

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA A
ANÁLISE ELASTO-VISCOPLÁSTICA DE PEÇAS DE CONCRETO
ARMADO E PROTENDIDO, SUBMETIDAS A ESTADOS PLANOS
DE TENSÃO**

Marcelo Augusto da Silva Machado

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.

Área de concentração: Estruturas

Porto Alegre
Março de 2002

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Programa de Pós-Graduação.

Prof. Américo Campos Filho
Orientador

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil

BANCA EXAMINADORA

Prof. Américo Campos Filho (Orientador)
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Profa. Henriette Lebre La Rovere
Ph.D. pela University of California - San Diego

Prof. Mauro de Vasconcellos Real
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal
Ph.D. pela North Carolina State University

Dedico esta dissertação à minha família, pelo esforço que fizeram e pelo carinho e incentivo que me deram, para que eu obtivesse êxito na sua realização.

“Há pessoas que estão sempre atribuindo às circunstâncias aquilo que são. Não acredito nas circunstâncias. As pessoas que vencem neste mundo são as que procuram as circunstâncias de que precisam e, se não as encontram, as criam.”.

(Bernard Shaw)

AGRADECIMENTOS

Ao professor Américo Campos Filho pela confiança depositada, pela constante e paciente orientação e pela amizade dispensada durante o período de realização deste trabalho.

Aos colegas do curso de mestrado, Agnagildo Conceição Machado, Alberto Mibielli Stein, Alexandre Luis Braun, Fernando Wordell, Paulo Roberto Cunha de Almeida, Luiz Alberto Duarte Filho, Moisés Maciel Vitoreti e Tatiana Thomé de Oliveira pela convivência, cooperação e amizade.

Aos demais colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil pela convivência.

Aos professores e funcionários da Escola de Engenharia e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, pela atenção recebida e auxílio prestado na condução deste trabalho.

À CAPES - Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - pelo suporte financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS.....	xii
LISTA DE FIGURAS.....	xvi
LISTA DE TABELAS.....	xxvi
RESUMO.....	xxvii
ABSTRACT.....	xxviii
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 GENERALIDADES.....	1
1.2 OBJETIVO DO TRABALHO.....	1
1.3 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO.....	2
2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE UM MATERIAL COM COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO.....	4
2.1 INTRODUÇÃO.....	4
2.2 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO CONCRETO.....	4
2.2.1 Expressões básicas.....	5
2.2.2 Incremento de deformação viscoplástica.....	5
2.2.3 Incremento de tensão.....	6
2.2.4 Equações de equilíbrio.....	6
2.2.5 Correção do equilíbrio.....	7
2.2.6 Modelo de camadas.....	8
2.3 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO AÇO.....	9
2.3.1 Incremento de tensão.....	9
2.3.2 Equações de equilíbrio.....	10
2.3.3 Taxa de deformação viscoplástica.....	10
2.3.4 Modelo de camadas.....	10
3 MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS EMPREGADOS PARA O CONCRETO E A PARA A ARMADURA.....	12
3.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO.....	12
3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA.....	14
3.2.1 Modelo incorporado.....	14
3.2.2 Formulação geométrica.....	15

3.2.3 Segmentos de armadura localizados no interior de um elemento de concreto.....	17
3.2.4 Funções de forma para os elementos de armadura.....	20
3.2.5 Matriz de rigidez para a armadura.....	20
4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS.....	22
4.1 INTRODUÇÃO.....	22
4.2 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO.....	22
4.2.1 Modelo para o concreto comprimido.....	23
4.2.1.1 Critério de ruptura.....	24
4.2.1.2 Critério de plastificação.....	26
4.2.1.3 Regra de endurecimento.....	26
4.2.1.4 Vetor de fluxo plástico.....	27
4.2.2 Modelo para o concreto à tração.....	28
4.2.2.1 Critério de fissuração.....	28
4.2.2.2 Critério para escolha da curva de amolecimento.....	29
4.2.2.3 Rigidez transversal do concreto fissurado.....	31
4.3 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA A ARMADURA.....	32
5 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS DEPENDENTES DO TEMPO.....	33
5.1 FLUÊNCIA E RETRAÇÃO DO CONCRETO.....	33
5.1.1 Relações constitutivas uniaxiais para o concreto.....	34
5.1.1.1 Hipótese básica.....	34
5.1.1.2 Lei do tipo integral para a fluência.....	34
5.1.1.3 Lei do tipo integral para a relaxação.....	35
5.1.1.4. Discussão das leis do tipo integral para fluência e relaxação.....	36
5.1.2 Inclusão da fluência no modelo.....	37
5.1.2.1 Formulação matemática do modelo de Maxwell.....	37
5.1.2.2 Determinação da função de relaxação, a partir da função de fluência	37
5.1.2.3 Determinação dos parâmetros $E_{\mu}(t)$ e $\eta_{\mu}(t)$	40
5.1.2.4 Determinação dos parâmetros da função de fluência.....	42
5.1.2.4.1 Equação básica.....	42
5.1.2.4.2 Coeficiente de fluência.....	42
5.1.2.4.3 Efeito do tipo de cimento e variação da temperatura	43

5.1.2.4.4	Comparação entre as curvas de fluência, geradas pelo modelo, com as obtidas pela formulação teórica do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993).....	44
5.1.3	Inclusão da retração no modelo.....	47
5.1.3.1	Determinação dos parâmetros de retração.....	47
5.1.3.2	Comparação entre a curva de retração, gerada pelo modelo, com a obtida pela formulação teórica do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993).....	49
5.2	RELAXAÇÃO DA ARMADURA PROTENDIDA.....	49
5.2.1	Comparação entre a curva de relaxação, gerada pelo modelo, com a obtida pela formulação teórica do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993).....	52
6	TIPOS DE PROTENSÃO IMPLEMENTADOS NO MODELO COMPUTACIONAL.....	53
6.1	INTRODUÇÃO.....	53
6.2	PRÉ-TRAÇÃO.....	55
6.3	PÓS-TRAÇÃO COM ADERÊNCIA.....	55
6.4	PÓS-TRAÇÃO SEM ADERÊNCIA.....	59
7	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO.....	60
7.1	INTRODUÇÃO.....	60
7.2	PRÉ-PROCESSAMENTO: ENTRADA DE DADOS.....	60
7.2.1	Primeira tela.....	60
7.2.2	Segunda tela.....	61
7.2.3	Terceira tela.....	61
7.2.4	Quarta Tela.....	61
7.2.5	Quinta tela.....	62
7.2.6	Sexta tela.....	62
7.2.7	Sétima tela.....	62
7.2.8	Oitava tela.....	62
7.2.9	Nona tela.....	62
7.2.10	Décima tela.....	62
7.2.11	Décima primeira tela.....	62
7.3	PROCESSAMENTO.....	67
7.3.1	Algoritmo de solução.....	67
7.3.2	Implementação das etapas de solução para o concreto.....	67
7.3.3	Implementação das etapas de solução para o aço.....	67
7.3.4	Armazenamento dos resultados obtidos para pós-processamento.....	67

7.4	PÓS-PROCESSAMENTO.....	71
7.4.1	Malha de elementos finitos de concreto e armadura.....	71
7.4.2	Deformação da malha de elementos finitos de concreto.....	72
7.4.3	Tensões no concreto.....	72
7.4.4	Tensões na armadura.....	72
7.4.5	Distribuição de fissuras.....	72
8	ANÁLISE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO.....	76
8.1	INTRODUÇÃO.....	76
8.2	EVOLUÇÃO DAS FLECHAS AO LONGO DO CARREGAMENTO.....	76
8.3	EVOLUÇÃO DAS TENSÕES NOS ESTRIBOS AO LONGO DO CARREGAMENTO.....	80
8.4	REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO COMPUTACIONAL.....	83
8.4.1	Evolução do estado de tensão (ϵ_x) dos elementos de concreto ao longo do carregamento.....	83
8.4.2	Evolução das tensões na armadura e distribuição de fissuras nos elementos de concreto ao longo do carregamento.....	83
9	ANÁLISE DE LAJES DE CONCRETO PROTENDIDO, ARMADAS EM UMA DIREÇÃO, SUBMETIDAS À PRÉ-TRAÇÃO.....	96
9.1	INTRODUÇÃO.....	96
9.2	EVOLUÇÃO DAS FLECHAS E DEFORMAÇÕES AO LONGO DO CARREGAMENTO.....	97
9.2.1	Ensaio de carregamento instantâneo com carga de serviço distribuída.....	97
9.2.2	Ensaio de carregamento permanente com carga de serviço distribuída.....	99
9.2.3	Ensaio de carregamento permanente com somente peso próprio.....	101
9.2.4	Ensaio de carregamento permanente com carga concentrada até a ruptura.....	103
9.3	REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO COMPUTACIONAL.....	108
9.3.1	Ensaio de carregamento instantâneo com carga de serviço distribuída.....	108
9.3.1.1	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto ao longo do carregamento.....	108
9.3.1.2	Evolução das tensões na armadura ao longo do carregamento.....	110
9.3.2	Ensaio de carregamento permanente com carga de serviço distribuída.....	111
9.3.2.1	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto ao longo do carregamento.....	111

9.3.2.2	Evolução das tensões na armadura ao longo do carregamento.....	112
9.3.3	Ensaio de carregamento permanente com somente peso próprio.....	113
9.3.3.1	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto ao longo do carregamento.....	113
9.3.3.2	Evolução das tensões na armadura ao longo do carregamento.....	114
9.3.4	Ensaio de carregamento permanente com carga concentrada até a ruptura.....	115
9.3.4.1	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto ao longo do carregamento.....	115
9.3.4.2	Evolução das tensões na armadura ao longo do carregamento.....	118
10	ANÁLISE DE VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDO, SUBMETIDAS À PÓS-TRAÇÃO COM ADERÊNCIA INICIAL.....	122
10.1	INTRODUÇÃO.....	122
10.2	EVOLUÇÃO DAS FLECHAS AO LONGO DO CARREGAMENTO.....	123
10.3	REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO COMPUTACIONAL.....	124
10.3.1	Deformada da estrutura antes e após o carregamento.....	124
10.3.2	Evolução do estado de tensão (ϵ_x) dos elementos de concreto ao longo do carregamento.....	124
10.3.3	Evolução das tensões na armadura ao longo do carregamento.....	125
11	ANÁLISE DE VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDO, SUBMETIDAS À PRÉ-TRAÇÃO OU PÓS-TRAÇÃO SEM ADERÊNCIA INICIAL.....	127
11.1	INTRODUÇÃO.....	127
11.2	EVOLUÇÃO DAS FLECHAS AO LONGO DO CARREGAMENTO.....	127
11.3	EVOLUÇÃO DA MÉDIA DAS TENSÕES NA ARMADURA PROTENDIDA AO LONGO DO CARREGAMENTO.....	130
11.4	REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO COMPUTACIONAL.....	131
11.4.1	Deformada da estrutura antes e após o carregamento.....	131
11.4.2	Evolução do estado de tensão (ϵ_x) dos elementos de concreto ao longo do carregamento.....	134
11.4.3	Evolução das tensões na armadura ao longo do carregamento.....	138
12	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	144
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	145

ANEXO A PREPARAÇÃO DOS RESULTADOS DE TENSÃO NO CONCRETO E NA ARMADURA PARA REPRESENTAÇÃO GRAFICA.....	148
A.1 PROCESSO DE SUAVIZAÇÃO DE TENSÕES UTILIZANDO O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS, PARA ELEMENTOS FINITOS PLANOS.	148
A.2 CONVERSÃO DOS VALORES DAS TENSÕES NOS PONTOS DE INTEGRAÇÃO DAS BARRAS DE ARMADURA, PARA OS PONTOS NODAIS.....	150

LISTA DE SÍMBOLOS

I - LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

A - área; coeficiente

A_c - área da seção transversal de concreto

A_p - área da seção transversal da armadura ativa

A_s - área da seção transversal da armadura passiva

B - matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de concreto; coeficiente

B_s - vetor que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de aço

C - função de posição ao longo da barra de armadura; coeficiente

D - matriz constitutiva

E - módulo de elasticidade longitudinal

E_c - módulo de elasticidade longitudinal do concreto

E_s - módulo de elasticidade longitudinal do aço

E_u - módulo de elasticidade longitudinal da camada de concreto

F - função de plastificação; tensão efetiva; força; “pseudo-carga”

F_0 - tensão corrente de plastificação

F_p - força de protensão

G - módulo de elasticidade transversal

G_c - módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado

G_f - energia de fratura

H - função de interpolação da armadura

I_1 - 1° invariante do tensor de tensão

J - matriz jacobiana; função de fluência

J_2 - 2° invariante do tensor desviador de tensão

J_3 - 3° invariante do tensor desviador de tensão

K - matriz de rigidez do elemento de concreto armado

K_c - matriz de rigidez do concreto

K_s - matriz de rigidez do aço

N - função de interpolação para o elemento de concreto

P - vetor de cargas de superfície e de volume; coordenadas dos nós das barras de aço
 Q - função do potencial plástico
 Q_s - forças nodais equivalentes da armadura
 R - função de relaxação
 \tilde{R} - pontos discretos de R
 RH - umidade relativa do ar
 S - superfície; matriz de suavização
 T - temperatura
 V - volume
 W - trabalho

II - LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

a - vetor de fluxo plástico; coeficiente
 b - coeficiente
 c - parâmetro; coeficiente
 e - espessura total do elemento de concreto; elemento de concreto
 e_i - espessura da camada de concreto
 f - função
 f_{cm} - resistência média à compressão do concreto
 f_{ptk} - tensão de ruptura do concreto protendido
 f_{tm} - resistência média à tração do concreto
 f_y - tensão de escoamento da armadura passiva
 g - função
 h - altura do volume de controle; espessura fictícia da seção de concreto
 k - parâmetro; número de iterações; coeficiente para o tipo de relaxação; razão entre f_{tm} e f_{cm}
 k_1 - parâmetro
 l_c - comprimento característico
 m - número de nós da barra de armadura
 n - número de nós do elemento de concreto
 n_e - número total de elementos
 n_g - número de pontos de integração de Gauss
 n_p - número total de pontos de integração da armadura protendida, pós-tracionada e não-aderente
 s - constante que depende do tipo de cimento; distância; tensão desviadora
 t - tempo, espessura do volume de controle

t_0 - tempo inicial
 t_1 - tempo um qualquer
 t' - idade do carregamento
 t_m - tempo qualquer
 t_p - data da protensão
 t_a - data de início de retração
 u - campo de deslocamento
 x - coordenada cartesiana
 y - coordenada cartesiana
 w - fator de peso; abertura de fissura

III - LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

Δ - incremento
 Σ - somatório
 Φ - função de fluxo

IV – LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

α - coeficiente; ângulo
 β - coeficiente; ângulo
 γ - coeficiente de fluidez do concreto; distorção
 γ_s - coeficiente de fluidez do aço
 δ - variação; deslocamentos nodais
 ϵ - deformação específica longitudinal
 $\dot{\epsilon}$ - velocidade de deformação
 ϵ_0 - deformação de fissuração
 ϵ_{cs} - deformação por retração do concreto
 ϵ_e - deformação elástica
 ϵ_n - deformação dependente de tensão
 ϵ_{svp} - deformação viscoplástica do aço
 ϵ_{tot} - deformação total
 ϵ_{ve} - deformação viscoelástica
 ϵ_{vp} - deformação viscoplástica
 η - coeficiente de viscosidade; coordenada normalizada

η_{μ} - coeficiente de viscosidade da camada de concreto
 θ - ângulo de similaridade; ângulo gravidade com eixo cartesiano y.
 λ - parâmetro
 ν - coeficiente de Poisson
 ξ - coordenada normalizada
 π - função residual
 $\dot{\pi}$ - energia dissipada na fissura
 ρ_{1000} - coeficiente de relaxação do aço
 σ - tensão normal no concreto
 $\dot{\sigma}$ - velocidade de tensão
 σ_{ef} - tensão efetiva no concreto
 σ_{po} - tensão de protensão inicial
 σ_{pi} - tensão de protensão na extremidade da barra de armadura
 σ_s - tensão normal na armadura
 σ_{tot} - tensão total
 τ - tensão tangencial no concreto; tempo inicial tensão unitária
 τ_{μ} - tempo de relaxação da camada de concreto
 ϕ - diâmetro da barra da armadura; coeficiente de fluência; função de minimização
 χ - coordenada normalizada
 μ - coeficiente de atrito armadura ativa; camada
 ψ - forças residuais; função de relaxação do aço

V - SÍMBOLOS

$\{ \}$ - vetor coluna
 $\langle \rangle$ - vetor linha
 $[]$ - matriz
 $[]^T$ - matriz transposta
 $[]^{-1}$ - matriz inversa
 $| |$ - determinante
 $\| \|$ - norma

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1	Modelo elasto-viscoplástico.....	4
FIGURA 2.2	Modelo de camadas superpostas.....	8
FIGURA 3.1	Elemento isoparamétrico quadrangular.....	12
FIGURA 3.2	Barra de armadura no interior de um elemento concreto.....	15
FIGURA 3.3	Coordenadas ao longo do eixo da armadura.....	16
FIGURA 3.4	Curva de definição da barra de aço.....	18
FIGURA 3.5	Situações possíveis de se encontrar uma barra de armadura.....	19
FIGURA 3.6	Segmento de armadura dentro do elemento concreto.....	19
FIGURA 3.7	Barra de armadura localizada numa aresta em comum de dois elementos de concreto.....	20
FIGURA 4.1	Diagrama carga-deslocamento típico de um elemento de concreto estrutural.....	22
FIGURA 4.2.a	Meridianos da superfície de ruptura.....	25
FIGURA 4.2.b	Seções transversais da superfície de ruptura.....	25
FIGURA 4.3	Superfícies de ruptura e de carregamento.....	26
FIGURA 4.4	Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido.....	27
FIGURA 4.5	Ilustração do comprimento característico em um volume de controle prismático.....	30
FIGURA 4.6	Diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado.....	31
FIGURA 4.7	Diagramas tensão-deformação para os aços tipo A e B e para o aço protendido, respectivamente.....	32
FIGURA 5.1	Evolução da deformação por fluência para uma tensão constante aplicada em t	34
FIGURA 5.2	Curva de deformação por retração.....	34
FIGURA 5.3	Modelo reológico do concreto.....	37
FIGURA 5.4	Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 2,8$ dias, por um período de 2800 dias.....	44
FIGURA 5.5	Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 8,85$ dias, por um período de 2800 dias.....	45

FIGURA 5.6	Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 28$ dias, por um período de 2800 dias.....	45
FIGURA 5.7	Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 88,54$ dias, por um período de 2800 dias.....	45
FIGURA 5.8	Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 280$ dias, por um período de 2800 dias.....	46
FIGURA 5.9	Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 885,44$ dias, por um período de 2800 dias.....	46
FIGURA 5.10	Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 2800$ dias, por um período de 2800 dias.....	46
FIGURA 5.11	Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 8854,37$ dias, por um período de 2800 dias.....	47
FIGURA 5.12	Comparação entre as curvas de retração, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t_s = 7$ dias, por um período de 140 dias....	49
FIGURA 5.13	Comparação entre as curvas de relaxação, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, por um período de 112 dias.....	52
FIGURA 6.1	Sistema de pré-tração.....	56
FIGURA 6.2	Perdas na pré-tração.....	56
FIGURA 6.3	Sistema de pós-tração.....	56
FIGURA 6.4	Representação das forças nodais equivalentes, devidas à carga de protensão.....	57
FIGURA 6.5	Perdas na pós-tração.....	58
FIGURA 6.6	Definição dos parâmetros s e $\Delta\alpha$	58
FIGURA 7.1	Arquivo de entrada.....	63
FIGURA 7.2	Dados iniciais.....	63
FIGURA 7.3.a	Dados estruturais - conectividade dos elementos de concreto.....	63
FIGURA 7.3.b	Dados estruturais - espessura dos elementos de concreto.....	64
FIGURA 7.4	Dados estruturais - conectividades das barras de aço.....	64
FIGURA 7.5	Dados estruturais - coordenadas.....	64
FIGURA 7.6	Dados estruturais - vinculação.....	64
FIGURA 7.7	Propriedades - ambiente.....	65
FIGURA 7.8	Propriedades - concreto.....	65
FIGURA 7.9	Propriedades - armadura passiva.....	65

FIGURA 7.10	Propriedades - armadura de protensão.....	65
FIGURA 7.11	Carga nodal.....	66
FIGURA 7.12	Carga gravitacional.....	66
FIGURA 7.13	Carga distribuída de bordo.....	66
FIGURA 7.14	Convenção do ângulo de gravidade.....	66
FIGURA 7.15	Fluxograma do modelo computacional.....	68
FIGURA 7.16	Malha de elementos finitos numerada.....	73
FIGURA 7.17	Numeração dos nós dos elementos de concreto.....	73
FIGURA 7.18	Posicionamento dos nós dos elementos finitos.....	73
FIGURA 7.19	Armadura inserida na malha de elementos finitos.....	74
FIGURA 7.20	Malha de elementos finitos deformada.....	74
FIGURA 7.21	Troca de carregamento para visualização da deformada.....	74
FIGURA 7.22	Distribuição de tensões σ_x para um determinado incremento do carregamento 1.....	74
FIGURA 7.23	Distribuição de tensões σ_y para o 3º incremento do carregamento 2....	75
FIGURA 7.24	Distribuição de tensões σ_y para o 5º incremento do carregamento 3...	75
FIGURA 7.25	Distribuição de tensões σ_s para o 2º incremento do carregamento 2....	75
FIGURA 7.26	Distribuição de fissuras nos elementos de concreto, para o 78º incremento do carregamento 3.....	75
FIGURA 8.1	Detalhamento das vigas ET e GT com diferentes larguras de alma (cotas em cm).....	77
FIGURA 8.2	Discretização adotada, para a análise das vigas ET e GT (cotas em cm).....	77
FIGURA 8.3	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET1.....	78
FIGURA 8.4	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET2.....	78
FIGURA 8.5	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET3.....	78
FIGURA 8.6	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET4.....	78
FIGURA 8.7	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT1.....	79
FIGURA 8.8	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT2.....	79
FIGURA 8.9	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT3.....	79
FIGURA 8.10	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT4.....	79

FIGURA 8.11	Tensões nos estribos, obtidas pelo modelo computacional, para as vigas ET.....	80
FIGURA 8.12	Tensões nos estribos, obtidas pelo modelo computacional, para as vigas GT.....	80
FIGURA 8.13	Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET1.....	81
FIGURA 8.14	Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET2.....	81
FIGURA 8.15	Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET3.....	81
FIGURA 8.16	Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET4.....	81
FIGURA 8.17	Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT1.....	82
FIGURA 8.18	Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT2.....	82
FIGURA 8.19	Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT3.....	82
FIGURA 8.20	Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT4.....	82
FIGURA 8.21	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga ET1, segundo o modelo computacional.....	84
FIGURA 8.22	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga ET2, segundo o modelo computacional.....	84
FIGURA 8.23	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga ET3, segundo o modelo computacional.....	85
FIGURA 8.24	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga ET4, segundo o modelo computacional.....	86
FIGURA 8.25	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga GT1, segundo o modelo computacional.....	87
FIGURA 8.26	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga GT2, segundo o modelo computacional.....	87
FIGURA 8.27	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga GT3, segundo o modelo computacional.....	88
FIGURA 8.28	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga GT4, segundo o modelo computacional.....	89
FIGURA 8.29	Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga ET1, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm ²).....	90

FIGURA 8.30	Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga ET2, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm ²).....	90
FIGURA 8.31	Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga ET3, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm ²).....	91
FIGURA 8.32	Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga ET4, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm ²).....	92
FIGURA 8.33	Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga GT1, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm ²).....	93
FIGURA 8.34	Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga GT2, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm ²).....	93
FIGURA 8.35	Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga GT3, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm ²).....	94
FIGURA 8.36	Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga GT4, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm ²).....	95
FIGURA 9.1	Detalhamento dos protótipos com as seções real e teórica (cotas em cm).....	98
FIGURA 9.2	Discretização adotada para a análise por elementos finitos dos protótipos (cotas em cm).....	98
FIGURA 9.3	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 02 e pelo modelo computacional, para o protótipo A1.....	98
FIGURA 9.4	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 02 e pelo modelo computacional, para as faces inferior e superior da seção central do protótipo A1.....	98
FIGURA 9.5	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 03 e pelo modelo computacional, para o protótipo B2.....	99
FIGURA 9.6	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 03 e pelo modelo computacional, para as faces inferior e superior da seção central do protótipo B2.....	99
FIGURA 9.7	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 05 e pelo modelo computacional, para o protótipo A1.....	100
FIGURA 9.8	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 05 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo A1.....	100
FIGURA 9.9	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 05 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo A1.....	100

FIGURA 9.10	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 06 e pelo modelo computacional, para o protótipo B2.....	100
FIGURA 9.11	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 06 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo B2.....	101
FIGURA 9.12	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 06 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo B2.....	101
FIGURA 9.13	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 07 e pelo modelo computacional, para o protótipo A2.....	101
FIGURA 9.14	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 07 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo A2.....	102
FIGURA 9.15	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 07 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo A2.....	102
FIGURA 9.16	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 08 e pelo modelo computacional, para o protótipo C1.....	102
FIGURA 9.17	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 08 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo C1.....	102
FIGURA 9.18	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 08 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo C1.....	103
FIGURA 9.19	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 01 e pelo modelo computacional, para a seção central do protótipo B1.....	103
FIGURA 9.20	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 01 e pelo modelo computacional, para a seção a um quarto do vão do protótipo B1.....	104
FIGURA 9.21	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 01 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo B1.....	104
FIGURA 9.22	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 01 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo B1.....	104
FIGURA 9.23	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 04 e pelo modelo computacional, para a seção central do protótipo C2.....	104
FIGURA 9.24	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 04 e pelo modelo computacional, para a seção a um quarto do vão do protótipo C2.....	105
FIGURA 9.25	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 04 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo C2.....	105
FIGURA 9.26	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 04 e pelo	

	modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo C2.....	105
FIGURA 9.27	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 09 e pelo modelo computacional, para a seção central do protótipo A2.....	105
FIGURA 9.28	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 09 e pelo modelo computacional, para a seção a um quarto do vão do protótipo A2.....	106
FIGURA 9.29	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 09 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo A2.....	106
FIGURA 9.30	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 09 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo A2.....	106
FIGURA 9.31	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 10 e pelo modelo computacional, para a seção central do protótipo C1.....	106
FIGURA 9.32	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 10 e pelo modelo computacional, para a seção a um quarto do vão do protótipo C1.....	107
FIGURA 9.33	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 10 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo C1.....	107
FIGURA 9.34	Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 10 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo C1.....	107
FIGURA 9.35	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo A1, ao longo do ensaio 02, segundo o modelo Computacional.....	108
FIGURA 9.36	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo B2, ao longo do ensaio 03, segundo o modelo computacional.....	109
FIGURA 9.37	Evolução das tensões na armadura do protótipo A1, ao longo do ensaio 02, segundo o modelo computacional.....	110
FIGURA 9.38	Evolução das tensões na armadura do protótipo B2, ao longo do ensaio 03, segundo o modelo computacional.....	111
FIGURA 9.39	Estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo A1, ao final do ensaio 05, segundo o modelo computacional.....	112
FIGURA 9.40	Estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo B2, ao final do ensaio 06, segundo o modelo computacional.....	112
FIGURA 9.41	Tensões na armadura do protótipo A1, ao final do ensaio 05, segundo o modelo computacional.....	112
FIGURA 9.42	Tensões na armadura do protótipo B2, ao final do ensaio 06, segundo o modelo computacional.....	113
FIGURA 9.43	Estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo A2, ao final do ensaio 07, segundo o modelo computacional.....	113

FIGURA 9.44	Estado de tensão (σ_x) da armadura do protótipo C1, ao final do ensaio 08, segundo o modelo computacional.....	114
FIGURA 9.45	Tensões na armadura do protótipo A2, ao final do ensaio 07, segundo o modelo computacional.....	114
FIGURA 9.46	Tensões na armadura do protótipo C1, ao final do ensaio 08, segundo o modelo computacional.....	115
FIGURA 9.47	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo B1, ao longo do ensaio 01, segundo o modelo computacional.....	115
FIGURA 9.48	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo C2, ao longo do ensaio 04, segundo o modelo computacional.....	116
FIGURA 9.49	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo A2, ao longo do ensaio 09, segundo o modelo computacional.....	117
FIGURA 9.50	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo C1, ao longo do ensaio 10, segundo o modelo computacional.....	118
FIGURA 9.51	Evolução das tensões na armadura do protótipo B1, ao longo do ensaio 01, segundo o modelo computacional.....	119
FIGURA 9.52	Evolução das tensões na armadura do protótipo C2, ao longo do ensaio 04, segundo o modelo computacional.....	119
FIGURA 9.53	Evolução das tensões na armadura do protótipo A2, ao longo do ensaio 09, segundo o modelo computacional.....	120
FIGURA 9.54	Evolução das tensões na armadura do protótipo C1, ao longo do ensaio 10, segundo o modelo computacional.....	121
FIGURA 10.1	Detalhamento da viga RB1 (cotas em cm).....	123
FIGURA 10.2	Discretização adotada para a análise por elementos finitos da viga RB1 (cotas em cm).....	123
FIGURA 10.3	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga RB1.....	123
FIGURA 10.4	Deformada da viga RB1, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional.....	124
FIGURA 10.5	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga RB1, segundo o modelo computacional.....	125
FIGURA 10.6	Evolução das tensões na armadura da viga RB1, segundo o modelo computacional.....	126
FIGURA 11.1	Detalhamento das vigas A e D (cotas em cm).....	128
FIGURA 11.2	Seção das vigas A e D (cotas em cm).....	128
FIGURA 11.3	Discretização adotada para a análise por elementos finitos das vigas A e D (cotas em cm).....	128

FIGURA 11.4	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga A-3.....	129
FIGURA 11.5	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga A-6.....	129
FIGURA 11.6	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga A-9.....	129
FIGURA 11.7	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga D-1.....	129
FIGURA 11.8	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga D-3.....	130
FIGURA 11.9	Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga D-10.....	130
FIGURA 11.10	Comparação entre as médias das tensões na armadura protendida, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga A-3.....	130
FIGURA 11.11	Comparação entre as médias das tensões na armadura protendida, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga A-6.....	131
FIGURA 11.12	Comparação entre as médias das tensões na armadura protendida, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para, a viga A-9.....	131
FIGURA 11.13	Deformada da viga A-3, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional.....	132
FIGURA 11.14	Deformada da viga A-6, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional.....	132
FIGURA 11.15	Deformada da viga A-9, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional.....	132
FIGURA 11.16	Deformada da viga D-1, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional.....	133
FIGURA 11.17	Deformada da viga D-3, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional.....	133
FIGURA 11.18	Deformada da viga D-10, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional.....	133
FIGURA 11.19	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga A-3, segundo o modelo computacional.....	134
FIGURA 11.20	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga A-6, segundo o modelo computacional.....	134
FIGURA 11.21	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga A-9, segundo o modelo computacional.....	135
FIGURA 11.22	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga D-1, segundo o modelo computacional.....	136
FIGURA 11.23	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga D-3, segundo o modelo computacional.....	137

FIGURA 11.24	Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga D-10, segundo o modelo computacional.....	137
FIGURA 11.25	Evolução das tensões na armadura da viga A-3, segundo o modelo computacional.....	138
FIGURA 11.26	Evolução das tensões na armadura da viga A-6, segundo o modelo computacional.....	139
FIGURA 11.27	Evolução das tensões na armadura da viga A-9, segundo o modelo computacional.....	140
FIGURA 11.28	Evolução das tensões na armadura da viga D-1, segundo o modelo computacional.....	141
FIGURA 11.29	Evolução das tensões na armadura da viga D-3, segundo o modelo computacional.....	142
FIGURA 11.30	Evolução das tensões na armadura da viga D-10, segundo o modelo computacional.....	143
FIGURA A.1	Tensões suavizadas e não suavizadas.....	148
FIGURA A.2	Barras de armadura no interior dos elementos de concreto.....	150
FIGURA A.3	Segmentos de barras no interior do elemento de concreto.....	150
FIGURA A.4	Numeração dos nós do segmento de armadura.....	150

LISTA DE TABELAS

TABELA 5.1	Representação das soluções das equações (5.1) e (5.5).....	36
TABELA 5.2	Coefficientes ψ para cada tipo de aço de protensão.....	50
TABELA 7.1	Diferentes procedimentos das etapas de solução para o aço.....	69
TABELA 9.1	Cobrimento das cordoalhas (cm).....	97
TABELA 9.2	Classificação dos ensaios nos protótipos.....	97
TABELA 11.1	Valores para cada viga.....	128

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar o desenvolvimento de um modelo computacional, baseado no método dos elementos finitos, para o estudo de estruturas de concreto armado e protendido, sob estados planos de tensão.

O modelo computacional utiliza dois procedimentos distintos, baseados em um modelo elasto-viscoplástico. No primeiro, determina-se a resposta da estrutura ao longo do tempo. Considera-se, nesta etapa, que o material possui comportamento viscoelástico. No segundo, busca-se a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo, considerando-se o material com um comportamento elastoplástico.

Um modelo de camadas superpostas é adotado para melhor representar o comportamento viscoelástico do concreto e da armadura protendida, onde estes materiais são compostos de diversas camadas que sofrem a mesma deformação. Cada camada possui diferentes propriedades mecânicas e a tensão total é obtida pela soma das diferentes contribuições de cada camada.

Para representar o concreto fissurado, utiliza-se um modelo de fissuras distribuídas, que leva em conta a contribuição do concreto entre fissuras.

Tanto a armadura passiva quanto a armadura de protensão são introduzidas no modelo como uma linha de material mais rígido dentro do elemento de concreto. Considera-se aderência perfeita entre o concreto e o aço. Os deslocamentos ao longo das barras de aço são determinados a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto. Desta forma, as matrizes de rigidez das armaduras têm as mesmas dimensões das matrizes de rigidez dos elementos de concreto e ambas são somadas para a obtenção das matrizes de rigidez totais.

Para verificar a precisão do modelo computacional, compararam-se resultados numéricos com valores experimentais disponíveis.

ABSTRACT

The aim of this work is to present the development of a computational model, based on the finite element method, for the study of reinforced and prestressed concrete structures under plane stress states.

The computational model uses two different procedures, based on an elasto-viscoplastic model. In the first procedure, the determination of the structure's behaviour in time is done. It is supposed, in this stage, that the material presents a viscoelastic behaviour. In the second procedure, the structure's response to an instantaneous loading is investigated, considering an elastoplastic behaviour for the material.

An overlay model is adopted to better represent the concrete's and the prestressed reinforcement's viscoelastic behaviour. These materials are composed by several layers, which have the same deformation. Each layer has different mechanical properties and the total stress is obtained by the sum of the different contributions of each layer.

To represent the cracking of the concrete, a smeared cracking model is used, which considers the contribution of concrete between the cracks.

The passive reinforcement as well as the prestressing one are inserted into the model as a line of a stiffer material inside the concrete element. The bond between concrete and steel is considered to be perfect. The displacements along the reinforcement elements are determined from the displacements of the concrete elements' nodes. Therefore, the reinforcement stiffness matrices have the same dimensions of the stiffness matrices of the concrete elements and both are summed to obtain the total stiffness matrices.

In order to evaluate the accuracy of the computational model, numerical results have been compared to available experimental values.

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

O material concreto estrutural comporta-se de uma maneira extremamente complexa, apresentando uma resposta altamente não-linear, quando submetido a solicitações. Em virtude da sua importância dentro da engenharia estrutural, este material tem sido um objeto permanente de estudo.

A fissuração do concreto, a plastificação do concreto e do aço, a diferença entre as resistências à tração e compressão do concreto, a não-linearidade da relação tensão-deformação e os fenômenos relacionados ao tempo como, fluência e retração do concreto e relaxação do aço, entre outros fatores, são as causas desta não-linearidade.

O método dos elementos finitos já se tornou uma ferramenta consagrada para solução numérica de uma variedade de problemas encontrados na engenharia e pode ser usado na análise do funcionamento de estruturas de concreto estrutural.

Dentro do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, foram realizados vários trabalhos, a fim de se analisar, numericamente, estruturas de concreto armado e protendido, utilizando-se o método dos elementos finitos. Sensale (1991) estudou o comportamento, ao longo do tempo, de estruturas de concreto armado, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos. Prates Júnior (1992), utilizando como base o trabalho de Sensale (1991), estendeu tal estudo para peças de concreto protendido. A partir do modelo computacional implementado por Prates Júnior (1992), diversos trabalhos foram realizados, como o trabalho de Claire (1994), o qual utilizou elementos tridimensionais para simular o comportamento de estruturas de concreto armado. Casos particulares de peças de concreto estrutural, podendo-se destacar estruturas reforçadas, Dantas (2000); aderência imperfeita entre os materiais, Aurich (2001); entre outros, também utilizaram como base o trabalho de Prates Júnior (1992).

Face ao tempo em que foi desenvolvido o modelo computacional por Prates Júnior (1992) e à importância desta linha de pesquisa de estudos de peças de concreto armado e protendido, através do método dos elementos finitos, dentro deste Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, fez-se necessária a revisão dos modelos implementados, a atualização da formulação utilizada, de acordo com as normas técnicas atuais, além de se introduzirem novos modelos, capazes de tornar o modelo computacional mais eficiente, o que é o objetivo principal deste trabalho.

1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

Neste trabalho, apresenta-se um modelo computacional, baseado no trabalho de Prates Júnior (1992), para simulação numérica de estruturas de concreto armado e protendido com ou sem aderência, sob estados planos de tensão, submetidas a cargas de curta e longa duração.

O concreto e o aço são considerados como tendo um comportamento elasto-viscoplástico, onde modelos constitutivos apropriados foram implementados para simular tal comportamento.

Para o concreto, sob a ação do tempo, foi empregado um modelo de camadas superpostas, onde cada camada, com propriedades mecânicas diferentes, sofre a mesma deformação total. Cada camada recebe uma parcela da tensão total.

Um modelo de fissuras distribuídas foi utilizado para o concreto fissurado, onde se leva em conta a contribuição da rigidez entre fissuras. Considera-se aderência perfeita entre o concreto e o aço.

As armaduras, tanto passivas, quanto de protensão, são introduzidas no modelo como linhas de um material mais rígido dentro dos elementos de concreto. Existe compatibilidade de deformações ou deslocamentos entre as barras de armadura e os elementos de concreto. A matriz de rigidez total é obtida, assim, pela soma das matrizes de rigidez do concreto e do aço.

O modelo computacional foi implementado usando-se o software MATLAB, que possui uma fácil linguagem computacional e, também, poderosas ferramentas gráficas. Criou-se, a partir deste software, além do programa principal, um programa de pré-processamento para entrada de dados e, também, outro de pós-processamento, o qual permite visualizar, graficamente, os resultados obtidos nas análises realizadas através do programa principal.

1.3 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é constituído de doze capítulos principais, dos quais este é o primeiro, além de um anexo.

No **capítulo 2**, faz-se uma breve revisão da teoria e apresenta-se o desenvolvimento do modelo de elementos finitos, para análise de um material elasto-viscoplástico, segundo proposto por Owen e Hinton (1980). Mostra-se o funcionamento do algoritmo de solução incremental para problemas não-lineares e explica-se o modelo de camadas adotado.

O **capítulo 3** apresenta os elementos finitos empregados para o concreto e para a armadura.

Os modelos constitutivos dos materiais são abordados no **capítulo 4**. Destacam-se, neste capítulo, o comportamento do concreto tracionado e comprimido e as propriedades da armadura.

As propriedades dos materiais, dependentes do tempo, destacando-se a fluência e a retração do concreto e a relaxação do aço, estão expostas no **capítulo 5**.

No **capítulo 6**, explicam-se os modelos implementados para as estruturas pré-tracionadas, ou pós-tracionadas com ou sem aderência, de concreto protendido.

No **capítulo 7** mostra-se a implementação computacional, além dos programas de pré e pós-processamentos desenvolvidos neste trabalho.

No **capítulo 8** são apresentadas comparações entre os resultados experimentais de vigas de concreto armado com os obtidos pelo modelo computacional.

No **capítulo 9**, são apresentadas comparações entre os resultados experimentais de lajes de concreto protendido, armadas em uma só direção, com os obtidos pelo modelo computacional.

No **capítulo 10**, são apresentadas comparações entre os resultados experimentais de vigas de concreto protendido, pós-tracionadas com aderência, com os obtidos pelo modelo computacional.

No **capítulo 11**, são apresentadas comparações entre os resultados experimentais de vigas de concreto protendido, pré-tracionadas, ou pós-tracionadas sem aderência, com os obtidos pelo modelo computacional.

O **capítulo 12** apresenta as conclusões deste trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Finalmente, no **anexo A**, são mostrados os processos de suavização e de interpolação das tensões nos elementos de concreto e nas barras de armadura, respectivamente, para visualização dos resultados através do programa de pós-processamento.

2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE UM MATERIAL COM COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO

2.1 INTRODUÇÃO

Através da teoria da elasto-viscoplasticidade, pode-se obter a resposta de uma estrutura para cargas de curta e longa duração. O modelo elasto-viscoplástico da Fig. 2.1 encontra soluções tanto de problemas elastoplásticos, quando a estrutura atinge o estado estacionário, quanto de problemas viscoelásticos, quando se anula a tensão de plastificação.

Desta forma, o modelo computacional desenvolvido permite encontrar a solução destes dois tipos de problemas. Na primeira situação, considerando-se o tempo tendendo ao infinito, estuda-se a resposta de uma estrutura submetida a um carregamento instantâneo. Este estado estável corresponde ao comportamento elastoplástico da estrutura. O segundo tipo de problema consiste na determinação da resposta da estrutura, decorrido um determinado período após a aplicação do carregamento, correspondendo ao seu comportamento viscoelástico.

Para se representar de uma forma mais realista o comportamento viscoelástico de um material, pode-se utilizar o modelo de camadas superpostas. Neste modelo, o material é dividido em um determinado número de camadas, onde cada uma delas possui propriedades mecânicas diferentes, mas sofre a mesma deformação total. Com isto, obtém-se um comportamento composto, capaz de exibir as características reais da resposta viscoelástica do material.

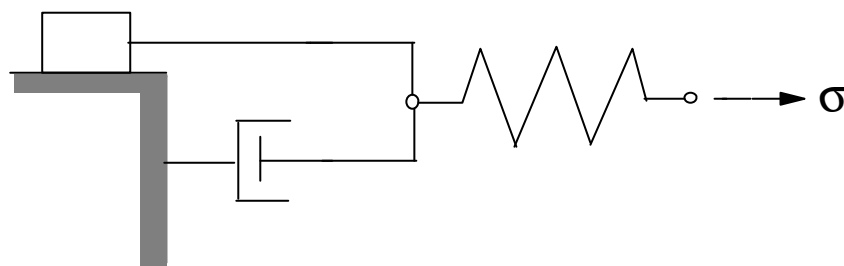


FIGURA 2.1 - Modelo elasto-viscoplástico

2.2 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO CONCRETO

Neste item, será mostrada a formulação matemática, apresentada por Owen e Hinton (1980), para a análise estrutural não-linear, através do método dos elementos finitos, de um material isotrópico, homogêneo, de comportamento elasto-viscoplástico, além da maneira pela qual esta formulação foi empregada para simular tal comportamento do concreto.

2.2.1 Expressões básicas

Em problemas contínuos não-lineares é admitido que a deformação total, ε , seja separada em duas componentes: elástica, ε_e , e viscoplástica, ε_{vp} . Desta forma, a taxa de deformação total pode ser expressa por:

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_e\} + \{\dot{\varepsilon}_{vp}\}, \quad (2.1)$$

onde $(\dot{\quad})$ representa diferenciação com relação ao tempo.

A taxa de tensão total, $\{\dot{\sigma}\}$, é calculada a partir da taxa de deformação elástica, $\{\dot{\varepsilon}_e\}$, de acordo com:

$$\{\dot{\sigma}\} = [D]\{\dot{\varepsilon}_e\}, \quad (2.2)$$

onde $[D]$ é a matriz constitutiva do material, apresentada no capítulo 3.

O comportamento viscoplástico do material é governado por uma superfície de plastificação dada por:

$$F(\{\sigma\}) - F_0(k) = 0, \quad (2.3)$$

onde F_0 é a tensão de plastificação uniaxial, que pode ser função de um parâmetro de endurecimento, k . Supõe-se que o aparecimento do comportamento viscoplástico se dê somente quando $F > F_0$.

Conhecido o estado de tensão, é preciso estabelecer uma lei específica para a determinação da deformação viscoplástica. Owen e Hinton (1980) sugeriram aplicar:

$$\begin{aligned} \{\dot{\varepsilon}_{vp}\} &= \gamma \Phi(F) \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}}, \text{ para } F > F_0 \\ \{\dot{\varepsilon}_{vp}\} &= \{0\}, \text{ para } F \leq F_0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

na qual:

- $\gamma = 1 / \eta$ é o parâmetro de fluidez;
- $Q = Q(\{\sigma\})$ é a função potencial plástico;
- $\Phi(F) = F - F_0$, função proposta por Prates Júnior (1992).

Restringindo-se apenas ao caso de plasticidade associada, na qual $F \equiv Q$, a equação (2.4) fica:

$$\{\dot{\varepsilon}_{vp}\} = \gamma \Phi(F) \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \gamma \Phi(F) \{a\}, \quad (2.5)$$

onde $\{a\}$ é o vetor de fluxo plástico, dependente do critério de plastificação utilizado, a ser visto no item 4.2.1.4.

2.2.2 Incremento de deformação viscoplástica

Com a lei para a taxa de deformação viscoplástica, expressa na equação (2.5), pode-se definir um incremento de deformação viscoplástica, $\{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\}$, correspondente a um intervalo de tempo $(\Delta t)_n = (t)_{n+1} - (t)_n$, usando um esquema de integração no tempo explícito, uma vez que o incremento de deformação viscoplástica fica completamente determinado pelas condições existentes no tempo, $(t)_n$, como:

$$\{\Delta(\varepsilon_{vp})_n\} = (\Delta t)_n \{\dot{\varepsilon}_{vp}\}_n. \quad (2.6)$$

2.2.3 Incremento de tensão

Utilizando-se a forma incremental na equação (2.2) e substituindo-se a equação (2.1) também na forma incremental, obtém-se:

$$\{(\Delta\sigma)_n\} = [(D)_n] \{(\Delta\varepsilon)_n\} = [(D)_n] (\{(\Delta\varepsilon)_n\} - \{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\}). \quad (2.7)$$

O incremento de deformação total pode ser expresso em termos do incremento de deslocamento. Assim:

$$\{(\Delta\varepsilon)_n\} = [B] \{(\Delta u)_n\}, \quad (2.8)$$

onde $[B]$ é a matriz de relações deformações-deslocamentos do elemento de concreto, a ser definida no capítulo 3, e $\{(\Delta u)_n\}$ é o vetor de incremento de deslocamento nas direções dos eixos globais cartesianos x e y .

Substituindo-se as equações (2.6) e (2.8) na equação (2.7), tem-se:

$$\{(\Delta\sigma)_n\} = [(D)_n] ([B] \{(\Delta u)_n\} - \Delta t_n \{\dot{\varepsilon}_{vp}\}_n). \quad (2.9)$$

2.2.4 Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio a serem satisfeitas, a cada instante de tempo, $(t)_n$, são:

$$\int_V [B]^T \{(\sigma)_n\} dV - \{(P)_n\} = 0, \quad (2.10)$$

onde $\{(P)_n\}$ é o vetor de carga nodal equivalente. Durante um incremento de tempo, as equações de equilíbrio a serem satisfeitas são dadas pela forma incremental da equação (2.10), como segue:

$$\int_V [B]^T \{(\Delta\sigma)_n\} dV - \{(\Delta P)_n\} = 0, \quad (2.11)$$

na qual, $\{(\Delta P)_n\}$ representa a variação do vetor de carga nodal equivalente durante um intervalo de tempo. Na maioria dos casos, o incremento de carga é aplicado como passo discreto, considerando-se $\{(\Delta P)_n\} = 0$ para todos os passos de tempo, exceto para o primeiro passo dentro de um incremento de carga.

Manipulando-se as equações (2.7) e (2.11), o incremento de deslocamento, a cada intervalo de tempo, pode ser calculado da forma:

$$\{(\Delta u)_n\} = [(K)_n]^{-1} \{(\Delta F)_n\}$$

e

$$\{(\Delta V)_n\} = \int_V [B]^T [(D)_n] \{\dot{\varepsilon}_{vp}\}_n (\Delta t)_n dV + \{(\Delta P)_n\}, \quad (2.12)$$

onde:

$-[(K)_n]$ é a matriz de rigidez tangencial global, dada por:

$$[(K)_n] = \int_V [B]^T [(D)_n] [B] dV; \quad (2.13)$$

- $\{(\Delta F)_n\}$ é o vetor de incremento de carga nodal equivalente de toda a estrutura, no passo n , chamado de vetor de “pseudo-cargas”.

Aplicando-se a condição inicial, o incremento de deslocamento pode ser calculado para qualquer instante de tempo, que, quando substituído na equação (2.9), resulta no incremento de tensão. Assim:

$$\{(\sigma)_{n+1}\} = \{(\sigma)_n\} + \{(\Delta\sigma)_n\}$$

e

$$\{(u)_{n+1}\} = \{(u)_n\} + \{(\Delta u)_n\}. \quad (2.14)$$

Pelas equações (2.7) e (2.8), calcula-se o incremento de deformação viscoplástica:

$$\{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\} = [B]\{(\Delta u)_n\} - [(D)_n]^{-1}\{(\Delta\sigma)_n\} \quad (2.15)$$

e, então:

$$\{(\varepsilon_{vp})_{n+1}\} = \{(\varepsilon_{vp})_n\} + \{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\}. \quad (2.16)$$

O estado estacionário pode ser obtido, numericamente, examinando-se a variação do deslocamento nodal. A condição de convergência é atingida quando esta quantidade torna-se adequadamente pequena, de acordo com o fator de tolerância adotado no problema. Logo, verifica-se:

$$\frac{\| \{(\Delta u)_n\} \|}{\| \{(u)_n\} \|} \leq \text{TOLER} , \quad (2.17)$$

onde:

- $\| \{(\Delta u)_n\} \|$ é a norma do vetor de incremento de deslocamento;
- $\| \{(u)_n\} \|$ é a norma do vetor de deslocamento;
- TOLER é o fator de tolerância adotado.

2.2.5 Correção do equilíbrio

O cálculo do incremento de tensão está baseado numa forma linearizada da equação de equilíbrio (2.11). Portanto, a tensão total, $\{(\sigma)_{n+1}\}$, obtida pela acumulação de todos os incrementos de tensões, não está estritamente correta e não satisfaz as equações de equilíbrio (2.10). Segundo Strincklin, Haisler e Reismann (1973), há vários procedimentos de solução disponíveis para se efetuarem as correções necessárias. A aproximação mais simples é avaliar $\{(\sigma)_{n+1}\}$, conforme apresentado anteriormente e, então, calcular a força residual, $\{(\Psi)_{n+1}\}$, como:

$$\{(\Psi)_{n+1}\} = \{(P)_{n+1}\} - \int_V [B]^T \{(\sigma)_{n+1}\} dV \neq \{0\}. \quad (2.18)$$

Esta força residual é, então, adicionada ao incremento de força, $\{(\Delta F)_{n+1}\}$, no próximo passo de tempo. Tal técnica evita um processo de iteração maior e, ao mesmo tempo, alcança uma redução do erro cometido.

2.2.6 Modelo de camadas

Para muitos materiais com comportamento complexo, como no caso do concreto, o modelo reológico, descrito anteriormente, pode ser muito simples para representar a história de deformações ao longo do tempo.

Pande, Owen e Zienkiewicz (1977) sugeriram representar tais materiais, dividindo-os em um número conveniente de camadas, as quais se deformam igualmente. Cada camada possui propriedades mecânicas distintas e contribui com uma parcela da tensão total.

No caso mais geral, o modelo reológico é formado por um conjunto de elementos compostos por uma mola (componente elástica), em série com um elemento de atrito (componente plástica) em paralelo com um amortecedor (componente viscosa). Têm-se como parâmetros as espessuras das camadas, e_i , os módulos de elasticidade, E_i , as constantes dos amortecedores, γ_i , e as tensões de plastificação, F_{0i} , a partir das quais começam a atuar os elementos de atrito.

Para simular o comportamento viscoelástico com envelhecimento do concreto, adotou-se o modelo com cinco camadas superpostas, onde os elementos de atrito foram retirados, considerando nulas as tensões de plastificação.

A Fig. 2.2 ilustra, esquematicamente, uma situação em duas dimensões de um modelo de camadas superpostas.

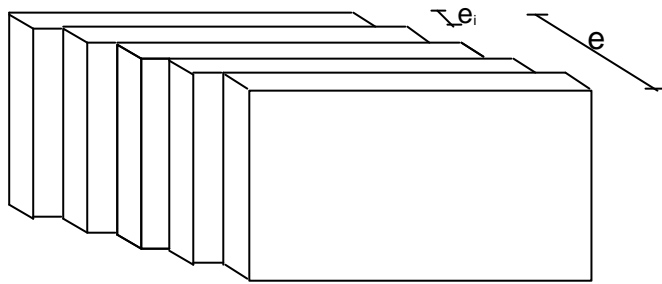


FIGURA 2.2 - Modelo de camadas superpostas

Cada camada pode ter tanto espessura quanto propriedades mecânicas diferentes, resultando em um campo de tensão, $\{\sigma_i\}$, distinto. Contribui, assim, com uma parcela para o campo de tensão total, $\{\sigma\}$, conforme sua espessura, e_i , da forma:

$$\{\sigma\} = \sum_{i=1}^j \{\sigma_i\} e_i, \quad (2.19)$$

onde j é o número de camadas do modelo e:

$$\sum_{i=1}^j e_i = 1. \quad (2.20)$$

A equação de equilíbrio (2.10) pode ser reescrita como:

$$\int_V [B]^T \sum_{i=1}^j \{(\sigma_i)_n\} e_i dV - \{(P)_n\} = 0, \quad (2.21)$$

A matriz de rigidez do elemento será a soma das contribuições de cada camada, ou seja:

$$[(K)_n] = \sum_{i=1}^j \int_V [B]^T [(D_i)_n] [B] dV, \quad (2.22)$$

onde $[(D_i)_n]$ é a matriz constitutiva de cada camada, calculada em função das suas propriedades.

O processo de solução é idêntico ao apresentado anteriormente, com o campo de deformação elástica, $\{\epsilon_{ei}\}$, e viscoplástica, $\{\epsilon_{vpi}\}$, além do campo de tensão, sendo avaliados para cada camada. É importante ressaltar que, embora tenham propriedades mecânicas diferentes, a deformação total é a mesma para todas as camadas.

2.3 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO AÇO

No item anterior, foi apresentado um modelo para a análise de um material homogêneo com comportamento elasto-viscoplástico. Tal modelo seria adequado para o estudo de peças de concreto simples.

Neste item, será apresentada a formulação implementada para incorporar a armadura tanto passiva quanto de protensão no modelo computacional.

Um algoritmo incremental, similar ao do concreto, pode ser desenvolvido para descrever o comportamento elasto-viscoplástico do aço.

2.3.1 Incremento de tensão

Conhecido o incremento de deslocamento nodal, $\{(\Delta u)_n\}$, para o passo n de tempo, o incremento de tensão axial em um ponto de uma barra de aço, $(\Delta \sigma_s)_n$, é dada por:

$$(\Delta \sigma_s)_n = E_s (\Delta \epsilon_e)_n = E_s [(\Delta \epsilon_s)_n - (\Delta \epsilon_{svp})_n], \quad (2.23)$$

onde:

- E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;
- $(\Delta \epsilon_e)_n$ é o incremento de deformação elástica do aço;
- $(\Delta \epsilon_s)_n$ é o incremento de deformação total do aço;
- $(\Delta \epsilon_{svp})_n$ é o incremento de deformação viscoplástica do aço.

O incremento de deformação total pode ser calculado como:

$$(\Delta \epsilon_s)_n = \langle B_s \rangle \{(\Delta u)_n\}, \quad (2.24)$$

em que $\langle B_s \rangle$ é o vetor das relações deslocamentos-deformações da barra de armadura, a ser definido no capítulo 3.

Usando-se um esquema de integração no tempo explícito, conforme o item 2.2, o incremento de deformação viscoplástica para o aço é:

$$(\Delta \epsilon_{svp})_n = (\Delta t)_n \{(\dot{\epsilon}_{svp})_n\}, \quad (2.25)$$

sendo a taxa de deformação viscoplástica, $\{(\dot{\epsilon}_{svp})_n\}$, dada no item 2.3.3.

Substituindo-se as equações (2.24) e (2.25) na expressão (2.23), tem-se:

$$(\Delta\sigma_s)_n = E_s [\langle B_s \rangle \{ (\Delta u)_n \} - (\Delta t)_n \{ (\dot{\epsilon}_{svp})_n \}]. \quad (2.26)$$

A tensão no próximo passo $n+1$, $(\sigma_s)_{n+1}$, fica:

$$(\sigma_s)_{n+1} = (\sigma_s)_n + (\Delta\sigma_s)_n. \quad (2.27)$$

2.3.2 Equações de equilíbrio

A equação (2.18), correspondente à força residual, considerando a presença da armadura, resulta:

$$\{(\Psi)_{n+1}\} = \{(P)_{n+1}\} - \int_V [B]^T \{(\sigma)_{n+1}\} dV - \int_s \{B_s\} (\sigma_s)_{n+1} A_s ds. \quad (2.28)$$

O vetor de “pseudo-carga” da equação (2.12) terá um acréscimo, $\{(\Delta F_s)_n\}$, de:

$$\{(\Delta F_s)_n\} = \int_s \{B_s\} E_s A_s \{(\dot{\epsilon}_{svp})_n\} (\Delta t)_n ds, \quad (2.29)$$

onde s é a coordenada que descreve o eixo da barra de armadura.

2.3.3 Taxa de deformação viscoplástica

A taxa de deformação viscoplástica pode ser calculada como:

$$(\dot{\epsilon}_{svp})_n = \gamma_s (\sigma_s - \sigma_y), \quad (2.30)$$

onde σ_y é a tensão de plastificação inicial e γ_s é o coeficiente de fluidez do aço. Na fase elastoplástica, o coeficiente de fluidez é tomado como sendo 1×10^{-5} .

2.3.4 Modelo de camadas

Na etapa viscoelástica, admite-se que o coeficiente de fluidez é nulo para as barras de armadura passiva. Já para a armadura de protensão, faz-se uso, de forma análoga à empregada para o concreto, de um modelo de camadas para a representação do comportamento viscoelástico do aço.

Assim como ocorre no concreto, cada camada do modelo implementado para o aço pode ter propriedades mecânicas diferentes e contribui com uma parcela de tensão. Todas as camadas sofrem a mesma deformação total. A tensão total obtida é a soma de todas as contribuições das diferentes camadas.

Neste modelo, têm-se como variáveis, os módulos de elasticidade, E_{si} , e os coeficientes de fluidez γ_{si} , para cada camada.

O vetor de forças residuais pode ser reescrito como:

$$\{(\Psi)_{n+1}\} = \{(P)_{n+1}\} - \int_V [B]^T \{(\sigma)_{n+1}\} dV - \int_s \{B_s\} \sum_{i=1}^j (\sigma_{si})_{n+1} A_s ds, \quad (2.31)$$

onde j é o número de camadas.

Já a parcela, correspondente à presença da armadura, no vetor de “pseudo-carga” é dada por:

$$\{(\Delta F_s)_n\} = \sum_{i=1}^j \int_S \{B_s\} E_s A_s \{(\dot{\epsilon}_{svpi})_n\} (\Delta t)_n ds, \quad (2.32)$$

onde:

$$(\Delta \sigma_{si})_n = E_{si} [\langle B_s \rangle \{(\Delta u)_n\} - (\Delta t)_n \{(\dot{\epsilon}_{svpi})_n\}]; \quad (2.33)$$

$$\{\sigma_{si}\}_n = \sum_{i=1}^j \{(\Delta \sigma_{si})_n\}; \quad (2.34)$$

$$\{\sigma_s\}_n = \sum_{i=1}^j \{\sigma_{si}\}_n \quad (2.35)$$

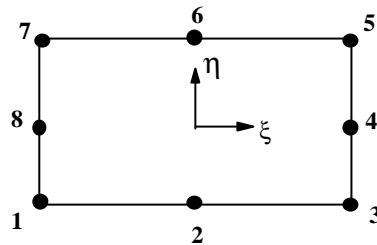
e

$$(\dot{\epsilon}_{svpi})_n = \gamma_{si} (\sigma_{si} - \sigma_y)_n. \quad (2.36)$$

3 MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS EMPREGADOS PARA O CONCRETO E PARA A ARMADURA

3.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO

Para a modelagem do concreto, utilizou-se, neste trabalho, o elemento finito isoparamétrico quadrangular, de oito nós, da família Serendipity, sugerido por Owen e Hinton (1980). Este elemento finito, ilustrado na Fig. 3.1, tem dois graus de liberdade em cada nó, correspondentes às translações na direção dos eixos x-y, sistema global de coordenadas. Seu campo de deslocamento varia de forma quadrática e seu campo de deformação é linear.



elemento Serendipity de 8 nós

FIGURA 3.1 - Elemento isoparamétrico quadrangular

A numeração dos nós, mostrada na Fig. 3.1, é iniciada no canto inferior esquerdo e percorre o elemento de forma anti-horária.

As funções de interpolação (ou de forma), N_i , em função das coordenadas normalizadas, (ξ, η) e da numeração dos nós, i , do elemento, são:

- para os nós de canto:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0), \quad i = 1, 3, 5, 7. \quad (3.1)$$

- para os nós de meio de lado:

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta_0)(1 - \xi^2), \quad i = 2, 4, 6, 8. \quad (3.2)$$

onde $\xi_0 = \xi \xi_i$, $\eta_0 = \eta \eta_i$ e (ξ_i, η_i) são as coordenadas do nó em questão.

Sendo elementos isoparamétricos, as coordenadas cartesianas, (x, y) , de um ponto no interior deste elemento podem ser representadas por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}, \quad (3.3)$$

onde (x_i, y_i) é o par de coordenadas cartesianas de um nó i do elemento em questão e n é o número de nós do elemento.

A matriz de rigidez, $[K_c]$, para os elementos de concreto pode ser calculada por:

$$[K_c] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (3.4)$$

e pode ser obtida, numericamente, através da expressão:

$$[K_c] = \sum_{i=1}^{ng} \sum_{j=1}^{ng} [B_{ij}]^T [D] [B_{ij}] w_i w_j e_{ij} |J|, \quad (3.5)$$

onde:

- ng é o número de pontos de integração em cada direção do elemento;
- $[B_{ij}]$ é a matriz de relações deformações-deslocamentos, calculada no ponto de integração com coordenadas naturais, (ξ_{ij}, η_{ij}) , dada por:

$$[B_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

onde $\frac{\partial N_i}{\partial x, y} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x, y} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x, y}$ e os termos $\frac{\partial \eta}{\partial x, y}$ e $\frac{\partial \xi}{\partial x, y}$ podem ser obtidos através da inversa da matriz Jacobiana do elemento:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}; \quad (3.7)$$

- $[D]$ é a matriz constitutiva elástica para estado plano de tensão:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

onde:

- E é o módulo de elasticidade longitudinal e ν é o coeficiente de Poisson;
- w_i e w_j são os fatores de peso;
- e_{ij} é a espessura do elemento;
- $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana do elemento.

As coordenadas naturais e os fatores de peso dos pontos de integração encontram-se em Owen e Hinton (1977).

3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

Para a representação da armadura, utilizou-se o modelo incorporado, Elwi e Hrudey (1989), onde se supõe que esta resiste apenas a esforços axiais e que há compatibilidade de deslocamentos entre seus pontos e os pontos de concreto localizados na mesma posição. Desta forma, a matriz de rigidez da armadura tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto e a matriz de rigidez total é a soma das duas. Permite-se, com este modelo, uma disposição arbitrária das barras de aço no interior dos elementos de concreto, sem a geração de novas incógnitas no problema. Podem ocorrer várias barras de aço dentro de um mesmo elemento finito de concreto. Admite-se, também, aderência perfeita entre o concreto e o aço.

Apresenta-se, em detalhes, o procedimento para o cálculo da matriz de rigidez da armadura, correspondente aos diversos elementos de concreto. Descrevem-se, inclusive, os passos para a determinação automática dos segmentos de barras de armadura contidos em cada elemento finito de concreto.

Este modelo foi implementado e testado em diversos trabalhos, tais como em Campos Filho (1987), Prates Júnior (1992), Claire (1994), Dantas (2000), entre outros.

3.2.1 Modelo incorporado

No modelo incorporado, admite-se que a armadura resiste apenas a tensões axiais na direção da barra e que os deslocamentos de um ponto genérico da barra são iguais aos do elemento de concreto localizado na mesma posição. Desta forma, as barras de aço contribuem para a rigidez apenas no sentido longitudinal e podem ser, arbitrariamente, dispostas dentro do elemento de concreto, sem a introdução de novas incógnitas no problema.

Os deslocamentos ao longo da barra de armadura são obtidos a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto correspondentes. Logo, a matriz de rigidez da armadura tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto e a matriz de rigidez total é a soma das duas. A expressão final da matriz de rigidez do elemento resulta em:

$$[K] = [K_c] + \sum_{i=1}^{nb} [K_s]_i, \quad (3.9)$$

onde nb denota o número de segmentos de barra de armadura no interior do elemento de concreto. A matriz de rigidez para cada barra de armadura é expressa por:

$$[K_s] = E_s A_s \int_s \{B_s\} \langle B_s \rangle ds, \quad (3.10)$$

onde:

- E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;
- A_s é a área da seção transversal da barra de armadura;
- $\{B_s\}$ é o vetor das relações deformações-deslocamentos para a armadura.

As barras de armadura são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos, permitindo-se modelar barras retas e curvas. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que, para barras curvas, são necessários três pontos.

3.2.2 Formulação geométrica

Neste item, é apresentada a formulação para se incorporar barras de aço ao elemento de concreto. A posição das barras é dada em coordenadas globais cartesianas, independentemente da malha de elementos finitos. Durante o processo de determinação da matriz de rigidez da armadura, necessita-se da utilização das suas coordenadas naturais locais, como será visto mais adiante.

O elemento de concreto, mostrado na Fig. 3.2, é descrito usando-se as suas coordenadas globais (x, y). As coordenadas naturais locais do elemento são (ξ, η). Seguindo o procedimento usual para o mapeamento isoparamétrico, as coordenadas globais de um ponto, localizado no interior de um elemento, são expressas em termos das funções de interpolação, N_i , conforme:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n N_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^n N_i y_i \end{aligned} \quad (3.11)$$

Os elementos infinitesimais das coordenadas globais são expressos por:

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}, \quad (3.12)$$

onde $[J]$ é a matriz Jacobiana mostrada no item 3.1.

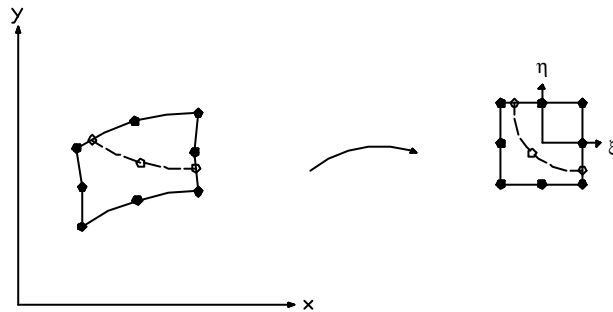


FIGURA 3.2 - Barra de armadura no interior de um elemento de concreto

Uma importante vantagem desta formulação é que a localização e geometria das barras independem da malha de elementos finitos. A armadura deve ser especificada por um conjunto de pontos nodais. Para se garantir uma continuidade interelementar adequada, é necessária a colocação de nós nos elementos de barra, onde a armadura atravessa o contorno do elemento de concreto. As coordenadas dos nós das barras de aço, entre os pontos de definição da mesma, são obtidas por interpolação. Desta maneira, nós adicionais são criados dentro dos elementos finitos, onde há presença de armadura. Tomando-se $\{x_j\}$ e $\{y_j\}$ como vetores que contêm as coordenadas globais dos nós da barra, as coordenadas de qualquer outro ponto ao longo desta barra podem ser determinadas por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_j & 0 \\ 0 & H_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix}, \quad (3.13)$$

As funções de interpolação unidimensionais, H_j , são expressas em termos de uma coordenada normalizada, χ .

Os vários termos da rigidez, associada à armadura, requerem integrações sobre a mesma. Para tanto, necessita-se de um elemento diferencial de comprimento ds , disposto ao longo da armadura, conforme a equação (3.13). A orientação da tangente à barra, ilustrada na Fig. 3.3, é dada pelo ângulo β , onde:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} \\ \text{sen } \beta &= \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\chi} \frac{d\chi}{ds}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Sendo $\cos^2 \beta + \text{sen}^2 \beta = 1$, segue que:

$$\frac{ds}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\chi}\right)^2}, \quad (3.15)$$

na qual:

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} \frac{dH_j}{d\chi} & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\chi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}.\quad (3.16)$$

Logo:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{dx/d\chi}{ds/d\chi} \\ \text{sen } \beta &= \frac{dy/d\chi}{ds/d\chi}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

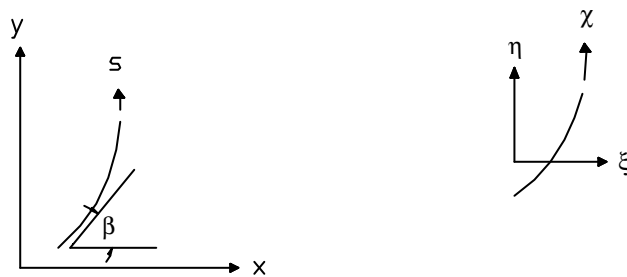


FIGURA 3.3 - Coordenadas ao longo do eixo de armadura

Deste modo, os co-senos diretores da reta tangente, em qualquer ponto ao longo da armadura, assim como o fator de mapeamento isoparamétrico, $ds/d\chi$, podem ser obtidos pelas expressões apresentadas acima.

Um elemento diferencial de volume, dV_s , da barra de aço, pode ser expresso em função do comprimento diferencial, ds , e da área da seção transversal da barra. Resulta que:

$$dV_s = A_s ds \quad (3.18)$$

Usando-se o fator de mapeamento descrito na expressão (3.15), integrais, envolvendo elementos de volume ao longo da armadura, podem ser escritas, em função da coordenada normalizada, χ , como:

$$\int_{V_s} C dV_s = \int_{\chi} C A_s \frac{ds}{d\chi} d\chi, \quad (3.19)$$

na qual C é uma função de posição ao longo da barra de armadura.

3.2.3 Segmentos de armadura localizados no interior de um elemento de concreto

As barras de armadura são posicionadas pelas coordenadas globais (x,y) de seus pontos de extremidade.

Para a obtenção da matriz de rigidez total (concreto-aço) de um determinado elemento, precisa-se saber quais barras interceptam este elemento, atribuindo-lhe uma rigidez adicional. De forma análoga, as forças internas, associadas à armadura, são integradas àquelas do elemento de concreto para a obtenção do vetor de forças internas totais do elemento.

O modelo computacional, mostrado neste trabalho, calcula, automaticamente, os segmentos de barras de armadura que ficam no interior do elemento de concreto.

Primeiramente, transformam-se as coordenadas globais, $P_j(x,y)$, dos pontos que definem as extremidades da barra de armadura, para coordenadas naturais locais, $P_j(\xi,\eta)$, dos mesmos. A relação entre estas coordenadas, para elementos isoparamétricos, é dada por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}, \quad (3.20)$$

onde:

- (x, y) são as coordenadas globais de um ponto qualquer;
- (x_i, y_i) são as coordenadas globais dos nós do elemento de concreto;
- $N_j(\xi, \eta)$ são as funções de forma do elemento de concreto.

A forma explícita, para a relação inversa da equação (3.20), em geral, não é facilmente encontrada. Entretanto, o mapeamento inverso pode ser feito, numericamente, através do algoritmo de Newton-Raphson, como sugerem Elwi e Hradey (1989). Deste modo, a determinação aproximada das coordenadas (ξ_p, η_p) está baseada no fato destas coordenadas serem raízes do seguinte sistema de equações:

$$\{f(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}. \quad (3.21)$$

Usando-se o método de Newton-Raphson, tem-se, após $k+1$ iterações:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^k + \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{k+1}, \quad (3.22)$$

onde:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = [J^k]^{-1} \left[\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_p - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i^k & 0 \\ 0 & N_i^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \right], \quad (3.23)$$

sendo, na iteração k :

- $[J^k] = [J^k(\xi, \eta)]$, a matriz Jacobiana;
- $\langle N_i^k \rangle = \langle N_i^k(\xi, \eta) \rangle$, as funções de forma do elemento de concreto.

Determinadas as coordenadas naturais dos pontos de definição da geometria da barra, referenciados ao sistema natural do elemento em análise, parte-se para uma segunda etapa, onde se define a curva que passa por estes pontos, conforme a Fig. 3.4.

A segunda etapa consiste em se determinar as coordenadas naturais da intersecção da reta, que contém a face do elemento, com a barra de armadura. Os lados do elemento de concreto são definidos, fixando-se uma das coordenadas naturais, valendo -1 ou 1 . Portanto, cada lado é definido por uma coordenada fixa e a outra podendo ter valores entre -1 e 1 .

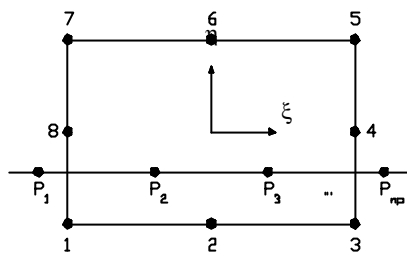


FIGURA 3.4 - Curva de definição da barra de aço

Segundo Zienkiewicz (1986), têm-se:

$$\xi = \sum_{i=1}^{np} f_i(\eta) \xi_i$$

$$\eta = \sum_{i=1}^{np} g_i(\xi) \eta_i, \quad (3.24)$$

onde, para os np pontos da barra de armadura, calculam-se as funções:

$$g_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)}$$

$$f_i(\eta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\eta - \eta_j)}{(\eta_i - \eta_j)}. \quad (3.25)$$

Na terceira etapa, verifica-se a existência de intersecção da curva P_1, P_2, \dots, P_n com cada um dos quatro lados do elemento de concreto. Para tal, fixa-se a coordenada $\xi = \pm 1$ do elemento e calcula-se a coordenada η da intersecção lado do elemento-curva da barra. Caso $-1 \leq \eta \leq 1$, diz-se que a barra intercepta este lado do elemento. Define-se, então, um elemento unidimensional, representativo da parte de armadura, situado no interior deste elemento.

A quarta etapa consiste na verificação do trecho de armadura, efetivamente, contido no elemento de concreto. Destacam-se os seguintes casos possíveis, mostrados na Fig. 3.5:

- a) Um dos nós, que define uma das extremidades da barra de armadura, encontra-se localizado dentro do elemento de concreto. Isto se evidencia quando as coordenadas naturais de P_1 ou P_{np} , em módulo, são menores que 1. Outra situação pode ocorrer, quando os dois

nós estão fora do elemento, um de cada lado, e houver intersecção. Obtém-se, então, o comprimento real do segmento de armadura, contido no interior do elemento de concreto.

b) Os dois nós, que definem a geometria da barra de armadura, encontram-se localizados no interior do elemento de concreto. Toma-se, então, para as coordenadas naturais dos pontos de intersecção, as mesmas coordenadas naturais dos pontos P_L e P_{rp} , já obtidas, anteriormente.

c) Nenhum dos nós de definição da barra de armadura está situado dentro do elemento de concreto. Neste caso, considera-se que a barra não está contida em tal elemento. Situação idêntica ocorre, quando apenas um dos nós de extremidade da barra intercepta um lado do elemento.

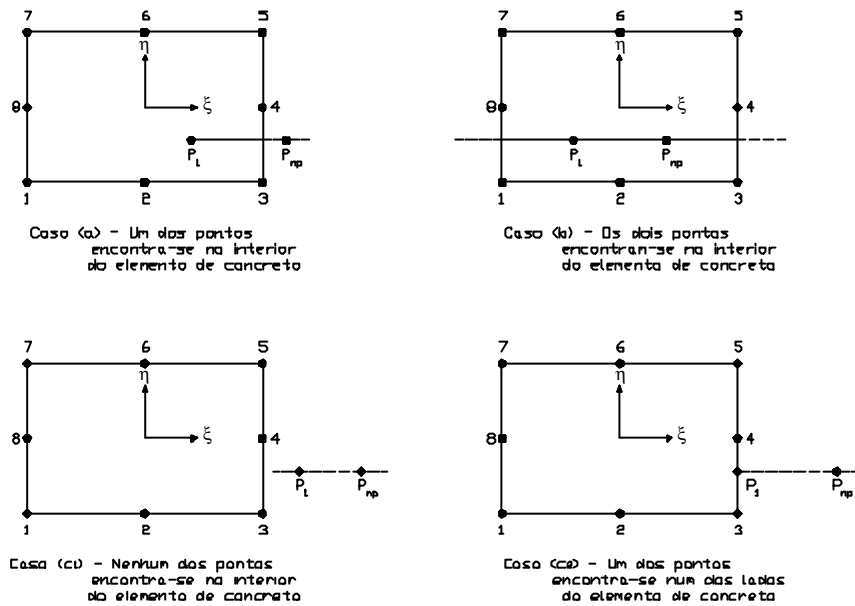


FIGURA 3.5 - Situações possíveis de se encontrar uma barra de armadura

Na quinta etapa, ocorre a criação, se necessária, de até dois nós intermediários no segmento de armadura, sobre o eixo da coordenada normalizada, χ , conforme ilustra a Fig. 3.6. Determinam-se, posteriormente, as coordenadas cartesianas globais e naturais locais para os nós extremos, bem como, para os nós extremos do segmento.

Por último, na sexta etapa, verifica-se se o segmento de armadura coincide com alguma aresta em comum entre dois ou mais elementos de concreto. Neste caso, divide-se a rigidez associada à barra de armadura entre tais elementos. Esta situação pode ser vista na Fig. 3.7.

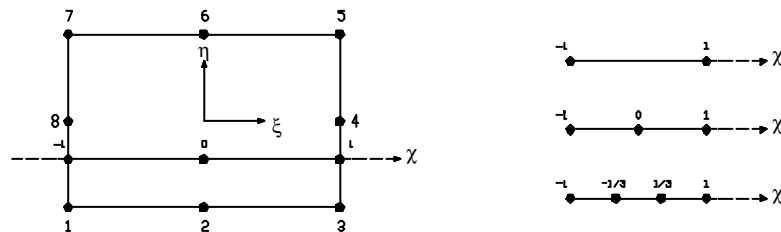


FIGURA 3.6 - Segmento de armadura dentro do elemento de concreto

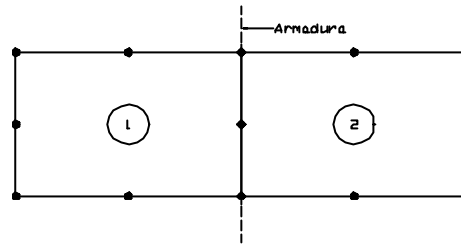


FIGURA 3.7 - Barra de armadura localizada numa aresta em comum de dois elementos de concreto

3.2.4 Funções de forma para os elementos de armadura

Polinômios de Lagrange podem ser usados para representar as funções de interpolação dos elementos de armadura, segundo Zienkiewicz (1986), que são expressas por:

$$H^m(\chi) = \prod_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(\chi - \chi_i)}{(\chi_k - \chi_i)}. \quad (3.26)$$

Esta função é um polinômio de grau $m=n-1$, em termos de χ , tendo valor unitário em $\chi=\chi_k$ e nulo para $\chi=\chi_1, \dots, \chi_{k-1}, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n$, onde n é o número de nós do elemento de armadura.

Deste modo, para elementos de 3 nós, empregados neste trabalho:

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{\chi^2 - \chi}{2} \\ H_2(\chi) &= 1 - \chi^2 \\ H_3(\chi) &= \frac{\chi^2 + \chi}{2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.2.5 Matriz de rigidez para a armadura

O campo de deformações, dentro de um elemento de armadura, pode ser definido de diversas maneiras. Segundo Zienkiewicz, Philips e Owen (1974), a deformação ao longo da barra de aço é igual à deformação normal, no elemento de concreto, na direção tangente à barra. Sendo assim, considerando-se aderência perfeita entre o concreto e o aço, a expressão para a deformação, em uma forma incremental, conforme proposto por Elwi e Hruday (1989), fica:

$$\Delta \epsilon_s = \Delta \epsilon_x \cos^2 \beta + \Delta \epsilon_y \sin^2 \beta + \Delta \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta. \quad (3.28)$$

Os incrementos de deformações $\Delta \epsilon_x$, $\Delta \epsilon_y$, $\Delta \gamma_{xy}$ são obtidos diretamente da relação entre o vetor de relações deformações-deslocamentos, $\{B_s\}$, determinado por Elwi e Hruday (1989), e o campo de incremento de deslocamento, $\{\Delta u\}$, do elemento de concreto. Da equação (3.28), segue que a deformação incremental na armadura pode ser expressa como:

$$\Delta \epsilon_s = \langle B_s \rangle \{\Delta u\}, \quad (3.29)$$

onde:

$$\{B_s\} = \begin{Bmatrix} \cos^2 \beta \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} + \cos \beta \sin \beta \left\{ \frac{dN}{dy} \right\} \\ \cos \beta \sin \beta \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} + \sin^2 \beta \left\{ \frac{dN}{dy} \right\} \end{Bmatrix}. \quad (3.30)$$

As derivadas das funções de forma, N_i , em relação às coordenada x e y , são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{dx} \\ \frac{dN_i}{dy} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{d\xi} \\ \frac{dN_i}{d\eta} \end{Bmatrix}. \quad (3.31)$$

Aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais, determina-se a variação de trabalho interno para a armadura:

$$\delta\Delta W = \int_{V_s} (\sigma_s + \Delta\sigma_s) \delta\Delta\varepsilon_s dV_s, \quad (3.32)$$

na qual σ_s é a tensão normal na armadura e V_s é o seu volume.

A forma incremental da relação constitutiva para a armadura pode ser escrita como:

$$\Delta\sigma_s = E_s \Delta\varepsilon_s, \quad (3.33)$$

onde E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço. Assim:

$$\delta\Delta W = \int_s \delta\Delta\varepsilon_s \sigma_s A_s ds + \int_s \delta\Delta\varepsilon_s E_s \Delta\varepsilon_s A_s ds, \quad (3.34)$$

ou:

$$\delta\Delta W = \langle \delta\Delta u \rangle ([K_s] \{ \Delta u \} + \{ Q_s \}), \quad (3.35)$$

onde o vetor de força nodal equivalente $\{Q_s\}$ é calculado por:

$$\{Q_s\} = \int_{\chi} \{B_s\} \sigma_s \frac{ds}{d\chi} A_s d\chi \quad (3.36)$$

e a matriz de rigidez para a armadura, $[K_s]$:

$$[K_s] = \int_{\chi} \{B_s\} E_s \langle B_s \rangle \frac{ds}{d\chi} A_s d\chi, \quad (3.37)$$

a qual pode ser representada, numericamente, pela expressão:

$$[K_s] = \sum_{i=1}^{ng} \{B_{si}\} E_s \langle B_{si} \rangle \frac{ds}{d\chi} A_s w_i, \quad (3.38)$$

onde:

- w_i é o fator de peso
- ng é o número de pontos de integração na direção axial da barra de armadura.

4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

4.1 INTRODUÇÃO

O material concreto estrutural comporta-se de uma maneira extremamente complexa, apresentando uma resposta altamente não-linear.

A Fig. 4.1 ilustra as três fases típicas pelas quais passa um elemento de concreto estrutural, quando submetido a uma solicitação de flexão: a primeira, elástica-linear, com o concreto não-fissurado; a segunda, onde aparecem as fissuras e a terceira, plástica.

A fissuração do concreto, a plastificação do concreto e do aço, a diferença entre as resistências à tração e compressão do concreto, a não-linearidade da relação tensão-deformação e os fenômenos relacionados ao tempo como, fluência e retração do concreto e relaxação do aço protendido, entre outros fatores, como o engrenamento dos agregados e o efeito de pino das barras de aço, são as causas desta não-linearidade.

Utilizando-se o método dos elementos finitos, uma ferramenta consagrada para solução numérica de uma variedade de problemas encontrados na engenharia, pode-se realizar uma análise mais racional destes fenômenos.

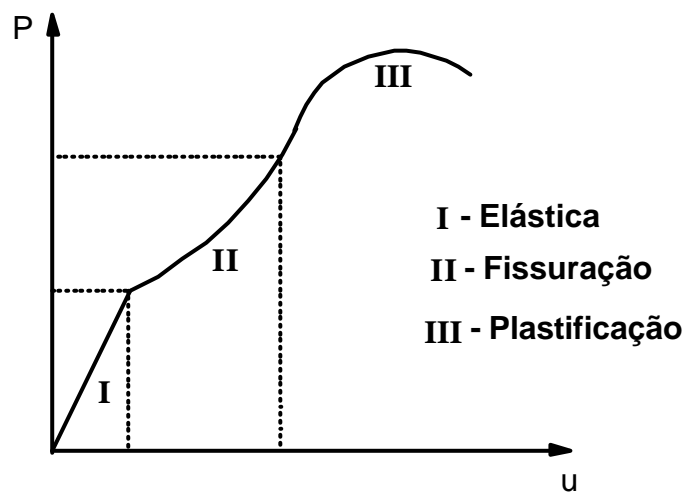


FIGURA 4.1 - Diagrama carga-deslocamento típico de um elemento de concreto estrutural

4.2 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO

Provavelmente, a principal característica do comportamento do concreto é a sua baixa resistência à tração, quando comparada a sua resistência à compressão. Por tal motivo, utilizaram-se dois modelos distintos para descrever este comportamento. Para o concreto comprimido, um modelo elastoplástico com endurecimento foi empregado. Já para o concreto sob tração, admite-se um comportamento elástico linear até a ruptura. A partir de então, considera-se a contribuição do concreto entre fissuras na rigidez total da estrutura.

A seguir, descrevem-se os modelos constitutivos empregados na representação do concreto.

4.2.1 Modelo para o concreto comprimido

O modelo elastoplástico, utilizado para descrever o comportamento do concreto comprimido, compõe-se por um critério de ruptura, por um critério de plastificação e uma regra de endurecimento.

Admite-se, para o concreto não-fissurado, um comportamento isotrópico. Sua superfície de ruptura, f , pode ser expressa, em função das tensões principais, σ_1 , σ_2 e σ_3 , por:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (4.1)$$

Convenientemente, substituem-se as tensões principais pelo primeiro invariante do tensor de tensões, I_1 , pelos segundo e terceiro invariantes do tensor desviador de tensões, J_2 e J_3 , respectivamente. Desta forma, a expressão (4.1) fica:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0, \quad (4.2)$$

onde, segundo Chen e Han (1988):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad (4.3)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_m)^2 + (\sigma_y - \sigma_m)^2 + (\sigma_z - \sigma_m)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2; \quad (4.4)$$

$$J_3 = (\sigma_x - \sigma_m)[(\sigma_y - \sigma_m)(\sigma_z - \sigma_m) - \tau_{xz}^2] + \tau_{xy}[\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_m) - \tau_{yz}\tau_{xz}] + \tau_{xz}[\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_m)\tau_{xz}]; \quad (4.5)$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} \quad (4.6)$$

e σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} são as tensões totais e σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais. Neste trabalho, tratando-se de um problema de estado plano de tensões, tem-se $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Esta formulação é apresentada por Owen e Hinton (1980) e sua principal vantagem é permitir fazer um código computacional da função de ruptura de uma forma geral, necessitando apenas a especificação de três constantes para qualquer critério individual.

As tensões desviadoras principais, s_1 , s_2 e s_3 , são dadas pelas raízes da equação cúbica:

$$s^3 - J_2 s - J_3 = 0, \quad (4.7)$$

onde se substitui $s = r \cdot \text{sen}\theta$:

$$\text{sen}^3 \theta - \frac{J_2}{r^2} \text{sen} \theta - \frac{J_3}{r^3} = 0. \quad (4.8)$$

Fazendo-se uso da identidade trigonométrica:

$$\text{sen}^3 \theta - \frac{3}{4} \text{sen} \theta + \frac{1}{4} = 0. \quad (4.9)$$

e comparando-se as equações (4.7) e (4.8), obtêm-se:

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} (J_2)^{1/2}; \quad (4.10)$$

e

$$\operatorname{sen} 3\theta = -\frac{4J_3}{r^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}}. \quad (4.11)$$

A primeira raiz da equação (4.11), com θ determinado por 3θ no intervalo de $\pm\pi/2$, é uma alternativa para o terceiro invariante do tensor desviador de tensões, J_3 . Notando-se a “natureza cíclica” de $\operatorname{sen}(3\theta + 2n\pi)$, têm-se, imediatamente, os três (e apenas três) possíveis valores de $\operatorname{sen}\theta$, os quais definem as três tensões principais. As tensões desviadoras principais são dadas por $s = r \cdot \operatorname{sen}\theta$, onde, substituindo-se os três valores de θ , o valor de r , dado pela equação (4.10) e adicionando-se a componente de tensão principal hidrostática, pode-se determinar as três tensões principais:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2J_2}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}(\theta + 2\pi/3) \\ \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen}(\theta + 4\pi/3) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (4.12)$$

com $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ e $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$.

4.2.1.1 Critério de ruptura

Neste trabalho, utilizou-se o critério de ruptura, proposto por Ottosen (1977), o qual foi adotado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) e é dado por:

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0, \quad (4.13)$$

onde f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto e:

$$\begin{aligned} \lambda &= c_1 \cos[1/3 \arccos(-c_2 \operatorname{sen} 3\theta)], \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta \leq 0 \\ \lambda &= c_1 \cos[\pi/3 - 1/3 \arccos(c_2 \operatorname{sen} 3\theta)], \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta > 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

com $\operatorname{sen} 3\theta$ calculado através da equação (4.11).

Os quatro parâmetros do modelo, α , β , c_1 e c_2 , são determinados, conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), a partir da relação, k , entre a resistência média à compressão uniaxial, f_{cm} , e a resistência média à tração uniaxial, f_{tm} , do concreto, dada por:

$$k = \frac{f_{tm}}{f_{cm}}, \quad (4.15)$$

onde:

$$f_{tm} = 0,14 (f_{cm})^{2/3}, \text{ em kN/cm}^2. \quad (4.16)$$

Assim, os parâmetros do critério de Ottosen são calculados por:

$$\alpha = \frac{1}{9 k^{1,4}};$$

$$\beta = \frac{1}{3,7 k^{1,1}};$$

$$c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}};$$

$$c_2 = 1 - 6,8(k - 0,07)^2. \quad (4.17)$$

O critério de ruptura de Ottosen, se forem adotados $\beta = c_2 = 0$, ou, então, $\alpha = c_2 = 0$, reduz-se aos critérios de Von Mises ou Drucker-Prager, respectivamente.

A Fig. 4.2 representa a forma geral da superfície de ruptura do concreto, no espaço tridimensional de tensões, podendo ser vista por seus meridianos, Fig.4.2.a, e suas seções transversais, Fig. 4.2.b. Para um material isotrópico e com mesmas resistências à tração e compressão, a superfície de ruptura apresenta tríplice simetria com origem em O , tornando-se necessário o estudo de apenas meio setor com $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$. Como o concreto possui resistência à tração muito menor do que à compressão, mas considerando que este é um material isotrópico, continua havendo tal simetria, porém a origem passa a não ser mais em O e o setor a ser estudado agora é de $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$.

Desta forma, a superfície de ruptura do concreto:

- é dependente dos três invariantes de tensão (I_1, J_2, J_3);
- tem uma forma é suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- tem meridianos que são parabólicos e que abrem no sentido negativo do eixo hidrostático;
- possui seções transversais que mudam, de uma forma triangular para circular, com o aumento da pressão hidrostática.

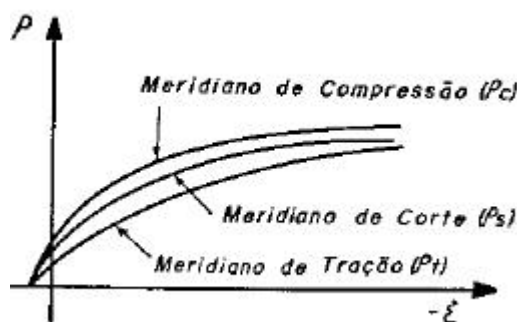


FIGURA 4.2.a - Meridianos da superfície de ruptura

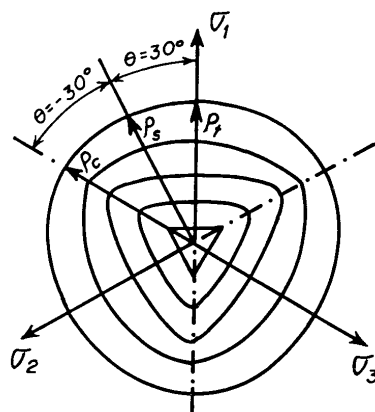


FIGURA 4.2.b - Seções transversais da superfície de ruptura

4.2.1.2 Critério de plastificação

Admite-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha endurecimento isotrópico, mas, por problemas de convergência, não foi possível adotar, para a superfície de plastificação, a mesma forma da superfície de ruptura de Ottosen. Utilizando-se esta superfície, em situação de solitação uniaxial, encontram-se valores elevados de deformações viscoplásticas, nas direções transversais ao eixo longitudinal do elemento de concreto. Optou-se, então, por adotar a superfície gerada pelo critério de Von Mises, o qual, como foi visto anteriormente, é um caso particular do critério de Ottosen.

Desta forma, a expressão geral para a superfície de plastificação ou de carregamento, a partir da superfície gerada pelo critério de Von Mises, é expressa por:

$$F = (3J_2)^{1/2} = \sigma_{ef} \quad (4.18)$$

Considerando nula a tensão de plastificação inicial, o domínio plástico, onde o material possui um comportamento elastoplástico com endurecimento, ocorre para valores de σ_{ef} , dentro do intervalo $0 \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$, conforme ilustrado na Fig. 4.3.

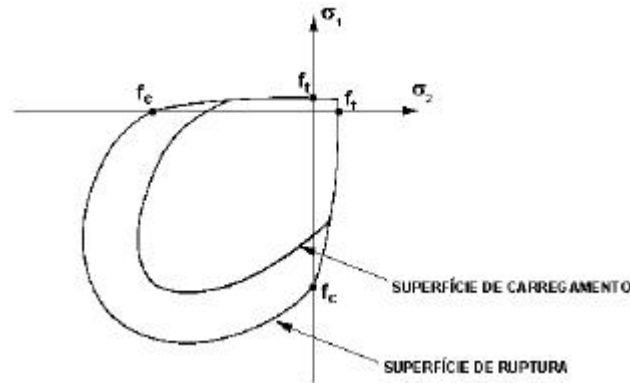


FIGURA 4.3 - Superfícies de ruptura e de carregamento

4.2.1.3 Regra de endurecimento

A regra de endurecimento define a maneira pela qual as superfícies de plastificação se movimentam (superfícies de carregamento), durante a deformação plástica. É determinada pela relação tensão-deformação plástica efetiva, onde, aplicando-se tais conceitos, é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

Neste trabalho, usou-se a curva tensão-deformação, proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), para representar o comportamento do concreto, sob compressão uniaxial, cuja expressão é:

$$\sigma = - \frac{-\frac{E}{f_{cm}} \varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{-0,0022} \right)^2}{1 + \left(\frac{E}{f_{cm}} - 0,0022 - 2 \right) \frac{\varepsilon}{-0,0022}} f_{cm} \quad (4.19)$$

Substituindo-se $\varepsilon = \varepsilon_{elástico} + \varepsilon_{plástico} = \sigma/E + \varepsilon_p$ na equação anterior e isolando-se σ , tem-se uma relação, $\sigma = \sigma(E, f_{cm}, \varepsilon_p)$, dada pela expressão:

$$s = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (4.20)$$

onde:

$$a = (1 - f_{cm}/(E \times 0,0022))^2 / f_{cm};$$

$$b = \varepsilon_p \times (E/f_{cm} - (1 - f_{cm}/(E \times 0,0022))/0,0011);$$

$$c = -\varepsilon_p \times (E - (e_p \times f_{cm})/(0,0022)^2). \quad (4.21)$$

A Fig. 4.4 representa o diagrama tensão-deformação, para o concreto comprimido.

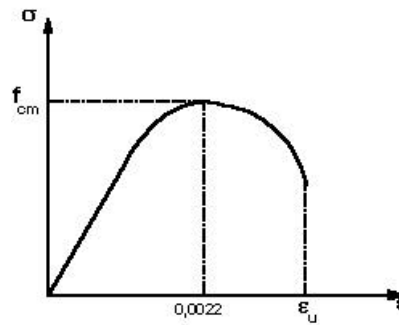


FIGURA 4.4 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido

4.2.1.4 Vetor de fluxo plástico

No modelo implementado, considera-se plasticidade associada, por motivos práticos, já que há poucas evidências experimentais disponíveis para este fato, segundo Owen e Hinton (1980). Desta forma, dentro do domínio plástico, na relação tensão-deformação, o vetor de fluxo plástico é normal à superfície de plastificação. Assim, este vetor, $\{a\}$, definido no capítulo 2, pode ser obtido, em termos da função de plastificação, por:

$$\{a\} = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}}, \quad (4.22)$$

sendo F a condição de plastificação ou as funções de carregamento subsequentes.

Derivando-se a equação (4.11) com relação à θ , obtém-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \left[\frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} - \frac{3J_3}{(J_2)^2} \frac{\partial (J_2)^{1/2}}{\partial \{\sigma\}} \right]. \quad (4.23)$$

Substituindo-se a expressão (4.23) na equação (4.22), pode-se escrever:

$$\{a\} = C_1 \{a_1\} + C_2 \{a_2\} + C_3 \{a_3\}, \quad (4.24)$$

onde:

$$\{a_1\} = \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} = \{1,1,1,0,0,0\};$$

$$\begin{aligned}
\{a_2\} &= \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{s_x, s_y, s_z, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}, 2\tau_{xy}\}; \\
\{a_3\} &= \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} = \left\{ (s_y s_z - \tau_{zy}^2 + \frac{J_2}{3}), (s_x s_z - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3}), \right. \\
&\quad \left. (s_x s_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3}), 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - s_x \tau_{zy}), \right. \\
&\quad \left. 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - s_y \tau_{xz}), 2(\tau_{yz} \tau_{xz} - s_z \tau_{xy}) \right\}; \\
C_1 &= \frac{\partial F}{\partial I_1}; \\
C_2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\tan 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right); \\
C_3 &= \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \tag{4.25}
\end{aligned}$$

nas quais :

s_x, s_y e s_z são as tensões desviadoras e τ_{xy}, τ_{yz} e τ_{xz} são as tensões totais de corte. Para o estado plano de tensão, $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ são nulos.

Substituindo-se a função F, determinada pela equação (4.18), nas expressões acima, encontram-se as componentes do vetor de fluxo plástico.

4.2.2 Modelo para o concreto à tração

O fato de o concreto possuir baixa resistência à tração resulta na sua fissuração, para baixos níveis de tensão, se comparados com as tensões de falha à compressão. O concreto fissurado segue o modelo de fissuras distribuídas. Neste modelo, necessita-se apenas que se atualize a relação tensão-deformação após a ocorrência da fissura, sem modificar-se a topologia da malha de elementos finitos durante a análise, como ocorre em outros modelos.

4.2.2.1 Critério de fissuração

No presente trabalho, o concreto sob tração é modelado como sendo um material elástico com amolecimento (“strain-softening”) e o critério de ruptura de Ottosen foi empregado para se distinguir o comportamento elástico da fratura à tração. Para um ponto, no interior do elemento, previamente não-fissurado, as tensões principais e suas direções são avaliadas. Conforme o critério estabelecido pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), segue-se que:

- se $\sigma_1 \geq f_{tm}/2$, o ponto de integração fissurou;
- se $\sigma_1 < f_{tm}/2$, o ponto de integração esmagou.

A fissura é formada no plano ortogonal a σ_1 . Após isso, considera-se o concreto ortotrópico, sendo desprezado o efeito de Poisson, conforme Hinton (1988), e os eixos materiais locais coincidem com as direções das tensões principais. A direção da fissura é admitida permanecer fixa, sendo isto conhecido como aproximação da fissura fixa. Como se

trata de estado plano de tensão, apenas uma única fissura é permitida, para cada ponto no interior do elemento de concreto. Para um ponto já fissurado, verifica-se a formação de uma segunda fissura, que, por simplicidade, seria ortogonal à primeira fissura. Se ocorrerem duas fissuras, o concreto é suposto não colaborar mais na resistência da estrutura, tendo suas tensões anuladas no ponto em questão.

A direção da fissura é calculada, resolvendo-se um problema de autovetores. Calculam-se os co-senos diretores dos ângulos formados entre o autovalor equivalente à tensão principal máxima, σ_1 e o estado de tensão que originou a fissura.

4.2.2.2 Critério para escolha da curva de amolecimento

Os primeiros estudos, feitos em análise numérica de concreto estrutural, admitiam o concreto como sendo um material elástico-frágil, sob tração. Quando uma fissura ocorria, a tensão normal à fissura era zerada. Esta idéia foi logo abandonada, por levar a dificuldades de convergência dos resultados.

Foi discutido que, devido às forças de aderência, o concreto entre as fissuras suporta um certo nível de tensão de tração. O concreto adere às barras de armadura e contribui ativamente para a rigidez total da estrutura. Este efeito é conhecido como enrijecimento à tração (“tension stiffening”). Pode ser incorporado ao modelo numérico, de duas maneiras:

a) Admitindo-se que a perda da resistência à tração do concreto ocorre gradualmente após a fissura. Isto é equivalente a se considerar o concreto elástico com amolecimento (“strain-softening”) em tração. Contudo, dois principais problemas permanecem insolúveis: o primeiro é que não há nenhuma objetividade em se medir quanta rigidez à tração deveria ser incluída no modelo; é fácil escolher a curva de rigidez à tração, mas muito difícil fazer qualquer prognóstico “a priori”, já o segundo, é que este conceito, se explicado em termos de interação da aderência com a armadura, não poderia ser aplicado a estruturas de concreto simples ou quando o concreto é locado a uma certa distância da armadura;

b) Modificando-se a curva tensão-deformação do concreto, opção adotada neste trabalho.

Hinton (1988) sugeriu o uso do principal conceito da mecânica da fratura: a hipótese da taxa de energia de fratura, G_f , ser uma propriedade do material, assim como a curva tensão-deformação local. Implementou-se o conceito “ $G_f = \text{constante}$ ”, levando a uma importante conclusão de que a lei da curva de amolecimento (“strain-softening”) local depende do comprimento característico, l_c , dependente da malha de elementos finitos.

Na definição de uma curva, para modelar o efeito do amolecimento das deformações, dois aspectos devem ser considerados: a forma da curva adotada e o valor dos parâmetros a serem usados.

Diferentes formas do ramo descendente da curva tensão-deformação têm sido adotadas. Prates Júnior (1992) sugeriu uma forma bi-linear e Hinton (1988), uma exponencial, usada também neste trabalho, conforme a Fig. 4.6.

Admitindo-se que a tensão, através da fissura, é uma função da abertura da fissura, w , a energia de fratura é definida por:

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma(w) dw, \quad (4.26)$$

onde G_f representa a energia necessária para separar as duas superfícies da fissura. Conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993):

$$G_f = 3 \times 10^{-4} (f_{cm})^{0.7}, \quad [f_{cm}] \text{ em kN/cm}^2. \quad (4.27)$$

O modelo de fissuras distribuídas não considera fissuras individuais, então a largura da fissura, w , deve ser distribuída numa deformação de fissura equivalente, ϵ_c , relacionada por um comprimento característico, l_c . Segundo Hinton (1988), esta relação é feita, considerando-se um volume de controle, V , contendo a fissura com uma área, S , Fig. 4.5. Supõe-se que, uma vez que a fissura esteja aberta, todas as tensões inelásticas façam parte da fissura e o resto do volume continua elástico.

A taxa de energia dissipada na fissura é:

$$\dot{\pi} = \int_S \sigma \dot{w} dS. \quad (4.28)$$

Pela hipótese de que o volume de controle fica submetido ao mesmo estado de tensão que a fissura, mas afetado pela deformação equivalente, ϵ_c , a taxa de energia dissipada do volume é:

$$\dot{\pi} = \int_V \sigma \dot{\epsilon}_c dV. \quad (4.29)$$

Se a tensão, a deformação e a abertura da fissura forem tomadas como constantes, dentro do volume considerado, então, equacionando-se a taxa de energia de dissipação da fissura com a mesma taxa no volume de controle, obtém-se a relação entre a abertura e a deformação fictícia da fissura:

$$w = (V/S)\epsilon_c = l_c \epsilon_c. \quad (4.30)$$

Esta relação define o comprimento característico, como a razão entre o volume de controle e a superfície da fissura.

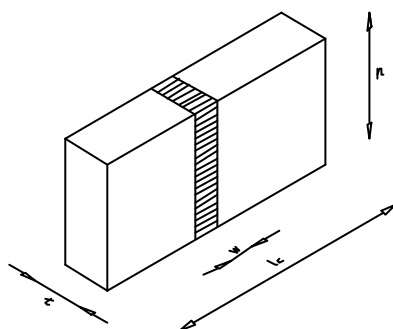


FIGURA 4.5 - Ilustração do comprimento característico em um volume de controle prismático

Neste trabalho, usa-se a curva exponencial, representada pela Fig. 4.6, sugerida por Hinton (1988), para simular o efeito do amolecimento das deformações. Esta curva é dada por:

$$\sigma = E \epsilon_0 (\exp(-(\epsilon - \epsilon_0) / \alpha)), \quad (4.31)$$

onde:

- E é o módulo de elasticidade longitudinal;
- ϵ_0 é a deformação de fissuração;
- α é o parâmetro de amolecimento;
- ϵ é a deformação de tração nominal da zona fissurada.

O parâmetro de amolecimento, α , é determinado pela avaliação da integral (4.26) e pela introdução da relação da abertura da fissura, w , e a deformação fictícia da fissura. Isto leva à

$$\alpha = (G_f - 1/2E \varepsilon_0 l_c) / E \varepsilon_0 l_c > 0. \quad (4.32)$$

No contexto do método dos elementos finitos, o volume de controle para o monitoramento da fissura é o volume associado a um ponto de integração, no interior de um elemento, representado por dV .

Neste trabalho, o comprimento característico para cada ponto de integração é dado por:

$$l_c = (dV)^{1/3}. \quad (4.33)$$

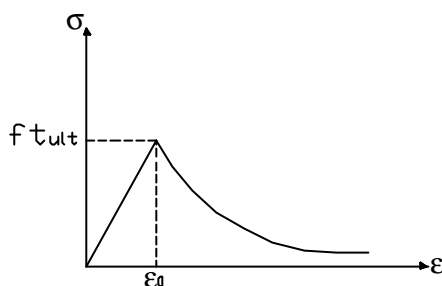


FIGURA 4.6 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado

Deve-se observar que esta definição não leva em conta a direção da fissura ou distorção do elemento, mas pode ser usada como uma aproximação de primeira ordem do comprimento característico real.

Outro aspecto relevante é que esta aproximação para o cálculo do ramo da curva de amolecimento (“strain-softening”) e a curva tensão-deformação é aplicável diretamente ao caso de concreto simples. O clássico efeito de rigidez à tração pela presença da armadura não está sendo considerado.

Assim como a tensão normal ao plano da fissura, a tensão paralela ao plano da fissura também sofre uma modificação. Duas situações possíveis podem acontecer: a deformação nesta direção ser de compressão, onde, para este caso, sugere-se que a tensão correspondente se comporte de acordo com o diagrama de um ensaio uniaxial à compressão, segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), de acordo com a equação (4.19). Por outro lado, se a deformação, na direção analisada, for de tração, uma relação tensão-deformação linear é adotada. O limite superior desta relação é a resistência à tração do concreto. Se este limite for atingido, o concreto é suposto fissurado nas duas direções e as tensões, no ponto, passam a serem nulas. Em ambos os casos, a deformação considerada está descontada da deformação de fissuração, ε_0 .

4.2.2.3 Rigidez transversal do concreto fissurado

Como uma regra geral, as primeiras fissuras que aparecem no concreto sob tração são perpendiculares à direção da mais alta tensão principal de tração do concreto, σ_1 . As direções principais se modificam, por mudanças no carregamento ou por não-linearidades da estrutura, produzindo deslocamentos relativos das faces rugosas da fissura. Isto causa o surgimento de tensões de corte no plano da fissura. O valor destas tensões de corte depende das condições

locais na fissura. O principal mecanismo de transferência de esforços transversais é o engrenamento dos agregados e as principais variáveis envolvidas são o tipo e a granulometria dos mesmos. Além disso, o efeito de pino da armadura que cruza a fissura (dowell effect) tem também importância na transferência de esforços. Neste caso, as principais variáveis envolvidas são o diâmetro das barras, a taxa de armadura e a inclinação das barras em relação ao plano da fissura. Ambos mecanismos são controlados pela abertura da fissura, que, quando aumenta, faz com que se reduza a capacidade de transferência de corte (shear transfer).

Os mecanismos acima mencionados não podem ser incluídos diretamente no modelo de fissuras distribuídas. Nos modelos de fissura fixa, tais mecanismos podem ser aproximados, conforme sugere Cervenka (1985), reduzindo-se o valor do módulo de elasticidade transversal do concreto, G , através de um fator β que varia entre 0 e 1. Desta forma, o novo valor para o módulo de elasticidade transversal, G_c , é dado por:

$$G_c = \beta G . \quad (4.34)$$

Em diversas análises, um valor constante foi atribuído a β , mas o mais realista seria relacioná-lo com a deformação normal à tração do concreto, ϵ_t . Cervenka (1985) apresentou a seguinte fórmula para β , também utilizada por Hinton (1988), a qual foi adotada neste trabalho:

$$\beta = 1 - (\epsilon_t / 0,005)^{k_1} . \quad (4.35)$$

sendo k_1 um parâmetro a ser ajustado, apresentado no capítulo 8.

4.3 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA A ARMADURA

Nas estruturas de concreto estrutural, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços axiais. Deste modo, faz-se necessário apenas um modelo uniaxial para descrever o seu comportamento.

No modelo computacional, implementou-se um diagrama tensão-deformação bi-linear do aço.

Considera-se o aço como um material elastoplástico perfeito. Seu módulo de elasticidade longitudinal, E_s , é uma variável do problema. Para as barras de armadura passiva, frouxas, o material segue um comportamento elástico-linear até atingir o valor da tensão de escoamento do aço, f_y . Já para as barras de armadura ativa, protendidas, o material tem um comportamento também elástico-linear até atingir 90% do valor da sua tensão de ruptura, f_{ptk} , conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). A Fig. 4.7 ilustra os dois diagramas tensão-deformação, adotados para ambos os tipos de aço.

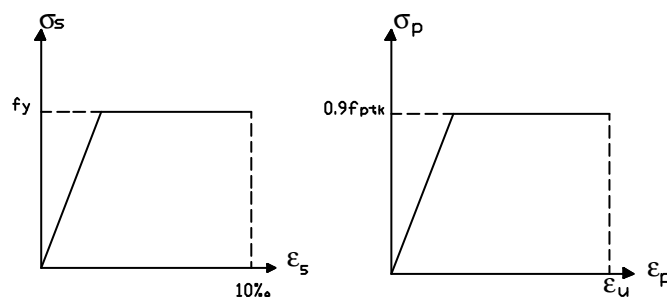


FIGURA 4.7 - Diagramas tensão-deformação para as armaduras passivas e protendidas, respectivamente

5 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS DEPENDENTES DO TEMPO

A consideração de efeitos dependentes do tempo, fluência e retração no concreto e relaxação no aço protendido, é de extrema importância na análise de concreto estrutural. As deformações por fluência e retração, ocorridas no concreto, têm a mesma ordem de grandeza das deformações imediatas, geradas por níveis usuais de tensão. Já a relaxação do aço protendido provoca uma perda significativa de tensão ao longo do tempo. Tais efeitos, portanto, não podem ser desprezados.

Os modelos de fluência e retração foram baseados nos trabalhos de Prates Júnior (1992) e Clure (1994).

5.1 FLUÊNCIA E RETRAÇÃO DO CONCRETO

O concreto, quando submetido a solicitações de longa duração, sofre uma deformação imediata, seguida de uma deformação lenta, devida ao efeito de fluência (creep), que se desenvolve ao longo do tempo. Deste modo, mesmo sob tensões constantes, as deformações ocorridas no concreto aumentam no decorrer do tempo, conforme ilustrado na Fig. 5.1.

Este fenômeno manifesta-se, mais acentuadamente, nas primeiras idades, posteriores ao aparecimento das tensões. Está relacionado com efeitos decorrentes devidos, principalmente, à circulação de água na massa de concreto e sua dissipação para o exterior. Em sua magnitude e desenvolvimento, influem diversos fatores, podendo-se destacar a umidade e a temperatura ambiente, a idade do carregamento e o período transcorrido após a sua aplicação, as dimensões da peça, as condições de cura, a composição do concreto e a velocidade de endurecimento do cimento.

Após a concretagem e cura do concreto, pode-se ainda encontrar água no seu interior, alojada em pequenos vasos capilares. Tal quantidade de água é o resíduo da reação de hidratação do cimento, a qual sempre vai existir, uma vez que o fator água/cimento, utilizado na reação, é menor que o mínimo necessário para se trabalhar com o concreto. Com o tempo, o resíduo de água tende a evaporar, levando os vasos capilares, sem a pressão interna do mesmo, ao esmagamento. Este efeito provoca uma perda de volume, conhecido como retração (shrinkage), conforme visto na Fig. 5.2.

Esta deformação, ao longo do tempo, é independente da tensão atuante e está relacionada a fatores semelhantes aos da fluência, também devidos à água que, em parte hidrata os componentes do cimento, em parte fica retida dentro da massa de concreto.

A seguir, descreve-se, detalhadamente, a inclusão dos efeitos de fluência e retração no modelo computacional.

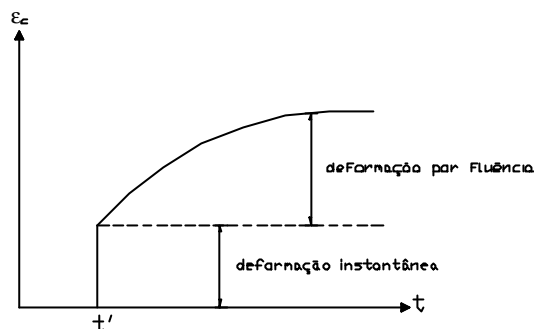


FIGURA 5.1 - Evolução da deformação por fluência para uma tensão constante aplicada em t'

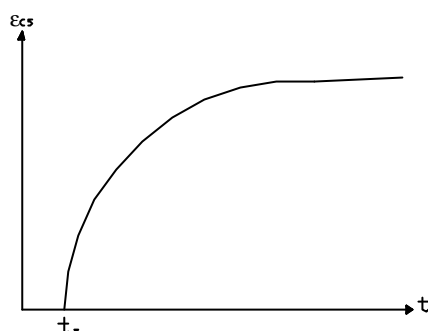


FIGURA 5.2 - Curva de deformação por retração

5.1.1 Relações constitutivas uniaxiais para o concreto

5.1.1.1 Hipótese básica

No domínio das tensões de utilização, conforme Creus (1986), as deformações por fluência, devidas a tensões em dois instantes diferentes, podem ser consideradas como aditivas, obedecendo a lei da superposição de efeitos.

De acordo com o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), a superposição linear de deformações é normalmente aceita, quando se trabalha com níveis de tensões menores que 40% do valor da resistência média à compressão do concreto. Este é o caso do modelo apresentado neste trabalho.

5.1.1.2 Lei do tipo integral para fluência

Para uma história prescrita de tensões, o somatório das respostas lineares de deformação, devidas a todos os pequenos incrementos de tensões uniaxiais aplicados, antes do tempo t , de acordo com a hipótese básica, induz a uma lei do tipo integral para a fluência:

$$\varepsilon_{\text{tot}}(t) - \varepsilon_n(t) = \int_0^t J(t, \tau) d\sigma(\tau), \quad (5.1)$$

onde:

- t é a idade do concreto;
- σ é a tensão uniaxial;
- $\varepsilon_{\text{tot}}(t)$ é a deformação axial total (inclui as parcelas dependentes e independentes do tempo);

- $\varepsilon_n(t)$ é a deformação axial inelástica (parcela decorrente da fluência, retração, dilatação térmica, etc);

- $J(t,\tau)$ representa a função de fluência, deformação no tempo, t , causada por uma tensão unitária constante, agindo no intervalo entre τ e t .

A função de fluência, analogamente ao módulo de elasticidade longitudinal dos materiais elásticos, relaciona a tensão aplicada com a deformação ocorrida. Esta, porém, não é apenas um número, mas sim, uma função dependente do tempo e da idade do material, no instante da colocação da carga.

Seja $\sigma(t)$, caracterizado por um valor inicial, $\sigma(t')$ para $\tau = t'$, isto é:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= 0, \text{ para } t < t'; \\ \Delta\sigma(t') &= \sigma(t'),\end{aligned}\quad (5.2)$$

pode-se, então, reescrever a equação (5.1), como:

$$\varepsilon_{\text{tot}}(t) - \varepsilon_n(t) = \sigma(t')J(t,t') + \int_{t'+}^t J(t,\tau) d\sigma(\tau), \quad (5.3)$$

onde:

- $\tau (t'+ \leq \tau \leq t)$ é o tempo no qual os incrementos de tensão, $d\sigma(\tau)$ são aplicados.

Se $\sigma(t)$ varia em passos discretos, $\Delta\sigma(t_i)$, tem-se, então:

$$\varepsilon_{\text{tot}}(t) - \varepsilon_n(t) = \sigma(t')J(t,t') + \sum_{i=1}^n J(t,t_i) \Delta\sigma(t_i). \quad (5.4)$$

5.1.1.3 Lei do tipo integral para relaxação

Para uma história prescrita de deformações, o somatório das respostas lineares de tensão, devidas a todos os pequenos incrementos de deformações uniaxiais aplicados, antes do tempo t , de acordo com a hipótese básica, induz uma lei do tipo integral para a relaxação:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t,\tau) d[\varepsilon_{\text{tot}}(\tau) - \varepsilon_n(\tau)], \quad (5.5)$$

onde:

- $R(t,\tau)$ representa a função de relaxação, tensão no tempo, t , causada por uma deformação unitária constante, agindo no intervalo entre τ e t .

Seja a deformação dependente da tensão, $\varepsilon_{\text{tot}}(t) - \varepsilon_n(t)$, caracterizada por um valor inicial, $\varepsilon_{\text{tot}}(t') - \varepsilon_n(t')$, para $\tau = t'$, isto é:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{tot}}(t) - \varepsilon_n(t) &= 0, \text{ para } t < t'; \\ \Delta[\varepsilon_{\text{tot}}(t') - \varepsilon_n(t')] &= \varepsilon_{\text{tot}}(t') - \varepsilon_n(t'),\end{aligned}\quad (5.6)$$

pode-se, então, reescrever a equação (5.5) como:

$$\sigma(t,t') = [\varepsilon_{\text{tot}}(t') - \varepsilon_n(t')] R(t,t') + \int_{t'+}^t R(t,\tau) d[\varepsilon_{\text{tot}}(\tau) - \varepsilon_n(\tau)], \quad (5.7)$$

onde:

- $\tau(t^+ \leq \tau \leq t)$ é o tempo no qual os incrementos de deformação dependente do tempo, $d[\epsilon_{\text{tot}}(\tau) - \epsilon_n(\tau)]$, são aplicados.

Se $[\epsilon_{\text{tot}}(t) - \epsilon_n(t)]$ varia em passos discretos, $\Delta[\epsilon_{\text{tot}}(t_i) - \epsilon_n(t_i)]$, tem-se, então:

$$\sigma(t, t') = [\epsilon_{\text{tot}}(t') - \epsilon_n(t')] R(t, t') + \sum_{i=1}^n R(t, \tau) d[\epsilon_{\text{tot}}(t_i) - \epsilon_n(t_i)]. \quad (5.8)$$

5.1.1.4 Discussão das leis do tipo integral para fluência e relaxação

Os seguintes aspectos merecem particular atenção:

a) As equações (5.1) e (5.5), ou (5.3) e (5.7), mostram a importância da determinação das funções de fluência e relaxação. Esta é a razão pela qual os resultados de testes com tensão ou deformação “constantes” são, especialmente, interessantes.

b) Se, ao contrário, a história de deformações, $\epsilon_{\text{tot}}(t)$, for prescrita na equação (5.1) e a história de tensões, $\sigma(t)$, for prescrita na equação (5.5), estas duas equações representam as equações integrais de Volterra, não-homogêneas, respectivamente, para a história incógnita de tensões e deformações.

Pode-se dizer, então, que as equações (5.1) e (5.5) representam a solução uma da outra, conforme está sintetizado na tabela 5.1:

TABELA 5.1 - Representação das soluções das equações (5.1) e (5.5)

Função dada: Problemas, onde:	Fluência $J(t, \tau)$	Relaxação (t, τ)
a história de tensões é prescrita	$\epsilon(t) = ?$ - integração simples da equação (5.1), ou (5.3)	$\epsilon(t) = ?$ - solução da equação de Volterra, equação (5.5), ou (5.7)
a história de deformações é prescrita	$\sigma(t) = ?$ - solução da equação de Volterra, equação (5.1), ou (5.3)	$\sigma(t) = ?$ - integração simples da equação (5.5), ou (5.7)

O caso mais freqüente, onde a solução da equação integral de Volterra é necessária, encontra-se em destaque.

c) A relação entre as funções de fluência e de relaxação pode ser obtida, considerando-se a história de deformações na equação (5.3), como sendo uma função do tipo salto unitário, ou seja:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{tot}}(t) - \epsilon_n(t) &= 0, \text{ para } t < t'; \\ \epsilon_{\text{tot}}(t, t') - \epsilon_n(t) &= 1, \text{ para } t \geq t', \end{aligned} \quad (5.9)$$

em cujo caso, a resposta de tensão é, por definição, $\sigma(t, t') = R(t, t')$.

Substituindo-se a resposta de tensão na equação (5.3) e considerando-se que $R(t', t') = E_c(t')$, tem-se, então:

$$1 = E_c(t') J(t, t') + \int_{t'+}^t J(t, \tau) dR(\tau). \quad (5.10)$$

A equação (5.10) representa uma equação integral, não-homogênea, de Volterra, para a determinação da função de relaxação, a partir da função de fluência.

5.1.2 Inclusão da fluência no modelo

O modelo reológico, adotado para representar o comportamento viscoelástico (dependente do tempo) do concreto, foi uma cadeia de elementos tipo Maxwell, conforme a Fig. 5.3. Esta cadeia é formada por uma associação, em paralelo, de elementos compostos por uma mola elástica, em série com um amortecedor viscoso.

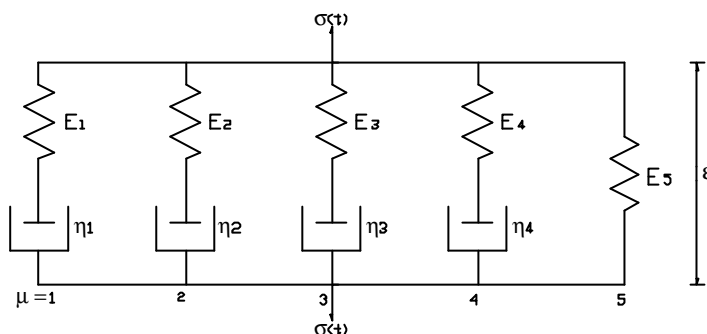


FIGURA 5.3 - Modelo reológico do concreto

Este modelo é um caso particular do modelo elasto-viscoplástico básico, descrito no capítulo 2, Fig. 2.1, admitindo-se que todos os elementos de atrito (componentes plásticas do modelo) possuam tensão de plastificação nula.

As molas da unidade, μ , da cadeia têm módulo de elasticidade, $E_\mu(t)$, dependente da idade, t , do concreto. Já os coeficientes de viscosidade, $\eta_\mu(t)$, são caracterizados por:

$$\eta_\mu = E_\mu \tau_\mu, \quad (5.11)$$

onde:

- τ_μ é o tempo de relaxação da unidade, μ , considerado constante no tempo.

Bazant & Wu (1974) desenvolveram um modelo deste tipo, com a finalidade de representar o comportamento viscoelástico, com envelhecimento, do concreto, sob baixos níveis de tensão, de acordo com a hipótese básica, apresentada anteriormente. Bazant (1982) propôs, também, um algoritmo, o qual determina, automaticamente, todos os parâmetros, $E_\mu(t)$ e $\eta_\mu(t)$, para cada idade, t , do concreto, a partir de resultados de ensaios ou informações, obtidas em normas, para estruturas de concreto.

5.1.2.1 Formulação matemática do modelo de Maxwell

Neste trabalho, utiliza-se o modelo idealizado por Bazant e Wu (1974). Fairbairn, Longo e Zheng (1987) utilizaram o mesmo modelo e sugeriram o uso de cinco unidades,

suficientes para representar o comportamento viscoelástico do concreto. Este modelo é computacionalmente adequado, quando se utiliza uma formulação, baseada em elementos finitos, com integração por intervalos discretos de tempo. Além disso, não necessita que se conheça toda a história de tensões.

Os tempos de relaxação de cada unidade da cadeia da Fig. 5.3, de acordo com o período de tempo que se deseja cobrir, após a aplicação da carga, são obtidos por:

$$\tau_{\mu} = 10^{\mu-1} \tau_1, \mu = 1, \dots, 4. \quad (5.12)$$

Considera-se, na unidade, $\mu = 5$, cuja mola não está acoplada a nenhum amortecedor, que $\tau_5 = 10^{30}$, $\eta_5 \rightarrow \infty$, $\tau_5 \rightarrow \infty$, a fim de tornar a deformação, assintoticamente, convergente, para uma certa data, conforme o comportamento real do concreto.

A tensão, $\sigma(t)$, aplicada na cadeia, pode ser expressa como:

$$\sigma(t) = \sum_{\mu=1}^5 \sigma_{\mu}(t), \quad (5.13)$$

na qual, $\sigma_{\mu}(t)$ representa a tensão, no tempo, t , em um elemento da cadeia de Maxwell.

Estando a mola e o amortecedor em série, pode-se escrever:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}_{\mu}}{E_{\mu}} + \frac{\sigma_{\mu}}{\eta_{\mu}}. \quad (5.14)$$

A equação diferencial (5.14) representa a tensão resultante para o elemento de Maxwell, cuja solução é dada por:

$$\sigma(t, t') = \sigma_{\mu}(t') e^{\frac{-(t-t')}{\tau_{\mu}}}. \quad (5.15)$$

A função de relaxação do modelo, $R(t, t')$ representa a tensão resultante para uma deformação unitária, imposta em $t = t'$ e mantida constante para $t > t'$, dos elementos de Maxwell e pode ser calculada por:

$$R(t, t') = \sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{\frac{-(t-t')}{\tau_{\mu}}}. \quad (5.16)$$

Esta equação traduz o desenvolvimento da função de relaxação, em séries de exponenciais reais, séries de Dirichlet ou séries de Prony. A determinação dos termos $E_{\mu}(t')$, desta função, pode ser feita a partir de uma função de relaxação, $\tilde{R}(t_i, t')$, cujos valores discretos, nos tempos t_i , são conhecidos.

5.1.2.2 Determinação da função de relaxação, a partir da função de fluência

Os pontos discretos, $\tilde{R}(t_i, t')$, são obtidos, geralmente, a partir de funções de fluência, $J(t, t')$, resolvendo-se, numericamente, a equação (5.10), para uma história conhecida de deformações. As funções de fluência podem ser obtidas em laboratório, ou por expressões analíticas, encontradas em normas, como é o caso deste trabalho. Os pontos discretos da função de relaxação também poderiam ser obtidos da mesma maneira.

Para a determinação de $\tilde{R}(t_i, t')$, necessita-se conhecer $J(t, t')$ para qualquer idade, t' , de aplicação da carga e a sua duração, $t - t'$, dentro da faixa de tempo considerada. Para tanto, são necessárias apenas algumas curvas de fluência. Neste trabalho, adotaram-se oito curvas.

Existem duas aproximações recomendáveis da equação (5.10):

- a primeira baseia-se em uma regra retangular:

$$\varepsilon_{\text{tot}}(t_k) - \varepsilon_n(t_k) = \sum_{i=1}^k J(t_k, t_i) \Delta\sigma(t_i). \quad (5.17)$$

-a segunda, em uma regra trapezoidal:

$$\varepsilon_{\text{tot}}(t_k) - \varepsilon_n(t_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1})] \Delta\sigma(t_i). \quad (5.18)$$

Neste trabalho, aplicou-se a regra trapezoidal, por induzir uma precisão mais adequada para histórias usuais de deformações.

As equações (5.17) e (5.18) são válidas, inclusive, para incrementos instantâneos de ε e σ . Se um incremento instantâneo ocorre num certo tempo, t_m , basta fixar-se $\Delta t_{m+1} = 0$, ou $t_{m+1} = t_m$.

As duas aproximações também englobam o caso particular de um incremento instantâneo de tensão, ocorrido em um tempo inicial qualquer, t_0 . Observa-se que $t_1 = t_0$, $\Delta t_1 = 0$, $\Delta\sigma(t_1) = \sigma_1$ e deste modo:

$$\varepsilon_{\text{tot}}(t_1) - \varepsilon_n(t_1) = \Delta\varepsilon_{\text{tot}}(t_1) = \varepsilon_1 = J(t_1, t_1)\sigma_1, \text{ com } \Delta\varepsilon_n(t_1) = 0. \quad (5.19)$$

Usando-se a regra trapezoidal para aproximar a equação (5.10), sua solução fica:

$$\Delta\tilde{R}_i = -(J_{i,i} + J_{i,j-1})^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\tilde{R}_j (J_{i,j} + J_{i,j-1} - J_{i-1,i} - J_{i-1,j-1}), \quad (5.20)$$

com:

$$- J_{i,j} = J(t_i, t_j);$$

$$- \Delta\tilde{R}_1 = E(t') = \text{valor inicial}$$

e

$$\tilde{R}(t_i, t') = \tilde{R}(t_{i-1}, t') + \Delta\tilde{R}_i. \quad (5.21)$$

Desta forma, conhecendo-se os valores de $J(t_i, t')$ para quaisquer valores de t' e $t - t'$, dentro da faixa de tempo considerada, obtêm-se os respectivos valores de $\tilde{R}(t_i, t')$ nos N tempos discretos. Entre os valores de t' e $t - t'$, considera-se uma variação linear com $\log(t')$ e $\log(t - t')$.

Os valores de $t - t'$, de durações de carga, foram escolhidos por uma razão constante crescente, em escala logarítmica, do tipo:

$$(t_i - t') = 10^{\frac{1}{10}} (t_{i-1} - t'), \quad (5.22)$$

onde:

$$-(t_1 - t') = 3,52 \text{ dias ;}$$

$$-(t_{30} - t') = 2224,12 \text{ dias .}$$

Assim, têm-se três décadas em $\log(t - t')$, com dez passos por década. E, para as idades, t' , de carregamento, adotou-se uma faixa de tempo, considerada de boa precisão com respeito à dispersão dos dados de fluência, de forma que:

$$t'_i = 10^{\frac{1}{2}} t'_{i-1}, \quad (5.23)$$

para a qual:

$$-t'_1 = 2,8 \text{ dias ;}$$

$$-t'_8 = 8854,28 \text{ dias ,}$$

ou seja, quatro décadas em $\log(t')$, com dois passos por década.

5.1.2.3 Determinação dos parâmetros $E_\mu(t)$ e $\eta_\mu(t)$

A equação da curva de relaxação, para uma idade, t' , pode ser determinada pelo método dos mínimos quadrados, a partir dos pontos conhecidos, $\tilde{R}(t_i, t')$. A aplicação deste método é feita através da minimização da soma dos quadrados do desvio, ϕ , ou seja:

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} [R(t_i, t') - \tilde{R}(t_i, t')]^2 + \pi, \quad (5.24)$$

sendo π , o termo residual para melhorar o ajuste da função, definido por:

$$\pi = \varpi_1 \sum_{\mu=1}^3 (E_{\mu+1} - E_\mu)^2 + \varpi_2 \sum_{\mu=1}^2 (E_{\mu+2} - 2E_{\mu+1} + E_\mu)^2, \quad (5.25)$$

onde $\varpi_1 = 0,01$ e $\varpi_2 = 0,08$ representam os pesos adotados para o termo residual.

Substituindo-se a função de relaxação, equação (5.16), na expressão (5.24) do desvio, sem o termo residual, tem-se:

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} \left[\sum_{\mu=1}^5 E_\mu(t') e^{-\tau_\mu} - \tilde{R}(t_i, t') \right]^2. \quad (5.26)$$

As incógnitas $E_\mu(t')$ são obtidas através das condições de minimização:

$$\frac{\partial \phi}{\partial E_\mu} = 0, \quad \mu = 1, \dots, 5. \quad (5.27)$$

As equações (5.27) formam um sistema de cinco equações com cinco incógnitas. A resolução deste sistema conduz a valores positivos de $E_\mu(t')$, pois a inclinação da curva de relaxação é sempre positiva. Desenvolvendo-se a equação j do sistema (5.27), obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{30} \left[\sum_{\mu=1}^5 E_\mu(t') e^{-\tau_\mu} - \tilde{R}(t_i, t') \right] \sum_{i=1}^{30} e^{-\tau_j} = 0. \quad (5.28)$$

Esta expressão pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{30} \left[\sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{-\left(\frac{t-t'}{\tau_{\mu}} + \frac{t-t'}{\tau_j} \right)} \right] = \sum_{i=1}^{30} \tilde{R}(t_i, t') e^{-\frac{-(t-t')}{\tau_j}}, \quad (5.29)$$

que, sob a forma matricial, fica:

$$[A]\{E\} = \{B\}, \quad (5.30)$$

onde:

$$- A_{jk} = \sum_{i=1}^{30} e^{-\left(\frac{t-t'}{\tau_{\mu}} + \frac{t-t'}{\tau_j} \right)}, \quad k=1, \dots, 5;$$

$$- E_j = E_j(t');$$

$$- B_j = \sum_{i=1}^{30} \tilde{R}(t_i, t') e^{-\frac{-(t-t')}{\tau_j}}. \quad (5.31)$$

Introduzindo-se o termo residual, π , nas equações (5.27), os elementos A_{jk} , da matriz $[A]$, devem ser corrigidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= A_{1,1} + \varpi_1 + \varpi_2 & A_{3,1} &= A_{3,1} + \varpi_2 \\ A_{1,2} &= A_{1,2} - \varpi_1 + 2\varpi_2 & A_{3,2} &= A_{3,2} - \varpi_1 + 4\varpi_2 \\ A_{1,3} &= A_{1,3} + \varpi_2 & A_{3,3} &= A_{3,3} + 2\varpi_1 + 5\varpi_2 \\ A_{2,1} &= A_{2,1} - \varpi_1 - 2\varpi_2 & A_{3,4} &= A_{3,4} - \varpi_1 - 2\varpi_2 \\ A_{2,2} &= A_{2,2} + 2\varpi_1 + 5\varpi_2 & A_{4,3} &= A_{4,3} - \varpi_1 - 2\varpi_2 \\ A_{2,3} &= A_{2,3} - \varpi_1 - 4\varpi_2 & A_{4,4} &= A_{4,4} + \varpi_1 + \varpi_2. \\ A_{2,4} &= A_{2,4} + \varpi_2 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Resolvendo-se o sistema (5.27), determinam-se os valores dos módulos de elasticidade da cadeia de Maxwell, $E_{\mu}(t')$, para os valores de t' , nos quais são dados os pontos discretos $\tilde{R}(t_i, t')$. Já, para qualquer idade, t , os valores de $E_{\mu}(t)$ são interpolados pela expressão:

$$E_{\mu}(t) = \{E_{\mu}(t'_{i-1})[\log(t'_i) - \log(t)] + E_{\mu}(t'_i)[\log(t) - \log(t'_{i-1})] / [\log(t'_i) - \log(t'_{i-1})]\}, \quad (5.33)$$

para $i=2, \dots, 8$ e $\mu=1, \dots, 5$.

Conhecidos os valores de E_{μ} para as cinco camadas, obtêm-se os respectivos valores de η_{μ} , através da expressão (5.11). Assim sendo, com este modelo, tais valores de E_{μ} e η_{μ} podem ser obtidos para qualquer idade, t , do concreto na fase viscoelástica.

5.1.2.4 Determinação dos parâmetros da função de fluência

5.1.2.4.1 Equação básica

Como foi visto, anteriormente, para a obtenção da função de relaxação, $R(t, t')$, necessita-se saber alguns valores da função de fluência, $J(t, t')$. Neste trabalho, adotou-se a formulação apresentada pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), em que a função de fluência, para uma tensão menor que $0,4 f_{cm}$ e aplicada no tempo t' , é dada por:

$$J(t, t') = \frac{1}{E_c(t')} + \frac{\phi(t, t')}{E_c}, \quad (5.34)$$

na qual:

- $J(t, t')$ é a função de fluência, que representa a deformação na idade t , causada por uma tensão unitária, atuando a partir do tempo t' ;
- $E_c(t')$ é o módulo de elasticidade na idade t' (em dias) do carregamento;
- $\phi(t, t')$ é o coeficiente de fluência;
- E_c é o módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias de idade, que pode ser determinado pela expressão:

$$E_c = 2,15 \times 10^4 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{\frac{1}{3}}, [f_{cm}] \text{ em MPa}; \quad (5.35)$$

- f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto ao 28 dias de idade. O valor de E_c deve ser acrescido de 20%, se o concreto tiver agregados de basalto. Para uma idade, t' , o módulo de elasticidade, $E_c(t')$, será calculado da seguinte maneira:

$$E_c(t') = \beta_{cc}(t')^{\frac{1}{2}} E_c, \quad (5.36)$$

com:

$$\beta_{cc}(t') = \exp \{s [1 - (28/t'_T)^{0,5}]\}, \quad (5.37)$$

onde s é um parâmetro, dependente do tipo de cimento, que vale:

0,20	Para cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial
0,25	Para cimento de endurecimento rápido e normal
0,38	Para cimento de endurecimento lento

5.1.2.4.2 Coeficiente de fluência

O coeficiente de fluência é calculado por:

$$\phi(t, t') = \phi_0 \beta_c(t - t'), \quad (5.38)$$

onde:

- ϕ_0 é o coeficiente de fluência nominal;

- β_c é o coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência com o tempo;
- t' é a idade de aplicação da carga;
- t é a idade atual, em dias, do concreto.

O coeficiente de fluência nominal, ϕ_0 vale:

$$\phi_0 = \phi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t'), \quad (5.39)$$

com:

$$\phi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH/100}{0,46 (h/10)^{1/3}} \quad e \quad h = \frac{2A_c}{\mu}, \quad (5.40)$$

onde:

- RH é a umidade relativa do ar em [%];
- h é a espessura fictícia em [cm];
- A_c é a área da seção transversal e μ é o perímetro de contato com a atmosfera.

$$\beta(f_{cm}) = \frac{5,3}{(f_{cm}/10)^{0,5}}; \quad (5.41)$$

$$\beta(t') = \frac{1}{0,1 + (t')^{0,2}}. \quad (5.42)$$

O coeficiente, β_c , que descreve o desenvolvimento da fluência com o tempo, é expresso por:

$$\beta_c(t - t') = \left[\frac{(t - t')}{\beta_H + (t - t')} \right]^{0,3}, \quad (5.43)$$

com:

$$\beta_H = 150 \{1 + (1,2 RH/100)^{18}\} h/10 + 250 \leq 1500. \quad (5.44)$$

5.1.2.4.3 Efeito do tipo de cimento e variação da temperatura

No modelo apresentado acima, os efeitos do tipo de cimento e da variação da temperatura ao longo do tempo, sobre as deformações por fluência, são considerados através de correções dos coeficientes e funções descritos acima. Os efeitos de altas ou baixas temperaturas, a maturidade do concreto, devem ser considerados, ajustando-se o valor do tempo, t' , conforme:

$$t' = t'_T \left[\frac{9}{2 + (t'_T)^{1,2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0,5 \text{ dias}, \quad (5.45)$$

onde o valor de α , dependendo do tipo do cimento, vale:

1	Para cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial
0	Para cimento de endurecimento rápido e normal
-1	Para cimento de endurecimento lento

$$t_T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \exp \left[- \left[\frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)} - 13,65 \right] \right], \quad (5.46)$$

onde:

- t_T é o tempo ajustado, devido a efeitos ocorridos para temperaturas diferentes de 20°C, compreendidas entre 0°C e 80°C;

- $T(\Delta t_i)$ é a temperatura média atuante por um período de Δt_i dias.

Os coeficientes β_H e ϕ_{RH} são corrigidos, respectivamente, por:

$$\beta_{H,T} = \beta_H \beta_T; \quad (5.47)$$

$$\phi_{RH} = \phi_T + (\phi_{RH} - 1) \phi_T^{0,5}, \quad (5.48)$$

onde:

$$\beta_T = \exp \left[- \left[\frac{1500}{273 + T(\Delta t_i)} - 5,12 \right] \right]; \quad (5.49)$$

$$\phi_T = \exp \{ 0,015 [T(\Delta t_i) - 20] \}. \quad (5.50)$$

5.1.2.4.4 Comparação entre as curvas de fluência, geradas pelo modelo, com as obtidas pela formulação teórica do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993)

Para se comprovar a perfeita ajustagem do modelo de fluência implementado, compararam-se as curvas de fluência, para os oito diferentes tempos, t , obtidas pelo modelo computacional, apresentado neste trabalho, e pela formulação proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). As Fig. 5.4 até 5.11 mostram as curvas de fluência de ambos os modelos, para os diferentes tempos, t , conforme a equação (5.23).

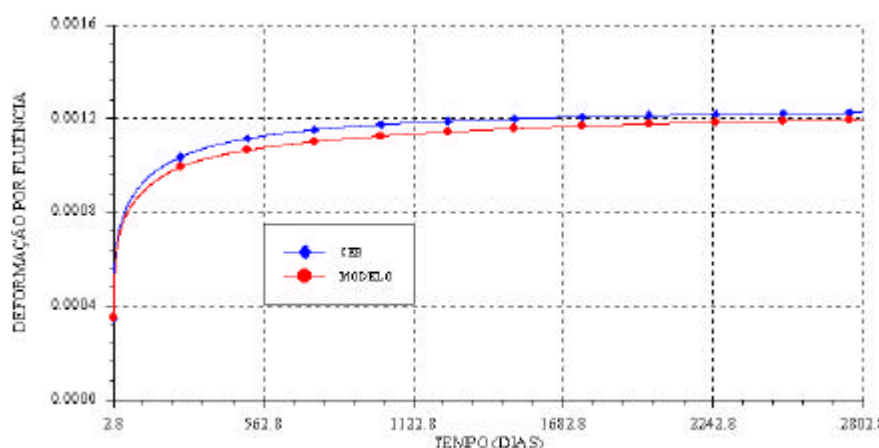


FIGURA 5.4 - Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 2,8$ dias, por um período de 2800 dias

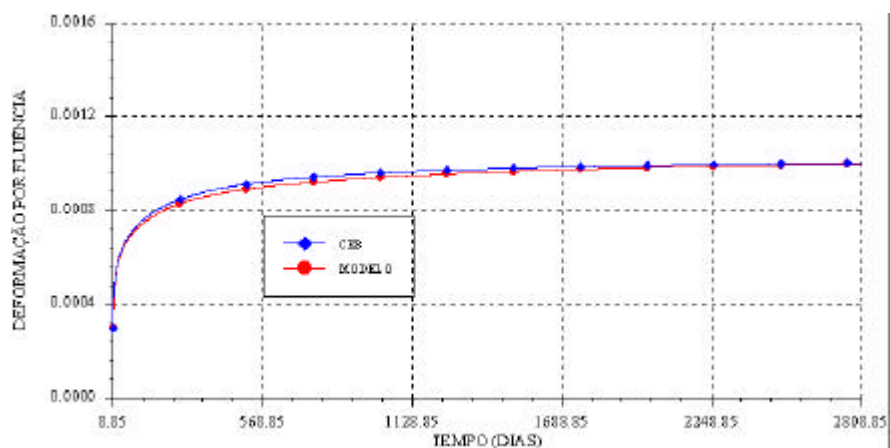


FIGURA 5.5 - Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 8,85$ dias, por um período de 2800 dias

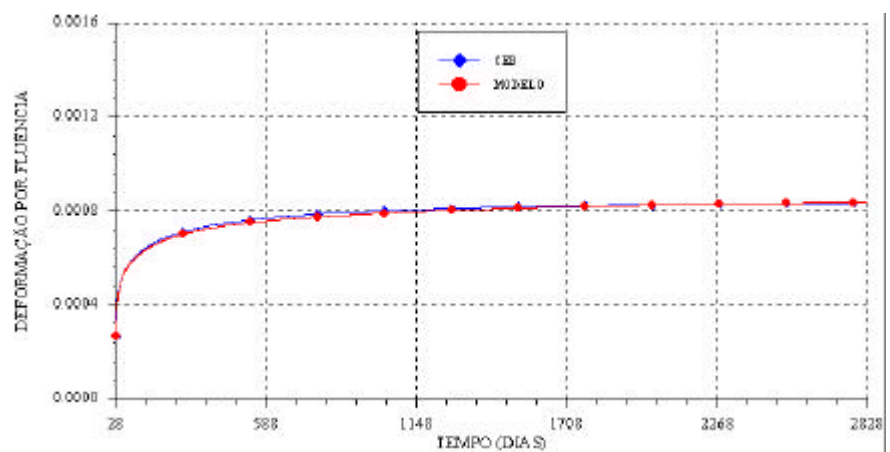


FIGURA 5.6 - Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 28$ dias, por um período de 2800 dias

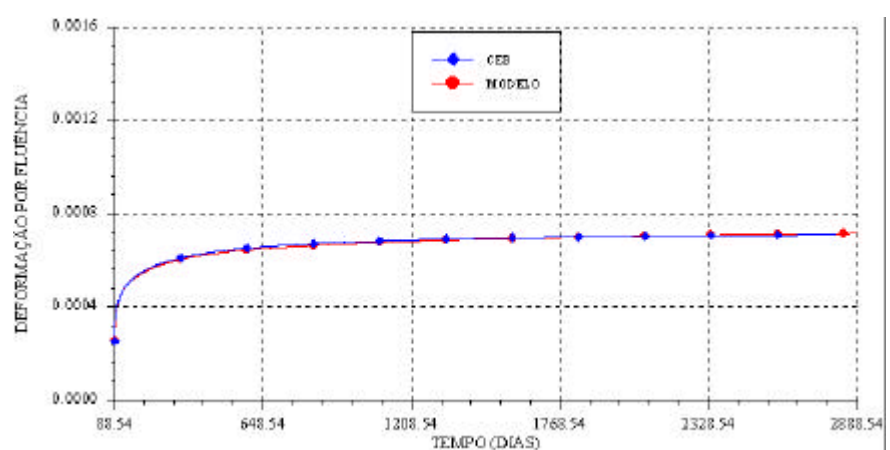


FIGURA 5.7 - Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 88,54$ dias, por um período de 2800 dias

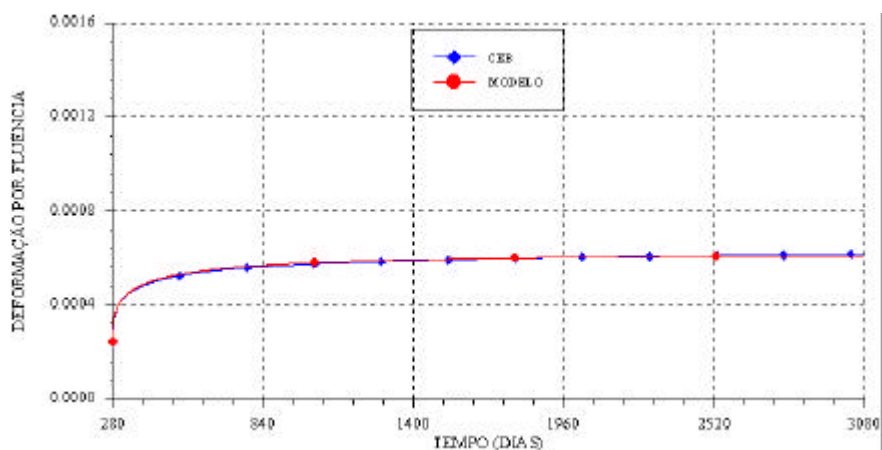


FIGURA 5.8 - Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 280$ dias, por um período de 2800 dias

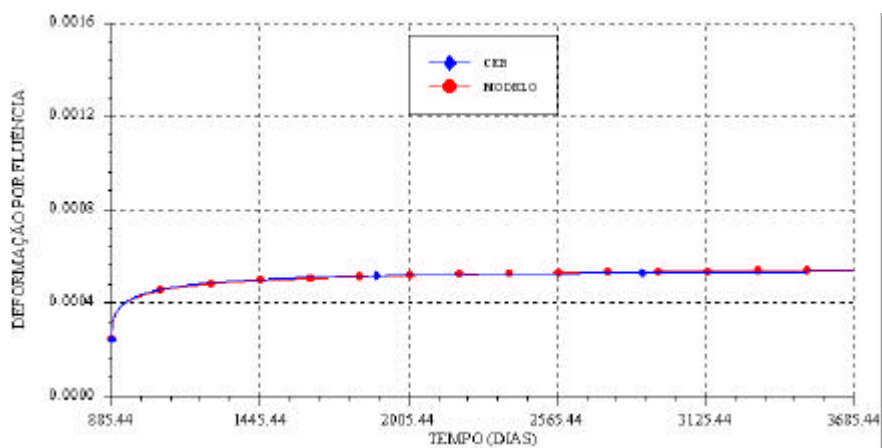


FIGURA 5.9 - Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 885,44$ dias, por um período de 2800 dias

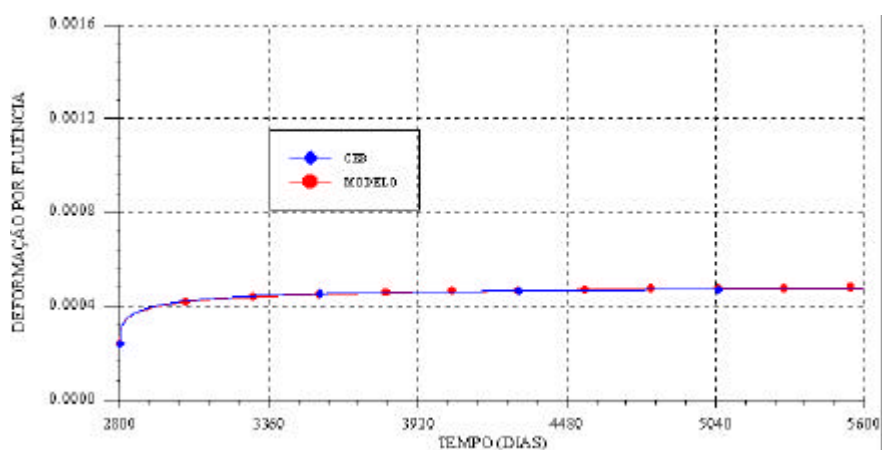


FIGURA 5.10 - Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t = 2800$ dias, por um período de 2800 dias

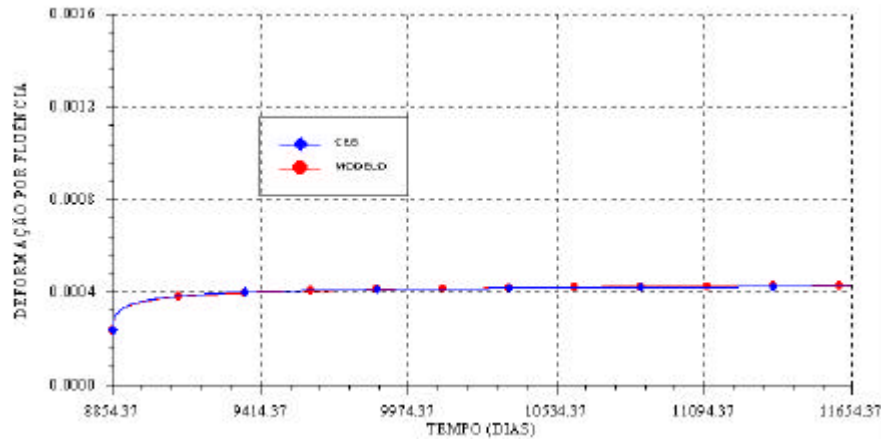


FIGURA 5.11 - Comparação entre as curvas de fluência, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t' = 8854,37$ dias, por um período de 2800 dias

5.1.3 Inclusão da retração no modelo

As deformações por retração do concreto são tratadas como deformações impostas à estrutura. Para isto, determina-se um vetor de forças nodais equivalentes, através da expressão:

$$\Delta P_{CS} = \int_V [B]^T [D] \{\Delta \epsilon_{cs}\} dV. \quad (5.51)$$

onde:

$$\{\Delta \epsilon_{CS}\} = \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{cs} \\ \Delta \epsilon_{cs} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.52)$$

A exemplo da fluência, a deformação originada por retração não produz, diretamente, tensões no concreto. Por isso, para a avaliação da tensão no concreto, desconta-se o seu valor da deformação total, que pode ser obtida a partir do vetor de deslocamentos.

5.1.3.1 Determinação dos parâmetros de retração

As deformações, oriundas do efeito de retração do concreto, podem ser calculadas, conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), como:

$$\epsilon_{cs}(t, t_s) = \epsilon_{cs0} \beta_s(t - t_s), \quad (5.53)$$

onde:

- ϵ_{cs0} é o coeficiente de retração nominal;
- β_s é o coeficiente que descreve o desenvolvimento da retração com o tempo;
- t é a idade do concreto, em dias;
- t_s é a idade de começo da retração no concreto, em dias.

O coeficiente de retração nominal é obtido por:

$$\varepsilon_{cs0} = \varepsilon_s (f_{cm}) \beta_{RH}, \quad (5.54)$$

com:

$$\varepsilon_s (f_{cm}) = [160 + 10 \beta_{sc} (9 - f_{cm} / 10)] \times 10^{-6}, \quad (5.55)$$

onde:

- β_{sc} , dependendo do tipo do cimento, vale:

8	Para cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial
5	Para cimento de endurecimento rápido e normal
4	Para cimento de endurecimento lento

e

$$\beta_{RH} (f_{cm}) = \begin{cases} -1,55 (1 - RH / 100)^3 & \text{para } 0\% \leq RH \leq 99\% \\ 0,25 & \text{para } RH > 99\% \end{cases}. \quad (5.56)$$

O valor do coeficiente de desenvolvimento da retração no tempo, β_s , pode ser calculado através da expressão:

$$\beta_s (t - t_s) = \left[\frac{(t - t_s)}{\alpha_{st} + (t - t_s)} \right]^{0,5}, \quad (5.57)$$

com:

$$\alpha_{st} = 350 \left(\frac{h^2}{10} \right). \quad (5.58)$$

Os efeitos da variação da temperatura são, também, levados em consideração no cálculo da deformação por retração, através de correções nos coeficientes α_{st} e β_{RH} , tais como:

$$\alpha_{st} = 350 \left(\frac{h^2}{10} \right) \exp \{-0,06 [T(\Delta t_i) - 20^\circ \text{C}]\} \quad (5.59)$$

e

$$\beta_{RH,T} = \beta_{RH} \beta_{st}, \quad (5.60)$$

com:

$$\beta_{st} = 1 + \left(\frac{8}{103 - RH} \right) \left[\frac{T(\Delta t_i) - 20^\circ \text{C}}{40} \right]. \quad (5.61)$$

As equações (5.60) e (5.61) descrevem o efeito de uma temperatura constante, num intervalo de tempo, Δt_i , diferente de 20°C , enquanto o concreto está endurecendo.

5.1.3.2 Comparação entre a curva de retração, gerada pelo modelo, com a obtida pela formulação teórica do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993)

Para se comprovar o funcionamento do modelo de retração implementado, comparou-se a curva de retração, obtida pelo modelo computacional, apresentado neste trabalho, com a curva obtida pela formulação teórica do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), Fig. 5.12.

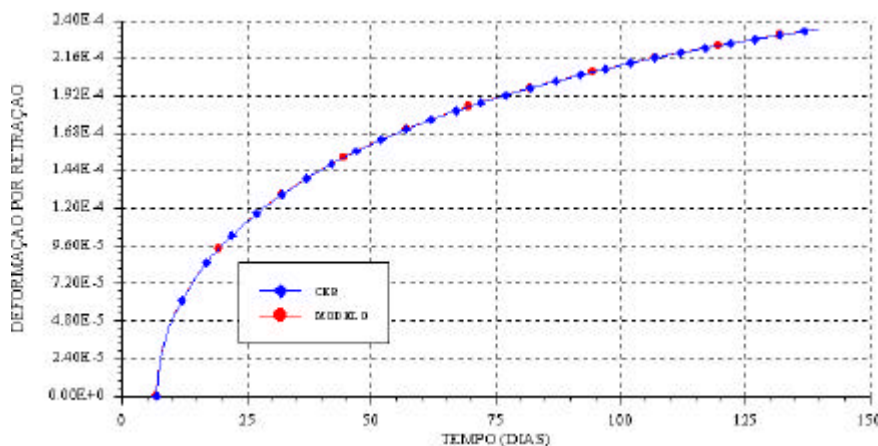


FIGURA 5.12 - Comparação entre as curvas de retração, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, para $t_s = 7$ dias, por um período de 140 dias

5.2 RELAXAÇÃO DA ARMADURA PROTENDIDA

Na fase viscoelástica, a armadura protendida sofre um processo de perda de tensão pelo efeito de relaxação. Para representar este comportamento, utilizou-se o mesmo modelo reológico, adotado para o efeito de fluência no concreto, mostrado na Fig. 5.3.

Da mesma forma mostrada anteriormente, a determinação dos termos $E_\mu(t')$ da função de relaxação do modelo, $R(t, t')$, pode ser feita a partir de uma função de relaxação, $\tilde{R}(t_i, t')$, cujos valores discretos, nos tempos t_i , são conhecidos.

Ao contrário do que ocorre para o concreto, existem formulações específicas para a obtenção do efeito da relaxação na armadura protendida. Então, para a obtenção dos pontos discretos, $\tilde{R}(t_i, t')$, dispensou-se o uso das curvas de fluência, como no caso do concreto. Para tal, utilizou-se a formulação, apresentada pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), para a relaxação do aço.

A relaxação do aço, segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) e a NBR 7197 (1989), é calculada através dos coeficientes ψ_{60} , ψ_{70} e ψ_{80} . Estes coeficientes são o resultado de medidas de tensão, após 1000 horas, a 20°C, de amostras de aço, mantidas com comprimento constante e submetidas, inicialmente, a tensões de tração de, respectivamente, 60%, 70% e 80% da tensão de ruptura característica, f_{ptk} . Conhecidos os três valores de ψ , é possível encontrar-se uma parábola, que passa por tais valores, em um gráfico que relaciona ψ com a razão entre a tensão inicial de protensão, σ_{p0} e de f_{ptk} , conforme ilustrado na Fig. 5.15. Segundo Vasconcelos (1980):

$$\psi = \rho_{1000} = a \left(\frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}} \right)^2 + b \left(\frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}} \right) + c, \quad (5.62)$$

onde:

$$- a = 50\psi_{60} - 100\psi_{70} + 50\psi_{80};$$

$$- b = -75\psi_{60} + 140\psi_{70} - 65\psi_{80};$$

$$- c = 28\psi_{60} - 48\psi_{70} + 21\psi_{80}, \quad (5.63)$$

sendo os valores de ψ_{60} , ψ_{70} e ψ_{80} dados na Tab. 5.2, para os diferentes tipos de aço de protensão.

TABELA 5.2 - Coeficientes ψ para cada tipo de aço de protensão

Tipo de Aço:	ψ_{60} (%)		ψ_{70} (%)		ψ_{80} (%)	
	CEB	NBR 7197	CEB	NBR 7197	CEB	NBR 7197
fios e cordoalhas com relaxação alta	0,9	-	1,8	-	4,7	-
fios e cordoalhas com relaxação normal	3,8	4,5	7,8	7	11,8	12
fios e cordoalhas com relaxação baixa	-	1,5	-	2,5	-	3,5
barras	1,7	-	4,2	-	6,7	-

Os valores de ψ são relativamente próximos daqueles apresentados pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). Adotaram-se, neste trabalho, então, os valores de ψ dados pela NBR 7197 (1989), já que os ensaios, envolvendo o efeito de relaxação do aço protendido, cujos resultados são comparados adiante com os obtidos pelo modelo computacional, apresentado neste trabalho, foram realizados aqui no Brasil.

Conhecido o valor de ρ_{1000} , pode-se determinar o valor da relaxação do aço, conforme o Modelo CEB-FIP 1990 (1993), para qualquer tempo, t , em horas:

$$\rho_t = \rho_{1000} \left(\frac{t}{1000} \right)^k, \quad (5.64)$$

onde:

- t é o tempo, em horas;

$$- k = \begin{cases} 0,12 & \text{para relaxação normal} \\ 0,25 & \text{para relaxação baixa} \end{cases}$$

onde:

- E_s é o módulo de elasticidade do aço.

Pode-se reescrever a equação (5.63), para utilizar-se o tempo, t , em dias, como:

$$\rho_t = \rho_{1000} \left(\frac{3t}{125} \right)^k. \quad (5.65)$$

Assim, os pontos discretos, $\tilde{R}(t_i, t')$, podem ser obtidos através da expressão:

$$\tilde{R}(t_i, t') = E_s \left[1 - \rho_{1000} \left(\frac{3t_i}{125} \right)^k \right]. \quad (5.66)$$

Os valores de $t - t'$, de durações de carga, foram escolhidos, por uma razão constante crescente, em escala logarítmica, segundo a equação (5.22), com :

- $(t_1 - t') = 3,52$ dias ;
- $(t_{40} - t') = 22241,2$ dias ;
- $t' = 2,8$ dias .

Têm-se, desta forma, quatro décadas em $\log(t - t')$, com dez passos por década.

Conhecidos os pontos discretos, $\tilde{R}(t_i, t')$, os valores de E_μ são obtidos através do procedimento descrito no item 5.1.2.3, onde os valores dos fatores de peso, ω_1 e ω_2 , da equação (5.25), adotados são, respectivamente, 0,08 e 0,25. No caso da armadura, não há necessidade de se corrigir o valor de E_μ pela equação (5.33), já que este permanece constante ao longo do tempo.

Os tempos de relaxação das unidades da cadeia de Maxwell são considerados constantes e seguem os valores determinados pela equação (5.22). Assim, os coeficientes de viscosidade, η_μ , são calculados pela expressão (5.11).

Cada unidade da cadeia de Maxwell recebe um incremento de tensão, em cada intervalo de tempo, dado por:

$$\Delta\sigma_\mu = E_\mu (\Delta\varepsilon_{tot} - \Delta\varepsilon_{ve\mu}), \quad (5.67)$$

onde:

- $\Delta\varepsilon_{tot}$ é o incremento de deformação total da armadura;
- $\Delta\varepsilon_{ve\mu}$ é o incremento de deformação viscoelástica da unidade, μ , da armadura, calculado por:

$$\Delta\varepsilon_{ve\mu} = \frac{\sigma_\mu}{\eta_\mu} \Delta t, \quad (5.68)$$

na qual:

- σ_μ é o somatório de todos os incrementos de tensão da unidade, μ , para todos os incrementos de tempo.
- Δt é o incremento de tempo considerado.

Para um certo tempo, t , pode ocorrer que o acúmulo de deformação viscoelástica, $\varepsilon_{ve\mu} = \sum \Delta\varepsilon_{ve\mu}$, até o tempo, t , para uma dada unidade, μ , ultrapasse o valor da deformação

total, $\varepsilon_{\text{tot}} = \sum \Delta\varepsilon_{\text{tot}}$, ocorrida até o mesmo instante, t . Neste caso, desconsidera-se esta unidade, μ , ou seja, esta unidade não contribui mais com uma parcela de incremento de tensão, $\Delta\sigma_{\mu}$, para a obtenção do incremento de tensão total, a partir do tempo, $t+\Delta t$. Assim:

$$\Delta\sigma_{\text{tot}} = \sum_{\mu=1}^n \Delta\sigma_{\mu} , \quad (5.69)$$

com:

- n = número de unidades ativas, que recebem uma parcela de tensão, da cadeia de Maxwell.

A tensão total, agindo na armadura protendida, até o tempo, t , é dada por:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{p0} + \sum_{i=0}^t (\Delta\sigma_{\text{tot}})_i , \quad (5.70)$$

onde:

- σ_{p0} é a tensão inicial de protensão, descontadas as perdas iniciais;
- $\Delta\sigma_{\text{tot}}$ é o incremento de tensão, que, na fase viscoelástica da armadura protendida, representa a perda de tensão, devida à relaxação.

5.2.1 Comparação entre a curva de relaxação, gerada pelo modelo, com a obtida pela formulação teórica do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993)

Para se comprovar o funcionamento do modelo de relaxação implementado, comparou-se a curva de retração, obtida pelo modelo computacional, apresentado neste trabalho, com a curva obtida pela formulação teórica do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). Esta comparação é apresentada na Fig. 5.13.

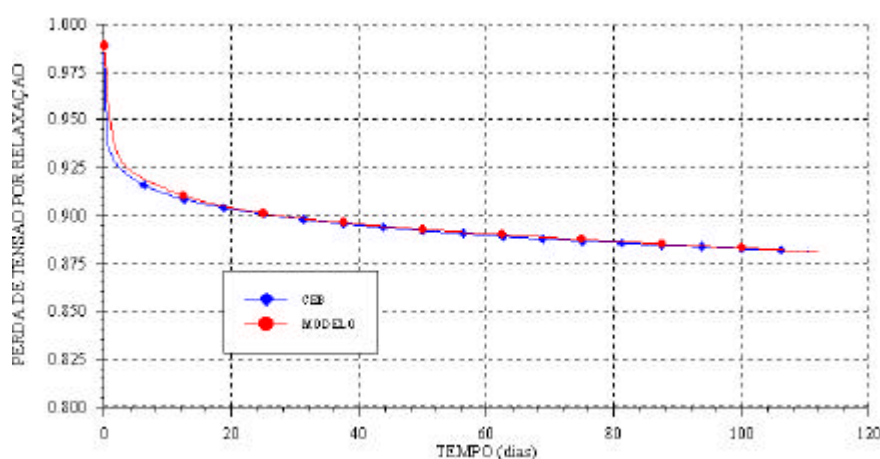


FIGURA 5.13 - Comparação entre as curvas de relaxação, obtidas pelo CEB e pelo modelo computacional, por um período de 112 dias

6 TIPOS DE PROTENSÃO IMPLEMENTADOS NO MODELO COMPUTACIONAL

6.1 INTRODUÇÃO

Segundo Pfeil (1980), o artifício da protensão, aplicado ao concreto, consiste em introduzir esforços que anulem (protensão total), ou limitem drasticamente (protensão parcial, com presença de armadura passiva) as tensões de tração do concreto, de modo a eliminar a abertura de fissuras como condição determinante do dimensionamento da estrutura.

O artifício da protensão desloca a faixa de trabalho do concreto para o âmbito das tensões de compressão, onde o material é eficiente. Por outro lado, com armaduras em forma de cabos e ancoradas, pode-se empregar aços de alta resistência, trabalhando com tensões elevadas. Compatibiliza-se, dessa forma, o trabalho simultâneo de dois materiais, um de elevada resistência à compressão (concreto) e outro de elevada resistência à tração (aço).

Correntemente, se utilizam, em concreto protendido, resistências de concreto duas a três vezes maiores que as empregadas em concreto armado. Os aços de protensão têm resistências da ordem de quatro a cinco vezes as dos aços convencionais.

Em relação a sua utilização, quando comparado ao concreto armado convencional, o concreto protendido apresenta diversas vantagens:

- redução das quantidades necessárias de concreto e aço; este fator decorre do emprego eficiente de materiais de alta resistência;
- permite vencer vãos maiores que o concreto armado convencional; para o mesmo vão, permite reduzir a altura necessária da peça;
- reduz, em geral, a incidência de fissuras;
- reduz as tensões principais de tração, provocadas pelo esforço cortante;
- durante a aplicação da protensão, o concreto e o aço são submetidos a tensões, em geral, superiores às que poderão ocorrer durante a vida útil da estrutura. Os materiais componentes da estrutura são, portanto, testados antes de receberem as cargas de serviço.

Os aços utilizados para protensão caracterizam-se por suas elevadas resistências e pela ausência de um patamar de escoamento definido. Neste tipo de aço, existe uma tensão inicial variável ao longo do comprimento e, também, ao longo do tempo, devida a perdas ocorridas na protensão.

Este tipo de aço pode ser agrupado nas seguintes categorias:

- fios trefilados de aço carbono, com diâmetro, em geral, de 3 mm a 8 mm, fornecidos em rolos ou bobinas. A trefilação produz encruamento do aço, aumentando sua resistência. Obtêm-se resistências mais elevadas para fios de menor diâmetro;
- cordoalhas: produtos formados por fios enrolados em forma de hélice, como uma corda. As cordoalhas mais comuns são constituídas por três ou sete fios; na cordoalha de sete fios, há um fio central retilíneo de maior diâmetro, em torno do qual se enrolam os seis fios laterais;
- barras de aço liga de alta resistência, laminadas a quente, com diâmetro superior a 12 mm, fornecidas em peças retilíneas de comprimento limitado.

As estruturas de concreto protendido são também armadas com quantidades moderadas de ferragem usual de concreto armado (armadura convencional), colocada sem tensões prévias, a qual se denomina armadura suplementar ou passiva.

A armadura suplementar tem as seguintes funções:

- na fase de execução, impede ou controla fissuras provocadas por retração do concreto, recalque de escoramento, etc;
- arma a estrutura para tensões elásticas de tração em serviço;
- no estágio de carga pós-fissuratório da estrutura, controla a abertura das fissuras;
- no estágio de carga de ruptura da estrutura, colabora como uma parcela do esforço de tração (a outra parcela, em geral preponderante, do esforço de tração é dada pelo aço de protensão).

Durante as operações de estiramento e ancoragem dos cabos de protensão, ocorrem perdas de tensão nos cabos, devidas a causas mecânicas, tais como: resistências de atrito ao longo do cabo, deslizamentos nas ancoragens, etc. Essas perdas são denominadas imediatas ou instantâneas e devem ser medidas e controladas durante a execução de protensão, de modo a se saber qual o esforço, efetivamente, aplicado na peça.

O cabo de protensão é um corpo elástico esticado e, efetivamente, ancorado nos extremos. Ele pode ser imaginado como sendo uma mola esticada e presa nas extremidades. Uma vez efetuada a ancoragem do cabo, parece razoável se supor que o esforço de protensão não sofrerá alterações com o tempo.

Acontece, porém, que os cabos de aço, quando mantidos sob tensão elevada, apresentam uma perda de protensão por relaxação.

Por outro lado, a peça de concreto, onde os cabos se ancoram, não mantém seu comprimento inicial; ela sofre encurtamentos com o decorrer do tempo, provocando queda de tensão nos cabos (encurtamento da mola). Os encurtamentos do concreto se devem a dois fenômenos:

- retração: encolhimento volumétrico do concreto, decorrente da perda de água;
- fluência: encurtamento do concreto, sob efeito da compressão permanente provocada pela protensão.

As perdas: causadas pela relaxação do aço e pela retração e fluência do concreto, são denominadas perdas lentas, retardadas ou progressivas.

Os sistemas de protensão, com cabos de aço, dividem-se em duas categorias:

- sistemas com armadura pré-tracionada;
- sistemas com armadura pós-tracionada.

Os sistemas com armadura pós-tracionada, quanto à ligação entre o cabo e o concreto, distinguem-se em duas categorias:

- cabos aderentes;
- cabos não aderentes.

Os cabos de aço:

- não aderentes: têm suas extremidades ancoradas no concreto, porém não se acham incorporados à estrutura, não havendo aderência entre os cabos e o concreto;
- aderentes: têm as extremidades ancoradas no concreto e o próprio cabo ligado à estrutura, com aderência.

Neste trabalho, com base em Prates Júnior (1992) e nas considerações apresentadas acima, implementaram-se três modelos matemáticos distintos, para cada um dos sistemas de protensão, utilizados em peças de concreto protendido: pré-tração, pós-tração com aderência e pós-tração sem aderência.

A seguir, será discutido cada um dos três modelos matemáticos implementados.

6.2 PRÉ-TRAÇÃO

O sistema de pré-tração visto na Fig. 6.1, conhecido, também, como sistema de protensão com aderência inicial, é caracterizado por se aplicar uma pré-determinada quantidade de tensão nos fios ou cordoalhas de aço e se utilizarem apoios provisórios e independentes da peça, antes da introdução do concreto. Enquanto a tensão no aço é mantida, o concreto é lançado. Após o endurecimento do concreto, desfaz-se a ligação entre a armadura de protensão com os referidos apoios, estabelecendo-se aderência entre os dois materiais.

Neste sistema, ocorrem perdas imediatas e, também, perdas, ao longo do tempo, de tensão na armadura protendida.

As perdas imediatas de tensão, a qual sofre uma queda, antes da aplicação da protensão, ocorridas no aço protendido, conforme a Fig. 6.2, são devidas ao escorregamento dos fios na ancoragem e, também devidas à retração inicial do concreto e à relaxação inicial da armadura.

No capítulo 5, mostrou-se que tanto o concreto, através dos efeitos de fluência e retração, quanto o aço protendido, através da relaxação, sofrem deformações ao longo do tempo. Por este motivo, além das perdas imediatas, a tensão inicial, aplicada na protensão, sofre perdas progressivas, as quais são consideradas, automaticamente, pelo modelo computacional implementado.

Neste sistema de protensão, considerando-se aderência perfeita entre o concreto e o aço, admite-se que ocorre compatibilidade de deformação entre os pontos ao longo da barra e os pontos no concreto, localizados na mesma posição. Assim, os incrementos de tensão, de deformação total, de deformação elástica e de deformação viscoplástica, além do equilíbrio com as forças residuais aplicadas, são calculados conforme mostrado no capítulo 2.

6.3 PÓS-TRAÇÃO COM ADERÊNCIA

No sistema de pós-tração com aderência visto na Fig. 6.3, ou no sistema de protensão com aderência posterior, os cabos são, em geral, revestidos por bainhas estanques, colocadas no interior das formas. Assim, durante a concretagem da peça, os cabos ficam isolados do concreto, condição essencial para que eles possam ser, posteriormente, esticados e ancorados em partes da própria peça, ao contrário do que ocorre no sistema de pré-tração. Após a protensão de cada cabo, injeta-se nata de cimento na bainha, para se estabelecer aderência entre o aço e a peça, ao longo de todo o cabo.

Depois da liberação dos cabos, a força de protensão, aplicada na armadura pelo equipamento de protensão, é transmitida à peça, em forma de carga externa de compressão, variável no tempo.

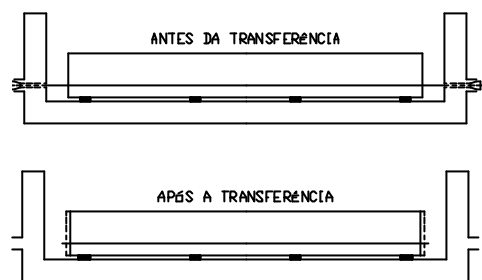


FIGURA 6.1 - Sistema de pré-tração

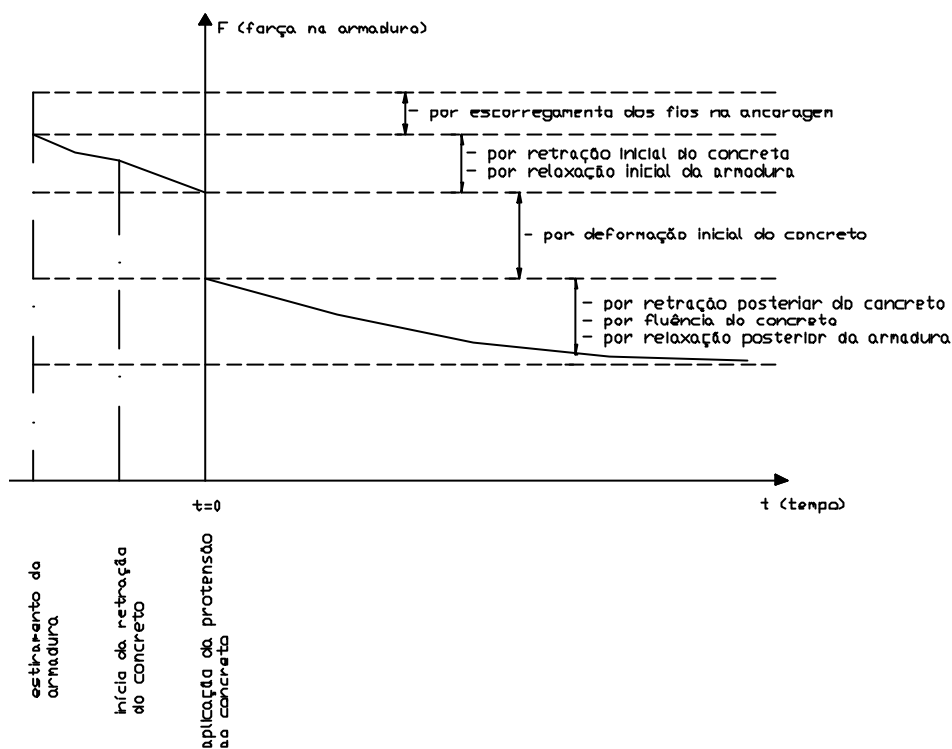


FIGURA 6.2 - Perdas na pré-tração

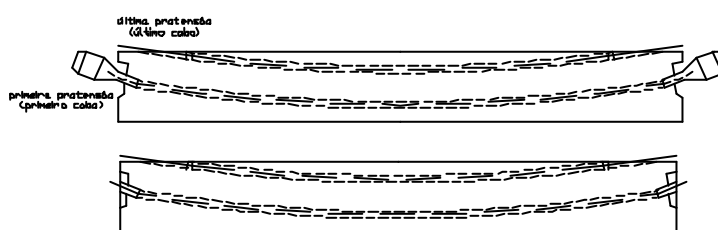


FIGURA 6.3 - Sistema de pós-tração

Esta carga aplicada é transformada em forças nodais equivalentes para o elemento de concreto correspondente, conforme a Fig. 6.4. A força axial de compressão F_p , devida à barra protendida, é dada por:

$$F_p = \sigma_{p0} A_p, \quad (6.1)$$

onde:

- σ_{p0} é a tensão inicial de protensão, $t = 0$, no primeiro ponto de integração, com $s = 0$;
- A_p é a área da seção transversal da armadura protendida.

Tal força, F_p , decomposta nas direções cartesianas globais, x e y , fica:

$$F_{px} = F_p \cos \alpha$$

$$F_{py} = -F_p \operatorname{sen} \alpha . \quad (6.2)$$

As forças nodais equivalentes, F_{pxi} e F_{pyi} , são obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} (F_{px})_i \\ (F_{py})_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{px} \\ F_{py} \end{Bmatrix}, \quad (6.3)$$

onde N_i é a função de forma para o nó i do elemento de concreto.

Neste tipo de protensão, ocorrem perdas imediatas, devidas a diversos fatores, conforme a Fig. 6.5:

- deformação imediata do concreto pelo estiramento do primeiro cabo e dos cabos restantes;
- atrito ao longo da armadura protendida;
- escorregamento dos fios na ancoragem;
- acomodação da ancoragem;
- retração e fluência iniciais do concreto;
- relaxação do aço protendido.

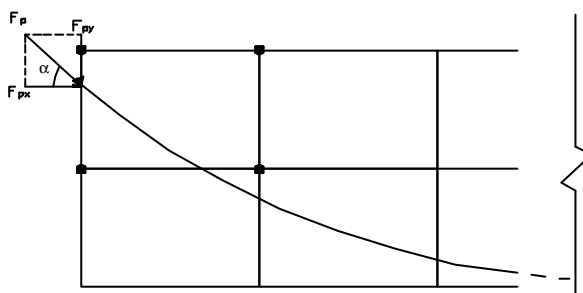


FIGURA 6.4 - Representação das forças nodais equivalentes, devidas à carga de protensão

A perda de tensão, por atrito no aço protendido, é calculada, segundo Vasconcelos (1980), por:

$$\sigma_{p0} = \sigma_{pi} \exp[-\mu (\Delta\alpha + 0,0001s)], \quad (6.4)$$

sendo:

- σ_{p0} a tensão inicial de protensão, $t = 0$, num ponto qualquer ao longo do cabo;
- σ_{pi} a tensão de protensão, aplicada na extremidade do cabo, $s = 0$;
- $\Delta\alpha$ a deflexão geométrica total, ou ângulo de desvio;
- s a distância entre um ponto qualquer ao longo do cabo e a sua extremidade;
- μ o coeficiente de atrito, dado por:

$$\mu = \begin{cases} 0,50 & \text{para armadura e concreto em contato direto} \\ 0,30 & \text{contato direto entre armadura de barras ou fios com mossas} \\ & \text{ou saliências e bainha metálica} \\ 0,25 & \text{contato entre armadura de fios paralelos ou cordoalhas e bainha metálica} \end{cases}$$

No modelo computacional, apresentado neste trabalho, a variação de tensão, ao longo do cabo, é verificada nos pontos de integração do aço. O ponto de integração do cabo, situado mais próximo do ponto de aplicação da carga de protensão, tem o comprimento $s = 0$. O parâmetro $\Delta\alpha$ da barra mede a variação da inclinação dos pontos de integração, ao longo da barra, em relação à inclinação do ponto de comprimento $s = 0$. Para barras retas, $\Delta\alpha = 0$.

A definição dos parâmetros, $\Delta\alpha$ e s está ilustrada na Fig. 6.6.

Segundo Vasconcelos (1980), não é possível executar uma ancoragem perfeita. Todas, mesmo aquelas baseadas na ação de parafusos, possuem folgas. Com a carga elevada que o cabo aplica à ancoragem, esta se deforma e, durante o processo, há um pequeno retrocesso do cabo. Esse retrocesso depende de cada tipo de ancoragem e seu valor é fixado no catálogo de cada fabricante. Além disso, pode haver algum deslizamento do cabo, na própria ancoragem, antes de se efetivar seu agarramento por atrito ou por engrenamento no corpo de ancoragem. Esses deslizamentos são fixados por meio de medidas experimentais. Neste trabalho, supõe-se que, nas forças de protensão aplicadas, as perdas desta natureza já tenham sido consideradas.

Da mesma forma que no sistema de pré-tração, ocorrem, também, perdas progressivas, pelos mesmos motivos apresentados anteriormente e que são consideradas automaticamente pelo modelo computacional, apresentado neste trabalho.

Os incrementos de tensão, de deformação total, de deformação elástica e de deformação viscoplástica, além do equilíbrio com as forças residuais aplicadas, são, também, calculados, conforme mostrado no capítulo 2, acrescentando-se a carga externa de protensão, além da tensão inicial na armadura protendida.

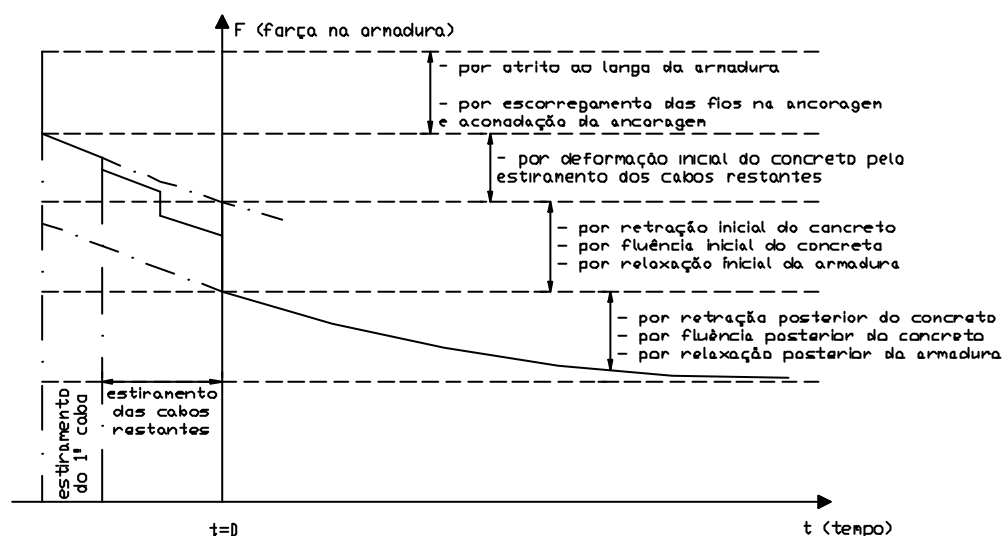


FIGURA 6.5 - Perdas na pós-tração

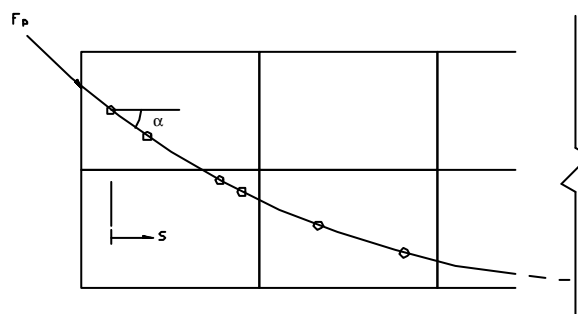


FIGURA 6.6 - Definição dos parâmetros s e $\Delta\alpha$

6.4 PÓS-TRAÇÃO SEM ADERÊNCIA

Segundo Barbieri, Gastal e Schwingel (2001), protensão não aderente é aquela na qual a armadura fica livre para movimentar-se, ao longo de seu perfil, em todas as seções do elemento protendido, menos nas de ancoragem.

O comportamento dos elementos com protensão não aderente, submetidos à flexão, é complexo. A ausência de aderência faz com que a compatibilidade de deformações não seja verificada e a tensão na armadura dependa da deformação do membro como um todo e não de uma seção apenas.

Mojtahedi e Gamble (1978) verificaram que, em membros de concreto protendido sem aderência, a armadura de protensão é vinculada ao concreto apenas nas extremidades da estrutura ou em pontos intermediários. Nas demais seções o aço pode mover-se livremente, em relação ao concreto, ao longo do perfil de protensão e a hipótese da compatibilidade de deformações não é verificada.

Assim, Figueras e Póvoas (1994) e Moons e Burns (1997) definiram que a principal característica dos elementos com protensão não aderente, submetidos à flexão, é que a variação de comprimento na armadura não aderente é equivalente à variação total de comprimento do concreto, ao longo do perfil de protensão. Existe, portanto, compatibilidade de deslocamentos em relação ao conjunto.

Considerando-se aderência perfeita, à seção de momento fletor máximo correspondem as maiores deformações no concreto e, portanto, as maiores deformações na armadura. No entanto, se o movimento relativo entre concreto e aço é permitido, quando ocorre a rotação da seção de maior sollicitação, ocorre também o deslizamento da armadura não aderente até que o equilíbrio de tensões ao longo de todo o cabo seja verificado.

Pode-se dizer, então, que a tensão na armadura não aderente não depende apenas da curvatura de cada seção independentemente, mas sim das curvaturas de todas as seções ao longo do elemento estrutural (Naaman & Alkhairi, 1991). Assim, convencionalmente, pode-se dizer que o desempenho de um elemento com protensão não aderente é membro-dependente, e não seção-dependente, como é o caso do concreto armado e protendido aderentes (Naaman & Alkhairi, 1991; Moon & Burns, 1997).

Esta compatibilidade de deslocamentos e não de deformações, em cada seção transversal, faz com que, segundo Mattock et al (1971), ocorra uma distribuição, praticamente, uniforme de tensões, ao longo do comprimento da armadura não aderente, função da deformação média do concreto, ao longo do perfil de protensão.

Desta forma, a única diferença, considerada neste trabalho, entre os modelos para elementos pós-tracionados com e sem aderência, é a obtenção da força de protensão, que, para o caso de não haver aderência entre a armadura protendida e o concreto, é obtida por:

$$F_p = A_p \left[\sum_{j=1}^{np} (\sigma_{p0})_j \right] / np, \quad (6.5)$$

onde np é o número total de pontos de integração, ao longo de todo o cabo protendido.

As demais considerações, feitas para membros pós-tracionados de concreto protendido com aderência, também valem para elementos submetidos à pós-tração sem aderência, com exceção das parcelas das forças equilibradas e das “pseudo-cargas”, que são consideradas nulas, devidas a este tipo de protensão.

Vale lembrar que não se considerou a rigidez dos cabos protendidos nas seções de concreto.

7 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO

7.1 INTRODUÇÃO

O modelo computacional foi implementado, utilizando-se o software MATLAB. Este software possui uma linguagem de programação de alto nível, cuja principal característica é a fácil manipulação e armazenamento de dados na forma matricial, muito útil quando se trabalha com o método dos elementos finitos. A escolha deste software se deu também, porque este contém poderosas ferramentas gráficas, onde puderam ser criados programas para introdução dos dados de entrada no problema, que não são poucos e, também, para melhor visualização e compreensão dos resultados obtidos. Elaboraram-se, então, três programas distintos para pré-processamento, processamento e pós-processamento. Os programas de pré-processamento e pós-processamento são operados de forma iterativa e foram desenvolvidos com um recurso do MATLAB chamado GUI (Graphics User Interface), bastante útil para a construção destes tipos de programas.

A seguir, descreve-se, detalhadamente, como funcionam os três programas: de pré-processamento, processamento e pós-processamento.

7.2 PRÉ-PROCESSAMENTO: ENTRADA DE DADOS

Devido ao fato do modelo computacional, desenvolvido neste trabalho, ter um grande número de variáveis de entrada, foi criado um programa de pré-processamento, de fácil manipulação, onde, sem o prévio conhecimento dos nomes das variáveis que constituem o programa principal de processamento, se é capaz de gerar o arquivo de entrada de dados do problema a ser estudado.

O programa é constituído de várias telas, onde se podem digitar os dados de entrada. Cada tela corresponde a um tipo de dado, tais como, por exemplo, coordenadas dos nós dos elementos, conectividades, propriedades do concreto e da armadura (passiva e de protensão), dados ambientais etc. As unidades-padrão do programa são [cm] e [kN].

Ao final de todas as telas, será montado um arquivo de texto, formatado de acordo com o programa principal, que poderá ser aberto em qualquer editor de texto, caso for preciso se modificar algum dado sem precisar fornecer tudo novamente.

A seguir, serão apresentadas as diversas telas que correspondem o programa e a maneira correta de utilizá-las.

7.2.1 Primeira tela

A tela inicial, Fig. 7.1, solicita o nome do trabalho em questão e o diretório onde serão gravados os dados. Caso o diretório não for informado, os dados serão gravados no diretório corrente.

Depois de completado o campo, é necessário que se aperte a tecla ENTER, para o botão PRÓXIMA ser habilitado e para se prosseguir com a entrada de dados.

7.2.2 Segunda tela

A segunda tela, Fig. 7.2, corresponde aos dados iniciais do programa. São solicitados:

- número total de nós. Incluem tanto os nós dos elementos de concreto quanto os nós dos elementos de armadura;
- número total de elementos de concreto;
- número de barras de armadura: soma das armaduras passivas e protendidas;
- número de nós de contorno: nós que têm seu deslocamento impedido;
- número de nós por elemento: o elemento pode ter quatro, oito ou nove nós;
- número de materiais diferentes de armadura passiva: número de barras de armadura passiva com características diferentes;
- número de materiais diferentes de armadura protendida: número de barras de armadura protendida com características diferentes;
- ordem de integração numérica, podendo ser dois, três ou quatro pontos;
- número de carregamentos em que a estrutura será submetida: cada carregamento pode ser constituído de até três tipos de carga (nodal, gravitacional e distribuída), que será mostrado adiante;
- fator de tolerância: fator que define a convergência do incremento de carregamento aplicado.

Da mesma forma que a tela anterior, após de se completar todos os campos, deve-se apertar a tecla ENTER. Aqui, duas opções são habilitadas, a tecla ANTERIOR, que permite voltar à tela anterior e modificar algum dado, ou a tecla PRÓXIMA, abrindo a tela seguinte. Se algum campo permanecer em branco, estas opções não ficarão disponíveis.

7.2.3 Terceira tela

A terceira tela, Figs. 7.3.a e 7.3.b, são pedidas as conectividades dos elementos de concreto e as espessuras de cada elemento, respectivamente.

Primeiramente, é preciso acionar o botão CONETIVIDADES. Irá, então, abrir uma tabela com o número de linhas correspondente ao número de elementos de concreto e o número de colunas igual ao número de nós por elemento, conforme foi informado na tela anterior. Após preencher esta tabela, é necessário apertar-se a tecla ACCEPT. A tabela será fechada e o botão ESPESSURA será ativado. Apertando-se este último botão, uma tabela com o número de colunas igual ao número de elementos de concreto irá se abrir, onde se poderá informar a espessura de cada elemento, não precisando ser, necessariamente, igual para todos os elementos (no caso de uma viga T, por exemplo). Apertando-se o botão ACCEPT, esta tela irá fechar e os botões ANTERIOR e PRÓXIMA ficarão disponíveis. Vale lembrar que a qualquer momento se poderá alterar os valores das tabelas, utilizando-se o botão correspondente ao que se quer modificar.

7.2.4 Quarta tela

A quarta tela funciona, basicamente, como a tela anterior. Nesta tela, Fig. 7.4, pede-se para informar o número das propriedades do material armadura, o número da barra de armadura da qual é continuação (para barras curvas e poligonais que não sejam inteiras), quantos nós definem sua geometria (dois nós para o caso dela ser reta ou três nós no caso dela ser curva) e suas conectividades.

7.2.5 Quinta tela

A quinta tela, Fig. 7.5, corresponde às coordenadas dos nós dos elementos de concreto e armadura. Igualmente, após apertar-se o botão COORDENADAS, abrirá uma tabela com o número de linhas igual ao número total de nós, e o número de linhas igual a dois, direções x e y . Então, se poderá digitar as coordenadas de todos os nós.

7.2.6 Sexta tela

Na sexta tela, Fig. 7.6, são pedidos os nós vinculados, as restrições em x e y (1 se o nó estiver impedido de se deslocar, ou 0 se o nó estiver livre), além dos valores prescritos de deslocamentos em x e y para o referido nó.

7.2.7 Sétima tela

Na sétima tela, o primeiro campo corresponde à data de início de retração do concreto e o segundo campo à umidade relativa do ar onde se encontra a estrutura.

Após isso, a tabela TEMPERATURA pede o período de duração, Δt_i , e o valor da temperatura, T_i , no correspondente período. As cinco linhas da tabela correspondem a cinco períodos diferentes, caso existam. A FIG.7.7 ilustra esta tela.

7.2.8 Oitava tela

Conforme a Fig. 7.8, na oitava tela, serão informadas a resistência média à compressão do concreto, aos 28 dias, a espessura fictícia do concreto e o tipo de cimento usado para este concreto.

7.2.9 Nona tela

Seguindo as instruções da nona tela, Fig. 7.9, pede-se para completar a tabela de propriedades da armadura passiva, informando o número de barras, o módulo de elasticidade do aço, o diâmetro da barra, a tensão de escoamento e o tipo de aço, para cada tipo de barra.

7.2.10 Décima tela

Do mesmo modo que a tela anterior, a décima tela, Fig. 7.10, mostra como se devem informar as propriedades da armadura protendida. O número de barras, a tensão de ruptura, a tensão inicial, o diâmetro da barra, a data de protensão, o tipo de protensão, o tipo de relaxação, o coeficiente de atrito entre o cabo e a bainha e o módulo de elasticidade do aço.

7.2.11 Décima primeira tela

A última tela do programa, Figs. 7.11 a 7.13, corresponde aos carregamentos a que é submetida a estrutura.

Deve-se informar a data e o número de incrementos de cada carregamento. Após isso, deve-se selecionar o tipo de carregamento. Por simplicidade, cada carregamento corresponde a um tipo de carga. Assim, por exemplo, cada carregamento pode ser composto por uma carga nodal, ou uma carga gravitacional, ou uma carga distribuída.

Se houver carga nodal, será pedido o número de nós carregados. Após isso, deve-se apertar o botão VALOR para informar o valor das cargas nodais.

Para carga gravitacional serão pedidos o ângulo de inclinação desta carga com o eixo Y, conforme a Fig. 7.14, e o valor da constante de gravidade.

Existindo carga distribuída, deve-se informar o número de elementos carregados. Após isso, deve-se apertar o botão VALOR, para digitar o número do elemento, o número dos dois nós carregados, se for o caso de quatro nós por elemento o valor das duas componentes normais e tangenciais, ou o número dos três nós carregados, se for o caso de oito ou nove nós por elemento e o valor das três componentes normais e tangenciais.

Após serem fornecidos todos os dados de carregamento, a tecla FIM estará habilitada. Apertando-se esta tecla, a tela será fechada e o arquivo de dados estará pronto para ser rodado no programa principal de processamento.

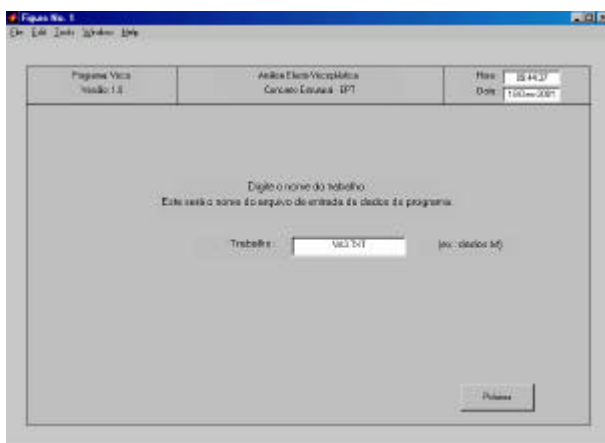


FIGURA 7.1 - Arquivo de entrada

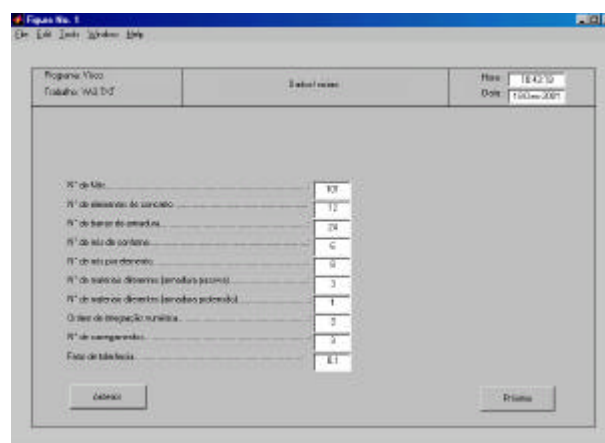


FIGURA 7.2 - Dados iniciais

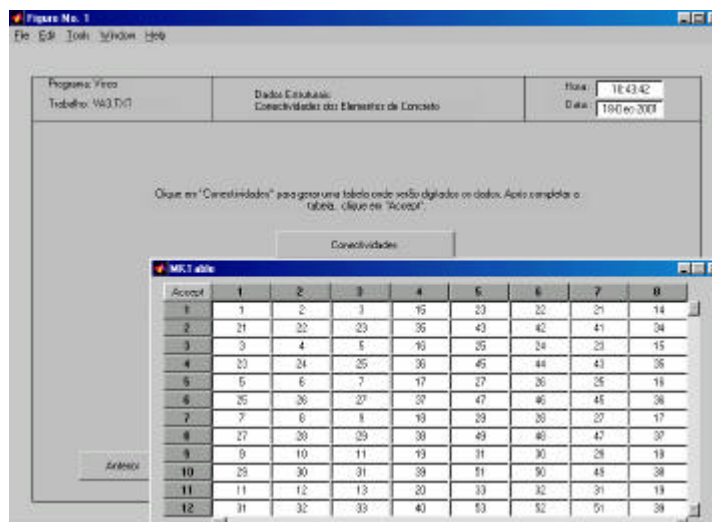


FIGURA 7.3.a - Dados estruturais - conectividade dos elementos de concreto

Programa: Vinte
Trabalho: VAI.DAT

Dados Estruturais:
Conectividade dos Elementos de Concreto

Hora: 10:42:42
Data: 19/01/2011

Click em "Especiar" para gerar uma tabela onde serão digitados os dados. Após completar a tabela, clique em "Accept".

Accept	1	2	3	4	5	6	7
Especiar	16	16	16	16	16	16	16

Buttons: Especiar, Accept

FIGURA 7.3.b - Dados estruturais - espessura dos elementos de concreto

Programa: Vinte
Trabalho: VAI.DAT

Dados Estruturais: Coordenadas

Hora: 11:47:39
Data: 19/01/2011

Click em "Coordenar" para gerar uma tabela onde serão digitados os dados. Após completar a tabela, clique em "Accept".

Buttons: Coordenar, Accept

Accept	X	Y
1	0.000	0.000
2	17.500	0.000
3	35.000	0.000
4	52.500	0.000
5	70.000	0.000
6	87.500	0.000
7	105.000	0.000
8	122.500	0.000
9	140.000	0.000
10	157.500	0.000

FIGURA 7.5 - Dados estruturais - coordenadas

Programa: Vinte
Trabalho: VAI.DAT

Dados Estruturais:
Conectividade das Barras de Aço

Hora: 11:09:43
Data: 19/Dec/2011

Click em "Conectividade" para gerar uma tabela onde serão digitados os dados. Após completar a tabela, clique em "Accept".

Buttons: Conectividade, Accept

Accept	Prog	Dist	Nº Nós	Conect1	Conect2	Conect3
1	1	0	2	54	55	0
2	4	0	2	56	57	0
3	3	0	2	58	59	0
4	2	0	2	60	61	0
5	2	0	2	62	63	0
6	2	0	2	64	65	0
7	2	0	2	66	67	0
8	2	0	2	68	69	0
9	2	0	2	70	71	0
10	2	0	2	72	73	0

FIGURA 7.4 - Dados estruturais - conectividades das barras de aço

Programa: Vinte
Trabalho: VAI.DAT

Dados Estruturais: Vinculação

Hora: 12:01:39
Data: 19/01/2011

Click em "Vinculação" para gerar uma tabela onde serão digitados os dados. Após completar a tabela, clique em "Accept".

Buttons: Vinculação, Accept

Accept	Nº	Restri. X	Restri. Y	Desloc. X	Desloc. Y
1	1	0	1	0.000	0.000
2	13	1	0	0.000	0.000
3	20	1	0	0.000	0.000
4	33	1	0	0.000	0.000
5	40	1	0	0.000	0.000
6	53	1	0	0.000	0.000

FIGURA 7.6 - Dados estruturais - vinculação

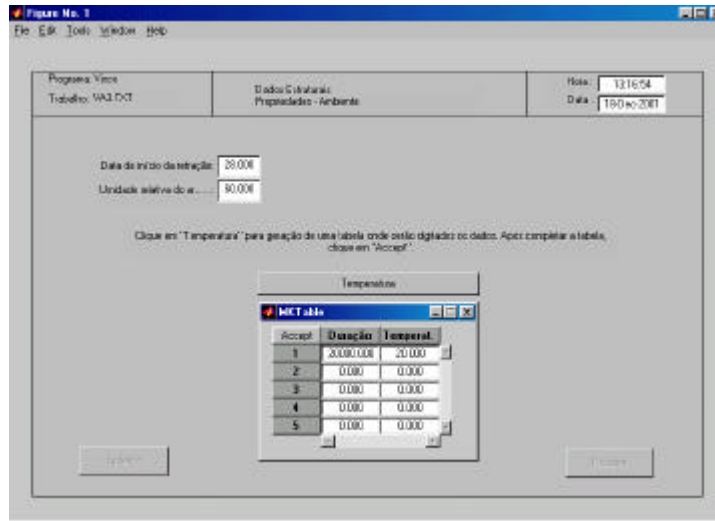


FIGURA 7.7 - Propriedades - ambiente

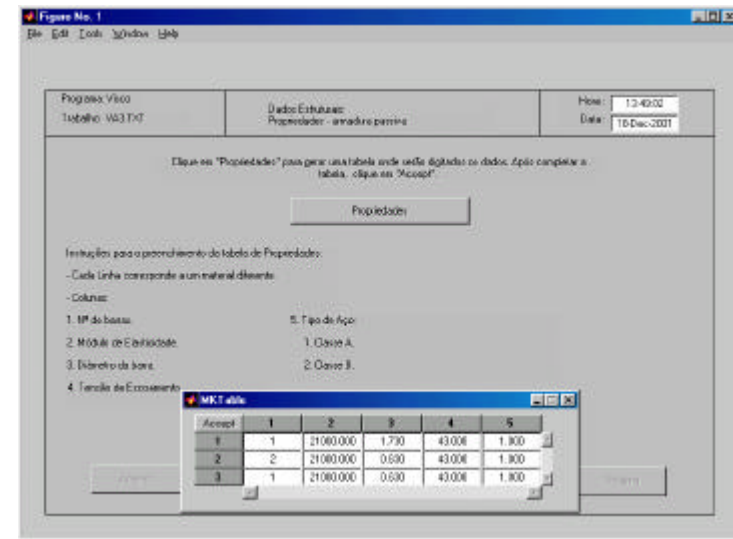


FIGURA 7.9 - Propriedades - armadura passiva

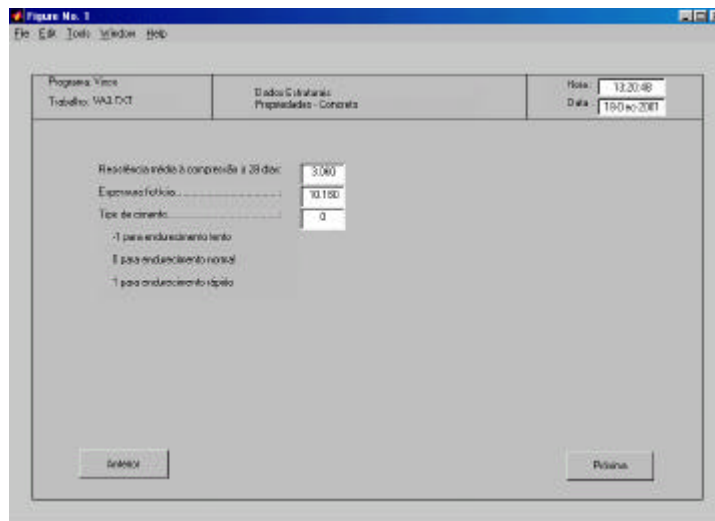


FIGURA 7.8 - Propriedades - concreto

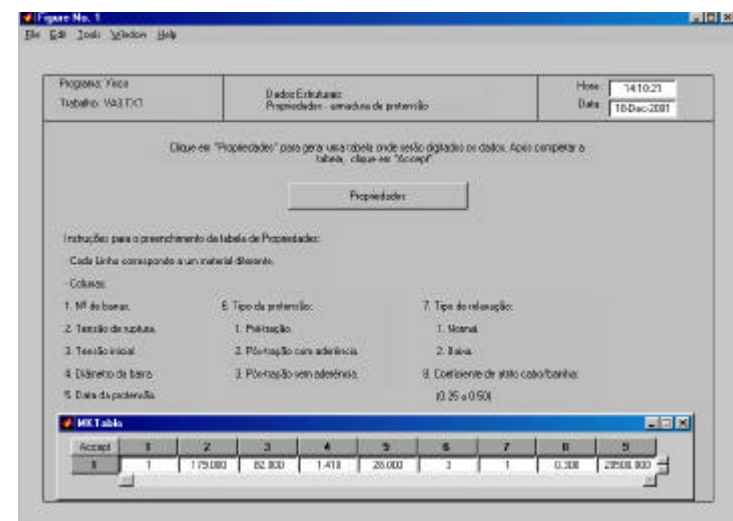


FIGURA 7.10 - Propriedades - armadura de protensão

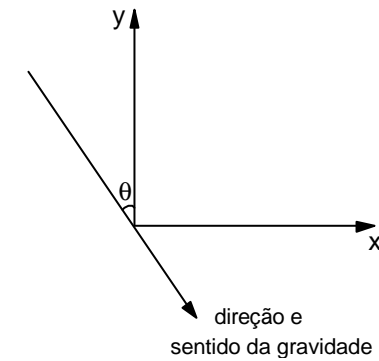
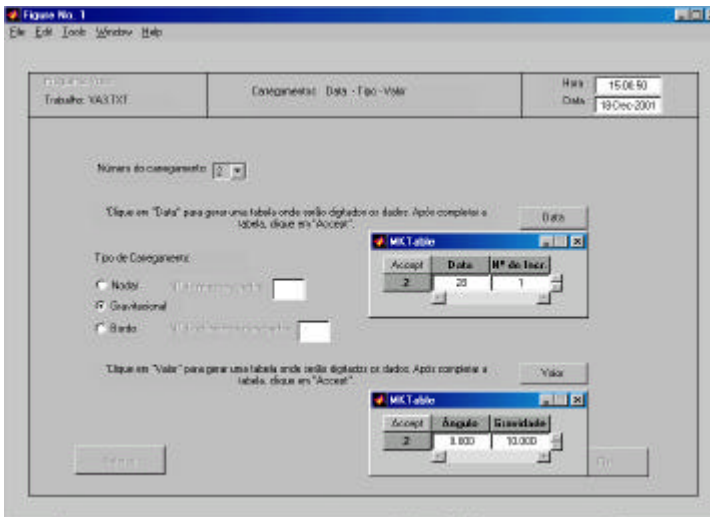
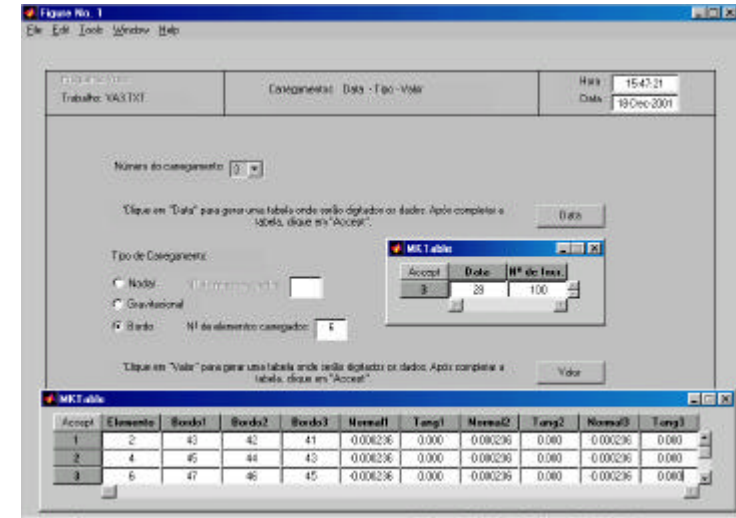
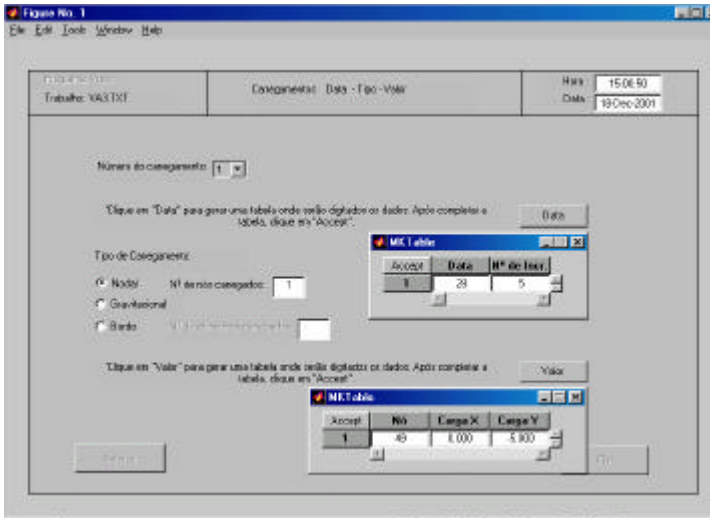


FIGURA 7.14 - Convenção do ângulo de gravidade

7.3 PROCESSAMENTO

7.3.1 Algoritmo de solução

O modelo computacional, desenvolvido nesta dissertação, propõe-se a analisar peças de concreto estrutural com comportamento elasto-viscoplástico. Para tanto, utilizaram-se dois procedimentos distintos para simular tal comportamento.

Numa primeira fase, determina-se a resposta da estrutura ao longo do tempo. Calcula-se o estado de deformação da estrutura, decorrido um certo período de tempo da aplicação do carregamento. Há um processo incremental do tempo real (em dias), onde ocorrem os efeitos ao longo do tempo na estrutura, fluência e retração no concreto e relaxação na armadura protendida. Neste trabalho adotou-se um intervalo de tempo fixo de um quarto de dia. Esta resposta representa um comportamento viscoelástico dos materiais, correspondente à etapa 1 do modelo computacional.

Em outra fase, procura-se obter a resposta da estrutura, submetida a carregamento instantâneo. Busca-se o equilíbrio da estrutura, após a aplicação do incremento de carga. Esta fase corresponde ao estado estável, descrito no capítulo 2, onde o comportamento elastoplástico da estrutura é analisado. Corresponde à etapa 2 do modelo computacional.

No modelo computacional, permite-se que sejam aplicados diversos carregamentos em datas diferentes, entre as quais avaliam-se os efeitos ocorridos ao longo do tempo. Assim, ambas as etapas são executadas sucessivamente, de acordo com as datas especificadas dos carregamentos.

A Fig. 7.15 ilustra o fluxograma, correspondente ao modelo computacional.

7.3.2 Implementação das etapas de solução para o concreto

Na etapa 1, correspondente ao comportamento viscoelástico, adotou-se para o concreto um modelo de cinco camadas, conforme apresentado no capítulo 5, onde são levados em conta os efeitos de fluência e retração. Nesta etapa, distribui-se a tensão total, para cada ponto de integração, para cada uma das cinco camadas, conforme o valor do seu módulo de elasticidade longitudinal.

A etapa 2 corresponde ao comportamento elastoplástico. No início desta etapa, calcula-se, em cada ponto de integração, uma tensão total equivalente, a qual é a soma das tensões em cada uma das cinco camadas, obtidas na etapa 1, anteriormente.

Em ambas as etapas, os pontos de integração são verificados, quanto ao critério de fissuração. As tensões, nos pontos fissurados, passam a sofrer uma redução, conforme apresentado no capítulo 4.

7.3.3 Implementação das etapas de solução para o aço

Em cada etapa de solução, implementaram-se diferentes procedimentos, sintetizados na Tab. 7.1 para a análise do comportamento elasto-viscoplástico conforme o tipo de aço.

7.3.4 Armazenamento dos resultados obtidos para pós-processamento

Para cada incremento de carregamento aplicado, após a etapa 2, obtida a convergência, os dados de deslocamentos nodais, de tensões totais no concreto e no aço para cada ponto de integração, além do vetor que indica o estado dos pontos de integração e as matrizes,

contendo os co-senos diretores das fissuras, são armazenados em matrizes tri ou quadridimensionais.

Estes dados serão utilizados no programa de visualização gráfica, mostrado adiante, onde, de uma forma iterativa, pode-se obter uma melhor compreensão dos resultados obtidos, os quais também podem ser vistos em um arquivo de saída.

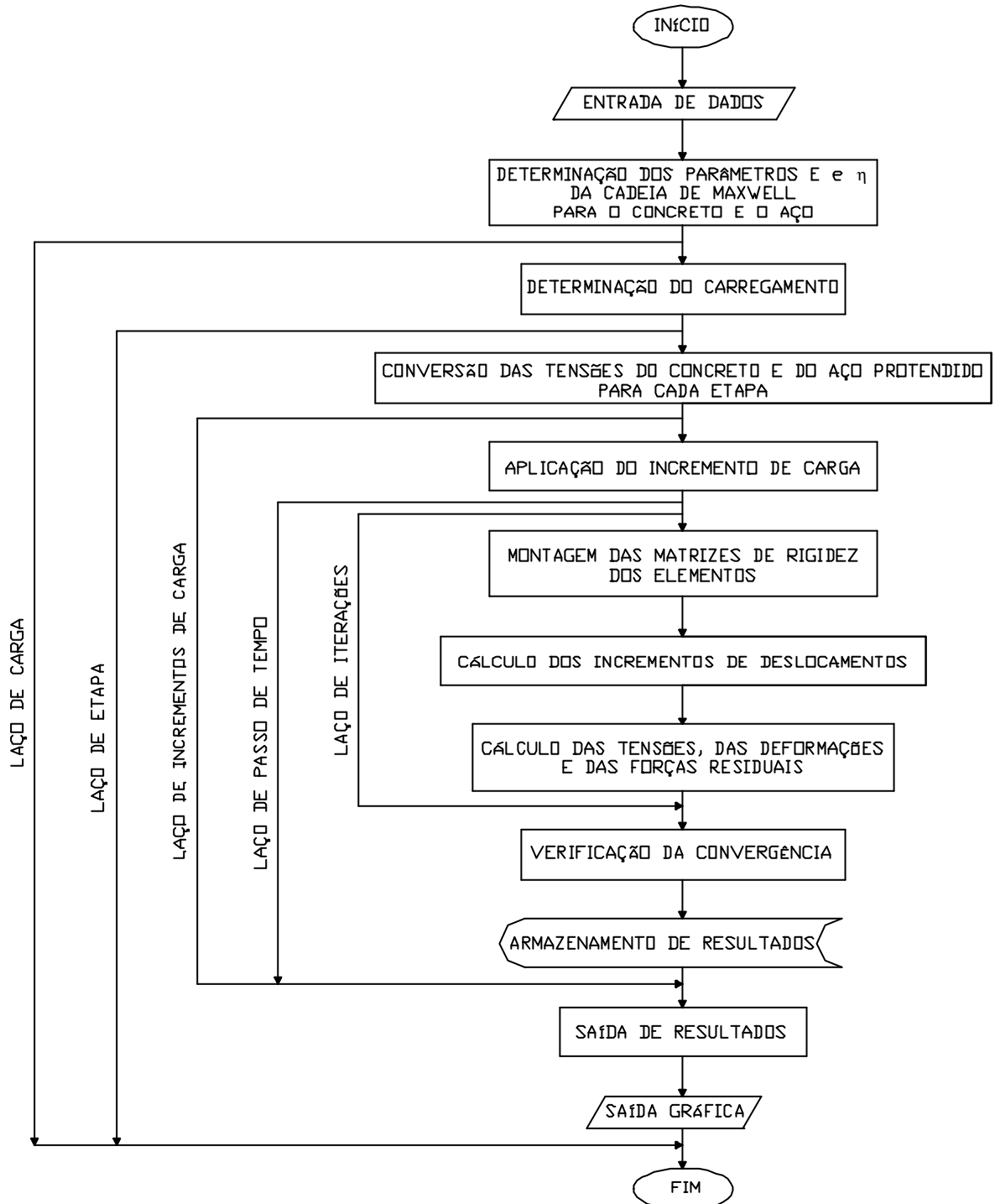


FIGURA 7.15 - Fluxograma do modelo computacional

TABELA 7.1 - Diferentes procedimentos das etapas de solução para o aço

ETAPA	AÇO	σ_y	γ_s	FORÇAS EQUILIBRADAS	$F_{px,y}$	
1	passivo ou frouxo	0	0	terceira parcela da equação (2.28)	0	
	pré-tração			se $t \geq t_p$ equação (5.11), senão, 0	se $t \geq t_p$ terceira parcela da equação (2.31), senão, 0	se $t \geq t_p$ equação (6.3), senão, 0
	pós - tração com aderência				0	se $t \geq t_p$ equação (6.5), senão, 0
	pós - tração sem aderência					
2	passivo ou frouxo	f_y	1×10^{-5}	terceira parcela da equação (2.28)	0	
	pré-tração	$0,9 f_{ptk}$		se $t \geq t_p$ terceira parcela da equação (2.28), senão, 0	se $t \geq t_p$ equação (6.3), senão, 0	
	pós - tração com aderência			0	se $t \geq t_p$ equação (6.3), senão, 0	
	pós - tração sem aderência					

Legenda:

- σ_y = tensão de escoamento;
- γ_s = coeficiente de fluidez;
- Forças equilibradas = $B_s \sigma_s dV$;
- $F_{px,y}$ = forças de compressão na pós-tração.

Assim, têm-se, após a aplicação de todos os incrementos de todos os carregamentos na estrutura:

- para os deslocamentos nodais:

$$\text{TDISPT} (1, \text{NTOTV}, 1 \text{ até } \text{NTI}) = \text{TDISP} (1, \text{NTOTV}),$$

onde TDISP é o vetor que contém os deslocamentos nodais da estrutura; TDISPT é a matriz tridimensional, que armazena os vetores, TDISP, para todos os incrementos de carregamentos aplicados à estrutura; NTOTV é o número total de graus de liberdade dos elementos de concreto, sendo dois graus de liberdade por nó e NTI é o número total de incrementos de todos os carregamentos aplicados na estrutura;

- para as tensões totais no concreto:

$$\text{STRSTT} (3, \text{NELEM} \times \text{NGAUS2}, 1 \text{ até } \text{NTI}) = \text{STRST} (3, \text{NELEM} \times \text{NGAUS2}),$$

onde STRST é a matriz que contém as tensões totais no concreto em cada ponto de integração, cujas dimensões são três linhas, onde na primeira linha se encontra a tensão σ_x , na segunda linha a tensão σ_y e na terceira linha a tensão τ_{xy} , e o número de colunas é o número de elementos, NELEM, multiplicado pelo número de pontos de integração dos elementos de concreto ($\text{NGAUS2} = \text{NGAUS} \times \text{NGAUS}$); STRSTT é a matriz tridimensional, que armazena todas as matrizes, STRST, para todos os incrementos, de carregamentos aplicados na estrutura. Adotou-se, neste trabalho, NGAUS igual a três, tanto para o concreto, quanto para a armadura;

- para as tensões totais na armadura:

$$\text{SIGMAT} (1, \text{NSEGM} \times \text{NGAUS}, 1 \text{ até } \text{NTI}) = \text{SIGMA} (1, \text{NSEGM} \times \text{NGAUS}),$$

onde SIGMA é o vetor que contém as tensões na armadura, em cada ponto de integração, com dimensão igual a uma linha, correspondente à tensão σ_s , e NSEGM x NGAUS colunas. NSEGM é o número total de segmentos de armadura; SIGMAT é a matriz tridimensional, que armazena todos os vetores sigma, para todos os incrementos de carregamentos aplicados na estrutura;

- para o estado de integridade dos pontos de integração:

$$\text{ISTATT} (1, \text{NELEM} \times \text{NGAUS2}, 1 \text{ até } \text{NTI}) = \text{ISTAT} (1, \text{NELEM} \times \text{NGAUS2}),$$

onde ISTAT é o vetor que contém o estado de integridade de todos os pontos de integração dos elementos de concreto ($\text{NELEM} \times \text{NGAUS2}$) e ISTATT é a matriz tridimensional que armazena todos os vetores ISTAT, para todos os incrementos de carregamentos aplicados na estrutura;

- para os co-senos diretores das fissuras de cada ponto de integração:

$$\text{BETAMTT} (3, 3, \text{NELEM} \times \text{NGAUS2}, 1 \text{ até } \text{NTI}) = \text{BETAMTT} (3,3, \text{NELEM} \times \text{NGAUS2}),$$

onde:

$$\text{BETAMT} (3, 3, 1 \text{ até } \text{NELEM} \times \text{NGAUS2}) = \text{BETAM} (3,3),$$

na qual, BETAM é a matriz três por três, contendo os co-senos diretores da direção normal ao plano da primeira fissura para cada ponto de integração do concreto; esta matriz é armazenada na matriz tridimensional BETAMT, para todos os pontos de integração do concreto, que por sua vez é armazenada na matriz BETAMTT, quadridimensional, para todos os incrementos de carregamentos aplicados na estrutura.

Com as matrizes acima, além dos dados iniciais, pode-se representar, graficamente, todos os resultados obtidos pela análise de estruturas de concreto estrutural, através do modelo computacional.

Para tanto, todos os dados, após o processamento, são salvos em um arquivo binário chamado VISCO.MAT. Com este arquivo, pode-se utilizar o programa de visualização gráfica dos resultados, a qualquer momento, sem a necessidade de se re-processar a análise.

A seguir, descrevem-se, detalhadamente, os recursos do programa de visualização gráfica dos resultados e a maneira correta de utilizá-lo.

7.4 PÓS - PROCESSAMENTO

Com a utilização do método dos elementos finitos para a análise de problemas cada vez mais complexos, já que este método fornece um volume muito grande de informações, há uma exigência de se visualizar, graficamente, os resultados obtidos.

Para tanto, com o mesmo recurso GUI do MATLAB, utilizado na elaboração do programa de pré-processamento, criou-se um programa iterativo, onde se é possível plotar todos os resultados, após a aplicação de todos os incrementos de carregamentos na estrutura.

O programa é composto por cinco telas independentes, cada uma apresentando um tipo de resultado. Com estas telas pode-se ter, graficamente, a malha de elementos finitos de concreto e armadura, a deformada dos elementos de concreto, as tensões totais no concreto, as tensões totais na armadura e a distribuição das fissuras nos elementos de concreto.

7.4.1 Malha de elementos finitos de concreto e armadura

As Fig. 7.16 até 7.19 mostram os recursos da tela, referente à visualização gráfica da malha dos elementos finitos de concreto e armadura.

Quatro botões controlam esta tela:

- numeração dos elementos finitos de concreto: mostra, quando estiver esta opção estiver marcada, a numeração dos elementos finitos de concreto, conforme a Fig. 7.16;
- numeração dos nós dos elementos de concreto: numera, quando esta opção estiver marcada, os nós dos elementos finitos de concreto, segundo a Fig. 7.17;
- posição dos nós: posiciona com um pequeno círculo, quando esta opção estiver marcada, os nós dos elementos finitos de concreto, vistos na Fig. 7.18;
- armadura: mostra, quando esta opção estiver marcada, Fig. 7.19, a armadura inserida na malha de elementos finitos de concreto. Vale lembrar que os segmentos de armadura representados foram plotados, usando-se as coordenadas obtidas pelo processo automatizado, implementado neste modelo computacional, conforme apresentado no capítulo 3. O botão FECHAR serve para abandonar a tela.

7.4.2 Deformação da malha de elementos finitos de concreto

A malha deformada dos elementos finitos é plotada sobreposta à malha indeformada, para que se tenha a clara noção de como a estrutura se comportou frente ao carregamento aplicado, para cada incremento deste carregamento. Um fator de majoração dos deslocamentos foi inserido para facilitar a visualização da deformada, que pode ser prejudicada caso a estrutura sofra pequenos deslocamentos. Utiliza-se a matriz TDISPT.

Esta tela é composta por quatro botões, que controlam a visualização da malha de elementos finitos de concreto indeformada, a malha deformada, a posição dos nós e a numeração dos elementos de concreto; dois menus, onde se pode selecionar o carregamento e o incremento deste carregamento, que se deseja obter a deformada e um campo editável, correspondente ao fator de majoração dos deslocamentos.

Assim, a Fig. 7.20 mostra as malha indeformada numerada e sua deformada, com os respectivos nós posicionados, para um incremento de um determinado carregamento. Utilizou-se um fator de majoração de deslocamentos igual a 10.

A Fig. 7.21 mostra a possibilidade de troca do número do carregamento. Mostra-se apenas a deformada da estrutura.

7.4.3 Tensões no concreto

As tensões totais, armazenadas na matriz STRSTT, antes de serem plotadas, tiveram de passar por um processo de suavização, apresentado no Anexo A.

Na tela, onde se podem representar as distribuições de tensões nos elementos de concreto, tem-se a possibilidade de escolher o carregamento, um incremento deste carregamento, além uma distribuição de tensões, σ_x , σ_y , e τ_{xy} . As Fig. 7.22 até 7.24 mostram cada uma destas opções.

7.4.4 Tensões na armadura

Ao contrário das tensões para o concreto que foram suavizadas, as tensões na armadura, armazenadas na matriz SIGMAT, foram extrapoladas para os seus nós, já que se tinham apenas valores para os pontos de integração. Isto será detalhado no anexo A.

Feitas as devidas extrapolações, pode-se escolher o carregamento e qualquer um dos seus incrementos para visualizar as tensões na armadura, que também são plotadas em forma de curvas de nível, ou isovalores. A Fig. 7.25 corresponde a esta situação.

7.4.5 Distribuição de fissuras

A quinta e última tela mostra a distribuição de fissuras ao longo da malha de elementos finitos. Cada fissura é mostrada na posição do seu ponto de integração, com a direção dada pela matriz BETAM. Da mesma forma que a tela anterior, para a distribuição de tensões na armadura, pode-se escolher qualquer incremento dos carregamentos aplicados na estrutura, para visualização da distribuição das fissuras. A Fig. 7.26 mostra a distribuição de fissuras nos elementos de concreto para o 78º incremento do carregamento 3. O símbolo (*) representa o ponto esmagado e o símbolo (*) significa que o ponto teve fissuras em duas direções.

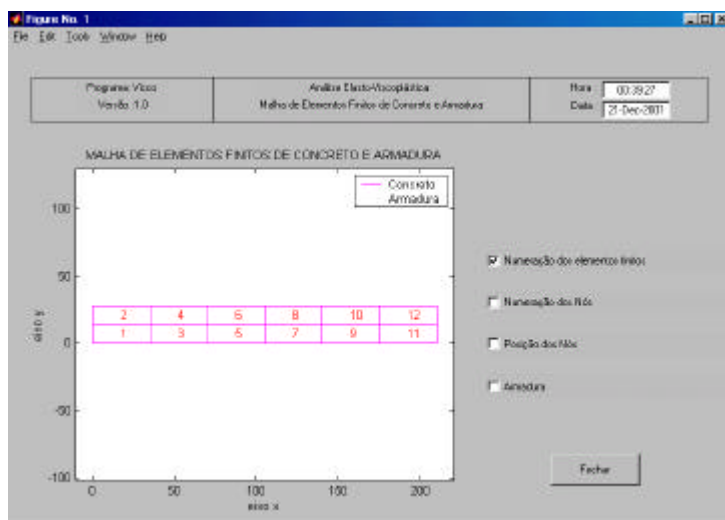


FIGURA 7.16 - Malha de elementos finitos numerada

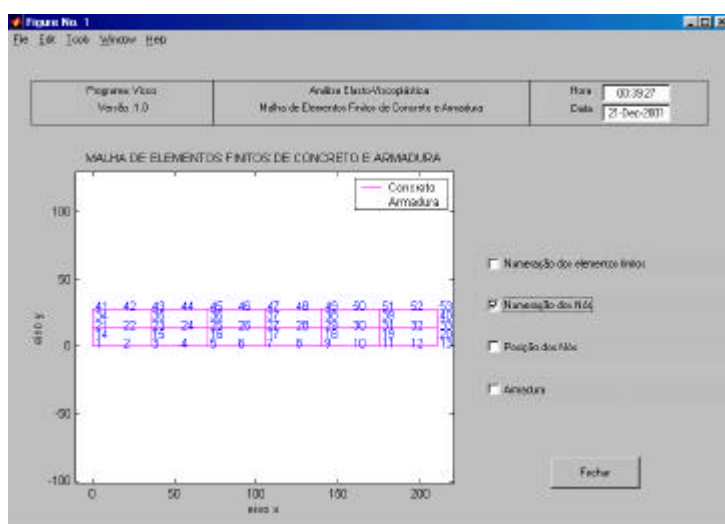


FIGURA 7.17 - Numeração dos nós dos elementos de concreto

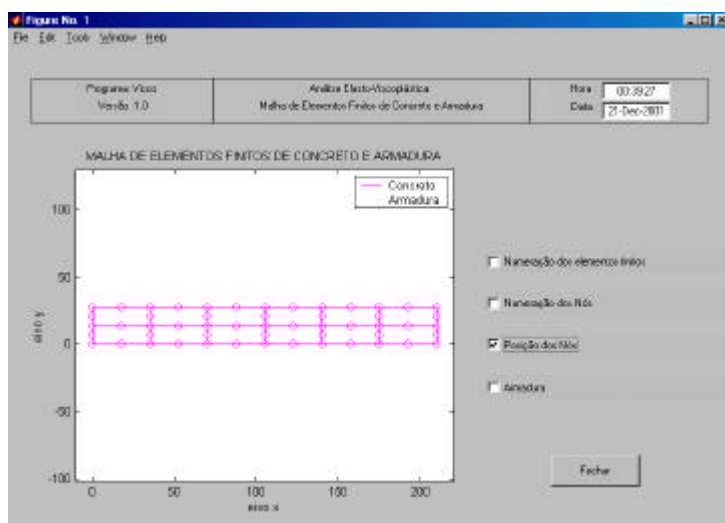


FIGURA 7.18 - Posicionamento dos nós dos elementos finitos

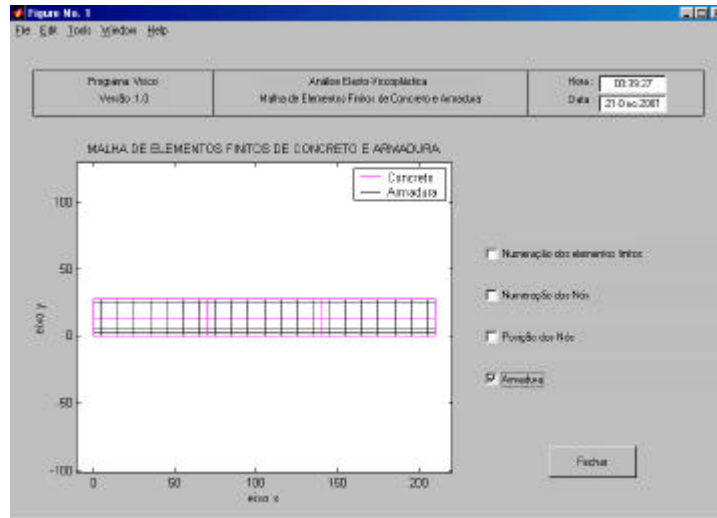


FIGURA 7.19 - Armadura inserida na malha de elementos finitos

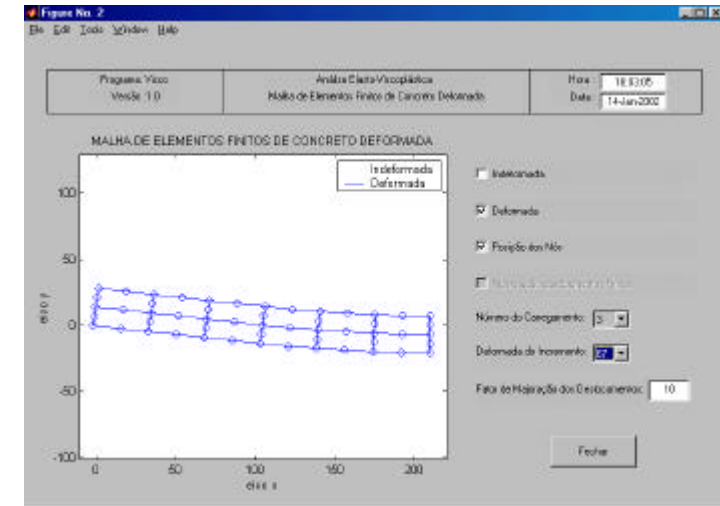


FIGURA 7.21 - Troca de carregamento para visualização da deformada

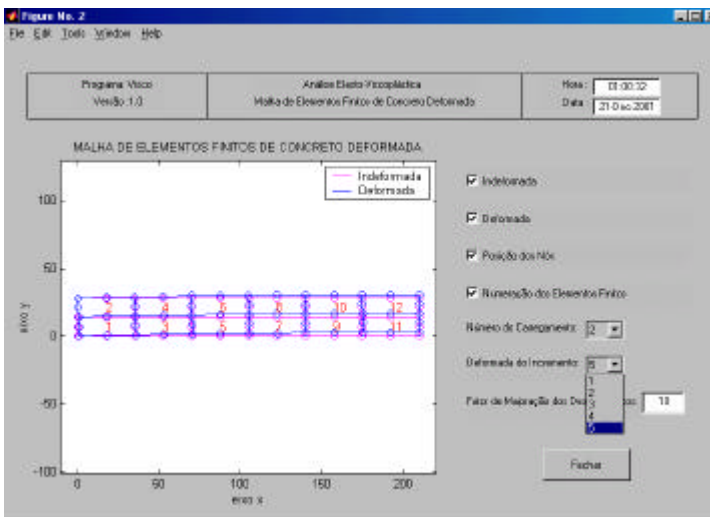


FIGURA 7.20 - Malha de elementos finitos deformada

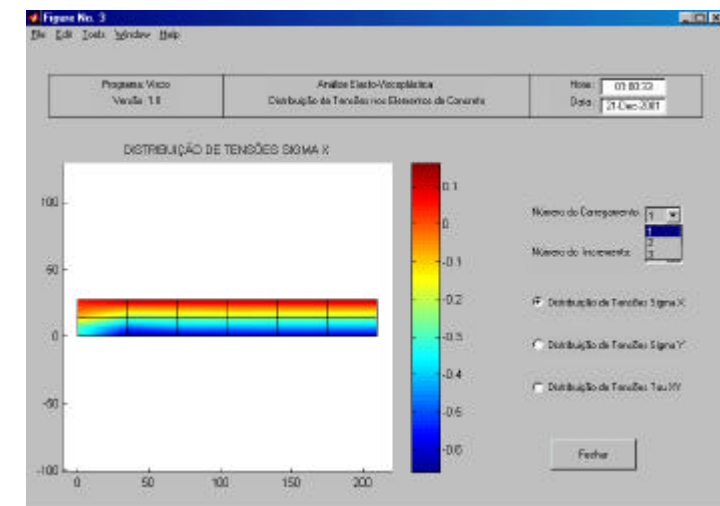


FIGURA 7.22 - Distribuição de tensões σ_x para um determinado incremento do carregamento 1

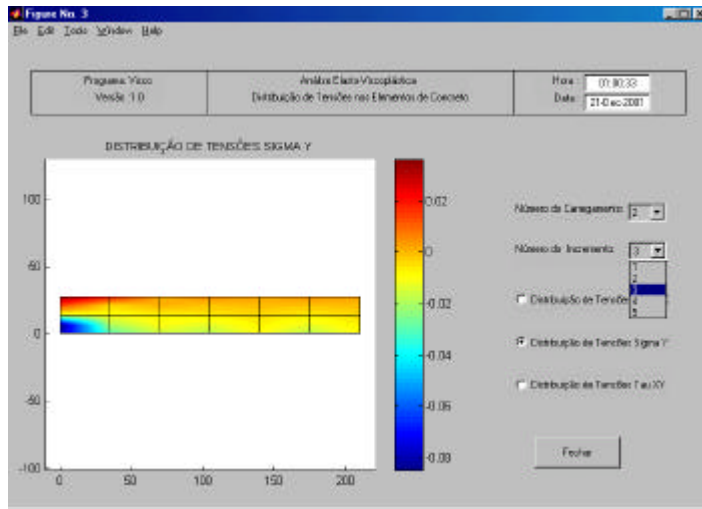


FIGURA 7.23 - Distribuição de tensões σ_y para o 3º incremento do carregamento 2

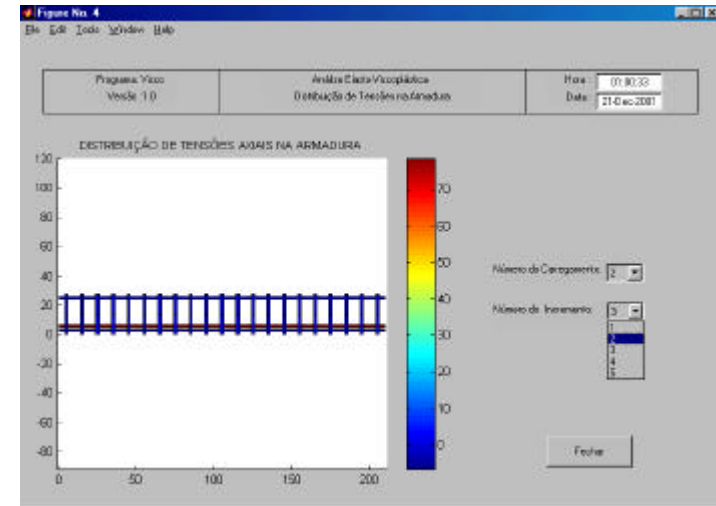


FIGURA 7.25 - Distribuição de tensões σ_s para o 2º incremento do carregamento 2

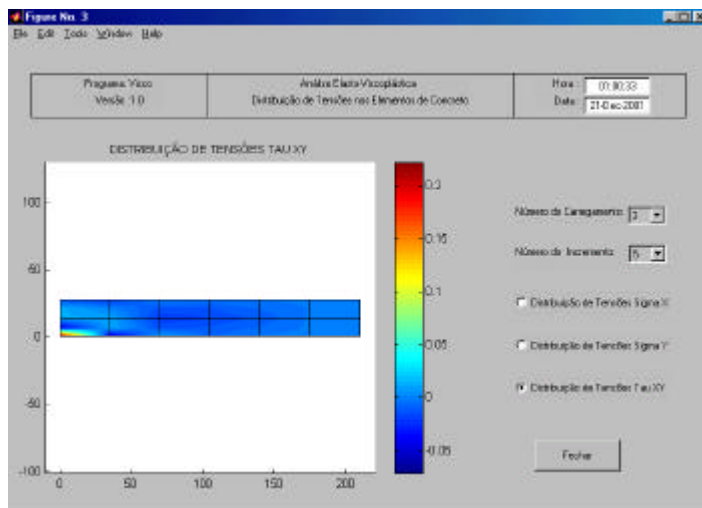


FIGURA 7.24 - Distribuição de tensões σ_y para o 5º incremento do carregamento 3

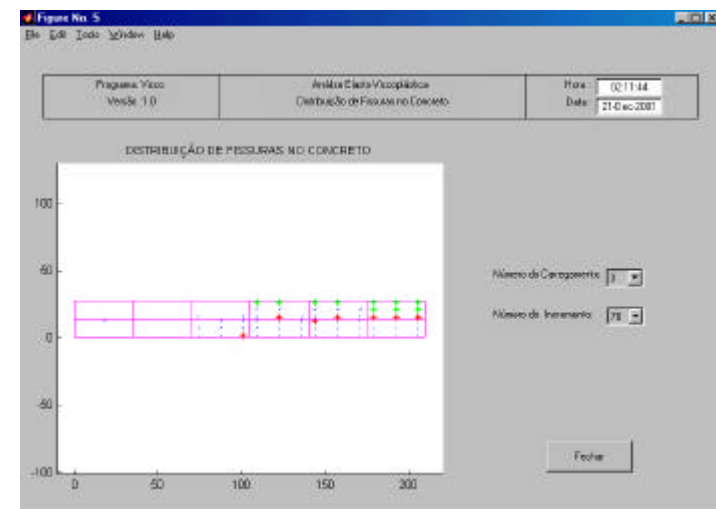


FIGURA 7.26 - Distribuição de fissuras nos elementos de concreto, para o 78º incremento do carregamento 3

8 ANÁLISE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

8.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados por ensaios experimentais para vigas bi-apoiadas de concreto armado. Estes ensaios foram realizados por Leonhardt e Walther (1962). Mostram-se, também, os resultados, obtidos pelo modelo computacional, para tensões no concreto e na armadura, além das distribuições de fissuras no concreto, ao longo da estrutura.

São analisados dois conjuntos de vigas, onde a largura da alma é variada, cujo detalhamento pode ser visto na Fig. 8.1. No primeiro conjunto, vigas ET1, ET2, ET3 e ET4, são aplicadas duas cargas concentradas, cuja posição pode ser vista também na Fig. 8.1. Sua resistência à compressão é de $2,42 \text{ kN/cm}^2$. Já no segundo conjunto, vigas GT1, GT2, GT3 e GT4, aplica-se carga uniformemente distribuída. A resistência à compressão do concreto é de $2,13 \text{ kN/cm}^2$.

Todas as vigas possuem a mesma armadura longitudinal. Esta consiste, inferiormente, de quatro barras de 20 mm de diâmetro ($f_y = 42,8 \text{ kN/cm}^2$), sendo duas localizadas a 3 cm da borda inferior e duas localizadas a 6 cm da mesma borda e, superiormente, de duas barras de 8 mm de diâmetro ($f_y = 46,5 \text{ kN/cm}^2$). Todas as barras são de aço encruado a frio (antiga classe B), localizadas a 3 cm da borda superior.

As vigas do conjunto ET têm estribos verticais de 6 mm de diâmetro ($f_y = 32 \text{ kN/cm}^2$, aço com encruamento natural, antiga classe A), uniformemente espaçados. Nas vigas do conjunto GT, os estribos verticais, também de 6 mm de diâmetro ($f_y = 32 \text{ kN/cm}^2$, aço da classe A), têm espaçamento variável junto ao apoio direito e uniforme junto ao apoio esquerdo.

Para a análise computacional, utilizou-se a malha de elementos finitos com quarenta elementos quadrangulares quadráticos de oito nós para estado plano de tensão, conforme a Fig. 8.2. Para as vigas do conjunto ET, utilizou-se uma malha com vinte elementos, por estas apresentarem simetria.

Para todos os ensaios, consideram-se os efeitos da fluência e da retração do concreto a partir do sétimo dia após a concretagem das vigas. Adotou-se, conforme medições no local, uma umidade relativa do ar de 60% e uma temperatura de 18° C . O peso próprio das vigas foi considerado carga de curta duração, uma vez que os ensaios eram montados na data da execução (aproximadamente, 28 dias após a concretagem). Os valores comparados, a seguir, são valores líquidos, onde estão descontadas as parcelas correspondentes aos efeitos dependentes do tempo e do peso próprio.

A base das vigas ET4 e GT4 tem 10 cm de altura.

8.2 EVOLUÇÃO DAS FLECHAS AO LONGO DO CARREGAMENTO

Nas Fig. 8.3 até 8.10, mostra-se a evolução das flechas ao longo do carregamento para os dois conjuntos de vigas, ET e GT, segundo os resultados dos ensaios e os obtidos através do modelo computacional.

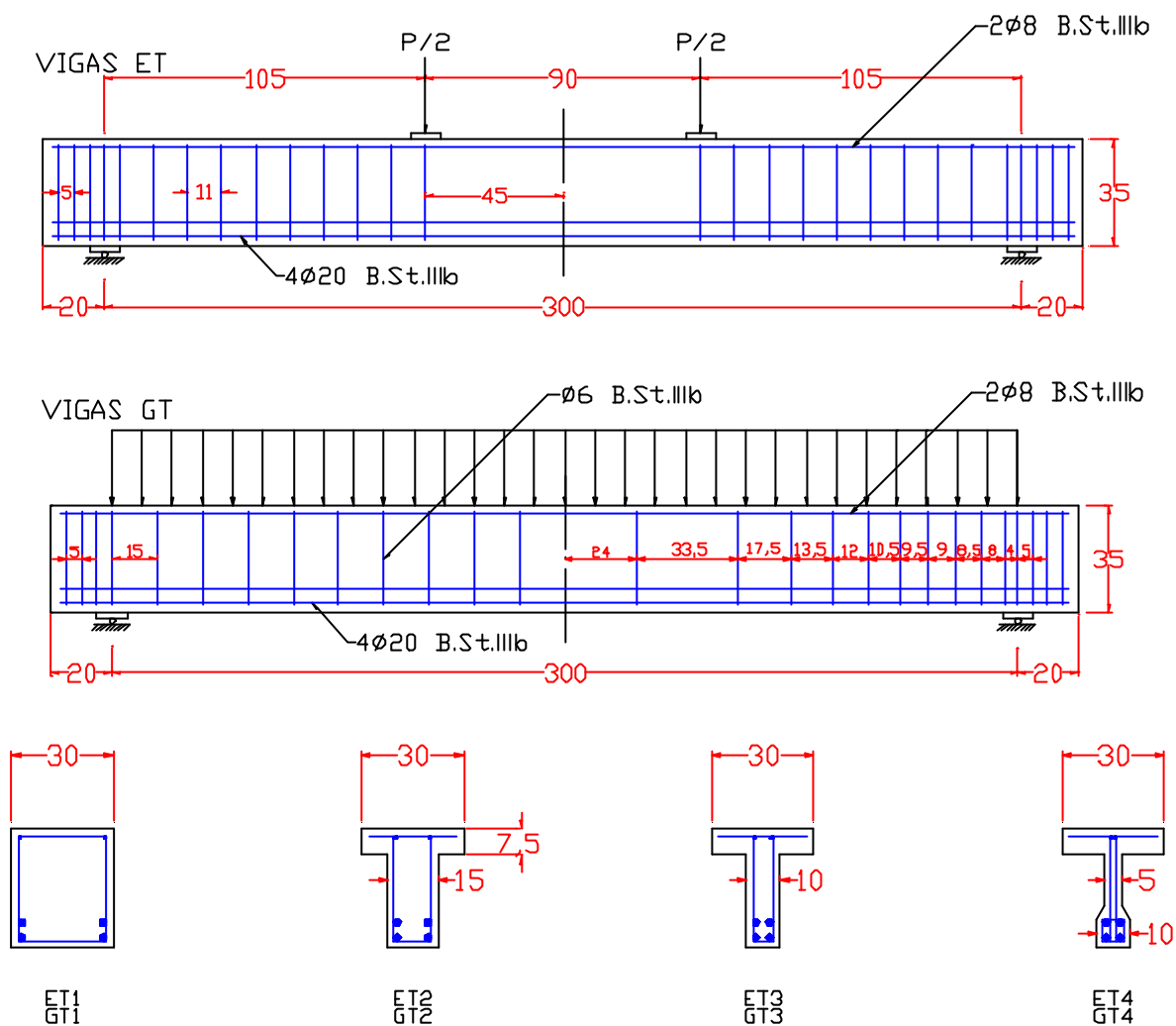


FIGURA 8.1 - Detalhamento das vigas ET e GT com diferentes larguras de alma (cotas em cm)

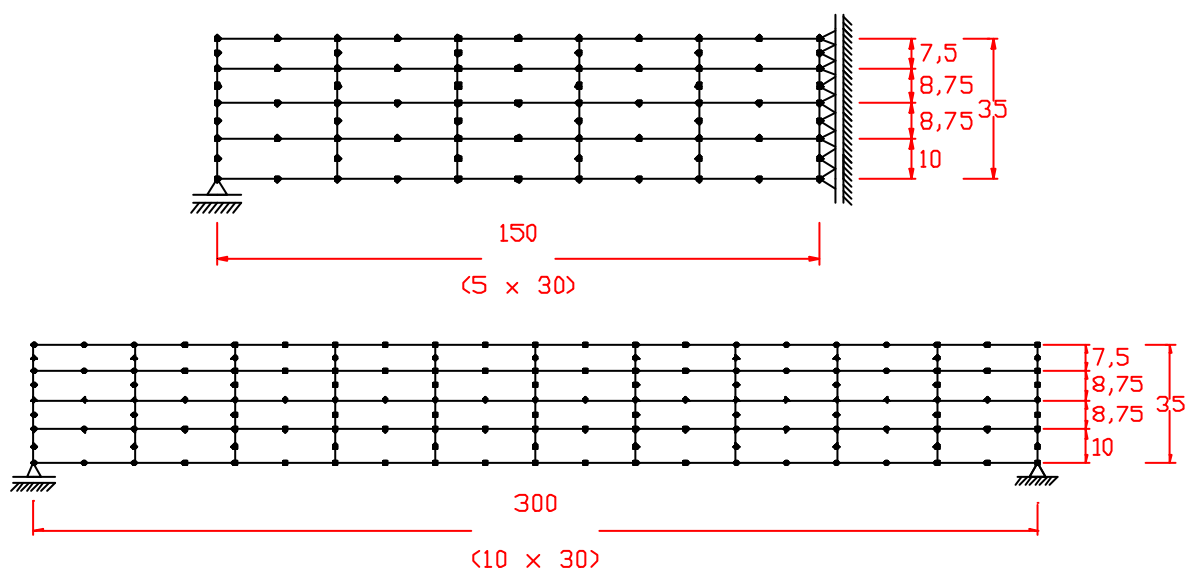


FIGURA 8.2 - Discretização adotada, para a análise das vigas ET e GT (cotas em cm)

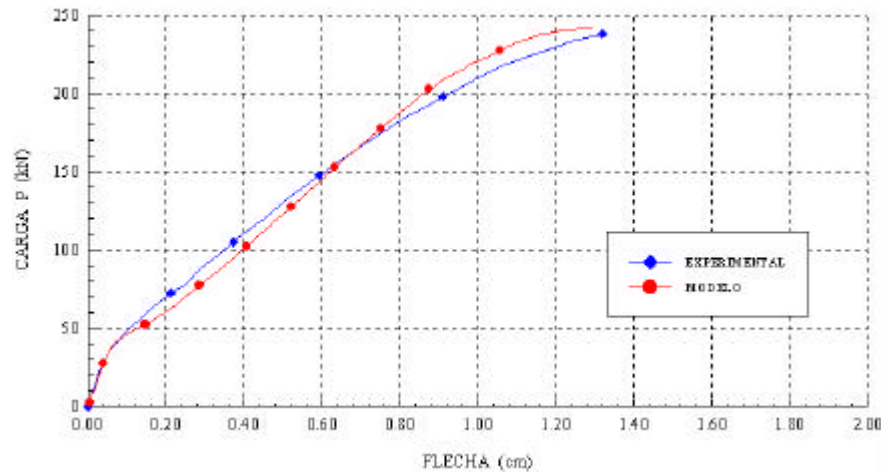


FIGURA 8.3 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET1

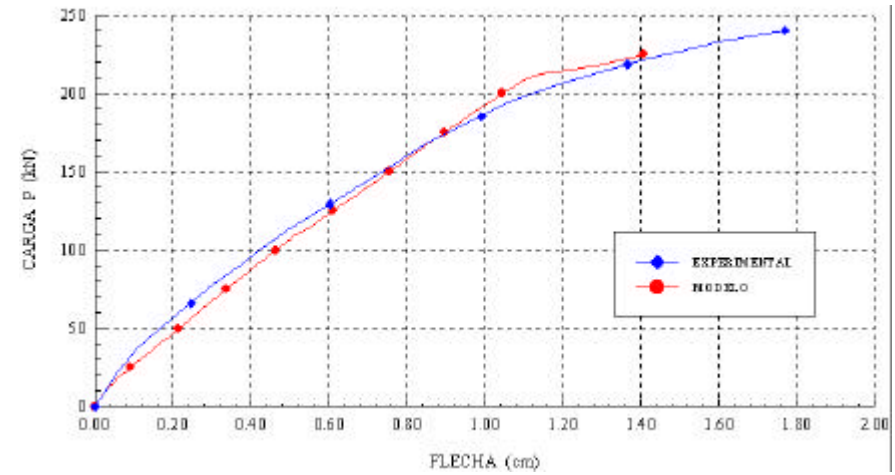


FIGURA 8.5 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET3

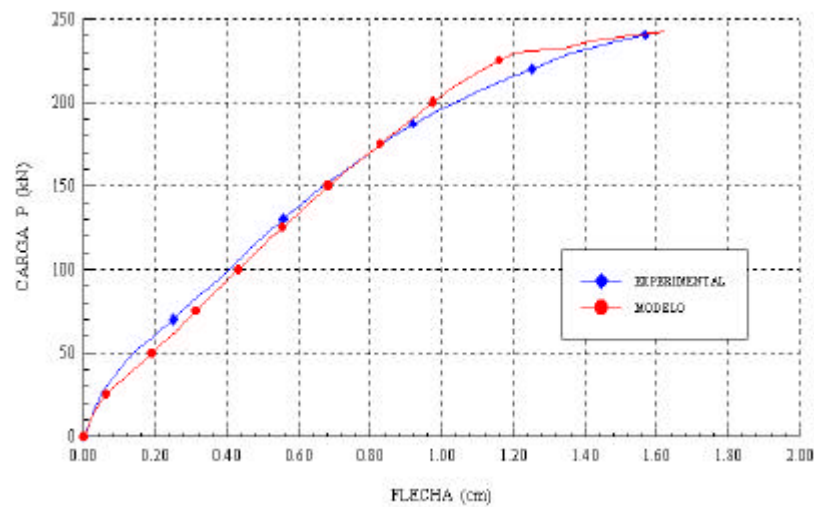


FIGURA 8.4 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET2

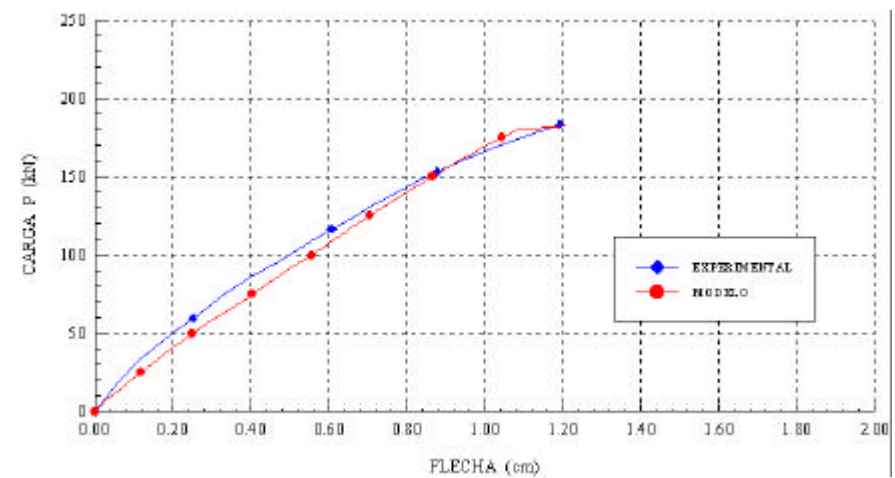


FIGURA 8.6 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET4

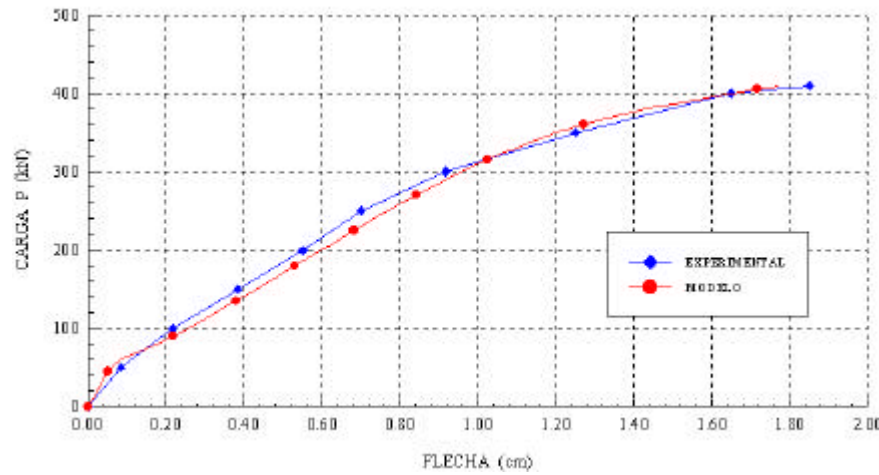


FIGURA 8.7 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT1

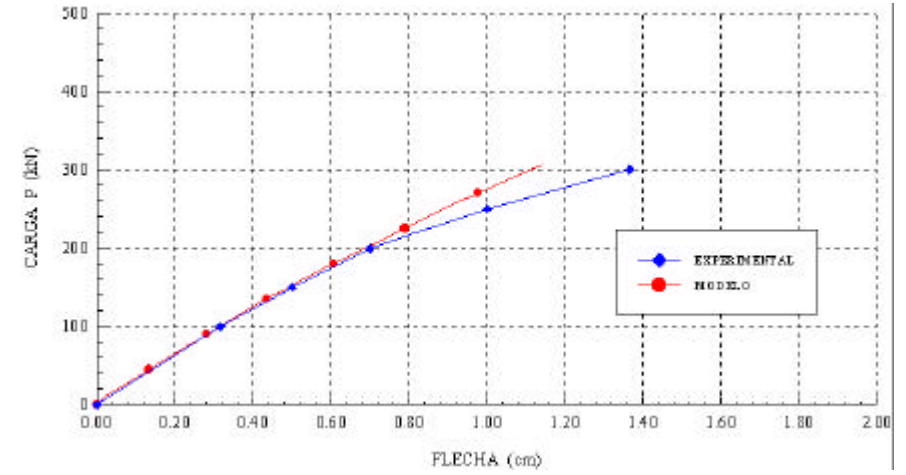


FIGURA 8.9 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT3

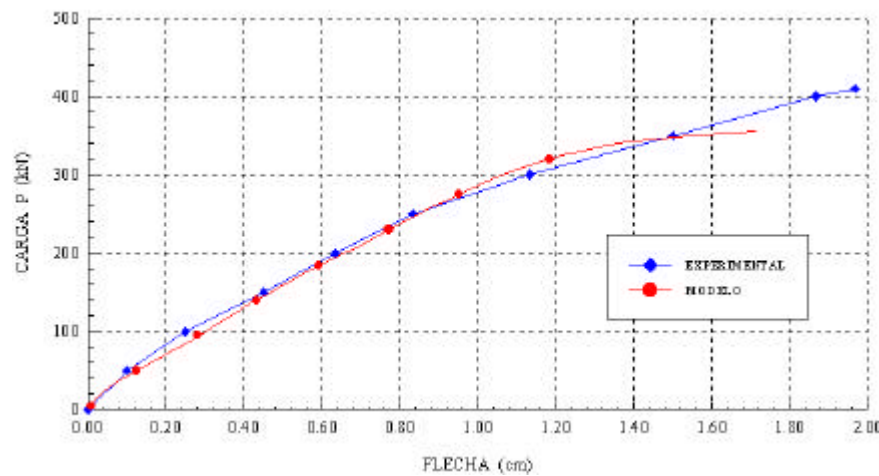


FIGURA 8.8 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT2

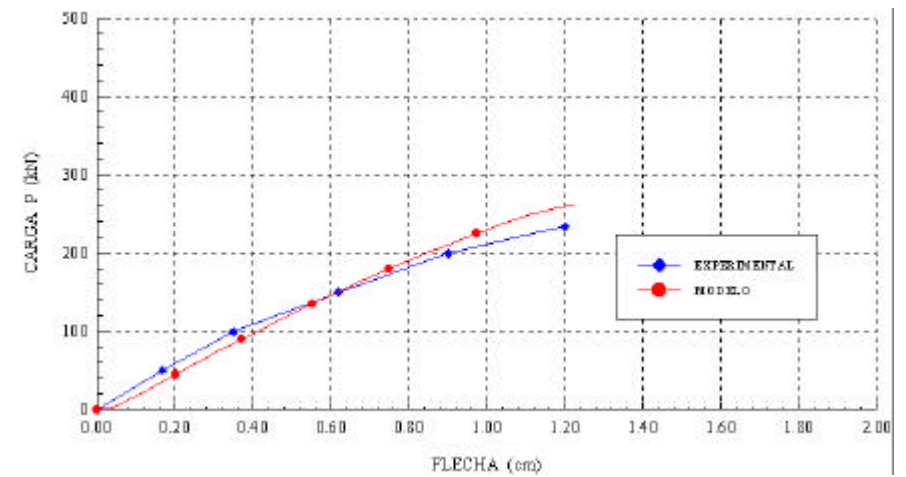


FIGURA 8.10 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT4

8.3 EVOLUÇÃO DAS TENSÕES NOS ESTRIBOS AO LONGO DO CARREGAMENTO

O valor da constante k_1 , da equação (4.35), segundo Cervenka (1985), varia entre 0,3 e 1,0. Contudo, neste trabalho, usando-se tais valores, os resultados obtidos não foram satisfatórios, quando comparados com aqueles dos ensaios experimentais. Calibrou-se, então, este parâmetro, tendo-se a viga ET4 como referência. Esta viga, por ter alma pouco espessa, mostrou-se sensível ao modelo de fissuras considerado na análise computacional. A viga apresentou fissuras devidas à flexão e, também, ao corte, solicitando os estribos. Sugere-se, assim, um valor de 0,075 para a constante k_1 . Este valor foi adotado para todas as demais estruturas analisadas neste trabalho, sejam de concreto armado ou protendido.

As Figs. 8.11 e 8.12 apresentam, em conjunto, as curvas “Carga x Tensão nos Estribos”, determinadas pelo modelo computacional, para as vigas ET e GT, respectivamente.

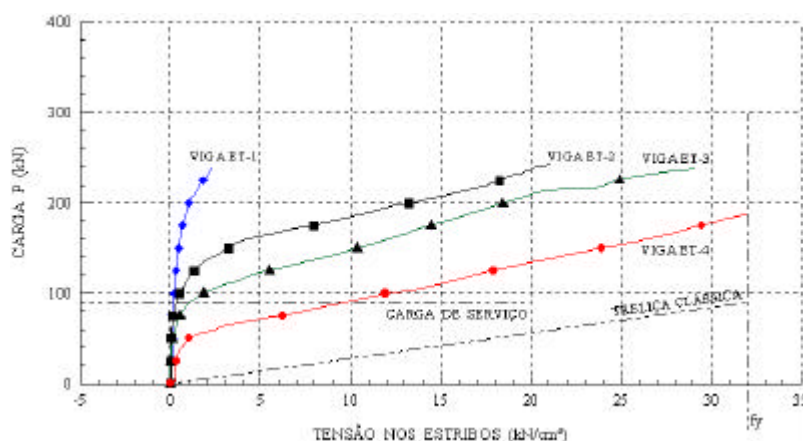


FIGURA 8.11 - Tensões nos estribos, obtidas pelo modelo computacional, para as vigas ET

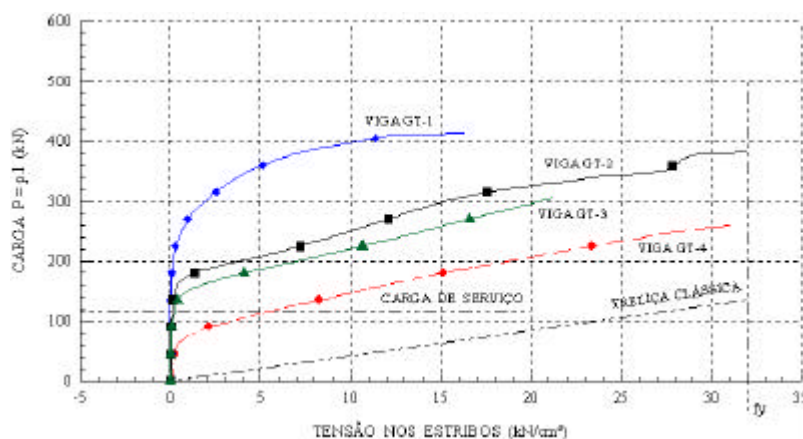


FIGURA 8.12 - Tensões nos estribos, obtidas pelo modelo computacional, para as vigas GT

Nas Figs. 8.13 até 8.16, comparam-se as tensões nos estribos, valores obtidos através do modelo computacional e experimentais, para cada uma das vigas ET. Os valores analisados são as tensões médias, dos trechos localizados na altura da alma, de quatro estribos posicionados entre 38 e 71 cm a partir do apoio esquerdo.

As Figs. 8.17 até 8.20 apresentam a análise da evolução das tensões nos estribos em função do carregamento, para as vigas GT. Neste caso, comparam-se as tensões médias, dos trechos localizados na altura da alma, de quatro estribos posicionados entre 20,5 e 61,5 cm a partir do apoio direito (estribos com espaçamento variável).

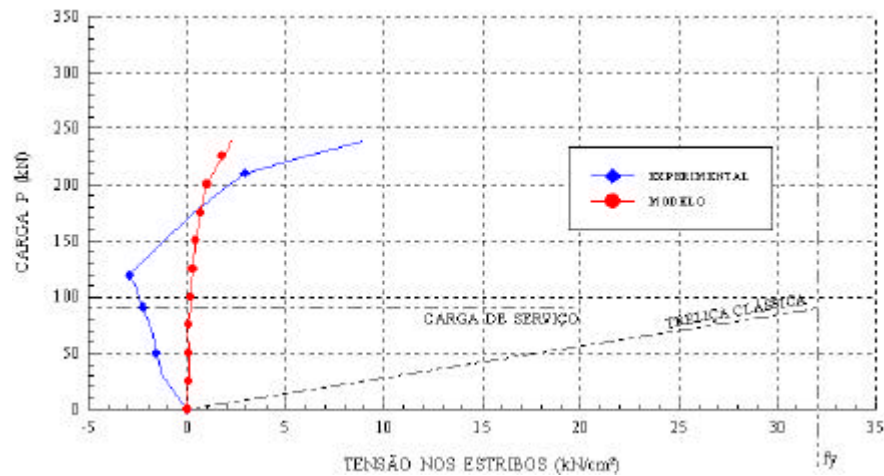


FIGURA 8.13 - Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET1

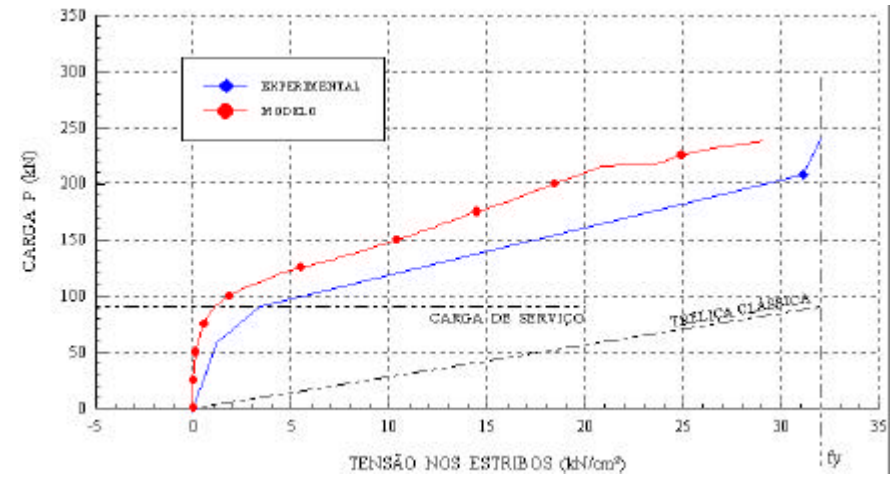


FIGURA 8.15 - Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET3

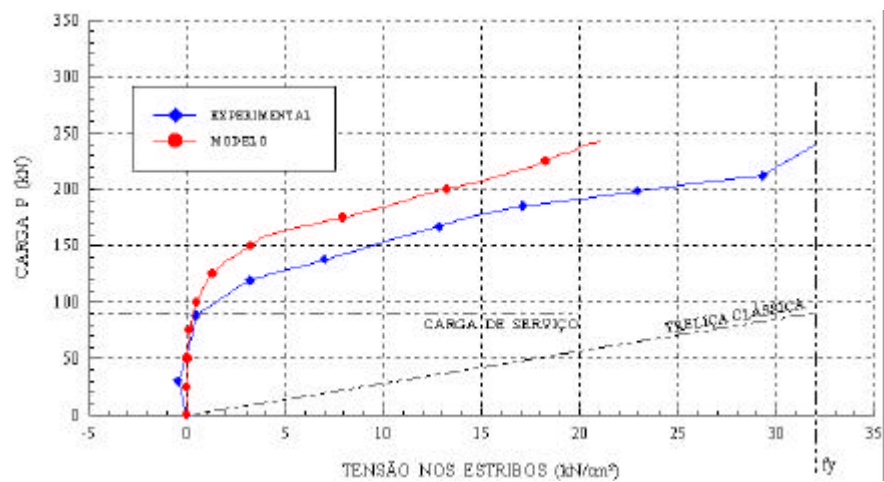


FIGURA 8.14 - Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET2

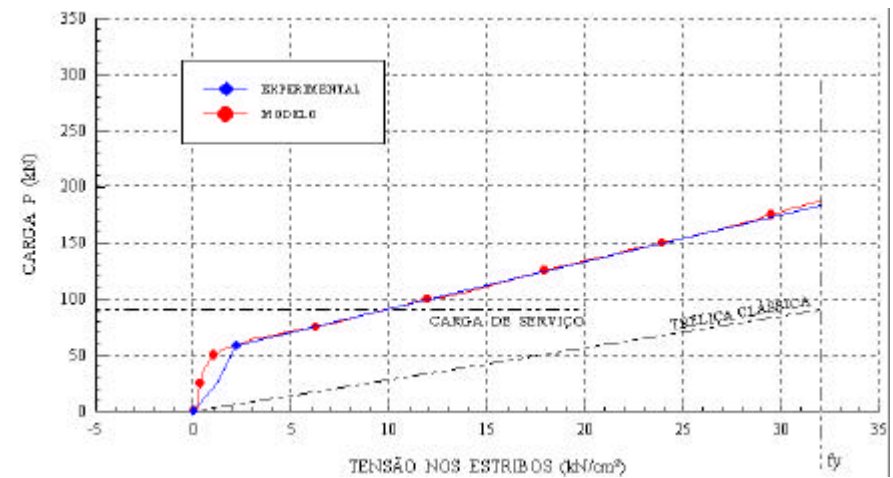


FIGURA 8.16 - Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga ET4

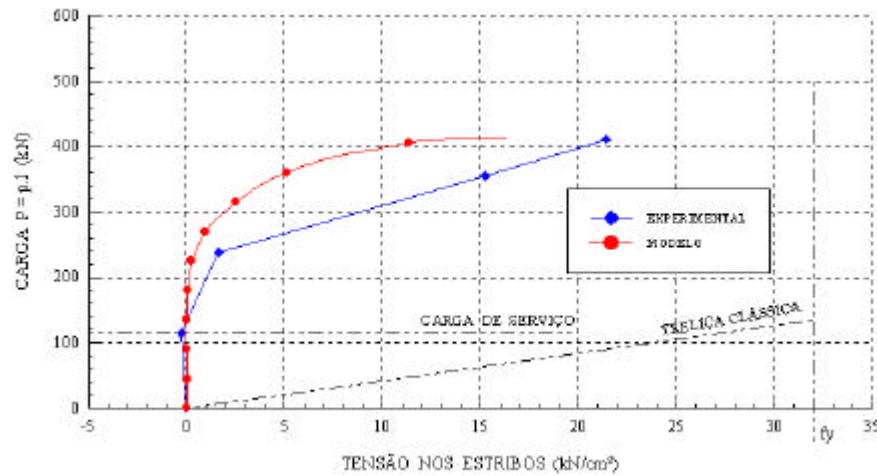


FIGURA 8.17 - Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT1

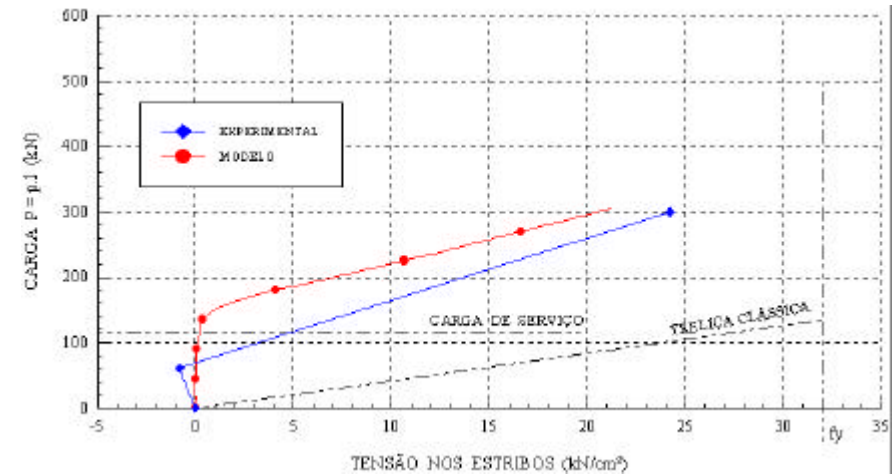


FIGURA 8.19 - Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT3

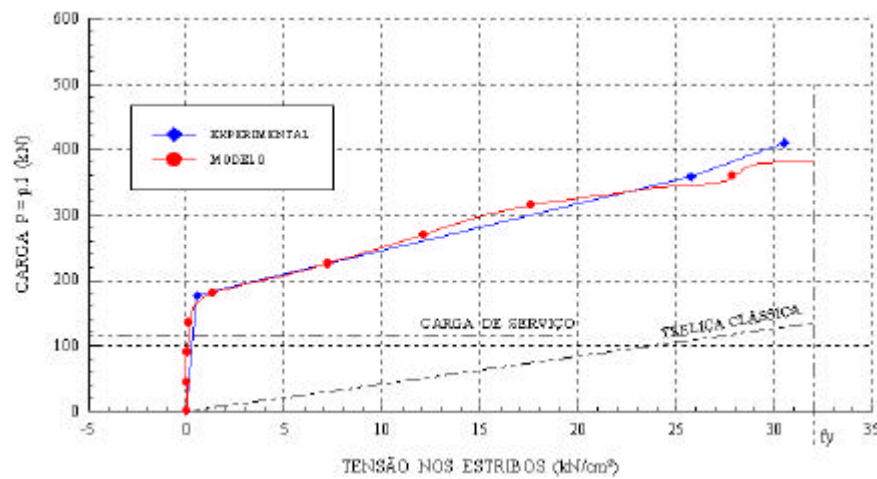


FIGURA 8.18 - Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT2

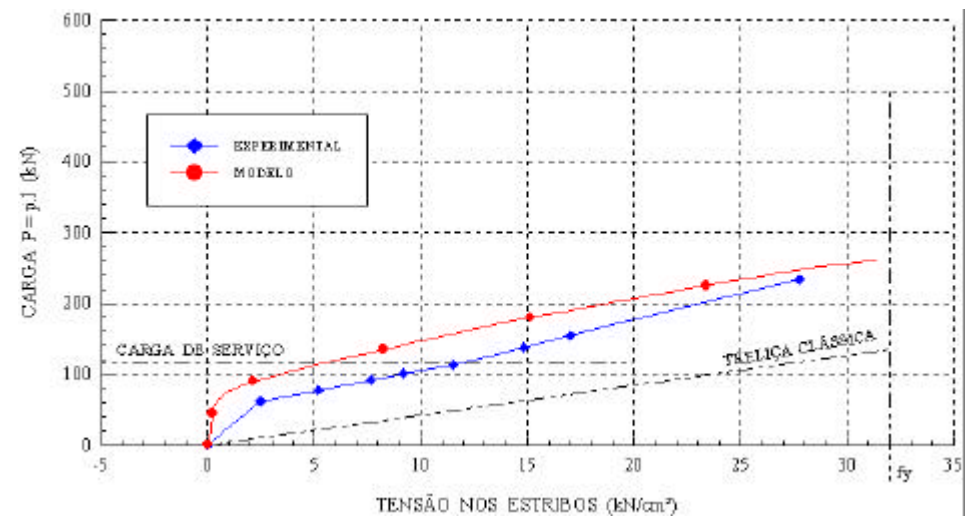


FIGURA 8.20 - Comparação das tensões nos estribos, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga GT4

8.4 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO COMPUTACIONAL

Neste item, serão apresentados, graficamente, os resultados obtidos pelo modelo computacional. Mostram-se os resultados das distribuições de tensões no concreto e no aço, além da distribuição de fissuras nos elementos de concreto, para cada ensaio.

8.4.1 Evolução do estado de tensão (s_x) dos elementos de concreto ao longo do carregamento

As Figs. 8.21 até 8.28 mostram a evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto das vigas ET e GT, após a aplicação do carregamento, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional.

8.4.2 Evolução das tensões na armadura e distribuição de fissuras nos elementos de concreto ao longo do carregamento

As Figs. 8.29 até 8.36 mostram a evolução das tensões na armadura e a distribuição de fissuras nos elementos de concreto das vigas ET e GT, após a aplicação do carregamento, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional.

O símbolo (*) representa ocorrência de fissura nas duas direções para o ponto em questão. Já o símbolo (**) significa que ocorreu esmagamento do concreto neste ponto.

Nas vigas de concreto armado apresentadas, observa-se que, à medida que a largura da alma diminui, mais fissuras inclinadas vão aparecendo, devido ao corte. Isto faz com que aumentem as tensões dos estribos, a partir do apoio para o centro das vigas.

As vigas ET1, GT1 e GT3 romperam à flexão, enquanto que a viga ET4, GT2 e GT4 romperam devido ao corte, face à pequena largura da sua alma, o que também foi observado experimentalmente.

Já para as vigas intermediárias, ET2 e ET3, no ensaio, ocorreu ruptura ao corte, pois, para a carga de ruptura, a tensão média nos estribos atingiu a tensão de escoamento do aço. Já o modelo, devido à ruptura à flexão e ao corte ocorrerem quase que ao mesmo tempo, detectou pela ruptura à flexão, aonde a tensão média dos estribos não chegou a atingir a tensão de escoamento do aço. Mesmo assim, o comportamento dos estribos obtido, ao longo da aplicação da carga, seguiu razoavelmente o comportamento real destas duas estruturas.

Os diferentes comportamentos das estruturas podem ser vistos nas distribuições de tensões nos elementos de concreto e nas barras de armaduras, assim como as distribuições de fissuras nos elementos de concreto, ao longo da aplicação da carga, obtidos pelo modelo computacional.

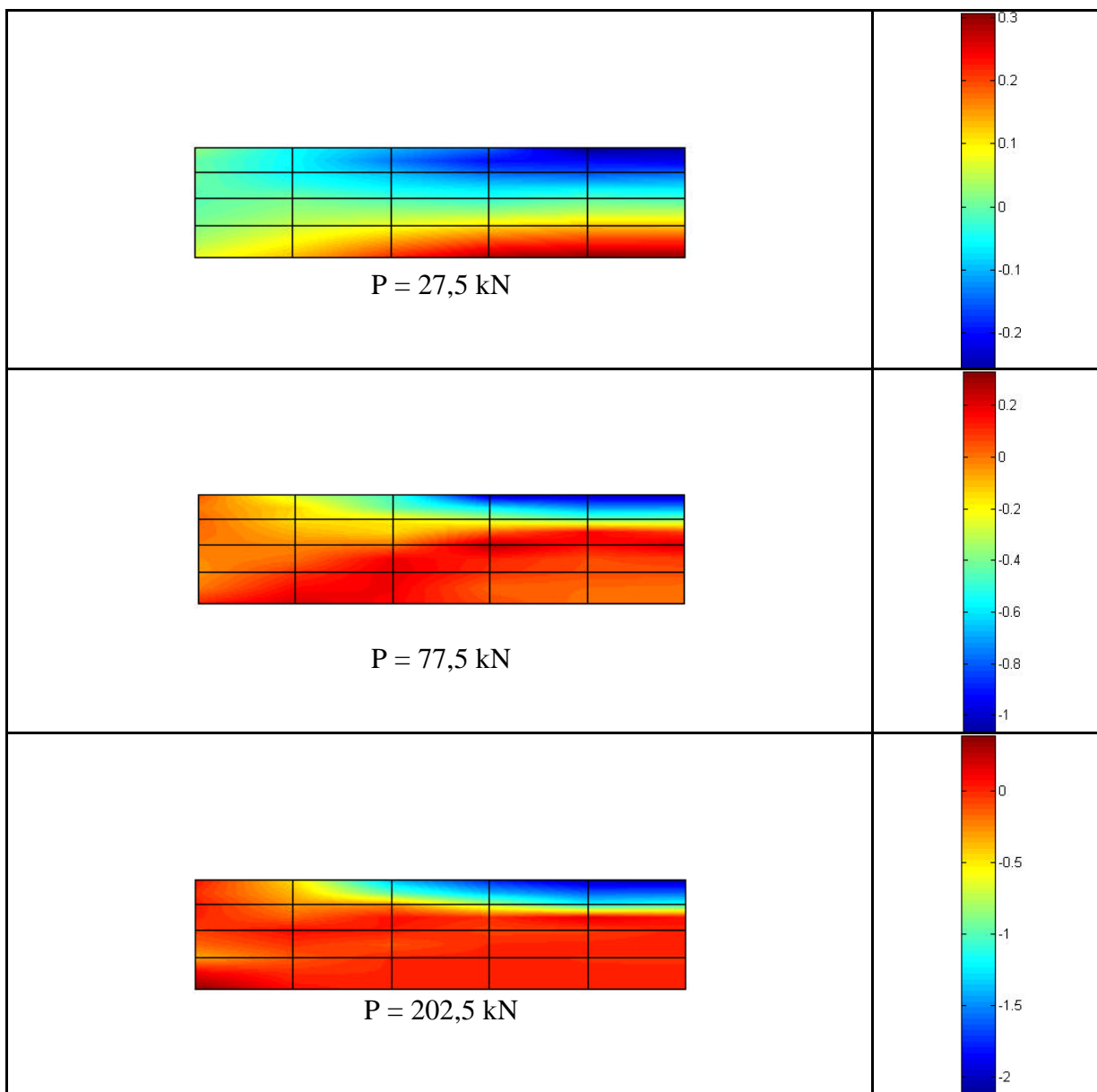
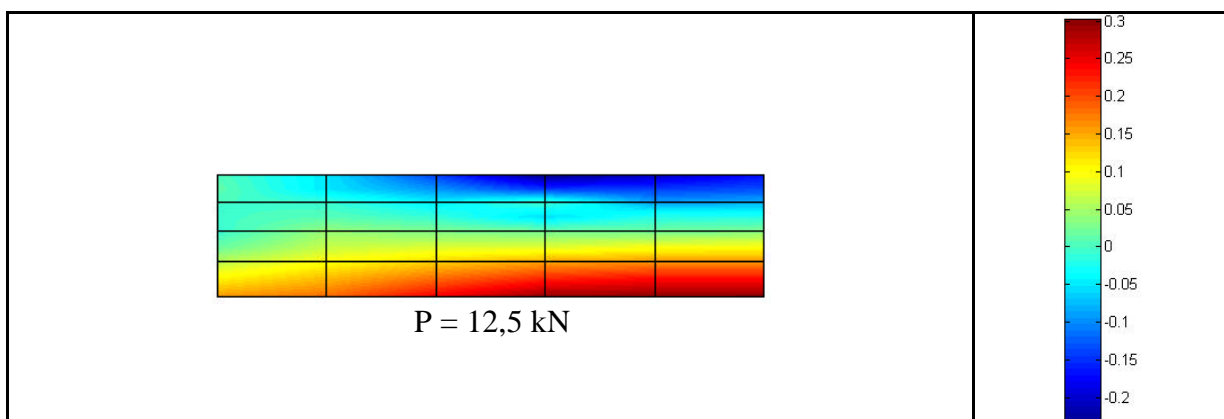


FIGURA 8.21 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga ET1, segundo o modelo computacional



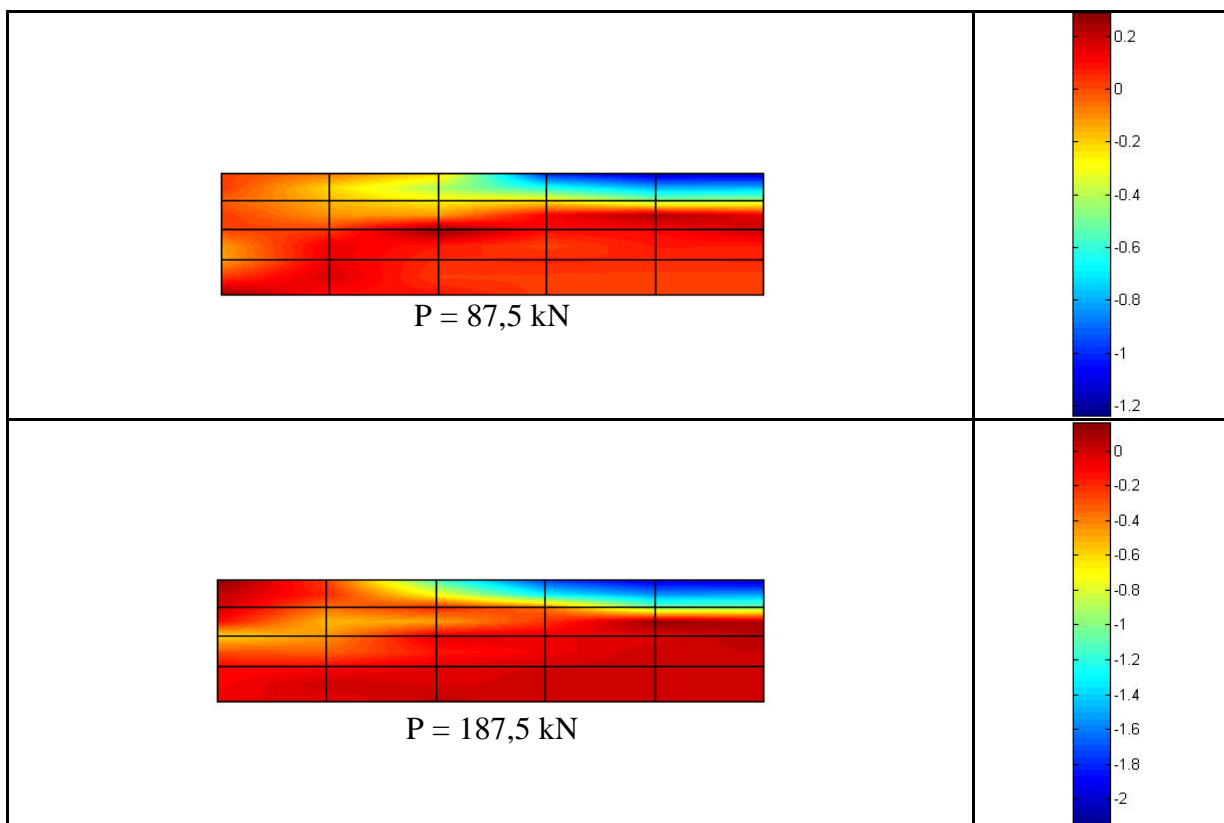
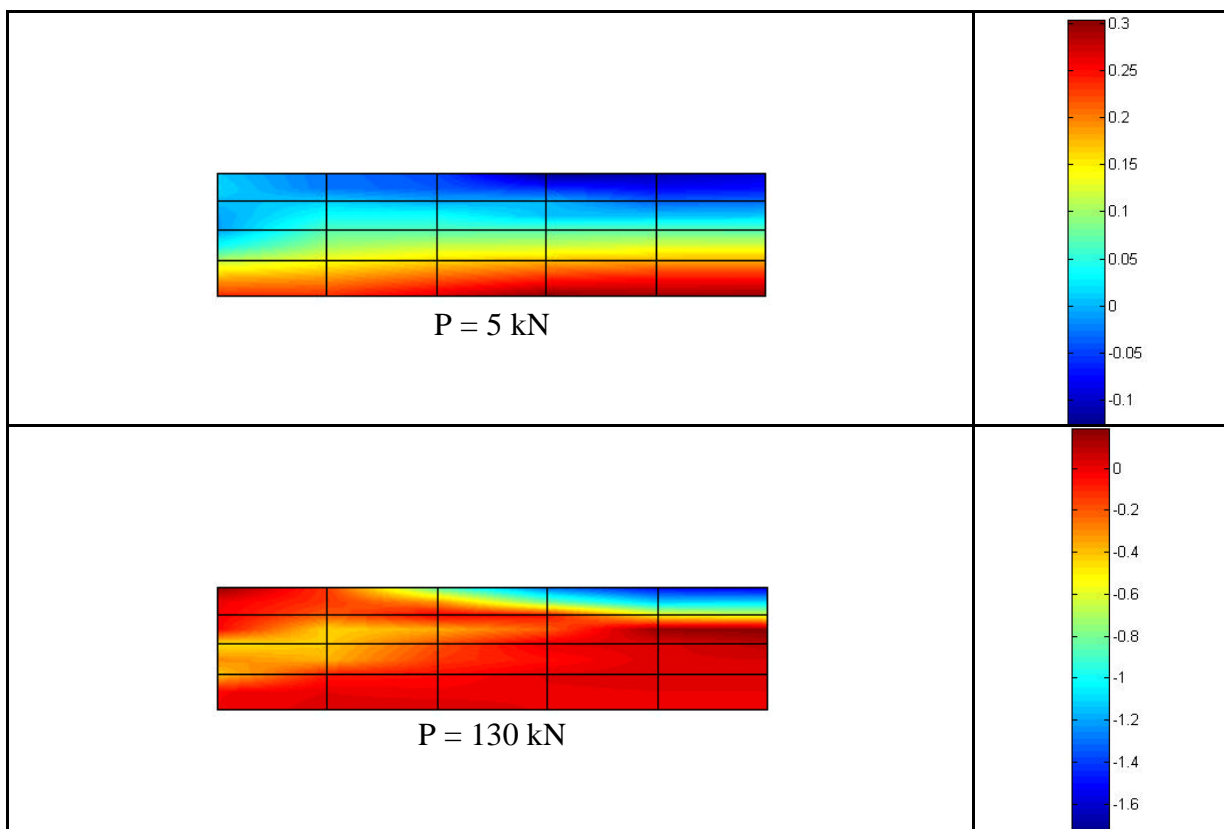


FIGURA 8.22 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga ET2, segundo o modelo computacional



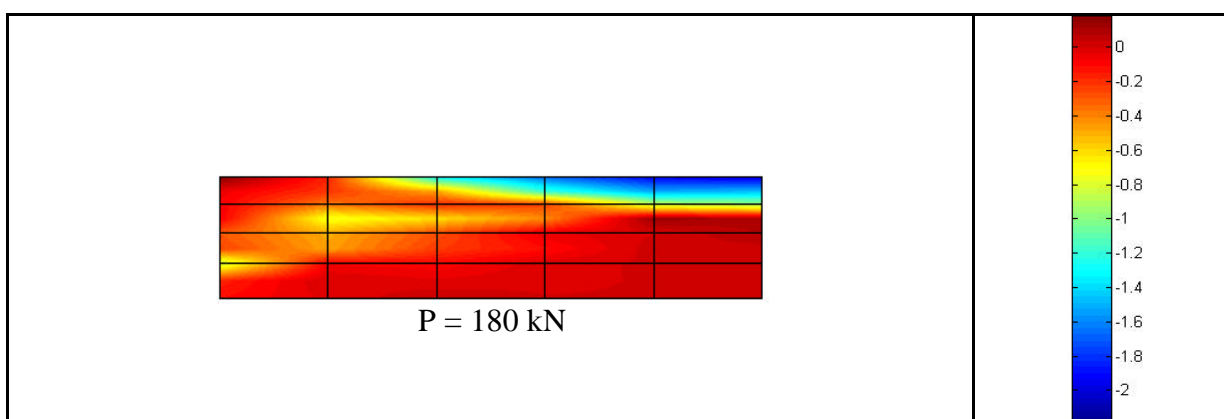


FIGURA 8.23 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga ET3, segundo o modelo computacional

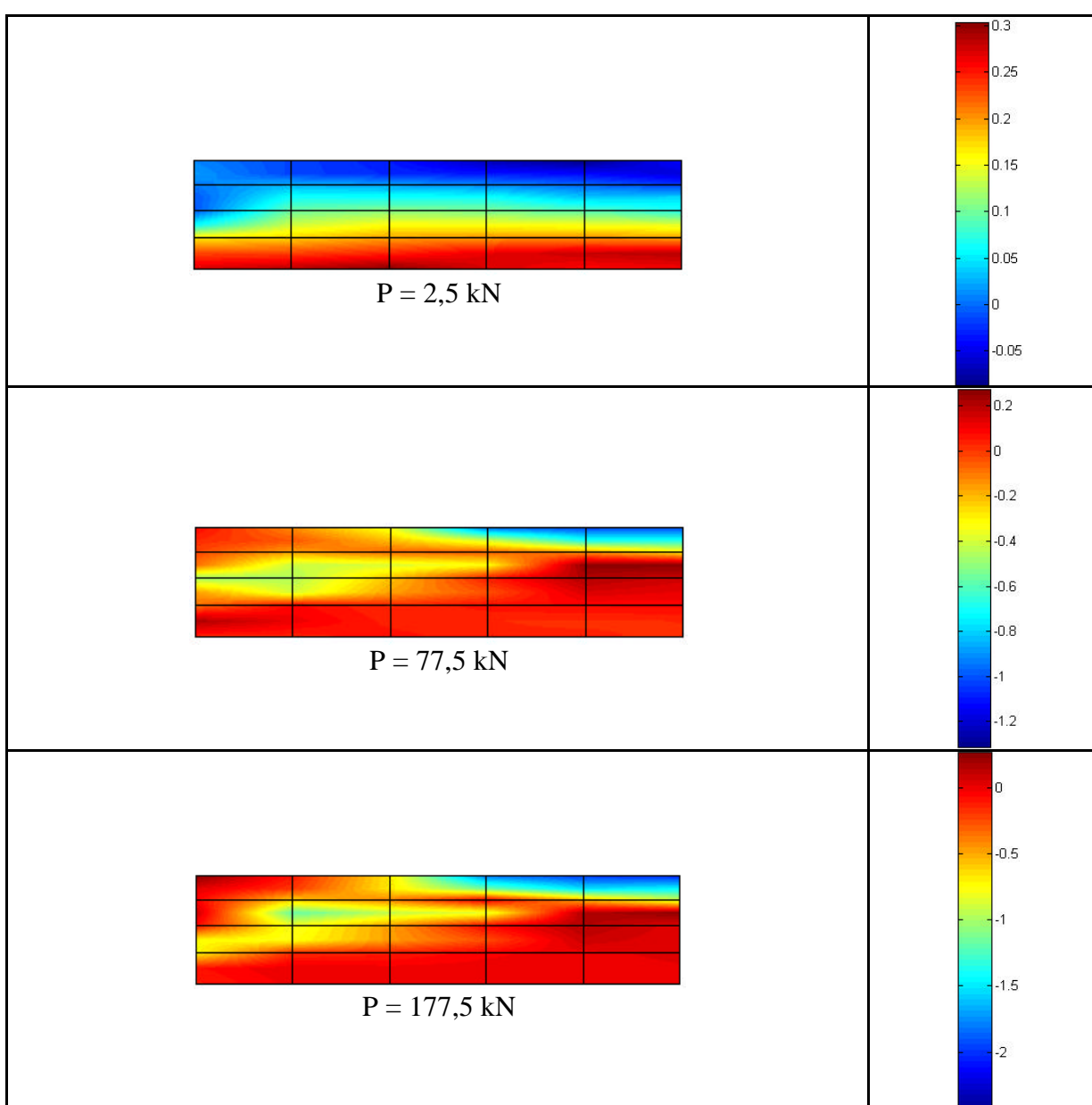


FIGURA 8.24 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga ET4, segundo o modelo computacional

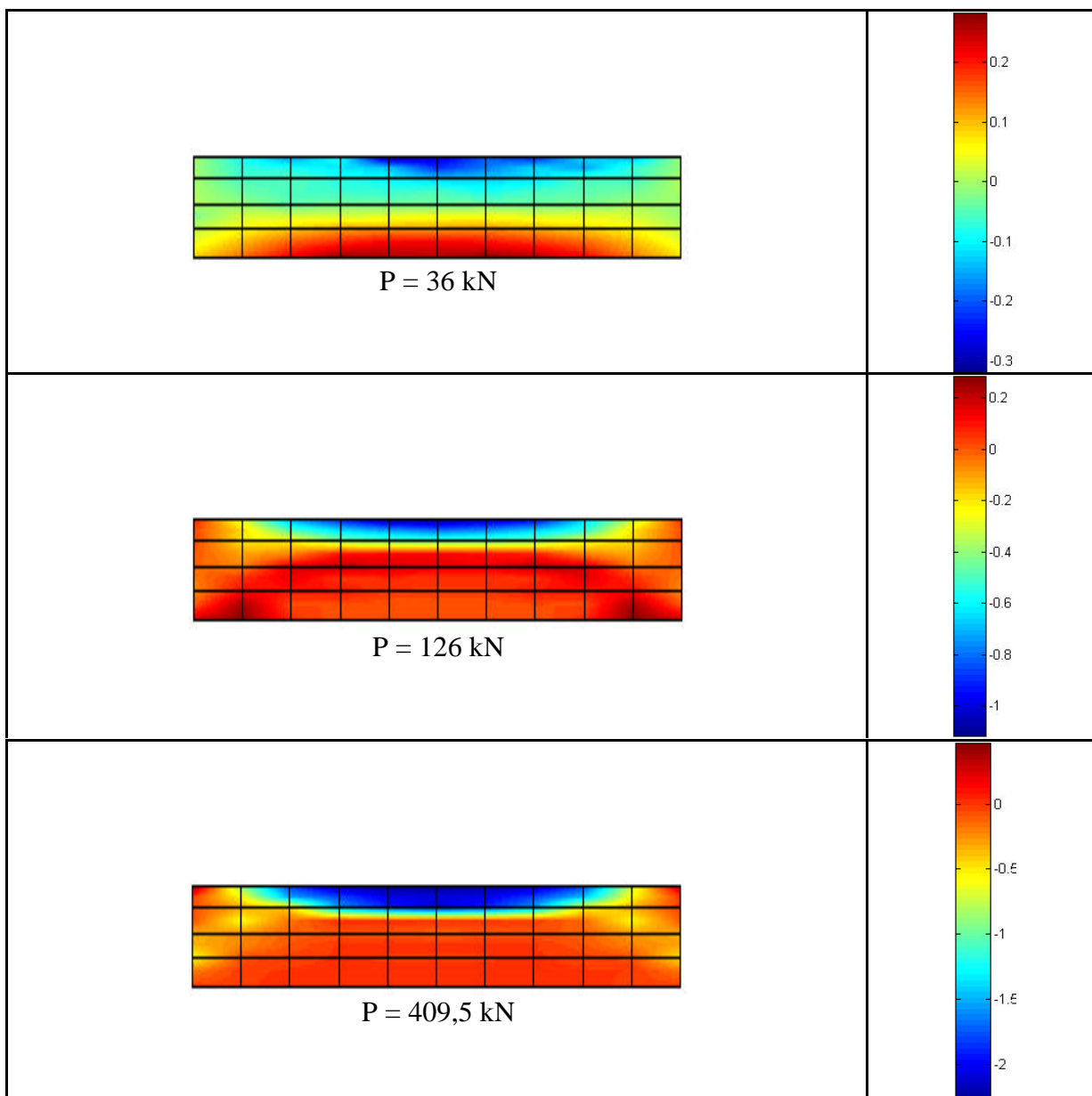
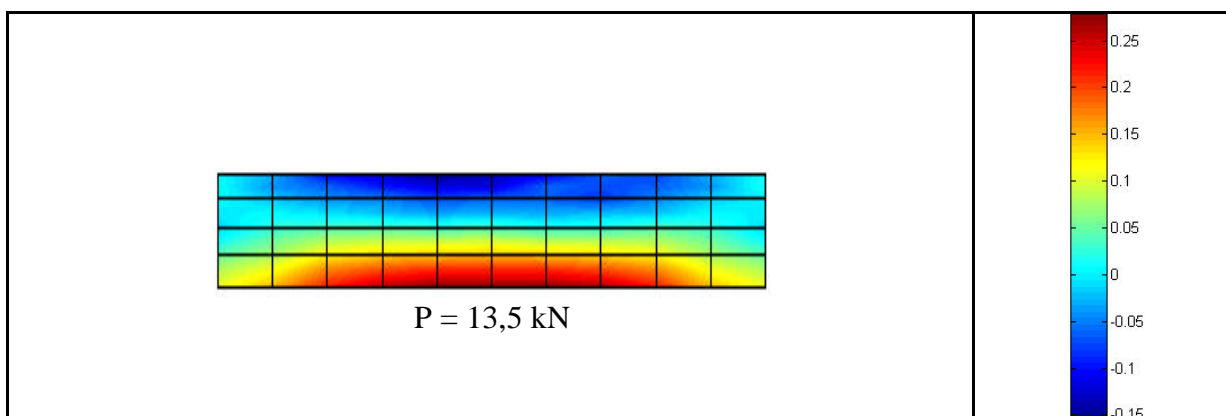


FIGURA 8.25 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga GT1, segundo o modelo computacional



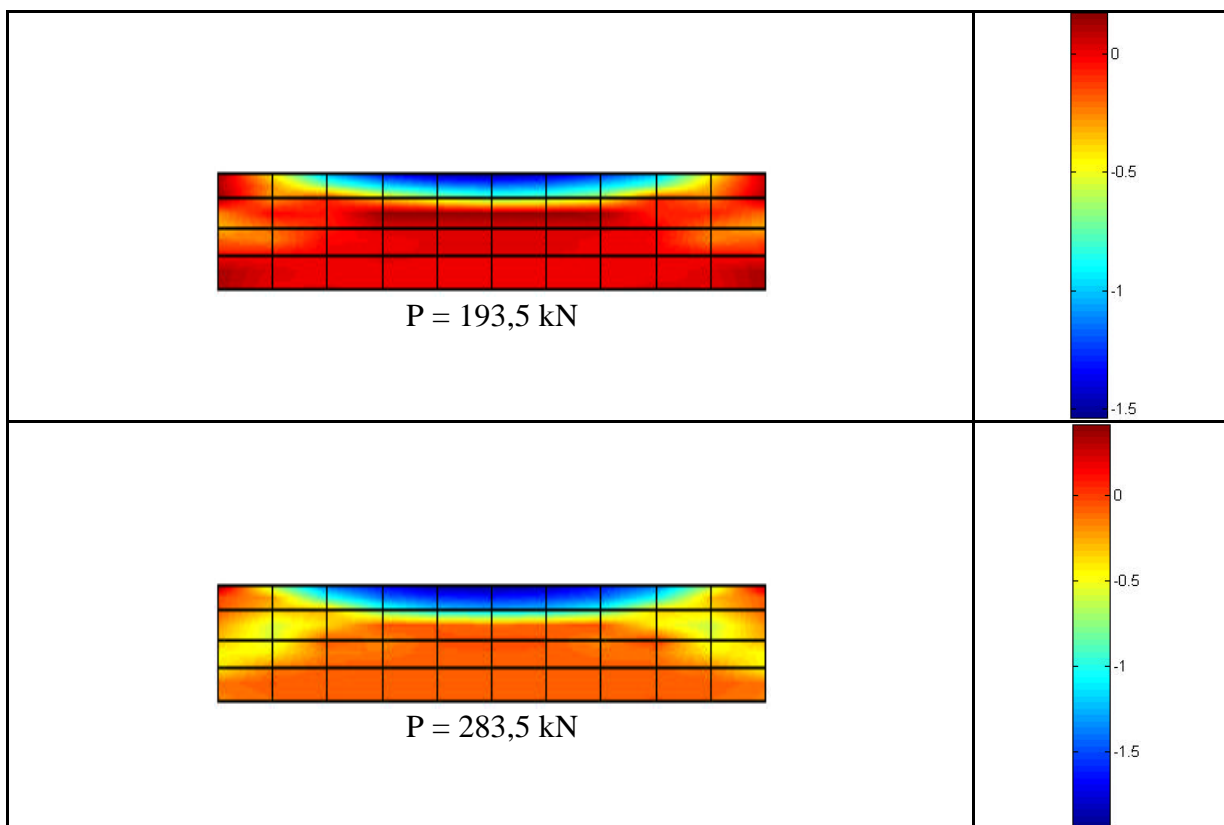
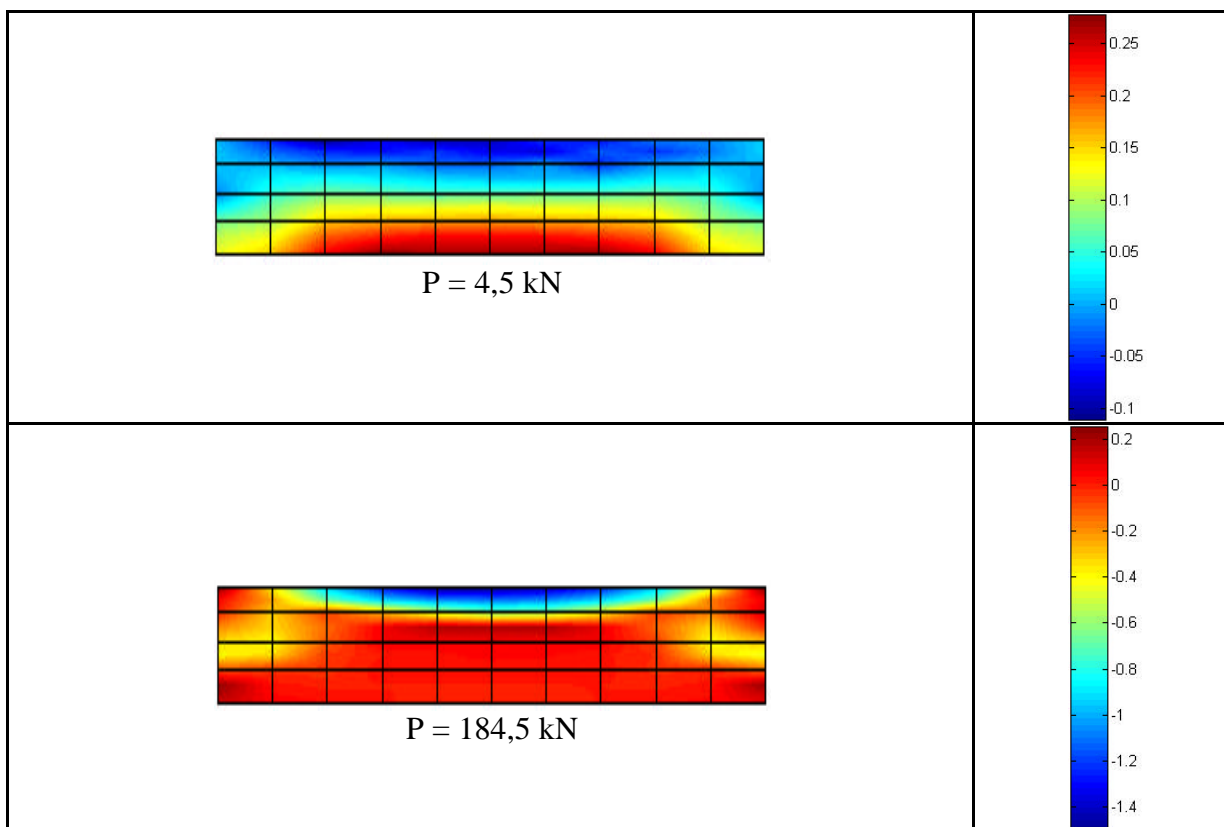


FIGURA 8.26 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga GT2, segundo o modelo computacional



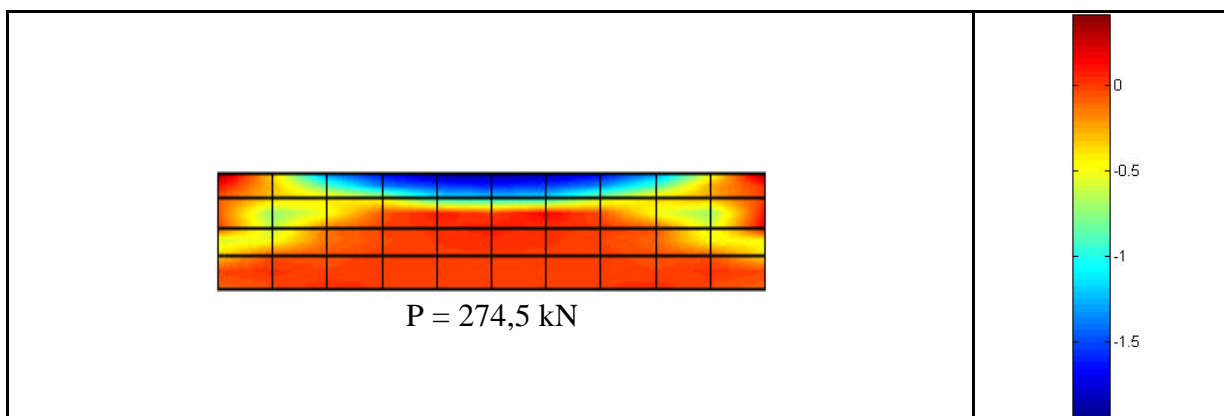


FIGURA 8.27 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga GT3, segundo o modelo computacional

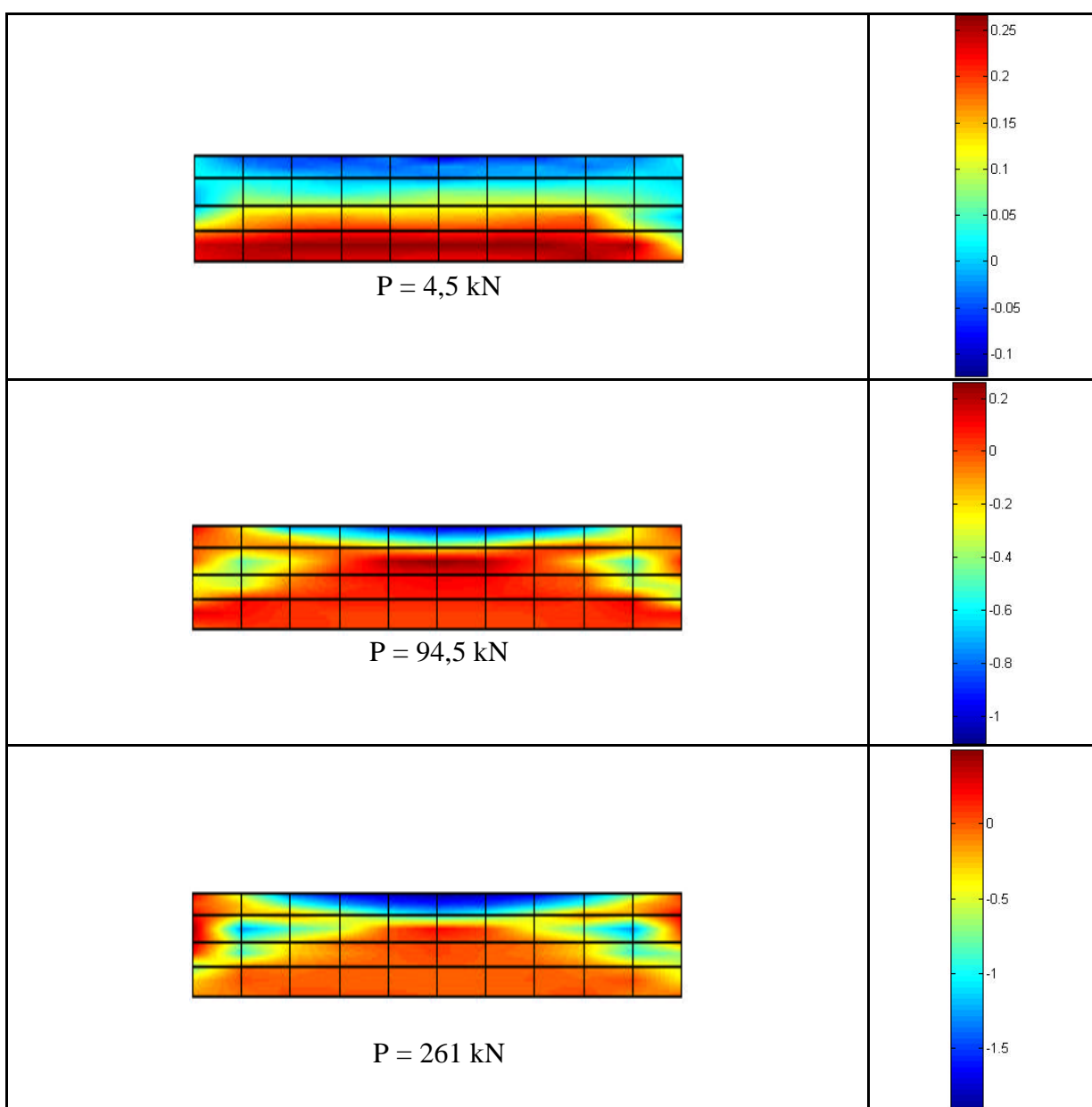


FIGURA 8.28 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga GT4, segundo o modelo computacional

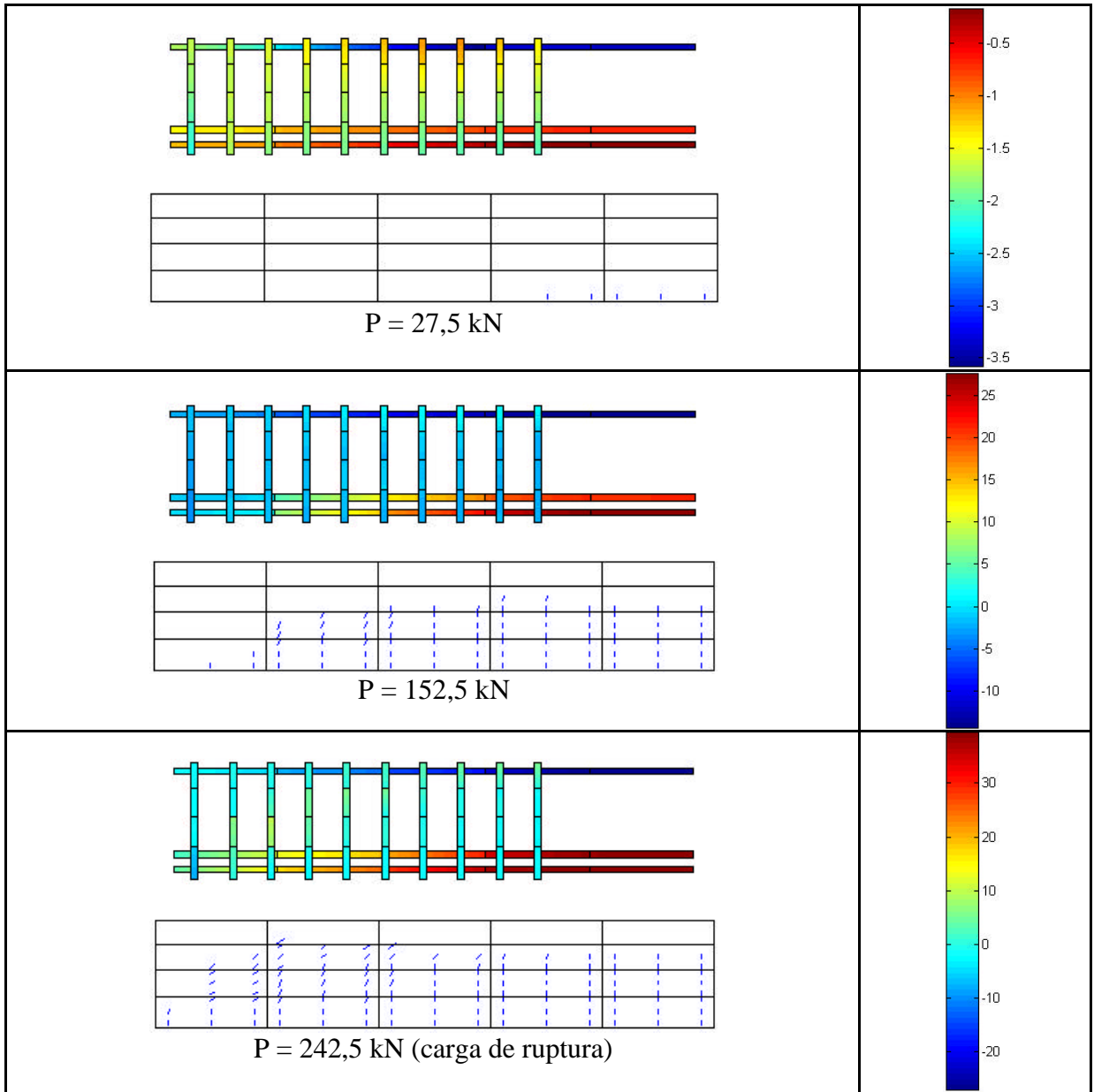
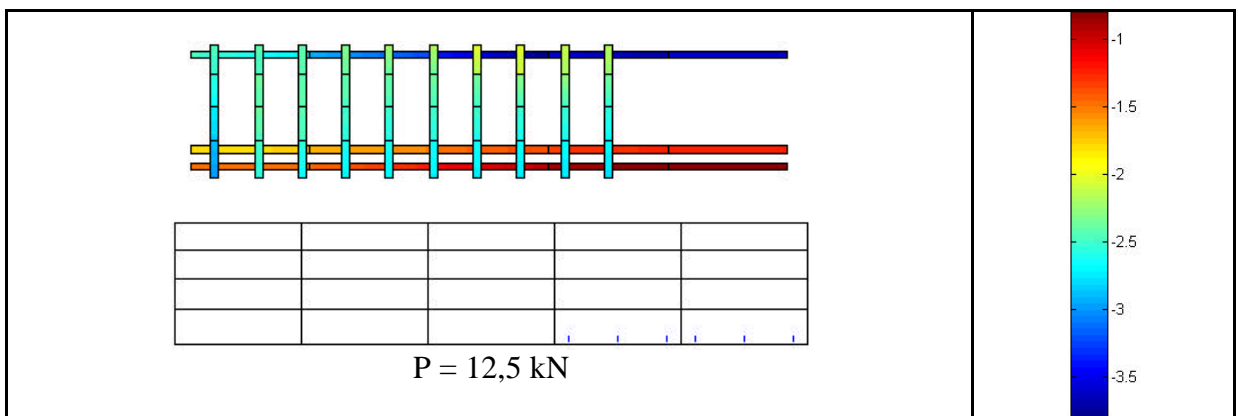


FIGURA 8.29 - Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga ET1, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm^2)



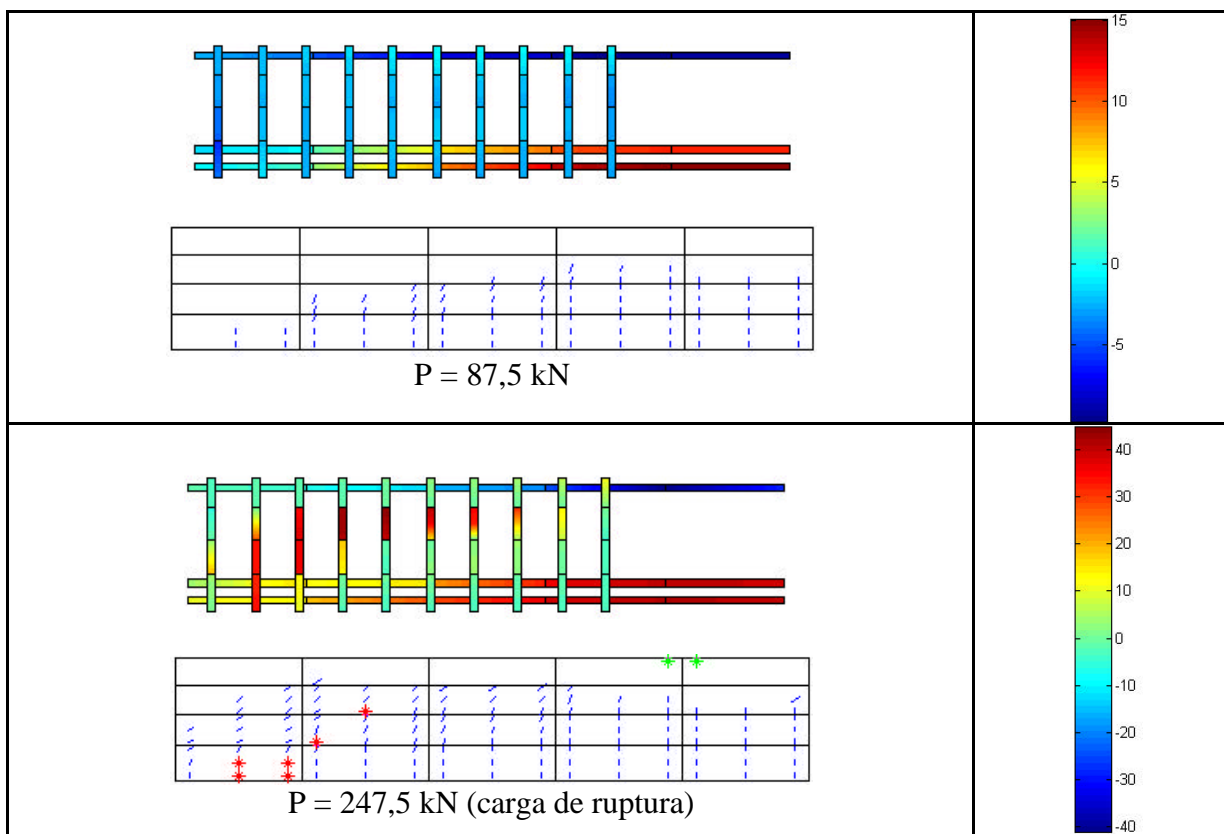
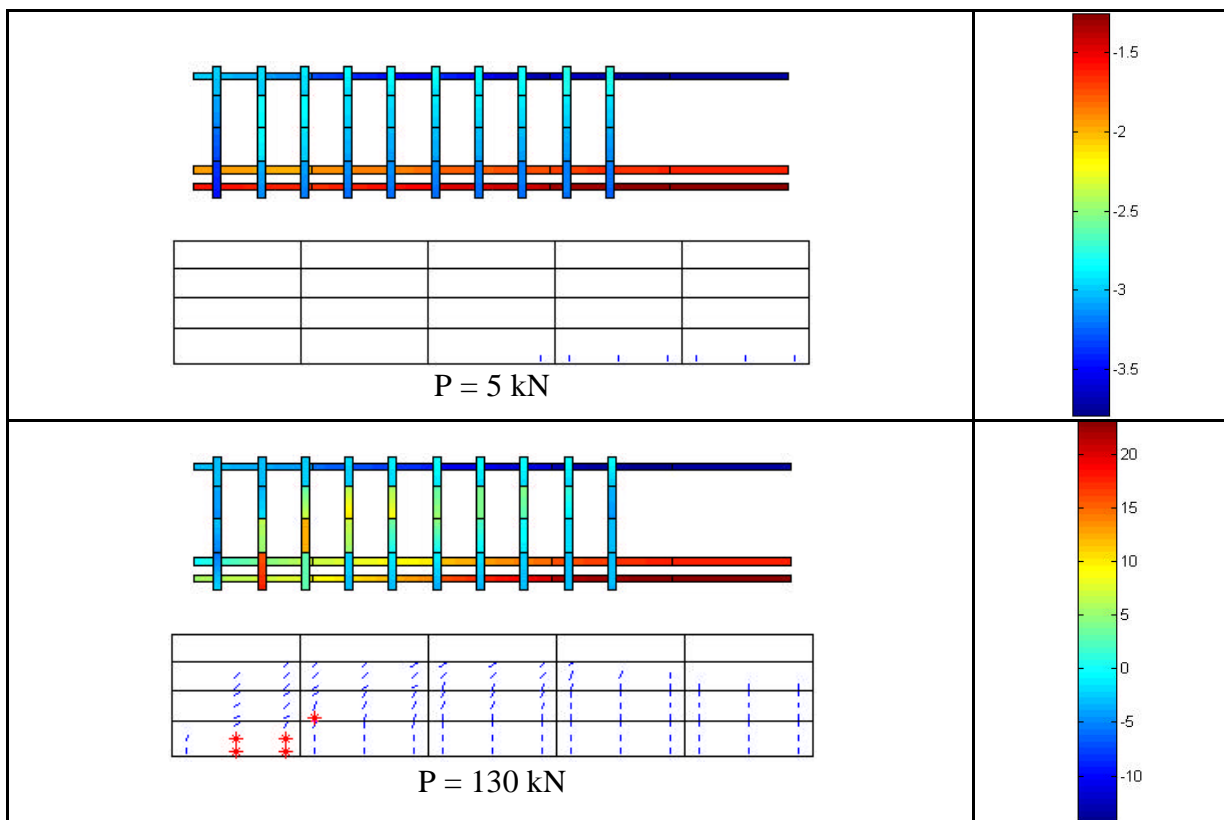


FIGURA 8.30 - Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga ET2, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm²)



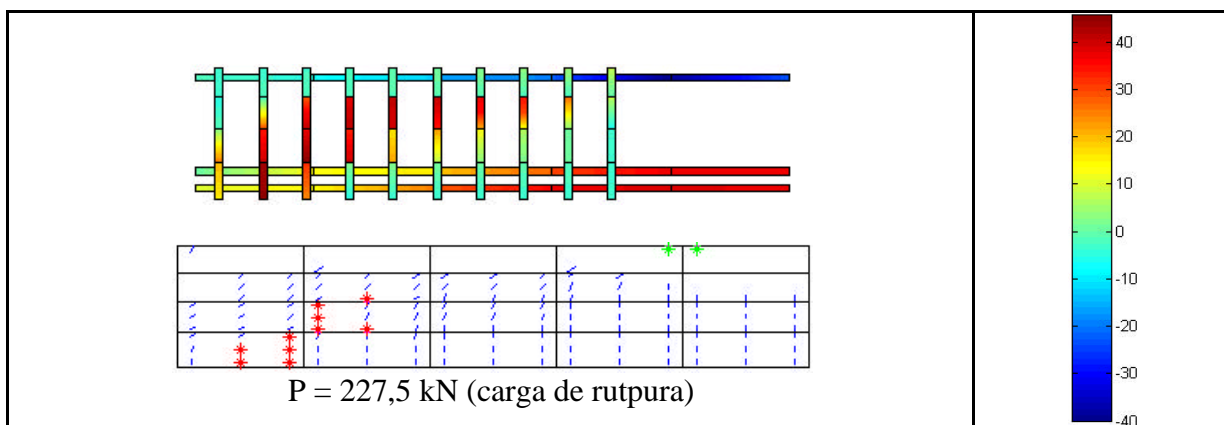


FIGURA 8.31 - Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga ET3, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm^2)

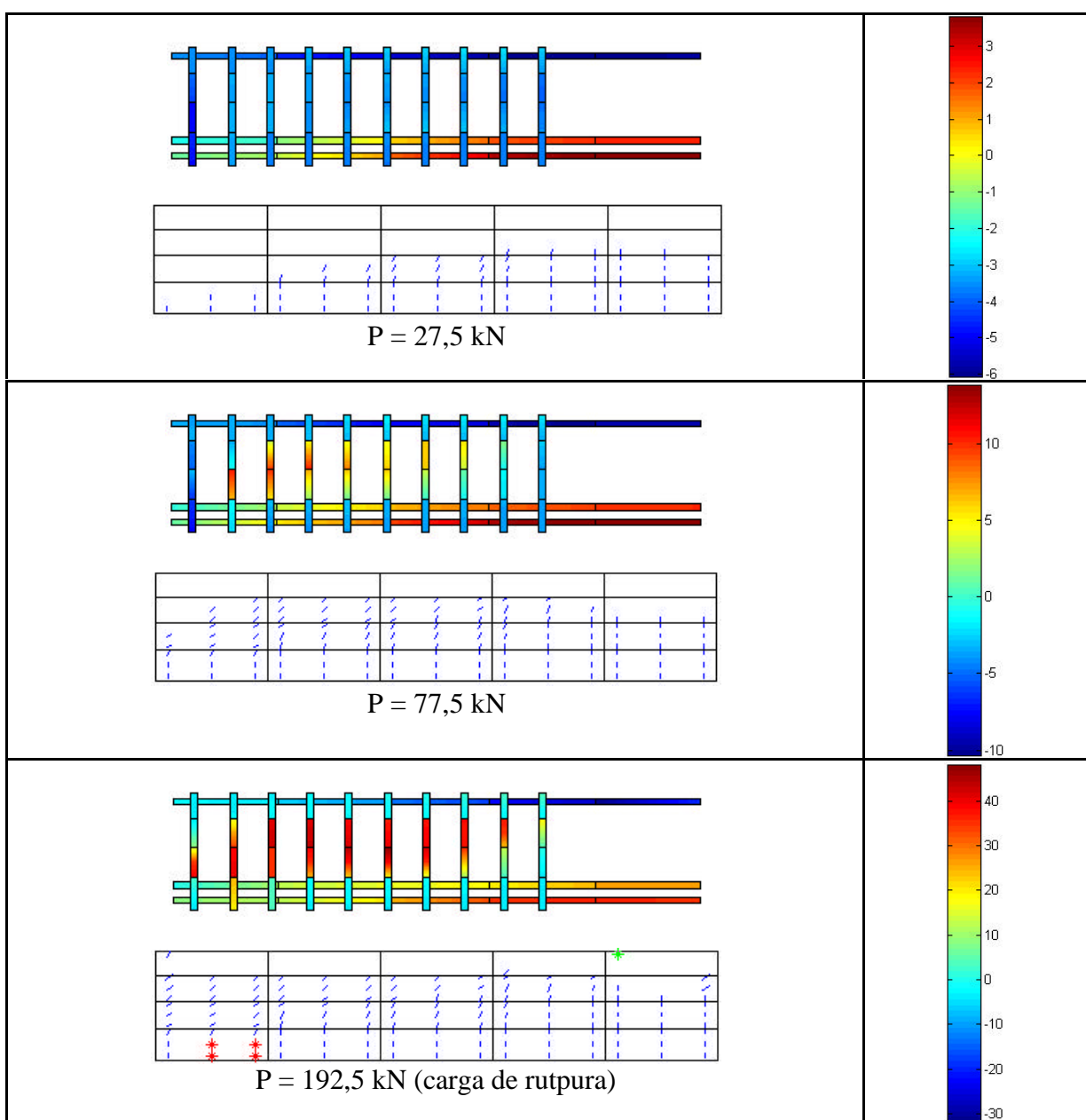


FIGURA 8.32 - Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga ET4, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm^2)

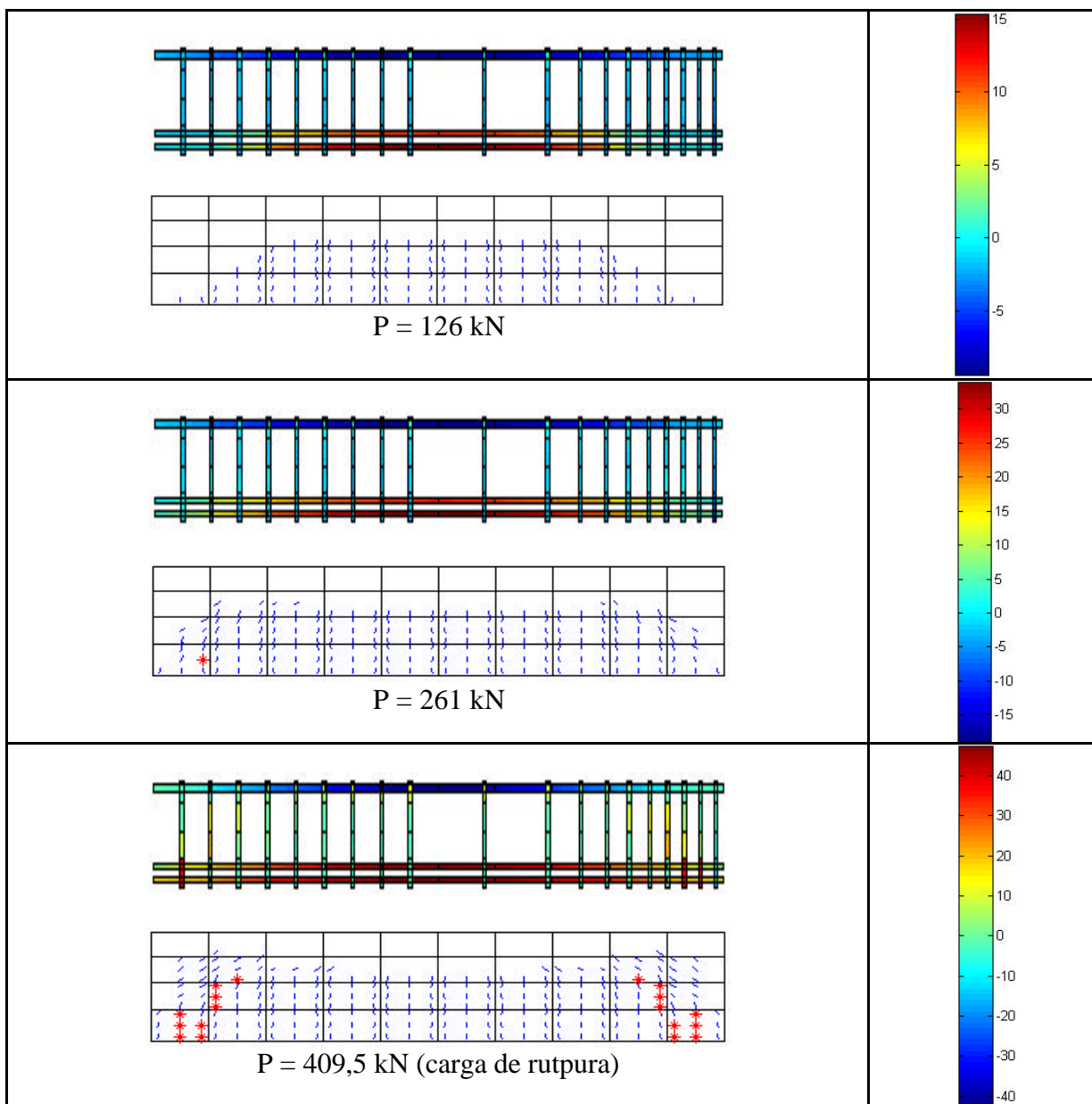
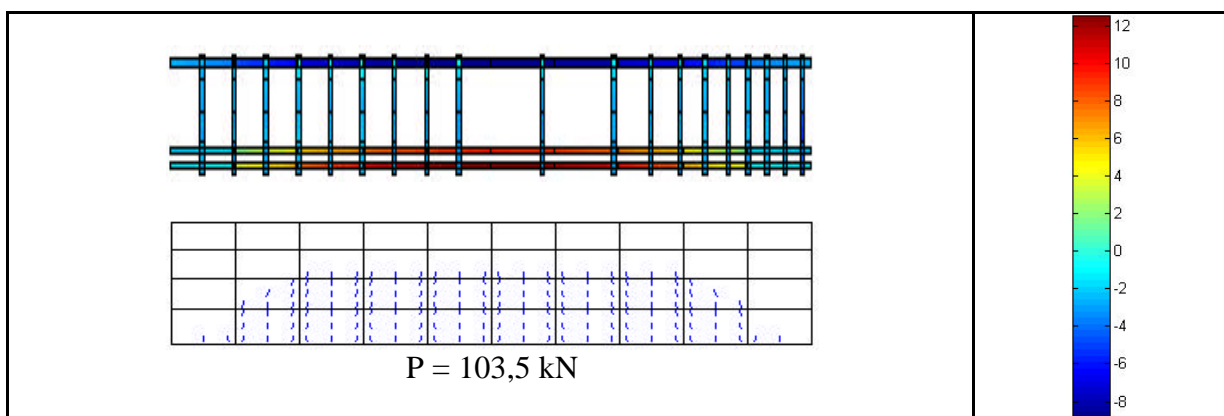


FIGURA 8.33 - Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga GT1, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm^2)



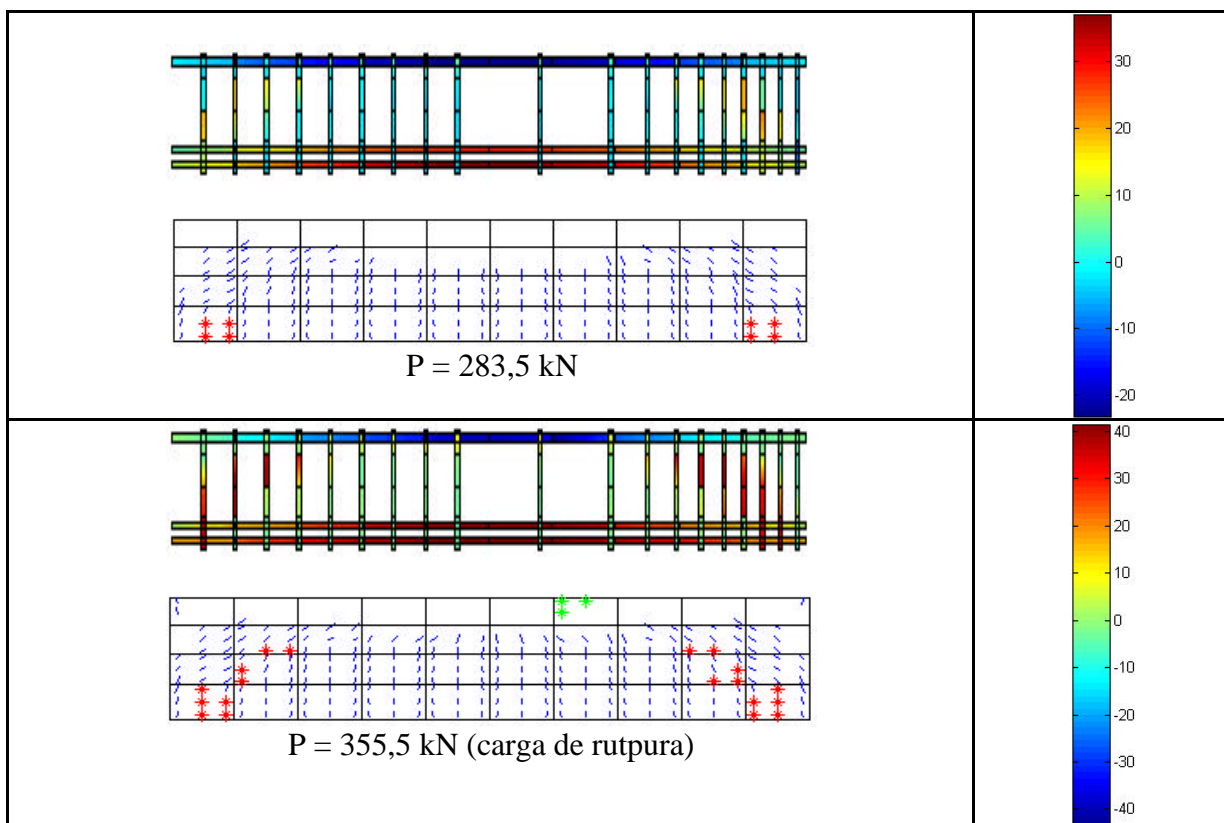
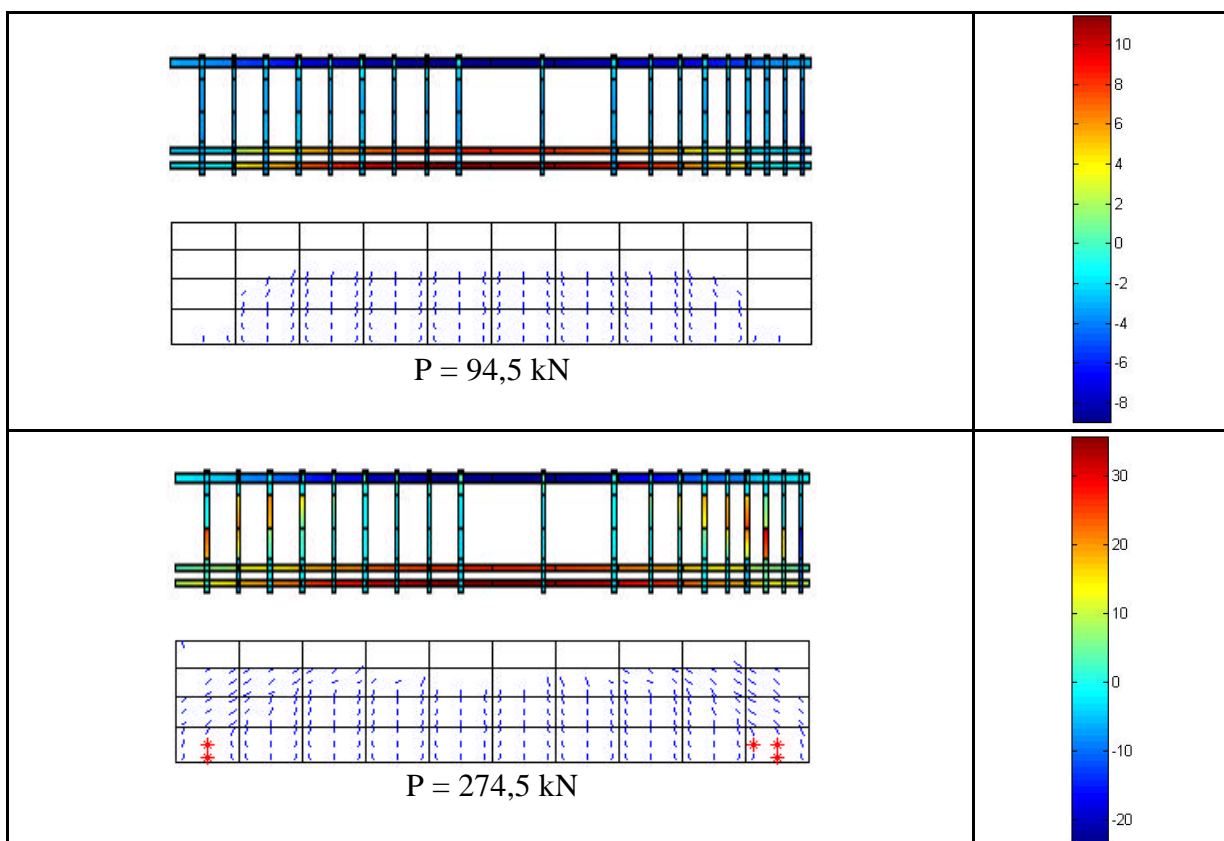


FIGURA 8.34 - Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga GT2, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm^2)



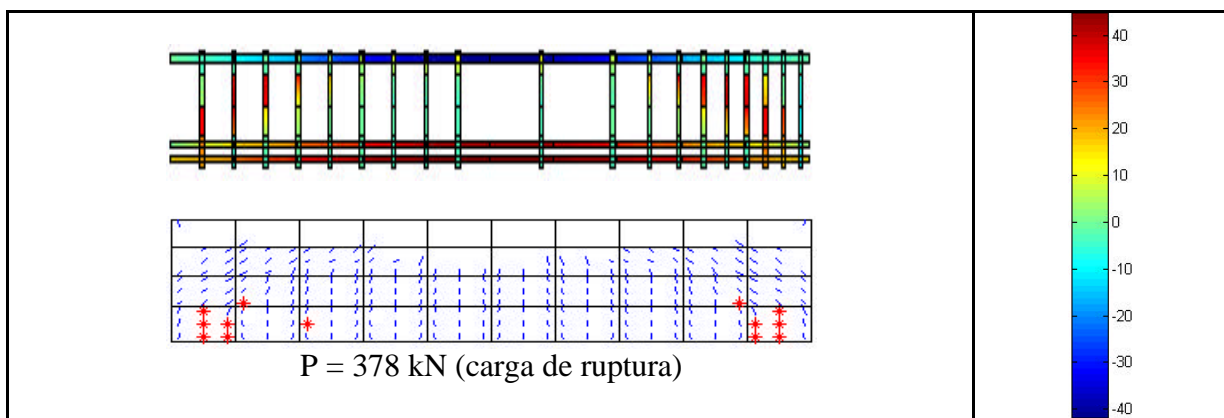


FIGURA 8.35 - Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga GT3, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm^2)

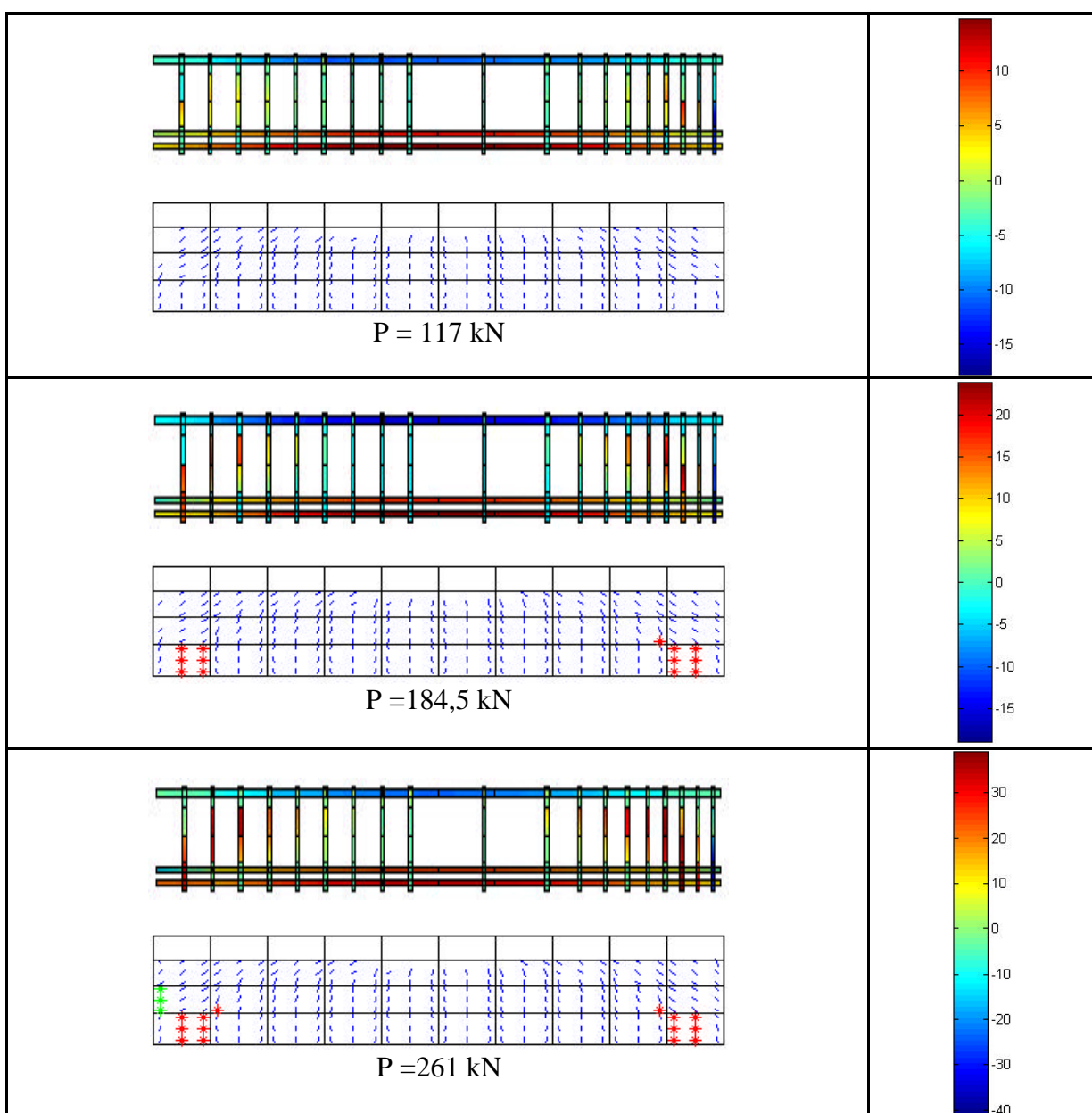


FIGURA 8.36 - Evolução da distribuição das tensões na armadura e das fissuras nos elementos de concreto da viga GT4, segundo o modelo computacional (tensões em kN/cm^2)

9 ANÁLISE DE LAJES DE CONCRETO PROTENDIDO, ARMADAS EM UMA DIREÇÃO, SUBMETIDAS À PRÉ-TRAÇÃO

9.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados por ensaios experimentais, realizados por Britto e Silva (1994), para lajes alveolares, armadas em uma só direção, de concreto protendido, submetidas à pré-tração.

Britto e Silva (1994) ensaiou um conjunto de seis lajes alveolares protendidas, armadas em uma única direção, referenciadas por protótipos A1, A2, B1, B2, C1 e C2, cujo detalhamento pode ser visto na Fig. 9.1. Tais protótipos possuem área da seção de concreto de 457 cm^2 . A armadura protendida, de aço CP-180 RN, é constituída, superiormente, de duas cordoalhas, compostas por fios de diâmetro 2,5 mm (área de $2 \times 0,147 \text{ cm}^2$) e, inferiormente, de quatro cordoalhas, com fios de diâmetro 3,0 mm (área de $4 \times 0,212 \text{ cm}^2$), cuja posição é mostrada na Tab. 9.1. As tensões iniciais superior e inferior de protensão no aço são, respectivamente, $\sigma_{p0}^s = 144,2 \text{ kN/cm}^2$ e $\sigma_{p0}^i = 139,7 \text{ kN/cm}^2$. O módulo de elasticidade do aço é 19500 kN/cm^2 e seu limite de resistência à tração (f_{ptk}), 180 kN/cm^2 . A resistência média à compressão do concreto é de 3 kN/cm^2 . O processo de cura foi realizado de forma acelerada, pela aplicação de vapor supersaturado, de forma que o concreto atingisse a resistência à compressão desejada no primeiro dia de idade. O tipo de cimento utilizado é o portland comum, com adição de cinzas e com endurecimento normal.

Dos seis protótipos, dois, B1 e C2, são carregados, até a ruptura, instantaneamente, dois, A1 e B2, são mantidos com um carregamento de serviço de $1,65 \text{ kN/m}$, e dois, A2 e C1, sem carga, além do peso próprio, $1,14 \text{ kN/m}$, por um período de quatro meses. Após este período, os quatro protótipos foram submetidos a carregamentos instantâneos de forma semelhante aos dois primeiros. A Tab. 9.2 mostra a classificação dos ensaios nos protótipos.

Para a análise computacional, foi utilizada uma malha de elementos finitos com doze elementos quadrangulares quadráticos de oito nós para estado plano de tensão, conforme a Fig. 9.2.

Foram considerados os efeitos de fluência e retração do concreto, adotando-se uma umidade relativa do ar de 80% e uma temperatura média de 20°C , já que tais dados não foram fornecidos no ensaio. A espessura fictícia dos protótipos vale $5,27 \text{ cm}$. Foram também considerados os efeitos de relaxação da armadura protendida.

As análises foram feitas considerando as características físicas individuais médias de cada protótipo, ou seja, a seção transversal dos protótipos foi aproximada para uma seção I, Fig. 9.1, com idênticas áreas de concreto e de armadura, considerada como sendo composta de duas barras de diâmetros equivalentes, uma superior e outra inferior, localizadas na seção conforme a Tab. 9.1.

Como os protótipos sofrem um processo de cura acelerada, a resistência à compressão do concreto no seu primeiro dia de idade corresponde aos 28 dias no modelo computacional.

Os valores de deslocamentos e deformações comparados, a seguir, são valores líquidos, ou seja, estão descontadas as parcelas correspondentes ao peso próprio.

No que se refere às deformações, são comparados os resultados obtidos através da leitura de extensômetros elétricos e mecânicos, para as faces inferior e superior da seção central, com aqueles encontrados através do modelo computacional.

TABELA 9.1 - Cobrimento das cordoalhas (cm)

COBRIMENTO	PROTÓTIPOS					
	A1	A2	B1	B2	C1	C2
Superior	2,670	1,970	2,350	2,070	2,870	2,970
Inferior	2,100	2,065	2,340	2,285	2,685	2,775

TABELA 9.2 - Classificação dos ensaios nos protótipos

ENSAIO	PROTÓTIPO	IDADE (DIAS)	CARACTERÍSTICAS
01	B1	12	Carga concentrada até a ruptura
02	A1	12	Carga de serviço, distribuída
03	B2	12	Carga de serviço, distribuída
04	C2	19	Carga concentrada até a ruptura
05	B2	12-140	Carga de serviço, distribuída
06	A1	12-143	Carga de serviço, distribuída
07	A2	12-126	Somente peso próprio
08	C1	12-136	Somente peso próprio
09	A2	133	Carga concentrada até a ruptura
10	C1	140	Carga concentrada até a ruptura

9.2 EVOLUÇÃO DAS FLECHAS E DEFORMAÇÕES AO LONGO DO CARREGAMENTO

9.2.1 Ensaio de carregamento instantâneo com carga de serviço distribuída

As Fig. 9.3 a 9.6 apresentam os resultados correspondentes aos ensaios 02 e 03, conforme a Tab. 9.1. Os protótipos A1 e B2 foram submetidos a um carregamento instantâneo, aplicado de forma distribuída. A carga total aplicada foi de 1,65 kN/m, além do peso próprio.

Conforme Britto e Silva (1994), o protótipo B2 apresentou maiores deslocamentos verticais do que o A1, pelo fato de já terem ocorrido fissuras numa região próxima ao centro, antes da aplicação do carregamento. Tal fato, porém, não pôde ser levado em consideração pelo modelo computacional, apresentado neste trabalho, pois se considera, inicialmente, que o concreto tracionado tenha um comportamento elástico linear e que não ocorram fissuras antes da aplicação do carregamento.

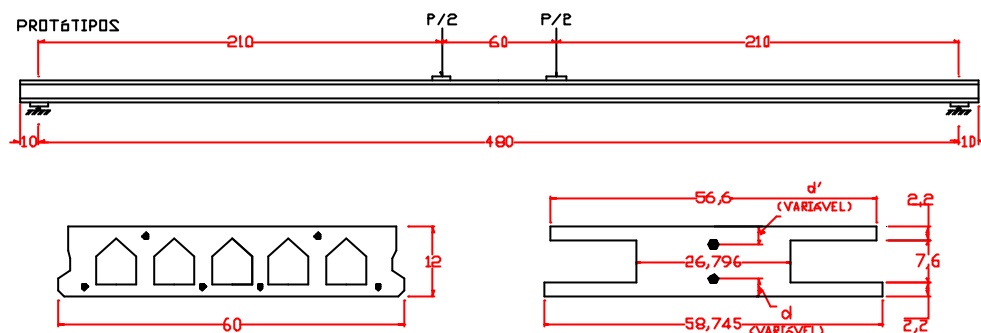


FIGURA 9.1 - Detalhamento dos protótipos com as seções real e teórica (cotas em cm)

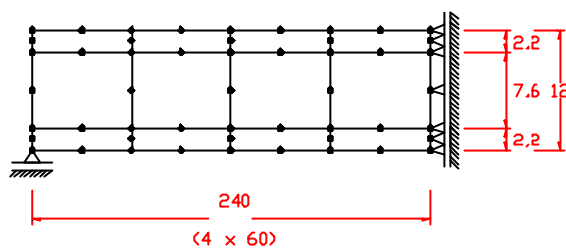


FIGURA 9.2 - Discretização adotada para a análise por elementos finitos dos protótipos (cotas em cm)

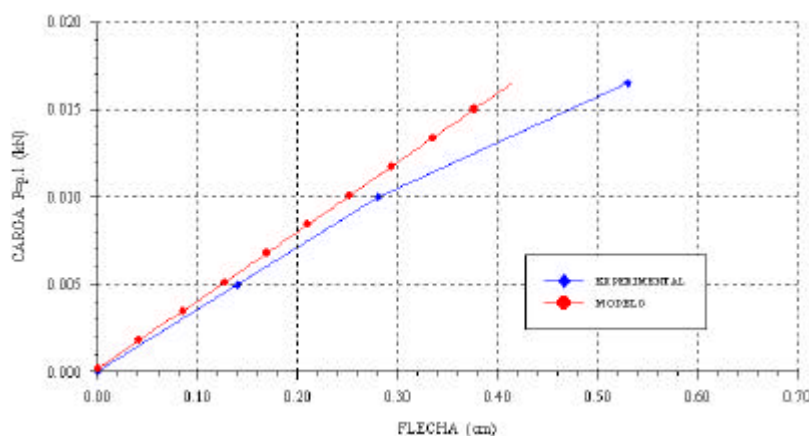


FIGURA 9.3 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 02 e pelo modelo computacional, para o protótipo A1

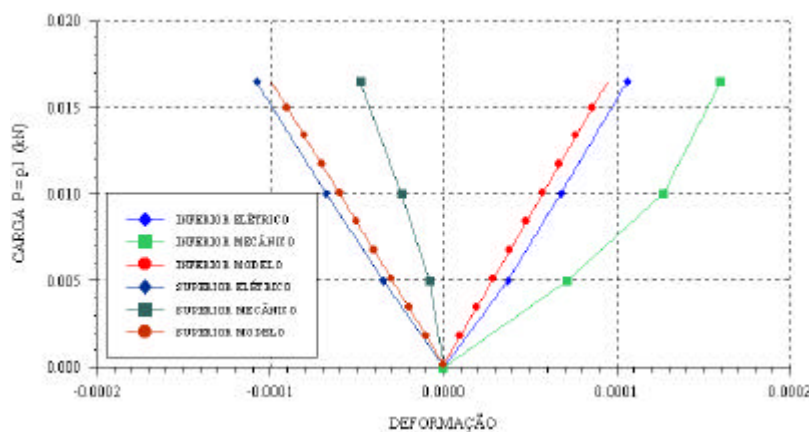


FIGURA 9.4 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 02 e pelo modelo computacional, para as faces inferior e superior da seção central do protótipo A1

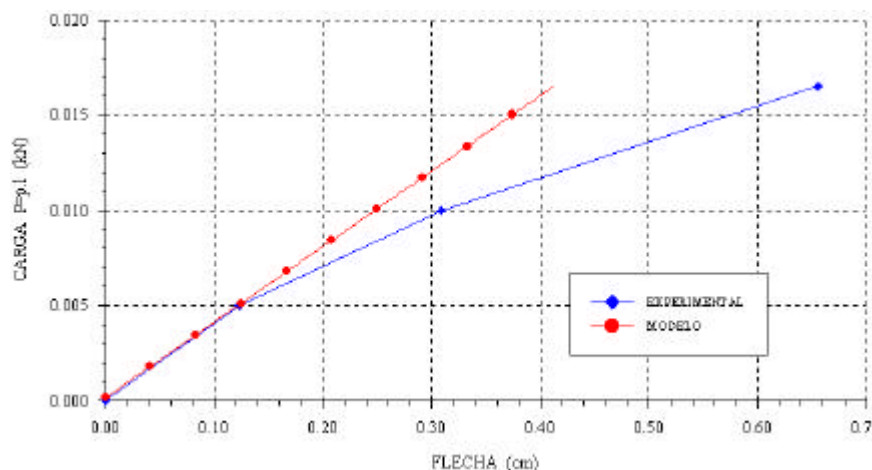


FIGURA 9.5 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 03 e pelo modelo computacional, para o protótipo B2

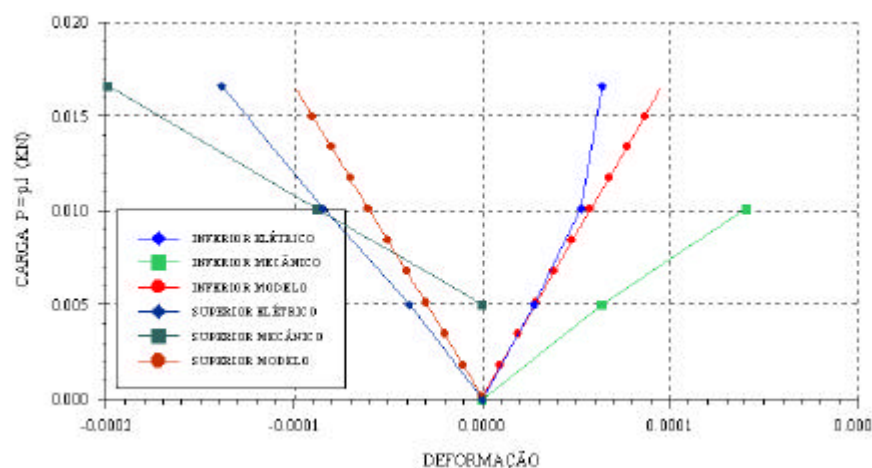


FIGURA 9.6 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 03 e pelo modelo computacional, para as faces inferior e superior da seção central do protótipo B2

9.2.2 Ensaio de carregamento permanente com carga de serviço distribuída

As Figs. 9.7 a 9.12 apresentam os resultados correspondentes aos ensaios 05 e 06, conforme a Tab. 9.1. Nestes ensaios, os protótipos A1 e B2 permaneceram submetidos ao carregamento, aplicado de forma distribuída, por um período de 143 e 140 dias, respectivamente.

Na Fig. 9.10, fica evidenciada a influência da fissura referida no item 9.2.1 no aumento do deslocamento vertical do protótipo B2, medido experimentalmente, ao longo do tempo.

Britto e Silva (1994) relatou que ocorreram dificuldades na utilização do extensômetro mecânico, podendo ter ocorrido imprecisões nas leituras do mesmo. Houve dificuldades de acesso à face inferior dos protótipos para a medição das deformações através deste aparelho. Além disso, nos protótipos A1 e B2, não foi possível utilizá-lo na face superior, devido ao fato desta face estar coberta por sacos de areia, os quais simulavam o carregamento distribuído. Tais deformações foram estimadas, então, através da leitura entre dois pontos situados na face lateral, o mais próximo da face superior. Esta aproximação pode ter originado diferenças significativas de valores. A própria utilização inadequada do equipamento pode ter conduzido a leituras incorretas, o que transparece, com maior evidência, em alguns gráficos de deformações por carregamento instantâneo (item 9.2.4).

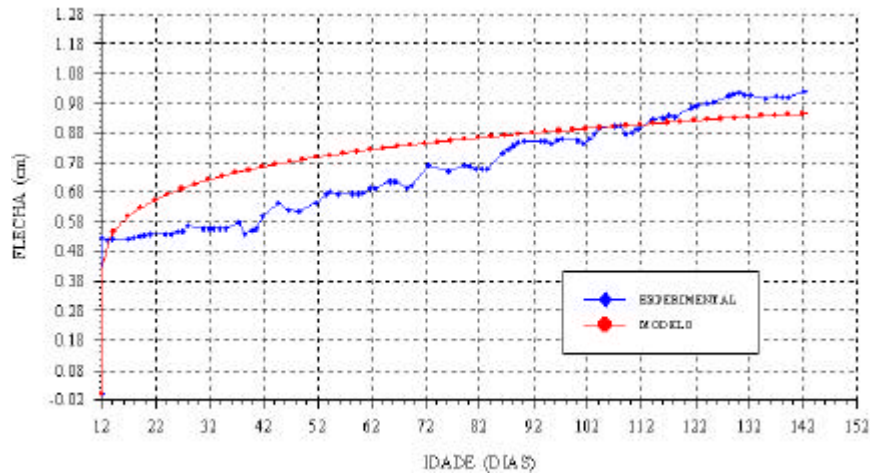


FIGURA 9.7 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 05 e pelo modelo computacional, para o protótipo A1

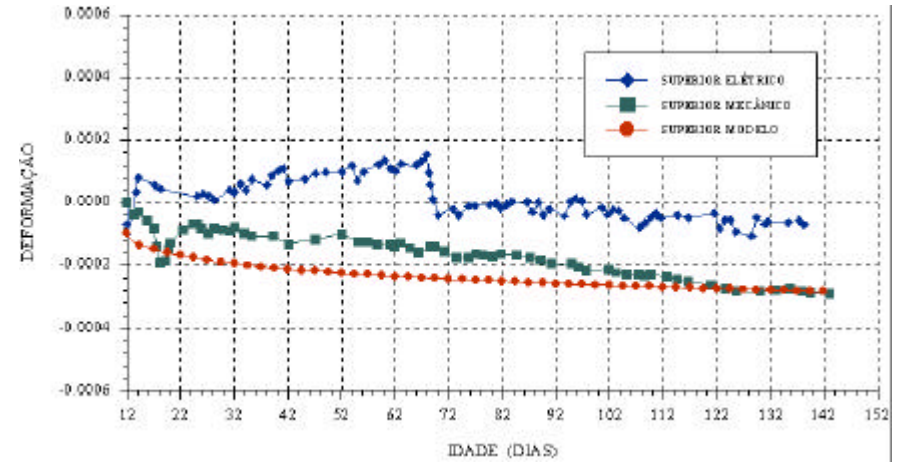


FIGURA 9.9 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 05 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo A1

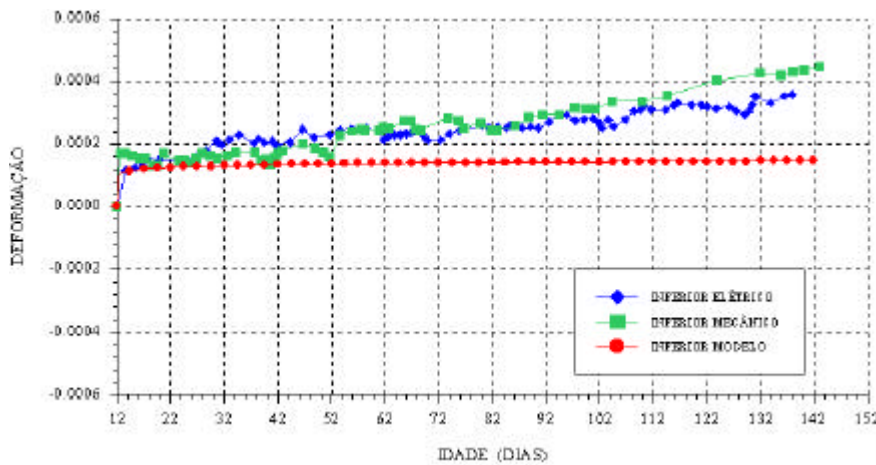


FIGURA 9.8 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 05 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo A1

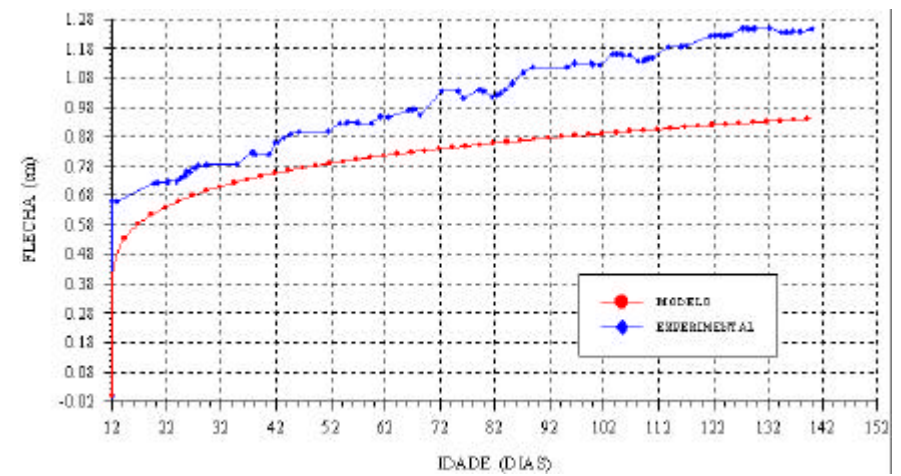


FIGURA 9.10 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 06 e pelo modelo computacional, para o protótipo B2

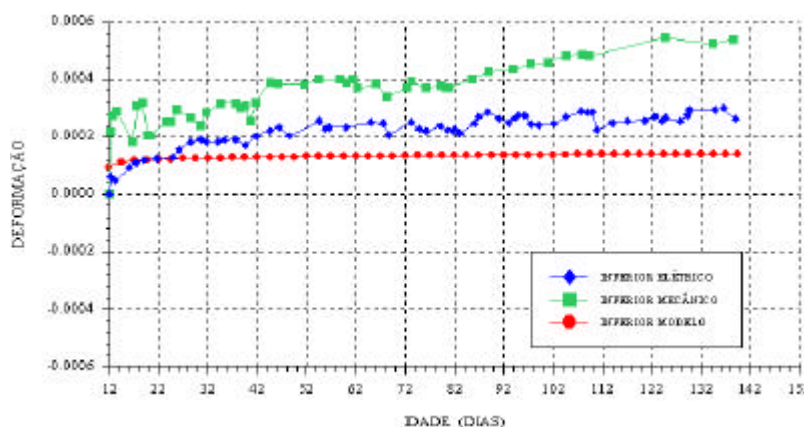


FIGURA 9.11 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 06 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo B2

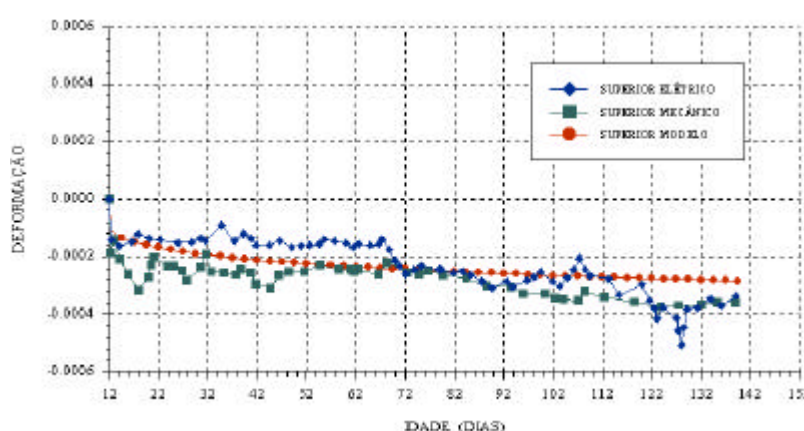


FIGURA 9.12 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 06 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo B2

9.2.3 Ensaio de carregamento permanente com somente peso próprio

As Figs. 9.13 a 9.18 apresentam os resultados correspondentes aos ensaios 07 e 08, conforme a Tab. 9.1. Nestes ensaios, os protótipos A2 e C1 permaneceram submetidos ao peso próprio carregamento por um período de 126 e 136 dias, respectivamente.

As observações feitas no item 9.2.2 a respeito do extensômetro mecânico são válidas também para este ensaio.

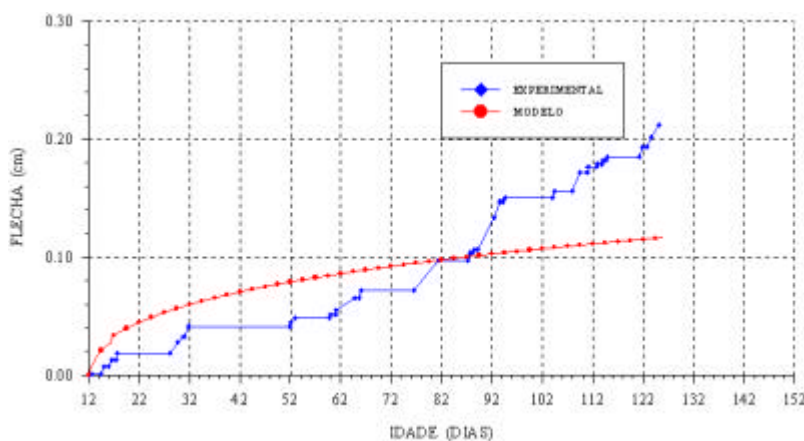


FIGURA 9.13 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 07 e pelo modelo computacional, para o protótipo A2

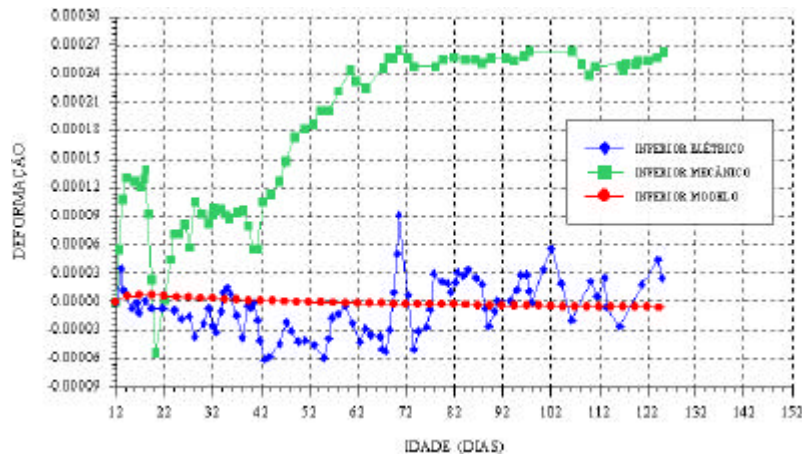


FIGURA 9.14 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 07 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo A2

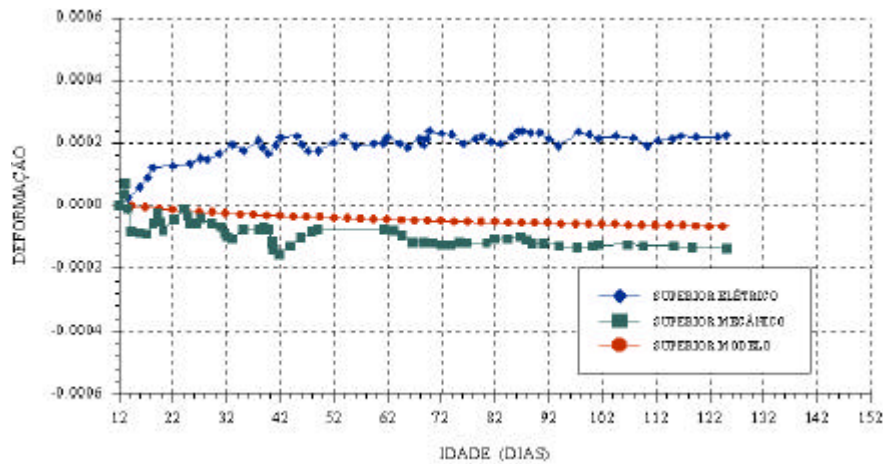


FIGURA 9.15 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 07 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo A2

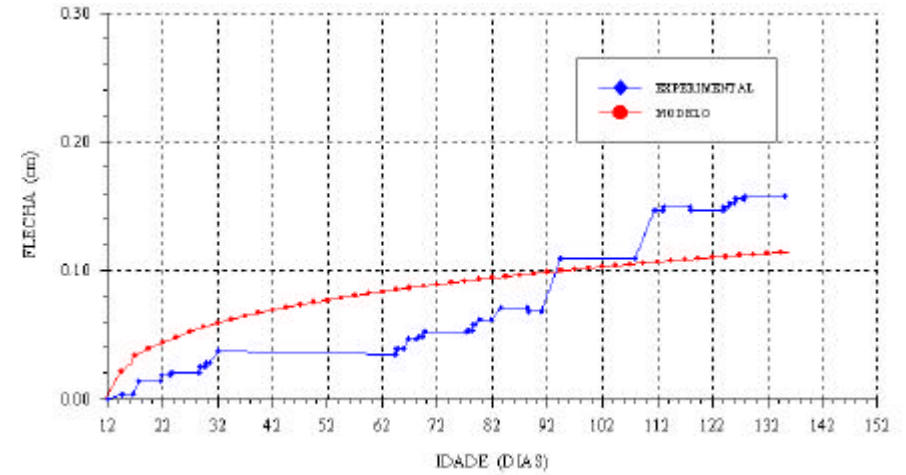


FIGURA 9.16 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 08 e pelo modelo computacional, para o protótipo C1

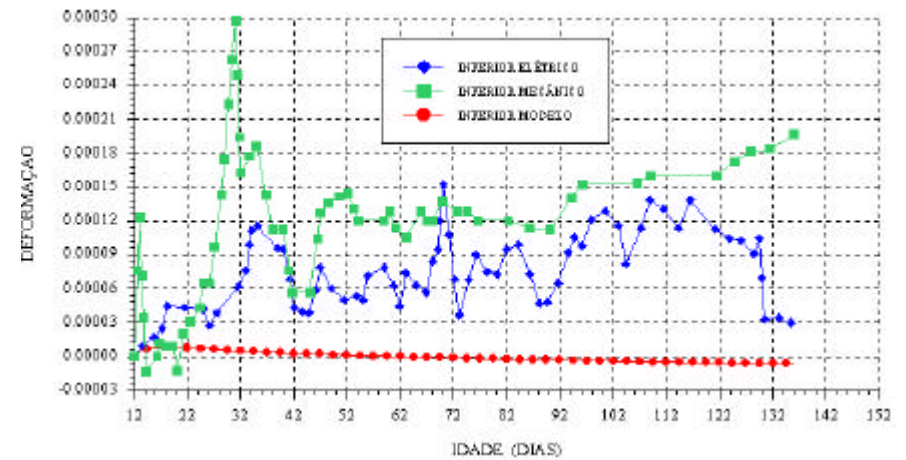


FIGURA 9.17 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 08 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo C1

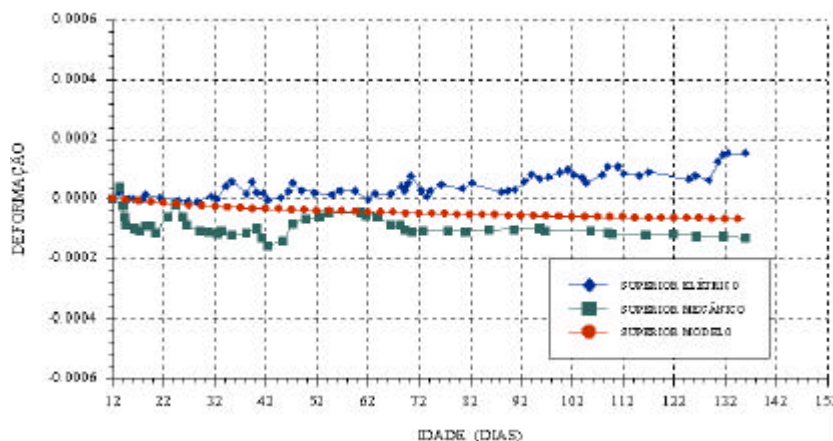


FIGURA 9.18 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 08 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo C1

9.2.4 Ensaio de carregamento instantâneo com carga concentrada até a ruptura

As Figs. 9.19 a 9.34 apresentam os resultados correspondentes aos ensaios 01, 04, 09 e 10, conforme a Tab. 9.1. Nestes ensaios, os protótipos B1, C2, A2 e C1, respectivamente, foram levados à ruptura, mediante a aplicação de cargas concentradas, localizadas a 30 cm de cada lado a partir do seu eixo, conforme a Fig. 9.1. Os dois primeiros foram rompidos logo no 12º dia de idade, enquanto que os dois últimos, após os períodos de 126 e 136 dias, respectivamente.

São comparadas as flechas medidas tanto na seção central de cada protótipo, quanto nas seções localizadas a um quarto do vão, onde, segundo Britto e Silva (1994), os resultados experimentais não estão plotados até a ruptura, pois os defletômetros atuantes nestas posições foram retirados assim que seu curso total foi atingido, não sendo, então, efetuadas leituras experimentais para estas posições a partir de então.

Britto e Silva (1994) também constatou que alguns resultados experimentais de deformações obtidos, utilizando o extensômetro mecânico, apresentaram valores bem diversos daquilo que era esperado, emprestando aos gráficos um aspecto inadequado.

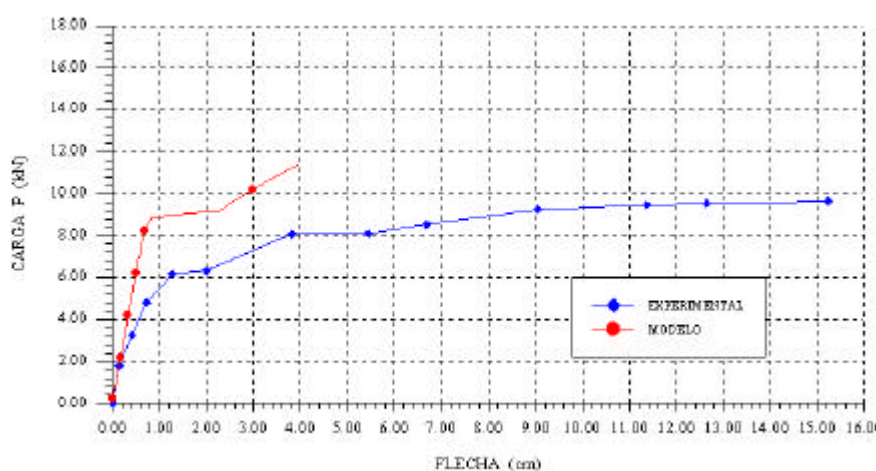


FIGURA 9.19 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 01 e pelo modelo computacional, para a seção central do protótipo B1

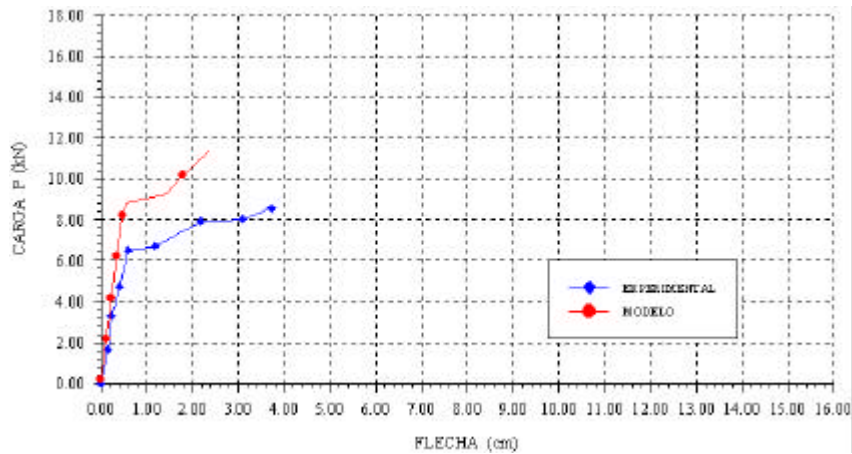


FIGURA 9.20 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 01 e pelo modelo computacional, para a seção a um quarto do vão do protótipo B1

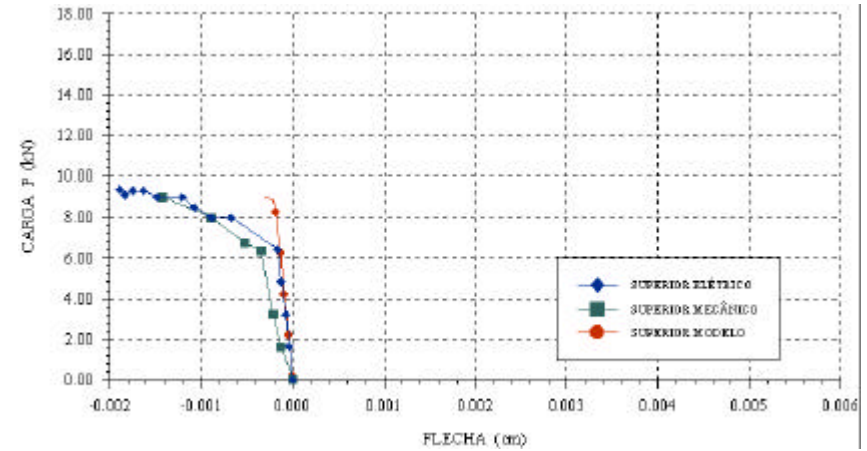


FIGURA 9.22 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 01 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo B1

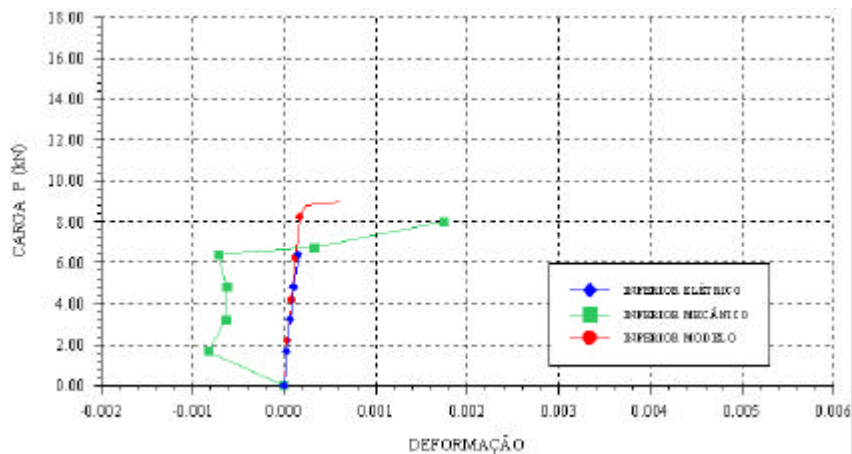


FIGURA 9.21 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 01 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo B1

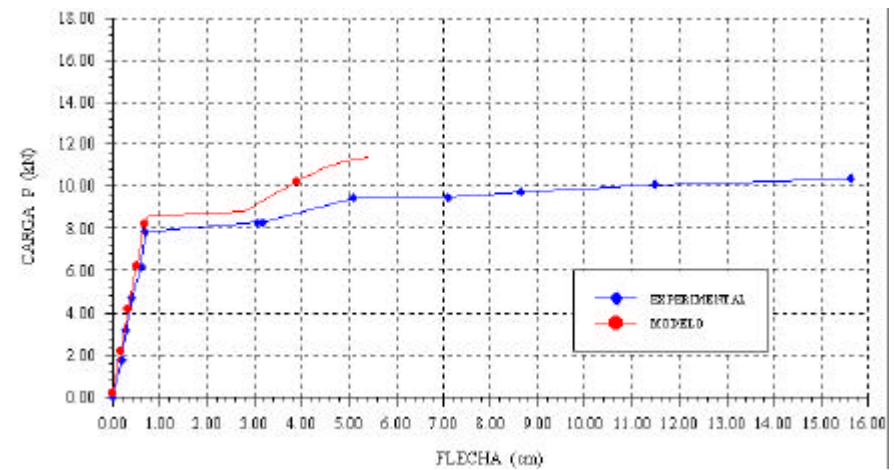


FIGURA 9.23 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 04 e pelo modelo computacional, para a seção central do protótipo C2

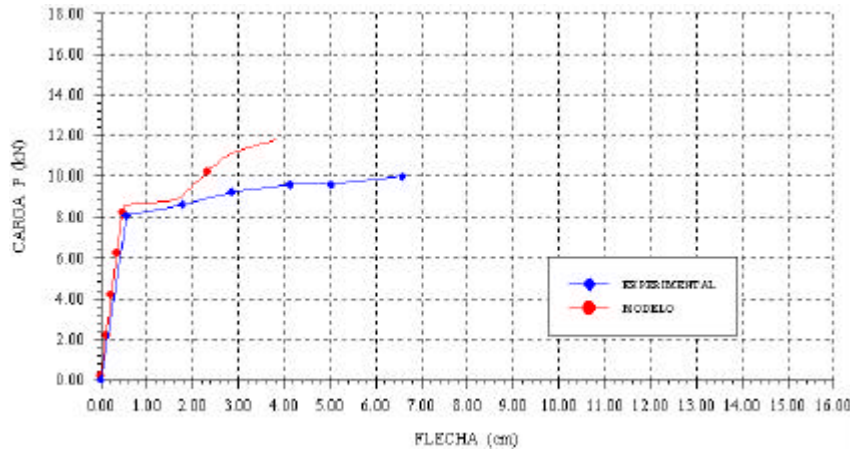


FIGURA 9.24 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 04 e pelo modelo computacional, para a seção a um quarto do vão do protótipo C2

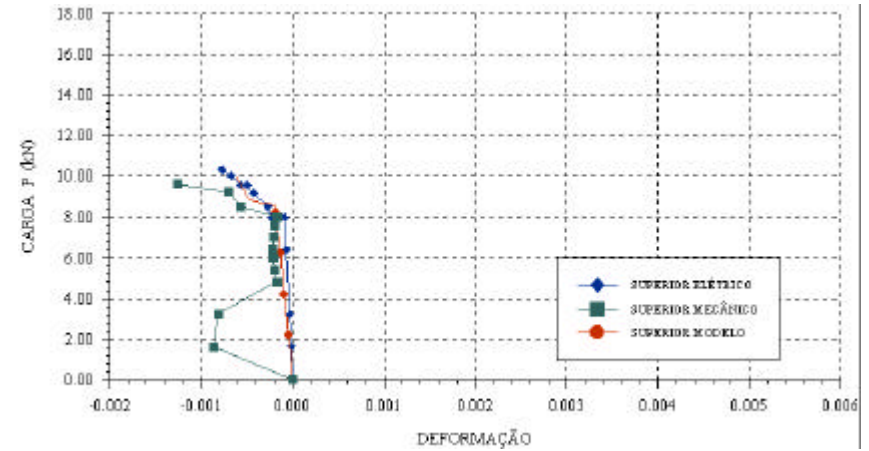


FIGURA 9.26 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 04 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo C2

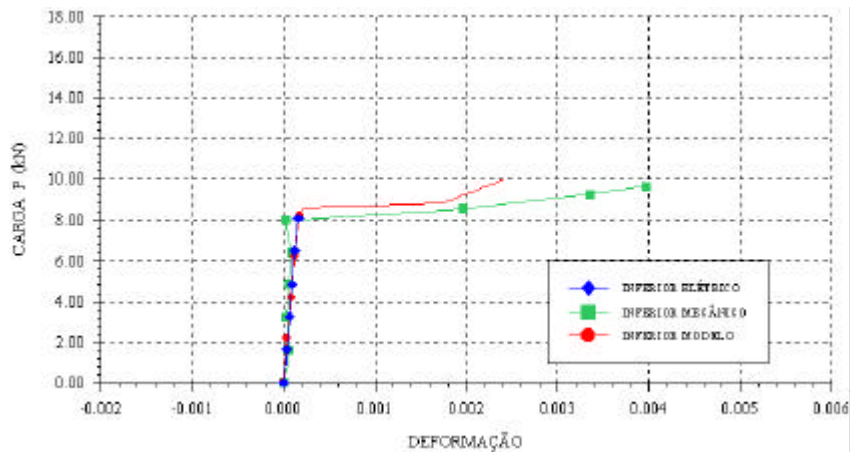


FIGURA 9.25 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 04 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo C2

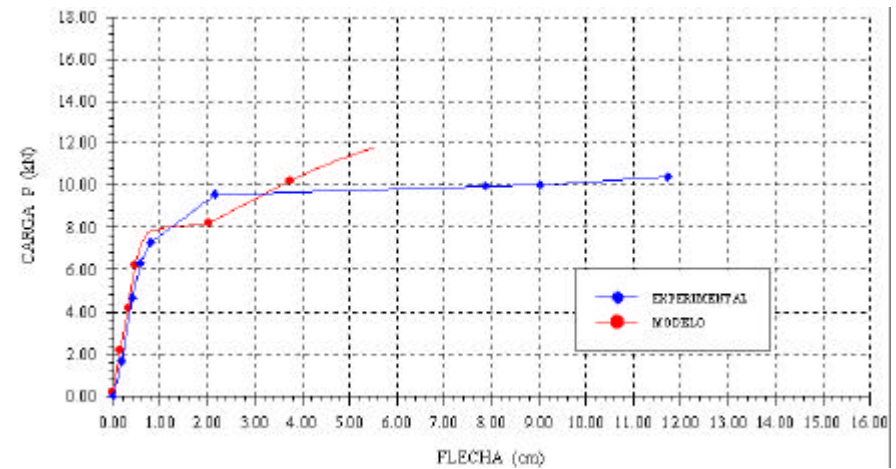


FIGURA 9.27 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 09 e pelo modelo computacional, para a seção central do protótipo A2

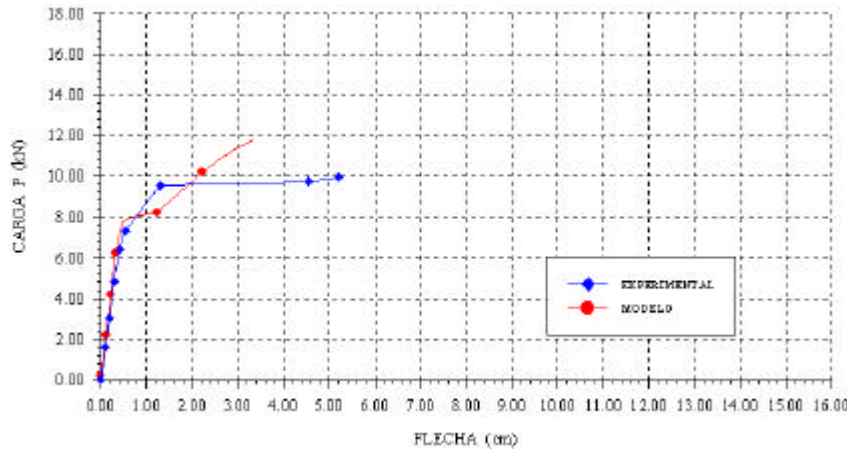


FIGURA 9.28 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 09 e pelo modelo computacional, para a seção a um quarto do vão do protótipo A2

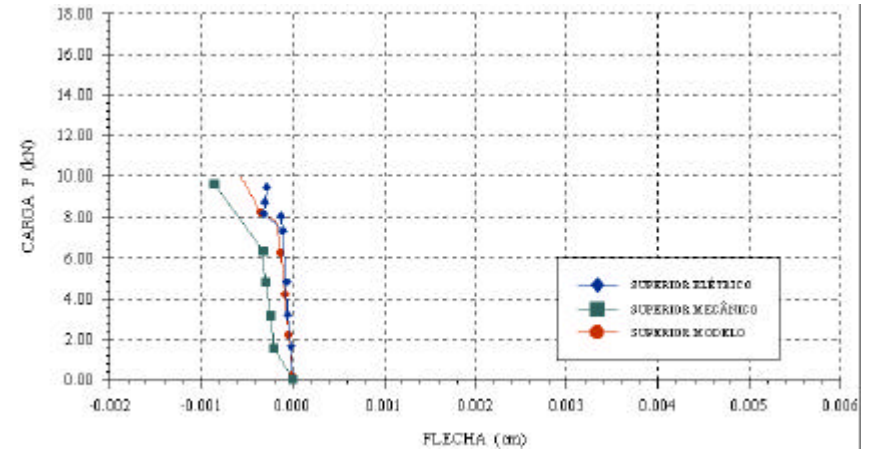


FIGURA 9.30 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 09 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo A2

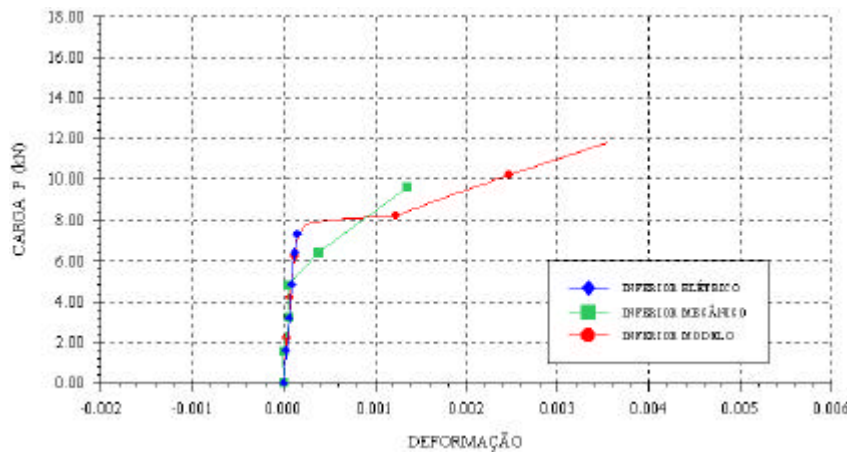


FIGURA 9.29 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 09 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo A2

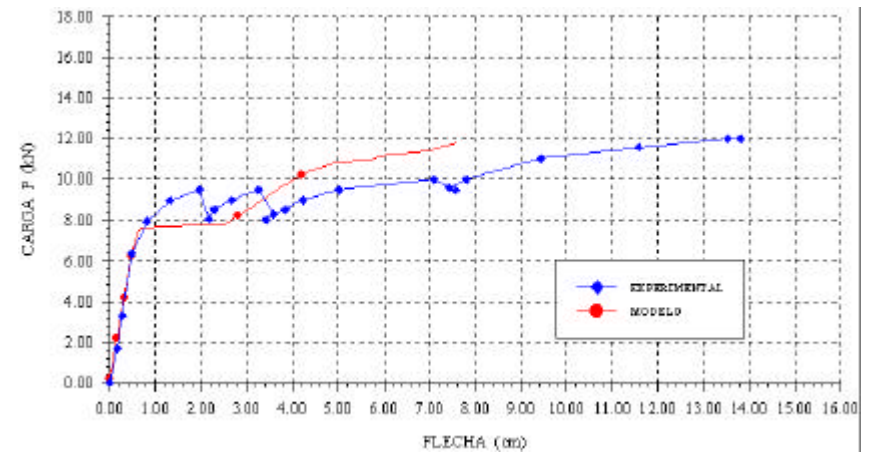


FIGURA 9.31 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 10 e pelo modelo computacional, para a seção central do protótipo C1

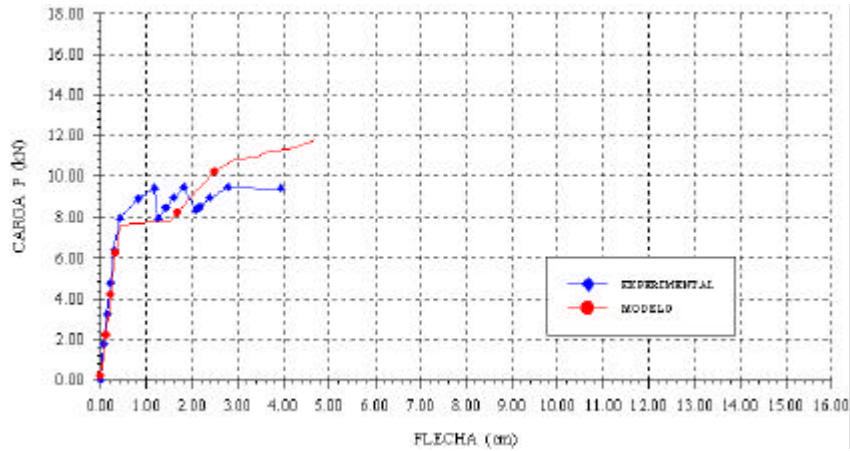


FIGURA 9.32 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio 10 e pelo modelo computacional, para a seção a um quarto do vão do protótipo C1

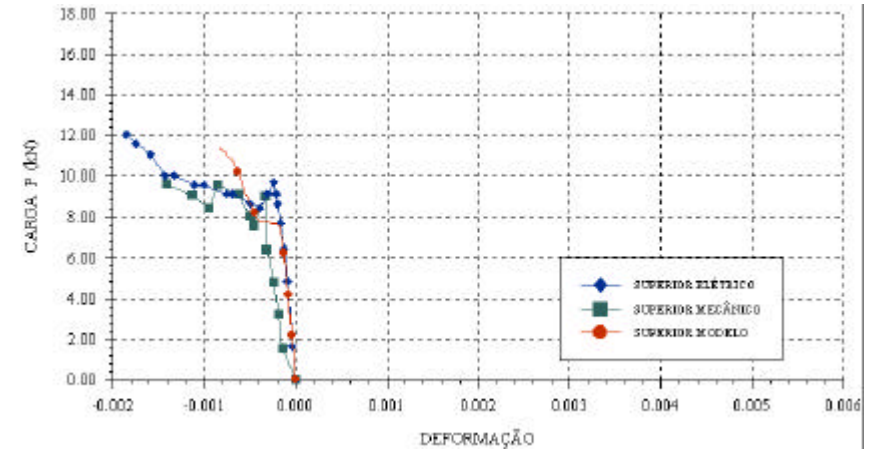


FIGURA 9.34 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 10 e pelo modelo computacional, para a face superior da seção central do protótipo C1

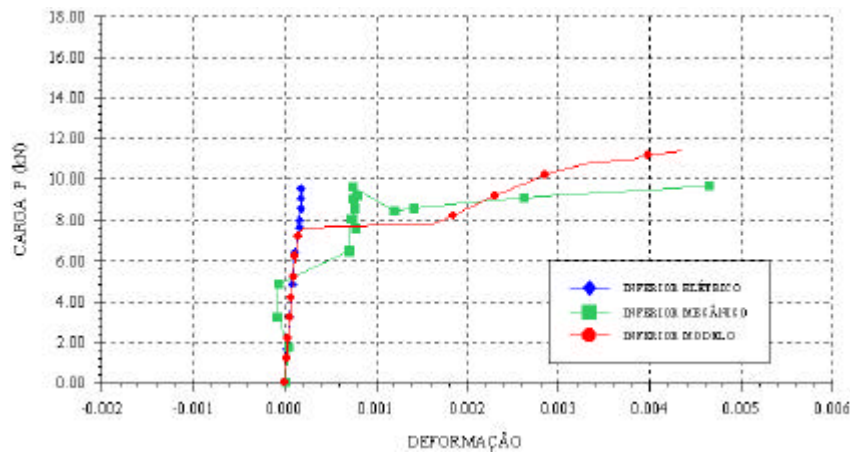


FIGURA 9.33 - Comparação entre as deformações, obtidas no ensaio 10 e pelo modelo computacional, para a face inferior da seção central do protótipo C1

9.3 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO COMPUTACIONAL

Neste item, mostram-se os resultados das distribuições de tensões no concreto e no aço, obtidos pelo modelo computacional ,segundo os ensaios apresentados na Tab. 9.1.

9.3.1 Ensaio de carregamento instantâneo com carga de serviço distribuída

9.3.1.1 Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto ao longo do carregamento

As Figs. 9.35 e 9.36 mostram a evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto dos protótipos A1 e B2, após a aplicação do carregamento distribuído, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional na simulação numérica dos ensaios 02 e 03, respectivamente, conforme a Tab. 9.1.

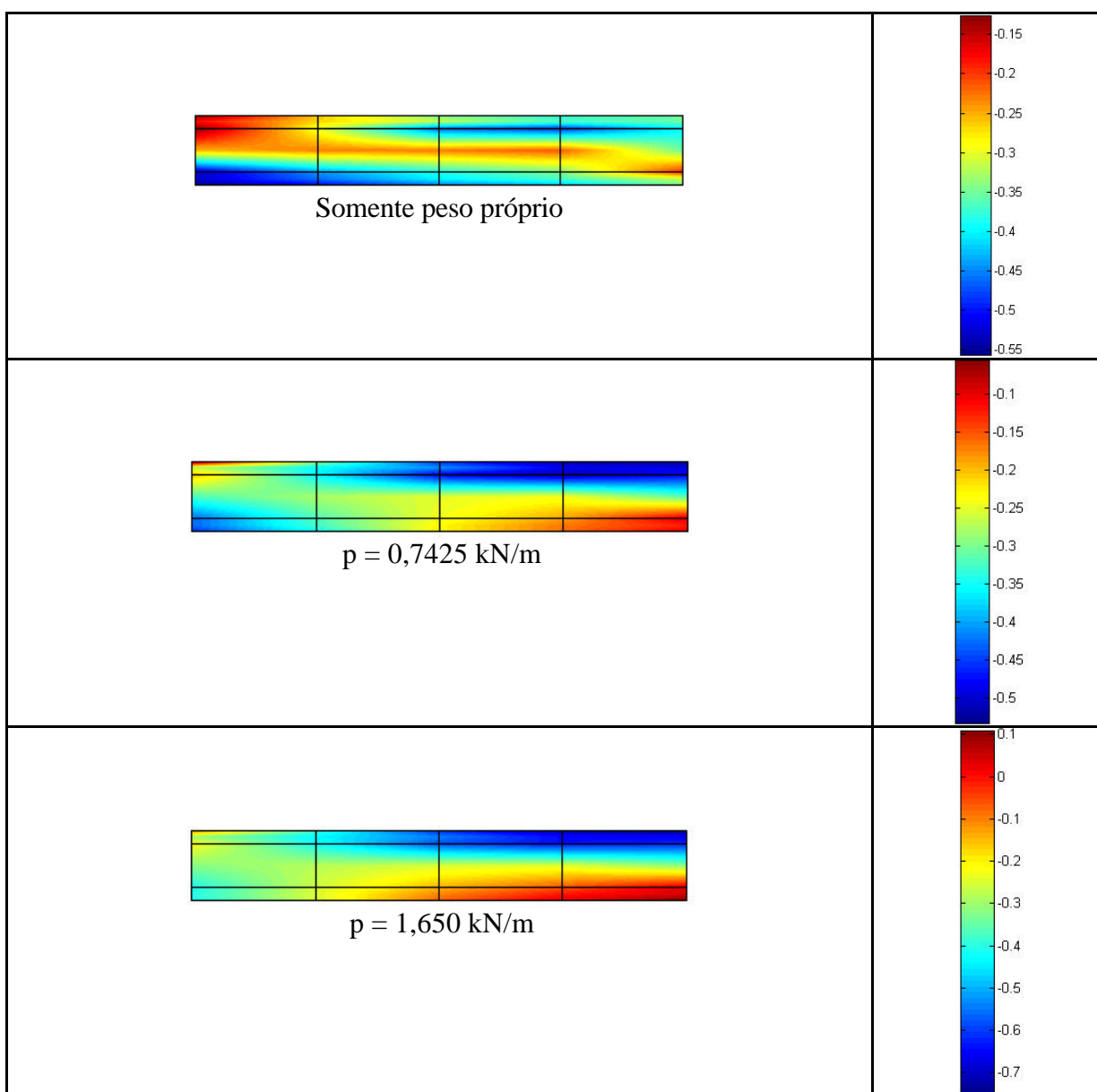


FIGURA 9.35 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo A1, ao longo do ensaio 02, segundo o modelo computacional

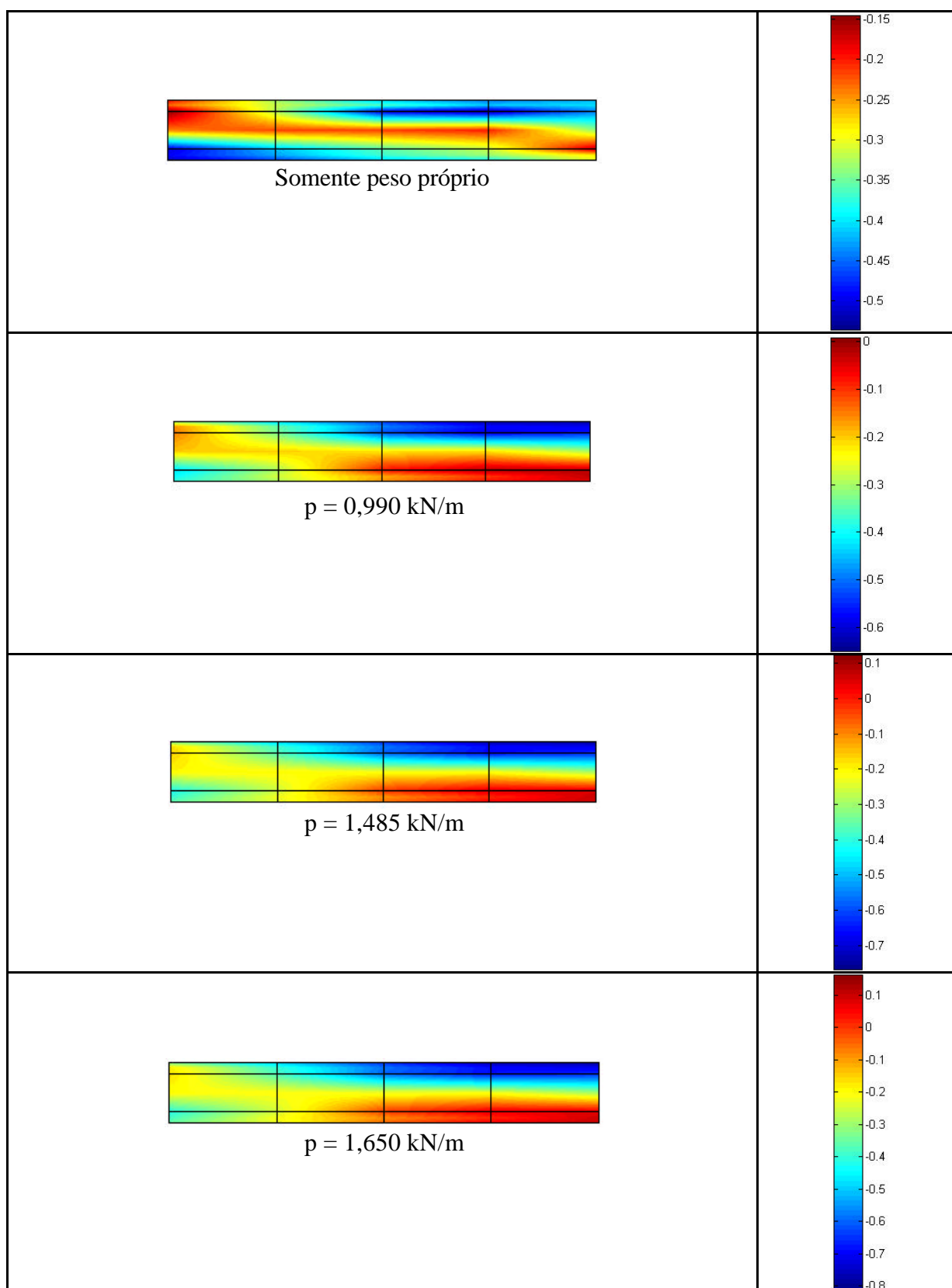


FIGURA 9.36 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo B2, ao longo do ensaio 03, segundo o modelo computacional

9.3.1.2 Evolução das tensões na armadura ao longo do carregamento

As Figs. 9.37 e 9.38 mostram a evolução das tensões na armadura dos protótipos A1 e B2, após a aplicação do carregamento distribuído, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional na simulação numérica dos ensaios 02 e 03, respectivamente, conforme a Tab. 9.1.

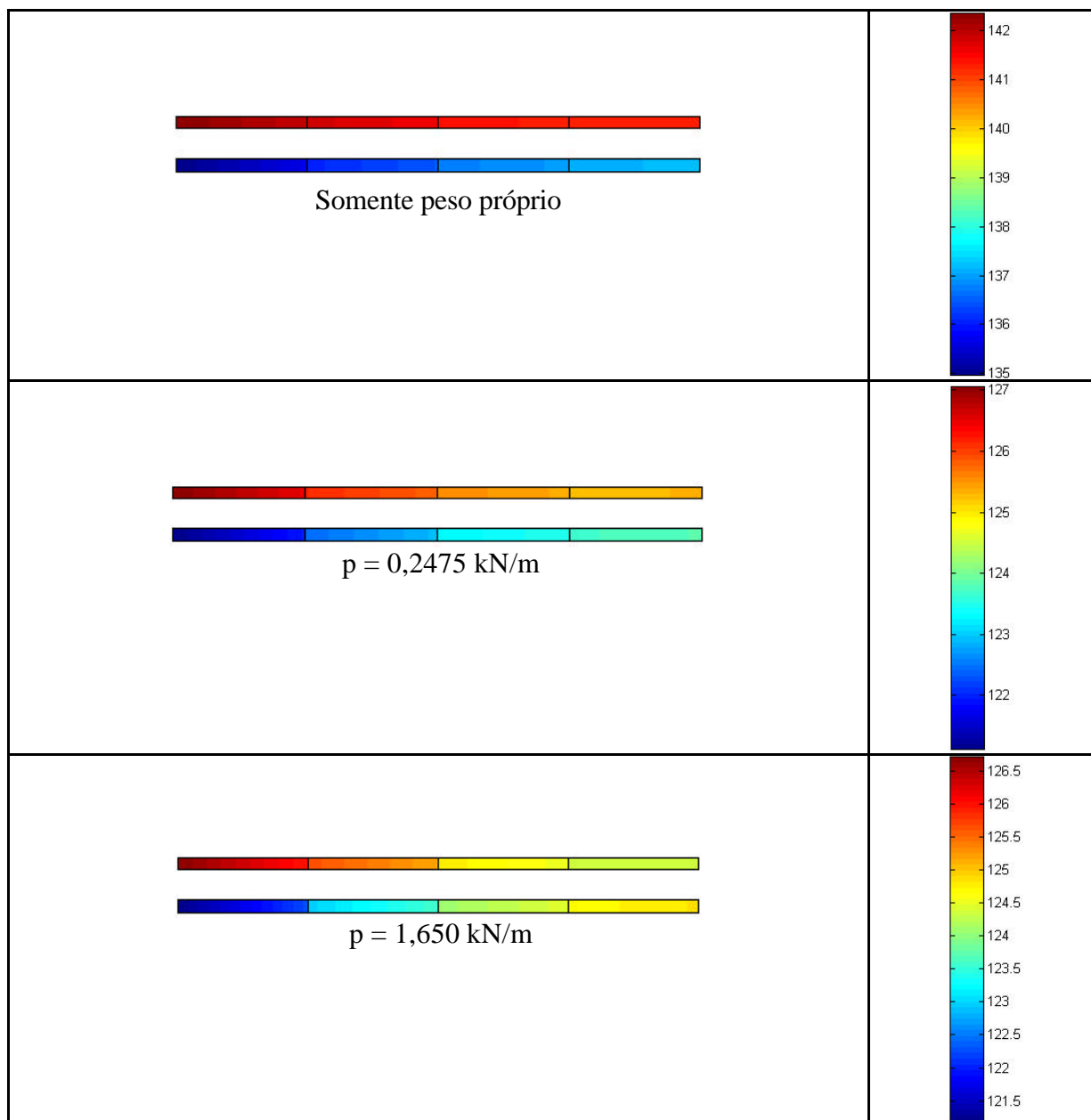


FIGURA 9.37 - Evolução das tensões na armadura do protótipo A1, ao longo do ensaio 02, segundo o modelo computacional

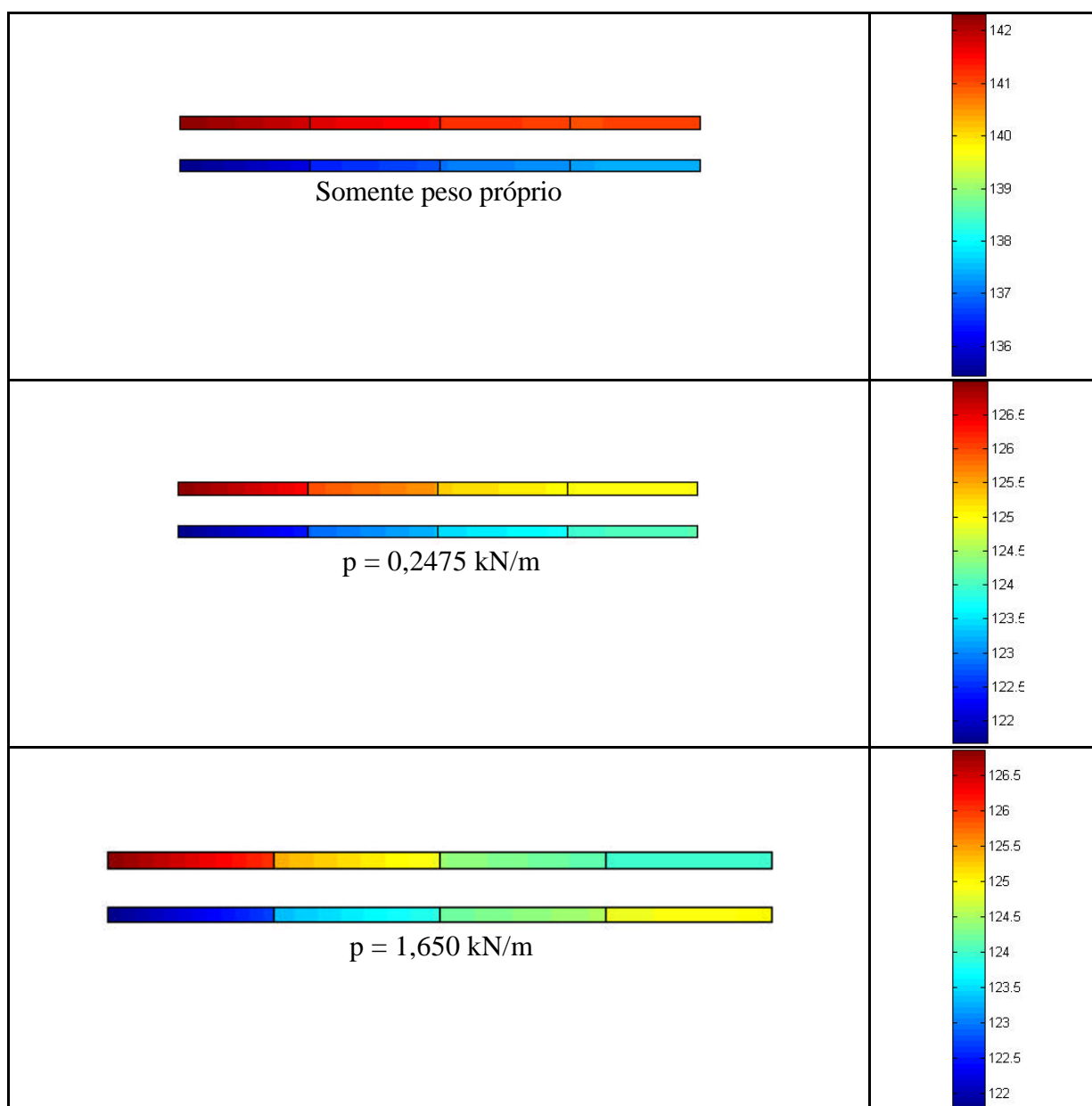


FIGURA 9.38 - Evolução das tensões na armadura do protótipo B2, ao longo do ensaio 03, segundo o modelo computacional

9.3.2 Ensaio de carregamento permanente com carga de serviço distribuída

9.3.2.1 Estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto ao término do ensaio

As Figs. 9.39 e 9.40 mostram o estado de tensão (σ_x) final dos elementos de concreto dos protótipos A1 e B2, após permanecerem submetidos ao carregamento, aplicado de forma distribuída, por um período de 143 e 140 dias, respectivamente, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional na simulação numérica dos ensaios 05 e 06, respectivamente, conforme a Tab. 9.1.

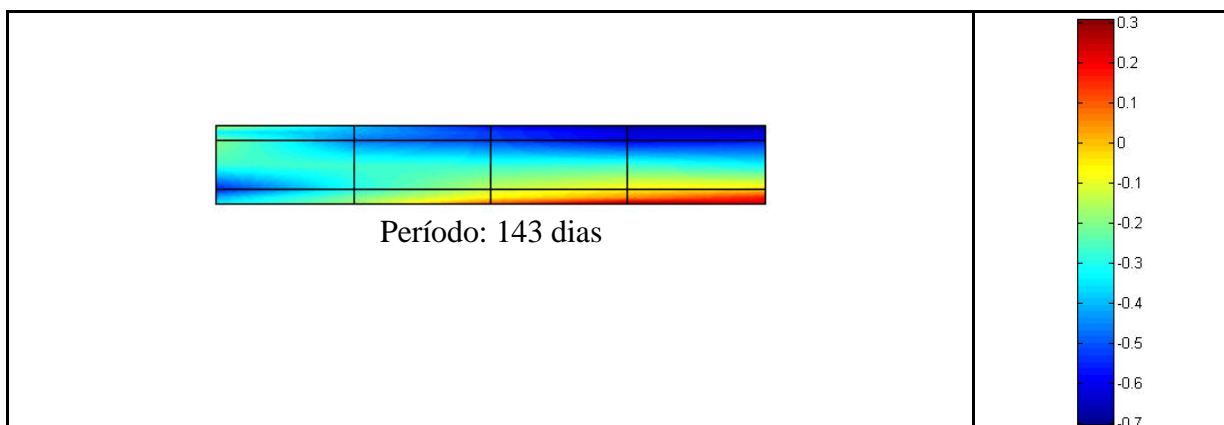


FIGURA 9.39 - Estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo A1, ao final do ensaio 05, segundo o modelo computacional

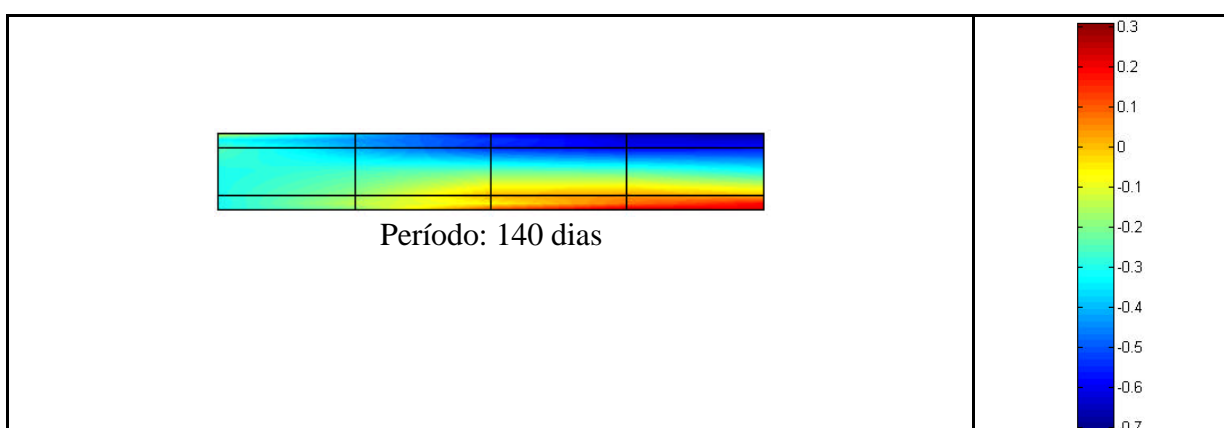


FIGURA 9.40 - Estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo B2, ao final do ensaio 06, segundo o modelo computacional

9.3.2.2 Tensões na armadura ao término do ensaio

As Figs. 9.41 e 9.42 mostram as tensões finais na armadura dos protótipos A1 e B2, após permanecerem submetidos ao carregamento, aplicado de forma distribuída, por um período de 143 e 140 dias, respectivamente, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional na simulação numérica dos ensaios 05 e 06, respectivamente, conforme a Tab. 9.1.

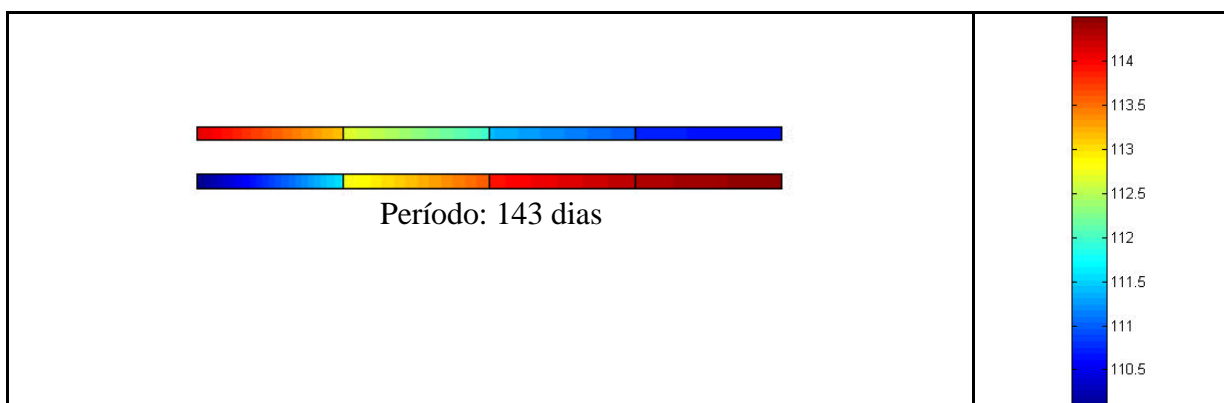


FIGURA 9.41 - Tensões na armadura do protótipo A1, ao final do ensaio 05, segundo o modelo computacional

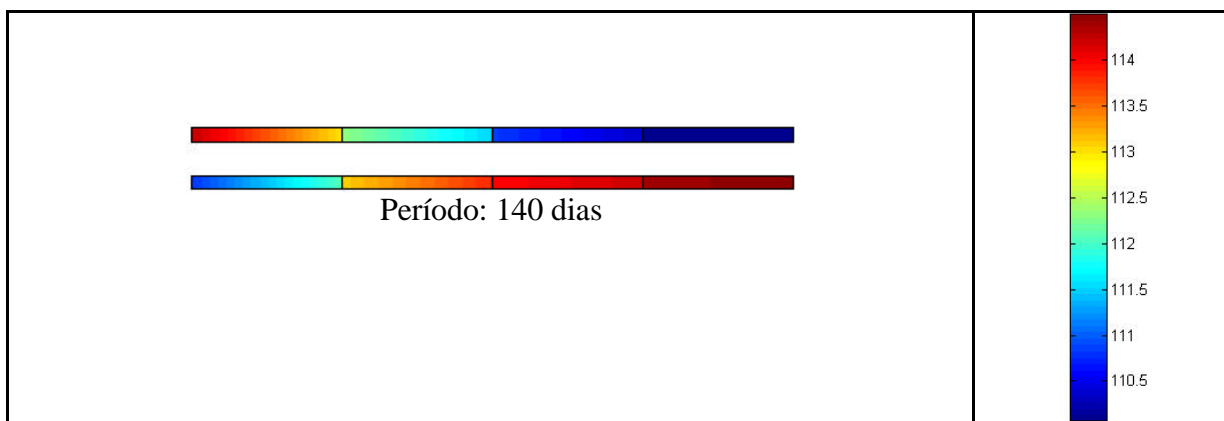


FIGURA 9.42 - Tensões na armadura do protótipo B2, ao final do ensaio 06, segundo o modelo computacional

9.3.3 Ensaio de carregamento permanente somente com peso próprio

9.3.3.1 Estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto no início e fim do ensaio

As Figs. 9.43 e 9.44 mostram o estado de tensão (σ_x) inicial e final dos elementos de concreto dos protótipos A2 e C1, após permanecerem submetidos ao carregamento, aplicado de forma distribuída, por um período de 126 dias, segundo o ensaio 07 e de 136 dias, segundo o ensaio 08, da Tab. 9.1, respectivamente.

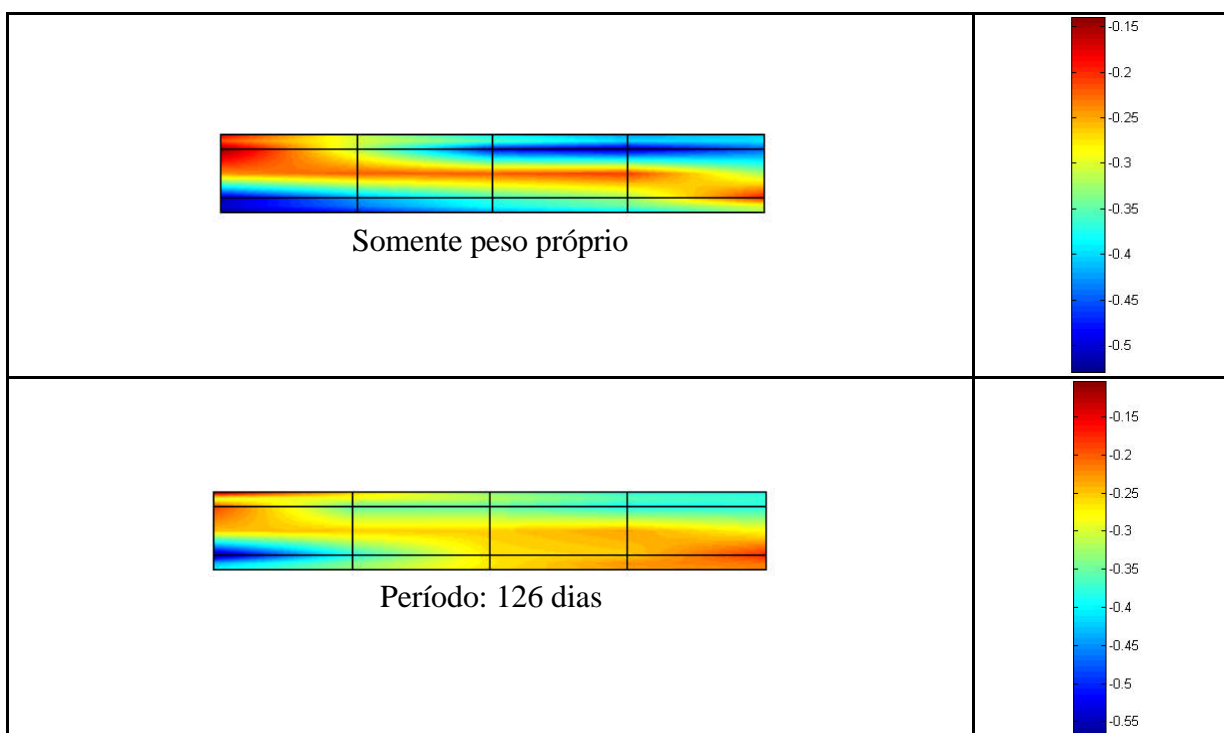


FIGURA 9.43 - Estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo A2, ao final do ensaio 07, segundo o modelo computacional

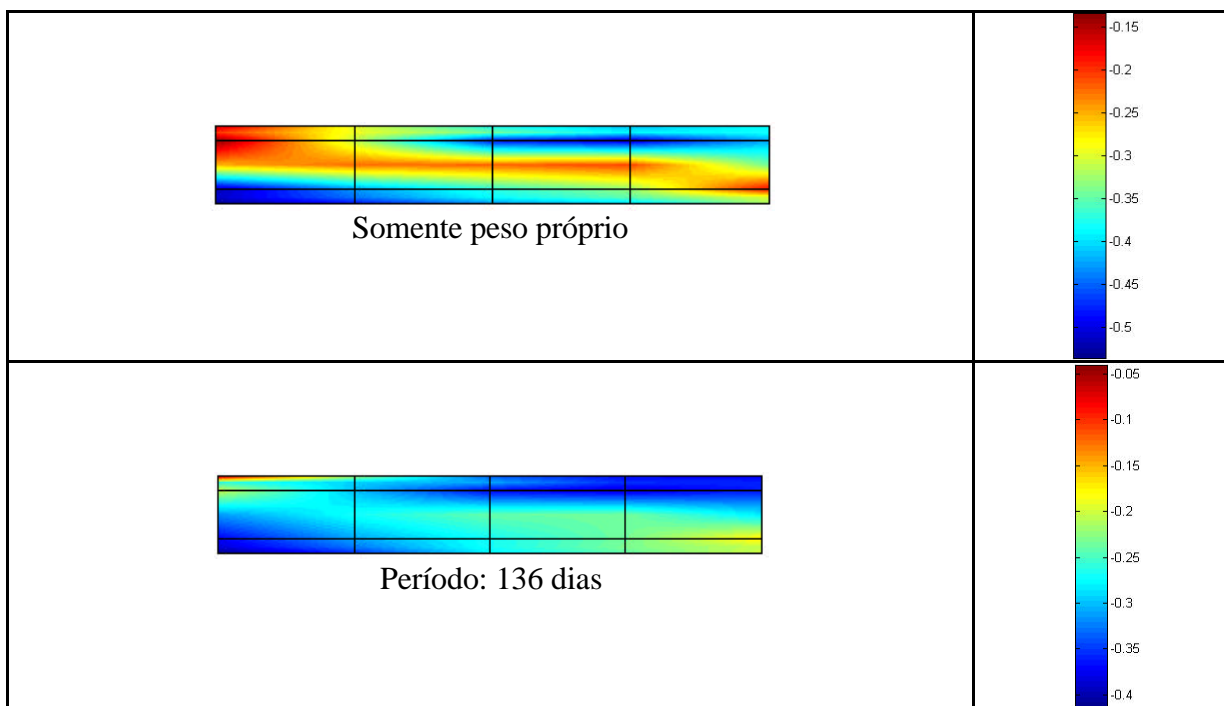


FIGURA 9.44 - Estado de tensão (σ_x) da armadura do protótipo C1, ao final do ensaio 08, segundo o modelo computacional

9.3.3.2 Tensões na armadura ao fim do ensaio

As Figs. 9.45 e 9.46 mostram as tensões inicial e final da armadura dos protótipos A2 e C1, após permanecerem submetidos ao carregamento, aplicado de forma distribuída, por um período de 126 e 136 dias, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional na simulação numérica dos ensaios 07 e 08, respectivamente, conforme a Tab. 9.1.

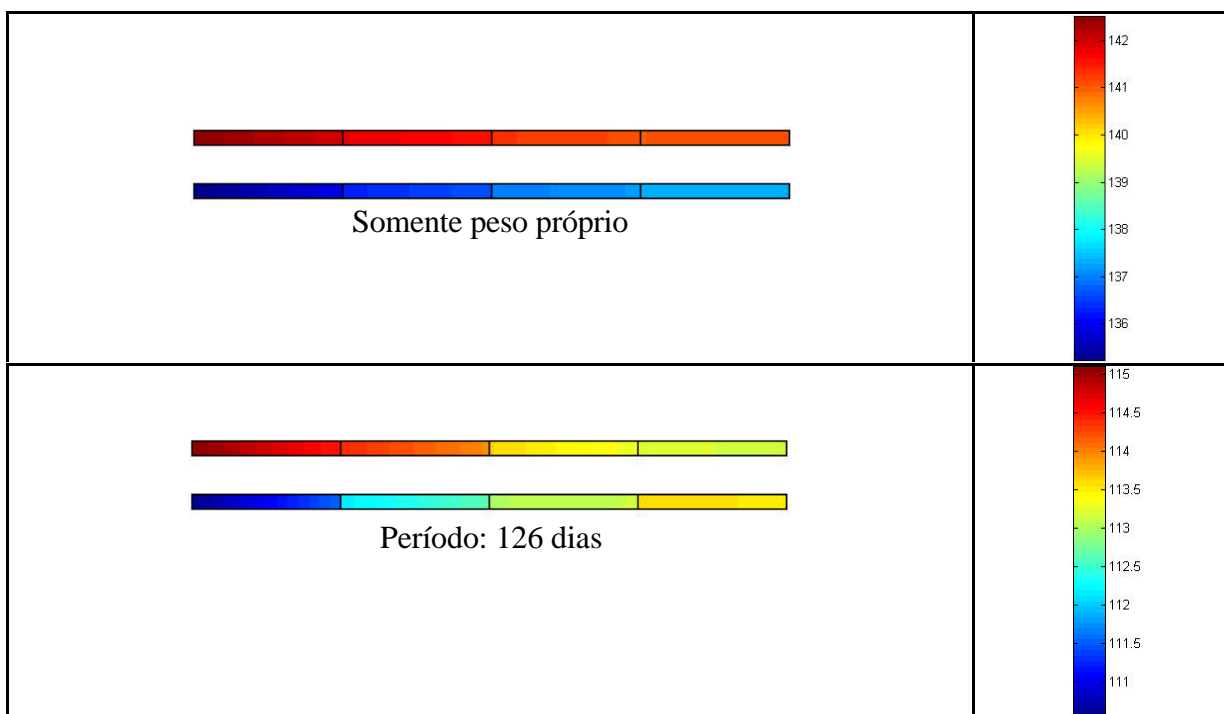


FIGURA 9.45 - Tensões na armadura do protótipo A2, ao final do ensaio 07, segundo o modelo computacional

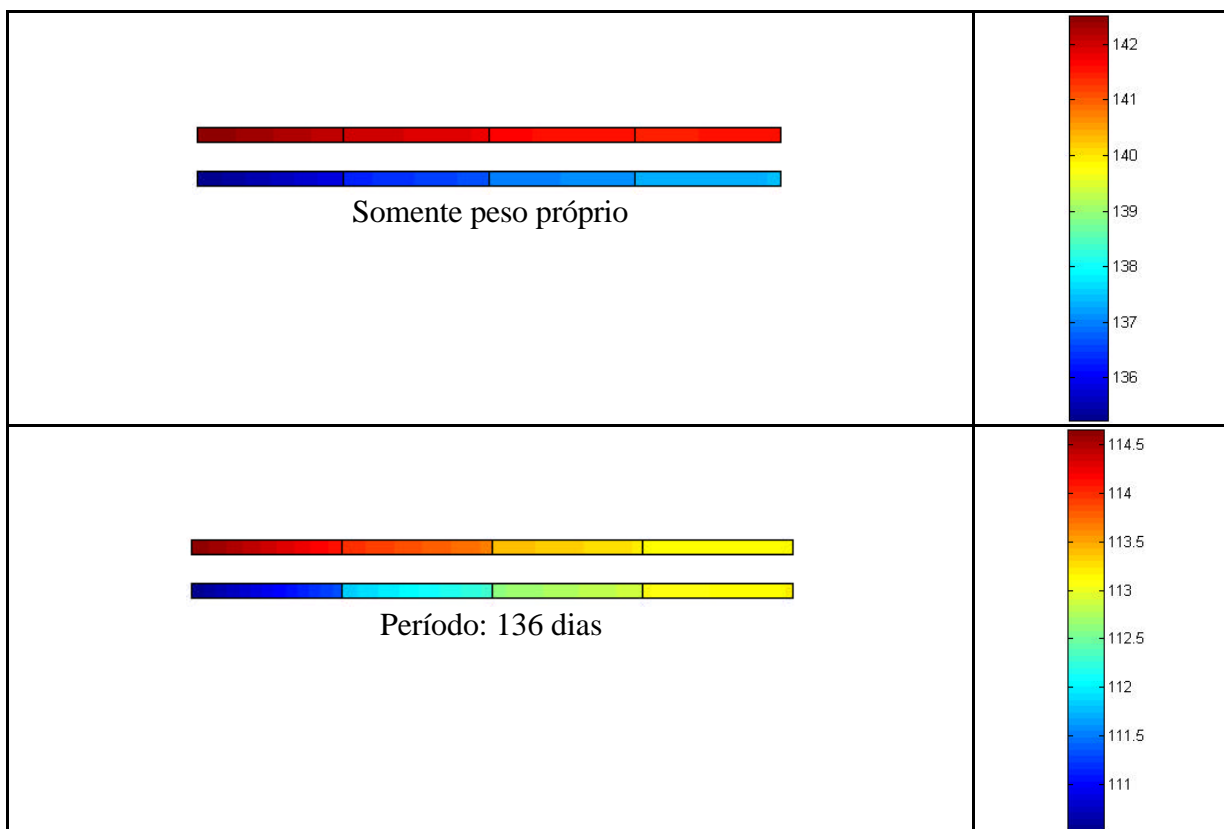
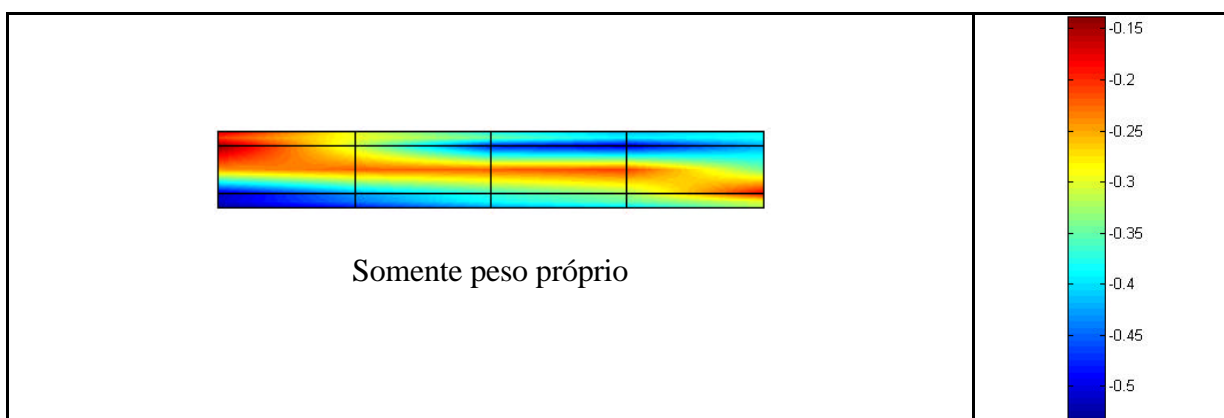


FIGURA 9.46 - Tensões na armadura do protótipo C1, ao final do ensaio 08, segundo o modelo computacional

9.3.4 Ensaio de carregamento instantâneo com carga concentrada até a ruptura

9.3.4.1 Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto ao longo do carregamento

As Figs. 9.47 a 9.50 mostram a evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto dos protótipos B1, C2, A2 e C1, ao longo da aplicação do carregamento instantâneo até a ruptura, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional na simulação numérica dos ensaios 01, 04, 09 e 10, respectivamente, conforme a Tab. 9.1.



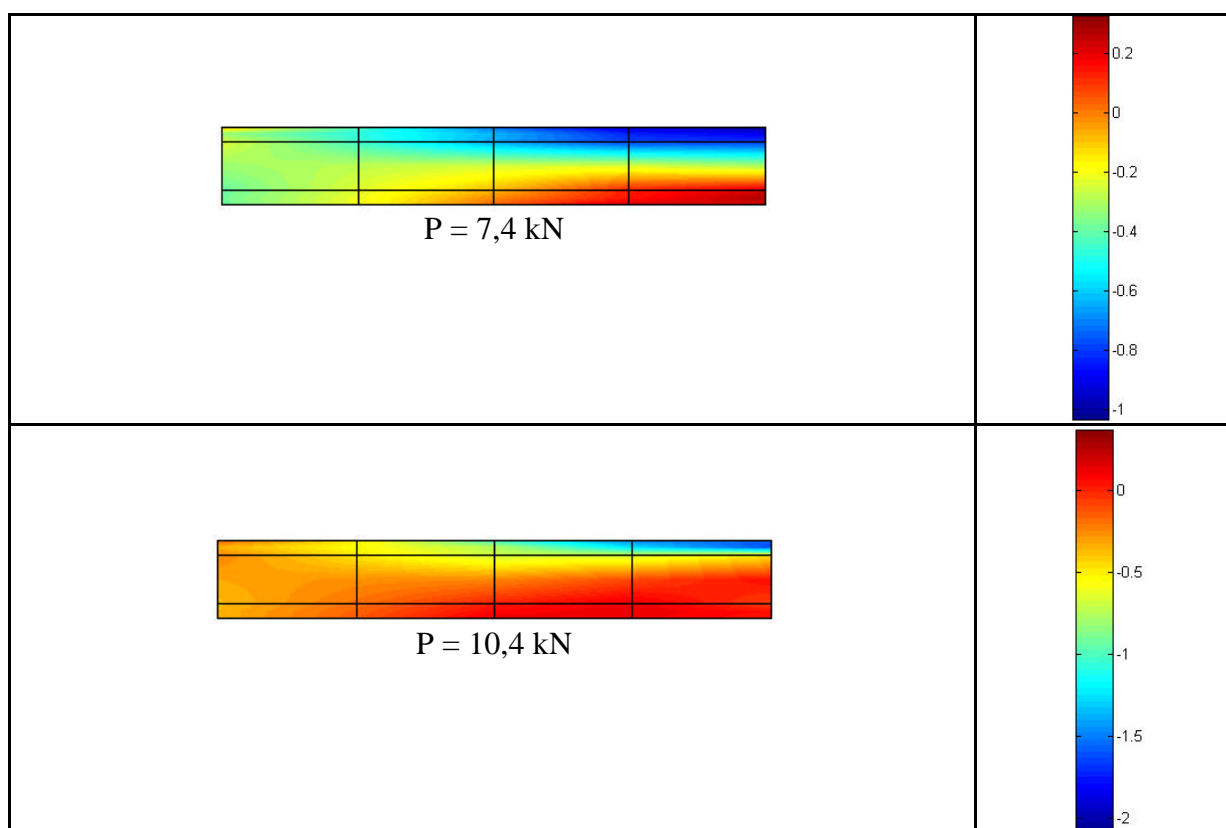
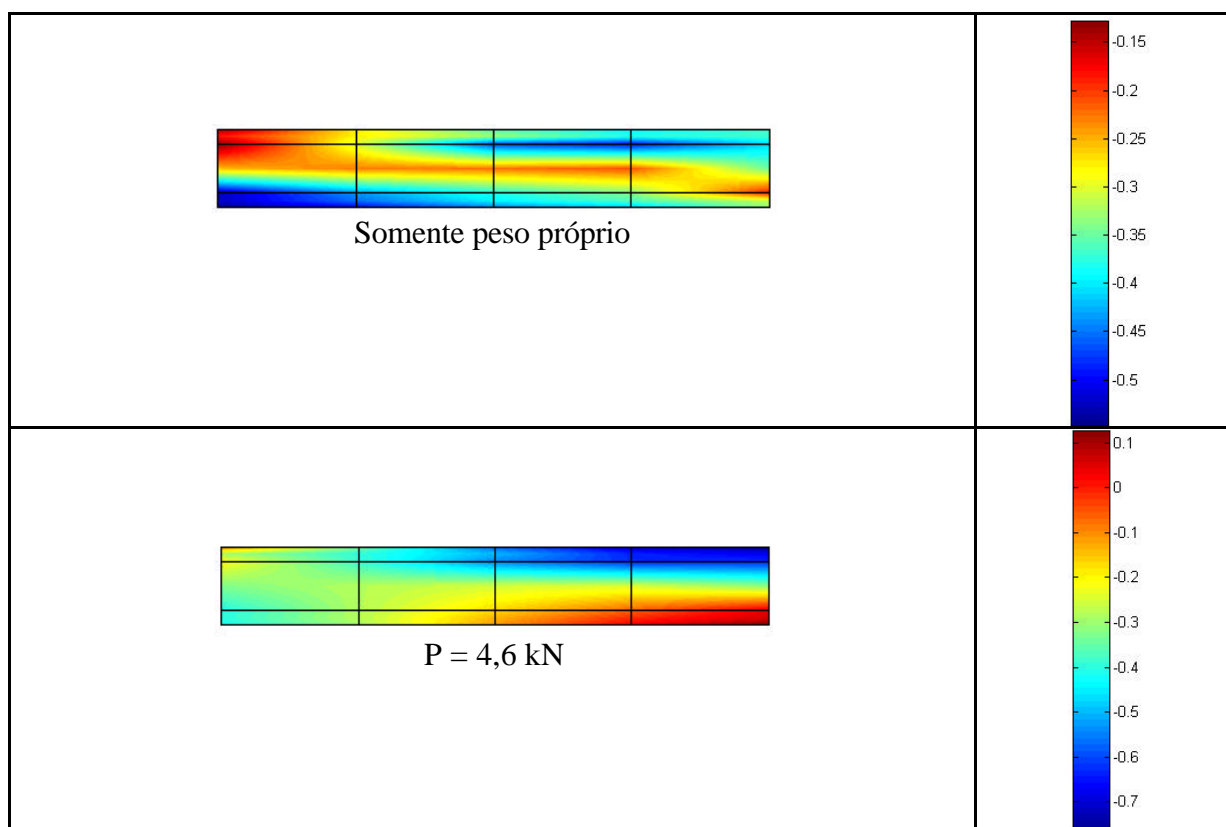


FIGURA 9.47 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo B1, ao longo do ensaio 01, segundo o modelo computacional



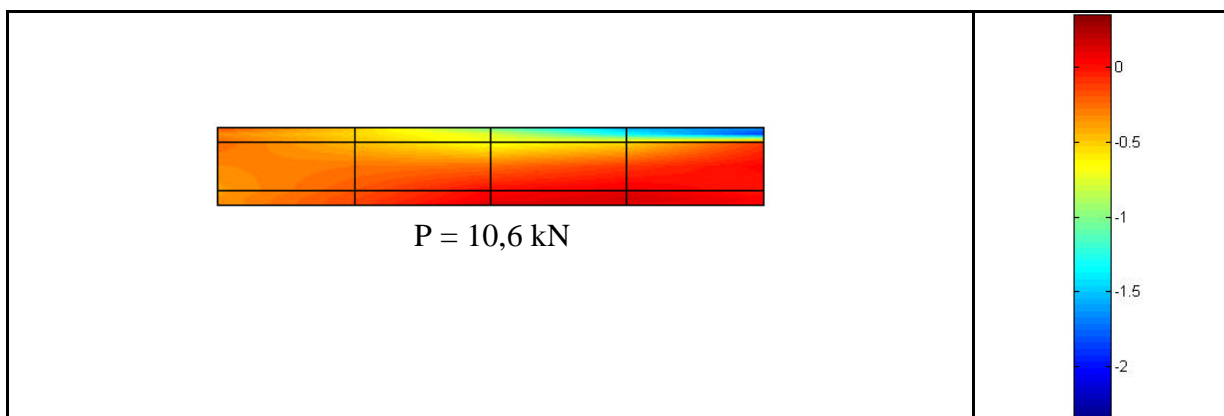


FIGURA 9.48 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo C2, ao longo do ensaio 04, segundo o modelo computacional

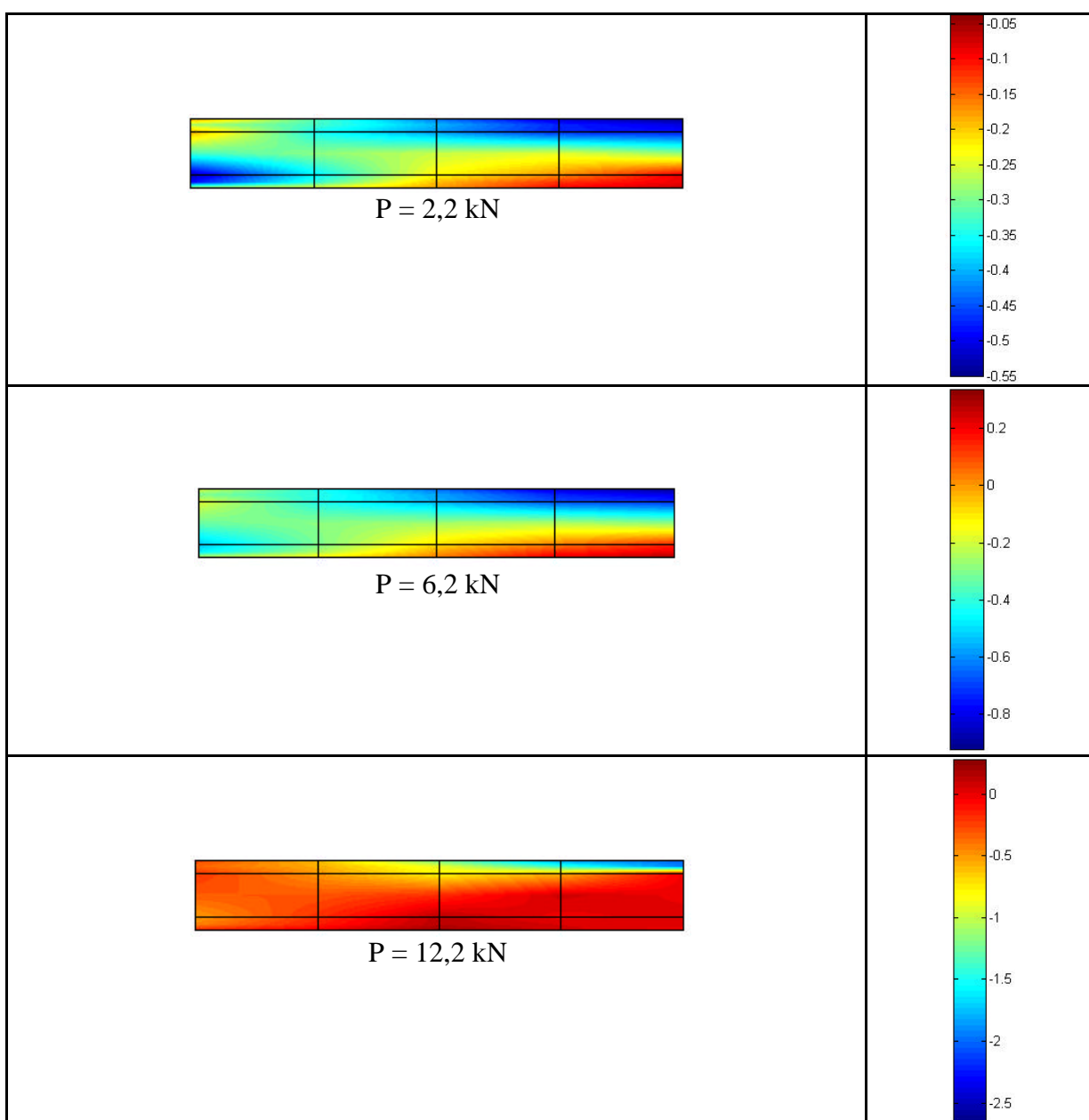


FIGURA 9.49 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo A2, ao longo do ensaio 09, segundo o modelo computacional

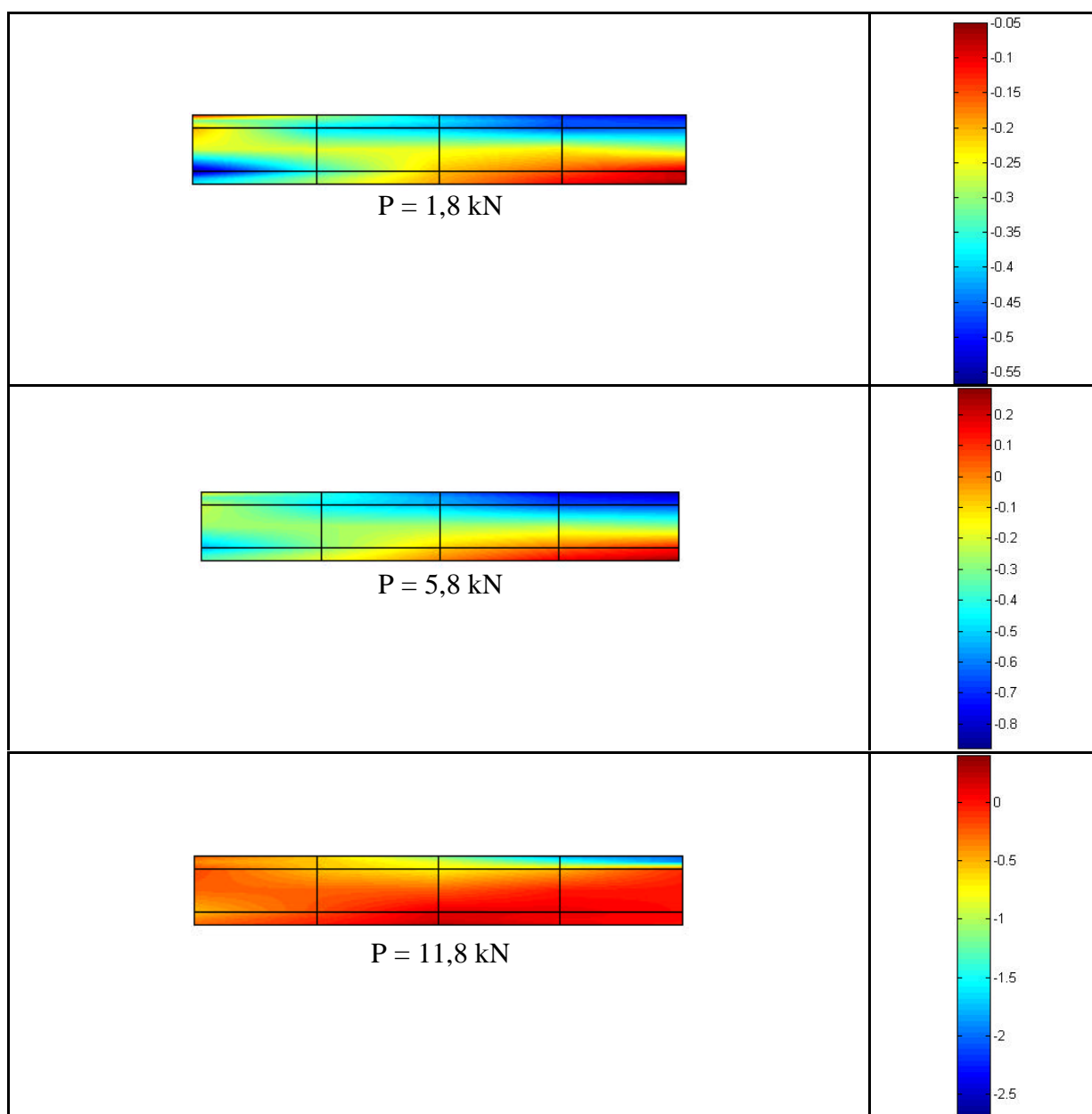


FIGURA 9.50 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto do protótipo C1, ao longo do ensaio 10, segundo o modelo computacional

9.3.4.2 Evolução das tensões na armadura ao longo do carregamento

As Figs. 9.51 a 9.54 mostram a evolução das tensões na armadura dos protótipos B1, C2, A2 e C1, ao longo da aplicação do carregamento instantâneo até a ruptura, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional na simulação numérica dos ensaios 01, 04, 09 e 10, respectivamente, conforme a Tab. 9.1.

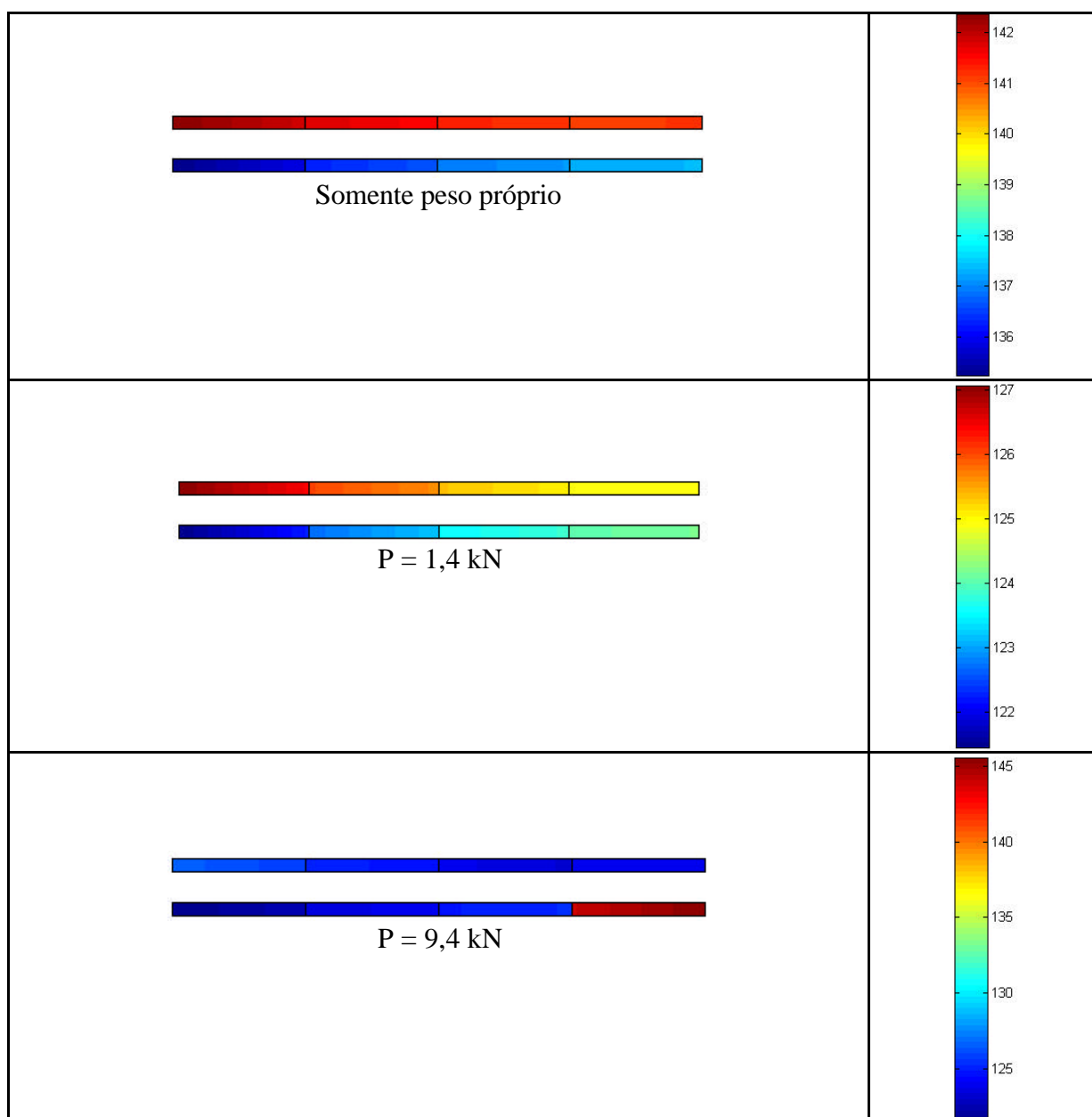
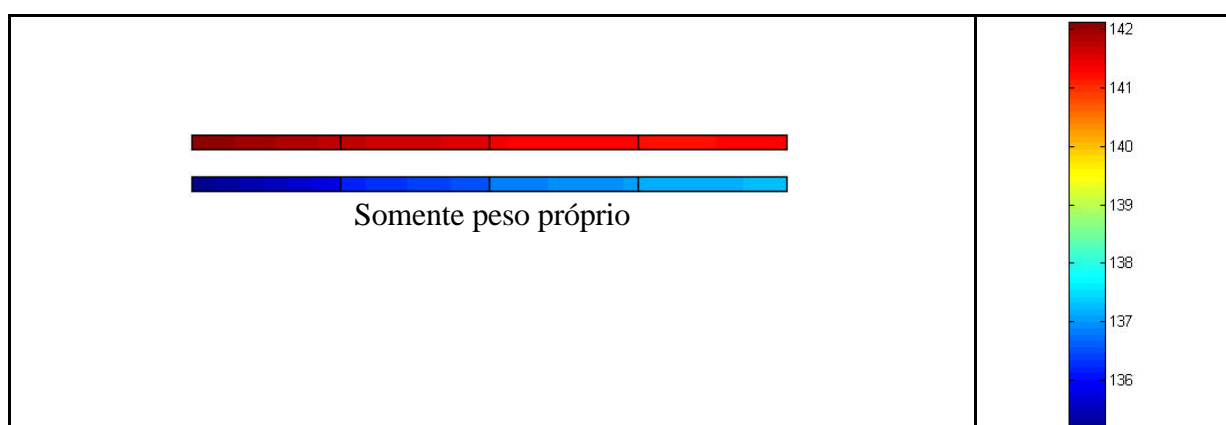


FIGURA 9.51 - Evolução das tensões na armadura do protótipo B1, ao longo do ensaio 01, segundo o modelo computacional



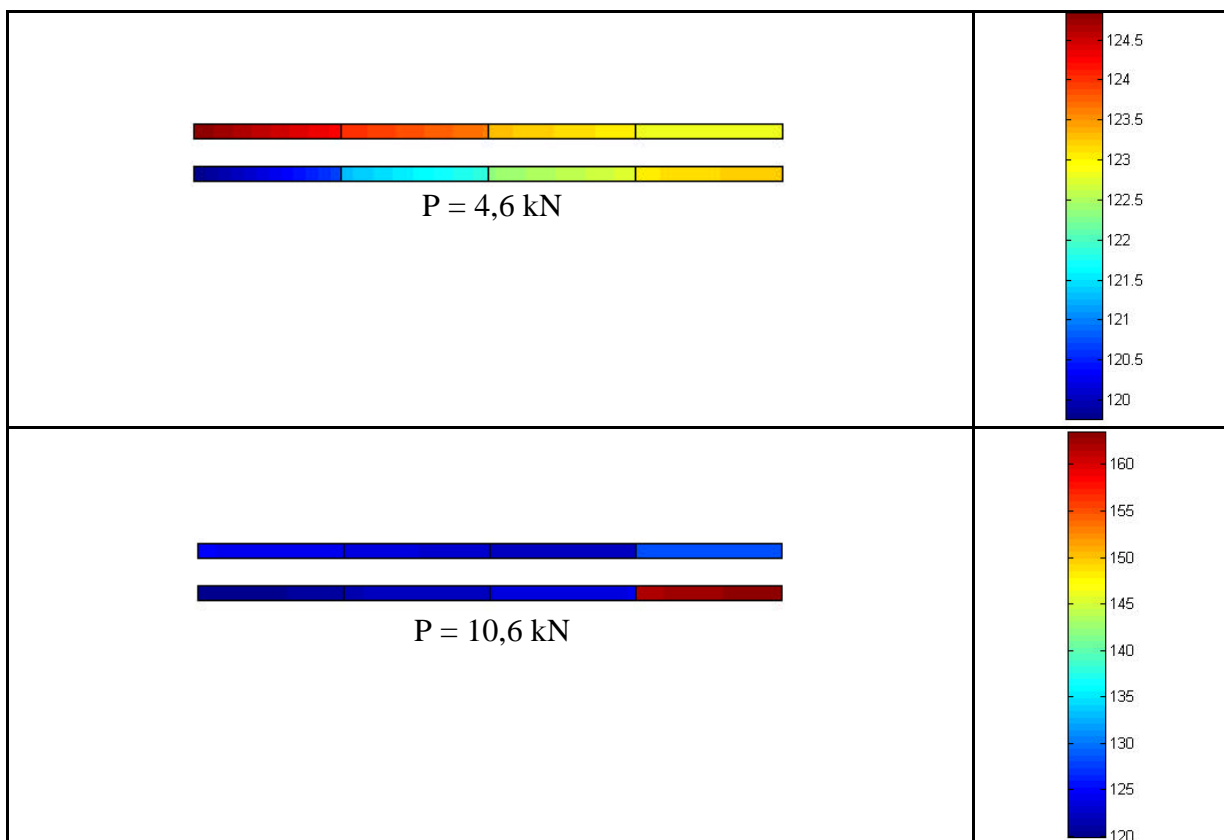
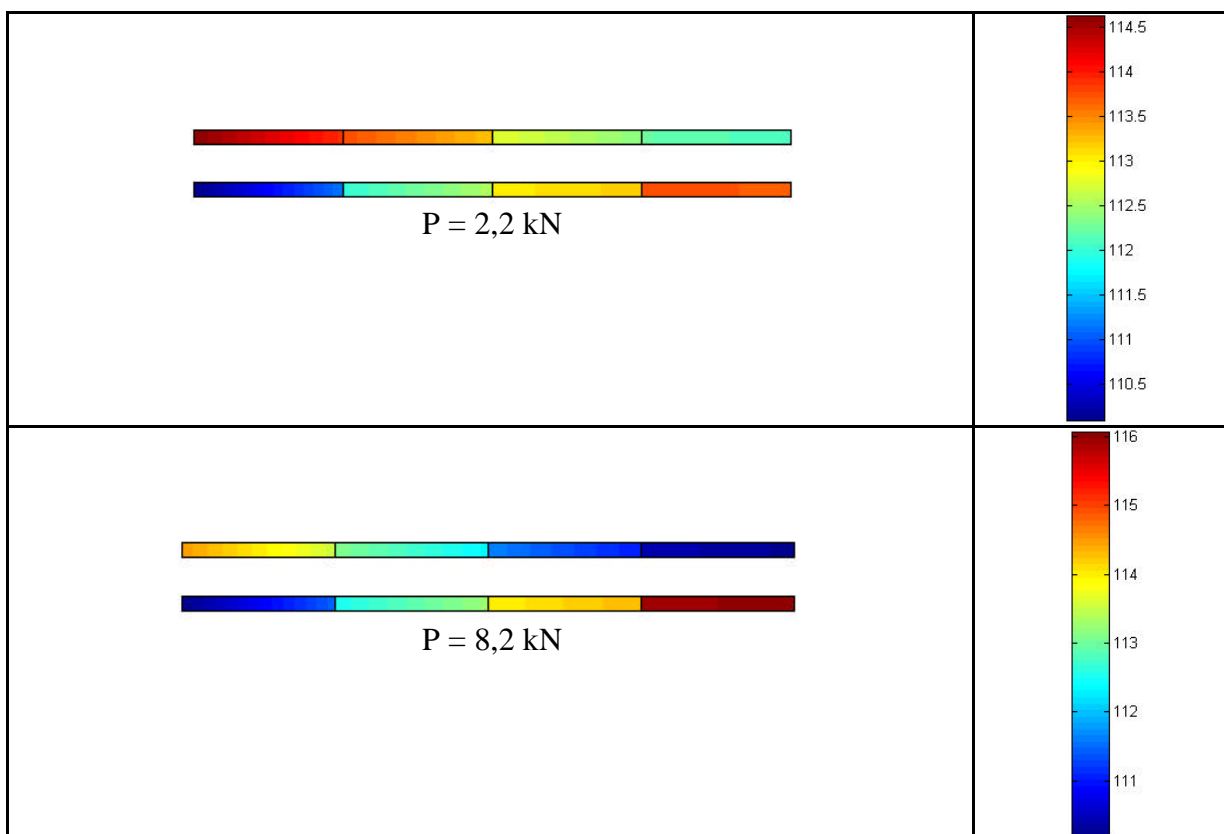


FIGURA 9.52 - Evolução das tensões na armadura do protótipo C2, ao longo do ensaio 04, segundo o modelo computacional



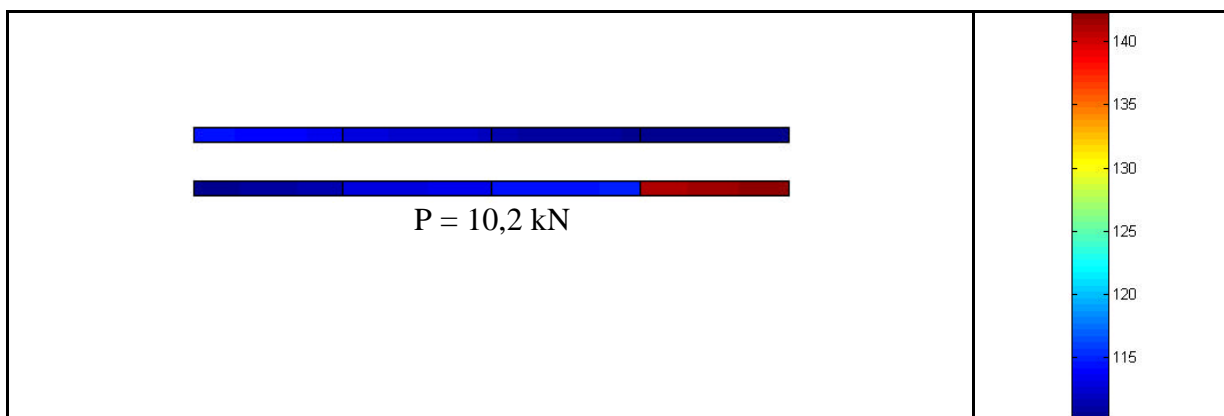


FIGURA 9.53 - Evolução das tensões na armadura do protótipo A2, ao longo do ensaio 09, segundo o modelo computacional

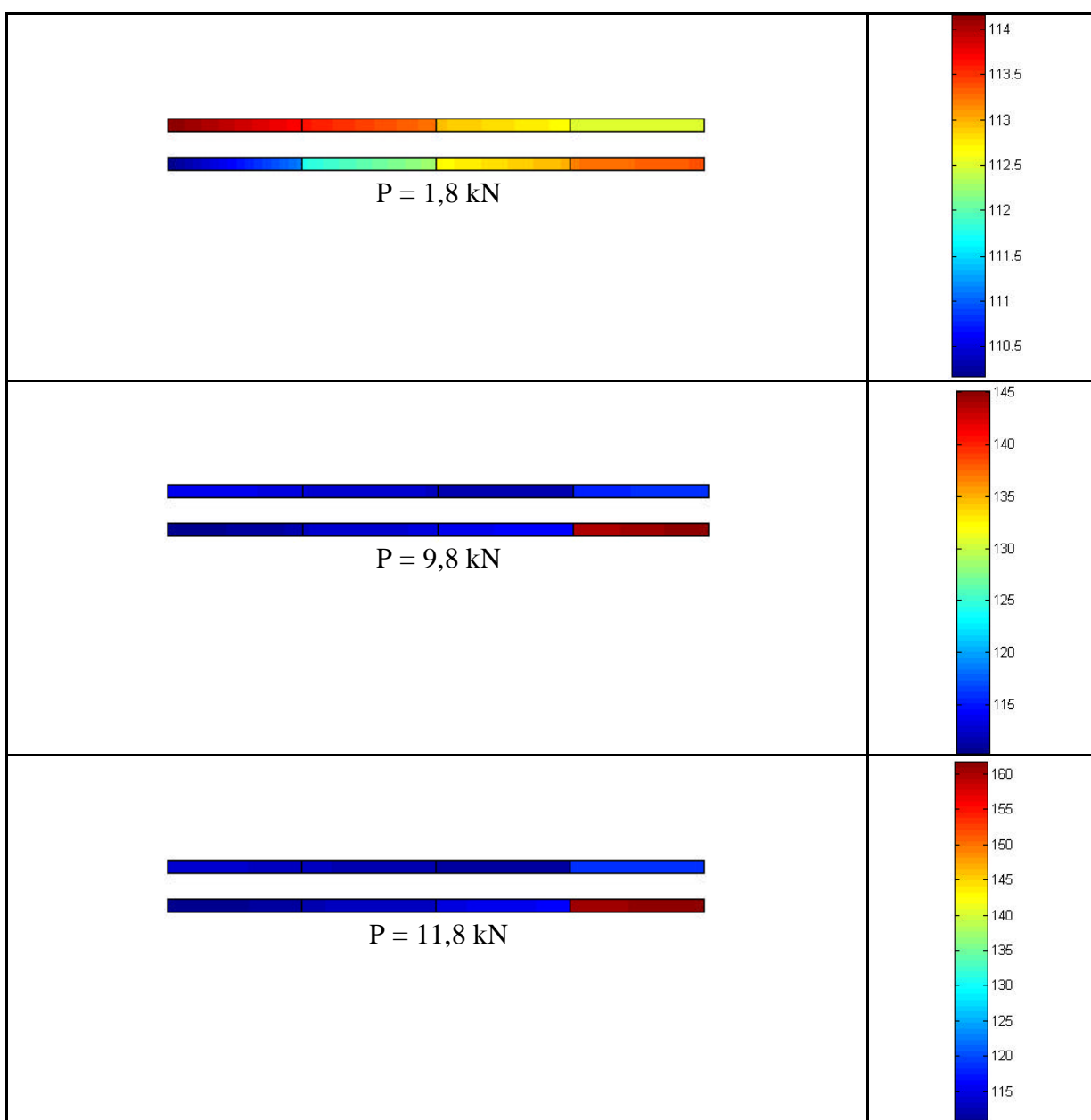


FIGURA 9.54 - Evolução das tensões na armadura do protótipo C1, ao longo do ensaio 10, segundo o modelo computacional

10 ANÁLISE DE VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDO, SUBMETIDAS À PÓS-TRAÇÃO COM ADERÊNCIA INICIAL

10.1 INTRODUÇÃO

Neste item, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados pelo ensaio experimental, realizado por Mattock, Yamazaki e Kattula (1971), para a viga, referenciada por RB1, bi-apoiada de concreto protendido, submetida à pós-tração com aderência.

O detalhamento da viga RB1, assim como suas seções transversais no meio do vão e nos apoios, podem ser vistas, respectivamente, na Fig. 10.1. O ensaio se constituiu na aplicação de quatro cargas concentradas, cujas posições podem ser vistas na Fig. 10.1, até atingir-se a ruptura da viga.

A armadura protendida é constituída de duas cordoalhas, compostas por fios de diâmetro 12,7 mm, disposta de forma parabólica e cuja posição pode ser vista na Fig. 10.1. Seu módulo de elasticidade e limite de resistência à tração (f_{ptk}) são, respectivamente, 19500 kN/cm² e 197 kN/cm². A tensão inicial de protensão (σ_{p0}) vale 132,5 kN/cm². Adotou-se um coeficiente de atrito para bainhas metálicas de 0,3, pelo fato deste valor não ter sido informado pelos autores do ensaio. Já as armaduras passivas longitudinalmente tracionada e comprimida são formadas por duas barras de 6,3 mm dispostas respectivamente, a 2,3 cm e 28,5 cm da base da viga. Seu módulo de elasticidade vale 21000 kN/cm² e sua tensão de escoamento, 38,5 kN/cm². Os estribos possuem os mesmos valores de diâmetro, módulo de elasticidade e tensão de escoamento das armaduras passivas longitudinais e estão espaçados de 17,78 cm.

A resistência à compressão do concreto é de 3kN/cm², aos 28 dias, mesma data de realização do ensaio e da aplicação da protensão. Adotou-se uma umidade relativa do ar de 80% e uma temperatura média de 20° C, já que tais dados não foram fornecidos pelos autores do ensaio. A espessura fictícia vale 10,16 cm.

Para a análise computacional, foi utilizada uma malha de elementos finitos com dez elementos quadrangulares quadráticos de oito nós para estado plano de tensão, conforme a Fig. 10.2.

Os valores comparados, a seguir, na Fig. 10.3, são valores líquidos, ou seja, estão descontadas as parcelas correspondentes ao peso próprio.

Mostram-se, graficamente, as deformadas e as distribuições de tensões no concreto e no aço, ao longo do carregamento, segundo os resultados obtidos computacionalmente, através das Figs. 10.4 até 10.6.

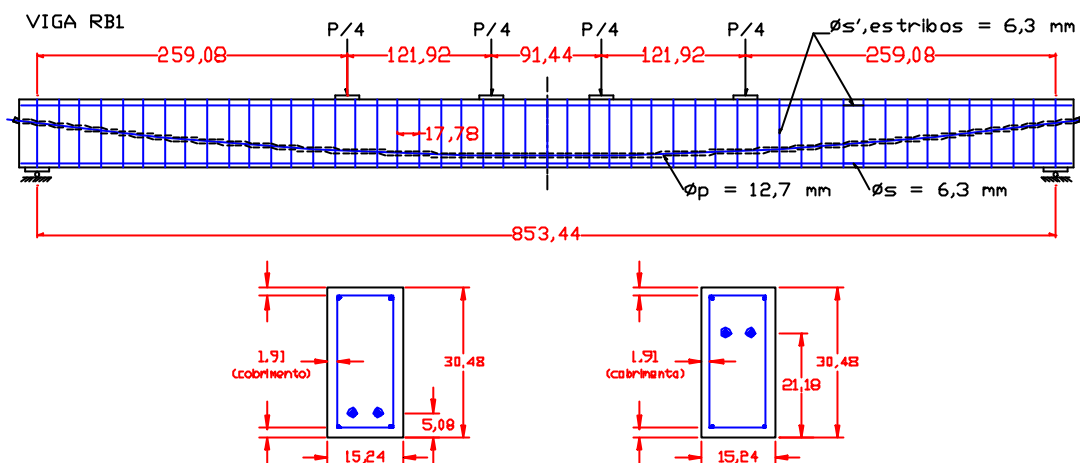


FIGURA 10.1 - Detalhamento da viga RB1 (cotas em cm)

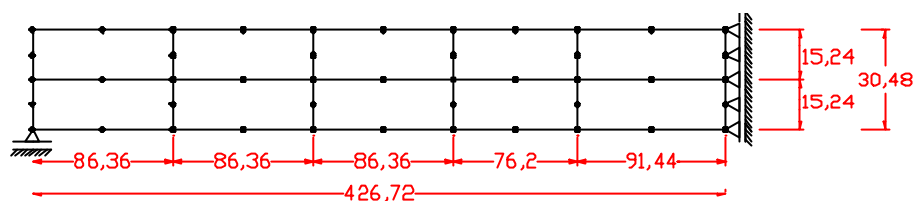


FIGURA 10.2 - Discretização adotada para a análise por elementos finitos da viga RB1 (cotas em cm)

10.2 EVOLUÇÃO DA FLECHA AO LONGO DO CARREGAMENTO

Na Fig. 10.3, mostra-se a evolução das flechas ao longo do carregamento para a viga RB1, segundo os resultados dos ensaios e os obtidos através do modelo computacional.

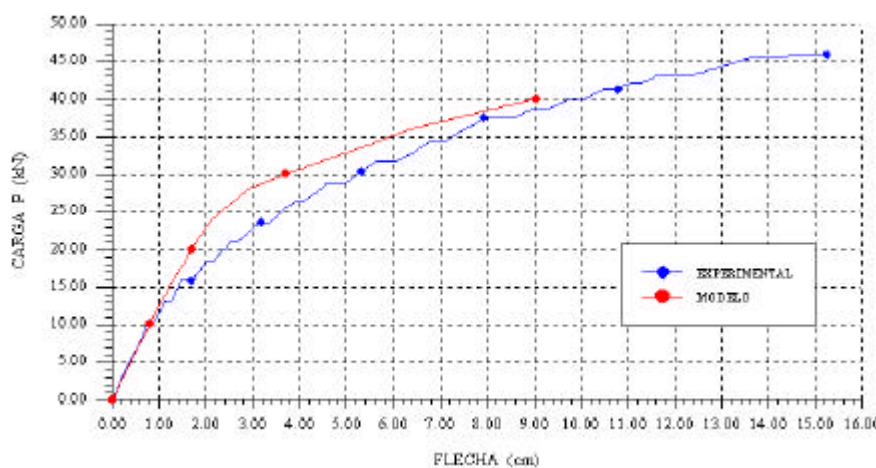


FIGURA 10.3 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga RB1

10.3 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO COMPUTACIONAL

Neste item, serão apresentados, graficamente, os resultados obtidos pelo modelo computacional. Mostram-se os resultados de deformadas da estrutura, além das distribuições de tensões no concreto e no aço. Para melhor visualização da distribuição de tensões no concreto, a altura da estrutura foi aumentada em duas vezes.

10.3.1 Deformada da estrutura antes e após o carregamento

A Fig. 10.4 mostra, respectivamente, as deformadas da viga RB1 no início e fim da aplicação do carregamento, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional. Usou-se um fator de amplificação igual a 20 para as deformadas da estrutura, quando nela atua somente o peso próprio.

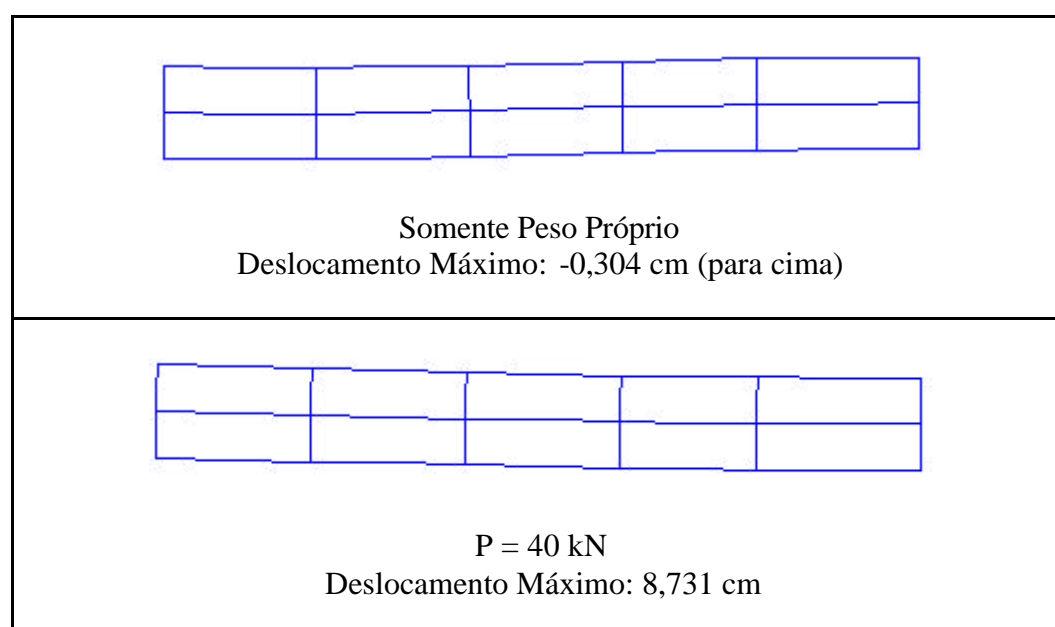


FIGURA 10.4 - Deformada da viga RB1, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional

10.3.2 Evolução do estado de tensão (s_x) dos elementos de concreto ao longo do carregamento

A Fig. 10.5 mostram a evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga RB1, ao longo da aplicação do carregamento, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional.

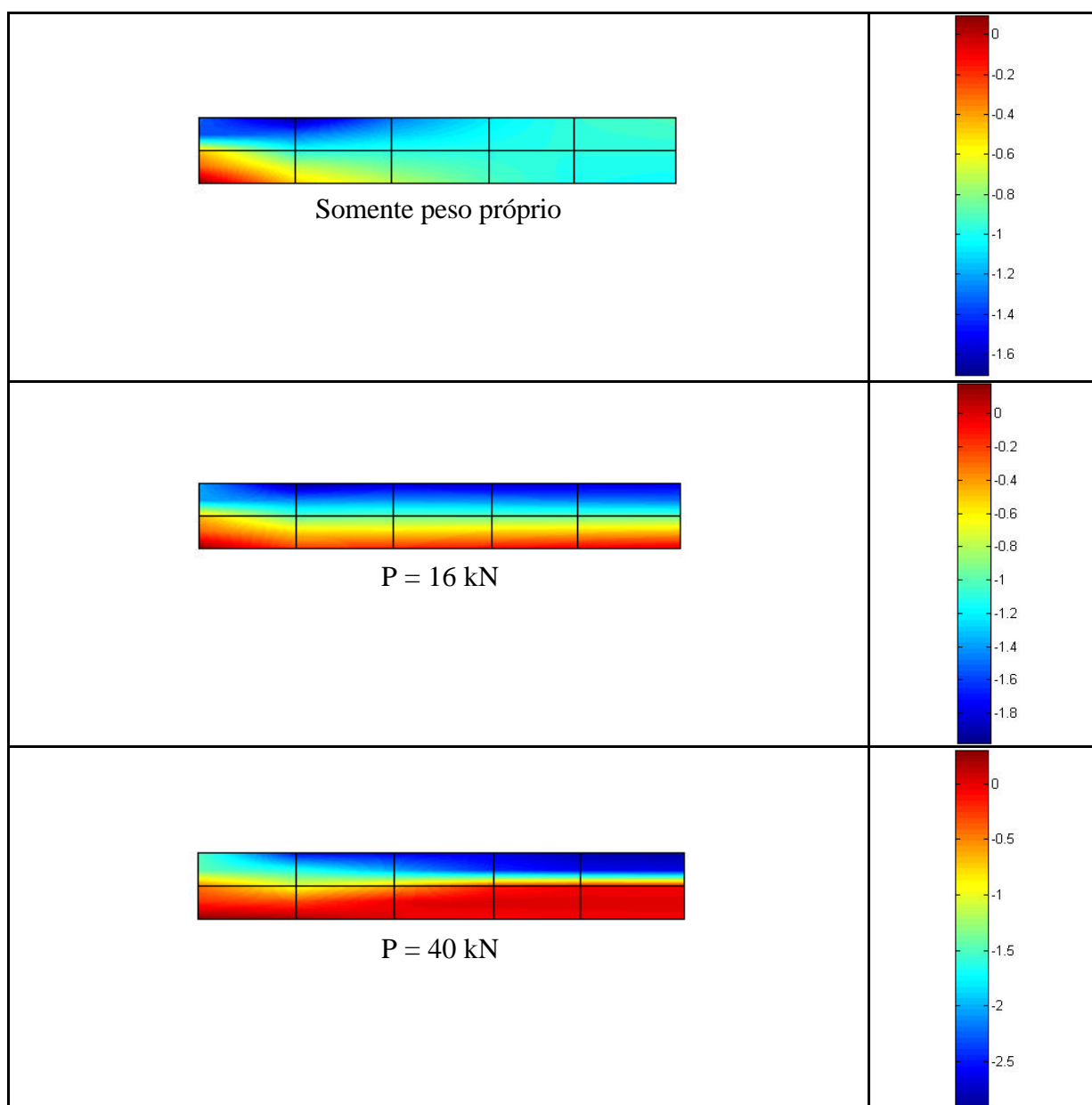


FIGURA 10.5 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga RB1, segundo o modelo computacional

10.3.3 Evolução das tensões na armadura ao longo do carregamento

A Fig. 10.6 mostra a evolução das tensões na armadura da viga RB1, ao longo da aplicação do carregamento, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional.

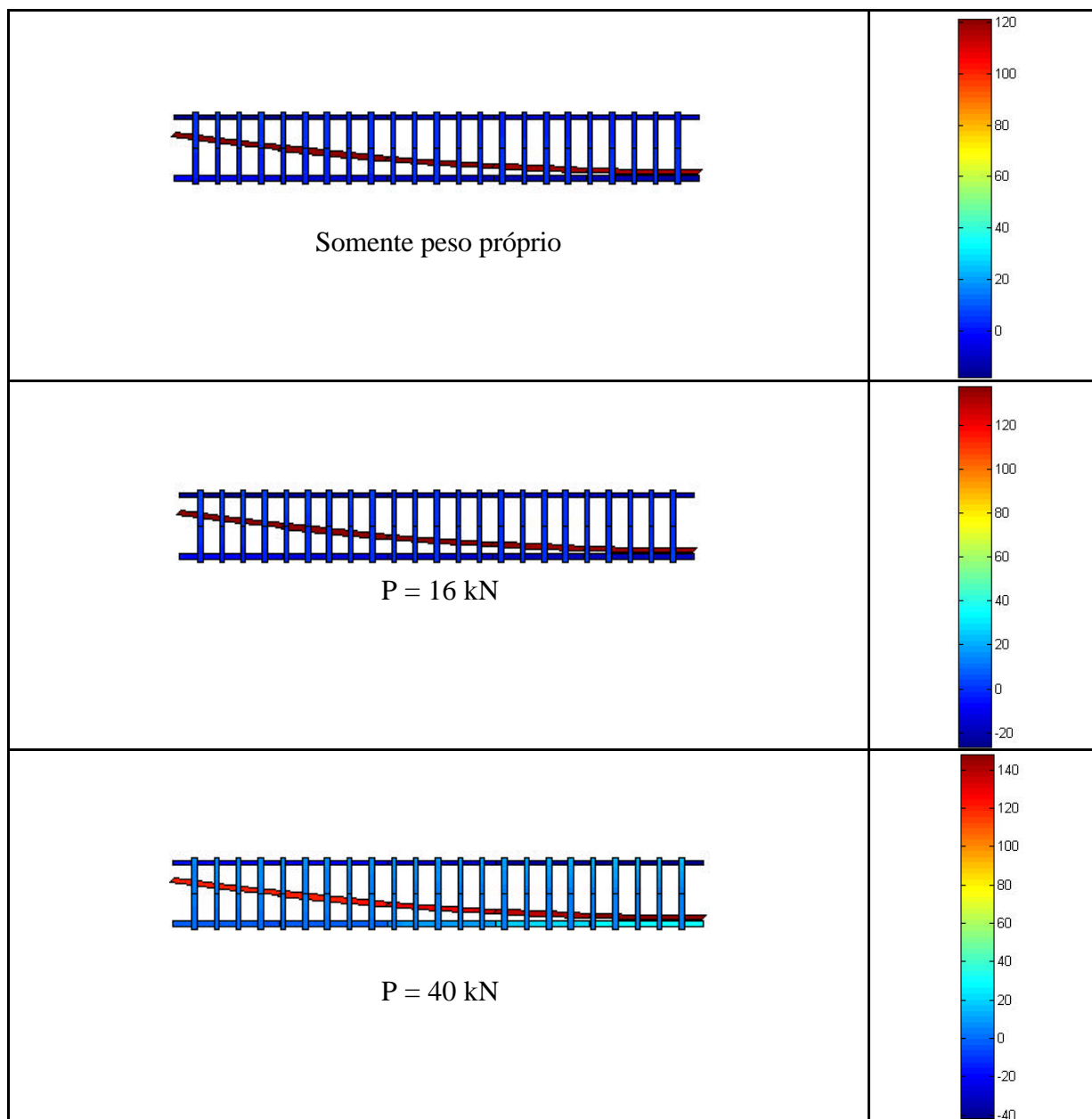


FIGURA 10.6 - Evolução das tensões na armadura da viga RB1, segundo o modelo computacional

11 ANÁLISE DE VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDO, SUBMETIDAS À PRÉ-TRAÇÃO OU PÓS-TRAÇÃO SEM ADERÊNCIA INICIAL

11.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados por ensaios experimentais, realizados por Gongchen e Xuekang (1988), para vigas bi-apoiadas de concreto protendido, submetidas à pré-tração ou pós-tração sem aderência inicial.

São analisados dois conjuntos de vigas: o primeiro conjunto corresponde às vigas, referenciadas por A-3, A-6 e A-9 e submetidas à pós-tração sem aderência inicial; já o segundo conjunto corresponde às vigas, referenciadas por D-1, D-3 e D-10 e submetidas à pré-tração. Em ambos os conjuntos, duas cargas concentradas são aplicadas até atingir-se a ruptura, cuja posição pode ser vista na Fig. 11.1, assim como o detalhamento de tais vigas. A seção das vigas é mostrada na Fig. 11.2.

Para cada viga, os valores das resistências médias à compressão do concreto (f_{cm}), das armaduras protendidas (ϕ_p), das tensões iniciais de protensão (σ_{p0}), das armaduras longitudinais passivas tracionadas (ϕ_s), das tensões de escoamento das armaduras passivas (f_y), das tensões de ruptura das armaduras protendidas (f_{ptk}) e os módulos de elasticidade das armaduras protendidas, E_p , e das armaduras passivas, E_s , encontram-se na Tab. 11.1.

Para a análise computacional, foi utilizada uma malha de elementos finitos com doze elementos quadrangulares quadráticos de oito nós para estado plano de tensão, conforme a Fig. 11.3.

Adotou-se uma umidade relativa do ar de 80% e uma temperatura média de 20° C, já que tais dados não foram fornecidos pelos autores dos ensaios. A espessura fictícia vale 10,180 cm. Todos os ensaios foram considerados como sidos realizados aos 28 dias de idade da estrutura, quando também foi aplicada a protensão na armadura ativa.

O coeficiente de atrito adotado entre a armadura protendida e o concreto, nas vigas do conjunto A, vale 0,5, já que ambos os materiais estavam em contato direto. Tal valor não foi não foi fornecido pelos autores dos ensaios.

Os valores comparados a seguir, através das Figs. 11.4 até 11.12, são valores líquidos, ou seja, estão descontadas as parcelas correspondentes ao peso próprio.

Mostram-se, graficamente, através das Figs. 11.13 até 11.30, os resultados, obtidos pelo modelo computacional, de deformadas da estrutura e de distribuições de tensões no concreto e no aço.

11.2 EVOLUÇÃO DAS FLECHAS AO LONGO DO CARREGAMENTO

Nas Figs. 11.4 até 11.9, mostra-se a evolução das flechas ao longo do carregamento para os dois conjuntos de vigas, A e D, segundo os resultados dos ensaios e os obtidos através do modelo computacional.

TABELA 11.1 - Valores para cada viga

VIGA	f_{cm} (kN/cm ²)	ϕ_p (cm)	σ_{p0} (kN/cm ²)	ϕ_s (cm)	f_y (kN/cm ²)	f_{ptk} (kN/cm ²)	E_s (kN/cm ²)	E_p (kN/cm ²)
A-3	3,06	1,410	82	1,730	43	179	21000	20500
A-6	3,06	1,410	85,4	2,430	40	179	21000	20500
A-9	3,31	1,410	92	3,200	39,5	179	21000	20500
D-1	3,56	0,865	92	1,410	39,5	166	21000	20000
D-3	3,56	1,410	87,9	1,730	26,7	166	21000	20000
D-10	3,56	1,580	82,5	1,130	26	166	21000	20000

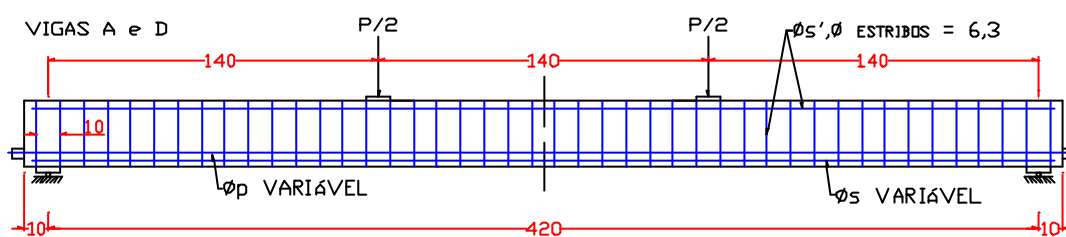


FIGURA 11.1 - Detalhamento das vigas A e D (cotas em cm)

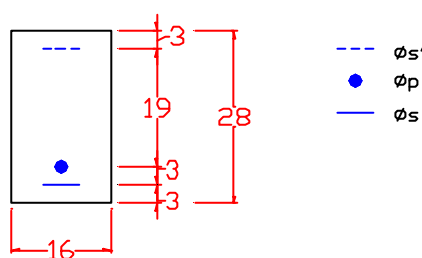


FIGURA 11.2 - Seção das vigas A e D (cotas em cm)

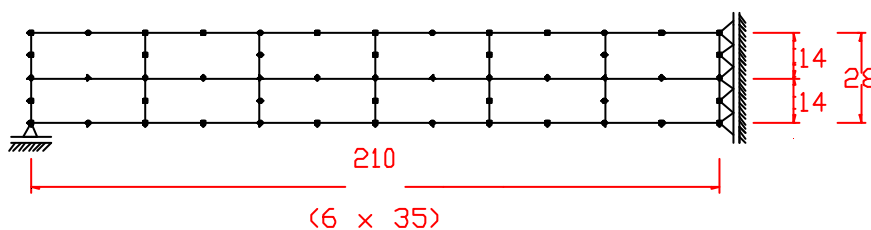


FIGURA 11.3 - Discretização adotada para a análise por elementos finitos das vigas A e D (cotas em cm)

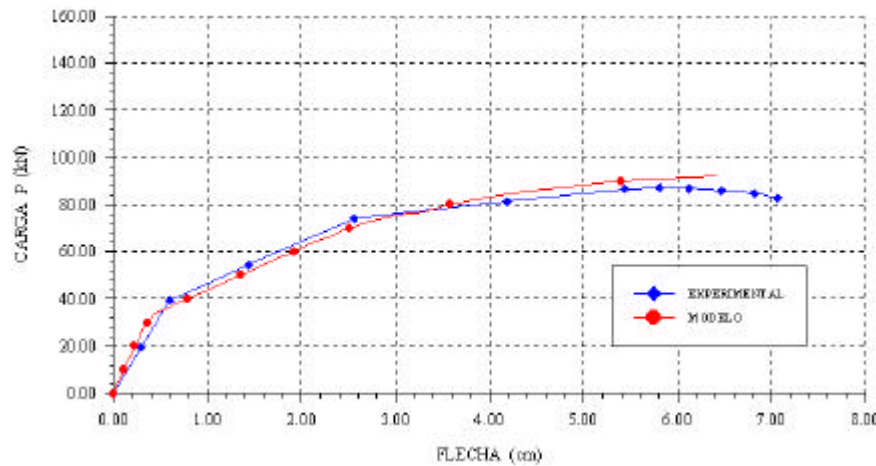


FIGURA 11.4 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga A-3

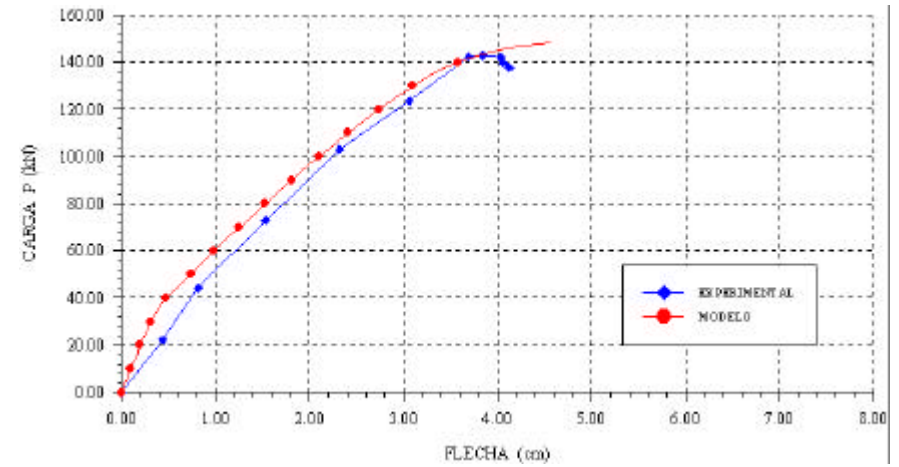


FIGURA 11.6 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga A-9

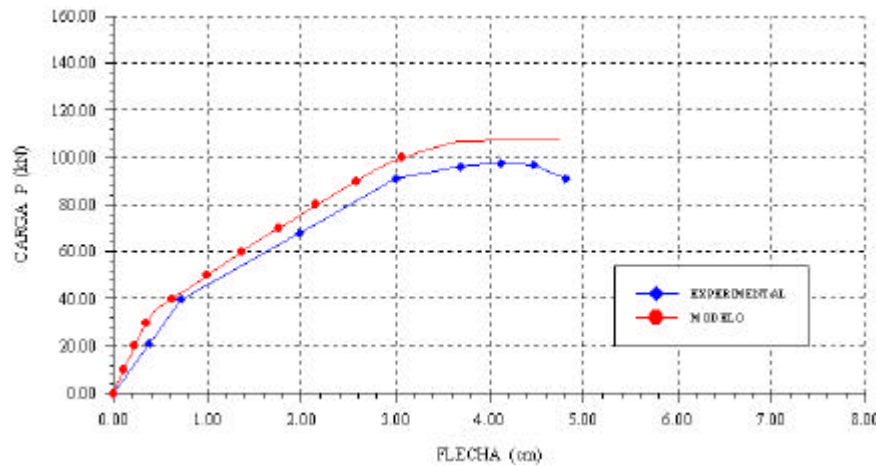


FIGURA 11.5 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga A-6

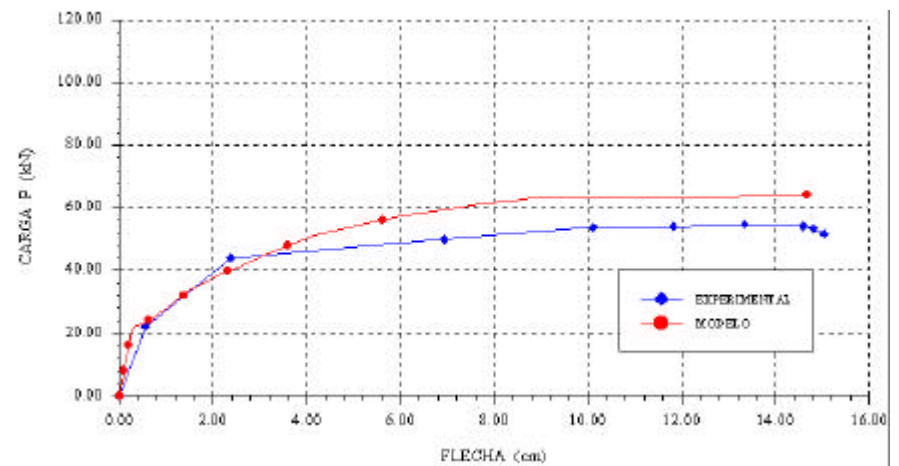


FIGURA 11.7 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga D-1

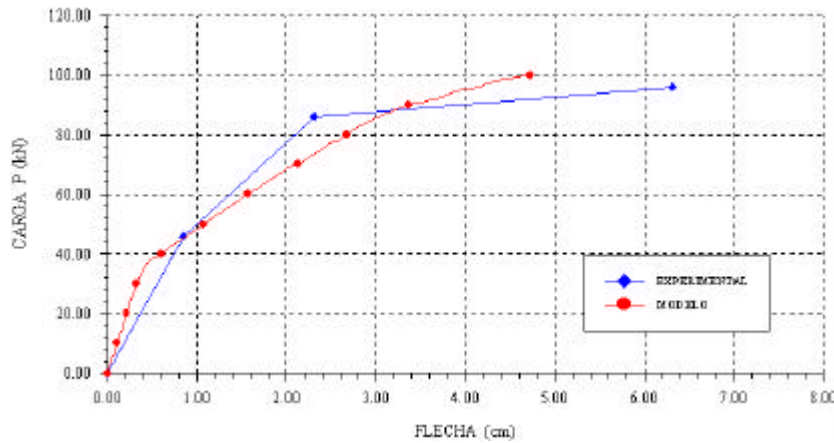


FIGURA 11.8 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga D-3

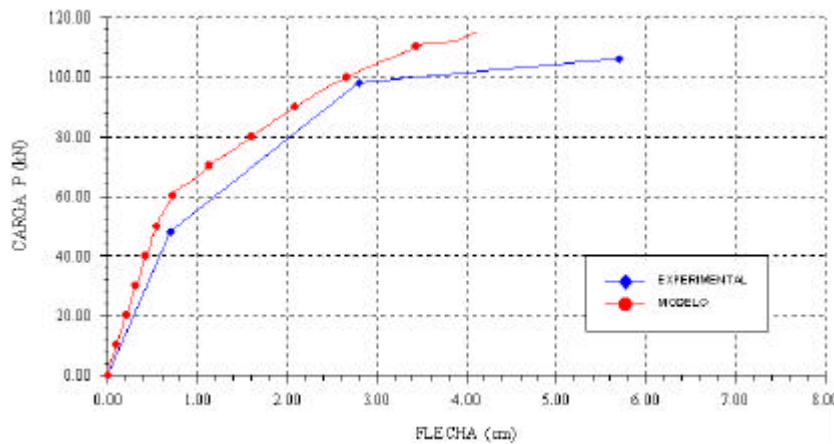


FIGURA 11.9 - Comparação entre as flechas, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga D-10

11.3 EVOLUÇÃO DA MÉDIA DAS TENSÕES NA ARMADURA PROTENDIDA AO LONGO DO CARREGAMENTO

Nas Figs. 11.10 até 11.12, mostra-se a evolução da média das tensões na armadura protendida ao longo do carregamento para o conjunto de vigas, A, segundo os resultados dos ensaios e os obtidos através do modelo computacional.

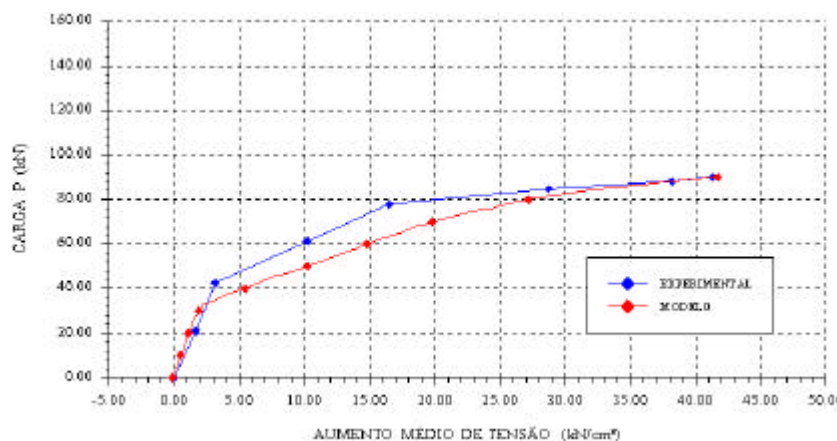


FIGURA 11.10 - Comparação entre as médias das tensões na armadura protendida, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga A-3

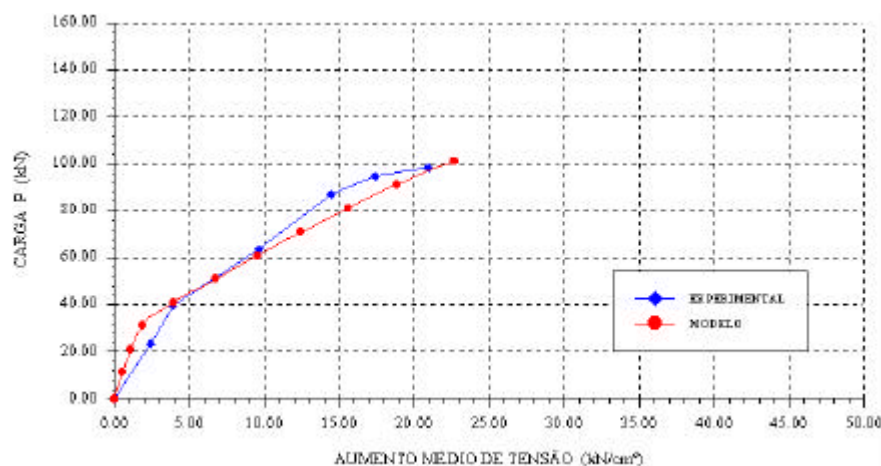


FIGURA 11.11 - Comparação entre as médias das tensões na armadura protendida, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga A-6

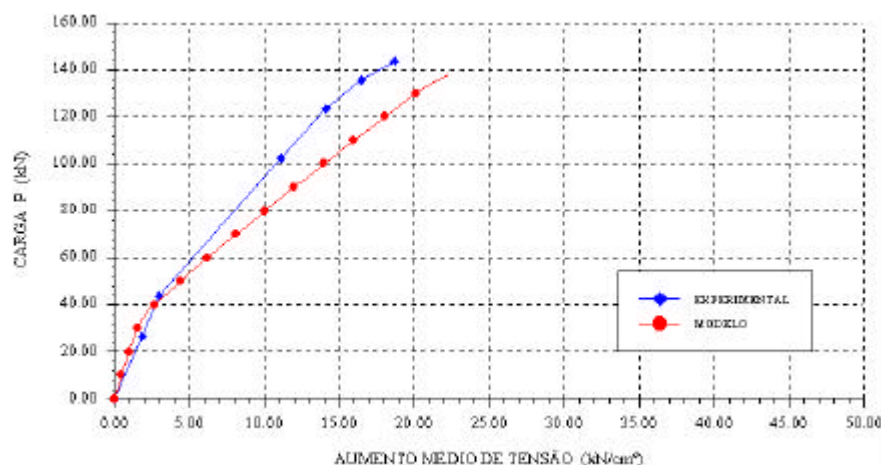


FIGURA 11.12 - Comparação entre as médias das tensões na armadura protendida, obtidas no ensaio e pelo modelo computacional, para a viga A-9

11.4 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO COMPUTACIONAL

Neste item, serão apresentados, graficamente, os resultados obtidos pelo modelo computacional na simulação numérica dos ensaios realizados com os conjuntos de vigas, A e D. Serão mostradas a deformada e a evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto e da tensão uniaxiais na armadura, ao longo do carregamento aplicado, para ambos os conjuntos de vigas.

11.4.1 Deformada da estrutura antes e após o carregamento

As Figs. 11.13 até 11.18 mostram, respectivamente, as deformadas dos dois conjuntos de vigas, A e D, no início e fim da aplicação do carregamento, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional. Usou-se um fator de amplificação igual a 20 para as deformadas da estrutura, quando nela atua somente o peso próprio.

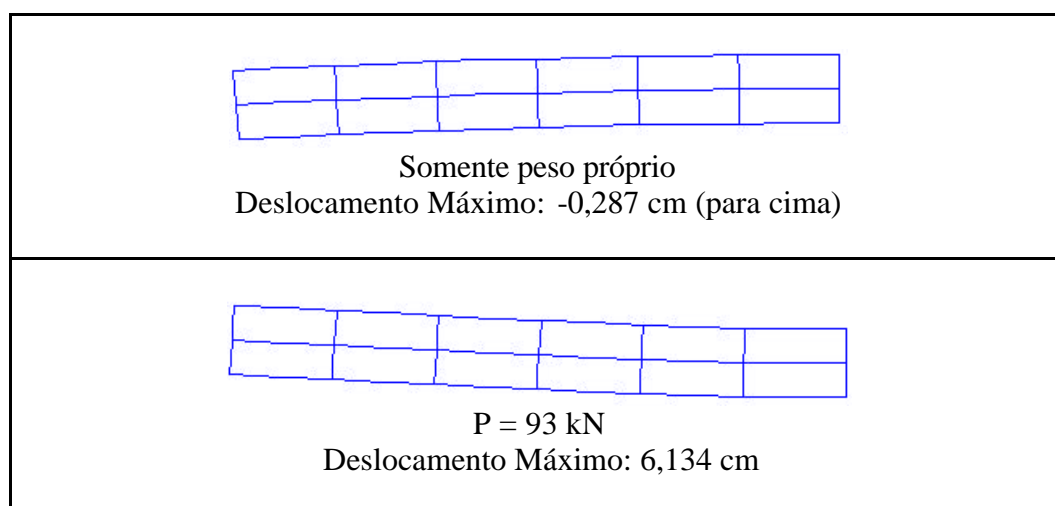


FIGURA 11.13 - Deformada da viga A-3, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional

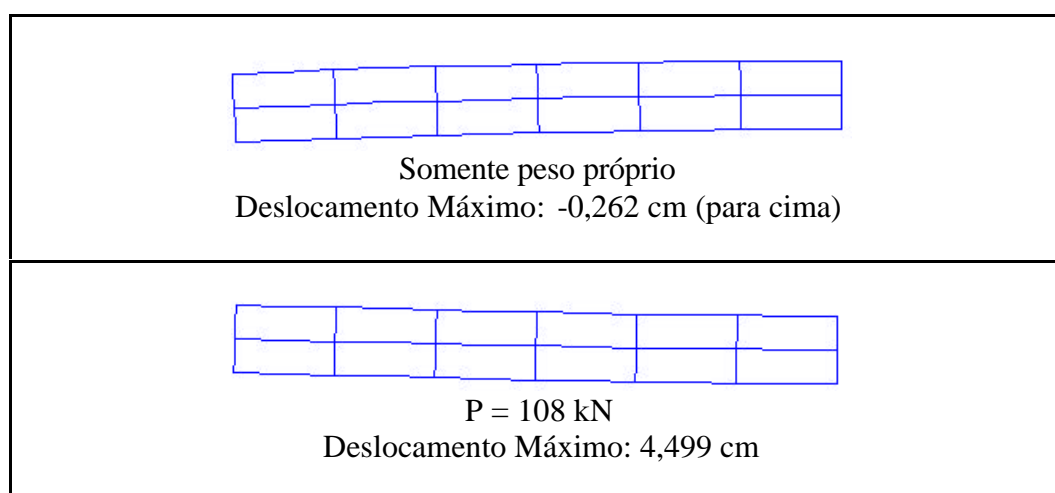


FIGURA 11.14 - Deformada da viga A-6, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional

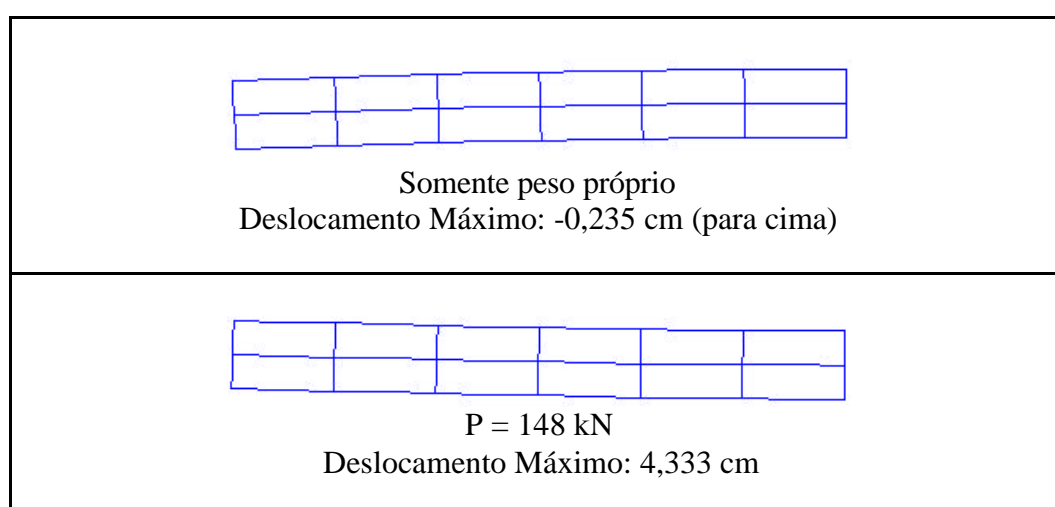


FIGURA 11.15 - Deformada da viga A-9, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional

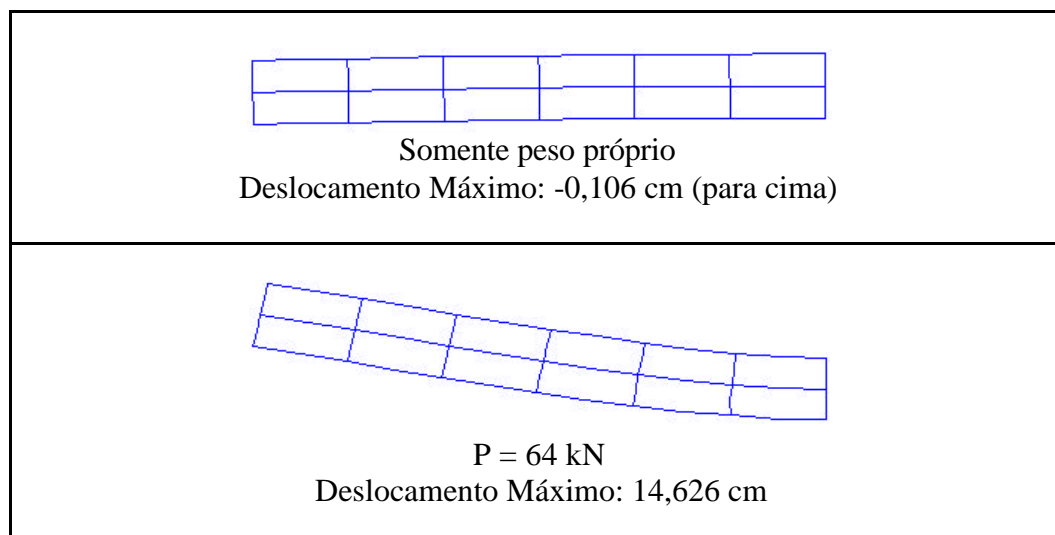


FIGURA 11.16 - Deformada da viga D-1, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional

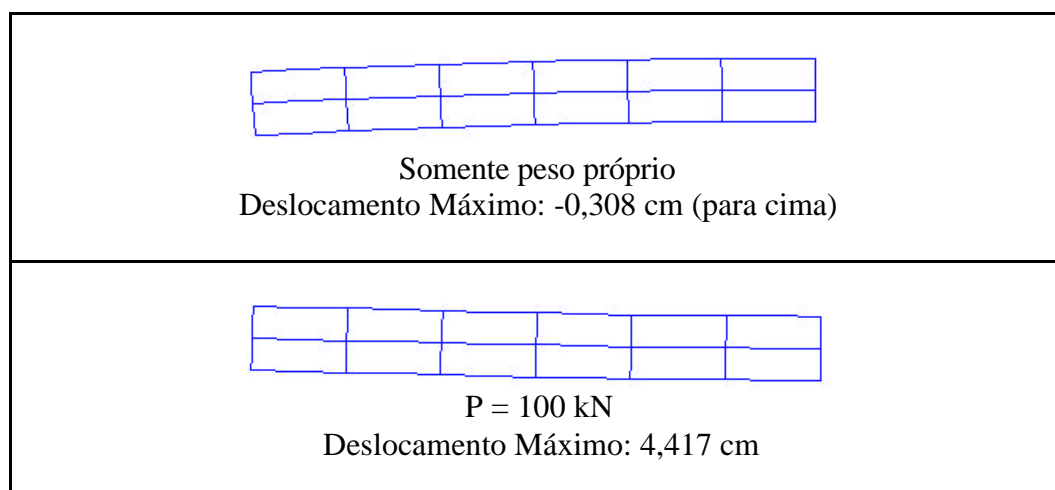


FIGURA 11.17 - Deformada da viga D-3, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional

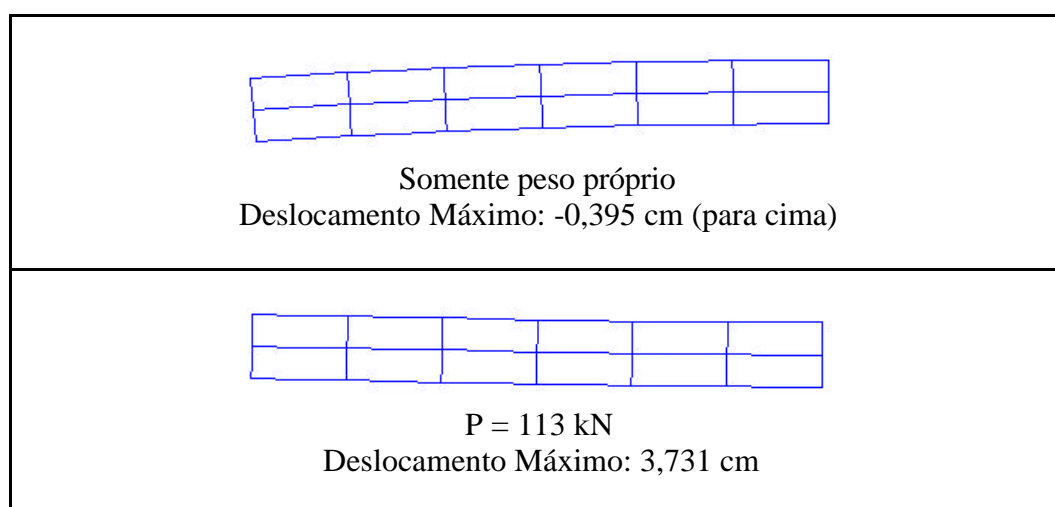


FIGURA 11.18 - Deformada da viga D-10, no início e fim da aplicação carregamento, segundo o modelo computacional

11.4.2 Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto ao longo do carregamento

As Figs. 11.19 até 11.24 mostram a evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto dos dois conjuntos de vigas, A e D, ao longo da aplicação do carregamento, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional.

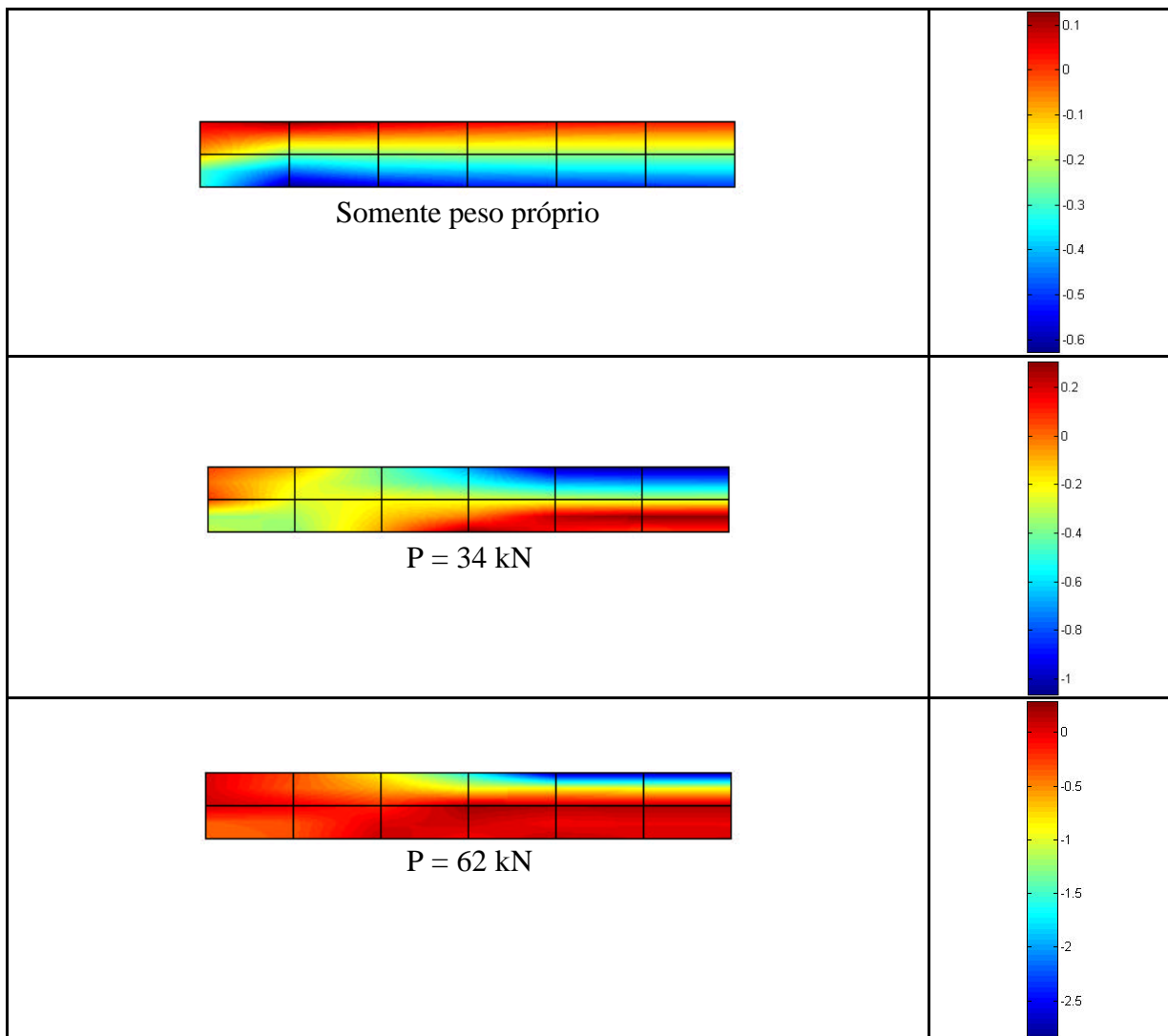
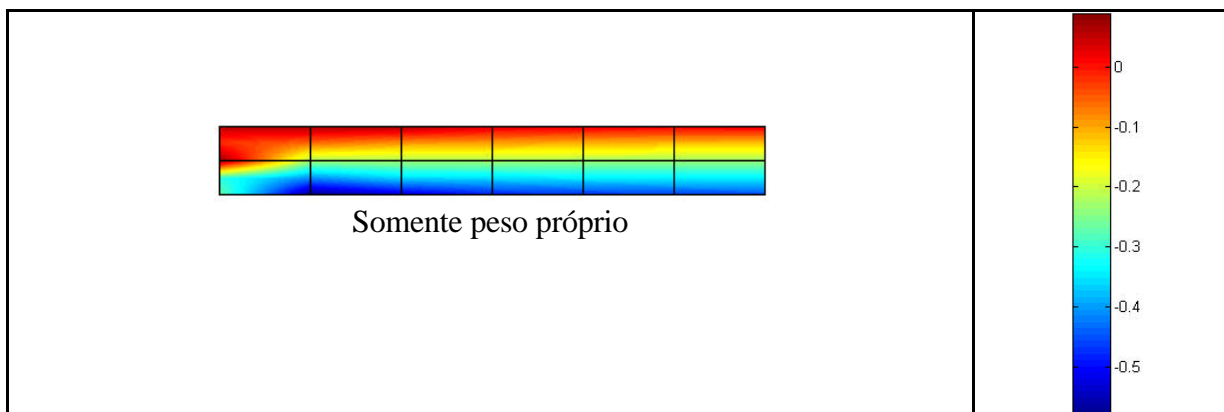


FIGURA 11.19 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga A-3, segundo o modelo computacional



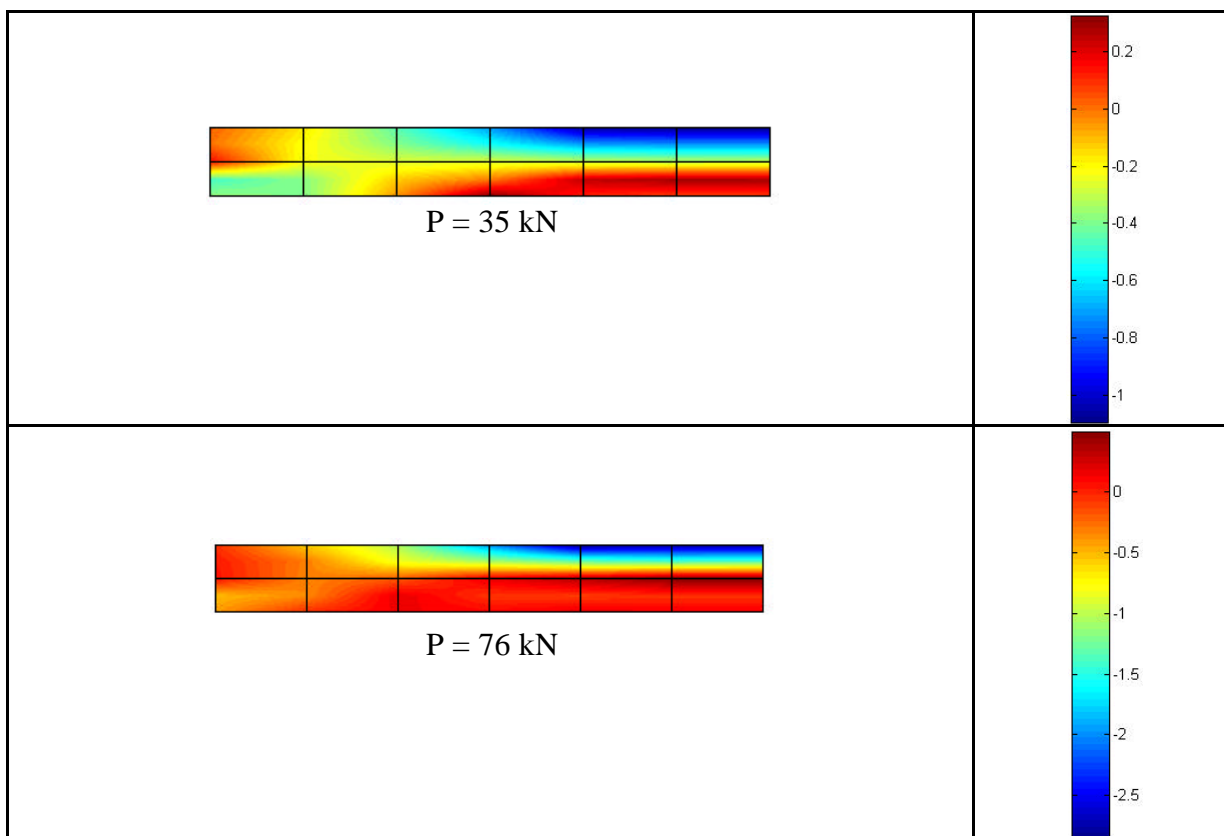
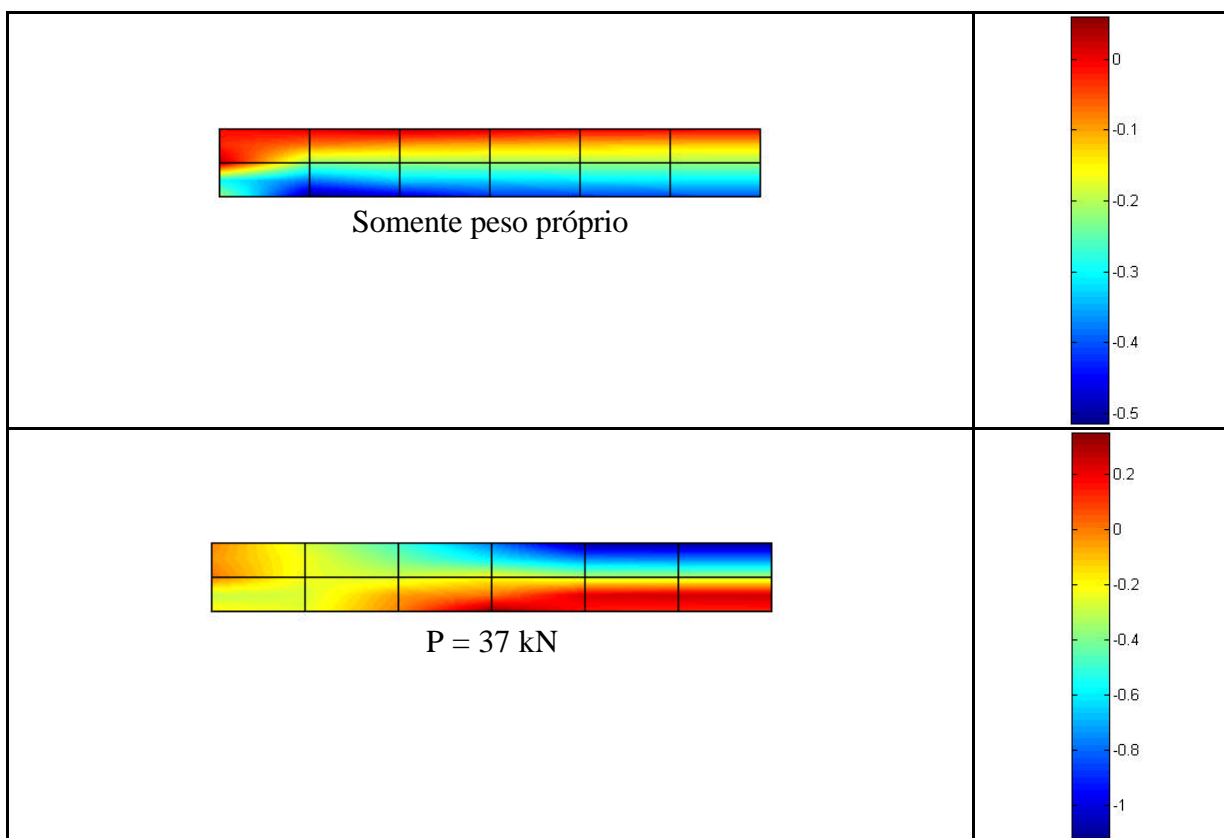


FIGURA 11.20 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga A-6, segundo o modelo computacional



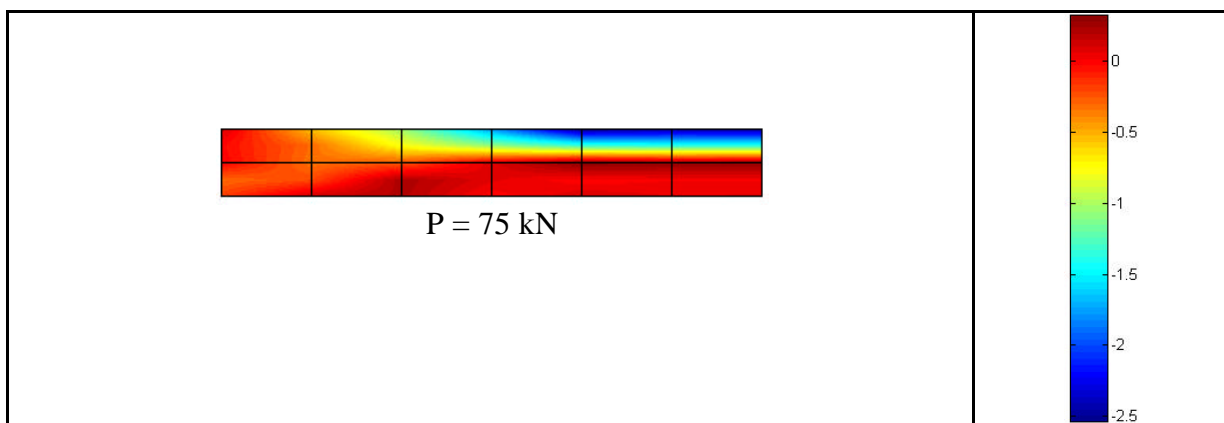


FIGURA 11.21 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga A-9, segundo o modelo computacional

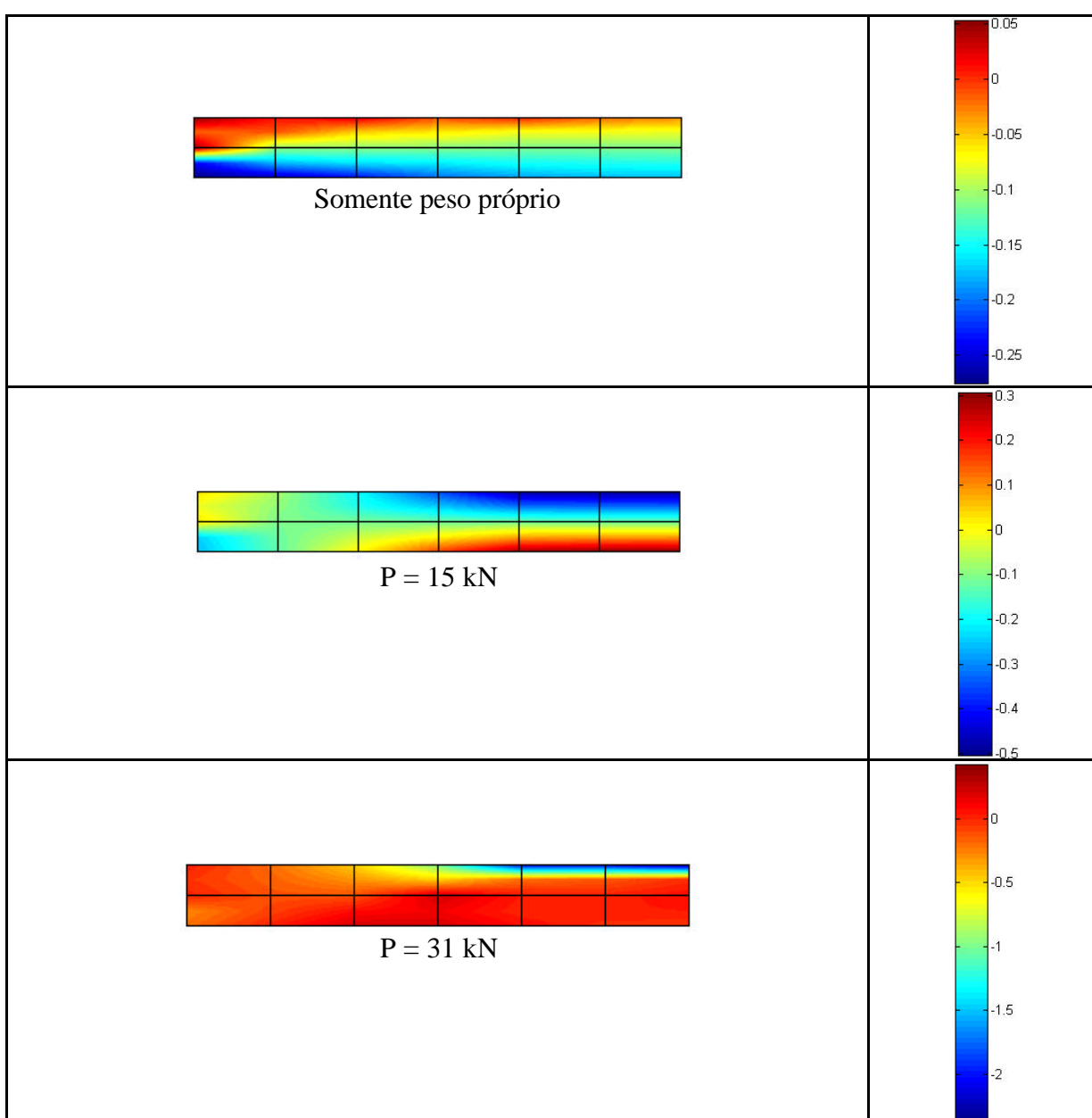


FIGURA 11.22 - Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga D-1, segundo o modelo computacional

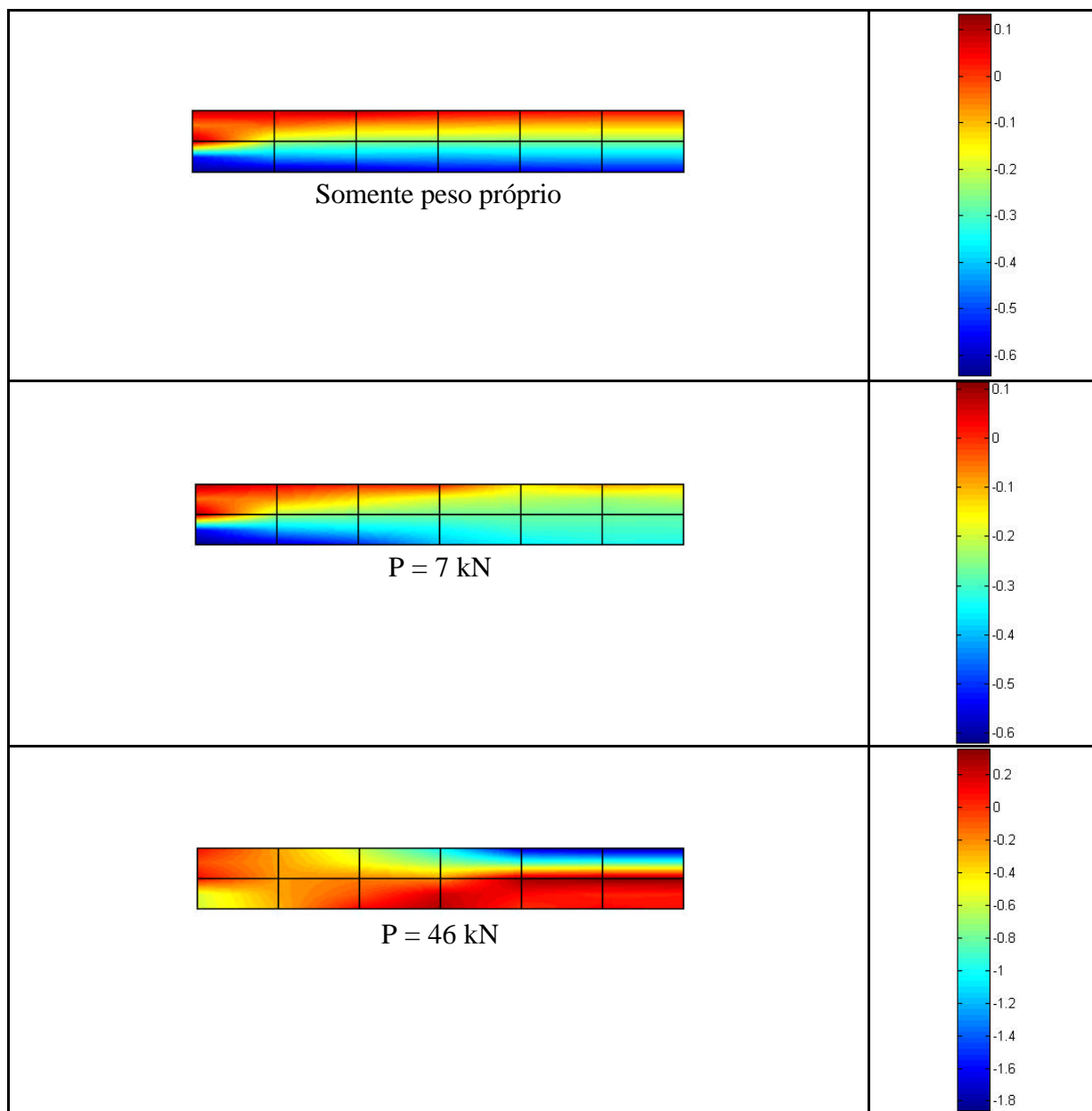
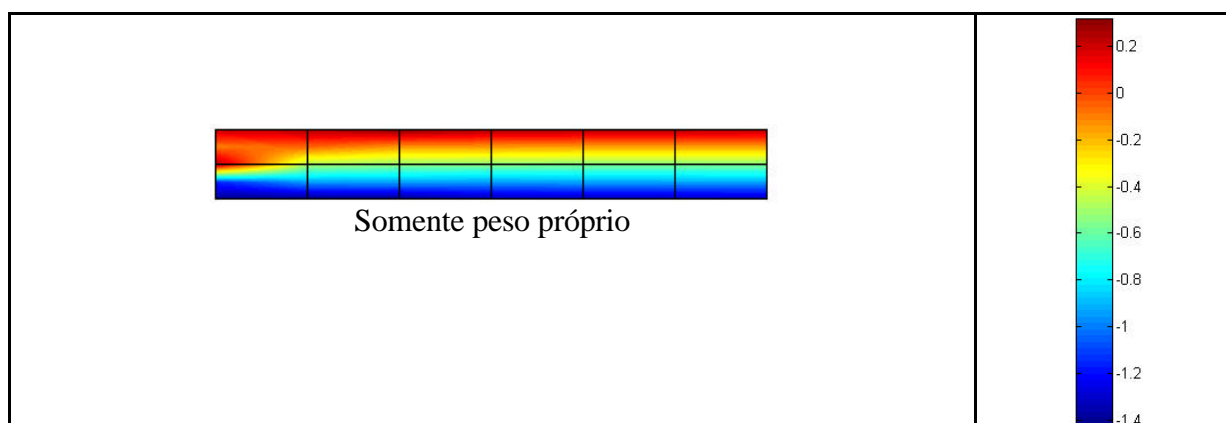


FIGURA 11.23 -Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga D-3, segundo o modelo computacional



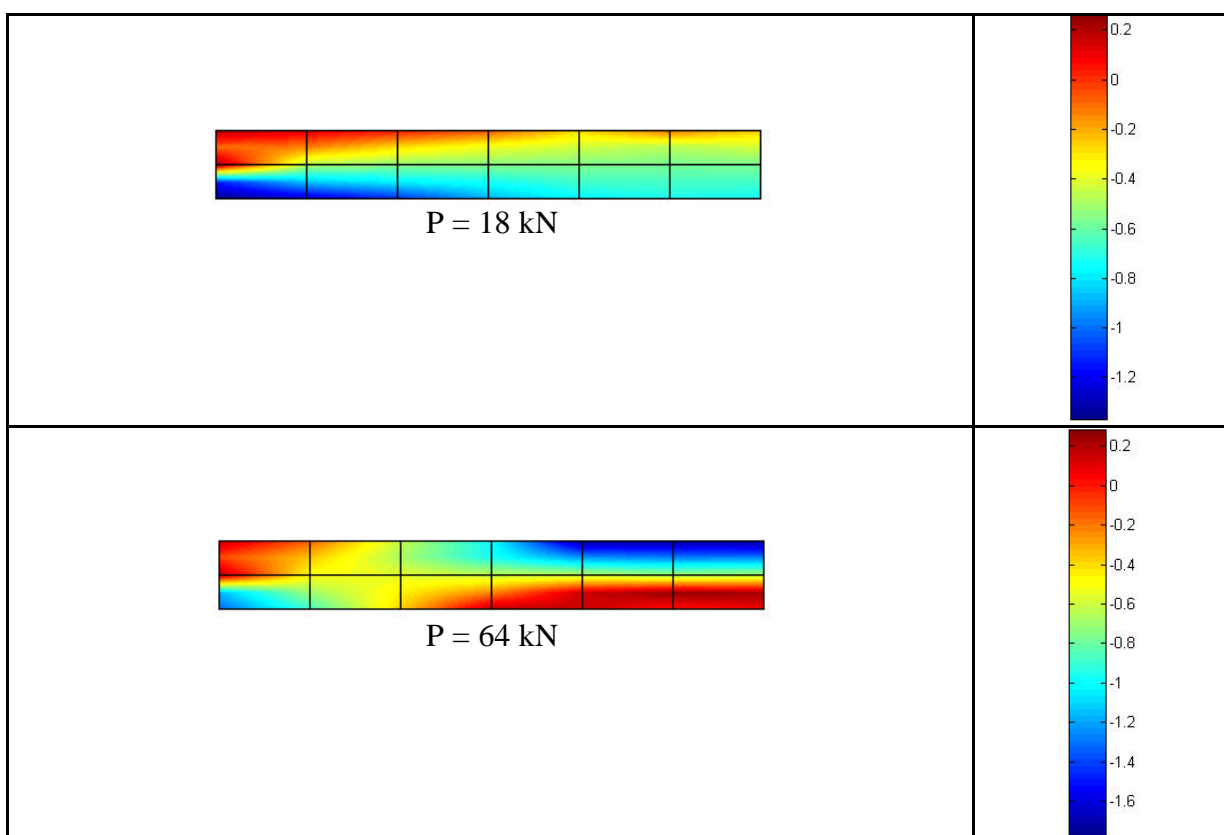
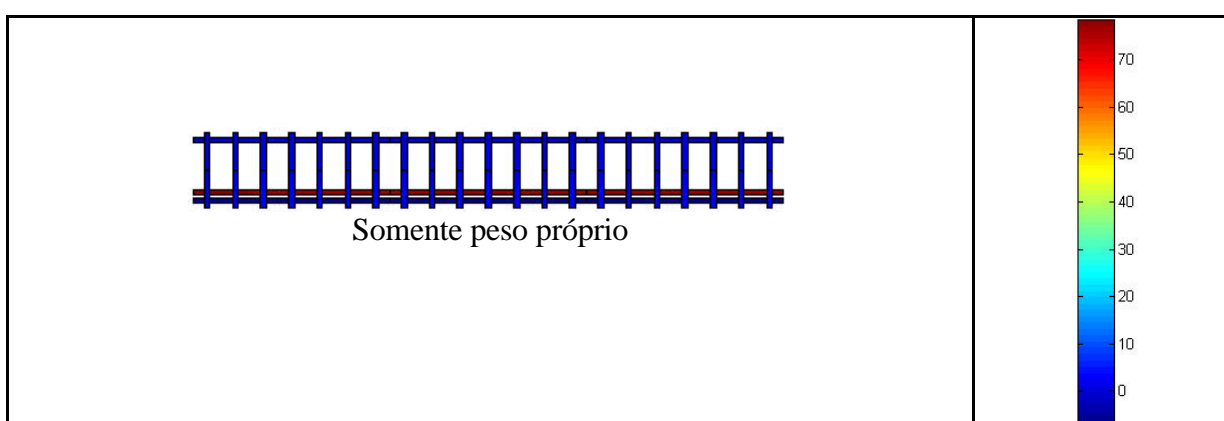


FIGURA 11.24 -Evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto da viga D-10, segundo o modelo computacional

11.4.3 Evolução das tensões na armadura ao longo do carregamento

As Figs. 11.25 até 11.30 mostram a evolução das tensões na armadura dos dois conjuntos de vigas, A e D, ao longo da aplicação do carregamento, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional.



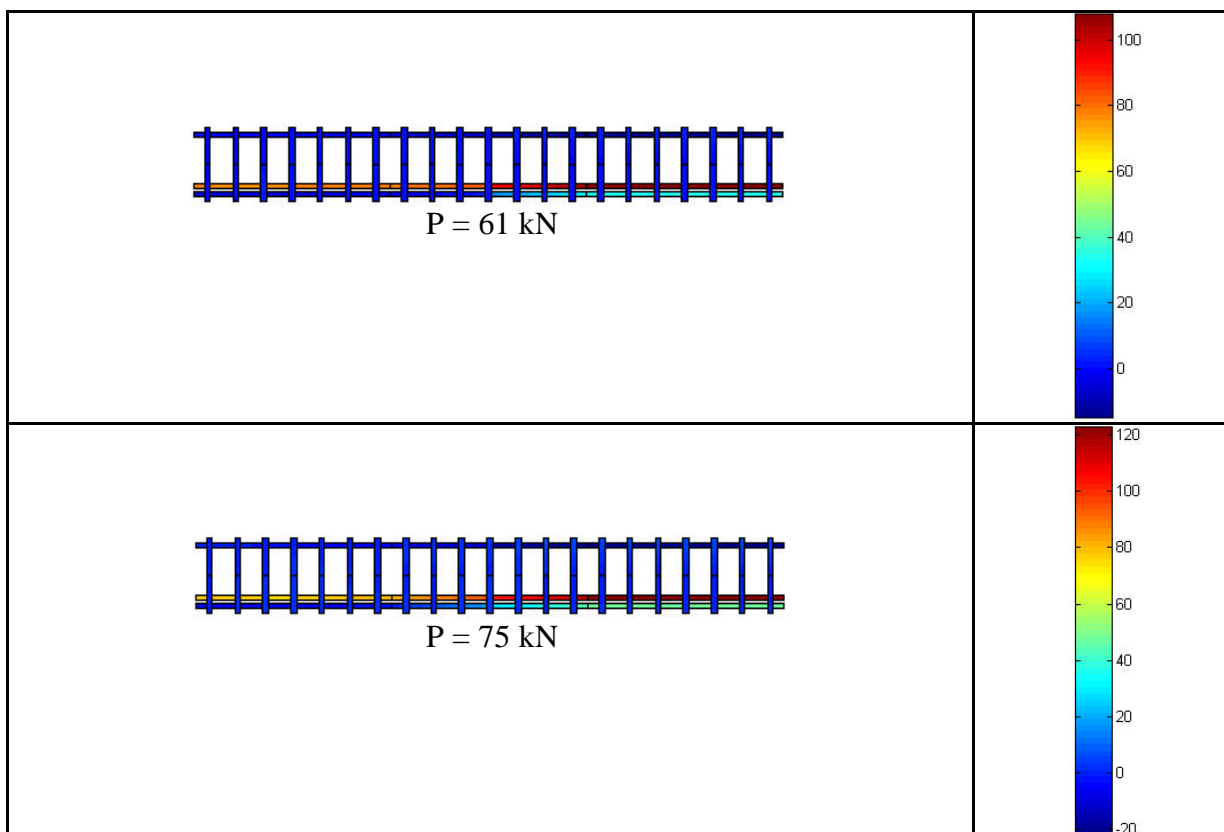
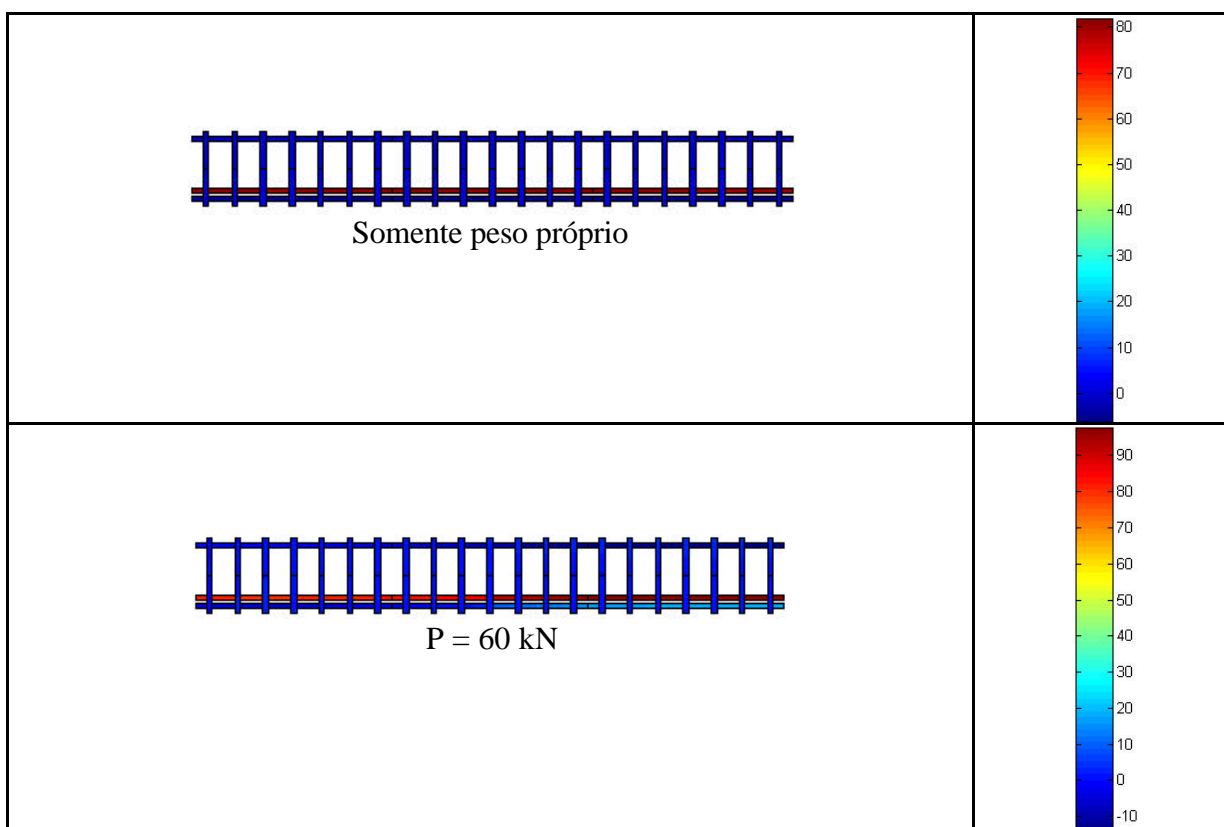


FIGURA 11.25 - Evolução das tensões na armadura da viga A-3, segundo o modelo computacional



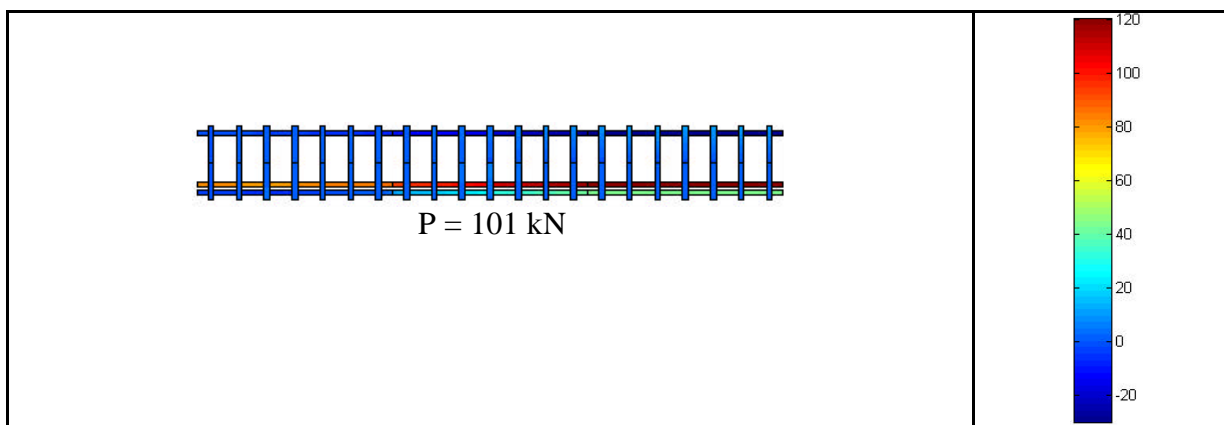


FIGURA 11.26 - Evolução das tensões na armadura da viga A-6, segundo o modelo computacional

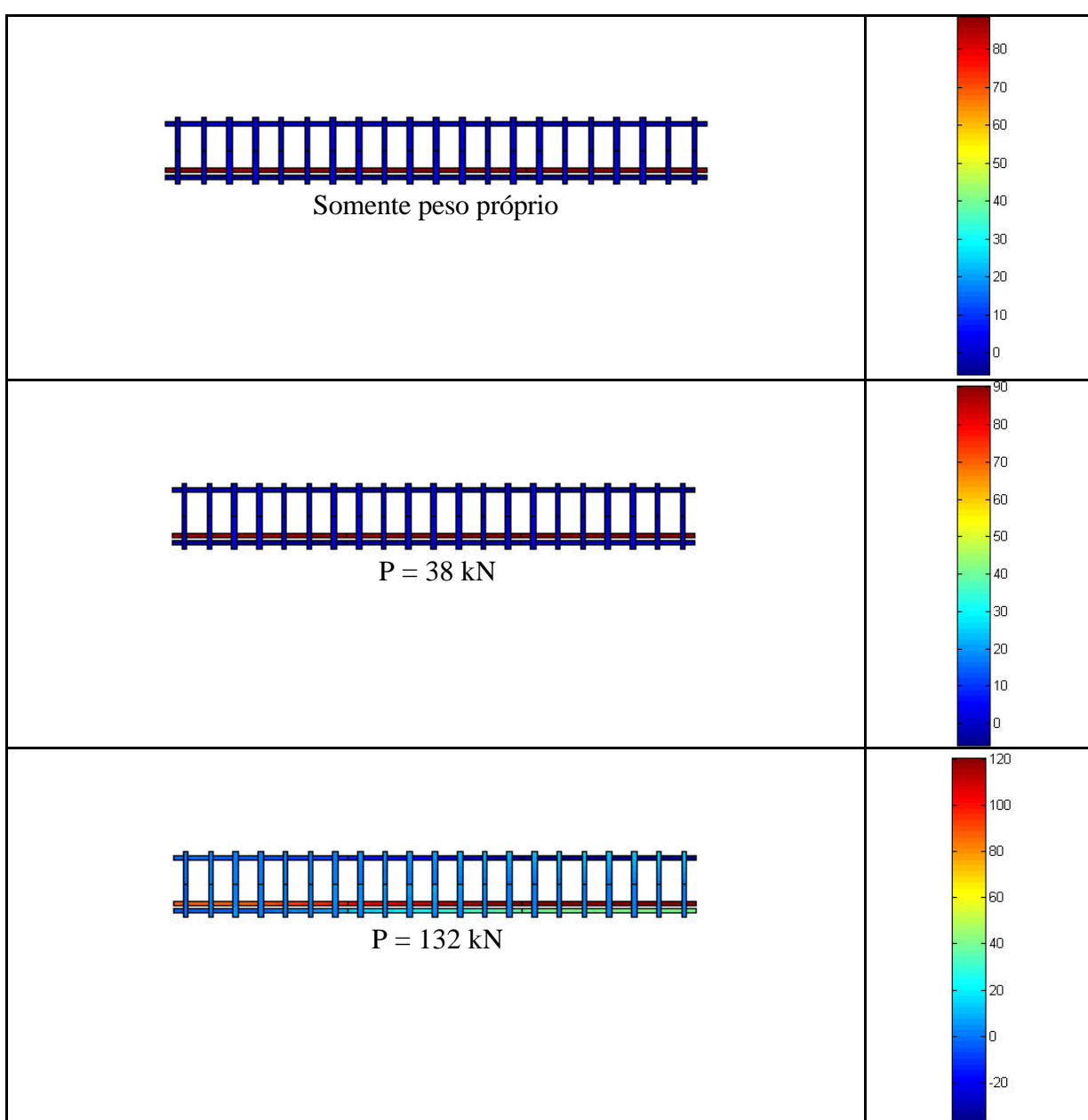


FIGURA 11.27 - Evolução das tensões na armadura da viga A-9, segundo o modelo computacional

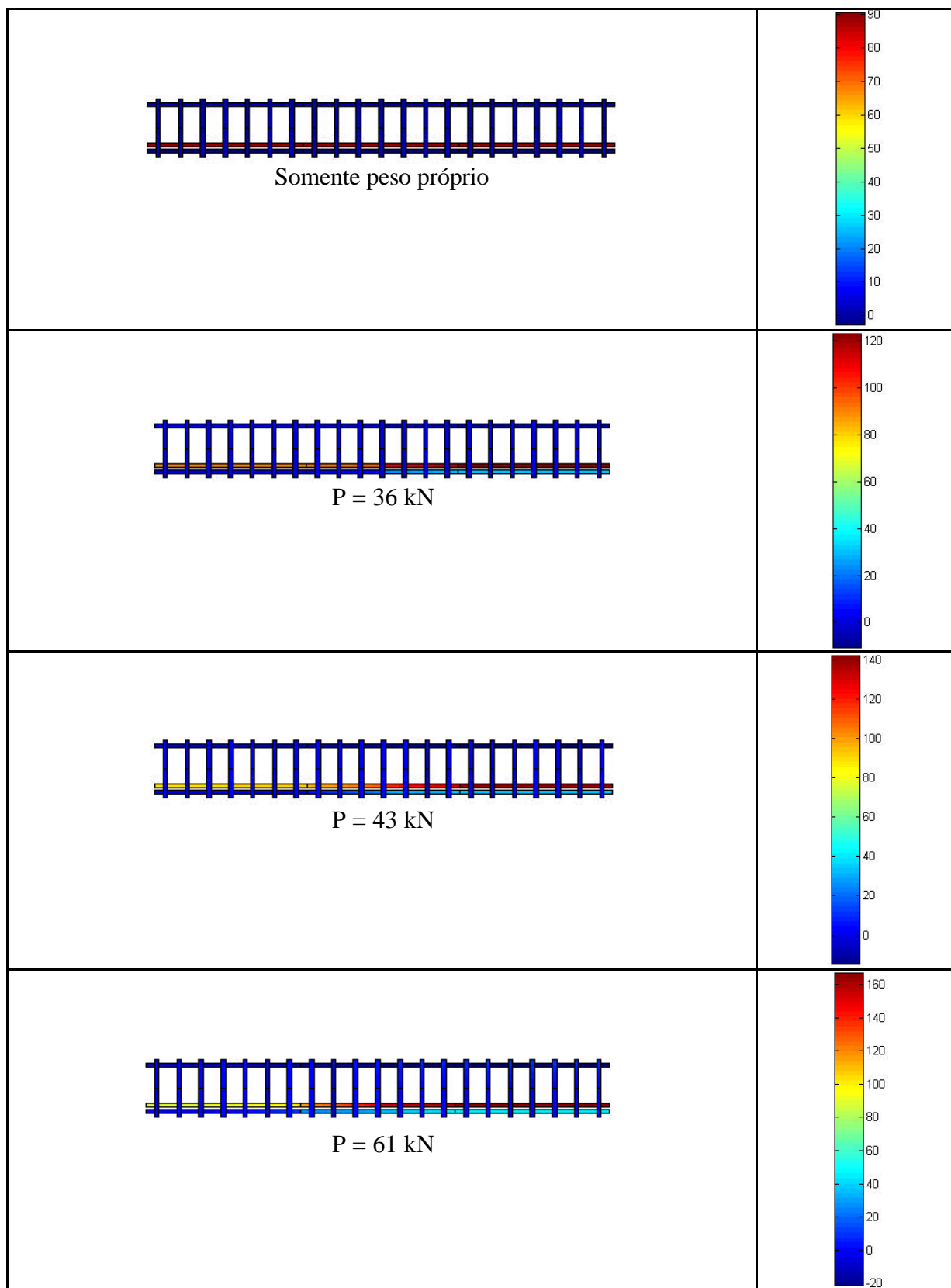


FIGURA 11.28 - Evolução das tensões na armadura da viga D-1, segundo o modelo computacional

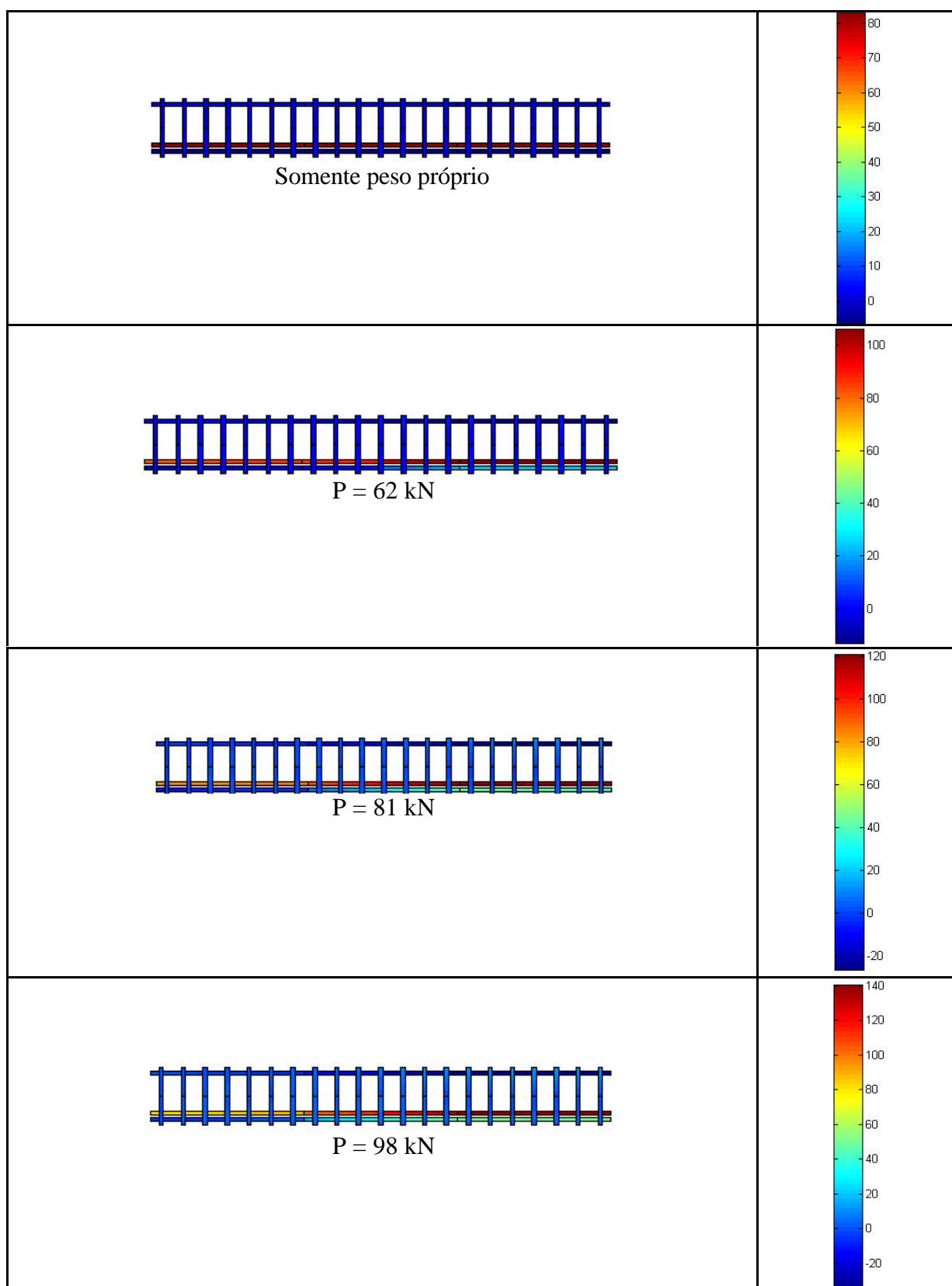


FIGURA 11.29 - Evolução das tensões na armadura da viga D-3, segundo o modelo computacional

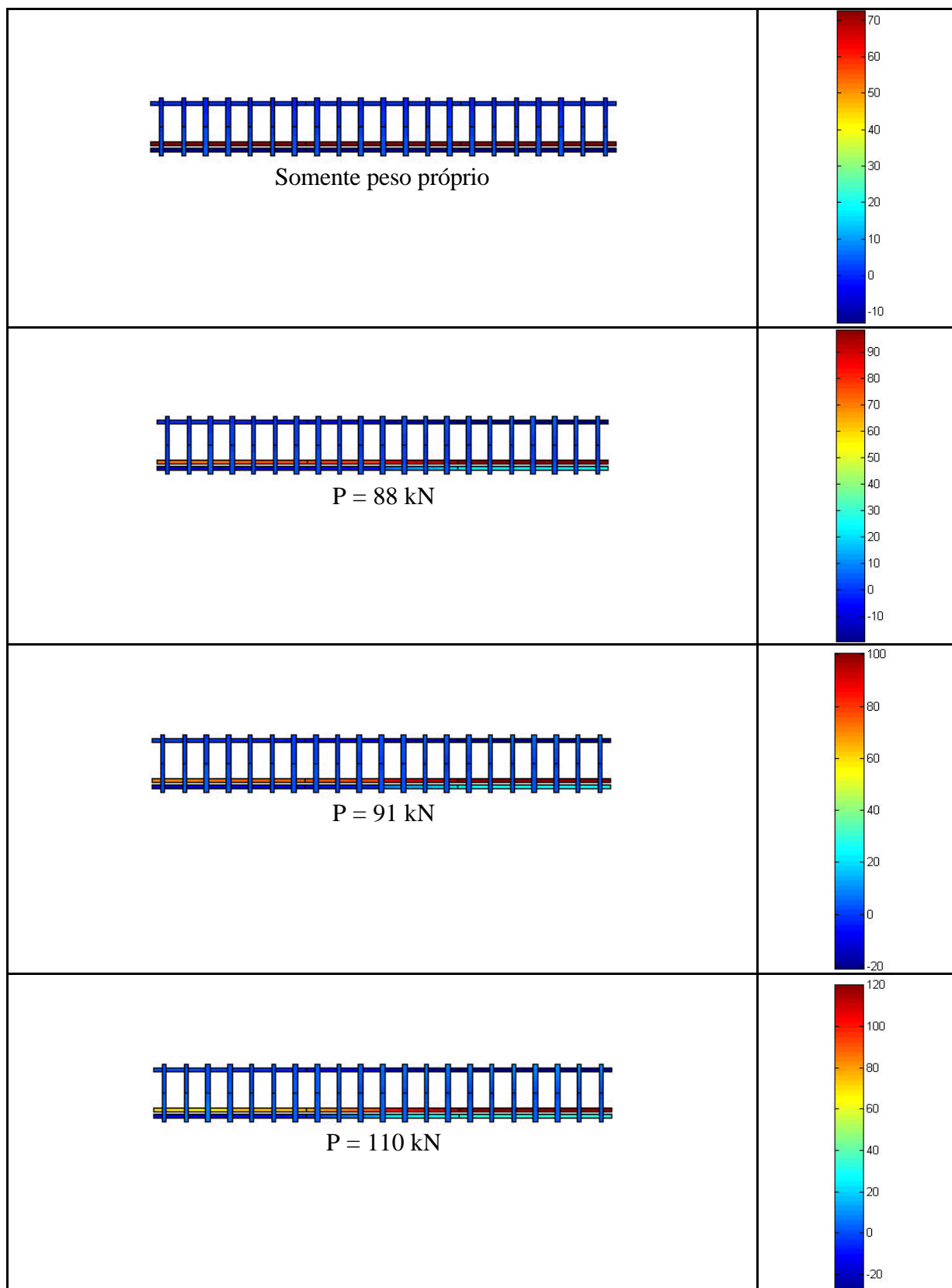


FIGURA 11.30 - Evolução das tensões na armadura da viga D-10, segundo o modelo computacional

12 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho, apresentou-se um modelo elasto-viscoplástico, baseado no método dos elementos finitos, para a análise de peças fletidas de concreto armado e protendido. Tal modelo tem como casos particulares o viscoelástico, onde os efeitos ligados ao tempo dos materiais, como fluência e retração do concreto e relaxação do aço, são investigados, e o elastoplástico, onde se busca o estado de deformações após a aplicação de um determinado carregamento.

Esta dissertação teve como base principal o trabalho de Prates Júnior, apresentado neste PPGEC em 1992. Em relação ao seu trabalho, revisaram-se todos os modelos implementados para o estudo do comportamento de peças de concreto estrutural, submetidas a cargas de curta e longa duração; sugeriu-se um modelo de camadas para se descrever o comportamento viscoelástico da armadura protendida; implementou-se um modelo mais simples para representar o comportamento do concreto fissurado, sob tração; utilizou-se o software MATLAB para a implementação do modelo computacional, com o qual foi possível criar, também, um programa para entrada de dados e outro para visualização gráfica dos resultados obtidos.

Na análise do funcionamento do concreto e da armadura, ao longo do tempo, o modelo de camadas superpostas atingiu ótimos resultados para descrever os fenômenos de fluência no concreto e de relaxação da armadura protendida.

Tanto o modelo elastoplástico para o concreto comprimido, quanto o modelo para o concreto tracionado, onde o modelo de fissuras distribuídas foi empregado, também se mostraram eficientes.

A automação da implementação da armadura, através do modelo incorporado, tornou o modelo computacional extremamente versátil, uma vez que as barras inseridas dentro dos elementos de concreto são definidas por apenas dois ou três pontos nodais. Automaticamente, o algoritmo se encarrega de determinar os segmentos de armadura dentro de cada elemento de concreto.

O software MATLAB mostrou-se muito eficiente para a implementação do modelo computacional. Além disso, viabiliza o uso de ferramentas gráficas para visualização dos resultados obtidos. Esta é uma exigência para a utilização do método dos elementos finitos, já que este método fornece um volume muito grande de informações.

Com os excelentes resultados obtidos com o modelo, quando comparados com os valores experimentais, verifica-se a possibilidade de se simular computacionalmente o funcionamento real de diferentes estruturas de concreto estrutural. Deste modo, pode-se analisar o comportamento de peças estruturais, de maneira mais precisa, a fim de se otimizar o aproveitamento dos materiais.

Para trabalhos futuros, sugere-se a implementação de incrementos de deslocamentos, para diferentes datas; o desenvolvimento de um modelo mais elaborado para a simulação do comportamento do concreto fissurado, sob tração, face à sensibilidade e simplicidade daquele implementado neste trabalho e um modelo que considere a aderência imperfeita entre o concreto e o aço.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto protendido: NBR 7197**. Rio de Janeiro, 1989.
- AURICH, M. **Modelo da ligação entre concreto e armadura na análise de estruturas de concreto pelo método dos elementos finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGEC, 2001. 132 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- BAZANT, Z. P. & WU, S.T. **Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell chain**. *Matériaux et Constructions*, v.7, n.34, p. 45-60, 1974.
- BAZANT, Z. P. **Mathematical models for creep and shrinkage of concrete**. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FUNDAMENTAL RESEARCH AND SHRINKAGE OF CONCRETE, 1980, Lausanne Papers...Chichester: John Willey, 1982, cap. 7, p. 163-256.
- BRITTO E SILVA, C. S. **Análise numérico-experimental de elementos protendidos tipo laje-roth**. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1994, 129 p. Dissertação de mestrado em Engenharia Civil.
- BARBIERI, R. A.; GASTAL, F. P. S. L. & SCHWINGEL, R. C. **Protensão não aderente: comportamento à flexão e métodos de previsão de desempenho**. In: CON-PAT 2001 - VI CONGRESSO IBEROAMERICANO DE PATOLOGIA DAS CONSTRUÇÕES - VI CONGRESSO DE CONTROLE DE QUALIDADE, Santo Domingo, out, 2001. Anais. CD ROM. 43-BR.23. 19 p.
- CAMPOS FILHO, A. **Análise teórico-experimental de elementos de concreto armado para obtenção de modelo matemático**. São Paulo: USP, 1987, 293 p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.
- CERVENKA, V. **Constitutive model for cracked reinforced concrete**. *Journal of the American Concrete Institute*, v.82, n.6, p. 877-882, 1985.
- CHEN, W. F. & HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988. 606p.
- CLAURE, J. D. **Análise tridimensional elasto-viscoplástica de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: CPGEC/ UFRGS, 1994. 145p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990**. Lausanne, 1993. (Bulletin d'Information, 213/214).
- CREUS, G. J. **Viscoelasticity: basic theory and applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1986. 169p.

- DANTAS, A. U. **Simulação numérica dos processos de recuperação e reforço de peças estruturais em concreto armado.** Porto Alegre, PPGEC/UFRGS, 2000, 133p. Dissertação de mestrado em Engenharia Civil.
- ELWI, A. E. & HRUDEY, T. M. **Finite element model for curved embedded reinforcement.** Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, v.115, n.4, p. 740-745, Apr. 1989.
- FAIRBAIRN, E. M. R.; LONGO, H. I. & ZHENG, R. **Formulação diferencial do problema da relaxação do concreto - estudo teórico experimental.** In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 24, 1987, Porto Alegre. Anais. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1987, v.2, p. 103-117.
- FIGUEIRAS, J. A. & PÓVOAS, R. H. **Modelling of Prestress in Non-Linear Analysis of Concrete Structures.** Computers & Structures. London, Elsevier Science, v. 53, n.1, Jan. 1994.
- GONGCHEN, D. & XUEKANG, T. **Contrainte ultime dans câbles non-adhérents de poutres en béton a précontrainte partielle.** Annales de L'Institut Technique du Batiment et des Tavaux Publics, n. 462, p.75-88, Fev. 1988.
- HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells.** Swansea: Pineridge Press, 1988, 550p.
- HINTON, E & CAMPBELL, J. S. **Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 8, p. 461-480, 1974.
- LEONHARDT, F. & WALTHER, R. **Beiträge zur behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau.** Beton und Stahlbetonbau, v.57, n.7, p.161-173, Juli 1962.
- MATTOCK, A. H.; YAMAZAKI J. & KATTULA, T. **Comparative study of prestressed concrete beams, with and without bond.** Journal of the American Concrete Institute, v. 68, n.2, p.116-125, Feb. 1971.
- MOJTAHEDI, S. & GAMBLE, W. L. **Ultimate Steel Stress in Unbonded Prestressed Concrete.** Journal of the Structural Division, New York, ASCE, v. 123, n. 8, Aug. 1978.
- MOON, J. & BURNS, N. H. **Flexural Behavior of Member with Unbonded Tendons I: Theory.** Journal of the Structural Division, New York, ASCE, v. 104, n. 7, Jul. 1977.
- NAAMAM, A. E. & ALKHAIRI, F. M. **Stress at Ultimate in Unbonded Post-Tensioned Tendons: Part 1 – Evaluation of the State-of-the-Art.** ACI Structural Journal, Farmington Hills, ACI, v.88, n. 5, Sep-Oct. 1991.
- NAAMAM, A. E. & ALKHAIRI, F. M. **Stress at Ultimate in Unbonded Post-Tensioned Tendons: Part 2 – Proposed Methodology.** ACI Structural Journal, Farmington Hills, ACI, v.88, n. 6, Nov-Dec. 1991.
- OTTOSEN, N. S. **A failure criterion of concrete.** Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.103, n.4, p. 527-535, Aug. 1977.
- OWEN, D. R. J. & HINTON, E. **Finite element in plasticity: theory and practice.** Swansea, Pineridge Press, 1980, 594p.
- OWEN, D. R. J. & HINTON, E. **Finite element programming.** London: Academic Press, 1977. 305p.

- PANDE, G. N.; OWEN, D. R. J. & ZIENKIEWICZ, O. C. **Overlay models in time-dependent non-linear material analysis**. Computers and Structures, v.7, n.3, p. 435-443, 1977.
- PFEIL, W. **Concreto protendido 1: introdução**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1988, 204 p.
- PRATES JÚNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre, CPGEC/UFRGS, 1992, 131p. Dissertação de mestrado em Engenharia Civil.
- SENSALE, C. B. **Análise do comportamento ao longo do tempo de peças de concreto armado submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: CPGEC/ UFRGS, 1991. 110p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- STRINCKLIN, J. A.; HAISLER, W. & REISEMANN, W. **Evaluation of solution procedures of material and/or geometrically non-linear structural analysis**. AIAA Journal, v.11, n.3, p. 292-299, 1973.
- VASCONCELOS, A. C. **Manual prático para a correta utilização dos aços no concreto protendido em obediência às normas atualizadas**. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, editora Ltda, 1980, 64 p.
- ZIENKIEWICKZ, O. C. **The finite element method**. London: McGraw-Hill, 1986, 787p.
- ZIENKIEWICKZ, O. C.; PHILLIPS, D. V. & OWEN D. R. J. **Finite element analysis of some concrete non-linearities: theory and examples**. In: SEMINAR ON CONCRETE STRUCTURES SUBJECTED TO TRIAXIAL STRESSES. PAPERS. Bergamo: IABSE, 1974, p.1-21.

ANEXO A PREPARAÇÃO DOS RESULTADOS DE TENSÃO NO CONCRETO E NA ARMADURA PARA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

A.1 PROCESSO DE SUAVIZAÇÃO DE TENSÕES UTILIZANDO O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS, PARA ELEMENTOS FINITOS PLANOS

No método dos deslocamentos, as tensões são descontínuas entre elementos por causa da natureza da variação do deslocamento admitida. Durante o processo de análise, as tensões são calculadas nos pontos de integração dos elementos. Para a representação da distribuição das tensões, são necessários os valores nodais das tensões. Se os valores nodais das tensões fossem calculados separadamente para cada elemento, seria gerada uma distribuição não suavizada, conforme apresentado na Fig. A.1. Torna-se, assim, necessário um processo de suavização para possibilitar a continuidade interelementar das tensões.

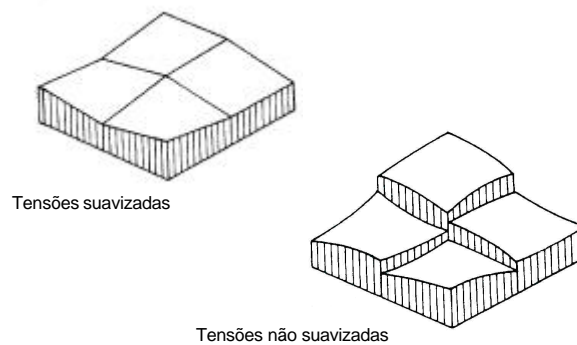


FIGURA A.1 - Tensões suavizadas e não suavizadas

Neste trabalho, usa-se o processo de suavização utilizado por Dantas (2000), com base no trabalho de Hinton e Campbell (1974). A função de suavização é definida como:

$$g(x,y) = a_{00} + a_{10} x + a_{01} y + a_{11} xy + a_{20} x^2 + \dots = \sum a_{ij} x^i y^j ,$$

$$\text{com } \begin{cases} i=0, p \\ j=0, q \end{cases} , \quad (\text{A.1})$$

onde g é uma função de ordem p em x e uma função de ordem q em y .

Se a função não suavizada é dada por $\sigma(x,y)$, então o problema resume-se em encontrar os coeficientes a_{ij} que minimizem o funcional:

$$\chi = \iint (\sigma - g)^2 dx dy . \quad (\text{A.2})$$

Conseqüentemente, para χ ser um valor mínimo:

$$\frac{\partial \chi}{\partial a_{ij}} = 0 . \quad (\text{A.3})$$

Neste problema, as incógnitas são tomadas como as tensões nodais suavizadas σ_i^* e estas tensões podem ser obtidas usando-se as funções de forma. Desta maneira, a função de suavização $g(\xi, \eta)$ é dada pela expressão:

$$g(\xi, \eta) = \sum_{i=1, n} N_i \sigma_i^* \quad (\text{A.4})$$

onde N_i , a função de forma no nó i , é uma função de coordenadas (ξ, η) e σ_i^* é a tensão nodal suavizada no nó i e n é o número de nós por elemento.

O erro entre as tensões suavizadas e não suavizadas em qualquer ponto dentro do elemento é dado por:

$$e(\xi, \eta) = \sigma(\xi, \eta) - g(\xi, \eta), \quad (\text{A.5})$$

onde as tensões não suavizadas $\sigma(\xi, \eta)$, em qualquer ponto dentro do elemento, podem ser obtidas pela relação usual de tensão-deslocamento:

$$\sigma(\xi, \eta) = [D] [B] \{\delta\}^e, \quad (\text{A.6})$$

onde:

- $[D]$ é a matriz constitutiva;
- $[B]$ é a matriz deformação - deslocamento;
- $\{\delta\}^e$ são os deslocamentos nodais do elemento.

O problema agora é encontrar as tensões nodais suavizadas $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_p^*$, que minimizem o funcional:

$$\chi = \sum_{j=1, ne} \iint e(\xi, \eta)^2 dx dy, \quad (\text{A.7})$$

onde p é o número total de nós e ne é o número total de elementos.

Para χ ser um mínimo:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \sigma_i^*} = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, p. \quad (\text{A.8})$$

Portanto, para cada elemento, a matriz de suavização do elemento é dada por:

$$[S]^e = \begin{bmatrix} \iint N_1 N_1 \det J d\xi d\eta & \dots & \iint N_1 N_n \det J d\xi d\eta \\ \vdots & & \vdots \\ \iint N_n N_1 \det J d\xi d\eta & \dots & \iint N_n N_n \det J d\xi d\eta \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

onde $\det J$ é o determinante da matriz Jacobiana.

O vetor de “forças” é dado por:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} \iint N_1 \sigma \det J d\xi d\eta \\ \vdots \\ \iint N_n \sigma \det J d\xi d\eta \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

O vetor de “forças” global $\{F\}$ e a matriz de suavização global $[S]$ são obtidos reunindo-se o vetor de “forças” de cada elemento $\{F\}^e$ e a matriz de suavização de cada elemento $[S]^e$, respectivamente.

As tensões nodais suavizadas $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_p^*$ são obtidas resolvendo-se o sistema:

$$\{F\} = [S] \{\sigma\}, \quad (A.11)$$

onde $\{\sigma\}$ é o vetor formado pelas tensões nodais suavizadas.

A.2 CONVERSÃO DOS VALORES DAS TENSÕES NOS PONTOS DE INTEGRAÇÃO DAS BARRAS DE ARMADURA, PARA OS PONTOS NODAIS

As barras de armadura são introduzidas no programa a partir apenas dos dois nós de extremidade, conforme Fig. A.2. O programa identifica, automaticamente, quais segmentos de barras estão contidos nos elementos de concreto. Assim, cada elemento possui n segmentos de barras, conforme a Fig. A.3.

Se o elemento de concreto utilizado for o quadrático de oito nós, cada segmento de barra terá três nós. Assim, cada segmento de barra, dentro de um elemento de concreto, fica dividido em duas partes. Para cada segmento de armadura, têm-se, então, três nós e dois elementos de barra. Esses nós são numerados em uma determinada seqüência, de modo que fique na mesma ordem dos resultados das tensões nos pontos de integração dos segmentos das barras, conforme Fig. A.4.

Para efeitos de visualização dos resultados, por simplificação de cálculo, considera-se que os valores de tensão, determinados para os pontos de integração, correspondem aos valores nodais do elemento de barra.

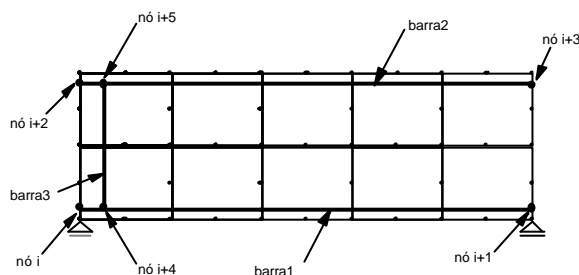


FIGURA A.2 - Barras de armadura no interior dos elementos de concreto

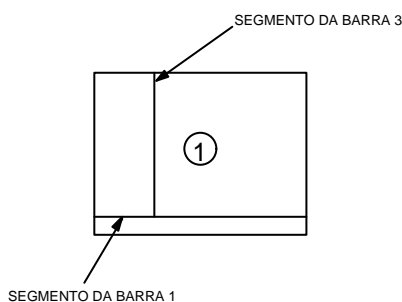


FIGURA A.3 - Segmentos de barras no interior do elemento de concreto

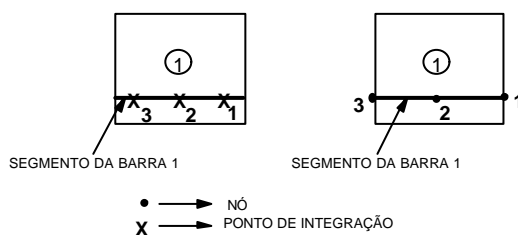


FIGURA A.4 - Numeração dos nós do segmento de armadura