Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ações Globais e Ações Parciais de I.P. Loops

Tese de Doutorado

FÉLIX AFONSO DE AFONSO

Porto Alegre, 19 de Dezembro de 2022

Tese submetida por Félix Afonso de Afonso*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Wagner de Oliveira Cortes

Professora Coorientadora:
Profa. Dra. Thaísa Raupp Tamusiunas

Banca examinadora:
Prof. Dr. Wagner de Oliveira Cortes (UFRGS)
Profa. Dra. Thaísa Raupp Tamusiunas (UFRGS)
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (UFRGS)
Prof. Dr. Laerte Bemm (UEM)
Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior (UnB)

---

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) no período de 08/2018 à 01/2020. Atualmente professor de matemática do IFFar - Campus Frederico Westphalen.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, marido, mãe, irmão e amigos por todo o apoio que me foi dado durante esse período. Agradeço ao meu orientador, professor Wagner Cortes pela escolha da temática, direções e apontamentos, sempre muito pertinentes. Agradeço a minha coorientadora, professora Thaísa Tamusiunas pelos direcionamentos, sugestões e apontamentos sempre me ajudando a sair de becos aparentemente sem saída. Ambos são excelentes profissionais que tive o prazer de trabalhar ao longo desses quatro anos conturbados para todos. Agradeço também aos meus colegas de doutorado e do PPGMat em especial ao Leonardo que sempre esteve disponível em me ajudar e pensar comigo sobre algumas dúvidas aleatórias que foram surgindo. Agradeço aos pesquisadores e ao S.U.S., pela criação, produção e distribuição da vacina contra o COVID-19 de forma gratuita que nos permitiu superar a pandemia. Agradeço a CAPES/CNPQ pelo fomento nos primeiros semestres do doutoramento, sem esse recurso não teria sido possível dar os primeiros passos. Agradeço também ao Instituto Federal Farroupilha, Campus Frederico Westphalen pelo espaço para dedicação a esse trabalho. Por fim, agradeço aos membros da banca que aceitaram ler o meu trabalho.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo introduzir uma teoria de ações parciais para contextos não associativos e apresentar alguns resultados sobre essa teoria. Para isso, apresentamos os conceitos de ações e ações parciais de um I.P. loop e estendemos alguns resultados clássicos da teoria de ações de grupos para esse novo contexto.

Abstract

The purpose of this work is to introduce the partial action theory for non-associative contexts and to show some results about this theory. In this case, we show some concepts about actions and partial actions of an I.P. loop and we extend some classic results of the group actions theory to this new context.

Índice

Introdução

Em [21], o autor traz um apanhado geral sobre o desenvolvimento da teoria dos loops, trazemos aqui uma síntese desse. Essa teoria começa a se desenvolver em meados de 1920, devido aos avanços em duas diferentes áreas, as denominadas geometrias não Euclidianas e a relatividade especial de Einstein, que datam do fim do século XIX. Um dos primeiros modelos algébricos não associativos foram os números de Cayley, construídos por Arthur Cayley no fim do século XIX. Essa construção foi generalizada por um processo conhecido hoje como processo de Cayley-Dickson. No fim da década de 20, um artigo publicado por Suschkewitsch fala de uma classe de estruturas não associativas que satisfazem um conhecido teorema dos grupos, o Teorema de Lagrange. Suschkewitsch observou que o teorema de Lagrange não fazia um uso exaustivo da associatividade em sua prova e talvez fosse possível generalizar essa resultado para uma estrutura que ele denominou por “grupos gerais”. Nas décadas seguintes, motivado pela geometria Web, Gerrit Bol desenvolveu a teoria na direção de combinar geometria, álgebra e topologia. Na década de 40, dois artigos de extrema importância foram publicados para o desenvolvimento da teoria dos loops, *Zur Struktur von Alternativkoerpern* de Ruth Moufang e *Geweb und Gruppen* por Gerrit Bol. Moufang, em seu artigo, definiu uma estrutura, que ela chamou de Quasigrupo Q^*, que satisfazia uma série de quatro axiomas, além de provar que essa estrutura era diassociativa (qualquer subquasigrupo gerado por dois elementos é associativo). Ademais, ela provou que esta estrutura também satisfaz uma espécie de "Teorema de Artin" e interpretou geometricamente esse teorema usando planos projetivos. Nas décadas que se seguiram, a teoria continuou se desenvolvendo em diversas direções como topologia e geometria, em geometrias Web e planos projetivos, em combinatória com quadrados latinos, em álgebra com anéis de loop e generalizações de teorias da álgebra associativa.

Muitas décadas depois, nos anos 90, começam a aparecer os estudos relativos a ações parciais de grupos. Em [11], o autor apresenta esses conceitos no contexto de álgebras de operadores, com o objetivo de descrever a estrutura de certas C^*-álgebras em que o círculo unitário S_1 age por automorfismos. Em [9], os autores carregam essa ideia para um contexto puramente algébrico e a partir disso, chamou a atenção de diversos pesquisadores da área. Muitas direções foram tomadas, como trabalhos relacionando ações parciais e semigrupos como em [12], uma teoria de Galois neste contexto desenvolvida pelos autores em [10] e mais recentemente os desenvolvimentos em contextos de álgebras de Hopf. Em [5], o autor traz um apanhado histórico e os principais desenvolvimentos dessa teoria nas últimas décadas e nas diferentes direções que foram tomadas deixando clara a importância dessa teoria.

O presente trabalho tenta reunir esses dois eixos temáticos que vem se desenvolvendo em paralelo no último século e nas últimas décadas. Um motivador para este trabalho foram os trabalhos de Majid e Brzezinski, em [19] e [8] respectivamente, ambos em contextos de álgebras de Hopf. O primeiro abordou a estrutura algébrica da 7-Esfera em termos de Hopf Quasigrupos, apresentando neste trabalho alguns resultados sobre ações utilizando a definição usual de ação. O segundo usa uma alteração da condição de associatividade de uma ação para mostrar uma equivalência entre categorias. Ao nos depararmos com estes trabalhos, nosso primeiro impulso foi tentar desenvolver uma teoria de de ações parciais para esses contextos não associativos de álgebras de Hopf (Hopf Quasigrupos), porém ao iniciarmos esse trabalho, percebemos que haviam lacunas na base dessa ideia, uma vez que não haviam trabalhos desenvolvidos sobre ações parciais de quasigrupos sobre conjuntos e nem mesmo ações de quasigrupos. Então, começamos a analisar melhores contextos para definir esses objetos e percebemos que os I.P. loops forneciam algumas condições importantes para que fosse possível trabalhar nesse sentido. Assim, começamos a desenvolver um trabalho de base e tentar entender como essa teoria das ações poderia ser transladada para um contexto não associativo, de forma que se introduzíssemos a associatividade teríamos a teoria das ações de grupo.

Este trabalho é o resultado desse processo, que ainda se encontra em desenvolvimento, pois muitas portas foram se abrindo nessa jornada e muitas perguntas foram surgindo. Para muitas dessas perguntas as respostas foram positivas, para outras foram negativas e ainda existem muitas para as quais ainda não foi possível fazer um estudo mais aprofundado. Para apresentar essas ideias e conceitos iniciais dividimos esse trabalho em cinco capítulos. O primeiro, que trata de alguns conceitos preliminares da teoria dos loops e da teoria das ações parciais de grupos. No segundo capítulo, introduzimos os conceitos relativos a ações fracas e fortes de I.P. loop, trazendo alguns exemplos e fazendo algumas discussões sobre o skew anel nos casos fracos e fortes. No terceiro capítulo, passamos para as ações parciais de I.P. loop, também no caso fraco e forte, onde apresentamos exemplos e discutimos a alternatividade do skew anel parcial. No quarto capítulo, apresentamos alguns resultados que conseguimos desenvolver sobre essa teoria. Apresentamos as questões relativas a ação envolvente no caso fraco e forte e também apresentamos uma relação entre as ações parciais fortes de I.P. loop e magmas com inverso. No último capítulo apresentamos nossas considerações finais sobre este trabalho, deixando algumas questões em aberto para trabalhos futuros, questões essas que ainda estamos trabalhando em um melhor entendimento e que apresentam algumas direções que podemos tomar para dar continuidade a este trabalho.

Convenções e Notações

Neste trabalho, sempre que nos referirmos simplesmente a um anel, estamos nos referindo a um anel associativo com unidade. Caso contrário será especificado, por exemplo, um anel não associativo ou um anel comutativo. A letra $\mathbb{K}$ será reservada para denotar um corpo e $Nuc(L)$ sempre irá denotar nucleus de um loop L. Reservaremos as letras β e α para ação global e ação parcial, respectivamente.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados, presentes na bibliografia, que são essenciais para a compreensão deste trabalho. Iniciamos o capítulo com alguns resultados sobre a teoria de loops, tentando sempre usar como referencia a teoria de grupos, que nos é mais familiar e permeia a ideia central desse trabalho, uma transposição da teoria de ações de grupos para um contexto não associativo. Em seguida, retomaremos os conceitos de ações (parciais) de grupo e sua teoria inicial, juntamente com alguns resultados da álgebra de multiplicadores, que será essencial para entender questões envolvendo o skew anel parcial de loop. Dando continuidade nesse estudo de ações, trazemos os conceitos de ação induzida e ação envolvente para o caso de grupos, pois esses conceitos serão adaptados nos capítulos três e quatro desse trabalho para o contexto dos loops. Vale destacar que muitos dos exemplos da teoria de loops apresentados nesse capítulo foram calculados com o auxílio do sotware [15].

1.1 Loops

Nesta seção, trazemos um apanhado das principais definições e resultados, da teoria de loops, que serão necessários para este trabalho. Utilizamos como principais referências [22], [17], [24], [2], [3] e [23].

Definição 1.1. Sejam M um conjunto não vazio e $\cdot : M \times M \to M$ uma operação binária. Dizemos que o par $(M, \cdot)$ é um magma.

Neste trabalho, escreveremos apenas ab ao invés de $a.b$ sempre que não for necessário destacar a operação envolvida. Também escreveremos usualmente M em lugar de $(M, .)$.

Definição 1.2. Seja $(M, \cdot)$ um magma. Dizemos que o par $(M, \cdot)$ é um magma com inverso se para cada $a \in M$ existir um único $a^* \in M$ tal que os seguintes axiomas são satisfeitos:
(i) $a(a^*a) = (aa^*)a = a$
(ii) $a^*(aa^*) = (a^*a)a^* = a^*$

Quando o elemento a^* existe, mas não é único, chamamos M de magma regular.

Definição 1.3. Seja $(G, \cdot)$ um magma. Dizemos que o par $(G, \cdot)$ é um quasigrupo se para quaisquer $a, b, c \in G$ a equação $a.b = c$ possui solução única, para quaisquer dois elementos fixados na equação.

Muitas vezes é importante definir um quasigrupo em termos de multiplicação à esquerda e à direita. Assim, sejam $L(a) : G \to G$ e $R(a) : G \to G$ dadas respectivamente por $L(a)(x) = ax$ e $R(a)(x) = xa$, para algum $a \in G$. Então temos o seguinte teorema.

Teorema 1.4. *Seja $(G, \cdot)$ um magma. Então as seguintes proposições são equivalentes:*

(i) $(G, \cdot)$ *é um quasigrupo;*

(ii) $L(a)$ *e* $R(a)$ *são bijeções, para todo* $a \in G$*;*

(iii) A lei do cancelamento à direita e à esquerda são satisfeitas;

(iv) No caso de G *ser finito, cada elemento de* G *aparece uma única vez em cada linha e em cada coluna da tábua de Cayley.*

Demonstração. Notemos que em $(i) \Rightarrow (ii)$ temos que $L(a)$ e $R(a)$ são sobrejetivas pelo fato de existir solução para as equações $ax = b$ e $xa = b$. A injetividade de ambas decorre do fato desta solução ser única. Para $(ii) \Rightarrow (iii)$ temos que como $L(a)$ é uma bijeção, existe $L(a)^{-1}$ tal que $L(a)L(a)^{-1} = L(a)^{-1}L(a) = Id(a)$ e segue que a equação $ab = ac$ pode ser reescrita como $L(a)(b) = L(a)(c)$. Assim, aplicando a inversa de $L(a)$ em ambos os lados da igualdade, segue que $Id(a)(b) = Id(a)(c)$, isto é, $b = c$. Analogamente, podemos mostrar que $ba = ca$ implica $b = c$ utilizando $R(a)$ ao invés de $L(a)$. Para $(iii) \Rightarrow (iv)$, suponhamos que um elemento a apareça mais de uma vez na mesma linha de um elemento x da tábua de Cayley de $(G, \cdot)$, digamos nas colunas y e z, com $y \neq z$. Isso significa que $xy = a$ e $xz = a$, isto é, $xy = xz$ e pela lei do cancelamento temos que $y = z$, o que contradiz a hipótese. O raciocínio para a não repetição de um elemento na mesma coluna é análogo. Por fim, $(iv) \Rightarrow (i)$ é imediato. □

Através desse teorema, é possível entender o conceito de quasigrupo de diversas formas distintas. Nos resta definirmos nosso principal objeto de trabalho, os loops.

Definição 1.5. Seja $(L, \cdot)$ um quasigrupo. Dizemos que $(L, \cdot)$ é um loop se existir um elemento $e \in L$ (denominado elemento neutro) tal que $ea = ae = a$, para quaisquer $a \in L$. Usualmente escreveremos apenas L, ao invés de $(L, \cdot)$ e também denotaremos o elemento neutro de L por 1_L, conforme for mais conveniente.

Exemplo 1.6. Seja $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\cdot$ dado por

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	4	5	3
3	3	5	1	2	4
4	4	3	5	1	2
5	5	4	3	2	1

Notemos que 1 é o elemento neutro e cada elemento se repete uma única vez em cada linha e coluna, logo representa um loop. Além disso, esse loop não é associativo pois $3.(3.4) = 3.2 = 5$ e $(3.3).4 = 1.4 = 4$.

Uma subclasse, dentro da teoria dos loops, com especial importância para o nosso trabalho é a classe dos loops com a propriedade do inverso, que denotaremos neste trabalho por I.P. loops, definidos como segue.

Definição 1.7. Seja $(L, \cdot)$ um loop. Dizemos que $(L, \cdot)$ é um loop com a propriedade do inverso, ou um I.P. loop, se para todo $a \in L$, existe $a^{-1} \in L$ tal que $a^{-1}(ax) = x$ e $(xa)a^{-1} = x$, para quaisquer $x \in L$.

É importante observar que, todo loop, por possuir elemento neutro e, tem elemento inverso à esquerda, isto é, para qualquer $a \in L$, existe um $a^{\lambda} \in L$ tal que $a^{\lambda}a = e$ e elemento inverso à direita, isto é, para qualquer $a \in L$, existe um $a^{\rho} \in L$ tal que $aa^{\rho} = e$. Porém, isso não garante que ele seja um I.P. loop. Notemos que no Exemplo 1.6 temos que $x.x = 1$, para qualquer $x \in L$, ou seja, $a^{\rho} = a^{\mu} = a^{\lambda}$. Porém, para $a = 3$ temos que $3.(3.4) = 3.2 = 5$ e a equação $a^{-1}(ax) = a$ não é satisfeita, se tomarmos $a = 4$, temos que $(3.4).4 = 2.4 = 5$, e a equação $(xa)a^{-1} = a$ não é satisfeita. Assim, este é um loop que não é I.P. loop. No caso dos I.P. loops, todos elementos são inversíveis e ainda o inverso é bilateral, isto é, $a^{\rho} = a^{\lambda} = a^{-1}$.

Exemplo 1.8. Sejam $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $\cdot$ dado por

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	3	1	6	7	5	4
3	3	1	2	7	6	4	5
4	4	7	6	5	1	2	3
5	5	6	7	1	4	3	2
6	6	4	5	3	2	7	1
7	7	5	4	2	3	1	6

Este loop tem elemento neutro 1 e é um I.P. loop.

Agora, vamos definir mais algumas classes de loops que serão utilizadas nas construções desse trabalho.

Definição 1.9. Seja $(L, \cdot)$ um I.P. loop. Dizemos que L é um loop alternativo se satisfaz as seguintes identidades, chamadas, respectivamente, de identidade alternativa à esquerda e identidade alternativa à direita, para quaisquer $x, y \in L$.

(i) $(x.x).y = x.(x.y)$;

(ii) $(x.y).y = x.(y.y)$.

Caso o loop satisfaça a identidade (ii) ele é dito um loop alternativo à esquerda (ou à direita, caso satisfaça a identidade (i)).

Definição 1.10. Seja $(L, \cdot)$ um I.P. loop. Dizemos que L é um loop de Moufang se satisfaz qualquer uma das seguintes identidades, para quaisquer $x, y, z \in L$.

(i) $(xy)(zx) = x((yz)x)$;

(ii) $(x(zx))y = x(z(xy))$;

(iii) $((xz)x)y = x(z(xy))$;

(iv) $((yx)z)x = y(x(zx))$.

Observação 1.11. É importante destacar que todo loop de Moufang é alternativo, pois a identidade alternativa à direita decorre de (iii) se tomarmos $z = 1$ e a identidade alternativa à esquerda decorre da identidade alternativa à direita se tomarmos $x = x^{-1}$ e $y = y^{-1}$. Também vale destacar que no caso de loops qualquer uma das identidades implica as outras três, a demonstração para isso pode ser encontrada em [22].

Definição 1.12. Seja $(L, \cdot)$ um I.P. loop. Dizemos que $(L, \cdot)$ é um grupo se satisfaz $(a.b).c = a.(b.c)$, para quaisquer $a, b, c \in L$.

Agora é possível entender a estreita relação entre I.P. loops e grupos, o que motiva em grande parte o desenvolvimento deste trabalho. Assim, como na teoria de grupos, vamos definir algumas subestruturas que serão de relevância para o escopo deste trabalho.

Definição 1.13. Sejam $(L, \cdot)$ um loop e $\emptyset \neq H \subseteq L$. Dizemos que $(H, \cdot)$ é um subloop de L se ele próprio é um loop. Usualmente, escreveremos $H \leq L$ ao invés de H é um subloop de L.

Definição 1.14. Sejam $(L, \cdot)$ um loop, $\emptyset \neq S \subseteq L$, então o subloop gerado por S, denotado por $\langle S \rangle$, é a interseção de todos os subloops de L que contém S. Se ainda $\langle S \rangle = L$, dizemos que L é gerado por S.

Algumas definições da teoria de loop são associações e generalizações feitas da teoria de grupos, algumas são análogas e outras diferem em alguns axiomas devido a não necessidade da associatividade.

Para definir o conceito de subloop normal, utilizaremos o conceito de decomposição em classes, que é análoga a da teoria de grupos. Dados $a \in L$ e $H \leq L$, então denotamos por $aH = \{a.h : h \in H\}$ a classe à direita módulo H, analogamente definimos uma classe à esquerda módulo H. Uma observação interessante, antes de avançarmos, é que em teoria de loops nem sempre é válido o Teorema de Lagrange. No caso do Exemplo 1.6, $\{1, 2\}$ é um subloop, de ordem 2, em um loop de ordem 5.

Definição 1.15. Sejam L um I.P. loop, $H \leq L$. Então L ter uma decomposição em classes (à direita) módulo H significa que o conjunto P de todas as classes (à direita) módulo H formam uma partição de L.

Definição 1.16. Sejam L um loop, $H \leq L$ e L admita uma decomposição em classes via H. Dizemos que H é um subloop normal de L se para quaisquer $x, y \in L$ temos

(i) $xH = Hx$;

(ii) $(xH)y = x(Hy)$;

(iii) $x(yH) = (xy)H$.

Usualmente escrevemos $H \trianglelefteq L$ ao invés de H é um subloop normal de L.

Exemplo 1.17. Sejam $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $\cdot$ dado por

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	1	5	7	4	9	6	8
3	3	1	2	6	4	8	5	9	7
4	4	5	7	8	6	9	2	1	3
5	5	6	4	7	9	3	8	2	1
6	6	9	5	2	8	7	1	3	4
7	7	4	8	9	3	1	6	5	2
8	8	7	9	1	2	5	3	4	6
9	9	8	6	3	1	2	4	7	5

Considere $H = \{1, 6, 7\} \subseteq L$. Então, é possível observar que H é um subloop normal de L e também temos que $2H = 4H = 9H$ e $3H = 5H = 8H$. Assim sendo, $L/H = \{1H, 2H, 3H\}$ tem uma estrutura de grupo, como mostra a seguinte tábua de Cayley.

·	1H	2H	3H
1H	1H	2H	3H
2H	2H	3H	1H
3H	3H	1H	2H

Esta situação, em que o quociente é um grupo, ocorreu pois H é o que chamamos de associador de um loop. Dois conceitos novos na teoria de loops que não temos na teoria de grupos, visto que a operação de um grupo é associativa, são os de nucleus e de associador, que apresentaremos a seguir.

Definição 1.18. Sejam L um loop e $a \in L$. Dizemos que a é nuclear à esquerda se $L_{a.x} = L_a L_x$, para qualquer $x \in L$. Analogamente, dizemos que $a \in L$ é nuclear à direita se $R_{x.a} = R_a R_x$, para qualquer $x \in L$. Por fim, dizemos que $a \in L$ é nuclear ao centro se $L_{x.a} = L_x L_a$, para qualquer $x \in L$.

Definição 1.19. Seja L um loop. Definimos o nucleus à esquerda de L, denotado por $Nuc_\lambda(L)$, o nucleus à direita de L, denotado por $Nuc_\rho(L)$ e o nucleus ao centro de L, denotado por $Nuc_\mu(L)$, como segue:

a) $Nuc_\lambda(L) = \{a \in L : a.(x.y) = (a.x).y,\ \ x, y \in L\}$;

b) $Nuc_\mu(L) = \{a \in L : (x.a).y = x.(a.y),\ \ x, y \in L\}$;

c) $Nuc_\rho(L) = \{a \in L : (x.y).a = x.(y.a),\ \ x, y \in L\}$.

Também definimos o nucleus de L, denotado por $Nuc(L)$, como sendo $Nuc(L) = Nuc_\lambda \cap Nuc_\rho \cap Nuc_\mu$.

Utilizando as funções L e R, podemos definir o nucleus à esquerda de L como o conjunto de todos os elementos nucleares à esquerda em L. Analogamente, o nucleus à direita de L como o conjunto de todos os elementos nucleares à direita de L e por fim o nucleus ao centro de L como o conjunto de todos os elementos nucleares ao centro de L.

Uma importante observação sobre os nucleus de um loop é que eles são subloops ([22], Teorema I.3.5), e consequentemente o nucleus é um subloop, porém nem sempre são subloops normais, conforme o seguinte exemplo.

Exemplo 1.20. Sejam $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e $\cdot$ dada por

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	1	5	6	3	4	9	10	7	8	12	11
3	3	4	6	5	2	1	11	12	8	7	10	9
4	4	3	2	1	6	5	8	7	11	12	9	10
5	5	6	4	3	1	2	12	11	10	9	8	7
6	6	5	1	2	4	3	10	9	12	11	7	8
7	7	8	10	9	12	11	1	2	4	3	6	5
8	8	10	9	11	7	12	5	1	3	2	4	6
9	9	11	12	7	10	8	4	6	1	5	2	3
10	10	9	11	12	8	7	6	5	2	1	3	4
11	11	12	7	8	9	10	3	4	5	6	1	2
12	12	7	8	10	11	9	2	3	6	4	5	1

Em L temos que $Nuc_\lambda(L) = Nuc_\mu(L) = \{1, 3, 6\}$ são subloops normais de L, entretanto $Nuc_\rho(L) = \{1, 4, 10, 12\}$ não é um subloop normal de L.

No caso de L ser um I.P. loop, temos que $Nuc_\lambda(L) = Nuc_\rho(L) = Nuc_\mu(L) = Nuc(L)$, o que decorre da bilateralidade do inverso e dos nucleus serem subloops.

Além disso, se L for um loop de Moufang o nucleus é um subloop normal.

Exemplo 1.21. Sejam $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ e $\cdot$ dada por

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	2	1	5	6	3	4	8	7	10	9	16	14	15	12	13	11
3	3	8	1	7	6	5	4	2	11	13	9	15	10	16	12	14
4	4	6	7	1	8	2	3	5	12	14	15	9	16	10	11	13
5	5	7	2	8	4	3	6	1	13	11	14	16	12	15	10	9
6	6	4	8	2	7	1	5	3	14	12	13	10	11	9	16	15
7	7	5	4	3	2	8	1	6	15	16	12	11	14	13	9	10
8	8	3	6	5	1	7	2	4	16	15	10	13	9	11	14	12
9	9	10	11	12	16	14	15	13	1	2	3	4	8	6	7	5
10	10	9	13	14	15	12	16	11	2	1	8	6	3	4	5	7
11	11	16	9	15	10	13	12	14	3	5	1	7	6	8	4	2
12	12	14	15	9	13	10	11	16	4	6	7	1	5	2	3	8
13	13	15	10	16	9	11	14	12	5	3	6	8	1	7	2	4
14	14	12	16	10	11	9	13	15	6	4	5	2	7	1	8	3
15	15	13	12	11	14	16	9	10	7	8	4	3	2	5	1	6
16	16	11	14	13	12	15	10	9	8	7	2	5	4	3	6	1

Este I.P. loop tem elemento neutro 1 e o nucleus é dado por $Nuc(L) = \{1, 4\}$. Além disso, este é um loop de Moufang, indexado por MoufangLoop(16,1) na biblioteca de loops do GAP4.

Proposição 1.22. *Sejam L um I.P. loop, $b \in L$ e $a \in Nuc(L)$, então $ab \in Nuc(L)$ se e somente se $b \in Nuc(L)$.*

Demonstração. Primeiro vamos supor que $ab \in Nuc(L)$, como $a \in Nuc(L)$ e o

$Nuc(L)$ é um subloop de L, então $a^{-1} \in Nuc(L)$. Como L é um I.P. loop então $b = a^{-1}(ab) \in Nuc(L)$ pois $ab \in Nuc(L)$ e $Nuc(L)$ é fechado para a operação. A recíproca é imediata visto que $Nuc(L)$ é um subloop e portanto fechado para a operação. $\square$

Definição 1.23. Sejam L um loop e $A \leq L$. Dizemos que A é o subloop associador de L, se A é o menor subloop normal tal que L/A é um grupo.

No Exemplo 1.17, o subloop normal $H = \{1, 6, 7\}$ é o associador de L. Assim podemos perceber que existe uma diferença entre o nucleus e o associador. Esses conceitos não são importados da teoria de grupos, porém um outro conceito interessante na teoria de loops que é importado da teoria de grupos é o conceito de centro, que também é um subloop normal.

Definição 1.24. Seja L um loop. O centro de L é o subloop $Z(L) = \{a \in Nuc(L) : L(a) = R(a)\}$, onde $Nuc(L)$ é o nucleus de L.

Em termos de operação, o centro é o conjunto de todos os elementos a do nucleus de um loop L que satisfazem a equação $a.x = x.a$, para quaisquer $x \in L$. Também é possível mostrar que o centro é um subloop normal de L e portanto, é um subgrupo abeliano de L.

Uma importante ferramenta no estudo da teoria de grupos são os homomorfismos de grupos. Em teoria de loops, os homomorfismos de loops não tem um papel tão central, porém apresentam bastante relevância, principalmente para este trabalho.

Definição 1.25. Sejam L e H loops e $f : L \to H$ uma aplicação. Dizemos que f é um homomorfismo de loops se $f(ab) = f(a)f(b)$, para quaisquer $a, b \in L$.

Exemplo 1.26. Sejam L um I.P. loop e A seu subloop associador. Então $\pi : L \to L/A$ dada por $\pi(l) = lA$ é um homomorfismo de loops.

Uma das diferenças centrais entre a teoria dos homomorfismos de grupos para os homomorfismos de loop é que dado um homomorfismo de loops $f : L \to H$, nem sempre, $f(L)$ é um subloop de H, o que sempre acontece no caso de grupos. Construir um exemplo em que isso não é satisfeito é difícil porém existe, ver em [22] página 29. Devido ao primeiro resultado da proposição a seguir, já é possível perceber que essa construção requer loops infinitos, a demonstração do resultado que segue pode ser encontrada em [22] página 29.

Proposição 1.27. *Sejam L, H loops e $f : L \to H$ um homomorfismo de loops. Então:*

1. *Se $f(L)$ é finito, então $f(L)$ é um subloop de H;*
2. *Se $f(L)$ é associativo, então $f(L)$ é um subloop de H.*

Apesar da imagem de um loop, através de um homomorfismo de loops, não se comportar como a imagem de um homomorfismo de grupos, o núcleo de um homomorfismo de loops é um subloop normal de L, assim como em grupos. Em [22], capítulo I, seção 7, é definido subloop normal como sendo o núcleo de um homomorfismo, definindo assim uma relação de equivalência. Como vamos trabalhar principalmente com I.P. loops, o núcleo dos homomorfismos de loops são subloops normais. Felizmente, também temos que o teorema do homomorfismo para grupos é válido para loops, fazendo as devidas adaptações, como segue.

Teorema 1.28. ***(Teorema de Zassenhaus)*** *Sejam L, H loops e $f : L \to H$ um homomorfismo de loops sobrejetor e N qualquer subloop normal de L, então $f(N)$ é um subloop normal de H e ainda $L/N \cong H/f(N)$.*

Demonstração. Esse resultado pode ser encontrado em [22], Teorema I.7.9. $\square$

1.2 Ações (Parciais) de Grupos

Nesta seção, retomaremos algumas definições e resultados sobre ações globais e ações parciais de grupos. Grande parte dos resultados e discussões dessa seção podem ser encontrados com mais detalhes em [18], [9], [1] e [12].

Definição 1.29. Sejam X um conjunto não vazio e G um grupo. Uma ação de G em X é uma aplicação $\beta : G \times X \to X$, dada por $\beta(g,x) = g \cdot x$, para quaisquer $g \in G$ e $x \in X$, tal que:

(i) $e \cdot x = x$, para qualquer $x \in X$, onde e denota o elemento neutro de G;

(ii) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $x \in X$.

É importante destacar que a cada $g \in G$, podemos associar $\beta_g : X \to X$ uma bijeção de X em X e assim podemos entender a ação β como sendo uma coleção de bijeções $\{\beta_g\}_{g \in G}$. No caso do conjunto X ter uma estrutura de anel, adicionamos que cada $\{\beta_g\}_{g \in G}$ seja um automorfismo de anéis ao invés de ser apenas uma bijeção e usualmente dizemos que G age em X via automorfismos.

Definição 1.30. Sejam R um anel, G um grupo e $\beta : G \times R \to R$ uma ação de G em R via automorfismos. Definimos o skew anel de grupos como sendo o conjunto das somas formais finitas $R \rtimes_\beta G = \{\sum_{g \in G} r_g \delta_g : r_g \in R\}$, cuja soma é pontual e o produto é dado por $(a\delta_g)(b\delta_h) = a\beta_g(b)\delta_{gh}$, para quaisquer $a, b \in R$ e $g, h \in G$, estendido por linearidade a todos os elementos do conjunto.

Definição 1.31. Sejam X um conjunto não vazio e G um grupo. Uma ação parcial de G em X é uma coleção de subconjuntos não-vazios $D_g \subseteq X$ e de bijeções $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$, com $g \in G$ tais que

(i) $D_e = X$ e $\alpha_e = Id_X$, onde e denota o elemento neutro de G;

(ii) $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$;

(iii) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, para cada $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$.

No caso do conjunto X ter uma estrutura de anel, pedimos também que as bijeções $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ sejam isomorfismos de anéis e ainda que cada D_g seja um ideal de X, para todo $g \in G$.

Definição 1.32. Sejam R um anel, G um grupo e α uma ação parcial de G em R. Definimos o skew anel parcial de grupos como sendo o conjunto das somas formais finitas $R \rtimes_\alpha G = \{\sum_{g\in G} r_g\delta_g : r_g \in D_g\}$, cuja soma é pontual e o produto é dado por $(a\delta_g)(b\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{gh}$, para quaisquer $a \in D_g$, $b \in D_h$ e $g, h \in G$, e estendido por linearidade a todos os elementos do conjunto.

Um dos problemas do skew anel parcial de grupos é o da associatividade. O problema consiste em determinar sob quais condições o skew anel parcial de grupos é associativo. Em [9], os autores mostram que essa condição está intimamente ligada a cada ideal da álgebra (anel) ser (L, R)-associativo. Alguns dos resultados discutidos em [9], em termos de álgebra de multiplicadores e (L, R)-associatividade, são enunciados aqui como segue.

Sejam A uma $\mathbb{K}$-álgebra e $I \subseteq A$ um ideal de A. Tome um elemento $x \in A$ e consideremos a multiplicação à esquerda e à direita de I por x, isto é, $L_x : I \to I$ e $R_x : I \to I$, dadas respectivamente por $L_x(a) = xa$ e $R_x(a) = ax$, para todo $a \in I$, tais que as seguintes propriedades são satisfeitas para quaisquer $a, b \in I$:

(i) $L_x(ab) = L_x(a)b$;

(ii) $R_x(ab) = aR_x(b)$;

(iii) $R_x(a)b = aL_x(b)$.

Definição 1.33. A álgebra de multiplicadores de uma álgebra não necessariamente unitária I é o conjunto $M(I)$ de todos os pares ordenados (L, R), onde L e R são transformações lineares de I em I que satisfazem as três propriedades anteriores. Para $(L, R), (L', R') \in M(I)$ e $\alpha \in K$ definimos as operações da álgebra $M(I)$ como $\alpha(L, R) = (\alpha L, \alpha R)$, $(L, R) + (L', R') = (L + L', R + R')$ e $(L, R)(L', R') = (L \circ L', R' \circ R)$.

Podemos definir $\phi : I \to M(I)$ por $\phi(x) = (L_x, R_x)$, para qualquer $x \in I$ que é claramente um homomorfismo de álgebras. Também dizemos que a álgebra não necessariamente unitária I é não degenerada se ϕ for injetiva. Além disso, vale que $\phi(I)$ é um ideal de $M(I)$ e ϕ é um isomorfismo se e somente se I for uma álgebra unitária. No caso de I ser uma álgebra não necessariamente unitária temos a seguinte definição.

Definição 1.34. Uma álgebra não necessariamente unitária I é dita ser (L, R)-associativa se dados quaisquer pares de multiplicadores $(L, R), (L', R') \in M(I)$ temos que $R' \circ L = L \circ R'$.

Proposição 1.35. *Uma álgebra não necessariamente unitária I é dita ser (L, R)-associativa quando qualquer uma das seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) I é não degenerada;

(ii) I é idempotente.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [9], Proposição 2.5. □

Proposição 1.36. *Seja A uma álgebra unitária. Então, são equivalentes:*

(i) Todo ideal não nulo de A é não degenerado;

(ii) Todo ideal não nulo de A é ambos idempotente e não degenerado;

(iii) Todo ideal não nulo de A é não degenerado à direita, isto é, $aI \neq \{0\}$, para qualquer $a \in A$ e todo ideal $I \subseteq A$;

(iv) Todo ideal não nulo de A é não degenerado à esquerda, isto é, $Ia \neq \{0\}$, para qualquer $a \in A$ e todo ideal $I \subseteq A$;

(v) A é semiprimo.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [9], Proposição 2.6. $\square$

Assim, em qualquer um desses casos, todo ideal de uma álgebra A é (L, R)-associativo.

Proposição 1.37. *Sejam I, J álgebras, $\pi : I \to J$ um isomorfismo de álgebras e $M(I), M(J)$ suas respectivas álgebras de multiplicadores. Se $(L, R) \in M(I)$, então $(\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1}) \in M(J)$ e ainda $\pi' : M(I) \to M(J)$ definido por $\pi'(L, R) = (\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1})$ é um isomorfismo de álgebras.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [9], Proposição 2.7. $\square$

Capítulo 2

Ações Globais de I.P. Loop

Neste capítulo, vamos introduzir as definições e alguns resultados relativos a ações fraca e forte de I.P. loop. No caso das ações fortes, que foram inspiradas pelo trabalho [19], onde o autor define uma ação de um quasigrupo sobre uma álgebra de Hopf quasigrupo utilizando os axiomas usuais de uma ação, nós utilizamos o mesmo procedimento, o de usar os axiomas da ação de grupos para definir a ação, e encontramos alguns exemplos. Porém, assim como no caso do artigo citado, os exemplos clássicos de ação, o da multiplicação e o da ação adjunta, não são contemplados e portanto, emergiu a necessidade do que definimos como ação fraca de I.P. loop, substituindo o axioma da associatividade da ação por uma condição mais fraca. Em ambos os casos, construímos o skew anel de I.P. loop associado e provamos resultados sobre a alternatividade deste anel, pois a associatividade já não era esperada, e resultados que relacionam nucleus do skew anel e o conjunto $R \rtimes_\beta Nuc(L)$. Assim, separamos este capítulo em duas seções, a primeira, em que falamos sobre as ações fracas de I.P. loop e o skew anel fraco e uma segunda seção, onde falamos sobre as ações forte de I.P. loop e o skew anel forte.

2.1 Ações Fracas de I.P. Loop e Skew Anel Fraco

Nesta seção trabalhamos o conceito de ação fraca de I.P. loop e skew anel fraco. Além disso, trazemos alguns exemplos e provamos alguns resultados relativos a alternatividade do skew anel fraco e sobre o nucleus do mesmo.

Definição 2.1. Sejam L um I.P. loop e X um conjunto não vazio. Dizemos que L age fracamente em X se existe uma família de bijeções $\{\beta_l\}_{l\in L}$ de X em X, onde $\beta_l(x) = l \cdot x$, tais que os seguintes axiomas são satisfeitos.

(i) $e \cdot x = x$, para qualquer $x \in X$, onde e é o elemento neutro de L;

(ii) Se a ou b estão no nucleus de L, então $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$, para qualquer $x \in X$.

Notemos que o primeiro axioma é o mesmo para o caso de ações de grupos, já o segundo vem no sentido de adaptar a definição para que, no caso de L ser um grupo, as definições coincidam. Também nos referimos a família de bijeções $\{\beta_l\}_{l\in L}$ pela função $\beta : L \times X \to X$ e dizemos que β é uma ação fraca de I.P. loop.

Exemplo 2.2. Podemos considerar $X = L$ e a ação fraca de I.P. loop dada pela multiplicação em L. Claramente $ex = x$, para qualquer $x \in L$ e para qualquer a ou b elementos do nucleus temos que $a(bx) = (ab)x$ e $b(ax) = (ba)x$, para qualquer $x \in L$.

Exemplo 2.3. Podemos considerar $X = L$ e definir $\cdot : L \times L \to L$, dada por $l \cdot h = l(hl^{-1})$, que denotaremos por ação adjunta à direita, pois é onde estão os parênteses. Para o primeiro axioma temos que $e \cdot h = e(he^{-1}) = e(he) = eh = h$, para qualquer $h \in L$. Para o segundo axioma, se $a \in Nuc(L)$, para quaisquer $b, h \in L$ temos:

$$
\begin{aligned}
(ab) \cdot h &= (ab)(h(ab)^{-1}) = (ab)(h(b^{-1}a^{-1})) \\
&\overset{(*)}{=} a(b(h(b^{-1}a^{-1}))) \overset{(**)}{=} a(b((hb^{-1})a^{-1})) \\
&\overset{(**)}{=} a((b(hb^{-1}))a^{-1}) = a \cdot (b(hb^{-1})) \\
&= a \cdot (b \cdot h).
\end{aligned}
$$

Em $(*)$, usamos o fato de $a \in Nuc(L)$ e em $(**)$ fato de $a^{-1} \in Nuc(L)$. Por outro lado, se $b \in Nuc(L)$ e para quaisquer $a, h \in L$ temos:

$$
\begin{aligned}
(ab) \cdot h &= (ab)(h(ab)^{-1}) = (ab)(h(b^{-1}a^{-1})) \\
&\overset{(*)}{=} (ab)((hb^{-1})a^{-1}) \overset{(**)}{=} a(b((hb^{-1})a^{-1})) \\
&\overset{(**)}{=} a((b(hb^{-1}))a^{-1}) = a((b \cdot h)a^{-1}) \\
&= a \cdot (b \cdot h).
\end{aligned}
$$

Em $(*)$, usamos o fato de $b^{-1} \in Nuc(L)$ e em $(**)$ o fato de $b \in Nuc(L)$. Portanto, a adjunta à direita é uma ação fraca de I.P. loop.

Como não estamos em um contexto associativo, não existem motivos para a ação adjunta à esquerda (com parêntese à esquerda) também ser uma ação fraca de I.P. loop, mas de fato, ela também é uma ação fraca de I.P. loop, conforme o seguinte exemplo.

Exemplo 2.4. Podemos considerar $X = L$ e definir $\cdot : L \times L \to L$, dada por $l \cdot h = (lh)l^{-1}$, que denotaremos por ação adjunta à esquerda. Para o primeiro axioma temos que $e \cdot h = (eh)e^{-1} = (eh)e = he = h$, para quaisquer $h \in L$. Para o segundo axioma, se $a \in Nuc(L)$, para quaisquer $b, h \in L$ temos:

$$
\begin{aligned}
(ab) \cdot h &= ((ab)h)(ab)^{-1} = ((ab)h)(b^{-1}a^{-1}) \\
&\overset{(*)}{=} (a(bh))(b^{-1}a^{-1}) \overset{(**)}{=} ((a(bh))b^{-1})a^{-1} \\
&\overset{(*)}{=} (a((bh)b^{-1}))a^{-1} = (a(b \cdot h))a^{-1} \\
&= a \cdot (b \cdot h).
\end{aligned}
$$

Em $(*)$, usamos o fato de $a \in Nuc(L)$ e em $(**)$ o fato de $a^{-1} \in Nuc(L)$. Por outro lado, se $b \in Nuc(L)$ e para quaisquer $a, h \in L$ temos:

$$\begin{aligned}
(ab) \cdot h &= ((ab)h)(ab)^{-1} = ((ab)h)(b^{-1}a^{-1}) \\
&\overset{(*)}{=} (a(bh))(b^{-1}a^{-1}) \overset{(**)}{=} ((a(bh))b^{-1})a^{-1} \\
&\overset{(**)}{=} (a((bh)b^{-1}))a^{-1} = (a(b \cdot h))a^{-1} \\
&= a \cdot (b \cdot h).
\end{aligned}$$

Em $(*)$, usamos o fato de $b \in Nuc(L)$ e em $(**)$ o fato de $b^{-1} \in Nuc(L)$. Portanto, a adjunta à esquerda é uma ação fraca de I.P. loop.

Exemplo 2.5. Sejam X um conjunto não vazio, L um I.P. loop e A seu subloop associador. Como L/A é um grupo, podemos definir $\mu : L/A \times X \to X$ uma ação de grupos em X. Também é possível projetar, via π do Exemplo 1.26, L em L/A e podemos definir $\beta : L \times X \to X$ por $\mu \circ (\pi \times Id)$, conforme o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}
L \times X \arrow[r, "\pi \times Id"] \arrow[dr, dashed, "\beta"'] & L/A \times X \arrow[d, "\mu"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Notemos que se e for o elemento neutro de L então, para qualquer $x \in X$ temos que

$$\begin{aligned}
e \cdot x &= \beta(e, x) \\
&= \mu \circ (\pi \times Id)(e, x) \\
&= \mu(\pi(e), x) \\
&= \mu(e, x) \overset{(*)}{=} x,
\end{aligned}$$

onde $(*)$ decorre de μ ser uma ação de grupos.

Além disso, se $a \in Nuc(L)$ e $b \in L$, então

$$\begin{aligned} ab \cdot x &= \beta(ab, x) \\ &= \mu \circ (\pi \times Id)(ab, x) \\ &= \mu(\pi(ab), x) \\ &= \mu(\pi(a)\pi(b), x) \\ &\overset{(*)}{=} \mu(\pi(a), \mu(\pi(b), x)), \end{aligned}$$

onde $(*)$ decorre do fato de μ ser ação de grupos. Por outro lado,

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot x) &= \beta(a, \beta(b, x)) \\ &= \mu \circ (\pi \times Id)(a, \mu \circ (\pi \times Id)(b, x)) \\ &= \mu \circ (\pi \times Id)(a, \mu(\pi(b), x)) \\ &= \mu(\pi(a), \mu(\pi(b), x)). \end{aligned}$$

Portanto, temos que $ab \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$, para quaisquer $a \in Nuc(L)$, $b \in L$ e $x \in X$. De forma análoga, dados $b \in Nuc(L)$ e $a \in L$, temos que

$$\begin{aligned} ab \cdot x &= \beta(ab, x) \\ &= \mu \circ (\pi \times Id)(ab, x) \\ &= \mu(\pi(ab), x) \\ &= \mu(\pi(a)\pi(b), x) \\ &\overset{(*)}{=} \mu(\pi(a), \mu(\pi(b), x)), \end{aligned}$$

onde $(*)$ decorre do fato de μ ser ação de grupos, por outro lado,

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot x) &= \beta(a, \beta(b, x)) \\ &= \mu \circ (\pi \times Id)(a, \mu \circ (\pi \times Id)(b, x)) \\ &= \mu \circ (\pi \times Id)(a, \mu(\pi(b), x)) \\ &= \mu(\pi(a), \mu(\pi(b), x)). \end{aligned}$$

Portanto, β é uma ação fraca de I.P. loop.

Cabe destacar que no caso de grupos, $\beta : G \to Aut(X)$, onde G e X são grupos, é um homomorfismo de grupos, visto que $\beta(gh) : X \to X$ é dada por $\beta(gh)(x) = gh \cdot x$, e pelo item (ii) da Definição 1.29, temos que $\beta(gh)(x) = gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = (\beta(g) \circ \beta(h))(x)$, para todo $x \in X$. Já no caso das ações fracas de I.P. loop temos que a igualdade $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ só ocorre quando g ou h estão no nucleus do I.P. loop e portanto β não é necessariamente um homomorfismo de I.P. loops.

Continuando nossas construções por analogia a teoria das ações de grupos, vamos definir o skew anel fraco de I.P. loop e para isso, primeiro, vamos definir a ação fraca de um I.P. loop L sobre um anel R.

Definição 2.6. Sejam R um anel unitário, L um I.P. loop e $\beta : L \times R \to R$ uma aplicação dada por $\beta(l, r) = l \cdot r$. Dizemos que L age fracamente em R, ou β é uma ação fraca do I.P. loop L sobre R, se são satisfeitos os seguintes axiomas.

(i) $e \cdot r = r$, para qualquer $r \in R$, onde e é o elemento neutro de L;

(ii) Se a ou b estão no nucleus de L, então $a \cdot (b \cdot r) = (ab) \cdot r$, para qualquer $r \in R$;

(iii) $l \cdot (r_1 r_2) = (l \cdot r_1)(l \cdot r_2)$, para quaisquer $r_1, r_2 \in R$ e $l \in L$;

(iv) $l \cdot (r_1 + r_2) = l \cdot r_1 + l \cdot r_2$, para quaisquer $r_1, r_2 \in R$ e $l \in L$;

(v) $l \cdot 1_R = 1_R$, para qualquer $l \in L$.

Notemos que os dois primeiros itens remetem a Definição 2.1 e os três últimos itens afirmam que $\phi(L) \subseteq Aut(R)$, onde $\phi : L \to Aut(R)$ é dada por $\phi(l)(r) = l \cdot r$.

Exemplo 2.7. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, L o I.P loop do Exemplo 1.8 e $R = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3 \oplus \mathbb{K}e_4$, onde cada e_1, e_2, e_3 e e_4 são idempotentes centrais e ortogonais, um anel com unidade $1_R = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Vamos definir $\beta : L \times R \to R$ pela seguinte tábua e estendida por linearidade:

β	1	2	3	4	5	6	7
e_1	e_1	e_2	e_1	e_1	e_3	e_3	e_1
e_2	e_2	e_1	e_3	e_3	e_2	e_4	e_4
e_3	e_3	e_3	e_2	e_2	e_1	e_1	e_3
e_4	e_4	e_4	e_4	e_4	e_4	e_2	e_2

Notemos que $1 \cdot e_i = e_i$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$ e como $Nuc(L) = \{1\}$ o Axioma (ii) da Definição 2.6 é trivialmente satisfeito. Logo, β é uma ação fraca de I.P. loop.

Exemplo 2.8. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, L o I.P loop do Exemplo 1.21 e $R = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3 \oplus \mathbb{K}e_4$, onde cada e_1, e_2, e_3 e e_4 são idempotentes centrais e ortogonais, um anel com unidade $1_R = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Vamos definir $\beta : L \times R \to R$ pela seguinte tábua e estendida por linearidade:

β	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
e_1	e_1	e_3	e_4	e_2	e_1	e_4	e_3	e_2	e_1	e_3	e_4	e_2	e_2	e_4	e_3	e_1
e_2	e_2	e_4	e_3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_4	e_3	e_1	e_1	e_3	e_4	e_2
e_3	e_3	e_2	e_2	e_4	e_3	e_1	e_1	e_3	e_4	e_2	e_2	e_3	e_4	e_1	e_1	e_3
e_4	e_4	e_1	e_1	e_3	e_4	e_2	e_2	e_4	e_3	e_1	e_1	e_4	e_3	e_2	e_2	e_4

Notemos que $1 \cdot e_i = e_i$, para qualquer $i = 1, 2, 3, 4$ e como $Nuc(L) = \{1, 4\}$ é possível verificar que o Axioma (ii) da Definição 2.6 é satisfeito, para isto basta observar que L possui sete subloops de ordem quatro, a saber, $\{1, 4, 2, 6\}$, $\{1, 4, 3, 7\}$, $\{1, 4, 5, 8\}$, $\{1, 4, 9, 12\}$, $\{1, 4, 13, 16\}$, $\{1, 4, 10, 14\}$ e $\{1, 4, 11, 15\}$ e que o Axioma (ii) se verifica para cada subloop. Logo, β é uma ação fraca de I.P. loop.

Em teoria de grupos é recorrente a construção do skew anel de grupo como na Definição 1.30 e, além disso, em [9] foi provado que, sobre certas condições, o skew anel de grupo é associativo. Como trabalhamos em um contexto não associativo, essa propriedade dificilmente seria satisfeita sem a associatividade das estruturas envolvidas, então ao construirmos o skew anel fraco de I.P. loop, cuja construção é análoga trocando o grupo G por um I.P. loop L e a ação de grupo pela ação fraca do I.P. loop L no anel R, tínhamos interesse, inicialmente, em saber se ele é de fato um anel não necessariamente associativo. Como mostra a seguinte proposição, o skew anel fraco de I.P. loop é um anel unitário não necessariamente associativo.

Proposição 2.9. *Sejam R uma anel unitário, L um I.P. loop e $\beta : L \times R \to R$ uma ação fraca do I.P. loop L em R. Então, o skew anel fraco de I.P. loop, que é o conjunto das somas formais finitas $R \rtimes_\beta L = \{\sum_{l\in L} r_l\delta_l : r_l \in R\}$, com a soma usual e o produto dado por $(r\delta_l)(s\delta_g) = r(l \cdot s)\delta_{lg}$, para quaisquer $r, s \in R$, $l, g \in L$ e estendido por linearidade, é um anel unitário não necessariamente associativo.*

Demonstração. Mostraremos apenas os axiomas do produto, visto que a operação de soma está sob as mesmas condições do skew anel de grupos que é um anel. Primeiramente notemos que, se tomarmos o elemento $1_R\delta_{1_L} \in R \rtimes_\beta L$ temos que $(1_R\delta_{1_L})(r\delta_l) = 1_R(1_L \cdot r)\delta_{1_L l} = 1_R r\delta_l = r\delta_l$, onde a segunda igualdade decorre do item (i) da Definição 2.6. Por outro lado, $(r\delta_l)(1_R\delta_{1_L}) = r(l \cdot 1_R)\delta_{l1_L} = r1_R\delta_l = r\delta_l$, onde a segunda igualdade decorre do item (v) da Definição 2.6. Logo, $1_R\delta_{1_L}$ é a unidade da multiplicação.

Resta mostrarmos que o produto é distributivo. De fato, sejam $r\delta_l, s\delta_g, t\delta_h \in R \rtimes_\beta L$, então temos que:

$$\begin{aligned}(r\delta_l)(s\delta_g + t\delta_h) &= r((l \cdot s)\delta_{lg} + (l \cdot t)\delta_{lh}) \\ &= r(l \cdot s)\delta_{lg} + r(l \cdot t)\delta_{lh} \\ &= (r\delta_l)(s\delta_g) + (r\delta_l)(t\delta_h),\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é dada pelo item (iv) da Definição 2.6. Agora, para a distributividade à direita temos que

$$\begin{aligned}(sg+th)(rl) &= (s(g\cdot r)\delta_g + t(h\cdot t)\delta_h)\delta_l \\ &= s(g\cdot r)\delta_{gl} + t(h\cdot r)\delta_{hl} \\ &= (s\delta_g)(r\delta_l) + (t\delta_h)(r\delta_l).\end{aligned}$$

Assim, estendendo por linearidade, temos que a distributividade à direita e à esquerda é satisfeita para todos os elementos de $R \rtimes_\beta L$ e portanto, é um anel unitário não necessariamente associativo. $\square$

Notemos que, mesmo que R seja associativo, $R \rtimes_\beta L$ não é necessariamente associativo, já que não seria possível associar os elementos do I.P. loop. Assim, temos mais uma maneira de construir anéis não associativos a partir de anéis associativos. Uma classe de anéis importante dentro da teoria dos anéis de loop são os anéis de loop alternativos. Como vimos na Definição 1.9, um loop L é alternativo se satisfeitas duas condições. Analogamente, dizemos que um anel não necessariamente associativo R é alternativo à esquerda se $(xx)y = x(xy)$ e alternativo à direita se $(xy)y = x(yy)$, para quaisquer $x, y \in R$. Naturalmente nos questionamos: se L for alternativo, então o skew anel fraco de I.P. loop é alternativo? Como veremos na próxima proposição, não basta apenas L ser alternativo, é necessário exigir mais para que o skew anel fraco seja alternativo à esquerda.

Proposição 2.10. *Sejam R um anel unitário, L um I.P. loop alternativo e $\beta : L \times R \to R$ uma ação fraca de I.P. loop tal que $l \cdot (l \cdot r) = l^2 \cdot r$, para quaisquer $l \in L$ e $r \in R$. Então, o skew anel fraco de I.P. loop $R \rtimes_\beta L$ é um anel alternativo à esquerda.*

Demonstração. Para demonstrar essa proposição precisamos mostrar que, para quaisquer $a\delta_l, b\delta_g \in R \rtimes_\beta L$, temos que $(a\delta_l a\delta_l)b\delta_g = a\delta_l(a\delta_l b\delta_g)$. De fato,

$$\begin{aligned} a\delta_l(a\delta_l b\delta_g) &= a\delta_l(a(l \cdot b)\delta_{lg}) \\ &= a(l \cdot (a(l \cdot b)))\delta_{l(lg)} \\ &\overset{(*)}{=} a((l \cdot a)(l \cdot (l \cdot b)))\delta_{l(lg)} \\ &\overset{(**)}{=} a((l \cdot a)(ll \cdot b))\delta_{l(lg)} \\ &\overset{(***)}{=} (a(l \cdot a))(ll \cdot b)\delta_{(ll)g} \\ &= ((a(l \cdot a))\delta_{ll})b\delta_g \\ &= (a\delta_l a\delta_l)b\delta_g, \end{aligned}$$

onde em $(*)$ utilizamos o item (iii) da Definição 2.6, em $(**)$ utilizamos a hipótese que $l \cdot (l \cdot r) = l^2 \cdot r$ e em $(***)$ usamos o fato do anel R ser associativo e de L ser um I.P. loop. $\square$

O seguinte exemplo ilustra a importância da condição $l \cdot (l \cdot r) = l^2 \cdot r$ sobre a ação fraca de I.P. loop para que o skew anel fraco de I.P. loop seja alternativo à esquerda.

Exemplo 2.11. Seja β a ação fraca de I.P. loop descrita no Exemplo 2.8, como L é um loop de Moufang, Exemplo 1.21, pela Observação 1.11 este I.P. loop é alternativo. Note que, na ação β temos $5 \cdot 5 \cdot e_1 = e_1$ e $(5.5) \cdot e_1 = 4 \cdot e_1 = e_2$ e portanto $l \cdot (l \cdot r) = l^2 \cdot r$, para quaisquer $l \in L$ e $r \in R$, não é satisfeita. Assim, se considerarmos o skew anel fraco de I.P. loop $R \rtimes_\beta L$ e tomarmos os elementos $e_1\delta_5$, $e_1\delta_2 \in R \rtimes_\alpha L$ temos que, por um lado

$$\begin{aligned} e_1\delta_5(e_1\delta_5 e_1\delta_2) &= e_1\delta_5(e_1(5 \cdot e_1)\delta_{5.2}) \\ &= e_1\delta_5(e_1 e_1\delta_7) \\ &= e_1\delta_5 e_1\delta_7 \\ &= e_1(5 \cdot e_1)\delta_{5.7} \\ &= e_1 e_1\delta_6 = e_1\delta_6, \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(e_1\delta_5 e_1\delta_5)e_1\delta_2 &= e_1(5\cdot e_1)\delta_{5.5}e_1\delta_2\\ &= e_1e_1\delta_4 e_1\delta_2\\ &= e_1\delta_4 e_1\delta_2\\ &= e_1(4\cdot e_1)\delta_{4.2}\\ &= e_1e_2\delta_6 = 0\delta_6.\end{aligned}$$

Portanto, não é satisfeita a identidade alternativa à esquerda e consequentemente o skew anel não é alternativo à esquerda.

Em um certo sentido, é possível entender que, o I.P. loop L ser alternativo e a condição $l\cdot(l\cdot r) = l^2\cdot r$, para quaisquer $l \in L$ e $r \in R$, ser satisfeita são condições necessárias e suficientes para que o skew anel fraco de I.P. loop seja alternativo, supondo que o anel R é associativo, conforme a seguinte proposição.

Proposição 2.12. *Sejam R um anel unitário, L um I.P. loop tal que L age fracamente sobre R via β e que o skew anel fraco de I.P. loop $R \rtimes_\beta L$ seja alternativo à esquerda. Então, L é alternativo à esquerda e a equação $l\cdot(l\cdot r) = l^2\cdot r$, para quaisquer $l \in L$ e $r \in R$, é satisfeita.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que o I.P. loop L é alternativo à esquerda. Para isso, vamos tomar $a\delta_l = 1_R\delta_l$ e $b\delta_g = 1_R\delta_g$. Agora, usando a definição de alternativo à esquerda, temos que

$$
\begin{aligned}
(1_R\delta_l 1_R\delta_l)1_R\delta_g = 1_R\delta_l(1_R\delta_l 1_R\delta_g) &\Leftrightarrow \\
(1_R(l\cdot 1_R))\delta_{ll}1_R\delta_g = 1_R\delta_l(1_R(l\cdot 1_R))\delta_{lg} &\Leftrightarrow \\
(1_R 1_R)\delta_{ll}1_R\delta_g = 1_R\delta_l(1_R 1_R)\delta_{lg} &\Leftrightarrow \\
1_R\delta_{ll}1_R\delta_g = 1_R\delta_l 1_R\delta_{lg} &\Leftrightarrow \\
1_R(ll\cdot 1_R)\delta_{(ll)g} = 1_R(l\cdot 1_R)\delta_{l(lg)} &\Leftrightarrow \\
1_R 1_R\delta_{(ll)g} = 1_R 1_R\delta_{l(lg)} &\Leftrightarrow \\
1_R\delta_{(ll)g} = 1_R\delta_{l(lg)}&,
\end{aligned}
$$

e portanto, temos que $(ll)g = l(lg)$, para quaisquer $l, g \in L$.

Agora, para mostrar que vale $l \cdot (l \cdot r) = l^2 \cdot r$, para quaisquer $l \in L$ e $r \in R$ vamos tomar $a\delta_l = 1_R\delta_l$ e $b\delta_g = b\delta_l$ na definição de alternativo à esquerda. Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
(1_R\delta_l 1_R\delta_l)b\delta_l = 1_R\delta_l(1_R\delta_l b\delta_l) &\Leftrightarrow \\
1_R(l\cdot 1_R)\delta_{ll}b\delta_l = 1_R\delta_l 1_R(l\cdot b)\delta_{ll} &\Leftrightarrow \\
(1_R 1_R)\delta_{ll}b\delta_l = 1_R\delta_l(l\cdot b)\delta_{ll} &\Leftrightarrow \\
1_R\delta_{ll}b\delta_l = 1_R\delta_l(l\cdot b)\delta_{ll} &\Leftrightarrow \\
1_R(ll\cdot b)\delta_{(ll)l} = 1_R(l\cdot(l\cdot b))\delta_{l(ll)} &\Leftrightarrow \\
l^2\cdot b\delta_{(ll)l} = l\cdot(l\cdot b)\delta_{l(ll)}&,
\end{aligned}
$$

como já mostramos que L é alternativo à esquerda, da última igualdade decorre que $l \cdot (l \cdot b) = l^2 \cdot b$, para quaisquer $l \in L$ e $b \in R$. □

Uma pergunta natural que pode ser feita após este resultado é, quais são as condições para que o skew anel fraco de I.P. loop seja alternativo à direita? Provar que o skew anel fraco de I.P. loop é alternativo à direita significa provar que para quaisquer $a\delta_l, b\delta_g \in R \rtimes_\beta L$ temos que $(a\delta_l b\delta_g)b\delta_g = a\delta_l(b\delta_g b\delta_g)$. Por um lado teríamos que

$$(a\delta_l b\delta_g)b\delta_g = a(l \cdot b\delta_{lg})b\delta_g = (a(l \cdot b))(lg \cdot b)\delta_{(lg)g}$$

por outro lado teríamos que

$$\begin{aligned} a\delta_l(b\delta_g b\delta_g) &= a\delta_l b(g \cdot b)\delta_{gg} \\ &= a(l \cdot (b(g \cdot b)))\delta_{l(gg)} \\ &= a((l \cdot b)(l \cdot g \cdot b))\delta_{l(gg)} \end{aligned}$$

ou seja, a equação $(a\delta_l b\delta_g)b\delta_g = a\delta_l(b\delta_g b\delta_g)$ é equivalente a equação

$$(a(l \cdot b))(lg \cdot b)\delta_{(lg)g} = a((l \cdot b)(l \cdot g \cdot b))\delta_{l(gg)},$$

se considerarmos que L é um I.P. loop alternativo à direita, então podemos garantir a igualdade anterior se $l \cdot g \cdot b = lg \cdot b$, para quaisquer $l, g \in L$ e $b \in R$, o que seria a mesma condição utilizada no item (ii) da Definição 1.29. Ações de I.P. loop que satisfazem essa condição "mais forte" serão tratadas em uma seção separada e serão chamadas de ações fortes de I.P. loop.

Uma outra pergunta que surgiu é em relação aos elementos que associam neste anel, ou seja, seu nucleus. Mais precisamente, nos questionamos sobre qual a relação entre $Nuc(R \rtimes_\beta L)$ e $R \rtimes_\beta Nuc(L)$. O seguinte resultado vem nessa direção.

Teorema 2.13. *Sejam R um anel unitário, L um I.P. loop e β uma ação fraca de L em R. Então, temos que:*
a) $R \rtimes_\beta Nuc(L) \subseteq Nuc_\lambda(R \rtimes_\beta L) \cap Nuc_\mu(R \rtimes_\beta L)$;
b) $Nuc(R \rtimes_\beta L) \subseteq R \rtimes_\beta Nuc(L)$.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $R \rtimes_\beta Nuc(L) \subseteq Nuc_\lambda(R \rtimes_\beta L)$. Sejam $a\delta_l \in R \rtimes_\beta Nuc(L)$ e $b\delta_g, c\delta_h \in R \rtimes_\beta L$. Então, por um lado temos que

$$\begin{aligned} (a\delta_l b\delta_g)c\delta_h &= a(l \cdot b)\delta_{lg} c\delta_h \\ &= (a(l \cdot b))(lg \cdot c)\delta_{(lg)h}, \end{aligned}$$

por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
a\delta_l(b\delta_g c\delta_h) &= a\delta_l b(g\cdot c)\delta_{gh}\\
&= a(l\cdot(b(g\cdot c)))\delta_{l(gh)}\\
&= a((l\cdot b)(l\cdot g\cdot c))\delta_{l(gh)}\\
&\overset{(*)}{=} a((l\cdot b)(lg\cdot c))\delta_{(lg)h}\\
&\overset{(**)}{=} (a(l\cdot b))(lg\cdot c)\delta_{(lg)h},
\end{aligned}$$

onde $(**)$ decorre de R ser associativo e $(*)$ decorre de $l \in Nuc(L)$ e segue que, podemos usar o item (ii) da Definição 2.6. Agora, vamos mostrar que $R \rtimes_\beta Nuc(L) \subseteq Nuc_\mu(R \rtimes_\beta L)$. De fato, sejam $b\delta_g \in R \rtimes_\beta Nuc(L)$ e $a\delta_l, c\delta_h \in R \rtimes_\beta L$. Então, por um lado temos

$$\begin{aligned}
(a\delta_l b\delta_g)c\delta_h &= a(l\cdot b)\delta_{lg}c\delta_h\\
&= (a(l\cdot b))(lg\cdot c)\delta_{(lg)h},
\end{aligned}$$

por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
a\delta_l(b\delta_g c\delta_h) &= a\delta_l b(g\cdot c)\delta_{gh}\\
&= a(l\cdot(b(g\cdot c)))\delta_{l(gh)}\\
&= a((l\cdot b)(l\cdot g\cdot c))\delta_{l(gh)}\\
&\overset{(*)}{=} a((l\cdot b)(lg\cdot c))\delta_{(lg)h}\\
&\overset{(**)}{=} (a(l\cdot b))(lg\cdot c)\delta_{(lg)h},
\end{aligned}$$

onde $(**)$ decorre de R ser associativo e $(*)$ decorre de $g \in Nuc(L)$ e portanto, podemos usar o item (ii) da Definição 2.6.

Vamos provar o item b), para isto, sejam $a\delta_l \in Nuc(R \rtimes_\beta L) \subseteq Nuc_\lambda(R \rtimes_\beta L)$. Então, para quaisquer $b\delta_g, c\delta_h \in R \rtimes_\beta L$ temos que

$$(a\delta_l b\delta_g)c\delta_h = a\delta_l(b\delta_g c\delta_h) \Leftrightarrow$$

$$a(l\cdot b)\delta_{lg}c\delta_h = a\delta_l b(g\cdot c)\delta_{gh} \Leftrightarrow$$

$$(a(l\cdot b))(lg\cdot c)\delta_{(lg)h} = a((l\cdot b)(l\cdot g\cdot c))\delta_{l(gh)}.$$

Tomando $b = c = 1_R$ nesta última igualdade, ela pode ser reescrita como

$$(a(l \cdot 1_R))(lg \cdot 1_R)\delta_{(lg)h} = a((l \cdot 1_R)(l \cdot g \cdot 1_R))\delta_{l(gh)},$$

utilizando o item (v) da Definição 2.6 ela equivale a

$$(a1_R)1_R\delta_{(lg)h} = a(1_R 1_R)\delta_{l(gh)},$$

isto é, $a\delta_{(lg)h} = a\delta_{l(gh)}$ e segue que $(lg)h = l(gh)$, o que nos diz que $l \in Nuc_\lambda(L)$. Assim, provamos que $Nuc(R \rtimes_\beta L) \subseteq R \rtimes_\beta Nuc_\lambda(L)$. Como L é um I.P. loop temos que $Nuc_\lambda(L) = Nuc_\mu(L) = Nuc_\rho(L) = Nuc(L)$ e fica provado o item b).

$\square$

Cabe observar que a inclusão ausente no item a), a saber, $R \rtimes_\beta Nuc(L) \subseteq Nuc_\rho(R \rtimes_\beta L)$, não é sempre verdadeira, pois se considerarmos a ação fraca de I.P. loop descrita no Exemplo 2.8 temos a seguinte situação: tomando $a\delta_l = e_2\delta_2$, $b\delta_g = e_3\delta_2$ e $c\delta_h = e_2\delta_4$, como $4 \in Nuc(L)$, então $e_2\delta_4 \in R \rtimes_\beta Nuc(L)$. Assim, por um lado, temos que

$$\begin{aligned}
(e_2\delta_2 e_3\delta_2)e_2\delta_4 &= (e_2(2 \cdot e_3)\delta_{2.2})e_2\delta_4 \\
&= (e_2e_2\delta_1)e_2\delta_4 \\
&= e_2\delta_1 e_2\delta_4 \\
&= e_2(1 \cdot e_2)\delta_{1.4} \\
&= e_2e_2\delta_4 = e_2\delta_4,
\end{aligned}$$

por outro lado temos

$$\begin{aligned}
e_2\delta_2(e_3\delta_2 e_2\delta_4) &= e_2\delta_2(e_3(2 \cdot e_3)\delta_{2.4}) \\
&= e_2\delta_2(e_3e_2\delta_6) \\
&= e_2\delta_2 0\delta_6 \\
&= e_2 0\delta_{2.6} \\
&= 0\delta_4,
\end{aligned}$$

e assim sendo, $e_2\delta_4 \notin Nuc(R \rtimes_\beta L)$.

2.2 Ações Fortes de I.P. Loop e Skew Anel Forte

Na seção anterior, quando estudamos o skew anel fraco de I.P. loop e a propriedade da alternatividade neste anel, vimos que para exigir a alternatividade à direita seria necessário uma condição mais forte para a ação do que a descrita no item (ii) da Definição 2.6. Além disso, em [19] o autor definiu uma ação em uma estrutura não associativa da mesma forma feita para as estruturas associativas e provou alguns resultados em relação a elas. O problema dessa definição está em perdermos alguns exemplos que são usuais para as ações, como o produto e a adjunta, porém os ganhos são significativos em relação a outros resultados. Essa seção será dedicada ao estudo dessas ações que chamaremos de ações fortes de I.P. loop assim como o estudo do skew anel com estas ações.

Definição 2.14. Sejam L um I.P. loop e X um conjunto não vazio. Dizemos que L age fortemente em X se existir $\beta : L \times X \to X$, dada por $\beta(l,x) = l \cdot x$, tal que os seguintes axiomas são satisfeitos.

(i) $e \cdot x = x$, para qualquer $x \in X$, onde e é o elemento neutro de L;

(ii) $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$, para qualquer $x \in X$ e para quaisquer $a, b \in L$.

Assim como definimos a ação fraca de um I.P. loop L em um anel R na Definição 2.6, podemos definir a ação forte de um I.P. loop L em um anel R por substituir o item (ii) da Definição 2.6 pelo item (ii) da Definição 2.14.

Definição 2.15. Sejam R um anel unitário, L um I.P. loop e $\beta : L \times R \to R$ uma aplicação dada por $\beta(l,r) = l \cdot r$. Dizemos que L age fortemente em R, ou β é uma ação forte do I.P. loop L sobre R, se são satisfeitos os seguintes axiomas.

(i) $e \cdot r = r$, para qualquer $r \in R$, onde e é o elemento neutro de L;

(ii) $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$, para qualquer $x \in X$ e para quaisquer $a, b \in L$.

(iii) $l \cdot (r_1 r_2) = (l \cdot r_1)(l \cdot r_2)$, para quaisquer $r_1, r_2 \in R$ e $l \in L$;

(iv) $l \cdot (r_1 + r_2) = l \cdot r_1 + l \cdot r_2$, para quaisquer $r_1, r_2 \in R$ e $l \in L$;

(v) $l \cdot 1_R = 1_R$, para qualquer $l \in L$.

Nesse sentido, diferente da ação fraca de I.P. loop, a ação forte de I.P. loop, dada por $\beta : L \to Aut(R)$, é um homomorfismo de loops, pois a substituição do item (ii) da Definição 2.6 pelo item (ii) da Definição 2.14 é o que garante $\beta(ab)(x) = (\beta(a) \circ \beta(b))(x)$, para quaisquer $a, b \in L$ e $x \in R$. Porém, ao se impor essa condição mais forte para a ação, excluímos os exemplos mais usuais de ação, como o produto e a adjunta, pois impor que qualquer uma das duas fosse uma ação forte de I.P. loop acarretaria no I.P. loop L ser associativo, e consequentemente, L seria um grupo. Como podemos ver nos seguintes resultados, os exemplos de ações fortes não triviais são mais escassos, mas existem.

Exemplo 2.16. Sejam L um I.P. loop, R um anel e $\beta : L \times R \to R$ a ação de loop dada no Exemplo 2.5, via projeção em L/A e uma ação de grupo μ. Então, β é uma ação forte de I.P. loop. De fato, como o primeiro axioma é o mesmo, este já foi mostrado no Exemplo 2.5. Para mostrar o Axioma (ii) cabe observar que ele é equivalente a comutatividade do seguinte diagrama, onde m denota a operação do loop L:

$$\begin{tikzcd}
L \times L \times R \arrow[r, "m \times Id"] \arrow[d, "Id \times \beta"'] & L \times R \arrow[d, "\beta"] \\
L \times R \arrow[r, "\beta"] & R
\end{tikzcd}$$

Sendo assim, dados $l, g \in L$ e $r \in R$ temos que:

$$
\begin{aligned}
(\beta\circ(Id\times\beta))(l,g,r) &= (\beta\circ(Id\times(\mu\circ(\pi\times Id))))(l,g,r)\\
&= \beta(Id(l),(\mu\circ(\pi\times Id))(g,r))\\
&= \beta(l,\mu(\pi(g),Id(r)))\\
&= (\mu\circ(\pi\times Id))(l,\mu(\pi(g),r))\\
&= \mu(\pi(l),\mu(\pi(g),r))\\
&= \mu\circ(Id\times\mu)(\pi(l),\pi(g),r)\\
&\overset{(*)}{=} \mu\circ(\bar{m}\times Id)(\pi(l),\pi(g),r)\\
&= \mu(\pi(l)\pi(g),r)\\
&\overset{(**)}{=} \mu(\pi(lg),r)\\
&= \mu\circ(\pi\times Id)(lg,r)\\
&= \beta(lg,r) = (\beta\circ(m\times Id))(l,g,r).
\end{aligned}
$$

Em $(*)$ usamos o fato de μ ser uma ação de grupos e portanto, o diagrama comuta para μ, e em $(**)$ usamos o fato da projeção ser homomorfismo de I.P. loops. Sendo assim o Axioma (ii) é satisfeito. Para os axiomas restantes, estes decorrem todos do fato de μ ser uma ação de grupos e π ser um homomorfismo de I.P. loops.

Exemplo 2.17. Considere L o I.P. loop descrito no Exemplo 1.17. Como vimos, o associador desse conjunto é $H = \{1,6,7\}$ e L/A é um grupo de ordem 3 representado pelas classes $\{1H, 2H, 3H\}$. Podemos considerar o anel $R = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3 \oplus \mathbb{K}e_4$, onde cada e_i, $1 \leq i \leq 4$, são idempotentes centrais ortogonais, e a ação de grupos $\overline{\beta} : L/A \times R \to R$ pela seguinte tábua e estendida por linearidade:

$\overline{\beta}$	e_1	e_2	e_3	e_4
1H	e_1	e_2	e_3	e_4
2H	e_3	e_1	e_2	e_4
3H	e_2	e_3	e_1	e_4

Então, podemos definir uma ação forte do I.P. loop L sobre o anel R, utilizando o método do Exemplo 2.16, como sendo a ação forte $\beta : L \times R \to R$ dada pela seguinte tábua e estendida por linearidade:

$1 \cdot e_1 = e_1$	$6 \cdot e_1 = e_1$	$7 \cdot e_1 = e_1$
$1 \cdot e_2 = e_2$	$6 \cdot e_2 = e_2$	$7 \cdot e_2 = e_2$
$1 \cdot e_3 = e_3$	$6 \cdot e_3 = e_3$	$7 \cdot e_3 = e_3$
$1 \cdot e_4 = e_4$	$6 \cdot e_4 = e_4$	$7 \cdot e_4 = e_4$
$2 \cdot e_1 = e_3$	$4 \cdot e_1 = e_3$	$9 \cdot e_1 = e_3$
$2 \cdot e_2 = e_1$	$4 \cdot e_2 = e_1$	$9 \cdot e_2 = e_1$
$2 \cdot e_3 = e_2$	$4 \cdot e_3 = e_2$	$9 \cdot e_3 = e_2$
$2 \cdot e_4 = e_4$	$4 \cdot e_4 = e_4$	$9 \cdot e_4 = e_4$
$3 \cdot e_1 = e_2$	$5 \cdot e_1 = e_2$	$8 \cdot e_1 = e_2$
$3 \cdot e_2 = e_3$	$5 \cdot e_2 = e_3$	$8 \cdot e_2 = e_3$
$3 \cdot e_3 = e_1$	$5 \cdot e_3 = e_1$	$8 \cdot e_3 = e_1$
$3 \cdot e_4 = e_4$	$5 \cdot e_4 = e_4$	$8 \cdot e_4 = e_4$

O seguinte lema generaliza uma classe de exemplos de ações fortes de I.P. loop.

Lema 2.18. *Sejam R um anel, L um I.P loop e A seu subloop associador. Se $\beta : L \to Aut(R)$ é uma ação forte do I.P. loop L em R então, $A \subseteq Ker(\beta)$.*

Demonstração. De fato, como $Aut(R)$ é um grupo, isto é, um loop associativo então, $\beta(L)$ é um subloop, pela Proposição 1.27, e consequentemente um subgrupo. Agora, pelo Teorema 1.28, temos que $L/Ker(\beta) \cong \beta(L)$, que é um grupo. Como

$ker(\beta)$ é um subloop normal de L e por definição A é o menor subloop normal de L tal que L/A é um grupo, temos que $A \subseteq ker(\beta)$. $\square$

Um ganho que temos, das ações fortes de I.P. loop em relação as ações fracas de I.P. loop, é em relação a estrutura de anel alternativo do skew anel de I.P. loop quando a ação é forte, que chamaremos de skew anel forte de I.P. loop. O seguinte resultado traz as condições necessárias e suficientes para que o skew anel forte de I.P. loop seja alternativo.

Teorema 2.19. *Sejam R um anel unitário, L um I.P. loop, $\beta : L \to Aut(R)$ uma ação forte do I.P. loop L em R e $R \rtimes_\beta L$ o skew anel forte de I.P. loop. Então, $R \rtimes_\beta L$ é um anel alternativo, se e somente se, L for alternativo.*

Demonstração. Como a condição $l \cdot (l \cdot r) = l^2 \cdot r$, para quaisquer $l \in L$ e $r \in R$ é satisfeita, pois a ação de I.P. loop é forte, temos, pela Proposição 2.10, que $R \rtimes_\beta L$ é um anel alternativo à esquerda. Iremos mostrar que $R \rtimes_\beta L$ é um anel alternativo à direita. De fato, seja $a\delta_l, b\delta_g \in R \rtimes_\beta L$. Então, temos que:

$$\begin{aligned}
a\delta_l(b\delta_g b\delta_g) &= a\delta_l b(g \cdot b)\delta_{gg} \\
&= a(l \cdot (b(g \cdot b)))\delta_{l(gg)} \\
&= a((l \cdot b)(l \cdot (g \cdot b)))\delta_{l(gg)} \\
&\overset{(*)}{=} a((l \cdot b)(lg \cdot b))\delta_{l(gg)} \\
&\overset{(**)}{=} a((l \cdot b)(lg \cdot b))\delta_{(lg)g} \\
&\overset{(***)}{=} (a(l \cdot b))(lg \cdot b)\delta_{(lg)g} \\
&= a(l \cdot b)\delta_{lg} b\delta_g \\
&= (a\delta_l b\delta_g) b\delta_g.
\end{aligned}$$

Em $(*)$ usamos o item (ii) da Definição 2.15, em $(**)$ a hipótese de L ser um I.P. loop alternativo e em $(***)$ o fato de R ser associativo.

Reciprocamente, se $R \rtimes_\beta L$ é um skew anel de I.P. loop alternativo temos que para quaisquer $a\delta_l, b\delta_g \in R \rtimes_\beta L$ valem as seguintes igualdades

$$a\delta_l(b\delta_g b\delta_g) = (a\delta_l b\delta_g)b\delta_g$$

$$a\delta_l(a\delta_l b\delta_g) = (a\delta_l a\delta_l)b\delta_g$$

tomando $a = b = 1_R$ em ambas igualdades temos

$$1_R\delta_l(1_R\delta_g 1_R\delta_g) = (1_R\delta_l 1_R\delta_g)1_R\delta_g \tag{2.1}$$

$$1_R\delta_l(1_R\delta_l 1_R\delta_g) = (1_R\delta_l 1_R\delta_l)1_R\delta_g. \tag{2.2}$$

Notemos que a Equação (2.1) pode ser reescrita, ao efetuarmos o produto entre parênteses, como

$$1_R\delta_l(1_R(g \cdot 1_R)\delta_{gg}) = 1_R(l \cdot 1_R)\delta_{lg}1_R\delta_g$$

ou, equivalentemente,

$$1_R(l \cdot (1_R(g \cdot 1_R))\delta_{l(gg)} = (1_R(l \cdot 1_R))(lg \cdot 1_R)\delta_{(lg)g}.$$

Como 1_R é a unidade do anel e como β é uma ação forte de I.P. loop, pelo item (v) da Definição 2.15, podemos reescrever essas equações como

$$1_R\delta_{l(gg)} = 1_R\delta_{(lg)g}.$$

Assim, $l(gg) = (lg)g$. Logo, L é um I.P. loop alternativo à direita.

Já a Equação (2.2) pode ser reescrita, efetuando o produto nos parênteses, como

$$1_R\delta_l(1_R(l \cdot 1_R)\delta_{lg} = 1_R(l \cdot 1_R)\delta_{ll}1_R\delta_g$$

ou, equivalentemente,

$$1_R(l \cdot (1_R(l \cdot 1_R))\delta_{l(lg)} = (1_R(l \cdot 1_R))(ll \cdot 1_R)\delta_{(ll)g},$$

Como 1_R é a unidade do anel e como β é uma ação forte de I.P. loop, pelo item (v) da Definição 2.15, podemos reescrever essas equações como

$$1_R\delta_{l(lg)} = 1_R\delta_{(ll)g}.$$

Consequentemente, $l(lg) = (ll)g$ e obtemos que L é um I.P. loop alternativo à esquerda. $\square$

O seguinte resultado vem na mesma direção da Proposição 2.13, porém para ações fortes de I.P. loop. No caso forte, temos as inclusões que ficaram faltando no caso fraco para garantirmos a igualdade.

Teorema 2.20. *Sejam R um anel unitário, L um I.P. loop e β uma ação forte do I.P. loop L em R. Então, temos que $R \rtimes_\beta Nuc(L) = Nuc(R \rtimes_\beta L)$.*

Demonstração. Tendo em vista a Proposição 2.13 e que uma ação forte de I.P. loop também é, em particular, uma ação de I.P. loop fraca resta mostrarmos apenas a inclusão $R \rtimes_\beta Nuc(L) \subseteq Nuc_\rho(R \rtimes_\beta L)$.

Assim, sejam $c\delta_h \in R \rtimes_\beta Nuc(L)$ e $a\delta_l, b\delta_g \in R \rtimes_\beta L$. Então, por um lado,

$$\begin{aligned}(a\delta_l b\delta_g)c\delta_h &= a(l \cdot b)\delta_{lg}c\delta_h \\ &= (a(l \cdot b))(lg \cdot c)\delta_{(lg)h},\end{aligned}$$

por outro lado temos que

$$\begin{aligned}a\delta_l(b\delta_g c\delta_h) &= a\delta_l b(g \cdot c)\delta_{gh} \\ &= a(l \cdot (b(g \cdot c)))\delta_{l(gh)} \\ &= a((l \cdot b)(l \cdot g \cdot c))\delta_{l(gh)} \\ &\overset{(*)}{=} a((l \cdot b)(lg \cdot c))\delta_{l(gh)} \\ &\overset{(**)}{=} a((l \cdot b)(lg \cdot c))\delta_{(lg)h} \\ &\overset{(***)}{=} (a(l \cdot b))(lg \cdot c)\delta_{(lg)h},\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a propriedade (ii) da Definição 2.15, em $(**)$ usamos a hipótese de $h \in Nuc(L)$ e em $(***)$ utilizamos o fato de R ser associativo, então podemos concluir que $R \rtimes_\beta Nuc(L) \subseteq Nuc_\rho(R \rtimes_\beta L)$. $\square$

Capítulo 3

Ações Parciais de I.P. Loop

O objetivo deste capítulo é trazer o contexto das ações parciais para o caso não associativo. Em [9], os autores apresentam um conceito puramente algébrico para as ações parciais de grupo e como no capítulo anterior nos preocupamos em abordar os conceitos de ações de grupos para o caso não associativo, as ações de I.P. loop, o problema de estender as ações parciais de grupos para contextos não associativos surgiu naturalmente. Alguns problemas foram carregados da teoria de grupos e outros surgiram naturalmente devido a falta de associatividade do conjunto que está agindo sobre. Neste sentido, este capítulo visa discutir alguns resultados clássicos da teoria das ações parciais de grupos transpostos para os I.P. loops.

Assim, como no caso das ações de I.P. loop, o caso parcial terá uma versão de ações fracas e outra de ações fortes. Este capítulo foi dividido em duas seções, a primeira irá introduzir o conceito e apresentar alguns resultados sobre ações parciais fracas de I.P. loop, além de trazer a discussão sobre a propriedade alternativa do skew anel parcial fraco de I.P. loop. A segunda seção irá apresentar o conceito de ação parcial forte de I.P. loop, alguns resultados e uma discussão sobre a propriedade alternativa do skew anel parcial forte de I.P. loop.

3.1 Ações Parciais Fracas de I.P. Loop e Skew Anel Parcial Fraco

Nesta seção iremos abordar a definição de ação parcial fraca de I.P. loop, alguns resultados referentes a essas ações e discutiremos a questão da alternatividade do skew anel parcial fraco.

Definição 3.1. Sejam L um I.P. loop e X um conjunto não vazio. Uma ação parcial fraca α do I.P. loop L em X é uma coleção de subconjuntos $D_l \subseteq X$, com $l \in L$, e de bijeções $\alpha_l : D_{l^{-1}} \to D_l$ tais que:

(i) $D_e = X$;

(ii) $\alpha_e = Id_X$;

(iii) Para quaisquer $h \in Nuc(L)$ e $l \in L$ temos que

a) $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{(lh)^{-1}}$;

b) $(\alpha_l \circ \alpha_h)(x) = \alpha_{lh}(x)$, para qualquer $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}})$.

Notemos que, quando $Nuc(L) = L$, L é um grupo e portanto, a definição coincide com a definição de ação parcial de grupo apresentada em [9] e [12]. Cabe destacar que, caso o conjunto X tenha uma estrutura de anel é necessário impor algumas condições sobre os D_l e os α_l. Nesta situação, como é de se esperar, é necessário que os D_l sejam ideais e os α_l sejam isomorfismos. Alguns resultados imediatos da definição, amplamente utilizados na teoria das ações parciais de grupos, podem ser adaptados para as ações parciais fracas de I.P. loop, conforme mostra o seguinte lema.

Lema 3.2. *Sejam L um I.P. loop, X um conjunto e $\alpha := (\alpha_l, D_l)$, com $l \in L$, uma ação parcial fraca de I.P. loop, então temos que:*

a) $\alpha_h^{-1} = \alpha_{h^{-1}}$, *para qualquer* $h \in Nuc(L)$;

b) $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{(lh)^{-1}}$ *é equivalente a* $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}}) = D_h \cap D_{l^{-1}}$, *para quaisquer* $h \in Nuc(L)$ *e* $l \in L$.

Demonstração. Para provar o item a), basta tomarmos $x \in D_h$, com $h \in Nuc(L)$ e observar que $D_h = \alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}}) = \alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}})$ e segue que podemos usar o Axioma (iii) b) da Definição 3.1 e temos que $(\alpha_h \circ \alpha_{h^{-1}})(x) = \alpha_{hh^{-1}}(x) = id_{D_h}(x)$. Como $(\alpha_h \circ \alpha_h^{-1})(x) = id_{D_h}(x)$ e como as α_h são bijeções temos que $\alpha_{h^{-1}}(x) = \alpha_h^{-1}(x)$, para quaisquer $x \in D_h$. Logo, $\alpha_{h^{-1}} = \alpha_h^{-1}$, para quaisquer $h \in Nuc(L)$.

Para o item b) primeiro vamos mostrar que se $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{(lh)^{-1}}$, então $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}}) = D_h \cap D_{l^{-1}}$, para quaisquer $h \in Nuc(L)$ e $l \in L$. De fato, se vale $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{(lh)^{-1}}$, então como α_h^{-1} é uma bijeção de D_h em $D_{h^{-1}}$ temos que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}}$ segue que

$$\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}} \tag{3.1}$$

Para a inclusão " $\subseteq$ " vamos usar a Equação (3.1) fazendo $h = h^{-1}$ e $l = lh$. Então, temos $\alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}}) \subseteq D_{(h^{-1})^{-1}} \cap D_{((lh)h^{-1})^{-1}}$, pelo fato que L é um I.P. loop temos que, $(lh)h^{-1} = l$, e utilizando o item a) deste lema, isto é, $\alpha_{h^{-1}}^{-1} = \alpha_{(h^{-1})^{-1}} = \alpha_h$, temos que essa inclusão é equivalente a $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}}) \subseteq D_h \cap D_{l^{-1}}$. Para a inclusão reversa basta aplicarmos α_h em ambos os lados da Equação (3.1) e teremos que $\alpha_h(\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}})) \subseteq \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}})$ e portanto, $D_h \cap D_{l^{-1}} \subseteq \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}})$.

Resta mostrarmos a implicação reversa. Suponha que $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}}) = D_h \cap D_{l^{-1}}$, para quaisquer $h \in Nuc(L)$ e $l \in L$. Se aplicarmos α_h^{-1} em ambos os lados da equação, temos que $\alpha_h^{-1}(\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}})) = \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}})$, ou equivalentemente, $D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}} = \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}})$ e consequentemente, temos que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}} \subseteq D_{(lh)^{-1}}$. $\square$

Agora traremos alguns exemplos de ações parciais fracas de I.P. loop sobre anéis finitamente gerados onde os símbolos e_i, com $i \in \mathbb{N}$, são idempotentes centrais e ortogonais.

Exemplo 3.3. Sejam $R = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3$ e L o I.P. loop descrito no exemplo 1.8, cujo $Nuc(L) = \{1\}$. Vamos definir uma ação parcial fraca de L sobre R da seguinte forma, considere os seguintes ideais $D_1 = R$, $D_2 = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2$, $D_3 = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2$, $D_4 = \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3$, $D_5 = \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3$, $D_6 = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_3$, $D_7 = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_3$ e os isomorfismos $\alpha_1 = Id_R$ e α_i, com $2 \leq i \leq 7$, descritos na tabela abaixo e estendidos por linearidade:

$\alpha_2 : D_3 \to D_2$ $e_1 \mapsto e_2$ $e_2 \mapsto e_1$	$\alpha_3 : D_2 \to D_3$ $e_1 \mapsto e_2$ $e_2 \mapsto e_1$	$\alpha_4 : D_5 \to D_4$ $e_2 \mapsto e_3$ $e_3 \mapsto e_2$
$\alpha_5 : D_4 \to D_5$ $e_2 \mapsto e_3$ $e_3 \mapsto e_2$	$\alpha_6 : D_7 \to D_6$ $e_1 \mapsto e_3$ $e_3 \mapsto e_1$	$\alpha_7 : D_6 \to D_7$ $e_1 \mapsto e_3$ $e_3 \mapsto e_1$

Notemos que os dois primeiros itens da Definição 3.10 são satisfeitos pois $D_1 = R$ e $\alpha_1 = Id_R$. Já para o item (iii), o subitem b) é trivialmente satisfeito pois $Nuc(L) = \{1\}$ e então resta mostrarmos o subitem a), para isto calculamos manualmente todas as interseções $D_h \cap D_{g^{-1}}$, aplicamos α_h^{-1} e comparamos com $D_{h^{-1}g^{-1}}$, conforme segue:

$\alpha_2^{-1}(D_2 \cap D_3) = D_2 = D_{3.3}$	$\alpha_5^{-1}(D_5 \cap D_2) = \mathbb{K}e_3 \subseteq D_7 = D_{4.2}$
$\alpha_2^{-1}(D_2 \cap D_4) = \mathbb{K}e_1 \subseteq D_7 = D_{3.4}$	$\alpha_5^{-1}(D_5 \cap D_3) = \mathbb{K}e_3 \subseteq D_6 = D_{4.3}$
$\alpha_2^{-1}(D_2 \cap D_5) = \mathbb{K}e_1 \subseteq D_6 = D_{3.5}$	$\alpha_5^{-1}(D_5 \cap D_4) = D_4 = D_5 = D_{4.5}$
$\alpha_2^{-1}(D_2 \cap D_6) = \mathbb{K}e_2 \subseteq D_4 = D_{3.6}$	$\alpha_5^{-1}(D_5 \cap D_6) = \mathbb{K}e_2 \subseteq D_2 = D_{4.6}$
$\alpha_2^{-1}(D_2 \cap D_7) = \mathbb{K}e_2 \subseteq D_5 = D_{3.7}$	$\alpha_5^{-1}(D_5 \cap D_7) = \mathbb{K}e_2 \subseteq D_3 = D_{4.7}$
$\alpha_3^{-1}(D_3 \cap D_2) = D_2 = D_3 = D_{2.2}$	$\alpha_6^{-1}(D_6 \cap D_2) = \mathbb{K}e_2 \subseteq D_5 = D_{7.2}$
$\alpha_3^{-1}(D_3 \cap D_4) = \mathbb{K}e_1 \subseteq D_6 = D_{2.4}$	$\alpha_6^{-1}(D_6 \cap D_3) = \mathbb{K}e_2 \subseteq D_4 = D_{7.3}$
$\alpha_3^{-1}(D_3 \cap D_5) = \mathbb{K}e_1 \subseteq D_7 = D_{2.5}$	$\alpha_6^{-1}(D_6 \cap D_4) = \mathbb{K}e_1 \subseteq D_2 = D_{7.4}$
$\alpha_3^{-1}(D_3 \cap D_6) = \mathbb{K}e_2 \subseteq D_5 = D_{2.6}$	$\alpha_6^{-1}(D_6 \cap D_5) = \mathbb{K}e_1 \subseteq D_3 = D_{7.5}$
$\alpha_3^{-1}(D_3 \cap D_7) = \mathbb{K}e_2 \subseteq D_4 = D_{2.7}$	$\alpha_6^{-1}(D_6 \cap D_7) = D_6 = D_{7.6}$
$\alpha_4^{-1}(D_4 \cap D_2) = \mathbb{K}e_3 \subseteq D_6 = D_{5.2}$	$\alpha_7^{-1}(D_7 \cap D_2) = \mathbb{K}e_2 \subseteq D_4 = D_{6.2}$
$\alpha_4^{-1}(D_4 \cap D_3) = \mathbb{K}e_3 \subseteq D_7 = D_{5.3}$	$\alpha_7^{-1}(D_7 \cap D_3) = \mathbb{K}e_2 \subseteq D_5 = D_{6.3}$
$\alpha_4^{-1}(D_4 \cap D_5) = D_4 = D_{5.4}$	$\alpha_7^{-1}(D_7 \cap D_4) = \mathbb{K}e_1 \subseteq D_3 = D_{6.4}$
$\alpha_4^{-1}(D_4 \cap D_6) = \mathbb{K}e_2 \subseteq D_3 = D_{5.6}$	$\alpha_7^{-1}(D_7 \cap D_5) = \mathbb{K}e_1 \subseteq D_2 = D_{6.5}$
$\alpha_4^{-1}(D_4 \cap D_7) = \mathbb{K}e_2 \subseteq D_2 = D_{5.7}$	$\alpha_7^{-1}(D_7 \cap D_6) = D_6 = D_7 = D_{6.7}$

Portanto, fica provado que α é uma ação parcial fraca de I.P. loop.

Dentre os exemplos de ações parciais de grupos, um exemplo interessante é a ação parcial induzida por uma ação global. Em [4], os autores constroem esse caso para as álgebras de Hopf. O seguinte exemplo vem nessa direção para o caso das ações parciais fracas de I.P. loops, isto é, dada uma ação fraca de I.P. loop β, vamos considerar os ideais $D_l = A \cap \beta_l(A)$ e $\alpha_l = \beta_l|_{D_{l^{-1}}}$.

Exemplo 3.4. Considere a ação fraca do I.P. loop L sobre o anel R descrita no Exemplo 2.7. A partir dessa ação fraca, vamos considerar o ideal $A = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3 \subseteq R$, $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = A$ e $D_6 = D_7 = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_3$ e, seguindo a tábua de Cayley de L, $D_{2^{-1}} = D_3$, $D_{4^{-1}} = D_5$ e $D_{6^{-1}} = D_7$. Agora vamos definir as bijeções α_l, para todo $l \in L$. Como $\alpha_1 = id_A$, resta definir para os outros elementos de L, assim sendo temos,

$\alpha_2 : D_3 \to D_2$ $e_1 \mapsto e_2$ $e_2 \mapsto e_1$ $e_3 \mapsto e_3$	$\alpha_3 : D_2 \to D_3$ $e_1 \mapsto e_1$ $e_2 \mapsto e_3$ $e_3 \mapsto e_2$	$\alpha_4 : D_5 \to D_4$ $e_1 \mapsto e_1$ $e_2 \mapsto e_3$ $e_3 \mapsto e_2$
$\alpha_5 : D_4 \to D_5$ $e_1 \mapsto e_3$ $e_2 \mapsto e_2$ $e_3 \mapsto e_1$	$\alpha_6 : D_7 \to D_6$ $e_1 \mapsto e_3$ $e_3 \mapsto e_1$	$\alpha_7 : D_6 \to D_7$ $e_1 \mapsto e_1$ $e_3 \mapsto e_3$

Assim, ao definirmos $\alpha = (\alpha_l, D_l)$ temos que os dois primeiros axiomas são satisfeitos e o terceiro é trivialmente satisfeito, pois, $Nuc(L) = \{1\}$. Cabe destacar nesse exemplo que, $\alpha_2 \circ \alpha_3(e_2) = \alpha_2(e_3) = e_3$ e $\alpha_{(2.3)}(e_2) = \alpha_1(e_2) = e_2$ e portanto, α não é uma ação parcial de grupo.

Na teoria das ações parciais de grupos, a partir de uma ação de grupos, é sempre possível construir uma ação parcial de grupos induzida pela ação de grupos, fazendo exatamente $D_l = A \cap \beta_l(A)$ e $\alpha_l = \beta_l|_{D_{l^{-1}}}$. Porém, no caso das ações fracas de I.P. loops, como podemos ver no exemplo a seguir, nem sempre é possível, construir a ação parcial fraca induzida.

Exemplo 3.5. Vamos considerar a seguinte ação fraca do I.P. loop L do Exemplo 1.8 no anel $R = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3 \oplus \mathbb{K}e_4$.

β'	1	2	3	4	5	6	7
e_1	e_1	e_2	e_1	e_2	e_1	e_1	e_1
e_2	e_2	e_1	e_3	e_3	e_3	e_3	e_4
e_3	e_3	e_3	e_2	e_1	e_2	e_4	e_3
e_4	e_4	e_4	e_4	e_4	e_4	e_2	e_2

Assim, como no Exemplo 2.7, β' também é uma ação fraca do I.P. loop L em R, pelos mesmos motivos do Exemplo 2.7. Porém, neste caso, ao considerarmos o ideal $A = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3 \subseteq R$ e tentarmos definir a ação parcial induzida fazendo $D_l = A \cap \beta_l(A)$ e $\alpha_l = \beta_l|_{D_{l^{-1}}}$ temos que, apesar de $D_6 = D_7 = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_3$, acontece que $\alpha_6(e_3) = \beta'_6(e_3) = e_4 \notin D_6$. Portanto, α_6 não fica bem definida em todos os elementos de seu domínio.

Existem também situações em que, após construir os ideais D_l, com $l \in L$, não é possível construir as bijeções α_l, devido a diferença da dimensão dos ideais, como vemos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.6. Vamos considerar a seguinte ação fraca do I.P. loop L do Exemplo 1.8 no anel $R = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3 \oplus \mathbb{K}e_4$.

β''	1	2	3	4	5	6	7
e_1	e_1	e_2	e_1	e_1	e_1	e_1	e_1
e_2	e_2	e_1	e_3	e_4	e_3	e_3	e_4
e_3	e_3	e_3	e_2	e_3	e_2	e_4	e_3
e_4	e_4	e_4	e_4	e_2	e_4	e_2	e_2

Neste caso, ao considerarmos o ideal $A = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3 \subseteq R$ e tentarmos definir os D_l, com $l \in L$, de forma induzida teremos que $D_4 = A \cap \beta''_4(A) = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_3$ mas $D_5 = A$ e portanto, não é possível construir as bijeções entre D_4 e D_5, visto que $4^{-1} = 5$.

Então, é natural nos perguntarmos quais as condições sobre uma ação fraca de I.P. loop β que propiciem que seja sempre possível induzir uma ação parcial fraca de I.P. loop. Sabemos que o fato de β ser um homomorfismo de grupos garante uma condição que permite essa construção, porém existem condições mais fracas que essa, que também permitem essa construção, como podemos ver no seguinte resultado.

Proposição 3.7. *Sejam L um I.P. loop, R um anel finitamente gerado, A um ideal de R e $\beta : L \to Aut(R)$ uma ação fraca de I.P. loop tal que, para quaisquer $l \in L$, $\beta_l(A)$ é um ideal de A, $\beta_l \circ \beta_{l^{-1}}(A) \subseteq A$ e $\beta_{l^{-1}} \circ \beta_l(A) \subseteq A$, para todo $l \in L$. Então, podemos induzir uma ação parcial fraca do I.P. loop L em A dada por $\alpha = (\alpha_l, D_l)$ onde $D_l = \beta_l(A) \cap A$ e $\alpha_l = \beta_l|_{D_{l^{-1}}}$, para todo $l \in L$.*

Demonstração. Primeiramente, notemos que como D_l é uma interseção de ideais de A, ele próprio é um ideal de A. Agora, as funções $\alpha_l : D_{l^{-1}} \to D_l$ estão bem definidas pois, $\alpha_l(\beta_{l^{-1}}(A)) = \beta_l(\beta_{l^{-1}}(A)) \subseteq A$ e segue que $\alpha_l(D_{l^{-1}}) \subseteq \beta_l(A) \cap A = D_l$ e como β_l são bijeções, α_l acabam por ser bijeções, pois R é finitamente gerado. Resta mostrar que α satisfaz os Axiomas da Definição 3.1. De fato, $D_e = \beta_e(A) \cap A$ e como $\beta_e = id$, pelo Axioma (i) da Definição 2.1, temos que $D_e = A$ e consequentemente, temos $\alpha_e = \beta_e|_{D_e} = \beta_e|_A = id_A$, e os Axiomas (i) e (ii) da Definição 3.1 são satisfeitos.

Agora, seja $h \in Nuc(L)$ e tome $x \in D_h \cap D_{l^{-1}}$, isto é, $x \in A \cap \beta_h(A) \cap \beta_{l^{-1}}(A)$. Então, existe $y \in A$ tal que $\beta_{l^{-1}}(y) = x$. Como $x \in D_h$, temos que $\alpha_{h^{-1}}(x) = \alpha_{h^{-1}}(\beta_{l^{-1}}(y)) = \beta_{h^{-1}}(\beta_{l^{-1}}(y))$. Pelo fato que $h \in Nuc(L)$ e β ser uma ação fraca de I.P. loop, temos que $\beta_{h^{-1}}(\beta_{l^{-1}}(y)) = \beta_{h^{-1}l^{-1}}(y)$. Assim, $\alpha_{h^{-1}}(x) = \beta_{h^{-1}l^{-1}}(y)$ e segue que $\alpha_{h^{-1}}(x) \in \beta_{h^{-1}l^{-1}}(A)$. Como $\alpha_{h^{-1}}(x) \in D_{h^{-1}} \subseteq A$, então $\alpha_{h^{-1}}(x) \in A \cap \beta_{h^{-1}l^{-1}}(A) = D_{h^{-1}l^{-1}}$. Logo $\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}l^{-1}}$ e o Axioma (iii) a) é satisfeito.

Por fim, para quaisquer $x \in \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{l^{-1}})$, $l \in L$ e $h \in Nuc(L)$ temos que $\alpha_l \circ \alpha_h(x) = \beta_l \circ \beta_h(x) = \beta_{lh}(x)$, pois $h \in Nuc(L)$ e β é uma ação fraca de I.P. loop. Assim, devido a (iii) a), $\alpha_l \circ \alpha_h(x) = \beta_{lh}(x) = \beta_{lh}|_{D_{h^{-1}l^{-1}}}(x) = \alpha_{lh}$ e fica provado o Axioma (iii) b). $\square$

Com este resultado ficam definidas algumas condições para que seja possível induzir a ação parcial fraca de I.P. loop a partir de um ação fraca de I.P. loop em anéis finitamente gerados. Retomaremos essas discussão em um capítulo mais adiante quando tratarmos as questões referentes a globalização das ações parciais.

Assim, como no caso das ações fracas de I.P. loop, que chamaremos em algumas situações, de ações fracas globais de I.P. loops, é possível o construir um skew anel. Como agora a ação envolvida é uma ação parcial fraca, chamaremos esse skew anel de skew anel parcial fraco de I.P. loop.

Definição 3.8. Sejam R um anel, L um I.P. loop e $\alpha = (\alpha_l, D_l)$, com $l \in L$, uma ação parcial fraca do I.P. loop L em R. Definimos o skew anel parcial fraco de I.P. loop como sendo o conjunto das seguintes somas formais finitas, $R \rtimes_\alpha L = \{\sum_{l\in L} a_l\delta_l : a \in D_l\}$, onde a soma é feita da forma usual e o produto de $a\delta_l, b\delta_h \in R \rtimes_\alpha L$ é dado por $a\delta_l b\delta_h = \begin{cases} \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b)\delta_{lh}, \text{se } l \in Nuc(L) \\ 0, \text{se } l \notin Nuc(L) \end{cases}$ e estendido por linearidade.

Cabe destacar que na definição de skew anel parcial fraco de I.P. loop, o produto é definido desta forma para que esteja bem definido, pois quando $l \in Nuc(L)$ podemos concluir do item (iii) a) da Definição 3.1, fazendo $h^{-1} = l$ e $l^{-1} = h$, que $\alpha_l(D_{l^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{lh}$ e segue que o produto $a\delta_l b\delta_h = \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b)\delta_{lh} \in D_{lh}$. Porém, se $l \notin Nuc(L)$ não podemos garantir que esse produto irá pertencer ao ideal D_{lh} e por isso definimos o resultado do produto como sendo zero.

Como vimos na Definição 1.32, dado um anel R e um grupo G que age parcialmente em R sempre é possível construir o skew anel parcial de grupos, porém apenas em alguns casos ele é associativo. Como estamos em um contexto com I.P. loops é natural não estarmos interessados na associatividade desse skew anel parcial fraco, mas em sua alternatividade. Assim, como acontece com o caso do skew anel fraco de I.P. loops, podemos provar que o skew anel parcial fraco de I.P. loops é alternativo à esquerda, adicionando as condições necessárias para o skew anel parcial de grupo seja associativo utilizadas em [9], conforme o seguinte resultado.

Teorema 3.9. *Sejam R um anel, L um I.P. loop alternativo e α uma ação parcial fraca do I.P. loop L em R de tal forma que cada D_g seja (L,R)-associativo. Então, o skew anel parcial fraco de I.P. loops $R \rtimes_\alpha L$ é alternativo à esquerda.*

Demonstração. Sejam $a\delta_l, b\delta_h \in R \rtimes_\alpha L$. Se $l \notin Nuc(L)$, então dado qualquer $h \in L$ temos que $(a\delta_l a\delta_l)b\delta_h = 0b\delta_h = 0 = a\delta_l 0 = a\delta_l(a\delta_l b\delta_h)$. Nos resta provar o caso em que $l \in Nuc(L)$, nesta situação, dado qualquer $h \in L$ temos que

$$\begin{aligned}
(a\delta_l a\delta_l)b\delta_h &= \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)a)\delta_{ll}(b\delta_h)\\
&= \alpha_{ll}(\alpha_{l^{-1}l^{-1}}(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)a))b)\delta_{(ll)h}\\
&\overset{(*)}{=} \alpha_{ll}(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)a)))b)\delta_{(ll)h}\\
&\overset{(*)}{=} \alpha_{ll}(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}l}(\alpha_{l^{-1}}(a)a))b)\delta_{(ll)h}\\
&\overset{(**)}{=} \alpha_{ll}(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)a)b)\delta_{(ll)h}\\
&\overset{(*)}{=} \alpha_l(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)a)b))\delta_{(ll)h}
\end{aligned}$$

em $(*)$ usamos o fato de $l \in Nuc(L)$ para poder usar o Axioma (iii) b) da Definição 3.1. Além disso, em $(**)$ usamos o Axioma (ii) da mesma definição.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
a\delta_l(a\delta_l b\delta_h) &= a\delta_l \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b)\delta_{lh}\\
&= \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b))\delta_{l(lh)}.
\end{aligned}$$

Logo, $(a\delta_l a\delta_l)b\delta_h = a\delta_l(a\delta_l b\delta_h)$ é equivalente a

$$\alpha_l(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)a)b))\delta_{(ll)h} = \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b))\delta_{l(lh)},$$

como $l \in Nuc(L)$, isto equivale a

$$\alpha_l(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)a)b))\delta_{(ll)h} = \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b))\delta_{(ll)h},$$

que é o mesmo que

$$\alpha_l(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)a)b)) = \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b)),$$

aplicando α_l^{-1} em ambos os lados temos

$$\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)a)b) = \alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b). \tag{3.2}$$

Se escrevermos $\alpha_{l^{-1}}(a) = x \in D_{l^{-1}}$ podemos reescrever a Equação (3.2) como

$$\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(xa)b) = x\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b),$$

e o que nos resta é mostrar que

$$\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(xa)b) = x\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b).$$

Esta última igualdade pode ser reescrita, utilizando os operadores da álgebra de multiplicadores da Definição 1.33, como $(\alpha_l \circ R_b \circ \alpha_{l^{-1}} \circ L_x)(a) = (L_x \circ \alpha_l \circ R_b \circ \alpha_{l^{-1}})(a)$.

Como cada α_l é uma bijeção e R_b é um multiplicador à direita então, pela Proposição 1.37, $\alpha_l \circ R_b \circ \alpha_{l^{-1}}$ também é um multiplicador à direita e como cada D_l é (L, R)-associativo, para quaisquer $l \in L$, temos que $(\alpha_l \circ R_b \circ \alpha_{l^{-1}} \circ L_x)(a) = (L_x \circ \alpha_l \circ R_b \circ \alpha_{l^{-1}})(a)$ é válido, para quaisquer $a \in D_l$. Portanto, $R \rtimes_\alpha L$ é alternativo à esquerda. $\square$

3.2 Ações Parciais Fortes de I.P. Loop e Skew Anel Parcial Forte

Nesta seção, iremos abordar a definição de ação parcial forte de I.P. loop, alguns resultados referentes a essa ação e discutiremos a questão da alternatividade do skew anel parcial forte.

Definição 3.10. Sejam L um I.P. loop e X um conjunto não vazio. Uma ação parcial forte α do I.P. loop L em X é uma coleção de subconjuntos $D_l \subseteq X$ e bijeções $\alpha_l : D_{l^{-1}} \to D_l$ tais que:

(i) $D_e = X$;

(ii) $\alpha_e = id_X$;

(iii) Para quaisquer $l, h \in L$ temos que

a) $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{(lh)^{-1}}$;

b) $(\alpha_l \circ \alpha_h)(x) = \alpha_{lh}(x)$, para qualquer $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}})$.

Assim, como no caso das ações parciais fracas de I.P. loop, se X possuir uma estrutura de anel é necessário que cada D_l, para qualquer $l \in L$, seja um ideal e ainda que cada α_l, com $l \in L$, seja um isomorfismo.

Essa definição é análoga a que é utilizada para ação parcial de grupos, porém ao invés de um grupo estamos trabalhando com um I.P. loop L. Como já é de se esperar, algumas propriedades são mantidas, devido a definição ser a mesma, conforme segue.

Lema 3.11. *Sejam L um I.P. loop, X um conjunto não vazio e $\alpha := (\alpha_l, D_l)$, com $l \in L$, uma ação parcial forte de I.P. loops, então temos que:*

a) $\alpha_h^{-1} = \alpha_{h^{-1}}$, *para qualquer* $h \in L$;

b) $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{(lh)^{-1}}$ *é equivalente a* $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}}) = D_h \cap D_{l^{-1}}$, *para quaisquer* $h, l \in L$.

Demonstração. Para provar o item a), basta tomarmos $x \in D_h$, com $h \in L$ e observar que $D_h = \alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}}) = \alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}})$ e podemos usar o Axioma (iii) b) da Definição 3.10. Assim, $(\alpha_h \circ \alpha_{h^{-1}})(x) = \alpha_{hh^{-1}}(x) = id_{D_h}(x)$, porém $(\alpha_h \circ \alpha_h^{-1})(x) = id_{D_h}(x)$ e como as α_h são bijeções temos que $\alpha_{h^{-1}}(x) = \alpha_h^{-1}(x)$, para qualquer $x \in D_h$. Logo, $\alpha_{h^{-1}} = \alpha_h^{-1}$, para quaisquer $h \in L$.

Para o item b), primeiro vamos mostrar que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{(lh)^{-1}}$ implica $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}}) = D_h \cap D_{l^{-1}}$, para quaisquer $h, l \in L$.

De fato, por hipótese temos que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{(lh)^{-1}}$ então, como $\alpha_h^{-1} : D_h \to D_{h^{-1}}$ temos que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}}$ e segue que,

$$\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}} \tag{3.3}$$

Para a inclusão " $\subseteq$ " vamos usar a Equação (3.3) fazendo $h = h^{-1}$ e $l = lh$ e temos a seguinte inclusão

$$\alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}}) \subseteq D_{(h^{-1})^{-1}} \cap D_{((lh)h^{-1})^{-1}}$$

como L é um I.P. loop, $(lh)h^{-1} = l$, e utilizando o item a), temos que essa inclusão é equivalente a $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}}) \subseteq D_h \cap D_{l^{-1}}$.

Para a inclusão reversa basta aplicarmos α_h em ambos os lados da Equação (3.3) e teremos que $\alpha_h(\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}})) \subseteq \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}})$ e consequentemente $D_h \cap D_{l^{-1}} \subseteq \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}})$.

Por fim, resta mostrarmos a implicação no sentido contrário. Sendo assim, se $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}}) = D_h \cap D_{l^{-1}}$, para quaisquer $h, l \in L$ então, se aplicarmos α_h^{-1} em ambos os lados desta equação temos que

$$\alpha_h^{-1}(\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}})) = \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}})$$

ou equivalentemente, $D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}} = \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}})$. Portanto, temos que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}} \subseteq D_{(lh)^{-1}}$. $\square$

Proposição 3.12. *Sejam L um I.P. loop, R um anel, A um ideal de R e $\beta : L \to Aut(R)$ uma ação forte de I.P. loop. Então, podemos induzir uma ação parcial forte do I.P. loop L em A dada por $\alpha = (\alpha_l, D_l)$, onde $D_l = \beta_l(A) \cap A$ e $\alpha_l = \beta_l|_{D_{l^{-1}}}$, para todo $l \in L$.*

Demonstração. Inicialmente, notemos que como D_l é uma interseção de ideais de A, então ele próprio é um ideal de A. Agora as funções $\alpha_l : D_{l^{-1}} \to D_l$ estão bem definidas pelo item (ii) da Definição 2.14 e como β_l são bijeções, α_l acabam por ser bijeções. Resta mostrar que α satisfaz os Axiomas da Definição 3.10. De fato, $D_e = \beta_e(A) \cap A$ e como $\beta_e = id$, pelo Axioma (i) da Definição 2.14, temos que $D_e = A$. Consequentemente, temos que $\alpha_e = \beta_e|_{D_e} = \beta_e|_A = id_A$ e os Axiomas (i) e (ii) da Definição 3.10 são satisfeitos.

Agora, sejam $l, h \in L$ e seja $x \in D_h \cap D_{l^{-1}}$. Então temos que $x \in A \cap \beta_h(A) \cap \beta_{l^{-1}}(A)$ e segue que existe $y \in A$ tal que $\beta_{l^{-1}}(y) = x$. Como $x \in D_h$, temos que $\alpha_{h^{-1}}(x) = \alpha_{h^{-1}}(\beta_{l^{-1}}(y)) = \beta_{h^{-1}}(\beta_{l^{-1}}(y))$. Assim, $\beta_{h^{-1}}(\beta_{l^{-1}}(y)) = \beta_{h^{-1}l^{-1}}(y)$, pois β é uma ação forte de I.P. loops. Assim, $\alpha_{h^{-1}}(x) = \beta_{h^{-1}l^{-1}}(y)$ e consequentemente, $\alpha_{h^{-1}}(x) \in \beta_{h^{-1}l^{-1}}(A)$. Logo, $\alpha_{h^{-1}}(x) \in D_{h^{-1}} \subseteq A$ e temos que $\alpha_{h^{-1}}(x) \in A \cap \beta_{h^{-1}l^{-1}}(A) = D_{h^{-1}l^{-1}}$. Portanto, $\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{l^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}l^{-1}}$ e o Axioma (iii) a) é satisfeito.

Por fim, para quaisquer $x \in \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{l^{-1}})$, com $l, h \in L$ temos que $\alpha_l \circ \alpha_h(x) = \beta_l \circ \beta_h(x) = \beta_{lh}(x)$, pelo item (ii) da Definição 2.14. Assim, devido a (iii) a) da Definição 3.10 que acabamos de provar, $\alpha_l \circ \alpha_h(x) = \beta_{lh}(x) = \beta_{lh}|_{D_{h^{-1}l^{-1}}}(x) = \alpha_{lh}$ e fica provado o Axioma (iii) b). □

Esta proposição, assim como no caso das ações de grupos, nos permite construir exemplos de ações parciais fortes de I.P. loops a partir de ações fortes de I.P. loops conforme o seguinte exemplo.

Exemplo 3.13. Se considerarmos a ação forte de I.P. loop β descrita no Exemplo 2.17, podemos tomar o ideal $A = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_4 \subseteq R$ e construir a ação parcial forte induzida por β. Neste caso, teríamos que $D_1 = A$, $D_2 = \{e_1, e_4\}$, $D_3 = \{e_2, e_4\}$, $D_4 = \{e_1, e_4\}$, $D_5 = \{e_2, e_4\}$, $D_6 = A$, $D_7 = A$, $D_8 = \{e_2, e_4\}$ e $D_9 = \{e_1, e_4\}$ e as bijeções α_i, com $1 \leq i \leq 9$, descritas pela tábua abaixo e estendidas por linearidade.

$\alpha_1 : A \to A$ $e_1 \mapsto e_1$ $e_2 \mapsto e_2$ $e_4 \mapsto e_4$	$\alpha_6 : A \to A$ $e_1 \mapsto e_1$ $e_2 \mapsto e_2$ $e_4 \mapsto e_4$	$\alpha_7 : A \to A$ $e_1 \mapsto e_1$ $e_2 \mapsto e_2$ $e_3 \mapsto e_4$
$\alpha_2 : D_3 \to D_2$ $e_2 \mapsto e_1$ $e_4 \mapsto e_4$	$\alpha_4 : D_8 \to D_4$ $e_2 \mapsto e_1$ $e_4 \mapsto e_4$	$\alpha_9 : D_5 \to D_9$ $e_2 \mapsto e_1$ $e_4 \mapsto e_4$
$\alpha_3 : D_2 \to D_3$ $e_1 \mapsto e_2$ $e_4 \mapsto e_4$	$\alpha_5 : D_9 \to D_5$ $e_1 \mapsto e_2$ $e_4 \mapsto e_4$	$\alpha_8 : D_4 \to D_8$ $e_1 \mapsto e_2$ $e_4 \mapsto e_4$

Assim, como fizemos para as ações parciais fracas de I.P. loop, vamos estudar o skew anel parcial, porém utilizando a ação parcial forte de I.P. loops ao invés da ação parcial fraca de I.P. loops.

Definição 3.14. Sejam R um anel, L um I.P. loop e $\alpha = (\alpha_l, D_l)$, com $l \in L$, uma ação parcial forte do I.P. loop L em R. Definimos o skew anel parcial forte de I.P. loop como sendo o conjunto das somas formais finitas, isto é, $R \rtimes_\alpha L = \{\sum_{l \in L} a_l \delta_l : a_l \in D_l\}$, onde a soma é feita da forma usual e o produto de $al, bh \in R \rtimes_\alpha L$ é dado por $a\delta_l b\delta_h = \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b)\delta_{lh}$ e estendido por linearidade.

Diferentemente do caso do skew anel parcial fraco de I.P. loops, no caso da ação parcial forte o produto está bem definido para todos os ideais D_l, com $l \in L$, pois o axioma $\alpha_l(D_{l^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{lh}$ é válido para todos os elementos de L e não apenas para os elementos do $Nuc(L)$. Cabe ainda destacar que se o I.P. loop L for alternativo então, seu skew anel parcial forte também será, quando cada D_l for (L, R)-associativo, conforme seguinte resultado.

Proposição 3.15. *Sejam R um anel, L um I.P. loop alternativo e $\alpha = (\alpha_l, D_l)$, com $l \in L$, uma ação parcial forte do I.P. loop L em R de tal forma que cada D_l, com $l \in L$, seja (L, R)-associativo, então o skew anel parcial forte de I.P. loop $R \rtimes_\alpha L$ é um anel alternativo.*

Demonstração. Vamos começar mostrando que $R \rtimes_\alpha L$ é alternativo à esquerda. De fato, sejam $a\delta_l, b\delta_h \in R \rtimes_\alpha L$. Então, por um lado temos que

$$a\delta_l(a\delta_l b\delta_h) = a\delta_l\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b)\delta_{lh} = \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b))\delta_{l(lh)}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}(a\delta_l a\delta_l)b\delta_h &= \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)a)\delta_{ll}b\delta_h \\ &= \alpha_{ll}(\alpha_{l^{-1}l^{-1}}(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)a))b)\delta_{(ll)h} \\ &\overset{(*)}{=} \alpha_{ll}(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)a)))b)\delta_{(ll)h} \\ &= \alpha_{ll}(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)a)b)\delta_{(ll)h}\end{aligned}$$

em $(*)$ utilizamos o item $b)$ do Axioma (iii) da Definição 3.10.

Assim, temos que a equação $(a\delta_l a\delta_l)b\delta_h = a\delta_l(a\delta_l b\delta_h)$ é equivalente a equação

$$\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b))\delta_{l(lh)} = \alpha_{ll}(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)a)b)\delta_{(ll)h},$$

Como L é alternativo, isto é o mesmo que

$$\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b)) = \alpha_{ll}(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)a)b). \tag{3.4}$$

Agora, aplicando $\alpha_{l^{-1}}$ em ambos os lados da Equação (3.4) temos que

$$\alpha_{l^{-1}}(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b))) = \alpha_{l^{-1}}(\alpha_{ll}(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)a)b))$$

e novamente pelo item $b)$ do Axioma (iii) da Definição 3.10 podemos reescrever esta última equação como

$$\alpha_{l^{-1}}(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b))) = \alpha_{l^{-1}}(\alpha_l(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)a)b)))$$

ou equivalentemente temos

$$\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b) = \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)a)b). \tag{3.5}$$

Fazendo a substituição $\alpha_{l^{-1}}(a) = x$ na Equação (3.6) podemos reescrevê-la como $\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(xa)b) = x\alpha(\alpha_{l^{-1}}(a)b)$, que em termos de álgebra de multiplicadores pode ser reescrita como $(\alpha_l \circ R_b \circ \alpha_{l^{-1}} \circ L_x)(a) = (R_x \circ \alpha_l \circ R_b \circ \alpha_{l^{-1}})(a)$. Esta igualdade decorre da Proposição 1.37 visto que α_l são isomorfismos e cada D_l é (L, R)-associativo, para qualquer $l \in L$.

A propriedade de $R \rtimes_\alpha L$ ser alternativo à direita se dá de forma análoga ao caso alternativo à esquerda, com as devidas adaptações. Dados $a\delta_l, b\delta_h \in R \rtimes_\alpha L$, então por um lado temos que

$$a\delta_l(b\delta_h b\delta_h) = a\delta_l\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(b)b)\delta_{hh} = \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(b)b))\delta_{l(hh)}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
(a\delta_l b\delta_h)b\delta_h &= \alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b)\delta_{lh}b\delta_h \\
&= \alpha_{lh}(\alpha_{(lh)^{-1}}(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b))b)\delta_{(lh)h} \\
&= \alpha_{lh}(\alpha_{h^{-1}l^{-1}}(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b))b)\delta_{(lh)h} \\
&\overset{(*)}{=} \alpha_{lh}(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b)))b)\delta_{(lh)h} \\
&= \alpha_{lh}(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)b)b)\delta_{(lh)h}
\end{aligned}$$

em $(*)$ utilizamos o item $b)$ do Axioma (iii) da Definição 3.10, pois, $b \in D_h$ e $\alpha_{l^{-1}}(a) \in D_{l^{-1}}$. Logo, $\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)b) \in \alpha_l(D_{l^{-1}} \cap D_h) = \alpha_{l^{-1}}^{-1}(D_{l^{-1}} \cap D_{(h^{-1})^{-1}})$.

Assim, a equação $a\delta_l(b\delta_h b\delta_h) = (a\delta_l b\delta_h)b\delta_h$ é equivalente a equação

$$\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(b)b))\delta_{l(hh)} = \alpha_{lh}(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)b)b)\delta_{(lh)h},$$

como L é alternativo, então $(lh)h = l(hh)$ e nos resta mostrar que

$$\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(b)b)) = \alpha_{lh}(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)b)b). \tag{3.6}$$

Para isto, basta aplicarmos novamente $\alpha_{l^{-1}}$ em ambos os lados da Equação (3.6) e teremos que

$$\alpha_{l^{-1}}(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(b)b))) = \alpha_{l^{-1}}(\alpha_{lh}(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)b)b)).$$

Agora, como $b \in D_h$ e $\alpha_{l^{-1}}(a) \in D_{l^{-1}}$, então $\alpha_{h^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)b) \in \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{l^{-1}}) = \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{l^{-1}})$ e pelo item $b)$ do Axioma (iii) da Definição 3.10 podemos reescrever a equação anterior como

$$\alpha_{l^{-1}}(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(b)b))) = \alpha_{l^{-1}}(\alpha_l(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)b)b))),$$

ou equivalentemente,

$$\alpha_{l^{-1}}(a)\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(b)b) = \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_{l^{-1}}(a)b)b)$$

Se considerarmos, $\alpha_{l^{-1}}(a) = x$, podemos reescrever a última igualdade como $x\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(b)b) = \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(xb)b)$. Utilizando a notação da álgebra de multiplicadores temos que esta última igualdade é equivalente a $(L_x \circ \alpha_h \circ R_b \circ \alpha_{h^{-1}})(b) = (\alpha_h \circ R_b \circ \alpha_{h^{-1}} \circ R_x)(b)$. Essa igualdade decorre da Proposição 1.37, visto que α_l são isomorfismos e cada D_l é (L, R)-associativo, para qualquer $l \in L$. Concluímos então que $R \rtimes_\alpha L$ também é alternativo à direita e portanto, é alternativo. $\square$

Capítulo 4

Alguns Resultados sobre Ações Parciais de I.P. Loops

Neste capítulo, vamos apresentar alguns resultados sobre ações parciais fortes e fracas de I.P. loop. Muitos desses resultados são provenientes da teoria das ações parciais de grupos e foram adaptados para o caso não associativo. Em alguns casos, essas adaptações exigiram algumas restrições mais fortes do que as utilizadas nos casos de grupos. Este capítulo está dividido em duas seções: na primeira seção, traremos alguns resultados sobre a existência da envolvente de uma ação parcial de I.P. loop no caso forte e no caso fraco, onde no segundo caso é necessário impor algumas relações mais fortes sobre o anel base. A segunda seção foi dividida em duas subseções, na primeira subseção vamos construir um magma com inverso a partir de um I.P. loop e na segunda subseção vamos estabelecer uma relação de um para um entre as ações parciais fortes de I.P. loop e este magma com inverso.

4.1 Ações Envolventes

Nesta seção, vamos desenvolver a questão da ação envolvente de uma ação parcial de I.P. loop em ambos os casos, no caso forte e fraco. No caso forte, podemos ver que é muito análogo ao que é feito na teoria de grupos em [9], porém no caso fraco, foi necessário fazer algumas restrições mais fortes, baseadas principalmente nos trabalhos de [14], [6],[20].

Definição 4.1. Sejam L um I.P. loop, R e A anéis, α uma ação parcial fraca (ou forte) do I.P. loop de L em R. Dizemos que a ação fraca de I.P. loop β de L em A é uma ação envolvente para α, se existir um isomorfismo de anéis $\phi : R \to \phi(R) \subseteq A$ tal que, para todo $l \in L$ temos:

(i) $\phi(D_l) = \phi(R) \cap \beta_l(\phi(R))$;

(ii) $\phi \circ \alpha_l(x) = \beta_l \circ \phi(x)$, para qualquer $x \in D_{l^{-1}}$;

(iii) A é gerado pela $\bigcup_{l \in L} \beta_l(\phi(R))$;

(iv) $\phi(R)$ é um ideal de A.

Assim como na teoria das ações parciais de grupo, pelo fato de L ser um I.P. loop, temos um resultado análogo sobre a existência da ação envolvente para o caso das ações parciais fortes e com as mesmas condições impostas para as ações parciais de grupos. Antes de enunciarmos o resultado, vamos provar alguns lemas que irão nos auxiliar na demonstração do resultado principal.

Lema 4.2. *Sejam L um I.P. loop, R um anel unitário tal que cada ideal D_l, com $l \in L$, seja unitário com unidade denotada por 1_l, isto é, $D_l = 1_l R$ e ainda $\alpha = (\alpha_l, D_l)$ uma ação parcial forte do I.P. loop L em R. Então $1_l 1_h$ é a unidade de $D_l \cap D_h$ e ainda $\alpha_h(1_{h^{-1}} 1_l) = 1_h 1_{hl}$.*

Demonstração. Seja $r \in D_l \cap D_h$. Então temos que $r1_l1_h = r1_h = r = 1_lr = 1_l1_hr$. Logo, 1_l1_h é a unidade de $D_l \cap D_h$. Agora sejam $h, l \in L$. Pelo fato de α ser uma ação parcial forte de I.P. loops temos, pelo item b) do Lema 3.11 que $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(lh)^{-1}}) = D_h \cap D_{l^{-1}}$. Pelo que provamos no item a) a respeito da unidade da interseção, temos que $\alpha_h(1_{h^{-1}}1_{(lh)^{-1}}) = 1_h1_{l^{-1}}$. Se tomarmos $l^{-1} = hl$ e utilizarmos a hipótese que L é um I. P. loop temos que $\alpha_h(1_{h^{-1}}1_{h^{-1}(hl)}) = 1_h1_{(hl)}$, ou equivalentemente, $\alpha_h(1_{h^{-1}}1_l) = 1_h1_{hl}$. $\square$

Agora nos resta ver quais as condições para que a ação parcial forte de I.P. loop possua ação envolvente. Veremos, no seguinte resultado, que mantidas as mesmas condições para as ações parciais de grupos é possível construir a ação envolvente do caso forte. Antes de enunciarmos o teorema é importante destacar algumas notações: denotaremos a álgebra das funções de L em R, onde L é um I.P. loop e R é um anel, por $\mathcal{F} = \{f : L \to R |\ f$ é uma função$\}$ o anel das funções e denotaremos $f|_l = f(l)$, para quaisquer $f \in \mathcal{F}$ e $l \in L$.

Teorema 4.3. *Sejam L um I.P loop e R um anel unitário. Então, a ação parcial forte α do I.P. loop L em R admite uma ação fraca de I.P. loop envolvente β se cada ideal D_l, com $l \in L$, também for um anel unitário.*

Demonstração. Vamos começar definindo a seguinte ação:

$$\begin{array}{rcl} \beta : L & \to & Aut(\mathcal{F}) \\ l & \mapsto & \beta_l : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ & & \qquad f \mapsto \beta_l(f) : L \to R \\ & & \qquad\qquad h \mapsto \beta_l(f)|_h = f(l^{-1}h). \end{array}$$

Primeiro, vamos mostrar que β está bem definida, isto é, β_l é um automorfismo, para qualquer $l \in L$. De fato, sejam $f, g \in \mathcal{F}$. Então, para quaisquer $l, h \in L$, $\beta_l(f+g)|_h = (f+g)(l^{-1}h) = f(l^{-1}h) + g(l^{-1}h) = \beta_l(f)|_h + \beta_l(g)|_h$ e também $\beta_l(fg)|_h = (fg)(l^{-1}h) = f(l^{-1}h)g(l^{-1}h) = \beta_l(f)|_h\beta_l(g)|_h$, e segue que β_l é um homomorfismo de anéis. Agora, se $\beta_l(f) = \beta_l(g)$, então para todo $h \in L$, $\beta_l(f)|_h = \beta_l(g)|_h$, ou equivalentemente, $f(l^{-1}h) = g(l^{-1}h)$, tomando $z = l^{-1}h$ temos que $f(z) = g(z)$, para todo $z \in L$ e com isso, $f = g$ e β_l é injetiva. Para mostrar que é sobrejetiva, seja $f \in \mathcal{F}$. Então, se e é o elemento neutro de L, temos que $\beta_e(f)|_h = f(e^{-1}h) = f(h)$, para todo $h \in L$ e assim, $f \in Im(\beta_l)$.

Agora, vamos mostrar que β define uma ação fraca do I.P. loop L em $\mathcal{F}$. Se $e \in L$ denota o elemento neutro de L, então $\beta_e(f)|_h = f(eh) = f(h)$, para todo $f \in \mathcal{F}$ e $h \in L$ e segue que, $\beta_e = Id$. Dados $l \in Nuc(L)$, $g, h \in L$ e para todo $f \in \mathcal{F}$ temos que

$$\begin{aligned}
\beta_{lg}(f)|_h &= f((lg)^{-1}h) \\
&= f((g^{-1}l^{-1})h) \\
&\overset{(*)}{=} f(g^{-1}(l^{-1}h)) \\
&= \beta_g(f)|_{l^{-1}h} \\
&= \beta_l(\beta_g(f))|_h = (\beta_l \circ \beta_l)(f)|_h,
\end{aligned}$$

em $(*)$ usamos o fato de $l \in Nuc(L)$ e consequentemente, $\beta_{lg} = \beta_l \circ \beta_g$. Analogamente, pelo fato de $l \in Nuc(L)$, temos que

$$\begin{aligned}
\beta_{gl}(f)|_h &= f((gl)^{-1}h) \\
&= f((l^{-1}g^{-1})h) \\
&= f(l^{-1}(g^{-1}h)) \\
&= \beta_l(f)|_{g^{-1}h} \\
&= \beta_g(\beta_l(f))|_h = (\beta_g \circ \beta_l)(f)|_h.
\end{aligned}$$

Assim, β é uma ação fraca do I.P. loop L em $\mathcal{F}$.

Dando continuidade, definimos $\phi : R \to \mathcal{F}$, por $\phi(r)|_l = \alpha_{l^{-1}}(r1_l)$, para todo $l \in L$, $r \in R$, onde 1_l é a unidade do ideal $D_l \subseteq R$. Vamos mostrar que ϕ é um monomorfismo de anéis. De fato, sejam $r, s \in R$. Então, para todo $l \in L$ temos que

$$\begin{aligned}
\phi(r+s)|_h &= \alpha_{l^{-1}}((r+s)1_l) \\
&= \alpha_{l^{-1}}(r1_l + s1_l) \\
&\overset{(*)}{=} \alpha_{l^{-1}}(r1_l) + \alpha_{l^{-1}}(s1_l) \\
&= \phi(r)|_h + \phi(s)|_h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(rs)|_h &= \alpha_{l^{-1}}((rs)1_l) \\
&= \alpha_{l^{-1}}(r1_l s1_l) \\
&= \alpha_{l^{-1}}(r)\alpha_{l^{-1}}(s) \\
&= \phi(r)|_l \phi(s)|_l,
\end{aligned}$$

em $(*)$ usamos o fato de α ser um isomorfismo de anéis. Por fim, dado que $\phi(r) = \phi(s)$ então, para todo $l \in L$, $\phi(r)|_l = \phi(s)|_l$, ou equivalentemente, $\alpha_{l^{-1}}(r1_l) = \alpha_{l^{-1}}(s1_l)$, tomando $l = e$ e usando os dois primeiros Axiomas da Definição 3.10, temos que $\alpha_{e^{-1}}(r1_e) = \alpha_{e^{-1}}(s1_e)$ é equivalente a $r = s$ e segue que ϕ é injetiva.

Seja A um subanel de $\mathcal{F}$ gerado pela $\bigcup\limits_{l \in L} \beta_l(\phi(R))$. Agora, resta mostrarmos que $\beta|_A$ é uma ação envolvente para α. Vamos começar por mostrar o item (ii) da Definição 4.1. De fato, seja $x \in D_{l^{-1}}$, com $l \in L$. Então para todo $h \in L$ temos que por um lado $(\beta_l \circ \phi)(x)|_h = \phi(x)|_{l^{-1}h} = \alpha_{(l^{-1}h)^{-1}}(x1_{l^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}l}(x1_{l^{-1}h})$ e por outro lado $(\phi \circ \alpha_l)(x)|_h = \phi(\alpha_l(x))|_h = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_l(x)1_h)$. Assim, mostrar o Axioma (ii) da Definição 4.1 é equivalente a mostrar que $\alpha_{h^{-1}l}(x1_{l^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_l(x)1_h)$, para todo $l, h \in L$. Para isto, primeiro observe que em $\alpha_{h^{-1}l}(x1_{l^{-1}h})$ temos que $x1_{l^{-1}h} \in D_{l^{-1}} \cap D_{l^{-1}h}$. Agora, fazendo $h = l^{-1}$ e $l^{-1} = l^{-1}h$ no item b) do Lema 3.11, temos que $D_{l^{-1}} \cap D_{l^{-1}h} = \alpha_{l^{-1}}(D_{(l^{-1})^{-1}} \cap D_{((h^{-1}l)l^{-1})^{-1}}) = \alpha_{l^{-1}}(D_l \cap D_h)$. Assim, $x1_{l^{-1}h} \in D_{l^{-1}} \cap D_{l^{-1}h} = \alpha_{l^{-1}}(D_l \cap D_h)$. Usando, o Lema 3.11 item a), temos $x1_{l^{-1}h} \in D_{l^{-1}} \cap D_{l^{-1}h} = \alpha_l^{-1}(D_l \cap D_h)$ e assim, fica claro que podemos aplicar o Axioma (iii) b) da Definição 3.10 em $\alpha_{h^{-1}l}(x1_{l^{-1}h})$. Logo,

$$\alpha_{h^{-1}l}(x1_{l^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_l(x1_{l^{-1}h}))$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_l(x 1_{l^{-1}} 1_{l^{-1}h})), \text{ pois } x \in D_{l^{-1}} \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_l(x)\alpha_l(1_{l^{-1}} 1_{l^{-1}h})) \\
&\overset{(*)}{=} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_l(x) 1_l 1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_l(x) 1_h), \text{ pois } \alpha_l(x) \in D_l,
\end{aligned}
$$

onde $(*)$ decorre do Lema 4.2 fazendo $h^{-1} = l^{-1}$ e $l = l^{-1}h$, ou seja, $\alpha_l(1_{l^{-1}} 1_{l^{-1}h}) = 1_l 1_{l(l^{-1}h)} = 1_l 1_h$, pois L é um I.P. loop. Consequentemente, temos que $(\beta_l \circ \phi)(x) = (\phi \circ \alpha_l)(x)$, para todo $l \in L$.

Agora, vamos mostrar o Axioma (i) da Definição 4.1. Para a inclusão $\phi(D_l) \subseteq \phi(R) \cap \beta_l(\phi(R))$, seja $a \in D_l$. Então, precisamos mostrar que existe algum $r \in R$ que satisfaz $\beta_l(\phi(r)) = \phi(a)$, ou seja, para todo $h \in L$, $\beta_l(\phi(r))|_h = \phi(a)|_h = \alpha_{h^{-1}}(a 1_h)$. Assim, tomando $r = \alpha_{l^{-1}}(a)$ temos

$$
\begin{aligned}
\beta_l(\phi(r))|_h &= \phi(r)|_{l^{-1}h} \\
&= \alpha_{h^{-1}l}(r 1_{l^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}l}(\alpha_{l^{-1}}(a) 1_{l^{-1}h}) \\
&\overset{(*)}{=} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_l(\alpha_{l^{-1}}(a)) 1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(a 1_h),
\end{aligned}
$$

onde $(*)$ decorre do Axioma (ii) da Definição 4.1 provado anteriormente.

Agora, para a inclusão $\phi(D_l) \supseteq \phi(R) \cap \beta_l(\phi(R))$, seja $x \in \phi(R) \cap \beta_l(\phi(R))$. Então, existem $r, s \in R$ tais que $\phi(r) = x = \beta_l(\phi(s))$, ou seja, para todo $h \in L$, $\phi(r)|_h = \beta_l(\phi(s))|_h$, ou equivalentemente, $\alpha_{h^{-1}}(r 1_h) = \phi(s)|_{l^{-1}h} = \alpha_{h^{-1}l}(s 1_{l^{-1}h})$. Se tomarmos $h = e$ a unidade de L, então temos $\alpha_{e^{-1}}(r 1_e) = \alpha_{e^{-1}l}(s 1_{l^{-1}e})$, usando os Axiomas (i) e (ii) da Definição 3.10 temos que $r = \alpha_l(s 1_{l^{-1}}) \in D_l$ e consequentemente, $\phi(r) \subseteq \phi(D_l)$. Logo, $x \in \phi(D_l)$ e $\phi(D_l) \supseteq \phi(R) \cap \beta_l(\phi(R))$.

Como o Axioma (iii) é trivialmente satisfeito pela escolha de A, resta mostrarmos o Axioma (iv), isto é, $\phi(R)$ é um ideal de A. Sejam $r, s \in R$ e $h \in L$. Então,

$$\begin{aligned}
\beta_l(\phi(r))\phi(s)|_h &= \beta_l(\phi(r))|_h\phi(s)|_h \\
&= \phi(r)|_{l^{-1}h}\phi(s)|_h \\
&= \alpha_{h^{-1}l}(r1_{l^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(s1_h) \\
&\overset{(*)}{=} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_l(r1_l)1_h)\alpha_{h^{-1}}(s1_h) \\
&\overset{(**)}{=} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_l(r1_l)1_h s1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_l(r1_l)s1_h) \\
&= \phi(\alpha_l(r1_l)s)|_h,
\end{aligned}$$

em $(*)$ usamos o Axioma (ii) da Definição 4.1 provado anteriormente e $(**)$ decorre de α ser um homomorfismo de anéis. Consequentemente, $\beta_l(\phi(r))\phi(s) = \phi(\alpha_l(r1_l)s)$ e como $\alpha_l(r1_l)b \in R$, então $\beta_l(\phi(r))\phi(s) \in \phi(R)$.

Analogamente, temos que,

$$\begin{aligned}
\phi(s)\beta_l(\phi(r))|_h &= \phi(s)|_h\beta_l(\phi(r))|_h \\
&= \phi(s)|_h\phi(r)|_{l^{-1}h} \\
&= \alpha_{h^{-1}}(s1_h)\alpha_{h^{-1}l}(r1_{l^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(s1_h)\alpha_{h^{-1}}(\alpha_l(r1_l)1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(s1_h\alpha_l(r1_l)1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(s\alpha_l(r1_l)1_h) \\
&= \phi(s\alpha_l(r1_l)).
\end{aligned}$$

Logo, $\phi(s)\beta_l(\phi(r)) = \phi(s\alpha_l(r1_l))$ e como $s\alpha_l(r1_l) \in R$, então concluímos que $\phi(s)\beta_l(\phi(r)) \in \phi(R)$. $\square$

Definição 4.4. Sejam L um I.P. loop, (β, A) e (β', A') duas ações fracas do I.P. loop L em A e A', respectivamente. Dizemos que (β, A) e (β', A') são equivalentes se existir um isomorfismo de anéis $\psi : A \to A'$ tal que $\psi \circ \beta_l = \beta'_l \circ \psi$, para todo $l \in L$

Uma segunda questão emergente, no contexto da ação envolvente, é a questão relativa a unicidade. A literatura nos indica que em algumas situações, como no caso de ações parciais de grupo tratadas em [9], a envolvente é única (a menos de equivalências), já em outros casos, como ações parciais de álgebras de Hopf tratadas em [4], não é possível garantir a unicidade da envolvente. O seguinte resultado mostra que para o caso de ações parciais fortes de I.P. loop, a ação envolvente, sobre certas circunstâncias, também é única (a menos de equivalências).

Teorema 4.5. *Sejam L um I.P. loop, R um anel unitário, α uma ação parcial forte do I.P. loop L em R, (β, A) e (β', A') duas ações envolventes para α tais que β e β' são ações fortes de I.P. loop. Então, (β, A) e (β', A') são equivalentes.*

Demonstração. Sejam $\phi : R \to A$ e $\phi' : R \to A'$ os monomorfismos descritos na Definição 4.1. Pelo Axioma (iii) da Definição 4.1 temos que A é gerado pela união de ideais $\beta_l(\phi(R))$ e A' é gerado pela união de ideais $\beta'_l(\phi'(R))$, com $l \in L$. Consequentemente, os elementos de A e A' são, respectivamente, somas finitas do tipo $\sum\limits_i \beta_{l_i}(\phi(r_i))$ e $\sum\limits_j \beta'_{l_j}(\phi'(r_j))$. Agora, vamos definir $\psi : A' \to A$ dada por $\psi(\beta'_l(\phi(r))) = \beta_l(\phi(r))$.

Primeiramente, vamos mostrar que ψ está bem definida. De fato, suponhamos que $\sum\limits_{i=1}^{s} \beta'_{l_i}(\phi'(r_i)) = 0$ e iremos mostrar que $\sum\limits_{i=1}^{s} \beta_{l_i}\phi(r_i) = 0$. De fato, para qualquer

$h \in L$ e $r \in R$, temos que $\sum\limits_{i=1}^{s} \beta'_{l_i}(\phi'(r_i))\beta'_h(\phi'(r)) = 0$. Aplicando $\beta'_{h^{-1}}$, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \beta'_{h^{-1}}(0) \\
&= \beta'_{h^{-1}}(\sum_{i=1}^{s} \beta'_{l_i}(\phi'(r_i))\beta'_h(\phi'(r))) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \beta'_{h^{-1}}(\beta'_{l_i}(\phi'(r_i)))\beta'_{h^{-1}}(\beta'_h(\phi'(r))) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{s} \beta'_{h^{-1}l_i}(\phi'(r_i))\beta'_{h^{-1}h}(\phi'(r)) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \beta'_{h^{-1}l_i}(\phi'(r_i))\phi'(r),
\end{aligned}$$

em $(*)$, utilizamos a hipótese de β ser uma ação forte de I.P. loop. Como $\phi'(R)$ é um ideal de A', então $\sum\limits_{i=1}^{s} \beta'_{h^{-1}l_i}(\phi'(r_i))\phi'(r) \in \phi'(R) \cap \beta'_{h^{-1}l_i}(\phi'(R)) = \phi'(D'_{h^{-1}l_i}) = \phi'(R1_{h^{-1}l_i}) = \phi'(R)\phi'(1_{h^{-1}l_i})$, cuja unidade é $\phi'(1_{h^{-1}l_i})$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\beta'_{h^{-1}l_i}(\phi'(r_i))\phi'(r) =& \beta'_{h^{-1}l_i}(\phi'(r_i))\phi'(1_{h^{-1}l_i})\phi'(r) \\
=& \beta'_{h^{-1}l_i}(\phi'(r_i))\phi'(\alpha_{h^{-1}l_i}(1_{l_i^{-1}h}))\phi'(r) \\
\overset{(*)}{=}& \beta'_{h^{-1}l_i}(\phi'(r_i))(\beta'_{h^{-1}l_i} \circ \phi')(1_{l_i^{-1}h})\phi'(r) \\
=& (\beta'_{h^{-1}l_i} \circ \phi')(r_i 1_{l_i^{-1}h})\phi'(r) \\
\overset{(*)}{=}& (\phi' \circ \alpha_{h^{-1}l_i})(r_i 1_{l_i^{-1}h})\phi'(r) \\
=& \phi'(\alpha_{h^{-1}l_i}(r_i 1_{l_i^{-1}h})r),
\end{aligned}$$

em $(*)$, utilizamos o Axioma (ii) da Definição 4.1. Assim, $0 = \sum\limits_{i=1}^{s} \beta'_{l_i}(\phi'(r_i))\phi(r) = \sum\limits_{i=1}^{s} \phi'(\alpha_{h^{-1}l_i}(r_i 1_{l_i^{-1}h})r) = \phi'(\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_{h^{-1}l_i}(r_i 1_{l_i^{-1}h})r)$ e como ϕ' é um monomorfismo, temos que $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_{h^{-1}l_i}(r_i 1_{l_i^{-1}h})r = 0$.

Por outro lado, como $\beta_{h^{-1}l_i}(\phi(r_i))\phi(r) \in \beta_{h^{-1}l_i}(\phi(R)) \cap \phi(R) = \phi(D_{h^{-1}l_i}) =$

$\phi(R1_{h^{-1}l_i}) = \phi(R)\phi(1_{h^{-1}l_i})$ então, de forma análoga, temos que

$$\begin{aligned}\beta_{h^{-1}l_i}(\phi(r_i))\phi(r) =& \beta_{h^{-1}l_i}(\phi(r_i))\phi(1_{h^{-1}l_i})\phi(r)\\ =& \beta_{h^{-1}l_i}(\phi(r_i))\phi(\alpha_{h^{-1}l_i}(1_{l_i^{-1}h}))\phi(r)\\ \overset{(*)}{=}& \beta_{h^{-1}l_i}(\phi(r_i))(\beta_{h^{-1}l_i}\circ\phi)(1_{l_i^{-1}h})\phi(r)\\ =& (\beta_{h^{-1}l_i}\circ\phi)(r_i1_{l_i^{-1}h})\phi(r)\\ \overset{(*)}{=}& (\phi\circ\alpha_{h^{-1}l_i})(r_i1_{l_i^{-1}h})\phi(r)\\ =& \phi(\alpha_{h^{-1}l_i}(r_i1_{l_i^{-1}h})r),\end{aligned}$$

em $(*)$, utilizamos o Axioma (ii) da Definição 4.1. Assim, $\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_{h^{-1}l_i}(\phi(r_i))\phi(r) = \sum\limits_{i-1}^{s}\phi(\alpha_{h^{-1}l_i}(r_i1_{l_i^{-1}h})r) = \phi(\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_{h^{-1}l_i}(r_i1_{l_i^{-1}h})r)$ e como $\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_{h^{-1}l_i}(r_i1_{l_i^{-1}h})r = 0$, temos que $\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_{h^{-1}l_i}(\phi(r_i))\phi(r) = \phi(0) = 0$. Agora, aplicando β_h em ambos os lados temos que $0 = \beta_h(0) = \beta_h(\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_{h^{-1}l_i}(\phi(r_i))\phi(r)) = \sum\limits_{i=1}^{s}\beta_{h(h^{-1}l_i)}(\phi(r_i))\beta_h(\phi(r))$ e usando o fato de L ser um I.P. loop, temos que $\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_{h(h^{-1}l_i)}(\phi(r_i))\beta_h(\phi(r)) = \sum\limits_{i=1}^{s}\beta_{l_i}(\phi(r_i))\beta_h(\phi(r))$ e, consequentemente, $0 = \sum\limits_{i=1}^{s}\beta_{l_i}(\phi(r_i))\beta_h(\phi(r))$. Logo, os elementos $\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_{l_i}(\phi(r_i))$ são anuladores do conjunto $\beta_h(\phi(R))$, para qualquer $h \in L$. Agora, se tomarmos A_1 como o anel gerado por $\bigcup\limits_{i=1}^{s}\beta_{l_i}(\phi(R))$, este é um anel unitário, com unidade que denotaremos por 1_{A_1}, e então $\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_{l_i}(\phi(r_i)) = (\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_{l_i}(\phi(r_i)))1_{A_1} = 0$ e concluímos que ψ está bem definida.

Notemos que ψ é homomorfismo de anéis, pois isso decorre imediatamente da hipótese β_l ser uma ação forte de I.P. loop, para qualquer $l \in L$ e se definirmos a $\psi^{-1} : A \to A'$ por $\psi^{-1}(\beta_l(\phi(r))) = \beta'_l(\phi'(r))$ temos claramente que $\psi\circ\psi^{-1} = id_A$ e

$\psi^{-1} \circ \psi = id_{A'}$. Por fim, se $h, l \in L$ temos que

$$
\begin{aligned}
(\psi \circ \beta'_h)(\beta'_l(\phi'(r))) &= \psi(\beta'_h(\beta'_l(\phi'(r)))) \\
&\overset{(*)}{=} \psi(\beta'_{hl}(\phi'(r))) \\
&= \beta_{hl}(\phi'(r)) \\
&\overset{(**)}{=} \beta_h(\beta_l(\phi'(r))) \\
&= \beta_h(\psi(\beta'_l(\phi'(r)))) \\
&= (\beta_h \circ \psi)(\beta'_l(\phi'(r))),
\end{aligned}
$$

onde em $(*)$, usamos a hipótese de β' ser uma ação forte de I.P. loop e em $(**)$ a hipótese de β ser uma ação forte de I.P. loop. Portanto, concluímos que ψ é uma equivalência.

□

Para o caso das ações parciais fracas de I.P. loop, utilizando o mesmo procedimento descrito no Teorema 4.3, nem sempre é possível construir a ação envolvente. O seguinte exemplo ilustra esta situação.

Exemplo 4.6. Considere $R = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \mathbb{K}e_3$ e a ação parcial fraca de I.P. loop induzida do Exemplo 3.4. Então se considerássemos $\phi : L \to R$ dada por $\phi(r)|_l = \alpha_{l^{-1}}(r1_l)$ teríamos que

$\phi(e_1) : L \to R$	$\phi(e_2) : L \to R$	$\phi(e_3) : L \to R$
$1 \mapsto e_1$	$1 \mapsto e_2$	$1 \mapsto e_3$
$2 \mapsto e_1$	$2 \mapsto e_3$	$2 \mapsto e_2$
$3 \mapsto e_2$	$3 \mapsto e_1$	$3 \mapsto e_3$
$4 \mapsto e_3$	$4 \mapsto e_2$	$4 \mapsto e_1$
$5 \mapsto e_1$	$5 \mapsto e_3$	$5 \mapsto e_2$
$6 \mapsto e_1$	$6 \mapsto 0$	$6 \mapsto e_3$
$7 \mapsto e_3$	$7 \mapsto 0$	$7 \mapsto e_1$

Se considerássemos $\beta_l(f) : L \to R$ dada por $\beta_l(f)|_h = f(l^{-1}h)$ e se fixarmos $l = 2$, temos que

$\beta_2(\phi(e_1)) : L \to R$	$\beta_2(\phi(e_2)) : L \to R$	$\beta_3(\phi(e_3)) : L \to R$
$1 \mapsto e_2$	$1 \mapsto e_1$	$1 \mapsto e_3$
$2 \mapsto e_1$	$2 \mapsto e_2$	$2 \mapsto e_3$
$3 \mapsto e_1$	$3 \mapsto e_3$	$3 \mapsto e_2$
$4 \mapsto e_3$	$4 \mapsto 0$	$4 \mapsto e_1$
$5 \mapsto e_1$	$5 \mapsto 0$	$5 \mapsto e_3$
$6 \mapsto e_3$	$6 \mapsto e_2$	$6 \mapsto e_1$
$7 \mapsto e_1$	$7 \mapsto e_3$	$7 \mapsto e_2$

portanto, $\phi(D_2) = \{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$. Já por outro lado $\phi(R) \cap \beta_2(\phi(R)) = \{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\} \cap \{\beta_2(\phi(e_1)), \beta_2(\phi(e_2)), \beta_2(\phi(e_3))\} = \emptyset$ e segue que, o Axioma (i) da Definição 4.1 não é satisfeito quando usamos a construção do Teorema 4.3.

O seguinte resultado nos dá algumas condições para que seja possível construir a ação envolvente de uma ação parcial fraca de I.P. loop utilizando o procedimento utilizado em [9], que foi o mesmo utilizado na construção do Teorema 4.3.

Teorema 4.7. *Sejam L um I.P. loop e R um anel unitário. Considere α uma ação parcial fraca do I.P. loop L em R tal que os ideais D_g, D_h são disjuntos sempre que $g \neq h$, $g, h \neq e$, eles próprios anéis unitários e ainda para quaisquer $g \in L$ temos que $\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}} = id_{D_g} = \alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g$. Então, a ação parcial fraca α admite uma ação de loop envolvente β.*

Demonstração. Assim como no caso do Teorema 4.3, vamos considerar

$$\begin{array}{llllllll} \beta: & L & \to & Aut(\mathcal{F}) & & & & \\ & l & \mapsto & \beta_l : \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} & & \\ & & & f & \mapsto & \beta_l(f) : L & \to & R \\ & & & & & h & \mapsto & \beta_l(f)|_h = f(l^{-1}h). \end{array}$$

Começaremos mostrando que β_g é um automorfismo, para qualquer $g \in L$. De fato, sejam $f, h \in \mathcal{F}$ e $l \in L$. Então temos que

$$\begin{aligned}
\beta_g(f+h)|_l &= (f+h)(g^{-1}l) \\
&= f(g^{-1}l) + h(g^{-1}l) \\
&= \beta_g(f)|_l + \beta_g(h)|_l,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_g(fh)|_l &= f(g^{-1}l)h(g^{-1}l) \\
&= \beta_g(f)|_l \beta_g(h)|_l \\
&= \beta_g(f)\beta_g(h)|_l.
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que β_g é injetivo. Fixado $g \in L$, se $\beta_g(f) = \beta_g(h)$, então para todo $l \in L$ temos que $\beta_g(f)|_l = \beta_g(h)|_l$ e segue que, $f(g^{-1}l) = h(g^{-1}l)$ e consequentemente, $f = h$. Por fim, β_g é sobrejetivo pois se tomarmos $f \in \mathcal{F}$ e $X_g : L \to A$ dada por $X_g(h) = f(gh)$, com $g \in L$ fixado, temos que $\beta_g(X_g)|_l = X_g(g^{-1}l) = f(g(g^{-1}l)) = f(l)$, pois L é um I.P. loop.

Agora, vamos verificar se β_g é uma ação fraca de I.P. loop. Claramente $\beta_e(f)|_l = f(e^{-1}l) = f(l)$, onde $e \in L$ é o elemento neutro de L e fica satisfeito o Axioma (i) da Definição 2.6. Se tomarmos $g \in Nuc(L)$ ou $h \in Nuc(L)$ temos por um lado que $(\beta_g \circ \beta_h)(f)|_l = \beta_g(\beta_h(f))|_l = \beta_h(f)|_{g^{-1}l} = f(h^{-1}(g^{-1}l))$. Por outro lado, se $g \in Nuc(L)$ então

$$\begin{aligned}
\beta_{gh}(f)|_l &= f((gh)^{-1}l) \\
&= f((h^{-1}g^{-1})l) \\
&= f(h^{-1}(g^{-1}l)).
\end{aligned}$$

Analogamente, se $h \in Nuc(L)$ então

$$\begin{aligned}
\beta_{gh}(f)|_l &= f((gh)^{-1}l) \\
&= f((h^{-1}g^{-1})l) \\
&= f(h^{-1}(g^{-1}l))
\end{aligned}$$

e portanto, vale o Axioma (ii) da Definição 2.6.

Agora, definindo $\phi : R \to \mathcal{F}$ como $\phi(r) : L \to R$ dada por $\phi(r)|_g = \alpha_{g^{-1}}(r1_g)$ temos que ϕ é um homomorfismo de anéis, pois α é um isomorfismo de I.P. loops. Agora, para a injetividade de ϕ, temos que para quaisquer $r, s \in R$, $\phi(r) = \phi(s)$ se, e somente se, para qualquer $l \in L$, $\phi(r)|_l = \phi(s)|_l$, isto é, $\alpha_{l^{-1}}(r1_l) = \alpha_{l^{-1}}(s1_l)$. Em particular, se tomarmos $l = e$ temos que $r = s$.

Sendo assim, tomemos $B = \bigcup_{g\in L} \beta_g(\phi(R))$. Iremos mostrar que é vaálido o item (ii) da Definição 4.1. De fato, para qualquer $x \in D_{g^{-1}}$ e $h \in L$ temos, por um lado que

$$\begin{aligned}(\beta_g \circ \phi)(x)|_h &= \phi(x)|_{g^{-1}h}\\ &= \alpha_{(g^{-1}h)^{-1}}(x1_{g^{-1}h})\\ &= \alpha_{(h^{-1}g)}(x1_{g^{-1}h})\end{aligned}$$

e por outro lado, temos que $(\phi \circ \alpha_g)(x)|_h = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)1_h)$. Assim, mostrar esse item equivale a mostrar que $\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)1_h) = \alpha_{(h^{-1}g)}(x1_{g^{-1}h})$. Notemos que como D_g e D_h são disjuntos, se $g \neq h$, $g, h \neq e$, então $\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)1_h) = \alpha_{h^{-1}}(0) = 0 = \alpha_{(h^{-1}g)}(x1_{g^{-1}h})$. Dito isto, os casos em que esse produto não é igual a zero são os que $g = h \neq e$ e $h = e$ ou $g = e$. No primeiro caso, $1_{g^{-1}h} = 1_{g^{-1}g} = 1_e = 1_R$ e portanto,

$$\begin{aligned}\alpha_{(h^{-1}g)}(x1_{g^{-1}h}) &= \alpha_{g^{-1}g}(x1_{g^{-1}g})\\ &\overset{(*)}{=} (\alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g)(x1_e)\\ &= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(x))\\ &= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(x)1_g)\end{aligned}$$

em $(*)$ usamos a hipótese que $\alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g = id_{D_g}$ e obtemos a igualdade desejada. No segundo caso, a igualdade $\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)1_h) = \alpha_{(h^{-1}g)}(x1_{g^{-1}h})$ é imediata e portanto, fica provado o item (ii) da 4.1.

Agora, vamos mostrar que $\phi(D_g) = \phi(R) \cap \beta_g(\phi(R))$. Para a inclusão $\phi(R) \cap \beta_g(\phi(R)) \subseteq \phi(D_g)$, tome $x \in \phi(R) \cap \beta_g(\phi(R))$. Então, existem $r, s \in R$ tais que $\phi(r) = x = \beta_g(\phi(s))$, ou seja, para qualquer $h \in L$, $\phi(r)|_h = \beta_g(\phi(s))|_h$, ou equivalentemente, $\alpha_{h^{-1}}(r1_h) = \alpha_{h^{-1}g}(s1_{g^{-1}h})$. Tomando $h = e$, temos que $r = \alpha_g(s1_{g^{-1}}) \in D_g$. Logo, $x = \phi(r) \in \phi(D_g)$. Para a inclusão reversa, seja $x \in \phi(D_g)$, isto é, existe $a \in D_g$ tal que $x = \phi(a)$. Precisamos mostrar que existe um $r \in R$ tal que $\beta_g(\phi(r)) = \phi(a)$. De fato, tome $r = \alpha_{g^{-1}}(a)$. Assim, para $h \in L$, temos $\beta_g(\phi(r))|_h = \alpha_{h^{-1}g}(r1_{g^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}h})$. Se $g \neq h$, $g, h \neq e$ então, $\alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}h}) = 0 = \alpha_{h^{-1}}(a1_h) = \phi(a)|_h$. Desta maneira, os casos em que esse produto não é igual a zero são os que $g = h \neq e$ e $h = e$ ou $g = e$. No primeiro caso,

$$\begin{aligned}
\beta_g(\phi(r))|_h &= \alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}h}(\alpha_{h^{-1}}(a)1_{h^{-1}h}) \\
&= \alpha_e(\alpha_{g^{-1}}(a)1_e) \\
&= \alpha_{g^{-1}}(a) \\
&= \alpha_{g^{-1}}(a1_g) = \phi(a)|_g
\end{aligned}$$

e consequentemente, $x \in \phi(D_g) \subseteq \beta_g(\phi(R)) \cap \phi(R)$. Agora, se $h = e$ temos que

$$\begin{aligned}
\beta_g(\phi(r))|_h &= \alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{e^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}e}) \\
&= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}}) \\
&\overset{(*)}{=} id_{D_g}(a) \\
&= a = \phi(a)|_e = \phi(a)|_h,
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a hipótese que $\alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g = id$. Logo, $x \in \phi(D_g) \subseteq \beta_g(\phi(R)) \cap \phi(R)$. O caso $g = e$ é trivialmente satisfeito, pois $\beta_e = id$.

Por fim, resta mostrar que $\phi(R)$ é um ideal de B. Primeiramente, dados $r, s \in R$,

$g, h \in L$ temos que

$$\begin{aligned}(\beta_g(\phi(r))\phi(s))|_h &= \beta_g(\phi(r))|_h\phi(s)|_h \\ &= \phi(r)|_{g^{-1}h}\phi(s)|_h \\ &= \alpha_{h^{-1}g}(r1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(s1_h).\end{aligned}$$

Agora, se $g = h \neq e$, então temos que

$$\begin{aligned}\alpha_{h^{-1}g}(r1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(s1_h) &= \alpha_{h^{-1}h}(r1_{h^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(s1_h) \\ &= id_{D_h}(r1_{h^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(s1_h) \\ &\overset{(*)}{=} (\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_h)(r1_{h^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(s1_h) \\ &= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_h(r1_{h^{-1}h})s1_h) \\ &= \phi(\alpha_h(r1_{h^{-1}h})s)|_h,\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a hipótese que $\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_h = id_{D_h}$. Como $\alpha_h(r1_{h^{-1}h})s \in D_h \subseteq R$, temos que $\alpha_{h^{-1}g}(r1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(s1_h) \in \phi(R)$. No caso em que $h = e$ temos

$$\begin{aligned}\alpha_{h^{-1}g}(r1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(s1_h) &= \alpha_{e^{-1}g}(r1_{g^{-1}e})\alpha_{e^{-1}}(s1_e) \\ &= \alpha_g(r1_{g^{-1}})\alpha_e(s1_e) \\ &= \alpha_g(r1_{g^{-1}})\alpha_{gg^{-1}}(s1_{gg^{-1}}) \\ &= \alpha_g(r1_{g^{-1}})(\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}})(s1_{gg^{-1}}) \\ &= \alpha_g(r1_{g^{-1}}\alpha_{g^{-1}}(s1_{gg^{-1}})) \\ &= \phi(r\alpha_{g^{-1}}(s1_{gg^{-1}}))|_g.\end{aligned}$$

Como $r\alpha_{g^{-1}}(s1_{gg^{-1}}) \in D_{g^{-1}}$, pois $D_{g^{-1}}$ é um ideal, então neste caso também temos que $\alpha_{h^{-1}g}(r1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(s1_h) \in \phi(R)$. Por outro lado, se $g = e$, então

$$\begin{aligned}\alpha_{h^{-1}g}(r1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(s1_h) &= \alpha_{h^{-1}e}(r1_{e^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(s1_h) \\ &= \alpha_{h^{-1}}(r1_h)\alpha_{h^{-1}}(s1_h) \\ &= \alpha_{h^{-1}}(rs1_h) \\ &= \phi(rs)|_{h^{-1}},\end{aligned}$$

e neste caso também temos que $\alpha_{h^{-1}g}(r1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(s1_h) \in \phi(R)$. De forma análoga, prova-se que $\phi(s)\beta_g(\phi(R)) \in \phi(R)$ e portanto, $\phi(R)$ é ideal de B. $\square$

É importante observar que o Exemplo 4.6 nos mostra que a condição $D_g \cap D_h = \{0\}$, $g, h \neq e$, é essencial para que se consiga este resultado.

4.2 Ações Parciais Fortes e Magmas com Inverso

O Teorema 4.2 de [12], estabelece uma correspondência um a um entre as ações parciais de um grupo G em um conjunto X e as ações de $S(G)$ em X, onde $S(G)$ denota o semigrupo inverso construído a partir de G, tal semigrupo inverso é conhecido como semigrupo inverso de Exel. No artigo [16], os autores definiram e provaram alguns resultados referentes a magmas com inverso. Nosso objetivo agora é estabelecer um resultado análogo ao de [12] para ações parciais fortes de I.P. loop porém utilizaremos os magmas com inverso, ao invés dos semigrupos inversos. O processo de construção é muito análogo, feitas as devidas adaptações para o contexto não associativo. Para uma melhor apresentação destes resultados vamos separar esta seção em duas subseções. Na primeira subseção, vamos construir o magma com inverso $M(L)$ a partir de um I.P. loop L e na segunda subseção, iremos relacionar $M(L)$ com as ações fortes de I.P. loop.

4.2.1 Construção do Magma com Inverso $M(L)$

Nesta subseção vamos, a partir de um I.P. loop L, construir um magma com inverso, denotado por $M(L)$, utilizando as relações descritas por [12] e mais algumas que serão necessárias para o caso não associativo. Para isso, utilizaremos o magma livre $M(L)$, descrito em [7] Capítulo 1, Seção 7, a saber, para cada elemento $t \in L$, tomemos os símbolos $[t]$, os elementos de $M(L)$ são palavras formadas pela justaposição destes símbolos e a operação é a concatenação destes símbolos respeitando a ordem dos parênteses. Além disso, os elementos de $M(L)$ estão sujeitos as seguintes relações, para quaisquer $r, s, t \in L$:

(i) $[s^{-1}]([s][t]) = ([s^{-1}][s])[t] = [s^{-1}][st]$;

(ii) $([s][t])[t^{-1}] = [s]([t][t^{-1}]) = [st][t^{-1}]$;

(iii) $([s][t])([t^{-1}][r]) = [s](([t][t^{-1}])[r]) = ([s]([t][t^{-1}]))[r]$;

(iv) $([s][s^{-1}])([t][r]) = (([s][s^{-1}])[t])[r]$;

(v) $([s][t])([r][r^{-1}]) = [s]([t]([r][r^{-1}]))$;

(vi) $[s][e] = [s] = [e][s]$.

Notamos que, se tomarmos $t = s^{-1}$ em (i) temos que

$$\begin{aligned} [s^{-1}]([s][s^{-1}]) &= ([s^{-1}][s])[s] \\ &= [s^{-1}][ss^{-1}] \\ &\overset{(*)}{=} [s^{-1}][e] \\ &\overset{(**)}{=} [s^{-1}], \end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a hipótese de L ser um I.P. loop e em $(**)$ usamos a relação (vi).

Analogamente, se tomarmos $s = t^{-1}$ em (i) e, como L é um I.P. loop, vale $(t^{-1})^{-1} = t$ e temos que

$$[(t^{-1})^{-1}]([t^{-1}][t]) = ([(t^{-1})^{-1}][t^{-1}])[t] = [(t^{-1})^{-1}t^{-1}][t],$$

o que é equivalente a

$$[t]([t^{-1}][t]) = ([t][t^{-1}])[t] = [tt^{-1}][t] = [e][t] = [t],$$

onde a última igualdade decorre da relação (vi).

A seguinte proposição vem no sentido de garantir a existência e unicidade de um homomorfismo que vai nos permitir construir o elemento $[a]^*$ em $M(L)$.

Proposição 4.8. *Sejam L um I.P. loop, M um magma e $f : L \to M$ uma aplicação que satisfaz as seguintes relações para quaisquer $r, s, t \in L$:*

a) $f(s^{-1})(f(s)f(t)) = (f(s^{-1})f(s))f(t) = f(s^{-1})f(st)$;

b) $(f(s)f(t))f(t^{-1}) = f(s)(f(t)f(t^{-1})) = f(st)f(t^{-1})$;

c) $(f(r)f(s))(f(s^{-1})f(t)) = f(r)((f(s)f(s^{-1}))f(t)) = (f(r)(f(s)f(s^{-1})))f(t)$;

d) $(f(s)f(s^{-1}))(f(t)f(r)) = ((f(s)f(s^{-1}))f(t))f(r)$;

e) $(f(s)f(t))(f(r)f(r^{-1})) = f(s)(f(t)(f(r)f(r^{-1})))$;

f) $f(s)f(e) = f(s) = f(e)f(s)$.

Então, existe um único homomorfismo de magmas $\phi : M(L) \to M$ tal que $\phi([t]) = f(t)$.

Demonstração. A existência de ϕ decorre da propriedade universal dos magmas livres, [7] Proposição 1.7.1, e a unicidade de ϕ é uma consequência da boa definição de f. $\square$

Agora, para definirmos o elemento $[a]^*$ em $M(L)$ primeiramente, vamos considerar o magma $M(L)^{op}$. Em termos de conjunto, ele corresponde a $M(L)$ porém a multiplicação de dois elementos $\alpha, \beta \in M(L)^{op}$ é dada por $\alpha \bullet \beta = \beta\alpha$, onde $\beta\alpha$ denota o produto em $M(L)$.

Proposição 4.9. *Seja L um I.P. loop. Existe um único anti-automorfismo involutivo $* : M(L) \to M(L)$ dado por $[a]^* = [a^{-1}]$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos definir $f : L \to M(L)^{op}$ dada por $f(t) = [t^{-1}]$. Agora vamos mostrar que f satisfaz as condições da Proposição 4.8, onde o produto é o de $M(L)^{op}$. Então, para quaisquer $s, t \in L$, por um lado temos que

$$\begin{aligned} f(s^{-1}) \bullet (f(s) \bullet f(t)) &= f(s^{-1}) \bullet (f(t)f(s)) = (f(t)f(s))f(s^{-1}) \\ &= ([t^{-1}][s^{-1}])[(s^{-1})^{-1}] = ([t^{-1}][s^{-1}])[s] \\ &\overset{(*)}{=} [t^{-1}s^{-1}][s] = [(st)^{-1}][s] \\ &= f(st)f(s^{-1}) = f(s^{-1}) \bullet f(st), \end{aligned}$$

por outro lado temos que,

$$\begin{aligned} (f(s^{-1}) \bullet f(s)) \bullet f(t) &= (f(s)f(s^{-1})) \bullet f(t) = f(t)(f(s)f(s^{-1})) \\ &= [t^{-1}]([s^{-1}][(s^{-1})^{-1}]) = [t^{-1}]([s^{-1}][s]) \\ &\overset{(*)}{=} [t^{-1}s^{-1}][s] = [(st)^{-1}][s] \\ &= f(st)f(s^{-1}) = f(s^{-1}) \bullet f(st), \end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a relação (ii) da definição de $M(L)$ e como L é um I.P. loop temos que $(s^{-1})^{-1} = s$. Assim, temos que $(f(s^{-1}) \bullet f(s)) \bullet f(t) = f(s^{-1}) \bullet (f(s) \bullet f(t)) = f(s^{-1}) \bullet f(st)$ e o item a) da Proposição 4.8 é satisfeito.

Agora, para quaisquer $s, t \in L$ temos que

$$\begin{aligned} (f(s) \bullet f(t)) \bullet f(t^{-1}) &= (f(t)f(s)) \bullet f(t^{-1}) = f(t^{-1})(f(t)f(s)) \\ &= [(t^{-1})^{-1}]([t^{-1}][s^{-1}]) = [t]([t^{-1}][s^{-1}]) \\ &\overset{(*)}{=} [t]([t^{-1}][s^{-1}]) = [t][(st)^{-1}] \\ &= f(t^{-1})f(st) = f(st) \bullet f(t^{-1}), \end{aligned}$$

por outro lado temos que,

$$\begin{aligned}
f(s)\bullet(f(t)\bullet f(t^{-1})) &= f(s)\bullet(f(t^{-1})f(t)) = (f(t^{-1})f(t))f(s)\\
&= ([(t^{-1})^{-1}][t^{-1}])[s^{-1}] = ([t][t^{-1}])[s^{-1}]\\
&\overset{(*)}{=} [t][t^{-1}s^{-1}] = [t][(st)^{-1}]\\
&= f(t^{-1})f(st) = f(st)\bullet f(t^{-1}),
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a relação (i) da definição de $M(L)$. Assim, temos que o item b) da Proposição 4.8 é satisfeito.

Agora, dados $r, s, t \in L$ temos que

$$\begin{aligned}
(f(r)\bullet f(s))\bullet(f(s^{-1})\bullet f(t)) &= (f(s)f(r))\bullet(f(t)f(s^{-1}))\\
&= (f(t)f(s^{-1}))(f(s)f(r))\\
&= ([t^{-1}][(s^{-1})^{-1}])([s^{-1}][r^{-1}])\\
&= ([t^{-1}][s])([s^{-1}][r^{-1}])\\
&\overset{(*)}{=} [t^{-1}](([s][s^{-1}])[r^{-1}])\\
&= f(t)((f(s^{-1})f(s))f(r))\\
&= f(t)((f(s)\bullet f(s^{-1}))f(r))\\
&= f(t)(f(r)\bullet(f(s)\bullet f(s^{-1})))\\
&= (f(r)\bullet(f(s)\bullet f(s^{-1})))\bullet f(t),
\end{aligned}$$

por outro lado temos,

$$\begin{aligned}
(f(r)\bullet f(s))\bullet(f(s^{-1})\bullet f(t)) &= (f(s)f(r))\bullet(f(t)f(s^{-1}))\\
&= (f(t)f(s^{-1}))(f(s)f(r))\\
&= ([t^{-1}][(s^{-1})^{-1}])([s^{-1}][r^{-1}])\\
&= ([t^{-1}][s])([s^{-1}][r^{-1}])\\
&\overset{(*)}{=} ([t^{-1}]([s][s^{-1}]))[r^{-1}]\\
&= (f(t)(f(s^{-1})f(s)))f(r)\\
&= (f(t)(f(s)\bullet f(s^{-1})))f(r)\\
&= ((f(s)\bullet f(s^{-1}))\bullet f(t))f(r)\\
&= f(r)\bullet((f(s)\bullet f(s^{-1}))\bullet f(t)),
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a relação (iii) da definição de $M(L)$. Assim, temos que o item c) da Proposição 4.8 é satisfeito.

Agora, dados $r, s, t \in L$ temos que

$$\begin{aligned}
(f(s)\bullet f(s^{-1}))\bullet(f(t)\bullet f(r)) &= (f(s^{-1})f(s))\bullet(f(r)f(t))\\
&= (f(r)f(t))(f(s^{-1})f(s))\\
&= ([r^{-1}][t^{-1}])([(s^{-1})^{-1}][s^{-1}])\\
&= ([r^{-1}][t^{-1}])([s][s^{-1}])\\
&\overset{(*)}{=} [r^{-1}]([t^{-1}]([s][s^{-1}]))\\
&= f(r)(f(t)(f(s^{-1})f(s)))\\
&= (f(t)(f(s^{-1})f(s)))\bullet f(r)\\
&= ((f(s^{-1})f(s))\bullet f(t))\bullet f(r)\\
&= ((f(s)\bullet f(s^{-1}))\bullet f(t))\bullet f(r),
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a relação (v) da definição de $M(L)$. Assim, temos que o item d) da Proposição 4.8 é satisfeito.

Agora, dados $r, s, t \in L$ temos que

$$\begin{aligned}
(f(r) \bullet f(s)) \bullet (f(t) \bullet f(t^{-1})) &= (f(s)f(r)) \bullet (f(t^{-1})f(t)) \\
&= (f(t^{-1})f(t))(f(s)f(r)) \\
&= ([(t^{-1})^{-1}][t^{-1}])([s^{-1}][r^{-1}]) \\
&= ([t][t^{-1}])([s^{-1}][r^{-1}]) \\
&\overset{(*)}{=} (([t][t^{-1}])[s^{-1}])[r^{-1}] \\
&= ((f(t^{-1})f(t))f(s))f(r) \\
&= f(r) \bullet ((f(t^{-1})f(t))f(s)) \\
&= f(r) \bullet (f(s) \bullet (f(t^{-1})f(t))) \\
&= f(r) \bullet (f(s) \bullet (f(t) \bullet f(t^{-1}))),
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a relação (iv) da definição de $M(L)$. Assim, temos que o item e) da Proposição 4.8 é satisfeito.

Por fim, temos que $f(s) \bullet f(e) = f(e)f(s) = [e][s^{-1}] = [s^{-1}]$ e $f(e) \bullet f(s) = f(s)f(e) = [s^{-1}][e] = [s^{-1}]$ devido a relação (vi) da definição de $M(L)$ segue que vale a relação f) da Proposição 4.8. Logo, existe um único homomorfismo de magmas $\phi : M(L)^{op} \to M(L)^{op}$ tal que $\phi([t]) = f(t) = [t^{-1}]$, ou equivalentemente, existe um único anti-automorfismo $* : M(L) \to M(L)$ tal que $[t]^* = [t^{-1}]$ e além disso, $([t]^*)^* = [t^{-1}]^* = [(t^{-1})^{-1}] = [t]$. □

Dando continuidade ao estudo de $M(L)$, na direção de tentar provar a unicidade de $[t]^*$ acabamos por estudar os elementos do tipo $\varepsilon_t = [t][t^{-1}]$. A seguinte proposição traz alguns resultados em relação a estes elementos, muito análogas ao que temos no caso associativo.

Proposição 4.10. *Sejam L um I.P. loop e $r, s, t \in L$, então temos que:*

1) ε_t é um idempotente e é auto-adjunto;

2) $[t]\varepsilon_s = \varepsilon_{ts}[t]$*;*

3) ε_t *e* ε_r *comutam;*

4) $\varepsilon_t \in Nuc(M(L))$*.*

Demonstração. No item 1) vamos começar provando que para qualquer $t \in L$, ε_t é um idempotente. De fato,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t\varepsilon_t &= ([t][t^{-1}])([t][t^{-1}]) \\
&\overset{(*)}{=} [t](([t^{-1}][t])[t^{-1}]) \\
&\overset{(**)}{=} [t]([t^{-1}][tt^{-1}]) \\
&= [t]([t^{-1}][e]) = [t][t^{-1}] = \varepsilon_t,
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a relação (iii) da definição de $M(L)$ e em $(**)$ usamos a relação (ii) da mesma definição. Notemos também que $\varepsilon_t^* = ([t][t^{-1}])^* = [(t^{-1})^{-1}][t^{-1}] = [t][t^{-1}] = \varepsilon_t$ e segue que é auto-adjunto também.

Para provarmos o item 2), vamos tomar $s, t \in L$, então temos que

$$\begin{aligned}
[t]\varepsilon_s &= [t]([s][s^{-1}]) \\
&\overset{(ii)}{=} [ts][s^{-1}] \\
&\overset{(vi)}{=} ([ts][e])[s^{-1}] \\
&= ([ts][(ts)^{-1}(ts)])[s^{-1}] \\
&\overset{(i)}{=} ([ts]([(ts)^{-1}][(ts)]))[s^{-1}] \\
&\overset{(iii)}{=} [ts](([(ts)^{-1}][(ts)])[s^{-1}]) \\
&\overset{(i)}{=} [ts]([(ts)^{-1}][(ts)s^{-1}]) \\
&= [ts]([(ts)^{-1}][t]) \\
&\overset{(i)}{=} ([ts][(ts)^{-1}])[t] = \varepsilon_{ts}[t],
\end{aligned}$$

onde em cada igualdade está representado qual relação da definição de $M(L)$ que foi utilizada e ainda utilizamos o fato de L ser um I.P. loop para termos $(ts)s^{-1} = t$.

Para mostrarmos o item 3), sejam $s, t \in L$. Então temos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t\varepsilon_s &= ([t][t^{-1}])\varepsilon_s \\
&\overset{(i)}{=} [t]([t^{-1}]\varepsilon_s) \\
&\overset{(*)}{=} [t](\varepsilon_{t^{-1}s}[t^{-1}]) \\
&= [t]\left(([t^{-1}s][(t^{-1}s)^{-1}])[t^{-1}]\right) \\
&\overset{(iii)}{=} ([t]([t^{-1}s][(t^{-1}s)^{-1}]))[t^{-1}] \\
&= ([t]\varepsilon_{t^{-1}s})[t^{-1}] \\
&\overset{(*)}{=} (\varepsilon_{t(t^{-1}s)}[t])[t^{-1}] \\
&= (\varepsilon_s[t])[t^{-1}] \\
&\overset{(iv)}{=} \varepsilon_s([t][t^{-1}]) = \varepsilon_s\varepsilon_t
\end{aligned}$$

onde em cada igualdade está representado qual relação da definição de $M(L)$ foi utilizada e em $(*)$ utilizamos o item 2) desta proposição.

Para provarmos o item 4) desta proposição basta observarmos que as relações (iii), (iv) e (v) da definição de $M(L)$ podem ser reescritas, utilizando a notação ε_t como

$$\begin{aligned}
[s](\varepsilon_t[r]) &= ([s]\varepsilon_t)[r] \\
\varepsilon_t([s][r]) &= (\varepsilon_t[s])[r] \\
([s][r])\varepsilon_t &= [s]([t]\varepsilon_r).
\end{aligned}$$

Assim sendo, da primeira igualdade temos que $\varepsilon_t \in Nuc_\mu(M(L))$, da segunda igualdade temos que $\varepsilon_t \in Nuc_\lambda(M(L))$ e da terceira igualdade temos que $\varepsilon_t \in Nuc_\rho(M(L))$ e portanto, podemos concluir que $\varepsilon_t \in Nuc(M(L))$. $\square$

Assim, como no caso dos grupos, é possível escrever os elementos de $M(L)$ utilizando ε_{r_i}, com $r_i \in L$. Também chamaremos essa forma de escrever de forma padrão e o seguinte teorema vem nesta direção.

Teorema 4.11. *Seja L um I.P. loop. Então, para qualquer elemento $\alpha \in M(L)$ podemos escrever $\alpha = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s]$, onde $n \geq 0$ e $r_1, r_2, ..., r_n, s \in L$. Além disso, podemos assumir que para quaisquer $i \neq j$, $r_i \neq r_j$, $r_i \neq s$ e $r_i \neq e$, onde e denota o elemento neutro de L.*

Demonstração. Seja $S \subseteq M(L)$ o conjunto de todos os α que admitem uma forma padrão. Temos que S não é vazio, pois, podemos tomar $n = 0$ e segue que, $[s]$ está em S. Para concluirmos o resultado, resta mostrarmos que S é um submagma de $M(L)$ uma vez que os $[s]$, para $s \in L$, formam um sistema gerador de $M(L)$. Primeiramente, vamos observar que

$$\begin{aligned}
[s][t] &= ([e][s])[t] = ([ss^{-1}][s])[t] \\
&\overset{(ii)}{=} (([s][s^{-1}])[s])[t] \\
&\overset{(ii)}{=} ([s]([s^{-1}][s]))[t] \\
&\overset{(iii)}{=} [s](([s^{-1}][s])[t]) \\
&\overset{(i)}{=} [s]([s^{-1}][st]) \\
&\overset{(i)}{=} ([s][s^{-1}])[st] = \varepsilon_s[st],
\end{aligned}$$

onde em cada igualdade está indicada a relação da definição de $M(L)$ que foi utilizada. Assim, temos que $\alpha[t] = (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s])[t]$ e como pelo item 4) da Proposição 4.10, temos que $\varepsilon_{r_i} \in Nuc(M(L))$ para qualquer i, então $\alpha[t] = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}([s][t]) = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}(\varepsilon_{st}[st]) = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{st}[st] \in S$. Como $\varepsilon_{r_i}^2 = \varepsilon_{r_i}$ é plausível que $r_i \neq r_j$, se $i \neq j$ e ainda que $r_i \neq e$ visto que $\varepsilon_e = [e]$. Por fim, se algum $r_i = s$, como pelo item 3) da Proposição 4.10 os ε_{r_i} comutam entre sí, podemos considerar o produto $\varepsilon_s[s] = ([s][s^{-1}])[s]$ e utilizando a relação (i) da definição de $M(L)$ temos que $\varepsilon_s[s] = ([s][s^{-1}])[s] = [s][ss^{-1}] = [s][e] = [s]$. Portanto, podemos considerar todos os $r_i \neq s$. □

Para mostrarmos que $M(L)$ é um magma regular devemos provar que para qualquer $\alpha \in M(L)$ temos que $\alpha(\alpha^*\alpha) = (\alpha\alpha^*)\alpha = \alpha$ e $\alpha^*(\alpha\alpha^*) = (\alpha^*\alpha)\alpha^* = \alpha^*$. O seguinte resultado vem nessa direção e para isso faremos o uso da forma padrão descrita no teorema anterior.

Proposição 4.12. *Seja L um I.P. loop. Então, para qualquer $\alpha \in M(L)$ temos que*

a) $\alpha(\alpha^*\alpha) = (\alpha\alpha^*)\alpha = \alpha$;

b) $\alpha^*(\alpha\alpha^*) = (\alpha^*\alpha)\alpha^* = \alpha^*$.

Demonstração. Primeiramente, se $\alpha = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$, então $\alpha^* = [s^{-1}]\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha^*\alpha) &= (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s])(([s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n})(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s]))\\
&= (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s])((\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}])(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s]))\\
&\overset{(*)}{=} (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s])(\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}][s])\\
&= (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s])(\varepsilon^2_{s^{-1}r_1}\varepsilon^2_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon^2_{s^{-1}r_n}[s^{-1}][s])\\
&\overset{(**)}{=} (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s])(\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}][s])\\
&= (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n})(\varepsilon_{s(s^{-1}r_1)}\varepsilon_{s(s^{-1}r_2)}.....\varepsilon_{s(s^{-1}r_n)}[s]([s^{-1}][s]))\\
&= (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n})(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s]([s^{-1}][s]))\\
&= \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}([s]([s^{-1}][s]))\\
&\overset{(ii)}{=} \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}([ss^{-1}][s])\\
&= \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[e][s]\\
&= \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s] = \alpha,
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos o item 2) e em $(**)$ usamos o item 1) da Proposição 4.10. Além disso, (ii) indica que usamos a relação (ii) da definição de $M(L)$. Por outro lado, utilizando também os itens 1) e 2) da Proposição 4.10, temos que

$$\begin{aligned}
(\alpha\alpha^*)\alpha &= ((\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s])([s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}))(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s]) \\
&= ((\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s])(\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}]))(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s]) \\
&= (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{s(s^{-1}r_1)}\varepsilon_{s(s^{-1}r_2)}.....\varepsilon_{s(s^{-1}r_n)}[s][s^{-1}])(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s]) \\
&= (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n})(\varepsilon_{s(s^{-1}r_1)}\varepsilon_{s(s^{-1}r_2)}.....\varepsilon_{s(s^{-1}r_n)}([s][s^{-1}])[s]) \\
&= (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}([s][s^{-1}])[s] \\
&= \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}([s][s^{-1}])[s]) \\
&\overset{(i)}{=} \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}s] \\
&= \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s][e] \\
&= \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s] = \alpha,
\end{aligned}$$

onde em (i) foi utilizada a relação (i) da definição de $M(L)$. Agora, para as outras igualdades temos que

$$\begin{aligned}
(\alpha^*\alpha)\alpha^* &= (([s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n})(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s]))([s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}) \\
&= (\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}][s])([s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}) \\
&= (\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}][s])([s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}) \\
&\overset{(*)}{=} (\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}([s^{-1}][s])[s^{-1}])\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n} \\
&\overset{(i)}{=} (\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}][ss^{-1}])\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n} \\
&= (\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}][e])\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n} \\
&= (\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}])\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n} \\
&= [s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n} \\
&= [s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n} = \alpha^*,
\end{aligned}$$

onde em (i) foi utilizada a relação (i) da definição de $M(L)$ e em $(*)$ utilizamos o item 4) da Proposição 4.10. Por fim, de forma análoga, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha^*(\alpha\alpha^*) &= ([s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n})((\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}[s])([s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}))\\
&= ([s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n})(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}([s][s^{-1}])\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n})\\
&= \varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}\varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}]([s][s^{-1}])\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}\\
&= \varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}]([s][s^{-1}])\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}\\
&\overset{(ii)}{=} \varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}s][s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}\\
&= \varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[e][s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}\\
&= \varepsilon_{s^{-1}r_1}\varepsilon_{s^{-1}r_2}.....\varepsilon_{s^{-1}r_n}[s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}\\
&= [s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n}\\
&= [s^{-1}]\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}.....\varepsilon_{r_n} = \alpha^*,
\end{aligned}$$

onde em (ii) foi utilizada a relação (ii) da definição de $M(L)$. □

Por fim, para mostrarmos que $M(L)$ é um magma com inverso, resta mostrarmos a unicidade de α^*. Para isso vamos utilizar o mesmo argumento utilizado em [12]. Neste trabalho, o autor utilizou o termo representação no sentido de serem homomorfismo entre semigrupos inversos, no nosso contexto será um homomorfismo entre magmas regulares, a priori.

Primeiro, vamos considerar a representação $\partial : M(L) \to L$ dada por $\partial([t]) = t$. Note que, se $\alpha \in M(L)$, utilizando a forma padrão, podemos reescrever $\alpha = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}...\varepsilon_{r_n}[t]$ e temos que

$$\begin{aligned}
\partial(\alpha) &= \partial(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}...\varepsilon_{r_n}[t])\\
&= \partial(\varepsilon_{r_1})(\partial(\varepsilon_{r_2})...(\partial(\varepsilon_{r_n})\partial([t])))\\
&= (r_1r_1^{-1})(r_2r_2^{-1})...(r_nr_n^{-1})t\\
&= t.
\end{aligned}$$

Agora, vamos considerar o conjunto $P_e'(L)$ que consiste do conjunto de todas as partes de L que contém o elemento neutro e juntamente com o vazio. Então, para cada $t \in L$, definimos $\phi_t : P'_e(L) \to P'_e(L)$, dado por, $\phi_t(\emptyset) = \emptyset$ e se $E \in P'_e(L)$ e é diferente de vazio, então $\phi_t(E) = \begin{cases} tE \cup \{e\}, \text{se } t \in Nuc(L) \\ \emptyset, \text{se } t \notin Nuc(L) \end{cases}$.

Iremos mostrar que se definirmos $\lambda : L \to \mathcal{F}(P'_e(L))$, onde $\mathcal{F}(P'_e(L))$ denota as funções de $P'_e(L)$ em $P'_e(L)$, dada por $\lambda(t) = \phi_t$, então λ satisfaz todas as relações da Proposição 4.8. De fato, se considerarmos $E = \emptyset$, então as relações de $a) - f)$ são trivialmente satisfeitas. Agora, vamos analisar cada relação considerando $E \neq \emptyset$ e analisando todos os possíveis casos.

Para a relação $a)$, primeiro consideremos o caso em que $s, t \notin Nuc(L)$. Desta maneira, $\phi_{s^{-1}}(\phi_s\phi_t)(E) = \emptyset = (\phi_{s^{-1}}\phi_s)\phi_t(E)$ e observe que mesmo que $s, t \notin Nuc(L)$ pode ocorrer de $st \in Nuc(L)$, porém como $Nuc(L)$ é um subloop de L e $s \notin Nuc(L)$, então $s^{-1} \notin Nuc(L)$ e segue que $\phi_{s^{-1}}\phi_{st}(E) = \emptyset$. Agora, se $s \in Nuc(L)$ e $t \notin Nuc(L)$, então $\phi_{s^{-1}}(\phi_s\phi_t)(E) = \emptyset = (\phi_{s^{-1}}\phi_s)\phi_t(E)$ e pela Proposição 1.22, $st \notin Nuc(L)$ e consequentemente, $\phi_{s^{-1}}\phi_{st}(E) = \emptyset$. O caso $s \notin Nuc(L)$ e $t \in Nuc(L)$ é análogo. Resta mostrarmos o caso em que $s, t \in Nuc(L)$. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} \phi_{s^{-1}}(\phi_s\phi_t)(E) &= \phi_{s^{-1}}(\phi_s(tE \cup \{e\})) \\ &= \phi_{s^{-1}}(s(tE) \cup \{s, e\}) \\ &= s^{-1}(s(tE)) \cup \{s^{-1}, s^{-1}s, e\} \\ &\overset{(*)}{=} tE \cup \{s^{-1}, e\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\phi_{s^{-1}}\phi_s)\phi_t(E) &= (\phi_{s^{-1}}\phi_s)(tE \cup \{e\}) \\ &= \phi_{s^{-1}}(s(tE) \cup \{s, e\}) \\ &= s^{-1}(s(tE)) \cup \{s^{-1}, s^{-1}s, e\} \\ &\overset{(*)}{=} tE \cup \{s^{-1}, e\}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\phi_{s^{-1}}\phi_{st}(E) &= \phi_{s^{-1}}((st)E \cup \{e\}) \\
&= s^{-1}((st)E) \cup \{s^{-1}, e\} \\
&\overset{(**)}{=} (s^{-1}(st))E \cup \{s^{-1}, e\} \\
&\overset{(*)}{=} tE \cup \{s^{-1}, e\},
\end{aligned}
$$

onde em $(*)$ usamos o fato de L ser um I.P. loop e em $(**)$ o fato que se $s \in Nuc(L)$, então temos que $s^{-1} \in Nuc(L)$.

Para a relação $b)$, primeiro consideremos o caso em que $s, t \notin Nuc(L)$. Assim, $(\phi_s\phi_t)\phi_{t^{-1}}(E) = \emptyset = \phi_s(\phi_t\phi_{t^{-1}})(E)$ e observe que mesmo que $s, t \notin Nuc(L)$ pode ocorrer de $st \in Nuc(L)$, porém como $Nuc(L)$ é um subloop de L e $t \notin Nuc(L)$, então $t^{-1} \notin Nuc(L)$. Logo, $\phi_{st}\phi_{t^{-1}}(E) = \emptyset$. Agora, se $s \notin Nuc(L)$ e $t \in Nuc(L)$, então $(\phi_s\phi_t)\phi_{t^{-1}}(E) = \emptyset = \phi_s(\phi_t\phi_{t^{-1}})(E)$ e, pela Proposição 1.22, $st \notin Nuc(L)$ e consequentemente, $\phi_{st}\phi_{t^{-1}}(E) = \emptyset$. O caso $s \in Nuc(L)$ e $t \notin Nuc(L)$ é análogo. Resta mostrarmos o caso em que $s, t \in Nuc(L)$. Neste caso, temos que

$$
\begin{aligned}
(\phi_s\phi_t)\phi_{t^{-1}}(E) &= (\phi_s\phi_t)(t^{-1}E \cup \{e\}) \\
&= \phi_s(t(t^{-1})E \cup \{t, e\}) \\
&\overset{(*)}{=} \phi_s(E \cup \{t, e\}) \\
&= sE \cup \{s, st, e\} \\
&= sE \cup \{st, e\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_s(\phi_t\phi_{t^{-1}})(E) &= \phi_s(\phi_t(t^{-1}E \cup \{e\})) \\
&= \phi_s(t(t^{-1})E \cup \{t, e\}) \\
&\overset{(*)}{=} \phi_s(E \cup \{t, e\}) \\
&= sE \cup \{s, st, e\} \\
&= sE \cup \{st, e\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_{st}\phi_{t^{-1}}(E) &= \phi_{st}(t^{-1}E \cup \{e\}) \\
&= (st)(t^{-1}E) \cup \{st, e\} \\
&\overset{(**)}{=} ((st)t^{-1})E \cup \{st, e\} \\
&\overset{(*)}{=} sE \cup \{st, e\},
\end{aligned}
$$

onde em $(*)$ usamos o fato de L ser um I.P. loop e em $(**)$ o fato de que se $t \in Nuc(L)$, então $t^{-1} \in Nuc(L)$.

Antes de provarmos as relações $c), d)$ e $e)$ é importante observarmos que se r, s ou $t \notin Nuc(L)$, como não há produtos entre r, s e t nos índices de ϕ, então $\phi_r(E), \phi_s(E)$ ou $\phi_t(E)$ será igual a vazio e portanto, as igualdades são trivialmente satisfeitas. Sendo assim, resta analisar apenas o caso em que r, s e $t \in Nuc(L)$. Para a relação $c)$ temos que

$$
\begin{aligned}
(\phi_r\phi_s)(\phi_{s^{-1}}\phi_t)(E) &= (\phi_r\phi_s)(\phi_{s^{-1}}(tE \cup \{e\})) \\
&= (\phi_r\phi_s)(s^{-1}(tE) \cup \{s^{-1}, e\}) \\
&= \phi_r(s(s^{-1}(tE)) \cup \{ss^{-1}, s, e\}) \\
&\overset{(*)}{=} \phi_r(tE \cup \{s, e\}) \\
&= r(tE) \cup \{r, rs, e\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_r((\phi_s\phi_{s^{-1}})\phi_t)(E) &= \phi_r(\phi_s\phi_{s^{-1}})(tE \cup \{e\}) \\
&= \phi_r(\phi_s(s^{-1}(tE) \cup \{s^{-1}, e\})) \\
&= \phi_r(s(s^{-1}(tE)) \cup \{ss^{-1}, s, e\}) \\
&\overset{(*)}{=} \phi_r(tE \cup \{s, e\}) \\
&= r(tE) \cup \{r, rs, e\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\phi_r(\phi_s\phi_{s^{-1}}))\phi_t(E) &= (\phi_r(\phi_s\phi_{s^{-1}}))(tE \cup \{e\}) \\
&= \phi_r(\phi_s(s^{-1}(tE) \cup \{s^{-1}, e\})) \\
&= \phi_r(s(s^{-1}(tE)) \cup \{ss^{-1}, s, e\}) \\
&\overset{(*)}{=} \phi_r(tE \cup \{s, e\}) \\
&= r(tE) \cup \{r, rs, e\},
\end{aligned}
$$

onde em $(*)$ usamos o fato de L ser um I.P. loop. Para a relação $d)$ temos que

$$
\begin{aligned}
(\phi_s\phi_{s^{-1}})(\phi_t\phi_r)(E) &= (\phi_s\phi_{s^{-1}})(\phi_t(rE \cup \{e\}) \\
&= (\phi_s\phi_{s^{-1}})(t(rE) \cup \{t, e\}) \\
&= \phi_s(s^{-1}(t(rE)) \cup \{s^{-1}, s^{-1}t, e\}) \\
&= s(s^{-1}(t(rE))) \cup \{ss^{-1}, s(s^{-1}t), s, e\} \\
&\overset{(*)}{=} t(rE) \cup \{t, s, e\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
((\phi_s\phi_{s^{-1}})\phi_t)\phi_r(E) &= ((\phi_s\phi_{s^{-1}})\phi_t)(rE \cup \{e\}) \\
&= (\phi_s\phi_{s^{-1}})(t(rE) \cup \{t, e\}) \\
&= \phi_s(s^{-1}(t(rE)) \cup \{s^{-1}, s^{-1}t, e\}) \\
&= s(s^{-1}(t(rE))) \cup \{ss^{-1}, s(s^{-1}t), s, e\} \\
&\overset{(*)}{=} t(rE) \cup \{t, s, e\},
\end{aligned}
$$

onde em $(*)$ usamos o fato de L ser um I.P. loop. Para a relação $e)$ temos que

$$
\begin{aligned}
(\phi_s\phi_t)(\phi_r\phi_{r^{-1}})(E) &= (\phi_s\phi_t)(\phi_r(r^{-1}E \cup \{e\}) \\
&= (\phi_s\phi_t)(r(r^{-1}E) \cup \{r, e\}) \\
&\overset{(*)}{=} (\phi_s\phi_t)(E \cup \{r, e\}) \\
&= \phi_s(tE \cup \{t, tr, e\}) \\
&= s(tE) \cup \{s, st, s(tr), e\}),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\phi_s(\phi_t(\phi_r\phi_{r^{-1}}))(E) &= \phi_s(\phi_t(\phi_r(r^{-1}E \cup \{e\}))\\ &= \phi_s(\phi_t(r(r^{-1}E) \cup \{r, e\}))\\ &\overset{(*)}{=} \phi_s(\phi_t(E \cup \{r, e\}))\\ &= \phi_s(tE \cup \{t, tr, e\})\\ &= s(tE) \cup \{s, st, s(tr), e\}),\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos o fato de L ser um I.P. loop.

Por fim, para a relação f), se $s \notin Nuc(L)$ então $\phi_s(E) = \emptyset = \phi_s\phi_e(E) = \phi_e\phi_s(E)$ e se $s \in Nuc(L)$, então $\phi_s(E) = sE \cup \{e\} = e(sE) \cup \{e\} = \phi_e\phi_s(E)$ e também $\phi_s(E) = sE \cup \{e\} = s(eE) \cup \{e\} = \phi_s\phi_e(E)$. Portanto, a Proposição 4.8 nos garante que existe uma única representação $\Lambda : M(L) \to \mathcal{F}(P'_e(L))$ tal que $\Lambda([t]) = \phi_t$.

Além disso, observemos que como $\Lambda(\varepsilon_r)(E) = \phi_{\varepsilon_r}(E)$ e no caso em que $E = \emptyset$ temos que $\Lambda(\varepsilon_r)(E) = \emptyset$. Agora, no caso em que $E \neq \emptyset$, pelo item 4) da Proposição 4.10 temos que $\varepsilon_r \in Nuc(M(L))$, para qualquer $r \in L$ e segue que

$$\begin{aligned}\Lambda(\varepsilon_r)(E) &= \phi_{\varepsilon_r}(E)\\ &= \phi_r\phi_{r^{-1}}(E)\\ &= \phi_r(r^{-1}E \cup \{e\})\\ &= r(r^{-1}E) \cup \{r, e\}\\ &\overset{(*)}{=} E \cup \{r, e\}\\ &= E \cup \{r\},\end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos o fato de L ser um I.P. loop. Assim, se $\alpha = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}...\varepsilon_{r_n}[s]$, então $\Lambda(\alpha)(\{e\}) = \{e\} \cup \{r_1, r_2, ...r_n, s\} = \{r_1, r_2, ...r_n, s, e\}$ o que será útil para provar a seguinte proposição.

Proposição 4.13. *Sejam L um I.P. loop e $\alpha \in M(L)$. Então a forma padrão de α é única a menos de uma permutação dos ε_{r_i}'s.*

Demonstração. Primeiro, se considerarmos $\alpha = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}...\varepsilon_{r_n}[s]$, então $\Lambda(\alpha)(\{e\}) =$

$\{r_1, r_2, ...r_n, s, e\}$ e também temos que $\partial(\alpha) = s$. Suponha que exista uma outra forma padrão, digamos $\alpha = \varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}...\varepsilon_{t_m}[u]$. Logo $s = \partial(\alpha) = u$ e portanto, temos que $\{r_1, r_2, ...r_n, s, e\} = \Lambda(\alpha)(\{e\}) = \{t_1, t_2, ...t_m, u, e\}$, isto é, $\{r_1, r_2, ...r_n\} = \{t_1, t_2, ...t_m\}$ e ambas as formas padrão são iguais, a menos de uma permutação dos ε_{r_i}'s. □

Agora, com essas ferramentas em mãos, conseguimos provar a unicidade de α^*, o que nos permite concluir que $M(L)$ é um magma com inverso.

Proposição 4.14. *Seja L um I.P. loop. Então, para cada $\alpha \in M(L)$, o elemento $\alpha^* \in M(L)$ é único.*

Demonstração. Vamos assumir que $\alpha \in M(L)$ possui outro elemento inverso, digamos $\beta \in M(L)$, com $\beta \neq \alpha^*$, tal que $\alpha(\beta\alpha) = (\alpha\beta)\alpha = \alpha$ e $\beta(\alpha\beta) = (\beta\alpha)\beta = \beta$. Utilizando a forma padrão, podemos escrever $\alpha = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}...\varepsilon_{r_n}[s]$ e consequentemente, $\alpha^* = [s^{-1}]\varepsilon_{r_n}...\varepsilon_{r_2}\varepsilon_{r_1}$. Se considerarmos uma forma padrão $\beta = \varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}...\varepsilon_{t_m}[u]$, por um lado temos que $s = \partial(\alpha) = \partial(\alpha(\beta\alpha)) = s(us)$, ou seja, $s = s(us)$, ou equivalentemente, $u = s^{-1}$, pois L é um I.P. loop. Além disso,

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta\alpha) &= (\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}...\varepsilon_{r_n}[s])((\varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}...\varepsilon_{t_m}[u])(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}...\varepsilon_{r_n}[s])) \\
&= \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}...\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}...\varepsilon_{t_m}[s]([s^{-1}][s]) \\
&\overset{(*)}{=} \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}...\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}...\varepsilon_{t_m}[s] = \alpha,
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ utilizamos a relação (i) da definição de $M(L)$. Pela unicidade da forma padrão temos que $\{r_1, r_2, ...r_n, t_1, t_2, ...t_m\} = \{r_1, r_2, ...r_n\}$ e portanto, temos que $\{t_1, t_2, ...t_m\} \subseteq \{r_1, r_2, ...r_n\}$. Aplicando o mesmo argumento, porém em $\beta(\alpha\beta)$ concluímos que $\{r_1, r_2, ...r_n\} \subseteq \{t_1, t_2, ...t_m\}$. Logo, $\{r_1, r_2, ...r_n\} = \{t_1, t_2, ...t_m\}$ e consequentemente, $\beta = \alpha^*$. □

Assim, fica provado que $M(L)$ é um magma com inverso. Cabe destacar que a ausência de exemplos nesta seção decorre da grande quantidade de elementos que pode ter o conjunto $M(L)$. Em [12] o autor traz no Teorema 3.3, para o caso de grupos finitos, que se a ordem do grupo for p, então $S(G)$ tem $(p+1)2^{p-2}$ elementos, como o menor I.P. loop que não é grupo tem ordem 7, estima-se que $M(L)$ tenha mais de 250 elementos e por falta de recursos computacionais, torna-se inviável efetuar os cálculos manualmente.

4.2.2 Relação entre $M(L)$ e Ações Fortes de I.P. Loop

Nesta subseção vamos relacionar as ações parciais fortes de um I.P. loop L em um conjunto X com as aplicações de L em $I(X)$, onde $I(X)$ denota as bijeções parciais em X. primeiramente vamos definir uma ação de um magma com inverso em um conjunto.

Definição 4.15. Sejam M um magma com inverso e $X \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que M age em X se existir uma aplicação $\mu : M \times X \to X$, dada por, $\mu(m,x) = m \cdot x$ tal que para quaisquer $m_1, m_2 \in M$ e $x \in X$ temos que $m_1 \cdot (m_2 \cdot x) = (m_1 m_2) \cdot x$.

Proposição 4.16. *Sejam L um I.P. loop e X um conjunto. Uma aplicação $\theta : L \to I(X)$ é uma ação parcial forte do I.P. loop L em X se e somente se são satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $r, s, t \in L$:*

a) $\theta_{s^{-1}}(\theta_s \theta_t) = (\theta_{s^{-1}} \theta_s)\theta_t = \theta_{s^{-1}} \theta_{st}$;

b) $(\theta_s \theta_t)\theta_{t^{-1}} = \theta_s(\theta_t \theta_{t^{-1}}) = \theta_{st}\theta_{t^{-1}}$;

c) $(\theta_r \theta_s)(\theta_{s^{-1}}\theta_t) = \theta_r((\theta_s \theta_{s^{-1}})\theta_t) = (\theta_r(\theta_s \theta_{s^{-1}}))\theta_t$;

d) $(\theta_s \theta_{s^{-1}})(\theta_t \theta_r) = ((\theta_s \theta_{s^{-1}})\theta_t)\theta_r$;

e) $(\theta_s \theta_t)(\theta_r \theta_{r^{-1}}) = \theta_s(\theta_t(\theta_r \theta_{r^{-1}}))$;

f) $\theta_s \theta_e = \theta_s = \theta_e \theta_s$.

Demonstração. Suponhamos que $\theta : L \to I(X)$ satisfaça as relações a)-f). Vamos provar que θ é uma ação parcial forte do I.P. loop L em X.

Se tomarmos $s = t^{-1}$ em b) temos que

$$\theta_{t^{-1}}(\theta_t \theta_{t^{-1}}) = (\theta_{t^{-1}}\theta_t)\theta_{t^{-1}} = \theta_{t^{-1}t}\theta_{t^{-1}} = \theta_e \theta_{t^{-1}} = \theta_{t^{-1}}$$

Agora, trocando $t = t^{-1}$ em b) temos que

$$\theta_t(\theta_{t^{-1}}\theta_t) = (\theta_t\theta_{t^{-1}})\theta_t = \theta_{tt^{-1}}\theta_t = \theta_e\theta_t = \theta_t$$

Como $I(X)$ é um magma com inverso, temos que $\theta_t^* = \theta_{t^{-1}}$. Agora, vamos definir $D_t = ran(\theta_t)$. Pela teoria das funções parciais temos que $dom(\theta_t) = ran(\theta_t^*) = ran(\theta_{t^{-1}}) = D_{t^{-1}}$ e segue que, $\theta_t : D_{t^{-1}} \to D_t$. Agora, se $t, s \in L$, então

$$\begin{aligned}
\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}} &= \theta_{t^{-1}}(\theta_{s^{-1}}\theta_e) \\
&= \theta_{t^{-1}}(\theta_{s^{-1}}\theta_{ss^{-1}}) \\
&\overset{a)}{=} \theta_{t^{-1}}(\theta_{s^{-1}}(\theta_s\theta_{s^{-1}})) \\
&\overset{e)}{=} (\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}})(\theta_s\theta_{s^{-1}}) \\
&\overset{c)}{=} (\theta_{t^{-1}}(\theta_{s^{-1}}\theta_s))\theta_{s^{-1}} \\
&\overset{b)}{=} (\theta_{t^{-1}s^{-1}}\theta_s)\theta_{s^{-1}} \\
&\overset{b)}{=} \theta_{t^{-1}s^{-1}}(\theta_s\theta_{s^{-1}}),
\end{aligned}$$

onde em cada igualdade está indicada a relação de a)-f) utilizada. Se por um lado temos que $dom(\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}}) = \theta_{s^{-1}}^{-1}(ran(\theta_{s^{-1}}) \cap dom(\theta_{t^{-1}})) = \theta_s(D_{s^{-1}} \cap D_t)$, por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
dom(\theta_{t^{-1}s^{-1}}(\theta_s\theta_{s^{-1}})) &= (\theta_s\theta_{s^{-1}})^{-1}(ran(\theta_s\theta_{s^{-1}}) \cap dom(\theta_{t^{-1}s^{-1}})) \\
&= Id_{D_s}^{-1}(\theta_s(ran(\theta_{s^{-1}}) \cap dom(\theta_s)) \cap D_{st}) \\
&= Id_{D_s}(\theta_s(D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}}) \cap D_{st}) \\
&= Id_{D_s}(D_s \cap D_{st}) = D_s \cap D_{st}.
\end{aligned}$$

Por fim, se tomarmos $x \in D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}}D_{t^{-1}}$, então existe $y \in D_s$ tal que $x = \theta_{s^{-1}}(y)$ e segue que $(\theta_t\theta_s)(x) = \theta_t(\theta_s\theta_{s^{-1}})(y) = (\theta_{ts}\theta_{s^{-1}})(y) = \theta_{ts}(x)$.

Agora, dada uma ação parcial forte $\theta = (\{\theta_l\}_{l \in L}, \{D_l\}_{l \in L})$ de L em X vamos provar que são satisfeitas as condições de $a)$ à $f)$.

Como a composição de funções é associativa, então temos que:

$$\theta_{s^{-1}}(\theta_s\theta_t) = (\theta_{s^{-1}}\theta_s)\theta_t = \theta_{s^{-1}}\theta_{st}$$

$$(\theta_s\theta_t)\theta_{t^{-1}} = \theta_s(\theta_t\theta_{t^{-1}}) = \theta_{st}\theta_{t^{-1}}$$

$$(\theta_r\theta_s)(\theta_{s^{-1}}\theta_t) = \theta_r((\theta_s\theta_{s^{-1}})\theta_t) = (\theta_r(\theta_s\theta_{s^{-1}}))\theta_t$$

$$(\theta_s\theta_{s^{-1}}(\theta_t\theta_r) = ((\theta_s\theta_{s^{-1}}\theta_t)\theta_r$$

$$(\theta_s\theta_t)(\theta_r\theta_{r^{-1}}) = \theta_s(\theta_t(\theta_r\theta_{r^{-1}}))$$

Notemos também que como θ é uma ação parcial forte, então $\theta_s\theta_e = \theta_s = \theta_e\theta_s$, pois $\theta_e = Id_X$. □

Teorema 4.17. *Para todo I.P. loop L e um conjunto X existe uma correspondência um para um entre:*

a) Ações parciais fortes do I.P. loop L em X;

b) Ações de $M(L)$ em X.

Demonstração. Pela Proposição 4.16 uma aplicação $\theta : L \to I(X)$ é uma ação parcial forte de I.P. loops se e somente se satisfaz as condições de $a)$ à $f)$. Como $I(X)$ também é um magma, pela Proposição 4.8, para cada ação parcial forte de I.P. loop existe uma única $\phi : M(L) \to I(X)$, isto é, uma única ação de $M(L)$ em X. Analogamente, dada uma ação $\beta_{[l]}$ de $M(L)$ em X, basta definirmos $\alpha_l = \beta_{[l]}$. Assim, os axiomas da Proposição 4.16 são satisfeitos, tendo em vista que $M(L)$ satisfaz os axiomas da Definição 4.15.

□

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos os conceitos iniciais referentes as ações e ações parciais de I.P. loops assim como alguns resultados clássicos da teoria de ações e ações parciais de grupos transpostos para esse contexto não associativo. No desenvolver desse trabalho, muitas perguntas acabaram surgindo que ainda não temos respostas para elas. Por exemplo, quando estudamos as ações envolventes para ações parciais no caso fraco e forte nos questionamos sobre ser possível construir um contexto de Morita entre o skew anel parcial e o skew anel da envolvente. Nas nossas tentativas, ainda não tivemos resultados positivos para as situações que não se reduzissem aos casos análogos aos de ações de grupos, mas ficamos com esse problema em aberto. Em [13], os autores trazem algumas propriedades do skew anel parcial no caso de grupos, também ficamos com esse eixo para explorar de forma mais aprofundada. Também ficamos em aberto sobre a relação entre $Nuc(R \rtimes_\alpha L)$ e $R \rtimes_\alpha Nuc(L)$ nos casos em que α é uma ação parcial fraca e forte de I.P. loop. Como se tratam de conceitos novos, observamos muitas direções que ainda podem ser tomadas para desenvolvimento e trabalhos futuros. Cabe destacar também que em [19] o autor trabalha sobre um contexto de álgebra de Hopf, usando o que seria, no nosso caso, as ações fortes. Assim, outra direção possível para pesquisa é o estudo neste contexto do que seriam as ações fracas e as ações parciais, outra direção que vemos como possibilidade para trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

[1] F. Abadie, M. Dokuchaev, R. Exel, and J. Simon. Morita equivalence of partial group action and globalization. *Transactions of the American Mathematical Society*, 368:4957–4992, 07 2016.

[2] A. A. Albert. Quasigroups i. *Transactions of the American Mathematical Society*, 54(3):507–519, 11 1943.

[3] A. A. Albert. Quasigroups ii. *Transactions of the American Mathematical Society*, 55(3):401–419, 05 1944.

[4] M. M. S. Alves and E. Batista. Enveloping actions for partial Hopf actions. *Communications in Algebra*, 38(8):2872–2902, 2010.

[5] E. Batista. Partial actions: what they are and why we care. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, 24(1):35–71, 03 2017.

[6] L. Bemm, W. G. Lautenschlaeger, and T. Tamusiunas. Groupoid twisted partial actions. *arXiv e-prints*, page arXiv:2105.03008v1, Nov 2021.

[7] N. Bourbaki. *Algebra I*, volume Chapters 1-3. Springer, 1998.

[8] T. Brzezinski. Hopf modules and the fundamental theorem for hopf (co)quasigroups. *International Eletronic Journal of Algebra*, 8:114–128, 12 2009.

[9] M. Dokuchaev and R. Exel. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(5):1931–1952, 2005.

[10] M. Dokuchaev, M. Ferrero, and A. Paques. Partial actions and Galois theory. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 208:77–87, 01 2007.

[11] R. Exel. Circle actions on C*-algebras, partial automorphisms, and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence. *Journal of functional analysis*, 122(2):361–401, 1994.

[12] R. Exel. Partial actions of groups and actions of inverse semigroups. *Proceeding of the American Mathematical Society*, 126(12):3481–3494, 12 1998.

[13] M. Ferrero and J. Lazzarin. Partial actions and partial skew group rings. *Journal of Algebra*, 319(12):5247–5264, 2008.

[14] S. Flora, D. Flôres, A. Morgado, and T. Tamusiunas. Groupoid actions on sets, duality and a morita context. *Communications in Algebra*, pages 1–13, 07 2022.

[15] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.1*, 2022.

[16] M. Giuliani and W. Cortes. On loopoids and magma with inverse. *Communications in Algebra*, 49:1–10, 06 2021.

[17] E. G. Goodaire and C. P. Milies. Ring alternative loops and their loop rings. *Resenhas IME - USP*, 2(1):47–82, 1995.

[18] T. W. Hungerford. *Algebra.* Graduate Text in Mathematics. Springer Verlag, 1974.

[19] J. Klim and S. Majid. Hopf quasigroups and the algebraic 7-sphere. *Journal of Algebra*, 323(11):3067–3110, 2010.

[20] W. Lautenschlaeger and T. Tamusiunas. Inverse semigroupoid actions and representations. *arXiv e-prints*, page arXiv:2007.15216v3, 07 2020.

[21] H. Pflugfelder. Historical notes on loop theory. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 41, 01 2000.

[22] H. O. Pflugfelder. *Quasigroups and Loops: Introduction.* Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, 1990.

[23] V. Shcherbacov. *Elements of Quasigroup Theory and Applications.* Monographs and Research notes in Mathematics. Chapman & Hall Book, 2017.

[24] J. D. Smith. *An Introduction to quasigroup and their representation.* Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall Book, 2006.