UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

UMA ANÁLISE SOBRE O ENSINO DE MATRIZES NO ENSINO BÁSICO

VICTOR VASCONCELLOS FERNANDES NETO

Porto Alegre
2022

VICTOR VASCONCELLOS FERNANDES NETO

UMA ANÁLISE SOBRE O ENSINO DE MATRIZES NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de conclusão de curso submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Matemática

Orientador Metodológico
Dra. Bárbara Seelig Pogorelsky

Porto Alegre
2022

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de matemática

Uma análise sobre o ensino de matrizes no Ensino Básico

Victor Vasconcellos Fernandes Neto

Banca examinadora:

Dra. Bárbara Seelig Pogorelsky
UFRGS

Dra. Luísa Rodríguez Doering
UFRGS

Dr. Rodrigo Orsini Braga
UFRGS

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à profa. Bárbara pela confiança de me orientar nesse trabalho e pela paciente monitoria que teve nesses últimos anos de pandemia.

Agradeço à minha família, em especial aos meus tios Bárbara e Renato e à minha prima Francielle, por serem grandes apoiadores da minha formação na Licenciatura, mesmo com toda a sociedade desencorajando, eles sempre estiveram lá.

Agradeço ao meu melhor amigo Gustavo que esteve comigo desde o dia 1 do curso. Tenho certeza que se não fosse ele, não teria publicado esse trabalho e não chegaria nem perto de me tornar o professor que almejo ser. Modéstia parte, vale o mesmo pro diploma dele: não conseguiria sem mim.

Agradeço ao prof. Wagner e à direção do Colégio Julinho por me tratarem bem e concederem a honra de aplicar o trabalho em uma das turmas de uma escola tão conceituada de Porto Alegre.

Agradeço a todos os meus amigos, em especial André, Lucas, Guilherme e Vitor por nunca desistirem de mim, mesmo quando eu pisava na bola de alguma forma.

Agradeço de coração a todas as pessoas que, de alguma forma, me auxiliaram nessa caminhada na graduação, seja auxiliando nas disciplinas ou simplesmente tirando uma boa risada de mim.

Por último, agradeço aos meus gatinhos por todos os dias aquecerem meu coração com carinho. Em especial, ao meu falecido gatinho Mew, que foi meu companheiro desde o Ensino Fundamental e deixou esse plano durante a pandemia.

DEDICATÓRIA

Pra quem me conhece, sabe que não será novidade nenhuma para quem será minha dedicatória.

Dedico esse trabalho às três mulheres da minha vida: minha mãe, Joice; minha irmã, Virginia; e minha futura esposa, Helena.

Minha mãe criou dois filhos sozinha enquanto trabalhava 60h para poder nos manter alimentados, com um teto e com educação de qualidade. Esse último foi sempre o que ela nos disse: era a herança que iria nos deixar. Durante a graduação, em toda a interação que eu tive em sala de aula, eu conseguia sentir essa herança. Não era uma herança de professor para aluno, a qual ela ainda passa diariamente, mesmo após mais de 40 anos de magistério. Não era uma herança milionária, de garimpos ou minas de esmeraldas na África do Sul, era uma herança de poder ser cidadão. Hoje, se sou um ser pensante que luta contra a alienação pela educação, é graças a essa herança: a educação. Eu estudo e vou continuar estudando não somente para orgulhar a minha mãe, mas para os meus filhos receberem essa herança também. Eu leciono e vou continuar lecionando para criar o máximo de cidadãos emancipados, de forma que eles passem essa herança para os seus filhos. Por isso, eu dedico acima de tudo a ti esse trabalho, mãe, sem a senhora eu não seria nada perto do homem que eu sou hoje.

É uma história engraçada a que eu percebi que queria ser professor, de verdade. Estava eu, minha mãe e minha irmã, Virginia, na mesa, jantando. Não lembro o que a gente jantava, mas era algo comum, como arroz e feijão. Eu estava no cursinho pré-vestibular, em 2017, se não me engano. No dia, eu tive uma aula de História com o professor Edir Vieira Filho, ótimo professor, por sinal. Durante as famosas conversas fiadas de família, tipo “como foi seu dia?”, “como foi a aula?”, eu comentei que tive aula com o prof. Edir. Houve uma reação extremamente confusa pra mim no momento da Vi (abreviação de Virginia): ela perguntou “Edir?” e começou a chorar. Eu realmente não entendi. Dias, noites e nada de eu entender esse choro. Quando eu percebi que um professor atingiu, dentre milhares de alunos, a minha irmã e uma simples memória dele acarretou numa reação dessas nela, eu percebi o que eu queria fazer, era uma inspiração. E, no final das contas, é isso que tu és todos os dias pra mim, Vi: uma inspiração. Inspiração de uma mulher que, desde o primeiro semestre da faculdade de Farmácia se destruiu em tanta experiência de estágio não obrigatório, enquanto estudava um monte e hoje é a mestra e profissional que é. Inspiração pra um irmão que, no final das contas, quer ser metade do profissional que tu é hoje. Óbvio, não de Farmácia.

Amor, eu nem sei como dizer isso. Mas que caminho foi esse, né? Não fui sozinho nele, tu sempre esteve lá, final de semana, dia de semana, chuva, sol. Em 2016, tu tinha um namorado não muito produtivo, fez um cursinho e desistiu rápido, só jogava, sem perspectiva de voltar a estudar nem nada, mas tu tava lá. Em 2017, o namorado foi meio bagunçado: gastronomia, árabe; mas no final, tomou jeito e começou um cursinho, ainda pra medicina. No meio do caminho, resolveu fazer Matemática. Desde que comecei a faculdade, muita coisa aconteceu, muita coisa mudou mas tu nunca desistiu de mim, nem nos piores erros. Tu com certeza merece uma dedicatória por ter sido a pessoa que, depois do Gustavo, mais aguentou minhas reações à faculdade, o estresse e ansiedade pela pressão, a depressão por não atingir as metas, a mania por sonhar demais, tudo o que dá pra imaginar, tu aguentou e me deu o ombro pra aninhar. Até agora, foram seis anos e não acho que para por aqui, o mestrado tá chegando (se tudo der certo) e eu gostaria que tu não fosse embora. Eu te amo.

O medo de perder tira a vontade de ganhar.
Vanderlei Luxemburgo

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal a criação de uma sequência didática sobre matrizes e aplicações na resolução de sistemas lineares no Ensino Básico, utilizando como referência o livro *A arte de resolver problemas*, de George Polya. A sequência didática em questão foi aplicada em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Júlio de Castilhos, em Porto Alegre. Os dados analisados na pesquisa são provenientes das discussões feitas em sala de aula e das resoluções feitas pelos alunos dos problemas propostos durante a sequência didática. Como resultado, foi possível concluir que a Resolução de Problemas é uma grande aliada do ensino de Matemática, até mesmo de conteúdos mais formais como a Álgebra Linear. Por fim, foi feita uma proposta para o ensino de matrizes e para as matrizes curriculares do Ensino Básico brasileiro.

Palavras-chave: Matrizes. Resolução de Problemas. Sistemas Lineares.

ABSTRACT

The scope of this study was the creation of a didactic sequence about matrices and its applications in the solution of linear systems in primary education, guided by George Polya's book *How to Solve It*. The didactic sequence in question was applied in a third grade highschool class at Colégio Estadual Júlio de Castilhos, in Porto Alegre. The data analysed in the study came from discussions in class and the student's solutions of the problems proposed during the didactic sequence. As a result, it was possible to conclude that Problem Solving is a great ally of Math teaching, even of highly formal subjects as Linear Algebra. Finally, it was made a proposal to matrices teaching and to the curricular matrices of primary education from Brazil.

Keywords: Matrices. Problem solving. Linear systems.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 Introdução

A motivação para a elaboração deste trabalho surgiu a partir da experiência do autor com a monitoria da disciplina de Álgebra Linear da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, onde era muito evidente a dificuldade dos alunos quanto a diversos aspectos das matrizes - de definições básicas a operações fundamentais -, o que não só atrapalhava, mas muitas vezes impedia-os de progredirem na disciplina e, consequentemente, no seus respectivos cursos. Sendo assim, o trabalho pode ser utilizado como uma pesquisa inicial na preparação dos alunos do Ensino Básico para cursos de Ensino Superior, visto que a Álgebra Linear está presente em muitos deles.

Na seção “BNCC: uma breve análise”, é analisada, de forma crítica, a base que norteia a docência brasileira no Ensino Básico. A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), a BNCC, é alvo de críticas por todos os seguidores de Paulo Freire, pois se mostra uma base que defende a liberdade, mas já alertava Freire (2019, p.13): “sua tendência é, antes, camuflá-la, num jogo manhoso. Jogo artificioso de palavras em que aparece ou pretende aparecer como o que defende a liberdade e não como a teme. [...] Liberdade que se confunde com a manutenção do status quo” (FREIRE, 2019, p.13).
Sendo assim, vamos também observar algumas ausências, competências e habilidades do documento referentes ao ensino de matrizes, principal objeto de estudo.

Na seção “O ensino de matrizes”, são analisados três trabalhos correlatos (STORMOWSKI, 2008; BARRIOS, 2015; REIS, 2017) que expõe sequências didáticas para o ensino de matrizes, algumas observações, apontamentos ou alertas que inspiraram a elaboração do planejamento das aulas que são aplicadas neste texto. Além disso, são expostas as definições e propriedades das matrizes que foram trabalhadas em sala de aula.

A seção “Metodologia” abordará a pesquisa qualitativa (BOGDAN, BIKLEN, 1994) e a Resolução de Problemas, uma tendência em Educação Matemática, teorizada por Polya (1995). A escolha de tal tendência alia-se ao objetivo do texto de que os alunos, ao seguirem a aplicação das quatro fases do método educacional, consigam desenvolver planos para “manusear” uma (ou mais) matrizes para resolverem os problemas com os quais se deparam. O plano de aula e as seções subsequentes referem-se à prática propriamente dita, os dados coletados e as análises dos mesmos.

2 BNCC: uma breve análise

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ao impor uma informação com foco exclusivo em eficiência, objetividade e competências, dá “mais a impressão de uma matriz de referência para avaliação externa do que um referente curricular” (FREITAS et al., 2019, p. 288). Na Matemática, disciplina onde a avaliação tem como norte “nos conhecimentos específicos e na contagem de erros” (PAVANELLO, NOGUEIRA, p. 32), é inegável que a BNCC, ao listar competências e habilidades necessárias para avaliar um aluno, retira do professor liberdade para guiar o seu aluno em um processo emancipatório como cidadão.

Além disso, há importantes ausências no documento referente ao currículo de ensino matemático (VALLE, 2021; FELIPE, SILVA, COSTA, 2021). Uma das ausências, as matrizes, suas definições e particularidades, mesmo que estejam explicitamente ausentes na BNCC, podem se inserir na habilidade EM13MAT301 da base que diz que o aluno deve “resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p.536), sendo as operações nas linhas de uma matriz dos coeficientes uma dessas “técnicas algébricas" citadas na seção.

Além disso, visto que a computação se faz muito presente na era em que vivemos, o escalonamento, por ser um algoritmo, facilita na resolução de outros problemas computacionais, como nas linguagens de programação. As matrizes, especificamente na Álgebra Linear, são necessárias nos cursos de Ciências Exatas e, portanto, não deve ser negado o seu ensino de caráter teórico e específico para alunos do Ensino Básico, principalmente àqueles que almejam esses cursos. A defasagem desse conteúdo dificulta no aprendizado dos futuros acadêmicos do país, o que é prejudicial ao desenvolvimento científico brasileiro.

Assim, propomos uma habilidade exclusiva das matrizes, visto que é necessário o conhecimento prévio de suas estruturas para utilizá-la como ferramenta para a resolução de problemas de diversos tipos, como nos sistemas lineares citados acima, na geometria analítica, da habilidade EM13MAT502 (BRASIL, p.543), entre outros.

É preciso também que a prática docente rompa com o modelo bancário de educação (FREIRE, 2019) que está sendo proposto no documento, de forma que as matrizes sejam ferramentas emancipadoras, que podem “contribuir para a leitura de mundo e para o exercício da cidadania, de forma crítica” (MALHEIROS, FORNER, 2020, p.9).

Uma das maiores dificuldades dos alunos, na minha experiência docente até então, foi na compreensão a partir da leitura dos problemas e, por conseguinte, a incapacidade de resolver esses desafios. Mesmo sabendo que “cerca de 29% da população brasileira tem dificuldades para ler textos e aplicar conceitos de matemática” (USP, 2020), não é possível afirmar que todos os alunos que encontram dificuldades nessas resoluções sejam, de fato, analfabetos funcionais. Podemos apenas argumentar que há uma falha na alfabetização matemática (DANYLUK, 1989). Não temos como objetivo despertar o matemático dentro de todos (FREIRE, 1995), mas que consigam se “numerar” e se apropriar dos conceitos abordados na sequência didática.

3 O ensino de matrizes

Nesta seção, expomos as definições apresentadas na sequência didática, os objetivos - alguns norteados pela base e outros suleados (FREIRE, 1992) pela perspectiva educacional emancipadora - e dissertações que já exploraram o assunto em seus respectivos trabalhos.

3.1 Definições

Todas as definições desta subseção foram retiradas do livro Álgebra Linear e suas Aplicações, de David Lay (2013), bibliografia essencial do curso de Álgebra Linear I-A da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Começamos com a recapitulação de equações lineares e sistemas de equações lineares, bem como suas particularidades. Como esse é um conteúdo já previsto pro Ensino Fundamental, foi tomada a liberdade de utilizar uma maior formalidade que não é usual para o nível de ensino.

Continuamos as definições com a preocupação principal do trabalho: a manipulação da matriz dos coeficientes utilizando as operações elementares nas linhas para encontrar uma matriz equivalente, bem como mostrar as semelhanças entre a resolução de um sistema linear a partir do sistema linear ou a partir da matriz dos coeficientes.

Equação linear

Uma equação linear nas variáveis x_1, ..., x_n, é uma equação que pode ser escrita na forma em que b e os coeficientes a_1, ..., a_n são números reais ou complexos, em geral já conhecidos.

$$b = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

Sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares (ou um sistema linear) é uma coleção de uma ou mais equações lineares envolvendo as mesmas variáveis, digamos x_1, ..., x_n.

Conjunto solução de um sistema linear

Uma solução do sistema é uma lista (s_1, s_2, ..., s_n) de números que torna cada equação uma afirmação verdadeira quando os valores s_1, ..., s_n são substituídos por x_1, ..., x_n, respectivamente. O conjunto de todas as soluções possíveis é conhecido como conjunto solução do sistema linear.

Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas lineares são chamados equivalentes se tiverem o mesmo conjunto solução, ou seja, cada solução do primeiro sistema é uma solução do segundo sistema, e cada solução do segundo sistema é uma solução do primeiro.

Matriz dos coeficientes

A informação essencial de um sistema linear pode ser representada de forma compacta por meio de um arranjo retangular chamado matriz. Dado o sistema

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_2 - 8x_3 = 8$$

$$5x_1 - 5x_3 = 10$$

podemos formar uma matriz com os coeficientes de cada variável alinhados em colunas

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Essa matriz é chamada matriz dos coeficientes (ou matriz associada) do sistema.

Matriz aumentada

A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

é conhecida como matriz aumentada do sistema. Uma matriz aumentada de um sistema consiste na matriz dos coeficientes, com uma coluna adicional que contém as constantes à direita do sinal de igualdade nas equações.

Resolvendo um sistema linear

A estratégia básica é substituir um sistema por um sistema equivalente (isto é, um com o mesmo conjunto solução) que seja mais fácil de resolver.

Basicamente, usamos o termo em x_1 da primeira equação do sistema para eliminar os termos em x_1 das outras equações. Depois, usamos o termo em x_2 da segunda equação para eliminar os termos em x_2 das outras equações, e assim por diante, até por final obtermos um sistema equivalente bem simples.

Três operações básicas são usadas para simplificar um sistema linear: substituir uma equação por sua própria soma com um múltiplo de outra equação, trocar entre si duas equações e multiplicar todos os termos de uma equação por uma constante não nula.

Operações elementares entre linhas

(Substituição) Substituir uma linha por sua própria soma com um múltiplo de outra.

(Troca) Trocar duas linhas entre si.

(Mudança de escala) Multiplicar todos os elementos de uma linha por uma constante não nula.

As operações elementares podem ser aplicadas a qualquer matriz, não só àquelas que surgem como matriz aumentada de um sistema linear. Diremos que duas matrizes são equivalentes por linhas se existir uma sequência de operações elementares de linhas que transforme uma matriz na outra.

Matriz escalonada

Uma matriz retangular está em forma escalonada (ou em forma escalonada por linhas) se satisfizer as três seguintes propriedades:

1. Todas as linhas não nulas estão acima de qualquer linha que só contenha zeros.
2. O elemento líder de cada linha não nula está em uma coluna à direita do elemento líder da linha acima.
3. Todos os elementos na coluna de um elemento líder que estão abaixo do mesmo são iguais a zero.

Se uma matriz em forma escalonada satisfizer as condições adicionais a seguir, então estará na forma escalonada reduzida (ou em forma escalonada reduzida por linhas):

1. O elemento líder de cada linha não nula é igual a 1.
2. Cada elemento líder igual a 1 é o único elemento não nulo em sua coluna.

Uma matriz escalonada (matriz escalonada reduzida, respectivamente) é uma matriz em forma escalonada (forma escalonada reduzida, respectivamente). A propriedade 2 diz que os elementos líderes formam um padrão escalonado ("de escada") que desce para a direita pela matriz. A propriedade 3 é uma simples consequência da propriedade 2.

Teorema da unicidade da Forma Escalonada Reduzida

Cada matriz é equivalente por linhas a uma e somente uma matriz escalonada reduzida.

Se uma matriz A for equivalente por linhas a uma matriz escalonada U, dizemos que U é uma forma escalonada (ou forma escalonada por linhas) de A; se U estiver em forma escalonada reduzida, dizemos que U é a forma escalonada reduzida de A.

3.2 Trabalhos correlatos

Uma das principais habilidades de um professor é a capacidade de ser um professor-pesquisador; aquele que pesquisa a sua sala de aula, a sua prática, a fim de aprimorá-la (GARCIA, 2009) para que proporcione aos seus alunos uma experiência completa, capaz de auxiliar o aluno no exercício da sua cidadania plena. Além disso, pelo que indica a definição, um professor-pesquisador pesquisa; seja lendo artigos, entrevistando ou simplesmente conversando. Dito isto, nesta seção analisarei, de forma breve, três trabalhos que tratam sobre o ensino de matrizes mas que utilizam tendências diferentes entre si. O trabalho de Barrios, o de Stormowski e o de Reis que tratam, respectivamente, com modelagem, tecnologias na educação e resolução de problemas. Enquanto os dois primeiros foram analisados para procurar possíveis questionamentos ou soluções, o terceiro foi em busca de como foram coletados os dados e a análise desses dados.

O trabalho de Barrios (2015) traz como principal foco um dos maiores problemas do professorado, principalmente o matemático, o famoso “Pra que serve isso?”. Com foco nos problemas de otimização, o professor criou uma sequência didática baseada na Modelagem Matemática, buscando no envolvimento do aluno com o aprendizado a motivação necessária para transformar a sala de aula em um ambiente concentrado e proveitoso. Mesmo que o presente trabalho não seja focado em Modelagem Matemática, essa questão teve impacto na decisão de finalizar o trabalho com pelo menos uma aplicação diária do conteúdo trabalhado.

A dissertação de Stormowski (2008) traz à tona uma relação importante no estudo de matrizes, aplicando-a nas transformações geométricas utilizando as tecnologias digitais. Sendo assim, o trabalho apresentado pelo professor nos dá mais uma, dentre as várias já citadas, aplicação das matrizes na sala de aula. Isso posto, boa parte da sequência didática, mais especificamente na atividade de aplicação dos conteúdos abordados, foi pensada para ser um conteúdo que esteja no dia-a-dia de todos os alunos para um estudo que perdure “a longo prazo”.

A dissertação do prof. Mest. Michel Silva dos Reis (2017), da Universidade Federal do Pará, esclareceu algumas dúvidas em relação ao planejamento de aula do presente trabalho, visto que utiliza da metodologia de Resolução de Problemas para a sua sequência didática. Porém, dada a diferença de modalidade e de série de ensino, a lógica da sua sequência tem caráter muito mais introdutório às matrizes do que avançado para Álgebra Linear. Enquanto os alunos do colega estão na segunda etapa (entre segundo e terceiro ano do Ensino Médio), os alunos da pesquisa atual conhecem, pelo menos superficialmente, o que é uma matriz, visto que na escola o conteúdo é abordado no segundo ano.

Observando o trabalho do prof. Michel também pude perceber não somente o sucesso da sua sequência didática mas também a possibilidade de aprofundar o estudo para a resolução de sistemas lineares a partir das suas respectivas representações matriciais. Os questionamentos do professor para os alunos serão tratados na seção onde será discorrido sobre o método de Polya, mas me mantive atento quanto às perguntas dos alunos, a fim de me preparar para possíveis questões semelhantes durante a experiência.

Como os trabalhos, por serem prévios à BNCC, se baseiam nos PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais - e na LDB, os trabalhos dos autores abrangem pontos interessantes dos documentos que regiam a educação brasileira para a elaboração dos seus planos de aula. É importante perceber que também há ausência do termo específico “matriz” (STORMOWSKI, 2008), obrigando os professores a buscarem livros estrangeiros para guiar o seu estudo. Não é proposta deste trabalho analisar a abordagem estrangeira sobre esse ensino visto que buscamos uma análise e proposta para a base atual, que, como visto anteriormente, trata a matriz apenas como parte de uma técnica algébrica.

4 Metodologia

4.1 Pesquisa qualitativa

Observando a partir da pesquisa qualitativa nos dados coletados da prática, poderemos analisar e traçar possíveis saídas para o ensino de matrizes no Ensino Básico. Seguiremos, em grande parte, a definição dos autores Bogdan e Biklen (1994) sobre pesquisa qualitativa visto que, dentre a enorme variedade de denominações (ALVES, 1991), foi a que mais se assemelhou com as ideias da prática. Analisaremos as cinco características que compõem a pesquisa qualitativa, segundo os autores.

1. *Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.* (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p.47)

Para os autores, é na sala de aula, ambiente natural de professores e alunos, que se observa a teoria entrando na prática ou, quem sabe, surgem novas teorias. O registro manual e as observações do contexto compõem o instrumento (de coleta) principal e quem analisa esses dados é o autor. Além disso, é necessário sempre analisar o contexto em que as situações são criadas, por isso os investigadores se dispõe de grandes quantidades de tempo para frequentar os seus locais de estudo, já que "assumem que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto que ocorre" (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p.48).

2. *A investigação qualitativa é descritiva.* (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p.48)

Essa pequena frase resume o cuidado que precisamos ter com a coleta de dados no trabalho. Não buscamos quantos alunos conseguiram resolver determinada questão, quais as notas atribuídas em avaliações ou, ironicamente, números. Buscamos os porquês desses números, criamos teorias sobre eles baseado no seu contexto. Ao contrário de sabermos quantos resolveram, queremos saber como resolveram, que planos criaram e suas indagações para ser possível teorizar o que podemos fazer para melhorar o ensino de matrizes. Bodgan e Biklen (1994, p.49) ainda citam:

> A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo.

3. *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.*

Apesar de nos interessamos se os alunos conseguiram ou não resolver os problemas propostos, nos interessa muito mais o processo de resolução (ou o porquê da falta dele). Aliado à Resolução de Problemas, que vamos comentar mais na próxima subseção, queremos saber que planos criaram e como utilizaram os conceitos apresentados. À frente, como vimos no item 1., precisamos de uma observação próxima dos alunos, pois o contato direto com os alunos possibilita concluir sobre um estudo educacional.

4. *Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.*

No livro de Hefez (2006, p.8) o Princípio da Indução Matemática é definido da forma:

Seja a um número natural e seja $p(n)$ uma sentença aberta em n. Suponha que

I. $p(a)$ é verdade e que,

II. para todo $n \geq a$, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ é verdade,

então, $p(n)$ é verdade para todo $n \geq a$.

Mesmo que a indução que os autores comentam não seja a definida acima, podemos ter alguma ideia como funciona: agrupamos ideias e criamos as teorias de forma indutiva, **onde o dado sucessor fomenta o argumento do dado anterior**. Ou seja, “não se trata de montar um quebra-cabeças cuja forma final conhecemos de antemão. Está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes” (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p.50).

5. *O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.*

Apesar de dramático, os autores deixam claro que os “investigadores estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentidos às suas vidas” (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p.50). Sendo assim, somente suas anotações não bastam, é necessário contar as suas histórias e compreender o contexto de onde elas vêm. Mesmo que seja impossível criar um planejamento para abranger todos os alunos e suas particularidades, a Resolução de Problemas pode ser uma saída para conseguirmos uma coleta de dados completa, visto que eles discutirão entre si as questões, transformando assim o pensamento matemático em algo natural, como uma ferramenta utilizada diariamente.

4.2 Resolução de Problemas

A resolução de problemas, teorizada por Polya, em 1995, gerou um grande avanço nas salas de aula que buscavam um estudo mais significativo para os seus alunos. Pelos últimos 25 anos, muitos autores, como Onuchic e Allevato (2011), analisaram a teoria e ajudaram a desenvolver ainda mais o trabalho de Polya. Quebrar o padrão da sala de aula expositiva tradicional de quadro e caneta e trocar pelo aprendizado na prática indiretamente guiado é o principal objetivo da Resolução de Problemas. Como uma aula de natação, só se aprende a nadar quando se está na água.

Polya divide a teoria em quatro fases (POLYA, 1995, p.3-11): compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução do plano; retrospecto. Apesar dos títulos serem auto-explicativos, vamos explicar brevemente cada um deles.

I. Compreensão do problema

Esse passo merece todo o cuidado do professor, pois sua orientação pode guiar o aluno de maneira confusa, interferindo negativamente nos próximos passos. Dito isto, procuramos apresentar os problemas de forma indireta, utilizando de perguntas como “Quais são os dados?”, de forma que o aluno busque independentemente a leitura e interpretação inicial do problema.

II. Estabelecimento de um plano

É importante que o professor observe e estimule o aluno a verbalizar suas ações, mais precisamente, o planejamento delas. Quando o aluno mapear suas possibilidades, por conhecimentos prévios, ideias aleatórias ou brilhantes, que seja, o que importa é que o aluno trace um mapa claro em sua cabeça. Uma das perguntas mais frequentes da prática se deu a partir dessa fase: Conhece um problema correlato? Inclusive, o planejamento da aula é em torno dessa pergunta. Das frutas para as equações e das equações para a matriz dos coeficientes, tudo é um problema correlato que eles já conhecem previamente das redes sociais. Se eles criaram planos anteriormente ao verem as postagens, eles podem criar novamente no ambiente escolar.

III. Execução do plano

Como cita Polya (1995, p.8): “Conceber um plano, a ideia da resolução, não é fácil. [...] Executar o plano é muito mais fácil; paciência é o que mais se precisa.” De fato, traçado o mapa de um caminho, nosso trabalho é só seguir caminhando. Isso se esse mapa for realmente traçado pelo aluno. Polya (1995, p.9) também alerta: “O maior risco é o de que o estudante esqueça seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor.” No caso, havendo um descuido e interferência do professor no segundo passo, um prejuízo no plano de aula será iminente.

IV. Retrospecto

O último passo, particularmente, se enquadra mais para alunos interessados e dispostos a buscarem curiosidades e consolidar o conhecimento. Entender o seu plano e executá-lo corretamente para a maioria dos alunos é o que interessa. Porém, segundo Polya (1995, p.10), “eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução”, pois não conseguem utilizar esse problema e essas resoluções para questões futuras. Investigar essa resolução, tentar traçar outro possível caminho pode aperfeiçoar a capacidade de resolver problemas do aluno.

4.3 A turma e o planejamento

A sequência didática foi planejada para uma das turmas ministradas na disciplina de Estágio em Matemática III entre os dias 6 e 14 de abril de 2022. Sendo assim, traçamos, junto à prof. Fernanda Wanderer, o planejamento da sequência didática (Anexo 1), pois era necessário a confirmação da mesma para liberar o trabalho. O plano inicial era conseguir que os alunos utilizassem as matrizes de coeficientes e o processo de escalonamento para conseguir resolver questões do dia-a-dia, como a questão 3 do Anexo 3.

Após sondagem com o professor titular da turma 31A do Colégio Estadual Júlio de Castilhos, de Porto Alegre, soube que as matrizes, num contexto geral, são abordadas na escola como conteúdo do segundo ano do Ensino Médio. Por isso, evitamos as generalidades como explicar linhas e colunas, permitindo, assim, trabalharmos em cima da resolução de sistemas lineares pela operação nas linhas das matrizes. A aula foi planejada (Anexo 1) de forma que os alunos conseguissem se apropriar das ferramentas de forma que criem o diálogo entre a Matemática e a Língua Portuguesa (LORENSATTI, 2009), ou seja, conseguissem ler e compreender os problemas matemáticos e traçar planos para a argumentação escrita de suas resoluções.

5 Experiência

Durante o relato da experiência, irei citar alguns alunos de forma anônima, utilizando uma letra. É necessário deixar claro para, além de manter privada a identidade do aluno, a fim de não lhes causar nenhum tipo de constrangimento, conseguir diferenciá-los. Foi iniciada a sequência didática conforme o Anexo 1.

Iniciamos, na primeira aula, uma inserção direta dos sistemas lineares utilizando um problema (Figura 1) que, provavelmente, já foi visto pelos alunos, de forma que eles usassem de um conhecimento prévio à apresentação do conteúdo.

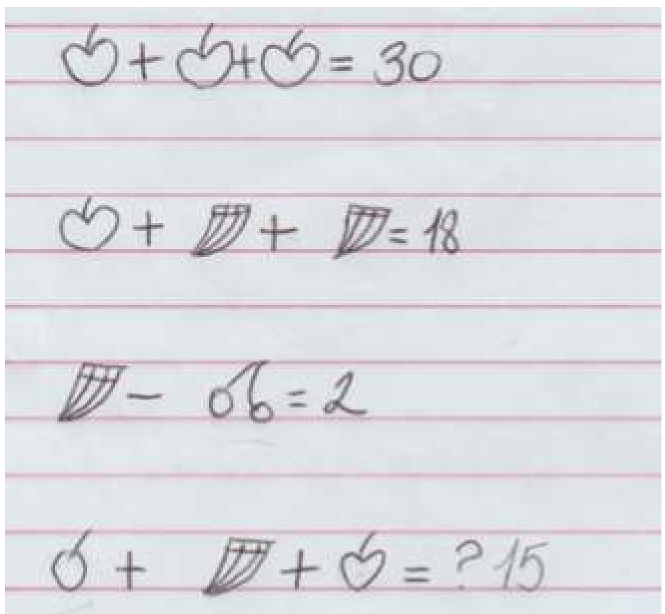


Figura 1 - Desenho da aluna K

Mostrado o sistema utilizando as frutas, os alunos foram questionados se reconheciam o problema e, se sim, de onde? Como esperado, as respostas foram "*Facebook*", "*Twitter*", "*Instagram*" e, um curioso, "quinta série" (ou sexto ano). Como o problema já era conhecido pela grande maioria da turma, muitos perceberam a "pegadinha" que são apresentadas duas cerejas na terceira equação e, na última equação, é pedido o valor de somente uma.

Após esse momento "descontraído" da aula, tentamos a transição desse problema para uma maneira mais formal dos sistemas lineares, buscando aplicar um dos principais questionamentos de Polya (1995): "Conhecem um problema correlato?". Foi apresentado o seguinte sistema no quadro:

$$3x_1 = 30$$

$$x_1 + 2x_2 = 18$$

$$x_2 - 2x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = ?$$

Foi observado que a maioria dos alunos estranharam a questão, principalmente as notações usadas. Os índices das variáveis x_i foram o principal problema com a notação, visto que eles conheciam somente x, y, z. Questionamentos como: "tem que multiplicar?"; "potência?" foram apresentados pelos alunos, deixando clara uma necessidade de esclarecimento. Para tentar explicar, utilizei de exemplo a devolução das notas de alunos de uma turma qualquer. A nota x_i é referente ao aluno i, ou seja, x_1 se refere ao aluno 1, x_2 se refere ao aluno 2 e assim sucessivamente. Esclareço que, apesar das notas (variáveis) serem distintas, elas não necessariamente têm valores diferentes, visto que $x_1 = x_2$ se o aluno 1 teve a mesma nota que o aluno 2. Claramente a utilização desses índices foi um erro no planejamento, visto que estava adicionando muitas informações novas para os alunos. Não havia a necessidade dessa formalidade pois eram utilizadas somente 3 incógnitas que poderiam ser substituídas facilmente por x, y, z.

Voltando ao problema, a grande maioria dos discentes não conseguia associar esse problema a nada que viram antes, "travaram" na resolução e se sentiram intimidados. Podemos pensar que os alunos tinham, como cita Fragoso (2012, p.97): "o medo por desconhecimento", sendo citado pelo autor como o medo mais comum entre as pessoas que se deparam com a Matemática. Gerado o estranhamento esperado, consegui trabalhar com uma das indagações principais da Resolução de Problemas: "Conhecem algum problema correlato?" - já citado anteriormente. Somente o aluno D, que já havia transformado as uvas, bananas e cerejas em variáveis, como é possível observar na Figura 2 (utilizei maçãs pois eram mais rápidas de desenhar), respondeu de prontidão à atividade proposta. Note que o aluno utilizou somente uma variável x para as três frutas e também utilizou x para duas cerejas. Era esperado, mesmo que não necessário, uma diferenciação entre três variáveis, o que causou surpresa na leitura da resolução.

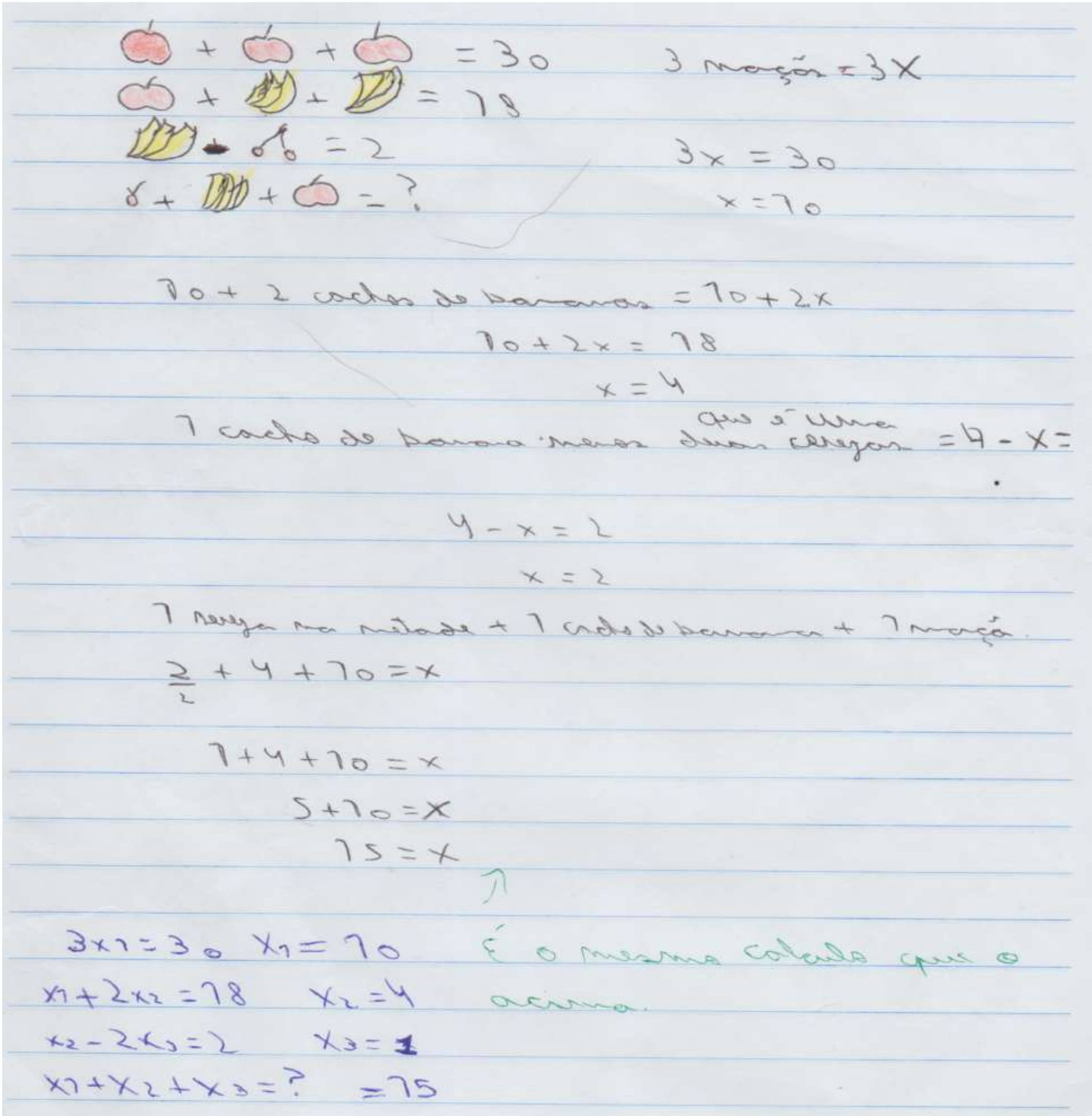
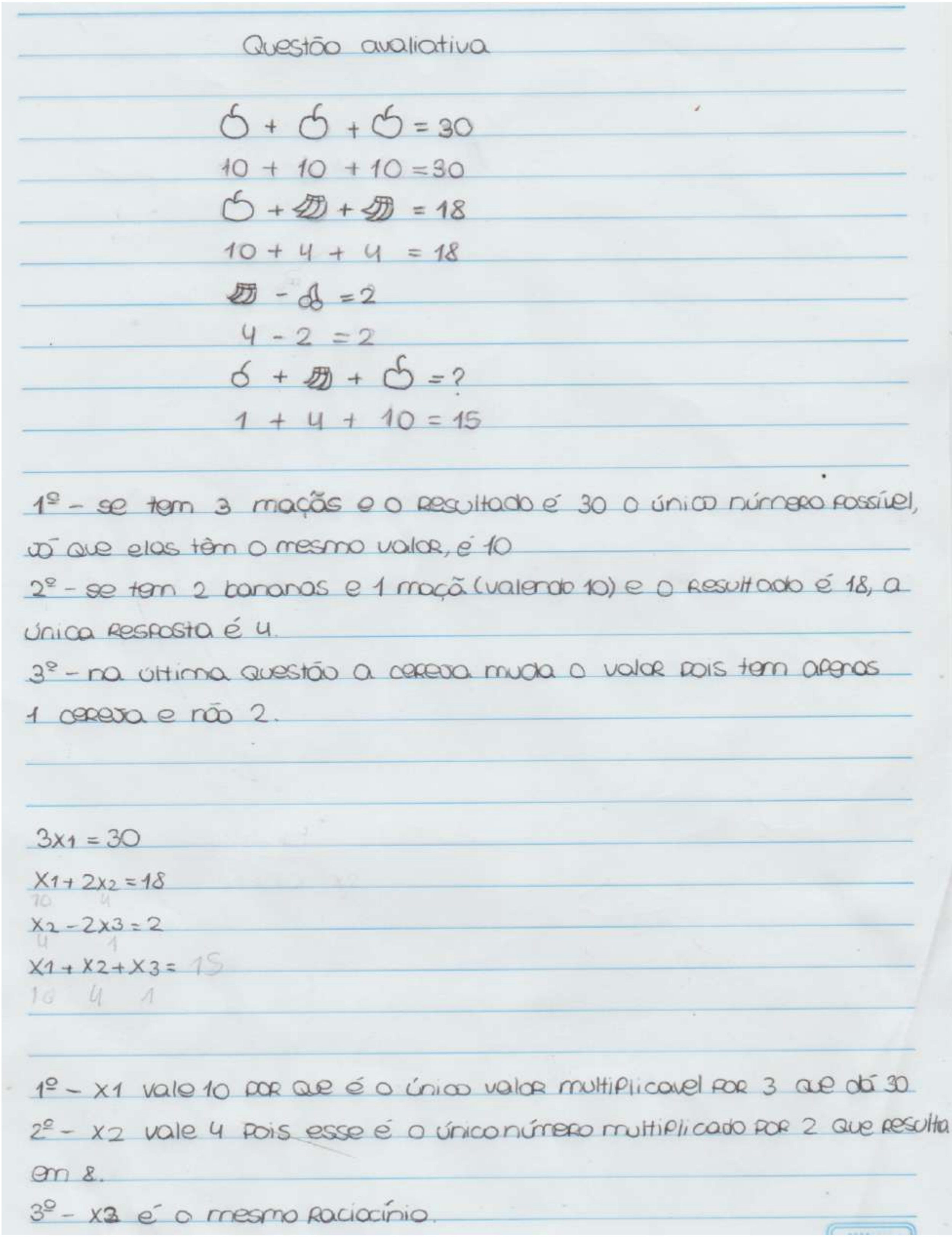


Figura 2 - Resolução do aluno D

Por outro lado, a aluna F utilizou da argumentação matemática para falar sobre a sua resolução. Além de captar a noção de índice das variáveis, ela resolve as equações de forma “diferente”. Ao invés de utilizar operações em ambos os lados da equação - ou “passar para o lado” -, ela argumenta como “é o único valor multiplicável”, o que está correto mas não é usual.



Questão avaliativa

10 + 10 + 10 = 30

10 + 4 + 4 = 18

4 - 2 = 2

1 + 4 + 10 = 15

1º - se tem 3 maçãs e o resultado é 30 o único número possível, já que elas têm o mesmo valor, é 10

2º - se tem 2 bananas e 1 maçã (valendo 10) e o resultado é 18, a única resposta é 4.

3º - na ultima questão a cereja muda o valor pois tem apenas 1 cereja e não 2.

$3x_1 = 30$

$x_1 + 2x_2 = 18$

10 4

$x_2 - 2x_3 = 2$

4 1

$x_1 + x_2 + x_3 =$ 15

10 4 1

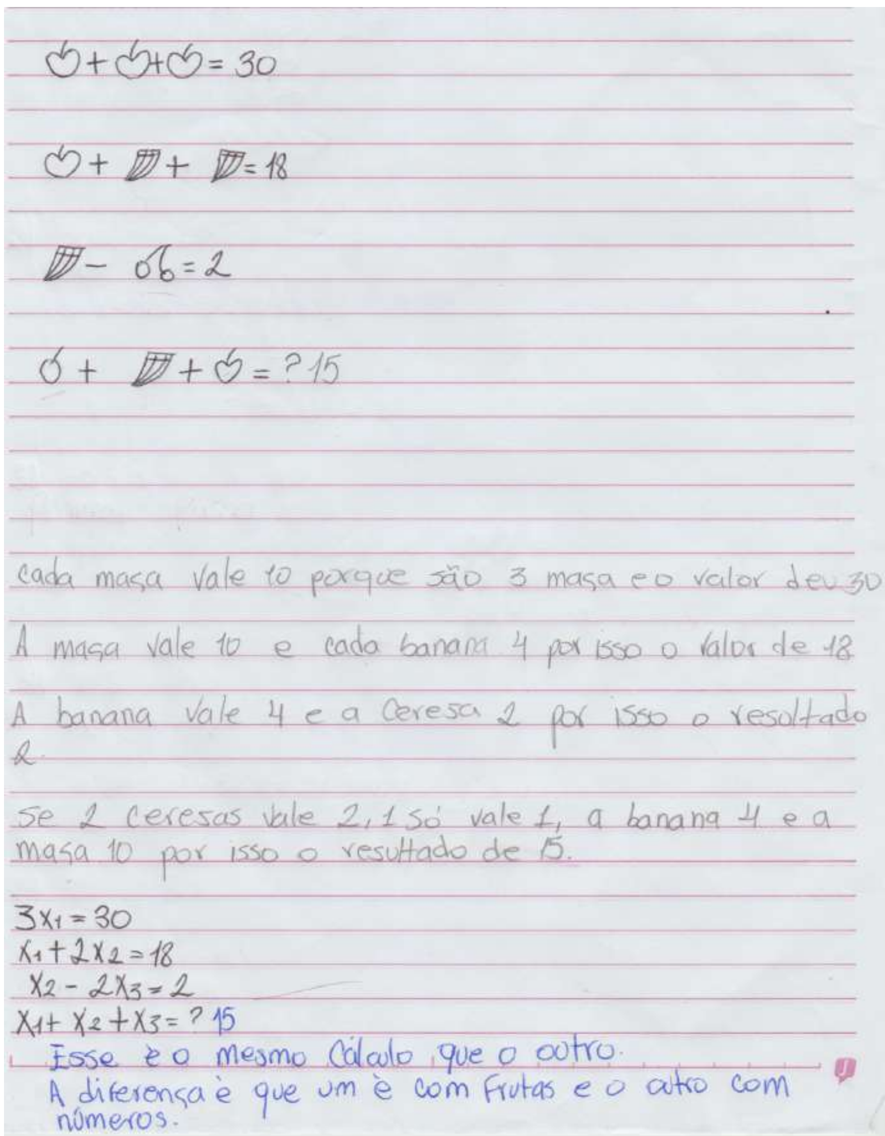
1º - x1 vale 10 por que é o único valor multiplicavel por 3 que dá 30

2º - x2 vale 4 pois esse é o único número multiplicado por 2 que resulta em 8.

3º - x3 é o mesmo raciocínio.

Figura 3 - Resolução da aluna F

Note que ambos os alunos, ao resolverem, compreenderam o problema, criaram um plano, pois foi possível observá-los discutindo entre si as possibilidades, executaram esse plano, pois tomaram a direção que queriam e conseguiram explicar sua resolução e porquê acreditavam que estava correta. Apesar do segundo ter (re)feito os passos da primeira resolução, houve uma elaboração e execução do plano e o cuidado em se expressar matematicamente. Enquanto isso, o resto da turma, após alguns minutos, começou a discutir que os números estavam muito "parecidos" com os da primeira questão e, consequentemente, entenderam que se tratava da mesma questão com "números ao invés de figuras", como podemos observar na Figura 4, resolução da aluna K.



cada masa vale 10 porque são 3 masa e o valor deu 30

A masa vale 10 e cada banana 4 por isso o valor de 18

A banana vale 4 e a Ceresa 2 por isso o resultado 2.

se 2 ceresas vale 2, 1 só vale 1, a banana 4 e a masa 10 por isso o resultado de 15.

$3x_1 = 30$

$x_1 + 2x_2 = 18$

$x_2 - 2x_3 = 2$

$x_1 + x_2 + x_3 = ?\ 15$

Esse è o mesmo Cálculo que o outro.
A diferença è que um è com Frutas e o outro com números.

Figura 4 - Resolução da aluna K

Ao final da aula, para dar prosseguimento à resolução de sistemas lineares, foi escrito no quadro a matriz dos coeficientes referente ao sistema anterior:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 30 \\ 1 & 2 & 0 & 18 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Como era final da aula, era somente uma escrita para deixá-los pensando na situação nova até a próxima aula. Houve um estranhamento maior que a passagem de frutas para variáveis, o que era esperado.

No início da aula seguinte, foi dado um tempo para discutirem os caminhos possíveis para encontrar os resultados, mas faltava uma coisa importante: qual era o objetivo? O que buscavam? Tentei buscar a percepção dos “mesmos valores”: “Conhecem um problema correlato?” Porém, não conseguiram associar os valores com os primeiros problemas. Criado o caos na turma, foram definidas a matriz dos coeficientes e as operações entre linhas, de forma que poderiam servir de ferramentas para criar algum tipo de plano para a resolução. Somente a aluna F conseguiu utilizar a mudança de escala para dividir toda a primeira linha por 3, mas não conseguia utilizar a substituição ou traduzir a informação da linha para o entendimento de sistemas lineares.

Para continuar o conteúdo, visto que precisava coletar dados das resoluções, trabalhamos com uma lista de exercícios (Figura 5), tentando iniciar com o pequeno passo de criar a matriz dos coeficientes de sistemas lineares e resolvê-los.

1) Dadas os sistemas lineares a seguir, escreva as suas respectivas notações matriciais e ache o valor das suas variáveis:

a) $3x_1 = 30$
$x_1 + 2x_2 = 18$
$x_2 - x_3 = 2$

b) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
$2x_2 - 8x_3 = 8$
$5x_1 - 5x_3 = 10$

2) Enuncie, em palavras, a próxima operação elementar que deve ser realizada no sistema de modo a resolvê-lo.

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0$$
$$x_2 + 8x_3 =- 4$$
$$2x_3 = 3$$
$$x_4 = 1$$

3) Ache os valores das variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4 utilizando a notação matricial.

Figura 5 - Lista 1

O problema de não compreender o que se era pedido na resolução das matrizes dos coeficientes perdurava e isso foi o principal erro na sequência didática, o excesso de informações novas de maneira acelerada, a ser corrigido para um futuro ensino de noções introdutórias de Álgebra Linear. Entretanto, insistimos na lista atual e isso não foi benéfico para o entendimento dos alunos, visto que havia dificuldade na operação de substituição e aplicar sucessivas substituições seria utópico, pois necessitavam de prática para observar alguns exemplos. Faltava uma direção pros alunos, como eles iriam operar nas matrizes sendo que eles mal compreendiam qual o objetivo por trás das operações? Ao reconhecer o erro, teorizamos e entendemos que deveríamos ter iniciado a sequência com mais passos nessa "tradução" de sistemas lineares para matrizes dos coeficientes e, concluído isso, solicitar somente a resolução de matrizes $2x2$. Dessa forma, criamos uma nova lista (Figura 6), para aplicar em outros dois períodos e coletar o que os alunos haviam compreendido da transformação em notação matricial e da resolução de sistemas lineares com 2 variáveis utilizando a matriz dos coeficientes, além de um problema aplicado.

1) Apresente a notação matricial dos sistemas lineares a seguir:

   a) $x_1 + 2x_3 = 4$

      $2x_1 + x_2 = 1$

      $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

   b) $x + y = 1$

      $2x + 2y = 2$

   c) $x + y + z = 1$

      $2x + 2y = 2$

      $3y + 3z = 3$

   d) $4x_1 = 8$

      $x_1 + x_2 = 3$

2) Encontre o valor das variáveis, utilizando o algoritmo de escalonamento, das seguintes matrizes de coeficientes:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3) Estudando prescrições e consultas, uma nutricionista em formação deparou-se com algumas dúvidas sobre o gasto calórico diário ideal de homens, mulheres e crianças. As prescrições citadas eram de nutricionistas mais antigos e eles não tiveram o cuidado de escrever esses dados nas dietas familiares. Porém, havia o gasto calórico total das famílias:

- Família 1: dois homens adultos e uma criança gastam 5000 kcal diariamente.
- Família 2: um homem, uma mulher e duas crianças 5600 kcal diariamente.
- Família 3: uma mulher e três crianças 4900 kcal diariamente.

Qual a matriz dos coeficientes associada ao problema da nutricionista?

Figura 6 - Lista 2

Todos os alunos presentes pareceram compreender a noção de matriz dos coeficientes, utilizando corretamente as colunas para cada matriz e as linhas para cada equação, como mostra a resolução da aluna L.

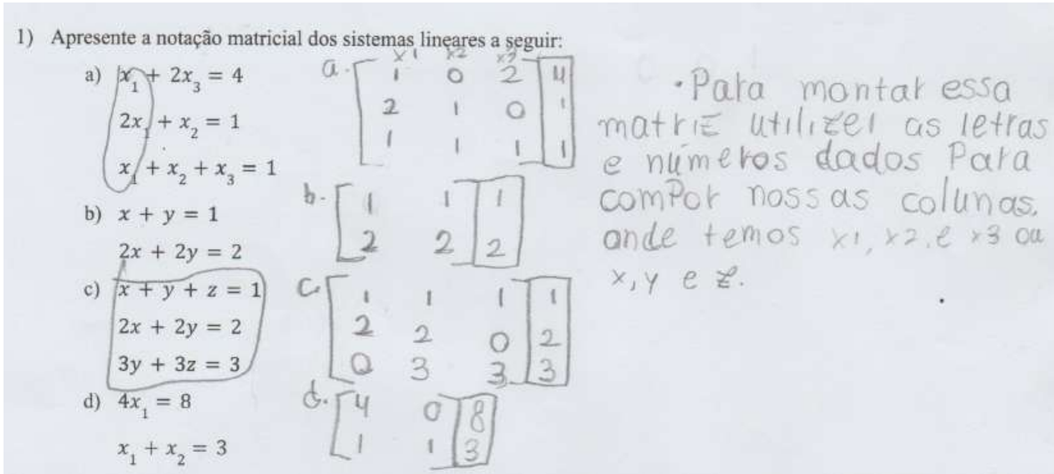


Figura 7 - Resolução da aluna L

A questão 3 foi corretamente trabalhada pelos alunos, como podemos ver na resolução da aluna A, visto que eles compreenderam como transformar cada equação em linhas, sem nem passar pelos sistemas lineares. Além disso, todas as variáveis foram colocadas corretamente em suas respectivas colunas, mostrando que se apropriaram do conceito de forma adequada.

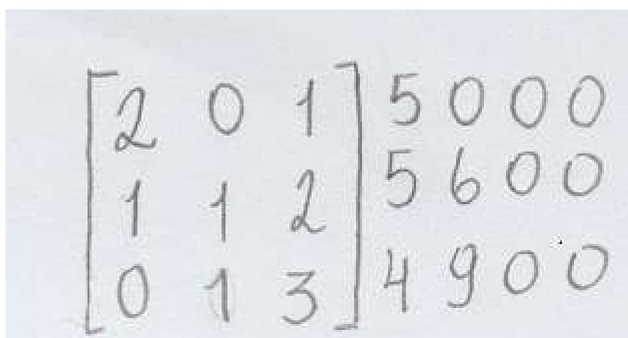


Figura 8 - Resolução da aluna A

Infelizmente, foi mantida a dificuldade dos alunos para com a resolução dessas matrizes, pois não compreenderam a noção de matriz equivalente em transformar as linhas como transformava as equações e, que o objetivo era achar uma posição de pivô para encontrar o valor de cada variável. Porém, o aluno E conseguiu reproduzir a operação de substituição sucessiva nas linhas:

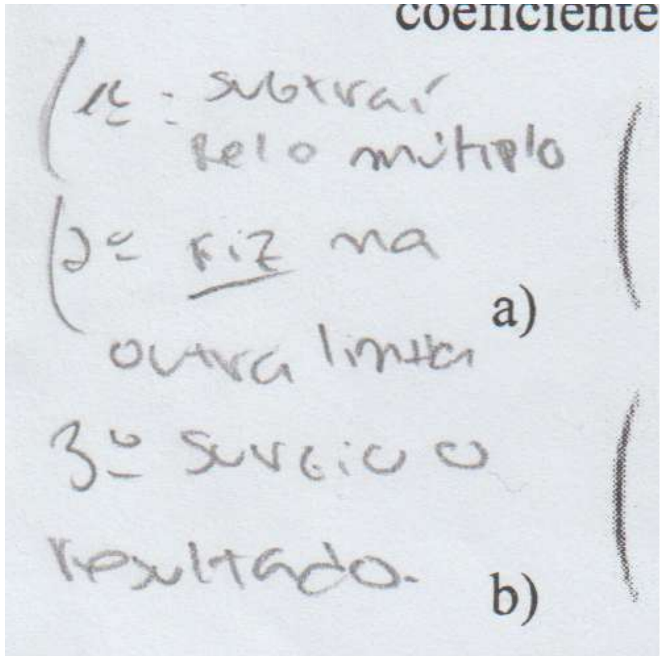


Figura 9 - Explicação do aluno E

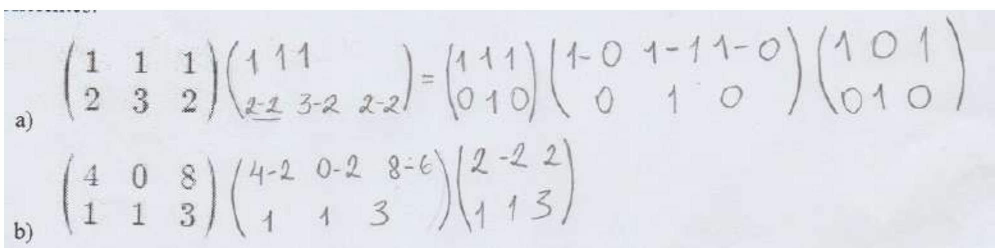


Figura 10 - Resolução do aluno E

Por falta de mais tempo disponível, com esta lista de exercícios finalizamos a experiência.

5 Considerações finais

Apesar do início promissor com a recapitulação de sistemas lineares e a passagem para notação matricial, os alunos tiveram muitas dificuldades com o escalonamento. Porém, foi deduzido que os problemas apresentados decorreram do excesso de novas informações aos alunos, desde o índice das variáveis ao algoritmo de escalonamento, pois eles constantemente se sentiam perdidos nas resoluções: não sabiam as ferramentas que tinham para utilizar ou o objetivo da atividade em si.

Acreditamos que o tempo curto foi um fator para não ter sucesso em introduzir satisfatoriamente o escalonamento. Se houvesse mais tempo disponível para expor os conceitos, é bem provável que a sequência teria sido bem sucedida, visto que para o final alguns alunos estavam esboçando um entendimento sobre o assunto. Esse tempo extra teria sido ótimo para começar com exemplos de dimensão menor para reforçar as operações em linhas e, progressivamente, conseguir a compreensão do escalonamento com maior número de variáveis.

Pela experiência do autor com esse trabalho e com a monitoria, é possível teorizar que os alunos, principalmente de escola pública, têm dificuldades similares às dos alunos de Ensino Superior, apesar destes últimos terem passado por um vestibular complicado como o ENEM ou a UFRGS.

Uma proposta para as matrizes curriculares do Ensino Médio é a possibilidade de investir mais tempo no estudo de matrizes no segundo ano do Ensino Médio, visto que é uma área que já está presente no currículo. Faltam noções mais precisas para a aplicação direta em áreas como administração, economia e informática. Além disso, a Resolução de Problemas foi grande aliada nas aulas e mostrou porque é tão estudada e renomada por todo o mundo, visto que a discussão entre os colegas para utilizar as ferramentas já conhecidas tornavam a Matemática em algo natural no ambiente, de forma que os alunos trocavam entre si o conhecimento e, de forma plena, estabeleciam e executavam seus planos democraticamente.

Ao contrário da noção de educação bancária, que Paulo Freire (2019) tanto criticava, os alunos do Ensino Básico, mesmo que não almejem um curso de Ensino Superior que trabalhe com matrizes, merecem uma educação que os possibilite de usufruir de ferramentas matemáticas, tanto de maneira aplicada quanto formal.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. J. O planejamento de pesquisas qualitativas em educação. **Cad. Pesq**, São Paulo, maio 1991.

BARRIOS, J. C. **Modelagem matemática: Uma abordagem do método gráfico e do método simplex na resolução de problemas de otimização.** Dissertação. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Presidente prudente, 2015.

BODGAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitative em Educação – uma introdução à teoria e aos métodos.** Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base. Acesso em: 27 out 2021.

BURNIER, S. **Pedagogia das competências: conteúdos e métodos.** Boletim Técnico do Senac, v. 27, n. 3, p. 48-60, 28 set. 2001.

DANYLUK, O. **Alfabetização Matemática: o cotidiano da vida escolar**. Gráfica e Editora da UPF, Passo Fundo, 1989.

FELIPE, Fabiana Alvarenga; SILVA, Dayana dos Santos; COSTA, Áurea de Carvalho. **Uma base comum na escola: análise do projeto educativo da Base Nacional Comum Curricular.** Ensaio: aval. pol. públ. Educ. Rio de Janeiro, v.29, n.112, p. 783-803, 2021. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ensaio/a/PbZbjrWHzzQ3Yt4LBFzK6NF/. Acesso em: 25 de fevereiro de 2022.

FRAGOSO, W. da C. O MEDO DA MATEMÁTICA. **Educação**, [S. l.], p. 95–110, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/reveducacao/article/view/3686. Acesso em: 13 abr. 2022.

FREIRE, P. **Pedagogia da Esperança – um reencontro com a Pedagogia do Oprimido.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1992.

FREIRE, P. Paulo Freire: **entrevista**. [1995]. Entrevistadores: D'AMBROSIO, U.; MENDONÇA, M. C. D. [S.l]: [s.n], 1995. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=o8OUA7jE2UQ. Acesso em: 24 de março de 2022.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**. 25ª Edição. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. 69ª Edição. São Paulo: Paz e Terra, 2019.

FREITAS, Fabrício Monte; BERTOLUCCI, Cristina Cavalli; ROVEDA, Crislaine; SILVA, João Alberto. Abrindo a caixa de Pandora: as competências da matemática na BNCC. **RPEM**. Campo Mourão, v.8, n.17, p. 265-291, 2019. Disponível em: http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/627/527. Acesso em: 25 de fevereiro de 2022.

GARCIA, Vera C. G. Fundamentação teórica para as perguntas primárias: O que é Matemática? Porque Ensinar? Como se ensina e como se aprende? **Educação**, Porto Alegre, v. 32, n. 2, p. 176-184, maio/ago. 2009

HEFEZ, A. **Elementos de aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

LAY, D. C. **Álgebra Linear e Suas Aplicações.** 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

LORENSATTI, E. J. C. **Conjectura**, Caxias do Sul, v. 14, n. 2, maio/ago. 2009. Disponível em: http://ucs.br/etc/revistas/index.php/conjectura/article/view/17. Acesso em: 6 de abril de 2022.

MALHEIROS, A. P. S.; FORNER, R. Um Olhar Freireano Para a Base Nacional Comum Curricular De Matemática. **Revista Olhar de Professor.** Ponta Grossa, vol. 23, p.1-14. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=68464195058. Acesso em: 24 de março de 2022.

PAVANELLO, Regina Maria; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Avaliação em Matemática: algumas considerações. **Estudos em Avaliação Educacional.** São Paulo, v. 17, n. 33, p. 29–42, 2006. Disponível em: http://200.155.188.131/index.php/eae/article/view/2125. Acesso em: 25 de fevereiro de 2022.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Interciência, Rio de Janeiro, 1995.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. Pesquisa Em Resolução de Problemas: Caminhos, Avanços e Novas Perspectivas. **BOLEMA**, Rio Claro/ SP, v. 25, n.41, p. 73-98. 2011.

STORMOWSKI, V. **Estudando matrizes a partir de transformações geométricas.** Dissertação de Mestrado, Porto Alegre: UFRGS, 2008.

REIS, M. S.; BARROS, O. dos S. **O Whatsapp no apoio à resolução de problema de matrizes: um produto educacional na EJA**. Revista BOEM, Florianópolis, v. 6, n. 11, p. 138-159, 2018. DOI: 10.5965/2357724X06112018138. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/10985. Acesso em: 15 de abril de 2022.

VALLE, J. C. Apontamentos sobre as ausências da Base Nacional Comum Curricular de Matemática. **Revemop**, v. 3, e202122, p. 1-26, 26 jul. 2021.

LOURENÇO, T. Escolas brasileiras ainda formam analfabetos funcionais. **Jornal da USP**, São Paulo 13 de novembro de 2021. Disponível em: https://jornal.usp.br/atualidades/escolas-brasileiras-ainda-formam-analfabetos-funcionais/. Acesso em: 23 de março de 2022.

ANEXOS
Anexo 1

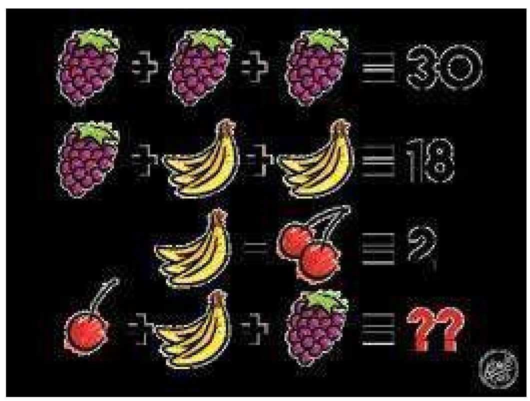
Plano de aula

Nome: Victor V. Fernandes Neto
Escola: Colégio Estadual Júlio de Castilhos, Porto Alegre
Período: 06/04 e 09/04 (6 períodos de 50 minutos)
Conceitos matemáticos: sistemas lineares; matriz dos coeficientes; matrizes genéricas.
Livro:

- David Lay - Algebra Linear e suas Aplicações.

Descrição:
Aula 1

- Entregar o termo de consentimento de TCC para os alunos; eles serão requisitados que os planejamentos das resoluções e suas ideias sejam entregues como utilização de dados para o trabalho. Para "estimular" as resoluções, será uma forma de avaliação, visto que eles se motivam muito quando escutam as palavras "vale nota".
- Será escrito no quadro o seguinte exemplo:



- Os alunos, em um primeiro momento, serão perguntados se já se depararam com esse tipo de problema. Se sim, onde? Então, serão incentivados a se reunir em grupos para compreender o problema, criar e executar seus respectivos planos para respondê-lo. Como na semana passada foram estimulados a se comunicar matematicamente e esclarecidos que de fato pensam Matemática, após um máximo de 10 minutos, serão incentivados a expor seus planos e resoluções.
- Após a discussão, que deve durar entre 5 e 10 minutos, o problema será apagado do quadro e o seguinte problema será exposto:

$$3x_1 = 30$$
$$x_1 + 2x_2 = 18$$
$$x_2 - 2x_3 = 2$$

- Da mesma maneira que o primeiro problema, o planejamento de Polya e a discussão devem durar de 15 a 20 minutos.

- Após a discussão, o problema será apagado e a seguinte matriz vai ser desenhada:

3	0	0	30
1	2	0	18
0	1	-2	2

- Diferente dos outros problemas, essa parte deve durar até o final da aula, pois é um conteúdo novo, extremamente complexo e principal foco do TCC. Será requisitado que, se não conseguirem resolver, tragam a atividade na próxima aula para discussão ou tirada de dúvidas.

Aula 2

- Serão recapitulados, no início da aula, os dois últimos problemas, de sistema linear e matriz de coeficientes, respectivamente, enquanto os preparo para as devidas definições. Todas essas definições são retiradas do livro de David Lay de Álgebra Linear.
- Após breve discussão sobre os problemas, entre 5 e 10 minutos, será escrito no quadro:
  - Definição: Uma equação linear nas variáveis $x_1,..., x_n$ é uma equação que pode ser escrita na forma
  $$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$$
  onde b e os coeficientes $a_1,..., a_n$ são números reais, geralmente já conhecidos.
  - Definição: Um sistema de equações lineares (ou um sistema linear) é uma coleção de uma ou mais equações lineares envolvendo as mesmas variáveis, digamos $x_1,..., x_n$.

Até aqui, é bem provável que os alunos compreendam essas definições pois (é esperado que) conseguiram resolver os dois primeiros exercícios, já que já conheciam essas definições de forma (bem) menos rigorosa. Após a leitura das definições e esclarecimentos das mesmas devido à formalidade, será escrito no quadro:

  - Notação matricial: A informação essencial de um sistema linear pode ser representada de forma compacta por meio de um arranjo retangular chamado matriz. Dado o sistema
  $$3x_1 = 30$$
  $$x_1 + 2x_2 = 18$$
  $$x_2 - 2x_3 = 2$$
  - podemos formar uma matriz com os coeficientes de cada variável alinhados em colunas

3	0	0
1	2	0
0	1	-2

- Essa matriz é chamada matriz dos coeficientes (ou matriz associada) do sistema e a matriz

3	0	0	30
1	2	0	18
0	1	-2	2

- É conhecida como matriz aumentada do sistema. Como são esperadas **muitas** dúvidas até aqui, é possível que tome de um a dois períodos essa dinâmica.

Aula 3.

- Inicia-se a aula recapitulando as noções de sistemas lineares e suas respectivas notações matriciais. A aula vai ter como "norte" o questionamento: "como utilizamos as matrizes de coeficientes para encontrar os valores das variáveis $x_1, ..., x_n$?"
- Antes de introduzirmos propriamente a noção de escalonamento, escrever no quadro o sistema linear da aula anterior ao lado da sua notação matricial para resolvê-los em "sincronia". O quadro será dividido em 3 partes:
    - Sistema linear "comum";
    - Notação matricial;
    - Os passos para resolução.
- Após a resolução, que deve durar entre 10 e 20 minutos, serão escritas as noções de "operações por linhas" do livro de David Lay:
    - OPERAÇÕES ELEMENTARES NAS LINHAS
    - (Substituição) Substituir uma linha por sua própria soma com um múltiplo de outra.
    - (Troca) Trocar duas linhas entre si.
    - (Mudança de escala) Multiplicar todos os elementos de uma linha por uma constante não nula.
- Com isso, definimos as operações que fizemos no exemplo anterior, da notação matricial. Ao final da aula, será distribuído o anexo 2, para os alunos resolverem como atividade avaliativa.

Anexo 2

Colégio Estadual
Júlio de Castilhos

COLÉGIO ESTADUAL JÚLIO DE CASTILHOS

NOME COMPLETO:	**TURMA DO ALUNO:**

ÁREA: Matemática e suas tecnologias **ATIVIDADE**: MATEMÁTICA 4 **TURNO:** Manhã
TURMAS: 31A
PROFESSOR: Victor Fernandes Neto **BIMESTRE: 1º**

1) Dadas os sistemas lineares a seguir, escreva as suas respectivas notações matriciais e ache o valor das suas variáveis:

a) $3x_1 = 30$
$x_1 + 2x_2 = 18$
$x_2 - x_3 = 2$

b) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
$2x_2 - 8x_3 = 8$
$5x_1 - 5x_3 = 10$

2) Enuncie, em palavras, a próxima operação elementar que deve ser realizada no sistema de modo a resolvê-lo.

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0$$
$$x_2 + 8x_3 = -4$$
$$2x_3 = 3$$
$$x_4 = 1$$

3) Ache os valores das variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4 utilizando a notação matricial.