

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Estudo do Neutrino no
Espaço-Tempo Não Comutativo

Thiago Oliveira Ferreira

Porto Alegre
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Estudo do Neutrino no Espaço-Tempo Não Comutativo

Thiago Oliveira Ferreira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Instituto de Física da UFRGS como requisito par-
cial para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Dimiter Hadjimichef

Porto Alegre
2022

Ferreira, Thiago Oliveira

Estudo do Neutrino no Espaço-Tempo Não Comutativo /
Thiago Oliveira Ferreira. -- 2022.

43 f.

Orientador: Dimiter Hadjimichef

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de
Física, Bacharelado em Física: Astrofísica, Porto Alegre,
BR-RS, 2022.

1. Neutrino. 2. Comprimento mínimo. 3. Helicidade.

I. Hadjimichef, Dimiter, orient. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, à minha mãe e ao meu pai, pelo apoio incondicional às minhas escolhas e por toda ajuda e todo carinho despendidos desde sempre;

aos meus amigos de longa data, Brenda e Vítor, que têm me suportado há anos;

aos meus amigos de média data — em especial àqueles que conheci no início do curso e que me acompanharam desde então (Marcos e Mateus), mas também àqueles que saíram da Física e encontraram seus caminhos ao longo do tempo, bem como àqueles que fui conhecendo no transcorrer do curso —, pois tornaram essa jornada mais agradável;

aos meus amigos de curta data, em especial Pedro, Gabriela e Luísa, dos quais me aproximei graças ao Café da Física;

ao meu orientador, Dimiter, pela paciência e atenção desde o princípio;

aos meus professores da UFRGS, sobretudo o caro Sílvio Dahmen, cujos conselhos têm me ajudado muito, e também a querida Sandra Prado, pela sua dedicação excepcional no início do ensino remoto;

à minha professora de Matemática do ensino fundamental, Viviane Pereira, e à diretora Marloiva Oliveira, que me incentivaram lá no começo;

à OBMEP e ao PIC Jr., que me apresentaram ao universo da Matemática Pura e foram fundamentais para a minha inserção na Física Teórica;

e, finalmente, ao CNPq (que me apoiou diretamente através do PICME) e, por extensão, a todas as agências e políticas públicas de fomento à pesquisa e de inclusão social ao ensino público, gratuito e de qualidade.

*You spin me right 'round, baby,
right 'round,
like a record, baby,
right 'round, 'round, 'round.*

— Dead or Alive (1985)

Resumo

Apesar de fracamente interagente, o neutrino traz para o Modelo Padrão de partículas elementares alguns problemas, dentre os quais a sua massa muito pequena (mas não nula) e a sua helicidade: neutrinos são sempre observados tendo mão-esquerda, enquanto que antineutrinos são sempre de mão-direita. Atualmente, uma das maneiras de se explicar isso é através do mecanismo de gangorra, que torna pequena a massa dos neutrinos observados às custas de aumentar a massa dos neutrinos não observados (a saber, o neutrino de mão-direita e o antineutrino de mão-esquerda).

Neste trabalho, eu fiz um estudo de álgebras de um espaço-tempo não comutativo devido à presença de um comprimento mínimo. Com uma álgebra covariante de Lorentz, obteve-se a equação de Dirac modificada, da qual surgem dois conjuntos de soluções, cada qual associado a uma massa efetiva diferente. No limite de massa cinética nula, obtém-se as soluções interpretadas como neutrinos, sendo possível identificar os neutrinos observados como os estados de massa efetiva nula, enquanto que os neutrinos não observados ficam associados a uma massa de mesma ordem que a escala de Planck.

Palavras-chave: Neutrino. Comprimento mínimo. Helicidade.

Abstract

Although weakly interacting, the neutrino brings some problems to the Standard Model of elementary particles, such as its tiny (but non-vanishing) mass and its helicity: neutrinos are (always) observed as left-handed particles, whereas antineutrinos are always right-handed. Currently, one way to explain such problems is through the seesaw mechanism, which gives small masses to the observed neutrinos at the expense of making the unobserved ones (the right-handed neutrino and the left-handed antineutrino) extremely heavy.

In the present work, I studied some algebras of a noncommutative space-time due to the existence of a minimal length. With a Lorentz-covariant algebra, we obtained a modified Dirac equation which gives us two sets of solutions, each associated with a different effective mass. In the limit of vanishing kinetic mass, we obtain solutions that can be interpreted as neutrinos, and it is possible to identify the observed neutrinos as states with vanishing effective mass, whilst the mass of the unobserved neutrinos is similar to the Planck scale.

Keywords: Neutrino. Minimal length. Helicity.

Sumário

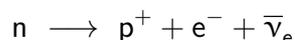
1	O neutrino	9
1.1	A equação de Weyl	10
1.2	A oscilação de neutrinos	13
1.3	O mecanismo de gangorra	15
2	O espaço-tempo não comutativo	17
2.1	O comprimento mínimo	17
2.2	O caso unidimensional	19
2.3	O caso D -dimensional	20
2.4	A álgebra de Quesne–Tkachuk	22
3	O neutrino no espaço-tempo não comutativo	25
3.1	A equação de Dirac modificada	25
3.2	A solução de onda plana	26
3.3	A solução do neutrino	29
3.3.1	Solução implícita	29
3.3.2	Solução explícita	31
3.4	Algumas considerações finais	33
	Referências Bibliográficas	35
A	Alguns resultados da Mecânica Quântica	39
A.1	A equação de Dirac ordinária	39
A.2	As matrizes de Pauli	41
A.3	A helicidade e a quiralidade	42

Capítulo 1

O neutrino

No decaimento β , um nêutron é convertido em um próton com a emissão de um elétron. Caso o próton e o elétron fossem os únicos subprodutos desse processo, a conservação do quadrimomentum no referencial do centro de massa fixaria a energia E_e do elétron como função das massas das partículas. Porém, experimentos [1] mostram que o elétron emitido possui um espectro contínuo, onde E_e é, na verdade, o *valor máximo*. [2]

Em 1930, Wolfgang Pauli enviou uma carta [3, 4] a Lise Meitner na qual propunha a existência de uma partícula eletricamente neutra muito leve que também seria subproduto do decaimento β . Essa partícula seria a responsável por carregar a energia que “falta” — i.e., a soma da sua energia com a do elétron totalizaria E_e . Em 1933, Enrico Fermi propôs uma exitosa teoria de decaimento β incorporando a partícula proposta por Pauli, batizada de “neutrino”. Na verdade, para que haja conservação do número leptônico, a partícula envolvida no decaimento β deve ser um *antineutrino* do elétron:



Na década de 1950, experimentos [5] envolvendo o decaimento β inverso



confirmaram a existência dos neutrinos.

A partir do espectro de energia dos elétrons emitidos por decaimento β , conclui-se que os neutrinos devem ser muito leves. Em sua carta, Pauli até sugeriu que a massa do neutrino poderia ser da ordem da massa do elétron. Posteriormente, notou-se que era possível “pôr a culpa” da violação da paridade das interações eletrofracas no neutrino se o mesmo tivesse massa nula. [4]

1.1 A equação de Weyl

Considere-se a equação de Dirac [6]

$$\left(\varepsilon \mathbf{1} - c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - mc^2 \gamma^0\right) \psi = 0, \quad (1.1)$$

onde ε é a energia associada ao espinor (*spinor*) ψ , $\mathbf{1}$ é o operador identidade, e γ^0 e α^k são matrizes¹ autoadjuntas (i.e. $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ e $\alpha^{k\dagger} = \alpha^k$) satisfazendo as relações

$$\gamma^0 \gamma^0 = \mathbf{1}, \quad \{\gamma^0, \alpha^k\} = 0 \quad \text{e} \quad \{\alpha^j, \alpha^k\} = 2 \delta^{jk} \mathbf{1}.$$

Para um férmion sem massa (como é costumeiro de se supor para o neutrino), a equação (1.1) fica dada por

$$\left(\varepsilon \mathbf{1} - c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}\right) \psi = 0. \quad (1.2)$$

Como já não há mais a matriz γ^0 , as matrizes α^k deverão satisfazer apenas

$$\{\alpha^j, \alpha^k\} = 2 \delta^{jk} \mathbf{1}, \quad \text{e} \quad \alpha^{k\dagger} = \alpha^k. \quad (1.3)$$

Ora, a álgebra (1.3) é satisfeita pelas matrizes de Pauli². Mais ainda, pode-se escolher as representações $\alpha^k = +\sigma^k$ e $\alpha^k = -\sigma^k$, que, respectivamente, tornarão (1.2) em

$$c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \eta = +\varepsilon \eta, \quad (1.4a)$$

$$c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi = -\varepsilon \chi, \quad (1.4b)$$

onde η e χ são espinores de duas componentes; essas são as **equações de Weyl**.

Como cada uma das equações (1.4) vem de uma representação diferente da equação de Dirac (1.2), cada qual admite duas soluções (uma de energia positiva e outra de energia negativa). Quando a massa é nula, tira-se da relação energia-momentum que

$$\varepsilon = \lambda c |\mathbf{p}|, \quad \text{onde} \quad \lambda \in \{-1, +1\};$$

o fator λ indica a evolução temporal do estado, i.e., se $\lambda = +1$ tem-se uma partícula, e se $\lambda = -1$ tem-se uma antipartícula. Desse modo, as equações (1.4) ficam

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \eta = +\lambda \eta, \quad (1.5a)$$

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \chi = -\lambda \chi. \quad (1.5b)$$

¹Ao escrever a equação de Dirac em termos das matrizes α^k , é comum que a quarta matriz seja denotada por β , porém “ β ” será reservado para o próximo capítulo.

²Comparar com a Seção A.2 do Apêndice A — em especial, a equação (A.9b) que estabelece os comutadores das matrizes de Pauli σ^k .

O operador $\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$ é chamado de **helicidade**: ele mede a orientação relativa entre o momentum e o spin da partícula. Caso momentum e spin tenham mesmo sentido, a helicidade será $+1$, e diz-se que o estado é “de mão-direita” (*right-handed*); caso momentum e spin tenham sentidos opostos, a helicidade será -1 , e diz-se que o estado é “de mão-esquerda” (*left-handed*).

Para baixas energias, a helicidade não é um bom número quântico, pois a sua medida depende do referencial inercial adotado: é possível encontrar uma transformação de Lorentz que inverta o sentido do momentum, enquanto que o sentido do spin se mantém, levando à troca de helicidade. Entretanto, para altas energias (como é o caso do neutrino sem massa), a helicidade se confunde com a **quiralidade**, que é um invariante de Lorentz. Uma breve discussão sobre helicidade e quiralidade pode ser encontrada na Seção A.3.

As soluções de (1.5a) são

$$\left. \begin{aligned} \lambda = +1 &\quad \Longrightarrow \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \eta = +\eta && \rightsquigarrow \nu_R \\ \lambda = -1 &\quad \Longrightarrow \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \eta = -\eta && \rightsquigarrow \bar{\nu}_L \end{aligned} \right\} (1.6)$$

i.e., (1.5a) descreve o neutrino de mão-direita (ν_R) e o antineutrino de mão-esquerda ($\bar{\nu}_L$).

Já as soluções de (1.5b) são

$$\left. \begin{aligned} \lambda = +1 &\quad \Longrightarrow \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \chi = -\chi && \rightsquigarrow \nu_L \\ \lambda = -1 &\quad \Longrightarrow \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \chi = +\chi && \rightsquigarrow \bar{\nu}_R \end{aligned} \right\} (1.7)$$

i.e., (1.5b) descreve o neutrino de mão-esquerda (ν_L) e o antineutrino de mão-direita ($\bar{\nu}_R$).

Em 1929, Hermann Weyl propôs as equações (1.4) como uma forma simplificada da equação de Dirac [7]. Entretanto, as equações de Weyl violam a paridade; explicitamente, ao fazer

$$\mathbf{p} \longmapsto -\mathbf{p}$$

as equações (1.4) invertem de papel, fazendo com que $\nu_R \longleftrightarrow \nu_L$ e $\bar{\nu}_R \longleftrightarrow \bar{\nu}_L$. Posteriormente, experimentos mostraram que a interação fraca viola paridade [8, 9]. Além disso, dentro da margem de erro, *todos* os neutrinos observados são de mão-esquerda, enquanto que *todos* os antineutrinos são de mão-direita [10]. Desse modo, a equação (1.5b) — advinda da representação $\alpha^k = -\sigma^k$ para a equação de Dirac (1.2) — voltou a ter importância, pois ela descrevia exatamente os neutrinos observados. Por consequência, o Modelo Padrão foi construído considerando que neutrinos são descritos por espiniores de Weyl obedecendo (1.5b). [4, 6]

Pode-se, ainda, abordar o problema diretamente com as representações matriciais.

A representação de Pauli–Dirac é dada por

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

onde σ^k são as matrizes de Pauli; nessa representação, a equação de Dirac (1.1) torna-se

$$\begin{pmatrix} (\varepsilon - mc^2) \mathbb{1} & -c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & (\varepsilon + mc^2) \mathbb{1} \end{pmatrix} \psi = 0. \quad (1.9)$$

No caso de $m = 0$, usando a forma explícita (A.10), fica-se com

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & -cp_z & -cp_+ \\ 0 & \varepsilon & -cp_- & +cp_z \\ -cp_z & -cp_+ & \varepsilon & 0 \\ -cp_- & +cp_z & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \psi = 0 \quad (1.10)$$

(onde $p_{\pm} \equiv p_x \pm ip_y$), cujos autovalores são

$$\varepsilon_1 = +c|\mathbf{p}|, \quad \varepsilon_2 = +c|\mathbf{p}|, \quad \varepsilon_3 = -c|\mathbf{p}|, \quad \varepsilon_4 = -c|\mathbf{p}|,$$

associados aos autovetores (não normalizados)

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{|\mathbf{p}|} \\ \frac{p_+}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{|\mathbf{p}|} \\ -\frac{p_z}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{p_z}{|\mathbf{p}|} \\ -\frac{p_+}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix}, \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{p_-}{|\mathbf{p}|} \\ \frac{p_z}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix}.$$

Escolhendo o eixo z na direção do momentum, i.e., $p_x = p_y = 0$ e $p_z = |\mathbf{p}|$, tem-se

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

que estão associados, respectivamente, às helicidades

$$\hat{h} \psi_1 = (+1) \psi_1, \quad \hat{h} \psi_2 = (-1) \psi_2, \quad \hat{h} \psi_3 = (+1) \psi_3, \quad \hat{h} \psi_4 = (-1) \psi_4,$$

pois, nessa escolha do eixo z , a helicidade fica representada por $\hat{h} \equiv \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \sigma^3$. Portanto, a menos da normalização, valem as seguintes identificações:

$$\psi_1 \rightsquigarrow \mathbf{v}_R, \quad \psi_2 \rightsquigarrow \mathbf{v}_L, \quad \psi_3 \rightsquigarrow \bar{\mathbf{v}}_R, \quad \psi_4 \rightsquigarrow \bar{\mathbf{v}}_L. \quad (1.12)$$

1.2 A oscilação de neutrinos

Para cada lépton carregado (elétron, múon e tau), há um neutrino associado a si (i.e., neutrino do elétron, neutrino do múon e neutrino do tau) — i.e., de certo modo, existe uma *base de sabor* $\mathcal{B}_s = \{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}$. Uma vez que neutrinos são pouco interagentes, as detecções são feitas indiretamente em interações da força fraca: o neutrino ν_ℓ é aquele que surge em interações de corrente carregada acompanhando o lépton carregado $\bar{\ell}$.

Um dos processos de fusão de hidrogênio em estrelas (em particular, o Sol) é o ciclo próton-próton, cujo primeiro estágio consiste em



No Sol, a taxa de produção é da ordem de 10^{38} neutrinos do elétron por segundo [11]. Mesmo que as interações de neutrinos sejam eventos relativamente raros (em comparação com outras partículas), essa alta taxa de produção torna factível medir neutrinos solares quando se usa grandes detectores em medidas suficientemente demoradas³. O que os experimentos mostram é que o fluxo de neutrinos do elétron que vêm do Sol é menor do que o esperado [14], enquanto que se mede também neutrinos do múon e do tau [13] — o que não era previsto inicialmente, já que múons e taus não devem ser produzidos em quantidades significativas no interior solar. Esses dados sugerem que, após serem produzidos, os neutrinos *oscilam* de sabor até chegar no detector.

Essa oscilação pode ser explicada através da existência de uma outra base de neutrinos: a *base de massas* $\mathcal{B}_m = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$. No ciclo próton-próton, o neutrino sai como um autoestado de sabor ν_e , que pode ser escrito como superposição linear dos autoestados de massa ν_k . Ao fazer a evolução temporal do estado, cada autoestado de massa ν_k terá um fator $\exp(-\frac{i}{\hbar} p_k \cdot x)$ diferente (pois, a princípio, as massas m_k serão diferentes); aqui p_k e x são os quadrivetores de momentum e posição, respectivamente, e a assinatura da métrica é $(+, -, -, -)$. Matematicamente, se $c_{\ell k} \equiv \langle \nu_k | \nu_\ell \rangle$ são os coeficientes da matriz de mudança de base $\mathcal{B}_s \rightarrow \mathcal{B}_m$, então

$$\begin{aligned} |\nu(0)\rangle &\equiv |\nu_e\rangle = \sum_k c_{ek} |\nu_k\rangle, \\ |\nu(x)\rangle &= \hat{U}(t) |\nu_e\rangle = \sum_k c_{ek} |\nu_k\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_k \cdot x\right). \end{aligned}$$

³Dentre os quais vale destacar o Super-Kamiokande [12], no Japão, e o Sudbury Neutrino Observatory (SNO) [13], no Canadá.

Já que o neutrino só interage através da força fraca, ele deverá colapsar em um dos autoestados de sabor quando for detectado. Portanto é preciso reescrever $|\nu(x)\rangle$ na base de sabor:

$$|\nu(x)\rangle = \overbrace{\sum_{\ell} |\nu_{\ell}\rangle \langle \nu_{\ell}|}^{\mathbb{1}} \hat{U}(t) |\nu_e\rangle = \sum_{\ell} \sum_k c_{e k} c_{\ell k}^* |\nu_{\ell}\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_k \cdot x\right),$$

uma vez que $c_{\ell k}^* = \langle \nu_{\ell} | \nu_k \rangle$ são os coeficientes da matriz de mudança de base $\mathcal{B}_m \rightarrow \mathcal{B}_s$. Por fim, a probabilidade de se medir o neutrino de sabor ℓ (i.e., ν_{ℓ}) é

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_{\ell}) = \left| \langle \nu_{\ell} | \nu(x) \rangle \right|^2, \quad \text{onde} \quad \langle \nu_{\ell} | \nu(x) \rangle = \sum_k c_{e k} c_{\ell k}^* \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_k \cdot x\right),$$

ou seja, a probabilidade de se medir os diferentes sabores de neutrino depende das massas m_k (que estão implícitas nos quadrimomenta p_k) — e também de outros fatores, como a distância e o intervalo de tempo entre a emissão e a detecção (contidos no evento x).

O fato de se medir diferentes sabores de neutrinos solares corrobora, portanto, a hipótese de que os neutrinos são massivos e têm massas distintas. Um estudo recente [15] utilizando dados do Planck-CMB sobre neutrinos cósmicos mostra que, com nível de confiança de 95 %, tem-se

$$\sum_k m_{\nu_k} < 0,116 \text{ eV}.$$

Os neutrinos serem massivos é uma das evidências de uma Física *além do Modelo Padrão*, já que o mesmo foi construído na hipótese de que os neutrinos não têm massa. Além disso, os limites para as massas dos neutrinos são muito baixas, mesmo em comparação com a massa do elétron ($\sim 0,5 \text{ MeV}$), que é o férmion mais leve do Modelo Padrão; surge então a pergunta:

Por que os neutrinos são tão leves?

Além disso, há o problema da helicidade:

Por que neutrinos são de mão-esquerda, e antineutrinos são de mão-direita?

Será que seus companheiros, viz. os neutrinos de mão-direita e os antineutrinos de mão-esquerda, não existem? Caso existam, as suas propriedades devem ser bastante diferentes, já que não foram observados até agora. Por exemplo, pode ser que eles não interajam via força fraca, ou, então, são muito massivos — decaindo rapidamente e sendo, portanto, difíceis de se medir.

1.3 O mecanismo de gangorra

Uma maneira de se responder simultaneamente às perguntas anteriores é através de algum mecanismo que dê massas muito leves aos neutrinos observados (ν_L e $\bar{\nu}_R$), enquanto que torna os seus companheiros (ν_R e $\bar{\nu}_L$) muito massivos. Essa ideia, proposta por Tsutomu Yanagida em 1981 numa conferência em Tóquio [16], foi batizada por ele de **mecanismo de gangorra** (*seesaw mechanism*).

Matematicamente, esse mecanismo está baseado na propriedade de que matrizes 2×2 do tipo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & B \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

possuem autovalores

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(B \pm \sqrt{B^2 + 4M^2} \right) \quad (1.14)$$

e, portanto, o determinante de A é

$$\lambda_+ \lambda_- = -M^2. \quad (1.15)$$

Através do ajuste do parâmetro B , ao aumentar um autovalor, o outro deverá diminuir; esse contrabalanço entre λ_+ e λ_- é o que dá origem ao apelido de “gangorra”. Ao aplicar essa propriedade aos neutrinos, toma-se B muito maior do que M , de maneira que

$$\lambda_+ \approx B \quad \text{e} \quad \lambda_- \approx -\frac{M^2}{B}. \quad (1.16)$$

Tome-se o dubleto leptônico de mão-esquerda

$$L = \begin{pmatrix} \chi \\ \ell_L \end{pmatrix},$$

onde o neutrino χ é um espinor de Weyl, e ℓ_L é um lépton carregado de mão-esquerda, e considere-se um neutrino hipotético de mão-direita η . Na densidade de lagrangiana, haverá três maneiras de se formar termos de massa covariantes de Lorentz, viz.

$$\frac{1}{2} \bar{B} \chi^\nu \chi_\nu, \quad \frac{1}{2} B \eta^\nu \eta_\nu, \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} B \eta^\nu \chi_\nu,$$

que pode ser compactado na forma matricial como

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \chi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{B} & M \\ M & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

O parâmetro \bar{B} é proibido por questões de renormalizabilidade, de modo que se recai no cenário (1.13) [17–20].

Já que o neutrino de mão-direita não interage, a princípio, em nenhuma das interações do Modelo Padrão de partículas elementares, o mesmo deve ter carga nula frente a todas as simetrias de calibre do Modelo Padrão. Desse modo, B é um parâmetro livre. Valores grandes para B podem ser motivados pelas teorias de grande unificação (GUT) [21]. Havendo simetrias de calibre aumentadas, tem-se inicialmente $B = 0$; porém, na escala de quebra espontânea da simetria, B passa a ter um valor grande do tipo $B \approx M_{\text{GUT}} \approx 10^{15}$ GeV. Para uma massa de $M \sim 100$ GeV, encontra-se

$$\lambda_- \sim 0,01 \text{ eV} \quad \text{e} \quad \lambda_+ \sim 10^{15} \text{ GeV}, \quad (1.17)$$

de modo que o mecanismo de gangorra prevê que os neutrinos observados (ν_L e $\bar{\nu}_R$) sejam tão leves às custas de que os neutrinos não observados (ν_R e $\bar{\nu}_L$) sejam muito pesados.

Capítulo 2

O espaço-tempo não comutativo

2.1 O comprimento mínimo

Motivado pelas divergências nas teorias de campos que surgem ao assumir interações pontuais entre a matéria e os campos, Hartland Snyder propôs, em 1947, que, ao invés de contínuo, o espaço-tempo poderia ser discreto, com uma unidade natural de comprimento. Especificamente em [22], Snyder reescreve os operadores x , y , z e t em termos de coordenadas projetivas (homogêneas) de um espaço quadridimensional de curvatura constante, o que leva à discretização dos espectros dos operadores espaciais x , y e z , mantendo o operador temporal t com um espectro contínuo em toda a reta real; Snyder também mostra que a forma quadrática das coordenadas projetivas é invariante sob o grupo de Lorentz, o que torna viável o uso do espaço-tempo não comutativo.

Com o sucesso da teoria de renormalização no controle das divergências da teoria de campos, as ideias de Snyder foram deixadas de lado, até que na década de 1990 elas voltaram à tona por meio dos trabalhos de Achim Kempf, que escreveu uma série de artigos tratando da geometria não comutativa e das incertezas mínimas na posição e no momentum. O objetivo de Kempf em suas publicações era encontrar uma maneira alternativa de regularização.

Segundo Kempf [23], a introdução da gravidade na teoria quântica de campos parece, à primeira vista, comprometer a sua renormalizabilidade, ainda que se acredite que a própria gravidade deva levar a um corte (*cut-off*) no ultravioleta, levando à existência de um comprimento mínimo. O argumento é que a teoria quântica de campos na sua abordagem ordinária não é capaz de descrever a Física nem em largas escalas, nem em

pequenas escalas (como da ordem do comprimento de Planck $\ell_P \sim 10^{-35}$ m): em largas escalas, a curvatura do espaço-tempo torna-se relevante e deixa de haver sentido na noção de onda plana; já em pequenas escalas é preciso usar partículas de energias muito altas, o que acaba provocando perturbações gravitacionais devido à alta densidade de energia. No primeiro caso, pode-se resolver o problema usando uma incerteza mínima no momentum; já no segundo, usa-se uma incerteza mínima na posição. [24]

Além da motivação na renormalização da teoria quântica de campos, as ideias de comprimento mínimo também surgiram naturalmente em gravitação quântica e teoria de cordas. Em especial, Amati *et al.* [25] argumentam que as cordas só podem ser examinadas a distâncias não menores do que o seu comprimento intrínseco $\ell_S \sim \ell_P$; Konishi *et al.* [26] definem uma nova integral de caminho para cordas e mostram a existência de um comprimento mínimo da ordem de ℓ_P ; Maggiore [27] mostra que, em uma álgebra de Poincaré κ -deformada, surge naturalmente um comprimento mínimo. Ainda motivado na renormalização, em [28] Kempf trata da relação de incerteza modificada pela gravitação quântica e pela teoria de cordas e mostra que, para teorias ϕ^4 euclidianas, de fato há cortes no ultravioleta e no infravermelho.

Embora Kempf tenha obtido resultados mais gerais de incertezas mínimas tanto na posição quanto no momentum, aqui serão usados os resultados obtidos por ele em [23] com Gianpiero Mangano e Robert B. Mann, onde tratam apenas da incerteza mínima na posição. Conforme o argumento anterior, isso corresponde ao uso de partículas de altas energias no estudo das pequenas escalas. Em outro artigo [29], Kempf impõe que a álgebra seja rotacionalmente isotrópica, obtendo uma sutil variação da anterior.

Contudo, a álgebra estabelecida em [23, 29] não é covariante de Lorentz. Motivados a corrigir esse problema, Christiane Quesne e Volodymyr Tkachuk constroem uma nova álgebra em [30], covariante de Lorentz e que contém a álgebra original de Snyder [22] como caso particular. Em [31], Mykola Samar e Tkachuk encontram uma representação dos operadores de posição e momentum que satisfaz a álgebra de Quesne–Tkachuk em primeira aproximação e que mantém os operadores de posição inalterados. Essa representação de Samar–Tkachuk será útil para obter a equação de Dirac modificada.

Nas seções 2.2 e 2.3 está apresentada a álgebra de Kempf *et al.* construída em [23, 29], enquanto que na seção 2.4 é analisada a nova álgebra introduzida por Quesne e Tkachuk [30] e a representação de Samar–Tkachuk [31].

2.2 O caso unidimensional

O objetivo desta seção é mostrar que, a partir de uma relação de incerteza generalizada, é possível introduzir um comprimento mínimo. A forma mais simples de se generalizar a relação de incerteza em uma dimensão é

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 + \alpha (\Delta X)^2 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma \right), \quad (2.1)$$

onde α , β e γ são coeficientes positivos e independentes de ΔX e ΔP . Quando $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0$, recupera-se a relação de incerteza da Mecânica Quântica ordinária, onde é possível fazer ΔX tão pequeno quanto se queira às custas de aumentar ΔP , e vice-versa.

Agora, quando $\alpha, \beta > 0$, a relação (2.1) acarreta em incertezas mínimas tanto na posição quanto no momentum: ao diminuir ΔX , aumenta-se ΔP , de modo que é preciso levar em conta o termo $\beta (\Delta P)^2$; o similar ocorre com ΔP e $\alpha (\Delta X)^2$. Esse cenário é mais genérico e, conseqüentemente, mais complicado do que se deseja neste trabalho. Por esse motivo, escolhe-se que $\alpha = 0$ a fim de que

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma \right). \quad (2.2)$$

Para dois operadores \hat{A} e \hat{B} , vale a relação de incerteza generalizada [11]

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|. \quad (2.3)$$

Tomando

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar (1 + \beta \hat{P}^2), \quad (2.4)$$

fica-se com

$$\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle = i\hbar \left(1 + \beta \underbrace{(\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2)}_{(\Delta P)^2} + \beta \langle P \rangle^2 \right).$$

Note-se que, escolhendo $\gamma = \beta \langle P \rangle^2$, é possível fazer com que (2.2) torne-se

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 + \beta (\Delta P)^2 + \beta \langle P \rangle^2 \right); \quad (2.5)$$

i.e., o comutador (2.4) de fato leva a uma relação de incerteza do tipo (2.2).

A fronteira da região permitida por (2.5) no espaço $(\Delta X) \times (\Delta P)$ pode ser escrita como

$$\Delta X_{\min} = \frac{\hbar}{2} \left(\beta \Delta P + \frac{1 + \beta \langle P \rangle^2}{\Delta P} \right), \quad (2.6)$$

cuja derivada em ΔP é

$$\frac{\partial}{\partial(\Delta P)} \Delta X_{\min} = \frac{\hbar}{2} \left(\beta - \frac{1 + \beta \langle P \rangle^2}{(\Delta P)^2} \right).$$

Ora, a derivada da esquerda é nula quando ΔP assumir o valor que minimiza ΔX . Isso ocorre quando

$$\Delta P = \sqrt{\frac{1 + \beta \langle P \rangle^2}{\beta}}. \quad (2.7)$$

Substituindo (2.7) em (2.6), encontra-se que a incerteza mínima na posição, como função de $\langle P \rangle$, é

$$\Delta X_{\min}(\langle P \rangle) = \hbar \sqrt{\beta} \sqrt{1 + \beta \langle P \rangle^2},$$

de modo que o menor valor possível é

$$\Delta X_0 = \hbar \sqrt{\beta}. \quad (2.8)$$

Por fim, é fácil de ver que o comutador (2.4) é satisfeito quando o operador posição \hat{X} for representado, no espaço de momentum, por

$$\hat{X} \tilde{\psi}(p) = i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \tilde{\psi}(p).$$

2.3 O caso D -dimensional

A generalização ingênua de (2.4) para D dimensões (espaciais) parece ser

$$[\hat{X}^j, \hat{P}^k] = i\hbar \delta^{jk} (1 + \beta \hat{\mathbf{P}}^2), \quad \text{onde } \hat{\mathbf{P}}^2 \equiv \sum_{k=1}^D \hat{P}^k \hat{P}^k;$$

porém, como mostrado em [29], ao exigir invariância rotacional, deve-se ter

$$[\hat{X}^j, \hat{P}^k] = i\hbar \left(\delta^{jk} (1 + \beta \hat{\mathbf{P}}^2) + \beta' \hat{P}^j \hat{P}^k \right), \quad (2.9)$$

havendo, agora, dois parâmetros de deformação $\beta, \beta' > 0$. Nesse caso, o operador de posição \hat{X}^j pode ser representado no espaço de momentum por

$$\hat{X}^j \tilde{\psi}(p) = i\hbar \left[\left(\beta + \beta' \frac{D+1}{2} \right) \hat{P}^j + \left(\delta^{jk} (1 + \beta \hat{\mathbf{P}}^2) + \beta' \hat{P}^j \hat{P}^k \right) \frac{\partial}{\partial p^k} \right] \tilde{\psi}(p),$$

onde uma soma em k está implícita [29]. Conseqüentemente, considerando apenas a primeira ordem em β e β' , o comutador dos operadores de posição fica

$$[\hat{X}^j, \hat{X}^k] = -\hbar^2 (2\beta - \beta') \left(\hat{P}^j \frac{\partial}{\partial p^k} - \hat{P}^k \frac{\partial}{\partial p^j} \right) + \mathcal{O}^2(\beta, \beta'). \quad (2.10)$$

Vale lembrar que, para os operadores de momentum, ainda vale

$$[\hat{P}^j, \hat{P}^k] = 0. \quad (2.11)$$

A álgebra estabelecida por (2.9), (2.10) e (2.11) é rotacionalmente covariante, porém não é covariante de Lorentz. Na verdade, como Kempf afirma em [29], essa álgebra nem sequer é covariante de Galileu. Note-se que o parâmetro β' surge da invariância rotacional da álgebra; no caso particular em que $\beta' = 2\beta$, é possível retornar ao comutador convencional $[\hat{X}^j, \hat{X}^k] = 0$.

Defina-se os operadores [32]

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}^j &= (1 + \beta \hat{\mathbf{P}}^2) \hat{x}^j + \beta' \hat{\mathbf{p}}^j (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) + i\hbar \gamma \hat{\mathbf{p}}^j, \\ \hat{\mathbf{P}}^k &= \hat{\mathbf{p}}^k, \end{aligned} \right\} (2.12)$$

onde γ é uma constante arbitrária, e \hat{x}^j e $\hat{\mathbf{p}}^k$ são os operadores de posição e momentum ordinários⁴, respectivamente; \hat{X}^j e $\hat{\mathbf{P}}^k$, assim definidos, satisfazem a álgebra (2.9), (2.10) e (2.11), que pode ser reescrita em termos de \hat{X}^j e $\hat{\mathbf{P}}^k$ como

$$[\hat{X}^j, \hat{\mathbf{P}}^k] = i\hbar \left(\delta^{jk} (1 + \beta \hat{\mathbf{P}}^2) + \beta' \hat{\mathbf{P}}^j \hat{\mathbf{P}}^k \right), \quad (2.13a)$$

$$[\hat{X}^j, \hat{X}^k] = i\hbar \frac{2\beta - \beta'}{1 + \beta \hat{\mathbf{P}}^2} (\hat{\mathbf{P}}^j \hat{X}^k - \hat{\mathbf{P}}^k \hat{X}^j) + \mathcal{O}^2(\beta, \beta'), \quad (2.13b)$$

$$[\hat{\mathbf{P}}^j, \hat{\mathbf{P}}^k] = 0. \quad (2.13c)$$

Já que a álgebra de Kempf é rotacionalmente covariante, as incertezas mínimas nas coordenadas de posição devem ser todas iguais. Para $j = k$, (2.13a) torna-se

$$\begin{aligned} \langle [\hat{X}^j, \hat{\mathbf{P}}^j] \rangle &= i\hbar \left\{ 1 + \beta \sum_{k=1}^D \langle \hat{\mathbf{P}}^k \hat{\mathbf{P}}^k \rangle + \beta' \langle \hat{\mathbf{P}}^j \hat{\mathbf{P}}^j \rangle \right\} \\ &= i\hbar \left\{ 1 + \beta \sum_{k=1}^D [(\Delta P^k)^2 + \langle P^k \rangle^2] + \beta' [(\Delta P^j)^2 + \langle P^j \rangle^2] \right\}. \end{aligned}$$

Por simplicidade, suponha-se que todas as incertezas nos momenta são iguais, e que os valores esperados dos momenta são nulos — i.e., $\Delta P^k = \Delta P$ e $\langle P^k \rangle = 0$ para todo k . Então (2.3) leva a

$$\Delta X^j \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 + (D\beta + \beta') (\Delta P)^2 \right), \quad (2.14)$$

donde conclui-se, por analogia a (2.5), que o comprimento mínimo advindo da álgebra de Kempf em D dimensões é

$$\ell_K = \hbar \sqrt{D\beta + \beta'}. \quad (2.15)$$

No caso unidimensional ($D = 1$), deve-se ter $\beta' = 0$ para que o comutador fundamental (2.9) torne-se (2.4); nesse caso, ℓ_K coincide com o resultado (2.8).

⁴I.e., \hat{x}^j e $\hat{\mathbf{p}}^k$ são tais que $[\hat{x}^j, \hat{\mathbf{p}}^k] = i\hbar \delta^{jk}$ e $[\hat{x}^j, \hat{x}^k] = [\hat{\mathbf{p}}^j, \hat{\mathbf{p}}^k] = 0$. No espaço de momentum, tem-se $\hat{x}^j = i\hbar \frac{\partial}{\partial p^j}$; no espaço de posição, tem-se $\hat{\mathbf{p}}^k = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k}$.

2.4 A álgebra de Quesne–Tkachuk

A correção relativística feita por Quesne e Tkachuk em [30] é baseada na troca

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^2 &\longmapsto \mathbf{p}^2 - (p^0)^2 = -p_\mu p^\mu, \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - p^0 x^0 = -p_\mu x^\mu,\end{aligned}$$

onde usa-se a métrica com assinatura $(+, -, \dots, -)$. Os operadores em (2.12) tornam-se

$$\left. \begin{aligned}X^\mu &= (1 + \beta p_\nu p^\nu) x^\mu + \beta' p^\mu p_\nu x^\nu + i\hbar \gamma p^\mu, \\ P^\nu &= p^\nu,\end{aligned} \right\} (2.16)$$

onde, novamente, x^μ e p^ν são os operadores de posição e momentum ordinários⁵, respectivamente. Nessa correção relativística, a álgebra fica dada pelos comutadores

$$[X^\mu, P^\nu] = i\hbar \left(-g^{\mu\nu} (1 - \beta P_\rho P^\rho) + \beta' P^\mu P^\nu \right), \quad (2.17a)$$

$$[X^\mu, X^\nu] = i\hbar \frac{2\beta - \beta'}{1 + \beta P_\rho P^\rho} (P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu) + \mathcal{O}^2(\beta, \beta'), \quad (2.17b)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0; \quad (2.17c)$$

note-se que, por causa da assinatura escolhida, fica-se com $\delta^{jk} = -g^{jk}$, o que justifica o sinal negativo em (2.17a).

Ao invés da representação exata (2.16), Samar e Tkachuk [31] mostraram que a representação

$$\left. \begin{aligned}X^\mu &= x^\mu - \frac{2\beta - \beta'}{4} (x^\mu p_\nu p^\nu + p_\nu p^\nu x^\mu), \\ P^\mu &= \left(1 - \frac{\beta'}{2} p_\nu p^\nu \right) p^\mu,\end{aligned} \right\} (2.18)$$

satisfaz a álgebra (2.17) até primeira ordem em β e β' . Como já foi comentado, no caso $\beta' = 2\beta$, os operadores de posição voltam a comutar (pelo menos até primeira ordem em β); nesse cenário, a representação de Samar–Tkachuk (2.18) torna-se

$$\left. \begin{aligned}X^\mu &= x^\mu, \\ P^\mu &= \left(1 - \beta p_\nu p^\nu \right) p^\mu.\end{aligned} \right\} (2.19)$$

O interessante dessa representação (2.19) é manter os operadores de posição inalterados, porém corrigindo os operadores de momentum pela presença do comprimento mínimo.

⁵I.e., x^μ e p^ν são tais que $[x^\mu, p^\nu] = -i\hbar g^{\mu\nu}$ e $[x^\mu, x^\nu] = [p^\mu, p^\nu] = 0$.

Conforme [30], a álgebra (2.17) é covariante de Lorentz — em especial, é rotacionalmente covariante, de modo que todas as coordenadas espaciais terão o mesmo comprimento mínimo. Tomando o valor esperado em (2.17a), com $\mu = \nu = k \in \{1, \dots, D\}$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle [X^k, P^k] \rangle &= i\hbar \left(1 - \beta \langle P_\rho P^\rho \rangle + \beta' \langle P^k P^k \rangle \right) \\ &= i\hbar \left\{ 1 - \beta \left[\langle (P^0)^2 \rangle - \sum_{j=1}^D \langle (P^j)^2 \rangle \right] + \beta' \langle (P^k)^2 \rangle \right\} \\ &= i\hbar \left\{ 1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle + \beta \sum_{j=1}^D \left[(\Delta P^j)^2 + \langle P^j \rangle^2 \right] + \beta' \left[(\Delta P^k)^2 + \langle P^k \rangle^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Supondo novamente $\Delta P^j = \Delta P$ e $\langle P^j \rangle = 0$ para todo j , fica-se com

$$\langle [X^k, P^k] \rangle = i\hbar \left\{ 1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle + (D\beta + \beta') (\Delta P)^2 \right\},$$

portanto, a relação de incerteza na álgebra de Quesne–Tkachuk é

$$\Delta X^k \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \left| 1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle + (D\beta + \beta') (\Delta P)^2 \right|. \quad (2.20)$$

Em analogia ao que foi feito na seção Seção 2.2, conclui-se que o comprimento mínimo advindo dessa álgebra é

$$\ell_{\text{QT}} = \hbar \sqrt{D\beta + \beta'} \sqrt{1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle}. \quad (2.21)$$

Note-se que o comprimento mínimo “sentido” por um estado depende do valor esperado do quadrado da sua energia $\langle (P^0)^2 \rangle = \frac{1}{c^2} \langle \varepsilon^2 \rangle$. Para que $\ell_{\text{QT}} > 0$ — que está associado à existência de um ponto de mínimo para a curva $\Delta X_{\text{min}}^j(\Delta P)$ —, é preciso que

$$\beta < \frac{1}{\langle (P^0)^2 \rangle}; \quad (2.22)$$

os estados que obedecem essa condição são aqueles que sentem a presença do comprimento mínimo.

Alternativamente, supondo que de fato existe um comprimento mínimo absoluto da ordem do comprimento de Planck $\ell_{\text{P}} \sim 10^{-35}$ m [25, 26], é preciso que $\ell_{\text{P}} < \ell_{\text{QT}}$ para qualquer estado, donde

$$\langle \varepsilon^2 \rangle < \frac{c^2}{\beta} \left[1 - \frac{1}{D\beta + \beta'} \left(\frac{\ell_{\text{P}}}{\hbar} \right)^2 \right] < \frac{c^2}{\beta}, \quad (2.23)$$

ou seja, havendo um comprimento mínimo absoluto ℓ_{P} e supondo que a Natureza obedece a álgebra de Quesne–Tkachuk, existe um limite superior para energias.

Para ilustrar, na Figura 2.1 é possível ver as relações de incerteza discutidas: a da Mecânica Quântica ordinária (MQO), a advinda da álgebra de Kempf dada por (2.14), e três curvas dadas pela relação de Quesne–Tkachuk (2.20), com $D = 3$ e $\beta' = 2\beta$, para as três possíveis relações entre β^{-1} e $\xi \equiv \langle (P^0)^2 \rangle$. Note-se que as curvas de $\xi \geq \beta^{-1}$ violam a condição (2.22), o que leva à inexistência de comprimento mínimo nesses casos.

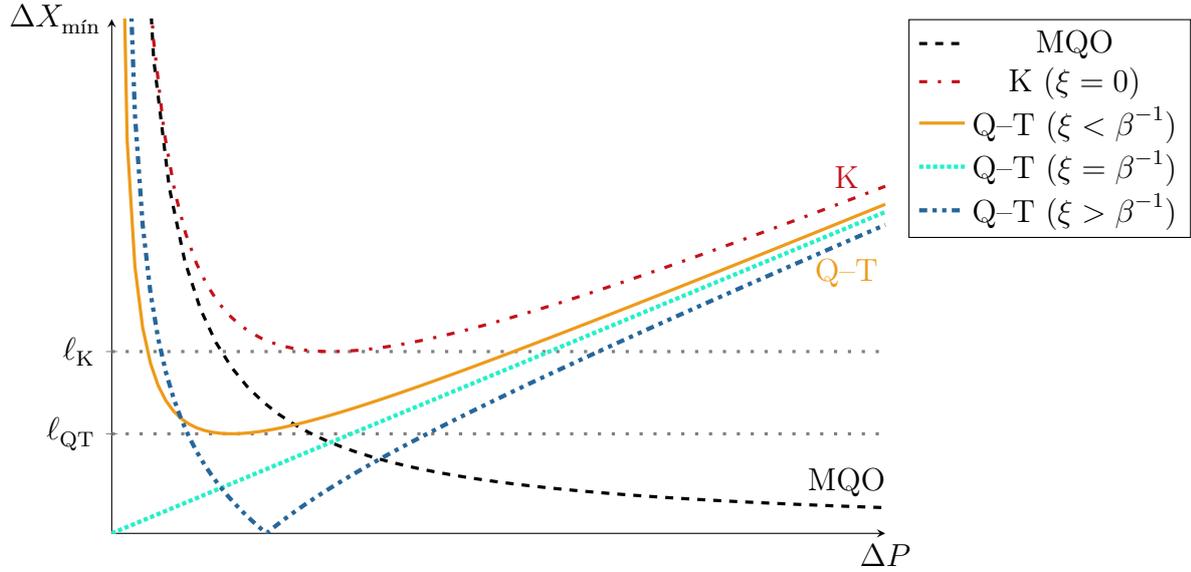


Figura 2.1: As fronteiras das diferentes relações de incerteza, advindas da Mecânica Quântica ordinária (MQO), da álgebra de Kempf (K) e da álgebra de Quesne–Tkachuk (Q–T).

Ainda no caso de $D = 3$ e $\beta' = 2\beta$, ao desprezar o termo β^2 no radicando, o comprimento mínimo (2.21) pode ser estimado por

$$\ell_{QT} \simeq \hbar \sqrt{5\beta} \quad \Longrightarrow \quad \beta \simeq \frac{1}{5} \left(\frac{\ell_{QT}}{\hbar} \right)^2.$$

Considerando que $\ell_{QT} \gtrsim \ell_P \sim 10^{-35}$ m, uma estimativa inferior para o valor de β é

$$\beta \gtrsim 10^{-57} \text{ (eV/c)}^{-2}, \quad (2.24)$$

enquanto que (2.23), desprezando termos em β^2 por autoconsistência, dará

$$|\varepsilon| \lesssim 10^{19} \text{ GeV/c}^2 \sim E_P \quad (2.25)$$

i.e., dentro dessa estimativa grosseira, a condição (2.23) parece ser: para sentir um comprimento mínimo, o estado deve ter energia menor do que a energia de Planck E_P .

Capítulo 3

O neutrino no espaço-tempo não comutativo

3.1 A equação de Dirac modificada

A densidade de lagrangiana de um campo de spin $\frac{1}{2}$ é [2]

$$\mathcal{L} = i\hbar c \bar{\Psi} \gamma^\nu (\partial_\nu \Psi) - mc^2 \bar{\Psi} \Psi, \quad (3.1)$$

onde Ψ é um espinor de Dirac, $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$ é o seu espinor adjunto, e γ^ν são as matrizes de Dirac. Na representação de Samar–Tkachuk (2.19), viz.

$$\begin{aligned} x^\rho &\longmapsto x^\rho, \\ \partial^\nu &\longmapsto (1 + \beta \hbar^2 \square) \partial^\nu, \end{aligned}$$

onde $\square \equiv \partial_\nu \partial^\nu$, a densidade de lagrangiana (3.1) torna-se

$$\mathcal{L} = i\hbar c \bar{\Psi} \gamma^\nu \partial_\nu \Psi + i\beta \hbar^3 c \bar{\Psi} \gamma^\nu (\square \partial_\nu \Psi) - mc^2 \bar{\Psi} \Psi.$$

O termo $i\beta \hbar^3 c \bar{\Psi} \gamma^\nu (\square \partial_\nu \Psi)$ está relacionado à existência do comprimento mínimo. Note-se que \mathcal{L} não depende das derivadas de $\bar{\Psi}$, logo a equação de Euler–Lagrange correspondente será

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = i\hbar c \gamma^\nu \partial_\nu \Psi + i\beta \hbar^3 c \gamma^\nu (\square \partial_\nu \Psi) - mc^2 \Psi,$$

chegando-se, portanto, à **equação de Dirac modificada** pela presença do comprimento mínimo:

$$\left[i\hbar c (1 + \beta \hbar^2 \square) \gamma^\nu \partial_\nu - mc^2 \mathbf{1} \right] \Psi(x) = 0. \quad (3.2)$$

3.2 A solução de onda plana

Sendo ψ um espinor constante, considere-se o *ansatz* de onda plana

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\nu x^\nu\right) = \psi \exp\left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \varepsilon t)\right]; \quad (3.3)$$

então

$$\left. \begin{aligned} \gamma^\nu (\partial_\nu \Psi) &= -\frac{i}{\hbar} \gamma^\nu p_\nu \Psi \\ \gamma^\nu (\square \partial_\nu \Psi) &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 (p_\rho p^\rho) \gamma^\nu p_\nu \Psi \end{aligned} \right\} (1 + \beta \hbar^2 \square) \gamma^\nu \partial_\nu \Psi = -\frac{i}{\hbar} \omega \gamma^\nu p_\nu \Psi, \quad (3.4)$$

onde

$$\omega \equiv 1 - \beta (p^\rho p_\rho) = 1 - \frac{\beta}{c^2} (\varepsilon^2 - c^2 \mathbf{p}^2). \quad (3.5)$$

Agora note-se que

$$\gamma^\nu p_\nu = \frac{\varepsilon}{c} \gamma^0 + \gamma^k p_k = \frac{1}{c} \gamma^0 (\varepsilon \mathbf{1} - c \alpha^k p_k), \quad (3.6)$$

pois $\alpha^k = \gamma^0 \gamma^k$ e $\gamma^0 \gamma^0 = \mathbf{1}$. Substituindo (3.4) e (3.6) em (3.2), chega-se em

$$\left\{ \omega [\varepsilon \mathbf{1} - c (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})] - mc^2 \gamma^0 \right\} \psi = 0. \quad (3.7)$$

Usando a representação de Pauli–Dirac (1.8) em (3.7), tem-se

$$\left\{ \omega \left[\begin{pmatrix} \varepsilon \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \varepsilon \mathbf{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} mc^2 \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -mc^2 \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\} \psi = 0,$$

donde

$$\begin{pmatrix} (\omega \varepsilon - mc^2) \mathbf{1} & -\omega c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \\ -\omega c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) & (\omega \varepsilon + mc^2) \mathbf{1} \end{pmatrix} \psi = 0. \quad (3.8)$$

A equação (3.8) admite solução não trivial se o determinante da sua matriz for nulo, i.e.,

$$\left[(\omega \varepsilon)^2 - (mc^2)^2 \right] - (\omega c)^2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = 0.$$

Usando (A.13), chega-se finalmente em

$$\omega^2 (\varepsilon^2 - c^2 \mathbf{p}^2) - (mc^2)^2 = 0. \quad (3.9)$$

Na ausência de comprimento mínimo (i.e., $\beta \rightarrow 0$), o fator ω definido em (3.5) torna-se 1, de modo que a equação acima recai na relação energia-momentum ordinária.

A nova relação de energia-momentum, como visto, é dada por (3.9). Ainda assim, defina-se uma grandeza μ de tal forma que

$$\varepsilon^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + (\mu c^2)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu \equiv \frac{1}{c^2} \sqrt{\varepsilon^2 - c^2 \mathbf{p}^2}, \quad (3.10)$$

i.e., μ é uma *massa efetiva* (ou *massa dinâmica*) relacionada ao autoespinor de energia ε ; ela é “efetiva” porque o seu valor satisfaz, por definição, a relação de energia-momentum ordinária.

De (3.5), vê-se que

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 1 - \frac{2\beta}{c^2} (\varepsilon^2 - c^2 \mathbf{p}^2) + \mathcal{O}(\beta^2) \\ &= 1 - 2\beta c^2 \mu^2 + \mathcal{O}(\beta^2), \end{aligned}$$

logo (3.9) torna-se, em primeira ordem de β ,

$$2\beta c^2 \mu^4 - \mu^2 + m^2 = 0; \quad \Longrightarrow \quad \mu^2 = \frac{1}{4\beta c^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 8\beta m^2 c^2} \right).$$

Uma vez que μ deve ser uma massa, as soluções negativas podem ser ignoradas, tendo-se

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2\sqrt{\beta}c} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 8\beta m^2 c^2}}; \quad (3.11)$$

além disso, para evitar entrar na questão de massas complexas, é preciso que

$$\beta \leq \frac{1}{8m^2 c^2}. \quad (3.12)$$

Juntando (3.10) e (3.11), conclui-se que os autovalores de energia da equação de Dirac modificada (3.7) são

$$\varepsilon_{\pm} = \lambda E_{\pm}, \quad \text{onde} \quad E_{\pm} \equiv c \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mu_{\pm}^2 c^2} \quad \text{e} \quad \lambda \in \{-1, +1\}. \quad (3.13)$$

O fator $\lambda \in \{-1, +1\}$ determina a evolução temporal do estado: se $\lambda = +1$, associamos o estado a uma partícula; e, se $\lambda = -1$, associamo-lo a uma antipartícula.

Retornando a (3.5), vê-se que

$$\omega = 1 - \frac{\beta}{c^2} (\mu c^2)^2 = 1 - \beta \mu^2 c^2,$$

portanto

$$\omega_{\pm} = 1 - \beta \mu_{\pm}^2 c^2. \quad (3.14)$$

Escrevendo o espinor ψ como

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

onde χ e ϕ são espinores de duas componentes, a equação matricial (3.8) torna-se

$$\begin{cases} (\omega\varepsilon - mc^2) \chi - \omega c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \phi = 0, \\ (\omega\varepsilon + mc^2) \phi - \omega c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi = 0. \end{cases}$$

Quando $\varepsilon = \varepsilon_{\pm}$ — i.e., quando se usa os autovalores de energia em (3.13) — o sistema se degenera e as duas equações ficam equivalentes, sendo possível escrever ϕ em função de χ . Sabe-se que existem quatro autovalores de energia dados em (3.13), viz. $\varepsilon_{\pm} = \lambda E_{\pm}$, de modo que os quatro autoespinores de Dirac serão da forma

$$\psi_{\lambda}^{(\pm)} = N_{\lambda}^{(\pm)} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\omega_{\pm} c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{mc^2 + \lambda \omega_{\pm} E_{\pm}} \chi \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

onde N_{λ}^{\pm} é o fator de normalização. Supondo que $\chi^{\dagger} \chi = 1$ e usando as propriedades (A.13) e (A.11), tem-se

$$1 = |N_{\lambda}^{(\pm)}|^2 \left[\chi^{\dagger} \chi + \left(\frac{\omega_{\pm} c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{mc^2 + \lambda \omega_{\pm} E_{\pm}} \right)^2 \chi^{\dagger} \chi \right] = |N_{\lambda}^{(\pm)}|^2 \left[1 + \frac{(\omega_{\pm} c)^2 \mathbf{p}^2}{(mc^2 + \lambda \omega_{\pm} E_{\pm})^2} \right]$$

portanto, usando (3.14), o fator de normalização fica dado por

$$N_{\lambda}^{(\pm)} = \left\{ \frac{[mc^2 + \lambda E_{\pm} (1 - \beta \mu_{\pm}^2 c^2)]^2}{c^2 \mathbf{p}^2 (1 - \beta \mu_{\pm}^2 c^2)^2 + [mc^2 + \lambda E_{\pm} (1 - \beta \mu_{\pm}^2 c^2)]^2} \right\}^{1/2}. \quad (3.17)$$

Por completude, lembrando o *ansatz* (3.3) e a decomposição (3.15), as soluções da equação de Dirac modificada (3.2) são

$$\Psi_{\mathbf{p}, \lambda}^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) = \frac{N_{\lambda}^{(\pm)}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\omega_{\pm} c (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{mc^2 + \lambda \omega_{\pm} \varepsilon_{\pm}} \chi \end{pmatrix} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \lambda E_{\pm} t) \right]. \quad (3.18)$$

Cada um dos conjuntos $\{\Psi_{\mathbf{p}, \lambda}^{(+)}\}_{\mathbf{p}}$ e $\{\Psi_{\mathbf{p}, \lambda}^{(-)}\}_{\mathbf{p}}$, indexados pelo momentum \mathbf{p} , é um conjunto completo de soluções de (3.2): o primeiro descreve as partículas com massa efetiva μ_{+} , e o segundo descreve as com μ_{-} .

Até aqui, obteve-se os mesmos resultados que Moayedi *et al.* [33]; nessa referência, os autores constroem as soluções gerais (3.18) e analisam o caso do elétron. No presente trabalho, o foco é voltado para o neutrino, de modo que, a partir deste ponto, os resultados passam a ser originais.

3.3 A solução do neutrino

Para o estudo do neutrino, a massa m do campo (que pode ser vista como uma *massa cinética*) vai a zero, i.e., $m \rightarrow 0$. Ao fazer $m \rightarrow 0$, os autoespinores (3.16) tornam-se

$$\psi_\lambda^{(\pm)} = N_\lambda^{(\pm)} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\lambda c}{E_\pm} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

e as massas efetivas em (3.11), as energias em (3.13) e os fatores de normalização (3.17) ficam

$$\mu_- = 0, \quad E_- = c |\mathbf{p}|, \quad |N_\lambda^{(-)}|^2 = \frac{1}{2}, \quad (3.20a)$$

$$\mu_+ = \frac{1}{\sqrt{2}\beta c}, \quad E_+ = c \sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2\beta}}, \quad |N_\lambda^{(+)}|^2 = \frac{E_+^2}{E_+^2 + c^2 \mathbf{p}^2}. \quad (3.20b)$$

As duas subseções que se seguem apresentam, cada qual, uma maneira diferente (porém equivalentes em essência) de se abordar o caso do neutrino.

3.3.1 Solução implícita

Seja χ um autovetor de helicidade associado ao autovalor $f \in \{-1, +1\}$, i.e.

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \chi = f \chi; \quad (3.21)$$

então os espinores de massa efetiva μ_- serão dados por

$$\psi_\lambda^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi \\ \lambda f \chi \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \psi_\lambda^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f \chi \\ \lambda f^2 \chi \end{pmatrix} = \frac{h}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi \\ \lambda f \chi \end{pmatrix} = f \psi_\lambda^{(-)},$$

ou seja, a helicidade/quiralidade de $\psi_\lambda^{(-)}$ é igual à helicidade do espinor χ escolhido.

Tomando $f = -\lambda$, tem-se

$$\psi_{+1}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi \\ -\chi \end{pmatrix} \implies \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \psi_{+1}^{(-)} = -\psi_{+1}^{(-)} \rightsquigarrow \nu_L, \quad (3.22a)$$

$$\psi_{-1}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi \\ +\chi \end{pmatrix} \implies \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \psi_{-1}^{(-)} = +\psi_{-1}^{(-)} \rightsquigarrow \bar{\nu}_R. \quad (3.22b)$$

Note-se que, com a escolha adequada de χ , os estados $\psi_\lambda^{(-)}$ associados à massa efetiva $\mu_- = 0$ descrevem os neutrinos observados, a saber ν_L e $\bar{\nu}_R$.

Já os espinores de massa efetiva μ_+ serão, na aproximação $m \rightarrow 0$,

$$\psi_\lambda^{(+)} = N^{(+)} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{c|\mathbf{p}|}{E_+} \lambda f \chi \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

onde, novamente, escolheu-se χ conforme (3.21). Aplicando novamente o operador helicidade, tem-se

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \psi_\lambda^{(+)} = N^{(+)} \begin{pmatrix} f\chi \\ \frac{c|\mathbf{p}|}{E_+} \lambda f^2 \chi \end{pmatrix} = N^{(+)} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{c|\mathbf{p}|}{E_+} \lambda f \chi \end{pmatrix} = f \psi_\lambda^{(+)}. \quad (3.24)$$

Agora, porém, escolhe-se que $f = +\lambda$, para que

$$\psi_{+1}^{(+)} = N^{(+)} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{c|\mathbf{p}|}{E_+} \chi \end{pmatrix} \implies \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \psi_{+1}^{(+)} = +\psi_{+1}^{(-)} \rightsquigarrow \nu_{\mathbf{R}}, \quad (3.25a)$$

$$\psi_{-1}^{(+)} = N^{(+)} \begin{pmatrix} \chi \\ -\frac{c|\mathbf{p}|}{E_+} \chi \end{pmatrix} \implies \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \psi_{-1}^{(+)} = -\psi_{-1}^{(-)} \rightsquigarrow \bar{\nu}_{\mathbf{L}}, \quad (3.25b)$$

i.e., os estados $\psi_\lambda^{(+)}$ associados à massa μ_+ descrevem os neutrinos não observados.

A solução acima foi dita “implícita” porque não foram especificadas todas as componentes dos espinores, mas apenas as suas relações. A única escolha é de que χ (até então um parâmetro livre da solução) seja um autovalor de $\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$ no sentido algébrico, i.e., representando esse operador por uma matriz, escolhe-se χ de tal modo que (3.21) seja satisfeita. A Tabela 3.1 a seguir resume as grandezas usadas nesta subseção para a descrição de cada um dos neutrinos.

observados		não observados	
$\nu_{\mathbf{L}}$	$\bar{\nu}_{\mathbf{R}}$	$\nu_{\mathbf{R}}$	$\bar{\nu}_{\mathbf{L}}$
$\psi_{+1}^{(-)}$	$\psi_{-1}^{(-)}$	$\psi_{+1}^{(+)}$	$\psi_{-1}^{(+)}$
$\lambda = +1$	$\lambda = -1$	$\lambda = +1$	$\lambda = -1$
$f = -1$	$f = +1$	$f = +1$	$f = -1$
$f = -\lambda$		$f = +\lambda$	
μ_-		μ_+	

Tabela 3.1: Parâmetros da solução implícita.

3.3.2 Solução explícita

Alternativamente, é possível abrir cada uma das soluções nas suas componentes. Já no limite $m \rightarrow 0$, os autovetores em (3.16) podem ser escritos (a menos da normalização) como

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ +\frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{\varepsilon} \chi_1 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} \chi_2 \\ +\frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{\varepsilon} \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.26a)$$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ -\frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{\varepsilon} \chi_1 \end{pmatrix}, \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} \chi_2 \\ -\frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{\varepsilon} \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.26b)$$

onde χ_1 e χ_2 são vetores de duas componentes. Note-se que ψ_1 e ψ_2 correspondem às soluções de energias positivas, enquanto que ψ_3 e ψ_4 correspondem às energias negativas.

Ao definir

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.27a)$$

tem-se, através de (A.10),

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_1 = \begin{pmatrix} p_z \\ p_+ \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_2 = \begin{pmatrix} p_- \\ -p_z \end{pmatrix}. \quad (3.27b)$$

Para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, os espinores ψ_n em (3.26) tornam-se

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{\varepsilon} \\ \frac{cp_+}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{cp_-}{\varepsilon} \\ -\frac{cp_z}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{cp_z}{\varepsilon} \\ -\frac{cp_+}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{cp_-}{\varepsilon} \\ \frac{cp_z}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Similarmente ao que foi feito na Seção 1.1 — onde se tratou do neutrino ordinário através da equação de Weyl —, escolha-se o eixo z paralelo ao momentum, de modo que $p_{\pm} = 0$ e $p_z = |\mathbf{p}|$. Desse modo,

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{c|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{c|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{c|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Agora compare-se cada ψ_n de (3.28) com o seu equivalente em (1.11): são praticamente idênticos, exceto pelos fatores de energia! Seguindo a interpretação em (1.12), tem-se

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c|\mathbf{p}|}{E_+} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{c|\mathbf{p}|}{E_+} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

de modo que

$$\psi_1 \rightsquigarrow \mathbf{v}_R^{(+)}, \quad \psi_2 \rightsquigarrow \mathbf{v}_L^{(-)}, \quad \psi_3 \rightsquigarrow \bar{\mathbf{v}}_R^{(-)}, \quad \psi_4 \rightsquigarrow \bar{\mathbf{v}}_L^{(+)}, \quad (3.30)$$

onde o índice superior (\pm) indica a massa efetiva μ_{\pm} do neutrino.

Usando a definição do eixo z paralelo ao momentum, note-se que a equação (3.27b) torna-se

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Agora, comparando o resultado acima com (3.27a), vê-se que

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \chi_1 = (+1) \chi_1, \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \chi_2 = (-1) \chi_2,$$

i.e., $f = +1$ para χ_1 e $f = -1$ para χ_2 . As grandezas utilizadas nesta solução explícita encontram-se na Tabela 3.2.

observados		não observados	
\mathbf{v}_L	$\bar{\mathbf{v}}_R$	\mathbf{v}_R	$\bar{\mathbf{v}}_L$
ψ_2	ψ_3	ψ_1	ψ_4
χ_2	χ_1	χ_1	χ_2
$f = -1$	$f = +1$	$f = +1$	$f = -1$
μ_-		μ_+	

Tabela 3.2: Parâmetros da solução explícita.

Comparando a Tabela 3.1 e a Tabela 3.2, vê-se que elas possuem mesmos parâmetros f , de modo que as soluções são, de fato, equivalentes! A vantagem da solução explícita é que ela ajuda a se convencer dos resultados, pois é possível fazer uma comparação direta com o caso ordinário da Seção 1.1; porém, a solução implícita é esteticamente mais elegante e mostra uma coincidência curiosa: para descrever os estados com massa efetiva μ_{\pm} , deve-se fazer a escolha $f = \pm\lambda$.

3.4 Algumas considerações finais

Da equação de Dirac modificada (3.2), surgem duas massas efetivas μ_- e μ_+ associadas à massa cinética m do campo fermiônico. No limite em que $m \rightarrow 0$, a massa efetiva μ_- vai a zero, enquanto que a massa efetiva μ_+ fica dependendo do parâmetro β de deformação da álgebra dos comutadores (esse parâmetro, por sua vez, está relacionado com o comprimento mínimo ℓ_{QT}). Na seção anterior, foi mostrado que é possível associar os neutrinos observados (viz. ν_{L} e $\bar{\nu}_{\text{R}}$) à massa efetiva $\mu_- \rightarrow 0$, enquanto que os neutrinos não observados (viz. ν_{R} e $\bar{\nu}_{\text{L}}$) ficam associados à massa efetiva μ_+ ; essa massa é imensa, haja vista que

$$\mu_+ = \frac{1}{\sqrt{2\beta}c} \quad \Longrightarrow \quad E_+ \geq \mu_+c^2 = \frac{c}{\sqrt{2\beta}}. \quad (3.31)$$

Uma vez que β é uma deformação muito pequena, fica-se com uma energia (de repouso) altíssima. De fato, usando a estimativa (2.24) para β , encontra-se que

$$\mu_+ \sim 10^{19} \text{ GeV}/c^2 \quad \Longrightarrow \quad \mu_+c^2 \sim E_{\text{P}}, \quad (3.32)$$

ou seja, essa estimativa prevê que os neutrinos não observados devem ter energias (de repouso) da ordem da energia de Planck!

Em todo este trabalho, bem como nas referências utilizadas [23, 28–30, 33], utilizou-se a métrica do espaço-tempo de Minkowski. Conseqüentemente, para massas tão grandes, uma questão pertinente de se levantar é: *Qual o efeito desses neutrinos pesados sobre a métrica? Até que ponto é razoável utilizar um espaço-tempo plano?* Neste momento em que escrevo este texto, eu não me arrisco a sugerir quais passos poderiam ser tomados futuramente nesse sentido.

Agora, considerando (2.23) como um limite superior de energias, vê-se que

$$(\mu_+c^2)^2 = \frac{c^2}{2\beta} < \frac{c^2}{\beta},$$

de modo que, nas aproximações feitas, os neutrinos pesados ν_{R} e $\bar{\nu}_{\text{L}}$ são permitidos. Porém, cálculos considerando mais ordens em β (desde a álgebra) podem corrigir esse fator $\frac{1}{2}$, o que pode tornar esses neutrinos pesados inviáveis dentro da própria teoria — novamente, assumindo (2.23) como um limite superior absoluto. Uma etapa posterior pode ser, portanto, refazer esse estudo considerando mais ordens em β . Mais ainda, as estimativas numéricas e a dedução da equação de Dirac modificada (3.2) foram feitas sob

a condição de que $\beta' = 2\beta$ (na qual os operadores de posição voltam a comutar). Com base em valores experimentais, seria relevante verificar a validade dessa condição, pois ela própria pode alterar a condição (2.23) e a viabilidade dos neutrinos pesados dentro do formalismo.

Olhando, agora, diretamente para (3.11), note-se que

$$\mu_+\mu_- = \frac{1}{\sqrt{2\beta}c} m; \quad (3.33)$$

para $m \ll 1$, o lado direito torna-se aproximadamente μ_+m , de maneira que $\mu_- \approx m$, estando de acordo com o resultado obtido por Moayedi *et al.* [33] Poder-se-ia, então, utilizar métodos aproximados para m finito vindo de estimativas de medidas das massas dos neutrinos. Note-se ainda que (3.33) é similar ao que ocorre no mecanismo de gangorra (1.15), com

$$B \sim \frac{1}{\sqrt{2\beta}c}, \quad M \sim \sqrt{\mu_+\mu_-}. \quad (3.34)$$

De fato, o lado direito de (3.33) é, a princípio, uma constante (pois β deve ser uma constante), de maneira que, ao diminuir a massa efetiva μ_- , é preciso aumentar a massa efetiva μ_+ , produzindo o efeito de “gangorra”. Ou seja, o presente trabalho mostra que é possível reproduzir o mecanismo de gangorra (no qual uma partícula é muito leve às custas do seu par ser muito pesado) partindo da imposição de um comprimento mínimo.

Especificamente no que diz respeito à helicidade dos neutrinos, este trabalho expôs que é possível que a existência de um comprimento mínimo seja a *causa* desse problema: o comprimento mínimo (que carrega consigo uma álgebra deformada dos operadores de posição e momentum) pode ser o responsável por dar uma massa leve ao neutrino de mão-esquerda (ν_L) e ao antineutrino de mão-direita ($\bar{\nu}_R$), enquanto que dá uma massa gigantesca ao neutrino de mão-direita (ν_R) e ao antineutrino de mão-esquerda ($\bar{\nu}_L$).

Referências bibliográficas

- [1] CHADWICK, J. “Intensitätsverteilung im magnetischen Spectrum der β -Strahlen von radium B + C”. *Verhandl. Dtsc. Phys. Ges.*, v. 16 (1914), p. 383. URL: <http://cds.cern.ch/record/262756> (acesso em 1 de dez. de 2022).
- [2] GRIFFITHS, David. *Introduction to Elementary Particles*. 2nd ed. Wiley-VCH, 2008. ISBN: 978-3-527-40601-2.
- [3] PAULI, Wolfgang. “Pauli letter collection: letter to Lise Meitner”. Cópia digitada. URL: <https://cds.cern.ch/record/83282> (acesso em 9 de nov. de 2022).
- [4] AITCHISON, Ian Johnston Rhind; HEY, Anthony J. G. *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction, Volume 2: Non-Abelian Gauge Theories: QCD and The Electroweak Theory*. 4th ed. CRC Press, 2013. ISBN: 978-1-4665-1310-5.
- [5] COWAN, C. L. *et al.* “Detection of the Free Neutrino: a Confirmation”. *Science*, v. 124, n. 3212 (1956), pp. 103–104. DOI: 10.1126/science.124.3212.103.
- [6] HALZEN, Francis; MARTIN, Alan D. *Quarks And Leptons. An Introductory Course In Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, 1984. ISBN: 0-471-88741-2.
- [7] WEYL, H. “Gravitation and the Electron”. *Proc Natl Acad Sci U S A*, v. 15, n. 4 (abr. de 1929), pp. 323–334. DOI: 10.1073/pnas.15.4.323.
- [8] LEE, T. D.; YANG, C. N. “Question of Parity Conservation in Weak Interactions”. *Phys. Rev.*, v. 104 (1 out. de 1956), pp. 254–258. DOI: 10.1103/PhysRev.104.254.
- [9] WU, C. S. *et al.* “Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay”. *Phys. Rev.*, v. 105 (4 fev. de 1957), pp. 1413–1415. DOI: 10.1103/PhysRev.105.1413.
- [10] GOLDHABER, M.; GRODZINS, L.; SUNYAR, A. W. “Helicity of Neutrinos”. *Phys. Rev.*, v. 109, n. 3 (fev. de 1958), pp. 1015–1017. DOI: 10.1103/PhysRev.109.1015.
- [11] THOMSON, Mark. *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, 2013. ISBN: 978-1-107-03426-6.

- [12] FUKUDA, Y. *et al.* “The Super-Kamiokande detector”. *Nucl. Instrum. Meth. A*, v. 501 (2003). Ed. por V. A. ILYIN; V. V. KORENKOV; D. PERRET-GALLIX, pp. 418–462. DOI: 10.1016/S0168-9002(03)00425-X.
- [13] AHMAD, Q. R. *et al.* “Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory”. *Phys. Rev. Lett.*, v. 89 (1 jun. de 2002), p. 011301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.011301.
- [14] CLEVELAND, Bruce T. *et al.* “Measurement of the Solar Electron Neutrino Flux with the Homestake Chlorine Detector”. *The Astrophysical Journal*, v. 496, n. 1 (mar. de 1998), p. 505. DOI: 10.1086/305343.
- [15] KUMAR, Suresh; NUNES, Rafael C.; YADAV, Priya. “Updating non-standard neutrinos properties with Planck-CMB data and full-shape analysis of BOSS and eBOSS galaxies”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2022, n. 09 (set. de 2022), p. 060. DOI: 10.1088/1475-7516/2022/09/060.
- [16] YANAGIDA, Tsutomu. “Horizontal Symmetry and Masses of Neutrinos”. *Progress of Theoretical Physics*, v. 64, n. 3 (set. de 1980), pp. 1103–1105. DOI: 10.1143/PTP.64.1103.
- [17] MINKOWSKI, Peter. “ $\mu \rightarrow e\gamma$ at a rate of one out of 109 muon decays?” *Physics Letters B*, v. 67, n. 4 (1977), pp. 421–428. ISSN: 0370-2693. DOI: 10.1016/0370-2693(77)90435-X.
- [18] MOHAPATRA, Rabindra N.; SENJANOVIĆ, Goran. “Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation”. *Phys. Rev. Lett.*, v. 44, n. 14 (abr. de 1980), pp. 912–915. DOI: 10.1103/PhysRevLett.44.912.
- [19] SCHECHTER, J.; VALLE, J. W. F. “Neutrino masses in $SU(2) \otimes U(1)$ theories”. *Phys. Rev. D*, v. 22, n. 9 (nov. de 1980), pp. 2227–2235. DOI: 10.1103/PhysRevD.22.2227.
- [20] KLAUBER, Robert D. “The Seesaw Mechanism”. *Quantum Field Theory*. URL: <http://www.quantumfieldtheory.info/TheSeesawMechanism.htm> (acesso em 21 de nov. de 2022).
- [21] KAKU, Michio. *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*. 1^a ed. Oxford University Press, 1993. ISBN: 0195076524.
- [22] SNYDER, Hartland S. “Quantized Space-Time”. *Phys. Rev.*, v. 71 (jan. de 1947), pp. 38–41. DOI: 10.1103/PhysRev.71.38.

- [23] KEMPF, Achim; MANGANO, Gianpiero; MANN, Robert B. “Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation”. *Phys. Rev. D*, v. 52 (jul. de 1995), pp. 1108–1118. DOI: 10.1103/PhysRevD.52.1108.
- [24] KEMPF, Achim. “Quantum groups and quantum field theory with nonzero minimal uncertainties in positions and momenta”. *Czechoslovak Journal of Physics*, v. 44, n. 11-12 (nov. de 1994), pp. 1041–1048. DOI: 10.1007/bf01690456.
- [25] AMATI, D.; CIAFALONI, M.; VENEZIANO, G. “Can spacetime be probed below the string size?” *Physics Letters B*, v. 216, n. 1 (1989), pp. 41–47. DOI: 10.1016/0370-2693(89)91366-X.
- [26] KONISHI, Kenichi; PAFFUTI, Giampiero; PROVERO, Paolo. “Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory”. *Physics Letters B*, v. 234, n. 3 (1990), pp. 276–284. DOI: 10.1016/0370-2693(90)91927-4.
- [27] MAGGIORE, Michele. “Quantum groups, gravity, and the generalized uncertainty principle”. *Phys. Rev. D*, v. 49, n. 10 (mai. de 1994), pp. 5182–5187. DOI: 10.1103/PhysRevD.49.5182.
- [28] KEMPF, Achim. “On quantum field theory with nonzero minimal uncertainties in positions and momenta”. *Journal of Mathematical Physics*, v. 38, n. 3 (1997), pp. 1347–1372. DOI: 10.1063/1.531814.
- [29] KEMPF, Achim. “Non-pointlike particles in harmonic oscillators”. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 30, n. 6 (mar. de 1997), p. 2093. DOI: 10.1088/0305-4470/30/6/030.
- [30] QUESNE, C.; TKACHUK, V. M. “Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length and application to the $(1 + 1)$ -dimensional Dirac oscillator”. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 39, n. 34 (ago. de 2006), p. 10909. DOI: 10.1088/0305-4470/39/34/021.
- [31] SAMAR, M. I.; TKACHUK, V. M. “Perturbation Hydrogen-atom Spectrum in a space with the Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length”. *Journal of Physical Studies*, v. 14 (2010), p. 1001. DOI: 10.30970/jps.14.1001.
- [32] CHANG, Lay Nam *et al.* “Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations”. *Phys. Rev. D*, v. 65, n. 12 (jun. de 2002), p. 125027. DOI: 10.1103/PhysRevD.65.125027.

- [33] MOAYEDI, S. K. *et al.* “Formulation of the Spinor Field in the presence of a minimal length based on the Quesne–Tkachuk algebra”. *International Journal of Modern Physics A*, v. 26, n. 29 (2011), pp. 4981–4990. DOI: 10.1142/S0217751X11054802.

Apêndice A

Alguns resultados da Mecânica Quântica

A.1 A equação de Dirac ordinária

Conforme [2], a densidade de lagrangiana de um campo de Dirac com spin $\frac{1}{2}$ é dada por (3.1); de fato,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} &= i\hbar c \gamma^\nu (\partial_\nu \Psi) - mc^2 \Psi, & \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \bar{\Psi})} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} &= -mc^2 \bar{\Psi}, & \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Psi)} \right) &= i\hbar c (\partial_\nu \bar{\Psi}) \gamma^\nu,\end{aligned}$$

de modo que as equações dos campos Ψ e $\bar{\Psi}$ são

$$i\hbar c \gamma^\nu (\partial_\nu \Psi) - mc^2 \Psi = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$i\hbar c (\partial_\nu \bar{\Psi}) \gamma^\nu + mc^2 \bar{\Psi} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Uma maneira alternativa de se escrever essa densidade de lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{\text{alt}} = \frac{i\hbar c}{2} [\bar{\Psi} \gamma^\nu (\partial_\nu \Psi) - (\partial_\nu \bar{\Psi}) \gamma^\nu \Psi] - mc^2 \bar{\Psi} \Psi. \quad (\text{A.3})$$

Essa versão, que é usada por [33] para construção da equação de Dirac modificada, tem a vantagem de ser mais simétrica em relação aos campos Ψ e $\bar{\Psi}$; porém, para todos os efeitos, ela é equivalente a (3.1), pois a diferença entre as duas é

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}_{\text{alt}} = \frac{i\hbar c}{2} [\bar{\Psi} \gamma^\nu (\partial_\nu \Psi) + (\partial_\nu \bar{\Psi}) \gamma^\nu \Psi] = \frac{i\hbar c}{2} \partial_\nu (\bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi)$$

e uma derivada desse tipo não altera as equações de movimento. Além disso, a dedução da equação de Dirac modificada (3.2) fica bem mais simples usando (3.1).

As matrizes γ^ν devem ser autoadjuntas (i.e., $\gamma^{\nu\dagger} = \gamma^\nu$) e devem obedecer as relações de anticomutação

$$\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} = 2g^{\nu\rho} \mathbf{1}, \quad (\text{A.4})$$

onde $g^{\nu\rho} = \text{diag}(+, -, -, -)$; em particular, note-se que $\gamma^0\gamma^0 = \mathbf{1}$. Usa-se também as matrizes α^k , definidas por

$$\alpha^k = \gamma^0\gamma^k; \quad (\text{A.5})$$

multiplicando (A.4) por γ^0 à esquerda e fixando $\nu = 0$ e $\rho = k$, fica-se com

$$0 = \gamma^0 \{\gamma^0, \gamma^k\} = \gamma^0 \underbrace{\gamma^0\gamma^k}_{\alpha^k} + \underbrace{\gamma^0\gamma^k}_{\alpha^k} \gamma^0 = \gamma^0\alpha^k + \alpha^k\gamma^0 \quad \Longrightarrow \quad \{\gamma^0, \alpha^k\} = 0.$$

Agora, multiplicando (A.4) por γ^0 à esquerda e à direita, tem-se

$$2 \underbrace{g^{jk}}_{-\delta^{jk}} \underbrace{\gamma^0\mathbf{1}\gamma^0}_{\mathbf{1}} = \underbrace{\gamma^0\gamma^j}_{\alpha^j} \underbrace{\gamma^k\gamma^0}_{-\alpha^k} + \underbrace{\gamma^0\gamma^k}_{\alpha^k} \underbrace{\gamma^j\gamma^0}_{-\alpha^j} = -\{\alpha^j, \alpha^k\} \quad \Longrightarrow \quad \{\alpha^j, \alpha^k\} = 2\delta^{jk} \mathbf{1}.$$

Considerando o *ansatz*

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\nu x^\nu\right) \quad (\text{A.6})$$

(i.e., Ψ é autoestado de energia ε e é uma onda plana de momentum \mathbf{p}) e usando os resultados já obtidos em (3.4), a equação de Dirac (A.1) torna-se

$$0 = (c\gamma^\nu p_\nu - mc^2\mathbf{1}) \Psi = (\gamma^0\varepsilon + c\gamma^k p_k - mc^2\mathbf{1}) \Psi.$$

Multiplicando por γ^0 à esquerda e dividindo pela exponencial complexa $\exp(-\frac{i}{\hbar} p_\nu x^\nu) \neq 0$, tem-se

$$(\varepsilon\mathbf{1} + c\alpha^k p_k - mc^2\gamma^0) \psi = 0.$$

Finalmente, usando a representação de Pauli–Dirac e lembrando que $p_k = -p^k$ (de modo que $\alpha^k p_k = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}$), chega-se em

$$(\varepsilon\mathbf{1} - c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - mc^2\gamma^0) \psi = 0. \quad (\text{A.7})$$

Essa é igual à equação (1.1), que foi usada como ponto de partida para a Seção 1.1. De maneira contrária, pode-se partir de (1.1) e da álgebra das matrizes γ^0 e α^k e reconstruir a equação de Dirac na sua forma covariante (A.1) através dos passos inversos.

A.2 As matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli σ^k são definidas como [6]

$$\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Por cálculo direto, é possível verificar que

$$[\sigma^j, \sigma^k] = 2i \varepsilon^{jk\ell} \sigma^\ell, \quad (\text{A.9a})$$

$$\{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta^{jk} \mathbf{1}, \quad (\text{A.9b})$$

onde $\varepsilon^{jk\ell}$ é o símbolo de Levi-Civita; a soma sobre índices repetidos está sempre implícita.

Se $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ é um vetor, denota-se

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \equiv \sigma^k A_k = \begin{pmatrix} A_z & A_- \\ A_+ & -A_z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

onde

$$A_\pm \equiv A_x \pm iA_y.$$

Se as coordenadas de \mathbf{A} são todas reais, olhando para as entradas dessa matriz, é fácil ver que

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})^\dagger = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}). \quad (\text{A.11})$$

Agora note-se que

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \sigma^j A_j \sigma^k B_k = \sigma^j \sigma^k A_j B_k = \frac{1}{2} \left(\{\sigma^j, \sigma^k\} + [\sigma^j, \sigma^k] \right) A_j B_k,$$

logo, usando (A.9), tem-se

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \delta_{jk} A_j B_k \mathbf{1} + i \varepsilon^{jk\ell} A_j B_k \sigma^\ell.$$

Ora, $\varepsilon^{jk\ell} A_j B_k = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_\ell$ (i.e., a componente ℓ), logo

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{1} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (\text{A.12})$$

No caso especial em que $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, fica-se com

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{1}. \quad (\text{A.13})$$

A.3 A helicidade e a quiralidade

Como dito na Seção 1.1, a helicidade é o operador

$$\hat{h} \equiv \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (\text{A.14})$$

que mede a orientação relativa entre o spin e o momentum. Em algumas referências, e.g. [11], define-se a helicidade como a *componente* do spin na direção do momentum, i.e.,

$$\hat{h}_\Sigma \equiv \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \text{onde } \boldsymbol{\Sigma} \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Na verdade, (A.14) é um abuso de notação, já que \hat{h} deve atuar em espinores de Dirac (com quatro componentes), enquanto que o lado direito é uma matriz 2×2 ; a rigor, dever-se-ia ter definido

$$\hat{h} \equiv \frac{1}{|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{por abuso} \\ \text{de notação} \end{array} \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}.$$

A partir da propriedade (A.13), nota-se que

$$\hat{h}^2 = \mathbb{1}.$$

Tomando o determinante de ambos os lados e usando as propriedades do mesmo, tem-se $(f_1 f_2)^2 = 1$, onde f_1 e f_2 são os autovalores de \hat{h} . Ao inverter o momentum, inverte-se a helicidade, logo $f_1 = -f_2$, e, portanto, os autovalores de helicidade são $f \in \{-1, +1\}$. Essa conclusão pode ser obtida olhando-se diretamente para as matrizes de Pauli (A.8).

Já a quiralidade é definida como

$$\gamma^5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad (\text{A.16})$$

que é um invariante de Lorentz [11]. Usando a representação de Pauli–Dirac (1.8), tem-se

$$\frac{1}{|\mathbf{p}|} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^k p_k = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} \sigma^k p_k & 0 \\ 0 & \sigma^k p_k \end{pmatrix} = -\hat{h},$$

pois a assinatura da métrica é $(+, -, -, -)$. Da equação de Dirac (A.1), $\gamma^\mu p_\mu \Psi = mc \Psi$ (logo $\gamma^\mu p_\mu = mc \mathbb{1}$ para as soluções da equação de Dirac), de modo que

$$-\hat{h} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \gamma^5 \gamma^0 (\gamma^\mu p_\mu - \gamma^0 p_0) = \frac{1}{c|\mathbf{p}|} \gamma^5 \gamma^0 (mc^2 \mathbb{1} - \varepsilon \gamma^0).$$

No limite de altas energias (i.e. $\varepsilon \gg mc^2$, como é o caso do neutrino), o termo entre parênteses se reduz a $-\varepsilon \gamma^0 = -c|\mathbf{p}| \gamma^0$; portanto, nesse limite,

$$\hat{h} \simeq \gamma^5. \quad (\text{A.17})$$