Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DERIVAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR EM ANÉIS PRIMOS E SEMIPRIMOS

por

CLAUS HAETINGER

Porto Alegre, agosto de 2000

Tese submetida por CLAUS HAETINGER* como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Miguel Ferrero

Banca Examinadora:

Dra. Ada Maria de Souza Doering

Dr. Antônio Paques

Dr. Francisco Cesar Polcino Milies

Data da Defesa: 24 de agosto de 2000

---

* Bolsista do Conselho de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

CIP - Catalogação na Publicação

HAETINGER, CLAUS

DERIVAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR EM ANÉIS PRIMOS E SEMIPRIMOS / CLAUS HAETINGER.—Porto Alegre: CPGMP da UFRGS, 2000.

63 p.: il.

Tese (doutorado)—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Porto Alegre, 2000. Orientador: Miguel Ferrero

Tese: Álgebra – Teoria de Anéis Não-Comutativos

1. derivações, 2. derivações de ordem superior, 3. teoria de anéis, 4. álgebra não-comutativa

"Aprendam, como geração presente,
a lição das gerações passadas:
Isolado, nada ou pouco vale o homem.

Unidos, irmanados a outros homens,
em torno de um ideal,
colocada a fértil individualidade
aos bons serviços da coletividade,
realizamo-nos na vida.

E mereceremos o respeito dos pósteros".

Prof. Armindo Frederico Haetinger
(1918-1998)

Dedico

este trabalho

à minha esposa Rosmarie.

E, através dela, a todos os demais

membros de nossas famílias,

e às gerações futuras.

Agradecimentos

Agradeço sinceramente ao Prof. Miguel, a orientação e o incentivo.

Quero externar meu agradecimento aos Profs. Antônio Paques e Eduardo Brietzke, por terem ampliado minha visão algébrica a outras áreas.

Da mesma forma, agradeço a Andrzej Nowicki, Amos Kovacs, Eduardo Marcos, Jersey Matczuk, Ivan Chestakov e ao amigo e ex-aluno Eduardo Garibaldi, os quais colaboraram com sugestões, e-mails e cópias de artigos em momentos decisivos do meu trabalho.

Em especial, quero agradecer à minha tia-avó Tante Friedel, de 93 anos, que dedicou algumas manhãs de domingo para, entre uma conversa e outra, ajudar-me na tradução de vários artigos em alemão.

Particularmente, agradeço:

à Janice e ao Rogério, a amizade, convivência, apoio e motivação;

à colega Simone e aos colegas Pedro e Wagner, o estímulo, a amizade sincera e a feliz convivência na sala de estudos;

na pessoa dos colegas de profissão Carla, Ingo, João Batista, Marli e Verno, aos demais Professores, funcionários e alunos da UNIVATES, que sempre me incentivaram e souberam ter a devida paciência nos momentos mais difíceis;

a todo pessoal da Academia Stágio, a amizade e a preparação física.

Finalmente, agradeço à minha esposa "Nega" o amor, compreensão, incentivo, apoio e carinho. Agradeço-lhe principalmente por saber perdoar minhas faltas durante todo o curso e, em especial, nesta fase final da tese.

A todos vocês, meu sincero **muito obrigado**!

Resumo

Nesta tese estudamos as derivações de ordem superior (DOS) em anéis não-comutativos. Inicialmente, mostramos que toda derivação tripla de Jordan de ordem superior em um anel semiprimo livre de 2*-torção é uma DOS. Em particular, toda derivação de Jordan de ordem superior (DJOS) num anel deste tipo é uma DOS. Estendemos também o resultado a ideais de Lie* U*, provando que se* R *é um anel primo livre de* 2*-torção e* D *é uma DJOS de* U *em* R *onde* $U \not\subset Z(R)$ *é tal que* $u^2 \in U$ *para todo* $u \in U$*, então* D *é uma DOS de* U *em* R*. Nestas condições, se* $U \subset Z(R)$*, então o resultado não é válido.*

Estudamos ainda as DOS cujas componentes satisfazem relações de dependência linear sobre R *ou* Q *(o anel de quocientes à direita de Martindale de* R*). Caracterizamos tais DOS, e mostramos que as relações de dependência linear são preservadas ao estendermos uma DOS de* R *a* Q*.*

Abstract

In this thesis we study the higher order derivations (shortly, DOS) in noncommutative rings. Initially, we show that every higher order Jordan triple derivation on a 2*-torsion free semiprime ring is a DOS. In particular, every higher order Jordan derivation (DJOS) in a ring of this type is a DOS. We also extend the result to Lie ideals* U*, proving that if* R *is a* 2*-torsion free prime ring and* D *is a DJOS of* U *into* R *where* $U \not\subset Z(R)$ *(the center of* R*) is such that* $u^2 \in U$ *for all* $u \in U$*, then* D *is a DOS of* U *into* R*. With these conditions, if* $U \subset Z(R)$*, then the result is no more true.*

We also study the DOS whose components satisfy relationships of linear dependence on R *or* Q *(the Martindale ring of right quocients of* R*). We characterize such DOS and we show that the relationships of linear dependence are preserved if we extend a DOS of* R *to* Q*.*

Introdução

Neste trabalho estudamos alguns problemas sobre derivações de ordem superior em anéis, principalmente primos.

0.1 Retrospectiva Histórica e Motivação

As derivações de ordem superior (DOS) aparecem pela primeira vez na literatura em 1936, nos trabalhos de H. Hasse, T.K. Schmidt e O. Teichmüller, sendo difícil afirmar com certeza qual deles foi o pioneiro neste estudo. No que segue, veremos melhor porque isto parece ser verdade.

As DOS têm sua origem no Cálculo Diferencial em característica positiva p, quando Hasse ([18]) justificou a Teoria da DOS em corpos de funções algébricas. Ele usou fórmulas de derivadas sucessivas de funções implícitas, conhecidas da Análise. Em corpos de característica zero não há dificuldades, porque usam-se as iterações de uma derivação usual.

O artigo de Hasse ([18]) é continuação de outro artigo prévio seu ([17]) de 1934, que trata das DOS num corpo de funções algébricas K em uma indeterminada sobre um corpo k de constantes, completo e de característica p (onde $p = 0$ ou é primo). Em ([18]), o autor generaliza resultados de ([17]).

O. Teichmüller ([53]) conseguiu também, nos corpos de característica positiva, evitar as sempre presentes fórmulas complicadas de derivações de funções implíticas. Sem entrarmos em detalhes, Teichmüller enxergou os corpos de funções algébricas como extensões inseparáveis de subcorpos bi-racionais invariantes e, com essa observação, pôde introduzir as DOS e suas propriedades sem precisar utilizar o desenvolvimento em séries de potências. Com isso, consegue-se uma teoria diferencial para as mais simples extensões inseparáveis de corpos de característica prima com base puramente algébrica.

A seguir, apresentamos a tradução de um trecho de uma carta de F.K. Schmidt endereçada a Hasse, datada de 25 de maio de 1936, que pode ser vista em ([19]).

Em bom alemão, Schmidt diz a Hasse que: *"Talvez lhe interesse que eu desenvolvi por conta própria a sua teoria dos quocientes diferenciais de ordem superior em um corpo de funções algébricas de uma maneira um pouco diferente, para uma futura palestra. Meu objetivo era introduzir estes quocientes diferenciais logo num sentido mais amplo. Eu não utilizei o desenvolvimento em séries de potências em um ponto como o senhor, porque eu gostaria de evitar o cálculo da equação definida, que seria necessário para a transição do restrito ao amplo. Da conclusão do seu trabalho ([18]), eu vi mais tarde que a explanação de O. Teichmüller sobre a teoria das diferenciais de ordem superior é desde o início no sentido mais amplo e, portanto, supus que a minha definição estivesse de acordo com a dele. O recente trabalho de O. Teichmüller ([53]) me convenceu, entretanto, que não é certo. Como a minha definição sobre a teoria das funções algébricas leva aos resultados desejados, eu gostaria de lhe comunicar brevemente o que fiz".*

Hasse apresenta um tratamento detalhado desta teoria ([19]), no qual discorda de alguns pontos da sua argumentação original. Depois de concluir este artigo, Hasse soube que Schmidt havia encontrado uma melhora e uma generalização da mesma, e sugere o livro "Zusatz bei der Korrektur" (pg. 223-237) para quem quiser mais detalhes.

Sabemos que a p-ésima potência de uma derivação em anéis de polinômios de característica p prima se anula. Como aplicação da teoria clássica das diferenciais, baseada em Hasse, Schmidt e M. Deuring[1], em 1952 A. Jaeger ([25]) utilizou estas idéias para desenvolver uma teoria modificada das diferenciais algébricas independentemente da característica. Desta forma, foi possível definir derivações de ordem superior não triviais.

Em 1966, R. Berger ([7]) publicou um artigo em que apresenta o que foi feito até então dentro da teoria das derivações de ordem superior, principalmente por Hasse e Schmidt. Entre outras coisas, cita o trabalho de Kähler, o qual provou que as derivações, vistas como um R-módulo, são muito úteis em diversas áreas da Álgebra Comutativa e da Geometria Algébrica. Segundo Berger, embora esta visão não traga nada de novo porque o módulo diferencial de Kähler é o dual do módulo das derivações, as formulações ficam em geral significativamente mais suaves no idioma dos módulos diferenciais neste caso. Esta construção é aplicada por Schmidt a extensões inseparáveis de corpos. Nesta linha, Berger estuda as derivações universais de uma álgebra diferencial. Analisa também extensões K de corpos k em característica p. Sabendo que as DOS de primeira ordem estão relacionadas com as p-bases de K sobre k, obtém que em DOS de ordem qualquer temos p-bases de $K^{p^s}k$ sobre k, onde $s = 1, 2, \ldots$. Além disso, calcula o expoente de inseparabilidade destas extensões, como Schmidt.

[1]Trata-se do livro "Arithmetische theorie der algebraischen Funktionen"

Segundo Hasse, Schmidt e Teichmüller, uma derivação de ordem superior num anel R é uma seqüência de aplicações aditivas $D = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de R que satisfaz as condições $d_0 = id_R$ e $d_n(ab) = \sum_{i=0}^{n} d_i(a)d_{n-i}(b)$ para todo $a, b \in R$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Existem vários outros tipos de aplicações que poderiam ser chamadas de derivações de ordem superior. Vejamos algumas delas.

Em 1970, Y. Nakai ([41]) publicou um artigo em que considera k e A anéis comutativos com unidade, supondo que A é uma k-álgebra. Então define uma *derivação de q-ésima ordem* D de A em um A-módulo F sobre k como um elemento de $Hom_k(A, F)$ tal que para cada conjunto de $q+1$ elementos $(x_0, x_1, \ldots, x_q)$ de A temos a seguinte identidade

$$D(x_0 x_1 \cdots x_q) \doteq \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s-1} \sum_{i_1 < \ldots < i_s} x_{i_1} \cdots x_{i_s} D(x_0 \cdots, \check{x}_{i_1} \cdots \check{x}_{i_s} \cdots x_q).$$

A derivação de 1ª ordem é uma derivação ordinária. Esta noção interessante de "derivação de ordem finita" (brevemente DOF) parece ter sido introduzida por H. Osborn ([45]), em 1967, e por R.G. Heyneman e M.E. Sweedler ([24]), em 1969.

Nakai desenvolveu a teoria das DOF de Kähler e as ampliou às DOF de funções C^∞. Em um artigo posterior, o autor trata de uma aplicação desta teoria à Teoria de Galois de extensões puramente inseparáveis de expoente finito de corpos[2].

A relação entre esta definição de DOF e a de DOS de Hasse e Schmidt é a seguinte: se $D = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma DOS no sentido de Hasse (que é o que usaremos aqui), então a m-ésima componente d_m é uma derivação de m-ésima ordem no sentido de Osborn. Mas, a recíproca não é verdadeira, em geral. Um problema interessante é o de encontrar condições para que uma derivação de m-ésima ordem no sentido de Osborn seja a m-ésima componente de uma DOS no sentido de Hasse.

Em 1978, Nakai apresenta as *derivações de ordem superior iterativas localmente finitas* de um anel comutativo A com unidade. Se $D = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma DOS de A, então D é localmente finita se para todo $a \in A$ existe um índice j tal que $d_n(a) = 0$ para todo $n > j$. Mais ainda, D é uma DOS iterativa se $d_i d_j = \binom{i+j}{i} d_{i+j}$ para todo $i, j \geq 0$. O autor considera k um corpo algebricamente fechado e A um domínio de integridade tal que $A \supset k$ com $dim_k A = 2$. Então faz uma caracterização dos anéis de polinômios 2-dimensionais e aplica a teoria para o estudo de uma linha no plano afim em Geometria Algébrica ([42]).

[2]Artigo publicado no Journal of Science of the Hiroshima University, série A-I, volume 34 (1970), e que não conseguimos descobrir o título

Existem muitos estudos posteriores e aplicações na Álgebra Comutativa e na Geometria Algébrica, envolvendo derivações de ordem superior. Também existem estudos na área da Teoria de Anéis não-comutativos.

Em particular, vários estudos em anéis tratam sobre a estrutura dos mesmos quando possuem derivações envolvidas. Neste sentido, diversos problemas já estudados poderiam estender-se às derivações de ordem superior.

De fato, um dos primeiros resultados na teoria das derivações é o teorema fundamental de E.C. Posner ([48], Teorema 1), provado em 1957, o qual afirma que se o produto de duas derivações em um anel primo de característica diferente de 2 é uma derivação, então ao menos uma delas é zero. Este é conhecido como o 1º Teorema de Posner. A conclusão deste teorema não é verdadeira se o anel for de característica 2. No mesmo artigo, Posner prova que se d é uma derivação em um anel primo R tal que o comutador $[x, d(x)] \in Z(R)$ (o centro de R) para todo $x \in R$, então ou $d = 0$ ou R é comutativo. Este é o chamado 2º Teorema de Posner, que pode ser facilmente provado no caso em que $car(R) = 2$ ([1], pg. 13). Considerando o produto de potências de derivações (em um anel primo), D.W. Jensen ([26]) obteve extensões do 1º Teorema de Posner. T. Creedon ([13]), em 1998, estendeu o 1º Teorema de Posner ao caso de álgebras semiprimas, provando que se o produto de duas derivações em uma álgebra A é uma derivação, então a aplicação produto leva a álgebra em seu nil radical $nil(A)$ (a interseção de todos os ideais primos de A). Segue que se o produto de duas derivações em uma álgebra semiprima é uma derivação, então o produto é zero. Mais ainda, Creedon obteve condições as quais implicam que o produto de duas derivações aplica a álgebra em seu radical de Jacobson ([13], Proposição 9). Estes problemas não foram ainda analisados para DOS.

Finalmente, queremos introduzir uma motivação a mais de interesse no estudo de DOS, baseada num trabalho recente de D. Farkas, C. Geiss e E. Marcos ([15]).

Num trabalho de H. Matsumura ([37]), definem-se as derivações integráveis em anéis comutativos. Se A é um anel comutativo com unidade e d é uma derivação em A, dizemos que d é *integrável* se existir um homomorfismo E: $A \to A[[t]]$ tal que $E(a) \equiv a + td(a) \pmod{t^2}$. Equivalentemente, d é integrável se existir uma DOS $D = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $d_1 = d$. Neste caso, D é dita uma *integral* de d. As derivações integráveis possuem muitas propriedades boas. De fato, muitos fenômenos indesejáveis das derivações em característica p desaparecem se considerarmos somente derivações integráveis. Seidenberg ([49], [50], [51]) mostra condições necessárias para integrabilidade. Nakai ([41], [42]) prova condições suficientes. Já Matsumura considera álgebras lisas - ou fortemente lisas - e faz uso da teoria da homologia de André ([2]). Além disso, mostra que existem muitas derivações integráveis (no caso em que A é um domínio de integridade finitamente gerado sobre um corpo perfeito). Se $A \supset \mathbb{Q}$, então toda derivação é integrável ($d_n = \frac{d^n}{n!}$). Da mesma forma se A é um corpo de característica qualquer ([37], Teorema 6). Mas, em geral, há derivações não-integráveis.

O estudo das derivações integráveis também se aplica a anéis não-comutativos. A definição de derivação integrável pode ser dada por uma das três condições equivalentes, cuja prova é facilmente obtida na literatura: (a). existe um homomorfismo de k-álgebras $f\colon A \to A[[t]]$ tal que $f(a) \equiv a + td(a) \pmod{t^2}$; (b). existe um $k[[t]]$-automorfismo $g\colon A[[t]] \to A[[t]]$ tal que para $a \in A$ vale $g(a) \equiv a + td(a) \pmod{t^2}$; (c). existe uma DOS $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de A tal que $d_1 = d$.

Neste sentido, destacamos o recente trabalho de Farkas, Geiss e Marcos ([15]). O modo mais ingênuo de entender uma álgebra associativa finito-dimensional é encontrar uma base e analisar sua tábua de multiplicação. Modernamente, considera-se o esquema de todas as álgebras associativas n-dimensionais sobre o corpo k como um subesquema do espaço afim $Hom_k(k^n \otimes k^n, k^n)$. Então $GL_n(k)$ age sobre os pontos k-racionais do esquema de modo que as órbitas podem ser vistas como classes de isomorfismos de álgebras n-dimensionais. O estabilizador de um ponto pode ser identificado com o esquema de grupo de automorfismos da álgebra correspondente. A geometria no ponto é particularmente boa quando o esquema é liso. O esquema de grupo de automorfismos é automaticamente liso quando $car(k) = 0$, pela caracterização clássica de álgebras de Hopf comutativas. Se k possui característica positiva, isto é um pouco mais misterioso. A principal contribuição dos autores é fornecer uma reformulação simples e prática de álgebras lisas. Provam que um esquema de grupo de automorfismos de uma álgebra A finito-dimensional sobre um corpo perfeito k é liso se, e somente se, cada k-derivação de A é integrável ([15], Teorema 1.2).

Este critério dá uma caracterização puramente algébrica para um fato da Geometria Algébrica.

0.2 Resultados Principais

O presente trabalho trata essencialmente sobre derivações de ordem superior em anéis não-comutativos.

Em 1957, I.N. Herstein provou que toda derivação de Jordan em um anel primo R de característica diferente de 2 é uma derivação em R ([20], ou [23], Teorema 3.3). Posteriormente, M. Bresăr ([8], Teorema 1) provou que se o anel R é semiprimo e livre de 2-torção, então toda derivação de Jordan de R é uma derivação.

Nosso primeiro objetivo, no Capítulo 2, é a generalização de um resultado de Bresăr, segundo o qual toda derivação tripla de Jordan de um anel semiprimo livre de 2-torção é uma derivação usual ([9], Teorema 4.3). Generalizamos o mesmo, provando que toda derivação tripla de Jordan de ordem superior de um anel semiprimo livre de 2-torção é uma derivação de ordem superior (Teorema 2.1.2). A seguir, mostramos que toda derivação de Jordan de ordem superior é uma derivação tripla de Jordan de ordem superior (Teorema 2.1.8), o que generaliza o caso conhecido para derivações triplas de Jordan. Como conseqüencia, obtemos que toda derivação de Jordan de ordem superior definida em um anel semiprimo e livre de 2-torção é uma derivação de ordem superior (brevemente, DOS) (Corolário 2.1.9). Este último fato, embora não conste na literatura, já nos é conhecido, pois o obtivemos em nossa dissertação de mestrado ([16], Teorema 2.2.1). Em particular, ele generaliza os resultados de Herstein e Bresăr antes mencionados.

Nos últimos 30 anos, muita literatura tem sido escrita sobre a relação entre derivações usuais e ideais de Lie de um anel primo. Em particular, envolvendo a ação das derivações sobre ideais de Lie. Muitos destes resultados estendem outros provados anteriormente apenas para a ação das derivações sobre o anel todo. Temos interesse em analisar a ação das derivações de ordem superior sobre ideais de Lie de um anel primo.

Na segunda seção estendemos às derivações de ordem superior um resultado obtido para derivações por R. Awtar. De fato, o resultado principal de ([5], Teorema) estende o resultado de Herstein a ideais de Lie, provando que se R é um anel primo de característica diferente de 2 e U é um ideal de Lie de R (contido no centro do anel, ou não) tal que $u^2 \in U$ para todo $u \in U$ então, se d: $R \to R$ é uma aplicação aditiva satisfazendo $d(u^2) = d(u)u + ud(u)$ para todo $u \in U$, segue que $d(uv) = d(u)v + ud(v)$ para todo $u, v \in U$. Generalizamos o mesmo às DOS, provando que se R é um anel primo livre de 2-torção e D é uma derivação de Jordan de ordem superior de U em R, onde U é um ideal de Lie de R tal que $u^2 \in U$ para todo $u \in U$ e $U \not\subset Z(R)$ (o centro de R), então D é uma DOS de U em R (Teorema 2.2.11). Nas mesmas condições deste teorema, se $U \subset Z(R)$, então mostramos que o resultado não é válido (Exemplo 2.2.12). Note que em ([5]) este resultado ainda continua válido neste caso.

É um problema de interesse o estudo das derivações algébricas d definidas num anel primo R (com unidade), e suas respectivas extensões $d^\star$ ao anel de quocientes (à direita) de Martindale de R, denotado por Q. Há vários trabalhos nesta linha, donde destacamos ([14], [27], [28], [29], [35]). Sejam R um anel primo e d uma derivação de R. Então d pode ser estendida de modo único a uma derivação $d^\star$ de Q. V.K. Karchenko ([28]) mostrou que se d é R-algébrica e R é de característica zero, então d é X-interna. Em ([35]), mostra-se que as seguintes condições são equivalentes: (i). d é R-algébrica; (ii). $d^\star$ é R-algébrica; (iii). $d^\star$ é Q-algébrica; (iv). d é Q-algébrica; (v). $d^\star$ é C-algébrica (onde C indica o centro de Q); (vi). d é C-algébrica.

Para as derivações de ordem superior, esta questão da algebricidade nos remete ao estudo de DOS que satisfazem relações de dependência linear. Este é o assunto do nosso último capítulo. Neste sentido, o resultado principal que obtivemos (Teorema 3.1.1) afirma que se $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma DOS R-linearmente dependente (brevemente, R-LD) de comprimento n sobre R, então D é Q-LD mônica de mesmo comprimento sobre R. Além disso, se $q_0, \ldots, q_{n-1}$ são elementos de Q tais que $\sum_{i=0}^{n} d_i(x)q_i = 0$ para todo $x \in R$ é uma relação de comprimento mínimo, onde $q_n = 1$, então d_1 é X-interna dada por $d_1(x) = [q_{n-1}, x]$ e $d_m(x) = [q_{n-m}, x] - \sum_{i=0}^{m-1} d_{m-i}(x)q_{n-i}$, para todo $x \in R$, $2 \le m \le n$. Mais ainda, $q_0 = 0$.

Provamos ainda o Teorema 3.1.2, o qual afirma que para $n \in \mathbb{N}$, T um anel com unidade e elementos $t_0, t_1, \ldots, t_n \in T$, onde $t_0 = 0$ e $t_n = 1$, se $D = (d_i)$ $(0 \leq i \leq n)$ é uma seqüência de aplicações de T definida por $d_0 = id_T$, $d_1(x) = [t_{n-1}, x]$ e $d_m(x) = [t_{n-m}, x] - \sum_{i=1}^{m-1} d_{m-i}(x)t_{n-i}$ para todo $x \in T$, $2 \leq m \leq n$, então D é T-LD mônica sobre T. Em particular, o Teorema 3.1.2 implica uma recíproca do Teorema 3.1.1 (Corolário 3.2.4).

Por outra parte, provamos que as relações de dependência linear são preservadas ao estendermos uma DOS D de R a $D^\star$ em Q. O Teorema 3.2.5 afirma que se D é uma DOS de R, então as seguintes condições são equivalentes: (i). D é R-LD sobre R; (ii). D é Q-LD sobre R; (iii). D é Q-LD mônica sobre R; (iv). $D^\star$ é Q-LD sobre Q; (v). $D^\star$ é R-LD sobre Q. Além disso, se as condições equivalentes do Teorema 3.2.5 são verificadas, então o comprimento das relações minimais em cada caso é o mesmo.

Finalmente, apresentamos exemplos e resultados complementares a esta teoria.

No Capítulo 1, apresentamos alguns tópicos que são pré-requisitos para a leitura do que segue. Dividimo-lo em cinco seções. Na primeira, revisamos alguns conceitos sobre anéis primos e semiprimos. A seguir, construímos o anel de quocientes (à direita) de Martindale Q de R, e o centróide estendido C de R, segundo W.S. Martindale III ([36]). Na terceira seção, definimos os ideais de Lie de um anel R, e apresentamos alguns exemplos e resultados relacionados a derivações que serão posteriormente necessários. Depois, introduzimos a noção de derivação de ordem superior em um anel, apresentando alguns exemplos e demonstrando algumas propriedades elementares. Encerramos o capítulo, provando que toda derivação de ordem superior definida num anel primo R pode ser estendida de maneira única a Q.

Sumário

Algumas Notações Freqüentemente Usadas

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais incluindo o zero
$\mathbb{Q}$	corpo dos números racionais
$\mathbb{K}$	um corpo qualquer
$\subset$, $\subseteq$	usado indistintamente para inclusão
$\subsetneq$	inclusão estrita
$<_l$, $<_r$,$\lhd$	ideal à equerda, à direita e bilateral
$Ann_l(I)$, $Ann_r(I)$, $Ann(I)$	anulador à esquerda, à direita e bilateral de um conjunto I
$Z(R)$	centro de um anel R
(a)	ideal gerado pelo elemento a, i.e., RaR
Q	anel de quocientes (à direita) de Martindale
C	centróide estendido de um anel primo R
RC	fecho ou clausura central de R
a_l	multiplicação por a à esquerda: $a_l(x) = ax$, $\forall x \in R$
$V_Q(R)$	centralizador de R em Q
$[\cdot,\cdot]$	comutador: $[a, b] = ab - ba$, $\forall a, b \in R$
$\mathbb{K}[x]\langle y, z\rangle$	anel livre sobre $\mathbb{K}[x]$ nas indeterminadas y e z
$\varphi_n(a, b, c)$	indica $d_n(abc) - \sum\limits_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(c)$
$[\cdot,\cdot,\cdot]$	indica $[a, b, c] = abc - cba$, $\forall a, b, c \in R$
DOS	derivação de ordem superior
DJOS	derivação de Jordan de ordem superior
DTJOS	derivação tripla de Jordan de ordem superior
$car(R)$	característica do anel R
$\varphi_n(u, v)$	indica $d_n(uv) - \sum\limits_{i+j=n} d_i(u)d_j(v)$
R^{op}	anel oposto de um anel R
I_a	derivação interna definida pelo elemento a
$\binom{n}{k}$	coeficiente combinatório
$End_k(A)$	anel dos k-endomorfismos de A
$dim_k(A)$	dimensão de A sobre k
$R \hookrightarrow Q$	R contido injetivamente em Q
$d^\star$	extensão de uma derivação d de R a Q
$d^\star\mid_R$	restrição de $d^\star$ a R

Capítulo 1

Pré-Requisitos

Este capítulo contém alguns pré-requisitos necessários à compreensão do que segue. Mais detalhes podem ser obtidos em Lam ([30]) ou Lambek ([31]).

1.1 Anéis Primos e Semiprimos

Seja R um anel qualquer.

Um ideal P de R é dito um *ideal primo* de R se para ideais A e B de R temos que $AB \subseteq P$ implica $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$. É bom observar que algumas vezes convém restringir-se a ideais A e B que contêm P. A definição que corresponde a este caso resulta ser equivalente à anterior. O mesmo acontece se A e B são ideais unilaterais. A seguinte proposição estabelece as equivalências mais usuais, e sua prova pode ser encontrada em ([30], Proposição 10.2).

Proposição 1.1.1 *Seja P um ideal de R. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *P é um ideal primo de R;*

2. *Se A e B são ideais de R tais que $A \supseteq P$, $B \supseteq P$ e $AB \subseteq P$, então $A = P$ ou $B = P$;*

3. *Se I e L são ideais à direita (ou à esquerda) de R tais que $IL \subseteq P$, então $I \subseteq P$ ou $L \subseteq P$;*

4. *Se $a, b \in R$ e $aRb \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$.*

Um anel R é dito um *anel primo* se (0) é um ideal primo de R. Da Proposição 1.1.1 segue o seguinte corolário evidente

Corolário 1.1.2 *As seguintes condições são equivalentes:*

1. *R é um anel primo;*
2. *Se $0 \neq H \lhd R$ é tal que $aHb = 0$ para $a, b \in R$, então $a = 0$ ou $b = 0$;*
3. *Dados dois ideais A e B de R tais que $AB = (0)$, então $A = (0)$ ou $B = (0)$;*
4. *O anulador à direita $Ann_r(I)$ de um ideal à direita não-nulo $I <_r R$ é zero.*

A seguir, apresentamos duas proposições que serão utilizadas mais adiante.

Proposição 1.1.3 *Seja R um anel primo e $0 \neq A \lhd R$. Se $A \subset Z(R)$, então $R = Z(R)$, i.e., R é comutativo.*

Prova. Sejam $x, y \in R$. Como $A \subset Z(R)$ e é um ideal bilateral, então é fácil ver que $(xy - yx)A = 0$. Portanto, $(xy - yx)RA = 0$. Como R é primo segue que $xy = xy$ para todo $x, y \in R$. Logo R é comutativo. ∎

Proposição 1.1.4 *Sejam R um anel primo, $0 \neq x \in Z(R)$ e $y \in R$ tais que $xy \in Z(R)$. Então $y \in Z(R)$.*

Prova. Seja $r \in R$. Como $x, xy \in Z(R)$, segue que $x(yr - ry) = 0$. Assim, para $t \in R$, $tx(yr - ry) = 0$. Então $xR(yr - ry) = 0$. Sendo R primo e $x \neq 0$, temos $yr = ry$, para todo $r \in R$, i.e., $y \in Z(R)$. ∎

Um anel R é dito *livre de 2-torção* se para qualquer $x \in R$, $2x = 0$ implica $x = 0$.

Um ideal C de um anel R é dito um *ideal semiprimo* se, para cada ideal A de R, $A^2 \subseteq C$ implica $A \subseteq C$.

Num paralelo com a Proposição 1.1.1, os ideais semiprimos apresentam as seguintes equivalências mais usuais, cuja prova pode ser encontrada em ([30], Proposição 10.9).

Proposição 1.1.5 *Sejam C um ideal de R e $a \in R$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *C é um ideal semiprimo de R;*
2. *Se $(a)^2 \subseteq C$, então $a \in C$;*
3. *Se $aRa \subseteq C$, então $a \in C$;*
4. *Se A é um ideal à esquerda (ou à direita) de R tal que $A^2 \subseteq C$, então $A \subseteq C$.*

Diremos que um anel R é *semiprimo* se, para todo $a \in R$, $aRa = 0$ implica $a = 0$ ou, equivalentemente, se (0) é um ideal semiprimo de R. Observe que todo anel primo é semiprimo.

As duas próximas proposições serão muito úteis mais tarde. Suas provas podem ser encontradas em ([9], Lemas 1.1 e 1.2). Porém, por completitude, iremos apresentar uma prova rápida de cada uma delas.

Proposição 1.1.6 *Seja R um anel semiprimo livre de 2-torção. Se $a, b \in R$ são tais que $axb + bxa = 0$ para todo $x \in R$, então $axb = bxa = 0$ para todo $x \in R$. Se R é semiprimo, então $axb = 0$ para todo $x \in R$ implica que $bxa = ab = ba = 0$. Então para todo $U \lhd R$, temos que $Ann_r(U) = Ann_l(U) = Ann(U)$.*

Prova. Sejam x e y elementos arbitrários de R. Usando $arb = -bra$ três vezes, obtemos $axbyaxb = -(bxaya)xb = ax(ayb)xb = -axbyaxb$. Portanto, $2(axb)y(axb) = 0$ para todo $x, y \in R$. Como R é semiprimo livre de 2-torção, segue que $axb = 0$ para todo $x \in R$. Logo, pela hipótese, também $bxa = 0$ para todo $x \in R$.

Agora suponhamos que R é semiprimo e $axb = 0$ para todo $x \in R$. Então, para todo $x, y \in R$, temos que $(bxa)y(bxa) = bx(ayb)xa = 0$, $(ab)x(ab) = a(bxa)b = 0$, e $(ba)x(ba) = b(axb)a = 0$. Como R é semiprimo, segue que $bxa = ab = ba = 0$. ■

Proposição 1.1.7 *Sejam $G_1, G_2, \ldots, G_n$ grupos aditivos e R um anel semiprimo. Suponhamos que as aplicações $S\colon G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n \to R$ e $T\colon G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n \to R$ são aditivas em cada argumento. Se $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)xT(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, para todo $x \in R$ e para todo $a_i \in G_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)xT(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$ para todo $x \in R$ e para todo $a_i, b_i \in G_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Prova. Mostremos inicialmente o caso $n = 1$.

Substituindo a por $a+b$ em $S(a)xT(a) = 0$, obtemos $S(a)xT(b) + S(b)xT(a) = 0$. Mas, então, $(S(a)xT(b))y(S(a)xT(b)) = -S(a)(xT(b)yS(b)x)T(a) = 0$ por hipótese. Como R é semiprimo, segue que $S(a)xT(b) = 0$.

Para $n \geq 2$ basta repetir este raciocínio para cada componente. De fato, para $n = 2$, seja $S(a_1, a_2)xT(a_1, a_2) = 0$ para todo $x \in R$ e para todo $a_1, a_2 \in R$. Substituindo a_1 por $a_1 + b_1$ nesta expressão, obtemos $S(a_1, a_2)xT(b_1, a_2) + S(b_1, a_2)xT(a_1, a_2) = 0$ por hipótese. Repetindo o raciocínio do caso $n = 1$, temos que $S(a_1, a_2)xT(b_1, a_2) = 0$. Donde, substituindo a_2 por $a_2 + b_2$, obtemos $S(a_1, a_2)xT(b_1, b_2) = 0$. ■

Observação 1.1.8 Na prova da proposição acima, temos aplicado um mecanismo que será usual no que segue. Utilizamos a expressão $S(a)xT(a) = 0$, mas substituindo a por $a + b$. Tal processo denomina-se linearização com respeito a a.

O resultado a seguir caracteriza anéis primos livres de 2-torção.

Teorema 1.1.9 *Seja R um anel livre de 2-torção. Então são equivalentes:*

1. *R é um anel primo;*
2. *Se $a, b \in R$ e $axb + bxa = 0$ para todo $x \in R$, então $a = 0$ ou $b = 0$;*
3. *Se $a, b \in R$ e $axa = bxb$ para todo $x \in R$, então $a = b$ ou $a = -b$.*

Prova. (*1.*→*2.*) É conseqüência imediata da Proposição 1.1.6.

(*2.*→*1.*) Suponhamos que, para todo $y \in R$, vale $ayb = 0$.

Então $(bxa)y(bxa) + (bxa)y(bxa) = 2bx(ayb)xa = 0$ para todo $x, y \in R$. Donde, por hipótese, $bxa = 0$ para todo $x \in R$. Portanto, $axb + bxa = 0$ para todo $x \in R$. Logo, por *2*, $a = 0$ ou $b = 0$, e R é primo.

(*2.*→*3.*) Suponhamos $axa = bxb$ para todo $x \in R$.

Então $(a-b)x(a+b) + (a+b)x(a-b) = 0$ para todo $x \in R$. Por *2*, segue que $a - b = 0$ ou $a + b = 0$. Sendo assim, $a = b$ ou $a = -b$.

(*3.*→*2.*) Suponhamos $axb + bxa = 0$ para todo $x \in R$.

Então $(a-b)x(a-b) = (a+b)x(a+b)$ para todo $x \in R$. Portanto, por *3*, $a - b = a + b$ ou $a - b = -(a + b)$. Como R é livre de 2-torção, segue que $a = 0$ ou $b = 0$. ■

Observação 1.1.10 Para provar (*2.*→*1.*) e (*2.*→*3.*) no Teorema 1.1.9, não utilizamos o fato de R ser livre de 2-torção.

1.2 O Anel de Quocientes (à direita) de Martindale de um Anel Primo

Se D é um domínio de integridade comutativo, é conhecido que existe um corpo F que contém D, chamado o corpo de frações de D, tal que para cada $x \in F$ existe um elemento $0 \neq a \in D$ com $xa \in D$. A existência do corpo de frações de D é um fato extremamente importante e útil para muitos assuntos.

A construção de F a partir de D pode ser estendida aos anéis não-comutativos. Este é o assunto desta seção. Vamos nos restringir ao anel de quocientes (à direita) de Martindale de um anel primo R, definido pela primeira vez por W. Martindale III em ([36]). Existem construções mais gerais, também para anéis não necessariamente comutativos. O leitor interessado pode consultar ([40], Capítulo 3) e ([31], Seção 4.3).

Seja R um anel primo não necessariamente com unidade. Se $I \lhd R$ diremos que uma aplicação $f\colon I \to R$ é um R-homomorfismo (à direita) se f é aditiva e $f(ar) = f(a)r$, para todo $a \in I$, $r \in R$. No que segue, consideraremos ideais não-nulos I de R e R-homomorfismos $f\colon I \to R$. O conjunto dos ideais não-nulos de R será denotado por $\mathcal{I}$. Note que, se $I, J \in \mathcal{I}$, então $IJ \in \mathcal{I}$ e $I \cap J \in \mathcal{I}$.

Denotamos por $\mathcal{Q}$ o conjunto de todos os pares (I, f), onde $I \in \mathcal{I}$ e $f\colon I \to R$ é um R-homomorfismo (à direita).

Em $\mathcal{Q}$, definimos uma relação de equivalência como segue: se (I, f), $(J, g) \in \mathcal{Q}$, dizemos que (I, f) é equivalente a (J, g) ($(I, f) \sim (J, g)$) se existir um ideal não-nulo $H \subseteq I \cap J$ tal que $f\mid_H = g\mid_H$. Podemos verificar facilmente que esta relação é realmente uma relação de equivalência e que pode ser definida de maneira equivalente como segue: $(I, f) \sim (J, g)$ se, e somente se, $f\mid_{(I\cap J)} = g\mid_{(I\cap J)}$.

Denotemos por Q o conjunto quociente $\mathcal{Q}/\sim$ e por $[I, f]$ a classe de equivalência (I, f) onde $(I, f) \in \mathcal{Q}$. No que segue, dotaremos Q de uma estrutura de anel de modo a podermos considerar $R \subseteq Q$.

Sejam $[I, f]$, $[J, g]$ dois elementos de Q. Definimos a soma e o produto em Q por:

i) $[I, f] + [J, g] = [I \cap J, f + g]$, onde $f + g\colon I \cap J \to R$ é definida de modo natural: $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, para todo $a \in I \cap J$.

ii) $[I, f] \cdot [J, g] = [JI, f \circ g]$, onde $f \circ g\colon JI \to R$ é definida por $(f \circ g)(a) = f(g(a))$ para todo $a \in JI$ (note que esta definição está bem dada, pois $g(JI) \subseteq I$ e assim $f(g(a)) \in R$).

É fácil verificar que estas operações estão bem-definidas em Q, e provar o seguinte

Teorema 1.2.1 $(Q, +, \cdot)$ *é um anel com unidade.*

O anel definido acima é denominado *anel de quocientes (à direita) de Martindale de R.* Com uma construção semelhante podemos definir o anel de quocientes à esquerda.

Vejamos como R pode ser mergulhado em Q. Se $a \in R$, denotamos por a_l a multiplicação à esquerda por a (i.e., a_l: $R \to R$ é definida por $a_l(x) = ax$, para todo $x \in R$). É claro que $[R, a_l]$ é um elemento de Q, o qual denotaremos apenas por a_l. A aplicação ψ: $R \to Q$ definida por $\psi(a) = a_l$, para cada $a \in R$, é um homomorfismo injetor de anéis. Isto permite identificar R com sua imagem $\psi(R)$ em Q. Utilizando esta identificação, podemos supor $R \subseteq Q$ e, para $a \in R$, escrever $a_l = a$.

Quando D é um domínio comutativo, o corpo de frações de D é um corpo. No caso geral, existe um resultado correspondente muito importante e útil, não diretamente para Q, senão para seu centro. O centro de Q, denotado por C, é definido de forma usual.

A seguinte proposição contém as propriedades mais importantes do anel Q, que precisaremos mais adiante.

Proposição 1.2.2 *Sejam R um anel primo e Q o anel de quocientes (à direita) de Martindale de R. Então:*

1. *$R \subseteq Q$;*
2. *Dados n elementos $q_1, \ldots, q_n \in Q$, existe um ideal $I \in \mathcal{I}$ tal que $q_i I \subseteq R$, para $i = 1, 2, \ldots, n$;*
3. *Se $a \in Q$ é tal que $aI = 0$ ou $Ia = 0$ para algum $0 \neq I \lhd R$, então $a = 0$;*
4. *Se $I \in \mathcal{I}$ e f: $I \to R$ é um R-homomorfismo (à direita), então existe $q \in Q$ tal que $f(a) = qa$ para todo $a \in I$;*
5. *Todo anel intermediário T (anel com $R \subseteq T \subseteq Q$) é também primo. Em particular, Q é primo.*
6. *C é um corpo.*

O corpo C é denominado *centróide estendido de R.* O anel gerado por R e C é igual a RC. Este subanel é particularmente importante, e é chamado o *fecho central de R.* Podemos verificar que o seu centro é ainda C.

Note que $Z(R) \subseteq C$. Portanto, C contém o corpo de frações de $Z(R)$. Mas, em geral, este corpo de frações não é igual a C.

O conjunto $V_Q(R) = \{q \in Q \mid \quad qr = rq, \quad \forall r \in R\}$ formado pelos elementos $q \in Q$ que comutam com todo $r \in R$ é denominado *centralizador de R em Q.* A proposição seguinte caracteriza os elementos de C.

Proposição 1.2.3 *Seja $q = [I, f] \in Q$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *$q \in C$;*
2. *f é um homomorfismo de R-bimódulos ($f(xa) = xf(a)$, para todo $a \in I$, $x \in R$);*
3. *$q \in V_Q(R)$.*

Encerramos com mais algumas proposições que serão úteis mais adiante.

Proposição 1.2.4 *Se a, $b \in Q$ são tais que $aRb = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.*

Prova. Pela Proposição 1.2.2, existem $U, V \in \mathcal{I}$ tais que $aU \subseteq R$ e $bV \subseteq R$. Se $aRb = 0$, então $aURbV = 0$. Mas, R é primo, donde $aU = 0$ ou $bV = 0$. Logo $a = 0$ ou $b = 0$. ■

Proposição 1.2.5 *Se $0 \neq q \in Q$, então $qRqR \cap R \neq 0$.*

Prova. Seja $0 \neq I \lhd R$ tal que $0 \neq qI \subseteq R$. Sendo $qR \neq 0$ e R primo, então $qIqI \neq 0$ e segue que $qRqR \bigcap R \neq 0$. ■

A prova da próxima proposição é análoga à de ([22], Lema 1.3.2), utilizando a proposição anterior. Novamente, iremos apresentá-la por completitude.

Proposição 1.2.6 *Se a_i, b_i, $1 \leq i \leq m$, são elementos não-nulos de Q tais que $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i x b_i = 0$ para todo $x \in R$, então os a_i's e os b_i's são linearmente dependentes sobre C.*

Prova. Mostraremos que os a_i's são linearmente dependentes sobre C. Caso contrário, existem um n minimal e elementos $a_1, \ldots, a_n \in Q$ linearmente independentes sobre C tais que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x b_i = 0$ para todo $x \in R$ e para alguns b_i's, onde os b_i's são elementos não-nulos de Q. Pela Proposição 1.2.4, temos que $n > 1$. Suponhamos que x_j, $y_j \in R$ são tais que $\sum x_j b_1 y_j = 0$.

Se $r \in R$, então $0 = \sum\limits_j a_1 r x_j b_1 y_j = -\sum\limits_{i=2}^{n} a_i r \sum\limits_j x_j b_i y_j$, uma vez que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i r x_j b_i = 0$. Como temos uma relação mais curta do que n, concluímos que $\sum\limits_j x_j b_i y_j = 0$ para todo i. Portanto a aplicação γ_i: $Rb_1R \cap R \to Q$ dada por $\gamma_i(\sum\limits_j u_j b_1 v_j) = \sum\limits_j u_j b_i y_j$ é bem-definida.

Note que a imagem $Im(\gamma_i)$ é um ideal bilateral não-nulo de Q, e que a pré-imagem $\gamma_i^{-1}(Im(\gamma_i) \cap R)$ é um ideal bilateral não-nulo de R. Assim, é claro que a aplicação

$\gamma_i\mid_{Im(\gamma_i)\cap R}$: $Rb_1R\cap R\cap\gamma_i^{-1}(Im(\gamma_i)\cap R)\to R$ é um homomorfismo de R-bimódulos, donde $\gamma_i\mid_{Im(\gamma_i)\cap R}$ define um elemento – que denotaremos por c_i – pertencente a C. Ademais, por esta definição, $c_ib_1 = b_i$. Então, para todo $x\in R$, $0=\sum_i a_ixb_i=\sum_i a_ixc_ib_1=\sum_i c_ia_ixb_1$. Pela Proposição 1.2.4, segue que $\sum_i c_ia_i = 0$. Sendo os a_i's linearmente independentes sobre C, resulta que $c_i = 0$. Neste caso, $Rb_iR = 0$ pela definição de c_i. Donde $b_i = 0$, contradição. Isto prova a proposição. ∎

Proposição 1.2.7 *Seja $0\neq q\in Q$ tal que $qR = Rq$ (globalmente). Então q é inversível.*

Prova. Temos que existe $0\neq I\lhd R$ tal que $qI\subseteq R$.

É fácil verificar que $qI\lhd R$. Então podemos utilizá-lo como domínio de definição de uma aplicação φ: $qI\to R$ tal que $\varphi(qi) = i$.

Note que φ é um homomorfismo à direita bem-definido. De fato, se $qi = qi'$ para i, $i'\in I$, então $q(i-i') = 0$ e $Rq(i-i') = 0$. Pela hipótese concluímos que $qR(i-i') = 0$. Assim, via Proposição 1.2.4, $i-i' = 0$, donde $i = i'$. Verifica-se facilmente que $\varphi\circ q_l = id_I$ e $q_l\circ\varphi = id_{qI}$. Logo a aplicação φ define um elemento q' tal que $qq' = q'q = 1$. ∎

1.3 Ideais de Lie

Um subgrupo aditivo U de um anel R é dito um *ideal de Lie de R* se o comutador $[u,r] = ur - ru\in U$, para todo $u\in U$, $r\in R$. É fácil ver que todo ideal bilateral $A\lhd R$ de um anel R é um ideal de Lie.

Nos últimos 30 anos, muita literatura tem sido escrita sobre a relação entre derivações usuais e ideais de Lie de um anel primo. Em particular, envolvendo a ação das derivações sobre ideais de Lie. Muitos destes resultados estendem outros provados anteriormente apenas para a ação das derivações sobre o anel todo. O leitor interessado pode ver resultados neste sentido em vários trabalhos. Por exemplo ([3], [6], [33], [34] e [52]), entre outros.

Nesta seção listamos alguns resultados conhecidos. Temos interesse em analisar a ação das derivações de ordem superior sobre ideais de Lie de um anel primo. Faremos uma diferenciação entre os ideais de Lie que estão e os que não estão contidos no centro do anel. Há um interesse particular em ideais de Lie U tais que $u^2\in U$ para todo $u\in U$. Tal distinção já ocorre em vários trabalhos envolvendo derivações usuais e ideais de Lie (ver por exemplo [5]).

As proposições a seguir nos serão úteis mais adiante. Embora estejam demonstradas em ([6], Lemas 1, 2, 3 e 4), daremos uma prova rápida de cada uma delas por motivo de completitude.

Começamos com um caso especial de um resultado bem mais geral ([21], Teorema 5). O resultado para anéis primos está implicitamente contido em ([23], Lema 1.3), o qual passamos a demonstrar agora.

Lema 1.3.1 *Seja R um anel semiprimo livre de 2-torção. Se $U \neq 0$ é tanto um ideal de Lie como um subanel de R, então ou $U \subseteq Z(R)$, ou U contém um ideal não-nulo de R.*

Prova. Suponhamos, primeiramente, que U, como um anel, é não-comutativo. Então para algum $x, y \in U$, $[x, y] \neq 0$. Para cada $r \in R$, $[x, yr] \in U$, i.e., $[x, y]r + y[x, r] \in U$. Note que $y[x, r] \in U$, pois $y, [x, r] \in U$ uma vez que U é tanto um ideal de Lie como um subanel de R. Logo $[x, y]R \subseteq U$. Assim, para $r, s \in R$, $[[x, y]r, s] \in U$. Donde $R[x, y]R \subseteq U$. Mostramos que o ideal $R[x, y]R$ está em U. Se $R[x, y]R = 0$, então $(R[x, y])^2 = 0$, contrariando a hipótese. Portanto o resultado é verdadeiro se U como subanel de R é não-comutativo.

Assim, suponhamos que U é comutativo; vamos mostrar que $U \subseteq Z(R)$. Dados $a \in U$, $x \in R$, então $[a, x] \in U$, logo comuta com a. Agora, para $x, y \in R$, $a[a, xy] = [a, xy]a$. Como $[a, xy] = [a, x]y + x[a, y]$, $[a, x]$ e $[a, y]$ comutam com a, resulta que $2[a, x][a, y] = 0$ para todo $x, y \in R$. Sendo R livre de 2-torção, temos que $[a, x][a, y] = 0$. Seja $y = ux$. Então $[a, x][a, ux] = [a, x]([a, u]x + u[a, x]) = [a, x]u[a, x] = 0$. Donde $[a, x]R[a, x] = 0$. Como R é semiprimo, concluímos que $[a, x] = 0$. Logo $a \in Z(R)$. ■

Note que na última parte da prova do Lema 1.3.1 nós provamos a seguinte

Observação 1.3.2 Seja R um anel semiprimo livre de 2-torção. Se $a \in R$ comuta com todo $[a, x]$, $x \in R$, então $a \in Z(R)$.

Proposição 1.3.3 *Seja R um anel primo livre de 2-torção. Se $U \not\subseteq Z(R)$ é um ideal de Lie de R, então existe $M \lhd R$ tal que $[M, R] \subseteq U$, mas $[M, R] \not\subseteq Z(R)$.*

Prova. Como $car(R) \neq 2$ e $U \not\subseteq Z(R)$, segue da prova do Lema 1.3.1 que $[U, U] \neq 0$ e que $[M, R] \subseteq U$, onde $M = R[U, U]R \neq 0$ é o ideal de R gerado por $[U, U]$. É fácil ver que $[M, R] \not\subseteq Z(R)$ pois, se $[M, R] \subseteq Z(R)$, então $[M, [M, R]] = 0$. Isto implicaria que $M \subseteq Z(R)$ pela Observação 1.3.2 e, como $0 \neq M \lhd R$, teríamos $R = Z(R)$. ■

Proposição 1.3.4 *Sejam R um anel primo livre de 2-torção, e U um ideal de Lie de R tal que $U \not\subseteq Z(R)$. Então $V_R(U) = Z(R)$.*

Prova. $V_R(U)$ é tanto um subanel como um ideal de Lie de R. Como $V_R(U)$ não pode conter um ideal não-nulo de R – caso contrário U centraliza um ideal não-nulo de R e, portanto, está em $Z(R)$ – pelo Lema 1.3.1 concluímos que $V_R(U) \subseteq Z(R)$. Donde $V_R(U) = Z(R)$. ■

A próxima proposição é um caso particular de ([21], Lema 2).

Proposição 1.3.5 *Sejam R um anel primo livre de 2-torção e U um ideal de Lie de R. Se $a \in R$ centraliza $[U, U]$, então a centraliza U. Isto é, $V_R([U, U]) = V_R(U)$.*

Prova. Se $[U, U] \not\subseteq Z(R)$ então, pela Proposição 1.3.4, $a \in Z(R)$. Donde certamente a centraliza U. Por outro lado, se $[U, U] \subseteq Z(R)$, $u \in U$ e $x \in R$, então $\alpha = [u, [u, x]] = 0$. Mas, pela Observação 1.3.2, $u \in Z(R)$. Segue que $U \subseteq Z(R)$. Em ambos os casos vemos que $a \in V_R(U)$. Logo $V_R([U, U]) = V_R(U)$. ■

Proposição 1.3.6 *Sejam R um anel primo livre de 2-torção, e U um ideal de Lie de R tal que $U \not\subseteq Z(R)$. Se $a, b \in R$ são tais que $aUb = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.*

Prova. Pela Proposição 1.3.3, existe $M \lhd R$ tal que $[M, R] \not\subseteq Z(R)$, mas $[M, R] \subseteq U$. Se $u \in U$, $m \in M$ e $y \in R$, então $[mau, y] \in [M, R] \subseteq U$. Portanto, $0 = a[mau, y]b =$ $= a[ma, y]ub + ama[u, y]b = a(may - yma)ub = amayub$, pois $a[u, y]b \in aUb = 0$. Então $aMaRUb = 0$. Se $a \neq 0$, como R é primo, obtemos $Ub = 0$. Se $x \in R$ e $u \in U$, então $(ux - xu) \in U$ e, por conseguinte, $(ux - xu)b = 0$. Donde $uxb = 0$, para todo $x \in R$. Em outras palavras, $uRb = 0$. Como $U \neq 0$, segue que $b = 0$. ■

1.4 Derivações de Ordem Superior (DOS)

Uma família $D = (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou $0 \leq n \leq m$ para algum m) de aplicações aditivas $d_n \colon R \to R$ é dita uma *derivação de ordem superior* (DOS) no anel R, se $d_0 = id_R$ e, para quaisquer elementos a e b em R e qualquer natural n, $d_n(ab) = \sum_{i=0}^{n} d_i(a) d_{n-i}(b)$.

Exemplo 1.4.1 Seja $\delta \colon R \to R$ uma derivação usual sobre uma $\mathbb{Q}$-álgebra R (álgebra sobre os racionais). Definindo $d_i = \frac{\delta^i}{i!}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que a seqüência $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma DOS em R.

Exemplo 1.4.2 Seja $R = \mathbb{K}[x]\langle y, z \rangle$ o anel livre sobre $\mathbb{K}[x]$ nas indeterminadas y e z ($\mathbb{K}$ corpo, $car(\mathbb{K}) \neq 2$, y e z comutam com x, mas não comutam entre si), anel primo e livre de 2-torção.

Como R é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, então para determinarmos a ação de uma aplicação aditiva de R em R sobre seus elementos, basta definirmos a ação sobre os elementos da base $\{x^i w : \ i \in \mathbb{N}, \ w \text{ é palavra em } y, z\}$ de R.

Temos que $Z(R) = \mathbb{K}[x]$. Seja $D = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de aplicações aditivas de R em R tal que $d_0 = id_R$ e, para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
d_n(x) &= p_n(x), \text{ onde } p_n(x) \in \mathbb{K}[x] \\
d_n(y) &= q_n(x,y,z), \text{ onde } q_n(x,y,z) \in R \\
d_n(z) &= r_n(x,y,z), \text{ onde } r_n(x,y,z) \in R \\
d_n(a^j) &= \sum_{i=0}^{n} d_i(a^{j-1})d_{n-i}(a), \text{ para todo } j \geq 2, \text{ onde } a = x,\ y, \text{ ou } z.
\end{aligned}$$

Seja agora w uma palavra em y, z. Denotaremos por $|w|$ o número de letras de w.

Se $|w| = 2$, então podemos escrever $w = uv$ onde $u, v \in \{y, z\}$. Por conseguinte, definimos $d_n(w) = d_n(uv) = \sum_{i=0}^{n} d_{n-i}(u)d_i(v)$, para todo $n \geq 1$.

Se $|w| = k > 2$, podemos escrever $w = w't$, onde $t \in \{y, z\}$ e w' é uma palavra em y, z tal que $|w'| = k - 1$. Supondo que $d_s(w')$ está definida para todo $s \leq n$, definimos $d_n(w) = d_n(w't) = \sum_{i=0}^{n} d_{n-i}(w')d_i(t)$, para todo $n \geq 1$.

Finalmente, para uma palavra w de comprimento arbitrário, definimos $d_n(x^i w) = \sum_{j=0}^{n} d_{n-j}(x^i)d_j(w)$, para todo $i \geq 1$ e para todo $n \geq 1$.

Agora é fácil ver que D é uma DOS em R.

Reciprocamente, toda DOS de R é desta forma para algum $p_i(x), q_i(x,y,z), r_i(x,y,z)$.

O exemplo acima pode ser facilmente generalizado a anéis do tipo

$$R = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_s]\langle y_1, y_2, \ldots, y_m\rangle.$$

Proposição 1.4.3 *Seja $D = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derivação de ordem superior (DOS) em um anel R. Então $d_i(Z(R)) \subseteq Z(R)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Prova. Por indução sobre n. Seja $a \in Z(R)$. Então $ab = ba$ para todo $b \in R$ e, portanto, $d_n(ab) = d_n(ba)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 0$ o resultado é óbvio.

Como $d_1(ab) = d_1(ba)$, então $ad_1(b) + d_1(a)b = bd_1(a) + d_1(b)a$. Mas, $a \in Z(R)$, donde $ad_1(b) = d_1(b)a$. Portanto $d_1(a)b = bd_1(a)$ para todo $b \in R$ e para todo $a \in Z(R)$. Logo $d_1(Z(R)) \subseteq Z(R)$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que $d_m(Z(R)) \subseteq Z(R)$, para todo $m < n$. Temos que $d_n(ab) = d_n(ba)$ para todo $b \in R$. Isto é, $\sum\limits_{i+j=n} d_i(a)d_j(b) = \sum\limits_{i+j=n} d_j(b)d_i(a)$. Por hipótese de indução, $d_i(a)d_{n-i}(b) = d_i(a)d_{n-i}(b)$ para todo $0 \leq i \leq n-1$. Portanto, $d_n(a)b = ad_n(b)$. Assim, $d_n(Z(R)) \subseteq Z(R)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

Proposição 1.4.4 *Sejam $a \in R$, $d_0 = id_R$, e*

$$d_n(x) = (-1)^n(xa^n - axa^{n-1}) = (-1)^n(xa - ax)a^{n-1}$$

para $n \geq 1$, $x \in R$. Então $D = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma DOS.

Prova. Por indução sobre n.

Temos que $d_1(x) = ax - xa$ é uma derivação interna, logo é uma derivação usual.

É fácil ver que $d_n(x) = -d_{n-1}(x)a = (-1)^{n-1}d_1(x)a^{n-1}$ para todo $n \geq 2$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que $d_m(xy) = \sum\limits_{i=0}^{m} d_i(x)d_{m-i}(y)$ para todo $x, y \in R$ e para todo $2 \leq m < n$.

Usando a propriedade acima e a hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned}
d_{m+1}(xy) &= -d_m(xy)a = -\sum_{i=0}^{m} d_i(x)d_{m-i}(y)a = \\
&= -xd_m(y)a - d_1(x)d_{m-1}(y)a - d_m(x)ya - \sum_{i=2}^{m-1} d_i(x)d_{m-i}(y)a = \\
&= -xd_m(y)a - d_1(x)d_{m-1}(y)a - d_m(x)ay + d_m(x)(ay - ya) - \sum_{i=2}^{m-1} d_i(x)d_{m-i}(y)a = \\
&= xd_{m+1}(y) + d_1(x)d_m(y) + d_{m+1}(x)y + d_m(x)d_1(y) + \sum_{i=2}^{m-1} d_i(x)d_{m+1-i}(y) = \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} d_i(x)d_{m+1-i}(y)a.
\end{aligned}$$

Logo, $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma derivação de ordem superior. ∎

Estas derivações de ordem superior já foram utilizadas por Nowicki ([44]). No seu trabalho, prova que as derivações de ordem superior de um anel R formam um grupo. A sua definição de DOS associada a $a \in R$ é dada por $d_i(x) = a^{i-1}(ax - xa)$ para todo $i \geq 1$ e para todo $x \in R$. A DOS definida por nós é a inversa (no mencionado grupo) da DOS por ele definida, associada a $-a$.

1.5 Extensão de uma DOS ao Anel de Quocientes

É bastante conhecido que se R é um anel primo e d: $R \to R$ é uma derivação, então existe uma única derivação $d^\star$: $Q \to Q$ que é extensão de d (i.e., tal que $d^\star \mid_R = d$).

Aqui estenderemos uma derivação de ordem superior definida num anel R primo, não necessariamente com unidade, ao anel de quocientes de Martindale (à direita) Q de R. Embora este seja um resultado provavelmente conhecido, não encontramos nenhuma referência sobre sua prova. Por isso, resolvemos apresentá-la aqui. O resultado central é o

Teorema 1.5.1 *Sejam R um anel primo, Q o anel de quocientes de Martindale (à direita) de R, e $D = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma DOS em R. Então, para cada d_n: $R \longrightarrow R$, $n \geq 1$, existe uma única $d_n^\star$: $Q \longrightarrow Q$ que é extensão de d_n a Q, i.e., tal que $d_n^\star \mid_R = d_n$. Nestas condições, $D^\star = (d_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma DOS.*

Explicitamente, para $q \in Q$ e $0 \neq A \lhd R$ tal que $qA \subseteq R$, temos $d_n^\star(q)$: $A^{n+1} \longrightarrow R$ dada por $d_n^\star(q)a = d_n(qa) - \sum\limits_{i=0}^{n-1} d_i^\star(q)d_{n-i}(a)$ para todo $a \in A^{n+1}$ e para todo $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Iniciamos com o seguinte

Lema 1.5.2 *Sejam D uma DOS em R, e $0 \neq A \lhd R$. Então, convencionando que $A^0 = R$, temos que $d_m(A^n) \subseteq A^{n-m}$ para todo $n \geq m$ e para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Prova. É obvio que $d_0(A^n) \subseteq A^n$ para todo $n \geq 0$.

A prova segue por indução sobre m, $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $m = 1$ e $n \geq m$. Se $n = 1$, então para $a \in A$ temos $d_1(a) \in R = A^0$.

Para $n \geq 2$, todo elemento $a \in A^n$ pode ser considerado como $a = \sum\limits_i j_i l_i$, onde $j_i \in A^{n-1}$ e $l_i \in A$, para todo $i > 0$. Sem perda de generalidade (uma vez que D é aditiva) consideremos $a \in A$ como $a = jl$, onde $j \in A^{n-1}$, $l \in A$. Assim, se $n = 2$, então $d_1(a) = d_1(jl) = d_1(j)l + jd_1(l) \in A$.

Suponhamos $d_1(A^{n-i}) \subseteq A^{n-i-1}$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Então para $a = jl \in A^n$ como acima, $d_1(a) \in A^{n-1}$. Logo $d_1(A^n) \subseteq A^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

Seja agora $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 2$. Suponhamos que para todo $k < h$ e para todo $m \leq k$, vale $d_m(A^k) \subseteq A^{k-m}$. Vamos provar a relação para h. Sabemos que $d_1(A^h) \subseteq A^{h-1}$.

Como h é fixo, façamos indução sobre m: suponhamos que $d_i(A^h) \subseteq A^{h-i}$ para todo $i < m \leq h$.

Se $m = h$, então $d_m(A^h) \subseteq R = A^{h-m}$.

Suponhamos, portanto, $h > m$. Então, para $a \in A^h$, $a = jl$ onde $j \in A^{h-1}$ e $l \in A$, $d_m(a) = d_m(jl) = d_m(j)l + jd_m(l) + \sum_{s=1}^{m-1} d_s(j)d_{m-s}(l)$. Como $j \in A^{h-1}$ e $1 \leq s \leq m-1$, temos que $d_s(j) \in A^{h-(s+1)} \subseteq A^{h-m}$ e $d_m(j) \in A^{h-(m+1)}$. Logo $d_m(A^h) \subseteq A^{h-m}$ para todo $h \geq m$ e para todo $m \in \mathbb{N}$. ∎

Estamos em condições de provar o Teorema 1.5.1:

Prova do Teorema 1.5.1. A prova é construtiva, por indução:

Como $d_0 = id_R$, tomemos $d_0^\star = id_Q$.

Sabemos que d_1 é uma derivação usual. Então existe uma única derivação $d_1^\star\colon Q \to Q$ que é extensão de d_1 ([16], Proposição 3.1.3). Explicitamente:

$$d_1^\star(q)a = d_1(qa) - qd_1(a) \text{ para todo } a \in A^2, \text{ onde } qA \subseteq R. \tag{1.1}$$

Por definição, $d_2(xy) = xd_2(y) + d_1(x)d_1(y) + d_2(x)y$ para todo $x, y \in R$. Definimos então $d_2^\star(q) \in Q$ como sendo a aplicação $d_2^\star(q)\colon A^3 \to R$ tal que

$$d_2^\star(q)a = d_2(qa) - d_1^\star(q)d_1(a) - qd_2(a) \text{ para todo } a \in A^3. \tag{1.2}$$

Pelo Lema 1.5.2 e por d_2 ser bem-definida, a expressão de $d_2^\star(q)$ mostra que $d_2^\star$ também é bem-definida, e garante a unicidade de $d_2^\star$.

Vejamos agora que $d_2^\star(qq') = \sum_{i=0}^{2} d_i^\star(q)d_{2-i}^\star(q')$ para todo $q, q' \in Q$.

Sejam $q, q' \in Q$. Pela Proposição 1.2.2, existe $0 \neq C \lhd R$ tal que $qC \subseteq R$ e existe $0 \neq B \lhd R$ tal que $q'B \subseteq R$. Tomemos $A = BC \neq 0$. Portanto, para $a \in A^3$,

$$\begin{aligned} d_2^\star(qq')a &= d_2(qq'a) - d_1^\star(qq')d_1(a) - qq'd_2(a) = \\ &= d_2(qq'a) - d_1(qq'd_1(a)) + qq'd_1(d_1(a)) - qq'd_2(a). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} qd_2^\star(q')a &= qd_2(q'a) - qd_1^\star(q')d_1(a) - qq'd_2(a) = \\ &= qd_2(q'a) - qd_1(q'd_1(a)) + qq'd_1(d_1(a)) - qq'd_2(a). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ainda

$$\begin{aligned} d_1^\star(q)d_1^\star(q')a &= d_1^\star(q)(d_1(q'a) - q'd_1(a)) = \\ &= d_1^\star(q)d_1(q'a) - d_1^\star(q)q'd_1(a) = \\ &= d_1(qd_1(q'a)) - qd_1(d_1(q'a)) - d_1(qq'd_1(a)) + qd_1(q'd_1(a)), \end{aligned} \tag{1.5}$$

bem como

$$\begin{aligned} d_2^\star(q)q'a &= d_2(qq'a) - d_1^\star(q)d_1(q'a) - qd_2(q'a) = \\ &= d_2(qq'a) - d_1(qd_1(q'a)) + qd_1(d_1(q'a)) - qd_2(q'a). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Assim, $d_2^\star(qq')a = qd_2^\star(q')a + d_1^\star(q)d_1^\star(q')a + d_2^\star(q)q'a$, pois (1.3)=(1.4)+(1.5)+(1.6).

Observemos que $d_2^\star$ estende d_2: sejam $r \in R$ e $i \in A^3$.

Como $d_2(ri) = rd_2(i) + d_1(r)d_1(i) + d_2(r)i$, então

$$\begin{aligned} d_2^\star(r)i &= d_2(ri) - d_1^\star(r)d_1(i) - rd_2(i) = \\ &= d_2(r)i + d_1(r)d_1(i) + rd_2(i) - d_1(r)d_1(i) - rd_2(i) = d_2(r)i. \end{aligned}$$

Logo $(d_2^\star(r) - d_2(r))A^3 = 0$, donde $d_2^\star(r) = d_2(r)$.

Vejamos o caso geral: seja $n \in \mathbb{N}$.

Suponhamos, por indução, que para todo $m < k \leq n$ e para $q \in Q$ e um ideal bilateral não-nulo A de R tal que $qA \subseteq R$, a aplicação $d_m^\star(q)\colon\ A^{m+1} \to R$ dada por $d_m^\star(q)a = d_m(qa) - \sum\limits_{i=0}^{m-1} d_i^\star(q)d_{m-i}(a)$ para todo $a \in A^{m+1}$ está bem-definida. Suponhamos, ainda, que $d_m^\star(qq') = \sum\limits_{i=0}^{m} d_i^\star(q)d_{m-i}^\star(q')$ para todo $q, q' \in Q$, e que $d_m^\star\,|_R = d_m$.

Então definimos $d_{m+1}^\star(q)\colon\ A^{m+2} \to R$ por

$$d_{m+1}^\star(q)b = d_{m+1}(qb) - \sum_{i=0}^{m} d_i^\star(q)d_{m+1-i}(b) \quad \text{para todo } b \in A^{m+2}. \tag{1.7}$$

A expressão de $d_{m+1}^\star(q)$ mostra que $d_{m+1}^\star$ é bem-definida (pelo Lema 1.5.2 e porque d_{m+1} também é bem-definida), e garante a unicidade de $d_{m+1}^\star$.

Resta mostrar que $d_{m+1}^\star(qq') = \sum\limits_{i=0}^{m+1} d_i^\star(q)d_{m+1-i}^\star(q')$ para todo $q, q' \in Q$. Sejam $q, q' \in Q$.

Pela Proposição 1.2.2, existe $0 \neq C \lhd R$ tal que $qC \subseteq R$ e existe $0 \neq B \lhd R$ tal que $q'B \subseteq R$. Tomemos $A = BC \neq 0$. Portanto, para $a \in A^{m+2}$,

$$d^{\star}_{m+1}(qq')a \quad = \quad d_{m+1}(qq'a) - \sum_{i=0}^{m} d^{\star}_i(qq')d_{m+1-i}(a). \tag{1.8}$$

(Pela hipótese de indução podemos computar $d_i(qq')d_{m+1-i}(a)$ para todo $0 \leq i \leq m$, pois se $a \in A^{m+2}$, então $d_{m+1-i}(a) \in A^{m+2-(m+1-i)} = A^{i+1} = (BC)^{i+1}$, que é o domínio de definição de $d^{\star}_i(qq')$.)

Vamos mostrar que $d^{\star}_{m+1}(qq')a = \sum_{i=0}^{m+1} d^{\star}_i(q)d^{\star}_{m+1-i}(q')a$ para todo $a \in A^{m+2}$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m+1} d^{\star}_i(q)d^{\star}_{m+1-i}(q')a &= \sum_{i=0}^{m+1}(d_i(qd^{\star}_{m+1-i}(q')a) - \sum_{j=0}^{i-1} d^{\star}_j(q)d_{i-j}(d^{\star}_{m+1-i}(q')a)) = \\
&= d_{m+1}(qq'a) - \sum_{j=0}^{m} d^{\star}_j(q)d^{\star}_{m+1-j}(q'a) + \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m}(d^{\star}_i(q)d^{\star}_{m+1-i}(q')a) - \sum_{j=0}^{i-1} d^{\star}_j(q)d_{i-j}(d^{\star}_{m+1-i}(q')a).
\end{aligned}$$

Reagrupando termos e usando, em (1.8), a hipótese de indução para $d^{\star}_i$, para todo $1 \leq i \leq m$, resulta

$$\begin{aligned}
d^{\star}_{m+1}(qq')a &= d_{m+1}(qq'a) - \sum_{i=0}^{m} d^{\star}_i(qq')d_{m+1-i}(a) = \\
&= d_{m+1}(qq'a) - \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i} d^{\star}_j(q)d^{\star}_{i-j}(q')d_{m+1-i}(a) = \\
&= \sum_{l=0}^{m+1} d^{\star}_l(q)d^{\star}_{m+1-l}(q')a.
\end{aligned}$$

Logo $D^{\star} = (d^{\star}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é DOS em Q.

Ainda, $d^{\star}_m$ estende d_m: para $t \in R$ e $i \in A^{m+1}$, como $d_m(ti) = \sum_{j=0}^{m} d_j(t)d_{m-j}(i)$, segue que

$$d^{\star}_m(t)i = d_m(ti) - \sum_{l=0}^{m-1} d^{\star}_l(t)d_{m-l}(i) = \sum_{j=0}^{m} d_j(t)d_{m-j}(i) - \sum_{l=0}^{m-1} d_l(t)d_{m-l}(i) = d_m(t)i.$$

Portanto, $(d^{\star}_m(t) - d_m(t))A^{m+1} = 0$, donde $d^{\star}_m(t) = d_m(t)$. ∎

Capítulo 2

Derivações de Jordan de Ordem Superior (DJOS)

Seja R um anel não necessariamente com unidade. Uma derivação de Jordan definida num anel R é uma aplicação aditiva que satisfaz a propriedade $d(a^2) = d(a)a + ad(a)$ para todo elemento $a \in R$. Toda derivação é obviamente uma derivação de Jordan. A recíproca é falsa, em geral ([16], Exemplo 1.1.11). É natural, então, perguntarmo-nos sob quais condições uma derivação de Jordan é uma derivação usual. Esta questão foi considerada por I.N. Herstein. Em 1957, provou que quando o anel R é primo e livre de 2-torção, então toda derivação de Jordan de R é uma derivação ([20], Teorema 3.1). Mais tarde, em 1988, M. Bresăr e J. Vukman publicaram uma versão mais simplificada da prova de Herstein ([11], Teorema 1). No mesmo ano, Bresăr mostrou a validade da questão de Herstein para anéis semiprimos livres de 2-torção ([8], Teorema 1). Naturalmente, esta segunda prova é também uma prova do resultado para anéis primos, uma vez que todo anel primo é semiprimo.

Em 1994, em nossa dissertação de mestrado ([16]), generalizamos esta questão às derivações de ordem superior. Isto não aparece na literatura, e foi obtido pelo autor seguindo sugestões de M. Ferrero.

Uma família $D = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $0 \leq n \leq m$ para algum m) de aplicações aditivas $d_n \colon R \to R$ é dita uma derivação de Jordan de ordem superior (brevemente DJOS) em R, se $d_0 = id_R$ e, para qualquer $a \in R$ e qualquer número natural n, $d_n(a^2) = \sum\limits_{i+j=n} d_i(a)d_j(a)$.

Uma vez que toda DOS é uma DJOS, faz sentido novamente perguntar sobre a validade da recíproca. Nosso resultado de ([16]) mostra que ela não é verdadeira em geral ([16], Exemplo 2.1.4) mas, se R é semiprimo livre de 2-torção, então a recíproca é verdadeira ([16], Teorema 2.2.1).

Por outra parte, em ([9]) e ([10]), Bresăr publicou dois trabalhos em que descreve os homomorfismos de Jordan e os homomorfismos triplos de Jordan em anéis semiprimos. Entre outros resultados, generalizou a questão de Herstein mais uma vez, provando que toda aplicação aditiva d de um anel semiprimo livre de 2-torção R que satisfaz a relação $d(aba) = d(a)ba + ad(b)a + abd(a)$ para todo $a, b \in R$ (derivação tripla de Jordan), é uma derivação ([9], Teorema 4.3).

Continuando com os resultados de nossa dissertação de mestrado ([16]), na primeira seção deste capítulo consideramos as derivações triplas de Jordan de ordem superior, e provamos que toda derivação tripla de Jordan de ordem superior de um anel semiprimo livre de 2-torção R é uma derivação de ordem superior de R (Teorema 2.1.2). A seguir, mostramos que toda DJOS é uma derivação tripla de Jordan de ordem superior (Teorema 2.1.8), o que generaliza o resultado de Bresăr. Obtivemos, como conseqüência (Corolário 2.1.9), o teorema principal de nossa dissertação de mestrado ([16], Teorema 2.2.1), bem como uma generalização do resultado de Bresăr acima mencionado.

Além disso, R. Awtar estendeu a questão de Herstein a ideais de Lie ([5], Teorema). Obtivemos também uma generalização deste resultado para derivações de ordem superior. O principal teorema afirma que se R é um anel primo livre de 2-torção e D é uma DJOS definida num ideal de Lie U de R tal que $u^2 \in U$ para todo $u \in U$, onde $U \not\subset Z(R)$, então D é uma DOS de U em R (Teorema 2.2.11). Ademais, mostramos que, nas mesmas condições do Teorema 2.2.11, se o ideal de Lie U estiver contido no centro do anel, então o resultado não é válido (Exemplo 2.2.12). Este resultado contrasta com ([5]), pois Awtar provou seu teorema para os dois casos.

2.1 Derivações Triplas de Jordan de Ordem Superior

Definição 2.1.1 *Uma família* $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *(ou* $0 \le i \le m$ *para algum* m*) de aplicações aditivas* $d_i\colon R \to R$ *é dita uma* derivação tripla de Jordan de ordem superior *se para todo* $a, b \in R$ *e para todo natural* n *a condição* $d_n(aba) = \sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(a)$ *é satisfeita.*

Nosso primeiro objetivo é mostrar o seguinte

Teorema 2.1.2 *Seja* R *um anel semiprimo livre de* 2*-torção. Então toda derivação tripla de Jordan de ordem superior de* R *é uma derivação de ordem superior de* R*.*

Para tal, precisaremos de alguns lemas prévios.

Iniciamos com o

Lema 2.1.3 *Sejam R um anel e $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma derivação tripla de Jordan de ordem superior em R. Então, para quaisquer $a, b, c \in R$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$d_n(abc + cba) = \sum_{i+j+k=n} (d_i(a)d_j(b)d_k(c) + d_i(c)d_j(b)d_k(a)).$$

Prova. Sejam $a, b, c \in R$ e $n \in \mathbb{N}$. Começamos linearizando a expressão de d_n com respeito a a. Seja $\gamma = d_n((a + c)b(a + c))$.

Temos $\gamma = d_n(aba) + d_n(cbc) + d_n(abc + cba)$.

Pela definição de d_n,

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{i+j+k=n} d_i(a + c)d_j(b)d_k(a + c) = \\
&= \sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(a) + \sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(c) + \\
&\quad + \sum_{i+j+k=n} d_i(c)d_j(b)d_k(a) + \sum_{i+j+k=n} d_i(c)d_j(b)d_k(c) = \\
&= d_n(aba) + \sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(c) + d_n(cbc) + \sum_{i+j+k=n} d_i(c)d_j(b)d_k(a).
\end{aligned}$$

Logo, $d_n(abc + cba) = \sum_{i+j+k=n} (d_i(a)d_j(b)d_k(c) + d_i(c)d_j(b)d_k(a))$. ∎

Para qualquer derivação tripla de Jordan de ordem superior e quaisquer $a, b, c \in R$ e natural n, denotaremos por $[a, b, c] = abc - cba$, e por $\varphi_n(a, b, c)$ o elemento

$$\varphi_n(a, b, c) \doteq d_n(abc) - \sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(c).$$

Note que se $\varphi_n(a, b, c) = 0$, então $d_n(abc) = \sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(c)$.

Esta notação será livremente usada no que segue.

Lema 2.1.4 *Sejam R um anel $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma derivação tripla de Jordan de ordem superior em R. Então, para quaisquer $a, b, c, e \in R$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:*

1. $\varphi_n(c, b, a) = -\varphi_n(a, b, c)$;

2. $\varphi_n(a, b, c + e) = \varphi_n(a, b, c) + \varphi_n(a, b, e)$;

3. $\varphi_n(a, b + e, c) = \varphi_n(a, b, c) + \varphi_n(a, e, c)$;

4. $\varphi_n(a + e, b, c) = \varphi_n(a, b, c) + \varphi_n(e, b, c)$;

5. $2\varphi_n(a, b, c) = d_n([a, b, c]) + [d_n(c), b, a] + [c, d_n(b), a] + [c, b, d_n(a)]+$
$$+\sum_{i+j+k=n}^{1\leq i\leq n-1}[d_i(c), d_j(b), d_k(a)] + \sum_{i+j=n}^{1\leq i,j}[c, d_j(b), d_k(a)].$$

Prova. *1.* Sejam $a, b, c \in R$ e $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 2.1.3, temos que

$$d_n(abc) + d_n(cba) = d_n(abc + cba) = \sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(c) + \sum_{i+j+k=n} d_i(c)d_j(b)d_k(a).$$

Donde

$$d_n(abc) - \sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(c) = -(d_n(cba) - \sum_{i+j+k=n} d_i(c)d_j(b)d_k(a)).$$

Ou seja, $\varphi_n(a, b, c) = -\varphi_n(c, b, a)$.

2. Temos

$$\begin{aligned}
\varphi_n(a, b, c + e) &= d_n(ab(c + e)) - \sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(c + e) = \\
&= d_n(abc) - \sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(c) + d_n(abe) - \sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(e) = \\
&= \varphi_n(a, b, c) + \varphi_n(a, b, e).
\end{aligned}$$

Analogamente mostram-se *3* e *4*.

5. Por *1*, $\varphi_n(a, b, c) = -\varphi_n(c, b, a)$. Então

$$\begin{aligned}
2\varphi_n(a, b, c) &= \varphi_n(a, b, c) - \varphi_n(c, b, a) = \\
&= d_n(abc) - \sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(c) - d_n(cba) + \sum_{i+j+k=n} d_i(c)d_j(b)d_k(a) =
\end{aligned}$$

$$= \quad d_n([a,b,c]) - abd_n(c) - \sum_{i+j=n} d_i(a)d_j(b)c - \sum_{i+j+k=n}^{1\leq k\leq n-1} d_i(a)d_j(b)d_k(c) +$$

$$+ d_n(c)ba + \sum_{j+k=n} cd_j(b)d_k(a) + \sum_{i+j+k=n}^{1\leq i\leq n-1} d_i(c)d_j(b)d_k(a) =$$

$$= \quad d_n([a,b,c]) + [d_n(c),b,a] - ad_n(b)c - d_n(a)bc - \sum_{i+j=n}^{1\leq i,j} d_i(a)d_j(b)c -$$

$$- \sum_{i+j+k=n}^{1\leq k\leq n-1} d_i(a)d_j(b)d_k(c) + cd_n(b)a + cbd_n(a) + \sum_{j+k=n}^{1\leq j,k} cd_j(b)d_k(a) +$$

$$+ \sum_{i+j+k=n}^{1\leq i\leq n-1} d_i(c)d_j(b)d_k(a) =$$

$$= \quad d_n([a,b,c]) + [d_n(c),b,a] + [c,d_n(b),a] + [c,b,d_n(a)] +$$

$$+ \sum_{i+j+k=n}^{1\leq i\leq n-1} [d_i(c),d_j(b),d_k(a)] + \sum_{i+j=n}^{1\leq i,j} [c,d_j(b),d_k(a)].$$

Isto conclui a prova. ∎

Lema 2.1.5 *Sejam R um anel, n um número natural e $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma derivação tripla de Jordan de ordem superior em R. Se $\varphi_m(a,b,c) = 0$ para todo $m < n$ e para quaisquer $a,b,c \in R$, então $\varphi_n(a,b,c)r[a,b,c] + [a,b,c]r\varphi_n(a,b,c) = 0$ para todo $r,a,b,c \in R$.*

Prova. Sejam $a,b,c \in R$. Por hipótese, $\varphi_m(a,b,c) = 0$ para todo $m < n$. Portanto $\varphi_m(a,b,c)r[a,b,c] + [a,b,c]r\varphi_m(a,b,c) = 0$ para todo $r \in R$ e para todo $m < n$.

Seja $\vartheta = abcrcba + cbarabc$, com $r \in R$. Por um lado, pela expressão de d_n,

$$d_n(\vartheta) = d_n(a(bcrcb)a + c(barab)c) =$$

$$= \sum_{i+j+k=n} (d_i(a)d_j(b(crc)b)d_k(a) + d_i(c)d_j(b(ara)b)d_k(c)) =$$

$$= \sum_{i+j+k=n} (d_i(a) \sum_{l+t+u=j} d_l(b)d_t(crc)d_u(b)d_k(a) + d_i(c) \sum_{l+t+u=j} d_l(b)d_t(ara)d_u(b)d_k(c)) =$$

$$= \sum_{i+j+k=n} (d_i(a) \sum_{l+t+u=j} d_l(b) \sum_{s+p+q=t} d_s(c)d_p(r)d_q(c)d_u(b)d_k(a) +$$

$$+ d_i(c) \sum_{l+t+u=j} d_l(b) \sum_{s+p+q=t} d_s(a)d_p(r)d_q(a)d_u(b)d_k(c)) =$$

$$= \sum_{i+l+s+p+q+u+k=n} (d_i(a)d_l(b)d_s(c)d_p(r)d_q(c)d_u(b)d_k(a) + d_i(c)d_l(b)d_s(a)d_p(r)d_q(a)d_u(b)d_k(c)).$$

Seja

$$y = \sum_{i+l+s+p+q+u+k=n} (d_i(a)d_l(b)d_s(c)d_p(r)d_q(c)d_u(b)d_k(a) + d_i(c)d_l(b)d_s(a)d_p(r)d_q(a)d_u(b)d_k(c)).$$

No entanto, pelo Lema 2.1.3,

$$\begin{aligned} d_n(\vartheta) &= d_n((abc)r(cba) + (cba)r(abc)) = \\ &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} (d_\alpha(abc)d_\beta(r)d_\gamma(cba) + d_\alpha(cba)d_\beta(r)d_\gamma(abc)). \end{aligned}$$

Seja $x = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} (d_\alpha(abc)d_\beta(r)d_\gamma(cba) + d_\alpha(cba)d_\beta(r)d_\gamma(abc))$.

Igualando-se as expressões de $d_n(\vartheta)$ acima, obtemos $x - y = 0$.

Sejam $x_1 = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} d_\alpha(abc)d_\beta(r)d_\gamma(cba)$ e $x_2 = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} d_\alpha(cba)d_\beta(r)d_\gamma(abc)$ o primeiro e o segundo somatórios de x, respectivamente.

Da mesma forma, sejam $y_1 = \sum_{i+l+s+p+q+u+k=n} d_i(a)d_l(b)d_s(c)d_p(r)d_q(c)d_u(b)d_k(a)$ e $y_2 = \sum_{i+l+s+p+q+u+k=n} d_i(c)d_l(b)d_s(a)d_p(r)d_q(a)d_u(b)d_k(c)$ o primeiro e o segundo somatórios de y, respectivamente.

Calculemos agora x_1. Então

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{\beta=0}^{n} \sum_{\alpha+\gamma=n-\beta} d_\alpha(abc)d_\beta(r)d_\gamma(cba) = \\ &= abcrd_n(cba) + d_n(abc)rcba + \sum_{\alpha+\gamma=n}^{\alpha,\gamma\leq n-1} d_\alpha(abc)rd_\gamma(cba) + \sum_{\beta=1}^{n-2} \sum_{\alpha+\gamma=n-\beta} d_\alpha(abc)d_\beta(r)d_\gamma(cba) + \\ &\quad + abcd_{n-1}(r)d_1(cba) + d_1(abc)d_{n-1}(r)cba + abcd_n(r)cba. \end{aligned}$$

Pela hipótese ($\varphi_m(a,b,c) = 0$ para todo $m < n$) aplicada a cada somatório acima, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= abcrd_n(cba) + d_n(abc)rcba + \sum_{\alpha+\gamma=n}^{\alpha,\gamma\leq n-1} \sum_{i+j+l=\alpha} d_i(a)d_j(b)d_l(c)r \sum_{u+k+s=\gamma} d_u(c)d_k(b)d_s(a)+ \\ &+ \sum_{\beta=1}^{n-2} \sum_{\alpha+\gamma=n-\beta} \sum_{i+j+l=\alpha} d_i(a)d_j(b)d_l(c)d_\beta(r) \sum_{u+k+s=\gamma} d_u(c)d_k(b)d_s(a)+ \\ &+abcd_{n-1}(r)d_1(c)ba + abcd_{n-1}(r)cd_1(b)a + abcd_{n-1}(r)cbd_1(a)+ \\ &+d_1(a)bcd_{n-1}(r)cba + ad_1(b)cd_{n-1}(r)cba + abd_1(c)d_{n-1}(r)cba + abcd_n(r)cba. \end{aligned}$$

Podemos escrever y_1 como

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{i+l+s+q+u+k=n-p} d_i(a)d_l(b)d_s(c)d_p(r)d_q(c)d_u(b)d_k(a) + abcd_n(r)cba = \\ &= abcr \sum_{q+u+k=n} d_q(c)d_u(b)d_k(a) + \sum_{i+l+s=n} d_i(a)d_l(b)d_s(c)rcba+ \\ &+ \sum_{i+l+s+q+u+k=n}^{1\leq i+l+s\leq n-1} d_i(a)d_l(b)d_s(c)rd_q(c)d_u(b)d_k(a)+ \\ &+ \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{i+l+s+q+u+k=n-p} d_i(a)d_l(b)d_s(c)d_p(r)d_q(c)d_u(b)d_k(a) + d_1(a)bcd_{n-1}(r)cba+ \\ &+ad_1(b)cd_{n-1}(r)cba + abd_1(c)d_{n-1}(r)cba + abcd_{n-1}(r)d_1(c)ba+ \\ &+abcd_{n-1}(r)cd_1(b)a + abcd_{n-1}(r)cbd_1(a) + abcd_n(r)cba. \end{aligned}$$

Assim, $x_1 - y_1 = \varphi_n(a,b,c)rcba + abcr\varphi_n(c,b,a)$.

Trocando a por c em x_1 e em y_1, obtemos $x_2 - y_2 = \varphi_n(c,b,a)rabc + cbar\varphi_n(a,b,c)$. Segue de $x - y = 0$ que $\varphi_n(a,b,c)rcba + abcr\varphi_n(c,b,a) + \varphi_n(c,b,a)rabc + cbar\varphi_n(a,b,c) = 0$.

Pelo Lema 2.1.4, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_n(a,b,c)rcba - abcr\varphi_n(a,b,c) - \varphi_n(a,b,c)rabc + cbar\varphi_n(a,b,c) = \\ &= \varphi_n(a,b,c)r(cba - abc) + (cba - abc)r\varphi_n(a,b,c) = \\ &= \varphi_n(a,b,c)r[c,b,a] + [c,b,a]r\varphi_n(a,b,c) = \\ &= -(\varphi_n(a,b,c)r[a,b,c] + [a,b,c]r\varphi_n(a,b,c)), \quad \text{que é o resultado procurado.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 2.1.6 *Sejam R um anel semiprimo livre de 2-torção e $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma derivação tripla de Jordan de ordem superior de R. Se $\varphi_m(a,b,c) = 0$ para todo $a,b,c \in R$ e para todo $m < n$, n fixo, então $\varphi_n(a,b,c)xd_k([a,b,c]) = 0$ e $d_k([a,b,c])x\varphi_n(a,b,c) = 0$ para todo $k \leq m$ e para todo $x \in R$.*

Prova. Como conseqüência imediata do Lema 2.1.5 e das Proposições 1.1.6 e 1.1.7, obtemos

$$\varphi_n(a_1,a_2,a_3)x[b_1,b_2,b_3] = 0, \text{ para todo } x, a_i, b_i \in R, \quad i = 1,2,3. \tag{2.1}$$

Vamos provar a primeira parte. Para $k = 0$ o resultado é válido por (2.1).

Suponhamos $\varphi_n(a,b,c)xd_l([a,b,c]) = 0$ para todo $l < k \leq m$. Então,

$$\begin{aligned}\varphi_n(a,b,c)xd_k([a,b,c]) &= \varphi_n(a,b,c)xd_k(abc - cba) = \\ &= \varphi_n(a,b,c)xd_k(abc) - \varphi_n(a,b,c)xd_k(cba).\end{aligned}$$

Mas, $\varphi_k(a,b,c) = 0$, pois $k < n$ e, portanto, $d_k(abc) = \sum\limits_{i+j+l=k} d_i(a)d_j(b)d_l(c)$.

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\varphi_n(a,b,c)xd_k([a,b,c]) &= \varphi_n(a,b,c)x(\sum_{i+j+l=k} d_i(a)d_j(b)d_l(c) - d_i(c)d_j(b)d_l(a)) = \\ &= \varphi_n(a,b,c)x\sum_{i+j+l=k}[d_i(a),d_j(b),d_l(c)] = 0, \quad \text{por (2.1)}.\end{aligned}$$

Logo $\varphi_n(a,b,c)xd_k([a,b,c]) = 0$ para todo $k \leq m$ e para todo $x \in R$.

Da mesma forma, $d_k([a,b,c])x\varphi_n(a,b,c) = 0$ para todo $k \leq m$ e para todo $x \in R$. ∎

Lema 2.1.7 *Sejam R um anel semiprimo livre de 2-torção e $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma derivação tripla de Jordan de ordem superior de R. Então $\varphi_n(a,b,c) = 0$ para todo $a,b,c \in R$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Prova. Note que $\varphi_0(a,b,c) = 0$, trivialmente.

Temos que $\varphi_1(a,b,c) = 0$, pois d_1 é uma derivação ([9], Teorema 4.3).

Suponhamos, por indução, que $\varphi_m(a,b,c) = 0$ para todo $a,b,c \in R$ e para todo $m < n$, com n fixo.

Pelo Lema 2.1.4, item *5*, e pela expressão de (2.1), temos que

$$2\varphi_n(a,b,c)x\varphi_n(a,b,c) = d_n([a,b,c])x\varphi_n(a,b,c). \tag{2.2}$$

Similarmente, obtemos

$$2\varphi_n(a,b,c)x\varphi_n(a,b,c) = \varphi_n(a,b,c)xd_n([a,b,c]). \tag{2.3}$$

Pelo Lema 2.1.5, $\varphi_n(a,b,c)x[a,b,c] + [a,b,c]x\varphi_n(a,b,c) = 0$, e então

$$\begin{aligned}
0 &= d_n(\varphi_n(a,b,c)x[a,b,c] + [a,b,c]x\varphi_n(a,b,c)) = \\
&= \sum_{i+j+k=n} (d_i(\varphi_n(a,b,c))d_j(x)d_k([a,b,c]) + d_i([a,b,c])d_j(x)d_k(\varphi_n(a,b,c))) = \\
&= \varphi_n(a,b,c)\sum_{j+k=n} d_j(x)d_k([a,b,c]) + \sum_{i+j+k=n}^{i\neq 0} d_i(\varphi_n(a,b,c))d_j(x)d_k([a,b,c]) + \\
&\quad + \sum_{i+j=n} d_i([a,b,c])d_j(x)\varphi_n(a,b,c) + \sum_{i+j+k=n}^{k\neq 0} d_i([a,b,c])d_j(x)d_k(\varphi_n(a,b,c)) = \\
&= \varphi_n(a,b,c)xd_n([a,b,c]) + \varphi_n(a,b,c)d_n(x)[a,b,c] + \varphi_n(a,b,c)\sum_{j+k=n}^{j,k\neq 0} d_j(x)d_k([a,b,c]) + \\
&\quad + d_n(\varphi_n(a,b,c))x[a,b,c] + \sum_{i+j+k=n}^{i\neq 0,n} d_i(\varphi_n(a,b,c))d_j(x)d_k([a,b,c]) + [a,b,c]d_n(x)\varphi_n(a,b,c) + \\
&\quad + d_n([a,b,c])x\varphi_n(a,b,c) + \sum_{i+j=n}^{i,j\neq 0} d_i([a,b,c])d_j(x)\varphi_n(a,b,c) + [a,b,c]xd_n(\varphi_n(a,b,c)) + \\
&\quad + \sum_{i+j+k=n}^{k\neq 0,n} d_i([a,b,c])d_j(x)d_k(\varphi_n(a,b,c)).
\end{aligned}$$

Utilizando (2.1), (2.2), (2.3) e o Lema 2.1.5, chegamos a

$$\begin{aligned}
0 = {} & 4\varphi_n(a,b,c)x\varphi_n(a,b,c) + \varphi_n(a,b,c)\sum_{j+k=n}^{j,k\neq 0} d_j(x)d_k([a,b,c]) + d_n(\varphi_n(a,b,c))x[a,b,c] + \\
& + \sum_{i+j+k=n}^{i\neq 0,n} d_i(\varphi_n(a,b,c))d_j(x)d_k([a,b,c]) + \sum_{i+j=n}^{i,j\neq 0} d_i([a,b,c])d_j(x)\varphi_n(a,b,c) + \\
& + [a,b,c]xd_n(\varphi_n(a,b,c)) + \sum_{i+j+k=n}^{k\neq 0,n} d_i([a,b,c])d_j(x)d_k(\varphi_n(a,b,c)).
\end{aligned}$$

Multiplicando a relação acima por $\varphi_n(a,b,c)y$ à esquerda, por $y\varphi_n(a,b,c)$ à direita, e usando (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & 4\varphi_n(a,b,c)y\varphi_n(a,b,c)x\varphi_n(a,b,c)y\varphi_n(a,b,c)+ \\ & +\varphi_n(a,b,c)y\varphi_n(a,b,c)\sum_{j+k=n}^{j,k\neq 0} d_i(x)d_k([a,b,c])y\varphi_n(a,b,c)+ \\ & +\varphi_n(a,b,c)y\sum_{i+j+k=n}^{i\neq 0,n} d_i(\varphi_n(a,b,c))d_j(x)d_k([a,b,c])y\varphi_n(a,b,c)+ \\ & +\varphi_n(a,b,c)y\sum_{i+j=n}^{i,j\neq 0} d_i([a,b,c])d_j(x)\varphi_n(a,b,c)y\varphi_n(a,b,c)+ \\ & +\varphi_n(a,b,c)y\sum_{i+j+k=n}^{k\neq 0,n} d_i([a,b,c])d_j(x)d_k(\varphi_n(a,b,c))y\varphi_n(a,b,c). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pela hipótese de indução e pelo Lema 2.1.6, a expressão (2.4) se reduz a $4\varphi_n(a,b,c)y\varphi_n(a,b,c)x\varphi_n(a,b,c)y\varphi_n(a,b,c)=0$, onde a,b,c,x,y são elementos arbitrários de R. Como R é semiprimo livre de 2-torção, segue imediatamente que $\varphi_n(a,b,c)=0$ para todo $a,b,c\in R$. Isto prova o lema. ■

Observe que, nas condições do Lema 2.1.7, temos

$$d_n(a,b,c)=\sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(c) \text{ para todo } a,b,c\in R. \tag{2.5}$$

Esta igualdade será doravante livremente usada.

Estamos agora em condições de provar o Teorema 2.1.2.

Prova do Teorema 2.1.2. Sabemos que $d_1(ab)=ad_1(b)+d_1(a)b$ ([9], Teorema 4.3).

Suponhamos, por hipótese de indução, que $d_m(ab)=\sum_{i+j=m} d_i(a)d_j(b)$ para todo $a,b\in R$ e para todo $m<n$. Seja $w=d_n(abxab)$. Por (2.5), temos que

$$\begin{aligned} w \;&=\; d_n(a(bxa)b)=\sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(bxa)d_k(b)=\sum_{i+j+k=n} d_i(a)\sum_{l+s+t=j} d_l(b)d_s(x)d_t(a)d_k(b)= \\ &=\; \sum_{i+l+s+t+k=n} d_i(a)d_l(b)d_s(x)d_t(a)d_k(b). \end{aligned}$$

Por outro lado, $w = d_n((ab)x(ab)) = \sum_{i+j+k=n} d_i(ab)d_j(x)d_k(ab)$.

Comparando as duas expressões de w, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= d_n(ab)xab + abxd_n(ab) + \sum_{i+j+k=n}^{i,k\neq n} d_i(ab)d_j(x)d_k(ab) - \sum_{i+l=n} d_i(a)d_l(b)xab - \\
&\quad -abx \sum_{t+k=n} d_t(a)d_k(b) - \sum_{\substack{i+l+s+t+k=n \\ i+l\neq n \\ t+k\neq n}} d_i(a)d_l(b)d_s(x)d_t(a)d_k(b) = \\
&= (d_n(ab) - \sum_{i+l=n} d_i(a)d_l)b))xab + abx(d_n(ab) - \sum_{i+l=n} d_i(a)d_l(b)) + \\
&\quad + \sum_{i+j+k=n}^{i,k\neq n} d_i(ab)d_j(x)d_k(ab) - \sum_{r+s+v=n}^{r,v\neq n} \sum_{i+l=r} d_i(a)d_l(b)d_s(x) \sum_{t+k=v} d_t(a)d_k(b).
\end{aligned}$$

Então, por hipótese de indução:

$(d_n(ab) - \sum_{i+j=n} d_i(a)d_j(b))xab + abx(d_n(ab) - \sum_{i+j=n} d_i(a)d_j(b)) = 0$ para todo $a, b, x \in R$.

Usando as Proposições 1.1.6 e 1.1.7 novamente, obtemos

$(d_n(ab) - \sum_{i+j=n} d_i(a)d_j(b))xcd = 0$ para todo $a, b, c, d, x \in R$.

Como R é semiprimo, tomando, em particular, $d = d_n(ab) - \sum_{i+j=n} d_i(a)d_j(b)$, segue que $d_n(ab) = \sum_{i+j=n} d_i(a)d_j(b)$, o que completa a prova. ■

É conhecido que toda derivação de Jordan num anel semiprimo livre de 2-torção é uma derivação tripla de Jordan ([11], Teorema 4.3). Vamos generalizar esta propriedade para DJOS. Em particular, obteremos daqui que toda DJOS num anel semiprimo livre de 2-torção é uma DOS.

Teorema 2.1.8 *Sejam R um anel semiprimo livre de 2-torção e $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DJOS de R. Então D é uma derivação tripla de Jordan de ordem superior de R.*

Prova. Sejam $a, b \in R$, $n \in \mathbb{N}$. Inicialmente vamos mostrar que

$$d_n(ab + ba) = \sum_{i+j=n} (d_i(a)d_j(b) + d_i(b)d_j(a)). \tag{2.6}$$

Dado que $d_n(a^2) = \sum\limits_{i+j=n} d_i(a)d_j(a)$, linearizando esta relação com respeito a a, obtemos

$$\begin{aligned} d_n((a+b)^2) &= \sum_{t+u=n} d_t(a+b)d_u(a+b) = \sum_{t+u=n} (d_t(a)+d_t(b))(d_u(a)+d_u(b)) = \\ &= \sum_{t+u=n} d_t(a)d_u(a) + \sum_{t+u=n} d_t(a)d_u(b) + \sum_{t+u=n} d_t(b)d_u(a) + \sum_{t+u=n} d_t(b)d_u(b). \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned} d_n((a+b)^2) &= d_n(a^2+ab+ba+b^2) = d_n(a^2) + d_n(ab+ba) + d_n(b^2) = \\ &= d_n(ab+ba) + \sum_{i+j=n} d_i(a)d_j(a) + \sum_{r+s=n} d_r(b)d_s(b). \end{aligned}$$

Comparando as duas expressões e redenominando os índices, chegamos ao resultado procurado.

Seja agora $\omega = d_n(a(ab+ba)+(ab+ba)a)$. Usando o resultado acima com $ab+ba$ no lugar de b, temos

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i+j=n} d_i(a)d_j(ab+ba) + \sum_{i+j=n} d_i(ab+ba)d_j(a) = \\ &= \sum_{i+j=n} d_i(a)(\sum_{r+s=j} d_r(a)d_s(b) + \sum_{r+s=j} d_r(b)d_s(a)) + \sum_{i+j=n} (\sum_{k+l=i} d_k(a)d_l(b) + \sum_{k+l=i} d_k(b)d_l(a))d_j(a) = \\ &= \sum_{i+j=n}\sum_{r+s=j} d_i(a)d_r(a)d_s(b) + 2\sum_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(a) + \sum_{i+j=n}\sum_{k+l=i} d_k(b)d_l(a)d_j(a). \end{aligned}$$

Por outro lado, $\omega = d_n((a^2b+ba^2)+2aba) = d_n(a^2b+ba^2) + 2d_n(aba)$.

Pela relação (2.6) e sendo D uma DJOS, temos que

$$\omega = 2d_n(aba) + \sum_{i+j=n}\sum_{r+s=i} d_r(a)d_s(a)d_j(b) + \sum_{i+j=n} d_i(b) \sum_{k+l=j} d_k(a)d_l(a).$$

Comparando as duas expressões de ω e redenominando os índices, obtemos $2d_n(aba) = 2\sum\limits_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(a)$. Como R é livre de 2-torção, segue que $d_n(aba) = \sum\limits_{i+j+k=n} d_i(a)d_j(b)d_k(a)$. Logo D é uma derivação tripla de Jordan de ordem superior, o que completa a prova. ∎

Obtemos assim como corolário o nosso resultado principal em ([16], Teorema 2.2.1).

Corolário 2.1.9 *Sejam R um anel semiprimo livre de 2-torção e $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DJOS de R. Então D é uma derivação de ordem superior de R.*

Prova. Imediata dos Teoremas 2.1.8 e 2.1.2. ∎

2.2 DJOS em Ideais de Lie

Em 1984, Awtar ([5], Teorema) estendeu o resultado de Herstein ([23], Teorema 3.3) a ideais de Lie. O autor prova que se R é um anel primo, $car(R) \neq 2$, U é um ideal de Lie de R tal que $u^2 \in U$ para todo $u \in U$, e d é uma aplicação aditiva de R em R satisfazendo $d(u^2) = d(u)u + ud(u)$ para todo $u \in U$, então $d(uv) = d(u)v + ud(v)$ para todo $u, v \in U$.

Aqui generalizamos este resultado a derivações de ordem superior. O principal teorema afirma que se R é um anel primo livre de 2-torção, U é um ideal de Lie de R tal que $u^2 \in U$ para todo $u \in U$, $U \not\subset Z(R)$ e $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de aplicações aditivas de R em R satisfazendo as condições $d_0 = id_R$ e $d_i(u^2) = \sum\limits_{j+l=i} d_j(u)d_l(u)$ para todo $u \in U$ e para todo $i \in \mathbb{N}$, então D satisfaz $d_i(uv) = \sum\limits_{j+l=i} d_j(u)d_l(v)$ para todo $u, v \in U$ e para todo $i \in \mathbb{N}$ (Teorema 2.2.11). Além disso mostramos que, nas mesmas condições do Teorema 2.2.11, se o ideal de Lie U estiver contido no centro do anel, então o resultado não mais é válido (Exemplo 2.2.12).

Definição 2.2.1 *Sejam R um anel não necessariamente com unidade e U um ideal de Lie não-nulo de R. Uma seqüência de aplicações aditivas de R em R, $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (ou $0 \leq i \leq m$ para algum m), que satisfaz as condições $d_0 = id_R$ e $d_i(u^2) = \sum_{j=0}^{i} d_j(u)d_{i-j}(u)$ para todo $u \in U$ (respectivamente, $d_i(uv) = \sum_{j=0}^{i} d_j(u)d_{i-j}(v)$ para todo $u, v \in U$) e para todo $i \in \mathbb{N}$, é dita uma* DJOS de U em R *(respectivamente,* DOS de U em R*).*

Sejam R um anel primo livre de 2-torção não necessariamente com unidade e U um ideal de Lie de R que satisfaz a condição $u^2 \in U$ para todo $u \in U$. Sejam $u, v \in U$. Note que $(uv + vu) = (u + v)^2 - (u^2 + v^2)$. Como $u, v \in U$, então $u^2, v^2 \in U$ e, como U é um grupo aditivo, segue que $uv + vu \in U$. Por outro lado, como $u \in U$, temos que $[u, v] = uv - vu \in U$, pois U é um ideal de Lie de R. Como U é um grupo aditivo, segue que $uv + vu + uv - vu = 2uv \in U$. Conseqüentemente, $4uvu = 2u(2vu) \in U$ para todo $u, v \in U$. Estas observações serão usadas livremente no que segue.

Em toda a seção R é um anel não necessariamente com unidade e U é um ideal de Lie não-nulo de R que satisfaz a condição $u^2 \in U$ para todo $u \in U$.

Iniciamos com um lema.

Lema 2.2.2 *Sejam $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DJOS de U em R. Então, para todo $u, v, w \in U$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, vale*

1. $d_n(uv + vu) = \sum\limits_{i+j=n} d_i(u)d_j(v) + d_i(v)d_j(u)$.

Se R é livre de 2-torção, valem ainda

2. $d_n(uvu) = \sum\limits_{i+j+k=n} d_i(u)d_j(v)d_k(u)$;

3. $d_n(uvw + wvu) = \sum\limits_{i+j+k=n} d_i(u)d_j(v)d_k(w) + d_i(w)d_j(v)d_k(u)$.

Prova. *1.* Como $u^2 \in U$, temos $d_n(u^2) = \sum\limits_{i+j=n} d_i(u)d_j(u)$. Linearizando a relação com respeito a u, obtemos:

$$\begin{aligned} d_n((u+v)^2) &= \sum_{l+k=n} d_l(u+v)d_k(u+v) = \sum_{l+k=n} (d_l(u)+d_l(v))(d_k(u)+d_k(v)) = \\ &= \sum_{l+k=n} d_l(u)d_k(u) + \sum_{l+k=n} d_l(u)d_k(v) + \sum_{l+k=n} d_l(v)d_k(u) + \sum_{l+k=n} d_l(v)d_k(v). \end{aligned}$$

Também $d_n((u+v)^2) = d_n(u^2 + uv + vu + v^2) = d_n(u^2) + d_n(uv + vu) + d_n(v^2) =$ $= d_n(uv + vu) + \sum\limits_{i+j=n} d_i(u)d_j(u) + \sum\limits_{r+s=n} d_r(v)d_s(v)$. Comparando as duas expressões e redenominando os índices, chegamos ao resultado procurado.

2. Seja $\theta = d_n(u(uv + vu) + (uv + vu)u)$. Pondo $uv + vu \in U$ no lugar de v em *1*,

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_{i+j=n} d_i(u)d_j(uv+vu) + \sum_{i+j=n} d_i(uv+vu)d_j(u) = \\ &= \sum_{i+j=n} d_i(u)\Big(\sum_{r+s=j} d_r(u)d_s(v) + \sum_{r+s=j} d_r(v)d_s(u)\Big) + \\ &\quad + \sum_{i+j=n}\Big(\sum_{k+l=i} d_k(u)d_l(v) + \sum_{k+l=i} d_k(v)d_l(u)\Big)d_j(u) = \\ &= \sum_{i+j=n} d_i(u)\sum_{r+s=j} d_r(u)d_s(v) + \sum_{i+j=n} d_i(u)\sum_{r+s=j} d_r(v)d_s(u) + \\ &\quad + \sum_{i+j=n}\sum_{k+l=i} d_k(u)d_l(v)d_j(u) + \sum_{i+j=n}\sum_{k+l=i} d_k(v)d_l(u)d_j(u) = \\ &= \sum_{i+j=n}\sum_{r+s=j} (d_i(u)d_r(u)d_s(v) + d_r(v)d_s(u)d_j(u)) + 2\sum_{i+j+k=n} d_i(u)d_j(v)d_k(u). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $\theta = d_n((u^2v + vu^2) + 2uvu) = d_n(u^2v + vu^2) + 2d_n(uvu)$. Assim, pelo item *1* e por D ser uma DJOS de U em R, segue que:

$$\theta = 2d_n(uvu) + \sum_{i+j=n}\sum_{r+s=i} d_r(u)d_s(u)d_j(v) + \sum_{i+j=n} d_i(v)\sum_{k+l=j} d_k(u)d_l(u).$$

Comparando as duas expressões de θ e redenominando os índices, obtemos:
$2d_n(uvu) = 2\sum_{i+j+k=n} d_i(u)d_j(v)d_k(u)$. Como R é livre de 2-torção, o resultado segue.

3. Linearizemos o item *2* com respeito a u.

Seja então $\gamma = d_n((u+w)v(u+w))$. Temos $\gamma = d_n(uvu) + d_n(wvw) + d_n(uvw + wvu)$. Contudo, pelo item *2*,

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{i+j+k=n} d_i(u+w)d_j(v)d_k(u+w) = \\
&= \sum_{i+j+k=n} d_i(u)d_j(v)d_k(u) + \sum_{i+j+k=n} d_i(u)d_j(v)d_k(w) + \\
&\quad + \sum_{i+j+k=n} d_i(w)d_j(v)d_k(u) + \sum_{i+j+k=n} d_i(w)d_j(v)d_k(w) = \\
&= d_n(uvu) + \sum_{i+j+k=n} d_i(u)d_j(v)d_k(w) + \sum_{i+j+k=n} d_i(w)d_j(v)d_k(u) + d_n(wvw).
\end{aligned}$$

Logo $d_n(uvw + wvu) = \sum_{i+j+k=n} (d_i(u)d_j(v)d_k(w) + d_i(w)d_j(v)d_k(u))$ para todo $u, v, w \in U$, o que prova o lema. ∎

Para qualquer DJOS de U em R, $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$, definimos $\varphi_n(u,v)$ por

$$\varphi_n(u,v) \doteq d_n(uv) - \sum_{i+j=n} d_i(u)d_j(v),$$

para todo $u, v \in U$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizer que $\varphi_n(u,v) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $u, v \in U$ equivale a dizer que D é uma DOS de U em R.

Lema 2.2.3 *Seja $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DJOS de U em R. Então, para todo $u, v, w \in U$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:*

1. $\varphi_n(v,u) = -\varphi_n(u,v)$;
2. $\varphi_n(u, v+w) = \varphi_n(u,v) + \varphi_n(u,w)$;
3. $\varphi_n(u+v, w) = \varphi_n(u,w) + \varphi_n(v,w)$.

Prova. É inteiramente análoga à feita no Lema 2.1.4. ∎

Observação 2.2.4 Na prova do item *2* do próximo lema, utilizaremos o anel oposto R^{op} de R. Lembramos que R^{op} é formado por todos os elementos da forma a^{op} em correspondência biunívoca com os elementos $a \in R$, com soma e multiplicação dadas por $a^{op}+b^{op} = (a+b)^{op}$ e $a^{op}b^{op} = (ba)^{op}$ para todo $a, b \in R$. O anel oposto R^{op} é canonicamente anti-isomorfo ao anel R. Maiores detalhes podem ser vistos em ([30]).

Se $a, b \in R$, então $[a, b]^{op} = [b, a]$. Além disso, se R é primo livre de 2-torção, então R^{op} também o é. Finalmente, seja $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DOS em R. Para $a \in R$ e $i \in \mathbb{N}$, definamos $d_i(a^{op}) = d_i(a)^{op}$. É fácil ver que esta aplicação está bem-definida e que forma uma DOS em R^{op}. Logo $(\varphi_i(a, b))^{op} = \varphi_i(b, a)$.

Lema 2.2.5 *Sejam R um anel livre de 2-torção, n um número natural, $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DJOS de U em R e $u, v \in U$. Se $\varphi_m(u, v) = 0$ para todo $m < n$, então:*

1. $\varphi_n(u, v)[u, v] = 0$;
2. $[u, v]\varphi_n(u, v) = 0$.

Prova. *1.* Sabemos que se $u, v \in U$, então $2uv \in U$.

Portanto, $4d_n((uv)^2) = d_n((2uv)^2) = \sum_{i+j=n} d_i(2uv)d_j(2uv) = 4\sum_{i+j=n} d_i(uv)d_j(uv)$. Sendo R livre de 2-torção, resulta que

$$d_n((uv)^2) = \sum_{i+j=n} d_i(uv)d_j(uv).$$

Pelo Lema 2.2.2:

$$\begin{aligned}
2d_n(uv(uv) + (uv)vu) &= d_n(uv(2uv) + (2uv)vu) = \\
&= \sum_{i+j+k=n}(d_i(u)d_j(v)d_k(2uv) + d_i(2uv)d_j(v)d_k(u)) = \\
&= 2\sum_{i+j+k=n}(d_i(u)d_j(v)d_k(uv) + d_i(uv)d_j(v)d_k(u)).
\end{aligned}$$

Então

$$d_n(uv(uv) + (uv)vu) = \sum_{i+j+k=n}(d_i(u)d_j(v)d_k(uv) + d_i(uv)d_j(v)d_k(u)).$$

Por outro lado, $2d_n(uv(uv) + (uv)vu) = 2d_n((uv)^2) + 2d_n(uv^2u)$. Segue que

$$\begin{aligned} d_n(uv(uv)+(uv)vu) &= d_n((uv)^2)+d_n(uv^2u) = \\ &= \sum_{i+j=n} d_i(uv)d_j(uv) + \sum_{i+j+k=n} d_i(u)d_j(v^2)d_k(u) = \\ &= \sum_{i+j=n} d_i(uv)d_j(uv) + \sum_{i+j+k=n} d_i(u)\sum_{r+s=j} d_r(v)d_s(v)d_k(u). \end{aligned}$$

Igualando esta última expressão à anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j+k=n} d_i(u)d_j(v)d_k(uv) + \sum_{i=0}^{n} d_i(uv)\sum_{j+k=n-i} d_j(v)d_k(u) &= \sum_{i=0}^{n} d_i(uv)d_{n-i}(uv)+ \\ &+ \sum_{i+j+k=n} d_i(u)\sum_{r+s=j} d_r(v)d_s(v)d_k(u). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}(\sum_{l+s=i} d_l(u)d_s(v)d_{n-i}(uv) + d_i(uv)\sum_{j+k=n-i} d_j(v)d_k(u)) &= \sum_{i=0}^{n} d_i(uv)d_{n-i}(uv)+ \\ &+ \sum_{i+j+k=n} d_i(u)\sum_{r+s=j} d_r(v)d_s(v)d_k(u). \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}(d_i(uv) - \sum_{l+s=i} d_l(u)d_s(v))d_{n-i}(uv) &= \sum_{i=0}^{n} d_i(uv)\sum_{j+k=n-i} d_j(v)d_k(u) - \\ &- \sum_{i+j+k=n} d_i(u)\sum_{r+s=j} d_r(v)d_s(v)d_k(u). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_n(u,v)uv + \sum_{i=0}^{n-1}\varphi_i(u,v)d_{n-i}(uv) &= d_n(uv)vu + \sum_{i=0}^{n-1} d_i(uv)\sum_{j+k=n-i} d_j(v)d_k(u) - \\ &- \sum_{i+j+k=n} d_i(u)\sum_{r+s=j} d_r(v)d_s(v)d_k(u). \end{aligned}$$

Pela hipótese, segue que

$$\begin{aligned} \varphi_n(u,v)uv &= d_n(uv)vu - \sum_{i=0}^{n} d_i(u)\sum_{r+s+k=n-i} d_r(v)d_s(v)d_k(u) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} d_i(uv)\sum_{j+k=n-i} d_j(v)d_k(u). \end{aligned}$$

Explicitando o termo em que $r = n - i$:

$$\varphi_n(u,v)uv = d_n(uv)vu - \sum_{i=0}^{n} d_i(u)d_{n-i}(v)vu - \sum_{i=0}^{n} d_i(u) \sum_{r+s+k=n-i}^{r\neq n-i} d_r(v)d_s(v)d_k(u) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} d_i(uv) \sum_{j+k=n-i} d_j(v)d_k(u).$$

Donde $\varphi_n(u,v)[u,v] = \sum_{i=0}^{n-1} d_i(uv) \sum_{j+k=n-i} d_j(v)d_k(u) - \sum_{i=0}^{n} d_i(u) \sum_{r+s+k=n-i}^{r\neq n-i} d_r(v)d_s(v)d_k(u)$.

No último somatório, se $i = n$, então $r \neq 0$ (pois $r \neq n - i$). Por outro lado temos, neste caso, $r + s + k = 0$. Donde $r = s = k = 0$, uma contradição. Logo $i \neq n$. Então temos

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_i(u) \sum_{r+s+k=n-i}^{r\neq n-i} d_r(v)d_s(v)d_k(u) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i(u) \sum_{r=0}^{n-i-1} d_r(v) \sum_{s+k=n-i-r} d_s(v)d_k(u) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{l+t=i} d_l(u)d_t(v) \sum_{j+k=n-i} d_j(v)d_k(u).$$

Portanto, substituindo acima

$$\varphi_n(u,v)[u,v] = \sum_{i=0}^{n-1} (d_i(uv) - \sum_{l+t=i} d_l(u)d_t(v)) \sum_{j+k=n-i} d_j(v)d_k(u) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(u,v) \sum_{j+k=n-i} d_j(v)d_k(u) = 0.$$

2. Basta calcular $d_n(uv(2vu) + (2vu)vu)$ como no item *1*, ou então utilizar o anel oposto R^{op} de R. De fato, sejam $a = \varphi_n(u,v)$, $b = [u,v] \in R$. Pelo item *1*, $ab = 0$.

Então $[u,v]\varphi_n(u,v) = [v,u]\varphi_n(v,u) = b^{op}a^{op} = (ab)^{op} = 0$. ∎

No restante desta seção, salvo menção em contrário, R denotará um anel primo livre de 2-torção.

A prova do próximo lema é semelhante à do Lema 2.1.5. Por isso, alguns passos serão omitidos.

Lema 2.2.6 *Sejam n um número natural, $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DJOS de U em R e $u, v \in U$. Se $\varphi_m(u,v) = 0$ para todo $m < n$, então $\varphi_n(u,v)w[u,v] + [u,v]w\varphi_n(u,v) = 0$ para todo $w \in U$.*

Prova. Seja $w \in U$. Por hipótese, $\varphi_m(u,v) = 0$ para todo $m < n$. Portanto, $\varphi_m(u,v)w[u,v] + [u,v]w\varphi_m(u,v) = 0$ para todo $m < n$. Como $u, w \in U$, então $2wu \in U$ e $2u(2wu) = 4uwu \in U$. Analogamente, $4vwv \in U$.

Seja $\mu = 4(uvwvu + vuwuv) = u(4vwv)u + v(4uwu)v$. Pelo Lema 2.2.2,

$$\begin{aligned} d_n(\mu) &= d_n(u(4vwv)u) + d_n(v(4uwu)v) = \\ &= 4(\sum_{i+j+k=n} (d_i(u)d_j(vwv)d_k(u) + d_i(v)d_j(uwu)d_k(v))) = \\ &= 4\sum_{i+j+k=n} (d_i(u)\sum_{l+t+s=j} d_l(v)d_t(w)d_s(v)d_k(u) + d_i(v)\sum_{l+t+s=j} d_l(u)d_t(w)d_s(u)d_k(v)) = \\ &= 4\sum_{i+l+t+s+k=n} (d_i(u)d_l(v)d_t(w)d_s(v)d_k(u) + d_i(v)d_l(u)d_t(w)d_s(u)d_k(v)). \end{aligned}$$

Seja $y = \sum_{i+l+t+s+k=n} (d_i(u)d_l(v)d_t(w)d_s(v)d_k(u) + d_i(v)d_l(u)d_t(w)d_s(u)d_k(v))$.

Por outro lado, $\mu = (2uv)w(2vu) + (2vu)w(2uv)$. Portanto,

$$d_n(\mu) = 4\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} (d_\alpha(uv)d_\beta(w)d_\gamma(vu) + d_\alpha(vu)d_\beta(w)d_\gamma(uv)).$$

Seja $x = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} (d_\alpha(uv)d_\beta(w)d_\gamma(vu) + d_\alpha(vu)d_\beta(w)d_\gamma(uv))$.

Igualando-se as duas expressões de $d_n(\mu)$, como R é livre de 2-torção, obtemos $x - y = 0$.

Sejam $x_1 = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} d_\alpha(uv)d_\beta(w)d_\gamma(vu)$ e $x_2 = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} d_\alpha(vu)d_\beta(w)d_\gamma(uv)$ o primeiro e o segundo somatórios de x, respectivamente. Da mesma forma, sejam $y_1 = \sum_{i+l+t+s+k=n} d_i(u)d_l(v)d_t(w)d_s(v)d_k(u)$ e $y_2 = \sum_{i+l+t+s+k=n} d_i(v)d_l(u)d_t(w)d_s(u)d_k(v)$ o primeiro e o segundo somatórios de y, respectivamente.

Calculemos agora x_1. Então

$$\begin{aligned} x_1 &= uvwd_n(vu) + d_n(uv)wvu + \sum_{\alpha+\gamma=n}^{\alpha,\gamma\leq n-1} d_\alpha(uv)wd_\gamma(vu) + \sum_{\beta=1}^{n-2}\sum_{\alpha+\gamma=n-\beta} d_\alpha(uv)d_\beta(w)d_\gamma(vu) + \\ &\quad + uvd_{n-1}(w)d_1(vu) + d_1(uv)d_{n-1}(w)vu + uvd_n(w)vu. \end{aligned}$$

Pela hipótese ($\varphi_m(u,v)=0$ para todo $m<n$) aplicada a cada somatório acima, temos:

$$x_1 = uvwd_n(vu) + d_n(uv)wvu + \sum_{\alpha+\gamma=n}^{\alpha,\gamma\leq n-1} \sum_{i+j=\alpha} d_i(u)d_j(v)w \sum_{k+s=\gamma} d_k(v)d_s(u) +$$

$$+\sum_{\beta=1}^{n-2} \sum_{\alpha+\gamma=n-\beta} \sum_{i+j=\alpha} d_i(u)d_j(v)d_\beta(w) \sum_{k+s=\gamma} d_k(v)d_s(u) + uvd_{n-1}(w)d_1(v)u +$$

$$+uvd_{n-1}(w)vd_1(u) + d_1(u)vd_{n-1}(w)vu + ud_1(v)d_{n-1}(w)vu + uvd_n(w)vu.$$

Podemos escrever y_1 como

$$y_1 = uvw \sum_{q+k=n} d_q(v)d_k(u) + \sum_{i+l=n} d_i(u)d_l(v)wvu + \sum_{i+l+q+k=n}^{1\leq i+l\leq n-1} d_i(u)d_l(v)wd_q(v)d_k(u) +$$

$$+\sum_{p=1}^{n-2} \sum_{i+l+q+k=n-p} d_i(u)d_l(v)d_p(w)d_q(v)d_k(u) + d_1(u)vd_{n-1}(w)vu + ud_1(v)d_{n-1}(w)vu +$$

$$+uvd_{n-1}(w)d_1(v)u + uvd_{n-1}(w)vd_1(u) + uvd_n(w)vu.$$

Assim, $x_1 - y_1 = \varphi_n(u,v)wvu + uvw\varphi_n(v,u)$.

Trocando u por v em x_1 e em y_1, obtemos $x_2 - y_2 = \varphi_n(v,u)wuv + vuw\varphi_n(u,v)$. Segue de $x-y=0$, que $\varphi_n(u,v)wvu + uvw\varphi_n(v,u) + \varphi_n(v,u)wuv + vuw\varphi_n(u,v) = 0$. Como $\varphi_n(v,u) = -\varphi_n(v,u)$, então $\varphi_n(u,v)w[u,v] + [u,v]w\varphi_n(u,v) = 0$. ■

Lema 2.2.7 *Sejam n um número natural e $D=(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DJOS de U em R. Sejam $u,v\in U$ tais que $[u,v]\neq 0$. Se $U\not\subset Z(R)$ e $\varphi_m(u,v)=0$ para todo $m<n$, então $\varphi_n(u,v)=0$.*

Prova. Temos que, para todo $w\in U$, $[w,\varphi_n(u,v)]\in U$, i.e., $\varphi_n(u,v)w - w\varphi_n(u,v)\in U$. Como $[u,v]\in U$, segue que $2[u,v](\varphi_n(u,v)w - w\varphi_n(u,v))\in U$ também. Mas, se $\varphi_m(u,v)=0$ para todo $m<n$ então, pelo Lema 2.2.5, $[u,v]\varphi_n(u,v)=0$.

Por outro lado, pelo Lema 2.2.6, $\varphi_n(u,v)w[u,v] + [u,v]w\varphi_n(u,v) = 0$ para todo $w\in U$. Ou seja, $\varphi_n(u,v)w[u,v] = -[u,v]w\varphi_n(u,v)$, para todo $w\in U$.

Para $x,y\in U$, temos

$$\begin{aligned}
[u,v]x\varphi_n(u,v)y[u,v]x\varphi_n(u,v) &= -(\varphi_n(u,v)(x[u,v]y)[u,v])x\varphi_n(u,v) = \\
&= [u,v]x([u,v]y\varphi_n(u,v))x\varphi_n(u,v) = \\
&= -[u,v]x\varphi_n(u,v)y[u,v]x\varphi_n(u,v).
\end{aligned}$$

Portanto, $([u,v]x\varphi_n(u,v))y([u,v]x\varphi_n(u,v)) = 0$ para todo $x, y \in U$. Como $U \not\subset Z(R)$ segue, pela Proposição 1.3.6, que $[u,v]x\varphi_n(u,v) = 0$ para todo $x \in U$. Pela mesma Proposição, $[u,v] = 0$ ou $\varphi_n(u,v) = 0$. Mas, por hipótese, $[u,v] \neq 0$. Logo $\varphi_n(u,v) = 0$. ■

Lembremos que a Proposição 1.3.4 afirma que $V_R(U) = Z(R)$.

Lema 2.2.8 *Sejam n um número natural e $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DJOS de U em R. Sejam $u, v \in U$ tais que $[u,v] = 0$. Se $\varphi_m(u,v) = 0$ para todo $m < n$, então $\varphi_n(u,v) \in Z(R)$.*

Prova. Para $u, v, w \in U$, $d_n(uvw + wvu) = \sum_{i+j+k=n} d_i(u)d_j(v)d_k(w) + d_i(w)d_j(v)d_k(u)$. Mas, $[u,v] = uv - vu = 0$. Então, como $2uv \in U$ e R é livre de 2-torção, segue que

$$d_n((uv)w + w(vu)) = d_n((uv)w + w(uv)) = \sum_{i+j=n} d_i(uv)d_j(w) + d_i(w)d_j(uv).$$

Comparando as duas expressões, obtemos:

$$\sum_{i=0}^{n} d_i(u)d_{n-i}(v)w + w\sum_{i=0}^{n} d_i(v)d_{n-i}(u) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} d_i(w)\sum_{j+k=n-i} d_j(v)d_k(u) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j+k=n-i} d_j(u)d_k(v)d_i(w) =$$

$$d_n(uv)w + \sum_{i=0}^{n-1} d_i(uv)d_{n-i}(w) + wd_n(uv) + \sum_{i=1}^{n} d_i(w)d_{n-i}(uv).$$

Seja $\rho = d_n(uv)w - \sum_{i=0}^{n} d_i(u)d_{n-i}(v)w + wd_n(uv) - w\sum_{i=0}^{n} d_i(v)d_{n-i}(u)$. Então

$$\begin{aligned}
\rho &= -\sum_{i=0}^{n-1} d_i(uv)d_{n-i}(w) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j+k=n-i} d_j(u)d_k(v)d_i(w) - \\
&\quad -\sum_{i=1}^{n} d_i(w)d_{n-i}(uv) + \sum_{i=1}^{n} d_i(w)\sum_{j+k=n-i} d_j(v)d_k(u) =
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} d_i(uv)d_{n-i}(w) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j+k=i} d_j(u)d_k(v)d_{n-i}(w) -$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1} d_{n-i}(w)d_i(uv) + \sum_{i=0}^{n-1} d_{n-i}(w) \sum_{j+k=i} d_j(v)d_k(u).$$

Como $uv = vu$, temos que $d_s(uv) = d_s(vu)$ para todo $s \in \mathbb{N}$. Então a igualdade acima fica:

$$\begin{aligned}\varphi_n(u,v)w + w\varphi_n(v,u) &= -\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(u,v)d_{n-i}(w) - \sum_{i=0}^{n-1} d_{n-i}(w)\varphi_i(u,v) = \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(u,v)d_{n-i}(w) + \sum_{i=0}^{n-1} d_{n-i}(w)\varphi_i(u,v) = 0.\end{aligned}$$

Segue que $\varphi_n(u,v)w - w\varphi_n(u,v) = 0$ para todo $w \in U$.

Logo $\varphi_n(u,v) \in V_R(U) = Z(R)$. ■

Lema 2.2.9 *Seja $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DJOS de U em R. Se $U \not\subset Z(R)$ e $u \in U$ é tal que $u \in Z(R)$, então $d_n(u) \in Z(R)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Prova. Seja $v \in U$. Seguiremos por indução sobre n: para $n = 1$, $d_1(u) \in Z(R)$.

Supondo que $u, d_1(u), d_2(u), \ldots, d_{n-1}(u) \in Z(R)$, temos:

$$\begin{aligned}2d_n(uv) &= d_n(2uv) = d_n(uv + vu) = \sum_{i=0}^{n} d_i(u)d_{n-i}(v) + d_i(v)d_{n-i}(u) = \\ &= d_n(u)v + \sum_{i=0}^{n-1} d_i(u)d_{n-i}(v) + vd_n(u) + \sum_{i=1}^{n} d_i(v)d_{n-i}(u) = \\ &= d_n(u)v + vd_n(u) + \sum_{i=0}^{n-1} d_i(u)d_{n-i}(v) + \sum_{j=0}^{n-1} d_{n-j}(v)d_j(u).\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$2d_n(uv) = d_n(u)v + vd_n(u) + 2\sum_{i=0}^{n-1} d_i(u)d_{n-i}(v). \tag{2.7}$$

Por outra parte, para $w \in U$, temos que

$$d_n(u(vw + wv)) = d_n(uvw + wvu) = \sum_{i+j+k=n} d_i(u)d_j(v)d_k(w) + d_i(w)d_j(v)d_k(u) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} d_i(u) \sum_{j=0}^{n-i} d_j(v)d_{n-i-j}(w) + d_n(u)vw + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-k} d_l(w)d_{n-k-l}(v)d_k(u) + wvd_n(u).$$

Novamente pela hipótese de indução, a igualdade acima é equivalente a

$$\begin{aligned} d_n(u(vw+wv)) &= \sum_{i=0}^{n-1} d_i(u) \sum_{j=0}^{n-i} d_j(v)d_{n-i-j}(w) + d_n(u)vw + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-k} d_k(u)d_l(w)d_{n-k-l}(v) + wvd_n(u) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} d_i(u) \sum_{j=0}^{n-i} (d_j(v)d_{n-i-j}(w) + d_j(w)d_{n-i-j}(v)) + d_n(u)vw + wvd_n(u) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} d_i(u)d_{n-i}(vw+wv) + d_n(u)vw + wvd_n(u). \end{aligned}$$

Por outro lado, por (2.7), temos

$$2d_n(u(vw+wv)) = d_n(u)(vw+wv) + (vw+wv)d_n(u) + 2\sum_{i=0}^{n-1} d_i(u)d_{n-i}(vw+wv).$$

Comparando as duas expressões de $d_n(u(vw+wv))$, obtemos

$$d_n(u)(vw-wv) + (wv-vw)d_n(u) = 0.$$

Ou seja, $d_n(u)[v,w] = [v,w]d_n(u)$ para todo $v, w \in U$.

Logo, $d_n(u) \in V_R([U,U]) = V_R(U) = Z(R)$ (Proposições 1.3.5 e 1.3.6). ■

Lema 2.2.10 *Sejam n um número natural e $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DJOS de U em R. Se $U \not\subset Z(R)$ e para todo $u, v \in U$ tais que $[u,v] = 0$ tivermos $\varphi_m(u,v) = 0$ para todo $m < n$, então $\varphi_n(u,v) = 0$.*

Prova. Vimos, no Lema 2.2.8 que, sob estas hipóteses, $\varphi_n(u,v) \in Z(R)$. Como $[u,v] = 0$, temos $[u,uv] = [u^2,v] = 0$.

Por hipótese, como $u^2 \in U$, $\varphi_m(u,uv) = \varphi_m(u^2,v) = 0$ para todo $m < n$ e, pelo Lema 2.2.8, $\varphi_n(u,uv)$, $\varphi_n(u^2,v) \in Z(R)$. Segue que $\varphi_n(u,uv) - \varphi_n(u^2,v) \in Z(R)$. Ou seja,

$$d_n(u^2v) - \sum_{i=0}^{n} d_i(u)d_{n-i}(uv) - d_n(u^2v) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} d_j(u)d_{i-j}(u)d_{n-i}(v) \in Z(R).$$

Então

$$-ud_n(uv) - \sum_{i=1}^{n} d_i(u)d_{n-i}(uv) + u\sum_{i=0}^{n} d_i(u)d_{n-i}(v) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} d_j(u)d_{i-j}(u)d_{n-i}(v) \in Z(R).$$

Portanto, $-u\varphi_n(u,v) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} d_j(u)d_{i-j}(u)d_{n-i}(v) - \sum_{i=1}^{n} d_i(u)d_{n-i}(uv) \in Z(R)$.

Redenominando os índices, obtemos $-u\varphi_n(u,v) - \sum_{i=1}^{n-1} d_i(u)\varphi_{n-i}(u,v) \in Z(R)$. Mas, por hipótese, $\varphi_m(u,v) = 0$ para todo $m < n$. Segue que $u\varphi_n(u,v) \in Z(R)$.

Se $\varphi_n(u,v) \neq 0$, como R é primo e $\varphi_n(u,v) \in Z(R)$ obtemos, pela Proposição 1.1.4, que $u \in Z(R)$. Assim, pela Proposição 2.2.9, $d_n(u) \in Z(R)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $2d_n(uv) = d_n(2uv) = d_n(uv+vu) = \sum_{i=0}^{n} d_i(u)d_{n-i}(v) + d_i(v)d_{n-i}(u) = 2\sum_{i=0}^{n} d_i(u)d_{n-i}(v)$, Ou seja, $2\varphi_n(u,v) = 0$. E, como R é livre de 2-torção, concluímos que $\varphi_n(u,v) = 0$, uma contradição. A contradição prova o resultado. ∎

Teorema 2.2.11 *Sejam R um anel primo livre de 2-torção, U um ideal de Lie de R tal que $u^2 \in U$ para todo $u \in U$ e $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DJOS de U em R. Se $U \not\subset Z(R)$, então D é uma DOS de U em R.*

Prova. Sejam $u, v \in U$ e $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $\varphi_n(u,v) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Procederemos por indução sobre n. Sabemos que $\varphi_0(u,v) = 0$. Awtar ([5], Teorema) provou que $\varphi_1(u,v) = 0$. Suponhamos, por hipótese de indução, que $\varphi_m(u,v) = 0$ para todo $u, v \in U$ e para todo $m < n$. Então $d_i(uv) = \sum_{l=0}^{i} d_l(u)d_{i-l}(v)$ para todo $u, v \in U$ e para todo $i \leq m$.

Se $[u,v] \neq 0$, então $\varphi_n(u,v) = 0$ pelo Lema 2.2.7.

Se $[u,v] = 0$, então $\varphi_n(u,v) = 0$ pelo Lema 2.2.10. ∎

Exemplo 2.2.12 O Teorema 2.2.11 não vale no caso em que $U \subset Z(R)$. Porém, no caso em que d é uma derivação de Jordan de um ideal de Lie central U de R (onde $u^2 \in U$ para todo $u \in U$) em um anel R primo livre de 2-torção, então d é uma derivação usual de U em R ([5], Teorema).

Seja $R = \mathbb{K}[x]\langle y, z\rangle$ o anel livre sobre $\mathbb{K}[x]$ nas indeterminadas y e z ($\mathbb{K}$ corpo, $car(\mathbb{K}) \neq 2$, y e z comutam com x, mas não comutam entre si). É fácil ver que R é um anel primo livre de 2-torção.

Consideremos $U = \mathbb{K}[x] = Z(R)$ (U é ideal de Lie tal que $u^2 \in U$ para todo $u \in U$). Definamos $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$, d_i: $R \to R$, por:

$$\begin{array}{lcl}
d_0 & = & id_R; \\
 & & \\
d_1(x) & = & y \\
d_1(x^i) & = & d_1(x^{i-1})x + xd_1(x^{i-1}) \\
d_1(x^i w) & = & 0, \ \forall i \in \mathbb{N}, \ \text{onde } w \text{ é palavra em } y, z; \\
 & & \\
d_2(x) & = & z \\
d_2(x^{2i}) & = & d_2(x^i)x^i + d_1(x^i)d_1(x^i) + x^i d_2(x^i), \ \forall i \geq 1 \\
d_2(x^{2i+1}) & = & 0, \ \ \forall i \geq 1 \\
d_2(x^i w) & = & 0, \ \forall i \in \mathbb{N}, \ \text{onde } w \text{ é palavra em } y, z.
\end{array}$$

E, para todo $n \geq 2$:

$$\begin{array}{lcl}
d_n(x^{2i}) & = & \sum_{i=0}^{n} d_j(x^i)d_{n-j}(x^i), \ \forall i \geq 1 \\
d_n(x^{2i+1}) & = & 0, \ \ \forall i \geq 1 \\
d_n(x^i w) & = & 0, \ \forall i \in \mathbb{N}, \ \text{onde } w \text{ é palavra em } y, z.
\end{array}$$

Por construção, temos que D é uma DJOS de $U = \mathbb{K}[x] = Z(R)$ em R. No entanto, D não é uma DOS de U em R, pois $d_2(x^3) = 0 \neq 3x^2z + 3xy^2 = x(2xz + y^2) + y2xy + zx^2 = = xd_2(x^2) + d_1(x)d_1(x) + d_2(x)x^2$.

Logo, o Teorema 2.2.11 não é válido se $U \subset Z(R)$.

Capítulo 3

DOS com Relações de Dependência Linear

3.1 Introdução

Neste capítulo estudamos as DOS que satisfazem uma relação de dependência R ou Q-linear sobre R ou Q, onde R é um anel primo não necessariamente com unidade e Q é o anel de quocientes (à direita) de Martindale de R. Os resultados que obtivemos estendem outros obtidos por V.K. Kharchenko ([28]), A. Leroy e J. Matczuk ([35]) em seus estudos sobre derivações algébricas. Estudamos mais detalhadamente as DOS que possuem relações de dependência linear mônica, o que tem sido pouco considerado até hoje. Nosso objetivo principal é provar o

Teorema 3.1.1 *Seja $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DOS R-LD de comprimento n sobre R. Então D é Q-LD mônica de comprimento n sobre R. Além disso, se $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1} \in Q$ são tais que $\sum_{i=0}^{n} d_i(x)q_i = 0$ para todo $x \in R$ é uma relação de comprimento mínimo, onde $q_n = 1$, então d_1 é X-interna dada por $d_1(x) = I_{q_{n-1}}(x)$ e $d_m(x) = I_{q_{n-m}}(x) - \sum_{i=1}^{m-1} d_{m-i}(x)q_{n-i}$, para todo $x \in R$, $2 \leq m \leq n$. Mais ainda, $q_0 = 0$.*

Sua recíproca é obtida como caso particular do

Teorema 3.1.2 *Sejam T um anel com unidade, $n \in \mathbb{N}$ e $t_0, t_1, \ldots, t_n \in T$, onde $t_0 = 0$ e $t_n = 1$. Seja $D = (d_i)$ $(0 \leq i \leq n)$ uma seqüência de aplicações de T definida por $d_0 = id_T$, $d_1(x) = I_{t_{n-1}}(x)$ e $d_m(x) = I_{t_{n-m}}(x) - \sum_{i=1}^{m-1} d_{m-i}(x)t_{n-i}$, para todo $x \in T$, $2 \leq m \leq n$. Então D é uma DOS T-LD mônica sobre T.*

A minimalidade do comprimento da combinação linear no Teorema 3.1.2 nem sempre é garantida. Encontramos condições sobre os coeficientes da combinação linear mônica que garantem a minimalidade do comprimento da mesma (Teorema 3.3.3).

Em todo o capítulo, $D = (d_i)$ denotará uma DOS em R. Consideraremos os índices $i \in \mathbb{N}$, ou $0 \leq i \leq n$ para algum n, dependendo do caso.

Seja $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DOS de R. Então D pode ser estendida de modo único a uma DOS $D^\star = (d_i^\star)_{i\in\mathbb{N}}$ de Q, onde $d_i^\star \mid_R = d_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ (Proposição 1.5.1). Provamos que as relações de dependência linear são preservadas ao passarmos de D para $D^\star$. O Teorema 3.2.5 afirma que se D é uma DOS de R, então as seguintes condições são equivalentes: (i). D é R-LD sobre R; (ii). D é Q-LD sobre R; (iii). D é Q-LD mônica sobre R; (iv). $D^\star$ é Q-LD sobre Q; (v). $D^\star$ é R-LD sobre Q. Ademais, se estas condições equivalentes são verificadas, então o comprimento das relações minimais em cada caso é o mesmo.

Finalmente, apresentamos alguns resultados que complementam o capítulo, bem como alguns exemplos.

3.2 DOS com Relações de Dependência Linear

Iniciamos com uma definição.

Seja $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DOS de um anel R e suponhamos que A seja um anel tal que $R \subseteq A$ ou $A \subseteq R$.

Definição 3.2.1 *Dizemos que D satisfaz uma relação de dependência A-linear sobre R se existem $a_0, a_1, \ldots, a_n \neq 0$ em A tais que $\sum_{i=0}^{n} d_i(x)a_i = 0$, para todo $x \in R$.*

Neste caso iremos escrever simplesmente que D *é A-LD sobre* R, por brevidade de linguagem. A relação acima será escrita como $\sum_{i=0}^{n} d_i a_i = 0$, caso não haja possibilidade de dúvida.

O inteiro n é dito o *comprimento* da relação. Se n é minimal entre os comprimentos de todas as relações, então a relação é dita uma relação *minimal* e o inteiro n é dito o *A-comprimento de D sobre R*, ou simplesmente o *comprimento de D*, se não houver possibilidade de dúvida.

Se o anel A possui unidade e na relação acima temos $a_n = 1$, então a relação é dita uma relação *mônica*. O comprimento de uma relação mônica e o comprimento mônico de D são definidos de modo similar.

Note que o n da Definição 3.2.1 depende de A e de R. Mais ainda, se A tem unidade e D é A-LD de comprimento n e também é A-LD mônica de comprimento m sobre R, então $n \leq m$.

Lembramos que uma aplicação d: $R \to R$ é dita uma *derivação interna* se existe um elemento $a \in R$ tal que $d(x) = [a, x] = ax - xa$ para todo $x \in R$, e é denotada por I_a.

Seja d: $R \to R$ uma derivação de R. Se existe $a \in Q$ tal que $d(x) = [a, x] = ax - xa$ para todo $x \in R$, então d é dita uma *derivação X-interna*. Diversos autores em vários trabalhos têm usado esta definição. Por abuso de notação, utilizaremos também I_a para indicá-la.

Agora vamos demonstrar o Teorema 3.1.1:

Prova do Teorema 3.1.1. Seja $n \in \mathbb{N}$ minimal tal que D seja R-LD de comprimento n sobre R. Denotemos por $\mathcal{A}$ o conjunto
$\mathcal{A} = \{r \in R : \exists r_0, r_1, ..., r_{n-1} \in R \ tq. \ d_n(x)r + d_{n-1}(x)r_{n-1} + ... + d_1(x)r_1 + xr_0 = 0, \ \forall x \in R\}$.
É claro que $\mathcal{A}$ é um ideal à direita não-nulo de R. Além disso, se $r \in \mathcal{A}$ e $x \in R$, existem $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1} \in R$ tais que $\sum_{i=0}^{n} d_i(z)r_i = 0$ para todo $z \in R$, onde $r_n = r$. Em particular, para cada $y \in R$, temos $\sum_{i=0}^{n} d_i(yx)r_i = 0$. Segue que $\sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{l+k=i} d_l(y)d_k(x)r_i = 0$, donde $\sum_{j=0}^{n} d_j(y)(\sum_{k=0}^{n-j} d_k(x)r_{j+k}) = 0$.

Sendo a última relação válida para todo $y \in R$, obtemos, em particular, $xr \in \mathcal{A}$. Assim, $\mathcal{A}$ é um ideal de R.

Sejam $r \in \mathcal{A}$ e $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1} \in R$ tais que $d_n(x)r + d_{n-1}(x)r_{n-1} + \ldots + d_1(x)r_1 + xr_0 = 0$ para todo $x \in R$. Se tivermos outra relação $d_n(x)r + d_{n-1}(x)r'_{n-1} + \ldots + xr'_0 = 0$ para todo $x \in R$, resulta $\sum\limits_{i=0}^{n-1} d_i(x)(r_i - r'_i) = 0$. Sendo n o comprimento de D sobre R, segue que $r_i - r'_i = 0$ para $i = 0, \ldots, n-1$. Portanto as funções φ_i: $\mathcal{A} \longrightarrow R$ definidas por $\varphi_i(r) = r_i$, estão bem-definidas. Ademais, de $d_n(x)rb + d_{n-1}(x)r_{n-1}b + \ldots + xr_0b = 0$ resulta que $\varphi_i(rb) = \varphi_i(r)b$, para todo $b \in R$. Conseqüentemente, φ_i é um homomorfismo de R-módulos à direita de $\mathcal{A}$ em R. Então existem elementos $q_i \in Q$ tais que $\varphi_i(r) = q_ir$, para todo $r \in \mathcal{A}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, onde $q_n = 1$.

Para cada $r \in \mathcal{A}$, $x \in R$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= d_n(x)r + d_{n-1}(x)r_{n-1} + \ldots + d_1(x)r_1 + xr_0 = \\ &= (d_n(x) + d_{n-1}(x)q_{n-1} + \ldots + d_1(x)q_1 + xq_0)r. \end{aligned}$$

Sendo que, para $x \in R$, a soma entre parênteses é um elemento de Q e a relação vale para todo $r \in \mathcal{A}$, a Proposição 1.2.2, item 3, implica que

$$d_n(x) + d_{n-1}(x)q_{n-1} + \ldots + xq_0 = 0 \text{ para todo } x \in R. \tag{3.1}$$

O resultado mostra que D é Q-LD mônica sobre R e que o comprimento de D sobre Q é menor ou igual a n. Seja m tal comprimento. Suponhamos que $\sum_{i=0}^m d_i(x)q'_i = 0$ para todo $x \in R$, onde $q'_i \in Q$, $i = 0, 1, \ldots, m$, e $m < n$. Existe um ideal não-nulo I de R tal que $q'_i I \subseteq R$, para $i = 0, 1, \ldots, m$. Tomemos $s \in I$ tal que $q'_m s \neq 0$. Então $\sum_{i=0}^m d_i(x)q'_i s = 0$ para todo $x \in R$, o que contradiz o fato de que D é de comprimento n sobre R. Isto completa a prova da primeira parte.

Suponhamos agora que $\sum_{i=0}^n d_i(x)q_i = 0$ para todo $x \in R$, onde $q_n = 1$. Como antes, para $x, y \in R$ temos

$$0 = \sum_{j=0}^n d_j(xy)q_j = \sum_{j=0}^n \sum_{l+k=j} d_l(x)d_k(y)q_j = \sum_{i=0}^n d_i(x)(\sum_{k=0}^{n-i} d_k(y)q_{i+k}).$$

Além disso, $\sum_{i=0}^n d_i(x)q_i y = 0$.

Subtraindo as duas expressões, resulta

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_i(x)(\sum_{k=0}^{n-i} d_k(y)q_{i+k} - q_i y) = 0, \text{ para todo } x, y \in R.$$

Pela primeira parte segue que

$$\sum_{k=0}^{n-i}(d_k(y)q_{i+k} - q_i y) = 0, \text{ para todo } y \in R \text{ e } i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.2}$$

Em particular, tomando $i = n-1$, obtemos $d_1(y)q_n + yq_{n-1} = q_{n-1}y$. Segue que $d_1(y) = I_{q_{n-1}}(y)$ para todo $y \in R$, sendo que $q_n = 1$.

Suponhamos, por indução, que $d_s(y) = I_{q_{n-s}}(y) - \sum_{i=1}^{s-1} d_{s-i}(y)q_{n-i}$, para todo $s < m \leq n$ e todo $y \in R$.

Da relação (3.2), para $i = n-(s+1)$, vem que $d_{s+1}(y) = I_{q_{n-(s+1)}}(y) - \sum_{i=1}^{s} d_i(y)q_{n-s+i-1}$. Fazendo $j = s+1-i$, resulta $d_{s+1}(y) = I_{q_{n-(s+1)}}(y) - \sum_{j=1}^{s} d_{s+1-j}(y)q_{n-j}$, para todo $y \in R$. Logo, segue o resultado.

Finalmente, pelo que acabamos de provar, sabemos que $d_n(x) = I_{q_0}(x) - \sum_{i=1}^{n-1} d_i(x)q_i$ para todo $x \in R$. Então $q_0x = \sum_{i=0}^{n} d_i(x)q_i = 0$, por (3.1). Como $q_0x = 0$ para todo $x \in R$, segue que $q_0 = 0$. ■

O Teorema 3.1.1 implica o seguinte corolário imediato.

Corolário 3.2.2 *Se $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma DOS Q-LD mônica de comprimento n sobre R, então $d_m(x)$ é uma combinação linear de derivações internas de Q, para todo $1 \leq m \leq n$. Mais precisamente, $d_m = I_{q_{n-m}} + \sum_{i=2}^{m} I_{q_{n-(m-i+1)}} \cdot b_{i1}$, onde $b_{11} = 1$ e $b_{i1} = -\sum_{k=1}^{i-1} b_{(i-k),1} \cdot q_{n-k}$, para todo $2 \leq i \leq m$.*

Em particular, temos:

$$
\begin{aligned}
d_1(x) &= I_{q_{n-1}};\\
d_2(x) &= I_{q_{n-2}} - I_{q_{n-1}}q_{n-1};\\
d_3(x) &= I_{q_{n-3}} - I_{q_{n-2}}q_{n-1} - I_{q_{n-1}}(q_{n-2} - q_{n-1}^2);\\
d_4(x) &= I_{q_{n-4}} - I_{q_{n-3}}q_{n-1} - I_{q_{n-2}}(q_{n-2} - q_{n-1}^2) -\\
&\quad -I_{q_{n-1}}(q_{n-3} - q_{n-1}q_{n-2} - (q_{n-2} - q_{n-1}^2)q_{n-1});\\
d_5(x) &= I_{q_{n-5}} - I_{q_{n-4}}q_{n-1} - I_{q_{n-3}}(q_{n-2} - q_{n-1}^2) -\\
&\quad -I_{q_{n-2}}(q_{n-3} - q_{n-1}q_{n-2} - (q_{n-2} - q_{n-1}^2)q_{n-1}) -\\
&\quad -I_{q_{n-1}}\big(q_{n-4} - q_{n-1}q_{n-3} - (q_{n-2} - q_{n-1}^2)q_{n-2} -\\
&\quad -(q_{n-3} - q_{n-1}q_{n-2} - (q_{n-2} - q_{n-1}^2)q_{n-1}\big)\, q_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Para provar o Teorema 3.1.2, necessitamos do seguinte

Lema 3.2.3 *Sejam T um anel com unidade, $n \in \mathbb{N}$ e $t_0, t_1, \ldots, t_n \in T$, onde $t_0 = 0$ e $t_n = 1$. Seja $D = (d_i)$ $(0 \leq i \leq n)$ uma seqüência de aplicações de T definida por $d_0 = id_T$, $d_1 = I_{t_{n-1}}$ e $d_m = I_{t_{n-m}} - \sum_{i=1}^{m-1} d_{m-i}t_{n-i}$, para todo $2 \leq m \leq n$. Então todas as d_i's são aditivas e $d_m(xy) = \sum_{i=0}^{m} d_i(x)d_{m-i}(y)$ para todo $x, y \in T$, $1 \leq m \leq n$.*

Prova. Seguiremos por indução sobre m: sejam $x, y \in T$. Temos

$$\begin{aligned}
d_1(xy) &= I_{t_{n-1}}(xy) = I_{t_{n-1}}(x)y + xI_{t_{n-1}}(y) = d_1(x)y + xd_1(y); \\
d_2(xy) &= I_{t_{n-2}}(xy) - d_1(xy)t_{n-1} = I_{t_{n-2}}(x)y + xI_{t_{n-2}}(y) - (d_1(x)y + xd_1(y))t_{n-1} = \\
&= I_{t_{n-2}}(x)y + xI_{t_{n-2}}(y) - (d_1(x)y + xd_1(y))t_{n-1} + \\
&\quad + d_1(x)yt_{n-1} - d_1(x)t_{n-1}y + d_1(x)d_1(y) = \\
&= (I_{t_{n-2}}(x) - d_1(x)t_{n-1})y + d_1(x)d_1(y) + x(I_{t_{n-2}}(y) - d_1(y)t_{n-1}) = \\
&= d_2(x)y + d_1(x)d_1(y) + xd_2(y).
\end{aligned}$$

Para $m \geq 3$, suponhamos, por hipótese de indução, que $d_j(xy) = \sum_{i=0}^{j} d_i(x)d_{j-i}(y)$ para todo $x, y \in T$ e para todo $j < m$. Então:

$$\begin{aligned}
d_m(xy) &= I_{t_{n-m}}(xy) - \sum_{i=1}^{m-1} d_{m-i}(xy)t_{n-i} = \\
&= I_{t_{n-m}}(x)y + xI_{t_{n-m}}(y) - \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-i} d_{m-i-j}(x)d_j(y)t_{n-i} + \sum_{l=1}^{m-1} d_{m-l}(x)d_l(y) - \\
&\quad - d_{m-1}(x)d_1(y) - \sum_{l=2}^{m-1} d_{m-l}(x)(t_{n-l}y - yt_{n-l} - \sum_{s=1}^{l-1} d_{l-s}(y)t_{n-s}).
\end{aligned}$$

Reordenando os termos e separando as parcelas de $\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-i} d_{m-i-j}(x)d_j(y)t_{n-i}$ onde $j = m - i$, temos:

$$\begin{aligned}
d_m(xy) &= (I_{t_{n-m}}(x) - d_{m-1}(x)t_{n-1} - \sum_{l=2}^{m-1} d_{m-l}(x)t_{n-l})y + \sum_{l=1}^{m-1} d_{m-l}(x)d_l(y) + \\
&\quad + x(I_{t_{n-m}}(y) - \sum_{i=1}^{m-1} d_{m-i}(y)t_{n-i}) - \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-i-1} d_{m-i-j}(x)d_j(y)t_{n-i} + \\
&\quad + \sum_{l=2}^{m-1} d_{m-l}(x)(yt_{n-l} + \sum_{s=1}^{l-1} d_{l-s}(y)t_{n-s}) + d_{m-1}(x)yt_{n-1} = \\
&= d_m(x)y + \sum_{l=1}^{m-1} d_{m-l}(x)d_l(y) + xd_m(y) - d_1(x)yt_{n-m+1} + d_{m-1}(x)yt_{n-1} - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m-2}\sum_{j=0}^{m-i-1} d_{m-i-j}(x)d_j(y)t_{n-i} + \sum_{l=2}^{m-1} d_{m-l}(x)(yt_{n-l} + \sum_{s=1}^{l-1} d_{l-s}(y)t_{n-s}) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{m} d_{m-l}(x)d_l(y) - d_1(x)yt_{n-m+1} - \sum_{i=1}^{m-2} d_{m-i}(x)yt_{n-i} - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=1}^{m-i-1} d_{m-i-j}(x)d_j(y)t_{n-i} + \sum_{l=2}^{m-1} d_{m-l}(x)yt_{n-l} + \\
&\quad + \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{s=1}^{l-1} d_{m-l}(x)d_{l-s}(y)t_{n-s} + d_{m-1}(x)yt_{n-1} = \\
&= \sum_{l=0}^{m} d_{m-l}(x)d_l(y) - \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{l=i+1}^{m-1} d_{m-l}(x)d_{l-i}(y)t_{n-i} + \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{s=1}^{l-1} d_{m-l}(x)d_{l-s}(y)t_{n-s} = \\
&= \sum_{l=0}^{m} d_{m-l}(x)d_l(y) - \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{i=1}^{l-1} d_{m-l}(x)d_{l-i}(y)t_{n-i} + \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{s=1}^{l-1} d_{m-l}(x)d_{l-s}(y)t_{n-s} = \\
&= \sum_{l=0}^{m} d_{m-l}(x)d_l(y).
\end{aligned}
$$

Logo, $d_m(xy) = \sum_{i=0}^{m} d_i(x)d_{m-i}(y)$ para todo $x, y \in T$, para todo $1 \leq m \leq n$. ■

Agora estamos em condições de provar o Teorema 3.1.2:

Prova do Teorema 3.1.2. Pelo Lema 3.2.3, temos que $d_m(xy) = \sum_{i=0}^{m} d_i(x)d_{m-i}(y)$ para todo $x, y \in T$ e para todo $1 \leq m \leq n$. Por definição, $d_m(x) = I_{t_{n-m}}(x) - \sum_{i=1}^{m-1} d_{m-i}(x)t_{n-i}$ para todo $x \in T$ e para todo $2 \leq m \leq n$. Assim,

$$d_n(x) + d_{n-1}(x)t_{n-1} + d_{n-2}(x)t_{n-2} + \ldots + d_2(x)t_2 + d_1(x)t_1 = I_{t_0}(x) = 0$$

para todo $x \in T$, pois $t_0 = 0$. Logo, D é T-LD mônica sobre T. ■

Em particular, sejam $T = Q \supseteq R$, $n \in \mathbb{N}$, e $q_0, q_1, \ldots, q_n \in Q$, onde $q_0 = 0$ e $q_n = 1$. Então o seguinte corolário imediato do Teorema 3.1.2 é uma recíproca do Teorema 3.1.1.

Corolário 3.2.4 *Sejam $q_0, , \ldots, q_n$ elementos como acima e $D = (d_i)$ (com $0 \leq i \leq n$) uma seqüência de aplicações de R em Q definida por $d_0 = id_R$, $d_1 = I_{q_{n-1}}$ e $d_m = I_{q_{n-1}} - \sum_{i=1}^{m-1} d_{m-i}q_{n-i}$, para todo $2 \leq m \leq n$. Se $d_i(R) \subseteq R$, para todo $i \leq n$, então D é uma DOS de R que é Q-LD mônica sobre R.*

No Teorema 3.1.2, a minimalidade do comprimento da combinação linear nem sempre é garantida. De fato, veremos que nem sempre uma DOS Q-LD mônica sobre R que satisfaz $d_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1} d_{n-i}(x)q_{n-i} = 0$ para todo $x \in R$, onde $q_i \in Q$, tem comprimento minimal n (Exemplo 3.3.2).

Sejam d uma derivação algébrica sobre um anel primo R, e $d^\star$ a sua extensão a Q. Em ([28]) e ([35]) a equivalência entre os seguintes resultados é provada: (i). d é R-algébrica; (ii). $d^\star$ é R-algébrica; (iii). $d^\star$ é Q-algébrica; (iv). d é Q-algébrica; (v). $d^\star$ é C-algébrica (onde C indica o centro de Q); (vi). d é C-algébrica.

Agora vamos analisar o correspondente resultado para uma derivação de ordem superior. No teorema que segue, $D^\star$ denota a extensão da DOS $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ao anel de quocientes (à direita) de Martindale Q de R.

Nosso objetivo é provar o

Teorema 3.2.5 *Seja D uma DOS de R. Então são equivalentes:*

1. *D é R-LD sobre R;*
2. *D é Q-LD sobre R;*
3. *D é Q-LD mônica sobre R;*
4. *$D^\star$ é Q-LD sobre Q;*
5. *$D^\star$ é R-LD sobre Q.*

Além disso, se estas condições equivalentes são verificadas, então o comprimento das relações minimais em cada caso é o mesmo.

Prova. Seja $\sum_{i=0}^{n} d_i(x)q_i = 0$, para todo $x \in R$, uma relação de dependência linear de D sobre Q, onde $q_i \in Q$ para $0 \leq i \leq n$ e $q_n \neq 0$.

Sabemos que existe um ideal não-nulo A de R tal que $q_iA \subseteq R$, para todo i. Mais ainda, $q_nA \neq 0$, donde existe $a \in A$ tal que $0 \neq q_na \in R$. Logo $\sum_{i=0}^{n} d_i(x)q_ia = 0$ é uma relação de dependência linear com coeficientes em R.

O argumento prova que (*2.*$\rightarrow$*1.*). Isto completa a prova da equivalência entre *1*, *2* e *3*, sendo que (*3.*$\rightarrow$*2.*) é óbvia e (*1.*$\rightarrow$*3.*) é o conteúdo do Teorema 3.1.1.

Além disso, sejam n, m e s os comprimentos minimais nos casos *1*, *2* e *3*, respectivamente. Pelo Teorema 3.1.1, $s \leq n$. É claro que $m \leq n$. Finalmente, o argumento acima prova que $n \leq m$. Segue que $n = m = s$.

O mesmo argumento anterior prova que se $\sum_{i=0}^{n} d_i^\star(x) q_i = 0$, para todo $x \in Q$, então existe uma relação do tipo $\sum_{i=0}^{n} d_i^\star(x) r_i = 0$, para todo $x \in Q$, onde $r_i \in R$ para $0 \leq i \leq n$. Assim, (*4.*$\to$*5.*). A última relação implica, em particular, que $\sum_{i=0}^{n} d_i(x) r_i = 0$ para todo $x \in R$, donde (*5.*$\to$*4.*).

Finalmente, vejamos que (*1.*$\to$*4.*). Seja $\sum_{i=0}^{n} d_i(x) r_i = 0$, para todo $x \in R$, uma relação minimal. Pelo Teorema 3.1.1, existem elementos $q_i \in Q$, $1 \leq i \leq n-1$ tais que $\sum_{i=1}^{n} d_i(x) q_i = 0$, para todo $x \in R$. Além disso, $d_1(x) = I_{q_{n-1}}(x)$ e

$$d_m(x) = I_{q_{n-m}}(x) - \sum_{i=1}^{m-1} d_{m-i}(x) q_{n-i}, \text{ para todo } x \in R \text{ e } 2 \leq m \leq n. \tag{3.3}$$

Pelo Lema 3.2.3, os elementos $q_i \in Q$ definem uma derivação de ordem superior $\Delta = (\delta_i)$ (com $0 \leq i \leq n$) de Q tal que $\sum_{i=1}^{n} \delta_i(x) q_i = 0$, para todo $x \in Q$, $\delta_1^\star(x) = I_{q_{n-1}}(x)$ e $\delta_m^\star(x) = I_{q_{n-m}}(x) - \sum_{i=1}^{m-1} \delta_{m-i}^\star(x) q_{n-i}$, para todo $x \in Q$, $2 \leq m \leq n$.

A DOS Δ restrita a R coincide com D, por (3.3). Assim, $\Delta = D$, pela unicidade da extensão. Logo $D^\star$ verifica a relação $\sum_{i=1}^{n} d_i^\star(x) q_i = 0$, para todo $x \in Q$. Isto prova *4*.

Para completar a prova do teorema, basta agora observar que um raciocínio semelhante ao da primeira parte prova que os comprimentos das relações minimais para *1*, *4* e *5* são iguais. ∎

Nota 3.2.6 Em ([35]), uma derivação algébrica tem uma relação de C-dependência linear, C sendo o centro de Q. Em nosso caso esta equivalência não é válida. É claro que se D é uma DOS C-LD sobre R, então D é Q-LD sobre R. Mas, a recíproca não é verdadeira, como veremos depois (Exemplo 3.3.1).

3.3 Complementos e Exemplos

Esta última seção contém alguns resultados que complementam nosso estudo sobre as derivações de ordem superior que satisfazem relações de dependência linear.

Sejam R um anel, $a \in R$, e $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de aplicações de R definida por $d_0 = id_R$ e

$$d_i(x) = (-1)^i(xa^i - axa^{i-1}), \text{ para todo } x \in R,\ i \geq 1. \tag{3.4}$$

Pela Proposição 1.4.4, D é uma DOS de R.

Exemplo 3.3.1 Este exemplo prova a Nota 3.2.6.

Seja $R = \mathbb{K}\langle x, y\rangle$ um anel livre em duas indeterminadas x e y que não comutam entre si, sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Seja $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a DOS definida em (3.4), para $a = y$. É fácil ver que $d_2(r)+d_1(r)y = 0$, para todo $r \in R$. Portanto, D é R-LD de comprimento 2 sobre R. Mas, D não é C-LD sobre R, onde C é o centróide estendido de R. De fato, suponhamos que exista uma relação $d_n(r) + \sum_{i=1}^{n-1} d_i(r)c_i = 0$, para todo $r \in R$ e alguns $c_i \in C$. Escrevendo a relação por extenso, obtemos $(-1)^n(ry^n - yry^{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(ry^i - yry^{i-1})c_i = 0$.

Tomemos, em particular, $r = x$. Então

$$(-1)^n xy^n = -\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i y^i c_i - yx((-1)^{n+1}y^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}y^{i-1}c_i).$$

Mas, por ([47], Teorema 2.5), o centróide estendido de R coincide com $Z(R)$, ou seja, $C = \mathbb{K}$. Portanto, é fácil ver não existem $c_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n-1$, que tornem a igualdade acima verdadeira. A contradição mostra que D não é C-LD sobre R.

Exemplo 3.3.2 Este exemplo mostra que pode existir uma relação mônica, mas ela não ser minimal.

Seja R um anel primo e D a DOS definida em (3.4), para $a \in R$, $a \notin C$. Temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} d_2(x) + d_1(x)a &= 0, \text{ para todo } x \in R, \text{ e} \\ d_3(x) + d_2(x)a &= 0, \text{ para todo } x \in R. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$d_3(x) + d_2(x)(a + c) + d_1(x)ac = 0,$$

para todo $x \in R$ e para algum $c \in C$.

Note que nas últimas duas relações os coeficientes $1, a, 0$, ou então $1, a+c, ac$, para $c \in C$, são linearmente dependentes sobre C. Como veremos no teorema seguinte, isto não pode acontecer se os coeficientes são LI sobre C.

O exemplo acima nos motivou a provar o Teorema 3.3.3 a seguir.

Teorema 3.3.3 *Seja $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma DOS de R, Q-LD mônica de comprimento minimal n sobre R, tal que $\sum_{i=1}^{n} d_i(x)q_i = 0$ para todo $x \in R$, $q_i \in Q$ para todo $1 \le i \le n$, $q_n = 1$. Então o conjunto $A = \{q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n = 1\}$ é C-linearmente independente.*

Prova. Inicialmente, note que se a expressão mônica minimal de D é $d_n = 0$ então, pelo Teorema 3.1.1, temos $d_1 = 0$. Portanto a expressão minimal é $d_1(x) = 0$ para todo $x \in R$. Logo $A = \{1\}$, que é C-LI. Assim, podemos supor que existe algum $1 \le j \le n-1$ tal que $q_j \neq 0$.

Por absurdo, suponhamos que o conjunto $A = \{q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n = 1\}$ seja C-LD. Então, para algum $1 \le l \le n$, $q_l = \sum\limits_{1\le i\le n}^{i\neq l} c_i q_i$, onde $c_i \in C$.

Se $l = n$, então $1 = \sum\limits_{j=1}^{n-1} c_{n-j}q_{n-j}$ e, portanto, para algum $1 \le i \le n-1$, $c_{n-i} \neq 0$. Assim sendo,

$$0 = I_{q_{n-i}}c_{n-i} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{n-j}I_{q_{n-j}} + \sum_{j=i+1}^{n-1} c_{n-j}I_{q_{n-j}}.$$

Como C é corpo e $c_{n-i} \neq 0$, segue que

$$0 = I_{q_{n-i}} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{c_{n-j}}{c_{n-i}} I_{q_{n-j}} + \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{c_{n-j}}{c_{n-i}} I_{q_{n-j}}.$$

Mas, pelo Teorema 3.1.1, $I_{q_{n-1}} = d_1$ e, para todo $2 \le m \le n-1$, $I_{q_{n-m}} = d_m + \sum\limits_{k=1}^{m-1} d_{m-k}q_{n-k}$. Então,

$$0 = d_i + \sum_{k=1}^{i-1} d_{i-k}q_{n-k} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{c_{n-j}}{c_{n-i}}(d_j + \sum_{l=1}^{j-1} d_{j-l}q_{n-l}) + \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{c_{n-j}}{c_{n-i}}(d_j + \sum_{u=1}^{j-1} d_{j-u}q_{n-u}).$$

Reordenando os termos, a igualdade acima é equivalente a

$$0 = \sum_{k=1}^{i+1} d_{n-k}(\frac{c_k}{c_{n-i}} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{c_l}{c_{n-i}} q_{n-(k-l)}) + d_i(1 + \sum_{j=1}^{n-1-i} \sum_{u=i+j} \frac{c_{n-u}}{c_{n-i}} q_{n-j}) + \sum_{v<i} d_v s_v, \qquad (3.5)$$

onde $s_v \in Q$, para todo $v < i$.

É fácil ver que se existe $1 \leq k \leq i+1$ tal que $c_k \neq 0$, então D é Q-LD de comprimento menor que n, uma contradição. Mais ainda, se $c_1 = \ldots = c_{i+1} = 0$, então a expressão (3.5) pode ser escrita como $d_i + \sum\limits_{v<i} d_v s_v = 0$, e D é Q-LD de comprimento $m \leq i < n$. A contradição mostra que 1 não é combinação C-linear de $q_1, \ldots, q_{n-1}$.

Suponhamos agora, por absurdo, que $A = \{q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n = 1\}$ seja C-LD, e que para algum $1 \leq l \leq n-1$, $q_l = \sum\limits_{1 \leq i \leq n-1}^{i \neq l} c_i q_i$, onde $c_i \in C$.

Portanto, $I_{q_l} = \sum\limits_{i \neq l} I_{q_i} c_i$. Tomando $s_l = 1$ e $s_j = -c_j$ para todo $1 \leq j \leq n-1$, $j \neq l$, temos que

$$\sum_{j=1}^{n-1} I_{q_j} s_j = - \sum_{1 \leq j \leq n-1}^{j \neq l} I_{q_j} c_j + I_{q_l} = 0.$$

Com um cálculo semelhante ao que fizemos acima, isto implicaria a existência de elementos $t_1, \ldots, t_{n-1} \in Q$ tais que $\sum\limits_{j=1}^{n-1} d_j t_j = 0$, com algum $t_j \neq 0$. Então D seria Q-LD de comprimento $m \leq n-1$ sobre R. Porém, pelo Teorema 3.2.5, D é Q-LD de comprimento minimal n sobre R. A contradição prova o teorema. ■

É conhecido que se d é uma derivação num anel primo R que é algébrica sobre um ideal A de R, então d é algébrica sobre R ([12], [35]). Em conexão com este resultado provamos o teorema seguinte. Note que esta prova difere das provas para derivações.

Proposição 3.3.4 *Sejam R um anel primo, $D = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma DOS em R, e A um ideal não-nulo de R. Se $D \mid_A$ possui uma relação de dependência linear com coeficientes em R, então D é R-LD sobre R, onde $D \mid_A$ denota $(d_i \mid_A)_{i \in \mathbb{N}}$.*

Prova. É fácil ver que o anel de quocientes (à direita) de A coincide com o de R, ou seja, é igual a Q.

Por outro lado, se $\sum_{i=0}^{n} d_i r_i = 0$ é uma relação sobre A, com $r_i \in R$ para todo $0 \leq i \leq n$, então $\sum_{i=0}^{n} d_i r_i A = 0$ em A. Logo podemos assumir que existe uma relação com coeficientes em A. Portanto, pelos mesmos argumentos utilizados na prova do Teorema 3.1.1, existem elementos $q_i \in Q$ tais que

$$\sum_{i=0}^{n} d_i(x) q_i = 0, \text{ para todo } x \in A. \tag{3.6}$$

Além disso, $d_1(x) = I_{q_{n-1}}(x)$ e $d_m(x) = I_{q_{n-m}}(x) - \sum_{i=1}^{m-1} d_{m-i}(x) q_{n-i}$, para todo $x \in A$.

Pelo Teorema 3.1.2, as relações acima, quando consideradas para todo $x \in Q$, definem uma DOS $\Delta = (\delta_i)$ $(0 \leq i \leq n)$ em Q, a qual será Q-LD sobre Q. Em particular, $\Delta \mid_R$ é R-LD sobre R.

Resta somente verificar que $\Delta \mid_R = D$. Por definição, Δ e D coincidem em A. Se $r \in R$ e $a \in A$, temos que $d_1(ra) = \delta_1(ra)$. Logo $d_1(r)a + rd_1(a) = \delta_1(r)a + r\delta_1(a)$, ou seja, $d_1(r)a = \delta_1(r)a$. Segue que $(\delta_1(r) - d_1(r))A = 0$, para todo $r \in R$, donde $\delta_1 \mid_R = d_1$.

Por indução é fácil ver que, para todo $m \leq n$, $\delta_m \mid_R = d_m$, onde n é o comprimento da relação (3.6). ■

No próximo teorema, utilizaremos uma propriedade do comutador $[\cdot,\cdot]$ que convém lembrarmos neste momento. Dados um anel R e $a, b, x \in R$, então:

$$a[b, x] = [ab, x] - [a, x]b.$$

De fato, $a[b, x] = a(bx - xb) = abx - axb = abx - xab + xab - axb = [ab, x] - [a, x]b$.

Seja d uma derivação algébrica de um anel primo R que é uma álgebra sobre os racionais. Então d define uma DOS $D = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dada por $d_1 = d$, $d_n = \frac{d^n}{n!}$, para todo $n \geq 2$.

Sendo que d é algébrica sobre R, então D satisfaz uma relação R-LD sobre R e d_1 é X-interna definida por um elemento $q \in Q$. Além disso, cada d_m, para $m \leq n$, pode ser calculada utilizando o Teorema 3.1.1, onde n é o grau de algebricidade de d. No teorema seguinte, determinamos explicitamente a expressão das aplicações d_m, em função do elemento q, para todo m.

Teorema 3.3.5 *Sejam R uma $\mathbb{Q}$-álgebra e d uma derivação Q-interna dada por $d(x) = [q, x]$ para todo $x \in R$, com $q \in Q$. Seja $D = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a DOS de R dada por $d_i = \frac{d^i}{i!}$, para todo $i \geq 0$. Então $d_1 = I_q$ e*

$$d_m = \frac{1}{(\prod_{l=1}^{m-1}(m-l)!)^2} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i I_{q^{m-i}} \frac{q^i}{(m-i)!i!}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Prova. Como $d_1(x) = d(x) = I_q(x)$ e $d_m(x) = \frac{d^m(x)}{m!}$ para todo $m \geq 2$, temos que

$$\begin{aligned} d_2(x) &= \tfrac{d^2(x)}{2!} = \tfrac{1}{2!}(d(d(x)) = \tfrac{1}{2!}(qd(x) - d(x)q) = \tfrac{1}{2!}(qI_q(x) - I_q(x)q) = \\ &= \tfrac{1}{2!}(I_{q^2}(x) - I_q(x)q) - \tfrac{1}{2!}I_q(x)q = I_{q^2}(x)\tfrac{1}{2!} - I_q(x)q. \end{aligned}$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que

$$d_s = \frac{1}{(\prod_{l=1}^{s-1}(s-l)!)^2}\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i I_{q^{s-i}}\frac{q^i}{(s-i)!i!}, \text{ para todo } s \leq m.$$

Então

$$d_{m+1}(x) = \frac{d^{m+1}(x)}{(m+1)!} = \frac{1}{(m+1)!}(qd^m(x) - d^m(x)) = \frac{1}{(m+1)!m!}(qd_m(x) - d_m(x)q,$$

para todo $x \in R$. Aplicando a hipótese de indução, vem que

$$\begin{aligned} d_{m+1}(x) &= \tfrac{q}{(m+1)!m!}\big(\tfrac{1}{(\prod_{l=1}^{m-1}(m-l)!)^2}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i I_{q^{m-i}}(x)\tfrac{q^i}{(m-i)!i!}\big)- \\ &\quad -\tfrac{1}{(m+1)!m!}\big(\tfrac{1}{(\prod_{l=1}^{m-1}(m-l)!)^2}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i I_{q^{m-i}}(x)\tfrac{q^i}{(m-i)!i!}\big)q. \end{aligned}$$

Seja $\alpha = \frac{1}{(m+1)!m!(\prod_{l=1}^{m-1}(m-l)!)^2}$. Pela propriedade do comutador vista acima, temos

$$\begin{aligned} d_{m+1}(x) &= \alpha\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i(([\tfrac{q^{m+1-i}}{(m-i)!},x] - [q,x]\tfrac{q^{m-i}}{(m-i)!})\tfrac{q^i}{i!} - [\tfrac{q^{m-i}}{(m-i)!},x]\tfrac{q^{i+1}}{i!}) = \\ &= \alpha\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i((m+1-i)[\tfrac{q^{m+1-i}}{(m+1-i)!},x]\tfrac{q^i}{i!} - [q,x]\tfrac{q^m}{(m-i)!i!} - [\tfrac{q^{m-i}}{(m-i)!},x]\tfrac{q^{i+1}}{i!}) = \\ &= \alpha((m+1)[\tfrac{q^{m+1}}{(m+1)!},x] + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i(m+1-i)[\tfrac{q^{m+1-i}}{(m+1-i)!},x]\tfrac{q^i}{i!})+ \\ &\quad +\alpha(\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{i+1}[q,x]\tfrac{q^m}{(m-i)!i!}\tfrac{m!}{m!} + \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{i+1}[\tfrac{q^{m-i}}{(m-i)!},x]\tfrac{q^{i+1}}{i!}\tfrac{(i+1)}{(i+1)}). \end{aligned}$$

Como $\frac{m!}{(m-i)!i!} = \binom{m}{i}$, segue que

$$d_{m+1}(x) = \alpha((m+1)[\tfrac{q^{m+1}}{(m+1)!},x] + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i(m+1-i)[\tfrac{q^{m+1-i}}{(m+1-i)!},x]\tfrac{q^i}{i!}) +$$

$$+\alpha(\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{i+1}[q,x]\tfrac{q^m}{m!}\tbinom{m}{i} + (-1)^m[q,x]\tfrac{q^m}{m!}m + \sum_{i=0}^{m-2}(-1)^{i+1}[\tfrac{q^{m-i}}{(m-i)!},x]\tfrac{q^{i+1}}{(i+1)!}(i+1)).$$

Sabemos que $\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i} = 0$, por resultado de Análise Combinatória. Então $\sum\limits_{i=0}^{m-1}(-1)^{i+1}[q,x]\frac{q^m}{m!}\binom{m}{i} = (-1)^m[q,x]\frac{q^m}{m!}$. Substituindo na igualdade acima, obtemos

$$d_{m+1}(x) = \alpha((m+1)[\tfrac{q^{m+1}}{(m+1)!},x] + (m+1)(-1)^m[q,x]\tfrac{q^m}{m!}) +$$

$$+\alpha(\sum_{i=0}^{m-2}(-1)^{i+1}[\tfrac{q^{m-i}}{(m-i)!},x]\tfrac{q^{i+1}}{(i+1)!}(i+1) + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i(m+1-i)[\tfrac{q^{m+1-i}}{(m+1-i)!},x]\tfrac{q^i}{i!}) =$$

$$= \alpha((m+1)[\tfrac{q^{m+1}}{(m+1)!},x] + (m+1)(-1)^m[q,x]\tfrac{q^m}{m!}) +$$

$$+\alpha(\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j[\tfrac{q^{m+1-j}}{(m+1-j)!},x]\tfrac{q^j}{j!}j + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i(m+1-i)[\tfrac{q^{m+1-i}}{(m+1-i)!},x]\tfrac{q^i}{i!}) =$$

$$= \alpha(m+1)([\tfrac{q^{m+1}}{(m+1)!},x] + (-1)^m[q,x]\tfrac{q^m}{m!} + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i[\tfrac{q^{m+1-i}}{(m+1-i)!},x]\tfrac{q^i}{i!}) =$$

$$= \frac{(m+1)}{(m+1)!m!(\prod\limits_{l=1}^{m-1}(m-l)!)^2}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i[\tfrac{q^{m+1-i}}{(m+1-i)!},x]\tfrac{q^i}{i!} =$$

$$= \frac{1}{(\prod\limits_{l=0}^{m-1}(m-l)!)^2}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i[\tfrac{q^{m+1-i}}{(m+1-i)!},x]\tfrac{q^i}{i!}.$$

Logo

$$d_m(x) = \frac{1}{(\prod\limits_{l=1}^{m-1}(m-l)!)^2}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i I_{q^{m-i}}(x)\frac{q^i}{(m-i)!i!}, \text{ para todo } x \in R,\ m \in \mathbb{N}. \qquad \blacksquare$$

O próximo corolário é devido a Leroy e Matczuk. A prova de uma das implicações que apresentaremos aqui é diferente daquela obtida por eles em ([35], Lema 1.4).

Corolário 3.3.6 *Sejam R uma $\mathbb{Q}$-álgebra prima e $d\colon R \to R$ uma derivação definida por $d(x) = [q, x]$ para todo $x \in R$, onde $q \in Q$. Seja $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a DOS de R dada por $d_i = \frac{d^i}{i!}$ para todo $i \geq 0$. Então d é algébrica sobre Q se, e somente se, q é um elemento C-algébrico.*

Prova. Suponhamos que q seja algébrico de grau n sobre C. Então $q^n + \sum\limits_{i=0}^{n} q^i c_i = 0$, onde $c_i \in C$, para $0 \leq i \leq n-1$. Portanto $I_{q^n} = -\sum\limits_{i=1}^{n-1} I_{q^i} c_i$. Mas, pelo Teorema 3.3.5,

$$d_n = \frac{1}{(\prod\limits_{l=1}^{n-1}(n-l)!)^2}(I_{q^n}\frac{1}{n!} + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j I_{q^{n-j}}\frac{q^j}{j!(n-j)!}).$$

Seja $\alpha = \frac{1}{(\prod\limits_{l=1}^{n-1}(n-l)!)^2}$. Então

$$d_n = -\frac{\alpha}{n!}\sum_{i=1}^{n-1} I_{q^i}c_i + \alpha\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j I_{q^{n-j}}\frac{q^j}{(n-j)!j!} = \sum_{i=1}^{n-1} I_{q^i}\alpha(-\frac{c_i}{n!} + (-1)^{n-i}\frac{q^{n-i}}{i!(n-i)!}). \quad (3.7)$$

Para $1 \leq i \leq n-1$, seja $\alpha_i = \frac{1}{(\prod\limits_{l=1}^{i-1}(i-l)!)^2}$. Portanto, pelo Teorema 3.3.5,

$$I_{q^i} = i!\alpha_i d_i + i!\alpha_i\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j I_{q^{i-j}}\frac{q^j}{j!(i-j)!}.$$

Substituindo sucessivamente esta expressão em (3.7), segue que existem elementos $s_1, \ldots, s_{n-1} \in Q$, não todos nulos, tais que $d_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i s_i$. Como $d_i = i! d^i$ para todo $i \geq 0$, então d é algébrica sobre Q.

A recíproca aqui apresentada é devida a Leroy e Matczuk. Vamos escrevê-la por motivo de completitude.

Reciprocamente, suponhamos que d seja Q-algébrica de grau n tal que $\sum\limits_{i=0}^{n} d^i s_i = 0$, para $s_i \in Q$, $0 \leq i \leq n$, onde $s_n \neq 0$. Como $d(x) = qx - xq$ para todo $x \in R$, uma indução fácil mostra que $d^i(x) = \sum\limits_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}q^j x q^{i-j}$ para todo $0 \leq i \leq n$ e qualquer $x \in R$. Portanto,

$$0 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}q^j x q^{i-j}s_i, \text{ para todo } x \in R.$$

Por ser R um anel primo, a Proposição 1.2.6 nos diz que q é algébrico sobre C de grau inferior ou igual a n. ■

Exemplo 3.3.7 Sejam k um corpo e A uma álgebra sobre k de dimensão finita n, i.e., $dim_k A = n$, que é um anel primo. Então a álgebra dos endomorfismos de A é também finitamente gerada, i.e., $dim_k(End(A)) = n^2$. Se D é uma DOS de A tal que $D\mid_k = 0$ ($d_i(\alpha x) = \alpha d_i(x)$, para todo $\alpha \in k$, $x \in A$, $i \geq 0$), segue que D terá relações de dependência linear sobre k. Em particular, sobre A.

Nota 3.3.8 Em [44], A. Nowicki define derivações internas de ordem superior de um anel R e prova que elas correspondem aos automorfismos internos deste anel. Mais ainda, prova que uma derivação de ordem superior de R é interna se, e somente se, a derivação usual de R é interna ([44], Teorema 4.2). Este teorema é satisfeito por uma vasta classe de anéis (ver, por exemplo, [38], [39], ou [43]).

Suspeitávamos que uma DOS $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Q-LD mônica de comprimento n sobre R tivesse alguma relação com as derivações internas de ordem superior de Nowicki. De fato, como veremos a seguir, para $n \leq 3$, o número de parcelas de d_n coincide com as de Nowicki. No entanto, para $n \geq 4$, este número é bem diferente. A conclusão final é que estes conceitos não parecem estar relacionados.

Nowicki define, para $a \in R$ e $0 \neq k \in \mathbb{N}$, uma seqüência de aplicações $\{a,k\} = (\{a,k\}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da seguinte forma:

$$\{a,k\}_n(x) = \begin{cases} x, & se \quad n = 0 \\ 0, & se \quad k \nmid n \\ d_r(x) = a^r x - a^{r-1}xa, & se \quad n \neq 0, \quad n = kr, \text{ para todo } x \in R. \end{cases}$$

Em ([43]), mostra-se que $\{a,k\}$ é uma DOS de R.

Finalmente, seja $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em R. Denotando por $\Delta(A)$ o elemento defnido por $\Delta(A) = (\{a_1,1\} * \{a_2,2\} * \ldots * \{a_n,n\})_n$, onde para D, D' derivações de ordem superior, $(D*D')_n = \sum_{i+j=n} d_i \circ d'_j$, então, se existir uma seqüência $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de R tal que $D = \Delta(A)$, D é dita (por Nowicki) uma derivação interna de ordem superior de R. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
\Delta(A)_1(x) &= a_1x - xa_1 \\
\Delta(A)_2(x) &= a_1^2x - a_1xa_1 + a_2x - xa_2 \\
\Delta(A)_3(x) &= a_1^3x - a_1^2xa_1 + a_1a_2x + xa_2a_1 - a_1xa_2 - a_2xa_1 + a_3x - xa_3 \\
\Delta(A)_4(x) &= a_1^4x - a_1^3xa_1 + a_2^2x - a_2xa_2 + a_1^2a_2x - a_1^2xa_2 - a_1a_2xa_1 + \\
&\quad + a_1xa_2a_1 + a_1a_3x - a_1xa_3 - a_3xa_1 + xa_3a_1 + a_4x - xa_4.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma DOS Q-LD mônica de comprimento n sobre R, tal que $\sum_{i=0}^{n} d_i q_i = 0$ para $q_i \in Q$ $(0 \leq i \leq n)$ e $q_n = 1$, então

$$
\begin{aligned}
d_1(x) &= q_{n-1}x - xq_{n-1}\\
d_2(x) &= xq_{n-1}^2 - q_{n-1}xq_{n-1} + q_{n-2}x - xq_{n-2}\\
d_3(x) &= -xq_{n-1}^3 + q_{n-3}x - xq_{n-3} - q_{n-2}xq_{n-1}+\\
&\quad +xq_{n-2}q_{n-1} + q_{n-1}xq_{n-1}^2 - q_{n-1}xq_{n-2} + xq_{n-1}q_{n-2}\\
d_4(x) &= q_{n-4}x - xq_{n-4} - q_{n-3}xq_{n-1} + xq_{n-3}q_{n-1} + q_{n-2}xq_{n-1}^2 - xq_{n-2}q_{n-1}^2-\\
&\quad -q_{n-1}xq_{n-1}^3 + xq_{n-1}^4 + q_{n-1}xq_{n-2}q_{n-1} - xq_{n-1}q_{n-2}q_{n-1} - q_{n-2}xq_{n-2} + xq_{n-2}^2+\\
&\quad +q_{n-1}xq_{n-1}q_{n-2} - xq_{n-1}^2q_{n-2} - q_{n-1}xq_{n-3} + xq_{n-1}q_{n-3}.
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] **M. Ahmad** – *"On a theorem of Posner"*, Proceedings of the American Mathematical Society 66 (1997), pp. 13-16

[2] **M. André** – *"Homologie des algèbres commutatives"*, Springer, 1974

[3] **N. Argaç, M.S. Yenigül** – *"Lie ideals and symmetric bi-derivations of prime rings"*, Symmetries in Science VI, New York, Plenum Press, 1993, pp. 41-45

[4] **R. Awtar** – *"Lie and Jordan srtucture in prime rings with derivations"*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol 41, no. 1 (1973), pp. 67-74

[5] **_________** – *"Lie ideals and Jordan derivations of prime rings"*, Proceedings of the American Mathematical Society 90(1) (1984), pp. 9-14

[6] **J. Bergen, I.N. Herstein & J.W. Kerr** – *"Lie ideals and derivations of prime rings"*, Journal of Algebra 71 (1981), pp. 259-267

[7] **R. Berger** – *"Differentiale höherer Ordnung und Körpererweiterungen bei Primzahlcharakteristik"*, S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. (1966), MR 34#2570, pp. 143-202

[8] **M. Bresăr** – *"Jordan derivations on semiprime rings"*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 104, n. 4 (1988), pp. 1003–1006

[9] **_________** – *"Jordan mappings of semiprime rings"*, Journal of Algebra, 1227 (1989), pp. 218-228

[10] **_________** – *"Jordan mappings of semiprime rings II"*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol. 44 (1991), pp. 233-238

[11] **_________, J. Vukman** – *"Jordan derivations on prime rings"*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol. 37 (1988), pp. 321–322

[12] **L.O. Chung, J. Luh** – *"Nilpotency of derivations on an ideal"*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 90, no. 2 (1984), pp. 211–214

[13] **T. Creedon** – *"Products of derivations"*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 41 (1998), pp. 407-410

[14] **F. Dumas, R. Vidal** – *"Dérivations, et hautes dérivations, dans certains corps gauches de series de Laurent"*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 153, no. 2 (1992), pp. 277-280

[15] **D.R. Farkas, C. Geiss, E.N. Marcos** – *"Smooth automorphism group schemes"*, RT-MAT99-29, São Paulo, USP, 1999, preprint

[16] **C. Haetinger** – *"Derivações em anéis primos e semiprimos"*, Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, dissertação de mestrado orientada por Miguel Ferrero, 1994

[17] **H. Hasse** – *"Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper"*, Journal für Mathematik 172 (1934), pp. 55-64

[18] ________ – *"Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik"*, J. Reine Angew. Math. (Journal für Mathematik) 175 (1936), pp. 50-54

[19] ________ – *"Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten"*, J. Reine Angew. Math. (Journal für Mathematik) 177 (1936), pp. 215-237

[20] **I.N. Herstein** – *"Jordan derivations of prime rings"*, Proceedings of the American Mathematical Society, 8 (1957), pp. 1104–1110

[21] ________ – *"On the Lie structure of an associative ring"*, Journal of Algebra 14 (1970), pp. 561-571

[22] ________ – *"Rings with involution"*, The University of Chicago Press, 1976

[23] ________ – *"Topics in ring theory"*, The University of Chicago Press, Chicago, 1965

[24] **R.G. Heyneman, M.E. Sweedler** – *"Affine Hopf algebras I"*, Journal of Algebra 13 (1969), pp. 192-241

[25] **A. Jaeger** – *"Eine algebraische Theorie vertauschbarer Differentiationen für Körper beliebiger Charakteristik"*, J. Reine Angew. Math. (Journal für Mathematik) 190 (1952), MR 14,130, pp. 1-21

[26] **D.W. Jensen** – *"Nilpotency of derivations in prime rings"*, Proceedings of the American Mathematical Society 123(9) (1995), pp. 2633-2636

[27] **V.K. Karchenko** – *"Automorphisms and derivations of associative rings"*, Mathematics and its Applications, Soviet Series, no. 69, ISBN 079231382-8

[28] _________ – *"Differential identities of prime rings"*, Algebra i Logika, vol 17, n.2(1978), pp. 220–238 = Algebra and Logic 17(1978), pp. 155–168

[29] **J. Krempa, J. Matczuk** – *"On algebraic derivations of prime rings"*, Methods in Ring Theory, edited by F. van Oystaeyen, 1984, pp. 211-229

[30] **T.Y. Lam** – *"A first course in noncommutative rings"*, New York, Springer-Verlag, 1991

[31] **J. Lambek** – *"Lectures on rings and modules"*, New York, Chelsea Publishing Company, 1976

[32] **C. Lanski** – *"Derivations with algebraic values on Lie ideals"*, Communications in Algebra, 18 (5), (1990), pp. 1379-1399

[33] _________ – *"Derivations with nilpotent values on Lie ideals"*, American Mathematical Society, 108 (1) (1990), pp. 31-37

[34] **_________, S. Montgomery** – *"Lie structure of prime rings of characteristic 2"*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 42, no. 1 (1972), pp. 117-136

[35] **A. Leroy, J. Matczuk** – *"Derivations et automorphismes algebriques d'anneux premiers"*, Communications in Algebra, 13(6) (1985), pp. 1245–1266

[36] **W.S. Martindale III** – *"Prime rings satisfying a generalized polynomial identity"*, Journal of Algebra 12 (1969), pp. 576-584

[37] **H. Matsumura** – *"Integrable derivations"*, Nagoya Mathematical Journal 87 (1982), pp. 227-245

[38] **P. Miles** – *"Derivations on B^*-álgebras"*, Pacific Journal of Mathematics 14 (1964), pp. 1359-1366

[39] **J.B. Miller** – *"Homomorphisms, higher derivations, and derivations of associative algebras"*, Acta Sciencia Mathematica 28 (1967), pp. 221-232

[40] **S. Montgomery** – *"Fixed rings of finite automorphism groups of associative rings"*, Lectures Notes in Math. 818, Berlin, Springer Verlag (1980)

[41] **Y. Nakai** – *"High order derivations I"*, Osaka Journal of Mathematics no. 1, 7 (1970), pp. 1-27

[42] _________ – *"On locally finite iterative higher derivations"*, Osaka Journal of Mathematics 15, no.3 (1978), pp. 655-662

[43] **A. Nowicki** – *"Derivations of special subrings of matrix rings and regular graphs"*, Tsukuba Journal of Mathematics 7 (1983), pp. 281-297

[44] __________ – *“Inner derivations of higher orders”*, Tsukuba Journal of Mathematics 8(2) (1984), pp. 219-225

[45] **H. Osborn** – *“Modules of differentials I”*, Math. Ann. 170 (1967), pp. 221-244

[46] __________ – *“Modules of differentials II”*, Math. Ann. 175 (1968), pp. 146-158

[47] **D. Passman** – *“Computing the symmetric ring of quocients”*, Journal of Algebra, vol. 105, no. 1 (1987), pp. 207-235

[48] **E.C. Posner** – *“Derivations in prime rings”*, Proceedings of the American Mathematical Socitey 8(1957), pp. 1093-1100

[49] **A. Seidenberg** – *“Derivations and integral closure”*, Pacific Journal of Mathematics 16 (1966), pp. 167-173

[50] __________ – *“Differential ideals in complete local rings”*, American Journal of Mathematics 95 (1973), pp. 52-58

[51] __________ – *“Differential ideals in rings of finitely type”*, American Journal of Mathematics 89 (1967), pp. 22-42

[52] **G.A. Swain** – *“Lie derivations of the skew elements of prime rings with involution”*, Journal of Algebra 184 (1996), pp. 679-704

[53] **O. Teichmüller** – *“Differentialrechnung bei Charakteristik p”*, J. Reine Angew. Math. (Journal für Mathematik) 175 (1936), pp. 89-99

Índice Remissivo

Bibliografia

Índice Remissivo