

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**APLICAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS  
EM ESTRUTURAS DE CONCRETO**

*Roberto Domingo Rios*

Tese apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA.

Porto Alegre

2002

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia e aprovada em sua forma final pelo orientador e pela banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

---

Prof. Jorge Daniel Riera (Ph. D. Princeton University, USA)  
(Orientador)

---

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal, PhD.  
(Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil)

Banca Examinadora:

Prof. Alberto Tamagna

D. Sc. CPGEC/UFRGS - Brasil

Prof. Américo Campos Filho

Dr. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - Brasil

Prof. Raul Rosas e Silva

Ph. D. Stanford University - USA

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aqui a todas as pessoas que colaboraram, de uma forma ou outra para a concretização deste trabalho. Ao professor Jorge Riera pela orientação e incentivo ao longo desta longa jornada e também pela minha participação no grupo de trabalho do LDEC, o que sem dúvida alguma marcou uma etapa muito importante na minha vida profissional e também pessoal. Ao professor, colega e amigo Ignacio Iturrioz pelo incondicional apoio nas diferentes etapas deste trabalho. Ao professor e colega Marcelo Rocha pelo incentivo e sugestões dadas em determinadas partes deste trabalho. Aos professores do PPGECC pelos conhecimentos transmitidos nas disciplinas. Ao Coordenador do PPGECC, professor Gastal. Aos colegas Virginia e João pelo convívio durante o difícil período das disciplinas e qualificação e nas diferentes etapas da minha vida acadêmica. Aos colegas do LDEC e à ex-chefe do Departamento de Engenharia Civil, professora Wai pelo incentivo ao término deste trabalho e a amizade demonstrada durante muitos anos. A minha querida colega Suyen pelo alento nos momentos difíceis. Ao bolsista Marcelo que grande ajuda me forneceu neste último ano. A uma amiga, Leonor, que foi de fundamental ajuda na conclusão deste trabalho. Às secretárias do PPGECC pelo seu empenho que mantém este curso funcionando. Às agências CAPES e CNPq pelo financiamento desta pesquisa.

Dedico este trabalho à minha amada esposa Angelita e aos meus filhos Vanessa e Rafael pelo ambiente de harmonia, amor e compreensão, fundamentais para a conclusão deste trabalho.

## RESUMO

A ciência moderna apresentou significativo avanço a partir do desenvolvimento da análise diferencial. A transformação de equações diferenciais de alta ordem em sistemas de equações algébricas foi possível através do desenvolvimento de métodos numéricos, constituindo este, outro grande avanço. Dentro desses pode-se destacar os métodos de diferenças finitas, dos elementos finitos, dos elementos discretos e mais recentemente, os elementos de contorno.

Neste trabalho, faz-se uma contribuição ao desenvolvimento do Método dos Elementos Discretos para aplicações na Mecânica do Contínuo, na Mecânica da Fratura, assim como na determinação do dano em elementos estruturais submetidos a cargas. Neste método, a discretização espacial no modelo se realiza mediante um conjunto de massas ligadas entre si por forças materializadas como um arranjo de barras de treliça com rigidez equivalente ao contínuo que se quer representar, e mediante um esquema de integração explícita, se realiza a integração das equações de movimento no tempo.

Verifica-se a validade e a capacidade do método em prever o efeito de tamanho em elementos de concreto e concreto armado, obtendo-se uma excelente correlação com ensaios encontrados na literatura técnica, além de importantes conclusões a respeito da aplicação de cargas estáticas e dinâmicas, tanto em padrões de fissuração ou ruptura, quanto aos valores limites de resistência dos materiais ou cargas aplicadas, dando-se importância na geração aleatória das propriedades dos materiais mediante o uso do Método de Representação Espectral.

## **ABSTRACT**

Modern science has presented a significant progress with the development of the differential analysis. Algebraic equations transformation of high order differential equations was possible by means of the development of numerical methods, constituting another great progress. Among these methods the Finite Differences, the Finite Elements, the Discrete Elements and the Boundary Elements Methods are very important

This work intends to provide a contribution to the development of the Discrete Element Method for Continuum Mechanics, Fracture Mechanics applications, so well as to the damage determination of loaded structural members. In this method, the spatial discretization of the model is done by means of a regular reticular bar array, with stiffness equivalent to continuum media, and the temporal discretization is done by the explicit integration scheme of the equation of motion.

The size effect on concrete and reinforced concrete is used to assess the capacity and the validity of the method, obtaining an excellent correlation with experimental results available in technical literature. Important conclusions in dynamic and static loading applications are obtained, in terms of cracks patterns and stresses or limit loads applied. The Spectral Representation Method was used for the stochastic generation of material's properties.

## SUMÁRIO

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1.    | INTRODUÇÃO.....   | 1  |
| 1.1   | OBJETIVOS .....   | 2  |
| 1.2   | ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....   | 3  |
| 2.    | METODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS .....  | 5  |
| 2.1   | INTRODUÇÃO .....  | 5  |
| 2.2   | REVISÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS .....   | 6  |
| 2.3   | FORMULAÇÃO EMPREGADA NESTE TRABALHO .....   | 7  |
| 2.3.1 | Cálculo das Rigidezes Equivalentes das Barras .....   | 7  |
| 2.3.2 | Solução da Equação de Movimento .....   | 14 |
| 2.3.3 | Determinação do Intervalo Crítico de Integração .....   | 16 |
| 2.4   | EXTENSÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA<br>MODELAR ESTRUTURAS LAMINARES .....             | 17 |
| 2.5   | CONSIDERAÇÕES FINAIS .....  | 20 |
| 3.    | FRATURA EM CONCRETO .....   | 21 |
| 3.1   | MECÂNICA LINEAR DA FRATURA .....  | 21 |
| 3.2   | MECÂNICA DA FRATURA EM CONCRETO .....   | 28 |
| 3.3   | CRITÉRIO DE RUPTURA EMPREGADO NESTE TRABALHO .....  | 37 |
| 3.3.1 | Definição da Relação Constitutiva Empregada .....   | 37 |
| 3.3.2 | Inclusão da Não Homogeneidade do Material Através da Aleatorização das<br>Propriedades .....      | 42 |
| 4.    | CARACTERÍSTICAS ALEATÓRIAS DAS PROPRIEDADES<br>MECÂNICAS E APLICAÇÕES A PROBLEMAS ESTÁTICOS ..... | 44 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 4.1   | CONSIDERAÇÕES GERAIS .....  | 44  |
| 4.2   | FORMULAÇÃO TEÓRICA DO MÉTODO DE REPRESENTAÇÃO ESPECTRAL .....   | 45  |
| 4.3   | CONSIDERAÇÕES DE VALORES EXTREMOS .....   | 48  |
| 4.4   | APLICAÇÕES A PROBLEMAS ESTÁTICOS DA METODOLOGIA PROPOSTA .....  | 49  |
| 4.4.1 | Placas Ensaçadas por Kupfer (1973) .....  | 50  |
| 4.4.2 | Aplicação a Vigas Paredes de Concreto Armado .....  | 56  |
| 5.    | CONSIDERAÇÕES SOBRE O EFEITO DE ESCALA .....  | 63  |
| 5.1   | INTRODUÇÃO .....  | 63  |
| 5.2   | MODELO ENSAIADO POR VAN VLIET (2000) .....  | 65  |
| 5.3   | VERIFICAÇÃO DO EFEITO DE ESCALA EM PEÇAS SUBMETIDAS À FLEXÃO E CORTE .....  | 75  |
| 6.    | CONSIDERAÇÕES SOBRE OS PARÂMETROS MECÂNICOS DO CONCRETO OBTIDOS POR ENSAIOS DE TRAÇÃO .....   | 88  |
| 6.1   | INTRODUÇÃO .....  | 88  |
| 6.2   | MODELO ENSAIADO .....   | 89  |
| 7.    | USO DO DEM NO ESTUDO DA EVOLUÇÃO DOS PARÂMETROS DINÂMICOS DAS ESTRUTURAS COM O NÍVEL DE DANO EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO ..... | 99  |
| 7.1   | INTRODUÇÃO .....  | 99  |
| 7.2   | REVISÃO DE RESULTADOS ANTERIORES .....  | 100 |
| 7.3   | ANÁLISE EXPERIMENTAL .....  | 101 |
| 7.3.1 | Descrição dos Modelos .....   | 101 |
| 7.3.2 | Descrição dos Ensaios .....   | 103 |
| 7.3.3 | Resultados Experimentais .....  | 104 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 7.4   | SIMULAÇÃO NUMÉRICA .....   | 107 |
| 7.5   | RESULTADOS .....   | 110 |
| 8.    | OBTENÇÃO DE MODOS DE VIBRAÇÃO MEDIANTE O USO DA<br>TRANSFORMADA DE FOURIER ..... | 113 |
| 8.1   | METODOLOGIA .....  | 113 |
| 8.2   | MODELO TESTADO .....   | 114 |
| 8.3   | RESULTADOS OBTIDOS .....   | 118 |
| 9.    | APLICAÇÕES DO DEM AOS PROBLEMAS DE IMPACTO .....                                 | 121 |
| 9.1   | INTRODUÇÃO .....   | 121 |
| 9.2   | IMPACTO EM PLACAS E CASCAS CILÍNDRICAS .....                                     | 122 |
| 9.3   | CARACTERÍSTICAS DO MODELO DISCRETO .....   | 123 |
| 9.3.1 | Resposta Local de Placa para Carga em Área Circular no Centro .....              | 125 |
| 9.3.2 | Resposta Local de Casca Cilíndrica para Carga em Área Circular .....             | 125 |
| 9.3.3 | Influência nas Condições de Contorno .....                                       | 135 |
| 9.4   | MODELO PARA UMA PLACA DE CONCRETO ARMADO .....                                   | 137 |
| 10    | CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....   | 148 |
|       | ANEXO I .....  | 150 |
|       | BIBLIOGRAFIA .....   | 152 |

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.2-1: Esquema do método de elementos distintos (Cundall & Strach, 1977) ...

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.3-1: Módulo cúbico apresentado por Nayfeh & Hefzy (1979) e utilizado nos trabalhos de Hayashi 1982 e Rocha (1989). a) Módulo Cúbico b) e c) composição de prismas .....  | 10 |
| Figura 2.3-2: Cálculo da área efetiva para as barras normais (a), e diagonais (b) do módulo cúbico .....  | 13 |
| Figura 2.4-1 Transformação de coordenadas, de um prisma a um setor cilíndrico. ....   | 19 |
| Figura 3.1-1: Trajetória das tensões principais em um espécime com uma trinca .....   | 24 |
| Figura 3.1-2: Distribuição das tensões nas proximidades da ponta da trinca. ....  | 25 |
| Figura 3.1-3: Modos I, II, III de fratura da ponta da trinca. ....  | 26 |
| Figura 3.1-4: a) Placa com um furo trincado submetido a uma carga uniforme; b) ensaio de tração compacta. ....  | 27 |
| Figura 3.2-1: a) Placa com uma trinca central submetida a uma tensão uniforme. b) Curvas de resistência limite da placa vs. o comprimento relativo da fissura da placa a/b. c) Envolvente do logaritmo da resistência limite vs. o logaritmo do comprimento característico da placa b. .... | 29 |
| Figura 3.2-2: Fratura em diferentes materiais. (L): Zona Linear, (N): Zona não linear e (F): Zona Microfissurada. ....  | 31 |
| Figura 3.2-3: Diagramas $\sigma - \epsilon$ característicos do caso de materiais dúcteis (a) e não dúctil (b). ....   | 33 |
| Figura 3.2-4: Distribuição das tensões nas proximidades da ponta da fissura para o modelo da fissura fictícia proposto por Hillerborg (1978). ....  | 34 |
| Figura 3.2-5: Distribuição das tensões nas proximidades da ponta da fissura para o modelo da banda fissurada proposto por Bazant (1976). ....   | 35 |
| Figura 3.2-6: Objetividade dos modelos de fratura com “Strain Softening”. ....  | 38 |
| Figura 3.3-1 Relação constitutiva elementar implementada por Rocha (1989). ....   | 38 |
| Figura 4.4-1: Esquema do modelo numérico da placa ensaiada por Kupfer para o caso de compressão bi-dimensional. ....  | 53 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 4.4-2: Resultados obtidos nas simulações para diferentes combinações de cargas. ....                      | 54 |
| Figura 4.4-3: Esquema do modo de ruptura para o caso de tração uniaxial. ....                                    | 55 |
| Figura 4.4-4: Esquema do modo de ruptura para o caso de tração bi-axial. ....                                    | 56 |
| Figura 4.4-5: Esquema do modo de ruptura para o caso de compressão uniaxial. ....                                | 57 |
| Figura 4.4-6: Esquema do modo de ruptura para o caso de compressão bi-axial. ....                                | 58 |
| Figura 4.4-7: Esquema empregado para modelar a viga parede v023 ensaiada por Lehwalter. ....                     | 60 |
| Figura 4.4-8: Esquema de fissuração perto da carga máxima. ....  | 61 |
| Figura 4.4-9: Esquema de fissuração após atingida a carga máxima. ....   | 61 |
| Figura 4.4-10: Esquema de fissuração obtido por Lehwalter (1988). ....   | 62 |
| Figura 4.4-11: Curvas carga-deslocamento experimental , simulação com DEM e resultados de Lehwalter (1988). .... | 62 |
| <br>   |    |
| Figura 5.2-1 : Esquema dos modelos ensaiados por van Vliet (2000). ....  | 67 |
| Figura 5.2-2: Esquema completo do modelo D após atingida a carga máxima. ....                                    | 68 |
| Figura 5.2-3: Resultados obtidos nos ensaios de van Vliet (2000). ....   | 68 |
| Figura 5.2-4: Evolução das energias envolvidas no processo para o modelo D. ....                                 | 69 |
| Figura 5.2-5: Curva carga-deslocamento para as simulações do modelo B. ....                                      | 69 |
| Figura 5.2-6: Curva carga-deslocamento para as simulações do modelo C. ....                                      | 70 |
| Figura 5.2-7: Curva carga-deslocamento para as simulações do modelo D. ....                                      | 70 |
| Figura 5.2-8: Curva carga-deslocamento para as simulações do modelo E. ....                                      | 71 |
| Figura 5.2-9: Curva carga-deslocamento para as simulações do modelo F. ....                                      | 71 |
| Figura 5.2-10: Perspectiva do esquema de ruptura obtido numa das simulações do modelo D. ....                    | 72 |
| Figura 5.2-11: vista frontal do esquema de ruptura (Modelo D). ....  | 72 |
| Figura 5.2-12: Evolução das tensões em função do tamanho do modelo. ....   | 73 |
| Figura 5.2-13: Evolução do coeficiente de variação com o tamanho do modelo. ....                                 | 74 |
| Figura 5.3-1: Esquemas das vigas ensaiadas por Ramallo (1993). ....  | 76 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 5.3-2: Evolução das cargas aplicadas em função do tempo. ....  | 78 |
| Figura 5.3-3: Esquema de fissuração do no modelo D1: a) antes de atingir a carga máxima, e b) no momento de atingir a carga máxima. ....                          | 79 |
| Figura 5.3-4: Esquema de fissuração do modelo D2: a) antes de atingir a carga limite, b) no instante da ruptura, e, c) configuração final de ruptura. ....        | 79 |
| Figura 5.3-5: Esquema de fissuração do modelo D3: a) antes de atingir a carga máxima, e b) no momento de atingir a carga máxima. ....                             | 80 |
| Figura 5.3-6: Esquema de fissuração do no modelo D4: a) antes de atingir a carga máxima, e b) após atingir a carga máxima. ....                                   | 80 |
| Figura 5.3-7: Esquema de fissuração para o modelo D1: a) antes de atingir a carga limite, b) no momento de atingir a carga máxima, c) configuração final. ....    | 82 |
| Figura 5.3-8: Esquema de ruptura do modelo D2 com aplicação de carga: a) antes de atingir a carga máxima, b) configuração final. ....                             | 82 |
| Figura 5.3-9: Esquema de fissuração para o modelo D3 com aplicação de carga: a) antes de atingir a carga limite, b) e c) configurações pós ruptura. ....          | 83 |
| Figura 5.3-10: Esquema de fissuração para o modelo D4 com aplicação de carga: a) antes de atingir a carga limite, e b) no momento de atingir a carga máxima. .... | 85 |
| Figura 5.3-11: Evolução da tensão de compressão em função do tamanho. ....  | 86 |
| Figura 5.3-12: Evolução da tensão de corte em função do tamanho do modelo. ....   | 86 |
| Figura 5.3-13: Evolução da carga última em função do tamanho do modelo. ....  | 87 |
| <br>  |    |
| Figura 6-1: Esquemas dos modelos ensaiados por Hordijk (1987). ....   | 91 |
| Figura 6-2: Perspectiva do modelo com a fratura na região central. Modelo A. ....   | 92 |
| Figura 6-3: Resultados obtidos experimentalmente por Hordijk(1987). ....  | 93 |
| Figura 6-4: Vistas laterais do modelo A, indicando nelas o esquema de fissuração encontrado. ....   | 94 |
| Figura 6-5: Vistas laterais do modelo B, indicando nelas o esquema de fissuração encontrado. ....   | 95 |
| Figura 6-6: Vistas laterais do modelo C, indicando nelas o esquema de fissuração encontrado. ....   | 95 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 6-7: Vistas laterais do modelo D, indicando nelas o esquema de fissuração encontrado. .... | 95  |
| Figura 6-8: Esquema tensão- deslocamento para o modelo A. ....                                    | 96  |
| Figura 6-9: Esquema tensão- deslocamento para o modelo B. ....                                    | 96  |
| Figura 6-10: Esquema tensão- deslocamento para o modelo C. ....                                   | 97  |
| Figura 6-11: Esquema tensão- deslocamento para o modelo D. ....                                   | 97  |
| Figura 6-12: Média obtidas por simulação numérica para os quatro modelos. ....                    | 98  |
| <br>  |     |
| Figura 7.3-1: Esquema da viga ensaiada com a armadura correspondente. ....                        | 102 |
| Figura 7.3-1: esquema dos ensaios. ....   | 104 |
| Figura 7.3-2: Evolução da deformação no centro do vão em função da carga. ....                    | 106 |
| Figura 7.3-3: Evolução da frequência fundamental com a carga aplicada. ....                       | 107 |
| Figura 7.3-4: Variação do módulo dinâmico equivalente. ....                                       | 107 |
| Figura 7.3-5: Variação do módulo estático equivalente. ....                                       | 108 |
| Figura 7.3-6 Variação do decremento logarítmico em função da amplitude da vibração.....           | 108 |
| Figura 7.3.4-1 Vista lateral do modelo numérico com o DEM. ....                                   | 110 |
| Figura 7.3.4-2: Esquema de cargas. ....   | 110 |
| Figura 7.3.4-3: Evolução do deslocamento no centro do vão. ....                                   | 111 |
| <br>  |     |
| Figura 8.1: Esquema da discretização empregada. ....  | 116 |
| Figura 8.2: Esquema do pulso de carga empregado. ....   | 117 |
| Figura 8.3: Primeiro modo de vibração do modelo. ....   | 118 |
| Figura 8.4: Segundo modo de vibração do modelo. ....  | 119 |
| Figura 8.5: Terceiro modo de vibração do modelo. ....   | 119 |
| Figura 8.6: Quarto modo de vibração do modelo. ....   | 120 |
| <br>  |     |
| Figura 9.3.1: vista superior do modelo DEM (Modelo A). ....                                       | 124 |
| Figura 9.3.2: perspectiva do modelo A da placa. ....  | 124 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 9.3.1-1: curva reação total versus tempo para o raio de 2,30 m. ....  | 126 |
| Figura 9.3.1-1 (a): curva reação total versus deslocamento no centro para o raio de<br>2,30 m. ....                | 127 |
| Figura 9.3.1-1 (b): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga<br>de 2,30 m. ....             | 127 |
| Figura 9.3.1-1 (c): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga<br>de 2,30 m. ....             | 128 |
| Figura 9.3.1-2: Curva reação total versus tempo para o raio de 3,6 m. ....   | 128 |
| Figura 9.3.1-2 (a): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga<br>de 3,6 m. ....              | 129 |
| Figura 9.3.1-2 (b): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga<br>de 3,6 m. ....              | 129 |
| Figura 9.3.2-1: curva reação total versus tempo para o raio de 2,3 m. ....   | 130 |
| Figura 9.3.2-1 (a): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga                                | 130 |
| Figura 9.3.2-2: curva reação total versus tempo para o raio de 3.6 m. ....   | 131 |
| Figura 9.3.2-2 (a): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga<br>de 3,6 m. ....              | 131 |
| Figura 9.3.2-3: curva reação total versus tempo para o raio de 3.6 m, modelo B. ....                               | 132 |
| Figura 9.3.2-3 (a): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga<br>de 3,6 m. (Modelo B). ....  | 132 |
| Figura 9.3.2-3 (b): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga<br>de 3,60 m. (Modelo B). .... | 133 |
| Figura 9.3.2-4: curva reação total versus tempo para o raio de 3.6 m, modelo C. ....                               | 133 |
| Figura 9.3.2-4 (a): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga<br>de 3,60 m. (Modelo C). .... | 134 |
| Figura 9.3.2-4 (b): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga<br>de 3,60 m. (Modelo C). .... | 134 |

|  |     |
|--|-----|
| Fig. 9.3.3-1. Vista lateral da placa para um raio de aplicação da carga de 2.3m para $t= 0,5s$ após início de aplicação da carga, mostrando claramente a falha por perfuração no centro, sem deformação visível nem dano perceptível nos apoios, confirmando que o efeito local não é afetado por flexão global da placa. ....                               | 135 |
| Fig. 9.3.3-2. Vista lateral da casca cilíndrica para um raio de aplicação da carga de 2.3m em $t= 0,5s$ após início de aplicação da carga, mostrando claramente a falha por perfuração no centro, sem deformação visível nem dano perceptível nos apoios, confirmando que a resposta local não é afetada significativamente por flexão global da casca. .... | 135 |
| Fig. 9.3.3-3. Vista lateral da casca cilíndrica para um raio de aplicação da carga de 3,6m em $t= 0,5s$ após início de aplicação da carga, mostrando claramente a falha por perfuração no centro, sem deformação visível nem dano perceptível nos apoios, confirmando que a resposta local não é afetada significativamente por flexão global da casca. .... | 136 |
| Figura 9.4-1: Vista frontal do modelo simulado. ....   | 138 |
| Figura 9.4-2: Corte transversal do modelo ensaiado. ....   | 139 |
| Figura 9.4-3: Esquema da armadura existente no protótipo. ....   | 140 |
| Figura 9.4-4: Esquema do modelo ensaiado. ....   | 141 |
| Figura 9.4-5: Vista superior da placa. ....  | 141 |
| Figura 9.4-6: fotografia da fissura encontrada in loco. ....   | 142 |
| Figura 9.4-7: fotografia da fissura encontrada in loco. ....   | 143 |
| Figura 9.4-8: fotografia da forma de atuação da carga na placa. ....   | 144 |
| Figura 9.4-9: Curva Reação de apoio – Tempo. ....  | 145 |
| Figura 9.4-10: Discretização antes da ruptura. ....  | 146 |
| Figura 9.4-11: Discretização no momento de atingir a carga máxima de 1280 KN. ...  | 146 |
| Figura 9.4-12: Modelo transcorridos 20 ms depois de atingida a carga máxima. ....  | 147 |

## TABELAS

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 4.4-1: Propriedades do material a ser modelado. ....  | 52  |
| Tabela 4.4-2: Parâmetros usados na simulação numérica do problema. ....                              | 52  |
| Tabela 4.5-1: Propriedades dos materiais do modelo de Lewalter (1993). ....                          | 59  |
| Tabela 5.2-1: propriedades mecânicas usadas na simulação numérica. ....                              | 64  |
| Tabela 5.2-2: Resultados numéricos e experimentais. ....   | 71  |
| Tabela 5.3-1: Valores das propriedade usados na simulação numérica. ....                             | 75  |
| Tabela 5.3-2: número de elementos empregados nos quatro tamanhos ensaiados. ....                     | 75  |
| Tabela 5.3-3: Dimensões, materiais cargas e tensões obtidas nos ensaios de Stuttgart e Tucuman. .... | 84  |
| Tabela 5.3-4: Dimensões e materiais simulados e resultados numéricos obtidos. ....                   | 85  |
| Tabela 6-1: Dimensões dos diferentes modelos ensaiados. ....   | 87  |
| Tabela 6-2: Propriedades mecânicas dos modelos ensaiados por (Hordijk, 1987). ....                   | 87  |
| Tabela 6-3: Dimensões dos corpos modelados. ....   | 88  |
| Tabela 6-4: Propriedades mecânicas usadas na simulação numérica. ....                                | 89  |
| Tabela 6-5: Resumo dos resultados em tensões obtidos por simulação numérica. ....                    | 96  |
| Tabela 7-1: Traço do concreto. ....  | 100 |
| Tabela 7-2: Propriedades mecânicas dos materiais (MPa). ....   | 100 |
| Tabela 7-3: Designação dos ensaios. ....   | 101 |
| Tabela 7-4: Propriedades mecânicas dos materiais. ....   | 107 |
| Tabela 7-5: Evolução da frequência fundamental com o nível de carga. ....                            | 109 |
| Tabela 8.1: características geométricas e mecânicas do modelo estudado. ....                         | 116 |
| Tabela 8.2: Resultados obtidos para o modelo analisado. ....   | 117 |

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 9.3.1: Propriedades dos materiais. ....                     | 121 |
| Tabela 9.4-1: Propriedades mecânicas dos materiais modelados. .... | 137 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

### LETRAS

$a_{11}, a_{12}, a_{44}$  : Constantes.

$A_{n1n2}$  e  $A_{n1n2}$  : Parâmetros para a geração das propriedades.

$A_s$  : Armadura de tração ou principal.

$A_s'$  : Armadura de compressão.

$A$  : Área de uma barra prismática.

$A_c$  : Área da seção crítica.

$a_v$  : Distância do apoio ao ponto de aplicação da carga.

$B$  : Espessura da peça.

$C_{\bar{n}}$  : Velocidade de propagação da onda.

$CV()$  : Coeficiente de Variação.

$c$  : Constante de amortecimento proporcional à massa.

$D_f$  : Constante de amortecimento.

$d_{max}$  : Tamanho do máximo agregado.

$D$  : Dimensão característica.

$EA_d$  : Rigidez das barras diagonais.

$EA_n$  : Rigidez das barras normais.

$E[G_f]$  : Valor esperado da energia específica de fratura.

$E_c, E$  : Módulo de elasticidade do concreto.

$E_d$  : Módulo dinâmico equivalente.

$E_s$  : Módulo de elasticidade longitudinal do aço.

$f_{tk}$  : Resistência de tração característica do concreto.

$f_{ck}$  : Resistência característica à compressão do concreto.

$f_{cm}$  : Resistência média à compressão do concreto.

$F_r^b$  : Força nodal.

$f_{tm}$  : Resistência de tração média do concreto.

$f_s, f_y$  : Resistência de escoamento do aço.

- $f$  : Frequência.  
 $f_n$  : Frequência do modo  $n$ .  
 $f_0$  : Frequência do corpo sem dano.  
 $f_1$  : Frequência fundamental.  
 $F$  : Estado de carga atuante numa estrutura.  
 $G_f$  : Energia Específica de Fratura.  
 $G_F$  : Valor Básico da Energia de Fratura.  
 $g$  : Desvio padrão.  
 $G$  : Módulo de elasticidade transversal.  
 $h$  : Altura útil da viga.  
 $K_f$  : Parâmetro de ductilidade.  
 $K_I, K_{II}, K_{III}$  : Fatores de intensidade de tensões.  
 $L_c$  : Dimensão do módulo cúbico básico.  
 $L$  : Número de módulos na direção coordenada  $z$ .  
 $l$  : Vão livre da viga.  
 $M$  : Número de módulos na direção coordenada  $x$ .  
 $m$  : Massa  
 $M_{su}$  : Momento fletor último.  
 $N$  : Número de módulos na direção coordenada  $y$ .  
 $P$  : Carga concentrada.  
 $P_u$  : Carga máxima.  
 $p_c$  : Carga por unidade de comprimento que produz a propagação instável da fissura.  
 $PHI$  : Fator usado na geração aleatória das propriedades mecânicas.  
 $q$  : Valor do deslocamento nodal  
 $R$  : Raio.  
 $R_f$  : Fator de falha.  
 $R_{f_0}(\xi_1, \xi_2)$  : Função de autocorrelação.  
 $S_{f_0}(\kappa_1, \kappa_2)$  : Função densidade espectral de potência.  
 $T_{tot}$  : Tempo total de integração numérica.  
 $T$  : Temperatura.  
 $U(a)$  : Energia de deformação da estrutura.

- $V$  : Valor do esforço de corte.  
 $V_u$  : Esforço de corte último.  
 $w_c$  : Largura da banda fissurada.  
 $W_0$  : Umidade.  
 $W$  : Trabalho.  
 $Y_A$  e  $Y_B$  : Velocidades nos pontos de referência e varredura.  
 $Z$  : Índice que mede a proximidade à ruptura.

## LETRAS GREGAS

- $\acute{\alpha}_n$  : Cosseno diretor  
 $\hat{\alpha}$  : Parâmetro de escala da distribuição de Weibull.  
 $\tilde{\alpha}$  : Parâmetro de forma da distribuição de Weibull  
 $\ddot{A}_{crit}$  : Intervalo crítico de integração.  
 $\kappa_{1u}$  e  $\kappa_{2u}$  : Limites de corte da onda.  
 $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$  : Incremento de distância  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente.  
 $\ddot{o}_{ij}$  : Constantes elásticas.  
 $\ddot{o}^n$  : Constante elástica das barras normais.  
 $\ddot{o}^d$  : Constante elástica das barras diagonais.  
 $\xi_1$  e  $\xi_2$  : Separação nas direções  $x_1$  e  $x_2$ .  
 $\dot{\epsilon}$  : Velocidade de deformação.  
 $\hat{O}_A \hat{O}_B$  : Ângulos de fase.  
 $\dot{i}$  : Taxa da armadura.  
 $\acute{o}_{eu}$  : Tensão na barra de aço.  
 $\hat{i}_N$  : Valor Esperado da primeira estatística de ordem.  
 $\hat{i}_n$  : Razão de amortecimento.  
 $\mathcal{D}(a)$  : Energia potencial.  
 $\acute{o}_x$  : Coeficiente de variação da variável  $X$ .

$\dot{\sigma}$  : Velocidade de aplicação da carga.

$\xi_1$  e  $\xi_2$  : Separação nas direções  $x_1$  e  $x_2$ .

$A_{n1n2}$  e  $A_{n1n2}$  : Parâmetros para a geração das propriedades.

$\kappa_{1u}$  e  $\kappa_{2u}$  : Limites de corte da onda.

$\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$  : Incremento de distância  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente.

## 1 INTRODUÇÃO

Desde a década dos 80, a equipe do LDEC, vem desenvolvendo uma linha de trabalho e pesquisa na área do Método dos Elementos Discretos. Este método teve inicialmente uma boa divulgação e aceitação, mas paralelamente houve considerável esforço desenvolvido por vários pesquisadores no mundo para o estudo do Método dos Elementos Finitos, em primeiro lugar, e posteriormente o Método dos Elementos de Contorno, ficando assim superado em número de trabalhos desenvolvidos com estes últimos métodos.

Como é de se esperar, os dois métodos não deveriam estar em competição uns com outros, e sim, deveria haver um acoplamento deles em cada uma das tarefas que, por condições de formulação, cada um é capaz de resolver mais eficientemente.

Existem varias referências bibliográficas que mostram a interação dos métodos, mas, limitando-se quase exclusivamente aos métodos dos Elementos Finitos com os de Contorno. Praticamente não existe referência de trabalhos em conjunto com o método dos Elementos Discretos.

O Método dos Elementos Discretos, como será visto no Capítulo 2, propõe a representação do meio contínuo através de barras de treliça espacial unidas nos seus extremos formando arranjos basicamente cúbicos, estabelecendo-se em cada um dos vértices as correspondentes equações de equilíbrio e integrando numericamente no tempo para obter o comportamento ao longo de um certo tempo em um corpo sólido. Pela condição acima mencionada, esta formulação é extremamente vantajosa nos casos onde é envolvida fratura de materiais frágeis, como o caso do concreto, as cerâmicas, etc., pois, nestes casos, um esquema de fratura é conseguido desativando barras que tenham atingido seu limite de resistência, o que resulta uma operação muito simples.

Esta importante propriedade do método o torna extremamente vantajoso de ser usado em estudos de fratura de materiais frágeis, no estudo da propagação de fissuras, estudo do comportamento microestrutural de alguns materiais, etc.

Embora tenha sido destacada a importância deste método no estudo de materiais frágeis, seu uso, não se encontra restringido a esses casos, tendo sido aplicado com sucesso em materiais com comportamento dúctil e em materiais heterogêneos como o caso do concreto armado. As situações acima mencionadas podem ser levadas a bom termo, simplesmente mudando a relação constitutiva das barras do arranjo espacial.

## 1.1 OBJETIVOS

No presente trabalho, trata-se de dar um aporte nas formulações e aplicações do Método dos Elementos Discretos, resolvendo problemas de simulação das propriedades dos materiais, determinando e localizando o dano de modelos estruturais em conjunto com outros programas e aplicativos disponíveis, ou analisando o problema do efeito de escala, entre outros.

Os objetivos são principalmente de oferecer uma contribuição para o cada vez maior número de aplicações que tem surgido para este método, passando desde a resolução ou estudo de problemas estruturais estáticos e dinâmicos, por problemas de geotecnia, como é o caso de solos cimentados, até o entendimento da microestrutura cristalina de alguns materiais.

Durante o desenvolvimento do estudo, vários subprodutos de interesse foram obtidos, entre eles:

- Possibilidade de geração de uma malha com características independentes das propriedades do material.
- Aportes consideráveis ao entendimento do efeito de escala.
- Entendimento dos mecanismos de ruptura e avaliação do dano produzido por um determinado nível de sollicitação.
- Verificação do comportamento do modelo para concreto submetido a um estado biaxial e uniaxial de tensões.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Os tópicos tratados neste trabalho são resumidos a seguir.

No Capítulo 2, é realizada uma breve introdução e revisão bibliográfica, dos antecedentes e formulações usadas no Método dos Elementos Discretos. Também é dado um destaque importante neste capítulo, à compreensão das equações e metodologias de implementação do programa. Isto é desde as equações para o modelo até o uso do método de integração numérica explícita para obtenção de soluções.

No Capítulo 3, é realizada uma introdução e uma breve descrição do processo de estudo na Mecânica da Fratura, isto é, estudo da propagação das trincas, do efeito de escala, etc. com as relações constitutivas usadas neste trabalho assim como as propostas por diferentes autores.

No Capítulo 4, é aplicada a técnica de Representação Espectral, para simular as características aleatórias dos materiais simulados. Esta etapa é de grande importância para reduzir uma das grandes limitações do método anteriormente usado, pois torna independente o tamanho da malha de elementos discretos com as propriedades do material simulado.

No Capítulo 5, faz-se um estudo de dois casos de modelos de concreto submetidos a solicitações de esforço normal e outro de flexão, analisando-se para cada solicitação o efeito da escala ou tamanho dos corpos simulados, isto é, uma análise do conhecido efeito de escala tão importante no entendimento do comportamento de estruturas de materiais frágeis.

No capítulo 6, é estudado o efeito do comprimento dos corpos de prova nos resultados de tensão e curva característica para barras de concreto submetidas à tração simples.

No Capítulo 7, é feita uma análise da evolução das características dinâmicas dos materiais a medida que progride o processo de deterioração provocado por cargas atuantes. Encara-se aqui, uma análise numérica de problemas estudados experimentalmente no LDEC.

No Capítulo 8, realiza-se um estudo mediante a aplicação da Transformada de Fourier com o objetivo de determinar os modos e frequências de vibração de um modelo simples.

No Capítulo 9, é realizado o estudo da aplicação do Método dos Elementos Discretos com a técnica de geração das propriedades dos materiais proposta para o caso de estruturas submetidas a cargas impulsivas.

## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS

### 2.1 INTRODUÇÃO

A ciência moderna apresentou significativo avanço a partir do desenvolvimento da análise diferencial. Nas Ciências Mecânicas, em particular, admite-se a existência de domínios de trabalho contínuos, onde é possível integrar e derivar variáveis definidas dentro dos mesmos. A teoria da mecânica dos meios contínuos foi consolidada pelos desenvolvimentos teóricos devidos a Trusdell (1966), Eringen (1966), e outros pesquisadores, permitindo realizar avanços significativos na compreensão do comportamento de muitos materiais, tanto sólidos como fluidos.

A transformação de sistemas de equações diferenciais de alto grau em sistemas de equações algébricas foi possível através de métodos numéricos, constituindo outro grande avanço. Entre os métodos mais desenvolvidos podem-se citar os métodos das diferenças finitas, dos elementos finitos e dos elementos de contorno.

Mesmo considerando diferentes tipos de não linearidade, tanto físicas quanto geométricas, muitos tipos de problemas de engenharia são resolvidos com métodos numéricos. A mecânica do contínuo apresenta limitações, quando se produz a fratura do material, porque neste caso, o que até agora era suposto contínuo deixa claramente de ser, comprometendo uma hipótese básica da teoria. Mesmo assim, alguns esforços foram realizados para trabalhar com fratura ou fragmentação dentro do campo da mecânica do contínuo, entre os quais cabe mencionar a teoria da mecânica do dano contínuo apresentada por Kachanov (1966). Mas, no caso de se estudar materiais suscetíveis de fraturarem, resulta interessante também partir de uma teoria que deixe a hipótese da continuidade de lado. Uma opção consiste na representação do contínuo mediante partículas onde se concentrem as massas que interagem entre si. Estas interações podem ser representadas mediante molas e amortecedores, isto é, elementos unidirecionais com uma lei constitutiva definida em função de vários parâmetros. Tais parâmetros dependerão das características do material a modelar, da disposição das barras e da separação das massas a serem unidas. O interessante neste tipo de esquema é que a fratura de um material pode ser modelada naturalmente desativando

barras na região afetada pela descontinuidade. Cuidados com relação à energia que é retirada junto com o elemento “fraturado” devem ser levados em conta.

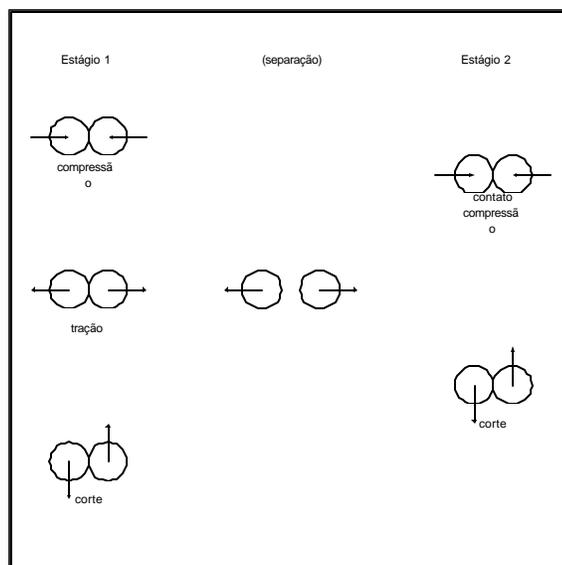
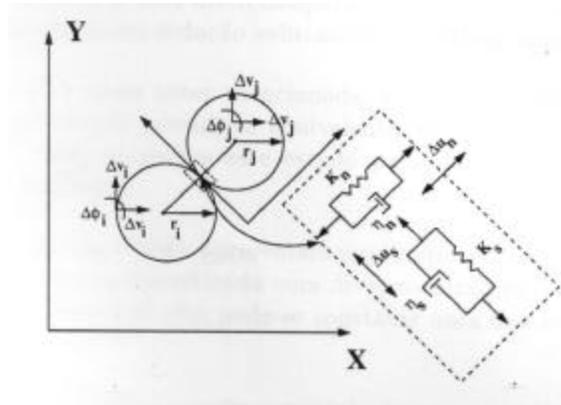
Na seção seguinte é apresentada uma sucinta revisão das diferentes versões do método dos elementos discretos.

## 2.2 REVISÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS

Pode-se considerar que o trabalho de Hrennikoff (1941) representa o primeiro passo no desenvolvimento deste método. Ele propõe a representação do contínuo mediante arranjos de bielas de rigidez equivalente. Mais recentemente Absi (1971) desenvolveu a mesma idéia realizando aplicações aos estudos de fundações de base elástica e na representação de muros em prédios altos através de arranjos de barras com rigidez equivalente. É importante mencionar o aporte significativo que o trabalho de Cundall (1977) trouxe para o desenvolvimento do método. Cundall (1977) aplicou o seu método para realizar estudos mecânicos geotécnicos com materiais granulares. O método proposto por Cundall (método dos elementos distintos) baseia-se em realizar a integração explícita das equações de movimento de uma estrutura formada por partículas rígidas com massas conectadas entre si, mediante molas e amortecedores, como se mostra na Figura 2.2-1.

Este método pode ser aplicado facilmente na simulação não só de materiais contínuos, como também para representar estruturas descontínuas. Isto se deve ao fato de que, antes da fratura, surgem forças de tração, de compressão e corte entre as partículas adjacentes. Mas, após a falha, desaparecem as forças de tração entre as partículas contíguas afastadas pela descontinuidade.

Um dos materiais mais amplamente usado em estruturas de engenharia civil é o concreto, o qual pode ser estudado em conjunto ou similarmente ao conjunto de materiais heterogêneos frágeis. Nestes tipos de materiais, foram aplicadas com sucesso diferentes versões do método dos elementos discretos. Ostoja (1993) realiza uma extensa compilação sobre os mesmos. No capítulo 4 se discutem em detalhe aspectos do método aplicado ao concreto. Também na física teórica, em estudos relacionados com estruturas cristalinas de materiais, acoplando ou não efeitos térmicos, se podem encontrar alguns desenvolvimentos empregando os elementos discretos; como por exemplo, em Starzenski (1995).



**Figura 2.2-1: Esquema do método de elementos distintos (Cundall & Strach, 1977)**

Na seção seguinte se apresenta a formulação utilizada neste trabalho.

## 2.3 FORMULAÇÃO EMPREGADA NESTE TRABALHO

### 2.3.1 CÁLCULO DAS RIGIDEZES EQUIVALENTES DAS BARRAS

O modelo adotado é devido a Nayfeh & Hefzy (1978), mas estes autores tinham interesse no sentido oposto, isto é, a representação de painéis formados por módulos de treliças espaciais, empregados na indústria aeronáutica, através de um meio contínuo equivalente. Isto

possibilita uma discretização com um número menor de graus de liberdade, o que se traduz em uma redução substancial do esforço computacional.

Utilizando a idéia antes mencionada, foram desenvolvidas formulações para determinar as propriedades mecânicas equivalentes do sólido fictício. No trabalho de Nayfeh & Hefzy (1978), se realiza este estudo para dois tipos de arranjos básicos de barras (octaédrico e cúbico). Hayashi em (1982) percorre o caminho inverso; ou seja, a partir de um sólido elástico ortotrópico com constantes conhecidas, são obtidas as propriedades das barras de treliça espacial para o arranjo cúbico que se apresenta na Figura 2.3-1. Noor & Mikulas (1988), apresentam uma comparação entre o comportamento dinâmico calculado para a estrutura discretizada com diversos arranjos de barras, e ela considerada como contínua, verificando uma boa correlação entre os resultados mostrados.

A seguir, apresenta-se em forma resumida, as deduções que permitem chegar, das constantes elásticas de um sólido, às rigidezes equivalentes das barras para o módulo cúbico apresentado na Figura 2.3-1, as quais foram desenvolvidas na dissertação de Hayashi (1982) e a partir do trabalho de Nayfeh & Hefzy (1978).

A relação constitutiva de um corpo elástico arbitrário, em notação indicial, pode ser escrita como segue:

$$\sigma_i = C_{ijej}(i, j = 1 \dots 6) \quad (2.1)$$

No caso do corpo anisotrópico e elástico, a matriz das constantes elásticas,  $C_{ij}$ , fica definida conhecendo 21 parâmetros independentes. Se o material é isótropo, é possível realizar simplificações que permitem expressar a matriz  $C_{ij}$  em função de apenas duas constantes independentes. Neste último caso, pode-se escrever  $C_{ij}$  como segue:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde  $C_{11}, C_{12}, C_{44}$  são funções do módulo de elasticidade longitudinal,  $E$ , e do coeficiente de Poisson,  $\nu$ .

As constantes elásticas  $C_{ij}$  podem ser transformadas de um sistema de coordenadas ortogonal cartesiano  $x$  para outro  $\bar{x}_i$  ( $i = 1 \dots 3$ ) através de uma equação do tipo:

$$\bar{\varphi}_{ij} = f(\varphi_{ij}, \alpha_{kl})(k, l = 1 \dots 3) \text{ e } (i, j = 1 \dots 6) \quad (2.3)$$

onde  $\alpha_n$  são os co-senos diretores entre os sistemas de referência  $x$  e  $\bar{x}$ ;  $\varphi_{ij}$  e  $\bar{\varphi}_{ij}$  são as constantes elásticas referidas aos sistemas de referência  $x$  e  $\bar{x}_i$  respectivamente. A expressão para  $\bar{\varphi}_{ij}$  e mais detalhes sobre este desenvolvimento são encontrados na tese de Hayashi (1982) e em Nayfeh & Hefzy (1978).

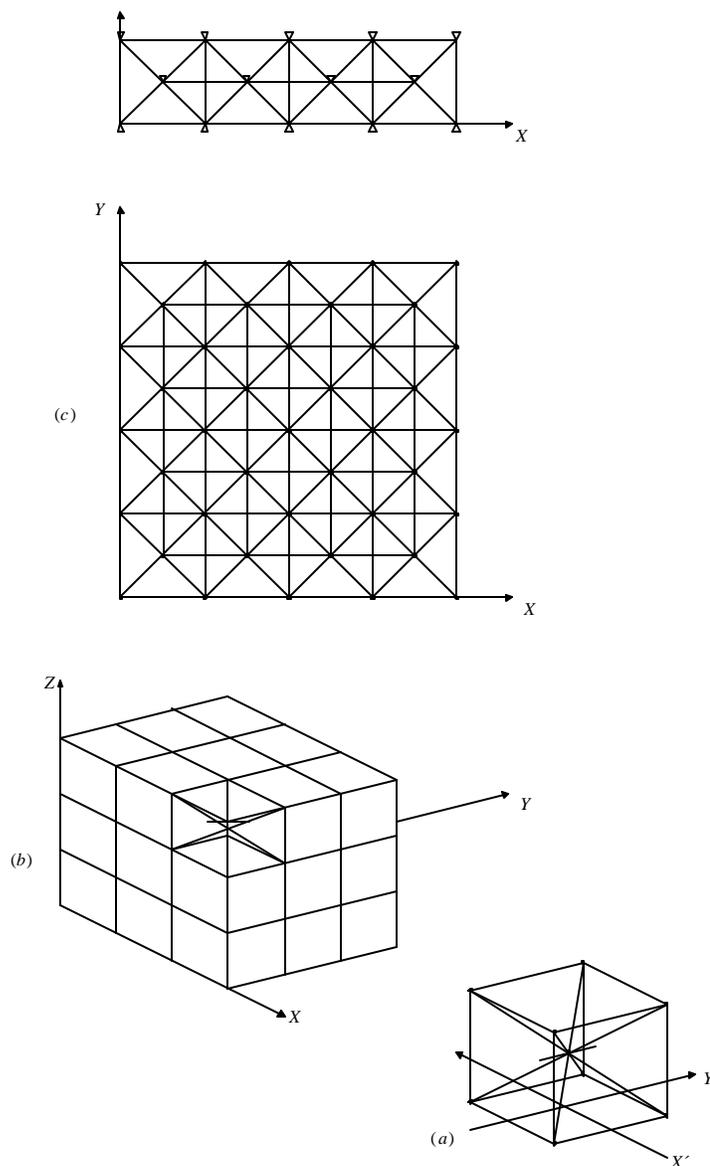
Se todas as barras possuem o mesmo módulo de elasticidade  $E$ , cada conjunto de elementos paralelos definirá um contínuo com uma propriedade unidirecional efetiva, que será referida como  $\varphi_{11}$ . Como  $\varphi_{11}$  é tomado como um valor médio ponderado de tal propriedade com relação a área de influência da barra, em um determinado conjunto de barras paralelas seu valor dependerá do espaçamento entre estas barras.

O módulo cúbico da Figura 2.3-1.a) possui dois valores diferentes para  $\mathbf{j}_{11}$ , um correspondente às barras que são normais às faces  $\varphi_{11}^n$  e o outro correspondente às barras diagonais  $\varphi_{11}^d$ .

Para uma estrutura cúbica, o valor do parâmetro  $\varphi_{11}^n$  pode ser facilmente determinado projetando a área das barras numa face do cubo como se mostra na Figura 2.3-2 a).

Então, em cada face do módulo cúbico de área ( $L_c^2$ ) se tem a contribuição de duas barras normais inteiras. Dessa forma, cada elemento tem uma área efetiva de contribuição igual a ( $L_c^2/2$ ). Por isso, a relação entre a rigidez da barra  $EA_n$  e a área efetiva de contribuição da mesma fornece o valor médio da propriedade unidirecional efetiva na direção das barras normais às faces do módulo  $\varphi_{11}^n$ :

$$\Phi_{11}^n = \frac{EA_n}{L_c^2/2} \quad (2.4)$$



**Figura 2.3-1: Módulo cúbico apresentado por Nayfeh & Hefzy (1979) e utilizado nos trabalhos de Hayashi 1982 e Rocha (1989). a) Módulo Cúbico b) e c) composição de prismas.**

Em forma similar se procede para obter o valor médio da propriedade unidirecional na direção das barras diagonais em relação às faces do módulo cúbico  $\mathbf{j}_{11}^d$ . Deve-se também determinar a área efetiva de contribuição de cada diagonal, a qual é indicada na figura (2.2.b). Logo,  $\mathbf{j}_{11}^d$  é dado pela expressão:

$$\varphi_{11}^d = \frac{\sqrt{3} \cdot EA_n}{L_c^2} \quad (2.5)$$

A partir de  $\varphi_{11}^n$  e  $\varphi_{11}^d$ , é possível obter  $\overline{\varphi}_{ij}$ , que é a matriz de rigidez de um sólido equivalente a um arranjo de módulos cúbicos como os definidos na figura (2.2.a). Levando em conta que a cada nó genérico concorrem 7 barras (3 normais + 4 diagonais), a matriz  $\overline{\varphi}_{ij}$  poderá ser expressa como segue:

$$\overline{\varphi}_{ij} = \sum_{I=1}^3 f_I(\varphi_{11}^n, \alpha_{kl}^n) + \sum_{J=1}^4 f_J(\varphi_{11}^d, \alpha_{kl}^d) \quad (k, l = 1 \dots 3) \quad (2.6)$$

onde  $\alpha_{kl}^n$  e  $\alpha_{kl}^d$  são os co-senos diretores dos sistemas cartesianos  $\overline{x}, x_1^n$  e  $\overline{x}, x_j^d$  respectivamente.

Substituindo as expressões (2.4), (2.5) em (2.6), e trabalhando algebricamente se obtém:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \varphi_{11}^n \left( 1 + \frac{4}{9} \delta \right) \\ C_{12} &= \varphi_{11}^n \left( \frac{4}{9} \delta \right) \\ C_{44} &= \varphi_{11}^n \left( \frac{4}{9} \delta \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde

$$\delta = \frac{\varphi_{11}^d}{\varphi_{11}^n} = \frac{\sqrt{2} A_d}{2 A_n} \quad (2.8)$$

Substituindo as expressões de  $C_{ij}$  na matriz obtém-se:

$$C_{ij} = \frac{2EA_n}{L_c^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{4\delta}{9} & \frac{4\delta}{9} & \frac{4\delta}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 + \frac{4\delta}{9} & \frac{4\delta}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 + \frac{4\delta}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{4\delta}{9} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4\delta}{9} & 0 \\ & & & & & \frac{4\delta}{9} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

que é a expressão proposta por Nayfeh & Hefzy (1978), onde  $A_n$  e  $A_d$  são dados do problema. As constantes elásticas  $E$ ,  $\mathbf{n}$  e  $G$  podem ser obtidas para o contínuo equivalente a partir dos correspondentes  $C_{ij}$  da expressão anterior, como segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_2 - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_3 \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1 + \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_3 \\ \varepsilon_3 &= \frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_2 + \frac{1}{E_3} \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 &= \frac{1}{G_{23}} \sigma_4 \\ \varepsilon_5 &= \frac{1}{G_{13}} \sigma_5 \\ \varepsilon_6 &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_6 \end{aligned} \quad (2.11)$$

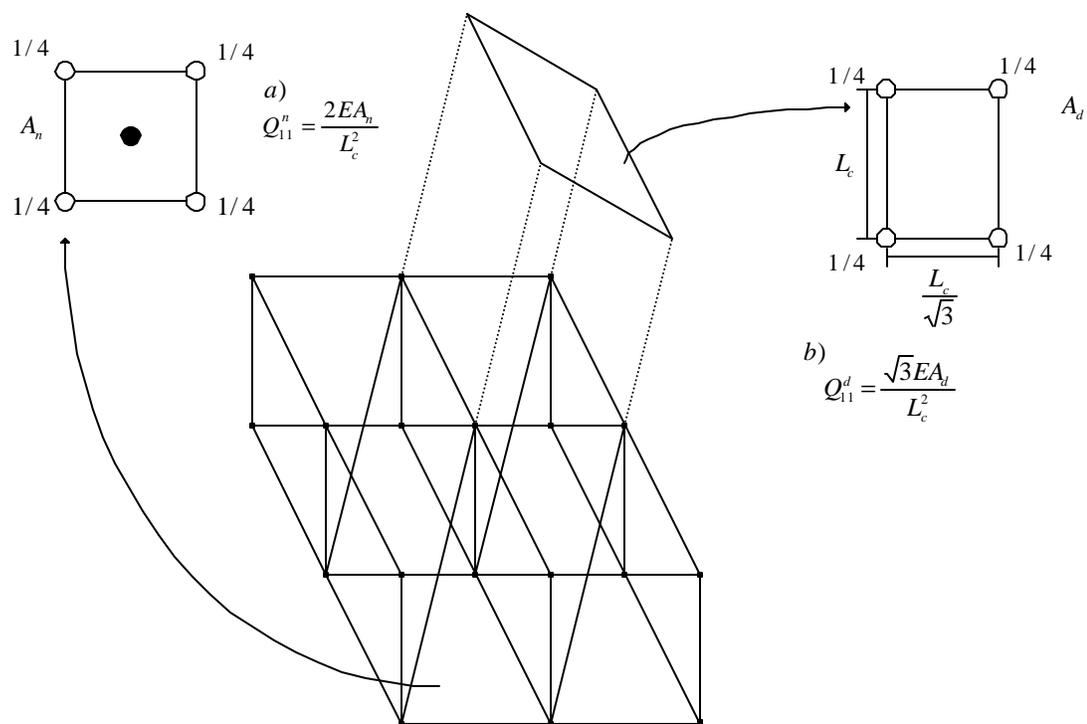
As expressões anteriores podem ser escritas em forma matricial da seguinte maneira:

$$\varepsilon_i = A_{ij} \sigma_j \quad (2.12)$$

de onde se obtém que:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, a_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}, a_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad (2.13)$$

Comparando (2.1) e (2.12) se conclui que:



**Figura 2.3-2: Cálculo da área efetiva para as barras normais (a), e diagonais (b) do módulo cúbico.**

$$A_{ij} = C_{ij}^{-1} \quad (2.14)$$

Realizando esta inversão é possível obter os coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  e  $a_{44}$  em termos de  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{44}$  e a partir de (2.13) e (2.9)

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{2EA_n \left(1 + \frac{12\delta}{9}\right)}{L_c^2 \left(1 + \frac{8\delta}{9}\right)} \\ \nu_{12} &= \frac{4\delta}{9 + 8\delta} \\ G_{13} &= \frac{2EA_n 4\delta}{L_c^2 9} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como o que interessa no método dos elementos discretos é obter as rigidezes das barras ( $EA_n$ ) e ( $EA_d$ ) em função das propriedades elásticas do sólido definidas por  $E$ ,  $\nu$ , simplesmente isolam-se tais valores da equação (2.15), obtendo:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{9\nu}{(4-8\nu)} \\ EA_n &= \frac{L_c^2}{2} \frac{(9+8\delta)}{(9+12\delta)} E \\ EA_d &= \frac{2_n}{\sqrt{3}}\end{aligned}\quad (2.16)$$

Estas expressões são válidas se o módulo básico de barras é o cúbico mostrado na Figura 2.3-2 a).

Para uma célula básica de forma diferente, deverão ser obtidas novas relações Bush 'et al' e Noor & Milukas (1988) apresentam estas relações para tetraedros, enquanto outros autores propõem realizar o cálculo das rigidezes das barras diretamente por calibração numérica. Schlangem (1993) faz uma revisão bibliográfica de vários tipos de arranjos utilizados na modelagem de estruturas de concreto. Ostoja (1995) também se apresentam o cálculo de propriedades equivalentes das barras para o caso em que existe ortotropia utilizando células tetraédricas.

### 2.3.2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

A equação de movimento para o modelo teórico é dada pela seguinte expressão:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + \bar{F}_r(t) - \bar{P}(t) = 0 \quad (2.17)$$

onde  $x$  representa um vetor de deslocamentos nodais,  $M$  a matriz de massas nodais (diagonal);  $C$  é uma matriz de amortecimento, também considerada diagonal, e  $\bar{F}_r(t) - \bar{P}(t)$  representa a diferença entre o vetor de forças reativas  $\bar{F}_r(t)$  e o vetor de forças internas  $\bar{P}(t)$ , sendo que estas forças atuam sobre os nós do modelo.

Para cada nó  $i$  do modelo se verifica que

$$\vec{F}_r^i = \sum_{b=1}^k \vec{F}_r^b \quad (2.18)$$

sendo  $k$  o número de barras que concorrem no nó  $i$ . A força interna em cada barra,  $F_r^b$ , é obtida a partir de uma equação constitutiva elementar, que pode-se expressar como segue:

$$F_r^b = \text{const}(\epsilon_b, \dot{\epsilon}_b) \quad (2.19)$$

sendo que  $\epsilon_b$  e  $\dot{\epsilon}_b$  representam a deformação e a velocidade de deformação da barra  $b$  e  $\text{const}$  será uma função que dependerá do tipo de material a modelar. A equação do movimento matricial (2.17) é desacoplada e, por isso, pode ser integrada no tempo mediante um esquema explícito. O amortecimento é proporcional a massa, de tal forma que:

$$C = MD_f \quad (2.20)$$

sendo  $D_f$  uma constante vinculada ao coeficiente de amortecimento crítico,  $\xi_n$ , como segue:

$$D_f = \xi_n 2\pi f_n \quad (2.21)$$

onde  $f_n$  representa a frequência natural de vibração do modo  $n$  expressa em [Hz], o modo  $n$  é aquele em que a estrutura dissipa mais energia (em geral é o modo fundamental de vibração da estrutura). A determinação do valor de  $D_f$  é um aspecto delicado do modelo, que deve ser mais estudado por diversas razões.

Além do amortecimento do material que é, em geral, difícil de se determinar, deve-se incluir dentro do  $D_f$  um certo amortecimento artificial com dois objetivos principais:

- a) Reduzir as vibrações associadas às frequências de vibração mais altas do modelo, as quais não são de interesse e dificultam a interpretação de resultados.
- b) No caso em que são aplicadas excitações em formas súbitas, também é necessário colocar um certo grau de amortecimento para suavizar a frente da onda de choque, distribuindo-a entre vários elementos e prevenindo, assim, o colapso dos mesmos sob a ação de gradientes muito fortes.

Este amortecimento numérico tem sido muito estudado havendo, até expressões fechadas propostas por diferentes autores. Pode-se encontrar um tratamento detalhado sobre o tema nos manuais do programa Abaqus/Explicit (1994). Os amortecimentos numéricos mencionados são conhecidos na literatura como viscosidade volumétrica linear e quadrática.

Um dos pontos que devem ser melhorados no programa é a separação deste amortecimento numérico do amortecimento do material, para facilitar sua avaliação.

Foram, também feitos alguns esforços para que o amortecimento não seja apenas função da massa, mas também da rigidez do sistema. Uma das tentativas realizadas foi acrescentar o seguinte termo na equação constitutiva uniaxial da barra genérica  $b$ :

$$E_b * \dot{\epsilon}_b * \vartheta \quad (2.22)$$

sendo  $E_b$  a rigidez da barra  $b$ ,  $\dot{\epsilon}_b$  a taxa de deformação de tal barra e  $\vartheta$  um coeficiente a ser determinado mediante experimentação numérica. Ainda que seja possível aplicar amortecimento desta forma, o algoritmo fica muito instável, principalmente quando existem não linearidades envolvidas no comportamento do material.

Também se experimentou incorporar a dependência da rigidez em forma indireta, isto é, fazendo  $D_f$  depender de um índice de dano local da estrutura, calculado em cada nó, função da degradação da rigidez das barras que concorrem ao nó. Neste caso, foram obtidos resultados interessantes, mas o cálculo adicional necessário implica num gasto computacional elevado.

### 2.3.3 DETERMINAÇÃO DO INCREMENTO CRÍTICO DE INTEGRAÇÃO

Uma desvantagem dos métodos explícitos de integração das equações de movimento, é que são apenas condicionalmente estáveis, isto é, o intervalo de integração  $\Delta t$  deve ser menor que um valor crítico  $\Delta t_{crit}$ , a partir do qual o processo resulta instável. O método de diferenças finitas centrais foi escolhido porque, dentre outras vantagens, apresenta

em problemas lineares o menor intervalo crítico no grupo dos métodos explícitos, Krieg (1973).

Por outro lado, em problema de impacto e cargas impulsivas com possibilidade de fratura, a descrição das ações e do processo de ruptura do material exige o uso de intervalos de integração pequenos, a vezes da ordem de  $\Delta t_{\text{crit}}$ , o que naturalmente elimina a desvantagem do método em relação a procedimentos implícitos.

Em relação a determinação de  $\Delta t_{\text{crit}}$ , pode ser encontrada em Flanagan & Belytschko (1984) uma discussão sobre o tema. Essencialmente se tem que  $\Delta t_{\text{crit}}$  é função da maior frequência de vibração do modelo da estrutura  $f_{\text{máx}}$ . A última depende do comprimento característico do elemento utilizado na discretização  $L_o$  e da velocidade de propagação da onda de compressão  $C_p$ . No modelo teórico em estudo, se utiliza um critério simples que se mostra a seguir.

$$\Delta t_{\text{crit}} \leq 0,6 \frac{L_c}{C_p} \quad (2.23)$$

onde  $L_o = L_c$  e  $C_p = \sqrt{E/\rho}$ .

## 2.4 EXTENSÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA MODELAR ESTRUTURAS LAMINARES CILÍNDRICAS CIRCULARES

Como já foi mencionado anteriormente, a rigidez dos elementos constituintes do modelo depende das propriedades locais do sólido e do comprimento  $L_c$  da célula básica. Então, é possível modelar estruturas com formas regulares aplicando uma transformação conforme nas coordenadas de um prisma formado pela repetição das células cúbicas básicas. Como a transformação conforme preserva a ortogonalidade, as células cúbicas transformadas são suavemente distorcidas. Por isso, admite-se que as fórmulas para calcular as rigidezes equivalentes das barras a partir das propriedades do sólido mantêm a sua validade.

Neste trabalho foram usadas expressões dadas em Churchill (1960) para realizar a transformação de coordenadas. A título de exemplo, apresenta-se a seguir a transformação de coordenadas de um prisma regular em um setor de casca cilíndrica.

Partindo de um prisma no espaço  $(X,Y,Z)$ , mediante as expressões:

$$\begin{aligned} U &= \frac{re^{(1+Z)}}{e} \cos(x) \\ W &= \frac{re^{(1+Z)}}{e} \operatorname{sen}(x) \\ V &= Y \cdot (L_c/L_{co}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

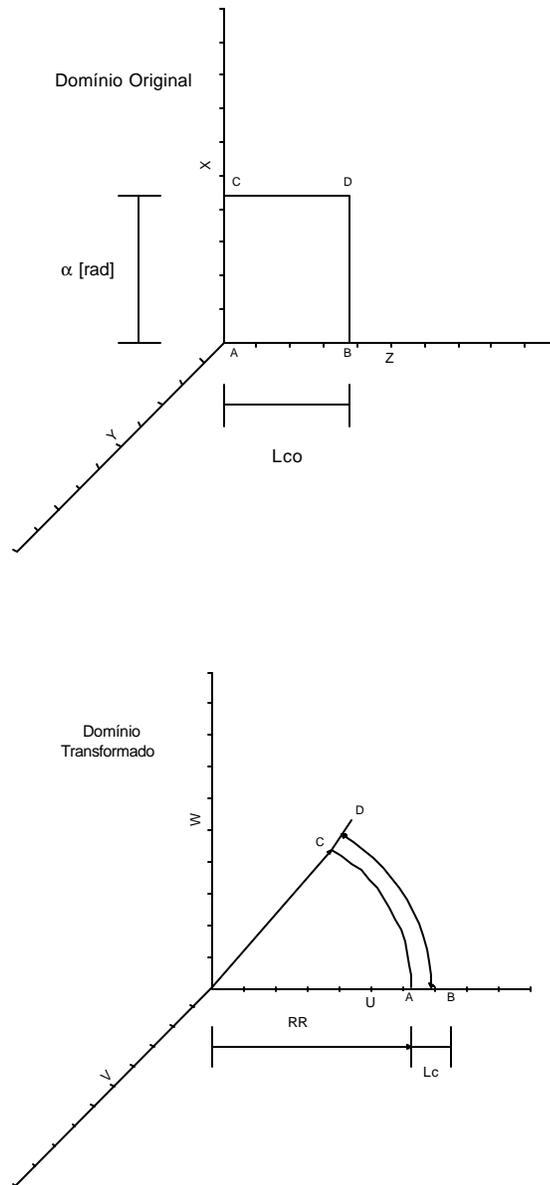
é possível passar a um espaço transformado  $(U,V,W)$ , onde  $L_c$ ,  $S$  e  $\alpha$  são dados na transformação, enquanto  $r$  e  $L_{co}$  são obtidos a partir dos mesmos como se indica a seguir:

$$\begin{aligned} r &= S/\alpha - L_c/2 \\ L_{co} &= \ln\left(\frac{L_c}{r} + 1\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Na Figura 2.4-1, se indica o significado destes parâmetros. As massas nodais devem ser transformadas de acordo com a seguinte lei:

$$\text{massa transformada} = (\det J) \text{ massa original} \quad (2.26)$$

na qual  $(\det J)$  representa o determinante jacobiano da transformação. No caso de cascas que sofrem esforços preponderantemente membranais, a utilização de uma célula básica na espessura é suficiente para obter bons resultados. Na presença de esforços de flexão precisar-se-á em geral utilizar maior quantidade de células na direção da espessura.



**Figura 2.4-1** Transformação de coordenadas, de um prisma a um setor cilíndrico

## 2.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Laboratório de Dinâmica Estrutural e Confiabilidade (LDEC) da UFRGS tem uma experiência de quase vinte anos no trabalho com este método. Ele tem sido utilizado no estudo do comportamento dinâmico de materiais homogêneos ou não, considerando-se grandes deslocamentos na análise, em alguns problemas de fronteira móvel (contato) e inclusão de características aleatórias na definição das propriedades do material.

Em particular, foi utilizado com sucesso na simulação do comportamento de concreto submetido a diferentes tipos de solicitações, sendo que o modelo capta corretamente o efeito de escala como será visto no capítulo 6 e permite simular fenômenos de fratura não local típico em materiais frágeis não homogêneos. Sobre este tema se discute a lei constitutiva unidirecional para o concreto no capítulo 3.

Foi também utilizado o DEM (método dos elementos discretos) na simulação de cascas elastoplásticas submetidas a cargas de curta duração; no estudo do comportamento do concreto submetido a um estado biaxial de tensões e na aplicação do método ao estudo de estruturas laminares de concreto armado Iturrioz (1995).

### 3 FRATURA EM CONCRETO

#### 3.1 MECÂNICA LINEAR DA FRATURA

A mecânica da fratura é principalmente importante para concretos de alta resistência, estruturas de concreto reforçadas com fibras, estruturas de dimensões consideráveis e para concreto protendido, entre outras importantes aplicações dentro da engenharia civil. Como é amplamente conhecido, as estruturas de concreto, apresentam numerosas fissuras “iniciais”, mas a falha das mesmas envolve principalmente o crescimento estável de largas zonas de fissuração e de formação de grandes fraturas antes da carga máxima ser atingida.

A mecânica da fratura é, em amplos termos, uma teoria de falha que usa critérios energéticos, em conjunto com critérios de resistência, e leva em conta a propagação das falhas através da estrutura.

Observa-se, quase sempre, uma grande discrepância entre a resistência teórica de um corpo cristalino previstas a partir das forças interatômicas e a resistência medida sobre corpos de prova de dimensões de varias ordens de grandeza superiores às dimensões interatômicas. Griffith (1920) sugeriu que a razão deste fato podia ser explicada pela presença de defeitos no material, tais como pequenas cavidades responsáveis pelo incremento das tensões no local. Com efeito, na solução apresentada por Inglis (1913) do estado tensional de uma placa com um furo elíptico submetida a uma carga uniforme de tração, verifica-se um aumento significativo de tensões na borda do furo.

Também chama a atenção de Griffith o sensível aumento na tensão de ruptura à medida que as dimensões do corpo de prova diminuam. Este efeito, chamado “Efeito de Escala”, foi explicado independentemente e de forma diferente por Weibull (1938), considerando que, quando o volume do espécime diminui, se reduz também à probabilidade de existência de elos ou componentes fracos, o que se traduz num aumento da tensão última da peça analisada. Este tema será analisado no Capítulo 5.

A intuição de Griffith permitiu-lhe vincular os métodos que estudam a propagação das fissuras dentro da microestrutura com um estado macroscópico do sólido. Foi assim que o mesmo introduz o critério energético, o qual evita a necessidade de analisar o estado tensional nas proximidades do ponto de fissura, estabelecendo uma condição necessária para a propagação da fissura na forma de uma igualdade entre a energia liberada pelo sistema e a energia necessária para criar superfícies livres da trinca.

O problema de propagação instável de uma fissura considerando uma tensão infinita na ponta da trinca foi resolvido por Irwin (1957), que demonstra também a equivalência entre métodos por ele proposto e a análise energética de Griffith (1920). A partir dos trabalhos de Griffith e de Irwin é que se estabelece a base da mecânica das fraturas, a qual permite relacionar as cargas máximas que podem atuar sobre uma estrutura com a localização e grandeza de fissuras preexistentes na mesma.

Considerando-se, por exemplo, o caso de uma barra prismática submetida a um esforço de tração simples nos extremos. De acordo com a teoria da elasticidade, capítulo clássico da hoje denominada mecânica do contínuo, o colapso da peça fica definido se a tensão limite é ultrapassada na região crítica da peça. Portanto, a condição de não colapso pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\sigma_{\max}(F, D) \leq \sigma_y(T, \sigma, W_0, P_0) \quad (3.1)$$

admite-se assim que a condição  $\sigma_{\max} = \sigma_y$  caracteriza o estado limite da barra em estudo. Na equação (3.1)  $\sigma_{\max}(F, D)$  é a tensão atuante, a qual depende do estado de carga sobre a estrutura (F) e da geometria da mesma (D). Por outro lado  $\sigma_y$  é a tensão limite da estrutura, cujo valor determina-se experimentalmente em peças simples (corpos de prova). Em geral, considera-se  $\sigma_y$  uma propriedade do material, função das características do mesmo ( $P_0$ ) e de fatores como temperatura (T), umidade ( $W_0$ ) e velocidade de aplicação da carga ( $\dot{\sigma}$ ).

De forma análoga, dentro da mecânica da fratura, se introduz na barra prismática em estudo uma trinca perpendicular à direção da sollicitação de tração aplicada. Para que a fissura não propague de forma instável, deve-se verificar a condição:

$$Z(a, F, D) \leq Z_c(T, \dot{\sigma}, B, P_0) \quad (3.2)$$

Sendo que a condição  $Z = Z_c$  caracteriza a ruptura da estrutura em estudo.

Neste caso  $Z$  é um índice que mede a proximidade da peça à condição de falha pela propagação instável da fissura. Em geral, este índice  $Z$  depende de um parâmetro geométrico que caracterize a fissura, que pode ser seu comprimento ( $a$ ), do estado tensional da peça nas proximidades da trinca se a mesma não existisse ( $F$ ), e finalmente das características geométricas da peça em estudo ( $D$ ).

Por outro lado  $Z_c$  é um fator que mede a resistência da peça à propagação determinada experimentalmente, considerado uma propriedade do material (ainda que isto seja discutível). Este fator  $Z_c$  é função das características do material ( $P_0$ ), da temperatura ( $T$ ), da velocidade de carga ( $\dot{\sigma}$ ) e de um parâmetro associado ao tensor de tensões esférico nas proximidades da descontinuidade, que muitas vezes está relacionado à espessura da peça em estudo ( $B$ ). Na mecânica linear de fraturas existem, em princípio, dois enfoques básicos, o que se traduz em formas diferentes na definição das funções  $Z$  e  $Z_c$ .

- Critério energético de Griffith ou critério global.
- Critério do fator de Intensidade de tensões de Irwin ou critério local.

#### *Critério Global (Griffith)*

No critério global a capacidade de carga do corpo é determinada avaliando a energia necessária para produzir a propagação instável de uma fissura preexistente. Para este fim, é necessário realizar um balanço energético em toda a estrutura em análise.

Para que uma trinca se propague, é preciso que exista um fluxo de energia até o extremo da mesma, onde esta é dissipada no processo de fratura. A taxa de energia liberada pode ser expressa da seguinte forma:

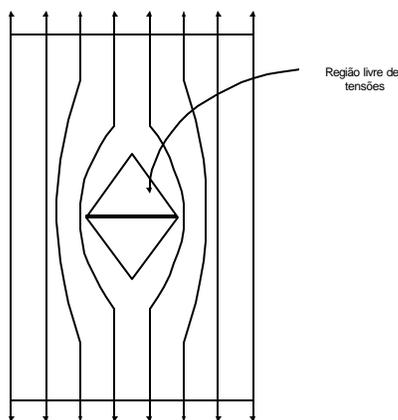
$$G_F = \frac{1}{b} \left( -\frac{\partial \pi(a)}{\partial a} \right) \cong \frac{1}{b} \left( -\frac{1}{\Delta a} \left( \pi \left( a + \frac{\Delta a}{2} \right) - \pi \left( a - \frac{\Delta a}{2} \right) \right) \right) \quad (3.3)$$

onde ( $b$ ) denota a espessura da peça, ( $a$ ) é o comprimento da fissura, ( $W$ ) é o trabalho das cargas, ( $U(a)$ ) é a energia de deformação da estrutura e ( $\pi(a) = U(a) - W$ ) é a energia potencial da estrutura.

Na equação (3.3) também se apresenta uma aproximação que pode ser aplicada para calcular  $G_f$  pelo método dos elementos finitos (Owen & Fawkes, 1983) ou com o método dos elementos de contorno (Brebbia & Telles, 1980). De acordo com Griffith, a condição de propagação da fissura  $G_f = G_{fc}$ , é similar à expressão (3.2) se  $Z = G_f$  e  $Z_c = G_{fc}$ .

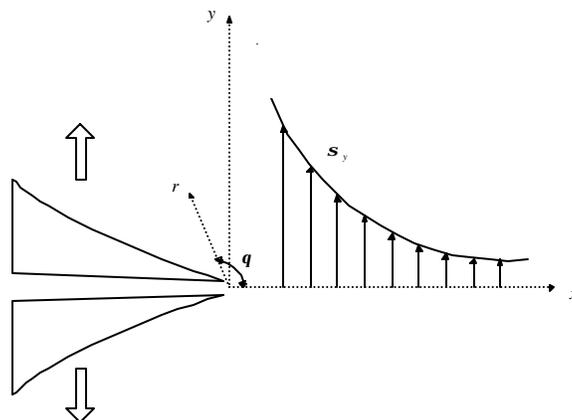
*Critério Local (Irwin).*

No critério local, a propagação instável da fissura é função do estado tensional nas proximidades do extremo da trinca. A introdução de uma fissura dentro de um corpo elástico linear produz uma concentração de tensões nas proximidades dos lábios da trinca. Isto é devido à perturbação das trajetórias das tensões principais máximas, como se mostra na Figura 3.1-1.



**Figura 3.1-1: Trajetória das tensões principais em um espécime com uma trinca**

O campo de tensões é singular no extremo da fissura, com todas as componentes de tensões distintas de zero tendendo a infinito quando a distância radial  $r$ , com centro no extremo da fissura, tende a zero. É conveniente distinguir três modos elementares de fratura, modos I, II, III ilustrados na Figura 3.1-3. Os modos I e II são simétricos e antissimétricos com respeito ao plano de falha, enquanto que o modo III é tridimensional. A fratura, em geral, é produzida pela combinação linear destes três modos básicos.



**Figura 3.1-2: Distribuição das tensões nas proximidades da ponta da trinca**

Nas proximidades do extremo da fissura, as componentes de tensões  $\sigma_{ij}$  são as mesmas, independentemente da forma do corpo e do tipo de carga que atua sobre ele. Tais componentes, deduzidas por Irwin (1958), podem se expressar como segue:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^I &= K_I f_{ij}^I(\theta)(2\pi r)^{-1/2} \\ \sigma_{ij}^{II} &= K_{II} f_{ij}^{II}(\theta)(2\pi r)^{-1/2} \\ \sigma_{ij}^{III} &= K_{III} f_{ij}^{III}(\theta)(2\pi r)^{-1/2}\end{aligned}\quad (3.4)$$

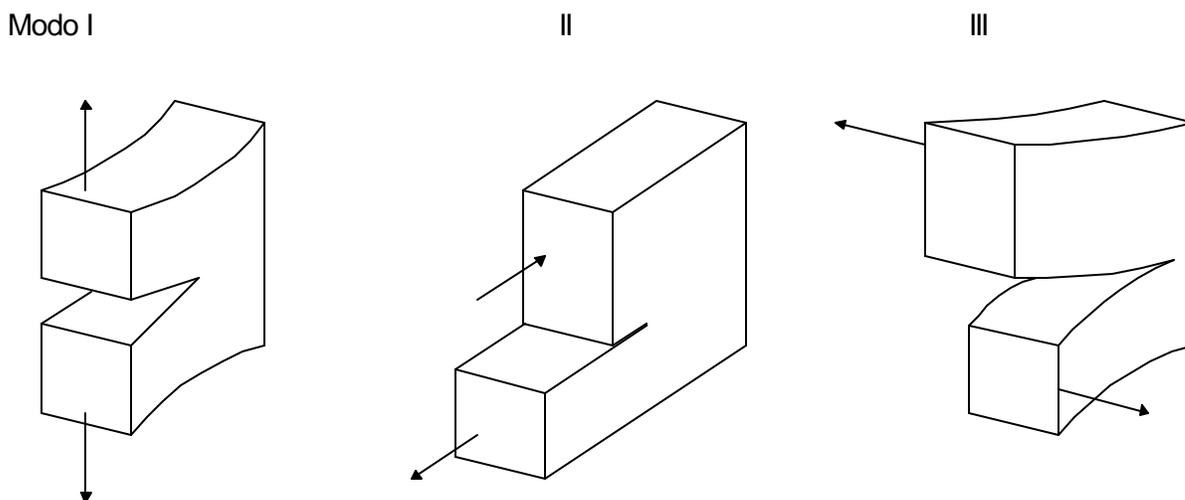
onde os índices I, II, III se referem aos modos elementares de fratura,  $\theta$  é o ângulo polar,  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  são parâmetros chamados de fatores de intensidade de tensões e as funções  $f_{ij} = f_{ij}(\theta)$  são independentes do tipo carga e geometria do corpo. As expressões para  $f_{ij}$  podem ser encontradas na literatura, por exemplo, Kanninen & Popelar (1985).

Os fatores de intensidade de tensões são proporcionais à carga aplicada e geralmente podem ser expressos na forma:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} f(D_i) \quad (3.5)$$

Na qual  $f(D_i)$  é função da geometria da estrutura e da disposição das fissuras nela contidas, características que se representam em forma genérica como  $D_i$  com  $i = \alpha, \beta, \dots$ , etc.

Para várias geometrias simples de corpos de prova, existem expressões para  $f(D_i)$  disponíveis na literatura, podendo-se citar Cartwright (1976). Para geometrias mais complexas, esta função, em geral, deve ser calculada por métodos numéricos, tais como o método dos elementos finitos ou o método dos elementos de contorno. De acordo com a expressão (3.2) no critério local  $Z = K$  e  $Z_c = K_c$ .



**Figura 3.1-3: Modos I, II, III de fratura da ponta da trinca.**

Em Kanninen (1985) é apresentada uma compilação das teorias não lineares de fratura, como também critérios para definir quando se pode utilizar a mecânica linear da fratura.

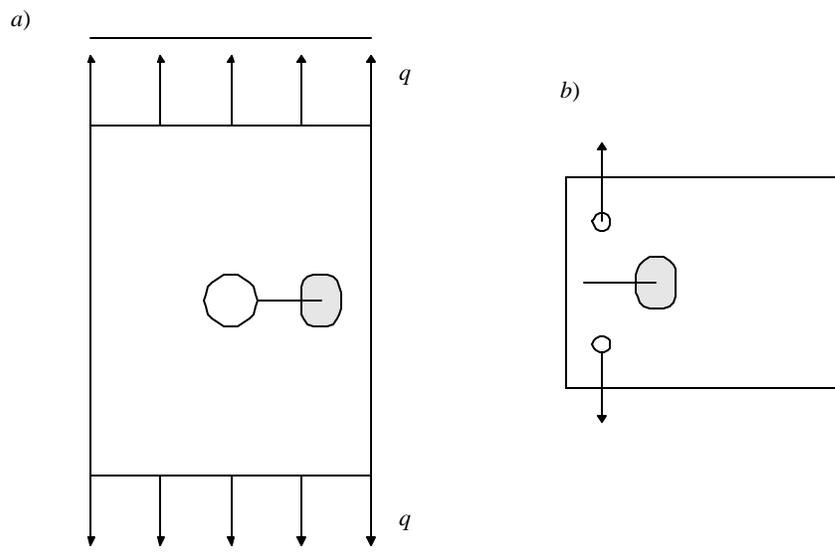
Para ilustrar a vantagem de trabalhar com o fator de intensidade de tensões se analisa, como exemplo, o caso de uma placa com um furo trincado submetida a uma tensão uniforme, como mostra a Figura 3.1.4.a. Quando se quer saber se a trinca propaga em forma instável ou não, pode-se expressar:

$$K_I = f(D_\alpha) \sigma \sqrt{a\pi} \quad (3.6)$$

Onde  $f(D_\alpha)$  é uma função que depende da geometria da estrutura da figura  $D_\alpha$ ,  $\sigma$  representa o estado tensional sendo igual à tensão no extremo da fissura se a mesma não existisse e  $(a)$  é comprimento da trinca.

Para solucionar este problema deve-se conhecer  $K_{IC}$ , o fator de intensidade de tensões limite, que é uma propriedade do material. Para isso, deve-se ensaiar uma peça com uma geometria já padronizada (por exemplo, ensaio de tração compacta ou ensaio de flexão a três pontos), como a mostrada na Figura 3.1.4.b, determinando-se  $\sigma_{crit}$ , tensão na qual a peça rompe. Pode-se escrever então:

$$K_{IC} = f(D_\beta) \sigma_{crit} \sqrt{a\pi} \quad (3.7)$$



**Figura 3.1-4: a) Placa com um furo trincado submetido a uma carga uniforme; b) ensaio de tração compacta.**

A partir da expressão anterior, é possível obter o valor de  $K_{IC}$ . Para ambas estruturas os campos de tensões, deformações e deslocamentos são iguais para pontos homólogos situados nas proximidades da ponta da fissura, zona salientada nas Figuras 3.1.4.a e 3.1.4.b.

Por isso, o fator de intensidade de tensões limite  $K_{IC}$  calculado para a peça padronizada Figura 3.1.4.b também é válido para a peça em estudo Figura 3.1.4.a. Comparando o valor de  $K_{IC}$  por médio do ensaio experimental com o  $K$  calculado com a equação (3.6) tem-se agora condições de resolver o problema proposto.

É importante salientar que, baseados no critério de tensões limites, se a previsão de tensões infinitas na ponta da trinca da Teoria da Elasticidade fosse real, as estruturas não poderiam, em geral, suportar quaisquer tensões de tração que lhe fossem impostas. É óbvio que isto não está de acordo com o observado na prática. Pode-se supor que na região onde ocorrem tensões infinitas, se produza, na verdade, uma plastificação local seguida de uma perda de coesão entre duas partes em que o material se divide. Se a região de plastificação local é suficientemente pequena é possível aplicar a mecânica linear de fratura para determinar quando uma fissura instabiliza (fratura frágil). Quando a região de plastificação é maior, deve-se utilizar a Mecânica não linear de fratura (neste caso a fratura pode crescer em forma estável antes de instabilizar seu crescimento).

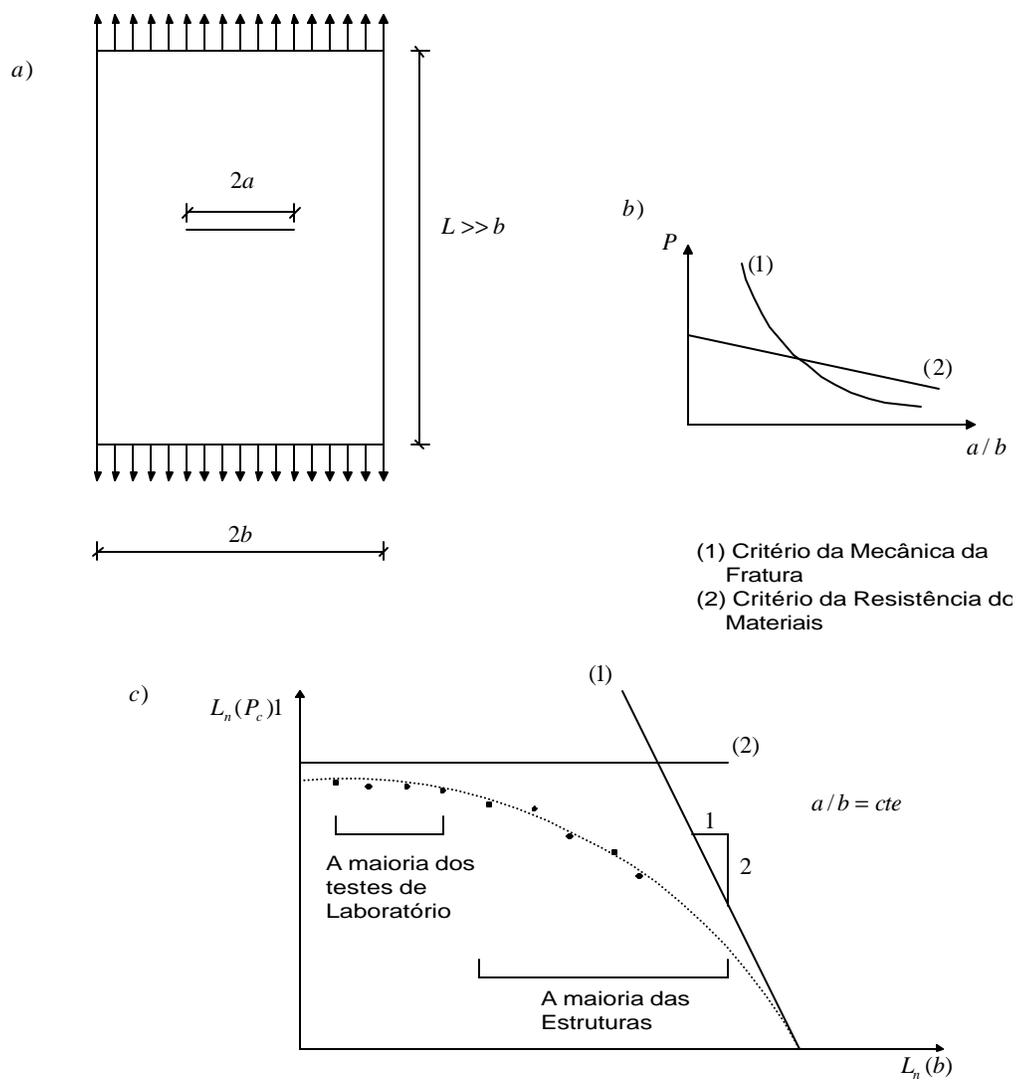
O concreto, assim como alguns materiais cerâmicos, não podem ser estudados dentro do campo da mecânica linear de fraturas. Na seção seguinte será discutido o caso particular do concreto.

### 3.2 MECÂNICA DA FRATURA EM CONCRETO

Com o objetivo de analisar algumas características da fratura no concreto estuda-se, a seguir, a carga de colapso de uma placa com uma fissura central carregada em forma uniforme em suas bordas, a qual é mostrada na figura (3.5.a). Segundo a mecânica linear de fratura, a carga de colapso é determinada pela fórmula:

$$p_c = \frac{K_I}{\sqrt{b}g\left(\frac{a}{b}\right)} \quad (3.8)$$

onde  $p_c$  é a carga por unidade de comprimento que produz uma propagação instável da fissura,  $K_I$  é o fator de intensidade de tensões e  $g\left(\frac{a}{b}\right)$  é uma função que depende das características geométricas do problema que constitui uma forma diferente de apresentar a função  $f(D_i)$  apresentada na seção anterior.



**Figura 3.2-1:** a) Placa com uma trinca central submetida a uma tensão uniforme. b) Curvas de resistência limite da placa vs. o comprimento relativo da fissura da placa  $a/b$ . c) Envolvente do logaritmo da resistência limite vs. o logaritmo do comprimento característico da placa  $b$ .

Utilizando a teoria da resistência dos materiais, a carga do colapso para a estrutura analisada por ser expressa como segue:

$$p_c = f_y t \left(1 - \frac{a}{b}\right) \quad (3.9)$$

onde  $f_y$  é a tensão de escoamento do material e  $t$  a largura da peça. Na figura (3.5.b) se graficam as expressões dadas em (3.8 e 5.9), em termos da carga de colapso da placa  $p$  vs. o comprimento relativo da fissura da mesma  $a / b$ , sendo possível, a partir das mesmas, determinar uma curva envolvente de resistência limite vs.  $a / b$ . Esta envolvente, considerando a relação  $a / b$  constante, é apresentada na Figura 3.2-1, em termos do logaritmo de  $p_c$  e do logaritmo de  $b$ . Estudando dita envolvente conclui-se que a placa pode alcançar a carga última por dois mecanismos de ruptura diferentes, dependendo das dimensões da mesma. Para corpos de prova pequenos, o colapso acontece segundo a resistência dos materiais (ver eq. 3.8) enquanto que, para corpos de prova maiores, domina o comportamento da mecânica linear de fratura (ver eq. 3.9). Entretanto, ensaios sobre corpos de prova em concreto realizados por vários autores, entre eles Kaplan (1961) e Walsh (1972), mostram que a envolvente de colapso apresentada na Figura 3.2-1 não representa o comportamento real das estruturas ensaiadas, salvo no caso de estruturas muito grandes ou muito pequenas.

Este efeito de escala, diferente do previsto pela mecânica linear de fratura, é um dos fatores que motivou o estudo de modelos de fratura adequados para a representação do comportamento do concreto. O desvio do comportamento do concreto da mecânica linear da fratura é devido, dentre outras razões, à grande área de microfissuras que se desenvolvem na cabeça da trinca. Tal área se caracteriza por ter um comportamento de abrandamento frente ao aumento das deformações. O efeito da microfissuração pode ser resumido como segue:

- Reduz o fluxo de energia que é liberada na ponta da trinca.
- A área microfissurada produz um aumento da capacidade de absorção de energia da região fraturada.

Em geral pode-se distinguir dois tipos de mecânica linear de fratura:

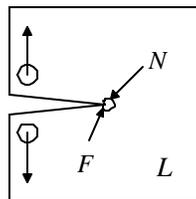
- Dúctil: aplicável ao caso de metais.

- Não dúctil: aplicável ao caso de concreto assim como alguns materiais cerâmicos.

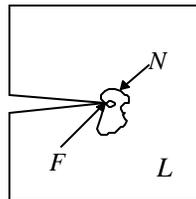
Como é mostrado na

Figura 3.2-2, ao contrário da mecânica linear da fratura, a zona não linear é grande para ambos tipos de mecânica de fratura não linear.

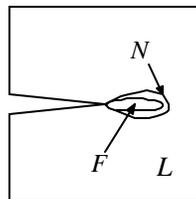
a) *Fratura linear*



b) *Fratura dúctil*



c) *Fratura não dúctil*



**Figura 3.2-2: Fratura em diferentes materiais. (L): Zona Linear, (N): Zona não linear e (F): Zona Microfissurada**

No caso dúctil, a maior parte da zona não linear (N), tem um comportamento plástico com encruamento ou plástico perfeito, sendo que a zona microfissurada (F), que tem um comportamento plástico com abrandamento, é muito menor.

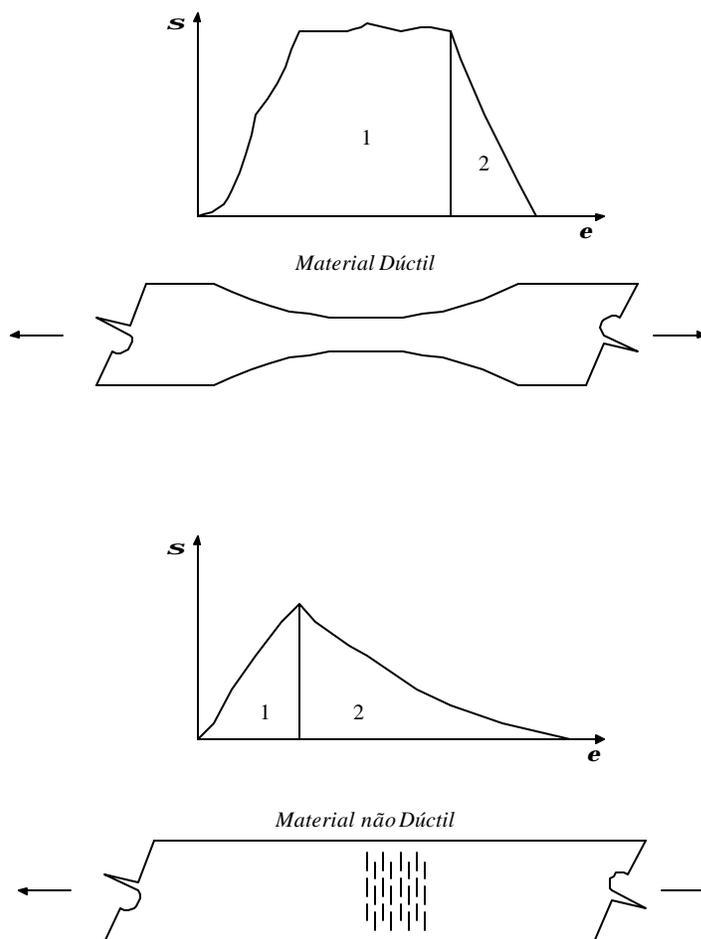
Em contraste ao caso não dúctil, a zona microfissurada (F) ocupa praticamente a totalidade da região não linear da Figura 3.3-2. Verifica-se assim, que o comportamento da zona de fratura é muito diferente para materiais dúcteis e não dúcteis. Por isso se considera importante salientar as seguintes características:

- No aço a fratura é precedida de um estrangulamento (estrição), isto se deve ao fato de que as deformações plásticas de corte são muito grandes na zona de fratura. No concreto, a fratura é precedida de microfissuras aproximadamente perpendiculares à direção das tensões; por isso não se produzem deformações laterais devido à ausência de forças cortantes na região de interesse.
- Na Figura 3.2-3 pode-se comparar duas relações ( $\sigma-\varepsilon$ ) típicas para materiais dúcteis e não dúcteis. É uma característica dos últimos que a maior parte da energia entregue é dissipada quando ele tem deformação com abrandamento frente ao comportamento diferente de um material dúctil.
- No caso de material dúctil não se pode considerar a energia específica de fratura como uma propriedade do material, pois ela depende do tensor de tensões esférico  $J_1$  nas proximidades da ponta da trinca. Se o valor de  $J_1$  é baixo, se tem um estado plano de tensões. A estrutura dissipa muita energia, plastificando antes de fraturar e produzindo-se uma deformação dúctil considerável. Se o valor de  $J_1$  é elevado, isto traduz-se em um estado plano de deformações. Geralmente é o caso de estruturas com uma espessura considerável, onde a quantidade de deformações plásticas que antecede a ruptura é menor.

A partir da análise anterior fica claro que, para modelar adequadamente a fratura em materiais como concreto, é necessário incluir nos modelos o comportamento da zona microfissurada. Isto pode ser feito, basicamente, de duas formas:

- Introduzindo uma relação tensão deslocamento ( $\sigma-\delta$ ) na zona localizada na frente da fratura contínua. Este enfoque proposto por Hillerborg (1978).

- Introduzindo uma relação tensão-deformação ( $\sigma-\epsilon$ ) com abrandamento da região localizada na frente da fissura principal. Este enfoque apresentado inicialmente por Bazant (1976).

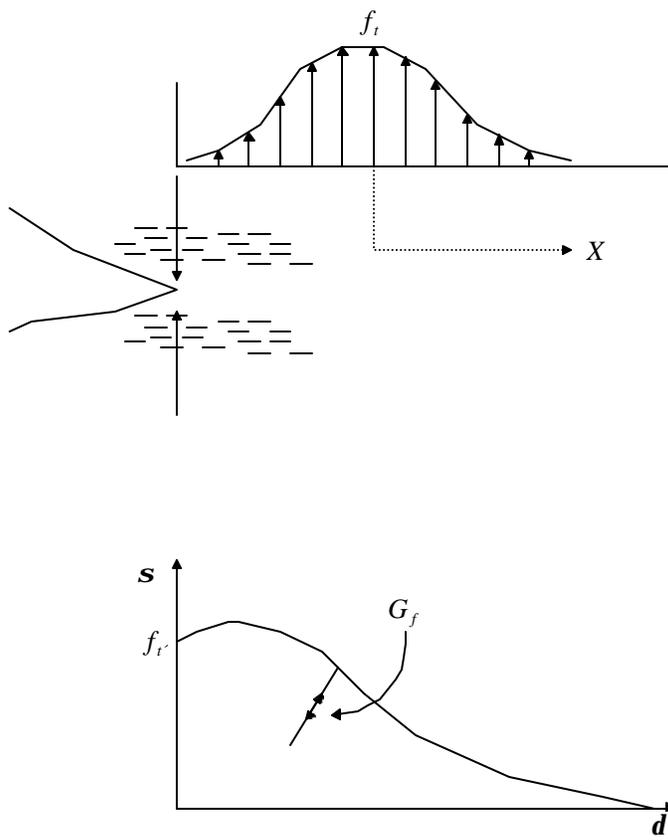


**Figura 3.2-3: Diagramas  $s - e$  característicos do caso de materiais dúcteis (a) e não dúctil (b).**

O modelo analítico proposto por Hillerborg (1978), denominado de “Fissura Fictícia”, representa toda a zona onde se desenvolve a fissura mediante uma fissura discreta fictícia. Esta fissura fictícia tem uma lei  $(\sigma-\delta)$  do tipo  $(\sigma_y=f(\delta_c))$  de abrandamento, que rege seu comportamento mecânico como se ilustra na Figura 3.2-4, onde  $\sigma_y$  é a tensão na direção normal a fissura e  $f(\delta_c)$  é a abertura da trinca. A área sob a curva  $f(\delta_c)$  representa a energia de fratura específica do material, isto é:

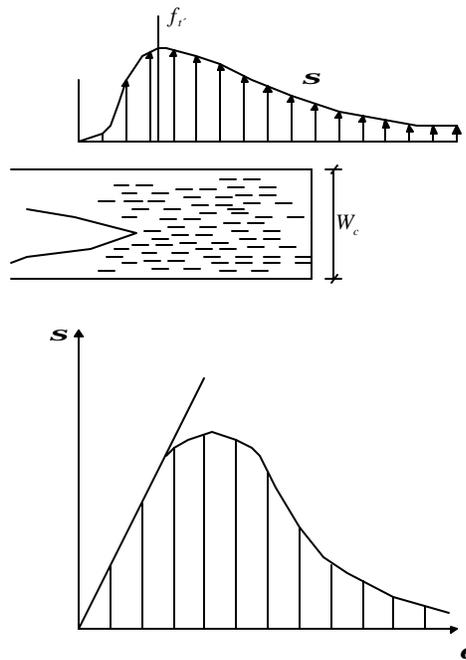
$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma_y d(\delta_c) \quad (3.10)$$

A fissura começa a se abrir quando a tensão em seu extremo alcança o valor limite  $f_t$ .



**Figura 3.2-4: Distribuição das tensões nas proximidades da ponta da fissura para o modelo da fissura fictícia proposto por Hillerborg (1978)**

Bazant (1976), adota o ponto de vista oposto, representando toda a zona onde se produz a fratura através de uma banda de material microfissurado de espessura  $w_c$ . Esta banda tem uma lei tensão-deformação definida do tipo  $\sigma_y = f(\epsilon_f)$  como se mostra na Figura 3.2-5. Neste caso a energia de fratura é dada pela seguinte expressão:



**Figura 3.2-5: Distribuição das tensões nas proximidades da ponta da fissura para o modelo da banda fissurada proposto por Bazant (1976).**

$$G_f = w_c \int_0^{\infty} \sigma_y d(\epsilon_f) \quad (3.11)$$

Fixando-se a forma da relação  $(\sigma_y - \epsilon_f)$  na zona microfissurada, o modelo de banda fissurada fica totalmente caracterizado pelos três parâmetros  $f_t'$ ,  $G_f$  e  $w_c$ .

Sobre os modelos da fissura fictícia e o modelo da banda fissurada, apresentados anteriormente, pode-se fazer as seguintes observações:

- Ambos modelos permitem explicar os resultados experimentais obtidos em ensaios sobre corpos de prova de concreto que, como se mencionou anteriormente, não obedecem às predições da mecânica linear de fraturas (linha tracejada na Figura 3.2-5).
- Outros modelos derivados dos dois acima apresentados foram desenvolvidos com algumas variações, mas, em todos os casos, é característica a presença do abrandamento por deformação, que se traduz num ramo descendente na relação constitutiva do material. Uma completa compilação sobre os modelos desenvolvidos pode ser encontrada nos trabalhos de Oliver (1990) e de Bažant (1992).
- A não homogeneidade do material é incluída no modelo incorporando-se características aleatórias nas propriedades mecânicas do material, nas propriedades geométricas ou em ambas. Uma compilação extensa sobre este tipo de modelos pode-se encontrar no trabalho de Schlagen (1993).
- A forma da curva de abrandamento por amolecimento tem influência considerável no comportamento do modelo. Wittman (1983) apresenta um estudo sobre este tema, sugerindo a necessidade de um ramo descendente bilinear ou quadrático. Rocha (1989) demonstrou que adotando um ramo descendente elementar linear, mas sendo a inclinação da curva de abrandamento por amolecimento aleatório, não é preciso realizar maiores sofisticções na forma da mesma para se obter bons resultados na simulação do comportamento mecânico do concreto.
- É necessário que os modelos propostos sejam objetivos com respeito a discretização da malha. Para isso, analisa-se o modelo discretizado de uma barra submetida à tração apresentada na Figura 3.3-1.a), onde se coloca uma imperfeição no elemento que modela a fissura para induzir a localização da fratura no mesmo. Adota-se, primeiramente, o diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  da Figura 3.3-1.b), onde a deformação última,  $\epsilon_u$ , considerada uma propriedade do material permanece fixa. Analisando o processo de deformação da totalidade da barra, será obtida uma curva  $\sigma$ - $\delta$  como a mostrada na Figura 3.3-1 c). Observa-se que posição do ponto 2 de tal curva e, por conseguinte, da inclinação do ramo descendente, depende do comprimento do elemento que corresponde à região fissurada. Refina-se a malha na região da fissura, diminuindo a largura  $l$  do correspondente elemento

a valores progressivamente menores, os resultados variam sensivelmente e não se obtém a convergência para o valor correto que se espera de qualquer método numérico. Na literatura técnica, este efeito se conhece como falta de objetividade da análise com respeito a discretização e é típica de qualquer análise que não considere o ramo de abrandamento por deformação dependente do tamanho da malha. Introduzindo a energia de fratura como uma propriedade do material, de modo tal que se cumpra a seguinte condição:

$$G_f = 1 \int_0^{\epsilon_v} \sigma d\epsilon \quad (3.12)$$

a resposta  $\sigma$ - $\epsilon$  da estrutura esquematizada na Figura 3.3-1 e) não dependo do tamanho da malha. Observa-se que a introdução da energia de fratura para o abrandamento por deformação permite obter resultados objetivos com respeito ao tamanho da malha. Neste caso, o ramo de abrandamento da equação constitutiva ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) depende do tamanho do elemento.

- A largura de banda fissura  $w_c$  do modelo proposto por Bazant foi, depois de grande quantidade de ensaios, determinada com valor  $w_c = 3d_{max}$  ( $d_{max}$  = tamanho máximo do agregado) (Bažant & Oh, 1983). Também comprovou-se que os resultados não são muito sensíveis ao valor de  $w_c$ , no caso de fraturas isoladas (aceitando-se variações para  $w_c$  entre  $6d_{max}$  e  $1d_{max}$ ). O valor de  $w_c$  torna-se importante quando acontecem fissuras distribuídas e paralelas, nesse caso o parâmetro garante uma separação mínima admissível das trincas principais.

### 3.3 CRITÉRIO DE RUPTURA EMPREGADO NESTE TRABALHO

#### 3.3.1 DEFINIÇÃO DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA EMPREGADA

Utilizando o modelo dos elementos discretos cuja base teórica é apresentada no capítulo 3, se discute a seguir da implementação do critério de ruptura utilizado, para o estudo de materiais não dúcteis e não homogêneos. Este critério é baseado nas considerações feitas na seção anterior e foi apresentado originalmente por Rocha (1989).

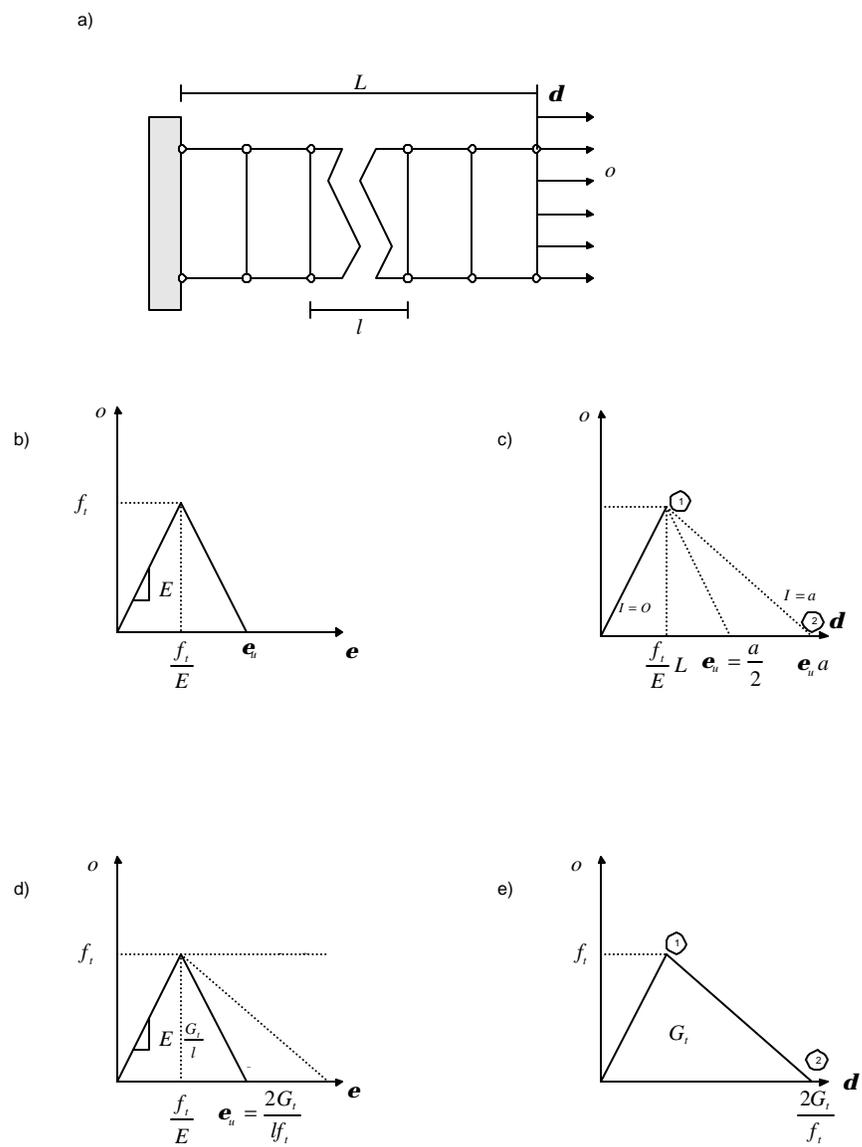


Figura 3.3-1: Objetividade dos modelos de fratura com “Strain Softening”

A seguir são apresentadas as expressões fundamentais nas quais baseia-se a relação constitutiva empregada.

Pode-se estabelecer uma relação entre o fator de intensidade de tensões crítico,  $K_{IC}$ , e uma certa deformação crítica. Para isso, parte-se da expressão:

$$K_{IC} = \frac{\sigma_c}{R_f} \quad (3.13)$$

onde  $R_f$ , definido como um fator de falha  $\left[ R_f = \frac{1}{f(D_i)\sqrt{a}} \right]$ , representa uma função que depende das características geométricas do modelo e  $a$  representa o comprimento da fissura.

O fator de falha  $R_f$ , permite incorporar todas as características que dão origem ao processo de ruptura do elemento com um único parâmetro. A relação que vincula a energia específica de fratura,  $G_f$ , e o fator de intensidade de tensões,  $K_I$ , que foi apresentado por Irwin (1957) é:

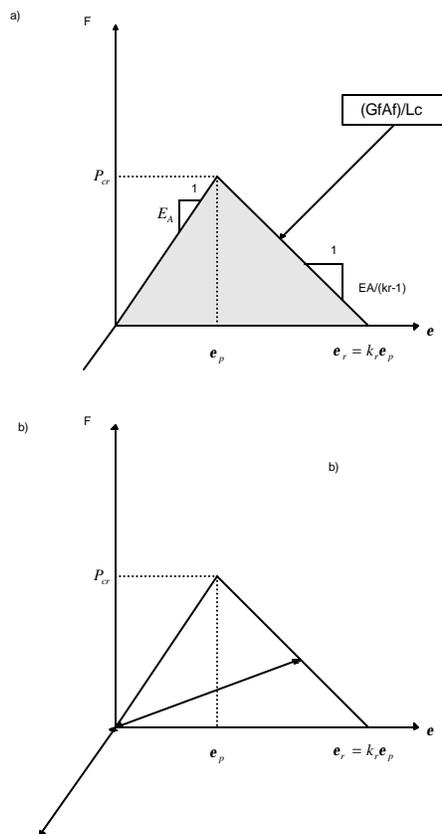
$$\frac{K_I^2}{E'} = G_f \quad (3.14)$$

com  $E'=E$  no estado plano de tensões e  $E'=E(1-\nu^2)$  no estado plano de deformações, sendo  $E$  = módulo de Young e  $\nu$  = coeficiente de Poisson.

Escrevendo a tensão crítica em função da deformação crítica,  $\epsilon_p$ , isto é, deformação na qual se atinge a carga máxima como segue ( $\sigma_c = \epsilon_c E'$ ), e combinando as expressões (3.13) e (3.14) tem-se, finalmente, que:

$$\epsilon_p = \left[ \frac{G_f}{E'} \right]^{1/2} R_f \quad (3.15)$$

A partir das definições feitas, pode-se adotar a relação constitutiva elementar bilinear que se ilustra na Figura 3.3-2. Nota-se que para compressão o material é considerado elástico linear, sendo que a ruptura do modelo global, quando comprimido, deverá ocorrer por tração indireta (efeito Poisson).



**Figura 3.3-2 Relação constitutiva elementar implementada por Rocha (1989)**

É possível introduzir melhorias sobre o comportamento à compressão do modelo em função de pesquisas realizadas por vários autores; entre eles, Vonk (1993) e de Bors & Feenstra (1993). Também pode ser questionada a forma pela qual se realiza a descarga. Linde (1993) propõe uma lei mais sofisticada, baseada nos ensaios realizados por Curbach (1987), que foi testada em casos de excitações impulsivas sem obter vantagens nos resultados obtidos. Presumivelmente, em problemas onde o comportamento cíclico da excitação seja dominante, cargas sísmicas, por exemplo, sua utilização trará vantagens. Tal relação  $\sigma$ - $\varepsilon$  está apresentada na Figura 3.3-2, os parâmetros têm os seguintes significados:

- $F$  é a força axial resultante da barra, função da deformação  $\varepsilon$ , sendo a carga crítica  $P_{cr}$  associada à deformação crítica  $\varepsilon_p$ .
- $E_A$  é a rigidez axial das barras normais e diagonais, obtidas a partir das constantes do material, como se indicou no capítulo 2.
- $L_c$  é o comprimento dos elementos normais.
- $A_f$  é a área de influência da barra, ou seja, a área transversal formada com a sua ruptura, podendo ser expressa na seguinte forma  $A_f = c_A L_c^2$ , onde  $c_A$  é um coeficiente geométrico próprio do modelo cúbico igual a 0,1385.
- $G_f$  é a energia consumida por unidade de área de fratura formada (energia específica de fratura).
  - $k_r$  é um parâmetro chamado de ductilidade, que permite calcular a deformação  $\varepsilon_r$  para a qual a barra não transmite mais esforços de tração ( $\varepsilon_r = K_r \varepsilon_p$ ), sendo que

$$k_r = \frac{2c_A}{\lambda \cdot R_f \cdot L_c} \quad (3.16)$$

Na equação (3.16),  $\lambda$  é um parâmetro que depende se o elemento é normal ou diagonal e permite relacionar  $E_A$  e  $E$  como segue [ $E_A = \lambda E L_c^2$ ]. As formas de  $\lambda$  podem ser encontradas no capítulo 3.

Para as barras de aço foram empregadas relações constitutivas correspondentes a materiais elasto-plástico com o critério de descarga proposto por Iturrioz (1995).

### 3.3.2 OBSERVAÇÕES SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO DO CRITÉRIO DE RUPTURA UTILIZADO

- É importante salientar que  $\varepsilon_p$ ,  $E$ ,  $P_{cr}$ ,  $R_f$  e  $G_f$  são consideradas propriedades exclusivas do material enquanto  $A_f$  e  $L_c$  são propriedades exclusivas do modelo, já  $K_r$  e  $E_A$  dependem tanto do modelo como do material.

- De forma análoga ao demonstrado na seção anterior, pode-se provar que o critério constitutivo utilizado é objetivo frente a discretização do modelo.
- Um condicionante do modelo na definição de  $L_c$  é a seguinte:
- Quando um elemento rompe, toda energia de deformação acumulada nele é consumida no processo de fratura. Isto não é o que acontece na realidade, pois parte da energia de deformação é preservada sob as formas energia cinética (vibrações induzidas) e energia elástica, nas duas partes em que o elemento se divide. Como não é possível levar em conta esta subdivisão para um elemento isolado (pois as massas estão concentradas nos nós, e não ao longo do seu comprimento), isto resulta numa restrição em termos de um valor máximo para o comprimento  $L_c$ .
- Uma discussão sobre a influência dos diversos parâmetros mencionados no comportamento do modelo é apresentada por Rocha (1989).

### 3.3.2 INCLUSÃO DA NÃO HOMOGENEIDADE DO MATERIAL ATRAVÉS DA ALEATORIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES

No estudo de materiais como concreto, é necessário incluir a não homogeneidade do material no modelo. Isto pode ser feito introduzindo aleatoriedade na definição das propriedades geométricas, nas propriedades mecânicas ou em ambas. Uma recopilção completa sobre várias formas de incorporar a não homogeneidade pode ser encontrada no trabalho de Schlangen (1993).

No modelo apresentado originalmente por Rocha (1989), incorpora-se a aleatorização definindo a energia específica de fratura  $G_f$  como um campo aleatório. Posto que  $G_f$  define indiretamente a resistência local à propagação da fratura, isto implica, naturalmente, numa resistência variável através do volume, característica que deseja conferir ao modelo. Isto fica evidente ao observar a equação (3.15), onde  $\varepsilon_p$  é função de  $G_f$ .

A partir das hipóteses feitas anteriormente, pode-se introduzir aleatoriedade no modelo através de uma função de distribuição de probabilidade para  $G_f$ . A definição das características do campo aleatório associado a  $G_f$  está vinculada a um comprimento de

correlação que, para simplificar a implementação numérica, foi adotado igual ao comprimento do módulo básico crítico  $L_c$ . Isto é uma limitação na implementação numérica, pois vincula a discretização às características do material empregado. No caso do concreto, o comprimento é adotado aproximadamente igual ao dobro do tamanho máximo do agregado. No modelo proposto por Iturrioz (1995), o campo aleatório  $G_f$  é gerado admitindo uma distribuição de probabilidade Weibull com dois parâmetros, dada pela expressão:

$$f_w(G_f) = 1 - e^{-\left(\frac{G_f}{\beta}\right)^\gamma} \quad (3.17)$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são, respectivamente, os parâmetros de escala e de forma. Estes parâmetros podem ser expressos em termos do valor esperado,  $E[G_f]$ , e do coeficiente de variação,  $CV[G_f]$ , que são os parâmetros de entrada no programa computacional. Neste trabalho se dá ênfase ao problema da simulação das propriedades dos materiais tornando independente a geração da malha das propriedades do mesmo (ver Capítulo 4).

#### 4. CARACTERÍSTICAS ALEATÓRIAS DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS E APLICAÇÕES A PROBLEMAS ESTÁTICOS:

##### 4.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS:

Em estudos anteriores tratou-se da representação da heterogeneidade das propriedades mecânicas do material modelado através da introdução da aleatoriedade do parâmetro  $G_f$ , pois segundo a teoria da MELF ele seria o parâmetro empregado no próprio critério de ruptura. Assim, sendo  $G_f$  um parâmetro que definiria a resistência local à propagação da fratura, sua aleatorização implica naturalmente em uma resistência variável através do volume.

Assim, foi introduzida dita aleatoriedade na teoria através da definição de uma função de distribuição de probabilidade para  $G_f$ . Obviamente esta função é uma propriedade do material, e mais importante do que isto é caracterizada principalmente pelo comprimento de correlação  $L_c$ . Dito comprimento representa em alguma medida a “textura” do material, ou ainda uma dimensão dentro da qual as propriedades podem ser consideradas uniformes. Foi admitida para a função de densidade de probabilidade de  $G_f$  a distribuição de Weibull de dois parâmetros (Rocha, 1989). Tornou-se necessário neste ponto tornar independentes o tamanho dos elementos e o comprimento de correlação de  $G_f$  o que limitava a possibilidade de modelar determinados problemas, sendo então encarado o problema da introdução da aleatoriedade mediante um novo esquema de simulação.

Até a atualidade vários métodos foram desenvolvidos para resolver um grande número de problemas da mecânica que envolvam variáveis aleatórias descritas por processos ou campos estocásticos. A simulação de Monte Carlo parece ser o método universalmente usado para prover soluções de problemas em mecânica estocástica envolvendo não-linearidade, estabilidade aleatória, excitações paramétricas, grandes deformações, etc. A maior vantagem da simulação de Monte Carlo é que soluções precisas podem ser obtidas para qualquer problema cuja solução

determinística (analítica ou numérica) é conhecida. Em contrapartida, a maior desvantagem da simulação está no seu alto custo computacional. Uma das mais

importantes partes da metodologia da simulação de Monte Carlo é a geração de amostras de funções do campo ou processo aleatório envolvidos no processo. As amostras geradas devem descrever precisamente as características aleatórias do correspondente processo ou campo, que pode ser estacionário ou não estacionário, homogêneo ou não homogêneo, unidimensional ou multidimensional, normal ou não gaussiano.

Entre os vários métodos disponíveis para a geração de funções amostra de processos ou campos aleatórios, o método de representação espectral é um dos mais amplamente usados na atualidade. Embora a concepção do método para uma dimensão e uma variável exista desde 1954 (Rice), foi Shinosuka (1972) quem primeiro o aplicou para a simulação de campos não estacionários bi ou multidimensionais. Também Yang (1972,1973) demonstrou que a técnica da Transformada de Fourier pode ser usada, para reduzir o tempo computacional. Shinosuka e Yamazaki (1988) desenvolvem uma técnica iterativa para simular um campo aleatório não gaussiano que, como consequência, aumenta o custo computacional requerido. Neste trabalho optou-se pela utilização do método de representação espectral para a simulação de um campo aleatório gaussiano, como se descreve a seguir.

#### 4.2 FORMULAÇÃO TEÓRICA DO MÉTODO DE REPRESENTAÇÃO ESPECTRAL.

A formulação descrita a seguir foi apresentada por Shinosuka e Deodatis (1996). Seja  $f(x_1, x_2)$  um campo aleatório bidimensional, homogêneo com média igual a zero (sem perda de generalidade), função de autocorrelação  $R_{f_0}(\xi_1, \xi_2)$  e função de densidade espectral de potência  $S_{f_0}(\kappa_1, \kappa_2)$ . Assim, as seguintes relações podem ser estabelecidas:

$$E[f_0(x_1, x_2)] = 0 \quad (4.1)$$

$$E[f_0(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2)f_0(x_1, x_2)] = R_{f_0}(\xi_1, \xi_2) \quad (4.2)$$

$$S_{f_0}(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{f_0}(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\kappa_1 \xi_1 + \kappa_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.3)$$

Onde  $E$  indica a esperança matemática,  $\xi_1$  e  $\xi_2$  denotam a de separação nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente e  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são os respectivos números de onda. A equação anterior corresponde a uma versão do par transformado de Wiener-Khintchine, sendo  $S_{f_0f_0}(\kappa_1, \kappa_2)$  uma função real e positiva além de ser simétrica com respeito à origem. Shinozuka (1996) chega à seguinte expressão para um campo bidimensional:

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} [A_{n_1 n_2} \cos(\kappa_{1n_1} x_1 + \kappa_{2n_2} x_2 + \Phi_{n_1 n_2}^{(1)}) + \hat{A}_{n_1 n_2} \cos(\kappa_{1n_1} x_1 - \kappa_{2n_2} x_2 + \Phi_{n_1 n_2}^{(2)})] \quad (4.4)$$

Na equação (4.4),  $\phi_{n_1 n_2}^{(1)}$  e  $\phi_{n_1 n_2}^{(2)}$  com  $n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ ;  $n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1$ , são dois ângulos de fase aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo  $[0, 2\pi]$ ,  $A_{n_1 n_2}$  e  $\hat{A}_{n_1 n_2}$  estão definidos pelas seguintes equações:

$$A_{n_1 n_2} = \sqrt{2S_{f_0f_0}(\kappa_{1n_1}, \kappa_{2n_2}) \Delta\kappa_1 \Delta\kappa_2} \quad (4.5)$$

$$\hat{A}_{n_1 n_2} = \sqrt{2S_{f_0f_0}(\kappa_{1n_1}, -\kappa_{2n_2}) \Delta\kappa_1 \Delta\kappa_2} \quad (4.6)$$

onde:

$$\kappa_{1n_1} = \Delta\kappa_{1n_1} n_1, \quad \kappa_{2n_2} = \Delta\kappa_{2n_2} n_2 \quad (4.7)$$

$$\Delta\kappa_1 = \frac{\kappa_{1u}}{N_1}, \quad \Delta\kappa_2 = \frac{\kappa_{2u}}{N_2} \quad (4.8)$$

$$A_{0n_2} = A_{n_10} = 0 \quad \text{para} \quad n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1 \quad \text{e} \quad n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1$$

$$\hat{A}_{0n_2} = \hat{A}_{n_10} = 0 \quad \text{para} \quad n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1 \quad \text{e} \quad n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1$$

e:

$$S_{f_0f_0}(0, \kappa_2) = S_{f_0f_0}(\kappa_1, 0) \quad \text{para} \quad -\infty < \kappa_1 < \infty \quad \text{e} \quad -\infty < \kappa_2 < \infty \quad (4.11)$$

Os valores de  $\kappa_{1u}$  e  $\kappa_{2u}$  são os limites de corte de onda correspondentes aos eixos  $x_1$  e  $x_2$  no domínio do espaço respectivamente. Isto implica que a função densidade espectral de potência é considerada nula por razões matemáticas ou físicas, fora da região definida por:

$$-\kappa_{1u} \leq \kappa_1 \leq \kappa_{1u}, -\kappa_{2u} \leq \kappa_2 \leq \kappa_{2u} \quad (4.12)$$

Como a função densidade espectral de potência é simétrica, as expressões (4.5) e (4.6) tem o mesmo valor, podendo-se então simplificar a equação (4.4). As condições indicadas nas equações (4.9) e (4.10) são necessárias, e devem ser forçadas em caso de não se cumprir, para garantir que a média espacial e a função de correlação da função simulada e a real sejam as mesmas.

Os pontos onde a função pode ser simulada deverão estar separados segundo os eixos  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, pelos incrementos  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$ , onde ditos incrementos devem satisfazer o critério indicado na equação (4.13), com o objetivo de evitar o efeito de dobra de frequência.

$$\Delta x_1 \leq \frac{2\pi}{2\kappa_{1u}} \quad ; \quad \Delta x_2 \leq \frac{2\pi}{2\kappa_{2u}} \quad (4.13)$$

Já para o caso tridimensional que nos interessa para poder representar as características estocásticas dos materiais e, em especial o concreto, a expressão anterior assume a forma indicada na eq. (4.14).

Na equação (4.14), assim como na eq.(4.4), os valores  $\phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1)}, \dots, \phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4)}$  são ângulos de fase com valores distribuídos uniformemente no intervalo  $[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = & \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} A_{n_1 n_2 n_3} \\ & \left[ \cos(\kappa_{1n_1} x_1 + \kappa_{2n_2} x_2 + \kappa_{3n_3} x_3 + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1)}) + \right. \\ & \cos(\kappa_{1n_1} x_1 + \kappa_{2n_2} x_2 - \kappa_{3n_3} x_3 + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2)}) + \\ & \cos(\kappa_{1n_1} x_1 - \kappa_{2n_2} x_2 + \kappa_{3n_3} x_3 + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3)}) + \\ & \left. \cos(\kappa_{1n_1} x_1 - \kappa_{2n_2} x_2 - \kappa_{3n_3} x_3 + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4)}) \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pode-se apreciar nas eq. (4.5) e (4.6), que para determinar o valor da função em um ponto dado do campo aleatório é necessário o conhecimento dos valores da função densidade espectral

de potência do processo que está sendo modelado. Assim, surge a necessidade de escolher uma expressão para tal distribuição, sendo escolhida no presente trabalho uma função que pode ser expressa em função da equação (4.15). A mesma foi escolhida baseada na consideração da forma da função densidade de probabilidade de potência para a energia específica de fratura do concreto considerado como processo aleatório. (ver referencia)

$$S_{f_0}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \frac{8a_0^2\eta}{\pi\eta^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2} \quad (4.15)$$

onde:

$$\eta = \frac{1}{2L_c} \quad (4.16)$$

sendo  $L_c$  a longitude de correlação do campo aleatório a ser simulado.

$$a_0^2 = E[G_f]^2 \times [1 + CV^2] \quad (4.17)$$

### 4.3 CONSIDERAÇÕES DE VALORES EXTREMOS:

A função  $f(x_1, x_2, x_3)$  que define o valor do campo aleatório em cada ponto do espaço que está sendo simulado, pode tomar valores que variam entre os limites calculados com a expressão (4.14) tendo um valor médio nulo, mas é necessário fazer uma transformação para que a mesma tenha valor médio unitário para depois multiplicar pelo valor esperado mantendo o correspondente desvio padrão, além de não ser permitido que assumam valores negativos, pois isto implicaria propriedades negativas dos materiais. Assim, foi necessária a abordagem da Teoria de Valores Extremos, (Nanni e Riera, 1986)

Os valores esperados do máximo e mínimo podem ser determinados respectivamente pelas expressões (4.18) e (4.19).

$$E [ X_{(N)} ] = X + \xi_N \sigma_x \quad (4.18)$$

$$E [ X_{(1)} ] = X - \xi_N \sigma_x \quad (4.19)$$

onde  $\xi_N$  é o valor esperado da 1ª estatística de ordem, e pode ser calculado pela seguinte expressão, (Nanni e Riera, 1986)

$$\xi_N = [ \ln (N - 0.918 \ln N) ]^{0.604} \quad (4.20)$$

na qual N é o número de elementos não correlacionados (barras do modelo). A partir das expressões (4.18, 4.19 e 4.20) chega-se a seguinte expressão para o coeficiente de variação de origem:

$$\sigma_x = E [ X_{(N)} ] - E [ X_{(1)} ] / 2 \xi_N \quad (4.21)$$

Assim escolhendo para a nova variável a expressão (4.22), seu valor esperado é o indicado na expressão (4.23), a sua variância pela expressão (4.24), o que permite determinar um valor para o coeficiente “a” determinado de acordo à eq (4.25).

$$\ddot{O} = ( 1 - X(i) / a ) \quad (4.22)$$

$$E[\ddot{O}] = 1 - 1/a E[ X ] = 1 \quad (4.23)$$

$$\sigma_{\ddot{O}}^2 = 1 / a^2 \sigma_X^2 \quad (4.24)$$

$$a = \xi_N \sigma_{\ddot{O}} / E [ X_{(N)} ] - E [ X_{(1)} ] \quad (4.25)$$

#### 4.4 APLICAÇÕES A PROBLEMAS ESTÁTICOS DA METODOLOGIA PROPOSTA

Embora o método seja altamente eficiente para o caso de cargas dinâmicas, também é possível fazer a análise de problemas com cargas estáticas ou quase-estáticas. A seguir são analisados dois exemplos, um de concreto simples, caso das placas ensaiadas por Kupfer (1973), já

estudado por Iturrioz (1995) com a anterior limitação, outro de concreto armado, consistente em uma viga parede ensaiada por Lehwalter (1988).

Em todos os casos foi usada igual quantidade de termos nas séries das eq (4.5 e 4.6),  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  sendo iguais a 16.

#### 4.4.1 PLACAS ENSAIADAS POR KUPFER (1973)

Levando em conta que uma placa de concreto submetida a um estado bidimensional de tensões constitui o caso mais simples de estrutura laminar, foram realizados alguns testes neste sentido para verificar o desempenho do modelo teórico submetido a solicitações membranais. Para realizar tal comprovação, foram utilizados os resultados obtidos por Kupfer (1973) quem testou uma série de placas de 20x20x5 cm submetidos a uma solicitação axial sob deslocamentos controlados a baixa velocidade, no plano da placa.

A partir dos resultados obtidos, Kupfer propôs expressões empíricas para representar a resistência das placas testadas no espaço das tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . É importante salientar que, durante os ensaios, se teve cuidado especial para não induzir tensões cortantes nas faces das placas ao aplicar as cargas.

Este mesmo problema foi modelado por Iturrioz e Riera (1995), só que com as limitações que possuía o algoritmo, portanto assim foram empregados elementos cúbicos de 30 mm de modo a formar uma placa de 21x21x12 cm, ou seja, medidas diferentes dos corpos de prova ensaiados por Kupfer. Isto aconteceu porque o comprimento do módulo elementar  $L_{co}$  era função do tamanho máximo do agregado, ou seja, propriedade do concreto, e porque se comprovou que a peça submetida à compressão nas duas direções deve ter vários módulos na direção da espessura. Se esta condição não era cumprida, o modelo ficava enfraquecido nessa direção e, quando a forma de ruptura é por tração indireta na direção da espessura, os resultados numéricos não modelam corretamente o fenômeno físico.

Assim, foram modelados as placas ensaiadas, com 16x16x4 elementos de 1,25mm de comprimento, constituindo uma placa de 20x20x5cm, já que o tamanho do elemento não precisa estar ligado ao comprimento de correlação da energia específica de fratura  $G_f$ . A partir dos dados apresentados na Tabela 4.4-1, foi possível estabelecer ou escolher os dados necessários para a geração do modelo teórico.

- O valor esperado da energia específica de fratura,  $E[G_f]$ , é obtido a partir das expressões fornecidas pelo FIP-CEB.
- Para  $CV_{[G_f]}$ ,  $D_f$  e  $R_p$  foram arbitrados valores plausíveis, os quais precisam verificação experimental.
- Ao igual que no modelo de Iturrioz (1995), foi considerado que o módulo de Young do concreto é também um campo aleatório. A deformação crítica  $\epsilon_p$  é, como foi explicado anteriormente, um campo aleatório que deriva do valor de  $G_f$ . Os campos aleatórios de  $\epsilon_p$  e  $E_c$  foram considerados perfeitamente correlacionados.

Na tabela 4.4.1 são indicadas as propriedades mecânicas de interesse para realizar a comparação. Na tabela 4.4.2 estão indicados os parâmetros adicionais usados para definir o modelo teórico das placas ensaiadas por Kupfer. A excitação é aplicada em termos de deslocamentos prescritos como indicado na Figura 4.4-1, cuidando de não introduzir distorções nas faces da placa.

**Tabela 4.4.1: Propriedades do material a ser modelado.**

|          |                           |
|----------|---------------------------|
| $f_{tk}$ | 1,4E6 N/m <sup>2</sup>    |
| $f_{ct}$ | 19,1E6 N/m <sup>2</sup>   |
| $E_c$    | 2,958E10 N/m <sup>2</sup> |
| $\nu$    | 0,19                      |

|            |                        |
|------------|------------------------|
| $\rho$     | 2400 kg/m <sup>3</sup> |
| $d_{\max}$ | 15 mm                  |

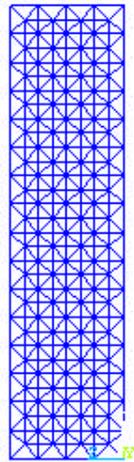
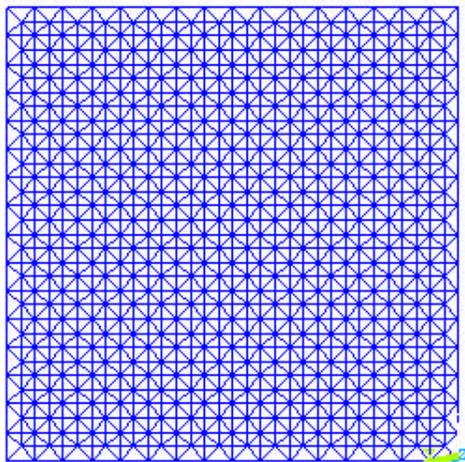
**Tabela 4.4-2: Parâmetros usados na simulação numérica do problema.**

|              |                            |
|--------------|----------------------------|
| $L_{co}$     | 12,5 mm                    |
| $E [G_f]$    | 47 N/m                     |
| $CV [G_f]$   | 25%                        |
| $R_{fc}$     | 1,236 m <sup>(-1/2)</sup>  |
| $E [E_c]$    | 2,958 E10 N/m <sup>2</sup> |
| $CV [E_c]$   | 25%                        |
| $\epsilon_p$ | 5E-5                       |

Foram realizadas quatro combinações de relações de deslocamentos diferentes, a saber: tração biaxial, compressão biaxial da mesma magnitude nos dois sentidos, compressão unidirecional e tração unidirecional.

Na Figura 4.4-2, estão representados os resultados da simulação para os diferentes casos analisados, mostra-se também as curvas obtidas por Kupfer (1973), sendo possível apreciar uma boa correspondência dos mesmos. Na 4.4-3 é apresentado o esquema de ruptura encontrado para o caso de tração uniaxial para uma simulação, na Figura 4.4-4 é apresentado um esquema do esquema de ruptura encontrado para o caso de tração biaxial, na Figura 4.4-5 o correspondente ao caso de compressão uniaxial, e finalmente na Figura 4.4-6 o correspondente ao caso de compressão biaxial, todos estes obtidos por simulação numérica com o modelo proposto para uma das simulações. Nas figuras acima referidas foram indicadas em azul as barras que ainda apresentam resistência aos esforços, enquanto em amarelo as barras que atingiram a ruptura.

a)



c)

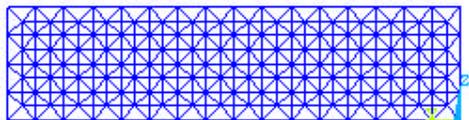
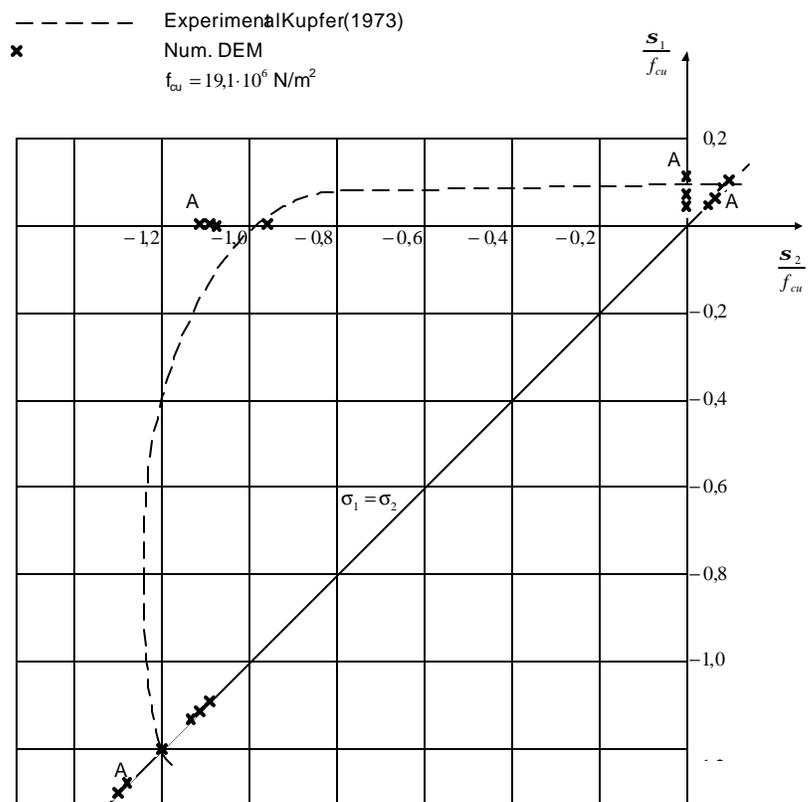
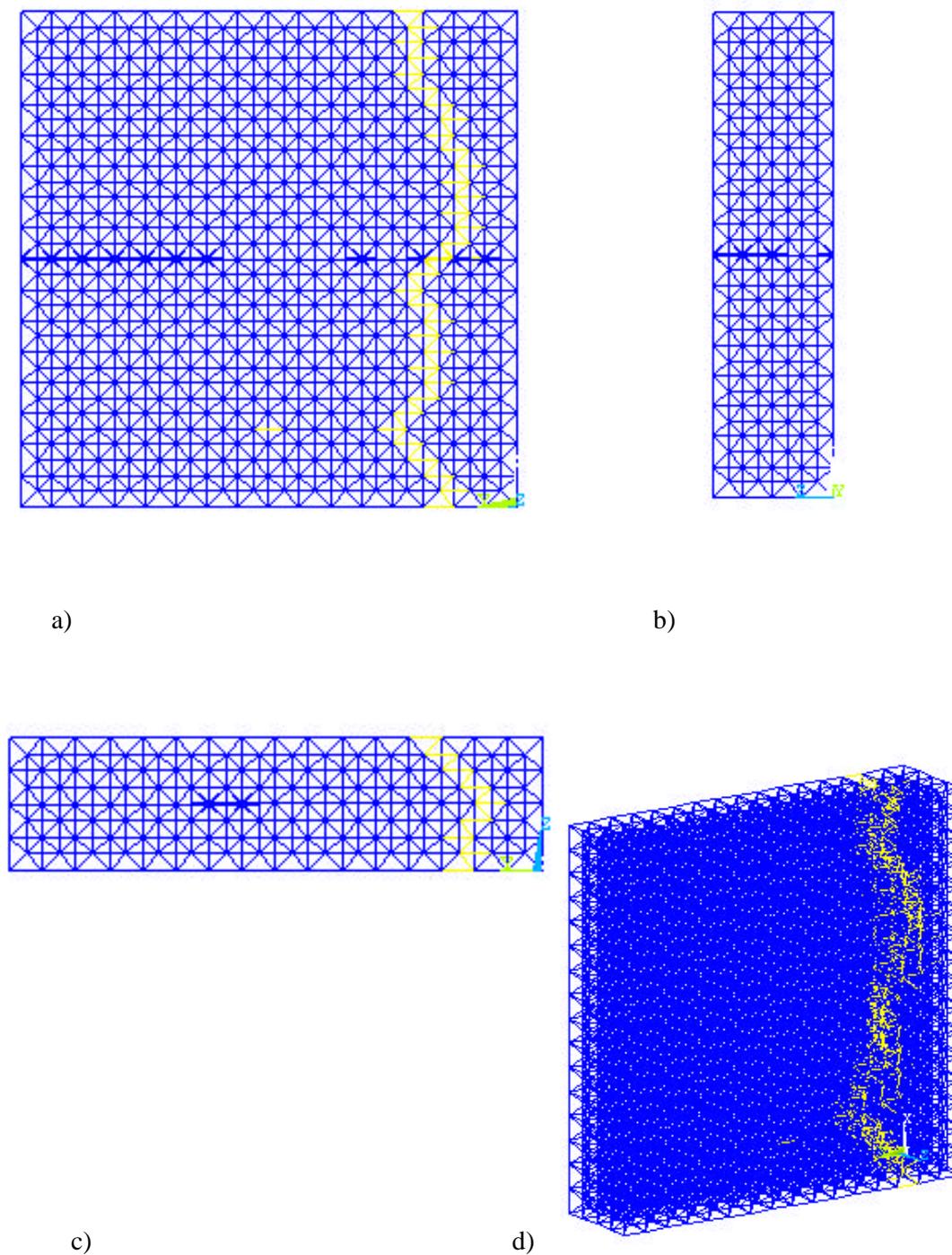


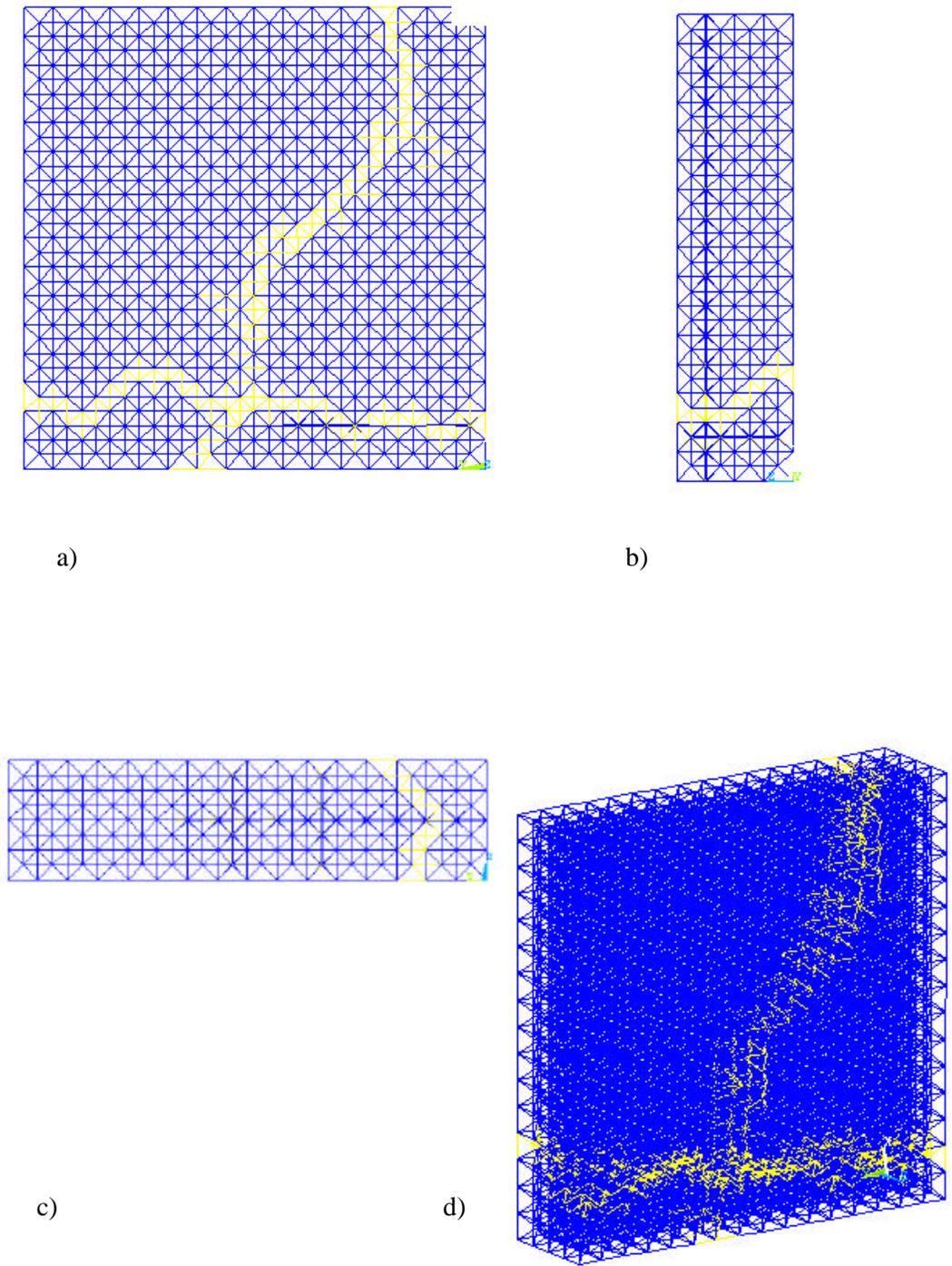
Figura 4.4-1: Esquema do modelo numérico da placa ensaiada por Kupfer. a) vista frontal, b) lateral esquerda e c) lateral inferior.



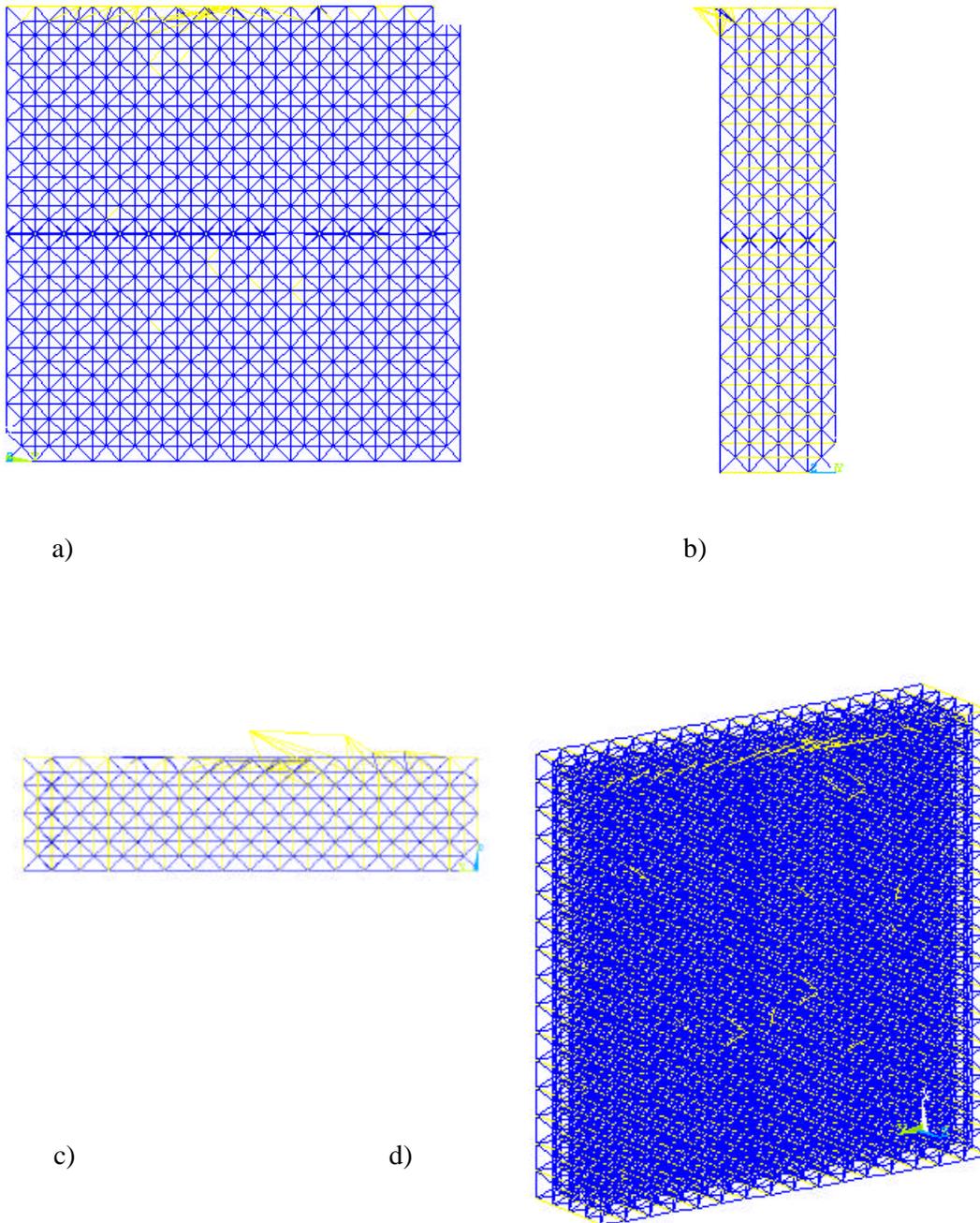
**Figura 4.4-2: Resultados obtidos nas simulações para diferentes combinações de cargas.**



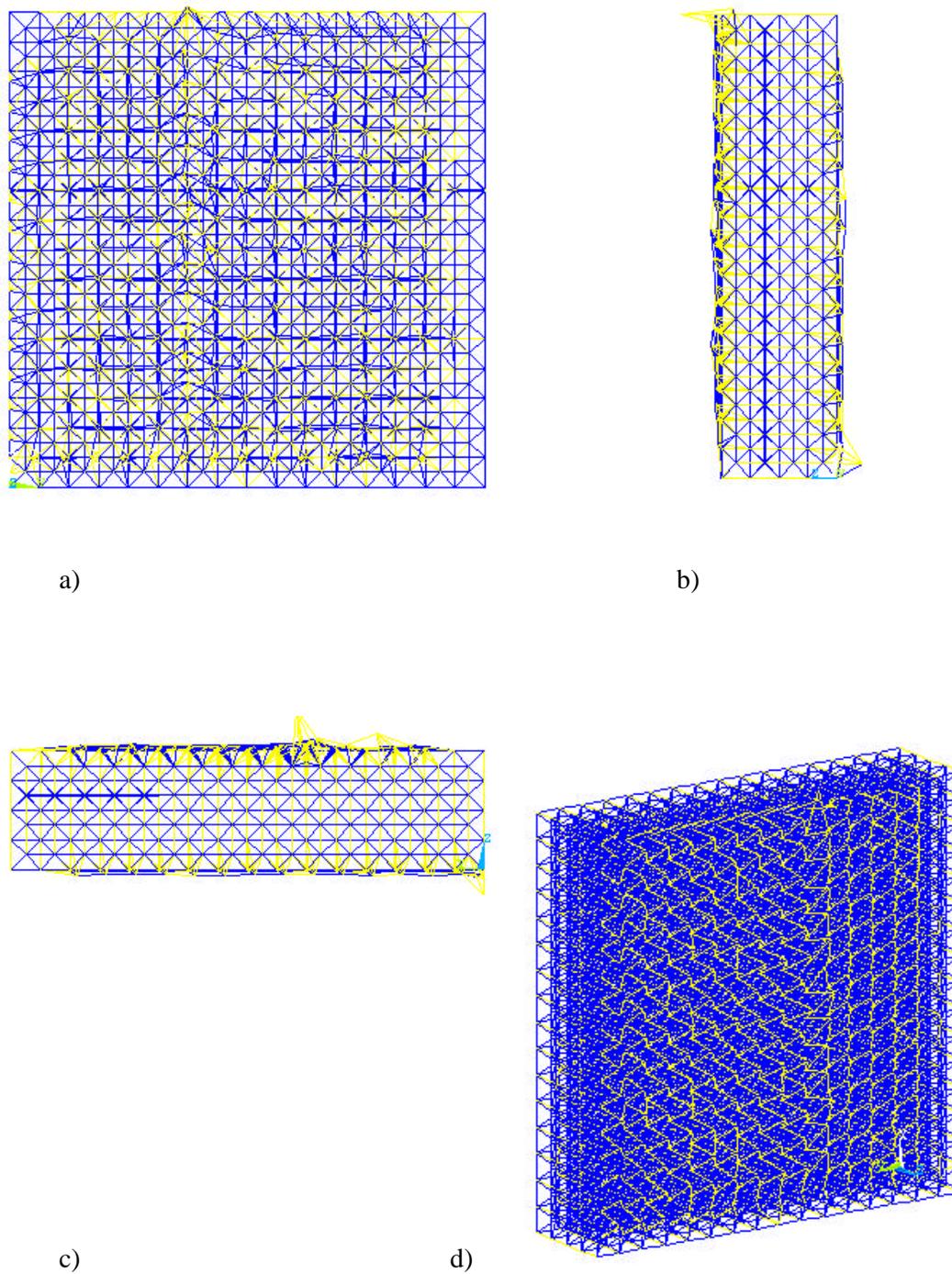
**Figura 4.4-3: Esquema do modo de ruptura para o caso de tração uniaxial. a) vista frontal, b) vista lateral, c) vista superior e d) perspectiva.**



**Figura 4.4-4: Esquema do modo de ruptura para o caso de tração bi-axial. a) vista frontal, b) vista lateral, c) vista superior e d) perspectiva.**



**Figura 4.4-5: Esquema do modo de ruptura para o caso de compressão uniaxial. a) vista frontal, b) vista lateral, c) vista superior e d) perspectiva.**



**Figura 4.4-6: Esquema do modo de ruptura para o caso de compressão bidireccional. a) vista frontal, b) vista lateral, c) vista superior e d) perspectiva.**

#### 4.4.2 APLICAÇÃO A VIGAS PAREDES DE CONCRETO ARMADO

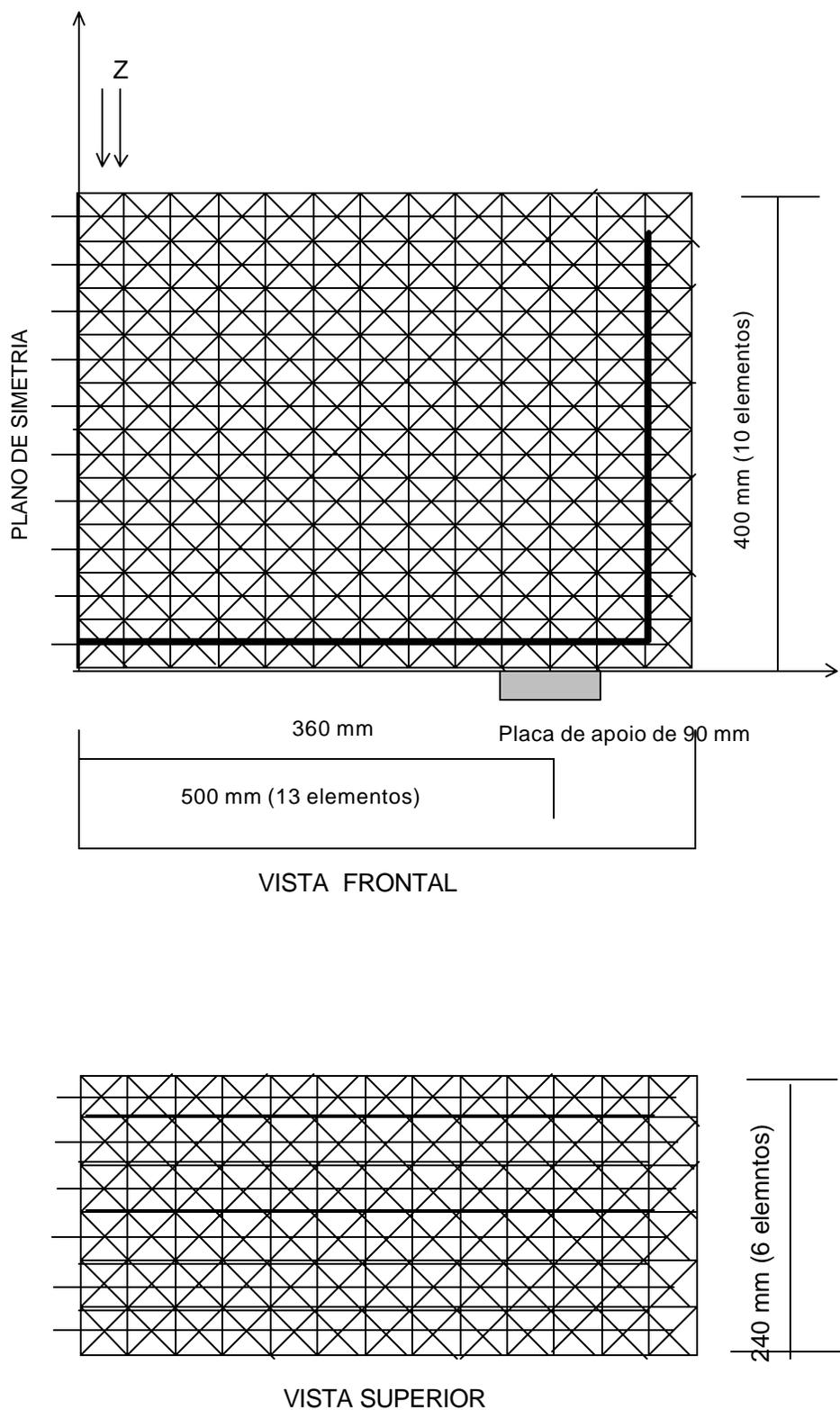
Foi modelada também uma viga parede V023 ensaiada por Lehwalter (1988), e analisada por Feenstra P.H. et all. (1993). A mesma consiste em vigas de 360 mm de altura e um vão de 720 mm, sendo a espessura de 250 mm. Somente foi modelada a metade da viga, aproveitando as condições de simetria. A armadura principal consiste em barras de aço num total de 1020 mm<sup>2</sup> de área transversal. A Figura 4.4-7 mostra um esquema da viga modelada, para o qual foram empregados 13x6x10 elementos de 0,04 m nas direções x, y e z respectivamente.

A carga é aplicada na superfície superior mediante o uso de uma placa considerada rígida de 5 cm de comprimento. Também o apoio foi realizado com uma placa rígida de 9 cm. As propriedades dos materiais a serem modelados estão indicadas na Tabela 4.4-4.

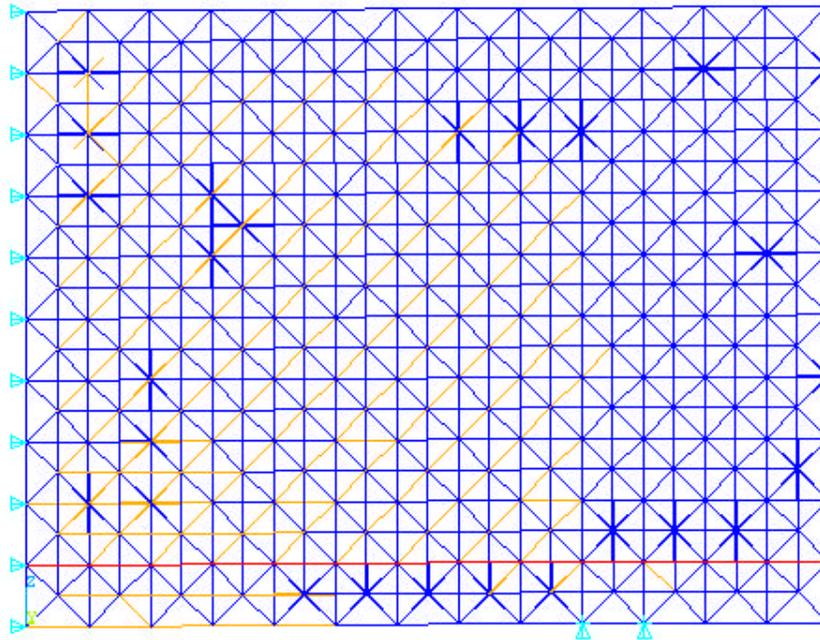
Nas Figura 4.4-8 e Figura 4.4-9, mostra-se o esquema de ruptura obtido nesta simulação e na Figura 4.4-10 o esquema apresentado por Lehwalter(1988). Na figura 4.4-11, são apresentadas as curvas carga-deslocamento obtidas por simulação e a correspondente ao modelo de Lehwalter (1993), também é indicado o valor limite da carga obtida em ensaios experimentais.

**Tabela 4.4.2: Propriedades dos materiais do modelo de Lewalter (1993).**

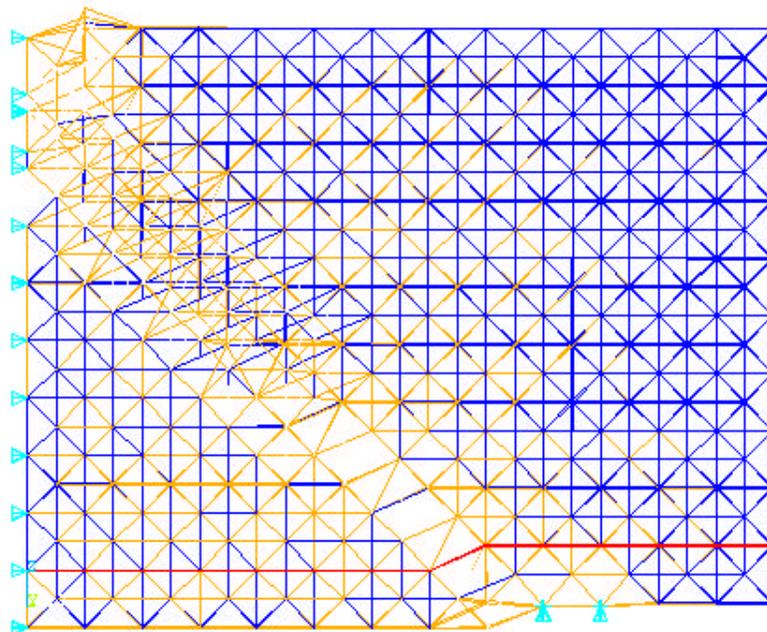
| CONCRETO   |                          |
|------------|--------------------------|
| $f_{cm}$   | 20 MPa                   |
| $f_{ct,m}$ | 2,0 MPa                  |
| $E[E_c]$   | $3,0 \times 10^{10}$ Pa  |
| $\nu$      | 0,15                     |
| $E[G_p]$   | 100 Nm/m                 |
| $\rho$     | 2400 kg/m <sup>3</sup>   |
| $CV(G_p)$  | 15 %                     |
| AÇO        |                          |
| $E[E_s]$   | $2,10 \times 10^{11}$ Pa |
| $f_{yk}$   | 420-500 MPa              |



**Figura 4.4-7: Esquema empregado para modelar a viga parede v023 ensaiada por Lehwalter.**



**Figura 4.4-8: Esquema de fissuração perto da carga máxima.**



**Figura 4.4-9: Esquema de fissuração após atingida a carga máxima.**

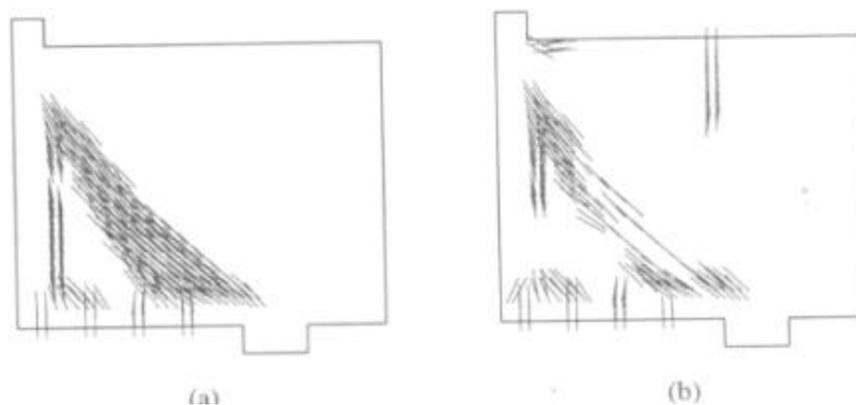


Figura 4.4-10: esquema de fissuração obtido por Lehwalter (1988).

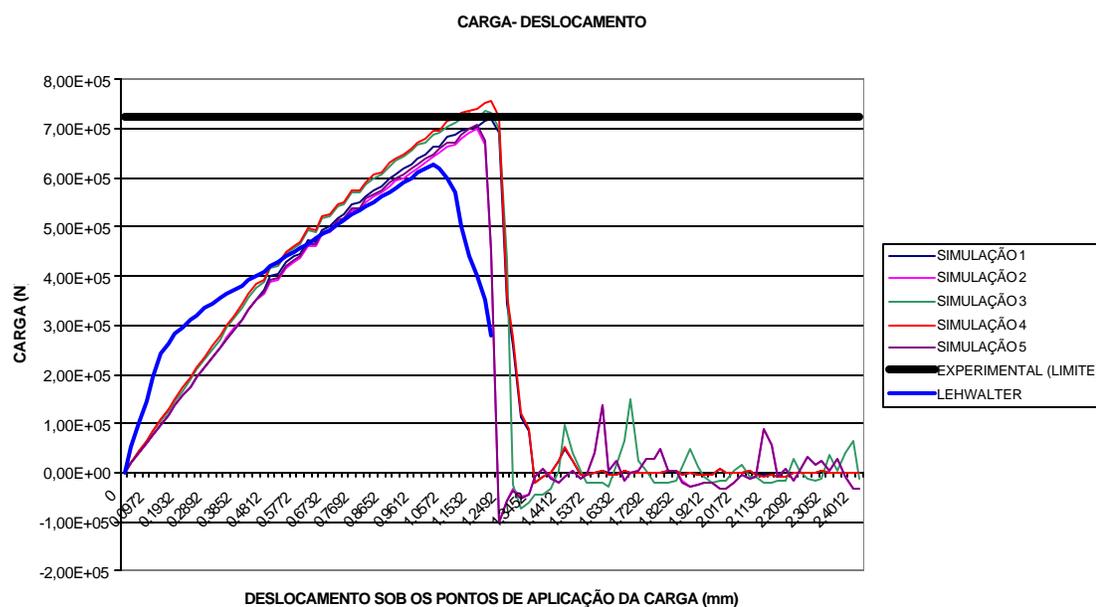


Figura 4.4-11: Curvas carga-deslocamento experimental, simulação com DEM e resultados de Lehwalter (1988).

## 5 CONSIDERAÇÕES SOBRE O EFEITO DE ESCALA

### 5.1 INTRODUÇÃO

O efeito da escala é um aspecto que deve ser levado em conta em qualquer teoria física. Tal fato leva a entender porque a questão tem ocupado uma posição importante em muitos problemas de engenharia. Na mecânica dos sólidos, o principal efeito de escala relaciona o tamanho das estruturas com uma dimensão característica. Esta situação já foi analisada por Leonardo da Vinci (1500s), assim como Galileo (1638). O primeiro grande avanço nesta área se deve a Griffith (1921), quem estabeleceu os fundamentos não tão só da mecânica da fratura como também à introdução da mecânica da fratura no estudo do efeito de escala.

Cabe destacar também o trabalho de Weibull (1939) na Suíça. Weibull chegou a uma crucial conclusão: “a distribuição de valores de resistência extremamente pequena com pequena probabilidade, não pode ser adequadamente descrita por nenhuma das distribuições conhecidas”. Com os trabalhos de Weibull, os fundamentos da teoria de efeito de escala pareciam estar completos. Estudos posteriores ficariam restritos a refinamentos, justificativas e aplicações de suas teorias.

As teorias de Weibull ou a Mecânica Linear da Fratura não são porém aplicáveis a casos de materiais frágeis não homogêneos. Tais materiais são caracterizados pela existência de uma grande zona em processo de fratura com dano distribuído. Dentro desse grupo de materiais pode-se mencionar vários tipos de concretos ou argamassas de cimento, polímeros ou asfaltos, vários tipos de rochas, areias cimentadas, cerâmicas, materiais refratários, etc. Dentro de todo esse grupo acima mencionado, o material concreto é o mais amplamente utilizado e seu estudo foi iniciado por Kaplan (1961). O maior avanço nesta matéria é devido a Hillerborg et al (1976). Inspirado no critério de amolecimento e o processo de fratura plástica, este último formulou o modelo da fissura fictícia. Ao mesmo tempo, Bažant (1976) demonstrou analiticamente que a localização do dano de amolecimento em bandas gera um efeito de escala sobre deflexões pós-cargas máximas e na dissipação de energia das estruturas.

Em 1980 Bažant obteve, baseado na análise aproximada de dissipação de energia, uma fórmula simples para a lei do efeito de escala que descreve dito efeito na tensão nominal de ruptura de materiais frágeis submetidos a grandes crescimentos estáveis da fissura.

Uma outra idéia intrigante sobre o efeito de escala foi lançada por Carpinteri et al (1994, 1995 a, b, c), inspirada por estudos recentes das características fractais das fissuras em vários materiais. Carpinteri propôs que a diferença entre as características fractais das fissuras e microfissuras em diferentes escalas de observação é a principal causa do efeito de escala no concreto. Esta última idéia foi posteriormente questionada por Bažant (1997b).

Até agora, foram identificados três fenômenos básicos para explicar o efeito de escala na resistência dos sólidos:

- 1- Teoria estatística de resistência aleatória de Weibull, que leva em conta a variabilidade das propriedades mecânicas dos componentes [problema de valores extremos (min.)]
- 2- Efeito de escala da mecânica da fratura e derivados (incluindo a Teoria da redistribuição das tensões e dissipação da energia de fratura ocasionada por grandes fissuras proposta por Bažant ant.)
- 3- Teorias que podem ser consideradas uma combinação das duas anteriores (1) e (2).

Na engenharia civil, experimentos de laboratório são ferramentas essenciais para estudar o comportamento de estruturas ou dos materiais de que estas estão compostas. Quando o material sob estudo é concreto ou rocha, as dimensões reais da estrutura em geral são várias vezes maiores que as dos modelos que podem ser ensaiados em laboratório. Por este motivo tais ensaios são usualmente efetuados em escala reduzida, e como é conhecido isto induz uma dependência dos resultados com a escala escolhida. Surge assim a necessidade de um correto entendimento deste efeito de escala para poder levar os resultados experimentais para a escala da estrutura real.

Com o objetivo de verificar nesta pesquisa a capacidade do modelo proposto de prever o efeito de escala, foram simulados numericamente mediante o uso do Método dos Elementos Discretos, ensaios de tração uniaxial realizados por van Vliet et al (2000). Os

ensaios de tração foram escolhidos, pois eles constituem o mecanismo de fratura básico dos materiais frágeis. Os experimentos de Vliet et al (2000) foram realizados sob deformação controlada com o objetivo de estudar o efeito de escala sobre a resistência do material assim como a energia específica de fratura.

Também é apresentado um estudo sobre o efeito de escala em elementos lineares de concreto armado submetidos à flexão e corte analisado por Ramallo et al (1993).

## 5.2 MODELO ENSAIADO POR VAN VLIET (2000)

Normalmente é estudado o efeito de escala modelando os corpos a serem ensaiados em três dimensões, ou ao menos em duas dimensões, mas com uma seção prismática. Para o caso analisado foram usados modelos de forma de “osso” com o objetivo de garantir que na região central do modelo surjam exclusivamente tensões normais provocadas pela tração, evitando assim introduzir erros por causa do sistema de fixação de corpo. Este tipo de modelo foi escolhido porque as reduções de seção centrais de forma circular têm algumas vantagens amplamente conhecidas como, por exemplo, reduzir o efeito de concentração de tensões e oferecer melhores condições de fabricação sem introduzir danos durante o processo entre outros fatores.

Os modelos foram realizados em concreto de 50 MPa de tensão característica de compressão cúbica com agregado máximo de 8 mm. A espessura de todos os modelos foi escolhida em 100 mm. Embora van Vliet et al (2000) tenham ensaiado modelos com dimensões de 50x75 mm, estes casos não foram analisados neste trabalho principalmente pela dificuldade de representar adequadamente sem mudar as dimensões dos elementos. Assim, somente foram modelados os cinco modelos maiores. É de praxe que a menor dimensão do modelo não deva ser menor que 3 a 5 vezes a do máximo tamanho do agregado, o que justifica o tamanho estudado por van Vliet (2000). Em todos os modelos foi mantida uma espessura constante de 100 mm. As dimensões dos modelos analisados encontram-se indicadas na Figura 5.2-1. Nos ensaios realizados por van Vliet et al (2000) foram realizadas quatro séries para cada uma das dimensões, com o objetivo de determinar o comportamento estatístico dos mesmos. Já no modelo numérico apresentado neste trabalho, foram feitas cinco ou seis simulações para cada uma das dimensões. O esquema de cargas aplicado na simulação tenta reproduzir o mais fielmente possível a metodologia experimental, ou seja, aplicando

deslocamentos prescritos com taxa constante desde o início do ensaio. Neste ponto cabe destacar que, nos ensaios de van Vliet et al (2000) foi usada uma velocidade de 0.028 $\mu$ m/s, chegando em todos os casos a alongamentos da ordem de 200 a 300  $\mu$ m. Tal velocidade tornaria praticamente impossível a sua simulação com a metodologia de integração proposta neste trabalho, pois exigiria um tempo computacional excessivamente grande. Após um cuidadoso estudo dos fatores envolvidos, entre eles o balanço energético, chegou-se a uma velocidade de 0.048 mm/s para a simulação.

As propriedades mecânicas do material simulado encontram-se na Tabela 5.2-1. Com esses dados, e lembrando a expressão (2.20) para o intervalo crítico de integração, adotou-se um  $\Delta t = 3.0 \text{ E-}06 \text{ s}$ .

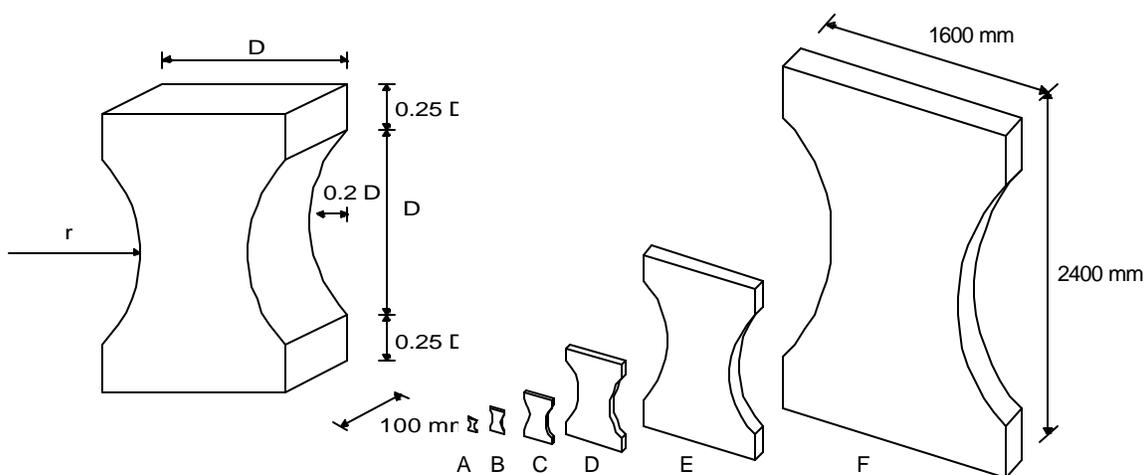
**Tabela 5.2-1: propriedades mecânicas usadas na simulação numérica.**

| PROPRIEDADE                  |        |
|------------------------------|--------|
| $f_{ck}$ (MPa)               | 45     |
| $f_{tk}$ (MPa)               | 4,5    |
| $E[E_c]$ [N/m <sup>2</sup> ] | 3,5E10 |
| $E[G_f]$ [N/m]               | 100,00 |
| $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]  | 2400   |
| $\nu$                        | 0,18   |
| CV( $G_f$ )                  | 0,30   |
| CV( $E_c$ )                  | 0,30   |
| $L_{co}$ [m]                 | 0,02   |
| $R_f$                        | 1,15   |

A Figura 5.2-2 mostra um esquema da ruptura numa simulação para o caso **D**, nela são representadas em cor azul as barras que não experimentaram dano, em cor laranja, as que se encontram no trecho descendente da curva tensão-deformação, enquanto as barras que atingiram seu limite de resistência foram excluídas. A forma escolhida por van Vliet et al (2000) tem uma importância fundamental para um ensaio em laboratório, pois como já foi

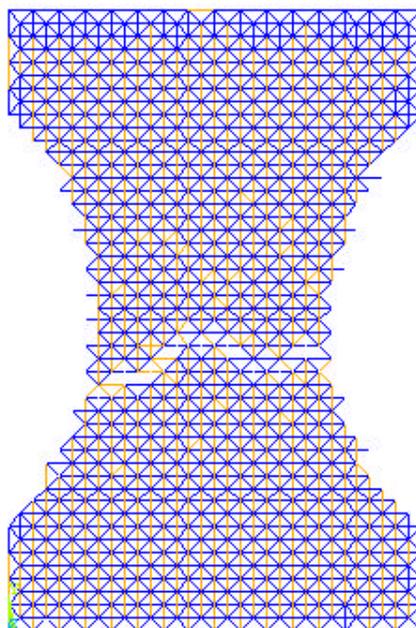
mencionado permite, entre outras vantagens, uma maior facilidade de montagem no equipamento de ensaio. Já para o caso de fazer a simulação numérica, sua forma não interfere nos resultados atingidos. Também pode ser observado na mesma figura que, a ruptura acontece como esperado, ou seja, na zona central onde existe a redução de seção transversal. Baseado nisso, e com o objetivo de reduzir o número de graus de liberdade do modelo, com a conseqüente redução do esforço computacional necessário, foi decidido simular somente uma determinada região, definida como a zona onde existe tal redução de seção.

Na Figura 5.2-4, é apresentada a evolução das energias desenvolvidas e dissipadas durante o processo de carregamento para o caso do modelo D, enquanto a Figura 5.2-3 mostra as curvas de carga deslocamento obtidas por van Vliet (2000).

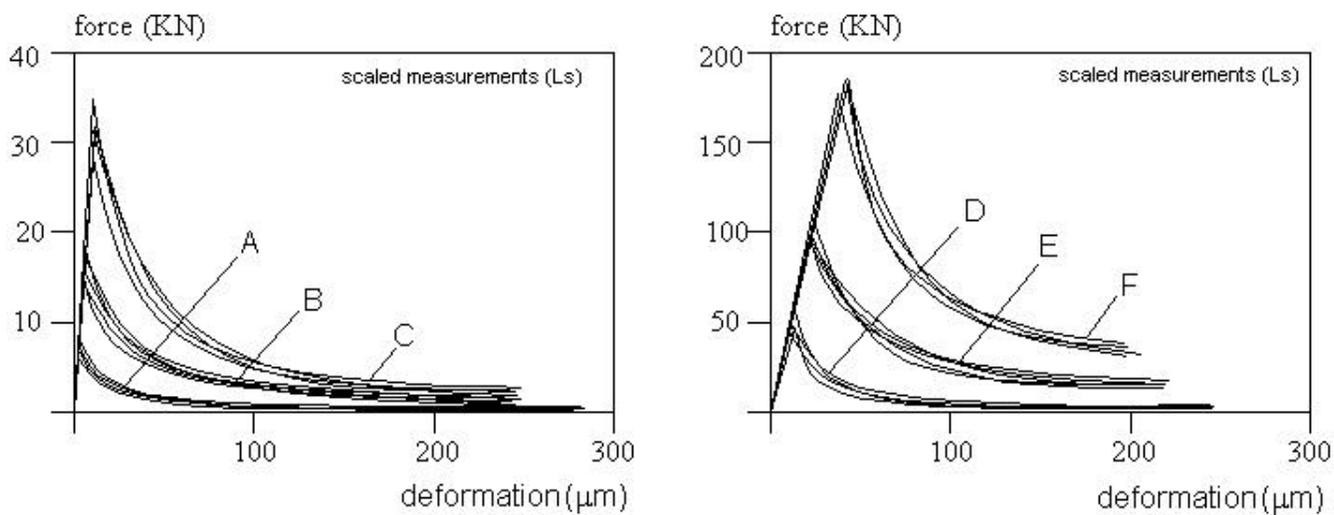


| Type   | A     | B    | C   | D   | E   | F    |
|--------|-------|------|-----|-----|-----|------|
| D [mm] | 50    | 100  | 200 | 400 | 800 | 1600 |
| R [mm] | 36.25 | 72.5 | 145 | 290 | 580 | 1160 |

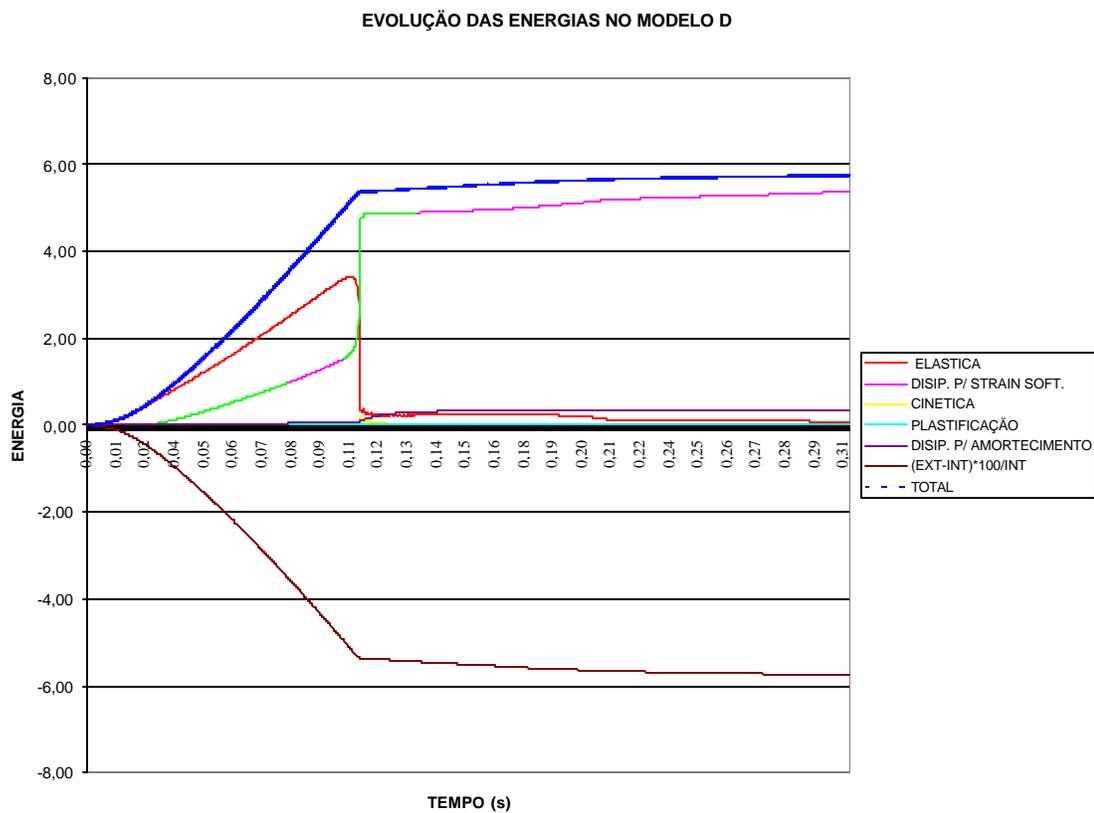
**Figura 5.2-1 : Esquema dos modelos ensaiados por van Vliet (2000).**



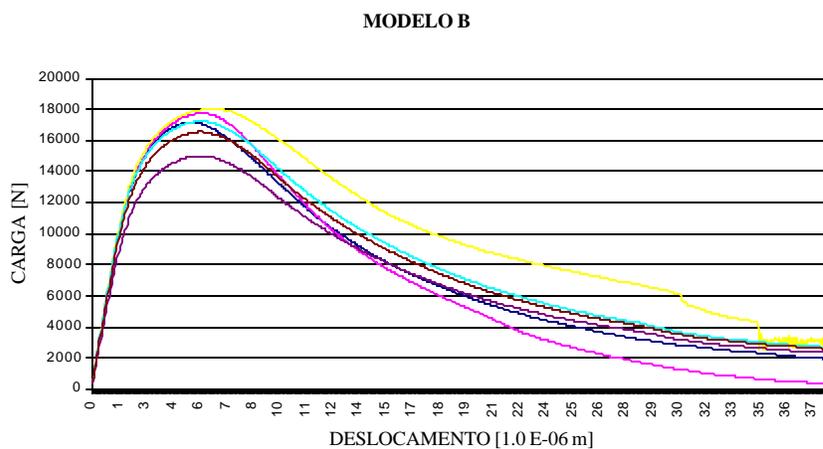
**Figura 5.2-2: Esquema completo do modelo D após atingida a carga máxima.**



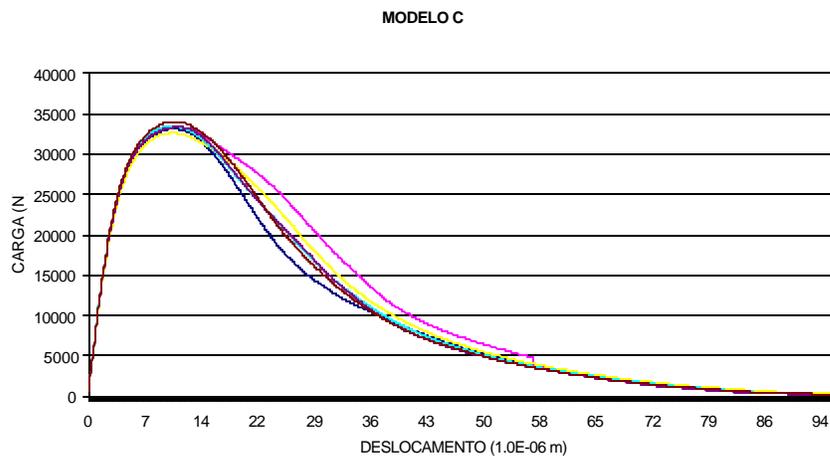
**Figura 5.2-3: Resultados obtidos nos ensaios de van Vliet (2000)**



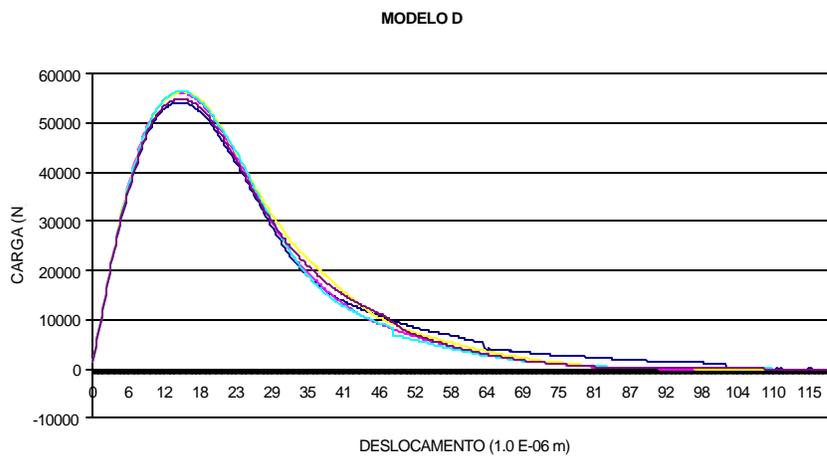
**Figura 5.2-4: Evolução das energias envolvidas no processo de carga para o modelo D.**



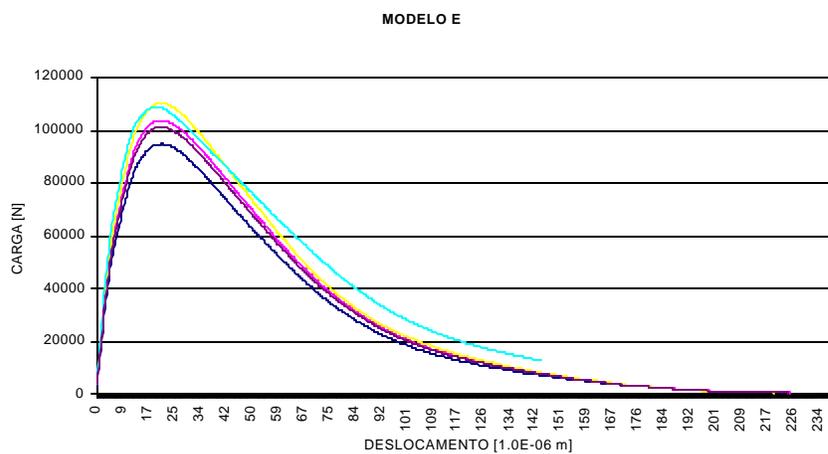
**Figura 5.2-5: Curva carga-deslocamento para as seis simulações do modelo B.**



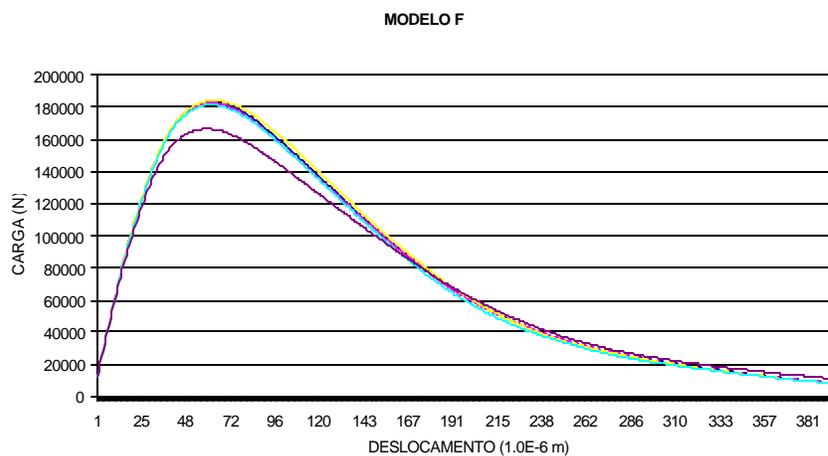
**Figura 5.2-6: Curva carga-deslocamento para as simulações do modelo C.**



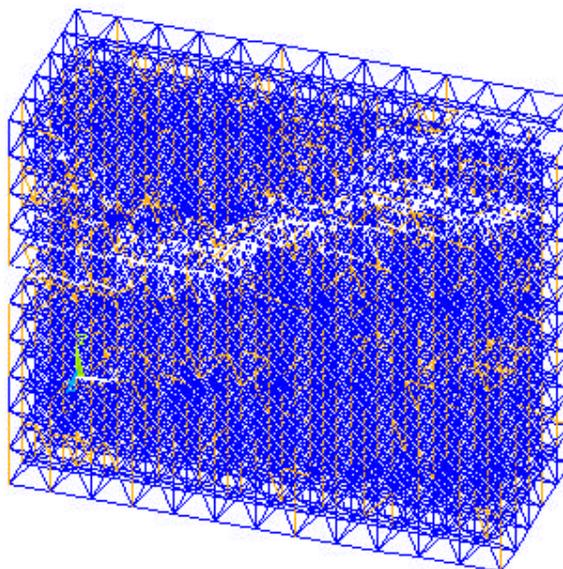
**Figura 5.2-7: Curva carga-deslocamento para as cinco simulações do modelo D.**



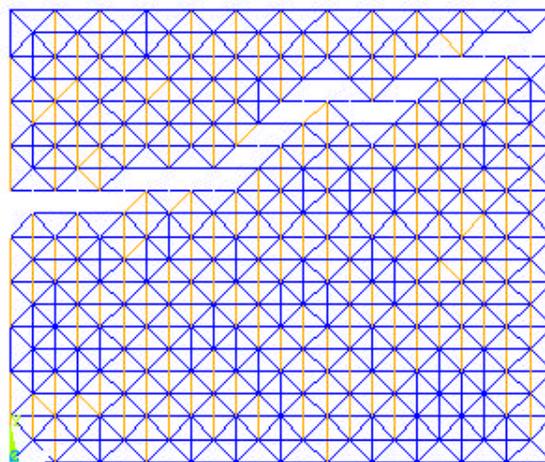
**Figura 5.2-8:** Curva carga-deslocamento para as cinco simulações do modelo E.



**Figura 5.2-9:** Curva carga-deslocamento para as cinco simulações do modelo F.



**Figura 5.2-10: Perspectiva do esquema de ruptura obtido numa das simulações do modelo D.**



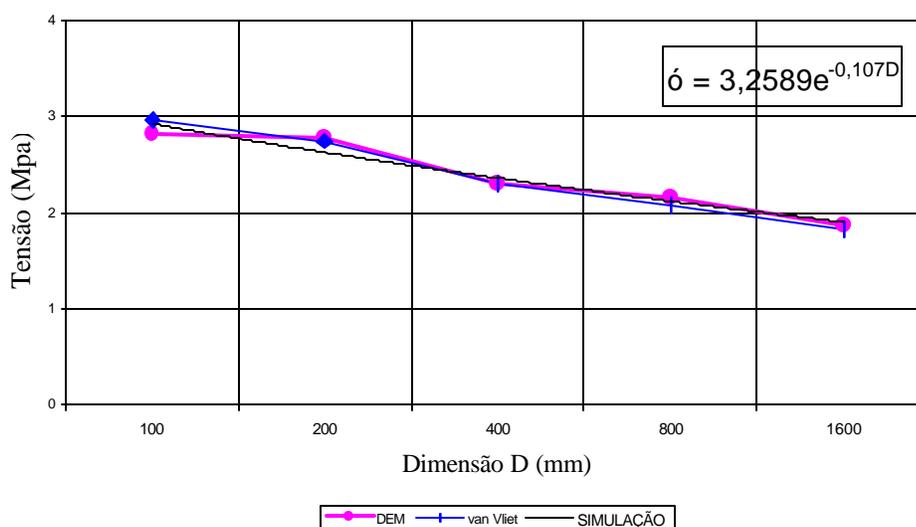
**Figura 5.2-11: vista frontal do esquema de ruptura (Modelo D)**

**Tabela 5.2-2: Resultados numéricos e experimentais.**

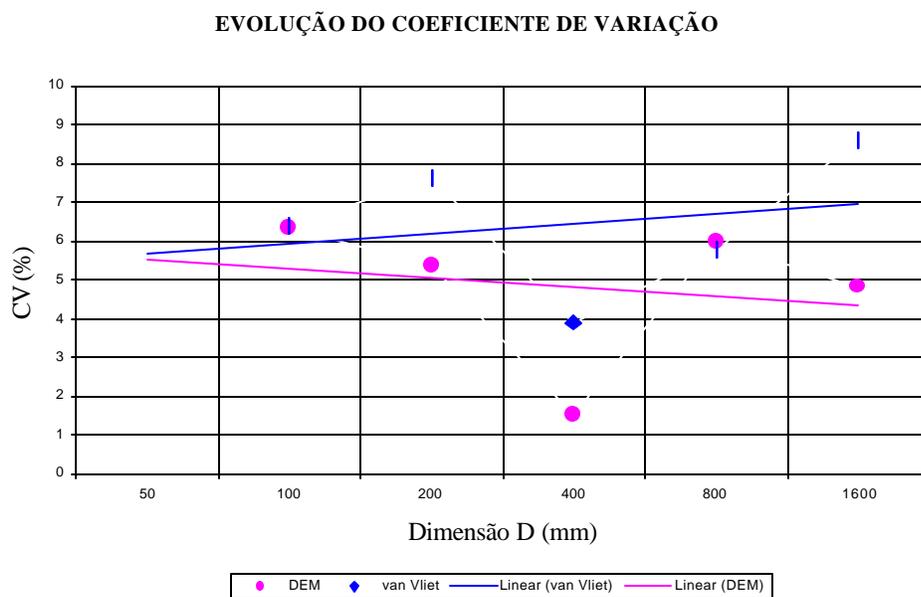
| MODELO   | $\sigma_N$ [MPa]   |                    | CARGA [KN]         |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|
|          | DEM                | van Vliet          | DEM                |
|          | Médio ( desv. Pad) | Médio ( desv. Pad) | Médio ( desv. Pad) |
| <b>B</b> | 2,83 (0,180)       | 2,97 (0,180)       | 17,0 (1,810)       |
| <b>C</b> | 2,78 (0,150)       | 2,75 (0,210)       | 33,3 (4,200)       |
| <b>D</b> | 2,31 (0,035)       | 2,30 (0,090)       | 55,5 (0,900)       |
| <b>E</b> | 2,16 (0,130)       | 2,07 (0,120)       | 104,0 (6,207)      |
| <b>F</b> | 1,88 (0,091)       | 1,86 (0,160)       | 179,0 (8,710)      |

Como se pode observar na Tabela 5.2-2, existe uma excelente concordância entre os resultados numéricos aqui apresentados e os experimentais obtidos por van Vliet et al (2000), principalmente no que se refere aos valores médios das tensões e cargas atingidas, já no referente ao desvio padrão, embora exista uma boa concordância, ela não é tão expressiva. Nas Figura 5.2-5 a Figura 5.2-9, pode-se conferir a excelente representação do comportamento carga-deslocamento tanto no comportamento anterior como no posterior à carga máxima atingida em cada modelo.

### EVOLUÇÃO DAS TENSÕES

**Figura 5.2-12: Evolução das tensões em função do tamanho do modelo.**

As Figura 5.2-10 e Figura 5.2-11 mostram esquemas de ruptura encontrados também para o modelo D. Com os valores indicados na Tabela 5.2-2, foram construídas as Figuras 5.2-12 e 5.2-13, na primeira das quais pode-se observar a excelente correlação entre os resultados de tensão limite experimentais de van Vliet et al (2000) e os obtidos no presente trabalho. Apresenta-se também em dita figura uma regressão exponencial da tensão em função da dimensão D do modelo para a simulação numérica. Na Figura 5.2-13, mostra-se a evolução do coeficiente de variação em função do tamanho D. Observa-se que o coeficiente de variação parece ser independente do tamanho. O desvio padrão apresenta valores médios de 0,15 Mpa (experimental) e 0,12 Mpa (numérico). O desvio padrão dos valores obtidos para os diversos tamanhos foi em ambos casos aproximadamente 0,05 , o que sugere que o modelo numérico permite simular adequadamente o comportamento a tração estática de corpos de prova.



**Figura 5.2-13: Evolução do coeficiente de variação com o tamanho do modelo.**

### 5.3 VERIFICAÇÃO DO EFEITO DE ESCALA EM PEÇAS SUBMETIDAS À FLEXÃO E CORTE.

Como foi mencionado anteriormente, grande parte dos estudos desenvolvidos sobre o efeito de escala correspondem a estado plano de tensões. Nesta parte, trata-se da aplicação do método dos elementos discretos para aferir os resultados experimentais realizados por Leonhart (1961) et al e posteriormente por Ramallo et al (1993) (1994) (1995). Assim, foram simulados os ensaios da serie D realizados por Leonhardt e Walther em Stuttgart (Alemanha). As dimensões e características dos materiais utilizados são indicadas na tabela 5.3-1.

As séries estavam compostas por vigas com semelhança geométrica completa, com a mesma taxa de armadura, mas com diâmetros diferentes, sendo os mesmos proporcionais às dimensões externas. As vigas tinham uma relação de esbeltez definida como  $l/h = 100/15 = 6.7$ . As dimensões (Tabela 5.3-2) mantinham a relação  $D1: D2: D3: D4 = 1: 2: 3: 4$ . Foram utilizadas barras de aço nervurado (BSt IIIb) retas e contínuas, não dispondo de armadura de corte. Foram empregadas duas barras das bitolas 6, 12, 18 e 24 mm, respectivamente, provendo em todos os casos uma taxa de armadura constante de 1,62%.

A carga foi aplicada simetricamente em dois pontos como é indicado na Figura 5.3-1. Foram usadas placas de aço fixadas com argamassa nos pontos de aplicação da carga e dos apoios, cujos tamanhos também variavam para manter a semelhança dimensional.

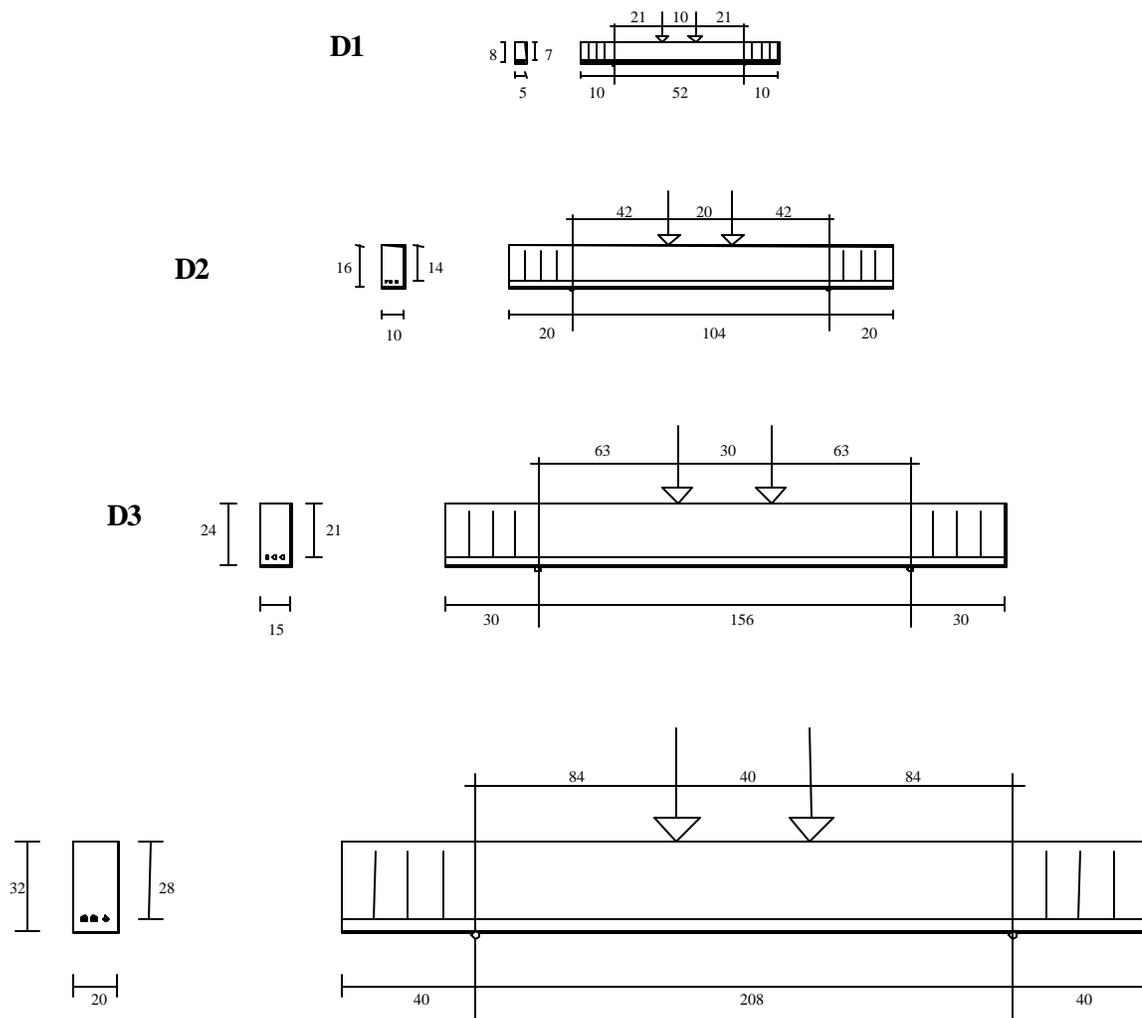
Ramallo et al (1993) realizaram algumas alterações, a saber:

- Para manter a taxa de armadura com as bitolas disponíveis, foram usadas três barras no lugar de duas em alguns modelos.
- Foram usados corpos de prova cilíndricos no lugar dos cúbicos.
- Foram aplicadas de 5 a 7 etapas de carga incremental, verificando em cada caso o grau de fissuração.
- Instrumentação eletrônica das informações.

Para a simulação com o DEM, foram mantidas as dimensões, o número de barras empregado por Ramallo et al (1993), enquanto o esquema de cargas foi o de deslocamento

prescrito crescente nos pontos correspondentes, para tentar reproduzir o efeito do sistema de carga empregado experimentalmente.

Na Tabela 5.3-1 são apresentados os valores das propriedades mecânicas dos materiais simulados, assim como o tamanho dos elementos escolhidos a partir das condições analisadas no capítulo 3.



**Figura 5.3-1: Esquemas das vigas ensaiadas por Ramallo (1993).**

**Tabela 5.3-1: Valores das propriedades usados na simulação numérica.**

| PROPRIEDADE               |         |
|---------------------------|---------|
| E [E <sub>c</sub> ] (Pa)  | 2,5E10  |
| f <sub>ck</sub> (MPa)     | 30,0    |
| f <sub>tk</sub> (MPa)     | 3,10    |
| E [G <sub>f</sub> ] (N/m) | 120,0   |
| f <sub>yk</sub> (MPa)     | 495,0   |
| CV (G <sub>f</sub> ) (%)  | 35      |
| CV (E <sub>c</sub> ) (%)  | 35      |
| ñ (kg/m <sup>3</sup> )    | 2500    |
| v                         | 0,20    |
| L <sub>co</sub> (m)       | 0,02667 |
| R <sub>f</sub>            | 2,30    |

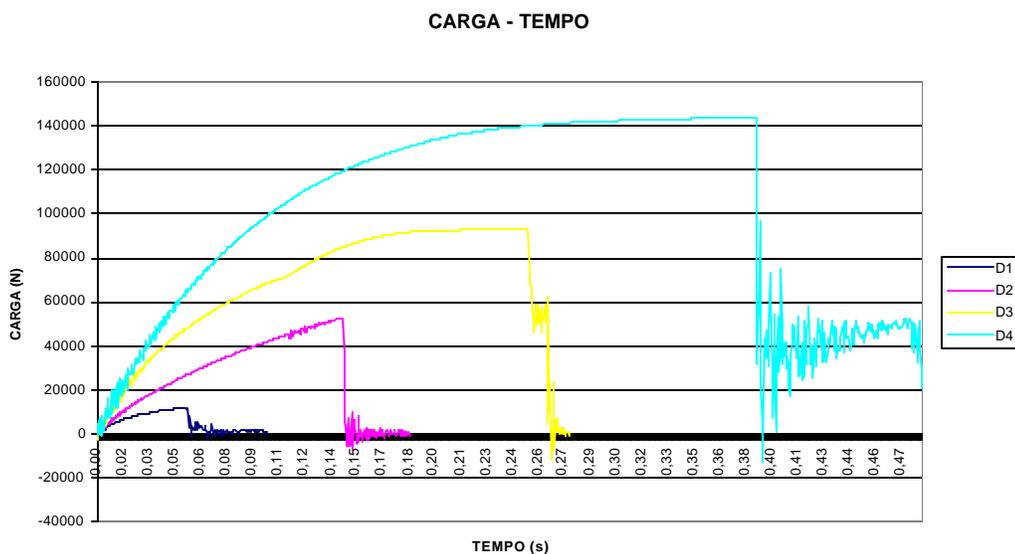
**Tabela 5.3-2: número de elementos empregados nos quatro tamanhos ensaiados.**

| MODELO | M   | N | L  |
|--------|-----|---|----|
| D1     | 28  | 3 | 4  |
| D2     | 55  | 5 | 7  |
| D3     | 82  | 7 | 10 |
| D4     | 109 | 9 | 13 |

Com a dimensão do tamanho dos elementos definido como indicado na tabela acima, foram montados para a simulação numérica os esquemas indicados na Tabela 5.3-2.

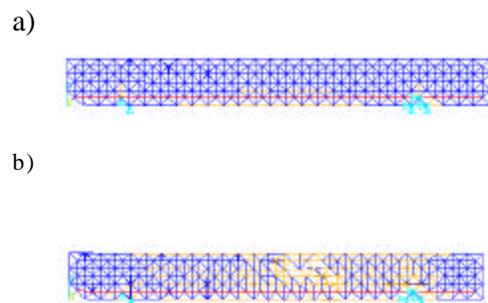
No referente à armadura, a mesma foi modelada reproduzindo-se em tal caso a usada por Ramallo et al (1993). Para a simulação do esquema de aplicação da carga, foi decidido usar um esquema de deslocamentos prescritos nos pontos correspondentes ao contato entre a viga e o sistema de carga. Como não estavam disponíveis nas referências bibliográficas os

dados relativos à velocidade de aplicação da mesma, ela foi escolhida em 0,0015 m/s, verificando-se que dita velocidade, é considerada adequada para reproduzir os resultados experimentais, sem aumentar consideravelmente o esforço computacional necessário para o processo de integração numérica. O intervalo de integração adotado foi de 4,9 E-06 s, o que obedece aos critérios de estabilidade da integração numérica explícita empregada.

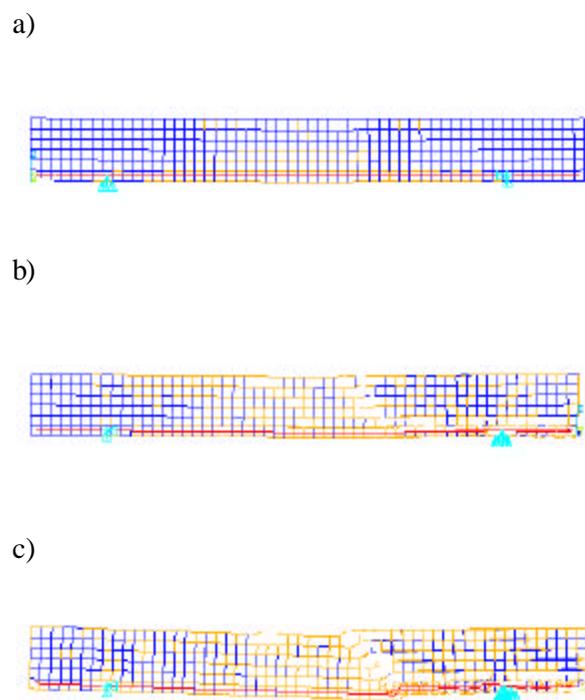


**Figura 5.3-2: Evolução das cargas aplicadas em função do tempo..**

Os esquemas de figuração e deformação encontrados encontram-se representados nas Figura 5.5-3 a 5.3.6 para os modelos D1, D2, D3, e D4, respectivamente. Em ditas figuras, as barras que ainda se encontram no regime elástico estão representadas em cor azul, a cor laranja é usada para representar as barras que experimentaram tensões superiores á máxima esse encontram no trecho descendente da curva tensão deformação, já as barras rompidas foram eliminadas na representação.

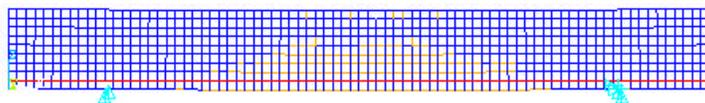


**Figura 5.3-3: Esquema de fissuração do no modelo D1: a) antes de atingir a carga máxima, e b) no momento de atingir a carga máxima.**

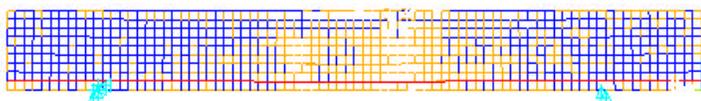


**Figura 5.3-4: Esquema de fissuração do modelo D2: a) antes de atingir a carga limite, b) no instante da ruptura, e, c) configuração final de ruptura.**

a)

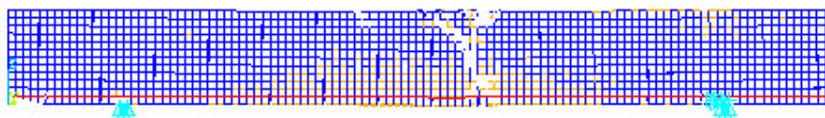


b)



**Figura 5.3-5: Esquema de fissuração do modelo D3: a) antes de atingir a carga máxima, e b) no momento de atingir a carga máxima.**

a)



b)



**Figura 5.3-6: Esquema de fissuração do no modelo D4: a) antes de atingir a carga máxima, e b) após atingir a carga máxima.**

Na Tabela 5.3-3 encontram-se indicadas as dimensões dos modelos ensaiados em Stuttgart e Tucumán respectivamente, assim como os resultados obtidos em ambos os casos. Já na Tabela 5.3-4, são apresentados os resultados obtidos pela simulação numérica proposta neste trabalho. Na coluna 12 de ditas tabelas encontram-se as cargas últimas ( $P_u$ ) para os diferentes modelo, na coluna 13, os correspondentes esforços de corte ( $V_u$ ), nas colunas 14, os valores da tensão de corte última ( $\hat{\sigma}_0$ ) calculada com a expressão (5.1) e , nas colunas 17, as tensões limites a compressão do concreto calculadas com a expressão (5.2).

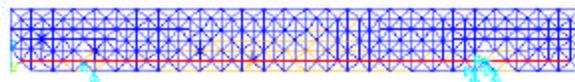
$$\tau_0 = \frac{V_u}{0.85 * b * h} \quad (5.1)$$

$$\sigma_{su} = \frac{M_{su}}{b * h^2} \quad (5.2)$$

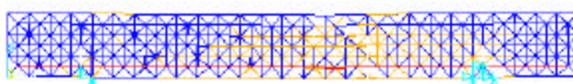
Para os mesmos ensaios foram realizadas simulações numéricas onde no lugar de aplicar deslocamentos prescritos nos pontos de aplicação da carga, foram aplicadas cargas linearmente crescentes em função do tempo transcorrido desde o início do processo. Com este procedimento, foi possível observar que não houve uma variação substancial no valor da carga aplicada para atingir a ruptura, mas houve sim uma considerável diferença nos esquemas de ruptura encontrados.

Na Figura 5.3-11, se observa a redução da tensão de compressão última do concreto em função de uma dimensão característica do modelo ( $h$ , por exemplo) do modelo, nela também são apresentadas as regressões exponenciais para os modelos experimentais e numérico, respectivamente. Na Figura 5.3-12 é apresentada a evolução da tensão de corte com a dimensão característica ( $h$ ), enquanto a Figura 5.3-13 mostra a evolução da carga última atingida nos diferentes modelos simulados e ensaiados.

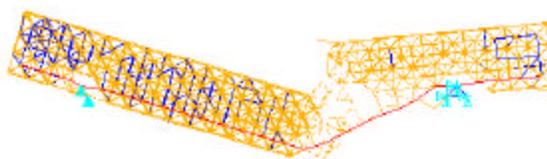
a)



b)

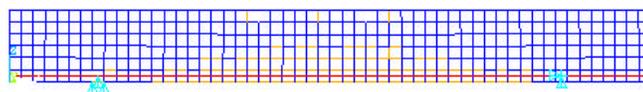


c)

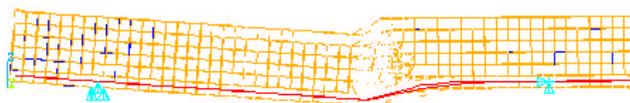


**Figura 5.3-7: Esquema de fissuração para o modelo D1: a) antes de atingir a carga limite, b) no momento de atingir a carga máxima, c) configuração final.**

a)

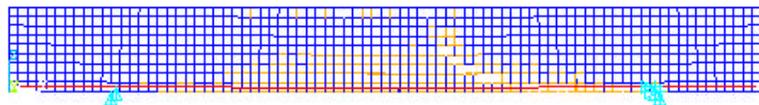


b)

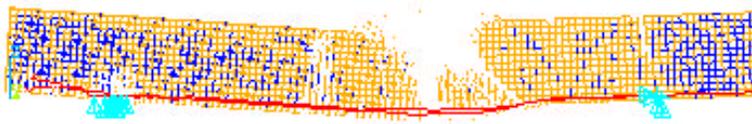


**Figura 5.3-8: Esquema de ruptura do modelo D2 com aplicação de carga: a) antes de atingir a carga máxima, b) configuração final.**

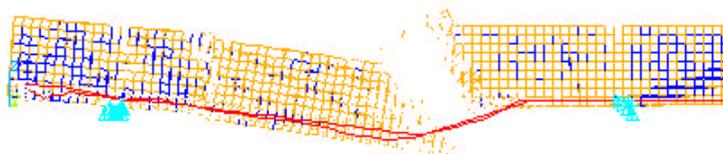
a)



b)

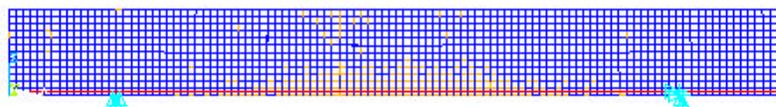


c)

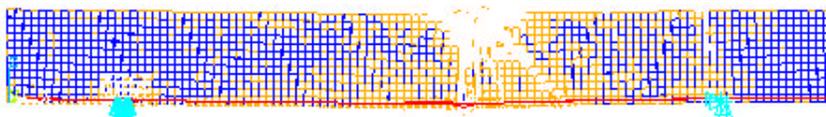


**Figura 5.3-9: Esquema de fissuração para o modelo D3 com aplicação de carga: a) antes de atingir a carga limite, b) e c) configurações pós ruptura.**

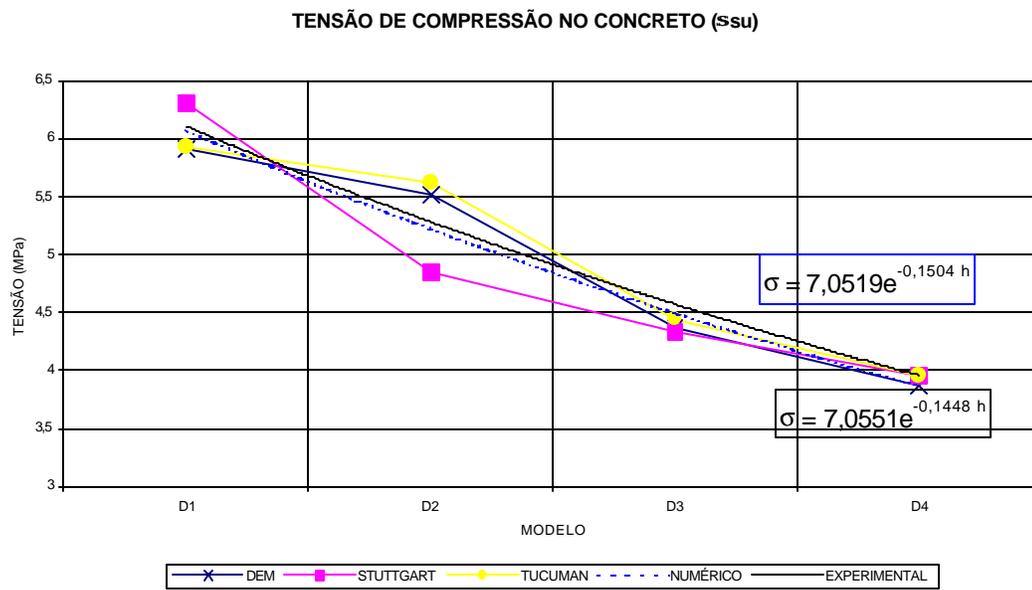
a)



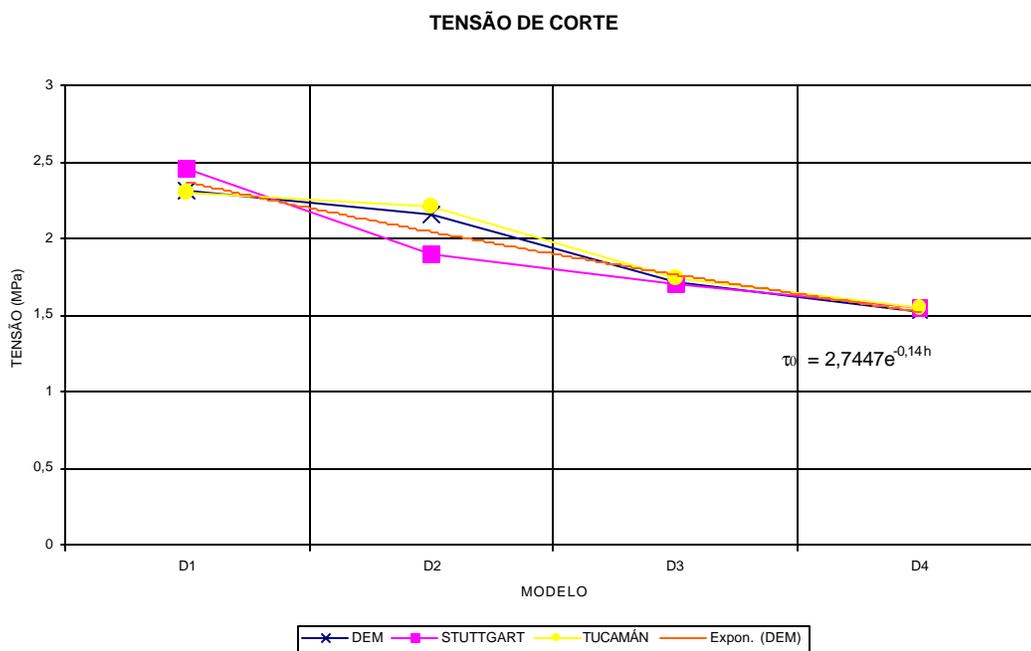
b)



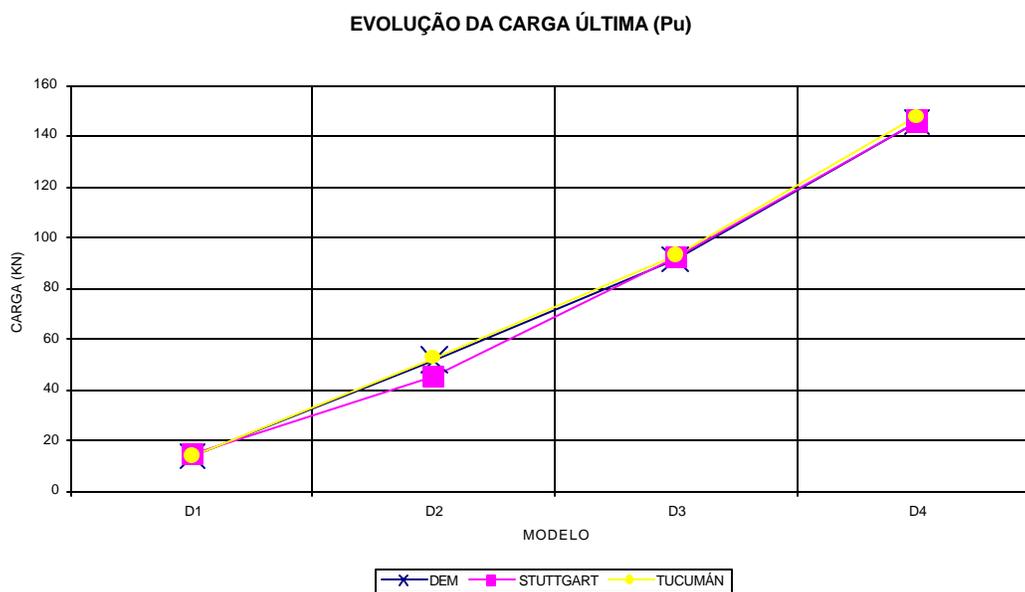
**Figura 5.3-10: Esquema de fissuração para o modelo D4 com aplicação de carga: a) antes de atingir a carga limite, e b) no momento de atingir a carga máxima.**



**Figura 5.3-11: Evolução da tensão de compressão em função do tamanho do modelo.**



**Figura 5.3-12: Evolução da tensão de corte em função do tamanho do modelo.**



**Figura 5.3-13: Evolução da carga última em função do tamanho do modelo.**

**Tabela 5.3-3: Dimensões, materiais cargas e tensões obtidas nos ensaios de Stuttgart e Tucuman.**

| 1         | 2    | 3    | 4              | 5   | 6   | 7               | 8    | 9    | 10   | 11    | 12              | 13             | 14             | 15              | 16              | 17              | 18    |
|-----------|------|------|----------------|-----|-----|-----------------|------|------|------|-------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------|
| LUGAR     | Viga | L    | a <sub>v</sub> | h   | b   | As              | μ    | fc   | M/Vh | In.   | Estado de Falha |                |                |                 |                 |                 |       |
|           |      |      |                |     |     |                 |      |      |      | Fiss. | P <sub>u</sub>  | V <sub>u</sub> | τ <sub>0</sub> | M <sub>su</sub> | σ <sub>eu</sub> | σ <sub>su</sub> | Prom. |
| (--)      | (--) | mm   |                |     |     | mm <sup>2</sup> | %    | MPa  | (--) | KN    | KN              | KN             | MPa            | KNm             | MPa             | MPa             | MPa   |
| Stuttgart | D1/1 | 520  | 210            | 70  | 50  | 2Φ6             | 1,71 | 38,0 | 3    | 5,33  | 14,9            | 7,4            | 2,48           | 1,56            | 434             | 6,34            |       |
|           | D1/2 | 520  | 210            | 70  | 50  | 2Φ6             | 1,71 | 38,0 | 3    | 4,48  | 14,7            | 7,3            | 2,44           | 1,54            | 428             | 6,28            | 6,31  |
|           | D2/1 | 1040 | 420            | 140 | 100 | 2Φ12            | 1,66 | 38,2 | 3    | 12,0  | 43,2            | 21,6           | 1,82           | 9,1             | 323             | 4,65            |       |
|           | D2/2 | 1040 | 420            | 140 | 100 | 2Φ12            | 1,66 | 38,2 | 3    | 11,2  | 47,4            | 23,7           | 1,99           | 9,9             | 352             | 5,05            | 4,85  |
|           | D3/1 | 1560 | 630            | 210 | 150 | 2Φ18            | 1,62 | 39,4 | 3    | 24,0  | 94,6            | 47,3           | 1,77           | 29,8            | 319             | 4,50            |       |
|           | D3/2 | 1560 | 630            | 210 | 150 | 2Φ18            | 1,62 | 39,4 | 3    | 22,0  | 90,8            | 43,7           | 1,63           | 27,5            | 294             | 4,16            | 4,33  |
|           | D4/1 | 2080 | 840            | 280 | 200 | 2Φ24            | 1,67 | 36,1 | 3    | 36,9  | 151             | 75,5           | 1,59           | 63,4            | 278             | 4,04            |       |
|           | D4/2 | 2080 | 840            | 280 | 200 | 2Φ24            | 1,67 | 36,1 | 3    | 31,0  | 141             | 72,7           | 1,53           | 61,0            | 268             | 3,89            | 3,96  |
| Tucumán   | D1/1 | 520  | 210            | 70  | 50  | 2Φ6             | 1,60 | 37,3 | 3    | 4,67  | 13,8            | 6,9            | 2,3            | 1,45            | 435             | 5,92            | ----  |
|           | D2/1 | 1040 | 420            | 140 | 100 | 2Φ12            | 1,61 | 37,3 | 3    | 11,4  | 52,5            | 26,3           | 2,21           | 11,0            | 409             | 5,61            | ----  |
|           | D3/1 | 1560 | 630            | 210 | 150 | 2Φ16<br>1Φ12    | 1,63 | 37,3 | 3    | 22,9  | 93,1            | 46,6           | 1,74           | 29,4            | 320             | 4,44            | ----  |
|           | D4/1 | 2080 | 840            | 280 | 200 | 3Φ20            | 1,68 | 37,3 | 3    | 38,0  | 147,5           | 73,8           | 1,55           | 62,0            | 277             | 3,95            | ----  |

**Tabela 5.3-4: Dimensões e materiais simulados e resultados numéricos obtidos.**

| 1         | 2    | 3    | 4              | 5   | 6   | 7               | 8    | 9              | 10   | 11   | 12              | 13             | 14             | 15             | 16              | 17              | 18              |
|-----------|------|------|----------------|-----|-----|-----------------|------|----------------|------|------|-----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| LUGAR     | Viga | L    | a <sub>v</sub> | h   | b   | As              | μ    | f <sub>c</sub> | M/Vh | In.  | Estado de Falha |                |                |                |                 |                 |                 |
|           |      |      |                |     |     |                 |      |                |      |      | Fiss.           | P <sub>u</sub> | V <sub>u</sub> | τ <sub>0</sub> | M <sub>su</sub> | σ <sub>eu</sub> | σ <sub>su</sub> |
| (--)      | (--) | mm   |                |     |     | mm <sup>2</sup> | %    | MPa            | (--) | KN   | KN              | KN             | MPa            | KNm            | MPa             | MPa             | MPa             |
| Simulação | D1/1 | 520  | 210            | 70  | 50  | 2Φ6             | 1,60 | 37,3           | 3    | 6,87 | 13,8            | 6,9            | 2,31           | 1,45           | -               | 5,06            | -               |
|           | D2/1 | 1040 | 420            | 140 | 100 | 2Φ12            | 1,61 | 37,3           | 3    | 8,16 | 51,5            | 25,75          | 2,16           | 10,81          | -               | 5,51            | -               |
|           | D3/1 | 1560 | 630            | 210 | 150 | 2Φ16*           | 1,63 | 37,3           | 3    | 25,0 | 91,6            | 45,8           | 1,71           | 28,85          | -               | 4,36            | -               |
|           | D4/1 | 2080 | 840            | 280 | 200 | 3Φ20            | 1,68 | 37,3           | 3    | 34,9 | 145,5           | 72,75          | 1,53           | 61,11          | -               | 3,87            | -               |

## 6 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS PARAMETROS MECÂNICOS DO CONCRETO OBTIDOS POR ENSAIOS DE TRAÇÃO

### 6.1 INTRODUÇÃO

Ainda que o limite de resistência à tração do concreto não seja levado em conta nas análises correntes das estruturas de concreto ou concreto armado, a importância do seu correto entendimento é agora amplamente aceita. Além de que a resistência à tração tem um papel muito importante em fenômenos como corte e ancoragem da armadura, a demanda por parâmetros de entrada para modelos em elementos finitos é também um fator de estímulo ao estudo de esta propriedade. Não são só a resistência  $f_k$  do concreto, mas também o módulo de elasticidade  $E_c$ , a energia de fratura  $G_f$  a forma da curva descendente e a máxima abertura de fissura à qual, tensões não podem mais ser transferidas, são de interesse e definem o comportamento à tração.

Como já foi mencionado anteriormente, o ensaio de tração uniaxial é o mais amplamente usado para determinar esses parâmetros de fratura (Hilleborg, 1985). O diagrama  $\sigma$ - $\delta$  obtido por um teste de tração uniaxial pode ser visto como uma propriedade do material somente se as superfícies das fissuras permanecem paralelas desde o instante em que a primeira microfissura aparece até o instante em que não podem ser transferidas mais tensões. (Hordijk, 1987).

No capítulo anterior, foi estudada a influência do efeito do tamanho sobre a resistência a tração dos elementos de concreto. Já neste capítulo, será analisada a influência do comprimento do corpo de prova sobre a tensão última à tração, assim como a sua influência na forma da curva  $\sigma$ - $\delta$ . Esta linha de trabalho foi inspirada em estudos do fenômeno desenvolvidos por Hordijk (1987). Com este objetivo, foram simulados numericamente os ensaios realizados por Hordijk, (1987), os quais são detalhados a seguir.

## 6.2 MODELO ENSAIADO

Foram ensaiados corpos de prova quatro tamanhos de como se indica na Figura 6.1. As dimensões assim como a área crítica da seção transversal  $A_c$ , obtidas por meio de dois cortes de 5mmx5mm feitos no meio de cada modelo, estão listados na Tabela 6.1.

**Tabela 6-1: Dimensões dos diferentes modelos ensaiados.**

|              | TIPO      | A     | B     | C     | D     |
|--------------|-----------|-------|-------|-------|-------|
| Comprimento  | (mm)      | 250   | 125   | 50    | 250   |
| Espessura    | (mm)      | 60    | 60    | 60    | 50    |
| Profundidade | (mm)      | 50    | 50    | 50    | 40    |
| $A_c$        | (mm x mm) | 50x50 | 50x50 | 50x50 | 40x40 |

Foi usado nos ensaios um concreto de 50,4 MPa de resistência cúbica à compressão. Tal resistência foi obtida em corpos de prova cúbicos de 150 mm de lado. O tamanho máximo de agregado empregado foi de 4 a 8 mm, o qual foi levado em conta para definir o tamanho do elemento básico em 0,01m. Os demais parâmetros mecânicos dos materiais ensaiados estão indicados na Tabela 6-3.

**Tabela 6-2 Propriedades mecânicas dos modelos ensaiados por (Hordijk, 1987).**

| MODELO | Num. de testes | $E_c$<br>(MPa) | $f_{tk}$<br>(MPa) | $G_f$<br>(N/m) |
|--------|----------------|----------------|-------------------|----------------|
| A      | 6              | 19050          | 3,39 [3,7]        | 78,3 [7,0]     |
| B      | 5              | 19050          | 3,37 [3,8]        | 77,0 [9,9]     |
| C      | 6              | 13760          | 3,51 [4,1]        | 88,3 [8,9]     |
| D      | 8              | 19740          | 3,63 [9,1]        | 75,8 [13,8]*   |

\*) Coeficiente de variação entre parêntesis.

Com os parâmetros acima definidos foram modelados os quatro tamanhos dos corpos de prova, realizando em cada um deles quatro simulações dos ensaios, para obter assim os valores médios e sua correspondente variabilidade representada pelo coeficiente de variação.

Como já foi mencionado, o tamanho dos elementos escolhidos para a simulação numérica foi  $L_{co} = 1$  cm, o qual permite a correta modelagem dos corpos de prova, permitindo também a determinação da localização do dano. Neste caso foi considerada aleatoriedade tanto no valor da energia específica de fratura, quanto do módulo de elasticidade do concreto. Com os dados acima mencionados foram modelados então os corpos de prova, com as quantidades de elementos definidas na Tabela 6-3 e propriedades mecânicas na Tabela 6-4.

O intervalo de integração escolhido foi de  $2,0E-06$  s, o qual satisfaz os critérios de estabilidade da integração numérica explícita empregada. O esquema de carregamento consiste em deslocamentos prescritos nos extremos das barras a uma velocidade de  $2,5E-02$  m/s. Cabe destacar neste aspecto que, ao igual que no capítulo anterior, o deslocamento prescrito foi aplicado aos nós extremos e aos nós adjacentes aos mesmos, para evitar a aplicação de cargas exclusivamente em uma região de resistência naturalmente reduzida pelo método proposto (Iturrioz, 1995).

**Tabela 6-3: Dimensões dos corpos modelados.**

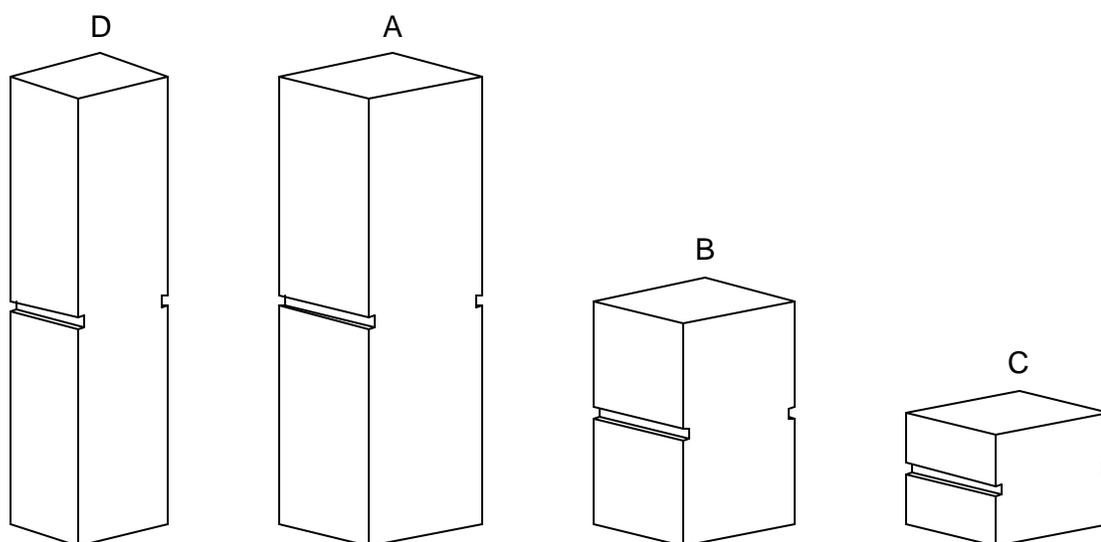
| MODELO | M(x) | N(y) | L(z) |
|--------|------|------|------|
| A      | 7    | 6    | 26   |
| B      | 7    | 6    | 14   |
| C      | 7    | 6    | 6    |
| D      | 6    | 5    | 26   |

A Figura 6.2 mostra uma perspectiva de uma das simulações numéricas do ensaio para o caso do modelo A. A Figura 6.3 é uma reprodução dos resultados experimentais expressos em termos de curva tensão-deslocamento obtidos por Hordijk (1987).

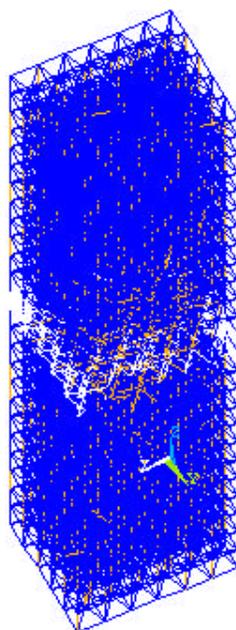
Na figuras 6.4 a 6.7, podem ser observados os mecanismos de ruptura encontrados mediante a simulação numérica dos ensaios dos modelos A até D.

**Tabela 6-4: Propriedades mecânicas usadas na simulação numérica.**

| PROPRIEDADE                 |         |
|-----------------------------|---------|
| $E[E_c]$ (Pa)               | 2,8 E10 |
| $E[G_f]$ (N/m)              | 100     |
| $CV(G_f)$                   | 0,35    |
| $CV(E_c)$                   | 0,35    |
| $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) | 2400    |
| $\nu$                       | 0,18    |
| $L_{co}$ (m)                | 0,01    |
| $\xi$ (%)                   | 4,00    |
| $f_{tk}$ (MPa)              | 3,50    |
| $R_f$                       | 2,06    |

**Figura 6-1: Esquemas dos modelos ensaiados por Hordijk (1987).**

Como são indicadas na Figura 6-1, todas as barras ensaiadas por Hordijk (1987) apresentam um entalhe em dois lados na região central do modelo. Tal redução tem como objetivo criar uma região onde a barra se encontra debilitada com área  $A_e$ , sendo nela que a ruptura deverá acontecer, evitando assim influências do sistema de fixação nos resultados esperados. No modelo numérico tais entalhes foram modelados atribuindo valores nulos de resistência para as barras que se encontrem nessas regiões.



**Figura 6-2: Perspectiva do modelo com a fratura na região central. Modelo A.**

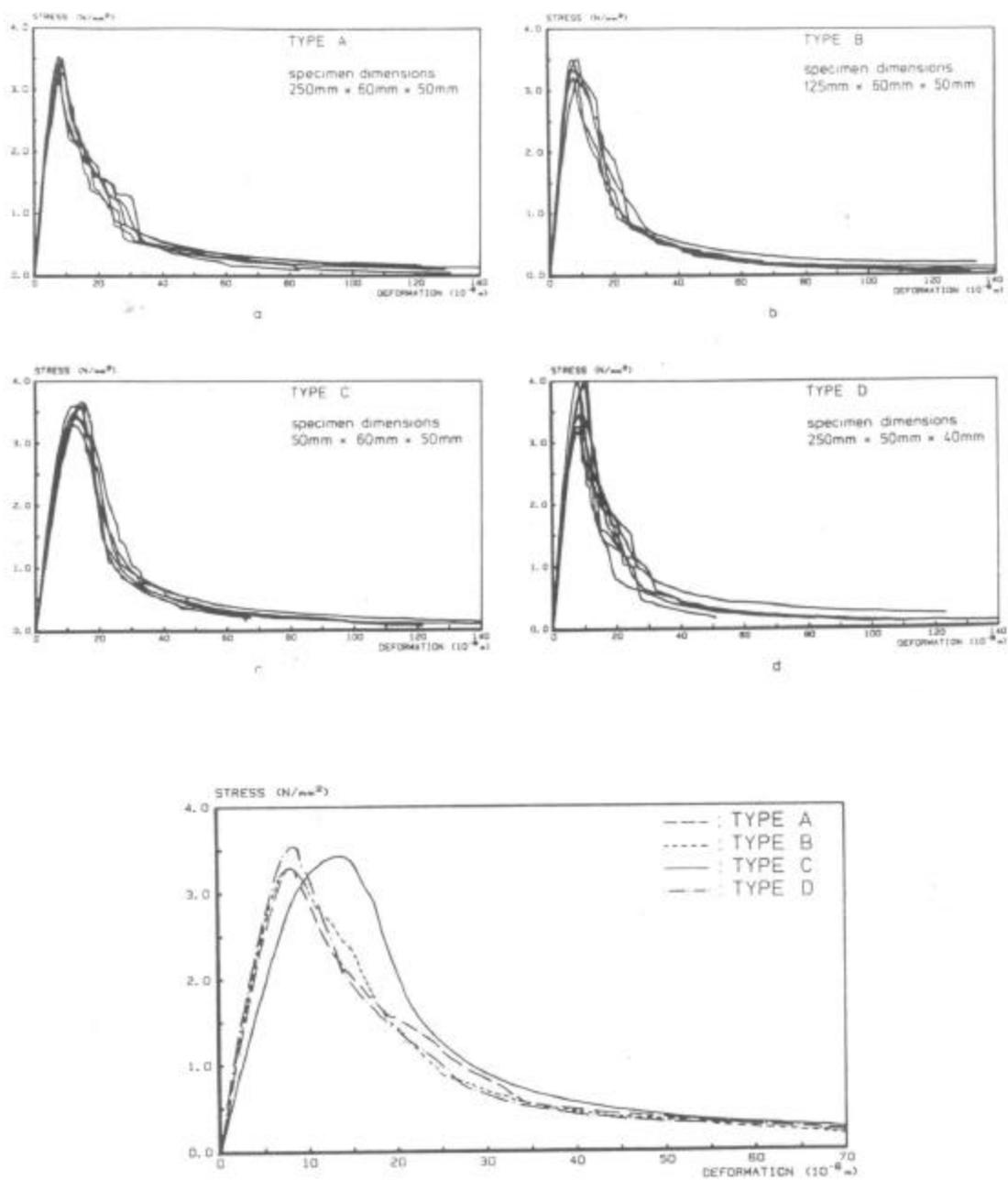
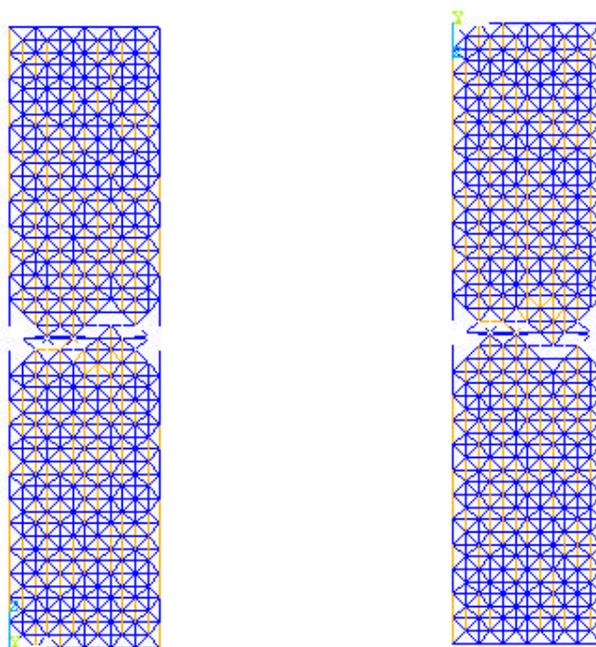
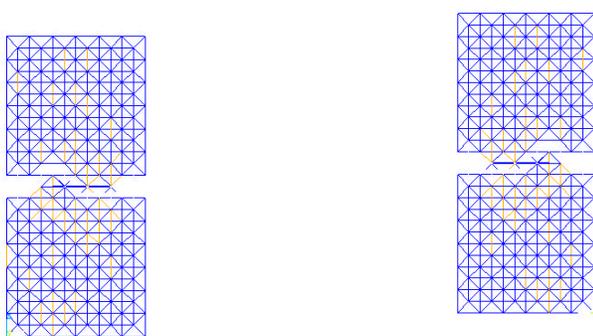


Figura 6-3: Resultados obtidos experimentalmente por Hordijk(1987).



**Figura 6-4: Vistas laterais do modelo A, indicando nelas o esquema de fissuração encontrado.**

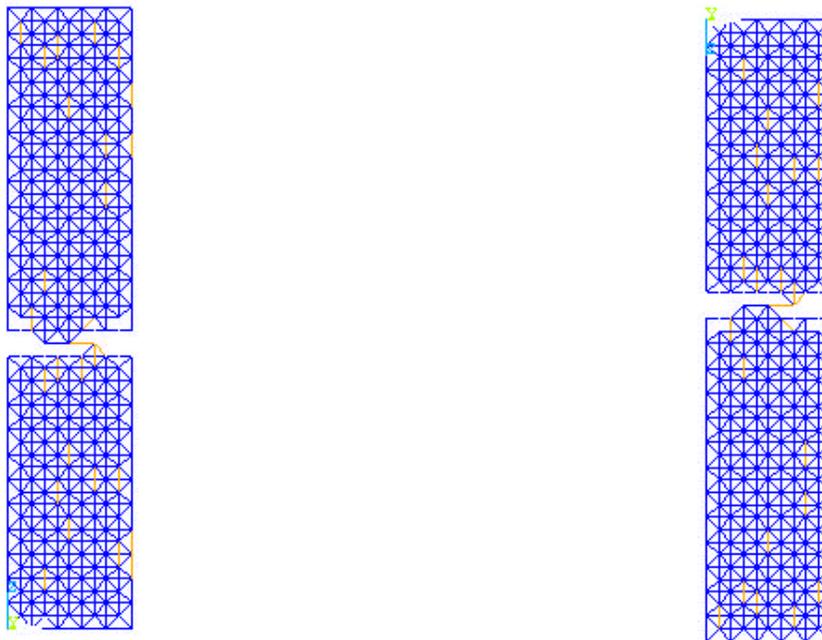


**Figura 6-5: Vistas laterais do modelo B, indicando nelas o esquema de fissuração encontrado.**

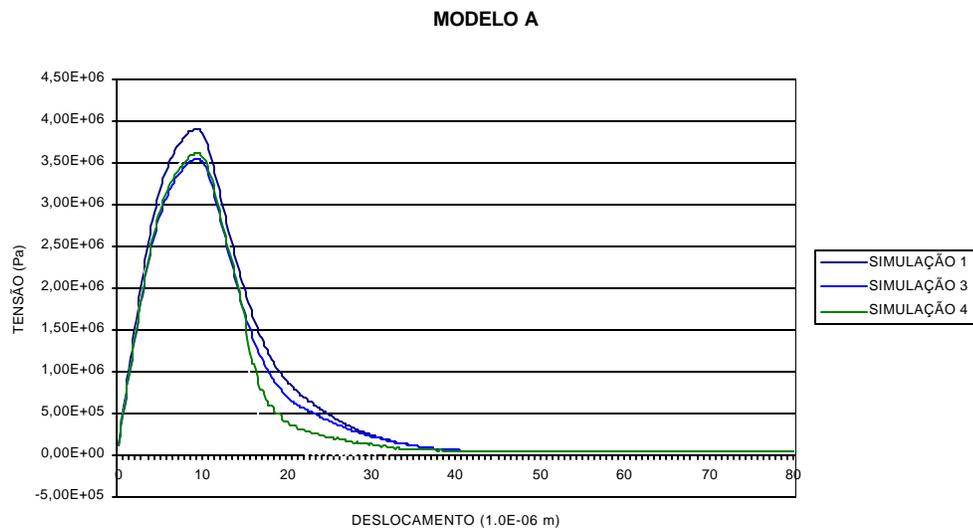
Nas Figuras 6.8 a 6.11, podem se observar as curvas tensão–deslocamento obtidas pela simulação numérica para os diferentes modelos ensaiados. Sendo que para cada modelo foram realizadas 4 ou cinco simulações para poder assim realizar uma análise estatística destes resultados.



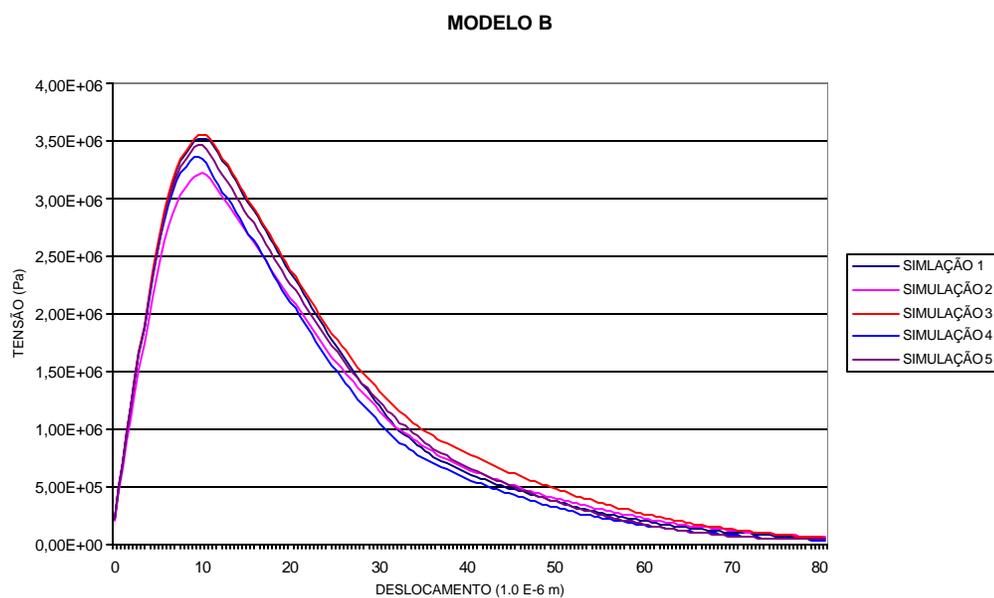
**Figura 6-6: Vistas laterais do modelo C, indicando nelas o esquema de fissuração encontrado.**



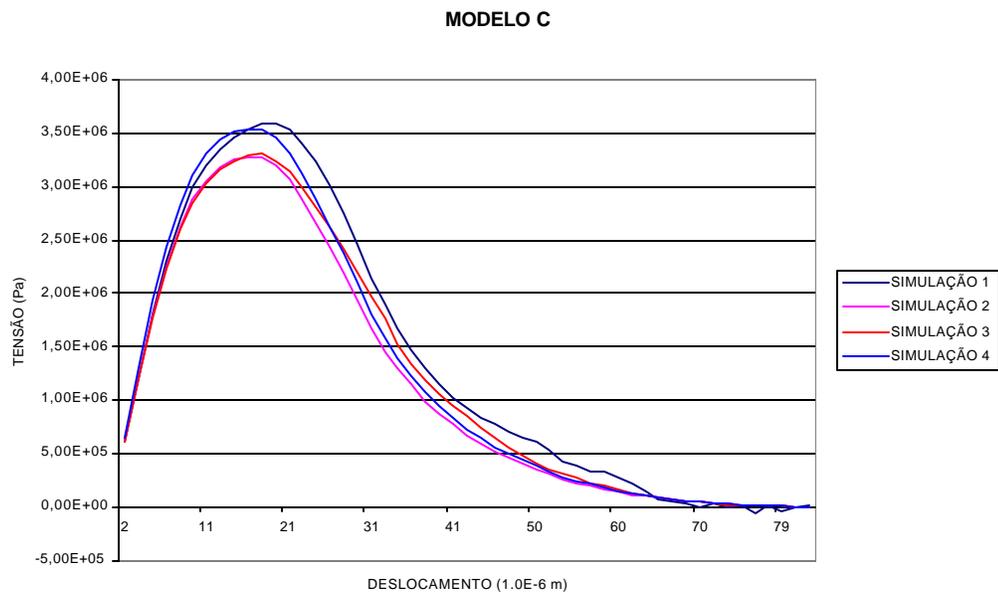
**Figura 6-7: Vistas laterais do modelo D, indicando nelas o esquema de fissuração encontrado.**



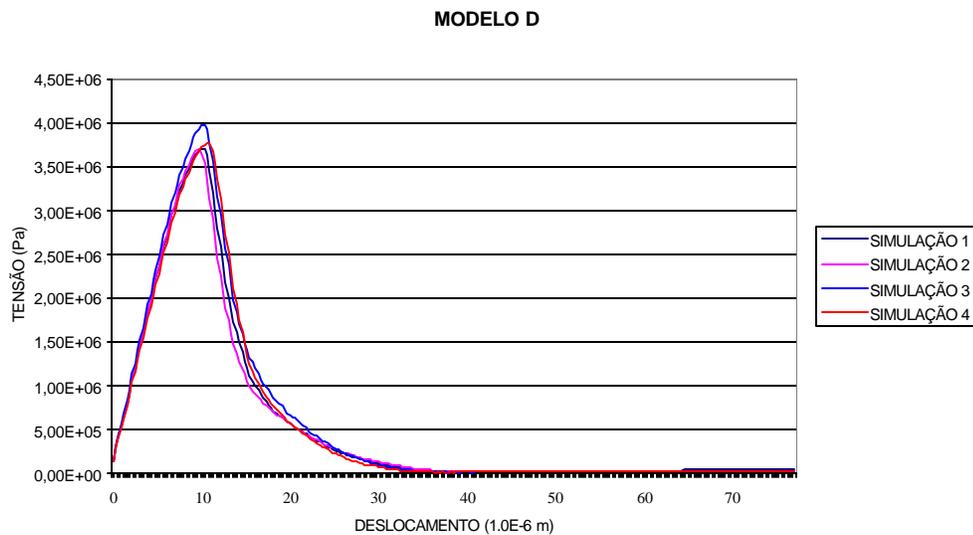
**Figura 6-8: Esquema tensão - deslocamento para o modelo A.**



**Figura 6-9: Esquema tensão - deslocamento para o modelo B.**



**Figura 6-10: Esquema tensão- deslocamento para o modelo C**

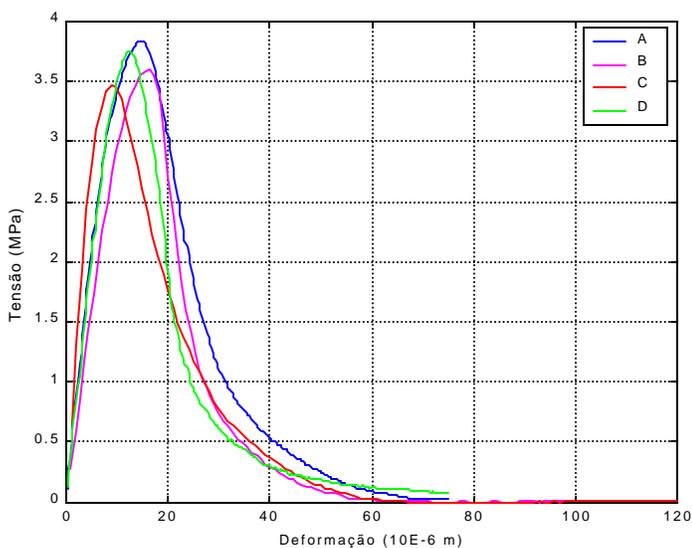


**Figura 6-11: Esquema tensão- deslocamento para o modelo D.**

**Tabela 6-5: Resumo dos resultados em tensões obtidos por simulação numérica.**

| MODELO  | $E[f_d]$ | $CV[f_d]$     | $(f_t)_{exp}$ | Teórico/exper. |
|---------|----------|---------------|---------------|----------------|
| A [MPa] | 3,36     | 0,155 (4,23%) | 3,39          | 0,991          |
| B [MPa] | 3,29     | 0,114 (3,47%) | 3,37          | 0,976          |
| C [MPa] | 3,43     | 0,166 (4,23%) | 3,51          | 0,977          |
| D [MPa] | 3,79     | 0,133 (3,50%) | 3,63          | 1,044          |

Na Tabela 6.5 se observa a excelente correspondência entre os resultados experimentais de Hordijk (1987) com os obtidos pela simulação numérica. Na Figura 6.12, são representadas as curvas médias obtidas pela simulação de cada modelo, que podem ser comparadas com os resultados experimentais de Hordijk (1987) indicados na Figura 6.3.

**Figura 6-12: Gráfico das médias obtidas por simulação numérica para os quatro modelos.**

## 7. EVOLUÇÃO DOS PARÂMETROS DINÂMICOS DE ESTRUTURAS COM O NÍVEL DE DANO EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

### 7.1. INTRODUÇÃO

Antes de ser submetida a cargas externas, se admite em geral que as estruturas de concreto armado estão na condição *não fissurada*. Com a aplicação das cargas, peso próprio em primeiro lugar e cargas úteis posteriormente, as componentes submetidas à flexão fissuram nas regiões tracionadas, passando a atuar em outras zonas de estados limites. As características dinâmicas básicas representadas, por exemplo, pela rigidez secante e um amortecimento viscoso equivalente variam na medida que progride o estado de fissuração. Observa-se assim uma redução monotônica da rigidez com o grau de fissuração ambos fortemente correlacionados com a solitação máxima anterior e com o número de aplicações da carga. Simultaneamente, verifica-se uma alteração nas frequências naturais de vibração, as quais estão obviamente relacionadas com a matriz de rigidez da estrutura. A detecção do dano em estruturas a partir da observação de variações nas frequências de vibração em ensaios não destrutivos tem recebido considerável atenção nas últimas duas décadas, constituindo uma área importante de pesquisa no LDEC, UFRGS (Ferrufino, 1994; Rios, 1994; Kaminsky, 1997).

Por outro lado, o amortecimento global, isto é, a dissipação de energia interna, não parece apresentar uma tendência definida. É claro que a história do processo de carga exerce influência na capacidade de dissipação de energia, mas o fenômeno está longe de ter uma formulação satisfatória ou pelos menos um diagnóstico preliminar. Considera-se o problema relevante na detecção e identificação de dano em estruturas, porque pequenas variações na rigidez resultam em variações ainda menores no espectro, cuja observação em campo é usualmente difícil e de alto custo. Um melhor conhecimento das características e da evolução do amortecimento pode contribuir a reduzir o efeito de outros fatores que influenciam, ainda

que marginalmente, às frequências de vibração. Porém, a relevância do amortecimento é ainda maior na previsão do dano em longo prazo em estruturas sujeitas a vibrações induzidas pelo vento, tráfego, máquinas rotatórias, etc. Com efeito, existe evidência, tanto de laboratório como decorrente da observação do comportamento de estruturas reais, que aponta a uma redução do amortecimento com a evolução do processo de fissuração. Para contribuir ao estudo do fenômeno em condições controladas de laboratório, foram ensaiadas no LDEC duas vigas de concreto armado nas quais foi observada a evolução do amortecimento com a amplitude das cargas aplicadas (Riera e Torelli, 1985).

No presente trabalho, são apresentados tais resultados, conjuntamente com uma simulação numérica utilizando um modelo discreto de estruturas de concreto armado, empregado anteriormente por Iturrioz (1995) e por Riera, Rios e Rocha (1998) para quantificar a resposta estrutural até, e após, a ruptura.

## 7.2. REVISÃO DE RESULTADOS ANTERIORES

Na quase totalidade dos trabalhos experimentais sobre identificação de sistemas e quantificação do dano em estruturas de concreto não é apresentada informação sobre o amortecimento estrutural. Os estudos resumem-se à avaliação de variações na rigidez da estrutura. Dados sobre o amortecimento são encontrados apenas em Rios (1994), que determinou o decremento logarítmico em ensaios de vibração livre o amortecimento num modelo de micro-concreto em escala 1:10 de um pórtico plano, componente principal da arquibancada de um estádio de futebol, para os cinco primeiros modos de vibração. O modelo foi submetido a cargas de 4, 8, 12 e 16 kN, sendo medidas as frequências de vibração e o amortecimento em vibrações livres de pequena amplitude na estrutura descarregada, após cada aplicação de carga. Foram obtidos dos registros valores entre 0,0131 e 0,0871 da razão de amortecimento crítico para os cinco primeiros, não sendo detectável um comportamento padrão do amortecimento nos diversos modos. Quando uma parábola quadrática é ajustada à totalidade dos dados, porém, obtém-se:

$$\zeta=0,013+0,017x-0,024x^2 \quad (7.1)$$

$$\text{onde } x = \text{carga/carga de fissuração} \quad (7.2)$$

A expressão acima sugere que na estrutura estudada o amortecimento inicialmente aumenta com a amplitude da carga, atingindo um valor máximo de ao redor de 0,043, a partir do qual *decrece* com subseqüentes aumentos da carga máxima previamente aplicada. Diterle & Bachmann (1981) já tinham observado uma redução do amortecimento em vigas de concreto que passam da condição não fissurada à condição fissurada. É oportuno ressaltar que no modelo ensaiado por Rios (1994) e (1995) observa-se, em todos os modos, uma queda da freqüência com a amplitude da carga máxima previamente aplicada no mesmo. A redução da freqüência fundamental é descrita pela parábola:

$$f_1/f_0 = 1 - 0,015x^2 \quad (7.3)$$

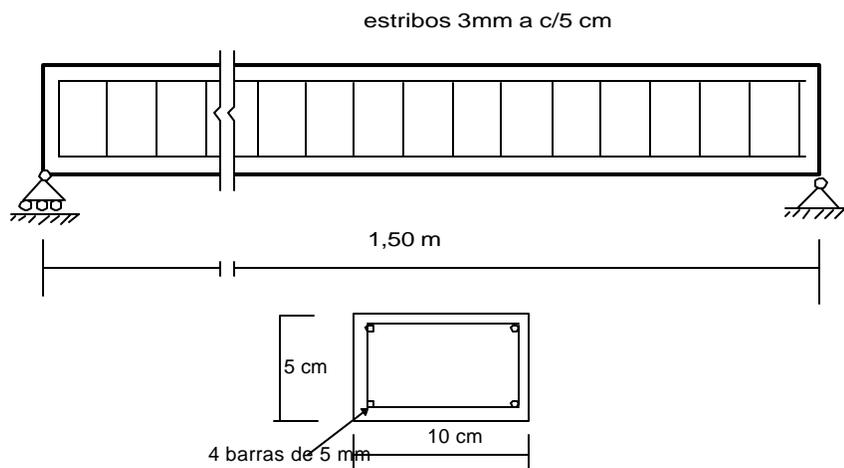
onde  $f_0$  denota a freqüência do modelo não-fissurado. A equação precedente, no entanto, não é aplicável para valores de  $x$  que impliquem em escoamento na armadura.

Parece procedente chamar a atenção, neste contexto, à repetida observação em grandes estruturas de concreto armado, de vibrações de *aparentemente crescente amplitude*, surgidas vários anos após a inauguração das mesmas. Pode-se mencionar exemplos de estádios de futebol (Maracanã, Rio de Janeiro; Olímpico, Porto Alegre; Morumbi, São Paulo) e de pontes e viadutos (Viaduto da Conceição, Porto Alegre). Em todos os casos foram identificadas causas concorrentes, por exemplo, alterações nos hábitos dos torcedores ou irregularidades na pista de rolamento, mas uma redução no amortecimento resultante da extensa fissuração das estruturas pode ter sido um fator contribuinte que merece especial atenção.

### 7.3. ANÁLISE EXPERIMENTAL

#### 7.3.1. DESCRIÇÃO DOS MODELOS

Foram construídas duas vigas de concreto armado com as dimensões e características indicadas na Figura 7.3-1. O traço do concreto utilizado é dado na Tabela 7.3-1, enquanto as características dos materiais, determinadas sobre seis corpos de prova, são apresentados na Tabela 7.3-2.



**Figura 7.3-1: Esquema da viga ensaiada com a armadura correspondente.**

**Tabela 7.3-1 Traço do concreto.**

| Cimento | Areia | Brita | Água |
|---------|-------|-------|------|
| 1       | 2,99  | 3,26  | 0,87 |

**Tabela 7.3-2. Propriedades mecânicas dos materiais (MPa)**

| VIGA | CONCRETO       |      |                | AÇO         |
|------|----------------|------|----------------|-------------|
|      | $f_{cj}$ (MPa) | g    | $f_{ck}$ (MPa) | $f_s$ (MPa) |
| 1    | 14,8           | 0,78 | 13,5           | 650         |
| 2    | 13,7           | 0,65 | 12,6           |             |

Os pesos totais das vigas 1 e 2 foram 181,5 e 184,5 N, respectivamente.

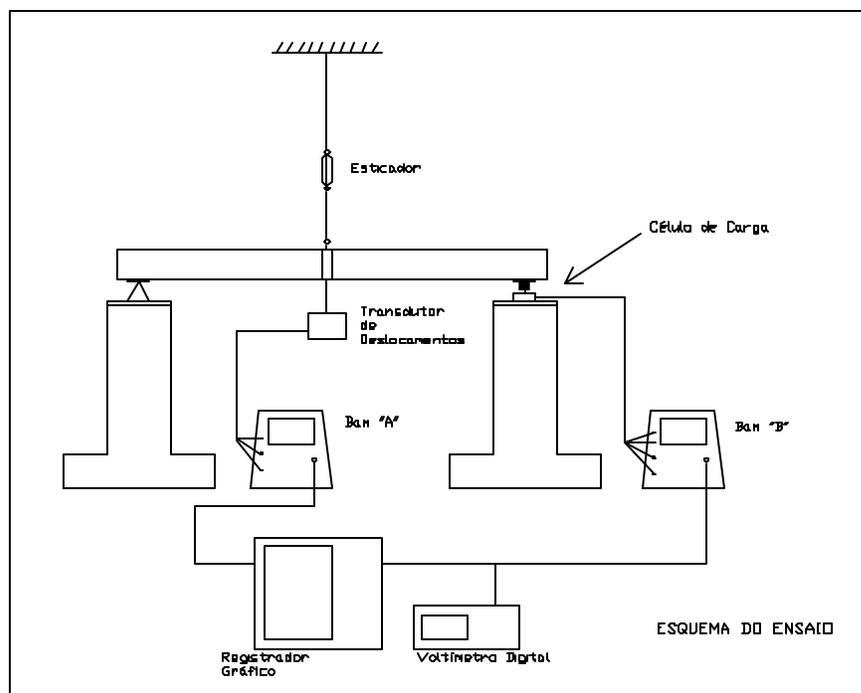
### 7.3.2. DESCRIÇÃO DOS ENSAIOS

Os ensaios foram realizados mediante a aplicação de uma carga quase-estática  $P$  no centro do vão. O tempo de aplicação da carga, de algumas dezenas de segundos, foi apenas o necessário para se obter estabilidade na leitura da tensão na ponte. A retirada repentina da carga induz vibrações livres da viga, cuja amplitude inicial coincide com a amplitude do deslocamento estático devida a  $P$ .

Visando a determinação da influência da história de carga no comportamento da viga, foram aplicadas cargas segundo a seqüência indicada na Tabela 7.3-3. Observe-se que, em cada nível, o ensaio foi repetido três vezes. Cada ensaio permite a medição do deslocamento inicial, a partir do qual é calculado o módulo estático equivalente. O decremento logarítmico foi medido também para cada ciclo de vibração, sendo considerado função da respectiva amplitude. A Figura 7.3-2 apresenta o esquema empregado nos ensaios.

**Tabela 7.3-3: Designação dos ensaios**

| ENSAIO<br>(em ordem cronológica) | NÍVEL DE CARREGAMENTO $P$ (N) |
|----------------------------------|-------------------------------|
| 1                                | 50                            |
| 2                                | 100                           |
| 3                                | 150                           |
| 4                                | 300                           |
| 5                                | 100                           |
| 6                                | 50                            |
| 7                                | 500                           |
| 8                                | 150                           |
| 9                                | 700                           |



**Figura 7.3-2: Esquema dos ensaios.**

### 7.3.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

As Figura 7.3-3 e Figura 7.3-4 mostram a variação do deslocamento inicial e da frequência fundamental (médias de três ensaios) com a carga inicial  $P$  para a série de ensaios descritos na Tabela 7.3-3 sobre a viga 1. Com base nesses resultados foram obtidos os módulos equivalentes dinâmico e estático, respectivamente, apresentados nas Figura 7.3-5 e Figura 7.3-6. Finalmente, a variação do decremento logarítmico, representativo do amortecimento da estrutura, com a amplitude da oscilação pode ser apreciada na Figura 7.3-7.

Os resultados precedentes serão discutidos primeiramente em relação à viga não fissurada. Considera-se que os ensaios 1, 2 e 4, para os quais  $P < 150$  N, correspondam à configuração inicial da viga não fissurada.

Os módulos estático e dinâmico se mantêm praticamente constantes dentro do erro experimental nessa faixa, sendo o segundo ligeiramente inferior ao primeiro. Não foi possível explicar essa aparente anomalia, apesar de terem sido pesquisados todos os fatores potencialmente relevantes, tais como a influência da rigidez do transdutor de deslocamento na frequência fundamental da barra. É interessante comparar o módulo equivalente observado antes da fissuração com o recomendado pela Norma DIN 1045 (1978) para o concreto usado. Admitindo que  $f_{ck} = 13,5$  MPa, ter-se-ia para a viga 1 o valor  $E_b = 2,5 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>, próximo do valor estático medido  $E_{exp} = 2,4 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>. Na viga 2 os módulos estático e dinâmico medidos, iguais a  $1,65 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>, foram sensivelmente inferiores ao recomendado na norma para  $f_{ck} = 12,6$  MPa.

No caso da viga não fissurada o decremento logarítmico aumenta sensivelmente com a amplitude do movimento, sendo a variação descrita pela função linear:

$$d_{log} = 0,15 \eta \quad (\eta < 1) \quad (7.4)$$

Na qual  $\eta =$  amplitude da vibração / amplitude correspondente à fissuração (P = 150N).

Após a fissuração, o fenômeno é bem mais complexo, observando-se que, a partir de aproximadamente  $\eta=5$ , o amortecimento diminui com a amplitude de deformação. Esse comportamento, já observado por Dieterle e Bachman (1981), continua aparentemente até que o aço atinja a tensão de escoamento.

A relação linear:

$$d_{log} = 0,50 - 0,02\eta \quad (7.5)$$

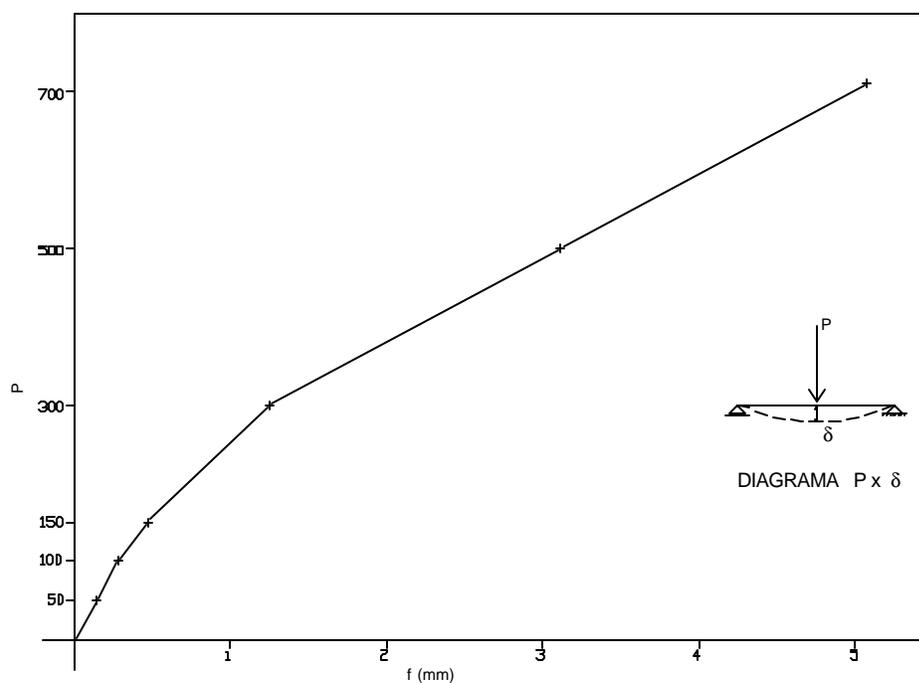
define um limite superior ao decremento logarítmico observado nas vibrações por flexão da viga 1. A razão de amortecimento crítico apresenta o limite inferior:

$$\xi_{\eta} = (0,08 - 0,0032\eta) [1 - \exp^{-0,15\eta}] \quad (7.6)$$

Finalmente, a frequência fundamental decresce de acordo com:

$$f / f_0 = 1 - 0,022 x^2 \quad (7.7)$$

Observe-se que para amplitudes da carga máxima aplicada, relativa à carga de fissuração superiores a 3, o amortecimento decresce com a carga, confirmando a previsão da eq. (7.1) e os resultados de Dietrl e Bachmann (1981). Finalmente, a redução da frequência com a carga máxima, descrita pela eq. (7.7), é também compatível com a expressão (7.3) correspondente a um pórtico plano.



**Figura 7.3-3: Evolução do deslocamento no centro do vão em função da carga.**

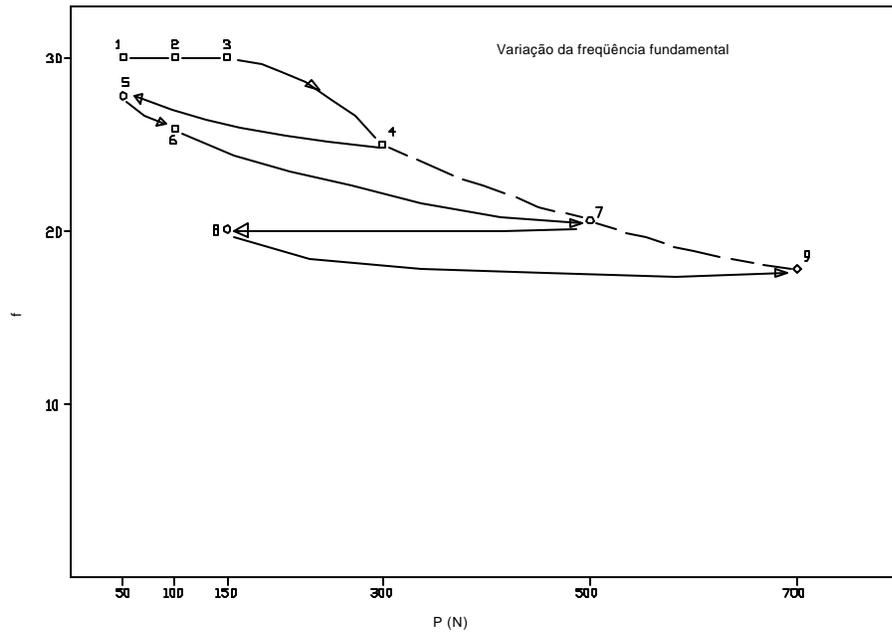


Figura 7.3-4: Evolução da frequência fundamental com a carga aplicada.

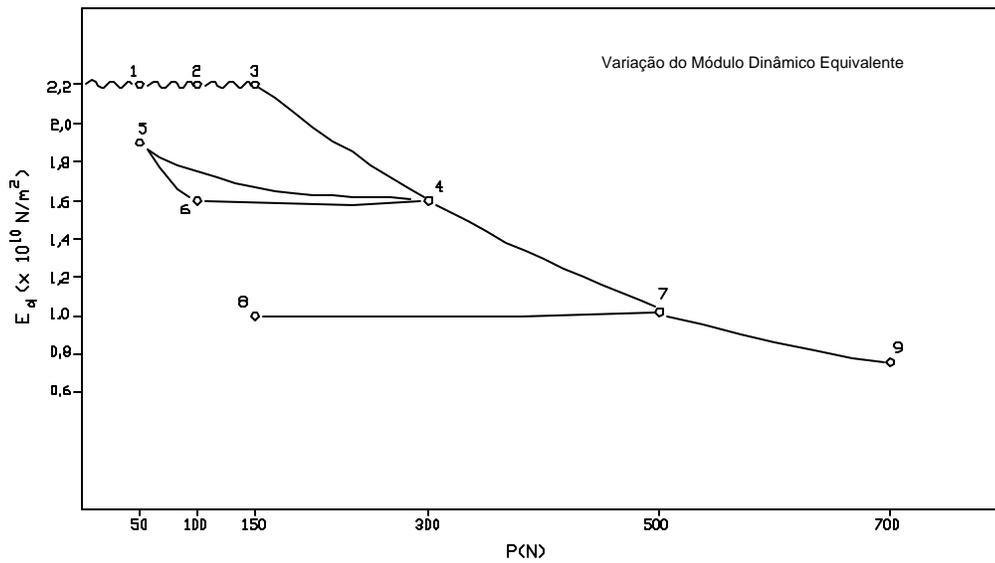


Figura 7.3-5: Variação do módulo dinâmico equivalente.

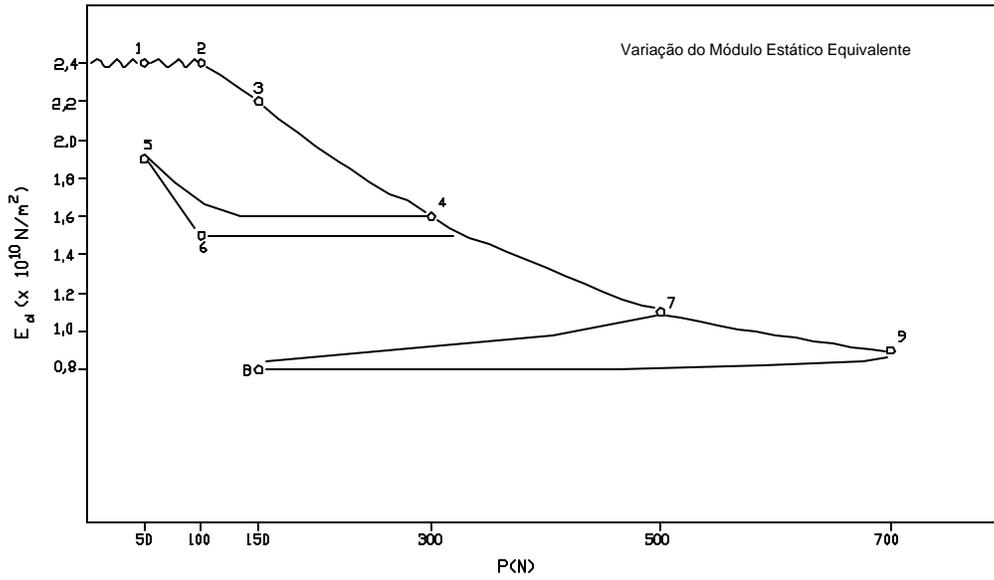


Figura 7.3-6: Variação do módulo estático equivalente.

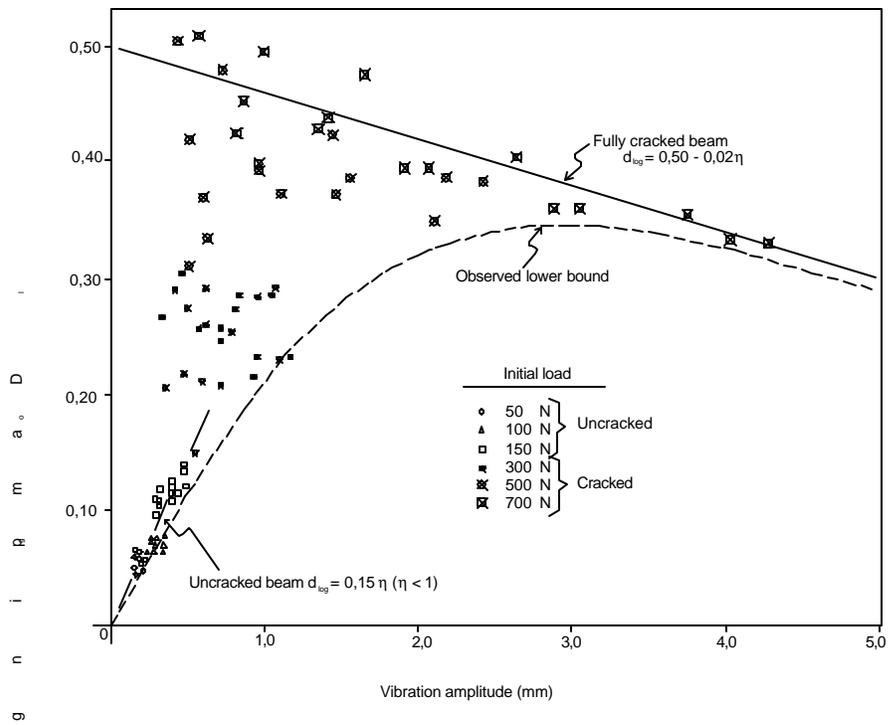


Figura 7.3-7: Variação do decremento logarítmico em função da amplitude da vibração.

### 7.3.4. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

A viga utilizada no estudo experimental foi simulada numericamente mediante o uso do programa do Método dos Elementos Discretos. Foram simuladas para a viga 1 as propriedades mecânicas do concreto e do aço da armadura. Foi admitida, para reduzir o tempo de integração, simetria ao redor de um plano que passa pelo centro do vão modelando-se a viga com 69x3x6 elementos de 0,0145m de comprimento. Para a armadura foi considerado um comportamento elasto-plástico perfeito, enquanto para o concreto a relação bi-linear apresentada por Riera et al (1997). A Figura 7.3.4-1 mostra um esquema do modelo simulado. O esquema de aplicação da carga é apresentado na Figura 7.3.4-2, nesta figura é apresentada a carga aplicada na metade simulada, enquanto a Figura 7.3.4-3 mostra a evolução do deslocamento no centro do vão em função do tempo.

A Tabela 7.3.4-1 apresenta os valores das propriedades mecânicas usadas na simulação numérica.

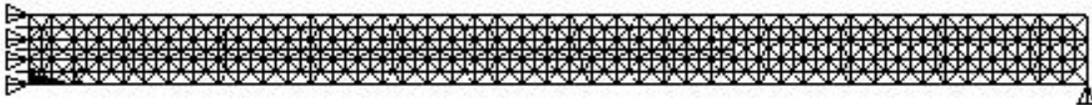
**Tabela 7.3.4-1: Propriedades mecânicas dos materiais.**

| PROPRIEDADE                            |                         |
|--|-------------------------|
| $E_{\text{concreto}}$                  | $2,0 \times 10^{10}$ Pa |
| $G_f$ (Energia específica de fractura) | 100 N/m                 |
| $\nu$ (coeficiente de Poisson)         | 0,25                    |
| $\rho$ (massa específica)              | $2500 \text{ kg/m}^3$   |
| $CV(G_f)$ (coeficiente de variação)    | 10 %                    |
| $f_s$ (tensão de escoamento do aço)    | 495 MPa                 |
| $\xi$ (razão de amortecimento)         | 1,3 %                   |
| $E_{\text{aço}}$                       | $2,1 \times 10^{11}$ Pa |

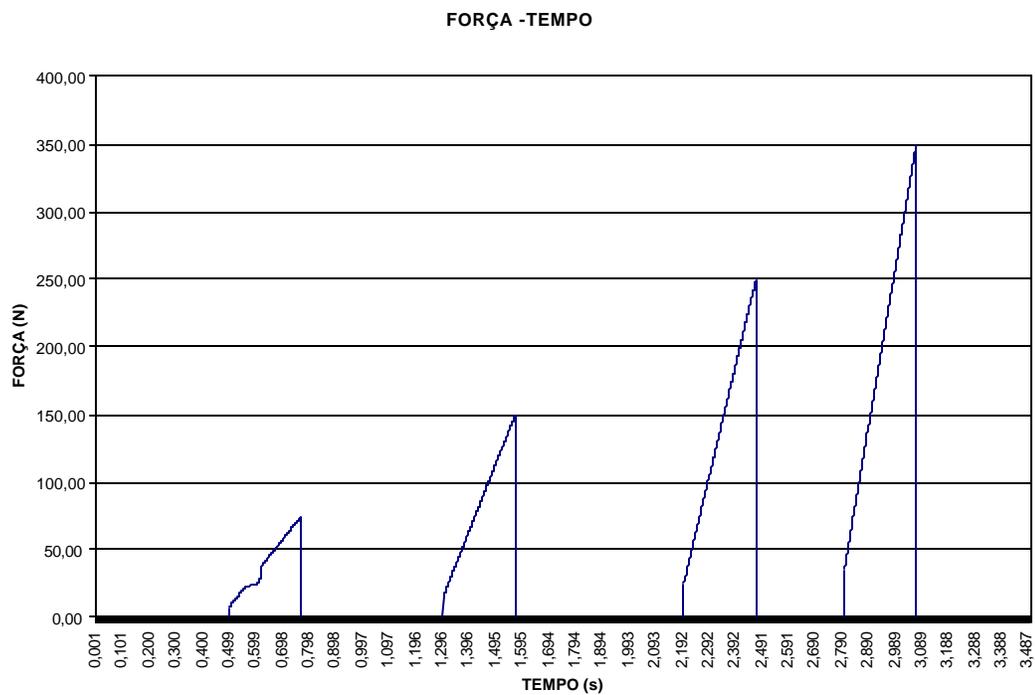
Na Tabela 7.3.4-2 são indicadas as frequências correspondentes ao primeiro modo de vibração do modelo para os diferentes níveis de carga aplicados, obtidas como o valor médio de três simulações. Com tais frequências e considerando a carga de início de fissuração de

175 N pode ser encontrada uma expressão para a evolução da frequência à medida que aumenta o dano, chegando-se a:

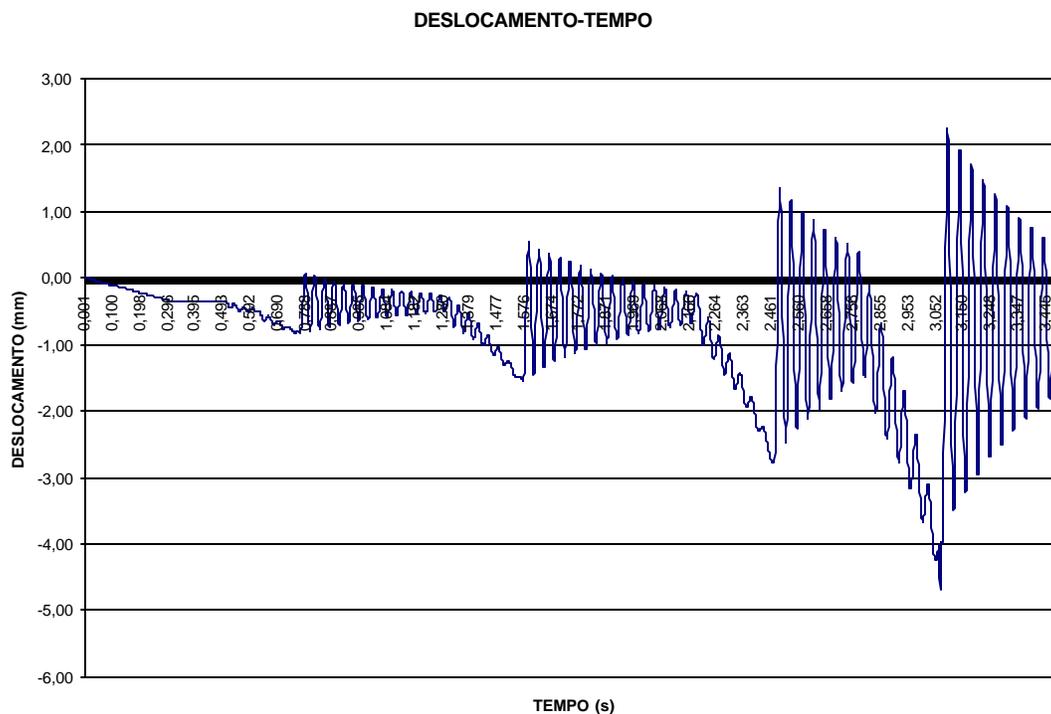
$$f/f_0 = 1 - 0,014x^2 \quad (7.8)$$



**Figura 7.3.4-1: Vista lateral do modelo numérico com o DEM.**



**Figura 7.3.4-2: Esquema de cargas.**



**Figura 7.3.4-3: Evolução do deslocamento no centro do vão para uma simulação.**

A equação (7.8), apesar de prever valores menores de frequência que as eqs. (7.3) e (7.7), pode ser considerada satisfatória. Já no referente ao amortecimento, o mesmo permaneceu aproximadamente constante ao redor dos 0,013. Esta última situação pode ser explicada provavelmente, pela baixa densidade da malha escolhida, não sendo assim capaz de representar adequadamente a dissipação da energia de fratura.

**Tabela 7.3.4-2: Evolução da frequência fundamental com o nível de carga.**

| CARGA (N)    | FREQUÊNCIA (Hz) |
|--------------|-----------------|
| Peso próprio | 30,00           |
| 150 N        | 28,25           |
| 300 N        | 26,59           |
| 500 N        | 23,86           |
| 700 N        | 20,83           |

## 7.5. RESULTADOS

Foi apresentada evidência experimental sobre a redução de frequência fundamental de vibração de estruturas de concreto submetidas principalmente à flexão, com carga máxima aplicada. Enquanto a primeira apresenta uma queda monotônica e suave, o amortecimento é caracterizado por forte variabilidade sendo inicialmente função linear da amplitude da vibração. Uma vez atingido um valor próximo a três vezes a carga de fissuração, o amortecimento decresce com acréscimos adicionais da carga.

O autor não conhece estudos sobre o efeito de repetição da carga ou de fadiga no amortecimento, mas parece lógico esperar que os mesmos provoquem uma redução ainda maior da capacidade de dissipação da energia do concreto armado.

A simulação numérica com um modelo de elementos discretos revela-se capaz de reproduzir adequadamente a resposta de elementos submetidos à flexão, incluindo-se a redução da frequência fundamental com a carga máxima anterior, mas não mostra variação no amortecimento.

## 8. OBTENÇÃO DE MODOS DE VIBRAÇÃO MEDIANTE O USO DA TRANSFORMADA DE FOURIER

### 8.1. INTRODUÇÃO

A determinação da resposta estrutural a excitações transientes pode ser obtida vantajosamente no domínio do tempo, especialmente na presença de comportamento não linear ou de muito baixo amortecimento, em cujo caso soluções no domínio da frequência resultam, em principio, não viáveis. As opções disponíveis para o analista são então (a) integração direta no domínio do tempo e (b) o método dos modos normais. Tem sido propostas extensões deste último, para tratar também problemas não lineares. Em particular, o uso de métodos explícitos de integração a nível do elemento, isto é, sem o uso da matriz de rigidez, tem demonstrado ser uma opção interessante na solução de problemas não lineares, por exemplo, fratura de sólidos frágeis (Rocha,1989); (Iturrioz, 1995). Com efeito, em formulações em que se recorre a métodos implícitos de integração em problemas lineares, a atualização da matriz de rigidez para uma malha em evolução é uma tarefa, além de complexa, sumamente demorada. Por outro lado, o método explícito a nível do elemento é ideal, para aplicação em computadores vectoriais.

Observa-se que nesse contexto, o conhecimento dos modos e frequências naturais de vibração é frequentemente necessário, pelas seguintes razões:

1. Quando existem resultados experimentais, usualmente as primeiras frequências naturais e coeficientes de amortecimento, é possível verificar a qualidade do modelo numérico.

2. No estudo da evolução e detecção do dano em estruturas, também é possível encontrar na literatura métodos baseados nas mudanças nos modos e frequências naturais, a medida que progride o processo de deterioração (Ferrufino, 1994).

## 8.2 METODOLOGIA

A técnica foi aplicada pelo autor na determinação experimental de modos de vibração e frequências em modelos em escala reduzida, assim como em partes de equipamentos mecânicos (Rios, 1994). Ela consiste em fazer uso da transformada de Fourier dos sinais no tempo registrados em diferentes pontos, levando-os ao domínio da frequência, obtendo-se assim os espectros instantâneos de cada um daqueles sinais, para logo realizar a análise dos mesmos.

Para poder aplicar tal técnica, é necessário escolher um ponto para ser usado como de referência, geralmente escolhido em um lugar onde é esperado o maior deslocamento nodal, e um conjunto de pontos para efetuar o mapeamento dos modos de vibração da estrutura estudada. Esses pontos são chamados de 'pontos de varredura', cujo número e localização é escolhido em função da quantidade de modos de vibração assim como da precisão requerida na sua determinação. Para a obtenção da resposta, a estrutura é excitada com um impacto em um ou vários pontos, o qual é função do tipo de modos que se deseja obter (simétricos e/ou antissimétricos). Trabalha-se assim com a magnitude e o ângulo de fase do espectro instantâneo, sendo usada a primeira para definir o valor do deslocamento nodal correspondente ao ponto de varredura considerado, e a fase para determinar o sentido de dito deslocamento. Cada modo de vibração é localizado na frequência onde existe um pico no espectro instantâneo. A expressão usada para calcular os deslocamentos nodais e fases são respectivamente:

$$q = Y_A / Y_B \quad (8.1)$$

$$\phi = \phi_A - \phi_B \quad (8.2)$$

Onde:

$q$  = valor do deslocamento modal.

$Y_A$  = velocidade do ponto de referência.

$Y_B$  = velocidade do ponto de varredura analisado.

$\phi_A$  = ângulo de fase do ponto de referência.

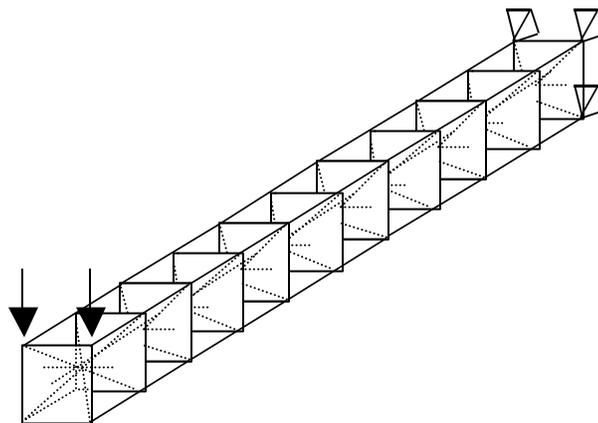
$\phi_B$  = ângulo de fase do ponto de varredura.

Em sistemas não amortecidos, o ponto de varredura estará em fase com o de referência se o ângulo  $\phi$  for  $0^\circ$ , e fora de fase se dito ângulo for de  $180^\circ$ . Como em estruturas com amortecimento os valores da diferença de fase entre os pontos de referência e varredura não são exatamente 0 ou 180, é necessário estabelecer um certo intervalo de tolerância. Rios (1994) adotou um intervalo de  $\pm 70^\circ$ , sendo esse um valor razoável em estudos experimentais, nos quais ruído considerável pode estar presente, mas no caso numérico esse intervalo pode ser bem menor, sendo sugerido  $\pm 5^\circ$ , pois os valores não se afastam muito dos  $0^\circ$  ou  $180^\circ$  teóricos.

### 8.3 MODELO TESTADO

Neste trabalho foi modelada uma viga treliçada de 77 cm de comprimento, material elástico linear, de seção transversal quadrada de 7,7 cm de lado, engastada em um extremo e livre no outro. Usou-se uma discretização com dez elementos no sentido longitudinal ( $L=11$ ) e um no sentido transversal ( $M = N = 2$ ). Os valores dos parâmetros usados no programa estão na tabela 1, e o esquema do modelo é indicado na Figura 8.1.

A carga aplicada consiste em um impulso de 4,2 ms de duração (Figura 8.2), sendo um pulso retangular de 100 N de magnitude, aplicada no extremo livre. Também foram testadas as aplicações da carga em outros pontos para tentar excitar outros modos de vibração obtendo resultados semelhantes aos aplicados no extremo, sem ganho na definição e qualidade dos modos de vibração.

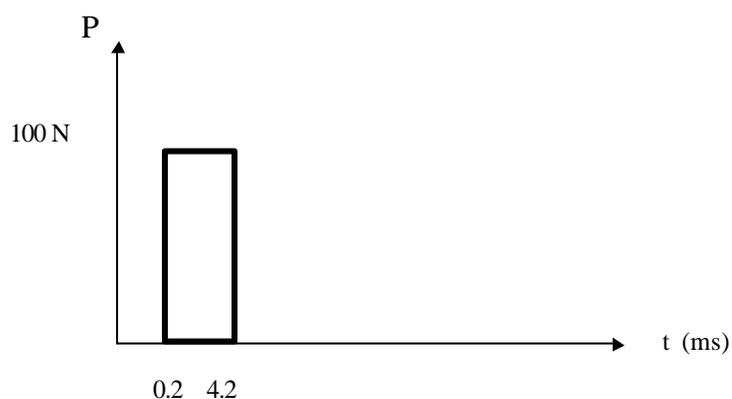


**Figura 8.1:** esquema da discretização empregada.

**Tabela 8.1:** características geométricas e mecânicas do modelo estudado.

|                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| L (sentido x)          | 11                     |
| M (sentido y)          | 2                      |
| N (sentido z)          | 2                      |
| $D_f$ ( amortecimento) | 2 %                    |
| $\rho$ (densidade)     | 2400 kg/m <sup>3</sup> |

|                     |                        |
|---------------------|------------------------|
| $L_{co}$            | 0,077m                 |
| E (módulo de Young) | 3 E10 N/m <sup>2</sup> |



**Figura 8.2: Esquema do pulso de carga empregado.**

Com o objetivo de obter a maior quantidade possível de modos de vibração, foram escolhidos dois tempos totais de 1 seg. e 0,250 seg, com intervalo de integração de 1,0E-05 seg, sendo possível obter até os terceiros e quintos modos de vibração respectivamente, mas a medida que aumenta o número de modos diminui a definição pois o intervalo de frequência é inversamente proporcional ao tempo total de integração.

A Tabela 8.2 mostra os resultados obtidos para esses dois casos.

**Tabela 8.2: Resultados obtidos para o modelo analisado.**

| MODOS           | FREQÜÊNCIAS (Hz) |              |
|-----------------|------------------|--------------|
|                 | Ttot = 0,25 s    | Ttot = 1,0 s |
| 1 <sup>ro</sup> | 81,97            | 83,01        |

|                 |         |         |
|-----------------|---------|---------|
| 2 <sup>do</sup> | 470,92  | 473,64  |
| 3 <sup>ro</sup> | 1196,49 | 1196,29 |
| 4 <sup>to</sup> |         | 2084,96 |
| 5 <sup>to</sup> |         | 3420,23 |

#### 8.4 RESULTADOS OBTIDOS:

Os quatro primeiros modos de vibração do modelo analisado estão representados nas Figuras 8.3 a 8.6.

Um aspecto importante a ser mencionado é que a aplicação da transformada de Fourier e da técnica estudada não requer grande esforço computacional, sendo que para o caso de 0,250 seg o tempo total para esta tarefa é de aproximadamente 3 minutos em um Micro computador Pentium 133 Mhz com 16 Mb de memória RAM, sendo que o tempo necessário para encontrar os deslocamentos é aproximadamente 15 minutos.

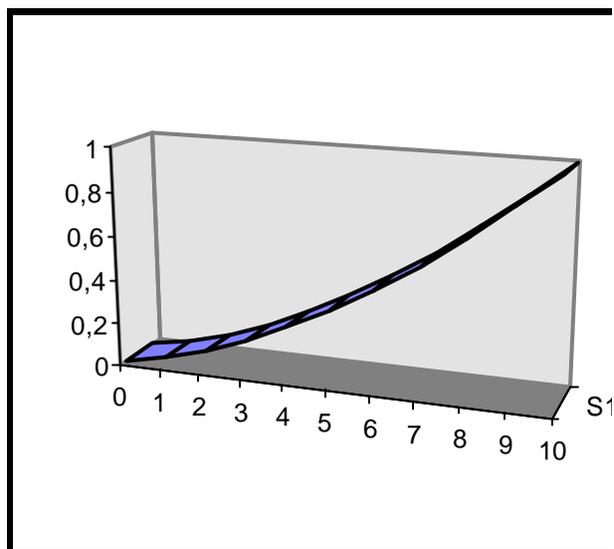


Figura 8.3: Primeiro modo de vibração do modelo.

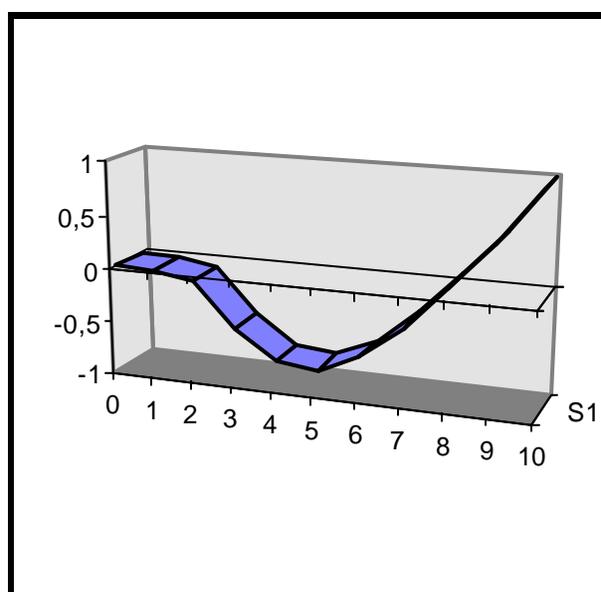


Figura 8.4: segundo modo de vibração do modelo.

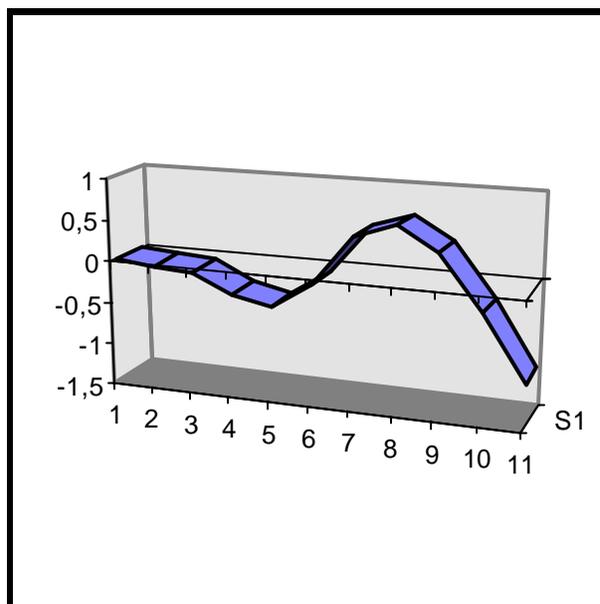


Figura 8.5: Terceiro modo de vibração do modelo.

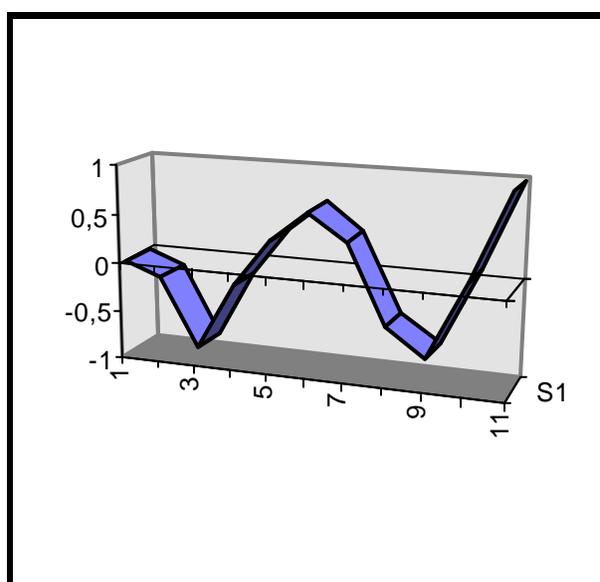


Figura 8.6: quarto modo de vibração do modelo.

Destaca-se neste ponto a utilidade do método proposto, pois permite determinar modos e frequências de vibração conhecendo a evolução do deslocamento, velocidade ou

aceleração no tempo, sem a necessidade de conhecer as matrizes de rigidez e massas. Isto permitiria analisar a evolução dos parâmetros dinâmicos de estruturas submetidas a cargas que provocam dano, como o analisado nos Capítulos 7 ou 9. Sendo o objetivo deste capítulo demonstrar a aplicabilidade do método, sugere-se como proposta para futuras pesquisas o estudo de sua aplicação na detecção das alterações nesses parâmetros provocado por dano.

## 9. APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE IMPACTO

### 9.1 INTRODUÇÃO

Com o objetivo de ilustrar o potencial e versatilidade do método para a obtenção da resposta em problemas de impacto, foram simulados dois problemas diferentes, o primeiro, a aplicação de cargas crescentes sobre placas e cascas cilíndricas (Seções 9.3.1 e 9.3.2), e a seguir, a aplicação do mesmo para o caso do impacto de um navio na estrutura de defesa de um cais de porto (seção 9.4).

O objetivo dos estudos apresentados nas seções 9.3.1 a 9.3.3 é a avaliação da capacidade de carga de estruturas de cascas e placas submetidas ao efeito de puncionamento provocado por cargas impulsivas com taxa de crescimento constante. A avaliação das conseqüências do impacto na estrutura exigiria nesse ponto a realização de uma análise dinâmica não-linear levando em conta a variabilidade das propriedades geométricas e dos materiais empregados na construção.

Com efeito, pode-se prever que para muitos eventos, definidos pelos parâmetros que caracterizam a carga, acontecerá perfuração. Em tais casos, *não seria necessária a determinação da resposta dinâmica completa da mesma*. É obvio, neste contexto, que seria requerido um critério simples que permita eliminar situações que resultariam em falha por perfuração da placa ou casca analisada. Com esse objetivo, na Seção 9.3.1 é determinada a resposta de uma placa plana com características mecânicas determinadas, a uma carga distribuída uniformemente em áreas circulares de 4,6m e 7,2m de diâmetro, com taxas de crescimento constante de 42000 MN/s e 200000 MN/s para duas simulações de velocidade, obtendo-se diferenças desprezíveis na resposta. São estudados os efeitos da área e forma da zona carregada e das condições de bordo. Os resultados apresentados serão também de utilidade na verificação de fórmulas da velocidade de perfuração de placas e cascas, tópico de um estudo posterior. A seguir é avaliada a influência da curvatura, no caso de impacto contra uma superfície cilíndrica, sendo o modelo escolhido representativo o correspondente à placa referida no parágrafo anterior na qual foi atribuída uma curvatura.

## 9.2 IMPACTO EM PLACAS E CASCAS CILINDRICAS

Cargas impulsivas aplicadas numa região reduzida de uma placa ou casca tendem a produzir efeitos locais (descamação, penetração, perfuração ou puncionamento) mais pronunciados em relação aos efeitos globais, na medida em que a área da zona de carga decresce e a velocidade de aplicação da carga aumenta. A situação é típica de impacto de projéteis sólidos em estruturas de centrais nucleares, tais como os associados a tornados, pás de turbinas, e vários outros. Resulta nessa situação suficiente analisar a resposta *local* da estrutura submetida a impacto, isto é, um *setor limitado* da mesma (setor de placa ou casca, por exemplo). Um exemplo ilustrativo, não descrito na literatura técnica aberta, é o impacto de um míssil no cilindro de concreto protendido da Central Nuclear de Boucher (Iran), o qual perfurou o cilindro, deixando um orifício de aproximadamente 0.4m de diâmetro. Fora da região do impacto, porém, não foi detectado nenhum dano na estrutura de concreto. Já no caso de áreas de impacto maiores, ter-se-ia uma situação em que efeitos globais podem exercer alguma influência no comportamento local, mas em termos do *risco de perfuração*, que seria a condição de falha a considerar, estima-se que este efeito será em qualquer caso pequeno e não necessariamente desfavorável. A possível influência da flexão global da casca na resistência à perfuração é discutida nas Seções 9.3.4, verificando que, nos casos estudados, dita influência é marginal.

Pelas razões indicadas foram determinadas as respostas de uma placa plana e de um painel cilíndrico, com a espessura e armadura, assim como as características dos materiais especificadas a seguir:

|                     |  |
|---------------------|--|
| <b>Concreto:</b>    | $f_{ck}=28$ MPa (Resistência à compressão aos 28 dias).              |
|                     | $f_{ck}=45$ MPa (Resistência à compressão atual, estimada).          |
| <b>Aço CA-50-A:</b> | $f_{yk} = 500$ MPa (Tensão de Escoamento)                            |
| <b>Dimensões</b>    | R interno = 1758 cm  |
|                     | R externo = 1833 cm  |
|                     | Espessura total= 75 cm   |
|                     | d = 66 cm.   |
| <b>Armadura</b>     | Horizontal (Circ.) externa 1" a/c 30 cm (Eixo a 9cm da face externa) |
|                     | Horizontal interna 1" a/c 29 cm (Eixo a 6cm da face interna)         |

Vertical externa 1" a/c 30 cm (Eixo a 12cm da face externa)

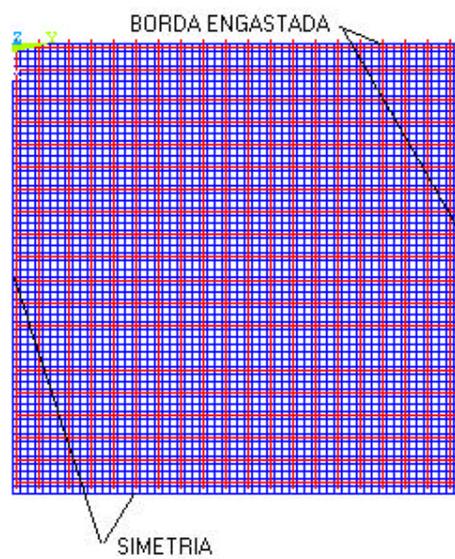
Vertical interna 1" a/c 30 cm (Eixo a 9cm da face interna).

### 9.3 CARACTERÍSTICAS DO MODELO DISCRETO (DEM)

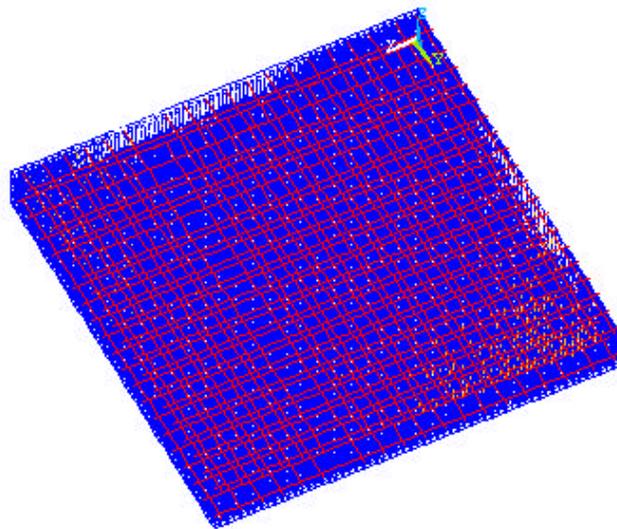
Com as características mecânicas e geométricas acima definidas, foram modeladas placas quadradas de 6m de lado e 75 cm de espessura total. Nas séries denominadas A, tais placas foram consideradas engastadas em dois dos seus lados e com condições de simetria nos outros dois lados, visando representar uma placa ou casca cilíndrica de 12 m de lado. Para tal fim foram usados 60 x 60 x 7 elementos de comprimento  $L_{co}$  igual a 0,106 m. Os parâmetros usados na simulação numérica são indicados na Tabela 9.3.1. Para o modelo B, foram usados elementos de  $L_{co}$  igual a 0,15 m em 70 x 70 x 5 elementos, enquanto no modelo C, foram usados 120 x 50 x 5 elementos de 0,15 m.

**Tabela 9.3.1: Propriedades dos materiais .**

| PROPRIEDADE              |                   |
|--------------------------|-------------------|
| $E_c$ [MPa]              | $4,0 \times 10^5$ |
| $E[G_d]$ [N/m]           | 150               |
| $f_{tk}$ [MPa]           | 4,50              |
| CV [ $G_d$ ] [%]         | 20                |
| $\tilde{\sigma}$         | 0,20              |
| $\tilde{n}$ [ $Kg/m^3$ ] | 2500              |
| $L_{co}$ [m]             | 0,106             |
| $f_{yk}$ [MPa]           | 500               |
| $E_s$ [MPa]              | $2,1 \times 10^6$ |



**Figura 9.3.1: Vista superior do modelo DEM (Modelo A)**



**Figura 9.3.2: Perspectiva do modelo A da placa.**

### 9.3.1 RESPOSTA LOCAL DE PLACA PARA CARGA EM ÁREA CIRCULAR NO CENTRO

Foi determinada a resposta de uma placa de 12m x 12m de lado, com carga numa área circular centrada no centro da placa, analisando apenas um quarto da mesma. Com efeito, admitindo-se a existência de dois planos de simetria, pode-se assim reduzir o número de GDL do problema. Devido a hipóteses de que as propriedades do concreto (módulo de elasticidade, resistência à compressão, etc.) são campos aleatórios, *não existe simetria das propriedades dos materiais*. Estritamente, devia então ser determinada a resposta da totalidade da placa, não apenas de um setor. Uma representação correta exigiria a utilização de um modelo DEM com mais de 800.000 GDL, que excede a capacidade atualmente disponível no LDEC. Pela razão indicada, foi aceita a análise de um quadrante unicamente.

Admite-se também que a carga está uniformemente distribuída e que é aplicada com uma taxa de crescimento de 20000 MN/s.

Na Fig. 9.3.1-1 mostra-se a variação da reação total na borda da placa com o tempo. O valor máximo atingido pela reação para uma área carregada de 2,3m de diâmetro, identifica a carga de colapso por perfuração da placa, igual a 16,5 MN. A falha acontece 0,11s após o início do processo de carga. Já para um área carregada de 7,2m de diâmetro, a carga de perfuração seria, na simulação graficada na Fig. 9.3.1-2, igual a 21,7 MN.

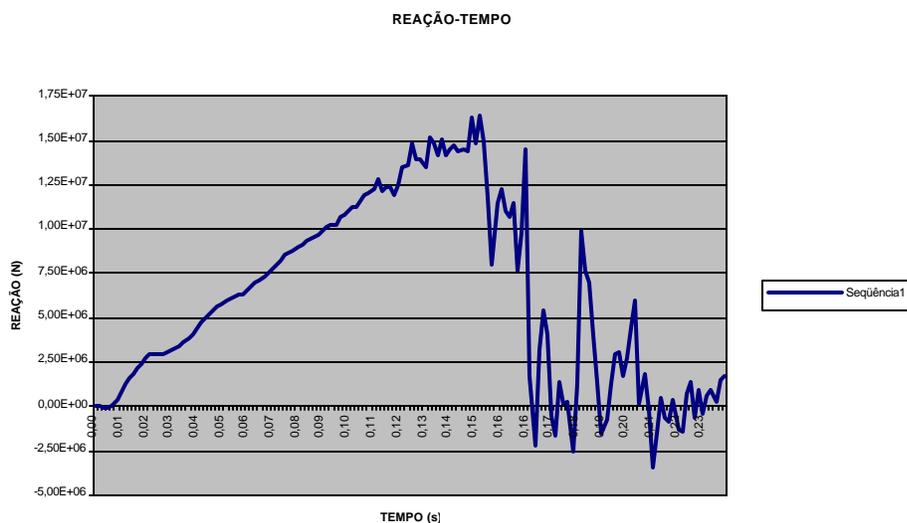
### 9.3.2 RESPOSTA LOCAL DE CASCA CILÍNDRICA PARA CARGA EM ÁREA CIRCULAR.

A seguir foi determinada a resposta de um setor de casca cilíndrica (placa curva) que difere da placa plana analisada no item anterior apenas no raio de curvatura na direção meridional, que passa a ser tomado, em relação à superfície média, igual a 1200 cm no modelo A, 2100 cm no modelo B e retangular de 1500 cm x 3600 cm no modelo C.

As Figs. 9.3.2-1 e 9.3.2-2, mostram a evolução no tempo da reação total nos apoios da casca, para cargas aplicadas em áreas circulares de 2,3m e 3,6m de raio, aplicadas no centro do setor.

Ambos os casos para o modelo A. Observe-se que, como nos casos anteriores, apenas um quadrante foi modelado na análise. Os valores de pico dos respectivos diagramas são 30 MN e 35 MN. Esses valores podem ser considerados estimadores das cargas totais que produzem perfuração da casca cilíndrica, admitindo distribuição uniforme da carga em círculos de 4,6 e 7,2m de diâmetro, respectivamente.

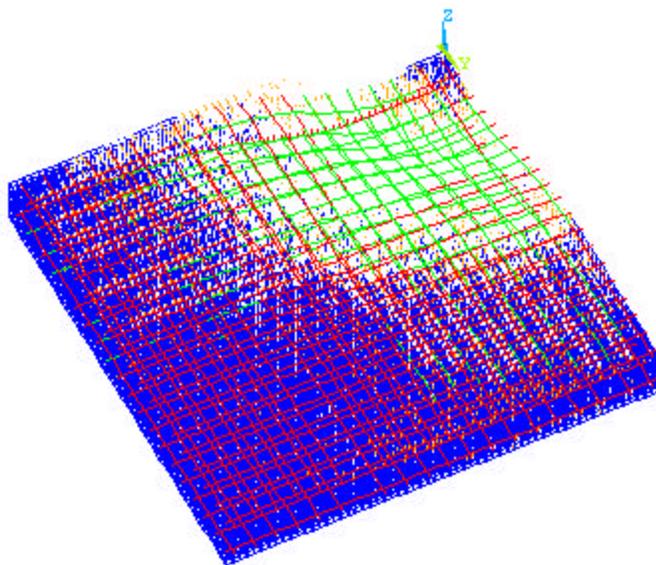
Com o objetivo de aferir os resultados obtidos e para verificar a influência das dimensões das cascas consideradas em relação ao tamanho da área carregada, foram realizadas as simulações de carregamento para o raio de aplicação da carga de 3,60 m nos modelos B e C, cujas dimensões foram anteriormente definidas. A taxa de incremento da carga foi mantida constante e igual à correspondente no modelo A. Pode-se observar nas Figura 9.3.2-3 e Figura 9.3.2-4, que não se percebe nenhuma mudança no padrão de ruptura e quase nenhuma alteração nos valores da resistência da casca ao efeito de puncionamento.



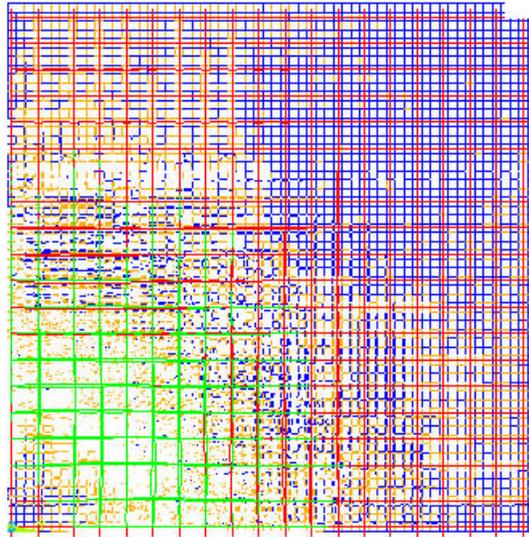
**Figura 9.3.1-1: Curva reação total versus tempo para o raio de 2,30 m.**



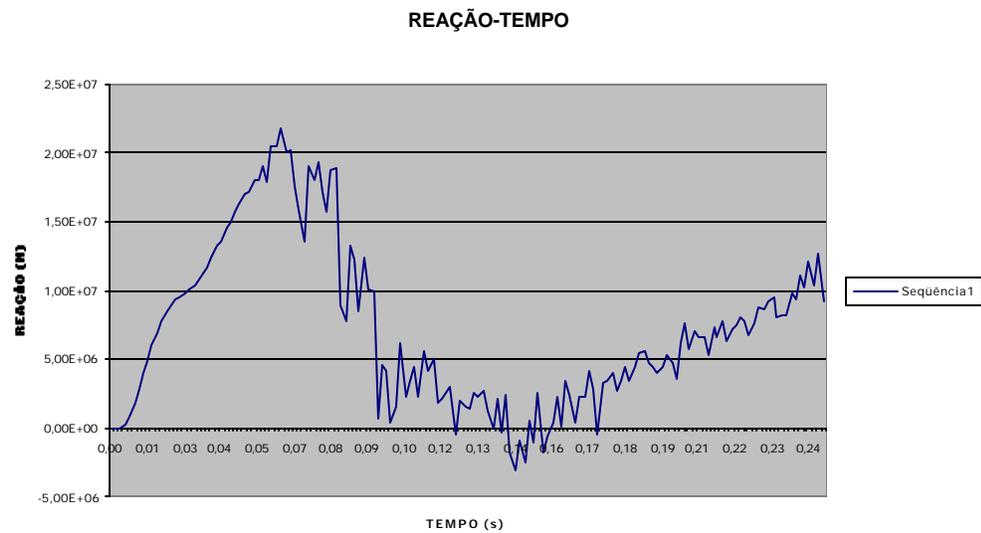
**Figura 9.3.1-1 (a):** Curva reação total versus deslocamento no centro para o raio de 2,30 m.



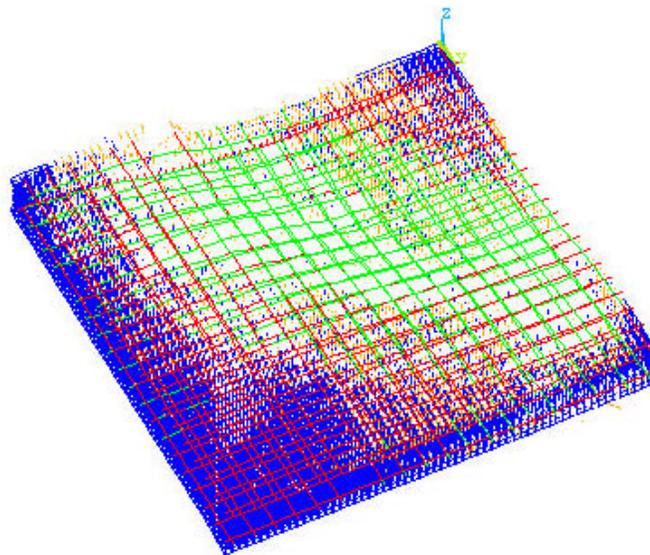
**Figura 9.3.1-1 (b):** Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga de 2,30 m.



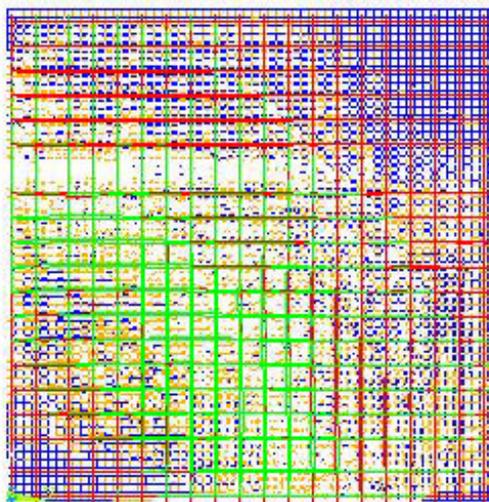
**Figura 9.3.1-1 (c): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga de 2,30 m.**



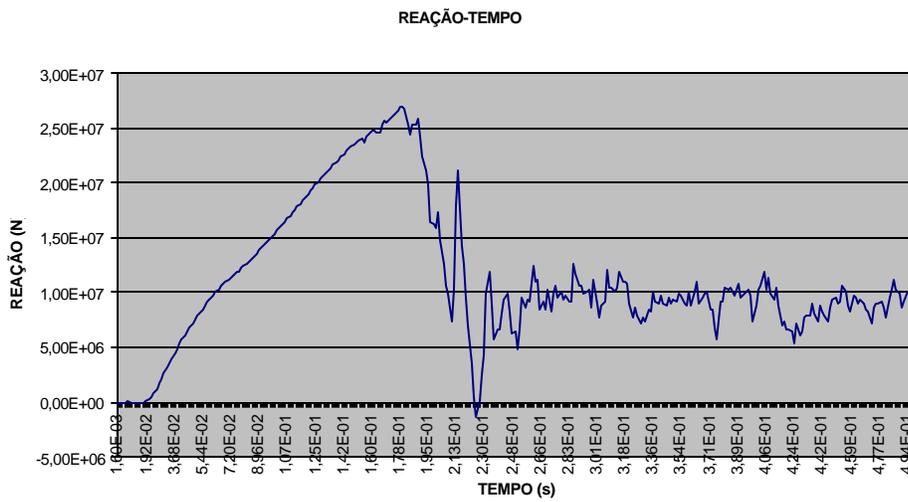
**Figura 9.3.1-2: Curva reação total versus tempo para o raio de 3,6 m.**



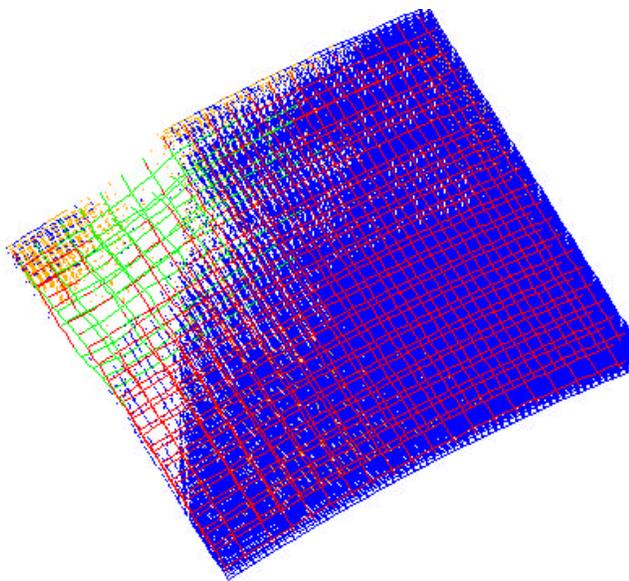
**Figura 9.3.1-2 (a):** Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga de 3,6 m.



**Figura 9.3.1-2 (b):** Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga de 3,6 m.

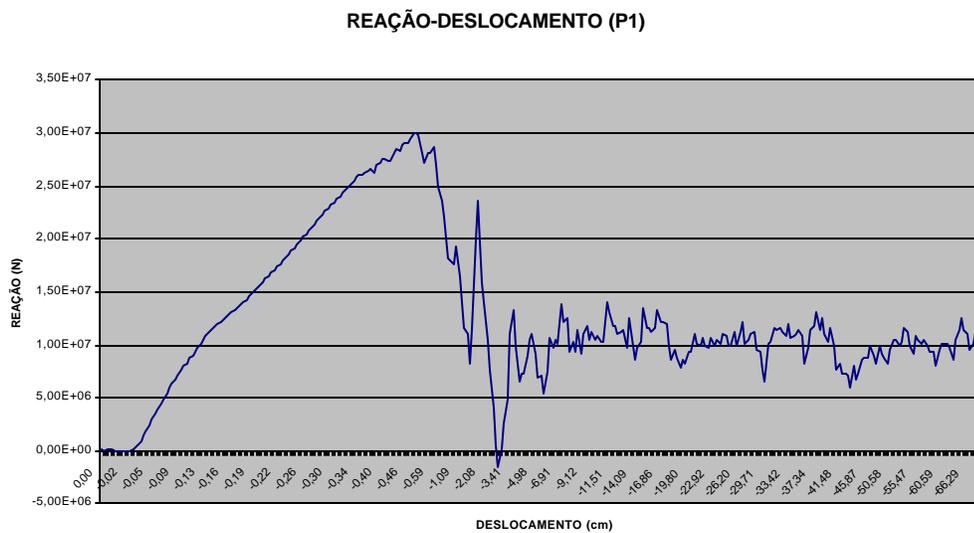


**Figura 9.3.2-1: curva reação total versus tempo para o raio de 2,3 m**

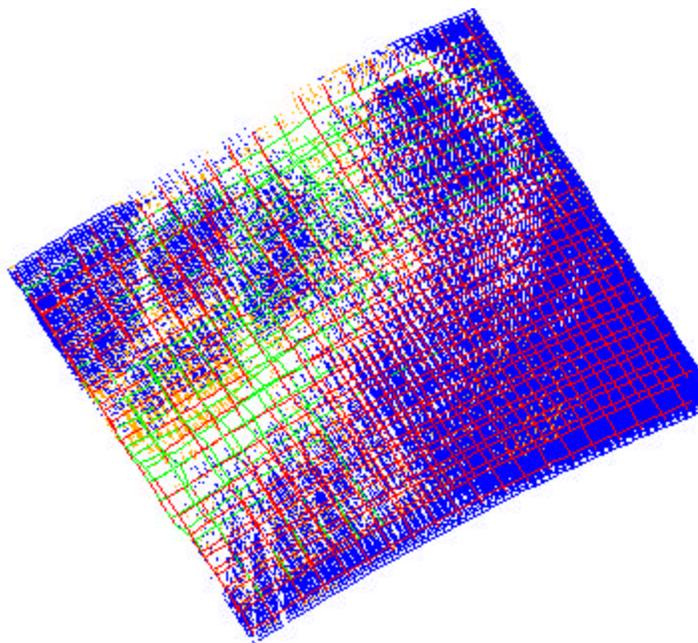


**Figura 9.3.2-1 (a): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga de 2,30**

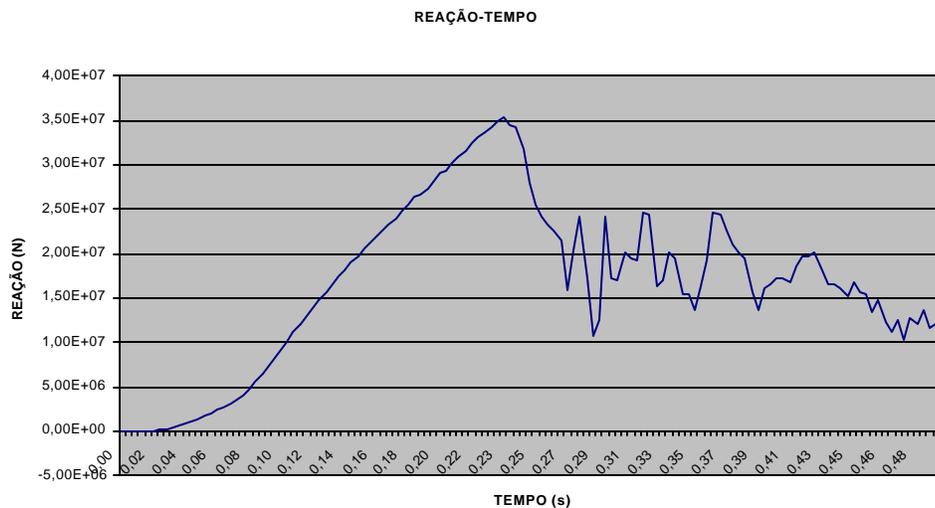
**m.**



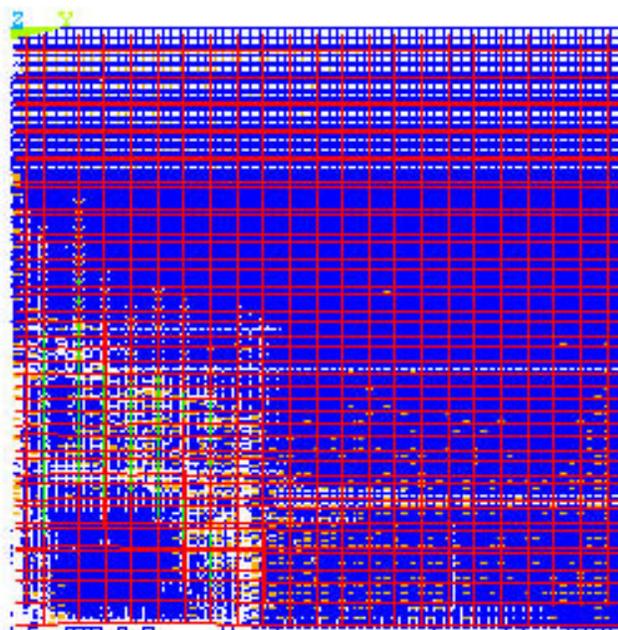
**Figura 9.3.2-2: curva reação total versus tempo para o raio de 3.6 m.**



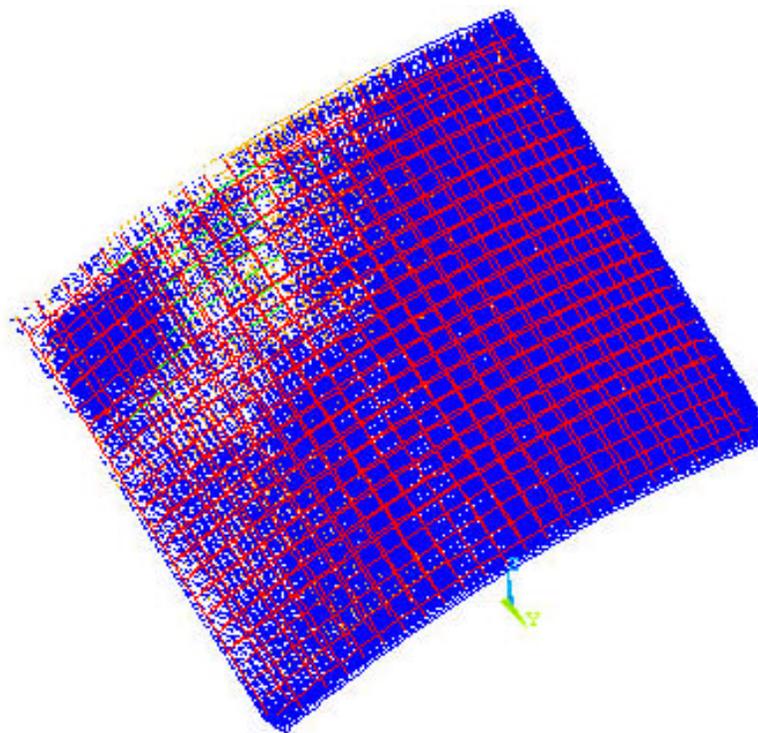
**Figura 9.3.2-2 (a): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga de 3,6 m.**



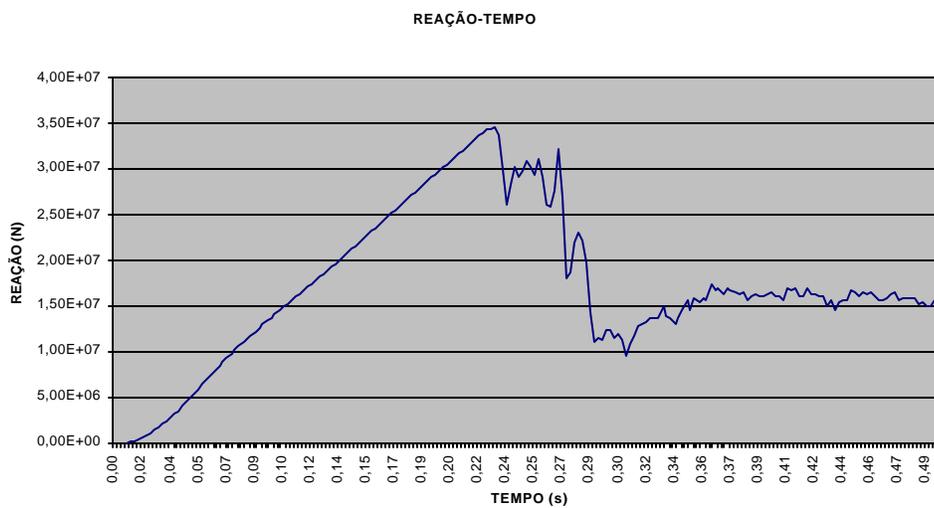
**Figura 9.3.2-3: curva reação total versus tempo para o raio de 3.6 m, modelo B.**



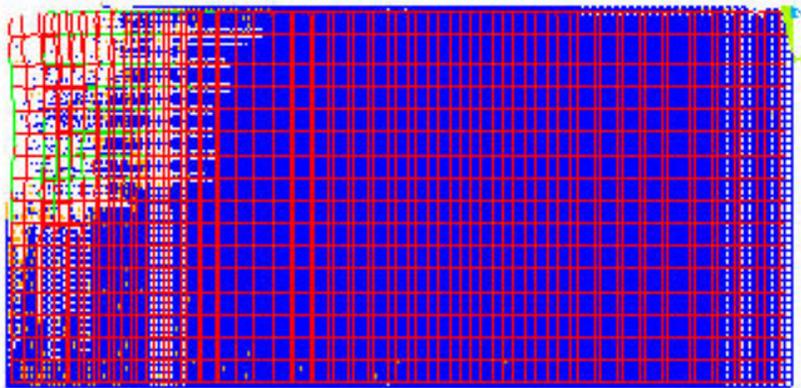
**Figura 9.3.2-3 (a): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga de 3,6 m.  
Modelo B.**



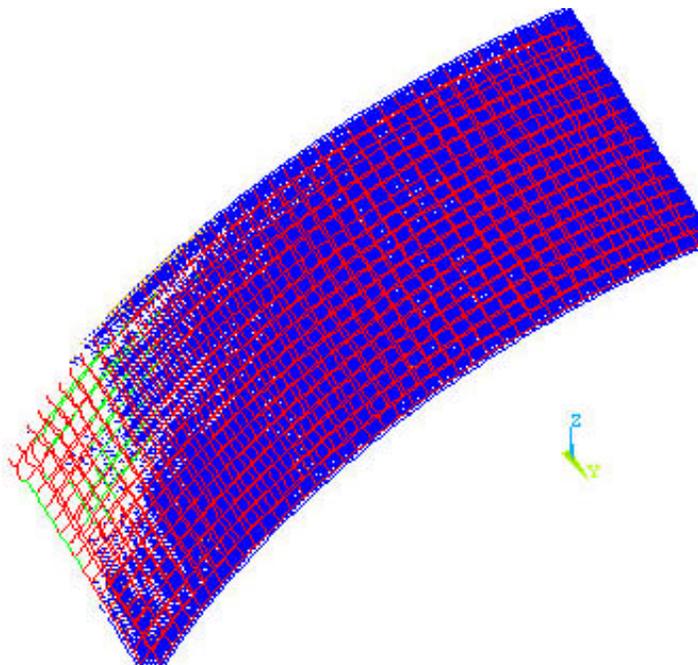
**Figura 9.3.2-3 (b):** Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga de 3,60 m. Modelo B.



**Figura 9.3.2-4:** curva reação total versus tempo para o raio de 3,6 m, modelo C.



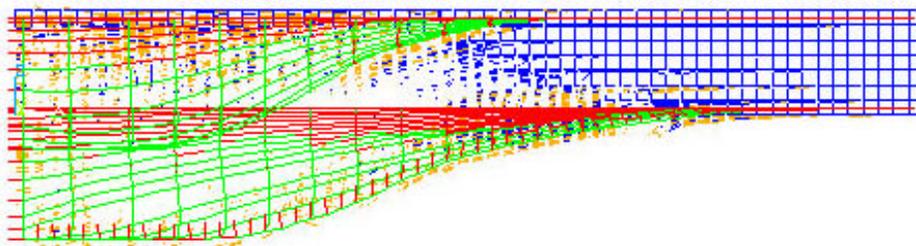
**Figura 9.3.2-4 (a):** Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga de 3,60 m. Modelo C.



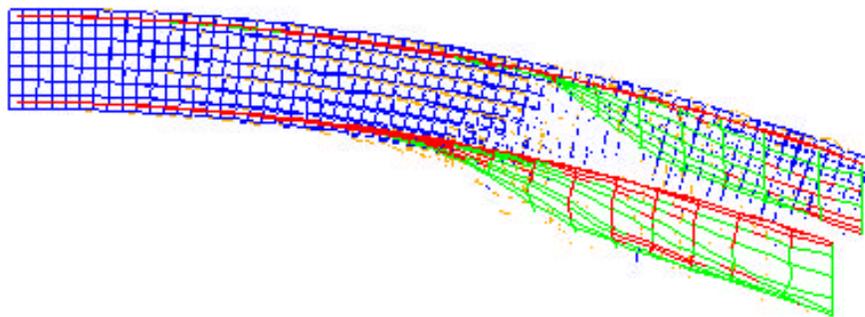
**Figura 9.3.2-4 (b): Esquema de ruptura encontrado para o raio de aplicação da carga de 3,60 m. Modelo C.**

### 9.3.3 INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

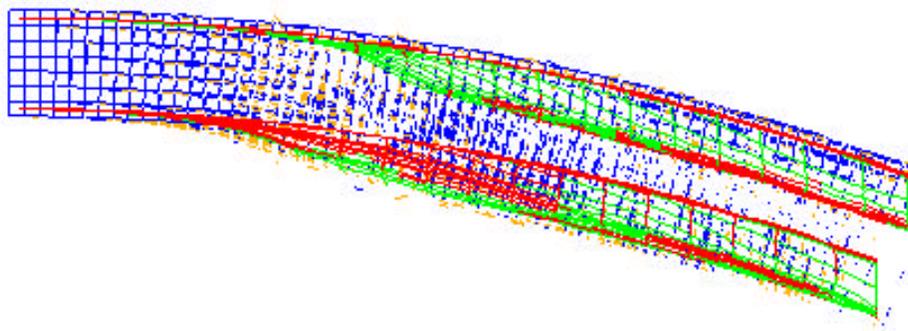
No presente capítulo é examinada a resposta local de estruturas nucleares, especificamente a casca cilíndrica analisada no item anterior, visando determinar a resistência à perfuração. Evidência inicial sobre a pequena influência das condições de contorno foi apresentada na determinação da resposta local do cilindro, discutida na Seção 9.3.2, na qual são empregados três modelos diferentes (Modelos A, B e C), com diferenças marginais na resposta local. A seguir são apresentados gráficos de vários casos descritos anteriormente, que mostram claramente que a falha por perfuração acontece *antes* que as placas ou cascas analisadas experimentem resposta perceptível *por flexão*.



**Fig. 9.3.3-1.** Vista lateral da placa para um raio de aplicação da carga de 2,3m para  $t= 0,5s$  após início de aplicação da carga, mostrando claramente a falha por perfuração no centro, sem deformação visível nem dano perceptível nos apoios, confirmando que o efeito local não é afetado por flexão global da placa.



**Fig. 9.3.3-2.** Vista lateral da casca cilíndrica para um raio de aplicação da carga de 2,3m em  $t= 0,5s$  após início de aplicação da carga, mostrando claramente a falha por perfuração no centro, sem deformação visível nem dano perceptível nos apoios, confirmando que a resposta local não é afetada significativamente por flexão global da casca.



**Fig. 9.3.3-3.** Vista lateral da casca cilíndrica para um raio de aplicação da carga de 3,6m em  $t= 0,5s$  após início de aplicação da carga, mostrando claramente a falha por perfuração no centro, sem deformação visível nem dano perceptível nos apoios, confirmando que a resposta local não é afetada significativamente por flexão global da casca.

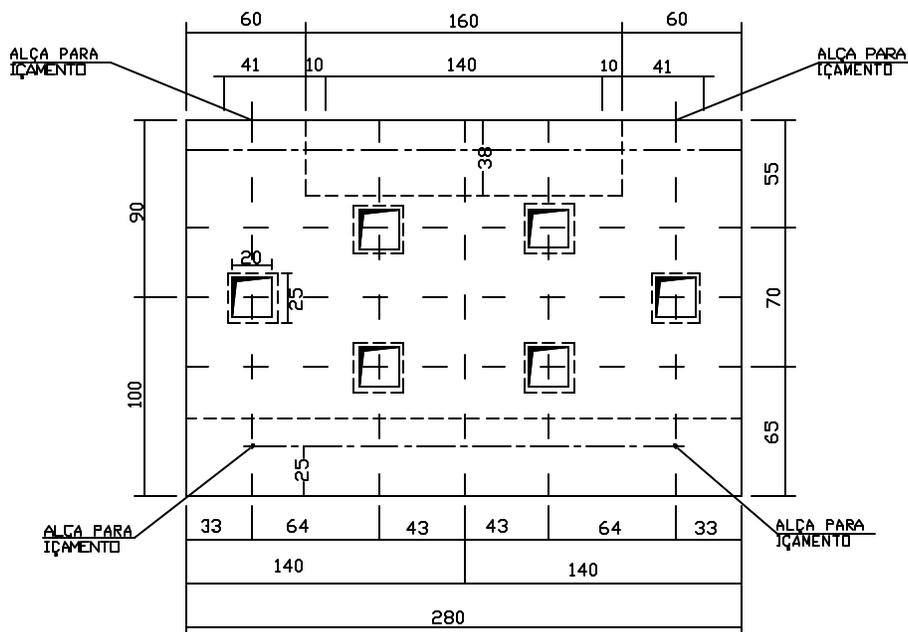
#### 9.4 MODELO PARA UMA PLACA DE CONCRETO ARMADO:

A simulação foi realizada num modelo de uma placa de concreto armado, a qual suporta absorvedores de impacto instalados na estrutura de um cais de porto. Dita placa rompeu sob o efeito de um impacto acidental de um barco de 62.000 t durante operação de atraque.

As características geométricas da placa em consideração estão indicadas nas Figura 9.4-1. Fazendo uso da condição de simetria foi modelada somente a metade da estrutura usando 20x7x27 elementos cúbicos de 0,07m de comprimento, nas direções X, Y e Z respetivamente. As barras de aço existentes na placa indicadas na Figura 9.4-2 e Figura 9.4-3 foram adequadamente representadas no modelo, totalizando 700 barras reforçadas. As propriedades dos materiais a serem modelados assim como os parâmetros usados na simulação estão indicados na Tabela 9.4-1.

O esquema de carga aplicado consiste em um deslocamento prescrito crescente linearmente no ponto de engaste na placa do absorvedor de impacto, ver Figura 9.4-4. Foram testadas diferentes velocidades de aplicação da carga, observando-se pequenas mudanças no valor da carga de ruptura, da ordem dos 5%. O intervalo de integração escolhido foi de  $5 \times 10^{-5}$  seg. Assim a carga aplicada foi proporcional ao tempo transcorrido desde o início do processo de carga. Tal carga foi considerada atuando segundo a direção do eixo da estrutura metálica do absorvedor de impacto (Figura 9.4-4 e Figura 9.4-5).

As Figura 9.4-6, Figura 9.4-7, Figura 9.4-8 correspondem a fotografias do esquema de aplicação da carga e o esquema de ruptura encontrado.



VISTA FRONTAL

**Figura 9.4-1: Vista frontal do modelo simulado.**

As Figura 9.4-6, Figura 9.4-7, Figura 9.4-8 correspondem a fotografias do esquema de aplicação da carga e o esquema de ruptura encontrado.

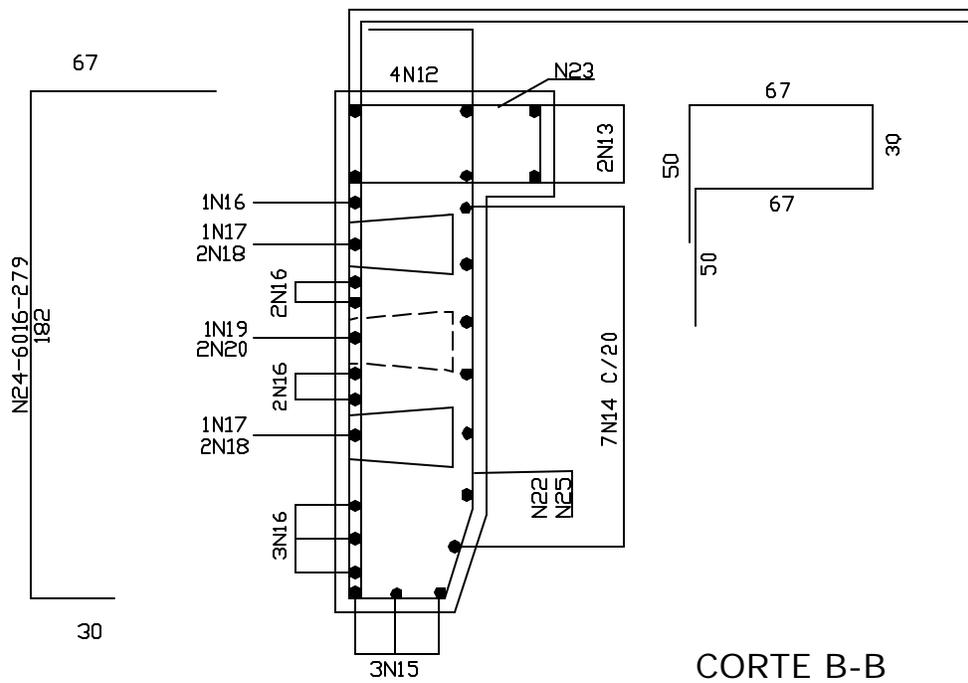


Figura 9.4-2: Corte transversal do modelo ensaiado

Tabela 9.4-1: Propriedades mecânicas dos materiais modelados.

| Concreto  |                          | Aço   |                          |
|-----------|--------------------------|-------|--------------------------|
| $f_{cm}$  | 40 MPa                   | $E_s$ | $2,10 \times 10^{11}$ Pa |
| $f_{tm}$  | 2,3 MPa                  | $f_s$ | 495 MPa                  |
| $E_c$     | $3,10 \times 10^{10}$ Pa |       |                          |
| $E(G_f)$  | 80 N/m                   |       |                          |
| $CV(G_f)$ | 25 %                     |       |                          |
| $\nu$     | 0,20                     |       |                          |
| $\rho$    | 2500 kg/m <sup>3</sup>   |       |                          |

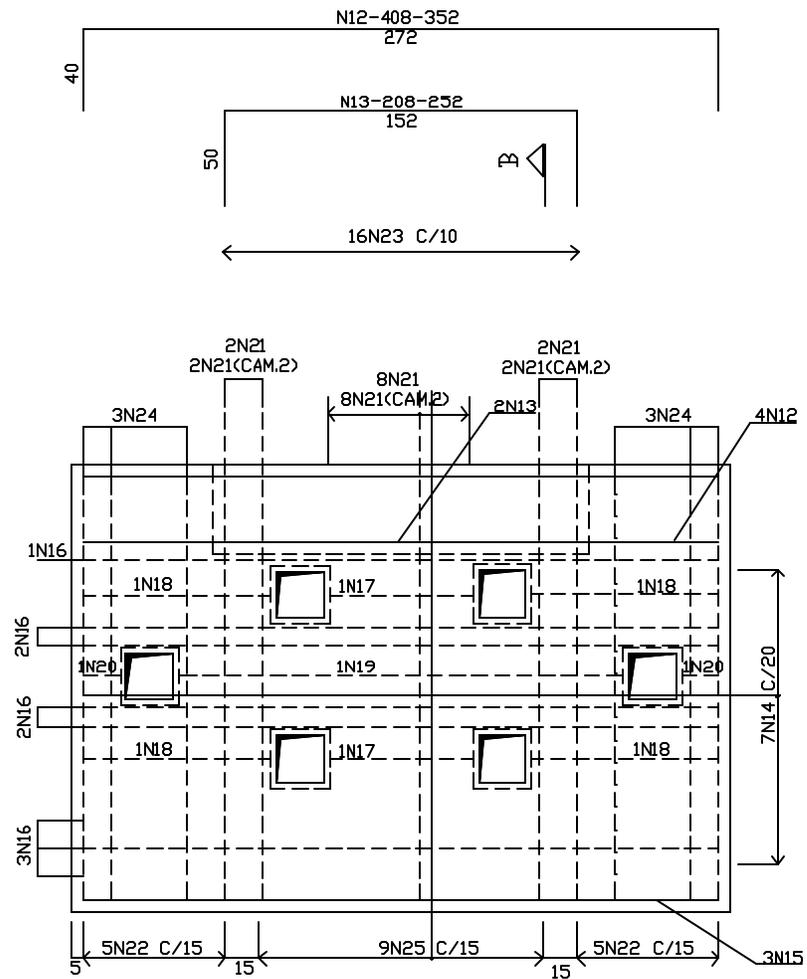
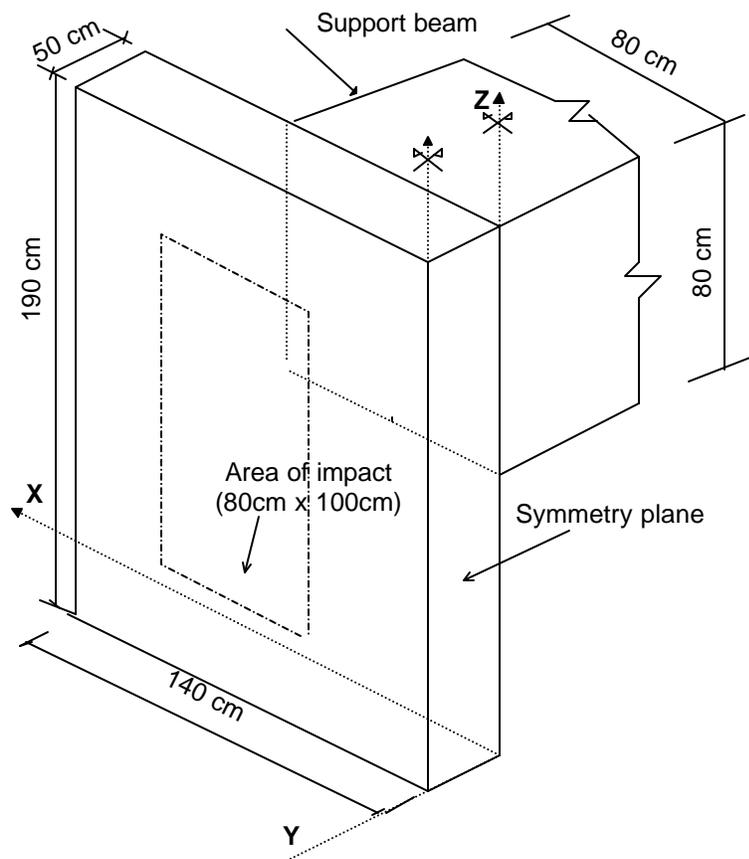
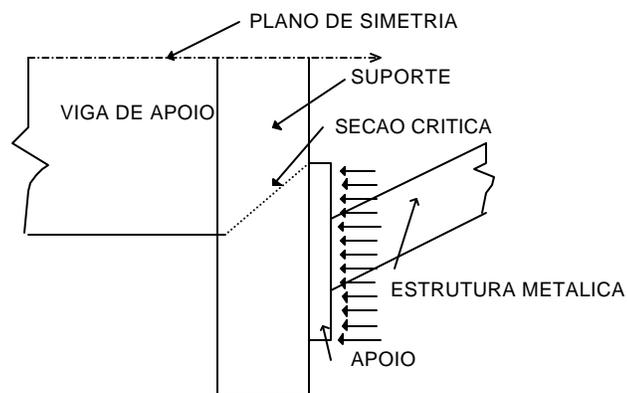


Figura 9.4-3: Esquema da armadura existente no protótipo.



**Figura 9.4-4: Esquema do modelo ensaiado.**



**Figura 9.4-5: Vista superior da placa.**



**Figura 9.4-6: Fotografia da fissura encontra da in loco.**

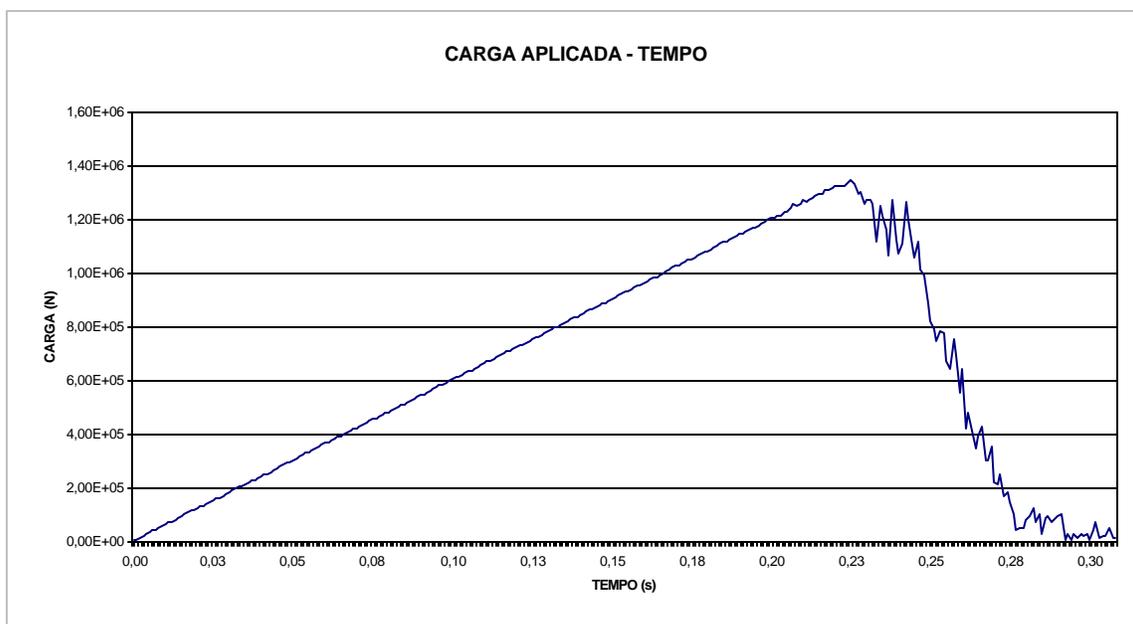


**Figura 9.4-7: Fotografia da fissura encontrada in loco.**



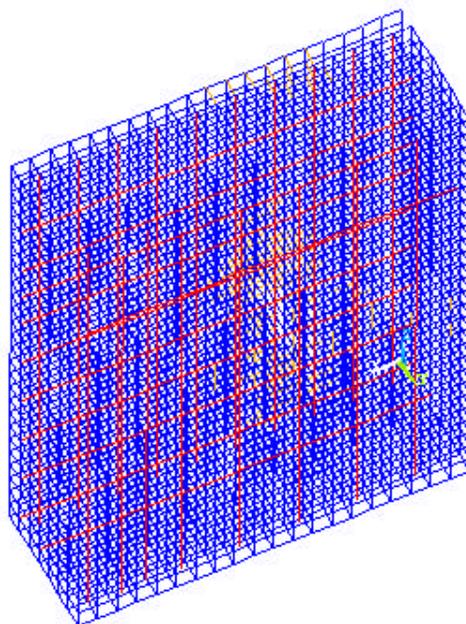
**Figura 9.4-8: Fotografia da forma de atuação da carga na placa.**

A Figura 9.4-9 apresenta a evolução da Reação de Apoio em função do tempo para uma simulação, a qual permite deduzir o momento no qual acontece a ruptura, assim como o valor da carga de ruptura da placa do suporte, da ordem dos 1280 kN.

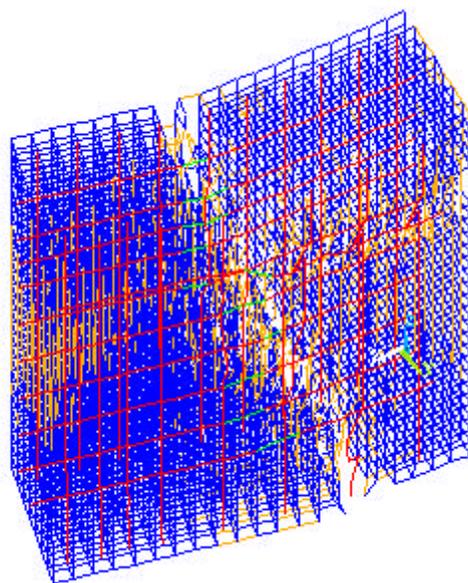


**Figura 9.4-9: Curva Reação de apoio – Tempo**

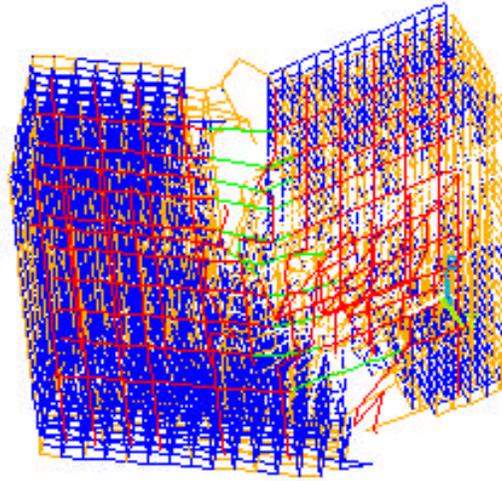
Na Figura 9.4-10, apresenta-se um esquema do suporte modelado antes da ruptura, enquanto a Figura 9.4-11 corresponde ao modelo depois de atingida a carga de ruptura, e a Figura 9.4-12 corresponde ao modelo 20 ms após a mencionada carga. Nas figuras acima mencionadas, foi usado um fator de escala de 10 na representação dos deslocamentos horizontais, sendo também excluídas da representação as barras diagonais.



**Figura 9.4-10: Discretização antes da ruptura.**



**Figura 9.4-11: Discretização no momento de atingir a carga máxima de 1280 kN.**



**Figura 9.4-12: Modelo transcorridos 20 ms depois de atingida a carga máxima.**

## CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste trabalho foram desenvolvidos ferramentas e algoritmos que representam um avanço na metodologia do DEM, permitindo representar o contínuo por meio de um arranjo de barras formando uma treliça espacial.

Foi abordado satisfatoriamente o problema da aleatorização das propriedades mecânicas dos materiais, através da geração usando o esquema de Representação Espectral. Neste aspecto, é importante salientar que embora esta metodologia de geração aumente o esforço computacional necessário, esta tarefa é realizada uma única vez enquanto a integração numérica continua sendo o principal fator a ser considerado no esforço computacional necessário, sendo que para este tópico devem ser estudadas novas alternativas de otimização.

Sobre o Efeito de Escala, é importante salientar que os resultados obtidos com esta metodologia de simulação numérica estão em excelente nível de convergência com os resultados obtidos experimentalmente para os casos de tração simples, assim como em flexão e corte, pelo qual, pode-se afirmar que, realmente, o esquema proposto, é capaz de reproduzir eficientemente tal efeito, não só em nível de tensão, mas principalmente no referente à forma da curva carga-deslocamento no comportamento pós-crítico. Este último aspecto, nem sempre levado em conta nas referências bibliográficas.

Como foi apresentado nos capítulos 7 e 8, o DEM permite determinar com um bom nível de precisão o efeito da deterioração por causa da aplicação de cargas, medido através das propriedades dinâmicas, i.e, frequência, e embora, não tenha sido realizado neste trabalho, também é de se esperar que em termos das formas modais. No referente à evolução do amortecimento, não foi possível com a discretização escolhida obter uma resposta a tal evolução.

Levando em conta as considerações acima mencionadas, é importante destacar alguns tópicos que ainda precisariam ser abordados, o que poderia dar lugar à continuidade da pesquisa nesta área, entre outros, eles estão mencionados a seguir.

- Necessidade de estudar diferentes alternativas para a relação constitutiva para as barras tracionadas, provavelmente, nesta linha seja interessante estudar, a relação bi-linear na descarga proposta por Hilleborg (1978) e adotada pelo CEB, assim como outras relações existentes na bibliografia do tipo exponencial. Isto provavelmente permitiria fazer uma análise mais rigorosa ao respeito da variabilidade dos resultados.
- Necessidade de reduzir o esforço computacional necessário para a integração numérica, tornando assim possível a sua aplicação para cargas estáticas.
- Um melhor estudo sobre o efeito da discretização sobre alguns parâmetros dinâmicos como, por exemplo, o amortecimento, sendo que, com o nível de discretização usado neste trabalho não foi possível detectar este efeito.
- A ligação do método dos elementos discretos (DEM) a outros tipos de discretização do contínuo como podem ser o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos pode ser um caminho importante para contornar a limitação do DEM no que faz geração de malhas de geometria complexas.





**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- ABAQUS/Explicit (1995). The Theorie Manual, (internal HKS distribution) HIBITT, Karlson & Soresen, INC.
- ABSI, E. (1971). Théorie des equivalences determination de quelques elements types. Anales de L'Institut Technique du Balument et des Travau Public. No. 281, 83-86.
- BAŽANT, Z. P. (1976). Instability, ductility, and size effect in strain -softening concrete, J. Eng. Mech. Div. 102, EM2, 331-344; disc 103, 357-358, 775-777, 104, 501-502.
- BAŽANT, Z. P. and CEDOLIN, L. (1980). Fracture mechanics of reinforced concrete, J. Eng. Mech. Div. Proc. 106, 1257-1306.
- BAŽANT, Z.P. & OH, B.H. (1983). Crack Band Theory for Fracture of Concrete. Mater and Struct., Vol. 16, No. 93, 155-177.
- BAŽANT, Z.P. & KIM, J.K (1984). Size effect in shear failure of longitudinally reinforced beams. Disc. 81-38. ACI Journal, p.456,1984.
- BAŽANT, Z.P., (1992). Fracture Mechanics Of Concrete: Concepts, models and Determination of Material properties. Report by ACI Committee 446. Fracture Mechanics 1R-91. Detroit.
- BELARBI, A. & HSU, T.T.C. (1994). Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete. Structural Journal of tha American Concrete Institute, 91-4, pp. 465-474.
- BUSH, H. G., MIKULA, M.M. & HEARD, W.L., (1977). Some Design Considerations for Large Space Structures, AIAA Journal, Vol. 16 , No 4 – ASME, NY.

- CARPINTERI, A. (1994). Fractal Nature Of Material Microstructure And Size Effects On Apparent Mechanical Properties, *Mech Mat* 18, 89-101.
- CARPINTERI, A. and CHIAIA, B. (1995). Fracture Mechanics of Concrete Structures, Proc of FraMCoS-2, at ETH, Zürich, Wittmann F. H. (ed), Aedificatio Publ, Freiburg, 581-596.
- CARPINTERI, A., CHIAIA, B. and FERRO, G. (1995). Size effects on nominal tensile strength of concrete structures, multifractality of material ligaments and dimensional transition from order to disorder *Mat. Struct.* 28 (7) 311-317.
- CARPINTERI, A., FERRO, G. and INTERVENIZZI, S. (1995). Fracture Mechanics of concrete structures, Proc of FraMCoS-2, at ETH, Zürich, Wittman F. H. (ed), Aedificatio Publ, Freiburg, Germany, 557-570.
- CHURCHILL, R.V. (1960). Complex variables and applications. McGraw Hill –NY 297p.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. CEB-FIP Model Code 1990. Lausanne, 1993.
- CUNDALL, P.A. & STRACK, D.L. (1977). A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique* 29, No. 1, 47-65.
- CURBACH, M. (1987). Festigkeitssteigerung von Beton bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten, Dissertation, Heft 1, Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe.
- da VINCI L. (1500s). Notebooks of Leonardo da Vinci (1945), Edward McCurdy, London , 546; and *Les Manuscrits de Léonard da Vinci*, transi in French by Ravaisson-Mollien C., Inst de France (1881-91), Vol. 3.
- DEODATIS, G. and SHINOZUKA, M. (1989). Simulation of seismic ground motion using stochastic waves, *J Eng. Mech, ASCE*, v. 115, n 12, pp 2723-2737.

- DIETERLE, R. and BACHMANN, H. (1981). Experiments and Models for the damping behavior of vibrating reinforced concrete beams in the cracked and uncracked conditions”, IABSE Colloquium “Advanced Mechanics of Reinforced Concrete”, Delft 1981, Find Report, p.69-82.
- ERINGEN, A.C. (1966). Relativistic Continuum Mechanics. *Int J. Eng. Science*, v. 4 n 6, pp 611-670.
- FANELLA, D.A. (1990). Fracture and failure of concrete in uniaxial and biaxial loading. *Journal of Eng. Mech.*, Vol 116, No. 11, pp. 2341-2362, 1990.
- FEENSTRA, P.H. & BORST, R.(1993). Aspects of robust computational modeling for plain and reinforced concrete, *HERON* vol. 38 , no. 4, 1993,. 5-76.
- GALILEO GALILEI, L. (1638). *Discorsi i Dimostrazioni Matematiche intorno a due Nuove Scienze*, Elsevirii, Leiden; English transl by Weston T, London (1730), 178-181.
- GRIFFITH, A.A. (1920). Phenomena of rupture and flow in solids, *Phi Trans* 221A, 179-180.
- GRIFFITH, A.A. (1924). Theory of Rupture. *Proc., 1st Int. Congress on Apl. Mech.*, Delft, pp.55-63.
- HAYASHI, Y. (1982). Sobre uma representação discreta de meios contínuos em dinâmica não linear, *Dissertação de Mestrado*, CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil.
- HILLEBORG, A. (1978). A model for fracture analysis, *Cod. LUTVDG/TV BM-30051-8*.
- HRENNIKOFF, A. (1941). Solution problems of elasticity by the framework method, *Journal of Applied Mechanics*, 12, pp.169-175.

- HILLERBORG, A., MODÉER, M. and PETERSON, P. E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cement Concrete Res* 6, pp. 773-782.
- HILLERBORG, A. (1985). The teoretical basis of a method to determine the fracture energy  $G_f$  of concrete. *Materiaux et Constructions* 18, No. 106, 1985, pp. 291-296.
- HORDIJK, D.A., REINHARDT, H.W. & CORNELISSEN, H.A.W. (1987). Fracture mechanics parameters of concrete from uniaxial tensile tests as influenced by specimen length. In *fracture of Concrete and Rocks*, preprint SEM-RILEM Int. Conf., Bethel, 1987, pp. 138-149.
- HORDIJK, D.A. (1992). Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete experiments, modelling and analyses. *HERON* vol. 37 , no. 1, 1992., 1-79.
- INGLIS, C.E. (1913). Stress in a plate to the presence of cracks and sharp corners. *Tran. Inst. Naval Architects*, pp. 219-241.
- IRWIN, G.R., (1957). *Fracture*, Handbach der Phisik, vol VI, Ed. Flugge, Springer, pp. 551-590.
- ITURRIOZ, I. (1995). Aplicação do método dos elementos discretos ao estudo de estruturas laminares de concreto armado. Tese de Doutorado, CPGECE, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1995, 157p.
- J. E. FERRUFINO VEIZAGA (1993). Identificação de dano em estruturas pela variação das características modais. *Disertação de mestrado*, PROMEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 1993.
- KACHANOV, M. (1966). *Introduction to continuum damage mechanics*. Martins Nyhoff Publishes. Boston, 1966. 135p.

- KANNIENEN, M. & POPELAR, C.H. (1985). Advanced fracture mechanics. Oxford University press – NY. Clarendon press. Oxford. pp 5633.
- KAPLAN M. F. (1961). Crack propagation and the fracture concrete, ACI J, 58(11).
- KATAFYGIOTIS, L.S, ZERVA, A. & MALYARENKO, A . A . (1999). Simulation of homogeneous random and partially isotropic random fields. Journal of Engineering Mechanics, Vol 125, No. 10, 1999.
- KRIEG, R.D. (1973). Unconditional stability in numerical integration methods, J. of Applied Mechanics, Transactions ASME, June 1973, 417-421.
- KUPFER, H. B. e GERSTLE, K.H. (1973). Behavior of concrete under biaxial stresses. J. Engrg. Mech., ASCE, 99(4), p. 853-866.
- LEONHARDT F., WALTHER R. (1965). 'The Stuttgart shear tests, 1961', Translation No. 111, C&CA, Londres. Tradução dos artigos aparecidos em Beton-und-Stahlbetonbau, Vol. 65, No. 12, 1961; Vol. 57, Nos. 2, 3, 6, 7 e 8, 1962.
- LEHWALTER, N. (1998). Die Tragfähigkeit von Betondruckstreben in fachwerkmodellen am Beispiel von gerdrungenen Balken. Disertation, Technischen Hochschule Darmstadt, Germany.
- LINDE, P. (1993). Numerical modelling and capacity design of earthquake resistant reinforce concrete walls. Inst. Fur Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Ag, Bericht 200.
- MORGAN, S.E., NIWA, J. & TANABE, T. (1997). Detecting the size effect in concrete beams using nonlinear fracture mechanics. Engineering Structures, Vol 19, No. 8, pp. 605-616, 1997.
- NANI, L.F. e RIERA, J.D. (1986). Sobre as distribuições de valores extremos. CPGEC, UFRGS, CT-83, 22p, (1986).

- NOOR, A.K. & MIKULAS, M.M., (1988). Continuum modeling of large lattice structures status and projections. Springer Series in Computational Mechanics. Alturi, S. N., Amops, A.K. (Eds). Large Space Structures: Dynamic and Control. Springer 1988.
- NAYFEH, A.H., HEFZY, M.S. (1978). Continuum modelling of three-dimensional truss-like space structures, AIAA Journal, Vol. 16, No 8.
- OLIVER, J. (1990). Modelado de la fisuración en estructuras de hormigón. Publicación interna del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona.
- OSTOJA-STRARZENWSKI, M., (1995). Spring-Networks in Thermomechanics: Effective properties and fracture phenomena. Applied Mechanics in the Americas Vol. III, pp, 179-184 edited by L.A. Godoy, S. R. Idelsohn, P.A.A. Laura, Santa Fé, Argentina.
- OWEN, D.J.R.(1980). Finite elements in plasticity: theory and practice. Swansea Pineridge Press, 1980.
- OWEN, D.J.R., FAWKES, A . J., (1983). Engineering fracture mechanics. Numerical methods and applications. Pineridge Press Ltd. Swansea, U.H.
- PITANGUEIRA, R.L. e SILVA, R.R. (2000). Efeito de escala: de Galileo Galilei às estruturas de concreto. Memórias-Jorn. Sud. Ing. Est., 12-17 Nov. 2000, Punta del Este Uruguai.
- RAMALLO J.C, Kotsovos M. D, DANESI R. D.(1993). Una posible explicação del efecto de tamaño em las estructuras de hormigón, Memórias-Jorn. Sud.Ing.Est., 15-19 Out. 1993: 383-394. Montevideo Uruguai (em espanhol).
- RAMALLO J.C, Kotsovos M. D, DANESI R. D.(1994). El efecto Del tamaño em estructuras de H. A., Memórias-Jorn. Arg.Ing.Est., 4-7 Out. 1994: 17-30. Bs. As. Argentina (em espanhol).

- RAMALLO J.C, Kotsovos M. D, DANESI R. D.(1995). Unintended out-of- plane actions in size effects tests of structural concrete, Transactions of the 13<sup>th</sup> SMIRT, 13-18 Ago. 1995: 351-357. Porto Alegre Brasil.
- RICE S.O. (1954). Mathematical analysis of random noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, (ed, N Wax), Dover, pp 133-294.
- RIERA J. D. e TORELLI E.(1985). Sobre as propriedades dinâmicas de vigas de concreto armado submetidas a vibrações de flexão. Relatório Técnico, CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1985.
- RIERA J. D. e RIOS R.(1998). Response of Concrete Structures to short durations load. SEWC'98 Structural Engineers World Congress, 1998.
- RIERA J. D. e RIOS R.(2000). Evolução do amortecimento com o nível de dano em estruturas de concreto armado. Memórias-Jorn. Sud. Ing. Est., 12-17 Nov. 2000: 383-394. Punta del Este Uruguai.
- RIERA, J.D. (1984). Local effects in impact problems on concrete structures, in: Proceedings, Conference on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants, Vol III, 57-79, Out 1984, Porto Alegre, Brazil,
- RIERA J.D. and ITURRIOZ, I. (1995). Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells, Transactions of the 13<sup>th</sup> SMIRT, Porto Alegre, Brazil. Ed. By J.D. Riera 'et al', Editora da Universidade, UFRGS, Vol. IV, 225-230.
- RIOS R. D., (1994). Determinação das propriedades dinâmicas das estruturas mediante o emprego de modelos em escala reduzida. Dissertação de Mestrado, CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 155p, 1994.

- RIOS R. D., RIERA, J.D., (1995). Evaluación de métodos de detección de daño en estructuras mediante ensayos dinámicos en modelos reducidos. Memórias-Jorn. Sud. Ing. Est., 18-22 Set. 1995: 355-363. Tucumán, Argentina.
- ROCHA, M.M. (1989). Ruptura e efeitos de escala em materiais não homogêneos, Dissertação de Mestrado, CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil.
- ROCHA M.M. and RIERA, J.D. (1990). On size effects and rupture of nonhomogeneous material, in: Proceedings, Congress in Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics, Ed. By J.G.M. Van Mier. J.G. Rots & A. Baker, Chapman & Hall/ Ed. Fn. Spon., London, 451-460.
- ROCHA, M.M., RIERA J.D. and KRUTZIK, N.J. (1991). Extension of model that aptly describes fracture of plain concrete to impact analysis of reinforced concrete, Transactions of the 11<sup>th</sup> SMIRT, 1991, Tokyo, Japan, Vol. J.
- ROELFSTRA, P.E and WITTMANN, F.H. (1987). Numerical modelling of fracture of concrete, Transactions, International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, SMIRT 9, Laussane, Switzerland, Balkema, Rotterdam, Vol. H, 41-49.
- ROELFSTRA, P.E and WITTMANN, F.H. (1986). Numerical method to link strain softening with failure of concrete, Fracture toughness and fracture energy of concrete, Ed. By F.H. Wittmann, Elsevier Science Publ., Amsterdam, 163-175.
- ROTS, J.G. (1986). Strain-softening analysis of concrete fracture specimens, *ibid*, 137-148.
- SCHLANGEN, E. (1993). Experimental and numerical analysis of fracture process in concrete. *Heron* 38(3), pp. 1-118.
- SHINOZUKA, M. (1972). Monte Carlo simulation of structural dynamics. *Computers & Structures*, vol. 2, 855-874, 1972a.

- SHINOZUKA, M. (1972). Probabilistic modeling of concrete structures. Journal of Engineering Mechanics Division, vol. 98, 1433-1452, 1972 b.
- SHINOZUKA, M. and DEODATIS, G. (1991). Simulation of stochastic processes by spectral representation, Applied Mechanics Review, no 4, vol 44, 1991, pp. 191-204.
- SHINOZUKA, M. and DEODATIS, G. (1996). Simulations of multi-dimensional Gaussian stochastic fields by spectral representation, Applied Mechanics Review, January 1996, no 1, vol 49, 29-53.
- Van VLIET M.R.A, Van MIER, J.G.M (2000). Size effects of concrete and sandstone, HERON, Vol 45, No. 2, 2000, 91-108.
- VONK, R.A. (1993). A micromechanical investigation of softening of concrete loaded in compression. Heron 38(3).
- WEIBULL, W. (1939). Phenomenon of rupture in solids, Proc. Royal Swedish. Inst. Of Eng. Res. 153, pp. 1-55.
- WEIBULL, W. (1949). Statistical representation of fatigue failures in solids, Proc. Royal IT 27.
- WITTMAN, F.H., ROELFSTRA, P.E. & SADOUKI, H.(1983). Simulation and analysis of composite structures. Summary Report on Research Activities, Swis Federal Inst. of Tech., Lousanne, 1986, pp. 309-317.
- YAMAZAKI, F. , SHINOZUKA, M.. Nueman expansion for stochastic finite elements analysis. Journal of Engineering Mechanics, v. 114, no. 8, 1335-1354, 1986.
- YANG, J.N. (1972). Simulation of random envelope processes, Journ. Sound and Vibration, vol 25, no 1, pp. 73-85.

YANG, J.N. (1973)., On the normality and accuracy of simulated random processes, *Journ. Sound and Vibration*, vol 26, no 3, pp. 417-428.

## A.1) ANEXO 1

O projeto de estruturas de concreto e ou concreto armado é baseado numa classificação dos mesmos que em geral corresponde a um valor específico da resistência característica à compressão  $f_{ck}$ , a qual é determinada mediante ensaios de compressão em corpos de prova cilíndricos, prismáticos e/ou cúbicos. Para fins da simulação numérica e para determinar indiretamente outros parâmetros do concreto, o valor médio da tensão de compressão  $f_{cm}$  é necessário, neste trabalho quando isso foi necessário, a mesma foi estimada com a seguinte fórmula: CEB-FIP (1990)

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad \text{A.1 1}$$

O comportamento inicial do concreto é modelado usando uma relação constitutiva elástica linear a qual é completamente definida pelo módulo de elasticidade  $E$ , e pelo coeficiente de Poisson  $\nu$ . Para concretos de características normais, tal módulo pode ser determinado com a seguinte expressão: CEB-FIP (1990)

$$E_c = 10^4 f_{cm}^{1/3} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad \text{A.1 2}$$

O coeficiente de Poisson do concreto é variável entre 0,10 e 0,25.

De acordo com o código modelo CEB-FIP (1990), a resistência à tração do concreto está relacionada com a resistência à compressão. Para fins práticos, a mesma pode ser determinada pela seguinte expressão:

$$f_{tm} = 0,30 f_{ck}^{2/3} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad \text{A.1 3}$$

Para a forma da curva de “strain softening” à tração, acostuma-se se encontrar nas diferentes referências bibliográficas, modelos como a relação linear, a bilinear (Hilleborg) e outras como, por exemplo, a exponencial. A energia dissipada pelo processo de fratura é determinada pela área sob o diagrama tensão deslocamento. A energia específica de fratura é considerada como uma propriedade do material, está relacionada com a tensão máxima de compressão e com o tamanho máximo do agregado, de acordo com o CEB-FIP (1990), pode ser estimado como:

$$G_f = G_{F0} (f_{cm} / f_{cm0})^{0.7} \text{ [Nmm/mm}^2\text{]} \quad \text{A.14}$$

Onde  $f_{cm0} = 10 \text{ [Nmm/mm}^2\text{]}$ . O valor básico para a energia de fratura,  $G_{F0}$ , depende do tamanho máximo do agregado, e está indicado na Tabela 1.

**Tabela 1: Valores básicos da energia de fratura  $G_{F0}$  [Nmm/mm<sup>2</sup>] CEB-FIP (1990)**

| $d_{\text{máx}}$ [mm] | $G_{F0}$ [Nmm/mm <sup>2</sup> ] |
|-----------------------|---------------------------------|
| 8                     | 0,025                           |
| 16                    | 0,030                           |
| 32                    | 0,058                           |