

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO – EA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ADMINISTRATIVAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

VILMAR MÁRIO ORO BOFF

**EXTENSÕES DO MÉTODO MULTICRITÉRIO DE APOIO
À DECISÃO REFERENCE IDEAL METHOD**

Porto Alegre

2022

VILMAR MÁRIO ORO BOFF

**EXTENSÕES DO MÉTODO MULTICRITÉRIO DE APOIO À DECISÃO REFERENCE
IDEAL METHOD**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Administração, Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para obtenção do grau de Mestre em Administração.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Ferreira

Área de Concentração: Pesquisa Operacional

Porto Alegre

2022

CIP - Catalogação na Publicação

Boff, Vilmar Mário Oro
Extensões do Método Multicritério de Apoio à
Decisão Reference Ideal Method / Vilmar Mário Oro
Boff. -- 2022.
75 f.
Orientador: Luciano Ferreira.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Escola de Administração, Programa
de Pós-Graduação em Administração, Porto Alegre,
BR-RS, 2022.

1. Apoio Multicritério à Decisão. 2. Reference
Ideal Method. 3. RIM-Sort. I. Ferreira, Luciano,
orient. II. Título.

VILMAR MÁRIO ORO BOFF

**EXTENSÕES DO MÉTODO MULTICRITÉRIO DE APOIO À DECISÃO
REFERENCE IDEAL METHOD**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Administração, Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para obtenção do grau de Mestre em Administração.

Aprovada em Porto Alegre, 15 de junho de 2022.

Prof. Dr. Luciano Ferreira
Orientador

Prof. Dr. Denis Borenstein
UFRGS

Prof. Dr. Pablo Cristini Guedes
UFRGS

Prof. Dr. Diogo de Lima Silva
UFF

Porto Alegre
2022

Ao meu avô, Mário Oro.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Vilmar e Salete, pela vida gerada e proporcionada até então. Além disso, agradeço-os por terem sido meus guias nessa trajetória e por serem minha inspiração na profissão de pesquisador acadêmico. À minha irmã, por dividir vários momentos dessa caminhada juntos.

Aos meus amigos verdadeiros, que serviram de suporte e deixaram mais leve todo o percurso, especialmente neste momento atípico de pandemia.

À minha namorada Manoela, pelo amor, a companhia e o fiel apoio em todos os dias da caminhada.

A todos os funcionários e docentes que passaram pela minha trajetória na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, que me acolheu desde a graduação. Em particular ao Programa de Pós Graduação em Administração, pela parceria e aprendizado nos grupos de pesquisa que participei.

Ao meu orientador, prof. Dr. Luciano Ferreira, por confiar e apostar no meu trabalho. Aos membros da banca, Prof. Dr. Pablo Cristini Guedes, Prof. Dr. Denis Borenstein e Prof. Dr. Diogo Ferreira de Lima Silva, pela disponibilidade e honra de suas presenças.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro concedido, essencial para a garantia de excelência nos trabalhos desenvolvidos no mestrado.

RESUMO

Os processos de tomada de decisão têm papel fundamental no dia-a-dia de vários agentes, com potencial de impactar a performance de organizações e o bem-estar das pessoas. Dada a complexidade e os múltiplos objetivos conflitantes que emergem desses julgamentos, os métodos e modelos de Apoio Multicritério à Decisão (AMD) são alternativas viáveis para auxiliar diversos tipos de decisores. O Reference Ideal Method (RIM), um dos métodos dessa classe, proposto por Cables, Lamata e Verdegay (2016), constrói novas possibilidades de aplicações, uma vez que amplia o escopo de trabalhos como a Técnica para Ordem de Preferência por Semelhança com a Solução Ideal (TOPSIS), possibilitando o decisor a escolher um intervalo ideal em cada critério sem, necessariamente, considerar os valores extremos. Embora as contribuições do RIM a diversas áreas do conhecimento sejam notórias, uma análise mais detalhada do seu algoritmo revelam instabilidades acerca de um princípio básico da Teoria da Decisão, o princípio de dominância. Nesse contexto, o presente trabalho apresenta e descreve a inconsistência, assim como a soluciona, introduzindo o método Balanced-RIM. Para confirmar a existência dessa instabilidade na literatura, compara-se o RIM e o Balanced-RIM em artigos da área de AMD. Sequencialmente, uma extensão do RIM é proposta para problemas de classificação ordinal multicritério, nomeada RIM-Sort. Essa concepção é apoiada por conceitos definidos no Balanced-RIM. Para verificar a eficácia do RIM-Sort, um caso da literatura de ordenamento em AMD é adaptado para a classificação e há a confirmação do mérito do método.

Palavras-chave: RIM-Sort, Reference Ideal Method, Apoio Multicritério à Decisão.

ABSTRACT

Decision-making processes play a fundamental role in the lives of various agents, potentially impacting organization's performance and people's well-being. Given the complexity and the conflicting objectives that emerge from these judgments, Multiple-Criteria Decision Analysis (MCDA) methods and models are viable alternatives to help different types of decision makers. The Reference Ideal Method (RIM), proposed by Cables, Lamata and Verdegay (2016), builds new possibilities for applications once it expands the scope of works such as the Technique for Order of Preference by Similarity to the Ideal Solution (TOPSIS), enabling the decision maker to choose an ideal interval in each criterion without necessarily consider the extreme values. Although RIM shows contributions in several areas of knowledge, a closer analysis of its algorithm reveals violations in a basic principle of Decision Theory, the dominance principle. In this context, the present work presents and describes the problems, and solves it introducing the Balanced-RIM method. To confirm the existence of the problem, the RIM and the Balanced-RIM are compared in the bibliography. Sequentially, a RIM extension is proposed aiming multicriteria ordinal classification problem, named RIM-Sort. This conception is supported by concepts defined in Balanced-RIM. To verify the effectiveness of the method, a case from the AMD ordering literature is adapted to the classification and the value of RIM-Sort is confirmed.

Keywords: RIM-Sort, Reference Ideal Method, Multiple-criteria Decision Analysis.

SUMÁRIO

	Lista de ilustrações	11
	Lista de tabelas	12
1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Justificativa do Trabalho	14
1.1.1	Por que o RIM?	15
1.1.2	Por que Classificação?	15
1.2	Objetivos	16
1.2.1	Objetivo Geral:	16
1.2.2	Objetivos Específicos:	16
1.3	Estrutura da Dissertação	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1	Teoria da Decisão	18
2.2	Apoio Multicritério à Decisão	20
2.2.1	Estrutura dos Problemas de Decisão Multicritério	22
2.2.2	O Princípio de Dominância	23
2.2.3	Tipos de Problemas	24
2.3	Métodos de Tomada de Decisão Multicritério	25
2.3.1	Escola Francesa e o ELECTRE	25
2.3.2	Escola Americana e a MAUT	26
2.3.3	Métodos de Referência	27
2.3.3.1	TOPSIS	28
2.3.3.2	RIM	31
2.4	Classificação	36
2.4.1	Classificação Ordinal	37
3	O RIM E O PRINCÍPIO DE DOMINÂNCIA	41
3.1	A Inconsistência	43
3.2	Nova Normalização Proposta	47
3.3	Comparação do RIM e o Balanced-RIM em Artigos da Literatura	50
3.3.1	Primeiro Artigo: Sofuoğlu (2021)	51
3.3.2	Segundo Artigo: Gürgen et al. (2019)	52
3.4	Discussão e Considerações Finais do Capítulo	54
4	O MÉTODO DE CLASSIFICAÇÃO RIM-SORT	56

4.1	Adaptação para Classificação	56
4.1.1	Visualização do Processo de Classificação	58
4.2	Aplicação Numérica	59
4.2.1	Estruturação do Problema e Classificação dos Fornecedores	61
4.3	Impacto do Balanced-RIM no RIM-Sort	65
4.4	Considerações Finais do Capítulo	66
4.4.1	Trabalhos Futuros	67
5	CONCLUSÃO	69
5.1	Limitações da Pesquisa	70
5.2	Trabalhos Futuros	71
	REFERÊNCIAS	72

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Grafo da Matriz de Concordância	26
Figura 2 – Matriz de Decisão MAUT	27
Figura 3 – Redução de Dimensionalidade	28
Figura 4 – Curvas de Indiferenças TOPSIS	31
Figura 5 – Função f em relação a idade	34
Figura 6 – Perfis de Fronteira no TOPSIS-Sort-B	39
Figura 7 – Normalização - Critério Cloro	45
Figura 8 – Normalização nos Demais Critérios	46
Figura 9 – Normalização pela Maior Declividade - Cloro	48
Figura 10 – Normalização pela Menor Declividade - Cloro	49
Figura 11 – Função de Normalização em Sofuoğlu (2021) - Critério C3	52
Figura 12 – Função de Normalização em Gürgen et al. (2019)	54
Figura 13 – Normalização, Perfis e Classes para o Exemplo	57
Figura 14 – Classificação a partir do RIM-Sort	58
Figura 15 – Visualização de Resultados RIM-Sort e TOPSIS-Sort	60
Figura 16 – Visualização de Resultados RIM-Sort	63
Figura 17 – Visualização de Resultados RIM-Sort	64
Figura 18 – Normalização Critério 6 - RIM e Balanced-RIM	66
Figura 19 – Comparação de Normalização	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Ações, Estados e Resultados	19
Tabela 2 – Matriz de Decisão	23
Tabela 3 – Tipos e Exemplos Práticos de Problemas de Decisão Multicritério	24
Tabela 4 – Exemplo de Matriz de Concordância	26
Tabela 5 – Principais Procedimentos de Normalização	27
Tabela 6 – Publicações de Sorting Envolvendo Métodos de Referência	37
Tabela 7 – Informações sobre as Estações	42
Tabela 8 – Variações e Importância	42
Tabela 9 – Desempenhos Normalizados	44
Tabela 10 – Desempenhos Normalizados e Ponderados	44
Tabela 11 – Coeficientes de Proximidade	44
Tabela 12 – Desempenhos Normalizados e Coeficientes de Proximidade (Balanced-RIM)	50
Tabela 13 – Comparação dos métodos em Sofuoğlu (2021)	51
Tabela 14 – Comparação dos métodos em Gürgen et al. (2019) - Expert 1	53
Tabela 15 – Pesos e Quantidades de Trocas para Diferentes Experts	53
Tabela 16 – Desempenhos - Leite Cru Refrigerado	62
Tabela 17 – Alcances e Ideais de Referência - Leite Cru Refrigerado	62
Tabela 18 – Perfis - Leite Cru Refrigerado	62
Tabela 19 – Resultados - Leite Cru Refrigerado	63
Tabela 20 – Perfis - Leite Cru Refrigerado	64
Tabela 21 – Resultados - Leite Cru Refrigerado	64
Tabela 22 – Comparação do RIM e Balanced-RIM - Leite Cru Refrigerado	65

1 INTRODUÇÃO

Decisões precisam ser tomadas sempre que estamos diante de um problema que possui mais de uma alternativa de solução. Em sua dimensão mais básica, um processo de tomada de decisão é a eleição por parte de um centro decisor (indivíduo ou grupo de indivíduos) da melhor alternativa entre as possíveis (GOMES; GOMES; DE ALMEIDA, 2009).

Nesse contexto, muitos pesquisadores da chamada Teoria da Decisão Normativa dedicam-se a estudar como prescrever decisões, seguindo alguns princípios básicos. A teoria supõe que os decisores têm um ou mais objetivos externos à teoria que guiam suas escolhas, transformando-se numa racionalidade capaz de gerar uma estrutura de preferências logicamente manipulável e consistente. Essa abordagem dá origem a alguns princípios de tomada de decisão racional, como o princípio de dominância (PETERSON, 2009).

Nas últimas décadas, várias metodologias matemáticas foram fundamentadas nessas teorias (HWANG; YOON, 1981; KEENEY; RAIFFA; MEYER, 1993; CABLES; LAMATA; VERDEGAY, 2016). Em particular, os métodos desenvolvidos para o Apoio Multicritério à Decisão (AMD) auxiliam gestores diante de decisões com objetivos conflitantes, transformando esses alvos em critérios (ou atributos). De acordo com Colson e Bruyn (1989), a área de AMD consiste em conceitos, abordagens, modelos e métodos que ajudam os tomadores de decisão a descobrir, avaliar, ordenar, selecionar ou rejeitar objetos (candidatos, produtos, projetos, etc.) tendo como base uma ponderação (expressa por escores, valores ou intensidades de preferência) de acordo com vários critérios.

As aplicações práticas das metodologias são vistas em diversos campos do conhecimento, como: sustentabilidade (STOJČIĆ et al., 2019), economia (DE LIMA SILVA; SILVA; DE ALMEIDA FILHO, 2020) e aprendizado de máquina (PENG et al., 2011). Porém, o campo de pesquisa mais impactado é o de negócios, sendo a maioria dos trabalhos nas subáreas de logística, cadeia de suprimentos, seleção de fornecedores, recursos humanos e finanças (MARDANI et al., 2015; ZAVADSKAS; ANTUCHEVICIENE; CHATTERJEE, 2019).

A construção e o subsequente uso dos métodos de AMD deram-se por caminhos diferentes. Dentre as abordagens, pode-se citar a chamada escola francesa, exemplificada por modelos como o ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la REalité) (ROY, 1968), com enfoque na comparação par a par das alternativas e na sobreclassificação entre elas. Simultaneamente, surgiu a escola americana, com funções de utilidade e *tradeoffs* entre alternativas, levando em consideração os custos de oportunidade. Nela, destaca-se a Multi-Attribute Utility Theory (MAUT) proposta por Keeney, Raiffa e Meyer (1993).

Com a inspiração nessa última, foram desenvolvidos os chamados métodos de referência, como a Technique for Order Preferences by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS) (HWANG;

YOON, 1981) e o Reference Ideal Method (RIM) (CABLES; LAMATA; VERDEGAY, 2016), onde faz-se a comparação da distância relativa de cada alternativa para uma alternativa ideal. No entanto, as estratégias para definir tanto a distância quanto a alternativa ideal variam conforme a técnica utilizada.

Pertencente aos métodos de referência, o RIM agrega ao decisor possibilidade de definir um intervalo ideal em cada critério, limitado por um Alcance definido pelo contexto. Após analisar o algoritmo em detalhes, observa-se que o RIM gera resultados não consistentes sob o ponto de vista de Teoria da Decisão, em particular no amplamente aceito princípio de dominância (PETERSON, 2009; GOMES; GOMES; DE ALMEIDA, 2009). O presente trabalho objetiva-se a explicitar em detalhes sobre essas perturbações nos resultados e também formular uma solução para o problema, testando-a em exemplos controlados e na bibliografia de AMD.

Em paralelo a problemática de ordenamento, alvo do RIM, os métodos de AMD também são capazes de resolver problemas: de classificação, que objetivam atribuir as alternativas a categorias pré-estabelecidas; e de escolha, que explicitam uma melhor alternativa ou um conjunto de alternativas consideradas satisfatórias (PARREIRAS, 2006). Em particular à classificação, verificou-se na literatura a ausência de métodos que envolvam o RIM na problemática. Esse fato impossibilita a classificação a partir de métodos de referência com ideais no meio dos critérios, restringido aos métodos que consideram somente os extremos, como o TOPSIS-Sort (SABOKBAR et al., 2016) e o TOPSIS-Class (FERREIRA et al., 2018), derivados do TOPSIS.

Para resolver essa lacuna e expandir a área de AMD, essa dissertação visa a construção de um novo método de classificação ordinal - isto é, quando as classes estão previamente ordenadas - baseado no RIM. Para isso, propõe-se uma adaptação do método TOPSIS-Sort ao contexto do RIM, seguido de uma verificação na literatura. Além disso, pretende-se demonstrar como as violações no princípio de dominância do RIM impactariam - e até em alguns casos impossibilitariam - a constituição de qualquer algoritmo de classificação multicritério que envolvesse o Reference Ideal Method.

1.1 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

Para fins de justificativa do trabalho, uma das principais questões a serem respondidas paira sobre o porquê pesquisar novos métodos para a literatura, visto que já existem tantos outros. Nesse caso, Parreiras (2006) menciona as seguintes palavras:

"O desenvolvimento de novos métodos de decisão é encorajado, visto que não existe ainda um método ideal. Os métodos existentes apresentam pelo menos um dos problemas listados a seguir:

- envolvem parâmetros de entrada cujo significado e influência no resultado final muitas vezes não são intuitivos;
- são excessivamente simples e, por isso, incapazes de modelar certos aspectos complexos comuns em situações práticas como: a intransitividade da preferência e da indiferença; atitudes do decisor de hesitação ou de indecisão;

- não possuem uma fundamentação teórica satisfatória e por isso acabam sendo mal empregados na prática; [...]
- apresentam um problema conhecido como 'inversão de ordem', frequentemente explorado pela literatura. Esse problema foi detectado em importantes métodos das Escolas Americana e Francesa, baseados em comparações de pares de alternativas, como Promethee, Electre, AHP. Consiste em uma inversão na ordem das alternativas provocada pela adição ou subtração de uma alternativa insignificante, ou seja, pior do que as demais. É natural esperar que a adição ou subtração de algum critério ou de alguma alternativa significativa altere a preferência do decisor e, conseqüentemente, os resultados finais. Mas não é intuitivo que uma alternativa dominada pelas demais provoque inversões na ordenação das alternativas."

Além disso, novos métodos da área normativa devem ser propostos para englobar as contribuições da chamada Teoria da Decisão Descritiva, outro braço da Teoria da Decisão que demonstra como de fato ocorre o processo de tomada de decisão humano (PETERSON, 2009). Um exemplo disso é consiste no método Behavioral TOPSIS (YOON; KIM, 2017), uma extensão compatibilizando o famoso método Technique for Order Preferences by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS) a adequar-se a Teoria do Prospecto (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979), modificando dos passos finais do TOPSIS para inclusão dos achados empíricos da teoria descritiva.

1.1.1 Por que o RIM?

O Reference Ideal Method foi lançado no ano de 2016 na revista Information Sciences. Com base em pesquisa realizada no motor de buscas Google Scholar no ano de 2022, foram constatadas 108 citações no artigo seminal. Além disso, uma pesquisa avançada exatamente com o termo "Reference Ideal Method" retornou 192 resultados, mostrando a relevância do tópico.

Extensões do RIM e aplicações práticas de tomada de decisão foram constatadas em mais de uma dezena de artigos (GÜRGEN et al., 2019; SOFUOĞLU, 2021; PALHARES, 2020). Como já explicitado no início do capítulo, o RIM carrega consigo violações no princípio de dominância da Teoria da Decisão, tornando possível a seleção de dois artigos e uma dissertação com esse problema para análise no trabalho atual.

Dessa forma, o estudo compilado nesta dissertação justifica-se não somente por fornecer uma explicação detalhada do problema nos artigos, mas também alertar para que os próximos trabalhos envolvendo o RIM sejam teoricamente mais consistentes ao incorporar o novo algoritmo proposto.

1.1.2 Por que Classificação?

A classificação multicritério possui uma vasta área de aplicação, passando por finanças (FERREIRA et al., 2018), agricultura (ALMEIDA-DIAS, 2011) e qualidade do ar (SABOKBAR et al., 2016), por exemplo. Segundo Alvarez, Ishizaka e Martínez (2021), de 1997 a 2021, a

soma de citações referindo-se a métodos de classificação ordinal na plataforma Web of Science alcançou a marca de 2299, com média de citações de 114 por ano e tendência de crescimento linear nos próximos anos.

Alvarez, Ishizaka e Martínez (2021) também observam que os métodos multicritério de classificação ordinal majoritariamente se encaixam em dois subtipos: baseados em utilidade ou sobreclassificação, fazendo com que aqueles baseados em métodos de referência como TOPSIS-Sort (SABOKBAR et al., 2016) e PDTOPSIS-Sort (DE LIMA SILVA; FERREIRA; DE ALMEIDA FILHO, 2020) sejam a minoria. Não por acaso, após pesquisa em motores de busca como Google Scholar e Scopus, constata-se que não existem métodos de classificação ordinal fundamentados no RIM até a publicação dessa dissertação.

Dessa forma, o presente trabalho justifica-se por: unir-se a tendência de crescimento em artigos de classificação, rebalancear os tipos de métodos na literatura ao considerar um método de referência e também por ser o primeiro método de classificação ordinal multicritério que tem o RIM como alicerce.

1.2 OBJETIVOS

Considerando o exposto, nessa subseção define-se o Objetivo Geral da dissertação e os Objetivos Específicos.

1.2.1 Objetivo Geral:

Propor um aprimoramento do método de apoio multicritério à decisão Reference Ideal Method e uma extensão capaz de lidar com a problemática de classificação ordinal.

1.2.2 Objetivos Específicos:

- Identificar e descrever as violações no princípio de dominância no método RIM;
- Analisar e propor as possíveis soluções para a inconsistência num novo algoritmo, chamado Balanced-RIM;
- Realizar a comparação do RIM frente ao Balanced-RIM em artigos na literatura;
- Propor o RIM-Sort, um novo método de classificação baseado no RIM;
- Verificar a aplicabilidade do RIM-Sort em uma produção bibliográfica.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho está organizado em 5 Capítulos, cada qual descreve-se a partir das respectivas seções que os compõe, conforme mostrado a seguir:

- a) O Capítulo 1 consiste na introdução da dissertação, composto pelo contexto do problema de pesquisa, a justificativa do trabalho, seus objetivos e sua estrutura;
- b) O Capítulo 2 trata da fundamentação teórica do estudo. Esse Capítulo possuirá quatro seções: seção 2.1 que aborda a Teoria da Decisão; a seção 2.2 que trata do enfoque multicritério ou Apoio à Decisão Multicritério; a seção 2.3 explicita os métodos multicritério de referência (TOPSIS e RIM) e das demais escolas; a seção 2.3 que detalha a teoria de classificação multicritério.
- c) O Capítulo 3 discorre o primeiro problema de pesquisa, com as subseções: 3.1, descrevendo a inconsistência no RIM; 3.2, que discute e formaliza uma solução no novo método Balanced-RIM; 3.3, comparando o RIM e o Balanced-RIM em dois artigos da literatura; 3.4, com a discussão dos achados do capítulo.
- d) O Capítulo 4 propõe o RIM-Sort. A seção 4.1 discute como a classificação ordinal pode ser adaptada para o contexto do RIM e propõe o RIM-Sort; a seção 4.2 mostra a aplicabilidade do método num ambiente de tomada de decisão presente na literatura; a seção 4.3 mostra a contribuição do Balanced-RIM no RIM-Sort; a seção 4.4 provê uma discussão sobre o algoritmo e trabalhos futuros relacionados a ele.
- e) Por fim, o Capítulo 5 revela as conclusões da pesquisa. A seção 5.1 carrega as limitações da pesquisa e a seção 5.2 sugere os trabalhos futuros à dissertação.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O Capítulo 2 fornece o embasamento teórico para desenvolver o trabalho, contemplando as propriedades do processo decisório, descrições dos métodos multicritérios e a bibliografia da problemática de classificação. Assim, as propriedades da Teoria da Decisão e o conhecimento das escolas de AMD fomentam a discussão de métodos multicritério nas seções seguintes. Por fim, o embasamento teórico para problemas de classificação é explicitado para embasar a criação do RIM-Sort nos capítulos seguintes.

2.1 TEORIA DA DECISÃO

A Teoria da Decisão é uma vasta área de pesquisa interdisciplinar, onde economistas, filósofos, matemáticos, psicólogos, cientistas da computação e estatísticos fazem suas contribuições. Na literatura, as primeiras obras sobre o tema datam da Grécia Antiga, com avanços e consolidações a partir de 1738 dadas por Daniel Bernoulli com o artigo "Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis" (BERNOULLI, 1954). Nele, Bernoulli introduziu a noção de "valor moral", futuramente utilizada por Von Neumann e Morgenstein para a construção da Teoria da Utilidade e a Teoria da Utilidade Esperada (NEUMANN; MORGENSTERN, 2007), bases da bibliografia.

Como um campo de pesquisa, a Teoria da Decisão possui duas ramificações, desenvolvidas independentemente: a teoria descritiva, com estudos com o objetivo de entender empiricamente como pessoas tomam decisões através de psicologia experimental; e a teoria normativa, com o objetivo de gerar prescrições sobre o que os decisores racionais devem fazer, visando uma ótica mais pragmática (PETERSON, 2009). Esta dissertação pertence a Teoria da Decisão Normativa, com contribuições a ela.

Peterson (2009) explica que o tipo de racionalidade por trás das teorias normativas é a chamada racionalidade instrumental. Assim, ela visa um objetivo, como ajudar o maior número de pessoas ou aumentar o lucro de uma empresa, que sempre será externo à Teoria da Decisão e ausente de subjetividade. Entretanto, o autor pontua que fatores externos e inesperados podem afetar uma decisão, modificando os ganhos até mesmo após a decisão ser tomada.

Kaufman (1999) também vai numa linha parecida e pontua que são três as fontes de restrição cognitiva:

- Capacidade limitada do processamento do cérebro humano;
- Desconhecimento de todas as ações possíveis de resolver o problema;
- Influência dos aspectos emocionais e afetivos.

Nessa questão, (GOMES; GOMES; DE ALMEIDA, 2009) salienta que a Teoria da Decisão parte do pressuposto de que os indivíduos são racionais e não têm limitação para compreender todos os sistemas ao seu redor e processar todas informações que recebe. Entretanto, o autor também considera que, quando essas condições são satisfeitas, as metodologias propostas possibilitam resolver problemas de decisão mais complexos. Em síntese, os três escritores indicam que uma decisão racional nem sempre é a decisão mais correta, mas com certeza é a mais consistente sob o ponto de vista do objetivo em questão.

Com base na racionalidade instrumental, surge a interessante possibilidade de formalizar os processos decisórios, onde algumas entidades do mundo aparecem (PETERSON, 2009):

- Estados: É o que pode ocorrer no mundo caso uma ação seja escolhida. Para uma boa análise, recomenda que somente os estados que afetem o contexto decisório sejam considerados;
- Resultados: É uma avaliação do impacto de uma ação dentro de um estado;
- Ações: São dispositivos que permitem escolher o melhor Resultado dentre os diferentes Estados. As ações devem ser o máximo específicas possível.

Uma maneira de visualizar esses conceitos é a partir de uma matriz com as ações, como na Tabela 1.

Tabela 1 – Ações, Estados e Resultados

	Estado 1	Estado 2
Ação 1	Resultado 11	Resultado 12
Ação 2	Resultado 21	Resultado 22

autor: autoria própria

Isto posto, podemos definir um princípio de Teoria da Decisão, útil para qualificar regras de tomada de decisão, o chamado Princípio de Dominância (PETERSON, 2009). Seja v uma função que atribui valores aos Resultados, formados por pares ordenados (a_i, s_m) de Ações e Estados, respectivamente. Seja também a relação \succeq entre duas ações, onde $a \succeq b$ significa que é mais racional performar a do que b . Há a seguinte definição:

Definição 2.1.1. (Princípio da Dominância)

$a_i \succeq a_j$ se e somente se $v(a_i, s_m) \geq v(a_j, s_m)$ para cada estado s_m , e existe algum estado em que $v(a_i, s_n) > v(a_j, s_n)$.

Dessa forma, quando uma ação tem resultados iguais ou melhores que outra estritamente preferível em pelo menos um estado, há uma situação de dominância. Basicamente, o Princípio de Dominância prescreve uma regra na qual ações que são dominadas não devem ser escolhidas.

O conjunto de ações que são não-dominadas é chamado de "fronteira eficiente" ou "ótimo de Pareto" (GOMES; GOMES; DE ALMEIDA, 2009).

Ademais, existe uma segunda versão mais fraca desse princípio, sendo o primeiro princípio muitas vezes chamado de Princípio de Dominância Forte.

Definição 2.1.2. (Princípio de Dominância Fraca)

$$a_i \succeq a_j \text{ se e somente se } v(a_i, s_m) \geq v(a_j, s_m) \text{ para cada estado } s_m.$$

Nesse caso, não há uma necessidade de ser melhor em algum critério, basta igualar os resultados da outra alternativa em todos os estados. Isso amplia o conjunto de ações dominadas, abrindo um leque maior de prescrições para a tomada de decisão.

2.2 APOIO MULTICRITÉRIO À DECISÃO

A expressão Apoio Multicritério à Decisão descreve a coleção de abordagens que levam em consideração múltiplos critérios, ajudando indivíduos ou grupos a explorar decisões que importam. Decisões Multicritério importam quando o nível de conflito entre critérios - ou também entre diferentes tomadores de decisão a respeito de quais critérios são relevantes e suas importâncias - assume proporções onde a tomada de decisão intuitiva já não é considerada satisfatória (BELTON; STEWART, 2002).

Nesse contexto, a partir da década de 70, várias publicações surgiram criticando o fato de a Teoria da Decisão considerar apenas um único atributo nas suas decisões. Segundo Peterson (2009), há situações onde os Resultados não são comparáveis numa mesma escala, como dinheiro e bem-estar - enquanto que o conceito de Resultados na seção anterior deixa implícito a existência de somente um atributo para cada Estado -, requerindo uma abordagem específica.

Roy e Vincke (1981) vão na mesma direção e justificam a área de AMD da seguinte forma:

"Before the advent of multicriteria analysis, the definition of 'good' or 'best' actions was made according to a single point of view in general. In this context, decision problems are well-defined mathematically: [...] we can study the existence and uniqueness of the solution and construct an algorithm which furnishes this solution [...]. However it is rare to find concrete applications where a single point of view is sufficient to embrace all the necessary information to compare the elements [...]. For example, the choice of a car rests simultaneously on its price, its looks, its comfort, its performance, its petrol consumption, etc. The objective of multicriteria analysis is the study of decision problems in which several points of view must be taken into consideration."

Dessa forma, a análise multicritério tem como alvo auxiliar o homem a fazer escolhas em conformidade com seus interesses, em circunstâncias de dúvidas, incertezas, conflitos de informações e concorrência entre vários critérios (PARREIRAS, 2006). Para Belton e Stewart (2002), o principal objetivo do AMD consiste na facilitação da aprendizagem e compreensão

dos tomadores de decisão sobre o problema em questão, considerando suas próprias preferências, valores e objetivos, orientando-os na identificação da melhor escolha em relação as suas prioridades.

Por essas características, Roy e Vincke (1981) e Gomes, Gomes e de Almeida (2009) notam o esforço em representar o mais fielmente possível as preferências do decisor ou grupo de decisores, mesmo que essas preferências não sejam totalmente consistentes no sentido matemático. Em geral, haverá contradições entre os diferentes pontos de vista, de modo que uma ação pode ser melhor num critério e pior noutro. Nessas circunstâncias, para o primeiro dos dois autores, seria infrutífero:

- Deixar o decisor completamente livre para a decisão;
- Introduzir (conscientemente ou não) hipóteses restritivas de modo que o problema possa ser resolvido de maneira "clássica".

Sendo assim, os métodos multicritério residem entre esses dois extremos: eles são fundamentados não somente por hipóteses matemáticas necessárias e parcialmente restritivas, mas também por informações advindas do decisor. O autor conclui a ideia afirmando que esta é uma evolução no papel do cientista em problemas de decisão, pois os problemas não são resolvidos substituindo o decisor por um modelo matemático, mas sim ajudando-o a construir sua própria solução via descrição de suas possibilidades.

Nessa linha, Gomes, Gomes e de Almeida (2009) cita que o AMD não visa apresentar ao decisor ou aos decisores uma solução para o seu problema, elegendo uma única verdade representada pela ação selecionada. Visa, como seu nome indica, apoiar o processo decisório recomendando ações ou cursos de ações a quem vai tomar a decisão. Analogamente, Belton e Stewart (2002) contemplam uma ideia semelhante ao descrever os três mitos da área:

- Mito 1: O AMD resulta na solução ótima em um problema de decisão;
- Mito 2: O AMD proverá um diagnóstico objetivo que isenta os decisores da incumbência de realizar julgamentos difíceis;
- Mito 3: O AMD excluirá toda a dificuldade da tomada de decisão.

Portanto, a ideia do AMD é permitir uma análise mais próxima do decisor, mas sem deixar de lado as regras básicas que compõem a Teoria da Decisão. Na próxima subseção, iremos descrever um pouco mais sobre a estrutura de um problema de AMD.

2.2.1 Estrutura dos Problemas de Decisão Multicritério

Para sustentar a teoria, esta subsecção define algumas estruturas características de problemas de AMD, retiradas de Gomes, Gomes e de Almeida (2009) e Parreiras (2006). A primeira delas refere-se a alternativas:

Definição 2.2.1 (Alternativa). Constitui uma das possibilidades de escolha do agente de decisão, identificada no início, ou mesmo no decorrer de um processo decisório, podendo vir a se tornar uma solução para o problema em estudo. Se o problema em questão tiver o número de ações finitas, pode-se enumerar as alternativas no conjunto $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, de elementos diferentes, exclusivos e exaustivos, onde não é permitido ao agente selecionar uma ação mista combinando duas alternativas a_i e a_j . Também podem ser chamadas de Ações (em Potencial) ou Candidatos.

Num segundo passo, para que um agente de decisão efetue uma escolha sobre um conjunto de ações potenciais A , supõe-se que ele observe um conjunto de características, como preço, durabilidade e qualidade. Essas particularidades são atributos, que quando agregados a um mínimo de informação relativa às preferências desse consumidor, convertem-se em critérios.

Ou seja, um critério é um dispositivo capaz de expressar as preferências de um decisor com respeito a um atributo. Formalmente:

Definição 2.2.2 (Critério). Um critério g é uma função com valores reais definida sobre um conjunto de ações potenciais A , de tal sorte que é possível pensar ou descrever uma comparação entre duas ações a e b . Quando associada uma escala e , o critério g ser definido como o modelo onde é possível formular uma proposição do tipo

$$g(a) > g(b) \implies bP_e a$$

para alternativas a e b , onde P é a relação binária entre a e b e lê-se " a é preferível a b , relativamente às dimensões da escala levada em consideração na definição de g ".

Nessa abordagem com múltiplos critérios, considera-se o conjunto $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ como o conjunto de critérios. Um ponto importante é que critérios possivelmente estarão em diferentes tipos de escalas e ainda pode-se encontrar unidades de grandeza distintas dentro de cada escala, como custo, distância, tempo, etc.

As definições de alternativas e critérios formam a base de um problema de decisão multicritério. Posteriormente, para agregá-los, é necessário avaliar o desempenho de cada alternativa no seu respectivo critério. Sejam $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ um conjunto de alternativas e $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ um conjunto de critérios. Formam-se as definições:

Definição 2.2.3 (Vetor de Desempenhos). O vetor de desempenhos da alternativa a_i é definido como o elemento $V \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$V = g(a_i) = (g_1(a_i), g_2(a_i), \dots, g_m(a_i)) = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}).$$

Definição 2.2.4 (Matriz de Decisão). É agrupamento dos vetores V na matriz $X = [x_{ij}]$, nomeada de Matriz de Decisão. Uma maneira de visualizar a Matriz de Decisão é dada na Tabela 2.

Tabela 2 – Matriz de Decisão

		Critérios			
		g_1	g_2	\dots	g_m
Alternativas	a_1	x_{11}	x_{12}	\dots	x_{1m}
	a_2	x_{21}	x_{22}	\dots	x_{2m}
	a_3	x_{31}	x_{32}	\dots	x_{3m}
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
	a_n	x_{n1}	x_{n2}	\dots	x_{nm}

Fonte: autoria própria.

Assim, para cada ação fixada, há um desempenho x_{ij} no critério correspondente, também chamadas de Consequências (da ação em potencial), gerando os termos Matriz de Desempenhos e Matriz de Consequências.

Com a Matriz de Decisão definida, a última estrutura comum aos problemas de AMD são os pesos dos critérios:

Definição 2.2.5 (Pesos). São as medidas w_j que expressam a importância relativa entre os critérios. O conjunto de pesos atribuídos aos diferentes critérios denomina-se vetor dos critérios $W = \{w_1, \dots, w_m\}$.

Assim, o objetivo dos pesos é dar liberdade para o agente de decisão definir quais critérios são mais relevantes. Entretanto, eles influenciam de maneira decisiva o resultado dos problemas, sendo necessário refletir o mais fielmente as preferências do decisor. Para isso, várias metodologias de elicitação de conjuntos pesos foram propostas. Gomes, Gomes e de Almeida (2009) cita que os principais são: o Simple Multi Attribute Rating Technique (SMART), os Ranking Methods, o Analytic Hierarchy Process (AHP), a Atribuição Direta ou Pontuação Direta, o Swing Weighting e o Trade-off Weighting.

2.2.2 O Princípio de Dominância

A partir da discussão sobre como os métodos de AMD auxiliam os decisores mantendo o rigor matemático, Hwang e Yoon (1981) e Gomes, Gomes e de Almeida (2009) vão na mesma direção quando adaptam o princípio de dominância da Teoria da Decisão para o contexto de Apoio Multicritério à Decisão:

Definição 2.2.6 (Dominância em AMD). Uma alternativa é considerada *dominada* quando existe outra alternativa que é estritamente preferível em um ou mais critérios e iguala-se aos demais.

A definição diverge daquela de Teoria da Decisão quando considera critérios e não estados. Se por um lado, estados sempre estarão numa mesma escala e são facilmente comparáveis, critérios (atributos com informações de preferências) podem ter outros eixos de significância e denotam estruturas mais complexas sob o ponto de vista das preferências do decisor.

Um ponto importante é que o princípio de dominância não requer nenhuma suposição sobre a agregação de critérios para eliminar alternativas dominadas, fornecendo um meio para reduzir o conjunto de ações em potencial independentemente do método multicritério. Isso é crucial para testar a consistência dos métodos de Apoio Multicritério a decisão, processo que será feito com o RIM no Capítulo 3.

Como na seção anterior, mas agora num número discreto de alternativas Keeney, Raiffa e Meyer (1993) e Gomes, Gomes e de Almeida (2009) nomeiam o conjunto de alternativas não dominados pelas demais como Conjunto Ótimo de Pareto ou Fronteira Eficiente.

2.2.3 Tipos de Problemas

As implicações de se considerar múltiplos critérios fornecem uma abordagem capaz de resolver vários problemas. Parreiras (2006) divide os trabalhos de AMD entre três classes: *ordenamento*, *escolha* e *classificação*. As definições e exemplos estão na tabela 3.

Tabela 3 – Tipos e Exemplos Práticos de Problemas de Decisão Multicritério

Tipo de Problema	Exemplo
- <i>Ordenamento</i> : Ordenar as alternativas da melhor para a pior. Esta ordenação não é necessariamente completa.	Ordenar candidatos a um emprego em uma empresa, conforme seu desempenho no processo de seleção.
- <i>Escolha</i> : Fornecer a melhor alternativa ou um conjunto limitado de soluções consideradas satisfatórias.	Seleção de uma entre várias versões de um mesmo projeto. As melhores soluções não são necessariamente ótimas mas, simplesmente, satisfatórias.
- <i>Classificação</i> : Classificar as alternativas em grupos homogêneos pré-definidos.	Diagnóstico médico pela classificação de pacientes em grupos de doenças conforme alguns sintomas. Classificação acadêmica de alunos em aprovados ou reprovados no ano letivo.

Fonte: adaptado de Parreiras (2006).

Ademais, Gomes, Gomes e de Almeida (2009) estabelecem a problemática P_δ , com objetivo de esclarecer a decisão por uma descrição, em linguagem apropriada, das ações e suas consequências. O resultado pretendido é uma descrição ou um procedimento cognitivo.

Entretanto, as definições não são independentes umas das outras. Assim, uma solução de classificação pode ser baseada num ordenamento prévio, como no caso do TOPSIS-Sort

(SABOKBAR et al., 2016), que adapta o algoritmo TOPSIS (HWANG; YOON, 1981), de ordenação, para problemas de classificação.

Na prática, muitos métodos multicritério priorizaram a problemática de ordenamento, em particular na década de 70 e 80 (GOMES; GOMES; DE ALMEIDA, 2009). Na próxima seção é dado ênfase a Métodos de Tomada de Decisão Multicritério com enfoque em ordenamento pelo fato do RIM, principal método analisado pelo trabalho, pertencer a essa classe.

2.3 MÉTODOS DE TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO

A partir da década de 70, diferentes estratégias foram se popularizaram por solucionar problemas de decisão multicritério (ROY, 1968; HWANG; YOON, 1981; KEENEY; RAIFFA; MEYER, 1993; CABLES; LAMATA; VERDEGAY, 2016). Diversas escolas propuseram maneiras de resolver os problemas de decisão multicritério, como: a escola francesa, que propõe relações de sobreclassificação entre as alternativas; a escola americana, baseada na teoria da utilidade; e os métodos de referência, cujos métodos constroem julgamentos orientados por uma solução ideal. O principal alvo dessa dissertação são os métodos de referência, em particular aqueles que resolvem a problemática de ordenamento, como o TOPSIS e o RIM.

2.3.1 Escola Francesa e o ELECTRE

A escola francesa surgiu na década de 1960 com os trabalhos de Bernard Roy (ROY, 1968) sobre os métodos ELECTRE, do acrônimo ELimination Et Choix Traduisant la REalité (Eliminação e Escolha Expressando a Realidade), e teve suas contribuições estendidas principalmente com os trabalhos de Brans and Vincke sobre o método PROMETHEE, sigla de Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation (BRANS; VINCKE, 1985).

Um representante dessa classe é o ELECTRE IV, alicerçado nas relações de sobreclassificação.

Definição 2.3.1. (Sobreclassificação)

Diz-se que uma alternativa a sobreclassifica outra b se, levando em consideração toda a informação do problema e as preferências do decisor, existe um argumento forte o bastante para suportar a conclusão de que a é pelo menos tão boa quanto b e que não há nenhum argumento suficientemente forte na direção contrária.

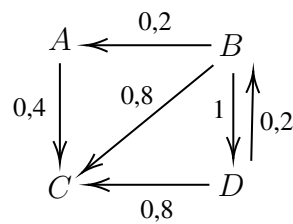
Dessas definições surgem os coeficientes (entre 0 e 1) de concordância para a afirmação a sobreclassifica b . Quando essas afirmações são avaliadas uma a uma, gera-se matriz de concordância, a qual pode ser interpretada como uma matriz de adjacência de um grafo entre as alternativas.

Tabela 4 – Exemplo de Matriz de Concordância

	A	B	C	D
A	-	0	0,4	0
B	0,2	-	0,8	1
C	0	0	-	0
D	0	0,2	0,8	-

Fonte: o autor.

Figura 1 – Grafo da Matriz de Concordância



Fonte: o autor.

Na segunda fase, há uma exploração nas relações de sobreclassificação para produzir o ordenamento. Dois algoritmos de destilação são reproduzidos no grafo da figura 1, o primeiro partindo da melhor alternativa para a pior (Destilação Descendente) e o segundo indo na direção contrária (Destilação Ascendente). Geram-se duas pré-ordens ao considerarmos a Destilação Descendente e o inverso da Destilação Ascendente. A interseção dessas duas pré-ordens resulta na ordenação final do método ELECTRE IV.

Em suma, a estratégia dos métodos ELECTRE baseia-se em dois estágios: primeiramente constrói-se as relações de sobreclassificação e depois explora-se os resultados da etapa anterior. Dessa forma, espera-se que a dominância de uma alternativa com desempenho melhor num critério e igual nos demais reflita-se no primeiro estágio, em particular na concordância (e na não discordância, no sentido contrário do grafo) da afirmação de sobreclassificação em relação a alternativa dominada.

2.3.2 Escola Americana e a MAUT

Em contraste a abordagem construtiva da escola francesa, a atitude da escola americana é de caráter mais normativo, com a convicção de que antes do início do processo decisório o decisor tem seus valores e seu sistema de preferências bem definidos (PARREIRAS, 2006). A principal criação americana é a Multi Attribute Utility Theory (MAUT), utilizando como base os trabalhos de utilidade monocritério desenvolvidos no início do séculos XX - como a Teoria da Utilidade Esperada de Von Neumann (NEUMANN; MORGENSTERN, 2007). Keeney, Raiffa e Meyer (1993) estenderam essa abordagem para um cenário de vários critérios com a MAUT. A inovação foi considerar os desempenhos x_{ij} como funções v_j avaliadas nas alternativas a_i , como mostrado na Figura 2.

Figura 2 – Matriz de Decisão MAUT

Alternativa/critérios	c_1	c_2	...	c_k
a_1	$v_1(a_1)$	$v_2(a_1)$...	$v_k(a_1)$
a_2	$v_1(a_2)$	$v_2(a_2)$...	$v_k(a_2)$
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
a_n	$v_1(a_n)$	$v_2(a_n)$...	$v_k(a_n)$

Fonte: Retirado de Juliano (2017).

Em seguida, para cada alternativa, os resultados são agregados numa soma ponderada com os pesos, formando uma espécie de utilidade conjunta. Assim, uma alternativa com maior utilidade conjunta domina outra com valor menor. Naturalmente, um desempenho ruim em um critério pode ser compensado por outro melhor dentro da soma ponderada, característica indicada na literatura como compensatoriedade (PARREIRAS, 2006).

Note que para a soma ponderada (utilidade conjunta) não tenha viés dado pela magnitude dos valores num único critério é necessário que todos eles estejam numa mesma escala. Dessa forma, diferentes procedimentos têm como alvo trazer as alternativas a num cenário homogêneo, critério a critério, para que possam ser comparadas (GOMES; GOMES; DE ALMEIDA, 2009). Destacam-se os principais procedimentos na Tabela 5.

Tabela 5 – Principais Procedimentos de Normalização

Fórmula	Nomes Encontrados na Literatura	Métodos que a Utilizam
$\frac{a_{ij}}{\sqrt{\max_i a_{ij}}}$	Normalização pelo Máximo	TOPSIS-Sort (SABOKBAR et al., 2016)
$\frac{a_{ij} - \min_i a_{ij}}{\max_i a_{ij} - \min_i a_{ij}}$	Normalização Max/Min ou Normalização Intervalar	RIM (CABLES; LAMATA; VERDEGAY, 2016)
$\frac{a_{ij}}{\sum_j a_{ij}}$	Normalização pela Soma da Coluna	AHP (SAATY, 2004)
$\frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_j a_{ij}^2}}$	Normalização pela Norma do Vetor	TOPSIS (HWANG; YOON, 1981)

Fonte: adaptado de Gomes, Gomes e de Almeida (2009).

2.3.3 Métodos de Referência

Os métodos de referência obtém uma solução aos problemas multicritério de decisão através de uma alternativa ideal, uma referência. Alguns exemplos de métodos dessa categoria são: o VIKOR, o RIM, o TOPSIS (YU, 1973; CABLES; LAMATA; VERDEGAY, 2016; HWANG; YOON, 1981) e mais recentemente o REF (AYTEKIN; DURUCASU, 2021).

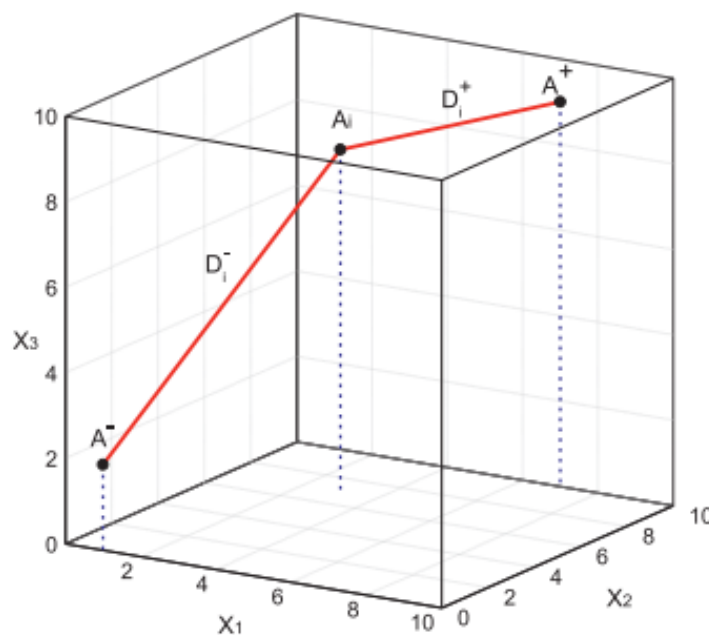
Sendo assim, esses métodos ordenam através da proximidade a uma alternativa ideal (positiva ou negativa). Para os coeficientes de proximidades ao Ideal de Referência $CP(a_1)$ e $CP(a_2)$ das alternativas a_1, a_2 , respectivamente, temos a seguinte relação de preferência:

$$a_1 \succeq a_2 \iff CP(a_1) \geq CP(a_2),$$

ou seja, se o coeficiente de proximidade $CP(a_1)$ de a_1 for mais alto que $CP(a_2)$, estabelece-se que a_1 domina a_2 .

Essa função de proximidade $CP(a_i)$ é composta pela distância da alternativa i para uma alternativa ideal positiva a^+ (ou negativa a^-). No artigo Behavioral TOPSIS, Yoon e Kim (2017) notam que essas distâncias cumprem o papel de reduzir de dimensionalidade dos vários critérios para um valor de uma dimensão, como explicado geometricamente na figura 3. Na figura, vemos as distâncias D_i^+ e D_i^- de A_i para alternativas ideais A^+ e A^- , levando em consideração os desempenhos nos critérios X_1, X_2, X_3 . Em suma, essa classe de métodos procura nas distâncias D_i^+ e D_i^- um meio para reduzir a dimensionalidade nos critérios, para no final introduzir coeficientes de proximidades (números reais) e ordenar as alternativas.

Figura 3 – Redução de Dimensionalidade



Fonte: Yoon e Kim (2017).

No que segue, serão discutidos dois métodos de referência, o Reference Ideal Method (RIM) e a Technique for Order Preferences by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS).

2.3.3.1 TOPSIS

O TOPSIS é um algoritmo de ordenamento criado por HWANG; YOON em 1981 e se tornou popular desde então. Somente entre 2007 e 2017, foram mais de 2800 publicações

nas bases IEEE, World of Science e ScienceDirect a respeito do método (SALIH et al., 2019). Nas propriedades do TOPSIS, destaca-se a compensatoriedade nos critérios e também a não interatividade, isto é, ele não volta em um passo após este ter sido finalizado (LUZ, 2014; GARCÍA-CASCALES; LAMATA, 2012).

A aplicabilidade do TOPSIS evidencia-se em diferentes áreas. Num âmbito socioeconômico, de Lima Silva, Silva e de Almeida Filho (2020) usaram variações do TOPSIS (TOPSIS-Sort-B e TOPSIS-Sort-C) para sugerir um novo método para o cálculo do índice de liberdade econômica proposto pela fundação Heritage. Outras aplicações estão na otimização da cadeia de suprimentos, onde Chen, Lin e Huang (2006) selecionaram fornecedores através de vários critérios de benefício e custo num ambiente de lógica difusa (*fuzzy*). Para o problema de localização na construção de uma nova planta, Yong (2006) utilizou o TOPSIS para o cálculo das distâncias num ambiente *fuzzy* para representar os pesos e critérios de maneira linguística.

Uma característica do TOPSIS é a definição de dois subconjuntos (mutuamente exclusivos) nos critérios: os critérios de custo e os de benefício. Essa divisão auxilia na construção das alternativas ideais, localizadas nos extremos de cada critério. A alternativa ideal positiva é um vetor com as entradas nos máximos dos critérios e benefício e nos mínimos dos critérios de custo (e vice-versa para a alternativa ideal negativa).

Essa característica de valores extremos (monotonicidade em cada critério) é explicitada no artigo seminal (HWANG; YOON, 1981), onde o autor julga ser incomum um problema em que os melhores valores em cada atributo estejam em algum valor entre o máximo e mínimo:

"TOPSIS assumes that each attribute takes either monotonically increasing or decreasing utility. A nonmonotonic utility (e.g., square utility) is a rare case, such as the optimum number of rooms in a house or the blood sugar count in a human body, where the best utility is located somewhere in the middle of an attribute range."

Pode-se concluir que (HWANG; YOON, 1981) deixam uma lacuna na literatura de AMD, onde novos métodos deveriam ser propostos considerando desempenhos ideais nos valores intermediários dos critérios.

Outra característica do TOPSIS é a normalização da matriz de desempenho, feita para permitir comparações entre os critérios. Ela é dada pela equação

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^I x_{ij}^2}}$$

A expressão do denominador pode ser vista como o tamanho do vetor-coluna da matriz de desempenho no critério fixado. Portanto, ela define o quanto o desempenho x_{ij} da alternativa i representa frente as outras alternativas do mesmo critério. Outras abordagens propuseram colocar a normalização pelo máximo, como é o caso do TOPSIS-Sort (SABOKBAR et al., 2016).

Para a execução do método, devemos definir as alternativas a_i , os critérios c_j , os pesos w_j e a matriz de desempenhos X . Após a introdução, há a normalização, a ponderação pelos

pesos, a construção das alternativas ideais e o cálculo do coeficiente de proximidade em função da distância a essas pontos. O processo de ordenação do TOPSIS está descrito no Algoritmo 1.

Algoritmo 1: TOPSIS

- 1: Definir as alternativas a_i os critérios c_j e os pesos w_j e a matriz com os desempenhos $[x_{ij}]$

$$\begin{matrix} & w_1 & \dots & w_J \\ & c_1 & \dots & c_J \\ a_1 & [x_{11} & \dots & x_{1J}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_I & [x_{I1} & \dots & x_{IJ}] \end{matrix}$$

- 2: Normalizar a matriz de desempenhos: $r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^I x_{ij}^2}}$, $i = 1, \dots, I$; $j = 1, \dots, C$

- 3: Calcular os desempenhos normalizados ponderados: $v_{ij} = w_j r_{ij}$, $i = 1, \dots, I$; $j = 1, \dots, C$

- 4: Identificar a Alternativa Ideal Positiva a^+ e a Alternativa Ideal Negativa a^-

$$a^+ = \{v_1^+, \dots, v_C^+\} = \left\{ \left(\max_i v_{ij} \mid j \in C_1 \right), \left(\min_i v_{ij} \mid j \in C_2 \right) \mid i = 1, 2, \dots, I \right\}$$

$$a^- = \{v_1^-, \dots, v_C^-\} = \left\{ \left(\min_i v_{ij} \mid j \in C_1 \right), \left(\max_i v_{ij} \mid j \in C_2 \right) \mid i = 1, 2, \dots, I \right\}$$

- 5: Calcular a distância Euclidiana de cada alternativa para as alternativas ideais a^+ e a^-

$$D_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^C (v_{ij} - v_j^+)^2} \quad \text{e} \quad D_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^C (v_{ij} - v_j^-)^2}, \quad i = 1, \dots, I$$

- 6: Calcular o Coeficiente de Proximidade CP_i de cada alternativa

$$CP_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-}, \quad i = 1, \dots, I$$

A literatura dispõe de discussões importantes a respeito do TOPSIS. Yoon e Kim (2017) citam a redução da dimensionalidade característica da classe dos métodos de referência, pois cada alternativa é reduzida a sua distância da alternativa ideal positiva e negativa, resultando no ponto (D_i^+, D_i^-) . Os autores pontuam que pode ser uma tarefa relativamente difícil de criar um coeficiente de proximidade para uma alternativa com m atributos $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$, mas que pode ser fácil de desenvolver uma função de valor com dois atributos consolidados (D_i^+, D_i^-) .

Em seguida, os autores redefinem a função objetivo dos Coeficientes de Proximidade (CP) a fim de considerar a Teoria do Prospecto (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979), a qual foge do escopo dessa dissertação. Entretanto, uma interpretação das curvas de indiferença dos CP contida no artigo é válida e inspira algumas contribuições para essa dissertação.

Partindo do princípio que queremos nos afastar da solução ideal negativa e nos aproximar da positiva, é consenso que a função do coeficiente de proximidade propõe maximizar D_i^- e

minimizar D_i^+ . Dessa forma, os autores propõem analisar a seguinte função de valor:

$$V = \frac{D_i^-}{D_i^+}.$$

Isso se justifica porque, para uma alternativa s preferível a outra t , devemos ter

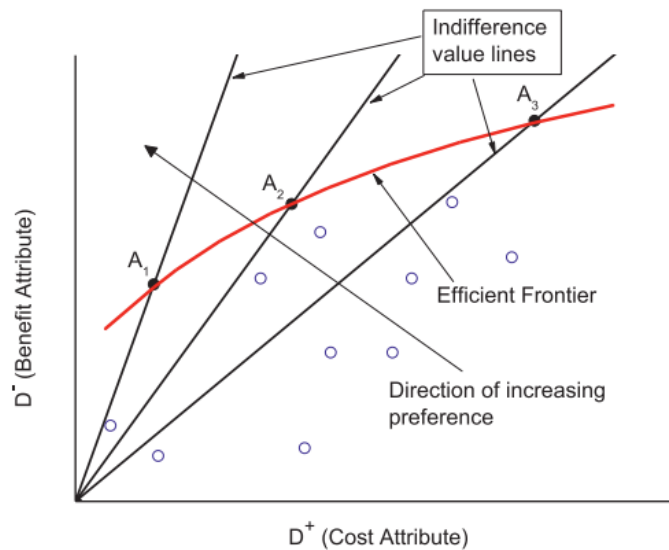
$$\frac{D_s^-}{D_s^+} > \frac{D_t^-}{D_t^+}$$

que é matematicamente equivalente a se dizer

$$\frac{D_s^-}{D_s^- + D_s^+} > \frac{D_t^-}{D_t^- + D_t^+}.$$

Isso nos mostra que as curvas de indiferença do Coeficiente de Proximidade do TOPSIS se comportam igual a função V , retas que se cruzam no zero, como mostra a Figura 4. Essa interpretação será útil quando considerarmos as classes em algoritmos de classificação ordinal, pois os limites delas serão definidos por perfis com essas curvas de indiferença.

Figura 4 – Curvas de Indiferenças TOPSIS



Fonte: Yoon e Kim (2017).

Entretanto, algumas falhas foram relatadas no algoritmo. Uma crítica ao TOPSIS deve-se a reversão de ordem quando adicionadas novas alternativas (GARCÍA-CASCALES; LAMATA, 2012; AIRES; FERREIRA, 2019). Para resolver esse problema, Aires e Ferreira (2019) propuseram o método normalização diferente com a inputação de um domínio em cada critério, definido previamente pelo decisor.

2.3.3.2 RIM

O Reference Ideal Method é um método multicritério de referência que objetiva resolver problemas de ordenamento, introduzido na literatura em 2016 por Cables, Lamata e Verdegay na

revista Information Sciences. Com base em pesquisa no motor de buscas Google Scholar (2022), foram constatadas 108 citações no artigo seminal.

Embora recente, algumas aplicações do método já foram desenvolvidas. Na área da medicina, Sofuoğlu (2021) aplicou o RIM para o problema de seleção de biomateriais, utilizando de diferentes métodos para atribuição dos pesos em cada critério. Outro exemplo prático do uso do RIM está na priorização de monitoramento de asteróides (SÁNCHEZ-LOZANO; FERNÁNDEZ-MARTÍNEZ; LAMATA, 2019). Devido a grande quantidade deles, o problema envolvia a ordenação de quais asteróides revelavam mais perigo a Terra, baseado nos critérios de tamanho, distância da Terra, energia e probabilidade de impacto e também o ganho de velocidade ao entrar na atmosfera. Os pesos de cada critério vieram de uma *survey* respondida por experts agregadas pelo método Analytical Hierarchy Process.

No artigo seminal, Cables, Lamata e Verdegay (2016) contribuíram para a área de recursos humanos. Em particular, o RIM auxiliou no recrutamento e seleção de motoristas para uma companhia. Os critérios utilizados foram idade, anos de experiência, quantidade de sanções, conhecimento de mecânica, limitações físicas e estabilidade emocional. Os resultados se mostraram consistentes após a validação e análise de sensibilidade em 6 cenários distintos.

A subseção 2.3.3.1 demonstrou que a busca por uma solução ideal no valor máximo ou mínimo dos critérios é a essência do TOPSIS, mediante a citação de Hwang e Yoon (1981). Como um complemento ao método, o Reference Ideal Method possibilita o decisor escolher intervalos dentro dos critérios para a construção das alternativas ideais (CABLES; LAMATA; VERDEGAY, 2016).

O argumento do RIM é o de que a solução ótima nem sempre estará nos extremos dos critérios. Por exemplo, se uma empresa quer contatar um motorista tendo como critério a idade e ela varia entre 23 e 60 anos, pode ser que a idade ideal não seja nem 23 e nem 60 anos, mas um intervalo contido nesses dois extremos, como entre 25 e 35 anos. Dessa forma, as definições de Alcance (Range) e Ideal de Referência (Reference Ideal) foram propostas.

Definição 2.3.2 (Alcance). O Alcance R é qualquer intervalo, conjunto de rótulos ou simples valores que pertencem ao domínio D associado ao universo do discurso.

Definição 2.3.3 (Ideal de Referência). O Ideal de Referência IR é um intervalo, conjunto de rótulos ou conjunto de valores simples que representam a máxima importância ou relevância em um dado Alcance.

Dado o universo do discurso D associado a um critério, interpretamos o Alcance R como a restrição de D na qual queremos trabalhar. Juntamente, define-se o Ideal de Referência IR como o local mais importante dentro de R (note que $IR \subseteq R$). Para o exemplo das idades visto anteriormente, temos como domínio a reta real \mathbb{R} , restrita ao Alcance $[23, 60]$, com Ideal de Referência em $[25, 35]$.

Para incluir esses conceitos num método de referência, Cables, Lamata e Verdegay (2016) desenvolveram uma função de normalização que coloca todas os critérios numa mesma escala, ao mesmo tempo em que considera os Alcances e Ideais de Referência. Para um problema com uma matriz de decisão e pesos definidos, a inclusão dos Alcance e Ideal de Referência se dá em duas etapas.

Na primeira fase, define-se a distância mínima do desempenho x ao intervalo Ideal de Referência $IR = [\gamma, \delta]$ por

$$d_{min}(x, \gamma, \delta) = \min(|x - \gamma|, |x - \delta|).$$

Na segunda etapa, são incluídos o Alcance $R = [\alpha, \beta]$ e a função definida por partes $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow [0, 1]$:

$$f(x, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [\gamma, \delta] \\ 1 - \frac{d_{min}(x, [\gamma, \delta])}{|\alpha - \gamma|}, & \text{se } x \in [\alpha, \gamma] \wedge \alpha \neq \gamma \\ 1 - \frac{d_{min}(x, [\gamma, \delta])}{|\delta - \beta|}, & \text{se } x \in [\delta, \beta] \wedge \beta \neq \delta \end{cases} \quad (2.1)$$

Dessa forma, há uma normalização do desempenho baseada no seu Ideal de Referência. Para completar a matriz de decisão, iteramos a função para cada desempenho. Colocando na notação com os indexadores da matriz de decisão $X = [x_{ij}]$, aplicaremos a função f para cada desempenho x_{ij} , passando por cada Alcance $R_j = [\alpha_j, \beta_j]$ e cada Ideal de Referência $IR_j = [\gamma_j, \delta_j]$. Retornemos ao exemplo anterior das idades para demonstrar o uso da função f .

Exemplo 2.3.1. Sejam o Alcance das idades $R = [\alpha, \beta] = [23, 60]$ e o intervalo Ideal de Referência desse critério $IR = [\gamma, \delta] = [30, 35]$. Para um candidato com 25 anos, tem-se que

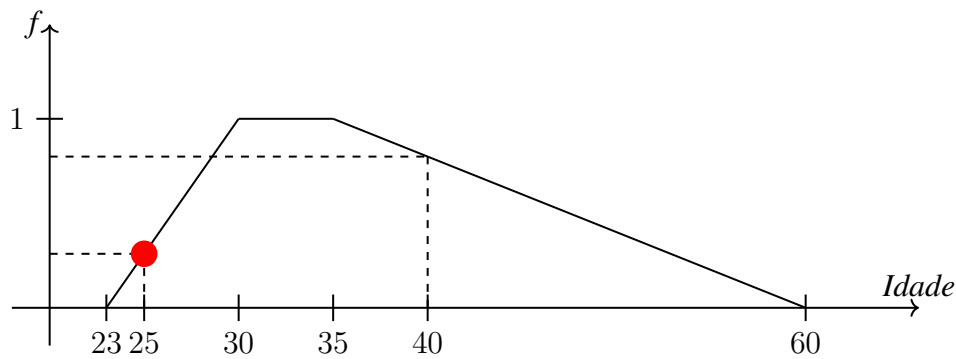
$$d_{min}(25, 30, 35) = \min(|25 - 30|, |25 - 35|) = \min(5, 10) = 5.$$

Portanto, como $25 \in [\alpha, \gamma] = [23, 30]$ será acionada a segunda condição da função f :

$$f(25, 23, 60, 30, 35) = 1 - \frac{d_{min}(25, 30, 35)}{|23 - 30|} = 1 - \frac{5}{|-7|} = 1 - \frac{5}{7} = 1 - 0.714 = 0.286.$$

A alternativa do exemplo corresponde ao ponto em vermelho na Figura 5, considerando o Alcance $[23, 60]$ e o Ideal de Referência $[30, 35]$.

A imagem de f varia entre 0 e 1 e tem um comportamento não simétrico em relação ao Ideal de Referência, fazendo com que, nesse caso, uma idade de 40 tenha desempenho superior a uma de 25, mesmo ambos estando a uma distância de 5 anos do intervalo Ideal de Referência $[30, 35]$. Esse efeito se torna mais agudo quando $\gamma \rightarrow \alpha$ ou $\delta \rightarrow \beta$. Esse problema será detalhado e analisado no Capítulo 3.

Figura 5 – Função f em relação a idade

Fonte: autoria própria.

A função f tem um comportamento semelhante a função de pertinência de um número fuzzy trapezoidal, com suporte $[\alpha, \beta]$ e núcleo em $[\gamma, \delta]$. Além disso, Cables, Lamata e Verdegay (2018) criaram a versão fuzzy do Reference Ideal Method (FRIM) ao colocar ambos γ e δ como números fuzzy triangular para selecionar diferentes tipos de azeite de oliva.

Em comparação a outras normalizações, a função de normalização do RIM e a função de normalização pelo máximo, dada por

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max_i |x_{ij}|} \quad (2.2)$$

podem ser comparadas utilizando a seguinte proposição, adaptada de Cables, Lamata e Verdegay (2016):

Proposição 2.3.1. *Assuma que $X = [x_{ij}]$ é a matriz de decisão com i no conjunto Alt das alternativas e j em C conjunto dos critérios, $[A_j, B_j]$ é o Alcance em cada critério tal que $A_j < x_{ij} < B_j$, $A_j = \min_{i \in Alt} x_{ij}$, $B_j = \max_{i \in Alt} x_{ij}$. Se o Ideal de referência é $IR_j = \max_{i \in Alt} x_{ij}$, então a normalização do máximo tende a normalização do RIM quando $x_{ij} \rightarrow B_j$.*

Escrevendo a conclusão da proposição em outras palavras, percebe-se que, na situação específica de desempenhos próximos ao máximo (i.e., $x_{ij} \rightarrow B_{ij}$) e Ideais de Referência no máximo, a normalização do máximo se torna próxima a do RIM. Porém essa proposição não garante que os resultados dos algoritmos seriam os mesmos, uma vez que a proposição é falsa quando se troca o máximo em cada critério pelo mínimo.

Além do mais, pode acontecer de as duas normalizações gerarem coeficientes de proximidade diferentes e até ordenações diferentes. As condições para igualdade no coeficiente de proximidade serão exploradas no Capítulo 4.

O processo de obtenção de solução a partir do RIM é descrito no algoritmo 2. Resumidamente, após a normalização, há a ponderação pelos pesos e o cálculo da distância de cada alternativa para as alternativas ideais positiva e negativa. O resultado desse passo é utilizado para calcular os coeficientes de proximidade.

Algoritmo 2: RIM

- 1: Definir os Alcances $R_j = [\alpha_j, \beta_j]$, os intervalos Ideais de Referência $IR = [\gamma_j, \delta_j]$ e os pesos w_j de cada critério $j, j = 1, \dots, J$

$$\begin{aligned} [R_1, \dots, R_J] &= [[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_J, \beta_J]] \\ [IR_1, \dots, IR_J] &= [[\gamma_1, \delta_1], \dots, [\gamma_J, \delta_J]] \\ [w_1, \dots, w_J] & \end{aligned}$$

- 2: Obtenha a matriz de decisão X

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1J} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{I1} & x_{I2} & \dots & x_{IJ} \end{bmatrix}$$

- 3: Normalizar a matriz de desempenhos por meio da função f definida na Equação (2.1):

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1J} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{I1} & y_{I2} & \dots & y_{IJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_{11}, R_1, IR_1) & f(x_{12}, R_2, IR_2) & \dots & f(x_{1J}, R_J, IR_J) \\ f(x_{21}, R_1, IR_1) & f(x_{22}, R_2, IR_2) & \dots & f(x_{2J}, R_J, IR_J) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_{I1}, R_1, IR_1) & f(x_{I2}, R_2, IR_2) & \dots & f(x_{IJ}, R_J, IR_J) \end{bmatrix}$$

- 4: Calcular os desempenhos normalizados ponderados

$$Y' = \begin{bmatrix} y_{11}w_1 & y_{12}w_2 & \dots & y_{1J}w_J \\ y_{21}w_1 & y_{22}w_2 & \dots & y_{2J}w_J \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{I1}w_1 & y_{I2}w_2 & \dots & y_{IJ}w_J \end{bmatrix}$$

- 5: Calcular a distância para os Ideais de Referência normalizados para cada alternativa $i = 1, \dots, I$

$$D_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^C (y'_{ij} - w_j)^2} \quad \text{e} \quad D_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^C (y_{ij})^2}, \quad i = 1, \dots, I$$

- 6: Calcular o Coeficiente de Proximidade CP_i de cada alternativa

$$CP_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-}, \quad i = 1, \dots, I$$

A lógica de ordenamento é similar à do TOPSIS, no sentido em que há uma redução de dimensionalidade para o \mathbb{R}^2 e um ranking das alternativas dado por CP_i . A diferença entre métodos reside somente na função de normalização: o TOPSIS divide um desempenho pelo tamanho do vetor das alternativas e o RIM leva os valores para o intervalo $[0, 1]$.

Como verificado na MAUT e no TOPSIS, o RIM também é um método compensatório, pois no passo 5 do algoritmo 2 há a soma das distâncias para as alternativas ideais, fazendo com que um desempenho ruim em um critério seja compensado por um desempenho bom noutro. Ademais, nota-se também que é um método que não volta nos passos anteriores uma vez que

computa uma solução, logo também pode ser classificado como um método não-interativo.

Uma última característica sobre o RIM é que ele seus resultados não sofrem alterações quando introduzidas novas alternativas, i.e., ele não sofre de reversão de ordem como o TOPSIS. De fato, adicionar uma nova alternativa não alteraria o comportamento de D_i^+ e D_i^- (e consequentemente o coeficiente proximidade CP_i), pois as variáveis que compõem a função f - o Alcance R_j e o Ideal de Referência IR_j - estão fixos.

2.4 CLASSIFICAÇÃO

A classificação visa atribuir a cada ação em potencial uma ou mais categorias homogêneas, definidas *a priori*, usando uma abordagem de comparação absoluta (ALMEIDA-DIAS, 2011). Assim, diferentemente das outras problemáticas, a classificação envolve julgamentos absolutos sobre da aplicação, uma vez que os perfis e referências para o agrupamentos de alternativas independem delas (ZOPOUNIDIS; DOUMPOS, 2002).

Na bibliografia, as contribuições de AMD voltadas a classificação tiveram destaque em várias áreas, mas principalmente: na medicina (STEFANOWSKI; SLOWIŃSKI, 1997; MICHALOWSKI et al., 2001; KADZIŃSKI; CIOMEK; SŁOWIŃSKI, 2015), no marketing (SISKOS et al., 1998; DUTKA, 1995), em finanças (GRECO; MATARAZZO; SLOWINSKI, 1998; CORRENTE et al., 2017) e no meio ambiente e energia (FLINKMAN et al., 2000).

Em sua gênese, os problemas de classificação podem ser tipificados como ordinais ou nominais (ZOPOUNIDIS; DOUMPOS, 2002):

- Classificação Nominal: quando as alternativas devem ser atribuídas a grupos nominalmente definidos, sem uma ordem definida;
- Classificação Ordinal: quando as alternativas devem ser atribuídas a grupos ordinalmente definidos.

Complementando, Almeida-Dias (2011) afirma que essa nomenclatura não consegue captar os problemas intermediários. Sendo assim, ele sugere três nomenclaturas para dividir a classificação: categorias totalmente ordenadas, de mesmo significado da classificação ordinal; categorias parcialmente ordenadas, nos casos em que há uma ordem parcial no conjunto das classes; e categorias não ordenadas, com sentido igual a classificação nominal.

Essa seção visa embasar teoricamente o trabalho para a proposição de um novo algoritmo de classificação ordinal baseado no RIM. Deste modo, o enfoque da revisão literária será para a classificação ordinal, evidenciando as produções relacionadas com o tema.

2.4.1 Classificação Ordinal

A classificação ordinal, como definida anteriormente, constitui uma problemática das áreas de decisão multicritério. Segundo Alvarez, Ishizaka e Martínez (2021), os primeiros trabalhos surgiram em 1997 e tiveram um incremento de publicações a partir de 2002, crescendo linearmente até a data do artigo, com 2299 citações no Web of Science. As áreas mais estudadas compreendem a avaliação de riscos, com 17 artigos, e a educação, com 15.

Ainda segundo essa revisão literária, o autor constata que, nesse período, 79 métodos envolvendo a Escola Francesa são a maioria das publicações na área, seguidos de 52 métodos com total agregação dos critérios (baseados em utilidades aditivas), 19 seguindo linhas não clássicas de AMD e 14 baseados em métodos de referência. Assim, metodologias envolvendo algoritmos como o TOPSIS são a minoria, enquanto que não há nenhum algoritmo baseado no RIM. As principais publicações desse tipo estão na Tabela 6.

Tabela 6 – Publicações de Sorting Envolvendo Métodos de Referência

Artigo	Método	Aplicação
(Ishizaka et al. (2018))	DEASort	Gerenciamento de Materiais
(Karasakal e Aker (2017))	DEA-based Sorting	Avaliação de Projetos
(Chen, Hipel e Kilgour (2008))	Sequential Sorting	Gerenciamento de Inventário
(Demir et al. (2018))	VIKORSORT	Meio Ambiente
(Souza, Gomes e Barros (2018))	AHP-TOPSIS-2N	Avaliação de Projetos
(Sabokbar et al. (2016))	TOPSIS-Sort	Meio Ambiente
(de Lima Silva, Ferreira e de Almeida Filho (2020))	PDTOPSIS-Sort	Finanças
(de Lima Silva e de Almeida Filho (2020))	TOPSIS-Sort-C	Finanças

Fonte: adaptado de Alvarez, Ishizaka e Martínez (2021).

Em relação à teoria de classificação ordinal, Almeida-Dias (2011) fornece duas suposições básicas para a classificação ordinal e multicritério:

Suposição 1. As categorias nas quais as ações devem ser atribuídas estão completamente ordenadas (da pior para a melhor, da menos prioritária para a mais prioritária, da menos arriscada para a mais arriscada, da menos consensual para a mais consensual, e assim por diante).

Suposição 2. Cada categoria é definida *a priori* para receber alternativas e serão processadas do mesmo jeito (pelo menos num primeiro passo).

de Lima Silva (2021) segue a primeira suposição já nomeando as q classes em termos de preferência $C1 \succeq C2 \succeq \dots Cq$. Ademais, com a finalidade de gerar algoritmos de classificação baseado no TOPSIS, aplica essas definições para o contexto de métodos de referência e na segunda suposição define as alternativas a^* e a^- , onde a_j^* e a_j^- são o maior e menor valor possível no critério g_j , respectivamente. Essa ação visa delimitar o algoritmo para todas as alternativas receberem pelo menos uma classe (e também lidar com o problema de reversão de ordem do TOPSIS).

Em relação as metodologias criadas, o fato do RIM pertencer a classe dos métodos de referência torna relevante a análise do TOPSIS-Sort (SABOKBAR et al., 2016), derivado do TOPSIS. Sabokbar *et. al* têm como objetivo a análise multicritério da qualidade do ambiente de 22 distritos de Teerão, capital do Irã. São levados em consideração os critérios de: espaço verde per capita, desperdício e poluição do solo, qualidade e desperdício de água, poluição do ar e razão de incidentes na estação de bombeiros.

O procedimento de classificação do TOPSIS-Sort segue da seguinte maneira: primeiramente, para as k categorias, são introduzidos k perfis $(\underline{P}^k, \overline{P}^k)$, com \underline{P}^k contendo os limites inferiores para aquela classe e \overline{P}^k os limites superiores. Como trata-se de um método multicritério, cada \underline{P}^k (ou \overline{P}^k) deve ter tantas componentes quantos critérios houver. Dessa forma, eles podem ser interpretados como alternativas, onde o TOPSIS é capaz de determinar o Coeficiente de Proximidade \overline{cl}^{p^k} e \underline{cl}^{p^k} . Com eles, o TOPSIS-Sort gera a relação de pertencimento às classes C_k da forma

$$a \in C_k \iff \overline{cl}^{p^k} < cl^a < \underline{cl}^{p^k}$$

Para qualificar e axiomatizar as definições de perfis, Almeida-Dias (2011) sugere mais duas suposições:

Suposição 3. Cada categoria é caracterizada por uma única alternativa de referência típica.

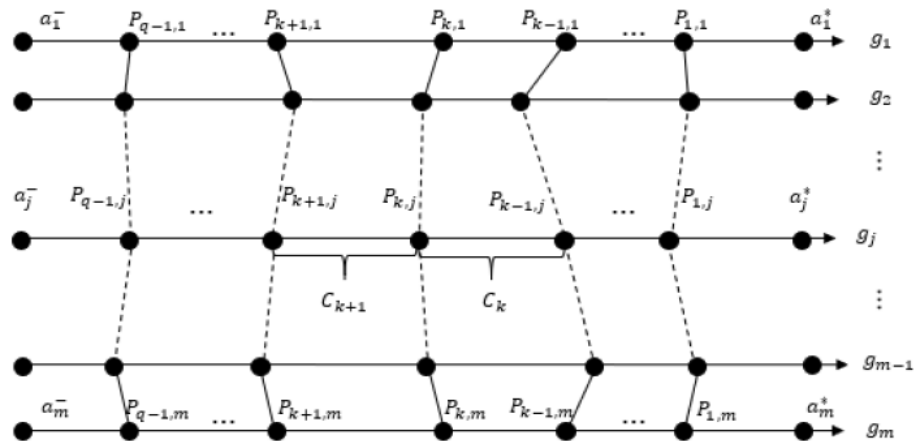
Suposição 4. Cada categoria é definida por duas alternativas referências, as quais representam seus limites superiores e inferiores.

Dessa forma, claramente as suposições são mutuamente exclusivas, pertencendo a cenários distintos. Na Suposição 4 há a criação dos chamados Perfis de Fronteira, encontrados no TOPSIS-Sort, enquanto que na Suposição 3 aparecem os Perfis Característicos, presentes em trabalhos com o ELECTRE-TRI-nC (ALMEIDA-DIAS, 2011).

Recentemente, de Lima Silva (2021) modificou o TOPSIS-Sort, apresentando o TOPSIS-Sort-C, incorporando a Suposição 3, e o TOPSIS-Sort-B, incorporando a Suposição 4. No TOPSIS-Sort-B, o autor une o limite superior \overline{P}^k com o limite inferior da classe seguinte \underline{P}^{k+1} , ilustrado na Figura 6. Além disso, o TOPSIS-Sort-B introduz os extremos de cada critério e adiciona um processo de normalização distinto. Pode-se notar três diferenças frente ao seminal TOPSIS-Sort:

1. O TOPSIS-Sort-B define somente $k - 1$ perfis, enquanto o TOPSIS-Sort define k ;
2. A inclusão de alternativas nos extremos evita a reversão de ordem característica do TOPSIS (GARCÍA-CASCALES; LAMATA, 2012; AIRES; FERREIRA, 2019) presente no TOPSIS-Sort;
3. É adicionada uma opção de normalização pelo máximo e mínimo no Passo 4 algoritmo.

Figura 6 – Perfis de Fronteira no TOPSIS-Sort-B



Fonte: retirado de de Lima Silva (2021).

O procedimento do TOPSIS-Sort-B pode ser visto no Algoritmo 3.

Almeida-Dias (2011) define algumas propriedades que os algoritmos de classificação ordinal esperariam ter, as quais são convertidas para a linguagem de métodos de referência por de Lima Silva (2021). Quatro delas estão listadas abaixo:

Definição 2.4.1. (Conformidade) Qualquer alternativa a_i similar a um perfil de fronteira/característico P_k (i.e., $x_{ij} = P_{kj}, \forall j$) deve ser alocada a classe C_k .

Definição 2.4.2. (Homogeneidade) Duas alternativas diferentes devem ser alocadas na mesma classe se elas são igualmente distantes da alternativa ideal positiva e negativa.

Definição 2.4.3. (Monotonicidade) Se uma alternativa a_i domina outra alternativa a_j , então ela deve ser alocada a uma classe pelo menos tão boa a classe na qual a_i está alocada.

Definição 2.4.4. (Irreversibilidade (proteção a reversão de ordem)) A classificação de uma alternativa a_i não deve ser afetada pela inclusão de uma ou mais novas alternativas no conjunto inicial A ou pela eliminação de uma ou mais alternativas que foram inicialmente consideradas no conjunto A.

Dessa forma, em seus trabalhos, ambos os autores provam que seus métodos sugeridos para a problemática de classificação ordinal seguem essas propriedades. Além dessas, outras duas propriedades surgem, perguntando se a classificação é mantida quando duas ou mais classes se unem (ou dividem). Elas são nomeadas de estabilidade e estabilidade forte.

A metodologia do TOPSIS-Sort-B foi empregada para sugerir novos ratings de liberdade econômica dadas pela fundação Heritage de Lima Silva e de Almeida Filho (2020). Também, foram desenvolvidas versões com a lógica difusa no FTOPSIS-Sort-B e FTOPSIS-Sort C. Isso permitiu uma aplicação envolvendo a análise de Fundos de Investimento Imobiliários (DE LIMA SILVA, 2021).

3 O RIM E O PRINCÍPIO DE DOMINÂNCIA

O Reference Ideal Method, método de Apoio Multicritério à Decisão, tem como finalidade principal resolver problemas de ordenamento, incluindo os conceitos de Alcance e Ideal de Referência. Após uma análise detalhada, percebe-se algumas inconsistências no procedimento proposto pelo RIM. Esse capítulo contempla todos os aspectos dessas inconsistências, bem como as soluções para elas.

Em particular, os objetivos serão:

- Identificar e descrever a inconsistência embutida no Reference Ideal Method;
- Propor um novo algoritmo (Balanced-RIM) para contornar a instabilidade;
- Detectar a inconsistência em artigos da literatura e aplicar ambos os métodos neles, numa análise comparativa.

No contexto dos problemas capazes de serem resolvidos pelo RIM, estão presentes alguns conceitos já discutidos anteriormente, como alternativas, critérios, pesos e desempenhos. Vamos fixar a notação deles com as definições abaixo:

Definição 3.0.1 (Alternativa). É o conjunto finito totalmente ordenado $A = \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_N\}$, onde $a_i \in A$ são os objetos a serem ordenados pelo método multicritério. Também serão chamadas de candidatos.

Definição 3.0.2 (Critérios). É o conjunto finito totalmente ordenado $C = \{c_1, \dots, c_j, \dots, c_M\}$, onde $c_j \in C$ são especificidades ou características presentes em todas as alternativas. Também serão chamados de atributos.

Definição 3.0.3 (Desempenhos). É a avaliação do(s) decisor(es) de uma alternativa i em um determinado critério j , denotado por x_{ij} . Quando agrupados, formam a tabela $X = [x_{ij}]$, nomeada Matriz de Decisão.

Definição 3.0.4 (Pesos). É o conjunto ordenado W que contém o grau de importância w_j do critério j . Os pesos são positivos e devem somar 1.

Uma observação importante: em modelos de AMD, as escalas dos critérios podem variar entre qualitativas (como escala nominal e ordinal) e quantitativas (como escala intervalar e escala de razão). O método RIM lida originalmente com escalas intervalares. A abordagem dessa dissertação se restringirá a escalas intervalares, com cada desempenho pertencendo a um Alcance (definido no Capítulo 2), isto é, um intervalo de números reais.

O exemplo abaixo ilustra a aplicação das definições:

Exemplo 3.0.1. Uma empresa de tratamento de água deseja avaliar as estações de tratamento em uma determinada cidade. Para tanto, é necessário determinar em que medida a água de cada estação segue os padrões exigidos pela lei nos critérios: Índice de PH, Quantidade de Cloro (em miligramas por litro), Turbidez (em NTU – Nephelometric Turbidity Unity) e Cor (em uH - unidade Hazen). Na tentativa de extrair um ranking dentre as estações para apoiar a sua decisão, o decisor depara-se com um problema de ordenamento multicritério.

O decisor dispõe de uma tabela com informações para embasar sua decisão (Tabela 7), após coleta e análise de amostras em cada estação:

Tabela 7 – Informações sobre as Estações

Estação	PH	Cloro	Turbidez	Cor
Estação 1	5,0	6,0	7,0	1,0
Estação 2	5,0	0,1	7,0	1,0
Estação 3	5,0	4,0	7,0	1,0
Estação 4	11,0	5,8	2,0	5,0
Estação 5	5,0	3,0	1,0	3,0

Fonte: autoria própria

Além disso, uma agência reguladora (AR) forneceu os parâmetros para avaliação da qualidade da água. Pela experiência no assunto, o decisor conhece a variação possível dentro de cada critério e o grau de importância de cada um deles. Todas as informações estão disponíveis na Tabela 8:

Tabela 8 – Variações e Importância

Critério	Variação Permitida pela AR	Variação Possível	Grau de Importância
PH	Entre 6,5 e 9,5	Entre 0 e 14	0,15
Cloro	Entre 0,2 a 2	Entre 0 a 10	0,40
Turbidez	Entre 0 e 5	De 0 a 500	0,30
Cor	Mínimo Possível	De 0 a 15	0,15

Fonte: autoria própria

Dessa forma, mostraremos agora como encaixar a notação explicada nas entradas requeridas pelo RIM. Mais precisamente, a modelagem começa com a introdução dos seguintes conjuntos: as alternativas

$$A = \{\text{Estação 1}, \dots, \text{Estação 5}\} = \{a_1, \dots, a_5\}$$

e os critérios

$$C = \{\text{Índice de PH, Quantidade de Cloro, Turbidez, Cor}\} = \{c_1, \dots, c_4\}.$$

Com isso, pode-se enxergar a Tabela 7 - a qual contém os desempenhos de cada alternativa em cada critério - como a Matriz de Decisão do problema. Na Tabela 8, localizamos os pesos na

coluna "Grau de Importância", os Ideais de Referência na coluna "Variação Permitida pela AR" e os Alcances na coluna "Variação Possível". Assim, temos:

$$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \{0, 15; 0, 30; 0, 40; 0, 15\}$$

$$IR = \{IR_1, IR_2, IR_3, IR_4\} = \{[6, 5; 9, 5], [0, 2; 2], [0, 5], [0]\}$$

$$R = \{R_1, R_2, R_3, R_4\} = \{[0, 14], [0, 10], [0, 500], [0, 15]\}.$$

A seguir, cada seção utilizará a notação e o exemplo acima para exemplificar as ideias. Sendo assim, há a divisão em três seções: A Inconsistência, Nova Normalização Proposta, Comparação do RIM e o Balanced-RIM em Artigos da Literatura e Discussão e Considerações Finais do Capítulo.

3.1 A INCONSISTÊNCIA

Para discutir a instabilidade no método RIM, é importante lembrar o princípio de dominância, uma das bases da Teoria da Decisão normativa. No caso do Apoio Multicritério à Decisão, temos a seguinte definição:

Definição 3.1.1. Uma alternativa é considerada *dominada* quando há uma segunda que é estritamente preferível em um ou mais critérios e iguala-se nos demais.

Nos problemas de ordenamento multicritério, a alternativa dominante deve estar melhor posicionada que a alternativa inferior, obrigatoriamente. Em particular aos métodos de referência, há a introdução de alternativas ideais e as distâncias à elas. No RIM, após a normalização, ponderação por pesos e seleção das alternativas ideais, gera-se a distância para a alternativa ideal positiva, a distância para a alternativa ideal negativa e o coeficiente de proximidade (CP_i). Nesse caso, uma alternativa i domina outra alternativa k quando o coeficiente de proximidade de i for maior do que o de k , isto é,

$$CP_i > CP_k.$$

Essas ideias de dominância em AMD e dominância no RIM podem ser aplicadas no Exemplo 3.0.1. Vamos focar nos candidatos a_2 (Estação 2) e a_3 (Estação 3). Da Tabela 7, a_2 tem os mesmos desempenhos que a_3 em todos os critérios, exceto em Cloro. Olhando somente para o valores numéricos dos desempenhos nesse critério, a_2 possui 0,1 mg/L e a_3 tem 4 mg/L. Nesse caso, conclui-se que o desempenho de a_2 é inferior ao de a_3 nesse atributo e, considerando que os desempenhos são iguais nos demais critérios, a_2 é dominada por a_3 .

Em paralelo, aplica-se o RIM nesse caso. No primeiro passo, a normalização do RIM gera a Tabela 9:

Tabela 9 – Desempenhos Normalizados

Alt.	PH	Cloro	Turbidez	Cor
a_1	0,77	0,50	0,996	0,93
a_2	0,77	0,50	0,996	0,93
a_3	0,77	0,75	0,996	0,93
a_4	0,67	0,53	1,00	0,67
a_5	0,77	0,88	1,00	0,80

Fonte: autoria própria

Ponderando pelos pesos, temos a Tabela 10:

Tabela 10 – Desempenhos Normalizados e Ponderados

Alt.	PH	Cloro	Turbidez	Cor
a_1	0,115	0,150	0,398	0,140
a_2	0,115	0,150	0,398	0,140
a_3	0,115	0,225	0,398	0,140
a_4	0,100	0,158	0,400	0,100
a_5	0,115	0,263	0,400	0,120

Fonte: autoria própria

Nos passos finais do algoritmo, criando as alternativas ideais, o RIM constrói os coeficientes de proximidade, como na Tabela 11.

Tabela 11 – Coeficientes de Proximidade

Alt.	Coeficiente de Proximidade
a_1	0,75
a_2	0,75
a_3	0,86
a_4	0,74
a_5	0,90

Fonte: autoria própria

Fixando-se nos candidatos a_2 e a_3 , vê-se que

$$CP_2 < CP_3$$

e a_2 é dominada por a_3 .

Entretanto, essa conclusão dada pelo princípio de dominância (e corroborada pelos resultados do RIM) não leva em conta o Ideal de Referência do problema, que é o intervalo de

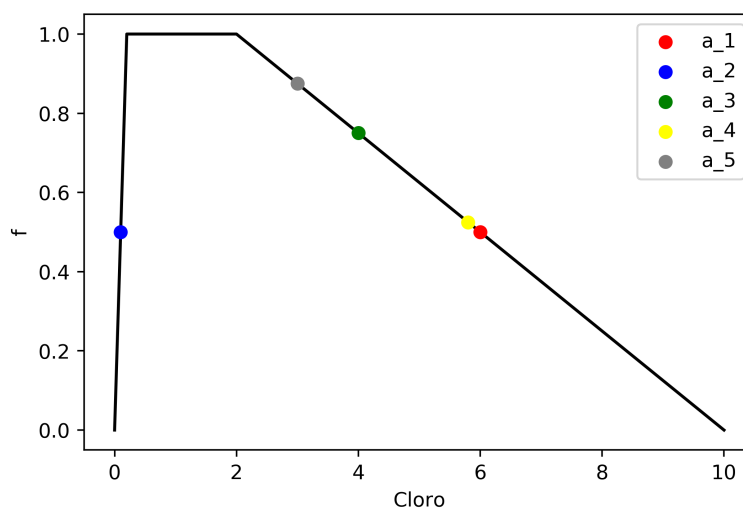
desempenhos mais importante dentro de um critério, por definição. Assim, ao introduzir o Ideal de Referência nas análises, deve-se considerar a distância de cada alternativa à ele, ao contrário de levar em conta somente a magnitude do valor numérico.

Sendo assim, reestabeleceremos a noção de dominância olhando para as distâncias a esse intervalo no Exemplo 3.0.1. Atendo-se novamente aos candidatos a_2 e a_3 e o critério de Cloro, o Ideal de Referência situa-se entre 0,2 mg/L e 2 mg/L. Primeiramente, nota-se que a_2 tem desempenho 0,1 mg/L e dista 0,1 unidades do Ideal de Referência. Em contrapartida, a_3 tem desempenho de 4,0 mg/L, distando 2 unidades dele. Logo, a_2 está mais perto do Ideal de Referência que a_3 . Como os desempenhos nos demais critérios são os mesmos, conclui-se por definição que a_2 domina a_3 .

Isso contradiz a ordenação dada pelo RIM através dos Coeficientes de Proximidade na Tabela 11. Portanto, há uma inconsistência do RIM em capturar o princípio de dominância sob a ótica dos Ideais de Referência.

Para entender a instabilidade no algoritmo mais a fundo, o primeiro passo é observar que a alternativa a_3 tem um desempenho melhor que a_2 no critério Cloro desde a Tabela 9 (dos desempenhos normalizados). Isso é um indício de que a inconsistência já estava embutida a partir da etapa de normalização do algoritmo. Olhando para o gráfico da função de normalização no critério, temos o seguinte aspecto:

Figura 7 – Normalização - Critério Cloro



Fonte: autoria própria

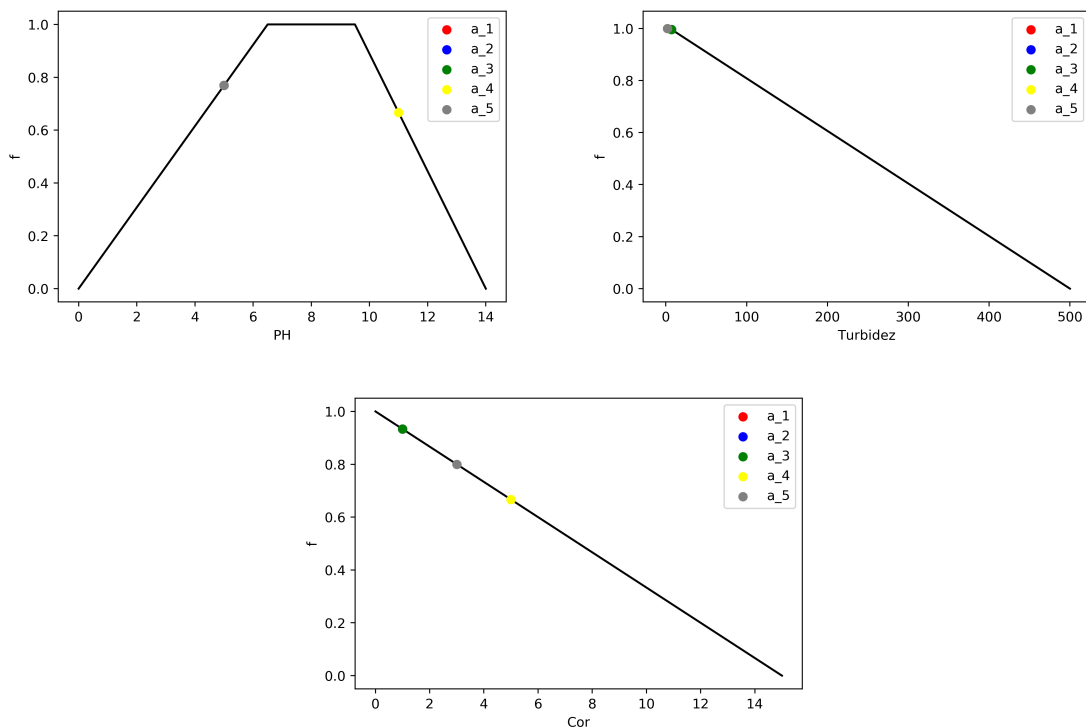
Os pontos coloridos mostram as alternativas e em preto está o comportamento da função f em todo o Alcance. Como esperado, a_3 (em verde) está a uma altura de 0,75 e a_2 (em azul) a uma altura de 0,5. Note que o comportamento da função f é assimétrico em relação ao Ideal de Referência e há uma diferença nas declividades das duas retas. É exatamente isso que faz

com que a_3 tenha melhor desempenho normalizado que a_2 (e conseqüentemente um CP maior, invertendo a ordem das alternativas).

O ponto em que a_2 tem o mesmo valor de desempenho normalizado a partir da função f é em 6 mg/l - a 4 unidades do Ideal de Referência -, ilustrado pela alternativa alternativa a_1 (em vermelho), que também tem os desempenhos iguais nos critérios restantes. O leitor pode notar que essas duas alternativas geram coeficiente de proximidade iguais (Tabela 11), confirmando que isso acontece quando as normalizações se igualam. Dessa forma, candidatos semelhantes a a_1 - que têm nível de Cloro entre 2.1 até 6 - deveriam ser dominados por a_2 , o que não ocorre.

Os demais gráficos das funções de normalização estão listados na Figura 8. Note que o critério PH tem diferentes inclinações na função f .

Figura 8 – Normalização nos Demais Critérios



Fonte: autoria própria.

As considerações propostas até então baseiam-se em casos de fácil identificação das inconsistências acerca do RIM e o princípio de dominância. Estendendo para um contexto mais amplo, onde os desempenhos são diferentes em vários os critérios, haverá situações nas quais uma diferença de normalização do RIM em um critério pode não ser capaz de alterar a ordem das alternativas.

Considere a alternativa a_4 , que possui desempenhos bastante distintos de a_2 . Em relação a distância aos Ideais de Referência, a_4 está mais perto que a_2 que Turbidez, na mesma distância em PH e mais longe em relação a Cor e Cloro (vide Tabela 7 e 8). Entretanto, nota-se que a_4 tem

desempenho normalizado acima de a_2 em Cloro (Figura 7. Em PH, o desempenho normalizado de a_4 está abaixo ao de a_2 (Figura 8).

Sendo assim, a primeira incoerência privilegia a_4 e a segunda a desqualifica. Nesse caso, quem define uma leve dominância de a_2 sobre a_4 - verificado num CP de 0,75 contra 0,74 na Tabela 11 - são os pesos dos critérios. Caso o peso do critério Cloro fosse maior, ele poderia inverter a ordem das alternativas, por exemplo. Podemos também notar que as diferenças de inclinação no critério de Cloro são mais intensas e podem gerar mais distorções do que as verificadas em PH, que possui declividades mais parecidas.

Generalizando, dois fatores amplificam ou mascaram os resultados do RIM em relação ao princípio de dominância:

1. Os pesos nos critérios com problemas na normalização.
2. A diferença de declividade entre os dois lados da função de normalização f ;

Em suma, todas as incoerências apontadas no exemplo são derivadas de uma mesma causa: a função de normalização do RIM, que pode gerar coeficientes de proximidade equivocados e violar o princípio da dominância da Teoria de Decisão. Isso se deve ao fato de a função de normalização não ser simétrica em relação aos Ideais de Referência, o que em algumas situações pode estar escondido e ser difícil de achar, mas ainda assim é um aspecto relevante.

3.2 NOVA NORMALIZAÇÃO PROPOSTA

Nessa seção, após identificada a violação no princípio de dominância pelo RIM, veremos como corrigir o algoritmo, fazendo a menor modificação possível nele. Em particular, foi constatado que o fato gerador das anomalias reside na função de normalização, descrita abaixo (Equação 3.1):

$$f(x_{ij}, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_{ij} \in [\gamma_j, \delta_j] \\ 1 - \frac{d_{\min}(x_{ij}, [\gamma_j, \delta_j])}{|\alpha_j - \gamma_j|}, & \text{se } x_{ij} \in [\alpha_j, \gamma_j] \wedge \alpha_j \neq \gamma_j \\ 1 - \frac{d_{\min}(x_{ij}, [\gamma_j, \delta_j])}{|\delta_j - \beta_j|}, & \text{se } x_{ij} \in [\delta_j, \beta_j] \wedge \beta_j \neq \delta_j \end{cases} \quad (3.1)$$

onde

$$d_{\min}(x_{ij}, \gamma_j, \delta_j) = \min(|x_{ij} - \gamma_j|, |x_{ij} - \delta_j|).$$

e:

- $IR_j = [\gamma_j, \delta_j]$ é o Ideal de Referência no critério j
- $R_j = [\alpha_j, \beta_j]$ é o Alcance no critério j .

Basicamente, a função leva o Alcance do atributo no intervalo $[0,1]$, como visto nos gráficos da seção anterior. Por se tratar de duas retas, quando não estamos no Ideal de Referência, teremos obrigatoriamente

$$y = ax_{ij} + b.$$

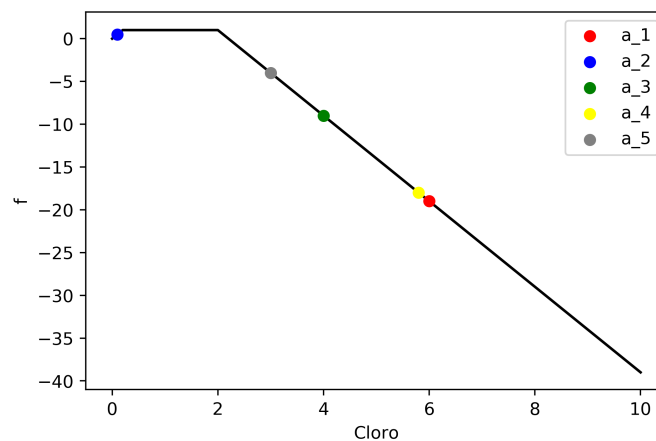
em cada lado da função.

Além disso, lembremos que o problema está na declividade das duas retas, ou seja, nos coeficientes a 's de cada uma delas. Analisando a função, vemos que eles são: $\frac{1}{|\alpha_j - \gamma_j|}$ para o lado esquerdo da função e $-\frac{1}{|\delta_j - \beta_j|}$ para o lado direito. Dessa forma, temos que igualar essas inclinações para corrigir o problema. Isso pode ser feito de duas formas:

- Igualar colocando a maior declividade (em módulo) das duas;
- Igualar colocando a menor declividade (em módulo) das duas;

Para exemplificar o comportamento de f para a maior das declividades, ao aplicá-las no critério Cloro do Exemplo 3.0.1, teremos a Figura 9, onde a imagem da função contém valores abaixo de zero. Agora, lembrando dos passos finais do RIM, o zero é a alternativa ideal negativa de cada critério. Portanto, seria necessário a mudança dos cálculos de todas as distâncias às alternativas ideais nesses passos, o que tornaria a correção mais invasiva e complicada.

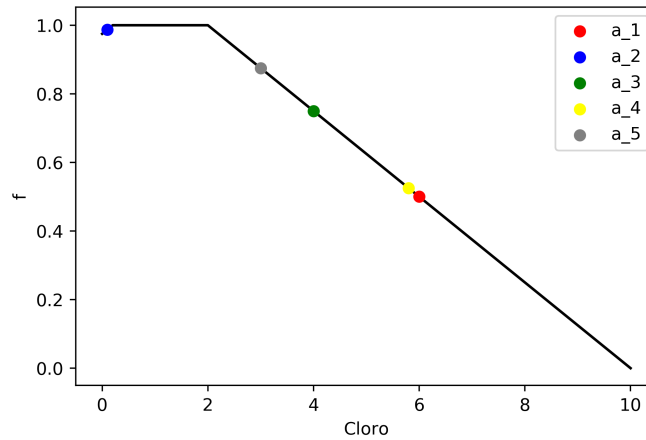
Figura 9 – Normalização pela Maior Declividade - Cloro



Fonte: autoria própria

Por outro lado, a aplicação da menor declividade gera a Figura 10. Nesse caso, a imagem da função f captura o objetivo de reduzir os critérios para uma mesma escala (de 0 a 1), levando em conta o Ideal de Referência. Esses fatos implicam que ela é a solução mais simples e menos invasiva para o problema.

Figura 10 – Normalização pela Menor Declividade - Cloro



Fonte: autoria própria

Dessa forma, a menor das duas inclinações $|\frac{1}{\alpha_j - \gamma_j}|$ e $|\frac{1}{\delta_j - \beta_j}|$ será a que possui o maior valor no denominador, i.e, $\max(\delta_j - \beta_j, \alpha_j - \gamma_j)$. Logo, altera-se a função de normalização colocando as duas inclinações iguais com valor $|\frac{1}{\max(|\delta_j - \beta_j|, |\alpha_j - \gamma_j|)}|$.

Isso gera a seguinte função de normalização:

$$f(x_{ij}, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_{ij} \in [\gamma_j, \delta_j] \\ 1 - \frac{d_{\min}(x_{ij}, [\gamma_j, \delta_j])}{\max(|\alpha_j - \gamma_j|, |\delta_j - \beta_j|)}, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.2)$$

As modificações dão origem a um novo algoritmo derivado do RIM: o Balanced Reference Ideal Method (Balanced-RIM), que possuirá inclinações iguais na função de normalização. Basicamente, a mudança está somente na função de normalização, não alterando os demais passos. O novo procedimento é descrito no Algoritmo 4.

Para determinar a superioridade desse método em relação ao anterior, aplicamos o Balanced-RIM no exemplo da água das seções anteriores. A tabela com a normalização e os respectivos Coeficientes de Proximidade (CP) é a Tabela 12. Note que as instabilidades na dominância apontadas na seção anterior foram corrigidas:

- a_2 tem maior coeficiente de proximidade e domina a_3 ;
- a_2 tem maior coeficiente de proximidade e domina a_1 ;
- a_2 tem maior coeficiente de proximidade e domina a_4 ;
- a_2 tem maior coeficiente de proximidade e domina a_5 ;

Isso mostra que todas as incongruências acerca do princípio de dominância do RIM foram resolvidas! Não obstante, a solução encontrada é simples e restringe-se a função de

Algoritmo 4: Balanced-RIM

1: Defina os Alcances $R_j = [\alpha_j, \beta_j]$, os intervalos Ideais de Referência $IR = [\gamma_j, \delta_j]$ e os pesos w_j de cada critério $j, j = 1, \dots, J$

$$\begin{aligned} [R_1, \dots, R_J] &= [[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_J, \beta_J]] \\ [IR_1, \dots, IR_J] &= [[\gamma_1, \delta_1], \dots, [\gamma_J, \delta_J]] \\ [w_1, \dots, w_J] & \end{aligned}$$

2: Obtenha a matriz de desempenhos X

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1J} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{I1} & x_{I2} & \dots & x_{IJ} \end{bmatrix}$$

3: Normalize a matriz de desempenhos por meio da função f definida na Equação (3.2):

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1J} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{I1} & y_{I2} & \dots & y_{IJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_{11}, R_1, IR_1) & f(x_{12}, R_2, IR_2) & \dots & f(x_{1J}, R_J, IR_J) \\ f(x_{21}, R_1, IR_1) & f(x_{22}, R_2, IR_2) & \dots & f(x_{2J}, R_J, IR_J) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_{I1}, R_1, IR_1) & f(x_{I2}, R_2, IR_2) & \dots & f(x_{IJ}, R_J, IR_J) \end{bmatrix}$$

4: Execute os passos 4 a 6 do RIM.

Tabela 12 – Desempenhos Normalizados e Coeficientes de Proximidade (Balanced-RIM)

Desempenhos Normalizados					Coeficiente de Proximidade	
Alt.	PH	Cloro	Turbidez	Cor	Alt.	
a_1	0,769	0,500	0,996	0,933	a_1	0,936
a_2	0,769	0,988	0,996	0,933	a_2	0,895
a_3	0,769	0,750	0,996	0,933	a_3	0,855
a_4	0,769	0,375	1,000	0,667	a_4	0,750
a_5	0,769	0,875	1,000	0,800	a_5	0,692

fonte: autoria própria

normalização, mantendo a sua principal característica: ser uma mudança de escala que leva em conta o Ideal de Referência. Por fim, pode-se concluir que a alteração proposta traz benefícios a aplicação do método.

3.3 COMPARAÇÃO DO RIM E O BALANCED-RIM EM ARTIGOS DA LITERATURA

Após a identificação e descrição de como o RIM viola o princípio de dominância, na seção anterior um novo algoritmo foi proposto, o Balanced-RIM. Nessa seção, os dois métodos de ordenamento são aplicados e comparados em dois artigos da literatura de AMD.

3.3.1 Primeiro Artigo: Sofuoğlu (2021)

O primeiro artigo é intitulado "A new biomaterial selection approach using reference ideal method", publicado no periódico SADHANA - ligado a Academia de Ciências da Índia - em 2021. O tema tratado é o ordenamento e seleção de biomateriais para implantes em seres humanos. O texto conta com dois estudos de caso, um sobre próteses de quadril e outro sobre próteses de joelho. Nos restringiremos ao segundo, o qual usa o RIM para o ordenamento multicritério dos biomateriais.

Na parte do manuscrito onde analisa próteses de joelho, Sofuoğlu (2021) utiliza três composições de pesos. Não por acaso, em todas elas houve mudança de ordenamento quando aplicados o RIM e o Balanced-RIM. Por simplicidade, vamos nos restringir ao caso onde o método SIMOS foi usado para a obtenção das ponderações. Dessa forma, após aplicar os dois algoritmos nos dados do problema, temos os coeficientes de proximidade e ordenamentos na Tabela 13.

Tabela 13 – Comparação dos métodos em Sofuoğlu (2021)

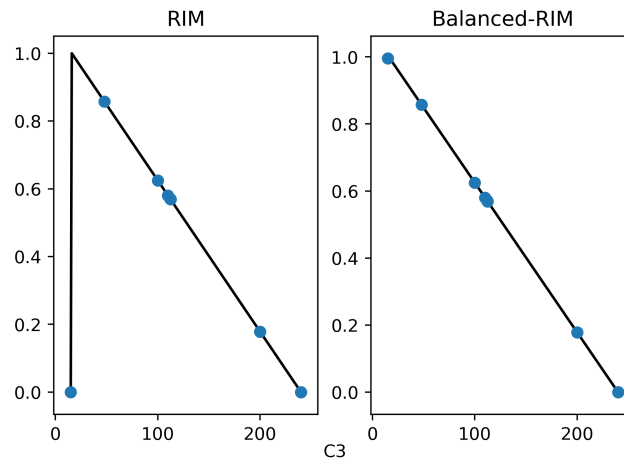
Alt.	RIM		Balanced-RIM	
	Coefficiente de Proximidade	Ranking	Coefficiente de Proximidade	Ranking
A	0,182	10	0,182	10
B	0,272	9	0,272	9
C	0,438	7	0,438	7
D	0,424	8	0,424	8
E	0,479	6	0,479	6
F	0,503	4	0,503	4
G	0,495	5	0,495	5
H	0,508	3	0,508	3
I	0,613	1	0,613	2
J	0,585	2	0,668	1

Fonte: autoria própria.

Da lista, podemos ver que dois candidatos trocam de posição, I e J. Porém, a alteração é de grande importância para o problema, visto que o objetivo é indicar qual a melhor prótese de joelho, ou seja, a alternativa melhor posicionada.

Analisando as possíveis violações no princípio de dominância, a causa reside em $C3$ (Figura 11), critério chamado de Módulo de Elasticidade, que determina a resistência do material quando deformado elasticamente. A instabilidade ocorre pois o alvo a ser seguido está muito próximo do Alcance, gerando diferença nas declividades no critério. Dessa forma, como a alternativa J está ao lado esquerdo da função de normalização (lado com maior declividade), quando o RIM é aplicado, o coeficiente de proximidade é penalizado pela inconsistência já definida anteriormente. Quando executado o Balanced-RIM, esse valor salta de 0.585 para 0.668, levando J para a primeira posição do ranking.

Figura 11 – Função de Normalização em Sofuoğlu (2021) - Critério C3



Fonte: autoria própria.

3.3.2 Segundo Artigo: Gürgen et al. (2019)

O segundo artigo a ser examinado tem o título "Multi-criteria decision-making analysis of different non-traditional machining operations of Ti6Al4V", de autoria de GÜRGEN et al. e publicado na revista *Soft Computing* no ano de 2019. Até o dia 06 de abril de 2022, o artigo já recebeu 463 acessos, 21 citações, implementando dois estudos sobre a liga metálica Ti6Al4V: o primeiro é experimental e disserta sobre vários métodos de corte da liga e o segundo ordena 24 experimentos com diferentes técnicas de corte, diferentes máquinas e diferentes parâmetros nas máquinas.

Assim, o foco dessa subseção é analisar o segundo estudo, que utiliza o RIM como método de ordenamento desses 24 experimentos (alternativas) via 3 critérios: Rugosidade da Superfície (C1), Profundidades de Corte Estáveis (C2) e Temperaturas Máximas da Ferramenta de Corte (C3). Nesse contexto, os Alcances e Ideais de Referência do RIM foram determinados por quatro experts, que também determinaram os pesos de cada critério separadamente, formando quatro conjuntos dos pesos.

Ao computar o RIM e o Balanced-RIM, houve trocas no ordenamento em todos os conjuntos de pesos. Novamente, por simplicidade, vamos fazer uma análise mais detalhada dos pesos de somente um dos experts, o Expert 1. Ao aplicar os dois algoritmos, temos os coeficientes de proximidade e os ranking na Tabela 14.

Dessa forma, nota-se 20 mudanças no ordenamento das alternativas, todas elas devido ao mesmo problema já elicitado nas seções anteriores. Mais precisamente, a Figura 12 mostra que, nos três critérios, os Ideais de Referência são alvos que estão entre o início e o meio dos Alcances, acumulando muitas distorções causadas pelas diferenças de inclinações nas funções de normalização.

Ademais, quando considerados os outros experts, temos a Tabela 15, que mostra quantos

Tabela 14 – Comparação dos métodos em Gürgen et al. (2019) - Expert 1

Alt.	RIM		Balanced-RIM	
	Coefficiente de Proximidade	Ranking	Coefficiente de Proximidade	Ranking
1	0,700	8	0,739	10
2	0,777	15	0,777	15
3	0,801	20	0,801	18
4	0,815	21	0,822	19
5	0,852	22	0,852	21
6	0,735	11	0,735	9
7	0,791	16	0,833	20
8	0,874	23	0,874	22
9	0,750	13	0,750	12
10	0,794	18	0,875	23
11	0,878	24	0,878	24
12	0,698	7	0,698	5
13	0,512	1	0,591	1
14	0,793	17	0,793	16
15	0,800	19	0,800	17
16	0,677	4	0,705	6
17	0,740	12	0,746	11
18	0,767	14	0,767	14
19	0,621	3	0,661	2
20	0,710	10	0,728	8
21	0,710	9	0,710	7
22	0,589	2	0,679	3
23	0,677	5	0,753	13
24	0,688	6	0,688	4

Fonte: autoria própria.

candidatos trocaram de lugar para cada conjunto de pesos.

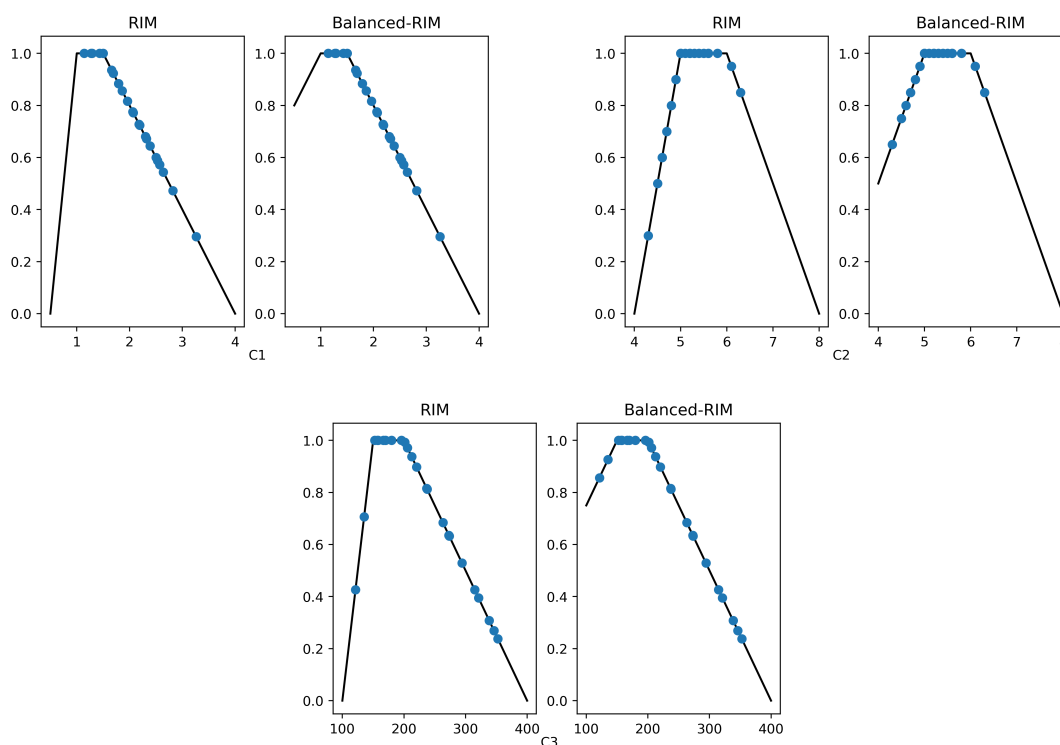
Tabela 15 – Pesos e Quantidades de Trocas para Diferentes Experts

Expert	Pesos em [C1,C2,C3]	Quantidade de Trocas
1	[0,4; 0,3; 0,3]	20
2	[0,3; 0,4; 0,3]	19
3	[0,3; 0,3; 0,4]	22
4	[1/3; 1/3; 1/3]	20

Fonte: autoria própria.

Em suma, dado os dois artigos expostos, percebe-se que as alterações propostas teoricamente no Balanced-RIM conversam com as análises aplicadas, tendo como exemplo dois casos concretos em que houve alteração nos resultados após a troca de algoritmo.

Figura 12 – Função de Normalização em Gürgen et al. (2019)



Fonte: autoria própria.

3.4 DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Nesse capítulo, uma inconsistência no algoritmo RIM foi identificada e criou-se uma nova formulação capaz de evitá-la. Para melhor compreensão, foi apresentado um exemplo sobre tratamento de água com ordenações violando o princípio da dominância da Teoria da Decisão quando considerados os Ideais de Referência. A resolução se deu a partir de uma mudança na função de normalização do RIM e o algoritmo Balanced-RIM foi proposto.

Embora o uso do RIM sem alterações possa gerar as alterações de ordenamento já citadas, há algumas situações impossíveis de originar esse tipo de inconsistência:

1. Quando o Ideal de Referência está num dos extremos dos Alcances. Nesse caso, não há como ter duas inclinações diferentes e por conseguinte, mudança de ordenamento;
2. Quando a distância do Alcance para o Ideal de Referência dos dois lados são iguais. Aqui, a função de normalização é semelhante a um trapézio/triângulo isósceles e vai obrigatoriamente ter as mesmas inclinações, não sendo necessária nenhuma correção.

Algumas dessas situações específicas foram encontradas na literatura, tanto com ideais nos extremos ou no meio do Alcance. Vale lembrar que no artigo seminal, a contradição ocorre somente no critério de idade (Figura 5, Capítulo 2), fazendo com que a diferença nas inclinações da função f e o peso do critério (0,2262) não sejam capazes de gerar problemas ao ordenamento.

Todavia, há vários artigos onde essas duas condições não se verificam, sendo dois deles listados na seção 3.3, recomendando a alteração do ordenamento. Assim, a nova proposição do algoritmo deve ser considerada para que instabilidades desse tipo não ocorram novamente na literatura de AMD.

4 O MÉTODO DE CLASSIFICAÇÃO RIM-SORT

Esse capítulo tem como objetivo explicar as minúcias do método RIM-Sort. Para isso, a primeira seção tem como objetivo descrever o RIM-Sort e fornecer uma visualização dos resultados, a segunda seção demonstra a aplicabilidade do algoritmo em um caso da literatura e a última seção conclui o capítulo e aponta trabalhos futuros.

Dentre as principais justificativas para a criação de um algoritmo de classificação fundamentado no RIM está a existência de uma série de problemas característicos e que não podem ser resolvidos com métodos utilizados em situações de ordenamentos ou escolhas, por exemplo. Outro ponto motivante é derivado das inconsistências no processo de ordenação do RIM, discutidas no capítulo anterior. Aqui, as instabilidades no princípio de dominância refletirão diretamente nas classes do RIM-Sort. Uma explicação detalhada sobre as inconsistências da aplicação direta do RIM para a classificação, juntamente com a comparação com o Balanced-RIM, estão na Seção 4.3.

No que segue, antes de falar sobre o método e o seu procedimento, iremos posicionar o RIM-Sort via diferentes literaturas. Ele resolve o problemática de classificação como base em critérios pré-determinados, isto é, encontra-se na literatura dos métodos de classificação multicritério.

A primeira característica é o tipo de classificação, pertencendo a classificação ordinal. O método RIM-Sort é inspirado no algoritmo TOPSIS-Sort-B (DE LIMA SILVA; DE ALMEIDA FILHO, 2020), seguindo nomenclatura similar. A lógica de classificação é a mesma, dada pela introdução de perfis de fronteira para auxílio na classificação. A diferença entre os dois métodos reside na utilização do Balanced-RIM ao invés do TOPSIS para a geração de coeficientes de proximidade que serão utilizados para a classificação.

A substituição do TOPSIS pelo Balanced-RIM acarreta duas mudanças nos resultados. Por um lado, o RIM é um algoritmo que não possui reversão de ordem - ao contrário do TOPSIS - e por consequência o RIM-Sort carrega esse benefício. Por outro lado, como já demonstrado no Capítulo 3, o RIM produz resultados inconsistentes em relação princípio de dominância da Teoria da Decisão e por isso há a utilização do Balanced-RIM para a correção desse empecilho, acarretando uma mudança na função de normalização.

4.1 ADAPTAÇÃO PARA CLASSIFICAÇÃO

A adaptação do RIM para um problema de classificação é semelhante a do TOPSIS-Sort-B, onde introduz-se Perfis de Decisão (Perfis) de forma crescente para delimitar as classes. No contexto do RIM, os Perfis devem ser escolhidos considerando a distância para o Ideal de

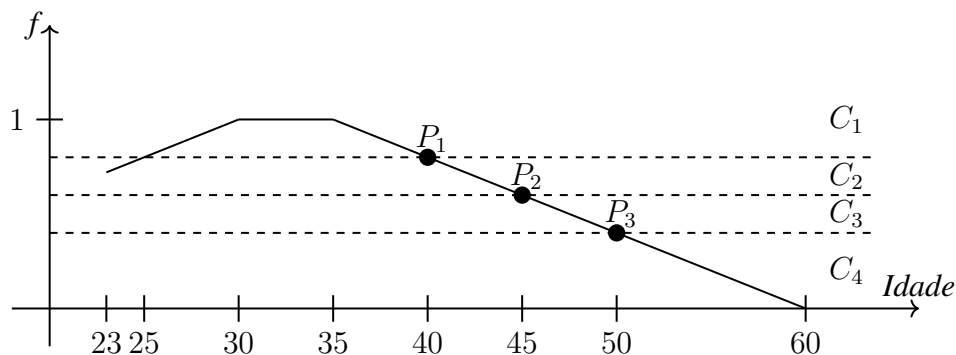
Referência IR_j , isto é, para as classes ordenadas $C_1 \succeq C_2 \succeq \dots \succeq C_k \dots \succeq C_q$, os Perfis $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_{q-1}$ estarão cada vez mais distantes do IR conforme o subíndice k aumenta. Mesmo assim, os Perfis são tratados de maneira semelhante às alternativas, com os mesmos passos de normalização, ponderação pelos pesos e cálculo do Coeficiente de Proximidade. Veja um exemplo de classificação para num contextp onde temos só um critério.

Exemplo 4.1.1. Suponha que a classificação dependa apenas de um critério chamado Idade, com Alcance em $[23,60]$ e Ideal de Referência em $[30,35]$. Para introduzir quatro classes $C_1 \succeq C_2 \succeq C_3 \succeq C_4$ dentro desse Alcance, são necessários três perfis P_1, P_2 e P_3 . Sendo assim, distribui-se os Perfis entre o Alcance com os valores

$$P_1 = 40, P_2 = 45, P_3 = 50$$

e temos o seguinte comportamento da função de normalização do Balanced-RIM:

Figura 13 – Normalização, Perfis e Classes para o Exemplo



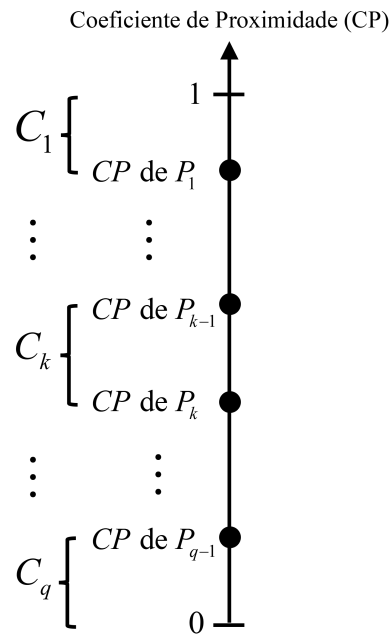
Fonte: autoria própria.

Assim, podemos definir as classes da seguinte forma: as idades entre 25 a 40 são associadas a C_1 , entre 23 e 25 ou 40 a 45 associadas a C_2 , entre 45 e 50 associadas a C_3 e de 50 a 60 atribuídas a C_4 . Note que P_1, P_2 e P_3 estão cada vez mais distantes do IR, resultando em desempenhos normalizados decrescentes, o que mantém a ordem $C_1 \succeq C_2 \succeq C_3 \succeq C_4$ das classes.

Para um problema onde temos vários critérios, cada Perfil terá desempenhos em todos eles e assim, pode-se calcular o seu Coeficiente de Proximidade. Dessa forma, como no TOPSIS-Sort-B, quando a classificação depende de mais de um critério, usa-se os Coeficientes de Proximidade dos Perfis para a atribuição das classes, como na Figura 14.

Como alternativas e Perfis terão o mesmo tratamento, concatena-se a Matriz de Decisão juntamente com os Perfis, formando a Matriz de Decisão Aumentada. Dessa forma, mudando a entrada de dados, podemos utilizar exatamente o mesmo processo do Balanced-RIM para cálculo dos Coeficientes de Proximidade. O procedimento completo do RIM-Sort é exposto no Algoritmo 5.

Figura 14 – Classificação a partir do RIM-Sort



Fonte: autoria própria

4.1.1 Visualização do Processo de Classificação

Após definir e explicar o algoritmo do RIM-Sort, nessa subseção será proposta uma forma de visualização do processo de classificação, que vale tanto para o TOPSIS-Sort quanto para o RIM-Sort. As principais ideias são baseadas no artigo de Yoon e Kim (2017), onde o autor analisa a função

$$CP_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-},$$

que calcula os Coeficientes de Proximidade do TOPSIS e do RIM.

Nesse artigo, o autor observa que as alternativas com mesmo valor de CP_i têm a mesma razão entre D^+ e D^- . Logo, as curvas de indiferença da função CP_i são retas no plano delimitado por (D^+, D^-) . Como os Perfis são tratados como alternativas, eles também possuem essas curvas de indiferença.

Por outro lado, no RIM-Sort e TOPSIS-Sort, uma alternativa a_i é atribuída a classe C_k quando tiver Coeficiente de Proximidade CP_i entre os CP dos Perfis P_k e P_{k-1} . Dessa forma, pode-se graficar as curvas de indiferença de cada Perfil, as alternativas e as classes, como na Figura 15, que usa os dados do artigo seminal do TOPSIS-Sort (SABOKBAR et al., 2016). Forma-se assim uma ferramenta de visualização da atribuição às classes, auxiliando o decisor em ações como a análise de sensibilidade dos resultados.

Algoritmo 5: RIM-Sort

- 1: Definir os Alcances $R_j = [\alpha_j, \beta_j]$, os intervalos Ideais de Referência $IR = [\gamma_j, \delta_j]$ e os pesos w_j de cada critério $j, j = 1, \dots, J$

$$\begin{aligned} [R_1, \dots, R_J] &= [[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_J, \beta_J]] \\ [IR_1, \dots, IR_J] &= [[\gamma_1, \delta_1], \dots, [\gamma_J, \delta_J]] \\ [w_1, \dots, w_J] & \end{aligned}$$

- 2: Obtenha a matriz de desempenhos X

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{I1} & x_{I2} & \dots & x_{IJ} \end{bmatrix}$$

- 3: Estabelecer os Perfis de Decisão $P = \{P_1, P_2, \dots, P_{(q-1)}\}$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(q-1)1} & p_{(q-1)2} & \dots & p_{(q-1)J} \end{bmatrix}$$

- 4: Adicionar os Perfis de Decisão P à Matriz de Decisão X , gerando a Matriz de Decisão Aumentada

$$M = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{I1} & x_{I2} & \dots & x_{IJ} \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(q-1)1} & p_{(q-1)2} & \dots & p_{(q-1)J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{I1} & m_{I2} & \dots & m_{IJ} \\ m_{(I+1)1} & m_{(I+1)2} & \dots & m_{(I+1)J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{(I+q-1)1} & m_{(I+q-1)2} & \dots & m_{(I+q-1)J} \end{bmatrix}$$

- 5: Executar os passos 3 e 4 do Balanced-RIM (Algoritmo 4).
6: Calcular o Coeficiente de Proximidade CP_i de cada Alternativa e cada Perfil

$$CP_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-}, \quad i = 1, \dots, I + q - 1$$

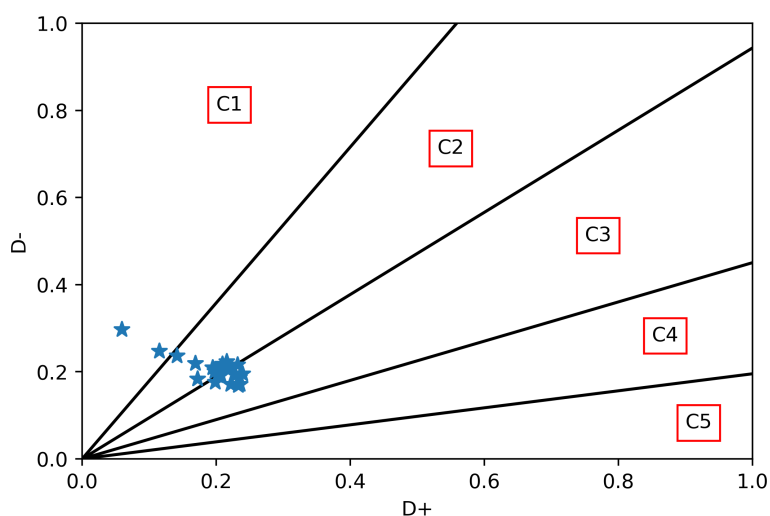
- 7: Classificar cada alternativa a_i fazendo a comparação com os coeficientes de proximidade delas e dos perfis.

$$\begin{aligned} a_i \in C_1 &\iff CP_i \geq CP_{I+1} \\ a_i \in C_k &\iff CP_{I+k-1} > CP_i \geq CP_{I+k}, \quad k = 2, \dots, (q-1) \\ a_i \in C_q &\iff CP_{I+q-1} > CP_i \end{aligned}$$

4.2 APLICAÇÃO NUMÉRICA

O ineditismo do método proposto faz com que, obviamente, não existam dados disponíveis na literatura para verificação dele. Assim, a aplicação numérica usa dados de Palhares (2020)

Figura 15 – Visualização de Resultados RIM-Sort e TOPSIS-Sort



Fonte: autoria própria.

num problema de seleção de fornecedores de leite cru refrigerado (ordenamento), adaptando-o para classificação com intuito de demonstrar o mérito do RIM-Sort. No referido estudo, há a análise multicritério dos fornecedores de uma indústria de laticínios quanto as propriedades físico-químicas do leite.

Por ser matéria-prima dos fornecedores, o leite cru refrigerado é produzido e conservado seguindo alguns protocolos para manutenção de suas características, como o transporte em carro isotérmico do produtor rural até a indústria em questão. Ademais, a qualidade da mercadoria é afetada por vários outros fatores, como instalações precárias, água com baixa qualidade, inexistência de higienização dos equipamentos e utensílios, manejo impróprio devido à desqualificação da mão de obra ou refrigeração inadequada (LAMPUGNANI et al., 2018).

Dessa forma, o manejo inadequado em qualquer etapa da produção do leite cru refrigerado pode torná-lo impróprio. A fim de verificar essa afirmação, análises laboratoriais das propriedades físico-químicas do leite garantem a certificação da qualidade do leite, com parâmetros dados pela lei brasileira, mais precisamente, pela instrução normativa nº 76, de 26 de novembro de 2018 do Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento (BRASIL, 2018). Com os parâmetros e critérios a serem seguidos, a análise multicritério dos fornecedores - em particular, com o uso do método RIM - torna-se uma possibilidade.

Vale lembrar que o propósito do autor em Palhares (2020) é ressaltar a aplicabilidade do método W-FRIM, uma extensão do método RIM no ambiente *fuzzy* para lidar com a indecisão do algoritmo quando muitos desempenhos residem no Ideal de Referência. Todavia, o intuito do trabalho atual é usar os mesmos dados para demonstrar o uso do RIM-Sort, ou seja, o desafio aqui será o de adaptar um problema de ordenamento - que pode ser resolvido pelo RIM - para classificação - resolvido pelo RIM-Sort -, além verificar as consequências da solução do problema

de dominância do RIM dentro do RIM-Sort, dadas pelo uso do Balanced-RIM.

4.2.1 Estruturação do Problema e Classificação dos Fornecedores

O primeiro passo para a estruturação do problema é a definição das alternativas e dos critérios. Naturalmente, num problema de seleção dos fornecedores, as alternativas a serem ordenadas são os próprios fornecedores, com o conjunto

$$A = \{\text{Fornecedor 1}, \dots, \text{Fornecedor 10}\}.$$

Em relação aos critérios, o estudo da dissertação selecionou seis atributos do leite cru refrigerado:

- Critério 1: Teor de Gordura (% m/m);
- Critério 2: Teor de Proteína total (g/100g);
- Critério 3: Teor mínimo de sólidos totais (% m/m);
- Critério 4: Índice crioscópico (°H) grau Hortvet negativos;
- Critério 5: Acidez titulável / graus Dornnic (°D) gramas de ácido láctico /100ml;
- Critério 6: Densidade relativa à 15°C;

Forma-se portanto, o conjunto $C = \{\text{Critério 1}, \dots, \text{Critério 6}\}$.

Os dados da Matriz de Decisão, dos Ideais de Referência e Alcances estão nas Tabelas 16 e 17. Para construí-las, Palhares (2020) utilizou análises laboratoriais e parâmetros da instrução normativa mencionada no início dessa seção. Adicionalmente, todos os critérios do problema são igualmente considerados, tendo pesos de 0,1667. É importante pontuar que serão usadas somente os dados *crisp* do problema, diferentemente do autor, que transforma todos os números do estudo em números *fuzzy*, devido a uma margem de erro de 2% nos resultados das análises laboratoriais.

Os Perfis, responsáveis pela formação das classes do problema, são introduzidos na Tabela 18. Vale ressaltar que, embora trate-se de um problema real e presente na literatura, os Perfis têm muito mais a intenção de ilustrar o algoritmo RIM-Sort do que serem fiéis retratos da realidade dos stakeholders, nesse caso o ambiente formado pelos responsáveis pela produção e transporte do leite e o engenheiro químico responsável.

Após a introdução dos dados, roda-se o RIM-Sort e os resultados são exibidos na Tabela 19. Da tabela, três alternativas são atribuídas a categoria $C2$ e o resto para $C1$, enquanto que a classe $C3$ não teve nenhuma atribuição. Também pode-se inferir que a distância a alternativa ideal positiva D_i^+ são baixas, na média. Mais abaixo, encontra-se a visualização de D_i^+ e D_i^- , proposta nas seções anteriores (Figura 16), onde vemos que as alternativas atribuídas a $C1$ têm

Tabela 16 – Desempenhos - Leite Cru Refrigerado

	Critério 1	Critério 2	Critério 3	Critério 4	Critério 5	Critério 6
Fornecedor 1	3,440	3,050	12,910	-0,546	0,130	1,035
Fornecedor 2	3,750	3,490	12,770	-0,550	0,140	1,033
Fornecedor 3	3,820	3,100	12,650	-0,534	0,140	1,033
Fornecedor 4	3,960	3,240	12,900	-0,546	0,150	1,032
Fornecedor 5	3,680	3,400	12,340	-0,544	0,150	1,034
Fornecedor 6	2,480	3,250	12,040	-0,549	0,150	1,039
Fornecedor 7	3,660	3,260	12,310	-0,540	0,150	1,034
Fornecedor 8	4,020	3,650	12,800	-0,547	0,150	1,032
Fornecedor 9	3,250	3,190	12,200	-0,556	0,150	1,036
Fornecedor 10	2,960	3,500	12,090	-0,555	0,150	1,037
Fornecedor 11	3,060	3,050	11,730	-0,551	0,190	1,037

Fonte: Palhares (2020).

Tabela 17 – Alcances e Ideais de Referência - Leite Cru Refrigerado

	Alcance		Ideal de Referência	
	α_j	β_j	γ_j	δ_j
Critério 1	2,480	4,020	3,500	4,020
Critério 2	3,050	3,650	3,200	3,650
Critério 3	11,730	12,910	12,000	12,910
Critério 4	-0,556	-0,534	-0,553	-0,550
Critério 5	0,130	0,190	0,150	0,180
Critério 6	1,032	1,039	1,034	1,038

Fonte: Palhares (2020).

Tabela 18 – Perfis - Leite Cru Refrigerado

	Critério 1	Critério 2	Critério 3	Critério 4	Critério 5	Critério 6
P1	3,150	3,150	11,860	-0,545	0,140	1,0385
P2	3,000	3,100	11,810	-0,540	0,135	1,0390

Fonte: autoria própria.

D_i^- perto de 0.4 e uma relação $D_i^- : D_i^+$ próxima a 2 pra 1, enquanto que aquelas atribuídas a C2 têm D_i^- mais baixo e relação próxima de 1 pra 1.

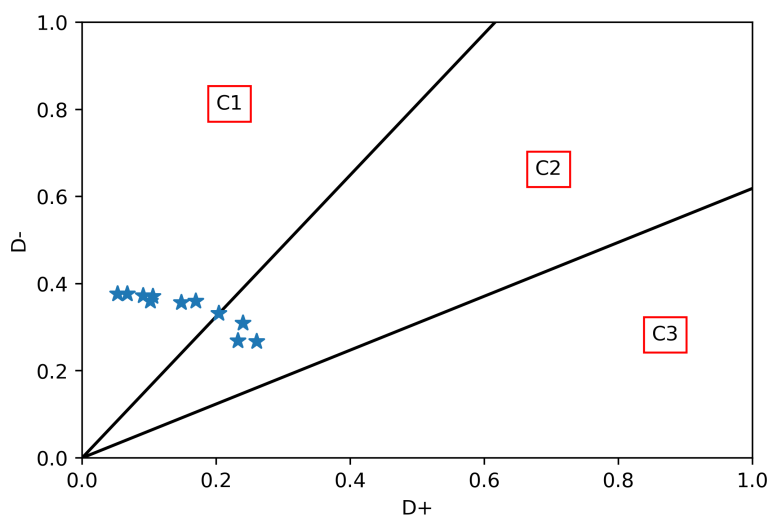
Uma segunda informação é a de que o critério para a introdução dos perfis foi a equalização da área ocupada pelas classes nesse gráfico, tendo cada classe uma área próxima a 0,33. Isso significa que se os dados de (D_i^+, D_i^-) são dados aleatoriamente, então a chance desses candidatos caírem em cada classe será a mesma. Esse pode ser um jeito para a introdução dos perfis quando não se tem mais informações sobre o problema, como é o caso.

Tabela 19 – Resultados - Leite Cru Refrigerado

	Distância Ideal		Coeficiente de Proximidade	Classe
	Positiva	Negativa		
Fornecedor 1	0,240	0,309	0,564	C2
Fornecedor 2	0,102	0,360	0,780	C1
Fornecedor 3	0,232	0,269	0,537	C2
Fornecedor 4	0,148	0,357	0,707	C1
Fornecedor 5	0,067	0,377	0,848	C1
Fornecedor 6	0,204	0,332	0,620	C1
Fornecedor 7	0,105	0,371	0,779	C1
Fornecedor 8	0,170	0,360	0,680	C1
Fornecedor 9	0,053	0,376	0,877	C1
Fornecedor 10	0,091	0,372	0,804	C1
Fornecedor 11	0,260	0,267	0,507	C2
P1	0,159	0,258	0,619	
P2	0,257	0,159	0,382	

Fonte: autoria própria.

Figura 16 – Visualização de Resultados RIM-Sort



Fonte: autoria própria.

Dada a flexibilidade da aplicação, podemos introduzir um conjunto de dois Perfis diferentes, dessa vez buscando distribuir melhor as alternativas dentre os Perfis, atribuindo algumas delas à Classe 3. Sendo assim, temos os novos Perfis na Tabela 20. Agora, os resultados exibidos na Tabela 21 mostram quatro alternativas em C_1 , quatro na classe C_2 e três classe restante.

Os Perfis agora julgam como classe C_1 a alternativa que tiver a razão entre a distância para alternativa ideal positiva sobre a ideal negativa maior que 3,5 para 1. Para a Classe C_2 , essa razão limite é entre 3,5:1 e 1,5:1, enquanto que para C_3 é abaixo de 1,5:1. A Figura 17 ilustra

Tabela 20 – Perfis - Leite Cru Refrigerado

	Critério 1	Critério 2	Critério 3	Critério 4	Critério 5	Critério 6
P1	3,150	3,150	11,860	-0,545	0,140	1,0385
P2	3,000	3,100	11,810	-0,540	0,135	1,0390

Fonte: autoria própria.

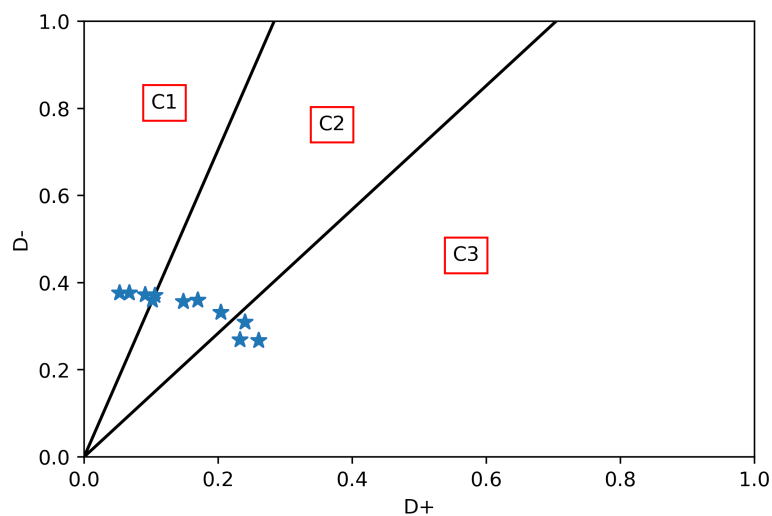
Tabela 21 – Resultados - Leite Cru Refrigerado

	Distância Ideal		Coeficiente de Proximidade	Classe
	Positiva	Negativa		
Fornecedor 1	0,240	0,309	0,564	C3
Fornecedor 2	0,102	0,360	0,780	C1
Fornecedor 3	0,232	0,269	0,537	C3
Fornecedor 4	0,148	0,357	0,707	C2
Fornecedor 5	0,067	0,377	0,848	C1
Fornecedor 6	0,204	0,332	0,620	C2
Fornecedor 7	0,105	0,371	0,779	C2
Fornecedor 8	0,170	0,360	0,680	C2
Fornecedor 9	0,053	0,376	0,877	C1
Fornecedor 10	0,091	0,372	0,804	C1
Fornecedor 11	0,260	0,267	0,507	C3
P1	0,093	0,327	0,779	
P2	0,174	0,247	0,586	

Fonte: autoria própria.

todos os cenários.

Figura 17 – Visualização de Resultados RIM-Sort



Fonte: autoria própria.

4.3 IMPACTO DO BALANCED-RIM NO RIM-SORT

A troca do RIM pelo Balanced-RIM traz impactos importantes não somente no ordenamento das alternativas, mas também na classificação dos problemas. Os impactos podem ser vistos com alternativas performando melhor (maior Coeficiente de Proximidade), trocando de classes, bem como os perfis podem ter seu CP alterado e ocasionar mudanças nas fronteiras de cada classe.

Quando aplicado o RIM e o Balanced-RIM no problema de seleção de fornecedores de leite cru refrigerado com os primeiros Perfis considerados (Tabela 18), temos 7 mudanças de ordenamento, como na Tabela 22. Fazendo uma extrapolação no método RIM-Sort, consideremos uma versão do algoritmo de classificação embasada no RIM ao invés do RIM-Sort. Ao executar as duas versões no exemplo de fornecedores, o Fornecedor 6 sobe da classe $C2$ para $C1$. O motivo das diferenças de classificação reside no Critério 6, o qual a Figura 18 contempla os desempenhos normalizados.

Tabela 22 – Comparação do RIM e Balanced-RIM - Leite Cru Refrigerado

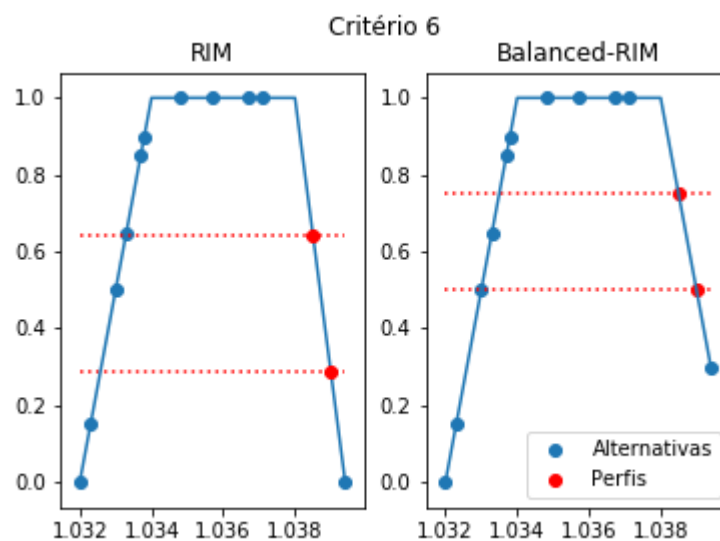
Alternativa	RIM-Sort com o RIM			RIM-Sort com o Balanced-RIM		
	Coeficiente de Proximidade	Ordem	Classe	Coeficiente de Proximidade	Ordem	Classe
Fornecedor 1	0,564	9	C2	0,564	9	C2
Fornecedor 2	0,780	2	C1	0,780	4	C1
Fornecedor 3	0,537	10	C2	0,537	10	C2
Fornecedor 4	0,707	5	C1	0,707	6	C1
Fornecedor 5	0,848	1	C1	0,848	2	C1
Fornecedor 6	0,582	8	C2	0,620	8	C1
Fornecedor 7	0,779	3	C1	0,779	5	C1
Fornecedor 8	0,680	6	C1	0,680	7	C1
Fornecedor 9	0,671	7	C1	0,877	1	C1
Fornecedor 10	0,710	4	C1	0,804	3	C1
Fornecedor 11	0,461	11	C2	0,507	11	C2

Fonte: autoria própria.

Entrando no problema mais a fundo, percebe-se que há declividades diferentes nas retas da função de normalização. Dessa maneira, o RIM faz com que os perfis tenham desempenho normalizado abaixo do que deveriam, e conseqüentemente, Coeficiente de Proximidade mais baixo, causando problemas para a atribuição das classes. Ademais, somente na Figura 18, quando o Balanced-RIM é usado ao invés do RIM:

- O desempenho normalizado do Perfil $P1$ se torna maior que de uma alternativa ao lado esquerdo da função;

Figura 18 – Normalização Critério 6 - RIM e Balanced-RIM



Fonte: autoria própria.

- O desempenho normalizado do Perfil $P2$ se torna maior que de uma alternativa ao lado esquerdo da função;
- Uma alternativa ao lado direito da função aumenta seu desempenho normalizado;

Essas três características representam a violação da propriedade de homogeneidade (ALMEIDA-DIAS, 2011; DE LIMA SILVA, 2021) quando utilizado o RIM (ao invés do Balanced-RIM) no RIM-Sort, pois alternativas (e perfis) mais próximos ao Ideal de Referência estão tendo coeficiente de proximidade defasado, que é o caso do Fornecedor 6.

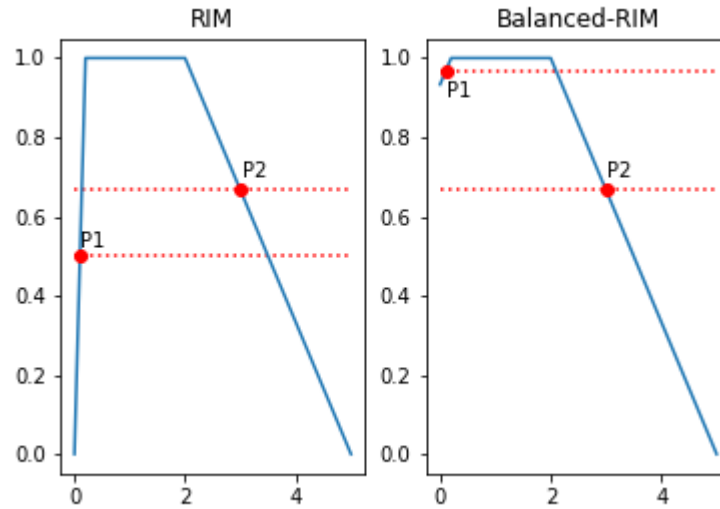
Mas o problema poderia ainda ser pior. Um Perfil $P1$ poderia estar mais próximo do Ideal de Referência e ter desempenho normalizado menor que um segundo $P2$, como no exemplo abaixo (Figura 19). Dependendo de quantos critérios isso ocorrer, há a possibilidade de que $P1$ tenha até o Coeficiente de Proximidade menor que $P2$ (e por consequência $P2 \succeq P1$), violando a ordem das classes ($C1 \succeq C2 \succeq C3 \succeq \dots$).

Portanto, não há nenhuma garantia de que a classificação seja feita da forma correta (ordinalmente) caso a mudança na função de normalização não ocorra. Isso significa que a proposição de monotonicidade de Almeida-Dias (2011) seria violada.

4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou um novo algoritmo de classificação multicritério, composto de maneira supervisionada. Na primeira seção, o RIM-Sort foi posicionado na literatura de classificação, além de propor o método e uma visualização dos seus resultados. Na segunda

Figura 19 – Comparação de Normalização



Fonte: autoria própria.

seção, uma aplicação numérica em um artigo da literatura foi feita para demonstrar o mérito da solução, gerando resultados satisfatórios.

Numa terceira seção, foi oferecida uma prévia da demonstração da violação as propriedades de monotonicidade e homogeneidade da classificação quando executado o RIM ao invés do Balanced-RIM no RIM-Sort. Isso porque não haveria a garantia de que as alternativas respeitariam o Ideal de Referência, nem de que a ordem das classes seria mantida.

4.4.1 Trabalhos Futuros

Duas sugestões de trabalhos futuros que ampliariam as contribuições teóricas do RIM-Sort: a demonstração de todas as propriedades de classificação de Almeida-Dias (2011) e a prova de um teorema de equivalência entre o TOPSIS e o RIM, que geraria resultados interessantes para o TOPSIS-Sort e RIM-Sort.

Acerca do teorema, a seguinte afirmação é proposta: se a matriz de desempenhos tem todas as entradas positivas e os Ideais de Referência estão nos extremos, então o TOPSIS gera o mesmo resultado que o RIM. Formalmente:

Teorema 4.4.1. *Seja o conjunto de alternativas $A = \{1, \dots, n\}$, o conjunto de critérios $C = \{1, \dots, m\}$, a matriz de desempenhos $X = x_{ij}$ com $x_{ij} \geq 0 \forall i \in A, \forall j \in C$, o conjunto de pesos $W = \{w_1, \dots, w_m\}$, os Ideais de Referência $IR = \{IR_1, \dots, IR_m\}$ com $IR_j = [\gamma_j, \delta_j]$, $\forall j$ e os Alcances $R = \{R_1, \dots, R_m\}$ com $R_j = [\alpha_j, \beta_j]$, $\forall j$. Se para todo j , tem-se*

$$[\gamma_j, \delta_j] = [\beta_j]$$

ou

$$[\gamma_j, \delta_j] = [\alpha_j],$$

então, para toda alternativa $i \in A$ o Coeficiente de Proximidade do TOPSIS é igual ao Coeficiente de Proximidade do RIM.

A prova desse resultado garantiria que o RIM equivale o TOPSIS quando a comparação pode ser feita. Dessa forma, não só o TOPSIS seria equivalente ao RIM, mas também o TOPSIS-Sort seria equivalente ao RIM-Sort, mostrando que as alternativas seriam alocadas para as mesmas classes, uma vez que terão os coeficientes de proximidade iguais.

5 CONCLUSÃO

A Teoria da Decisão visa auxiliar a tomada de decisão sob o ponto de vista dos próprios decisores. Em particular, ela é fundamentada na racionalidade instrumental, com objetivos concretos (sem subjetividade) e externos à teoria. Surge então, um princípio para ordenar alternativas: o princípio de dominância. Com o passar do tempo, um braço dessa teoria permitiu que múltiplos critérios fossem considerados, flexibilizando a tomada de decisão, mas mantendo os mesmos princípios. Trata-se do Apoio Multicritério à Decisão, que permite aos decisores não só uma solução final, mas também uma compreensão melhor dos seus objetivos.

Dessa forma, várias metodologias foram propostas na área de AMD. Destacam-se os métodos de referência, onde a relação de dominância entre as alternativas é proposta seguindo uma alternativa ideal. Dessa forma, métodos como o TOPSIS e o RIM sugerem uma maneira de estabelecer essa relação através de um coeficiente de proximidade e ordenar alternativas. Paralelamente ao ordenamento, outro problema de interesse em AMD visa atribuir a cada ação em potencial uma ou mais categorias ordenadas, usando uma abordagem de comparação absoluta. A classificação ordinal constitui uma problemática de AMD na qual métodos de referência como TOPSIS e RIM podem ser adaptados.

Em vias de contemplar esses dois assuntos, esse trabalho teve duas frentes, uma de restituir o princípio de dominância no RIM e outra de propor um algoritmo de classificação baseado nele. Em relação ao primeiros, foi demonstrado, através de um exemplo, como o RIM não cumpre o princípio de dominância posto pela Teoria da Decisão Normativa e fornece-se um novo algoritmo que reestabelece a característica, mantendo a consistência do processo decisório.

Em particular, casos dessas violações foram detectadas na literatura e notou-se que os resultados das produções seriam alterados. Dessa forma, no artigo Sofuoğlu (2021), que analisa a compra de próteses de joelho para implantes em seres humanos, o biomaterial indicado para compra deveria ser o segundo colocado da análise caso o princípio de dominância fosse levado em consideração, acarretando em mudanças nos resultados e na conseqüente compra do produto. Em Gürgeç et al. (2019), o ranking de 24 experimentos sobre a liga metálica Ti6Al4V obteve pelo menos 19 trocas de ordenação entre as alternativas (com cenários de 22 trocas dependendo dos pesos definidos por experts), fazendo com que a análise dos experimentos com cortes da liga não ressaltasse o melhor deles.

Pretende-se que a proposição do presente trabalho seja utilizada nos próximos artigos da literatura para que tenham mais constância no processo decisório e, conseqüentemente, nos seus resultados. Aliás, pode-se citar que o primeiro de sucesso ao considerar o Balanced-RIM ao invés do RIM num problema de AMD é na construção do RIM-Sort, pois como evidenciado na dissertação, a propriedade de monotonicidade e homogeneidade na classificação (ALMEIDA-

DIAS, 2011) foi garantida somente com o Balanced-RIM.

Para o segundo tópico citado, a problemática de classificação ordinal foi exposta e o RIM-Sort foi proposto. O algoritmo manteve a consistência em relação aos princípios de AMD e mostrou resultados satisfatórios num caso real de seleção de fornecedores de leite cru refrigerado em Palhares (2020) adaptado para classificação. Também, ressalta-se a ferramenta de visualização das classes gerada para os métodos de referência, como o TOPSIS-Sort, PDTOPSIS-Sort, o TOPSIS-Sort-B e TOPSIS-Sort-C, abrindo novas possibilidades para os decisores que usam essas metodologias refletirem sobre os resultados.

As contribuições baseiam-se na expansão da literatura com um novo método de referência para a problemática de classificação ordinal multicritério, permitindo ao decisor fazer julgamentos com alternativas ideais no meio dos Alcances de cada critério (ao contrário das abordagens encontradas até então, com ideais extremos dos critérios). Destaca-se também que esse é o primeiro método de classificação ordinal multicritério que tem o RIM como alicerce.

A partir do exposto acima, pode-se concluir que o objetivo geral do trabalho foi atingido, uma vez que a nova versão do RIM, o Balanced-RIM, sana algumas inconsistências teóricas do seu primogênito e que a extensão dada pelo RIM-Sort foi capaz de resolver a problemática de classificação ordinal.

Em relação aos objetivos específicos da presente dissertação de mestrado, eles foram atingidos de forma sequencial:

1. Primeiramente, a definição de dominância de AMD foi contrastada com a definição de dominância no algoritmo RIM através de um exemplo e as transgressões foram explicitadas;
2. Avaliam-se duas formas de corrigir a inconsistência teórica no RIM e constrói-se o Balanced-RIM;
3. Comparam-se os dois métodos em dois artigos de revistas científicas;
4. Em seguida foi proposto o RIM-Sort para lidar com a problemática de classificação, utilizando-se dos conceitos do Balanced-RIM;
5. Uma vez ausentes na literatura os artigos com a problemática, um problema da bibliografia de ordenamento foi adaptado para classificação e o mérito do RIM-Sort foi demonstrado.

5.1 LIMITAÇÕES DA PESQUISA

Assim como os principais resultados, as limitações dividem-se em: referentes ao Balanced-RIM e acerca do RIM-Sort. Para as primeiras, houve uma limitação em respeito ao número de casos reais analisado, restrito a dois artigos. Para avaliar todos os casos da literatura seria necessária uma metodologia nova, com atributos não subjetivos e comuns a todos os artigos, tais

como a quantidade de ações em potencial trocadas e se a alternativa melhor posicionada muda de lugar. Vale ressaltar que, mesmo restrito a dois artigos, a abordagem utilizada foi capaz de cumprir os objetivos do trabalho.

Para o algoritmo de classificação, as restrições dizem respeito à validação. Em razão de ser o primeiro método ao englobar a classificação e o RIM, não haviam dados disponíveis na literatura para testá-lo e o trabalho limitou-se a fazer uma adaptação de um problema de ordenamento para classificação.

Dessa forma, a aplicação do método RIM-Sort utilizou perfis definidos pelo autor, em contraste a uma abordagem conjunta na construção dessas estruturas, que possui maior validação das partes interessadas e maior impacto na realidade do negócio. Em contrapartida, no caso específico da seleção de fornecedores de leite cru refrigerado, os manuais de AMD sugerem uma abordagem mais próxima do decisor na definição dos perfis.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros, pode-se citar a adaptação do Balanced-RIM para o ambiente difuso. Em certa medida, pode-se propor uma nova visualização combinando as violações no princípio de dominância - impostas pela função de normalização do RIM - e a imprecisão dos dados. Nesse novo ambiente, a definição do problema baseia-se no mesmo princípio de dominância e não precisa ser alterada, mas o método deve ser atualizado. Em seguida, o RIM-Sort também poderia ser estendido para incorporar números difusos, uma vez que baseia-se no RIM.

Outras sugestões - mencionadas na Seção 4.4.1 - baseiam-se na demonstração de algumas propriedades específicas dos problemas de classificação ordinal, como a conformidade, homogeneidade, monotonicidade, irreversibilidade, estabilidade e estabilidade forte. Propostas por Almeida-Dias (2011) e adaptadas ao contexto dos métodos de referência por de Lima Silva (2021), elas poderiam ser um indicativo de que o método tem respaldo teórico razoável. Ao que parece, o RIM-Sort cumpre esses requisitos, mas uma análise detalhada é necessária.

Uma segunda opção de trabalho seria a tentativa de demonstração de equivalência entre o TOPSIS e o RIM (e o Balanced-RIM também), explicitada na 4.4.1. Isso provaria que o RIM-Sort é equivalente ao TOPSIS-Sort nas situações em que se aplica.

A última ideia de novas vias de pesquisa está na validação RIM-Sort a problemas de classificação reais, validando o processo construtivo com gestores e demais partes interessadas. Ademais, isso contribuiria para o reequilíbrio da literatura de métodos referência na classificação multicritério, que hoje são minoria, como já verificado em Alvarez, Ishizaka e Martínez (2021).

REFERÊNCIAS

- AIRES, R. F. de F.; FERREIRA, L. A new approach to avoid rank reversal cases in the tophis method. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 132, p. 84–97, 2019.
- ALMEIDA-DIAS, J. *Multiple criteria decision aiding for sorting problems: Concepts, methodologies, and applications*. Tese (Doutorado) — Paris 9, 2011.
- ALVAREZ, P. A.; ISHIZAKA, A.; MARTÍNEZ, L. Multiple-criteria decision-making sorting methods: A survey. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 183, p. 115368, 2021.
- AYTEKIN, A.; DURUCASU, H. Nearest solution to references method for multicriteria decision-making problems. *Decision Science Letters*, v. 10, n. 2, p. 111–128, 2021.
- BELTON, V.; STEWART, T. *Multiple criteria decision analysis: an integrated approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2002.
- BERNOULLI, D. Exposition of a new theory on the measurement. *Econometrica*, v. 22, n. 1, p. 23–36, 1954.
- BRANS, J.-P.; VINCKE, P. Note—a preference ranking organisation method: (the promethee method for multiple criteria decision-making). *Management science*, INFORMS, v. 31, n. 6, p. 647–656, 1985.
- BRASIL. Instrução normativa nº 76, de 26 de novembro de 2018. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, Poder Executivo, 2018.
- CABLES, E.; LAMATA, M.; VERDEGAY, J. Frim—fuzzy reference ideal method in multicriteria decision making. In: *Soft computing applications for group decision-making and consensus modeling*. [S.l.]: Springer, 2018. p. 305–317.
- CABLES, E.; LAMATA, M. T.; VERDEGAY, J. L. Rim-reference ideal method in multicriteria decision making. *Information Sciences*, Elsevier, v. 337, p. 1–10, 2016.
- CHEN, C.-T.; LIN, C.-T.; HUANG, S.-F. A fuzzy approach for supplier evaluation and selection in supply chain management. *International journal of production economics*, Elsevier, v. 102, n. 2, p. 289–301, 2006.
- CHEN, Y.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. A multiple criteria sequential sorting procedure. *Journal of Industrial & Management Optimization*, American Institute of Mathematical Sciences, v. 4, n. 3, p. 407, 2008.
- COLSON, G.; BRUYN, C. D. *Models and methods in multiple criteria decision making*. [S.l.]: Elsevier, 1989.
- CORRENTE, S. et al. Multiple criteria hierarchy process for sorting problems based on ordinal regression with additive value functions. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 251, n. 1, p. 117–139, 2017.
- DE LIMA SILVA, D. F. *Essays on TOPSIS for sorting with applications in finance*. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), 2021.

- DE LIMA SILVA, D. F.; DE ALMEIDA FILHO, A. T. Sorting with topsis through boundary and characteristic profiles. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 141, p. 106328, 2020.
- DE LIMA SILVA, D. F.; FERREIRA, L.; DE ALMEIDA FILHO, A. T. A new preference disaggregation topsis approach applied to sort corporate bonds based on financial statements and expert's assessment. *Expert systems with applications*, Elsevier, v. 152, p. 113369, 2020.
- DE LIMA SILVA, D. F.; SILVA, J. C.; DE ALMEIDA FILHO, A. Aprendizagem de preferências através do método topsis: Uma aplicação para ratings de liberdade econômica. In: SBC. *Anais do XLVII Seminário Integrado de Software e Hardware*. [S.l.], 2020. p. 72–80.
- DEMIR, L. et al. A green supplier evaluation system based on a new multi-criteria sorting method: Vikorsort. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 114, p. 479–487, 2018.
- DUTKA, A. A handbook of customer satisfaction: A guide to research, planning and implementation. *Illinois: NTC Publishing Group*, 1995.
- FERREIRA, L. et al. A fuzzy hybrid integrated framework for portfolio optimization in private banking. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 92, p. 350–362, 2018.
- FLINKMAN, M. et al. Use of rough sets analysis to classify siberian forest ecosystems according to net primary production of phytomass. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, Taylor & Francis, v. 38, n. 3, p. 145–160, 2000.
- GARCÍA-CASCALES, M. S.; LAMATA, M. T. On rank reversal and topsis method. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier, v. 56, n. 5-6, p. 123–132, 2012.
- GOMES, L. F. A. M.; GOMES, C. F. S.; DE ALMEIDA, A. T. *Tomada de Decisão Gerencial: Enfoque Multicritério*. [S.l.]: Editora Atlas, 2009.
- GRECO, S.; MATARAZZO, B.; SLOWINSKI, R. A new rough set approach to evaluation of bankruptcy risk. In: *Operational tools in the management of financial risks*. [S.l.]: Springer, 1998. p. 121–136.
- GÜRGEN, S. et al. Multi-criteria decision-making analysis of different non-traditional machining operations of titanium. *Soft Computing*, Springer, v. 23, n. 13, p. 5259–5272, 2019.
- HWANG, C.-L.; YOON, K. Methods for multiple attribute decision making. In: *Multiple attribute decision making*. [S.l.]: Springer, 1981. p. 58–191.
- ISHIZAKA, A. et al. Deasort: Assigning items with data envelopment analysis in abc classes. *International Journal of Production Economics*, v. 199, p. 7–15, 2018. ISSN 0925-5273. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925527318300963>>.
- JULIANO, Í. J. Análise de decisão multicritério baseada em teoria da utilidade: uma aplicação na priorização de produtos. [sn], 2017.
- KADZIŃSKI, M.; CIOMEK, K.; SŁOWIŃSKI, R. Modeling assignment-based pairwise comparisons within integrated framework for value-driven multiple criteria sorting. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 241, n. 3, p. 830–841, 2015.
- KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. On the interpretation of intuitive probability: A reply to jonathan cohen. Elsevier Science, 1979.

- KARASAKAL, E.; AKER, P. A multicriteria sorting approach based on data envelopment analysis for rd project selection problem. *Omega*, v. 73, p. 79–92, 2017. ISSN 0305-0483. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305048316309550>>.
- KAUFMAN, B. E. Emotional arousal as a source of bounded rationality. *Journal of Economic Behavior & Organization*, Elsevier, v. 38, n. 2, p. 135–144, 1999.
- KEENEY, R. L.; RAIFFA, H.; MEYER, R. F. *Decisions with multiple objectives: preferences and value trade-offs*. [S.l.]: Cambridge university press, 1993.
- LAMPUGNANI, C. et al. Qualidade do leite cru refrigerado e características da produção leiteira na mesorregião oeste paranaense, brasil. *Revista do Instituto de Laticínios Cândido Tostes*, v. 73, n. 1, p. 19–26, 2018.
- LUZ, L. M. G. *Uma aplicação do método fuzzy-electre-topsis para seleção de serviços de computação em nuvem*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014.
- MARDANI, A. et al. Multiple criteria decision-making techniques and their applications—a review of the literature from 2000 to 2014. *Economic research-Ekonomska istraživanja*, Sveučilište Jurja Dobrile u Puli, Odjel za ekonomiju i turizam’Dr. Mijo . . . , v. 28, n. 1, p. 516–571, 2015.
- MICHALOWSKI, W. et al. Triage of the child with abdominal pain: A clinical algorithm for emergency patient management. *Paediatrics & child health*, Oxford University Press, v. 6, n. 1, p. 23–28, 2001.
- NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O. *Theory of games and economic behavior (commemorative edition)*. [S.l.]: Princeton university press, 2007.
- PALHARES, R. d. A. *Um novo método multicritério baseado no conceito de referência ideal em lógica fuzzy*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2020.
- PARREIRAS, R. O. Algoritmos evolucionários e técnicas de tomada de decisão em análise multicritério. Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.
- PENG, Y. et al. Famedm: A fusion approach of mcdm methods to rank multiclass classification algorithms. *Omega*, Elsevier, v. 39, n. 6, p. 677–689, 2011.
- PETERSON, M. *An Introduction to Decision Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- ROY, B. Classement et choix en présence de points de vue multiples. *Revue française d’informatique et de recherche opérationnelle*, EDP Sciences, v. 2, n. 8, p. 57–75, 1968.
- ROY, B.; VINCKE, P. Multicriteria analysis: survey and new directions. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 207–218, 1981.
- SAATY, T. L. Decision making—the analytic hierarchy and network processes (ahp/anh). *Journal of systems science and systems engineering*, Springer, v. 13, n. 1, p. 1–35, 2004.
- SABOKBAR, H. F. et al. A novel sorting method topsis-sort: an application for tehran environmental quality evaluation. *E+M Ekonomie a Management*, v. 19, p. 87–104, 06 2016.
- SALIH, M. M. et al. Survey on fuzzy topsis state-of-the-art between 2007 and 2017. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 104, p. 207–227, 2019.

- SÁNCHEZ-LOZANO, J.; FERNÁNDEZ-MARTÍNEZ, M.; LAMATA, M. T. Near-earth asteroid impact dates: A reference ideal method (rim) approach. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier, v. 81, p. 157–168, 2019.
- SISKOS, Y. et al. Measuring customer satisfaction using a collective preference disaggregation model. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 12, n. 2, p. 175–195, 1998.
- SOFUOĞLU, M. A. A new biomaterial selection approach using reference ideal method. *Sādhanā*, Springer, v. 46, n. 1, p. 1–8, 2021.
- SOUZA, L. P. D.; GOMES, C. F. S.; BARROS, A. P. D. Implementation of new hybrid ahp–topsis-2n method in sorting and prioritizing of an it capex project portfolio. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, World Scientific, v. 17, n. 04, p. 977–1005, 2018.
- STEFANOWSKI, J.; SLOWIŃSKI, K. Rough set theory and rule induction techniques for discovery of attribute dependencies in medical information systems. In: SPRINGER. *European Symposium on Principles of Data Mining and Knowledge Discovery*. [S.l.], 1997. p. 36–46.
- STOJČIĆ, M. et al. Application of mcdm methods in sustainability engineering: A literature review 2008–2018. *Symmetry*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 11, n. 3, p. 350, 2019.
- YONG, D. Plant location selection based on fuzzy topsis. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Springer, v. 28, n. 7-8, p. 839–844, 2006.
- YOON, K. P.; KIM, W. K. The behavioral topsis. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 89, p. 266–272, 2017.
- YU, P.-L. A class of solutions for group decision problems. *Management science*, INFORMS, v. 19, n. 8, p. 936–946, 1973.
- ZAVADSKAS, E. K.; ANTUCHEVICIENE, J.; CHATTERJEE, P. *Multiple-criteria decision-making (MCDM) techniques for business processes information management*. [S.l.]: Multidisciplinary Digital Publishing Institute, 2019.
- ZOPOUNIDIS, C.; DOUMPOS, M. Multicriteria classification and sorting methods: A literature review. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 138, n. 2, p. 229–246, 2002.