

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**ANÁLISE DA ESTRUTURA DAS ESTRELAS DE NÊUTRONS E
SUA RELAÇÃO COM O ESPAÇO DE FASE DA
CROMODINÂMICA QUÂNTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

AUTOR: LUCAS DORIA DE CARVALHO

**PORTO ALEGRE, RS
2022/1**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**ANÁLISE DA ESTRUTURA DAS ESTRELAS DE NÊUTRONS E
SUA RELAÇÃO COM O ESPAÇO DE FASE DA
CROMODINÂMICA QUÂNTICA**

AUTOR: LUCAS DORIA DE CARVALHO

Trabalho de conclusão de curso apresentado como
requisito parcial para obtenção do título de Bacharel
em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Magno Valério Trindade Machado

**PORTO ALEGRE, RS
2022/1**

Agradecimentos

Agradeço ao professor Magno Machado pela orientação neste trabalho, assim como pelas dicas e direções durante todo o tempo que cursei a graduação.

Agradeço também ao professor Maximiliano Segala, pela excelente orientação de programa bolsista-pesquisador durante a maior parte do tempo em que fiz parte da UFRGS.

Resumo

Estrelas de nêutrons (NSs) fazem parte do grupo de objetos mais extremos que existem no universo. Com a recente observação de ondas gravitacionais provenientes da colisão entre duas estrelas de nêutrons (evento GW170817), pelos projetos LIGO e VIRGO, assim como a confirmação de estrelas de nêutrons de $M > 2M_{\odot}$ como o pulsar PSR J0740+6620 observado pelo telescópio NICER, o estudo das equações de estado para a matéria nuclear fria e extremamente densa, encontrada apenas em estrelas de nêutrons, se tornou uma área de crescente interesse.

Este trabalho se propõe a estudar e revisar a física básica de estrelas de nêutrons, com ênfase na análise de equações de estado e a relação destas com as propriedades macroscópicas das estrelas resultantes das soluções das equações Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Vale ressaltar que todos os resultados deste trabalho são extraídos da literatura recente, com o propósito de ilustrar e possibilitar uma melhor visualização das soluções para cada equação de estado.

Inicialmente, o modelo simples de uma estrela de nêutrons constituída por um gás de Fermi de nêutrons é revisado em detalhes, com posterior adição de prótons e elétrons no sistema de forma a garantir o equilíbrio em relação à interação fraca. São derivadas equações de estado para os dois modelos, a partir das quais é possível estimar as propriedades macroscópicas das estrelas. Para os modelos não-interagentes, é obtido o limite para a massa máxima de NSs $M_{max} \sim 0,7M_{\odot}$.

Posteriormente, um modelo empírico para a interação entre núcleons é utilizado para modelar uma estrela de nêutrons composta por matéria nuclear interagente. A derivação da equação de estado é baseada em resultados didáticos retirados da literatura. Observa-se que o limite de massa M_{max} aumenta consideravelmente, sendo obtido $M_{max} \sim 2,7M_{\odot}$ para a EoS da matéria interagente. Aspectos de modelos fenomenológicos para a matéria nuclear densa são comentados na Seção 3.2, dando ênfase ao fato de que diferentes modelos estimam valores diferentes para as propriedades da matéria nuclear a altas densidades, visto a falta de vínculos para a região $n_B > 1,1n_0$. A aparição de graus de liberdade estranhos na composição de NSs é comentada, observando que a presença de híperons diminui o valor de massa máximo.

Na Seção 4.1 o trabalho revisa um modelo para a matéria de quarks desconfiados, o *modelo de sacola do M.I.T.*, que tem o objetivo de descrever a matéria de quarks não-interagentes. Este modelo é útil pois permite uma abordagem simples para uma fase

possível de ser encontrada no núcleo de estrelas de nêutrons extremamente densas. Por fim, são analisados alguns conceitos referentes a métodos de interpolação de equações de estado para a região de densidades da estrela onde as incertezas são maiores, com particular interesse no resultado recente de (ANNALA et al., 2020), que sugere um vínculo entre a velocidade do som c_s da equação de estado de NSs e a presença de matéria de quarks desconfinados em seus núcleos.

Palavras-chave: Estrelas de nêutrons, Equações de estado, Sistemas degenerados, Matéria nuclear, Matéria de quarks, Modelos efetivos da matéria nuclear densa, Cromodinâmica Quântica.

Sumário

1	Introdução	1
2	Equações de Estado para Sistemas de Gás de Fermi	7
2.1	Modelo de gás de Fermi de nêutrons	9
2.2	Estrela de nêutrons com prótons e elétrons	15
3	Matéria Nuclear Densa e Interagente	21
3.1	Modelo empírico para interação núcleon-núcleon	22
3.2	Outros modelos para matéria nuclear densa	28
4	Núcleos de Estrelas de Nêutrons	35
4.1	Modelo de sacola do M.I.T	37
4.2	Transições de fase nos núcleos de NSs - testando o diagrama de fase da QCD	41
5	Conclusões e Perspectivas	49
	Referências Bibliográficas	53
A	Detalhamento matemático para alguns resultados apresentados	57
A.1	Densidade de estados para um gás de férmions livres	57
A.2	Pressão interna de um gás isotrópico	58

Capítulo 1

Introdução

Estrelas de nêutrons (*Neutron Stars*, NSs) são estrelas compactas remanescentes de eventos supernova tipo II ou tipo Ib/Ic, onde a estrela de origem sofre um colapso gravitacional após os processos de fusão em seu interior chegarem à etapa da produção de ferro. Mais especificamente, as NSs se formam a partir do colapso de núcleos de estrelas massivas ($8M_{\odot} < M < 25M_{\odot}$), quando não há mais energia termonuclear para sustentar a massa da estrela exterior ao núcleo. Esse núcleo, constituído principalmente por núcleos de ^{56}Fe , sofre um colapso gravitacional, fazendo com que seu interior atinja densidades da ordem de 10^{14}g/cm^3 . Quando a pressão de degenerescência bariônica do núcleo em colapso for equivalente à pressão gravitacional, as camadas exteriores da estrela são ejetadas ao espaço em uma supernova e o núcleo da estrela colapsada se torna uma estrela de nêutrons.

A existência de estrelas de nêutrons foi proposta inicialmente por Baade e Zwicky em 1934, sugerindo que estrelas mais compactas que anãs-brancas poderiam ser formadas em eventos supernova (BAADE; ZWICKY, 1934), mas pouco trabalho foi investido na área de NSs até a observação do primeiro *radio pulsar*, PSR B1919+21, por Bell e Hewish em 1967 (HEWISH et al., 1968). Depois que Gold propôs a ideia de que pulsares poderiam ser explicados como sendo estrelas de nêutrons magnetizadas em rotação (GOLD, 1968), as observações dos pulsares *Crab* e *Vela* em 1968 foram consideradas como evidências para a formação de NSs em supernovas, confirmando a predição de Baade e Zwicky.

Em 1974 Hulse e Taylor observaram o primeiro sistema binário de pulsar PSR J1913+16 (HULSE; TAYLOR, 1975). Esse sistema é formado por duas estrelas de nêu-

trons orbitando o centro de massa em comum. De fato, NSs podem ser observadas isoladamente, mas a maioria das observações até hoje pertencem a sistemas binários formados junto a outras NSs, anãs-brancas ou estrelas ordinárias. Existem ainda teorias que predizem a existência de binários com buracos-negros, porém até hoje não há registros de observação de tal sistema (VIDANA, 2020).

Em 2017 foi observada a emissão de ondas gravitacionais provenientes da colisão entre duas estrelas de nêutrons (evento GW170817), pelos projetos LIGO e VIRGO (ABBOTT, 2017). A possibilidade de observações de ondas gravitacionais oferece uma importante nova fonte de informação. Em particular, as equações de estado para a matéria de NSs podem ser modeladas para reproduzirem o formato do sinal da onda gravitacional detectada, que por sua vez depende das massas e deformabilidades das NSs envolvidas na colisão, ambas propriedades inferidas pelas diversas EoS existentes.

As estrelas de nêutrons possuem massa tipicamente dentro do intervalo $1-2M_{\odot}$, mas algumas estimativas indicam que sua massa máxima pode chegar à $M_{max} = 2,3M_{\odot}$, e raios da ordem de $10-13\text{km}$ (LATTIMER, 2021), resultando em densidades médias de $7 \times 10^{14}\text{g/cm}^3$, que correspondem a densidades numéricas de bárions de $n_0 = 0,16\text{fm}^{-3}$.

A estrutura interna de uma NS é composta por uma atmosfera e no mínimo três camadas internas, cada uma com propriedades distintas. A crosta da estrela é constituída por núcleos de ferro arranjados em uma rede cristalina, envolvida por um gás de elétrons relativístico. À medida que a densidade da matéria nuclear chega à ordem de $\sim 4 \times 10^{11}\text{g/cm}^3$, os núcleos tornam-se ricos em nêutrons, chegando ao ponto de alguns nêutrons ocuparem estados não-ligados. As densidades na região da crosta da estrela podem chegar à $\rho_0/2$, onde ρ_0 é a densidade de saturação nuclear. No núcleo exterior da NS a matéria é constituída principalmente por nêutrons, com uma pequena concentração de prótons e elétrons para garantir o equilíbrio da matéria nuclear altamente assimétrica. Na região de densidades $\gtrsim 2\rho_0$, alguns autores reportam sobre uma esperada transição de fase para uma matéria de quarks desconfinada (WEISSENBORN et al., 2011; KURKELA et al., 2014; ANNALA et al., 2020). Várias composições são propostas para o núcleo, como híperons, condensados de káons ou píons, bem como matéria de quarks desconfinados em uma fase pura ou uma fase mista com hádrons.

De acordo com a Cromodinâmica Quântica (*Quantum Chromodynamics*, QCD), a teoria das interações fortes fundamentais, a matéria a altas densidades consiste em quarks assintoticamente livres. Entretanto, ainda não está claro se tal fase existe no interior de estrelas de nêutrons, já que a densidade pode não ser suficiente para essa fase da matéria existir.

Uma primeira análise do equilíbrio interno de uma NS pode ser feita a partir de equações da mecânica clássica, considerando o equilíbrio hidrostático entre a pressão interna da estrela p e a força gravitacional F contrária,

$$dp = \frac{dF}{A} = \frac{-G}{4\pi r^2} \frac{m(r)dm}{r^2}, \quad (1.1)$$

onde G é a constante gravitacional, r a componente radial do sistema esférico, $m(r)$ a massa radial da estrela e $dm = \rho(r)dV = 4\pi r^2 \rho(r)dr$. Além disso, geralmente se trabalha com a densidade de energia $\epsilon(r) = \rho(r)c^2$ ao invés da densidade de massa, de forma que a substituição dessas duas definições na Equação 1.1 resulta nas equações diferenciais acopladas

$$\frac{dm}{dr} = \frac{4\pi r^2 \epsilon(r)}{c^2}, \quad (1.2)$$

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{\epsilon(r) m(r)}{c^2 r^2}, \quad (1.3)$$

que representam o equilíbrio entre a pressão e a força gravitacional de uma estrela qualquer. Uma manipulação algébrica leva a equação a uma forma interessante,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\epsilon(r)} \frac{dp}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{c^4} \epsilon(r). \quad (1.4)$$

É possível ver de forma imediata que para resolver a Equação 1.4 é necessário conhecer a relação $p(\epsilon)$ que representa a equação de estado (*Equation of State*, EoS) da estrela. A equação de estado $p(\epsilon)$ pode ser obtida a partir da análise microscópica do sistema que constitui a estrela, de forma que diferentes constituições levam à diferentes equações de estado, e consequentemente a diferentes observáveis macroscópicos como massa e raio. Ainda assim, a determinação da equação de estado geral da estrela de

nêutrons tem se mostrado um problema desafiador. O enorme intervalo de densidades e as diferentes constituições da estrela em suas regiões interiores dificultam a derivação de equações de estado generalizadas e confiáveis. Em particular a região intermediária $3\rho_0 \leq \rho \leq 7\rho_0$ se apresenta como um desafio, já que as condições físicas da matéria não são reproduzíveis em laboratório.

Para modelar corretamente as NSs, correções de natureza da relatividade geral são necessárias. Isso se deve principalmente ao fato de que NSs são objetos extremamente compactos. As equações de equilíbrio hidrostático que descrevem uma estrela isotrópica e sem rotação foram desenvolvidas por Tolman, Oppenheimer e Volkoff (TOV) (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939),

$$\frac{dm}{dr} = \frac{4\pi r^2 \epsilon(r)}{c^2}, \quad (1.5)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2 r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1}. \quad (1.6)$$

São necessárias duas condições de contorno para a resolução das TOVs, sendo elas $m(r=0) = 0$ e $p(r=0) = p_0$, onde p_0 determina a pressão central inicial da NS. A solução para $p(r)$ deverá ser igual a zero em algum ponto $r = R$ marcando o raio da estrela $p(r=R) = 0$, e assim é possível obter uma estimativa para a massa da estrela $M = m(R)$. A solução das Equações 1.5 para diferentes valores de pressão central p_0 resulta em uma curva parametrizada por p_0 conhecida como diagrama $M-R$, muito útil na análise de NSs. Essa curva $M(R)$ depende fortemente da equação de estado escolhida.

As equações de estado podem então serem utilizadas para resolver as Equações 1.5 e estimar a massa e o raio de uma NS modelada pela EoS em questão, para uma dada pressão central inicial. Isto é, uma vez obtida a equação de estado para a matéria nuclear do interior de NSs, determinam-se suas propriedades observáveis a partir da resolução das TOVs, mais comumente expressa em diagramas $M-R$.

Como dito anteriormente, o estudo da matéria altamente assimétrica e a altas densidades bariônicas, em particular o estudo da matéria dos núcleos de NSs, vêm recebendo grande atenção. Isso porque recentes avanços no campo da física de altas

energias têm possibilitado cada vez mais o estudo da matéria sob condições extremas, proporcionando novos dados e vínculos sobre os estados da matéria em condições físicas limites (PASECHNIK; ŠUMBERA, 2017). Dentre esses, o estado de quarks desconfiados é de particular interesse, visto que há possibilidade dessa fase da matéria existir de forma estável no núcleo interno de estrelas de nêutrons. O cenário de baixas temperaturas e altíssimas densidades é encontrado apenas no interior de NSs, fazendo destas estrelas um laboratório único para o estudo da matéria nuclear a altas densidades. Assim, a proposta de que exista matéria de quarks desconfiados no interior de NSs é atualmente um dos principais tópicos de estudo da astrofísica nuclear.

Espera-se que ocorra uma transição de fase a partir das regiões de densidade $\gtrsim 2\rho_0$ no interior de NSs. Uma revisão realizada por (BAYM et al., 2018) aponta essa transição como sendo contínua, com os graus de liberdade dos quarks aparecendo no sistema de forma gradual, o que dificulta o tratamento da região intermediária de densidades $3\rho_0 \leq \rho \leq 7\rho_0$ a partir de equações de estado hadrônicas, porém não está bem estabelecido na literatura se essa transição de fase é contínua ou de primeira ordem. Em estudos recentes, como aqueles propostos por (ANNALA et al., 2020), sugere um possível vínculo entre a velocidade do som adiabática c_s e a existência da fase de matéria de quarks desconfiados no núcleo de NSs.

O objetivo do presente trabalho é estudar, com enfoque didático e de revisão, a física pertinente para o entendimento das estrelas de nêutrons, iniciando com a relação entre a constituição microscópica da estrela, modelada através da sua equação de estado (usando matéria hadrônica, estados mistos e de quarks desconfiados), e as suas propriedades macroscópicas como massa e raio. São analisadas equações de estado simplificadas para vários graus de liberdade distintos contribuindo para a constituição da estrela e as consequências físicas da sua presença. No Capítulo 2, é revisada a descrição de uma estrela de nêutrons pura, modelada através da equação de estado do gás de Fermi e sua comparação com o caso de inclusão de prótons e elétrons bem como as interações nucleares. A inclusão de interações nucleares e o estudo de sistemas constituídos por matéria nuclear densa é deixada para o Capítulo 3, onde também é comentada a definição da velocidade do som adiabática em objetos compactos e os limites físicos para seu valor. No Capítulo 4, é realizado um breve estudo do *modelo de sacola do M.I.T* (CHODOS et al., 1974), um modelo simples para descrever a matéria

de quarks desconfiados, no qual os quarks são considerados assintoticamente livres em uma região do espaço denominada sacola. O diagrama de fase da QCD também é revisto, observando a possível linha de transição de fase para a matéria fria altamente densa encontrada apenas em NSs. As regiões de densidades intermediárias entre a fase hadrônica e a fase de quarks desconfiados no núcleo de NSs é estudada, com ênfase nos avanços dos métodos de interpolação para determinação da equação de estado para a região $\gtrsim 2n_0$. No capítulo final resumimos os principais pontos revisados neste estudo.

Capítulo 2

Equações de Estado para Sistemas de Gás de Fermi

Estrelas de nêutrons são diferentes de estrelas ordinárias no sentido de que não realizam fusões nucleares em seu interior. Dessa forma, sua estabilidade não pode ser explicada em termos de uma pressão térmica. Quando a estrela ordinária original encerra o ciclo de fusões em seu núcleo, este sofre um colapso gravitacional, fazendo com que a matéria dentro desta região atinja densidades da ordem de 10^{14} g/cm³.

É revisado neste capítulo que, devido ao princípio de exclusão de Pauli, esse colapso gravitacional causa uma pressão no interior do núcleo que sustenta a recém-formada estrela de nêutrons. Essa pressão interna das NSs é chamada pressão de degenerescência, e sustenta a estrela contra o colapso gravitacional de sua enorme massa resultante.

A estrela de nêutrons mais simples de ser modelada é composta por um gás de Fermi. Esse modelo é útil pois prevê uma pressão interna do sistema mesmo a $T = 0$. Assim, inicialmente é feita uma análise de sistema de nêutrons degenerados, derivando equações de estado correspondentes e apresentando resultados baseados em revisões didáticas da literatura (SILBAR; REDDY, 2004; SAGERT et al., 2006). Ao final do capítulo, prótons e elétrons são adicionados ao gás de nêutrons livres para satisfazer as condições de equilíbrio- β . Ao longo deste capítulo, são ignoradas as interações entre as partículas (a serem estudadas no Capítulo 3), de forma a primeiramente tratar com detalhes a estrutura básica de uma NS modelada por um gás de férmions degenerados, bem como suas equações de estado simplificadas deste cenário. Com

esse modelo é possível compreender a resolução das Equações TOV de maneira didática, e entender como as equações de estado afetam as propriedades macroscópicas da estrela.

Um sistema de férmions degenerados é um sistema composto de partículas de spin $s = 1/2$ a altas densidades, fazendo com que a aproximação $T = 0$ seja aplicável. Se o sistema em consideração for não-interagente, então o sistema é chamado de gás de Fermi. O estudo desse sistema se torna útil no caso de uma primeira descrição de NSs, onde é possível obter uma pressão interna mesmo a temperatura nula. A aproximação $T = 0$ é justificada pelo fato de que a energia de Fermi (e portanto a temperatura de Fermi $T_F \equiv E_F/k_B$) é muito maior do que a temperatura de uma NS comum ($T_{NS} \lesssim 1 \text{ MeV}$) (HAENSEL et al., 2007).

Supondo $T = 0$, um sistema de N férmions não terá energia térmica, de forma que a energia do sistema é equivalente à soma das energias individuais das partículas. A função de distribuição de partículas em um gás de férmions é dada por

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}. \quad (2.1)$$

Como estamos supondo $T \rightarrow 0$, podemos estimar a função de distribuição para dois casos em função da energia: (i) $E < \mu$, $f(E) \rightarrow 1$ e (ii) $E > \mu$, $f(E) \rightarrow 0$. O potencial químico é denotado por μ . Isto é, para o caso de um gás de Fermi, a função de distribuição reduz-se para

$$\begin{cases} f(E) = 1, & \text{se } E < \mu, \\ f(E) = 0, & \text{se } E > \mu. \end{cases} \quad (2.2)$$

Ou seja, a energia necessária para um férmion ser adicionado ao sistema é $\mu = E_F$, denominada energia de Fermi. Correspondentemente, o momentum associado às energias de cada estado aumenta à medida que os níveis de energia são preenchidos. Essa é a razão pela qual esse tipo de sistema produz uma pressão, mesmo a uma temperatura nula.

2.1 Modelo de gás de Fermi de nêutrons

O modelo mais simples de um sistema de férmions degenerados aplicável para NSs é o caso do gás de Fermi de nêutrons. Temos que encontrar $p(\epsilon)$ para o gás de nêutrons livres a $T = 0$. Vamos derivar a EoS para esse gás, partindo de uma análise microscópica dos estados disponíveis para este sistema de partículas livres. A Equação A.6 nos dá a densidade de estados de momentum k para um sistema de nêutrons livres:

$$\rho(k) = \frac{k^2}{\pi^2 \hbar^3}, \quad (2.3)$$

onde foi usado que os graus de liberdade $g = 2$ para nêutrons, como exigido pelo princípio de exclusão de Pauli. Já que $T = 0$, o sistema possui estados preenchidos apenas abaixo no nível de Fermi, de forma que podemos obter uma densidade numérica de elétrons dentro da estrela integrando até o momento de Fermi, k_F ,

$$n(k) = \int_0^{k_F} f(E) \rho(k) dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}. \quad (2.4)$$

O momentum de Fermi do gás pode ser encontrado, então, em função da densidade de massa ou energia

$$\rho = nm_N \quad , \quad k_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 \rho}{m_N} \right)^{1/3}, \quad (2.5)$$

onde, n é dado pela Equação 2.4. A Equação 2.5 relaciona o momentum de Fermi do gás de nêutrons que constitui a NS modelada até aqui, com a densidade de energia da matéria. A grandeza k_F é portanto um parâmetro livre para o sistema, fazendo com que diferentes k_F modelem estrelas de diferentes massas e raios. Com $\epsilon(k_F)$ em mãos, precisamos relacionar a densidade de energia à pressão para obter a EoS.

A densidade de energia ϵ para a matéria de gás de nêutrons livres pode ser

obtida a partir da integral sobre os níveis de energia até o momentum de Fermi k_F

$$\epsilon(k_F) = \int_0^{k_F} E(k)\rho(k)dk = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/mc} (u^2 + 1)^{1/2} u^2 du, \quad (2.6)$$

onde utilizamos a energia para um nêutron relativístico $E(k) = \sqrt{(mc^2)^2 + (kc)^2}$ e fizemos a substituição conveniente $u = k/mc$. A integral 2.6 pode ser resolvida analiticamente, resultando na densidade de energia $\epsilon(k_F)$ para o gás de nêutrons livres

$$\epsilon(u) = \frac{1}{8} \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} [(u_F^3 + u_F)(1 + u_F^2)^{1/2} - \sinh^{-1} u_F], \quad (2.7)$$

onde $u_F = k_F/mc$.

A Equação A.14 nos permite calcular a pressão de maneira imediata para um gás de férmions livres não-interagentes. A pressão interna para o gás de nêutrons é portanto

$$p = \frac{1}{3} \frac{8\pi c^2}{(2\pi \hbar)^3} \int_0^{k_F} (k^2 c^2 + m^2 c^4)^{-1/2} k^4 dk, \quad (2.8)$$

onde $v(k) = dE/dk = kc^2/E(k)$. Realizando a mesma substituição para a densidade de energia, a saber $u = k/mc$, chegamos à expressão para a pressão interna da NS composta por um gás de Fermi de nêutrons em função do momentum de Fermi k_F

$$p(u_F) = \frac{1}{24} \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} [(u_F^2 + 1)^{1/2} (2u_F^3 - 3u_F) + 3 \sinh^{-1} u_F] \quad (2.9)$$

onde $u_F = k_F/mc$ como no caso anterior. A Equação 2.9 é a pressão interna de uma NS pura, constituída somente por um gás de Fermi de nêutrons. Precisamos ainda relacionar a densidade de energia ϵ à pressão para determinar a equação de estado para esse sistema, a fim de inserí-la nas equações TOV 1.5 e determinar propriedades macroscópicas como massa e raio. Entretanto, as expressões para $p(k_F)$ e $\epsilon(k_F)$ não são triviais, de forma que usualmente são realizadas duas aproximações para o estado da matéria do gás de nêutrons para derivação das equações de estado. Assim, seguindo (SAGERT et al., 2006) e (SILBAR; REDDY, 2004) vamos considerar os limites relativístico e não-relativístico das Equações 2.6 e 2.8 para obter EoSs que possuem uma forma

simples. Finalmente, essas EoSs podem então ser inseridas nas equações de equilíbrio da estrela 1.5, para analisar como a constituição microscópica da estrela (nesse caso o gás de Fermi) afeta as grandezas macroscópicas da estrela, como massa e raio.

No limite de densidades não-relativístico, $k_F \ll mc$, de forma que $u \ll 1$. A integral 2.8 se reduz para

$$p(\epsilon) = \frac{1}{3} \frac{m_N^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \frac{1}{5} \frac{k_F^5}{m_N^5 c^5} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_N} \left(\frac{3\pi^2}{m_N c^2} \right)^{5/3} \epsilon^{5/3} = K_{nrel} \epsilon^{5/3}, \quad (2.10)$$

onde usamos que a densidade de energia no limite de densidades não-relativístico é dada simplesmente por $\epsilon(k_F) = n(k_F)^2 2m_N$. Uma equação de estado na forma $p(\epsilon) = K\epsilon^\gamma$ é chamada *equação de estado politrópica*, onde γ é o chamado *índice politrópico*. Portanto, a EoS para o gás de nêutrons livres no limite não-relativístico a $T = 0$ é uma politrópica com índice $\gamma = 5/3$.

Tendo derivado a equação de estado 2.10, pode-se resolver as Equações 1.5 para diferentes valores de pressão central p_0 . Os resultados para o raio R da estrela e massa total M são mostrados na Figura 2.1 para as Equações Newtonianas 1.2 e relativísticas 1.5. Para o limite não-relativístico, vemos que o valor máximo para a massa de uma NS é de $M \approx 0,44M_\odot$ utilizando as TOVs, enquanto o raio da estrela fica entre 18 km e 30 km. É interessante observar que, à medida que a pressão central aumenta, a estrela fica mais compacta, com maior massa e menor raio, fazendo com que as diferenças entre as previsões das TOVs em relação às equações Newtonianas fiquem mais aparentes.

Para o caso de densidades relativísticas onde $k_F \gg mc$ e consequentemente $u \gg 1$, devemos obter a densidade de energia total relativística para o caso do gás de nêutrons,

$$\epsilon(k_F) = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} (k^2 c^2 + m_N^2 c^4)^{1/2} k^2 dk, \quad (2.11)$$

$$= \frac{m_N^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/m_N c} (u^2 + 1)^{1/2} u^2 du, \quad (2.12)$$

$$= \frac{m_N^4 c^5}{4\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{k_F}{m_N c} \right)^4. \quad (2.13)$$

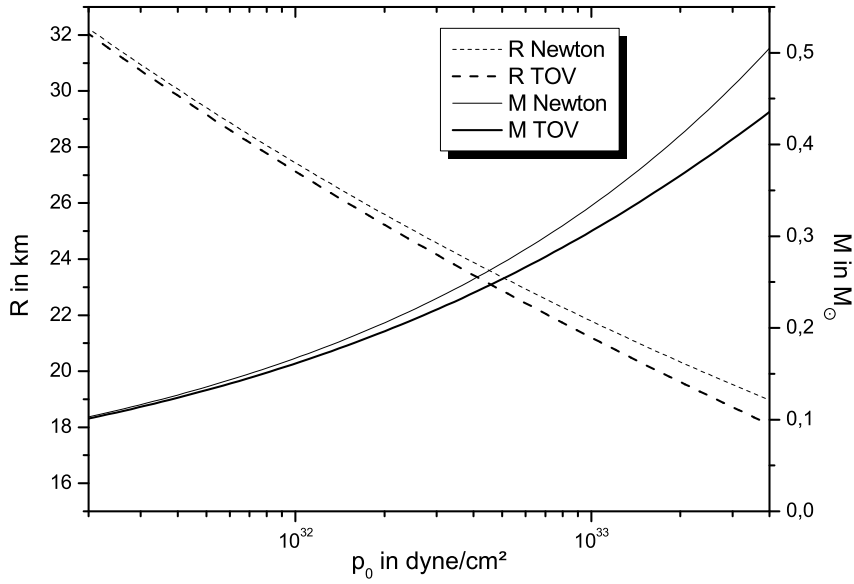


FIGURA 2.1. Massa M e raio R de NSs no limite não-relativístico de densidades, em função da pressão central p_0 . Os resultados para as Equações 1.2 e 1.5 são comparados. Figura extraída de (SAGERT et al., 2006).

A integral 2.8 reduz-se para

$$p(k_F) = \frac{1}{3} \frac{m_N^4 c^5}{4\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{k_F}{m_N c} \right)^4. \quad (2.14)$$

Portanto, para o caso do gás de nêutrons livres relativístico, obtemos a equação de estado

$$p(\epsilon) = \frac{1}{3}\epsilon, \quad (2.15)$$

a qual consiste em uma EoS politrópica, agora com $\gamma = 1$. Como feito anteriormente, a Equação 2.15 pode ser inserida nas equações TOV para estimar massa e raio da estrela. Porém, é um resultado bem estabelecido na literatura que essa EoS não satisfaz as condições de uma solução para as TOVs (SILBAR; REDDY, 2004; SAGERT et al., 2006). Isso porque a pressão para a EoS politrópica de $\gamma = 1$ converge monotonicamente a 0, sem nunca cruzar o eixo r , de forma que a solução não satisfaz a condição $p(r = R) = 0$, pois a estrela teria um raio infinito. O problema com essa EoS está no fato de que para uma dada pressão central inicial p_0 , a pressão interna passa necessariamente pela região não-relativística de densidades da estrela, fazendo com que a

aproximação utilizada não seja válida, concluindo que a solução relativística do gás de Fermi de nêutrons não é válida para a resolução das TOVs sobre o grande intervalo de densidades da estrela de nêutrons.

Até agora foram derivadas duas equações de estado para estrelas de nêutrons, considerando dois limites para os valores do momentum de Fermi do sistema de gás de nêutrons livres em função da densidade do sistema. Entretanto, é interessante analisar os resultados de uma equação de estado que seja válida para todo o intervalo de densidades de uma estrela de nêutrons, sem a necessidade de aproximações. Isso é realizado em (SILBAR; REDDY, 2004) e (SAGERT et al., 2006), onde os autores utilizam de métodos de localização de raízes das Equações 2.6 e 2.8, sem a necessidade de utilizar aproximações para isolar ϵ ou p .

Os resultados das TOVs para M e R como função da pressão central p_0 são dispostos na Figura 2.2. É possível verificar que a massa máxima M_{max} prevista para estrelas de nêutrons fica na região intermediária de densidades, onde $M_{max} = M(p_0^{max}) \approx 0,7M_{\odot}$. De fato, uma condição de estabilidade para uma estrela de nêutrons é $dM/dp > 0$, já que um aumento na massa total da estrela deve ser acompanhada por um aumento na pressão, para equilibrar a estrela contra o aumento da pressão gravitacional. Assim, a região da curva $M(p_0)$ para $p_0 > p_0^{max}$ é constituída por NSs instáveis.

Um diagrama muito utilizado para estudar o comportamento de diferentes equações de estado para NSs é o chamado *diagrama massa-raio*, ou *diagrama $M-R$* . O diagrama correspondente para a NS do gás de Fermi de nêutrons é apresentado na Figura 2.3. Cada ponto da curva $M-R$ corresponde a uma estrela de pressão central p_0 , onde a pressão central aumenta da direita para a esquerda. A estrela de nêutrons mais massiva possui pressão central de $p_0 = 3,5 \times 10^{35}$ dyne/cm³.

Até agora foram revisadas as propriedades de um gás de Fermi de nêutrons, em particular como a equação de estado para esse sistema afeta propriedades macroscópicas de estrelas de nêutrons modeladas pelas Equações 1.5. A pressão de degenerescência para esse sistema foi calculada, utilizando aproximações para os limites não-relativístico e relativístico de densidades, a fim de obter a definição do índice politrópico γ . Utilizando resultados numéricos apresentados nas Figuras 2.1, 2.2 e 2.3

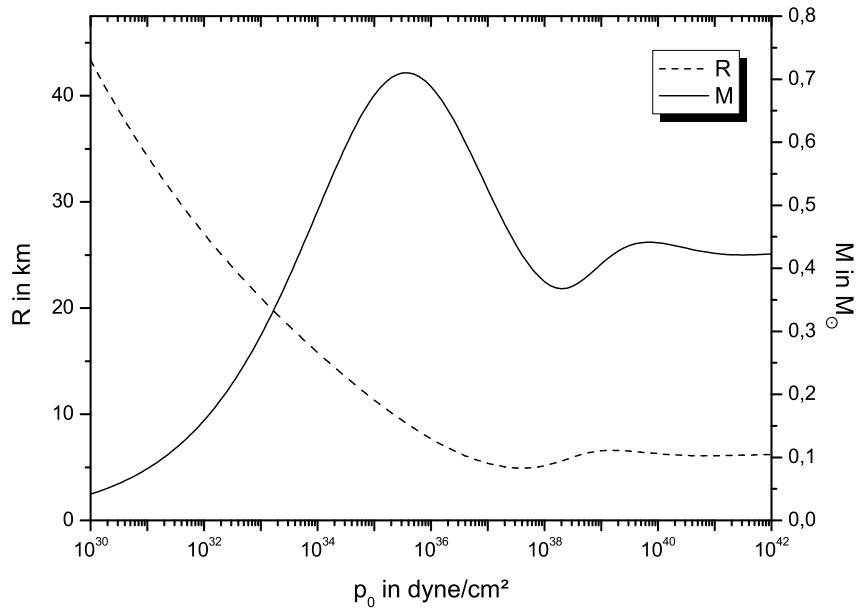


FIGURA 2.2. Massa M e raio R de estrelas de nêutrons obtidas com as TOVs em função da pressão central p_0 . Figura extraída de (SAGERT et al., 2006).

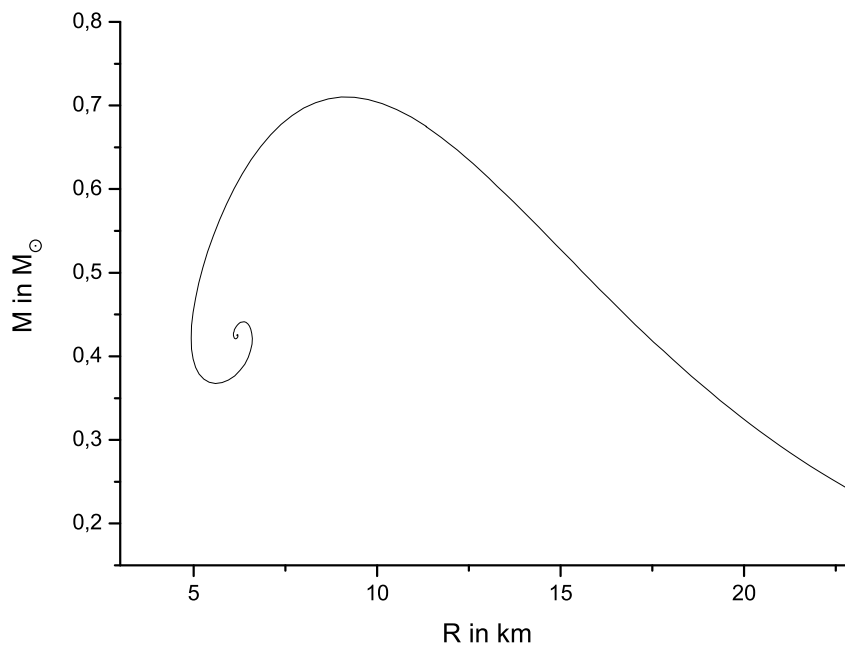


FIGURA 2.3. Diagrama $M-R$ para a estrela de nêutrons do gás de nêutrons livres. A massa máxima de uma estrela dessa constituição é $M_{max} \approx 0,7 M_{\odot}$ com raio de $R \approx 9,1$ km. Figura extraída de (SAGERT et al., 2006).

extraídas de (SAGERT et al., 2006) para a solução das TOVs, resultados importantes foram apresentados, como a obtenção do limite $M_{max} \approx 0,7M_{\odot}$. É possível agora aprimorar este modelo para a constituição da estrela, de forma a estudar estrelas de nêutrons mais complexas.

2.2 Estrela de nêutrons com prótons e elétrons

Sabe-se que um nêutron livre decai em aproximadamente 15 minutos (DUBBERS; MÄRKISCH, 2021), a partir da reação



Portanto, o gás de Fermi de nêutrons considerado na seção anterior é instável devido à interação fraca, e uma NS não pode ser constituída apenas por nêutrons. É interessante, pois, modelar um sistema não-interagente onde os nêutrons permaneçam estáveis, a partir de um equilíbrio químico no sistema. Para isso, devem existir reações inversas à 2.16 do tipo captura de elétrons,



Se um sistema onde ocorrem as reações 2.16 e 2.17 acima estiver em equilíbrio químico e elétrico, dizemos que ele encontra-se em *equilíbrio- β* , pois as reações de decaimento β do nêutron são equilibradas por reações do tipo captura de elétron. Assim, vamos incluir ao modelo de gás de nêutrons livres uma fração de gases de prótons e de elétrons livres, produzidos a partir da reação 2.16. Como estamos considerando um sistema com carga líquida total nula $Q = 0$ (JACOBSEN, 2007), temos

$$n_p = n_e \quad \Rightarrow \quad k_{F,p} = k_{F,e}. \quad (2.18)$$

Ou seja, a densidade de prótons é a mesma da densidade de elétrons, ambas dadas por 2.4, o que implica que o momentum de Fermi de ambas as espécies de partículas devem ser equivalentes. Da condição de equilíbrio químico, temos

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e, \quad (2.19)$$

onde μ_j denota o respectivo potencial químico de cada espécie de férmion. Desconsideramos o potencial químico dos neutrinos ($\mu_\nu = 0$) visto que o fluxo de neutrinos escapa da NS fria sem quaisquer interações (BAYM et al., 2018). Como ainda estamos considerando um sistema a $T = 0$, vale que $E_F = \mu$, então

$$(c^2 k_{F,n}^2 + m_n^2 c^4)^{1/2} = (c^2 k_{F,p}^2 + m_p^2 c^4)^{1/2} + (c^2 k_{F,e}^2 + m_e^2 c^4)^{1/2}, \quad (2.20)$$

de onde podemos retirar um vínculo para o momentum de Fermi do gás de prótons $k_{F,p}$ em função de $k_{F,n}$

$$k_{F,p}(k_{F,n}) = \frac{[(k_{F,n}^2 + m_n^2 - m_e^2)^2 - 2m_p^2(k_{F,n}^2 + m_n^2 + m_e^2) + m_p^4]^{1/2}}{2(k_{F,n}^2 + m_n^2)^{1/2}}. \quad (2.21)$$

O caso $k_{F,n} = 0$ corresponde ao caso onde não há nêutrons livres no gás composto em consideração. Portanto, conclui-se que este modelo só é válido para $p_{critica} > 3 \times 10^{24}$ dyne/cm³, estabelecendo uma pressão interna mínima para existência de nêutrons no sistema. A densidade de energia desse sistema composto é simplesmente a soma das densidades de energia parciais de cada gás para a espécie j , isto é,

$$\epsilon = \sum_j \epsilon(u_j) = \frac{1}{8} \frac{m_j^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} [(2u_j^3 + u_j)(1 + u_j^2)^{1/2} - \sinh^{-1} u_j]. \quad (2.22)$$

A pressão de um gás composto por N espécies de partículas é dada pela soma das pressões parciais de cada espécie. Como todas as espécies são férmions, podemos

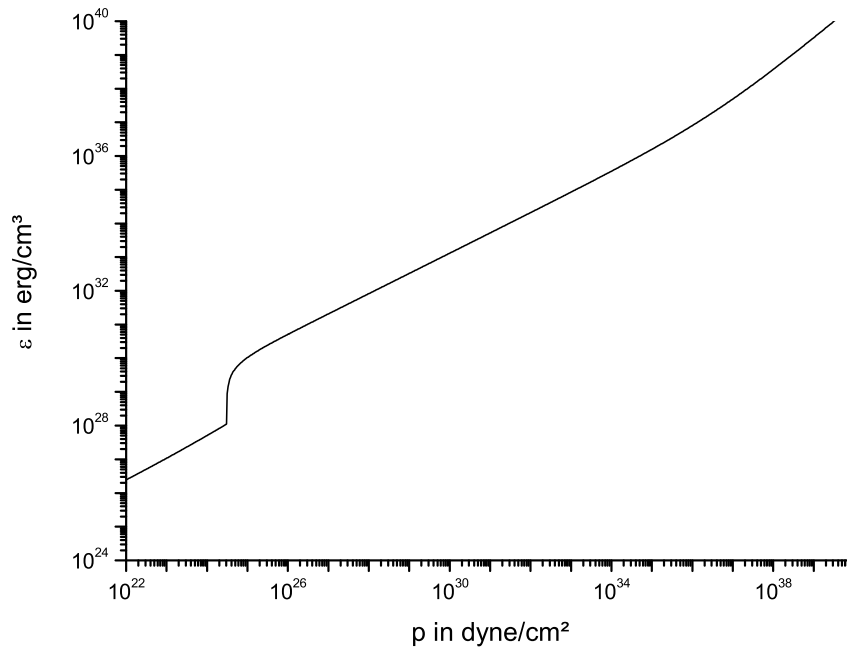


FIGURA 2.4. Equação de estado $p(\epsilon)$ para o gás de férmions livres, considerando equilíbrio- β . Existe um salto indicando a pressão $p_{critica}$ onde há formação de nêutrons no sistema e consequente aumento na densidade de energia. Figura extraída de (SAGERT et al., 2006).

utilizar a Equação 2.8 para cada espécie, isto é

$$p_j = \frac{1}{3} \frac{8\pi c^2}{(2\pi\hbar)^3} \sum_j \int_0^{k_{F,j}} (k^2 c^2 + m_j^2 c^4)^{-1/2} k^4 dk, \quad j = n, p, e, \quad (2.23)$$

onde p_j é a pressão parcial do gás de partículas livres da espécie j . A Equação 2.9 nos dá a solução explícita dessas integrais. A pressão interna do sistema de gás de férmions livres não-interagentes em equilíbrio- β é dada por

$$p(k_{F,j}) = \frac{1}{24} \frac{c^5}{\pi^2 \hbar^3} \sum_j m_j^4 [(u_j^2 + 1)^{1/2} (2u_j^3 - 3u_j) + 3 \sinh^{-1} u_j], \quad (2.24)$$

onde $u_j = k_{F,j}/m_j c$, com $k_{F,j} = \hbar (3\pi^2 \epsilon_j / m_j c^2)^{1/3}$. É possível notar que a respectiva pressão de degenerescência agora tem contribuições do gás de prótons e de elétrons. A Figura 2.4 mostra o gráfico da equação de estado para o sistema de gás de férmions livres em equilíbrio- β a $T = 0$. É possível visualizar o ponto a partir do qual os nêutrons são criados no sistema, causando um salto na densidade de energia.

Uma propriedade bastante útil na análise de sistemas compostos por j espécies

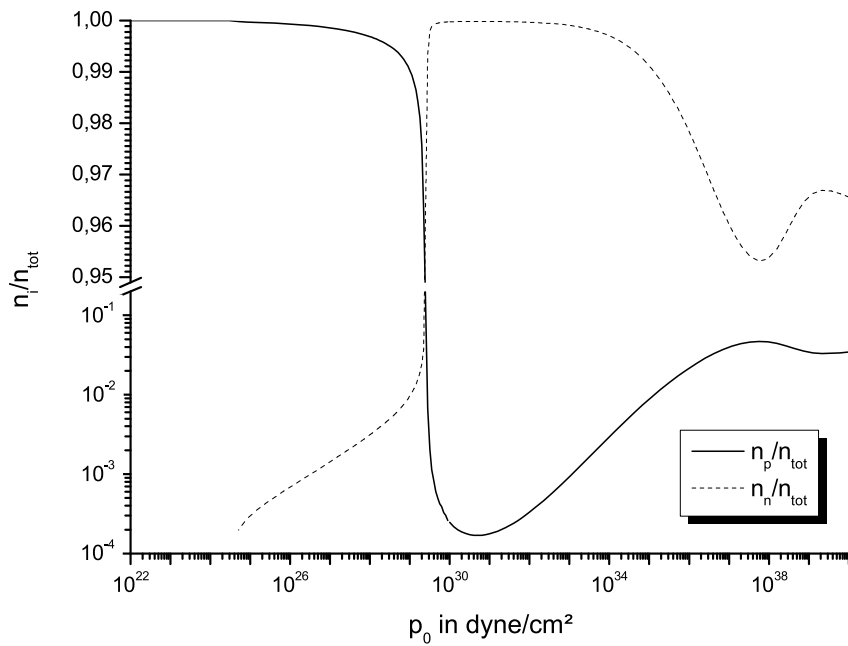


FIGURA 2.5. A densidade de prótons n_p e densidade de nêutrons n_n como fração da densidade de nucleons n em função da densidade central p_0 de estrelas modeladas por um gás de férmions livres. Figura extraída de (SAGERT et al., 2006).

diferentes de partículas, como no caso da NS composta por um gás de Fermi de vários férmions, é a razão de densidades n_j/n_{tot} . O gráfico da razão de densidades como função de diferentes estrelas de pressão central p_0 é mostrado na Figura 2.5. Vemos que para estrelas de pressão central $\lesssim 10^{29}$ dyne/cm³ a estrela é composta principalmente por prótons, dificilmente caracterizando uma NS. Já para pressões maiores que essa pressão central crítica, a matéria é composta quase que exclusivamente por nêutrons, apontando que o sistema favorece reações do tipo 2.17, fazendo desta a região válida para o modelo de gás de nêutrons livres estudado na seção anterior. Para pressões $\gtrsim 10^{34}$ dyn/cm³, uma fração considerável de prótons reaparece no sistema.

O diagrama $M-R$ para essa estrela é exposto na Figura 2.6. A curva $M(R)$ é similar àquela da EoS do gás de Fermi de nêutrons, porém agora a NS mais massiva prevista possui um limite M_{max} ligeiramente menor, possivelmente devido ao fato dos nêutrons serem mais massivos que os prótons. A configuração da estrela mais massiva prevista possui fração de prótons $n_p/n_{tot} \sim 0,2$. Vimos nesta subseção que os detalhes da constituição química da NS sob a luz do equilíbrio- β é mais rica comparado com o caso de apenas nêutrons livres.

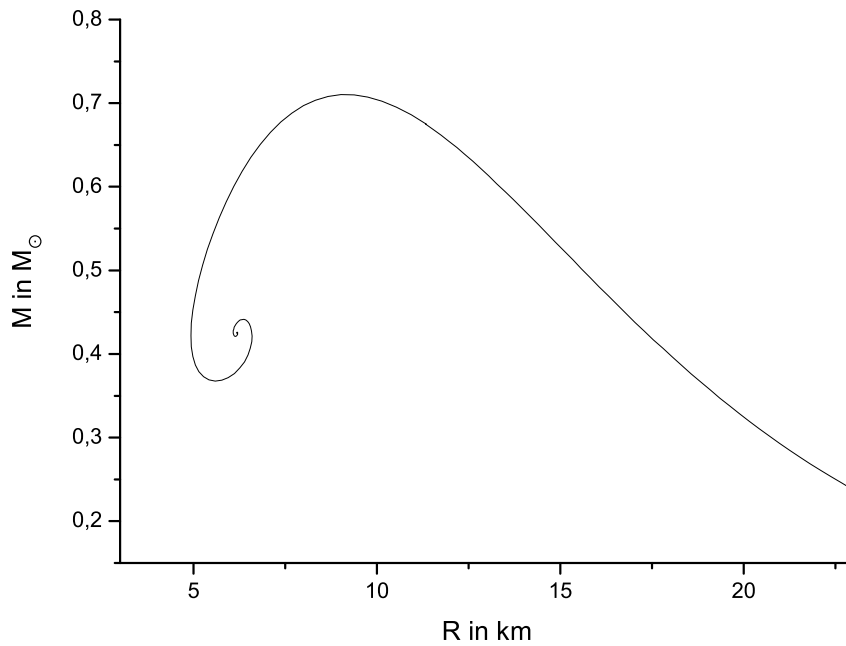


FIGURA 2.6. Diagrama $M - R$ para NSs compostas por gás de férmions livres. O valor de M_{max} é menor que o encontrado para o gás de nêutrons livres, com raio correspondente $R = 9,24\text{km}$. Figura extraída de (SAGERT et al., 2006).

Neste capítulo, foram revisados modelos simples para o gás de Fermi de nêutrons e de nêutrons com adição de prótons e elétrons, como matéria constituinte de estrelas de nêutrons. Foram derivadas as equações de estado para os dois modelos, analisando as propriedades macroscópicas de estrelas de nêutrons e como estas dependem da EoS escolhida. Apresentamos as representações gráficas das EoS correspondentes e diagramas $M-R$ a partir das soluções das TOVs revisadas em (SAGERT et al., 2006). A saber, foram revisados os limites para a massa máxima de NSs constituídas por um gás de Fermi de nêutrons, prótons e elétrons $M_{max} \approx 0,7M_{\odot}$, assim como uma região de instabilidade das estrelas modeladas por essa constituição, isto é, $p_0 \gtrsim 10^{36}$ dyne/cm². Ainda, foi notado que para pressões centrais $p_0 < 10^{30}$ dyne/cm², a estrela é constituída principalmente por prótons e elétrons, não caracterizando uma NS.

Apesar dos resultados interessantes, foram utilizadas aproximações significativas e simplificações para esses sistemas, a mais importante delas sendo a desconsideração de interações nucleares. Uma consequência direta dessa simplificação pode ser vista ao comparar o limite obtido para a massa máxima de NSs $M_{max} \sim 0,7M_{\odot}$ com as estrelas observadas de massa próxima a $2M_{\odot}$.

Portanto, a fim de modelar estrelas de nêutrons mais realistas, o próximo capítulo irá abordar sistemas de núcleons interagentes como composição da matéria nuclear das NSs. De maneira similar, as respectivas equações de estado serão revistas, permitindo verificar-se que a inclusão de interações pode aumentar o limite de massa para as NSs modeladas pelas equações TOV maiores que $2M_{\odot}$.

Capítulo 3

Matéria Nuclear Densa e Interagente

No capítulo anterior foram derivadas as equações de estado para uma estrela de nêutrons constituída por um gás de nêutrons, prótons e elétrons não-interagentes a $T = 0$, obtendo resultados importantes como expressões para a pressão de degenerescência. As soluções foram extraídas da literatura para as equações de equilíbrio hidrostático (TOVs) e as propriedades macroscópicas da estrela como massa e raio.

Porém, o modelo de gás de Fermi não é capaz de descrever as estrelas de nêutrons observadas. Isso porque, como será visto neste capítulo, considerar as interações núcleon-núcleon levam a resultados muito diferentes. De fato, a contribuição para a pressão devido às interações nucleares é tão grande que o limite de massa de NSs aumenta em quase quatro vezes. Assim, este capítulo é destinado à análise das propriedades da matéria nuclear a $T = 0$ a altas densidades e fortemente interagente que constitui uma estrela de nêutrons. De maneira similar ao realizado no capítulo anterior, uma equação de estado para o modelo empírico proposto por (SILBAR; REDDY, 2004) é derivada com certo detalhe, para posterior visualização de propriedades macroscópicas a partir das soluções das equações TOV obtidas da literatura.

Ao final deste capítulo, outros modelos para a matéria nuclear densa de NSs são revistos, assim como a aparição de graus de liberdade estranhos à medida que a densidade da matéria aumenta. Resultados atuais publicados em trabalhos de revisão, i.e. *reviews on neutrons stars EoS*, também são apresentados, a fim de introduzir os vínculos utilizados na área de pesquisa sobre a equação de estado para a matéria densa no interior de estrelas de nêutrons.

Neste capítulo, são utilizadas unidades de MeV para energia e fm para distâncias. Aliás, convém definir $c = 1$, tal que $\hbar c = 197,3 \text{ MeVfm}^{-1}$.

3.1 Modelo empírico para interação núcleon-núcleon

Um modelo simples para descrever um sistema de núcleons interagentes é proposto por (SILBAR; REDDY, 2004), onde é introduzida uma interação nuclear empírica, modelada por dois termos de energia potencial na expressão para a densidade de energia por núcleon ϵ/n para a matéria nuclear simétrica ($n_n = n_p$) na forma

$$\frac{\epsilon(n)}{n} = m_N + \langle E_0 \rangle u^{2/3} + \frac{A}{2} u + \frac{B}{\sigma + 1} u^\sigma, \quad u = n/n_0. \quad (3.1)$$

O primeiro termo à direita da expressão 3.1 é simplesmente a energia de repouso dos núcleons, a ser comparado com a expressão do caso não-interagente 2.5. Além disso, a massa dos nêutrons é considerada igual a dos prótons, i.e. $m_n = m_p = m_N$. O termo $\langle E_0 \rangle$ é a energia cinética média por núcleon da matéria nuclear simétrica no estado fundamental,

$$\langle E_0 \rangle = \frac{3}{5} \frac{k_0^2}{2m_N} = \frac{3}{5} \frac{1}{2m_N} \left(\frac{3\pi^2 \hbar^3 n_0}{2} \right)^{2/3}, \quad (3.2)$$

onde utiliza-se o momentum de Fermi 2.5 na *densidade de saturação* n_0 . Porém, agora temos o fator de degenerescência $g = 4$ na expressão A.6, levando em conta os dois possíveis estados de isospin para os núcleons. Os termos que ajustam as interações nucleares são os dois últimos na Equação 3.1, onde σ é parâmetro adimensional e A e B possuem dimensão de energia. Esses três parâmetros são livres, de forma que deverão ser ajustados a partir de dados experimentais existentes à respeito da matéria nuclear. O modelo deve reproduzir os seguintes resultados bem-estabelecidos na literatura para a matéria nuclear simétrica a n_0 ,

- A densidade bariônica de saturação $n_B = 0,16/\text{fm}^3$;
- A energia de ligação por núcleon $(\epsilon(n)/n - m_N)|_{n=n_0} = -16 \text{ MeV}$;

- A compressibilidade nuclear $K(n_0) = 9dp(n)/dn|_{n=n_0} \approx 400 \text{ MeV}$.

Cálculos de ajuste levam ao seguinte conjunto de parâmetros para o modelo empírico da Equação 3.1(SAGERT et al., 2006)

$$\boxed{A = -118,2 \text{ MeV}, \quad B = 65,39 \text{ MeV}, \quad \sigma = 2,112, \quad \langle E_0 \rangle = 22,1 \text{ MeV},} \quad (3.3)$$

Como estamos considerando uma matéria composta por núcleons interagentes, a expressão para a pressão A.14 que utilizamos para o gás de férmions livres não é mais válida. Precisamos encontrar uma nova relação para relacionar uma grandeza termodinâmica p do sistema a uma grandeza microscópica ϵ . A equação fundamental da termodinâmica para um sistema a $T = 0$ é dada por

$$du = -pdV + \sum_j \mu_j dN_j, \quad (3.4)$$

onde μ_j é o potencial químico da partícula de espécie j . Podemos expressar essa equação como uma densidade de energia por partícula do sistema, já substituindo a densidade de energia para matéria nuclear ϵ ,

$$d(\epsilon/n) = -pd(1/n) + \sum_j \mu_j Y_j, \quad (3.5)$$

onde $Y_j = n_j/n$ é a fração de partículas da espécie j em relação a densidade total. Da Equação 3.5 e da definição da pressão temos que $p = -\partial(\epsilon/n)/\partial(1/n)$. Portanto, a pressão para um sistema a $T = 0$ pode ser dada por

$$p(\epsilon) = n^2 \frac{d(\epsilon/n)}{dn}, \quad (3.6)$$

onde p é a pressão interna da matéria nuclear interagente e ϵ/n é a densidade de energia por núcleon. Substituindo a Equação 3.1 na expressão acima e resolvendo a derivada,

pode-se obter uma primeira equação de estado para a matéria nuclear simétrica,

$$p(\epsilon) = n_0 \left(\frac{2}{3} \langle E_0 \rangle u^{5/3} + \frac{A}{2} u^2 + \frac{B\sigma}{\sigma+1} u^{\sigma+1} \right). \quad (3.7)$$

Porém, a constituição da matéria na qual temos interesse possui alta assimetria de núcleons, isto é, para a matéria de estrelas de nêutrons $n_n \gg n_p$, de forma que se faz necessária uma equação de estado para a matéria nuclear assimétrica. O primeiro passo para descrever a matéria nuclear com assimetria de nêutrons em relação ao número de prótons é definir um parâmetro que meça a assimetria,

$$\alpha = \frac{n_n - n_p}{n}. \quad (3.8)$$

É comum tratar a energia do sistema assimétrico de núcleons em função de (n, α) , ao invés das duas densidades de núcleons. Uma álgebra simples torna possível mostrar que $n_n = n(1 + \alpha)/2$ e $n_p = n(1 - \alpha)/2$. A energia do sistema assimétrico é obtida por uma expansão de Taylor em torno de $\alpha = 0$. É mostrado em (SAGERT et al., 2006) que a correção em expansão de Taylor até segunda ordem é suficiente para garantir a validade da Equação 3.9 na densidade de saturação,

$$\boxed{E(n, \alpha) = E(n, 0) + \alpha^2 S(u)}, \quad (3.9)$$

onde $S(u)$ é denominada função de energia de simetria. Este último termo tem a função de corrigir a energia do sistema com relação a um sistema simétrico de núcleons. Tendo uma expressão para a energia total do sistema, a densidade de energia é dada por $\epsilon = nE(n, \alpha)/A$ e a Equação 3.6 dá a equação de estado da estrela deste modelo,

$$\boxed{p(n, \alpha) = p(n, 0) + n_0 \alpha^2 \left[(2^{2/3} - 1) \langle E_0 \rangle (2/3 u^{5/3} - u^2) + S_0 u^2 \right]}, \quad (3.10)$$

O gráfico da equação de estado 3.10, parametrizada pela densidade numérica bariônica n , para uma estrela de nêutrons constituída por matéria nuclear interagente de parâmetro de assimetria $\alpha = 1$ é apresentado na Figura 3.1, em comparação com a EoS do gás de Fermi de nêutrons.

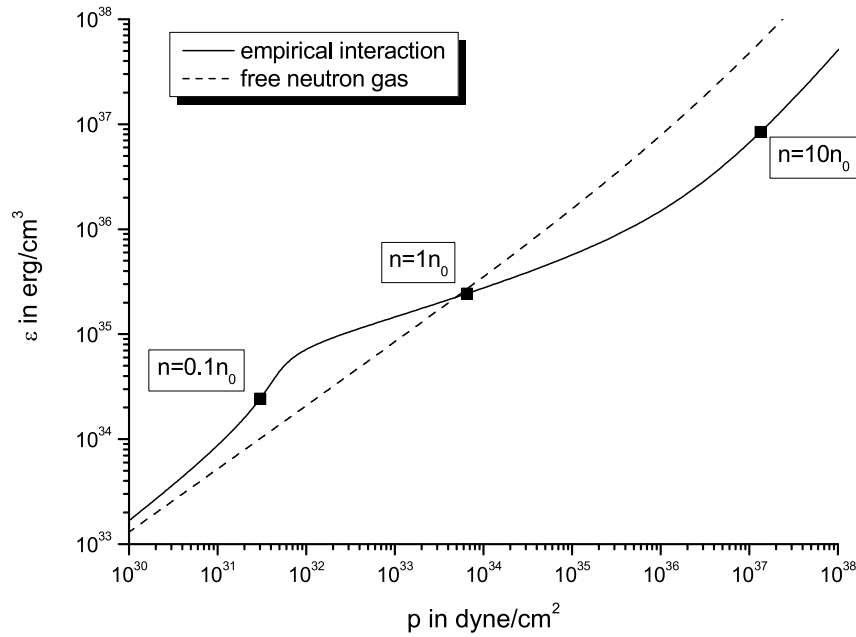


FIGURA 3.1. Equação de estado $p(n, 1)$ em função da densidade de energia da matéria nuclear interagente em comparação com a EoS do gás de Fermi de nêutrons. A interação é modelada de forma empírica como proposto por (SILBAR; REDDY, 2004). Figura extraída de (SAGERT et al., 2006).

Se $p(\epsilon)$ é maior para uma dada densidade de energia, significa que o sistema suporta uma maior força gravitacional contrária para uma mesma densidade. Uma convenção muito utilizada no estudo de equações de estado de NSs é definir que dadas duas equações de estado sobre um intervalo de densidades de energia, aquela com a maior pressão para o sistema é chamada equação de estado *rígida*, ao contrário de uma equação de estado *suave* correspondente à uma menor pressão. Pode-se concluir dessa definição, portanto, que uma EoS mais suave irá prever uma estrela com um limite menor para M_{max} .

Pode-se visualizar a partir da Figura 3.1 que a equação de estado 3.10 é mais rígida que a EoS para o gás de Fermi considerado no capítulo 2 para densidades superiores que a de saturação $n > n_0$. Como a pressão interna prevista é maior para uma dada densidade de energia, pode-se concluir que as interações nucleares fazem a NS suportar uma maior massa total. As diferentes regiões indicadas na Figura 3.1 representam diferentes regiões de densidade da estrela. Por exemplo, a densidades menores que a densidade de saturação, o caráter atrativo da interação nuclear prevalece, fazendo com que a EoS seja mais suave nessa região. Já para densidades $n > n_0$ a EoS é mais rígida,

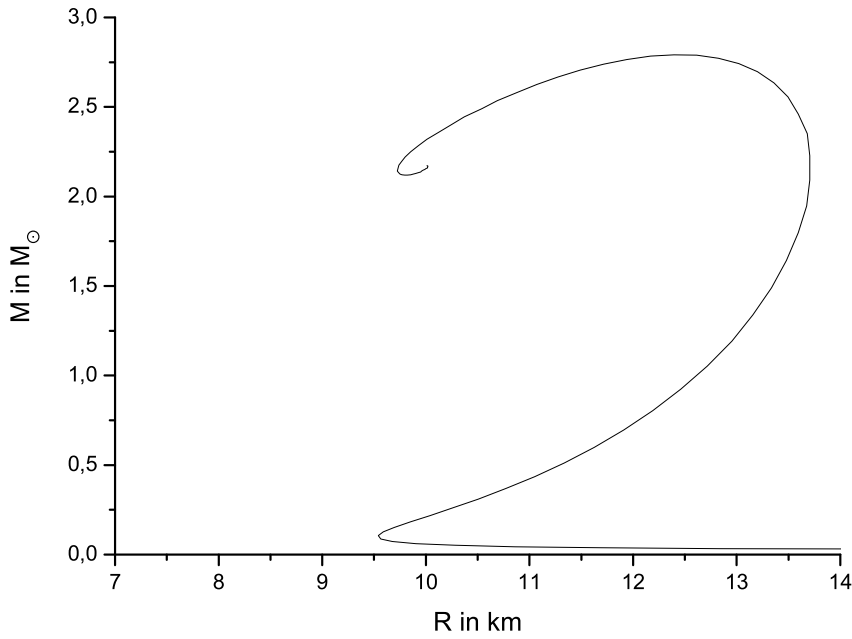


FIGURA 3.2. Diagrama $M - R$ para a EoS empírica de (SILBAR; REDDY, 2004). Agora $M_{max} = 2,7M_{\odot}$ com $R = 12,4$ km. Figura extraída de (SAGERT et al., 2006)

indicando que o caráter repulsivo da interação nuclear é dominante. A EoS muda de comportamento novamente para densidades próximas a $\sim 10n_0$, indicando um limite de densidades físicas para a matéria de NSs. De fato, já foi comentado na Seção 2.1 que pressões centrais excessivamente altas levam à NSs instáveis. Isso corrobora o fato de que é esperado que as densidades centrais de NSs não sejam superiores a $10n_0$ (LATTIMER, 2012).

O diagrama $M-R$ característico do presente modelo é obtido a partir da inserção da Equação 3.10 nas equações TOV. O diagrama é exposto na Figura 3.2. A pressão central p_0 aumenta da direita para a esquerda na curva $M(R)$. Dentre todas as diferenças com o modelo do gás de férmions livres, a que mais se destaca é o aumento do limite teórico para massa de estrelas de nêutrons, onde o modelo empírico prevê $M_{max} \approx 2,7M_{\odot}$. Esse valor equivale a quase quatro vezes o limite imposto pelo modelo de gás de Fermi do Capítulo 2, mostrando que as interações nucleares na matéria de NSs contribuem significativamente para a pressão que equilibra a estrela frente à pressão gravitacional de sua massa.

Existe mais uma propriedade física da matéria nuclear densa que é interessante de se analisar. Ao longo deste trabalho, foi observado que um aumento na densidade

bariônica causa um aumento proporcional na densidade de energia, seja através da Equação 2.5 ou da Equação 3.1, e que esse aumento na densidade de energia deve ser acompanhado por um aumento na pressão grande o suficiente para contrabalançar o aumento na interação gravitacional. Acontece que a taxa de variação da pressão com respeito à densidade de energia é relacionada à velocidade do som adiabática na matéria,

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\epsilon}, \quad (3.11)$$

onde c_s é a velocidade do som adiabática. De acordo com a relatividade especial, nenhum tipo de informação pode se propagar a uma velocidade maior que a da luz no vácuo. Isso impõe um limite na taxa de variação da pressão com relação a aumentos em ϵ , ou seja, equações de estado não podem ser arbitrariamente rígidas. Esse limite implica que para alguma densidade de energia ϵ , a estrela ganha um aumento na força gravitacional que não pode ser compensada por um aumento correspondente na pressão interna da estrela. É por essa razão que as NSs devem possuir um limite de massa M_{max} estimado pelas equações de estado dos modelos em consideração.

Além disso, se para um dado modelo a densidade de energia puder ser reduzida a uma potência da densidade bariônica $\epsilon = an^\Gamma$, temos, utilizando a Equação 3.6, que:

$$p = n \frac{d\epsilon}{dn} - \epsilon = (\Gamma - 1)an^\Gamma = (\Gamma - 1)\epsilon. \quad (3.12)$$

Substituindo essa relação para a pressão na Equação 3.11, obtém-se um limite para o expoente $\Gamma \leq 2$. Para valores de $\Gamma > 2$, a equação de estado correspondente deixa de ser física, pois viola a relatividade especial.

Nesta seção, foi revisado um modelo empírico para a inclusão de interações núcleon-núcleon em um sistema constituído por nêutrons e prótons. A derivação das equações de estado para os casos da matéria nuclear simétrica e assimétrica foi realizada, com a ajuda de alguns resultados retiradas da literatura. Além disso, utilizando as soluções extraídas da literatura para as equações TOV, foi possível visualizar os efeitos das interações nucleares nas estrelas de nêutrons, em particular o novo limite estimado para a massa máxima de NSs $M_{max} \approx 2,7M_\odot$. Também foi introduzida a

definição da velocidade do som adiabática na matéria, concluindo que as equações de estado para a matéria nuclear não podem ser arbitrariamente rígidas.

3.2 Outros modelos para matéria nuclear densa

A expressão para a densidade de energia 3.1 utilizada na seção anterior apresentou resultados interessantes e didáticos, como a verificação de que as interações núcleon-núcleon contribuem de maneira significativa para a pressão interna que estabelece o equilíbrio da estrela contra o colapso gravitacional. Entretanto, o modelo possui algumas limitações, como a suposição de que os dois termos de interação na Equação 3.1 têm a forma de potência. Além do mais, não foi feita nenhuma análise microscópica do sistema físico como foi feita no Capítulo 2. O objetivo desta seção é revisar conceitos introdutórios de modelos fenomenológicos para a descrição da matéria nuclear densa.

A equação de estado da matéria nuclear densa têm sido estudada por diversos autores, utilizando tanto métodos fenomenológicos quanto resultados da teoria nuclear de muitos-corpos (e.g. (JACOBSEN, 2007; DUTRA et al., 2012; GOMES, 2011; BURGIO et al., 2021)). As *interações do tipo Skyrme* e a *aproximação do campo-médio relativístico* são exemplos dos modelos fenomenológicos mais utilizados. Discutiremos brevemente os principais pressupostos e consequências nestes casos.

As interações do tipo Skyrme consistem em uma abordagem não-relativística, geralmente definindo um hamiltoniano para o sistema nuclear $H = T + V$, onde $T = \sum_j p^2/2m_j$ é o termo cinético, e V o termo que define a interação núcleon-núcleon, considerando contribuições de forças de até três-corpos. A maioria das interações do tipo Skyrme são, por construção, bem-comportadas próximo a região da densidade de saturação n_0 e valores moderados de α . Porém, somente certas combinações de parâmetros que são necessários para modelar essas interações são bem-estabelecidos experimentalmente. Como consequência, existem diversos modelos para forças do tipo Skyrme que produzem uma EoS similar para $\alpha = 0$, porém predizem propriedades bem diferentes para a matéria altamente assimétrica. Aqui vale a referência ao trabalho de (DUTRA et al., 2012) que verificou a capacidade de 240 conjuntos de pa-

râmetros de interação do tipo Skyrme de satisfazer 11 vínculos derivados de dados experimentais e propriedades empíricas da matéria nuclear simétrica e próxima à região de saturação, encontrando que apenas 5 das 240 equações de estado analisadas satisfaziam todos os vínculos impostos.

Existem também modelos que utilizam a chamada aproximação de campo-médio, baseados em Lagrangianos efetivos para a interação nuclear. Um exemplo é o modelo de Walecka (WALECKA, 1974), onde as interações entre bárions são mediadas por mésons escalares e vetoriais. O modelo utiliza constantes de acoplamento para as interações méson-núcleon que são fixadas através do ajuste de massas e raios dos núcleos e das propriedades da matéria nuclear infinita, também para densidades de saturação e matéria nuclear simétrica. Esse modelo foi utilizado por diversos autores como (GOMES, 2011) e (JACOBSEN, 2007). A principal característica do modelo é a consideração de uma massa efetiva para os núcleons m_N^* , que considera um desvio em relação à massa de repouso dos núcleons em razão da sua interação com os mésons escalares. A densidade de energia do sistema fica dependente, portanto, de m_N^* e não mais da massa de repouso dos núcleons. As equações de estado parametrizadas para o modelo de Walecka a $T = 0$ são dadas por (GOMES, 2011),

$$p = \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} n_B^2 - \frac{1}{2} \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} n_s^2 + \frac{1}{4\pi^2} \left[\left(\frac{2}{3} k_F^3 - (m_N^*)^2 k_F \right) E_F^* + (m_N^*)^4 \ln \frac{k_F + E_F^*}{m_N^*} \right], \quad (3.13)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} n_B^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} n_s^2 + \frac{1}{4\pi^2} \left[(2k_F^3 + (m_N^*)^2 k_F) E_F^* - (m_N^*)^4 \ln \frac{k_F + E_F^*}{m_N^*} \right], \quad (3.14)$$

onde a energia de Fermi é dada agora em termos da massa efetiva dos núcleons $E_F^* = \mu^* = \sqrt{k_F^2 + (m_N^*)^2}$. As constantes de acoplamento do modelo são g_ω e g_σ e devem ser ajustadas a partir de dados experimentais da matéria nuclear densa, se possível, através de dados de espalhamento de núcleons. No limite de altas densidades, a pressão do sistema é dominada pela pressão do méson vetorial ω , o que é esperado pois para densidades cada vez maiores a componente repulsiva da interação forte é dominante. Isso corrobora o resultado encontrado na seção anterior na interpretação do resultado da Figura 3.1.

Por se tratar de um modelo fenomenológico, as constantes de acoplamento do modelo de Walecka são ajustadas para reproduzir as propriedades da matéria nuclear

que possuem dados experimentais confiáveis, como a densidade de saturação nuclear, que representa a densidade para a qual a matéria nuclear infinita possui pressão $P = 0$. Ainda assim, o modelo apresenta limitações como a previsão para o valor da incompressibilidade nuclear $K \approx 540 \text{ MeV}$, enquanto que os valores estimados em experimentos indicam $230 \text{ MeV} < K < 250 \text{ MeV}$ (BURGIO et al., 2021),

Esses métodos fenomenológicos descritos geralmente baseiam-se em interações efetivas construídas para descrever sistemas nucleares próximos ao caso simétrico $\alpha = 0$, e portanto as extrapolações para valores altos de α podem não ser precisas. A Figura 3.3 ilustra a incerteza dos modelos fenomenológicos em estimar as propriedades da matéria nuclear assimétrica e altamente densa. As equações de estado obtidas com interações Skyrme são legendadas por Gs, Rs, SLy4, SV, SkI4, SkMP, e SkO. Também são consideradas duas equações de estado obtidas a partir de aproximações de campo-médio, GM1 e GM3. A matéria nuclear simétrica é legendada por SNM e a matéria nuclear assimétrica por PNM. Para ambos os casos, todas as equações de estado estimam valores similares até $\sim 2n_0$, mas divergem para densidades maiores. A discrepância é ainda maior para o caso da matéria altamente assimétrica e para a energia de simetria. A observação desse problema é de grande interesse, visto que essas propriedades são importantes para a determinação da estrutura e composição de NSs.

A análise de modelos para a matéria nuclear densa na literatura também é frequentemente feita através de bandas inseridas nos gráficos como os da Figura 3.3. Essas bandas têm o propósito de filtrar modelos aceitáveis, que são dispostas nos gráficos de propriedades da matéria nuclear como energia de ligação ou até mesmo de equações de estado, representam vínculos experimentais ou resultados teóricos de baixa incerteza.

Ainda não foi feita uma revisão acerca da composição química da estrela composta por matéria nuclear interagente, similar à realizada na Seção 2.2. A Equação 2.5 mostra que $k_F^j \propto \rho_j^{1/3}$, ou seja, à medida que a densidade da espécie j de partículas aumenta, k_F aumenta com proporção cúbica. O sistema logo chega a um ponto onde adicionar mais uma partícula da espécie j é menos favorável do que adicionar uma partícula mais pesada. Isso ocorre para o caso dos nêutrons e elétrons dentro de NSs,

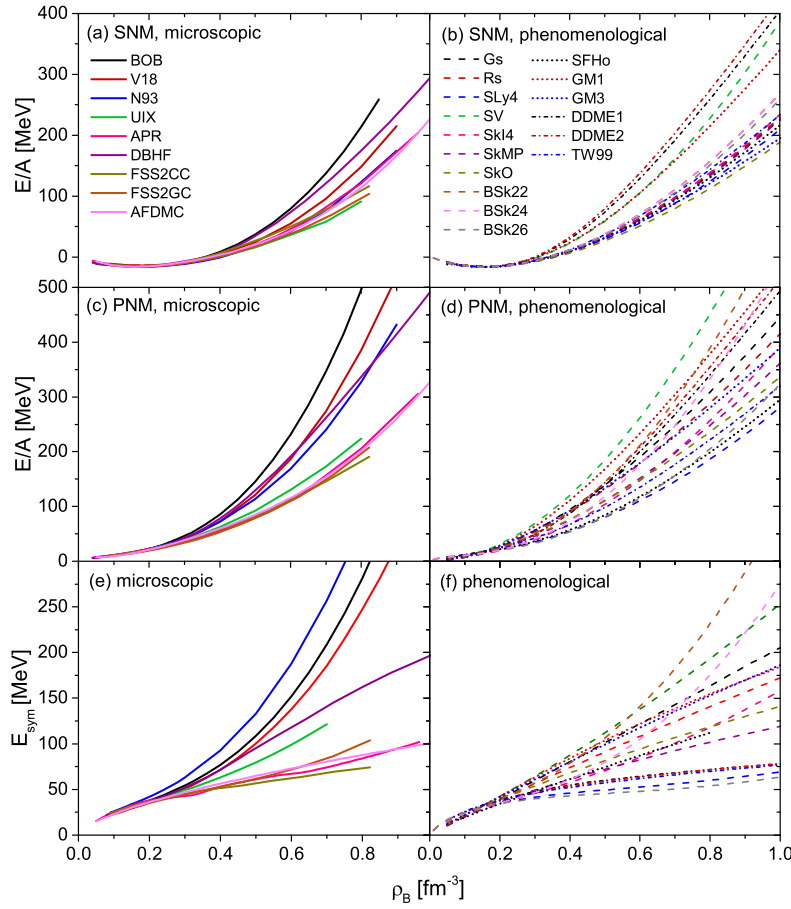


FIGURA 3.3. Energia de ligação por núcleon da matéria nuclear simétrica (SNM) e matéria de nêutrons pura (PNM). A energia de simetria é estimada pelas equações de estado dos diferentes modelos. Figura extraída de (BURGIO et al., 2021).

fazendo com que existam processos de produção de múons logo que

$$\mu_\mu = \mu_e. \quad (3.15)$$

A aparição de bárions mais pesados no sistema também é verificada, assim que a massa dos bárions pesados seja menor do que μ_n . Um cálculo da composição da estrela foi realizado por exemplo em (SANTOS; MENEZES, 2004), utilizando uma versão refinada do modelo de Walecka, encontrando que híperons, bárions com estranheza S diferente de zero, têm fração significativa logo que $\rho \sim 2\rho_0$.

Entretanto, é difícil estimar com precisão a população de partículas para den-

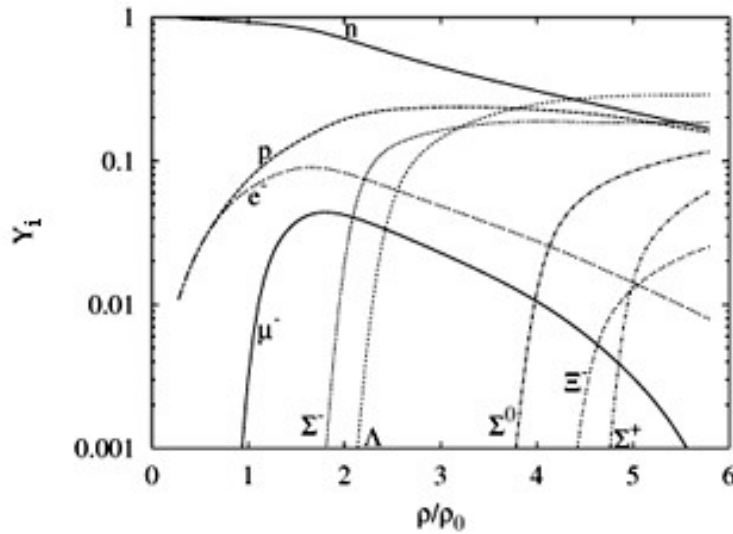


FIGURA 3.4. População de bárions para a matéria nuclear de NSs calculado com o modelo de Walecka não-linear (NLWM) a $T = 0$. Adaptado de (SANTOS; MENEZES, 2004).

idades maiores que n_0 , pois como encontrado por exemplo em (GOMES, 2011), se o modelo de Boguta-Bodmer é utilizado (outro modelo derivado do modelo de Walecka original), estimou-se frações significativas de híperons logo que $\rho \sim \rho_0$, indicando que as populações de partículas são dependentes do modelo utilizado.

De fato, a presença de híperons, assim como outros graus de liberdade hadrônicos que aparecem no sistema com o aumento de densidade, é difícil de ser descrita. Isso se deve ao fato de que as forças híperon-híperon e híperon-núcleon não são bem conhecidas. Alguns modelos sugerem a aparição de híperons na região $\sim 2-4n_0$, mas essa conversão de núcleons em híperons enfraquece a pressão interna exercida pelos bárions, de forma a tornar a equação de estado mais suave. Isto faz com que muitos modelos não sejam compatíveis com os vínculos impostos pelas observações de NSs massivas, como a observação do pulsar MSP J0740+6620 com $M = 2,14 \pm 0,20 M_\odot$ (CROMARTIE et al., 2019). Algumas tentativas para contornar esse problema introduzem forças de repulsão entre os híperons ou entre híperons e núcleons, de forma a tornar as equações de estado mais rígidas. Espera-se que no futuro, cálculos de QCD providenciem informações cruciais sobre os potenciais de interação híperon-híperon.

A observação de estrelas de nêutrons fornece os principais vínculos para as equações de estado da matéria de NSs. A Figura 3.5 mostra os diagramas $M-R$ ob-

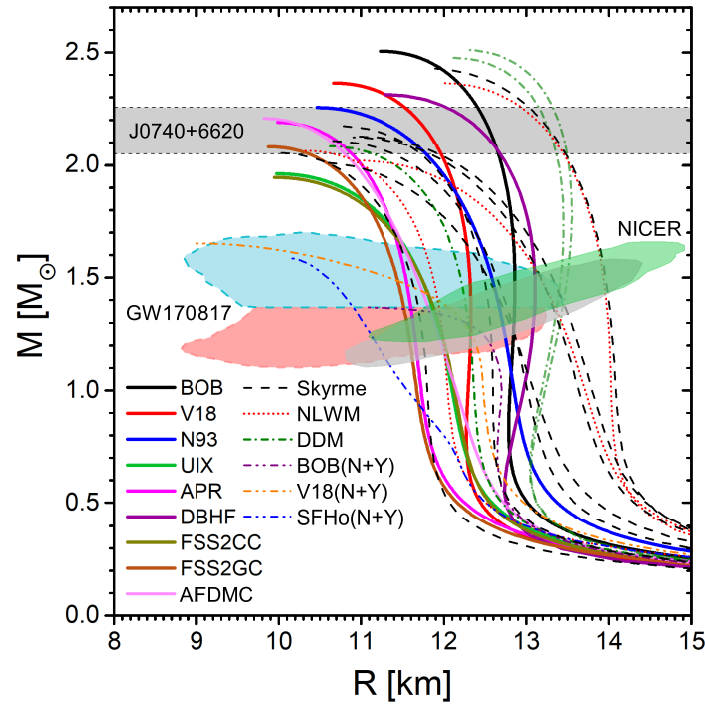


FIGURA 3.5. Diagramas $M-R$ para diversas equações de estado para matéria de NSs. Os vínculos de observações astrofísicas são representados como bandas e utilizados como filtros. As equações de estado com graus de liberdade estranhos (N+Y) não satisfazem o vínculo de massa do pulsar PSR J0740+6620. Figura extraída de (BURGIO et al., 2021).

tidos a partir de diversas EoSs. A massa do pulsar mais massivo detectado até hoje PSR J0740+6620 é utilizada como vínculo na forma de banda, como comentado anteriormente. Os vínculos fornecidos pelo evento GW170817 e pelas medições da missão NICER também são mostrados.

A dificuldade que equações de estado exóticas possuem em estimar o limite correto para a massa máxima de NSs pode ser visualizada na Figura 3.5, já que as três EoSs com presença de híperons não satisfazem o vínculo de massa do pulsar PSR J0740+6620. Estes tópicos são ativos na literatura e não os abordaremos com maiores detalhes neste trabalho.

Neste capítulo, foi estudada a matéria nuclear densa e interagente. A saber, foi considerado um modelo empírico para as interações nêutron-nêutron, obtendo um

limite de massa $M_{max} \approx 2,7M_{\odot}$ para NSs. Além disso, foram introduzidos conceitos importantes como saturação nuclear, assimetria e a velocidade do som adiabática.

Posteriormente, foram revisados brevemente outros modelos teóricos para o estudo da matéria nuclear a altas densidades. Para densidades abaixo da densidade nuclear de saturação, pode-se dizer que existem dados experimentais confiáveis, produzidos a partir do estudo de núcleos atômicos e espalhamento de nêutrons, que servem para ajustar os parâmetros dos modelos teóricos. Entretanto, é reportado diversas vezes na literatura que é difícil construir um modelo que prevê de forma confiável as propriedades da matéria nuclear para densidades maiores que a de saturação nuclear e alta assimetria. Isto significa dizer que os experimentos nessa região da matéria nuclear consistem em observações astrofísicas de objetos densos, que naturalmente não são tão controladas como experimentos de laboratório. Assim, o estado da arte na descrição da matéria nuclear interagente à altas densidades consiste numa abordagem de diversos modelos, todos propensos à incertezas.

Finalmente, foi revisada a composição da estrela de nêutrons a altas densidades, observando a aparição de graus de liberdade estranhos a pelo menos $\gtrsim 2n_0$. A dificuldade de modelar tais sistemas também consiste na falta de dados sobre sistemas de híperons, fazendo com que seja difícil a modelagem de estrelas de nêutrons massivas com equações de estado exóticas. Na próximo capítulo analisaremos os núcleons das NSs e discutiremos a possibilidade de investigar-se as transições de fase na QCD para o caso de NSs supermassivas.

Capítulo 4

Núcleos de Estrelas de Nêutrons

Este trabalho tem considerado até então estrelas homogêneas, isto é, constituídas por uma mesma fase da matéria, da região central da estrela até sua superfície. No Capítulo 2, a estrela era formada por um gás de Fermi de nêutrons com adição de prótons e elétrons. Já no Capítulo 3 a estrela era constituída por núcleons interagentes, com a aparição de graus de liberdade estranhos no sistema sendo brevemente revista na Seção 3.2. Entretanto, estrelas de nêutrons possuem diferentes regiões, cada uma com propriedades diferentes, como ilustrado na Figura 4.1.

A atmosfera da estrela possui espessura da ordem de alguns centímetros e é composta por uma fina camada de plasma que é responsável pela emissão do espectro térmico da estrela, observado na região do raio-X.

A primeira região interior da estrela é a crosta exterior, constituída principalmente por núcleos de ^{56}Fe com alta concentração de elétrons degenerados, e modelos para as equações de estado dessa região são baseados em dados experimentais bem estabelecidos sobre núcleos atômicos, espalhamento de núcleons e teoria de sistemas fortemente acoplados pela interação de Coulomb.

À medida que a densidade aumenta, processos de captura de elétrons do tipo 2.17 ocorrem de forma a causar uma assimetria $\alpha \simeq 0,3$ nos núcleos tornando-os ricos em nêutrons, e quando a densidade chega à ordem de $\sim 10^{11} \text{g/cm}^3$, os nêutrons começam a ocupar estados não-ligados. Para essa região, a literatura baseia-se principalmente em modelos teóricos para construção de equações de estado.

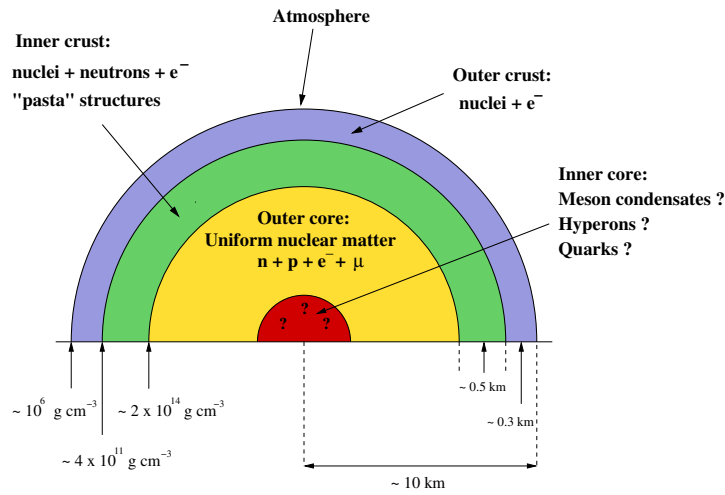


FIGURA 4.1. Esquemática das regiões de densidade de uma estrela de nêutrons. Figura extraída de (VIDANA, 2020).

A região de densidades no intervalo $\rho_0/4$ – $\rho_0/2$ da NS é formada por uma mistura de núcleos altamente assimétricos e elétrons e nêutrons livres, indicada com a cor verde na Figura 4.1, que é caracterizada por possuir núcleos sem a forma esférica usual. Ao invés disto, os núcleos adotam topologias exóticas às quais a literatura chama "pasta nuclear" (VIDANA, 2020). Evidências para a comprovação da existência dessas estruturas exóticas da matéria nuclear não são bem-estabelecidas, entretanto vale referenciar o trabalho de (PONS et al., 2013) que indica que uma camada de matéria altamente resistiva no interior de NSs limita os períodos de rotação de pulsares do tipo raio-X para uma máxima de 10–20 s. Isso está de acordo com a ausência de observações de pulsares raio-X com períodos maiores que 12 s, fazendo deste um trabalho importante para o estudo de evidências de uma crosta interior amorfa. A transição gradativa dos núcleos para a fase de pasta nuclear é ilustrada na Figura 4.2. Então uma transição de fase para a matéria nuclear homogênea ocorre à densidades $\gtrsim 0,5\rho_0$. A matéria nessa região é constituída por nêutrons e prótons livres, onde a fração de prótons é esperada ser de 0,02–0,04 n_B/n (LATTIMER, 2021). É justamente para essa região da estrela que as equações de estado obtidas nos capítulos anteriores é válida.

Contudo, a densidade no interior de NSs pode chegar à valores $\rho \sim 10n_0$ (BAYM et al., 2018). É interessante, pois, revisar um modelo que descreva a matéria a densidades muito maiores que n_0 . Não há consenso na literatura sobre a composição da matéria nessa região da estrela, porém a possível existência de matéria de quarks desconfiados é de particular interesse, visto que estabelece uma ligação única entre es-

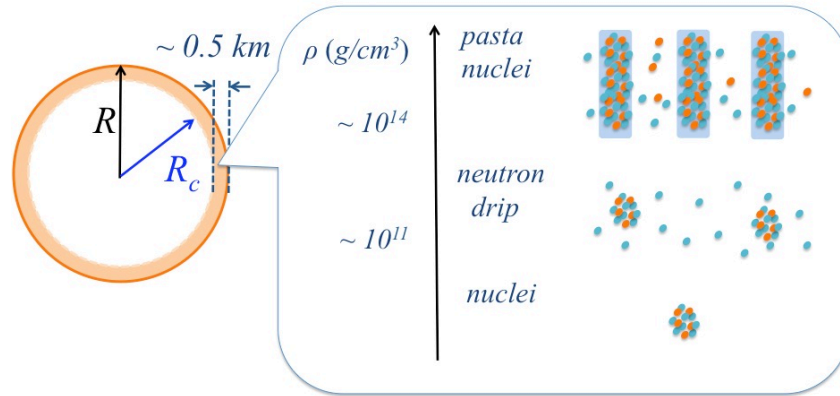


FIGURA 4.2. Região da crosta de uma NS entre o raio R da estrela e o raio do núcleo externo R_c . À medida que a densidade aumenta, os núcleos assumem formas exóticas denominadas "pasta nuclear". Figura extraída de (BAYM et al., 2018).

trelas de nêutrons e a QCD, a teoria fundamental das interações entre quarks. Um modelo bastante utilizado na literatura para descrever a matéria de quarks no interior de NSs é o *modelo de sacola do M.I.T.* (MIT Bag model). Esse modelo efetivo, proposto em 1974 por (CHODOS et al., 1974), considera a matéria de quarks como um gás não-interagente no interior de uma região denominada sacola, i.e., o modelo considera a matéria de quarks como confinada à região da sacola, porém livres no interior dessa região.

Na Seção 4.1, vamos revisar brevemente o modelo de sacola do M.I.T. Embora ultrapassado, este modelo ainda é amplamente utilizado na literatura, pois reproduz de uma forma simples os conceitos de confinamento e liberdade assintótica, constituindo uma boa alternativa para tratar da matéria de quarks desconfinados. Na Seção 4.2, são revisados alguns métodos de interpolação para modelar a equação de estado da região 1, no intervalo $1 < n_B/n_0 < 10$. Alguns aspectos a respeito de transições de fase no interior de NSs são discutidos, em particular a transição para a matéria de quarks desconfinados. A partir de agora, o trabalho adota unidades naturais $c = \hbar = 1$.

4.1 Modelo de sacola do M.I.T

Uma propriedade da matéria de quarks que deve ser respeitada pelo modelo de sacola é a liberdade assintótica: quanto mais alta é a escala de energia, menor a

intensidade da interação entre quarks, indicando que a aproximação de quarks não-interagentes têm validade proporcional à densidade ρ , fazendo deste um modelo adequado para a possível matéria de quarks desconfiados no núcleo de NSs. Outro fenômeno que deve incorporar o modelo de sacola é o confinamento da matéria de quarks no interior de hádrons. De acordo com a QCD, quando dois quarks tendem a ser separados, os glúons trocados correspondendo a um tubo de fluxo de cor de estrutura alongada, e quando a distância entre esses dois quarks é suficientemente grande, é energeticamente mais favorável para o glúon a criação de um par quark-antiquark. Assim, os quarks encontram-se confinados na região da sacola devido a uma pressão externa, mas no interior dessa região podem ser considerados como quarks livres.

De acordo com (SCHMITT, 2010), ao descrever a matéria de quarks desconfiados para NSs, pode-se ignorar os sabores de quarks *charm*, *bottom* e *top*. Isso se deve ao fato de o potencial químico dos quarks no interior da estrela ser da ordem de 500 MeV, e portanto baixo demais para criar uma população desses estados. Assim, nesta seção são considerados no modelo de sacola do M.I.T. apenas os sabores *up*, *down* e *strange*. Assumindo um sistema de quarks não-interagentes, sem massa, a $T = 0$, composto apenas pelos sabores $f = u, d, s$, a equação de estado do modelo de sacola na forma parametrizada por k_F é dada por:

$$\epsilon = \sum_f \epsilon_f + B, \quad p + B = \sum_f p_f. \quad (4.1)$$

O modelo tem como parâmetro principal a chamada constante de sacola B , que pode ser interpretada como a pressão externa à região da sacola, de forma a reproduzir o confinamento da matéria para baixas escalas de energia. Uma ilustração das propriedades do modelo é dada na Figura 4.3.

As densidades de energia para cada sabor são dadas pela Equação 2.4. Além disso, o fator de degenerescência de quarks livres é dado por $g = 6$, levando em conta os três estados possíveis de cor r, g, b para cada quark. Logo, a suas densidades de

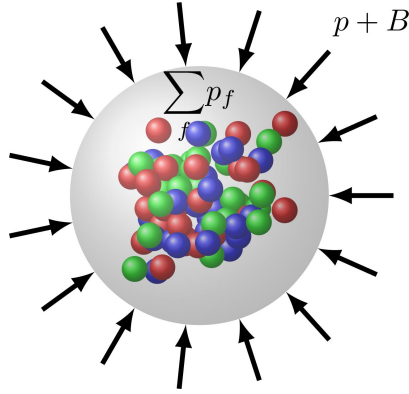


FIGURA 4.3. Ilustração do equilíbrio das pressões para uma matéria de quarks livres no modelo de sacola. Figura extraída de (GONÇALVES; LAZZARI, 2020).

energia serão dadas por:

$$\epsilon_f = \sum_f \frac{3\mu_f^4}{4\pi^2}. \quad (4.2)$$

Substituindo essa expressão na Equação 4.1, obtém-se a equação de estado para o modelo de sacola do M.I.T. na aproximação de quarks não-interagentes, sem massa ($m_f = 0$), para a região interior à sacola teremos:

$$p = \sum_f p_f - B = \frac{1}{3} (\epsilon_f - 4B). \quad (4.3)$$

A Equação 4.3 mostra que a equação de estado é mais suave para os valores mais altos de B . O intervalo de valores válidos para a constante de sacola B é determinado experimentalmente (LOPES et al., 2021),

$$\boxed{148 \text{ MeV} < B^{1/4} < 159 \text{ MeV}.} \quad (4.4)$$

O modelo de sacola original consiste em uma abordagem simples para a matéria a altíssimas densidades. Na Seção 4.2 será introduzido o diagrama de fases da QCD, que para altas temperaturas e baixas densidades é bem-conhecido. Para aproximações de temperatura zero e altíssimas densidades, métodos perturbativos da QCD (pQCD)

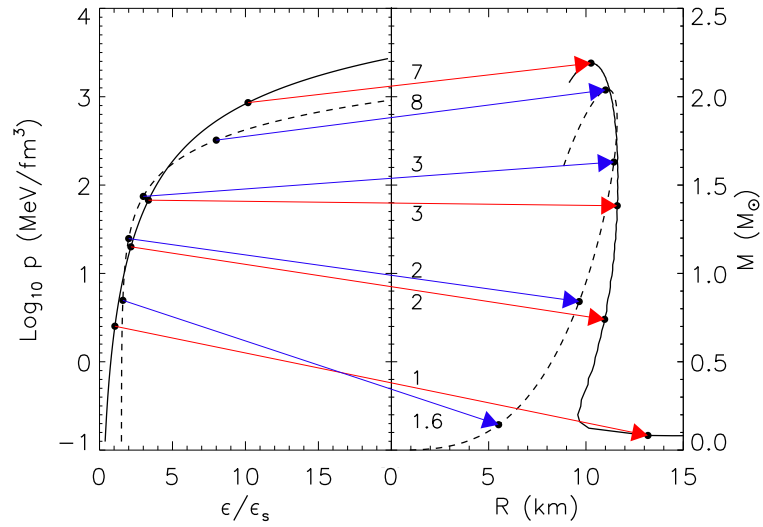


FIGURA 4.4. À esquerda, equação de estado hadrônica politrópica de $\gamma = 4/3$ a baixas densidades e $\gamma = 2$ a altas densidades (Linhas contínuas) e equação de estado do modelo de sacola M.I.T. (linhas tracejadas). As setas ligam as pressões centrais aos correspondentes pontos (M, R) , enquanto os números denotam os múltiplos de densidade bariônica n/n_s para EoS hadrônica e ϵ/ϵ_s para EoS do modelo de sacola. Figura extraída de (LATTIMER, 2012)

dão resultados confiáveis para densidades bariônicas $\gtrsim 40n_0$. Para essa densidade, o modelo de sacola do M.I.T. original representa uma boa aproximação.

A Figura 4.4 mostra o gráfico da equação de estado do modelo de sacola do M.I.T. para $B^{1/4} = 150$ MeV e o diagrama $M-R$ correspondente. À esquerda da figura, equações de estado hadrônica e do modelo de sacola são mostradas. A EoS hadrônica se mostra mais rígida para altas densidades, fazendo com que as estrelas puramente hadrônicas tenham facilidade em prever limites maiores para massa de NSs. É interessante de se observar que as equações de estado produzem trajetórias similares no diagrama $M-R$ comum para o intervalo $1,5 < M/M_\odot < 2$, e portanto seria difícil distinguir uma estrela de quarks de uma estrela de nêutrons com base somente em observações de suas massas.

Nesta seção, foi revisado de maneira breve o modelo de sacola do M.I.T. Esse modelo é interessante de ser utilizado para a possível matéria de quarks desconfiados

no interior de NSs, visto que satisfaz a liberdade assintótica e também o confinamento da matéria em hádrons para baixas energias. Uma pressão cinética dos quarks, alta o suficiente para superar a pressão de sacola B , pode ocorrer quando a densidade bariônica for elevada, dando origem à matéria de quarks desconfinados. Densidades desta ordem podem estar presentes no núcleo de algumas NSs, levando à diferentes possíveis composições dessas estrelas. Portanto, o núcleo pode ser tratado como uma versão maior da sacola.

4.2 Transições de fase nos núcleos de NSs - testando o diagrama de fase da QCD

Até aqui foram revisados modelos para a descrição da matéria de estrelas de nêutrons a densidades da ordem de saturação $\sim n_0$ nos Capítulos 2 e 3, e para densidades muito maiores que a de saturação $\gtrsim 40n_0$ na Seção 4.1, de forma que agora é possível estudar a construção de equações de estado na região *intermediária* entre esses dois limites de densidades. Em particular, serão discutidas as equações de estado *híbridas*. Isto é, equações de estado para estrelas com matéria de quarks desconfinados em seus núcleos. A derivação de equações de estado híbridas confiáveis para a região intermediária de densidades representa um enorme desafio, já que a região de densidades $\gtrsim 1, 1n_0$ não pode ser descrita somente via potenciais de interação entre bárions. Além disso, os graus de liberdade dos quarks aparecem gradativamente no sistema, ficando difícil dizer exatamente para qual densidade ou potencial químico bariônico ocorrem as possíveis transições no interior da estrela. Como essas condições não podem ser atingidas em laboratório, cálculos teóricos de equações de estado para regiões de densidade intermediária de NSs devem ser testados exclusivamente por observações astrofísicas.

Foi apontado na Seção 3.2 que a equação de estado da matéria nuclear densa, em particular com alta assimetria, é conhecida com precisão somente até a região próxima à densidade de saturação $n_{CET} \sim 1, 1n_0$. No limite oposto, de altas densidades, métodos perturbativos da teoria fundamental da interação forte, a QCD, são utilizados com precisão para estimar propriedades da matéria de quarks e glúons para densidades $n_{pQCD} \gtrsim 40 n_0$. Na região intermediária de densidades, $n_{CET} < n < n_{pQCD}$, onde

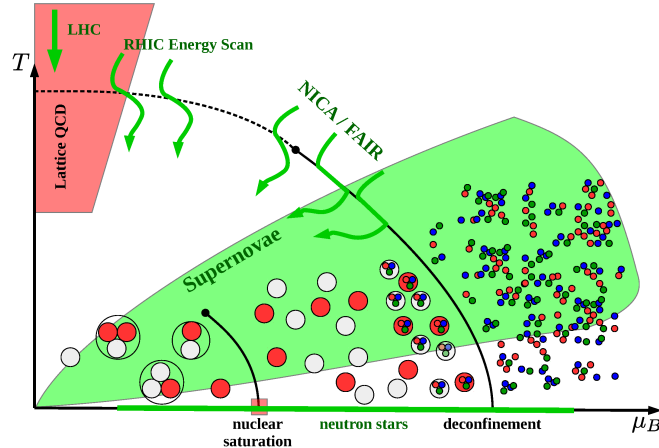


FIGURA 4.5. Diagrama de fases da QCD. A escala de densidades em estrelas de nêutrons é representada sobre o eixo- μ_B . Figura extraída de (BASTIAN; BLASCHKE, 2018).

núcleos de NSs encontram-se, são utilizados métodos de interpolação para construir equações de estado efetivas.

As fases da matéria hadrônica podem ser dispostas em um diagrama de fases chamado diagrama $T-\mu_B$, onde T é a temperatura e μ_B o potencial químico bariônico. O potencial químico bariônico é relacionado à densidade bariônica por $\mu_B = \partial\epsilon/\partial n_B$. Um diagrama $T-\mu_B$ é exemplificado na Figura 4.5. Como dito anteriormente, a escala de temperaturas típicas para NSs é de ~ 1 MeV, fazendo com que as possíveis fases da matéria densa no interior de NSs sejam aquelas próximas ao eixo- μ_B do diagrama. Exceções para essa aproximação são NSs recém-nascidas e nos instantes finais de colisões de NSs em sistemas binários.

A baixas temperaturas e potenciais químicos, os graus de liberdade da matéria são hadrônicos, i.e., núcleons, híperons, mésons, etc., enquanto que para altas temperaturas e/ou altas densidades, a matéria forma um plasma de quarks e glúons (*quark-gluon plasma*, QGP), ou matéria de quarks desconfinados.

Um trabalho realizado por (WEISSENBORN et al., 2011) demonstrou a possibilidade de EoS híbridas, onde a matéria de quarks desconfinados foi descrita por um modelo de sacola refinado, sustentarem uma estrela com $M > 2M_\odot$ para uma transição de fase de primeira ordem.

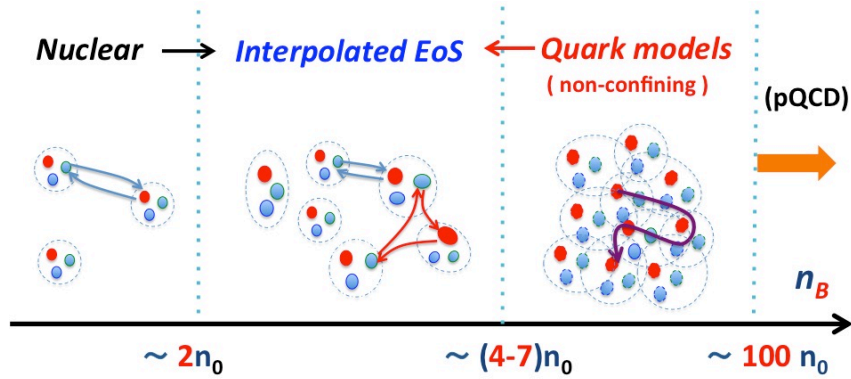


FIGURA 4.6. Ilustração da possível transição de fase da matéria hadrônica de NSs. A matéria possui graus de liberdade hadrônicos (quarks confinados) até $\sim 2n_0$. A partir desse ponto as interações entre os núcleons não são mais bem-descritas por potenciais de dois corpos ou aproximações de campo médio, região indicada por densidades intermediárias. Para o limite de densidades mais altas esperadas nos núcleos de NSs $\gtrsim 7n_0$, são utilizados modelos de matéria de quarks desconfinados. Figura extraída de (BAYM et al., 2018).

Espera-se que a matéria no interior de NSs encontre-se na fase hadrônica a densidades de até $\sim n_0$, e matéria de quarks desconfinados para densidades $\gtrsim 7n_0$. A transição, que deve ocorrer nas regiões de densidades $(4 - 7) n_0$ (BAYM et al., 2018), é ilustrada na Figura 4.6.

Para uma dada região da estrela de potencial químico μ_B , a matéria estará na fase que apresentar maior valor para pressão interna, onde $n_B = \partial P / \partial \mu_B$. Isto é, dada uma densidade bariônica n_B , calcula-se a respectiva densidade de energia ϵ para cada fase, e aquela que possuir a menor energia é considerada como a fase da matéria em n_B .

Tentativas de construção de equações de estado para a região de densidades intermediárias consistem basicamente em métodos de interpolação entre os resultados confiáveis da região próxima a n_0 e os resultados da pQCD a $40n_0$. Ainda que as densidades em núcleos de estrelas de nêutrons não cheguem a esse valor, são feitas extrapolações dos resultados da pQCD para $\sim 10n_0$ para tornar possível a interpolação entre os limites.

Uma ilustração de interpolação convencional para uma EoS híbrida é dada na Figura 4.7. A pressão da matéria de quarks desconfinados é igualada à pressão da

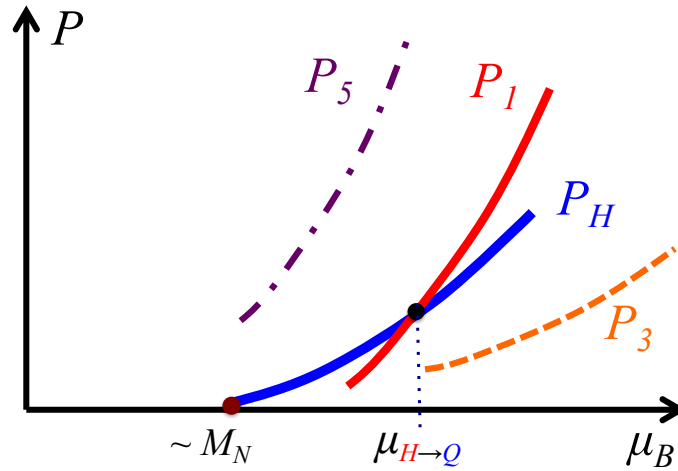


FIGURA 4.7. Para satisfazer a condição de matéria hadrônica a n_0 , a condição de que a pressão P_Q da matéria de quarks intercepte a pressão hadrônica P_H é imposta. Da mesma forma, para garantir a matéria de quarks no núcleo de NSs, a pressão P_Q deve ser maior no ponto de transição de fase $\mu_{H \rightarrow Q}$. Algumas equações de estado para a matéria de quarks como representadas por P_5 e P_3 são desconsideradas por serem muito rígidas para permitirem matéria hadrônica a baixas densidades. Figura extraída de (BAYM et al., 2018).

matéria hadrônica no ponto $\mu_{H \rightarrow Q}$. Equações de estado muito rígidas para a matéria de quarks são descartadas por não serem consistentes com a presença de matéria hadrônica a baixas densidades, o que resulta em um problema pois qualquer equação de estado híbrida física deve satisfazer o limite inferior de $M_{max}/M_\odot \gtrsim 2$, e quanto mais suave a EoS para matéria de quarks, mais difícil é de a equação de estado satisfazer essa condição.

Esse método assume de implicitamente que ambas as equações de estado, hadrônica e de quarks, são confiáveis na região de interseção para a condição de igualdade das pressões. Porém, a região de interseção $n_B \sim (2-5)n_0$ é justamente a região onde a equação de estado hadrônica possui incertezas devido à forças de muitos-corpos e interações entre híperons, enquanto que a equação de estado para a matéria de quarks possui incertezas devido à efeitos de confinamento. Assim, não se pode comparar de maneira confiável pressões hadrônicas e de matéria de quarks sobre todo o intervalo de densidades intermediárias $n_B \sim (2-5)n_0$. Tais considerações sugerem que a construção de equações de estado que utilizam o critério de igualdade de pressões na

região intermediária coloca vínculos excessivamente rigorosos na forma da EoS para a matéria de quarks desconfiados por aceitar os modelos hadrônicos para densidades acima de seus regimes de validade.

O método mais utilizado para determinar a equação de estado para regiões intermediárias de densidade de NSs consiste na interpolação de politrópicas. Supõe-se que a EoS têm a forma de uma politrópica

$$p_i = K_i n^{\gamma_i}, \quad (4.5)$$

na região $n_i < n < n_{i+1}$, onde γ é o índice politrópico discutido nos capítulos anteriores. O número de politrópicas é arbitrário, e as condições impostas à EoS interpolada são geralmente respeitar a causalidade $c_s^2 < 1$ e suportar um limite de massa máximo $\gtrsim 2M_\odot$. Esse método foi utilizado por (KURKELA et al., 2014), onde foi imposto que a EoS interpolada convergisse para a pressão da matéria de quarks desconfiada a altas densidades, encontrando que os valores válidos para os índices politrópicos são $2,85 < \gamma_1 < 9,2$ e $1,0 < \gamma_2 < 1,5$. A maior restrição para os valores de γ_2 se deve à exigência de que a pressão da EoS interpolada deve convergir para as pressões de matéria de quarks desconfiados. Foram obtidos também resultados para as densidades centrais de NSs $n \lesssim 8n_0$. Considerando transição de fase de primeira ordem, $2,23 < \gamma_1 < 4,03$.

Um trabalho recente realizado por (ANNALA et al., 2020) utiliza um método diferente de interpolação de equações de estado para a região de densidades intermediária. Os autores analisaram os vínculos entre parâmetros termodinâmicos do sistema como c_s e γ e a composição da matéria no núcleo de NSs. Foi encontrado que as interpolações seguem trajetórias de EoSs hadrônicas para baixas densidades, porém desviam desse comportamento para maiores densidades em estrelas massivas $M \gtrsim 2M_\odot$, sinalizando uma mudança no estado físico da matéria. A densidades cada vez maiores, a equação de estado interpolada se aproxima das previsões da pQCD para a velocidade do som c_s^2 . Para para um gás ideal de quarks sem massa $c_s^2 = 1/3$, chamado *limite conforme*.

A observação de que interpolações para a EoS da matéria de NSs convergem

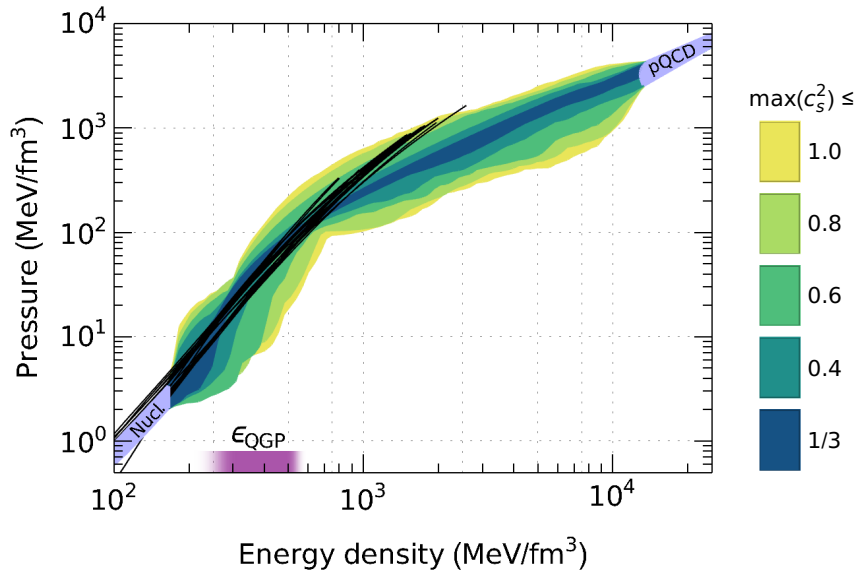


FIGURA 4.8. Equações de estado interpoladas para a região intermediária de densidades. O gradiente de cor representa as velocidades do som em cada modelo. Nesse método de interpolação, há possibilidade de uma transição de fase de primeira ordem. Figura extraída de (ANNALA et al., 2020).

para parâmetros termodinâmicos da pQCD poderia ser interpretada como evidência da presença de núcleos de matéria de quarks desconfinados no interior de NSs massivas. Assim, para as estrelas com observações confiáveis de $M \approx 2M_{\odot}$, a presença da matéria de quarks é ligada ao comportamento da velocidade do som adiabática na matéria c_s .

A Figura 4.8 mostra as equações de estado interpoladas, assim como um gradiente de cor para a velocidade do som adiabática para cada EoS. As equações de estado hadrônicas são representadas por linhas pretas, que desviam do comportamento da matéria de NSs para uma dada densidade de energia crítica. A descontinuidade das equações de estado interpoladas são típicas de primeira ordem.

Resumindo a discussão deste capítulo, alguns aspectos sobre a transição de fase de matéria hadrônica para a matéria de quarks é revisada, assim como a possibilidade da existência de QGP no núcleo de NSs massivas. Estrelas de nêutrons com núcleos compostos por matéria de quarks desconfinados são chamadas *estrelas híbridas*, e possuem uma crosta formada por matéria hadrônica e o núcleo formado por quarks desconfinados.

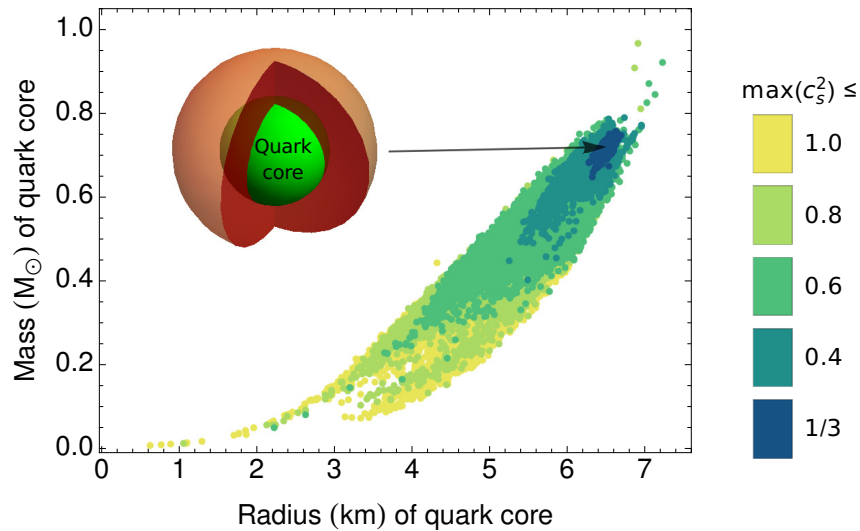


FIGURA 4.9. Estimativas para a massa e raio do núcleo de quarks desconfinados em NSs massivas. Figura extraída de (ANNALA et al., 2020).

Ainda assim, avanços são obtidos através de observações de estrelas de nêutrons, refinando os vínculos atuais com observações de ondas gravitacionais, resfriamento da estrela através de emissão de neutrinos, assim como dados de massa e raio. Essas observações restringem a gama de EoS possíveis para estrelas híbridas e reduzindo a região de interpolação aceitável em gráficos da pressão em função de densidade ou potencial químico.

As equações de estado de diversos sistemas foram estudadas neste trabalho, com o foco na inserção das EoS nas equações TOV, de forma a analisar as propriedades astrofísicas das estrelas de nêutrons modeladas pela respectiva EoS. Mas as equações de estado também representam ferramenta importante no estudo de transições de fase no interior de NSs.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Estrelas de nêutrons são objetos únicos no universo, pois proporcionam uma ligação entre conceitos da relatividade geral, física nuclear a altas densidades e física de partículas de altas energias. Diversas observações recentes e desenvolvimentos teóricos levaram à avanços significativos nos últimos anos na área da física de estrelas de nêutrons.

Neste trabalho, foi realizado um estudo da física básica de NSs partindo da constituição mais simples para uma estrela de nêutrons, o gás de Fermi de nêutrons com posterior adição de prótons e elétrons ao gás. As derivações das equações de estado para estes sistemas foram revistas de forma detalhada, assim como as resoluções das TOVs existentes na literatura para a visualização de propriedades macroscópicas de NSs como diagramas $M-R$. Em particular, foi encontrado que $M_{max} \approx 0,7M_{\odot}$ para o gás de nêutrons e $M_{max}^{n,p,e} < M_{max}^n$. Além disso, estrelas com pressões centrais muito elevadas consistem em soluções instáveis a partir da condição $dM/dp > 0$.

A inclusão de interações na composição da estrela muda drasticamente o perfil de NSs. Na Seção 3.1, utilizando um modelo efetivo para as interações núcleon-núcleon proposto por (SILBAR; REDDY, 2004), foi derivada a equação de estado de uma estrela de nêutrons com matéria nuclear interagente, encontrando para essa estrela um limite de massa $M_{max} \approx 2,7M_{\odot}$.

A região de estrelas de nêutrons de densidade $\gtrsim 0,5n_0$ é constituída quase que inteiramente por matéria nuclear a altas densidades. Entretanto, é bem-estabelecido na literatura que os modelos para a matéria nuclear a densidades $\gtrsim 1,1n_0$ divergem

entre si, principalmente para o caso de alta assimetria. Os modelos fenomenológicos se baseiam em ajustes de dados a respeito da matéria nuclear próxima a região de saturação, de forma que as extrapolações para regiões de maiores densidades têm grande incerteza. A presença de híperons em NSs comentada na Seção 3.2 consiste em um dos principais problemas na área de física de nêutrons, conhecido como *hyperon puzzle*, i.e., a dificuldade em conciliar as massas detectadas de NSs massivas com a presença de graus de liberdade estranhos na composição das estrelas. O principal problema também é o desconhecimento das interações híperon-híperon e híperon-núcleon. Dados provenientes do futuro acelerador internacional Facility for Antiproton and Ion Research in Europe (FAIR) (SPILLER; FRANCHETTI, 2006), onde serão reproduzidas condições da matéria nuclear densa e com alta assimetria certamente ajudarão a impor mais vínculos aos modelos fenomenológicos, de forma a diminuir suas incertezas. Um dos objetivos do projeto FAIR também é o estudo das interações híperon-núcleon, de forma a elucidar os problemas relacionados à presença de híperons na equação de estado de estrelas de nêutrons.

Como a matéria de NSs pode chegar à densidades da ordem $\sim 10 n_0$, modelos de equações de estado para a matéria de quarks desconfiados também recebem muita atenção na literatura. Em particular, foi estudado na Seção 4.1 o modelo de sacola do M.I.T. Esse modelo é ao mesmo tempo interessante e didático, pois reproduz os conceitos de liberdade assintótica e confinamento da matéria de quarks. A equação de estado para essa fase da matéria pode ser utilizada como o caso limite da equação de estado $p(\mu_B)$ da matéria de estrelas de nêutrons. É claro que existem outras suposições para a constituição dos núcleos de NSs, como condensados mesônicos e matéria estranha. Uma discussão das diferentes propostas para a matéria no núcleo de NSs é encontrada em (VIDANA, 2020).

A construção de equações de estado da matéria de NSs para densidades $1, 1 < n_B/n_0 < 10$ se dá por métodos de interpolação, onde a pressão da EoS interpolada deve convergir para equações hadrônicas a baixas densidades $\sim n_0$ e para pressões de equações de estado de matéria de quarks desconfiados a altas densidades $10n_0$. Apesar de a maioria das técnicas utilizarem um conjunto de politrópicas para a interpolação, um estudo recente por (ANNALA et al., 2020) mostrou que um método de interpolação baseado na velocidade do som adiabática da matéria c_s produz resultados importantes.

Em particular, o autor reporta que para NSs massivas, se o limite conforme $c_s^2 < 1/3$ for obedecido pela equação de estado, a estrela irá possuir um núcleo de quarks desconfiados. O tamanho do núcleo para estrelas com $c_s^2 < 1/3$ se mostra considerável, podendo chegar à 6,5 km, com $M \gtrsim 0,7M_\odot$.

O telescópio NICER, do acrônimo em inglês *Neutron Star Interior Composition Explorer*, foi anexado à estação espacial internacional em 2017 com a missão de realizar medidas de massas e raios de estrelas de nêutrons com precisão de $\sim 5\%$. Até agora, resultados foram publicados para os pulsares PSR J0030+0451 e PSR J0740+6620, obtendo $R = 13,02 \pm 1,24$ km e $R = 12,47 \pm 2,42$ km. A massa medida para o pulsar PSR J0740+6620 consiste na maior massa observada atualmente, com $M = 2,08 \pm 0,07M_\odot$ (LATTIMER, 2021). Essas e outras futuras observações irão impor vínculos mais rigorosos para as equações de estado da matéria de NSs.

Acontece que o diagrama de fase da QCD ainda está em desenvolvimento, sendo uma área bastante ativa atualmente tanto da física teórica quanto da física experimental de altas energias. Como a QCD não pode ser resolvida por primeiros princípios na região sobre a linha de transição de fase, não há consenso quanto à transição de fase no interior de estrelas de nêutrons. Assim, uma melhor compreensão da teoria QCD para baixas temperaturas e altas densidades bariônicas podem levar a avanços no entendimento de equações de estado da matéria sob as condições extremas de interiores de NSs (BAYM et al., 2018).

Durante este trabalho, em particular no Capítulo 2 e Seção 3.1, as equações de estado discutidas modelaram estrelas de nêutrons a partir da inserção destas nas equações TOV. Porém, vale ressaltar que as soluções das equações TOV representam uma estrela estática e isotrópica. Estrelas de nêutrons reais são objetos com rotação tão alta que a estrela perde a forma esférica usual. O grau de achatamento da estrela depende da velocidade angular de rotação Ω . Um próximo passo no refinamento das modelagens apresentadas neste trabalho seriam possíveis, resolvendo as equações para uma NS com velocidade angular Ω , trabalho este desenvolvido primeiramente por Hartle e Thorne (HARTLE; THORNE, 1968).

Finalmente, avanços na descrição de estrelas de nêutrons vão ajudar a compreender outros fenômenos astrofísicos, como o colapso dos núcleos de estrelas ordinárias

e a observação de supernovas, o limite de massa para a formação de buracos negros e a dinâmica de colisões entre NSs.

Referências Bibliográficas

- ABBOTT, B. P. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 119, p. 161101, Oct 2017.
- ANNALA, E.; GORDA, T.; KURKELA, A.; NÄTTILÄ, J.; VUORINEN, A. Evidence for quark-matter cores in massive neutron stars. *Nature Physics*, v. 16, 09 2020.
- BAADE, W.; ZWICKY, F. Remarks on super-novae and cosmic rays. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 46, p. 76–77, Jul 1934.
- BASTIAN, N.-U. F.; BLASCHKE, D. Towards a unified quark-hadron-matter equation of state for applications in astrophysics and heavy-ion collisions. *Universe*, v. 4, n. 6, 2018. ISSN 2218-1997.
- BAYM, G.; HATSUDA, T.; KOJO, T.; POWELL, P. D.; SONG, Y.; TAKATSUKA, T. From hadrons to quarks in neutron stars: a review. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 81, n. 5, p. 056902, mar 2018.
- BURGIO, G.; SCHULZE, H.-J.; VIDAÑA, I.; WEI, J.-B. Neutron stars and the nuclear equation of state. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier BV, v. 120, p. 103879, sep 2021.
- CHODOS, A.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; THORN, C. B.; WEISSKOPF, V. F. New extended model of hadrons. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 9, p. 3471–3495, Jun 1974.
- CROMARTIE, H. T.; FONSECA, E.; RANSOM, S. M.; DEMOREST, P. B. Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. *Nature Astronomy*, Springer Science and Business Media LLC, v. 4, n. 1, p. 72–76, sep 2019.
- DUBBERS, D.; MÄRKISCH, B. Precise measurements of the decay of free neutrons. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, v. 71, n. 1, p. 139–163, 2021.
- DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; MARTINS, J. S. S.; DELFINO, A.; STONE, J. R.; STEVENSON, P. D. Skyrme interaction and nuclear matter constraints. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, v. 85, p. 035201, Mar 2012.
- GOLD, T. Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources. *Nature*, v. 218, p. 731–732, 1968.

- GOMES, R. d. O. *Transições de fase hadron-quark em estrelas de nêutrons*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Física. Programa de Pós-Graduação em Física., 2011.
- GONÇALVES, V. P.; LAZZARI, L. d. S. Uma introdução às estrelas estranhas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 42, 06 2020.
- HAENSEL, P.; POTEKHIN, A. Y.; YAKOVLEV, D. G. *Neutron stars 1: Equation of state and structure*. New York, USA: Springer, 2007. v. 326.
- HARTLE, J. B.; THORNE, K. S. Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars. *apj*, v. 153, p. 807, set. 1968.
- HEWISH, A.; BELL, S. J.; PILKINGTON, J. D. H.; SCOTT, P. F.; COLLINS, R. A. Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. *nat*, v. 217, n. 5130, p. 709–713, fev. 1968.
- HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system. *apjl*, v. 195, p. L51–L53, jan. 1975.
- JACOBSEN, R. B. *Plasma de quarks e glúons no interior de estrelas de nêutrons*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Física. Programa de Pós-Graduação em Física., 2007.
- KURKELA, A.; FRAGA, E. S.; SCHAFFNER-BIELICH, J.; VUORINEN, A. Constraining neutron star matter with quantum chromodynamics. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 789, n. 2, p. 127, jun 2014.
- LATTIMER, J. Neutron stars and the nuclear matter equation of state. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, v. 71, n. 1, p. 433–464, 2021.
- LATTIMER, J. M. The nuclear equation of state and neutron star masses. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, Annual Reviews, v. 62, n. 1, p. 485–515, nov 2012.
- LOPES, L. L.; BIESDORF, C.; MENEZES, D. P. Modified MIT bag models—part i: Thermodynamic consistency, stability windows and symmetry group. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 96, n. 6, p. 065303, mar 2021.
- OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 55, p. 374–381, Feb 1939.
- PASECHNIK, R.; ŠUMBERA, M. Phenomenological review on quark–gluon plasma: Concepts vs. observations. *Universe*, MDPI AG, v. 3, n. 1, p. 7, jan 2017.
- PONS, J. A.; VIGANÒ, D.; REA, N. A highly resistive layer within the crust of x-ray pulsars limits their spin periods. *Nature Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 9, n. 7, p. 431–434, jun 2013.
- SAGERT, I.; HEMPEL, M.; GREINER, C.; SCHAFFNER-BIELICH, J. Compact stars for undergraduates. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 27, n. 3, p. 577–610, apr 2006.

- SANTOS, A. S.; MENEZES, D. Relativistic equations of state at finite temperature. *Brazilian Journal of Physics*, v. 34, 12 2004.
- SCHMITT, A. *Dense Matter in Compact Stars*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- SILBAR, R. R.; REDDY, S. Neutron stars for undergraduates. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 72, n. 7, p. 892–905, jul 2004.
- SPILLER, P.; FRANCHETTI, G. The fair accelerator project at gsi. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, v. 561, n. 2, p. 305–309, 2006. ISSN 0168-9002. Proceedings of the Workshop on High Intensity Beam Dynamics.
- TOLMAN, R. C. Static solutions of einstein's field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 55, p. 364–373, Feb 1939.
- VIDANA, I. Short introduction to the physics of neutron stars. *EPJ Web Conf.*, v. 227, p. 01018, 2020.
- WALECKA, J. D. A Theory of highly condensed matter. *Annals Phys.*, v. 83, p. 491–529, 1974.
- WEISSENBORN, S.; SAGERT, I.; PAGLIARA, G.; HEMPEL, M.; SCHAFFNER-BIELICH, J. Quark matter in massive compact stars. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 740, n. 1, p. L14, sep 2011.

Apêndice A

Detalhamento matemático para alguns resultados apresentados

A.1 Densidade de estados para um gás de férmions livres

Vamos derivar a densidade de estados por unidade de momentum k , para um sistema de férmions livres. Consideramos um sistema do tipo "partícula numa caixa" tal que $0 \leq x_j \leq l$ $j = 1, 2, 3$, com condições de contorno $\psi(0) = \psi(l) = 0$. As autoenergias desse sistema são descritas por uma lista (n_1, n_2, n_3) . A saber,

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2), \quad (\text{A.1})$$

Podemos contar o número de estados acessíveis com energia menor que E por uma simples contagem,

$$N(E) = \sum_{n_j} G(E - E(n_1, n_2, n_3)), \quad (\text{A.2})$$

onde $G(x) = 1$ se $x > 0$ e $G(x) = 0$ se $x < 0$. A partir daí, podemos definir a função densidade de estados por unidade de energia $\rho(E)$,

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \sum_{n_j} \delta(E - E(n_1, n_2, n_3)), \quad (\text{A.3})$$

Para pequenos valores de energia, o espaçamento entre os níveis é muito grande e $\rho(E)$ tem pouco valor. Porém, à medida que E aumenta, δE se aproxima de valores

infinitesimais, de forma que $\rho(E)$ se aproxima de uma função contínua muito útil em sistemas de muitas partículas.

Podemos estimar o valor de $N(E)$ esquematizando um espaço- (n_1, n_2, n_3) , onde cada ponto caracteriza um estado acessível de volume unitário nesse espaço. Como n_j só toma valores inteiros positivos, o volume do espaço acessível é $1/8$ de uma esfera. A equação A.1 pode ser identificada como a equação de uma esfera de raio $\xi = (2ml^2E/\pi^2\hbar^2)^{1/2}$ no espaço- (n_1, n_2, n_3) , de forma que a contagem de estados de energia menor que E resulta em,

$$N(E) = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2ml^2E}{\pi^2\hbar^2} \right)^{3/2} = \frac{1}{6\pi^2} V \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{3/2}, \quad (\text{A.4})$$

onde $V \equiv l^3$. A Equação A.3 nos mostra como obter a densidade de estados,

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} V \sqrt{E}, \quad (\text{A.5})$$

É conveniente expressarmos a densidade de estados por unidade de momentum $k = \sqrt{2mE}$:

$$\rho(k) = g \frac{dN}{dk} = \rho(E) \frac{dE}{dk} = g \frac{4\pi k^2}{(2\pi\hbar)^3} V, \quad (\text{A.6})$$

onde inserimos g que representa o número de estados acessíveis de mesmo momentum k . A equação acima sugere uma generalização para o elemento dn :

$$dn = g \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (\text{A.7})$$

o qual representa o número de estados disponíveis de momentum k por unidade de volume $(2\pi\hbar)^3$ no espaço de fase de um sistema com simetria isotrópica. Apesar de não ser uma derivação rigorosa para a expressão A.7, é uma forma simples de se chegar a essa expressão que será útil para tratar de sistemas de férmions livres de alta densidade a $T = 0$.

A.2 Pressão interna de um gás isotrópico

Vamos derivar uma equação para estimar a pressão de qualquer gás isotrópico, dada a sua densidade de estados por unidade de momentum $\rho(k)$.

O momentum transferido de uma partícula do gás a uma parede imaginária é $\Delta k = 2mv_{\perp}$, onde v_{\perp} é a componente paralela à normal da parede. Por simplicidade, façamos $\Delta k = 2mv_z$.

Considere as partículas que possuem $v_z \in [v_z, v_z + dv_z]$. A pressão correspondente a essas partículas é dada por

$$dp(v_z) = \Delta k d\Phi(v_z) = 2mv_z d\Phi(v_z), \quad (\text{A.8})$$

onde $d\Phi(v_z)$ é o elemento diferencial do fluxo de partículas. Isto é, $d\Phi(v_z) = dN/At$, onde, por sua vez

$$dN(v_z) = (Av_z)t \times n \times f(v_z)dv_z, \quad (\text{A.9})$$

onde aqui $f(v_z)$ é a função de distribuição de velocidades do gás. Portanto, temos até aqui,

$$dp(v_z) = 2mv_z^2 n f(v_z)dv_z, \quad (\text{A.10})$$

A pressão total é dada pela integral sobre todos os valores $v_z > 0$, então

$$p(v_z) = \int_0^{+\infty} 2mnv_z^2 f(v_z)dv_z = mn \int_{-\infty}^{+\infty} v_z^2 f(v_z)dv_z = mn \langle v_z^2 \rangle, \quad (\text{A.11})$$

onde utilizamos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx$ para $f(x)$ par.

Podemos tornar essa relação mais elegante utilizando a função de distribuição $f(\vec{v})$, para a qual a pressão sobre toda a distribuição de velocidades é

$$p(\vec{v}) = m n \int d^3\vec{v} v_z^2 f(\vec{v}) = m n \langle v_z^2 \rangle, \quad (\text{A.12})$$

Estamos interessados em um sistema isotrópico, i.e., todas as direções são equivalentes entre si, de forma que $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$, Portanto, utilizando a Equação A.12, para um gás isotrópico,

$$p = \frac{1}{3} n m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} n \langle k v(k) \rangle = \frac{1}{3} n k v(k), \quad (\text{A.13})$$

Portanto, substituindo a densidade de partículas n pela densidade de estados, podemos estimar a pressão interna do sistema como

$$p = \int_0^{+\infty} \langle v_j k_j \rangle \rho(k) dk = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} k v(k) \rho(k) dk, \quad (\text{A.14})$$