UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PERCEPÇÕES MATEMÁTICAS COM O JOGO HYPERBOLICA

ANDRÉ BRIANCE MOTA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Rosa

Porto Alegre
2022

ANDRE BRIANCE MOTA

PERCEPÇÕES MATEMÁTICAS COM O JOGO HYPERBOLICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Rosa

Porto Alegre
2022

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Mota, André
Percepções Matemáticas com o jogo Hyperbolica / André Mota. -- 2022.
90 f.
Orientador: Maurício Rosa.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Licenciatura em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2022.

1. Percepções. 2. Geometria Hiperbólica. 3. Jogos Digitais. 4. Estética. 5. Tecnologias Digitais. I. Rosa, Maurício, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de matemática

Percepções matemáticas com o Jogo Hyperbolica

André Briance Mota

Banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Maurício Rosa
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

Profª. Drª. Débora da Silva Soares
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

AGRADECIMENTOS

No decorrer de minha trajetória na graduação e deste trabalho diversas pessoas ajudaram no decorrer dessa caminhada. Gostaria, então, de separar este espaço para agradecê-las em grupos ou individualmente.

Primeiramente, gostaria de agradecer meu orientador, Prof. Dr. Maurício Rosa, por não ter me deixado desistir nos (muitos) momentos em que tentei e por todas as oportunidades, orientações e ajuda para trabalhar com o que eu não tinha experiência.

Gostaria de agradecer à banca avaliativa deste trabalho, Profª. Drª. Débora da Silva Soares e Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia, por terem me dado a chance de apresentar um trabalho no qual acredito 100% em sua potencialidade, assim como, a ambos por participarem da etapa final da minha graduação.

Agradeço também a minha falecida mãe pelo apoio que ela me deu enquanto estava conosco e à toda minha família, meu pai, Maurício, minhas avós, Célia e Mara, minha irmã Mariana por terem me apoiado na minha escolha e permanência na graduação em Licenciatura em Matemática.

Agradeço a minha namorada Verônica que aguentou noites de sono sob a luz de computadores ligados enquanto eu fazia trabalhos e, também, me apoiou em um dos anos mais difíceis da minha vida.

Agradeço a todos os amigos que tenho, vocês foram muito importantes na formação de quem eu sou, da pessoa que queria acreditar neste trabalho. Alice, Letícia, Leonardo Flores, Rodrigo Itai, Beatriz Helena, Lucas Cantu, Victor Fernandes, Vinicius Piruca, Sthefânia Bittencourt, Renata Aguiar, Gabriel Fagundes, Lucas Peregrina, Luiz Sabadi, Luiz Zanella, Luísa Mendes, Kim, Vítor Riella, Pala, Anderson, Vitor Hugo, Alexandre Link, João Pedro Andres, João Antônio, Marcel, Isis, Sofia, Pepi, Júlia, Pedro, Júlia, Rafael Bento, Samuel, Arthur, Juliane, Giullia, Fantin, Claudio, Vitor Machado, Lucas Alves, João Gabriel, Leonardo Machado, Leonardo Lizzot, Luiza Rodrigues, Isabela Pavan, Ricardo Gonçalves.

Agradeço da mesma forma a todos/todas integrantes do grupo de pesquisa P3RmiTA-SE[2] (Pesquisas em Resistência, Responsabilidade e Respeito, matematicamente incluindo as Tecnologias e a Aprendizagem-Situada em Espaços-Educativos) que foram os ombros em que pude ficar em cima para poder ver mais longe.

Por fim e não menos importante, agradeço aos estudantes de graduação que aceitaram fazer parte dessa pesquisa, pois vocês foram fundamentais.

Epígrafe

“Tudo que nóis tem é nóis”

- Leandro Roque de Oliveira (Emicida)

RESUMO

Este trabalho investiga como estudantes de educação matemática percebem a geometria hiperbólica por meio de atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica. Para isso, produzimos dados por meio de um curso de extensão intitulado "Percepções em um Micromundo Digital Hiperbólico: como se dá a constituição do conhecimento matemático?", o qual discutiu projeções do espaço hiperbólico, retas, polígonos e ângulos na geometria hiperbólica e suas relações com o espaço digital do jogo. Os sujeitos de pesquisa foram cinco estudantes de educação matemática, quatro da Licenciatura em Matemática e uma do Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS, os quais não tiveram nenhum tipo de disciplina envolvendo geometria hiperbólica no decorrer de suas formações. Como referencial teórico, nos embasamos em estudos sobre Tecnologias Digitais (TD) e adotamos as ideias de ser-com-TD, pensar-com-TD e saber-fazer-com-TD (ROSA, 2008), além disso, evidenciamos estudos sobre estética e experiência estética (EAGLETON, 1993), uma vez que os jogos eletrônicos assumem a estética como forma de interação em linguagem multimodal. Dessa forma, nossos resultados mostram que a percepção dos estudantes se deu plugando-se ao jogo, trazendo à tona um eixo contemplando as ideias de ser-com, pensar-com e saber-fazer-com-Hyperbolica participantes no processo perceptivo. Um eixo com respeito à experiência estética também se mostrou proeminente, de modo que as estéticas do jogo tocavam os estudantes em seus afetos e aversões e contrastavam com os saberes de geometria euclidiana dos participantes.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometrias Não-Euclidianas. Geometria Hiperbólica. Jogos Digitais.

ABSTRACT

This graduate thesis investigates how mathematics education students perceive hyperbolic geometry through mathematical-activities-with-the-electronic-game-Hyperbolica. For this, we produced data through an extension course called “Perceptions in a Digital Hyperbolic Microworld: How is mathematical knowledge constituted?” which discussed projections in hyperbolic space, straight lines, polygons and angles in hyperbolic geometry and their relations with the game’s digital space. The subjects of this research were 5 students of mathematical education, four of which were undergraduate students in a mathematics education course and one was a student in the math’s education master's degree program in UFRGS the five of them having never taken a class on hyperbolic geometry during their graduate or postgraduate classes. As for our theoretical references we based ourselves in studies regarding Digital Technologies (DT) and adopted the ideas of being-with-DT, thinking-with-DT and knowing-making-with-DT (ROSA, 2008), besides that, we searched studies regarding aesthetics and the aesthetics experience (EAGLETON, 1993), assuming that electronic games admit aesthetics as a form of interaction in multimodal language. In this way, our results show that the students’ perception showed itself in their connection with the game, bringing forward an axis contemplating the concepts of being-with, thinking-with and knowing-how-to-make-with-DT as participants in the perceptive process. An axis regarding the aesthetic experience was also shown to be prominent, in a way in which the game’s different aesthetics were received with affect and aversions and contrasted with the students’ knowledge on euclidean geometry.

Keywords: Perception. Digital Games. Hyperbolic Geometry.

1. Iniciando o jogo

Para a introdução deste trabalho é discutida a trajetória do autor para que, de forma pessoal, explique-se de onde veio a vontade de realizar esta pesquisa e como foi o processo até seu início. Para a segunda seção iremos buscar trazer uma justificativa científica com uma breve revisão da literatura consultada para esta pesquisa. Na terceira seção, abordaremos a pergunta que guiou esta pesquisa, bem como os objetivos gerais e específicos dela. Na quarta seção, então, falaremos brevemente da pesquisa e na quinta e última seção abordaremos a estrutura do texto deste trabalho.

1.1 Trajetória e Justificativa Pessoal

Meu[1] caminho para chegar até a conclusão de minha graduação foi longo, totalizando seis anos, e transformador, de modo que entrei nesta faculdade de Licenciatura em Matemática com uma visão de mundo muito diferente da que tenho hoje. No começo da faculdade, sentia que não entendia tão bem quanto hoje as características que admiro em um professor e em um pesquisador da educação matemática.

Sinto que minha mudança para o professor e pesquisador que sou hoje veio quando comecei a ter mais apreço pelas leituras que eram passadas em sala de aula, em especial, quando tive contato com os ensinamentos do professor Larrosa sobre experiência na cadeira de Laboratório III, mesmo que na época não soubesse o quanto este texto viria a influenciar o modo que penso minha profissão hoje.

Foi próximo ao meu contato com estes textos que passei a ter meus primeiros contatos com alguns filósofos pós-estruturalistas como também alguns estudos antropológicos e etnomatemáticos. No meio de tantas narrativas, sinto que consegui pegar um semblante do potencial que a educação matemática tem e o alcance que ela pode ter em nossas vidas.

Com isso veio a pandemia e com ela o ensino remoto, pelo qual passei a ter mais contato ainda com minhas leituras, passei a tentar ler pelo menos um artigo ou capítulo de livro diariamente. Nesta rotina, acabei entrando em contato com alguns textos que até hoje fundamentam como penso e pratico a educação matemática. Ao mesmo tempo que tive meus contatos com a leitura aumentados, também tive a chance de trabalhar como pesquisador de iniciação científica sob a orientação da Professora Débora Soares. Essa oportunidade (e sorte) de ver a educação matemática como algo além das pilhas de teoria que estavam se acumulando

[1] Para esta seção do capítulo de introdução utilizarei a primeira pessoa do singular devido ao fato de estar contando uma narrativa pessoal de minha vida.

me fez crescer também enquanto professor que se formava. Com isso, digo que, meus tempos como bolsista foram fundamentais para o pesquisador que lhes apresenta esta pesquisa. Assim como, ingressar no grupo de pesquisa P3RmiTA-SE[2] (Pesquisas em Resistência, Responsabilidade e Respeito, matematicamente incluindo as Tecnologias e a Aprendizagem-Situada em Espaços-Educativos) que tem o Professor Maurício Rosa como coordenador e ser orientado por ele, contribuiu muito para essa pesquisa e para minha formação, pois houve uma parceria que ajudou a elevar minhas qualidades como professor e pesquisador, mas também me deu as oportunidades e ajuda para trabalhar onde eu não tinha experiência. Com isso, pude, então, realizar meu trabalho da maneira mais profissional possível sem perder a essência de quem sou e o que queria fazer.

Porém, entre tantas atividades na pesquisa e formação, meu descanso dos estudos da faculdade foi com os jogos digitais, os quais jogava com mais frequência do que lia, inclusive. Assim, com o passar do tempo em casa notei um movimento, quase inconsciente, acontecendo, passei a perceber que certas práticas que fazia nos jogos, que jogava sem nem dar muita atenção, poderiam ser vistas como aplicações diretas de teoremas que já havia estudado ou pelo menos ouvido falar. Quando explorava planetas não estava somente movimentando meu avatar em uma esfera, estava utilizando conceitos como pólos, equador e o próprio teorema 180º esférico. Diante disso, passei a jogar aqueles jogos favoritos com novos olhares, atentando-me para revisitar os conceitos matemáticos.

Nesta ideia de revisitar jogos antigos, lembrei-me de um vídeo que havia visto no YouTube alguns anos antes. O vídeo em questão mostrava um jogo ainda em desenvolvimento, cuja base de sua jogabilidade era negar axiomas e teoremas da geometria euclidiana. Ao rever este vídeo acabei ficando interessado se este projeto de jogo havia se desenvolvido. Foi neste momento que fiquei sabendo que o protótipo apresentado no vídeo do YouTube tinha evoluído para um projeto de um jogo completo, que hoje é parte dessa pesquisa, o Hyperbolica. Após buscar mais informações sobre este jogo criou-se o sentimento em mim de que, independente de que área decidisse dedicar meus estudos na educação matemática, ali estava algo que gostaria de falar, o potencial que jogos digitais possuem em discussões matemáticas e pedagógicas, não importando qual fosse o meio pelo qual faria isso.

Assim, quanto mais me aproximava do momento em que deveria decidir qual seria meu trabalho final do curso, podendo até duvidar de minhas chances de conseguir realizar o que queria, nunca desisti dos jogos digitais na educação matemática. A partir desta decisão me foi indicado falar com o professor Maurício Rosa, docente da UFRGS, devido a sua experiência em pesquisas com jogos eletrônicos na educação matemática. A partir disso foi marcado uma reunião em que foi decidido que o jogo que o trabalho seria feito com seria um que explorasse todas as possibilidades que o elemento virtual do mundo do jogo possibilita acontecimentos diferentes do que vemos no nosso cotidiano, sendo escolhido um jogo que desafiasse isso por meio de seu mundo ser não-euclidiano, o Hyperbolica.

Tendo acertado minha orientação no final de 2021 e já sabendo sobre o que iria falar comecei a procurar uma escola que pudesse ter os computadores para trabalhar com o jogo no Ensino Médio e que tivesse interesse em receber minha proposta. Esta procura tornou-se um processo extremamente difícil para mim, tendo entrado em contato com mais de 35 escolas diferentes, sendo impossível fechar uma parceria com algumas devido à falta de computadores.

Com a dificuldade de encontrar escolas para meu trabalho, começaram a crescer em mim sentimentos de rejeição e dúvida que só foram ampliados. No entanto, com a ajuda de muitas pessoas consegui finalizar o projeto, a pesquisa e seguir meus interesses: estudar como se relaciona a educação matemática com jogos digitais com a participação de estudantes do Ensino Superior em Licenciatura em Matemática, utilizando como suporte técnico computadores pessoais com as configurações devidas.

Com a resolução desse enfrentamento, foi possível realizar o planejamento de um curso de extensão sobre geometria hiperbólica de curta duração e desenvolvê-lo com cinco estudantes, quatro graduandos em Licenciatura em Matemática e uma pós-graduanda em Ensino de Matemática, a qual ficou sabendo do curso e se ofereceu para participar.

1.2 Justificativa Científica e Revisão de Literatura

Justificamos[2] esta pesquisa com a necessidade de continuação de pesquisas que pautam a investigação de jogos eletrônicos/digitais na educação matemática. Além disso, pautamos nossa pesquisa na intenção de trabalhar com o ensino de geometrias não-euclidianas para participar de sua discussão no contexto da educação matemática e ampliar seu alcance dentro e fora da academia.

Dessa maneira, para que pudéssemos nos preparar para o trabalho, uma breve revisão de literatura foi feita, contando com leituras de textos que usassem abordagens teóricas que se aproximam da que escolhemos adotar, em particular. Por exemplo, em Silva e Rosa (2020) a

---

[2] A partir desse momento do texto usamos a primeira pessoa do plural por entendermos que a pesquisa não é feita de forma individual, mas com o orientador, com o grupo de pesquisa e demais contribuintes em relação a esse texto.

pesquisa apresenta uma atividade com a experiência com o videogame[3] Xbox[4] e um aparelho conectado a ele denominado Kinect[5]. Em específico, foram utilizadas estas tecnologias em conjunto com o jogo Sports Rivals, um jogo que, com o suporte do Kinect, dispõe ao jogador uma série de esportes para que ele jogue utilizando seu corpo como controle do avatar. Esta atividade investigou como os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio compreendiam a sua relação com corpo e movimentos em relação à matemática discutida com o jogo. Não obstante, a ideia de investigação se embasa teoricamente em como essa experiência se doa à percepção dos sujeitos presentes na atividade. A atividade também registrou o aparecimento de cálculos e conceitos como ângulos, velocidade, força com o objetivo de tentar entender mais profundamente como realizar o movimento do corpo, aperfeiçoando-o em termos de performance com o jogo.

Em Silva (2021), a pesquisa é realizada investigando atividades-matemáticas-com-Fornite, ou seja, investiga como se mostra a matemática com um jogo digital chamado Fornite Battle Royale, em seu modo construção, pois esse jogo permite a construção de mundos digitais e a interação neles. Ao longo de suas atividades, os estudantes deveriam resolver problemas como medir certas distâncias e calcular a velocidade de certos veículos ou projéteis. As atividades foram voltadas para estudantes do Ensino Fundamental, os quais já estavam familiarizados com o jogo, por terem jogado em casa em seus computadores ou videogames.

Temos também o trabalho feito por Bulla (2020) que tem como objetivo investigar um curso de formação com professores voltado para a construção de atividades-matemáticas-com-Minecraft. Esse curso foi desenvolvido na UFRGS. Desta maneira, o curso com inicialmente 32 participantes se iniciou, com debates e leituras de textos para que os estudantes pudessem buscar criar uma atividade que levasse em conta os referenciais teóricos da Cyberformação e atuou com a experiência o jogo digital Minecraft de forma a revelar a matemática desenvolvida com o jogo. Os resultados da pesquisa apontam para a matemática da construção, a matemática da experimentação e a matemática da simulação.

Buscamos também ler e nos alinhar com o que é proposto em Rosa (2008) que trabalha o conceito de identidades online com um Role Playing Game, um jogo online jogado por meio

[3] Chamamos de videogame o console que roda um jogo digital, isto é, o hardware que permite jogar um jogo digital.
[4] Xbox é um videogame da empresa Microsoft. O console foi lançado na metade da primeira década do século XXI.
[5] Kinect é um acessório do Xbox com uma câmera que grava e converte os movimentos de um jogador para comandos em um jogo, de maneira que o avatar do jogador imite os movimentos dele.

de chats, junto ao Cálculo Diferencial e Integral e no contexto de um curso à distância com licenciandos em Matemática. Neste trabalho, Rosa (2008) articula não só sobre os jogos em si, mas como as identidades online são construídas à medida em que o conceito de integral definida perpassa essa construção. Nesse ínterim, o autor apresenta as ações de ser-com-TD[6], pensar-com-TD e saber-fazer-com-TD.

Damasceno (2021), por sua vez, apresenta em seu trabalho de mestrado profissional uma proposta pedagógica para o ensino de geometrias não-euclidianas utilizando o Geogebra para a Educação Básica. Em específico, trabalha com a esférica e da hiperbólica, para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. Em sua proposta foram feitos estudos sobre projeções e geodésicas no *software* GeoGebra[7], direcionados para que uma aprendizagem de geometria não-euclidiana caracterizada pela exploração de construções prontas, criação de geodésicas em superfícies curvas e uma atividade em que os estudantes colorem uma projeção a sua escolha. Em seus resultados a autora entende que há uma conexão entre a geometria esférica e a hiperbólica, bem como o entendimento de que estas aproximações possibilitam a aprendizagem destes conceitos em outros contextos, principalmente interdisciplinares com a geografia e artes.

Outro exemplo de pesquisa que trabalha com *softwares* de geometria dinâmica para o ensino de geometrias não-euclidianas é o de Reis (2006). Esse trabalho investiga a produção do conhecimento matemático em relação a geometria esférica e também discute nesse processo investigativo o uso de materiais manipuláveis como caleidoscópios, entre outros. O trabalho foi feito no contexto de um curso de geometria esférica, oferecido a estudantes do terceiro ao oitavo semestre da graduação em matemática na UNESP de Rio Claro. O curso tinha como proposta discussões e atividades que requerem dos estudantes pensamentos geométricos não-euclidianos, como exemplo, temos a situação na qual a turma deveria discutir qual o formato da trajetória que dois barcos navegando na terra devem fazer para que a distância entre eles permaneça constante.

Com esse levantamento, passamos a nossa pergunta e objetivos, de forma a deixar claro nosso foco investigativo. Ademais, entendemos que nossa pesquisa contribui para a área de Educação Matemática, pois, investiga um jogo digital próprio à geometria hiperbólica por meio de atividades-matemáticas constituídas com ele, diferente das pesquisas aqui apresentadas, e além disso, se encontra sob um viés de compreender a percepção de estudantes em relação à

[6] TD, aqui, é uma abreviação de Tecnologias Digitais
[7] GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica e álgebra cujo foco é na divulgação, acessibilidade e educação de matemática.

matemática apresentada nele. Nosso trabalho reforça os pontos apresentados nesta revisão que envolvem abordagens para a aplicação de atividades matemáticas com os jogos digitais bem como um desejo por participar da discussão de atividades pedagógicas com geometrias não-euclidianas. Quanto ao que este trabalho se difere da revisão de literatura, temos a união dos assuntos já comentados, geometrias não-euclidianas e jogos digitais, e o foco na aplicação de um curso de atividades-matemáticas-com-o-jogo-digital-Hyperbolica.

1.3 Pergunta e Objetivos da Pesquisa

Dado que a construção do curso e o estudo dos referenciais teóricos se deu ao mesmo tempo, buscamos colocar a pergunta de maneira que sua resposta pudesse conversar claramente com o que estava elaborado no curso e com o referencial teórico proposto. Uma vez que consideramos ambos os fatores, previmos um possível entendimento dos acontecimentos do curso, por meio dos conceitos de percepção propostos por Merleau-Ponty, os quais poderiam ser usados para uma compreensão do como a exploração dos estudantes de atividades-matemáticas construídas com um mundo digital regido pela geometria hiperbólica se daria. Portanto, a pergunta que direcionou esta pesquisa se deu da seguinte forma: **Como estudantes de educação matemática percebem a geometria hiperbólica por meio de atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica?**

A partir de nossa pergunta, nosso objetivo geral se apresenta como: investigar como estudantes de educação matemática percebem a geometria hiperbólica por meio de atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica, de modo a compreender o conhecimento matemático possível de ser constituído com o jogo eletrônico e suas possibilidades pedagógicas.

Nessa perspectiva, nossos objetivos específicos se revelam como forma de alcançar nosso objetivo geral. Logo, temos:

1. Investigar como se compreende o conceito de percepção na filosofia;
2. Investigar a geometria hiperbólica em termos de seu ensino;
3. Desenvolver atividades-matemáticas-com-o-jogo-digital-Hyperbolica de forma que a concepção de experiência com Tecnologias Digitais pudesse ser evidenciada nessas atividades; e
4. Compreender a forma de desenvolver pesquisa qualitativa, assim como, desenvolver uma análise de dados em consonância com visão de mundo e de conhecimento.

1.4 A Pesquisa

A pesquisa, então, se deu no desenvolvimento de um curso de oito horas presenciais para quatro licenciandas/os em Licenciatura em Matemática e, por voluntariado, uma estudante de pós-graduação em Ensino de Matemática, todos/as da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. O curso foi divulgado de forma individual para colegas da graduação e pós-graduação, visto que em um primeiro momento foi produzido para estudantes de Ensino Médio e com dificuldades de realização frente, principalmente, os equipamentos das escolas. Com a disposição desses cinco participantes em dois encontros de quatro horas cada, em dias diferentes de acordo com a disponibilidade dos/das participantes, os quais foram realizados na casa do professor-pesquisador por causa do equipamento necessário. Assim, foram realizadas atividades-matemáticas-com-o-Hyperbolica. Ou seja, atividades-matemáticas que foram previamente formuladas e reformuladas com a supervisão do professor orientador que discutiam a geometria hiperbólica com o jogo digital. Isso significa que sem o jogo as atividades perderiam o sentido ou mesmo teriam outra nuance de significação. A pesquisa, então, foi desenvolvida com a gravação desses dois encontros, dos diálogos e das ações no jogo realizadas pelos/as participantes. Ao final também, houve uma interação entre o grupo sobre a potencialidades pedagógicas das atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica em espaços educativos formais.

1.5 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está dividido em um total de seis capítulos, com o primeiro servindo de introdução para ele; o segundo capítulo servirá como uma discussão de nossos referenciais teóricos e está dividido em quatro partes: geometrias não-euclidianas, percepção, estética e tecnologias digitais; o terceiro capítulo explicará a metodologia aplicada no trabalho e está dividido em seis seções: pesquisa qualitativa, visão de mundo e conhecimento, sujeitos e contexto da pesquisa, recursos, encontros e procedimentos; o quarto capítulo é onde ocorrerá a apresentação e a análise dos dados produzidos e está dividido em duas seções principais, uma análise em termos dos referenciais teóricos que envolvem ser-com-TD, pensar-com-TD e saber-fazer-com-TD, enquanto a outra seção analisa os dados e as manifestações de experiências estéticas neles; o quinto capítulo corresponde às nossas considerações finais sobre a pesquisa desenvolvida e sobre a análise dos dados; o sexto capítulo lista todas as referências bibliográficas utilizadas neste trabalho; por fim, encontram-se anexos e apêndices, como as atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hypebólica propostas aos/as estudantes, bem como um exemplar do termo de consentimento que foi assinado pelos/as participantes da pesquisa e que se encontrarão por cinco anos em nossa posse.

2. Jogos Teóricos

Neste capítulo iremos jogar com quatro referenciais teóricos diferentes. Primeiramente, iremos discutir um referencial teórico de geometrias não-euclidianas, trazendo tanto o conteúdo matemático quanto alguns trabalhos que lidam com geometrias não-euclidianas na educação matemática. Depois iremos debater brevemente o conceito de percepção, segundo Merleau-Ponty. Na terceira parte deste capítulo iremos falar sobre estética e experiência estética. Por último falamos sobre Tecnologias Digitais e Cyberformação.

2.1 Geometria Não-Euclidiana

Para começarmos esta seção, iniciamos com as geometrias não-euclidianas e o que elas são. No entanto, para que possamos discutir isso, antes precisamos falar sobre o que é, na verdade, a geometria euclidiana. Afinal, para que possamos entender algo que, já em seu próprio nome, se trata de uma negação, uma oposição, precisamos entender também a que ela se opõe ou confronta de certa forma.

A geometria euclidiana é a geometria que lida com objetos planos em geral, isto é, segmentos de reta, polígonos e formas circulares existentes em um espaço que em si é plano, ou seja, que não possui nenhuma forma de curvatura. As origens de sua utilização e compreensão são um tanto difíceis de serem encontradas com exatidão, no entanto, o que se tem bem documentado é a origem de sua formalização para a matemática acadêmica. Esta origem é dada a partir do livro[8] “Os Elementos”, de autoria do próprio Euclides, uma série de 13 livros, vários anos depois da morte do autor convertidos para um único volume, em que Euclides busca construir e unificar o conhecimento de geometria por meio da prática de demonstrar, por meio de uma lógica de dois valores[9], quase toda afirmação feita sob geometria no “Os Elementos”. Assim, se tomarmos uma das traduções para o português que temos, a de Irineu Bicudo (EUCLIDES, 2009), podemos ver que já no começo do livro algumas definições básicas de geometria (o que é um ponto, por exemplo) e noções comuns de igualdade que Euclides coloca ali não estão postas para demonstrar, mas para dar sentido às suas demonstrações. Junto a estas, o livro também traz cinco postulados, que serviriam como as verdades básicas da geometria, a qual aplicar-se-ia a lógica para que se pudesse realizar todas e quaisquer demonstrações feitas.

Estes postulados são, de certa forma, muito simples. Os quatro primeiros falam sobre a

[8] Iremos, ao longo deste trabalho, nos referir ao livro Os Elementos de Euclides no singular, nos referindo ao volume que compila os 13 livros originais em um único livro.

[9] Lógica de dois valores é aquela em que uma dada afirmação só pode ser considerada como verdadeira (o primeiro valor) ou falsa (o segundo valor), de maneira que uma terceira possibilidade para uma afirmação não exista.

possibilidade de se traçar uma reta de um ponto até outro; a possibilidade de se estender uma reta infinitamente; como se descreve um círculo a partir de um ponto e uma certa distância; e como todos os ângulos retos são iguais entre si. Porém, o quinto postulado, conhecido como postulado das paralelas, não divide essa simplicidade com os outros, Euclides (2009, p. 98) o descreve assim: “E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos”.

A maneira como esse postulado foi apresentado no livro fez com que vários matemáticos desconfiassem de sua classificação como tal, dando a impressão de que, na verdade, ele era uma proposição, isto é, um resultado que também é demonstrável a partir das outras quatro proposições. Como é afirmado em Greenberg (1974) suspeita-se que até o próprio Euclides tinha suas dúvidas quanto a este postulado, devido ao fato de que ele adiou o seu uso o máximo possível no livro, utilizando-o pela primeira vez na vigésima sétima proposição.

Com o passar dos séculos, matemáticos como Saccheri e Lambert buscaram investigar esta suspeita por meio da construção de certos quadriláteros[10] e afirmaram ter descoberto uma demonstração para o quinto postulado, porém, posteriormente todas estas se mostraram falhas, mantendo a viva ideia desta afirmação apenas como um postulado (GREENBERG, 1974).

Este esforço investigativo, no entanto, não se mostrou em vão, pois foi a partir dele que matemáticos do século XIX, como János Bolyai, Nikolai Lobachevsky e até mesmo Gauss (em grau menor que os outros dois), em seus estudos sobre o quinto postulado de Euclides, descobriram que ao negar este postulado uma nova geometria, igualmente consistente à euclidiana, emergia (GREENBERG, 1974). Nascia, então, a ideia de uma geometria não-euclidiana como a conhecemos hoje, isto é, geometrias que negam pelo menos um dos postulados da geometria proposta por Euclides e ainda se mostram como consistentes internamente.

A partir dessa ideia, conforme Eduardo (2013), é possível ver como não devemos falar em apenas uma geometria não-euclidiana, mas, na verdade, em diversas. Em específico, a geometria descoberta por Bolyai e Lobachevsky é denominada comumente por geometria hiperbólica, porém, geometrias como a elíptica também são consideradas não-euclidianas, já

[10] O quadrilátero de Saccheri, é um quadrilátero com dois lados congruentes perpendiculares à sua base. O objetivo dessa construção era provar que era absurdo os ângulos da parte de cima do quadrilátero serem obtusos ou agudos, o que só é verdade na geometria proposta por Euclides. O quadrilátero de Lambert, é um quadrilátero construído com o mesmo objetivo, no entanto, ele se diferenciava por ter três ângulos retos, com a intenção de provar que o quarto ângulo deveria ser reto também. Porém, foi demonstrado que o quarto ângulo era, na verdade, agudo(GREENBERG, 1974).

que também negam postulados presentes em "Os Elementos". Ademais, o conceito de geometrias não-euclidianas é muito extenso, tendo sido levado além do proposto por Bolyai e Lobachevsky por matemáticos como Riemann e sendo parte fundamental para o entendimento das ideias de relatividade geral propostas por Einstein (EDUARDO, 2013). No entanto, para os propósitos deste trabalho iremos discutir apenas conceitos pertinentes a geometria hiperbólica.

O quinto postulado é interessante para se construir uma geometria em volta de sua negação, tendo sido mostrado como equivalente ao axioma proposto por Hilbert em seu livro "Os Fundamentos da Geometria"[11] que diz que "Dado um plano α, pode ser desenhada por um ponto A que esteja fora de uma linha reta a, uma única reta que não intersecta a reta a. Esta reta é chamada de paralela a a pelo ponto A"[12] (HILBERT, 1950, p. 7, tradução nossa), a negação dele implica que ou não existe esta reta paralela ou que existem, na verdade, várias retas paralelas a reta r, como é o caso da geometria hiperbólica.

Esta ideia é chamada de o axioma hiperbólico em Greenberg (1974, p. 188, tradução nossa) e é apresentada da seguinte forma: "na geometria hiperbólica existe uma reta l e um ponto P não pertencente a l de modo que pelo menos duas retas distintas, paralelas a l, passam por P"[13]. A partir deste axioma e dos outros quatro postulados da geometria euclidiana que não são negados na hiperbólica pode-se demonstrar algumas proposições importantes para o entendimento da geometria hiperbólica.

Uma delas é que, na geometria hiperbólica, não existem retângulos. Isso se dá pelo fato de que a existência deles é logicamente equivalente ao postulado das paralelas[14], que na geometria hiperbólica é negado, portanto, não existem retângulos na geometria hiperbólica (GREENBERG, 1974).

Temos também, o chamado Teorema Hiperbólico Universal[15] (GREENBERG, 1974, p. 188, tradução nossa) que estende a ideia do axioma hiperbólico da noção de uma reta específica para uma mais geral, a de que, na geometria hiperbólica, dada uma reta qualquer existem pelo

[11] Em 1900, o matemático David Hilbert lança seu livro Os Fundamentos da Geometria, em que busca uma nova axiomatização para a geometria euclidiana, de maneira que seus axiomas fossem equivalentes (logicamente trazem a mesma ideia) aos de Euclides.

[12] In a plane α there can be drawn through any point A, lying outside of a straight-line a, one and only one straight line which does not intersect the line a. This straight line is called the parallel to a through the given point A.

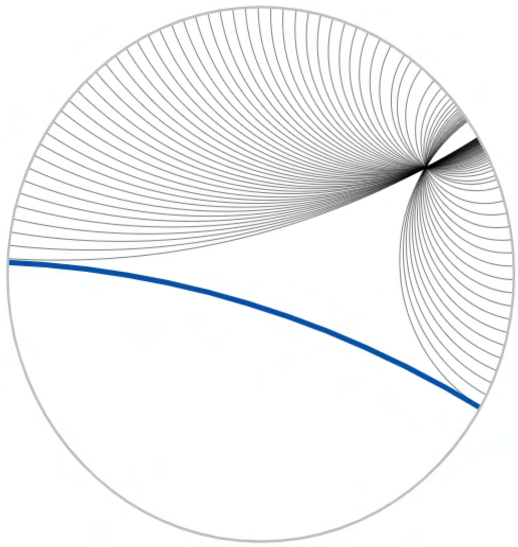
[13] In hyperbolic geometry there exist a line I and a point P not on I such that at least two distinct lines parallel to I pass through P.

[14] "Esta equivalência se dá por meio de mais uma equivalência entre a existência de retângulos e a soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180º. Esta outra equivalência é demonstrada utilizando quadriláteros de Saccher" (GREENBERG, 1974, p. 131).

[15] Universal Hyperbolic Theorem

menos duas retas distintas paralelas à primeira. Deste resultado, segue diretamente que, na geometria hiperbólica, existem infinitas retas paralelas à nossa reta original que passam pelo mesmo ponto P.

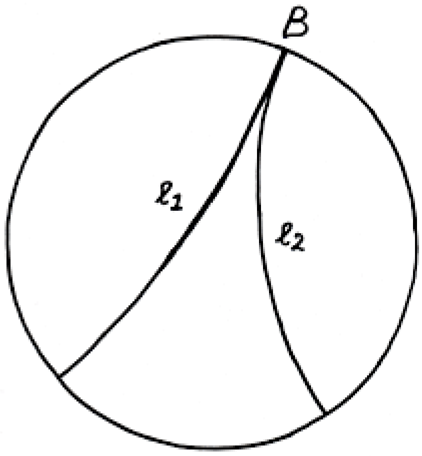
Figura 1: retas paralelas em uma projeção do plano hiperbólico



Fonte: Singerfix[16] (2022)

Um aspecto interessante das retas paralelas na geometria hiperbólica, que as diferem de suas análogas na geometria euclidiana, vem de uma proposição que diz que entre duas retas hiperbólicas paralelas a distância entre elas varia, existindo um ponto em que a distância entre elas é a menor possível (GREENBERG, 1974). Isso implica numa divergência entre duas retas paralelas na geometria hiperbólica, isto é, elas vão ficando cada vez mais distantes umas das outras.

Figura 2: Distância entre as retas hiperbólicas paralelas



Fonte: Wikimedia (2022)

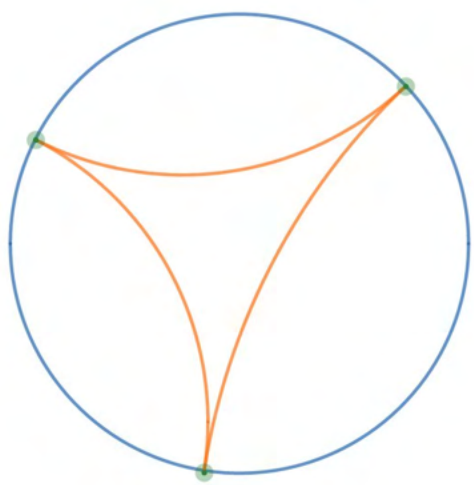
[16] Disponível em: Geometria hiperbólica (stringfixer.com). Acesso em 10/10/2022

É importante frisar que as retas no plano hiperbólico não curvam, apesar de sua divergência, elas apenas aparentam curvar devido a distorções da projeção do plano hiperbólico para o plano euclidiano[17], que é como conseguimos as visualizar. Na verdade, estas formas são, de fato, linhas retas paralelas entre si.

Outra proposição que iremos falar é relacionada ao conceito de ângulos internos de um triângulo hiperbólico. A demonstração dela vem também de uma equivalência, a de que, se existem retângulos, então a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. No entanto, como na geometria hiperbólica não existem retângulos, então, a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser diferente de 180º, não só diferente, mas, estritamente menor que 180º (GREENBERG, 1974). Diretamente ligado a isso, possuímos um corolário afirmando que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero, na geometria hiperbólica, é estritamente menor que 360º.

Uma consequência destas proposições relacionadas a ângulos é a possibilidade de produzirmos triângulos com ângulos muito pequenos, já que nossa única restrição é que eles somem menos que 180º. Podemos, inclusive, construir um triângulo que a soma de seus ângulos internos é exatamente 0º, desde que todos seus vértices se encontrem onde as retas hiperbólicas convergem em um único ponto[18]. Frisamos que estes pontos de convergência deste triângulo de 0º se encontram no infinito, portanto a distância entre estes pontos seria, também, infinita.

Figura 3: Triângulo hiperbólico cujos ângulos internos possuem 0 graus

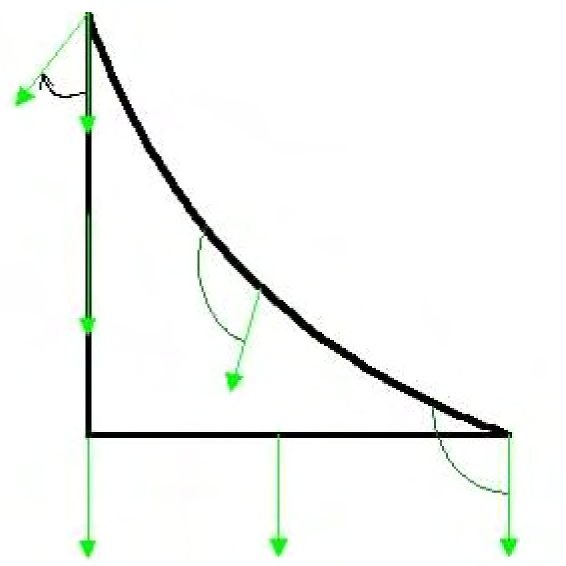


Fonte: Quora (2020)

[17] De maneira semelhante a como um mapa fica distorcido devido às projeções do globo para uma folha plana ocorrem distorções quando projetamos o plano hiperbólico.
[18] Chamamos estes pontos de pontos ideais. Pontos ideias são pontos bem definidos localizados no infinito quando representados em uma projeção de Poincaré (GREENBERG, 1974, p. 349)

O espaço hiperbólico também possui algumas propriedades que são importantes que falemos. Em especial, a holonomia, conforme Henderson e Taimina (2005), é a diferença entre o ângulo de um vetor v em um certo ponto P em relação a uma reta r e o ângulo deste vetor v neste mesmo ponto P em relação à mesma reta r depois de ser transladado no espaço hiperbólico. Normalmente, na geometria euclidiana a inclinação do vetor em relação à reta não mudaria, então esta diferença seria 0. No entanto, na geometria hiperbólica, a inclinação do vetor em relação a reta muda, isto é, acontece um giro no vetor, portanto esta diferença entre os ângulos é um número diferente de 0.

Figura 4: A holonomia de um triângulo hiperbólico



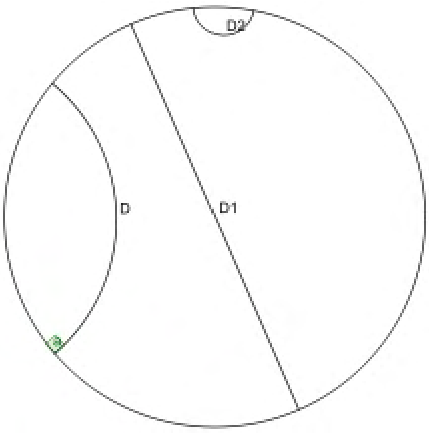
Fonte: Henderson e Taimina (2005)

Bem como falamos sobre algumas características do plano hiperbólico, convém falar brevemente sobre algumas de suas projeções, em outras palavras, iremos falar sobre representações de figuras hiperbólicas em um plano euclidiano, em específico, a projeção de Poincaré e a projeção de Beltrami-Klein. A projeção de Poincaré é a que vimos nas imagens mostradas até então, nas quais há uma distorção da forma dos objetos, se comparados aos da geometria euclidiana plana, mais especificamente, por causa de suas distâncias hiperbólicas[19]. Em outros termos, a projeção de Poincaré não preserva o tamanho de alguns objetos, ainda mais, as suas linhas retas entre alguns objetos em sua representação, as torna curvas quando comparadas às retas da geometria euclidiana. No entanto, existe uma outra projeção que

[19] A distância no plano hiperbólico funciona de maneira um pouco diferente da euclidiana, por isso identificamos aqui as distâncias como hiperbólicas.

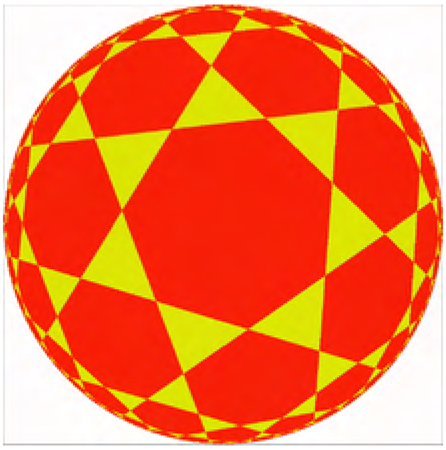
preserva esta linearidade, a projeção de Beltrami-Klein, que também distorce o tamanho das formas, assim como a de Poincaré, porém, objetos que são retos no plano hiperbólico, em sua projeção serão representados como se fossem retas euclidianas.

Figura 5: Projeção de Poincaré de três retas paralelas na geometria hiperbólica



Fonte: Wikipédia (2022)

Figura 6: Projeção de Beltrami-Klein do plano hiperbólico



Fonte: Wikipédia (2022)

Assim, com esta seção, buscamos esclarecer as origens da geometria hiperbólica bem como trazer à tona suas ligações com a euclidiana. Além disso, buscamos esclarecer o comportamento de retas, polígonos e ângulos na geometria hiperbólica e suas diferentes projeções. Seguimos agora para uma discussão sobre o que é a percepção segundo Merleau-Ponty.

2.2 Percepção

Tratar do conceito de percepção com base na filosofia não é um trabalho fácil, principalmente devido ao fato de ser uma palavra muito utilizada em nosso cotidiano, tornando a discussão em volta do conceito filosófico mais complexa, principalmente pelo fato que o conceito filosófico de percepção, além de diferir em significado, também possui uma carga teórica de visão de mundo que o antecede.

A visão de mundo de que falamos e nos embasamos é elaborada por um filósofo do século XX chamado Merleau-Ponty, principalmente, em um livro denominado "A Fenomenologia da Percepção", lançado em 1945. Este livro, antes de tratar do conceito de percepção traz para o leitor uma discussão sobre do que exatamente se trata a fenomenologia, um campo da filosofia interessado no estudo de fenômenos, isto é, tudo que acontece na natureza e/ou no mundo.

Um cuidado grande tem que ser tomado ao tratar da fenomenologia, isso se dá devido ao fato de que certas palavras que estamos acostumados na nossa rotina possuem significados diferentes quando tratadas nesta área de estudo, de modo semelhante ao como na matemática a palavra função possui um sentido um tanto quanto diferenciado do que é normalmente utilizado no cotidiano de uma pessoa, pois assume a própria linguagem matemática para sua definição. Palavras como mundo, percepção e muitas outras[20], quando usadas, possuem significações que, para um leitor que ainda não iniciou seus estudos nessa área, podem encontrar conflitos entre o uso delas na filosofia e na linguagem cotidiana.

Desta forma, julgamos pertinente esclarecer que o entendimento fenomenológico de mundo é um que considera que o mundo está/é junto ao ser que nele vive (SEIDEL, 2013), isto é, se pensa em um ser-com-o-mundo, identificando a não-separação de ambas as palavras por hifens. Dessa maneira, larga-se a ideia de que se é (se existe) sobre o mundo, já que dessa maneira ambos os conceitos poderiam existir a parte um do outro. Por exemplo, essa ideia pode ser entendida quando falamos que pensamos sobre o mundo, identificando uma independência entre eles, de forma que existiria um mundo sem um ser nele, com ele, tornando-o como algo que é dado, com a necessidade de ser estabelecido rigorosamente de maneira separada. Assim, o ser-aí, já é no mundo, com o mundo. Assim, podemos prosseguir a discutir mais a fundo a visão trazida por Merleau-Ponty sobre a percepção, iniciando pela diferenciação da palavra como ela é usualmente usada e como ela é pensada com o conceito filosófico de mesmo nome.

---

[20] Intencionalidade, atenção, corpo, ser, ente são exemplos de palavras que possuem significações diferentes das que usualmente usamos no dia-a-dia.

Ao consultar um dicionário da língua portuguesa como Michaelis (2022) lemos definições de percepção que a definem como um ato de perceber, a recepção de impressões colhidas pelos sentidos ou uma sensação física manifestada pela experiência. Em suma, a percepção, em seu uso na língua portuguesa está direta e unicamente relacionada aos sentidos do corpo humano. Porém, ao descrever seu conceito de percepção, Merleau-Ponty (2006) fala, justamente, sobre a incompletude das definições de percepção que a tratam como algo puramente sensível, que chama de empirismo, bem como também aponta falhas no tratamento do conceito pela vertente intelectualista (uma corrente que considera o intelecto e a razão como conceitos que devem dominar a maneira da pessoa se portar durante sua vida).

Quanto à interpretação empirista do que é a percepção, Seidel (2013, p. 74) aponta que "[...] os empiristas definiram a percepção como sensação, aquela confiada aos órgãos dos sentidos como uma qualidade ou impressão pura". Da mesma forma, em Merleau-Ponty (2006) nos é ensinado que resumir a percepção a somente uma qualidade dada pelos órgãos sensoriais é o mesmo que tomar um objeto como algo já determinado. Logo, esta equivalência se torna falsa quando discutimos a percepção de um objeto que, dentro de uma única forma ou materialidade, "[...] anuncia mais do que uma qualidade isolável e experimentada imediatamente com os órgãos dos sentidos" (SEIDEL, 2013, p. 75). Tomamos como exemplo uma prática comum de crianças quando vão jogar futebol na rua e não possuem uma goleira. Nestas situações, é comum que se use um par de chinelos como a própria goleira, isto é, no instante que a partida começa aquele mesmo objeto, com a mesma materialidade que causa as respostas sensoriais que o tratam como uma peça de vestimenta para os pés, passa a ser percebido não como um calçado, mas como uma fronteira cuja bola deve cruzar para que se marque um gol, ou seja, cada um dos chinelos é uma trave da goleira. Da mesma maneira, após o jogo, ou em outra situação de vivência, este mesmo chinelo pode ser percebido como uma proteção caseira contra insetos ou outros animais.

Desta maneira vemos como nossas experiências com o mundo não são estagnadas e presas a uma única qualidade, elas são na verdade um todo, um fundo ilimitado da qual o percebido apenas entra em relevo, se destacando deste fundo em um movimento denominado em Merleau-Ponty (1990) como figura-e-fundo ou uma figura que tem um fundo. Desta forma, podemos entender a figura chinelo que utilizamos como algo que é vestimenta, é goleira, é uma ferramenta de defesa contra insetos indesejados em um quarto, por meio da nossa percepção dele sendo essa figura que se destaca de um fundo que se revela como a necessidade de calçar os pés, a partida de futebol e o incômodo com mosquitos, por exemplo, fazendo com que seja percebido.

Em relação ao intelectualismo e sua interpretação puramente racional, desprendida do material, Merleau-Ponty (2006) faz sua crítica. Essa crítica acontece por parte desse autor, pelo fato dele entender que não é possível existir uma vida que seja privada de uma consciência (de modo que um pensamento puramente abstrato não trata da subjetividade do ser), apontando que o próprio ato de se colocar em um movimento racional absoluto é uma tentativa de se descolar por completo do fundo ilimitado do mundo (SEIDEL, 2013).

Desta forma, temos que, para Merleau-Ponty (2006) a percepção seria um conceito que serviria para indicarmos tudo que existiria no "entre" o ser e o mundo (SEIDEL, 2013). Especificamente, temos que a

> [...] percepção torna-se uma 'interpretação' dos signos que a sensibilidade fornece conforme os estímulos corporais, uma 'hipótese' que o espírito forma para 'explicar-se suas impressões'. [...] Através disso, somos levados para fora da reflexão, e construímos a percepção em lugar de revelar seu funcionamento próprio (MERLEAU-PONTY, 2006, p. 61-62).

Desta forma, possuímos a ideia de percepção que une aspectos do sensível com aspectos do racional, isto é, um processo que considera além do que é material e racional, a subjetividade explícita na "interpretação" dos signos. Frisamos que esta "interpretação" não se dá na associação do que foi captado pelos sentidos do corpo com experiências passadas que uma pessoa teve, pois, a percepção não é somente associação. Como explicado em Silva (2020, p. 24)

> [...] perceber não é lembrar, não é relacionar com algo já passado. Perceber é o que torna o vínculo com o passado possível. Está no enlaçamento do ser que se lança ao percebido, não no sentido atribuído depois de referências passadas modelarem o fenômeno. Ele se dá na possibilidade do haver referências cabíveis de serem conectadas com o percebido, que só se dá na percepção.

A percepção, então, não é a associação em si, de memórias com o sensível, ela pode se tornar o que possibilita a associação de um objeto a uma lembrança ou vivência de alguém. Ela se dá com os sentidos, com a atenção, com a associação, com tudo que de pronto se apresenta em um enlace momentâneo, em uma amalgama de todos esses fatores.

Assim, podemos lidar com um conceito maior do que apenas as memórias, lidamos com algo mutável que uma hora se doa à percepção de uma maneira, podendo alguns segundos depois mudar isso completamente. Nesta aceitação da pluralidade da percepção fugimos também das falácias que envolvem uma suposta percepção completa de algo, já que tanto a interpretação de uma pessoa em relação ao que foi experienciado sensorialmente, quanto a admissão da possibilidade da existência de uma qualidade fixa e imutável de um objeto, inicialmente vista pelo observador como racionalmente explicável, não se torna produto rígido do que pode ser interpretado como uma qualidade percebida (SILVA, 2020).

Um exemplo que esperamos que esclareça como que se dá a "interpretação" de uma qualidade de um objeto, se materializa quando estamos andando pela cidade, em um lugar que, a princípio, reconhecemos, no entanto, ao caminhar mais, percebemos que estamos em um lugar completamente diferente do que pensávamos. Neste exemplo, vemos como nossa interpretação sensória se deu baseada em qualidades que não estavam de fato na rua, no entanto, não foi só isso, nossa percepção inicial desencadeou situações que nos levaram para o lugar que não era. No entanto, ao continuar nosso potencial reflexivo nos lançou para a comparação do que foi visto possibilitando o reconhecimento de fato daquele lugar. Assim, nosso movimento perfaz que a percepção é o primado do conhecimento, como argumentado em Silva e Rosa (2020, p.49) ao colocarem que:

> [...] a constituição do conhecimento tem como primado a percepção, pois há o olhar intencionalmente focado, sendo no mundo com o corpo-próprio, e traz à consciência o percebido, sendo esse processo de percepção em si. Sem a percepção não há consciência nem foco, pois ela é fio condutor que costura a consciência com o mundo, sem ser possível desatá-la em momento algum.

Logo, a nosso ver, é a percepção que possibilita a reflexão, revela como comparação, relação, mensuração, espacialização etc. Conforme Merleau-Ponty (2006) afirma, dificilmente duvidamos que sejamos nós ao vermos a imagem de nossa silhueta andando quando somos filmados de costas, essa percepção implica em movimento posterior de reflexão e demonstração disso. Isso, então, abarca outro movimento relacionado à percepção. No caso, de corpos, cores, figuras a percepção interrelaciona-se com a estética. Nesse sentido, passamos a discutir também esse conceito.

2.3 Concepções de Estética

Para o começo desta seção, primeiramente, iremos buscar abordar algumas noções mais populares da palavra estética e seus possíveis significados, afinal, essa é uma palavra que tem usos muito diversos na língua portuguesa. Uma de suas variações, esteticista, por exemplo, está associada aos salões de beleza, enquanto a outra se associa dando sentido às frases que falam sobre a estética de uma construção de prédio. A relação entre estes dois usos pode, inicialmente, não parecer clara para muitos, porém, é por meio de uma análise de uma terceira utilização da palavra que esta relação pode se tornar mais clara para os leitores. Este terceiro uso vem de uma área de estudo da filosofia, também chamada de estética.

A área de estudo da estética é uma que já teve diferentes objetivos e compreensões ao longo dos tempos. Ademais, o dicionário de filosofia Abbagnano (2007, p.367) define estética da seguinte maneira: “com esse termo [estética] designa-se a ciência (filosófica) da arte e do belo”. Tomando esta noção como guia, podemos ver já como a palavra esteticista pode tomar um sentido como uma profissional que trabalha com o conceito de beleza, enquanto frases que se referem à estética de obras de arte falam da dimensão artística desta área da filosofia.

Esta definição, no entanto, simplifica e, por consequência, acaba não englobando tudo que a estética é capaz de fazer e interpretar. Para que possamos compreender melhor isso, precisaremos compreender melhor suas origens.

Em seu livro, a Ideologia da Estética, Terry Eagleton (1993) faz justamente isso, buscando explicitar as diferentes compreensões que pensadores como Freud, Kant, Hegel, Nietzsche e Walter Benjamin, ao longo dos séculos, tiveram sobre esta área de estudo. Apesar de podermos observar ideias sobre a beleza já em Platão, com seus discursos sobre a pureza da abstração da matemática a tornando bela e perfeita (SILVA; IDEM, 2021) e em Aristóteles, que também atribuía beleza à matemática em suas simetrias, mas também discursava sobre a relação dela com “belo” e o “bom” (HOINSKY; POLANSKY, 2016), Eagleton escolhe iniciar seu livro com outro pensador, Alexander Baumgarten.

Baumgarten foi um pensador alemão do século XVIII que cunhou o termo estética, vindo do grego *aisthesis*, como um ramo da filosofia que teria como objetivo dar conta do que foge das competências da lógica e da razão, uma espécie de adendo à filosofia. Eagleton (1993, p. 14) explica que

> A distinção que o termo “estética” perfaz inicialmente, em meados do século XVIII, não é aquela entre “arte” e “vida”, mas entre o material e o imaterial: entre coisas e pensamentos, sensações e ideias; entre o que está ligado a nossa vida como seres criados opondo-se ao que leva uma espécie de existência sombria nos recessos da mente. É como se a filosofia acordasse subitamente para o fato de que há um território denso e crescendo para além de seus limites, e que ameaça fugir inteiramente à sua influência.

Em outras palavras, no século XVIII começa-se a perceber que a razão sozinha já não bastava para entendermos tudo que faz parte do mundo, para isso precisa-se de uma área que consiga ligar as sensações de nosso corpo material, nossa observação, com a racionalidade da lógica, considerada por Baumgarten como imaterial. Assim, podia-se elevar o material e sensível ao nível perfeito do racional, podia-se começar a compreender a arte e nossos sentimentos da mesma maneira que compreendemos teoremas matemáticos ou argumentações filosóficas complexas.

Os motivos que Eagleton escolheu Baumgarten para iniciar seu livro vão além dele ter sido o primeiro registrado a utilizar a palavra dentro do uso que temos hoje na filosofia. Eagleton (1993) também argumenta que, a partir do século XVIII, os conceitos estéticos “[...] começam a exercer um papel central e intensivo na constituição da ideologia dominante” (EAGLETON, 1993, p.8). Afinal, o que era este “bom” que falava Aristóteles? Não seria ele uma tentativa de normatizar ideias em uma categoria, excluindo outras, desconhecidas e pertinentes ao sensível para o ruim, ou, em outras palavras, o “não-bom”? Um movimento parecido pode ser visto nas diversas tentativas que se vê ao se classificar músicas do século XVII e XVIII como um modelo ideal (belo e bom), de maneira que todas as outras músicas e gêneros musicais deveriam ser comparados, com a conclusão final de que não são tão bons, já que não são iguais a essas. Rosa (2021, p. 17) comenta sobre esta normatividade da estética da seguinte maneira:

> Nesse caso, o fato de a estética rumar à arte e ser dita intrínseca a este conceito, assim como, ao “belo”, o qual na Grécia antiga já era considerado por Platão como manifestação do bem e por Aristóteles como simetria, não obstante, no século XIX, por Hegel, como manifestação do verdadeiro, chegando a ser entendido como perfeição sensível (Baumgarten, Hume e Kant) e perfeição expressiva (Benedetto Croce), fazem com que a estética ganhe juízo de valor.

Baseado nisso, fazemos aqui uma crítica justamente a este movimento de desprender a estética do mundo o qual ela se mostra unida. Devemos, na sociedade atual, questionar sempre o que é esta normatividade do “belo”, do “verdadeiro”, do “bom”, que está sendo proposto, o que ele exclui, por que ele exclui e de qual ideia de mundo vem essa exclusão, afinal, quantos exemplos temos de exclusão de um grupo de pessoas ou ideias simplesmente por serem denominadas como contrárias à ideologia dominante (não-boas)?

Em uma proposta de união do conceito de estética com o mundo em que ela se apresenta, não a tratando como algo separado e não afetado por ele, temos uma abordagem fenomenológica, que considera este mundo como *lebenswelt*, mundo que tem vida, mundo-vida, munda-da-vida, sendo retratado como algo inacabado, vivo, que é vida, que está sempre a se formar e mudar, isto é, o mundo que é percebido por alguém, um mundo que é formado por sua história, suas culturas e seus territórios e tudo mais (BICUDO; ROSA, 2010). “Assim, o sentido para nós se faz como o mundo que é vida, e não vida que tem um mundo. Entendemos que vida não é um *a priori* do mundo, mas se faz e sustenta no e com o mundo” (BICUDO; ROSA, 2010, p.64) e, desse modo, não faz sentido tratarmos a estética, uma área que trata do sensível, da arte e da vida, de maneira que considere que esta vida e o mundo em que ela vive sejam independentes um do outro.

Ao compreender estética, nos encaminhamos para a ideia de experiência estética, a qual para nós concerne com o que Eagleton (1993, p.17) revela: “Atualmente, entendo que a experiência estética se refere ao [...] movimento de nossos afetos e aversões, de como o mundo atinge o corpo em suas superfícies sensoriais”. Nesse sentido, a ideia de mundo, aqui, para nós também está sendo compreendida como mundo que é vida.

Podemos aproximar estes conceitos com o da percepção, sobre isso, Rosa (2021) fala sobre como “[...] há um corpo vivente que se mobiliza, se lança à percepção. A imagem percebida anuncia mais do que uma qualidade isolável e imediatamente vivenciada com os órgãos dos sentidos”. Sob esta perspectiva, consideramos que dois corpos ao verem um mesmo filme não o percebem da mesma maneira, de modo semelhante como duas pessoas, ao comerem o mesmo prato não o sentem e não o aproveitam da mesma maneira, também. Isto é, a percepção de algo vai muito além da soma dos sentidos do corpo e, nesse sentido, em termos estéticos, quando percebemos uma imagem, por exemplo, essa percepção vai além dos fatos científicos que dizem e descrevem como a luz bate na pintura e reflete em direção aos nossos olhos, assim como, vai além do como nossos olhos passam a informação para o cérebro que, por fim, realiza as sinapses que dão condições de materialização que interpretamos. Ou seja, a percepção não pode ser resumida em processos físicos, químicos e biológicos responsáveis pelos sentidos do nosso corpo (tato, olfato, paladar, visão e audição). Ela se faz sensível, pelo modo como nossos afetos e aversões se conectam a esses sinais.

Idem e Silva (2021) utilizam estas noções para argumentar que o entendimento da realidade não é completo com os conhecimentos lógicos e literais de algo, o sensível também é parte fundamental para sua compreensão. A educação, então, teria um compromisso em também ser estética, também notar e entender os afetos e aversões ligados à certa expressão de alguém.

Desta maneira, podemos distribuir o peso que damos para certas objetividades que podem aparecer quando se olha para uma situação qualquer e ir além, compreendendo a nossa percepção como primado do conhecimento (MERLEAU-PONTY, 1990; SILVA; ROSA, 2020), imbuída da nossa subjetividade. Não falamos mais, então, de uma prática artística, por exemplo, em termos de boa ou ruim, bela ou feia, conversamos sobre o que dela nos provoca, das sensações de afeto ou de aversão, intrínsecas ao como a percebemos.

Em cima disso, podemos evidenciar ainda mais o papel da percepção e da subjetividade do mundo, contemplando uma estética artística específica, que por mais que possa apresentar uma única pintura, por exemplo, é passível de percepções distintas, como exemplificado no trabalho do pintor ucraniâno Oleg Shuplyak, mostrado a seguir.

Figura 7: Charles Darwin

Fonte: Shuplyak (1967)

Nesta pintura é possível perceber duas imagens distintas, em um primeiro momento, coexistindo na mesma tela, sendo feitas da mesma tinta, dos mesmos traços. No entanto, são imagens que se referem a cenários completamente diferentes. Em um temos uma moça lendo um livro perto de um senhor barbado e encapuzado, abaixo de um arco, com uma outra mulher e uma casa ao fundo. Porém, ao mesmo tempo, podemos notar que estas figuras também formam um retrato do cientista renomado Charles Darwin, cujas árvores do cenário anterior configuram seus cabelos, a mulher distante junto à cabeça da mulher que lê, forma seu nariz e o vestido dessa mesma leitoa, sua barba. Desta forma, uma mesma pintura, com todas as suas objetividades materiais[21], se referem a duas ideias distintas, nenhuma mais correta que a outra, coexistindo e podendo, talvez, serem diferenciadas apenas pelo que afeta a percepção de quem a vê, a qual é momentânea.

Ademais, dentro de subáreas da matemática como a geometria, ocorrem movimentos muito parecidos com o da pintura de Ole Shuplyak (1967), pois, onde um dado objeto pode ser

[21] Aqui falamos de todas as características materiais objetivas que um objeto pode ter, por exemplo, qual material ele é feito, de que cor ele é, qual o seu tamanho, etc…

interpretado de mais de uma maneira, isto é, ao mesmo tempo ser uma coisa e outra também, há um movimento perceptivo intrínseco. É o caso da própria reta hiperbólica que em um plano euclidiano é vista como apenas uma curva qualquer, porém, quando pensamos sob uma perspectiva da geometria hiperbólica, a mesma figura pode ser identificada como uma reta hiperbólica.

Silva e Idem (2021) discutem a relação da matemática com a estética e a arte trazendo o ponto de vista de diversos matemáticos ao relacionarem elas, em específico, falam que Hardy[22] e Poincaré[23] citam diretamente a arte. O primeiro ressalta que tanto um matemático quanto um artista participam de uma criação de padrões, enquanto o segundo, respectivamente, traz essa relação da seguinte forma.

> A matemática tem um tríplice objetivo. Deve fornecer um instrumento para o estudo da natureza. Mas não é só isso: tem um objetivo filosófico e, ouso dizer, um objetivo estético. Deve ajudar o filósofo a aprofundar as noções de número, espaço e tempo. Seus adeptos, sobretudo, encontram nela fruições análogas às proporcionadas pela pintura e a música. Admiram a delicada harmonia dos números e das formas; maravilham-se quando uma nova descoberta lhes abre uma perspectiva inesperada [...] (POINCARÉ, 2011, cap. V).

Em geral, o que se pode dizer sobre a consonância existente na amálgama matemática, estética e arte, é que essa exige movimento. Esta ideia de movimento é referida ainda em Eagleton (1993) quando o livro apresenta sua definição de estética, pois, a estética existe no movimento, no viver e com isso ela exige, também, tanto da matemática quanto da arte, que haja uma prática subjacente às ações destas naturezas (matemática e artística). Em outras palavras, precisamos experienciar a estética, escapando da concepção de que estética é somente a formalidade do sensível e nos direcionando para o como ela se manifesta no viver, na experiência da vida, o que se entende por experiência estética.

Quanto à estética, Levinson (2005) divide sua compreensão em três focos: arte, sua criação e apreciação; propriedade estética, isto é, objetos que possuem propriedades que podem ser classificadas como estética; experiência estética, que consiste em atitudes, percepções ou experiências que podem ser consideradas estéticas. Idem e Silva (2021, p.40-41) chamam a atenção para este último foco, a experiência estética, como “[...] uma dimensão da vida humana, sendo necessária para uma experiência completa do mundo. A experiência estética é uma experiência intensa, significativa, memorável e satisfatória”. Isto é, fenomenologicamente, podemos pensar nela como algo que convida o ser vivo, encarnado, que vive no mundo em que

[22] Godfrey Harold Hardy foi um matemático inglês do século XX famoso por seus trabalhos em teoria dos números e análise matemática.
[23] Jules Henri Poincaré foi um matemático francês durante o final do século XIX e o começo do século XX, conhecido por trabalhos em diversas áreas da matemática, em especial, a análise.

se encontra e que se movimenta para realizar ações, experienciá-las e para, então, perceber o mundo que estamos também por meio da estética.

Estas experiências são algo único para quem as viveu. No entanto, é necessário frisar que elas também não são algo que esteja sujeito às descrições *per si*. Ou seja, não se consegue resumir em uma conversa as sensações de afeto e de aversão sentidas. Sempre que houver uma tentativa disso, acaba-se caindo na mera enunciação das atividades realizadas ou de processos mecânicos que foram realizados.

Segundo Rosa e Pazuch (2014), a experiência é assumida como um aspecto do que é sentido pelas vivências na dimensão da fenomenalidade corporal e que se doa à percepção como ponto de partida do conhecimento, isto é, a experiência é dependente e vivida com/por um corpo com o mundo em movimento, em fluidez, em devir consonante a sua temporalidade/espacialidade.

Nessa perspectiva, a percepção envolta à estética se transforma nos dias atuais, pois o mundo tecnológico, cibernético, conglomera linguagem multimodal e todas as suas nuances de cores, imagens, sons, movimentos e isso permite uma diversidade complexa de vivências, as quais também são experienciadas esteticamente. Logo, passamos a discutir a experiência com Tecnologias Digitais na educação matemática.

2.4 Tecnologias Digitais na Educação Matemática: a dimensão tecnológica da Cyberformação.

Para que possamos começar a discutir Tecnologias Digitais (TD) é importante antes que deixemos claro nossa visão sobre elas, como pensamos a sua inserção nas aulas de matemática, no caso, como se pensa elas em si e qual o papel delas na educação matemática. Isto se faz necessário já que no campo da educação matemática as visões sobre as TD são muitas e, às vezes, divergentes entre si em pontos cruciais.

Desta forma, nosso entendimento das relações entre as pessoas e as Tecnologias Digitais se dá semelhante ao entendimento fenomenológico de mundo. Desta forma, concordamos com Rosa (2018) que entende as TD como meios de revelação e não como ferramenta ou próteses. Esses meios se mostram no mundo, com o mundo. Portanto, com esse entendimento das TD como mundo, fenomenologicamente, entendemos que quando as pessoas se plugam às tecnologias, intencionalmente, esse movimento de lançar-se e trazem à consciência é algo que não existe a parte, assim como, as tecnologias também não estão a parte do ser-aí-no-mundo-com.

Portanto, temos que as TD, a nosso ver, devem ser pensadas assim, como uma possibilidade de revelação em um mundo que tem vida, isto é, um modo viável de se revelar o que é possível de ser criado e imaginado. Em outras palavras, as tecnologias, quando partícipes podem destacar certos aspectos que antes pareciam estar escondidos. Com isso, podemos ver as TD como algo que pode fazer parte do próprio processo de constituição do conhecimento com o mundo, ela pode estar envolvida no próprio pensar, na própria percepção de quem a experiencia.

Quando falamos em TD, é importante reforçar que não nos referimos às Tecnologias Digitais simplesmente como ferramentas para compreender o mundo. Rosa (2018) nos elucida sobre esta diferença, explicando que, na sua compreensão, ferramentas são algo que aceleram um processo a ser feito, por exemplo, caso quiséssemos cavar um buraco no chão poderíamos muito bem fazer isso apenas com nossas mãos, porém, uma pá aceleraria este processo.

De modo semelhante não entendemos as TD como uma prótese. Rosa (2018) revela que próteses são algo que está destinado a substituir, a compensar aquilo que não se tem mais. Óculos, por exemplo, enquadra-se como uma prótese, pois é um objeto cuja função é fazer com que pessoas que têm problemas de visão voltem a conseguir ver as coisas em condições muito próximas a quando não possuíam o problema. Do mesmo jeito, uma prótese de braço tem como sua função a substituição de um braço. No caso das TD em sala de aula, utilizamos essa metáfora quando se deseja usar as tecnologias como substitutivas de processos cognitivos ou formativos, por exemplo. As TD tornam-se próteses educacionais, embora próteses, em muitas situações, sejam necessárias.

A partir destas noções, entendemos as TD não como ferramentas nem como próteses, embora não se deixe de considerar a importância de ferramentas e próteses em diversas situações, mas como mídias, isto é, o meio pelo qual o ser se percebe no mundo (ROSA, 2018) e que revela a esse, modos de criação e imaginação. Sobre mídias, Mcluhan (1996, p. 7, tradução nossa) as explica como

> [...] a mídia é a mensagem. Isso é meramente dizer que as consequências pessoais e sociais de qualquer mídia – ou seja, de qualquer extensão de nós mesmos – resulta da nova escala que é introduzida dentro de nossas relações por cada extensão de nós mesmos, ou por qualquer nova tecnologia.

Nesta compreensão de tecnologias digitais como mídias, temos as tecnologias como meio para a constituição de conhecimento. Ou seja, elas são partícipes desse processo. Esse modo de encarar as TD faz parte da dimensão tecnológica da concepção de Cyberformação (ROSA, 2018; ROSA, 2022). Essa concepção dialoga fortemente com a forma em ação, com a ação de dar forma, não acabada, não pronta, em um contínuo, tanto do/a professor/a, quanto do/a estudante, do/a aprendiz. Não diz de uma forma como aquela que pode ser reproduzida por uma "forma de bolo", que repete o mesmo formato variando somente em relação ao quanto de fermento se insere à receita. Diz de um modo fluído e contínuo que é perseguido em termos dos afetos, dos desejos, dos ideais humanitários e profissionais, mas que nunca é alcançado. Especificamente, nessa dimensão da Cyberformação, da forma/ação-cyber, discute-se ações que podem ser pensadas e possibilitadas com ambientes tecnológicos e que venham a promover a forma partícipe das TD e, com isso, a revelação do que pode ser criado e imaginado na constituição do conhecimento.

Entendendo as TD como mídia, como meio, podemos falar em um ser que se desvela, se percebe também com a mídia (ROSA, 2020), um ser que se faz no mundo, com seu entorno, um ser que é com o mundo e, nesse caso, consequentemente, com o cibermundo. Ademais, Rosa (2008) traz esta ideia, de perceber-se com as TD, por meio delas, com-elas. Traz a ideia de identificar-se, de morfar-se, transformar-se como quiser, no que quiser quando conectado às TD (principalmente as TD móveis atuais). Rosa (2008) revela o termo ser-com-TD, de modo hifenizado, trazendo e remetendo a uma união, do verbo "ser" com as TD que estão, se tornam, logo, são mundo. Esse "ser" é devir, é movimento de vir-a-ser sendo que no caso se mostra, se manifesta com as TD. Há, então, um movimento que Rosa (2008) denomina como plugar-se, o qual, basicamente, ocorre quando uma pessoa intencionalmente se projeta à uma TD, a um meio tecnológico, isto é, se identifica nele assim como com o mundo.

O conceito de plugar-se vem justamente das conexões que um ser faz com as TD. Tome como exemplo uma dupla de amigos jogando um jogo digital em que apenas um jogador pode controlar o avatar do jogo por vez. Não é incomum ouvir o amigo que não está controlando o avatar falando "vamos naquela direção" mesmo que ele não mexa seu corpo material nem mesmo o avatar que interage com o mundo digital do jogo. No entanto, essa fala faz sentido já que sua conexão, sua projeção naquele mundo se dá tão forte que naquele momento mesmo sem interagir diretamente com seu corpo ou com o avatar ele passa pelas mesmas sensações e impressões envoltas com o mundo que caracterizam um ser-com-TD.

Uma outra clarificação que precisamos fazer é sobre uma possível aproximação entre o ser-com-TD e a ideia de ciborgue. Conjecturar uma aproximação entre os dois termos não é uma ideia que diríamos ser muito difícil de alcançar. No entanto, o ciborgue, isto é, um organismo feito por partes mecânicas e partes orgânicas, se faz fundamentalmente estranha à ideia de ser-com-TD. No entanto, os atuais ciborgues não são mais a mistura transgressiva do biológico com a máquina, mas o sujeito que segura seu smartphone no metrô, o qual já não vive mais sem esse recurso. Fenomenologicamente, esse ciborgue é-com-TD, pois, é também corpo-encarnado, está sempre em contato com o que está ao seu redor por meio de seus sentidos (BICUDO, 2014) e sua intencionalidade que o move e o impulsiona faz com que se conecte, se plugue ao smartphone, por exemplo.

Voltando ao conceito de mídia, tomamos o que diz Rosa (2018, p. 260) “[...] ou seja, a mídia não é mera extensão do homem. A mídia está envolvida no próprio pensar. No caso das TD como meios de [...] [constituição] do conhecimento, falamos do pensar-com-TD”. Este pensar-com-TD não se dá somente no campo da abstração, pois, o pensar é corpóreo, é movido pela intencionalidade do ser que lança e traz à consciência. Há um pensar situado no modo de vida da pessoa, no qual se localiza em diferentes “ondes” (BICUDO; ROSA, 2010), cada *lócus* assumindo características mundanas, digitais ou ambas ao mesmo tempo.

Com isso, temos que a encarnação do corpo, a existência dele com o mundo, é o que "possibilita a [...] [constituição] de conhecimento (inclusive o matemático)" (ROSA, 2018, p. 262) de forma que este conhecimento não se dá na materialidade dele, isto é, nos processos físicos, químicos e biológicos (como as leis de movimento são dadas com este corpo ou como as sinapses são feitas no processo de pensar), sim no lançar-se deste corpo-encarnado à percepção com-o-mundo. Desta forma de pensar temos, então, que o sujeito e o mundo, e por consequência as tecnologias são participes nesta constituição do conhecimento, ambos são igualmente importantes.

Além do pensar-com-TD, podemos discutir a ação de saber-fazer-com-TD. Essa ação se dá quando há intencionalidade de lançar-se ao mundo cibernético, às TD, trazendo à consciência os atos necessários para que a ação, no/com as TD, aconteça. O saber-fazer-com-TD é uma ação com vontade e senso de realização (ROSA, 2008), de modo não estanque em relação às outras ações (ser-com-TD e pensar-com-TD). O ser-com-TD percebe, se identifica e transforma de ser e mostra-se com TD. Essa identificação permite que haja uma imersão no ambiente, no *lócus* de modo que se pensa-com-TD, com esse ambiente cibernético, com seus recursos e age-se de modo a saber-fazer-com-TD, realizando tarefas nesse mundo por meio de interfaces lógicas, comandos, avatares, em *agency*. O saber-fazer-com-TD é pautado também na construção e projeção de algo quando se é-com-TD, são discussões, descrições, depurações, imaginações, experimentações, execuções (ROSA, 2008) que ocorrem de modo que estas ações são intencionais em termos fenomenológicos. Também, há um indicativo para que ocorra o planejamento dessas ações a serem executadas, refletidas, de modo que haja uma razão para qual deva-se realizá-las.

Dessa forma, temos que este saber-fazer-com-TD se manifesta em processos que não são separados do que se faz, da mesma maneira que o ser-com e o pensar-com, na corporeidade do ser que se encontra com Tecnologias Digitais. Portanto, saber-fazer-com-TD é mais que um processo de união de saber-com-TD e fazer-com-TD, ele precisa de um corpo que lhe dê materialidade e condições neste e naquele mundo, de modo que esse não só faça algo, mas que faça buscando algum objetivo e que suas ações sejam de certa forma discutidas, imaginadas e experienciadas em diversas nuances de materialidade.

Com isso, encerramos o capítulo sobre referenciais teóricos e prosseguimos para a apresentação de como essa pesquisa ocorreu, ou seja, qual embasamento e procedimentos adotados metodologicamente, ou seja, o capítulo de metodologia de pesquisa.

3. A Jogabilidade da Pesquisa: regras e modos

Este capítulo discute a metodologia de pesquisa e está dividido em seis seções: na primeira, falamos do paradigma de pesquisa qualitativo; na segunda, expomos nossas visões sobre mundo e conhecimento; na terceira, por sua vez, tratamos dos sujeitos que participaram da pesquisa, bem como o contexto geral dessa; na quarta seção nos dedicamos a apresentar os recursos utilizados durante a prática, com uma subseção para cada recurso; na quinta seção dialogamos sobre a estrutura dos encontros; e na sexta sobre os procedimentos que tomamos enquanto desenvolvimento das atividades-matemáticas-com-o-jogo-digital-Hyperbolica, isto é, os problemas que foram propostos para os estudantes durante a prática com o jogo.

3.1 Pesquisa Qualitativa

Ao refletir sobre nossa questão diretriz (**Como estudantes de educação matemática percebem a geometria hiperbólica por meio de atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica?**), entendemos que ela possui uma natureza descritiva, pois, liga-se ao "como", esse como precisa ser respondido de modo descritivo, contando a observação do fenômeno e enquadramento de retratos que em conjunto apresentam um filme, um jogo, que se estabelece na análise mais profunda possível dos dados. Assim, optamos por seguir uma linha qualitativa nesta pesquisa. Com isso, apoiamos nossa definição de pesquisa qualitativa em Bogdan e Biklen (1994), que discutem as manifestações possíveis desse paradigma de pesquisa junto à educação. Esses autores, no segundo capítulo de seu livro, descrevem algumas características básicas de uma pesquisa qualitativa em educação. Por exemplo, o ambiente de trabalho como fonte direta da construção do investigador, suas características descritivas; o interesse do pesquisador qualitativo no processo e não apenas no resultado; a análise indutiva dos dados e a importância dada à perspectiva dos participantes da pesquisa são características apresentadas. Ademais, os autores ainda comentam sobre a maneira que o pesquisador deve encarar o ambiente de pesquisa da seguinte forma: "A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos limita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo" (BODGAN; BIKLEN, 1994, p.49).

Também, é esclarecido que os dados recolhidos podem vir de gravações de vídeo ou voz, materiais produzidos, fotografias, notas de campo, documentos pessoais e diversos outros. No entanto, os autores também enfatizam que no cerne da pesquisa qualitativa está o movimento do pesquisador de não reduzir as narrativas que surgem na pesquisa a meros números ou categorias, respeitando a riqueza delas (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Nesta pesquisa, as percepções de estudantes de educação matemática no micromundo do jogo digital Hyperbolica e as contribuições que as práticas-com-o-Hyperbolica podem ter no seu processo de formação são alicerces do que está sendo investigado. O público-alvo da prática desta pesquisa são estudantes de graduação e pós-graduação em educação matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). O local da prática foi a casa do professor/pesquisador, devido ao fato de que não havia outros lugares disponíveis com computadores que tivessem capacidade para que o jogo funcionasse. Frisamos aqui que na casa do professor/pesquisador havia apenas um computador, portanto os participantes tiveram que revezar o computador com seus colegas, o que foi previamente planejado. Os encontros ocorreram no período da tarde, com os horários variando conforme o grupo pudesse participar das atividades.

Para esta pesquisa foi entregue aos participantes o termo de consentimento livre e informado, o qual informa o objetivo da pesquisa, sua responsabilidade quanto ao sigilo e direitos de cada participante. Assim, o completo anonimato dos participantes e o total sigilo dos dados produzidos foram questões de destaque. Também, a possibilidade de desistência da participação a qualquer momento foi ação clara e evidenciada. Todos os participantes demonstraram interesse e entregaram os termos de consentimentos após leitura, debate e assinatura, passando a participar da pesquisa efetivamente. Quanto aos dados produzidos tivemos a oportunidade de gravar as falas dos participantes em poucos encontros, então traremos um foco inicial maior nas gravações de telas e nas respostas para os problemas propostos em aula.

3.2 Visão de Mundo e Conhecimento

Esta seção está dedicada para esclarecermos como pensamos o mundo e o conhecimento em consonância com nossos procedimentos metodológicos, isto é, como nossa ideia do que é o mundo e como entendemos a constituição do conhecimento afeta nossa pesquisa. Desta forma, quando falamos em mundo, pensamos em algo que não existe anterior e separadamente do ser. Com isso, não se fala em pensar sobre o mundo e sim com o mundo, unindo o ser e o mundo de forma que ambos são partícipes na constituição do conhecimento.

Nesse pensamento, podemos ainda falar na conexão do mundo com as tecnologias, isto é, as tecnologias também não podem ser pensadas como *a posteriori* do mundo, como um conceito transcendental que é separado inteiramente dele. Portanto, quando falamos nas tecnologias, pensamos nelas com o mundo, de forma que elas também se fazem mundo, de forma que também são condicionadas e condicionam os ambientes histórico e socioculturais de que participam.

Sobre o conhecimento, entendemos que as tecnologias são partícipes dele, isto é, falamos das maneiras que um sujeito é-com–TD, pensa-com-TD e sabe-fazer-com-TD, de modo que as tecnologias, aqui, os jogos digitais, possuem um papel não de acelerar um processo de aprendizagem matemático abstrato e universal, mas de caracterização, potencialização e ampliação do conhecimento. Desta forma, também passamos a falar sobre o conhecimento em termos de uma continuidade, em ambos sentidos da palavra, de ser um processo contínuo que não possui fim e de não pensarmos na aprendizagem-com-TD em termos de "não saber" ou "saber", pensando em conhecimentos como algo unitário e contável, mas como uma continuidade multidimensional em que o conhecer se expande para todos os lados, sem a necessidade de desenhar linhas divisórias entre o que é saber algo e o que é não-saber.

3.3 Sujeitos e Contexto da Pesquisa

Como já informado, os dados dessa pesquisa foram produzidos por meio de um curso envolvendo atividades-matemáticas-com-o-jogo-digital-Hyperbolica. Assim, esse curso contou com a participação de cinco estudantes de educação matemática, em nível de graduação (quatro) e pós-graduação (uma), os/as quais são identificados neste texto por Estudante A, Estudante B, Estudante C, Estudante D e Estudante E. Os quatro primeiros, respectivamente, são estudantes de graduação em Licenciatura em Matemática e a Estudante E é uma aluna de pós-graduação em Ensino de Matemática. Todos/as pertencem ao Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS

O Estudante A cursa a sétima etapa da Licenciatura em Matemática - diurno, possui 23 anos, é do sexo masculino. O Estudante B cursa a oitava etapa no diurno, também possui 23 anos, é do sexo masculino e estudou em escola privada na Educação Básica. O Estudante C cursa a quinta etapa do noturno em Licenciatura em Matemática, como os anteriores possui 23 anos, é do sexo masculino e proveniente de escola pública. A Estudante D cursa a segunda etapa da Licenciatura no noturno, possui 20 anos, é do sexo feminino e, também, realizou a Educação Básica em escola pública. A Estudante E, por sua vez, cursa o segundo ano da pós-graduação em Ensino de Matemática, possui 23 anos, é do sexo feminino e ´fez somente o último ano do Ensino Médio em escola privada. Destes, somente dois dos estudantes já haviam ouvido falar do jogo, sabendo que ele de alguma forma envolvia conceitos de geometrias não-euclidianas. Quanto às geometrias do jogo em si, as não-euclidianas, uma das estudantes, em específico, a que já estava na pós-graduação, já havia tido contato com geometria hiperbólica, devido a um trabalho realizado em seu mestrado. Outros três sabiam da existência de geometrias não-euclidianas, no entanto, não consideravam que sabiam bem do que tratavam ou como se pensava e visualizava elas. Por fim, um último estudante não possuía noção alguma de geometrias não-euclidianas.

3.4 Recursos

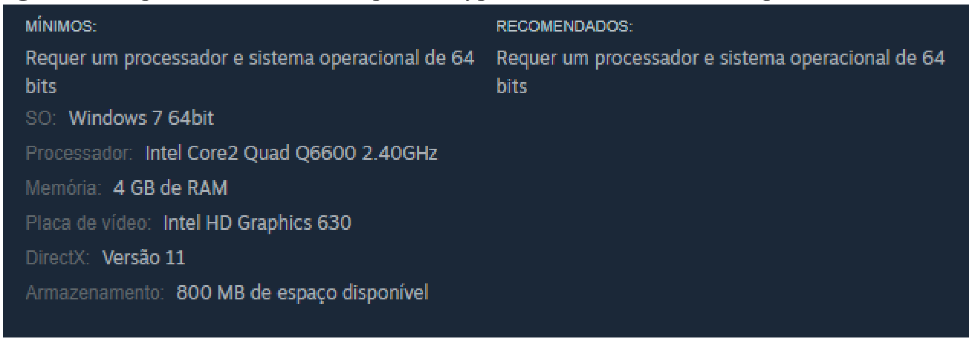
Dentro dos recursos necessários para que as atividades pudessem ser realizadas, temos três recursos principais: computadores; plataforma da Steam; o jogo digital Hyperbolica e o gravador de tela OBS studio. Tendo isso em vista, iremos dividir esta seção em quatro subseções descrevendo o funcionamento de cada recurso detalhadamente.

3.4.1 Computadores

Para os computadores, além das necessidades básicas como mouse, teclado e som, era necessário que o computador possuísse uma capacidade mínima de processamento de informação e imagem para que o jogo pudesse funcionar. Além disso, o computador precisa possuir um sistema operacional[24] de um tipo compatível com o jogo, sendo estes o Windows, MasOS[25], SteamOS Linux. Para cada um dos sistemas operacionais o jogo exige de um computador uma potência específica e diferente, portanto, seguem nas imagens a seguir os requerimentos organizados para cada um dos sistemas operacionais:

[24] Sistema operacional é um programa de computador que tem como função gerenciar recursos dele. Exemplos de sistemas operacionais são o Windows, Linux, MacOS e ChromeOS.
[25] Aqui, o OS no final de MasOS ou SteamOS significa "*Operational System*" que ao traduzirmos para o português significa sistema operacional.

Figura 8: Requerimentos mínimos para o Hyperbolica em um sistema operacional Windows

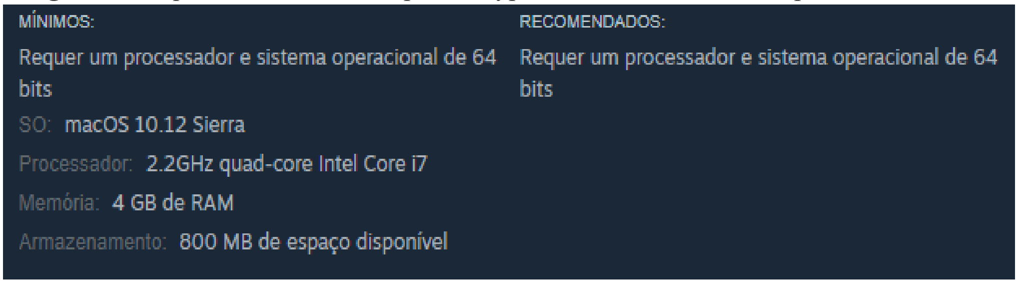


MÍNIMOS:
Requer um processador e sistema operacional de 64 bits
SO: Windows 7 64bit
Processador: Intel Core2 Quad Q6600 2.40GHz
Memória: 4 GB de RAM
Placa de vídeo: Intel HD Graphics 630
DirectX: Versão 11
Armazenamento: 800 MB de espaço disponível

RECOMENDADOS:
Requer um processador e sistema operacional de 64 bits

Fonte: Loja da Steam

Figura 9: Requerimentos mínimos para o Hyperbolica em um sistema operacional MacOS

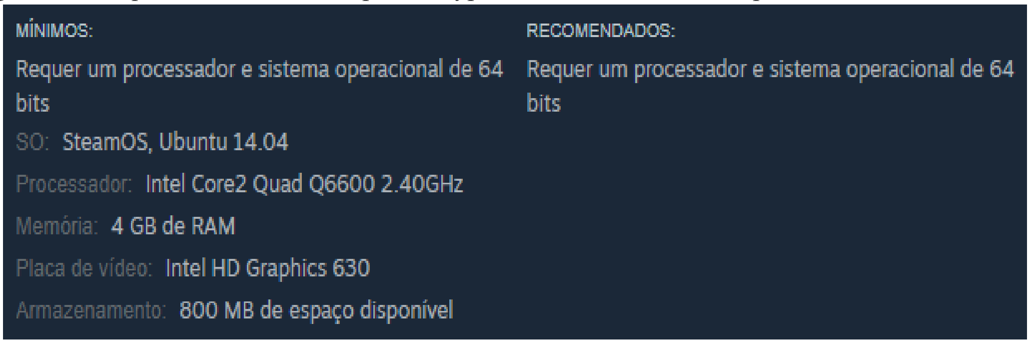


MÍNIMOS:
Requer um processador e sistema operacional de 64 bits
SO: macOS 10.12 Sierra
Processador: 2.2GHz quad-core Intel Core i7
Memória: 4 GB de RAM
Armazenamento: 800 MB de espaço disponível

RECOMENDADOS:
Requer um processador e sistema operacional de 64 bits

Fonte: Loja da Steam

Figura 10: Requerimentos mínimos para o Hyperbolica em um sistema operacional Linux e SteamOS



MÍNIMOS:
Requer um processador e sistema operacional de 64 bits
SO: SteamOS, Ubuntu 14.04
Processador: Intel Core2 Quad Q6600 2.40GHz
Memória: 4 GB de RAM
Placa de vídeo: Intel HD Graphics 630
Armazenamento: 800 MB de espaço disponível

RECOMENDADOS:
Requer um processador e sistema operacional de 64 bits

Fonte: Loja da Steam

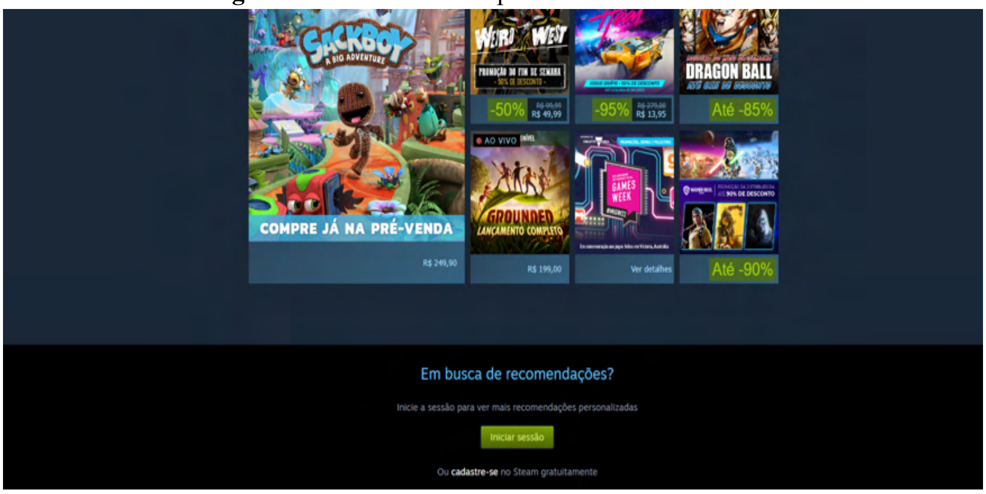
Devido às exigências mínimas do jogo para que um computador fosse escolhido é que ocasionou que as atividades fossem realizadas no computador do professor/pesquisador que atenderia aos requerimentos mostrados acima. Lembramos que essa exigência só foi percebida no decorrer da pesquisa, após seu início em termos de projeto e exequibilidade. Assim, as adaptações metodológicas foram tomadas para que o tempo de execução e apresentação da pesquisa fosse respeitado.

3.4.2 Steam

Steam[26] é uma plataforma digital online da empresa Valve que serve tanto como uma biblioteca de jogos, que os armazena para que um usuário os possa jogar, quanto como uma loja para que os usuários possam comprar outros jogos que ainda não adicionaram às suas bibliotecas. Além disso, a Steam também conta com uma série de outras funcionalidades como uma loja da comunidade, reviews de jogos e sistemas de adicionar amigos para que duas pessoas possam se encontrar com mais facilidade nos jogos.

A Steam também conta com um sistema de criação de contas, para que cada usuário específico tenha seus jogos e histórico de jogos associado a um nome de usuário/a e senha e não a um computador específico, podendo então instalar um jogo em um computador novo, caso venha ao caso do usuário ter trocado. Para que um usuário crie sua conta é preciso entrar no site da Steam (Disponível em: [Bem-vindo(a) ao Steam (steampowered.com)](), acesso em 30/09/2022) descer a tela do site até o final e clicar no texto escrito "cadastrar-se" localizado na parte inferior do centro da tela. Uma vez iniciado o cadastro, o site pede ao novo usuário apenas um endereço de e-mail, o país de origem, um número de celular que possa receber um código de confirmação e a confirmação de que o/a usuário/a possui mais de treze anos.

Figura 11: Site da Steam após descer a tela até o final



Fonte: Site da Steam

Uma vez que o novo usuário tenha criado sua conta, ele deve baixar a plataforma da Steam para seu computador. Para isso, ele deve clicar no ícone em que está escrito "Instale o Steam" localizado no canto superior direito. Concluído o download e a instalação da plataforma o/a usuário/a pode iniciar uma busca por jogos que deseja possuir.

[26] Notamos aqui a coincidência do nome desta plataforma com STEAM (ciência, tecnologias, engenharia artes e matemática) e frisamos que ambos foram nomeados de maneira independente um do outro.

3.4.3 O Hyperbolica

Hyperbolica é um jogo digital lançado no final do ano de 2021 produzido pelo dono de um canal do YouTube intitulado CodeParade. O jogo pode ser considerado do gênero “mundo aberto”, isto é, ele se passa em um micromundo digital em que o/a usuário/a tem acesso à maioria dos lugares disponíveis por ele, assim que começa a mover seu avatar neste mundo.

Como já mencionado, o fator importante a ser levado em conta é que a geometria hiperbólica que se faz presente neste mundo não é a geometria considerada na maioria dos jogos. No mundo do Hyperbolica, a geometria é hiperbólica, com a exceção de um lugar que possui geometria esférica, predomina. Esclarecemos que este lugar não foi utilizado durante as atividades do curso proposto, tendo o professor/pesquisador esclarecido isso com a turma antes das atividades.

A maioria dos acontecimentos do Hyperbolica se dá em uma região principal do mapa, que é representada por um campo de gramado verde em que se pode acessar, apenas movendo o avatar, outras seis regiões: uma cidade, uma floresta, uma praia, uma fazenda, um museu e uma região com neve. Dessas seis regiões, todas, menos a praia, possuem áreas separadas do resto do mapa, mantendo a temática da sua região, com o jogador podendo acessá-las ao interagir com um portal que fica localizado na própria região associada. Assim, na Figura 12, podemos ver o mapa do mundo inteiro do jogo sendo o centro do mapa o local onde o/a jogador/a se encontra, enquanto isso, distorções maiores acontecem quando mais longe do centro os locais se encontram. Na seção superior do mapa se encontram, da esquerda para direita, as regiões: da floresta, região com neve (cujo portal pode ser visto na Figura 13), da praia, da fazenda. Ademais, na seção inferior do mapa se encontram apenas duas regiões do jogo, da esquerda para direita: o museu, indicado pelas cores azul e rosa; a cidade, localizada na parte mais abaixo no mapa, a qual possui uma entrada (Figura 14).

Figura 12: As principais regiões do Hyperbolica vistas pelo seu mapa

Fonte: Hyperbolica

Figura 13: Portal para a região com neve

Fonte: Hyperbolica

Figura 14: Entrada para a região da cidade

Fonte: Hyperbolica

O objetivo do jogador no jogo é completar uma série de desafios localizados nestas áreas e encontrar itens, em específico os chamados no jogo de "Cristais Platônicos", denominados assim por possuírem a forma dos cinco sólidos platônicos[27]. Estes cristais são

[27] Os cinco sólidos platônicos são sólidos geométricos em que todas suas faces são polígonos regulares e congruentes.

apenas encontrados ao resolver desafios das áreas separadas do mapa principal. Estes desafios, especificamente, estão relacionados a uma ação que pode ser considerada comum na geometria euclidiana, mas, na geometria hiperbólica, ela se torna menos trivial. Dos desafios temos: um labirinto (localizado na floresta); um desafio de plataforma, isto é, um desafio que pede que o jogador navegue em um lugar pulando de uma plataforma para outra (localizado na região do museu); um desafio de navegação por um restaurante para entregar certos itens (localizado na região da cidade); um desafio que envolve navegar por dois lados de um mapa dividido ao meio (localizado na região com neve) e um desafio de mira em uma geometria esférica (localizado na região da fazenda).

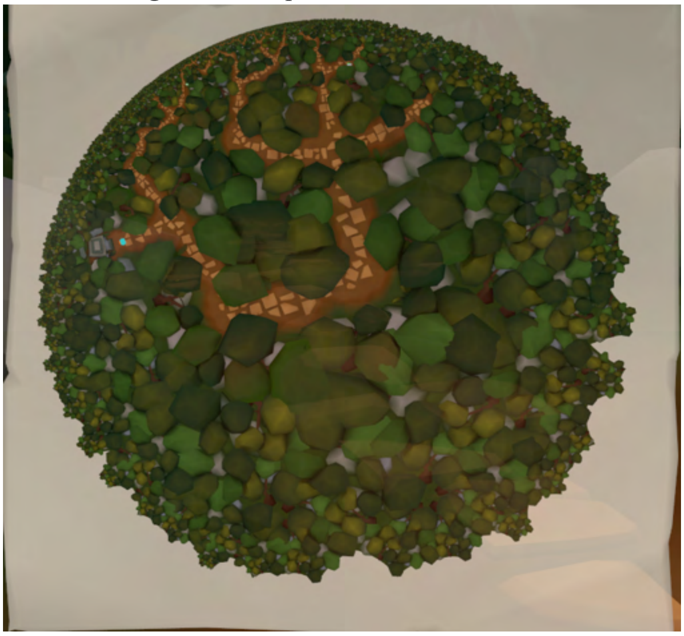
Assim, nessa descrição do jogo, apenas não especificamos a geometria da região da fazenda, a qual é esférica e não foi explorada nessa pesquisa, pois é diferente da geometria de todas as outras áreas, a qual é hiperbólica, bem como o mapa principal.

Ademais, as áreas como o labirinto (Figuras 15 e 16) ou o restaurante se mostram desafiadoras de navegar devido ao fato de que para sairmos de um lugar e voltarmos para ele em um labirinto euclidiano precisaríamos de quatro voltas de 90º, porém, neste labirinto, precisamos de cinco voltas de 90º, graças ao teorema 180 da geometria hiperbólica.

Figura 15: Labirinto da Floresta

Fonte: Hyperbolica

Figura 16: Mapa do labirinto da floresta



Fonte: Hyperbolica

Uma vez que o/a jogador/a consiga todos os cinco “Cristais Platônicos” seu/sua personagem deverá enfrentar uma inteligência artificial que se revela sendo a “vilã” do jogo. Uma vez que esse embate acabe, o jogo termina, com a navegação por seu mundo ainda disponível ao/à jogador/a.

3.4.4 OBS Studio

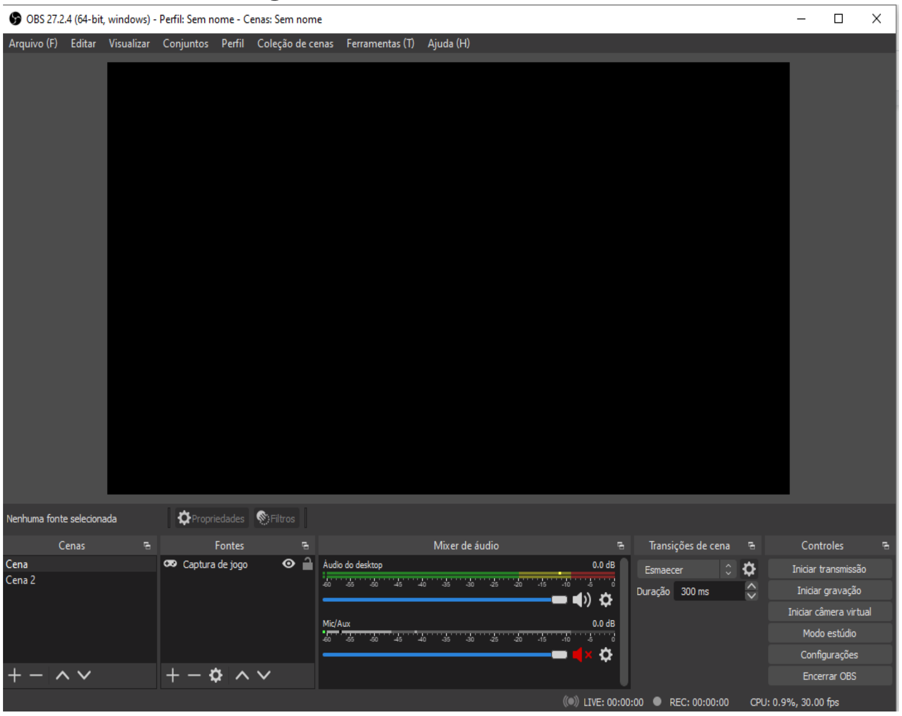
O OBS Studio é um software para computador que possibilita para seus usuários gravar sua tela, os sons dela e de um microfone ligado ao computador, permitindo que quem estiver no computador possa gravar vídeos navegando pela internet ou jogando jogos, com a opção de transmitir estes vídeos ao vivo por meio de uma plataforma que tenha compatibilidade com ele e com o modelo de *livestreams*[28] como a Twitch[29] ou o YouTube, por exemplo. Para baixar o OBS Studio basta visitar seu site (Disponível em: Baixar | OBS (obsproject.com), acesso dia 30/09/2022) e clicar no link para download correspondente ao sistema operacional do computador em que se está visitando o site.

Uma vez que o software esteja baixado esteja instalado podemos prosseguir passasse a utilizá-lo. O software funciona por meio da tela inicial que se abre com uma imagem preta no

[28] *Livestreams* são transmissões ao vivo na internet que envolvem normalmente um *streamer*, a pessoa responsável pela *livestream* que irá fazer algum tipo de tarefa ou prover entretenimento para os espectadores.
[29] Twitch é um site de transmissões de *livestreams*.

centro, uma aba de opções e configurações em cima e um display de ferramentas abaixo da imagem preta.

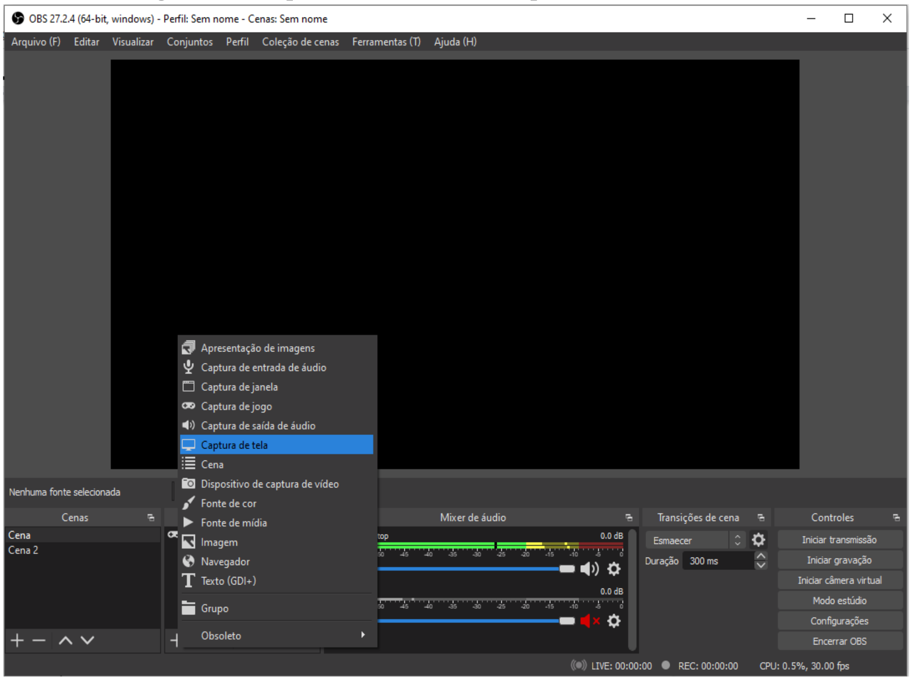
Figura 17: Tela inicial do OBS Studio



Fonte: OBS Studio

Para que possamos começar a gravar a tela de nosso computador, olhamos para a caixa em que está escrito “Fontes”. Nesta caixa procuramos o ícone de “+”, para que possamos adicionar mais uma fonte de imagem para a tela de nosso vídeo. Uma vez que clicamos no “+” procuramos a opção que mais serve para o que queremos fazer, conforme na Figura 18 que ilustra o caso em que desejamos gravar toda a tela do computador, no entanto, é possível gravar a tela somente de um jogo, se desejarmos.

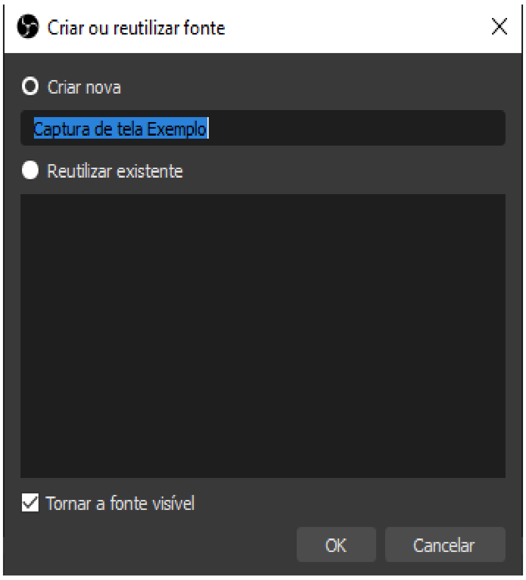
Figura 18: Capturando a tela do computador no OBS Studio



Fonte: OBS Studio

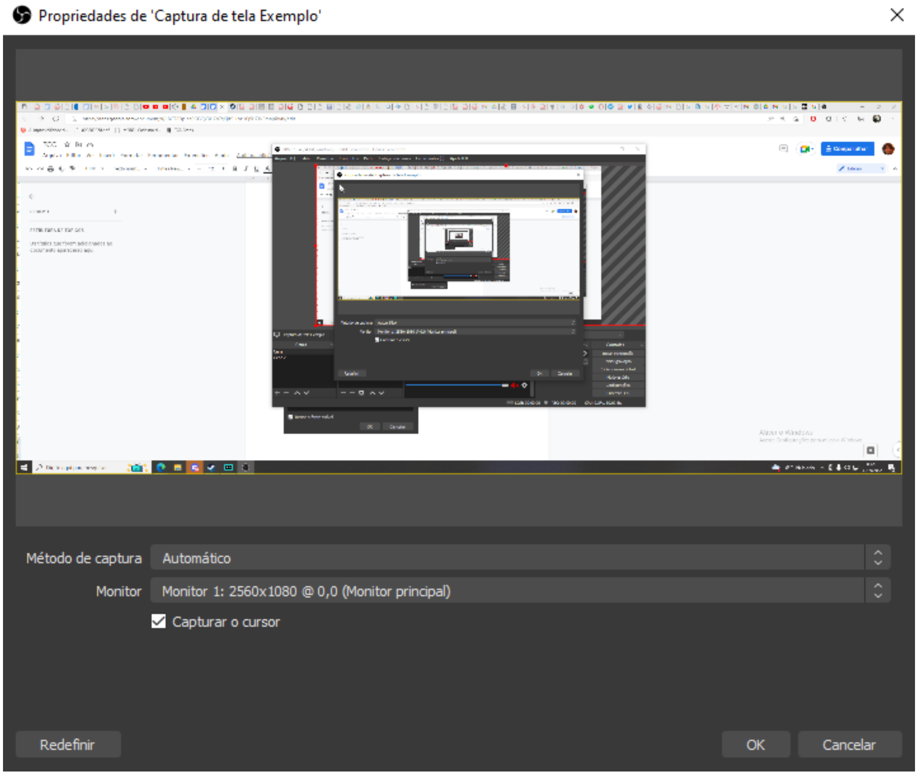
Após clicarmos em captura de tela, basta darmos um nome para esta "Fonte" (Figura 19), que irá gravar nossa tela, para que possamos identificá-la no display do OBS Studio. Depois de darmos um nome, selecionamos as propriedades que desejamos para a nossa gravação (Figura 20) e finalizamos o processo de criação de uma "Fonte".

Figura 19: Nomeando nossa Fonte no OBS



Fonte: OBS Studio

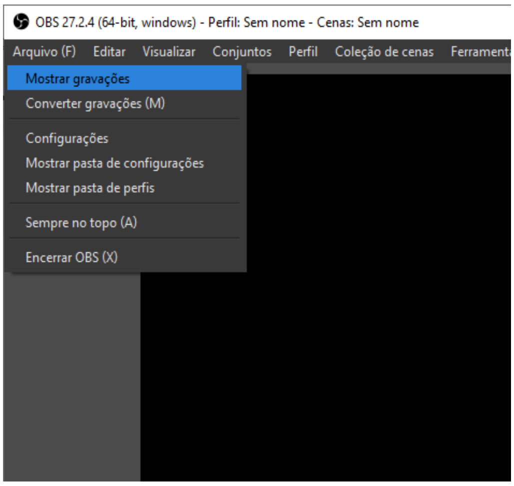
Figura 20: Propriedades da captura de tela do OBS Studio



Fonte: OBS Studio

Após esses procedimentos, basta clicar no botão “iniciar gravação", localizado na região inferior direita da tela inicial do OBS Studio e iniciamos nossa gravação com sucesso. Para que possamos encontrar o vídeo, basta clicarmos em “Arquivo”, no canto superior esquerdo da tela inicial e depois em “Mostrar Gravações” (Figura 21).

Figura 21: Encontrando as gravações no OBS Studio



Fonte: OBS Studio

3.5. Encontros

Os encontros do curso ocorreram ao longo de quatro dias, na casa do professor-pesquisador, de modo que todos/as os/as estudantes fizessem uso do computador pessoal do pesquisador. Estes quatro dias seguiram de acordo com o planejamento do curso, o qual previa cinco questões sobre o mundo do jogo e sua geometria, com duas questões extras, caso o tempo planejado para as cinco questões fosse mais que suficiente. Também, uma seção para formalizar os conceitos que foram vistos e uma entrevista/diálogo consistindo-se de cinco perguntas semiestruturadas sobre o curso, sua estrutura, o jogo e a aplicabilidade de atividades semelhantes foram realizadas. É importante frisar que as questões deveriam ser respondidas enquanto se estava jogando o Hyperbolica, para que pudéssemos nos aproximar mais do que foi percebido pelos participantes durante a produção de dados com o jogo digital.

Para o primeiro dia (23/09/22) foram separadas as três primeiras questões das cinco iniciais. As questões consistem na exploração do mundo e identificação de características básicas dele, identificação de retas hiperbólicas e paralelismo por meio da comparação com os saberes dos/das estudantes sobre estes conceitos na geometria euclidiana. Para estas questões foi previsto o tempo de quatro horas, de modo que os/as estudantes estariam livres para jogar e explorar o jogo da maneira que quisessem.

Os outros três dias de prática também dispuseram de quatro horas cada e foram separados para o desenvolvimento do restante do planejamento nos dias em que os/as estudantes poderiam comparecer, de modo que no segundo dia (25/09/22) dois estudantes compareceram e terminaram suas atividades e no terceiro dia (30/09/22) mais um estudante compareceu para terminar suas atividades, com o quarto e último encontro (03/10/22) consistindo no término do curso para o restante dos inscritos e diálogo sobre as atividades.

Ademais estudantes nos seus respectivos dias finais deveriam realizar as atividades restantes do planejamento geral, são elas as questões 4 e 5 que abordam com maior ênfase os conceitos de polígonos, ângulos para que pudesse ser feita uma investigação do teorema 180 da geometria hiperbólica. Também estavam planejadas para este encontro, mais duas atividades que envolviam, então, o conceito de holonomia. No entanto, apenas a estudante E conseguiu completar as outras atividades propostas de modo que tivesse tempo de poder realizar estas.

Além das perguntas, os estudantes também tiveram uma sessão breve, com cerca de 30 minutos, com o professor-pesquisador para que juntos formalizassem os conceitos. Esta formalização se deu por meio da história do quinto postulado de Euclides, tentativas de demonstração deste postulado como demonstrações envolvendo quadriláteros de Saccheri e

Lambert, discussão sobre o Teorema Hiperbólico Universal, sobre o Teorema 180 da geometria hiperbólica e suas expansões para outros polígonos.

Por fim, ainda no segundo encontro, foi realizado com cada indivíduo ou dupla uma entrevista/diálogo com cada um dos/das participantes. Eles com as questões em mãos dialogaram com o professor-pesquisador quanto os aspectos pedagógicos das atividades e, também, sobre as dúvidas referentes às atividades as suas respostas. Assim, o diálogo ocorreu fundamentalmente sobre as percepções dos estudantes sobre geometria hiperbólica, sobre a prática aplicada com eles, mudanças que os estudantes sentiram ser necessárias à prática e sobre possíveis contribuições da geometria hiperbólica em sala de aula, inclusive, sobre a possibilidade de trabalhar esses conceitos em suas aulas quando efetivamente elas ocorrerem.

3.6 Procedimentos de desenvolvimento das atividades-matemáticas-com-o-jogo-digital-Hyperbolica

Começamos esta seção esclarecendo que a atividades que montamos não foi pensada de modo que os estudantes tivessem que meramente identificar um dado conceito, por entender que uma listagem de conceitos que são percebidos no jogo não necessariamente faz referência a um processo de aprendizagem. Indo em movimento contrário a isso, os procedimentos de construção do curso foram pensados de maneira que o foco não fosse unicamente na identificação e listagem de conceitos matemáticos presentes na simulação do jogo. Em vez disso, o foco se deu nas percepções que os estudantes teriam do micromundo do jogo, como eles buscam compreender e investigar a realidade que lhes é apresentada no Hyperbolica. Por isso, focamos todas as atividades buscando algum aspecto da realidade e buscando de cada estudante que tentassem descrever como é experienciar aquele aspecto por meio de suas sensibilidades e percepção.

Dessa forma, discutimos nessa seção as sete atividades-matemáticas-como-jogo-digital-Hyperbolica planejadas para serem desenvolvidas ao longo do curso, explicando o objetivo de cada uma delas e sua contextualização nos ambientes que as envolvem.

A atividade 1 (Figura 22) tinha como intenção que os/as estudantes buscassem explorar o mundo e que respondessem seus itens por meio de suas primeiras impressões do Hyperbolica em relação ao seu funcionamento e a como ele se aproxima de nossa realidade. Os itens pediam que os/as estudantes explorassem o mundo tanto pelo mapa quanto pela câmera em primeira pessoa[30].

Figura 22: Atividade 1

Atividade 1

O mundo do jogo em que você se encontra é um pouco diferente do nosso. Para que possamos compreendê-lo melhor vamos inicialmente tentar identificar e compreendê-lo. Portanto, explore o jogo, visite as áreas que lhe interessar e tente observar bem como é viajar e se deslocar por esse mundo.

a) Você acha que o jogo possui ambientes(celeiros, prédios, árvores) que são projetados de maneira diferente da nossa realidade em que você vive?

b) Desloque-se pelo mundo do jogo e tente descrever informalmente como você vê o funcionamento deste mundo e seus ambientes.

c) Com o botão direito do mouse, acesse a função de mapa do jogo. Movimente-se e diga: qual sua percepção do mundo do jogo com o uso do mapa? Você sente que ele o ajuda? Justifique.

d) Quanto aos ambientes do mundo do jogo que você descreveu no item b, eles se comportam da mesma maneira quando olhamos o mundo pelo mapa? Justifique.

e) Como você relacionaria as suas percepções (mundo do jogo e mapa) com a matemática? Você diria que elas se manifestam de acordo com a matemática que você conhece? Justifique.

Fonte: A pesquisa

A Atividade 2 (Figura 23) consiste nos estudantes buscarem compreender como as retas funcionavam no jogo, tanto pelo mapa quanto pela câmera em primeira pessoa. Seus itens, especificamente, abordam as diferenças que as retas possuem quando as observamos de lugares diferentes no jogo, as diferenças entre as retas no mapa e em primeira pessoa e a diferença das retas no Hyperbolica pras retas que os/as estudantes já conhecem, as da geometria euclidiana, pode despertar percepções distintas em cada caso.

[30] Câmera em primeira pessoa é uma termologia de jogos digitais para quando a visão que o jogador possui da tela é representativa e equivalente ao que seu avatar veria com seus olhos.

Figura 23: Atividade 2

Atividade 2

Agora que você explorou o mundo do jogo, vamos tentar entendê-lo a partir de alguns conceitos que conhecemos do nosso. Com essa mentalidade de comparação, responda os itens abaixo.

a) Encontre e descreva a localização de retas grandes que você conseguir ver no chão ou em caminhos dentro do jogo. Explique porquê a reta que você escolheu realmente é uma reta.

b) Utilize o mapa para descrever o que acontece quando você olha para estas mesmas retas do item a de lugares diferentes?

c) Ainda utilizando o mapa, descreva as semelhanças e diferenças entre as visualizações de lugares diferentes da reta que você escolheu, se houver, e como elas ocorrem no mundo do jogo. Você acha que as retas no jogo continuam sendo as mesmas retas que você conhece de outras aulas de matemática? Justifique.

d) Fora do mapa, estas semelhanças e diferenças que você descreveu no item c ainda são as mesmas? Explique.

e) Como essas semelhanças e diferenças mudam do mapa para a visão em primeira pessoa no jogo? Você percebeu outras semelhanças e diferenças novas apenas com a primeira pessoa do jogo? Se sim, descreva-as.

Fonte: A Pesquisa

Para a Atividade 3 (Figura 24) os/as estudantes deveriam começar a compreender as posições relativas entre as retas, isto é, paralelismo, perpendicularismo etc. Os itens, então, buscam focar na classificação das retas e em como estas retas se comportam entre si, ao observarmos no mapa e na câmera em primeira pessoa.

Figura 24: Atividade 3

Atividade 3

a) Dentro do jogo busque um lugar onde se possa ver três ou mais retas nas proximidades e descreva este lugar e descreva as retas que você encontrou.

b) Estas retas são finitas, isto é, possuem um ponto de início e um ponto de fim? Caso sejam, imagine e tente descrever, com suas palavras, como elas seriam caso fossem infinitas.

c) Como as retas que você escolheu no jogo se posicionam relacionadas entre si? (Explore diferentes espaços). Se desejar, utilize o apoio do mapa e descreva utilizando conceitos como ângulos, intersecção, paralelismo, perpendicularismo...

d) Considerando retas paralelas como retas que não possuem nenhum ponto em comum, busque encontrar e descrever pares de retas paralelas.(A partir deste item pense nas retas como as retas infinitas identificadas e imaginadas no item b)

e) Escolha uma reta na região em que você se encontra e descreva-a. Busque então dizer quantas são as retas paralelas a ela em suas proximidades.

f) Comparando as retas paralelas que você encontrou com as que você conhece do nosso mundo, você vê alguma diferença significativa entre elas? Justifique. Você acha que essas diferenças significam alguma coisa para o mundo do jogo? Justifique.

Fonte: A Pesquisa

A Atividade 4 (Figura 25), pedia que todos/as os/as estudantes se dirigissem a um lugar, um café presente na região da cidade. Lá, os/as estudantes deveriam buscar formas geométricas que conheciam e identificá-las. Além disso, a questão também trabalhava com classificação de ângulos em formas geométricas hiperbólicas e o teorema 180 hiperbólico.

Figura 25: Atividade 4

Atividade 4

Na outra aula, observamos como as retas se comportam no mundo deste jogo. H buscaremos olhar para algumas formas que estão presentes nele e ter entendê-las um pouco melhor.

a) Abra o mapa, procure e vá para a cidade. Nela, à direita do prédio princi se encontra o "Infinity Café"(café infinito), tente entrar nele. Dentro dele te descrever e listar abaixo algumas formas geométricas que você vê lá e reconhece de outras aulas de matemática.

b) No chão e no teto do café existem formas geométricas de quatro lad verifique de alguma maneira se eles são quadrados do modo como conhecemos usualmente ou se são apenas quadriláteros. Descreva processo que você fez para que esta verificação acontecesse e escreva conclusão.

c) No centro do café existe um bar, neste lugar está mais uma forma de qua lados, o balcão, classifique seus ângulos em agudo, reto ou obtuso, maneira que você faz na aula de matemática.

d) Baseando-se na sua resposta para a última pergunta, você diria que a so dos ângulos desta forma de quatro lados é maior, menor ou igual à 360º?

e) Pensando no item d, caso tivéssemos um triângulo neste café, ele teria ma menos ou exatamente 180º?

Fonte: A Pesquisa

Para a Atividade 5, então, temos uma continuação das atividades no café, agora, os/as estudantes deveriam observar como as paredes desta área se relacionam angularmente e como os objetos perto delas se comportam.

Figura 26: Atividade 5

Atividade 5

a) Ainda no café, observe as paredes deste lugar pela câmera de primeira pessoa do avatar e pelo mapa do jogo, então descreva com suas palavras algo que chama sua atenção nelas.

b) Vá para uma das paredes do café e se direcione para o ponto em que ela aparenta se encontrar com outra parede. Descreva o que acontece com os objetos na câmera em primeira pessoa e no mapa quanto mais próximos estão deste ponto de encontro.

c) De que forma, você relacionaria este espaço, entre as duas paredes, que forma um canto, com um ângulo? Justifique.

d) Caso quisessemos medir esta forma na parede em graus, quantos graus ele tem? Este valor que você encontrou se mantém quando olha para este canto no mapa? Justifique.

e) Baseado no seu resultado da sua última questão, na geometria que você conhece ou na sua vida, é possível obtermos uma figura geométrica com este ângulo? Explique.

Fonte: A Pesquisa

Para a atividade 6 (Figura 27) trabalhamos com a localização no Hyperbolica. As questões pediam que jogador escolhesse um ponto inicial e nele fizesse uma movimentação em um padrão “frente, direita, trás, esquerda”, de modo que, em um espaço euclidiano, este movimento faria o avatar voltar para o mesmo lugar, porém, no Hyperbolica isso não acontece. Portanto, a ideia da atividade era trabalhar a percepção dos estudantes sobre esta diferença entre os dois espaços.

Figura 27: Atividade 6

Atividade 6

Hoje vamos explorar um pouco sobre localizações e movimento neste mundo. Escolha um ponto fixo de partida reconhecível no mapa e realize os itens a seguir. (Lembre-se de buscar sempre andar a mesma quantidade de tempo para todas as direções. Caso necessário, utilize o cronômetro do seu celular.)

a) Descreva o ponto de partida que escolheu.

b) Neste ponto de partida, siga reto, depois dobre para a direita, caminhe a mesma quantidade de tempo, dobre para a direita novamente, caminhe mais uma vez e depois para a direita para finalizar com mais uma caminhada, com todos os movimentos sendo feitos pela mesma quantidade de tempo. Confira se você se movimentou corretamente. O ponto final do seu trajeto é o mesmo que o inicial? Justifique sua resposta.

c) Caso fizéssemos este trajeto no nosso mundo, o ponto final e o inicial deveriam ser iguais? Justifique sua resposta.

d) Ao retornar ao ponto de partida, siga reto, depois dobre para a esquerda, caminhe a mesma quantidade de tempo, dobre para a esquerda novamente, caminhe mais uma vez e depois dobre para a esquerda para finalizar com mais uma caminhada, com todos os movimentos sendo feitos pela mesma quantidade de tempo. Confira se você se movimentou corretamente. Os lugares em que você terminou o primeiro e o segundo trajeto são o mesmo lugar ou são pontos diferentes neste mundo? Justifique sua resposta.

Fonte: A Pesquisa

A atividade 7 (Figura 28) consistia também em observar mais a fundo como funcionava o movimento neste espaço não-euclidiano. Em específico, seria trabalhado o conceito de holonomia. Este conceito seria trabalhado com os estudantes escolhendo um lugar para que seu avatar ficasse e um ponto de referência que deveriam comparar onde ficava em sua tela antes e depois de se mover pelo mapa sem que mexessem sua câmera.

Figura 28: Atividade 7

Atividade 7

Procure um espaço bem aberto no jogo para realizar os próximos itens.

Saia de um ponto de partida reconhecível, ande como quiser pelo mapa do jogo e retorne a este ponto. Você está olhando para os mesmos objetos que estavam na sua frente antes do trajeto? Justifique sua resposta. O que mais lhe chamou a atenção?

Tente andar em volta do mesmo lugar usando apenas as teclas “W”, “A”, “S”, “D” e descreva o que acontece com os objetos observados pelo seu avatar.

Vá para a parte do mapa com uma praia e procure um baú do tesouro, então tente encontrar alguma maneira de colocá-lo no buraco designado a ele e descreva o modo como fez.

Fonte: A Pesquisa

4. Apresentação e análise dos dados em jogo: percepções em um mundo hiperbólico

Este capítulo se divide em duas partes: uma apresentação da forma como os dados serão evidenciados e a segunda com a análise desses, propriamente ditas. Dessa forma, informamos que a parte de análise desvela dois eixos analíticos. O primeiro eixo analítico apresenta a percepção dos/das estudantes por meio das ações de ser-com-TD, pensar-com-TD e saber-fazer-com-TD enquanto a segundo consiste na percepção inquirida por meio da experiência estética vivenciada pelos participantes.

.

4.1 Apresentação dos dados

Os dados da pesquisa serão apresentados em forma de eixos analíticos, sub-eixos e cenas investigativas. Identificamos a categoria maior dos dados como eixos analíticos de forma a remetê-los aos eixos de um plano cartesiano em que, para qualquer ponto, podemos avaliar sua posição, sua manifestação no plano pelas suas coordenadas x e y. Assim, para qualquer dado que iremos analisar, entendemos que ao fazermos esta análise em um dos eixos aqui propostos, não estamos implicando na inexistência de outros eixos possíveis ou que não poderíamos analisar este dado segundo o outro eixo, assim como ao analisarmos um ponto somente pela sua coordenada x não estamos dizendo que a coordenada y não o define também ou que uma coordenada z ainda não mencionada não pode existir.

Denominamos como sub-eixos, aspectos específicos pertinentes a um determinado eixo que desejamos destacar especificamente dentro dos dados apresentados. Estes sub-eixos, no entanto, estão todos relacionados, sendo o nosso objetivo com essa separação apenas para focar a discussão dos dados no tópico específico ao qual o sub-eixo se refere.

Por fim, chamamos de cenas recortes de acontecimentos específicos que ocorreram durante a prática, as cenas serão compostas por um título que descreve resumidamente os acontecimentos que traremos foco na análise, por uma breve contextualização do dia em que a prática ocorreu, onde o estudante se encontrava e quais eram suas ações dentro do jogo naquele momento. Depois desta contextualização traremos uma análise considerando os elementos antes abordados junto às respostas dos estudantes dadas nas atividades com o objetivo de discutirmos quais são as suas percepções naquele momento recortado.

4.2 Análise dos dados

A análise dos dados, traz dois eixos, os quais levam em conta as respostas dos/das estudantes para as atividades do curso e a gravação de suas telas enquanto jogavam o jogo e realizavam cada atividade. Além disso, a análise dos dados busca tecer os dados por meio dos referenciais teóricos trazendo à tona os conceitos matemáticos explorados e os indícios da percepção dos/das estudantes que a nosso ver foram desvelados. Nesse ínterim, o primeiro eixo, evidencia recortes de respostas que apareceram ao longo dos encontros com os/as participantes do curso que nos permitem afirmar que os/as estudantes de educação matemática percebem a geometria hiperbólica por meio de atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica enquanto são-com-TD, pensam-com-TD e sabem-fazer-com-TD. As cenas que aparecem nesta seção, então, são cenas em que o jogo Hyperbolica se mostra partícipe na percepção dos/das estudantes, sendo um ator principal no desenvolvimento das respostas elaboradas por eles/elas. Ademais, subdividimos esse eixo em cenas que revelam, respectivamente, momentos (sub-eixos) em que houve movimentos de ser-com-Hyperbolica, pensar-com-Hyperbolica e saber-fazer-com-Hyperbolica. Salientamos que essa subdivisão nada mais é que fotografias instantâneas que tentam assegurar uma maior precisão de análise, pois, essas ações, como já dito, não são disjuntas. Elas se atravessam, se entrecruzam, se misturam podem a mesma fotografia ser analisadas sob diferentes pontos de vista.

4.2.1 Cenas relativas a Ser-com -com-o-Hyperbolica

Nessa subseção, discorremos sobre a imersão vivenciada com o jogo. O ato de ser-com-Hyperbolica é definido pelo ambiente em que os estudantes se colocam. Assim, o ser-com-Hyperbólica assume a corporeidade dos avatares conduzida pelos/as participantes, há um movimento ciborgue desses/as. Há ser que lança e traz à consciência, sendo-com-o-jogo. Ser-com-Hyperbolica, então define-se da encarnação do jogador no micromundo definido pelo jogo, nele se entender como alguém que está com o jogo se incorporando, plugando-se na realidade e se incorporando com o avatar.

Cena 4.2.1.1: Ser-com-Hyperbolica para frente e para trás

Para a primeira cena, discutiremos atividades que ocorreram no dia 23/09/22 e contaram com a formação da dupla entre os estudantes C e D. O contexto para a primeira cena é a exploração da região da praia (Figura 29) por parte dos/das estudantes, especificamente, os momentos em que buscavam responder os itens b e d da atividade 2. Em específico, para que pudessem responder os itens, os/as participantes C e D deveriam escolher uma reta no mundo do Hyperbolica para que pudessem observar como ela se comporta no mapa ou na visão de primeira pessoa, sem que seu avatar estivesse em cima da reta escolhida.

Figura 29: C e D explorando a região da praia pelo mapa

Fonte: A Pesquisa

Em suas explorações da região, C e D acabaram por escolher como sua reta a divisa entre a região da praia e a área central do Hyperbolica (Figura 29), uma vez que estavam respondendo o item b da Atividade 2 (*Utilize o mapa para descrever o que acontece quando você olha para estas mesmas retas do item a de lugares diferentes*). Uma vez que tenham escolhido a reta, passaram então a explorar como ela se comporta ao se locomoverem pelo mundo. Esta locomoção resultou na tela deles em uma distorção do formato que a divisa tinha quando estavam em cima dela. Ademais, C e D descrevem o comportamento desta distorção (Figura 30), de modo que percebem que essa distorção da reta faz com que ela se assemelhe a uma parábola (Figura 31).

Figura 30: Resposta de C e D para o item b da Atividade 2

b) Utilize o mapa para descrever o que acontece quando você olha para estas mesmas retas do item a de lugares diferentes?

Quando andamos para frente ou para trás, as linhas se distorcem, tornando-as semelhantes a parábolas

Fonte: A Pesquisa

Figura 31: D e C observando as distorções da divisa entre a praia e a área central pelo mapa

Fonte: A Pesquisa

No entanto, ao se aprofundarem em suas investigações sobre as distorções identificadas, C e D continuam desenvolvendo sobre elas no item d, ao falarem que "*as retas que vemos no jogo, não são as mesmas que vemos em [aulas de] matemática, pois elas se dobram*" (Figura 32).

Figura 32: Resposta de C e D para o item d da Atividade 2

d) Fora do mapa, estas semelhanças e diferenças que você descreveu no item c ainda são as mesmas? Explique.

Sim, porque dependendo da perspectiva, do lugar onde estamos no mundo, as construções aparentam ser curvadas, quando na verdade são retas.

Fonte: A Pesquisa

Com isso, notamos que os estudantes C e D percebem as perspectivas do que observam na praia do mundo do Hyperbolica como retas, conforme falam no item d, de parecerem curvas. Porém, mesmo revelando-se como algo distorcido, semelhante a uma parábola, não deixam de se mostrar para as percepções dos estudantes C e D como o objeto reto inicial.

Desta forma, um princípio da compreensão de como as retas hiperbólicas se revelam na geometria hiperbólica começa a tomar destaque para C e D, em especial, quando unido à projeção de Poincaré e suas distorções. Em especial, a percepção dos estudantes C e D sobre o comportamento e propriedades das distorções mostrou-se como um fator importante para o que seria, então, a percepção da dupla. Também, ao descreverem o comportamento das distorções da reta localizada na praia fazem isso das seguintes maneiras: "*Quando andamos para frente ou para trás, as linhas se distorcem*" (Figura 30) e "*dependendo da perspectiva, do lugar onde estamos no mundo, as construções aparentam ser curvadas*" (Figura 32).

Ambas as frases equivalem à experiência de movimentar o avatar no jogo com uma corporeidade identificada por C e D, pois é ele e ela que andam para frente e para trás, é ele e ela que identificam o lugar onde ele e ela estão no mundo. Ou seja, não é o avatar, mas cada um lá, plugado/a ao jogo, percebendo o seu mundo. Esta identificação entre o movimento do avatar com o corpo ainda é somada, então, com a distorção da reta e de outras formas, causadas pelo movimento. Desta forma, se tem o ser-com-Hyperbolica (ROSA, 2008) em C e D, de modo a evidenciar a transformação de si no avatar do jogo com o próprio corpo (com sua materialidade) que é quem percebe o ambiente e as distorções. O ser-com-Hyperbolica de fato é o que caracteriza a percepção final sobre as distorções das retas no mapa do jogo, afinal, é explicitado duas vezes que a distorção da reta é causada dependendo de "*onde estamos no mundo*" ou "*quando andamos para frente ou para trás*".

Cena 4.2.1.2: Ser -com-Hyperbolica: conseguimos nos localizar pelas bordas

A segunda cena que iremos comentar ocorreu no primeiro dia de atividades do curso (23/09/22) e foi protagonizada pelos participantes A e B enquanto estavam explorando a área central do mapa. Nesta cena, os participantes estavam realizando a primeira questão proposta, em específico o item c dela, e o respondendo da seguinte forma (Figura 33).

Figura 33: Comentários sobre a navegação com o mapa

c) Com o botão direito do mouse, acesse a função de mapa do jogo. Movimente-se e diga: qual sua percepção do mundo do jogo com o uso do mapa? Você sente que ele o ajuda? Justifique.

Sentimos que em termos usuais como distâncias e formas de objetos não. No entanto, no momento em que conhecemos o ambiente conseguimos nos localizar a partir das bordas do mapa, já que todo o ambiente está projetado no mapa. Além disso, no momento em que comparamos as distorções no mapa com as do ambiente ele se torna mais útil.

Fonte: A Pesquisa

Podemos notar que na elaboração da utilidade do mapa, A e B têm uma percepção inicial de que para identificar distâncias e formas na visão do mundo, dada pelo mapa, não possui tanta utilidade. Ademais, foi a partir dessa percepção que os estudantes conseguiram conjecturar o que para eles seria a utilidade maior do mapa, um recurso para encontrar sua localização em relação ao todo do mapa. Dessa percepção, já pode-se notar algumas noções da projeção de Poincaré sendo percebidas pelos estudantes, isto é, que dada esta projeção, então "[...] todo o ambiente está projetado no mapa", mesmo que com suas dimensões muito distorcidas. Desta forma, com suas percepções, os estudantes já começam a interpretar projeções específicas de espaços hiperbólicos para espaços euclidianos.

Notemos também que a resposta dada por A e B é colocada em primeira pessoa e em sua linguagem descreve os movimentos realizados pelo avatar de A e B no mundo do jogo como se fossem movimentos realizados pelos estudantes em si, por exemplo, quando A e B falam que "estou andando no que eu acho…", esta identificação da pessoa com seu avatar, é denominada em Rosa (2008) como um movimento de plugar-se, em que a conexão formada entre o avatar e a pessoa é tão forte que a barreira entre o avatar e o jogador do jogo se quebra, levando o jogador a existir com o mundo do jogo, ou, em outras palavras, ser-com-Hyperbolica.

Figura 34: A e B consultando o mapa com todas as regiões do jogo visíveis

Fonte: A Pesquisa

Esse ser-com-Hyperbolica permite que os estudantes percebam com o jogo (mapa) que a projeção do jogo não preserva o tamanho de alguns objetos, ainda mais, buscando se orientar pelas suas linhas retas entre alguns objetos. No caso, ao comparar com o mapa geral, em um primeiro momento, quando comparadas às retas da geometria euclidiana (*...conseguimos nos orientar pelas bordas*) eles dão sentido (*...ele se torna mais útil*) ao percebido.

4.2.2 Cenas de Pensar-com-Hyperbolica

Nessa subseção, discorremos sobre a imersão vivenciada com o jogo. A ação de pensar é condicionada pelo ambiente em que os estudantes se colocam. Assim, o pensar-com-Hyperbólica assume a corporeidade dos avatares conduzida pelos/as participantes, há um movimento cyborg desses/as. Há ser que lança e traz à consciência, pensando-com-o-jogo. Há um pensar situado no modo de vida da pessoa, no qual se localiza no próprio Hyperbolica.

Cena 4.2.2.1 – Pensando-com-Hyperbolica: a foto, o desenho e as cores paralelas e perpendiculares

Esta cena se deu durante o primeiro dia de práticas (23/09/22) e seu contexto é a exploração da estudante E da região da cidade. Ademais, esta exploração e reflexão se deu enquanto E estava buscando descrever a relação entre as retas que identificou na cidade para que pudesse responder o item e da Atividade 3.

Para que pudesse descrever as relações entre as retas, primeiramente, E escolhe uma reta principal para que então pudesse comparar as outras retas que conseguiu identificar na cidade. Uma vez que a estudante escolheu sua rua, ela abriu o mapa e bateu uma foto para que pudesse com ela identificar, desenhando em cima da foto que bateu (utilizando as funções de desenho do word), as relações entre as retas. A Figura 35, feita pela própria estudante E, indica em laranja a reta que E escolheu como sua referência de onde iria manter seu personagem parado para que pudesse utilizar o mapa para observar as outras. Em seguida, de vermelho, a estudante E passa a traçar retas que considera paralelas entre si. Por fim, E passa a traçar de azul as retas que considera perpendiculares às retas vermelhas. A Figura 36 identifica a resposta de E dada pela questão

Figura 35: Esquema feito por E para visualizar a relação entre as retas

Fonte: A Pesquisa

Figura 36: Legenda para as cores utilizadas na imagem feita por E e sua resposta para o item e da Atividade 3

Paralelas, perpendiculares reta de referência.

Ou seja, enxergo quatro retas que me parecem paralelas e quatro que parecem ser perpendiculares. As retas que estão mais distantes, como as que contornam o prédio vermelho central à esquerda na imagem parecem ser mais difíceis de relacionar com a reta de referência. Me guiei pela ideia possivelmente inusitade de que se uma rua é perpendicular a uma reta perpendicular a reta de referência, essa reta é paralela a reta de referência.

Fonte: A Pesquisa

Podemos notar que as percepções de E sobre paralelismo e perpendicularismo com o Hyperbolica se dão por meio de noções já existentes na geometria euclidiana. Especificamente, a estudante E busca associar a sua reta de referência como paralela a uma reta também é perpendicular a outra reta perpendicular à de referência. Isto é, a perpendicular de uma perpendicular é paralela à primeira. Ademais, esta maneira que E pensa paralelismo com o mundo do jogo, segundo Rosa (2018) faz referência ao pensar-com-Hyperbolica, pois, é com o Hyperbolica que ela percebe as retas (*...enxergo quatro retas que me parecem paralelas*) que ela entende como paralelas. Há o pensar-com-o-Hiperbolica ao mencionar que as retas mais distantes parecem ser mais difíceis de relacionar com a de referência, ou seja, é com o ambiente do Hyperbolica que ela conjectura.

Além disso, a maneira que E manifestou seu pensar-com-Hyperbolica neste item remete, quase que literalmente a um destaque perceptivo das figuras (retas escolhidas pela estudante) em relação ao fundo (o jogo Hyperbolica e conceitos de paralelismo da geometria euclidiana) (MERLEAU-PONTY, 1990). Também, na Figura 35, podemos notar que E inclusive desenha, sabendo-fazer-com-a-foto-do-mapa. No entanto, para isso percebe como são mostradas duas paralelas na projeção do mapa do Hyperbolica e as traça usando cores, ou seja, como se mostram duas paralelas e duas perpendiculares na projeção do disco de Poincaré. Em específico, podemos falar também sobre como este processo realizado pela estudante E abre uma possibilidade de saberes de geometria hiperbólica serem percebidos mesmo vindo de conceitos específicos da geometria euclidiana.

Cena 4.2.2.2 -Pensando-com-Hyperbolica: convergindo no infinito

Nessa cena, as percepções dos estudantes A e B se revelam no pensar-com-Hyperbolica quando, em um exemplo, também realizado no dia 23/09/22, eles exploram a área do museu no mapa para responderem o item d da Atividade 3. Eles, tomando apenas as retas do chão, procuravam pelo mapa retas paralelas para descreverem alguma característica que percebessem.

Ao explorarem a área do mapa, A e B identificaram na área algumas retas hiperbólicas que julgaram convergir (Figura 37). Uma vez identificadas as retas, A e B começam a se afastar dessas, as quais estavam observando de modo que passaram a perceber que eram retas paralelas que se distorciam de modo que pareciam ter suas extremidades se aproximando cada vez mais (Figura 38), como é indicado em sua resposta para a questão.

Figura 37: Resposta de A e B para o item d da Atividade 3

d) Considerando retas paralelas como retas que não possuem nenhum em comum, busque encontrar e descrever pares de retas paralelas.(A deste item pense nas retas como as retas infinitas identificadas e imagi no item b)

À medida que nos afastamos, percebemos que as retas tendem a convergir no infinito.

Fonte: A Pesquisa

Desta maneira, vemos como A e B praticam um pensar-com-Hyperbolica que permite com que realizem uma projeção de segmentos de reta, que são finitos, para uma representação infinita de retas que contém estes mesmos segmentos escolhidos. Complementando isso, por meio dessa atividade, a concepção de retas que convergem no infinito do Hyperbólica revela que a percepção disso é dada pelo pensar-com-Hyperbolica, uma vez que Hyperbólica que promove essa percepção de infinito no jogo. Eles, então, estão imersos no jogo, mobilizando suas referências de infinito e as inserindo como resposta à atividade. Assumindo o comportamento convergente das retas hiperbólicas percebido, uma vez que dependia de quão longe elas estivessem do centro do mapa (projeção de Poincarré).

Com isso, temos que as percepções de A e B sobre o comportamento de retas paralelas em uma projeção de Poincaré aparecem como figuras destacando-se de um fundo perceptivo o qual mobiliza não só um fundo de geometria hiperbólica como também conceitos de convergência e infinito.

Figura 38: Representação da convergência referida por A e B no item d.

Fonte: A Pesquisa

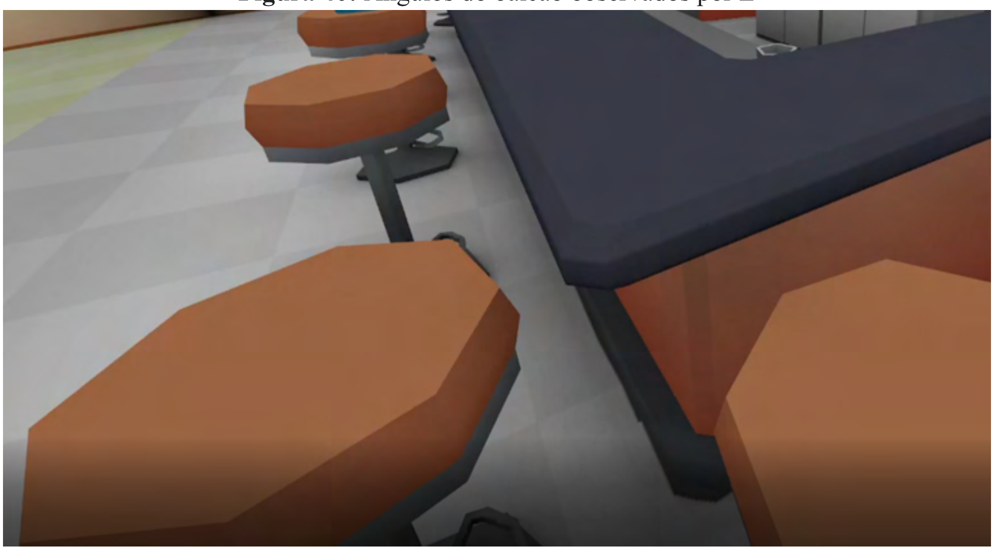
Cena 4.2.2.3 – Pensando-com-Hyperbolica: percebendo os bancos, percebendo o teto e a soma do ângulos internos

Para esta cena, que ocorreu no dia 30/09, traremos um excerto de três itens da Atividade 5, e como eles foram percebidos pela estudante E. A Atividade 4 consistia na percepção dos estudantes sobre os ângulos em figuras geométricas hiperbólicas, em específico, traremos um recorte de três itens (c, d e e) que a estudante E busca descrever sua percepção dos ângulos de um balcão (Figura 39) e (Figura 40), encontrado na área interna do café, sua classificação em agudos, retos e obtusos e como a classificação dos ângulos deste balcão se relaciona com a soma interna de outras figuras, como quadriláteros e retângulos.

Figura 39: Balcão observado pela estudante E em seus estudos dos ângulos.

Fonte: A Pesquisa

Figura 40: Ângulos do balcão observados por E



Fonte: A Pesquisa

O primeiro dos itens, perguntava para os participantes do curso justamente sobre os ângulos internos do balcão. Para isso, E toma a iniciativa de tentar classificar o balcão como algum tipo de quadrilátero (quadrado, retângulo, losango etc.), a estudante então toma a estratégia de contar os bancos em volta do balcão, de forma que, se cada lado tivesse o mesmo número de bancos, que estão igualmente espaçados, poderia assumir que o balcão possui lados iguais, contribuindo para os estudos de seus ângulos.

Além disso, em sua resposta para o item c (Figura 41), E comenta sobre, inicialmente, ter percebido os ângulos como se fossem retos. No entanto, após uma sugestão do professor-pesquisador de que comparasse as formas que via no balcão com as formas que via no teto (Figura 42), E sugere que uma vez que voltou a observar o balcão (Figura 43) percebe que "os ângulos parecem ser mais agudos do que retos".

Figura 41: Resposta de E para o item c da Atividade 5

c) No centro do café existe um bar, neste lugar está mais uma forma de quatro lados, o balcão, classifique seus ângulos em agudo, reto ou obtuso, da maneira que você faz na aula de matemática.

Comparando o balcão com os quadrados no chão, ele aparentava ser quadrado e ter todos os seus ângulos retos. Mas após ser sugerido que eu olhasse para o teto também, percebi que os ângulos parecem mais ser agudos do que retos.

Fonte: A Pesquisa

Figura 42: Ângulo no teto localizado diretamente acima do balcão

Fonte: A Pesquisa

Figura 43: Estudante E volta a observar o ângulo presente nos vértices do balcão

Fonte: A Pesquisa

Uma vez que E identificou os quatro ângulos do balcão como agudos, a estudante prosseguiu para responder os itens d e e da questão, que consistiam em identificar quanto vale a soma dos ângulos internos de um quadrilátero e a soma dos ângulos internos em um triângulo no mundo do Hyperbolica. Com o que foi percebido por E no item c, que os ângulos do balcão são agudos, suas respostas para os outros itens (Figura 44) consistiam em observar que quadriláteros deviam somar sempre menos do que 360º internos e triângulos menos do que 180º internos.

Figura 44: Resposta da estudante E para os itens d e e da Atividade 4.

d) Baseando-se na sua resposta para a última pergunta, você diria que a soma dos ângulos desta forma de quatro lados é maior, menor ou igual à 360º?
A figura, por ser composta por 4 ângulos aparentemente agudos, dever ter menos de 360° graus.

e) Pensando no item d, caso tivéssemos um triângulo neste café, ele teria mais, menos ou exatamente 180º?
Menos de 180°, considerando um triângulo como metade de um quadrilátero.

Fonte: A Pesquisa

Podemos ver como a percepção de E das angulações no balcão se revelam de maneira dinâmica. Inicialmente, percebendo os ângulos do balcão como retos, inclusive buscando medir os lados dele para corroborar a ideia de um quadrado. No entanto, nos movimentos de figura-e-fundo (MERLEAU-PONTY, 1990) vemos sua percepção (MERLEAU-PONTY, 2006), primeiramente, fazendo parte no processo da figura do balcão como um quadrado, isto é, equilátero e equiângulo. Ademais, uma vez que a estudante E observou outras partes do ambiente, percebendo que é possível no Hyperbolica existirem quadriláteros com todos os ângulos agudos, a figura destacada no mundo do jogo deixa de ser a do quadrado e sim a de um quadrilátero com seus ângulos próximos a 90º, mas ainda assim agudos.

Além disso, notamos como, depois de perceber os ângulos do quadrilátero do balcão como agudos, a participante E movimentou o seu pensar-com-Hyperbolica, de modo que conseguiu não só perceber, com certa desconfiança (indicada pelo uso da palavra "aparente" no item d da Figura 44), que a soma dos ângulos internos do balcão seria menor que 360º, como E também foi capaz de generalizar esta ideia para um triângulo qualquer presente na área em que o balcão se encontrava.

4.2.3 Cenas do Saber-Fazer-Com-Hyperbolica

Essa subseção destaca os dados analisados trataremos sobre os fazeres dos participantes dentro do jogo. Esta ação, a de saber-fazer-com-Hyperbolica é caracterizada não somente pelo êxito em completar uma tarefa ou objetivo, é também sobre a intencionalidade dos estudantes, o que move e guia eles junto ao mundo do jogo. Este fazer então se mostra com-o-Hyperbolica, situado e plugado a este mundo.

Cena 4.2.3.1 -Saber-fazer-com-Hyperbólica: movendo-se ao centro, pois lá todos os lugares são perceptíveis

Para esta cena, ocorrida no primeiro encontro com o grupo, dia 23/09/22, temos como atores principais os estudantes A e B. Iremos discutir suas percepções no que elas envolvem a Atividade 2, em específico o item c. Como mostra a Figura 45, A e B discutem as diferenças entre a perspectiva entre a câmera em primeira pessoa, quando os estudantes falam como "o campo de visão não permite distorções tão bruscas" em comparação ao mapa que consegue "representar todo o ambiente", mas, provoca "grandes distorções na reta".

Figura 45: Resposta dos estudantes A e B para o item c da Atividade 2

c) Ainda utilizando o mapa, descreva as semelhanças e diferenças entre as visualizações de lugares diferentes da reta que você escolheu, se houver, e como elas ocorrem no mundo do jogo. Você acha que as retas no jogo continuam sendo as mesmas retas que você conhece de outras aulas de matemática? Justifique.

O campo de visão não permite distorções tão bruscas. Já o mapa, por representar todo o ambiente, provoca grandes distorções na reta. Sim, pois entendemos a reta por direção. É a mesma.

Fonte: A Pesquisa

Podemos ver como as distorções têm grande importância para A e B. No entanto, um dos conceitos mais curiosos trazido pelos participantes emergiu com a exploração contínua do mapa do Hyperbolica e como as distorções apresentadas nele se manifestam. Assim, uma reflexão por parte dos estudantes sobre o que estavam observando é manifestada. Logo, ao explorarem o Hyperbolica com o mapa aberto A e B conseguem utilizá-lo para se direcionar para as regiões que desejam ir. Porém, ao explorarem a área do meio percebem um elemento crucial, é possível ver todas as áreas do jogo ao mesmo tempo quando estão no meio do mapa (Figura 46). Ao perceberem isso, A e B buscam ir para outros lados do mapa para ver se esta propriedade que descobriram sobre o funcionamento do mapa também funciona para qualquer lugar do mundo de Hyperbolica (Figura 47).

Figura 46: Estudantes A e B identificando todas as regiões do mundo aparecendo no mapa

Fonte: A Pesquisa

Figura 47: Estudantes A e B mudando de localização para observar se as outras regiões ainda aparecem no mapa

Fonte: A Pesquisa

Esta situação nos evidencia um saber-fazer-com-Hyperbolica por parte de A e B, este saber-fazer-com-TD se deu por meio da percepção do mapa a qual gerou uma hipótese. Em seguida, a *agency*, ação com vontade e posterior senso de realização, se mostra ao caminharem pelo mapa para conferir ou refutar a hipótese levantada. Há um movimento intencional com o jogo, de moso lançarem-se e trazer à consciência aquilo que foi percebido. Nesse sentido, mesmo não sendo o enquadramento dessa cena, há também um pensar-com-Hyperbolica que se mobiliza na associação de retas vistas no mapa com uma compreensão de retas como direção, constituindo este pensar de A e B característico dos estudantes-com-Hyperbolica.

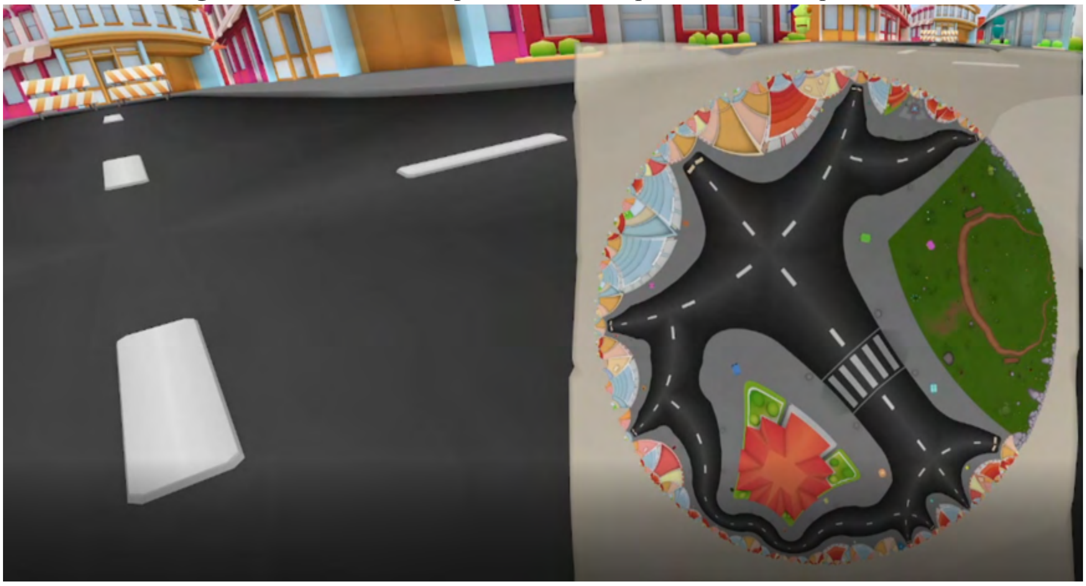
Ademais, ao se doarem para uma percepção do mundo pelo mapa, os estudantes A e B percebem que não só as distorções do mapa, mas também a maneira de navegar, consequentemente, perceber como o mundo se apresenta, acontece com o próprio mundo, vivenciando-o, experienciando-o. Estas percepções não só condicionam o jogar, mas também constituem conhecimento matemático sobre projeções na geometria hiperbólica, em específico, a projeção de Poincaré que sempre se refere às distorções do espaço hiperbólico em que se está.

Cena 4.2.3.2 - Saber-fazer-com-Hyperbólica: caminhando sobre as faixas seccionadas da rua e a percepção de reta

A segunda cena que iremos comentar nesta subseção ocorreu no dia 23/09/22, o primeiro encontro do curso, e envolve a estudante E respondendo o item a da Atividade 2. Neste item, os/as estudantes deveriam navegar pelo mundo do jogo, identificar e descrever um objeto que parecesse ser uma reta e justificar porque o identificaram como tal.

A estudante E, para sua reta, escolheu um tracejado no meio de uma das ruas da cidade como mostrado na Figura 48. O tracejado escolhido é o localizado no meio da rua com a faixa de segurança (de pedestre), estando visível em primeira pessoa no lado esquerdo da figura.

Figura 48: Rua escolhida pela estudante E para o item a da questão 2



Fonte: A Pesquisa

Na Figura 49, notamos a maneira que a estudante E justifica seu objeto escolhido como reta. Para isso, a estudante E, movimenta seu avatar sem mexer o mouse ou em mais de uma tecla de movimento com intuito de verificar se o trajeto do tracejado da rua se mantinha como o trajeto de seu personagem.

Este movimento intencional, segundo Rosa (2018), caracteriza um saber-fazer-com-Hyperbolica, pois naquele momento, a participante E não estava apenas andando por cima da reta, sem um objetivo determinado, mas o caminhar em cima da reta se deu com o objetivo de comparar justamente as direções do caminhar. Sua ação se deu com vontade e senso de realização, no sentido de um caminhar "reto" do avatar (possibilitado pelo fato de E se movimentar de acordo com apenas uma tecla) no tracejo da rua.

Desta maneira, a estudante E consegue perceber que uma maneira de identificar retas no jogo vai além do modo visual, destacando especificamente que apesar de objetos retos aparentarem curvar quando seu avatar não se encontra em cima deles, estes objetos não deixam de ser retas (*...em nenhum momento minha direção muda*). Em específico, E, por meio deste movimento de saber-fazer-com-Hyperbolica, passa a perceber as retas no jogo e na geometria não só como retas euclidianas, que já conhecia, mas como retas hiperbólicas, identificando figuras que estão distorcidas no mapa também como retas.

Figura 49: E explica qual reta escolheu e justifica sua classificação como reta

a) Encontre e descreva a localização de retas grandes que você conseguir ver no chão ou em caminhos dentro do jogo. Explique porquê a reta que você escolheu realmente é uma reta.

Seguindo o tracejado de um rua, tenho a sensação de andar em linha reta. Isso é pelo fato de que em nenhum momento a minha direção muda, eu não mexo o mouse, não viro meu corpo virtual, eu sigo em frente e sigo na rua.

Fonte: A Pesquisa

Cena 4.2.3.3 -Saber-fazer-com-Hyperbólica: indo aos cantos do café e a percepção

Esta atividade foi realizada no dia 03/10/22 individualmente com o estudante B. A atividade consistia na exploração da região de um café/pub (chamado no jogo de café do infinito[31]), localizado na região da cidade. Seu interior é apresentado na Figura 50 e seu exterior (sua entrada) na Figura 51. Esta cena retrata o estudante B explorando a Atividade 5, em específico, o item c, que pede para o participante do curso que analisasse os cantos deste café, que são formados pela intersecção de segmentos de polígonos ideais, isto é, estão localizados nas bordas de uma projeção de Poincaré, e comparasse estes cantos com o conceito euclidiano de ângulos.

Figura 50: B explorando a área interna do café

Fonte: A Pesquisa

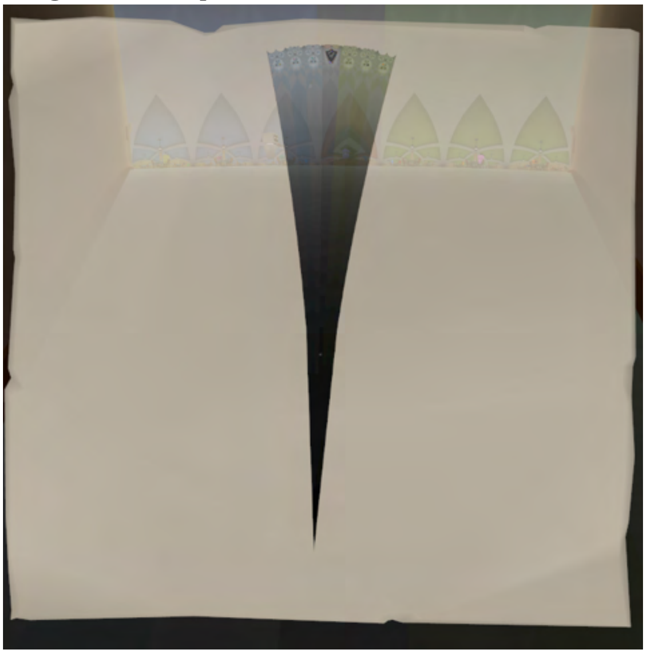
[31] Infinity Cafe

Figura 51: Área externa do café

Fonte: A Pesquisa

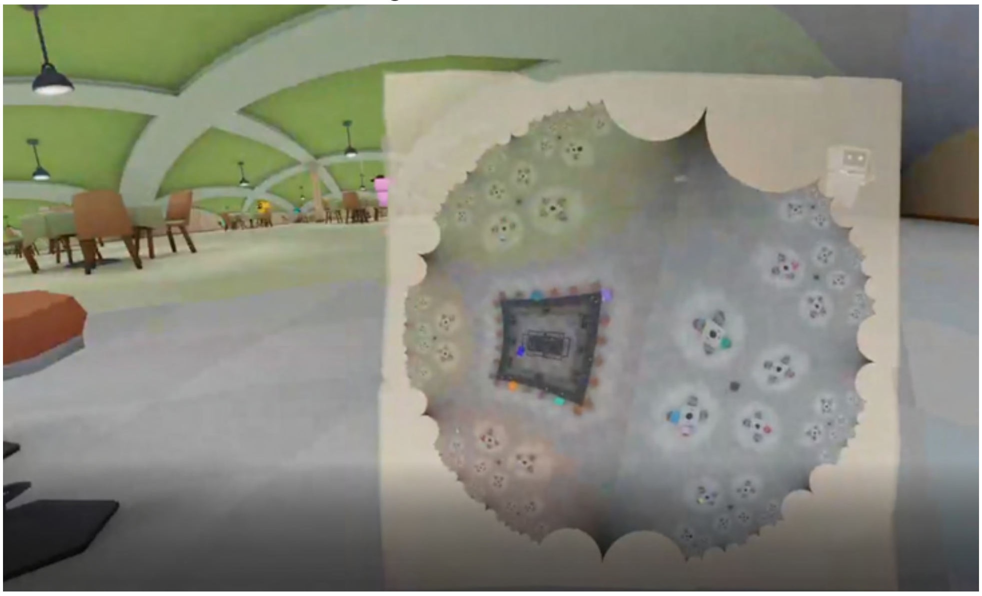
Na exploração do item, o estudante B começa a explorar os cantos do café, não somente indo em direção a eles como está indicado na Figura 52, mas também escolhendo se afastar deles, para entender seu comportamento quando este está mais distorcido na projeção do mapa, além de poder ver como os cantos do café se comportam e se formam em conjunto na estrutura inteira da área, como indicado na Figura 53.

Figura 52: B explorando um dos cantos da área do café



Fonte: A Pesquisa

Figura 53: Estudante B observando como os ângulos do café se relacionam nas distorções e com o fo
geométrico do café



Fonte: A Pesquisa

Uma vez que B explorou os cantos desta maneira, ele buscou relacionar eles com o conceito euclidiano de ângulo, classificando os cantos como se fossem ângulos agudos, mas, notando que, como o café é uma forma geométrica de mais de quatro lados, estes ângulos deveriam ser maiores que 90º, como pode ser visto em sua resposta (Figura 54).

Figura 54: Resposta de B para o item c da Atividade 5

h) De que forma, você relacionaria este espaço, entre as duas paredes, que forma um canto, com um ângulo? Justifique.

Indo para o centro, faria sentido todos os ângulos serem maiores que 90º, pois a sala é um "polígono" aproximadamente regular com mais de 4 lados. Contudo quando nos aproximamos de um "canto" os ângulo claramente aparentam ser agudos.

Fonte: A Pesquisa

Em seus movimentos de exploração dos cantos do café, podemos ver que o estudante B não exerceu apenas um pensar-com-Hyperbolica, para confirmar suas conjecturas, o estudante realizou os movimentos de maneira que mostrou uma intencionalidade de lançar-se aos cantos e trazer à consciência o percebido. Há uma ação com vontade (ir ao canto) e senso de realização (é um ângulo agudo – pelo percebido). B movimenta-se com o objetivo de investigar o comportamento dos cantos do café, ou seja, ocorreu também um movimento de saber-fazer-com-Hyperbolica. Deste saber-fazer-com-Hyperbolica, B conseguiu lançar-se a uma percepção contraditória ao que seria, caso o mundo fosse euclidiano. O estudante percebe os cantos como ângulos agudos, porém, baseando-se em fórmulas da geometria euclidiana, compreende que o formato do café, deveria possuir ângulos maiores que um reto. Desta forma, não só B destaca um conhecimento sobre polígonos ideais em uma projeção de Poincaré, como sua percepção inicial de ângulos agudos torna-se o primado de seu conhecimento (MERLEAU-PONTY, 1990) que se destaca de um fundo que é constituído tanto pela geometria hiperbólica como pela geometria euclidiana.

4.3 Cenas Estéticas: A sensibilidade vinda da percepção

Nesta seção iremos discutir a experiência estética vivenciada com o jogo Hyperbolica. Essa experiência também emerge das percepções matemáticas que as atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica provocam. Em específico iremos trazer cenas que desvelam essa experiência estética, como que ela se acontece no que se refere aos conceitos de geometria hiperbólica que estão sendo vivenciados no jogar o Hyperbolica.

Cena 4.3.1: Experiência Estética: Por que ângulo vejo isso?

A primeira cena que iremos destacar o aspecto estético, ocorreu no dia 25/09/22 e ocorre na exploração do estudante C da área do café enquanto o estudante buscava compreender como as paredes do café, quando se encontram, funcionam (atividade 5 questões c, d e e). Para isso o estudante anda próximo às paredes do café para observá-las de mais perto, procurando algum tipo de intersecção entre as paredes, para que pudesse confirmar existe algum tipo de ângulo ali, além disso, C também busca guiar sua visão na câmera em primeira pessoa de forma como se estivesse olhando do canto para dentro do café, de forma que pudesse observar como o resto do café se relaciona com este lugar no qual se encontra (Figura 55).

Figura 55: C se coloca olhando da visão do canto do café para sua parte mais interna

Fonte: A pesquisa

Sobre as percepções de C, podemos notar como a estética do jogo se mostra às suas percepções nas respostas para as respostas (Figura 56) em que o estudante percebe que existe um ângulo presente nos cantos da cafeteria, mas ao mesmo tempo não consegue o identificar definitivamente como tal, descrevendo essa sua percepção escrevendo que "*Não parece ter um ângulo entre as paredes mas tem*". Ademais, C também indica perceber uma intersecção entre as paredes do café, tanto no mapa quanto na sua câmera em primeira pessoa, como ocorrendo no infinito e atribuindo a esse fato a ideia de que ângulo deste canto deve possuir, então, 0º. Notamos também no item e C descrevendo como esta forma existiria na geometria euclidiana ou em seu dia a dia da seguinte forma "*As únicas figuras possíveis seriam segmentos de reta, que teriam um ângulo inexistente*". C, portanto, associa a existência deste ângulo às curvas do Hyperbolica ao falar que caso tentássemos construir uma figura de 0º teríamos apenas dois segmentos de reta com um ângulo entre eles inexistente.

Com isso, vemos que a estética do jogo, como se apresenta no mapa e na câmera em primeira pessoa foram participantes no ato do estudante perceber que a intersecção das paredes como algo que ocorre apenas no infinito, uma propriedade de formas da geometria hiperbólica que ocorre na projeção de Poincaré, bem como vimos como a estética do jogo e como ela manifesta curvas causa um estranhamento em C quando ele percebe os cantos como sendo e não-sendo ângulos ao mesmo tempo.

Figura 56: Resposta de C para os itens c, d, e da atividade 5.

c) De que forma, você relacionaria este espaço, entre as duas paredes, que forma um canto, com um ângulo? Justifique.

Não parece ter um ângulo entre as paredes mas tem.

d) Caso quisessemos medir esta forma na parede em graus, quantos graus ele tem? Este valor que você encontrou se mantém quando olha para este canto no mapa? Justifique.

Vendo as paredes no mundo e no mapa, a impressão é que o ângulo é de 0°, porque a intersecção das paredes parece acontecer num espaço infinitamente pequeno.

e) Baseado no seu resultado da sua última questão, na geometria que você conhece ou na sua vida, é possível obtermos uma figura geométrica com este ângulo? Explique.

As únicas figuras possíveis seriam segmentos de reta, que teriam um ângulo inexistente.

Fonte: A Pesquisa

Cena 4.3.2: Experiência Estética: a sensação de estar em um labirinto

Esta cena se deu durante o dia 23/09/22 e foi protagonizada pela estudante E enquanto ela pensava e respondia o item e da Atividade 2. O cenário da cena se dá na região da cidade, enquanto E explorava as suas ruas principais com o intuito de compreender o funcionamento das retas. Em específico, o item "e" buscava perguntar aos estudantes quais as semelhanças e diferenças percebidas entre a representação do mundo pela câmera em primeira pessoa (projeção de Beltrami-Klein) e pelo mapa (disco de Poincaré).

Com isso, as percepções de E na Atividade 2 podem ser notadas em sua resposta (Figura 57).

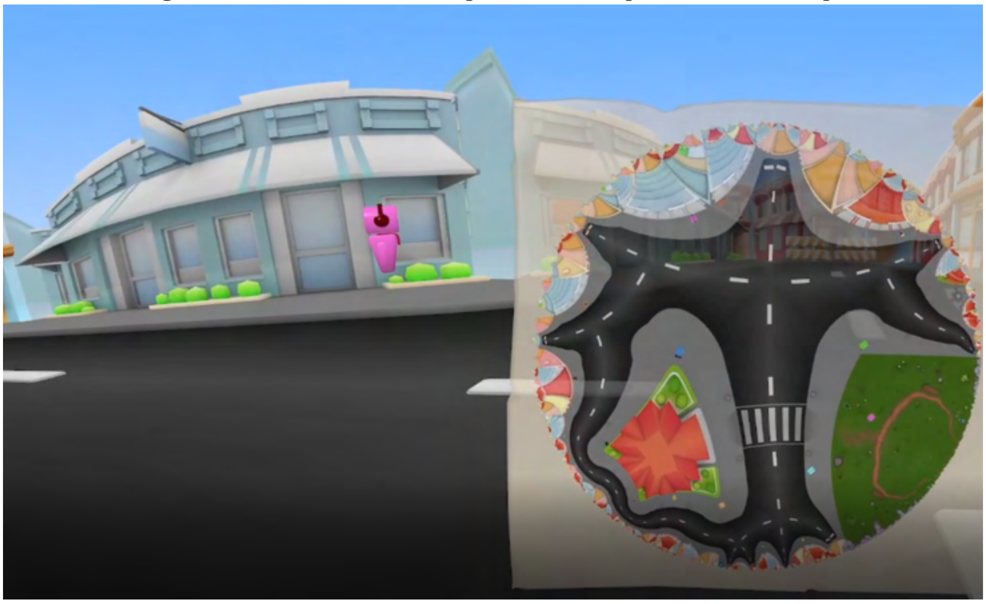
Figura 57: Descrição de E sobre como é visualizar o mundo em primeira pessoa

e) Como essas semelhanças e diferenças mudam do mapa para a visão em primeira pessoa no jogo? Você percebeu outras semelhanças e diferenças novas apenas com a primeira pessoa do jogo? Se sim, descreva-as.

Com o uso do mapa, parece ser mais fácil entender a posição relativa entre os objetos em um sentido direcional, talvez simplesmente por ser mais amplo. Na primeira pessoa, a sensação é de estar em um labirinto sem saída, principalmente na cidade.

Fonte: A Pesquisa

Figura 58: E se locomovendo pela cidade enquanto utiliza o mapa



Fonte: A Pesquisa

A estudante apresenta em sua resposta seus afetos e aversões (ROSA, 2021) sobre as diferentes maneiras de perceber o mundo do Hyperbolica. A estudante E fala que quando utiliza a câmera em primeira pessoa sente-se perdida como se estivesse em um labirinto, isto é, a visão em primeira pessoa afeta tanto os sentidos de E, com ela não conseguindo se localizar geograficamente. No entanto, ela não apenas sabe se locomover, por meio dos sentidos que possui, quanto o seu sensível cria uma aversão, comparando a região da cidade a um labirinto sem saída o que nos leva a entender sua insegurança.

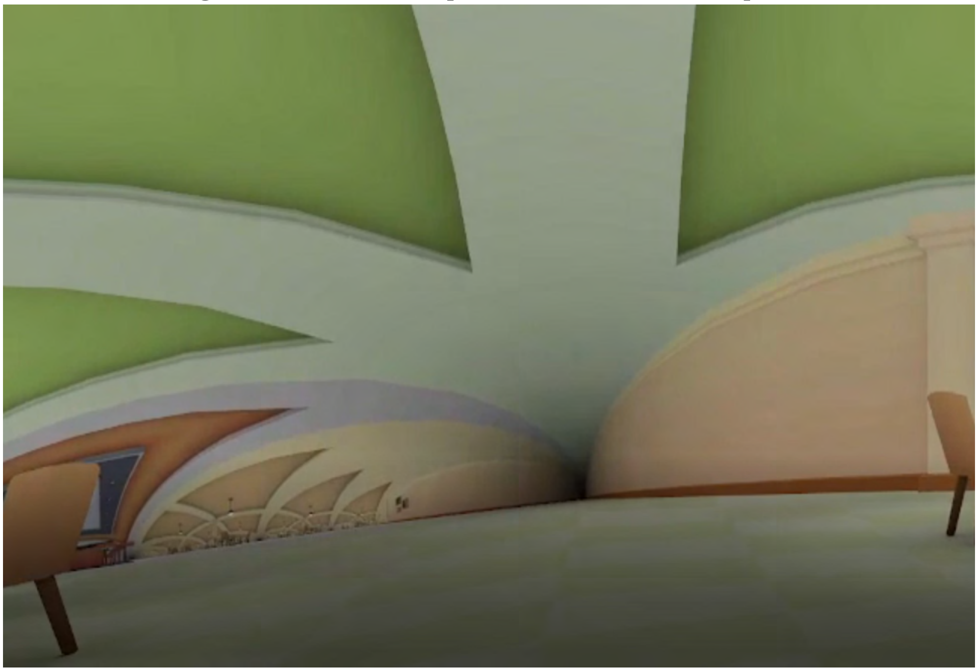
Em contrapartida, E se locomove facilmente ao utilizar o mapa, conseguindo encontrar uma direção para onde deseja ir sem problemas. Ademais, é possível notar (Figura 58) como E ao se locomover pela cidade, sempre busca utilizar o mapa, apenas deixando de usá-lo quando precisava olhar somente para a câmera em primeira pessoa. Desta forma, o jogar de E evidencia a maneira que a estudante acaba tendo mais conforto ao lidar com planos e espaços hiperbólicos, isto é, com a projeção do disco de Poincaré.

Em cima destes afetos e aversões (em relação à fala de E sobre o mapa e a câmera em primeira pessoa), podemos retornar para a ideia de plugar-se, como descrito por Rosa (2008). Neste caso, o sentimento de projeção da pessoa no avatar, isto é, o sentimento de ser-com-Hyperbolica em si demonstra-se de modo que a estudante E experiencia esteticamente seu andar pela cidade como se estivesse presa em um labirinto. No entanto, além do corpo biológico de E, em si, preso à cadeira, ela não está presa a lugar algum. Esse afeto/aversão em relação ao ambiente em que ela se encontra ajuda-a a experienciar cidade em que se locomove, mesmo que sua percepção a leve a um labirinto. Com isso, o próprio sensível de E está envolto na sua percepção de movimentação, em específico, com a câmera em primeira pessoa, e da cidade e dos elementos em si, vinculados às retas hiperbólicas na projeção de Beltrami-Klein.

Cena 4.3.3: Experiência Estética: Desconforto com ângulos

Esta cena ocorreu durante a prática do dia 30/09/22, também com a estudante E. Nela, a estudante explora a área do café buscando compreender seu ambiente e responder as perguntas propostas para a atividade. Em particular, trazemos as percepções de E sobre os itens c, d e e da Atividade 5, que trata sobre as regiões do café em que as paredes dele se encontravam (Figura 59) e suas relações com ângulos.

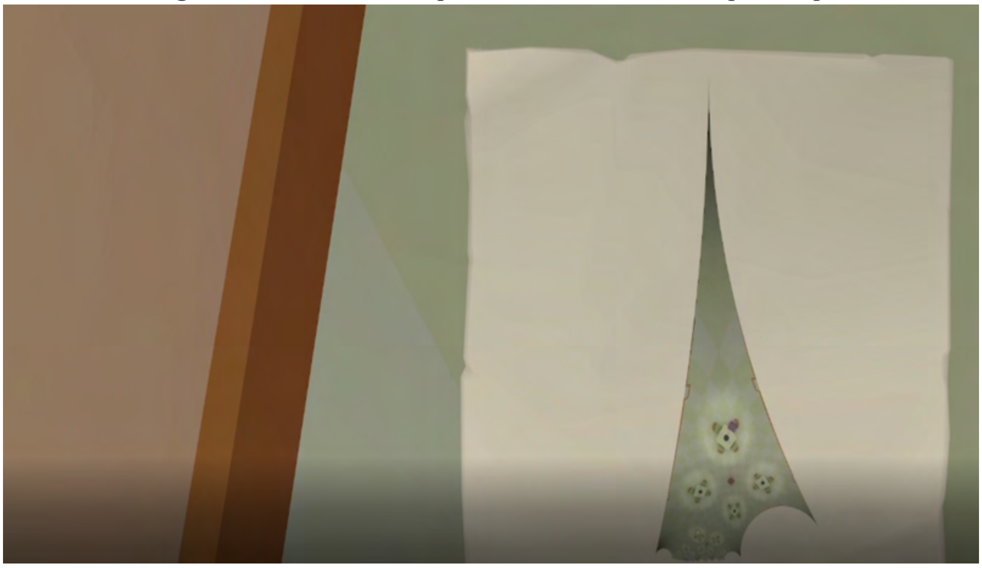
Figura 59: Encontro das paredes do café como visto por E



Fonte: A pesquisa

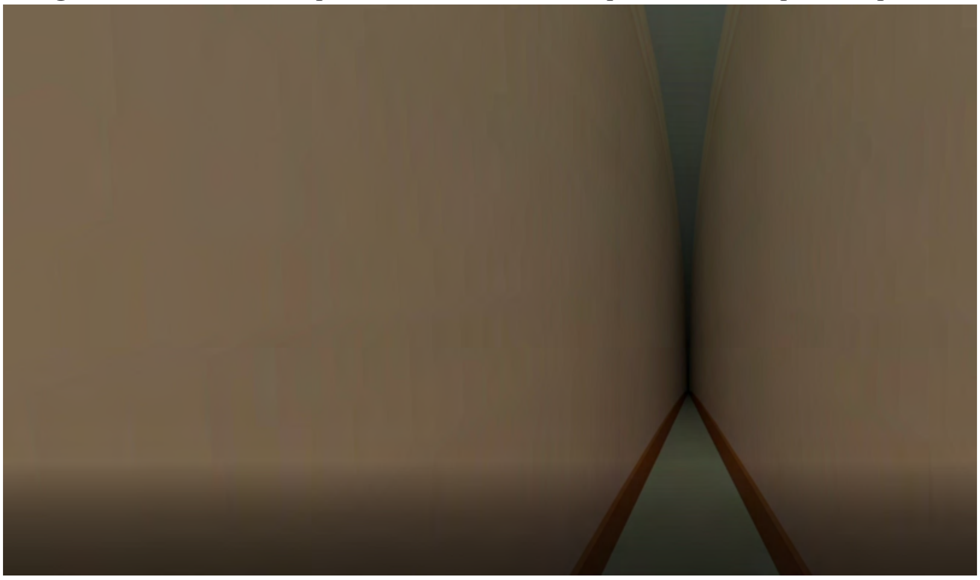
Para este item, a participante E explora o café por inteiro, buscando compreender a sua forma completa e ver se identifica alguma diferença que estes cantos formados pelas paredes possuam entre si. Uma vez que E explorou o café por inteiro, a estudante escolheu um canto para tentar se aproximar e observar este encontro das paredes o mais próximo que pudesse, tanto em primeira pessoa quanto pelo mapa (Figura 60 e Figura 61).

Figura 60: Estudante E explorando um canto do café pelo mapa



Fonte: A Pesquisa

Figura 61: Estudante E explorando um canto do café pela câmera em primeira pessoa



Fonte: A Pesquisa

Após explorar o ambiente, a estudante E, em sua resposta ao item c (Figura 62), explica que percebe os cantos, caso se chegue bem perto deles, como ângulos agudos, mas que isso se mostra um pouco assustador para ela, já que E associa este tipo de ângulo a "espaços pequenos". Isto é, espaços formados por polígonos que possuem poucos lados. Ademais, na sua resposta do item d, a estudante estima que, caso este canto do café seja um ângulo, para ela este ângulo de forma estimada mede uns 20° mas sua percepção do mapa lhe dá 5º (*Em primeira pessoa, estimaria uns 20°, mas olhando pelo mapa, parece ser bem menor que isso, uns 5° eu diria*) (Figura 62). Além disso, no item e (Figura 62) podemos ver que, para E, ao final do item e, o sentimento de desconforto ainda se mantém, especialmente, por estar baseada em teoremas de uma geometria que ela estava acostumada.

Figura 62: Respostas da estudante E para os itens c, d e e da questão 5

c) De que forma, você relacionaria este espaço, entre as duas paredes, que forma um canto, com um ângulo? Justifique.
É difícil pensar em termos de ângulo pela curvatura que percebo. Mas se entro nesse cantinho o máximo que posso e olho pelo mapa, aparenta ser um ângulo agudo. Essa ideia de um ângulo agudo é um pouco assustadora porque normalmente associamos ângulos agudos com espaços pequenos, mas o Café é gigantesco e formado apenas por ângulos agudos. Como seria uma forma construída com ângulos obtusos? Assustador.

d) Caso quisessemos medir esta forma na parede em graus, quantos graus ele tem? Este valor que você encontrou se mantém quando olha para este canto no mapa? Justifique.
Em primeira pessoa, estimaria uns 20°, mas olhando pelo mapa, parece ser bem menor que isso, uns 5° eu diria. Essa estimativa é feita completamente no achômetro.

e) Baseado no seu resultado da sua última questão, na geometria que você conhece ou na sua vida, é possível obtermos uma figura geométrica com este ângulo? Explique.
Acredito que não. Principalmente uma figura com tantos lados quanto a planta do café. A ideia de que tanto espaço cabe dentro de um figura formada por ângulos aparentemente agudos é desconcertante. Quando utilizamos a geometria usual, os ângulos obtusos são necessários para formar figuras com mais lados.

Fonte: A Pesquisa

Desta maneira, vemos como este desconforto de E é dado ao experienciar a estética do jogo, tanto a do mapa quanto a de câmera em primeira pessoa, são partícipes neste desconforto experienciado por E. Esse desconforto então torna as associações das paredes curvas com ângulos difíceis para E, por mais que sua percepção diga também que aquilo é um ângulo agudo. Podemos falar também sobre como a estética do mundo apresenta o café como algo gigante para E se mostra assustador para a estudante, principalmente ao perceber que o café por inteiro possui muitos lados.

Aqui, notamos como a estudante E,ao vivenciar esteticamente o mundo do Hyperbolica, isto é, ao perceber que os ângulos nos cantos do café aparentam ser agudos, E, então, busca uma explicação destas sensações aversivas nos conhecimentos de que o café é uma figura geométrica de vários lados e que figuras de vários lados na geometria euclidiana devem possuir ângulos maiores ou pelo menos iguais a 90º. Desta forma essa contradição entre o que é percebido neste mundo e o que já era conhecido para outras geometrias válida o que a estudante experiência esteticamente, um desconforto, uma reação que a remete ao medo (afeto e aversão ao visto) com aquilo que está percebendo neste mundo. Por fim, notamos que esta aversão, na verdade, não é vista por nós como algo negativo, pois é ela que possibilita uma reflexão do que foi percebido para que então E constitua estes conceitos da geometria hiperbólica.

5 Considerações Finais

Como último ato desta pesquisa, retornamos então a nossa pergunta diretriz da pesquisa: **Como estudantes de educação matemática percebem a geometria hiperbólica por meio de atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica?**

Desta forma, respondemos a pergunta afirmando que estudantes da educação matemática percebem a geometria hiperbólica por meio de atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica ao serem-pensarem-saberem-fazer-com-o-Hyperbolica e experienciar esteticamente o mundo do jogo. Ou seja, ambos os eixos apresentados em nossa análise de dados mostraram-se importantes para a resposta de nossa pergunta. Primeiramente, o eixo das tecnologias digitais, referente às percepções dos estudantes de educação matemática sobre geometria hiperbólica por meio de atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica nos aproxima da resposta de modo que as percepções dos estudantes se mostraram caracterizadas no ser-com, pensar-com e saber-fazer-com-Hyperbolica. Pode-se observar em diversas instâncias o movimento dos estudantes de plugar-se, em que os estudantes se conectam com seu avatar e os movimentos e interações dele com o Hyperbolica caracterizavam o que era percebido pelo estudante, de modo que viam-se responsáveis pela distorção do mundo ao caminharem por ele, situavam-se no mundo pelas bordas e em geral percebiam o mundo como algo junto a eles que moldava suas percepções ao mesmo tempo que eles percebiam ele. O eixo de experiência-estética-com-Hyperbolica se mostrou importante para aproximação de nossa resposta, o jogo possibilita a coexistência de duas estéticas ao mesmo tempo, a do mundo, visto pela câmera em primeira pessoa e do mundo visto pelo mapa que não só contrastam entre si, mas com as experiências que os jogadores possuem na realidade mundana. Desta forma, ao experienciarem o mundo esteticamente, ou seja, experienciarem suas curvaturas, seus ângulos, suas formas geométricas e se lançarem à percepção com ele percebiam a figura-e-fundo, traduzidos, por exemplo, pelo canto formado por duas paredes e o diálogo sobre a angulação desses. Além disso, os estudantes vivenciaram a estética em movimento, que pode mudar como o mundo é percebido, uma hora gigante, outra hora com regiões infinitamente pequenas, uma hora curvo, outra hora retilíneo, isso, então, permitiu reflexões matemáticas que desestruturaram concepções euclidianas pré-existentes.

Com isso, cumprimos nosso objetivo de investigar como estudantes de educação matemática percebem a geometria hiperbólica por meio de atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica, bem como nossos objetivos específicos, a saber: 1) investigar como se compreende o conceito de percepção na filosofia, portanto, nos voltamos para o referencial teórico para a discussão a percepção proposta por Merleau-Ponty em seu livro A Fenomenologia da Percepção; 2) investigar a geometria hiperbólica em termos de seu ensino, objetivo que foi atingido na realização dos encontros do curso utilizado nesta pesquisa e seus diversos momentos destacados neste trabalho bem como a formalização ao final da prática com os participantes e a entrevista/discussão; 3) desenvolver atividades-matemáticas-com-o-jogo-digital-Hyperbolica de forma que a concepção de experiência com Tecnologias Digitais pudesse ser evidenciada nessas atividades, objetivo alcançado na elaboração das sete atividades propostas durante o curso vinculado com esta pesquisa dos quais cinco foram realizadas em sua totalidade pelos participantes, com um estudante realizando todas as atividades propostas no curso, bem como o planejamento das atividades em si tendo sido feito em consonância com nossa visão e entendimento do referencial teórico; 4) Compreender a forma de desenvolver pesquisa qualitativa, assim como, desenvolver uma análise de dados em consonância com visão de mundo e de conhecimento, que se mostrou realizado nos estudos de como que um pesquisador qualitativo deve se portar quanto a seus dados e como se da uma pesquisa qualitativa em geral, o que gerou também adaptações das questões de forma que fossem pensadas para considerassem a estrutura de como se faz uma pesquisa qualitativa.

Com isso, falemos também das contribuições que este trabalho trouxe para a formação do autor como professor/pesquisador de diferentes maneiras. Primeiramente, foi possível vivenciar na pele o esforço para que uma pesquisa com tecnologias digitais possa ser realizada no Brasil, mais especificamente no Rio Grande do Sul, com mais de trinta escolas sendo contatadas no total, com algumas sendo fora da região metropolitana de Porto Alegre, o que resultou numa diversidade de destinos incertos que esta pesquisa poderia ter tomado até que se encontraram as condições para realizá-la da maneira que foi apresentada neste trabalho. Vemos também que a própria inserção do professor/pesquisador no contexto de uma pesquisa acadêmica, a qual exige um rigor acadêmico em um nível que até então não tinha sido encontrado pelo autor, serviu como uma experiência importante. Temos também formados vínculos no processo de realização deste trabalho, vínculos que consigo trouxeram novas visões de mundo, de tecnologias, de sensibilidades, dentre muitas outras que até o início desta pesquisa eram compreendidos de maneiras completamente diferentes. Em suma, o professor/pesquisador teve a oportunidade de ter contado com uma multitude de faces que a pesquisa pode ter, uma que se mostra desafiante, uma que se mostra como oportunidade e outra que se revela como mudança e crescimento.

Dado o que foi debatido neste trabalho, entendemos que o campo de pesquisa que relaciona percepção a jogos digitais, em especial, o de geometrias não-euclidianas podem ainda ser trabalhados em termos de adaptação/criação de novas atividades com o objetivo de apresentação de propostas pedagógicas no ensino de geometrias não-euclidianas no ensino superior, formação de professores focado na criação de mais atividades-matemáticas-com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica, investigação de percepções de professores com geometria não-euclidiana e seus benefícios na formação de professores, trabalhos pedagógicos que lidem com as discrepâncias entre as pluralidades das geometrias e de expressões de gênero dos seres humanos e pesquisas cujo intuito é a aplicação de atividades semelhantes com-o-jogo-eletrônico-Hyperbolica para a educação básica, como o ensino médio e ensino fundamental.

Concluímos, então, reconhecendo a vastidão em geral que os campos de educação matemática com jogos digitais e geometria hiperbólica possuem dentro da pesquisa de educação matemática. Este trabalho se propôs a ser um recorte específico dentro de uma linha de pesquisa específica que se manifesta em uma região específica do mundo. Esperamos, então, que este trabalho tenha contribuído para as discussões destas áreas em alguma maneira.

6 Referências Bibliográficas

ABBAGNANO, N. História da Filosofia. Lisboa: Presença, 1970.

BICUDO, M. A. V. A perplexidade: ser-com-o-computador e outras mídias. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Ciberespaço: possibilidades que abre ao mundo da educação. São Paulo: Livraria da Física, 2014. p. 33-62

BICUDO, M. A. V.; ROSA, M. Realidade e Cibermundo: horizontes filosóficos e educacionais antevistos. Canoas: Editora da ULBRA, 2010.

BICUDO, M; KLÜBER, T. E. Experiência Estética na Educação Matemática: um olhar fenomenológico. In: SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; IDEM, Rita de Cássia (org.). Experiências Estéticas em Educação Matemática. Porto Alegre: Fi, 2021. Cap. 1. p. 52-80.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BULLA, F. D. Minerando a matemática com o Minecraft: uma investigação sob o enfoque da cyberformação Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - UFRGS, Porto Alegre, 2020.

EAGLETON, T. A Ideologia da Estética. Rio de Janeiro: Zahar, 1993.

EDUARDO, E. C. **Geometrias Não-Euclidianas e a Geometria da Relatividade**. 2013. 102 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: https://docplayer.com.br/68270636-Geometrias-nao-euclidianas-e-a-geometria-da-relatividade.html. Acesso em: 14 jul. 2022.

EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009. 593 p.

GREENBERG, M. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries**: development and history. 3. ed. Duluth: W. H. Freeman And Company, 1974. 483 p.

HARDY, G. H. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Godfrey_Harold_Hardy&oldid=60980821>. Acesso em: 22 abr. 2021.

POINCARÉ, H. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Henri_Poincar%C3%A9&oldid=63614488>. Acesso em: 18 mai. 2022.

POINCARÉ, H. O valor da Ciência. 4. reimp. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 2011.

HENDERSON, D; TAIMINA, D. Area and Holonomy. In: HENDERSON, D; TAIMINA, D. **Experiencind Geometry**: euclidean and non-euclidean with history. 3. ed. Nova Jersey: Cornell, 2005. Cap. 7. p. 95-110.

HILBERT, D. **The Foundations of Geometry**. 2. ed. Illinois: La Salle, 1950. 92 p.

HOINSKI, D.; POLANSKY, R. Aristotle on Beauty in Mathematics. Dia-noesis: A Journal of Philosophy, [s. l.], n. 2, p. 37–64, 2016. Disponível em: https://www.academia.edu/download/63022524/Polansky_t220200420-67764-epj8c0.pdf. Acesso em: 15 jun. 2021

LEVINSON, J. Philosophical Aesthetics: An Overview. In: The Oxford Handbook of Aesthetics. [S. l.]: Oxford University Press, 2005. Disponível em: https://www.oxfordhandbooks.com/view/10.1093/oxfordhb/9780199279456.001.

0001/oxfordhb-9780199279456-e-1. Acesso em: 18 jun. 2021

McLUHAN, M. Understanding Media: the extensions of man. Introduction by Lewis H. Lapham. Cambridge: MIT Press, 199

MERLEAU-PONTY, M. Fenomenologia da Percepção. Tradução de Carlos Alberto Ribeiro de Moura. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006. 662 p.

___. O primado da percepção e suas consequências filosóficas. Tradução de Constança Marcondes Cesar. Campinas: Papirus, 1990.

Michaelis (online): moderno dicionário da língua portuguesa. São Paulo: Companhia Melhoramentos, 2022. Disponível em Acesso em: 09/10/22

PEREIRA, H. S. **Poliedros Platônicos**. 2011. 42 f. Monografia (Doutorado) - Curso de Matemática Para Professores do Ensino Básico, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

PINHEIRO, R. Professores/Professoras que Ensinam Matemática Conectados/Conectadas à Realidade Virtual: como se mostra a cyberfomação?. 2020. 147 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/215494/001119986.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 14 jul. 2022

POINCARÉ, H. O valor da Ciência. 4. reimp. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 2011.

ROSA, M. Tessituras Teórico-Metodológicas em uma Perspectiva Investigativa na Educação Matemática: : da construção da concepção de cyberformação com professores de matemática a futuros horizontes. In: OLIVEIRA, Andréia Maria Pereira de; ORTIGÃO, Maria Isabel Ramalho (org.). **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática**. Brasília: Sbem, 2018. Cap. 12. p. 255-281.

ROSA, M. "Experiências Estéticas em Educação Matemática que “belo” livro!!!" Prefácio. In: SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; IDEM, Rita de Cássia (org.). Experiências Estéticas em Educação Matemática. Porto Alegre: Fi, 2021. p. 11-24.

ROSA, M. A Construção de Identidades online por meio do Role Playing Game: relações com o ensino e aprendizagem de matemática em um curso à distância. 2008. 263 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008. Disponível em: http://www1.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/rosa%20m%20doutadodo.pdf. Acesso em: 14 jul. 2022.

ROSA, M. Cyberformação com professories de matemática: a compreensão da héxis política à pedagogia queer. In. ESQUINCALHA, A. C. Estudos de Gênero e Sexualidades em Educação Matemática. Brasília: SBEM, 2022.

____. Mathematics Education in/with Cyberspace and Digital Technologies: What Has Been Scientifically Produced About It? In: BICUDO M. A. V. (eds) Constitution and Production of Mathematics in the Cyberspace. Springer, 2020, p. 3-15. Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42242-4_1

SEIDEL, D. J. **O PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE PERCEBENDO-SE EM CYBERFORMAÇÃO**. 2013. 269 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2013.

SHELLEY, J. The Concept of the Aesthetic. In: The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2020. Disponível em: https://plato.stanford.edu/entries/aesthetic-concept/. Acesso em: 17 jun. 2021.

SILVA, C. A. da; ROSA, M. Corpo, Videogame e Constituição de Conhecimento Matemático: um estudo com xbox kinect. Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Brasília, v. 10, n. 3, p. 45-69, 01 set. 2020. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/235217/001136601.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 14 jul.

SILVA, E. C. **Atividades-matemáticas-com-Fortnite**: : o jogo eletrônico como potencializador da matemática situada. 2021. 96 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Ime, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/231266/001132111.pdf?sequence=1. Acesso em: 08 out. 2022.

SILVA, R; IDEM, R. C. Experiências Estéticas em Educação Matemática. In: SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; IDEM, Rita de Cássia (org.). Experiências Estéticas em Educação Matemática. Porto Alegre: Fi, 2021. p. 25-51.

HENRI POINCARÉ. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Henri_Poincar%C3%A9&oldid=63614488>. Acesso em: 18 mai. 2022.

APÊNDICE

Atividade 1

O mundo do jogo em que você se encontra é um pouco diferente do nosso. Para que possamos compreendê-lo melhor vamos inicialmente tentar identificar e compreendê-lo. Portanto, explore o jogo, visite as áreas que lhe interessar e tente observar bem como é viajar e se deslocar por esse mundo.

a) Você acha que o jogo possui ambientes(celeiros, prédios, árvores) que são projetados de maneira diferente da nossa realidade em que você vive?

b) Desloque-se pelo mundo do jogo e tente descrever informalmente como você vê o funcionamento deste mundo e seus ambientes.

c) Com o botão direito do mouse, acesse a função de mapa do jogo. Movimente-se e diga: qual sua percepção do mundo do jogo com o uso do mapa? Você sente que ele o ajuda? Justifique.

d) Quanto aos ambientes do mundo do jogo que você descreveu no item b, eles se comportam da mesma maneira quando olhamos o mundo pelo mapa? Justifique.

e) Como você relacionaria as suas percepções (mundo do jogo e mapa) com a matemática? Você diria que elas se manifestam de acordo com a matemática que você conhece? Justifique.

Atividade 2

Agora que você explorou o mundo do jogo, vamos tentar entendê-lo a partir de alguns conceitos que conhecemos do nosso. Com essa mentalidade de comparação, responda os itens abaixo.

a) Encontre e descreva a localização de retas grandes que você conseguir ver no chão ou em caminhos dentro do jogo. Explique porquê a reta que você escolheu realmente é uma reta.

b) Utilize o mapa para descrever o que acontece quando você olha para estas mesmas retas do item a de lugares diferentes?

c) Ainda utilizando o mapa, descreva as semelhanças e diferenças entre as visualizações de lugares diferentes da reta que você escolheu, se houver, e como elas ocorrem no mundo do jogo. Você acha que as retas no jogo continuam sendo as mesmas retas que você conhece de outras aulas de matemática? Justifique.

d) Fora do mapa, estas semelhanças e diferenças que você descreveu no item c ainda são as mesmas? Explique.

e) Como essas semelhanças e diferenças mudam do mapa para a visão em primeira pessoa no jogo? Você percebeu outras semelhanças e diferenças novas apenas com a primeira pessoa do jogo? Se sim, descreva-as.

Atividade 3

a) Dentro do jogo busque um lugar onde se possa ver três ou mais retas nas proximidades e descreva este lugar e descreva as retas que você encontrou.

b) Estas retas são finitas, isto é, possuem um ponto de início e um ponto de fim? Caso sejam, imagine e tente descrever, com suas palavras, como elas seriam caso fossem infinitas.

c) Como as retas que você escolheu no jogo se posicionam relacionadas entre si? (Explore diferentes espaços). Se desejar, utilize o apoio do mapa e descreva utilizando conceitos como ângulos, intersecção, paralelismo, perpendicularismo…

d) Considerando retas paralelas como retas que não possuem nenhum ponto em comum, busque encontrar e descrever pares de retas paralelas.(A partir deste item pense nas retas como as retas infinitas identificadas e imaginadas no item b)

e) Escolha uma reta na região em que você se encontra e descreva-a. Busque então dizer quantas são as retas paralelas a ela em suas proximidades.

f) Comparando as retas paralelas que você encontrou com as que você conhece do nosso mundo, você vê alguma diferença significativa entre elas? Justifique. Você acha que essas diferenças significam alguma coisa para o mundo do jogo? Justifique.

Atividade 4

Na outra aula, observamos como as retas se comportam no mundo deste jogo. Hoje buscaremos olhar para algumas formas que estão presentes nele e tentar entendê-las um pouco melhor.

a) Abra o mapa, procure e vá para a cidade. Nela, à direita do prédio principal se encontra o “Infinity Café”(café infinito), tente entrar nele. Dentro dele tente descrever e listar abaixo algumas formas geométricas que você vê lá e que reconhece de outras aulas de matemática.

.

b) No chão e no teto do café existem formas geométricas de quatro lados, verifique de alguma maneira se eles são quadrados do modo como os conhecemos usualmente ou se são apenas quadriláteros. Descreva o processo que você fez para que esta verificação acontecesse e escreva sua conclusão.

.

c) No centro do café existe um bar, neste lugar está mais uma forma de quatro lados, o balcão, classifique seus ângulos em agudo, reto ou obtuso, da maneira que você faz na aula de matemática.

d) Baseando-se na sua resposta para a última pergunta, você diria que a soma dos ângulos desta forma de quatro lados é maior, menor ou igual à 360º?

e) Pensando no item d, caso tivéssemos um triângulo neste café, ele teria mais, menos ou exatamente 180º?

Atividade 5

a) Ainda no café, observe as paredes deste lugar pela câmera de primeira pessoa do avatar e pelo mapa do jogo, então descreva com suas palavras algo que chama sua atenção nelas.

b) Vá para uma das paredes do café e se direcione para o ponto em que ela aparenta se encontrar com outra parede. Descreva o que acontece com os objetos na câmera em primeira pessoa e no mapa quanto mais próximos estão deste ponto de encontro.

c) De que forma, você relacionaria este espaço, entre as duas paredes, que forma um canto, com um ângulo? Justifique.

d) Caso quisessemos medir esta forma na parede em graus, quantos graus ele tem? Este valor que você encontrou se mantém quando olha para este canto no mapa? Justifique.

e) Baseado no seu resultado da sua última questão, na geometria que você conhece ou na sua vida, é possível obtermos uma figura geométrica com este ângulo? Explique.

Atividade 6

Hoje vamos explorar um pouco sobre localizações e movimento neste mundo. Escolha um ponto fixo de partida reconhecível no mapa e realize os itens a seguir. (Lembre-se de buscar sempre andar a mesma quantidade de tempo para todas as direções. Caso necessário, utilize o cronômetro do seu celular.)

a) Descreva o ponto de partida que escolheu.

b) Neste ponto de partida, siga reto, depois dobre para a direita, caminhe a mesma quantidade de tempo, dobre para a direita novamente, caminhe mais uma vez e depois para a direita para finalizar com mais uma caminhada, com todos os movimentos sendo feitos pela mesma quantidade de tempo. Confira se você se movimentou corretamente. O ponto final do seu trajeto é o mesmo que o inicial? Justifique sua resposta.

c) Caso fizéssemos este trajeto no nosso mundo, o ponto final e o inicial deveriam ser iguais? Justifique sua resposta.

d) Ao retornar ao ponto de partida, siga reto, depois dobre para a esquerda, caminhe a mesma quantidade de tempo, dobre para a esquerda novamente, caminhe mais uma vez e depois dobre para a esquerda para finalizar com mais uma caminhada, com todos os movimentos sendo feitos pela mesma quantidade de tempo. Confira se você se movimentou corretamente. Os lugares em que você terminou o primeiro e o segundo trajeto são o mesmo lugar ou são pontos diferentes neste mundo? Justifique sua resposta.

Atividade 7

Procure um espaço bem aberto no jogo para realizar os próximos itens.

a) Saia de um ponto de partida reconhecível, ande como quiser pelo mapa do jogo e retorne a este ponto. Você está olhando para os mesmos objetos que estavam na sua frente antes do trajeto? Justifique sua resposta. O que mais lhe chamou a atenção?

b) Tente andar em volta do mesmo lugar usando apenas as teclas “W”, “A”, “S”, “D” e descreva o que acontece com os objetos observados pelo seu avatar.

Vá para a parte do mapa com uma praia e procure um baú do tesouro, então tente encontrar alguma maneira de colocá-lo no buraco designado a ele e descreva o modo como fez.

ANEXOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ___________________________________, da turma _____, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada PERCEPÇÕES EM UM MICROMUNDO DIGITAL HIPERBÓLICO: COMO SE DÁ A CONSTITUIÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO?, desenvolvida pela pesquisadora André Briance Mota. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Maurício Rosa, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (51) 9 9342-2702 ou e-mail mauriciomatematica@gmail.com.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Investigar como a matemática se mostra quando discutimos geometrias não-euclidianas por meio do jogo eletrônico Hyperbolica.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de caderno de campo escrito e gravação das telas de computador durante a duração dos encontros, bem como a sua produção, por meio de atividades, poderá ser analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às avaliações analisadas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc., sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos estudantes ao participarem do desenvolvimento das atividades e na gravação de suas telas. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes para que se possa compreender melhor como a matemática das geometrias não-euclidianas se constitui com o jogo digital Hyperbolica, contribuindo com as pesquisas em Educação Matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a pesquisadora responsável no endereço Rua: Germano Petersen Jr., 501, 302 –

Auxiliadora, Porto Alegre/RS – CEP: 90540-140/telefone (51) 9 89292273/e-mail andrebriance@gmail.com.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do pesquisador:

Assinatura do Orientador da pesquisa: