

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**Daiane Della Libera Leite**

**ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DE LAJES MACIÇAS DE  
CONCRETO ARMADO COM ERROS DE EXECUÇÃO POR  
MEIO DE CAMPOS ESTOCÁSTICOS**

Porto Alegre  
2022

**DAIANE DELLA LIBERA LEITE**

**Análise da confiabilidade de lajes maciças de concreto armado com erros de execução por meio de campos estocásticos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Orientador: Herbert Martins Gomes

Coorientador: Marcelo Maia Rocha

Porto Alegre  
2022

Leite, Daiane Della Libera  
ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DE LAJES MACIÇAS DE  
CONCRETO ARMADO COM ERROS DE EXECUÇÃO POR MEIO DE  
CAMPOS ESTOCÁSTICOS / Daiane Della Libera Leite. --  
2022.

179 f.

Orientador: Herbert Martins Gomes.

Coorientador: Marcelo Maia Rocha.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,  
BR-RS, 2022.

1. Confiabilidade estrutural. 2. Estruturas de  
concreto. 3. Simulação de Monte Carlo. I. Martins  
Gomes, Herbert, orient. II. Maia Rocha, Marcelo,  
coorient. III. Título.

**Daiane Della Libera Leite**

**ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DE LAJES MACIÇAS DE  
CONCRETO ARMADO COM ERROS DE EXECUÇÃO POR MEIO DE  
CAMPOS ESTOCÁSTICOS**

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Concentração-Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 21 de outubro de 2022

Prof. Herbert Martins Gomes  
Dr. pela Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul  
Orientador

Prof. Marcelo Maia Rocha  
Dr. Pela Universität Innsbruck  
(Áustria)  
Coorientador

Prof. Lucas Festugato  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)**  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

**Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Adelano Espósito (IFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico este trabalho a minha família pelo apoio durante essa jornada, em especial ao meu pai que contempla a Luz eterna.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por se fazer presente em minha vida e por colocar pessoas tão boas no meu caminho. Agradeço a minha família por todo apoio nessa caminhada, em especial minha mãe pelo incentivo aos meus estudos e pelo apoio contínuo, apesar de todas as dificuldades presentes.

Tenho profundo e sincero agradecimento à Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela oportunidade de cursar o mestrado na área de Estruturas, pela infraestrutura cedida e pela possibilidade de conviver com pessoas tão notáveis. A educação ilumina e transforma a vida das pessoas, principalmente as que são mais vulneráveis em nossa sociedade. Eu acredito no poder transformador da educação e agradeço a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela oportunidade de ter estudado com bolsa de estudos, durante parte do mestrado.

Agradeço imensamente o meu orientador, Prof. Herbert Martins Gomes, pelos ensinamentos e principalmente pelo apoio durante essa caminhada. O seu uso adequado das palavras, a paciência, o encantamento em transmitir conhecimento e a dedicação à pesquisa, me motivaram e enriqueceram o meu estudo. Com sua habilidade soube ensinar, mostrar novos caminhos e provocar sorrisos. Sinto-me privilegiada.

A cada professor que passei, nas diferentes etapas da vida, que com seu toque especial, me desafiou constantemente. Agradeço, em especial, o professor Sérgio Pacheco que, apesar de não ser mais meu professor, sempre esteve disposto a me orientar e auxiliar nos momentos que mais precisei. Ao senhor, cabe o versículo bíblico: “os sábios que ensinam os outros, nos céus, como estrelas brilharão, com um brilho que nunca apagará”.

Aos amigos queridos, companheiros dessa jornada, que foram uma ótima companhia durante esses anos, dentre os quais agradeço, de forma especial, à Nilceane Lisboa de Avila, Felipe P. M. Quevedo e a Daniele Elisa Benvegnú: Deus saberá recompensá-los.

Igual agradecimento faço aos professores que integram a banca examinadora: Prof. Américo Campos Filho, Prof. Mauro de Vasconcellos Real e Prof. Adelano Espósito. As contribuições de uma banca demonstram que devemos sempre buscar a continuidade dos nossos estudos.

O período do mestrado foi um tempo único e inesquecível da minha trajetória pessoal. Foram diversos desafios durante essa caminhada. A batalha diária para afastar o desânimo frente as dificuldades e obrigações, agora se transforma em recompensa. O esforço sempre vale a pena quando se sabe aonde se quer chegar.

Muita gente pequena, em lugares pequenos,  
fazendo coisas pequenas, podem mudar o mundo.

*Eduardo Galeano*



## RESUMO

As estruturas de concreto armado podem ser prejudicadas devido à imprevisibilidade presente nos projetos, nos carregamentos, nas suposições de modelagem, desvios geométricos e erros de construção. Devido a isso, o objetivo principal desta pesquisa é analisar qual o impacto que possuem algumas imperfeições, decorrentes do processo construtivo, na segurança das lajes maciças de concreto armado. Tais imperfeições ficaram delimitadas na avaliação da variação da geometria da laje e do posicionamento da armadura dentro da estrutura, sendo essas imperfeições consideradas como variáveis aleatórias. Para as análises, também foram consideradas as variáveis que conhecidamente afetam o comportamento real da estrutura. Tais variáveis são; a resistência do concreto à compressão, a resistência do aço à tração, as ações permanentes e variáveis, incerteza do modelo das solicitações e as incertezas de modelo da resistência. Para representar o posicionamento da armadura dentro da estrutura, foi utilizado um campo estocástico. Para as análises, a laje foi avaliada em dois cenários possíveis: o primeiro com a armadura perfeitamente plana e o segundo com a armadura apresentando ondulações diversas na malha. Para esse estudo, foi realizado análises de sensibilidade, das variáveis aleatórias consideradas, e de confiabilidade, para algumas situações propostas. As análises foram feitas utilizando o Método dos Elementos Finitos, através do *software* ANSYS 2022R1 em conjunto com o *software* Matlab. Foi avaliado somente o Estado Limite de Serviço (ELS) e foi utilizado a ISO 2394:1998 para definir o índice de confiabilidade alvo. Concluiu-se, através do estudo de sensibilidade, que as variáveis que mais afetam no valor final do deslocamento das lajes são as que fazem parte da sua geometria e a resistência à compressão do concreto. As análises de confiabilidade apontaram que a estrutura é bastante segura pois, todos os casos analisados ficaram com o índice de confiabilidade acima do prescrito pela ISO 2394:1998. Tanto a malha de armadura perfeitamente plana, quanto a malha com deformações, não influenciaram no valor final da flecha. O cobrimento, para ambos os casos de malha de armadura avaliados, também não influenciou significativamente no valor final da flecha.

Palavras-chave: Método de Simulação. FORM. Monte Carlo. Método dos Elementos Finitos. Concreto Armado. Lajes.

## ABSTRACT

The reinforced concrete structures can be harmed due to the unpredictability present in the projects, the loads, the modeling assumptions, geometric deviations and construction errors. In this context, the main objective of this research is to analyze the impact that some imperfections, resulting from the construction process, have on the safety of simple reinforced concrete slabs. These imperfections were delimited in the evaluation of the variation of the geometry of the slab and the positioning of the reinforcement inside the structure, and these imperfections were considered as random variables. For the analysis, it was also considered the variables that are known to affect the actual behavior of the structure. These variables are: concrete compressive strength, steel tensile strength, permanent and variable loads, model uncertainty of loads, and model uncertainty of strength. To represent the positioning of the reinforcement within the structure, a stochastic field was used. For the analyses, the slab was evaluated in two possible scenarios: the first with the reinforcement perfectly flat and the second with the reinforcement presenting several undulations in the mesh. For this study, it was performed sensitivity analyses of the considered random variables and reliability analyses for some proposed situations. The analyses were performed using the Finite Element Method, by the ANSYS 2022R1 *software* in conjunction with the Matlab *software*. Only the Service Limit State (SLS) was evaluated and ISO 2394:1998 was used to define the target reliability index. It was concluded, with the sensitivity study, that the variables that most affect the final value of the slabs displacement are those that are part of their geometry and the compressive strength of concrete. The reliability analysis showed that the structure is very safe, where in all cases analyzed presenting a reliability index above that prescribed by ISO 2394:1998. Both the perfectly flat reinforcement mesh and the mesh with irregularities had no influence on the final value of the deflection. The cover, for both cases of reinforcement mesh evaluated, also did not influence significantly on the final value of the deflection.

Keywords: Simulation Method. FORM. Monte Carlo. Finite Element Method. Reinforced Concrete. Slabs.

## LISTA DE FIGURAS

|  |     |
|--|-----|
| Figura 1 - Variância pequena e variância grande.....   | 43  |
| Figura 2 - FDP de uma v.a normal com média $\mu$ e desvio padrão $\sigma$ .....                | 48  |
| Figura 3 - FDP de uma v.a. normal padronizada.....   | 49  |
| Figura 4 - FDP de uma v.a. exponencial, para valores selecionados de $\lambda$ .....           | 50  |
| Figura 5 - FDP de uma distribuição lognormal .....   | 51  |
| Figura 6 - Diagrama carga x deslocamento típico do concreto estrutural.....                    | 54  |
| Figura 7 - Domínios de estado-limite último de uma seção transversal .....                     | 55  |
| Figura 8 - Hipóteses básicas considerando $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$ .....                     | 59  |
| Figura 9 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido .....                         | 60  |
| Figura 10 - Diagrama tensão-deformação do aço .....  | 61  |
| Figura 11 - Definição de diferentes módulos de elasticidade .....                              | 63  |
| Figura 12 - Carregamento das lajes .....   | 67  |
| Figura 13 - Tipos de Lajes.....  | 68  |
| Figura 14 - Convenção para as condições de apoio .....   | 70  |
| Figura 15 - Laje apoiada com carga distribuída .....   | 70  |
| Figura 16 - Laje engastada-apoiada com carga distribuída.....                                  | 70  |
| Figura 17 - Laje engastada-engastada com carga distribuída.....                                | 71  |
| Figura 18 - Lajes em balanço com carga distribuída .....                                       | 71  |
| Figura 19 - Laje em balanço com carga na extremidade.....                                      | 71  |
| Figura 20 - Configuração de ruptura - laje simplesmente apoiada .....                          | 75  |
| Figura 21 - Inclinação das linhas de ruptura.....  | 76  |
| Figura 22 - Função densidade de probabilidade para ações e resistências.....                   | 84  |
| Figura 23 - Relação entre o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha .....          | 86  |
| Figura 24 - Representação do índice de confiabilidade - FORM.....                              | 87  |
| Figura 25 - Ilustração do índice de segurança .....  | 91  |
| Figura 26 - Fatores de sensibilidade .....   | 92  |
| Figura 27 - Método da transformação inversa para distribuição qualquer.....                    | 96  |
| Figura 28 - Conceito básico de LHS exemplificado para duas variáveis e cinco realizações ..... | 97  |
| Figura 29 - Modelos para inclusão da armadura em um modelo de elementos finitos .....          | 100 |
| Figura 30 - Geometria do elemento SOLID186 .....   | 101 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 31 - Elemento REINF264 incorporada ao elemento SOLID186 .....  | 103 |
| Figura 32 - Orientação da fibra de reforço em um elemento sólido de 20 nós .....  | 104 |
| Figura 33 - Superfície de falha de Drucker-Prager para o concreto .....   | 106 |
| Figura 34 - Lei de endurecimento do concreto comprimido e lei de amolecimento do concreto fissurado – HSL <i>linear</i> .....   | 108 |
| Figura 35 - Diagrama tensão deformação para o modelo elastoplástico bilinear ....   | 114 |
| Figura 36 - Geometria da laje S7 - Abdul-Wahab e Khalil .....   | 117 |
| Figura 37 - Modelo numérico - laje S7 de Abdul-Wahab e Khalil .....   | 119 |
| Figura 38 - Deslocamentos - laje S7 Abdul-Wahab e Khalil .....  | 121 |
| Figura 39 - Comprimento de correlação $\rho$ em relação à distância espacial $\tau$ experimental e numérico ajustado após a otimização para os modelos de decaimento exponencial..... | 129 |
| Figura 40 - Procedimento para aplicar o campo estocástico de recobrimento no modelo de armaduras negativas em elementos finitos do ANSYS .....  | 130 |
| Figura 41 - Matriz de coeficiente de correlação para os pontos de geração do campo estocásticos para cobertura.....   | 131 |
| Figura 42 - Campo estocástico para cobertura [m] gerado para os pontos de interseção das armaduras negativas da laje, longitudinal e transversal.....                                 | 132 |
| Figura 43 - Campo estocástico para cobertura gerado para os pontos entrada e saída das armaduras em cada elemento finito .....  | 133 |
| Figura 44 - Armaduras geradas.....  | 133 |
| Figura 45 - Geometria da laje de estudo .....   | 139 |
| Figura 46 - Modelo numérico – Armadura reta.....  | 142 |
| Figura 47 - Modelo numérico – Armadura variável.....  | 143 |
| Figura 48 - Análise de sensibilidade - $f_c$ .....  | 148 |
| Figura 49 - Análise de sensibilidade - $f_y$ .....  | 149 |
| Figura 50 - Análise de sensibilidade - $LX$ .....   | 150 |
| Figura 51 - Análise de sensibilidade - $h$ .....  | 151 |
| Figura 52 - Análise de sensibilidade - <i>cobri</i> .....   | 152 |
| Figura 53 - Análise de sensibilidade - $Lc$ .....   | 153 |
| Figura 54 - Análise de sensibilidade caso “a” .....   | 160 |
| Figura 55 - Análise de sensibilidade caso “b” .....   | 161 |
| Figura 56 - Análise de sensibilidade caso “c” .....   | 162 |
| Figura 57 - Análise de sensibilidade caso “d” .....   | 163 |

## LISTA DE TABELAS

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 1 – Efeito do tipo de agregados no módulo de elasticidade .....                     | 62  |
| Tabela 2 – Módulo tangente e módulo de elasticidade reduzido.....                          | 63  |
| Tabela 3 – Valores do coeficiente $\xi$ em função do tempo.....                            | 66  |
| Tabela 4 – Tipos de aço para o concreto armado .....                                       | 66  |
| Tabela 5 – Limites de deslocamentos .....  | 78  |
| Tabela 6 – Exigência de durabilidade relacionadas à fissuração.....                        | 81  |
| Tabela 7 – Dados utilizados para o modelo HSD <i>linear</i> .....                          | 113 |
| Tabela 8 – Parâmetros da laje S7 - Abdul-Wahab e Khalil.....                               | 117 |
| Tabela 9 – Dados utilizados para o concreto - Abdul-Wahab e Khalil.....                    | 120 |
| Tabela 10 – Modelos de correlação espacial propostos e encontrados na literatura.<br>..... | 123 |
| Tabela 11 – Coordenadas dos pontos medidos e cobertura para 3 Lajes.....                   | 127 |
| Tabela 12 – Variáveis aleatórias de estudo.....  | 136 |
| Tabela 13 – Carregamento da laje de estudo .....   | 137 |
| Tabela 14 – Parâmetros da laje de estudo.....  | 138 |
| Tabela 15 – Dados utilizados para o concreto .....   | 141 |
| Tabela 16 – Tempo de processamento das análises de sensibilidade .....                     | 147 |
| Tabela 17 – Valores iniciais atribuídas às variáveis aleatórias.....                       | 155 |
| Tabela 18 – Configuração computadores utilizados.....                                      | 156 |
| Tabela 19 – Índice de confiabilidade alvo – ISO 2394:1998.....                             | 156 |
| Tabela 20 – Valor dos parâmetros para o método MCAI .....                                  | 158 |
| Tabela 21 – Valor dos parâmetros para o método FORM.....                                   | 158 |
| Tabela 22 – Tempo de processamento das análises de confiabilidade .....                    | 158 |
| Tabela 23 – Resultado do índice de confiabilidade para os casos avaliados.....             | 160 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|        |  |
|--------|--|
| ABNT   | ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS       |
| APDL   | ANSYS PARAMETRIC DESIGN LANGUAGE               |
| CEB    | COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON             |
| CV     | COEFICIENTE DE VARIAÇÃO                        |
| ELS    | ESTADOS-LIMITES DE SERVIÇO                     |
| ELU    | ESTADOS-LIMITES ÚLTIMOS                        |
| FDA    | FUNÇÃO DENSIDADE ACUMULADA                     |
| FDP    | FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE              |
| FEA    | ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS                   |
| FIB    | FÉDERATION INTERNATIONALE DU BÉTON             |
| FORM   | FIRST-ORDER RELIABILITY METHOD                 |
| ISO    | INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION |
| JCSS   | JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY           |
| LHS    | LATIN HYPERCUBE SAMPLING                       |
| MC     | MONTE CARLO                                    |
| MCAI   | MONTE CARLO COM AMOSTRAGEM POR IMPORTÂNCIA     |
| MEF    | MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS                   |
| MPP    | MOST PROBABLE FAILURE POINT                    |
| MVFOSM | MEAN VALUE FIRST ORDER SECOND METHOD           |
| PPGEC  | PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL  |
| SORM   | SECOND ORDER RELIABILITY METHOD                |
| UFRGS  | UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL      |
| HSD    | HARDENING, SOFTENING, DILATATION               |
| MLM    | MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA               |

## LISTA DE SÍMBOLOS

### LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

|             |   |
|-------------|---|
| $E_c$       | módulo de elasticidade reduzido do concreto                       |
| $E_{ci}$    | módulo de elasticidade inicial do concreto                        |
| $E_s$       | módulo de elasticidade do aço                                     |
| $F_X(x_i)$  | Função de Densidade Acumulada                                     |
| $G_K$       | valor característico da solicitação permanente.                   |
| $G_f$       | energia de fratura  |
| $I_1$       | primeiro invariante do tensor de tensões                          |
| $I_W$       | função indicadora   |
| $J_2$       | segundo invariante do tensor desviador de tensões                 |
| $L_c$       | comprimento de correlação   |
| $N$         | tamanho da população  |
| $P^*$       | <i>most probable failure point</i> (ponto mais provável de falha) |
| $P_f$       | probabilidade de falha  |
| $\hat{P}_f$ | estimador da probabilidade de falha                               |
| $Q_K$       | valor característico das solicitações variáveis                   |
| $R_b$       | resistência biaxial à compressão do concreto                      |
| $R_c$       | resistência uniaxial à compressão do concreto                     |
| $R_c$       | resistência uniaxial à compressão do concreto                     |
| $R_d$       | esforço resistente de cálculo                                     |
| $R_t$       | resistência uniaxial à tração do concreto                         |
| $S_d$       | esforço solicitante de cálculo                                    |
| $R$         | resistência   |
| $S$         | ações externas  |
| $S$         | espaço amostral   |
| $S$         | desvio padrão amostral  |
| $S^2$       | variância amostral  |
| $X$         | variáveis aleatórias no espaço real                               |
| $Z$         | variáveis aleatórias no espaço Normal não correlacionado          |

## LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $c$                   | fator de proporcionalidade  |
| $f_X(x_i)$            | função Densidade de Probabilidade                                     |
| $f_{c2c}$             | resistência à compressão biaxial do concreto                          |
| $f_{c2m}$             | resistência média à compressão biaxial do concreto                    |
| $f_{ck}, f_c, f_{cd}$ | resistência à compressão do concreto                                  |
| $f_{cm}$              | resistência média à compressão do concreto                            |
| $f_{ctk}$             | resistência característica à tração do concreto                       |
| $f_{ctm}$             | resistência média à tração do concreto                                |
| $f_y, f_{yk}, f_{yd}$ | tensão de escoamento do aço   |
| $h$                   | espessura da peça   |
| $k_{cm}$              | deformação plástica quando é atingida a tensão máxima                 |
| $k_{cr}$              | deformação plástica última em compressão                              |
| $k_{tr}$              | deformação plástica quando é atingida a tensão mínima;                |
| $k$                   | parâmetro do material   |
| $k$                   | deformação plástica efetiva (equivalente), parâmetro de endurecimento |
| $n$                   | tamanho da amostra  |
| $ns$                  | número de ciclos de simulações efetuadas                              |
| $wk$                  | abertura característica das fissuras                                  |
| $\bar{x}$             | média aritmética amostral   |

## LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

|               |  |
|---------------|--|
| $\Phi$        | função acumulada Normal padrão                           |
| $\Omega_{tr}$ | tensão relativa residual em tração                       |
| $\Omega_t$    | função de plastificação em tração                        |
| $\Omega_{cr}$ | tensão relativa residual em compressão                   |
| $\Omega_{ci}$ | tensão relativa no início da plastificação em compressão |
| $\Omega_c$    | função de plastificação em compressão                    |

## LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

|            |                                   |
|------------|-----------------------------------|
| $\alpha$   | parâmetro do material             |
| $\alpha_i$ | fator de sensibilidade            |
| $\beta$    | índice de confiabilidade          |
| $\gamma$   | constante de Euler                |
| $\delta_t$ | parâmetro da dilatância em tração |



|                    |   |
|--------------------|---|
| $\delta_c$         | parâmetro da dilatação em compressão  |
| $\varepsilon_{yd}$ | deformação plástica do aço de projeto   |
| $\varepsilon_{cu}$ | deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura                    |
| $\varepsilon_{c2}$ | deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico |
| $\mu$              | média aritmética populacional   |
| $\mu_i$            | média da variável $i$   |
| $\rho(\tau)$       | função de autocorrelação  |
| $\hat{\rho}(\tau)$ | função de autocorrelação experimental   |
| $\sigma$           | desvio padrão populacional  |
| $\sigma^2$         | variância populacional  |
| $\sigma_i$         | desvio padrão da variável $i$   |
| $\sigma_c$         | tensão de compressão do concreto  |
| $\sigma_s$         | tensão de escoamento do aço à tração  |
| $\nu$              | coeficiente de Poisson  |

#### SÍMBOLOS ESPECIAIS

|             |                    |
|-------------|--------------------|
| $\nabla$    | operador gradiente |
| $\partial$  | derivada parcial   |
| $ \cdot $   | operador de módulo |
| $\ \cdot\ $ | norma Euclidiana   |
| $\Sigma$    | operador somatório |

## SUMÁRIO

|              |  |           |
|--------------|--|-----------|
| <b>1</b>     | <b>INTRODUÇÃO .....</b>  | <b>20</b> |
| 1.1          | OBJETIVO GERAL.....  | 22        |
| 1.2          | OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....                                    | 23        |
| 1.3          | ESTRUTURA DO TRABALHO .....                                    | 23        |
| <b>2</b>     | <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>                             | <b>25</b> |
| 2.1          | TRABALHOS E PESQUISAS REALIZADOS .....                         | 25        |
| <b>3</b>     | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>                             | <b>37</b> |
| 3.1          | CONCEITOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA .....                 | 37        |
| <b>3.1.1</b> | <b>Axiomas de probabilidade .....</b>                          | <b>38</b> |
| <b>3.1.2</b> | <b>Variáveis aleatórias .....</b>                              | <b>39</b> |
| <b>3.1.3</b> | <b>Medidas de tendência central.....</b>                       | <b>40</b> |
| <b>3.1.4</b> | <b>Medidas de dispersão .....</b>                              | <b>42</b> |
| 3.2          | DISTRIBUIÇÃO DISCRETA E CONTÍNUA DE PROBABILIDADE .....        | 44        |
| <b>3.2.1</b> | <b>Distribuição discreta de probabilidade.....</b>             | <b>45</b> |
| <b>3.2.2</b> | <b>Distribuição contínua de probabilidade .....</b>            | <b>47</b> |
| 3.3          | ESTADOS LIMITES E SEGURANÇA .....                              | 52        |
| <b>3.3.1</b> | <b>Estado limite de serviço – ELS.....</b>                     | <b>53</b> |
| <b>3.3.2</b> | <b>Estado limite último - ELU .....</b>                        | <b>54</b> |
| <b>3.3.3</b> | <b>Condições para segurança.....</b>                           | <b>55</b> |
| 3.4          | DIMENSIONAMENTO ÀS SOLICITAÇÕES NORMAIS .....                  | 57        |
| <b>3.4.1</b> | <b>Hipóteses básicas .....</b>                                 | <b>57</b> |
| <b>3.4.2</b> | <b>Diagrama tensão-deformação para o concreto .....</b>        | <b>59</b> |
| <b>3.4.3</b> | <b>Diagrama tensão-deformação para o aço .....</b>             | <b>60</b> |
| 3.5          | PROPRIEDADE DOS MATERIAIS .....                                | 62        |
| <b>3.5.1</b> | <b>Concreto.....</b>   | <b>62</b> |
| <b>3.5.2</b> | <b>Aço.....</b>  | <b>66</b> |
| 3.6          | PROJETO DE LAJES DE CONCRETO ARMADO.....                       | 67        |
| <b>3.6.1</b> | <b>Tipos de lajes.....</b>                                     | <b>67</b> |
| <b>3.6.2</b> | <b>Métodos de cálculo .....</b>                                | <b>69</b> |
| 3.7          | VERIFICAÇÃO DO ESTADO-LIMITE DE SERVIÇO (ELS) .....            | 77        |
| <b>3.7.1</b> | <b>Estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF) .....</b> | <b>77</b> |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 3.7.2 | <b>Estado limite de fissuração</b> .....                                      | 80  |
| 3.8   | CONFIABILIDADE ESTRUTURAL .....   | 81  |
| 3.8.1 | <b>Índice de confiabilidade</b> .....   | 85  |
| 3.9   | MÉTODOS PARA A AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE .....                              | 87  |
| 3.9.1 | <b>Método de primeira ordem FORM</b> .....                                    | 87  |
| 3.9.2 | <b>Método de Monte Carlo</b> .....  | 92  |
| 3.9.3 | <b>Método de Monte Carlo com Amostragem por importância</b> .....             | 94  |
| 3.9.4 | <b>Geração das amostras aleatórias para o Método de MC</b> .....              | 95  |
| 4     | <b>MODELO NUMÉRICO</b> .....  | 99  |
| 4.1   | TIPOS DE ELEMENTOS.....   | 100 |
| 4.1.1 | <b>Laje de concreto – SOLID186</b> .....                                      | 100 |
| 4.1.2 | <b>Armadura – REINF264</b> .....  | 102 |
| 4.2   | MODELO DE MATERIAIS.....  | 104 |
| 4.2.1 | <b>Modelo constitutivo do concreto – <i>Drucker-Prager Concrete</i></b> ..... | 105 |
| 4.2.2 | <b>Modelo constitutivo – armadura</b> .....                                   | 113 |
| 5     | <b>VALIDAÇÃO DO MODELO</b> .....  | 115 |
| 5.1   | LAJE DE ABDUL-WAHAB E KHALIL (2000).....                                      | 115 |
| 5.1.1 | <b>Propriedades dos materiais e características geométricas</b> .....         | 116 |
| 5.1.2 | <b>Modelo numérico</b> .....  | 118 |
| 5.1.3 | <b>Comparação dos resultados de deslocamentos</b> .....                       | 120 |
| 6     | <b>VARIABILIDADE ESPACIAL DE PROPRIEDADES POR CAMPO ESTOCÁSTICO</b> .....     | 122 |
| 6.1   | AVALIAÇÃO DO COMPRIMENTO DE CORRELAÇÃO.....                                   | 122 |
| 6.1.1 | <b>Geração de Campos Estocásticos</b> .....                                   | 125 |
| 6.2   | DADOS EXPERIMENTAIS DE RECOBRIMENTO.....                                      | 126 |
| 6.3   | GERAÇÃO DO CAMPO ESTOCÁSTICO PARA RECOBRIMENTO DA ARMADURA.....               | 129 |
| 7     | <b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....   | 134 |
| 7.1   | VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONSIDERADAS.....  | 134 |
| 7.2   | DESCRIÇÃO DA LAJE DE ESTUDO.....  | 137 |
| 7.2.1 | <b>Modelo numérico</b> .....  | 140 |

|              |  |            |
|--------------|--|------------|
| 7.3          | FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE ADOTADA.....                           | 144        |
| 7.4          | ESTUDO DA SENSIBILIDADE DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS .....         | 145        |
| <b>7.4.1</b> | <b>Análise dos resultados do estudo de sensibilidade .....</b> | <b>147</b> |
| 7.5          | CONFIABILIDADE PARA O ELS-DESLOCAMENTOS.....                   | 154        |
| <b>8</b>     | <b>CONCLUSÃO .....</b>   | <b>165</b> |
| 8.1          | SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....                          | 167        |
|              | <b>REFERÊNCIAS.....</b>  | <b>169</b> |
|              | <b>APÊNDICE A – RESULTADOS ANÁLISE SENSIBILIDADE .....</b>     | <b>176</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

As estruturas de concreto armado (CA) são meios de construção muito versáteis. Apresentam vantagens em termos de robustez, baixo custo de manutenção, lenta degradação e alto grau de resistência à agressividade ambiental. Devido à inevitável imprevisibilidade presente em cada projeto, carregamento, desvios geométricos, erros de construção e devido às incertezas ligadas a suposições de modelagem, essas vantagens podem ser prejudicadas.

Choi *et al.* (2007) classifica as incertezas como aleatórias e epistêmicas, de acordo com os diferentes tipos. A incerteza aleatória (objetiva) também é chamada de incerteza irreduzível ou inerente. A incerteza epistêmica (subjativa) é uma incerteza redutível que se origina da falta de conhecimento e dados. Existe uma série de ferramentas de análise probabilística, desenvolvidas para quantificar incertezas, mas alguns sistemas complexos ainda são projetados com regras simplificadas. Os fatores de majoração e minoração das ações e das resistências ainda são usados para assegurar a segurança no projeto estrutural. Quando a dispersão e o tipo de distribuição das variáveis são consideradas, o fator de segurança global pode ser potencialmente menor que a unidade, e a maneira convencional de considerar as incertezas não seria tão adequado. Particularmente em projetos de laje de concreto armado, é de interesse obter e analisar o grau de segurança envolvido em tais projetos. A NBR 6118:2014 utiliza fatores de segurança como meio de lidar com as incertezas.

Diversos artigos podem ser encontrados na literatura sobre a confiabilidade de estruturas de concreto armado (CA), como em Scherer (2018), Saleh *et al.* (2017), Santos *et al.* (2014), Baji e Ronagh (2011), Gomes *et al.* (1997), mas poucos tratam da análise de sensibilidade e dos efeitos dos erros de execução na confiabilidade de lajes de CA.

A norma brasileira de projeto estrutural, NBR 6118: 2014, estabelece requisitos básicos para o projeto e detalhamento de estruturas de concreto armado e protendido. Outra norma específica para ações, a NBR 8681: 2004, também é utilizada para o desenvolvimento de projetos estruturais, a qual apresenta as diretrizes básicas para o projeto de edificações. Estas normas utilizam uma teoria

semi-probabilística para garantir a segurança adequada das estruturas, onde, dependendo da previsibilidade e frequência de ocorrência, as cargas e resistências são tratadas de formas diferentes e valores característicos são atribuídos a cada variável. Os valores de projeto são obtidos por meio dos coeficientes de minoração da resistência e dos coeficientes de majoração das ações (NBR 8681:2004).

No entanto, como a dimensão da estrutura e a resistência dos materiais são de natureza aleatória, sempre há algum grau de incerteza em relação aos valores que assumirão. As cargas permanentes e variáveis também são consideradas como sendo variáveis aleatórias, pois apresentam uma dispersão considerável, especialmente as variáveis. Devido a isso, o valor máximo das cargas às quais a estrutura será submetida, pode ser previsto com certa imprecisão (OLIVEIRA, 2014).

Existem outras incertezas, que estão relacionadas aos métodos de fabricação, que incluem os erros devido à qualificação dos funcionários e à tecnologia dos equipamentos utilizados. Todas as incertezas acima mencionadas permitem que parte das grandezas relevantes sejam assumidas como variáveis aleatórias.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é avaliar a confiabilidade estrutural de lajes de CA quando sujeitas a certos erros de execução, levando em consideração as incertezas relacionadas a geometria e as propriedades dos materiais. Além disso, pretende-se avaliar a sensibilidade de alguns parâmetros e seu efeito na confiabilidade final para a função de Estado Limite de Serviço (ELS), projetada com base na abordagem semi-probabilística de fatores de segurança da NBR6118:2014. O Método de Simulação de Monte Carlo com Amostragem por Importância (MCAI) e o FORM (Método de Confiabilidade de Primeira Ordem) serão utilizados para a avaliação da confiabilidade e investigação de sensibilidade das variáveis aleatórias.

## 1.1 OBJETIVO GERAL

Neste trabalho, pretende-se analisar qual o impacto dos erros de execução na segurança de lajes simples de concreto armado. Tais erros são delimitadas em:

- a) variação na geometria da laje, que pode ser decorrente da abertura da forma no momento da concretagem ou da montagem inadequada das mesmas;
- b) variação da posição da armadura dentro da laje e cobrimento insuficiente, que podem ser ocasionados devido à ausência de espaçadores, espaçadores insuficientes ou devido ao próprio funcionário que pode passar sobre a malha e deformá-la.

Para analisar a variação da armadura, será utilizado um campo estocástico, o qual gerará uma malha com diferentes ondulações dentro da laje. O intuito dessa análise é avaliar se a malha com a armadura com deformações tem sua confiabilidade afetada em comparação com a malha perfeitamente plana.

Além das imperfeições decorrentes da execução da laje, serão consideradas também, as variáveis que conhecidamente afetam o comportamento real da estrutura. Tais variáveis possuem incertezas e são; a resistência do concreto à compressão, a resistência do aço à tração, as ações permanentes e variáveis, incerteza do modelo das solicitações e as incertezas de modelo da resistência (modelo numérico).

Para o estudo da confiabilidade separaram-se as análises em quatro casos, o primeiro onde todas as incertezas foram consideradas simultaneamente e os outros três casos, onde foram feitas combinações entre as variáveis. Nestes três casos, foram retiradas algumas variáveis, a fim de analisar qual o impacto na confiabilidade da laje. Será avaliado somente o Estado Limite de Serviço (ELS), pois, em uma situação real, o ELS é violado antes que seja atingido o Estado Limite Último (ELU). Ao atingir o ELS o usuário tem a possibilidade de buscar intervenções para que a estrutura não chegue à ruína.

## 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- a) dimensionar uma laje modelo, a qual irá servir de base para pesquisa, utilizando as recomendações da NBR 6118:2014;
- b) gerar um campo estocástico capaz de reproduzir a variabilidade da posição da armadura no interior da laje;
- c) analisar o efeito da posição da armadura na laje;
- d) analisar o efeito da variação das dimensões da laje;
- e) analisar o efeito da variação do cobrimento da laje;
- f) analisar as incertezas presentes nas lajes;
- g) programar os algoritmos de análise de confiabilidade no *software* Matlab;
- h) analisar a sensibilidade das variáveis frente ao comportamento estrutural (flechas);
- i) calcular a confiabilidade de lajes de concreto armado;
- j) identificar o quão prejudicial é para a segurança da estrutura as imperfeições de execução.

## 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em 8 capítulos, onde cada um trata de um assunto referente ao tema de estudo. No capítulo 1 é apresentada uma pequena introdução, onde é exposto o assunto abordado. No capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica da literatura científica, dando maior ênfase aos trabalhos publicados que tenham alguma relação com a proposta de estudo. No capítulo 3 é exposto a fundamentação teórica, onde são abordados alguns temas que são de suma importância para o entendimento do trabalho, como a análise de confiabilidade, os conceitos de probabilidade e estatística, funções de estado-limite, dentre outros. Esse capítulo foi desenvolvido com o intuito de proporcionar ao leitor um arcabouço conceitual para aprimorar e fornecer uma base teórica para o entendimento dos resultados.



No capítulo 4 são apresentados os tipos de elementos finitos, bem como os modelos constitutivos que foram utilizados para representar o concreto e o aço. No capítulo 5 se encontra a validação do modelo numérico proposto, onde a verificação é feita comparando o exemplo numérico com um resultado experimental. No capítulo 6 é discutido a variabilidade espacial através da utilização de campos estocásticos, onde são apresentados dados experimentais locais de recobrimento de lajes reais, para a geração do campo estocástico.

No capítulo 7 são apresentados os resultados obtidos, tanto para a análise de sensibilidade quanto para a análise de confiabilidade. Por fim, as conclusões do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros no campo de pesquisa tratado, são expostas no capítulo 8. No final, encontra-se um apêndice que traz as imagens dos resultados da análise de sensibilidade.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 TRABALHOS E PESQUISAS REALIZADOS

O tema de análise de confiabilidade de estruturas de concreto armado tem sido um assunto recorrente no Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil (PPGEC) da UFRGS. Trabalhos pioneiros nesta área, dentro do PPGEC da referida universidade, remontam a análise da confiabilidade de estruturas de barragens, por Araújo (1995), a análise de estruturas de concreto armado, por Gomes (1997, 2001) e Real (2000), assim como a análise de vigas recuperadas à flexão, estudado por Paliga (2008), dentre diversos outros trabalhos. O enfoque sempre recaiu no modelamento destas estruturas projetadas segundo preceitos normativos e a posterior avaliação da Probabilidade de Falha frente às incertezas presentes em materiais, modelamento e carregamentos.

Mais especificamente, Araújo (1995) analisou barragens de gravidade de concreto armado, considerando a fase construtiva e a interação dinâmica barragem-reservatório-fundação. A análise das barragens foi desde o lançamento da primeira camada de concreto até a sua total entrada em serviço. O autor empregou o Método dos Elementos Finitos (MEF) para solucionar os problemas referentes à transferência de calor. A análise dinâmica foi realizada considerando o movimento do sistema acoplado barragem-reservatório-fundação, onde a barragem foi submetida à pressão hidrostática e a uma excitação sísmica. Os resultados apontaram que o Método de Simulação de Monte Carlo exige um maior esforço computacional, porém pode ser empregado para resolver qualquer problema de característica probabilística, desde que um algoritmo para a solução determinística seja utilizado.

Gomes (1997) analisou a confiabilidade de estruturas de concreto armado usando o Método dos Elementos Finitos e processos de simulação. A análise de confiabilidade foi feita através de Simulação Direta de Monte Carlo, utilizando a técnica de Amostragem por Importância. O autor assumiu como variáveis aleatórias básicas a resistência última à compressão do concreto, seu módulo de elasticidade, a tensão de escoamento do aço, o coeficiente de Poisson e as intensidades das

cargas permanentes e variáveis. O aço foi modelado com elementos de placa incorporados nos elementos tridimensionais, já o concreto armado foi modelado com elementos finitos tridimensionais. Concluiu-se que o modelo numérico proposto para a validação determinística de estruturas de concreto armado, apresentou bons resultados. Para as estruturas tridimensionais de concreto armado, quando considerado apenas incertezas do tipo física, a análise de confiabilidade apresentou resultados melhores quando utilizando a simulação direta com Amostragem por Importância, em comparação a técnica de Simulação de Monte Carlo. Além de resultados melhores, houve a redução do tempo computacional e um menor número de simulações.

Real (2000) apresentou um modelo para análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob o estado plano de tensão, utilizando o Método dos Elementos Finitos. O objetivo principal do autor foi demonstrar como as incertezas presentes nos principais parâmetros do comportamento de pilares e vigas afetam a variabilidade da resposta das estruturas. O método utilizado, para fazer a análise de confiabilidade, foi o de Simulação de Monte Carlo. O modelamento da variabilidade das propriedades do concreto se deu através de um campo estocástico bidimensional, gerado por intermédio do método da representação espectral. As variáveis aleatórias consideradas foram as propriedades da armadura e as dimensões da estrutura. O autor concluiu que com as simulações de Monte Carlo, em conjunto com testes paramétricos, foi possível a identificação dos principais parâmetros que afetam a variabilidade da resposta estática de pilares e vigas de concreto armado. Identificou-se também, que no dimensionamento das vigas, o nível de segurança atingido foi extremamente superior ao obtido no dimensionamento dos pilares.

Gomes (2001) apresenta outro trabalho na área, porém com uma abordagem diferente. Nesta pesquisa, o autor compara técnicas para avaliação da confiabilidade em estruturas de concreto armado incluindo o efeito da variabilidade espacial de suas propriedades. O objetivo principal do trabalho foi desenvolver algoritmos e técnicas eficazes para trabalhar o problema da confiabilidade estrutural em estruturas de concreto armado. O trabalho envolve uma série de comparações entre as técnicas clássicas de análise de confiabilidade, como o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM), Simulação Direta de Monte Carlo, Simulação Monte

Carlo com Amostragem por Importância Adaptativa e os métodos aproximados da Superfície de Resposta e de Redes Neurais Artificiais. Para a representação do concreto armado, o autor desenvolveu um modelo de elementos finitos que incluiu as principais características observadas nesse material. Para a geração de campos estocásticos multidimensionais não gaussianos, com relação as propriedades do material, foi desenvolvido outro modelo, o qual foi independente da malha de elementos finitos. Também foi desenvolvido técnicas capazes de acelerar as avaliações estruturais presentes nas técnicas empregadas. O autor conclui que as técnicas de simulação têm um desempenho consideravelmente baixo para os problemas mais complexos. As técnicas que se destacam positivamente foram a de FORM, da Superfície Resposta e de Resposta Neurais Artificiais, porém as mesmas apresentaram precisão prejudicada devido às aproximações realizadas.

Low e Hao (2001) fizeram uma análise de confiabilidade de lajes de concreto armado sob carga explosiva. Os autores relatam que é muito difícil prever a carga explosiva que uma estrutura será sujeita, por ser um fenômeno que envolve muitas incertezas. De acordo com os autores, as funções de desempenho foram configuradas com base na ductilidade do deslocamento (devido à plastificação do aço que leva a deformações excessivas da estrutura) e estados-limite da deformação máxima (esmagamento do concreto devido á carga explosiva), para avaliar a confiabilidade. O método de simulação utilizado foi o de Monte Carlo e foi combinada uma análise dinâmica da laje, considerado o sistema com apenas um grau de liberdade (1GL). Os autores concluíram que a representação de 1GL mostrou-se adequada, por meio da utilização do *software* MARC, de elementos finitos. Foram examinadas três variações de resistência do material. Ao avaliar a ruptura por flexão, foi identificado que a variação do módulo de elasticidade do concreto exerceu maior influência na probabilidade de ruptura. Já a resistência ao escoamento da armadura, teve uma contribuição ligeiramente menor, seguida da resistência ao esmagamento do concreto que teve a menor contribuição. Por meio de estudos paramétricos, os autores concluíram também que o comprimento da laje não teve influência na probabilidade de falha. O aumento da espessura e da porcentagem de armadura, bem como a redução da rigidez pela alteração das condições de apoio, foram positivos no desempenho da resposta à flexão da laje.

Nogueira (2006) avaliou a confiabilidade de pilares curtos em concreto armado sob flexo-compressão normal, dimensionados segundo a NBR 6118:2003. Seus principais objetivos foram avaliar os níveis de confiabilidade implícitos na NBR6118:2003 e NBR 8681:2013, verificar os níveis de confiabilidade alvo a serem atingidos, analisar a influência de inúmeros parâmetros de projeto nos níveis de confiabilidade obtidos e propor mudanças para a NBR 6118:2003. Os resultados obtidos pelo autor indicaram que, de acordo com os critérios da NBR 6118:2003, considerando a resistência característica à compressão do concreto, ( $f_{ck}$ ), igual a 50 Mpa, os níveis de confiabilidade mostram-se inferiores aos pilares com  $f_{ck}$  de 20 e 35 MPa. O autor constatou que, excedendo as recomendações da NBR 6118:2003 para concretos com  $f_{ck}$  de 65 e 80 MPa, obteve-se índices de confiabilidade inaceitáveis. Porém, com ajustes no bloco de tensões e mantendo todas as recomendações da NBR 6118:2003, obteve-se níveis de confiabilidade adequados para todas as resistências de concreto analisadas.

Paliga (2008) fez uma análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, por intermédio do Método de Simulação de Monte Carlo e com a utilização de um modelo de elementos finitos. As vigas foram dimensionadas segundo a NBR 6118:2014 e para o projeto de recuperação das vigas danificadas foram empregados os procedimentos do *Bulletin 14 da Fédération Internationale du Béton (fib)*, referente ao dimensionamento de sistemas de reforço com material compósito colado na face externa da estrutura. As análises demonstraram que o nível de segurança no projeto de vigas de concreto armado, dimensionadas segunda a NBR 6118:2014, foi considerado satisfatório. Porém, a confiabilidade pode reduzir drasticamente, a níveis inaceitáveis, quando há danos nas armaduras tracionadas de flexão. Com relação as vigas recuperadas, dimensionado de acordo com a *Bulletin 14 da fib*, pode ser observado que a confiabilidade foi no mínimo igual à confiabilidade das vigas originais. Assim, a probabilidade de falha das vigas recuperadas foi menor, se comparado com a probabilidade de falha das vigas originais.

Almeida (2008) comparou o projeto ótimo (DDO) com o projeto ótimo baseado na confiabilidade (RBDO) de pórticos planos de concreto armado. O autor utilizou uma malha de elementos finitos usando elementos de barra para modelar a estrutura, considerando a não-linearidade física e geométrica e dos materiais. As

variáveis aleatórias consideradas para a obtenção da confiabilidade, foram a tensão de escoamento do aço, a resistência à compressão do concreto e as cargas acidentais e permanentes. O método utilizado para a análise foi o FORM. O autor concluiu que os projetos ótimos obtidos via DDO podem conduzir a projetos antieconômicos e extremamente seguros ou projetos com nível de segurança baixo. Ao ser utilizado o RBDO foi obtido um projeto ótimo e com uma probabilidade de falha pré-fixada. Uma das vantagens destacadas pelo autor é que a utilização do RBDO via FORM possibilita obter os coeficientes parciais de segurança para um estado limite de uma estrutura em específico, assim como os fatores de importância das variáveis aleatórias. Devido a isto é possível identificar quais são as variáveis que realmente importam na análise, sem ter um aumento no custo do processamento.

Batos (2012) fez uma análise de confiabilidade de seções submetidas à flexão simples e composta através do Método de Simulação de Monte Carlo e com o auxílio do *software* VaP. Neste estudo foi avaliado as seções mais solicitadas de elementos estruturais usuais, seções essas que foram dimensionadas segundo a NBR 6118:2014. O autor fez uma estimativa da probabilidade de falha da seção mais solicitada de lajes e não levou em consideração a plasticidade dos elementos. Os resultados mostraram que nenhuma das lajes estudadas atingiu o índice de confiabilidade estabelecido pelo EUROCODE (1990). Em função do tipo de carregamento, as lajes apresentaram o pior resultado para os casos em que a carga variável correspondia a maior parte do carregamento. Isso aponta, segundo o autor, que para esses casos é preciso utilizar um coeficiente de majoração mais elevado.

Magalhães *et al.* (2014) avaliaram a confiabilidade de pilares de concreto armado com base em resultados de testes obtidos em diferentes laboratórios tecnológicos. Foi determinado a capacidade resistente dos elementos estruturais através do Método dos Elementos Finitos, em conjunto com a Simulação de Monte Carlo. A confiabilidade foi avaliada através do método FORM. Os autores observaram que o índice de confiabilidade modifica em decorrência da variabilidade da resistência à compressão do concreto considerado e da proporção entre os carregamentos acidental e permanente. Concluiu-se que a estimativa da resistência, alcançada em decorrência do controle tecnológico do concreto, exerce uma influência significativa na confiabilidade estrutural. Um controle tecnológico realizado

de forma inadequada pode acarretar gigantescas distorções na avaliação da probabilidade de falhas.

Magalhães *et al.* (2015) fizeram outro estudo, onde avaliou-se o nível de segurança estrutural de pilares de concreto armado através de um modelo computacional que simula o comportamento do mesmo. Para a determinação da carga de ruptura foi utilizado o Método dos Elementos Finitos. Os autores validaram o modelo através da comparação com resultados experimentais presentes na literatura. Para a avaliação do valor do índice de confiabilidade, utilizou-se o Método de Simulação de Monte Carlo e FORM. Os autores chegaram à conclusão de que o modelo foi capaz de simular de maneira adequada o comportamento estrutural de pilares de concreto armado e conseqüentemente, a determinação da carga de ruptura.

Damas, Campos Filho e Real (2015) avaliaram a confiabilidade de pilares de concreto armado de alta resistência, dimensionados segundo a NBR 6118:2014. Os autores fizeram a avaliação através da modelagem numérica, onde foi realizada a validação de um modelo em elementos finitos que simulasse o comportamento de pilares esbeltos de concreto armado. Foi considerado a variabilidade das dimensões da seção transversal e das resistências dos materiais para aplicação do Método de Simulação de Monte Carlo. Os autores concluíram que a confiabilidade do pilar será maior quando for maior a carga permanente em relação à carga total. Quanto maior a excentricidade relativa de primeira ordem, menos confiável será o cálculo. Foi constatado também que quanto maior a esbeltez do pilar, menor é a confiabilidade. A confiabilidade tende a ser menor para concretos com resistência à compressão de 90 MPa. O Método da Rigidez Aproximada resultou em um índice de confiabilidade menor que o Método da Curvatura Aproximada. O estudo dos autores demonstrou que as diretrizes da NBR 6118:2014 estão de acordo com a segurança, pois apresentaram índices de confiabilidade satisfatórios para diferentes situações de projeto.

Pantoja, Silva e Narvaez (2016) avaliaram os índices de segurança de punção, em lajes cogumelo com armadura de cisalhamento através da análise de confiabilidade. O estudo comparou e analisou como diferentes modelos normativos de verificação de punção em lajes se comportaram frente a variação dos parâmetros

analisados. As variáveis aleatórias foram geradas randomicamente considerando cada tipo de distribuição de probabilidade envolvida no estudo, bem como os parâmetros indicados na literatura. Os autores fizeram variações na taxa de armadura da laje, no perímetro crítico, coeficiente de resistência à compressão do concreto, coeficiente de resistência à tração do aço e cargas acidentais e permanentes com o objetivo de investigar o nível de segurança para as oscilações realizadas. Os autores concluíram que é possível e viável avaliar, através da análise de confiabilidade, os resultados para punção de laje cogumelo, com ou sem armadura de cisalhamento. Sendo possível avaliar mais precisamente o seu comportamento, conduzindo ao dimensionamento de projetos mais seguros e econômicos.

Tramontini (2016) estudou a confiabilidade de seções de concreto armado submetidas a diversos tipos de esforços, como: flexão simples, flexão composta, esforços normais simples, esforços cortantes e de segunda ordem em pórticos, com o objetivo de avaliar a probabilidade de falha. Para as verificações foi utilizado o método FORM e as seções foram dimensionadas segundo as recomendações da NBR 6118:2014. O autor utilizou como variáveis probabilísticas que afetam o valor do carregamento e resistência das seções, as dimensões da seção, a resistência à compressão do concreto, a resistência ao escoamento do aço, área de aço e cargas acidentais e permanentes. O autor conclui que os coeficientes de majoração da NBR 6118:2014 para as cargas permanentes são adequados e poderiam ser reduzidos, já para as cargas acidentais poderiam ser aumentadas. O autor identificou a necessidade de maiores pesquisas em se tratando dos critérios de dimensionamento propostos pela NBR 6118:2014, para o caso particular do cisalhamento, cujo mecanismo crítico de falha é frágil.

Prata (2017) avaliou a confiabilidade estrutural do dimensionamento de lajes portuárias maciças de concreto armado, segundo a NBR 6118:2014. As lajes avaliadas foram submetidas a um carregamento uniformemente distribuído e eram simplesmente apoiadas nos quatro lados. O método de simulação utilizado foi o de Monte Carlo, onde foi calculado o índice de confiabilidade para diferentes cenários estruturais. O autor constatou que, para concretos com resistência à compressão inferior a 50 MPa, houve um aumento na resistência característica à compressão do concreto, que provocou uma queda pequena nos índices de confiabilidade. Já para



concretos com resistência característica à compressão superior a 50 MPa, foi observado uma queda maior nos índices de confiabilidade. Foi identificado que ao aumentar a relação entre a espessura das lajes e os vãos, o índice de confiabilidade aumenta. A autora ainda conclui que a predominância do carregamento variável ocasiona quedas nos índices de confiabilidade, quando variadas as proporções entre carregamento permanente e variável.

Mahmoud *et al.* (2017) avaliaram os níveis de confiabilidade específico de pontes de laje de concreto armado, projetadas de acordo com os procedimentos empíricos recomendados pela *American Association of State Highway and Transportation Officials* (AASHTO) para cargas vivas. Para esta análise foram modeladas duas pistas com diferentes comprimentos, pelo Método dos Elementos Finitos. Essas pistas foram submetidas ao carregamento de caminhões, carregamento Tandem e carregamento de pista padrão, utilizando os procedimentos da AASHTO LRFD (*Load and Resistance Factor Design*). O nível de confiabilidade foi obtido por meio da Simulação de Monte Carlo, sendo avaliado para as diferentes pontes analisadas. Os autores concluíram que o método utilizado pela AASHTO LRFD, para calcular o momento fletor, tende a superestimar os momentos de carga viva para vãos menores em pontes de uma e duas pistas se, comparado com momento obtido através da Análise de Elementos Finitos (FEA). Para vãos maiores, o procedimento da AASHTO LRFD tende a superestimar menos o momento fletor quando comparado com o obtido pelo FEA. O índice de confiabilidade foi ligeiramente inferior ao índice de confiabilidade alvo para pontes de duas pistas, já para vias com uma pista foi considerado baixo. Os autores ainda sugerem que seja aumentado o fator de carga vida da AASHTO LRFD para 2,07 para as pistas com uma faixa e 1,8 ou 1,95 (dependendo o caso) para as pistas com duas faixas.

Silva (2017) fez uma análise da confiabilidade da ligação de laje-pilar interno sob o efeito da punção em lajes que ficam apoiadas diretamente sobre pilares, seguindo as recomendações da NBR 6118:2014. Para a análise de confiabilidade o autor fez uso da ferramenta PDS (*Probabilistic Design System*) do *software* ANSYS, onde empregou o Método de Simulação de Monte Carlo com amostragem por *Latin Hypercube*. Foi determinado o índice de confiabilidade para cada projeto e realizado análises paramétricas com as variáveis adotadas, que foram elas: a resistência à tração, resistência à compressão e o módulo de elasticidade do concreto, resistência

ao escoamento do aço, distância entre o centro da armadura superior e a face superior da laje, altura da laje e carregamento permanente e variável. Concluiu-se que as lajes lisas sem armadura de cisalhamento obtiveram índices de confiabilidade aceitáveis. Porém, para as lajes lisas com armadura de cisalhamento, obteve-se um menor índice de confiabilidade alvo adotado. O autor ainda destaca que, de maneira geral, os índices de confiabilidade aumentam com o acréscimo da taxa de armadura de flexão, com o aumento da altura das lajes e com o acréscimo da resistência à compressão do concreto. Porém ocorre uma diminuição dos índices de confiabilidade com o aumento da carga variável. O estudo indicou que a NBR 6118:2014 está adequada para a maioria das lajes lisas sem armadura de cisalhamento, sendo necessário um estudo mais aprofundado para as lajes lisas com armadura de cisalhamento.

Coelho (2018) avaliou a confiabilidade de seções de vigas de concreto armado, submetidas a situação de incêndio, através da Simulação de Monte Carlo. Foram avaliadas cinco diferentes configurações de vigas para uma temperatura na faixa de 100 °C - 900 °C. As variáveis aleatórias foram a carga, a resistência a compressão do concreto e o tipo de agregado. O autor observou uma baixa influência com relação ao tipo de agregado na probabilidade de falha. Observou-se também, que com o aumento da razão de carga, há um aumento da probabilidade de falha e ocorre um aumento da probabilidade de falha com o aumento da área de aço, para uma mesma seção transversal.

Lessa, Lima Junior e Lima (2018) avaliaram a confiabilidade estrutural aplicada ao estudo da resistência de lajes maciças em edifícios de concreto armado. O objetivo dos autores foi aplicar os conceitos de confiabilidade estrutural às lajes de um edifício de concreto armado, o qual foi dimensionado no *software* TQS em conjunto com as recomendações da NBR 6118:2014 e a NBR 8687:2003. A modelagem foi realizada através da implementação do método FORM. Os autores concluíram que, para alguns casos os índices de confiabilidade ficaram abaixo dos valores mínimos estabelecidos pelo EUROCODE (2002) e ACI 318:2003. De modo geral a análise de confiabilidade demonstrou ser uma importante ferramenta no apoio do dimensionamento e análise de estruturas.

Scherer (2018) avaliou o nível de confiabilidade de vigas de concreto armado dimensionadas de acordo com a NBR 6118:2014, em relação ao estado-limite último de flexão. O autor dimensionou 81 de vigas e para o estudo probabilístico inseriu as principais aleatoriedades relacionadas aos materiais, carregamento e geometria. Três metodologias foram empregadas para a obtenção da resistência, as duas primeiras assumiram que a resistência é descrita por uma distribuição teórica, ajustada com os dados obtidos através da Simulação de Monte Carlo associado ao Método dos Elementos Finitos. A terceira metodologia fez uso do Método da Superfície Resposta para descrever a resistência, no qual os ajustes necessários foram feitos através de resultados obtidos pelo MEF. A confiabilidade foi avaliada através do método FORM. O autor concluiu que o carregamento acidental influencia muito o nível de confiabilidade alcançado pelas vigas, sendo observado que a resistência das mesmas é influenciada pelas propriedades mecânicas do aço utilizado nas armaduras. Os resultados obtidos demonstraram que o atual coeficiente de ponderação parcial do carregamento acidental apontado pela NBR 6118:2014 não garantem, para os casos em que os carregamentos acidentais se tornam predominantes nas combinações de ações, a uniformidade dos índices de confiabilidade.

Serpa (2018) fez uma análise da confiabilidade de vigas de concreto armado, avaliando a sensibilidade dos parâmetros de dimensionamento. O trabalho teve por objetivo determinar a probabilidade de falha e os índices de confiabilidade de vigas de concreto armado, sujeitas à flexão simples. Os parâmetros analisados foram a base, a altura, o cobrimento, a resistência à compressão do concreto e a carga variável acidental e de vento. O estudo demonstrou que, com o aumento da base, altura e resistência à compressão do concreto, os índices de confiabilidade foram menores. Em contrapartida, o aumento do cobrimento resultou em índices de confiabilidade maiores. As análises de sensibilidade dos parâmetros descritos, apontaram que a base representa o parâmetro de menor influência na análise de confiabilidade de vigas, enquanto a altura e a resistência à compressão do concreto foram os mais relevantes.

Oliveira (2018) fez um estudo comparativo da confiabilidade de pilares de concreto armado dimensionados de acordo com a NBR 6118:2014 e o ACI 318:2014. O autor teve como objetivo principal, determinar o nível de confiabilidade

atingido no dimensionamento de pilares de concreto armado submetidos à flexo-compressão normal, de acordo com as normas citadas. Foi simulado o comportamento dos pilares no *software* ANSYS, onde foi incorporado um modelo constitutivo para o concreto com base nas recomendações do Código Modelo *fib* 2010 (FIB, 2012). Foram utilizados trabalhos experimentais de outros autores para a validação do modelo. A análise de confiabilidade foi realizada através da utilização da Simulação de Monte Carlo. As variáveis aleatórias foram relativas à geometria da estrutura, à resistência do aço e do concreto e às solicitações. A partir dos resultados foi possível concluir que os índices de confiabilidade determinados para os pilares dimensionados de acordo com a NBR 6118:2014 foram inferiores aos dimensionados de acordo com o ACI 318. Inúmeros pilares dimensionados segundo a NBR 6118:2014 obtiveram valores inadequados para o índice de confiabilidade. Em contrapartida, a grande maioria dos pilares dimensionados segundo o ACI 318 obtiveram valores superiores ao valor alvo.

Liberati (2019) aplicou os conceitos das teorias de probabilidade e de confiabilidade para avaliar os modelos de dimensionamento de ligações laje-pilar sujeitos à punção, a fim de analisar os índices de confiabilidade e as probabilidades de falha para cada estado limite de punção. O autor ensaiou experimentalmente, até a ruptura, 9 lajes lisas quadradas de 1800 mm de lado e 130 mm de espessura, com o intuito de avaliar o sistema estrutural com ou sem a existência de aberturas. Foi analisado as especificações de projeto do EUROCODE 2 (2004), CEB-FIP/MC (2010), ACI 318:2014 e ABNT NBR 6118:2014. Os resultados experimentais indicaram que todas as lajes testadas apresentaram ruptura por punção com carga experimental bastante abaixo da resistência prevista à flexão. Foi evidenciado que, a carga de ruptura das lajes reduziu devido a presença de aberturas adjacentes ao pilar. Já a análise de confiabilidade indicou que as prescrições dos códigos EUROCODE 2 (2004) e ABNT NBR 6118:2014 foram os mais satisfatórios em prever a carga de ruptura, para esses códigos os resultados foram menos dispersos e mais precisos. Os métodos utilizados pelo autor foram o Método de Simulação de Monte Carlo e o método FORM.

Deuschle (2019) estudou a confiabilidade de pilares de concreto armado dimensionados com redistribuição de esforços. O objetivo do autor foi avaliar a confiabilidade de pilares de concreto armado, através de análises lineares com

redistribuição de momentos, para fazer uma comparação com os dimensionamentos tradicionais utilizados. Os pilares foram dimensionados utilizando a análise elástico-linear, análise com redistribuição apenas em vigas, análises com diferentes taxas de redistribuição e análise não-linear simplificada da NBR 6118:2014. A análise de confiabilidade foi realizada através da utilização da Simulação de Monte Carlo com amostragem por importância. Os resultados apontaram que há um aumento da probabilidade de falha como uso da análise linear com redistribuição de momentos para o dimensionamento.

Johari, Delavar e Fiouz (2020) se focaram em avaliar o comportamento de uma laje de concreto armado, tendo como base a teoria das linhas de escoamento. Neste estudo foi avaliado a variação do momento fletor último e o padrão das linhas de escoamento, considerando as incertezas nas propriedades do concreto e do aço, bem como as propriedades geométricas. Foi realizando uma análise estocástica levando em consideração a propriedade dos materiais, a variabilidade de definição de cargas e as dimensões da laje via Simulação de Monte Carlo. Os autores concluem que as incertezas dos parâmetros avaliados têm um maior efeito sobre a área de armadura e um menor efeito sobre as linhas de escoamento.

Outro trabalho relevante, que trata sobre um tema parecido desta dissertação, é o trabalho da própria autora, em conjunto com o pesquisador Gomes. Leite e Gomes (2021) avaliaram a confiabilidade de seções transversais de concreto armado sob cargas de flexão no estado limite último. Foi analisado uma viga dimensionada segundo a NBR 6118:2014, no qual foram avaliados o cobrimento, a resistência à compressão do concreto, o  $d'$  e as dimensões geométricas da seção. Para o estudo os autores utilizaram o Método FORM e o MCAI. Os autores consideraram diversas variações da relação entre a carga permanente e a carga variável, relação essa representada pelo parâmetro  $\chi$ . Os autores concluíram que, para valores muito altos de  $\chi$  (situação em que a carga permanente é menor que a carga variável), os valores de confiabilidade para estados limites últimos são muito altos, o que talvez leve a uma modificação dos coeficientes parciais da NBR 6118:2014 para esta faixa de razões de carregamento. Para valores baixos de  $\chi$  a confiabilidade foi considerada razoável, segundo especificações do Código Modelo *fib* 2010 (FIB, 2012) e da ISO 2394:1998.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 3.1 CONCEITOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

A estatística é uma ciência que fornece métodos para a coleta, descrição, organização, interpretação e análise de dados, com o propósito da utilização dos mesmos na tomada de decisões (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.3).

O termo probabilidade refere-se ao estudo da incerteza e da aleatoriedade. Existe sempre uma incerteza se um evento em especial irá ocorrer ou não em qualquer experimento aleatório. Os primeiros registros matemáticos sobre a probabilidade, retomam ao século XVI e foram feitos pelos italianos Cardano e Galileu Galilei. As aplicações iniciais tratavam de jogos de dados, a grande maioria vinculadas a jogos de azar. A probabilidade de um evento pode ser estimada através de dois procedimentos importantes: (DEVORE, 2006, p.45; SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.52; SPIEGEL; SCHILLER; SRINIVASAN, 2013, p.5; LOESCH, 2015, p.28).

- a) **abordagem Clássica:** se um evento ocorre de  $h$  maneiras diferentes em um total de  $n$  maneiras possíveis, sendo todas igualmente prováveis, então a probabilidade do evento é  $h/n$ . Exemplo: A probabilidade de cair cara em um único lançamento de uma moeda, sabendo-se que existem dois resultados possíveis (cara ou coroa) e presumindo que ela não role ou fique em pé e que seja honesta, isto é, não tenda para nenhum dos lados, é de  $\frac{1}{2}$ . A probabilidade de cair cara é a mesma de cair coroa, 50%.
- b) **abordagem Frequentista:** se após  $n$  repetições de um experimento, onde  $n$  é extremamente grande, um evento ocorre  $h$  vezes, então a probabilidade do evento é  $h/n$ . Este resultado pode ser denominado também como *probabilidade empírica* do evento. Exemplo: Se uma moeda for lançada 1000 vezes e verificar-se que 532 vezes apareceu cara, estima-se que a probabilidade de cair cara é de  $532/1000= 0,532$  ou seja 53,2%.

Tanto a abordagem clássica quanto a frequentista possuem sérios problemas, isso porque a expressão “igualmente provável” da primeira e a expressão “grande número” da segunda é vago. Por consequência os matemáticos criaram uma abordagem axiomática para a probabilidade (SPIEGEL; SCHILLER; SRINIVASAN, 2013, p.5).

Para dar sequência ao trabalho é necessário definir alguns conceitos básicos (MONTGOMERY; RUNGER, 2021 p.15; SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.4):

- a) **espaço amostral:** é conhecido como espaço amostral do experimento o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. É denotado por  $S$ .
- b) **evento:** é um subconjunto do espaço amostral de experimento aleatório.
- c) **variável:** toda característica ou condição que pode ser observada ou mensurada.
- d) **dispersão:** mede o quão próximos uns dos outros estão os valores de um grupo.

### 3.1.1 Axiomas de probabilidade

Considerando um espaço amostral  $S$ . Se  $S$  é discreto, todos os subconjuntos são eventos e vice-versa, porém se  $S$  não for discreto, somente os subconjuntos especiais (mensuráveis) são eventos. Para cada evento  $A$  na classe  $\mathcal{C}$  dos eventos, associa-se um número real  $P(A)$ . Logo,  $P$  é denominada uma função de probabilidade e  $P(A)$  de probabilidade do evento  $A$ , se forem satisfeitos os seguintes axiomas (SPIEGEL; SCHILLER; SRINIVASAN, 2013, p.5):

- a) *axioma 1:* para cada evento  $A$  na classe  $\mathcal{C}$ :

$$P(A) \geq 0 \tag{3.1}$$

- b) *axioma 2:* para cada evento certo ou garantido de  $S$  na classe  $\mathcal{C}$ :

$$P(S) = 1 \quad (3.2)$$

c) *axioma 3*: para qualquer número de eventos mutuamente exclusivos  $A_1, A_2, \dots$  na classe  $C$  :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \quad (3.3)$$

Nos casos particulares, para dois eventos mutuamente exclusivos:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Variáveis aleatórias

Uma variável aleatória é uma função que atribui um número real a cada resultado no espaço amostral de um experimento aleatório. As variáveis podem ser classificadas como qualitativa ou quantitativa (MORETTIN; BUSSAB; 2017, p.12; SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.4; MONTGOMERY; RUNGER, 2021 p.30):

- a) **variáveis qualitativas**: tem relação com uma quantidade ou atributo. Quando uma variável ou característica é não numérica.
- b) **variáveis quantitativas**: tem relação com uma contagem ou mensuração. Quando a variável tem valor numérico mensurável com unidade.

As variáveis quantitativas podem ser divididas em discretas ou contínuas. As discretas são as que podem assumir apenas determinados valores. Já as variáveis contínuas são as que podem assumir qualquer valor dentro de uma determinada faixa de valores (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.4).

As variáveis qualitativas podem ser divididas em nominal ou ordinal. A nominal é a qual, nas possíveis realizações, não existe nenhuma ordenação. Já a ordinal necessita que exista uma ordem nos seus resultados (MORETTIN; BUSSAB, 2017, p.12).



### 3.1.3 Medidas de tendência central

Em um estudo, a população é um conjunto de membros, grupos ou conjuntos. Consiste na totalidade de unidades de observação a partir das quais se deseja tomar uma decisão. Se a população for pequena, é mais prudente analisar toda ela. Entretanto, analisar a população inteira nem sempre é viável, devido a restrições de tempo, dinheiro e/ou outros recursos escassos. Por esse motivo, um subconjunto da população (uma amostra) é selecionado de uma forma prescrita (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.5; DEVORE, 2006, p.2).

Há situações em que não se está interessado nos padrões de um grupo e sim na caracterização dele como um todo, nesses casos é utilizado as medidas de tendência central. Para responder questões como: Qual o tipo sanguíneo mais comum? Qual o salário médio do trabalhador brasileiro? É necessário apenas um grupo único, que represente todos os valores obtidos pelo grupo. Com esse número (que tente a ficar no centro da série), é possível fazer a caracterização do grupo como um conjunto (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.21)

Será apresentado três medidas de tendência central: a *média*, a *mediana* e a *moda*.

#### 3.1.3.1 Média

A média de um conjunto de números  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , é um valor que pode substituir a todos os números sem alterar as características do conjunto. Por exemplo, se a característica de um determinado conjunto é a soma dos seus elementos, tem-se a média aritmética. Entretanto existem vários tipos de médias, sendo a mais utilizada a aritmética. Por convenção, a média é representada por  $\bar{x}$  quando se trata de uma amostra ou  $\mu$  quando o conjunto de dados for uma população. A média aritmética é expressa pela equação (3.5) (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.23).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (3.5)$$

Onde  $\bar{x}$  e  $\mu$  são a média aritmética amostrar e populacional, respectivamente,  $x_i$  são os valores das variáveis,  $n$  e  $N$  são os números das medidas efetuadas na amostra e na população, respectivamente.

### 3.1.3.2 Mediana

A palavra *mediana* é sinônimo de “metade”. A mediana é o valor que ocupa a posição central de uma listagem, sendo que a amostra precisa estar com seus valores ordenados (crescente ou decrescente) e com todos os valores repetidos incluídos na lista. Se a lista de valores tiver número par de termos, a mediana será, a média dos dois valores médios (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.26; DEVORE, 2006, p.27).

### 3.1.3.3 Moda

Em um conjunto de dados a moda é o valor que ocorre com maior frequência, em outras palavras, é o valor que tem a maior probabilidade de ocorrer. Podem haver mais de uma moda em uma amostra, por exemplo, a amostra {1, 3, 9, 2, 9, 5, 2} possui moda 9 e 2. Uma sequência de números pode não ter um valor modal, ou apresentar diversos tipos de repetição, sendo denominados como:

- a) **amodal**: quando não tem distribuição entre todas as frequências que aparecem;
- b) **unimodal**: quando há apenas uma moda;
- c) **bimodal**: quando há duas modas;
- d) **multimodal**: quando há três ou mais modas.

### 3.1.4 Medidas de dispersão

Normalmente uma série é representada por alguma medida de tendência central, como a média, a mediana ou a moda, onde elas estabelecem maneiras diferentes de determinar um único número representativo de uma série. Porém, essas medidas não representam a flutuação dos valores em torno delas, devido a isto são utilizadas medidas de dispersão, que indicam o grau de variabilidade ou flutuação dos valores em torno de uma das medidas de tendência central considerada. As medidas de dispersão mais usadas são abordadas a seguir (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.30; LOESCH, 2015, p.21).

#### 3.1.4.1 Amplitude

Também designada como intervalo total, é a diferença entre o maior e o menor valor de um conjunto de dados. A principal vantagem de se usar esta medida de dispersão é o fato de o intervalo ser relativamente fácil de calcular, mesmo para um conjunto grande de números. Porém a maior limitação da amplitude é que ela leva em consideração apenas os dois valores extremos de um conjunto, não informando quanto aos outros valores (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.31).

#### 3.1.4.2 Variância

Mede a média dos quadrados dos desvios dos valores de um conjunto numérico em relação a sua média (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.31). As equações que descrevem a variância amostral e populacional são expressas abaixo.

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad \text{ou} \quad \sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N} \quad (3.6)$$

Onde:

$S^2$  = variância amostral;

$\sigma^2$  = variância populacional;

$x_i$  = valor da variável;

$\bar{x}$  = média amostral;

$\mu$  = média populacional;

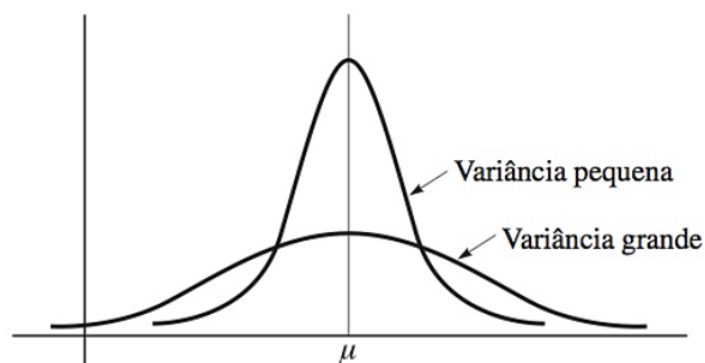
$N$  = tamanho da população;

$n$  = tamanho da amostra.

Quando se trata de um conjunto de números que representam uma amostra, divide-se a soma obtida por  $n - 1$ . Se a finalidade de somar os dados é somente para descrevê-los, sem fazer interferência sobre uma população, então no lugar de  $n - 1$  usa-se  $N$  no denominador (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.31).

Se os valores da variável aleatória, em torno da média, tendem a se concentrar próximas da média, a variância é dita pequena, entretanto se os valores tendem a estar distribuídos longe da média, a variância é dita grande. As duas situações estão ilustradas na Figura 1 (SPIEGEL; SCHILLER; SRINIVASAN, 2013, p.77).

Figura 1 - Variância pequena e variância grande.



Fonte: Spiegel, Schiller e Srinivasan (2013, p.78).

### 3.1.4.3 Desvio Padrão

O desvio padrão é a raiz quadrada positiva da variância (MORETTIN; BUSSAB, 2017, p.43).

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}} \quad (3.7)$$

Sendo  $S$  o desvio padrão amostral e  $\sigma$  o desvio padrão populacional. Uma das medidas mais utilizadas para distribuições é o desvio padrão, pois desempenha um papel importante em toda a estatística. Cabe destacar que a unidade do desvio padrão é a mesma unidade da média. A variância é expressa em quadrados de unidades (por exemplo, se os dados são expressos em cm, a variância é expressa em  $\text{cm}^2$ ) (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.33; MORETTIN; BUSSAB, 2017, p.42).

### 3.1.4.4 Coeficiente de variação

A dispersão relativa, ou Coeficiente de Variação (CV), é a variabilidade dos dados em relação à média. Se o CV é pequeno, mais homogêneo é o conjunto de dados. É dado pelo quociente entre o desvio padrão e a média de um conjunto, sendo expresso pela equação (3.8) (LOESCH, 2015, p.22).

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} 100 \quad \text{ou} \quad CV = \frac{\sigma}{\mu} 100 \quad (3.8)$$

## 3.2 DISTRIBUIÇÃO DISCRETA E CONTÍNUA DE PROBABILIDADE

A distribuição de probabilidade é definida como sendo um modelo matemático que associa determinado valor da variável em estudo com sua probabilidade de

ocorrência. A distribuição da probabilidade pode ser do tipo discreta ou contínua (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.65).

Utilizará a notação abaixo para indicar a média e a variância de uma v.a.  $X$ :

$$E(X) = \mu(X)$$

$$Var(X) = \sigma^2(X)$$

### 3.2.1 Distribuição discreta de probabilidade

Envolvem as variáveis aleatórias relacionadas a dados que podem ser contados, como por exemplo o número de ocorrências por amostra (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.66; LOESCH, 2015, p.36).

#### 3.2.1.1 Distribuição binomial

Para entender a distribuição binomial é necessário compreender a distribuição de Bernoulli (MORETTIN; BUSSAB, 2017, p.152). Nessa Distribuição, a variável aleatória  $X$  assume apenas dois valores, 0 e 1, usualmente chamados de “sucesso” e “falha”.

A distribuição binomial consiste em  $n$  tentativas de Bernoulli, de modo que (MONTGOMERY; RUNGER, 2021 p.40; SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.66):

- a) as tentativas são independentes;
- b) cada tentativa tem 2 resultados possíveis apenas, designado como “sucesso” e “falha”;
- a) as probabilidades  $p$  de sucesso e  $1 - p$  de falha, continuam constantes em todas as tentativas e são complementares;
- b) existem  $n$  observações ou provas idênticas.

A distribuição binomial trata da quantidade de “sucessos” observados em uma amostra. Conhecendo a quantidade  $n$  de observações presentes na amostra e a probabilidade de “sucesso”, a função de probabilidade  $x$  é dada por (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.66):

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

Pode-se escrever:

$$P(X = x) = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \quad (3.10)$$

Onde:

$P(x)$  = probabilidade de que sejam observados  $x$  sucessos, tendo  $n$  e  $p$ ;

$x$  = quantidade de sucessos de uma amostra;

$n$  = tamanho da amostra;

$p$  = probabilidade de sucesso;

$1 - p$  = probabilidade de falha

$X$  = variável aleatória discreta.

A média e variância de uma distribuição binomial é, respectivamente (MONTGOMERY; RUNGER, 2021, p.42):

$$\mu = E(X) = n.p \quad (3.11)$$

$$\sigma^2 = Var(X) = n.p.(1-p) \quad (3.12)$$

### 3.2.2 Distribuição contínua de probabilidade

Quando uma variável discreta contém um grande número de resultados possíveis ou quando a variável aleatória em estudo é contínua, não pode ser usado a distribuição discreta, como a Binomial, para a obtenção da probabilidade. Uma variável discreta com diversos resultados possíveis, exigiria uma tabela extremamente extensa ou um esforço grande na utilização de uma fórmula para a obtenção de probabilidades. Uma variável contínua não pode ser corretamente descrita por uma distribuição discreta, pois inclui em seus resultados valores tanto inteiros como não inteiros (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.73).

Para as variáveis aleatórias contínuas tem-se uma Função Densidade de Probabilidade (FDP),  $f(x)$ , com um gráfico que a representa e uma equação que a caracteriza, e que, integrada entre dois limites, fornece a área abaixo da curva e entre seus limites. Essa área tem o mesmo valor da probabilidade da variável aleatória estar contida entre os limites (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.77).

Uma variável aleatória contínua  $X$  assume quaisquer valores, para a qual existe uma função de densidade de probabilidade,  $f(x)$ , que satisfaz as seguintes condições (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.77; LOESCH, 2015, p.37):

- a)  $f(x) \geq 0$  para todo o  $x$
- b)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- c)  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$  onde  $a$  e  $b$  são quaisquer dois valores de  $x$  com a restrição  $a < b$ .

#### 3.2.2.1 Distribuição normal

A distribuição normal é a mais utilizada, tanto na estatística teórica como na aplicada, uma das razões é o fato dela servir como aproximação de probabilidades binomiais, quando  $n$  é muito grande. O motivo de maior destaque para a utilização



da distribuição normal, é que as distribuições tanto de médias como das proporções em grandes amostras tendem a ser distribuídas normalmente, o que tem grande importância na amostragem (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.78).

Uma variável aleatória  $x$  tem distribuição normal com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$ , em que  $-\infty < \mu < +\infty$  e  $0 < \sigma^2 < \infty$ , se sua densidade é dada por (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.78; MONTGOMERY; RUNGER, 2021, p.57; MORETTIN; BUSSAB, 2017, p.188):

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.13)$$

Onde:

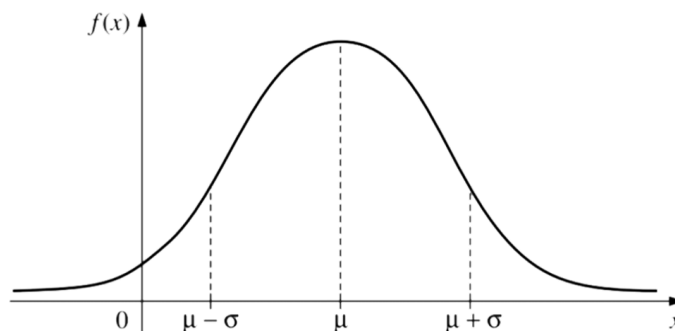
$\mu$ : representa a média da população ou centro da distribuição;

$\sigma^2$ : variância da população;

$x$ : variável aleatória, onde seus valores são representados no eixo horizontal.

A Figura 2 ilustra uma curva normal típica, determinada por valores particulares de  $\mu$  e  $\sigma^2$ .

Figura 2 - FDP de uma v.a normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ .



Fonte: Morettin e Bussab (2017, p.188).

Existem diversas curvas normais para representar as distribuições de probabilidade, devido a isso, há uma distribuição de referência chamada “distribuição normal padronizada ou reduzida”. Sendo aquela quando  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$ ,

obtida a partir de uma transformação  $Z$  aplicada a função de probabilidade da curva normal. Qualquer distribuição normal, com desvio padrão diferente de 1 e média diferente de zero, pode ser transformada na normal padronizada. A equação de  $Z$ , ou escore  $Z$  é dado pela expressão (SPEGGIORIN; ESPÍNDOLA; LORANDI, 2015, p.80):

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (3.14)$$

Onde:

$Z$ : afastamento dos valores de  $x$  em relação à média em número de desvio padrão;

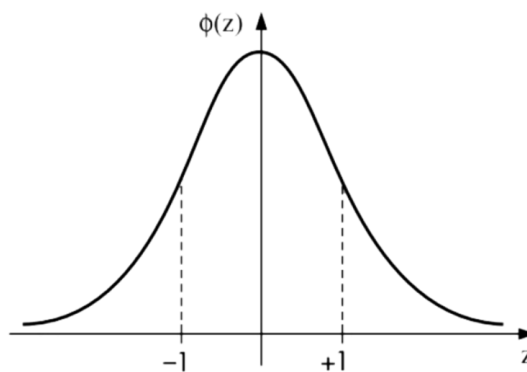
$x$ : valor qualquer da variável aleatória;

$\mu$ : média da distribuição;

$\sigma$ : desvio padrão da distribuição.

O gráfico da normal padronizada está na Figura 3.

Figura 3 - FDP de uma v.a. normal padronizada



Fonte: Morettin e Bussab (2017, p.189).

### 3.2.2.2 Distribuição exponencial

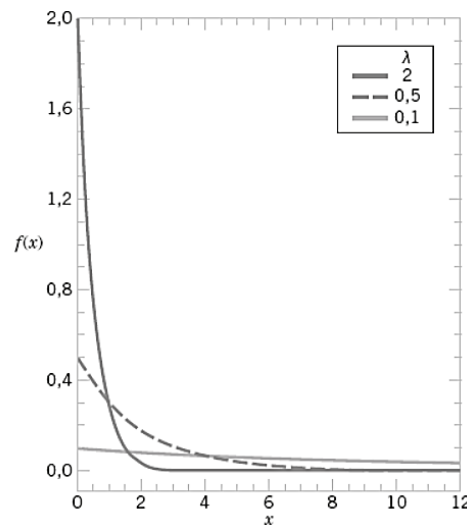
É uma distribuição importante e que tem aplicações em confiabilidade de sistemas. A variável aleatória  $X$  com média  $\lambda > 0$ , é uma variável exponencial com

parâmetro  $\lambda$ . A função densidade de probabilidade de  $X$  é (MONTGOMERY; RUNGER, 2021, p.63):

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{para } 0 \leq x < \infty \quad (3.15)$$

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória exponencial pode ser observada na Figura 4.

Figura 4 - FDP de uma v.a. exponencial, para valores selecionados de  $\lambda$ .



Fonte: Montgomery e Runger (2021, p.64).

A média e variância são, respectivamente (MONTGOMERY; RUNGER, 2021, p.69):

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (3.16)$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (3.17)$$

### 3.2.2.3 Distribuição lognormal

Algumas vezes as variáveis em um sistema seguem uma relação exponencial, como  $x = \exp(y)$ . Caso o expoente for uma variável aleatória  $Y$ , logo  $X = \exp(Y)$  será uma variável aleatória com uma distribuição de interesse. O nome lognormal origina da transformação  $Y = \ln(X)$ , onde o logaritmo natural de  $X$  é normalmente distribuído (MONTGOMERY; RUNGER, 2021, p.68).

Tem distribuição lognormal a variável aleatória  $X$  com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$ , onde que  $-\infty < \mu < +\infty$  e  $\sigma^2 > 0$ , se que  $Y = \ln(X)$  tiver distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . A função densidade de probabilidade de  $X$  tem a seguinte forma (MORETTIN; BUSSAB, 2017, p.214):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

O gráfico de  $f(x)$  pode ser visto na Figura 5:

Figura 5 - FDP de uma distribuição lognormal



Fonte: Morettin e Bussab (2017, p.214).

A média e variância são, respectivamente (MONTGOMERY; RUNGER, 2021 p.69):

$$E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2} \quad (3.19)$$

$$\text{Var}(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (3.20)$$

### 3.2.2.4 Distribuição de Gumbel para máximos ou tipo I

Conhecida também como distribuição de primeira ordem, é amplamente utilizada na engenharia para representar extremos de fenômenos ambientais como velocidade do vento, cheias de um rio, nível de precipitação, dentre outros. Sendo  $X$  uma variável aleatória, a *função densidade de probabilidade* é definida como (BECK, 2019, p.162):

$$F(x) = \exp \left\{ -\exp \left[ -\left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\} \quad (3.21)$$

Com os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  sendo  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma > 0$  e  $-\infty < x < \infty$ , cuja função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[ -\left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \exp \left\{ -\exp \left[ -\left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\} \quad (3.22)$$

A média e variância são, respectivamente (BECK, 2019, p.162):

$$\mu = E(X) = \mu + \gamma \quad (3.23)$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{\sigma^2 \pi^2}{6} \quad (3.24)$$

Sendo  $\gamma$  a constante de Euler,  $\gamma \approx 0,577216$ .

## 3.3 ESTADOS LIMITES E SEGURANÇA

A análise e dimensionamento de elementos submetidos à flexão simples, ou composta, é um tema bastante difundido atualmente. Com o desenvolvimento tecnológico dos materiais de concreto e aço, diversas pesquisas são desenvolvidas com o objetivo de aproveitar ao máximo a capacidade desses materiais. Tais

estudos exigem um maior conhecimento sobre o comportamento dos elementos, principalmente sobre os estados limites.

Para projetar uma estrutura com um adequado grau de segurança é imprescindível que se verifique uma série de estados limites. Esses estados limites podem ser classificados em Estados Limites Últimos (ELU) e Estados Limites de Serviço (ELS). Sendo os Estados Limites Últimos relacionado ao colapso da estrutura ou qualquer outra forma de ruína, que inviabilize o uso da edificação. Já os Estados Limites de Serviço estão relacionados com o conforto do usuário e à durabilidade, aparência e boa utilização da estrutura.

### 3.3.1 Estado limite de serviço – ELS

Está relacionado aos estados em que a utilização da estrutura fica prejudicada por apresentar deformações excessivas (compreendendo vibrações indesejáveis), ou que apresente um nível de fissuração que comprometa a sua durabilidade. Portanto, em projetos de concreto armado são analisados o estado limite de deformações excessivas e o estado limite de abertura das fissuras (ARAÚJO, 2014). Os ELS considerados no período de vida útil da edificação são caracterizados por:

- a) **abertura de fissuras:** estado onde as fissuras se apresentam com aberturas iguais aos máximos especificados;
- b) **deformações excessivas:** estado onde as deformações atingem os limites prescritos nas normas de construção, prejudicando a utilização normal da estrutura ou seu aspecto estético;
- c) **vibrações excessivas:** estado em que as vibrações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da construção.

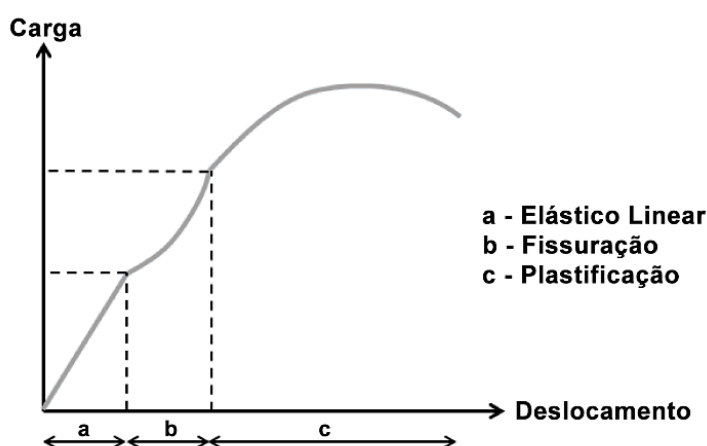
### 3.3.2 Estado limite último - ELU

O desempenho último de uma seção de concreto armado é avaliado aplicando um carregamento até a sua ruína. As fases que essa seção de concreto passa, ao longo do carregamento aplicado, chamam-se de estádios.

- a) **estádio I:** elemento de concreto armado sem fissuras, nível baixo de carregamento;
- b) **estádio II:** elemento de concreto armado com fissuras na zona de tração, nível intermediário de carregamento;
- c) **estádio III:** ruptura, nível elevado de carregamento.

O dimensionamento do concreto armado é feito no estágio III, e através dos coeficientes de segurança a peça atuará no estágio II. No estágio I o concreto apresenta um comportamento elástico-linear. Nessa fase a curva de carga coincide com a de descarga e as tensões são proporcionais às deformações. No estágio II há o rompimento à tração do concreto, resultando na formação de fissuras. No estágio III ocorre a plastificação do aço e do concreto comprimido. A Figura 6 apresenta as três fases (estádios) típicas de um elemento de concreto estrutural, quando submetido a uma sollicitação de flexão.

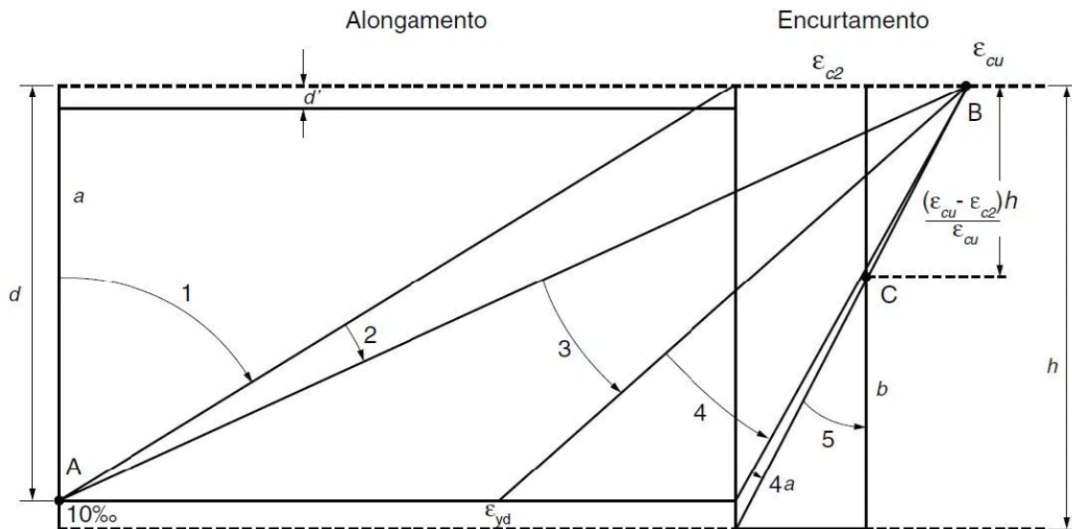
Figura 6 - Diagrama carga x deslocamento típico do concreto estrutural



Fonte: Adaptado Lazzari (2016).

A NBR 6118:2014 apresenta um gráfico denominado de *domínios de deformação do estado limite-último*. O gráfico apresenta a divisão dos domínios em função do alongamento ou encurtamento máximo do concreto armado, onde as retas representam os limites entre cada um dos domínios, conforme pode ser visto na Figura 7.

Figura 7 - Domínios de estado-limite último de uma seção transversal



Fonte: NBR 6118:2014.

### 3.3.3 Condições para segurança

As condições de segurança devem ser verificadas para todos os estados-limites, analisando cada um dos esforços atuantes. Não podendo o esforço atuante ser menor que as solicitações. Em todos os casos deve ser respeitada a seguinte condição:

$$R_d \geq S_d \quad (3.25)$$

Onde:

$R_d$  = é o esforço resistente de cálculo do elemento;

$S_d$  = é o esforço solicitante de cálculo (valor de cálculo dos efeitos das ações).



Em uma análise estrutural deve ser considerada a influência de todas as ações que possam causar efeitos significativos na segurança da estrutura. Essas ações podem ser classificadas como permanentes, variáveis ou excepcionais (NBR 6118:2014 e NBR 8681:2004).

- a) as ações permanentes são as que ocorrem com valores constantes ou com uma variabilidade desprezível ao longo de toda a vida útil da construção. Podem ser classificadas como permanentes diretas ou indiretas. Para as diretas tem-se como exemplo: peso próprio da estrutura, da alvenaria, dos revestimentos, do peso dos equipamentos fixos à estrutura, dentre outros. Para as indiretas tem-se: retração e fluência do concreto, recalque dos apoios, protensão e imperfeições geométricas.
- b) as ações variáveis são as que possuem intensidade, duração ou direção variável ao longo da vida útil da estrutura, por exemplo: cargas acidentais (peso dos móveis, veículos, etc.), ação do vento, efeito das variações de temperatura, etc.
- c) as ações excepcionais são as que apresentam uma variação extremamente curta e uma probabilidade pequena de ocorrência durante a vida útil da estrutura, porém possuem uma intensidade significativa, tem-se como exemplo: sismos de magnitude elevada, ações de impacto, dentre outros.

Segundo a NBR 6118:2014 e NBR 8681:2003, os valores característicos das ações variáveis correspondem a valores que têm de 25% a 35% de probabilidade de serem ultrapassados, no sentido desfavorável, durante um período de 50 anos. Para esse trabalho em questão, foi utilizado 25%. Para as ações permanentes o modelo probabilístico adotado é de distribuição normal (HOLICKÝ, 2004). A distribuição para as ações variáveis é do tipo Gumbel (ELLINGWOOD; GALAMBOS, 1982).

De acordo com a NBR 6118:2014, para as resistências são utilizados valores nominais correspondentes ao quantil inferior de 5%. Os valores característicos  $f_k$  das resistências são os que, em um determinado lote, têm a probabilidade de serem excedido, no sentido desfavorável da segurança. Ou seja, somente 5% das amostras podem apresentar resistência inferior da resistência ( $f_k$ ) especificada em

projeto. Logo, para uma probabilidade de 95%, analisando a curva de distribuição normal padronizada, tem-se um *score* (fator de abrangência) de 1,645. Desta forma, a definição da resistência característica do concreto e do aço é dada pela equação (3.26):

$$f_k = \mu - 1,645 \sigma \quad (3.26)$$

Onde:

$\mu$  = é a média da distribuição;

$\sigma$  = é o desvio padrão da distribuição.

### 3.4 DIMENSIONAMENTO ÀS SOLICITAÇÕES NORMAIS

As solicitações normais são aquelas que produzem tensões normais nas seções transversais dos elementos estruturais. Neste caso, são a força normal e o momento fletor, onde ambos atuando no centro de gravidade da seção transversal do elemento.

#### 3.4.1 Hipóteses básicas

A NBR 6118:2014 estabelece as seguintes Hipóteses Básicas referente as deformações de uma seção de concreto armado no estado limite-último:

- a) as seções se mantêm planas após as deformações, conforme a Hipótese de Bernoulli, mesmo até a ruptura;
- b) as deformações do aço são limitadas em 10‰, a fim de evitar flechas excessivas.
- c) os valores para os parâmetros  $\varepsilon_{c2}$  (deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico) e  $\varepsilon_{cu}$  (deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura) são definidos como sendo:

- Para concreto de classe até C50:

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\text{‰}$$

$$\varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$$

- Para concreto de classe C50 até C90:

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 0,085\text{‰} \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53}$$

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 35\text{‰} \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$$

d) o concreto é totalmente desprezado na região tracionada, todo esforço de tração é resistido unicamente pelas armaduras.

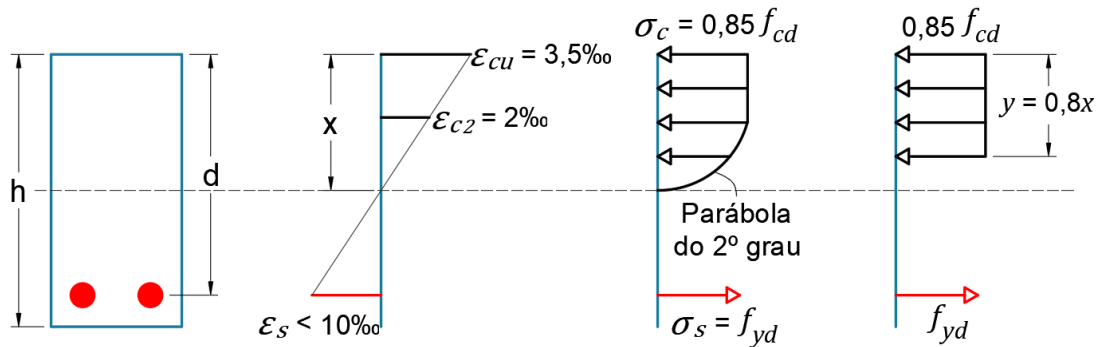
A distribuição de tensões no concreto é feita de acordo com o diagrama parábola-retângulo, com tensão de pico igual a  $0,85 f_{cd}$ , porém, esse diagrama pode ser substituído por uma retângulo de profundidade  $y = \lambda x$ , onde o parâmetro  $\lambda$  é:

$$\lambda = 0,8 \quad \text{para } f_{ck} \leq 50\text{MPa} \quad (3.27)$$

$$\lambda = 0,8 - \frac{f_{ck} - 50}{400} \quad \text{para } f_{ck} > 50\text{MPa} \quad (3.28)$$

Na Figura 8 são apresentadas as hipóteses básicas de cálculo, anteriormente indicadas, em uma seção retangular para concretos com  $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$ . Sendo  $f_{cd}$  a resistência de cálculo do concreto à compressão,  $f_{yd}$  a resistência de cálculo do aço à tração,  $\sigma_c$  a tensão de compressão do concreto e  $\sigma_s$  é a tensão de escoamento do aço.

Figura 8 - Hipóteses básicas considerando  $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$ .



Fonte: O autor.

### 3.4.2 Diagrama tensão-deformação para o concreto

As distribuições de tensão do concreto na seção, segundo a NBR 6118:2014, se faz de acordo com o diagrama de parábola-retângulo. Supõe-se que na região comprimida o diagrama tensão-deformação seja composto de uma parábola do segundo grau que passa pela origem e tem vértice no ponto de abscissas  $\varepsilon_{c2}$ , ordenada  $0,85 f_{cd}$  e por uma reta tangente à parábola e paralela ao eixo das abscissas. O diagrama pode ser visto na Figura 9.

A resistência de cálculo do concreto à compressão é determinada como:

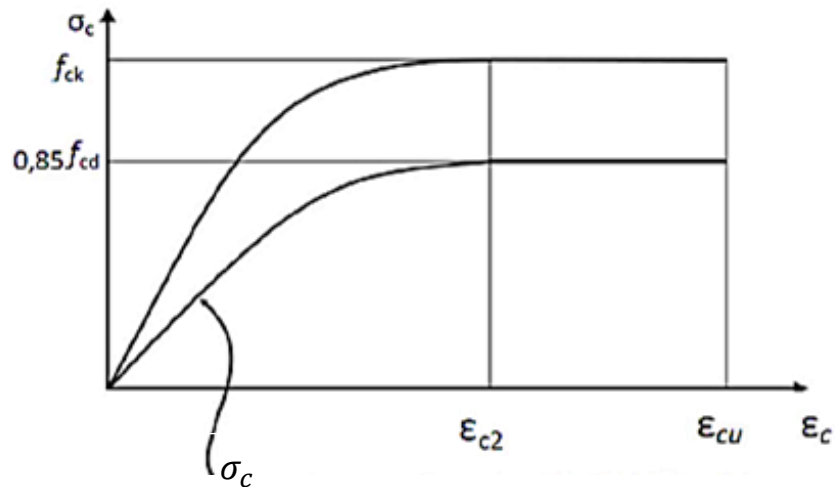
$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (3.29)$$

Onde:

$f_{ck}$  = resistência característica do concreto à compressão;

$\gamma_c$  = coeficiente de minoração da resistência do concreto, assumido como sendo 1,4 para concretos normais.

Figura 9 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido



Fonte: NBR 6118:2014.

As tensões no concreto são definidas por:

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (3.30)$$

Para:

$$f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} : n = 2;$$

$$f_{ck} > 50 \text{ MPa} : n = 1,4 + 23,4[(90 - f_{ck})/100]^4.$$

### 3.4.3 Diagrama tensão-deformação para o aço

A resistência de cálculo do aço à tração é determinada como:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (3.31)$$

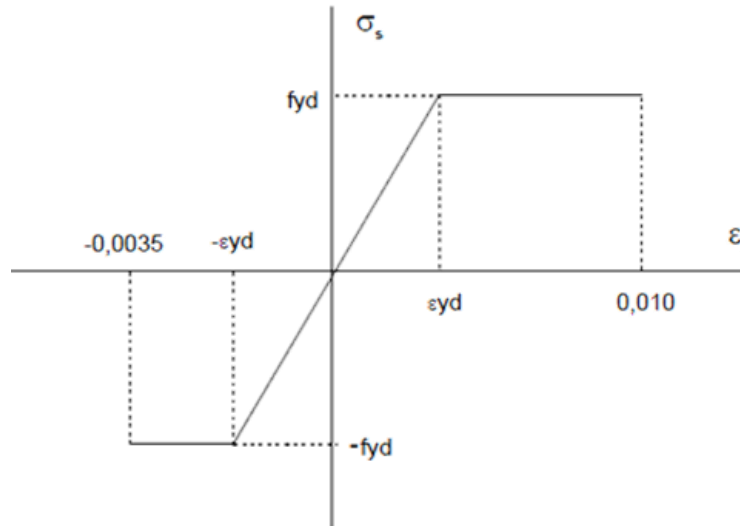
Onde:

$f_{yk}$  = resistência característica do aço à tração;

$\gamma_s$  = coeficiente de minoração da resistência do aço, assumido como sendo 1,15 para aços normais.

O diagrama de tensão-deformação do aço pode ser visto na Figura 10:

Figura 10 - Diagrama tensão-deformação do aço



Fonte: Campos Filho (2014).

O diagrama tensão-deformação do aço classe A é dado por:

$$\sigma_s(\varepsilon) = -f_{yd} \quad \text{para} \quad -0,0035 \leq \varepsilon \leq -\varepsilon_{yd}$$

$$\sigma_s(\varepsilon) = E_s \varepsilon \quad \text{para} \quad -\varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{yd}$$

$$\sigma_s(\varepsilon) = f_{yd} \quad \text{para} \quad \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq 0,010$$

O módulo elasticidade do aço ( $E_s$ ) é igual a 210000 MPa. A deformação específica de cálculo do escoamento do aço ( $\varepsilon_{yd}$ ) é dada por:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (3.32)$$

## 3.5 PROPRIEDADE DOS MATERIAIS

### 3.5.1 Concreto

#### 3.5.1.1 Módulo de Elasticidade:

Neste trabalho adotou-se a formulação apresentada no Código Modelo *fib* 2010 (FIB, 2012), onde o módulo de elasticidade tangente inicial ( $E_{ci}$ ), quando a resistência média a compressão do concreto com 28 dias é conhecida, é dada pela equação (3.33).

$$E_{ci} = E_{c0} \alpha_E \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3} \quad (3.33)$$

Onde o módulo de elasticidade pode ser aumentado ou reduzido, dependendo do tipo de agregado utilizado, através da Tabela 1 (tradução própria para os termos do Código Modelo):

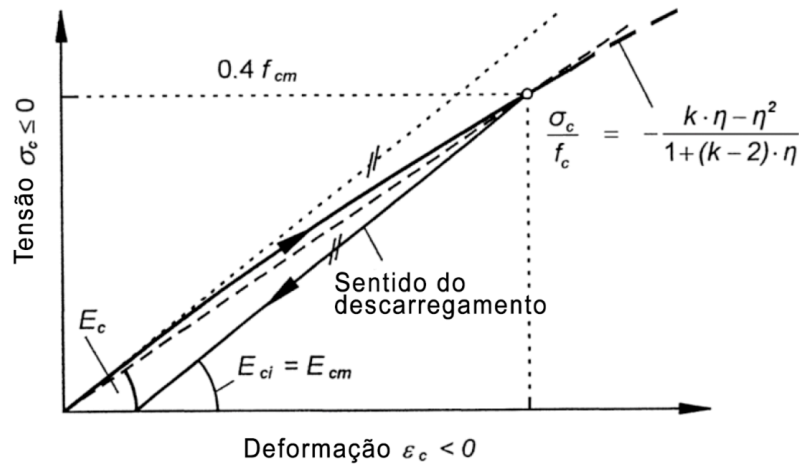
Tabela 1 – Efeito do tipo de agregados no módulo de elasticidade

| Tipos de agregados | $E_{c0} \alpha_E$ (MPa) |
|--------------------|-------------------------|
| Basalto            | 25800                   |
| Quartzito          | 21500                   |
| Calcário           | 19400                   |
| Arenito            | 15100                   |

Fonte: Adaptado do Código Modelo *fib* 2010 (FIB, 2012).

O módulo de elasticidade tangente inicial ( $E_{ci}$ ), não inclui a deformação plástica inicial. A tensão limite  $\sigma_c$  no Estado Limite de Serviço (ELS) é definido como sendo 40% do valor de  $f_{cm}$  ( $\sigma_c = -0,4f_{cm}$ ), no qual esse nível de tensão fornece um valor superior para o fator de redução  $\alpha_i$ . Esse fator é definido como sendo  $\alpha_i = E_c/E_{ci}$ , onde o  $E_c$  é o módulo de elasticidade reduzido, dado pela equação (3.34) e o  $f_{cm}$  é a resistência média à compressão do concreto. A Figura 11 exemplifica o que foi dito até aqui.

Figura 11 - Definição de diferentes módulos de elasticidade



Fonte: Adaptado do Código Modelo *fib* 2010 (FIB, 2012).

É possível observar que o  $E_{ci}$  é considerado o valor médio do módulo de elasticidade tangente inicial ( $E_{ci} = E_{cm}$ ). Quando é realizada uma análise elástica de uma estrutura de concreto, dever ser usado o  $E_c$  (expressão (3.34)) para levar em conta a deformação plástica inicial.

$$E_c = \alpha_i E_{ci} \quad (3.34)$$

Onde:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{cm}}{88} \leq 1 \quad (3.35)$$

Os valores do módulo de elasticidade tangente inicial para os concretos de classe até C50, são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Módulo tangente e módulo de elasticidade reduzido

| Classe concreto | C12   | C16   | C20   | C25   | C30   | C35   | C40   | C45   | C50   |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $E_{ci}$ [GPa]  | 27,1  | 28,8  | 30,3  | 32,0  | 33,6  | 35,0  | 36,3  | 37,5  | 38,6  |
| $E_c$ [GPa]     | 22,9  | 24,6  | 26,2  | 28,0  | 29,7  | 31,4  | 33,0  | 34,5  | 36,0  |
| $\alpha_i$      | 0,845 | 0,855 | 0,864 | 0,875 | 0,886 | 0,898 | 0,909 | 0,920 | 0,932 |

Fonte: Código Modelo *fib* 2010 (FIB, 2012).



### 3.5.1.2 Coeficiente de Poisson:

Segundo o Código Modelo *fib* 2010 (FIB, 2012), o coeficiente de Poisson do concreto ( $\nu_c$ ) varia entre 0,14 e 0,26 para faixas de tensão de  $-0,6 f_{ck} < \sigma_c < 0,8 f_{ctk}$ . Onde  $f_{ctk}$  é a resistência característica à tração do concreto. O coeficiente de Poisson pode ser assumido como sendo de  $\nu_c = 0,2$ , pois atende a precisão exigida. Esse valor também é o valor recomendado pela NBR 6118:2014.

### 3.5.1.3 Resistência à compressão biaxial:

A resistência à compressão biaxial, de acordo com o Código Modelo *fib* 2010 (FIB, 2012), é descrita pela equação (3.36).

$$f_{c2c} = \left(1,2 - \frac{f_c}{1000}\right) f_c \quad (3.36)$$

Onde o  $f_c$  é a resistência à compressão do concreto.

### 3.5.1.4 Resistência à tração

A NBR 6118:2014 estipula um limite mínimo e máximo para a resistência à tração concreto,  $f_{ctk,inf}$  e  $f_{ctk,sup}$ , denominados resistência característica à tração inferior e superior, respectivamente. Tais valores podem ser obtidos através das seguintes equações.

$$f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ct,m} \quad (3.37)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 f_{ct,m} \quad (3.38)$$

Onde, a resistência média à tração do concreto é dada pela equação (3.39).

$$f_{ct,m} = \begin{cases} 0,3 f_{ck}^{2/3} & - \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{MPa} \\ 2,12 \ln(1 + 0,11 f_{ck}) & - \text{para } f_{ck} > 50 \text{MPa} \end{cases} \quad (3.39)$$

### 3.5.1.5 Fluência

Quando o concreto é submetido a cargas de longa duração, sofre uma deformação instantânea seguida de uma deformação devido a fluência, que evolui ao longo do tempo. Em resumo, as deformações do concreto, mesmo sob tensões constantes, aumentam com o decorrer do tempo.

A consideração da fluência é feita introduzindo uma flecha adicional diferida, que pode ser calculada de maneira aproximada pela multiplicação da flecha imediata pelo fator  $\alpha_f$ , dado pela expressão (3.40) (NBR 6118:2014).

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50\rho'} \quad (3.40)$$

Sendo:

$$\rho' = \frac{A_s'}{bd} \quad (3.41)$$

Onde:

$\rho'$  = taxa geométrica de armadura longitudinal de compressão;

$A_s'$  = área da seção transversal da armadura longitudinal de compressão;

$d$  = altura útil;

$b$  = largura;

$\xi$  = é um coeficiente que é função do tempo, que pode ser obtido diretamente na Tabela 3 ou ser calculado pelas expressões seguintes:

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \xi(t) &= 0,68(0,996^t)t^{0,32} && \text{para } t \leq 70 \text{ meses} \\ \xi(t) &= 2 && \text{para } t > 70 \text{ meses} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Tabela 3 – Valores do coeficiente  $\xi$  em função do tempo

| Tempo ( $t$ )<br>meses  | 0 | 0,5  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 10   | 20   | 40   | $\geq 70$ |
|-------------------------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----------|
| Coeficiente<br>$\xi(t)$ | 0 | 0,54 | 0,68 | 0,84 | 0,95 | 1,04 | 1,12 | 1,36 | 1,64 | 1,89 | 2         |

Fonte: NBR 6118:2014.

Sendo:

$t$  = tempo, em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida;

$t_0$  = idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração.

Por fim, o valor da flecha total deve ser obtido multiplicando a flecha imediata por  $(1 + \alpha_f)$ . Considerando que as lajes não têm armadura de compressão e, a favor da segurança, tomando-se  $t = \infty$  e  $t_0 = 1$  mês, tem-se:

$$\alpha_f = \xi(t = \infty) - \xi(t_0 = 1 \text{ mês}) = 2 - 0,68 = 1,32 \quad (3.44)$$

### 3.5.2 Aço

A NBR 7480:2022 define os tipos de aço em função da sua resistência característica ao escoamento ( $f_{yk}$ ), conforme mostrado na Tabela 4.

Tabela 4 – Tipos de aço para o concreto armado

| Tipo  | $f_{yk}$ (MPa) |
|-------|----------------|
| CA-25 | 250            |
| CA-50 | 500            |
| CA-60 | 600            |

Fonte: O autor.

Onde a categoria CA-50 são as barras de aço que possuem nervuras, a categoria CA-60 são os fios de aço com nervuras e a categoria CA-20 são as barras de aço lisas. Segundo a NBR 6118:2014 o módulo de elasticidade do aço ( $E_s$ ) pode ser admitido como sendo de 210 GPa, na falta de ensaios.

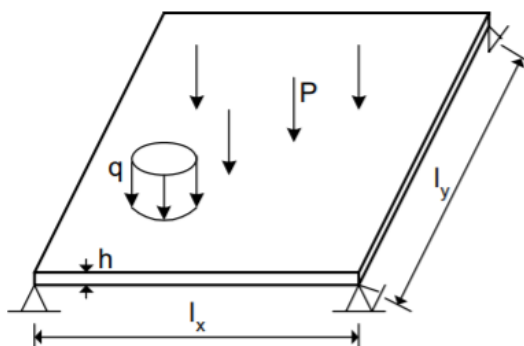
## 3.6 PROJETO DE LAJES DE CONCRETO ARMADO

### 3.6.1 Tipos de lajes

A função principal das lajes (também chamadas de placas) é receber as cargas provenientes da edificação, que são aplicadas no piso e transmitir às vigas. Por sua vez as vigas transmitem as cargas aos pilares, que fazem com que o carregamento seja transferido para as fundações. Existem outras possibilidades de concepção, porém essa é a mais usual (ARAÚJO, 2014, p.1).

As lajes são elementos bidimensionais planos, onde a espessura  $h$  é extremamente inferior as dimensões  $l_x, l_y$ . São solicitadas, predominantemente, por cargas perpendiculares ao seu plano médio, conforme pode ser visto na Figura 12 (ARAÚJO, 2014, p.1).

Figura 12 - Carregamento das lajes



Fonte: Araújo (2014, p.1).

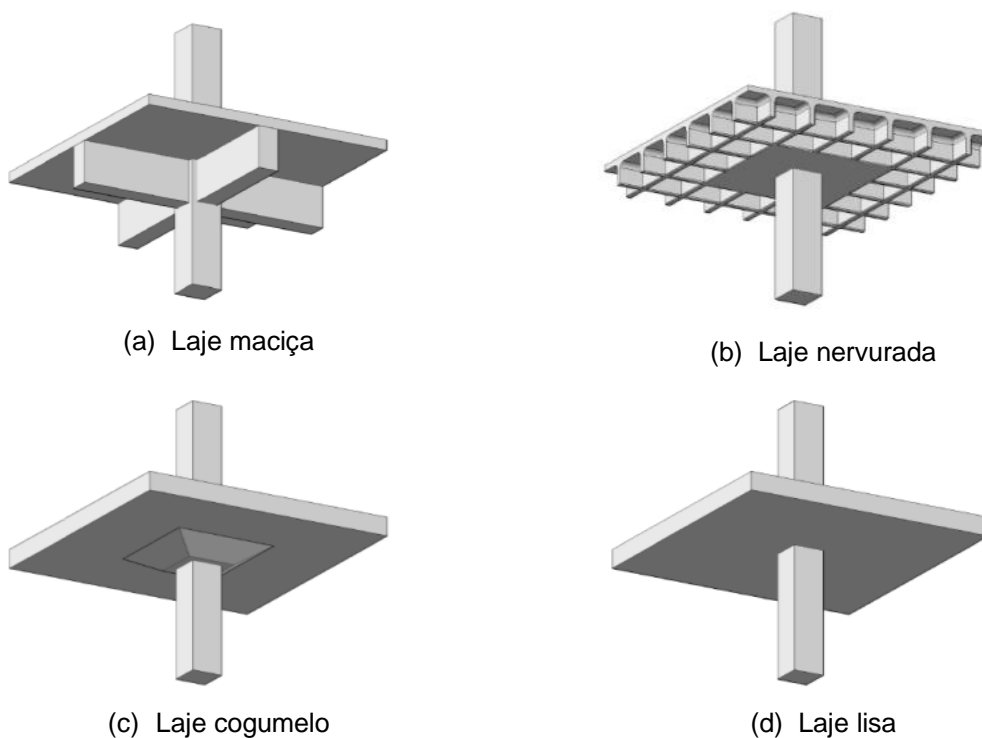
Existem diferentes tipos de lajes, como as lajes maciças, lajes nervuradas, lajes cogumelo, lajes lisas e pré-moldadas. A escolha do tipo a ser utilizada vai depender das considerações econômicas e de segurança (ARAÚJO, 2014, p.35).

- a) **lajes maciças:** são placas de espessura uniforme, apoiadas ao longo do seu contorno. É um tipo de laje predominante em edifícios residenciais onde os vãos são relativamente pequenos;

- b) **lajes nervuradas:** são utilizadas para vencer grandes vãos, geralmente superiores a 8 m, sendo constituídas por nervuras, onde são colocadas as armaduras longitudinais e de tração. Devido ao fato de eliminar parte do concreto que fica na zona tracionada, este tipo de laje tem uma redução do peso próprio;
- c) **lajes cogumelo:** são lajes apoiadas diretamente em pilares, sem o emprego de vigas. O topo do pilar possui um aumento de seção, conhecido como capitel, a fim de aumentar à resistência a punção da laje.
- d) **lajes lisas:** lajes que se apoiam diretamente sobre os pilares, sem capiteis e sem a presença de vigas.

Na Figura 13 está apresentado alguns tipos de lajes existentes.

Figura 13 - Tipos de Lajes



Fonte: Santos (2014).

Neste trabalho serão abordos apenas lajes maciças.

### 3.6.2 Métodos de cálculo

Para o dimensionamento de lajes retangulares de concreto armado, primeiramente é necessário classificá-las em:

- a) lajes armadas em uma direção;
- b) lajes armadas em duas direções.

As lajes armadas em uma direção têm a seguinte relação:

$$\frac{L_{menor}}{L_{maior}} = \frac{L_x}{L_y} < 0,5 \quad (3.45)$$

As lajes em duas direções (em cruz) têm a seguinte relação:

$$\frac{L_{menor}}{L_{maior}} = \frac{L_x}{L_y} \geq 0,5 \quad (3.46)$$

Sendo:

$L_x$  = a menor dimensão da laje;

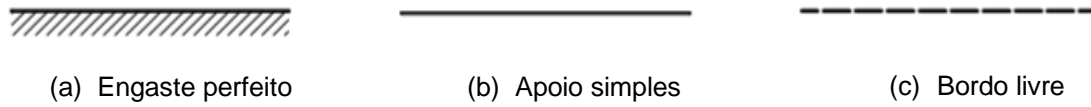
$L_y$  = a maior dimensão da laje.

Para o cálculo de lajes maciças retangulares, a vinculação pode ser de três tipos:

- 1) **apoiada**: quando a borda da laje é continuamente suportada por vigas, paredes de alvenaria de tijolos cerâmicos, de blocos de concreto ou de pedras;
- 2) **livre**: quando a borda da laje não tiver nenhuma vinculação ao longo daquele lado;
- 3) **engastada**: quando a borda da laje tiver continuidade além do apoio correspondente daquele lado (laje adjacente).

A convenção de vinculação é mostrada na Figura 14.

Figura 14 - Convenção para as condições de apoio

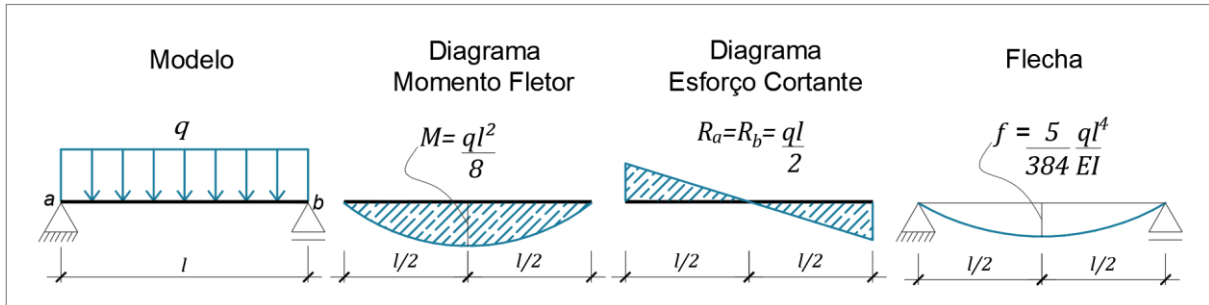


Fonte: O autor.

### 3.6.2.1 Lajes armadas em uma direção

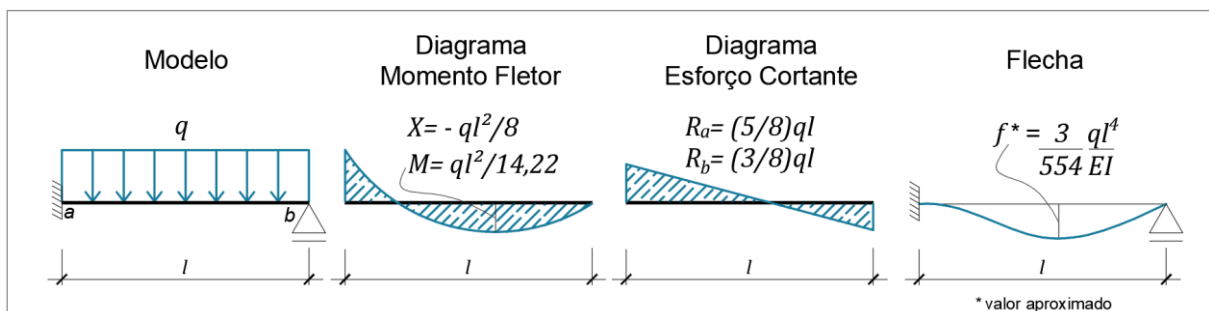
As lajes armadas em uma direção são calculadas como se fossem vigas com 1m de largura. Da Figura 15 até a Figura 19 são apresentadas as formas de obtenção dos esforços e flechas, de maneira simplificada, para lajes armadas em uma direção com diversas condições de apoio.

Figura 15 - Laje apoiada com carga distribuída



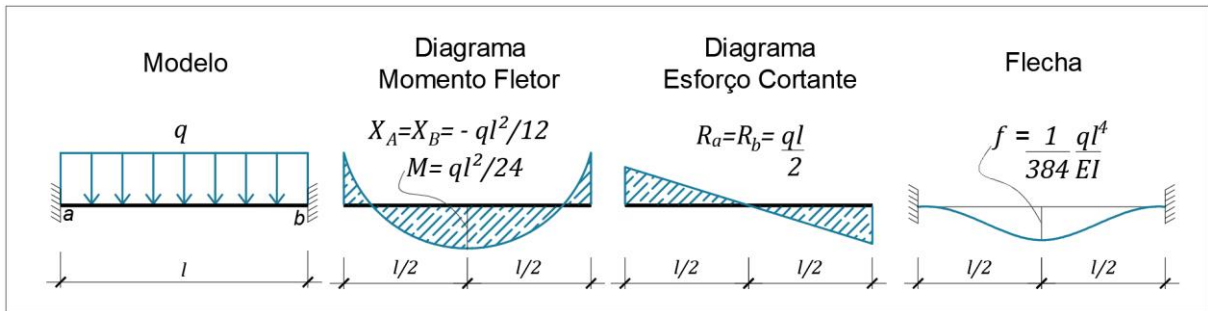
Fonte: O autor.

Figura 16 - Laje engastada-apoiada com carga distribuída



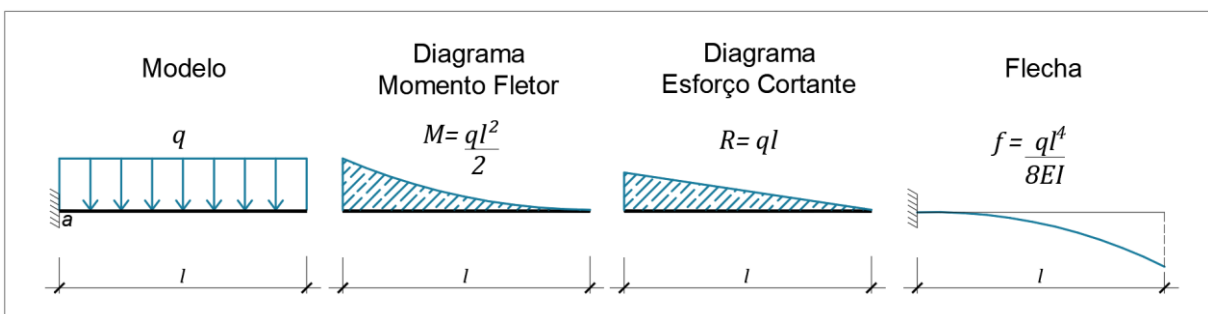
Fonte: O autor.

Figura 17 - Laje engastada-engastada com carga distribuída



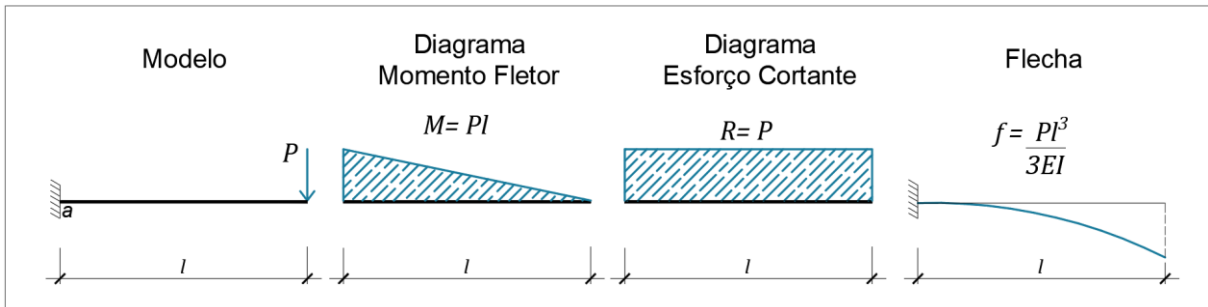
Fonte: O autor.

Figura 18 - Lajes em balanço com carga distribuída



Fonte: O autor.

Figura 19 - Laje em balanço com carga na extremidade



Fonte: O autor.

### 3.6.2.2 Lajes armadas em duas direções

Segundo a NBR 6118:2014, para efeitos de cargas atuantes normal ao seu plano, as lajes podem ser calculadas como:

- placas em regime elástico;
- placas em regime rígido plástico.



Os métodos de cálculo de lajes fundamentados na teoria da elasticidade (análise linear), denominados Métodos Clássicos, supõem que o material é homogêneo e isotrópico. Já os métodos fundamentados na teoria da plasticidade (análise plástica) chamados de Métodos de Ruptura, supõem que o material se comporta como a conexão de diversos corpos rígidos perfeitos por meio de rótulas. Este último permite a obtenção mais racional da carga última em situação de esgotamento da placa. Eventualmente, uma análise mais precisa, pode ser obtida através de um modelo da laje feito a partir do Método dos Elementos Finitos considerando as não linearidades dos materiais.

Existem diversos métodos de cálculos disponíveis na bibliografia (métodos simplificados, métodos numéricos e os métodos embasados na teoria da elasticidade) dentre eles pode-se citar:

- a) **teoria das Grelhas:** é um método simplificado e para o projeto de lajes de concreto armado é bastante útil. Admite-se um comportamento elástico linear do material da laje;
- b) **teoria das Linhas de Ruptura:** é admitido que o material apresenta um comportamento rígido-plástico. Para garantir o equilíbrio é aplicado o princípio dos trabalhos virtuais, sendo desprezada totalmente a contribuição das deformações elásticas;
- c) **teoria de Flexão de Placas:** é a teoria exata dentro dos princípios da teoria da elasticidade. Para obter a solução do problema é necessário resolver uma equação diferencial de quarta ordem, juntamente com as condições de contorno. Admite-se que o material apresenta um comportamento elástico linear;
- d) **analogia da Grelha Equivalente:** é o método numérico que mais se destaca para análise de lajes de concreto armado, se fazendo presente em diversos *softwares* comerciais. Este método pode ser utilizado para a análise de lajes poligonais de formas diversas, incluindo também vigas de apoio. A laje é relacionada a uma grelha equivalente, a qual é analisada com um programa baseado no método da rigidez;
- e) **Método das Diferenças Finitas:** é um método numérico que foi vastamente utilizado no passado. Normalmente admite-se que o material é elástico linear, mas é possível incluir a não linearidade física

sem grandes dificuldades. Uma desvantagem deste método está na dificuldade de generalização das condições de contorno e de carregamento;

- f) **Método dos Elementos Finitos:** é um método numérico muito utilizado atualmente. Pode-se considerar a não linearidade física e geométrica, as diferentes condições de carregamento e de contorno, formas diversificadas etc. Porém a formulação não é simples e o trabalho computacional pode se tornar exaustivo e requerer grande velocidade e capacidade de armazenamento.

Aprofundando-se mais no Método das Linhas de Ruptura, por ser o mais utilizado no dimensionamento de lajes de concreto armado, é exposto a seguir a formulação básica do método.

### ***Método das Linhas de Ruptura***

Este método foi iniciado pelo engenheiro Ingeslev, sendo posteriormente desenvolvido pelo engenheiro K.W. Johansen no ano de 1962 (JOHANSEN, 2017). Refere-se a um método simples, havendo sido demonstrado sua precisão através de inúmeros resultados experimentais. É uma alternativa para o cálculo de reações e esforços em lajes. Com o emprego deste método é possível obter os momentos de ruína que serão utilizados para o dimensionamento de lajes de diferentes formas, condições de contorno e carregamentos.

As linhas de ruptura, designadas de Charneiras Plásticas (rótulas plásticas), consideram o equilíbrio da laje no momento que antecede a ruína, isto é, no Estado Limite Último. Este método não permite analisar o comportamento da laje nas condições de utilização, sendo esta uma desvantagem em relação às soluções elásticas (ARAÚJO, 2014, p.107).

Em uma seção de concreto armado em flexão simples, o momento de ruína é aproximadamente proporcional à área da armadura longitudinal de tração. Logo, as áreas das armaduras por unidade de comprimento nas direções  $x$  e  $y$  da laje são  $A_{sx}$

e  $A_{sy}$ , os correspondentes momentos de ruína são dados por (ARAÚJO, 2014, p.109):

$$M_x = c A_{sx} \quad ; \quad M_y = c A_{sy} \quad (3.47)$$

Onde  $c$  é um fator de proporcionalidade. Considerando uma seção transversal com uma inclinação genérica  $\alpha$  em relação ao eixo  $x$ , tem-se os correspondentes momentos de ruína:

$$M_x = c A_{sx} \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad M_y = c A_{sy} \operatorname{cos} \alpha \quad (3.48)$$

O momento fletor em uma seção genérica em função do momento  $M_x$  e do coeficiente de ortotropia  $k$ , é expresso por:

$$M_\alpha = M_x (\operatorname{sen}^2 \alpha + k \operatorname{cos}^2 \alpha) \quad (3.49)$$

O coeficiente  $k$  é empregado para evitar grandes desvios da solução elástica, sendo definido por:

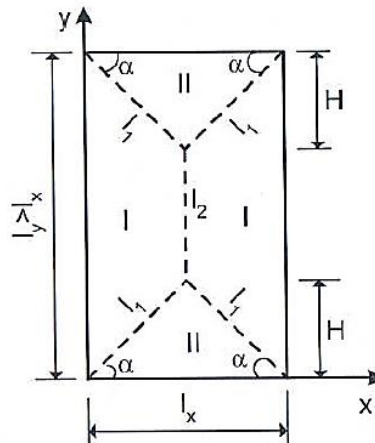
$$k = \frac{M_y}{M_x} \cong \frac{A_{sy}}{A_{sx}} \quad (3.50)$$

Na teoria das linhas de ruptura as hipóteses básicas para o cálculo dos esforços são (ARAÚJO, 2014, p.111):

- a) na iminência da ruína da laje, formam-se linhas de ruptura nas regiões de momento máximo, ao longo das quais atuam momentos de intensidade constante;
- b) as deformações elásticas da laje podem ser desprezadas;
- c) a laje é dividida em partes planas que só experimentam movimentos de rotação.

A configuração de ruptura, simplificada, para uma laje simplesmente apoiada nos quatro cantos e com carregamento uniforme, esta ilustrada na Figura 20.

Figura 20 - Configuração de ruptura - laje simplesmente apoiada



Fonte: Araújo (2014).

No instante da ruptura, a laje fica dividida em quatro partes (dois triângulos e dois trapézios) através das linhas de ruptura de comprimento  $l_1$  e  $l_2$ . Os momentos atuantes nas linhas de ruptura têm as seguintes expressões (ARAÚJO, 2014, p.112):

$$\text{Para } l_1 (\alpha = 45^\circ): M_1 = \left(\frac{1+k}{2}\right) M_x \quad (3.51)$$

$$\text{Para } l_2 (\alpha = 90^\circ): M_2 = M_x \quad (3.52)$$

O trabalho virtual interno realizado pelos momentos ao longo das linhas de ruptura é expresso por:

$$W_{int} = 4M_x \left(\frac{l_y + kl_x}{l_x}\right) \quad (3.53)$$

O trabalho virtual externo é igual ao produto da carga  $p$  pelo volume do espaço que está entre o plano médio da laje horizontal e sua configuração de deformada, dado por:

$$W_{ext} = p \frac{l_x(3l_y - l_x)}{6} \quad (3.54)$$

Igualando o trabalho virtual interno ao externo, tem-se o seguinte momento flexor na direção  $x$  e  $y$ :

$$\text{Direção } x: M_x = pl_x^2 \left[ \frac{3l_y - l_x}{24(l_y + kl_x)} \right] \quad (3.55)$$

$$\text{Direção } y: M_y = kM_x \quad (3.56)$$

Para que a relação entre os dois momentos seja próxima daquela obtida no cálculo elástico é necessário que o parâmetro  $k$  seja:

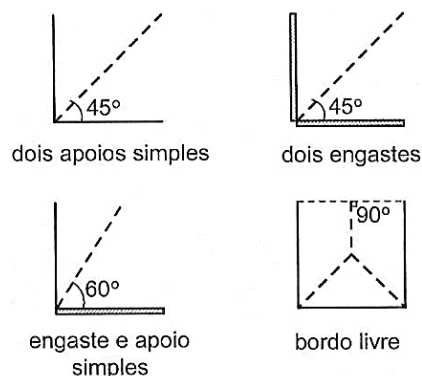
$$k = \left( \frac{l_x}{l_y} \right)^2 \quad (3.57)$$

Segundo a NBR 6118:2014, as reações de apoio de lajes retangulares com cargas uniformemente distribuídas, podem ser calculadas considerando-se as áreas dos triângulos ou trapézios obtidos através do traçado, a partir dos vértices na planta da laje, de retas inclinadas de:

- 45° entre dois apoios do mesmo tipo;
- 60° a partir do apoio engastado, quando o outro for simplesmente apoiado;
- 90° a partir do apoio, quando a borda vizinha for livre.

Todas essas situações estão apresentadas na Figura 21.

Figura 21 - Inclinação das linhas de ruptura



Fonte: Araújo (2014).

### 3.7 VERIFICAÇÃO DO ESTADO-LIMITE DE SERVIÇO (ELS)

A estrutura deve ser analisada sob as condições normais de utilização, ou seja, antes da ruína. Deste modo, a estrutura, sob a ação das cargas de serviço, deve ser suficientemente rígida para que suas deformações não provoquem danos inaceitáveis em elementos não estruturais, não causem desconforto aos usuários e não afetem a sua aparência e o seu uso. Ainda, o grau de fissuração não deve afetar a durabilidade da edificação. Portanto, verifica-se no ELS a deformação excessiva e a fissuração inaceitável (ARAÚJO, 2014, p. 249).

De acordo com Araújo (2014, p. 249) quanto maior for o diâmetro das barras da armadura, maior será a abertura das fissuras. Deste modo, normalmente não é necessário verificar o estado limite de fissuração das lajes maciças, pois as barras utilizadas possuem diâmetros muito pequenos. Além do mais, as flechas podem ser calculadas admitindo-se que toda a laje esteja no estágio I (concreto não fissurado). Portanto, para as lajes maciças a verificação dos estados limites de utilização fica restrito a um simples cálculo de flechas.

#### 3.7.1 Estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF)

O estado limite de deformação excessiva é atingido quando os deslocamentos da estrutura superam os valores limites estabelecidos pela NBR 6118:2014, os quais estão apresentados na Tabela 5. Esses limites estabelecidos são valores práticos, determinados de modo a prevenir que os deslocamentos da estrutura não causem sensação desagradável ao usuário, não impeçam a utilização adequada da construção e não causem danos em elementos não estruturais. Esses limites garantem a validade da hipótese dos pequenos deslocamentos (ARAÚJO, 2014, p.170).

A deformação real da estrutura está associada também ao processo construtivo, bem como das propriedades dos materiais no momento de sua efetiva solicitação. Devido a vasta variabilidade dos parâmetros mencionados, existe uma grande variabilidade das deformações reais. Não sendo possível esperar uma

precisão exata nas previsões de deslocamentos dadas pelos processos analíticos (CAMPOS, 2014).

Portanto, o limite a ser adotado para um deslocamento é função do dano que se quer evitar. Por exemplo, se o objetivo é evitar danos em paredes, o acréscimo da flecha na laje, presente após a construção da parede, deve ser limitado. Se o objetivo for evitar vibrações no piso perceptíveis ao usuário, a flecha devida à carga acidental não deve ultrapassar um determinado valor (ARAÚJO, 2014, p.170).

Sendo assim, as flechas das lajes não devem ultrapassar o limite de  $l/250$ , onde  $l$  é o menor vão da laje. Para as lajes em balanço, a flecha na extremidade livre deve ser limitada em  $l/125$ , onde  $l$  é o comprimento do balanço (ARAÚJO, 2014, p.171).

Tabela 5 – Limites de deslocamentos

(continua)

| <b>Tipo de deslocamento</b>                   | <b>Razão da limitação</b>              | <b>Exemplo</b>                                  | <b>Deslocamento a considerar</b>   | <b>Deslocamento limite</b>                                 |
|---|--|---|--|--|
| <b>Aceitabilidade sensorial</b>               | Visual                                 | Deslocamentos visíveis em elementos estruturais | Total  | $l/250$  |
|   | Outro                                  | Vibrações sentidas no piso                      | Devidos a cargas acidentais  | $l/350$  |
| <b>Estrutura em serviço</b>                   | Superfícies que devem drenar água      | Coberturas e varandas                           | Total  | $l/250^{1)}$   |
|   | Pavimentos que devem permanecer planos | Ginásios e pistas de boliche                    | Total  | $l/350 + \text{contra-flecha}^{2)}$                        |
|   |  |   | Ocorrido após a construção do piso                                       | $l/600$  |
| Elementos que suportam equipamentos sensíveis | Laboratórios                           | Ocorrido após nivelamento do equipamento        | De acordo com recomendação do fabricante do equipamento                  |  |
| <b>Efeitos em elementos não estruturais</b>   | Paredes                                | Alvenaria, caixilhos e revestimentos            | Após a construção da parede  | $l/500^{3)}$ ou 10 mm ou $\theta=0,0017 \text{ rad}^{4)}$  |
|   |  | Divisórias leves e caixilhos telescópicos       | Ocorrido após a instalação da divisória                                  | $l/250^{3)}$ ou 25 mm                                      |
|   |  | Movimento lateral de edifícios                  | Provocado pela ação do vento para combinação frequente ( $\Psi_1=0,20$ ) | $H/2500$ ou $H_i/1250^{5)}$ entre pavimentos <sup>6)</sup> |
|   |  | Movimentos térmicos verticais                   | Provocado por diferença de temperatura                                   | $l/400^{7)}$ ou 15 mm                                      |

Tabela 5 – Limites de deslocamentos

| (conclusão)  |   |  |  |            |
|--|---|--|--|------------|
| <b>Efeitos em elementos não estruturais</b>  | Forros  | Movimentos térmicos horizontais  | Provocado por diferença de temperatura                     | $H_i/500$  |
|  |   | Revestimentos colados  | Ocorrido após construção do forro                          | $\ell/350$ |
|  |   | Revestimentos pendurados ou com juntas   | Deslocamento ocorrido após construção do forro             | $\ell/175$ |
|  | Ponte rolante   | Desalinhamento de trilhos  | Deslocamento provocado pelas ações decorrentes da frenagem | $H/400$    |
| <b>Efeitos em elementos estruturais</b>  | Afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas | Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados, incorporando-as ao modelo estrutural adotado. |  |            |
| <b>Observações:</b>  |   |  |  |            |
| <p>a) Todos os valores limites de deslocamentos supõem elementos de vão <math>\ell</math> suportados em ambas as extremidades por apoios que não se movem. Quando se tratar de balanços, o vão equivalente a ser considerado deve ser o dobro do comprimento do balanço.</p> <p>b) Para o caso de elementos de superfície, os limites prescritos consideram que o valor <math>\ell</math> é o menor vão, exceto em casos de verificação de paredes e divisórias, onde interessa a direção na qual a parede ou divisória se desenvolve, limitando-se esse valor a duas vezes o vão menor.</p> <p>c) O deslocamento total deve ser obtido a partir da combinação das ações características ponderadas pelos coeficientes de acompanhamento definidos na NBR6118:2014.</p> <p>d) Deslocamentos excessivos podem ser parcialmente compensados por contraflechas.</p>   |   |  |  |            |
| <b>NOTAS:</b>  |   |  |  |            |
| <p>1) As superfícies devem ser suficientemente inclinadas ou o deslocamento previsto compensado por contraflechas, de modo a não se ter acúmulo de água.</p> <p>2) Os deslocamentos podem ser parcialmente compensados pela especificação de contraflechas. Entretanto, a atuação isolada da contraflecha não pode ocasionar um desvio do plano maior que <math>\ell/350</math>.</p> <p>3) O vão <math>\ell</math> deve ser tomado na direção na qual a parede ou a divisória se desenvolve.</p> <p>4) Rotação nos elementos que suportam paredes.</p> <p>5) <math>H</math> é a altura total do edifício e <math>H_i</math> o desnível entre dois pavimentos vizinhos.</p> <p>6) Esse limite aplica-se ao deslocamento lateral entre dois pavimentos consecutivos devido à atuação de ações horizontais. Não devem ser incluídos os deslocamentos devidos a deformações axiais nos pilares. O limite também se aplica para o deslocamento vertical relativo das extremidades de lintéis conectados a duas paredes de contraventamento, quando <math>H_i</math> representa o comprimento do lintel.</p> <p>7) O valor <math>\ell</math> refere-se à distância entre o pilar externo e o primeiro pilar interno.</p> |   |  |  |            |

Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014.



### 3.7.2 Estado limite de fissuração

Segundo a NBR 6118:2014, é inevitável a fissuração em elementos estruturais de concreto, devido à grande variabilidade e baixa resistência à tração do mesmo. Devido a isso, é importante controlar a abertura dessas fissuras, a fim de garantir a proteção das armaduras à corrosão e a aceitabilidade sensorial dos usuários.

A fissuração excessiva pode afetar significativamente a durabilidade de um elemento de concreto armado. Deste modo, o controle das fissuras faz parte de uma verificação do estado limite de serviço, pois interessa saber a fissuração que ocorrerá na utilização normal da estrutura e não próxima do colapso.

O valor da abertura das fissuras pode sofrer a influência de restrições às variações volumétricas da estrutura, que são difíceis de serem consideradas de forma precisa. Essas aberturas também sofrem a influência das condições de execução da estrutura. Devido a isto, é difícil garantir uma avaliação precisa da abertura de uma determinada fissura (NBR 6118:2014).

A NBR 6118:2014 estabelece valores limites da abertura característica das fissuras ( $w_k$ ), tendo como objetivo principal proteger as armaduras quanto à corrosão. Esses valores são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 – Exigência de durabilidade relacionadas à fissuração

| Tipo de concreto estrutural                      | Classe de agressividade ambiental (CAA) e tipo de protensão | Exigências relativas à fissuração  | Combinação de ações em serviço a utilizar |
|--|---|------------------------------------|---|
| Concreto simples                                 | CAA I a CAA IV  | Não há                             | -   |
| Concreto armado                                  | CAA I   | ELS-W $wk \leq 0,4$ mm             | Combinação frequente                      |
|  | CAA II e CAA III  | ELS-W $wk \leq 0,3$ mm             |   |
|  | CAA IV  | ELS-W $wk \leq 0,2$ mm             |   |
| Concreto protendido nível 1 (protensão parcial)  | Pré-tração com CAA I ou Pós-tração com CAA I e II           | ELS-W $wk \leq 0,2$ mm             | Combinação frequente                      |
| Concreto protendido nível 2 (protensão limitada) | Pré-tração com CAA II ou Pós-tração com CAA III e IV        | Verificar as duas condições abaixo |   |
|  |   | ELS-F                              | Combinação frequente                      |
|  |   | ELS-D <sup>a</sup>                 | Combinação quase permanente               |
| Concreto protendido nível 3 (protensão completa) | Pré-tração com CAA III e IV                                 | Verificar as duas condições abaixo |   |
|  |   | ELS-F                              | Combinação rara                           |
|  |   | ELS-D <sup>a</sup>                 | Combinação frequente                      |

<sup>a</sup> A critério do projetista, o ELS-D pode ser substituído pelo ELS-DP com  $ap = 50$  mm.

**NOTAS**

- 1 ELS-W: estado-limite de abertura das fissuras, ELS-F: estado limite de formação de fissuras, e ELS-D: estado-limite de descompressão.
- 2 Para as classes de agressividade ambiental CAA-III e IV, exige-se que as cordoalhas não aderentes tenham proteção especial na região de suas ancoragens.
- 3 No projeto de lajes lisas e cogumelo protendidas, basta ser atendido o ELS-F para a combinação frequente das ações, em todas as classes de agressividade ambiental.
- 4 CAA: Classe de Agressividade Ambiental.

Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014.

### 3.8 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

A confiabilidade pode ser definida como sendo a probabilidade de que o sistema não falhe, respeitando as condições de operação, dentro do período especificado em projeto. A probabilidade de falha pode ser definida como sendo a probabilidade do sistema falhar, não atendendo às recomendações de projeto, dentro da vida útil especificada, mesmo respeitando as exigências de operação e de projeto do sistema (BECK, 2019).

É garantida a confiabilidade a partir de cálculos, modelos e testes realizados para a chamada vida de projeto, considerando específicas condições de projeto ou utilização. Não terá a confiabilidade desejada o sistema que for utilizado em

condições mais elevadas do que aquelas consideradas em projeto ou em testes. A vida útil de um sistema pode ser maior do que a vida útil estabelecido em projeto. A vida de projeto é aquela que tem a confiabilidade calculada, levando em consideração o envelhecimento (desgaste, corrosão, fadiga, etc.). A confiabilidade é reduzida, geralmente, nos casos em que a vida útil do sistema ultrapasse a vida de projeto. Em contrapartida, como o sistema já foi inicialmente avaliado durante a vida de projeto, é possível que a sua confiabilidade seja maior do que a estipulada no mesmo (BECK, 2019).

Nesse contexto, a confiabilidade estrutural pode ser entendida como sendo a probabilidade de um sistema violar um estado limite, tanto por falha como por não atender o desempenho esperado. O principal objetivo de um projeto estrutural é o dimensionamento de estruturas que atendam, em simultâneo, os requisitos de segurança e economia. Em alguns casos, os requisitos de segurança não são quantificados adequadamente, como são os requisitos de economia, não sendo incomum encontrar estruturas econômicas, porém pouco seguras ou estruturas muito seguras, mas pouco econômicas (GOMES, 1997).

A confiabilidade estrutural está relacionada com a variabilidade das variáveis que caracterizam o sistema estrutural. Esta variabilidade esta apresentada na forma de incertezas nos sistemas estruturais (GOMES, 1997, p.66). As incertezas são classificadas em diferentes tipos, as principais são (MELCHERS; BECK, 2017; BECK, 2019):

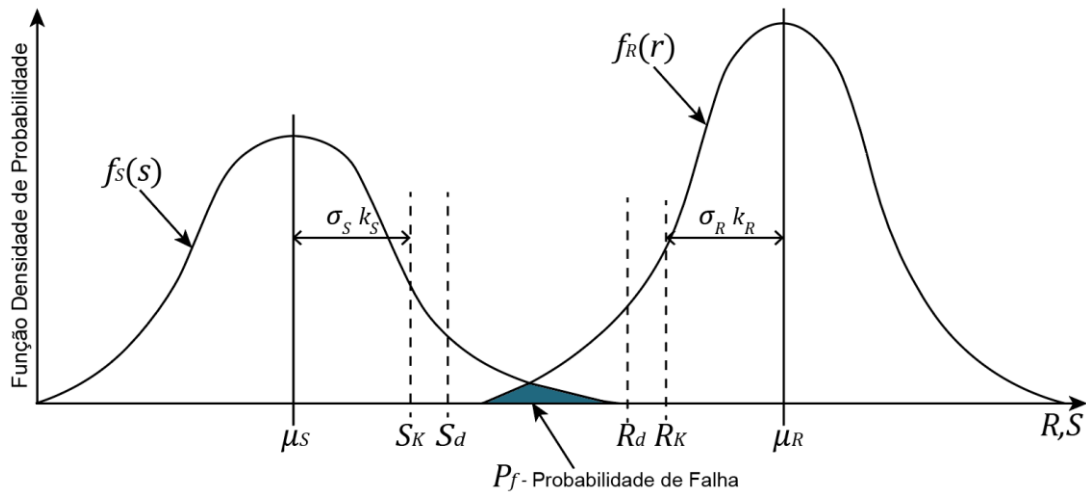
- a) **incerteza física:** corresponde à natureza aleatória inerente de uma variável básica, como por exemplo: variabilidade das cargas do vento, variação da resistência ao escoamento do aço, variabilidade da carga real do piso e das dimensões físicas dos componentes estruturais.
- b) **incerteza de previsão:** corresponde à previsão de condições futuras de um sistema. Na maioria das vezes a informação disponível sobre determinado processo é limitada a um curto período, porém deve ser excedido para o período de vida útil da estrutura. São um exemplo típico os extremos de fenômenos ambientais.
- c) **incerteza de modelagem:** corresponde à incerteza da representação do comportamento físico da estrutura, por meio de modelos

simplificados. A incerteza da modelagem normalmente ocorre devido à falta de conhecimento.

- d) **incerteza estatística:** está sujeita a denominada incerteza estatística a determinação, com base em amostras, da curva de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória ou de seus parâmetros. Pode-se citar como exemplo, quando a média de uma variável é determinada a partir de uma amostra, a variância do resultado corresponde a uma incerteza estatística nessa média.
- e) **incerteza devido a fatores humanos:** corresponde à incerteza decorrente do envolvimento humano no comportamento da estrutura. Pode ocorrer devido ao erro humano ou em decorrência das ações humanas.
- f) **incerteza fenomenológica:** corresponde ao conhecimento incompleto dos fenômenos relacionados a estrutura. Essa incerteza surge sempre que o sistema construtivo ou a técnica de projeto gera incerteza sobre qualquer aspecto do possível comportamento da estrutura.

Na análise de confiabilidade estrutural, investiga-se a probabilidade de um determinado sistema estrutural não falhar sob dadas ações externas e incertezas presentes na mesma, assim como em parâmetros e variáveis deste sistema. No contexto de funções de estado limite, a falha do projeto ocorre quando o efeito das ações externas ( $S$ ) excede a resistência ( $R$ ), ou seja,  $g(R, S) = R - S < 0$ . A hipótese de que  $S$  exceda  $R$  corresponde à sobreposição das áreas entre a função  $f_S(S)$  e a função  $f_R(r)$ , isto é, a região de falha a qual representa quantitativamente a medida da probabilidade de falha (Figura 22) (ANG; TANG, 2006).

Figura 22 - Função densidade de probabilidade para ações e resistências



Na Figura 22,  $R_k$  e  $S_k$  designam seus respectivos valores característico,  $R_k$  e  $S_k$  seus respectivos valores de cálculo,  $\mu_S$  e  $\mu_R$  os respectivos valores médios,  $\sigma_S$  e  $\sigma_R$  os desvios-padrão e  $k_S$  e  $k_R$  representam os respectivos coeficientes que garantem o percentil de 5% para carregamentos e resistências. A partir do  $R_k$  e do  $S_k$  são, usualmente, empregados fatores de majoração e minoração para garantir a segurança do projeto (gerando o  $R_d$  e o  $S_d$ ). A probabilidade de falha é expressa pela equação (3.58).

$$P_f = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^s f_R(r) dr \right] f_S(s) ds = \int_0^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds = P[g(\mathbf{X}) \leq 0] \quad (3.58)$$

Onde o  $\mathbf{X}$  representa o vetor de variáveis aleatórias estocásticas do problema de confiabilidade (neste caso,  $R$  e  $S$ ) e  $g(\mathbf{X})$  é a função de estado limite que define a região de segurança com  $g(\mathbf{X}) > 0$ , e a região de falha com  $g(\mathbf{X}) < 0$ . A hipersuperfície que separa a região de segurança da região de falha é a chamada função de estado limite  $g(\mathbf{X}) = 0$ ,  $f_S(s)$  é a função densidade de probabilidade das ações e  $F_R(r)$  é a função de probabilidade acumulada das resistências.

### 3.8.1 Índice de confiabilidade

Para medir o nível de confiança de um sistema, é utilizado o índice de confiabilidade  $\beta$ . Nos casos em que o  $\beta$  resultar em valores altos, significa que a probabilidade de falha é pequena. Nos casos em que o  $\beta$  resultar em valores baixos, o sistema tem uma probabilidade de falha maior, logo é mais inseguro.

A probabilidade de falha está relacionada com a confiabilidade de um sistema pela relação  $P_f = 1 - C$ , onde  $C$  é a probabilidade de sucesso. Para funções de estado limite que possam ser linearizadas, como indicado  $g(R, S) = R - S$ , o índice  $\beta$ , é utilizado para quantificar a confiabilidade, sendo definido pela seguinte equação (Ang e Tang, 2006):

$$\beta = \mu_{g(R,S)} / \sigma_{g(R,S)} = (\mu_R - \mu_S) / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (3.59)$$

Sendo o  $\Phi^{-1}(\cdot)$  a inversa da função acumulada Normal padrão,  $\mu_R$  o valor médio da resistência,  $\mu_S$  o valor médio da tensão,  $\sigma_R$  o desvio padrão da resistência e  $\sigma_S$  o desvio padrão da tensão. A definição dessa equação não é adequada, pois os valores de confiabilidade ficam dependentes do tipo de distribuição e principalmente não invariante da forma de como a função de estado limite é definida.

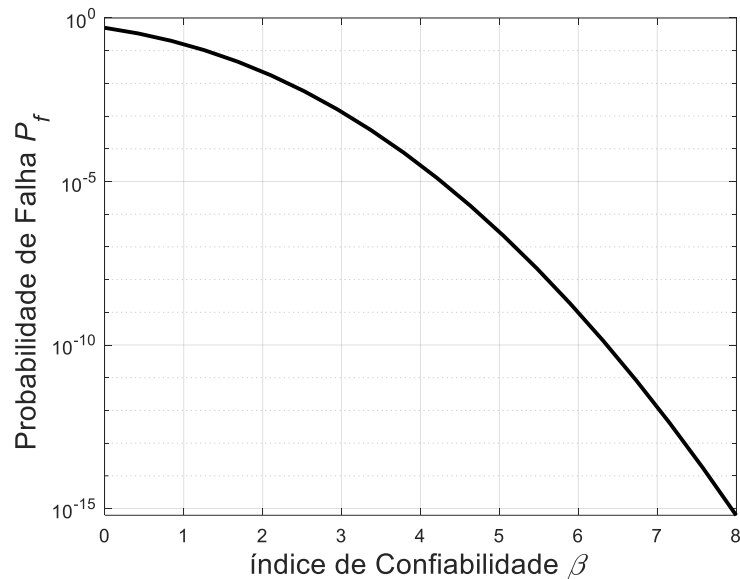
O índice de confiabilidade e a probabilidade de falha podem ser obtidos através de métodos de aproximação, como o método de 1ª Ordem (FORM), o Método de Simulação de Monte Carlo, dentre outros. Com esses métodos é possível, geralmente, estimar adequadamente o valor da probabilidade de falha ( $P_f$ ), sem precisar utilizar integrais, que tornam os métodos de simulação pouco eficientes. Outra vantagem de se estar utilizando esses métodos de aproximação, é a sua invariância perante a definição da equação de estado limite.

Para o método FORM, a probabilidade de falha pode ser avaliada em função da distribuição normal inversa acumulada, conforme a equação (3.60).

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (3.60)$$

A relação entre o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha, é apresentada na Figura 23.

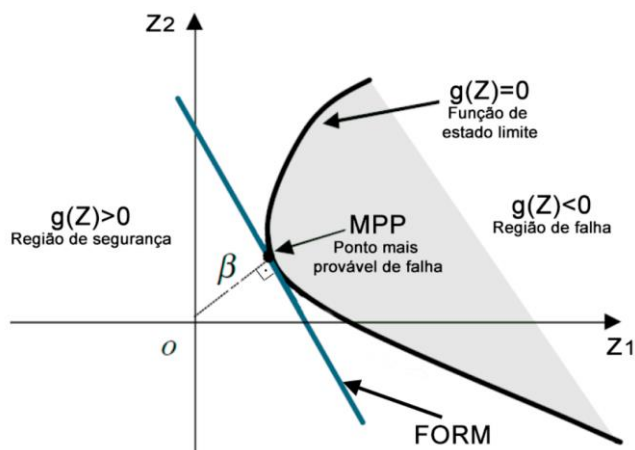
Figura 23 - Relação entre o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha



Fonte: O autor.

Quando a função de estado limite resultar em valores negativos, significa insucesso ou falha, quando resultar em valores positivos, ocorre o sucesso, a estrutura avaliada está segura. Caso a função de estado limite for nula, significa que esse ponto está na fronteira entre a falha e segurança, ou seja, sobre a função de estado limite. Quanto menor o índice  $\beta$ , maior a probabilidade de falha e, por consequência, menor a segurança do sistema. A Figura 24 ilustra a representação geométrica do índice de confiabilidade para o método FORM.

Figura 24 - Representação do índice de confiabilidade - FORM



Fonte: O autor.

### 3.9 MÉTODOS PARA A AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE

Em princípio, as variáveis aleatórias são caracterizadas pelos seus momentos estatísticos; o seu primeiro momento (média), segundo momento (variância) além de outros momentos de ordem mais elevados. Diferentes maneiras de aproximar a função de estado limite formam a base para diferentes algoritmos de análise de confiabilidade (como por exemplo FORM, SORM, etc.). Será discutido neste capítulo o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem, conhecido como FORM, o Método de simulação de Monte Carlo e o Método de simulação de Monte Carlo com Amostragem por Importância.

#### 3.9.1 Método de primeira ordem FORM

Para entender o método FORM (*First Order Reliability Method*), é necessário explicar o método MVFOSM (*Mean Value First Order Second Method*). Neste último, a função de estado limite é representada pela expansão, em série de Taylor em primeira ordem, expandida em torno do valor médio das variáveis aleatórias. Assumindo que as variáveis  $X$  sejam estatisticamente independentes, a aproximação de primeira ordem da função de estado limite fica:



$$g(\mathbf{X}) \cong g(\mu_X) + \nabla g(\mu_X)^T (\mathbf{X} - \mu_X) \quad (3.61)$$

Onde  $\mu_X = \{\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}\}^T$  é o vetor de médias das variáveis aleatórias e  $\nabla g(\mu_X)$  é o gradiente de  $g$  avaliado em  $\mu_X$ .

O valor médio da função de estado limite fica assim definida,  $\mu_g = E[g(\mu_X)] \cong g(\mu_X)$ , onde  $E[.]$  representa o operador do valor esperado de uma variável. Uma vez que tem-se,  $Var[g(\mu_X)] = 0$  assim como  $Var[\nabla g(\mu_X)] = 0$ , chega-se a:

$$Var[\nabla g(\mu_X)^T (\mathbf{X} - \mu_X)] = [\nabla g(\mu_X)^T]^2 Var(\mathbf{X}) \quad (3.62)$$

De forma que a variância da função de estado limite aproximada fica definida como:

$$Var[g(\mathbf{X})] \cong Var[g(\mu_X)] + Var[\nabla g(\mu_X)^T (\mathbf{X} - \mu_X)] \quad (3.63)$$

O desvio padrão da função de estado limite pode ser calculado através da equação (3.64) ou de forma expandida através da equação (3.65).

$$\sigma_g = \sqrt{[\nabla g(\mu_X)^T]^2 Var(\mathbf{X})} \quad (3.64)$$

$$\sigma_g = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g(\mu_X)}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (3.65)$$

Desta forma, pode-se avaliar a margem de segurança que se tem, chamada aqui de  $\beta$ , como a média aproximada da função de estado limite dividida pelo seu desvio padrão (número de desvios padrões que a média está longe da origem)  $\beta = \mu_g / \sigma_g$ . Esta forma de quantificar a confiabilidade de uma determinada função de estado limite é suscetível a diversos erros e devido a isso não é mais utilizada como forma de avaliar a confiabilidade.

Ademais há duas falhas graves nesta aproximação: (i) para funções de estado limite não lineares, a aproximação em primeira ordem levará a grandes diferenças e, portanto, erros na estimativa da confiabilidade; (ii) para formulações

equivalentes da função de estado limite (como por exemplo,  $g = \frac{R}{S} - 1$  ou mesmo  $g = \ln(R/S)$ ), o método se mostra não invariante, apresentando resultados que são diferentes para distintas formas de apresentação da função de estado limite.

Para resolver a equação (3.58), Rackwitz e Fiessler (1978) propuseram um algoritmo iterativo, conhecido como o algoritmo FORM, onde há uma aproximação através da linearização da função de estado limite pelo seu gradiente. De acordo Poletto (2017), resumidamente, o algoritmo pode ser descrito da seguinte forma:

**Passo 1:** definir a função de estado limite do problema  $g(\mathbf{X}) = 0$ ;

**Passo 2:** assumir valores iniciais do ponto de projeto no espaço real das variáveis aleatórias  $\mathbf{X}^* = (X_1, \dots, X_n)^T$  e avaliar os correspondentes valores da função de estado limite;

**Passo 3:** avaliar as médias e os desvios-padrão de uma distribuição Gaussiana equivalente, para as variáveis aleatórias.  $\sigma_{X_i}^N = \phi(\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)]) / f_{X_i}(x_i)$  e  $\mu_{X_i}^N = X_i - \sigma_{X_i}^N \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)]$ ;

**Passo 4:** transformar as variáveis aleatórias do espaço real  $\mathbf{X}$  para o espaço Normal não correlacionado  $\mathbf{Z}$ . Os valores das variáveis de projeto neste espaço serão avaliados como:  $Z_i = X_i - \mu_{X_i}^N / \sigma_{X_i}^N$ ;

**Passo 5:** avaliar as sensibilidades  $(\partial g(\mathbf{X}) / \partial X_i)$  no ponto de projeto  $\mathbf{X}^*$ ;

**Passo 6:** avaliar as derivadas parciais  $(\partial g(\mathbf{X}) / \partial Z_i)$  no espaço Normal não correlacionado usando a regra da cadeia:  $\partial g(\mathbf{X}) / \partial Z_i = (\partial g(\mathbf{X}) / \partial X_i) (\partial X_i / \partial Z_i)$ ;

**Passo 7:** avaliar o novo valor das variáveis normais não correlacionadas no ponto  $\mathbf{Z}^*$ , usando a expressão:  $Z_{i,k+1}^* = \left[ \nabla g(Z_{i,k}^*)^T Z_{i,k}^* - g(Z_{i,k}^*) \right] \left[ \nabla g(Z_{i,k}^*) / \|\nabla g(Z_{i,k}^*)\| \right]$ ;

**Passo 8:** avaliar a distância da origem do sistema no espaço Normal não correlacionado para este novo ponto de projeto na função de estado limite linearizada. Assim como o índice de confiabilidade através de  $\beta = \|\mathbf{Z}^*\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (Z_i^*)^2}$ . A probabilidade de falha pode ser avaliada por  $P_f = \Phi(-\beta)$ ;

**Passo 9:** verificar a convergência para o índice  $\beta$  com referência a uma determinada tolerância.

**Passo 10:** avaliar as variáveis aleatórias no espaço real para este novo ponto de projeto  $X_i = \mu_{X_i}^N + \sigma_{X_i}^N Z_i^*$ ;

**Passo 11:** avaliar  $g(\mathbf{X})$  para as novas variáveis aleatórias e verificar o critério de convergência, como por exemplo se  $\Delta g(\mathbf{X}) < \text{tolerância}$  e  $\Delta \mathbf{X} < \text{tolerância}$ ;

**Passo 12:** se ambos os critérios são atendidos parar as iterações, caso contrário, repetir os passos de 3 à 11.

### 3.9.1.1 Sensibilidade das variáveis aleatórias para o índice de Confiabilidade

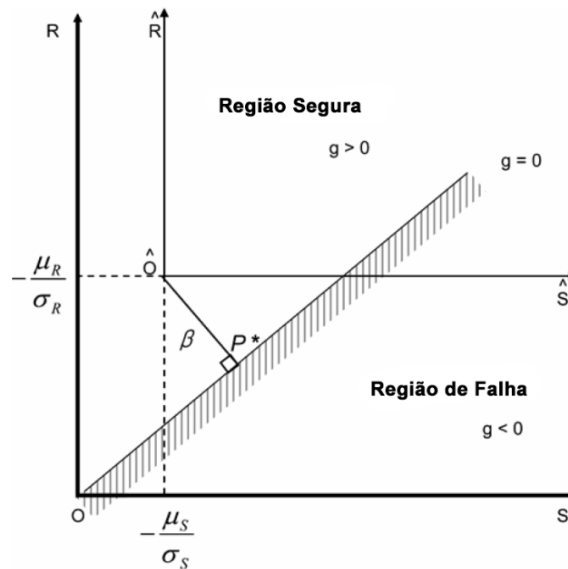
Sendo  $R$  a variável independente da resistência e  $S$  a tensão, ambos normalmente distribuídos. A função normalizada padrão dessas variáveis fica sendo:

$$\hat{R} = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad e \quad \hat{S} = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (3.66)$$

Onde  $\mu_R$  e  $\mu_S$  representam os valores médios das variáveis aleatórias  $R$  e  $S$ , respectivamente, e  $\sigma_R$  e  $\sigma_S$  são os desvios padrões de  $R$  e  $S$ .

A distância mais curta da origem  $(\hat{R}, \hat{S})$ , do sistema de coordenadas, até a superfície de falha  $\hat{g} = (\hat{R}, \hat{S}) = 0$ , é igual ao índice de segurança  $\beta = \hat{R}P^* = \mu_R - \mu_S / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$ , conforme pode ser visto na Figura 25. O ponto  $P^*(\hat{R}^*, \hat{S}^*)$  na superfície de falha, correspondente a menor distância, é denominado MPP (*Most Probable failure Point*).

Figura 25 - Ilustração do índice de segurança



Fonte: Adaptado Choi, Grandhi e Canfield (2007).

O cosseno diretor do vetor unitário é dado pela equação (3.67).

$$\alpha_i = \cos \theta_{x_i} = \cos \theta_{u_i} = \frac{\frac{\partial g(Z^*)}{\partial u_i}}{|\nabla g(Z^*)|} = \frac{\frac{\partial g(X^*)}{\partial x_i} \sigma_{x_i}}{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g(X^*)}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.67)$$

Onde, o fator de sensibilidade é o  $\alpha_i$ , que representa o efeito relativo da variável aleatória correspondente na variação total. Quanto maior o valor de  $\alpha_i$ , maior a contribuição, da variável de análise, para a probabilidade de falha. As coordenadas no ponto  $P^*$  são calculadas pela equação (3.68).

$$u_i^* = \frac{x_i^* - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} = \hat{O}P^* \cos \theta_{x_i} = \beta \cos \theta_{x_i} \quad (3.68)$$

No espaço real as coordenadas correspondentes a  $P^*$  são:

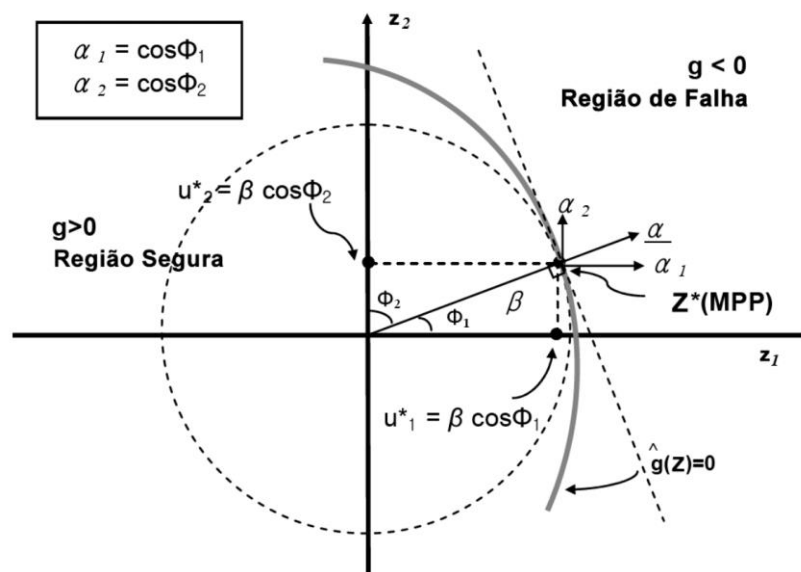
$$x_i^* = \mu_{x_i} + \beta \sigma_{x_i} \cos \theta_{x_i}, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.69)$$

Sendo  $P^*$  um ponto na superfície da função de estado limite, tem-se:

$$g(\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}^T) = 0 \quad (3.70)$$

Simplificadamente, ao calcular o  $\alpha_i$  é fornecida a sensibilidade do índice de confiabilidade em relação ao  $u_i$ . Esses fatores de sensibilidade mostram as contribuições das variáveis aleatórias para o índice de confiabilidade. O sinal do fator de sensibilidade representa a relação entre a função de desempenho e as variáveis físicas. Caso o  $\alpha_i$  seja positivo, significa que a função de desempenho  $g(Z)$  diminui à medida que a variável aleatória aumenta. Se  $\alpha_i$  for negativo, acontece o oposto,  $g(Z)$  aumenta à medida que a variável aleatória aumenta (CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007, p.90). Os fatores de sensibilidade estão ilustrados na Figura 26.

Figura 26 - Fatores de sensibilidade



Fonte: Adaptado Choi, Grandhi e Canfield (2007).

### 3.9.2 Método de Monte Carlo

O método de Simulação de Monte Carlo é capaz de para estimar a probabilidade de falha, definida pela equação (3.58). O método consiste em gerar amostras com as distribuições e correlações adequadas para as respectivas variáveis aleatórias e então alimentar a função de estado limite para obter os

respectivos resultados. Quando  $g(\mathbf{X}) \leq 0$  ocorre a falha e quando  $g(\mathbf{X}) > 0$  se estará no domínio da segurança. Uma estimativa da probabilidade de falha pode ser obtida por (Ang e Tang, 2006):

$$\hat{P}_f = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{ns} I[g(X) \leq 0], \quad (3.71)$$

onde  $ns$  é o número de ciclos de simulações efetuadas e  $I[.]$  é uma função indicadora que vale 1, caso  $g(\mathbf{X}) \leq 0$  e 0, no caso contrário.

À medida que  $ns$  aumenta, a estimativa da probabilidade  $\hat{P}_f$  aproxima-se da verdadeira probabilidade de falha  $P_f$ . A precisão da equação (3.71) pode ser avaliada em termos da variância do estimador de  $\hat{P}_f$ . Para pequenas probabilidades de falha e/ou pequeno número de ciclos de simulação, a variância de  $\hat{P}_f$ , indicado por  $var(\hat{P}_f)$ , pode ser muito grande. Portanto, para que se haja confiança no valor obtido pelo estimador  $\hat{P}_f$ , provavelmente seja necessário um grande número de ciclos de simulação para que uma dada variância especificada seja atingida.

A variância do estimador da probabilidade de falha, pode ser avaliada assumindo que cada ciclo de simulação constitui um processo de Bernoulli. Portanto, neste caso, o número de falhas nas simulações pode ser considerado como tendo uma distribuição binomial. Logo, a variância pode ser avaliada como:

$$var(\hat{P}_f) = \frac{(1 - \hat{P}_f)\hat{P}_f}{ns}. \quad (3.72)$$

Assim, é recomendado que a medida estatística da precisão do estimador da probabilidade de falha, obtida com simulações diretas de Monte Carlo, seja avaliada de forma adimensional pelo coeficiente de variação:

$$CV(\hat{P}_f) = \frac{\sqrt{\frac{(1 - \hat{P}_f)\hat{P}_f}{ns}}}{\hat{P}_f} = \frac{\sigma_{\hat{P}_f}}{\mu_{\hat{P}_f}}. \quad (3.73)$$

Quanto menor for o coeficiente de variação CV (valores em torno de 0,5-5% são aceitáveis), melhor será a precisão da estimativa de  $\hat{P}_f$ . Sendo possível observar que, quando  $ns$  tende a infinito o  $CV(\hat{P}_f)$  tende a zero.

### 3.9.3 Método de Monte Carlo com Amostragem por importância

Nos casos em que a probabilidade de falha é relativamente pequena (confiabilidade alta), o procedimento de Simulação de Monte Carlo (MC) puro torna-se ineficiente, devido à grande quantidade de simulações necessárias para obter resultados satisfatórios (resultados com baixo coeficiente de variação da probabilidade de falha). Sendo assim, existem limitações para obter uma alta precisão em problemas de grande escala, que exigem muito tempo e esforço computacional.

Para resolver uma das principais dificuldades da simulação de Monte Carlo puro, que é a convergência lenta, foram desenvolvidas técnicas de redução de variância como o método de Amostragem por Importância. Esse método utiliza uma função de amostragem com o intuito de evitar a geração de amostras longe da região de interesse, ou seja, longe do domínio de falha. É uma técnica eficaz para diminuir o número de amostras e reduzir o custo computacional (BECK, 2019; CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007, p.68).

O método de amostragem por importância modifica a simulação de MC a fim de torná-la mais eficiente. A probabilidade de falha pode ser escrita pela expressão (3.74).

$$\hat{P}_f = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{ns} I[g(X) \leq 0] \frac{f_X(X)}{f_W(X)} = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{ns} I_W \quad (3.74)$$

Onde:

$f_W(X)$  = função de densidade de probabilidade conjunta de amostragem;

$f_X(X)$  = função densidade de probabilidade conjunta de X.

Da mesma forma que para a Simulação de Monte Carlo, é possível calcular o coeficiente de variação para a estimativa de probabilidade de falha, conforme a equação (3.75).

$$CV(\hat{P}_f) = \frac{\sigma_{\hat{P}_f}}{\mu_{\hat{P}_f}} = \frac{1}{ns \cdot \hat{P}_f} \sqrt{\sum_{i=1}^{ns} I_W^2 - ns \cdot \hat{P}_f^2} \quad (3.75)$$

Essa função, diferente do coeficiente de variação para a simulação de MC Puro, não é somente uma função do número de amostras e da probabilidade de falha, mas também da função indicadora  $I_W$ . Esta técnica consegue a quantidade de amostras necessárias para obter a probabilidade de falha com o mesmo coeficiente de variação, quando comparada com o Método de Monte Carlo puro.

Diferente das outras implementações utilizadas por demais autores, aqui neste trabalho foi utilizado uma técnica adaptativa, onde todas as amostras são reutilizadas para a avaliação do  $\hat{P}_f$  e do  $CV(\hat{P}_f)$ . Os pontos do domínio de falha servem como base para a definição da função de amostragem  $f_w(X)$ , a fim de se reduzir ainda mais o custo computacional.

### 3.9.4 Geração das amostras aleatórias para o Método de MC

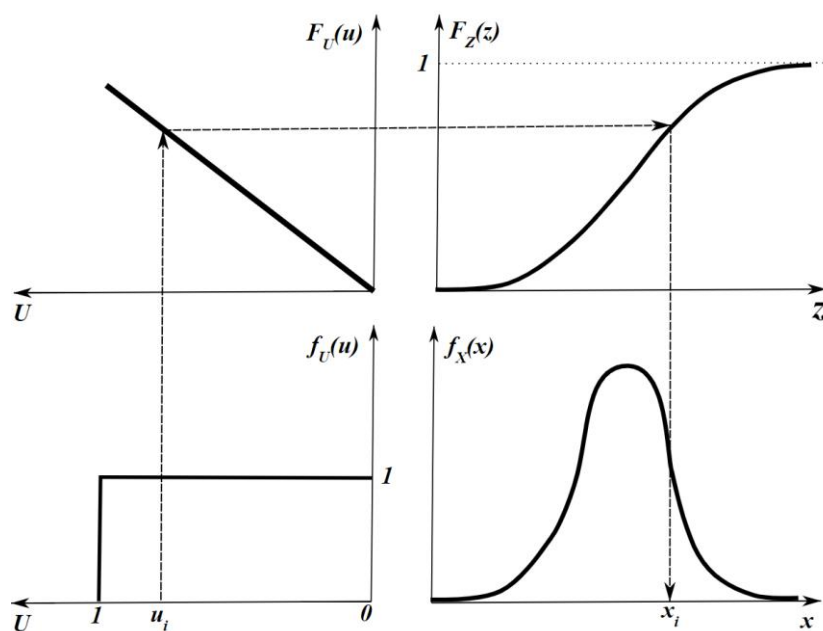
Uma das principais características do Método de Simulação de Monte Carlo é a possibilidade de gerar uma série de valores para uma ou mais variáveis aleatórias com uma específica distribuição de probabilidade. O método de geração mais utilizado é o método de transformação inversa. Seja a  $F_X(x_i)$  (Função de Densidade Acumulada – FDA) da variável aleatória  $x_i$ . Por definição, o valor numérico de  $F_X(x_i)$  está contido entre  $[0,1]$ . Assumindo que, é gerado um número aleatório  $v_i$ , uniformemente distribuído no intervalo de  $0 \leq v_i \leq 1$ , o método de transformação inversa é usado para igualar  $v_i$  a  $F_X(x_i)$ , como mostrado na equação (3.76) (CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007, p.62).

$$F_X(x_i) = v_i \quad \text{ou} \quad x_i = F_X^{-1}(v_i) \quad (3.76)$$



Essa metodologia pode ser aplicada para as variáveis que possuem uma função de distribuição acumulada obtida através de observação direta, ou caso exista uma expressão analítica para a função cumulativa inversa,  $F_X^{-1}(\cdot)$ . Na Figura 27 está apresentada graficamente a técnica de transformação inversa. São gerados números aleatórios uniformes entre 0 e 1, através do gerador de números aleatórios, com base em valores de sementes selecionadas arbitrariamente (neste trabalho está sendo usado o gerador *RAND* do *software* Matlab, o qual permite definir a quantidade de números aleatórios bem como a semente (comando RNG)). A partir do número uniforme gerado, o valor  $F_X(x_i)$  correspondente da distribuição alvo e uniforme, pode ser facilmente obtido. Por fim, é necessário obter o número aleatório para a  $f_X(x_i)$  (Função Densidade de Probabilidade inicial – FDP), usando a equação (3.76).

Figura 27 - Método da transformação inversa para distribuição qualquer



Fonte: Adaptado de Choi, Grandhi e Canfield (2007, p.63).

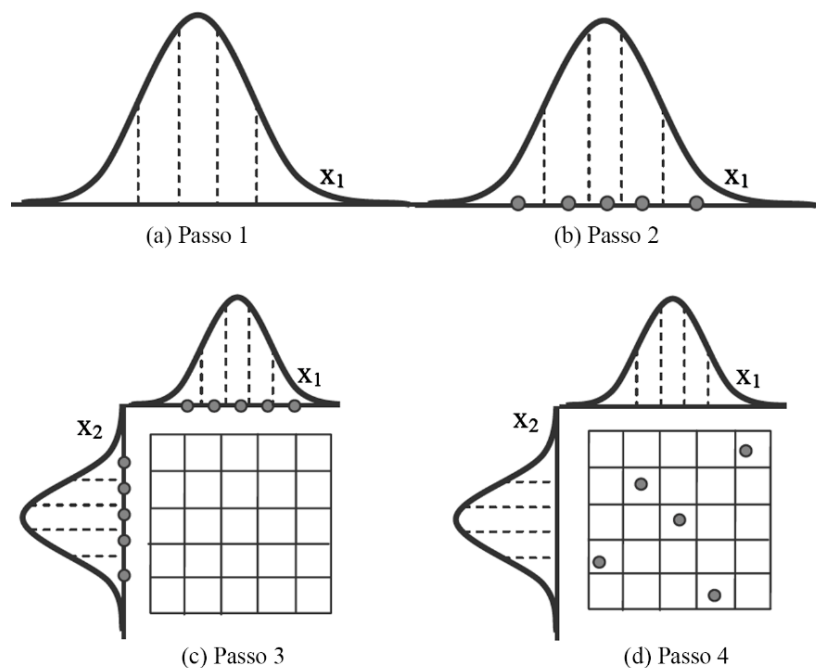
#### 3.9.4.1 Amostras por Hipercubo Latino

O método do Hipercubo Latino (*Latin Hypercube Sampling* ou LHS) seleciona qualquer valor aleatoriamente a partir da distribuição de cada variável. Representa um método que consegue gerar amostras multivariadas sem que haja a

sobreposição de planos de amostragem. Essa técnica é bastante utilizada para obter uma cobertura homogênea em problemas multidimensionais. No método de LHS, a distribuição de cada variável aleatória pode ser subdividida em  $n$  intervalos de probabilidade iguais. Há  $n$  pontos de análise, embaralhados aleatoriamente, de modo que cada um dos  $n$  intervalos tem  $1/n$  de probabilidade de distribuição. Os passos para o método de LHS estão ilustrados na Figura 28 e, em geral, são (BECK, 2019; CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007, p.70):

- dividir a distribuição para cada variável em  $n$  intervalos não sobrepostos e com igual probabilidade;
- selecionar um valor aleatoriamente de cada um dos intervalos em relação a sua densidade de probabilidade;
- repetir as etapas *a)* e *b)* até que se selecione valores para todas as variáveis aleatórias, por exemplo  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ;
- cada  $n$  valores obtidos para  $x_1$  é associado aos  $n$  valores obtidos para os outros  $x_{j \neq i}$ , de forma aleatória.

Figura 28 - Conceito básico de LHS exemplificado para duas variáveis e cinco realizações



Fonte: Adaptado de Choi, Grandhi e Canfield (2007, p.71).

No caso da simulação de MC, a precisão que se almeja da função de distribuição irá ser crucial para estabelecer o número de amostras necessárias. É importante destacar que o método de LHS, juntamente com a amostragem por importância, proporciona uma redução considerável (devido a redução do coeficiente de variação da estimativa da probabilidade de falha), de aproximadamente 50% no número de simulações necessárias.

Se  $N$  é o número necessário de simulações e  $K$  o número de variáveis aleatórias, o espaço de amostragem é de dimensão  $K$ . Uma nova matriz  $\mathbf{P}$  de dimensões  $N \times K$  é gerada, onde cada coluna de  $K$  é uma permutação aleatória de  $1, \dots, N$ . É gerado então, uma matriz  $\mathbf{R}$  de dimensões  $N \times K$ , que contém nas colunas os números aleatórios, que são uniformemente distribuídos entre  $(0,1)$ . Em conjunto, essas matrizes formam o plano básico de amostragem, representado pela matriz  $\mathbf{S}$ , conforme a equação (3.77) (OLSSON; SANDBERG; DAHLBLOM, 2003):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{N}(\mathbf{P} - \mathbf{R}) \quad (3.77)$$

Cada elemento de  $\mathbf{S}$ ,  $s_{ij}$ , é então mapeado de acordo com sua distribuição alvo como:

$$\hat{X}_{ij} = F_{x_j}^{-1}(s_{ij}) \quad (3.78)$$

Onde a  $F_{x_j}^{-1}$  é a inversa da função de distribuição acumulada alvo da variável  $x_j$ .

Existem outras formas de geração de números aleatórios independentes entre 0 e 1, por exemplo números aleatórios simples (que podem ser obtido usando o comando RAND do *software* Matlab), sequência de Sobol, etc. Porém, neste trabalho, o método que obteve melhores resultados para o problema proposto foi o LHS. O método de Hipercubo Latino tem como vantagem a geração de amostrar mais espaçadas, de modo que seja gerada uma distribuição mais uniforme. Com isso, é abrangida uma região maior do espaço amostral, propiciando a diminuição do coeficiente de variação de forma mais rápida.

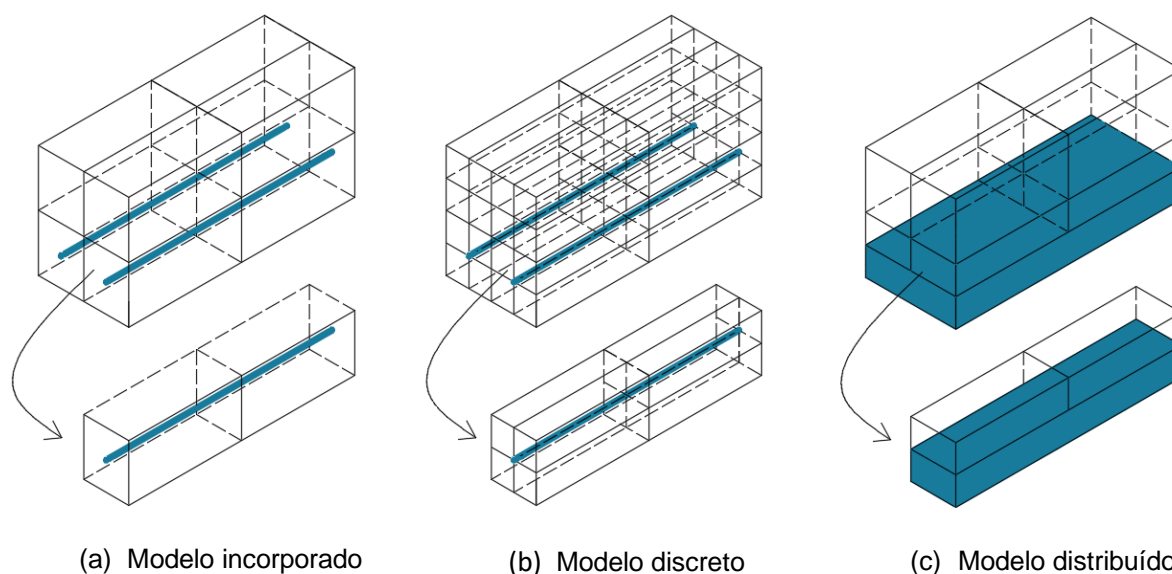
## 4 MODELO NUMÉRICO

É de extrema importância uma representação simples e precisa da armadura, para uma análise não-linear de estruturas de concreto armado através do MEF (Método dos Elementos Finitos). Tem-se, basicamente, três métodos para representar a armadura em um modelo de elementos finitos (BONO, 2018, p.113):

- a) **modelo incorporado:** as barras de armadura são definidas como linhas de um material mais rígido dentro do elemento de concreto. Neste modelo há um campo de deslocamentos único no domínio do elemento, pois os deslocamentos do elemento da armadura são iguais aos deslocamentos do elemento de concreto (assumindo aderência perfeita). Devido a isso, pode-se colocar a armadura em uma posição arbitrária dentro do elemento de concreto. Este modelo está ilustrado na Figura 29 “a”.
- b) **modelo discreto:** são utilizados elementos de barra para representar a armadura, tendo os nós da armadura coincidindo, obrigatoriamente, com os nós da malha de elementos finitos de concreto. Este modelo está ilustrado na Figura 29 “b”.
- c) **modelo distribuído:** o aço é considerado uniformemente distribuído e admite-se aderência perfeita entre o concreto e o aço. Nesse modelo, um conjunto de barras de armadura é substituído por uma camada bidimensional de espessura e área equivalentes. Este modelo está ilustrado na Figura 29 “c”.

Para este trabalho optou-se por utilizar o modelo e armadura incorporada, já que, para o problema proposto, a armadura precisa ser avaliada em posições diferentes dentro do elemento de concreto. Com a utilização deste modelo, é possível avaliar qual a influência da armadura quando, em alguns pontos da laje, não há um cobrimento adequado. O *software* utilizado para fazer as análises foi o ANSYS *Mechanical* APDL 2022, versão R1.

Figura 29 - Modelos para inclusão da armadura em um modelo de elementos finitos



Fonte: O autor.

O modelo numérico, desenvolvido para modelar a laje proposta, foi composto por um modelo sólido hexaédrico (SOLID168) para representar o concreto. Para as barras de aço utilizou-se o elemento REINF264. Nos tópicos a seguir serão detalhados cada um dos elementos e modelos utilizados.

## 4.1 TIPOS DE ELEMENTOS

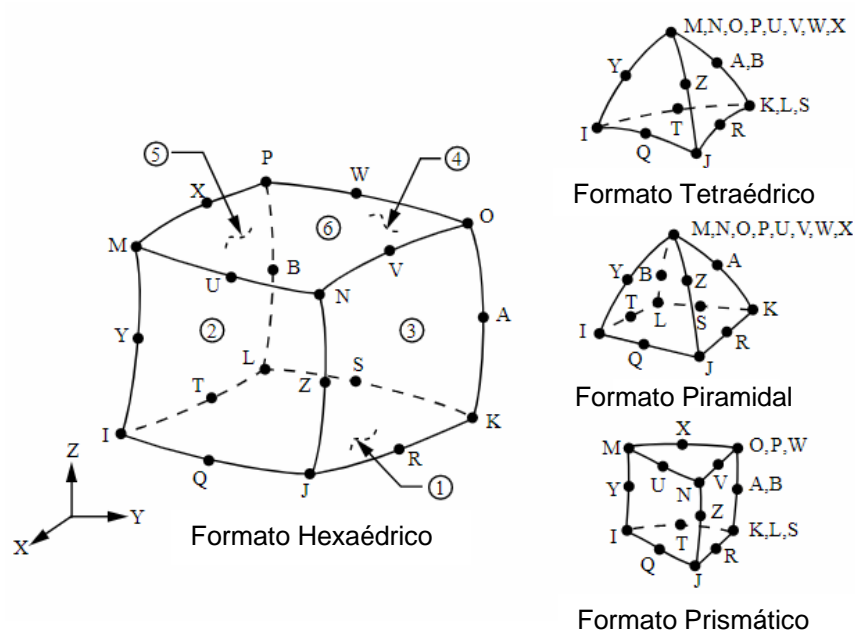
Neste item são apresentados os elementos finitos utilizados no modelo numérico proposto.

### 4.1.1 Laje de concreto – SOLID186

Para representar a laje, foi utilizado o elemento SOLID186 do ANSYS, que é um elemento sólido 3D que possui vinte nós, três graus de liberdade por nó (translação em  $x$ ,  $y$  e  $z$ ) e função de interpolação quadrática. O ANSYS permite trabalhar com esse elemento em duas formas, como sólido estrutural homogêneo ou

como um sólido estrutural em camadas. Para este trabalho optou-se por trabalhar com a primeira opção. É permitido também mudar o tipo de integração, para este trabalho optou-se pela integração reduzida uniforme, que é a padrão do ANSYS, ao invés da integração total. O elemento suporta plasticidade, fluência e grandes deslocamentos. Na Figura 30 é possível observar a geometria, as localizações dos nós e o sistema de coordenadas do elemento em seus quatro formatos possíveis.

Figura 30 - Geometria do elemento SOLID186



Fonte: Adaptado ANSYS (2022).

Segundo o manual do ANSYS (2022), o elemento SOLID186 é compatível com o modelo de *Drucker-Prager Concrete*, modelo este, escolhido para representar o modelo constitutivo do concreto neste trabalho. Trabalhos anteriores que também utilizaram o elemento SOLID186 foram o de Benincá (2019) e Lazzari (2016).

O elemento SOLID186 foi escolhido por obter bons resultados na modelagem de elementos de concreto, sem a necessidade de uma discretização demasiadamente refinada, o que reduz significativamente o tempo de análise do problema proposto. A escolha deste tipo elemento finito é feita por diversos autores como em Silva et. al., (2017) os quais constataam o bom desempenho com resultados experimentais. Nesta dissertação, tópico 5, é apresentado a validação do modelo numérico, onde foi constatado também o bom desempenho do elemento

SOLID186. Outro fator relevante na escolha deste elemento é o fato dele permitir o uso de armadura incorporada, fundamental para analisar os efeitos da variabilidade da posição da armadura dentro do elemento de concreto.

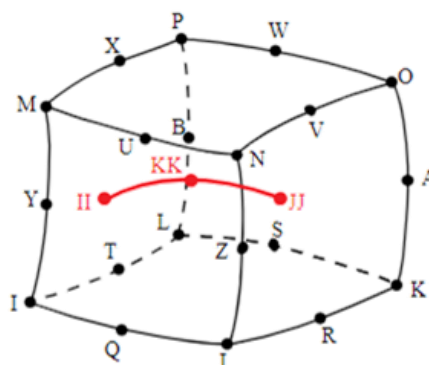
Cabe salientar que, o elemento SOLID186 é caracterizado como um elemento atual dentro da biblioteca do ANSYS (2022). Diferente do elemento SOLID65, que foi utilizado em alguns trabalhos anteriores, que é um elemento desatualizado, não compatível com o modelo *Drucker-Prager Concrete* e que não permite a utilização de armadura incorporada. O elemento SOLID65 é compatível com o modelo *concrete*, que possui formulação baseada nos parâmetros de Willam e Warnke (1975), por sua vez o elemento SOLID186 não é compatível com este modelo.

#### 4.1.2 Armadura – REINF264

O elemento REINF264 é o mais adequado para simular barras de aço com orientação arbitrária. Cada fibra é modelada separadamente, como uma barra apenas com rigidez uniaxial. Os graus de liberdade, as localizações nodais e a conectividade do elemento REINF264 são idênticos ao elemento base, no caso deste trabalho o SOLID186. O elemento REINF264 pode ser utilizado em elementos de placa, casca ou em elementos sólidos 3D.

Tal elemento permite análises com plasticidade, fluência, tensão inicial e grandes deformações. Como as barras de aço podem ser colocadas em qualquer posição dentro do elemento de concreto, os deslocamentos são expressos em função dos deslocamentos nodais deste elemento. Devido a isto, a dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto é a mesma da barra de reforço, resultando na matriz de rigidez do concreto armado. Ou seja, as rigidezes do concreto e do aço são somadas entre si, sem alterar o tamanho da matriz de rigidez do elemento de concreto. A geometria do elemento REINF264 incorporada ao elemento SOLID186 está ilustrada na Figura 31.

Figura 31 - Elemento REINF264 incorporada ao elemento SOLID186



Fonte: ANSYS (2022).

Este elemento foi escolhido para representar as barras de aço aderentes ao longo da laje de concreto, de forma incorporada. É importante salientar que este modelo só pode ser gerado após a geração da malha do elemento de concreto, no caso o SOLID186. De modo que, o mesmo é inserido no interior de cada elemento finito de acordo com sua orientação e posições correspondentes aos nós de extremidade, definidos por coordenadas naturais do elemento de concreto.

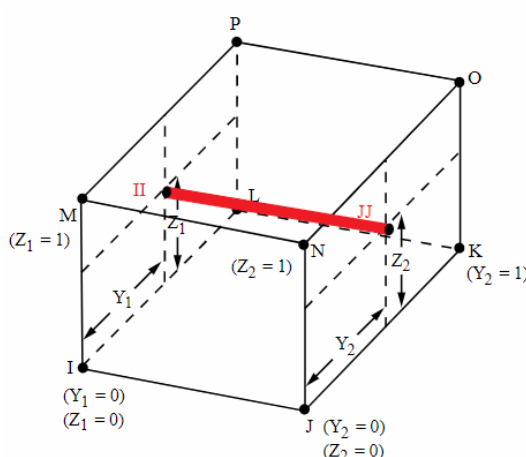
Segundo o manual do ANSYS (2022), é assumido que: a área da seção transversal das fibras de reforço é menor que o seu comprimento; as rigidezes à torção, à flexão e ao cisalhamento são ignoradas nos elementos de armadura; há uma aderência perfeita entre as fibras de reforço e o elemento de base (SOLID186), ou seja, os dois elementos não podem se movimentar separadamente; o movimento das fibras de reforço é determinado apenas pelo movimento do elemento de base. Para o efeito do escorregamento da armadura, outros modelos poderiam ser utilizados, com resultados mais fiéis ao comportamento real da união concreto e armadura. Porém, neste trabalho, assume-se que este tipo de modelamento não seja tão importante se analisado o Estado Limite de Serviço para deslocamentos, pois, nesse estágio, o escorregamento ainda não está completamente desenvolvido. Além do mais, isto significaria um esforço computacional maior para a análise da estrutura.

Para a implementação do elemento REINF264, devem ser seguidos os seguintes passos:



- definir o elemento base, que neste trabalho é o SOLID186, para representar o concreto;
- definir o tipo de seção transversal (neste caso o REINF264) e as propriedades geométricas da seção da armadura, através do comando **SECTYPE**;
- definir o material, a área da seção transversal e a orientação da fibra de reforço (conforme Figura 32) através do comando **SECDATA**;
- gerar o elemento de reforço através do comando **EREINF**.

Figura 32 - Orientação da fibra de reforço em um elemento sólido de 20 nós



Fonte: ANSYS (2022).

## 4.2 MODELO DE MATERIAIS

Neste item são apresentados os tipos materiais utilizados para modelo numérico proposto.

É extremamente complexo o comportamento do concreto estrutural, considerando todas as características do material a montagem das equações constitutivas não é algo simples. Grande parte dos modelos constitutivos reproduzem as relações tensão-deformação para diferentes condições de carga e podem ser classificados como: modelos baseados na teoria da elasticidade, na

teoria da plasticidade e na mecânica da fratura e do dano (LAZZARI, 2016, p. 90; CEB 230, 1996).

- a) **modelos baseados na teoria da elasticidade:** são assim chamados porque compartilham da formulação *Hookeana*. O material apresenta deformações instantâneas e reversíveis neste modelo, quando submetido a um estado de tensões. As deformações específicas permanecem constantes ao longo do tempo e aparecem simultaneamente com as tensões.
- b) **modelos baseados na teoria da plasticidade:** considera que o material apresenta deformações imediatas e não-reversíveis. Esses modelos são utilizados para descrever o comportamento inelástico dos materiais, sendo utilizada inicialmente para estudar materiais geotécnicos e metais.
- c) **modelos baseados na mecânica da fratura e do dano:** busca reproduzir o mecanismo interno de microfissuras e o crescimento de imperfeições e microcavidades que surgem em materiais frágeis, como o concreto, com o aumento das deformações.

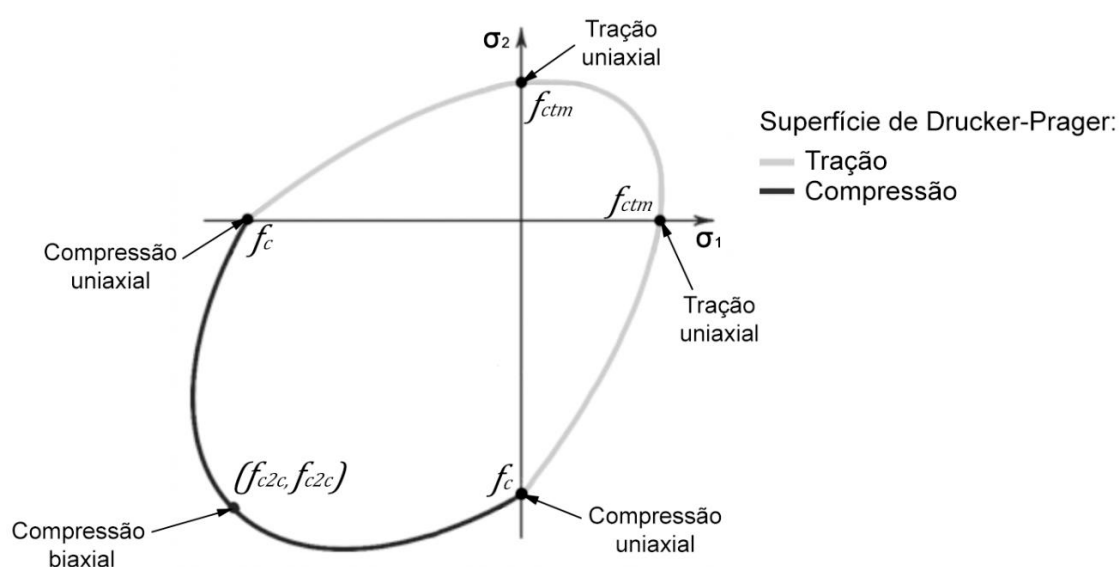
#### 4.2.1 Modelo constitutivo do concreto – *Drucker-Prager Concrete*

O modelo do ANSYS *Drucker-Prager Concrete*, possui dois modelos de superfície para definir a condição de plastificação:

- **Drucker-Prager:** uma superfície de plastificação para o comportamento do concreto à compressão (a qual evolui com a plastificação do concreto);
- **Rankine ou Drucker-Prager:** uma superfície de ruptura por tração e tração-compressão, que pode ser a de Rankine ou a de *Drucker-Prager* (superfície para definir a ruptura final do concreto).

O modelo de *Drucker-Prager Concrete* utiliza uma superfície de plastificação denominada de *Drucker-Prager*, que é indicado para a modelagem do concreto sob compressão. Para modelagem do comportamento sob tração e tração-compressão, é necessário introduzir uma segunda superfície, que pode ser a de *Drucker-Prager* ou a de Rankine (BENINCÁ, 2019). Neste trabalho, a segunda superfície adotada, foi a de *Drucker-Prager*. Tal superfície permite simular o esmagamento do concreto sob tração-compressão. A Figura 33 ilustra as superfícies de falha no plano de tensões principais do concreto.

Figura 33 - Superfície de falha de Drucker-Prager para o concreto



Fonte: Adaptado ANSYS (2022).

A equação original, desenvolvida por Drucker e Prager (1952), que descreve a superfície de plastificação é dada por:

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \quad (4.1)$$

Onde  $\alpha$  e  $k$  são parâmetros do material,  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões e  $J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador de tensões. Sendo  $I_1$  e  $J_2$  apresentados nas equações (4.2) e (4.3), em função das tensões principais (CHEN; HAN, 1988).

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (4.2)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (4.3)$$

Tomando a equação (4.1), quando o estado de tensões de um ponto resultar em valores negativos de  $f$ , assume-se que nesse ponto o concreto está no regime elástico. Quando  $f = 0$ , dá-se início a plastificação e o crescimento da superfície. Após a inicialização da plastificação, passa a valer a lei de endurecimento, que dita como tal superfície se movimenta (expandido ou retraindo).

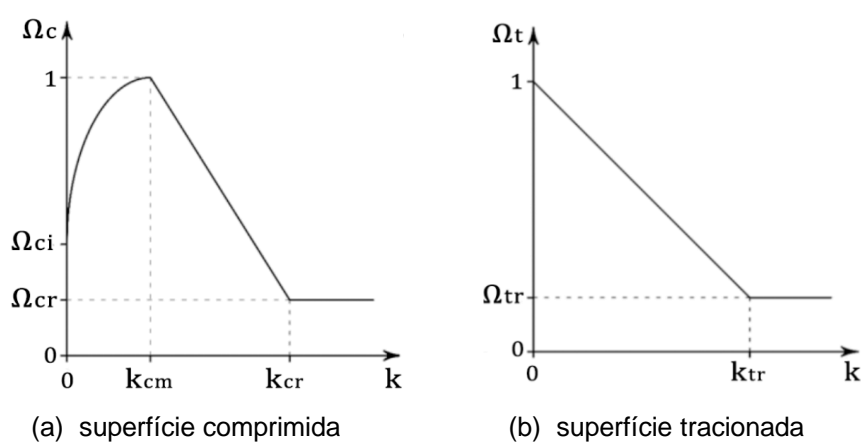
A lei de endurecimento é utilizada na relação *tensão efetiva x deformação plástica efetiva*, podendo assumir diferentes formas, conforme o modelo HSD (*hardening, softening, dilatation*). É disponibilizado pelo ANSYS (2022) quatro tipos de modelo HSD, que são: *exponential, steel reinforcement, fracture energy* e *linear*. Para cada um desses modelos, após ser atingida a superfície de plastificação ou de ruptura, há uma lei distinta de endurecimento e de amolecimento para o comportamento do concreto sob compressão e tração, respectivamente. Neste trabalho em questão, foi utilizado o modelo HSD *linear*, porém caso o usuário não escolha nenhum modelo, o ANSYS assume que o comportamento é elastoplástico perfeito, ou seja, a tensão efetiva no ponto plastificado continua constante com o incremento da deformação plástica e a superfície de plastificação permanece imóvel (sem contrair-se).

A Figura 34 “a” ilustra a lei de endurecimento para a superfície de compressão para o modelo HSD *linear*. Uma vez atingido o limite de tensão máxima, há uma diminuição linear da tensão com a deformação até o limite mínimo de tensão. No modelo *Drucker-Prager Concrete*, não é possível identificar de forma explícita o esmagamento. Este fenômeno está relacionado com a não convergência da solução em termos de equilíbrio de forças para carregamentos próximos da ruptura da peça, quando múltiplos pontos de integração tenham falhado. Essa adversidade também é relatada por outros autores, como Benincá (2019).

O comportamento do concreto tracionado pode ser simulado admitindo que o material possui comportamento elástico linear, até que seja alcançada a superfície de ruptura escolhida (Rankine ou Drucker-Prager). Nesse instante ocorre a fissuração, onde há uma diminuição linear da tensão de tração com a deformação.

Esse fenômeno da fissuração é introduzido por intermédio da lei de amolecimento em tração, através do modelo HSD adotado. Logo após o estado de tensões de um ponto atingir a superfície de ruptura, tal superfície começa a se comportar de acordo com a lei adotada. Para o modelo HSD *linear*, a Figura 34 “b” (lei de amolecimento para a superfície em tração) ilustra o que foi dito. A inclinação da reta de amolecimento é função da chamada energia de fratura ( $G_f$ ).

Figura 34 - Lei de endurecimento do concreto comprimido e lei de amolecimento do concreto fissurado – HSL *linear*



Fonte: Adaptado ANSYS (2022).

#### 4.2.1.1 Formulação

A formulação apresentada aqui, está descrita com mais detalhes no manual do ANSYS (2022). Utilizou-se a mesma simbologia a fim de facilitar o entendimento. Para mais informações sobre o modelo constitutivo *Drucker-Prager Concrete*, recomenda-se consultar o manual do ANSYS.

#### 4.2.1.1.1 Superfícies de plastificação

##### a) Superfície de Drucker-Prager em tração e tração-compressão

A superfície de Drucker-Prager em tração e tração-compressão é dada por:

$$f_{DPt} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} + \beta_t \sigma_m - \sigma_{yt} \quad (4.4)$$

Onde:

$$\sigma_m = I_1/3;$$

$$\sigma_e = \sqrt{3 J_2};$$

$\beta_t, \sigma_{yt}$  = São constantes definidas pela resistência à tração uniaxial ( $R_t$ ) e resistência à compressão uniaxial ( $R_c$ ).

Os valores de  $\beta_t$  e  $\sigma_{yt}$  variam em função de  $\Omega_c$  e  $\Omega_t$  (funções de endurecimento/amortecimento em compressão e tração) que dependem do modelo HSD escolhido. As equações (4.5) e (4.6) descrevem os valores de  $\beta_t$  e  $\sigma_{yt}$ .

$$\beta_t = \frac{\sqrt{3} (R_c \Omega_c - R_t \Omega_t)}{R_c \Omega_c + R_t \Omega_t} \quad (4.5)$$

$$\sigma_{yt} = \frac{2 R_c \Omega_c R_t \Omega_t}{\sqrt{3} (R_c \Omega_c + R_t \Omega_t)} \quad (4.6)$$

Onde:

$R_t$  = resistência uniaxial à tração do concreto [kN/cm<sup>2</sup>];

$R_c$  = resistência uniaxial à compressão do concreto [kN/cm<sup>2</sup>];

$\Omega_c$  e  $\Omega_t$  = função de plastificação em compressão e em tração, do modelo HSD adotado.

A superfície de potencial plástico é dada pela expressão (4.7):

$$Q_{DPrt} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} + \delta_t \beta_t \sigma_m \quad (4.7)$$

Nos casos em que, o parâmetro da dilatação em tração ( $\delta_t$ ) seja definido pelo usuário como sendo igual a 1, será de plasticidade associada. Isso significa que a taxa de deformação do material em escoamento é governada pelo gradiente do fluxo do potencial plástico, em outras palavras, o fluxo plástico se desenvolve ao longo da normal à superfície de escoamento.

### b) Superfície de Drucker-Prager em compressão

A superfície de Drucker-Prager em compressão é dada por:

$$f_{DPrC} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} + \beta_c \sigma_m - \sigma_{yt} \Omega_c \quad (4.8)$$

Onde:

$\beta_c, \sigma_{yc}$  = São constantes definidas pela resistência à compressão biaxial ( $R_b$ ) e resistência à compressão uniaxial ( $R_c$ ).

$\Omega_c$  = função de plastificação em compressão, do modelo HSD adotado.

A movimentação da superfície de Drucker-Prager é regida pela função  $\Omega_c$  do modelo HSD adotado. Todos os modelos disponíveis de HSD, para o comportamento em compressão, são divididos em dois trechos. O primeiro é referente ao endurecimento, o qual rege a expansão da superfície até ser atingida a tensão máxima. O segundo é o amolecimento, onde ocorre o encolhimento da superfície, dando início ao processo de esmagamento, após a tensão máxima ser atingida. Os valores de  $\beta_c$  e  $\sigma_{yc}$  são obtidos através das equações (4.9) e (4.10).

$$\beta_c = \frac{\sqrt{3} (R_b - R_c)}{2R_b - R_c} \quad (4.9)$$

$$\sigma_{Yc} = \frac{R_b R_c}{\sqrt{3} (2R_b - R_c)} \quad (4.10)$$

Onde:

$R_b$  = resistência biaxial à compressão do concreto [kN/cm<sup>2</sup>];

$R_c$  = resistência uniaxial à compressão do concreto [kN/cm<sup>2</sup>].

A superfície de potencial plástico é dada pela equação (4.11).

$$Q_{DPC} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} + \delta_c \beta_c \sigma_m \quad (4.11)$$

Os casos em que o parâmetro da dilatação em compressão ( $\delta_c$ ) seja definido pelo usuário como sendo igual a 1, será de plasticidade associada, como foi explicado no item anterior, referente a tração.

#### 4.2.1.1.2 HSD linear

Dentre os modelos HSD disponíveis pelo ANSYS, o *linear* é o mais simples, porém, segundo Benincá (2019), é um modelo que apresenta bons resultados. Os gráficos contidos na Figura 34 são regidos pelas equações (4.12) e (4.13), conforme o manual do ANSYS (2022).

$$\Omega_c = \begin{cases} \Omega_{ci} + (1 - \Omega_{ci}) \sqrt{2 \frac{k}{k_{cm}} - \frac{k^2}{k_{cm}^2}} & \text{para } 0 < k \leq k_{cm} \\ 1 - \frac{1 - \Omega_{cr}}{k_{cr} - k_{cm}} (k - k_{cm}) & \text{para } k_{cm} < k \leq k_{cr} \\ \Omega_{cr} & \text{para } k \geq k_{cr} \end{cases} \quad (4.12)$$

Onde:

$\Omega_c$  = função de plastificação em compressão;

$\Omega_{ci}$  = tensão relativa no início da plastificação;

$\Omega_{cr}$  = tensão relativa residual;

$k$  = deformação plástica efetiva (equivalente), parâmetro de endurecimento;



$k_{cm}$  = deformação plástica quando é atingida a tensão máxima;

$k_{cr}$  = deformação plástica última em compressão.

$$\Omega_t = \begin{cases} 1 - (1 - \Omega_{tr}) \frac{k}{k_{tr}} & \text{para } 0 < k \leq k_{tr} \\ \Omega_{tr} & \text{para } k \geq k_{tr} \end{cases} \quad (4.13)$$

Onde:

$\Omega_t$  = função de plastificação em tração;

$k_{tr}$  = deformação plástica quando é atingida a tensão mínima;

$\Omega_{tr}$  = tensão relativa residual.

#### 4.2.1.2 Utilização ANSYS APDL

A implementação do modelo *Drucker-Prager Concrete* só pode ser feita através da linguagem APDL, via *script*, não sendo possível configurar esse modelo na interface gráfica. Os passos para a implementação estão elencados a seguir:

- a) definir o comportamento elástico do material (isotrópico ou anisotrópico) através de comandos **MP** ou da tabela de dados [**TB**, **ELASTIC**];
- b) definir o modelo de *Drucker-Prager* para o concreto (**TB**, **CONCR**,,,,**DP**), seguido do comando **TBDATA** para definir as resistências uniaxiais à tração e à compressão e biaxial à compressão ( $R_t$ ,  $R_c$  e  $R_b$ ) das superfícies.

Depois de definida a superfície, pode-se definir os parâmetros de dilatação (em compressão,  $\delta_c$ , e em tração,  $\delta_t$ ) por intermédio do comando **TB**,**CONCR**,,,,**DILA**, seguido do comando **TBDATA**. Para implementar o modelo HSD *linear* deve ser utilizado o comando **TB**,**CONCR**,1,,,**HSD6**, adicionado os parâmetros  $k_{cm}$ ,  $k_{cr}$ ,  $\Omega_{ci}$ ,  $\Omega_{cr}$ ,  $k_{tr}$ ,  $\Omega_{tr}$ , nesta ordem, através do comando **TBDATA**.

Os dados para o modelo HSD linear, modelo escolhido para ser utilizado neste trabalho, são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Dados utilizados para o modelo HSD *linear*

| Parâmetros   | Parâmetro numérico ANSYS | Valor                       |
|--|--------------------------|-----------------------------|
| Deformação plástica quando é atingida a tensão máxima    | $k_{cm}$                 | $0,0020 - f_c/E$            |
| Deformação plástica última em compressão                 | $k_{cr}$                 | $0,0035 - \Omega_{ci}f_c/E$ |
| Tensão relativa no início da plastificação em compressão | $\Omega_{ci}$            | 40%                         |
| Tensão relativa residual em compressão                   | $\Omega_{cr}$            | 65%                         |
| Deformação plástica quando é atingida a tensão mínima    | $k_{tr}$                 | 0,001                       |
| Tensão relativa residual em tração                       | $\Omega_{tr}$            | 2%                          |

Fonte: O autor.

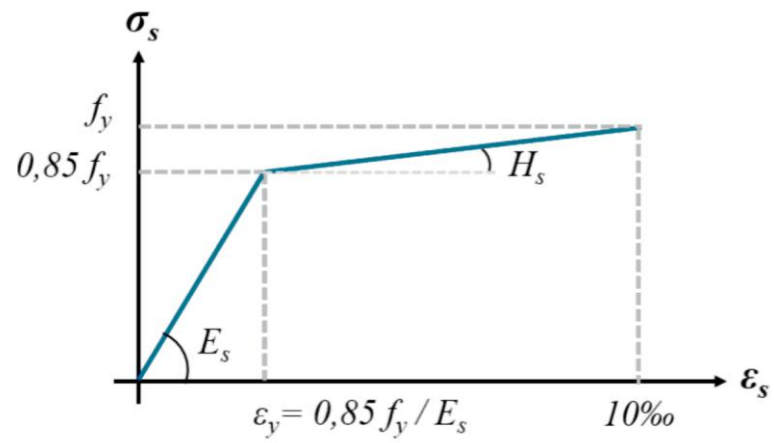
#### 4.2.2 Modelo constitutivo – armadura

O comportamento do aço é descrito por um modelo constitutivo uniaxial, uma vez que apenas a rigidez axial das barras é considerada. Optou-se nesse trabalho por usar o modelo elastoplástico bilinear para representar as barras de aço. Para a implementação é necessário informar no *script* o módulo de elasticidade do aço ( $E_s$ ), a tensão de escoamento do aço CA-50 ( $f_y$ ), o coeficiente de Poisson ( $\nu_s$ ) e a taxa de endurecimento ( $H_s$ ).

O modelo pode ser implementado no Ansys, através do comando BISO (*Bilinear Isotropic Hardening*), o diagrama tensão-deformação do aço é apresentado na Figura 35. O diagrama possui endurecimento linear e, após atingir o limite de escoamento, a taxa de endurecimento do aço é definida através da equação (4.14) (PRATES JUNIOR, 1992). Muitos autores fazem uma simplificação dessa expressão para um valor constante de  $H_s = E_s/100$ .

$$H_s = \frac{0,15 f_y}{10\% - \frac{0,85 f_y}{E_s}} \quad (4.14)$$

Figura 35 - Diagrama tensão deformação para o modelo elastoplástico bilinear



Fonte: O autor.

## 5 VALIDAÇÃO DO MODELO

Nesta seção será validado o modelo numérico desenvolvido. Foram encontrados na literatura, poucos trabalhos com ensaios experimentais de lajes maciças de concreto armado. Dentre esses trabalhos escolheu-se o de Abdul-Wahab e Khalil (2000), o qual foi o mais completo encontrado. A laje foi modelada computacionalmente a fim de comparar os resultados experimentais com o numérico. Na análise o valor do módulo de elasticidade do concreto,  $E_c$ , foi calculado pela expressão (3.34) (com  $\alpha_i = 0,88$  e  $E_{c0} \alpha_E = 19400$ ), devido à ausência de dados reais disponibilizado pelo autor. O valor adotado para o módulo de elasticidade do aço,  $E_s$ , foi de 210000 MPa, o coeficiente de Poisson para o concreto foi de  $\nu_c = 0,20$  e o coeficiente de Poisson para o aço foi de  $\nu_c = 0,30$ , conforme recomendações da NBR 6118:2014.

Na UFRGS há alguns trabalhos dedicados apenas a criação de modelos numéricos capazes de simular elementos de concreto armado no *software* Ansys. O trabalho de Benincá (2019) pode ser citado como exemplo. Em seu trabalho o autor utiliza o modelo de Drucker-Prager e o um modelo customizado através da interface *usermat* para simular o comportamento do concreto e comparar o desempenho. Neste trabalho, o modelo constitutivo (Drucker-Prager *Concrete*) adotado foi validado apenas com um exemplo de laje, devido ao extenso material desenvolvido sobre o tema de validação de modelos numéricos que podem ser encontrados em diversos outros trabalhos.

### 5.1 LAJE DE ABDUL-WAHAB E KHALIL (2000)

Abdul-Wahab e Khalil (2000) ensaiaram oito lajes de concreto armado, sendo seis delas nervuradas e duas maciças. As lajes foram simplesmente apoiadas e submetidas a uma carga uniformemente distribuída em uma placa metálica de 30x30 cm. O objetivo dos autores foi investigar o efeito do espaçamento e a profundidade das nervuras na rigidez e resistência à flexão de lajes nervuradas. Já as lajes

maciças foram utilizadas para investigar os efeitos da flexão e torção, bem como examinar a hipótese da espessura equivalente.

A laje de estudo escolhida foi a S7, uma das lajes maciças que Abdul-Wahab e Khalil (2000) utilizaram como referência para as análises. Ayala (2017) também utilizou as lajes do trabalho desse autor para validar seu modelo numérico, a fim de fazer uma customização no *software* ANSYS para analisar lajes de concreto protendido.

### 5.1.1 Propriedades dos materiais e características geométricas

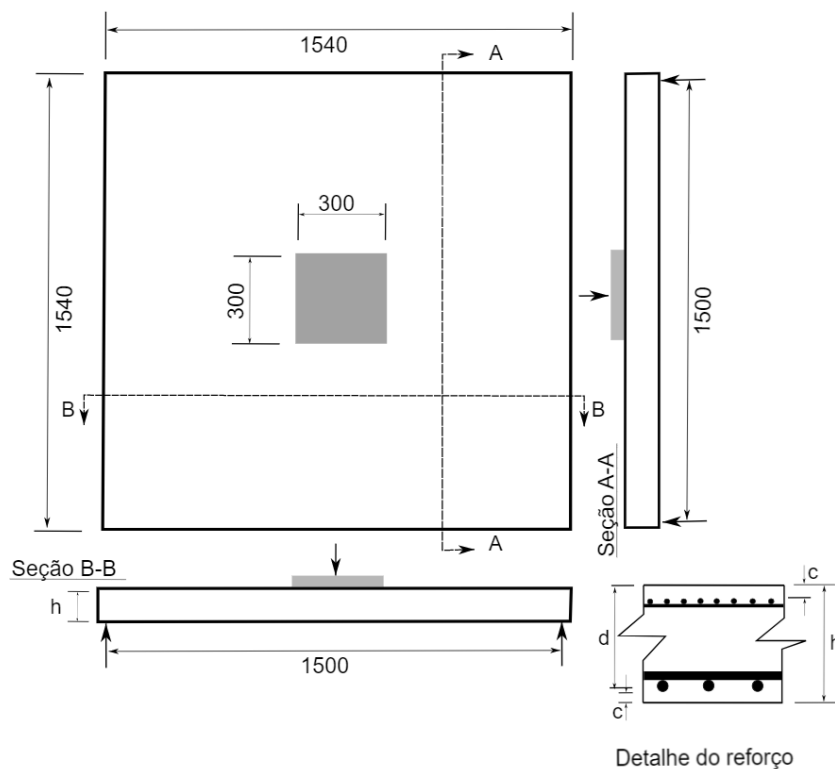
As lajes maciças foram executadas em modelos quadrados de concreto armado, com uma relação de escala de 1:4, para representar vãos reais de 6 m. A dimensão dos corpos de prova foram de 1,5 x 1,5 m. Em todos os ensaios as lajes foram simplesmente apoiadas ao longo das arestas e foram submetidas a uma carga central em uma superfície de 30x30 cm. O concreto foi projetado para atingir uma resistência à compressão de cerca de 30 MPa em 28 dias e teve as seguintes características:

- a) peso normal, com uma proporção de mistura de 1:1,5:3 de cimento Portland comum;
- b) agregado miúdo de tamanho máximo de 4,75 mm;
- c) agregado graúdo de tamanho máximo de 6,7 mm;
- d) relação água/cimento de 0,47.

Para a armadura de flexão, foram utilizadas barras de aço lisas de 8 mm de diâmetro, com limite de escoamento de 398 MPa. Para o controle de fissuras, os autores utilizaram uma tela de arame com diâmetro médio de 0,7 mm. A carga foi aplicada por meio de um atuador hidráulico, com capacidade de 150 kN, posicionado no centro da laje e sobre uma placa de aço quadrada de 30 x 30 x 2 cm. O protocolo de carregamento foi realizado com incrementos de cargas de 2,5 a 5 kN, até a finalização do mecanismo de fratura. A resistência média à compressão do concreto foi obtida através da média das resistências das 8 (oito) lajes ensaiadas pelos

autores. A configuração da laje S7 está contida na Figura 36, estando as medidas expressas em milímetros, e os parâmetros geométricos estão na Tabela 8.

Figura 36 - Geometria da laje S7 - Abdul-Wahab e Khalil



Fonte: Adaptado de Abdul-Wahab e Khalil (2000).

Tabela 8 – Parâmetros da laje S7 - Abdul-Wahab e Khalil

|           | Parâmetros                      | Sím.     | Uni.               | Valor   |
|-----------|---------------------------------|----------|--------------------|---------|
| Geometria | Comprimento                     | $L$      | cm                 | 150     |
|           | Espessura                       | $h$      | cm                 | 7,5     |
| Concreto  | Resistencia à compressão        | $f_c$    | kN/cm <sup>2</sup> | 3,6     |
|           | Módulo de elasticidade inicial  | $E_{ci}$ | kN/cm <sup>2</sup> | 2825,06 |
|           | Módulo de elasticidade reduzido | $E_c$    | kN/cm <sup>2</sup> | 2486,05 |
|           | Coefficiente de Poisson         | $\nu_c$  | -                  | 0,20    |
| Aço       | Área da armadura de flexão      | $A_s$    | cm <sup>2</sup> /m | 3,00    |
|           | Altura útil                     | $d$      | cm                 | 6,3     |
|           | Espaçamento                     | $s$      | cm                 | 2,5     |
|           | Tensão de escoamento            | $f_y$    | kN/cm <sup>2</sup> | 39,8    |
|           | Módulo de elasticidade          | $E_s$    | kN/cm <sup>2</sup> | 21000   |
|           | Coefficiente de Poisson         | $\nu_s$  | -                  | 0,3     |

Fonte: O autor.

### 5.1.2 Modelo numérico

A laje foi modelada no *software* ANSYS, através do elemento hexaédrico SOLID186, com armadura incorporada do tipo REINF264 que foi gerada a partir do método padrão. O método padrão defini o tipo da seção da laje através do comando SECTYPE e atribui os dados da geometria da armadura através do comando SECDATA. Os comandos citados estão descritos mais profundamente no Capítulo 4. O modelo utilizado para representar o concreto foi o *DP-Concrete* através do modelo HSD *linear*. Para a chapa de aço, também se utilizou o elemento SOLID186 e atribuiu-se o valor de 21000 kN/m<sup>2</sup> para o módulo de elasticidade.

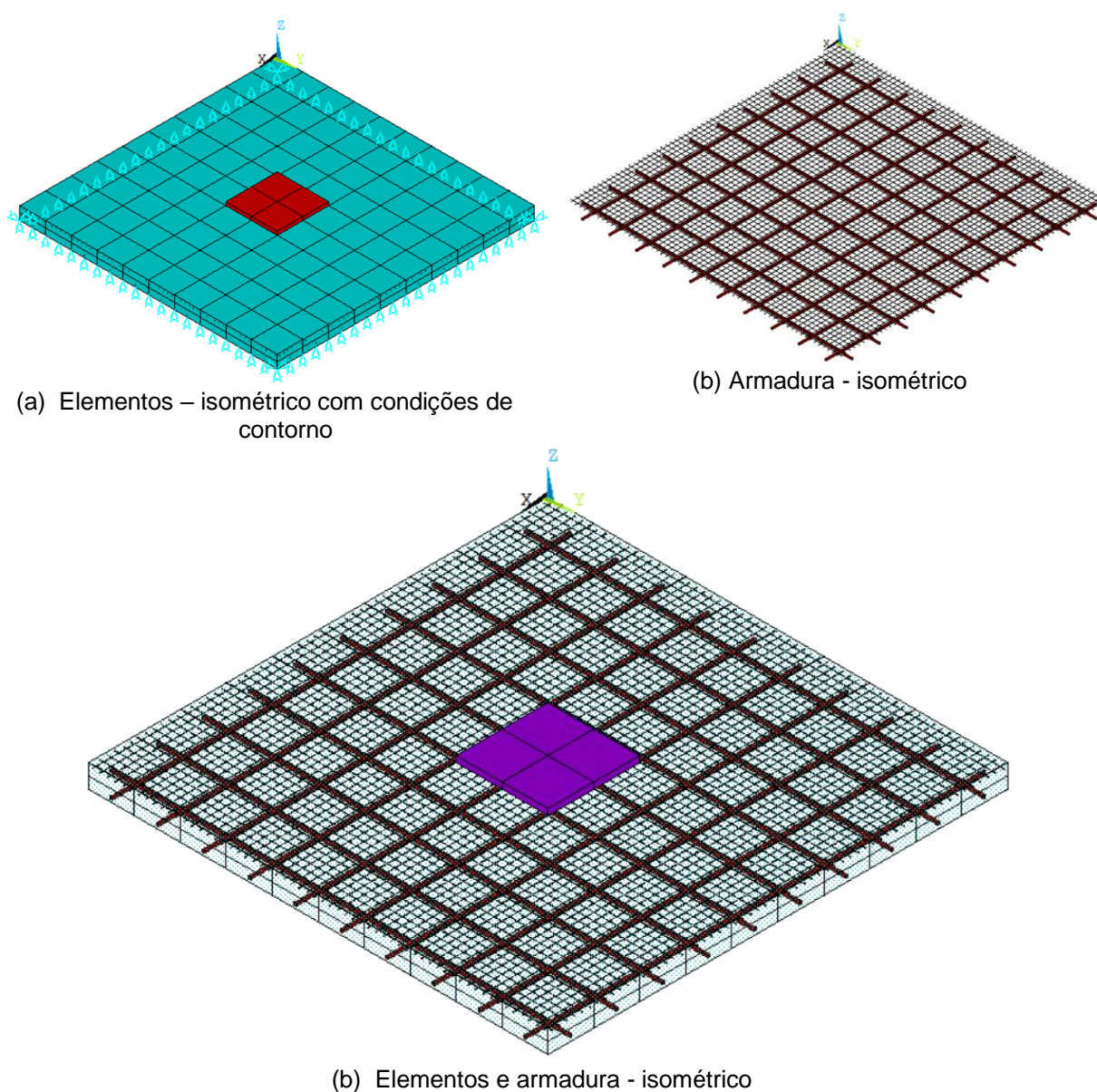
Utilizou-se na análise o módulo de elasticidade reduzido ( $E_c$ ), respeitando a declividade da curva de tensão de 40% da carga de ruptura ( $0,4f_{cm}$ ). Adotou-se, simplificada, o valor de  $0,88E_{ci}$ . Uma alternativa diferente da utilizada neste trabalho, seria utilizar o valor de  $\alpha_i \cdot E_{ci}$ , onde o  $\alpha_i$  é um valor preconizado pelo Código Modelo *fib* 2010 (FIB, 2012), que varia entre 0,84 à 0,932 para concretos de classe C12 à C50. Para essa análise o valor do módulo de elasticidade do concreto,  $E_c$ , foi calculado através da expressão (3.34) (com  $\alpha_i = 0,88$  e  $E_{c0} \alpha_E = 19400$ ).

A resistência à tração do concreto, na falta de informações fornecidas pelo autor, foi definida através da equação (3.37), conforme recomendação da NBR 6118:2014. Os dados utilizados para o modelo HSD foram os mesmos apresentados na Tabela 7, com exceção da deformação total do concreto quando a tensão máxima é alcançada, que foi adotada como sendo de 2,5‰. Logo,  $k_{cm}$  ficou sendo  $0,0025 - f_c/E$ .

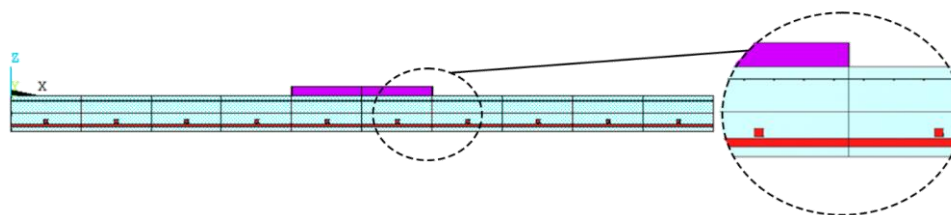
A Tabela 9 indica os dados utilizados para o concreto, onde a resistência à compressão é a resistência real da laje S7. A resistência média à compressão é a média dos valores de resistência das 8 lajes ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil (2000). Através das recomendações de cálculo da norma FIB (2012), foi possível obter o valor  $f_{ck}$  (3 kN/cm<sup>2</sup>), visto que esse valor não foi explicitamente citado no trabalho de Abdul-Wahab e Khalil (2000). Foi necessário obter o  $f_{ck}$ , pois a resistência a tração é calculada com base nesse valor, segundo a norma FIB (2012), conforme indicado na Tabela 9.

A malha foi dividida em elementos finitos de tamanho 15 x 15 cm, o modelo de elementos finitos gerado pode ser visto na Figura 37. A condição de contorno adotada, para representar a situação de ensaio real, foi a restrição vertical na direção  $z$ . A placa foi apoiada sobre a laje, não sendo utilizado elementos de ligação. A laje foi carregada em 30 incrementos de força, totalizando 40,16 kN. Essa carga foi aplicada uniformemente em toda a superfície da placa de aço. No decorrer das análises, utilizou-se um refinamento maior da malha, com elementos finitos de 10 x 10 cm, entretanto, não houve diferença nos resultados obtidos. Visando reduzir o custo computacional, escolheu-se trabalhar com a malha de 15 x 15 cm.

Figura 37 - Modelo numérico - laje S7 de Abdul-Wahab e Khalil







(c) Elementos e armadura – vista lateral

Fonte: O autor.

Tabela 9 – Dados utilizados para o concreto - Abdul-Wahab e Khalil

| Parâmetros   | Sím.      | Valor   | Uni.               | Fonte                                 | Parâmetro numérico |
|--|-----------|---------|--------------------|---------------------------------------|--------------------|
| Resistência à compressão                           | $f_c$     | 3,6     | kN/cm <sup>2</sup> | Abdul-Wahab e Khalil (2000)           | $R_c$              |
| Resistência média à compressão                     | $f_{cm}$  | 3,088   | kN/cm <sup>2</sup> | Abdul-Wahab e Khalil (2000)           | -                  |
| Resistência à tração                               | $f_{ct}$  | 0,17    | kN/cm <sup>2</sup> | $0,7(0,03f_{ck}^{2/3})$ NBR 6118:2014 | $R_t$              |
| Resistência média à compressão biaxial do concreto | $f_{c2m}$ | 4,19    | kN/cm <sup>2</sup> | $f_c (1,2 - f_c/100)$ FIB (2012)      | $R_b$              |
| Módulo de elasticidade inicial                     | $E_{ci}$  | 2825,06 | kN/cm <sup>2</sup> | $1940(f_{cm})^{1/3}$ FIB (2012)       | -                  |
| Módulo de elasticidade reduzido                    | $E_c$     | 2486,05 | kN/cm <sup>2</sup> | $0,88 E_{ci}$                         | $E_c$              |

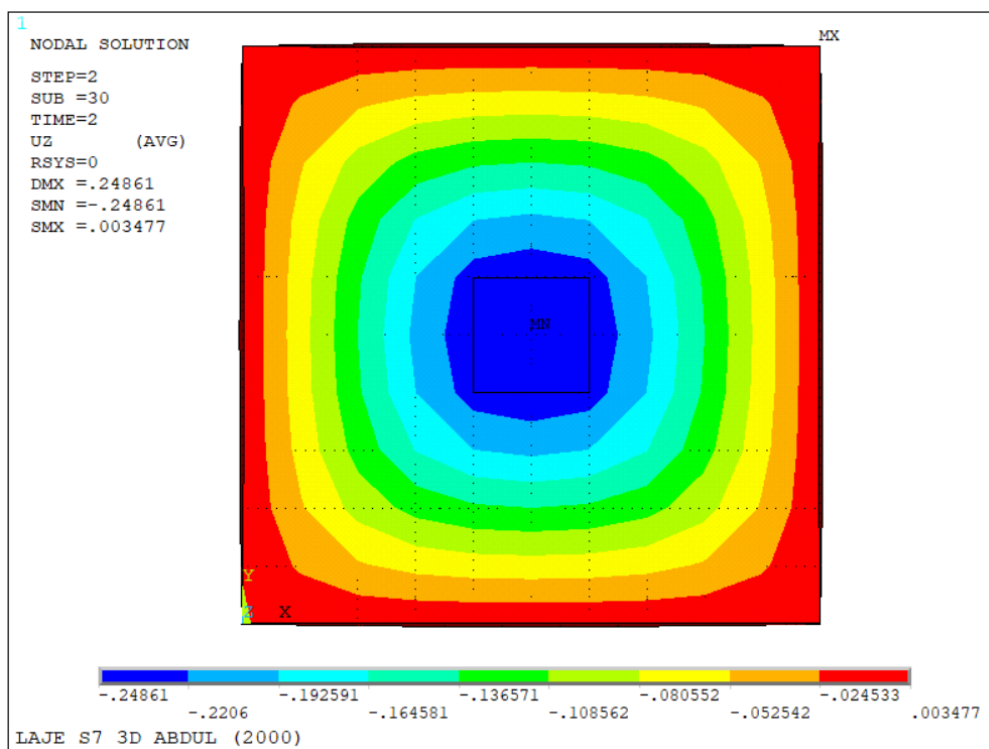
Fonte: O autor.

### 5.1.3 Comparação dos resultados de deslocamentos

Na Figura 38 é ilustrado os deslocamentos após a aplicação da carga de 40,16 kN, levando em conta o peso próprio da laje. No Gráfico 1 é apresentado os resultados obtidos numericamente, bem como a curva da *carga x deslocamento* fornecido pelos autores. O modelo computacional obteve um resultado satisfatório.

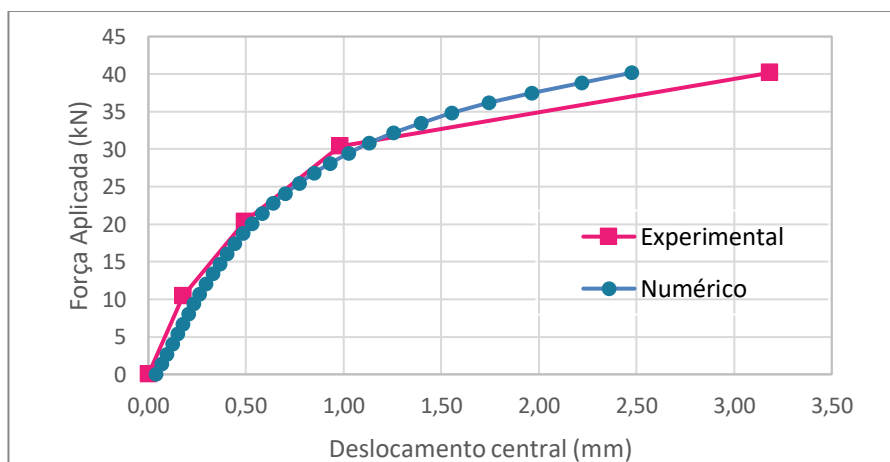
Analisando o Gráfico 1 é possível observar que o modelo numérico se aproximou do experimento real. É importante ressaltar que neste trabalho não há o interesse de avaliar o ELU, devido a isso os deslocamentos de interesse são apenas aqueles que vão até o ELS (no gráfico, por volta de 30kN), portanto, o modelo numérico proposto resultou em uma curva de *carga x deslocamento* considerada satisfatória para fins de avaliação de flechas.

Figura 38 - Deslocamentos - laje S7 Abdul-Wahab e Khalil



Fonte: O autor.

Gráfico 1 - Resultados obtidos - laje S7 Abdul-Wahab e Khalil



Fonte: O autor.

## 6 VARIABILIDADE ESPACIAL DE PROPRIEDADES POR CAMPO ESTOCÁSTICO

O processo estocástico é um modelo matemático para o estudo de fenômenos aleatórios. Trata de fenômenos que variam em algum grau, de modo imprevisível, com o passar do tempo ou no espaço. Neste trabalho será utilizado para simular a aleatoriedade na malha de armadura, ou seja, simular ondulações na extensão da malha de aço. O uso de campos estocásticos ajuda a entender como certos eventos aleatórios se relacionam entre si e permite simular estes eventos quantificando-o em termos de sua variabilidade temporal ou espacial.

A geração de campos aleatórios pode ser feita pela técnica da transformação inversa, com imposição de correlação entre os pontos pretendidos para geração. Primeiramente escolhe-se qual o modelo de campo aleatório que se pretende gerar assim como os seus parâmetros, como o comprimento de correlação  $L_c$  ou mesmo comprimentos de correlação diferenciados para cada direção espacial, como  $L_{xc}, L_{yc}, L_{zc}$ . Define-se qual o tipo de distribuição e parâmetros desta distribuição para o campo estocástico que se pretende gerar.

### 6.1 AVALIAÇÃO DO COMPRIMENTO DE CORRELAÇÃO

Baseado em medidas experimentais de uma série de propriedades do concreto, pode-se assumir que esta, em uma região de uma peça estrutural, assume uma estacionariedade de segunda ordem. Isto permite afirmar que a função de autocorrelação assume um papel crucial na descrição de um campo aleatório estacionário. Esta função irá descrever a forma como a correlação espacial de uma propriedade decai com a distância ( $\tau$ ) entre os pontos avaliados. A distância é calculada como na norma Euclidiana entre dois pontos no espaço  $\mathbf{X}_i$  e  $\mathbf{X}_j$ , ou seja,  $\tau = \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|$ . Muitos modelos têm sido propostos na literatura para descrever esta correlação espacial, alguns deles estão listados na Tabela 10.

Tabela 10 – Modelos de correlação espacial propostos e encontrados na literatura.

| Modelo               | Funções de autocorrelação usualmente empregadas  |
|----------------------|--|
| Triangular           | $\rho(\tau, L_c) = \begin{cases} 1 -  \tau /L_c & \text{para }  \tau  \leq L_c \\ 0 & \text{para }  \tau  > L_c \end{cases}$ |
| Exponencial          | $\rho(\tau, L_c) = \exp(-2\tau/L_c)$   |
| Exponencial quadrado | $\rho(\tau, L_c) = \exp[-(2\tau/L_c)^2]$   |
| Cosseno Exponencial  | $\rho(\tau, L_c) = \cos\left(\frac{\tau}{L_c}\right)\exp(-2\tau/L_c)$  |

Fonte: O autor.

Nestes modelos existe um parâmetro chamado de comprimento de correlação espacial ( $L_c$ ), ou escala de flutuação, que reflete a distância a partir da qual, dois pontos passam a ter propriedades aleatórias que são independentes entre si. Quanto maior o comprimento de correlação, mais forte é a correlação no campo, chegando-se, no limite, a uma correlação perfeita de 1, que significaria não haver campo, mas apenas uma variável aleatória para definir aquela propriedade e que não seria função da sua posição espacial.

Vários são os métodos para estimar este comprimento de correlação a partir de dados medidos experimentalmente, como o Método da Máxima Verossimilhança (*Maximum Likelihood Method*, MLM). Tal método permite avaliar este parâmetro de forma que o mesmo maximize o valor de probabilidade de que o modelo tenha este parâmetro, com o que melhor representa os dados medidos (LI *et al.*, 2004). Um segundo método é o método *Kriging*, o qual permite avaliar de forma que minimize os erros da estimativa, dados que estejam faltando no campo aleatório (O'CONNOR; KENSHEL, 2013). Um outro método popular é o Método do Ajuste da Autocorrelação (*Autocorrelation Fitting Method*), o qual utiliza uma otimização para o ajuste do parâmetro  $L_c$  do modelo aos dados experimentais a partir de uma função de mérito pré-definida (VANMARCKE, 2010). Este último é o que será utilizado neste trabalho.

Para utilizar o Método do Ajuste da Autocorrelação, basta ajustar algum dos modelos de autocorrelação  $\rho(\tau)$  à função de autocorrelação experimental  $\hat{\rho}(\tau)$ , baseando-se, por exemplo, na ideia da aproximação por mínimos quadrados. Supondo um campo estocástico de uma variável avaliada em uma série de pontos no espaço  $a(\mathbf{X}) = \{a(\mathbf{X}_1), a(\mathbf{X}_2), \dots, a(\mathbf{X}_n)\}$ , onde  $\mathbf{X}_n = \{x_n, y_n, z_n\}$  representa o vetor

posição da amostra  $n$ . Então a função de autocorrelação experimental  $\hat{\rho}(\tau)$  pode ser avaliada como:

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{1}{[n(\tau) - 1]\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^{n(\tau)} [a(\mathbf{X}_i) - \hat{\mu}][a(\mathbf{X}_i + \tau) - \hat{\mu}] \quad (6.1)$$

Onde:

$\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}$  = são as estimativas de média e desvio padrão dos dados do campo medido.

$n(\tau)$  = representa o número de pares de pontos que estão separados pela distância  $\tau$ .

Basicamente, monta-se a função de mérito baseando-se na aproximação dos mínimos quadrados como descrito na equação (6.2).

$$E(L_c) = \sum_{i=1}^k [\hat{\rho}(\tau) - \rho(\tau, L_c)]^2 \quad (6.2)$$

Onde,  $k$  representa os valores do comprimento de correlação avaliados em algumas distâncias.

Estas distâncias dependerão da malha de medição dos dados experimentais e serão valores discretos. Neste ponto, vale ressaltar que a literatura indica que a equação (6.1) não deva ser avaliada para distâncias  $\tau$  que não sejam maiores que  $\frac{1}{4}$  do menor comprimento da dimensão completa da malha de medição dos dados experimentais, isto porque a cada nova distância  $\tau$ , a quantidade de pares de pontos experimentais disponíveis para aquela distância  $n(\tau)$  torna-se menor, prejudicando a estimativa pela equação apresentada.

Desta forma, qualquer método de otimização poderá ser empregado para obter o melhor parâmetro  $L_c$  para aquele modelo de campo aleatório escolhido, de forma a representar a função de autocorrelação experimental. Neste trabalho o método *Nelder-Mead* é utilizado para este fim.

### 6.1.1 Geração de Campos Estocásticos

Deve-se inicialmente escolher os pontos no espaço onde serão geradas amostras da variável aleatória pretendida  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_m$ . Onde o número de pontos é  $m$  e  $\mathbf{X}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$  representa o vetor com as coordenadas espaciais destes  $m$  pontos. Como dito anteriormente,  $\tau_{ij} = \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|$  será a distância euclidiana entre estes pontos. Para  $m$  pontos, haverá uma matriz simétrica de  $m \times m$  distâncias possíveis, sendo sua diagonal zero.

Para iniciar o processo, deve-se gerar uma matriz  $\mathbf{Z}$  contendo números aleatórios uniformemente distribuídos em  $[0,1]$ . As linhas representarão os pontos no espaço, em que será feita a geração do campo, e as colunas representarão as diversas amostras daquela variável naqueles pontos.

Em seguida, monta-se a matriz de coeficientes de correlação  $\mathbf{R}_x$  (no espaço real das variáveis) para as distâncias  $\mathbf{X}_i$  (pontos no espaço) desejados para geração do campo. A partir da transformação de *Nataf*, procede-se à transformação desta matriz  $\mathbf{R}_x$  para o espaço não correlacionado  $\mathbf{R}_z$ . Essa matriz, em seguida, será fatorada por decomposição *Cholesky* em  $\mathbf{R}_z = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ , sendo  $\mathbf{L}$  a matriz diagonal inferior.

A matriz  $\mathbf{Z}$ , anteriormente gerada com números não correlacionados e uniformemente distribuídos entre 0 e 1, é utilizada para obter números correlacionados uniformes  $\mathbf{Z}_c = \mathbf{L}\mathbf{Z}$ . Estes números são trazidos para o espaço gaussiano por  $\mathbf{U}_c = \Phi^{-1}(\mathbf{Z}_c)$ , onde  $\Phi^{-1}$  representa a inversa da distribuição acumulada Padrão. Por fim, para o tipo de distribuição que o campo estocástico terá e seus momentos estatísticos (como por exemplo, média  $\boldsymbol{\mu}$  e desvio padrão  $\boldsymbol{\sigma}$ ), chega-se ao espaço real das variáveis do campo estocástico de interesse,  $\mathbf{X} = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}_c)$ . Onde  $F_{\mathbf{X}}(\cdot)$  representa a função acumulada de probabilidade do campo a ser gerado (com seu tipo de distribuição e seus momentos estatísticos).

## 6.2 DADOS EXPERIMENTAIS DE RECOBRIMENTO

Dados experimentais da variabilidade espacial de recobrimentos de armadura medidas em lajes maciças são escassos na literatura, apesar de existir algo a respeito da variabilidade espacial de propriedades do concreto como  $f_{ck}$  e módulo de elasticidade  $E$ . Propriedades estas, na maior parte das vezes, obtidas com o esclerômetro (*impact hammer*) ou mesmo com corpos de prova extraídos com serra copo, como indicado em Xu e Li (2018).

Um fator importante, que pode afetar a variabilidade espacial, diz respeito à regularidade da amarração da malha da armadura negativa, assim como a regularidade da colocação de espaçadores. Interessantes estudos em lajes maciças de construções em Porto Alegre foram desenvolvidos por Silva (2012), Benedetti (2013), Barreto (2014), Palm (2017) e Maran (2020). Tais trabalhos demonstram que o aumento das distâncias dos espaçadores, assim como da frequência da amarração das barras que se cruzam, induzem no cobrimento um efeito de diminuição para a laje executada. A principal causa origina-se da flexão sofrida pelas armaduras devido o próprio peso das mesmas, operários pisando sobre elas ou do concreto despejado e formas de adensamento. Infelizmente, muitos destes trabalhos fazem uso de amostragem aleatória do cobrimento ao longo da área da laje, o que impossibilita utilizar os dados experimentais destes trabalhos para obter comprimentos de correlação para os cobrimentos medidos. Estas medições de cobrimento geralmente são feitas com o equipamento Pacômetro. Por variação do campo magnético o Pacômetro, ao passar próximo das armaduras, possibilita obter a informação da profundidade da mesma com tolerâncias de 3 mm, e para um máximo de profundidade de 6 cm das armaduras. Nos trabalhos citados, esta informação foi obtida em diversas lajes com diferentes distâncias entre espaçadores e diferentes distâncias de amarração.

Especificamente no trabalho de Maran *et al.* (2014) disponibilizou-se medições feitas em lajes de forma regular (malha de medições com o Pacômetro) juntamente com os dados de cobrimento medidos em três lajes. Estes são os dados que aqui serão utilizados para estimar o comprimento de correlação do campo estocástico a ser gerado para o cobrimento. São um total de 60 medidas por laje em

uma malha de medição de 0,50 m por 0,36 m. Os dados estão indicados na Tabela 11.

Tabela 11 – Coordenadas dos pontos medidos e cobrimento para 3 Lajes

(continua)

| Pontos medidos | Coordenadas |      | Cobrimentos (mm) |                 |                 |
|----------------|-------------|------|------------------|-----------------|-----------------|
|                | x(m)        | y(m) | Espaçador 50 cm  | Espaçador 70 cm | Espaçador 80 cm |
| 1              | 0.00        | 0.00 | 22               | 20              | 20              |
| 2              | 0.50        | 0.00 | 24               | 21              | 21              |
| 3              | 1.00        | 0.00 | 23               | 21              | 27              |
| 4              | 1.50        | 0.00 | 22               | 21              | 17              |
| 5              | 2.00        | 0.00 | 14               | 22              | 17              |
| 6              | 2.50        | 0.00 | 18               | 18              | 16              |
| 7              | 0.00        | 0.36 | 22               | 22              | 20              |
| 8              | 0.50        | 0.36 | 28               | 26              | 22              |
| 9              | 1.00        | 0.36 | 24               | 19              | 21              |
| 10             | 1.50        | 0.36 | 19               | 19              | 17              |
| 11             | 2.00        | 0.36 | 17               | 25              | 17              |
| 12             | 2.50        | 0.36 | 18               | 20              | 29              |
| 13             | 0.00        | 0.72 | 20               | 22              | 16              |
| 14             | 0.50        | 0.72 | 19               | 22              | 22              |
| 15             | 1.00        | 0.72 | 20               | 21              | 12              |
| 16             | 1.50        | 0.72 | 19               | 20              | 21              |
| 17             | 2.00        | 0.72 | 19               | 23              | 19              |
| 18             | 2.50        | 0.72 | 22               | 20              | 12              |
| 19             | 0.00        | 1.08 | 17               | 20              | 22              |
| 20             | 0.50        | 1.08 | 18               | 24              | 21              |
| 21             | 1.00        | 1.08 | 22               | 23              | 21              |
| 22             | 1.50        | 1.08 | 22               | 22              | 21              |
| 23             | 2.00        | 1.08 | 22               | 23              | 22              |
| 24             | 2.50        | 1.08 | 23               | 22              | 15              |
| 25             | 0.00        | 1.44 | 23               | 30              | 22              |
| 26             | 0.50        | 1.44 | 22               | 25              | 23              |
| 27             | 1.00        | 1.44 | 21               | 16              | 17              |
| 28             | 1.50        | 1.44 | 19               | 19              | 25              |
| 29             | 2.00        | 1.44 | 20               | 14              | 16              |
| 30             | 2.50        | 1.44 | 21               | 25              | 20              |
| 31             | 0.00        | 1.80 | 23               | 17              | 15              |
| 32             | 0.50        | 1.80 | 27               | 20              | 21              |
| 33             | 1.00        | 1.80 | 16               | 20              | 25              |
| 34             | 1.50        | 1.80 | 23               | 22              | 26              |
| 35             | 2.00        | 1.80 | 22               | 26              | 18              |



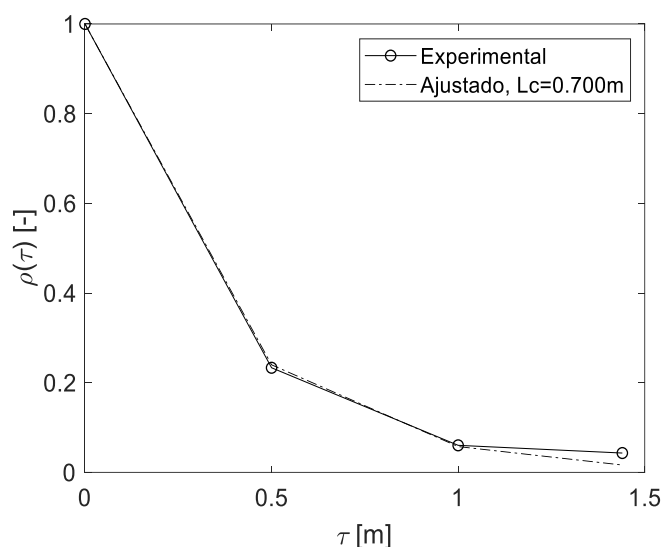
Tabela 11 – Coordenadas dos pontos medidos e cobertura para 3 Lajes

| (conclusão)               |      |      |              |              |              |
|---------------------------|------|------|--------------|--------------|--------------|
| 36                        | 2.50 | 1.80 | 16           | 18           | 15           |
| 37                        | 0.00 | 2.16 | 22           | 16           | 17           |
| 38                        | 0.50 | 2.16 | 19           | 21           | 20           |
| 39                        | 1.00 | 2.16 | 21           | 19           | 16           |
| 40                        | 1.50 | 2.16 | 22           | 21           | 23           |
| 41                        | 2.00 | 2.16 | 23           | 24           | 18           |
| 42                        | 2.50 | 2.16 | 20           | 19           | 21           |
| 43                        | 0.00 | 2.52 | 23           | 19           | 21           |
| 44                        | 0.50 | 2.52 | 25           | 21           | 16           |
| 45                        | 1.00 | 2.52 | 21           | 20           | 20           |
| 46                        | 1.50 | 2.52 | 20           | 22           | 20           |
| 47                        | 2.00 | 2.52 | 16           | 19           | 16           |
| 48                        | 2.50 | 2.52 | 21           | 21           | 11           |
| 49                        | 0.00 | 2.88 | 16           | 18           | 19           |
| 50                        | 0.50 | 2.88 | 24           | 20           | 21           |
| 51                        | 1.00 | 2.88 | 19           | 21           | 23           |
| 52                        | 1.50 | 2.88 | 24           | 19           | 22           |
| 53                        | 2.00 | 2.88 | 19           | 20           | 21           |
| 54                        | 2.50 | 2.88 | 19           | 18           | 20           |
| 55                        | 0.00 | 3.24 | 28           | 22           | 17           |
| 56                        | 0.50 | 3.24 | 26           | 24           | 19           |
| 57                        | 1.00 | 3.24 | 28           | 20           | 18           |
| 58                        | 1.50 | 3.24 | 21           | 19           | 14           |
| 59                        | 2.00 | 3.24 | 22           | 18           | 16           |
| 60                        | 2.50 | 3.24 | 18           | 23           | 25           |
| <b>Média (mm)</b>         |      |      | <b>21.07</b> | <b>20.87</b> | <b>19.42</b> |
| <b>Desvio Padrão (mm)</b> |      |      | <b>3.07</b>  | <b>2.72</b>  | <b>3.67</b>  |

Fonte: Maran *et al.*, 2014.

A partir dos dados indicados experimentalmente e assumindo um modelo para decaimento da correção do tipo exponencial, é possível estimar qual o comprimento de correlação dos dados de cobertura de acordo com o procedimento anteriormente descrito. Para o caso da laje com espaçador a cada 50 cm, a Figura 39 indica a forma do decaimento do valor do coeficiente de correlação experimental e aquela obtido a partir da otimização do parâmetro  $L_c$ .

Figura 39 - Comprimento de correlação  $\rho$  em relação à distância espacial  $\tau$  experimental e numérico ajustado após a otimização para os modelos de decaimento exponencial



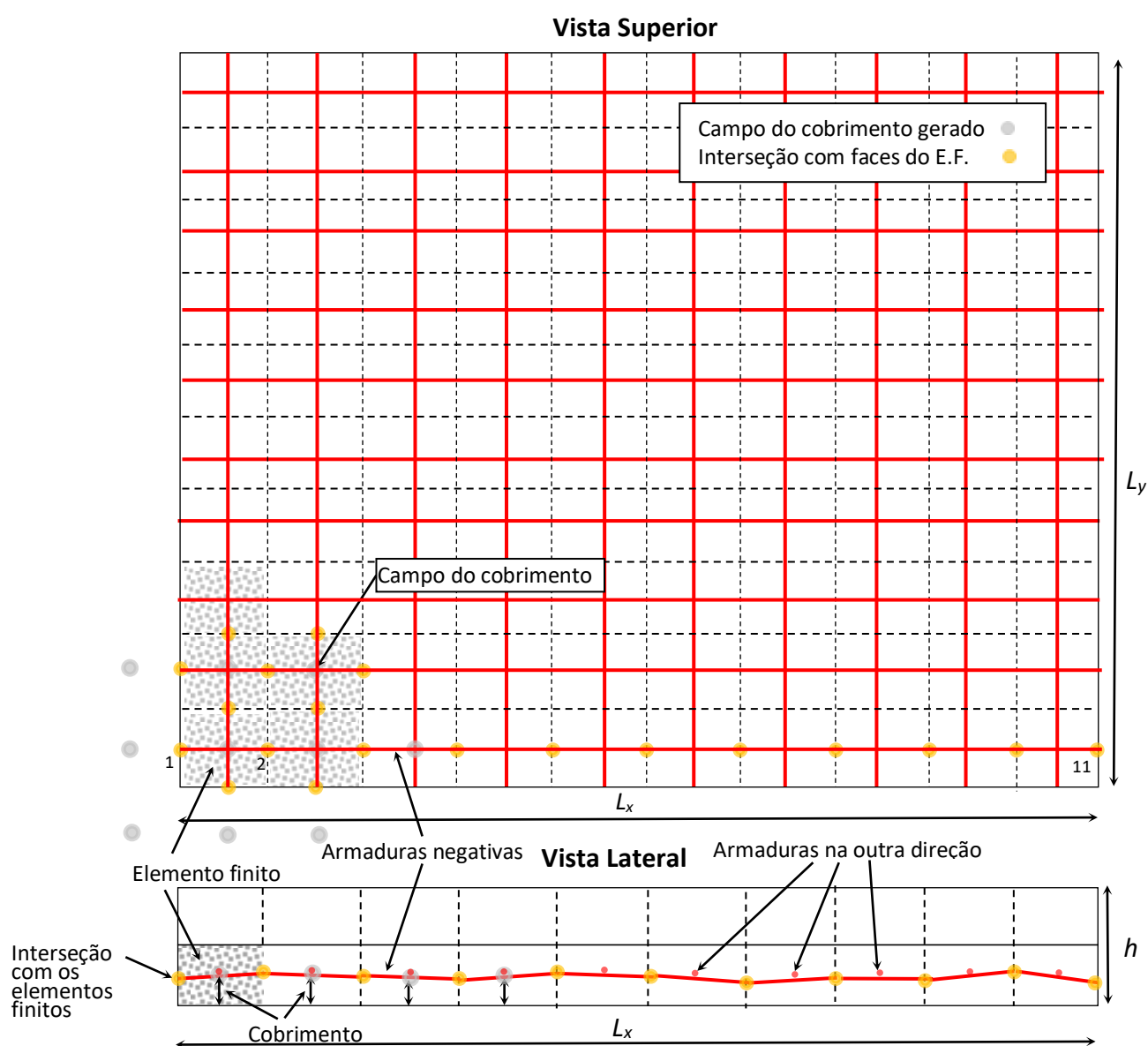
Fonte: O autor.

### 6.3 GERAÇÃO DO CAMPO ESTOCÁSTICO PARA RECOBRIMENTO DA ARMADURA

Para a geração do campo estocástico para o cobrimento da armadura na laje, algumas hipóteses foram feitas para a inclusão desta variabilidade no modelo de elementos finitos. A laje de elementos finitos é discretizada em suas dimensões  $L_x$  e  $L_y$  em um certo número de divisões  $n_x$  e  $n_y$ . A altura da laje  $h$  também é discretizada em um certo número de divisões  $n_h$ . O campo estocástico para o cobrimento da armadura é gerado nos pontos de interseção das armaduras negativas na direção  $x$  e  $y$  (pontos em cinza indicado na Figura 40). Assim, uma vez que o modelo em elementos finitos do ANSYS aceita apenas colocação das armaduras (modelo REINF) pela linguagem APDL a partir das coordenadas de interseção das armaduras com as faces de cada elemento finito, é necessário obter estes pontos (pontos laranja na Figura 40) a fim de gerar posições de armaduras que sejam compatíveis com o campo dos cobrimentos gerados. Para isto o campo é gerado para além da dimensão da laje, de forma que seja possível obter estes pontos de interseção com as faces dos elementos que estão nas bordas da laje. O mesmo procedimento é empregado para obter os pontos de interseção das barras na outra

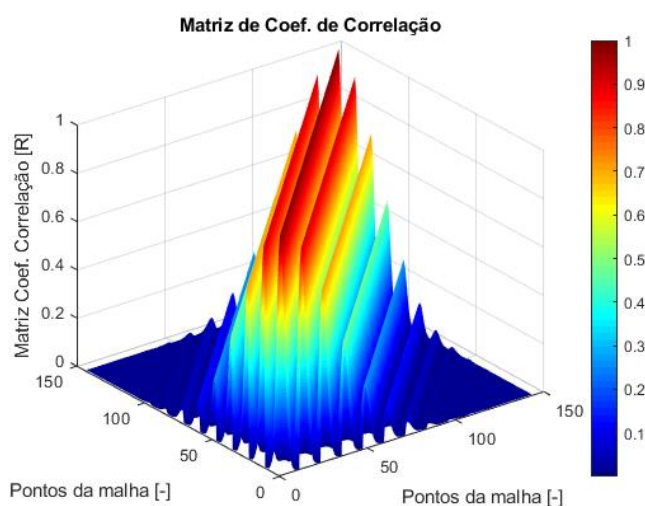
direção, com as faces do elemento finito. Estes dados são fornecidos como uma matriz de valores que são usados para gerar a malha de barras com o modelo REINF no *script* APDL do ANSYS. Vale ressaltar que as posições da armadura devem ser introduzidas de forma adimensional com relação à altura do elemento finito ( $h/n_h$ ) e não da laje  $h$ .

Figura 40 - Procedimento para aplicar o campo estocástico de recobrimento no modelo de armaduras negativas em elementos finitos do ANSYS



Assim, a Figura 41 representa a matriz de coeficiente de correlação nos pontos do campo gerado pela programação anteriormente descrita e implementada em MATLAB para a laje experimental S7 de Abdul-Wahab e Khalil (2000).

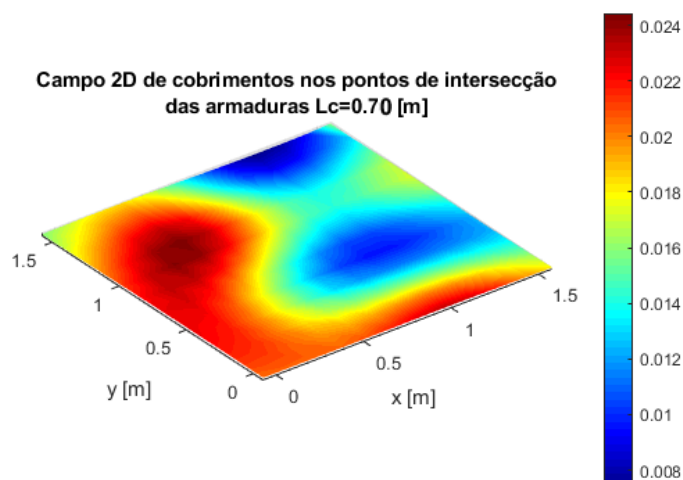
Figura 41 - Matriz de coeficiente de correlação para os pontos de geração do campo estocásticos para cobrimento



Fonte: O autor.

A Figura 42 representa o campo propriamente dito gerado para valor médio de cobrimento de 2 cm e desvio padrão de 3 mm, assumindo um comprimento de correlação  $L_c = 70$  cm e tipo de distribuição Gaussiana. Este campo foi gerado nos pontos cinzas das Figura 40, que não necessariamente é na intersecção com os lados do elemento finito de concreto.

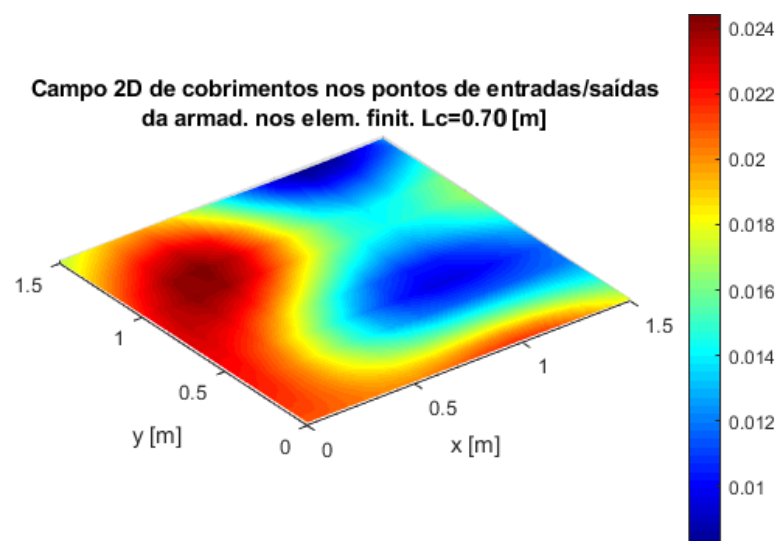
Figura 42 - Campo estocástico para cobrimento [m] gerado para os pontos de interseção das armaduras negativas da laje, longitudinal e transversal



Fonte: O autor.

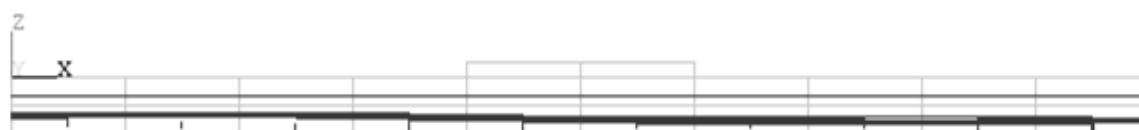
Na Figura 43 está representado o mesmo campo estocástico, agora gerado nos pontos de entrada e saída de intersecção das armaduras com as faces dos elementos finitos (sendo esse campo o utilizado pelo Ansys). Isto é feito a partir da interpolação do campo previamente gerado (indicado na Figura 42) para as coordenadas dos lados da malha de elementos finitos de concreto. Isso será necessário para que o modelo em ANSYS possa descrever corretamente as barras de armadura pelo modelo REINF. Como pode-se perceber, este campo é muito próximo, como esperado, ao campo da Figura 42, já que ambos representam a distribuição dos cobrimentos ao longo da área da laje. Na Figura 44 está uma vista lateral e detalhe de como a geração deste campo ficou representada na malha gerada pelo ANSYS.

Figura 43 - Campo estocástico para cobrimento gerado para os pontos entrada e saída das armaduras em cada elemento finito

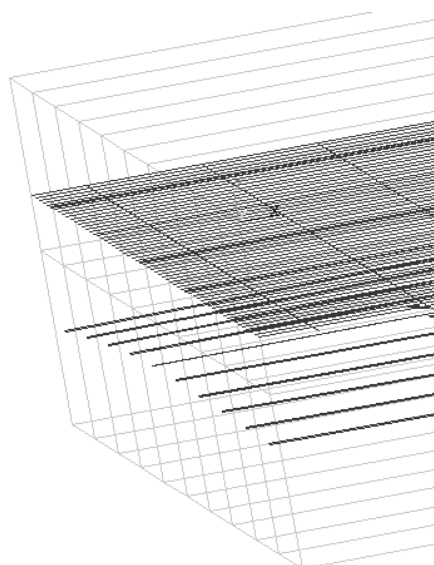


Fonte: O autor.

Figura 44 - Armaduras geradas



(a) vista lateral



(b) detalhe armadura em x

Fonte: O autor.

## 7 RESULTADOS NUMÉRICOS

### 7.1 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONSIDERADAS

Para a analisar um modelo com base na teoria da probabilidade, é necessário que sejam definidos um conjunto de variáveis aleatórias que possibilite examinar a variabilidade atingida, computacionalmente, em uma estrutura real. Entretanto o número de variáveis que afetam o comportamento real da estrutura dificilmente pode ser mensurado, pois dependem de vários fatores como, a utilização, reparo/manutenção, qualidade da execução, dentre outros. Portanto, do ponto de vista da pesquisa, essas variáveis devem ser limitadas.

As falhas estruturais, no geral, podem ocorrer mesmo que a mão de obra da execução seja qualificada, que a obra possua um rigoroso controle de qualidade e que profissionais competentes estejam à frente dos projetos. Os erros são dificilmente quantificáveis, pois sua origem é a imperfeição humana. Na engenharia de estruturas a incerteza é um fator muito presente, grande parte das falhas estruturais são devidas a erros no planejamento, projeto, execução e utilização. Os erros de execução podem ocorrer devido a 3 fatores: descuido, esquecimento ou negligência. As variabilidades estudadas nesse trabalho foram:

#### Variabilidade das dimensões

A variabilidade das dimensões ( $L_x$ ,  $L_y$  e  $h$ ) está relacionada aos erros de execução da laje, como a montagem inadequada das formas ou a abertura das mesmas no momento da concretagem (que pode ocorrer devido ao formato e/ou a qualidade das formas). Durante a execução da estrutura essas variáveis podem alterar a dimensão final do elemento, resultando em imperfeições geométricas e uma laje diferente da que foi projetada.

#### Variabilidade das ações

A variabilidade das ações se enquadra como incerteza física, de previsão e fenomenológica. É difícil prever com certeza qual vai ser o carregamento real da

estrutura, se realmente ela vai ser carregada somente até a carga pela qual foi projetada, se o usuário vai mudar o tipo de uso para a ocupação, etc.

#### Variabilidade das resistências

O concreto é um dos materiais estruturais que mais apresenta variabilidade de propriedades. A incerteza da resistência à compressão do concreto é decorrente da variabilidade das propriedades dos materiais constituintes, da não homogeneidade do material, das imprecisões da mistura, dentre outros. Sendo assim, a resistência à compressão do concreto para  $n$  corpos de prova, realizados na mesma betonada (mesmo lote), podem apresentar  $n$  resultados ligeiramente diferentes. No decorrer da construção de um edifício são necessários diversos lotes de concreto, havendo concretagens em diversas fases (dias diferentes) da obra, logo, a variação das propriedades do concreto pode ser maior do que os concretos feitos em uma mesma betonada.

A resistência ao escoamento do aço está relacionada ao seu processo de fabricação. Segundo Beck (2019), o coeficiente de variação de barras de aço produzidas em uma mesma siderúrgica é da ordem de 1 a 4%. Entretanto, para barras produzidas em diferentes siderúrgicas, o CV fica entre 4 e 7%. Um estudo desenvolvido por Santiago (2018) no ano de 2016 no Brasil, reuniu o resultado de ensaios de tração em mais de 8,7 mil barras de aço CA-50, provenientes de diferentes lotes. O CV obtido ficou entre 0,03 e 0,05, valor dentro dos valores internacionais.

#### Variabilidade do modelo

A incerteza do modelo está relacionada às aproximações feitas para reproduzir o comportamento real da estrutura no *software* de elementos finitos. As simplificações na consideração das ações e quais efeitos elas causam, também estão relacionadas à incerteza de modelo.

#### Variabilidade do cobrimento

A variabilidade do cobrimento está relacionada a falta de espaçadores, distribuição insuficiente de espaçadores ou devido a deformações na armadura. Tais deformações podem ocorrer, por exemplo, caso o trabalhador, ao trafegar sobre a



laje na fase de montagem, pise sobre a malha e ela não volte a sua posição inicial. Em ambos os casos a armadura muda sua posição inicial de projeto, o que faz com que o cobrimento não seja uniforme em toda a extensão da laje. Segundo Leite e Gomes (2022), analisando a nível de seção transversal, com a diminuição do cobrimento (mantido a altura fixa da seção e com a armadura mais baixa do que o projetado), o braço de alavanca ( $d - y/2$ ) da reação resultante das tensões de compressão do concreto aumenta, fazendo com que o momento último resistente seja maior.

Neste trabalho em questão, foram consideradas dez variáveis aleatórias, sendo apresentadas na Tabela 12.

Tabela 12 – Variáveis aleatórias de estudo

| <b>Categoria</b>                    | <b>Nome</b>                           | <b>Sím.</b> | <b>Uni.</b> | <b>Tipo de Distribuição</b> | <b>Média <math>\mu_x</math></b> | <b>Desvio Padrão <math>\sigma_x</math></b> |
|-------------------------------------|---------------------------------------|-------------|-------------|-----------------------------|---------------------------------|--|
| Ações                               | Permanente                            | $G$         | kN.m        | Normal                      | Gmédio                          | $0,1\mu_x$                                 |
|                                     | Variável                              | $Q$         | kN.m        | Gumbel                      | Qmédio**                        | $0,2\mu_x$                                 |
| Resistência dos materiais           | Concreto                              | $f_c$       | MPa         | Normal                      | $1,17f_{ck}$                    | *  |
|                                     | Aço                                   | $f_y$       | MPa         | Normal                      | $1,08f_{yk}$                    | $0,05\mu_x$                                |
| Dados geométricos                   | Altura                                | $h$         | cm          | Normal                      | 9                               | 0,6  |
|                                     | Largura                               | $L_x/L_y$   | cm          | Normal                      | 320                             | 1,2  |
|                                     | Cobrimento                            | $cobri$     | cm          | Lognormal                   | Variável                        | 0,6  |
| Incerteza - Ações                   | Incertezas de modelo das solicitações | $\theta_s$  | -           | Lognormal                   | 1                               | 0,05                                       |
| Incertezas de modelo da resistência | Flexão                                | $\theta_R$  | -           | Lognormal                   | 1                               | 0,05                                       |

\*  $\sigma_{f_c} = 0,15 e^{-(f_{ck}-20MPa) 0,036} \mu_x$

\*\* O valor médio é definido a partir do valor característico  $Q_k$ , o qual tem chance de que seja ultrapassado de 25%.

Fonte: O autor.

Foi proposta uma equação para o desvio padrão da resistência à compressão do concreto, com base no El-Reedy (2013, p.72). Para concreto com um bom controle de qualidade, o coeficiente de variação da resistência diminui, conforme o aumento da resistência à compressão. Neste ponto, este trabalho se diferencia da maior parte dos outros revisados, os quais consideram um desvio padrão proporcional à média da resistência à compressão. Deste modo, utilizar uma equação para o desvio padrão da resistência é a estimativa mais coerente. A

equação proposta pode ser vista na Tabela 12, onde ela foi ajustada conforme a curva que descreve a relação entre a resistência do concreto e o coeficiente de variação, fornecida por El-Reedy (2013). O desvio padrão da resistência do concreto obtém-se multiplicando essa equação pela média da resistência. Com esta proposta, o desvio padrão diminui conforme o aumento da resistência.

Os parâmetros estatísticos para as variáveis aleatórias, bem como as distribuições de probabilidade apresentados na Tabela 12, são baseados em Ellingwood e Galambos (1982), Holický (2004), JCSS (2012), Santos *et al.* (2014) e El-Reedy (2013).

## 7.2 DESCRIÇÃO DA LAJE DE ESTUDO

A laje utilizada para o estudo foi uma laje hipotética calculada com base na NBR 6118:2014, com a utilização do método das Charneiras Plásticas. Considerou-se que é simplesmente apoiada e faz parte de uma edificação escolar, com dimensões de 3,20 x 3,20 m e espessura de 9 cm. Inicialmente, após a escolha do tipo de ocupação, definiu-se os carregamentos atuantes, para isso considerou-se que o piso iria possuir contrapiso e revestimento cerâmico (revestimento padrão de pisos de edifícios comerciais) de 7 cm de espessura. Considerou-se também que, abaixo dessa laje, o teto iria receber uma camada de 2,5 cm de reboco. O carregamento total, obtido conforme a NBR 6120:2019, é apresentado na Tabela 13.

Tabela 13 – Carregamento da laje de estudo

| <b>Cargas Permanentes</b>         | <b>Valor kN/m<sup>2</sup></b> | <b>Cargas Acidentais</b> | <b>Valor kN/m<sup>2</sup></b> |
|-----------------------------------|-------------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| Peso Próprio                      | 2,25                          | Escola                   | 3                             |
| Revestimento                      | 1,4                           |                          |                               |
| Reboco teto                       | 0,525                         |                          |                               |
| Total                             | 4,175                         | Total                    | 3                             |
| q total = 7,175 kN/m <sup>2</sup> |                               |                          |                               |

Fonte: O autor.

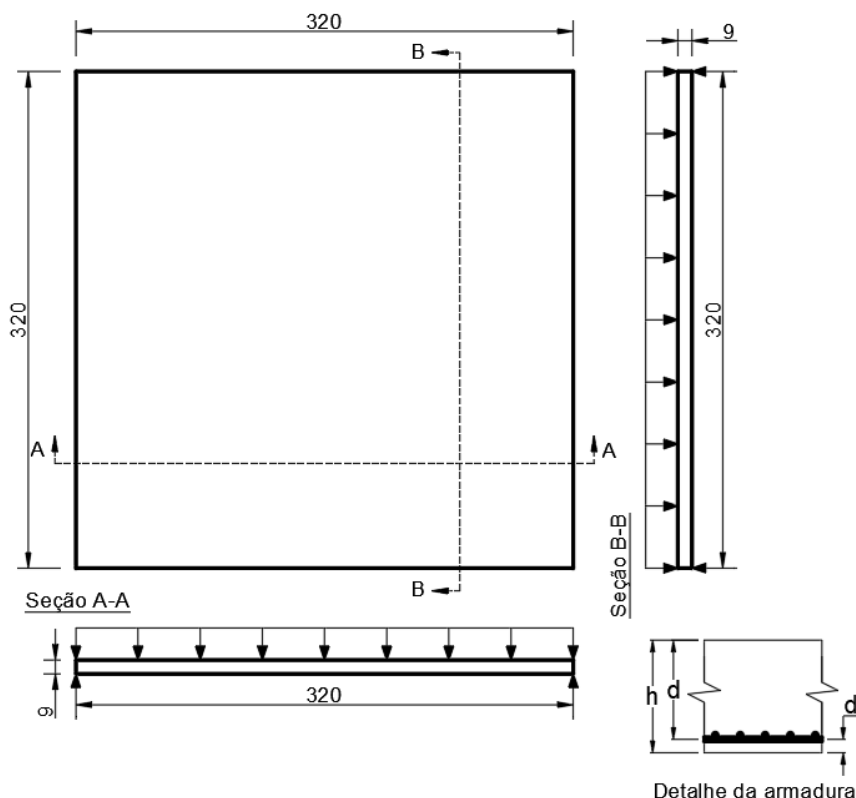
Para o dimensionamento considerou-se uma resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) de 25 MPa e resistência característica ao escoamento do aço ( $f_{yk}$ ) de 500 MPa. Com isso foi possível dimensionar a laje segundo a NBR 6118:2014. A configuração da laje de estudo está contida na Figura 45, estando as medidas expressas em centímetros, e os parâmetros geométricos estão na Tabela 14.

Tabela 14 – Parâmetros da laje de estudo

|           | <b>Parâmetros</b>                                   | <b>Sím.</b> | <b>Uni.</b>        | <b>Valor</b>       |
|-----------|---|-------------|--------------------|--------------------|
| Geometria | Comprimento   | $L$         | cm                 | 320                |
|           | Espessura   | $h$         | cm                 | 9                  |
|           | Cobrimento  | $cobri$     | cm                 | 2,5                |
| Concreto  | Resistencia à compressão                            | $f_{ck}$    | kN/cm <sup>2</sup> | 2,5                |
|           | Módulo de elasticidade reduzido                     | $E_c$       | kN/cm <sup>2</sup> | 2317,03            |
|           | Coefficiente de Poisson                             | $\nu_c$     | -                  | 0,20               |
|           | Área da armadura de flexão                          | $A_s$       | cm <sup>2</sup> /m | 2,51               |
| Aço       | Armadura requerida em cada uma das direções (x e y) | $\emptyset$ | -                  | 16 $\emptyset$ 8.0 |
|           | Altura útil   | $d$         | cm                 | 6,0                |
|           | Espaçamento   | $s$         | cm                 | 20                 |
|           | Tensão de escoamento                                | $f_{yk}$    | kN/cm <sup>2</sup> | 50                 |
|           | Módulo de elasticidade                              | $E_s$       | kN/cm <sup>2</sup> | 21000              |
|           | Coefficiente de Poisson                             | $\nu_s$     | -                  | 0,3                |

Fonte: O autor.

Figura 45 - Geometria da laje de estudo



Fonte: O autor.

A fim de se transformar o esforço solicitante em valores característicos de cada ação, definiu-se a relação entre as cargas permanentes e variáveis que se deseja avaliar, conforme proposto por Santos, Stucchi e Beck (2014), através da seguinte expressão:

$$\chi = \frac{Q_K}{G_K + Q_K} \quad (7.1)$$

Onde:

$Q_K$  = é o valor característico das solicitações variáveis;

$G_K$  = é o valor característico da solicitação permanente.

Para todas as análises o fator  $\chi$  foi mantido constante em função do dimensionamento feito pela NBR 6118:2014. Para o caso estudado da laje, o valor de  $\chi$  foi de 0,418 (usando a equação (7.1), com  $G_K$  de 4,175 kN/m<sup>2</sup> e o  $Q_K$  de 3

kN/m<sup>2</sup>). A utilização desse parâmetro garante que em todas as análises a relação entre as cargas permanentes e variáveis vai ser a mesma, independente da mudança de geometria da laje.

### 7.2.1 Modelo numérico

A laje foi modelada no *software* ANSYS. Assim como no exemplo da laje modelada na seção 5.1, o elemento finito utilizado para modelar o concreto foi o hexaédrico SOLID186. A armadura foi modelada como sendo incorporada ao elemento finito do concreto, supondo aderência perfeita. Para isso foi utilizado o modelo do tipo REINF264 do ANSYS, sendo gerado a partir do método padrão no *software*. Este método define o tipo da seção da laje através do comando SECTYPE e a partir do comando SECDATA, atribui os dados da geometria da armadura. O Capítulo 4 detalha mais profundamente esses comandos. O modelo utilizado para representar o concreto foi o *DP-Concrete* através do modelo HSD linear.

Para obter o Módulo de elasticidade do concreto, utilizou-se as recomendações do Código Modelo *fib* 2010 (FIB, 2012), onde foi utilizado o módulo de elasticidade reduzindo ( $E_c$ ), respeitando a declividade da curva de tensão de 40% da carga de ruptura ( $0,4f_{cm}$ ). Esse é o modo recomendado para a avaliação do Estado Limite de Serviço pelo Código Modelo *fib* 2010 (FIB, 2012). Adotou-se o valor, simplificado, de  $0,88.E_{ci}$ . Em todas as análises o valor do módulo de elasticidade do concreto,  $E_c$ , foi calculado pela expressão (3.34) (com  $\alpha_i = 0,88$  e  $E_{c0} \alpha_E = 19400$ ). Os dados utilizados para o modelo HSD foram os mesmos apresentados na Tabela 7. A Tabela 15 indica os dados utilizados apenas para o concreto.

Tabela 15 – Dados utilizados para o concreto

| Parâmetros   | Sím.       | Valor   | Uni.               | Equações correspondentes FIB (2012) | Parâmetro numérico ANSYS |
|--|------------|---------|--------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| Resistência à compressão                           | $f_{ck}$   | 2,5     | kN/cm <sup>2</sup> | Valor variável                      | $R_c$                    |
| Resistência média à compressão                     | $f_{cm}$   | -       | kN/cm <sup>2</sup> | Valor variável conforme o $f_{ck}$  | -                        |
| Resistência à tração                               | $f_{ct}$   | 0,26    | kN/cm <sup>2</sup> | $0,03 (10f_{ck})^{2/3}$             | $R_t$                    |
| Resistência média à compressão biaxial do concreto | $f_{c2m}$  | 2,94    | kN/cm <sup>2</sup> | $f_c (1,2 - f_c/100)$               | $R_b$                    |
| Módulo de elasticidade inicial                     | $E_{ci}$   | 2632,98 | kN/cm <sup>2</sup> | $1940(f_{cm})^{1/3}$                | -                        |
| Módulo de elasticidade reduzido                    | $E_c$      | 2317,03 | kN/cm <sup>2</sup> | $0,88 E_{ci}$                       | $E_c$                    |
| Parâmetro da dilatação em tração                   | $\delta_t$ | 1       | -                  | ANSYS*                              | $delta_t$                |
| Parâmetro da dilatação em compressão               | $\delta_c$ | 1       | -                  | ANSYS*                              | $delta_c$                |

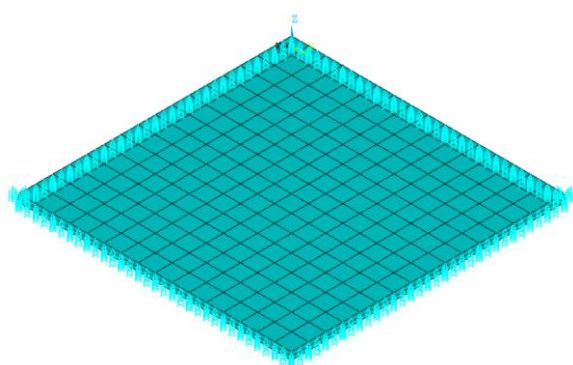
\* Recomendação do manual do ANSYS (2022),  $0 > \delta_c \geq 1$  e  $0 > \delta_t \geq 1$

Fonte: O autor.

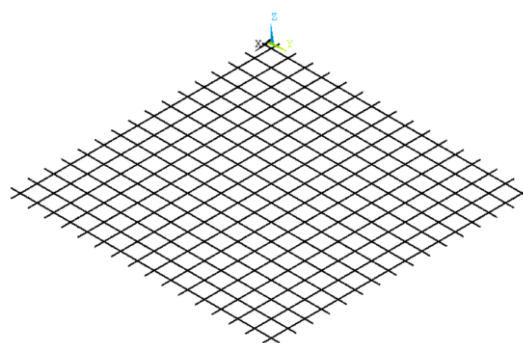
A malha foi dividida em elementos finitos de tamanho 20 x 20 cm. Tal dimensão foi suficiente para a análise de elementos finitos e para facilitar a distribuição das barras de forma automática na listagem APDL, o que resulta em 1 barra do tipo REINF para cada elemento finito.

O carregamento total foi distribuído em toda a superfície da laje, a fim de representar uma situação mais próxima da realidade, sem nenhum elemento de contato entre a laje e a carga. O modelo de elementos finitos gerado para armadura reta e variável, pode ser visto na Figura 46 e Figura 47. Utilizou-se a versão R1 do software ANSYS para fazer as análises.

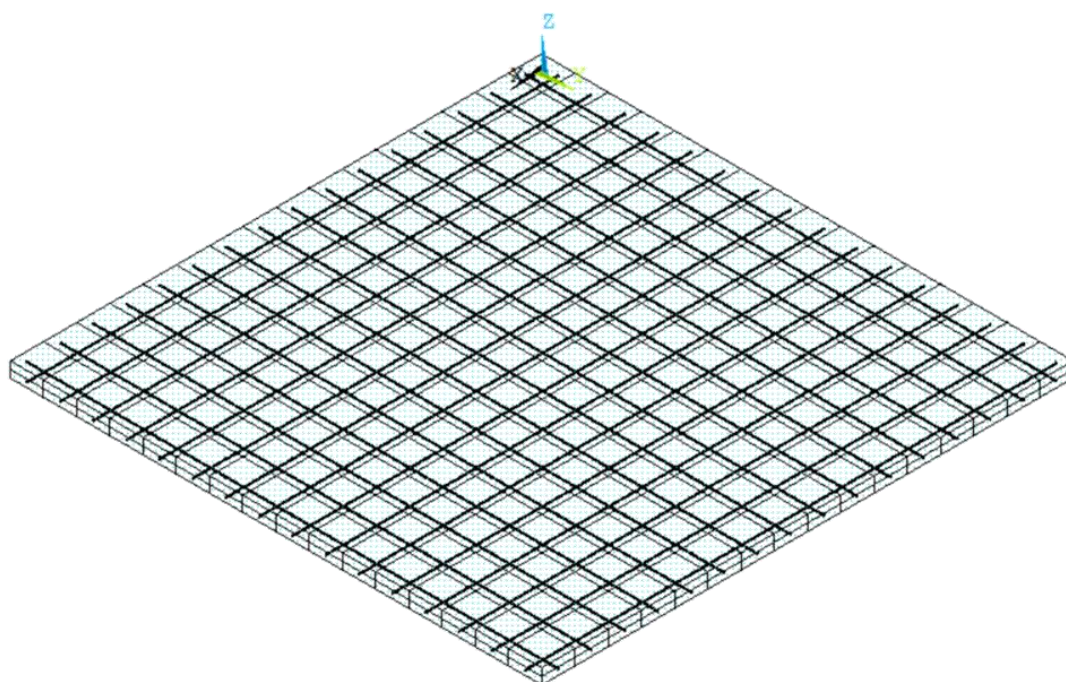
Figura 46 - Modelo numérico – Armadura reta



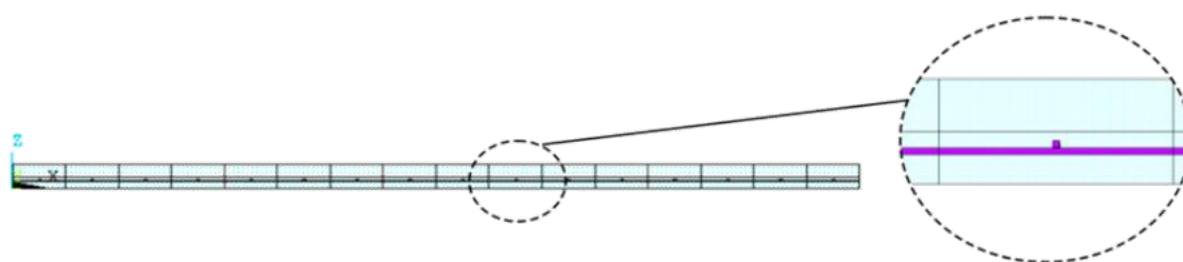
(a) Elementos – isométrico com condições de contorno



(b) Armadura - isométrico



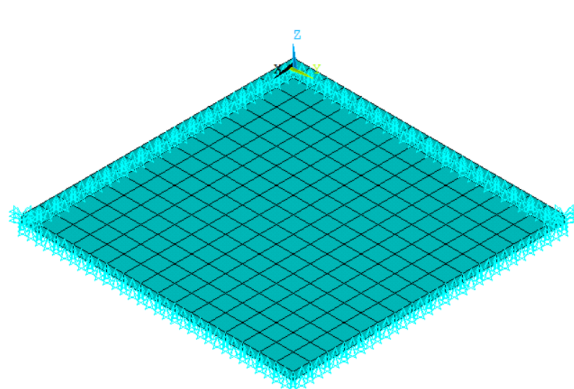
(c) Elementos e armadura - isométrico



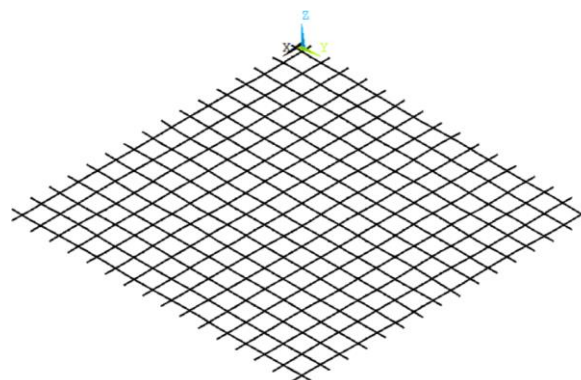
(d) Elementos e armadura – vista lateral

Fonte: O autor.

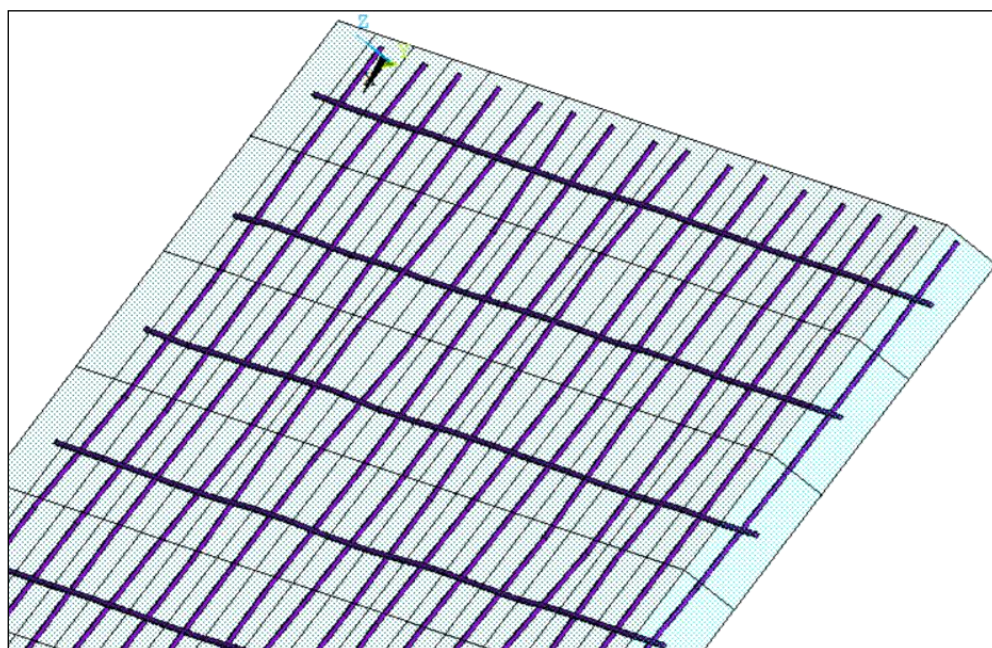
Figura 47 - Modelo numérico – Armadura variável



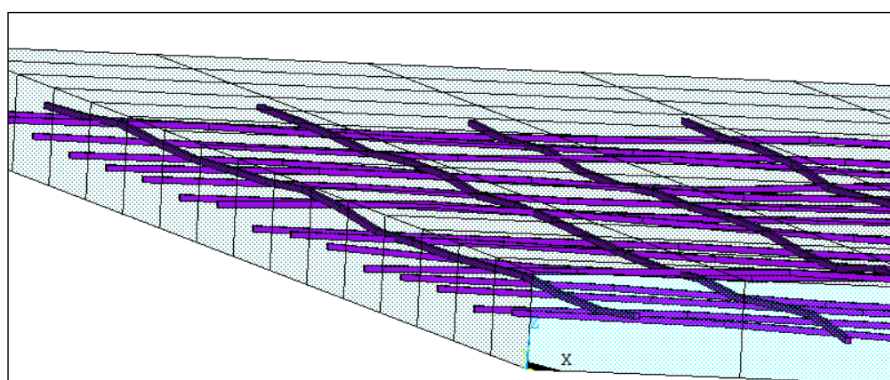
(a) Elementos – isométrico com condições de contorno



(b) Armadura - isométrico



(c) Elementos e armadura – isométrico



(d) Elementos e armadura – isométrico (lateral)

Fonte: O autor.



### 7.3 FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE ADOTADA

Em uma situação real, geralmente não se conhece a distribuição das variáveis aleatórias envolvidas no sistema. Sendo assim, as funções que descrevem a resposta de estruturas reais são funções implícitas que precisam de processos numéricos, tais como a análise pelo método dos elementos finitos. Nestes casos, as derivadas (utilizadas para obter a probabilidade de falha) não são facilmente calculadas, e cada avaliação da função estado limite pode exigir altos custos computacionais.

Segundo Araújo (2014) e a NBR 6118:2014, para as lajes maciças, a verificação para o ELS fica resumida como sendo um simples cálculo de flecha,  $l/250$ , sendo  $l$  o menor vão da laje. Não sendo, normalmente, necessário verificar o ELS de fissuração. Usualmente as barras utilizadas nos projetos de laje possuem diâmetros muito pequenos e a abertura da fissura depende do diâmetro da barra de aço utilizada (ela será maior quanto maior for o diâmetro das barras da armadura).

A função de estado limite adotada (utiliza apenas o cálculo de flechas) é válida somente para o ELS. O ELU não foi avaliado, pois para atingir o ELU, em geral, a laje viola primeiro o ELS. O usuário, identificando flechas excessivas, pode intervir buscando soluções de reforço estrutural para que a estrutura não chegue à ruína. O intuito desse trabalho é avaliar os deslocamentos excessivos, que comprometam a aparência, o conforto e a durabilidade da estrutura. Com isso, a função de estado limite fica definida como sendo:

$$g(X) = \frac{Flecha_{ELS}}{|Flecha_{numérica}| \times Fluência} - 1 \quad (7.2)$$

Onde a  $Flecha_{numérica}$  é o valor obtido via simulação no *software* ANSYS, em que é avaliado algumas situações para verificar qual o impacto da inclusão ou retirada de certas variáveis aleatórias no valor final da flecha. A  $Flecha_{ELS}$  é o deslocamento limite normativo,  $l/250$  e a  $Fluência$  é o valor que leva em consideração as deformações decorrentes das cargas de longa duração em função

da fluência do concreto, tal valor é de  $(1 + \alpha_f)$ , onde o valor de  $\alpha_f$  é de 1,32, conforme exposto na equação (3.44).

Deste modo, quando a função retorna em valores negativos significa insucesso/falha e quando retorna positiva, ocorre o sucesso e a estrutura encontra-se segura dentro do desempenho esperado. É de extrema importância escolher uma boa função de estado limite.

#### 7.4 ESTUDO DA SENSIBILIDADE DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Antes de avaliar a confiabilidade para as situações postas, decidiu-se analisar a sensibilidade das variáveis aleatórias a fim de descobrir o quanto cada uma afeta a função de estado limite. A sensibilidade para pequenas variações nos parâmetros do modelo estrutural (propriedades do material, cargas e dimensões) é essencial para calcular a variação estatística na resposta da estrutura. Neste aspecto, o problema de análise estrutural requer a solução de equações algébricas, problemas de autovalores, dentre outras, cuja análise da sensibilidade permite obter as derivadas dessas equações em relação a seus coeficientes.

A análise de sensibilidade pode ser chamada também, de gradientes das respostas da estrutura. Os gradientes da função objetivo são obtidos a partir dos gradientes das respostas da estrutura, sendo que, nesse trabalho as respostas de interesse são os deslocamentos. Os gradientes mostram a sensibilidade da resposta da função a pequenas mudanças nas variáveis de interesse.

Para o cálculo dos gradientes é de extrema importância escolher um método eficaz e de fácil implementação, pois nesse processo há um consumo computacional grande. É importante destacar que erros de precisão no cálculo das derivadas, acarretam problemas de convergência dos algoritmos de otimização. Dentre os métodos existentes, optou-se neste trabalho pela utilização do Método das Diferenças Finitas.

### Método das Diferenças Finitas (MDF)

É um método de fácil implementação, porém de elevado custo computacional, sendo considerada a técnica mais simples para o cálculo da sensibilidade. Sendo a função  $f(x)$ , em que  $x$  é a variável de projeto, a aproximação por diferenças finitas de primeira ordem (chamada de diferenciação à vante) é aproximada através da equação (7.3).

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (7.3)$$

A formulação de diferenças finitas de segunda ordem (chamada de diferenças centrais) é:

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (7.4)$$

Onde o  $\Delta x$  é a perturbação absoluta, suficientemente pequena para gerar resultados satisfatórios. A precisão do MDF está fortemente ligada a essa perturbação e à não-linearidade da função. Há algumas controvérsias com relação ao valor mais adequado para essa constante. Valores muito grandes levam a erros de truncamento, já valores muito pequenos, levam a erros de arredondamento (ALVES, 2003).

Neste trabalho o valor de  $\Delta x$  utilizado foi de 0,5% para a análise de confiabilidade (pois o cálculo é feito no espaço reduzido  $Z$ , onde as variáveis têm todas média zero e desvio padrão unitário). Para a análise de sensibilidade, foi utilizado um valor de 30% a mais do valor médio das variáveis e 30% a menos, porém no caso do  $L_c$  e do  $h$ , esse valor foi alterado para obter uma melhor convergência.

### 7.4.1 Análise dos resultados do estudo de sensibilidade

Analisaram-se todas as variáveis aleatórias contidas na Tabela 12, onde foram avaliadas para a armadura reta (coordenada  $z$  fixa) e para a armadura variável (coordenada  $z$  variando). Na geração das amostras aleatórias, que seguem a distribuição pré-definida, foi utilizado o Método de Simulação de Monte Carlo. O método tem como principal vantagem, com relação à análise de sensibilidade, a possibilidade de investigar inúmeras combinações das v.a., simultaneamente, criando uma distribuição para o valor esperado do deslocamento. Com nisso é possível criar histogramas para todas as v.a. envolvidas. Utilizou-se 200 simulações com amostragem por Hipercubo Latino na geração dessas amostras. Foram investigados 3 níveis, sendo 30% para mais e para menos (0,7; 1; 1,3) dos valores nominais, mantendo os desvios padrões originais. Este estudo foi realizado considerando a modificação de cada variável uma por vez.

A propagação da incerteza dos parâmetros estudados para ELS de deslocamento é dividida por variável. A Tabela 16 traz o tempo de processamento para cada uma das simulações realizadas. As análises foram feitas nos computadores cujas configurações estão descritas na Tabela 18.

Tabela 16 – Tempo de processamento das análises de sensibilidade

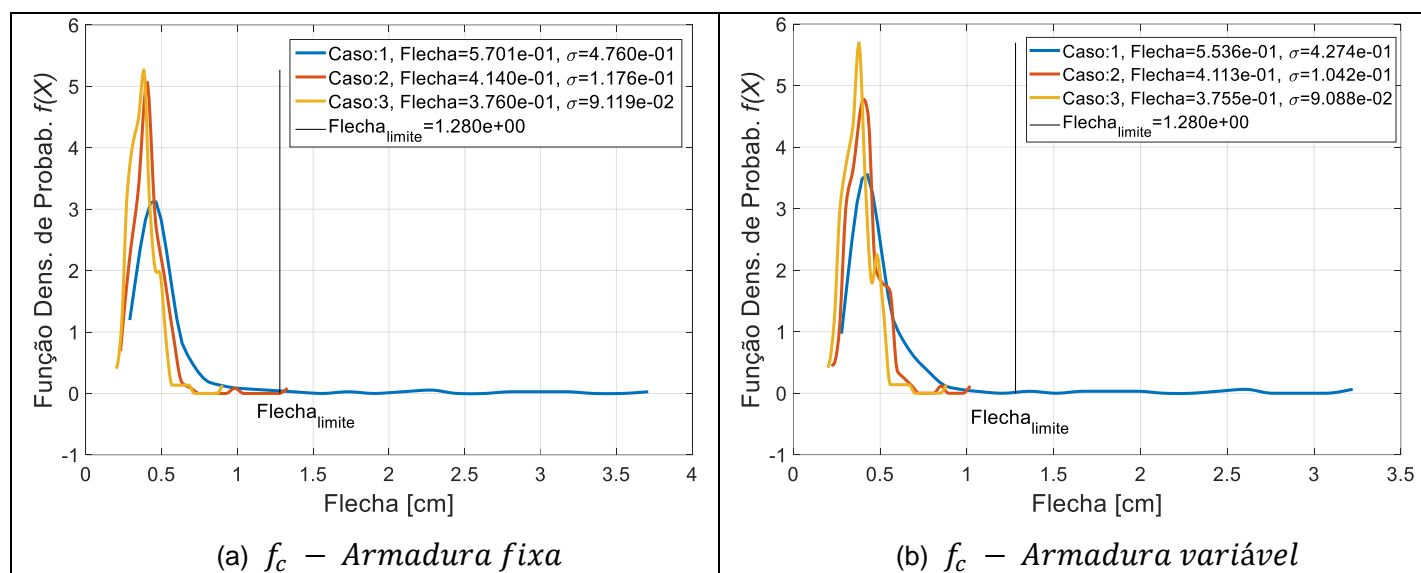
|                           | Parâmetros   | Sím.          | Valor                  | Tempo computacional armadura fixa | Tempo computacional armadura variável |
|---------------------------|--|---------------|------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| Variáveis Aleatórias      | Resistência à compressão do concreto   | $f_{ck}$      | 2,5 kN/cm <sup>2</sup> | 02:29:01                          | 02:19:16                              |
|                           | Tensão de escoamento do aço  | $f_{yk}$      | 50 kN/cm <sup>2</sup>  | 02:19:55                          | 02:42:02                              |
|                           | Altura   | $h$           | 9 cm                   | 02:28:26                          | 02:31:08                              |
|                           | Largura  | $L_x$ e $L_y$ | 320 cm                 | 02:36:43                          | 02:32:24                              |
|                           | Cobrimento   | $cobri$       | 2,5 cm                 | 02:30:43                          | 02:13:30                              |
| Variáveis determinísticas | Comprimento de correlação  |               |                        |                                   | 02:13:40                              |
|                           | Comprimento de correlação – com cobrimento sendo variável determinística (cobri=2,5 cm, sem média e desvio padrão) | $L_c$         | 70 cm                  | -                                 | 02:13:04                              |

Fonte: O autor.

- **Resistência à compressão do concreto**

Com relação ao  $f_c$ , houve pouca diferença nos valores das flechas entre os casos da armadura fixa e da armadura variável. O caso 1 da armadura variável e os casos 1 e 2 da armadura fixa, tiveram valores que foram maiores que a flecha limite, situação que viola o ELS. Tanto para armadura fixa, quanto para a armadura variável, o caso 1 apresentou uma flecha maior que o caso 2 e o caso 3, sendo possível concluir que quanto menor o  $f_c$ , maior o valor da flecha. Com isso, é possível constatar que o  $f_c$  influencia significativamente na deflexão da laje. Os resultados da análise estão expostos na Figura 48.

Figura 48 - Análise de sensibilidade -  $f_c$



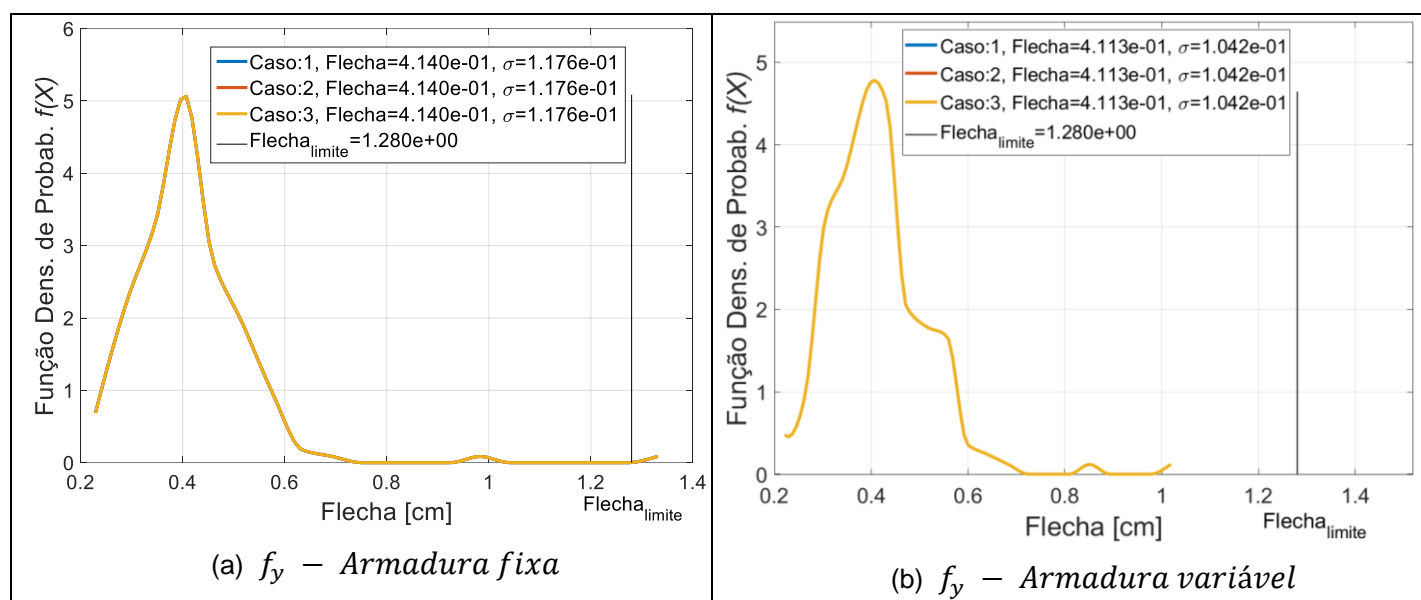
Fonte: O autor.

- **Tensão de escoamento do aço**

Analisando o  $f_y$ , tanto para a armadura variável quanto para a armadura reta, os valores para as flechas foram próximos, com variação de ordem centesimal, conforme pode ser observado na Figura 49. Algumas amostras da análise da armadura fixa violaram o ELS. Todos os casos avaliados (caso 1, 2 e 3), para a armadura fixa e para armadura variável, deram o mesmo resultado de deslocamento e desvio padrão. Isso demonstra que a tensão de escoamento do aço não afeta a deflexão da laje (na condição de ELS-deslocamento). Essa situação já era esperada,

visto que, o aço não escoou (não plastificou), se manteve intacto, não havendo mudança no valor da final do deslocamento.

Figura 49 - Análise de sensibilidade -  $f_y$



Fonte: O autor.

- **Largura da laje**

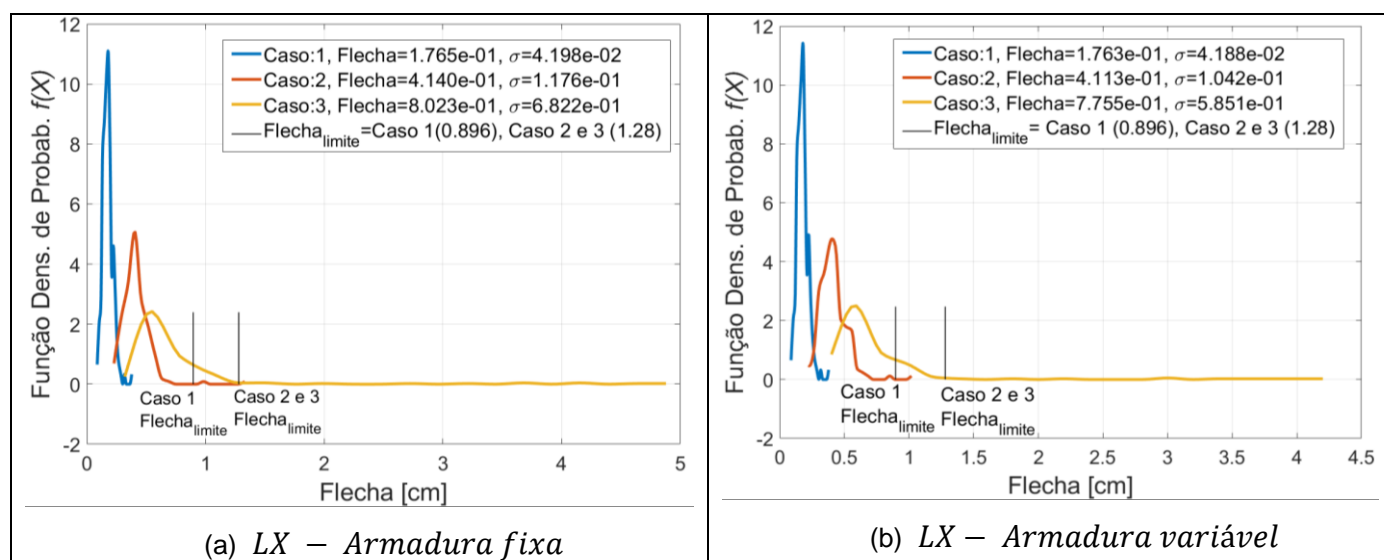
Para o  $LX$  a diferença entre a armadura fixa e a armadura variável para os casos 1 e 2 foi baixa, já para o caso 3 houve uma diferença percentual de 3,45% entre os valores. No caso 3 da armadura variável e casos 2 e 3 da armadura fixa, algumas amostras foram maiores que a flecha limite, situação que viola o ELS. Em ambas as situações, o caso 3 demonstrou ser o mais crítico em comparação com os casos 1 e 2, pois apresentou uma flecha maior. É possível concluir que quanto maior a dimensão da laje, maior é a flecha. A Figura 50 traz os resultados dessa análise.

Nesta análise em questão, a variação da dimensão para o estudo de sensibilidade foi ilustrativa, uma vez que dimensões geométricas de laje tem variações de apenas alguns centímetros. A variação de 30% foi mantida para visualizar melhor o efeito da dimensão na flecha. Dentro desta condição, é possível constatar que as dimensões da laje influenciam no valor final da flecha.

Na modelagem numérica, devido a mudanças na dimensão da laje, a armadura sofreu variação no espaçamento entre uma barra e outra. Isso porque, o programa desenvolvido redimensiona automaticamente o tamanho do elemento finito e distribui a armadura ao longo da dimensão da laje.

Na Figura 50 “a” e “b” tem-se dois valores para a flecha limite, isso porque ela é determinada em função da menor dimensão da laje. Como nesta análise o valor de  $LX$  varia, logo o valor da flecha limite tem que ser recalculado. Tal valor é calculado pela expressão  $L/250$ , onde o  $L$  é a menor dimensão da laje. Para o caso 1 o  $L$  é de 224 cm, logo o valor da flecha limite é igual a 0,896 cm, para o caso 2 e 3 o  $L$  é 320 cm, logo a flecha limite é de 1,28 cm.

Figura 50 - Análise de sensibilidade -  $LX$



Fonte: O autor.

- **Altura da laje**

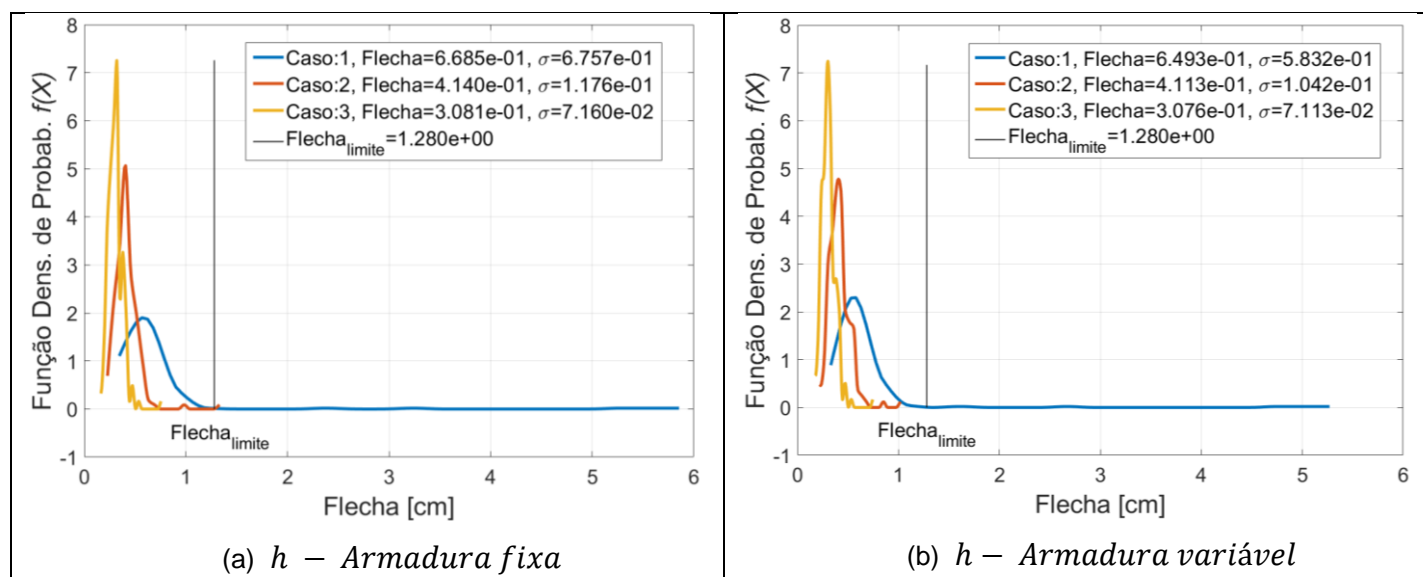
No caso da variável aleatória  $h$ , foi identificado que o percentual de 30% para mais e para menos era demasiado para este estudo. Isso porque, lajes com alturas médias muito pequenas (por exemplo  $0,7\mu_h$ ) apresentaram dificuldade de convergência com o *software* ANSYS, uma vez que as cargas foram mantidas constantes. A junção desses fatores fez com que fosse atingido o ELU. Algumas das simulações com alturas médias de laje baixas não convergiram, o que não permitia a geração dos histogramas e curvas de distribuição de probabilidade. Desta forma,

para esta variável aleatória, foi adotado para o estudo de sensibilidade uma variação de 10% para mais e para menos do valor médio, mantendo o desvio padrão original.

Após a mudança da variação do  $h$ , os resultados obtidos para a armadura reta foram similares aos obtidos para a armadura variável, tendo variação, na maioria dos casos, de ordem centesimal. Os casos 1 e 2 da armadura fixa e o caso 1 da armadura variável, tiveram amostras que violaram o ELS, situação em que a flecha obtida foi maior que a flecha limite. Para ambas as situações, o caso 1 foi o que obteve maiores valores para as flechas, seguido do caso 2 e 3, sendo possível constatar que a altura afeta significativamente o valor final da flecha.

A redução da espessura da laje provoca a diminuição do módulo da resistência à flexão da seção, devido à redução do momento de inércia, quanto menor a inércia maior será a deflexão da laje. Ou seja, quanto menor o valor de  $h$ , maior será a flecha, pois diminuindo a altura da laje, diminui a inércia da seção. Os resultados desta análise estão ilustrados na Figura 51.

Figura 51 - Análise de sensibilidade -  $h$



Fonte: O autor.

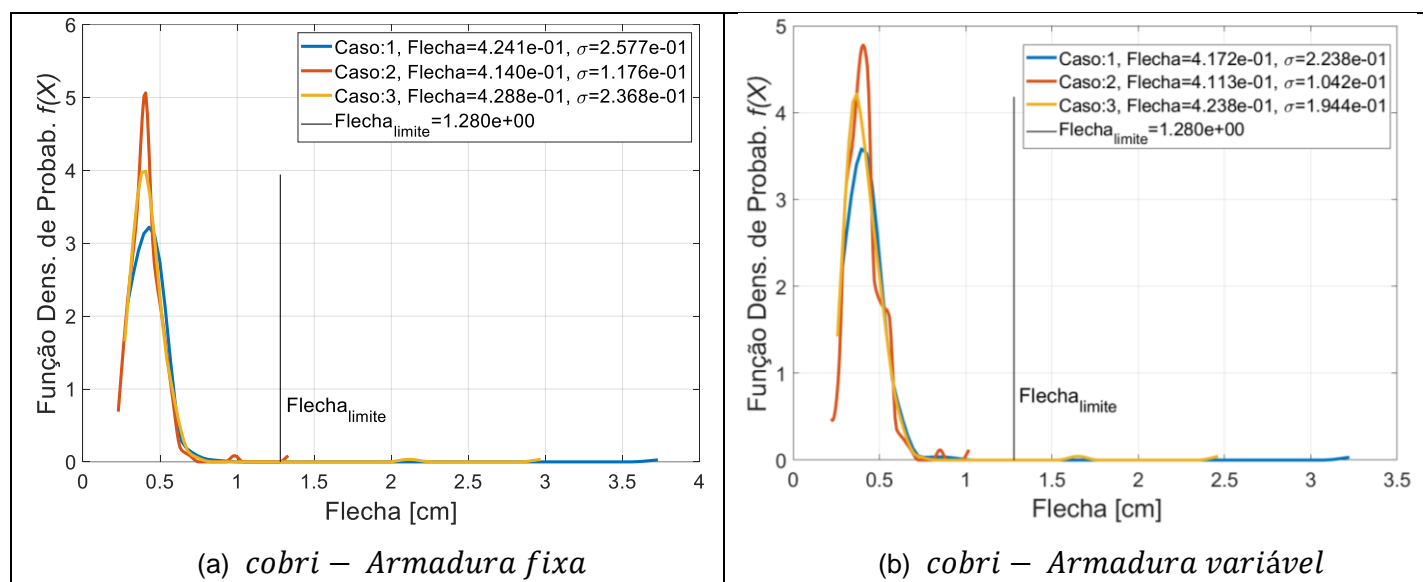


- **Cobrimento**

Analisando o cobrimento, foi possível constatar que tanto para a armadura reta quanto para a armadura variável, os resultados foram similares, tendo variação centesimal, conforme pode ser visto na Figura 52. É possível identificar diferença na frequência (eixo y dos gráficos da Figura 52) da ocorrência dos valores de flecha. Analisando os três casos, pode-se observar que a média da distribuição foi quase a mesma, ou seja, o valor médio do deslocamento foi muito próximo entre os casos, evidenciando que, mudando o valor do cobrimento o valor médio da deflexão não altera significativamente.

Os casos 1, 2 e 3 da armadura fixa e os casos 1 e 3 da armadura variável, tiveram algumas amostras que violaram o ELS. Entretanto, essas amostras têm uma contribuição muito baixa na curva de distribuição, visto que as curvas de distribuição se encontram afastadas da flecha limite. Por fim, é possível constatar que o cobrimento não afeta significativamente o valor final da flecha da laje.

Figura 52 - Análise de sensibilidade - *cobri*



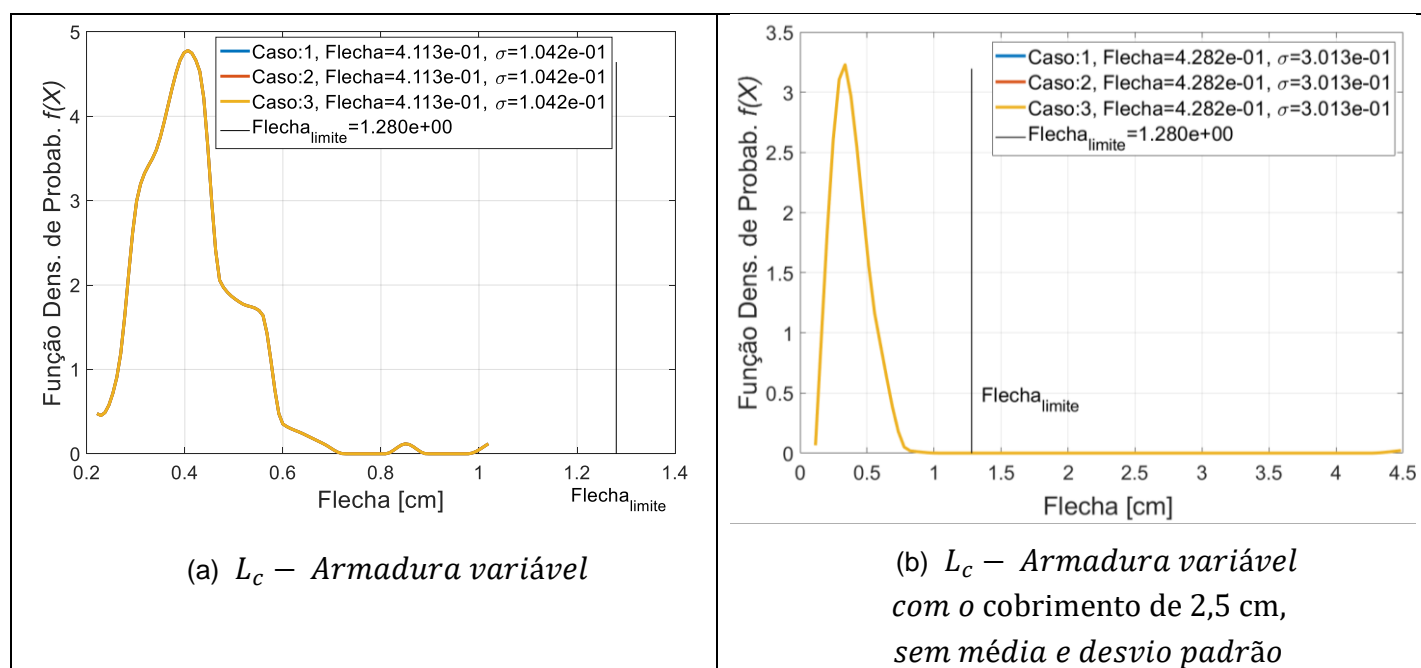
Fonte: O autor.

- **Comprimento de correlação**

Na análise do  $L_c$  não foi considerada a variação de 30% para mais e a menos do valor nominal, pois não se identificou diferenças. Logo, o valor foi aumentado nos casos 1, 2 e 3 para [15, 70, 350] cm, respectivamente. O caso 1 representa um campo praticamente aleatório (cada região da laje possui um cobrimento levemente diferente) o caso 2 representa o campo usual (medido experimentalmente e ajustado aqui nesse trabalho), já o caso 3 representa um campo uniforme (como se a armadura em qualquer região da laje, tivesse sempre o mesmo cobrimento).

Por fim, foi possível identificar que para a armadura variável com o cobrimento sendo uma variável determinística (Figura 53 “b”), algumas amostras violaram o ELS. Conclui-se que, o  $L_c$  não influencia no valor da flecha quando o cobrimento não tem variação do seu valor (cobrimento fixo em toda a extensão da laje, sofrendo variação uniforme em cada um dos casos avaliados e em todas as regiões da laje) e quando o cobrimento tem uma variação espacial (cobrimento diferente em cada região da laje, sofrendo ou não variação). Os resultados dessa análise estão ilustrados na Figura 53.

Figura 53 - Análise de sensibilidade -  $L_c$



Fonte: O autor.

## 7.5 CONFIABILIDADE PARA O ELS-DESLOCAMENTOS

Conforme a análise de sensibilidade, as variáveis que mais afetaram a função de estado limite foram o  $f_c$ ,  $LX$ ,  $LY$  e o  $h$ . Sendo que não houve diferenças significativas entre a armadura reta e a armadura espacial. Com isso, na análise de confiabilidade analisou-se quatro casos, sendo eles descritos abaixo, onde o valor nominal de cada variável está exposto na Tabela 17.

- a) armadura reta e considerando todas as 10 v.a.

$$G, Q, f_c, f_y, h, L_x, L_y, \text{cobri}, \theta_S, \theta_R;$$

O intuito nesta análise foi avaliar todos os parâmetros que, de certa forma apresentam variações e identificar qual o impacto na confiabilidade da laje. As v.a. escolhidas são aquelas descritas no tópico 7.1.

- b) armadura reta e desconsiderando o cobrimento como v.a., ficando a análise com apenas 9 das 10 v.a.

$$G, Q, f_c, f_y, h, L_x, L_y, -, \theta_S, \theta_R;$$

O objetivo desta análise foi avaliar o efeito do cobrimento, já que foi visto na análise de sensibilidade que ele não influencia no valor final da flecha.

- c) a mesma situação da letra “b”, porém, com a armadura variável.

$$G, Q, f_c, f_y, h, L_x, L_y, -, \theta_S, \theta_R;$$

Nesta análise o intuito foi analisar se, realmente, há diferença na confiabilidade o fato da armadura ter variações (na coordenada z) na disposição das barras ou não.

- d) armadura reta e desconsiderando as dimensões  $LX$  e  $LY$  da laje, ficando a análise com apenas 8 das 10 v.a.

$$G, Q, f_c, f_y, h, -, -, \text{cobri}, \theta_S, \theta_R;$$

Como foi identificado na análise de sensibilidade que as dimensões da laje exercem certa influência no valor final da flecha, teve-se o interesse de avaliar a confiabilidade retirando-as das v.a. Com isso, será possível identificar qual a influência das demais v.a. sem a interferência das

dimensões da laje. Neste estudo a laje fica com uma dimensão única de 320 x 320 cm em todas as análises.

Durante as análises de confiabilidade, teve-se o interesse de avaliar utilizando tanto o método FORM, quanto o de Monte Carlo Puro. Porém, devido ao elevado custo computacional, decorrente do elevado número de simulações, o método de Monte Carlo Puro seria inviável. Então, como medida alternativa, optou-se por utilizar o método de Monte Carlo com Amostragem por Importância (MCAI), o qual requer uma menor quantidade de simulações. Isso foi pensado a fim de avaliar a precisão do método FORM frente ao de Monte Carlo.

Tabela 17 – Valores iniciais atribuídas às variáveis aleatórias

| <b>Categoria</b>                    | <b>Nome</b>                           | <b>Sím.</b>   | <b>Uni.</b>        | <b>Valor Médio</b> |
|-------------------------------------|---------------------------------------|---------------|--------------------|--------------------|
| Ações                               | Permanente                            | $G$           | kN/cm <sup>2</sup> | 0,0004175          |
|                                     | Variável                              | $Q$           | kN/cm <sup>2</sup> | 0,0003             |
| Resistência dos materiais           | Concreto                              | $f_{ck}$      | kN/cm <sup>2</sup> | 2,5                |
|                                     | Aço                                   | $f_{yk}$      | kN/cm <sup>2</sup> | 50                 |
| Dados geométricos                   | Altura                                | $h$           | cm                 | 9                  |
|                                     | Largura                               | $L_x$ e $L_y$ | cm                 | 320                |
|                                     | Cobrimento                            | $cobri$       | cm                 | 2,5                |
| Incerteza - Ações                   | Incertezas de modelo das solicitações | $\theta_s$    | -                  | 1                  |
| Incertezas de modelo da resistência | Flexão                                | $\theta_r$    | -                  | 1                  |

Fonte: O autor.

No decorrer das análises identificou-se que os valores do índice  $\beta$  obtidos com o FORM foram muito próximos dos valores obtidos com o MCAI. Surgindo então o questionamento: qual dos dois é o mais confiável? Por estar se trabalhando com o MEF a função de estado limite é implícita, sendo necessário um processo número para a sua avaliação, e devido a isso, o método FORM (que usa gradientes) pode apresentar uma maior dificuldade para encontrar o índice  $\beta$ . Ou seja, a curva pode apresentar múltiplos mínimos e o índice  $\beta$  encontrado pelo método FORM pode não ser o valor mínimo global, não sendo então o valor correto.

O método de MCAI, diferente do método FORM, utiliza mais amostras e não precisar avaliar os gradientes da função de estado limite, devido a isso o seu resultado é mais confiável. As análises foram feitas utilizando o *software* Matlab em conjunto com o *software* ANSYS (*Mechanical APDL 2022 R1 Student*) em dois computadores distintos. As configurações dos computadores estão listadas na Tabela 18.

Tabela 18 – Configuração computadores utilizados

| Computador | Configuração   |
|------------|--|
| UFRGS      | Processador: Intel(R) Core(TM) i9-9900K CPU @ 3.60GHz<br>3.60 GHz (64bits Windows 10). RAM:32.0 GB |
| Autor      | Processador: Intel(R) Core(TM) i7-9750H CPU @ 2.60GHz<br>2.59 GHz (64bits Windows 10). RAM: 8.0 GB |

Fonte: O autor.

Atualmente no Brasil ainda não há uma norma específica para analisar a confiabilidade, devido a isso, neste trabalho foi utilizado como valores de referência o indicado na ISO 2394:1998. Segundo a ISO 2394:1998, o índice de confiabilidade alvo é obtido conforme a intensidade da consequência que a falha causaria na situação de interesse, conforme exposto na Tabela abaixo:

Tabela 19 – Índice de confiabilidade alvo – ISO 2394:1998

| Custo das medidas de segurança | Consequência do erro |       |          |       |
|--------------------------------|----------------------|-------|----------|-------|
|                                | Pequena              | Média | Moderada | Alta  |
| Alta                           | 0                    | A 1,5 | 2,3      | B 3,1 |
| Moderada                       | 1,3                  | 2,3   | 3,1      | C 3,8 |
| Baixa                          | 2,3                  | 3,1   | 3,8      | 4,3   |

Sugestões:

A: Para estados limites de serviço usar  $\beta = 0$  para situações reversíveis, para situações irreversíveis usar  $\beta = 1,5$ .

B: Para o estado limite de fadiga utilizar  $\beta = 2,3$  a  $\beta = 3,1$ , dependendo da possibilidade de inspeção.

C: No dimensionamento para o estado limite último, utilizar  $\beta = 3,1, 3,8$  e  $4,3$ .

Fonte: Adaptado da ISO 2394:1998.

Neste trabalho em questão, como está se trabalhando com o ELS, o índice de confiabilidade alvo é de 1,5, considerando a consequência do erro como média e o

custo de reparo alto. Neste trabalho, assume-se que a violação da flecha, além do limite permitido por norma, poderá ocasionar problemas do tipo irreversíveis, como o deslocamento do piso e/ou dificuldades de fechamento das aberturas (portas e janelas). Valores de índice  $\beta$  acima do valor alvo, indicam que a probabilidade de falha da estrutura de análise é menor do que o imposto. Situação favorável para a segurança. Porém, quando o valor do índice  $\beta$  estiver abaixo do valor alvo, indica que a estrutura tem uma maior probabilidade de falha, acima do que é prescrito. Essa situação é desfavorável para a segurança.

Na Tabela 22 está contido o tempo computacional de cada uma das situações avaliadas. O número máximo de lotes de simulação para o MCAI foi de 200. O valor dos parâmetros utilizados em cada um dos métodos, MCAI e FORM, estão reunidos nas Tabela 20 e Tabela 21, respectivamente. Para a Tabela 20, a *tol* é o coeficiente de variação para a probabilidade de falha, *n* é o número de amostras e *kmax* é o número máximo de lotes de re-simulações admitidos. Foi definido o percentual de 5% para *tol*, pois é o um valor, normalmente, utilizado pela literatura e tido como aceitável. O valor de *n* e *kmax* (totalizando 20.000 simulações em elementos finitos), foi escolhido de modo que as simulações não demandassem muito tempo e ainda assim resultassem em valores aceitáveis para a  $P_f$ .

Para a Tabela 21, *tol* significa a norma da diferença entre as variáveis aleatórias reduzidas de uma iteração e a anterior no FORM. Já  $\Delta z$  significa a perturbação que é dada a cada uma das v.a. para calcular os gradientes quando necessário. O  $\Delta z$  foi adotado como sendo de 10%, pois é um valor aceitável pela literatura, uma vez que as variáveis estão no espaço reduzido (todas tem média zero e desvio padrão unitário). Já o valor de *tol*, foi assumido como sendo de 10%, pois como no método FORM há o cálculo numérico dos gradientes por diferenças finitas, este valor pode estar sujeito a erros numéricos, sendo, portanto, o valor de 10% um valor razoável para atingir a convergência (conforme pode ser visto no Gráfico 2 “a”). O valor usual de 1% empregado em processos iterativos, resultaria em um número de chamadas excessivo e de iterações, para um ganho final no índice de confiabilidade muito pequeno.

Tabela 20 – Valor dos parâmetros para o método MCAI

| Parâmetro                                 | Simb.       | Valor |
|---|-------------|-------|
| Tolerância para o coeficiente de variação | <i>tol</i>  | 5%    |
| Número de amostras                        | <i>n</i>    | 100   |
| Número máximo de lotes de re-simulações   | <i>kmax</i> | 200   |

Fonte: O autor.

Tabela 21 – Valor dos parâmetros para o método FORM

| Parâmetro                                      | Simb.      | Valor |
|--|------------|-------|
| Tolerância para convergência $ Z_i - Z_{i+1} $ | <i>tol</i> | 10%   |
| Perturbação por gradientes                     | $\Delta z$ | 0,5%  |

Fonte: Autor.

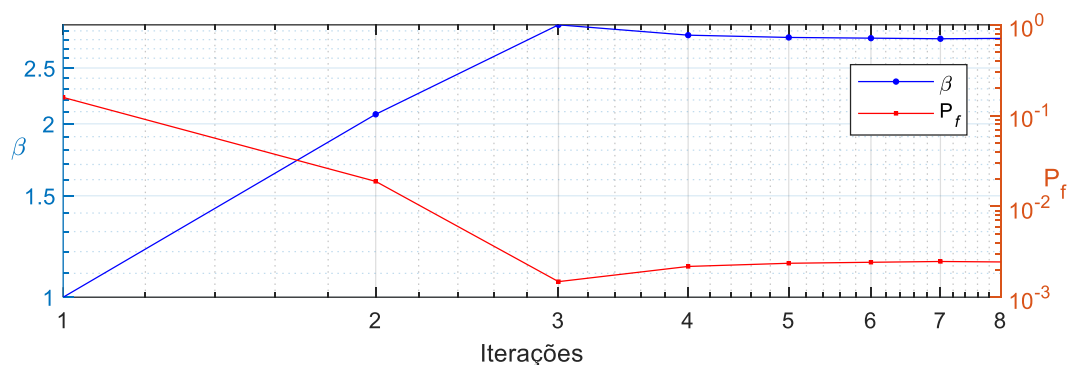
Tabela 22 – Tempo de processamento das análises de confiabilidade

| Caso   | Situação          | Tempo computacional FORM | Tempo computacional MCAI |
|--|-------------------|--------------------------|--------------------------|
| (a) $G, Q, fc, fy, h, Lx, Ly, cobri, \theta_S, \theta_R$ | Armadura Reta     | 00:37:22                 | 106:29:24                |
| (b) $G, Q, fc, fy, h, Lx, Ly, -, \theta_S, \theta_R$     | Armadura Reta     | 00:17:35                 | 38:41:13                 |
| (c) $G, Q, fc, fy, h, Lx, Ly, -, \theta_S, \theta_R$     | Armadura Variável | 00:39:07                 | 57:38:13                 |
| (d) $G, Q, fc, fy, h, -, -, cobri, \theta_S, \theta_R$   | Armadura Reta     | 00:44:48                 | 80:48:36                 |

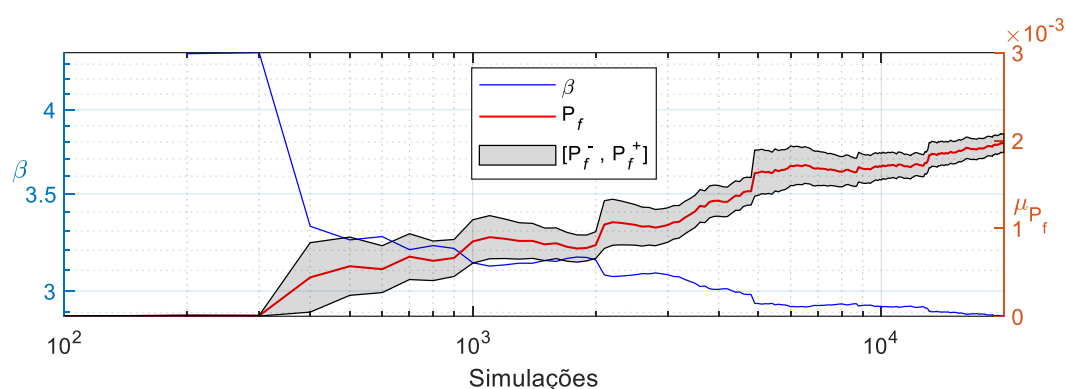
Fonte: O autor.

O Gráfico 2 ilustra a convergência do método MCAI e FORM para o caso “a”. A curva em vermelho indica a probabilidade de falha e a em azul o índice  $\beta$ . No gráfico de MCAI a banda cinza em torno da curva vermelha representa o intervalo de confiança para 95% do valor máximo e mínimo da probabilidade de falha. A convergência para os demais casos encontra-se no Apêndice A.

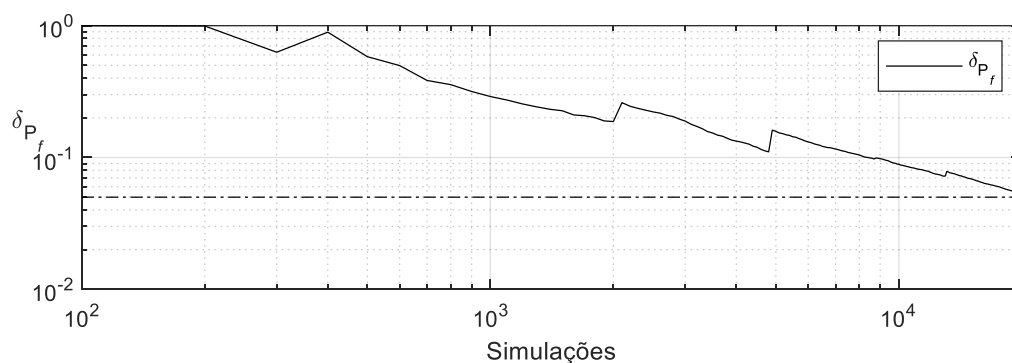
Gráfico 2 – Convergência dos métodos para o caso “a”



(a) FORM caso “a”



(b) MCAI caso “a”



(c) MCAI-Coeficiente de variação, caso “a”

Fonte: O autor.

É possível observar no Gráfico 2 “a”, que a convergência no método FORM ocorre, aproximadamente, na 5ª iteração. No mesmo gráfico, letra “b”, para MCAI, percebe-se que à medida que o número de simulações aumenta, o intervalo de confiança em torno da probabilidade de falha vai reduzindo, indicando a convergência para o valor final. Essa mesma convergência pode ser avaliada



observando a curva preta, no gráfico “c”, que representa o coeficiente de variação da probabilidade de falha, que ficou em 5,32%. Quanto menor o valor do coeficiente de variação da probabilidade de falha, maior a certeza de que o valor da probabilidade de falha é o verdadeiro.

Através das análises com o método FORM, avaliou-se a sensibilidade (pelos cossenos diretores) de cada um dos casos. Na Tabela 23 estão os valores do índice  $\beta$  para o método FORM e para o método de MCAI. Para as análises de MCAI, as simulações ocorreram até atingir um dos critérios de parada: coeficiente de variação inferior a 5%, ou até atingir o número máximo de simulações ou re-simulações. Na sequência está descrito o observado em cada um dos casos avaliados

Tabela 23 – Resultado do índice de confiabilidade para os casos avaliados

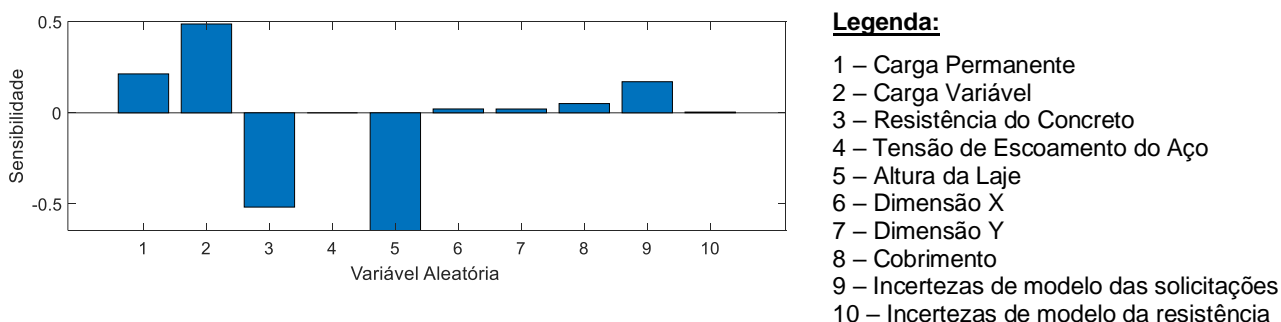
| Caso   | FORM $\beta$ | MCAI $\beta$ |
|--|--------------|--------------|
| (a) $G, Q, fc, fy, h, Lx, Ly, cobri, \theta_S, \theta_R$ | 2,814        | 2,883        |
| (b) $G, Q, fc, fy, h, Lx, Ly, -, \theta_S, \theta_R$     | 2,818        | 2,868        |
| (c) $G, Q, fc, fy, h, Lx, Ly, -, \theta_S, \theta_R$     | 2,862        | 2,870        |
| (d) $G, Q, fc, fy, h, -, -, cobri, \theta_S, \theta_R$   | 2,837        | 2,837        |

Fonte: Autor.

- **Caso A**

Analisando o caso “a”, é possível identificar, pelo gráfico de sensibilidade, que a variável que mais influência no valor final da flecha é a altura da laje, seguida da resistência do concreto e das ações variáveis.

Figura 54 - Análise de sensibilidade caso “a”



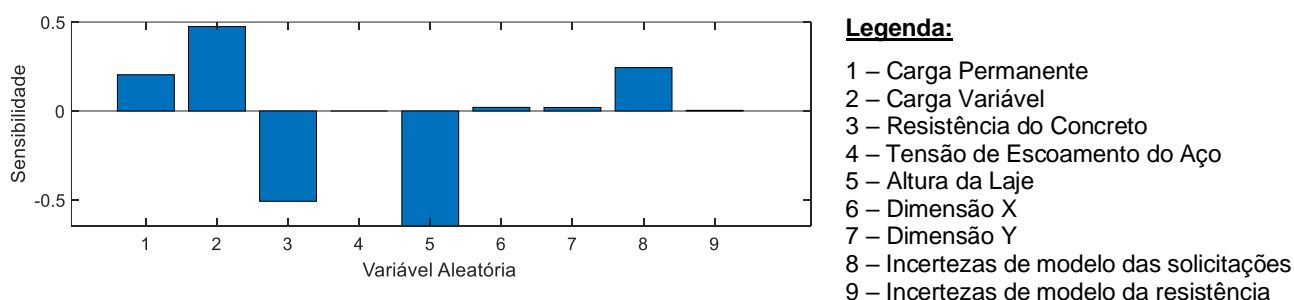
Fonte: O autor.

Com relação a confiabilidade, o método MCAI obteve um valor ligeiramente maior para o índice  $\beta$ , em comparação com o método FORM, entretanto, ambos os valores ficaram acima do prescrito pela ISO 2394:1998. O coeficiente de variação para o MCAI ficou em 5,32%, valor considerado aceitável pela literatura.

- **Caso B**

No caso “b” é possível identificar pelo gráfico de sensibilidade que a variáveis de maior relevância no valor final da flecha é a altura da laje, seguida das ações variáveis e a resistência do concreto.

Figura 55 - Análise de sensibilidade caso “b”



Fonte: O autor.

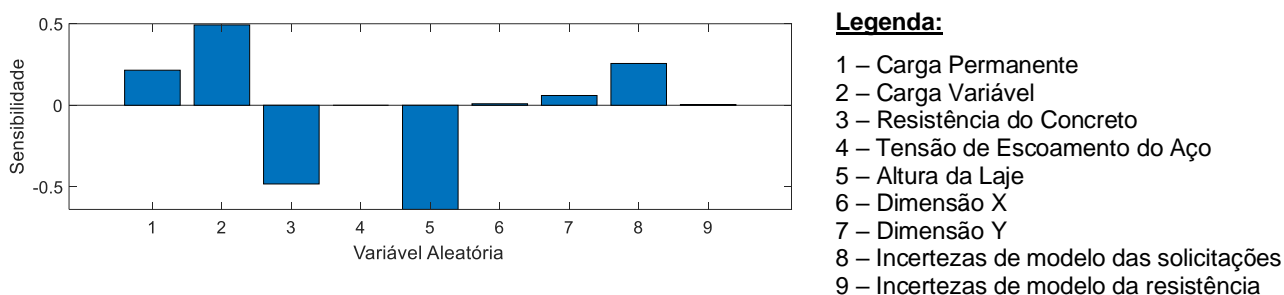
Com relação a confiabilidade, o método MCAI e o FORM obtiveram valores de índice  $\beta$  quase iguais. O índice de confiabilidade ficou muito próximo do obtido no caso “a”. O caso “a” e “b” se diferem em um único ponto: no “b” é desconsiderado o cobrimento e no “a” é considerado. Na análise de sensibilidade, abordada no item 7.4, foi identificado que o cobrimento não influencia significativamente no valor da flecha para o ELS, logo na análise de confiabilidade essa constatação foi confirmada, dando valores de índice  $\beta$  próximos entre os dois casos (caso “a” e “b”). Para o método MCAI o coeficiente de variação ficou em 4,93%, valor aceitável pela literatura. O valor do índice  $\beta$ , para ambas as análises, ficaram acima do prescrito pela ISO 2394:1998.

- **Caso C**

O caso “c” é similar ao caso “b”, a única diferença entre os dois é que no caso “c” a armadura é variável e no caso “b” a armadura é fixa. É possível identificar que, considerando a armadura variável, as variáveis obtiveram relevância similares entre o caso “c” e “b”. Em ambos os casos a variável mais relevante continuou sendo a altura da laje.

Com isso, é possível constatar que, ao se fazer a hipótese da variação da armadura, isto não mudou significativamente as variáveis de maior importância na confiabilidade.

Figura 56 - Análise de sensibilidade caso “c”



Fonte: O autor.

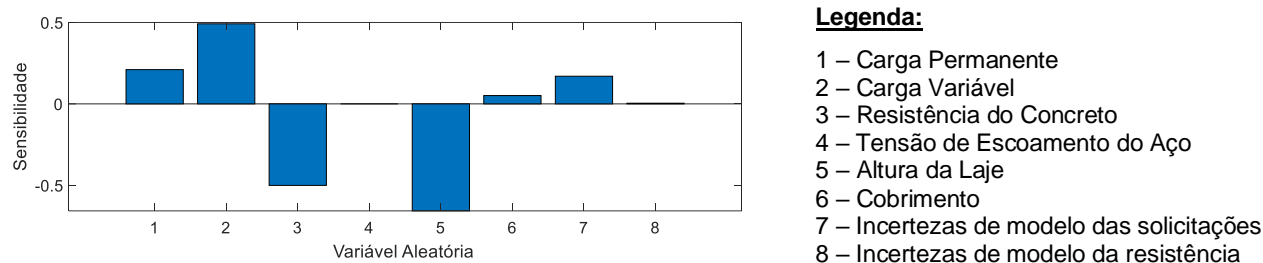
Na análise de confiabilidade foi possível constatar que o valor do índice  $\beta$  ficou muito próximo entre o método FORM e o método MCAI. O coeficiente de variação do MCAI ficou em 4,99%, valor considerado aceitável pela literatura. Ambos os casos estão a favor da segurança, com valores de índice  $\beta$  cima de 1,5 (valor prescrito pela ISO 2394:1998).

- **Caso D**

No caso “d” é possível identificar que as variáveis que mais influenciam no valor final da flecha são a altura da laje, seguida pela carga variável e a resistência do concreto. Na análise de sensibilidade foi visto que as variáveis  $LX$  e  $LY$  afetam a flecha da laje, porém nas análises de confiabilidade foi constatado que elas não possuem grande relevância. Isso se deve ao fato de que, numa situação real as dimensões da laje sofrem uma variação mínima, não sendo capaz de interferir na

deflexão final da mesma. No estudo de sensibilidade foi considerado uma variação alta das dimensões da laje (30% para mais e para menos do valor nominal), o que acabou impactando no valor final da flecha.

Figura 57 - Análise de sensibilidade caso “d”



Fonte: O autor.

A retirada das dimensões  $LX$  e  $LY$  na análise de confiabilidade resultou em um valor de índice de confiabilidade similar aos demais casos avaliados. Essa situação já era esperada, visto que nos demais casos essas variáveis tiveram pouca relevância. O método FORM e o método MCAI resultaram no mesmo valor de índice  $\beta$ . Para o método de MCAI o coeficiente de variação ficou em 4,99%, valor condizente com os valores aceitáveis pela bibliografia. O valor do índice  $\beta$  ficou acima do recomendado pela ISO 2394:1998.

Para todos os casos avaliados, foi possível identificar que a Tensão de escoamento do aço obteve valor nulo. Essa situação já era esperada, visto que, para o estado limite de serviço de deslocamentos, as armaduras não estão perto de plastificar. Isso indica que essa variável, provavelmente, apenas será relevante no caso do estado limite de último (perda de equilíbrio estático da seção, com ruína). Sendo assim, a não inclusão de todas as variáveis ( $f_y, L_x, L_y, cobri, \theta_R$ ), que não se mostraram relevantes, ao mesmo tempo, irá afetar o índice de confiabilidade final de forma pouco relevante. Isso significa que, o problema de confiabilidade poderia ser considerado com menos v.a., reduzindo assim, o esforço computacional.

Através do método FORM foi possível identificar que, para quase todos os casos avaliados, a incerteza de modelo da resistência não foi uma v.a. relevante. Isso demonstra que se fosse utilizado um outro modelo mais simples do que o de

Elementos Finitos, os resultados poderiam ter sido próximos dos obtidos neste estudo, sem grandes prejuízos. Entretanto, a incerteza de modelo das solicitações foi relevante em todas as análises, devido ao fato dessa incerteza afetar o carregamento da estrutura, o que por sua vez é um dos fatores que influenciam significativamente na deflexão da laje.

## 8 CONCLUSÃO

No presente trabalho foi desenvolvido, através do *software* ANSYS 2022 R1, um modelo numérico em elementos finitos, capaz de simular uma laje maciça de concreto armado. Em conjunto com o *software* Matlab, foi possível modificar o modelo numérico a fim de simular diversas configurações da laje para avaliar a confiabilidade e a sensibilidade da mesma.

O objetivo principal deste trabalho foi analisar qual o impacto na confiabilidade de uma laje quando ela apresenta certos erros de execução. Como é difícil elencar todas as variabilidades que podem existir no momento da execução de uma laje, bem como na sua utilização, foram delimitadas as imperfeições que iriam ser trabalhadas. Trabalhou-se com a variação geométrica e a variação da posição da armadura no interior da laje, em conjunto com as variáveis que conhecidamente possuem variações que afetam o comportamento real da estrutura. Foram avaliadas a confiabilidade para 4 casos possíveis, combinando as variáveis aleatórias. Foi realizada também, uma análise de sensibilidade para identificar quais variáveis têm maior impacto no deslocamento final. As análises foram feitas para o ELS-deslocamentos. A laje de estudo foi considerada simplesmente apoiada, onde o deslocamento máximo se dá no centro da estrutura. A laje foi projetada segundo as recomendações da NBR 6118:2014 e o modelo numérico foi validado com uma laje real, com dados experimentais.

As análises de sensibilidade apontaram que a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ) e as dimensões da laje ( $LX$ ,  $LY$  e  $h$ ) foram as variáveis que mais afetaram no deslocamento final. A resistência do concreto pelo motivo de que, quanto baixa, reduzir o módulo elástico e, portanto, a rigidez do elemento. A altura  $h$  devido a forte influência na inércia da seção e as dimensões  $LX$  e  $LY$  por afetarem o vão da laje. Contudo, cabe ressaltar que em uma situação real, a variação nas dimensões  $LX$  e  $LY$  são mínimas, não sendo suficientemente significativas para ocasionar uma deflexão relevante.

A análise de sensibilidade foi de suma importância para o entendimento do comportamento da laje proposta, pois foi possível identificar quais variáveis eram, a

priori, mais relevantes para fazer as análises de confiabilidade. Com base nisso, foi possível montar os casos avaliados no estudo de confiabilidade.

Uma das questões deste trabalho era avaliar se as imperfeições no posicionamento vertical (campo estocástico) da malha de armadura, afetaria a confiabilidade (quanto ao estado limite de serviço de deslocamento) da laje em comparação com o caso da laje com malha de armadura plana (sem imperfeições). Foi possível constatar, através da análise de sensibilidade (curvas de distribuição de probabilidade), que só o posicionamento da armadura não influencia de forma significativa na deflexão da laje. Essa constatação foi confirmada na análise de confiabilidade, onde foi avaliado dois casos iguais como apenas uma diferença: um deles possuía armadura plana (caso “b”) e no outro a armadura era variável (caso “c”). Ambos resultaram, praticamente, no mesmo valor de índice de confiabilidade.

Com relação a análise de confiabilidade, as variáveis que mais influenciaram na deflexão da laje foram a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ), a altura da laje ( $h$ ) e as ações variáveis ( $Q$ ). Ao avaliar o cobrimento foi identificado que o mesmo tem pouca influência no valor final da flecha, tanto para os casos que a malha da armadura é reta, quanto nos casos em que a malha é variável (campo estocástico). Entretanto, vale ressaltar que o cobrimento é fundamental a longo prazo, pois é a barreira física que bloqueia a transposição dos agentes agressores até a armadura, garantindo a proteção das barras.

Todos os casos estudados ficaram com o índice de confiabilidade acima do prescrito pela ISO 2394:1998. O que demonstrou que a estrutura é bastante segura, quanto ao ELS. Não houve diferença significativa no valor do índice  $\beta$  obtido pelo método FORM e pelo método MCAI, tendo uma variação de, no máximo de 2,4%, (assumindo como referência o valor de MCAI por ser mais preciso).

Embora o método MCAI seja mais preciso que o método FORM, as análises utilizando o MCAI foram mais custosas computacionalmente, tal que, a resposta probabilística consumiu em média 70 horas. O Método FORM foi mais rápido, consumindo em média 34 minutos e tendo resultados satisfatórios, com valores muito próximos ao do MCAI. Esse método é amplamente utilizado por ser mais rápido computacionalmente, embora, em funções de estado limite não lineares, o

seu resultado pode ficar longe do resultado correto. Isso sugere que, eventualmente, a função de estado limite deste estudo apresente pouca não-linearidade.

Para o desenvolvimento deste trabalho, a proporção entre a carga permanente e a variável se manteve a mesma em todas as análises. Isso foi garantido devido ao fator  $\chi$ , que foi mantido o mesmo do dimensionamento inicial da laje. Este valor de  $\chi$  é representativo de casos usuais em edifícios residenciais.

As conclusões aqui obtidas, estão limitadas a somente uma configuração de  $\chi$ , dimensões geométricas da laje e as condições de contorno adotadas. Nessas circunstâncias, a verificação, segundo critérios de Norma, indica um momento de fissuração menor que o atuante, indicativo de seção no estágio I, não fissurada. Entretanto, cabe salientar que durante as simulações foram detectados casos em que esta situação foi ultrapassada (pequena altura da laje associada a baixa resistência do concreto e valor mais elevado do carregamento), gerando simulações com laje fissurada na parte central no vão.

## 8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Diante dos resultados obtidos, constatou-se a importância de estudos mais aprofundados e ampliados. Portanto, como sugestão para serem estudados em trabalhos futuros:

- a) fazer um estudo com outras condições de contorno, a fim de investigar se há mudanças significativas;
- b) variar o fator  $\chi$  a fim de investigar o impacto da variação do carregamento na confiabilidade das lajes;
- c) validar o modelo numérico com outras lajes que possuam resultados experimentais, a fim de confirmar a precisão e acurácia do modelo apresentado;
- d) investigar mais a fundo o recobrimento da armadura, a fim de obter mais informações experimentais das condições usuais nas construções;



- e) investigar a utilização de metamodelos no processo de simulação de Monte Carlo, a fim de otimizar as análises, reduzindo o tempo computacional.

## REFERÊNCIAS

ABDUL-WAHAB, H. M. S.; KHALIL, M. H. Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete. **Journal of Structural Engineering**, [S.l.], v. 126, n. 2, p. 219-227, fev. 2000.

ALMEIDA, A. F. **Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado**. 2008. Tese. (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ALVES, E. C. Análise de sensibilidade e otimização de estruturas submetidas a vibrações aleatórias. 2003. Tese. (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica) – Instituto Nacional de Pesquisa Espacial, São José dos Campos, 2003.

ANG, A. H-S; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering: emphasis on applications to civil and environmental engineering**. 2. ed. Nova York: John Wiley & Sons, 2007.

ANSYS Inc. **ANSYS Help System**. Version R1. Canonsburg, 2022.

ARAÚJO, J. M. **Análise de barragens de gravidade de concreto considerando a fase construtiva e a interação dinâmica barragem-reservatório-fundação**. 1995. Tese (Doutorado em Engenharia Civil), Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 1995.

ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. 4. ed. Rio Grande: Dunas, 2014, v.2.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto - procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

\_\_\_\_\_. **NBR 6120**: ações para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro: ABNT, 2019.

\_\_\_\_\_. **NBR 7480**: aço destinado às armaduras para estruturas de concreto armado - requisitos. Rio de Janeiro: ABNT, 2022.

\_\_\_\_\_. **NBR 8681**: ações e segurança nas estruturas - procedimento. Rio de Janeiro, 2004.

AYALA, I. C. A. **Customização do software ANSYS para análise de lajes de concreto protendido pelo método dos elementos finitos**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

BAJI, H.; RONAGH, H. R. Effects of cross-sectional shape on the reliability of RC columns. **Structural Concrete**. Berlin, v. 12, n. 4, p. 262-269, dez. 2011.

BARRETO, M. F. F. M. **Avaliação de desempenho de espaçadores plásticos: proposição e avanço de métodos de avaliação**. 2014. Dissertação (Mestrado em

Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

BASTOS, F. P. S. **Análise de confiabilidade de seções submetidas à flexão simples e composta pelo método de Monte Carlo**. 2012. Trabalho de conclusão (Graduação em Engenharia Civil) – Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

BECK, A. T. **Confiabilidade e Segurança das Estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.

BENEDETTI, K. **Sensibilidade da segurança de vigas e lajes de concreto armado a erros de execução**. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

BENINCÁ, M. E. **Simulação numérica de vigas alveolares mistas de aço e concreto: modelo parametrizado de elementos finitos**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

BONO, G. F. F. **Modelos constitutivos para análise tridimensional de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos**. 2008. Tese. (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

CAMPOS FILHO, A. **Estados limites de serviço em estruturas de concreto armado**. 2014. 23 p. Notas de aula.

CAMPOS FILHO, A. **Projeto de lajes maciças de concreto armado**. 2014. 43 p. Notas de aula.

CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for Structural Engineers**. 1. Ed. New York: Springer, 1988.

CHOI, S. K.; GRANDHI, R. V.; CANFIELD R. A. **Reliability-based structural design**. Londres: Springer, 2007.

COELHO, T. A. P. **Avaliação da confiabilidade de seções de vigas de concreto armado em situação de incêndio**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2018.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (CEB 230). **RC elements under cyclic loading**. State-of-the-art report, Bulletin d'Information n° 230, 1996.

DAMAS, A. P.; CAMPOS FILHO, A.; REAL, M. V. Confiabilidade de pilares de concreto de alta resistência projetados de acordo com a NBR-6118:2014. *In: XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 36, 2015, Rio de Janeiro. **Proceedings** [...]. Rio de Janeiro: ABMEC, 2015.

DEUSCHLE, E. **Estudo de confiabilidade de pilares de concreto armado dimensionados com redistribuição de esforços**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2019.

DEVORE, J. L. **Probabilidade e estatística para engenharia e ciência**. 1. ed. São Paulo: Cengage, 2006.

DRUCKER, D. C.; PRAGER, W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. **Quarterly of Applied Mathematics**, Providence, v. 10, n. 2, p.157-165, 1952.

ELLINGWOOD, B.; GALAMBOS, T. V. Probability-based criteria for structural design. **Structural Safety**, [S.l.], v. 1, n. 1, p. 15-26, mar. 1982.

EL-REEDY, M. A. **Reinforced concrete structural reliability**. 1. ed. New York: RCR Press, 2013.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. **FIB Model Code 2010**. Final draft, v. 2. Bulletin 65, 2012.

GOMES, H. M. **Análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado usando o método dos elementos finitos e processos de simulação**. 1997. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1997.

GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M.; ROCHA, M. M. Reliability analysis of reinforced concrete structures. *In: STRUCTURAL MECHANICS IN REACTOR TECHNOLOGY CONFERENCE (SMIRT 14)*, 14, 1997, Lyon. **Structural Mechanics in Reactor Technology Conference**. Lyon: IASMiRT, 1997.

GOMES, H. M. **Técnicas de Avaliação da Confiabilidade em Estruturas de Concreto Armado**. 2001. Tese (Doutorado em Engenharia Civil), Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

HOLICKÝ, M. Calibration Study of Eurocodes. *In: Probabilistic Safety Assessment and Management*, 2004, Londres. **Proceedings** [...]. Londres: Springer, 2004. p. 1421-1426.

JCSS - Joint Committee on Structural Safety. **Probabilistic model code**, 2002.

JOHANSEN, K. W. **Yield-Line formulae for slabs**. 1. ed. Londres: CRC Press, 2017. 106 p.

JOHARI, A.; DELAVAR, Z.; FIOUZ, A. Analysis of rectangular concrete slab by stochastic yield lines. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CIVIL, STRUCTURAL AND EARTHQUAKE ENGINEERING*, 4, 2020. Teerã. **Proceedings** [...]. Teerã: 2020.

LAZZARI, P. M. **Simulação numérica das etapas construtivas de pontes estaiadas através do método dos elementos finitos**. 2016. Tese. (Doutorado em

Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

LEITE, D.D. L.; GOMES, H. M. Reliability analysis of reinforced concrete sections for ultimate limit states. *In: XLII IBERO-LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING AND III PAN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS*, 42, Rio de Janeiro. **Proceedings [...]**. Rio de Janeiro: CILAMCE, 2021. p. 1-7.

LESSA, J. P. L.; JUNIOR, E. T. L.; LIMA, F. B. Confiabilidade estrutural aplicada à análise da resistência de lajes maciças em edifícios de concreto armado. *In: CONGRESSO TÉCNICO CIENTÍFICO DA ENGENHARIA E DA AGRONOMIA CONTECC'2018*, 2018, Maceió. **Anais [...]**. Maceió: 2018.

LI, Y.; VROUWENVELDER, T.; WIJNANTS, G. H.; WALRAVEN, J. Spatial variability of concrete deterioration and repair strategies. **Structural Concrete**, [S. l.], v. 5, p. 121-129, set. 2004. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1680/stco.5.3.121.48332>. Acesso em: 12 mar. 2021.

LIBERATI, E. A. P. **Análise de confiabilidade de lajes lisas de concreto armado submetidas à punção**. 2019. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019.

LOESCH, C. **Probabilidade e Estatística**. 1. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

LOW, H. Y.; HAO, H. Reliability analysis of reinforced concrete slabs under explosive loading. **Structural Safety**, Chichester, v. 23, p. 157-178, 2001.

MAGALHÃES, F. C.; REAL, M. V.; PINHEIRO, L. C. L.; SILVA FILHO, L. C. P. Avaliação da confiabilidade de pilares de concreto armado com base nos resultados oriundos de distintos locais de ensaio. *In: Congresso Brasileiro do Concreto*, 59, 2014, Natal. **Anais [...]**. Natal: IBRACON, 2014.

MAGALHÃES, F. C.; REAL, M. V.; SILVA FILHO, L. C. P.; PINHEIRO, L. C. P. Avaliação do nível de segurança estrutural de pilares de concreto armado através de metodologia numérica. **Scientia Plena**, Sergipe, v.11, n. 8, ago. 2015.

MAHMOUD, A.; NAJJAR, S.; MABSOUT, M.; TARHINI, K. Reliability analysis of reinforced concrete slab bridges. **International Journal of Geomate**, Japão, v. 13, n. 36, p. 44-49, ago. 2017.

MARAN, A. P. **Proposta de diretriz para uso de espaçadores em lajes maciças de concreto armado, visando a obtenção do cobrimento especificado pela limitação da deformação plástica da armadura durante a execução**. 2020. Tese. (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

MARAN, A. P. *et al.* Análise da espessura de cobrimento de armaduras em uma laje com diferentes distanciamentos entre espaçadores. *In: Congresso Brasileiro do Concreto CBC2014*, 56, 2014, Natal. **Anais [...]**. Natal: IBRACON, 2014. 7 f.

MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. **Structural reliability analysis and prediction**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2018.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2021, 2403 p.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017, 568 p.

NOGUEIRA, H. A. T. **Avaliação da confiabilidade de pilares curtos em concreto armado projetados segundo a NBR 6118:2003**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

O'CONNOR, A. J.; KENSHEL O. Experimental evaluation of the scale of fluctuation for spatial variability modeling of chloride-induced reinforced concrete corrosion. **Journal of Bridge Engineering**, [S.l.], v. 18, p. 3-14, jan. 2013.

OLIVEIRA, A. H. C. R. **Estudo comparativo da confiabilidade de pilares de concreto armado dimensionados de acordo com a norma brasileira NBR 6118:2014 e com o código americano ACI 318:2014**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

OLSSON, A.; SANDBERG, G.; DAHLBLOM, O. On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis. **Structural Safety**, [S.l.], v. 25, n. 1, p. 47-68, jan. 2003.

PALIGA, C. M. **Análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através do método de Monte Carlos utilizando um modelo de elementos finitos**. 2008. Tese. (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

PALM, V. **Análise experimental da influência da distribuição de espaçadores em lajes de concreto armado, quanto à espessura de cobrimento**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

PANTOJA, J. C.; SILVA, T. S.; NARVAEZ, N. S. Avaliação de segurança de punção em lajes cogumelo com armadura de cisalhamento via análise de confiabilidade. *In: XXXVII Iberian-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 37, 2016, Brasília. **Proceedings [...]**. Brasília: ABMEC, 2016.

POLETTI, V. T. **Avaliação de confiabilidade estrutural com análise em elementos finitos de estruturas treliçadas**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica,

Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

PRATA, V. S. **Confiabilidade de lajes maciças de concreto armado em estruturas portuárias**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2017.

PRATES JÚNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. 1992. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1992.

RACKWITZ, R.; FIESSLER, B. Structural reliability under combined random load Sequences. **Computers and Structures**, Grã-Bretanha, v.9, n. 5, p. 489-494. 1978.

REAL, M. V. **Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos**. 2000. Tese. (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.

SALEH, I. M.; ABDEL-HAY, A. S.; AHMED, M. A. Effect of reinforcement ratio and cross section dimensions on the reliability index of slender reinforced concrete columns. **International Journal of Current Research**, [S.l.], v. 9, n.12, p. 62940-62946, dez. 2017.

SANTIAGO, W. C. **Calibração baseada em confiabilidade dos coeficientes parciais de segurança das principais normas brasileiras de projeto estrutural**. 2019. Tese. (Doutorado em Ciências) – Escola de Engenharia, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

SANTOS, D. M.; STUCCHI, F. R.; BECK, A. T. Reliability of beams designed in accordance with Brazilian codes. **IBRACON Structures and Materials Journal**, 2014, v. 7, n. 5, p. 723-746, out. 2014.

SANTOS, G. S. **Aplicação de mantas de polímeros reforçados com fibra de carbono (PRFC) como reforço à punção em lajes lisas de concreto armado**. 2014. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil), Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

SCHERER, M. **Avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

SERPA, V. C. **Análise de confiabilidade de vigas em concreto armado: sensibilidade dos parâmetros de dimensionamento**. 2018. Trabalho de conclusão (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento Acadêmico de Construção Civil, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

SILVA, G. R. **Análise da confiabilidade da ligação laje-pilar interno sob punção de acordo com a NBR-6118:2014**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

SILVA, O. S. P. **Cobrimento de armaduras em estruturas de concreto armado: análise comparativa entre o valor especificado em projeto e o em execução em obras da cidade de Porto Alegre**. 2012. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SILVA, G. R.; CAMPOS FILHO, A. C.; REAL, M. V. Análise não linear de lajes lisas de concreto armado utilizando o ANSYS APDL 15.0. **Revista de Engenharia e Tecnologia**, [S.l.], v. 9, n. 2, p.118-131, ago. 2017.

SPIEGEL, M. R.; SCHILLER J. J.; SRINIVASAN R. A. **Probabilidade e Estatística**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

SPEGGIORIN, A.; ESPÍNDOLA, A. M. S.; LORANDI M. L. **Probabilidade e estatística**. 2015. 111 p. Notas de aula.

TRAMONTINI, P. M. **Estudo de confiabilidade para seções de concreto armado submetidas a diversos tipos de esforços**. 2016. Dissertação (Mestrado em Projeto de Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

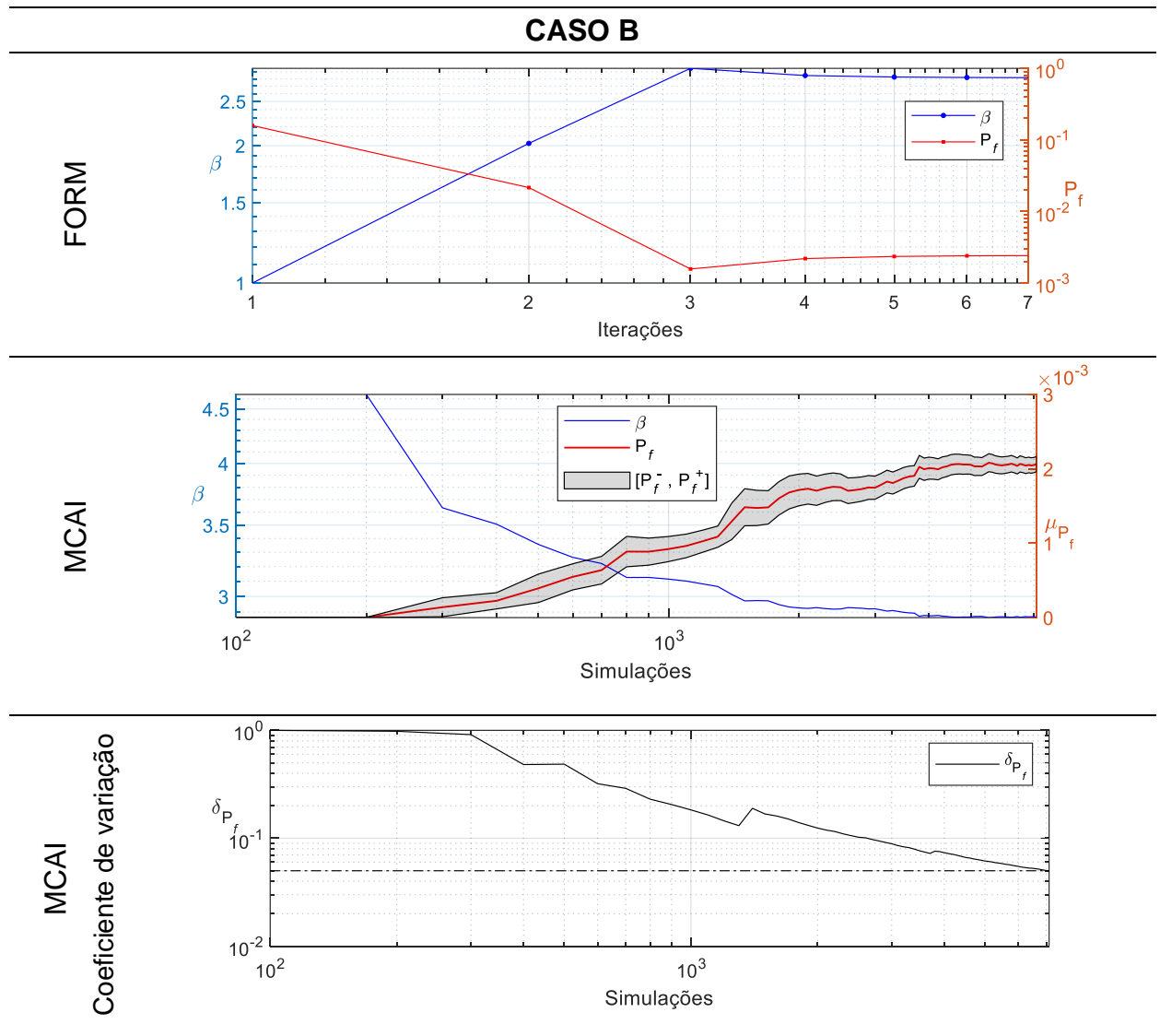
VANMARCKE, E. **Random Fields: Analysis and Synthesis**. [S.l.]: World scientific, 2010.

WILLAM, K. J.; WARNKE, E. P. Constitutive models for the triaxial behavior of concrete. *In: CONCRETE STRUCTURES SUBJECTED TO TRIAXIAL STRESSES*, 1975, Bergamo. **IABSE - International Association of Bridge Structures**, Bergamo, Bergamo, mai. 1975.

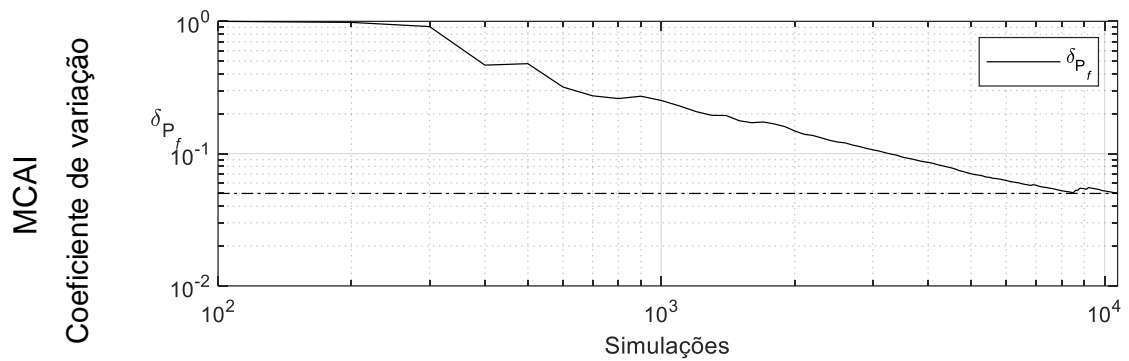
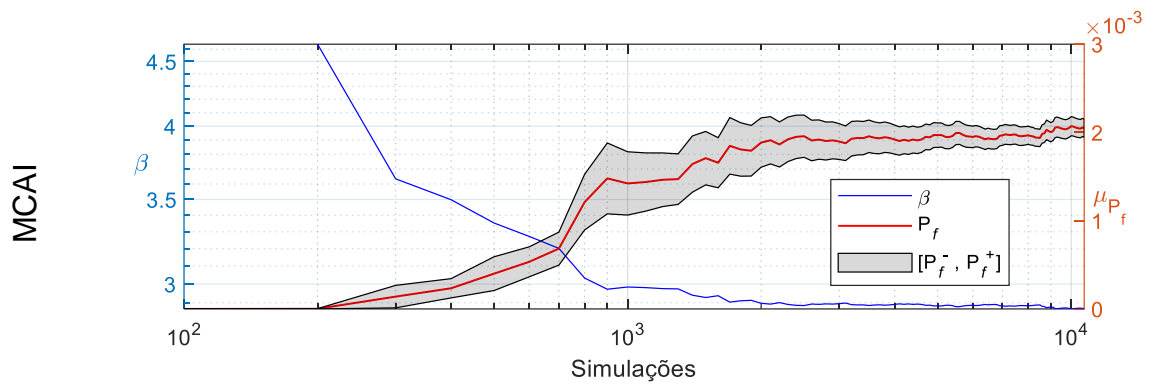
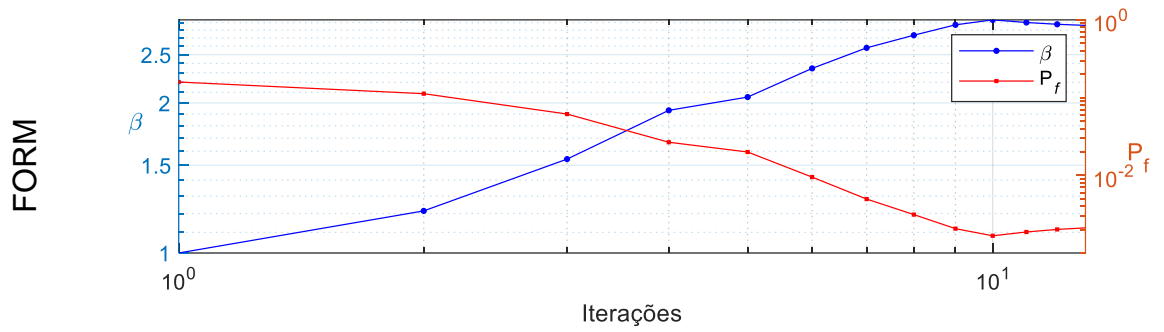
XU. T.; LI, J. Assessing the spatial variability of the concrete by the rebound hammer test and compression test of drilled cores. **Construction and Building Materials**, 2018, v. 188, p. 820 - 832, ago. 2018.



## APÊNDICE A – RESULTADOS ANÁLISE SENSIBILIDADE



## CASO C



**CASO D**

