Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Um lema do tipo Littman e estimativas do tipo Strichartz para a equação da onda

Dissertação de Mestrado

Mikaela Baldasso

Porto Alegre, 04 de março de 2022.

Dissertação submetida por Mikaela Baldasso[1] como requisito parcial para obtenção de grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Wanderley Nunes do Nascimento (UFRGS)

Banda Examinadora:
Diego Marcon Farias (UFRGS)
Marcelo Rempel Ebert (USP)
Patricia Lisandra Guidolin (UFRGS)

Data da Apresentação: 04 de março de 2022.

[1] Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

RESUMO

Nesta dissertação, apresentamos um lema do tipo Littman que nos fornece estimativas $L^\infty - L^\infty$ para a transformada de Fourier inversa do produto de uma função exponencial complexa por uma função teste. Um dos principais ingredientes da demonstração é um resultado sobre o comportamento assintótico de uma classe especial de integrais oscilatórias, conhecido como método da fase estacionária.

Como aplicação, obtemos estimativas de Strichartz do tipo $L^p - L^q$ na linha conjugada para o problema de Cauchy para a equação da onda livre. O lema é uma ferramenta essencial para conseguir estimativas $L^1 - L^\infty$, enquanto que estimativas $L^2 - L^2$ seguem de resultados clássicos. Assim, estimativas $L^p - L^q$ são consequências de teoremas de interpolação.

Palavras-chave: Lema de Littman, estimativas, equação da onda.

ABSTRACT

In this thesis, we present a Littman type lemma that provides $L^\infty - L^\infty$ estimates for the inverse Fourier transform of the product between a complex exponential function and a test function. One of the main ingredients of the proof is a result concerning the asymptotic behavior of a special class of oscillatory integrals, known as the stationary-phase method.

As an application, we establish Strichartz estimates of the type $L^p - L^q$ on the conjugate line to the Cauchy problem for the free wave equation. The lemma is an essential tool to obtain $L^1 - L^\infty$ estimates, while $L^2 - L^2$ estimates follows from classic results. $L^p - L^q$ estimates are thus consequences of interpolation theorems.

Keywords: Littman Lemma, estimates, wave equation.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Roque e Bernardete, por serem o meu alicerce e estarem ao meu lado sempre. Sinto-me orgulhosa e privilegiada por ter pais que me dão todo o suporte e amor que preciso e que vibram tanto com cada conquista minha.

Agradeço também ao Rangel que é a minha maior inspiração e o melhor irmão que eu poderia ter. Obrigada por me incentivar, me ajudar e me fazer acreditar que eu sou capaz.

Agradeço ao meu orientador Wanderley por me passar tanto conhecimento e pela incansável dedicação e paciência. O caminho ficou mais legal por estar acompanhada de alguém tão querido e compreensivo.

Agradeço à banca examinadora por todas as valiosas sugestões.

Também gostaria de agradecer a todos os professores que tive no Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS por todos os ensinamentos que recebi durante a minha estadia nessa instituição.

Agradeço à agência de fomento CNPq pelo apoio financeiro.

CONTEÚDO

1 INTRODUÇÃO

A área de Equações Diferenciais Parciais (EDP's) ocupa uma grande parte de estudos tanto na matemática aplicada quanto na pura. Na primeira, o foco geralmente é voltado ao desenvolvimento de métodos de aproximação numérica para soluções de uma dada equação, enquanto, na outra, normalmente busca-se estabelecer existência e características das soluções.

Existem vários tipos de EDP's e, diferentemente das equações algébricas, não existe uma teoria unificada que envolva todas elas. Por isso, o estudo de cada uma requer o desenvolvimento de técnicas e métodos distintos.

Um primeiro questionamento natural está ligado à existência e regularidade de soluções de um dado problema. Nesse sentido, pergunta-se se um problema é bem posto, isto é, se dadas as condições iniciais, existe uma única solução e se esta depende continuamente dos dados. A condição de dependência contínua tem bastante relevância nos problemas com aplicações físicas pois garante que pequenas variações nas condições iniciais não causam grandes alterações no perfil da solução.

Desde o final do século passado, vários autores têm estudado o comportamento das soluções para problemas de Cauchy da forma

$$\begin{cases} u_{tt} - (\Delta)^{\sigma} u + b u_t + m^2 u = f(t,x), & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.0.1}$$

onde $\sigma > 0$, $b \geqslant 0$ e $m \geqslant 0$ são constantes não negativas. No livro [8], por exemplo, Ebert e Reissig abordam algumas técnicas para determinar o comportamento de soluções do problema acima dependendo da escolha das constantes.

Um caso especial desse modelo (escolhendo $\sigma = 1$, $b = m = 0$ e $f \equiv 0$) é dado pela equação da onda livre

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

e, nesta dissertação, vamos estudar um método para obter estimativas de Strichartz para esse problema. Mais especificamente, vamos estabelecer o decaimento no tempo das soluções em termos de estimativas do tipo $L^p - L^q$ na linha conjugada[1].

Chamamos de multiplicador de Fourier o operador linear

$$u_0 \longmapsto \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{if(t,\xi)}a(t,\xi)\mathcal{F}(u_0)(\xi)\right),$$

onde $f = f(t, \xi)$ é chamada de função de fase e $a = a(t, \xi)$ é chamada de função amplitude. Via transformada de Fourier, é possível representar a solução do problema de Cauchy para a equação da onda

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0, x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.0.2}$$

para ϕ e ψ suficientemente regulares, em termos dos multiplicadores de Fourier, conforme (5.0.5). Tendo essa representação, o problema de conseguir estimativas para a solução do problema (1.0.2) se torna o de conseguir estimativas para os multiplicadores de Fourier em (5.0.5).

Um resultado essencial para obter estimativas $L^1 - L^\infty$ é conhecido como Lema de Littman. Em [16], Littman estudou o operador linear

$$\begin{aligned} T : C(\mathbb{R}^{n+1}) &\longrightarrow C(\mathbb{R}^{n+1}) \\ f &\longmapsto \int_M f(y - x)\mu(x)d\sigma_x, \end{aligned}$$

onde $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade de dimensão n e μ é uma distribuição de massa em M que se anula perto do bordo. Ele investigou quais hipóteses são necessárias sobre f, μ e M para garantir que

$$||\partial_y^\alpha Tf||_{L^p} \leqslant C_\alpha ||f||_{L^p}$$

para toda $f \in C(\mathbb{R}^{n+1})$. A conclusão obtida diz respeito ao comportamento no infinito da transformada de Fourier de μ.

[1] Dizemos que p, $q \in \mathbb{N}$ estão na linha conjugada quando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teorema 1.0.1. *Seja* M *uma variedade compacta suficientemente suave de dimensão* n *em* $\mathbb{R}^{n+1}$, *possivelmente com bordo* ∂M, *e* μ *uma distribuição de massa suficientemente suave em* M *que se anula perto de* ∂M. *Suponha que, em cada ponto de* M, k *das* n *principais curvaturas são diferentes de zero. Então, quando* $y \to \infty$,

$$\int_M e^{y \cdot x} \mu(x) d\sigma_x = O(|y|^{-\frac{k}{2}}).$$

A demonstração do teorema é bastante trabalhosa e foge do escopo do texto. Nesta dissertação, seguindo o artigo [18], exibimos um lema do tipo Littman que está relacionado ao nosso modelo de multiplicadores de Fourier e apresentamos uma prova para esse caso específico.

Teorema 1.0.2 (Um lema do tipo Littman)**.** *Dado* τ_0 *um número positivo grande, consideremos, para* $\tau \geqslant \tau_0$, *a integral oscilante*

$$\mathcal{F}^{-1}_{\eta \to x}(e^{\pm i\tau|\eta|} \nu(\eta)),$$

com $\nu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $\operatorname{supp}(\nu) \subseteq \left\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right\}$. *Então, vale a seguinte estimativa* $L^\infty - L^\infty$

$$\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta \to x}(e^{\pm i\tau|\eta|} \nu(\eta))\|_{L^\infty} \leqslant C(1+\tau)^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{|\alpha| \leqslant s} \|D^\alpha_\eta \nu(\eta)\|_{L^\infty},$$

onde $s > \frac{n+3}{2}$.

Duas ferramentas importantes para a demonstração do Teorema 1.0.2 são o método da fase estacionária e o Lema de Morse. A primeira fornece estimativas para integrais oscilatórias da forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda f(x)} u(x) dx, \tag{1.0.3}$$

onde $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Em linhas gerais, é possível verificar que, a medida que o gradiente da função de fase f não se anula, a integral decresce rapidamente em λ. Assim, o comportamento assintótico da integral, quando $\lambda \to \infty$, é determinado pelos pontos críticos de f. Já o Lema de Morse é uma consequência do teorema da função implícita. Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k e um ponto crítico não-degenerado x_0 de f, o lema nos permite obter um sistema de coordenadas local que simplifica bastante a expressão de f numa vizinhança do ponto x_0.

Utilizando esse caso especial do Lema de Littman e seguindo o artigo [3], chegamos em dois resultados que fornecem estimativas de Strichartz para as soluções do problema de Cauchy para a equação da onda livre (1.0.2).

Teorema 1.0.3. *Sejam* ϕ *e* ψ *no espaço de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*. A solução* u *para o problema de Cauchy* (1.0.2) *satisfaz a estimativa do tipo* $L^p - L^q$

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(\|\phi\|_{H_p^{M_p}} + \|\psi\|_{H_p^{M_p-1}}\right),$$

onde $n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \geqslant 1$, $1 < p \leqslant 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ *e* $M_p \in \mathbb{R}$ *com* $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$.

Note que a estimativa do Teorema 1.0.3 envolve as normas $\|\cdot\|_{L^q}$ e $\|\cdot\|_{H_p^{M_p}}$. Contudo, pela Definição 3.2.1, temos que a segunda norma, de fato, envolve a norma $\|\cdot\|_{L^p}$.

O segundo resultado apresenta estimativas parecidas com as do Teorema 1.0.3 com a vantagem de não precisar da condição $n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \geqslant 1$. No entanto, a estimativa no termo ψ não é tão boa quanto a anterior.

Teorema 1.0.4. *Sejam* $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*. A solução* u *para o problema de Cauchy* (1.0.2) *satisfaz a seguinte estimativa do tipo* $L^p - L^q$

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(\|\phi\|_{H_p^{M_p}} + t\|\psi\|_{H_p^{M_p}}\right),$$

onde $1 < p \leqslant 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ *e* $M_p \in \mathbb{R}$ *com* $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$.

Um método bastante semelhante foi aplicado em [17] para obter estimativas para o problema

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta+1)u + f(u) + \zeta u = 0, & t \geqslant 0,\, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

para $n \leqslant 7$ sob as condições de $f \in C^{k+1}(\mathbb{R})$, $\phi \in H^k(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in H^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ para $k > \frac{n}{2}+2$, $f(0) = 0$ e $\displaystyle\int_0^s f(x)dx \geqslant 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Estimativas do tipo $L^p - L^q$ na linha conjugada para o problema de Cauchy para a equação de Schrödinger

$$\begin{cases} D_t u - \Delta u = 0, & t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

podem ser feitas seguindo um método análogo com pequenas modificações. Esse caso não será abordado neste texto mas pode ser encontrado em [8, Capítulo 16].

Agora, vamos descrever brevemente o conteúdo de cada capítulo deste texto. No Capítulo 2, tratamos de alguns pré-requisito fundamentais para o decorrer da dissertação. Iniciamos com alguns tópicos de teoria da medida, como os espaços L^p. Além disso, introduzimos os espaços de distribuição mais comuns e as sequências de funções conhecidas por aproximações da identidade.

Começamos o Capítulo 3 apresentando a transformada de Fourier pra funções em L^1 e estendemos para o espaço das distribuições. Na segunda parte desse capítulo, definimos alguns espaços de distribuições importantes via transformada de Fourier como os espaços de Sobolev de ordem fracionária e os espaços de Besov.

O Capítulo 4 trata da versão que vamos utilizar do Lema de Littman. Começamos apresentando o método da fase estacionária, onde analisamos o comportamento da integral (1.0.3) para o caso em que $\phi(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx\rangle$, onde Q é uma matriz real $n \times n$, simétrica e invertível. A Seção 4.2 é toda voltada à demonstração do Teorema 1.0.2.

No Capítulo 5, encontramos uma representação para as soluções do problema de Cauchy para a equação da onda livre em termos de multiplicadores de Fourier e utilizamos essa expressão em combinação com o Lema de Littman para obter estimativas do tipo $L^p - L^q$ na linha conjugada.

O Apêndice possui alguns resultados pontuais bastante conhecidos que são utilizados nesta dissertação. Em especial, o Apêndice C apresenta o Lema de Morse, que é uma ferramenta bastante importante na demonstração do Lema de Littman.

2

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos algumas notações, terminologias e resultados que serão usados no restante do texto. Mais precisamente, introduzimos alguns espaços de funções e de distribuições e os principais resultados relacionados a eles.

2.1 TEORIA DA MEDIDA

Esta seção contém definições e resultados de teoria da medida e integração. Maiores detalhes e demonstrações podem ser encontrados em [1] e [9].

Aqui, vamos trabalhar em um espaço de medida fixado $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Começaremos introduzindo os espaços L^p, que são espaços de Banach cujas normas são definidas em termos de integrais.

Definição 2.1.1. Se f é uma função mensurável em X e $1 \leqslant p < \infty$, definimos

$$||f||_{L^p(X,\mathcal{M},\mu)} = \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

e denotamos

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ é mensurável e } ||f||_{L^p(X,\mathcal{M},\mu)} < \infty\}.$$

Para $p = \infty$, definimos

$$||f||_{L^\infty(X,\mathcal{M},\mu)} = \inf\{a \geqslant 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}$$

e denotamos

$$L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ é mensurável e } ||f||_{L^\infty(X,\mathcal{M},\mu)} < \infty\}.$$

Também usaremos as notações $\|\cdot\|_{L^p(X,\mu)}$, $\|\cdot\|_{L^p(X)}$ ou simplesmente $\|\cdot\|_{L^p}$ quando não houver ambivalência.

A fim de verificar que $\|\cdot\|_{L^p}$ é, de fato, uma norma, é preciso garantir que ela satisfaz a desigualdade triangular. Nesse contexto, esse resultado é conhecido como Desigualdade de Minkowski.

Teorema 2.1.2 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $f, g \in L^p(X)$, *então* $f + g \in L^p(X)$ *e*

$$\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Outra ferramenta bastante útil em espaços L^p é conhecida como Desigualdade de Hölder.

Teorema 2.1.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Supõe que* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Se* f *e* g *são funções mensuráveis em* X, *então*

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}. \tag{2.1.1}$$

Em particular, se $f \in L^p(X)$ *e* $g \in L^q(X)$, *então* $fg \in L^1(X)$ *e, nesse caso, a igualdade vale em* (2.1.1) *se, e somente se,* $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ *em quase todo ponto para* α, β *constantes não nulas.*

Corolário 2.1.4. *Se* $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$ *com* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, *então* $f \in L^r(X)$ *para todo* $p \leqslant r \leqslant q$. *Mais precisamente, escrevendo*

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

temos que

$$\|f\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}^{\alpha}\|f\|_{L^q}^{1-\alpha}.$$

Proposição 2.1.5. *Uma função mensurável* f *pertence a* $L^1(X)$ *se, e somente se,* $|f| \in L^1(X)$. *Nesse caso,*

$$\left|\int f d\mu\right| \leqslant \int |f| d\mu.$$

Nem sempre é possível trocar a ordem das operações de limite e integração de uma sequência de funções.

Exemplo 2.1.6. Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos

$$\begin{aligned} f_j : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1, & x \in [j, j+1], \\ 0, & x \notin [j, j+1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Temos que $f_j(x) \to 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(x)dx = \int_j^{j+1} 1dx = 1 \nrightarrow 0.$$

Além da convergência pontual e da convergência uniforme, existem outras noções de convergência importantes quando lidamos com funções mensuráveis. Algumas delas estão definidas a seguir.

Definição 2.1.7. Uma sequência (f_n) converge em quase todo ponto para uma função f se existe um conjunto M em X com $\mu(M) = 0$ e tal que, para todo $\epsilon > 0$ e $x \in X \setminus M$, existe $N(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ de forma que, se $n \geqslant N(\epsilon, x)$, então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Definição 2.1.8. Uma sequência $(f_n) \subset L^p$ converge em L^p para uma função $f \in L^p$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geqslant N(\epsilon)$, então

$$||f_n - f||_{L^p} = \left(\int |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Definição 2.1.9. Uma sequência (f_n) converge em medida para uma função f se

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \alpha\right\}\right) = 0$$

para todo $\alpha > 0$.

O próximo teorema fornece condições suficientes sob as quais convergência quase todo ponto de uma sequência de funções implica na convergência em L^1.

Teorema 2.1.10 (Teorema da Convergência Dominada). *Seja* (f_j) *uma sequência de funções em* $L^1(X)$ *que converge em quase todo ponto para uma função* f *mensurável. Se existir uma função* $g \in L^1(X)$ *tal que* $|f_j| \leqslant g$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$*, então* $f \in L^1(X)$ *e*

$$\int f d\mu = \lim_{j \to \infty} \int f_j d\mu.$$

Um corolário importante do Teorema da Convergência Dominada nos dá um critério para a validade da permutação entre as operações de derivação e integração.

Corolário 2.1.11. *Sejam* $-\infty < a < b < \infty$ *e* $f : X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *tais que* $f(t, \cdot) : X \longmapsto \mathbb{C}$ *é integrável para cada* $t \in [a, b]$. *Suponha que existam* $\frac{\partial f}{\partial t}$ *e* $g \in L^1(X)$ *tais que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leqslant g(x)$$

para todo $(x, t) \in X \times [a, b]$. *Defina*

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x).$$

Então, F *é diferenciável e*

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

Nosso objetivo, agora, é verificar que, trocando a convergência em quase todo ponto por convergência em medida, o Teorema da Convergência Dominada continua válido. Para isso, precisaremos do próximo resultado.

Proposição 2.1.12. *Seja* (f_j) *uma sequência de funções mensuráveis que converge em medida para uma função* f *mensurável. Então, existe uma subsequência* (f_{j_k}) *que converge para* f *em quase todo ponto.*

Assim, como queríamos, segue o próximo teorema.

Teorema 2.1.13. *O Teorema da Convergência Dominada vale se a convergência em quase todo ponto é substituída por convergência em medida.*

Demonstração. Supõe que o Teorema da Convergência Dominada não vale quando (f_j) converge para f em medida. Então, existe $\epsilon > 0$ e uma subsequência (f_{j_k}) tal que

$$\left|\int f_{j_k} d\mu - \int f d\mu\right| \geqslant \epsilon \tag{2.1.2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, $f_{j_k} \to f$ em medida e, então, pela Proposição 2.1.12, existe uma subsequência $(f_{j_{k_m}})$ que converge para f em quase todo ponto. Assim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada para essa subsequência, temos

$$\int f d\mu = \lim_{m\to\infty} \int f_{j_{k_m}} d\mu, \tag{2.1.3}$$

o que contradiz (2.1.2). □

Com o intuito de relacionar integração com respeito a uma medida produto e integração iterada, precisamos definir o que é uma seção.

Definição 2.1.14. Se E é um subconjunto de $X \times Y$ e $x \in X$, então a x-seção de E é o conjunto

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}.$$

De forma similar, se $y \in Y$, então a y-seção de E é o conjunto

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Se f é uma função definida em $X \times Y$, então a x-seção de f é a função f_x definida em Y por

$$f_x(y) = f(x, y), \quad y \in Y.$$

Ainda, se $y \in Y$, então a y-seção de f é a função f^y definida em X por

$$f^y(x) = f(x, y), \quad x \in X. \tag{2.1.4}$$

De posse dessa definição, podemos enunciar o Teorema de Fubini que nos fornece condições sob as quais é possível trocar a ordem de integração.

Teorema 2.1.15 (Teorema de Fubini). *Supõe que* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *são espaços de medida* σ*-finita. Se* $f \in L^1(X \times Y)$*, então* $f_x \in L^1(Y)$ *para quase todo* $x \in X$, $f^y \in L^1(X)$ *para quase todo* $y \in Y$*, as funções definidas em quase todo ponto* $g(x) = \int_X f_x d\nu$ *e* $h(y) = \int_Y f^y d\mu$ *estão em* $L^1(X)$ *e* $L^1(Y)$ *respectivamente, e vale*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y) d(\mu \times \nu)(x,y) &= \int_X \left[\int_Y f(x,y) d\nu(y)\right] d\mu(x) \\ &= \int_Y \left[\int_X f(x,y) d\mu(x)\right] d\nu(y).\end{aligned}$$

A seguir, apresentamos um teorema sobre o sistema de coordenadas não lineares em $\mathbb{R}^n$ mais importante.

Teorema 2.1.16 (Coordenadas Polares em $\mathbb{R}^n$). *Se* f *é uma função mensurável em* $\mathbb{R}^n$*, não negativa ou integrável, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S_r^{n-1}} f(x)d\sigma\left(\frac{x}{r}\right)dr,$$

onde $S_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ *é a esfera centrada em* 0 *de raio* r *e* $d\sigma$ *é a medida de superfície.*

Corolário 2.1.17. *Se* f *é uma função mensurável em* $\mathbb{R}^n$*, não negativa ou integrável, tal que* $f(x) = g(|x|)$ *para alguma função* g *em* $(0, \infty)$*, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sigma(S^{n-1})\int_0^\infty r^{n-1}g(r)dr,$$

onde $\sigma(S^{n-1})$ *é a área da esfera unitária* $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$*.*

Agora, vamos apresentar dois teoremas de interpolação fundamentais; o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin e o de Marcinkiewicz.

Teorema 2.1.18 (Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin). *Sejam* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *são espaços de medida e* $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$*. Se* $q_0 = q_1 = \infty$*, supõe também que* ν *é semifinita. Para* $0 < t < 1$*, define* p_t *e* q_t *por*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Se T *é um mapa linear de* $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ *em* $L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ *que satisfaz* $||Tf||_{L^{q_0}} \leqslant M_0||f||_{L^{p_0}}$ *para* $f \in L^{p_0}(\mu)$ *e* $||Tf||_{L^{q_1}} \leqslant M_0||f||_{L^{p_1}}$ *para* $f \in L^{p_1}(\mu)$*, então* $||Tf||_{L^{q_t}} \leqslant M_0^{1-t}M_1^t||f||_{L^{p_t}}$ *para* $f \in L^{p_t}(\mu)$*,* $0 < t < 1$*.*

O Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz é bastante similar mas se aplica também para uma classe de mapas não-lineares.

Definição 2.1.19. Dada uma função f mensurável, definimos a função de distribuição de f, $\lambda_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$, por

$$\lambda_f(t) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}).$$

Definição 2.1.20. Dado $1 \leqslant p < \infty$, denotaremos por $L^{p,\mu}$ o espaço L^p fraco das funções mensuráveis f tais que

$$\lambda_f(t) \leqslant \frac{C^p}{t^p} \tag{2.1.5}$$

para todo $t > 0$. Ainda, a menor constante C que satisfaz (2.1.5) é chamada de norma L^p fraca e será denotada por $||f||_{L^{p,\mu}}$.

Teorema 2.1.21 (Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz). *Supõe que* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *são espaços de medida e* $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$ *são tais que* $p_0 \leqslant q_0$, $p_1 \leqslant q_1$ *e* $q_0 \neq q_1$. *Para* $0 < t < 1$, *define* p_t *e* q_t *por*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Se T *é um mapa sublinear de* $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ *no espaço das funções* ν*-mensuráveis em* Y *que satisfaz* $||Tf||_{L^{q_i,\mu}} \leqslant C_i ||f||_{L^{p_i}}$ *para* $f \in L^{p_i}(\mu)$, $C_i > 0$ *e* $i = 0, 1$, *então existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $||Tf||_{L^{q_t}} \leqslant C ||f||_{L^{p_t}}$ *para* $f \in L^{p_t}(\mu)$, $0 < t < 1$.

2.2 TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

Nesta seção, apresentamos propriedades dos espaços de distribuições mais comuns e estendemos operações clássicas, como a convolução, a esses espaços. Maiores detalhes podem ser encontrados em [6] e [12].

2.2.1 *Multi-índice*

Inicialmente, apresentamos algumas notações que serão utilizadas ao longo desta dissertação e são muito comuns e úteis no estudos de EDP's. Aqui, $\mathbb{Z}_+$ denota o conjunto dos inteiros não negativos.

Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, onde cada componente $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, é chamado um multi-índice de ordem

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

e definimos

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

Dado outro multi-índice β, dizemos que $\beta \leqslant \alpha$ se $\beta_i \leqslant \alpha_i$ para $i = 1, \cdots, n$. Se $\beta \leqslant \alpha$, usaremos

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

Ainda, se $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Denotaremos o operador $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, onde $i = \sqrt{-1}$, e, para cada multi-índice α, definimos

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}.$$

De posse dessas definições, temos o seguinte resultado. A demonstração segue usando indução sobre a ordem de derivação.

Teorema 2.2.1 (Regra de Leibniz). *Se α é um multi-índice, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e f, $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, temos*

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g. \tag{2.2.1}$$

2.2.2 *Funções teste*

Nesta parte, introduzimos as funções teste que são importantes para o entendimento de distribuições. Para simplificar o texto, Ω sempre representa um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Comecemos por relembrar que o suporte de uma função f definida em Ω é dado por

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}. \tag{2.2.2}$$

Definição 2.2.2. O espaço das funções teste em Ω é dado por

$$C_c^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \in C^\infty(\Omega) \text{ e tem suporte compacto em } \Omega\}.$$

Um exemplo clássico de função teste é dado por

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

É interessante observar que multiplicando ϕ por uma constante adequada obtemos uma nova função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1,\ \phi \geqslant 0,\ \operatorname{supp}(\phi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geqslant 1\}. \tag{2.2.4}$$

Proposição 2.2.3. *Seja K um subconjunto compacto de Ω. Então, existe uma função $\psi_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leqslant \phi_\epsilon \leqslant 1$ e $\psi_\epsilon \equiv 1$ numa vizinhança de K.*

A seguir, apresentamos a noção de convergência no espaço das funções testes.

Definição 2.2.4. Uma sequência $(\phi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se

(a) Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $supp(\phi_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$;

(b) Para todo inteiro não-negativo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando $j \to \infty$.

2.2.3 *Distribuições*

Falamos, agora, sobre funcionais lineares definidos no espaço das funções teste.

Definição 2.2.5. Um funcional linear e contínuo $u : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ é dito uma distribuição em Ω. O espaço das distribuições em Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Por vezes, dadas $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, escrevemos $\langle u, \phi \rangle$ para representar a aplicação de u em ϕ.

Abaixo, seguem alguns exemplos importantes de distribuições.

Exemplo 2.2.6. Considere $\Omega = \mathbb{R}^n$ e defina

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0), \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

É fácil ver que δ é uma distribuição. Chamamos tal distribuição de Delta de Dirac.

Para os próximos resultados, precisamos da definição de função localmente integrável.

Definição 2.2.7. Se f é uma função mensurável definida em Ω, dizemos que f é localmente integrável em Ω se, para todo compacto $K \subset \Omega$,

$$\int_K f(x)dx < \infty.$$

Denotamos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções localmente integráveis em Ω.

O seguinte exemplo mostra de que forma podemos ver uma função localmente integrável como uma distribuição.

Exemplo 2.2.8. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Defina

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Segue do fato de que f é localmente integrável que T_f define uma distribuição. Ainda, se g é outra função em $L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\langle T_f, \phi\rangle = \langle T_g, \phi\rangle$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, então $f = g$ quase todo ponto em Ω.

Para simplificar, vamos identificar f com T_f e escrevemos

$$\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx.$$

Isso equivale a identificar qualquer função localmente integrável com o funcional linear definido no Exemplo 2.2.8. Da mesma forma, também podemos considerar muitos outros espaços, como por exemplo $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, e $C^k(\Omega)$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, que por sinal também fazem parte do conjunto das função localmente integráveis, como subespaços de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As operações de soma e multiplicação por escalar em $\mathcal{D}'(\Omega)$ são definidas da maneira usual, ou seja, dadas u_1, $u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle u_1 + u_2, \phi \rangle &= \langle u_1, \phi \rangle + \langle u_2, \phi \rangle, \\ \langle \lambda u_1, \phi \rangle &= \lambda \langle u_1, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Além dessas, podemos definir outras operações com distribuições. Para isso, seja $L : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$ um operador linear contínuo e suponha que L possua um transposto L^t, ou seja, um operador linear contínuo $L^t : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega (L\phi)(x)\psi(x)dx = \int_\Omega \phi(x)(L^t\psi)(x)dx, \quad \phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.2.5}$$

Note que ϕ, $L\phi$, ψ, $L^t\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ e, então, (2.2.5) pode ser escrita na forma

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L^t\psi \rangle.$$

Nesse caso, podemos estender L a um operador $\tilde{L} : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ da forma

$$\langle \tilde{L}u, \psi \rangle = \langle u, L^t\psi \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \psi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.2.6}$$

Frequentemente, usa-se a mesma notação L para L e $\tilde{L}$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos importantes de operações com distribuições cujos resultados provêm do que foi desenvolvido acima.

Exemplo 2.2.9 (Multiplicação por uma função C^∞)**.** Seja $f \in C^\infty(\Omega)$ e definimos

$$\begin{aligned} L : C_c^\infty(\Omega) &\longrightarrow C_c^\infty(\Omega) \\ \phi(x) &\longmapsto f(x)\phi(x). \end{aligned}$$

Temos que $L^t = L$ e a operação fica definida, para qualquer $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, como

$$\langle fu, \phi \rangle = \langle u, f\phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.2.7}$$

Exemplo 2.2.10 (Mudança de variáveis)**.** Seja $\psi : \Omega \longrightarrow \Omega$ um difeomorfismo. Definimos

$$\begin{aligned} L : C_c^\infty(\Omega) &\longrightarrow C_c^\infty(\Omega) \\ \phi(x) &\longmapsto \phi \circ \psi(x). \end{aligned}$$

Depois de aplicar o teorema de mudança de variáveis chegamos que $(L^t\phi)(x) = \phi \circ \psi^{-1}(x)|J\psi^{-1}|(x)$, onde $|J\psi^{-1}|$ denota o valor abosluto do determinante da matriz Jacobiana de ψ^{-1}. Assim, a operação fica definida, para qualquer $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, como

$$\langle u \circ \psi, \phi \rangle = \langle u, \phi \circ \psi^{-1}|J\psi^{-1}| \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.2.8}$$

Usando (2.2.8), seguem os dois próximos exemplos:

Exemplo 2.2.11 (Translação)**.** Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x - a. \end{aligned}$$

Ainda, definimos a translação de $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ como a função

$$\psi_a(x) = \psi(x - a) = \psi \circ f(x).$$

Assim, a operação fica definida, para qualquer $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, como

$$\langle u_a, \phi \rangle = \langle u, \phi_{-a} \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.2.9}$$

Exemplo 2.2.12 (Reflexão). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto simétrico em relação à origem e consideremos

$$\begin{aligned} f : \Omega &\longrightarrow \Omega \\ x &\longmapsto -x. \end{aligned}$$

Ainda, definimos a reflexão de $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ como a função

$$\check{\psi}(x) = \psi(-x) = \psi \circ f(x).$$

Assim, a operação fica definida, para qualquer $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, como

$$\langle \check{u}, \phi \rangle = \langle u, \check{\phi} \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.2.10}$$

Exemplo 2.2.13 (Derivação). Sejam $(x_1, \cdots, x_n)$ coordenadas cartesianas em Ω e definimos

$$\begin{aligned} L : C_c^\infty(\Omega) &\longrightarrow C_c^\infty(\Omega) \\ \phi(x) &\longmapsto \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x). \end{aligned}$$

Integrando por partes, vemos que $L^t = -L$ e assim, a operação fica definida, para qualquer $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, como

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.2.11}$$

Se $f \in C^1(\mathbb{R})$, usando (2.2.11) e a fórmula de integração por partes, temos

$$\left\langle \frac{df}{dx}, \phi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{d\phi}{dx} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{d\phi}{dx}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{df}{dx}(x) \phi(x) dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Ou seja, a derivada de f no sentido das distribuições coincide com a distribuição definida pela função contínua $\frac{df}{dx}$. Assim, para funções suficientemente regulares, as derivadas no sentido usual e das distribuições coincidem.

Definição 2.2.14. Uma sequência $(u_j) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge a $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se $\langle u_j, \phi \rangle$ converge a $\langle u, \phi \rangle$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Escrevemos $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

O próximo exemplo indica que a derivada no sentido das distribuições é o limite, nos sentido das distribuições, dos quocientes de Newton.

Exemplo 2.2.15. Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R}$ e a translação u_{-r} de u dada por

$$\langle u_{-r}, \phi \rangle = \langle u, \phi_r \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

onde $\phi_r(x) = \phi(x - r)$. Consideremos o quociente de Newton

$$v_r = \frac{u_{-r} - u}{r}.$$

Vamos verificar que v_r converge para u' em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Para isso, dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, temos que

$$\langle v_r, \phi \rangle = \left\langle \frac{u_{-r} - u}{r}, \phi \right\rangle = \left\langle u, \frac{\phi_r - \phi}{r} \right\rangle,$$

e, considerando uma sequência $(r_j) \subset \mathbb{R}$ tal que $r_j \to 0$ quando $j \to \infty$, precisamos verificar que $\frac{\phi_{r_j} - \phi}{r_j}$ converge a $-\phi'$ em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ quando $j \to \infty$. Comecemos notando que, como ϕ tem suporte compacto, conseguimos K compacto tal que

$$\operatorname{supp}\left(\frac{\phi_{r_j} - \phi}{r_j} + \phi' \right) \subset K$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Ainda, fixe $\epsilon > 0$. Temos que ϕ' é uma função uniformemente contínua, já que é contínua em um conjunto compacto, e podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica em $|\phi'(x) - \phi'(y)| < \epsilon$ para $x, y \in K$. Agora, sejam $j_0 \in \mathbb{N}$ e $x \in K$ tais que $0 < |r_j| < \delta$ e $x - r_j \in K$ para $j \geqslant j_0$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $x - r_j \leqslant a \leqslant x$ tal que

$$-\phi'(a) = \frac{\phi(x - r_j) - \phi(x)}{r_j}.$$

Note que $|x - a| \leqslant |x - (x - r_j)| = |r_j| < \delta$ e, então,

$$\left| \frac{\phi(x - r_j) - \phi(x)}{r_j} + \phi'(x) \right| = |-\phi'(a) + \phi'(x)| < \epsilon, \tag{2.2.12}$$

ou seja, $\frac{\phi_{r_j}-\phi}{r_j} \to -\phi'$ uniformemente em $\mathbb{R}$ quando $r_j \to 0$. Assim, chegamos que $\frac{\phi_r-\phi}{r} \to -\phi'$ em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ quando $r \to 0$ e

$$\lim_{r\to 0}\langle \nu_r, \phi\rangle = \lim_{r\to 0}\left\langle u, \frac{\phi_r - \phi}{r}\right\rangle = \langle u, -\phi'\rangle = \langle u', \phi\rangle \tag{2.2.13}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Os seguintes exemplos tratam da continuidade da derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Vemos que, diferentemente do que acontece com sequência de funções e com a derivação usual, sempre é possível trocar a ordem das operações de derivação e limite de uma sequência de distribuições.

Exemplo 2.2.16. Seja $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então, dada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \phi\right\rangle = -\left\langle u_j, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right\rangle \to -\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi\right\rangle.$$

Ou seja, $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Exemplo 2.2.17. Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $f_j(x) = \frac{\operatorname{sen}(jx)}{j}$, $x \in \mathbb{R}$. Temos que f_j converge uniformemente a 0 e, dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle f_j, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_j(x)\phi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}} 0 \cdot \phi(x)dx = \langle 0, \phi\rangle.$$

Ou seja, $f_j \to 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Agora, a sequência $f_j'(x) = \cos(jx)$ não é convergente para quase todo x. Entretanto, $f_j' \to 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ pois

$$f_j'(x) = \frac{df_j(x)}{dx} \to \frac{d}{dx}0 = 0.$$

Exemplo 2.2.18. Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi \geqslant 0$ e $\int \phi(x)dx = 1$, então, quando $\epsilon \to 0$,

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \to \delta \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

De fato, se $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue da continuidade uniforme de ψ que

$$\left|\int \psi(\epsilon x)\phi(x)dx - \psi(0)\right| \leqslant \sup_x |\psi(\epsilon x) - \psi(0)| \to 0.$$

Assim,

$$\langle \phi_\epsilon, \psi \rangle = \frac{1}{\epsilon^n} \int \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \psi(x) dx = \int \phi(x)\psi(\epsilon x) dx \to \psi(0) = \langle \delta, \psi \rangle.$$

Logo, $\phi_\epsilon \to \delta$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2.2.4 *Convolução*

Sejam f e g funções mensuráveis em $\mathbb{R}^n$. A convolução de f e g é a função $f * g$ definida por

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int f(y)g(x-y)dy \tag{2.2.14}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que a integral existe. Várias condições a respeito de f e g podem ser impostas para garantir que $f * g$ esteja definida pelo menos em quase todo ponto. Por exemplo, se f e g são funções contínuas e f tem suporte compacto ou, de forma mais geral, se f tem suporte compacto e g é localmente integrável, temos que $f * g$ está bem definida.

Um resultado bastante conhecido sobre convolução de funções em L^p é a Desigualdade de Young.

Teorema 2.2.19 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$*, então* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$||f * g||_{L^r} \leqslant ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}.$$

Para trabalharmos com convolução envolvendo distribuições, precisamos introduzir a noção de distribuição com suporte compacto. Primeiramente, dizemos que duas distribuições $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ são iguais num aberto $U \subset \Omega$ se, e somente se,

$$\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Definição 2.2.20. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, o suporte de u é a interseção de todos os conjuntos fechados fora dos quais u se anula. Denotamos por $\mathscr{E}'(\Omega)$ o subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.

Sendo assim, $\Omega \setminus supp(u)$ é o maior aberto onde u se anula. Ainda, se u é uma função contínua em Ω, então (2.2.2) e a Definição 2.2.20 coincidem.

Agora, vamos introduzir a convergência de funções em $C^\infty(\Omega)$.

Definição 2.2.21. Uma sequência (ϕ_j) de funções em $C^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C^\infty(\Omega)$ se, para todo compacto K e todo inteiro não negativo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero em K quando $j \to \infty$.

Note que a convergência em $C_c^\infty(\Omega)$ implica na convergência em $C^\infty(\Omega)$. No entanto, vemos a seguir que a recíproca nem sempre é verdadeira.

Exemplo 2.2.22. Sejam $\Omega = \mathbb{R}$ e, para cada $j \in \mathbb{N}$, seja

$$\phi_j(x) = \frac{1}{2^j}\phi_0\left(\frac{x}{j}\right),$$

onde $supp(\phi_0) \subset [-1, 1]$, $\phi_0 \in C^\infty(\Omega)$ e $\phi_0 = 1$ se $|x| \leqslant \frac{1}{2}$. Temos que, dado um inteiro positivo k,

$$\left|\phi_j^{(k)}(x)\right| = \left|2^{-j}j^{-k}\phi_0^{(k)}\left(\frac{x}{j}\right)\right| \leqslant C2^{-j}j^{-k} \to 0$$

uniformemente em $\mathbb{R}$ quando $j \to \infty$. Logo, (ϕ_j) converge a zero em $C^\infty(\Omega)$.

Por outro lado, se $|x| \leqslant \frac{j}{2}$, então $\left|\frac{x}{j}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, donde segue $\phi_j(x) = \frac{1}{2^j} \neq 0$ e $\left[-\frac{j}{2}, \frac{j}{2}\right] \subset supp(\phi_j)$. Logo, os suportes de ϕ_j não estão contidos em um compacto fixo e a sequência não converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$.

Agora, vejamos a definição e alguns resultados sobre a convolução entre uma distribuição e uma função.

Definição 2.2.23. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (ou $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$) e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), denotamos por $u * \phi$ a função definida por

$$u * \phi(a) = \langle u, \check{\phi}_a \rangle, \tag{2.2.15}$$

onde $\check{\phi}_a(x) = \check{\phi}(x - a) = \phi(a - x)$.

O próximo exemplo mostra que a distribuição Delta de Dirac exerce o papel de elemento neutro para a convolução com uma função teste.

Exemplo 2.2.24. Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$(\delta * \phi)(a) = \langle \delta, \check{\phi}_a \rangle = \check{\phi}_a(0) = \phi(a),$$

ou seja, $\delta * \phi = \phi$.

Se $p \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \delta_p, \phi \rangle = \phi(p)$, então

$$(\delta_p * \phi)(a) = \langle \delta_p, \check{\phi}_a \rangle = \check{\phi}_a(p) = \phi(a - p).$$

Teorema 2.2.25. *Sejam* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Então,*

(a) $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e suas derivadas são dadas por*

$$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi); \tag{2.2.16}$$

(b) $\operatorname{supp}(u * \phi) \subset \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\phi)$.

Demonstração. *(a)* Se $a_j \to a$, então $\check{\phi}_{a_j} \to \check{\phi}_a$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$u * \phi(a_j) = \langle u, \check{\phi}_{a_j} \rangle \to \langle u, \check{\phi}_a \rangle = u * \phi(a),$$

ou seja, $u * \phi$ é uma função contínua. Para provarmos a parte das derivadas, consideremos o quociente de Newton na direção do vetor $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$ que é dado por

$$\begin{aligned}
\frac{u * \phi(a + re_1) - u * \phi(a)}{r} &= \frac{\langle u, \check{\phi}_{a+re_1} \rangle - \langle u, \check{\phi}_a \rangle}{r} \\
&= \frac{\langle u_{-re_1}, \check{\phi}_a \rangle - \langle u, \check{\phi}_a \rangle}{r} \\
&= \left\langle \frac{u_{-re_1} - u}{r}, \check{\phi}_a \right\rangle.
\end{aligned}$$

Pelo Exemplo 2.2.15, temos que

$$\frac{u_{-re_1} - u}{r} \to \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(u * \phi)(a) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, \check{\phi}_a \right\rangle. \tag{2.2.17}$$

Já que o mesmo raciocício vale para as outras coordenadas e o membro direito de (2.2.17) é uma função contínua de a, segue que $u * \phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Agindo indutivamente, segue que $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_i} * \phi(a) &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \check{\phi}_a \right\rangle \\ &= -\left\langle u, \frac{\partial \check{\phi}_a}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= \left\langle u, \frac{\partial \check{\phi}_a}{\partial a_i} \right\rangle \\ &= u * \frac{\partial \phi}{\partial a_i}(a).\end{aligned}$$

Assim, fica provada a segunda igualdade.

(b) Supõe que $a \notin \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\phi)$. Então, $\operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}(\check{\phi}_a) = \emptyset$ e $\langle u, \check{\phi}_a \rangle = 0$. Assim, $u * \phi(a) = 0$ e $u * \phi$ se anula fora de $\operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\phi)$. Portanto,

$$\operatorname{supp}(u * \phi) \subset \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\phi).$$

□

Aqui, cabe observar que os resultados do Teorema 2.2.25 valem se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.2.26. *Se* $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi). \tag{2.2.18}$$

Demonstração. Sejam $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como ϕ tem suporte compacto, podemos escrever o domínio de integração de

$$\phi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\psi(y)dy$$

como a união de uma quantidade finita de conjuntos disjuntos $(F_i)_{i \in I}$ cujo diâmentro é no máximo ϵ. Para cada $i \in I$, tomamos $y_i \in F_i$ e definimos

$$s_\epsilon(x) = \sum_{i \in I} \left(\int_{F_i} \psi(y)dy \right) \phi(x - y_i).$$

Como s_ϵ é uma soma finita de funções-testes então s_ϵ também é uma função teste. Além disso, seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \notin supp(\phi) + supp(\psi)$. Assim, para todo $i \in I$, $y_i \in supp(\psi)$ e $x - y_i \notin supp(\psi)$. Logo $s_\epsilon(x) = 0$, ou seja, $supp(s_\epsilon) \subset supp(\phi) + supp(\psi)$.

Também temos que $s_\epsilon(x)$ converge pra $\phi * \psi$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ quando $\epsilon \to 0$ e

$$|s_\epsilon(x)| \leqslant \sum_{i \in I} \left(\int_{F_i} |\psi(y)| dy \right) |\phi(x - y_i)| \leqslant ||\phi||_{L^\infty} ||\phi||_{L^1}$$

para todo $\epsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Além disso, seguindo o mesmo raciocínio temos que as derivadas $D^\alpha s_\epsilon(x)$ também são uniformemente limitadas e convergem pontualmente para $D^\alpha \phi * \psi$. Dessa forma, o Corolário C.0.10 garante que s_ϵ converge uniformemente para $\phi * \psi$ e portanto temos a convergência em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, segue que

$$\begin{aligned}
(u * (\phi * \psi))(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} (u * s_\epsilon)(x) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{i \in I} \left(\int_{F_i} \psi(y) dy \right) (u * \phi)(x - y_i) \\
&= ((u * \phi) * \psi)(x).
\end{aligned}$$

□

Usando o Teorema 2.2.26, chegamos no próximo teorema.

Lema 2.2.27. *Sejam* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e* ϕ, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$\langle u * \phi, \psi \rangle = \langle u, \check{\phi} * \psi \rangle.$$

Demonstração. Para ϕ, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
(\check{\phi} * \psi)(-x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \check{\phi}(-x - y) \psi(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x + y) \psi(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - z) \psi(-z) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - z) \check{\psi}(z) dz \\
&= (\phi * \check{\psi})(x).
\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que

$$\langle u * \phi, \psi \rangle = (u * \phi) * \check{\psi}(0) = u * (\phi * \check{\psi})(0) = \langle u, \check{\phi} * \psi \rangle.$$

$\square$

2.3 APROXIMAÇÃO DA IDENTIDADE

Nesta seção, vamos introduzir uma classe especial de sequências de funções suaves que são usadas para criar sequências de funções suaves que aproximam funções generalizadas via convolução. Os resultados apresentados aqui seguem de [4].

Definição 2.3.1. Uma sequência de aproximações da identidade é uma sequência de funções $(\phi_j) \subset \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$,

(a) $\phi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(b) $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset \overline{B\left(0, \frac{1}{j}\right)}$;

(c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x)dx = 1$;

(d) $\phi_j \geqslant 0$.

Exemplo 2.3.2. Considere

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, tomando $\phi_j = Cj^n\phi(jx)$ com C tomado de modo que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x)dx = 1$, obtemos uma sequência chamada de aproximações da identidade padrão.

Nosso objetivo, agora, é verificar que a convolução de uma sequência de aproximações da identidade com uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leqslant p < \infty$, converge para f em medida. Para isso, precisamos dos próximos dois resultados.

Proposição 2.3.3. *Sejam* $(\phi_j) \subset \mathbb{R}^n$ *uma sequência de aproximações da identidade e* $f \in C(\mathbb{R}^n)$*. Então,* $\phi_j * f \to f$ *uniformemente em compactos de* $\mathbb{R}^n$ *quando* $j \to \infty$*.*

Demonstração. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x-y) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in K, \forall y \in B(0, \delta).$$

Assim, para $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\phi_j * f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\phi_j(y)dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\phi_j(y)dy \\
&= \int_{B\left(0,\frac{1}{j}\right)} (f(x-y) - f(x))\phi_j(y)dy.
\end{aligned}$$

Para $j > \frac{1}{\delta}$ e $x \in K$, temos

$$\begin{aligned}
|\phi_j * f(x) - f(x)| &\leqslant \int_{B\left(0,\frac{1}{j}\right)} |f(x-y) - f(x)|\phi_j(y)dy \\
&< \epsilon \int_{B\left(0,\frac{1}{j}\right)} \phi_j(y)dy \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

ou seja, $\phi_j * f \to f$ uniformemente em K quando $j \to \infty$. □

Teorema 2.3.4. *Sejam* $(\phi_j) \subset \mathbb{R}^n$ *uma sequência de aproximações da identidade e* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *com* $1 \leqslant p < \infty$*. Então,* $\phi_j * f \to f$ *em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *quando* $n \to \infty$*.*

Demonstração. Como $C_c(\mathbb{R}^n)$ é denso em L^p para $1 \leqslant p < \infty$, dado $\epsilon > 0$, existe $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$||f - f_1||_{L^p} < \epsilon.$$

Pela Proposição 2.3.3, temos que $\phi_j * f_1 \to f_1$ uniformemente em todo compacto de $\mathbb{R}^n$ quando $j \to \infty$. Mas, note que

$$\text{supp}(\phi_j * f_1) \subset \overline{B\left(0, \frac{1}{j}\right)} + \text{supp}(f_1) \subset \overline{B(0,1)} + \text{supp}(f_1)$$

que é um compacto. Assim, temos que

$$\|\phi_j * f_1 - f_1\|_{L^p} \to 0$$

quando $j \to \infty$.

Finalmente, escrevendo

$$\phi_j * f - f = \phi_j * (f - f_1) + ((\phi_j * f_1) - f_1) + (f_1 - f),$$

temos

$$\begin{aligned}\|\phi_j * f - f\|_{L^p} &\leqslant \|\phi_j * (f - f_1)\|_{L^p} + \|\phi_j * f_1 - f_1\|_{L^p} + \|f_1 - f\|_{L^p} \\ &\leqslant \|\phi_j\|_{L^1}\|f - f_1\|_{L^p} + \|\phi_j * f_1 - f_1\|_{L^p} + \|f_1 - f\|_{L^p} \\ &= 2\|f - f_1\|_{L^p} + \|\phi_j * f_1 - f_1\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Ou seja, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall j \geqslant j_0$

$$\|\phi_j * f - f\|_{L^p} \leqslant 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon.$$

Assim, $\|\phi_j * f - f\|_{L^p} \to 0$ quando $j \to \infty$. □

Dessa forma, como a convergência em L^p implica na convergência em medida, temos o próximo corolário.

Corolário 2.3.5. *Sejam* $(\phi_j) \subset \mathbb{R}^n$ *uma sequência de aproximações da identidade e* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *com* $1 \leqslant p < \infty$*. Então,* $\phi_j * f \to f$ *em medida quando* $j \to \infty$*.*

3

A TRANSFORMADA DE FOURIER E OUTROS ESPAÇOS DE DISTRIBUIÇÕES

Neste capítulo, apresentamos definições e alguns resultados sobre a transformada de Fourier que são importantes quando trabalhamos com a equação da onda. Na seção 3.1, seguindo [12, Capítulo 5], vamos definir a transformada de Fourier de funções integráveis e, posteriormente, vamos estender essa noção para distribuições. Tendo isso, na seção 3.2, vamos definir outros espaços de distribuições via transformada de Fourier.

3.1 TRANSFORMADA DE FOURIER

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1.1}$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Segue do Teorema da Convergência Dominada que $\hat{f}$ é contínua. Além disso, temos que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx| \leqslant \int |f(x)|dx = ||f||_{L^1}. \tag{3.1.2}$$

Ainda, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada inversa de Fourier de f por

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\xi\cdot x} f(\xi)d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1.3}$$

e temos a estimativa

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1}f(x)| \leqslant ||f||_{L^1}. \tag{3.1.4}$$

Introduzimos, agora, um subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que é invariante pela transformada de Fourier.

Definição 3.1.1. Denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de Schwartz definido como o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções ϕ tais que

$$\sup_x |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty, \quad \forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{3.1.5}$$

A próxima definição introduz a noção de convergência em $\mathcal{S}$.

Definição 3.1.2. Dizemos que a sequência $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge a zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, para todo α, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $x^\alpha D^\beta \phi_j(x) \to 0$ uniformemente quando $j \to \infty$.

O seguinte lema explica porque o espaço de Schwartz é conhecido como o espaço das funções que decrescem rapidamente no infinito.

Lema 3.1.3. *Seja* $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Então, são equivalentes:*

(a) $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*;*

(b) $\lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| = 0$ *para quaisquer* α, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ *(b)* Denotemos por

$$|x|_M = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$$

para $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e observemos que $|x| \leqslant n|x|_M$.

Agora, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e α, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, existe $M(\alpha,\beta) > 0$ constante tal que

$$|x^\alpha D^\beta \phi(x)| \leqslant M(\alpha,\beta), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Se $|x|_M = |x_i|$ para algum $i \in \{1, \cdots, n\}$, tomando $\alpha' = \alpha + e_i$, temos

$$\frac{|x|}{n}|x^\alpha D^\beta \phi(x)| \leqslant |x_i||x^\alpha D^\beta \phi(x)| = |x^{\alpha'} D^\beta \phi(x)| \leqslant M(\alpha',\beta).$$

Assim,

$$|x^\alpha D^\beta \phi(x)| \leqslant \frac{nM(\alpha',\beta)}{|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

e segue que $\lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| = 0$.

(b) $\Rightarrow$ *(a)* Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| = 0$ para cada α, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Então, dados α, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, existe $N > 0$ tal que $|x^\alpha D^\beta \phi(x)| < 1$ para todo $|x| > N$.

Agora, como a função $x \mapsto x^\alpha D^\beta \phi(x)$ é contínua, existe $M_1(\alpha, \beta)$ tal que $|x^\alpha D^\beta \phi(x)| \leqslant M_1(\alpha, \beta)$ se $|x| \leqslant N$.

Tomando $M(\alpha, \beta) = max\{M_1(\alpha, \beta), 1\}$, segue que

$$\sup_x |x^\alpha D^\beta \phi(x)| \leqslant M(\alpha, \beta) < \infty.$$

Logo, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Note que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, se $(\phi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é uma sequência tal que $\phi_n \to 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ quando $n \to \infty$, então $\phi_n \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

O próximo exemplo mostra que a inclusão contrária não é satisfeita.

Exemplo 3.1.4. Seja $f(x) = e^{-|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Temos que f não tem suporte compacto e, então, $f \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mas, $D^\beta f(x) = p_\beta(x) f(x)$, onde $p_\beta(x)$ é um polinômio, e a equação (3.1.5) é satisfeita, ou seja, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 3.1.5. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *é invariante por derivação e multiplicação por polinômios.*

Demonstração. Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ temos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (D^\gamma f)(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^{\beta+\gamma} f(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Logo, $D^\gamma f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ainda, se $p_\gamma(x)$ é um polinômio em $\mathbb{R}^n$ de ordem $|\gamma|$, segue que

$$x^\alpha D^\beta (p_\gamma(x) f(x)) = \sum_{\delta \leqslant \beta} \binom{\beta}{\delta} D^\delta p'_\gamma(x) D^{\beta-\gamma} f(x), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

onde $p'_\gamma(x) = x^\alpha p_\gamma(x)$ e temos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (p_\gamma(x) f(x))| \leqslant \sum_{\delta \leqslant \beta} \binom{\beta}{\delta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\delta p'_\gamma(x) D^{\beta-\gamma} f(x)| < \infty.$$

Então, $p_\gamma(x) f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

A próxima proposição mostra que as funções do espaço de Schwartz são integráveis.

Proposição 3.1.6. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ *e a convergência em* $\mathcal{S}$ *implica na convergência em* L^1.

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$\int |\phi(x)|dx = \int |\phi(x)|(1+|x|^2)^{\frac{-n-1}{2}}(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}dx.$$

Segue do Lema A.0.2 que existe $A_{n+1} > 0$ tal que

$$(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}} \leqslant A_{n+1} \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} |x^\alpha|.$$

Dessa forma, usando o Lema A.0.1, temos que

$$\begin{aligned}\int |\phi(x)|dx &\leqslant \int |\phi(x)|(1+|x|^2)^{\frac{-n-1}{2}} A_{n+1} \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} |x^\alpha|dx \\ &\leqslant A \int (1+|x|^2)^{\frac{-n-1}{2}} < \infty,\end{aligned}$$

onde $A = A_{n+1} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \sum\limits_{|\alpha| \leqslant n+1} |x^\alpha \phi(x)|$. Logo, $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Por fim, se $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}$ então, seguindo o mesmo que foi feito acima, temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x)dx \right| \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \phi_j(x)| \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{-n-1}{2}} dx.$$

Como $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}$, segue que para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|x^\alpha \phi_j(x)| \to 0$ uniformemente. Ainda, usando novamente o Lema A.0.1, segue que $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{-n-1}{2}}$ é finita. Assim, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x)dx \to 0$, ou seja, $\phi_j \to 0$ em L^1. □

De maneira análoga, também vemos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leqslant p < \infty$.

Agora, vejamos que o espaço de Schwartz é, de fato, invariante pela transformada de Fourier.

Teorema 3.1.7. *A transformada de Fourier é um operador contínuo de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e valem as fórmulas* *(a)* $\widehat{D^\alpha\phi}(\xi) = \xi^\alpha\hat{\phi}(\xi)$;

(b) $\mathcal{F}(x^\alpha\phi(x))(\xi) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\hat{\phi}(\xi)$;

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Começamos provando as fórmulas *(a)* e *(b)*. Para isso, fixe $\xi \in \mathbb{R}^n$. Como as funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são integráveis em $\mathbb{R}^n$, segue do Corolário 2.1.11 que podemos derivar sob o sinal da integração. Assim,

$$\begin{aligned}
D^\alpha_\xi(\hat{\phi})(\xi) &= D^\alpha_\xi \int e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)dx \\
&= \int D^\alpha_\xi e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)dx \\
&= \int (-x)^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)dx \\
&= (-1)^{|\alpha|}\int e^{-ix\cdot\xi}x^\alpha\phi(x)dx \\
&= (-1)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha\phi(x))(\xi)
\end{aligned}$$

e *(b)* fica provado.

Ainda, como $D^\alpha\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, integrando por partes $|\alpha|$ vezes e aplicando o Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{D^\alpha_x\phi}(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi}D^\alpha_x\phi(x)dx \\
&= (-1)^{|\alpha|}\int D^\alpha_x(e^{-ix\cdot\xi})\phi(x)dx \\
&= \xi^\alpha\int e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)dx \\
&= \xi^\alpha\hat{\phi}(\xi).
\end{aligned}$$

Isso prova *(a)*.

Agora, como a transformada de Fourier de uma função integrável é contínua, segue do item *(b)* que $\hat{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ainda, temos que

$$\xi^\alpha D^\beta\hat{\phi}(\xi) = \xi^\alpha(-1)^\beta\mathcal{F}(x^\beta\phi(x))(\xi) = (-1)^{|\beta|}\mathcal{F}(D^\alpha_x(x^\beta\phi(x)))(\xi).$$

Logo,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \hat{\phi}(\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(D_x^\alpha(x^\beta\phi(x)))(\xi)| \leqslant \|D_x^\alpha(x^\beta\phi(x))\|_{L^1} < \infty$$

e $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Finalmente, basta provarmos a continuidade de $\mathcal{F}$. Para isso, seja $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $x^\alpha D^\beta \phi_j(x) \to 0$ uniformemente para quaisquer α, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Então,

$$\begin{aligned}
|\xi^\alpha D^\beta \hat{\phi}_j(\xi)| &\leqslant \|D_x^\alpha(x^\beta\phi_j(x))\|_{L^1} \\
&= \int |D_x^\alpha(x^\beta\phi_j(x))| dx \\
&= \int \left| \frac{(1+|x|)^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}} D_x^\alpha(x^\beta\phi_j(x)) \right| \\
&\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|)^{n+1} D_x^\alpha(x^\beta\phi_j(x))| \int \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} dx.
\end{aligned}$$

Logo, segue que $\xi^\alpha D^\beta \hat{\phi}_j(\xi) \to 0$ uniformemente. Portanto, $\hat{\phi}_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

No próximo exemplo, usamos um método indireto para calcular a transformada de Fourier de uma função.

Exemplo 3.1.8. Seja $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Temos que ϕ satisfaz a equação diferencial

$$\begin{cases} \phi'(x) + x\phi(x) = 0 \\ \phi(0) = 1. \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Comecemos notando que, se $\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $\nu'(x) + x\nu(x) = 0$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\nu(x)e^{\frac{x^2}{2}}\right) = \nu'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + \nu(x)xe^{\frac{x^2}{2}} = 0$$

Assim, $\nu(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ é constante e segue que $\nu(x) = \nu(0)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Por outro lado, como $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aplicando a transformada de Fourier na primeira equação de (3.1.6) e usando o Teorema 3.1.7, temos

$$0 = \mathcal{F}(\phi'(x) + x\phi(x))(\xi) = i\xi\hat{\phi}(\xi) - \frac{1}{i}\frac{d\hat{\phi}}{d\xi}(\xi) = i\left(\frac{d\hat{\phi}}{d\xi}(\xi) + \xi\hat{\phi}(\xi)\right).$$

Logo, $\hat{\phi}$ satisfaz a mesma equação que ϕ. Assim, segue que

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(0)\phi(\xi) = \int \phi(x)dx\phi(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Para calcular a transformada de Fourier de $\phi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$, escrevemos a integral (3.1.1) como produto de integrais unidimencionais e obtemos

$$\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}. \tag{3.1.7}$$

Teorema 3.1.9. *A transformada de Fourier é continuamente inversível de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\phi(\xi)d\xi, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.1.8}$$

Demonstração. Consideremos, para $0 < \epsilon < 1$,

$$\phi_\epsilon(x) = \phi_1(\epsilon x),$$

onde

$$\phi_1(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}.$$

Usando a equação (3.1.7), temos que $\hat{\phi}_1(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\phi_1(\xi)$ e então

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_\epsilon(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi}\phi_\epsilon(x)dx \\
&= \int e^{-ix\cdot\xi}\phi_1(\epsilon x)dx \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\int e^{-iy\cdot\frac{\xi}{\epsilon}}\phi_1(y)dy \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\hat{\phi}_1\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\phi_1\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

Assim, dada $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, segue pelo Teorema de Fubini que

$$\begin{aligned}
\int \phi_\epsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi &= \int \phi_\epsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\int e^{-iy\cdot\xi}\psi(y)dyd\xi \\
&= \int\int e^{i(x-y)\cdot\xi}\phi_\epsilon(\xi)\psi(y)d\xi dy \\
&= \int \hat{\phi}_\epsilon(x-y)\psi(y)dy \\
&= \int \psi(x+z)\hat{\phi}_\epsilon(z)dz \\
&= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\epsilon^n}\int \psi(x+z)\phi_1\left(\frac{z}{\epsilon}\right)dz \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int \psi(x+\epsilon y)\phi_1(y)dy.
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Observe que

$$|\phi_\epsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\hat{\psi}(\xi)| \leqslant |\hat{\psi}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

e

$$|\psi(x+\epsilon y)\phi_1(y)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\psi(x)||\phi_1(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, quando $\epsilon \to 0$, temos que $\phi_\epsilon(\xi) \to 1$ e $\psi(x+\epsilon y) \to \phi(x)$. Assim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada no lado esquerdo da equação (3.1.9), temos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int \phi_\epsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi = \int e^{ix\cdot\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi. \tag{3.1.10}$$

Ainda, aplicando o Teorema da Convergência Dominada no lado direto da equação (3.1.9), segue que

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}\lim_{\epsilon\to 0}\int \psi(x+\epsilon y)\phi_1(y)dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\psi(x)\int \phi_1(y)dy = (2\pi)^n\psi(x). \tag{3.1.11}$$

Comparando as equação (3.1.10) e (3.1.11), segue que

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi.$$

A prova de que a transformada de Fourier é continuamente inversível de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é análoga à demonstração do Teorema 3.1.7 e será omitida. □

O próximo teorema nos fornece algumas relações importantes.

Teorema 3.1.10. *Se* $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *valem*

(a) $\displaystyle\int \hat{\phi}(x)\psi(x)dx = \int \phi(x)\hat{\psi}(x)dx$;

(b) $\displaystyle\int \phi(x)\overline{\psi(x)}dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{\phi}(x)\overline{\hat{\psi}(x)}dx$;

(c) $\widehat{\phi * \psi} = \hat{\phi}\hat{\psi}$;

(d) $\widehat{\phi\psi} = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{\phi} * \hat{\psi}$;

Demonstração. *(a)* Usando o Teorema de Fubini, segue que

$$\begin{aligned}\int \hat{\phi}(x)\psi(x)dx &= \int\int e^{-iy\cdot x}\phi(y)\psi(x)dydx \\ &= \int\int e^{-iy\cdot x}\phi(y)\psi(x)dxdy \\ &= \int\int e^{-iy\cdot x}\psi(x)\phi(y)dydx \\ &= \int \hat{\psi}(x)\phi(x)dx.\end{aligned}$$

(b) Aplicando o item anterior com $\psi = f$ e $\hat{\phi} = \overline{g}$, temos

$$\int f(x)\overline{g}(x)dx = \int \hat{\phi}(x)\psi(x)dx = \int \phi(x)\hat{\psi}(x)dx = \int \hat{f}(x)\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})(x)dx.$$

Mas, da equação (3.1.8), segue que

$$\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\overline{g}(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\int e^{-ix\cdot\xi}g(\xi)d\xi} = \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\hat{g}}(x).$$

Assim,

$$\int f(x)\overline{g}(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{f}(x)\overline{\hat{g}}(x)dx.$$

(c) Utilizando a Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi * \psi}(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi} \int \phi(x-y)\psi(y)dydx \\
&= \int \psi(y) \int e^{-ix\cdot\xi}\phi(x-y)dxdy \\
&= \int e^{-ix\cdot\xi} \int \phi(x-y)\psi(y)dydx \\
&= \int \psi(y) \int e^{-i(x+y)\cdot\xi}\phi(x)dxdy \\
&= \hat{\phi}(\xi)\hat{\psi}(\xi).
\end{aligned}$$

(d) Usando novamente o Teorema de Fubini e a fórmula (3.1.8), segue que

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi\psi}(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)\psi(x)dx \\
&= \int e^{-ix\cdot\xi} \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot k}\hat{\phi}(k)dk\psi(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\int e^{ix\cdot(k-\xi)}\hat{\phi}(k)\psi(x)dxdk \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{\phi}(k)\hat{\psi}(\xi-k)dk \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{\phi} * \hat{\psi}(\xi).
\end{aligned}$$

□

De maneira análoga, conseguimos relações similares para a transformada inversa de Fourier. Em especial, para $\phi,\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, citamos

$$\int \phi(x)\overline{\psi(x)} = \int \mathcal{F}^{-1}\phi(x)\overline{\mathcal{F}^{-1}\psi(x)}dx \tag{3.1.12}$$

e

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi\psi) = \mathcal{F}^{-1}(\phi) * \mathcal{F}^{-1}(\psi). \tag{3.1.13}$$

O próximo corolário nos dá uma estimativa para a norma L^1 da transformada de Fourier.

Corolário 3.1.11. *Se* $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, *então vale a seguinte estimativa*

$$\int |\hat{u}(\xi)| d\xi \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant s} ||D^\alpha u||_{L^\infty}$$

para $s > \frac{n}{2}$.

Demonstração. Usando a desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned}\int |\hat{u}(\xi)| d\xi &= \int |\hat{u}(\xi)| (1+|\xi|^2)^m (1+|\xi|^2)^{-m} d\xi \\ &\leqslant ||\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^m||_{L^2} ||(1+|\xi|^2)^{-m}||_{L^2}.\end{aligned}$$

Do Lema A.0.2, segue que existe $A > 0$ tal que

$$(1+|\xi|^2)^m \leqslant A \sum_{|\alpha| \leqslant m} |\xi^\alpha|^2. \tag{3.1.14}$$

Logo, usando (3.1.14) e o Teorema 3.1.7, segue que

$$||\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^m||_{L^2} \leqslant A \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} ||\xi^\alpha \hat{u}||_{L^2} = A \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} ||\widehat{D^\alpha u}||_{L^2}.$$

Usando o Teorema 3.1.10 e o fato de que u tem suporte compacto, temos que

$$A \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} ||\widehat{D^\alpha u}||_{L^2} = A(2\pi)^n \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} ||D^\alpha u||_{L^2} \leqslant B \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} ||D^\alpha u||_{L^\infty},$$

onde a constante B depende de $\mathrm{supp}(u)$. Ainda, segue que do Lema A.0.1 que

$$\int |(1+|\xi|^2)^{-2m}| d\xi < \infty$$

para $2m \geqslant \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2}$. Assim, existe C constante tal que

$$\int |\hat{u}(\xi)| d\xi \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant s} ||D^\alpha u||_{L^\infty} \tag{3.1.15}$$

para $s > \frac{n}{2}$. $\square$

Com o objetivo de definir a transformada de Fourier para distribuições, vamos introduzir o espaço das distribuições temperadas.

Definição 3.1.12. Um funcional linear e contínuo $u : \mathcal{S}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma distribuição temperada em Ω. Denotamos o espaço das distribuições temperadas em Ω por $\mathcal{S}'(\Omega)$.

Proposição 3.1.13. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e toma $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = 1$ se $|x| \leqslant 1$ e $0 \leqslant \psi \leqslant 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\psi_n(x) = \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Fixados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ e tomando

$$C(\psi, \beta) = \max_{\gamma \leqslant \beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\gamma \psi(x)|,$$

temos que, para $\gamma \leqslant \beta$,

$$\partial^\gamma \psi_n(x) = \frac{1}{n^{|\gamma|}} (\partial^\gamma \psi)\left(\frac{x}{n}\right)$$

e então

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\gamma \psi_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} C(\psi, \beta).$$

Aplicando a regra de Leibniz, obtemos

$$|D^\beta(\phi\psi_n - \phi)(x)| \leqslant |(\psi_n(x) - 1)D^\beta\phi(x)| + \frac{1}{n} C(\psi, \beta) \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} |D^{\beta-\gamma}\phi(x)|.$$

Agora, note que para $|x| \leqslant n$, $\psi_n(x) - 1 = \psi\left(\frac{x}{n}\right) - 1 = 0$ e, para $|x| > n$,

$$\begin{aligned} |(\psi_n(x) - 1)D^\beta\phi(x)| &\leqslant (1 + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\psi(x)|) \frac{1 + |x|}{1 + n} D^\beta\phi(x)| \\ &\leqslant \frac{2}{n}(1 + |x|)|D^\beta\phi(x)|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(\phi\psi_n - \phi(x))| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \frac{2}{n}|x^\alpha|(1 + |x|)|D^\beta\phi(x)| + \frac{1}{n} C(\psi, \beta) \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} |x^\alpha D^{\beta-\gamma}\phi(x)| \to 0. \end{aligned}$$

Logo, $\phi\psi_n \to \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Note que, se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\langle u, \phi \rangle$ está bem definido já que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, é fácil ver que, tomando

$$\nu : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

de modo que $\langle \nu, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle$ se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue que $\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Assim, todo elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pode ser visto como um elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

A convergência em $\mathcal{S}'$ se define de maneira natural; $(u_j) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ converge para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se

$$\langle u_j, \phi \rangle \to \langle u, \phi \rangle \tag{3.1.16}$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quando $j \to \infty$. Em particular, a convergência ocorre para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo, $u_j \to u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, isto é, a convergência em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ implica na convergência em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, usando também a densidade de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pode ser identificado como um subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

A continuidade de um funcional linear em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ também pode ser caracterizada pelo próximo teorema.

Teorema 3.1.14. *Seja u um funcional linear em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Se u é contínuo então existem inteiros M, m tais que*

$$|\langle u, \phi \rangle| \leqslant M \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^m D^\alpha \phi(x)|.$$

Demonstração. Supõe que a desigualdade é falsa para qualquer escolha de M e m. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $\phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$|\langle u, \phi_j \rangle| > j \sum_{|\alpha| \leqslant j} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^j D^\alpha \phi_j(x)|.$$

Seja $\psi_j = \frac{\phi_j}{|\langle u, \phi_j \rangle|}$. Dados α e β multi-índices, seja $j \geqslant max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \psi_j(x)| &\leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant j} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^j D^\gamma \psi_j(x)| \\
&= \frac{1}{|\langle u, \phi_j \rangle|} \sum_{|\gamma| \leqslant j} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^j D^\gamma \phi_j(x)| \\
&< \frac{1}{j},
\end{aligned}$$

ou seja, $x^\alpha D^\beta \psi_j(x) \to 0$ uniformemente. Logo $\psi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Entretanto, $|\langle u, \psi_j \rangle| = 1$ e então $\langle u, \psi_j \rangle$ não converge para 0. Logo, u não seria contínuo.

$\square$

Exemplo 3.1.15. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é tal que

$$|f(x)| \leqslant A(1+|x|)^B \quad \text{quando } |x| > C,$$

para certas constantes A, B, $C > 0$, então $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Com efeito, seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx\right| &\leqslant \int_{|x|>C} |f(x)\phi(x)|dx + \int_{|x|\leqslant C} |f(x)\phi(x)|dx \\ &\leqslant A\int_{|x|>C} (1+|x|)^B|\phi(x)|dx + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)| \int_{|x|\leqslant C} |f(x)|dx \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

está bem definida. Ainda, seja $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Temos que

$$\begin{aligned} &|\langle T_f, \phi_j \rangle| \leqslant \\ &\leqslant A\int_{|x|>C} (1+|x|)^B|\phi_j(x)|dx + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi_j(x)| \int_{|x|\leqslant C} |f(x)|dx \\ &\leqslant A \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left((1+|x|)^{B+n+1}|\phi_j(x)| \int_{|x|>C} (1+|x|)^{-n-1}dx + |\phi_j(x)| \int_{|x|\leqslant C} |f(x)|dx \right), \end{aligned}$$

e, portanto, $\langle T_f, \phi_j \rangle \to 0$. A linearidade de T_f é imediata e segue que $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 3.1.16. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, usando a desigualdade de Hölder com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos

$$\begin{aligned}
|\langle T_f, \phi \rangle| &= \left| \int f(x)\phi(x)dx \right| \\
&\leqslant \int |f(x)\phi(x)|dx \\
&\leqslant \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |\phi(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_{L^p} \|\phi\|_{L^q} < \infty,
\end{aligned}$$

pois $\phi \in L^q(\mathbb{R}^n)$.

Ainda, se $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\phi_j \to 0$ uniformemente e segue que $\langle T_f, \phi_j \rangle \to 0$. A linearidade é imediata e segue que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

A convolução entre uma distribuição temperada e uma função em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é definida seguindo a mesma ideia da convolução entre uma distribuição e uma função teste.

Definição 3.1.17. Sejam $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, definimos a convolução de u e ϕ por

$$(u * \phi)(a) = \langle u, \check{\phi}_a \rangle,$$

onde $\check{\phi}_a(x) = \check{\phi}(x - a) = \phi(a - x)$.

De forma análoga ao que feito no Teorema 2.2.25 para a convolução entre uma distribuição e uma função teste, é possível mostrar $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.1.18. *Se* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *então* $(u * \phi)(x)$ *satisfaz uma desigualdade da forma*

$$|(u * \phi)(a)| \leqslant A(1 + |a|)^B.$$

Demonstração. Sejam $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, pelo Teorema 3.1.14, existem inteiros C, m tais que

$$\begin{aligned}
|(u * \phi)(a)| &= |\langle u, \check{\phi}_a \rangle| \\
&\leqslant C \sum_{|\beta| \leqslant m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^m D^\beta \check{\phi}_a(x)| \\
&\leqslant C \sum_{|\beta| \leqslant m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x + a|^2)^m D^\beta \check{\phi}(x)|.
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Agora, note que $1+|x+a|^2 \leqslant (1+|x|^2)(1+|a|^2)$ e então, segue de (3.1.17), que

$$\begin{aligned}|(u*\phi)(a)| &\leqslant C(1+|a|^2)^m \sum_{|\beta|\leqslant m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^m D^\beta \check{\phi}(x)| \\ &\leqslant C(1+|a|)^{2m} \sum_{|\beta|\leqslant m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^m D^\beta \phi(x)|.\end{aligned}$$

O resultado segue tomando $A = C \sum_{|\beta|\leqslant m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^m D^\beta \phi(x)|$. □

Dessa forma, como $u*\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e usando o Exemplo 3.1.15, chegamos que $u*\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.1.19. *Sejam $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Se $(\phi_j) \subset S$ é tal que $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}$ então $u*\phi_j(a) \to 0$ para todo $a \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Consideremos uma sequência $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, para cada $a \in \mathbb{R}^n$, $\phi_j(a-\cdot) \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e segue da continuidade de u que

$$u*\phi_j(a) = \langle u, \phi_j(a-\cdot)\rangle \to \langle u, 0\rangle = 0.$$

□

Teorema 3.1.20. *Sejam $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Se $(\phi_j) \subset S$ é tal que $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}$ então $u*\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, como $u*\phi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\langle u*\phi_j, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (u*\phi_j)(x)\psi(x)dx.$$

Pelo Teorema 3.1.19, temos que $(u*\phi_j)(x)\psi(x) \to 0$. Além disso, pelo Teorema 3.1.14, existem inteiros C, m tais que

$$\begin{aligned}|(u*\phi_j)(x)\psi(x)| &= |\langle u, \check{\phi}_j(\cdot - x)\rangle||\psi(x)| \\ &\leqslant C \sum_{|\beta|\leqslant m} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |(1+|y|^2)^m D^\beta \check{\phi}_j(y-x)||\psi(x)| \\ &= C \sum_{|\beta|\leqslant m} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |(1+|y|^2)^m D^\beta \phi_j(y)||(1+|x|^2)^m \psi(x)|.\end{aligned}$$

Agora, note que, para cada $1 \leqslant k \leqslant m$, $(1+|y|^2)^k D^\beta \phi_j(y)$ é uniformemente limitada, já que é uma sequência uniformemente convergente de funções limitadas. Ainda, como $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que $|(1+|x|^2)^k \psi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Portanto, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada e concluímos que

$$\lim_{j\to\infty} \langle u * \phi_j, \psi \rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u * \phi_j)(x)\psi(x)dx = 0.$$

□

Teorema 3.1.21. *Sejam* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$\widehat{(u * \phi)} = \hat{\phi}\hat{u}.$$

Demonstração. Comecemos considerando $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Usando os Teoremas 2.2.26 e 3.1.10 e a identidade $\hat{\hat{\phi}} = (2\pi)^n \check{\phi}$, para $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\hat{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(u * \phi), \psi \rangle &= \langle u * \phi, \hat{\psi} \rangle \\ &= \langle u, \check{\phi} * \hat{\psi} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \langle u, \hat{\hat{\phi}} * \hat{\psi} \rangle \\ &= \langle u, \mathcal{F}(\hat{\phi}\psi) \rangle \\ &= \langle \hat{\phi}\hat{u}, \psi \rangle. \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e a transformada de Fourier é um mapa contínuo, então $\{\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \hat{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo, (3.1.18) vale também para $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ainda da densidade de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e da continuidade da transformada de Fourier e do mapa $\phi \longmapsto u * \phi$, concluímos que $\mathcal{F}(u * \phi) = \hat{\phi}\hat{u}$ também para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Agora, vamos definir a transformada de Fourier de distribuições temperadas.

Definição 3.1.22. Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier $\hat{u}$ de u se define por

$$\langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle u, \hat{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Pelo Teorema 3.1.7, $\hat{u}$ está bem definida. Ainda, se $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{\phi}_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e segue que

$$\langle \hat{u}, \phi_j \rangle = \langle u, \hat{\phi}_j \rangle \to \langle u, 0 \rangle = 0.$$

A linearidade é imediata e, então, $\hat{u}$ é uma distribuição temperada.

Agora, se $(u_j) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é tal que $u_j \to u$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\langle \hat{u}_j, \phi \rangle = \langle u_j, \hat{\phi} \rangle \to \langle u, \hat{\phi} \rangle = \langle \hat{u}, \phi \rangle.$$

Logo, $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é contínua.

Ainda, para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, temos pelo Teorema 3.1.9 que

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^{-1}u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\langle \mathcal{F}^{-1}u, \phi \rangle = \langle u, \mathcal{F}^{-1}\phi \rangle \end{aligned}$$

está bem definida e

$$\langle \mathcal{F}^{-1}\hat{u}, \phi \rangle = \langle \hat{u}, \mathcal{F}^{-1}\phi \rangle = \langle u, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\phi \rangle = \langle u, \phi \rangle$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo, $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é continuamente inversível.

No próximo exemplo, vamos calcular a transformada de Fourier da Delta de Dirac como distribuição temperada.

Exemplo 3.1.23. Dada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\langle \hat{\delta}, \phi \rangle = \langle \delta, \hat{\phi} \rangle = \hat{\phi}(0) = \int \phi(x)dx = \langle 1, \phi \rangle.$$

Ou seja, $\hat{\delta} = 1$.

Teorema 3.1.24. *Valem as seguintes propriedades para a transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:*

(a) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada $\hat{f}$ de f como distribuição temperada coincide com a transformada de f dada por (3.1.1);

(b) Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}^{-1}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$||f||_{L^2}^2 = (2\pi)^n ||\hat{f}||_{L^2}^2 = ||\mathcal{F}^{-1}f||_{L^2}^2;$$

(c) Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\begin{aligned}
&\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u},\\
&\widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{u},\\
&\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}.
\end{aligned}$$

Demonstração. (a) Se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, segue do Teorema 3.1.10 que

$$\langle \hat{\psi}, \phi \rangle = \langle \psi, \hat{\phi} \rangle = \int \psi(x)\hat{\phi}(x)dx = \int \hat{\psi}(x)\phi(x)dx$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, as transformadas de Fourier como função e como distribuição coincidem.

Quando $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, da densidade de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$, segue que existe $(\psi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi_j \to f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Assim, da continuidade de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle \hat{f}, \phi \rangle &= \langle f, \hat{\phi} \rangle\\
&= \int f(x)\hat{\phi}(x)dx\\
&= \lim_{j\to\infty} \int \psi_j(x)\hat{\phi}(x)dx\\
&= \lim_{j\to\infty} \int \hat{\psi}_j(x)\phi(x)dx\\
&= \int \hat{f}(x)\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

(b) Seja $(\psi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi_j \to f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Do Teorema 3.1.10 segue que

$$\begin{aligned}
\int |\hat{\psi}_j(x) - \hat{\psi}_k(x)|^2 dx &= \int (\hat{\psi}_j(x) - \hat{\psi}_k(x))\overline{(\hat{\psi}_j(x) - \hat{\psi}_k(x))}dx\\
&= (2\pi)^n \int (\psi_j(x) - \psi_k(x))\overline{(\psi_j(x) - \psi_k(x))}dx\\
&= (2\pi)^n \int |\psi_j(x) - \psi_k(x)|^2 dx,
\end{aligned}$$

ou seja, $||\hat{\psi}_j - \hat{\psi}_k||_{L^2}^2 = (2\pi)^n ||\psi_j - \psi_k||_{L^2}^2$.

Como (ψ_j) é uma sequência convergente, então é de Cauchy. Logo, $(\hat{\psi}_j) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ também é um sequência de Cauchy. Como $L^2(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach, segue que $\hat{\psi}_j$ converge para alguma função $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Agora, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$||(\psi_j - f)\phi||_{L^1} \leqslant ||\psi_j - f||_{L^2}||\phi||_{L^2} \to 0$$

e

$$||(\hat{\psi}_j - g)\phi||_{L^1} \leqslant ||\hat{\psi}_j - g||_{L^2}||\phi||_{L^2} \to 0.$$

Ou seja, $\psi_j\phi \to f\phi$ e $\hat{\psi}_j\phi \to g\phi$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Com isso,

$$\begin{aligned}\langle \hat{f}, \phi\rangle &= \langle f, \hat{\phi}\rangle \\ &= \int f(x)\hat{\phi}(x)dx \\ &= \lim_{j\to\infty}\int \psi_j(x)\hat{\phi}(x)dx \\ &= \lim_{j\to\infty}\int \hat{\psi}_j(x)\phi(x)dx \\ &= \lim_{j\to\infty}\int g(x)\phi(x)dx \\ &= \langle g, \phi\rangle.\end{aligned}$$

Logo, $\hat{f} = g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Por fim,

$$||\hat{f}||^2_{L^2} = \lim_{j\to\infty}||\hat{\psi}_j||^2_{L^2} = (2\pi)^n \lim_{j\to\infty}||\psi_j||^2_{L^2} = (2\pi)^n||f||^2_{L^2}.$$

(c) Segue do Teorema 3.1.7 que, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \widehat{D^\alpha u}, \phi\rangle = \langle D^\alpha u, \hat{\phi}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha\phi\rangle = \langle u, \widehat{\xi^\alpha\phi}\rangle = \langle \hat{u}, \xi^\alpha\phi\rangle = \langle \xi^\alpha\hat{u}, \phi\rangle,$$

ou seja, $\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha\hat{u}$.

Ainda,

$$\langle \widehat{x^\alpha u}, \phi\rangle = \langle x^\alpha u, \hat{\phi}\rangle = \langle u, x^\alpha\hat{\phi}\rangle = \langle u, \widehat{D^\alpha\phi}\rangle = (-1)^\alpha\langle \widehat{D^\alpha u}, \phi\rangle.$$

Logo, $\widehat{x^\alpha u} = (-1)^\alpha\widehat{D^\alpha u}$.

Por fim, temos que

$$\mathcal{F}^{-1}\check{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\check{\phi}(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ix\cdot\xi}\phi(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{\phi}(x).$$

Então, $\check{\phi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{\hat{\phi}}(\xi)$. Assim,

$$\langle \hat{u}, \phi\rangle = \langle u, \hat{\hat{\phi}}\rangle = \langle u, (2\pi)^n\check{\phi}\rangle = \langle (2\pi)^n\check{u}, \phi\rangle,$$

ou seja, $\hat{u} = (2\pi)^n\check{u}$. □

Usando as estimativas (3.1.4) e (3.1.2), o Teorema 3.1.24 e o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, segue o próximo resultado.

Corolário 3.1.25. *Sejam* $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então,*

$$||\hat{u}||_{L^q} \leqslant ||u||_{L^p}$$

e

$$||\mathcal{F}^{-1}u||_{L^q} \leqslant ||u||_{L^p}$$

para qualquer $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$*.*

Lema 3.1.26. *Seja* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$*. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) Se $||\mathcal{F}^{-1}(g)||_{L^\infty} \leqslant C_0$ *e* $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$||\mathcal{F}^{-1}(g\mathcal{F}(v))||_{L^\infty} \leqslant C_0||v||_{L^1}.$$

(b) Se $||g||_{L^\infty} \leqslant C_1$ *e* $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$||\mathcal{F}^{-1}(g\mathcal{F}(v))||_{L^2} \leqslant C_1||v||_{L^2}.$$

(c) Se $||\mathcal{F}^{-1}(g)||_{L^\infty} \leqslant C_0$*,* $||g||_{L^\infty} \leqslant C_1$ *e* $v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$||\mathcal{F}^{-1}(g\mathcal{F}(v))||_{L^q} \leqslant C_0^{2\delta}C_1^{1-2\delta}||v||_{L^p},$$

onde $p \in [1, 2]$*,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $\delta := \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$*.*

Demonstração. *(a)* Como $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segue de (3.1.2) que $\mathcal{F}(v) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dessa forma, como $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segue que $g\mathcal{F}(v) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Agora, usando a relação (3.1.13) e a Desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned} ||\mathcal{F}^{-1}(g\mathcal{F}(v))||_{L^\infty} &= ||\mathcal{F}^{-1}(g) * v||_{L^\infty} \\ &\leqslant ||\mathcal{F}^{-1}(g)||_{L^\infty}||v||_{L^1} \\ &\leqslant C_0||v||_{L^1}. \end{aligned}$$

(b) Como $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, segue do Teorema 3.1.24 que $\mathcal{F}(v) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, como $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue que $g\mathcal{F}(v) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dessa forma, usando novamente o Teorema 3.1.24, concluímos que

$$\begin{aligned} ||\mathcal{F}^{-1}(g\mathcal{F}(v))||_{L^2} &= ||g\mathcal{F}(v)||_{L^2} \\ &\leqslant ||g||_{L^\infty}||\mathcal{F}(v)||_{L^2} \\ &\leqslant C_1||v||_{L^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, o item *(c)* segue dos itens *(a)* e *(b)* e do Teorema de interpolação de Riesz-Thorin. □

Nosso objetivo, agora, é definir a transformada parcial de Fourier para funções localmente integráveis e, posteriormente, para distribuições.

Para o caso das funções, consideremos um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f(t,x) \in L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^m)$. Se, para todo compacto $K \subset \Omega$,

$$\int_K \int_{\mathbb{R}^m} |f(t,x)| dx dt < \infty,$$

então, cobrindo Ω com uma quantidade enumerável de compactos e aplicando o Teorema de Fubini em cada compacto, temos que $f(t,x)$ é integrável em x para quase todo $t \in \Omega$. Desta forma, podemos definir a transformada de Fourier de $f(t,x)$ na variável x como

$$\mathcal{F}_{x \to \xi}\big(f(t,x)\big)(t,\xi) = \tilde{f}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\cdot\xi} f(t,x) dx. \tag{3.1.19}$$

Além disso, para cada compacto $K \times L \subset \Omega \times \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \int_{K\times L} |\tilde{f}(t,x)| &= \int_L \int_K \left| \int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\cdot\xi} f(t,x) dx \right| dt d\xi \\ &\leqslant |L| \int_K \int_{\mathbb{R}^m} |f(t,x)| dx dt < \infty, \end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{f}(t,x) \in L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}^m)$.

De maneira análoga, se $f(t,x) \in L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^m)$, podemos definir a transformada parcial inversa de Fourier na variável ξ por

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\big(f(t,\xi)\big)(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int e^{ix\cdot\xi} f(t,\xi)dx.$$

Para definir a transformada parcial de Fourier de uma distribuição não podemos agir da mesma maneira já que, em geral, fixar uma variável carece de sentido para uma distribuição. Para isso, denotemos a projeção $(t,x) \mapsto t$ por $\pi : \Omega \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \Omega$.

Definição 3.1.27. Sejam $m, n \geqslant 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Denotamos por $C^\infty_c(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ o subespaço de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ das funções ϕ tais que $\pi(supp(\phi))$ é um compacto de Ω.

Dizemos que uma sequência $(\phi_j) \subset C^\infty_c(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ converge para zero em $C^\infty_c(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$, e escrevemos $\phi_j \to 0$ em $C^\infty_c(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$, se existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $supp(\phi_j) \subset K \times \mathbb{R}^m$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Teorema 3.1.28. *A transformada parcial de Fourier, definida por* (3.1.19), *é um operador continuamente inversível em* $C^\infty_c(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$, *com inversa dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\big(f(t,\xi)\big)(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int e^{ix\cdot\xi} f(t,\xi)dx.$$

Ainda, valem as fórmulas

(a) $\widetilde{D^\alpha_x \phi}(t,\xi) = \xi^\alpha \tilde{\phi}(t,\xi)$;

(b) $(\widetilde{x^\alpha \phi})(t,\xi) = (-1)^\alpha D^\alpha_\xi \tilde{\phi}(t,\xi)$;

(c) $\widetilde{D^\beta_t \phi}(t,\xi) = D^\beta_t \tilde{\phi}(t,\xi)$;

(d) $\displaystyle\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^m} \tilde{\phi}(t,\xi)\psi(t,x)dxdt = \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^m} \phi(t,x)\tilde{\psi}(t,\xi)dxdt.$

Demonstração. A primeira parte do teorema é análoga ao que foi feito no Teorema 3.1.9.

A demonstração dos itens *(a)* e *(b)* segue do Teorema 3.1.7 aplicado na variável x. O item *(c)* é consequência de derivação sob o sinal de integração e o item *(c)* segue usando o item *(a)* do Teorema 3.1.10. $\square$

Definição 3.1.29. Um funcional linear e contínuo em $C_c^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ é dito uma distribuição temperada em $x \in \mathbb{R}^m$. O espaço das distribuições temperadas em x é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$.

Exemplo 3.1.30. Se $u \in \mathcal{S}'(\Omega \times \mathbb{R}^m)$, a restrição de u a $C_c^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ é uma distribuição temperada em x. Em particular,

$$\mathscr{E}'(\Omega \times \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{D}'(\Omega, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)).$$

Agora, vejamos a definição de transformada parcial de Fourier para distribuições temperadas em x.

Definição 3.1.31. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$, a transformada parcial de Fourier $\tilde{u}$ se define por

$$\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \langle u, \tilde{\phi} \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)).$$

Da mesma forma como acontece com a transformada de Fourier quando estendida a $\mathcal{D}'(\Omega)$, a transformada parcial de Fourier também mantém as suas propriedades quando estendida a $\mathcal{D}'(\Omega, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$.

A seguir, vamos calcular a transformada de Fourier da Delta de Dirac em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.1.32. Consideremos $\delta = \delta(t, x)$ em $\mathbb{R}^2$. Então,

$$\langle \tilde{\delta}, \phi \rangle = \langle \delta, \tilde{\phi} \rangle = \tilde{\phi}(0, 0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(0, x) dx.$$

Denotamos essa distribuição por $\delta(t)$ indicando que atua como a distribuição Delta de Dirac somente na variável t, enquanto na segunda variável, atua como a função 1.

3.2 OUTROS ESPAÇOS DE DISTRIBUIÇÕES

Nesta seção, vamos apresentar alguns espaços de distribuições que são definidos através da transformada de Fourier. Começamos pelos mais conhecidos deles que são os espaços de Sobolev de ordem fracionária.

Definição 3.2.1. Sejam $1 < p < \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Os espaços de Sobolev de ordem fracionária são definidos como

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : ||f||_{H_p^s} := ||\mathcal{F}^{-1}(\langle \xi \rangle^s \mathcal{F}(f))||_{L^p} < \infty \right\},$$

onde $\langle \xi \rangle$ denota os colchetes japoneses dados por $\langle \xi \rangle^2 := 1 + |\xi|^2$.

Quando $p = 2$ também usamos a notação $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Definição 3.2.2. Sejam $1 < p < \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Os espaços de Sobolev homogêneos de ordem fracionária são definidos como

$$\dot{H}^s_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\dot{H}^s_p} := \|\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \mathcal{F}(f))\|_{L^p} < \infty \right\}.$$

De [2, Teoremas 6.2.3 e 6.3.2] segue o próximo resultado de incorporação entre espaços de Sobolev homogêneos e não homogêneos.

Teorema 3.2.3. *Sejam* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ *tais que* $s_1 \leqslant s_2$. *Então, temos*

$$H^{s_2}_p \subseteq H^{s_1}_p \subseteq \dot{H}^{s_1}_p,$$

com $\|\cdot\|_{\dot{H}^{s_1}_p} \leqslant \|\cdot\|_{H^{s_1}_p} \leqslant \|\cdot\|_{H^{s_2}_p}$ *para todo* $1 < p < \infty$.

Agora, vamos apresentar uma classe especial de distribuições temperadas conhecidas por multiplicadores do tipo (p, q). Para isso, seguimos [11].

Definição 3.2.4. Dados $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, denotamos por $L^q_p = L^q_p(\mathbb{R}^n)$ o espaço das distribuições temperadas T que satisfazem a estimativa

$$\|T * u\|_{L^q} \leqslant C\|u\|_{L^p}$$

para toda $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, onde a constante C não depende de u.

Definição 3.2.5. O conjunto das transformadas de Fourier $\hat{T}$ das distribuições $T \in L^q_p$, para $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, é denotado por $M^q_p = M^q_p(\mathbb{R}^n)$. Os elementos de M^q_p são chamados de multiplicadores do tipo (p, q).

Lema 3.2.6. *Sejam* $1 \leqslant p, p', q, q' \leqslant \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *e* $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. *Então,* $L^q_p = L^{p'}_{q'}$.

Demonstração. Vamos verificar que $L^q_p \subseteq L^{p'}_{q'}$. Para isso, seja $T \in L^q_p$. Então, temos que

$$\|T * u\|_{L^q} \leqslant C\|u\|_{L^p}, \quad u \in \mathcal{S}.$$

Usando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} |T * u * v(0)| &= \left| \int T * u(x) v(-x) dx \right| \\ &\leqslant \|T * u\|_{L^q} \|v\|_{L^{q'}} \\ &\leqslant C\|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{q'}}. \end{aligned}$$

Tomando $u \in \mathcal{S}$ tal que, em quase todo ponto, $T * v(x)u(-x)$ tem sinal constante, $|T * v|^{p'}$ é múltiplo de $|u|^p$ e $u \neq 0$, do Teorema 2.1.3 segue que

$$\begin{aligned}
\|T * v\|_{L^{p'}}\|u\|_{L^p} &= \left|\int T * v(x)u(-x)\,dx\right| \\
&= |T * v * u(0)| \\
&= |T * u * v(0)| \\
&\leqslant C\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^{q'}}.
\end{aligned}$$

Assim, $\|T * v\|_{L^{p'}} \leqslant C\|v\|_{L^{q'}}$ e segue que $T \in L^{p'}_{q'}$.

A outra inclusão é análoga. □

Do Lema 3.2.6 segue que, se $1 \leqslant p, p', q, q' \leqslant \infty$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, então $M^q_p = M^{p'}_{q'}$.

Teorema 3.2.7. *Seja $\phi \geqslant 0$ mensurável tal que*

$$m(\{\xi \in \mathbb{R}^n : \phi(\xi) \geqslant s\}) \leqslant \frac{C}{s}. \tag{3.2.1}$$

Então, com uma constante C_p dependendo de p e C temos, quando $1 < p \leqslant 2$,

$$\left(\int \left|\frac{\hat{u}}{\phi}\right|^p \phi^2 d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_p\|u\|_{L^p}, \quad u \in L^p.$$

Note que o integrando pode ser escrito como $|\hat{u}|\phi^{2-p}$ e, então, é natural definimos este para ser 0 quando $\phi = 0$.

Demonstração. Quando $p = 2$, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\int \left|\frac{\hat{u}}{\phi}\right|^2 \phi^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int |\hat{u}|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\hat{u}\|_{L^2} \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\|u\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Ou seja, o resultado vale para $p = 2$ com $C_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$.

Agora, escrevendo $d\mu(\xi) = (\phi(\xi))^2 d\xi$ e $Tu = \frac{\hat{u}}{\phi}$, seja

$$m(s) = m(\{\xi \in \mathbb{R}^n : \phi(\xi) \geqslant s\}).$$

Dessa forma, como $sm(s) \leqslant C$, temos que

$$\begin{aligned}
\mu(\{\xi \in \mathbb{R}^n : \phi(\xi) \leqslant \sigma\}) &= \int \chi_{\{\xi : \phi(\xi) \leqslant \sigma\}} d\mu(\xi) \\
&= \int \chi_{\{\xi : \phi(\xi) \leqslant \sigma\}} (\phi(\xi))^2 d\xi \\
&= \int \chi_{\{\xi : s \leqslant \sigma\}} s^2 d\phi^{-1}(s) \\
&= \int_0^\sigma s^2 d(-m(s)) \\
&= 2\int_0^\sigma sm(s)ds - \sigma^2 m(\sigma) + \lim_{s\to 0} s^2 m(s) \\
&\leqslant 2C\sigma.
\end{aligned}$$

Assim, como

$$|(Tu)(\xi)| = \left|\frac{\hat{u}(\xi)}{\phi(\xi)}\right| \leqslant \frac{\|u\|_{L^1}}{\phi(\xi)},$$

temos que

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : |(Tu)(\xi)| \geqslant s\} \subseteq \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \phi(\xi) \leqslant \frac{\|u\|_{L^1}}{s}\right\}$$

e, então,

$$\begin{aligned}
\mu(\{\xi \in \mathbb{R}^n : |(Tu)(\xi)| \geqslant s\}) &\leqslant \mu\left(\left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \phi(\xi) \leqslant \frac{\|u\|_{L^1}}{s}\right\}\right) \\
&\leqslant 2C\frac{\|u\|_{L^1}}{s},
\end{aligned}$$

$u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ainda, usando a validade do Teorema para $p = 2$, segue que

$$\begin{aligned}
\mu(\{\xi \in \mathbb{R}^n : |(Tu)(\xi)| \geqslant s\}) &= \int \chi_{\{\xi \in \mathbb{R}^n : |(Tu)(\xi)| \geqslant s\}} d\mu(\xi) \\
&= \int \chi_{\{\xi \in \mathbb{R}^n : |(Tu)(\xi)| \geqslant s\}} (\phi(\xi))^2 d\xi \\
&\leqslant \int \chi_{\{\xi \in \mathbb{R}^n : |(Tu)(\xi)| \geqslant s\}} \frac{|(Tu)(\xi)|}{s} (\phi(\xi))^2 d\xi \\
&\leqslant \frac{1}{s^2} \int \left|\frac{\hat{u}(\xi)}{\phi(\xi)}\right|^2 (\phi(\xi))^2 d\xi \\
&\leqslant (2\pi)^n \left(\frac{\|u\|_{L^2}}{s}\right)^2
\end{aligned}$$

para $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Logo, T é um operador linear limitado de L^1 em $L^{1,\mu}$ e de L^2 em $L^{2,\mu}$ e, pelo Teorema de Interpolação de Marcinkiewincz, segue que T é um operador linear limitado de L^p em L^p para qualquer $1 \leqslant p \leqslant 2$, ou seja,

$$\begin{aligned}\left(\int\left|\frac{\hat{u}(\xi)}{\phi(\xi)}\right|^p(\phi(\xi))^2 d\xi\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int\left|\frac{\hat{u}(\xi)}{\phi(\xi)}\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant C_p\|u\|_{L^p}\end{aligned}$$

para $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Corolário 3.2.8. *Se* $\phi \geqslant 0$ *satisfaz* (3.2.1) *e* $1 < p \leqslant r \leqslant p' < \infty$ *com* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, *temos*

$$\left(\int\left|\hat{u}\phi^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}\right)}\right|^r d\xi\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C_{p,r}\|u\|_{L^p},$$

para toda $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Escrevendo $d\mu = \phi(\xi)d\xi$ e usando o Corolário 2.1.4, temos

$$\begin{aligned}\left(\int\left|\hat{u}\phi^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}\right)}\right|^r d\xi\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int|\hat{u}|^r(\phi^{-\frac{1}{p'}})^r\phi d\xi\right)^{\frac{1}{r}}\\ &= \left(\int|\hat{u}|^r(\phi^{-\frac{1}{p'}})^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}}\\ &= \|\hat{u}\phi^{-\frac{1}{p'}}\|_{L^r(\mu)}\\ &\leqslant \|\hat{u}\phi^{-\frac{1}{p'}}\|^{\alpha}_{L^{p'}(\mu)}\|\hat{u}\phi^{-\frac{1}{p'}}\|^{1-\alpha}_{L^p(\mu)}\\ &= \left(\int\frac{|\hat{u}|}{\phi}\phi d\xi\right)^{\frac{\alpha}{p'}}\left(\int|\hat{u}|\phi^{2-p}d\xi\right)^{\frac{1-\alpha}{p}}\\ &= \|\hat{u}\|^{\alpha}_{L^{p'}}\left(\int|\hat{u}|\phi^{2-p}d\xi\right)^{\frac{1-\alpha}{p}},\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

onde $\alpha \in [0,1]$ é tal que $\frac{1}{r}=\frac{\alpha}{p'}+\frac{1-\alpha}{p}$. Finalmente, usando o Corolário 3.1.25 e o Teorema 3.2.7, concluímos que

$$\left(\int\left|\hat{u}\phi^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}\right)}\right|^r d\xi\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C_{p,r}\|u\|_{L^p}$$

para $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Finalmente, o próximo teorema nos fornece uma condição sob a qual uma função pertence à M_p^q.

Teorema 3.2.9. *Seja* f *uma função mensurável tal que, para algum* $1 < b < \infty$ *e alguma constante* C *positiva, vale que*

$$m\{\xi \in \mathbb{R}^n : |f(\xi)| \geqslant l\} \leqslant Cl^{-b}$$

para todo l *positivo. Então,* $f \in M_p^q$ *se* $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$ *e* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{b}$.

Demonstração. Sejam $1 < p', q' < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Como $M_p^q = M_{q'}^{p'}$, podemos assumir que $p \leqslant q'$. Tomando $\phi = |f|^b$ e $r = q'$, temos

$$\begin{aligned} m\{\xi \in \mathbb{R}^n : \phi(\xi) \geqslant s\} &= m\{\xi \in \mathbb{R}^n : |f(\xi)|^b \geqslant s\} \\ &= m\{\xi \in \mathbb{R}^n : |f(\xi)| \geqslant \sqrt[b]{s}\} \\ &\leqslant \frac{C}{s}. \end{aligned}$$

Assim, usando o Corolário 3.2.8, como

$$\frac{1}{q'} - \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{q} - 1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{b},$$

chegamos que

$$\|f\hat{u}\|_{L^{q'}} \leqslant C_{p,q'}\|u\|_{L^p} \tag{3.2.3}$$

para toda $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Agora, seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{T} = f$. Quando $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, como $q' \leqslant 2$, usando o Corolário 3.1.25, o Teorema 3.1.21 e a desigualdade (3.2.3), concluímos que

$$\|T * u\|_{L^q} = \|\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(T * u)\|_{L^q} \leqslant \|f\hat{u}\|_{L^{q'}} \leqslant C_{p,q'}\|u\|_{L^p}.$$

Logo, $T \in L_p^q$ e, então, $f \in M_p^q$. □

A fim de definir os espaços de Besov e de Triebel-Lizorkin em termos da transformada de Fourier, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.2.10. *Existe* $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *com* $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} < |x| < 2\}$ *e tal que*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho(2^{-j}\xi) = 1, \quad \xi \neq 0.$$

Demonstração. Seja $\psi \geqslant 0$ uma função em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(\xi) > 0$ quando $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant |\xi| \leqslant \sqrt{2}$ e $\text{supp}(\psi) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} < |x| < 2\}$. Assim, para $\xi \neq 0$, temos que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi(2^{-j}\xi) \neq 0$$

e, então, basta definir

$$\phi(\xi) = \frac{\psi(\xi)}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi(2^{-j}\xi)}.$$

□

Agora, dada a função do Lema 3.2.10, seja

$$\rho_j(y) = \begin{cases} \rho(2^{-j}y), & j \geqslant 1, \\ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(y), & j = 0. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Definição 3.2.11. Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $1 < p,\ q < \infty$. Definimos o espaço de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ por

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : ||f||_{B^s_{p,q}} := \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} ||\mathcal{F}^{-1}(\rho_j \mathcal{F}(f))||^q_{L^p} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}.$$

Definição 3.2.12. Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $1 < p,\ q < \infty$. Definimos o espaço de Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ por

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : ||f||_{F^s_{p,q}} := \left|\left| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} |\mathcal{F}^{-1}(\rho_j \mathcal{F}(f))|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right|\right|_{L^p} < \infty \right\}.$$

Lema 3.2.13. *Seja* $s \in \mathbb{R}$ *e* $1 < p,\ q < \infty$. *Então, valem as seguintes inclusões:*

(a) $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n) \subseteq F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ *se* $1 < q \leqslant p < \infty$;

(b) $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n) \subseteq B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ *se* $1 < p \leqslant q < \infty$.

Demonstração. Fazemos a demonstração do item *(a)* e o item *(b)* é análogo. Para isso, se $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ com $1 < q \leqslant p < \infty$, então

$$\begin{aligned}
\|f\|_{F^s_{p,q}} &= \Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq}|\mathcal{F}^{-1}(\rho_j\mathcal{F}(f))|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\|_{L^p} \\
&= \Big\|\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq}|\mathcal{F}^{-1}(\rho_j\mathcal{F}(f))|^q\Big\|^{\frac{1}{q}}_{L^{\frac{p}{q}}} \\
&\leqslant \Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq}\|\mathcal{F}^{-1}(\rho_j\mathcal{F}(f))\|^q_{L^p}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_{B^s_{p,q}}.
\end{aligned}$$

Logo, $f \in F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ e a inclusão é contínua. $\square$

Quando $s = 0$ e $q = 2$ temos que $F^0_{p,2}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$ (veja [20, Subseção 2.5.6]). Dessa forma, usando o Lema 3.2.13, chegamos no próximo resultado.

Teorema 3.2.14. *Consideremos* $1 < p \leqslant 2$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1$. *Então,*

(a) $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq B^0_{p,2}(\mathbb{R}^n)$;

(b) $B^0_{s,2}(\mathbb{R}^n) \supseteq L^s(\mathbb{R}^n)$

Teorema 3.2.15. *Sejam* $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $1 < p \leqslant 2 \leqslant s < \infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1$. *Ainda, supõe que*

$$\|\mathcal{F}^{-1}(g\rho_j\mathcal{F}(\nu))\|_{L^s} \leqslant C\|\nu\|_{L^p}, \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.2.5}$$

onde C *é independente de* j *e* ν. *Então, para alguma constante* A *que não depende de* g,

$$\|\mathcal{F}^{-1}(g\mathcal{F}(\nu))\|_{B^0_{s,q}} \leqslant AC\|\nu\|_{B^0_{p,q}} \tag{3.2.6}$$

para todo $q > 1$.

Demonstração. Comece notando que se $|j - k| > 1$, então $\rho_j\rho_k = 0$. Dessa forma, considerando $\rho_{-1} = 0$, temos que

$$\rho_j\mathcal{F}(\nu) = \rho_j\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k\mathcal{F}(\nu) = \rho_j(\rho_{j-1} + \rho_j + \rho_{j+1})\mathcal{F}(\nu).$$

Assim, substituindo v em (3.2.5) por v_j onde $\mathcal{F}(v_j) = (\rho_{j-1} + \rho_j + \rho_{j+1})\mathcal{F}(v)$, segue que

$$\|\mathcal{F}^{-1}(g\rho_j\mathcal{F}(v))\|_{L^s} = \|\mathcal{F}^{-1}(g\rho_j\mathcal{F}(v_j))\|_{L^s} \leqslant C\|v_j\|_{L^p}, \tag{3.2.7}$$

para $j = 0, 1, \cdots$. Elevando a desigualdade (3.2.7) na potência q, somando sobre todos os valores de j e tomando a raiz q-ésima, temos que

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathcal{F}^{-1}(g\rho_j\mathcal{F}(v))\|_{L^s}^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\|\mathcal{F}^{-1}[(\rho_{j-1} + \rho_j + \rho_j)\mathcal{F}(v)]\|_{L^p}\Big)^q\Big)^{\frac{1}{q}} \tag{3.2.8}$$

Finalmente, usando a desigualdade de Minkowski, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\|\mathcal{F}^{-1}[(\rho_{j-1} + \rho_j + \rho_j)\mathcal{F}(v)]\|_{L^p}\Big)^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \\
&\quad\leqslant \Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\|\mathcal{F}^{-1}(\rho_{j-1}\mathcal{F}(v))\|_{L^p} + \|\mathcal{F}^{-1}(\rho_j\mathcal{F}(v))\|_{L^p} + \|\mathcal{F}^{-1}(\rho_{j+1}\mathcal{F}(v))\|_{L^p}\Big)^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\leqslant \sum_{k=-1}^{1}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\|\mathcal{F}^{-1}(\rho_{j+k}\mathcal{F}(v))\|_{L^p}\Big)^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\leqslant 3\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\|\mathcal{F}^{-1}(\rho_j\mathcal{F}(v))\|_{L^p}\Big)^q\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Substituindo (3.2.9) em (3.2.8), concluímos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}^{-1}(g\mathcal{F}(v))\|_{B^0_{s,q}} &= \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathcal{F}^{-1}(g\rho_j\mathcal{F}(v))\|_{L^s}^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant 3C\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\|\mathcal{F}^{-1}(\rho_j\mathcal{F}(v))\|_{L^p}\Big)^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= 3C\|v\|_{B^0_{p,q}},
\end{aligned}$$

para $j = 0, 1, \cdots$. □

Observação 3.2.16. Escolhendo $q = 2$ no Teorema 3.2.15 e usando o Teorema 3.2.14, concluímos que

$$\|\mathcal{F}^{-1}(g\mathcal{F}(v))\|_{L^s} \leqslant AC\|v\|_{L^p}. \tag{3.2.10}$$

4

UM LEMA DO TIPO LITTMAN

Este capítulo é voltado ao estudo de um lema do tipo Littman que é uma ferramenta chave para obter estimativas $L^p - L^q$ na linha conjugada para soluções do problema de Cauchy para a equação da onda.

Teorema 4.0.1 (Lema do tipo do Littman)**.** *Dado τ_0 um número positivo grande, consideremos, para $\tau \geqslant \tau_0$, a integral oscilante*

$$\mathcal{F}^{-1}_{\eta \to x}(e^{\pm i\tau|\eta|}v(\eta)),$$

com $v \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ e $\operatorname{supp}(v) \subseteq \left\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right\}$. Então, vale a seguinte estimativa $L^\infty - L^\infty$

$$\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta \to x}(e^{\pm i\tau|\eta|}v(\eta))\|_{L^\infty} \leqslant C(1+\tau)^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{|\alpha| \leqslant s} \|D^\alpha_\eta v(\eta)\|_{L^\infty},$$

onde $s > \frac{n+3}{2}$.

Vamos separar nossa discussão em duas seções. Por primeiro, vamos desenvolver o método da fase estacionária e na segunda seção, fazendo o uso desse método, demonstramos o Teorema 4.0.1.

4.1 MÉTODO DA FASE ESTACIONÁRIA

Nesta seção, seguindo [19, Capítulo 8] e [10, Capítulo 2], estudamos o comportamento de uma classe especial de integrais da forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}u(x)\,dx, \tag{4.1.1}$$

onde $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é chamada de função amplitude e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é chamada de função de fase, ambas com valores reais. Vamos ver que um princípio básico sobre a análise de integrais oscilatórias da forma (4.1.1) é de que, a medida que o gradiente da função de fase não se anula, a integral decresce rapidamente em λ e, portanto, a maior contribuição vem dos pontos onde o gradiente de ϕ se anula.

A fim de simplificar o texto, vamos identificar por $M(m \times n)$ o conjunto das matrizes reais $m \times n$ e, se $Q \in M(n \times n)$ é uma matriz simétrica e invertível com r autovalores positivos e $n - r$ negativos, denotamos $\mathrm{sgn} Q = r - (n - r)$. Ainda, se $\det Q \neq 0$, dizemos que Q é uma matriz não degenerada.

Proposição 4.1.1. *Supõe que* $|\nabla \phi(x)| \geqslant c > 0$ *para todo* $x \in \mathrm{supp}(u)$*. Então, para todo* $N \geqslant 0$*,*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} u(x) dx \right| \leqslant c_N \lambda^{-N},$$

quando $\lambda > 0$*.*

Demonstração. Consideremos o operador

$$L := \frac{1}{i\lambda} \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde $a(x) = \frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|^2}$. Temos que

$$\begin{aligned} L\left(e^{i\lambda\phi(x)}\right) &= \frac{1}{i\lambda} \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \frac{\partial e^{i\lambda\phi(x)}}{\partial x_k} \\ &= \frac{1}{i\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\nabla\phi(x)|^2} \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_k} \frac{\partial e^{i\lambda\phi(x)}}{\partial x_k} \\ &= e^{i\lambda\phi(x)}. \end{aligned}$$

Dessa forma, usando integração por partes e o fato de que u tem suporte compacto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}u(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} L\big(e^{i\lambda\phi(x)}\big)u(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{i\lambda}\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{\partial e^{i\lambda\phi(x)}}{\partial x_k}u(x)dx \\
&= \frac{1}{i\lambda}\sum_{k=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} a_k(x)\frac{\partial e^{i\lambda\phi(x)}}{\partial x_k}u(x)dx \\
&= -\frac{1}{i\lambda}\sum_{k=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\frac{\partial(a_k u)}{\partial x_k}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\left(-\frac{1}{i\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(a_k u)}{\partial x_k}(x)\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}L^t u(x)dx,
\end{aligned}$$

onde

$$L^t u = -\frac{1}{i\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(a_k u)}{\partial x_k}.$$

Da mesma forma, para cada $N \geqslant 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}u(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}(L^t)^N u(x)dx \tag{4.1.2}$$

O resultado segue tomando o valor absoluto em ambos os lados de (4.1.2). $\square$

Agora, um questionamento natural é sobre o que acontece com (4.1.1) quando esta possui um ponto crítico não degenerado, ou seja, quando $\phi'(x_0) = 0$ e $\phi''(x) \neq 0$ para algum x_0. Uma bom indicativo do comportamento da integral, e que também é o caso que utilizamos nesta dissertação, vem de quando $\phi(x)$ é uma função quadrática, em que a origem é um ponto crítico não degenerado. Em específico, vamos analisar a integral com

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx\rangle,$$

sendo Q uma matriz real $n \times n$, simétrica e com determinante não nulo.

Interessados em desenvolver o Método da Fase Estacionária, precisamos dos seguintes resultados que dizem respeito à transformada de Fourier de funções Gaussianas imaginárias.

Lema 4.1.2. *Sejam* A *uma matriz* $n \times n$ *Hermitiana e* $f(x) = e^{-\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}}$. *Valem*

(a) *Se* $\langle \operatorname{Re} Ax, x\rangle > 0$, *então* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$;

(b) *Se* $\langle \operatorname{Re} Ax, x\rangle = 0$, *então* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. *(a)* Caso $\langle \operatorname{Re} Ax, x\rangle > 0$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}} \right| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{\langle \operatorname{Re} Ax,x\rangle}{2}} \right| \left| e^{-i\frac{\langle \operatorname{Im} Ax,x\rangle}{2}} \right| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{\langle \operatorname{Re} Ax,x\rangle}{2}} \right| dx < \infty.\end{aligned}$$

Logo, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) Caso $\langle \operatorname{Re} Ax, x\rangle = 0$, começaremos verificando que $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. Para isso,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}} \right| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{\langle \operatorname{Re} Ax,x\rangle}{2}} \right| \left| e^{-i\frac{\langle \operatorname{Im} Ax,x\rangle}{2}} \right| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 1 dx = \infty.\end{aligned}$$

Logo, $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, para verificar que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, note que a linearidade é imediata e, então, resta provarmos a continuidade. Para isso, seja $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim, segue da Proposição 3.1.6 que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}} \phi_j(x) dx \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}} \right| |\phi_j(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_j(x)| dx \to 0.$$

Sendo assim, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

Lema 4.1.3. *Se* A *é uma matriz* $n \times n$ *Hermitiana tal que* $\langle \operatorname{Re} Ax, x\rangle > 0$, *então*

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}}\right)(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}} dx\right) e^{-\frac{\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle}{2}}.$$

Demonstração. Definimos

$$u(x) = e^{-\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}}.$$

Observe que $\langle \mathrm{Re}Ax, x\rangle > 0$ e, do Lema 4.1.2, segue que $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Agora, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$(D_j u)(x) = i(Ax)_j u(x). \tag{4.1.3}$$

Por outro lado, se v é uma distribuição satisfazendo (4.1.3), então, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} D_j\left(v(x)e^{\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}}\right) &= (D_j v)(x)e^{\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}} - v(x)i(Ax)_j e^{\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}} \\ &= i(Ax)_j v(x)e^{\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}} - i(Ax)_j v(x)e^{\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $v(x)e^{\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}}$ é constante e segue que $v(x) = v(0)e^{-\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}}$.

Aplicando a transformada de Fourier em (4.1.3) e usando o Teorema 3.1.24, segue que, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\xi_j \hat{u} = -i(AD)_j \hat{u}.$$

Assim,

$$D_j \hat{u} = i(A^{-1}\xi)_j \hat{u}$$

e, portanto, aplicando o mesmo que foi feito no caso da equação diferencial ordinária em (4.1.3), temos

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \hat{u}(0)e^{-\frac{\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle}{2}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle Ax,x\rangle}{2}}dx\right)e^{-\frac{\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle}{2}}. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

□

De posse desses resultados, vamos calcular a transformada de Fourier de

$$u(x) = e^{i\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}},$$

onde $Q \in M(n \times n)$ é uma matriz simétrica real não degenerada. Nesse caso, como Q é uma matriz real, $\langle \mathrm{Re}(-iQ)x, x\rangle = 0$ e, então, segue do Lema

4.1.2, que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $u \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. Sendo assim, precisamos calcular a sua transformada de Fourier como distribuição temperada e, para isso, utilizamos a continuidade do operador $\mathcal{F}$ no espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, aproximando u por funções que satisfazem as hipóteses do Lema 4.1.3.

Lema 4.1.4. *Se* $Q \in M(n \times n)$ *é uma matriz simétrica não degenerada, então*

$$\mathcal{F}\left(e^{i\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}}\right)(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}Q} |\det Q|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}i\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}.$$

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$ e $Q_\epsilon := Q + \epsilon i I$, onde I é a matriz identidade de ordem n. Vamos começar verificando que $e^{i\frac{\langle Q_\epsilon x,x\rangle}{2}} \to e^{i\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}}$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\epsilon \to 0^+$. Para isso, dada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$e^{i\frac{\langle Q_\epsilon x,x\rangle}{2}}\phi(x) = e^{i\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}} e^{-\epsilon\frac{\langle x,x\rangle}{2}}\phi(x) \to e^{i\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}}\phi(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ quando $\epsilon \to 0^+$. Ainda,

$$\left|e^{i\frac{\langle Q_\epsilon x,x\rangle}{2}}\phi(x)\right| = \left|e^{i\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}} e^{-\epsilon\frac{\langle x,x\rangle}{2}}\phi(x)\right| = \left|e^{-\epsilon\frac{\langle x,x\rangle}{2}}\phi(x)\right| \leqslant |\phi(x)|,$$

e $|\phi| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ uma vez que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\langle Q_\epsilon x,x\rangle}{2}}\phi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}}\phi(x)dx$$

quando $\epsilon \to 0^+$.

Agora, para o cálculo da transformada de Fourier de $e^{i\frac{\langle Q_\epsilon x,x\rangle}{2}}$, tomando $A = -iQ_\epsilon$, temos que

$$\langle \operatorname{Re} Ax, x\rangle = \langle \operatorname{Re}(-iQ + \epsilon I)x, x\rangle = \epsilon\langle x,x\rangle > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Assim, usando o Lema 4.1.3, segue que

$$\mathcal{F}\left(e^{i\frac{\langle Q_\epsilon x,x\rangle}{2}}\right)(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\langle Q_\epsilon x,x\rangle}{2}}dx\right) e^{-i\frac{\langle Q_\epsilon^{-1}\xi,\xi\rangle}{2}}. \tag{4.1.5}$$

Agora, como $Q \in M(n \times n)$ é uma matriz simétrica, existe $P \in M(n \times n)$ ortogonal tal que $P^T Q P = D$, onde D é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de Q. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\langle Q_\epsilon x,x\rangle}{2}} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\langle Qx,x\rangle}{2} - \frac{\epsilon\langle x,x\rangle}{2}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\langle DP^Tx,P^Tx\rangle}{2} - \frac{\epsilon\langle P^Tx,P^Tx\rangle}{2}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{\langle Dy,y\rangle}{2} - \frac{\epsilon\langle y,y\rangle}{2}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(i\lambda_k - \epsilon)y_k^2} dy \\
&= \prod_{k=1}^n 2\int_0^\infty e^{\frac{1}{2}(i\lambda_k-\epsilon)y^2} dy.
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\lambda_k > 0$ para $1 \leqslant k \leqslant r$ e $\lambda_k < 0$ para $r+1 \leqslant k \leqslant n$.

Se $1 \leqslant k \leqslant r$, então $\lambda_k > 0$ e consideremos $z_k = (\epsilon - i\lambda_k)^{\frac{1}{2}} y$. Sejam ϕ_k e ψ_k os argumentos de z_k e z_k^2, respectivamente. Escrevendo z_k^2 na forma polar, temos

$$z_k^2 = |z_k^2| e^{i\psi_k} = |z_k|^2 e^{i\psi_k}. \tag{4.1.7}$$

Por outro lado, usando a forma polar de z_k, também temos que

$$z_k^2 = |z_k|^2 e^{i2\phi_k}. \tag{4.1.8}$$

Assim, combinando as equações (4.1.7) e (4.1.8), temos que $\psi_k = 2\phi_k$. Como $\epsilon, \lambda > 0$, temos que $\psi_k \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Tomando o ramo da raiz quadrada de forma que $\operatorname{Im}(\epsilon - i\lambda_k)^{\frac{1}{2}} < 0$, temos que $sen(\phi_k) \leqslant 0$ e, então, $\phi_k \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$. Dessa forma,

$$\int_0^\infty e^{\frac{1}{2}(i\lambda_k-\epsilon)y^2} dy = \frac{1}{(\epsilon - i\lambda_k)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Gamma_k} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \tag{4.1.9}$$

onde Γ_k é o contorno apresentado na figura 4.1.

Agora, vamos verificar que

$$\int_{\Gamma_k} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

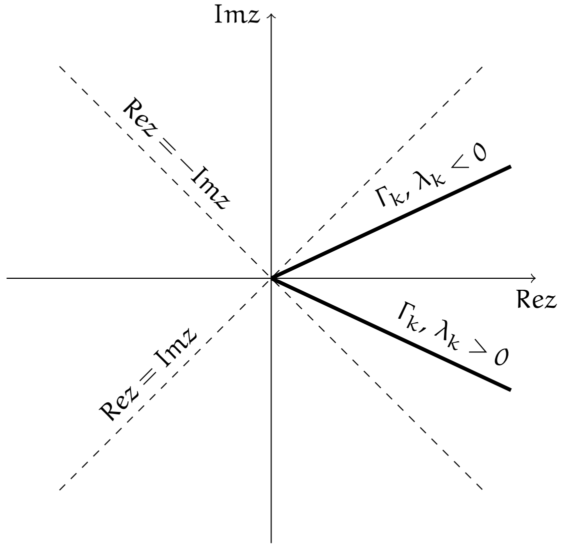

Figura 4.1: Contorno relacionado à mudança de variáveis do Lema 4.1.4.

Para isso, dado $R > 0$, consideremos o contorno definido em três pedaços dados por

$$\begin{cases} L_1 : |z| : R \to 0, & \theta = 0, \\ L_2 : |z| = R, & \theta : \theta_k \to 0, \\ L_3 : |z| : 0 \to R, & \theta = \theta_k, \end{cases} \tag{4.1.10}$$

que também estão apresentados na figura 4.2, onde as setas indicam a direção da integração de contorno.

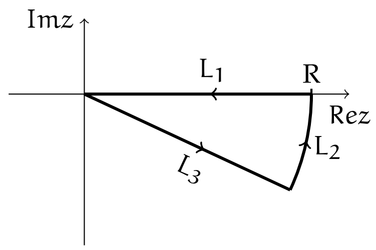

Figura 4.2: Contorno definido na equação (4.1.10).

Comecemos por notar que

$$\int_{\Gamma_k} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \lim_{R\to\infty} \int_{L_3} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Ainda, temos que $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ é uma função analítica sem singularidades. Portanto, pelo Teorema de Resíduos (D.0.5), segue que

$$\int_{L_1} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \int_{L_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \int_{L_3} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0. \qquad (4.1.11)$$

Analisando as duas primeiras parcelas da soma (4.1.11), temos que

$$\int_{L_1} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_R^0 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -\int_0^R e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

e

$$\left| \int_{L_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right| \leqslant \frac{1}{e^{\frac{1}{2}R^2}} \frac{2\pi R}{8} \leqslant \frac{\pi R}{4e^{\frac{R^2}{2}}} \to 0$$

quando $R \to \infty$. Assim, tomando o limite quando $R \to \infty$ em (4.1.11), segue que

$$\int_{\Gamma_k} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

e, substituindo em (4.1.9), concluímos que

$$\int_0^\infty e^{\frac{1}{2}(i\lambda_k - \epsilon)y^2} dy = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{2(\epsilon - i\lambda_k)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sendo assim,

$$\prod_{k=1}^r 2\int_0^\infty e^{\frac{1}{2}(i\lambda_k - \epsilon)y^2} dy = (2\pi)^{\frac{r}{2}} \prod_{k=1}^r \frac{1}{(\epsilon - i\lambda_k)^{\frac{1}{2}}}$$

e, tomando o limite quando $\epsilon \to 0^+$, temos

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{(\epsilon - i\lambda_k)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(-i)^{\frac{1}{2}}|\lambda_k|^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{|\lambda_k|^{\frac{1}{2}}}.$$

Caso $r+1 \leqslant k \leqslant n$, temos que $\lambda_k < 0$ e consideremos $z = (\epsilon - i\lambda_k)^{\frac{1}{2}} y$ tomando o ramo da raiz quadrada tal que $\operatorname{Im}(\epsilon - i\lambda_k)^{\frac{1}{2}} > 0$. Seguindo raciocínio análogo ao do caso anterior, segue que

$$\prod_{k=r+1}^{n} 2\int_0^{\infty} e^{\frac{1}{2}(i\lambda_k - \epsilon)y^2} dy = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{k=r+1}^{n} \frac{1}{(\epsilon - i\lambda_k)^{\frac{1}{2}}}.$$

Novamente, tomando o limite quando $\epsilon \to 0^+$, temos

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{(\epsilon - i\lambda_k)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{i^{\frac{1}{2}} |\lambda_k|^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{|\lambda_k|^{\frac{1}{2}}}.$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(e^{i\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}}\right)(\xi) &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \mathcal{F}\left(e^{i\frac{\langle Q_\epsilon x,x\rangle}{2}}\right)(\xi) \\
&= (2\pi)^{\frac{r}{2}} \left(\prod_{k=1}^{r} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{|\lambda_k|^{\frac{1}{2}}}\right) (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \left(\prod_{k=r+1}^{n} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{|\lambda_k|^{\frac{1}{2}}}\right) e^{-i\frac{\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}{2}} \\
&= e^{-i\frac{\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}(r-(n-r))}}{|\lambda_1 \cdots \lambda_n|^{\frac{1}{2}}} \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} Q} |\det Q|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}i\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}.
\end{aligned}$$

□

De posse desse resultado, podemos enunciar o Método da Fase Estacionária.

Teorema 4.1.5 (Método da Fase Estacionária). *Seja* $Q \in M(n \times n)$ *uma matriz simétrica e não degenerada. Então, para* $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $N \geqslant 1$*, temos que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}} u(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} Q}}{k!(2i)^k |\det Q|^{\frac{1}{2}} \lambda^{k+\frac{n}{2}}} (\langle Q^{-1}D_x, D_x\rangle^k u)(0) + S_N(u,\lambda),$$

onde

$$|S_N(u,\lambda)| \leqslant \frac{C_Q}{2^N N!} \lambda^{-\frac{n}{2}-N} \sum_{|\alpha| \leqslant s} \left\| D^\alpha \langle Q^{-1}D, D\rangle^N u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

para $s > \frac{n}{2}$.

Demonstração. Usando o item *(b)* do Teorema 3.1.10 e o Lema 4.1.4, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}} u(x)dx = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} Q}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\lambda^{\frac{n}{2}}|\det Q|^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}{2\lambda}} \hat{u}(\xi)d\xi. \tag{4.1.12}$$

Ainda, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange (C.0.4), temos que $\left| e^{it} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(it)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|t|^N}{N!}$ para $t \in \mathbb{R}$ e, então,

$$e^{-i\frac{\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}{2\lambda}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2\lambda i}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle\right)^k + R_N(\xi,\lambda),$$

onde

$$|R_N(\xi,\lambda)| \leqslant \frac{(2\lambda)^{-N}}{N!}|\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle|^N.$$

Agora, note que, se $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi)e^{i\cdot 0\cdot\xi}d\xi = (2\pi)^n g(0).$$

Assim, usando o item *(a)* do Teorema 3.1.7, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle^k \hat{u}(\xi)d\xi = (2\pi)^n(\langle Q^{-1}D_x, D_x\rangle^k u)(0).$$

Dessa forma, definindo

$$\tilde{R}_N(u,\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} R_N(\xi,\lambda)\hat{u}(\xi)d\xi, \tag{4.1.13}$$

temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}{2\lambda}} \hat{u}(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2\lambda i}\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle\right)^k \hat{u}(\xi)d\xi + \tilde{R}_N(u,\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2\lambda i)^k k!} \int_{\mathbb{R}^n} \langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle^k \hat{u}(\xi)d\xi + \tilde{R}_N(u,\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(2\pi)^n}{(2\lambda i)^k k!}(\langle Q^{-1}D_x, D_x\rangle^k u)(0) + \tilde{R}_N(u,\lambda).\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Portanto, aplicando (4.1.13) e (4.1.14) na equação (4.1.12) e usando o Corolário 3.1.11, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}} u(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{e\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}Q}}{k!(2i)^k|\det Q|^{\frac{1}{2}}\lambda^{k+\frac{n}{2}}}(\langle Q^{-1}D_x, D_x\rangle^k u)(0) + S_N(u,\lambda),$$

onde

$$\begin{aligned}
|S_N(u,\lambda)| &= \left| \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}Q}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\lambda^{\frac{n}{2}}|\det Q|^{\frac{1}{2}}} \tilde{R}_N(u,\lambda) \right| \\
&= \left| \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}Q}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\lambda^{\frac{n}{2}}|\det Q|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} R_N(\xi,\lambda)\hat{u}(\xi)d\xi \right| \\
&\leqslant \frac{C_Q}{2^N N!}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\lambda^{-\frac{n}{2}-N} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle^N \hat{u}(\xi) \right| d\xi \\
&\leqslant \frac{\widetilde{C_Q}}{2^N N!}\lambda^{-\frac{n}{2}-N} \sum_{|\alpha|\leqslant s} \left|\left| D^\alpha \langle Q^{-1}D, D\rangle^N u \right|\right|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

sendo $s > \frac{n}{2}$. □

4.2 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 4.0.1

Nesta seção, vamos demonstrar o Teorema 4.0.1. Fazemos a prova da estimativa para $\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to x}(e^{-i\tau|\eta|}v(\eta))$ e o outro caso é análogo.

Comecemos por denotar $V = \left\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right\}$.

Como $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos $e^{-i\tau|\cdot|}v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e, então, escrevendo $y = \frac{x}{\tau}$, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to x}(e^{-i\tau|\eta|}v(\eta)) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta\cdot x}e^{-i\tau|\eta|}v(\eta)d\eta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_V e^{i\tau(\eta\cdot y - |\eta|)}v(\eta)d\eta.
\end{aligned}$$

Assim, precisamos estimar

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left|\int_V e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}v(\eta)d\eta\right|. \tag{4.2.1}$$

Agora, vamos descrever informalmente e de maneira sucinta quais serão os próximos passos. Começamos definindo um operador linear L tal que $e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}$ seja um ponto fixo. Para $\delta > 0$, vamos analisar o que acontece com (4.2.1) quando $|y| \notin [1-\delta, 1+\delta]$ e quando $|y| \in [1-\delta, 1+\delta]$.

No caso em que $|y| \notin [1-\delta, 1+\delta]$, usamos que $e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}$ é ponto fixo de L para escrever a integral em (4.2.1) como uma nova integral que envolve N aplicações do operador transposto de L, L^t, em ν. Vamos verificar que, nesta região, cada aplicação de L^t em ν gera um decaimento na ordem de τ^{-1} e, então, chegamos na estimativa desejada. Este caso é tratado na subseção 4.2.1.

O caso em que $|y| \in [1-\delta, 1+\delta]$ é tratado na subseção 4.2.2. Começamos garantindo que basta estimar (4.2.1) para $y = (s, 0, \cdots, 0)$ com $s \in [1-\delta, 1+\delta]$. Depois, consideramos uma vizinhança K_δ de y de modo que, quando $\eta \notin K_\delta$, o resultado segue aproximando ν por uma sequência de funções de modo que podemos usar o mesmo argumento usado no caso em que $|y| \notin [1-\delta, 1+\delta]$.

A maior dificuldade da demonstração está no caso em que $\eta \in K_\delta$, já que aqui não conseguimos garantir que L^t tem decaimento da ordem de τ^{-1}. Nesta parte, usamos o Lema de Morse para escrever a função de fase de forma mais simplificada e o método da fase estacionária irá garantir o decaimento desejado.

Agora, vamos tornar a discussão acima mais precisa. Começamos introduzindo a função vetorial

$$\phi = \phi(\tau, y, \eta) := \tau\left(y - \frac{\eta}{|\eta|}\right)$$

e definimos o operador L por

$$L := \frac{1}{|\phi(\tau, y, \eta)|^2} \sum_{j=1}^{n} \phi_j(\tau, y, \eta) \frac{1}{i} \partial_{\eta_j},$$

onde ϕ_j representa a j-ésima componente de ϕ.

Com isso, note que

$$
\begin{aligned}
Le^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)} &= \frac{1}{|\phi(\tau,y,\eta)|^2}\sum_{j=1}^{n}\phi_j(\tau,y,\eta)\frac{1}{i}\partial_{\eta_j}e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\\
&= \frac{1}{\left|\tau\left(y-\frac{\eta}{|\eta|}\right)\right|^2}\sum_{j=1}^{n}\tau\left(y_j-\frac{\eta_j}{|\eta|}\right)\frac{1}{i}i\tau\left(y_j-\frac{\eta_j}{|\eta|}\right)e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\\
&= \frac{1}{\left|y-\frac{\eta}{|\eta|}\right|^2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-\frac{\eta_j}{|\eta|}\right)^2 e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\\
&= e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)},
\end{aligned}
$$

ou seja, $e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}$ é ponto fixo de L, por isso a importância da introdução deste operador.

Agora, vamos dividir a demonstração no partes: por primeiro, quando $|y| \notin [1-\delta, 1+\delta]$ e depois quando $|y| \in [1-\delta, 1+\delta]$, com $\delta > 0$.

4.2.1 *Caso* $|y| \notin [1-\delta, 1+\delta]$

Neste caso, temos $||y|-1| \geqslant \delta$ e, então,

$$
\left|y-\frac{\eta}{|\eta|}\right| \geqslant \left||y|-\left|\frac{\eta}{|\eta|}\right|\right| = ||y|-1| \geqslant \delta
$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Assim, vale que

$$
\begin{aligned}
|\phi(\tau,y,\eta)| &= \left|\tau\left(y-\frac{\eta}{|\eta|}\right)\right|\\
&= \tau\left|y-\frac{\eta}{|\eta|}\right|\\
&\geqslant \tau\delta
\end{aligned}
\tag{4.2.2}
$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Usando que $e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}$ é ponto fixo de L, temos que

$$\begin{aligned}
\int_V e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\nu(\eta)d\eta &= \int_V Le^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\nu(\eta)d\eta \\
&= \int_V \frac{1}{|\phi(\tau,y,\eta)|^2}\sum_{j=1}^{n}\phi_j(\tau,y,\eta)\frac{1}{i}\partial_{\eta_j}e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\nu(\eta)d\eta \\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_V \frac{1}{|\phi(\tau,y,\eta)|^2}\phi_j(\tau,y,\eta)\frac{1}{i}\partial_{\eta_j}e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\nu(\eta)d\eta.
\end{aligned}$$

Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$, vamos analisar a integral

$$\int_V \frac{1}{|\phi(\tau,y,\eta)|^2}\phi_j(\tau,y,\eta)\frac{1}{i}\partial_{\eta_j}e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\nu(\eta)d\eta. \tag{4.2.3}$$

Primeiramente, por (4.2.2), temos que

$$\begin{aligned}
&\int_V \left|\frac{\phi_j(\tau,y,\eta)}{|\phi(\tau,y,\eta)|^2}\frac{1}{i}\partial_{\eta_j}e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\nu(\eta)\right| d\eta \\
&\qquad\leqslant \int_V \left|\frac{1}{|\phi(\tau,y,\eta)|}\partial_{\eta_j}e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\nu(\eta)\right| d\eta \\
&\qquad\leqslant \frac{||\nu(\eta)||_{L^\infty}}{\tau\delta}\int_V |\partial_{\eta_j}e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}|d\eta \\
&\qquad\leqslant \frac{||\nu(\eta)||_{L^\infty}}{\tau\delta}\int_V \left|i\tau\left(y_j-\frac{\eta_j}{|\eta|}\right)e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\right| d\eta \\
&\qquad\leqslant \frac{||\nu(\eta)||_{L^\infty}}{\delta}\int_V \left|y_j-\frac{\eta_j}{|\eta|}\right| d\eta \\
&\qquad\leqslant \frac{||\nu(\eta)||_{L^\infty}}{\delta}\left(\int_V |y_j|d\eta+\int_V\left|\frac{\eta_j}{|\eta|}\right| d\eta\right) \\
&\qquad\leqslant \frac{||\nu(\eta)||_{L^\infty}(|y_j|+1)}{\delta}\int_V 1d\eta \\
&\qquad< \infty,
\end{aligned}$$

ou seja, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$\frac{1}{|\phi(\tau,y,\eta)|^2}\phi_j(\tau,y,\eta)\frac{1}{i}\partial_{\eta_j}e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\nu(\eta)$$

é integrável com relação a variável η. Assim, pelo Teorema de Fubini, podemos mudar a ordem de integração em (4.2.3) e, usando integração por partes, temos

$$\int_V \partial_{\eta_j} e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)} \frac{\phi_j(\tau,y,\eta)}{|\phi(\tau,y,\eta)|^2}\frac{1}{i}\nu(\eta)d\eta$$
$$= -\int_V e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\partial_{\eta_j}\left(\frac{\phi_j(\tau,y,\eta)}{|\phi(\tau,y,\eta)|^2}\frac{1}{i}\nu(\eta)\right)d\eta.$$

Com isso, temos que o operador transposto de L, denotado por L^t, é da forma

$$L^t\nu = i\sum_{j=1}^{n}\partial_{\eta_j}\left(\frac{\phi_j(\tau,y,\eta)}{|\phi(\tau,y,\eta)|^2}\nu(\eta)\right). \tag{4.2.4}$$

Sendo assim, aplicando N integrações por partes, segue que

$$\left|\int_V e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\nu(\eta)d\eta\right| = \left|\int_V e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}(L^t)^N\nu(\eta)d\eta\right|.$$

Afirmação 4.2.1. *Dado α um multi-índice com $|\alpha| = M \in \mathbb{N}$, considere $J_M = \{4,\dots,2(M+1)\}$. Então, para cada $j \in J_M$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ de modo que*

$$\partial_\eta^\alpha\left(\frac{1}{|\phi(\tau,y,\eta)|^2}\right) = \sum_{j\in J_M}\frac{1}{|\phi(\tau,y,\eta)|^j}\sum_{k=1}^{n_j}c_j^k f_j^k(\tau,y,\eta),$$

onde c_j^k é constante e f_j^k é produto de $j-2$ funções coordenadas de ϕ e/ou derivadas parciais de ordem no máximo M de funções coordenadas de ϕ.

Demonstração. Fazemos por indução em M e, a fim de simplificar a escrita, as variáveis de $\phi = \phi(\tau,y,\eta)$ são omitidas. Para $M = 1$, consideremos, sem perda de generalidade, $\alpha = e_1 = (1,0,\dots,0)$. Neste caso,

$$\partial_\eta^\alpha\left(\frac{1}{|\phi|^2}\right) = \frac{1}{|\phi|^4}\sum_{k=1}^{n} -2\phi_k\partial_{\eta_1}\phi_k.$$

Logo, o resultado vale para $M = 1$.

Supondo verdadeiro para algum $M \in \mathbb{N}$, queremos garantir a validade do resultado para $M+1$. Novamente, sem perda de generalidade, fazemos para um multi-índice α com $|\alpha| = M+1$ e $\alpha = \beta + e_1$ com $|\beta| = M$. Pela hipótese de indução, já sabemos que, para cada $j \in J_M$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\partial_\eta^\beta \left(\frac{1}{|\phi|^2} \right) = \sum_{j \in J_m} \frac{1}{|\phi|^j} \sum_{k=1}^{n_j} c_j^k f_j^k,$$

onde c_j^k é constante e f_j^k é produto de $j-2$ funções coordenadas de ϕ e/ou derivadas parciais de funções coordenadas de ϕ. Assim,

$$\begin{aligned} \partial_\eta^\beta \left(\frac{1}{|\phi|^2} \right) &= \partial_\eta^{e_1} \partial_\eta^\beta \left(\frac{1}{|\phi|^2} \right) \\ &= \partial_{\eta_1} \left(\sum_{j \in J_m} \frac{1}{|\phi|^j} \sum_{k=1}^{n_j} c_j^k f_j^k \right). \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Agora, para cada $j \in J_M$ e $1 \leqslant k \leqslant n_j$, temos

$$\begin{aligned} \partial_{\eta_1} \left(\frac{1}{|\phi|^j} c_j^k f_j^k \right) &= c_j^k \left[\partial_{\eta_1} \left(\frac{1}{|\phi|^j} \right) f_j^k + \frac{1}{|\phi|^j} \partial_{\eta_1} f_j^k \right] \\ &= c_j^k \left[\frac{-j}{|\phi|^{j+2}} \sum_{l=1}^{n} \phi_l \partial_{\eta_1} \phi_l f_j^k + \frac{1}{|\phi|^j} \partial_{\eta_1} f_j^k \right]. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Substituindo (4.2.6) em (4.2.5), chegamos em

$$\partial_\eta^\beta \left(\frac{1}{|\phi|^2} \right) = \sum_{j \in J_M} \left(\frac{1}{|\phi|^{j+2}} \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{l=1}^{n} -j c_j^k \phi_l \partial_{\eta_1} \phi_l f_j^k + \frac{1}{|\phi|^j} \sum_{k=1}^{n_j} c_j^k \partial_{\eta_1} f_j^k \right). \tag{4.2.7}$$

Como f_j^k é um produto de $j-2$ fatores sendo eles funções coordenadas de ϕ e/ou derivadas parciais de funções coordenadas de ϕ, segue que $\phi_l \partial_{\eta_1} \phi_l f_j^k$ é um produto de j funções coordenadas de ϕ e/ou derivadas parciais de funções coordenadas de ϕ. Por outro lado, pela regra da derivada do produto de várias funções, também temos que $\partial_{\eta_1} f_j^k$ é uma soma de $j-2$ produtos de $j-2$ funções coordenadas e derivadas parciais de funções coordenadas de ϕ. Com isso, reorganizando os termos, note que é possível reescrever (4.2.7) de forma que, para cada $j \in J_{M+1}$, existe $m_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\partial_\eta^\beta \left(\frac{1}{|\phi|^2} \right) = \sum_{j \in J_{M+1}} \frac{1}{|\phi|^j} \sum_{k=1}^{m_j} d_j^k g_j^k,$$

onde d_j^k é constante e g_j^k é produto de $j-2$ funções coordenadas de ϕ e/ou derivadas parciais de funções coordenadas de ϕ. $\square$

Afirmação 4.2.2. *Seja* L^t *o operador dado em* (4.2.4). *Então, para todo* $N \in \mathbb{N}$, *existe* $A > 0$ *constante tal que*

$$\int_V |(L^t)^N v(\eta)| d\eta \leqslant A\tau^{-N} \sum_{|\alpha| \leqslant N} \int_V |D_\eta^\alpha v(\eta)| d\eta.$$

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução e, novamente, as variáveis das funções $\phi = \phi(\tau, y, \eta)$ e $v = v(\eta)$ são omitidas. Para $N = 1$, temos

$$\begin{aligned} L^t v &= i \sum_{j=1}^{n} \partial_{\eta_j} \left(\frac{\phi_j}{|\phi|^2} v \right) \\ &= i \sum_{j=1}^{n} \left(\partial_{\eta_j} \frac{\phi_j}{|\phi|^2} v + \frac{\phi_j}{|\phi|^2} \partial_{\eta_j} v \right) \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

e as derivadas parciais de primeira ordem de $\frac{\phi_j}{|\phi|^2}$ são dadas por

$$\partial_{\eta_j} \frac{\phi_j}{|\phi|^2} = \frac{\partial_{\eta_j} \phi_j |\phi|^2 - \phi_j \partial_{\eta_j} |\phi|^2}{|\phi|^4}. \tag{4.2.9}$$

Calculando as derivadas parciais que aparecem na expressão (4.2.9), temos

$$\partial_{\eta_j} \phi_j = \tau \left(-\frac{1}{|\eta|} + \frac{\eta_j^2}{|\eta|^3} \right) \tag{4.2.10}$$

e

$$\begin{aligned} \partial_{\eta_j} |\phi|^2 &= 2 \sum_{i=1}^{n} \phi_i \partial_{\eta_j} \phi_i \\ &= 2\tau \left[\phi_j \left(-\frac{1}{|\eta|} + \frac{\eta_j^2}{|\eta|^3} \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \phi_i \left(\frac{\eta_i \eta_j}{|\eta|^3} \right) \right]. \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Dessa forma, como $\eta \in V$, usando as equações (4.2.10) e (4.2.11) e a estimativa (4.2.2), temos as estimativas

$$\frac{|\partial_{\eta_j} \phi_j|}{|\phi|^2} \leqslant \frac{\tau \left| -\frac{1}{|\eta|} + \frac{\eta_j^2}{|\eta|^3} \right|}{(\delta\tau)^2} \leqslant \frac{4}{\delta^2 \tau} \tag{4.2.12}$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{|\partial_{\eta_j}|\phi|^2|}{|\phi|^3} &\leqslant \frac{2\tau}{|\phi|^3}\left(|\phi_j|\left|-\frac{1}{|\eta|}+\frac{\eta_j^2}{|\eta|^3}\right|+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|\phi_i|\left|\frac{\eta_i\eta_j}{|\eta|^3}\right|\right)\\
&\leqslant \frac{2\tau}{|\phi|^2}\left(4+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{1}{|\eta|}\right)\\
&\leqslant \frac{8+4(n-1)}{\delta^2\tau}.
\end{aligned}
\tag{4.2.13}
$$

Utilizando a representação (4.2.8) e as estimativas (4.2.12) e (4.2.13), chegamos que existe $A>0$ constante tal que

$$
\begin{aligned}
|L^t v(\eta)| &\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\left|\partial_{\eta_j}\frac{\phi_j}{|\phi|^2}\right||v|+\frac{|\phi_j|}{|\phi|^2}|\partial_{\eta_j}v|\right)\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{8+4(n-1)}{\delta^2\tau}|v|+\frac{1}{\delta\tau}|\partial_{\eta_j}v|\right)\\
&\leqslant A\tau^{-1}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D_\eta^\alpha v(\eta)|
\end{aligned}
$$

para todo $\eta\in V$ e, portanto,

$$
\int_V |L^t v(\eta)|d\eta \leqslant A\tau^{-1}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\int_V |D_\eta^\alpha v(\eta)|d\eta.
$$

Supondo a afirmação verdadeira para algum $N\in\mathbb{N}$, ou seja, supondo que existe $A>0$ constante tal que

$$
\int_V |(L^t)^N v(\eta)|d\eta \leqslant A\tau^{-1}\sum_{|\alpha|\leqslant N}\int_V |D_\eta^\alpha v(\eta)|d\eta,
\tag{4.2.14}
$$

vamos verificar o que acontece para $N+1$. Para isso, usando a hipótese de indução dada em (4.2.14), temos que existe $A>0$ constante tal que

$$
\begin{aligned}
\int_V |(L^t)^{N+1}v(\eta)|d\eta &= \int_V |(L^t)^N(L^t v(\eta))|d\eta\\
&\leqslant A\tau^{-N}\sum_{|\alpha|\leqslant N}\int_V |D_\eta^\alpha(L^t v(\eta))|d\eta.
\end{aligned}
\tag{4.2.15}
$$

Agora, para cada multi-índice α com $|\alpha| \leqslant N$, usando o Teorema de Leibniz 2.2.1 temos que

$$
\begin{aligned}
&D_\eta^\alpha(L^t v(\eta)) = \\
&\quad = D_\eta^\alpha\left(i \sum_{j=1}^{n} \partial_{\eta_j} \left(\frac{\phi_j}{|\phi|^2} v \right) \right) \\
&\quad = i \sum_{j=1}^{n} D_\eta^\alpha \left(\partial_{\eta_j} \frac{\phi_j}{|\phi|^2} v + \frac{\phi_j}{|\phi|^2} \partial_{\eta_j} v \right) \\
&\quad = i \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_\eta^\beta \partial_{\eta_j} \frac{\phi_j}{|\phi|^2} D_\eta^{\alpha-\beta} v + \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_\eta^\beta \frac{\phi_j}{|\phi|^2} D_\eta^{\alpha-\beta} \partial_{\eta_j} v \right).
\end{aligned}
\tag{4.2.16}
$$

Finalmente, a fim de estimar $|D_\eta^\alpha(L^t v(\eta))|$ em termos de derivadas parciais de v, segue da representação obtida em (4.2.16) que basta encontrar estimativas para as derivadas parciais de ordem até $N+1$ de $\frac{\phi_j}{|\phi|^2}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Para isso, seja β um multi-índice com $|\beta| \leqslant N+1$. Se $|\beta| = 0$, note que

$$\frac{\phi_j}{|\phi|^2} \leqslant \frac{1}{|\phi|} \leqslant \frac{1}{\delta} \tau^{-1} \tag{4.2.17}$$

uma vez que $|\phi| \geqslant \delta\tau$ para $y \notin [1-\delta, 1+\delta]$.

Caso $|\beta| \neq 0$, usando novamente o Teorema de Leibniz, temos que

$$\partial_\eta^\beta \frac{\phi_j}{|\phi|^2} = \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial_\eta^\gamma \phi_j \partial_\beta^{\beta-\gamma} \frac{1}{|\phi|^2}. \tag{4.2.18}$$

Para todo $i \in \mathbb{N}$, as derivadas parciais de primeira ordem de ϕ_j são dadas por

$$\partial_{\eta_i} \phi_j = \begin{cases} \tau \left(-\frac{1}{|\eta|} + \frac{\eta_j^2}{|\eta|^3} \right), & i = j, \\ \tau \left(\frac{\eta_i \eta_j}{|\eta|^3} \right), & i \neq j. \end{cases}$$

e, então, $\partial_{\eta_i} \phi_j$ é uma função de classe C^∞ em V. Dessa forma, para todo multi-índice γ com $|\gamma| \geqslant 1$, existe A_γ constante tal que

$$|\partial_\eta^\gamma \phi_j| \leqslant A_\gamma \tau \tag{4.2.19}$$

para todo $\eta \in V$. Além disso, como $|\phi| \geqslant \delta\tau$ para $y \notin [1-\delta, 1+\delta]$, usando a estimativa (4.2.19), temos que

$$\frac{|\partial_\eta^\gamma \phi_j|}{|\phi|} \leqslant \frac{A_\gamma}{\delta}. \tag{4.2.20}$$

Por outro lado, a Afirmação 4.2.1 nos diz que se $|\gamma| = M \in \mathbb{N}$ e se definirmos $J_M = \{4, \ldots, 2(M+1)\}$ então, para cada $j \in J_M$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\partial_\eta^\alpha \left(\frac{1}{|\phi|^2} \right) = \sum_{j \in J_M} \frac{1}{|\phi|^j} \sum_{k=1}^{n_j} c_j^k f_j^k, \tag{4.2.21}$$

onde c_j^k é constante e f_j^k é produto de $j-2$ funções coordenadas de ϕ e/ou derivadas parciais de funções coordenadas de ϕ. Assim, usando a estimativa (4.2.20) e o fato de que $\frac{|\phi_j|}{|\phi|} \leqslant 1$, segue que, para cada $j \in J_M$ e cada $1 \leqslant k \leqslant n_j$, existe B_i^k tal que

$$\frac{|f_i^k|}{|\phi|^j} \leqslant \frac{B_i^k}{|\phi|^2}. \tag{4.2.22}$$

Portanto, utilizando a estimativa (4.2.22) na representação (4.2.21), temos que existe B_γ constante tal que

$$\begin{aligned} \left| \partial_\eta^\gamma \frac{1}{|\phi|^2} \right| &\leqslant \sum_{j \in J_M} \frac{1}{|\phi|^j} \sum_{k=1}^{n_j} |c_j^k f_j^k| \\ &\leqslant \sum_{j \in J_M} \frac{1}{|\phi|^2} \sum_{k=1}^{n_j} |c_j^k| B_i^k \\ &\leqslant B_\gamma \frac{1}{|\phi|^2}. \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Usando a representação (4.2.18) e as estimativas (4.2.19) e (4.2.23), chegamos que existe C_β constante tal que

$$\begin{aligned}
\left|\partial_\eta^\beta \frac{\phi_j}{|\phi|^2}\right| &\leqslant |\phi_j|\left|\partial_\eta^\beta \frac{1}{|\phi|^2}\right| + \sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\|\gamma|\neq 0\\ \gamma\neq\beta}} \binom{\beta}{\gamma} |\partial_\eta^\gamma \phi_j| \left|\partial_\eta^{\beta-\gamma}\frac{1}{|\phi|^2}\right| + |\partial_\eta^\beta \phi_j|\frac{1}{|\phi|^2} \\
&\leqslant B_\beta \frac{|\phi_j|}{|\phi|^2} + \sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\|\gamma|\neq 0\\ \gamma\neq\beta}} \binom{\beta}{\gamma} A_\gamma \tau B_{\gamma-\beta}\frac{1}{|\phi|^2} + A_\beta \tau \frac{1}{|\phi|^2} \\
&\leqslant \frac{B_\beta}{\delta}\tau^{-1} + \tau^{-1}\sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\|\gamma|\neq 0\\ \gamma\neq\beta}} \binom{\beta}{\gamma} \frac{A_\gamma B_{\gamma-\beta}}{\delta^2} + \frac{A_\beta}{\delta^2}\tau^{-1} \\
&\leqslant C_\beta \tau^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

Dessa forma, segue da fórmula (4.2.16) e das estimativas (4.2.17) e (4.2.24) que conseguimos C constante tal que

$$|D_\eta^\alpha (L^t v(\eta))| \leqslant C\tau^{-1} \sum_{|\beta|\leqslant N+1} |D_\eta^\beta v(\eta)| \tag{4.2.25}$$

para todo $\eta \in V$. Finalmente, substituindo (4.2.25) em (4.2.15), concluímos que existe $\tilde{A}$ constante tal que

$$\int_V |(L^t)^{N+1} v(\eta)| d\eta \leqslant \tilde{A}\tau^{-N-1} \sum_{|\alpha|\leqslant N+1} \int_V |D_\eta^\alpha v(\eta)| d\eta.$$

□

Usando a Afirmação 4.2.2, concluímos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_V e^{i\tau(\eta\cdot y - |\eta|)} v(\eta) d\eta\right| &\leqslant \int_V \left|e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}(L^t)^N v(\eta)\right| d\eta \\
&\leqslant \int_V |(L^t)^N v(\eta)| d\eta \\
&\leqslant C\tau^{-N} \sum_{|\alpha|\leqslant N} \int_V |D_\eta^\alpha v(\eta)| d\eta \\
&\leqslant \tilde{C}\tau^{-N} \sum_{|\alpha|\leqslant N} \|D_\eta^\alpha v(\eta)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_\eta)},
\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

onde $\tilde{C}$ depende somente de δ, que depois será fixado. Note que aqui precisamos $N \geqslant \frac{n-1}{2}$ para ter o decaimento desejado no Teorema 4.0.1.

4.2.2 *Caso* $|y| \in [1-\delta, 1+\delta]$

A próxima afirmação nos garante que, nesse caso, só precisamos estimar (4.2.1) para os valores de y cuja única coordenada possívelmente não nula é a primeira.

Afirmação 4.2.3. *No caso em que* $|y| \in [1-\delta, 1+\delta]$, *basta estimar* (4.2.1) *para* $y = (s, 0, ..., 0)$ *com* $s \in [1-\delta, 1+\delta]$.

Demonstração. Dado $z \in \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \in [1-\delta, 1+\delta]\}$, consideremos uma transformação ortogonal u_z tal que

$$u_z(z) = (|z|, 0, ..., 0),$$

cuja existência é dada pelo Teorema B.0.2. Como u_z é uma transformação ortogonal, temos que $u_z^* = u_z^{-1}$ e, como u^{-1} também é uma transformação ortogonal, temos que $|\det J_{u_z^{-1}}| = 1$, onde $J_{u_z^{-1}}$ representa a matriz Jacobiana associada à transformação u_z^{-1}. Assim, fazendo uma mudança de variáveis com $\alpha = u_z(\eta)$, temos que

$$\begin{aligned}\int_V e^{i\tau(\eta\cdot z-|\eta|)}\nu(\eta)d\eta &= \int_V e^{i\tau(\eta\cdot(u_z^{-1}(|z|,0,...,0))-|\eta|)}\nu(\eta)d\eta \\ &= \int_V e^{i\tau(u_z(\eta)\cdot(|z|,0,...,0)-|\eta|)}\nu(\eta)d\eta \\ &= \int_V e^{i\tau(\alpha\cdot(|z|,0,...,0)-|\alpha|)}(\nu\circ u_z^{-1})(\alpha)d\alpha.\end{aligned}$$

Como $\nu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{supp}(\nu) \subseteq V$ e $u_z^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue que $\nu \circ u_z^{-1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{supp}(\nu\circ u_z^{-1}) \subseteq V$. Portanto, caímos no caso em que estimamos a integral para $z = (s, 0, ..., 0)$ com $s \in [1-\delta, 1+\delta]$. Dessa forma, conseguimos estimativas para a integral para todo y. □

Sendo assim, para $y = (s, 0, ..., 0)$ com $s \in [1-\delta, 1+\delta]$, vamos calcular a integral

$$\int_V e^{i\tau(\eta\cdot y-|\eta|)}\nu(\eta)d\eta = \int_V e^{i\tau(s\eta_1-|\eta|)}\nu(\eta)d\eta.$$

Definição 4.2.4. Uma vizinhança cônica de um ponto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que K contém a bola $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \epsilon\}$ para algum $\epsilon > 0$ e $tz \in K$ para todo $t > 0$ e $z \in K$.

A fim de simplificar o entendimento da Definição 4.2.4, a Figura 4.3 ilustra uma vizinhança cônica em $\mathbb{R}^2$.

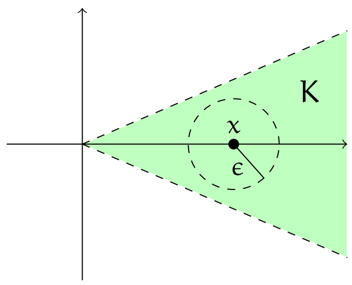

Figura 4.3: Exemplo de vizinhança cônica em $\mathbb{R}^2$.

Seja K_δ uma vizinhança cônica de y dada pela Definição 4.2.4. Vamos separar em dois casos: quando $\eta \notin K_\delta$ e quando $\eta \in K_\delta$.

Caso $\eta \notin K_\delta$:

Como K_δ uma vizinhança cônica de y, temos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(y, \epsilon) \subset K$ e, então, como $\eta \notin K_\delta$, $\frac{\eta}{|\eta|} \notin K_\delta$ e $\left| y - \frac{\eta}{|\eta|} \right| \geqslant \epsilon$. Assim, $|\phi(\tau, y, \eta)| \geqslant \epsilon\tau$.

Seja, agora, $N_\delta := V \setminus K_\delta$ e, para cada $m \in \mathbb{N}$, seja

$$N_\delta^m := \left\{ x \in N_\delta : \mathrm{dist}(x, \partial N_\delta) > \frac{1}{m} \right\}.$$

Ainda, denote por $\chi_{N_\delta^m}$ a função característica de N_δ^m, ou seja,

$$\chi_{N_\delta^m}(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta \in N_\delta^m, \\ 0, & \eta \notin N_\delta^m, \end{cases}$$

e considere

$$f_{m,\delta} = \nu \chi_{N_\delta^m}.$$

Defina

$$f_\delta^m = f_{m,\delta} * \phi_m,$$

onde (ϕ_m) é uma sequência de aproximações da identidade padrão (veja a Definição 2.3.1). Assim, do Teorema 2.2.25, temos que $f_\delta^m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com

$$\operatorname{supp}(f_\delta^m) \subset \overline{N_\delta^m} + \overline{B\left(0, \frac{1}{m}\right)} \subset \overline{N_\delta}$$

e ainda, segue do Teorema 2.3.4 que $f_\delta^m \longrightarrow \nu\chi_{N_\delta}$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e, consequentemente, em medida quando $m \to \infty$. Assim, seguindo o mesmo argumento da equação (4.2.26) e usando a desigualdade de Young, resulta que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{N_\delta} e^{i\tau(s\eta_1 - |\eta|)}\nu(\eta)\chi_{N_\delta}(\eta)d\eta\right| &= \left|\int_{N_\delta} e^{i\tau(s\eta_1 - |\eta|)} \lim_{m\to\infty} f_\delta^m(\eta)d\eta\right| \\
&= \lim_{m\to\infty}\left|\int_{N_\delta} e^{i\tau(s\eta_1 - |\eta|)} f_\delta^m(\eta)d\eta\right| \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} C\tau^{-N}\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|D_\eta^\alpha f_\delta^m\|_{L^\infty} \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} C\tau^{-N}\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|D_\eta^\alpha (f_{m,\delta} * \phi_m)\|_{L^\infty} \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} C\tau^{-N}\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|(D_\eta^\alpha f_{m,\delta}) * \phi_m\|_{L^\infty} \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} C\tau^{-N}\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|D_\eta^\alpha f_{m,\delta}\|_{L^\infty}\|\phi_m\|_{L^1} \\
&\leqslant C\tau^{-N}\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|D_\eta^\alpha \nu\|_{L^\infty}
\end{aligned} \tag{4.2.27}$$

e aqui, novamente precisamos $N \geqslant \frac{n-1}{2}$ para ter o decaimento desejado.

Caso $\eta \in K_\delta$:

Vamos estudar a integral

$$\int_{V\cap K_\delta} e^{i\tau(s\eta_1 - |\eta|)}\nu(\eta)d\eta. \tag{4.2.28}$$

Usando o Teorema 2.1.16, obtemos

$$\int_{V\cap K_\delta} e^{i\tau(s\eta_1 - |\eta|)}\nu(\eta)d\eta = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{M_\delta(r)} e^{i\tau(s\eta_1 - r)}\nu(\eta(r))d\sigma_r dr,$$

onde $M_\delta(r) = \{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| = r\} \cap K_\delta$ e $d\sigma_r$ é a medida de superfície de $M_\delta(r)$. Agora, para $r \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ fixado, consideremos a integral

$$\int_{M_\delta(r)} e^{i\tau(s\eta_1 - r)} \nu(\eta(r)) d\sigma_r. \tag{4.2.29}$$

Note que, como $\eta \in K_\delta$, temos que $\eta_1 > 0$ e assim, escrevendo $\eta = (\eta_1, \eta')$, segue que

$$M_\delta(r) = \left\{\eta \in \mathbb{R}^n : \eta_1 = \sqrt{r^2 - \eta_2^2 - \cdots - \eta_n^2}, |\eta'| \leqslant \epsilon_r(\delta)\right\}.$$

Dessa forma, como $\partial M_\delta(r)$ é uma subvariedade de $M_\delta(r)$ de codimensão 1, segue dos Teoremas C.0.1 e C.0.2 que a integral em (4.2.29) é da forma

$$\begin{aligned}
\int_{M_\delta(r)} e^{i\tau(s\eta_1 - r)} \nu(\eta(r)) d\sigma_r &= \int_{M_\delta(r)\setminus \partial M_\delta(r)} e^{i\tau(s\eta_1 - r)} \nu(\eta(r)) d\sigma_r \\
&= \int_{|\eta'| < \epsilon_r(\delta)} e^{i\tau(s\sqrt{r^2 - |\eta'|^2} - r)} \nu(\eta(\eta', r)) J_r(\eta') d\eta' \\
&= \int_{|\eta'| \leqslant \epsilon_r(\delta)} e^{i\tau(s\sqrt{r^2 - |\eta'|^2} - r)} \nu(\eta(\eta', r)) J_r(\eta') d\eta',
\end{aligned}$$

onde $J_r(\eta')$ é dada por

$$J_r(\eta') = \sqrt{1 + \frac{|\eta'|^2}{r^2 - |\eta'|^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - |\eta'|^2}}.$$

É importante observar que $J_r(\eta')$ e suas derivadas de ordem no máximo $\frac{n-1}{2}$ são uniformemente limitadas com relação a $r \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ e $|\eta'| \leqslant \epsilon_r(\delta)$.

Agora, temos que a função $F_r(\eta') := s\sqrt{r^2 - |\eta'|^2} - r$ é de classe C^∞ em $\{\eta' \in \mathbb{R}^n : |\eta'| \leqslant \epsilon_r(\delta)\}$ e, para $i, j \in \{2, \ldots, n\}$,

$$\frac{\partial F_r}{\partial_{\eta_i}}(\eta') = -\frac{s\eta_i}{\sqrt{r^2 - |\eta'|^2}}$$

e

$$\frac{\partial^2 F_r}{\partial_{\eta_i} \partial_{\eta_j}}(\eta') = \begin{cases} -s\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - |\eta'|^2}} + \frac{\eta_i^2}{\sqrt{r^2 - |\eta'|^2}^3}\right) & i = j \\ -s\left(\frac{\eta_i \eta_j}{\sqrt{r^2 - |\eta'|^2}^3}\right) & i \neq j \end{cases}.$$

Assim, segue que $\nabla F(0) = 0$ e a matriz Hessiana de F no ponto 0 é dada por

$$\mathrm{Hess}[F(0)] = \begin{pmatrix} -\frac{s}{r} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\frac{s}{r} & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{s}{r} \end{pmatrix}.$$

Logo, $\det(\mathrm{Hess}[F(0)]) = \left(-\frac{s}{r}\right)^{n-1} \neq 0$ e, portanto, 0 é ponto crítico não degenerado de F. Dessa forma, pelo Lema de Morse (veja C.0.8), existem $W_r = \{\eta' \in \mathbb{R}^{n-1} : |\eta'| \leqslant \epsilon_r\}$ (se necessário podemos tomar um ϵ_r menor), U_r vizinhança compacta da origem em $\mathbb{R}^{n-1}$ e um difeomorfismo C^∞

$$\xi_r : U_r \longrightarrow W_r$$

tal que $\xi_r(0) = 0$ e

$$s\sqrt{r^2 - |\eta'|^2} - r = F_r(\eta') = F_r(\xi_r(z)) = sr - r - \frac{1}{2}\left(z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2\right). \quad (4.2.30)$$

Assim, chegamos na integral

$$e^{i\tau(sr-r)} \int_{U_r} e^{i\tau(-\frac{1}{2}|z|^2)} \nu(\eta(\eta'(z), r)) J_r(\eta'(z)) |J_{\xi_r}(z)| dz,$$

onde $J_{\xi_r}(z)$ é a matriz Jacobiana associada à mudança de coordenadas ξ_r. Escrevendo

$$\xi_r(z) = (\xi_r^1(z), \ldots, \xi_r^{n-1}(z)),$$

como ξ_r é um difeomorfismo, existe $C_r > 0$ constante tal que

$$\left| \frac{\partial \xi_r^i}{\partial z_j}(z) \right| \leqslant C_r$$

para todo $z \in U_r$ e $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Afirmação 4.2.5. *As derivadas parciais das funções coordenadas de ξ_r são uniformemente limitadas para $r \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $z \in U_r$ e $i, j \in \{1, \cdots, n-1\}$.*

Demonstração. Dado $r' \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, temos que

$$F_{r'}(\eta') = s\sqrt{r'^2 - |\eta'|^2} - r'.$$

Consideremos $f(x) = \frac{r}{r'}x$ e $g(x) = \sqrt{\frac{r}{r'}}x$. Ainda, denotemos $W_{r'} = f^{-1}(W_r)$ e $U_{r'} = g^{-1}(U_r)$. Com isso, vamos definir $\xi_{r'} : U_{r'} \to W_{r'}$, dada por

$$\xi_{r'} = (g^{-1} \circ \xi_r^{-1} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ \xi_r \circ g.$$

Agora, note que

$$F_{r'} \circ f^{-1}(x) = F_{r'}\left(\frac{r'}{r}x\right) = s\sqrt{r'^2 - \frac{r'^2}{r^2}|x|^2} - r' = \frac{r'}{r}\left(s\sqrt{r - |x|^2} - r\right) = \frac{r'}{r}F_r(x).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
F_{r'}(\xi_{r'}(z)) &= (F_{r'} \circ f^{-1})(\xi_r \circ g(z)) \\
&= \frac{r'}{r}F_r\left(\xi_r\left(\sqrt{\frac{r}{r'}}z\right)\right) \\
&= \frac{r'}{r}\left(sr - r - \frac{r}{2r'}(z_1^2 + \cdots z_n^2)\right) \\
&= sr' - r' - \frac{1}{2}(z_1^2 + \cdots z_n^2),
\end{aligned}$$

ou seja, $\xi_{r'}$ satisfaz (4.2.30).

Agora, dados $i, j \in \{1, \cdots, n-1\}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_{r'}^i}{\partial z_j}(z) &= \frac{\partial (f^{-1} \circ \xi_r \circ g)^i}{\partial z_j}(z) \\
&= \frac{r'}{r}\frac{\partial \xi_r^i\left(\sqrt{\frac{r}{r'}}z\right)}{\partial z_j} \\
&= \sqrt{\frac{r'}{r}}\frac{\partial \xi_r^i}{\partial z_j}\left(\sqrt{\frac{r}{r'}}z\right).
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\left|\frac{\partial \xi_{r'}^i}{\partial z_j}(z)\right| \leqslant \sqrt{4}C_r = 2C_r$$

para todo $z \in U_{r'}$. □

Observação 4.2.6. Seguindo o mesmo racicínio, chegamos que o resultado da Afirmação 4.2.2 também é verdadeiro para as derivadas parciais de ordem no máximo $\frac{n-1}{2}$.

Consideremos

$$u(r,z)=v(\eta(\eta'(z),r))J_r(\eta'(z))|\det J_{\xi_r}(z)|.$$

Para cada $m\in\mathbb{N}$, sejam $U_r^m:=\left\{x\in U:\operatorname{dist}(x,\partial U_r)>\frac{1}{m}\right\}$, $\chi_{U_r^m}$ a função característica de U_r^m e $g_m=u\chi_{U_r^m}$. Defina

$$g^m=\phi_m*g_m,$$

onde (ϕ_m) é uma sequência de aproximações da identidade padrão. Assim, pelo Teorema 2.2.25, temos que $g^m\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ com

$$\operatorname{supp}(g^m)\subset\overline{U_r^m}+\overline{B\left(0,\frac{1}{m}\right)}\subset\overline{U_r}$$

e ainda, segue do Teorema 2.3.4 que $g^m\longrightarrow u\chi_{U_r}$ em medida. Portanto, pelo teorema da convergência dominada, temos que

$$\begin{aligned}\int_{U_r}e^{i\tau\frac{-|z|^2}{2}}u(r,z)dz&=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{i\tau\frac{-|z|^2}{2}}u(r,z)\chi_U dz\\&=\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{i\tau\frac{-|z|^2}{2}}g^m(r,z)dz.\end{aligned}\tag{4.2.31}$$

Agora, aplicando o Método da Fase Estacionária (Teorema 4.1.5), temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{i\tau\frac{-|z|^2}{2}}g^m(r,z)dz=&(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}e^{-i\frac{\pi(n-1)}{4}}\tau^{-\frac{n-1}{2}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\tau^{-k}}{k!}\left(-\frac{i}{2}\Delta_z\right)^k g^m(r,0)\\&+S_N(u,y,r,\tau),\end{aligned}$$

onde

$$|S_N(u,x,r,\tau)|\leqslant C(N!)^{-1}\tau^{-\frac{n-1}{2}-N}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\left\|D^\alpha\left(-\frac{1}{2}\Delta_z\right)^N g^m(r,z)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_z^{n-1})},$$

onde $s>\frac{n-1}{2}$. Escolhendo $N=1$, chegamos em

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{i\tau\frac{-|z|^2}{2}}g^m(r,z)dz=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}e^{-i\frac{\pi(n-1)}{4}}\tau^{-\frac{n-1}{2}}g^m(r,0)+S_1(u,y,r,\tau),\tag{4.2.32}$$

onde

$$\begin{aligned}|S_1(u,x,r,\tau)| &\leqslant C\tau^{-\frac{n-1}{2}}\tau^{-1}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D_z^\alpha g^m(r,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_z^{n-1})}\\ &\leqslant C\tau^{-\frac{n-1}{2}}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D_z^\alpha g^m(r,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_z^{n-1})}\end{aligned} \tag{4.2.33}$$

onde $s > \frac{n-1}{2} + 2 = \frac{n+3}{2}$.

Assim, usando (4.2.32) e (4.2.33) e seguindo o mesmo que foi feito em (4.2.27), segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\tau\frac{-|z|^2}{2}} g^m(r,z)dz\right| &\leqslant C\tau^{-\frac{n-1}{2}}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D_z^\alpha g^m(r,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_z^{n-1})}\\ &\leqslant C\tau^{-\frac{n-1}{2}}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D_z^\alpha u(r,z)\|_{L^\infty(U_r)}.\end{aligned} \tag{4.2.34}$$

Portanto, usando (4.2.31) e (4.2.34), temos que

$$\left|\int_{U_r} e^{i\tau\frac{1}{2}(-|z|^2)}u(r,z)dz\right| \leqslant C\tau^{-\frac{n-1}{2}}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D_z^\alpha u(r,z)\|_{L^\infty(U_r)},$$

onde $s > \frac{n+3}{2}$.

Agora, como $v(\eta(\eta'(z),r))$ é uma função C^∞ na variável r, ela e suas derivadas são limitadas para $r \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Ainda, como ξ_r é um difeomorfismo C^∞, temos que o determinante de J_{ξ_r} é não nulo e, portanto, pelo teorema do valor intermediário, $\det J_{\xi_r}$ não muda de sinal. Logo, para encontrar as derivadas de $|\det J_{\xi_r}|$, é suficiente encontrar as derivadas de $\det J_{\xi_r}$. Além disso, as derivadas parciais de J_r e das funções coordenadas de ξ_r de ordem no máximo $\frac{n-1}{2}$ são uniformemente limitadas e, portanto,

$$\begin{aligned}\left|\int_{V\cap K_\delta} e^{i\tau(s\eta_1-|\eta|)}v(\eta)d\eta\right| &\leqslant C\tau^{-\frac{n-1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D_z^\alpha u(r,z)\|_{L^\infty(U_r)}dr\\ &\leqslant C\tau^{-\frac{n-1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D_z^\alpha v(\eta(\eta'(z),r))\|_{L^\infty(U_r)}dr\\ &\leqslant C\tau^{-\frac{n-1}{2}}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|D_\eta^\alpha v(\eta)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_\eta^n)},\end{aligned}$$

onde $s > \frac{n+3}{2}$.

Finalmente, note que $1 + \tau \leqslant 2\tau$ e, então, $\tau^{-\frac{n-1}{2}} \leqslant 2^{\frac{n-1}{2}}(1+\tau)^{-\frac{n-1}{2}}$. Assim, chegamos na estimativa

$$\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to x}(e^{-i\tau|\eta|}v(\eta))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_x)} \leqslant C(1+\tau)^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{|\alpha|\leqslant s} \|D^\alpha_\eta v(\eta))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_\eta)},$$

onde $s > \frac{n+3}{2}$.

5

ESTIMATIVAS DE STRICHARTZ PARA A EQUAÇÃO DA ONDA

Neste capítulo, apresentamos, como uma aplicação do Teorema 4.0.1, estimativas do tipo $L^p - L^q$ na linha conjugada para o problema de Cauchy para a equação da onda livre que é dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5.0.1}$$

Começaremos deduzindo uma representação para a solução do problema (5.0.1). Para isso, aplicando a transformada parcial de Fourier, chegamos na equação diferencial ordinária auxiliar dependendo do parâmetro $\xi \in \mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{cases} v_{tt} + |\xi|^2 v = 0, & t \geqslant 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n, \\ v(0,\xi) = \mathcal{F}(\phi)(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n, \\ v_t(0,\xi) = \mathcal{F}(\psi)(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{5.0.2}$$

onde $v(t,\xi) := \mathcal{F}_{x\to\xi}(u(t,x))$. Para $\xi \neq 0$, a solução geral para o problema (5.0.2) é da forma

$$v(t,\xi) = c_1(\xi)e^{-i|\xi|t} + c_2(\xi)e^{i|\xi|t}. \tag{5.0.3}$$

Aplicando as condições de Cauchy para encontrar $c_1(\xi)$ e $c_2(\xi)$ chegamos em

$$c_1(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\phi)(\xi) - \frac{1}{2i|\xi|}\mathcal{F}(\psi)(\xi),$$
$$c_2(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\phi)(\xi) + \frac{1}{2i|\xi|}\mathcal{F}(\psi)(\xi).$$

Assim, substituindo $c_1(\xi)$ e $c_2(\xi)$ em (5.0.3), segue que

$$v(t,\xi) = \left(\frac{e^{i|\xi|t} + e^{-i|\xi|t}}{2}\right)\mathcal{F}(\phi)(\xi) + \left(\frac{e^{i|\xi|t} - e^{-i|\xi|t}}{2i|\xi|}\right)\mathcal{F}(\psi)(\xi). \tag{5.0.4}$$

Finalmente, supondo que a fórmula de inversão de $\mathcal{F}_{x\to\xi}$ vale para u, segue que

$$\begin{aligned} u(t,x) =& \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left[\left(\frac{e^{i|\xi|t} + e^{-i|\xi|t}}{2}\right)\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right] \\ &+ \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left[\left(\frac{e^{i|\xi|t} - e^{-i|\xi|t}}{2i|\xi|}\right)\mathcal{F}(\psi)(\xi)\right]. \end{aligned} \tag{5.0.5}$$

Essa representação consiste nos chamados *multiplicadores de Fourier*

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{i\phi(t,\xi)}a(t,\xi)\mathcal{F}(u_0)(\xi)\right),$$

onde $\phi = \phi(t,\xi)$ é chamada de *função de fase* e $a = a(t,\xi)$ é chamada de função *amplitude*.

A fim de obter estimativas $L^p - L^q$ para u dada em (5.0.5), vamos nos voltar primeiramente para o multiplicador de Fourier da forma

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right) \tag{5.0.6}$$

e entender quais os passos utilizados para conseguir tais estimativas. Tendo feito isso, seguimos o mesmo caminho para conseguir estimativas para os outros multiplicadores de Fourier.

A seguir, apresentamos as etapas seguidas.

1. Adicionamos uma função amplitude ao nosso modelo de forma que tenhamos

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{1}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right), \tag{5.0.7}$$

   onde $2r \geqslant 0$ será determinado depois.

2. Decompomos o espaço $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n_\xi$ em duas zonas. Definimos a zona pseudo-diferencial como

$$Z_{pd} := \{(t,\xi) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n_\xi : t|\xi| \leqslant 1\}$$

e a zona hiperbólica como

$$Z_{hyp} := \{(t, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n_\xi : t|\xi| \geqslant 1\}.$$

Ainda, introduzimos uma função $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$ satisfazendo

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, & |\xi| \geqslant \frac{3}{4}, \end{cases}$$

que será uma espécie de função de corte entre as zonas pseudo-diferencial e hiperbólica.

3. Vamos conseguir estimativas para

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{1 - \chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right).$$

Aqui, usamos que

$$\frac{1 - \chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}} = 0$$

para $(t, \xi) \in Z_{hyp}$.

4. Vamos conseguir estimativas para

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right).$$

Vale observar que

$$\frac{\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}} = 0$$

para $t|\xi| \leqslant \frac{1}{2}$, ou seja, nesse caso, a função amplitude se anula em grande parte da zona pseudo-diferencial.

5.1 ESTIMATIVAS NA ZONA PSEUDO-DIFERENCIAL

Nesta seção, vamos estimar

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{1 - \chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right).$$

Teorema 5.1.1. *Consideremos, para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o multiplicador de Fourier*

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{1-\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right).$$

Assumimos que $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$ e $0 \leqslant 2r \leqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$. Então, temos a seguinte estimativa $L^p - L^q$

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{1-\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right\|_{L^q} \leqslant Ct^{2r-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\phi\|_{L^p}$$

para todo p e q admissíveis. A constante C depende de p e q.

Demonstração. Comecemos introduzindo a notação

$$I_0 := \left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{1-\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right\|^q_{L^q}.$$

Fazendo as mudanças de coordenadas $\eta = t\xi$ e $tz = x$ e usando a relação (3.1.13), temos que

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}e^{-i|\xi|t}\frac{1-\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)d\xi\right|^q dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{x}{t}\cdot\eta}e^{-i|\eta|}\frac{1-\chi(|\eta|)}{|\eta|^{2r}}t^{2r}\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\eta}{t}\right)\frac{1}{t^n}d\eta\right|^q dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}e^{-i|\eta|}\frac{1-\chi(|\eta|)}{|\eta|^{2r}}t^{2r}\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\eta}{t}\right)\frac{1}{t^n}d\eta\right|^q t^n dz \qquad (5.1.1)\\
&= t^{2rq-nq+n}\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(e^{-i|\eta|}\frac{1-\chi(|\eta|)}{|\eta|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\eta}{t}\right)\right)\right\|^q_{L^q} \\
&= t^{2rq-nq+n}\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(e^{-i|\eta|}\frac{1-\chi(|\eta|)}{|\eta|^{2r}}\right) * \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\eta}{t}\right)\right)\right\|^q_{L^q}.
\end{aligned}$$

Para a integral

$$T := \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(e^{-i|\eta|}\frac{1-\chi(|\eta|)}{|\eta|^{2r}}\right),$$

dado l real positivo, temos

$$
\begin{aligned}
m\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{F}_{z\to\eta}(T)| \geqslant l\} &= m\left\{\eta \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{1-\chi(|\eta|)}{|\eta|^{2r}}\right| \geqslant l\right\} \\
&= m\left\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta|^{2r} \leqslant \frac{|1-\chi(|\eta|)|}{l}\right\} \\
&\leqslant m\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| \leqslant l^{-\frac{1}{2r}}\} \\
&= Cl^{-\frac{n}{2r}}.
\end{aligned}
$$

Assim, como $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$ e

$$
\frac{n}{2r} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} > 1, \tag{5.1.2}
$$

segue do Teorema 3.2.9 que $\mathcal{F}_{z\to\eta}(T) \in M_p^q$ e, então, $T \in L_p^q$. Assim, usando a Definição 3.2.4, segue que

$$
\left|\left|T * \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\eta}{t}\right)\right)\right|\right|_{L^q} \leqslant C\left|\left|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\eta}{t}\right)\right)\right|\right|_{L^p}.
$$

Agora, fazendo a mudança de variáveis $y = \frac{\eta}{t}$, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\eta}{t}\right)\right) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta\cdot z}\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\eta}{t}\right)d\eta \\
&= t^n\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot tz}\mathcal{F}(\phi)(y)dy \\
&= t^n\phi(tz).
\end{aligned}
$$

Assim, temos que

$$
\left|\left|T * \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\eta}{t}\right)\right)\right|\right|_{L^q} \leqslant Ct^n||\phi(tz)||_{L^p}.
$$

Além disso, fazendo a mudança de variáveis $x = tz$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
||\phi(tz)||_{L^p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi(tz)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= t^{-\frac{n}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= t^{-\frac{n}{p}}||\phi||_{L^p}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, segue que

$$\left\|T * \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\eta}{t}\right)\right)\right\|_{L^q} \leqslant Ct^{n-\frac{n}{p}}\|\phi\|_{L^p}. \tag{5.1.3}$$

Finalmente, substituindo (5.1.3) em (5.1.1), mostramos que

$$\begin{aligned} I_0 &\leqslant Ct^{2rq-nq+n+nq-\frac{n}{p}q}\|\phi\|^q_{L^p} \\ &= Ct^{2rq-n\left(\frac{q}{p}-1\right)}\|\phi\|^q_{L^p} \end{aligned}$$

e, tomando a raiz q-ésima, segue que

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{1-\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right\|_{L^q} \leqslant Ct^{2r-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\phi\|_{L^p}$$

para todo $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$ satisfazendo $0 \leqslant 2r \leqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$. □

5.2 ESTIMATIVAS NA ZONA HIPERBÓLICA

Nesta seção, vamos estimar

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right).$$

Aqui, o importante é que a função de fase se anula para $t|\xi| \leqslant \frac{1}{2}$ e uma das ferramentas principais para obter estimativas $L^1 - L^\infty$ é o Lema de Littman apresentado no Capítulo 4.

Teorema 5.2.1. *Consideremos, para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o multiplicador de Fourier*

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right).$$

Assumimos que $\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \leqslant 2r$. Então, temos a seguinte estimativa $L^p - L^q$

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right\|_{L^q} \leqslant Ct^{2r-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\phi\|_{L^p}$$

para todo $1 < p \leqslant 2$ satisfazendo $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Demonstração. Dada uma função $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz o Lema 3.2.10, consideremos a sequência (ρ_j) dada por

$$\rho_j(y) = \begin{cases} \rho(2^{-j}y), & j \geqslant 1 \\ 1 - \sum_{k=1}^\infty \rho_k(y), & j = 0 \end{cases}. \tag{5.2.1}$$

Primeiramente, utilizando o Lema 3.1.26, vamos conseguir estimativas $L^p - L^q$ na linha conjugada para

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(\xi)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right) \tag{5.2.2}$$

para todo $j \geqslant 0$. Para isso, para cada $j \geqslant 0$, definimos

$$g_j(\xi) = e^{-i|\xi|t}\frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}. \tag{5.2.3}$$

Vamos começar verificando que $g_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $j \geqslant 0$. No caso em que $j = 0$, fazendo as mudanças de variáveis $y = t\xi$ e, para cada $k \leqslant 0$, $x = 2^{-k}y$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |g_0(\xi)|d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi(t|\xi|)|\rho_0(t|\xi|)|}{|\xi|^{2r}}d\xi \\
&= t^{2r-n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi(|y|)|\rho_0(|y|)|}{|y|^{2r}}dy \\
&\leqslant 2^{2r}t^{2r-n}\int_{|y|>\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{0} |\rho(2^{-k}|y|)|dy \\
&\leqslant 2^{2r}t^{2r-n}\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k \int_{\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2} |\rho(|x|)|dx \\
&= Ct^{2r-n} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $j \geqslant 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |g_j(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi(t|\xi|)|\rho_j(t|\xi|)|}{|\xi|^{2r}} d\xi \\
&= 2^{2r} t^{2r-n} \int_{|y|>\frac{1}{2}} |\rho(2^{-j}|y|)| dy \\
&= 2^{2r+j} t^{2r-n} \int_{\frac{1}{2}<|x|<2} |\rho(|x|)| dx \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Logo, $g_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para cada $j \geqslant 0$. De maneira análoga, segue que, para $0 \leqslant j \leqslant j_0$,

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(e^{-i|\xi|t} \frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}} \right) \right\|_{L^\infty} \leqslant C t^{2r-n},$$

onde C é independente de j e ρ. Aqui j_0 pode ser escolhido arbitrariamente grande. Ainda, como $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Assim, usando o Teorema 3.1.26, segue que, para $0 \leqslant j \leqslant j_0$,

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(e^{-i|\xi|t} \frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}} \mathcal{F}(\phi)(\xi) \right) \right\|_{L^\infty} \leqslant C t^{2r-n} \|\phi\|_{L^1}. \tag{5.2.4}$$

Por outro lado, para $j > j_0$, fazendo a mudança de coordenadas $t\xi = 2^j \eta$ e usando que $\chi(2^j|\eta|) = 1$ para $|\eta| \geqslant \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}^n} & \left| \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(e^{-i|\xi|t} \frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}} \right) \right| = \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} e^{-i|\xi|t} \frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}} d\xi \right| \\
&= 2^{j(n-2r)} t^{2r-n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{2^j\eta}{t} \cdot x} e^{-i2^j|\eta|} \frac{\chi(2^j|\eta|)\rho_j(2^j|\eta|)}{|\eta|^{2r}} d\eta \right| \\
&= 2^{j(n-2r)} t^{2r-n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\eta \cdot \frac{2^j x}{t}} e^{-i2^j|\eta|} \frac{\chi(2^j|\eta|)\rho(|\eta|)}{|\eta|^{2r}} d\eta \right| \\
&= 2^{j(n-2r)} t^{2r-n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\eta \cdot x} e^{-i2^j|\eta|} \frac{\rho(|\eta|)}{|\eta|^{2r}} d\eta \right| \\
&\leqslant 2^{j(n-2r)} t^{2r-n} \left\| \mathcal{F}^{-1}_{\eta \to x} \left(e^{-i2^j|\eta|} \frac{\rho(|\eta|)}{|\eta|^{2r}} \right) \right\|_{L^\infty}.
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Agora, como $\frac{\rho}{|\cdot|^{2r}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com suporte no conjunto $\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| \in [\frac{1}{2}, 2]\}$, usando o Lema de Littman na forma 4.0.1 com $\tau = 2^j$, temos que

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to x}\left(e^{-i2^j|\eta|}\frac{\rho(|\eta|)}{|\eta|^{2r}}\right)\right\|_{L^\infty} \leqslant C(1+2^j)^{-\frac{n-1}{2}} \leqslant C2^{j(-\frac{n-1}{2})}. \tag{5.2.6}$$

Substituindo (5.2.6) em (5.2.5), segue que

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\right)\right\|_{L^\infty} &\leqslant C2^{j(-\frac{n-1}{2})}2^{j(n-2r)}t^{2r-n}\\ &= C2^{j(\frac{n+1}{2}-2r)}t^{2r-n}\end{aligned}$$

e, usando o Teorema 3.1.10 e a Desigualdade de Young, conseguimos que

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right\|_{L^\infty} &=\\ &= \left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\right)*\phi(\xi)\right\|_{L^\infty}\\ &\leqslant \left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\right)\right\|_{L^\infty}\|\phi\|_{L^1}\\ &\leqslant C2^{j(\frac{n+1}{2}-2r)}t^{2r-n}\|\phi\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Dessa forma, conseguimos estimativas $L^1 - L^\infty$ para (5.2.2) para todo $j \geqslant 0$.

Precisamos ainda derivar estimativas $L^2 - L^2$. Para esta parte, vamos verificar que

$$\|g_j\|_{L^\infty} \leqslant C2^{-j2r}t^{2r}.$$

Para $j = 0$, temos

$$\begin{aligned}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|g_0(\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}&\left|\frac{\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\sum_{k=-\infty}^{0}\rho_k(t|\xi|)\right|\\ &\leqslant \sup_{t|\xi|\geqslant\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{|\xi|^{2r}}\sum_{k=-\infty}^{0}\rho(2^{-k}t|\xi|)\right|\\ &\leqslant 2^{2r}t^{2r}\sup_{t|\xi|\geqslant\frac{1}{2}}\big(|\rho(t|\xi|)|+|\rho(2t|\xi|)|\big)\\ &\leqslant Ct^{2r},\end{aligned}$$

e, para $j \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |g_j(\xi)| &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}} \right| \\ &\leqslant \sup_{\frac{1}{2} \leqslant 2^{-j}t|\xi| \leqslant 2} \left| \frac{\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}} \right| \\ &\leqslant C2^{-j2r}t^{2r}.\end{aligned}$$

Ainda, como $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, usando o Lema 3.1.26, segue que, para todo $j \geqslant 0$,

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(e^{-i|\xi|t} \frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}} \mathcal{F}(\phi)(\xi) \right) \right\|_{L^2} \leqslant C2^{-j2r}t^{2r} \|\phi\|_{L^2}.$$

De posse das estimativas $L^1 - L^\infty$ e $L^2 - L^2$ e usando novamente o Lema 3.1.26, concluímos que, para $0 \leqslant j \leqslant j_0$,

$$\begin{aligned}\left\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(e^{-i|\xi|t} \frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}} \mathcal{F}(\phi)(\xi) \right) \right\|_{L^q} &\leqslant C2^{-2r\left(2-\frac{2}{p}\right)} t^{2r-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\phi\|_{L^p} \\ &\leqslant Ct^{2r-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\phi\|_{L^p},\end{aligned}$$

uma vez que $1 < p \leqslant 2$ e $-2r\left(2 - \frac{2}{p}\right) \leqslant 0$. E, para $j > j_0$, tomando $\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \leqslant 2r$, segue que

$$\begin{aligned}&\left\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(e^{-i|\xi|t} \frac{\chi(t|\xi|)\rho_j(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}} \mathcal{F}(\phi)(\xi) \right) \right\|_{L^q} \leqslant \\ &\qquad \leqslant C2^{j\left(\frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-2r\right)} t^{2r-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\phi\|_{L^p} \\ &\qquad \leqslant Ct^{2r-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\phi\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Finalmente, usando o Teorema 3.2.15 e a Observação 3.2.16, concluímos que

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(e^{-i|\xi|t} \frac{\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}} \mathcal{F}(\phi)(\xi) \right) \right\|_{L^q} \leqslant Ct^{2r-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\phi\|_{L^p},$$

para todo $1 < p \leqslant 2$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. □

Vamos começar encontrando as estimativas para o multiplicador de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right) \tag{5.3.1}$$

para diferentes valores de $t > 0$.

- Caso $t \in (0, 1]$
  Adicionamos o termo $\frac{|\xi|^{2r_1}}{|\xi|^{2r_1}}$ na função amplitude, onde $r_1 \geqslant 0$, e estudaremos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right) &= \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{|\xi|^{2r_1}}{|\xi|^{2r_1}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\\ &= \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{1}{|\xi|^{2r_1}}\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{2r_1}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Escolhendo $2r_1 = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ nos Teoremas 5.1.1 e 5.2.1 e usando o Teorema 3.2.3, segue que

$$\begin{aligned}\left|\left|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right|\right|_{L^q} &\leqslant C\left|\left|\mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{2r_1}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right|\right|_{L^p}\\ &= C||\phi||_{\dot{H}^{2r_1}_p}\\ &\leqslant C||\phi||_{H^{2r_1}_p}\end{aligned}$$

para todo $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, onde $\dot{H}^{2r_1}_p$ e $H^{2r_1}_p$ são os espaços de Sobolev definidos na Seção 3.2. Mas, como $t \in (0, 1]$, temos que

$$1 = \left(\frac{1+t}{1+t}\right)^{\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \leqslant 2^{\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$$

e, portanto,

$$\left|\left|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right|\right|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}||\phi||_{H^{2r_1}_p}$$

para todo $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Caso $t \in [1, \infty)$

  Adicionamos o termo $\frac{|\xi|^{2r_2}}{|\xi|^{2r_2}}$ na função amplitude, onde $r_2 \geqslant 0$, e estudaremos

  $$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{-i|\xi|t}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{1}{|\xi|^{2r_2}}\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{2r_2}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right)\right).$$

  Escolhendo $2r_2 = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ nos Teoremas 5.1.1 e 5.2.1 e usando novamente o Teorema 3.2.3, segue que

  $$\begin{aligned}\left|\left|\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{-i|\xi|t}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right|\right|_{L^q} &\leqslant \\ &\leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left|\left|\mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{2r_2}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right|\right|_{L^p} \\ &= C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}||\phi||_{\dot{H}^{2r_2}_p} \\ &\leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}||\phi||_{H^{2r_2}_p}\end{aligned}$$

  para todo $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Tomando $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, segue do Teorema 3.2.3 que, para todo $t > 0$,

$$\left|\left|\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{-i|\xi|t}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right|\right|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}||\phi||_{H^{M_p}_p}$$

para todo $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Para o multiplicador de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{i|\xi|t}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right),$$

os Teoremas 5.1.1 e 5.2.1 seguem de maneira análoga e conseguimos as mesmas estimativas. Dessa forma, chegamos no próximo teorema.

Teorema 5.3.1. *Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, o multiplicador de Fourier*

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{\pm i|\xi|t}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)$$

satisfaz a seguinte estimativa do tipo $L^p - L^q$

$$\left|\left|\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{\pm i|\xi|t}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right|\right|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}||\phi||_{H^{M_p}_p},$$

onde $M_p \in \mathbb{R}$, $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Agora, vejamos o que acontece com o multiplicador de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\mathcal{F}(\psi)(\xi)}{|\xi|}\right).$$

Na zona pseudo-diferencial, seguindo o mesmo que foi feito no Teorema 5.1.1, chegamos na estimativa

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{1-\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\frac{\mathcal{F}(\psi)(\xi)}{|\xi|}\right)\right\|_{L^q} \leqslant Ct^{2r+1-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\psi\|_{L^p} \tag{5.3.2}$$

para todo $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$ com $2r+1 \leqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ e note que precisamos supor, ainda, que $n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \geqslant 1$ para garantir que $2r \geqslant 0$.

Na zona hiperbólica, seguindo o mesmo que foi feito no Teorema 5.2.1, tomando $2r+1 \geqslant \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ chegamos na estimativa

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\chi(t|\xi|)}{|\xi|^{2r}}\frac{\mathcal{F}(\psi)(\xi)}{|\xi|}\right)\right\|_{L^q} \leqslant Ct^{2r+1-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\psi\|_{L^p} \tag{5.3.3}$$

para todo $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Novamente, precisamos analisar o que acontece para diferentes valores de t, mas o caminho é análogo ao que foi feito para o multiplicador de Fourier em (5.3.1).

- Caso $t \in (0,1]$

  Adicionamos o termo $\frac{|\xi|^{2r_1}}{|\xi|^{2r_1}}$ na função amplitude, onde $r_1 \geqslant 0$, e escolhendo $2r_1 = n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1$ nas estimativas (5.3.2) e (5.3.3), segue que

  $$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\mathcal{F}(\psi)(\xi)}{|\xi|}\right)\right\|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\psi\|_{H^{2r_1}_p}$$

  para todo $1 < p \leqslant 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ e $n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \geqslant 1$.

- Caso $t \in [1,\infty)$

Adicionamos o termo $\frac{|\xi|^{2r_2}}{|\xi|^{2r_2}}$ na função amplitude, onde $r_2 \geqslant 0$, e escolhendo $2r_2 = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) - 1$ nas estimativas (5.3.2) e (5.3.3), segue que

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\mathcal{F}(\psi)(\xi)}{|\xi|}\right)\right\|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\psi\|_{H^{2r_2}_p}$$

para todo $1 < p \leqslant 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ e $n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \geqslant 1$.

De maneira análoga conseguimos as mesmas estimativas para o multiplicador de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{i|\xi|t}\frac{\mathcal{F}(\psi)(\xi)}{|\xi|}\right)$$

e chegamos no seguinte teorema.

Teorema 5.3.2. *Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, o multiplicador de Fourier*

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{\pm i|\xi|t}\frac{\mathcal{F}(\psi)(\xi)}{|\xi|}\right)$$

satisfaz a seguinte estimativa do tipo $L^p - L^q$

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{\pm i|\xi|t}\frac{\mathcal{F}(\psi)(\xi)}{|\xi|}\right)\right\|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\psi\|_{H^{M_p}_p},$$

onde $n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \geqslant 1$, $M_p \in \mathbb{R}$, $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) - 1$, $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Assim, somando as estimativas dos Teoremas 5.3.1 e 5.3.2, segue o próximo teorema.

Teorema 5.3.3. *Sejam $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, a solução u para o problema de Cauchy para a equação da onda livre satisfaz a seguinte estimativa do tipo $L^p - L^q$*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\|\phi\|_{H^{M_p}_p} + \|\psi\|_{H^{M_p-1}_p}\right),$$

onde $n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \geqslant 1$, $1 < p \leqslant 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ e $M_p \in \mathbb{R}$ com $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$.

O próximo teorema apresenta uma estratégia diferente de demonstração que permite remover a condição $n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \geqslant 1$ no Teorema 5.3.3.

Teorema 5.3.4. *Seja* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então, temos a seguinte estimativa* $L^p - L^q$

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{e^{i|\xi|t} - e^{-i|\xi|t}}{2i|\xi|}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\right)\right\| \leqslant Ct^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}||\psi||_{H_p^{M_p}},$$

onde $M_p \in \mathbb{R}$, $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, $1 < p \leqslant 2$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração. Seguimos os mesmos passos feitos para o multiplicador de Fourier dado em (5.0.6). Para isso, adicionamos uma função amplitude ao nosso modelo de forma que tenhamos

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{e^{i|\xi|t} - e^{-i|\xi|t}}{2i|\xi|}\frac{1}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\right), \tag{5.3.4}$$

onde $2r \geqslant 0$ será determinado depois.

Começamos encontrando estimativas na zona pseudo-diferencial. Para isso, seguimos a ideia do Teorema 5.1.1 e por isso vários passos são omitidos. Introduzindo a notação

$$I_0 := \left\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{e^{i|\xi|t} - e^{-i|\xi|t}}{2i|\xi|}\frac{1-\chi(|\eta|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\right)\right\|^q_{L^q},$$

fazendo as mudanças de coordenadas $\eta = t\xi$ e $tz = x$ e usando a relação (3.1.13), chegamos que

$$I_0 = t^{(2r+1)q-nq+n}\left\| \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(\frac{e^{i|\eta|} - e^{-i|\eta|}}{2i|\eta|}\frac{1-\chi(|\eta|)}{|\eta|^{2r}}\right) * \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\eta}{t}\right)\right)\right\|^q_{L^q}. \tag{5.3.5}$$

Para a integral

$$T := \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(\frac{e^{i|\eta|} - e^{-i|\eta|}}{2i|\eta|}\frac{1-\chi(|\eta|)}{|\eta|^{2r}}\right),$$

note que existe $A > 0$ tal que

$$\left|\frac{e^{i|\eta|} - e^{-i|\eta|}}{2i|\eta|}\right| = \left|\frac{\mathrm{sen}(|\eta|)}{|\eta|}\right| \leqslant A$$

para todo $|\eta| \leqslant 1$. Assim, dado l real positivo, temos

$$\begin{aligned} m\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{F}_{z\to\eta}(T)| \geqslant l\} &= m\left\{\eta \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{e^{i|\eta|}-e^{-i|\eta|}}{2i|\eta|}\frac{1-\chi(|\eta|)}{|\eta|^{2r}}\right| \geqslant l\right\} \\ &= m\left\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta|^{2r} \leqslant \left|\frac{1-\chi(|\eta|)}{l}\frac{e^{i|\eta|}-e^{-i|\eta|}}{2i|\eta|}\right|\right\} \\ &\leqslant m\left\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta|^{2r} \leqslant \frac{A}{l}\right\} \\ &= Cl^{-\frac{n}{2r}}. \end{aligned}$$

Assim, como $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$ e

$$\frac{n}{2r} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} > 1,$$

segue do Teorema 3.2.9 que $\mathcal{F}_{z\to\eta}(T) \in M_p^q$ e, então, $T \in L_p^q$. Assim, usando a Definição 3.2.4, segue que

$$\left|\left|T * \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\eta}{t}\right)\right)\right|\right|_{L^q} \leqslant Ct^{n-\frac{n}{p}}||\phi||_{L^p}. \tag{5.3.6}$$

Finalmente, substituindo (5.3.6) em (5.3.5), mostramos que

$$I_0 \leqslant Ct^{(2r+1)q-n\left(\frac{q}{p}-1\right)}||\phi||^q_{L^p}$$

e, tomando a raiz q-ésima, concluímos que

$$\left|\left|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{e^{i|\xi|t}-e^{-i|\xi|t}}{2i|\xi|}\frac{1-\chi(|\eta|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\right)\right|\right|_{L^q} \leqslant Ct^{2r+1-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}||\psi||_{L^p} \tag{5.3.7}$$

para todo $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$ satisfazendo $2r \leqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$.

Por outro lado, na zona hiperbólica, seguindo o mesmo que foi feito no Teorema 5.2.1 e tomando $2r+1 \geqslant \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, segue que

$$\left|\left|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{e^{i|\xi|t}-e^{-i|\xi|t}}{2i|\xi|}\frac{\chi(|\eta|)}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\right)\right|\right|_{L^q} \leqslant Ct^{2r+1-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}||\psi||_{L^p} \tag{5.3.8}$$

para todo $1 < p \leqslant 2$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Finalmente, precisamos estudar o que acontece para diferentes valores de $t > 0$. Novamente, o caminho é o mesmo feito para os outros multiplicadores de Fourier e, por isso, não apresentamos alguns passos intermediários.

- Caso $t \in (0, 1]$
  Adicionamos o termo $\frac{|\xi|^{2r_1}}{|\xi|^{2r_1}}$ na função amplitude, onde $r_1 \geqslant 0$, e basta tomar $2r_1 = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ nas estimativas dadas em (5.3.7) e (5.3.8) para concluir que

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(\frac{e^{i|\xi|t} - e^{-i|\xi|t}}{2i|\xi|} \mathcal{F}(\psi)(\xi) \right) \right\|_{L^q} \leqslant Ct(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\psi\|_{H_p^{2r_1}}$$

  para todo $1 < p \leqslant 2$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Caso $t \in [1, \infty)$
  Adicionamos o termo $\frac{|\xi|^{2r_2}}{|\xi|^{2r_2}}$ na função amplitude, onde $r_2 \geqslant 0$, e basta tomar $2r_2 = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ nas estimativas dadas em (5.3.7) e (5.3.8) para concluir que

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(\frac{e^{i|\xi|t} - e^{-i|\xi|t}}{2i|\xi|} \mathcal{F}(\psi)(\xi) \right) \right\|_{L^q} \leqslant Ct(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\psi\|_{H_p^{2r_2}}$$

  para todo $1 < p \leqslant 2$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Sendo assim, tomando $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, segue que

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(\frac{e^{i|\xi|t} - e^{-i|\xi|t}}{2i|\xi|} \mathcal{F}(\psi)(\xi) \right) \right\|_{L^q} \leqslant Ct(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\psi\|_{H_p^{M_p}},$$

onde $M_p \in \mathbb{R}$, $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\square$

Dessa forma, somando as estimativas dadas pelos Teoremas 5.3.1 e 5.3.4, chegamos no próximo teorema.

Teorema 5.3.5. *Sejam* $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então, a solução* u *para o problema de Cauchy para a equação da onda livre satisfaz a seguinte estimativa do tipo* $L^p - L^q$

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\|\phi\|_{H_p^{M_p}} + t\|\psi\|_{H_p^{M_p}}\right),$$

onde $1 < p \leqslant 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ *e* $M_p \in \mathbb{R}$ *com* $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$.

5.4 ESTIMATIVAS PARA AS DERIVADAS PARCIAIS

Nesta seção, vamos obter estimativas para a derivada parcial de u na variável t e também para ∇u. Para isso, note que a derivada parcial de u na variável t é dada por

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) = &\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left[-\left(e^{i|\xi|t} - e^{-i|\xi|t}\right)\frac{|\xi|}{2i}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right] \\ &+ \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left[\left(e^{i|\xi|t} + e^{-i|\xi|t}\right)\frac{1}{2}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\right],\end{aligned} \tag{5.4.1}$$

e, para cada $1 \leqslant k \leqslant n$, a derivada parcial de u em relação a x_k é dada por

$$\begin{aligned}\partial_{x_k} u(t,x) = &\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left[\left(e^{i|\xi|t} + e^{-i|\xi|t}\right)\frac{i\xi_k}{2}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right] \\ &+ \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left[\left(e^{i|\xi|t} - e^{-i|\xi|t}\right)\frac{\xi_k}{2|\xi|}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\right].\end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Para obter estimativas para ∇u, vamos trabalhar com o multiplicador de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\xi_k\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right).$$

Adicionamos uma função amplitude de forma que estudamos o multiplicador de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\xi_k}{|\xi|^{2r}}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right),$$

onde $2r \geqslant 1$. Para obter estimativas na zona pseudo-diferencial, seguindo o mesmo que foi feito no Teorema 5.1.1 e definindo

$$T = \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to z}\left(e^{-i|\eta|}\frac{\eta_k}{|\eta|^{2r}}1 - \chi(|\eta|)\right),$$

temos

$$\begin{aligned} m\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{F}_{z\to\eta}(T)| \geqslant l\} &= m\left\{\eta \in \mathbb{R}^n : \frac{|\eta_k|}{|\eta|^{2r}}|1-\chi(|\eta|)| \geqslant l\right\} \\ &= m\left\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta|^{2r} \leqslant \frac{|1-\chi(|\eta|)||\eta_k|}{l}\right\} \\ &\leqslant m\left\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta|^{2r} \leqslant \frac{|\eta|}{l}\right\} \\ &\leqslant m\left\{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta|^{2r-1} \leqslant \frac{1}{l}\right\} \\ &= Cl^{-\frac{n}{2r-1}}. \end{aligned}$$

Tomando $0 \leqslant 2r-1 \leqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, chegamos que

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\xi_k}{|\xi|^{2r}}(1-\chi(t|\xi|))\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right\|_{L^q} \leqslant Ct^{2r-1-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\phi\|_{L^p}$$

para todo $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Na zona hiperbólica, usando o fato de que $|\xi_k| \leqslant |\xi|$, basta seguir o mesmo que foi feito no Teorema 5.2.1 e tomando $2r-1 \geqslant \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, segue que

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\xi_k}{|\xi|^{2r}}\chi(t|\xi|)\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right\|_{L^q} \leqslant Ct^{2r-1-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\phi\|_{L^p}$$

para todo $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Após separar nos casos $t \in (0,1]$ e $t \in [1,\infty)$, conforme feito para o multiplicador (5.0.6), tomando $2r = n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+1$ na zona pseudo-diferencial e $2r = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+1$ na zona hiperbólica e somando as estimativas, chegamos que

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\xi_k\mathcal{F}(\phi)(\xi)\right)\right\|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\phi\|_{H_p^{M_p}},$$

onde $M_p \in \mathbb{R}$, $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+1$, $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Para o multiplicador de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\xi_k}{|\xi|}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\right),$$

usando que $\left|\frac{\xi_k}{|\xi|}\right| \leqslant 1$, basta seguir o mesmo raciocínio e concluímos que

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{\xi_k}{|\xi|}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\right)\right\|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\psi\|_{H_p^{M_p}},$$

onde $M_p \in \mathbb{R}$, $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^q} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_{x_k}u(t,x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_{x_k}u(t,x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\|\partial_{x_k}u(t,\cdot)\|_{L^q} \\
&\leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}(\|\phi\|_{H_p^{M_p}}+\|\psi\|_{H_p^{M_p-1}}),
\end{aligned}$$

onde $M_p \in \mathbb{R}$, $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+1$, $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Para obter estimativas para (5.4.1) basta seguir o mesmo caminho e chegamos em

$$\|u_t(t,\cdot)\|_{L^q} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}(\|\phi\|_{H_p^{M_p}}+\|\psi\|_{H_p^{M_p-1}}),$$

onde $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+1$, $1 < p \leqslant 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Assim, demonstramos o seguinte teorema.

Teorema 5.4.1. *Sejam* ϕ, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então, as derivadas particias* $\partial_t u$ *e* ∇u *da solução* u *para o problema de Cauchy para a equação da onda livre satisfazem as seguintes estimativas do tipo* $L^p - L^q$

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u(t,\cdot)\|_{L^q} &\leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\|\phi\|_{H_p^{M_p}}+\|\psi\|_{H_p^{M_p-1}}\right), \\
\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^q} &\leqslant C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\|\phi\|_{H_p^{M_p}}+\|\psi\|_{H_p^{M_p-1}}\right),
\end{aligned}$$

onde $M_p \in \mathbb{R}$ *com* $M_p \geqslant n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+1$, $1 < p \leqslant 2$ *e* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

A

FERRAMENTAS I

Esta parte contém dois lemas que foram utilizados na Seção 3.1 em que tratamos sobre transformada de Fourier.

Lema A.0.1. *A integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx$$

é finita.

Demonstração. Seja $f(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$, $x \in \mathbb{R}^n$, e definimos $g(r) = \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}$, $r \in (0, \infty)$. Assim, f é uma função não negativa e $f(x) = g(|x|)$. Logo, aplicando o Teorema 2.1.17, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty r^{n-1} \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} dr.$$

Agora, para $r > 1$, temos

$$\int_1^\infty r^{n-1} \frac{1}{\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}} dr \leqslant \int_1^\infty r^{n-1} \frac{1}{r^{n+1}} dr = \int_1^\infty r^{-2} dr < \infty,$$

enquanto, para $0 \leqslant r \leqslant 1$, temos que a aplicação $r \mapsto r^{n-1} \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ é contínua e, portanto, integrável nesse intervalo. □

Lema A.0.2. *Para cada* $k \in \mathbb{N}$*, existem constantes* $A, B > 0$ *tais que*

$$(1+|\xi|^2)^k \leqslant A \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\xi^\alpha|^2 \leqslant B(1+|\xi|^2)^k \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Seja $\xi \in \mathbb{R}^n$. Para $|\alpha| \leqslant k$,

$$|\xi^\alpha| \leqslant 1, \text{ se } |\xi| \leqslant 1 \quad \text{e} \quad |\xi^\alpha| \leqslant |\xi|^{|\alpha|} \leqslant |\xi|^k, \text{ se } |\xi| \geqslant 1.$$

Assim,

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} |\xi^\alpha|^2 \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \max\{1, |\xi|^{2k}\} = C_k \max\{1, |\xi|^2\}^k \leqslant C_k(1+|\xi|^2)^k,$$

onde $C_k = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant k} 1 > 0$.

Por outro lado, a função $\xi \mapsto \sum_{j=1}^n |\xi_j^k|^2$ é contínua, definida positiva e possui um mínimo $D_1 > 0$ em S^1. Assim, para $\xi \neq 0$,

$$D_1 \leqslant \sum_{j=1}^n \left| \frac{\xi_j^k}{|\xi|^k} \right|^2 \Rightarrow |\xi|^{2k} \leqslant D_2 \sum_{j=1}^n |\xi_j^k|^2,$$

onde $D_2 = \frac{1}{D_1}$.

Temos ainda que

$$\sum_{j=1}^n |\xi_j^k|^2 = \sum_{j=1}^n |\xi^{ke_j}|^2 \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} |\xi^\alpha|^2$$

e assim,

$$\begin{aligned} (1+|\xi|^2)^k &\leqslant 2^k \max\{1, |\xi|^{2k}\} \\ &\leqslant 2^k(1+|\xi|^{2k}) \\ &\leqslant 2^k \left(1 + D_2 \sum_{j=1}^n |\xi_j^k|^2\right) \\ &\leqslant 2^k D_3 \sum_{|\alpha|\leqslant k} |\xi^\alpha|^2, \end{aligned}$$

onde $D_3 \geqslant 1 + D_2$. Portanto, tomando $B = 2^k D_3$, segue que

$$(1+|\xi|^2)^k \leqslant B \sum_{|\alpha|\leqslant k} |\xi^\alpha|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. $\square$

B

FERRAMENTAS II

Nesta seção, vamos apresentar um resultado sobre transformações ortogonais especiais. Maiores detalhes podem ser encontrados em [15].

Definição B.0.1. Uma transformação linear $T : E \longrightarrow F$, onde E e F são espaços vetorias de dimensão finita munidos de produto interno, chama-se ortogonal quando preserva produto interno, isto é, se $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$ para quaisquer u, $v \in E$.

Em particular, um operador $T : E \longrightarrow E$ é ortogonal quando $A^*A = I_E$ ou $AA^* = I_E$, onde A^* é o operador adjunto de A e I_E é a identidade em E.

Teorema B.0.2. *Sejam* x, $y \in \mathbb{R}^n$ *tais que* $|x| = |y|$. *Existe uma transformação ortogonal* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que* $Tx = y$.

Demonstração. Supõe que x, $y \in \mathbb{R}^n$ são tais que $|x| = |y| = 1$ e estendemos x e y para duas bases ortonormais de $\mathbb{R}^n$, $\{x, x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ e $\{y, y_1, \cdots, y_{n-1}\}$, respectivamente.

Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o mapa linear tal que $Tx = y$ e $Tx_i = y_i$ para $i = 1, \cdots, n-1$. Vamos verificar que T é uma transformação ortogonal. Para isso, basta garantir que T preserva produto interno. Assim, sejam z, $w \in \mathbb{R}^n$. Escrevendo

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \\ w &= \beta x + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{n-1} x_{n-1}, \end{aligned}$$

onde α_i, $\beta_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \cdots, n-1$, temos que

$$\begin{aligned} Tz &= \alpha Tx + \alpha_1 Tx_1 + \cdots + \alpha_{n-1} Tx_{n-1} \\ &= \alpha y + \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n-1} y_{n-1} \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
Tw &= \beta Tx + \beta_1 Tx_1 + \cdots + \beta_{n-1} Tx_{n-1} \\
&= \beta y + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_{n-1} y_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, temos que

$$
\begin{aligned}
\langle Tz, Tw \rangle &= \langle \alpha y + \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n-1} y_{n-1}, \beta y + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_{n-1} y_{n-1} \rangle \\
&= \alpha\beta \langle y, y \rangle + \alpha_1 \beta_1 \langle y_1, y_1 \rangle + \cdots + \alpha_{n-1} \beta_{n-1} \langle y_{n-1}, y_{n-1} \rangle \\
&= \alpha\beta \langle x, x \rangle + \alpha_1 \beta_1 \langle x_1, x_1 \rangle + \cdots + \alpha_{n-1} \beta_{n-1} \langle x_{n-1}, x_{n-1} \rangle \\
&= \langle \alpha x + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}, \beta x + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{n-1} x_{n-1} \rangle \\
&= \langle z, w \rangle,
\end{aligned}
$$

ou seja, T preserva produto interno. Logo,T é uma transformação ortogonal tal que $T(x) = y$.

Agora, se x, $y \in \mathbb{R}^n$ com $|x| = |y| \neq 0$, aplicando o mesmo raciocínio para $\frac{x}{|x|}$ e $\frac{y}{|y|}$, conseguimos uma transformação ortogonal T tal que

$$
\frac{Tx}{|x|} = T\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{y}{|y|}
$$

e, então, $Tx = y$. $\square$

C

FERRAMENTAS III

Nesta parte apresentamos algumas ferramentas pontuais de análise, dentre eles o Lema de Morse, que são utilizados na demonstração do Lema de Littman. Por fim, também citamos alguns resultados sobre sequências de funções são necessários quando tratamos da convolução envolvendo distribuições e funções teste. Começamos com uma consequência do Teorema de Sard sobre variedades C^∞.

Teorema C.0.1. *Supõe que* M *e* N *são variedades* C^∞ *tais que* $\dim M < \dim N$ *e seja* $F : M \to N$ *um mapa* C^∞. *Então,* $F(M)$ *tem medida zero em* N.

Demonstração. Veja [13, Corolário 6.11]. □

O próximo resultado é sobre mudança de coordenadas em integrais de superfícies parametrizadas por mapas C^k.

Teorema C.0.2. *Sejam* $V \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $g : V \to \mathbb{R}$ *um mapa* C^k. *Ainda, seja* $M = \{(y, g(y)) : y \in V\}$. *Então,* $d\sigma$ *na parametrização* $\Sigma : V \to M$ *definida por* $\Sigma(y) = (y, g(y))$ *é dada por*

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla g(y)|^2}\,dy.$$

Demonstração. Veja [7, Exemplo 22.6]. □

Agora, vamos apresentar alguns resultados sobre aplicações diferenciáveis. Maiores detalhes podem ser encontrados em [14, Capítulo 5].

Teorema C.0.3 (Teorema de Schwarz)**.** *Se a aplicação* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *definida no aberto* $U \subset \mathbb{R}^m$ *é duas vezes diferenciável no ponto* $a \in U$*, então a derivada segunda* $f''(a) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *é uma aplicação bilinear simétrica.*

Teorema C.0.4 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)**.** *Seja* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação definida no aberto* $u \subset \mathbb{R}^n$ *com* $[a,\ a+v] \subset U$ *. Se* f *é de classe* C^p *e é* $p+1$ *vezes diferenciável em cada ponto do segmento aberto* $(a,\ a+v)$*, com* $|f^{(p+1)}(x) \cdot w^{p+1}| \leqslant M|w|^{p+1}$ *para todo* $x \in (a,\ a+v)$ *e todo* $w \in \mathbb{R}^m$*, então a fórmula de Taylor de* f *com resto de Lagrange se escreve como*

$$f(a+v) = f(a) + f'(a) \cdot v + \frac{1}{2} f''(a) \cdot v^2 + \cdots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(a) \cdot v^p + r_p(v),$$

onde

$$|r_p(v)| \leqslant \frac{M}{(p+1)!} |v|^{p+1}.$$

Teorema C.0.5 (Fórmula de Taylor com resto integral)**.** *Seja* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação definida no aberto* $u \subset \mathbb{R}^n$ *com* $[a,\ a+v] \subset U$ *. Se* f *é de classe* C^{p+1}*, então a fórmula de Taylor de* f *com resto integral se escreve como*

$$f(a+v) = f(a) + f'(a) \cdot v + \frac{1}{2} f''(a) \cdot v^2 + \cdots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(a) \cdot v^p + r_p(v),$$

onde

$$r_p(v) = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(a+tv) \cdot v^{p+1} dt.$$

Teorema C.0.6 (Teorema da Função Inversa)**.** *Seja* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *de classe* C^k *definida no aberto* $U \subset \mathbb{R}^m$*. Se* $a \in U$ *é tal que* $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *é invertível, então existe uma bola aberta* $B = B(a, \delta) \subseteq U$ *tal que a restrição* $f|_B$ *é um difeomorfismo sobre um aberto* V *que contém* $f(a)$*.*

Exemplo C.0.7. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{n^2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n^2} \\ X &\longmapsto X^n \end{aligned}.$$

Temos que a aplicação f é de classe C^∞ e a sua derivada, em cada ponto X, é a transformação linear $f'(X) : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ dada por

$$f'(X) \cdot V = \sum_{i=1}^{n} X^{i-1} \cdot V \cdot X^{n-i}$$

No ponto $X = I$, temos $f'(I) \cdot V = nV$ e, então, $f'(I) : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ é invertível. Logo, pelo Teorema da Função Inversa, existem uma bola aberta $B = B(I, \delta)$ e V que contém $I = f(I)$ tais que $f : B \longrightarrow V$ é um difeomorfismo C^∞. Isto é, toda matriz $Y \in V$ possui uma raíz n-ésima X ($X^n = Y$), a qual é única se impusermos que $X \in B$.

Lema C.0.8 (Lema de Morse). *Seja a um ponto crítico não-degenerado de uma função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $k \geqslant 3$, num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então, existe um sistema de coordenadas $\xi : V \longrightarrow W$, de classe C^{k-2}, com $a \in W \subset U$, $0 \in V$ e $\xi(0) = a$ tal que*

$$f\xi(y) - f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$$

para todo $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$, onde

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Demonstração. Para simplificar a notação, vamos supor que $a = 0$ e $f(a) = 0$.

Seja W uma bola aberta centrada em 0 e contida em U. Pela fórmula de Taylor com resto integral, temos que se $x \in W$, então

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) x_i x_j$$

com

$$a_{ij}(x) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) dt.$$

Cada a_{ij} é uma função de classe C^{k-2} definida em W e, para $x \in W$, segue do Teorema de Schwarz que a matriz $A(x) = (a_{ij}(x))$ é simétrica. Ainda, temos que

$$\begin{aligned} a_{ij}(0) &= \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) dt \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \int_0^1 (1-t) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0). \end{aligned}$$

Assim, seja

$$A_0 = A(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right).$$

Como 0 é ponto crítico não-degenerado de f temos que A_0 é invertível e, então, existe uma matriz B_0 tal que

$$I = A_0 B_0 = B_0 A_0.$$

Logo, para cada $x \in W$, podemos escrever $A(x) = A_0 B(x)$ com $B(x) = B_0 A(x)$ e note que $B(0) = I$. Pelo exemplo C.0.7, como $B(x)$ é uma matriz que depende de x em classe C^{k-2}, podemos tomar o raio da bola W tão pequeno tal que $B(x) = C(x)^2$, onde $C : W \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ é de classe C^{k-2}. Portanto, se $x \in W$, $A(x) = A_0 C(x)^2$.

Como, para todo $x \in W$, $A(x)$ é simétrica, temos que

$$\langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle A_0 C(x)^2 x, x\rangle = \langle x, C^*(x)^2 A_0 x\rangle.$$

Assim, $A(x) = C^*(x)^2 A_0$ e, então,

$$C(x)^2 = A_0^{-1} A(x) = A_0^{-1} C^*(x)^2 A_0 = (A_0^{-1} C^*(x) A_0)^2.$$

Novamente pelo exemplo C.0.7, se o raio de W for suficientemente pequeno, $x \in W$ implicará que $C(x)$ e $A_0^{-1} C^*(x) A_0$ estão tão próximos da identidade que, por terem quadrados iguais, temos que $C(x) = A_0^{-1} C^*(x) A_0$ e, então, $A_0 C(x) = C^*(x) A_0$. Assim,

$$A(x) = A_0 C(x)^2 = C^*(x) A_0 C(x).$$

Dessa forma, se $x \in W$, temos que

$$f(x) = \langle A(x)x, x\rangle = \langle C^*(x) A_0 C(x) x, x\rangle = \langle A_0 C(x) x, C(x) x\rangle.$$

Mostramos agora que, se o raio da bola W for tomado suficientemente pequeno, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : W &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto C(x)x \end{aligned}$$

é um difeomorfismo de classe C^{k-2} sobre a sua imagem. Com efeito, para todo $x \in W$ e todo $v \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\phi'(x) \cdot v = \frac{\partial \phi}{\partial v}(x) = \frac{\partial C}{\partial v}(x) x + C(x) v.$$

Para $x = 0$, temos $\phi'(0)v = C(0)v = v$. Logo, $\phi'(0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a transformação linear identidade. Assim, segue do Teorema da Função Inversa que, se o raio de W for tomado suficientemente pequeno, temos que ϕ é um difeomorfismo de classe C^{k-2} de W sobre um aberto V que contém $\phi(0) = 0$ e, então,

$$f(x) = \langle A_0\phi(x), \phi(x)\rangle.$$

para todo $x \in W$. Então, $\xi = \phi^{-1} : V \longrightarrow W$ é um sistema de coordenadas de classe C^{k-2} tal que, para todo $y \in V$,

$$f\xi(y) = \langle A_0 y, y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j.$$

$\square$

Um resultado bastante conhecido sobre sequências de funções é o Teorema de Ascoli-Arzelá.

Teorema C.0.9 (Teorema de Ascoli-Arzelá)**.** *Seja $\mathscr{F}$ uma família equicontínua infinita de funções em uma espaço métrico compacto K que é uniformemente limitada, isto é, $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in K$ e toda $f \in \mathscr{F}$. Então $\mathscr{F}$ contém uma sequência infinita que converge uniformemente em K.*

Demonstração. Veja [6, Capítulo 1]. $\square$

Se $\mathscr{F}$ é uma família infinita de funções uniformemente limitadas com derivadas uniformemente limitadas, segue da Desigualdade do Valor Médio que o resultado do Teorema de Ascoli-Arzelá continua válido.

Corolário C.0.10. *Seja $\mathscr{F}$ uma família infinita de funções uniformemente limitadas com derivadas uniformemente limitadas. Então $\mathscr{F}$ contém uma sequência infinita que converge uniformemente em K.*

D

FERRAMENTAS IV

Nesta parte vamos apresentar algumas definições relacionadas a funções de uma variável complexa e que são usadas para apresentar o Teorema de Resíduos. Maiores detalhes podem ser encontrados em [5].

Definição D.0.1. Se γ é uma curva retificável fechada em $\mathbb{C}$, então, para $a \notin \gamma$,

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz$$

é chamado o índice de γ com respeito ao ponto a.

Definição D.0.2. Se G é um conjunto aberto dizemos que γ é homóloga à zero, em símbolos $\gamma \approx 0$, se $n(\gamma, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus G$.

Definição D.0.3. Uma função f tem uma singularidade isolada em $z = a$ se existe $R > 0$ tal que f está definida e é analítica em $B(a, R) \setminus \{a\}$ mas não em $B(a, R)$.

Definição D.0.4. Supõe que f tenha uma singularidade isolada em $z = a$ e seja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

sua expansão de Laurent em $z = a$. Então, o resíduo de f em $z = a$ é o coeficiente a_{-1} que é denotado por $\text{Res}(f, a) = a_{-1}$.

O próximo teorema pode ser encontrado em [5, Teorema 2.2].

Teorema D.0.5 (Teorema de Resíduos). *Seja* f *uma função analítica em uma região* G *exceto nas singularidades isoladas* $a_1, \cdots, a_m$. *Se* γ *é uma curva retificável fechada em* G *que não passa pelos pontos* a_k, $k = 1, \cdots, m$, *e se* $\gamma \approx 0$ *em* G, *então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k) Res(f, a_k).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Robert G Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 1995.

[2] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces: an introduction*, volume 223. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Philip Brenner. On $L^p - L^{p'}$ estimates for the wave-equation. *Mathematische Zeitschrift*, 145(3):251–254, 1975.

[4] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[5] John B Conway. *Functions of One Complex Variable I*. Springer, 1978.

[6] William F Donoghue. *Distributions and Fourier transforms*. Academic Press, 2014.

[7] Bruce K Driver. Analysis tools with applications. 2003.

[8] Marcelo R Ebert and Michael Reissig. *Methods for partial differential equations: qualitative properties of solutions, phase space analysis, semilinear models*. Birkhäuser, 2018.

[9] Gerald B Folland. Real analysis: modern techniques and their applications. John Wiley & Sons, 2013.

[10] Alain Grigis and Johannes Sjöstrand. *Microlocal analysis for differential operators: an introduction*, volume 196. Cambridge University Press, 1994.

[11] Lars Hörmander. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. *Acta Mathematica*, 104(1):93–140, 1960.

[12] Jorge Hounie. *Teoria elementar das distribuicoes:(12e coloquio brasileiro de matematica, pocos de caldas 1979).* Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada, 1979.

[13] John M Lee. *Introduction to Smooth Manifolds, Second edition*. Springer, 2013.

[14] Elon L Lima. *Curso de Análise vol. 2*. Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada, 2009.

[15] Elon L Lima. *Álgebra linear*. Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada, 2009.

[16] Walter Littman. Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 69(6):766–770, 1963.

[17] H Pecher. L^p-abschätzungen und klassische lösungen für nichtlineare wellengleichungen. i math. *Z*, 150(2):159–183, 1976.

[18] Michael Reissig and Karen Yagdjian. $L^p - L^q$ decay estimates for the solutions of strictly hyperbolic equations of second order with increasing in time coefficients. *Mathematische Nachrichten*, 214(1):71–104, 2000.

[19] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Functional analysis: introduction to further topics in analysis*, volume 4. Princeton University Press, 2011.

[20] Hans Triebel. *Theory of function spaces*. Birkhäuser, 1983.