UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

SISTEMA DE EQUAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL: ABORDAGEM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

LUIGI QUINTANS RIVEIRO

Porto Alegre
2021

LUIGI QUINTANS RIVEIRO

SISTEMA DE EQUAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL: ABORDAGEM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vandoir Stormowski

Porto Alegre
2021

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Sistemas de equações no Ensino Fundamental: abordagem através da Resolução de Problemas

Luigi Quintans Riveiro

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana
UFRGS

Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva
UFRGS

Prof. Dr. Vandoir Stormowski
UFRGS

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família pela paciência durante estes anos em que estive envolvido com minha segunda passagem por uma universidade, agora cursando uma Licenciatura. Diferentemente da minha primeira graduação, onde eu era somente filho, nesta segunda graduação sou filho, marido e pai. Faço um especial e carinhoso agradecimento à minha filha, também graduanda da UFRGS, que por muitas vezes foi minha ouvinte e conselheira nessa caminhada.

Agradeço aos professores com os quais tive a oportunidade de estar em sala de aula pelo trabalho a que se dedicam, formando novos professores.

Agradeço ao Professor Doutor Vandoir Stormowski por ter aceito meu convite para ser meu orientador possibilitando uma troca de ideias sem a qual não teria sido possível a realização deste trabalho.

Agradeço ao Professor Doutor Rodrigo Sychocki e ao Professor Doutor Alvino Sant'Ana por aceitarem o convite para compor a banca e por dedicarem seu tempo em ler e analisar meu trabalho.

Agradeço à equipe diretiva da EEEF Paraíba, escola onde atuo como professor, e onde realizei as práticas propostas neste trabalho, pela atenção que me concedem diariamente.

Agradeço aos meus alunos, tanto das turmas que participaram desta pesquisa como das outras que leciono, por me oferecerem suas dúvidas, conhecimentos e convivência; com eles sinto que cresço constantemente como profissional e pessoa.

E por fim agradeço aos meus jovens colegas de turmas e turmas, noites e noites, pela experiência proporcionada. Minha persistência de chegar até aqui veio de saber que a cada semestre estariam lá também, estudando, compartilhando e se divertindo.

Muito obrigado a todos!

“Para examinar a verdade é necessário, pelo menos uma vez na vida, pôr todas as coisas em dúvida, tanto quanto se puder.”

(René Descartes)

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem por objetivo analisar o estudo de Matemática através da Resolução de Problemas como meio de auxiliar na aprendizagem de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. A busca por alternativas didáticas que possibilitem ao aluno construir conhecimento matemático para além do uso de fórmulas ou métodos padronizados me motivou a realizar esta proposta. Seguindo a abordagem de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, foram realizadas práticas didáticas com turmas do nono ano do ensino fundamental de uma escola pública de Porto Alegre. Nesta abordagem, o desenvolvimento do conteúdo em sala de aula começa a partir de um problema. O professor torna-se um mediador e orientador enquanto que o aluno, trabalhando em grupo, procura construir novos conhecimentos a partir do que sabe. Estas atividades ocorreram no segundo semestre de 2021. Durante este período, o ensino escolar esteve condicionado aos protocolos de segurança estabelecidos em função da pandemia, o que fez com que as atividades ocorressem em um modelo híbrido, tornando o uso de tecnologias digitais necessário para seu bom andamento. A pesquisa teve o aspecto qualitativo, com ênfase na observação das informações provenientes das práticas citadas. Apoiado em livros e trabalhos acadêmicos sobre o tema Resolução de Problemas, foram elaborados relato e análises das práticas didáticas realizadas para esta investigação. As análises indicaram que, através da metodologia utilizada, é possível o aluno, em trabalho cooperativo e mediado pelo professor, relacionar noções matemáticas conhecidas a novos conceitos.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Sistema de Equações. Aprendizagem. Tecnologias Digitais.

ABSTRACT

This Degree Final Project aims to analyze the teaching of Mathematics through Problem Solving as a means of helping to learn a system of first degree equations in two unknowns. The search for didactic alternatives that enable the student to build mathematical knowledge beyond the use of formulas or standardized methods motivated me to carry out this proposal. Following the approach of teaching Mathematics through Problem Solving, didactic practices were carried out with classes from the ninth grade of elementary school in a public school in Porto Alegre. In this approach, the development of content in the classroom starts from a problem. The teacher becomes a mediator and guide while the student, working in groups, seeks to build new knowledge based on what he knows. These activities took place in the second half of 2021. During this period, school education was conditioned to the safety protocols established due to the pandemic, which made the activities take place in a hybrid model, making the use of digital technologies necessary for its smooth progress. The research had a qualitative aspect, with emphasis on the observation of information from the aforementioned practices. Supported by books and academic papers on the topic of Problem Solving, a report and analysis of the didactic practices carried out for this investigation were elaborated. The analyses indicated that, through the methodology used, it is possible for the student, in cooperative work and mediated by the teacher, relate known mathematical notions to new concepts.

Keywords: Problem solving. Equation System. Learning. Digital Technologies.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O seguinte Trabalho de Conclusão de Curso abordará o estudo de sistemas de equações do 1º grau através[1] da Resolução de Problemas. A escolha do assunto e da metodologia, também vista como uma tendência na Educação Matemática, coincide na busca por alternativas didáticas que possam se apresentar como potenciais meios de auxiliar o aluno na construção de um conhecimento matemático para mais do que padrões, fórmulas e algoritmos.

Vindo de uma primeira graduação de área técnica, um pensamento particular era que para ser professor de Matemática bastava conhecer bastante da disciplina. Ao longo da licenciatura foi possível compreender que ser docente é bem mais que isso; é preciso entender o que envolve o ser humano no ato de ensinar e aprender. Conforme Freire (1996, p. 13): “Quando vivemos a autenticidade exigida pela prática de ensinar-aprender participamos de uma experiência total, diretiva, política, ideológica, gnosiológica, pedagógica, estética e ética”. Por mais que ensino e aprendizagem sejam temas abrangentes, onde são estudados, entre outros, conceitos sobre cognição, didática, pedagogia, ao buscar trazer esses conhecimentos para o dia a dia de professor, alguns tópicos engajaram para uma maior disposição e interesse, direcionando minhas atenções para as tendências em Educação Matemática.

Coadunando tais interesses com a proximidade do término da graduação, e assistindo à prática de aula para a pesquisa de uma colega licencianda, percebi que estava começando a pensar no meu trabalho de conclusão: qual seria o tema, a proposta didática, em qual escola e com que público. Amadureci a ideia de trabalhar algo que investigasse sobre a forma como o aluno aprende, como ele elabora e expressa a Matemática independente do tema ou conteúdo. E quais alternativas o docente pode levar para sala de aula de modo a contribuir com tal aprendizagem. Como aluno e professor, visto que já atuo na profissão, uma reflexão que frequentemente me acompanha é porque para alguns alunos a Matemática tende a ser mais descomplicada, simples, compreensível, do que para outros. Nessa linha de raciocínio, optei por trabalhar minha investigação de final de curso com uma tendência

[1] O termo “através” é utilizado na literatura acadêmica para referenciar a abordagem apresentada neste trabalho.

na Educação Matemática, a Resolução de Problemas. Dentro da minha experiência estudantil, escolar e acadêmica, observo que desenvolvo melhor meu raciocínio matemático quando trabalho com problemas. Ou seja, quando de alguma situação que preciso entender e resolver, utilizo estratégias que auxiliam não só na sua resolução mas também na construção de conhecimento. Entendo que somente uma percepção pessoal seria algo insuficiente para começar um estudo, mas a Resolução de Problemas, temática de investigação e estudo na Educação Matemática, e que trago como referencial teórico deste trabalho, ampara essa opção.

O objetivo da minha pesquisa será analisar como, através da Resolução de Problemas, referenciada por aportes teóricos de autores como George Polya(1981), Onuchic(1999), Van de Walle(2009), além de artigos e trabalhos acadêmicos, os alunos podem desenvolver conhecimentos matemáticos sobre um determinado conteúdo. Escolhi trabalhar com sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Penso que para que a investigação tenha relevância, será preciso ao longo do trabalho manter em questão como o aluno constrói e explana suas estratégias de resolução para uma sequência de problemas, estes direcionados para o conteúdo definido.

A base da pesquisa deste trabalho serão práticas didáticas em sala de aula que serão detalhadas posteriormente. As mesmas ocorrerão com duas turmas do nono ano do ensino fundamental, turno da manhã, da Escola Estadual de Ensino Fundamental Paraíba Ciep, onde sou professor. A escola, localizada na zona sul de Porto Alegre, conta com 1354 alunos e 57 professores, oferecendo Ensino Fundamental em seus dois turnos.

A escolha por trabalhar com sistemas de equações converge com a busca por conhecer alternativas didáticas que apresentem possibilidades de desenvolver conteúdos matemáticos além do ensino de estruturas padronizadas. Ao longo das disciplinas de estágios do curso de Licenciatura e no trabalho com meus alunos, tenho observado, e de alguma forma ratificado, que muitos dos temas da disciplina são ensinados como uma sequência de passos padrões, onde sua memorização e repetição se colocam como principal forma, talvez única, de aprendizagem.

> Perduram, sobretudo, em certas disciplinas como Matemática, vezos arraigados tacanhamente expositivos e reprodutivos, tipo “carga curricular” que precisa ser repassada pela via das aulas. Porque os

> alunos compreendem pouco, já estão por isso condenados a decorar fórmulas e a “colar”. (DEMO, 2002, p. 36)

Não é difícil lembrar, tanto em aulas como em livros didáticos, os exercícios com suas duas equações prontas, seus x e y, e o símbolo da chave criando o denominado sistema. Sem saber de onde saíram tais letras e porquê, o aluno é levado pelo professor a conhecer o “principal”, as formas de resolver o sistema, os conhecidos métodos da substituição e da adição. Não há aqui nenhuma divergência quanto à formalização de conceitos, que será inclusive parte da prática a ser realizada com os alunos, observando que tal processo é inerente e importante para o ensino-aprendizagem da disciplina. A educadora e filósofa Gilla Hanna, estudiosa do papel educacional das provas matemáticas, aponta que:

> O ponto de partida para a compreensão é a ideia matemática ingênua enraizada na experiência cotidiana. Para fornecer uma base para um maior progresso, essa ideia ingênua deve ser desenvolvida e tornada explícita. Isso exige um certo grau de formalização. [...] A formalização não deve ser uma questão secundária, mas uma importante ferramenta de esclarecimento, validação e compreensão. Quando uma necessidade de justificativa é sentida, e quando essa necessidade pode ser atendida com um grau apropriado de rigor, a aprendizagem será muito melhorada. (HANNA, 1989, p.23, tradução nossa)

Contudo é viável considerar um desenvolvimento além do citado padrão de resolução de sistema de equações, possibilitando para o aluno contato com conceitos matemáticos como: o uso de letras na Matemática como incógnitas, a função da igualdade numa equação, a construção de uma equação, entre outros. Uma reduzida sequência de práticas didáticas é pouco para procurar respostas ou conclusões para o apontado, e claro, não existe esta presunção. Considerando a relevância das pesquisas e estudos sobre Resolução de Problemas, acredito que cada contribuição neste sentido pode auxiliar no desenvolvimento do ensino e aprendizagem da disciplina.

Outro motivo para a escolha do tema sistema de equações se dá pelo fato de ir ao encontro do referencial teórico direcionador das práticas a serem propostas, que aponta para atividades didáticas com conteúdos ainda não vistos pelos alunos. A BNCC traz o tópico como objeto de conhecimento para o oitavo ano, porém a atividade de investigação será feita com turmas do nono ano. Em função da pandemia, a matriz de referência de objetos do conhecimento e habilidades do ano de 2020 para as escolas públicas estaduais foi reduzida. Desta forma, o tema foi reposicionado para o nono ano, respeitando assim o aspecto de conteúdo novo citado anteriormente.

Com a continuação das restrições que se estendem durante o período da pandemia, as atividades didáticas ocorrerão em um ambiente de ensino híbrido, ponto que será explorado ao se apresentar o planejamento das práticas didáticas. As escolas da rede estadual de ensino adotaram o modelo de ensino remoto ainda no ano de 2020, começando o ano letivo atual no mesmo formato. Com a flexibilização das medidas e protocolos de segurança instituídos pelo estado, houve a readequação para o modelo híbrido. Tais formatos de aula impulsionaram o uso de TICs, tecnologias de informação e comunicação, no dia a dia das aulas. O professor e o aluno passaram a conviver com plataforma digital de ensino, softwares educacionais, aplicativos de mensagens e vídeo-aulas. Neste contexto, o trabalho permeia paralelamente o assunto sobre o uso TICs na Educação Matemática. Uma vez o ambiente virtual fazendo parte das práticas, é razoável pensar em possíveis impactos tanto no ensino como na aprendizagem. Maltempi (2008) cita que há uma transformação tanto na prática pedagógica quanto na Matemática quando novas tecnologias passam a fazer parte do ambiente de ensino e aprendizagem. Mesmo não sendo o foco desta pesquisa, as análises e observações ao longo das atividades naturalmente mencionarão o assunto, seja pela forma de comunicação, seja pelo uso de softwares e aplicativos.

A estrutura deste trabalho traz no capítulo 2 o aporte teórico sobre Resolução de Problemas, apresentando primeiramente uma visão geral do capítulo, para na sequência explorar o tema. Serão abordados aspectos históricos e matemáticos de “problema”, trazendo definições sob o ponto de vista de alguns pesquisadores. Na continuação, o capítulo discorre sobre a Resolução de Problemas como metodologia e tendência na Educação Matemática, para em seguida apresentar abordagens da metodologia para o ensino em sala de aula. Finalizando o capítulo, faz-se um registro sobre álgebra e equações algébricas. O capítulo 3 examina a metodologia de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, explorando o modelo de roteiro do grupo GTERP (Grupo de Trabalho em Resolução de Problemas) para a implementação da metodologia em sala de aula. Continuando nesta parte do trabalho, apresenta-se o planejamento das práticas didáticas a serem desenvolvidas. No capítulo 4 é feito o relato destas práticas, observando e analisando os pontos relevantes das atividades. Para uma melhor exposição, serão utilizados registros dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A pesquisa, bem como a sequência de práticas didáticas, base de dados deste trabalho, se apoiará na tendência em Educação Matemática Resolução de Problemas, conforme já citado. Para uma melhor compreensão sobre o assunto, faz-se necessário trazer referências teóricas que convergem para uma proposta específica dentro dos trabalhos sobre esta tendência. Apesar de ser norteado por uma ideia central, o tema é amplo e sobre ele são estudados perspectivas distintas. A escolha realizada teve como argumento principal trabalhar a reflexão apontada anteriormente, ou seja, como o aluno pode construir conhecimento através da Resolução de Problemas de tal forma que essa construção seja potencializada por alternativas didáticas às exposições de padrões. Nessa linha de atividades, o GTERP - Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (UNESP – Rio Claro/SP) faz trabalhos e investigações sobre o tema desde 1992. O grupo é constituído por alunos regulares e ex-alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, tendo desde o início a professora Lourdes de la Rosa Onuchic como coordenadora. Ao longo deste capítulo será apresentado o modelo de trabalho do grupo e como ele coincide com as ideias da investigação proposta, além de aspectos históricos e conceituais sobre problemas e a tendência Resolução de Problemas.

O ensino de Resolução de Problemas tem no livro A Arte de Resolver Problemas (1945), do matemático e professor George Polya, um marco importante. Nessa obra é apresentado um método didático para o ensino de resolução de problemas composto por quatro fases: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e verificar a solução encontrada. Contudo mais do que um método, um conceito, um conteúdo, Polya afirmava que era preciso ensinar o aluno a pensar. Em seu outro livro Mathematical Discovery (1981), ele indicava que ao longo da resolução do problema, o aluno deveria ser capaz de entender o significado dos conceitos utilizados:

> Ensinar a pensar significa que o professor de Matemática não deveria apenas transmitir informação, mas deveria também tentar desenvolver a habilidade dos estudantes em usar a informação transmitida: ele deveria enfatizar o saber-fazer, as atitudes úteis e os hábitos mentais desejáveis. (POLYA,1981, p. 100, tradução nossa).

Nesse sentido, a prática didática proposta e a consequente investigação realizadas ao longo deste trabalho, convergem com Polya e com outros autores. Onuchic (1999) reforça e complementa tais ideias ao citar:

> Um tema que fundamenta a investigação e a resolução de problemas em matemática é “como pensar”. Polya insistia que se tomasse muito cuidado nos esforços feitos para se ensinar a “como pensar” e que, na resolução de problemas, não se transformasse em ensinar “o que pensar’ ou “o que fazer. (ONUCHIC, 1999, p. 210)

Uma vez definido, conforme justificado anteriormente, o tema sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas como objeto a ser desenvolvido nas práticas, surge naturalmente a oportunidade de uma exposição sobre álgebra e equações algébricas. Como professor dos anos finais do Ensino Fundamental, vivencia-se o período da aprendizagem onde o estudante começa a conhecer a Matemática além da aritmética, a Matemática também das letras, sejam variáveis ou incógnitas. A álgebra pode tornar a Matemática genérica, abrangente, mas também estranha aos olhos dos alunos acostumados a somar, subtrair, dividir e multiplicar números. É possível que durante as práticas propostas neste trabalho, as equações algébricas com suas incógnitas sequer apareçam como propostas de resolução. A Matemática permite caminhos diversos para um mesmo resultado e a crença neste formato de construção do pensamento matemático passa por tais possibilidades.

Um dos muitos exemplos que podem ser relatados neste sentido, e que é apresentado em classe, observa-se semanalmente com comerciantes de feira livre ao calcularem o troco para um pagamento. Aprendemos e ensinamos na escola a fazer exercícios de troco usando a operação de subtração. Se uma conta de 22 reais é paga dando-se uma nota de 50 reais, geralmente fazemos a operação de subtração 50 – 22 = 28. Logo recebe-se 28 reais de troco. O vendedor na feira faz a seguinte operação mental: em 22 soma-se 8 e chega-se a 30, em trinta soma-se 20 e chega-se a 50, em seguida soma-se os dois valores, ou seja, 8 + 20, e chega-se no mesmo troco de 28 reais. Por dois caminhos diferentes, um usando subtração e outro usando adição, chega-se ao mesmo resultado esperado. Cabe ratificar que dentro da proposta deste trabalho, independente dos desenvolvimentos e soluções que os alunos apresentem para os problemas, está previsto, e será explicado no capítulo sobre o planejamento das práticas, a formalização do conteúdo abordado.

Buscamos neste início do capítulo 2 oportunizar um primeiro contato com o referencial teórico deste trabalho. Na sequência, aprofunda-se no tema Resolução de Problemas apresentando-se definições do que é um problema, a metodologia e a análise de abordagens em sala de aula.

2.1 Resolução de Problemas

Dada a importância deste tópico para o trabalho, o mesmo está estruturalmente subdividido em três partes. A primeira traz aspectos históricos e conceituais sobre o que é um problema, buscando assim consolidar um ponto de vista para, como alguns autores denominam, nosso fato gerador. Na segunda parte faz-se um apontamento histórico da Resolução de Problemas, alcançando o status de metodologia de ensino e foco do ensino da Matemática escolar. Na sequência, aprofundando no assunto, a terceira parte expõe uma análise de abordagens da Resolução de Problemas no contexto do ensino de Matemática em sala de aula.

2.1.1 O que é um problema?

A palavra problema, para além de seu uso na Matemática, aparece no vocabulário diário comumente expressada como sinônimo de dificuldade, obstáculo, incômodo, em seus diversos usos e contextos. Numa consulta ao dicionário, uma das definições de problema, notadamente mais próxima de seu uso matemático, é apresentada como “tema, em qualquer área do conhecimento, cuja solução ou resposta requer considerável pesquisa, estudo e reflexão” (Michaelis On-line, 2021).

Conforme Garbi (2009), na história da Matemática, alguns autores pesquisadores do tema apresentam achados arqueológicos em civilizações antigas, entre elas a babilônica e a egípcia, como sendo os primeiros problemas matemáticos. Podemos também considerar o “salto intelectual” que o ser humano deu bem antes no tempo, há cerca de 50.000 anos atrás, quando o Homo Sapiens adquiriu um comportamento distinto de seus antepassados. Manipulando e usando ferramentas para alterar o ambiente à sua volta, pode-se observar que nossa espécie organizava seu "pensamento" em torno de uma solução para sanar dificuldades e problemas, talvez não matemáticos. Ainda em Garbi (2009), alguns textos sugerem que problemas "de ordem" matemática já existiam há 11.000 anos com o aparecimento de sinais de contagem relacionados à Revolução Agrícola, há bem mais tempo do que os achados citados anteriormente, como o Papiro de Rhind. Resolver e solucionar suas dificuldades e problemas pode ter sido o acontecimento onde o primata humano passou a se diferenciar dos outros animais, ou seja, começou a pensar. Aprender a pensar é fato primordial na nossa história como ser humano e não pode deixar de ser para continuar seu desenvolvimento.

Registre-se novamente que na educação em geral, mais especificamente na Educação Matemática, conforme Sartori e Duarte (2021), o modelo da memorização e repetição é a alternativa pedagógica mais comum nas salas de aula. Em suas análises, as autoras destacam que o ensino baseado na memorização faz parte do dia a dia de muitas escolas, mesmo que o discurso das práticas de memorização tenha sido modificado ao longo do tempo. Fatores históricos, o modelos dos jesuítas, a doutrina dos generais, o "poder" do professor, onde decorar a tabuada já foi uma forma de castigo, as necessidades socioeconômicas de indivíduos fabris, contribuíram para esse cenário. E de alguma forma ainda contribuem para que tal alternativa, que tem seu espaço na Educação Matemática, tenha um papel maior do que preciso. O ser humano chegou ao que é hoje porque pensou, lembrou, depois pensou de novo, evoluiu, repetiu, memorizou, pensou, continua pensando e precisa cada vez mais aprender a pensar.

Analisando o que é problema em uma conceituação acadêmica direcionada para o ensino de Matemática, apresentamos definições segundo alguns autores:

> "Um problema significa buscar conscientemente alguma ação apropriada para alcançar um fim claramente concebido, mas não imediatamente atingível." (POLYA, 1981, p. 117).
>
> "Qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta." (VAN de WALLE, 2009, p. 33).

> “É qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la.” (DANTE, 1995, p. 10).
>
> “É tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer.” (ONUCHIC, 1999, p. 215).
>
> “Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la.” (PCN, 1998, p. 41).

Na literatura especializada existem outras diversas definições sobre o que é um problema. Para esta pesquisa, as definições apresentadas compõem um embasamento adequado para o conceito que se quer trabalhar. Nota-se que um problema é uma situação para a qual verbos como buscar, pensar, saber, fazer, são utilizados como ações em que o sujeito precisa desenvolver para construir, solucionar, alcançar, algo que ainda não sabe, novo, uma resposta, uma solução. Uma das definições acima reforça um dos eixos centrais deste trabalho ao apontar o problema como uma tarefa para a qual o aluno não tem ou precisa de métodos prescritos ou memorizados. Não obstante, é perceptível nas definições a necessidade de um saber matemático prévio para a sequência de ações que o estudante deve realizar para desenvolver um problema. Essa relação saber prévio e fato novo, por assim dizer, faz uma certa alusão à teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget. No livro Teorias de Aprendizagem, o professor e pesquisador Marco Antônio Moreira faz um resumo sobre importantes teorias de aprendizagem de alguns autores, entre elas, a de Piaget. No capítulo sobre o tema, o professor cita:

> No caso de modificação, ocorre o que Piaget chama de "acomodação". É através das acomodações (que, por sua vez, levam à construção de novos esquemas de assimilação) que se dá o desenvolvimento cognitivo. Se o meio não apresenta problemas, dificuldades, a atividade da mente é, apenas, de assimilação, porém, diante deles, ela se reestrutura (acomodação) e se desenvolve. (MOREIRA, 1999, p. 100)

Uma vez abordado o que é problema de um ponto de vista do ensino de Matemática, na sequência o texto explora a Resolução de Problemas no contexto ensino-aprendizagem da disciplina, alcançando a linha de estudo desta pesquisa.

2.1.2 A Resolução de Problemas

De acordo com o que elabora Garbi (2009), o já citado Papiro de Rhind, ou de Ahmes, é um documento que traz uma coletânea de problemas. Não só neste material como em outros da mesma época, a civilização egípcia já dava sinais de estabelecer certas regras para resolução de problemas matemáticos. Uma delas é a regra da falsa posição, onde por uma sequência de operações aritméticas envolvendo proporções, ao partir de um número qualquer, denominado valor falso, chega-se ao valor desejado. Este documento contém o detalhamento de 85 problemas e suas resoluções. Outros documentos históricos, e bem mais recentes em livros, apresentam o mesmo formato de conjuntos de questões com suas técnicas ou regras de soluções específicas. Nota-se que a Resolução de Problemas permeia a aprendizagem desde a Antiguidade, mas dentro de um padrão de especificidades, conforme a época, a necessidade, o interessado.

Onuchic e Allevato (2019) apontam que essa concepção de resolução de problemas começou a mudar quando da necessidade de um novo ensino de Matemática motivado por uma nova sociedade, a sociedade industrial. Esta demandava indivíduos com saberes e necessidades técnicas novos, atualizados. Era necessário um conhecimento matemático distinto se comparado ao da sociedade rural. As resoluções particulares deram lugar ao trabalho apoiado na repetição e memorização dos pontos considerados principais na Matemática como a tabuada e os hoje chamados algoritmos. O início do século XX consolida o ensino da Matemática muito semelhante como vemos hoje nas salas de aula: o professor explica, o aluno anota e posteriormente repete o que foi ensinado nos exercícios e provas. Resolver problemas acompanhou o mesmo modelo de ensino da disciplina, ou seja, eram, e ainda são, utilizados problemas para ensinar uma técnica particular de solução para depois o aluno repetir em outras situações do mesmo tipo. Os próprios livros didáticos trazem, em geral, o mesmo sistema: alguns problemas ou exercícios inicialmente solucionados para posterior sugestão de outras atividades na mesma linha de raciocínio. O PCN frisa esse formato quando cita:

> Assim, por exemplo, a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de resolução de problema, ainda bastante desconhecida da

> grande maioria, quando é incorporada, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos. (PCN, 1998, p. 22)

Na década de 50, segundo Onuchic e Allevato (2011), a partir dos trabalhos de George Polya citados anteriormente, a Resolução de Problemas começar a ganhar relevância na Educação Matemática. Mais do que relevância, uma nova possibilidade dentro da disciplina. Só recentemente, entre os anos 80 e anos 90, sustentado por movimentos mundiais a favor de um ensino matemático para além das necessidades fabris, buscando suscitar no aluno a ação do pensar mais do que o repetir, se propôs que a Resolução de Problemas fosse o foco no ensino de Matemática nas escolas.

> Em um cenário de reciprocidade, esses movimentos pelos quais passou a Educação Matemática ocorreram a par de transformações sociopolítico-econômicas profundas. Novas demandas de formação para uma sociedade plural, informatizada e mais complexa levaram a um aumento significativo da procura por Educação, especialmente pelos jovens em busca de condições para fazer frente ao surgimento de novas áreas de trabalho. (ONUCHIC, ALLEVATO, 2019, p. 39)

A Resolução de Problemas passa a ser objeto central de estudos e pesquisas como metodologia de ensino. Nesse novo contexto educacional, o problema não é mais somente um meio, mais principalmente um início. A partir e através dele pretende-se fazer com que o aluno desenvolva um pensar matemático. Resolver é mais do que uma técnica ou regra, é criar, inventar, raciocinar. O conteúdo surge da ação do estudante sobre uma determinada situação. Conforme Andrade apud Onuchic (1999):

> O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação de conceitos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal. O foco está na ação por parte do aluno. A Resolução de Problemas como metodologia de ensino passa a ser o lema das pesquisas e estudos de Resolução de Problema para os anos 90. (ONUCHIC, 1999, p. 207).

Dentro das discussões apresentadas por pesquisadores do tema está a forma como a Resolução de Problemas, já como uma metodologia de ensino, é abordada nas salas de aula. Com o crescente interesse pela metodologia, foram desenvolvidos muitos materiais para o trabalho em classe, algo que com o passar do tempo evidenciou uma falta de unidade com relação ao o que se entendia e se pretendia. Onuchic (1999, p.206) ressalta que “essa falta de concordância ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de resolução de problemas ser o foco da matemática escolar”. Estes diversos modelos, concepções e estratégias de trabalho levaram a questionamentos e análises sobre as diferentes perspectivas para o tema Resolução de Problemas.

2.1.3 A Resolução de Problemas na sala de aula: sobre, para e através

Em uma das análises citadas, Schroeder e Lester (1989) apresentam três abordagens: ensinar *sobre* resolução de problemas, ensinar Matemática *para* resolução de problemas e ensinar Matemática *através* da resolução de problemas.

Conforme os autores, ensinar *sobre* resolução de problema é trabalhar na linha da concepção apresentada por Polya, ou alguma variação da mesma. Seguindo as quatro fases de resolução por ele propostas, compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e verificar a solução encontrada, o aluno aprende técnicas para solucionar um problema. Ensinar sobre resolução de problemas é como ensinar um conteúdo, onde o aluno aprende estratégias com as quais ele pode buscar padrões que o auxiliam na resolução de um problema. Segundo Onunchic e Allevato:

> São abordados temas relacionados à resolução de problemas e percebe-se uma forte ênfase nas heurísticas como forma de orientar os alunos na resolução de problemas, com regras e processos gerais, independentes do conteúdo específico abordado. (ONUCHIC, ALLEVATO, 2019, p.38)

Ensinar Matemática *para* resolução de problemas traz muito do que vemos hoje em livros didáticos e aplicado por professores em sala de aula. Previamente é ensinado ao aluno conceitos matemáticos para posteriormente serem utilizados para resolver problemas. Nesta abordagem, a Resolução de Problemas é usada para o aluno trabalhar aquele tema que estudou, ou que o professor apresentou, praticando com exercícios em forma de problemas. Schroeder e Lester (1989, p.32, tradução nossa) explicam que: “Embora a aquisição de conhecimentos matemáticos seja de importância primordial, o propósito essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-los”.

Onuchic (1999, p. 206) aponta que “dá-se aos alunos muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas sobre aquilo que estão estudando e muitas oportunidades de aplicar essa matemática ao resolver problemas”. Onuchic e Allevato (2019) corroboram essa perspectiva e trazem uma observação importante ao analisar o uso da Resolução de Problemas nesta abordagem como apenas uma ferramenta para exercitar um conteúdo ou um algoritmo:

> Assim, nessa abordagem, apenas após ter desenvolvido a parte “teórica” referente a um determinado tópico matemático, é que o professor propõe problemas aos alunos, de fato, com aplicação dos conteúdos estudados. [...] um perigo dessa concepção é que ela configure a resolução de problemas como uma atividade que os alunos só podem realizar após a introdução de um novo conceito, ou após o treino de alguma habilidade ou de algum algoritmo. (ONUCHIC, ALLEVATO, 2019, p. 39)

A terceira abordagem da análise de Schroeder e Lester (1989) é o ensinar Matemática *através* da resolução de problemas. Vale destacar que tanto nesta abordagem como na imediatamente anterior, Onuchic e Alevato (2019, p.40) passaram a denotar recentemente o “ensinar Matemática” e não somente “ensinar”, como na primeira abordagem. Esse incremento vem da necessidade de explicitar que o ensinar *sobre* Resolução de Problemas tem o foco em si mesmo, enquanto que nas outras duas análises o foco é ensinar Matemática tendo como meio, ou como início, a Resolução de Problemas.

Ao ensinar Matemática *através* da resolução de problemas, o ponto de partida passa a ser o problema proposto. O aluno não tem de começo nenhum conteúdo ou tópico ensinados para que possa, a partir deles, resolver o problema. Neste caso o professor escolhe ou elabora um ou mais problemas que possam conduzir o aluno, com seus conhecimentos, a desenvolver e organizar seus pensamentos em direção ao conteúdo que se quer estudar. Schroeder e Lester (1989, p.33, tradução nossa) entendem que “o ensino de um tópico matemático começa com uma situação-problema que incorpora aspectos-chave do tópico e técnicas matemáticas são desenvolvidos como respostas razoáveis para problemas razoáveis”. Esta abordagem incentiva o estudante a buscar na Matemática que ele conhece, meios e possibilidades que o levem a tentar construir ou conjecturar novos conceitos matemáticos. Onuchic (1999) detalha quando escreve:

> Em nossa visão a compreensão de matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que entender é essencialmente relacionar. Esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando: o aluno é capaz de relacionar uma determinada ideia matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema. (ONUCHIC, 1999, p. 208)

No ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, tanto Matemática como Resolução de Problemas são propósitos, perfazem um conjunto de conhecimentos e habilidades a se desenvolverem; não é um ou outro, ou um por causa do outro; é um e outro. Onuchic e Alevato (2019, p.40) consideram que “a expressão “através” - significando “ao longo”, “no decurso” - enfatiza o fato de que ambas, Matemática e Resolução de Problemas, são consideradas simultâneas e são construídas mútua e continuamente”. Não se quer com isso sugerir que uma abordagem seja mais importante que outra. Apesar de apontar para certas limitações das duas primeiras abordagens no caso de uso individual e estrito por professores em sala de aula, Schroeder e Lester (1989), enfatizam que:

> Embora em teoria essas três concepções de ensino de resolução de problemas em matemática possam ser isoladas, na prática elas se sobrepõem e ocorrem em várias combinações e sequências. Assim, provavelmente é contraproducente argumentar a favor de um ou mais desses tipos de ensino ou contra os outros. (SCHROEDER, LESTER, 1989, p.32, tradução nossa)

Há algo substancial no PCN quanto ao ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. Entendemos que há uma tentativa de aproximação do documento com tal perspectiva quando contextualiza:

> Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. (PCN, 1998, p. 39)

Trazendo uma visão da metodologia de Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, Onuchic e Allevato teorizam:

> [...] o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores do seu

> próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir este processo. (ONUCHIC, ALLEVATO, 2011, p. 80).

Apoiada na abordagem de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, a professora Lourdes Onuchic desenvolveu o projeto chamado “Ensinando Matemática através da Resolução de Problemas”, que se tornou base para pesquisas e estudos. Esse projeto gerou uma proposta para prática em sala de aula trabalhando através da Resolução de Problemas.

Coincidindo em nossa busca por alternativas didáticas que levem o aluno a pensar a Matemática e não somente reproduzi-la, tal proposta tornou-se a sustentação metodológica da prática em sala de aula deste trabalho, a qual será detalhada no capítulo 3.

2.2 Álgebra e Equações Algébricas

Assim como demais áreas da Matemática, a álgebra não foi concebida ou elaborada por uma única pessoa ou povo. Ao longo do tempo, suas ideias foram sendo experimentadas e aperfeiçoadas à várias mãos e cérebros. Anteriormente foi citado que a Matemática pode ser percebida nos mais remotos antepassados do ser humano, porém não como a ciência que conhecemos. Nos povos da Antiguidade ela inicia sua caminhada até o que sabemos nos dias de hoje. No livro “Uma história da simetria na matemática”, o autor e matemático Ian Stewart nos fornece várias informações a respeito desta trajetória. Por volta dos anos 300, uma matemático grego chamado Diofante, que viveu em Alexandria, foi provavelmente o primeiro a utilizar símbolos para representar valores desconhecidos. Ele utilizava uma palavra, ou um símbolo, para representar inclusive a igualdade.

Já no final da Antiguidade, e assim início da Idade Média, com o advento da queda do Império Romano, as conquistas árabes se espalharam pela fatia do mundo onde muitos conhecimentos matemáticos já se difundiam. Imaginava-se que o império árabe criaria uma “escuridão” sobre as ciências e culturas dos povos dominados. Garbi (2009) contribui apontando que aconteceu exatamente o oposto. Os califas, chamados sucessores de Maomé, que com seus ensinamentos religiosos deu unidade ao império dos árabes, reconheceram a importância do saber e das artes. Em várias partes do mundo árabe-islâmico ocorreu um forte progresso cultural e científico. Os califas que se seguiram, principalmente a partir do século VIII, atraíram para suas regiões vários sábios e cientistas, inclusive de outros povos. O califa Al-Mamun, que reinou entre 813 e 833, determinou que todos os antigos manuscritos gregos encontrados fossem traduzidos para o árabe. Desta forma criou-se em Bagdad, capital do império árabe, uma escola científica na qual sua biblioteca reunia obras de Euclides, Arquimedes, Ptolomeu e outros gênios.

Entre os cientistas atraídos, estava o astrônomo e matemático Abu-Abdullah Muhammed ibn-Musa al-Kwwarizmi, último nome este que originou a palavra algarismo. Entre suas obras estava o livro Al-Kitab al-jabr wa´l Muqabalah, traduzido para algo como “O Livro da Restauração e do Balanceamento”. A palavra al-jabr era empregada pelo matemático para caracterizar “restauração”, operação utilizada na época para resolução de “equações”. Um exemplo desta operação adaptado aos dias de hoje seria algo como resolver $x - 5 = 2$, onde se faria na sequência da resolução, $x = 7$, significando uma “restauração” de $x - 5$, de forma a completar o valor de x. Oriunda do termo al-jabr, nasce a palavra Álgebra, que hoje expressamos nas salas de aula como o ramo da Matemática que trabalha com incógnitas e variáveis.

Ainda em Garbi (2009), o autor cita que a álgebra e o uso dos símbolos se difundiram pelo mundo e pelos anos através do trabalho de matemáticos como Luciano Fibonacci, Jacopo de Firenze, John Muller, François Viete, René Descartes, entre vários outros. Destaca-se o fato do matemático Fibonacci ter tido intenso contato em sua vida com a cultura árabe, algo que pressupõe uma possível influência dos trabalhos de Al-Kwwarizmi ou “seus seguidores”. A Álgebra dos séculos XV e XVI era muito parecida com a álgebra dos árabes, ou seja, usavam símbolos tanto para o valor que se queria “descobrir”, a incógnita, quanto para as operações. O movimento do valor procurado e do símbolo, junto com o procedimento inverso, começou a ser chamado nessa época como regra da álgebra ou regra da equação. François Viete introduziu em um de seus livros o uso de letras, que ele padronizou pelas vogais, para representar uma incógnita. Uma padronização maior, com o uso de letras em geral e o sinal de igual (=) ocorreu mais adiante, já com influência de Descartes, Newton e Leibniz.

> O divisor de águas do pensamento algébrico (separando o antigo fluxo raso da “solução manipulativa de equações” da moderna corrente profunda que começa com propriedades teóricas das equações) concretiza-se no francês Fraçois Viete, que foi o primeiro, em sua *logística speciosa*, a introduzir letras como coeficientes genéricos (positivos) e a dar alguns outros toques de acabamento no simbolismo que se finalizou e atualizou na época de Newton. (BAUMGART, 1992, p.14).

A Revolução Francesa no final do século XVIII, segundo Garbi (2009), deu um impulso significativo na ciência da época, com um intenso viés analítico, principalmente na Química e na Matemática. Isso causou o que alguns autores chamam de algebrização da análise, respaldada em trabalhos de matemáticos como Lagrange e Euler.

Percebe-se que a história da álgebra por muitas vezes se entrelaça com o que se sabe sobre equações. A palavra equação vem da mesma raiz latina das palavras igual e igualdade. Utiliza-se a igualdade para através de manipulações algébricas, algo que remete às citadas “restauração” e “regra da equação”, resolver uma equação. O artifício de usar símbolos e equações na Matemática deriva da busca de encontrar, descobrir, calcular um valor desconhecido, uma incógnita. De acordo com Garbi (2009, p. 2): “Resolver uma equação é, através da correlação que ela expressa, encontrar alguma coisa que desconhecemos e que costumamos denominar incógnita”.

É comum lermos ou escutarmos no dia a dia a expressão “xis do problema’, ou ainda, porém um pouco menos, o verbo equacionar. Resolvemos equações sem nos darmos conta na maioria das vezes que está acontecendo. Se um vendedor sabe o preço do quilo de algum produto e precisa calcular o valor final de um determinado peso vendido, mais do que simplesmente uma multiplicação, ele está resolvendo uma equação. O valor que ele precisa descobrir será igual ao preço por quilo vezes o peso do produto em quilos. Os problemas do já comentado Papiro de Rhind traziam situações rotineiras da época. Um deles por exemplo apresentava a seguinte questão: "Uma quantidade somada a seus 2/3, mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é essa quantidade?". De certo que com o que aprendemos na Matemática, usaríamos uma incógnita para representar a quantidade desconhecida. Somaríamos ela com 2/3, 1/2 e 1/7 da mesma incógnita, para em seguida igualar a 33. E assim tem-se uma equação com uma incógnita, ao que chamamos de equação algébrica.

Chegando na Álgebra e equações que conhecemos e usamos nos dias de hoje, o trabalho dos matemáticos ao longo da história nos fornece uma construção contínua e viva do que se ensina e aprende nas escolas. Nessa evolução da disciplina, e do seu ensino-aprendizagem, mais do que um aluno resolvendo uma ou mais equações para encontrar o valor de suas incógnitas, o que se busca é que ele saiba transitar do seu contexto de vida para a interpretação e representação matemática de determinadas situações.

> Um objetivo de se aprender matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos). (ONUCHIC, 1999, p. 207)

A Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental apresenta para o aluno uma disciplina diversa do que ele conhece “somente” como a disciplina dos números. Aparecem novos símbolos: letras que representam valores desconhecidos. A Matemática passa das operações aritméticas com números para a operação com letras e números. O valor desconhecido, a incógnita, a letra, representa; diferentemente do número, que certifica. Essa abstração do valor e generalização da situação, tão comuns para aqueles que conhecem bem a disciplina, é uma revolução para os alunos desta fase do ensino. O PCN em seu tópico sobre Álgebra diz o quão poderoso ela pode ser:

> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. (P, 1998, p. 115)

Essa abstração natural da álgebra pode ser inovadora e impulsionadora, se o aluno alcançá-la, mas também pode ser angustiante e desanimadora em caso contrário. Ajudar o aluno a construir tais conceitos é essencial para o que ele conhecerá de Matemática para o resto do ciclo escolar e para as situações-problema que ele vivenciará no seu dia a dia.

Finalizando este capítulo, onde procuramos especificar o aporte teórico deste trabalho, busca-se a partir do capítulo 3, apresentar a metodologia direcionada para as práticas didáticas a serem realizadas como base desta pesquisa.

3 METODOLOGIA

Em linha com o objetivo de analisar como a aprendizagem através da resolução de problemas pode auxiliar o aluno no desenvolvimento de conceitos sobre sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, definimos que a pesquisa ocorreria pela observação de uma sequência de práticas em sala de aula. Tal observação terá como base o viés exploratório da análise dos dados coletados nas atividades propostas. Córdova e Silveira (2009) identificam os diferentes tipos de pesquisa quanto à sua abordagem, sua natureza, seus objetivos e seus procedimentos. Seguindo tal entendimento, a pesquisa será do tipo qualitativa, não tendo assim uma preocupação numérica mas sim o aprofundamento da compreensão de um grupo. Olhando pela perspectiva do ensino, busca-se observar como a alternativa didática pode ajudar o professor a desempenhar um papel mais colaborativo com a turma. Pela perspectiva do aluno, a ideia é que suas dúvidas, perguntas, sugestões e desenvolvimentos indiquem como tal proposta contribui como recurso de aprendizagem.

Trabalhos direcionados por Onuchic e Noguti (2019), sugerem uma relação entre pesquisa científica e pesquisa pedagógica, esta última representativa desta investigação. Ainda conforme as autoras:

> A pesquisa pedagógica busca, em sua essência, melhorar os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula, utilizando para isso o ponto de vista do professor. Através dele, se espera compartilhar conhecimentos e experiências que possam desenvolver competências e autonomia nele e nos seus alunos. Para realizar uma pesquisa pedagógica, o professor deve ter em mente que a sistematização da pesquisa é bastante importante e, para isso, deve delimitar e justificar um determinado tema de estudo, deve levantar conjecturas ou hipóteses sobre ele, apresentar coleta de dados e, também, escrever um relatório de pesquisa. (ONUCHIC, NOGUTI, 2019, p.71)

A sequência das práticas em sala de aula segue um determinado roteiro. Na sequência apresentamos este roteiro e as adaptações que se fazem necessárias para o contexto atual de aulas híbridas em função da pandemia. Finalizando este capítulo, fazemos um relato do planejamento das atividades.

3.1 Modelo de aula através da Resolução de Problemas

No final da década de 90, após o estudo dos trabalhos de alguns autores em propor formas de colocar em prática a metodologia de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, o GTERP apresentou sua proposta. Ao longo dos últimos anos, com a sequência de trabalhos que o grupo realizou, algumas modificações foram realizadas sobre a orientação original, sendo utilizado neste trabalho o roteiro atualizado.

Como trabalhar a sala de aula para ensinar Matemática através da Resolução de Problemas se revela como a questão que levou autores a se debruçarem sobre o assunto. Van de Walle (2009) observa que o ensino-aprendizado desta maneira é uma reconceituação do papel do professor e do papel do aluno. O mesmo autor sugeriu o Antes, o Durante e o Depois, cada parte com sua direcionamento e importância para o todo. No Antes, Van de Walle orienta que o professor prepare mentalmente os alunos, fazendo-os pensarem em seus conhecimentos, tire as dúvidas relativas a atividade que será feita e explique o que se espera deles ao final. No Durante, os alunos devem ter a chance de trabalhar o problema por eles mesmos sendo constantemente incentivados. O professor precisa ouvir e observar ativamente; as orientações podem e devem acontecer mas seguindo as próprias ideias dos alunos, com o cuidado de não direcionar uma solução. E no Depois, o professor deve promover uma discussão do grupo sem emitir qualquer avaliação, ouvir os alunos atentamente e resumir as principais ideias, identificando problemas futuros a serem explorados. Onuchic e Allevato (2019) reforçam que Van de Walle chama a atenção para o fato de que esse trabalho começa onde estão os alunos, não onde estão os professores, como em outras formas de ensino.

A proposta do GTEPR para trabalhar em sala de aula, que ora apresentamos, define um roteiro que traz muito do orientado por Van de Walle(2009). Em resumo, nessa metodologia propõe-se aos alunos o texto de um problema previamente elaborado ou escolhido pelo professor, com vistas a trabalhar um novo conteúdo. Em grupos, busca-se que os alunos tomem suas decisões, estabeleçam relações, exponham suas ideias e apresentem seus desenvolvimentos e resultados. Esses aspectos devem ser estimulados em um modelo de aprendizagem desenvolvido através da resolução de problemas. Somente depois da resolução ser realizada é que acontece a formalização. O momento da formalização é quando o professor apresenta o conteúdo, com o simbolismo, as definições e as técnicas habituais, evitando-se assim o “pensar” e o “fazer” prévios, liberando o aluno para que ele tente construir o seu “pensar” e o seu “fazer”.

Para melhor compreensão, trazemos o roteiro do grupo e, para cada item, apresentamos entre parênteses a adaptação realizada em função das aulas estarem ocorrendo no modelo híbrido de ensino. No tópico seguinte será relatado como se deu o planejamento e preparação para seguir o roteiro e realizar as atividades.

- ✓ Preparação do problema - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula. (Sem necessidade de adaptação).

- ✓ Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura. (Serão formados grupos de três alunos com correspondente grupo no Whatsapp. Os problemas serão enviados nos grupos para que cada aluno leia)

- ✓ Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos. Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema. (A leitura será realizada na aula híbrida, onde será possível a presença física e on-line dos alunos. A aula será gravada no Meet e depois disponibilizada no mural da Plataforma Google Sala de Aula. Qualquer dúvida pontual poderá ser trabalhada nos grupos de Whatsapp).

- ✓ Resolução do problema - A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. (O problema poderá ser trabalhado durante a aula e no período até aula do dia seguinte. Os alunos poderão se comunicar pelos grupos de Whatsapp e ali exporem suas ideias).

- ✓ Observar e incentivar – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. (Uma vez presente em cada grupo de Whatsapp, será possível “percorrer os grupos” de forma a incentivar, estimular caminhos, atender as dificuldades e orientar quando necessário).

- ✓ Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam. (Será criado no aplicativo Padlet, uma espécie de mural virtual, o espaço para os grupos fazerem seus registros.).

- ✓ Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem. (A plenária será realizada na aula híbrida, onde os alunos poderão acompanhar pelo Padlet ou por reproduções no quadro dos desenvolvimentos apresentados).

- ✓ Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto. (A busca do consenso será realizada durante a aula híbrida).

- ✓ Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto. (A formalização será realizada na aula híbrida, que será gravada no Meet e depois disponibilizada no mural da Plataforma Google Sala de Aula).

Apesar da proposta ser bem delineada quanto ao que se quer fazer em sala de aula, existe a necessidade de sua adaptação, conforme comentado, e da elaboração de um planejamento. O formato das aulas híbridas traz um cenário desconhecido para a maioria dos envolvidos. O planejamento visa trabalhar a adequação a esse cenário e as particularidades inerentes a qualquer sala de aula.

3.2 Planejamento das Atividades Pedagógicas

A ideia desta parte do trabalho é esboçar como ocorrerão as atividades considerando vários fatores: o conteúdo escolhido, o formato das aulas híbridas, a realidade da maioria dos alunos que participarão e o que se quer observar para esta investigação.

Antes mesmo de ajustar o roteiro apresentado anteriormente às adaptações previstas, mas já de conhecimento de como funcionaria o modelo, explorou-se com o orientador qual forma seria interessante para abordar o tema Sistema de Equações. Em conformidade com o referencial teórico do trabalho, o ponto de partida é um problema direcionado para o conteúdo novo a ser estudado. Projetando um evolução dentro do próprio tema, optou-se não por um único problema e sim por uma sequência de problemas. Como o tópico central são sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, pensando numa construção gradual de um possível raciocínio matemático por parte do aluno, será apresentada uma sequência quatro problemas, um de cada vez. Se observará nas práticas e em seus registros quais estratégias e ideias que foram usadas ou aventadas para resolver cada problema, não necessariamente pela via das equações. O primeiro problema será direcionado para uma equação do 1º grau com uma incógnita. A intenção é fazer o aluno ter um primeiro contato com o valor desconhecido que se quer calcular, a incógnita. O segundo problema apresenta uma equação do 1º grau com duas incógnitas, ou seja, um problema que não tem um único resultado. A inclusão deste tipo de problema vem da ideia do aluno ter contato com possibilidades diversas dentro do mesmo assunto. Na sequência, os terceiro e quarto problemas estão voltados para a construção de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Em tempos de aulas presenciais, as práticas ocorreriam com os alunos em sala, trabalhando um problema a cada período. No formato das aulas híbridas, alguns outros fatores devem e precisam ser considerados, entre eles o fato de que nem todos os alunos tem os recursos necessários para acompanharem as aulas on-line. Poderia se pensar que aquele aluno que não estivesse on-line, acompanharia a aula na outra opção do modelo híbrido, ou seja, fisicamente. Porém esta não é a realidade. Pela limitação do distanciamento em classe, a escola organizou as turmas em grupos, ocorrendo um revezamento: uma semana um grupo está presente fisicamente, os outros assistem as aulas por vídeo, na semana trocam-se os grupos e assim sucessivamente. Mas não necessariamente todos os alunos dos grupos presenciais comparecem. Muitos pais assinaram um termo de responsabilidade que seus filhos não iriam à escola com o receio de contaminação. Porém muitos deles também não tem recurso de internet suficiente para participar das aulas on-line. Em função disso, as atividades foram planejadas para que cada problema fosse desenvolvido entre atividades presenciais, on-line e nos períodos entre a aula de um dia e o dia seguinte.

Será realizada uma aula híbrida preparatória para explicar o que, como e o porquê do que será feito nas aulas seguintes. Na plataforma do Google Sala de Aula serão postadas as gravações destas aulas, como de todas as outras, e um relato por escrito do apresentado. Neste dia, os alunos formarão grupos de três integrantes. Os alunos mantém contato entre eles através dos grupos de Whatsapp da turma, inclusive um deles só da disciplina Matemática, e também pela plataforma do Google. Na sequência serão formados os grupos do trabalho no Whatsapp contando com a participação do professor em todos. Essa proposta pedagógica prevê o professor como orientador; como não será possível a presença de todos em classe e boa parte do desenvolvimento será entre um encontro e outro, a orientação se dará também pelos grupos de mensagens.

Cada atividade iniciará, conforme o roteiro, com a distribuição e leitura dos problemas. Os alunos começarão a trabalhar durante a aula e terão tempo para trabalhar, entre eles, até a aula seguinte, onde ocorrerá a sequência estabelecida no mesmo roteiro, ou seja, a apresentação do que cada grupo fez, a busca pelo consenso de uma resposta e a formalização do que foi estudado. Os grupos terão até a aula seguinte para postar o desenvolvimento do problema no Padlet. Este aplicativo funciona como um mural, mas de forma digital. Cada grupo receberá o link e poderá postar no formato que considerar melhor. O Padlet oferece diversas opções de formatos para postagem como upload de fotos ou arquivos, gravação de tela ou vídeo e podcast. Pelo mesmo link, cada grupo poderá ver o que os outros grupos da turma apresentaram. Além da ferramenta em si, o uso do aplicativo pode se tornar um fator de incentivo para a maior participação dos grupos.

Em um primeiro momento, foi elaborado uma única situação-problema para cada um dos quatro problemas da sequência prevista. Levando em consideração o observado nas atividades realizadas ao longo do ano passado e deste ano, o meio digital propicia uma mais fácil multiplicação de respostas iguais. Com o intuito de procurar fazer com que os alunos participem mais produtivamente das atividades, decidiu-se pela elaboração de três situações-problema diferentes para cada “tipo” de problema da sequência apresentada no segundo parágrafo deste tópico.

As etapas do roteiro chamadas de Plenária, Busca de Consenso e Formalização do conteúdo serão realizadas na sala de aula e transmitidas e gravadas em vídeo. Para cada trio de problemas desenvolvido, haverá uma aula abordando estas etapas. Fazer esse processo ao finalizar cada problema foi um tema de discussão e reflexão ao longo deste planejamento, principalmente quanto à formalização dos conceitos. Como o modelo proposto coloca o problema como ponto de partida em direção ao conteúdo, a impressão era de que formalizações intermediárias poderiam estar em desacordo com o que se queria. A primeira ideia era fazer a formalização somente ao final da sequência dos quatro conjuntos de problemas. A resistência à tal ideia se apoiava na quantidade acumulada de informações do primeiro ao quarto problema sem nenhum retorno estruturado. A previsão é de duas semanas para a conclusão das atividades. Entendeu-se que seria mais profícuo que a cada problema resolvido houvesse um retorno para os alunos. Esse retorno mostrará os conceitos conforme forem ocorrendo, como o uso da incógnita no primeiro problema, ou a possibilidade de não só um resultado, como no caso do segundo problema. Ao finalizar os quatro problemas será feita uma recapitulação de todos os conceitos que apareceram e uma apresentação estruturada do conteúdo sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS PRÁTICAS

Este capítulo apresenta como ocorreram as práticas, trazendo os ajustes em relação ao planejado, os textos dos problemas elaborados, os dados mais relevantes dos registros e anotações feitas, as análises pertinentes e as considerações pontuais frente ao referencial teórico e ao objetivo deste trabalho. Para tanto, trataremos cada conjunto de três problemas semelhantes como uma prática, cada uma percorrendo basicamente o roteiro adaptado. Somente a primeira etapa, a Preparação do problema, será analisada a parte, uma única vez, no próximo parágrafo.

Para elaborar os doze problemas, três para cada prática, foi feita uma consulta a alguns livros didáticos. Estes apresentavam problemas por vezes muito parecidos, entre eles, exemplos frequentes para o trabalho com sistema de equações, como a soma das idades ou o cálculo do número que somado a seu múltiplo perfaz um total. Com a intenção de usar situações mais próximas da realidade, resolvemos elaborar pequenos problemas a partir de algumas ideias encontradas nos livros. A confecção dos enunciados contou com modificações, reformulações de valores, inclusão de informações, novas modificações, até o texto final. Uma dessas inclusões foi solicitar em todos os problemas que os alunos buscassem desenvolver equações para ajudar na resolução do problema. Frisamos nas orientações que eles podiam, e deviam, tentar resolver os problemas da forma que conseguissem, deixando-os livres para pensar. A ideia desta inclusão foi para que os grupos buscassem por conceitos conhecidos. Uma dos direcionamentos de Van de Walle (2009), na sua proposta do Antes, é justamente preparar os estudantes mentalmente para trabalhar sobre o problema e pensar sobre os tipos de ideias que mais os ajudarão.

Cada grupo de alunos recebeu um nome código no Whatsapp para melhor organização e acompanhamento. Uma alteração no planejado ocorreu antes ainda do início das atividades. As duas práticas que ocorreram na primeira semana das atividades tiveram que ser feitas no formato de aulas remotas. Na semana anterior, dois professores foram diagnosticados com Covid e a escola determinou que as aulas da semana seguinte não fossem no modelo híbrido, como estava planejado, ocorrendo então somente através da transmissão on-line pelo Meet.

4.1 Prática 1 – Uma equação do 1º grau com uma incógnita

Começamos este tópico apresentando os três problemas referentes a primeira prática, nomeados de problema (1a), (1b) e (1c), para na sequência passar ao relato e análise da atividade desenvolvida.

Problemas geradores

Problema (1a):
Uma escola de Porto Alegre tem 8 turmas de 9º ano com um total de 258 alunos. Das oito turmas, sete turmas tem o mesmo número de alunos. A oitava turma tem 2 alunos a mais que as outras turmas.
Para você pensar e fazer:
Desenvolva uma equação que calcule quantos alunos tem cada uma das sete turmas que tem quantidades iguais de alunos. Em seguida calcule e responda quantos alunos tem cada uma das sete turmas que tem quantidades iguais de alunos e a oitava turma.

Problema (1b):
Marcos pratica corrida. Em seu treinamento ele percorre um total de 102Km por semana. De segunda a sábado ele corre sempre a mesma distância diária. No domingo ele percorre 4km a mais que os outros dias.
Para você pensar e fazer:
Desenvolva uma equação que calcule quantos quilômetros Marcos corre em um dia de segunda à sábado. Em seguida calcule e responda quantos quilômetros Marcos corre em um dia de segunda à sábado e no domingo.

Problema (1c):
Gisele comprou um celular novo que custa 1145 reais. Conseguiu com a loja de comprar em sete vezes. A primeira parcela foi um pouco maior, 200 reais a mais que as outras seis parcelas. As outras seis parcelas foram de valores iguais.
Para você pensar e fazer:

Desenvolva uma equação que calcule qual foi o valor de cada uma das seis parcelas iguais. Em seguida calcule e responda qual o valor de cada parcela igual e o valor da parcela maior.

Os problemas foram enviados por mensagem para cada grupo. Escolhemos aleatoriamente um problema para cada grupo. Pedimos para que todos lessem os problemas. Lemos os três problemas para os alunos participantes on-line no dia. Foi perguntado se havia alguma dúvida e num primeiro momento nenhum aluno se manifestou. Foi feita a mesma pergunta nos grupos de Whatsapp, mas as dúvidas só apareceram posteriormente, como será visto. Muitos alunos não estavam participando on-line, situação constante desde o início do uso da plataforma no ano passado. Aproveitamos a maior parte da aula para rever o que faríamos e para nos comunicar com os grupos no Whatsapp.

O uso dos grupos de Whatsapp demandou bastante trabalho. Foram 16 grupos formados, cada um com três alunos, os quais trouxeram ao longo das práticas questões diversas. Algo a se notar é o uso do horário noturno para fazerem as atividades; muitas das trocas de mensagens aconteceram durante a noite. Por diversas vezes em outras ocasiões, os próprios alunos manifestaram que fazem as atividades escolares, jogam ou assistem séries, de noite e madrugada adentro. Para não causar nenhum desconforto com os pais principalmente, e também para poder criar uma rotina de trabalho que não comprometesse outros afazeres, mantivemos um horário particular de respostas começando pela manhã e indo até o início da noite, inclusive nos dois finais de semana do período da atividade. A intenção era não deixá-los sem resposta por muito tempo para não se desestimularem.

Se as práticas tivessem ocorrido em tempos sem pandemia, o contato seria direto na sala de aula, e talvez por estarem em classe, os alunos participassem naturalmente. Tentamos fazer com que o modelo virtual não fosse uma dificuldade e sim uma oportunidade. Maltempi (2008, p.62) frisa que: “a tecnologia não é boa nem má, tudo depende da relação que estabelecemos com ela”. O uso dos vídeos transmitidos e gravados, o mural virtual e principalmente o registro em mensagens, foram fundamentais para o trabalho. O aplicativo de mensagens foi uma ferramenta poderosa de acompanhamento e incentivo, produzindo um material significativo, talvez mais informativo do que observações e anotações em sala de aula.

Usaremos recortes deste material digital durante os relatos das práticas, como no exemplo abaixo (Figura 1) respondendo a dúvidas surgidas. Para não haver identificação de números de telefones e nome dos alunos, foram “colados” códigos e caracteres sobre estas informações.

```
ALUNOYY206: tá bom sor, tem um prazo pra entregar?? até o fim da semana por exemplo?
ALUNOXX206: sor se tu puder explicar do mural,como funciona e como tem q usar
            pq eu entrei no link e não entendi muito bem como funciona
Luigi: A entrega é colocar o que vocês conseguiram pensar e fazer lá no mural virtual
Luigi: O prazo é até quarta-feira
Luigi: Deste problema
Luigi: Depois faremos outro
ALUNOYY206: ok
Luigi: Quando você abre o link do mural, no canto direito em baixo, tem um sinal de +
Luigi: Quando você clica nele, aparece várias opções
Luigi: Colocar arquivo, foto, vídeo, áudio,…
Luigi: Vocês escolhem como querem postar
ALUNOXX206: ok
Luigi: Vai ficar “pendurado” o que vocês fizerem como num mural físico
ALUNOXX206: ok agora entendi como funciona
```

Figura 1 – Resposta a dúvidas gerais Fonte: Aplicativo de Mensagens

Neste modelo de trabalho o professor é orientador e também incentivador. Por vezes entramos nos grupos para “puxar” por eles, perguntando sobre a atividade e pedindo que se ajudassem (Figura 2). A adaptação ao modelo virtual permite essa vantagem, de “estender” a aula, mesmo sabendo da competição acirrada com tudo que o mundo digital oferece de possibilidades. O trabalho dentro dos grupos era importante para a investigação; a colaboração entre os alunos se apresenta como fator essencial nessa metodologia.

```
Luigi: Não acredito que esse grupo não fez a atividade
ALUNOXX202: Ai calmo, eu fiz, só não enviei pq a @@@@@ e o @@@@@ não deram sinal de vida
ALUNOXX202: 14x6= 84 - 102 = 18
            Sendo assim, ele corre 14km de segunda a sábado e aos domingo percorre 18km
Luigi: Tem que colocar lá no mural virtual da turma
ALUNOXX202: pode ser digitado?
Luigi: E tem que fazer esse grupo trabalhar
ALUNOXX202: Eu to com a câmera quebrada
ALUNOXX202: a @@@@@ disse que o @@@@@ ta sem internet
ALUNOXX202: e ela sumiu hoje a tarde
Luigi: pode ser digitado, filmado, gravado, do jeito que achar melhor
ALUNOXX202: ok
Luigi: amanhã já entra um novo problema
ALUNOXX202: certo
Luigi: o grupo tem que se ajudar
```

Figura 2 – Incentivando o grupo Fonte: Aplicativo de Mensagens

Nesse primeiro conjunto de problemas, é dado um valor total. Esse total é um número de vezes o valor que se quer calcular somado a ele mesmo acrescido de um outro valor dado. Tanto estes primeiros problemas como os próximos permitem possibilidades dos alunos procurarem seus caminhos baseado em seus conhecimentos. Em relação a ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, Van de Walle (2009, p.33, tradução nossa) assinala que: “o ensino deve começar com as ideias que os alunos já tem, as ideias que usarão para criar novas”.

Era possível resolver os problemas de formas distintas, como realmente aconteceu, aparecendo respostas por tentativa e erro, operações aritméticas e com o uso da equação algébrica. A busca pela equação era uma das possibilidades. Nota-se nos registros como a troca de ideias entre eles enriqueceu e favoreceu o desenvolvimento destas variadas tentativas de resolução.

Nas trocas de mensagens a seguir (Figura 3), o grupo desenvolve e resolve o problema (1c) utilizando somente operações matemáticas. Não houve a preocupação com a elaboração de uma equação para resolução. Eles utilizaram seus saberes, trocaram ideias, complementaram suas estratégias sem qualquer direcionamento do professor. A construção do saber vem do que o aluno conhece. O problema é o estopim e a colaboração é a mola impulsionadora para que os alunos desenvolvam a Matemática. Analisando o que se pretendia com este problema, ou seja, levar o aluno a pensar em identificar o valor desconhecido como uma incógnita, para na sequência elaborar uma equação e resolvê-la, pode-se pensar num primeiro momento que o objetivo com o grupo destas mensagens não foi alcançado. Mas Onuchic (1999, p.215) aponta que: “o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tornam sentido num campo de problemas”. A metodologia adotada dará a oportunidade desses alunos ainda visualizarem o que outros colegas fizeram antes de chegar na Matemática do professor. E soma-se a isso, a Matemática sendo desenvolvida em um aplicativo de mensagens.

ALUNOXX206: vcs querem fazer agora já??
ALUNOYY206: oiee
ALUNOYY206: pode ser
ALUNOXX206: tá no caso
ALUNOYY206: a gente sabe que o celular custou 1145
ALUNOXX206: sim
ALUNOYY206: e a primeira parcela foi 200
ALUNOXX206: e os 200 o valor a mais que ela pagou
ALUNOXX206: eu fiz, daí
ALUNOYY206: siiim
ALUNOXX206: 1145 - 200 que deu 945
ALUNOYY206: dai eu fiz 1145-200=945
ALUNOYY206: siiiimmm
ALUNOXX206: tá agora sobre o lá valores das outras seis parcelas
ALUNOYY206: depois eu fiz 945÷7
ALUNOYY206: que da 135
ALUNOXX206: eu pensei em dividir por 6
ALUNOYY206: eu pensei nisso tbm
ALUNOXX206: no caso foi oq eu fiz
ALUNOYY206: pq na minha cabeça a primeira parcela foi a maior
ALUNOYY206: e eu fiz por 6 e dai fica 157,5
ALUNOZZ206: N da pra fazer a conta normal e depois acrescentar 200?
ALUNOXX206: como assim?
ALUNOYY206: ??
ALUNOZZ206: Tipo 1145 dividido por 7
ALUNOXX206: não
ALUNOXX206: pelo menos não foi assim que eu fiz não sei s está certo
ALUNOZZ206: Dai dps só acrescenta 200 a uma parcela
ALUNOXX206: eu fiz 1145+200=975
ALUNOYY206: eu acho q não fica certo dai
ALUNOXX206: desses 975 tu tem que dividir pelo valor das parcelas
ALUNOXX206: eu fiz por 6
ALUNOYY206: siiim
ALUNOYY206: foi assim q eu fiz
ALUNOYY206: no caso ele quer saber o preço das outras parcelas
ALUNOXX206: só que eu acho que tá errado fazer por 6, eu acho que seria por 7 o certo
ALUNOXX206: sim mas eu parei pra pensar
ALUNOXX206: não sei se vcs vão entender
ALUNOXX206: mas por 7 seria o valor de todas até mesmo da primeira
ALUNOZZ206: Foi o que eu pensei
ALUNOXX206: no começo eu achei que seria por 6, mas depois eu li a atividade e vi que ela deu 200 a mais
ALUNOYY206: siiiim,fiz por 7 e por 6
ALUNOXX206: siim
ALUNOXX206: eu fiz por 7 agora
ALUNOXX206: e deu 135
ALUNOYY206: dai se for por 7 fica
ALUNOYY206: 1145-200=945
945÷7=135 que fica o valor das outras 6 parcelas
ALUNOXX206: ai gente
ALUNOXX206: tá confuso
ALUNOXX206: mas foi isso que eu fiz não sei se vcs vão entender
ALUNOYY206: ai que ta,tipo a parcela de 200 ela não deu a mais ela é a mais que as outras
ALUNOXX206: siim mas oqq acontece
ALUNOYY206: as outras são menores e essa é a maior
ALUNOXX206: o 135 é o valor de todas, inclusive da primeira então tu faz dividido por 7 ok
ALUNOXX206: ali ta dizendo que ela deu só 200 reais a mais
ALUNOXX206: que o pedido
ALUNOXX206: então 135+200=335
ALUNOXX206: o valor que ela pagou TOTAL na primeira parcela foi 335
ALUNOXX206: não 200
ALUNOXX206: o 200 foi só o a mais
ALUNOXX206: como diz ali
ALUNOXX206: o valor de todas as parcelas incluindo a primeira é 135,
o valor de 200 foi só o valor a mais que ela deu
ALUNOXX206: e o total foi 335
ALUNOXX206: isso que ela pagou na primeira parcela, no total
ALUNOXX206: entenderam???
ALUNOXX206: não sei se tá certo tbm kkkkkkkkkk, mas eu acho que é isso
ALUNOZZ206: Simm
ALUNOYY206: siiimmm

Figura 3 – Troca de mensagens – problema (1c) Fonte: Aplicativo de Mensagens

Outro grupos seguiram por estratégias semelhantes a apresentada, porém nem todos conseguiram resolver. Uma linha de raciocínio análoga a anterior aparece nas mensagens de um grupo resolvendo o problema (1b) (Figura 4). Até esta fase do ensino escolar, a aritmética é predominante na Matemática. Ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental é que o aluno começa o contato com a álgebra, geralmente pelas expressões algébricas. Parece natural que ao usar seu próprios saberes, a aritmética prevaleça como primeira estratégia de resolução.

```
ALUNOXX302: Bom, na aula de ontem que o sor mostrou as atividades
            o @@@@@ já deu a ideia de como fazer
ALUNOYY302: Sim
ALUNOXX302: Como a gente precisa saber quantos kms o carq fazia correndo de segunda a sábado
            pra saber o que ele fez no domingo
ALUNOXX302: É só diminuir o que ele fez a mais no domingo e dividir igualmente
ALUNOYY302: Exato
ALUNOXX302: Ele fez 102km na semana e no domingo ele fez 4km a mais do que nos outros dias,
            então fica 98km
ALUNOYY302: Bom pelo menos acredito que esteja correto
ALUNOYY302: Sim
ALUNOXX302: 98 : 7 da 14 km em cada dia
ALUNOXX302: Então ele fez 14 km em todos dias de segunda a sabado e no domingo ele fez 18 km
ALUNOYY302: E no domingo ele corre 18
ALUNOYY302: É
```

Figura 4 – Troca de mensagens – problema (1b) Fonte: Aplicativo de Mensagens

Houve grupos que desenvolveram o problema buscando elaborar uma equação e sua resolução. Na análise das mensagens, e no material postado no mural virtual, procuramos analisar como se deu essa elaboração. Em um dos grupos, resolvendo o problema (1a) (Figura 5), um dos alunos identifica a incógnita como as 7 turmas. E completa na sequência que a 8, ou seja, a oitava turma, é x + 2. Parece um pouco distorcido para um professor de Matemática, que enxerga a incógnita x como a quantidade de alunos de cada uma das 7 turmas, mas de forma alguma errada. É a forma como o aluno se expressa, e que no caso deu certo. Cabe ao professor aproveitar seu papel de orientador, principalmente no momento da formalização, trabalhar ajustes neste sentido de tal forma a acrescentar, não normatizar.

```
ALUNOYY205: Tropa
ALUNOYY205: Eu acho q o estilo de conta é esse = 8 x +2 = 258
ALUNOZZ205: deixa eu ler a questão dnv
ALUNOZZ205: vou mandar dnv q fica mais fácil de ver
ALUNOYY205: Ai 7 turmas seria = x
            E 8 seria meio q = x +2
ALUNOZZ205: ss
ALUNOZZ205: a 8º tem mais 2 alunos
ALUNOZZ205: tá certo isso aí
ALUNOZZ205: eu acho
ALUNOYY205: Hmmm
ALUNOYY205: Então vam tenta fzr em cima disso aqui
ALUNOYY205: Pq eu acho q a montagem dela num é tão difícil 🤔 no caso resolução
ALUNOZZ205: 8x = 258-2
ALUNOZZ205: sei la
ALUNOYY205: Hmm
ALUNOZZ205: sou bom em matemática nn
ALUNOYY205: Pera ae
ALUNOYY205: 8 x +2 = 258
            8 x = 258 . 2
            8 x = 256
ALUNOYY205: Se for nessa base
ALUNOYY205: Ai seria
ALUNOYY205: 8 x +2 = 258
            8 x = 258 . 2
            8 x = 256
            x = 256/8
            x =32
ALUNOYY205: Meio que isso sera 🤔
ALUNOZZ205: deve ser
```

Figura 5 – Troca de mensagens – problema (1a) Fonte: Aplicativo de Mensagens

Os recortes acima oferecem uma amostra inicial do uso da metodologia de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas. Os alunos partiram de seus próprio saberes para tentar resolver um problema. Em alguns dos desenvolvimentos percebe-se como as “arestas vão sendo aparadas”, como exemplo da Figura 3. A dúvida estava em se dividia o valor do total, diminuído do valor a mais da primeira prestação, por 6 ou por 7. O grupo em colaboração foi discutindo, sem um saber porquê conclusivo, até chegar à resposta e sua explicação cabível. Nas mensagens da Figura 5, o aluno encontra a sua forma de se expressar, e em colaboração com os colegas elabora a equação, calcula o x e resolve o problema. É possível que alguns alunos já tenham tido contato com exercícios semelhantes em cursos fora do colégio, seja preparatório ou por aula de reforço. O uso desse saber é parte dessa construção do conhecimento, não só porque determinado aluno sabe como resolver mas também pelo compartilhamento das ideias com os colegas. Onuchic (1999, p.216) destaca que “é preciso que os estudantes experimentem este processo cooperativo e que se lhes dê a oportunidade de aprender uns com os outros”.

À continuação do roteiro estabelecido, veio o momento de discutir os desenvolvimentos apresentados. Na aula seguinte, abrimos a página do Padlet no Meet e compartilhamos as soluções que foram colocadas no mural. Não houve uma grande participação dos alunos no decorrer dessa apresentação. Talvez neste ponto o contexto virtual “perde” para as aulas presenciais. Desde o início do uso das aulas por vídeo, poucos alunos participam ativamente. Eles não abrem a câmera e praticamente usam somente o Chat, e mesmo assim quando o professor insiste. Quanto ao aplicativo de mural virtual, o mesmo foi excelente no que proporcionou para o trabalho. É fácil de usar e oferece várias opções, mesmo na sua versão não paga.

Alguns materiais reproduziram muito do que apareceu nas mensagens porém de uma forma um pouco mais estruturada, como se pode ver abaixo na Figura 6 que corresponde ao grupo das mensagens da Figura 4. Em sua maioria, os grupos preferiram fazer o desenvolvimento no papel e colocar uma foto do mesmo no mural virtual, apesar do incentivo a usarem formatos de exposição diferente.

Desenvolvimento:

Essa ideia foi dada pelo [redacted] na aula onde o senhor mostrou as atividades, a ideia dele era de, como precisamos saber quantos quilômetros o homem fazia de segunda a sábado para sabermos o quanto ele fez no domingo, nós subtraímos da quilometragem total o quanto ele fez a mais no domingo para igualar os resultados de segunda a domingo em uma divisão, assim saberíamos quanto ele fez de segunda a sábado, e depois era só adicionar ao domingo o que subtraímos no início.

Cálculos:

102-4 = 98 km;

98 : 7 = 14 km por dia de segunda a sábado;

14 + 4 = 18 no domingo.

Resultados:

Assim chegamos à conclusão de que, em cada dia de segunda a sábado o homem fazia 14 km por dia e no total 84 km nesses seis dias, e no domingo ele fazia 18 km o que somando tudo da os totais 102 km que ele faz na semana toda.

Figura 6 – Postagem Mural Virtual – problema (1b)

Uma resolução chamou a atenção pois apresenta uma forma interessante e diferente de fazer o cálculo. O grupo trabalhou o problema (1a) (Figura 7).

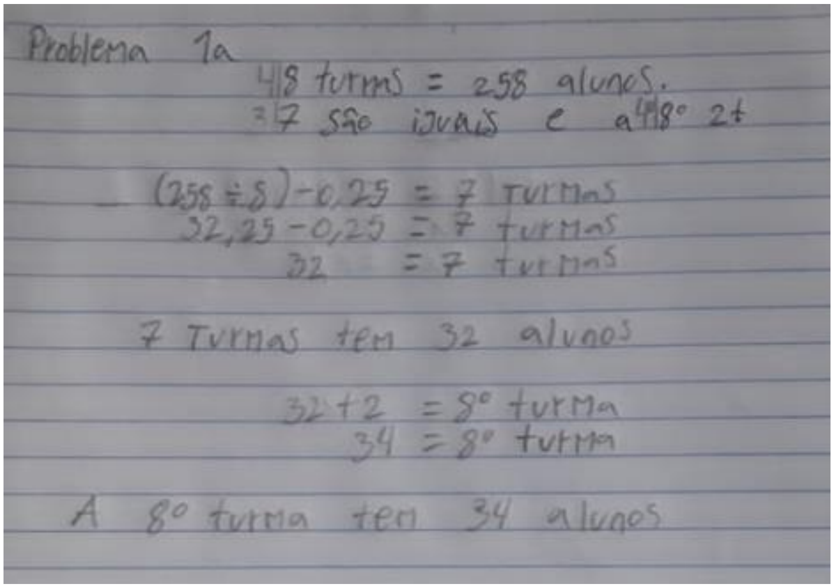

Figura 7 – Postagem Mural Virtual – problema (1a)

Olhando uma primeira vez parece ter algo estranho no desenvolvimento. Divide-se 258, que é o número total de alunos, por 8, número total de turmas. Desse valor diminui-se a divisão dos 2 alunos a mais da oitava turma também por 8. Ou seja, é como se dividisse os dois alunos pelas 8 turmas. Observando o cálculo de quando se isola o x na equação que resolve o problema, é exatamente o que acontece no outro lado da igualdade. A reflexão ao ler e reler esta resolução foi se ela teria ocorrido se o trabalho não desse a oportunidade para os alunos pensarem primeiro do jeito deles. Onuchic aponta que:

> Quando os professores ensinam Matemática através da Resolução de Problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar Matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente. (ONUCHIC, 1999, p. 208)

A participação do professor até este ponto do problema foi orientando e incentivando nos grupos e apresentando e mediando o que foi elaborado pelos alunos. No final da aula foi feita a resolução, com uma breve formalização do que se pediu do problema sem contudo trabalhar um tema específico. A ideia foi principalmente aproveitar as resoluções dos grupos que trabalharam identificando a incógnita para colocar esse uso em evidência. Entendemos que a metodologia aqui empregada valoriza o que o aluno sabe, e é sobre esse conhecimento que através de um problema busca-se que o aluno se desenvolva. Mas fica claro também que existe o espaço importante, necessário e no tempo certo para o professor apresentar a Matemática que o aluno vai para escola aprender.

Numa análise deste primeiro conjunto de problemas, entendemos que o que mais contribuiu para a aprendizagem foi a colaboração entre os alunos dentro dos grupos. Houve situações dos próprios alunos incentivando os outros a participarem. Houve alunos tirando dúvida de colegas e até perguntando porque não estavam na aula.

O primeiro grupo de problemas apresenta uma pequena amostra de como a Matemática oferece caminhos diversos. Procuramos deixar que seguissem suas ideias. Mesmo pedindo no problema que eles pensassem em elaborar uma equação, como já foi explicado, não era determinante e muitos deles mostraram isso. Havia um receio particular de que colocar tal direcionamento influísse ou de alguma forma “travasse” alguns grupos, o que não aconteceu. Por outro lado também havia a dúvida se apareceria a elaboração da equação em alguma das soluções, o que aconteceu naturalmente. Não que fosse primordial ocorrer, mas auxiliou na última etapa do roteiro, ao ser realizada com ideias apresentadas pelos próprios alunos.

4.2 Prática 2 – Uma equação do 1º grau com duas incógnitas

Este tópico se inicia apresentando os três problemas referentes a segunda prática, nomeados de problema (2a), (2b) e (2c), para na sequência passar ao relato e análise da atividade desenvolvida.

Problemas geradores:

Problema (2a):

Uma empresa de limpeza fornece para cada empregado um kit uniforme contendo duas calças iguais e cinco camisas iguais. A empresa compra cada kit uniforme por 570 reais.

Para você pensar e fazer:

Desenvolva uma equação que calcule quanto custa cada calça e cada camisa do kit uniforme fornecido pela empresa de limpeza. Em seguida calcule e responda quanto custa cada calça e cada camisa do uniforme.

Problema (2b):

Carla vai começar a treinar na escolinha do seu time. Ganhou de presente 440 reais da avó para comprar duas bermudas e três camisas para compor o uniforme. No dia que ela foi na lojinha do time só tinha camisas iguais e bermudas iguais. Ela gastou todo o dinheiro que ganhou.

Para você pensar e fazer:

Desenvolva uma equação que calcule quanto custou cada bermuda e cada camisa. Em seguida responda quanto custou cada bermuda e cada camisa do uniforme.

Problema (2c):

Na reunião de uma empresa, havia onze pessoas trabalhando desde cedo. Na hora do almoço, o diretor encomendou de um restaurante 4 pratos vegetarianos iguais e 7 pratos com carne iguais. O preço do prato vegetariano era diferente do preço do prato com carne. O diretor gastou um total de 515 reais para pagar o almoço.

Para você pensar e fazer:

Desenvolva uma equação que calcule quanto custou cada prato vegetariano e cada prato com carne. Em seguida calcule e responda quanto custou cada prato vegetariano e cada prato com carne.

O segundo grupo de problemas apresenta situações nas quais o desenvolvimento pode apresentar uma equação do 1º grau com duas incógnitas. Neste caso, a equação não fornece somente um resultado, ao qual geralmente denomina-se resultado indeterminado. Nos problemas desse grupo pede-se encontrar dois valores desconhecidos mas com somente uma informação que relaciona matematicamente os mesmos. Pretende-se com essas situações avançar sobre o que foi feito antes, inserindo um contexto com duas incógnitas e a possibilidade de resultados diversos.

Novamente enviamos previamente para os grupos os problemas, pedimos para que lessem e durante a aula on-line lemos os três problemas para ver se havia alguma dúvida. Para quem conhece o modelo do problema, poderia surgir a pergunta: “Não está faltando informação?”. Como a metodologia prevê o trabalho com conteúdos novos, talvez por esse motivo não tenha surgido dúvidas iniciais, diferente do que aconteceu ao longo desta prática.

Analisando as mensagens, percebemos que esse conjunto de problemas gerou trocas de mensagens mais extensas e mais dúvidas quanto ao resultado. Talvez por esse motivo alguns grupos não colocaram nada no mural virtual. Mais uma vez as tentativas com operações aritméticas foram predominantes para buscar o resultado. As dúvidas surgiram em função de alguns alunos terem percebido que outros valores eram possíveis, apesar de ao final a grande maioria ter optado por um único resultado. Nas mensagens abaixo (Figura 8), o grupo tenta elaborar um desenvolvimento para o problema (2b). Nota-se que o grupo realiza algumas operações matemáticas sem um porquê definido, semelhante ao ocorrido em outros grupos.

```
ALUNOXX206: eu comecei a fazer
ALUNOZZ206: Ta bemm
ALUNOXX206: é um pouco parecido com o outro
ALUNOZZ206: Que bom
ALUNOZZ206: Pelo menos a gente vai ter uma ideia
ALUNOXX206: eu fiz primeiro 440 dividido por 2 que no caso era o total mais as duas bermudas
ALUNOXX206: e depois com o resultado; 220 dividi por 3
ALUNOXX206: que era as camisetas
ALUNOXX206: tá igual o teu na vdd
ALUNOXX206: eu tinha ficado com uma dúvida
ALUNOZZ206: Eu fiz 440 divido 5
ALUNOZZ206: Deu 88
ALUNOZZ206: Depois eu fiz 2 vezes 88=176
ALUNOXX206: qual era a conta pra saber o valor individual de cada bermuda, já que 220 era o resultado total
            mas é só fazer 220 divido por dois no caso
ALUNOXX206: eu acho q é isso
ALUNOZZ206: E dps 440 menos 176
ALUNOXX206: mas pq por 8?
ALUNOZZ206: E o que sobra é 264
ALUNOZZ206: que é o preço das camisas
ALUNOZZ206: Aaa simm
ALUNOYY206: ssiiimmm
ALUNOYY206: foi assim que eu pensei
ALUNOXX206: então no caso, o valor de cada bermuda ou seja das duas é 110
ALUNOXX206: que somando da 220
ALUNOXX206: que foi oq ela pagou
ALUNOXX206: e as camisetas
ALUNOYY206: siim
ALUNOYY206: as camisetas eu fiz 220÷3
ALUNOZZ206: Isso
ALUNOYY206: e deu 73 cada camiseta
ALUNOXX206: aata
ALUNOXX206: tá bom
ALUNOXX206: então eu acho q é isso kkkk
ALUNOYY206: taaaa
ALUNOXX206: deu certinho cada conta pelo menos
ALUNOZZ206: Acho que simm
```

Figura 8 – Troca de mensagens – problema (2b) Fonte: Aplicativo de Mensagens

Um único grupo, que inclusive também tentou elaborar a equação para o problema (2a) (Figura 9), perguntou se existia um cálculo para achar o valor exato, ao que respondemos que essa era a grande pergunta deste problema. A equação mostra-se de imediato na primeira linha do diálogo, porém não conseguem resolvê-la.

```
ALUNOZZ302: Imagino que a equação vai ser algo do tipo 570 = 2X + 5Y
ALUNOZZ302: X as calças e Y as camisas
ALUNOZZ302: Ainda não precisa pensar muito nisso, ainda tem tempo pra fazer,
            era só pra dar um idéia mesmo
Luigi: Boa!!
ALUNOZZ302: Ok, então.pra resolver ficaria algo do tipo:
            2x + 5y = 570
            x + y = 570 : 2 : 5
            x + y = 285 : 5
            x + y = 57
            Mas eu não imagino como saber o valor de uma camisa e de uma calça
ALUNOXX302: É tbm não sei
ALUNOZZ302: Eu não sei se iss tá certo, mas eu imagino algo do tipo,
            se 570 : 5 que é a quantidade de camisetas, da 285,
            quer dizer que as 5 camisetas juntas valem 285
ALUNOZZ302: É a umica coisa que eu imagino pra fazer agora
ALUNOXX302: Hm pode ser isso aí
ALUNOYY302: Sim, eu tinha feito um calculo parecido mas de forma mais simples
ALUNOXX302: Até que faz sentido
ALUNOZZ302: Ai é so dividir esse 285 por 5 que a gente vai ter o valor de cada camisa
ALUNOZZ302: Da 57
ALUNOZZ302: Tem alguma coisa errada
ALUNOZZ302: Pera aí
ALUNOYY302: Eu tinha feito isso
ALUNOZZ302: Pera que eu fiz merda kk, 570 : 5 da 114 que dividido por 5 da 22,8
ALUNOYY302: Só q fui calcular o das calças e ficou sobrando
ALUNOZZ302: E as calças seria 570 : 2 que da 285 que dividido por 2 da 142,5
ALUNOZZ302: Então uma camiseta vale 22,8 e uma calça vale 142,5
ALUNOZZ302: Vou só somar pra ver se o valor total da 570
ALUNOZZ302: Não da o valor total, ainda tem algo errado
ALUNOXX302: Que estranho
ALUNOZZ302: Eu sei oq tem de errado, 570 : 2 não vai ser o valor  das duas calças
            eu teria que subtrair o valor das camisas antes pra eu saber o valor das calças
ALUNOZZ302: Mas como eu vou achar o valor de uma
ALUNOZZ302: Se precisa do valor da outra
ALUNOXX302: É
ALUNOXX302: Pensou nisso tbm
ALUNOZZ302: Tá, a gente sabe que 57 é o valor de uma calça mais o valor de uma camisa
ALUNOZZ302: Eu realmente não sei oq fazer
ALUNOZZ302: Então 57 - y é o valor de uma calça
ALUNOZZ302: To tentando tirar algo disso kk
ALUNOZZ302: A única coisa que podemos tirar daquele calculo seria que x = 57 - y

ALUNOYY302: 57, então 2.(57)=114 114 é o preço de duas calças
ALUNOZZ302: N, pq 57 é o valor de uma calça mais uma camisas
ALUNOZZ302: Ent 57 . 2 seria duas camisas e duas calças
ALUNOYY302: A
ALUNOZZ302: É realmente só isso que da pra chegar sem o valor de uma das duas
ALUNOZZ302: Não tem como saber o exato
ALUNOZZ302: @555191030146 tem um cálculo pra achar o valor exato de cada um? Só quero saber se tem
Luigi: Essa é a grande pergunta deste problema!
ALUNOZZ302: Olha, eu pensei bastante e tentei de várias formas diferentes
            eu acho que realmente não tem como descobrir o valor de um sem saber o valor do outro
```

Figura 9 – Troca de mensagens – problema (2a)   Fonte: Aplicativo de Mensagens

Voltando no que o mesmo grupo realizou no primeiro conjunto de problemas, verificou-se que o problema foi resolvido porém sem o uso da equação algébrica. Uma impressão ao ver que logo de início eles definem as incógnitas e descrevem a equação é que a discussão realizada ao fim do primeiro problema contribuiu para que trouxessem novas estratégias já para o segundo problema. Apesar do grupo ter se confundido ao desenvolver a equação inicial, fica evidente que mesmo assim um dos alunos elucida o problema com a última frase das mensagens ao escrever: “eu acho que realmente não tem como descobrir o valor de um sem saber o valor do outro”. Foi um aluno, que no grupo já fez outros dois alunos considerarem a ideia, mas traduz muito do modelo de trabalhar com a metodologia de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas.

Faz-se aqui uma observação sobre esse conjunto de problemas, que no nosso entendimento contribuiu para a investigação. No capítulo 2 foi proposto uma análise sobre o que é um de problema. A primeira etapa do roteiro estabelece a elaboração do problema. Nossa reflexão é a importância desta etapa para o bom andamento do restante do trabalho, seja nesta investigação, seja como implementação em salas de aula. O problema é gerador e no nosso entender também deve ser direcionador, catalisador e motivador. A ideia de usar este tipo de problema na construção do conceito do sistema de equações não era confundir ou desestimular o estudante. Pelo contrário, era instigar o aluno a refletir e extrapolar a Matemática que ele conhece.

Seguindo nas etapas, foi realizada a apresentação dos trabalhos postados no mural virtual. Nesse problema houve uma maior participação na discussão. Surgiram algumas ideias semelhantes ao que apresentaram nos grupos. Como por exemplo, definir nos problemas que parte do valor total era referente a um item e o restante ao outro item; na sequência, bastava dividir o total de cada parte pela quantidade de itens para encontrar a solução. Ou ainda ideia novas, como predefinir que os dois itens em cada problema tinham valores iguais. Na própria discussão entre eles chegou-se à conclusão que os problemas não traziam estas informações. No exemplo abaixo (Figura 10), apresenta-se uma das resoluções postadas no mural virtual para o problema (2b), que cai justamente em um dos casos discutidos em aula, no qual o grupo direcionou metade do total dado para calcular o custo de cada item.

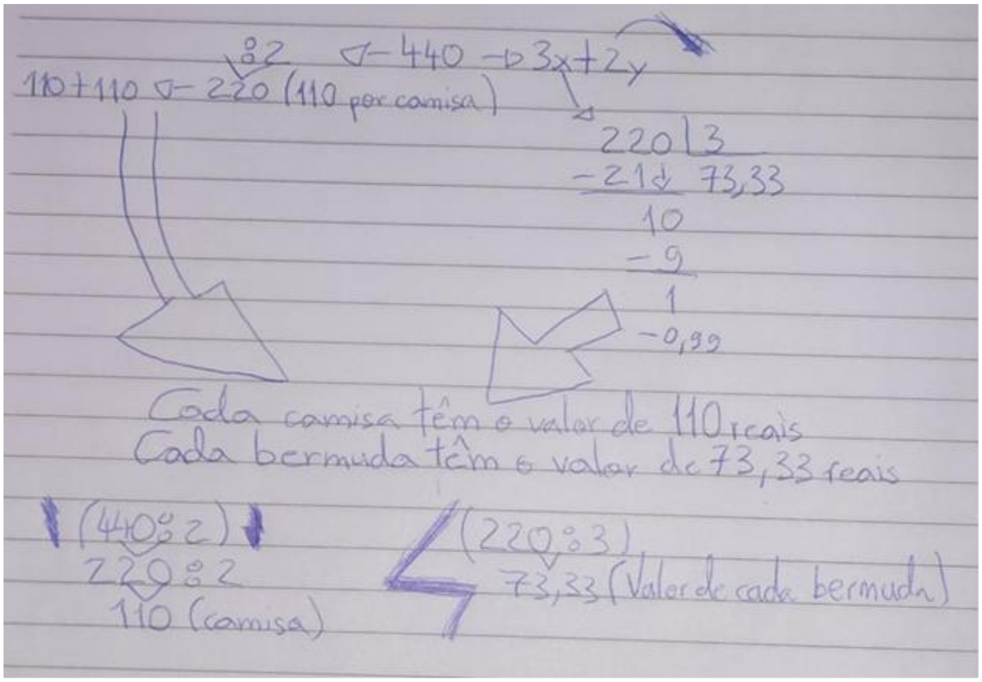

Figura 10 – Postagem Mural Virtual – problema (2b)

Na sequência da discussão, após não conseguirem chegar a um consenso, foi apresentado como seria a sugestão de resolução de cada problema começando pela definição das incógnitas. Esta parte do trabalho foi mais descomplicada do que parecia; os alunos relendo cada problema em conjunto identificaram quais eram os valores a serem calculados. Chamou-se a atenção para o fato de, diferente do primeiro problema, aparecerem duas incógnitas. Usando as informações dadas em cada problema, montamos as equações. Com as equações prontas, faltava mostrar como calcular os valores. Sugeriu-se que usássemos valores diferentes para uma das incógnitas para ver o que acontecia com a outra. Ao final dos cálculos, chegamos na mesma conclusão do grupo das mensagens da Figura 9, que um valor depende do outro. Não foi utilizado neste momento nenhuma linguagem matemática, como indeterminado, ou valores infinitos. Entendemos que onde paramos, ou seja, mostrando o cálculo de uma incógnita em função da outra, era suficiente para irmos para o próximo problema. Reservamos esse trabalho matemático para a formalização final depois dos quatro conjuntos de problemas.

Cabe ressaltar que se a dúvida por um lado causou uma menor postagem de resoluções no mural, por outro lado gerou discussões mais dinâmicas, participativas e produtivas. Se no primeiro conjunto de problemas a cooperação dentro dos grupos foi algo a se destacar, nesta prática, a discussão no grande grupo foi o fator relevante. Sem a “intervenção” prévia do professor, o problema gerador forneceu o conteúdo para o debate. Percebe-se que na busca por uma solução, as propostas e estratégias se entrelaçam proporcionando inclusive uma certa inquietação. Os alunos mesmos, entre eles, se “corrigem”, se ajudam, constroem.

4.3 Prática 3 – Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas (1)

O tópico começa apresentando os três problemas referentes a terceira prática, nomeados de problema (3a), (3b) e (3c), para na sequência passar ao relato e análise da atividade desenvolvida.

Problemas geradores:

Problema (3a):

Aline e Daniel participaram no fim de semana de um campeonato de games. Aline fez o triplo de pontos que Daniel. Os dois juntos fizeram um total de 256 pontos.

Para você pensar e fazer:

Desenvolva uma, ou mais equações, que calcule a quantidade de pontos que cada um fez no campeonato. Em seguida responda quantos pontos Aline fez e quantos pontos Daniel fez.

Problema (3b):

Márcia e Helena ficam disputando quem tem mais músicas em suas playlists. Márcia conseguiu adicionar em sua playlist o dobro de músicas que Helena. Somando as músicas das duas playlists, sem ter nenhuma música repetida, dá um total de 312 músicas.

Para você pensar e fazer:

Desenvolva uma, ou mais equações, que calcule a quantidade de músicas que cada uma adicionou às suas playlists. Em seguida responda quantos músicas tem na playlist da Márcia e quantas músicas tem na playlist da Helena.

Problema (3c):

Paulo e Niara gostam de colecionar gibis. Niara tem o quádruplo de gibis que Paulo. Os dois juntos tem 155 gibis, sem ter nenhum gibi repetido.

Para você pensar e fazer:

Desenvolva uma, ou mais equações, que calcule a quantidade de gibis que cada um tem. Em seguida responda quantos gibis tem Paulo e quantos gibis tem Niara.

Na semana em que começamos com o terceiro grupo de problemas, voltamos para o modelo híbrido. Nesse formato foi possível a interação com alguns alunos fisicamente em classe e outros alunos on-line, assistindo via transmissão pelo Meet. Esse grupo de problemas insere o trabalho no conteúdo matemático definido para a pesquisa, sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Cada problema apresenta um total da soma dos dois valores desconhecidos e uma informação que relaciona um dos valores com o múltiplo do outro. A ideia de usar um problema com essa estrutura era observar se o aluno, que consegue elaborar as duas equações, percebe que uma das equações fornece uma informação para utilizar na outra equação. O problema gerador deve ser orientado para o conteúdo que se quer estudar. Definir as incógnitas, montar as equações, estabelecer o sistema de equações, que indica uma relação entre as mesmas, e resolver o sistema, são conhecimentos a serem desenvolvidos no tema. Entendemos que o problema cumpre sua função na metodologia se ele for capaz de levar o aluno a percorrer as noções inerentes ao assunto. Van de Walle (2009) cita a importância da seleção ou elaboração do problema apontando que o mesmo será produtivo se ajudar o aluno a compreender as ideias que o professor quer trabalhar.

Entregamos no início da aula os problemas impressos para os poucos alunos presentes e enviamos para os demais por mensagem. Novamente pedimos para que lessem, para na sequência lermos e questionarmos por dúvidas. Essa etapa foi muito parecida para os quatro conjuntos de problemas. No momento da leitura, tanto individual como em grupo, não apareciam os questionamentos. Algumas dúvidas ocorriam quando os grupos começavam a trocar mensagens.

Uma mudança notada foi o maior uso de áudios gravados pelos alunos nas trocas de mensagens. É possível que com os problemas trazendo gradualmente um pouco mais de discussão, o recurso do áudio se tornou uma opção às extensas trocas de mensagens. Para a análise das práticas, foi necessário escutar cada áudio na sequência das conversas, entrecruzadas com mensagens de textos, emojis e stickers.

Neste ponto das práticas observa-se que identificar e utilizar incógnita passa a ser uma opção mais presente para desenvolver o problema. As plenárias que ocorreram, ou as discussões no grande grupo, e também a incluída pequena formalização entre cada grupo de problemas, trazem suas contribuições. Tanto para o desenvolvimento das estratégias dos grupos na direção do conteúdo proposto quanto para a associação da ideia de um problema anterior com o seguinte.

Alguns grupos continuaram procurando resolver o problema utilizando-se das operações aritméticas, ao mesmo tempo que buscavam um caminho via equações. Em um deles, o grupo enviou uma foto do desenvolvimento do problema (3b) numa folha (Figura 11) questionando se estava certo (Figura 12).

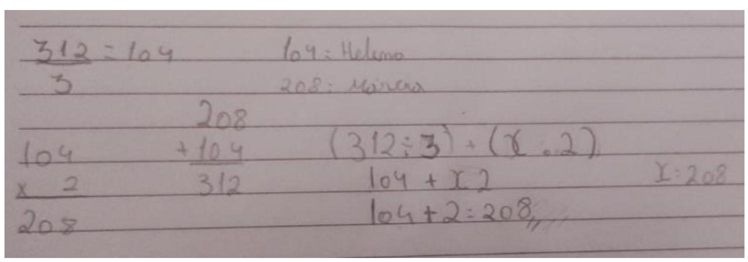

Figura 11 – Foto desenvolvimento – problema (3b)

Apesar da equação proposta não estar de acordo com o problema, os cálculos realizados indicavam a resposta correta; procuramos somente incentivá-los.

ALUNOYY204: ja viu a pegunta?
ALUNOZZ204: Vou dar uma olhada
ALUNOYY204: <anexado: 00000127-PHOTO-2021-10-05-10-38-19.jpg>
ALUNOYY204: Sor o que tu achou?
Luigi: É uma resposta. A equação é um pouco diferente. Mas estão no caminho

Figura 12 - Troca de mensagens – problema (3b) Fonte: Aplicativo de Mensagens

Um dos grupos elaborou uma única equação, incluindo diretamente nela própria a informação do múltiplo dado no problema (3a) (Figura 13). Mais uma vez as possibilidades que a disciplina permite. Para o aluno, não foi necessário um sistema, e realmente não é, mas já é possível notar o uso da incógnita, a elaboração da equação, o cálculo do segundo valor desconhecido, todos componentes do tema proposto.

```
ALUNOXX304: Oii amg pode ser
ALUNOZZ304: Okk vou tentar perai
ALUNOYY304: 3x + X= 256
ALUNOYY304: Pode ser amiga
ALUNOYY304: 4x= 256
            X= 256÷4
            X= 64
ALUNOZZ304: Ok
ALUNOYY304: 3x= 3.64= 192
ALUNOYY304: Daniel fez 64 pontos, e Aline fez 192 pontos.
ALUNOXX304: Ok amg obg
```

Figura 13 - Troca de mensagens – problema (3a) Fonte: Aplicativo de Mensagens

Outra trocas de mensagens (Figura 14) mostra não somente o aluno elaborando as duas equações, como calculando o resultado usando naturalmente a substituição de uma das incógnitas, método normalmente apresentado em aulas e livros didáticos para a resolução de sistemas de equações. E para complementar, tira a dúvida do colega do grupo fazendo a explicação do que desenvolveu para resolver o problema (3b):

```
ALUNOZZ308: X + Y = 312.  Mas Y = 2X
            Então
            X + 2X = 312
            3X = 312
            X = 312 : 3
            X = 104
            X = 104 e y = 208
ALUNOXX308: Não entendi nada mas acho que está correto 👍
ALUNOZZ308: Kkkk
ALUNOYY308: Rt
ALUNOZZ308: É o seguinte, se Marcia tem o dobro de músicas e Helena tem x
            Então X e as músicas de helena, e y as da Marcia, mas se Marcia tem o dobro de Helena,
            quer dizer que Y vai valer o mesmo que 2 vezes X
ALUNOZZ308: Então da para substituir Y por 2X
ALUNOXX308: Ah
ALUNOXX308: Entendi
ALUNOYY308: AAAAAA nossa pior que ej entendo
```

Figura 14 - Troca de mensagens – problema (3b) Fonte: Aplicativo de Mensagens

Em um último exemplo da tentativa de resolver o problema (3c), relata-se abaixo (Figura 15) a transcrição das troca de mensagens por áudio, intercalada com textos, de um dos grupos:

ALUNOZZ306: Manda aí tua conta
ALUNOYY306: Cara tu tem que descobrir o valor de uma primeiro
ALUNOYY306: Só uma e depois fazer o resto
ALUNOYY306: Pera que eu vou fazer aq
ALUNOXX306: Esse foi meu primeiro raciocínio mas não tem como, x vai ficar um número negativo, não tem como, impossível
ALUNOZZ306: É que o @@@@@ disse né, fazer um de cada vez não?
ALUNOXX306: Tu consegue entender o que eu pensei, é x + y tá, só que por exemplo, o nosso x que é a Niara, tem 4 vezes mais gibis que o Paulo, que é o nosso y. Entendeu, foi isso que eu pensei.
ALUNOYY306: Tipo, eu já cheguei aos resultados aqui, só que o número tem que fechar o 4 vezes mais né, tipo o da Niara tem que ser 4 vezes o do Paulo, só que isso não tá fechando. É isso que eu tô ficando encucado, entendeu?
ALUNOXX306: Me manda a foto
ALUNOXX306: Então é só ver 52 x 4 e soma com o y, e vê se dá o 155, que aí vai tá certa a reposta, senão tá errado
ALUNOYY306: Cara eu achei o valor, só que tava inverso
ALUNOXX306: Tá, só que eu quero que tu mande foto do teu raciocínio de antes, para eu ver como é que faz porque eu quero entender, não só pegar a resposta, eu quero entender como faz.
ALUNOXX306: Para talvez na próxima que o sor mandar, eu consiga ter mais ou menos o mesmo raciocínio e conseguir fazer, entendeu?

Figura 15 – Transcrição de mensagens de áudio – problema (3c) Fonte: Aplicativo de Mensagens

Consideramos alguns pontos significativos no desenvolvimento que este grupo buscou realizar, principalmente pela perspectiva da evolução problema após problema. Um dos integrantes direciona que é preciso encontrar um valor desconhecido para depois calcular o outro, possivelmente pelo o que ocorreu no problema anterior. Parece óbvio para quem já entende como soluciona um sistema de equações, mas talvez não tão óbvio para quem não conhece. Na sequência, outro aluno percebe que não poderia ter um valor negativo como resposta. Esse fator crítico, de entender o que significa a resposta, é essencial na aprendizagem de Matemática. Mais adiante nota-se que eles entenderam o que o problema dizia, relatando que a quantidade de gibis da Niara tem que ser 4 vezes a de Paulo, mas ao que parece não estavam sabendo como colocar no papel. Na mesma frase, o aluno aponta que verificou o resultado e não está certo. Esse conferir resposta foi um fator que pouco apareceu durante a resolução de todos os problemas, algo que planejamos trabalhar na formalização final. Faz-se aqui um registro das últimas duas linhas das mensagens. Não tem a ver com o desenvolvimento do problema mas com o ensinar e aprender: “eu quero entender, não só pegar a resposta, eu quero entender como faz”.

Na apresentação dos trabalhos e posterior discussão na turma para a busca do consenso, dois fatores deste conjunto de problemas foram mais debatidos: o uso das incógnitas e a diferença para o que foi feito anteriormente. Analisando o material do mural virtual, houve uma mescla entre grupos trabalhando a identificação das incógnitas e elaboração da equação, ou das equações, e outros apresentando resoluções puramente aritméticas. No exemplo abaixo (Figura 16), o grupo resolveu o problema (3b) com uma divisão, uma multiplicação e uma soma, algo aplicável ao que se pedia. Na discussão, sugerimos o mesmo tipo de problema com outros valores, estes já não tão simples, e alguns alunos observaram a diferença comentando que precisariam “pensar” mais um pouco.

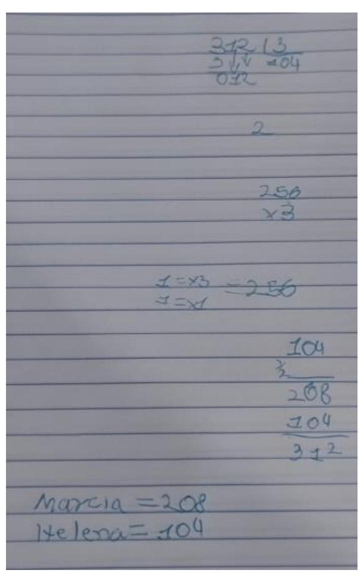

Figura 16 – Postagem Mural Virtual – problema (3b)

Um último exemplo de material postado no mural virtual traz uma resolução para o problema (3c) (Figura 17), semelhante ao da troca de mensagens da Figura 13. O grupo desenvolveu o problema trazendo uma única equação, realizando diretamente o que chamaríamos de substituição no ensino do tema:

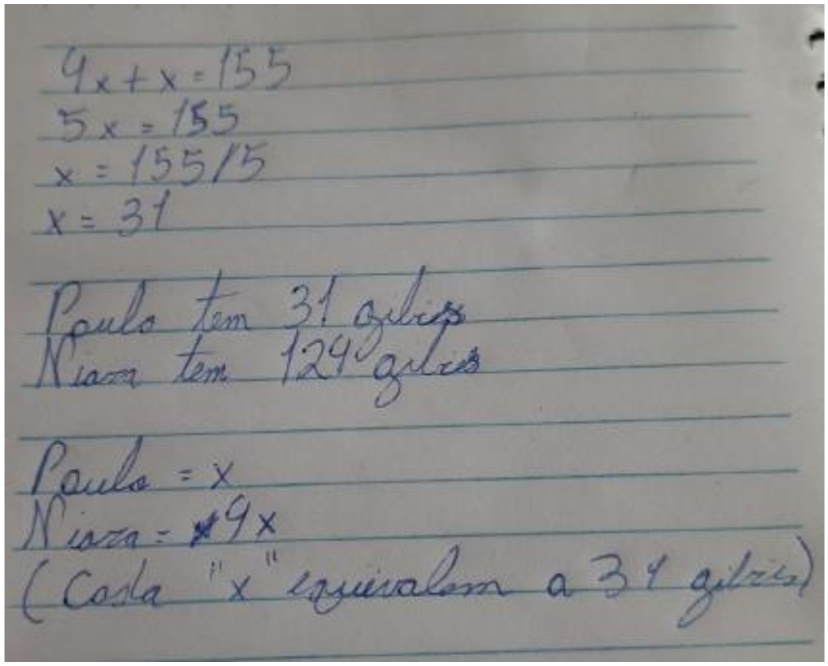

Figura 17– Postagem Mural Virtual – problema (3c)

Finalizando mais esta prática, ao trabalhar o que se queria destes problemas, procuramos destacar as diferenças deste grupo de problemas para o anterior. Não necessariamente numa abordagem matemática; a ideia foi comparar o que se tinha de informações e incógnitas e observar qual sua influência nas resoluções em cada situação. Na linha do fomentar algumas reflexões para o que eles fariam na prática seguinte, a intenção foi que atentassem para ao dados que o problema traz e como podemos utilizá-los.

Ao longo dos capítulos anteriores, citamos os modelos padronizados de resolução de sistemas de equações, entre eles o da substituição. Nesta prática percebe-se que é possível trabalhar tal método a partir dos próprios alunos. O nomear “método” e “substituição” passa a ser uma consequência.

4.4 Prática 4 – Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas (2)

Inicia-se o tópico apresentando os três problemas referentes a quarta prática, nomeados de problema (4a), (4b) e (4c), para na sequência passar ao relato e análise da atividade desenvolvida.

Problemas geradores:

Problema (4a):

Na festa de formatura do 9º ano, Laís e Guilherme foram escolhidos para fazerem a organização do salão. Guilherme precisava colocar 80 cadeiras em 22 mesas. Laís sugeriu que colocassem algumas mesas com 3 cadeiras e outras com 4 cadeiras, de modo que todas as cadeiras fossem utilizadas.

Para você pensar e fazer:

Desenvolva uma, ou mais equações, que calcule quantas mesas ficaram com 3 cadeiras e quantas mesas ficaram com 4 cadeiras. Em seguida responda quantas mesas ficaram com 3 cadeiras e quantas mesas ficaram com 4 cadeiras.

Problema (4b):

Em uma aula de artes, a professora pediu para seus alunos trabalharem com palitos de picolés, todos de mesmo tamanho. Jonas, um dos alunos, tinha 48 palitos e montou 13 figuras geométricas: alguns triângulos e alguns quadrados.

Para você pensar e fazer:

Desenvolva uma, ou mais equações, que calcule quantos quadrados e quantos triângulos Jonas montou. Em seguida responda quantos quadrados e quantos triângulos ele montou.

Problema (4c):

Na festa junina da escola do bairro, o convite para alunos custava 3 reais e o convite para visitantes 4 reais. Foi vendido um total de 80 convites e foram arrecadados 270 reais.

Para você pensar e fazer:
Desenvolva uma, ou mais equações, que calcule quantos convites para alunos e quantos convites para visitantes foram vendidos. Em seguida responda qual o números de convites vendidos para alunos e qual o número de convites vendidos para visitantes.

Começamos o último grupo de problemas continuado com os mesmos procedimentos. Como anteriormente, poucos alunos estavam presentes, tanto na aula virtual como presencialmente. Os grupos de Whatsapp foram fundamentais para que as atividades tivessem o seu devido andamento. Com mais esta quarta prática, tem-se novamente o objeto central do conteúdo, o sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Os três novos problemas apresentam informações que podem gerar duas somas, ambas relacionando os dois valores desconhecidos que se pede calcular. Um fato a se destacar é que as situações propostas contemplam que uma das equações apresente um formato além dos habituais $x + y$ e $x – y$. Esta observação visa esclarecer que não houve nenhum propósito específico nessa escolha mas que pode ter influenciado no desenrolar desta última prática, conforme será visto.

Se na sequência das práticas anteriores os grupos migraram gradativamente do formato das mensagens escritas para as mensagens de áudio, observa-se que estas deram lugar, por vezes, às ligações telefônicas nesta última atividade. Expressões como “me liga” ou “vou te ligar” foram mais frequentes. Não é uma conclusão, nem a pesquisa é voltada para este escopo, mas parece haver uma relação entre a “dificuldade” do problema e a forma de comunicação utilizada entre os alunos, algo razoavelmente aceitável se pensarmos em situações semelhantes do dia a dia.

Alguns grupos recorreram ao modelo de tentativa e erro para resolver o problema. O que se nota, analisando inclusive as postagens ao final, foi a dificuldade que encontraram em elaborar uma das equações. Chegar na equação considerada mais “simples”, a da soma das incógnitas, foi natural. A elaboração da segunda equação para formar o sistema que resolve esse grupo de problemas é que, a princípio, causou maiores dúvidas.

Um aluno utilizou uma estratégia interessante para o problema (4b) (Figura 18). Partiu do total de palitos diminuindo 4 palitos sucessivamente até parar num múltiplo de três. A partir deste valor, subtraiu 3 palitos em sequência até zerar o número de palitos. Ao somar o número de figuras, totalizou a informação dada no problema. Caso tivesse começado a diminuir em outro múltiplo de 3, zeraria os palitos mas não atingiria o número de figuras. É possível que tenha havido outras tentativas antes da mensagem enviada, conforme abaixo:

ALUNOXX304: Oii amg dps eu vou tentar e mando aqui
ALUNOZZ304: Ok
ALUNOXX304: Oiii @@@@@ eu fiz um cálculo bem simples foi assim ó
Um quadrado usa 4 palitos
E um triângulo usa 3 palitos
Então
48-4-4-4-4-4-4-4-4-4=12
12-3-3-3-3=0
Então o Jonas fez 9 quadrados e 4 triângulos
ALUNOYY304: Ok

Figura 18 – Troca de mensagens – problema (4b) Fonte: Aplicativo de Mensagens

Essa diversidade de formas que aparecem como estratégias de resolução desde o início pode ser analisada como a consequência do novo papel do professor na metodologia de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas. Oferecer para o aluno a oportunidade inicial de colocar em prática o que sabe, antes mesmo do professor apresentar o conteúdo, cria um ambiente onde a aprendizagem vem do que o aluno propõe, não do que o professor apresenta. Manifesta-se pelas correlações e não somente pelas instaurações.

A dúvida em como montar uma das equações é notória em algumas trocas de mensagens. Um aluno inclusive envolveu o pai na tentativa de elaborá-la, como no exemplo abaixo envolvendo o problema (4c) (Figura 19). Observa-se também o já comentado uso da ligação telefônica entre eles, uma certa frustração por não conseguir resolver e a ansiedade para ver como é a resposta:

ALUNOYY201: Podes call?
ALUNOYY201: Blz
ALUNOZZ201: mas vai ligando pro @@@@@
ALUNOYY201: Quantas mesas ficaram com 3 cadeiras = x
Quantas mesas ficaram com 4 cadeiras = y
ALUNOYY201: .
ALUNOXX201: Mensagem apagada
ALUNOYY201: () x
ALUNOYY201: () =x
ALUNOZZ201: liguem
ALUNOYY201: x + y = 22 isso é um fato
ALUNOYY201: Sor, perdemo
ALUNOZZ201: eu tava tentando fazer com meu pai
ALUNOYY201: Ah ta
ALUNOZZ201: mas não conseguimos pensar em nada também
ALUNOYY201: Ah ta
ALUNOYY201: Que pena
ALUNOYY201: Essa foi braba sor
ALUNOZZ201: o mais perto que chegamos foi 17x
ALUNOZZ201: só q da 51
ALUNOYY201: Mano só to pra ver como o sor vai fazer amanhã kk
ALUNOYY201: Tendi
ALUNOZZ201: aí se tu for fazer mais 28 da 79

Figura 19 – Troca de mensagens – problema (4c) Fonte: Aplicativo de Mensagens

Ainda na troca de mensagens, houve um grupo que conseguiu elaborar as equações mas não foi adiante na resolução do problema (4c) (Figura 20). Nas orientações surgiu a perspectiva dessa ocorrência: alunos conseguindo modelar o problema, criando o sistema de equações, porém não sabendo resolvê-lo. Entendemos que essa construção de raciocínio matemático é gradual, conforme visto no conjunto de problemas anterior. O crescimento está na estratégia de como resolver o problema, como vários alunos o fizeram, e no interesse gerado, como o aluno escreve acima: “Mano só to pra ver como o sor vai fazer amanhã”.

```
ALUNOZZ302: Ok, vou tentar imaginar uma equação
            X vai ser a quantidade de mesas com 3 cadeiras e y a quantidade de mesas com 4 cadeiras
            Então:
            X+Y=80 cadeiras
ALUNOZZ302: Nn, o 22 que é o numero de mesas tem que entrar ai no meio
ALUNOZZ302: *Talvez
ALUNOZZ302: Eu não sei oq fazer
ALUNOXX302: eu acho que dá pra resolver pela calculadora
ALUNOXX302: amanha eu tento
ALUNOZZ302: imagem ocultada
ALUNOXX302: bah
ALUNOZZ302: 14 mesas com 4 cadeiras e 8 mesaa com 3 cadeiras
ALUNOXX302: difícil isso aí
ALUNOZZ302: Eu comecei vendo quando era 22 . 4 que era 88, e fui diminuindo o 22,
            e aumentando o mumero de mesas com 3 cadeiras, eu já fui direto pro 15 . 4 + 7 . 3 pra poupar tempo
ALUNOXX302: tá
ALUNOZZ302: Já sei como fazer
            X . 4 + y . 3 = 80
ALUNOXX302: concordo
ALUNOZZ302: Kkkk
ALUNOXX302: deve estar certo
```

Figura 20 – Troca de mensagens – problema (4c)   Fonte: Aplicativo de Mensagens

A discussão no grande grupo ratificou o que as mensagens trouxeram de informações: a dúvida persistente quanto à “segunda” equação. Sobre o que os alunos discutiram, a reflexão que fica é se teria sido mais oportuno utilizar algo observado na consulta ao livros didáticos quando da elaboração prévias dos problemas. Percebe-se nos livros a utilização inicial de sistemas com duas equações onde uma é no formato x + y igual a um valor dado e a outra x – y igual a outro valor. Talvez seja mais simples num primeiro momento trabalhar com problemas nessa linha, algo que não foi ponderado de início. Por outro lado, o formato do problema gerou a oportunidade de analisar qual foi a dificuldade encontrada pelos alunos. Numa avaliação particular, a relação entre as grandezas apresentadas nos problemas pode ser algo a ser desenvolvido com os alunos. Era preciso interpretar o que significava mesas com 4 ou 3 cadeira, ou figuras com 4 ou 3 lados, ou preços de 4 ou 3 reais, e atrelar essas informações com o outro total dado nos problemas. O surgimento desse tipo de dúvida contribui para o planejamento da sequência das atividades, e que foi explorado na conclusão da prática.

Finalizando esse último grupo de problemas, apresentamos uma postagem do mural virtual. Os alunos utilizaram uma simulação visual das mesas e cadeiras do problema (4a) (Figura 21) junto com sua resolução. Esse tipo de recurso não só valoriza o empenho em realizar a atividade como, no nosso entender, mostra como trazer situações problemas mais próximas do dia a dia auxilia o aluno a expressar suas ideias.

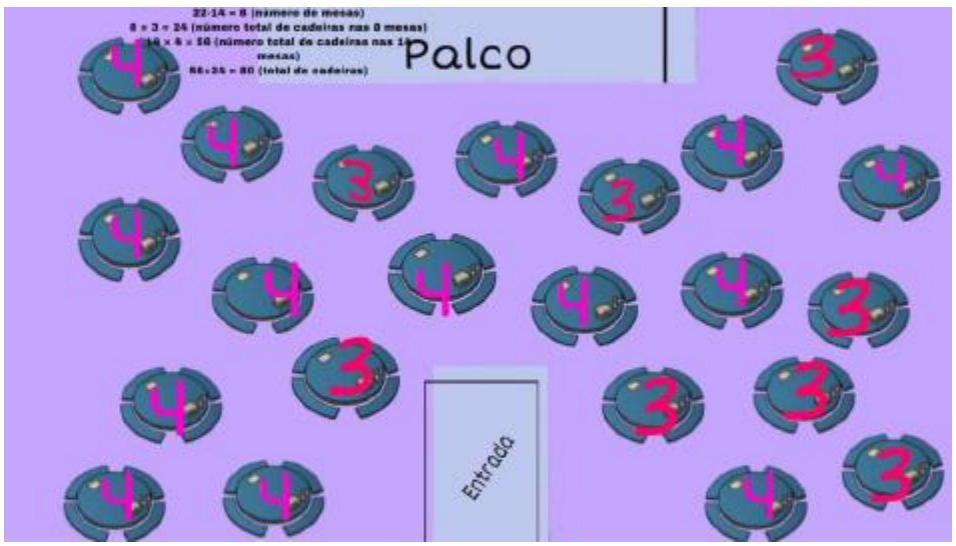

Figura 21 – Postagem Mural Virtual – problema (4a)

A continuação deste encontro foi utilizada para iniciar o trabalho geral de formalização do conteúdo abordado durante as quatro práticas, algo que se seguiu pelas aulas seguintes. Parte deste processo já havia sido realizada entre uma prática e outra, como já registrado. Organizamos uma revisão dos tipos de problemas que apareceram apresentando no quadro um resumo de cada um, lado a lado. A ideia era mostrar a evolução do que fizemos, começando por um problema possível de ser resolvido por uma equação do primeiro grau com uma incógnita, passando pelo problema da situação de resultado indeterminado, chegando nos problemas com duas equações do primeiro grau com duas incógnitas. Conforme Onuchic (1999, p.217): “é feita uma síntese do que se objetivava aprender a partir do problema dado. [...] É importante destacar, nesse momento, o que de matemática nova se construiu, usando as novas terminologias próprias ao assunto.” Uma vez já trabalhado os problemas, o desenvolvimento do assunto transcorre de uma forma mais embasada. Os conceitos matemáticos são apresentados revisitando discussões feitas nas plenárias; os alunos participam com as dúvidas e ideias que tiveram. O problema como fato gerador permite que aula seja uma sucessão de ideias novas com situações recém trabalhadas se complementando. A linguagem matemática, como por exemplo, o resultado indeterminado com infinitos resultados, ou o uso do método da substituição para resolução do sistema, ou a própria explicação do por que chamar de sistema, entra em consonância com as atividades anteriores. Ao perguntar para a turma porque chamar de sistema, um aluno respondeu: “é porque uma equação se relaciona com a outra porque no problema uma “coisa” depende da outra”. A aprendizagem se faz presente através das palavras dos próprios alunos. A formalização seguiu assim seu curso na sequência das aulas, tendo sido apresentados os conceitos de incógnita, equação de primeiro grau, sistema de equações e os métodos de resolução.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou analisar, ao propor práticas em sala de aula para ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, como o aluno elaboraria suas estratégias de respostas. A abordagem para implementação das atividades considerou a proposta de um roteiro pelo qual tanto professor como aluno assumem papéis menos usuais do que se vê nas escolas. O professor atua como um mediador, organizando, observando, incentivando e intervindo em momentos precisos. O aluno, trabalhando em grupo, busca seu desenvolvimento por meios próprios, apoiado na cooperação com os colegas. O ponto inicial de um novo conteúdo passa a ser um problema e não a apresentação do professor. Este problema deve ser escolhido ou elaborado de tal forma a fazer com que os alunos “redescubram” seus conhecimentos e, a partir deles e envolvidos no modo de como resolvê-los, construam novos saberes.

Devido às restrições do momento da pandemia, foram necessárias algumas adaptações para as práticas. Com o modelo híbrido de ensino em vigor, era preciso alcançar o aluno onde ele estivesse, na sala de aula ou em casa. Para tanto, o uso da tecnologia digital de comunicação, como aplicativo de mensagens, foi fundamental. O trabalho em grupo na classe, onde as cadeiras da sala de aula se juntam em torno de uma mesa, deram lugar ao grupo de Whatsapp. O “burburinho” dos alunos debatendo ideias deu lugar às trocas de mensagens, seja por texto, áudio ou emojis.

Ao escolher direcionar a atividade para trabalhar com sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, um passo importante foi definir o problema. Como visto ao longo do trabalho, este problema se transformou em quatro conjuntos de problemas. Buscou-se um desenvolvimento pelo qual o aluno fosse levado ao conteúdo escolhido deslocando-se por conceitos inerentes. Percebe-se a cada problema, nas trocas de mensagens, nas apresentações e nas discussões, tais conceitos aparecendo e sendo gradativamente utilizados. As formalizações intermediárias criaram uma espécie de link que auxiliou no encadeamento dos assuntos.

Como em qualquer objetivo de aprendizagem, os alunos seguiram caminhos distintos, alguns mais próximos ao proposto. As resoluções baseadas em tentativa e erro ou por operações aritméticas se fizeram presente em todos os problemas. E em sua grande maioria trazendo repostas dentro do que se pedia. A análise buscou examinar as estratégias de resolução apresentadas para o conteúdo de sistema de equações. Neste sentido, observa-se que para uma parte dos alunos, o uso da álgebra, ou seja, o uso das incógnitas e equações algébricas para o desenvolvimento dos problemas apresentados, foi uma construção viável. As discussões dos últimos dois conjuntos de problemas evidenciam tal fato ao darem ênfase para definir quais eram as incógnitas e como usar as informações dadas para montar as equações.

Dentro do que a abordagem metodológica propõe, em linha com a motivação inicial, ou seja, de buscar alternativas didáticas para além das exposições de algoritmos e fórmulas, existe a percepção de contribuições para o objetivo desta pesquisa. O aluno procura relacionar seus conhecimentos com as demandas apresentadas nos problemas antes mesmo do professor direcionar como fazer. A troca de ideias dentro dos grupos e nas discussões gerais permitem perspectivas, e até linguagens, diferentes das estabelecidas pelo professor. Os conceitos surgem das ideias matemáticas ingênuas, conforme Hanna (1989), para então alcançarem a linguagem matemática, importante e necessária. O ambiente didático oferece ao aluno a chance inicial de se expressar e elaborar, e ao professor uma fonte de novas ideias e possibilidades.

O dia a dia das duas semanas das práticas didática propostas e realizadas para este trabalho guarda mais do que foi possível relatar ao longo do texto. A preparação prévia com os alunos, a vasta trocas de mensagens, as postagens no mural virtual, as discussões; todas as etapas apresentaram realizações, incertezas, dificuldades e oportunidades. É notório que a abordagem proposta, como seria com qualquer outra, requer um período maior de trabalho em aula. A sequência de problemas poderia ser mais gradual, dando chance do aluno percorrer mesmos tipos de problemas antes de avançar. O aluno está habituado a esperar pelo professor; a proatividade do aluno não é algo habitualmente trabalhado em sala de aula. Por outro lado, o aluno teve a liberdade de pensar como premissa, e por conta do modelo híbrido de ensino, circular pelo ambiente do seu dia a dia, o ambiente digital. Visualizando o fazer Matemática em sala de aula, do professor vem a condução; a novidade vem do problema. Enfatizando Polya apud Onuchic (1999):

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. (ONUCHIC, 1999, p. 217).

Para o professor, saber identificar o que "funciona" ou não de uma metodologia conhecida somente na teoria, é um fator de inquietude. Não foram poucas as vezes em que foi necessário rever o que se tinha feito, e o que faltava fazer, para verificar se estava tudo conforme o proposto. Essa metodologia rompe com um padrão de aula que tanto aluno como professor estão formatados e acostumados na vida escolar. Em contrapartida, é notável como o ser professor ganha uma nova dimensão. Ler e ouvir o que os alunos proporcionaram nestas duas semanas de atividades gera a convicção de uma escolha adequada. Aquela percepção pessoal de que a partir de um problema é possível a construção do conhecimento, se fortalece e incentiva a novas experiências.

REFERÊNCIAS

BAUMGART, J. K. **Tópicos de História da matemática para uso em sala de aula**. 2ª Edição. Trad. Hygino Hugueros Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1992.

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: Matemática. Brasília: MECSEF, 1998. BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: Matemática**. Brasília: MECSEF, 1998.

DEMO, P. **Educar pela pesquisa**. 5ª Edição. Campinas/SP: Autores Associados, 2002.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia – Saberes Necessários à Prática Educativa**. 25ª Edição. São Paulo: Editora Paz e Terra, 1996.

GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 3ª Edição. São Paulo/SP: Editora Livraria da Física, 2009.

CÓRDOVA, F. P.; T. E.; SILVEIRA, D. T. A pesquisa científica. In: GEHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Org.). **Métodos de Pesquisa.** Editora UFRGS, Porto Alegre/RS, p. 31 – 35, 2009.

HANNA, G. More than Formal Proof. **For the Learning of Mathematics**. Montreal/QC, v. 9, n. 1, p. 20-23, Ano 1989.

MALTEMPI, V. M. Educação Matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. **Acta Scientiae**. Canoas/RS, v.10, n.1, jan./jun. 2008.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. 1ª Edição. São Paulo: EPU - Editora Pedagógica e Universitária, 1999.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema, Rio Claro/SP, n. 41, p. 73 – 98, 2011.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2019.

POLYA, G. **Mathematical Discovery - On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving**. Combined Edition – v.2. New York: John Willey & Sons, 1981.

PROBLEMA. In: **Michaelis on-line**. São Paulo: Editora Melhoramentos, 2021. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/problema/. Acesso em: 13/10/2021.

SARTORI, A. S. T.; DUARTE, C. G. Repetir, Memorizar, Recitar: Mecanismos para a Fabricação de Corpos Dóceis pela Educação Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. Londrina/PR, v.14, n.1, p. 84-91, 2021.

SCHROEDER, T.L.; LESTER Jr., F.K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving, TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book).

STEWART, I. **Uma história da simetria na matemática**. 1ª Edição. Trad. Claudio Carina. São Paulo: Editora Zahar, 2012.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. 7ª Edição. New York: Pearson Education, 2009.

ANEXOS

Anexo 1 – Termo de Consentimento da Escola

Porto Alegre, ____ de _____________ de _______

Prezada Professora____

Diretora da____

O aluno __Luigi Quintans Riveiro___, atualmente é graduando regularmente matriculado no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do Departamento de Matemática Pura e Aplicada para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o graduando está desenvolvendo um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). O TCC produzido deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto pesquisador e professor responsável pela orientação do desenvolvimento do TCC pelograduando**,** reitero nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa colocando-nos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixo à disposição o seguinte telefone de contato: (51)____________________.

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

____

Professor Orientador – Vandoir Stormowski

Professor do Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Anexo 2 – Termo de Consentimento Informado

Eu, ____,R.G.________, responsável pelo aluno(a) ____, da turma ________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada __Estudando Sistema de Equações do 1º grau com duas incógnitas através da Resolução de Problemas__, desenvolvida pelo pesquisador_Luigi Quintans Riveiro_. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por _Professor Vandoir Stormowski_, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone_____ ou e-mail____.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Investigar o uso da metodologia didática Resolução de Problemas como meio de aprendizagem
- Contribuir com pesquisas acadêmicas para o desenvolvimento da Educação Matemática

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre _Ensino e Aprendizagem de Matemática_, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável no telefone_XXXXXXXXXX_/e-mail_ XXXXXXXXXXX@XXXXX_.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre,________de__________de__________.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do pesquisador:

Assinatura do Orientador da pesquisa:

Anexo 2 – Termo de Assentimento

Você está sendo convidado para participar da pesquisa "Estudando Sistema de Equações de 1º grau com duas incógnitas através da Resolução de Problemas". Queremos investigar o uso da metodologia didática Resolução de Problemas como meio de aprendizagem e contribuir com pesquisas acadêmicas para o desenvolvimento da Educação Matemática.

Os alunos que irão participar dessa pesquisa têm de 13 a 17 anos de idade. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir.

A pesquisa será feita durante as aulas de Matemática na EEEF Paraíba Ciep, onde você participará desenvolvendo atividades da disciplina. Para isso, serão usadas folhas com exercícios e folhas em branco para desenvolvimento, além do Meet para transmissão da aula e de grupos de Whats para se comunicar com os colegas. Caso aconteça algo errado, você pode entrar em contato com meu orientador Professor Vandoir Stormowski no telefone (51)XXXXX-XXXX.

Ninguém saberá que você está participando da pesquisa, não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar o seu nome pois serão usados nomes fictícios. Quando terminarmos a pesquisa, ela poderá ser acessada no repositório de trabalhos da UFRGS.

Se você tiver ainda alguma dúvida, você pode me perguntar ou ao meu orientador Professor Vandoir Stormowski.

Eu____aceito participar da pesquisa "Estudando Sistema de Equações de 1º grau com duas incógnitas através da Resolução de Problemas", que tem como objetivo investigar o uso da metodologia didática Resolução de Problemas como meio de aprendizagem e contribuir com pesquisas acadêmicas para o desenvolvimento da Educação Matemática. Entendi que posso dizer "sim" e participar. Mas que, a qualquer momento, posso dizer "não" e desistir sem problema algum. Li e concordo em participar da pesquisa.

Porto Alegre,____de __________de__________.

______________________________ ______________________________

Assinatura do(a) aluno(a) Assinatura do (a) pesquisador (a)