Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ideais Fechados e Primos em Skew Anéis de Grupos Parciais

por

Jesús Antonio Ávila Guzmán

Setembro de 2008

Tese submetida por Jesús Antonio Ávila Guzmán* como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero

Banca Examinadora:

Dr. Antônio Paques

Dr. Mikhajolo Dokuchaev

Dr. Eduardo do Nascimento Marcos

Dr. Wagner Oliveira Cortes

Dr. João Roberto Lazzarin

Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero

Data de Defesa: 24 de setembro de 2008

*Bolsista do CNPq de 09/2006 a 07/2008 e Profesor Universidad del Tolima (Ibagué-Colombia).

Dedicatórias

Esta tese está dedicada a minha querida esposa Julie Kimberly e a meu querido filho Nicolás Alexandre.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço ao professor Miguel Ferrero pela confiança que depositou em mim e pela sabia orientação.

A meus pais Cristóbal Ávila e Elvira Guzmán, meu irmão Luis Fernando e a toda minha familia.

Aos professores e amigos Virginia Rodrigues, Cléber Bisognin, Wagner Oliveira Cortes, Elismar da Rosa Oliveira, João Lazzarin e Antônio Paques, que sempre estiveram me apoiando de alguma forma.

A meu grande amigo Paulo com quem mais compartilhei no Brasil.

A meus amigos Raquel, Emilio, Renne, Lucas, Bárbara-Alexandre, Joyce, Leandro, Duda, Kleiton, César, Adriana, Diego-Diego, Paty-Patropy, Luciane, Daiane, Thaisa, João-João-João, Debby, Lucinéia, Edilson, Laerte, Ezequia, Manoel, Bagé, Mauricio, Carolina, Linéia, André, Lisiane, Cinthya, Cicero, Guilherme, Marcio, Marcelo, Jairo, Edite, Hugo, Jorge, Roberto, Robert, John, Celso, Fabiano, Juliana, Juliane, Fabiano, Ana Paula, Eloah, Luciano, Fabio, Pedro, Paulista, Flavia, Davi, Vanderlei, Rafael, Rosane a secretária e os outros que infelizmente esquecí.

Agradeço também às instituições: CNPq, UFRGS e Universidad del Tolima.

Resumo

Ideais Fechados e Primos em Skew Anéis de Grupos Parciais

Neste trabalho estudamos ações parciais de grupos abelianos sobre um anel R (denotadas por (R, α)), com ação global envolvente (T, β). Construímos o anel de α-quocientes de Martindale $\mathcal{Q}$ de R e estendemos a ação parcial (R, α) a $\mathcal{Q}$. Entre outros resultados provamos que existe uma correspondência bijetiva entre todos os ideais R-disjuntos fechados de $R \star_\alpha G$ e todos os ideais T-disjuntos fechados de $T \star_\beta G$. Também provamos que existe uma correspondência bijetiva entre todos os ideais R-disjuntos fechados de $R \star_\alpha G$ e todos os ideais $\mathcal{Q}$-disjuntos fechados de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$. Provamos que estas correspondências preservam ideais primos. Finalmente, usamos estes resultados para estudar algumas classes de ideais primos de $R \star_\alpha G$ como ideais fortemente primos e primos não singulares.

Abstract

Closed and Prime Ideals in Partial Skew Group Rings

In this thesis we study partial actions of abelian groups on a ring R (denoted by (R, α)), with enveloping action (T, β). We construct the Martindale α-quotient ring $\mathcal{Q}$ and we extend the partial action (R, α) to $\mathcal{Q}$. Among others results we prove that there exist a one-to-one correspondence between the R-disjoint closed and prime ideals of $R \star_\alpha G$ and the T-disjoint closed and prime ideals of $T \star_\beta G$. We also prove that there exist a one-to-one correspondence between the R-disjoint closed and prime ideals of $R \star_\alpha G$ and the $\mathcal{Q}$-disjoint closed and prime ideals of $\mathcal{Q} \star_\alpha G$. Finally, we use this results to study the strongly prime ideals and the nonsingular prime ideals of $R \star_\alpha G$.

Sumário

Introdução

A relação entre os ideais primos de anéis T e S para certas extensões de anéis $T \subseteq S$ tem sido estudada por muitos autores ([1], [5], [7], [13]). Em [7], por exemplo, estuda-se o caso onde $S = T[E]$ é uma extensão livre centralizante de T. O problema pode ser sempre reduzido ao caso em que T é um anel primo, desta maneira é estabelecida uma correspondência bijetiva entre todos os ideais T-disjuntos fechados (em particular primos) de S e todos os ideais Q-disjuntos fechados (em particular primos) de $Q[E]$ onde Q é o anel de quocientes maximal de T. A técnica usada nestes trabalhos, foi estendida em [13] para o estudo dos ideais fechados do produto cruzado $T \star_\beta G$ (em particular para skew anéis de grupo) com G um grupo abeliano. Neste trabalho também foi provado que existe uma correspondência bijetiva entre os ideais T-disjuntos fechados (em particular primos) de $T \star_\beta G$ e os ideais Q-disjuntos fechados (em particular primos) de $Q \star_\beta G$, onde Q é o anel de G-quocientes à esquerda de Martindale de T e T é um anel G-primo.

Recentemente começaram a ser estudadas as ações parciais de grupos sobre anéis (ou k-álgebras) ([3]), dando origem à noção de skew anel de grupo parcial o qual resulta ser uma generalização dos bem conhecidos skew anéis de grupo. Por este motivo, resulta natural estender ao caso parcial os resultados conhecidos do caso global. Neste sentido por exemplo, tem sido estudado o skew anel de grupo parcial em [8] e [12]; as extensões parciais Galoissianas em [4] e os skew anéis de polinômios parciais em [2]. Desta maneira o objetivo central deste trabalho é estender todos os resultados de [13] para o caso parcial.

Esta tese está dividida em três capítulos. No Capítulo I apresentamos uma revisão breve sobre os conceitos e definições que serão usados neste trabalho. Na Seção 1.2 fazemos um resumo dos principais resultados de [13], em particular apresentamos a construção do anel de G-quocientes de Martindale de T, onde T é um anel G-semiprimo (não necessariamente com unidade) e G é um grupo qualquer que age globalmente sobre T. Todos os resultados apresentados nesta parte provêm de [13], onde são provados mais geralmente para o produto cruzado de grupos abelianos. Na Seção 1.3 estendemos a construção de Malasquez ([13], Seção 1) para obter o anel de α-quocientes de Martindale de R, para R um anel α-semiprimo e G um grupo qualquer e estendemos a ação parcial a este anel de quocientes. Vamos supor neste trabalho que a ação parcial (R, α) possui uma ação envolvente (T, β). Obtemos assim o seguinte diagrama de extensões de anéis:

$$\begin{array}{ccccc} R & \hookrightarrow & T & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ \mathcal{Q} & \hookrightarrow & E & \hookrightarrow & Q \end{array}$$

Onde (T, β) é a envolvente de (R, α), (E, β) é a envolvente de $(\mathcal{Q}, \alpha)$, $\mathcal{Q}$ é o anel de α-quocientes de Martindale de R e Q é o anel de G-quocientes de Martindale de T. Finalmente provamos que (Q, β) é a envolvente de $(\mathcal{Q}, \alpha)$ (ou equivalentemente $E = Q$) se e somente se T é um anel com unidade 1_T (Proposição 1.3.11).

Todos os resultados de [13] para ações globais são estendidos para ações parciais nos Capítulos 2 e 3.

A partir do Capítulo 2 assumimos que o grupo G que age parcialmente sobre R é abeliano e que R é um anel α-primo. Sendo (T,β) a ação envolvente de (R,α) com T um anel G-primo, temos que todos os resultados de [13] são aplicáveis ao skew anel de grupo $T\star_\beta G$ extensão do anel $R\star_\alpha G$. Este capítulo está dividido em duas seções, na primeira parte caracterizamos completamente a minimalidade de qualquer ideal T-disjunto de $T\star_\beta G$ em termos da minimalidade de sua interseção com $R\star_\alpha G$ (Lema 2.1.2). Também apresentamos um método para levantar ideais R-disjuntos de $R\star_\alpha G$ a ideais T-disjuntos de $T\star_\beta G$ assim como ideais fechados (Lema 2.1.4). Este método é usado para provar as propriedades do fecho em R de ideais R-disjuntos de $R\star_\alpha G$ (Lemas 2.1.5 e 2.1.8, Teorema 2.1.6 e Corolário 2.1.7), estendendo assim para o caso parcial todos os resultados da Seção 2 de [13].

Na segunda parte, provamos que existe uma correspondência bijetiva entre todos os ideais R-disjuntos fechados (em particular primos) de $R\star_\alpha G$ e todos os ideais T-disjuntos fechados (em particular primos) de $T\star_\beta G$. Esta correspondência para R um anel α-primo e G abeliano, estende a correspondência entre primos provada em [8] (Proposição 5.1). Além disso, estendemos a técnica usada em [13] (Seção 3) para provar que existe uma correspondência bijetiva entre todos os ideais R-disjuntos fechados (em particular primos) de $R\star_\alpha G$ e todos os ideais $\mathcal{Q}$-disjuntos fechados (em particular primos) de $\mathcal{Q}\star_\alpha G$.

Em resumo, provamos que existe uma correspondência bijetiva entre os ideais disjuntos fechados (em particular primos) de todos os anéis do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
R\star_\alpha G & \hookrightarrow & T\star_\beta G & & \\
\downarrow & & \downarrow & \searrow & \\
\mathcal{Q}\star_\alpha G & \hookrightarrow & E\star_\beta G & \hookrightarrow & Q\star_\beta G
\end{array}$$

Onde (T, β) é a envolvente de (R, α), (E, β) é a envolvente de $(\mathcal{Q}, \alpha)$, $\mathcal{Q}$ é o anel de α-quocientes de Martindale de R e Q é o anel de G-quocientes de Martindale de T.

No Capítulo 3 usamos a correspondência entre fechados e primos do Capítulo 2 para estudar algumas classes de ideais primos de $R \star_\alpha G$ como ideais fortemente primos e primos não singulares (Seções 3.1 e 3.2). Estendemos assim todos os resultados da Seção 3 de [13]. Na última seção provamos a correspondência entre ideais R-disjuntos fechados (em particular primos) de $R\langle x;\alpha\rangle$ e ideais T-disjuntos fechados (em particular primos) de $T\langle x;\sigma\rangle$ (Teorema 2.2.1), usando uma noção mais natural de minimalidade para polinômios. Além disso, provamos que cada ideal fechado de $R\langle x;\alpha\rangle$ (em particular primo) corresponde à interseção de um ideal principal de $\mathcal{Q}\langle x;\alpha\rangle$ com $R\langle x;\alpha\rangle$ (Teorema 3.3.4), o qual estende o resultado análogo para skew anéis de polinômios de Laurent ([1]).

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Ações Parciais

Antes de definir uma ação parcial devemos lembrar alguns resultados sobre ações globais. Consideramos uma k-álgebra T (não necessariamente com unidade), k um anel comutativo e G um grupo que age sobre T por automorfismos. Esta ação será denotada por (T, β), onde $\beta = \{\beta_g : T \to T \mid g \in G\}$, ou simplesmente por β. Um ideal I de T é dito G-invariante ($I \lhd_G T$), se $\beta_g(I) \subseteq I$ para todo $g \in G$. Sendo G um grupo, é imediato que se $I \lhd_G T$ então $\beta_g(I) = I$ para todo $g \in G$. Um ideal G-invariante I de T é dito G-primo se para quaisquer ideais G-invariantes A, B de T, a inclusão $AB \subseteq I$ implica que $A \subseteq I$ ou $B \subseteq I$. E é dito G-semiprimo se para qualquer ideal G-invariante A de R, a condição $A^2 \subseteq I$ implica $A \subseteq I$. O anel T é dito G-primo (G-semiprimo) se o ideal nulo é G-primo (G-semiprimo).

O skew anel de grupo (global) de uma ação global (T, β), denotado por $T \star_\beta G$, é definido como sendo um T-módulo livre à esquerda com base $\{\delta_g \mid g \in G\}$; isto é,

$$T \star_{\beta} G = \left\{ \sum_{g \in G} t_g \delta_g \mid t_g \in T, \text{ e } t_g \neq 0, \text{ para uma quantidade finita de } g \in G \right\}$$

A adição em $T \star_{\beta} G$ é definida de forma natural e o produto definido por: $(a\delta_g)(b\delta_h) = a\beta_g(b)\delta_{gh}$, para todo $a, b \in T$ e todo $g, h \in G$.

Para definir a noção de ação parcial, consideramos R um anel com unidade 1_R e G um grupo qualquer (ou equivalentemente uma k-álgebra unitária R, onde k é um anel comutativo). Começamos com a definição de ação parcial do grupo G sobre o anel R. Mais detalhes sobre este tópico podem ser consultados na referência [3].

Definição 1.1.1 *Sejam G um grupo com elemento neutro 1 e R uma k-álgebra. Uma ação parcial α de G sobre R, é uma coleção de ideais S_g de R, com $g \in G$, e isomorfismos $\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g$, tais que para todo $g, h \in G$ valem:*

(i) $S_1 = R$ *e* α_1 *é a aplicação identidade de* R.

(ii) $S_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}})$.

(iii) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, *para todo* $x \in \alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}})$.

As condições (ii) e (iii) estabelecem que a aplicação α_{gh} é uma extensão da aplicação $\alpha_g \circ \alpha_h$ e que $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$, para todo $g \in G$.

As condições $(i) - (iii)$ são equivalentes às seguintes três condições:

(i') $S_1 = R$ e α_1 é a aplicação identidade de R.

(ii') $S_g \cap S_{gh} = \alpha_g(S_{g^{-1}} \cap S_h)$.

(iii') $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$ para todo $x \in \alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}})$.

Uma ação parcial $\alpha = \{(S_g, \alpha_g) \mid g \in G\}$, do grupo G sobre o anel R será denotada por α ou (R, α).

Neste trabalho assumimos também que cada S_g $(g \in G)$ é gerado por um idempotente central 1_g. Portanto, cada S_g é um subanel com identidade 1_g, $S_g = R1_g = 1_gR$ e $S_g \cap S_h = 1_g1_hR$ para todo $g, h \in G$.

Dada uma ação parcial α do grupo G sobre o anel R, dizemos que o ideal I de R é α-invariante ($I \lhd_\alpha R$) se $\alpha_g(I \cap S_{g^{-1}}) \subseteq I \cap S_g$ para todo $g \in G$. Sendo G um grupo é imediato que $\alpha_g(I \cap S_{g^{-1}}) = I \cap S_g$ para todo $g \in G$. Um ideal α-invariante I de R é dito α-primo se para quaisquer ideais α-invariantes A, B de R a inclusão $AB \subseteq I$ implica que $A \subseteq I$ ou $B \subseteq I$. E é dito α-semiprimo, se para qualquer ideal α-invariante A de R a condição $A^2 \subseteq I$ implica $A \subseteq I$.

A continuação definimos o conceito de equivalência entre duas ações globais, assim como a noção de envolvente de uma ação parcial (R, α).

Definição 1.1.2 *Duas ações globais (T, β) e (T', β') do grupo G sobre as k-álgebras T e T' são equivalentes, se existe um isomorfismo de k-álgebras $\phi : T \to T'$ tal que $\beta'_g \circ \phi = \phi \circ \beta_g$ para cada $g \in G$.*

Definição 1.1.3 *([3], Definição 4.2) Uma ação (global) β de um grupo G sobre uma k-álgebra T é dita uma envolvente da ação parcial α de G sobre uma k-álgebra R, se existe um isomorfismo de álgebras φ de R sobre um ideal de T, tal que para todo $g \in G$, valem:*

1. $\varphi(S_g) = \varphi(R) \cap \beta_g(\varphi(R))$.

2. $\varphi \circ \alpha_g(x) = \beta_g \circ \varphi(x)$ *para todo* $x \in S_{g^{-1}}$.

3. *T é gerada por* $\bigcup_{g \in G} \beta_g(\varphi(R))$.

Notemos que se (T, β) é a ação envolvente da ação parcial (R, α), então identificando o anel R com o ideal $\varphi(R)$ de T obtemos:

1. $S_g = R \cap \beta_g(R)$.

2. $\alpha_g = \beta_g \mid_{S_{g^{-1}}}$.

3. $T = \sum\limits_{g \in G} \beta_g(R)$.

A existência de uma unidade em cada S_g é condição necessária e suficiente para a existência e unicidade da envolvente, como mostra o próximo resultado.

Teorema 1.1.4 *([3], Teorema 4.5) Seja R um anel com unidade. Então, uma ação parcial α de um grupo G sobre R possui uma ação global envolvente β, se e somente se, cada ideal S_g $(g \in G)$ é um anel com unidade. Além disso, se β existe, ela é única a menos de equivalências.*

Exemplo 1.1.5 Seja G um grupo que age (globalmente) sobre um anel T e R um ideal de T. Tomando $S_g = R \cap \beta_g(R)$ para todo $g \in G$ e definindo $\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g$, como a restrição de β_g em $S_{g^{-1}}$, temos que α é uma ação parcial de G sobre R. Se R é um ideal gerado por um idempotente central distinto da unidade de T, então cada S_g tem unidade e α é uma ação parcial, que tem envolvente contida em T. Se R não é G-invariante, então α não é global sobre R.

Observemos que se o grupo G é infinito, então o anel T não necessariamente tem unidade, mas todo elemento de T tem uma unidade local. Como estamos considerando cada S_g com unidade (denotada 1_g), então pelo item 1 da Definição 1.1.3 e identificando R com o ideal $\varphi(R)$ de T, temos que $1_g = \beta_g(1_R)1_R$ para todo $g \in G$.

O skew anel de grupo parcial correspondente a α, e denotado por $R \star_\alpha G$, se define como o conjunto de todas as somas formais finitas $\sum_{g \in G} a_g \delta_g$, onde $a_g \in S_g$ para todo

$g \in G$ e os δ_g são símbolos. A adição é definida pontualmente e o produto é dado pela seguinte regra:

$$(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}\left(a_g\right)b_h\right)\delta_{gh} = a_g\alpha_g(b_h 1_{g^{-1}})\delta_{gh}.$$

Como neste trabalho estamos considerando ações parciais onde cada S_g $(g \in G)$ é gerado por um idempotente central, então o Teorema 1.1.4 garante a existência de uma ação envolvente (T, β) para a ação parcial (R, α). Assim, pelo seguinte resultado temos que o skew anel de grupo parcial $R \star_\alpha G$ é um anel associativo.

Teorema 1.1.6 *([3], Proposição 4.3) Se (T, β) é uma ação envolvente da ação parcial (R, α), então o skew anel de grupo parcial $R \star_\alpha G$ está mergulhado em $T \star_\beta G$. Em particular, $R \star_\alpha G$ é associativo.*

Devemos notar que, em geral, o skew anel de grupo parcial $R \star_\alpha G$ não é associativo como mostra o Exemplo 3.5 de [3].

No caso particular em que G é o grupo cíclico infinito gerado por σ e α é uma ação parcial de G sobre R, o skew anel de grupo parcial $R \star_\alpha G$ pode ser identificado com o conjunto de todas as somas finitas $\sum_{i=-n}^{m} a_i x^i$, onde $a_i \in S_{\sigma^i}$ para qualquer inteiro i. Neste caso o anel $R \star_\alpha G$ é denotado por $R\langle x; \alpha\rangle$ e se (T, β) é a envolvente de (R, α), então o skew anel de grupo $T \star_\beta G$ corresponde ao skew anel de polinômios de Laurent $T\langle x; \sigma\rangle$. Sendo $R\langle x; \alpha\rangle$ um subanel de $T\langle x; \sigma\rangle$, $R\langle x; \alpha\rangle$ é chamado skew anel de polinômios de Laurent parcial. Mais detalhes sobre este tipo de polinômios se encontra na referência [2].

1.2 Ideais Fechados e Primos em Skew Anéis de Grupos Abelianos

Nesta seção T denota um anel (não necessariamente com unidade) e G um grupo abeliano que age globalmente sobre T. Todos os resultados apresentados aqui provêm de [13], onde são provados mais geralmente, para o caso de produto cruzado de grupos abelianos. Embora nesse artigo se assume que o anel T é unitário, todos os resultados são válidos se T não tem unidade, pois T pode ser mergulhado num anel com unidade T^1 e cada automorfismo de T pode ser extendido naturalmente a T^1. Todos os resultados apresentados nesta seção serão estendidos para ações parciais no Capítulo 2. A construção do anel de G-quocientes para anéis G-semiprimos da próxima subseção, será estendida para anéis α-semiprimos na Seção 1.3.

1.2.1 O Anel de G-quocientes de T

Nesta subseção apresentamos brevemente a construção do anel de G-quocientes à esquerda de Martindale Q de T quando T é G-semiprimo (Seção 1 de [13]). Além disso, mostramos que a ação global se estende naturalmente a Q o qual permite construir o skew anel de grupo $Q \star_\beta G$, extensão do anel $T \star_\beta G$.

Assumimos que o grupo G (não necessariamente abeliano) age sobre T e que T é um anel G-semiprimo.

Se I é um ideal G-invariante de T, facilmente vemos que o anulador à esquerda e o anulador à direita de I são ideais G-invariantes de T. Além disso, esses anuladores coincidem e a classe de ideais G-invariantes de T é fechada para interseções e produtos.

Seja $\mathscr{F}(T) = \{H \triangleleft_G T \mid An(H) = 0\}$. Temos que se $H, J \in \mathscr{F}(T)$, então $H \cap J \in \mathscr{F}(T)$ e $HJ \in \mathscr{F}(T)$. Ou seja a coleção $\mathscr{F}(T)$ é um filtro.

Dado $U \in \mathscr{F}(T)$, a aplicação $f: {}_TU \to {}_TT$ denotará um homomorfismo de T-módulos à esquerda e esta aplicação agirá pela direita sobre os elementos de U, isto é, $(u)f$ para todo $u \in U$ denota f aplicado a u.

Seja $\mathscr{U} = \{(U, f) \mid U \in \mathscr{F}(T) \text{ e } f: {}_TU \to {}_TT\}$. Se para $(U, f), (V, g) \in \mathscr{U}$ definimos $(U, f) \sim (V, g)$, se e somente se, $f\mid_{U \cap V} = g\mid_{U \cap V}$, então a relação $\sim$ é de equivalência. Dado $(U, f) \in \mathscr{U}$, denotaremos por $[U, f]$ a classe de equivalência de (U, f).

O conjunto $\mathscr{U}/\sim = \{[A, f] \mid (A, f) \in \mathscr{U}\}$, com as operações $[A, f] + [B, g] = [A \cap B, f + g]$ e $[A, f].[B, g] = [BA, f \circ g]$ é um anel com unidade. Este anel é chamado anel de G-quocientes à esquerda de Martindale de T, denotado por Q. Note que a classe $[BA, f \circ g]$ está bem definida, pois sendo f e g homomorfismos de T-módulos à esquerda, temos que $(BA)(f \circ g) = (B(A)f)g$ com $B(A)f \subseteq B$.

As propriedades mais importantes do anel Q estão resumidas no seguinte lema. Note, em particular, que Q é uma extensão de T.

Lema 1.2.1 *([13], Lema 1.1) Seja T um anel G-semiprimo. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *T é um subanel de Q, via multiplicação à direita.*

2. *Se $(U, f) \in \mathscr{U}$, então para cada $u \in U$ tem-se $u_r \circ f = ((u)f)_r$, onde $(x)u_r = xu$ para todo $x \in T$.*

3. *Se $q = [U, f] \in Q$, então $(u)f = uq$ para todo $u \in U$. Em particular, $Uq \subseteq T$.*

4. *Para quaisquer $q_1, ..., q_n \in Q$, existe $U \in \mathscr{F}(T)$ tal que $Uq_i \subseteq T$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$.*

5. *Se $U \in \mathscr{F}(T)$ e $f: U \longrightarrow T$ é um homomorfismo de T-módulos à esquerda, então existe $q \in Q$ tal que $(u)f = uq$ para todo $u \in U$.*

6. Seja $q \in Q$ e $U \in \mathscr{F}(T)$. Se $Uq = 0$ ou $qU = 0$, então $q = 0$.

Seja β_g um automorfismo de T. Para $[I, f] \in Q$, a aplicação $[I, f] \mapsto [I, \beta_{g^{-1}} \circ f \circ \beta_g]$ define um automorfismo de Q que é a extensão de β_g. Este automorfismo também será denotado por β_g. Assim, podemos construir o skew anel de grupo $Q \star_\beta G$ extensão do anel $T \star_\beta G$.

1.2.2 Ideais Fechados de $T \star_\beta G$

Se P é um ideal primo de $T \star_\beta G$, então fatorando $P \cap T$ e $(P \cap T) \star_\beta G$ de T e $T \star_\beta G$ respectivamente, podemos assumir que P é T-disjunto e T é um anel G-primo. Além disso, assumimos que o grupo G é abeliano. Nesta primeira parte apresentamos algumas definições e notações que iremos usar mais adiante.

Seja $x = \sum_{g \in G} a_g \delta_g$ um elemento de $T \star_\beta G$. Para cada $h \in G$ se define o h-ésimo coeficiente à esquerda de x por $c_h^l(x) = a_h$. Como x pode ser representado de maneira única por coeficientes à direita, digamos $x = \sum_{g \in G} \delta_g b_g$, então se define o h-ésimo coeficiente à direita de x por $c_h^r(x) = b_h$. Portanto, $c_h^l(x) = \beta_h(c_h^r(x))$.

Para um elemento não nulo x de $T \star_\beta G$, se define seu suporte como $sup(x) = \{g \in G \mid c_g^l(x) \neq 0\}$. Como cada β_g é um automorfismo de T temos que $sup(x) = \{g \in G \mid c_g^r(x) \neq 0\}$.

Se I é um ideal T-disjunto de $T \star_\beta G$, um elemento não nulo $x \in I$ é dito de suporte minimal em I se a condição $y \in I$ e $sup(y) \subsetneqq sup(x)$ implica $y = 0$. Se definem $M(I) = \{x \in I \mid x \text{ tem suporte minimal em } I\}$ e $Min(I) = \{sup(x) \mid x \in M(I)\}$.

O conjunto $\Theta_{\Gamma,g}(I) = \{t \in T \mid \text{ existe } x \in I \text{ tal que } sup(x) = \Gamma \text{ e } c_g^l(x) = t\} \cup \{0\}$, onde $\Gamma \in Min(I)$ e $g \in \Gamma$, é um ideal G-invariante não nulo de T.

Para cada ideal T-disjunto I de $T \star_\beta G$, se define o fecho de I por:

$$[I]_T = \{x \in T \star_\beta G \mid \text{ existe } H \in \mathscr{F}(T) \text{ tal que } Hx \subseteq I\}$$

Um ideal T-disjunto I de $T \star_\beta G$ é dito fechado se $I = [I]_T$. Se prova então que $[I]_T$ é um ideal T-disjunto de $T \star_\beta G$, $I \subseteq [I]_T$ e $Min(I) = Min([I]_T)$ ([13], Lema 2.1). O seguinte teorema apresenta duas caracterizações do fecho de I. A extensão deste teorema para ações parciais será dada no Teorema 2.1.6 do Capítulo 2.

Teorema 1.2.2 *([13], Teorema 2.2) Se I é um ideal T-disjunto de $T \star_\beta G$, então:*

1. *$[I]_T$ é o maior ideal T-disjunto J de $T \star_\beta G$, tal que $I \subseteq J$ e $Min(I) = Min(J)$.*

2. *$[I]_T$ é o menor ideal fechado de $T \star_\beta G$, tal que $I \subseteq [I]_T$.*

Como consequência do teorema anterior, temos que $[I]_T$ é o único ideal fechado de $T \star_\beta G$, tal que $I \subseteq [I]_T$ e $Min(I) = Min([I]_T)$ ([13], Corolário 2.3).

A classe de ideais fechados é ampla, pois facilmente se deduz que todo ideal primo T-disjunto de $T \star_\beta G$ é fechado ([13], Lema 2.4). Assim, resulta natural estender a ideais fechados resultados conhecidos para ideais primos.

1.2.3 Correspondência Entre os Ideais Fechados de $T \star_\beta G$ e $Q \star_\beta G$

Nesta subseção seguimos considerando T um anel G-primo e G um grupo abeliano. Vamos apresentar uma correspondência bijetiva, que preserva ideais primos, entre os ideais T-disjuntos fechados de $T \star_\beta G$ e os ideais Q-disjuntos fechados de $Q \star_\beta G$, onde Q denota o anel de G-quocientes de T.

Começamos lembrando que se I é um ideal T-disjunto não nulo de $T \star_\beta G$, então para cada $\Gamma \in Min(I)$ e cada $g \in \Gamma$ existe um único elemento $\mu = \mu_{\Gamma,g} \in Q \star_\beta G$, tal que, $sup(\mu) = \Gamma$, $c_g^l(\mu) = 1_Q$ e $x = c_g^l(x)\mu = \mu c_g^r(x)$ para todo $x \in I$ com $sup(x) = \Gamma$. Além disso, $\mu q = \beta_g(q)\mu$ e $\mu\delta_f = \delta_f\mu$ para todo $q \in Q$ e $f \in G$ ([13], Lema 3.1).

Pelo anterior, para cada ideal T-disjunto I de $T \star_\beta G$, se define $M_Q(I)$ como o conjunto dos elementos $\mu = \mu_{\Gamma,g}$, onde $\Gamma \in Min(I)$ e $g \in \Gamma$. Assumimos que $M_Q(\{0\}) = \varnothing$. Observemos que como consequência do dito acima, temos que para cada $\mu \in M_Q(I)$ existe $J \in \mathscr{F}(T)$ tal que $J\mu = \mu J \subseteq I$. Também é claro que $Q\mu = \mu Q$ e $(Q \star_\beta G)\mu = \mu(Q \star_\beta G)$.

As seguintes proposições caracterizam o fecho dos ideais Q-disjuntos de $Q \star_\beta G$ e dos ideais T-disjuntos de $T \star_\beta G$. As versões para o caso parcial destas proposições são as Proposições 2.2.8 e 2.2.9 do Capítulo 2.

Proposição 1.2.3 *([13], Proposição 3.5) Seja I um ideal não nulo e Q-disjunto de $Q \star_\beta G$. Então, $[I]_Q = (Q \star_\beta G)M_Q(I_0)$, onde $I_0 = I \cap (T \star_\beta G)$.*

Proposição 1.2.4 *([13], Proposição 3.6) Seja I um ideal não nulo e T-disjunto de $T \star_\beta G$. Então, $[I]_T = (Q \star_\beta G)M_Q(I) \cap (T \star_\beta G)$.*

Finalmente temos os dois teoremas principais, a correspondência biunívoca entre todos os ideais T-disjuntos fechados (e primos T-disjuntos) de $T \star_\beta G$ e todos os ideais Q-disjuntos fechados (e primos Q-disjuntos) de $Q \star_\beta G$. A extensão destes teoremas para o caso parcial se encontra nos Teoremas 2.2.10 e 2.2.12 do Capítulo 2.

Teorema 1.2.5 *(Teorema 3.7 de [13]) Seja T um anel G-primo. Então, existe uma correspondência bijetiva entre $\mathscr{C}(T \star_\beta G) = \{I \lhd T \star_\beta G \mid I \text{ é } T-\text{disjunto fechado}\}$ e $\mathscr{C}(Q \star_\beta G) = \{I^\star \lhd Q \star_\beta G \mid I^\star \text{ é } Q-\text{disjunto fechado}\}$. Esta correspondência associa o ideal $I \in \mathscr{C}(T \star_\beta G)$ com o ideal $I^\star \in \mathscr{C}(Q \star_\beta G)$ se $I^\star \cap (T \star_\beta G) = I$ e $I^\star = (Q \star_\beta G)M_Q(I)$.*

Teorema 1.2.6 *(Teorema 3.9 de [13]) Seja T um anel G-primo. A correspondência do teorema anterior induz uma correspondência bijetiva entre* $\mathscr{P}(T\star_\beta G) = \{P \lhd T\star_\beta G \mid P \text{ é primo } T-disjunto\}$ *e* $\mathscr{P}(Q\star_\beta G) = \{P^\star \lhd Q\star_\beta G \mid P^\star \text{ é primo } Q-disjunto\}$.

O método aplicado aqui é uma extensão do método aplicado em [7]. Alí se obtiveram resultados similares para $S = R[E]$ extensão livre centralizante de R e $Q[E]$, onde Q é o anel de quocientes maximal de R, sendo R um anel primo. Além disso, aplicaram-se estes resultados para o estudo de varios tipos de ideais primos como fortemente primos e primos não singulares. Resultados análogos foram obtidos no caso particular do skew anel de polinômios de Laurent $R\langle x;\sigma\rangle$ em [1]. Todos os resultados obtidos para ideais fortemente primos e para ideais primos não singulares, também foram estendidos em [13]. Como nosso objetivo é estender esses resultados para o caso parcial no Capítulo 3, vamos agora lembrar as definições correspondentes a estes tipos de ideais.

Sejam I e P ideais de T tais que $I \nsubseteq P$. Um insulador (à esquerda) módulo P em I, é um subconjunto finito F de I satisfazendo a condição: para todo $t \in T$ tal que $tF \subseteq P$ implica $t \in P$. Note que esta definição é equivalente a considerar ideais I e P de T tais que $P \subsetneqq I$ e satisfazendo a mesma condição de cima.

Um ideal P de T é dito fortemente primo (à esquerda), se todo ideal I de T tal que $I \nsubseteq P$, tem um insulador módulo P. O anel T é dito fortemente primo (à esquerda), se o ideal nulo é um ideal fortemente primo (à esquerda).

Analogamente, um ideal G-invariante H de T é dito G-fortemente primo (à esquerda), se todo ideal G-invariante I de T tal que $I \nsubseteq H$ tem um insulador (à esquerda) módulo H. O anel T é dito G-fortemente primo (à esquerda), se o ideal nulo é G-fortemente primo (à esquerda).

Lembramos que um ideal à esquerda J de T é dito essencial se para todo ideal à esquerda não nulo I de T tem-se $J \cap I \neq 0$. Para um T-módulo à esquerda M, se define o submódulo singular de M como $Z_l({}_TM) = \{m \in M \mid An_l(m) \text{ é essencial}\}$, onde $An_l(m)$ é o anulador à esquerda de m em T. Considerando T como um T-módulo, temos que $Z_l({}_TT)$ é um ideal de T denotado por $Z_l(T)$ e chamado o ideal singular à esquerda de T.

O anel T é dito não singular à esquerda se $Z_l(T) = 0$. Um ideal P de T é dito não singular à esquerda se o anel T/P é não singular.

1.3 O Anel de α-quocientes de R

Nesta seção apresentamos a construção do anel de α-quocientes à esquerda de Martindale $\mathcal{Q}$ de R, usando ideais α-invariantes. Conseguimos assim, estender a construção feita para ações globais na subseção 1.2.1. Além disso, estendemos a ação parcial a $\mathcal{Q}$ o qual permitirá construir o skew anel de grupo parcial $\mathcal{Q} \star_\alpha G$, extensão do anel $R \star_\alpha G$.

Assumimos que α é uma ação parcial de um grupo arbitrário G sobre R e que R é um anel α-semiprimo. Começamos provando que os anuladores à esquerda e à direita de um ideal α-invariante coincidem e que a classe de ideais α-invariantes de R é fechada para interseções e produtos.

Lema 1.3.1 *Seja R um anel α-semiprimo e H um ideal α-invariante de R. Então, as seguintes afirmações são válidas:*

1. *$An_l(H)$ e $An_r(H)$ são ideais α-invariantes de R.*

2. *$An_l(H) = An_r(H)$.*

Prova. 1. Sejam $g \in G$, $x \in An_l(H) \cap S_{g^{-1}}$ e $h \in H$. Então, $\alpha_g(x)h = \alpha_g(x)1_g h = \alpha_g(x)\alpha_g(h')$ para algum $h' \in H \cap S_{g^{-1}}$. Assim, temos que $\alpha_g(x)h = \alpha_g(xh') = 0$. Portanto, $\alpha_g(x) \in An_l(H) \cap S_g$. A segunda parte é análoga.

2. Como $An_l(H)H = 0$, temos que $[HAn_l(H)]^2 = 0$. Como R é α-semiprimo e $HAn_l(H)$ é α-invariante, segue que $HAn_l(H) = 0$ e assim $An_l(H) \subseteq An_r(H)$. Analogamente tem-se a outra inclusão. ■

Daqui em diante, $An(H)$ denotará o ideal $An_l(H) = An_r(H)$ para H um ideal α-invariante de R.

Lema 1.3.2 *Seja $\mathscr{F}(R) = \{H \lhd_\alpha R \mid An(H) = 0\}$. Se $H, J \in \mathscr{F}(R)$, então $H \cap J \in \mathscr{F}(R)$ e $HJ \in \mathscr{F}(R)$.*

Prova. É claro que $H \cap J$ e HJ são ideais α -invariantes de R. Como $An(H \cap J) \subseteq An(HJ)$, basta ver que $An(HJ) = 0$. Se $x \in R$ é tal que $x(HJ) = 0$, então $(xH)J = 0$ e assim $xH \subseteq An(J) = 0$. Logo, $xH = 0$ e temos que $x \in An(H) = 0$. Portanto, $An(HJ) = 0$. ■

Assim como no caso global, dado $U \in \mathscr{F}(R)$ e o homomorfismo de R-módulos à esquerda $f : {}_RU \to {}_RR$, $(u)f$ denotará f aplicado a u para todo $u \in U$.

Seja $\mathscr{T} = \{(U, f) \mid U \in \mathscr{F}(R) \text{ e } f : {}_RU \to {}_RR\}$. Sobre o conjunto $\mathscr{T}$ definimos a seguinte relação: $(U, f) \sim (V, g)$, se e somente se, $f \mid_{U \cap V} = g \mid_{U \cap V}$. Note que $U \cap V \in \mathscr{F}(R)$.

Lema 1.3.3 *Seja $A \in \mathscr{F}(R)$ e C um ideal à esquerda de R contendo A. Se $f \mid_A = g \mid_A$ para $f, g \in Hom_R({}_RC, {}_RR)$, então $f = g$.*

Prova. Para todo $a \in A$ e todo $c \in C$, temos que $a(c)f = (ac)f = (ac)g = a(c)g$. Portanto $a[(c)f - (c)g] = 0$, assim $(c)f - (c)g \in An(A)$ e o resultado segue. ■

A relação $\sim$ acima definida é claramente reflexiva e simétrica. E se $(U, f) \sim (V, g)$ e $(V, g) \sim (W, h)$, então $f\ |_{U\cap V} = g\ |_{U\cap V}$ e $g\ |_{V\cap W} = h\ |_{V\cap W}$. Assim, usando o Lema 1.3.3, temos que $f\ |_{U\cap W} = h\ |_{U\cap W}$. Logo, $\sim$ é uma relação de equivalência. Dado $(U, f) \in \mathscr{T}$, denotaremos por $[U, f]$ a classe de equivalência de (U, f).

Proposição 1.3.4 *O conjunto $\mathscr{T}/\sim = \{[A, f] \mid (A, f) \in \mathscr{T}\}$ com as operações:*

$$[A, f] + [B, g] = [A \cap B, f + g]$$

$$[A, f].[B, g] = [BA, f \circ g].$$

É um anel com unidade 1_R, chamado anel de α-quocientes à esquerda de Martindale de R, denotado por $\mathcal{Q}$.

Prova. Notemos primeiro que a classe $[BA, f \circ g]$ está bem definida, pois sendo f e g homomorfismos de R-módulos à esquerda, temos que $(BA)(f \circ g) = (B(A)f)g$ com $B(A)f \subseteq B$. Vamos provar então que as operações estão bem definidas. Sejam $[A, f] = [A', f']$ e $[B, g] = [B', g']$ em $\mathcal{Q}$. Então, $f\ |_{A\cap A'} = f'\ |_{A\cap A'}$ e $g\ |_{B\cap B'} = g'\ |_{B\cap B'}$. Se $a \in A \cap A' \cap B \cap B'$, então $(a)(f + g) = (a)f + (a)g = (a)f' + (a)g' = (a)(f' + g')$. Logo, $[A \cap B, f + g] = [A' \cap B', f' + g']$.

Se $a \in BA \cap B'A'$, então $a \in A \cap A'$ e $(a)f = (a)f'$. Além disso, $(a)f$ e $(a)f' \in B \cap B'$. Portanto, $(a)(f \circ g) = ((a)f)g = ((a)f')g = ((a)f')g' = (a)(f' \circ g')$. Segue que $[A, f][B, g] = [A', f'][B', g']$.

O resto da prova segue fácilmente como nos casos clássicos (ver [11], [15]). ■

A seguinte proposição é uma extensão para o caso parcial da Proposição 1.2.1. Nela mostramos algumas propriedades do anel $\mathcal{Q}$, em particular que é uma extensão de R.

Proposição 1.3.5 *Seja R um anel α-semiprimo. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *R é um subanel de $\mathcal{Q}$, via multiplicação à direita.*

2. *Se $(U, f) \in \mathscr{T}$, então para cada $u \in U$ tem-se $u_r \circ f = [(u)f]_r$, onde $(x)u_r = xu$ para todo $x \in R$.*

3. *Se $q = [U, f] \in \mathcal{Q}$ então $(u)f = uq$ para todo $u \in U$. Em particular, $Uq \subseteq R$.*

4. *Para quaisquer $q_1, ..., q_n \in \mathcal{Q}$, existe $U \in \mathscr{F}(R)$ tal que $Uq_i \subseteq R$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$.*

5. *Se $U \in \mathscr{F}(R)$ e $f : U \longrightarrow R$ é um homomorfismo de $R-$módulos à esquerda, então existe $q \in \mathcal{Q}$ tal que $(u)f = uq$ para todo $u \in U$.*

6. *Seja $q \in \mathcal{Q}$ e $U \in \mathscr{F}(R)$. Se $Uq = 0$ ou $qU = 0$, então $q = 0$.*

Prova. 1. Basta considerar a função $\varphi : R \longrightarrow \mathcal{Q}$ definida por $\varphi(a) = [R, a_r]$, onde $(s)a_r = sa$ para todo $s \in R$. Temos que φ é um homomorfismo de anéis porque para todo $a, b \in R$, $(a+b)_r = a_r + b_r$ e $(s)(ab)_r = s(ab) = (sa)b_r = ((s)a_r)b_r = (s)(a_r \circ b_r)$, isto é, $(ab)_r = a_r \circ b_r$. Finalmente, se $[R, a_r] = 0$ para algum $a \in R$, segue-se que $sa = 0$ para todo $s \in R$, em particular $a = 1_R a = 0$. Logo $Ker\ \varphi = 0$. Daqui em diante identificaremos o anel R com o subanel $\varphi(R)$ de $\mathcal{Q}$.

2. Para cada $u \in U$ e $x \in R$, temos que $(x)(u_r \circ f) = ((x)u_r)f = (xu)f = x(u)f = (x)((u)f)_r$.

3. Para cada $u \in U$, temos que $uq = u_r q = [R, u_r][U, f] = [U, ((u)f)_r] = [R, ((u)f)_r] = (u)f$.

4. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ consideramos $U_i \in \mathscr{F}(R)$, tal que $U_i q_i \subseteq R$. Então, tomando $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ o resultado segue.

5. Basta tomar $q = [U, f]$ e aplicar o item 3.

6. Se $q = [V, f]$, então $(U \cap V)q = 0$. Para cada $s \in U \cap V$ temos que $0 = sq = (s)f$. Portanto, $q = [V, f] = [U \cap V, f \mid_{U \cap V}] = [U \cap V, 0] = [R, 0] = 0$. Se $qU = 0$, então pelo item 4 existe $U_0 \in \mathscr{F}(R)$, tal que $U_0 q \subseteq R$. Assim, $U_0 qU = 0$ e portanto $U_0 q \subseteq An(U) = 0$. Logo temos que $U_0 q = 0$ o qual implica que $q = 0$. ■

O conjunto dos elementos $q \in \mathcal{Q}$, tais que $qr = rq$ para todo $r \in R$ é denominado *centralizador* de R em $\mathcal{Q}$ e é denotado por $C_{\mathcal{Q}}(R)$. O centro de $\mathcal{Q}$ é o conjunto $Z(\mathcal{Q}) = \{q \in \mathcal{Q} \mid qp = pq \text{ para todo } p \in \mathcal{Q}\}$. A seguinte proposição mostra que de fato estes dois conjuntos são iguais.

Proposição 1.3.6 *Seja R um anel α-semiprimo e $q = [U, f] \in \mathcal{Q}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $q \in Z(\mathcal{Q})$.

2. f é homomorfismo de $R-$bimódulos.

3. $q \in C_{\mathcal{Q}}(R)$.

Prova. $1 \Rightarrow 3$. É imediato.

$3 \Rightarrow 2$. Pelo item 3 da Proposição 1.3.5, temos que $sq = (s)f$ para todo $s \in U$. Se $r \in R$, então $(sr)f = (sr)q = s(rq) = s(qr) = (sq)r = (s)fr$.

$2 \Rightarrow 1$. Seja $p = [V, g]$. Se $x \in UV \cap VU$, então podemos supor $x = uv$. Assim, $(uv)(g \circ f) = (u(v)g)f = (u)f(v)g = ((u)fv)g = ((uv)f)g = (uv)(f \circ g)$. Portanto, $g \circ f \mid_{UV \cap VU} = f \circ g \mid_{UV \cap VU}$ e temos que $[UV, g \circ f] = [VU, f \circ g]$, isto é, $pq = qp$. ■

Lembremos que no caso global, para T um anel G-semiprimo, a ação do grupo G pode ser estendida ao anel de G-quocientes de T (Subseção 1.2.1). Como já construímos o anel de α-quocientes de R, nosso objetivo a seguir será estender a ação parcial de G sobre R a uma ação parcial sobre $\mathcal{Q}$, a qual será também denotada por α.

Teorema 1.3.7 *Seja R um anel α-semiprimo. Para cada ideal S_g $(g \in G)$ de R, seja*

$$S_g^\star = \{q \in \mathcal{Q} \mid \text{ existe } H \in \mathscr{F}(R) \text{ tal que } Hq \subseteq S_g\}.$$

Então, as seguintes afirmações são válidas:

1. *Cada $S_g^\star$ é um ideal de $\mathcal{Q}$, gerado por um idempotente central.*

2. *A função $\alpha_g^\star : S_{g^{-1}}^\star \longrightarrow S_g^\star$, definida como $\alpha_g^\star(q) = [H, f_{g,q}]$, onde $H \in \mathscr{F}(R)$ é tal que $Hq \subseteq S_{g^{-1}}$ e para cada $h \in H$, $(h)f_{g,q} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(h1_g)q)$, é um isomorfismo de anéis.*

3. *$\alpha = \{(S_g^\star, \alpha_g^\star) \mid g \in G\}$ define uma ação parcial do grupo G sobre o anel $\mathcal{Q}$.*

Prova. 1. Se $q \in S_g^\star$ e $p \in \mathcal{Q}$, então existem $H, J \in \mathscr{F}(R)$ tais que $Hq \subseteq S_g$ e $Jp \subseteq R$. Portanto, $(HJ)pq \subseteq H(Jp)q \subseteq Hq \subseteq S_g$ e assim $pq \in S_g^\star$. Temos também $(JH)qp \subseteq JS_gp = S_gJp \subseteq S_g$, logo $qp \in S_g$.

Como 1_g é um idempotente central de R, então também é um idempotente central de $\mathcal{Q}$. Dado $q \in \mathcal{Q}$, temos que existe $H \in \mathscr{F}(R)$ tal que $Hq \subseteq R$, assim $Hq1_g \subseteq S_g$ e $q1_g = 1_gq \in S_g^\star$. Se $p \in S_g^\star$, então $Jp \subseteq S_g$ para algum $J \in \mathscr{F}(R)$. Logo, para todo $j \in J$ temos que $jp1_g = jp$ o qual implica que $J(p1_g - p) = 0$. Assim obtemos que $p1_g = p$.

2. Primeiro devemos ver que $\alpha_g^\star$ está bem definida para cada $g \in G$. Sejam $p = [U, h]$ e $q = [V, j] \in S_{g^{-1}}^\star$, tais que, $p = q$. Para $a \in U \cap V$ temos que $(a)f_{g,p} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a1_g)p) = \alpha_g((\alpha_{g^{-1}}(a1_g))\,h) = \alpha_g((\alpha_{g^{-1}}(a1_g))\,j) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a1_g)q) = (a)f_{g,q}$. Logo, $[U, f_{g,p}] = [V, f_{g,q}]$ e assim $\alpha_g^\star(p) = \alpha_g^\star(q)$. Além disso, $f_{g,p}$ é um homomorfismo de R-módulos à esquerda para todo $g \in G$ e todo $p = [U, h] \in S_{g^{-1}}^\star$. De fato, para todo $r \in R$ e $u \in U$, temos que $(ru)f_{g,p} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(ru1_g)p) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(r1_g)\alpha_{g^{-1}}(u1_g)p) = r\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u1_g)p) = r(u)f_{g,p}$.

Finalmente, para todo $u' \in U$, $[R, u'_r]\,[U, f_{g,p}] = [U, u'_r \circ f_{g,p}]$ e portanto para todo $u \in U$ temos $(u)(u'_r \circ f_{g,p}) = (uu')f_{g,p} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(uu'1_g)p) = u\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u'1_g)p)$. Assim, $(u)(u'_r \circ f_{g,p}) = (u)(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u'1_g)p))_r$. Logo, $U\,[U, f_{g,p}] = [U, (\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u'1_g)p))_r] = [R, (\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u'1_g)p))_r]$. E como $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u'1_g)p) \in S_g$, temos que $U\alpha_g^\star(p) \subseteq S_g$. Portanto, $\alpha_g^\star(p) \in S_g^\star$.

Sejam $p = [J, f]$, $q = [H, g] \in S_{g^{-1}}^\star$ com $Hq \subseteq S_{g^{-1}}$ e $Jp \subseteq S_{g^{-1}}$. Então, $\alpha_g^\star(pq) = [HJ, f_{g,pq}]$ e para $hj \in HJ$ temos que $(hj)f_{g,pq} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(hj1_g)pq)$. Como $\alpha_g^\star(p)\alpha_g^\star(q) = [J, f_{g,p}][H, f_{g,q}] = [HJ, f_{g,p} \circ f_{g,q}]$, então para $hj \in HJ$ temos que $(hj)f_{g,p} \circ f_{g,q} = (\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(hj1_g)p))f_{g,q} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(hj1_g)p)1_g)q) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(hj1_g)pq) = (hj)f_{g,pq}$. Portanto, $\alpha_g^\star(pq) = \alpha_g^\star(p)\alpha_g^\star(q)$. Analogamente se prova que $\alpha_g^\star(p+q) = \alpha_g^\star(p) + \alpha_g^\star(q)$ e temos assim que $\alpha_g^\star$ é um homomorfismo de anéis para todo $g \in G$.

Sejam $p = [U, \eta] \in S_{g^{-1}}^\star$ e $H \in \mathscr{F}(R)$, tais que $Hp \subseteq S_{g^{-1}}$. Então, $p = [U, \eta] = [H \cap U, \eta]$ e portanto para $q = \alpha_g^\star(p) = [H \cap U, f_{g,p}]$ temos que $\alpha_{g^{-1}}^\star\left(\alpha_g^\star(p)\right) = \alpha_{g^{-1}}^\star(q) = [H \cap U, f_{g^{-1},q}]$. Para $h \in H \cap U$ tem-se $(h)f_{g^{-1},q} = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(h1_{g^{-1}})q) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(h1_{g^{-1}}))p)) = hp = (h)\eta$. Logo, $\alpha_{g^{-1}}^\star\left(\alpha_g^\star(p)\right) = [H \cap U, f_{g^{-1},q}] = [H \cap U, \eta] = p$. Assim, por simetria temos que $\alpha_g^\star$ é um isomorfismo de anéis para todo $g \in G$.

3. Devemos provar (i), (ii) e (iii) da Definição 1.1.1.

(i) É claro que $S_1^\star = \mathcal{Q}$. Para $q = [H, \eta] \in \mathcal{Q}$, temos que $\alpha_1^\star(q) = [H, f_{1,q}]$. Assim, para todo $h \in H$, tem-se $(h)f_{1,q} = hq = (h)\eta$. Logo, $\alpha_1^\star(q) = [H, \eta] = q$.

(ii) Para $g, h \in G$ se $q = [V, \eta] \in \alpha_h^{\star-1}(S_h^\star \cap S_{g^{-1}}^\star)$, então $\alpha_h^\star(q) = [V, f_{h,q}] \in S_h^\star \cap S_{g^{-1}}^\star$. Logo, existem $F_1, F_2 \in \mathscr{F}(R)$ tais que $F_1\alpha_h^\star(q) \subseteq S_h \cap S_{g^{-1}}$ e $F_2 q \subseteq S_{h^{-1}}$. Se $A = F_1 \cap F_2 \cap V$, então para todo $a \in A$ temos que $\alpha_h(aq) = \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a'1_h)q)$ para algum $a' \in A$. Logo, $\alpha_h(aq) = (a')f_{h,q} = a'[V, f_{h,q}] \subseteq S_h \cap S_{g^{-1}}$. Portanto,

$Aq \subseteq \alpha_{h^{-1}}(S_h \cap S_{g^{-1}}) \subseteq S_{(gh)^{-1}}$ o qual implica que $q \in S^{\star}_{(gh)^{-1}}$.

(iii) Sejam $q = [V, \eta] \in \alpha_h^{\star-1}(S_h^{\star} \cap S_{g^{-1}}^{\star})$ e $F \in \mathscr{F}(R)$ tais que $Fq \subseteq S_{h^{-1}}$. Por um lado temos que $(\alpha_g^{\star} \circ \alpha_h^{\star})(q) = \alpha_g^{\star}([V, f_{h,q}]) = [V, f_{g,p}]$, onde $p = [V, f_{h,q}]$. Por outro lado, temos $\alpha_{gh}^{\star}(q) = [V, f_{gh,q}]$. Para $v \in V \cap F$, temos que $(v)f_{g,p} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(v1_g)p) = \alpha_g((\alpha_{g^{-1}}(v1_g))f_{h,q}) = \alpha_g(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}(v1_g)1_h)q)) = \alpha_g(\alpha_h(\alpha_{(gh)^{-1}}(v1_{gh})1_{h^{-1}}q)) = \alpha_{gh}(\alpha_{(gh)^{-1}}(v1_{gh})q) = (v)f_{gh,q}$. Portanto, $(\alpha_g^{\star} \circ \alpha_h^{\star})(q) = \alpha_{gh}^{\star}(q)$ para todo $q \in \alpha_h^{\star-1}(S_h^{\star} \cap S_{g^{-1}}^{\star})$. ■

Daqui em diante cada isomorfismo $\alpha_g^{\star}$ $(g \in G)$, será denotado simplesmente por α_g.

Proposição 1.3.8 *Seja R um anel α-primo. Se $0 \neq q \in \mathcal{Q}$ é tal que $qR = Rq$ e $\alpha_g(q1_{g^{-1}}) = q1_g$ para todo $g \in G$, então q é invertível em $\mathcal{Q}$. Em particular, o α-centróide estendido de R, $C_\alpha(R) = \{q \in Z(\mathcal{Q}) \mid \alpha_g(q1_{g^{-1}}) = q1_g$ para todo $g \in G\}$ é um corpo.*

Prova. É claro que $I = Rq \cap R$ é um ideal de R. Além disso, como existe $H \in \mathscr{F}(R)$, tal que $Hq \subseteq R$ e $q \neq 0$, então $I \neq 0$. Finalmente, se $rq \in I \cap S_{g^{-1}}$, então $\alpha_g(rq) = \alpha_g(rq1_{g^{-1}}) = \alpha_g(r1_{g^{-1}})\alpha_g(q1_{g^{-1}}) = \alpha_g(r1_{g^{-1}})q \in Rq$. Logo, I é um ideal α-invariante não nulo de R.

É claro que Hq é um ideal α-invariante não nulo de R. Consideremos $f : Hq \longrightarrow R$, definida por $(hq)f = h$. Notemos que f está bem definida pois se $hq = 0$ e $h \neq 0$, então $\alpha_g(hq1_{g^{-1}}) = \alpha_g(h1_{g^{-1}})\alpha_g(q1_{g^{-1}}) = \alpha_g(h1_{g^{-1}})q = 0$ para todo $g \in G$. Portanto, $\sum_{g \in G} R\alpha_g(h1_{g^{-1}})Rq = 0$ e assim $\sum_{g \in G} R\alpha_g(h1_{g^{-1}})R = 0$. Logo, $h = 0$ o qual é contraditório. Além disso, é fácil ver que f é um homomorfismo de R-módulos à esquerda. Finalmente, para $p = [Hq, f]$ e $h \in H$ temos que $h = (hq)f = hqp$, o qual implica que $qp = 1_R$.

Sejam $y \in \mathcal{Q}$ e $J \in \mathscr{F}(R)$ tais que $qy = 0$ e $Jy \subseteq R$. Então, para todo $rq \in I$ e todo $jy \in Jy$ temos que $(rq)(jy) = r(qj)y = (rj')(qy) = 0$, onde $j' \in R$ e $qj = j'q$. Portanto, $IJy = 0$ o qual implica que $y = 0$. Temos então que q é invertível à direita e não é divisor de zero à esquerda. Logo, pelo item (b) do Exercicio 1.4 de [10], q é invertível. ■

Proposição 1.3.9 *Seja α uma ação parcial do grupo G sobre o anel R. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *Se H é um ideal α-invariante de $\mathcal{Q}$, então $H \cap R$ é um ideal α-invariante de R.*
2. *Se R é α-primo (α-semiprimo), então $\mathcal{Q}$ é α-primo (α-semiprimo).*
3. *Seja R um anel α-semiprimo. Para cada $x \in \mathcal{Q} \star_\alpha G$ existe $H \in \mathscr{F}(R)$, tal que $Hx \subseteq R \star_\alpha G$. Se $Jx = 0$ ou $xJ = 0$ para algum $J \in \mathscr{F}(R)$, então $x = 0$.*
4. *Se $R \star_\alpha G$ é primo (semiprimo), então $\mathcal{Q} \star_\alpha G$ é primo (semiprimo).*

Prova. 1. É evidente.

2. Sejam $I, J \lhd_\alpha \mathcal{Q}$ tais que $IJ = 0$. Então, $(I \cap R)(J \cap R) = 0$ e assim $I \cap R = 0$ ou $J \cap R = 0$. Se $I \cap R = 0$, então para $x \in I$ existe $H \in \mathscr{F}(R)$, tal que $Hx \subseteq R \cap I = 0$. Logo, $x = 0$ e assim $I = 0$. De modo análogo se prova que $J = 0$ quando $J \cap R = 0$.

Para a segunda parte, se $I \lhd_\alpha \mathcal{Q}$ tal que $I^2 = 0$, basta ver que $I \cap R = 0$ e raciocinar como acima.

3. Seja $x = \sum_{i=1}^n q_i \delta_{g_i} \in \mathcal{Q} \star_\alpha G$. Como cada $q_i \in S_{g_i}^\star$, então existe $J_i \in \mathscr{F}(R)$ tal que $J_i q_i \subseteq S_{g_i}$. Logo, tomando $H = \bigcap_{i=1}^n J_i$ tem-se que $Hx \subseteq R \star_\alpha G$.

Se para algum $x = \sum_{i=1}^n q_i \delta_{g_i} \in \mathcal{Q} \star_\alpha G$ e algum $J \in \mathscr{F}(R)$ tem-se $Jx = 0$, então $Jq_i = 0$ para todo i. Portanto, $q_i = 0$ para todo i e assim $x = 0$. Analogamente, $xJ = 0$ implica $x = 0$.

4. Sejam $I, J \lhd \mathcal{Q} \star_\alpha G$, tais que $IJ = 0$. Então, $(I \cap (R \star_\alpha G))(J \cap (R \star_\alpha G)) = 0$ e assim $I \cap (R \star_\alpha G) = 0$ ou $J \cap (R \star_\alpha G) = 0$. Se $I \cap (R \star_\alpha G) = 0$, então pelo item 3, para cada $x \in I$ existe $H_x \in \mathscr{F}(R)$ tal que $H_x x \subseteq R \star_\alpha G$. Logo, $H_x x \subseteq I \cap (R \star_\alpha G) = 0$ e assim $x = 0$. O outro caso é análogo. ■

Terminamos este capítulo mostrando que o anel de α-quocientes de Martindale $\mathcal{Q}$ de R pode ser identificado com um ideal do anel de G-quocientes de Martindale Q de T, onde (T, β) é a envolvente de (R, α). Além disso, explicitamos uma envolvente para $(\mathcal{Q}, \alpha)$.

Antes notemos que se H é um ideal α-invariante não nulo de R, então $H^\star = \{t \in T \mid \beta_g(t)1_R \in H \text{ para todo } g \in G\}$ é um ideal G-invariante não nulo de T com anulador nulo em T. De fato, se $h \in H^\star$ e $t \in T$ então $\beta_g(ht)1_R = \beta_g(h)\beta_g(t)1_R = \beta_g(h)1_R\beta_g(t) \in H$. Da mesma maneira $\beta_g(th)1_R \in H$. Se $h \in H^\star$ e $f, g \in G$, então $\beta_f(\beta_g(h))1_R = \beta_{fg}(h)1_R \in H$. Finalmente, como $An_T(H^\star)H^\star = 0$, então $An_T(H^\star)H = An_T(H^\star)1_R H = 0$. Logo, $An_T(H^\star)1_R = 0$ e como $An_T(H^\star)$ é um ideal G-invariante de T, temos que $An_T(H^\star) = 0$.

Teorema 1.3.10 *Seja R um anel α-semiprimo. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *A funcão $\varphi : \mathcal{Q} \to Q$, definida como $\varphi([H, f]) = \left[H^\star, \overline{f}\right]$ onde $(h^\star)\overline{f} = (h^\star 1_R)f$ para $h^\star \in H^\star$, é um monomorfismo de anéis.*

2. *$\mathcal{Q} \simeq Im\ \varphi$ é um ideal de Q.*

3. *$E = \sum_{g \in G} \beta_g(\varphi(\mathcal{Q}))$ é um ideal G-invariante de Q.*

4. *A ação envolvente de $(\mathcal{Q}, \alpha)$ é (E, β), onde cada β_g $(g \in G)$ age sobre E por restrição.*

Prova. 1. φ está bem definida: primeiro temos que $H^\star \in \mathscr{F}(T)$. Se $t \in T$ e $h^\star \in H^\star$, então $(th^\star)\overline{f} = (th^\star 1_R)f = (t1_R h^\star 1_R)f = t(h^\star 1_R)f = t(h^\star)\overline{f}$. Portanto, $\overline{f}$ é um homomorfismo de T-módulos à esquerda e assim $[H^\star, \overline{f}] \in Q$. Além disso, se $h^\star \in H$ temos que $(h^\star)\overline{f} = (h^\star)f$ e assim $\overline{f}\mid_H = f$. Finalmente, sejam $[H,f], [H_1,f_1] \in \mathcal{Q}$ tais que $[H,f] = [H_1,f_1]$, então $f\mid_{H\cap H_1} = f_1\mid_{H\cap H_1}$. Se $t \in H^\star \cap H_1^\star$, então $t1_R \in H \cap H_1$, logo $(t)\overline{f} = (t1_R)f = (t1_R)f_1 = (t)\overline{f_1}$. Portanto, $\overline{f}\mid_{H^\star\cap H_1^\star} = \overline{f_1}\mid_{H^\star\cap H_1^\star}$ e assim $\varphi([H,f]) = \left[H^\star, \overline{f}\right] = \left[H_1^\star, \overline{f_1}\right] = \varphi([H_1,f_1])$, isto é, φ está bem definida.

φ é homomorfismo de anéis: se $[H,f], [H_1,f_1] \in \mathcal{Q}$, então $\varphi([H,f][H_1,f_1]) = \varphi([H_1H, f\circ f_1]) = \left[(H_1H)^\star, \overline{f\circ f_1}\right]$ e $\varphi([H,f])\varphi([H_1,f_1]) = [H^\star,\overline{f}][H_1^\star,\overline{f_1}] = [H_1^\star H^\star, \overline{f}\circ\overline{f_1}]$. Lembrando que $H_1^\star H^\star \subseteq (H_1H)^\star$, para $tv \in H_1^\star H^\star$ temos que $(tv)\overline{f\circ f_1} = ((tv)1_R)f\circ f_1 = (t(v1_R)f)f_1 = (t(v1_R)f)\overline{f_1} = (((tv)1_R)f)\overline{f_1} = (tv)\overline{f}\circ\overline{f_1}$. Logo, estendendo por linearidade temos que $\overline{f\circ f_1}\mid_{H_1^\star H^\star} = \overline{f}\circ\overline{f_1}\mid_{H_1^\star H^\star}$ e assim $[(H_1H)^\star, \overline{f\circ f_1}] = [H_1^\star H^\star, \overline{f}\circ\overline{f_1}]$. Logo, $\varphi([H,f][H_1,f_1]) = \varphi([H,f])\varphi([H_1,f_1])$, isto é, φ é um homomorfismo de anéis.

φ é injetora: se $\varphi([H,f]) = 0$, então $\left[H^\star,\overline{f}\right] = 0$ e assim $(H^\star)\overline{f} = 0$. Em particular, $0 = (H)\overline{f} = (H)f$ o qual implica que $[H,f] = 0$. Daqui em diante assim que for necessário, identificaremos $\mathcal{Q}$ com $Im\ \varphi$.

2. Sejam $\left[H^\star,\overline{f}\right] \in Im\ \varphi$ e $0 \neq [J,j] \in Q$, onde $J \in \mathscr{F}(T)$ e $j : J \to T$ é um homomorfismo de T-módulos à esquerda. Então, $\left[H^\star,\overline{f}\right][J,j] = \left[JH^\star, \overline{f}\circ j\right]$. Notemos que $J\cap R \in \mathscr{F}(R)$ e $j_1 = j\mid_{J\cap R}$ é um homomorfismo de R-módulos à esquerda. Então, $[J\cap R, j_1] \in \mathcal{Q}$ e assim $\varphi([(J\cap R)H, f\circ j_1]) = \varphi([H,f])\varphi([J\cap R, j_1]) = [H^\star,\overline{f}][(J\cap R)^\star, \overline{j_1}] = [(J\cap R)^\star H^\star, \overline{f}\circ\overline{j_1}]$. Lembrando que $J \subseteq (J\cap R)^\star$, para $tv \in JH^\star$ temos que $(tv)\overline{f}\circ\overline{j_1} = (((tv)1_R)f)j_1 = (1_R((tv)1_R)f)j = (((tv)1_R)f)j = (tv)\overline{f}\circ j$. Portanto, estendendo por linearidade temos que $[(J\cap R)^\star H^\star, \overline{f}\circ\overline{j_1}] = [JH^\star, \overline{f}\circ j]$, isto é, $\varphi([(J\cap R)H, f\circ j_1]) = \left[H^\star,\overline{f}\right][J,j]$. Logo, $Im\ \varphi$ é um ideal à direita de Q.

Simetricamente se prova que $\varphi([H(J\cap R), j_1\circ f]) = \left[H^\star(J\cap R)^\star, \overline{j_1}\circ\overline{f}\right] = \left[H^\star J, j\circ\overline{f}\right] = [J,j]\left[H^\star,\overline{f}\right]$, isto é, $Im\ \varphi$ é um ideal à esquerda de Q.

3. Evidente.

4. Devemos provar 1, 2 e 3 da Definição 1.1.3. A última parte é clara do item 3. Para 2, se $g \in G$ e $q = [A, \eta] \in S^{\star}_{g^{-1}}$, então existe $H \in \mathscr{F}(R)$ tal que $Hq \subseteq S_{g^{-1}}$. Temos que

$$\varphi \circ \alpha_g(q) = \varphi\left([H, f_{g,q}]\right) = \left[H^{\star}, \overline{f_{g,q}}\right] \text{ e}$$

$$\beta_g \circ \varphi(q) = \beta_g([A^{\star}, \overline{\eta}]) = [A^{\star}, \beta_{g^{-1}} \circ \overline{\eta} \circ \beta_g]$$

Para $h^{\star} \in H^{\star} \cap A^{\star}$ tem-se $(h^{\star})\overline{f_{g,q}} = (h^{\star}1_R)f_{g,q} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(h^{\star}1_g)q) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(h^{\star}1_g)q) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(h^{\star})1_{g^{-1}}q) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(h^{\star})1_R q) = (h^{\star})\beta_{g^{-1}} \circ \overline{\eta} \circ \beta_g$. Portanto, $\varphi \circ \alpha_g(q) = \beta_g \circ \varphi(q)$.

Para provar 1, seja $q \in S^{\star}_g$. Então, $\varphi(q) \in \varphi(\mathcal{Q})$ e pela parte anterior, $\beta_{g^{-1}}(\varphi(q)) = \varphi(\alpha_{g^{-1}}(q))$ com $\varphi(\alpha_{g^{-1}}(q)) \in \varphi(\mathcal{Q})$. Portanto, $\varphi(q) = \beta_g(\varphi(\alpha_{g^{-1}}(q))) \in \beta_g(\varphi(\mathcal{Q}))$. E temos que $\varphi(S^{\star}_g) \subseteq \varphi(\mathcal{Q}) \cap \beta_g(\varphi(\mathcal{Q}))$.

Para a outra inclusão, identificando $\mathcal{Q}$ com $\varphi(\mathcal{Q})$ temos que se $q = \beta_g(q_1) \in \mathcal{Q} \cap \beta_g(\mathcal{Q})$, para certos $q, q_1 \in \mathcal{Q}$, então $q = 1_R\beta_g(1_R)\beta_g(q_1) = 1_g\beta_g(q_1) \in S^{\star}_g$. ■

Como $R \subseteq \mathcal{Q}$, então para todo $g \in G$ temos que $\beta_g(R) \subseteq \beta_g(\mathcal{Q})$. Portanto, $\sum_g \beta_g(R) \subseteq \sum_g \beta_g(\mathcal{Q})$ e sendo (T, β) a envolvente de (R, α) e (E, β) a envolvente de $(\mathcal{Q}, \alpha)$ concluímos que $T \subseteq E$. Além disso, note que E é um ideal denso (bilateral) em Q, isto é, intersecta qualquer ideal não nulo de Q pois dado $q \in Q$ existe $H \in \mathscr{F}(T)$ tal que $Hq \subseteq T \subseteq E$. Temos então o seguinte diagrama de extensões de anéis:

$$\begin{array}{ccccc} R & \hookrightarrow & T & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ \mathcal{Q} & \hookrightarrow & E & \hookrightarrow & Q \end{array}$$

Na seguinte proposição damos uma condição necessária e suficiente para ser (Q, β) a envolvente de $(\mathcal{Q}, \alpha)$ ou equivalentemente ser $E = Q$. Lembramos que uma ação parcial (R, α) com envolvente (T, β) é dita de tipo finito se T é um anel com unidade 1_T (ver [8], Proposição 1.2 para equivalências).

Proposição 1.3.11 *Seja R um anel α-semiprimo. (Q, β) é a envolvente de $(\mathcal{Q}, \alpha)$, se e somente se, α é uma ação parcial de tipo finito.*

Prova. Se (Q, β) é a envolvente de $(\mathcal{Q}, \alpha)$, então $Q = \sum_{g \in G} \beta_g(\mathcal{Q})$. Em particular, $1_Q \in \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\mathcal{Q})$ para alguns $g_i \in G$ $(i = 1, ..., n)$. Como $\beta_{g_i}(1_R)$ é a unidade de cada $\beta_{g_i}(\mathcal{Q})$ e cada $\beta_{g_i}(\mathcal{Q})$ é um ideal de Q para $i = 1, ..., n$, então temos que $1_Q = \sum_{1 \leq l \leq n} \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_l} (-1)^{l+1} \beta_{i_1}(1_R) \beta_{i_2}(1_R) ... \beta_{i_{l-1}}(1_R) \beta_{i_l}(1_R) \in T$ ([8], Proposição 1.10). Portanto, T é um anel com unidade $1_T = 1_Q$ e assim α é de tipo finito.

Reciprocamente, se α é de tipo finito então T é um anel com unidade 1_T. Logo, $1_T = 1_Q$ e como $T \subseteq E$ temos que $1_Q \in E$. Finalmente, como E é um ideal de Q concluímos que $E = Q$ e assim (Q, β) é a envolvente de $(\mathcal{Q}, \alpha)$. ∎

Capítulo 2

Ideais Fechados e Primos de $R \star_\alpha G$

A relação entre os ideais primos de anéis T e S para certas extensões de anéis $T \subseteq S$ tem sido estudada por varios autores ([1], [5], [7], [13]). Em [7], por exemplo, estuda-se o caso onde $S = T[E]$ é uma extensão livre centralizante de T. O problema pode ser sempre reduzido ao caso em que T é um anel primo, desta maneira é estabelecida ali uma correspondência bijetiva entre todos os ideais T-disjuntos fechados (em particular primos) de S e todos os ideais Q-disjuntos fechados (em particular primos) de $Q[E]$ onde Q é o anel de quocientes maximal de T. A técnica usada nestes trabalhos, foi estendida em [13] para o estudo dos ideais fechados do produto cruzado $T \star_\beta G$ (em particular para skew anéis de grupo) com G um grupo abeliano. Neste trabalho também foi provado que existe uma correspondência bijetiva entre os ideais T-disjuntos fechados (em particular primos) de $T \star_\beta G$ e os ideais Q-disjuntos fechados (em particular primos) de $Q \star_\beta G$, onde Q é o anel de G-quocientes à esquerda de Martindale de T e T é um anel G-primo.

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira parte definimos os ideais fechados de $R \star_\alpha G$ e estudamos algumas de suas propriedades, provando em particular que todo ideal primo R-disjunto de $R \star_\alpha G$ é fechado. Na segunda parte, provamos que existe uma correspondência bijetiva entre todos os ideais R-disjuntos fechados (e primos R-disjuntos) de $R \star_\alpha G$ e todos os ideais T-disjuntos fechados (e primos T-disjuntos) de $T \star_\beta G$, onde (T, β) é a envolvente de (R, α). Esta correspondência estende a correspondência entre primos provada na Proposição 5.1 de [8] para R um anel α-primo e G abeliano. Além disso, provamos também que existe uma correspondência bijetiva entre todos os ideais R-disjuntos fechados (e primos R-disjuntos) de $R \star_\alpha G$ e todos os ideais $\mathcal{Q}$-disjuntos fechados (e primos $\mathcal{Q}$-disjuntos) de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$.

Em resumo, provamos que existe uma correspondência bijetiva entre os ideais disjuntos fechados (em particular primos) de todos os anéis do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
R \star_\alpha G \arrow[r, hook] \arrow[d] & T \star_\beta G \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathcal{Q} \star_\alpha G \arrow[r, hook] & E \star_\beta G \arrow[r, hook] & Q \star_\beta G
\end{tikzcd}$$

Onde (T, β) é a envolvente de (R, α), (E, β) é a envolvente de $(\mathcal{Q}, \alpha)$, $\mathcal{Q}$ é o anel de α-quocientes de Martindale de R e Q é o anel de G-quocientes de Martindale de T.

2.1 Ideais Fechados de $R \star_\alpha G$

Como o nosso objetivo é estudar os ideais primos P de $R \star_\alpha G$, então fatorando $P \cap R$ e $(P \cap R) \star_\alpha G$ de R e $R \star_\alpha G$ respectivamente, podemos assumir que P é R-disjunto e R é um anel α-primo. Além disso, assumimos que o grupo G que age parcialmente sobre o anel R é abeliano e que cada ideal S_g $(g \in G)$ é gerado por um idempotente central 1_g. Assim, pelo Teorema 1.1.4 existe uma envolvente (T, β) para (R, α) e facilmente podemos ver que T é G-primo. Portanto, todos os resultados de [13] são aplicáveis ao anel $T \star_\beta G$. Começamos apresentando algumas definições e notações, que iremos usar mais adiante.

Seja $x = \sum_{g \in G} a_g \delta_g$ um elemento de $R \star_\alpha G$. Para cada $h \in G$ se define o h-ésimo coeficiente à esquerda de x por $c_h^l(x) = a_h$. Como x pode ser representado de maneira única com coeficientes à direita, digamos $x = \sum_{g \in G} 1_g \delta_g b_g$, então se define o h-ésimo coeficiente à direita de x por $c_h^r(x) = b_h$. Note que $c_h^r(x) \in S_{h^{-1}}$. Portanto, $c_h^l(x) = \alpha_h(c_h^r(x))$.

Para um elemento não nulo x de $R \star_\alpha G$, se define seu suporte como $sup(x) = \{g \in G \mid c_g^l(x) \neq 0\}$. Como cada α_g é um isomorfismo de anéis, temos que $sup(x) = \{g \in G \mid c_g^r(x) \neq 0\}$.

Se I é um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$, um elemento não nulo $x \in I$ é dito de suporte minimal em I se a condição $y \in I$ e $sup(y) \subsetneqq sup(x)$, implica $y = 0$. Se definem $M(I) = \{x \in I \mid x \text{ tem suporte minimal em } I\}$ e $Min(I) = \{sup(x) \mid x \in M(I)\}$.

Note que sendo R um anel α-primo e portanto T um anel G-primo, temos que $\mathscr{F}(R)$ é o conjunto de todos os ideais α-invariantes não nulos de R e $\mathscr{F}(T)$ é o conjunto de todos os ideais G-invariantes não nulos de T.

Definição 2.1.1 *Seja I um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$. O fecho de I é definido por:*

$$[I]_R = \{x \in R \star_\alpha G \mid \text{ existe } H \in \mathscr{F}(R) \text{ tal que } Hx \subseteq I\}$$

Um ideal R-disjunto I de $R \star_\alpha G$ é dito fechado se $I = [I]_R$. Note por exemplo que o ideal $\{0\}$ é fechado.

Nosso objetivo seguinte será caracterizar o fecho de um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$ como a interseção de um ideal fechado de $T \star_\beta G$ com $R \star_\alpha G$. Antes devemos caracterizar a minimalidade de qualquer ideal T-disjunto de $T \star_\beta G$, em termos da minimalidade da interseção com $R \star_\alpha G$. Lembramos que uma ação parcial α é dita própria se $1_g \neq 0$ para todo $g \in G$ ([6]).

Lema 2.1.2 *Sejam R um anel α-primo, J um ideal T-disjunto de $T \star_\beta G$ e $I = J \cap (R \star_\alpha G)$. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *Se $\Gamma \in Min(J)$ e $1_g = 0$ para algum $g \in \Gamma$, então $1_g = 0$ para todo $g \in \Gamma$.*

2. *Se $\Gamma \in Min(J)$ e $1_g \neq 0$ para algum $g \in \Gamma$, então $1_g \neq 0$ para todo $g \in \Gamma$. Além disso, $\Gamma \in Min(I)$.*

3. *$Min(J) = Min(I) \cup A$ (união disjunta), onde A está definido do seguinte modo: $\Gamma \in A$, se e somente se, $1_g = 0$ para todo $g \in \Gamma$ e existem $\Gamma' \in Min(I)$ e $h \in G$, tais que $\Gamma' h = \Gamma$. $A = \varnothing$, se e somente se, α é uma ação própria.*

4. *Se J' é um ideal T-disjunto de $T \star_\beta G$ e $I' = J' \cap (R \star_\alpha G)$, então $Min(J) = Min(J')$ se e somente se $Min(I) = Min(I')$.*

Prova. 1. Seja $\Gamma = \{g_1, ..., g_n\} \in Min(J)$ e suponhamos que $1_{g_i} = 0$ para algum $i \in \{1, ..., n\}$. Reordenando índices podemos supor que $1_{g_1} = 0$. Então, para todo $x = t_1\delta_{g_1} + ... + t_n\delta_{g_n} \in J$, temos que $1_R x 1_R \in J$ e como $1_{g_1} = 0$ e $\Gamma \in Min(J)$, temos que $1_R x 1_R = 0$ pois $sup(1_R x 1_R) \subseteq sup(x)$. Assim, se $t \in \Theta_{\Gamma, g_i}(J)$ para algum $i \in \{2, ..., n\}$, então existe $y = \sum_{h \in \Gamma} t_h \delta_h \in J$ com $sup(y) = \Gamma$ e $t_{g_i} = t$. Portanto, $1_R y 1_R = \sum_{h \in \Gamma} t_h 1_h \delta_h = 0$ e assim $t_{g_i} 1_{g_i} = t 1_{g_i} = 0$. Logo, $\Theta_{\Gamma, g_i}(J) 1_{g_i} = 0$. Como T é G-primo e $\Theta_{\Gamma, g_i}(J)$ é um ideal G-invariante não nulo de T, temos que $1_{g_i} = 0$ para $i = 2, ..., n$. Logo $1_{g_i} = 0$ para todo i.

2. Se $\Gamma = \{g_1, ..., g_n\} \in Min(J)$ e $1_{g_i} \neq 0$ para algum $i \in \{1, ..., n\}$, então pelo item 1 concluímos que $1_{g_i} \neq 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Além disso, existe $x = t_1\delta_{g_1} + ... + t_n\delta_{g_n} \in M(J)$ com $1_R x 1_R = t_1 1_{g_1} \delta_{g_1} + ... + t_n 1_{g_n} \delta_{g_n} \neq 0$, ou seja $sup(x) = sup(1_R x 1_R)$, pois do contrário raciocinando como no item 1 teríamos que $1_{g_i} = 0$ para todo i o qual é contraditório. Como $1_R x 1_R \in I$ e $\Gamma \in Min(J)$ temos que $\Gamma \in Min(I)$.

3. Seja $\Gamma = \{g_1, ..., g_n\} \in Min(J)$. Se $1_{g_i} \neq 0$ para algum $g_i \in \Gamma$, então pelo item 2 temos que $\Gamma \in Min(I)$. Se $1_{g_i} = 0$ para algum $g_i \in \Gamma$, então pelo item 1 temos que $1_g = 0$ para todo $g \in \Gamma$. Sejam $x = t_1\delta_{g_1} + ... + t_n\delta_{g_n} \in M(J)$ e $a \in T$ a unidade à direita de t_1. Então, $x\beta_{g_1^{-1}}(a)\delta_{g_1^{-1}} = t_1\delta_1 + t_2\beta_{g_2g_1^{-1}}(a)\delta_{g_2g_1^{-1}} + ... + t_n\beta_{g_ng_1^{-1}}(a)\delta_{g_ng_1^{-1}} \in M(J)$ e como $1_1 = 1_R \neq 0$, pelo item 2 temos que $\Gamma' = \left\{1, g_2g_1^{-1}, ..., g_ng_1^{-1}\right\} \in Min(I)$. Além disso, claramente vemos que $\Gamma' g_1 = \Gamma$. Portanto, $\Gamma \in A$ e assim $Min(J) \subseteq Min(I) \cup A$.

Seja $\Gamma \in Min(I)$, assim $1_g \neq 0$ para todo $g \in \Gamma$. Se $\Gamma \notin Min(J)$, então existe $\Gamma' \in Min(J)$ com $\Gamma' \subsetneqq \Gamma$. Logo, pelo item 2 concluímos que $\Gamma' \in Min(I)$, o qual é contraditório. Logo, $Min(I) \subseteq Min(J)$.

Sejam $\Gamma = \{g_1, ..., g_n\} \in A$, $\Gamma' = \{f_1, ..., f_n\} \in Min(I)$ e $h \in G$ tais que $\Gamma' h = \Gamma$. Devemos ver que Γ é um suporte em J. Se $y = a_1\delta_{f_1} + ... + a_n\delta_{f_n} \in M(I)$, então $y\beta_{f_1^{-1}}(1_R)\delta_h = a_1\delta_{g_1} + ... + a_n\beta_{f_nf_1^{-1}}(1_R)\delta_{g_n}$ é um elemento não nulo de J pois $a_1 \neq 0$. Se algum coeficiente de $y\beta_{f_1^{-1}}(1_R)\delta_h$ diferente de a_1 é nulo, então podemos escolher um elemento minimal y_0 em J com $sup(y_0) \subsetneqq \Gamma$. Assim, para $g_{i_0} \in sup(y_0)$ se t é a unidade à direita de $c^l_{g_{i_0}}(y_0)$ então $y_0\beta_{g_{i_0}^{-1}}(t)\delta_{h^{-1}} \in M(J)$, $sup(y_0\beta_{g_{i_0}^{-1}}(t)\delta_{h^{-1}}) \subsetneqq \Gamma'$ e $1_{f_{i_0}} = 1_{g_{i_0}h^{-1}} \neq 0$, logo pelo item 2 temos que $sup(y_0\beta_{g_1^{-1}}(t)\delta_{h^{-1}}) \in Min(I)$ o qual é contraditório. Se $\Gamma \notin Min(J)$, então raciocinando como antes se prova que $\Gamma' \notin Min(I)$ o qual é contraditório. Portanto, $\Gamma \in Min(J)$ e assim $Min(I) \cup A \subseteq Min(J)$.

Se α é própria, então claramente $A = \varnothing$. Se α não é própria, então aplicando o item 1 e o item 2, facilmente se prova que $A \neq \varnothing$.

4. O resultado é consequência direta do item anterior. ∎

Exemplo 2.1.3 (Exemplo de ação parcial não própria). Seja $R = Ke_{-2} \oplus Ke_0 \oplus Ke_2$, onde K é um corpo e e_{-2}, e_0 e e_2 são idempotentes centrais em R. Seja G o grupo cíclico infinito gerado por σ. Então, G age parcialmente sobre R da seguinte forma:

$\alpha_0 = id_R$; $\alpha_{\sigma^{-2}} : Ke_0 \oplus Ke_2 \to Ke_{-2} \oplus Ke_0$, onde $e_0 \mapsto e_{-2}$ e $e_2 \mapsto e_0$; $\alpha_{\sigma^2} : Ke_{-2} \oplus Ke_0 \to Ke_0 \oplus Ke_2$, onde $e_{-2} \mapsto e_0$ e $e_0 \mapsto e_2$; $\alpha_{\sigma^{-4}} : Ke_2 \to Ke_{-2}$, onde $e_2 \mapsto e_{-2}$; $\alpha_{\sigma^4} : Ke_{-2} \to Ke_2$, onde $e_{-2} \mapsto e_2$; $\alpha_{\sigma^n} = 0$ para todo n diferente de $0, 2, 4, -2, -4$. Assim, $1_{\sigma^n} = 0$ para todo n diferente de $0, 2, 4, -2, -4$.

O seguinte lema da um método para levantar ideais R-disjuntos de $R \star_\alpha G$ a ideais T-disjuntos de $T \star_\beta G$. Assim como ideais R-disjuntos fechados de $R \star_\alpha G$ a ideais T-disjuntos fechados de $T \star_\beta G$. Antes devemos lembrar algumas notações ([3], Seção 5). Sejam:

$$M = \left\{ \sum_{g \in G} c_g \delta_g \mid c_g \in R \text{ e } c_g \neq 0 \text{ para uma quantidade finita de } g \in G \right\}$$

$$N = \left\{ \sum_{g \in G} c_g \delta_g \mid c_g \in \beta_g(R) \text{ e } c_g \neq 0 \text{ para uma quantidade finita de } g \in G \right\}$$

Lembramos também que se H é um ideal α-invariante não nulo de R, então $H^\star = \{t \in T \mid \beta_g(t)1_R \in H \text{ para todo } g \in G\}$ é um ideal G-invariante não nulo de T.

Lema 2.1.4 *Sejam R um anel α-primo, I um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$ e J um ideal T-disjunto fechado de $T \star_\beta G$. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *NIM é um ideal T-disjunto de $T \star_\beta G$, tal que $NIM \cap (R \star_\alpha G) = I$.*

2. *$[I]_R = [NIM]_T \cap (R \star_\alpha G) = 1_R [NIM]_T 1_R$.*

3. *$J_0 = J \cap (R \star_\alpha G)$ é um ideal R-disjunto fechado de $R \star_\alpha G$.*

Prova. 1. Claramente NIM é um ideal de $T \star_\beta G$. Como I é R-disjunto, então $(NIM \cap T)1_R = 1_R(NIM \cap T)1_R = 0$. Assim, $(NIM \cap T)R = 0$ e como $NIM \cap T$ é um ideal G-invariante não nulo de T, temos que $\beta_g((NIM \cap T)R) = (NIM \cap T)\beta_g(R) = 0$ para todo $g \in G$. Logo, $(NIM \cap T)T = 0$ e assim $NIM \cap T = 0$.

Para a segunda parte, é claro que $I \subseteq NIM$ e assim $I \subseteq NIM \cap (R \star_\alpha G)$. E se $x \in NIM \cap (R \star_\alpha G)$, então $x = 1_R x 1_R \in I$ pois $1_R N$ e $M 1_R$ estão contidos em $R \star_\alpha G$. Portanto, $NIM \cap (R \star_\alpha G) = I$.

2. Se $x \in [I]_R$, então existe $H \in \mathscr{F}(R)$, tal que $Hx \subseteq I$. Se $h^\star \in H^\star$, então $h^\star 1_R \in H$ e assim $h^\star x = h^\star 1_R x \in I \subseteq NIM$. Logo, $H^\star \in \mathscr{F}(T)$ e $H^\star x \subseteq NIM$. Assim, $x \in [NIM]_T$. Isto prova que $[I]_R \subseteq [NIM]_T \cap (R \star_\alpha G)$.

Reciprocamente, se $x \in [NIM]_T \cap (R \star_\alpha G)$, então existe $F \in \mathscr{F}(T)$, tal que, $Fx \subseteq NIM$ e $x1_R = x$. Assim, $1_R F x 1_R \subseteq 1_R(NIM)1_R \subseteq I$. Como $1_R F = F \cap R \in \mathscr{F}(R)$, temos que $(F \cap R)x = 1_R F x 1_R \subseteq I$. Portanto, $x \in [I]_R$.

A última igualdade é consequência do fato que 1_R é a unidade de $R \star_\alpha G$ e que $[NIM]_T$ é um ideal de $T \star_\beta G$.

3. É claro que J_0 é um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$ e que $J_0 \subseteq [J_0]_R$. Se $x \in [J_0]_R$, então existe $H \in \mathscr{F}(R)$, tal que, $Hx \subseteq J_0 \subseteq J$. Para $H^\star \in \mathscr{F}(T)$, temos que $H^\star 1_R \subseteq H$. Logo, $H^\star x = H^\star 1_R x \subseteq J$ e assim $x \in [J]_T$. Como J é fechado, concluímos que $x \in J \cap (R \star_\alpha G) = J_0$, isto é, $[J_0]_R \subseteq J_0$. Portanto, $[J_0]_R = J_0$ e temos que J_0 é fechado. ■

Note que pelo lema anterior o fecho de um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$ está completamente caracterizado pelo fecho de um ideal T-disjunto de $T \star_\beta G$. Este fato será usado a diante para obter propriedades dos ideais R-disjuntos fechados e primos R-disjuntos de $R \star_\alpha G$. O seguinte lema estende para ações parciais o Lema 2.1 de

[13].

Lema 2.1.5 *Seja I um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *$[I]_R$ é um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$ que contém I.*

2. *$Min(I) = Min([I]_R)$.*

Prova. 1. Se I é um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$, então pelo Lema 2.1.4, $[I]_R = [NIM]_T \cap (R \star_\alpha G)$. Como $[NIM]_T$ é um ideal T-disjunto de $T \star_\beta G$ que contém I, temos que $[I]_R$ é um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$ que contém I.

2. O resultado segue do item 4 do Lema 2.1.2, pois NIM e $[NIM]_T$ são ideais T-disjuntos de $T \star_\beta G$ com $Min(NIM) = Min([NIM]_T)$ e além disso $NIM \cap (R \star_\alpha G) = I$ e $[I]_R = [NIM]_T \cap (R \star_\alpha G)$. ■

O seguinte teorema estende para ações parciais o Teorema 1.2.2.

Teorema 2.1.6 *Seja I um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *$[I]_R$ é o maior ideal R-disjunto J de $R \star_\alpha G$, tal que $I \subseteq J$ e $Min(I) = Min(J)$.*

2. *$[I]_R$ é o menor ideal fechado de $R \star_\alpha G$, tal que $I \subseteq [I]_R$.*

Prova. 1. Pelo Lema 2.1.5, é suficiente provar que se J é um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$ satisfazendo $I \subseteq J$ e $Min(I) = Min(J)$, então $J \subseteq [I]_R$. Seja J um ideal com estas condições. Então, $NIM \subseteq NJM$ e pelo item 4 do Lema 2.1.2 $Min(NIM) = Min(NJM)$. Assim, pelo Teorema 1.2.2 $NJM \subseteq [NIM]_T$ e intersectando com $R \star_\alpha G$, obtemos $J \subseteq [I]_R$.

2. Como $[I]_R = [NIM]_T \cap (R \star_\alpha G)$ e $[NIM]_T$ é um ideal fechado de $T \star_\beta G$, então pelo item 3 do Lema 2.1.4 concluímos que $[I]_R$ é um ideal fechado. Finalmente, se L é

um ideal fechado de $R \star_\alpha G$ tal que $I \subseteq L$, então $[NIM]_T \subseteq [NLM]_T$ e intersectando com $R \star_\alpha G$ obtemos $[I]_R \subseteq [L]_R = L$. ■

Como uma consequência direta do Teorema 2.1.6, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.1.7 *Se I é um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$, então $[I]_R$ é o único ideal R-disjunto fechado de $R \star_\alpha G$ que contém I e satisfaz $Min(I) = Min([I]_R)$.*

O seguinte lema relaciona os ideais primos R-disjuntos de $R \star_\alpha G$, com os ideais fechados de $R \star_\alpha G$.

Lema 2.1.8 *Cada ideal primo R-disjunto de $R \star_\alpha G$ é fechado.*

Prova. Seja P um ideal primo R-disjunto de $R \star_\alpha G$. Então, pela Proposição 5.1 de [8] existe um único ideal primo T-disjunto P' de $T \star_\beta G$, tal que, $P = P' \cap (R \star_\alpha G)$. Como P' é fechado, então pelo item 3 do Lema 2.1.4 concluímos que P é fechado. ■

2.2 Correspondências Entre Ideais Fechados e Primos

Nesta seção seguimos considerando G um grupo abeliano que age parcialmente sobre o anel R e R um anel α-primo. Nosso objetivo principal é provar que existe uma correspondência bijetiva entre todos os ideais disjuntos fechados e primos dos anéis $R \star_\alpha G$, $\mathcal{Q} \star_\alpha G$, $T \star_\beta G$, $E \star_\beta G$ e $Q \star_\beta G$.

O seguinte teorema estabelece a correspondência bijetiva entre os ideais R-disjuntos fechados (em particular primos) de $R \star_\alpha G$ e os ideais T-disjuntos fechados (em particular primos) de $T \star_\beta G$. Esta correspondência estende a correspondência entre primos da Proposição 5.1 de [8], para G um grupo abeliano e R um anel α-primo.

Teorema 2.2.1 *Seja R um anel $\alpha-$primo. Existe uma correspondência bijetiva, que preserva ideais primos, entre $\mathscr{C}(R\star_\alpha G) = \{I \lhd R\star_\alpha G \mid I$ é $R-$disjunto fechado$\}$ e $\mathscr{C}(T\star_\beta G) = \{J \lhd T\star_\beta G \mid J$ é $T-$disjunto fechado$\}$.*

Prova. Para $I \in \mathscr{C}(R\star_\alpha G)$ definimos $\varphi(I) = [NIM]_T$. Então, pelo Lema 2.1.4 temos que φ está bem definida e é injetora. Para $J \in \mathscr{C}(T\star_\beta G)$, seja $I = J\cap(R\star_\alpha G)$. Então, pelo item 3 do Lema 2.1.4 temos que $I \in \mathscr{C}(R\star_\alpha G)$ e como $I \subseteq J$ segue que $[NIM]_T \subseteq J$. Finalmente, como $I = [NIM]_T \cap (R\star_\alpha G) = J \cap (R\star_\alpha G)$, pelo item 4 do Lema 2.1.2 concluímos que $Min([NIM]_T) = Min(J)$. Portanto, pelo Teorema 1.2.2 temos que $J = [NIM]_T$ e assim φ é sobrejetora.

Para a segunda parte, devemos provar que $P \in \mathscr{C}(R\star_\alpha G)$ é primo, se e somente se, $[NPM]_T$ é primo. Se P é um ideal primo R-disjunto de $R\star_\alpha G$, então pela Proposição 5.1 de [8], existe um único ideal primo T-disjunto P' de $T\star_\beta G$, tal que, $P = P'\cap(R\star_\alpha G)$. Como $P = [NPM]_T\cap(R\star_\alpha G) = P'\cap(R\star_\alpha G)$, então raciocinando como acima concluímos que $[NPM]_T = P'$ e portanto $[NPM]_T$ é primo. A volta é evidente. ■

Corolário 2.2.2 *Seja R um anel α-primo. Existe uma correspondência bijetiva, que preserva ideais primos, entre $\mathscr{C}(\mathcal{Q}\star_\alpha G) = \{I^\star \lhd \mathcal{Q}\star_\alpha G \mid I^\star$ é $\mathcal{Q}-$disjunto fechado$\}$ e $\mathscr{C}(E\star_\beta G) = \{I^\star \lhd E\star_\beta G \mid I^\star$ é $E-$disjunto fechado$\}$.*

Prova. Sendo R um anel α-primo, temos que $\mathcal{Q}$ também é um anel α-primo (Proposição 1.3.9). Além disso, (E,β) é a envolvente de $(\mathcal{Q},\alpha)$ (Teorema 1.3.10). Logo, aplicando o Teorema 2.2.1 o resultado segue. ■

Notemos que pelo Teorema 1.3.10 podemos identificar $\mathcal{Q}$ como um ideal de Q, tal que, $Q1_R = 1_RQ = \mathcal{Q}$. Além disso, também temos que $1_R(Q\star_\beta G)1_R = \mathcal{Q}\star_\alpha G$.

Lema 2.2.3 *Seja I um ideal R-disjunto não nulo de $R \star_\alpha G$. Para cada $\Gamma \in Min(I)$ e cada $g \in \Gamma$ existe um único elemento $\mu' = \mu'_{\Gamma,g} \in \mathcal{Q} \star_\alpha G$, tal que $sup(\mu') = \Gamma$, $c^l_g(\mu') = 1_g$ e $1_R x 1_R = c^l_g(x)\mu'$ para todo $x \in NIM$ com $sup(x) = \Gamma$.*

Prova. Como I é um ideal R-disjunto não nulo de $R \star_\alpha G$, então pelo Lema 2.1.4 NIM é um ideal T-disjunto não nulo de $T \star_\beta G$ e pelo Lema 2.1.2 $Min(I) \subseteq Min(NIM)$. Seja $\Gamma \in Min(I)$ e $g \in \Gamma$. Note em particular que $1_h \neq 0$ para todo $h \in \Gamma$. Pelo Lema 3.1 de [13], existe um único elemento $\mu = \mu_{\Gamma,g} = \sum_{h \in G} q_h \delta_h \in Q \star_\beta G$, tal que, $sup(\mu) = \Gamma$, $c^l_g(\mu) = 1_Q$ e $x = c^l_g(x)\mu$ para todo $x \in NIM$ com $sup(x) = \Gamma$. Então, para $\mu' = 1_R \mu 1_R$ temos que $c^l_g(\mu') = 1_g$ e $1_R x 1_R = c^l_g(x) 1_R \mu 1_R = c^l_g(x)\mu'$ para todo $x \in NIM$ com $sup(x) = \Gamma$. Em particular, como existe $x \in I$ com $sup(x) = \Gamma$, tem-se que $x = c^l_g(x)\mu'$ e portanto $q_h 1_h \neq 0$ para todo $h \in \Gamma$. Assim, $sup(\mu') = \Gamma$. ■

Para cada ideal I não nulo e R-disjunto de $R \star_\alpha G$, seja $M_{\mathcal{Q}}(I)$ o conjunto dos elementos $\mu' = \mu'_{\Gamma,g} \in \mathcal{Q} \star_\alpha G$, $\Gamma \in Min(I)$ e $g \in \Gamma$ dados pelo Lema 2.2.3. Analogamente, denotamos por $M_Q(NIM)$ o conjunto dos elementos $\mu = \mu_{\Gamma,g} \in Q \star_\beta G$, $\Gamma \in Min(I)$ e $g \in \Gamma$ dados pelo Lema 3.1 de [13]. Cada elemento $\mu \in M_Q(NIM)$ é um elemento normalizante de $Q \star_\beta G$ e é um elemento minimal do ideal Q-disjunto $(Q \star_\beta G)M_Q(NIM)$ ([13], Lema 3.1). Assim, para todo $f \in G$ e $\mu \in M_Q(NIM)$ temos que $\delta_f \mu = \mu \delta_f$ é também um elemento minimal do ideal $(Q \star_\beta G)M_Q(NIM)$. Assumimos que $M_{\mathcal{Q}}(\{0\}) = M_Q(\{0\}) = \varnothing$.

Lembramos do Teorema 1.3.10 que (E, β) é a envolvente de $(\mathcal{Q}, \alpha)$, onde $E = \sum_{g \in G} \beta_g(\mathcal{Q})$ e o grupo G age sobre E por restrição de cada automorfismo β_g $(g \in G)$. Assim, para todo $x \in \mathcal{Q}$ e todo $g \in G$, temos que $\beta_g(x)1_R = \alpha_g(x 1_{g^{-1}})$.

Lema 2.2.4 *Seja I um ideal R-disjunto não nulo de $R \star_\alpha G$. Para $\Gamma \in Min(I)$ e $g \in \Gamma$, seja $\mu = \mu_{\Gamma,g} \in M_Q(NIM)$ e $\mu' = 1_R \mu 1_R \in M_{\mathcal{Q}}(I)$. Então, as seguintes afirmações são válidas:*

1. *Para todo $q \in Q$, $q\mu' = \mu'\alpha_{g^{-1}}(q1_g)$ e $\mu' q = q'\mu'$ para algum $q' \in \mathcal{Q}$. Em particular, $\mathcal{Q}\mu' = \mu'\mathcal{Q}$.*

2. *Existe $J' \in \mathscr{F}(R)$ tal que $J'\mu' = \mu' J' \subseteq I$.*

3. *Seja $h \in G$. Se $1_h \neq 0$, então $1_h\delta_h\mu' = \mu'_1 1_g\delta_g$ e $\mu' 1_h\delta_h = 1_g\delta_g\mu'_1$ para algum $\mu'_1 \in M_{\mathcal{Q}}(I)$.*

Prova. 1. Pelo Lema 3.1 de [13], para todo $q \in Q$, $q\mu = \mu\beta_{g^{-1}}(q)$. Então, $q\mu' = q1_R\mu 1_R$ e como 1_R é idempotente central e $q1_R \in \mathcal{Q}$, temos que $q\mu' = 1_R(q1_R)\mu 1_R = 1_R\mu\beta_{g^{-1}}(q1_R)1_R$. Portanto, $q\mu' = 1_R\mu\alpha_{g^{-1}}(q1_g)1_R = 1_R\mu 1_R\alpha_{g^{-1}}(q1_g)$. Assim, $q\mu' = \mu'\alpha_{g^{-1}}(q1_g)$.

Para a segunda parte temos que $\mu' q = 1_R 1_R \mu 1_R q = 1_R\mu\beta_{g^{-1}}(1_R)1_R q = 1_R\mu 1_R 1_{g^{-1}} q = \mu'\alpha_{g^{-1}}(q')$ para algum $q' \in S_g^{\star}$. Assim, aplicando a primeira parte o resultado segue.

2. Pelo Lema 3.1 de [13], existe $J \in \mathscr{F}(T)$ tal que $J\mu = \mu J \subseteq NIM$. Então, $1_R J\mu 1_R = 1_R\mu J 1_R \subseteq 1_R NIM 1_R \subseteq I$. Logo, $1_R J = J1_R = J \cap R \in \mathscr{F}(R)$ e assim $(J \cap R)1_R\mu 1_R = 1_R\mu 1_R(J \cap R) \subseteq I$. Portanto, para $J' = J \cap R \in \mathscr{F}(R)$ temos que $J'\mu' = \mu' J' \subseteq I$.

3. Fazendo $\mu_1 = \mu\delta_{g^{-1}h}$ temos que $\mu_1 \in M_Q(NIM)$ e $\mu = \mu_1\delta_{h^{-1}g}$. Logo, $1_h\delta_h\mu' = 1_h\delta_h\mu 1_R = 1_h\delta_h\mu_1\delta_{h^{-1}g}1_R = 1_h\mu_1\delta_h\delta_{h^{-1}g}1_R = 1_R\beta_h(1_R)\mu_1\delta_g 1_R = 1_R\mu_1 1_R\delta_g 1_R = 1_R\mu_1 1_R 1_g\delta_g$. Portanto, tomando $\mu'_1 = 1_R\mu_1 1_R \in M_{\mathcal{Q}}(I)$ temos que $1_h\delta_h\mu' = \mu'_1 1_g\delta_g$.

Para a segunda parte basta fazer $\mu_1 = \delta_{hg^{-1}}\mu$ e raciocinar como acima. ∎

Pelo lema anterior temos que $(\mathcal{Q} \star_\alpha G)M_{\mathcal{Q}}(I)$ é um ideal $\mathcal{Q}$-disjunto de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$. Além disso, note que para qualquer $q_h\delta_h \in \mathcal{Q} \star_\alpha G$ e qualquer $\mu' \in M_{\mathcal{Q}}(I)$, temos que $q_h\delta_h\mu' = q_h\delta_h 1_R\mu 1_R$ para algum $\mu \in M_Q(NIM)$. Assim, $q_h\delta_h\mu' = q_h\delta_h\mu 1_R =$

$q_h(1_R\delta_h\mu 1_R)$. Como $1_R\delta_h\mu 1_R = 0$ ou $1_R\delta_h\mu 1_R \in M_{\mathcal{Q}}(I)$, concluímos que $q_h\delta_h\mu' \in \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I)$. Portanto, $(\mathcal{Q} \star_\alpha G)M_{\mathcal{Q}}(I) = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I)$.

Lema 2.2.5 *Se A é um ideal não nulo e $\mathcal{Q}$-disjunto de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$ e $B = A \cap (R \star_\alpha G)$, então $Min(A) = Min(B)$.*

Prova. Se $\Gamma \in Min(A)$, então existe $x \in A$ com $sup(x) = \Gamma$. Pelo item 3 da Proposição 1.3.9, existe $H \in \mathscr{F}(R)$ tal que $Hx \subseteq R \star_\alpha G$ e assim $Hx \subseteq B$. Se $Hx = 0$, então $x = 0$ o qual é falso. Portanto, $Hx \neq 0$ e assim $\Gamma \in Min(B)$ pois para todo $h \in H$ com $hx \neq 0$, $sup(hx) = sup(x)$.

Suponhamos agora que $\Gamma' \in Min(B)$ e $\Gamma' \notin Min(A)$. Então, existe $0 \neq y \in A$ com $sup(y) \subsetneqq \Gamma'$. Como existe $H' \in \mathscr{F}(R)$, tal que $H'y \subseteq R \star_\alpha G$, temos $H'y \subseteq B$. Portanto, $H'y = 0$ e segue que $y = 0$ o qual é contraditório. ■

Seja I um ideal não nulo e R-disjunto de $R \star_\alpha G$. Um elemento $x \in R \star_\alpha G$ é dito resíduo módulo I, se a condição $y \in I$ com $sup(y) \subseteq sup(x)$ implica $y = 0$.

O seguinte lema é a extensão para o caso parcial do Lema 3.2 de [13].

Lema 2.2.6 *Seja I um ideal não nulo e $\mathcal{Q}$-disjunto de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$ e $I_0 = I \cap (R \star_\alpha G)$. Para cada $y \in \mathcal{Q}\star_\alpha G$, existem elementos $q_i \in \mathcal{Q}$, $\mu'_i \in M_{\mathcal{Q}}(I_0)$ $(1 \leq i \leq n)$ e $z \in \mathcal{Q}\star_\alpha G$, tais que $y = \sum_{i=1}^{n} q_i\mu'_i + z$, onde z é zero ou um resíduo módulo I.*

Prova. O resultado é imediato se $y = 0$ ou y é um resíduo módulo I. Caso contrário, seja $x \in M(I)$ satisfazendo $sup(x) \subseteq sup(y)$ e vamos fazer indução sobre $\mid sup(y) \mid$.

Seja $\Gamma = sup(y)$, $\Gamma_1 = sup(x)$ e $m =\mid \Gamma \mid$. Seja $k > 1$ e suponhamos que o lema é válido para todo $m < k$.

Para $m = k$, tomamos $g \in \Gamma_1$ e $\mu'_1 = \mu'_{\Gamma_1,g}$ e definimos $y_1 = y - c^l_g(y)\mu'_1$. Se y_1 é zero ou um resíduo módulo I, então segue que $y = c^l_g(y)\mu'_1 + y_1$. Caso contrário, temos $1 <| \, sup(y_1) \, |< k$ e pela hipótese de indução existem $q_i \in \mathcal{Q}$, $\mu'_i \in M_{\mathcal{Q}}(I_0)$ $(2 \leq i \leq n)$ tais que $y_1 = \sum_{i=2}^n q_i\mu'_i + z$, onde z é zero ou um resíduo módulo I. Assim, $y = \sum_{i=1}^n q_i\mu'_i + z$, com $q_1 = c^l_g(y)$ e z é zero ou um resíduo módulo I. ∎

Lema 2.2.7 *Sejam I um ideal não nulo e $\mathcal{Q}$-disjunto de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$, $I_0 = I \cap (R \star_\alpha G)$ e $y \in \mathcal{Q} \star_\alpha G$. Então, $y \in \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I_0)$, se e somente se, existe $H \in \mathscr{F}(R)$ tal que $Hy \subseteq I_0$.*

Prova. Seja $y = \sum_{i=1}^n q_i\mu'_i \in \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I_0)$. Pelo item 2 do Lema 2.2.4, para cada μ'_i existe $H_i \in \mathscr{F}(R)$ tal que $H_i\mu'_i \subseteq I_0$ e pelo item 4 da Proposição 1.3.5, existe $J \in \mathscr{F}(R)$ tal que $Jq_i \subseteq R$ para todo i. Tomando $H = \left(\bigcap_{i=1}^n H_i\right) J$, segue que $H \in \mathscr{F}(R)$ e satisfaz $Hy \subseteq I_0$.

Seja $H_1 \in \mathscr{F}(R)$, tal que $H_1 y \subseteq I_0$. Pelo Lema 2.2.6, existem elementos $q_i \in \mathcal{Q}$, $\mu'_i \in M_{\mathcal{Q}}(I_0)$ $(1 \leq i \leq n)$ e $z \in \mathcal{Q} \star_\alpha G$, tais que $y = \sum_{i=1}^n q_i\mu'_i + z$, onde z é zero ou um resíduo módulo I. Como $\sum_{i=1}^n q_i\mu'_i \in \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I_0)$, existe $H_2 \in \mathscr{F}(R)$ tal que $H_2\left(\sum_{i=1}^n q_i\mu'_i\right) \subseteq I_0$. Portanto, tomando $H = H_1 \cap H_2$, temos que $Hz \subseteq I_0 \subseteq I$ e assim, $Hz = 0$ e segue $z = 0$. Logo, $y = \sum_{i=1}^n q_i\mu'_i \in \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I_0)$. ∎

As seguintes proposições são extensões para o caso parcial das Proposições 3.5 e 3.6 de [13]. Elas caracterizam o fecho dos ideais R-disjuntos de $R \star_\alpha G$ e dos ideais $\mathcal{Q}$-disjuntos de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$.

Proposição 2.2.8 *Seja I um ideal não nulo e $\mathcal{Q}$-disjunto de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$. Então, $[I]_{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I_0)$, onde $I_0 = I \cap (R \star_\alpha G)$.*

Prova. Se $x \in [I]_{\mathcal{Q}}$, então existe $L \in \mathscr{F}(\mathcal{Q})$, tal que $Lx \subseteq I$. Como existe $H \in \mathscr{F}(R)$ tal que $Hx \subseteq R \star_\alpha G$, então $H_1 = (L \cap R) \cap H \in \mathscr{F}(R)$ e $H_1 x \subseteq I_0$. Portanto, pelo Lema 2.2.7 temos que $x \in \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I_0)$. Logo, $[I]_{\mathcal{Q}} \subseteq \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I_0)$.

Seja $y = q\mu' \in \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I_0)$, com $q \in \mathcal{Q}$ e $\mu' = \mu'_{\Gamma,g} \in M_{\mathcal{Q}}(I_0)$, $\Gamma \in Min(I_0)$ e $g \in \Gamma$. Se $L \in \mathscr{F}(R)$ é tal que $L\mu' \subseteq I_0$, então $H = \mathcal{Q}L\mathcal{Q} \in \mathscr{F}(\mathcal{Q})$ e satisfaz $Hy \subseteq I$. De fato, para $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$ e $l \in L$ temos que $q_1 l q_2 y = q_1 l q_2 q\mu' = q_1 l \mu' \alpha_{g^{-1}}(q_2 q 1_g) \subseteq I$. Portanto, estendendo por linearidade temos que $Hy \subseteq I$ e assim $y \in [I]_{\mathcal{Q}}$. Logo, $\mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I_0) \subseteq [I]_{\mathcal{Q}}$. ■

Proposição 2.2.9 *Se I é um ideal não nulo e R-disjunto de $R \star_\alpha G$, então $[I]_R = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I) \cap (R \star_\alpha G)$.*

Prova. Se $y \in [I]_R$, então existe $H \in \mathscr{F}(R)$, tal que $Hy \subseteq I$. Usando indução como no Lema 2.2.6, existem elementos $q_i \in \mathcal{Q}$, $\mu'_i \in M_{\mathcal{Q}}(I)$ $(1 \leq i \leq n)$ e $z \in \mathcal{Q} \star_\alpha G$, tais que $y = \sum_{i=1}^n q_i \mu'_i + z$, onde z é zero ou um resíduo módulo I. Como existem F, $J \in \mathscr{F}(R)$ tais que $Fq_i \subseteq R$ e $J\mu'_i \subseteq I$ para todo i, então $K = HJF \in \mathscr{F}(R)$ e satisfaz $Kz \subseteq I$. Portanto, $z = 0$ e assim $y \in \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I)$. Logo, $[I]_R \subseteq \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I) \cap (R \star_\alpha G)$.

Seja $y = q\mu' \in \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I) \cap (R \star_\alpha G)$, com $q \in \mathcal{Q}$ e $\mu' = \mu'_{\Gamma,g} \in M_{\mathcal{Q}}(I)$, $\Gamma \in Min(I)$ e $g \in \Gamma$. Se $L \in \mathscr{F}(R)$ é tal que $L\mu' \subseteq I$ e $F \in \mathscr{F}(R)$ é tal que $Fq \subseteq R$, então claramente $H = LF \in \mathscr{F}(R)$ e satisfaz $Hy \subseteq I$. Portanto, $y \in [I]_R$ e assim $\mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I) \cap (R \star_\alpha G) \subseteq [I]_R$. ■

O seguinte teorema relaciona o conjunto de ideais R-disjuntos fechados de $R \star_\alpha G$ e o conjunto de ideais $\mathcal{Q}$-disjuntos fechados de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$. Este teorema estende o Teorema 1.2.5 para o caso parcial.

Teorema 2.2.10 *Seja R um anel $\alpha-$primo. Então, existe uma correspondência bijetiva entre $\mathscr{C}(R \star_\alpha G) = \{I \lhd R \star_\alpha G \mid I \text{ é } R-\text{disjunto fechado}\}$ e $\mathscr{C}(\mathcal{Q} \star_\alpha G) = \{I^\star \lhd \mathcal{Q} \star_\alpha G \mid I^\star \text{ é } \mathcal{Q}-\text{disjunto fechado}\}$. Esta correspondência associa o ideal $I \in \mathscr{C}(R \star_\alpha G)$ com o ideal $I^\star \in \mathscr{C}(\mathcal{Q} \star_\alpha G)$ se $I^\star \cap (R \star_\alpha G) = I$ via $I^\star = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I)$.*

Prova. Se $I^\star \in \mathscr{C}(\mathcal{Q} \star_\alpha G)$ é não nulo, então pela Proposição 2.2.8, $I^\star = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I)$, onde $I = I^\star \cap (R \star_\alpha G)$. Assim pela Proposição 2.2.9, $[I]_R = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I) \cap (R \star_\alpha G) = I^\star \cap (R \star_\alpha G) = I$. Logo, $I \in \mathscr{C}(R \star_\alpha G)$. Se $J \in \mathscr{C}(\mathcal{Q} \star_\alpha G)$ satisfaz $J \cap (R \star_\alpha G) = I$, então $J = [J]_{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(J \cap (R \star_\alpha G)) = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I) = I^\star$. Assim, $I^\star \mapsto I$ define uma correspondência injetora.

Se $I \in \mathscr{C}(R \star_\alpha G)$ é não nulo, então $I^\star = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I)$ é um ideal $\mathcal{Q}$-disjunto não nulo de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$ satisfazendo $I^\star \cap (R \star_\alpha G) = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I) \cap (R \star_\alpha G) = [I]_R = I$. Assim, $[I^\star]_{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I^\star \cap (R \star_\alpha G)) = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(I) = I^\star$. Logo $I^\star \in \mathscr{C}(\mathcal{Q} \star_\alpha G)$. Isto completa a prova se $I^\star \neq 0$.

Se $I^\star = \{0\}$, temos que $I = I^\star \cap (R \star_\alpha G) = \{0\}$ e para $I = \{0\}$ segue que $I^\star = \mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}(\{0\}) = \{0\}$. ■

Note que se I é um ideal de $R \star_\alpha G$, então $I \cap R$ é um ideal α-invariante de R. De fato, se $a \in I \cap S_{g^{-1}}$ $(g \in G)$ então $\alpha_g(a) = 1_g\delta_g a 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} \in I$.

Lema 2.2.11 *Seja R um anel α-primo. Então, $R \star_\alpha G$ é primo, se e somente se, $\mathcal{Q} \star_\alpha G$ é primo.*

Prova. Que $R \star_\alpha G$ é primo implica $\mathcal{Q} \star_\alpha G$ é primo, foi provado na Proposição 1.3.9.

Suponhamos que $\mathcal{Q} \star_\alpha G$ é primo. Sejam A e B ideais de $R \star_\alpha G$, tais que $AB = 0$. Então, $(A \cap R)(B \cap R) = 0$ e como R é α-primo, temos que $A \cap R = 0$ ou $B \cap R = 0$. Se $A \cap R = 0$ e $A = 0$, então a prova termina. Se $A \cap R = 0$ e $A \neq 0$, então sejam $x \in [A]_R$ e $H \in \mathscr{F}(R)$ tais que $Hx \subseteq A$. Como $HxB = 0$, temos que $xB = 0$. Assim, $[A]_R B = 0$. Sejam $y \in B$ e $A^\star$ o ideal fechado de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$, tal que $A^\star \cap (R \star_\alpha G) = [A]_R$. Se $v \in A^\star$, existe $L \in \mathscr{F}(R)$, tal que $Lv \subseteq [A]_R$, assim $Lvy = 0$. Portanto, temos que $vy = 0$ para todo $v \in A^\star$, isto é, $A^\star y = 0$. Como $A^\star \neq 0$ e $\mathcal{Q} \star_\alpha G$ é primo, temos que $y = 0$. Logo, $B = 0$.

Se $B \cap R = 0$ e $B = 0$ a prova termina. Suponhamos que $B \cap R = 0$ e $B \neq 0$. Se $BA = 0$, então raciocinando como acima obtemos que $A = 0$. Se $BA \neq 0$, então temos que $BA \cap R = 0$ e $(BA)B = 0$ e de novo raciocinando como acima obtemos que $B = 0$ o qual é contraditório. Portanto, em qualquer caso $A = 0$ ou $B = 0$ e assim $R \star_\alpha G$ é primo. ■

O seguinte teorema relaciona os ideais primos R-disjuntos de $R \star_\alpha G$ e os ideais primos $\mathcal{Q}$-disjuntos de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$. Este teorema é uma extensão do Teorema 1.2.6 para ações parciais.

Teorema 2.2.12 *Seja R um anel α-primo. A correspondência do Teorema 2.2.10, induz uma correspondência bijetiva entre $\mathscr{P}(R \star_\alpha G) = \{P \lhd R \star_\alpha G \mid P$ é primo $R - disjunto\}$ e $\mathscr{P}(\mathcal{Q} \star_\alpha G) = \{P^\star \lhd \mathcal{Q} \star_\alpha G \mid P^\star$ é primo $\mathcal{Q} - disjunto\}$.*

Prova. Pelo Lema 2.2.11, basta considerar ideais não nulos. Sejam $P \in \mathscr{P}(R \star_\alpha G)$ e $P^\star \in \mathscr{P}(\mathcal{Q} \star_\alpha G)$, tais que $P^\star \cap (R \star_\alpha G) = P$. Iremos provar que P é primo, se e somente se, $P^\star$ é primo.

Suponhamos que P é primo e sejam A e B ideais de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$ que contém $P^\star$ e com $AB \subseteq P^\star$. Como $(A \cap (R \star_\alpha G))\,(B \cap (R \star_\alpha G)) \subseteq P$, temos que $A \cap (R \star_\alpha G) = P$ ou $B \cap (R \star_\alpha G) = P$. Se $A \cap (R \star_\alpha G) = P$, então pelo Lema 2.2.5 temos $Min(A) = Min(P) = Min(P^\star)$. Assim, A é um ideal que contém $P^\star$ e $Min(A) = Min(P^\star)$, logo pelo Teorema 2.1.6, $A \subseteq [P^\star]_{\mathcal{Q}}$ e portanto $A = P^\star$. Analogamente, $B \cap (R \star_\alpha G) = P$ implica $B = P^\star$. Logo, $P^\star$ é primo.

Suponhamos que $P^\star$ é primo e sejam A e B ideais não nulos de $R \star_\alpha G$ tais que $AB \subseteq P$. Então, $(A \cap R)\,(B \cap R) \subseteq P \cap R = 0$. Como R é α-primo, segue que $A \cap R = 0$ ou $B \cap R = 0$.

Se $A \cap R = 0$, sejam $x \in [A]_R$ e $H \in \mathscr{F}(R)$ tais que $Hx \subseteq A$. Como $HxB \subseteq P$, temos que $xB \subseteq [P]_R = P$. Assim, $[A]_R B \subseteq P$. Suponhamos que $B \nsubseteq P$ e seja

$y \in B$, tal que $y \notin P$. Seja $A^\star$ o ideal fechado de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$, tal que $A^\star \cap (R \star_\alpha G) = [A]_R$. Se $v \in A^\star$, existe $L \in \mathscr{F}(R)$, tal que $Lv \subseteq [A]_R$, assim $Lvy \subseteq P$. Pelo Lema 2.2.7, temos que $vy \in P^\star$ para todo $v \in A^\star$, isto é, $A^\star y \subseteq P^\star$. Como $P^\star$ é primo e $y \notin P$, segue que $A^\star \subseteq P^\star$. Portanto, $A \subseteq [A]_R = A^\star \cap (R \star_\alpha G) \subseteq P^\star \cap (R \star_\alpha G) = P$.

Finalmente, se $B \cap R = 0$, então $BA \cap R = 0$. Como $AB \subseteq P$, temos que $(BA)B \subseteq P$. Se $B \nsubseteq P$, então, raciocinando como acima concluímos que $BA \subseteq P$. Assim, se $A \nsubseteq P$ repetindo novamente o argumento acima, segue que $B \subseteq P$ o qual é contraditório. Logo, $A \subseteq P$. Portanto, em qualquer caso temos que $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$ e assim P é primo. ∎

Corolário 2.2.13 *Seja R um anel α-primo. Então, existe uma correspondência bijetiva, que preserva ideais primos, entre $\mathscr{C}(T \star_\beta G) = \{I^\star \lhd T \star_\beta G \mid I^\star$ é $T-$disjunto fechado$\}$ e $\mathscr{C}(E \star_\beta G) = \{I^\star \lhd E \star_\beta G \mid I^\star$ é $E-$disjunto fechado$\}$.*

Prova. Basta usar os Teoremas 2.2.1, 2.2.10, 2.2.12 o Lema 2.2.11 e o Corolário 2.2.2. ∎

Corolário 2.2.14 *Seja R um anel α-primo. Então, existe uma correspondência bijetiva, que preserva ideais primos, entre $\mathscr{C}(E \star_\beta G) = \{I^\star \lhd E \star_\beta G \mid I^\star$ é $E-$disjunto fechado$\}$ e $\mathscr{C}(Q \star_\beta G) = \{I^\star \lhd Q \star_\beta G \mid I^\star$ é $Q-$disjunto fechado$\}$.*

Prova. Basta usar o Corolário 2.2.13 e os Teoremas 1.2.5 e 1.2.6. ∎

Em conclusão, existe uma correspondência bijetiva entre os ideais disjuntos fechados (em particular primos) de todos os anéis do seguinte diagrama:

$$
\begin{array}{ccccc}
R \star_\alpha G & \hookrightarrow & T \star_\beta G & & \\
\downarrow & & \downarrow & \searrow & \\
\mathcal{Q} \star_\alpha G & \hookrightarrow & E \star_\beta G & \hookrightarrow & Q \star_\beta G
\end{array}
$$

Onde (T, β) é a envolvente de (R, α), (E, β) é a envolvente de $(\mathcal{Q}, \alpha)$, $\mathcal{Q}$ é o anel de α-quocientes de Martindale de R e Q é o anel de G-quocientes de Martindale de T.

Capítulo 3

Aplicações

A técnica de usar a correspondência bijetiva entre fechados (e em particular entre primos), foi primeiramente usada em [1] para estudar os ideais fortemente primos e não singulares em skew anéis de polinômios e em skew anéis de polinômios de Laurent. Mais tarde em [13], todos esses resultados foram estendidos para produtos cruzados de grupos abelianos. Nosso objetivo neste capítulo, será usar a correspondência bijetiva entre fechados (em particular entre primos) do Capítulo 2 para estudar os ideais fortemente primos e primos não singulares de $R \star_\alpha G$. Também vamos descrever os ideais fechados (em particular primos) do skew anel de polinômios de Laurent parcial $R\langle x; \alpha\rangle$.

3.1 Ideais Fortemente Primos de $R \star_\alpha G$

Nesta seção assumimos que α é uma ação parcial do grupo abeliano G sobre o anel R e que R é um anel α-primo.

Sejam I e P ideais de R tais que $I \nsubseteq P$. Um insulador (à esquerda) módulo P em I é um subconjunto finito F de I satisfazendo a condição: para todo $r \in R$ tal que $rF \subseteq P$ implica $r \in P$. Note que esta definição é equivalente a considerar I e P

ideais de R tais que $P \subsetneqq I$ e satisfazendo a mesma condição de cima.

Um ideal α-invariante H de R é dito α-fortemente primo (à esquerda), se todo ideal $I \in \mathscr{F}(R)$ tal que $I \nsubseteq H$ (ou equivalentemente $H \subsetneqq I$) tem um insulador (à esquerda) módulo H. O anel R é dito α-fortemente primo (à esquerda), se o ideal nulo é α-fortemente primo (à esquerda).

Lema 3.1.1 *Sejam R um anel α-primo e P um ideal fechado não nulo de $R \star_\alpha G$. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *Se I é um ideal à esquerda R-disjunto de $R \star_\alpha G$ com $P \subsetneqq I$, então existe $x \in M(I)$ que é um resíduo módulo P.*
2. *No item 1 se I é um ideal, então existe $x' \in M(I)$ que é um resíduo módulo P com $1 \in sup(x')$.*

Prova. 1. Seja $P^\star \in \mathscr{C}(\mathcal{Q} \star_\alpha G)$, tal que $P^\star \cap (R \star_\alpha G) = P$ e seja $y \in I \setminus P$ com $y = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu'_i + \gamma$ (Lema 2.2.6), onde $q_i \in \mathcal{Q}, \mu'_i \in M_{\mathcal{Q}}(P)$ e γ é um resíduo módulo $P^\star$. Como existe $H \in \mathscr{F}(R)$ tal que $H(\sum_{i=1}^{n} q_i \mu'_i) \subseteq P$, temos que $H\gamma \subseteq I$. Além disso, notemos que $H\gamma \neq 0$, pois o contrário implicaria $\gamma = 0$ e assim $y \in [P]_R = P$, o qual é falso. Como para qualquer $0 \neq x_0 \in H\gamma$ temos que $sup(x_0) \subseteq sup(\gamma)$, então x_0 é um resíduo módulo P. Logo, tomando qualquer $x \in M(I)$ com $sup(x) \subseteq sup(x_0)$ o resultado segue.

2. Pelo item 1 existe $x \in M(I)$ que é um resíduo módulo P. Temos que $sup(x) \in NIM$ (Lemas 2.1.4 e 2.1.2). Se $sup(x) = \{g_1, ..., g_n\}$, então $\{1, g_2 g_1^{-1}, ..., g_n g_1^{-1}\} \in Min(NIM)$. Como $1_1 = 1_R \neq 0$ temos que $\{1, g_2 g_1^{-1}, ..., g_n g_1^{-1}\} \in Min(I)$ (Lemas 2.1.4 e 2.1.2). Logo, existe $x' = a_1\delta_1 + ... + a_n\delta_{g_n g_1^{-1}} \in M(I)$. Se x' não é um resíduo módulo P, então existe $0 \neq y \in P$ tal que $sup(y) \subseteq sup(x')$. Como $P \subsetneqq I$ temos que $sup(y) = sup(x')$. Então, seja $y = b\delta_1 + ... + b_n\delta_{g_n g_1^{-1}} \in M(P)$. Se $H = \{b \in R \mid$ existe $z \in P$ tal que $sup(z) = sup(y)$ e $c_1^l(z) = b\} \cup \{0\}$ então H é um

ideal α-invariante não nulo de R. Se $b \in H$, então existe $z \in P$ com $sup(z) = sup(y)$ e $c_1^l(z) = b$ e temos que $z(1_{g_1}\delta_{g_1}) = 0$ pois $z \in P$ e $sup(z(1_{g_1}\delta_{g_1})) \subseteq sup(x)$. Logo, $b1_{g_1} = 0$ e temos que $H1_{g_1} = 0$. Como R é α-primo, concluímos que $1_{g_1} = 0$ o qual é contraditório. Portanto, $x' \in M(I)$ é um resíduo módulo P. ∎

Lema 3.1.2 *Seja R um anel α-primo. Se existe um ideal P, R-disjunto fortemente primo de $R \star_\alpha G$, então R é α-fortemente primo.*

Prova. Seja $I \in \mathscr{F}(R)$. Como P é R-disjunto, temos que $I \star_\alpha G \nsubseteq P$. Portanto, $I \star_\alpha G$ tem um insulador módulo P, digamos $F = \{x_1, ...x_n\}$. Seja $x_i = \sum_g a_g^i \delta_g$, onde $a_g^i \in I \cap S_g$ para todo $i = 1, ..., n$ e para todo $g \in G$. Então, $F_0 = \left\{a_g^i \mid 1 \leq i \leq n, g \in G\right\}$ é um insulador em I. De fato, se $r \in R$ é tal que $rF_0 = 0$, então $ra_g^i = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$ e para todo $g \in G$. Logo, $rx_i \in P$ para todo i e assim $r \in P \cap R = 0$. ∎

Lema 3.1.3 *Se R é um anel α-fortemente primo, então cada ideal primo R-disjunto de $R \star_\alpha G$ é fortemente primo.*

Prova. Sejam P um ideal primo R-disjunto de $R \star_\alpha G$ e I um ideal de $R \star_\alpha G$ tal que $P \subsetneqq I$.

Se $I \cap R \neq 0$, então como $I \cap R \in \mathscr{F}(R)$, temos que $I \cap R$ tem um insulador F_0. Seja $x \in R \star_\alpha G$, tal que, $xF_0 \subseteq P$. Se $P = 0$, facilmente segue que $x = 0$. Se $P \neq 0$, então podemos escrever $x = \sum_{i=1}^n q_i\mu_i' + \gamma$ (Lema 2.2.6), onde $q_i \in \mathcal{Q}, \mu_i' \in M_{\mathcal{Q}}(P)$ e γ é um resíduo módulo $P^\star$. Como existe $H \in \mathscr{F}(R)$ tal que $H(\sum_{i=1}^n \mu_i') \subseteq P$, temos que $l\gamma a = lxa - l(\sum_{i=1}^n q_i\mu_i')a \subseteq P^\star$, para todo $a \in F_0$ e para todo $l \in \mathcal{Q}H\mathcal{Q}$. E como $\mathcal{Q}H\mathcal{Q} \in \mathscr{F}(\mathcal{Q})$, temos que $\gamma a \in [P^\star]_{\mathcal{Q}} = P^\star$ para todo $a \in F_0$. Logo, $\gamma F_0 = 0$. Se $F \in \mathscr{F}(R)$ é tal que $F\gamma \subseteq R \star_\alpha G$, então $F\gamma F_0 = 0$. Representando cada $f\gamma$ para $f \in F$ com coeficientes à direita, obtemos $f\gamma = 0$ e assim $F\gamma = 0$. Então, segue que $\gamma = 0$ e como existe $J \in \mathscr{F}(R)$ com $Jx \subseteq P$, temos que $x \in [P]_R = P$.

Se $I \cap R = 0$, então pelo Lema 3.1.1 (item 2) existe $x \in M(I)$ que é resíduo módulo P e $\Gamma = sup(x) = \{g_1 = 1, ..., g_n\}$. Considerando o conjunto $H = \{a \in R \mid$ existe $z \in I$ tal que $sup(z) = \Gamma$ e $c_1^l(z) = r\} \cup \{0\}$, temos que H é um ideal α-invariante não nulo de R. Logo, H tem um insulador $F_0 = \{a_1, ..., a_t\}$. Para cada $i = 1, ..., t$, seja $x_i \in M(I)$ tal que $sup(x_i) = \Gamma$ e $c_{g_1}^l(x_i) = a_i$. Como $\Gamma \in Min(I) \subseteq Min(NIM)$, então pelo Lema 2.2.3 existe $\mu \in M_Q(NIM)$, tal que, $sup(\mu) = \Gamma$ e $x_i = a_i\mu$ para todo i. Iremos provar que $F = \{x_1.,,, x_t\}$ é um insulador módulo P em I. Seja $y \in R \star_\alpha G$, tal que, $yF \subseteq P$.

Se $P = 0$, então $0 = yx_i(Q \star_\beta G) = ya_i\mu(Q \star_\beta G) = ya_i(Q \star_\beta G)\mu$. Sendo $R \star_\alpha G$ primo, temos que $Q \star_\beta G$ é primo e assim $ya_i = 0$ para todo i, isto é, $yF_0 = 0$ e facilmente segue que $y = 0$.

Se $P \neq 0$, então podemos escrever $y = \sum_{i=1}^n q_i\mu_i' + \gamma$, onde $q_i \in \mathcal{Q}$, $\mu_i' \in M_{\mathcal{Q}}(P)$ e γ é um resíduo módulo $P^\star$. Como $yF \subseteq P$, então raciocinando como na primeira parte concluimos que $\gamma x_i \subseteq P^\star$ para todo i. Assim, $\gamma x_i = \gamma a_i\mu(\mathcal{Q} \star_\alpha G) = \gamma a_i\mu 1_R(Q \star_\beta G)1_R = \gamma a_i\beta_1(1_R)\mu(Q \star_\beta G)1_R = \gamma a_i 1_R(Q \star_\beta G)\mu 1_R = \gamma a_i(\mathcal{Q} \star_\alpha G)1_R\mu 1_R = \gamma a_i(\mathcal{Q} \star_\alpha G)\mu' \subseteq P^\star$ para todo i. Se $\mu' \in P^\star$, então como existe $J \in \mathscr{F}(R)$ tal que $J\mu' \subseteq I$ temos que $J\mu' \subseteq P^\star \cap (R \star_\alpha G) = P$. Como $sup(\mu') = \Gamma = sup(x)$ e x é um resíduo módulo P, temos que μ' é um resíduo módulo P e portanto $\mu' = 0$ o qual é contraditório. Segue que $\gamma a_i \in P^\star$ para todo i e assim $\gamma F_0 = 0$. Se $J' \in \mathscr{F}(R)$ é tal que $J'\gamma \subseteq R \star_\alpha G$, então $J'\gamma F_0 = 0$ e assim $J'\gamma = 0$. Logo $\gamma = 0$ e $y \in [P]_R = P$. ■

O seguinte teorema é uma extensão para ações parciais do Teorema 4.3 de [13]. Lembramos que se I é um ideal de $R \star_\alpha G$, então $I_0 = I \cap R$ é um ideal α-invariante de R e $R \star_\alpha G/I_0 \star_\alpha G \backsimeq (R/I_0) \star_\alpha G$ ([8], Lema 2.2). E se π é o homomorfismo canônico de $R \star_\alpha G$ em $(R/I_0) \star_\alpha G$, então $R \star_\alpha G/I \backsimeq (R \star_\alpha G/I_0 \star_\alpha G)/\pi(I)$ onde $\pi(I) = I/I_0 \star_\alpha G$.

Teorema 3.1.4 *Seja P_0 um ideal α-primo de R. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *P_0 é α-fortemente primo.*

2. *Cada ideal primo P de $R \star_\alpha G$, tal que $P \cap R = P_0$ é fortemente primo.*

3. *Algum ideal primo P de $R \star_\alpha G$, tal que $P \cap R = P_0$ é fortemente primo.*

Prova. $1 \Rightarrow 2$. Seja P um ideal primo de $R \star_\alpha G$ tal que $P \cap R = P_0$. Se $L = P/P_0 \star_\alpha G$ é o ideal (R/P_0)-disjunto de $(R/P_0) \star_\alpha G$ satisfazendo $(R \star_\alpha G)/P \cong ((R/P_0)\star_\alpha G)/L$, então L é primo. E pelo Lema 3.1.3, L é fortemente primo. Portanto, P é fortemente primo.

$2 \Rightarrow 3$. É evidente.

$3 \Rightarrow 1$. Seja P algum ideal fortemente primo de $R \star_\alpha G$, tal que, $P \cap R = P_0$. Se $L = P/P_0 \star_\alpha G$ é o ideal (R/P_0)-disjunto de $(R/P_0) \star_\alpha G$ satisfazendo $(R \star_\alpha G)/P \cong ((R/P_0)\star_\alpha G)/L$, então L é fortemente primo. E pelo Lema 3.1.2, R/P_0 é α-fortemente primo. Portanto, P_0 é α-fortemente primo. ■

Corolário 3.1.5 *Seja α uma ação parcial do grupo G sobre o anel R. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Cada ideal α-primo de R é α-fortemente primo.*

2. *Cada ideal primo de $R \star_\alpha G$ é fortemente primo.*

Prova. $1 \Rightarrow 2$. Se P é um ideal primo de $R \star_\alpha G$, então $P \cap R$ é um ideal α-primo de R e pela hipótese temos que $P \cap R$ é α-fortemente primo. Finalmente, pelo Teorema 3.1.4 concluímos que P é fortemente primo.

$2 \Rightarrow 1$. Seja P_0 um ideal α-primo de R e P um ideal primo de $R \star_\alpha G$ tal que $P \cap R = P_0$. Então pela hipótese temos que P é fortemente primo e pelo Teorema 3.1.4, concluímos que P_0 é α-fortemente primo. ■

3.2 Ideais Primos Não Singulares de $R \star_\alpha G$

Nesta seção seguimos assumindo que α é uma ação parcial com envolvente do grupo abeliano G sobre o anel R e que R é um anel α-primo.

Lembramos que para um R-módulo à esquerda M, o submódulo singular de M está definido como $Z_l(M) = \{m \in M \mid An_R(m) \text{ é essencial}\}$, onde $An_R(m)$ é o anulador à esquerda de m em R. Considerando R como um R-módulo, temos que $Z_l({}_RR)$ é um ideal de R denotado por $Z_l(R)$ e chamado o ideal singular à esquerda de R.

O anel R é dito não singular à esquerda se $Z_l(R) = 0$. Um ideal P de R é dito não singular à esquerda se o anel R/P é não singular.

Lema 3.2.1 *Seja R um anel α-primo. Se existe um ideal primo R-disjunto P não singular de $R \star_\alpha G$, então R é não singular.*

Prova. Basta ver que $(Z_l(R)+P)/P \subseteq Z_l(R\star_\alpha G/P)$, pois como P é não singular, obtemos $(Z_l(R) + P)/P \subseteq Z_l(R \star_\alpha G/P) = 0$. Assim, $Z_l(R) \subseteq P$ o qual implica que $Z_l(R) \subseteq P \cap R = 0$, isto é, R é não singular.

Sejam $a + P \in (Z_l(R) + P)/P$ com $a \in Z_l(R)$ e I um ideal à esquerda de $R \star_\alpha G$, satisfazendo $P \subsetneqq I$.

Se $I \cap R \neq 0$, então como $(I \cap R) \cap An_R(a) \neq 0$, existe $0 \neq b \in I \cap R$ tal que $ba = 0$. Portanto, $b+P \in (I/P)\cap An_{R\star_\alpha G/P}(a+P)$ e $b+P \neq 0$ em $R\star_\alpha G/P$, porque $P \cap R = 0$.

Se $I \cap R = 0$, então pelo Lema 3.1.1, existe $x \in M(I)$ resíduo módulo P. Dado $g \in \Gamma = sup(x)$, consideramos o ideal à esquerda de R,

$$H = \left\{ b \in R \mid \text{ existe } y \in I \text{ com } sup(y) = \Gamma \text{ e } c_g^r(y) = b \right\} \cup \{0\}.$$

Como $a \in Z_l(R)$, então $H \cap An_R(a) \neq 0$. Logo, existe $y = \sum_h 1_h \delta_h b_h \in I$ com $sup(y) = \Gamma$ e $b_g a = 0$.

Se $ya = 0$, então $0 \neq y + P \in (I/P) \cap An_{R\star_\alpha G/P}(a + P)$. Se $ya \neq 0$, então podemos escolher um elemento $c = \sum_h 1_h \delta_h c_h \in I$, tal que, $sup(c) = \Gamma$, $ca \neq 0$, $c_g a = 0$ e $\mid sup(ca) \mid$ é minimal. Assim, $sup(ca) \subsetneqq \Gamma \setminus \{g\}$. Se $f \in sup(ca)$, então $Rc_f^r(c) \cap An_R(a) \neq 0$. Logo, existe $s \in R$ tal que $sc_f^r(c) \neq 0$ e $sc_f^r(c)a = 0$. Se $c_0 = \alpha_f(s1_{f^{-1}})c$, temos que $c_0 \neq 0$, pois $sc_f^r(c) = s1_{f^{-1}}c_f^r(c) \neq 0$. Portanto, $c_0 \in I$, $sup(c_0) = \Gamma$ e $sup(c_0 a) \subsetneqq sup(ca)$. Como $\mid sup(ca) \mid$ é minimal, então $c_0 a = 0$. Assim, $0 \neq c_0 + P \in (I/P) \cap An_{R\star_\alpha G/P}(a + P)$.

Portanto, em qualquer caso temos que $(I/P) \cap An_{R\star_\alpha G/P}(a + P) \neq 0$. Logo, $a + P \in Z_l(R \star_\alpha G/P)$. ■

Lema 3.2.2 *Sejam R um anel α- primo, I um ideal não nulo e $\mathcal{Q}$-disjunto de $\mathcal{Q} \star_\alpha G$ e $I_0 = I \cap (R \star_\alpha G)$. Se $J \subseteq \mathcal{Q}$, então para cada $y \in (\mathcal{Q} \star_\alpha G)J$, existem elementos $b_i \in \mathcal{Q}J$, $\mu_i' \in M_{\mathcal{Q}}(I_0)$ $(1 \leq i \leq n)$ e $z \in (\mathcal{Q} \star_\alpha G)J$, tais que $y = \sum_{i=1}^n \mu_i' b_i + z$, onde z é zero ou um resíduo módulo I.*

Prova. O resultado é imediato se $y = 0$ ou y é um resíduo módulo I. Caso contrário, seja $x \in M(I)$ satisfazendo $sup(x) \subseteq sup(y)$ e vamos fazer indução sobre $\mid sup(y) \mid$.

Seja $\Gamma = sup(y)$, $\Gamma_1 = sup(x)$ e $m = \mid \Gamma \mid$. Seja $k > 1$ e suponhamos que o lema é válido para todo $m < k$.

Para $m = k$, tomamos $g \in \Gamma_1$ e $\mu'_1 = \mu'_{\Gamma_1,g}$ e definimos $y_1 = y - \mu'_1\alpha_{g^{-1}}(c^l_g(y))$. Note que $\alpha_{g^{-1}}(c^l_g(y)) \in \mathcal{Q}J$, pois $c^l_g(y) = \sum_i b^i_g \alpha_g(a_i 1_{g^{-1}})$ onde $a_i \in J$ para todo i. Se y_1 é zero ou um resíduo módulo I, então segue que $y = \mu'_1\alpha_{g^{-1}}(c^l_g(y)) + y_1$. Caso contrário, temos $1 <| sup(y_1) |< k$ e pela hipótese de indução existem $b_i \in \mathcal{Q}$, $\mu'_i \in M_{\mathcal{Q}}(I_0)$ $(2 \leq i \leq n)$ tais que $y_1 = \sum_{i=2}^n \mu'_i b_i + z$ onde $z \in (\mathcal{Q} \star_\alpha G)J$ é zero ou um resíduo módulo I. Assim, $y = \sum_{i=1}^n \mu'_i b_i + z$ com $b_1 = \alpha_{g^{-1}}(c^l_g(y))$ e z é zero ou um resíduo módulo I. ■

Lema 3.2.3 *Se R é um anel α-primo não singular, então cada ideal primo R-disjunto de $R \star_\alpha G$ é não singular.*

Prova. Assumamos que P é um ideal primo R-disjunto de $R \star_\alpha G$ tal que $Z_l(R \star_\alpha G/P) \neq 0$. Então, existe um ideal I de $R \star_\alpha G$ satisfazendo $P \subsetneqq I$ e $Z_l(R \star_\alpha G/P) = I/P$.

Seja $P^\star \in \mathscr{P}(\mathcal{Q} \star_\alpha G)$, tal que, $P^\star \cap (R \star_\alpha G) = P$ e seja $a \in I \cap R$. Se $0 \neq J$ é um ideal à esquerda de R, então $L = (R \star_\alpha G)J$ é um ideal à esquerda não nulo de $R \star_\alpha G$ coincidindo com o conjunto $\{\sum_g 1_g \delta_g b_g \mid b_g \in J \cap S_{g^{-1}}\}$ e satisfazendo $L \cap R = J$. Como P é R-disjunto, temos que $L \nsubseteq P$ e $(L+P)/P$ é um ideal à esquerda não nulo de $R \star_\alpha G/P$. Como $a + P \in Z_l(R \star_\alpha G/P)$, existe $x \in L$ satisfazendo $xa \in P$ e $x \notin P$.

Se $P = 0$, então $c^r_g(x)a = 0$ para todo $g \in sup(x)$. Logo, $J \cap An_R(a) \neq 0$. Se $P \neq 0$, então pelo Lema 3.2.2, podemos escrever $x = \sum_{i=1}^n \mu'_i b_i + \gamma$, onde $b_i \in \mathcal{Q}J$, $\mu'_i \in M_{\mathcal{Q}}(P)$ e $\gamma \in (\mathcal{Q} \star_\alpha G)J$ é um resíduo módulo $P^\star$. Como existe $H \in \mathscr{F}(R)$, tal que, $H\mu'_i \subseteq P$, temos que $F = \mathcal{Q}H\mathcal{Q} \in \mathscr{F}(\mathcal{Q})$ e satisfaz $F(\sum_{i=1}^n \mu'_i b_i a) \subseteq P^\star$. Portanto, $F\gamma a \subseteq P^\star$ e assim $\gamma a \in [P^\star]_{\mathcal{Q}} = P^\star$. Logo, $\gamma a = 0$. Seja $F_0 \in \mathscr{F}(R)$ tal que $F_0\gamma \subseteq (R \star_\alpha G)J = L$. Como cada $f\gamma$ $(f \in F_0)$ se pode representar com coeficientes à direita, os quais são elementos de J e $f\gamma a = 0$ então existe $0 \neq j \in J$ com $ja = 0$. Portanto, em qualquer caso temos que $J \cap An_R(a) \neq 0$ e assim $a \in Z_l(R)$. Como R é não singular concluímos que $a = 0$ e assim $I \cap R = 0$.

Se $P \neq 0$, então pelo Lema 3.1.1 existe $x \in M(I)$ resíduo módulo P. Seja $\Gamma = sup(x)$, $g \in \Gamma$ e $\mu' \in M_{\mathcal{Q}}(I)$ tal que $x = c^l_g(x)\mu'$. Seja J um ideal à esquerda não nulo de R e $L = (R \star_\alpha G)J$. Como $(L+P)/P$ é um ideal à esquerda não nulo de $(R \star_\alpha G)/P$ e $x + P \in Z_l(R \star_\alpha G/P)$, então existe $y \in L$ tal que $yx \in P$ e $y \notin P$. Se $P^{\star\star}$ é o ideal primo de $Q \star_\beta G$ tal que $P^\star \subseteq P^{\star\star}$ e $P^{\star\star} \cap (R \star_\alpha G) = P$, então temos que $yx(Q \star_\beta G) = yc^l_g(x)1_g\mu(Q \star_\beta G) = yc^l_g(x)(Q \star_\beta G)\mu \subseteq P^{\star\star}$. Se $\mu \in P^{\star\star}$, então como existe $J \in \mathscr{F}(R)$ tal que $J\mu' \subseteq P^{\star\star} \cap (R \star_\alpha G) = P$ temos que $J\mu' = 0$ pois μ' é um resíduo módulo P. Logo, $\mu' = 0$ o qual é falso. Portanto, $yc^l_g(x) \in P^{\star\star} \cap (R \star_\alpha G) = P$. Assim, $y \in L$ satisfaz $yc^l_g(x) \in P$ e $y \notin P$, e repetindo o mesmo argumento usado para provar que $I \cap R = 0$, se mostra que $c^l_g(x) \in Z_l(R)$. Portanto, como R é não singular, temos que $c^l_g(x) = 0$, o qual é contraditório.

Se $P = 0$, então como $I \cap R = 0$ podemos escolher $x \in M(I)$. Seja $\Gamma = sup(x)$, $g \in \Gamma$ e $\mu' \in M_{\mathcal{Q}}(I)$ tal que $x = c^l_g(x)\mu'$. Seja J um ideal à esquerda não nulo de R e $L = (R \star_\alpha G)J$. Como L é um ideal à esquerda não nulo de $R \star_\alpha G$ e $x \in Z_l(R \star_\alpha G)$, então existe $y \in L$ tal que $yx = 0$ e $y \neq 0$. Assim, temos que $yx(Q \star_\beta G) = yc^l_g(x)1_g\mu(Q \star_\beta G) = yc^l_g(x)(Q \star_\beta G)\mu = 0$. Como $Q \star_\beta G$ é primo e $\mu \neq 0$, então $yc^l_g(x) = 0$. Repetindo o argumento usado para provar que $I \cap R = 0$, se mostra que $c^l_g(x) \in Z_l(R)$. Como R é não singular temos que $c^l_g(x) = 0$, o qual é falso.

Portanto, cada ideal primo R-disjunto de $R \star_\alpha G$ é não singular. ■

O seguinte teorema é uma extensão para o caso parcial do Teorema 5.4 de [13], a prova é semelhante à do Teorema 3.1.4.

Teorema 3.2.4 *Seja P_0 um ideal α-primo de R. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *P_0 é não singular.*

2. Cada ideal primo P de $R \star_\alpha G$, tal que $P \cap R = P_0$ é não singular.

3. Algum ideal primo P de $R \star_\alpha G$, tal que $P \cap R = P_0$ é não singular.

O seguinte corolário é uma extensão para o caso parcial do Corolário 5.5 de [13], a prova é semelhante à do Corolário 3.1.5.

Corolário 3.2.5 *Seja α uma ação parcial do grupo G sobre o anel R. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. Cada ideal α-primo de R é não singular.

2. Cada ideal primo de $R \star_\alpha G$ é não singular.

Na seguinte proposição, para I um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$ caracterizamos o ideal singular do R-módulo $R \star_\alpha G/I$. Esta proposição é uma extensão para ações parciais da Proposição 5.6 de [13].

Proposição 3.2.6 *Seja R um anel α-primo não singular. Se I é um ideal R-disjunto de $R \star_\alpha G$, então $Z_l(_R(R \star_\alpha G/I)) = [I]/I$.*

Prova. Seja $x + I \in Z_l(_R(R \star_\alpha G/I))$ com $x = \sum_{i=1}^n q_i\mu_i' + \gamma$, onde $q_i \in \mathcal{Q}, \mu_i' \in M_{\mathcal{Q}}(I)$ e γ é um resíduo módulo $[I]^\star$ e $[I]^\star \cap (R \star_\alpha G) = [I]$. Seja $F \in \mathscr{F}(R)$ tal que $F\gamma \subseteq R \star_\alpha G$. Se $F\gamma = 0$ segue que $\gamma = 0$, $x \in [I]$ e $x + I \in [I]/I$. Se $F\gamma \neq 0$, existe $f \in F$ tal que $f\gamma \neq 0$. Seja $H \in \mathscr{F}(R)$ tal que $H(\sum_{i=1}^n q_i\mu_i') \subseteq I$. Se para algum $h \in H$, temos que $hf\gamma \neq 0$, então existe $g \in sup(x)$ satisfazendo $hfc_g^l(\gamma) \neq 0$. Como $Z_l(R) = 0$, então existe um ideal à esquerda não nulo L de R tal que $lhfc_g^l(\gamma) \neq 0$ para todo elemento não nulo l de L. Como $hfx + I \in Z_l(_R(R \star_\alpha G/I))$, temos que $l_0hfx \in I$ para algum elemento não nulo $l_0 \in L$. Assim, $l_0hf(\sum_{i=1}^n q_i\mu_i') + l_0hf\gamma \in I$. E como $l_0hf(\sum_{i=1}^n q_i\mu_i') \in I$, obtemos $l_0hf\gamma \in I$. Sendo γ um resíduo módulo $[I]^\star$, temos $l_0hf\gamma = 0$ e assim $l_0hfc_g^l(\gamma) = 0$ o qual é contraditório. Logo, $Hf\gamma = 0$ e assim $f\gamma = 0$ que também é contraditório.

Reciprocamente, seja $y \in [I]$ e L um ideal à esquerda não nulo de R. Se $0 \neq l \in L$, então $ly \in [I]$ e assim existe $H \in \mathscr{F}(R)$ tal que $Hly \subseteq I$. Como $Hl \neq 0$, existe $h \in H$ tal que $l_0 = hl \neq 0$. Como $l_0 y \in I$ e $l_0 \in L$, temos que $L \cap An_R(y + I) \neq 0$. Logo, $y + I \in Z_l({}_R(R \star_\alpha G/I))$. ■

O seguinte teorema é uma extensão para ações parciais, do Teorema 5.7 de [13].

Teorema 3.2.7 *Seja R um anel α-primo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *R é não singular.*

2. *Cada ideal R-disjunto fechado de $R \star_\alpha G$ é não singular como R-módulo.*

Prova. $1 \Rightarrow 2$. O resultado segue da Proposição 3.2.6.

$2 \Rightarrow 1$. Se P é um ideal primo R-disjunto de $R \star_\alpha G$, então $Z_l({}_R(R \star_\alpha G/P)) = 0$ pela hipótese. Seja $a \in Z_l(R)$ e L um ideal à esquerda não nulo de R. Então, existe $0 \neq b \in L$ tal que $ba = 0$ e assim $b \in An_R(a+P)$. Portanto, $a+P \in Z_l({}_R(R\star_\alpha G/P)) = 0$ e obtemos que $a \in P \cap R = 0$. ■

3.3 Ideais Fechados de $R\langle x; \alpha \rangle$

Nesta seção consideramos uma ação parcial α do grupo cíclico infinito $G = \langle \sigma \rangle$ sobre R e R um anel α-primo. Desta maneira, o skew anel de grupo parcial $R \star_\alpha G$ pode ser identificado com o conjunto de todas as somas finitas $\sum_{i=-n}^{m} a_i x^i$, onde $a_i \in S_{\sigma^i}$, para qualquer inteiro i. Neste caso o anel $R \star_\alpha G$ é denotado por $R\langle x; \alpha \rangle$ e se (T, β) e a envolvente de (R, α), então o skew anel de grupo $T \star_\beta G$ corresponde ao skew anel de polinômios de Laurent $T\langle x; \sigma \rangle$. Sendo $R\langle x; \alpha \rangle$ um subanel de $T\langle x; \sigma \rangle$, $R\langle x; \alpha \rangle$ é chamado skew anel de polinômios de Laurent parcial o qual foi introduzido em [2].

O objetivo desta seção é estudar os ideais fechados e primos do skew anel de polinômios de Laurent parcial $R\langle x;\alpha\rangle$. Vamos provar a correspondência entre ideais fechados R disjuntos de $R\langle x;\alpha\rangle$ e ideais fechados T disjuntos de $T\langle x;\sigma\rangle$ (Teorema 2.2.1), usando uma noção mais natural de minimalidade para polinômios. Mostraremos que esta noção nos da um caminho mais rápido e transparente para provar o teorema de correspondência citado acima. Também vamos caracterizar os ideais fechados de $R\langle x;\alpha\rangle$ em termos da interseção de um ideal principal de $\mathcal{Q}\langle x;\alpha\rangle$ com $R\langle x;\alpha\rangle$.

Se I é um ideal R-disjunto não nulo de $R\langle x;\alpha\rangle$ e $a_mx^m + ... + a_nx^n \in I$ para $a_m, a_n \neq 0$ e $m < n$, então $(a_mx^m + ... + a_nx^n)(1_{\sigma^{-m}}x^{-m}) = a_m + ... + a_n1_{\sigma^{n-m}}x^{n-m}$ é um polinômio de I. E como I é R-disjunto, não todos os coeficientes $a_{m+i}1_i$ para $1 \leq i \leq n-m$ são nulos. Portanto, existe um polinômio de grau mínimo n em I, com coeficiente constante não nulo (polinômio próprio). Este inteiro n é dito a *minimalidade* de I, denotada $Min(I)$. Um polinômio qualquer $f(x)$ será denotado simplesmente por f. Para um polinômio próprio f, o grau de f será denotado por ∂f e o coeficiente líder de f por $lc(f)$. Se $lc(f) = 1_R$, então o polinômio é dito mônico. Todas estas noções para polinômios de $T\langle x;\sigma\rangle$ são análogas.

Lema 3.3.1 *Se J é um ideal T-disjunto de $T\langle x;\sigma\rangle$ e $I = J \cap R\langle x;\alpha\rangle$, então $Min(J) = Min(I)$.*

Prova. Como $I \subseteq J$, então $Min(J) \leq Min(I)$. Suponhamos que $m = Min(J) < Min(I)$. Então, existe um polinômio $f = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m \in J$ com $a_0, a_m \neq 0$. Para $H = \{b \in T \mid \text{ existe } g = b + b_1x + ... + b_mx^m \in J \text{ com } b, b_m \neq 0\} \cup \{0\}$, temos que H é um ideal σ-invariante não nulo de T. Se $H \cap R = H1_R = 0$, então como R é α-primo temos que T é σ-primo, logo $1_R = 0$, o qual é contraditório. Portanto, $H \cap R \neq 0$ e assim podemos supor que $a_0 \in R$. Como o polinômio $1_Rf1_R \in I$ e $m < Min(I)$, temos que $1_Rf1_R = a_0 + a_11_\sigma x + ... + a_m1_{\sigma^m}x^m = 0$. Portanto, $a_0 = 0$

que é uma contradição. Logo, $Min(J) = Min(I)$. ■

O seguinte lema da um método para levantar ideais R-disjuntos de $R\langle x;\alpha\rangle$ a ideais T-disjuntos de $T\langle x;\sigma\rangle$. Assim como ideais R-disjuntos fechados de $R\langle x;\alpha\rangle$ a ideais T-disjuntos fechados de $T\langle x;\sigma\rangle$. Os conjuntos M e N da Seção 2.2 neste caso estão dados por $M = \left\{\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i x^i \mid c_i \in R \text{ e } c_i \neq 0 \text{ para um número finito de } i \in \mathbb{Z}\right\}$ e $N = \left\{\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i x^i \mid c_i \in \sigma^i(R) \text{ e } c_i \neq 0 \text{ para um número finito de } i \in \mathbb{Z}\right\}$.

Se J é um ideal T-disjunto de $T\langle x;\sigma\rangle$, então o fecho de J está dado por $[J]_T = \{g \in T\langle x;\sigma\rangle \mid \text{ existe } H \in \mathscr{F}(T) \text{ tal que } Hg \subseteq J\}$. Por outro lado, o fecho de J pode ser definido como $[J]_T = Q\langle x;\sigma\rangle f_J \cap T\langle x;\sigma\rangle$ (ver [1]), onde f_J é o polinômio dado pelo Lema 2.1 de [1] e Q é o anel de σ-quocientes de T. O polinômio f_J é mônico próprio e para todo $f \in J$ com $\partial f = n = Min(J)$, tem-se que $f = lc(f)f_J$. Além disso, $f_J x^{-n}$ é central em $Q\langle x;\sigma\rangle$ o qual implica que $Q\langle x;\sigma\rangle f_J = f_J Q\langle x;\sigma\rangle$. O seguinte lema é a versão para polinômios do Lema 2.1.4, sua prova é análoga.

Lema 3.3.2 *Seja R um anel α-primo, I um ideal R-disjunto de $R\langle x;\alpha\rangle$ e J um ideal T-disjunto fechado de $T\langle x;\sigma\rangle$. Então, as seguintes afirmações são válidas:*

1. *NIM é um ideal T-disjunto de $T\langle x;\sigma\rangle$, tal que, $NIM \cap R\langle x;\alpha\rangle = I$.*

2. *$[I]_R = [NIM]_T \cap R\langle x;\alpha\rangle = 1_R [NIM]_T 1_R$.*

3. *$J \cap R\langle x;\alpha\rangle$ é um ideal R-disjunto fechado de $R\langle x;\alpha\rangle$.*

O seguinte teorema estabelece a correspondência bijetiva entre fechados de $R\langle x;\alpha\rangle$ e $T\langle x;\sigma\rangle$.

Teorema 3.3.3 *Seja R um anel $\alpha-$primo. Existe uma correspondência bijetiva, que preserva ideais primos, entre $\mathscr{C}(R\langle x;\alpha\rangle) = \{I \lhd R\langle x;\alpha\rangle \mid I \text{ é } R-\text{disjunto fechado}\}$ e $\mathscr{C}(T\langle x;\sigma\rangle) = \{J \lhd T\langle x;\sigma\rangle \mid J \text{ é } T-\text{disjunto fechado}\}$.*

Prova. Para $I \in \mathscr{C}(R\langle x;\alpha\rangle)$ definimos $\varphi(I) = [NIM]_T$. Então, pelo Lema 3.3.2 temos que φ está bem definida e é injetora. Para $J \in \mathscr{C}(T\langle x;\sigma\rangle)$, seja $I = J \cap R\langle x;\alpha\rangle$. Então, pelo item 3 do Lema 3.3.2 temos que $I \in \mathscr{C}(R\langle x;\alpha\rangle)$ e como $I \subseteq J$ temos que $[NIM]_T \subseteq J$. Finalmente, como $I = [NIM]_T \cap R\langle x;\alpha\rangle = J \cap R\langle x;\alpha\rangle$ pelo Lema 3.3.1 concluimos que $Min([NIM]_T) = Min(J)$. Portanto, pelo Corolário 2.5 de [1] temos que $J = [NIM]_T$ e assim φ é sobrejetora. A segunda parte é análoga à segunda parte da prova do Teorema 2.2.1. ■

Em [1] é provado que todo ideal fechado (em particular primo) T-disjunto de $T\langle x;\sigma\rangle$ é igual à interseção de um ideal principal de $Q\langle x;\sigma\rangle$ com $T\langle x;\sigma\rangle$. O seguinte teorema mostra um resultado análogo para ideais fechados (em particular primos) R-disjuntos de $R\langle x;\alpha\rangle$.

Teorema 3.3.4 *Seja R um anel α-primo. Se I é um ideal fechado de $R\langle x;\alpha\rangle$, então existe um único polinômio mônico $f \in \mathcal{Q}\langle x;\alpha\rangle$ tal que $I = \mathcal{Q}\langle x;\alpha\rangle f \cap R\langle x;\alpha\rangle$.*

Prova. Seja $J = [NIM]_T$. Pelo Lema 3.3.2, temos que $I = J \cap R\langle x;\alpha\rangle = 1_R J 1_R$. Por [1], $J = Q\langle x;\sigma\rangle f_J \cap T\langle x;\sigma\rangle$, onde f_J é um polinômio mônico de $Q\langle x;\sigma\rangle$ e $f_J x^{-n}$ é central em $Q\langle x;\sigma\rangle$ para $n = Min(J) = Min(I)$. Logo, $I = 1_R Q\langle x;\sigma\rangle f_J 1_R \cap R\langle x;\alpha\rangle$. Finalmente, temos que $1_R Q\langle x;\sigma\rangle f_J 1_R = 1_R Q\langle x;\sigma\rangle f_J x^{-n} x^n 1_R = 1_R Q\langle x;\sigma\rangle x^n 1_R f_J x^{-n} 1_R = 1_R Q\langle x;\sigma\rangle 1_R f_J x^{-n} 1_R = \mathcal{Q}\langle x;\alpha\rangle 1_R f_J x^{-n} 1_R$. Se $g = 1_R f_J x^{-n} 1_R$, então $g - g 1_n = 0$, pois o contrário implicaria que existe um polinômio de grau menor que n em $Q\langle x;\sigma\rangle f_J$, assim $1_n = 1_R$. Portanto, tomando $f = g(1_R x^n)$ temos que f é um polinômio de $\mathcal{Q}\langle x;\alpha\rangle$ de grau n e $I = \mathcal{Q}\langle x;\alpha\rangle f \cap R\langle x;\alpha\rangle$. Além disso, f é único, pois é de grau mínimo e tem coeficiente líder 1_R. ■

Referências Bibliográficas

[1] E. Cisneros, M. Ferrero and M. I. Conzález, *Prime Ideals of Skew Polynomial Rings and Skew Laurent Polynomial Rings*, Math. J. of Okayama Univ. 32 (1990), 61-72.

[2] W. Cortes and M. Ferrero, *Partial Skew Polynomial Rings: Prime and Maximal Ideals*, Comm. Algebra 35 (2007), 1183-1189.

[3] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of Crossed Products by Partial Actions, Enveloping Actions and Partial Representations*, Trans. Amer. Math. Society 357 (5) (2005), 1931-1952.

[4] M. Dokuchaev, M. Ferrero and A. Paques, *Partial Actions and Galois Theory*, J. Pure Appl. Algebra 208 (2007), 77-87.

[5] M. Ferrero, *Prime and Principal Closed Ideals in Polynomial Rings*, J. Algebra 134 (1990), 45-59.

[6] M. Ferrero, *Partial Actions of Groups on Semiprime Rings*, A Series of Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, Volume 248, Chapman and Hall, 2006.

[7] M. Ferrero, *Closed and Prime Ideals in Free Centred Extensions*, J. Algebra 148 (1992), 1-16.

[8] M. Ferrero and J. Lazzarin, *Partial Actions and Partial Skew Group Rings*, J. Algebra 319 (2008), 5247-5264.

[9] G. Karpilovsky, *The Algebraic Structure of Crossed Product*, Amsterdam: North-Holland, 1987.

[10] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[11] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.

[12] J. Lazzarin, *Ações Parciais de Grupos Sobre Aneis: O Skew Anel de Grupo Parcial e o Subanel dos Invariantes*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (Brasil), 2006.

[13] M. Malásquez, *Prime Ideals in Crossed Products of Abelian Groups*, Comm. Algebra 22 (5) (1994), 1861-1876.

[14] D. S. Passman, *Infinite Crossed Products*, Academic Press, Londres, 1989.

[15] B. Stenstrom, *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1975.