caso esteja interessado(a) apenas na parte intuitiva, você pode pular a definição e seguir adiante no texto.

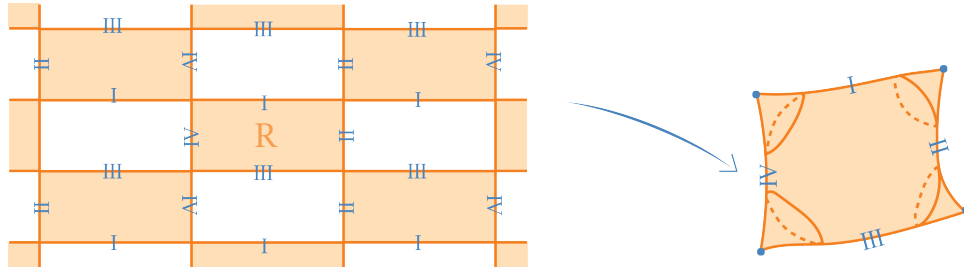


Figura 2.7: Quociente de  $\mathbb{R}^2$  por  $H$ . Note que  $H$  leva os retângulos preenchidos do ladrilhamento em outros retângulos preenchidos.

**Definição 2.2.8** (Thurston). *Uma orbifold  $\mathcal{O}$  de dimensão  $n$  é um espaço de Hausdorff  $X_{\mathcal{O}}$  munido de uma estrutura adicional.  $X_{\mathcal{O}}$  deve possuir uma cobertura por uma coleção de abertos  $\{U_i\}$  fechados com respeito a interseções finitas. A cada  $U_i$  associa-se um grupo finito  $\Gamma_i$ , uma ação de  $\Gamma_i$  em um aberto  $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^n$  e um homomorfismo  $\varphi_i : U_i \approx \tilde{U}_i/\Gamma_i$ .*

*Sempre que tivermos  $U_i \subset U_j$ , deve existir um homomorfismo injetivo  $f_{ij} : \Gamma_i \hookrightarrow \Gamma_j$  e um mergulho  $\tilde{\varphi}_{ij} : \tilde{U}_i \hookrightarrow \tilde{U}_j$  (equivariante com respeito a  $f_{ij}$ , ou seja,  $\tilde{\varphi}_{ij}(\gamma x) = f_{ij}(\gamma)\tilde{\varphi}_{ij}(x)$ ) tais que o diagrama comuta.*

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U}_i & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{ij}} & \tilde{U}_j \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{U}_i/\Gamma_i & \xrightarrow{\varphi_{ij} = \tilde{\varphi}_{ij}/\Gamma_i} & \tilde{U}_j/\Gamma_i \\
 \uparrow & & \downarrow f_{ij} \\
 U_j & \subset & U_j \\
 & & \uparrow \varphi_j \\
 & & \tilde{U}_j/\Gamma_j
 \end{array}$$

*Consideramos  $\tilde{\varphi}_{ij}$  como sendo definidas a menos de composição com elementos de  $\Gamma_j$ , e  $f_{ij}$  como sendo definidos a menos de conjugação por elementos de  $\Gamma_i$ .*

Além disso, não é necessariamente verdade que

$$\tilde{\varphi}_{ik} = \tilde{\varphi}_{jk} \circ \tilde{\varphi}_{ij}, \text{ quando } U_i \subset U_j \subset U_k,$$

mas deve existir um elemento  $\gamma \in \Gamma_k$  tal que

$$\gamma \tilde{\varphi}_{ik} = \tilde{\varphi}_{jk} \circ \tilde{\varphi}_{ij} \text{ e } \gamma f_{ik}(g) \gamma^{-1} = f_{ik} \circ f_{ij}(g).$$

A cada ponto  $x$  de uma orbifold  $\mathcal{O}$  podemos associar o grupo  $\Gamma_x$ , grupo de **isotropia**<sup>2</sup> de  $x$ , que está bem definido a menos de conjugação. Numa vizinhança de  $x$ ,  $U = \tilde{U}/\Gamma$ ,  $\Gamma_x$  é o subgrupo de  $\Gamma$  que age em  $\tilde{U}$  no ponto  $\tilde{x}$ , que se projeta sobre  $x$ .

**Definição 2.2.9.** O **locus singular** de uma orbifold  $\mathcal{O}$  é definido como  $\Sigma_{\mathcal{O}} = \{x \mid \Gamma_x \neq 1\}$ , ou seja,  $\Sigma_{\mathcal{O}}$  o conjunto dos pontos de  $\mathcal{O}$  cujos correspondentes em  $\tilde{U}$  possuem grupo de isotropia não trivial.

O *locus singular* é um conjunto fechado e um ponto  $p$  é dito **singular** se seu grupo de isotropia é não trivial, e é dito **regular** caso contrário.

**Exemplo 2.2.10.** Voltando ao exemplo do bilhar retangular, com grupo  $H$  de isometrias que preservam orientação geradas por reflexões ao longo dos quatro lados do retângulo  $R$ .

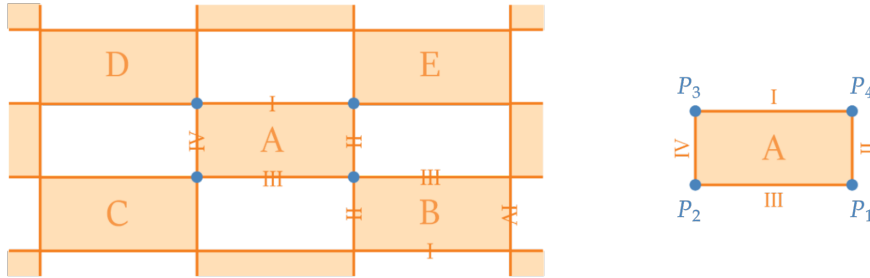


Figura 2.8: Os vértices dos retângulos preenchidos possuem grupo de isotropia não trivial.

Sabemos que  $H$  leva retângulos preenchidos em outros retângulos preenchidos, e não é difícil notar que ao levarmos  $A$  em  $B$  o ponto  $P_1$  é fixado

<sup>2</sup>**Definição:** Dados  $X$  um espaço topológico e  $G$  um grupo agindo em  $X$ . O grupo de isotropia de um ponto  $x \in X$  é o subgrupo  $G_x \subset G$  cujos elementos fixam  $x$ , isto é,  $G_x := \{g \in G : gx = x\}$ .

pelas reflexões. Por definição temos  $P_1 \in \Sigma_{\mathcal{O}}$ , pois  $P_1$  possui grupo de isotropia não trivial. Analogamente, ao levarmos  $A$  em  $C, D, E$ , notamos que  $P_2, P_3, P_4 \in \Sigma_{\mathcal{O}}$ .

Depois de alguns exemplos e munidos da definição de orbifold estamos aptos a enunciar e provar uma proposição muito interessante de Thurston identifica sob quais condições um par de espaço topológico e grupo, agindo nesse espaço, geram uma orbifold.

**Proposição 2.2.11** (Thurston [38]). *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade e  $\Gamma$  um grupo agindo propriamente descontinuamente em  $\mathcal{M}$ , então  $\mathcal{M}/\Gamma$  possui estrutura de orbifold.*

*Demonstração.* Dado  $x \in \mathcal{M}/\Gamma$ , tomamos  $\tilde{x} \in \mathcal{M}$  se projetando em  $x$  pelo quociente e  $\Gamma_x$  o grupo de isotropia de  $x$ .

Pela definição de grupo de isotropia, existe uma vizinhança  $\tilde{U}_x$  de  $\tilde{x}$  invariante por  $\Gamma_x$ . Como a ação de  $\Gamma$  é propriamente descontínua, podemos tomar uma vizinhança  $\tilde{U}_x$  de  $\tilde{x}$  tal que  $\tilde{U}_x$  é disjunto de suas imagens por elementos de  $\Gamma$  que não são elementos de  $\Gamma_x$  (elementos diferentes da identidade).

A projeção  $U_x = \tilde{U}_x/\Gamma_x$  é um homeomorfismo. Para que  $\mathcal{M}/\Gamma$  possua uma estrutura de orbifold, precisamos mostrar que existe uma cobertura por abertos (com uma estrutura igual ao que acabamos de construir) que é fechada com respeito a interseções finitas. Vamos então aumentar a cobertura  $\{U_x\}$  adjuntando interseções finitas de abertos que cobrem  $\mathcal{M}/\Gamma$ .

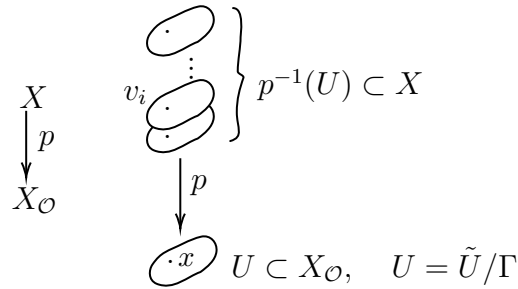
Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_k$  pontos de  $\mathcal{M}/\Gamma$  e  $\tilde{U}_{x_i}$  os abertos que são invariantes por  $\Gamma_{x_i}$  (grupo de isotropia de  $x_i$ ) que se projetam em  $U_{x_i}$  pelo quociente tais que  $U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \dots \cap U_{x_k} \neq \emptyset$ . Queremos construir um aberto em  $\tilde{U} \in \mathcal{M}$  que se projeta nessa interseção e possui um grupo de isotropia  $\Gamma'$  tal que  $U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \dots \cap U_{x_k} = \tilde{U}/\Gamma'$ .

Dizer que  $U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \dots \cap U_{x_k} \neq \emptyset$  não significa necessariamente que  $\tilde{U}_{x_1} \cap \tilde{U}_{x_2} \cap \dots \cap \tilde{U}_{x_k} \neq \emptyset$ , mas podemos afirmar que existem  $\gamma_i \in \Gamma_{x_i}$  tais que  $\gamma_1 \tilde{U}_{x_1} \cap \gamma_2 \tilde{U}_{x_2} \cap \dots \cap \gamma_k \tilde{U}_{x_k} \neq \emptyset$ . Podemos, então, definir  $\tilde{U} := \cap_{i=1}^k \gamma_i \tilde{U}_{x_i}$ , com grupo de isometria  $\gamma_1 \Gamma_1 \gamma_1^{-1} \cap \gamma_2 \Gamma_2 \gamma_2^{-1} \cap \dots \cap \gamma_k \Gamma_k \gamma_k^{-1}$ .

Desta forma,  $\mathcal{M}/\Gamma$  possui estrutura de orbifold. □

**Definição 2.2.12.** *Uma orbifold de recobrimento de uma orbifold  $\mathcal{O}$  é uma orbifold  $\tilde{\mathcal{O}}$  com um mapa de projeção  $p : X \rightarrow X_{\mathcal{O}}$  entre os espaços base, de forma que cada ponto  $x \in X_{\mathcal{O}}$  possui uma vizinhança  $U = \tilde{U}/\Gamma$  ( $\tilde{U}$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ) para o qual cada componente  $v_i$  de  $p^{-1}(U)$*

é isomorfo a  $\tilde{U}/\Gamma_i$ , onde  $\Gamma_i \subset \Gamma$  é algum subgrupo. O isomorfismo deve respeitar as projeções



A principal diferença entre recobrimentos de orbifolds e recobrimentos usuais de espaços topológicos é que o conjunto das pré-imagens de um aberto da orbifold recoberta não são necessariamente isomorfos nem ao aberto, nem entre si. Isso ocorre pois cada componente  $v_i$  dessa pré-imagem é um quociente de um aberto de  $\mathbb{R}^n$  por  $\Gamma_i \subset \Gamma$ .

**Exemplo 2.2.13.** *Munidos da definição acima não é difícil ver que o "travesseiro" (esfera com quatro pontos de singularidade) é uma orbifold de recobrimento do bilhar retangular.*

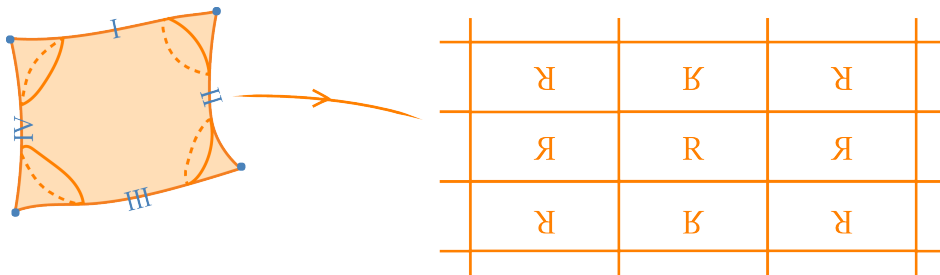


Figura 2.9: Um bilhar retangular, que possui o travesseiro como orbifold de recobrimento.

**Definição 2.2.14.** *Uma orbifold é dita **boa** se possui alguma orbifold de recobrimento que é uma variedade. Caso contrário, é uma orbifold ruim.*

Neste texto estamos interessados em orbifolds 2-dimensionais e, nesse caso, a caracterização do *locus singular* é mais simples. Vamos tentar entender melhor como esses pontos singulares da orbifold se relacionam com os subgrupos de isometria. Para isso vamos usar o fato de que dado um

sistema local de coordenadas  $U = \tilde{U}/\Gamma$  em uma orbifold  $\mathcal{O}$ , e  $x \in U$ , existe um homeomorfismo entre essa vizinhança em  $\mathcal{O}$  e uma vizinhança da origem na orbifold  $\mathbb{R}^2/\Gamma$ , onde  $\Gamma$  é um subgrupo finito de  $O(2)$  - o grupo **ortogonal de dimensão 2**.

**Proposição 2.2.15** (Thurston [38]). *O locus singular de uma orbifold 2-dimensional possui um dentre os três modelos locais:*

1. *Linhas de reflexão:  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_2$ , onde  $\mathbb{Z}_2$  age por reflexão no eixo  $y$ ;*
2. *Pontos elípticos de orden  $n$ :  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_n$ , onde  $\mathbb{Z}_n$  age por rotações;*
3. *Cantos refletores de orden  $n$ :  $\mathbb{R}^2/D_n$ , onde  $D_n$  é o grupo diedral de orden  $2n$ , com representação  $\langle a, b : a^2 = b^2 = (ab)^n = 1 \rangle$ , e os geradores  $a$  e  $b$  correspondem a reflexões em retas que se intersectam com um ângulo  $\pi/n$ .*

*Demonstração:* Só podem ocorrer esses três tipos pois esses são os únicos subgrupos finitos de  $O(2)$ . □

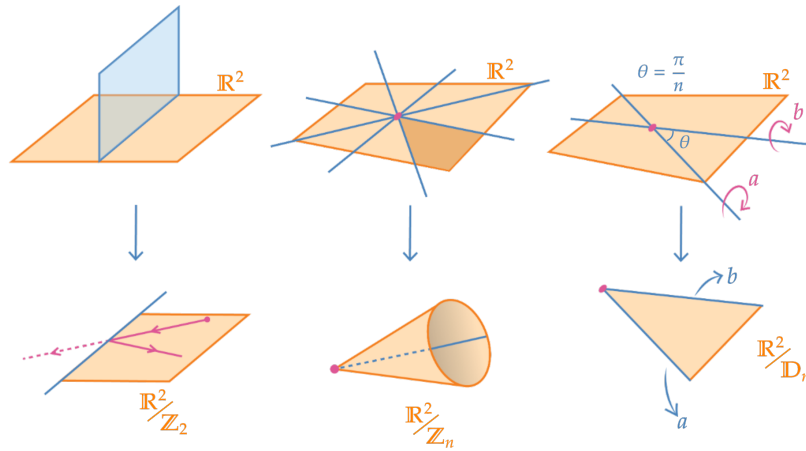


Figura 2.10: Quocientes de  $\mathbb{R}^2$  pelos grupos  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_n$  e  $D_n$ .

## 2.3 Espaços fibrados de Seifert

Nosso próximo passo na jornada até a geometrização é o estudo dos **espaços fibrados de Seifert**, e para lidar com espaços fibrados de Seifert primeiro temos de entender como funcionam espaços fibrados por círculos.

Inicialmente consideramos  $\mathbb{D}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  o disco unitário 2-dimensional. Definimos o **toro sólido fibrado trivial** como o produto  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$  munido da folheação produto por círculos, de forma que  $\mathbb{S}^1 \times \{y\}$ ,  $y \in \mathbb{D}^2$  seja uma fibra.

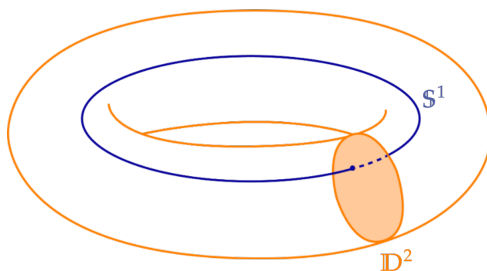


Figura 2.11: Imagem do toro sólido fibrado trivial.

**Definição 2.3.1.** *Um toro sólido fibrado é um toro sólido munido de uma folheação por círculos que é finitamente recoberta, no sentido de orbifolds, por um toro sólido fibrado trivial.*

O espaço fibrado de Seifert  $T(p, q)$ , chamado de *toro sólido fibrado padrão* para  $p, q \in \mathbb{Z}$  coprimos, é um toro construído cortando um toro sólido fibrado trivial ao longo de um disco  $D$  e colando de volta depois de um giro de  $\frac{q}{p}2\pi$ .

Olhando o exemplo abaixo pode-se notar que as fibras nesse caso giram  $p$  vezes ao redor do gerador do grupo fundamental do toro sólido e  $q$  vezes ao redor da fibra central.

**Exemplo 2.3.2.** *Tomemos o toro sólido padrão  $T(8, 3)$ , onde  $p = 8$ ,  $q = 3$ .*



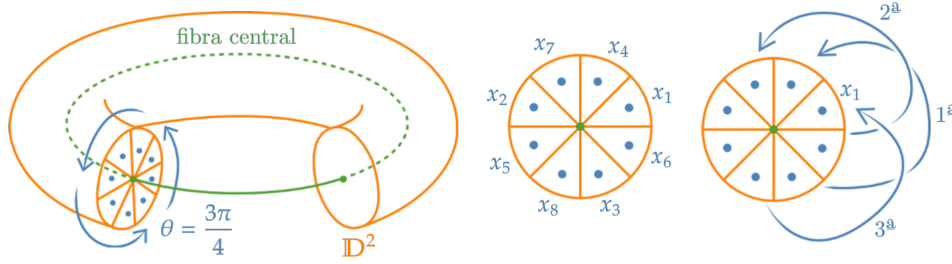


Figura 2.12:  $x_i$  é a interseção da fibra com o disco depois de  $i - 1$  voltas.

Note que a fibra gerada pela colagem após a rotação de  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  passa oito vezes pelo disco  $\mathbb{D}^2$ . Além disso, podemos contar quantas voltas a fibra deu ao redor da fibra central ao analisarmos a ordem dos pontos de interseção da fibra com  $\mathbb{D}^2$ .

$T(p, q)$  também pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\frac{\mathbb{D}^2 \times [0, 1]}{\{(z, 0) \sim (\psi_{p,q}(z), 1)\}},$$

onde  $\psi_{p,q} : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  é dada por  $\psi_{p,q}(z) = e^{(2\pi i q)/p} z$ .

Nesta construção, a fibra central é obtida colando os extremos da fibra  $\{0\} \times [0, 1]$  onde 0 é o centro do disco  $\mathbb{D}^2$ . Para  $T(p, q)$  o inteiro  $p$  é chamado de *multiplicidade da fibra central*.

**Definição 2.3.3.** A **garrafa de Klein sólida fibrada** é uma garrafa de Klein sólida cuja folheação por círculos é finitamente recoberta pelo toro sólido fibrado trivial.

Munidos dessas duas definições, podemos finalmente definir o que é um **espaço fibrado de Seifert**:

**Definição 2.3.4.** Um **espaço fibrado de Seifert** é uma 3-variedade  $\mathcal{M}$  que possui uma decomposição em círculos, nesse caso chamados também de fibras, tal que toda fibra possui uma vizinhança em  $\mathcal{M}$  que é uma união de fibras e além disso é homeomorfa a um toro sólido fibrado ou a uma garrafa de Klein sólida fibrada.

**Exemplo 2.3.5.** Um exemplo de espaço fibrado de Seifert é o cubo com a identificação dos lados opostos, mas ao identificarmos o quadrado da base

com o do topo, fazemos uma rotação de  $180^\circ$ . Nesse caso, as fibras do espaço fibrado de Seifert são as que ligam a base e o topo do cubo.

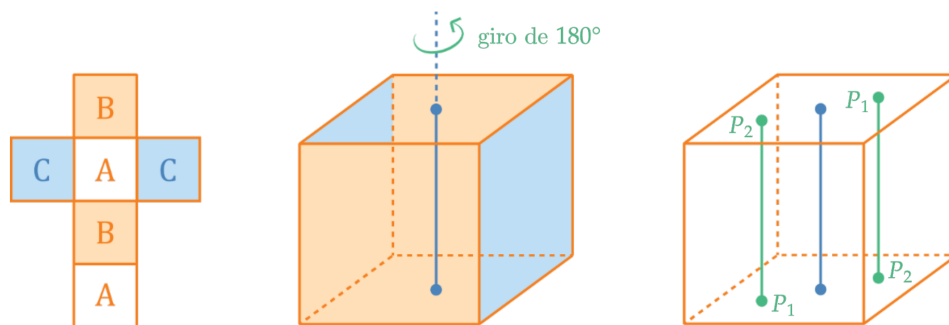


Figura 2.13: Identificações do cubo da construção do espaço fibrado de Seifert.

**Definição 2.3.6.** Uma fibra de um espaço fibrado de Seifert é dita **regular** se possui vizinhança isomorfa ao toro sólido fibrado trivial e é dita **singular** caso contrário.

**Exemplo 2.3.7.** Ao olharmos o exemplo anterior, não é difícil ver que a fibra central possui vizinhança isomorfa ao toro sólido fibrado padrão  $T(2, 1)$ .

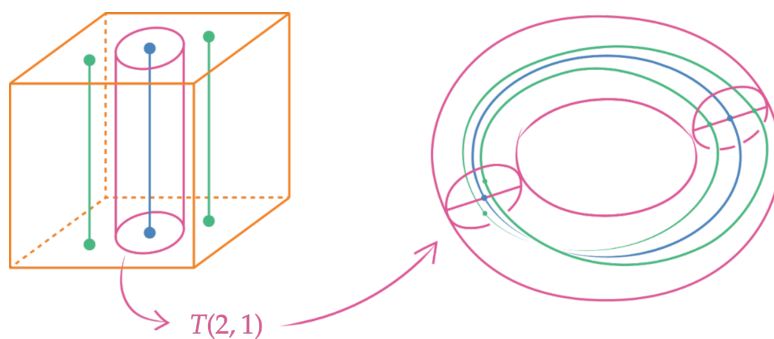


Figura 2.14: Identificação entre uma vizinhança da fibra central em  $A$  e  $T(2, 1)$ .

Portanto, temos que a fibra central é, por definição, singular. Vale também ressaltar que essa é a única fibra singular desse espaço.

Se  $p = 1$  temos claramente um toro sólido fibrado recoberto  $q$  vezes pelo toro sólido fibrado trivial e a fibra central é regular. Se  $p > 1$  temos que a fibra central é singular.

Em [7] Epstein provou o seguinte:

**Teorema 2.3.8** (Epstein). *Toda folheação por círculos de uma 3-variedade compacta é um fibrado de Seifert.*

Segue naturalmente da construção que todo espaço fibrado de Seifert é folheado por círculos. Juntando essa informação com o teorema de Epstein, temos que uma 3-variedade não homeomorfa a garrafa de Klein sólida admite uma estrutura de fibrado de Seifert se, e somente se, admite folheação por círculos.

**Definição 2.3.9.** *Dado  $\mathcal{M}^3$  um espaço fibrado de Seifert, o espaço topológico obtido ao colapsar cada fibra em um único ponto, denotada por  $X$ , é chamada de espaço base de  $\mathcal{M}^3$ . Além disso, chamamos a tripla  $(\mathcal{M}^3, X, \pi)$ , uma fibração circular na qual  $\pi$  é o mapa de recobrimento generalizado  $\pi : \mathcal{M}^3 \rightarrow X$ , de **fibração de Seifert**.*

De fato, uma das proposições fundamentais sobre fibrados de Seifert 3-dimensionais é o fato que o espaço base possui estrutura de uma orbifold boa, onde as fibras singulares se tornam pontos de cone.

Se olharmos novamente pra  $T(p, q)$  podemos enxergar uma ação de  $\mathbb{Z}_p$  em  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$  que é gerada pelo homeomorfismo dado pelo produto de uma rotação de  $\frac{2\pi}{p}$  na direção das fibras  $\mathbb{S}^1 \times \{y\}$  com uma rotação de  $\frac{q}{p}2\pi$  no disco  $\mathbb{D}^2$

Por causa dessa separação natural da ação em  $\mathbb{S}^1$  da ação em  $\mathbb{D}^2$  temos uma ação induzida por  $\mathbb{Z}_p$  no espaço base  $X$  gerado pela rotação de  $\frac{q}{p}2\pi$  no disco.

**Exemplo 2.3.10.** *Tomando  $T(p, q)$  com  $p = 4, q = 2$ , podemos visualizar a ação de  $\mathbb{Z}_4$  induzida no espaço base realizando uma rotação de  $\frac{2\pi}{4}$  na direção das fibras  $\mathbb{S}^1 \times \{y\}$  composta com uma rotação de  $2\pi\frac{2}{4}$  no disco  $\mathbb{D}^2$ .*

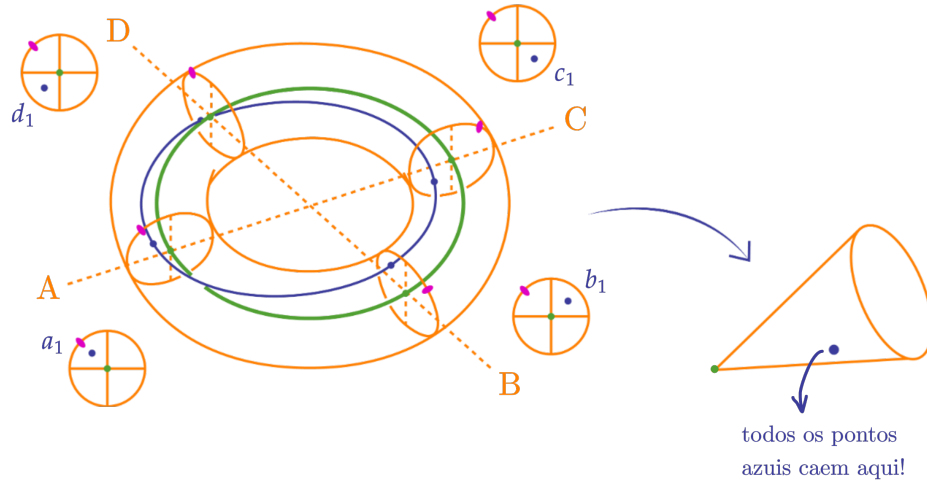


Figura 2.15: Ação induzida por  $\mathbb{Z}_4$  no espaço base com  $p = 4, q = 2$ .

**Proposição 2.3.11.** *Seja  $\mathcal{M}^3$  um fibrado de Seifert 3-dimensional. Então  $X$ , o espaço base de  $\mathcal{M}^3$ , possui estrutura de uma orbifold boa, chamada de orbifold base do fibrado.*

*Demonstração.* Por definição, o espaço fibrado de Seifert  $\mathcal{M}^3$  possui uma decomposição em círculos no qual toda fibra  $\tilde{x}$  possui uma vizinhança em  $\tilde{U}_x \subset \mathcal{M}$  que é uma união de fibras, e além disso, é isomorfa ou a um toro sólido fibrado ( $T(p, q)$  ou trivial) ou a uma garrafa de Klein sólida fibrada.

Ao quocientarmos  $\mathcal{M}$  por suas fibras, o espaço base resultante é uma superfície na qual cada ponto  $x$  (projeção de  $\tilde{x}$ ) possui uma vizinhança  $U_x$  que é isomorfa:

- Ou ao **toro sólido fibrado trivial** (TSFT) quocientado por suas fibras,
- ou ao **toro sólido padrão**  $T(p, q)$  quocientado por suas fibras,
- ou à **garrafa de Klein sólida fibrada** (GKSF) quocientada por suas fibras.

Desta forma, para mostrar que o espaço base  $X$  é uma orbifold, basta mostrar que os quocientes do TSFT, do  $T(p, q)$  e da GKSF são orbifolds.

◦  $\tilde{U}_x$  vizinhança da fibra  $\tilde{x}$  isomorfa ao TSFT:

Ao quocientarmos  $\tilde{U}_x$  por suas fibras, obtemos  $U_x$  uma vizinhança do ponto  $x \in X$ .  $U_x$  é claramente um disco e  $\tilde{U}_x \rightarrow U_x$  é um fibrado no sentido usual. Portanto  $U_x$  é uma orbifold.

◦  $\tilde{U}_x$  vizinhança da fibra  $\tilde{x}$  isomorfa ao  $T(p, q)$ :

Temos, que  $\tilde{U}_x$  é uma  $p$ -fold recoberta pelo TSFT  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ . Sabemos que  $\tilde{U}_x$  possui ação de  $\mathbb{Z}_p$  (induzida pela ação natural de  $\mathbb{Z}_p$  sobre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ ) e essa ação é gerada por um homeomorfismo que é simplesmente a rotação por  $2\pi/p$  no fator  $\mathbb{S}^1$  do produto e uma rotação de  $2q\pi/p$  no fator  $\mathbb{D}^2$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 & \longrightarrow & \tilde{U}_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ U'_x & \longrightarrow & U_x \end{array}$$

Em particular, a ação de  $\mathbb{Z}_p$  restrita ao disco define a forma do espaço base  $U_x$  (pois  $\tilde{U}_x \rightarrow U_x$  colapsa as fibras  $\mathbb{S}^1$ ).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 & \longrightarrow & \tilde{U}_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^2 & \longrightarrow & \mathbb{D}^2/\mathbb{Z}_p \end{array}$$

Portanto,  $U_x$  é uma orbifold.

◦  $\tilde{U}_x$  vizinhança da fibra  $\tilde{x}$  isomorfa a GKSF:

Temos que  $\tilde{U}_x$  é 2-recoberta pelo toro sólido fibrado trivial. Desta forma, existe uma ação induzida por  $\mathbb{Z}_2$  sobre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$  gerada pelo produto da rotação por  $\pi$  no fator  $\mathbb{S}^1$  e uma reflexão no fator  $\mathbb{D}^2$ . O espaço base  $U_x$  obtido a partir de  $\tilde{U}_x$  identificando cada fibra com um ponto pode ser identificado com  $\mathbb{D}^2/\mathbb{Z}_2$ , que é uma orbifold com bordo.

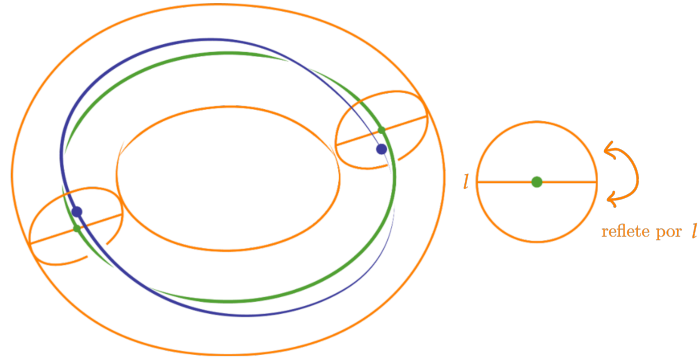


Figura 2.16: Ação induzida por  $\mathbb{Z}_2$  através da reflexão em  $\mathbb{D}^2$  por  $l$ .

Assim, temos que o espaço base  $\cup_x U_x$  de um fibrado de Seifert possui estrutura de **orbifold**, na qual pontos de cone correspondem a fibras críticas que preservam orientação e pontos em curvas de reflexão correspondem a fibras críticas que revertem orientação.  $\square$

Podemos pensar num espaço fibrado de Seifert como um tipo de fibração no qual os círculos da folheação são fibras. Para entender as ações propriamente descontínuas sobre esses espaços podemos usar orbifolds, que são mais apropriadas para este tipo de estudo de ações sobre um espaço topológico (como vimos anteriormente).

**Definição 2.3.12.** *Dado  $E$  um fibrado sobre um espaço base  $B$ ,  $\pi : E \rightarrow B$ , uma **seção** desse fibrado é um mapa contínuo  $\sigma : B \rightarrow E$  tal que  $\pi(\sigma(x)) = x, \forall x \in B$ .*

Seja  $\mathcal{M}$  um espaço fibrado de Seifert e  $\Sigma \subset \mathcal{M}$  uma superfície fechada e mergulhada em  $\mathcal{M}$ . Dizemos que  $\Sigma$  é **vertical** se é a união de fibras regulares. Nesse caso, ou  $\Sigma$  é um toro cuja projeção no espaço base é uma curva simples fechada contida no espaço complementar aos pontos de cone de  $X$ , ou  $\Sigma$  é uma garrafa de Klein, que se projeta em uma curva fechada simples que reverte orientação, novamente no espaço complementar aos pontos de cone de  $X$ .

Por outro lado, dizemos que  $\Sigma$  é **horizontal** se  $\Sigma$  for transversa as fibras em todo ponto.

Para espaços fibrados de Seifert  $\mathcal{M}$  **fechados** podemos definir um invariante que detecta a existência de superfícies horizontais. Esse invariante, chamado **número de Euler** de uma fibração de Seifert.

O número de Euler foi inicialmente definido para fibrados circulares (com fibra típica  $\mathbb{S}^1$ ) sobre superfícies fechadas e foi estendido posteriormente para fibrações de Seifert. Vamos começar definindo o número de Euler para fibrados circulares e depois vamos estender tal conceito para fibrados de Seifert.

Seja  $S$  uma superfície compacta. Se  $\partial S \neq \emptyset$  existe essencialmente apenas um fibrado circular, e quando  $\partial S = \emptyset$  existem infinitos fibrados não isomorfos.

No caso em que  $\partial S \neq \emptyset$ , todo fibrado  $\mathcal{M}$  sobre  $S$  é uma 3-variedade com bordo. Pela natureza do bordo da superfície fechada  $S$  (composto por círculos) sabemos que o bordo de  $\mathcal{M}$  é composto por toros que se projetam sobre cada uma das componentes de  $\partial S$ .

**Lema 2.3.13.** *Se  $\partial S \neq \emptyset$ , todos os fibrados circulares orientáveis sobre  $S$  são isomorfos.*

Vamos mostrar que as fibrações por círculos sobre superfícies com  $\partial S = \emptyset$  são parametrizadas por um inteiro chamado **número de Euler**, nos fornecendo uma forma eficiente de classifica-las.

Para estudarmos as fibrações por círculos sobre superfícies fechadas preferimos considerar tais fibrações como preenchimentos de Dehn de fibrações por círculos sobre superfícies com bordo.

**Definição 2.3.14.** *Dada uma 3-variedade  $\mathcal{M}$  cujo bordo é composto por toros 2-dimensionais  $T_1 \cup \dots \cup T_k$ , podemos colar toros sólidos ao longo de seus bordos em cada uma das componentes  $T_i$  do bordo de  $\mathcal{M}$ . Este processo é chamado de **preenchimento de Dehn**.*

Seja  $S$  uma superfície compacta com bordo não vazio. Definimos  $\mathcal{M} = S \tilde{\times} \mathbb{S}^1$  e fixamos ma orientação para  $\mathcal{M}$ . Além disso, denotamos por  $S$  a zero-seção  $S \tilde{\times} \{0\}$ . Cada componente de bordo  $T$  de  $\mathcal{M}$  é um toro orientado que contém duas curvas naturais, simples e não-orientadas:

- I - O bordo  $m = T \cap \partial S$  da seção  $S$ ;
- II - A fibra  $l$  do fibrado circular.

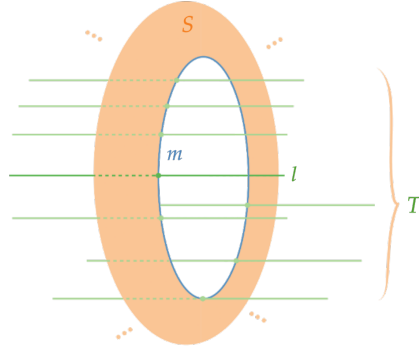


Figura 2.17: As curvas naturais  $m = T \cap S$  e  $l$ .

As curvas  $m$  e  $l$  (quando orientadas) formam uma base  $(m, l)$  para  $H_1(T, \mathbb{Z})$ , e escolhemos as orientações de  $m$  e  $l$  de forma que a base  $(m, l)$  seja positivamente orientada. O preenchimento de Dehn de uma componente de bordo  $T$  é determinado pelo par  $(p, q)$  de inteiros coprimos que indicam a curva  $\pm(pm + ql)$  que vai ser eliminada pelo preenchimento.

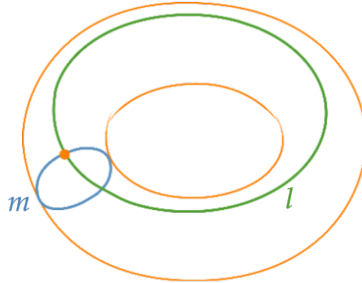


Figura 2.18: As curvas naturais  $m = T \cap S$  e  $l$ .

Vamos supor que  $S$  possui uma única componente de bordo  $T$ , e definimos  $\mathcal{M}^{fill}$  como o fibrado obtido através do preenchimento de Dehn de  $\mathcal{M}$  ao longo de  $(1, q)$ . Seja  $\hat{S}$  a superfície fechada obtida ao fecharmos o bordo de  $S$  preenchendo-o com um disco.

**Proposição 2.3.15.** *O fibrado circular definido como  $\mathcal{M} \rightarrow S$  se estende a um fibrado circular  $\mathcal{M}^{fill} \rightarrow \hat{S}$ . Toda fibração por círculos, orientada, sobre*



$\hat{S}$  é obtida desta forma, e valores distintos de  $q$  possuem fibrados vetoriais que não são isomorfos preservando a orientação.

A fibração sobre um disco  $D \subset \hat{S}$  é o toro trivial  $D \times \mathbb{S}^2$ . Se o removermos de  $\mathcal{M}^{fill}$ , obtemos  $\mathcal{M} \rightarrow S$  novamente. O número  $q$  é intrinsecamente determinado: o meridiano  $m$  não depende da seção de  $\mathcal{M} \rightarrow S$ , e a igualdade  $m' = m + ql$  determina  $q$ . Portanto, valores diferentes para  $q$  correspondem a fibrações não **isomorfas**.

**Definição 2.3.16.** *O inteiro  $q$  é o **número de Euler** da fibração por círculos fechada, e é usualmente denotado por  $e$ .*

**Corolário 2.3.17.** *Para cada  $e \in \mathbb{Z}$  e cada superfície fechada  $S$  existe uma única fibração por círculos sobre  $S$  com número de Euler  $e$ .*

A coisa mais importante sobre o número de Euler de uma fibração por círculos  $\mathcal{M} \rightarrow S$  sobre uma superfície fechada é que podemos vê-lo como uma obstrução à existência de uma **seção**  $i : S \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $i \circ \pi = id$ .

Como os fibrados de Seifert são casos particulares de fibrações por círculos, vamos generalizar o conceito de número de Euler para fibrações de Seifert e usa-lo para determinar a existência de seções.

Para facilitar a adaptação do conceito de número de Euler para fibrados de Seifert, vamos passar a ver fibrados de Seifert como preenchimentos de Dehn de fibrações por círculos, triviais, sobre superfícies com bordo. É uma abordagem similar a que usávamos anteriormente ao considerar um fibrado de Seifert como trivial fora das vizinhanças das fibras singulares, a diferença é que agora vamos estudar a parte trivial para depois preencheremos as vizinhanças destas fibras singulares utilizando preenchimentos de Dehn.

Seja  $\mathcal{M}$  o (único) fibrado circular orientado  $S \times \mathbb{S}^1$  sobre uma superfície  $S$  compacta, conexa, possivelmente não orientável com  $\partial S \neq \emptyset$ . Denotaremos por  $S$  a fatia  $S \times \{0\}$  da fibração.

Como  $\partial S \neq \emptyset$ , temos que  $\partial M \neq \emptyset$ . De fato, as componentes de bordo de  $M$  devem ser toros  $T_1, \dots, T_k$ , e para cada  $T_i$  escolhemos uma orientação para o meridiano  $m_i = T_i \cap \partial S$  e para fibra  $l_i$ . Tal orientação é escolhida de forma que  $(m_i, l_i)$  seja uma base positivamente orientada para  $H_1(T_i, \mathbb{Z})$ .

Um  $(m_i, l_i)$ -preenchimento de Dehn de  $T_i$  elimina a curva  $p_i m_i + q_i l_i$ . Dizemos que o preenchimento de Dehn é fibra-paralelo se  $p_i = 0$ , isto é, o preenchimento elimina  $0m_i + q_i l_i = q_i l_i$ , que é uma fibra.

**Definição 2.3.18.** *Uma **variedade de Seifert** é toda 3-variedade  $\mathcal{N}$  obtida a partir de  $\mathcal{M}$  ao realizarmos  $n \leq k$  preenchimentos de Dehn em toros de  $\partial\mathcal{M}$  de forma não fibra-paralela, isto é, com  $p_i \neq 0$ .*

A variedade de Seifert é fechada se  $h = k$  e possui  $k - h$  componentes de bordo caso contrário.<sup>3</sup> A proposição a seguir garante que não precisamos nos preocupar com a ordem dos  $h$  toros de  $\partial\mathcal{M}$ .

**Proposição 2.3.19.** *Toda permutação dos toros de  $\partial\mathcal{M}$  são realizadas pelos automorfismos de  $m$  que preservam os pares  $\pm(m_i, l_i)$ .*

O par  $(p_i, q_i)$  é determinado a menos de sinal, desta forma, podemos sempre assumir que  $p_i > 0$  e desta forma podemos descrever por completo uma variedade de Seifert  $\mathcal{N}$  utilizando a seguinte notação:

$$\mathcal{N} = (\hat{S}, (p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h)), \quad (2.7)$$

na qual  $\hat{S}$  denota a superfície gerada ao fecharmos  $h$  componentes de  $\partial S$  utilizando discos. A razão para utilizarmos  $\hat{S}$  ao invés de  $S$  é que  $N$  possui uma fibração trivial sobre  $\hat{S}$ .

Recordemos da definição 2.3.9 que o mapa  $\mathcal{N} \rightarrow S$  é de fato o que chamamos de fibração de Seifert. A superfície  $S$  por hipótese possui bordo não vazio e é possivelmente não-orientável. Além disso,  $S$  possui estrutura de orbifold.

**Observação 2.3.20.** *Note que uma fibração de Seifert que não possui fibras singulares é simplesmente um fibrado circular.*

**Proposição 2.3.21.** *A variedade de Seifert  $\mathcal{N} = (S, (p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h))$  possui uma fibração de Seifert  $\mathcal{N} \rightarrow S$  sobre a orbifold  $(S, p_1, \dots, p_h)$ , onde  $p_1, \dots, p_h$  são pontos singulares de  $S$ , que correspondem às fibras singulares de fato. Toda fibração de Seifert surge desta mesma construção.*

A notação 2.7 define uma fibração de Seifert  $\mathcal{N} \rightarrow S$  e uma variedade de Seifert  $\mathcal{N}$ . Agora que construímos uma notação que codifica completamente a estrutura das fibrações de Seifert podemos utiliza-la para fins de classificação.

Dizemos que duas fibrações de Seifert  $\pi_1 : \mathcal{N}_1 \rightarrow S_1$  and  $\pi_2 : \mathcal{N}_2 \rightarrow S_2$  são isomorfas se existe um difeomorfismo  $\Psi : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$  tal que  $\pi_1 = \pi_2 \circ \Psi$ .

---

<sup>3</sup>Vale ressaltar que o número de componentes de bordo de uma variedade ser zero não significa que ela é fechada, para garantir isso precisamos invocar a compacidade da variedade de Seifert.

**Proposição 2.3.22.** *Duas notações  $\mathcal{N}_1 = (S, (p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h))$  e  $\mathcal{N}_2 = (S, (r_1, s_1), \dots, (r_i, s_i))$  podem descrever fibrações isomorfas se as notações puderem ser transformadas uma na outra utilizando uma sequência finita das operações listadas abaixo:*

- $(p_i, q_i), (p_{i+1}, q_{i+1}) \mapsto (p_i, q_i + p_i), (p_i, q_{i+1} - p_{i+1});$
- $(p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h) \mapsto (p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h), (1, 0);$
- $(p_i, q_i) \mapsto (p_i, q_i + p_i)$ , se  $\partial\mathcal{N} \neq \emptyset;$
- *permutações dos pares.*

Esta proposição classifica espaços de Seifert a menos de isomorfismo. É natural nos perguntarmos sobre a classificação a menos de difeomorfismos, mas essa classificação é bem mais difícil de obter.

Munidos desta notação que classifica fibrados de Seifert podemos estender a definição de **número de Euler** de fibrações por círculos para fibrações de Seifert. Definimos o número de Euler de uma fibração  $\mathcal{N} = (\hat{S}, (p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h))$  como sendo o número

$$e(N) = \sum_{i=1}^h \left( \frac{p_i}{q_i} \right).$$

O número de Euler mede o quão distante estamos de conseguir uma seção no nosso espaço fibrado. Em particular,  $\mathcal{N}$  contém superfície horizontal mergulhada  $\Sigma$  se, e somente se,  $e(\eta) = 0$ , onde  $\eta$  denota a fibração de Seifert de  $\mathcal{N}$ .

# Capítulo 3

## Topologia das 3-variedades

Para conseguirmos chegar na conjectura da geometrização de Thurston precisamos entender melhor as estruturas geométricas. Ao longo da próxima seção vamos apresentar conceitos relacionados à geometria das 3-variedades, bem como um teorema que nos diz exatamente quais os tipos de geometria 3-dimensionais existem (provado por Thurston) e um resultado que nos ajuda a classificar 3-variedades que possuem estrutura geométrica modelada nessas geometrias.

Depois disso estaremos aptos a entender o significado da conjectura da geometrização e por que ela, depois de provada, nos dá um resultado elegante e geral de classificação, que tem como corolário um dos problemas do milênio [5].

### 3.1 Geometrias modelo

Vamos tomar como ponto de partida o conceito de geometria. A primeira definição de geometria que temos historicamente é a de Euclides, chamada de **clássica**, na qual se discutem apenas conceitos básicos como pontos, retas, relações de incidência, ângulos e comprimentos. Com o avançar do tempo e a evolução da matemática, também evoluiu a definição do que é uma geometria. Surge uma segunda definição de geometria, relacionada com o desenvolvimento da geometria diferencial, na qual a geometria de um espaço pode ser recuperada através da sua **métrica Riemanniana**.

A definição mais moderna do que é uma geometria surgiu pelas mãos de Klein, ela diz que dado um conjunto  $X$  e  $G$  um grupo agindo em  $X$ , a

**geometria do par**  $(X, G)$  é o estudo das propriedades de  $X$  invariantes (usualmente a esquerda) por  $G$ . Além disso, se  $\tilde{X}$  é o recobrimento universal de  $X$ , uma 3-variedade suave não simplesmente conexa, existe uma geometria natural  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  na qual  $\tilde{G}$  é o grupo de todos os difeomorfismos de  $\tilde{X}$  que são levantamentos de elementos de  $G$ . Desta forma, como a geometria  $(X, G)$  induz naturalmente uma geometria no recobrimento universal  $\tilde{X}$ , e podemos nos restringir, sem perda de generalidade, a estudar geometrias  $(X, G)$  nas quais  $X$  é simplesmente conexo. Vamos também nos restringir às geometrias com  $G$  maximal e que possui subgrupo  $H \subset G$ , agindo em  $X$  como grupo de recobrimento, que possui quociente compacto. Dizemos que, nesse caso, a geometria **admite quociente compacto**.

**Definição 3.1.1.** *Uma geometria 3-dimensional  $X$  é uma 3-variedade suave, simplesmente conexa equipada com uma ação suave e transitiva de um grupo de Lie  $G$  por difeomorfismos em  $X$ , com estabilizadores<sup>1</sup> compactos.*

Sabendo o que caracteriza uma geometria, também é necessário saber quando duas geometrias são equivalentes

**Definição 3.1.2.** *Dizemos que duas geometrias  $(X, G)$  e  $(X', G')$  são equivalentes se existe um difeomorfismo  $X \rightarrow X'$  que mapeia a ação de  $G$  sobre a ação de  $G'$ .*

**Definição 3.1.3.** *Uma **estrutura geométrica** em uma 3-variedade  $\mathcal{N}$  é um difeomorfismo de  $\mathcal{N}$  para  $X/\pi$ , onde  $(X, G)$  é uma geometria e  $\pi$  é um subgrupo discreto de  $G$  agindo livremente em  $X$ .*

Dizemos que a geometria de  $X$  **modela**  $\mathcal{N}$ , e diz-se nesse caso que  $\mathcal{N}$  admite uma  $X$ -estrutura, ou que  $\mathcal{N}$  é uma  $X$ -variedade.

Há muito tempo já se sabia através do teorema da uniformização, 3.3.2, que toda superfície compacta, conexa admite uma estrutura geométrica modelada em  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$  e que essas são as únicas geometrias modelo 2-dimensionais, mas ao contrário do que seria natural esperar, existem mais geometrias modelo 3-dimensionais do que simplesmente a “versão em dimensão maior” das já conhecidas em dimensão 2 (que seriam  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{H}^3$ ).

---

<sup>1</sup>também chamado de grupo de isotropia

De fato, Thurston provou um teorema classificando todas as geometrias 3-dimensionais maximais, que são oito no total. Mas vale ressaltar que existem alguns outros resultados de classificação com condições diferentes, ou seja, resultados que não pedem que a geometria seja necessariamente maximal ou admita quociente compacto.

**Teorema 3.1.4** (Thurston [39]). *Toda geometria 3-dimensional maximal, simplesmente conexa, que admite um quociente compacto é equivalente a uma das oito geometrias  $(\mathbb{X}, \text{Isom}(\mathbb{X}))$ , onde  $\mathbb{X}$  é uma dentre as seguintes variedades Riemannianas.*

$$\mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \text{Sol}_3, \text{Nil}_3, \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}). \quad (3.1)$$

Vamos agora apresentar uma ideia da demonstração, que é um tanto longa, mas fácil de acompanhar.

Dada  $(X, G)$  como descrita acima ( $X$  simplesmente conexo e  $G = \text{Isom}(X)$ ) munimos  $X$  de uma métrica  $G$ -invariante.

**Definição 3.1.5.** *Se  $G$  é um grupo topológico, então a **componente identidade** é a componente conexa do elemento identidade e de  $G$ .*

Tomamos  $x \in X$  e consideramos a componente identidade  $I(G_x)$  do estabilizador de  $x$ ,  $G_x$  (elementos de  $G$  que fixam  $x$ ). Como  $G$  age em  $X$  por isometrias,  $G_x$  age em  $T_x$  preservando o produto interno induzido pela métrica em  $X$ . Temos então que  $G_x$  é subgrupo de  $O(3)$ . Como  $I(G_x)$  é conexo por definição, temos que ou  $I(G_x)$  é trivial, ou  $I(G_x)$  é isomorfo a  $SO(2)$ , ou  $I(G_x)$  é isomorfo a  $SO(3)$ . Vamos considerar separadamente estes tres casos e entender quais geometrias são geradas por cada caso.

- Se  $I(G_x)$  for isomorfo a  $SO(3)$ , então a curvatura seccional em todos os pontos de  $X$  é a mesma, e portanto temos que  $X$  possui curvatura constante. Por este motivo, sabemos que a geometria  $(X, G)$  é equivalente a  $\mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ , ou  $\mathbb{S}^3$  dependendo apenas da curvatura ser igual a zero, menor que zero ou maior que zero.

- Se  $I(G_x)$  for isomorfo a  $SO(2)$ , podemos construir um campo de retas  $G$ -invariantes, que denotaremos por  $L_x$ , e um campo de planos  $G$ -invariantes, que denotaremos por  $P_x$ . Note que  $I(G_x)$  ser isomorfo a  $SO(2)$  nos diz que  $X$  possui um espaço 2-dimensional que é  $G$ -invariante, o que precisamos responder é se podemos “separá-lo” do resto do espaço. Como  $X$  é simplesmente conexo, podemos utilizar o campo  $L_x$  para construir um campo vetorial,  $V_x$ ,

em  $X$ . Este campo pode não ser  $G$ -invariante, mas é invariante por um subgrupo de  $G_1 \subset G$ . O campo vetorial  $V_x$  define um fluxo  $\varphi_t$  em  $X$  que preserva o produto interno (além disso, o fluxo  $\varphi_t$  descende para variedades recobertas por  $X$  desde que o grupo de recobrimento seja um subgrupo de  $G_1$ ). Novamente nossa análise deve ser dividida em casos, e dessa vez os casos dizem respeito a integrabilidade do campo de planos  $P_x$  (isso vai responder nossa pergunta sobre conseguirmos ou não “separar” o espaço 2-dimensional invariante do resto). Se  $P_x$  for integrável, temos que a menos de mudanças de escala  $X$  deve ser isométrico a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , ou a  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$  (que já apareceu anteriormente). Se  $P_x$  não for integrável, temos que a menos de mudanças de escala  $X$  deve ser isométrico a  $\mathbb{S}^3, \widetilde{SL}_2$  ou a  $Nil_3$ .

· Se  $I(G_x)$  for trivial, significa que a componente identidade  $G_e$  age livremente em  $X$ , de forma que  $X$  é naturalmente identificado com o grupo de Lie  $G_e$ . Além disso, o grupo  $G_e$  deve ser unimodular, e essa condição nos diz que existem apenas seis grupos de Lie possíveis:  $\mathbb{S}^3, \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}), \widetilde{\mathbb{E}^2}, Sol_3, Nil_3$  e  $\mathbb{R}^3$ . As condições de maximalidade excluem  $\mathbb{S}^3, \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}), \widetilde{\mathbb{E}^2}, Nil_3$  e  $\mathbb{R}^3$ . Portanto, a única opção possível é que  $X$  seja o grupo de Lie  $Sol_3$ .

Desta forma, obtivemos todas as oito geometrias modelo  $\mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, Sol_3, Nil_3, \widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ .

Além de existirem apenas essas oito geometrias, pelo teorema a seguir temos que a geometria associada a uma 3-variedade fechada é única.

**Teorema 3.1.6.** *Se  $\mathcal{M}$  é uma 3-variedade fechada que admite estrutura geométrica modelada em uma das oito geometrias discriminadas acima, então a geometria envolvida é única.*

## 3.2 As geometrias de Thurston

Nosso objetivo nesta sessão é entender um pouco mais sobre cada uma das oito variedades Riemannianas homogêneas e simplesmente conexas  $\mathbb{H}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $Nil_3$ ,  $Sol_3$ ,  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ , bem como suas métricas e grupos de isometria.

Essas oito geometrias podem ser divididas em 3 classes. A primeira é a classe das geometrias isotrópicas, que são chamadas de clássicas. Logo depois temos a classe das Geometrias produto e por último a classe das Geometrias de grupos de Lie. No caso do espaço ser um fibrado de Seifert,  $\chi$  vai denotar a **característica de Euler** da orbifold base e  $e$  o **número de Euler** da fibração de Seifert do espaço (quando a mesma existir).

### 3.2.1 Geometrias clássicas $\mathbb{R}^3$ , $\mathbb{H}^3$ , $\mathbb{S}^3$

- $\mathbb{R}^3$  - É familiar a todos que estudam matemática.

O espaço  $\mathbb{R}^3$  munido da métrica euclideana é caracterizado principalmente por possuir um total de zero surpresas: é simplesmente conexo e possui curvatura identicamente nula.

Dados dois pontos  $p, q$ , podemos medir a distância entre eles usando  $d_{\mathbb{E}}(p, q) = \sqrt{\langle p - q, p - q \rangle_{\mathbb{E}}}$  na qual  $\langle u, v \rangle_{\mathbb{E}} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$ . O grupo de isometrias de  $\mathbb{R}^3$  é o grupo euclidiano  $E(3)$ , que possui seis graus de liberdade das quais 3 são atribuídas a simetrias translacionais e as outras 3 são atribuídas a simetrias rotacionais. Além disso, podemos listar os tipos de isometria de  $Isom(\mathbb{R}^3)$  facilmente. São elas: Identidade, translação, rotação ao redor de um eixo, reflexão em um plano, inversão por um ponto, “screw displacement” (ou deslocamento em parafuso em tradução literal) que é uma combinação de rotação ao redor de um eixo e translação, “transflection” (transflecção em tradução livre) que é uma combinação de reflexão por um plano e translação e rotação imprópria que é uma combinação de rotação e inversão por um ponto.

Uma 3-variedade  $\mathcal{M}$  que possui estrutura geométrica modelada em  $\mathbb{R}^3$  pode ser relacionada a quocientes de  $\mathbb{R}^3$  pela ação de subgrupos de isometrias de  $\mathbb{R}^3$ . Tomemos como exemplo de 3-variedade o espaço fibrado de Seifert construído no exemplo 2.3.5 Existem no total 10 3-variedades fechadas e planas, que são precisamente as variedades que admitem uma estrutura de espaço fibrado de Seifert com  $\chi$  e  $e$  iguais a zero. Em [37] pode-se encontrar uma classificação detalhada de todas.



- $\mathbb{H}^3$  - Essa é a única 3-variedade simplesmente conexa com curvatura  $-1$ . Além disso,  $\mathbb{H}^3$  é modelado pelo 3-espaço superior  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$  munido da métrica hiperbólica dada por  $ds^2 = (1/z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ .

Tal qual o espaço euclidiano, o grupo de isometrias de  $\mathbb{H}^3$  também possui dimensão 6. Porém, enquanto topologicamente só existem 10 3-variedades fechadas distintas que são quocientes de  $\mathbb{R}^3$ , existem infinitas 3-variedades hiperbólicas topologicamente distintas que são quocientes de  $\mathbb{H}^3$ , o que mostra que o seu grupo de isometrias possui uma estrutura muito mais rica do que a de  $E(3)$ . De fato, a riqueza no número de variedades modeladas pela geometria hiperbólica ficará evidenciada ao longo da Seção 3.3. Por hora, apenas observamos que nenhuma variedade fechada modelada em  $\mathbb{H}^3$  possui estrutura de fibrado de Seifert.

- $\mathbb{S}^3$  - Uma forma de ver  $\mathbb{S}^3$  é vê-lo como a esfera unitária em  $\mathbb{R}^4$  munida da métrica euclidiana usual induzida pela de  $\mathbb{R}^4$  dada por  $d_{\mathbb{S}}(p, q) = \cos^{-1}(\langle p, q \rangle_{\mathbb{E}})$ . O grupo de isometrias de  $\mathbb{S}^3$  é o grupo ortogonal  $O(4)$ .

Além disso, se  $\mathcal{M}$  é uma 3-variedade fechada que admite estrutura geométrica modelada em  $\mathbb{S}^3$ , então  $\mathcal{M}$  possui uma estrutura de fibração de Seifert  $\eta$  com  $e(\eta) \neq 0$  e  $\chi(X) > 0$ .

**Exemplo 3.2.1.** *Um exemplo famoso de quociente da esfera  $\mathbb{S}^3$  é o espaço dodecaédrico de Poincaré, também conhecido como a esfera de homologia de Poincaré. Este espaço topológico que serviu como contra-exemplo para a primeira versão da conjectura de Poincaré.*

*Poincaré supôs inicialmente que toda 3-variedade com grupo fundamental finito seria homeomorfa a 3-esfera, mas o espaço dodecaédrico também possui grupo fundamental finito (de ordem 120). A descoberta deste contra-exemplo levou à reformulação da conjectura para considerar o grupo de homologia ao invés do grupo fundamental.*

*A homologia de Poincaré é isomorfa a  $\mathbb{S}^3/\tilde{I}$ , onde  $\tilde{I}$  é o grupo binário icosaédrico. Além disso, existe outra construção que parte de um dodecaedro e identifica as faces opostas fazendo a menor rotação possível para que a identificação faça sentido.*

**Exemplo 3.2.2.** *Uma família de exemplos de quocientes  $\mathbb{S}^3/G$  aparece ao quocientarmos  $\mathbb{S}^3$  por subgrupos finitos, e portando cíclicos, de  $\mathbb{S}^1$  agindo*

livremente em  $\mathbb{S}^3$  preservando fibrações de Seifert infinitas e não isomorfas. Os espaços dessa família são isomorfos aos espaços lenticulares  $L(n; 1)$ ,  $n \geq 2$ .

**Definição 3.2.3.** *Sejam  $p, q$  inteiros coprimos e considere  $\mathbb{S}^3$  como a esfera unitária  $\mathbb{C}^2$ . Então a  $\mathbb{Z}/p$ -ação em  $\mathbb{S}^3$  gerada pelo homeomorfismo*

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi i q}{p}} z_2)$$

é livre. O espaço quociente é chamado espaço lenticular  $L(p; q)$ .

### 3.2.2 Geometrias produto $S^2 \times \mathbb{R}$ , $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

- $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  - É a mais simples dentre as 8 geometrias.

Possui métrica induzida de forma canônica pelas métricas das componentes  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{R}$ , e tem como grupo de isometrias  $Isom(\mathbb{S}^2) \times Isom(\mathbb{R})$ .

Se  $\mathcal{M}$  é uma 3-variedade fechada com estrutura geométrica modelada em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e se a folheação natural de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  por retas se projeta numa folheação de  $\mathcal{M}$  por fibras  $\mathbb{S}^1$ , então  $\mathcal{M}$  possui uma estrutura de fibração de Seifert  $\eta$ . Claramente a orbifold base é recoberta por  $\mathbb{S}^2$ , ou seja, é esférica, e portanto  $\chi(X) > 0$ . Além disso,  $e(\eta) = 0$ .

Como o grupo de isometrias de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  é  $Isom(\mathbb{S}^2) \times Isom(\mathbb{R})$  podemos estudar os quocientes de  $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})/G$  apenas entendendo  $G$  através dos seus geradores  $(\alpha, \beta) \in Isom(\mathbb{S}^2) \times Isom(\mathbb{R})$ . Os elementos  $\alpha \in Isom(\mathbb{S}^2)$  e  $\beta \in Isom(\mathbb{R})$  nos dizem quais identificações de  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{R}$  vão dar forma ao espaço quociente.

Os quocientes fechados e orientáveis de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  são construídos da seguinte maneira:

Tomamos  $G$  como sendo o grupo infinito cíclico gerado por  $(\alpha, \beta)$ , com  $\alpha$  a identidade em  $\mathbb{S}^2$  e  $\beta$  a translação em  $\mathbb{R}$ , então o espaço quociente  $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})/G$  é homeomorfo à  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Além disso, se substituirmos  $\alpha$  pelo mapa antipodal em  $\mathbb{S}^2$  obtemos uma fibração não trivial por  $\mathbb{S}^2$  sobre  $\mathbb{S}^1$ , a qual denotaremos  $\mathbb{S}^2 \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ .

Para construirmos o segundo quociente fechado e orientável de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  tomamos  $G$  o grupo gerado por  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in Isom(\mathbb{S}^2) \times Isom(\mathbb{R})$ , onde  $\alpha_1, \alpha_2$  são o mapa antipodal em  $\mathbb{S}^2$  e  $\beta_1, \beta_2$  são reflexões distintas de  $\mathbb{R}$ . Desta forma, o quociente  $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})/G$  é homeomorfo a  $P^3 \# P^3$ .

Vale ressaltar que podemos também construir os espaços quocientes não orientáveis  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

- $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  - A geometria desse espaço produto é dada pela métrica produto, como em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , mas nesse caso temos infinitas 3-variedades com estrutura geométrica modelada em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Tomamos como exemplo o produto de uma superfície hiperbólica por  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{S}^1$ .

O grupo de isometrias, assim como em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , é dado por um produto, mas nesse caso  $Isom(\mathbb{H}^2) \times Isom(\mathbb{R})$ .

Supondo que  $G$  é um subgrupo discreto de isometrias de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  agindo livremente no quociente  $\mathcal{M}$  de forma que  $\mathcal{M}$  seja um fibrado de Seifert, existe uma projeção natural  $G \rightarrow Isom(\mathbb{H}^2)$  com imagem  $\Gamma$  e a orbifold base  $X$  em  $\mathcal{M}$  é  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ . Se  $X$  é compacta, temos  $\chi(X) < 0$ . Além disso, a estrutura de fibração de Seifert induzida em  $\mathcal{M}$  tem número de Euler  $e(\eta) = 0$ .

### 3.2.3 Geometrias de grupos de Lie $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R}), Nil_3, Sol_3$

- $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$  - Para entender  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ , que é o recobrimento universal de  $SL_2(\mathbb{R})$ , podemos começar conhecendo mais sobre o seu espaço base.

$SL_2(\mathbb{R})$  é o grupo de Lie 3-dimensional de todas as matrizes reais  $2 \times 2$  com determinante igual a 1. Isso significa que os elementos de  $SL_2(\mathbb{R})$  são matrizes  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tais que  $ad - bc = 1$ .

Podemos então tomar seu recobrimento universal,  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ , e a partir de agora vamos passar a omitir  $(\mathbb{R})$  por simplicidade.

Considere agora o plano hiperbólico,  $\mathbb{H}^2$ , temos que a métrica em  $T\mathbb{H}^2$  induz uma métrica no fibrado tangente unitário  $U\mathbb{H}^2$  de  $\mathbb{H}^2$ , que é subvariedade de  $T\mathbb{H}^2$ . Além disso existe uma identificação entre  $U\mathbb{H}^2$  e  $PSL_2$ , o grupo de isometrias que preserva orientação de  $\mathbb{H}^2$  (construção da identificação apresentada em 4.1) então conseguimos também uma métrica para  $PSL_2$ . Como  $PSL_2$  é coberto duplamente por  $SL_2$ , seu recobrimento universal é  $\widetilde{SL}_2$ , o que nos fornece o seguinte mapa de recobrimento:

$$\widetilde{SL}_2 \xrightarrow{p} SL_2 \xrightarrow{q} U\mathbb{H}^2. \quad (3.2)$$

Estamos interessados na métrica induzida em  $\widetilde{SL}_2$  pelo recobrimento (3.2). Vamos explorar a construção da geometria de  $\widetilde{SL}_2$  durante a elaboração do contra-exemplo para a conjectura de Meeks, Pérez e Ros (4.2).

Toda 3-variedade com estrutura geométrica modelada em  $\widetilde{SL}_2$  é um espaço fibrado de Seifert, onde as fibras da fibração de Seifert são imagens das fibras de  $\widetilde{SL}_2$ .

Uma 3-variedade  $\mathcal{M}$  fechada que admite estrutura geométrica modelada em  $\widetilde{SL}_2$ , pelo teorema (4.1.5), herda naturalmente uma estrutura de fibração de Seifert  $\eta$  sobre uma orbifold  $X$ , que é o quociente de  $\mathbb{H}^2$  por algum grupo de isometrias e portanto  $\chi(X) < 0$ . Além disso,  $e(\eta) \neq 0$ .

- $Nil_3$  -  $Nil_3$  é um grupo de Lie 3-dimensional que consiste de todas as matrizes triangulares superiores da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , munidas de multiplicação usual de matrizes, tem esse nome pois sua álgebra de Lie é **nil**potente.  $Nil_3$  é uma fibração por retas sobre o plano Euclidiano  $\mathbb{R}^2$  e como as isometrias de  $Nil_3$  preservam a estrutura de fibração, cada isometria de  $Nil_3$  induz também uma isometria no plano  $\mathbb{R}^2$ , desta forma podemos ver que o grupo de isometrias  $Isom(Nil_3)$  possui exatamente duas componentes.

Podemos identificar  $Nil_3$  com  $\mathbb{R}^3$  munido de uma métrica invariante por  $Nil_3$  dada por  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$ . Existe uma ação de  $S^1$  em  $Nil_3$  que é um grupo de automorfismos que preservam a métrica que acabamos de apresentar. Ela também preserva a estrutura de fibração, mas induz uma rotação em  $\mathbb{R}^2$  que fixa a origem. O grupo  $Isom(Nil_3)$  é gerado pelo grupo  $Nil$  e por essa ação nas fibras.

Se  $\mathcal{M}$  é uma 3-variedade fechada com estrutura geométrica modelada em  $Nil_3$ , então  $\mathcal{M}$  deve herdar a estrutura de fibração de Seifert  $\eta$  da folheação de  $Nil_3$  por retas. A orbifold base  $X$  de  $\eta$  é o quociente de  $\mathbb{R}^2$  por algum grupo de isometria e portanto  $\chi(X) = 0$ , e além disso,  $e(\eta) \neq 0$ .

- $Sol_3$  - O espaço  $Sol_3$  é um exemplo de grupo de Lie **sol**úvel, que consiste de todas as matrizes

$$\begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , munidas de multiplicação usual de matrizes.  $Sol_3$  é difeomorfo a  $\mathbb{R}^3$  e quando equipada com a métrica invariante a esquerda definida por  $ds^2 = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  é uma das oito geometrias modelo.

O grupo de isometrias  $Isom(Sol_3)$  possui oito componentes.

### 3.2.4 As 6 geometrias fibradas

Depois de termos visto um pouco sobre cada uma das oito geometrias e como se parecem as 3-variedades fechadas com estrutura modelada nelas, podemos pontuar que seis destas oito geometrias modelo, todas as variedades fechadas, são espaços fibrados de Seifert.

O teorema a seguir nos diz que quando a estrutura geométrica de uma 3-variedade é modelada em uma das geometrias fibradas ela pode ser determinada por  $\chi$ , o número de Euler da orbifold base  $X$  do espaço fibrado de Seifert, e  $e$ , o número de Euler da fibração de Seifert  $\eta$ .

**Teorema 3.2.4** ([37]). *Seja  $\mathcal{M}$  uma 3-variedade fechada.  $\mathcal{M}$  possui estrutura geométrica modelada em uma das geometrias  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\widetilde{SL}_2$ , ou,  $Nil_3$  se, e somente se,  $\mathcal{M}$  for um espaço fibrado de Seifert. Além disso, se  $\mathcal{M}$  possui estrutura de fibração de Seifert  $\eta$  sobre uma orbifold  $X$ , então a geometria apropriada para  $\mathcal{M}$  é determinada por  $\chi(X)$  e  $e(\eta)$  de acordo com a tabela abaixo:*

	$\chi < 0$	$\chi = 0$	$\chi > 0$
$e = 0$	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
$e \neq 0$	$\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$	$Nil_3$	$\mathbb{S}^3$

O teorema 3.2.4 nos dá uma boa divisão de espaços fibrados de Seifert fechados em 6 classes que dependem de que tipo de estrutura geométrica eles admitem. Determinamos qual a geometria apropriada a partir de  $\chi$  e  $e$ . Embora seja muito geral, infelizmente o único tipo de demonstração que existe consiste de fazermos uma avaliação caso a caso, o que foge completamente do escopo deste texto, mas pode ser encontrada com todos os detalhes em [37].

Outro teorema útil para a classificação de quais estruturas geométricas podem modelar quais 3-variedades é o seguinte:

**Teorema 3.2.5** ([37]). *Seja  $\mathcal{M}$  uma 3-variedade fechada.  $\mathcal{M}$  possui estrutura geométrica modelada em  $Sol_3$  se, e somente se,  $\mathcal{M}$  é finitamente recoberta por um “torus bundle” sobre  $S^1$  com mapa de identificação hiperbólico.*

**Definição 3.2.6.** *Seja  $f : T^2 \rightarrow T^2$  um homeomorfismo que preserva orientação. Tomamos o produto cartesiano  $T^2 \times I$  de  $T$  com o intervalo unitário  $I$ . A 3-variedade  $M(f)$  obtida ao identificarmos as duas componentes de fronteira da variedade pelo mapa  $f$  é um “torus bundle” com monodromia  $f$ .*

Munidos destes dois teoremas podemos tomar uma variedade fechada que possui estrutura geométrica modelada em uma dentre as oito geometrias modelo 3-dimensionais e saber se sua estrutura é modelada em uma das seis geometrias fibradas ou em  $Sol_3$ . Como sabemos que só existem oito geometrias modelo, se sua estrutura geométrica não for compatível com nenhuma dentre  $S^3$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\widetilde{SL}_2$ ,  $Nil_3$  ou  $Sol_3$ , então temos que ela deve ser modelada em  $\mathbb{H}^3$ .

### 3.3 Geometrização

A história da geometrização teve início com Henri Poincaré, que após desenvolver ferramentas importantíssimas para o estudo de geometria e topologia (tais como homologia, homeomorfismos e grupo fundamental) passou a se perguntar se homologia e homotopia eram a mesma coisa (e a resposta é não, como ele mesmo provou com um contra-exemplo). Essa pergunta gerou a conjectura de Poincaré:

**Teorema 3.3.1** (Conjectura de Poincaré). *Toda 3-variedade fechada e simplesmente conexa é homeomorfa a 3-esfera,  $S^3$ .*

Além disso, Poicaré enunciou em 1882 (e Klein em 1883) o teorema da uniformização, que foi provado de forma independente por Poincaré[29] e Koebe [18] em 1907.

**Teorema 3.3.2** (Uniformização). *Toda superfície compacta e conexa admite estrutura geométrica modelada em  $\mathbb{R}^2$ ,  $S^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ .*

Este é um resultado de classificação ótimo, pois toma todas as superfícies conexas, compactas e diz exatamente que tipo de estruturas geométricas elas podem ter como modelo. Thurston, inspirado por esse resultado, desejava

generalizá-lo para dimensões maiores, em particular dimensão 3 e ao longo do processo provou que existem não apenas 3 geometrias modelo 3-dimensionais, mas sim 8.

Agora vamos ver algumas definições relacionadas a decomposições e somas de variedades antes de voltar ao nosso interesse principal.

**Definição 3.3.3.** *A soma conexa  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \# \mathcal{M}_2$  de duas 3-variedades orientadas e conexas é construída retirando o interior de uma bola fechada de cada uma das duas variedades,  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$ , e então colando as duas esferas resultantes (como componentes de bordo das variedades) por um difeomorfismo que reverte orientação.*

**Definição 3.3.4.** *Uma 3-variedade  $\mathcal{M}$  é dita **prima** se toda soma conexa  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \# \mathcal{M}_2$  é trivial, isto é, se alguma das duas componentes da soma  $\mathcal{M}_1$ , ou  $\mathcal{M}_2$  for uma esfera 3-dimensional.*

**Definição 3.3.5.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma 3-variedade. Dizemos que  $\mathcal{M}$  é **irreduzível** se toda bola 2-dimensional mergulhada em  $\mathcal{M}$  é fronteira de uma 3-esfera em  $\mathcal{M}$ .*

Não é difícil notar que as definições de prima e irreduzível são parecidas. De fato, a única 3-variedade prima que não é irreduzível é  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , e é o que diz a próxima proposição.

**Proposição 3.3.6.** *Toda 3-variedade orientada  $N \neq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  é prima se, e somente se, é irreduzível.*

*Demonstração:* A operação inversa de uma soma conexa  $N = N_1 \# N_2$  consiste em cortarmos  $N$  ao longo de uma esfera de separação<sup>2</sup>  $S \subset N$  e depois fechando as variedades resultantes com bolas.

A componente  $N_i$  cortada é  $\mathbb{S}^3$  se, e somente se,  $N_i$  é uma bola. Desta forma, a soma conexa é trivial se, e somente se  $S$  delimita uma bola em um dos lados do corte. Portanto,  $N$  é prima se, e somente se toda esfera de separação  $S \subset N$  delimita uma bola.

Se  $N$  é irreduzível, então pela afirmação acima  $N$  é também prima. Pelo outro lado, se  $N$  for prima e não irreduzível, então ela possui uma esfera  $S \subset N$  tal que  $N - S$  possui uma única componente conexa. Existe uma curva simples fechada  $\alpha \subset N$  que intersecciona  $S$  transversalmente em um

---

<sup>2</sup>separating sphere - é uma esfera  $S \subset N$  tal que  $N - S$  é não conexa.

ponto, tomando as vizinhanças tubulares de  $S$  e  $\alpha$  vamos definir  $M$  como a união destas vizinhanças.

Notemos que  $\partial M$  é uma esfera, denotada por  $S'$ . A esfera  $S'$  separa  $N$  em duas componentes e como  $N$  é prima, temos que ou  $M$  é uma bola ou  $N - M$  é uma bola. Como  $\alpha \subset M$  e  $\alpha$  é homotopicamente não trivial, de fato  $N = M \cup B$ , onde  $B$  é uma bola.

Vamos mostrar que  $N = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Mergulhamos  $S \cup \alpha$  naturalmente em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  pois  $S$  é homeomorfa a  $\mathbb{S}^2 \times \{y\}$  e  $\alpha$  é homeomorfa a  $\{x\} \times \mathbb{S}^1$ .

Decompondo  $\mathbb{S}^2 = D \cup D'$  em dois discos e  $\mathbb{S}^1 = I \cup I'$  em dois intervalos, a variedade  $M$  também admite o mergulho de  $\mathbb{S}^2 \times (I \cup D) \times \mathbb{S}^1$  e seu complemento  $B = D' \times I'$  é uma bola. Portanto  $N = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . □

Não é difícil produzir 3-variedades compactas que não admitem uma única geometria dentre as oito, então para obtermos um resultado análogo à uniformização se fez necessário considerar "pedaços" da 3-variedade, ao invés da variedade inteira, e depois determinar se cada uma das partes possui estrutura geométrica. Resultados de Kneser [17] e Milnor [23] garantem a existência e unicidade de uma decomposição ao longo de esferas.

**Teorema 3.3.7** (Kneser-Milnor). *Toda 3-variedade  $\mathcal{M}$  fechada e orientável é soma conexa de variedades primas. Os fatores são determinados unicamente a menos de homeomorfismo.*

Mas com o avanço da teoria notou-se que 3-variedades com bordo toroidal possuem um papel importante e foi necessário considerar decomposição ao longo de toros, conhecida como decomposição JSJ, que possibilitou a versão mais moderna da conjectura da geometrização de Thurston [40].

**Definição 3.3.8.** *Seja  $S$  uma superfície propriamente mergulhada em uma 3-variedade  $\mathcal{M}$  suave ou linear por partes. Um disco de compressão  $D$  é um disco mergulhado em  $\mathcal{M}$  tal que  $D \cap S = \partial D$  e a interseção é transversal. Se a curva  $\partial D$  não delimita um disco em  $S$ , então dizemos que  $D$  é um disco de compressão não-trivial.*

*Se  $S$  não possui disco não-trivial, então dizemos que  $S$  é uma superfície compressível. Se  $S$  não é nem uma 2-esfera nem uma superfície compressível então  $S$  é dita **incompressível**.*

**Definição 3.3.9.** *Um toro essencial pode ser definido geometricamente como um toro incompressível, mergulhado e não paralelo ao bordo. Uma 3-variedade é dita **atoroidal** se não contém um toro essencial.*



**Teorema 3.3.10** (Decomposição JSJ). *Seja  $\mathcal{M}$  uma 3-variedade irredutível, orientável e fechada (compacta sem bordo). Então  $\mathcal{M}$  possui decomposição (a menos de isotopia) em uma coleção minimal de toros incompressíveis mergulhados e disjuntos tal que cada uma das componentes da 3-variedade obtidas ao cortar  $\mathcal{M}$  ao longo dos toros é, ou atoroidal, ou um fibrado de Seifert.*

**Definição 3.3.11.** *Dizemos que uma 3-variedade compacta com bordo toroidal (possivelmente vazio) é **geométrica** se o interior possui uma estrutura geométrica completa de volume finito modelada em uma das oito geometrias.*

Agora que sabemos o que significa uma variedade ser geométrica e que pode-se decompor 3-variedades de forma canônica longo de esferas ou toros, estamos prontos para enunciar a conjectura da geometrização de Thurston.

**Conjectura 3.3.12** (Thurston 1982 [40]). *Toda 3-variedade fechada e irredutível possui uma decomposição, ao longo de toros, em componentes geométricas.*

Nesse mesmo texto Thurston demonstra que a conjectura vale para 3-variedades Haken, num resultado que ficou conhecido como teorema da hiperbolização.

**Teorema 3.3.13** (Hiperbolização). *Seja  $N$  uma 3-variedade compacta, orientável e irredutível com bordo toroidal (possivelmente vazio). Se  $N$  é atoroidal e  $\pi_1(N)$  é infinito, então  $N$  é hiperbólica.*

**Definição 3.3.14.** *Dizemos que uma 3-variedade orientável fechada é **Haken**, se é irredutível e contém uma superfície incompressível de dois lados mergulhada  $\Sigma$  de gênero  $\geq 1$ . Caso contrário, é dita **não-Haken**.*

Além da hiperbolização, Thurston também escreveu a conjectura da eliptização, que tem a conjectura de Poincaré como corolário. O teorema da Eliptização junto com o teorema da Hiperbolização nos dizem que toda 3-variedade atoroidal ou é esférica ou é hiperbólica.

**Teorema 3.3.15** (Eliptização). *Toda 3-variedade fechada orientável com grupo fundamental finito é recoberto pela esfera.*

Demonstrações completas para esses dois teoremas foram apresentadas por Perelman [25, 26, 27] ao provar a conjectura de Thurston (que implica tanto a Hiperbolização quanto a Eliptização), e o caminho percorrido por

Perelman na demonstração usando fluxo de Ricci foi indicado por Hamilton em [10, 11, 12].

Após a demonstração da geometrização, passamos a poder utilizar o grupo fundamental de  $\mathcal{N}$ , uma  $X$ -variedade, para determinar em qual das oito geometrias  $\mathcal{N}$  é modelada. De fato, a partir do grupo fundamental podemos também caracterizar sua topologia e estrutura fibrada (ou a inexistência de tal estrutura). Essa classificação se dá de acordo com a tabela abaixo que pode ser encontrada em [1].

**Definição 3.3.16.** *Dada uma propriedade  $P$  de grupos, dizemos que um  $G$  é virtualmente  $P$  se  $G$  admite um subgrupo de índice finito satisfazendo  $P$ . Além disso, podemos usar essa nomenclatura quando  $P$  é outro grupo, i.e., se  $H$  é um grupo dizemos que  $G$  é **virtualmente**  $H$  se  $G$  possui subgrupo finito  $K$  tal que  $K$  é isomorfo a  $H$ .*

**Proposição 3.3.17.** *Seja  $\mathcal{N}$  uma 3-variedade fechada modelada em  $\mathbb{X}$  dentre as oito geometrias de Thurston (3.1.4), então a tabela abaixo nos diz como determinar qual  $\mathbb{X}$  a partir de  $\pi_1(\mathcal{N})$  e apresenta o tipo de topologia que  $\mathcal{N}$  possui. Além disso, as últimas duas colunas dessa tabela recuperam o teorema 3.2.4.*

<i>Geometria</i>	$\pi_1(\mathcal{N})$	<i>Topologia</i>	$\chi(X)$	$e(\eta)$
$\mathbb{S}^3$	$\pi_1(\mathcal{N})$ finito	$\mathcal{N}$ finitamente recoberta por $\mathbb{S}^3$	$> 0$	$\neq 0$
$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	Caso contrário, $\pi_1(\mathcal{N}) = \mathbb{Z}$ ou $D_\infty$	$\mathcal{N}$ ou seu recobrimento duplo é igual a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$	$> 0$	$= 0$
$\mathbb{R}^3$	Caso contrário, $\pi_1(\mathcal{N})$ é virtualmente $\mathbb{Z}^3$	$\mathcal{N}$ finitamente recoberta por $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$	$= 0$	$= 0$
$Nil_3$	Caso contrário, $\pi_1(\mathcal{N})$ virtualmente nilpotente, mas não virtualmente $\mathbb{Z}^3$	$\mathcal{N}$ finitamente recoberta por um "torus bundle" com monodromia nilpotente	$= 0$	$\neq 0$
$Sol_3$	Caso contrário, $\pi_1(\mathcal{N})$ solúvel, mas não virtualmente nilpotente	$\mathcal{N}$ ou seu recobrimento duplo é um "torus bundle" com monodromia Anosov		
$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	Caso contrário, $\pi_1(\mathcal{N})$ virtualmente um produto $\mathbb{Z} \times F$ , com $F$ livre e não cíclico	$\mathcal{N}$ finitamente recoberta por $\mathbb{S}^1 \times \Sigma$ , onde $\Sigma$ é uma superfície com $\chi(\Sigma) < 0$	$< 0$	$= 0$
$\widetilde{SL}_2$	Caso contrário, $\pi_1(\mathcal{N})$ é uma extensão não separável de um grupo livre não cíclico $F$ por $\mathbb{Z}$	$\mathcal{N}$ finitamente recoberta por $\mathbb{S}^1$ bundle sobre uma superfície $\Sigma$ com $\chi(\Sigma) < 0$	$< 0$	$\neq 0$
$\mathbb{H}^3$	caso contrário	$\mathcal{N}$ atoroidal		

# Capítulo 4

## Aplicando nossos conhecimentos

Superfícies mínimas fechadas, compactas e sem bordo não existem em  $\mathbb{R}^3$ , pois colapsam durante o processo de minimização. Se ao invés de  $\mathbb{R}^3$  considerarmos superfícies mínimas fechadas, compactas e sem bordo em 3-variedades Riemannianas, podemos impor condições topológicas que garantem a existência de tais subvariedades. Estas condições topológicas impedem a superfície de colapsar.

**Definição 4.0.1.** *Uma imersão  $f : F \rightarrow \mathcal{M}$  de uma superfície compacta  $F$  em uma 3-variedade Riemanniana  $\mathcal{M}$  é mínima se possui curvatura média igual a zero.*

**Definição 4.0.2.** *Um mapa de uma superfície é dito **de menor área** se possui área não maior que qualquer outro mapa homotópico a ele.*

**Definição 4.0.3.** *Um mapa  $f : F \rightarrow \mathcal{M}$  é dito **minimizante de área** se este mapa é homologicamente minimizante, de forma que a área da sua imagem ( $f(F)$  em  $\mathcal{M}$ ) não seja maior que a área de qualquer superfície na mesma classe de homologia.*

O estudo da existência de superfícies mínimas, fechadas e compactas em 3-variedades Riemannianas começou, naturalmente, com a esfera e depois seguiu para superfícies de gênero maior. Consideremos  $\mathcal{M}$  uma 3-variedade Riemanniana fechada com segundo grupo de homotopia,  $\pi_2$ , não trivial. Isso nos diz que existe ao menos uma família de esferas 2-dimensionais homotópicas e não contráteis em  $\mathcal{M}$ .

Seja  $\mathcal{F}$  a família de mapas suaves  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  da esfera 2-dimensional em  $\mathcal{M}$  tais que  $f(\mathbb{S}^2)$  é não homotópica a um ponto (ie, consideramos apenas imersões nas quais a imagem é não-contrátil) ou equivalentemente  $f(\mathbb{S}^2)$  representa um elemento não-trivial de  $\pi_2(\mathcal{M})$ .

Definimos  $\mathcal{I} := \{area(f) : f \in \mathcal{F}\}$ .

O teorema de Sachs-Uhlenbeck [34] a seguir mostra que, embora não possamos garantir a existência de um representante minimizante de área para um elemento particular de  $\pi_2(\mathcal{M})$ , é possível garantir a existência de um elemento minimizante de área dentre todas as esferas não contráteis.

**Teorema 4.0.4** (Sachs-Uhlenbeck). *Se  $\pi_2(\mathcal{M})$  é não-trivial, então existe um mapa  $f \in \mathcal{F}$  tal que  $area(f) = \mathcal{I}$ .*

Além deste teorema sobre a existência de esferas mínimas estáveis em 3-variedades Riemannianas, devemos destacar também o teorema da esfera de Papakyriakopolus [24]. O teorema da esfera afirma que se  $\pi_2(\mathcal{M})$  é não-trivial, então existe uma esfera 2-dimensional mergulhada e não-contrátil em  $\mathcal{M}$ .

Quando passamos a pensar sobre superfícies de gênero maior, precisamos mudar a abordagem, pois utilizarmos uma restrição em  $\pi_2$  já não é tão útil.

Para entendermos melhor a estrutura topológica de 3-variedades é comum utilizarmos abordagens na qual cortamos a variedade ao longo de superfícies em blocos mais simples (como vimos anteriormente quando consideramos a decomposição JSJ ou ao longo de esferas) para entendermos de que forma podemos recombinar os pedaços para obtermos a variedade inicial. Duas classes de superfícies são comumente utilizadas para cortar 3-variedades, as superfícies incompressíveis 3.3.8 e as superfícies de Heegaard.

Procuramos por superfícies incompressíveis definidas de forma a terem seus grupos fundamentais injetados em  $\pi_1(\mathcal{M})$ , e o teorema de Schoen-Yau [35] discute sobre a existência de tal classe de superfícies.

**Teorema 4.0.5** (Schoen-Yau). *Se uma 3-variedade Riemanniana  $\mathcal{M}$  contém uma superfície incompressível de gênero  $g \geq 1$ , então existe uma superfície de menor área imersa.*

A demonstração deste teorema mostra que de fato uma superfície de menor área existe na classe de homotopia de cada superfície incompressível, se  $\pi_2(\mathcal{M}) = 1$ . Além disso, o teorema de Freedman-Hass-Scott [12] trata do mergulho dos mapas de superfícies incompressíveis.

**Teorema 4.0.6.** *A superfície de menor área homotópica a uma superfície orientada, incompressível e mergulhada em uma variedade Riemanniana orientável e irredutível ou é mergulhada ou recobre suplamente uma superfície de um lado orientada.*

Aplicações de resultados subsequentes incluem o teorema de Peter Scott [36] sobre a rigidez topológica dos espaços fibrados de Seifert. Além disso, Waldhausen provou em [43] que uma 3-variedade com grupo fundamental isomorfo ao de  $\mathcal{M}$  é na verdade homeomorfa a  $\mathcal{M}$ .

Vimos que a existência de superfícies mínimas estáveis em uma 3-variedade Riemanniana têm relação com a não-trivialidade da topologia da variedade. Por outro lado, os quocientes de  $\mathbb{S}^3$  munidos de métrica com curvatura de Ricci positiva não admitem superfícies mínimas estáveis, fechadas e de dois lados. Estes fatos sugerem que existe relação entre a topologia de um espaço ambiente e a existência de superfícies mínimas estáveis e fechadas no mesmo. Uma das conjecturas nesta direção foi enunciada por Meeks, Pérez e Ros em [22] como segue.

**Conjectura 4.0.7** (Meeks, Pérez e Ros ). *Seja  $(\mathcal{M}, g)$  uma 3-variedade Riemanniana. Se  $(\mathcal{M}, g)$  não admite superfície mínima fechada e mergulhada cujo recobrimento de dois lados é estável, então  $\mathcal{M}$  é finitamente recoberto pela esfera  $\mathbb{S}^3$ .*

Vamos começar construindo a família de contra-exemplos de 3-variedades modeladas em  $\widetilde{SL}_2$ , depois seguiremos para a demonstração do teorema que explica por que a família de 3-variedades construída é de fato um contra-exemplo para a conjectura 4.0.7. Ao fim do capítulo apresentamos um teorema também provado em [19] que é uma versão desta conjectura trocando a hipótese de mergulho por imersão. A demonstração não será apresentada em detalhe, mas faremos algumas considerações sobre o método utilizado.

## 4.1 Construção do contra-exemplo

Agora vamos apresentar a construção de um espaço quociente que servirá como base para o contra-exemplo da conjectura de Meeks, Pérez e Ros.

Começamos tomando  $p_1, p_2, p_3 \geq 2$  números naturais e  $\Delta$  o triângulo cujos ângulos internos são  $\frac{\pi}{p_1}, \frac{\pi}{p_2}, \frac{\pi}{p_3}$ . Esse triângulo pode estar em  $\mathbb{R}^2$  ou em  $\mathbb{H}^2$ , isso depende apenas se a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a  $\pi$  ou menor que  $\pi$ , ie, se  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$  ou  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} < 1$ .

Podemos usar  $\Delta$  para gerar uma triangulação  $T$  do espaço ambiente,  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ , através de reflexões nos lados do mesmo.

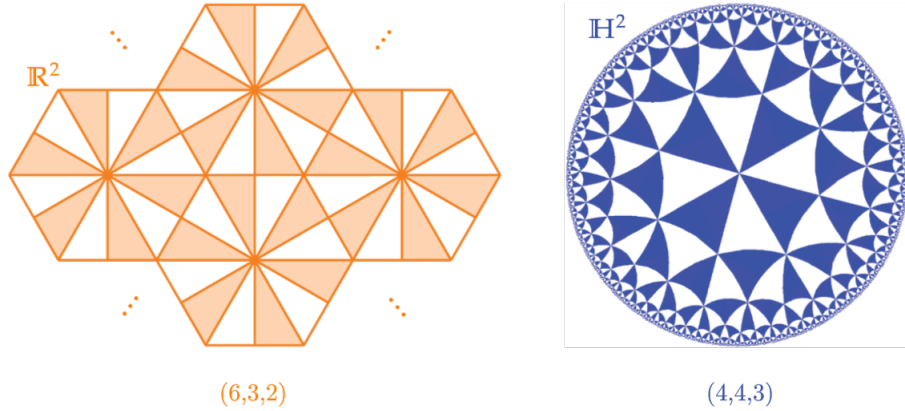


Figura 4.1: Triangulações de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{H}^2$  [32] onde  $(p_1, p_2, p_3)$  é uma notação para a triangulação gerada pelo triângulo  $\Delta$  com ângulos internos  $\frac{\pi}{p_1}, \frac{\pi}{p_2}, \frac{\pi}{p_3}$

Definimos  $\Gamma(p_1, p_2, p_3)$  como o grupo de isometrias do espaço ambiente gerado pelas reflexões ao longo dos lados do triângulo  $\Delta$ , parecido com o que fizemos no capítulo de orbifolds no exemplo 2.2.6. Esse grupo é chamado de *grupo triangular*.

Consideramos  $\Gamma := \Gamma^{or}(p_1, p_2, p_3) \triangleleft \Gamma(p_1, p_2, p_3)$  o subgrupo de isometrias que preservam orientação geradas pelas mesmas reflexões ao longo dos lados de  $\Delta$ . A ação de  $\Gamma$  é livre e transitiva nos triângulos de  $T$  (e  $\Gamma$  é subgrupo normal pois tem índice 2).

**Definição 4.1.1.** *Dado um espaço topológico  $X$  e um grupo  $G$  agindo em  $X$ , a órbita de um elemento  $x \in X$  é a classe de equivalência de  $x$ , com respeito a relação de equivalência determinada por  $x \sim y$  se existir  $g \in G$  tal que  $y = g(x)$ , onde  $g(x)$  é a imagem de  $x$  pelo homeomorfismo de  $x$  associado a  $g$ .*

Sabemos por 2.2.4 que  $X/G$  é um espaço topológico e por 2.2.11 que se  $G$  age propriamente discontinuamente no espaço ambiente  $X$ , então o quociente  $X/G$  é uma orbifold.

Tomemos a triangulação  $T$  do espaço ambiente. As isometrias geradas pelas reflexões ao longo dos lados do triângulo que preservam orientação

(elementos do grupo  $\Gamma$ ) são as transformações que levam os triângulos preenchidos, em outros triângulos preenchidos.

Olhando para uma parte da triangulação de  $\mathbb{R}^2$  e de  $\mathbb{H}^2$  na figura 4.1 podemos notar que os elementos  $a, b, c \in \Gamma(p_1, p_2, p_3)$  geram os elementos de  $\Gamma$ , que levam triângulos preenchidos em outros triângulos preenchidos.

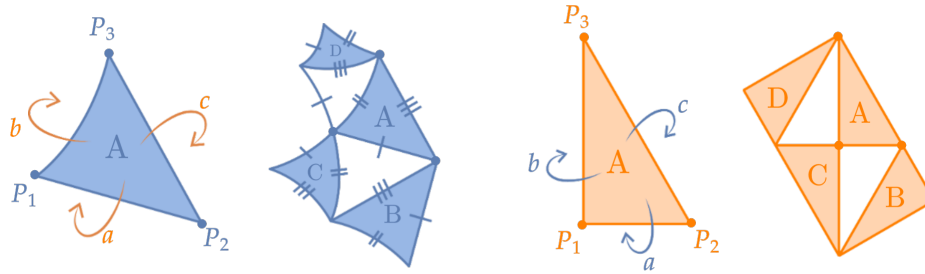


Figura 4.2: Os triângulos  $A, B, C, D$  em  $(4, 4, 3)$  e  $(6, 3, 2)$ .

Note que para levarmos o triângulo  $A$  em  $B, C, D$  podemos realizar o produto de duas reflexões.

- $A \longrightarrow B = ac$
- $A \longrightarrow C = ab$
- $A \longrightarrow D = bc$

Não é difícil ver que esses produtos podem ser interpretados como rotações ao redor dos pontos  $P_2, P_1$  e  $P_3$  respectivamente, e isso nos diz que  $P_1, P_2, P_3 \in \Sigma_S$ , isto é, os vértices fazem parte do *locus singular* da orbifold  $S$ . Além das rotações, também temos a identidade  $I$  e translações. Por se tratar de uma orbifold 2-dimensional, ao analisarmos os grupos de isotropia associados a esses pontos podemos tentar entender a estrutura topológica do espaço quociente de acordo com o teorema 2.2.15.

Os pontos no interior do triângulo  $\Delta$ , domínio fundamental, tem estabilizador trivial, bem como os pontos nas arestas de  $\Delta$ . Basta então entender os estabilizadores de  $P_1, P_2, P_3$ .

**Exemplo 4.1.2.** Tomando  $\Delta$  o triângulo com ângulos internos  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{6}$ . Como  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$  temos um triângulo em  $\mathbb{R}^2$ . Além disso, os pontos



$\tilde{P}_i$  são os pontos da nossa triangulação de  $\mathbb{R}^2$  que se projetam sobre  $P_i$  pelo quociente.

- $P_1$  - o estabilizador desse vértice é o grupo  $\mathbb{Z}_2$ , pois as isometrias em  $\Gamma$  que fixam os pontos  $\tilde{P}_1$  são a identidade  $I$  e uma rotação por  $\pi$ , que podem ser identificadas com elementos de  $\mathbb{Z}_2$ .
- $P_2$  - o estabilizador desse vértice é o grupo  $\mathbb{Z}_3$ , pois as isometrias em  $\Gamma$  que fixam os pontos  $\tilde{P}_2$  são a identidade  $I$ , uma rotação por  $\frac{2\pi}{3}$  e outra por  $\frac{4\pi}{3}$ , que podem ser identificado com elementos de  $\mathbb{Z}_3$ .
- $P_3$  - o estabilizador desse vértice é o grupo  $\mathbb{Z}_6$ , pois as isometrias em  $\Gamma$  que fixam os pontos  $\tilde{P}_3$  são a identidade  $I$ , e as rotações por  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{4\pi}{3}$  e  $\frac{5\pi}{3}$ , que podem ser identificado com elementos de  $\mathbb{Z}_6$ .

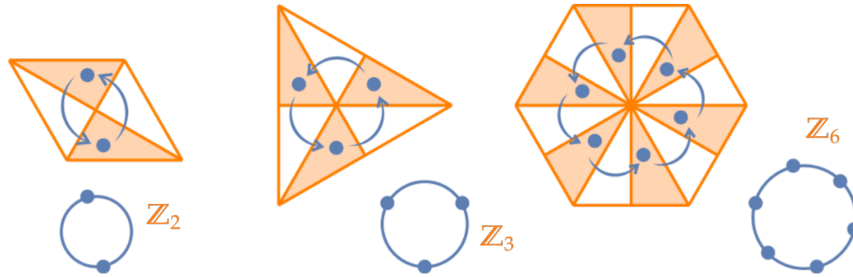


Figura 4.3: Identificação entre os estabilizadores de  $P_1, P_2, P_3$  com  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_6$

Usando o que já conhecemos sobre orbifolds, vemos que os pontos  $\tilde{P}_1$  se projetam em pontos de cone de índice 2, os pontos  $\tilde{P}_2$  se projetam em pontos de cone de índice 3 e os pontos  $\tilde{P}_3$  se projetam em pontos de cone de índice 6. Portanto  $\mathbb{R}^2/\Gamma = (S, g)$ , onde  $S$  é uma esfera com 3 pontos de cone com índices  $p_1, p_2, p_3$  e a métrica  $g$  é flat.

Se  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$ . A métrica induzida no espaço quociente é flat e se  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} < 1$  a métrica é hiperbólica. Para a construção do contra-exemplo da conjectura de Meeks, Pérez e Ros vamos nos concentrar no caso onde  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} < 1$ , isto é, o espaço ambiente onde construiremos a

triangulação a partir de  $\Delta$  é  $\mathbb{H}^2$ .

A geometria da 3-variedade na qual estamos interessados é **modelada em**  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ , então devemos primeiramente apresentar a geometria de  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ . Como já vimos anteriormente  $SL_2(\mathbb{R})$  é o grupo 3-dimensional de matrizes  $2 \times 2$  com entradas reais e determinante igual a 1, e  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$  é seu recobrimento universal.

Para construirmos a geometria de  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$  vamos começar munindo o fibrado tangente de  $\mathbb{H}^2$ ,  $T\mathbb{H}^2$ , de uma métrica Riemanniana definida de forma que o produto interno no espaço tangente  $T_w(T\mathbb{H}^2)$  é tal que  $V$  e  $H$  são ortogonais, onde  $V$  é o plano tangente a  $T_x$ ,  $x \in \mathbb{H}^2$ ,  $H$  é o plano horizontal em  $w \in T\mathbb{H}^2$ .

Tomando  $T\mathbb{H}^2$  podemos considerar o fibrado tangente unitário do plano hiperbólico  $U\mathbb{H}^2 \subset T\mathbb{H}^2$ , desta forma  $U\mathbb{H}^2$  possui métrica induzida pela métrica de  $T\mathbb{H}^2$ .

Além disso, existe uma identificação entre  $U\mathbb{H}^2$  e  $PSL_2$ , que é o grupo de isometrias de  $\mathbb{H}^2$  que preservam orientação. Isso se dá pois  $PSL_2$  age transitivamente em  $U\mathbb{H}^2$ , ie, dado  $(p, v) \in U\mathbb{H}^2$  existe uma única isometria  $\varphi \in PSL_2$  tal que  $\varphi(0) = p$  e  $d\varphi(0) = v$ , a existência de tal ação transitiva nos diz que existe  $U\mathbb{H}^2 \mapsto PSL_2$ . Para construirmos o caminho inverso da identificação,  $PSL_2 \mapsto U\mathbb{H}^2$ , basta notarmos que uma isometria  $\varphi \in PSL_2$  pode ser associada ao ponto  $(\varphi(0), d\varphi) \in U\mathbb{H}^2$ .

Por definição  $PSL_2$  é 2-recoberto por  $SL_2$ , desta forma,  $\widetilde{SL}_2$  é recobrimento universal de  $PSL_2$ , e por causa da identificação entre  $U\mathbb{H}^2$  e  $PSL_2$  temos que  $\widetilde{SL}_2$  também é recobrimento universal de  $U\mathbb{H}^2$ , isto é,  $\widetilde{U\mathbb{H}^2}$  é identificado com  $\widetilde{SL}_2$  de forma que  $p : \widetilde{SL}_2 \rightarrow U\mathbb{H}^2$  seja um mapa de recobrimento. Desta forma, podemos munir  $\widetilde{SL}_2$  de uma métrica pullback induzida pela métrica de  $U\mathbb{H}^2$ .

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{SL}_2 & & \widetilde{SL}_2 \\
\downarrow & & \downarrow \\
SL_2 & & U\mathbb{H}^2 \\
\downarrow & \implies & \downarrow \\
PSL_2 \approx U\mathbb{H}^2 \subset T\mathbb{H}^2 & & \mathbb{H}^2 \\
\downarrow & & \\
\mathbb{H}^2 & & 
\end{array}$$

$U\mathbb{H}^2$  é um fibrado sobre  $\mathbb{H}^2$  com fibras isomorfas a  $\mathbb{S}^1$  e, naturalmente,  $\widetilde{SL}_2$  é um fibrado sobre  $\mathbb{H}^2$  com fibras que são retas (mas não é um fibrado trivial).

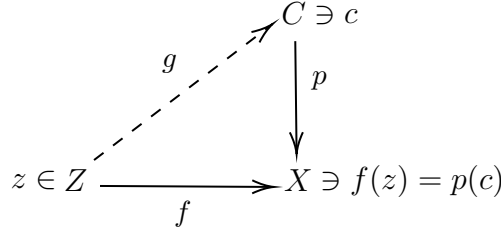
Sejam  $\Gamma(p_1, p_2, p_3)$  definido anteriormente, e  $\Gamma$  o subgrupo de  $\Gamma(p_1, p_2, p_3)$  que preserva orientação definido como

$\Gamma := \Gamma^{or}(p_1, p_2, p_3) \subset \Gamma(p_1, p_2, p_3)$ .  $\Gamma$  age em  $\mathbb{H}^2$ , portanto dada uma isometria  $f \in \Gamma$ , a aplicação derivada de  $f$  no fibrado tangente  $df : T\mathbb{H}^2 \rightarrow T\mathbb{H}^2$  é uma isometria quando  $T\mathbb{H}^2$  é munido da métrica apresentada anteriormente, e desta forma, sua diferencial  $df|_{U\mathbb{H}^2} : U\mathbb{H}^2 \rightarrow U\mathbb{H}^2$  é uma isometria de  $U\mathbb{H}^2$ .

Tomamos  $f \in \Gamma$ , e  $df$  isometria de  $U\mathbb{H}^2$ . Queremos determinar quando existe um levantamento de  $df$  para  $\widetilde{U\mathbb{H}^2}$ .

**Teorema 4.1.3** (Existência de levantamentos). *Sejam, um mapa de recobrimento  $p : C \rightarrow X$  e  $f : Z \rightarrow X$  um mapa contínuo, com  $Z$  um espaço conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. Fixamos um ponto base  $z \in Z$ , e escolhemos um ponto  $c \in C$  tal que  $p(c) = f(z)$ . Então existe um levantamento de  $f$  (um mapa contínuo  $g : Z \rightarrow C$  pro qual  $p \circ g = f$  e  $g(z) = c$ ) se, e somente se, os homomorfismos induzidos no nível de grupos fundamentais,  $f_\# : \pi_1(Z, z) \rightarrow \pi_1(X, f(z))$  e  $p_\# : \pi_1(C, c) \rightarrow \pi_1(X, p(c))$ , satisfazem a seguinte relação:*

$$f_\#(\pi_{Z,z}) \subset p_\#(\pi_1(C, c)) \quad (4.1)$$



Portanto, ao tomarmos o seguinte diagrama vemos que dada  $df : U\mathbb{H}^2 \rightarrow U\mathbb{H}^2$ , existe um levantamento para uma classe  $[df]$  se e somente se  $\tilde{d}f_{\#}(\pi_1(\widetilde{U\mathbb{H}^2})) \subset p_{\#}(\pi_1(\widetilde{U\mathbb{H}^2}))$ . Como  $\widetilde{U\mathbb{H}^2}$  é o recobrimento universal, tem-se  $\pi_1(\widetilde{U\mathbb{H}^2})$  trivial, portanto existe  $[df]$  levantamento de isometrias para  $\widetilde{SL}_2$ .

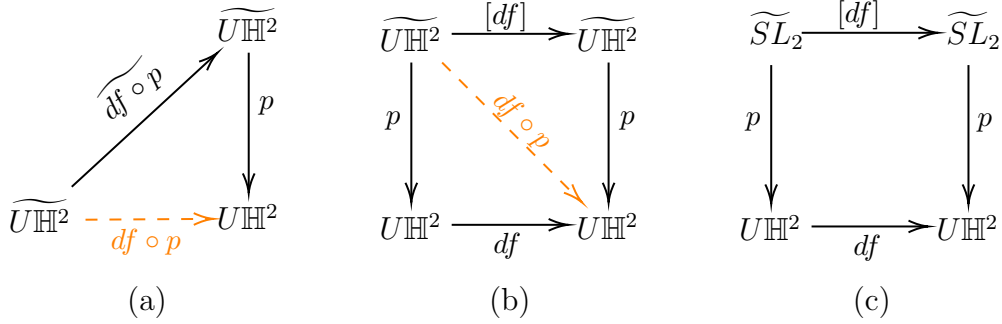


Figura 4.4: (a) Diagrama que justifica a existência do levantamento de  $df \circ \pi$  por  $p$  através do teorema de existência de levantamentos; (b) Diagrama mostrando a construção da classe  $[df]$ ; (c) Diagrama usando a identificação entre  $\widetilde{U\mathbb{H}^2}$  e  $\widetilde{SL}_2$ .

Como já vimos durante sua construção, os elementos de  $\Gamma$  são na verdade rotações ao redor dos vértices das cópias de  $\Delta$  na triangulação. Além disso, fazer tais rotações ao redor dos vértices mantêm dentro da triangulação  $T$ .

Uma isometria de  $\mathbb{H}^2$  se levanta a uma isometria de  $\widetilde{SL}_2$  e, desta forma, existe em  $\widetilde{SL}_2$  um grupo de isometrias  $\tilde{\Gamma}$  que é o levantamento de  $\Gamma$  elemento a elemento, como feito anteriormente para  $f$ . Assim, temos que  $\tilde{\Gamma}$  é uma extensão de  $\Gamma$  pelo subgrupo central  $\mathbb{Z}$  do grupo de isometrias  $Isom(\widetilde{SL}_2)$ .

$\tilde{\Gamma}$  foi construído de tal forma que obtemos a sequência exata<sup>1</sup>

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma \rightarrow 0.$$

**Definição 4.1.4.** *Uma ação de um grupo  $G$  sobre um espaço topológico  $X$ ,  $G \times X \rightarrow X$  é dita livre se  $\forall x \in X, g \cdot x = x \Rightarrow g = I$ , i.e., apenas a identidade fixa algum ponto.*

Nosso objetivo agora é mostrar que o quociente  $\widetilde{SL}_2/\tilde{\Gamma}$  é um espaço fibrado de Seifert. Para fazer isso, vamos começar verificando que a ação de  $\tilde{\Gamma}$  é livre para depois usarmos o teorema 4.1.5 que classifica  $\widetilde{SL}_2/\tilde{\Gamma}$  como um espaço fibrado de Seifert.

Para mostrar que a ação de  $\tilde{\Gamma}$  é livre em  $\widetilde{SL}_2$ , basta mostrar que a ação não possui pontos fixos, e para mostrar que  $\tilde{\Gamma}$  não possui pontos fixos basta mostrarmos que  $df : U\mathbb{H}^2 \rightarrow U\mathbb{H}^2$  não possui pontos fixos. Isso acontece pois dada  $f \in \Gamma$ , se para algum  $a \in U\mathbb{H}^2$  tem-se  $df(a) = a$ , como o diagrama (c) na página anterior comuta, temos  $\tilde{df} \circ p^{-1}(a) = p^{-1} \circ df(a)$  e desta forma,  $\tilde{df}(p^{-1}(a)) = p^{-1}(a)$ . Portanto, se  $df$  possui ponto fixo, então seu levantamento,  $\tilde{df}$ , também possui ponto fixo.

Seja  $(x, v) \in U\mathbb{H}^2$  e  $f \in \Gamma$ , então  $df(x, v) = (x, v)$  se, e somente se,  $f(x) = x$  e  $(df)_x(v) = v$ . Como  $f \in \Gamma$ ,  $f$  é conjugado ou a uma rotação ou a uma translação hiperbólica. Translações hiperbólicas não possuem pontos fixos, e as rotações fazem com que  $df$  não possua pontos fixos (porque muda a direção do  $v$ ). Assim,  $\tilde{\Gamma}$  não possui pontos fixos, portanto age livremente em  $\widetilde{SL}_2$ .

Podemos finalmente aplicar o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [37] (teorema 4.15), para afirmar que  $\widetilde{SL}_2/\tilde{\Gamma}$  é, de fato, um espaço fibrado de Seifert.

**Teorema 4.1.5** ([37]). *Seja  $G$  um grupo discreto de isometrias de  $\widetilde{SL}_2$  agindo livremente e com quociente  $\mathcal{M} = \widetilde{SL}_2/\tilde{\Gamma}$ . A folheação de  $\widetilde{SL}_2$  por retas verticais descende a uma folheação de  $\mathcal{M}$  e ocorre uma das seguintes opções:*

---

<sup>1</sup>Uma sequência de homomorfismos entre grupos  $G_i$  dada por  $G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} G_n$  é dita exata se a imagem de cada homomorfismo é igual ao núcleo do homomorfismo seguinte, ie,  $im(f_k) = ker(f_{k+1})$ .

1. A folheação dá a  $\mathcal{M}$  uma estrutura de fibrado por retas sobre uma superfície não fechada.
2. A folheação de  $\mathcal{M}$  é uma fibração de Seifert.
3. A folheação de  $\mathcal{M}$  é por retas cuja imagem em  $\mathcal{M}$  não é fechada. Nesse caso  $\tilde{\Gamma}$  deve ser isomorfo a  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ou ao grupo da garrafa de Klein.

Como vimos anteriormente, o grupo  $\tilde{\Gamma}$  age livremente em  $\widetilde{SL}_2$ , tomamos então com a sequência exata

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \longrightarrow Isom(\widetilde{SL}_2) \xrightarrow{p} Isom(\mathbb{H}^2) \rightarrow 1.$$

Onde  $p$  induzido pelo recobrimento  $\widetilde{SL}_2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ , então  $p(\tilde{\Gamma}) = \Gamma$  por construção. Seja  $K = \tilde{\Gamma} \cap \mathbb{R}$ , podemos reescrever a sequência exata com os subgrupos de  $Isom(\widetilde{SL}_2)$  e  $Isom(\mathbb{H}^2)$ .

$$0 \rightarrow \tilde{\Gamma} \cap \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma \rightarrow 1$$

Temos que  $\tilde{\Gamma}$  é discreto e, de acordo com [37] a interseção  $\tilde{\Gamma} \cap \mathbb{R}$  ou é trivial ou é infinita cíclica. Mas  $\tilde{\Gamma} \cap \mathbb{R}$  não pode ser trivial, pois isso implicaria que  $\tilde{df}(a) = a, \forall \tilde{df} \in \tilde{\Gamma}$  e  $\forall a \in U\mathbb{H}^2$ , assim  $a = p(\tilde{df}(a)) = df(p(a))$ , teríamos então  $\Gamma$  trivial (o que já provamos não ser verdade). Portanto,  $\tilde{\Gamma} \cap \mathbb{R}$  é infinito e cíclico e cada linha no fibrado, que é uma fibração de  $SL_2$  por linhas, cobre um círculo em  $\widetilde{SL}_2/K$  e ocorre o que foi descrito no item 2 do teorema, portanto,  $\mathcal{M}$  é uma fibração de Seifert.

Pela construção do recobrimento temos  $\widetilde{SL}_2 \xrightarrow{p} \mathbb{H}^2$  e  $\tilde{\Gamma} \xrightarrow{p} \Gamma$ , desta forma  $\mathcal{M} = \widetilde{SL}_2/\tilde{\Gamma}$  se projeta em  $\mathbb{H}^2/\Gamma = (S, g)$ .

Como  $\mathcal{M}$  é um espaço fibrado de Seifert com geometria modelada em  $\widetilde{SL}_2$ , a orbifold base  $X = (S, g)$  é  $\mathbb{H}^2$  quotientado por um grupo de isometrias, que possui métrica hiperbólica e  $(S, g) = X$  implica que  $\chi(X) < 0$ . Além disso, temos que o número de Euler do fibrado de Seifert  $e(\eta) \neq 0$  pelo teorema 4.1.5.

Antes de apresentarmos o contra-exemplo para a conjectura 4.2 de forma mais concreta, vamos apresentar alguns resultados que serão úteis pro nosso entendimento de superfícies mínimas em espaços fibrados de Seifert.

**Lema 4.1.6** (Pitts, Rubinstein [28]). *Seja  $\Sigma$  uma superfície mínima, fechada, estável e de dois lados mergulhada em um espaço fibrado de Seifert  $\mathcal{M}$  munido de uma métrica geométrica  $h$ . Então ou  $\Sigma$  é horizontal ou é vertical.*

*Demonstração.* Se  $\mathcal{M}$  é um espaço de Lens, então  $h$  possui curvatura de Ricci positiva, e nesse caso não existe superfície mínima, fechada, de dois lados e estável em  $\mathcal{M}$ .

Vamos então supor que  $\mathcal{M}$  **não** é um espaço de Lens, além disso, a fibração de Seifert associada ao espaço fibrado de Seifert é  $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow S$ . Nesse caso, existe um recobrimento finito  $F : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ , um recobrimento de orbifolds  $f : \tilde{S} \rightarrow S$  e uma fibração de Seifert  $\tilde{\Pi} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{S}$  tal que  $\tilde{S}$  é suave,  $\tilde{\mathcal{M}}$  é um fibrado circular sobre  $\tilde{S}$  e  $\Pi \circ F = f \circ \tilde{\Pi}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\tilde{\Pi}} & \tilde{S} \\
 F \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f \\
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\Pi} & S
 \end{array}$$

Além disso,  $\tilde{\mathcal{M}}$  possui métrica geométrica gerada pelo pullback  $\tilde{h} = F^*h$ .  $\tilde{S}$  e  $S$  estão munidas das métricas  $\tilde{g}$  e  $g$  de (mesma) curvatura constante.

Consideramos o levantamento  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  para  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Desta forma,  $\tilde{\Sigma}$  é uma superfície mínima fechada, de dois lados, estável e mergulhada em  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{h})$ .

Seja  $\xi$  o campo de Killing unitário associado a  $\tilde{\Pi}$ , isto é, o campo unitário na direção das fibras de  $\tilde{\Pi}$  e  $N$  a normal unitária a  $\tilde{\Sigma}$ . Denotamos  $\phi = \langle N, \xi \rangle$ .

Vamos supor que  $\tilde{\Sigma}$  não é horizontal nem uma união de fibras, isso significa que  $\phi \not\equiv 0$ , mas  $\phi = 0$  para pelo menos um  $x \in \tilde{\Sigma}$ . Além disso, como  $\xi$  é um campo de Killing, temos que  $L(\phi) = 0$ , onde  $L$  é o operador de Jacobi de  $\tilde{\Sigma}$ .

Como  $\tilde{\Sigma}$  é estável e vale que  $L(\phi) = 0$ , por “standard elliptic theory” podemos afirmar que ou  $\phi \neq 0, \forall x \in \tilde{\Sigma}$  ou  $\phi \equiv 0$ , o que contradiz a hipótese que  $\tilde{\Sigma}$  não é horizontal nem uma união de fibras.

Portanto, ou  $\tilde{\Sigma}$  é horizontal ou é uma união de fibras, e como essa classificação é local a afirmação se estende a  $\Sigma$ . Para mostrarmos que ou  $\Sigma$  é

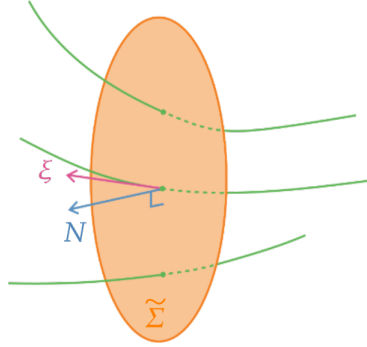


Figura 4.5: Vetor  $N$  normal a um ponto de  $\tilde{\Sigma}$  e vetor  $\xi$  elemento do campo de Killing unitário associado a  $\tilde{\Pi}$ .

vertical ou é horizontal precisamos garantir que  $\Sigma$  não possua fibras singulares.

Supondo que  $\Sigma$  seja uma união de fibras e que contém uma fibra singular. Desta forma,  $\gamma = \Pi(\Sigma)$  é uma curva simples e fechada (pois  $\Sigma$  é fechada e mergulhada) que contém um ponto de cone  $x \in S$  de ângulo  $\frac{2\pi}{p}$ , para algum inteiro  $p > 1$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\tilde{\Pi}} & \tilde{S} \\
 \downarrow F & & \downarrow f \\
 \Sigma \subset \mathcal{M} & \xrightarrow{\Pi} & S \supset \gamma
 \end{array}$$

Consideramos uma vizinhança  $D$  de  $x \in S$  tal que  $f^{-1}(D)$  seja uma coleção de discos geodésicos disjuntos  $D_1, \dots, D_m$  de  $(\tilde{S}, \tilde{g})$ . Cada  $D_i$  é decomposto em  $2p$  setores circulares com ângulo  $\frac{\pi}{p}$ , e  $\tilde{\gamma} = f^{-1}(\gamma \cap D)$  pode ser descrita da seguinte maneira:



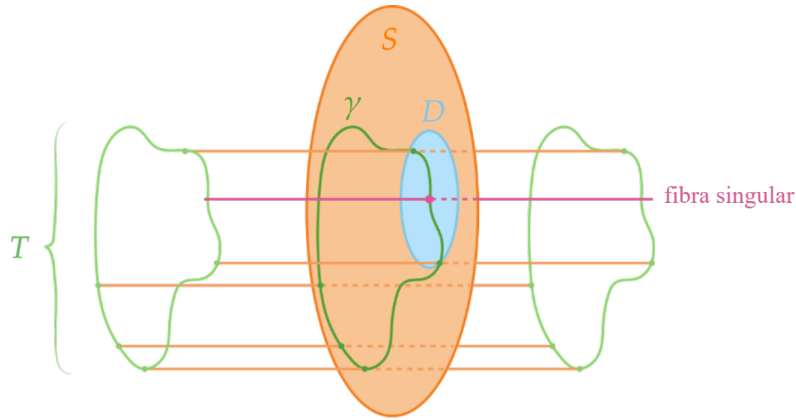


Figura 4.6: A curva  $\gamma$  passa por uma fibra singular.

Em cada setor existem dois arcos se encontrando (de forma única) no centro de  $D_i$ , temos então que  $\tilde{\Pi}^{-1}(\tilde{\gamma})$  não é mergulhada. Desta forma, como  $\Pi \circ F = f \circ \tilde{\Pi}$ , podemos concluir que  $\Sigma$  não pode ser mergulhada, mas isso contradiz a hipótese inicial.

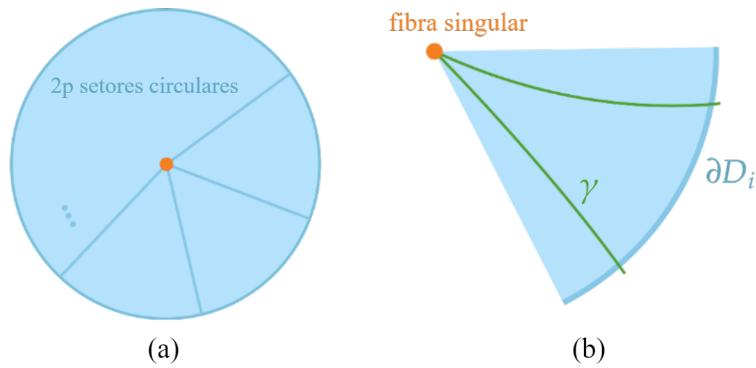


Figura 4.7: (a) O disco geodésico  $D_i$  dividido em  $2p$  setores. (b) Comportamento da curva  $\gamma$  em um setor do disco geodésico  $D_i$ .

Concluimos então que  $\Sigma$  não contém fibras singulares, portanto vale que ou  $\Sigma$  é horizontal ou  $\Sigma$  é vertical.  $\square$

Agora vamos ver mais uma proposição muito útil para a demonstração do teorema principal de [19], mas antes vamos passar por um dos meus teoremas

favoritos, que relaciona geometria e topologia de uma forma muito bonita e contra-intuitiva.

**Teorema 4.1.7** (Teorema de Gauss-Bonnet). *Seja  $(\mathcal{M}, d)$  uma variedade Riemanniana 2-dimensional com bordo  $\partial\mathcal{M}$ . Seja  $K$  a curvatura Gaussiana de  $\mathcal{M}$  e  $k_g$  a curvatura geodésica de  $\partial\mathcal{M}$ . Então*

$$\int_{\mathcal{M}} K \, dA + \int_{\partial\mathcal{M}} k_g \, ds = 2\pi\chi(\mathcal{M})$$

onde  $dA$  é o elemento de área da superfície,  $ds$  é o elemento de comprimento ao longo da componente de bordo  $\partial\mathcal{M}$  e  $\chi(\mathcal{M})$  é a característica de Euler de  $\mathcal{M}$ .

Uma demonstração muito interessante para o teorema de Gauss-Bonnet pode ser encontrada no livro [42]. Agora podemos passar para o próximo resultado auxiliar.

**Proposição 4.1.8.** *Seja  $(S, g)$  uma 2-esfera munida de uma métrica flat ou hiperbólica  $g$  com 3 pontos de cone. Então  $(S, g)$  não possui geodésicas fechadas simples na sua parte regular.*

*Demonstração.* Vamos supor que existe tal geodésica, que será denotada por  $\gamma$ . Consideramos então discos  $D_i$ , imagens dos discos geodésicos pela projeção, que são vizinhanças dos pontos de cone  $p_i, i = 1, 2, 3$  tais que  $\gamma \subset \tilde{S} = S - (\cup_{i=1}^3 D_i)$ .

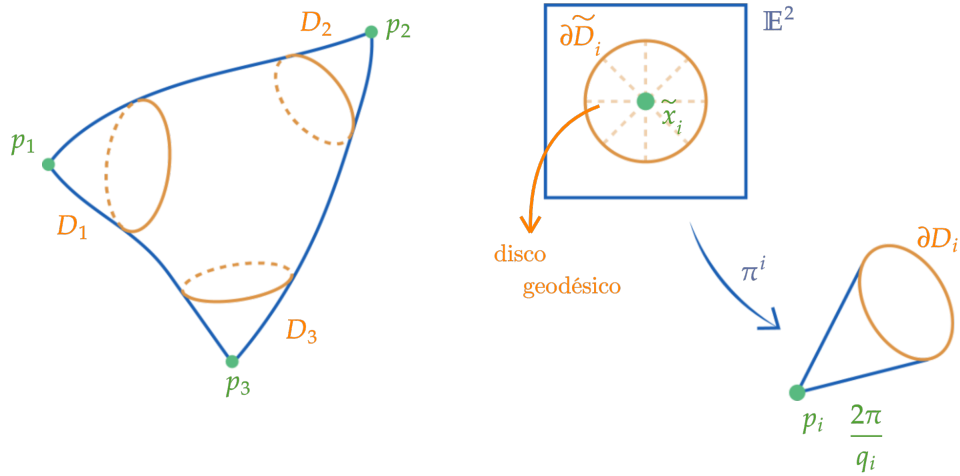


Figura 4.8: Discos  $D_i$  e  $\tilde{D}_i$  os discos em  $\mathbb{E}^2$  se projetando nos cones com vértices  $p_i$ .

Tomamos então os discos geodésicos  $\tilde{D}_i$  no espaço  $\mathbb{E}^2$ , que pode ser  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ , com centros  $\tilde{x}_i$  que se projetam por  $\pi^i$  nos pontos de cone  $p_i$  (como na imagem acima) onde  $\pi^i$  é o quociente pela ação de uma rotação de  $\frac{2\pi}{q_i}$ ,  $q_i \in \mathbb{Z}$ .  $\partial D_i = \pi^i(\partial \tilde{D}_i)$ .

Por essa construção, as componentes de bordo possuem curvatura geodésica negativa com respeito à normal unitária que aponta para parte interior de  $\tilde{S}$ .

Como a superfície com a qual começamos é uma esfera, temos que uma curva fechada simples deve separar  $S$  (teorema de Jordan), e nesse caso, também deve separar  $\tilde{S}$  pois está completamente contida em  $\tilde{S}$ . Então podem ocorrer uma das duas possibilidades abaixo ilustradas na imagem 4.1.

I -  $\gamma$  delimita um disco em  $\tilde{S}$ ;

II -  $\gamma$  é homotópica a uma das componentes de bordo de  $\tilde{S}$ .

(I) Se  $\gamma$  é bordo de um disco  $U$  em  $\tilde{S}$ , então podemos usar Gauss-Bonnet

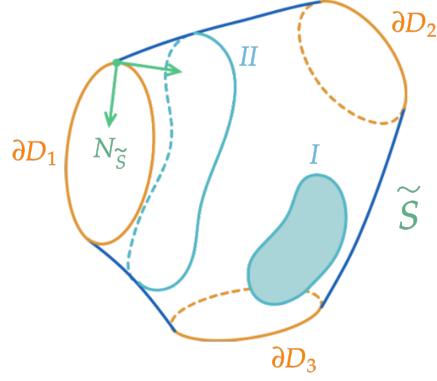


Figura 4.9: As duas possibilidades para  $\gamma \in \tilde{S}$ .

$$2\pi\chi(U) = \int_U K dA + \int_{\partial U} k_g ds \quad (4.2)$$

$$2\pi = \int_U K dA + \int_{\gamma} k_g ds \quad (4.3)$$

$$2\pi = \int_U K dA + \int_{\gamma} 0 ds \quad (4.4)$$

Se a métrica é flat temos  $2\pi = \int_U K dA = \int_U 0 dA = 0$  e se a métrica é hiperbólica temos  $2\pi = \int_U K dA = \int_U -1 dA = -|U|$ , onde  $|U|$  é a área da região  $U$ . Portanto temos uma contradição, e nos resta analisar (II).

(II) Se  $\gamma$  é homotópica a uma das componentes de bordo, que denotaremos por  $\tilde{\gamma}$ , consideramos o anel  $\mathcal{A}$  cujas componentes de bordo são  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$ .

Como  $\tilde{\gamma}$  possui curvatura geodésica negativa e vale  $\chi(\mathcal{A}) = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{A}} K dA + \int_{\partial\mathcal{A}} k_g ds \\ &= \int_{\mathcal{A}} K dA + \int_{\gamma} k_g ds + \int_{\tilde{\gamma}} k_g ds \\ &= \int_{\mathcal{A}} K dA + \int_{\gamma} 0 ds + \int_{\tilde{\gamma}} k_g ds. \end{aligned}$$

Se a métrica é flat temos  $0 = \int_{\mathcal{A}} K dA + \int_{\tilde{\gamma}} k_g ds = \int_{\tilde{\gamma}} k_g ds < 0$  que é uma contradição, e se a métrica é hiperbólica temos  $0 = \int_{\mathcal{A}} K dA + \int_{\tilde{\gamma}} k_g ds =$

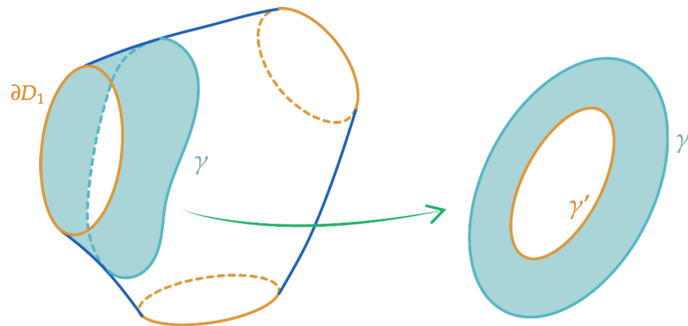


Figura 4.10: O anel em  $\tilde{S}$  que tem  $\tilde{\gamma}$  e  $\gamma$  como bordo.

$\int_{\mathcal{A}} -1 dA + \int_{\tilde{\gamma}} k_g ds < 0$  que também gera uma contradição. Desta forma, também não ocorre (II).

Isso nos diz que não existem geodésicas simples fechadas na parte regular  $\tilde{S}$ .  $\square$

## 4.2 O teorema

Em [19] o autor apresenta duas versões do teorema, na primeira versão é mais fácil notarmos o motivo dele justificar a existência do contra-exemplo para 4.0.7:

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{h})$  uma dentre  $\widetilde{SL}_2$  e  $Nil_3$  munido de uma métrica geométrica homogênea  $\tilde{h}$  cujo grupo de isometrias tem dimensão 4. Existe uma 3-variedade  $(\mathcal{M}, h)$  obtida como quociente de  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{h})$  e que não contém superfície mínima fechada e mergulhada cujo recobrimento de dois lados é estável.*

Ao demonstrar tal teorema, Lima também mostra que existe uma 3-variedade que não contém superfície mínima fechada e mergulhada cujo recobrimento de dois lados é estável e também não é finitamente recoberta pela esfera  $S^3$ . Como sabemos pelo teorema 3.1.6 a geometria modelo envolvida é única, então como  $(M, h)$  é modelada em  $\widetilde{SL}_2$  ou  $Nil_3$ , ela não pode ser finitamente recoberta pela esfera  $S^3$ .

**Teorema 4.2.2** (Lima [19]). *Seja  $(\mathcal{M}, h)$  um espaço fibrado de Seifert fechado, irreduzível, não-Haken, com grupo fundamental infinito e munido da métrica geométrica  $h$ . Então  $(\mathcal{M}, h)$  não contém superfície mínima, fechada e mergulhada cujo recobrimento de dois lados é estável.*

*Demonstração.* Utilizando a proposição 2 de [15] vimos que, como por hipótese  $(\mathcal{M}, h)$  é não-Haken, então:

- (a) ou  $\mathcal{M}$  é um espaço lenticular;
- (b) ou  $\mathcal{M}$  é um fibrado  $S^2$  ou  $P^2$  sobre  $S^1$ ;
- (c) ou  $\mathcal{M} = P^3 \# P^3$  ;
- (d) ou  $\mathcal{M}$  possui orbifold base  $X$  isomorfa a uma esfera com três pontos de cone.

Como por hipótese  $\pi_1(\mathcal{M})$  é infinito, não ocorre (a). Não ocorre (b) pois  $\mathcal{M}$  é irreduzível, e como vimos na proposição 3.3.6 esses dois tipos de fibrado sobre  $S^1$  não são irreduzíveis. Por fim, não ocorre (c) pois  $\mathcal{M}$  é não irreduzível.

Desta forma, temos que  $\mathcal{M}$  possui orbifold base é uma esfera  $(S, g)$  com três pontos de cone e  $e(\mathcal{M}) \neq 0$ . Pela construção que fizemos em 4.1, sabemos que as estruturas geométricas possíveis para  $\mathcal{M}$  são  $\widetilde{SL}_2$  e  $Nil_3$ .

Vamos supor que  $(M, h)$  possui uma superfície  $\Sigma$  mínima, fechada e mergulhada cujo recobrimento *de dois lados* é estável. Como o recobrimento de dois lados é estável, existem duas possibilidades: ou  $\Sigma$  é *de dois lados* ou é *de um lado*.

· Supondo  $\Sigma$  *de dois lados*: Então pelo lema 4.1.6, ou  $\Sigma$  é vertical ou  $\Sigma$  é horizontal.

Se  $\Sigma$  é vertical, então sua projeção no espaço base, denotada por  $\gamma$ , é uma curva simples fechada contida na parte regular da orbifold base que é uma esfera com três pontos de cone. Como  $\Sigma$  é vertical, temos  $\langle N_\Sigma, \xi \rangle = 0$ , onde  $N_\Sigma$  é o campo normal a  $\Sigma$  e  $\xi$  é o campo vetorial associado à ação  $SO(2)$  nas fibras. Desta forma, ser vertical nos diz que a projeção  $\gamma$  é em uma curva, e o fato de  $\Sigma$  ser fechada nos diz que ao projetarmos  $\Sigma$  sobre o espaço base obtemos uma curva também fechada. Além disso, sabemos que  $\gamma$  é uma curva simples pois  $\Sigma$  é mergulhada em  $\mathcal{M}$ .

Com a métrica em  $\Sigma$  é induzida pela métrica  $h$  de  $\mathcal{M}$  podemos mostrar que  $\gamma$  é uma geodésica. Sejam  $T$  e  $\eta$  os campos unitários tangente e normal a  $\gamma$ . Dado  $x \in \Sigma$  tomamos uma vizinhança  $U$  de  $\Pi(x)$  no espaço base  $S$  de forma que  $\Pi : \Pi^{-1}(U) \rightarrow U$  seja uma submersão Riemanniana.

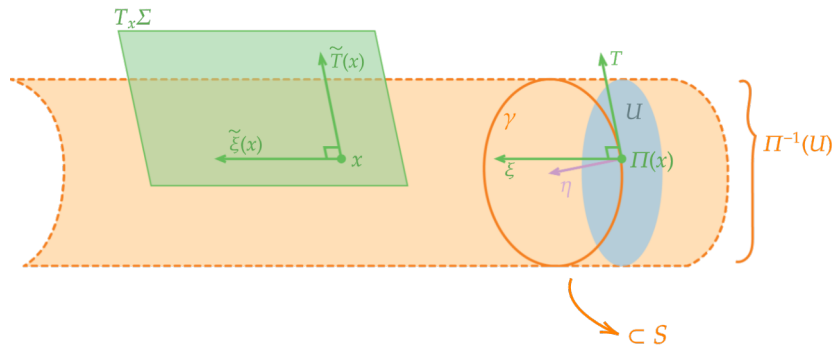


Figura 4.11: Figura mostrando a pré-imagem da vizinhança  $U$  de  $\Pi(x)$  e  $T_x \Sigma$  com sua base ortogonal dada por  $\{\tilde{\xi}(x), \tilde{T}(x)\}$ .

Sejam  $\tilde{T}, \tilde{\eta}$  os levantamentos de  $T$  e  $\eta$  para  $\Pi^{-1}(U)$ . Temos que  $\{\tilde{T}(x), \xi(x)\}$  é uma base ortonormal para o plano tangente a  $\Sigma$  no ponto  $x$ ,  $T_x\Sigma$ , onde  $\xi$  é o campo de Killing de  $\Pi^{-1}(U)$ .

Vamos denotar por  $\bar{\nabla}$  a conexão Riemanniana em  $\mathcal{M}$  e  $\nabla$  a conexão induzida em  $S$ . Podemos então calcular a curvatura média de  $\Sigma$  utilizando estes campos. Como por hipótese  $\Sigma$  é mínima, temos:

$$\begin{aligned} 0 = H &= \sum_i A(E_i, E_i)^N = \langle \bar{\nabla}_{\tilde{T}} \tilde{T}, \tilde{\eta} \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\xi} \xi, \tilde{\eta} \rangle \\ &= \langle \widetilde{\nabla_T T}, \tilde{\eta} \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\xi} \tilde{\eta}, \xi \rangle \\ &= \langle \nabla_T T, \eta \rangle = \text{curvatura geodésica de } \gamma \text{ no ponto } \Pi(x). \end{aligned}$$

Desta forma, temos que  $\gamma$  é uma geodésica, e pela proposição 4.1.8,  $S$  não admite geodésicas simples e fechadas na sua parte regular. Portanto,  $\Sigma$  não pode ser vertical.

Ao analisarmos a hipótese de  $\Sigma$  ser horizontal devemos recordar que, como  $\mathcal{M}$  é um espaço fibrado de Seifert, o número de Euler  $e$  é um indicador da existência de superfícies horizontais em  $\mathcal{M}$ , isto é,  $\mathcal{M}$  admite superfície horizontal  $\Sigma$  se, e somente se,  $e(\mathcal{M}) = 0$ . Como sabemos que  $e(\mathcal{M}) \neq 0$ , temos então que  $\mathcal{M}$  não possui  $\Sigma$  horizontal. Portanto,  $\Sigma$  não pode ser *de dois lados*. Devemos então analisar a existência de  $\Sigma$  *de um lado*.

· Supondo  $\Sigma$  *de um lado*: Por hipótese  $\Sigma \subset \mathcal{M}$  é mínima, fechada e mergulhada, podemos então tomar o recobrimento duplo  $\tilde{\mathcal{M}}$  de  $\mathcal{M}$  de forma que o levantamento  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  seja uma superfície mínima, fechada, conexa e *de dois lados* que é estável por hipótese.

Desta forma,  $\tilde{\mathcal{M}}$  é um espaço fibrado de Seifert munido de uma métrica pullback induzida pelo mapa de recobrimento, portanto, o lema 4.1.6 nos diz que  $\tilde{\Sigma}$  deve ser ou horizontal ou vertical, e isso deve valer também para  $\Sigma$  por causa do jeito que  $\tilde{\Sigma}$  foi definida e porque ser horizontal ou vertical é uma propriedade local. Então podemos usar a mesma argumentação feita no caso anterior, na qual tínhamos  $\Sigma$  *de dois lados*, gerando novamente uma contradição. Desta forma, não pode existir tal  $\Sigma$ .  $\square$

Além deste resultado, Lima prova que a conjectura 4.0.7 é válida se enfraquecermos uma das hipóteses de mergulhada para imersa:

**Teorema 4.2.3.** [19] *Seja  $(\mathcal{M}, g)$  uma 3-variedade Riemanniana. Se  $(\mathcal{M}, g)$  não admite superfície mínima fechada e imersa cujo recobrimento de dois lados é estável, então  $\mathcal{M}$  é finitamente recoberto pela esfera  $\mathbb{S}^3$ .*



*Demonstração.* Vamos supor que  $\mathcal{M}$  não é quociente da 3-esfera, e mostrar que neste caso  $(\mathcal{M}, g)$  possui superfície mínima estável, fechada, de dois lados e imersa. Pelo trabalho de de Perelman temos que se  $\mathcal{M}$  não é quociente da 3-esfera, então  $\mathcal{M}$  possui grupo fundamental infinito, portanto  $\mathcal{M}$  se encaixa em um dentre os seguintes quatro casos:

- I -  $\mathcal{M}$  é não-irredutível;
- II -  $\mathcal{M}$  é irredutível e não orientável;
- III -  $\mathcal{M}$  é irredutível, orientável e não-Haken;
- IV -  $\mathcal{M}$  é irredutível, orientável e Haken.

I - Se  $\mathcal{M}$  é não-irredutível existe esfera  $S \subset \mathcal{M}$  que representa um elemento não-nulo do grupo de homologia de  $\mathcal{M}$ . Combinando o teorema de Sacks-Uhlenbeck [34] e [21] obtemos que existe uma esfera mínima e estável  $\Sigma$  em  $(\mathcal{M}, g)$ , e que  $\Sigma$  ou é mergulhada ou recobre duplamente um plano projetivo mergulhado.

II - Se  $\mathcal{M}$  é irredutível e não orientável e não possui plano projetivo de dois lados mergulhado  $P$ , então por [2]  $(\mathcal{M}, g)$  contém uma superfície mergulhada e estável  $\Sigma$  homeomorfa a  $P$ . Além disso,  $\Sigma$  é de dois lados (caso contrário, por [[14], lema 2]  $\mathcal{M}$  é  $\mathbb{R}P^3$ , o que contradiz a hipótese da não orientabilidade).

Se  $\mathcal{M}$  possui plano projetivo de dois lados mergulhado  $P$ , pelos lemas 6.6 e 6.7 de [16],  $\mathcal{M}$  contém uma superfície incompressível, que não separa  $\mathcal{M}$ , de dois lados mergulhada  $S$ . Utilizando os teoremas 3.1 e 5.1 de [9] obtemos uma superfície mínima e estável  $\Sigma$  homotópica a  $S$  em  $(\mathcal{M}, g)$ . Além disso,  $\Sigma$  é mergulhada ou recobre duplamente uma superfície de um lado mergulhada.

III - Se  $\mathcal{M}$  é irredutível, orientável e não-Haken podemos dividir nossa análise em dois casos dependendo se  $\pi_1(\mathcal{M})$  possui subgrupo  $G$  isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ou não.

Se  $\pi_1(\mathcal{M})$  possui subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  então existe um toro incompressível imerso em  $\mathcal{M}$ . Desta forma, segue de resultados em [34] e [33] que  $(\mathcal{M}, g)$  contém toro mínimo, imerso e estável.

Se  $\pi_1(\mathcal{M})$  não possui subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , pelo trabalho de Perelman sabemos que  $\mathcal{M}$  admite superfície orientável, incompressível e imersa de gênero  $g \geq 2$ . Usando novamente [33] e [34] podemos concluir que  $(\mathcal{M}, g)$  contém superfície mínima, estável e imersa de gênero  $g \geq 2$ .

IV - Se  $\mathcal{M}$  é orientável, irredutível e Haken, combinando os resultados de [33] e [34] com o de [9], obtemos que  $(\mathcal{M}, g)$  contém superfície mínima estável, orientável e incompressível de gênero  $g \geq 1$ . Além disso, tal superfície é ou mergulhada ou recobre duplamente uma superfície não-orientável e mergulhada.  $\square$

É notável que a conjectura de Meeks-Pérez-Ros 4.0.7 difere do teorema anterior apenas pela hipótese do mergulho das superfícies mínimas em  $(\mathcal{M}, g)$ . Para descobrirmos se o resultado pode ser provado na versão mais forte (com mergulho ao invés de imersão) esbarramos diretamente no caso III. Se  $\pi_1(\mathcal{M})$  possui subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , segue de [31] que  $\mathcal{M}$  é um espaço fibrado de Seifert não-Haken com  $\pi_1(\mathcal{M})$  infinito. O teorema 4.2.2 garante que  $\mathcal{M}$  admite uma métrica que não contém superfície mínima fechada e mergulhada cujo recobrimento de dois lados é estável. Quando  $\pi_1(\mathcal{M})$  não possui subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{M}$  é hiperbólica, e não temos resultados sobre a existência de superfícies mínimas fechadas e mergulhadas cujo recobrimento de dois lados é estável.

Existem exemplos de  $\mathcal{M}$  não-Haken e hiperbólicas que não contém superfícies não-orientáveis mergulhadas, o que nos diz que as superfícies produzidas pela demonstração do teorema 4.2.3 não são mergulhadas e não recobrem nenhuma superfície não orientável.

**Questão 4.2.4.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma 3-variedade fechada, hiperbólica, não-Haken e seja  $g$  uma métrica Riemanniana arbitrária em  $\mathcal{M}$ . A 3-variedade Riemanniana  $(\mathcal{M}, g)$  admite superfície mínima fechada e mergulhada cujo recobrimento de dois lados é estável?*

É importante ressaltar que esta pergunta não possui está aberta até mesmo para o caso no qual  $g$  é uma métrica hiperbólica.

# Referências Bibliográficas

- [1] M. Aschenbrenner, S. Friedl, H. Wilton. *3-manifold groups*. (2012).
- [2] H. Bray, S. Brendle, M. Eichmair, A. Neves. *Area-minimizing projective planes in 3-manifolds*. *Comm. Pure Appl. Math.* 63 (2010), no. 9, 1237-1247
- [3] M.P. do Carmo. *Geometria riemanniana*. Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (1988).
- [4] E.B. Christoffel. "*Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*". *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 70: 46–70.
- [5] Clay Mathematics Institute (2021, 6 de outubro). Millennium Problems. Acessado via <https://www.claymath.org/millennium-problems>
- [6] T.H. Colding, W.P. Minicozzi II. *A Course in Minimal Surfaces*. Graduate Studies in Mathematics, (2011).
- [7] D.B.A. Epstein. "*Periodic flows on 3-manifolds*", *Ann. of Math.*, 95 (1972), 66-82.
- [8] L. Euler. "*Recherches sur la courbure des surfaces*". *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* (publicado em 1767), 16: 119–143.
- [9] M. Freedman, J. Hass, P. Scott. *Least area incompressible surfaces in 3-manifolds*. *Invent. Math.* 71 (1983), no. 3, 609-642.
- [10] R. Hamilton. "*Three-manifolds with positive Ricci curvature*", *J. Differential Geom.* 17 (1982), no. 2, 255–306.

- [11] R. Hamilton. *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993), 7–136, Int. Press, Cambridge, MA, (1995).
- [12] R. Hamilton. *Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds*, Comm. Anal. Geom. 7 (1999), no. 4, 695–729.
- [13] J. Hass. *Minimal Surfaces and the Topology of Three-Manifolds*. Clay Mathematics Proceedings. Volume 2, (2004).
- [14] W. Heil. *Testing 3-manifolds for projective planes*. Pacific J. Math. 44 (1973), 139-145.
- [15] W. Heil. *Almost sufficiently large Seifert fiber spaces*. Michigan Math. J. 20 (1973), 217-223.
- [16] J. Hempel. *3-Manifolds*. Ann. of Math. Studies, No. 86. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, (1976). xii+195 pp.
- [17] H. Kneser. "*Geschlossene Flächen in dreidimensionale Mannigfaltigkeiten*", Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., 38 (1929), 248-260.
- [18] P. Koebe. *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1907), 191–210 e 633–649.
- [19] V. Lima. "*On the conjecture of Meeks, Pérez and Ros*". arXiv:1806.03883v3
- [20] B. Martelli. *An Introduction to Geometric Topology*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 488 páginas (2016).
- [21] W.H. Meeks III, S.T. Yau. *Topology of three-dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory*. Ann. of Math. (2) 112 (1980), no. 3, 441-484.
- [22] W.H. Meeks III, J. Pérez, A. Ros. "*Stable constant mean curvature surfaces*", Handbook of geometric analysis. No. 1, 301-380, Adv. Lect. Math. (ALM), 7, Int. Press, Somerville, MA, (2008).
- [23] J.W. Milnor. *A unique factorisation theorem for 3-manifolds*, Amer. J. Math., 84 (1962), 1-7.

- [24] C. D. Papakyriakopolus. *Dehn's lemma and asphericity of knots*. Annals of Math. 66 (1975), 1-26
- [25] G.Y. Perelman. "*The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*", preprint (2002).
- [26] G.Y. Perelman. "*Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*", preprint (2003).
- [27] G.Y. Perelman. "*Ricci flow with surgery on three-manifolds*", preprint (2003).
- [28] R.J. Pitts, J. H. Rubinstein. "*The topology of minimal surfaces in Seifert fiber spaces*", Michigan Math. J. 42 (1995), no. 3, 525-535.
- [29] H. Poincaré. *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques*. Acta Math. 31 (1907), 1–64.
- [30] H. Poincaré *Cinquième complément à l'analysis situs*. Rend. Circ. Mat. Palermo 18, 45-110, 1904. Reprinted in Oeuvres, Tome VI. Paris, 1953, p. 498.
- [31] J-P. Pr´eaux. *A Survey on Seifert Fiber Space Theorem*. ISRN Geom. 2014, Art. ID 694106, 9 pp.
- [32] T. Ruen. Uniform dual tiling (4,4,3). Acessado via [https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Uniform\\_dual\\_tiling\\_443-t012.png](https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Uniform_dual_tiling_443-t012.png)
- [33] J. Sacks, K. Uhlenbeck. *The existence of minimal immersions of 2-spheres*. Ann. of Math. (2) 113 (1981), no. 1, 1-24.
- [34] J. Sacks, K. Uhlenbeck. *Minimal immersions of closed Riemann surfaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 271 (1982), no. 2, 639-652.
- [35] R. Schoen. *Curvature estimates for stable minimal surfaces in three-dimensional manifolds. Seminal on minimal submanifolds*. Annals of Math. Studies 103, Princeton University Press 1983. 111-126.
- [36] P. Scott. *There are no fake Seifert fibre spaces with infinite  $\pi_1$* . Annals of Math. (2) 117:1 (1983), 35-70.

- [37] P. Scott. "*The geometries of 3-manifolds*", Bull. London Math. Soc. 15 (1983), no. 5, 401–487.
- [38] W. P. Thurston. *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton Lecture Notes (1979), disponível em <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>
- [39] W. P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology*. Vol. 1. Edited by Silvio Levy. Princeton Mathematical Series, 35. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. x+311 pp. ISBN 0-691-08304-5
- [40] W. P. Thurston. "*Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*", Bull. Amer. Math. Soc., New Ser. 6 (1982), 357–379.
- [41] W. P. Thurston. *Hyperbolic geometry and 3-manifolds*, Low-dimensional topology (Bangor, 1979), pp. 9-25, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 48, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, (1982).
- [42] Ueno, Kenji, et al. *A Mathematical Gift, 1: The Interplay Between Topology, Functions, Geometry, and Algebra (Mathematical World) (v. 1)*. American Mathematical Society, (2003).
- [43] F. Waldhausen. *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*. Annals of Math (2) 87 (1968), 56-88.