UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

CONTRIBUIÇÕES AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO COMBINATÓRIO COM O JOGO SENHA: UMA EXPERIÊNCIA A PARTIR DA SEMIÓTICA

RODRIGO YUJI HIRATA SATO

Porto Alegre
2021

RODRIGO YUJI HIRATA SATO

CONTRIBUIÇÕES AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO COMBINATÓRIO COM O JOGO SENHA: UMA EXPERIÊNCIA A PARTIR DA SEMIÓTICA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Leandra Anversa Fioreze

Porto Alegre
2021

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

CONTRIBUIÇÕES AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO COMBINATÓRIO COM O JOGO SENHA: UMA EXPERIÊNCIA A PARTIR DA SEMIÓTICA

RODRIGO YUJI HIRATA SATO

Banca examinadora:

Prof.ª Dr.ª Leandra Anversa Fioreze
Faculdade de Educação - UFRGS

Prof.ª Dr.ª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof.ª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant’Ana
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, gostaria de deixar meus agradecimentos...

...à professora Leandra Fioreze, minha orientadora, que me guiou em toda pesquisa, levantando apontamentos, questionando e me fazendo enxergar a educação por outros olhos, auxiliando no meu processo de amadurecimento como um professor pesquisador.

...às professoras Márcia Notare e Marilaine Sant'Ana, por terem aceitado fazer parte desta banca e serem tão compreensivas com os adiamentos de prazos que precisei pedir.

...à professora Eliane Silveira e aos alunos da escola Prof. Tolentino Maia, que aceitaram fazer parte desta pesquisa e me ajudaram a crescer como professor.

...à minha namorada Paola, por nunca ter deixado de acreditar em mim, até nas horas quando eu não acreditei, você esteve lá pra me apoiar e dizer que ia dar tudo certo. Por isso, serei eternamente grato.

...à minha mãe que sempre esteve do meu lado e foi a primeira pessoa a me encorajar seguir meu sonho de ser professor. Sem o seu apoio, hoje não estaria aqui concluindo este trabalho.

...ao meu pai, que mesmo à distância, sempre me incentivou a seguir em frente, independente do caminho que escolhi.

...aos amigos que fiz na graduação Artur, Reginaldo, Samuel, Mariana, Joyce e Júlia, vocês fizeram esses anos serem mais divertidos e me ajudaram quando eu não conhecia ninguém em Porto Alegre.

...e por fim, ao meu filho Matteo Haruki. Filho, tu foste minha força nesses últimos tempos e minha alegria diária.

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Eiko e Celso, que nunca deixaram de acreditar em mim e sempre me apoiaram em todas as mudanças que eu resolvi enfrentar, estando sempre ao meu lado.

Também dedico este trabalho à minha namorada Paola e meu filho Matteo Haruki, que são minha fonte de alegria e estiveram sempre lá quando precisei.

RESUMO

Nesta pesquisa buscou-se observar de que maneiras o jogo Senha poderia contribuir no desenvolvimento do pensamento combinatório em alunos do 8º ano do ensino fundamental, a partir da teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval. Foram analisadas as explicações dos alunos, por meio de registros em língua materna, e as suas partidas, considerados registros materiais, verificando se foram capazes de realizar as conversões entre eles. A metodologia utilizada no presente trabalho é de caráter qualitativo, visto que são analisados os registros dos alunos, não se importando com o número de rodadas necessárias para finalizar o jogo, mas de que forma os alunos mobilizam suas jogadas de acordo com os *feedbacks* recebidos pelo sistema. Foram realizadas três oficinas com os alunos, de forma remota pela plataforma *Google Meet*, devido ao ensino remoto emergencial que se estabeleceu por conta da pandemia do Covid-19. A produção dos dados analisados se deu por meio de fotos tiradas pelos alunos, preenchimento do arquivo *Word* fornecido pelo pesquisador, conversas pelo *Whatsapp* da professora titular e um formulário criado no *Google Forms* pelo autor, com 9 questões qualitativas ou quantitativas. A análise destes dados foi feita sob a luz do referencial teórico de Duval. Os resultados desta pesquisa concluíram que o jogo Senha contribuiu para o desenvolvimento do Pensamento Combinatório, pois possibilitou os alunos refletirem e, com o auxílio do registro em língua materna, analisarem suas jogadas utilizando o raciocínio combinatório para concluir a partida.

Palavras-chave: Pensamento Combinatório. Jogos na Educação Matemática. Semiótica. Registros de Representação.

ABSTRACT

In this paper the searcher wanted to observe how the game Senha could contribute to the development of the Combinatorial Reasoning in students of the 8th grade of elementary school, using the theory of Registers of Semiotics Representations of Raymond Duval. It were analyzed the explanation of the students, through the mother language registers, and the matches, considered material registers, checking if they could make the conversions between the registers. The methodology used in this paper has a qualitative feature, since the registers of the students are analyzed, not mattering how many rounds they needed to complete the game, but how they made their play in accord with the *feedback* they received from the system. There were three workshops, all done remotely with the Google Meet platform, because of the emergencial remote teaching adopted by the schools in the pandemic of the COVID-19. The production of the analyzed data was made through photos taken by the students, filling of the *Word* document provided by the researcher, chat in *Whatsapp* with the teacher of the class and a form created in *Google Forms* by the author, with 9 questions qualitative and quantitative. The analysis of these data was made under the light of the theoretical reference of Duval. The results of this research concludes that the game Senha contributes to the development of the Combinatorial Reasoning because it allowed the students to reflect and, with the help of the registers in their native language, to analyze their moves utilizing the Combinatorial Reasoning to finish the game.

Keywords: Combinatorial Reasoning. Games in Mathematic Education. Semiotics. Registers of Representation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1. Introdução[1]

Em janeiro de 2019, fiz um curso de verão na Universidade de São Paulo sobre Análise Combinatória, Probabilidades e Aplicações. Por se tratar de um curso de verão, o ritmo era mais acelerado do que na disciplina de Combinatória I da faculdade e também em um nível um pouco superior. Por este segundo motivo, as exigências também foram maiores. E uma dessas exigências foi um exercício que o professor deste curso passou em uma das listas obrigatórias no qual os alunos deveriam demonstrar que a seguinte equação é verdadeira:

$$C_2^n = C_2^k + k.(n-k) + C_2^{n-k}$$

Porém, precisavam mostrar de duas formas que a igualdade era verdadeira. Primeiro algebricamente, e depois utilizando a linguagem materna, que poderia ser um exemplo que exemplificasse a igualdade. Para a maioria dos alunos daquele curso de verão demonstrar algebricamente era muito fácil, bastava apenas mostrar que:

$$C_2^k + k.(n-k) + C_2^{n-k} = \frac{k!}{(k-2)!\,2!} + k.(n-k) + \frac{(n-k)!}{(n-k-2)!\,2!}$$
$$= \frac{k.(k-1).(k-2)!}{(k-2)!\,2!} + nk - k^2 + \frac{(n-k).(n-k-1).(n-k-2)!}{(n-k-2)!\,2!} =$$
$$\frac{k^2-k}{2} + \frac{2nk-2k^2}{2} + \frac{n^2-2kn+k^2-n+k}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2!}$$
$$= \frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = C_2^n$$

O problema estava em encontrar esse exemplo, algo que eu não havia trabalhado em minha experiência de estudante da Educação Básica, cursinho pré-vestibular e como estudante de nível superior. Para mim, era possível realizar a “tradução” de um problema de contagem para uma expressão algébrica, mas nunca havia pensado no caminho inverso. E a resposta deste problema era simples, como:

---

[1] Esta parte será escrita em primeira pessoa, pois é uma experiência vivida pelo autor.

“A quantidade de maneiras possíveis de escolhermos duas pessoas num grupo de *n* pessoas é igual a quantidade de maneiras possíveis de escolhermos dois homens desse grupo (aqui dizemos que existem *k* homens), ou escolhermos um homem e uma mulher desse grupo, ou escolhermos duas mulheres desse mesmo grupo.”

E a partir desse curso, comecei a enxergar a Análise Combinatória com outros olhos, percebendo que permutações, arranjos e combinações poderiam ser trabalhadas de forma muito menos algébrica e simbólica.

Uma das maiores dificuldades na aprendizagem da Matemática é que os objetos matemáticos não possuem uma existência material, diferente da situação das demais ciências. A Análise Combinatória não necessita de cálculos matemáticos complexos, mas mesmo assim é um dos conteúdos que os alunos possuem maior dificuldade de aprendizagem, isto está ligado, em parte, à imaterialidade do raciocínio combinatório, e é dessa forma que os jogos vêm como uma forma de representação material deste raciocínio.

A escolha do pensamento combinatório como tema desta pesquisa vem motivada pela dificuldade que alunos e professores encontram em trabalhar com o conteúdo de Análise Combinatória. Apesar de não necessitar de nenhum conhecimento matemático avançado prévio, pois trabalha apenas com o campo aditivo e multiplicativo. Segundo Braga (2009), os alunos ainda apresentam muitas dificuldades para interpretar as questões e trabalhar com os conceitos específicos do conteúdo como arranjos, permutações e combinações, reforçando que o problema está na dificuldade de utilizar o pensamento combinatório na hora de interpretar os problemas. Para Lima e outros,

> Problemas de contagem estão entre os considerados mais difíceis pelos alunos (e professores) do Ensino Médio. Em parte, isto se deve ao fato de que este assunto é introduzido apenas na segunda série do Ensino Médio, apesar das técnicas matemáticas necessárias serem bastante elementares: essencialmente, o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão. (2006, p. 123)

Porém esta dificuldade não se limita apenas aos alunos. Muitos professores que não tiveram contato com este conteúdo durante sua formação na Educação

Básica não se sentem preparados para lecionar tal conteúdo, como mostra Mendonça (2011) ou não possuem confiança em trabalhar com a Análise Combinatória chegando a retirar do currículo, conforme em Gonzaga (2015).

Os estudos sobre a Análise Combinatória se iniciaram por conta dos jogos de azar, como lançamento de dados e os jogos de cartas. Porém, ao longo dos anos foi se desenvolvendo estudos mais aprofundados sobre o assunto e hoje é aplicada em diversas áreas como o cálculo de probabilidades, problemas de transporte, confecção de horários, programação linear, criação de senhas, entre outras (CARDOSO; GUIRADO, 2007). Por exemplo, a teoria dos Grafos se embasa na Análise Combinatória e serve para solucionar diversos problemas computacionais e entendo que não pode ser um conteúdo que é excluído do currículo escolar.

No início de 2020, fui convidado pela professora Leandra a me juntar ao grupo de pesquisa que ela coordena, o MathemaTIC. O grupo, atualmente, possui dois projetos de extensão, o projeto “A Programação na Educação Básica” e o “Cama de Gato - O Lúdico e a Aprendizagem com Jogos”. A minha experiência no segundo projeto foi o que me levou a me aproximar da tendência de Jogos na Educação Matemática. Os jogos na Educação Matemática, como classifica Moura (1991), têm a capacidade de desencadear a aprendizagem nos alunos de uma forma lúdica, despertando o interesse dos alunos pela Matemática.

No segundo semestre de 2019, tive a oportunidade de fazer a cadeira de Educação Matemática e Docência III com a minha orientadora, a professora Leandra Fioreze, e lá conheci a Semiótica, mais especificamente, os Registros de Representações Semióticas de Duval (2012), cujo referencial abordava exatamente o que eu procurava para trabalhar com a Análise Combinatória. Ou seja, abordar diferentes formas de registro de representação para o ensino de Combinatória, pois no entendimento de Duval, quando se é capaz de mobilizar dois ou mais tipos de registros, simultaneamente, fazendo a conversão livremente entre eles em qualquer sentido, se atinge a *noesis*, ou seja, a compreensão do objeto matemático.

O objetivo do meu trabalho de pesquisa é verificar de que formas o jogo Senha contribui no desenvolvimento do pensamento combinatório nos alunos, a partir da teoria dos Registros de Representações Semiótica de Raymond Duval. Os jogos na Educação Matemática têm se mostrado ferramentas importantes na construção de noções e conceitos matemáticos, segundo Grando (2000), e são capazes de representarem de forma material os conceitos matemáticos, sendo considerado por Silva (2009) como um Registro de Representação Semiótica Material, adicionando uma nova forma de representação à teoria de Duval. Dessa forma, procurei incentivar os alunos a trabalharem com representações distintas simultaneamente, buscando relacioná-las para que seja possível observar como os alunos são capazes de realizar as conversões entre os registros e, a partir disso, compreender o objeto matemático e completar o jogo. Neste sentido, minha questão de pesquisa é: De que forma o jogo Senha pode contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Combinatório nos alunos de turmas do oitavo ano do Ensino Fundamental da E.E.E.M. Prof. Tolentino Maia a partir da teoria dos Registros de Representações Semióticas?

No segundo capítulo deste trabalho apresento como os jogos são utilizados na Educação Matemática, não apenas por seu aspecto lúdico, mas permitindo que os alunos sejam os protagonistas em sua própria aprendizagem. No subcapítulo é apresentado o jogo Senha para o leitor, de forma que compreenda as regras e características do jogo utilizado neste trabalho.

No terceiro capítulo apresento a teoria de Duval, seus principais elementos e exemplos dos diferentes registros, definidos por Duval (2008), e faço a relação com a Análise Combinatória.

No quarto capítulo trago a origem da Análise Combinatória e algumas de suas aplicações na atualidade, bem como o entendimento do Pensamento Combinatório e sua influência na pesquisa. Faço também uma revisão de literatura sobre trabalhos que abordam Análise Combinatória e jogos.

No quinto capítulo descrevo a metodologia utilizada neste trabalho, o local onde a pesquisa ocorreu, as características dos participantes, os materiais utilizados para o seu desenvolvimento e quais dados foram coletados para a análise. No sexto capítulo faço a análise das oficinas, dos registros fornecidos pelos alunos e dos formulários entregue a eles no último dia. E por último, apresento as conclusões que faço a partir da pesquisa desenvolvida.

2. Os jogos na Educação Matemática

Teixeira (2008) aponta que com as novas formas de se pensar a aprendizagem dos alunos e a construção do pensamento, cada vez mais o estudante toma papel de protagonista, de forma ativa, como ser pensante, e os jogos na Educação Matemática vem tendo papel importante na reformulação como se vê a educação.

Quando se opta por trabalhar com jogos no ensino da Matemática, pensa-se em criar estratégias que levem os estudantes a aprenderem, diferente de trabalhar o jogo contando somente com o aspecto de ludicidade, fazendo-os questionarem, analisarem, refletirem e pensarem sobre seus movimentos e jogadas, afim de concluir o desafio com eficácia. Segundo Moura (1991), o professor utiliza o jogo com a finalidade de propiciar a aprendizagem, e tem como propósito o ensino de um conteúdo ou de uma habilidade.

Jogo pode ser visto como: “1) o resultado de um sistema linguístico que funciona dentro de um contexto social; 2) um sistema de regras; 3) um objeto” (KISHIMOTO, 2008, p.16). No primeiro caso, o jogo depende do contexto social e da linguagem de quem o joga, levando em consideração suas ações e vocabulários. A noção de jogo não remete à linguagem de nenhuma ciência específica, mas sim a um cotidiano e por isso deve ser respeitado o uso social da linguagem, pressupondo interpretações e projeções sociais. No segundo caso, o sistema de regras é o que é capaz de definir uma sequência estrutural para o jogo, diferenciando-o. É o sistema de regras que faz a diferença entre estar jogando *pôquer* e *buraco*, mesmo ambos fazendo uso de cartas. E o terceiro caso está relacionado ao jogo como objeto, ao material capaz de construir um jogo, como uma pequena pedra para se jogar amarelinha. Porém, nem todo jogo se faz necessário de um objeto, um problema capaz de intrigar um aluno, ou uma charada, podem ser considerados jogos também.

Críton (1997) define que para um problema ser considerado um jogo matemático ele precisa ser acessível ao maior número de pessoas, que seu enunciado surpreenda, intrigue, colocando um desafio a quem o lê e que sua resolução seja capaz de divertir, distrair, surpreender aquele que se dispõe a desvendá-lo. Um jogo não pode ser muito fácil, a ponto do aluno se desinteressar rapidamente por ele, nem muito difícil a ponto de não ser capaz de compreendê-lo, e mais importante, deve fazer sentido para o estudante.

Moura (1991, p.49) classifica os jogos pedagógicos em dois tipos: *jogos desencadeadores de aprendizagem* e *jogos de aplicação*. O primeiro tipo são jogos que exigem que os alunos estabeleçam “um plano de ação, com a busca de conhecimentos anteriores, através da comparação com situações semelhantes à proposta ou da síntese de conhecimentos anteriores, de modo que haja uma ruptura no conhecimento anterior”. Enquanto o segundo, como já diz o nome, são jogos nos quais os alunos só necessitam aplicar definições e algoritmos.

Borin (2007, p.15) traz outra classificação, diferente de Moura, com similaridades quanto ao conteúdo: *jogos de treinamento* e *jogos de estratégia*. O primeiro, similar aos jogos de aplicação, serve para ajudar na “memorização ou fixação de conceitos, fórmulas e técnicas ligadas a alguns tópicos do conteúdo”, servindo de reforço na aprendizagem. Já os jogos da segunda classificação servem para desenvolver o raciocínio lógico dos alunos. Mas, o que define a classificação do jogo não é o jogo em si, e sim a forma como ele é apresentado para os alunos, de acordo com os objetivos didáticos do professor, como complementa Moura (1991).

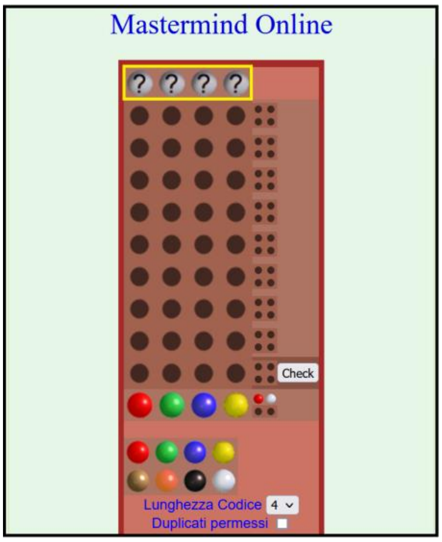
O jogo utilizado neste trabalho é um jogo de tabuleiro, e pode ser considerado por Moura (1991) como um jogo desencadeador de aprendizagem, posto que os alunos não possuem algoritmos e definições capazes de aplicá-los ao jogo. E na visão de Borin (2007), pode ser considerado um jogo de estratégia, pois, como é o objetivo deste trabalho, tem potencial para contribuir no desenvolvimento do pensamento combinatório nos alunos.

O objeto matemático só existe no campo das ideias e muitas vezes, isto dificulta o entendimento do conceito matemático por parte dos alunos, pois por se tratar de uma ideia abstrata que não existe no mundo real. Neste ponto, os jogos são capazes de simular os objetos matemáticos, trazendo a concretude que é sentido falta por parte dos estudantes. Dessa forma, os alunos são capazes de manipular as representações dos objetos matemáticos, permitindo-os que percebam as mudanças que ocorrem de acordo com as ações que eles tomam durante o jogo.

2.1. O jogo Senha

O jogo Senha, originalmente chamado de *Mastermind*, foi criado pelo israelita Mordecai Meirowitz e na década de 70 foi considerado o jogo mais bem sucedido da década, sendo vendidos 50 milhões de tabuleiros em 80 países (SILVA, 2018). A versão do jogo que foi utilizada na pesquisa é a de um site[2] em italiano[3], tendo as bolas compostas por 8 cores diferentes (vermelho, verde, azul, amarelo, marrom, laranja, preto e branco). No jogo, cada jogador tem até 10 rodadas para descobrir a senha, e a cada rodada o sistema fornece um *feedback* para se guiar através dele. Este *feedback* tem um único formato: bola branca para a cor certa no lugar errado, e bola vermelha para cor certa e lugar certo, conforme Figura 1, não tendo relação alguma com a posição das cores na tentativa. O código a ser descoberto está localizado no topo do tabuleiro, destacado em amarelo na Figura 1.

Figura 1: Exemplo do tabuleiro e *feedback*



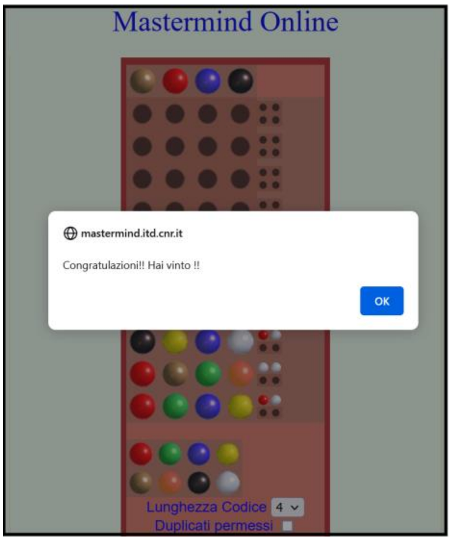
Fonte: Elaborada pelo autor

Quando a senha é descoberta, o sistema retorna com uma mensagem: “Congratulazioni!! Hai vinto!!”, conforme Figura 2, que se traduz: “Parabéns! Você venceu!”.

[2] http://mastermind.itd.cnr.it/index.php

[3] Foi escolhido este site, pois não possuía propagandas e havia a possibilidade de se fazer alterações nas configurações do jogo (aumentar o número de elementos e/ou permitir a repetição de cores). Existem outros sites em português ou inglês, mas os demais não cumpriam um destes requisitos.

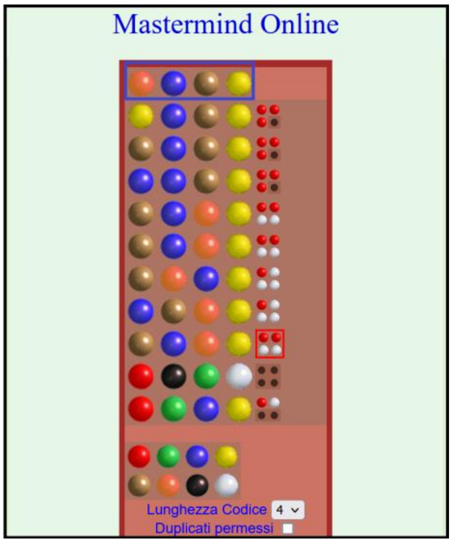
Figura 2: Exemplo de partida vencida



Fonte: Elaborada pelo autor

Quando a senha não é descoberta após a última rodada, no espaço onde estavam as interrogações destacadas na Figura 1, aparece a solução que na Figura 3 está destacada em azul.

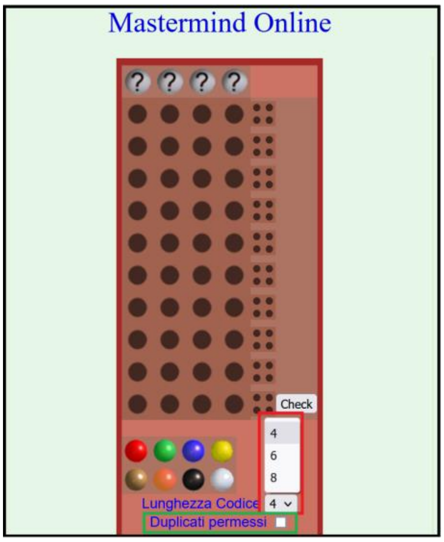
Figura 3: Exemplo de partida perdida



Fonte: Elaborada pelo autor

Além disso, o jogo possui a capacidade de ter suas configurações alteradas, com o intuito de aumentar a sua dificuldade, conforme a Figura 4. Pode-se aumentar o número de elementos na senha para 6 ou 8 elementos, destacado em vermelho, ou ativar a opção que permite a repetição de cores no código, destacado em verde, possibilitando que uma cor seja repetida 2 ou mais vezes.

Figura 4: Configurações do jogo



Fonte: Elaborada pelo autor

Sendo que a cada aumento no número de elementos, aumenta em 4 o número de rodadas para se descobrir o código, sendo 10 rodadas para 4 elementos, 14 rodadas para 6 elementos e 18 rodadas para 8 elementos. Ativar a possibilidade de ter cores repetidas não altera a quantidade de rodadas, apesar de ser possível criar mais senhas, comparando com senhas com o mesmo número de elementos, mas sem repetição de cor, como exemplificado no Quadro 1.

Quadro 1: Número de possibilidades para cada configuração do jogo Senha

Configurações do jogo	Quantidade de possíveis códigos
4 elementos, sem repetição de cor	8x7x6x5 = 1.680 possibilidades
4 elementos, podendo repetir cores	8x8x8x8 = 4.096 possibilidades
6 elementos, sem repetição de cor	8x7x6x5x4x3 = 20.160 possibilidades
6 elementos, podendo repetir cores	8x8x8x8x8x8 = 262.144 possibilidades
8 elementos, sem repetição de cor	8x7x6x5x4x3x2x1 = 40.320 possibilidades
8 elementos, podendo repetir cores	8x8x8x8x8x8x8x8 = 16.777.216 possibilidades

Fonte: Elaborada pelo autor

3. Registros de Representações Semióticas

A teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval baseia-se na ideia de que os objetos matemáticos são abstratos e é possível representá-lo através de diversos registros. Porém, muitas vezes este objeto é confundido por uma de suas representações. Por isso é importante que sejam mobilizados vários registros de representações diferentes, para que o aluno consiga diferenciar o objeto de sua representação.

Este é um dos paradoxos da teoria de Duval, não podemos associar um objeto matemático apenas a uma de suas representações, porém é necessário trabalhar com estas representações para compreender o objeto matemático. Segundo Duval (2012, p.280), “toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa, e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados.” Ou seja, uma representação não é capaz de representar completamente um objeto e as diversas representações são complementares umas às outras.

Na teoria dos Registros de Representações Semióticas, há alguns elementos que devem ser verificados mais atentamente, como a *semiose*, *noesis*, *tratamento*, *conversão*, *congruência* e as *representações*. Para conseguir entender porque a Semiótica é capaz de auxiliar na aprendizagem da Análise Combinatória precisa-se compreender o significado do que cada um destes elementos representa.

- **Semiose**

“Semiose é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica.” (DUVAL, 2012, p. 270) Isso quer dizer que a semiose ocorre quando se é capaz de representar ou identificar um objeto matemático através de um signo, o que não garante a compreensão do objeto matemático em si, mas é o primeiro passo para que este seja entendido.

- **Noesis**

“Noesis é a apreensão conceitual de um objeto.” (DUVAL, 2012, p. 270) A noesis acontece quando consegue-se compreender o objeto matemático. É importante acrescentar que não há *noesis* sem *semiose*. É através das representações do objeto matemático que se tem acesso a ele e se é capaz de compreendê-lo. Pode-se considerar que a *noesis* é o objetivo final, pois ela garante que houve a aprendizagem.

- **Tratamento**

"Tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro." (DUVAL, 2012, p. 272) Realiza-se o tratamento quando ao fazer uma transformação em uma representação não se sai de seu registro. Um exemplo disso é quando se realiza o tratamento de um número na sua forma simbólica:

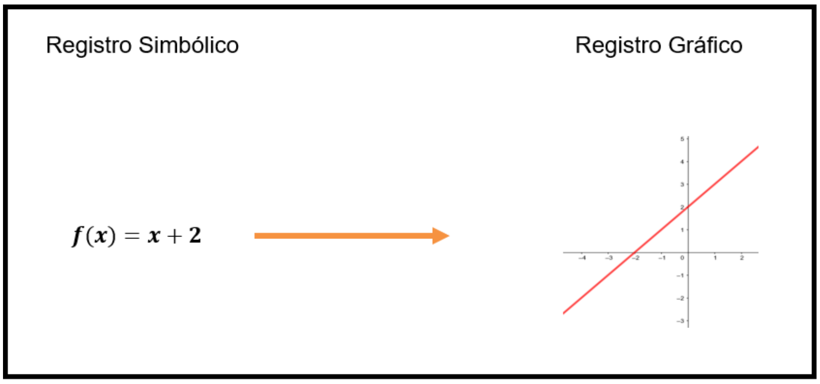
$$12 = \frac{24}{2} = (2\sqrt{3})^2 = A_{4,2}$$

Todos estes valores são equivalentes e pertencem ao registro simbólico, portanto foi apenas realizado um tratamento nas representações.

- **Conversão**

"Conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial." (DUVAL, 2012, p. 272) Quando se realiza uma transformação de uma representação em uma outra que não está no mesmo registro, diz-se que foi realizada uma conversão. Um exemplo de conversão é quando se passa do registro simbólico para o registro gráfico:

Figura 5: Conversão do registro simbólico para o registro gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

É importante destacar que os alunos muitas vezes sabem realizar um sentido da conversão, mas possuem dificuldade em realizar o sentido contrário.

- **Congruência**

Congruência para Duval (2012) é um fenômeno entre conversões que determina a facilidade de se transitar entre um registro de representação de partida e um outro registro de representação de chegada. Para isso, o autor estabelece três critérios para que possa haver congruência. O primeiro deles é a correspondência semântica, ou seja, se a cada unidade significante simples de uma das representações pode ser associada com uma unidade elementar. O segundo critério é o de univocidade semântica, que acontece quando cada unidade significante elementar da representação de partida pode ser relacionada a apenas uma unidade elementar no registro da representação de chegada. E o último é o da organização das unidades significantes, quando a ordem dentro da organização de representação de partida é mantida na organização de representação de chegada.

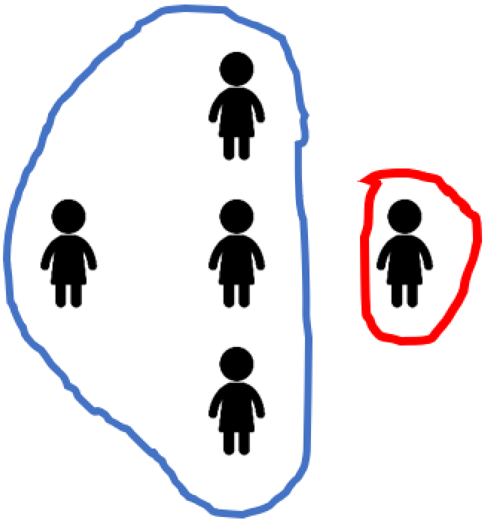
- **Representações**

As representações são os signos utilizados para representar o objeto matemático. Este signo está relacionado com a ideia de signo de Peirce, o pai da Semiótica. Peirce (2005, p.46) diz que, “um signo, ou *representàmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém.” Este signo é o que representa o objeto matemático, o algo é o objeto matemático e o alguém é cada um de nós que reconhece o signo e tem alguma interpretação do mesmo, nos fazendo relacioná-lo com o algo, o objeto matemático.

Segundo Duval (2008), estes registros podem ser multifuncionais (os tratamentos não são algoritmizáveis) ou monofuncionais (os tratamentos são principalmente algoritmos), e suas representações podem ser discursivas ou não discursivas. No Quadro 2 foram apresentados alguns exemplos destes diferentes registros de representações envolvendo a Análise Combinatória. Para isso a seguinte questão será respondida:

Prove que $C_{5,4} = C_{5,1}$.

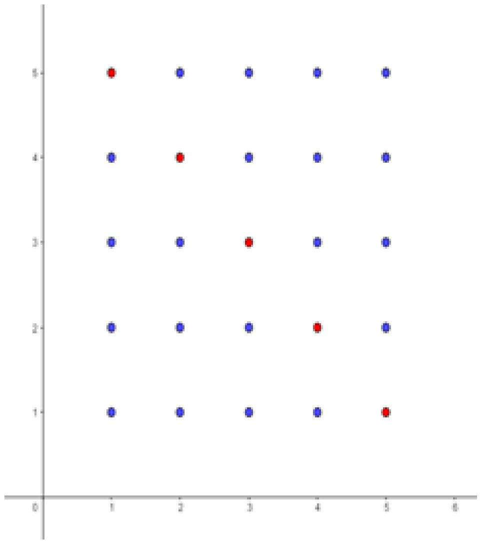
Quadro 2: Diferentes representações para responder à questão acima

	Representação Discursiva	**Representação Não Discursiva**
Registros Multifuncionais	**Registro em Língua Materna** Em uma sala que possui 5 alunos, a quantidade de maneiras possíveis de escolher 4 deles é a mesma do que a quantidade de maneiras possíveis de escolher apenas 1 aluno.	**Registro Figural** 
Registros Monofuncionais	**Registro Simbólico** $C_{5,4} = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} = \frac{5!}{(5-1)!\,1!} = C_{5,1}$	

Registro Tabular

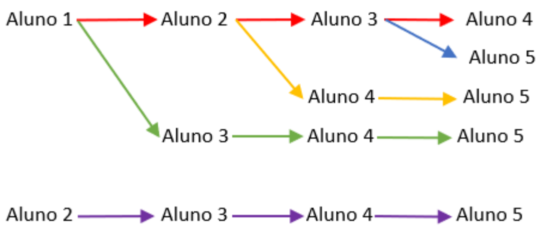
Alunos escolhidos	Aluno não escolhido
1,2,3,4	5
1,2,3,5	4
1,2,4,5	3
1,3,4,5	2
2,3,4,5	1

Registro Gráfico



Registro na forma de Árvore de possibilidades

Escolher 4 alunos de 5



Escolher 1 aluno de 5

Aluno 1

Aluno 2

Aluno 3

Aluno 4

Aluno 5

Neste gráfico o eixo x está relacionado com a quantidade de possibilidades e o eixo y está relacionado com quais alunos estão sendo escolhidos. Os alunos em azul são os que foram escolhidos e os alunos em vermelho são os que não foram escolhidos. (Este gráfico poderia facilmente se relacionar com o registro tabular apresentado, sendo os pontos em azuis a representação da primeira coluna e os pontos em vermelho a representação da segunda coluna)

Fonte: Elaborado pelo autor

4. Pensamento Combinatório (P.C.)

A Análise Combinatória está ligada diretamente com problemas de contagem, e como comentado anteriormente, teve sua origem nos jogos de azar, como lançamento de dados e jogos de cartas, segundo Guirado e Cardoso (2007). Pessoa e Borba apontam que:

> ...hoje seus métodos são aplicados em diversas áreas como no cálculo das probabilidades, em problemas de transporte, de confecção de horários, de elaboração de planos de produção, de programação linear, de estatística, de teoria da informação, de biologia molecular, de economia, de lógica, etc. Além disso, esses métodos são também utilizados em problemas de Matemática Pura, como na teoria dos grupos e de representações, no estudo dos fundamentos da Geometria, nas Álgebras não associativas, etc. (2010, p.2)

Demonstrando que cada vez mais o estudo da Análise Combinatória vem ganhando importância nos campos matemáticos, se afastando de sua origem prática e se aproximando das teorias matemáticas.

Dornelas (2004, p.20 e 21) comenta que: "A Análise Combinatória pode ser descrita ainda como o campo da Matemática que se ocupa de estudar, examinar, descrever e determinar as diferentes e possíveis classificações que podemos obter e observar de um conjunto dado e de seus elementos constitutivos". O pensamento combinatório é a capacidade de classificar e diferenciar estes conjuntos e elementos, de forma que consiga prever a quantidade destes elementos sem a necessidade de contar um a um. Este pensamento combinatório é guiado principalmente pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC), que também pode ser chamado de Princípio Multiplicativo (PM), no qual consiste em associar dois elementos, ou conjuntos, distintos e independentes, fazendo a associação de um-para-vários. Ao resolver problemas utilizando o PFC, é necessário se colocar no lugar de quem toma as decisões, a fim de compreender o problema e suas possibilidades. A capacidade dos alunos fazerem estas associações um-para-vários entre elementos distintos é o que se analisou no presente trabalho.

4.1. Revisão de literatura

Foi realizada uma revisão de literatura sobre trabalhos que abordassem o ensino de Análise Combinatória ou o Pensamento Combinatório, utilizando jogos sob a luz da teoria de Raymond Duval. Para esta revisão foi utilizado o Repositório Digital da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o Lume[4], no período entre 2010 e 2019. Para a busca foram utilizadas a combinação das seguintes palavras chaves: “Jogos” e “Pensamento Combinatório”; “Jogos Matemáticos” e “Semiótica”, aqui foi necessário acrescentar a palavra “Matemáticos” para filtrar nossa pesquisa para o campo da Educação Matemática; “Análise Combinatória” e “Semiótica”; e “Jogos”, “Semiótica” e “Pensamento Combinatório”. Foram encontrados 7 trabalhos que trabalhavam com Análise Combinatória, ou com conceitos de Análise Combinatória, e utilizavam jogos para sua aprendizagem, conforme Quadro 3. Não foram encontrados trabalhos que versassem sobre jogos matemáticos e Semiótica, nem que tratassem de Análise Combinatória sob a visão da Semiótica, e consequentemente não houve literatura que abordasse as três palavras-chave em conjunto.

Quadro 3: Trabalhos encontrados no Lume

Trabalhos que abordavam a Análise Combinatória e utilizaram jogos	Autor (Ano)	Tipo de trabalho:	Acessado em:
1. Análise Combinatória e construção de possibilidades: O raciocínio formal no Ensino Médio	Mariana Lima Duro (2012)	Dissertação	https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/49729
2. Estudo de caso sobre o ensino de análise combinatória	Carla Soares Silva (2010)	Trabalho de conclusão de curso	https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/29157
3. Ensino de Combinatória no Ensino Fundamental: Princípio Aditivo e Multiplicativo.	Greice Borges Quequi (2011)	Trabalho de conclusão de curso	https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/37160
4. Os jogos no ensino de Combinatória	Matheus da Costa Pereira (2019)	Trabalho de conclusão de curso	https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/212828
5. O jogo de pôquer: uma situação real para dar sentido aos conceitos de Combinatória	Ricardo Rodrigues Chilela (2013)	Dissertação	https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/81702
6. O uso de Role Playing Games como recurso pedagógico nas aulas de Matemática	Rodrigo Orestes Feijó (2014)	Dissertação	https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/108424

[4] A busca foi realizada no Lume, pois considerou apenas trabalhos de conclusão, dissertações ou teses.

7. Análise Combinatória na Educação de Jovens e Adultos: uma proposta de ensino a partir da resolução de problemas	Jussara Aparecida da Fonseca (2012)	Dissertação	https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/67877

Fonte: Dados da pesquisa

Nos três trabalhos que são descritos na sequência, percebe-se que o foco não é o ensino através de jogos e por isso esses trabalhos serão excluídos na análise:

- Na dissertação de Duro (2012), são utilizados brinquedos em sua pesquisa, não de forma atrelada a um jogo com um conjunto de regras, como define Kishimoto (2008). Foram apresentados aos alunos três questões e fornecidos três brinquedos diferentes para que os alunos pudessem manipular estas situações de forma material.

- Quequi (2011), em sua primeira atividade, faz uso do jogo *Set* em sua pesquisa de forma motivacional para que os alunos experienciem situações em que precisem agrupar elementos com as mesmas características, ou com todas as características diferentes. A pesquisadora não focou no ensino da Combinatória através de jogos, como descreve em sua pesquisa.

- Em Fonseca (2012), o autor utiliza o mesmo jogo deste trabalho, o jogo Senha, porém utiliza o jogo como um *jogo de treinamento*, como descreve Borin (2007), e não tendo como foco o ensino da Análise Combinatória através dele. O pesquisador descreve em seu trabalho que optou por utilizar o jogo após o terceiro encontro com os alunos como um substituto para as atividades que envolviam o conteúdo de Combinação, pois os alunos não estavam rendendo como ele esperava.

Os demais trabalhos encontrados nesta revisão tinham como foco o uso de jogos, utilizando-os como desencadeadores de aprendizagem, como define Moura (1991). Sendo estes:

- Estudo de caso sobre o ensino de análise combinatória (SILVA, 2010);
- Os jogos no ensino de Combinatória (PEREIRA, 2019);
- O jogo de pôquer: uma situação real para dar sentido aos conceitos de Combinatória (CHILELA, 2013);
- O uso de Role Playing Games como recurso pedagógico nas Aulas de Matemática (FEIJÓ, 2014).

Na revisão de literatura realizada pelo autor foram encontrados poucos trabalhos que utilizassem a tendência de jogos na Educação Matemática para o ensino da Análise Combinatória, e nenhum que faça isso a partir de um olhar semiótico, analisando as diferentes formas de representação que podem ser movidas e trabalhadas com os jogos.

Ao analisarmos os trabalhos que utilizam os jogos para o ensino e para a aprendizagem de Análise Combinatória, Silva (2010) destaca a importância de iniciar o contato dos alunos com problemas de contagem desde o Ensino Fundamental, pois:

> (...) um ensino focado na aplicação de fórmulas não é suficiente para desenvolver o pensamento combinatório. É necessário oportunizar ao aluno o contato com uma grande diversidade de situações-problema, em que ele possa desenvolver ferramentas auxiliares para conseguir resolvê-las.
> Nesse sentido, propomos que o professor inicie a abordagem do conteúdo de Análise Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental, começando com problemas de contagem. Pensamos ser interessante partir de problemas que possam ser resolvidos com contagem direta, incentivando os alunos ao uso de representações gráficas. Pensamos que o uso de representações gráficas tipo diagrama de árvore, tabelas de dupla entrada, enumerações, são facilitadoras do processo de aquisição do pensamento combinatório. Também é importante incentivar os alunos a descobrir, discutir e utilizar as diversas possibilidades de resolução dos problemas de combinatória. Dessa forma, o aluno, ao chegar no Ensino Médio, já terá tido contato com o conteúdo de Análise Combinatória, o que poderá facilitar o entendimento dos diversos tipos de agrupamentos envolvidos nesse conteúdo. (SILVA, 2010, p.38-39)

Silva (2010) acredita que ter um contato maior com problemas de contagem auxiliará no processo de aprendizagem por aumentar o número de situações problemas que o aluno terá resolvido, melhorando sua capacidade de compreender e diferenciar os diferentes casos de agrupamentos quando se estuda Análise Combinatória no Ensino Médio. Silva (2010) cita também que ao se trabalhar com diferentes formas de registro é possível facilitar a aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento combinatório.

Pereira (2019) destaca a importância do educador ao trabalhar com jogos em sala de aula:

> É necessário que o jogo traga elementos que façam os alunos pensar em situações matemáticas pondo a teoria em prática. Nesse sentido, o docente precisa realizar um planejamento no qual avalie o potencial do jogo para ser trabalhado em sala de aula (PEREIRA, 2019, p.61).

Não trazendo o jogo apenas pelo ato de jogar, mas pela sua capacidade de fazer o aluno experienciar situações ou contextos matemáticos, auxiliando na aprendizagem.

Por sua vez, Chilela (2013) infere que, com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, "(...) o ensino da Combinatória deve ser desenvolvido a partir de situações/problemas, com o objetivo de dar significado aos conceitos básicos” (CHILELA, 2013, p.117). Porém, ao analisar a revisão bibliográfica feita para a pesquisa e refletir como se é ensinado o conteúdo de Análise Combinatória, o autor conclui que os problemas trabalhados usualmente no ensino de matemática não têm o propósito de dar significado aos seguintes conceitos:

> 1) Conjunto universo; subconjunto; agrupamento; cardinal; produto cartesiano; n-upla; cardinal do produto cartesiano de conjuntos; Princípio Fundamental da Contagem; multiplicação.
> 2) Contagem; escolha/decisão; decisões sucessivas; Princípio Fundamental da Contagem; multiplicação;
> 3) Casos independentes; conjuntos disjuntos; Princípio da Adição; adição;
> 4) Princípio da intersecção de conjuntos; subtração;
> 5) Agrupamentos ordenados ou não ordenados; agrupamentos com ou sem repetição de objetos; contagem repetida de agrupamentos; divisão;
> 6) Ordem; n-upla; fatorial; permutação; permutação com repetição; arranjo.
> 7) Agrupamento não ordenado; combinação;
> 8) Escolha; combinação;
> 9) Seleção; distribuição; partição. (CHILELA, 2013, p.117)

Segundo Chilela (2013), o ensino usual parte apenas das definições de Arranjo, Permutação e Combinação, e os problemas propostos são previamente classificados e adequados a estes conceitos. Dificultando assim, a aprendizagem da Análise Combinatória.

O trabalho de Feijó (2014) utiliza um tipo de jogo muito específico: o Role Playing Game (RPG) que é um estilo de jogo no qual o participante precisa incorporar um personagem e fazer as ações, mas pensando como este personagem. Essa dinâmica coloca o aluno como o principal sujeito, no qual este toma todas as decisões e sofre todas as consequências delas. Na pesquisa de Feijó, os alunos precisam resolver uma série de assassinatos que estão interligados, e a cada nova evidência encontrada pelos investigadores se deparam com novos conteúdos de Matemática e Física, como a Combinatória, Probabilidade, Criptogramas, Escala, Velocidade Média, Volume e Proporcionalidade.

Baseado nas leituras destes trabalhos de pesquisa, é importante trazer algumas considerações pertinentes. Ao trabalhar com a Análise Combinatória é necessário que o aluno vivencie o máximo de situações-problemas possíveis (SILVA, 2010) desde os anos finais do ensino fundamental. Para Chilela (2013), também é importante o tipo de atividade que o professor aborda em sala de aula: o aprender combinatória não se dá só resolvendo exercícios, é preciso “dar significado aos conceitos básicos”, p.117). Quando os alunos trabalham apenas os problemas em sala de aula, se sentem distantes, pois são situações que eles não vivenciaram ou não fazem parte de sua realidade, enxergando sempre como uma terceira pessoa, não conseguindo dar significado.

Fazendo relação com os jogos, o ato de jogar por si só coloca o aluno na posição de sujeito principal, assumindo as responsabilidades por suas ações, como mostra o trabalho de Feijó (2014). Mas é importante que o professor esteja sempre orientando estes alunos, sistematizando o que foi trabalhado e esclarecendo dúvidas ou corrigindo suposições erradas, e não apenas jogando por jogar.

5. Metodologia

A abordagem metodológica utilizada nesta pesquisa é de caráter qualitativo, pois a pesquisa qualitativa tem como principal objetivo:

> (...) explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p.32).

Nesta pesquisa não se busca saber a quantidade de rodadas necessárias para os alunos concluírem os jogos, mas quais estratégias de resolução utilizaram, analisando as explicações que estes compartilharam e a mobilização dos diferentes registros.

Os alunos que participaram da pesquisa são da Escola Estadual de Ensino Médio Professor Tolentino Maia, em Viamão, do oitavo ano do Ensino Fundamental, das turmas 81 e 82. As atividades foram desenvolvidas em formato de oficina, em 3 períodos, no dia disponível para as atividades online[5], nas sextas-feiras das 14:00 - 15:00. Os encontros aconteceram de forma remota, utilizando a plataforma *Google Meet* e o site mencionado anteriormente para o jogo Senha.

Participaram em média 10 alunos por aula, com idades entre 13 e 14 anos, sendo que 5 aceitaram fazer parte da pesquisa. Um dos que aceitaram, fez parcialmente as atividades, então não foi considerado na análise deste trabalho. Para fins de anonimato, os alunos considerados nesta pesquisa são indicados como Aluno A, Aluno B, Aluno C e Aluno D.

Os dados coletados que são analisados correspondem: às imagens das partidas dos alunos (fotos tiradas por eles), às explicações do raciocínio utilizado para alcançar o objetivo através do documento Word fornecido para os alunos (Apêndice E) ou mensagens diretas à professora titular. Todos os registros foram encaminhados para a professora titular via *Whatsapp* e esta repassava para o professor pesquisador. E no final do último encontro, foi-lhes apresentado um questionário feito no *Google Forms* (Apêndice G) com 9 questões, 8 referentes ao jogo e 1 relacionando os

---

[5] As aulas já haviam retornado presencialmente.

requisitos para criação de senhas virtuais com o jogo *Mastermind*. A análise de dados foi realizada a partir dos registros encaminhados para a professora titular e pelas respostas do formulário. Buscamos verificar quais caminhos foram traçados ao realizar as escolhas das cores e posicionamentos das bolas, efetuando combinações na tentativa de descobrir a senha. Analisando, a cada rodada, se os estudantes fazem uso do pensamento combinatório para compor as tentativas, ao evitar o uso de elementos que não compõem o código ou a efetuar posicionamentos das bolas de acordo com os *feedbacks* anteriores recebidos pelo sistema.

O primeiro encontro aconteceu no dia 01/10/2021, e nele foi explicado que seria uma atividade de pesquisa para o trabalho de conclusão de curso e os alunos teriam a livre escolha de participar ou não. Também foi avisado que por se tratarem de alunos menores de 18 anos, quem desejasse participar deveria assinar um termo de assentimento (Apêndice B), os pais ou responsáveis um termo de consentimento (Apêndice A) e também a autorização de usar as imagens e áudios gravados na aula para a pesquisa (Apêndice C). Foi explicado que as imagens, voz e dados dos alunos não seriam divulgados e que seriam utilizados codinomes para representá-los. Também foi enviado termo de concordância para a instituição (Apêndice D).

5.1 Primeiro encontro (01/10/2021)

Neste dia havia 12 alunos, sendo que os quatro participantes da pesquisa estavam presentes. Após a explicação sobre como seriam as oficinas e o caráter da pesquisa, o encontro iniciou-se com o pesquisador apresentando e resolvendo dois problemas de análise combinatória de forma introdutória para os alunos:

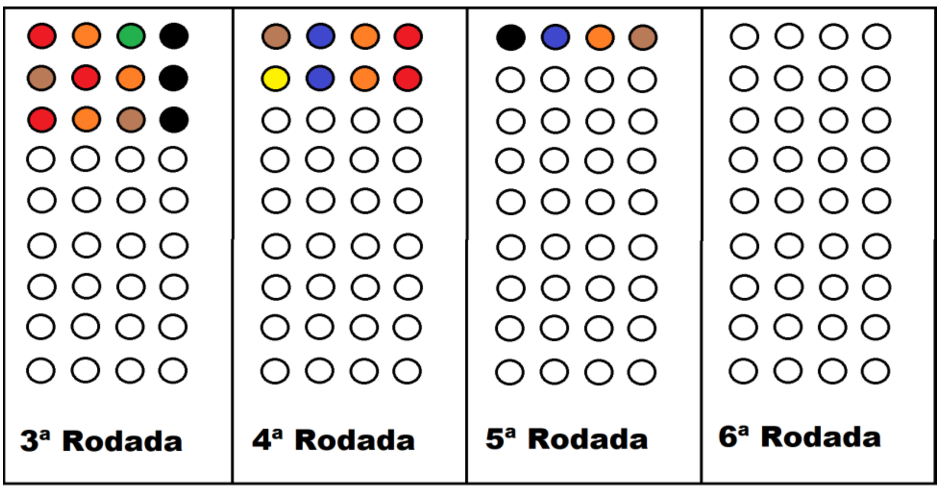
> “João vai viajar e sabendo que levará apenas 3 camisetas e 5 bermudas, cada uma de uma cor, deseja saber qual a quantidade de *looks* diferentes conseguirá formar.”
>
> “Maria vai a uma sorveteria e decide escolher um sorvete pequeno com dois sabores, mas Maria não gosta de repetir sabores. Sabendo que há 5 sabores diferentes nesta sorveteria, de quantas formas Maria pode escolher o seu sorvete?”

Em seguida, foi apresentado o jogo e compartilhado o link. Neste primeiro encontro, as configurações utilizadas pelo professor pesquisador e pelos alunos foram descobrir a senha com 4 elementos e sem repetição de cores. O professor pesquisador realizou uma partida com a tela compartilhada, explicando as regras do jogo e os comandos do site, pois estavam em italiano. Após, foi sugerido que fizessem mais uma partida teste, e dessa vez com a turma inteira jogando em conjunto, para verificar se os alunos realmente entenderam as regras e o objetivo do jogo. Nas duas partidas, o resultado foi encontrado na última rodada. Durante o tempo restante do encontro, os estudantes foram convidados a explorar o jogo.

5.2 Segundo encontro (08/10/2021)

No segundo encontro, foi retomado o jogo e apresentado aos alunos o tabuleiro criado (apêndice F) e o documento *Word* (apêndice E). Neste dia estavam presentes 11 alunos, sendo os alunos A, B e C parte destes, apenas o aluno D não estava presente nesta oficina. Neste documento, os alunos foram convidados a explicar o motivo e o raciocínio utilizados para decidir pela senha em cada rodada, a partir da 3ª rodada, e a refletir quantas possíveis combinações ainda podiam ser formadas, mobilizando o registro de língua materna. O tabuleiro representado na Figura 6, por sua vez, poderia ser usado para que os alunos testassem as possíveis combinações e pudessem decidir qual faria mais sentido, dessa forma mobilizando o registro na forma que lhes achar mais conveniente.

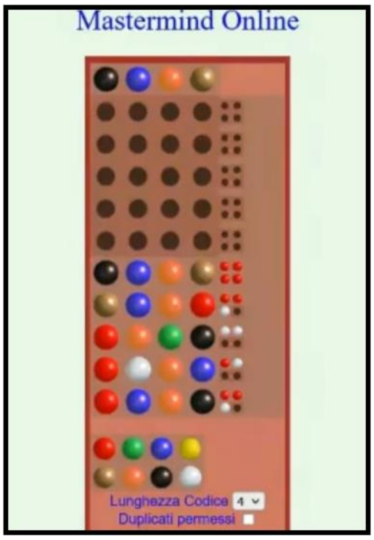
Figura 6: Exemplo do uso do tabuleiro



Fonte: Elaborada pelo autor

Foi mostrado para os alunos com o professor pesquisador jogando uma partida (Figura 7) como eles poderiam utilizar o tabuleiro e o documento *Word* para auxiliar na resolução do jogo e deixado como opcional o seu uso, além de permitir o envio de áudios para a professora titular, caso assim o quisessem. Mais uma vez os alunos tiveram um momento para jogar, mas dessa vez com o desafio de concluírem o jogo em até cinco jogadas, com as mesmas configurações do primeiro encontro (4 elementos na senha, sem poder repetir as cores). Ao final do encontro, foi questionado aos alunos se estes achavam que explicar as jogadas e/ou listar as possibilidades de combinações por meio do tabuleiro auxiliava na resolução do desafio. Alguns afirmaram que explicar as jogadas contribuiu na resolução, enquanto outros disseram que não fez diferença. Nenhum aluno fez uso do tabuleiro criado.

Figura 7: Jogo do professor pesquisador para exemplificar o uso das ferramentas



Fonte: Elaborada pelo autor

5.3 Terceiro encontro (15/10/2021)

No terceiro e último encontro estavam presentes 9 alunos, sendo que todos os participantes desta pesquisa se encontravam no dia. No início da oficina o professor pesquisador propôs realizar duas alterações nas configurações do jogo. A primeira consistia em aumentar o número de elementos da senha para seis, mantendo a configuração de não haver cores repetidas. Os alunos tiveram 15 minutos para jogar com a nova configuração e, novamente, foi opcional a explicação das jogadas. Os alunos que já estavam acostumados com a dificuldade do jogo com as configurações das oficinas anteriores, sentiram uma maior dificuldade quando sugerido que aumentassem o número de elementos na senha, conseguindo completar o jogo na décima quarta, que é a última, rodada ou nem conseguindo. Em seguida, foi sugerida outra configuração, desta vez retornando para quatro elementos na senha, mas com a possibilidade de haver cores repetidas. Os alunos tiveram um tempo para jogar com a nova configuração, porém nenhum foi capaz de chegar à resposta correta. No final do encontro, foi avisado aos alunos que eles teriam um formulário (Apêndice G) no *Google Forms* para ser respondido.

6. Análise

Neste item será realizada a análise das partidas que os alunos retornaram as fotos, juntamente com os registros e o formulário entregue no final do último encontro. O objetivo desta análise é verificar que contribuições são percebidas ao se utilizar outras formas de registro, além do registro material, durante o jogo Senha, verificando se há um desenvolvimento no pensamento combinatório dos participantes.

6.1. Primeiro encontro

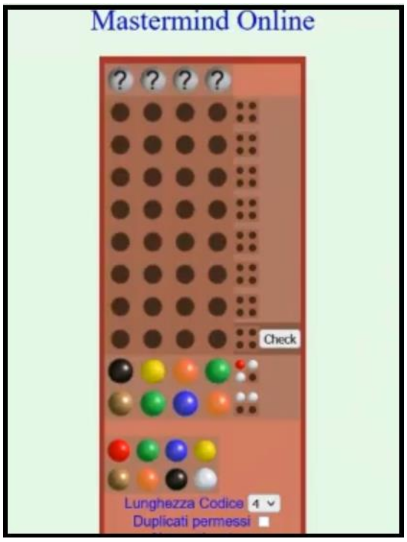
Com relação aos dois problemas introdutórios de análise combinatória, nenhum dos participantes desta pesquisa respondeu ao professor pesquisador, logo, não iremos considerá-los em nossa análise.

Após o autor mostrar um exemplo de partida para os alunos e explicar suas regras, a professora titular sugeriu que todos jogassem uma partida coletivamente para que os alunos experimentassem o jogo. O professor pesquisador foi perguntando a cada um dos alunos quais cores poderiam ser escolhidas.

> Aluno A: Marrom (primeira cor escolhida da primeira rodada)
> (...)
> Aluno C: Laranja (última cor escolhida da primeira rodada)
> Pesquisador: Acertamos duas. Agora quais cores vocês vão querer que fiquem?
> Professora titular: Acertamos duas, mas não na posição correta né?
> Pesquisador: Isso mesmo.
> (...)
> Aluno D: Amarelo (última cor escolhida da segunda rodada)
> Pesquisador: Acertamos uma cor na posição e tem mais outras duas cores certas. E aí? Qual vocês acham que a gente acertou a posição?
> Aluno B: Laranja.
> Pesquisador: É, temos que ir tentando. Vamos achar que o laranja está na posição certa. Vocês acham que o verde realmente fazia parte da senha?

O aluno D escolheu corretamente a cor amarelo para ser testada (Figura 8), posto que as cores verde e laranja foram mantidas em relação à primeira tentativa. O aluno B cria a hipótese de que a cor laranja está na posição correta nesta nova senha. Como o jogo não indica qual cor é a que está na posição correta, se faz necessário partir de uma suposição e ir realizando tentativas em cima desta.

Figura 8: Jogo realizado em conjunto (Segunda rodada)

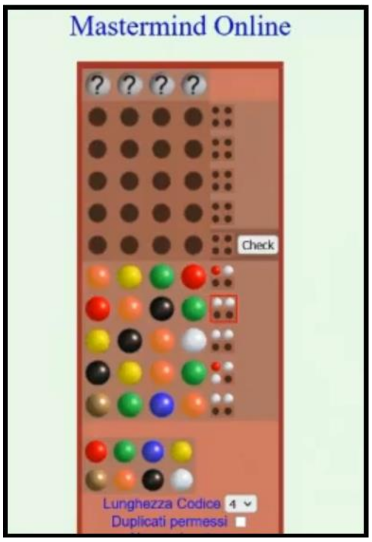


Fonte: Acervo pessoal

Aluno A: Branco. (última cor escolhida da terceira rodada)
Pesquisador: Diminuímos uma cor e não tem mais na posição certa. Quer dizer que não era o laranja nessa posição. Vamos testar agora o verde como se fosse a posição certa (da segunda rodada), e o laranja não pode ser na última nem na terceira posição. Ele só pode ser na segunda ou na primeira, qual vocês preferem?
(...)
Pesquisador: Qual vocês acham que não é, preto ou amarelo?
(...)
Pesquisador: Preto já testamos na primeira e na segunda, só falta na terceira. E só falta uma cor que não testamos, o vermelho.
(...)
Pesquisador: Ó, diminuiu. Sempre a gente volta pra rodada que a gente mais teve informação, que é a segunda linha.
(...)
Aluno D: É também acho que é o amarelo que estava certo.
Pesquisador: A gente sabe que o verde faz parte, porque na terceira rodada diminuiu. Então podemos testar o verde na primeira posição. Ou até na terceira, porque o laranja não é na última, nem na terceira, nem na segunda posição. Ou o laranja é na primeira posição ou ele enganou a gente o tempo todo.

Na quarta rodada, o aluno D sugere que o amarelo estava certo, pois ao testar se as cores verde e laranja eram as corretas da segunda rodada (Figura 9), ambas as tentativas não retornaram com o *feedback* positivo.

Figura 9: Jogo realizado em conjunto (quinta rodada)

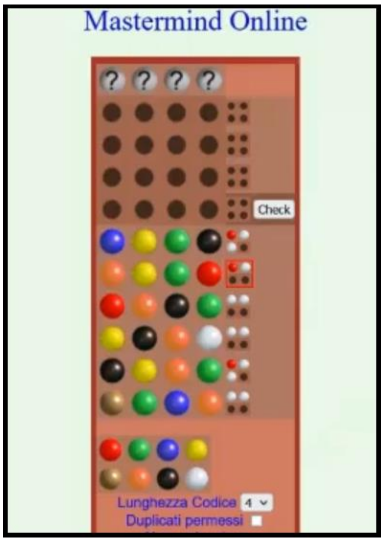


Fonte: Acervo pessoal

> Pesquisador: Agora acertou uma posição, mas só tem duas cores certas. Então acho que não era o amarelo, era o preto, ou vai ver o laranja não fazia parte.
> Aluno C: Acho que o amarelo tá na posição certa.
> Pesquisador: O laranja já tentamos em todas as posições então provavelmente ele não faz parte da senha, né?
> Aluno A: Bota o preto na última, sor.
> Pesquisador: Na última? E o que mais?
> (...)
> Aluno B: Eu colocaria o verde (na última posição que falta completar da sexta rodada)
> Pesquisador: Ó, já aumentamos. Eu acho que o azul tá certo mesmo.

Neste momento já era possível argumentar que o laranja não fazia parte da senha, pois de acordo com a segunda rodada, uma das cores estaria errada. E como já haviam sido feitas todas as combinações com laranja (terceira, quarta e quinta rodadas) e todas retornaram com o *feedback* que apenas duas cores estavam certas, não era possível que o laranja pertencesse ao código. O pesquisador sugere uma situação que pode ter confundido os alunos, quando fala que: “Eu acho que o azul tá certo mesmo”, mas ao se comparar com a primeira rodada e a sexta rodada, é possível saber que o azul está errado, pois caso fosse certo, todas as cores deveriam pertencer à senha (Figura 10). Já podendo se concluir que a senha era composta pelas cores preto, amarelo, verde e marrom.

Figura 10: Jogo realizado em conjunto (sexta rodada)

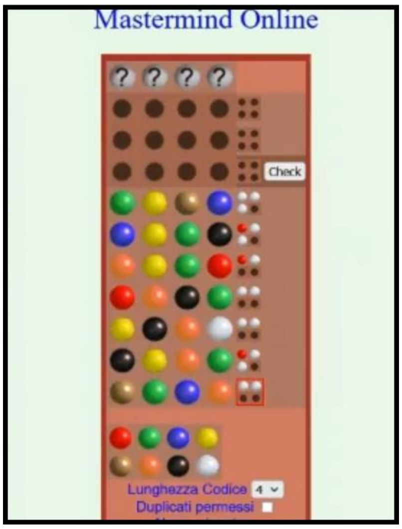


Fonte: Acervo pessoal

> Pesquisador: O preto já foi em todas as posições.
> Aluno B: Coloca o verde na primeira.
> Pesquisador: E agora? Quem fica na terceira?
> (...)
> Pesquisador: Ó, acertamos três! Mas o amarelo não era o que tava na posição certa né? Talvez o amarelo nem faça parte da senha. E agora?
> (...)
> Pesquisador: Mas agora o amarelo continuou na mesma posição (segunda) e não apareceu a bolinha vermelha. Então ele não tá na posição certa. Como o jogo não nos diz qual é a cor que está na posição certa, às vezes vai achando que um tá certo e depois vê que não era ele.

O pesquisador ficou preso no *feedback* da posição certa e não percebeu que já era possível saber quais eram todas as cores que pertenciam à senha, isso aconteceu, pois não foram analisadas todas as rodadas anteriores (Figura 11).

Figura 11: Jogo realizado em conjunto (sétima rodada)

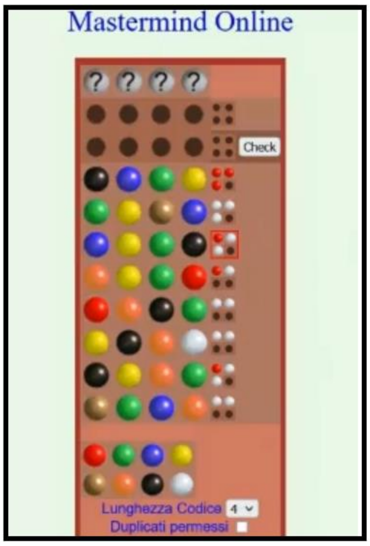


Fonte: Acervo pessoal

Pesquisador: E o azul, coloco onde agora?
Aluno B: Na segunda.
Pesquisador: E o amarelo? Na primeira (posição) não é, porque já tentamos na terceira rodada e não apareceu nenhuma bolinha vermelha. Vamos testar na última, né?
(...)
Pesquisador: Ó, acertamos três na posição correta.
Aluno A: Acho que o preto tá certo, sor.

O aluno A afirmou corretamente que o preto estava na posição certa, pois como já havia passado por todas as posições, somente na primeira e na última poderia ser seu lugar, mas de acordo com a sexta tentativa, ou o preto ou o verde estavam certos. Logo, restou apenas a primeira posição, que era condizente com a segunda tentativa (Figura 12).

Figura 12: Jogo realizado em conjunto (sétima rodada)

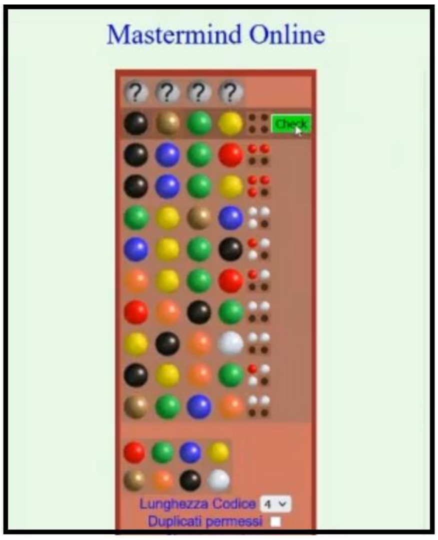


Fonte: Acervo pessoal

Pesquisador: E agora? O azul ou o amarelo tá certo?
Aluno A: Acho que o azul.
Pesquisador: Agora a gente precisa de mais um, quem a gente tenta aqui?
(...)
Pesquisador: Ó diminuiu uma. Então o amarelo tava certo. Vamo lá pessoal, é a última.
(...)
Pesquisador: Então é o preto na primeira, o verde na terceira. E agora falta só a última cor.
Aluno B: Vermelho.
Pesquisador: Mas o vermelho tá errado, porque quando a gente tirou o amarelo e colocou o vermelho, a gente perdeu uma bolinha.
Aluno A: O marrom, será?
Aluno D: É o marrom, sor. Porque na primeira ele tava certo.

O aluno B não faz a análise de que o vermelho não pode fazer parte da senha, pois da oitava para a nona tentativa diminuiu-se uma cor certa ao adicioná-lo. Os alunos A e D afirmam corretamente que a cor faltante é o marrom, com o aluno D apontando que comparando com a primeira tentativa, poderia se chegar a esta conclusão (Figura 13).

Figura 13: Jogo realizado em conjunto (final)



Fonte: Elaborada pelo autor

Os alunos demonstraram já possuir um certo nível de PC, mas também é possível perceber que em diversas ocasiões não levam em consideração as rodadas anteriores.

Durante o tempo que os alunos puderam explorar o jogo sozinhos, os alunos A, B e C comentaram que conseguiram completar o jogo. O aluno A conseguiu na última rodada, o aluno C em 9 rodadas e o aluno B, jogou duas partidas e conseguiu em 7 e 6 rodadas. Não houve retorno destas partidas para o pesquisador, impossibilitando a análise das jogadas dos participantes.

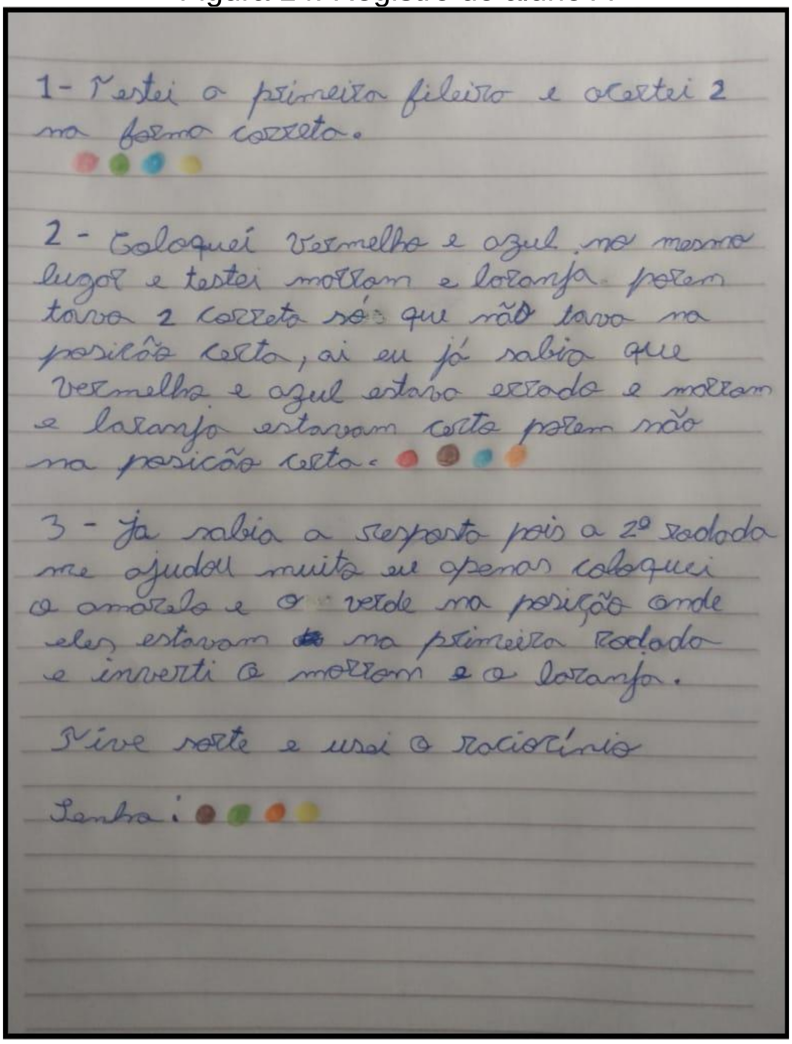
6.2. Segundo encontro

Neste encontro foram apresentadas algumas formas de representação que os alunos poderiam utilizar para concluir o jogo de forma mais eficiente. Eles já estavam utilizando o registro material através do site (SILVA, 2009), e foi sugerido que usassem, o registro multifuncional em língua materna através do documento *Word* (Apêndice A) ou da explicação das jogadas via áudio, ou o registro através do tabuleiro criado (Apêndice C) (DUVAL, 2008). Dos alunos que retornaram suas explicações das jogadas, todos utilizaram o registro em língua materna, sendo que um utilizou o documento, um em seu próprio caderno e um no chat do *Whatsapp* da professora titular. Os alunos não utilizaram outras formas de registro para completar o jogo.

Quando questionados ao final do encontro se explicar as jogadas ajudou ou não os alunos a completarem o jogo de forma mais eficaz, a maioria dos alunos respondeu de forma positiva: “Me ajudava a lembrar o porquê eu tinha feito aquela jogada (rodadas anteriores)”. Questionados sobre a utilização do tabuleiro criado, os alunos responderam que não contribuiu.

O aluno A que soube utilizar o pensamento combinatório e conseguiu concluir o jogo em três rodadas, explicando de forma coerente seu raciocínio (Figura 14).

Figura 14: Registro do aluno A



1- Testei a primeira fileira e acertei 2 na forma correta.

2 - Coloquei vermelho e azul no mesmo lugar e testei marrom e laranja porem tava 2 correta só que não tava na posição certa, ai eu já sabia que vermelho e azul estava errado e marrom e laranja estavam certa porem não na posição certa.

3 - Ja sabia a resposta pois a 2º rodada me ajudou muito eu apenas coloquei o amarelo e o verde na posição onde eles estavam na primeira rodada e inverti o marrom e o laranja.

Tive sorte e usei o raciocínio

Senha:

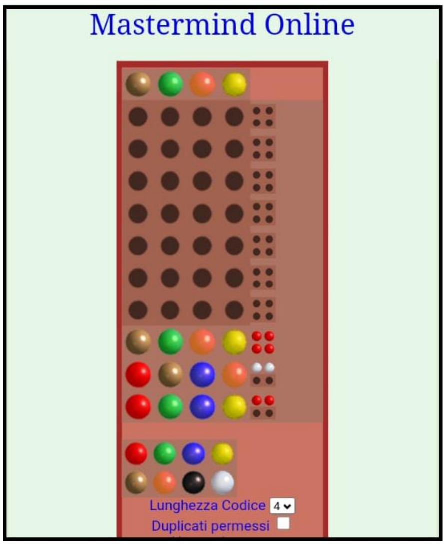
Fonte: Acervo pessoal

Após sua primeira jogada, o aluno A percebeu que havia duas cores que pertenciam ao código e que estavam no local correto. Por experimentação, optou por manter as bolas vermelha e azul nas mesmas posições e alternar as bolas verde e amarela, pelas bolas marrom e laranja, respectivamente. Essa escolha mostra que soube considerar que precisava manter duas cores no mesmo lugar, a fim de descobrir qual das quatro cores iniciais não faziam parte da senha. Como resultado, na segunda rodada, obteve o *feedback* de ter duas cores que faziam parte da senha, porém não estavam na posição certa. O aluno, soube inferir que se as bolas vermelha e azul fizessem parte da senha, o sistema manteria o *feedback* da rodada anterior. Logo, da formação inicial, as cores corretas eram a verde e amarela, nas posições 2 e 4, respectivamente. Além disso, foi capaz de perceber que as bolas marrom e laranja também faziam parte da senha.

Em seu registro, o estudante comenta que “teve sorte” e utilizou o “raciocínio”. Sorte é uma característica inerente a qualquer jogo, que não é possível ser excluída para fins de pesquisa. Mas, como constatado acima, o aluno realmente soube fazer uso do raciocínio combinatório para descobrir o código final, assim como mostrado na Figura 15.

Comparando com o seu resultado do primeiro encontro, concluindo o jogo na nona rodada, com o resultado do segundo encontro podemos observar que ao explicar seu raciocínio a cada jogada, o aluno A conseguiu realizar as conversões entre registro material e língua materna de forma livre. Há a correspondência semântica dos elementos nos dois sentidos quando o aluno é capaz de relacionar as cores, as posições e os *feedbacks* recebidos do sistema; também há a univocidade semântica, pois cada cor descrita no registro em língua materna só se relaciona com uma cor no jogo; e a organização das unidades significantes é mantida quando o aluno infere de forma correta que sabia que o marrom e o laranja faziam parte da senha e, posteriormente, que o azul e o amarelo estavam na posição correta.

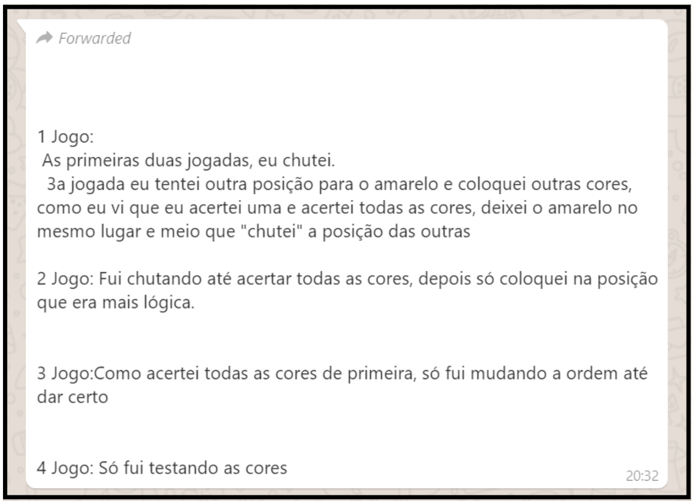
Figura 15: Jogo do aluno A



Fonte: Acervo pessoal

O aluno B também se utilizou da sorte para concluir o jogo, como pode ser notado pelo registro feito pelo aluno via mensagem à professora titular (Figura 16). Em todos os registros que o aluno fez, este afirmou que “chutou” até conseguir alcançar o resultado. Apenas no primeiro registro, ele afirma que levou em consideração os *feedbacks* das rodadas anteriores para compor o código final.

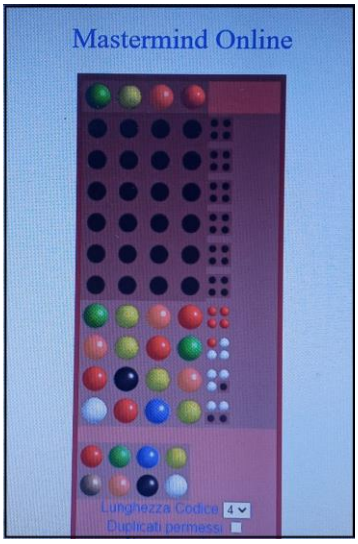
Figura 16: Mensagem encaminhada pela professora titular com registro do aluno B



Fonte: Acervo pessoal

Ao analisar o registro feito pelo aluno, na primeira partida, e compará-lo com o registro do jogo (Figura 17) não fica claro se realmente o aluno só se utilizou da sorte na transição da primeira rodada para a segunda, pois com o *feedback* de que havia apenas duas cores corretas, mas nenhuma na posição certa, o aluno manteve as cores vermelho e amarelo, testando ambas em outras posições, e adicionando as cores preto e laranja. Na segunda jogada, teve um retorno que haviam agora três cores corretas, mas nenhuma na posição certa. Logo, pelo menos a cor vermelha ou amarela, faziam parte do código. Na transição da segunda rodada para a terceira, o aluno afirma que tentou outra posição para o amarelo, partindo da hipótese que o amarelo é a cor correta, e como já havia testado na posição 4 e 3, não fazia sentido colocá-lo em uma delas, testando dessa vez a posição 2. O aluno mantém, de forma correta, pelo menos três das cores presentes na segunda tentativa, substituindo apenas a cor preto pela verde, acertando todas as cores presentes na senha e o local de uma delas. Além disso, é possível notar que o aluno também alterna a posição da cor vermelha, que já havia ocupado as posições 2 e 1. Em sua última jogada, o aluno diz que: “*deixei o amarelo no mesmo lugar e meio que ‘chutei’ nas outras posições*”, colocando o vermelho na última posição que ainda não havia testado, e as outras duas cores, nas duas únicas posições possíveis.

Figura 17: Jogo do aluno B



Fonte: Acervo pessoal

A forma como o aluno B escreve o registro na língua materna não é capaz de representar qual o raciocínio utilizado por ele, aparentando que ele próprio não está consciente das escolhas feitas. Dessa forma não é possível afirmar que o aluno faz uso do pensamento combinatório para concluir o primeiro jogo e também que é capaz de realizar a conversão do registro material para o de língua materna. Pois caso o fizesse, seria capaz de descrever suas jogadas de forma mais clara.

O aluno C por sua vez utilizou o documento *Word* como forma de registro da língua materna, porém fez algumas afirmações equivocadas nas questões que indagavam a quantidade de senhas possíveis, como podemos notar na Figura 18. Esta pergunta de caráter quantitativo havia sido incluída para mobilizar que o aluno pensasse em todas as possibilidades, porém como o propósito do jogo não é questionar quantas são as possibilidades a cada jogada, e sim descobrir qual a certa, o questionamento ficou fora de contexto.

Figura 18: Registro da 3ª rodada do aluno C

3ª Rodada:Acertei as 4 bolas errei três cores tenho que tentar fazer em menos vezes.

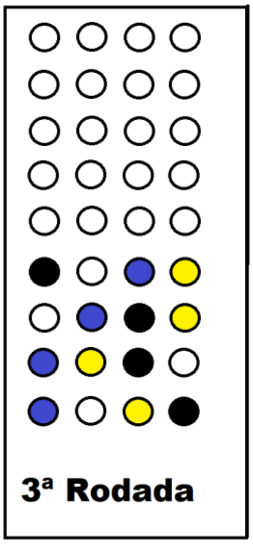
Com as informações das rodadas anteriores, quantas ainda são as possibilidades de senhas possíveis? Por que?3. Eu acertei todas as cores só errei os lugares em três tentativas eu consigo.

Concluiu o jogo? Não.

Fonte: Acervo pessoal

O aluno poderia ter utilizado o tabuleiro e constatar que ainda havia 4 possibilidades de senhas, conforme Figura 19, listando todas as possibilidades na qual a bola amarela não está na primeira posição, a preta não está na segunda, a branca não está na terceira e a azul não está na quarta. Podendo excluir também, as possibilidades na qual as cores azul e amarelo, ambas estão na posição 2 ou 3, e quando ambas estão na posição 1 e 4, respectivamente, pois como é possível ver na rodada 3 (Figura 20), apenas uma das cores está na posição correta.

Figura 19: Exemplo de uso do tabuleiro para verificação das possibilidades de senhas



Fonte: Elaborado pelo autor

Em sua quarta rodada, o aluno erra todas as cores de lugar, mas afirma: "*Mudei as bolas todas de lugar e errei todos os lugares, mas agora tenho mais chances de acertar*", como mostra na Figura 20. E dessa vez, afirma de forma correta que só há uma possibilidade de senha, pois ao eliminar as possíveis senhas que tem o preto na primeira posição, branco na segunda posição, azul na terceira posição e amarelo na última, só sobra a senha correta. Por trás da afirmação do aluno há um raciocínio combinatório, pois em um jogo no qual cada cor só possui uma posição certa, saber a posição errada, diminui a quantidade de senhas possíveis.

Figura 20: Registro da 4ª rodada do aluno C

4ª Rodada:Mudei as bolas todas de lugar e errei todos os lugares mas agora tenho mais chances de acertar

Com as informações das rodadas anteriores, quantas ainda são as possibilidades de senhas possíveis? Por que?1. Porque já tentei as chances que dava provavelmente na próxima acertarei.

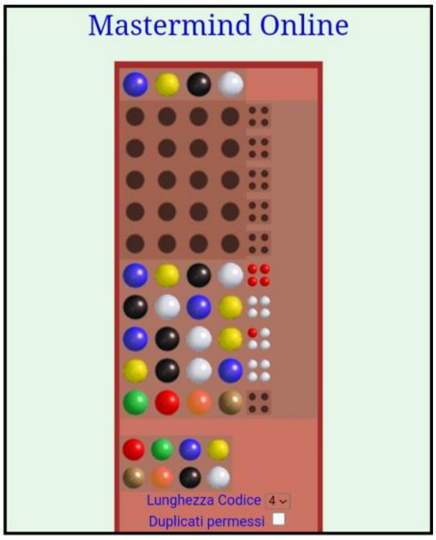
Concluiu o jogo? Não

Fonte: Acervo pessoal

O aluno C contou com a sorte em sua primeira jogada ao errar todas as cores, pois como mencionado acima, o “erro” também faz parte do *feedback* do jogo, pois é parte do conjunto “não pertence à senha” e faz com que o jogador se aproxime do código a cada vez que se descobre algum elemento que pertence a este conjunto, pois o número de cores possíveis de se compor a senha diminui.

Na Figura 21 é possível notar que o aluno faz uso do pensamento combinatório em suas jogadas, como por exemplo, manter as bolas preto e branco em suas posições da segunda rodada para a terceira, com o intuito de verificar se as bolas azul e amarelo estavam apenas com a posição trocadas. Em seguida, da terceira para a quarta rodada, o aluno cria como hipótese que a bola amarela é a que está na posição correta, além de saber que as bolas branco e preto, devem ocupar outros lugares além das posições 3 e 2, respectivamente. Como o aluno afirma no registro de língua materna, ao errar todas as posições, é possível deduzir qual a única possibilidade para o código.

Figura 21: Jogo do aluno C



Fonte: Acervo pessoal

O aluno C, assim como o aluno A, foi capaz de realizar as conversões livremente entre as duas formas de registro. Segundo Duval (2012), ser capaz de realizar as conversões entre os diferentes registros, em ambos os sentidos, aproxima o aluno da *noesis*, pois possibilita enxergar o objeto matemático em todas suas representações e como elas se equivalem, não o relacionando apenas a uma destas.

6.3. Terceiro encontro

Neste encontro, os alunos experimentaram duas configurações mais difíceis do jogo Senha, que foi o aumento no número de elementos e a possibilidade de ter uma cor repetida na senha. Neste dia estavam presentes 9 alunos, sendo que dois não haviam participado das duas aulas anteriores. O professor pesquisador jogou em conjunto com estes alunos para que entendessem as regras do jogo, enquanto os demais tentavam completar o jogo com a configuração com 6 elementos e, em seguida, com a possibilidade de repetição de cores. Nessas duas novas configurações, só houve retorno de 2 registros, sendo ambos utilizando língua materna: um registro de um jogo com 6 elementos, feito pelo aluno C, e o outro de um jogo podendo se repetir cores, feito pelo aluno B. Nos dois registros, é possível perceber que ambos alunos desenvolveram o pensamento combinatório nesta atividade do jogo em comparação com as oficinas anteriores.

Em seu registro da partida com 6 elementos na senha, o aluno C afirma, como é possível observar na Figura 22, que ainda há 3 possibilidades de senha, levando em consideração apenas as cores que ele sabe que estão corretas e no lugar correto. Porém, observando a segunda e terceira rodada, é possível afirmar que só há uma possibilidade para a senha: ou seja, na primeira rodada há 20160 possibilidades e vai diminuindo com as rodadas. Apesar de o aluno argumentar intuitivamente que colocar a bola marrom provavelmente é a resposta correta, ao verificar como está se desenvolvendo o pensamento combinatório, não considerar os casos que já ocorreram e retirá-los das possibilidades totais, demonstra que o aluno ainda não é capaz de fazer a intersecção de conjuntos, um dos conceitos fundamentais da Análise Combinatória, segundo Chilela (2013).

Figura 22: Registro em língua materna do jogo com 6 elementos do aluno C

3ª Rodada:Eu acertei 5 bolas e os lugares delas só falta uma bola pra mim posicionar

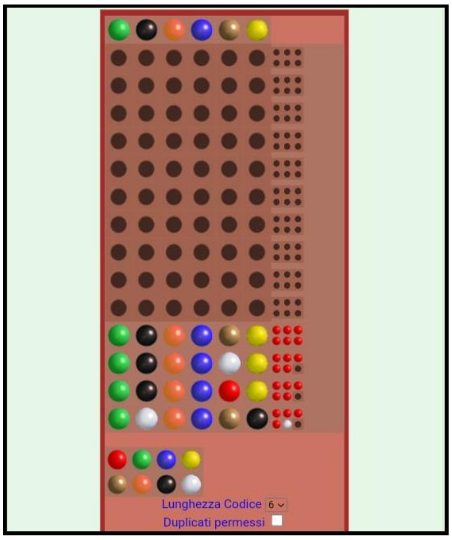
Com as informações das rodadas anteriores, quantas ainda são as possibilidades de senhas possíveis? Por que? São 3, porque só sobraram 3 bolas pra tentar mas eu acho que é a dourada porque eu já usei ela na primeira e contou como certa.

Concluiu o jogo? não

Fonte: Acervo pessoal

Em sua primeira jogada, o aluno conta com a sorte e é capaz de acertar 4 elementos na posição correta, como mostrado na Figura 23. Na segunda jogada, opta por manter as cores verde, laranja e azul na mesma posição e alterna a bola preta de lugar, acertando sua posição, com isso obtendo o *feedback* de que a bola preta também fazia parte da senha. Aqui é interessante notar que o aluno optou por trocar duas cores, para testar as duas cores que ele não havia escolhido na primeira rodada. No jogo com 6 elementos, na primeira rodada, sempre haverá 4 cores que farão parte da senha e as outras duas poderão ou não fazer parte. Na terceira rodada, tendo visto que ele sabia que as cores verde, preta, laranja e azul eram parte da senha, e sabendo que das duas cores uma delas estava na posição correta e a outra não fazia parte, resolveu trocar uma delas aleatoriamente, porém, se ele analisasse a primeira jogada, já poderia concluir que a bola marrom fazia parte da senha e estava no local correto e, de acordo com a segunda rodada, o amarelo era a única opção correta. Na quarta rodada, a rodada vencedora, o aluno sabe que fez a escolha certa, e a bola amarela realmente faz parte da senha, e como o branco não faz parte da senha, só resta a bola marrom. Porém como apontado anteriormente, o aluno poderia ter finalizado o jogo com uma rodada de antecedência. O aluno faz uso do pensamento combinatório, mas ainda não é capaz de analisar todas as possibilidades apresentadas a ele pelo jogo.

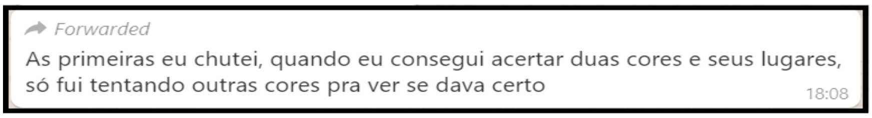
Figura 23: Jogo com 6 elementos do aluno C



Fonte: Acervo pessoal

No registro feito pelo aluno B (Figura 24), sobre o jogo com a possibilidade de haver cores repetidas, em sua própria visão, ele se vale da sorte para tentar completar o jogo, sem levar em consideração as combinações possíveis. Mesmo que em seu registro material haja indícios de que o aluno faz uso do PC para decidir suas próximas jogadas. Os alunos quando trabalham com Matemática, muitas vezes, estão acostumados com respostas certas ou erradas, e quando são questionados quais caminhos escolheram para tomar suas decisões, não o sabem explicar ou possuem uma insegurança que seus métodos estejam errados.

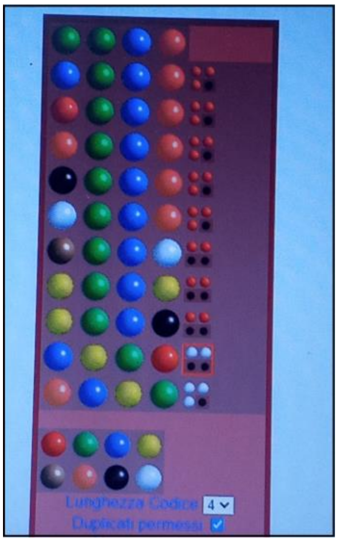
Figura 24: Registro do jogo com possibilidade de repetição de cores do aluno B



Fonte: Acervo pessoal

Ao analisar o registro material (Figura 25), fornecido pelo aluno, é possível observar que ele realiza combinações, utilizando o pensamento combinatório, baseadas em rodadas anteriores, mas não faz análise de todas as possibilidades. Diferentemente do encontro anterior, em que pelo menos soube argumentar o motivo de ter deixado a cor amarela no lugar. Da primeira para a segunda rodada, o aluno mantém as cores azul, amarelo e verde, alternando suas posições, já que no *feedback* anterior, as três cores corretas, não estavam no local certo. Porém, da segunda rodada para a terceira, o aluno não leva em consideração a informação da primeira rodada, na qual já se poderia afirmar que a bola laranja fazia parte da senha. Levando, assim, quatro rodadas para retorná-la à composição da senha. Outra situação na qual o aluno não leva em consideração o *feedback* fornecido pelo sistema, é a repetição da cor branca da quinta rodada para a sexta. Não se fazendo necessárias as jogadas da quinta, sétima e nona rodada, pois já era possível saber que o laranja fazia parte da senha, segundo a primeira rodada, o preto não fazia parte de acordo com a terceira rodada, e o vermelho também não fazia parte por conta da segunda tentativa. Podendo concluir o jogo em 9 jogadas.

Figura 25: Jogo com 4 elementos, podendo se repetir cores, do aluno B



Fonte: Acervo pessoal

6.4. Formulário

Ao final das oficinas, foi postado um link do *Google Forms* para os alunos, na plataforma *Google Classroom,* com o objetivo de verificar de que forma o pensamento combinatório foi desenvolvido. O questionário era composto por perguntas qualitativas e quantitativas, porém a análise foi feita apenas qualitativamente, a fim de verificar se os alunos eram capazes de associar os problemas de contagem com o PM. Os 4 alunos que fizeram parte desta pesquisa responderam ao questionário.

Questão 1: O que você achou do jogo Mastermind[6]?

Aluno A: Um jogo bem legal que você se diverte bastante.
Aluno B: Muito legal e didático por nos fazer pensar.
Aluno C: Legal, exercita o cérebro.
Aluno D: Achei legal até.

Todos os alunos apontaram aspectos ligados à ludicidade, o que se pode inferir que a dificuldade do jogo foi adequada de acordo com o nível de conhecimento prévio dos alunos, não sendo tão fácil, a ponto de causar desinteresse e nem tão difícil que não pudessem jogá-lo. Além do aspecto lúdico, os alunos B e C apontaram o lado didático

[6] Aqui foi utilizado o nome original, pois o site utilizava dessa forma.

do jogo Senha, comentando que os fizeram pensar e exercitar o cérebro, indo ao acordo do objetivo desta pesquisa em desenvolver o PC.

Questão 2: Você achou que o tabuleiro auxiliou na hora de concluir o jogo? Explique.

Aluno A: Eu não usei o tabuleiro, porém usei uma folha de papel e até que ajudou.
Aluno B: Eu não cheguei a usar, mas sim, ajuda. Pois você poderá conferir as cores que jogou, caso esqueça para conseguir acertar mais fácil.
Aluno C: Não. Acabei me confundindo mais ainda.
Aluno D: Não precisei dele, então pra mim não fez diferença.

Os alunos A, B e D não fizeram uso da ferramenta, então não é possível concluir algo sobre a mobilização do registro na forma de listagem. Enquanto o aluno C afirmou que acabou se confundindo mais. Vale ressaltar que o jogo não contava com o fator tempo, logo os alunos eram livres para refletir, analisar e listar todas as possibilidades a cada nova tentativa.

Questão 3: Você achou que explicar as jogadas (por meio do arquivo Word ou dos áudios enviados à professora) auxiliou na hora de concluir o jogo? Explique.

Aluno A: Acho que sim porque você consegue ter várias opções de jogadas.
Aluno B: Sim, porque ao invés de só ir chutando cores aleatórias, parei para pensar e analisar cada jogada, pensando em qual cor estaria certa
Aluno C: Sim. Porque eu contava em quantas rodadas dava para concluir.
Aluno D: Mais ou menos.

Os alunos A, B e C, afirmaram que mobilizar o registro na língua materna auxiliou-os na conclusão do jogo, pois permitia que estes analisassem e refletissem sobre as jogadas, podendo até prever o número de rodadas necessárias para se finalizar o jogo. Na Análise Combinatória os problemas se encontram, em sua maioria, nesta forma de registro e são convertidos para o registro simbólico. Dessa forma, os alunos são condicionados a realizarem as conversões em apenas um sentido. Ao não fazerem as conversões no sentido contrário, do registro simbólico para o registro em língua materna, não se apropriam totalmente do objeto matemático e, portanto, não atingem a *noesis*. Para Duval (2012), é importante que se mobilizem mais de uma forma de registro e que sejam capazes de se realizar conversões entre as representações, em todos os sentidos, de forma que se complementem e auxiliem na compreensão do objeto matemático.

Questão 4: Quantos são os códigos possíveis de se criar com 4 elementos e sem repetir cores? Explique como fez para encontrar a solução.

Aluno A: Não entendi muito bem, mas eu acho que são 2 pois tem oito cores e são 4 elementos e não pode repetir cores.
Aluno B: 32 códigos. Multiplicando 4 por 8 (número de cores disponíveis no jogo)
Aluno C: 24. Na primeira você bota uma cor e tem 4 possibilidades, na segunda bota outra e tem 3 possibilidades, na terceira botando mais uma cor ainda tem 2 possibilidades, na última tem só uma possibilidade.$4\times3\times2\times1=24$. Única resposta que eu consegui elaborar.
Aluno D: 16, porque são 4 cores, aí com isso eu consigo fazer 16 combinações.

Os alunos B, C e D foram capazes de associar os problemas de contagem com o PM. O aluno B foi o único que enxergou o conjunto universo das cores que compunham o código com todas as cores que poderiam formar a senha, enquanto os alunos C e D, só consideraram as cores que faziam parte da senha. Porém na pergunta faltou colocar o número de cores disponíveis pois os alunos teriam que lembrar das características do jogo. Por outro lado, o aluno C foi o único que identificou a independência na escolha das cores e que a cada nova cor, deveria se retirar um elemento do conjunto universo, já os alunos B e D, fizeram a correspondência entre o conjunto universo e a quantidade de elementos do código, o que não está de acordo com a questão, pois a cada escolha de cor, seu conjunto universo muda. O aluno A foi o único que não fez a ligação entre PM e o problema. O aluno afirma não ter entendido a questão, dividindo o total de cores pela quantidade de elementos na senha, chegando em 2 como resposta.

Questão 5: Foi mais difícil ou mais fácil descobrir o código com 6 elementos, comparado com descobrir o código com 4 elementos? Explique o porquê.

Aluno A: Foi mais difícil porque você tem que repetir muitas vezes aí você acha que tá certo mas não está.
Aluno B: Não. Porque com 6 elementos é mais fácil acertar as cores, mas mais difícil acertar o seu lugar. Com 4 elementos embora às vezes não seja tão simples acertar as cores de primeira, é mais fácil descobrir o lugar de cada uma.
Aluno C: Mais difícil. Porque com 4 elementos se eu errasse tudo na primeira era só por todas as outras cores que eu botei já na de seis eu vou sempre acertar uma cor de primeira.
Aluno D: pra mim foi um pouco mais complicadinho, porque são mais cores e mais difícil de encontrar a solução.

Os alunos A, C e D responderam que achar o código com 6 elementos foi mais difícil, enquanto o aluno B não deixa claro se foi mais difícil ou mais fácil. Destacam-se as afirmações dos alunos B e C, que trouxeram situações do jogo específicas. Primeiro a afirmação do aluno B o qual aponta dois objetivos distintos do jogo: descobrir quais cores fazem parte da senha e saber qual a posição das cores. Ele afirma corretamente que é mais fácil descobrir quais cores pertencem a senha de 6 elementos do que descobrir quais cores pertencem na de 4 elementos ($C_{8,6} < C_{8,4}$), porém descobrir a posição correta destas 6 cores é mais difícil do que descobrir a posição das 4 cores ($6! > 4!$), considerando que já se sabe quais cores pertencem à senha nos dois casos. Já o aluno C traz uma situação de jogo que este presenciou durante as oficinas, errar todas as cores na primeira tentativa, o que automaticamente lhe informava quais cores faziam parte do código. Porém, como apontado acima, há mais maneiras de se escolher 4 cores entre 8 possíveis, do que 6 cores entre 8. O caso do aluno foi 2 entre 70, que seria errar todas as cores ou acertar todas as cores de primeira.

Questão 6: Quantos são os códigos possíveis de se criar com 6 elementos e sem repetir cores? Explique como fez para encontrar a solução.

Aluno A: Apenas 1 pois tem oito cores e seis elementos, aí vai ficar sobrando 2 cores porém não pode repetir.
Aluno B: 48 códigos. Multiplicando 6 por 8(número de cores disponíveis)
Aluno C: 720. Igual na outra na primeira terei 6 possibilidades na segunda 5 e assim por diante multiplica as possibilidades e chega ao resultado. Provavelmente está errado mas é a única resposta que eu consegui.
Aluno D: 36 combinações, porque com cada cor eu consigo fazer 6 combinações.

Como apontado na questão 4, os alunos B, C e D utilizam o PM para explicar suas soluções, mantendo o mesmo tipo de raciocínio utilizado anteriormente. Enquanto o aluno A continua realizando a divisão entre o total de cores e o número de elementos, isso fica evidente quando este aponta que “sobra” 2 cores.

Questão 7: Foi mais difícil ou mais fácil descobrir o código podendo repetir as cores, comparando com não poder repetir as cores? Explique o porquê.

Aluno A: Eu não testei a de repetir cores, porém eu acho que repetir cores é mais difícil porque você gasta tentativas mais rápido.
Aluno B: Foi mais difícil. Porque às vezes acertamos todas as cores, mas não sabemos se tem ou não uma cor repetida e não sabemos qual é ela. Já sem repetir, é mais fácil de descobrir o código.
Aluno C: Mais difícil. Porque eu tenho que tentar cor por cor duas vezes pra ver se ela está na senha ou não.
Aluno D: não achei muito difícil, mas também não achei muito fácil.

A resposta do aluno A está condicionada às tentativas do jogo, não ao número de possibilidades que a senha pode ter. O aluno B traz como experiência sua partida no qual o aluno sabia as cores e as posições de 3 elementos do código, mas não foi capaz de descobrir o último até a décima tentativa. Já o aluno C afirma que tem que tentar cada cor duas vezes, mas a senha pode ser composta pela mesma cor em 3 ou 4 posições também. E a resposta do aluno D é vaga, não podemos inferir nada.

Questão 8: Quantos são os códigos possíveis de se criar com 4 elementos e podendo repetir cores? Explique como fez para encontrar a solução.

Aluno A: Eu não consegui fazer essa pois eu me confundi eu tentei de várias maneiras porém não sei qual está certa
Aluno B: 256 códigos. Fiz 32 (número de códigos possíveis com 4 elementos sem repetir cores) por 8(número de cores disponíveis no jogo)
Aluno C: Essa eu não vou saber responder acho que são muitos porque cada cor pode ir quatro vezes e vários lugares e se repetindo não sei a resposta.
Aluno D: da pra fazer várias combinações, nem sei responder essa pergunta.

Como o aluno A estava preso à ideia de dividir a quantidade de cores possíveis pelo número de elementos do código, ao se poder repetir, o número de possibilidades cresce de uma forma que o aluno não esperava, não sendo capaz de trazer uma resposta. Os alunos C e D também não souberam responder a esta pergunta, apesar de o aluno C ter argumentado de forma correta que cada cor poderia ocupar os 4 espaços, faltando apenas formalizar a sua explicação. O aluno B foi o único que trouxe uma resposta, porém se baseou em sua resposta da questão 4 e apenas multiplicou pelo número de cores possíveis, entendendo que cada cor só poderia se repetir uma vez apenas.

Questão 9: Hoje, a maioria das senhas de computadores exige que haja pelo menos uma letra minúscula, uma letra maiúscula, um número e um caractere especial em sua composição. Por que você acha que é feito esta exigência?

Aluno A: Eu acho que é feito esta exigência para não correr o risco que alguém descubra sua senha de um jeito fácil
Aluno B: Para tornar a senha mais segura, ou seja, ser mais difícil adivinhá-la
Aluno C: Para dificultar as pessoas que tentam invadir ou roubar sua conta.
Aluno D: por segurança e para ter mais opções de senhas, para não terem senhas repetidas.

A última questão serviu para trazer contexto para o jogo Senha comparando uma situação que é bem comum na nossa realidade atual, com redes sociais, e-mails, cadastros em sites, todos fazendo pelo menos uma destas exigências para compor suas senhas. Todos os alunos apontaram que com as exigências feitas se é aumentado o número de dificuldade para se descobrir a senha.

O aluno A foi o único aluno que não fez a correspondência entre as questões de contagem e o Princípio Multiplicativo, pela análise das respostas, isso aconteceu, pois o estudante não conseguiu entender o que as questões 4, 6 e 8 pediam. Esse é o principal problema para alunos que estudam a Análise Combinatória, a interpretação das questões, logo não é incomum que pelo menos um dos alunos que participaram desta pesquisa não compreendesse o enunciado. Já o aluno B, apesar de não ter conseguido realizar as explicações de suas jogadas de forma clara, no formulário foi capaz de associar as questões 4, 6 e 8 com o PM, além de ter sido o único que enxergou que todas as cores disponíveis no jogo poderiam ser consideradas. Também fez apontamentos em relação ao jogo que demonstram o raciocínio combinatório. O aluno C e o aluno D só associaram as questões 4 e 6 com o Princípio Multiplicativo, não conseguindo responder à questão 8. Sendo que o aluno C foi o único que percebeu que a cada cor escolhida, o número de cores possíveis de se escolher depois diminuía em uma unidade. Este tipo de questão se aproxima de problemas de contagem do Ensino Médio que envolvem Permutação ou Arranjo.

7. Considerações Finais

Os jogos na Educação Matemática têm criado possibilidades do aluno ser agente ativo em sua aprendizagem, tornando-o responsável por suas ações e decisões, enquanto o professor se torna o mediador, sempre presente, capaz de guiar o aluno, questioná-lo e ajudá-lo, quando necessário. Borin justifica o uso de jogos na aprendizagem de conceitos matemáticos da seguinte forma:

> Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes positivas frente a seus processos de aprendizagem. (2007, p.9)

Nesta pesquisa buscou-se verificar de que formas o jogo Senha poderia contribuir no desenvolvimento do Pensamento Combinatório em alunos do oitavo ano do ensino fundamental, analisando os diferentes tipos de registro de representação produzidos pelos alunos, baseado na Semiótica de Duval (2008).

Ao final desta pesquisa foi possível constatar que ao se mobilizar outros registros, além do registro material, os alunos foram capazes de concluir as partidas de forma mais eficaz, comparando os retornos do primeiro encontro com os do segundo, analisando de forma lógica e utilizando-se do pensamento combinatório para determinar quais jogadas faziam mais sentido a cada tentativa. Trabalhar com mais de um tipo de registro contribuiu no desenvolvimento do PC destes alunos, possibilitando-os refletir, analisar e fazer suposições sobre cada jogada.

O uso do tabuleiro criado, por sua vez, não foi significativo para os alunos e nada contribuiu para a pesquisa. O autor tinha como objetivo, ao apresentá-lo, que os alunos fizessem uso do documento *Word* e do tabuleiro, simultaneamente, utilizando este segundo para responder a pergunta: “Quantas ainda são as possibilidades de senhas possíveis?” Porém, esta pergunta se mostrou distante do objetivo principal do jogo, pois ao se jogar, não se necessita saber quantas são as senhas possíveis, e sim qual combinação mais se aproxima do código correto.

Uma das dificuldades ao se realizar esta pesquisa no modelo de ensino remoto emergencial, foi a não interação dos alunos durante a partida. Cada estudante jogava contra a máquina e não houve nenhuma troca entre eles, sobre possíveis estratégias e soluções para se resolver o jogo, após as partidas. Em sua forma original, há um desafiante, aquele que precisa descobrir o código, e um desafiado, o que cria a senha, necessitando pelo menos de duas pessoas para se desenvolver uma partida. Fioreze et. al (2021) traz apontamentos que indicam que a falta de interações que acontecia pessoalmente entre professor e aluno, e aluno com aluno, em sala de aula é perdida no ensino remoto, pois mesmo que as aulas aconteçam de forma síncrona há uma perda nesta interação, que por muitas vezes faz parte da verificação de aprendizagem.

Não poder visualizar os movimentos dos alunos durante suas jogadas também foi um aspecto negativo ao se trabalhar no ensino remoto emergencial. Fioreze et. al (2021, p. 37) também destaca que: “a falta de interação entre os alunos e o docente em atividades síncronas e assíncronas” preocupa os autores quando consideram as novas possibilidades de se ensinar matemática por meio das tecnologias.

Muitos aspectos poderiam ser melhorados nesta pesquisa tais como: o incentivo na utilização de mais de uma forma de registro, como a árvore de possibilidades; a participação em grupos, para que houvesse troca entre os alunos; a formalização das respostas 4, 6 e 8 do formulário ao final da pesquisa; realização de plenárias ao final dos encontros para que os alunos compartilhassem estratégias; utilizar problemas relacionados ao jogo, trazendo situações que os alunos pudessem descobrir o código de acordo com os feedbacks anteriores.

Porém acredita-se que mesmo com as considerações acima, o trabalho conseguiu apontar as contribuições do jogo Senha no desenvolvimento do Pensamento Combinatório, pois possibilitou que os alunos analisassem suas jogadas e ao mobilizar o registro em língua materna, explicando cada rodada, foram capazes de refletir sobre elas de forma que utilizaram o raciocínio combinatório para concluir as partidas com o mínimo de jogadas possíveis.

Ao desenvolver esta pesquisa, o autor pode comprovar que ao se trabalhar com mais de um registro de representação os alunos foram capazes de desenvolver o Pensamento Combinatório durante as partidas do jogo Senha. Por ter sido a primeira experiência em uma prática didática que foi capaz de utilizar a teoria de Duval, isto fez com o pesquisador se motivasse a continuar utilizando os diferentes registros e suas conversões em seu futuro como professor, buscando sempre que os alunos consigam atingir a *noesis.*

Referências

BRAGA, K.A. **O Processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória:** uma visão dos professores de matemática de Floriano/PI. ULBRA, 2009. 68 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Floriano, 2009.

BORIN, J. Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME - USP, 2007.

CARDOSO, E.R.; GUIRADO, J.C. Análise combinatória: da manipulação à formalização de conceitos. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IX, 2007, Paraná. Anais... Paraná: EPEM, 2007.

CHILELA, R.R. **O jogo de pôquer: uma situação real para dar sentido aos conceitos de Combinatória.** UFRGS, 2013, 126 p. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

CRITON, M. Les jeux mathématiques. Paris: PUF 1997. CURY, H. N. Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, Coleção Tendências em Educação Matemática, 2007.

DORNELLAS, A.C.B. Resolução de problemas em análise combinatória: um enfoque voltado para alunos e professores do ensino médio. SBEM: VII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat***,* Florianópolis, v.7, n.2, p.266-297, 2012.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In:* MACHADO, S.D.A. **Aprendizagem em Matemática.** Campinas: Papirus Editora, 2008. p.11-34.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o Raciocínio Combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do ensino fundamental.** PUC-SP, 2001, 202 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.

FEIJÓ, R.O. **O uso de Role Playing Games como recurso pedagógico nas aulas de Matemática.** UFRGS, 2014, 215 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.
FIOREZE, L.A.; et. al. Educação matemática durante o ensino remoto emergencial: experiências docentes de escolas públicas e privadas do Rio Grande do Sul. *In:* FIOREZE, L.A.; HALBERSTADT, F.F. (orgs.). **Aprendizagens e Vivências no Ensino de Matemática em tempos de pandemia.** Editora Fi, 2021. p.15-78. Disponível em: https://www.editorafi.org/315matematica. Acesso em: 26 nov. 2021.

GERHARDT, T.E.; SILVEIRA, D.T. **Métodos de Pesquisa.** Ed. 1. Porto Alegre: PLAGEDER, 2009.
GONZAGA, F.L.O. **Uma investigação sobre o ensino de Probabilidade e Análise Combinatória.** UFRGS, 2015. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** UNICAMP, 2000, 224 p. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

KISHIMOTO, T.M. **Jogo, brinquedo, brincadeira e educação**. Ed. 8. São Paulo: Cortez, 2008.

LIMA, E.L. et al. **Temas e Problemas Elementares**. Ed.12. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MENDONÇA, L. **Trajetória hipotética de aprendizagem:** análise combinatória. PUC/SP, 2011. 122 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

MOURA, M.O.de. O jogo e a construção do conhecimento matemático. **Idéias,** São Paulo, n.10, p. 45-53, 1991.

PEIRCE, C.S. **Semiótica.** Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 3. Ed. São Paulo: Perspectiva, 2005.

PEREIRA, M. da C. **Os jogos no ensino de Combinatória.** UFRGS, 2019, 70p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

PESSOA, C.A. dos S.;BORBA, R.E. de S.R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana,** Recife, v.1, n.1, s/ p., 2010.

SILVA, C.S. **Estudo de caso sobre o ensino de análise combinatória**. UFRGS, 2010, 46 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

SILVA, E.C.A. da. **O jogo Senha e o Princípio Fundamental da Contagem: uma aplicação no ensino médio.** UFRN, 2018, 73 p. Dissertação (Mestrado profissional), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.

SILVA, G.C.M. O jogo Contig 60, as expressões numéricas e os registros de representação semiótica. **Horizonte**, São Paulo, v. 27, n.1, p.61-67, jan-jun, 2009.

TEIXEIRA, S.F. de A. **Uma reflexão sobre a ambiguidade do conceito de jogo na educação matemática**. USP, 2008, 101 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

APÊNDICE A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

PAIS OU RESPONSÁVEIS

PESQUISA: O desenvolvimento do raciocínio combinatório com o jogo Mastermind: uma experiência a partir da Semiótica

COORDENAÇÃO: Leandra Anversa Fioreze

Prezado(a) Sr(a)

Estamos convidando o (a) estudante _________________________ a participar de uma pesquisa a ser realizada na escola que ele frequenta. Gostaríamos de obter seu consentimento e concordância. A seguir, esclarecemos e descrevemos as condições e objetivos do estudo:

NATUREZA DA PESQUISA: Esta é uma pesquisa que tem como finalidade investigar o desenvolvimento do raciocínio combinatório através do jogo *Mastermind*. Este projeto foi aprovado pela Comissão de Pesquisa da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

PARTICIPANTES DA PESQUISA: Participarão desta pesquisa em torno de 15 alunos do oitavo ano da Escola Estadual de Ensino Médio Professor Tolentino Maia em Brasil, Rio Grande do Sul, Viamão.

ENVOLVIMENTO NA PESQUISA: Ao participar deste estudo, a criança/ adolescente sob sua responsabilidade irá jogar *Mastermind* e registrar suas jogadas de forma escrita, por voz ou imagens, e sua participação será gravada na sala do Google Meet, junto com outros (as) alunos (as) que aceitem participar da pesquisa. É previsto em torno de 3 oficinas, com duração de 1 hora cada, às sextas-feiras. Você pode se recusar a autorizar a criança/adolescente a participar; e a criança/adolescente poderá desistir de participar em qualquer momento que decida. No entanto solicitamos sua colaboração para que possamos obter melhores resultados da pesquisa. Sempre que o Senhor/a Senhora e/ou a criança/adolescente queiram mais informações sobre este estudo podem entrar em contato diretamente com o (a) Prof(a) Leandra Anversa Fioreze pelo número (51)995391963.

SOBRE O QUESTIONÁRIO/ENTREVISTA: Serão solicitadas algumas informações básicas/perguntas sobre o jogo, por exemplo, quantas possibilidades foram percebidas pelos alunos para a construção das senhas no jogo, a diferença entre as modalidades do jogo, e a significação da exigência mínima na construção de senhas virtuais.

RISCOS E DESCONFORTO: Os procedimentos utilizados obedecem aos critérios da ética na pesquisa, conforme a Resolução 466/2012 e a Resolução 510/2016, do Conselho Nacional de Saúde. Os possíveis riscos são o desconforto em comunicar seus resultados em frente à turma.

Tais riscos serão resolvidos com encaminhamentos que garantam cuidados e respeito de acordo com a manifestação da criança/adolescente sob sua responsabilidade.

CONFIDENCIALIDADE: Todas as informações coletadas nesta investigação são estritamente confidenciais. Trataremos todas as informações sem que haja identificação de particularidades da criança/adolescente entrevistado (a). Os resultados obtidos na pesquisa serão utilizados para alcançar os objetivos do trabalho expostos acima, incluindo a possível publicação na literatura científica especializada.

BENEFÍCIOS: Ao participar desta pesquisa, a criança/adolescente sob sua responsabilidade não terá nenhum benefício direto; entretanto, esperamos que futuramente os resultados deste estudo sejam usados em benefício de outras pessoas no entendimento do desenvolvimento do raciocínio combinatório.

PAGAMENTO: Você não terá nenhum tipo de despesa pela criança/adolescente participar deste estudo, bem como não receberá nenhum tipo de pagamento pela participação. Após estes esclarecimentos, solicitamos o seu consentimento de forma livre para que a criança/adolescente participe desta pesquisa. Para tanto, preencha os itens que se seguem:

Desde já, agradecemos a atenção e a participação da criança/adolescente. Caso queiram contatar a equipe, isso poderá ser feito pelo email: rodrigosat@gmail.com e ao Comitê de Ética em Pesquisa UFRGS (51) 3308 3738. etica@propesq.ufrgs.br Av. Paulo Gama, 110, Sala 311 Prédio Anexo I da Reitoria - Campus Centro Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060

CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu,________________________________ entendi os objetivos desta pesquisa, bem como, a forma de participação. Eu li e compreendi este Termo de Consentimento, portanto e concordo com a participação de (nome do estudante menor) nesta pesquisa.

Local e data:________________________

____

(Assinatura do responsável)

Eu, Rodrigo Yuji Hirata Sato, membro da equipe do projeto O desenvolvimento do raciocínio combinatório com o jogo Mastermind: Uma experiência a partir da Semiótica, obtive de forma apropriada e voluntária o consentimento Livre e Esclarecido do sujeito da pesquisa ou representante legal para a participação na pesquisa.

Rodrigo Saito

(Assinatura do membro da equipe que apresentar o TCLE ou o pesquisador responsável)

APÊNDICE B

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)

PESQUISA: O desenvolvimento do raciocínio combinatório com o jogo Mastermind: Uma experiência a partir da Semiótica

COORDENAÇÃO: Leandra Anversa Fioreze

Para crianças e adolescentes (menores de 18 anos) e para legalmente incapaz.

O assentimento informado para a criança/adolescente não substitui a necessidade de consentimento informado dos pais e/ou responsáveis. O assentimento assinado pela criança demonstra a sua cooperação na pesquisa.

Você está sendo convidado a participar da pesquisa "O desenvolvimento do raciocínio combinatório com o jogo Mastermind: Uma experiência a partir da Semiótica", coordenada pelo/pela professor/professora Leandra Anversa Fioreze do Departamento de Matemática da Faculdade de Educação da UFRGS.

Com esta pesquisa, queremos saber de que formas o raciocínio combinatório (modo de organizar e agrupar elementos, respeitando regras específicas de escolha e/ou ordenação) é desenvolvido quando jogamos o jogo *Mastermind*, para isso vamos observar os registros feitos pelos alunos por meio dos tabuleiros e/ou das explicações fornecidas.

Você só participa da pesquisa se quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir.

A pesquisa será feita no/a Google Meet, onde vocês irão jogar o jogo *Mastermind* no site (http://mastermind.itd.cnr.it/index.php) e registrar suas jogadas utilizando o tabuleiro, o documento Word fornecido e/ou através de áudios enviados à professora Eliane de Fraga Silveira. É possível ocorrer constrangimento ao reportar seus resultados em frente à turma, neste caso, você tem a opção de não o fazer. Caso aconteça algo errado, você pode nos procurar pelos telefones que estão informados no começo do texto. Esclarecemos que há coisas legais que podem acontecer como aprendizado de um conteúdo matemático através de um jogo.

Ninguém saberá que você está participando da pesquisa; não contaremos para outras pessoas as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados no Trabalho de Conclusão de Curso da Licenciatura em Matemática da UFRGSa, mas sem que outras pessoas saibam quais foram as crianças que participaram.

Se você ou os responsáveis por você tiver (em) dúvidas com relação ao estudo, direitos do participante, ou riscos relacionados ao estudo, você deve contatar o(a) responsável por esta pesquisa, Leandra Anversa Fioreze, do Departamento de Matemática da Faculdade de Educação da UFRGS, telefone: (51) 995391963.

Da mesma forma, você pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. O CEP por intermédio do telefone (51) 3308.3738.

CONSENTIMENTO PÓS-INFORMADO

Eu ______________________________________ aceito participar da pesquisa "O desenvolvimento do raciocínio combinatório com o jogo Mastermind: Uma experiência a partir da Semiótica".

Entendi as coisas legais e as coisas desconfortáveis que podem acontecer. Entendi que posso dizer "sim" e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer "não" e desistir de participar da pesquisa e que ninguém vai ficar bravo ou chateado comigo.

Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus responsáveis.

Recebi uma cópia deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

Eu, Rodrigo Yuji Hirata Sato, membro da equipe do projeto "O desenvolvimento do raciocínio combinatório com o jogo Mastermind: Uma experiência a partir da Semiótica" obtive de forma apropriada e voluntária o assentimento para a participação na pesquisa.

Rodrigo Sato

____

(Assinatura do membro da equipe que apresentar o TALE)

APÊNDICE C

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA UTILIZAÇÃO DE IMAGEM E SOM DE VOZ PARA FINS DE PESQUISA

Eu, ____, autorizo a utilização da minha imagem e som de voz, na qualidade de participante/entrevistado(a) no projeto de pesquisa intitulado "O desenvolvimento do raciocínio combinatório com o jogo Mastermind: Uma experiência a partir da Semiótica", sob responsabilidade de Leandra Anversa Fioreze vinculado(a) ao/à Programa de Graduação em Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Minha imagem e som de voz podem ser utilizadas apenas para análise por parte da equipe de pesquisa.

Tenho ciência de que não haverá divulgação da minha imagem nem som de voz por qualquer meio de comunicação, sejam elas televisão, rádio ou internet, exceto nas atividades vinculadas ao ensino e a pesquisa explicitadas anteriormente. Tenho ciência também de que a guarda e demais procedimentos de segurança com relação às imagens e sons de voz são de responsabilidade do(a) pesquisador(a) responsável.

Deste modo, declaro que autorizo, livre e espontaneamente, o uso para fins de pesquisa, nos termos acima descritos, da minha imagem e som de voz.

Este documento foi elaborado em duas vias, uma ficará com o(a) pesquisador(a) responsável pela pesquisa e a outra com o(a) participante.

____________________________ ________________________________

Assinatura do (a) participante Assinatura do (a) responsável do (a) participante

Rodrigo Sato

____

Rodrigo Yuji Hirata Sato ________________________________

Nome e Assinatura do (a) pesquisador (a) Local e data

APÊNDICE D

TERMO DE CONCORDÂNCIA DA INSTITUIÇÃO

Estamos realizando uma pesquisa que tem como objetivo investigar o desenvolvimento do raciocínio combinatório utilizando o jogo *Mastermind* e analisando os registros feitos pelos alunos. Para tanto, solicitamos autorização para realizar este estudo nesta instituição. Também será utilizado um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para os pais de cada participante e um Termo de Assentimento Livre e Esclarecido para cada participante. A coleta de dados envolverá a aplicação de um questionário que deverá ser respondido individualmente por cerca de 15 jovens no espaço da sala de aula com a presença do professor. A coleta será realizada por dois pesquisadores treinados. Os participantes do estudo serão claramente informados de que sua contribuição é voluntária e pode ser interrompida em qualquer tempo sem nenhum prejuízo. A qualquer momento, tanto os participantes quanto os responsáveis pela Instituição poderão solicitar informações sobre os procedimentos ou outros assuntos relacionados a este estudo. Este projeto foi aprovado pela Comissão de Pesquisa da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Todos os cuidados serão tomados para garantir o sigilo e a confidencialidade das informações, preservando a identidade dos participantes bem como das instituições envolvidas. Os procedimentos utilizados nesta pesquisa obedecem aos critérios de ética na pesquisa com seres humanos conforme Resolução nº 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde. Nenhum dos procedimentos realizados oferece riscos à dignidade do participante. Todo material desta pesquisa ficará sob responsabilidade da/do pesquisador(a) coordenador(a) do estudo, Prof./Profª. Leandra Anversa Fioreze e, após cinco anos, será destruído. Dados individuais dos participantes coletados ao longo do processo não serão informados às instituições envolvidas ou aos familiares, e será realizada a devolução dos resultados, de forma coletiva, para a escola, se assim for solicitado. UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL FACULDADE DE EDUCAÇÃO COMISSÃO DE PESQUISA Av. Paulo Gama, s/n, sala 918, Centro Histórico, Porto Alegre, RS – Cep: 90046-900 – Fone: 3308.3098 – Contato: Por intermédio deste trabalho, esperamos contribuir para a compreensão do desenvolvimento do raciocínio combinatório e suas relações com o jogo Mastermind. Agradecemos a colaboração dessa instituição para a realização desta atividade de pesquisa e colocamo-nos à disposição para esclarecimentos adicionais. A/O pesquisador(a) responsável por esta pesquisa é a/o Prof./Profª Leandra Anversa Fioreze do Departamento de Matemática da Faculdade de Educação da UFRGS. A equipe poderá ser contatada por meio do telefone (51) 995391963. Maiores informações podem ser obtidas com o Comitê de Ética em Pesquisa da UFRGS pelo telefone (51) 3308.3738.

____ Porto Alegre, 19 de outubro de 2021.

____Profª Leandra Anversa Fioreze (FACED/UFRGS)

Concordamos que os jovens/discentes, que estudam na Escola Estadual de Ensino Médio Professor Tolentino Maia, participem do presente estudo.

____

Local e data

Responsável e cargo

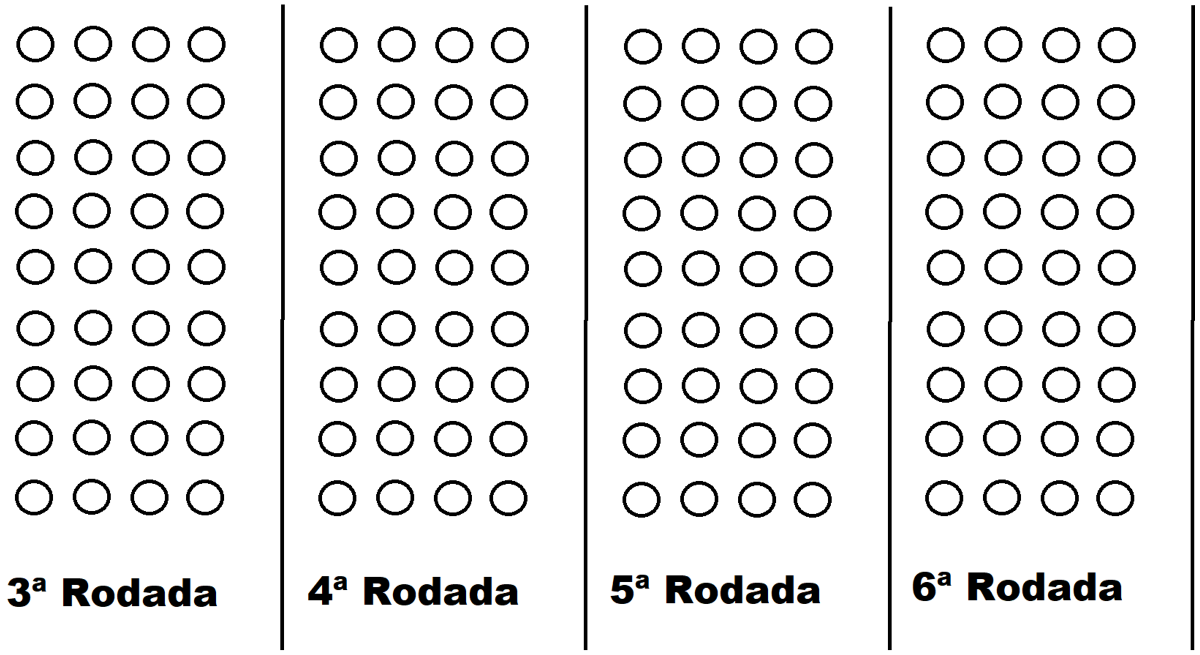
APÊNDICE E

3ª Rodada: **Com as informações das rodadas anteriores, quantas ainda são as possibilidades de senhas possíveis? Por que?** **Concluiu o jogo?**

4ª Rodada: **Com as informações das rodadas anteriores, quantas ainda são as possibilidades de senhas possíveis? Por que?** **Concluiu o jogo?**

5ª Rodada: **Com as informações das rodadas anteriores, quantas ainda são as possibilidades de senhas possíveis? Por que?** **Concluiu o jogo?**

APÊNDICE F



APÊNDICE G

1. O que você achou do jogo Mastermind? *

Sua resposta

2. Você achou que o tabuleiro auxiliou na hora de concluir o jogo? Explique. *

Sua resposta

3. Você achou que explicar as jogadas (por meio do arquivo Word ou dos áudios enviados à professora) auxiliou na hora de concluir o jogo? Explique. *

Sua resposta

4. Quantos são os códigos possíveis de se criar com 4 elementos e sem repetir cores? Explique como fez para encontrar a solução. *

Sua resposta

5. Foi mais difícil ou mais fácil descobrir o código com 6 elementos, comparado com descobrir o código com 4 elementos? Explique o porquê. *

Sua resposta

6. Quantos são os códigos possíveis de se criar com 6 elementos e sem repetir cores? Explique como fez para encontrar a solução. *

Sua resposta

7. Foi mais difícil ou mais fácil descobrir o código podendo repetir as cores, comparando com não poder repetir as cores? Explique o porquê. *

Sua resposta

8. Quantos são os códigos possíveis de se criar com 4 elementos e podendo repetir cores? Explique como fez para encontrar a solução. *

Sua resposta

9. Hoje, a maioria das senhas de computadores exige que haja pelo menos uma letra minúscula, uma letra maiúscula, um número e um caractere especial em sua composição. Por que você acha que é feito esta exigência? *

Sua resposta