

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

Controle de Emaranhamento em um Modelo Integrável de Três Poços

Bruno Heitor de Carvalho Barros

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de
Mestre em Física
Orientadora: Angela Foerster

Porto Alegre - RS

Março de 2023

Agradecimentos

Gostaria de começar agradecendo aos meus colegas do grupo de pesquisa em Física Matemática, sob a tutela da Prof^ª Dra. Angela Foerster e à toda comunidade acadêmica em geral. Os últimos quatro anos foram desafiadores para todos nós.

Agradecimentos especiais ao professor Leandro Ymai da Universidade Federal de Bagé, cujas notas sobre os assuntos abordados nesta dissertação foram imprescindíveis para seu desenvolvimento; e a Karin Wilsmann, por ser a especialista de referência no Modelo de Três Poços no nosso grupo.

Também devo agradecer à minha família e amigos, em especial à minha namorada, por todo o apoio e suporte ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, um tributo à minha mãe, pessoa chave no meu desenvolvimento pessoal, que apesar de sua partida um ano após meu ingresso na faculdade, ainda é muito lembrada e amada.

Resumo

Nesta dissertação um modelo quântico integrável de três poços sujeito a uma quebra de integrabilidade é investigado, com ênfase em aplicações no controle de emaranhamento de estados quânticos e em interferometria. Iniciando por uma introdução histórica, uma família de modelos de $m + n$ poços de potencial em condensados de Bose-Einstein dipolares é apresentada, com um regime dinâmico especial, denominado de Regime de Tunelamento Ressonante. Neste regime, expressões analíticas para a evolução temporal de grandezas de interesse podem ser extraídas. Tomando-o como ponto de partida, uma análise do emaranhamento dos estados quânticos do sistema é conduzida em termos das entropias de Von Neumann e das funções de correlação. Em seguida, um protocolo capaz de controlar o nível de emaranhamento de estados quânticos através do tempo de aplicação de uma quebra de integrabilidade é desenvolvido, a partir de diferentes estados iniciais. É mostrado que este protocolo é capaz de gerar $N00N$ states em diferentes partes do sistema. A seguir é verificado que este protocolo pode se comportar como um interferômetro de dois feixes, com sua diferença de fase ϕ podendo ser estimada a partir de operadores de paridade. Nessa aplicação, mostra-se que a incerteza $\Delta\phi$ se localiza próxima ao Limite de Heisenberg. Esta dissertação é concluída realizando uma contextualização dos fenômenos estudados, apresentado algumas questões em aberto que podem abrir caminho para futuros trabalhos.

Abstract

In this dissertation, a quantum integrable model with three wells subject to an integrability break is investigated with a focus on its applications in controlling quantum states entanglement and interferometry. Beginning with a historical introduction, a family of models of $m + n$ potential wells in dipolar Bose-Einstein condensates is presented, with a special dynamical regime, called Resonant Tunneling Regime. In this regime, analytical expressions for the time evolution of quantities of interest can be extracted. Taking this as a starting point, an analysis of the system's quantum states entanglement is conducted in terms of the Von Neumann entropy and correlation functions. Next, a protocol capable of controlling the quantum states' entanglement level through the application of an integrability break for different initial states is developed. It is shown that this protocol is also capable of generating $N00N$ states in different parts of the system. Additionally, it is verified that this protocol can behave as a two-beam interferometer, with its phase difference ϕ being able to be estimated from parity operators. In this application, it can be seen that the uncertainty $\Delta\phi$ is located close to the Heisenberg Limit. This dissertation is concluded by contextualizing the studied phenomena and presenting some open questions that may lead to future works.

Press Release

Desde o Início do século passado, a Física passou por uma explosão de ideias inovadoras e desafiadoras em seu eterno desafio de descrever o mundo em que vivemos. Um desses novos conceitos foi a Física Quântica, que, descrevendo a matéria a partir do ponto de vista de funções de onda, trouxe um novo olhar sobre as interações das partículas num nível (sub)atômico. Com o advento de novas tecnologias, está sendo possível utilizar os conceitos introduzidos por ela como um novo paradigma de computação com a promessa de tornar mais eficiente a resolução de muitos problemas modernos nesse campo, através da implementação de portas lógicas “quânticas”. Outra área de pesquisa que se beneficiou da Física Quântica foi a interferometria, pois agora é possível utilizar outras partículas para se investigar as propriedades de materiais além de somente luz. Até hoje, uma das principais maneiras de se extrair informação a respeito de um material se dá através de interferometria.

Outra predição oriunda da Física Quântica foi um estado da matéria especial a baixas temperaturas, em que suas partículas constituintes estariam em uma grande função de onda coletiva, chamado de condensado de Bose-Einstein. Esse condensado é importante, pois ele mantém propriedades quânticas, como emaranhamento, que podem ser exploradas macroscopicamente. O Modelo de Três Poços Integrável é composto por três desses condensados que interagem entre si por tunelamento, forças de contato, ou interações dipolo-dipolo. A integrabilidade do modelo é obtida através do balanceamento dessas interações para que o máximo de informação possa ser extraído do sistema através de expressões analíticas. A partir dele, foi produzido um protocolo capaz de manipular sua entropia, o que permite a criação de estados com níveis controlados de emaranhamento para possíveis aplicações nas “portas quânticas”. Sua integrabilidade também permite que esse mesmo protocolo possa ser utilizado em analogia a um interferômetro, cujo limite de resolução foi explorado para estados iniciais especiais. Estes resultados podem ser úteis na fabricação de novas tecnologias quânticas.

Press Release

Since the beginning of the past century, Physics has passed through an explosion of challenging ground breaking ideas in its eternal quest for describing the world we live in. One of these new concepts was Quantum Physics that brought a new look over particles interactions on a (sub)atomic level by describing matter through the wave function point of view. With the advent of new technologies, it is being possible to use the concepts introduced by it as a new paradigm of computation with the promise of making the resolution of many modern problems in this field more efficient, through the implementation of “quantum” logic gates. Another research area that has benefited from Quantum Physics was interferometry, because now it is possible to employ particles to investigate the properties of materials other than just light. Still today one of the main ways to extract information with respect to some material is through interferometry.

Another prediction from Quantum Physics was a special state of matter at low temperatures in which its constituents would be in one great collective wave function, called Bose-Einstein condensate. This condensate is important because it mantain quantum properties, such as entanglement, that can be explored macroscopically. The Integrable Three Wells Model is made up of three of such condensates that interact with one another by tunneling, contact forces, or dipole-dipole interactions. The model's integrability is obtained by balancing these interactions so that the maximum amount of information can be extracted from the system through analytic expressions. From it, a protocol capable of manipulate its entropy, which allows the creation of states with controlled entanglement levels, has been produced, for possible applications in the “quantum gates”. Its integrability also enables this same protocol to be used as an interferometer analog, whose resolution limit was explored for special initial states. These results can be useful in the creation of new quantum technologies.

Sumário

1	Introdução	7
2	O Modelo de Três Poços Integrável	11
2.1	Hamiltoniano Integrável	11
2.1.1	Quantidades Conservadas	11
2.1.2	Espaço de Hilbert	12
2.1.3	Regime Ressonante	13
2.2	Hamiltoniano Efetivo	14
2.3	Dinâmica Quântica	15
2.4	Entropia e Funções de Correlação	16
2.4.1	Entropia de Von Neumann	16
2.4.2	Funções de Correlação	18
2.5	Condições Iniciais	19
3	A Quebra de Integrabilidade	21
3.1	A Quebra de Integrabilidade Externa	21
3.2	Efeitos da Quebra sobre o Regime Ressonante	22
3.3	Dinâmica Quântica com A Quebra	23
3.4	Efeitos da Quebra Sobre Entropia e Correlação	24
4	Controle de Emaranhamento	26
4.1	Protocolo de Emaranhamento	26
4.2	Aplicação sobre Estados Iniciais	27
4.3	Estado Inicial $N00N$ state Coerente	30
4.3.1	Controle Dinâmico Através do Protocolo	30
5	Interferometria	33
5.1	Analogia Com Interferômetro Óptico	33
5.2	Resolução	34
5.3	Limite de Resolução	35
5.4	Operador de Paridade	36
5.5	Estados Iniciais	37
5.5.1	Estado $ \Psi_1\rangle = N, 0, 0\rangle$	37
5.5.2	Estado Gêmeo de Fock	38

6 Conclusões	40
A Expressões Analíticas do Regime de Tunelamento Ressonante	42
A.1 Obtendo H_e da Teoria de Perturbação Dependente do Tempo	42
A.2 Diagonalizando H_e com A Quebra	45
B Entendendo o Sistema como Um Interferômetro	49
B.1 Funcionamento de um Interferômetro	49
B.1.1 Resolução Através do Limite de Cramér-Rao Quântico	50
B.2 Encontrando a Incerteza Mínima para O Sistema	52
C Robustez	55
C.1 A Quebra de Integrabilidade de Interação	55
C.2 Fidelidade	56
C.3 A Perturbação Estática	56
C.4 O pulso Alternante	57

Capítulo 1

Introdução

É possível que, em determinadas condições, a matéria se organize em outros estados além dos três estados básicos com que estamos mais familiarizados na vida cotidiana, com propriedades bem distintas e únicas. Os condensados de Bose-Einstein são um exemplo disso. Dado um conjunto de bósons, suas funções de onda simétricas permitem que, a baixas temperaturas, eles passem a ocupar cada vez mais o estado fundamental do sistema, todos com os mesmos números quânticos. Essas partículas criam uma função de onda coletiva altamente correlacionada, que corresponde a um novo estado da matéria, de origem estatística, hoje nomeado em homenagem a seus idealizadores: Albert Einstein e Satyendra Nath Bose. Apesar de proposto em 1924 por Einstein [1], tendo se inspirado nos trabalhos anteriores de Bose [2], sua realização só veio a ocorrer em 1995 nos experimentos de Eric Cornell, Carl Wieman e colegas com átomos de ^{87}Rb resfriados a 170 nK [3], utilizando o método de resfriamento desenvolvido por Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji e William D. Phillips [4], que viriam a receber o Prêmio Nobel de Física em 1997. Quatro meses depois, de forma independente Wolfgang Ketterle do MIT (Massachusetts Institute of Technology) produziu um condensado formado por ^{23}Na [5, 6]. Esses achados culminaram no Prêmio Nobel de Física de 2001 para Cornell, Wieman e Ketterle.

Desde sua primeira realização, um número muito grande de experimentos tem sido realizados com condensados de Bose-Einstein. Entre estes, é importante mencionar uma série de experimentos realizados pelo grupo do Prof. M. Oberthaler, em Heidelberg, que observou tunelamento do tipo Josephson e um regime de autoaprimsonamento utilizando um condensado de Bose-Einstein aprisionado num potencial de dois poços [7]. Esses experimentos podem ser bem descritos através do modelo de Bose-Hubbard de dois sítios [8–13]. Esse modelo já foi utilizado na descrição de certas características de sistemas de átomos ultrafrios em redes ópticas como a transição de fase de superfluido para isolante de Mott [14] e os colapsos dinâmicos de ondas de matéria [15]. Uma característica peculiar do modelo de Bose-Hubbard de dois sítios é a sua integrabilidade, que somente é mantida para o caso de 1, 2 e infinitos sítios [16].

Basicamente a integrabilidade é a capacidade de se encontrar soluções analíticas para um determinado sistema. Classicamente isso pode ser obtido por meio de quadraturas no formalismo de Liouville-Arnold [17–19]. Num contexto quântico, isso pode ser obtido para determinados sistemas, incluindo o Modelo de Bose-Hubbard, através da resolução do espectro de energias pelo *ansatz* de Bethe [20], e já foi aplicada em diversas áreas como Física da Matéria Condensada [21–23], Teoria de Campos [24, 25], Física Atômica e Molecular [26–29], entre outras. Historicamente, as primeiras propostas de modelos integráveis surgiram com Hans Bethe em 1931 com a criação de seu *ansatz* para a resolução do modelo de Heisenberg [30]. O interesse em modelos integráveis vem

do fato de que nem sempre é possível aplicar com eficiência teorias de campo médio ou teorias de perturbação diretamente aos sistemas estudados, devido a flutuações quânticas. No intuito de generalizar a integrabilidade de sistemas quânticos, o *ansatz* de Bethe foi aperfeiçoado no que hoje é chamado de Método do Espalhamento Quântico Inverso (MEQI) [31–34] em que, dado um sistema integrável pelo Bethe *ansatz*, é possível se extrair seu espectro e quantidades conservadas.

Ao longo da história, o Bethe *ansatz* já foi utilizado por C. N. Yang em 1967 para encontrar soluções exatas para o problema de muitos corpos unidimensional com interação do tipo delta repulsiva [35, 36] e, posteriormente, em 1978 para se solucionar o modelo de 8 vértices por R. J. Baxter [37, 38], além de ter recebido contribuições importantes de Faddeev e Takhtajam e dos teóricos Lieb e Wu, entre outros [39]. No contexto do modelo de Bose-Hubbard, o seguinte modelo de dois poços que descreve dois condensados acoplados por tunelamento Josephson [10], foi proposto por A. Leggett:

$$H = \frac{K}{8}(N_1 - N_2)^2 - \frac{\Delta\mu}{2}(N_1 - N_2) - \frac{\varepsilon_J}{2}(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1), \quad (1.0.1)$$

em que K corresponde ao termo que descreve a interação entre as partículas (amplitude de espalhamento de ondas s), $\Delta\mu$ é um potencial externo e ε_J é a amplitude de tunelamento. Os termos N_j denotam os operadores número de partículas no poço j , e os termos a_j e a_j^\dagger são operadores destruição e criação de partículas no poço j respectivamente. Este modelo inspirou uma proposta de um modelo integrável de três poços [20] dada pelo seguinte Hamiltoniano:

$$H = \Omega_2(a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_3) + \Omega_1(a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1) + \mu N_1 + \mu_2 N_2 + \mu N_3, \quad (1.0.2)$$

em que Ω e Ω_2 são amplitudes de tunelamento e μ e μ_2 denotam potenciais externos. No entanto, apesar de integrável, o modelo (1.0.2) ainda não conseguia descrever interações entre partículas, o que é essencial para uma discussão física do problema. Portanto, mais estudos foram conduzidos nessa área até que foi encontrada uma família de modelos integráveis de $m + n$ poços [40, 41]. O número total de poços do modelo é descrito dessa forma porque ele possui duas classes distintas: a classe A e a classe B. Definindo as quantidades $N_A = \sum_{j=1}^m a_j^\dagger a_j$, $N_B = \sum_{j=1}^n b_j^\dagger b_j$, $A = \sum_{j=1}^m \alpha_j a_j$ e $B = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j$ em função dos operadores criação da primeira classe a_j^\dagger e da segunda classe b_j^\dagger , a família de modelos de $m + n$ é dada pelo seguinte Hamiltoniano:

$$H_{m,n} = U(N_A - N_B)^2 + \mu(N_A - N_B) + t(A^\dagger B + B^\dagger A). \quad (1.0.3)$$

Nesse modelo, U é um parâmetro de interação intra e interpoços, μ é um potencial externo e t denota o termo de tunelamento entre poços, sendo que α_j e β_j são constantes reais tais que $\sum_{j=1}^m |\alpha_j|^2 = \sum_{j=1}^n |\beta_j|^2 = 1$ (maiores detalhes em [40]). Também é importante observar que $N_A + N_B$ é o número total de partículas N . Os modelos de $m + n$ poços integráveis vieram em resposta ao vácuo deixado quanto à integrabilidade dos Modelos de Bose-Hubbard de n sítios, como já mencionado anteriormente.

Alguns estudos usando o Hamiltoniano (1.0.3) já foram realizados para os casos de $m + n < 5$. Por exemplo, o modelo de $2 + 1$ poços foi usado para investigar a geração de estados emaranhados [42], enquanto que a produção de $N00N$ states e sua aplicação em interferometria foram investigadas usando o modelo de $2 + 2$ poços [43, 44]. Em ambos os casos, propostas de possíveis realizações experimentais foram idealizadas usando condensados de Bose-Einstein com átomos dipolares (como ^{164}Dy e ^{52}Cr) em armadilhas ópticas.

O $N00N$ state tem recebido bastante atenção devido a seu potencial em metrologia quântica [45], por

ser um estado capaz de gerar medidas de estimadores com maiores níveis de precisão. Ele é obtido ao final do processo de minimização da incerteza associada ao processo de medida [46], sendo definido na base de Fock [47] $\{|n_1, N - n_1\rangle\}$ como:

$$|\Psi_{N00N}\rangle = \frac{|N, 0\rangle + e^{i\varphi}|0, N\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.0.4)$$

As características metrológicas que distinguem $|\Psi_{N00N}\rangle$ de outros estados devem-se ao seu emaranhamento, uma propriedade de natureza puramente quântica (sem análogo clássico) e que matematicamente se reflete na impossibilidade de escrever o estado do sistema como um produto de estados de suas partes. O emaranhamento quântico produz correlações não locais entre partes separadas do sistema no momento da medição [48] e é um recurso chave na implementação de diversas tecnologias quânticas, destacando-se o algoritmo de fatoração rápida de grandes números [49] e a transformada de Fourier quântica [50], que puderam ser implementadas a partir do controle fino de sistemas quânticos em laboratório [51, 52]. O nível de emaranhamento de um sistema é considerado por muitos autores como uma medida de o quão “quântico” (ou o quão “clássico” dependendo do ponto de vista) é um determinado estado quântico. Inicialmente foram desenvolvidas uma variedade de funções como a entropia de Von Neumann [53, 54], funções de correlação entre observáveis [55], entre outras, que, com o tempo, vieram a conectar entrelaçamento quântico com outras quantidades físicas, como quantidade de informação carregada por um sistema (função de informação quântica [53]), sua entropia termodinâmica (função de informação de Holevo [56]) e até mesmo na descrição quantitativa dessa ideia do quão “quântico” é o sistema (discórdia quântica [48]).

Até o momento, até onde sabemos, não foram realizados estudos sobre a produção de $N00N$ states e aplicações em interferometria usando o caso do modelo integrável de 2 + 1 poços. Neste trabalho, este estudo será conduzido através da proposta de um protocolo utilizando o modelo de 2 + 1 poços com uma quebra de integrabilidade, a fim de realizar o controle do nível de emaranhamento dos estados por ele gerados. O Modelo de Três Poços Integrável (MTPI) [42] obtido como um caso particular da família de modelos $H_{m,n}$ aqui apresentada, constitui o principal tema em análise nesta dissertação, e é dado pelo Hamiltoniano:

$$H = U(N_1 - N_2 + N_3)^2 + \mu(N_1 - N_2 + N_3) + J_1(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) + J_3(a_3^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_3), \quad (1.0.5)$$

onde U denota o parâmetro de interação, μ é um potencial externo e J_1, J_3 denotam os termos de tunelamento. A partir deste ponto, a não ser que seja explicitamente especificado, unidades naturais em que $\hbar = 1$ serão adotadas.

Esta dissertação está estruturada em mais 4 capítulos que proporcionam um estudo abrangente do Modelo de Três Poços Integrável e de suas aplicações com ênfase no controle de emaranhamento:

- No Capítulo 2, o modelo é apresentado, sendo elencadas suas principais propriedades e sua dinâmica é analisada em termos dos operadores número de partículas em cada poço. As principais ferramentas de análise, assim como estados ilustrativos do comportamento da base escolhida para se descrever o sistema também serão apresentados. Um regime especial da dinâmica do sistema regido por um tipo especial de tunelamento de segunda ordem será introduzido, denominado de regime ressonante; este regime será utilizado ao longo de todo o resto da dissertação para o estudo do modelo;
- No Capítulo 3, uma quebra de integrabilidade será aplicada ao sistema e as mudanças em sua dinâmica serão discutidas;
- No Capítulo 4, é discutido como a quebra de integrabilidade pode ser aplicada para criação de estados de

entropia constante e na criação de um operador que implementa um protocolo capaz de manipular um $N00N$ state coerente em outros $N00N$ states;

- No Capítulo 5 é feita uma analogia entre o protocolo proposto e o interferômetro de Mach-Zehender, sendo conduzida uma discussão sobre os limites de incerteza que podem ser alcançados pelo sistema na detecção de diferenças de fase através da análise dos estados ilustrativos do Capítulo 2.

Esta dissertação finaliza com uma conclusão em que os principais pontos deste estudo são elencados, assim como questões em aberto que surgiram deste estudo. Os apêndices detalham o desenvolvimento e cálculos dos principais resultados obtidos e ajudam a formar um entendimento sobre os conceitos aqui apresentados. A expressão analítica para a evolução temporal dos estados do sistema, assim como parte dos resultados obtidos nos Capítulos 4 e 5 são resultados originais do autor e constituem sua contribuição para a área.

Capítulo 2

O Modelo de Três Poços Integrável

Neste capítulo o modelo de Bose-Hubbard Integrável de três poços será introduzido como um caso especial do modelo de $m+n$ poços integrável discutido em [57]. Esses modelos descrevem condensados de Bose-Einstein aprisionados em poços de potencial que podem ser agrupados em duas classes distintas e são especialmente desenhados para serem integráveis pela ótica do Bethe *ansatz* e pelo MEQI. O MTPI consiste no modelo não trivial mais simples nessa nova família de sistemas recém definida.

2.1 HAMILTONIANO INTEGRÁVEL

Casos em que $m+n=2$ [58, 59], 3 [42] e 4 [60] poços já foram estudados na literatura e já têm propostas de realizações experimentais. Para os sistemas de 2 e 3 poços, os modelos 1+1 e 2+1 são os únicos possíveis de se obter da família (1.0.3), enquanto que para o sistema de 4 poços as propostas de realização experimental se focaram no modelo 2+2. Os trabalhos anteriores nesse sistema consideraram o potencial químico $\mu=0$, como continuará a ser feito nesta dissertação. Com isso, o Hamiltoniano do modelo de três poços pode ser definido como:

$$H = U(N_1 - N_2 + N_3)^2 + J_1(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) + J_3(a_2^\dagger a_3 + a_2 a_3^\dagger), \quad (2.1.1)$$

em que há a correspondência dos poços aqui enumerados 1 e 3 com os poços da primeira classe, enquanto o poço 2 é o poço pertencente a segunda classe (consequentemente os operadores criação para cada um desses poços também se identificam com essas classes). Com isso, H pode ser interpretado como um sistema de três poços conectados em sequência, com os poços 1 e 3 nas extremidades e com tunelamento ocorrendo apenas entre poços adjacentes.

2.1.1 Quantidades Conservadas

Como a quantidade de partículas em cada poço pode variar, o Hamiltoniano (2.1.1) possui três graus de liberdade, consequentemente possuindo 3 quantidades conservadas. Duas delas são fornecidas pelo *ansatz* de Bethe [57] que são a energia total do sistema e o número total de partículas. A terceira quantidade é obtida a partir da extensão apresentada em [57] e é representada pelo operador:

$$Q = J_3^2 N_1 + J_1^2 N_3 - J_1 J_3 (a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1). \quad (2.1.2)$$

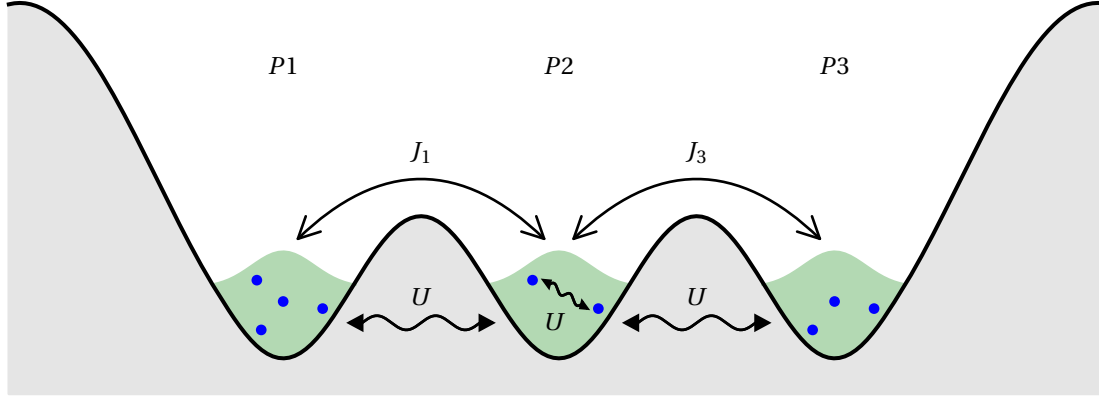


Figura 2.1: Descrição esquemática do Modelo de Três Poços Integrável. Os poços, aqui elencados de P1 a P3 estão dispostos em sequência com as partículas em cada um, representadas em azul, formando condensados de Bose-Einstein com uma função de onda coletiva representada em verde. As energias de interação dipolo-dipolo entre partículas num mesmo poço e o potencial de interação entre poços são mediadas pelo parâmetro U no Hamiltoniano (2.1.1) e o tunelamento de partículas entre poços vizinhos pelos parâmetros J_1 e J_3 .

A partir disso, o conjunto completo de observáveis comutantes $\{H, N, Q\}$ se forma, obedecendo:

$$[H, N] = 0, \quad [H, Q] = 0, \quad [Q, N] = 0. \quad (2.1.3)$$

2.1.2 Espaço de Hilbert

Para entender o espaço de Hilbert de (1.0.3), uma base que compreenda a informação do número de partículas em cada poço $\mathcal{D}_{n_p} \equiv \{|n_1, \dots, n_{n_p}\rangle\}$ deve ser pensada, sendo $n_p = m + n$ e $\sum_{j=1}^{n_p} n_j = N$. Esta é a chamada base de Fock e seus estados são chamados estados de Fock [47]. Para o caso de três poços, os estados da base podem ser representados através do conjunto $\{|N - l - k, l, k\rangle\}$, com l indicando o número de partículas do poço 2 e k representado o número de partículas no poço 3. A dimensão desse espaço será dada pelas combinações possíveis de se arranjar N partículas em n_p poços, ou seja:

$$D(n_p) = \frac{(N + n_p - 1)!}{N!(n_p - 1)!} \Rightarrow D(3) = \frac{(N + 2)(N + 1)}{2}. \quad (2.1.4)$$

A ação dos operadores criação e aniquilação sobre os estados iniciais é dada por:

$$a_j^\dagger |n_1, \dots, n_j, \dots, n_{n_p}\rangle = \sqrt{n_j + 1} |n_1, \dots, n_j + 1, \dots, n_{n_p}\rangle; \quad (2.1.5)$$

$$a_j |n_1, \dots, n_j, \dots, n_{n_p}\rangle = \sqrt{n_j} |n_1, \dots, n_j - 1, \dots, n_{n_p}\rangle. \quad (2.1.6)$$

Com isso, um estado qualquer da base $|n_1, \dots, n_{n_p}\rangle$ pode ser expresso em termos do estado de vácuo $|0, \dots, 0\rangle$ como:

$$|n_1, \dots, n_{n_p}\rangle = \left[\prod_{j=1}^{n_p} \frac{(a_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} \right] |0, \dots, 0\rangle. \quad (2.1.7)$$

Para o caso de 3 poços, essa expressão se reduz a:

$$|N-l-k, l, k\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{N-l-k}}{\sqrt{(N-l-k)!}} \frac{(a_2^\dagger)^l}{\sqrt{l!}} \frac{(a_3^\dagger)^k}{\sqrt{k!}} |0, 0, 0\rangle, \quad 0 \leq l \leq N, \quad 0 \leq k \leq N-l. \quad (2.1.8)$$

Expressando $|\hat{n}_j\rangle = |n_{j,1}, \dots, n_{j,n_p}\rangle \in \mathcal{D}_{n_p}$, um estado geral qualquer $|\Psi(t)\rangle$ pode ser escrito nesta base como:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^{D(n_p)} c_{\hat{n}_j}(t) |\hat{n}_j\rangle. \quad (2.1.9)$$

2.1.3 Regime Ressonante

O espectro de energia de H pode ser estudado em função do parâmetro $\eta = \frac{UN}{J}$, em que $J = \sqrt{J_1^2 + J_3^2}$ como feito na figura 2.2. A partir deste momento, o modelo isotrópico será estudado, em que $J_1 = J_3 = \frac{J}{\sqrt{2}}$, no entanto, as expressões aqui apresentadas se aplicam ao caso geral em que $J_1 \neq J_3$. A partir desse espectro, três regimes podem ser identificados:

- Regime de Rabi: quando $\eta \ll 1$. Nesse caso o modelo apresenta uma estrutura de bandas com vários níveis de energia degenerados. À medida que η aumenta, essas degenerescências são levantadas e a largura das bandas aumenta.
- Regime de Josephson: quando $1 \ll \eta \ll N^2$. Nesse regime, ocorre a sobreposição das bandas do regime de Rabi de forma que as energias do sistema se encontram uniformemente distribuídas em determinado intervalo de valores. Apesar disso, uma nova estrutura de bandas começa a surgir. É nesse regime que o espectro de energia se abre, com cada nova banda se separando cada vez mais.
- Regime de Fock: quando $\eta \gg N^2$. Nesse regime há uma nova estrutura de bandas de energia bem definidas. As bandas de energia já estão plenamente separadas e é neste regime onde estão os maiores valores de energia para H . Outra diferença com relação às bandas formadas ao final do regime de Josephson é que as energias de cada banda se encontram praticamente degeneradas em torno de um mesmo valor, configurando bandas sem “espessura”.

Os regimes de Rabi e de Fock são marcados por estruturas de bandas de energia que, por sua vez, acabam por impor correlações entre as energias do sistema. No entanto, as correlações existentes no regime de Rabi são diferentes das presentes no regime de Fock, o que faz com que a região de transição no regime de Josephson seja marcada por um processo de formação de novas correlações fazendo com que as energias do Hamiltoniano não possuam qualquer organização aparente. Por causa disso, o MTPI se encontra mais próximo de um caos quântico dentro desse regime [61]. A partir de certo ponto do regime de Josephson, a estrutura de bandas do regime de Fock começa a surgir favorecendo processos de segunda ordem. Essas bandas são compostas por estados $|N-l-k, l, k\rangle$ que compartilham o mesmo valor de l e sua separação cresce linearmente com esse parâmetro. Isso pode ser visto mais ao se reformular o termo não linear nos operadores número de (2.1.1) se aproveitando da conservação do número total de partículas:

$$(N_1 - N_2 + N_3)^2 = N^2 - 4N_2(N_1 + N_3). \quad (2.1.10)$$

A expressão (2.1.10) mostra que a separação de duas bandas consecutivas cresce linearmente com $\langle N_2 \rangle = l$.

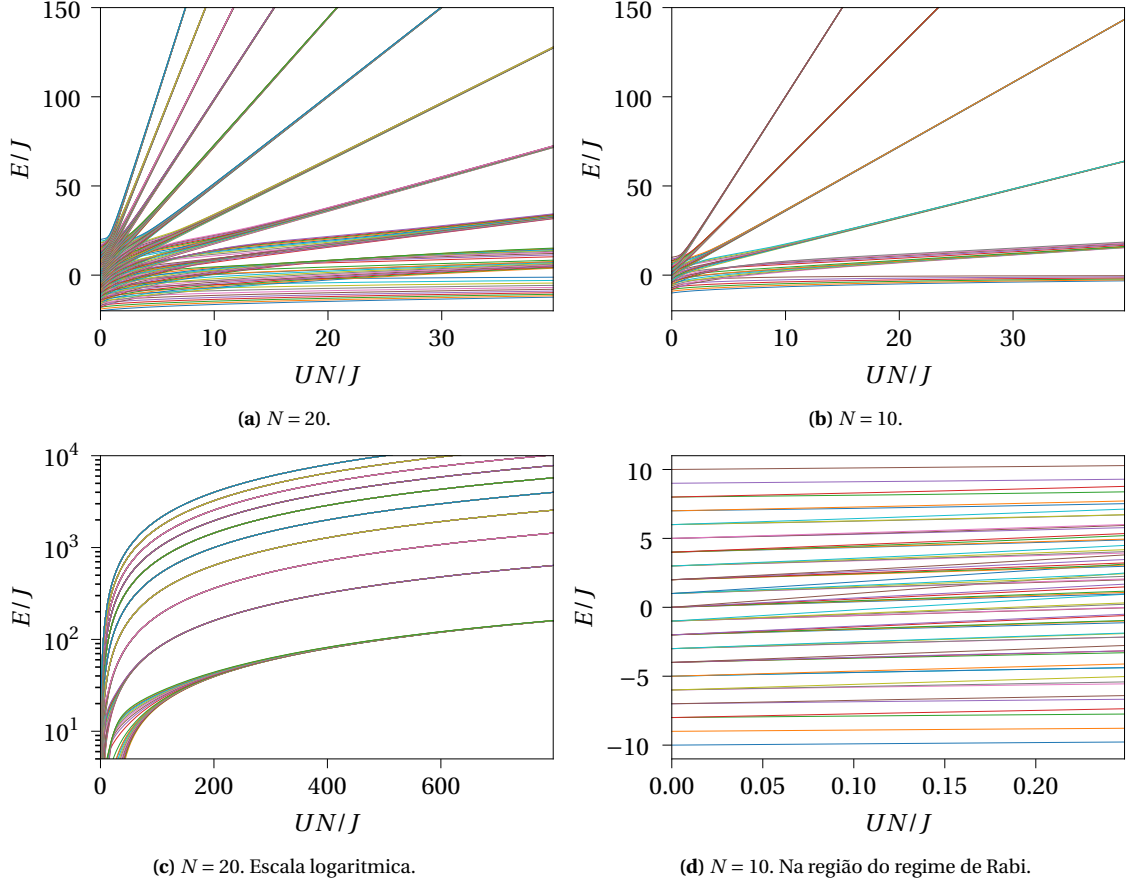


Figura 2.2: Energias do sistema em função do parâmetro $\eta = \frac{UN}{J}$ para um sistema de 20 e 10 partículas respectivamente. Em ambas as figuras, pode ser visto a emergência dos regimes que regem o comportamento do modelo. Na figura (c) está destacado o início do regime de Fock para o sistema de 20 partículas e na figura (d) está retratada uma ampliação da região $0 \leq \eta < 1$ para uma melhor visualização do regime de Rabi.

Quando $\eta \gg 1$, o termo de interação determina a estrutura de níveis de energia e o termo de tunelamento pode ser tratado como uma perturbação. Isso justifica o uso de teoria de perturbação dependente do tempo [62] para se obter um hamiltoniano efetivo que determina a dinâmica final do sistema num regime especial da evolução temporal, chamado de Regime de Tunelamento Ressonante (neste trabalho também abreviado como RTR).

2.2 HAMILTONIANO EFETIVO

A partir de teoria de perturbação dependente do tempo o Hamiltoniano efetivo do RTR pode ser obtido conforme mostrado no Apêndice A e pode ser descrito em função da carga conservada Q como:

$$H_e = -\lambda_l Q; \quad \lambda_l = \frac{1}{4U} \left(\frac{l+1}{N-2l-1} - \frac{l}{N-2l+1} \right). \quad (2.2.1)$$

Esse Hamiltoniano descreve transferências de partículas entre os poços 1 e 3 devido a processos de segunda ordem, conservando o número inicial de partículas no poço 2. A teoria de perturbação dependente do tempo também mostra que as bandas formadas ao final do regime de Josephson estão divididas de acordo com os

valores da energia intra e interpoços $4Ul(N-l)$. Ainda assim, o RTR só atua em estados que têm o mesmo valor de l , sendo que o motivo para tal restrição também pode ser explorado mais detalhadamente no Apêndice A.

2.3 DINÂMICA QUÂNTICA

Nesta seção, fórmulas analíticas para a evolução temporal do sistema serão apresentadas. Suas derivações seguem do Hamiltoniano efetivo H_e que reproduz as mesmas dinâmicas de H no RTR. Para a conferência de sua validade, a dinâmica obtida com essas expressões foram confrontadas com a evolução temporal obtida através da diagonalização exata do Hamiltoniano H . Esse método é baseado nos autovalores E_j e autoestados $|E_j\rangle$ de energia de H e consiste em escrever um estado inicial qualquer $|\Psi_0\rangle$ como uma combinação linear desses autoestados:

$$|\Psi_0\rangle = \sum_j c_j |E_j\rangle, \quad (2.3.1)$$

em que $c_j = \langle E_j | \Psi_0 \rangle$. Como a aplicação de uma função qualquer $f(H)$ nos estados $|E_j\rangle$ será tal que $f(H)|E_j\rangle = f(E_j)|E_j\rangle$, a aplicação do operador evolução temporal $\mathcal{U}(t) = e^{-iHt}$ para se obter $|\Psi(t)\rangle$ resultará em:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j c_j e^{-iE_j t} |E_j\rangle. \quad (2.3.2)$$

Devido a sua fácil implementação, esse método auxilia na validação das expressões analíticas mostradas nesta dissertação, que por sua vez ajudam a entender relações mais importantes sobre o funcionamento do sistema. Sendo $|\Psi(t)\rangle$ e $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ os estados do sistema obtidos através de H e de H_e respectivamente, uma expressão analítica para $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ já foi obtida em [42] através da representação de Jordan-Schwinger do grupo $SU(2)$ e ainda outro método analítico de foi desenvolvido no Apêndice A. Para o caso integrável, na notação desenvolvida por [42], o estado $|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \mathcal{U}(t)|N-l-k, l, k\rangle$ é dado por:

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = e^{\frac{i\omega_l(N-l)t}{2}} \sum_{n=0}^{N-l} b_n(k, l, t) |N-l-n, l, n\rangle. \quad (2.3.3)$$

Nessa expressão, $\omega_l = 2\lambda_l J_1 J_3$ e

$$b_n(k, l, t) = \sqrt{\frac{C_k^{N-l}}{C_n^{N-l}}} \sum_{j \in S_n(k, l)} (-i)^{k+n-2j} \cos\left(\frac{\omega_l}{2}\right)^{N-l-k-n+2j} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_l}{2}\right)^{k+n-2j} C_{n-j}^{N-l-k} C_j^k, \quad (2.3.4)$$

em que

$$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad S_n(k, l) = \{j \in I_k : j = n-p, p \in I_{N-l-k}\}, \quad I_k = \{j \in \mathbb{N} : j \leq k\}; \quad (2.3.5)$$

cujas evoluções temporais estão mostradas na Figura 2.3.

O termo $\lambda_l J_1 J_3$ em ω_l pode ser agrupado em uma só constante de tunelamento efetivo J_e . A partir disso, a dinâmica de um observável correspondente a um operador hermiteano O pode ser estudada ao se fazer $\langle O \rangle = \langle \tilde{\Psi}(t) | O | \tilde{\Psi}(t) \rangle$. Na situação em que O corresponde ao número de partículas em dado poço de potencial, a dinâmica do sistema no RTR mantém o número de átomos no subsistema 1,3 constante, $\langle N_1 \rangle + \langle N_3 \rangle = N-l$. Os resultados analíticos para $\langle N_j \rangle$ estão expostos em (2.3.6) e (2.3.7) e mostrados na Figura 2.3, e também já

foram obtidos por [42] através de análise semiclássica.

$$\langle N_1 \rangle = \frac{1}{2} [N - l + (N - l - 2k) \cos(\omega_l t)]; \quad (2.3.6)$$

$$\langle N_3 \rangle = \frac{1}{2} [N - l - (N - l - 2k) \cos(\omega_l t)]. \quad (2.3.7)$$

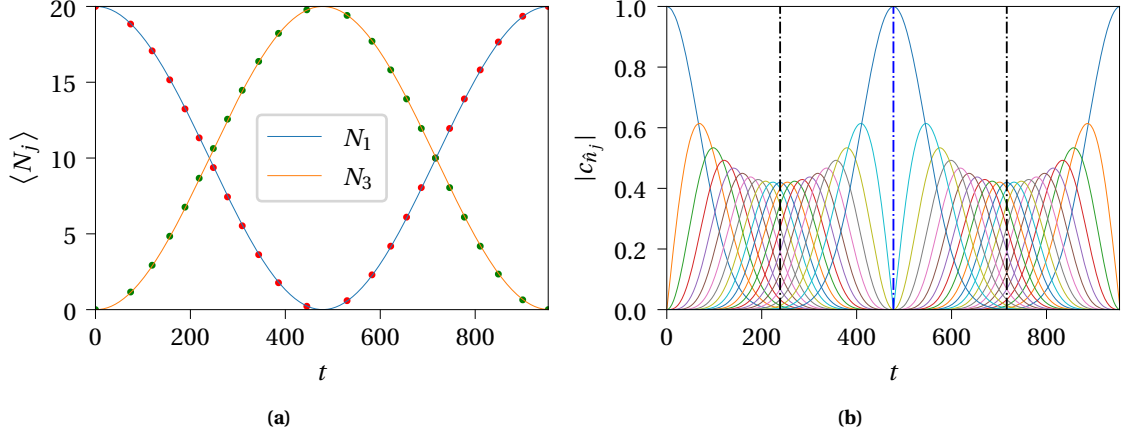


Figura 2.3: Evolução temporal do sistema para 20 partículas no RTR para uma configuração inicial no estado $|20, 0, 0\rangle$ com $\eta = 40$. A evolução temporal dos valores esperados de número de partículas nos poços 1 e 3 foi mostrada na figura (a). Os pontos vermelhos e verdes são os valores obtidos através de (2.3.6) e (2.3.7) respectivamente. Na figura (b) foi mostrada a evolução temporal do módulo dos parâmetros c_{n_j} , se comportando conforme representados em (2.3.4). Essa figura possui 21 linhas e, até a metade do intervalo de tempo mostrado, 21 máximos locais, sendo um para cada linha. O primeiro máximo da esquerda para a direita corresponde ao estado $|20, 0, 0\rangle$, e os outros seguem em ordem decrescente de n_1 , para o estado $|n_1, 0, 20 - n_1\rangle$, até o estado $|0, 0, 20\rangle$. As linhas tracejadas pretas indicam os instantes $t = \frac{T}{4}$ e $t = \frac{3T}{4}$ e a linha tracejada azul o instante $t = \frac{T}{2}$. O tempo nessas figuras está em unidades de J recíprocas e os resultados em (a) e (b) foram obtidos através da diagonalização exata de (2.1.1).

A evolução temporal do sistema apresenta notável ordem no RTR, diferentemente do que acontece fora dele quando o parâmetro U é pequeno, como pode ser visto na Figura 2.4. Uma consequência dessa ordem é que os estados $|N - l - k, l, k\rangle$ e $|k, l, N - l - k\rangle$ são equiprováveis para cada $k = 0, \dots, N - l$ nos instantes $t = (n + \frac{1}{4})T$ e $t = (n + \frac{3}{4})T$, em que $T = \frac{2\pi}{\omega_l}$. Outro fenômeno deste regime é, dado um estado inicial $|N - l - k, l, k\rangle$, a emergência do estado $|k, l, N - l - k\rangle$ com probabilidade 1 em $t = (n + \frac{1}{2})T$.

2.4 ENTROPIA E FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO

O próximo passo para a compreensão da dinâmica do sistema é buscar uma medida de seu emaranhamento. Para isso a entropia de Von Neumann [42] e as funções de correlação foram utilizadas. Com essas funções, as informações sobre a quantidade de emaranhamento no estado quântico do sistema podem ser apuradas.

2.4.1 Entropia de Von Neumann

Para se chegar na entropia de Von Neumann, primeiro é necessário apresentar a matriz de densidade. Dado um estado $|\Psi(t)\rangle$, a matriz de densidade $\hat{\rho}(t)$ é o operador $\hat{\rho}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$. Sobre essa matriz, será aplicada

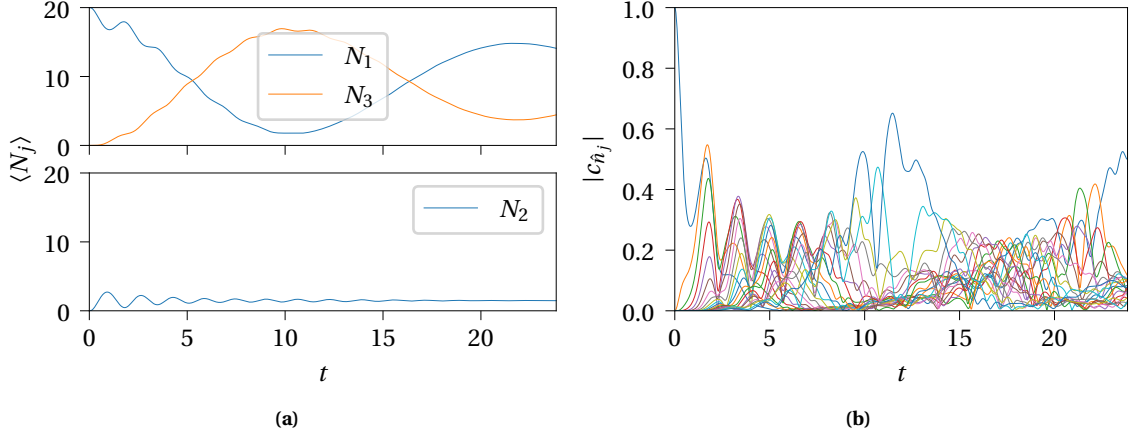


Figura 2.4: Evolução temporal do sistema para 20 partículas fora do RTR para uma configuração inicial no estado $|20, 0, 0\rangle$ com $\eta = 1$. A evolução temporal dos valores esperados de número de partículas em cada poço foi mostrada na figura (a). Na figura (b) foi mostrada a evolução temporal do módulo dos parâmetros $c_{\hat{n}_j}$. O tempo nessas figuras está em unidades de J recíprocas e os resultados em (a) e (b) foram obtidos através da diagonalização exata de (2.1.1).

uma operação chamada traço parcial sobre o espaço de estados de um subsistema para obter uma matriz densidade do subsistema remanescente. Seja um espaço de Hilbert $V = A \otimes B$ e um estado $|\Psi\rangle = \sum_{A \otimes B} |a_i, b_j\rangle$. Então o traço parcial da matriz de densidade de $|\Psi\rangle$ poderá ser dado através da seguinte regra [53]:

$$\text{tr}_B(|a_i, b_j\rangle\langle a_{i'}, b_{j'}|) = |a_i\rangle\langle a_{i'}| \text{tr}(|b_j\rangle\langle b_{j'}|), \quad (2.4.1)$$

em que o subíndice do traço indica qual subespaço está sendo **excluído**.

Essa operação é uma generalização do traço de uma matriz [53] e a matriz $\hat{\rho}_A = \text{tr}_B(\hat{\rho})$ resultante desse processo é chamada de matriz de densidade reduzida. A partir das matrizes de densidade reduzidas, a entropia de Von Neumann pode ser definida como (2.4.2) e é apresentada na Figura 2.5:

$$S_j = -\text{tr}(\hat{\rho}_j \ln(\hat{\rho}_j)), \quad (2.4.2)$$

em que, para o caso do modelo de três poços integrável, as matrizes de densidade reduzidas são:

$$\hat{\rho}_1(t) = \text{tr}_3(\text{tr}_2(\hat{\rho}(t))) \text{ para o espaço do poço 1;} \quad (2.4.3)$$

$$\hat{\rho}_2(t) = \text{tr}_3(\text{tr}_1(\hat{\rho}(t))) \text{ para o espaço do poço 2;} \quad (2.4.4)$$

$$\hat{\rho}_3(t) = \text{tr}_2(\text{tr}_1(\hat{\rho}(t))) \text{ para o espaço do poço 3.} \quad (2.4.5)$$

Dessa forma, a entropia de Von Neumann está diretamente relacionada com a quantidade de emaranhamento entre o subsistema j e o subsistema remanescente. Na Figura 2.5a, quadro de baixo, é apresentada a evolução temporal de S_1 e S_3 , para o estado inicial $|20, 0, 0\rangle$. Observa-se que $S_2 = 0$ pois o estado do poço 2 permanece constante no RTR, enquanto $S_1 = S_3 \neq 0$ indicando que apenas o estado do subsistema de poços 1 e 3 possui emaranhamento. S_1 , S_2 e S_3 também podem ser desenvolvidas em termos dos coeficientes $c_{\hat{n}_j}$. Para

um estado $|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{N-k} c_{lk} |N-l-k, l, k\rangle$, as entropias de Von Neumann são dadas por:

$$S_1 = - \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^k |c_{k-l,l}|^2 \ln \left(\sum_{l=0}^k |c_{k-l,l}|^2 \right); \quad (2.4.6)$$

$$S_2 = - \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{N-k} |c_{k,l}|^2 \ln \left(\sum_{l=0}^{N-k} |c_{k,l}|^2 \right); \quad (2.4.7)$$

$$S_3 = - \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{N-k} |c_{l,k}|^2 \ln \left(\sum_{l=0}^{N-k} |c_{l,k}|^2 \right). \quad (2.4.8)$$

2.4.2 Funções de Correlação

Para gerar outras assinaturas que permitam sinalizar a presença de emaranhamento no sistema, também foram avaliadas as funções de correlação dos observáveis N_j dadas por:

$$C_{ij} = \langle N_i \rangle \langle N_j \rangle - \langle N_i N_j \rangle. \quad (2.4.9)$$

$|C_{ij}|$ se relaciona com o nível de emaranhamento do sistema porque se o estado é um produto do estado do poço i com o estado dos poços remanescentes, então $\langle N_i N_j \rangle = \langle N_i \rangle \langle N_j \rangle$ para $j \neq i$. Ou de modo equivalente, se $\langle N_i N_j \rangle \neq \langle N_i \rangle \langle N_j \rangle$, então o estado não pode ser um produto entre os estados do poço i e o estado do poço remanescente, e portanto, possui emaranhamento. Por causa disso, os extremos da entropia de Von Neumann e de C_{ij} devem se encontrar nos mesmos pontos no tempo como pode ser visto na Figura 2.5. Além disso, C_{ij} é mais simples de ser calculada do que S_j , o que a torna a ferramenta ideal para o estudo do emaranhamento neste modelo.

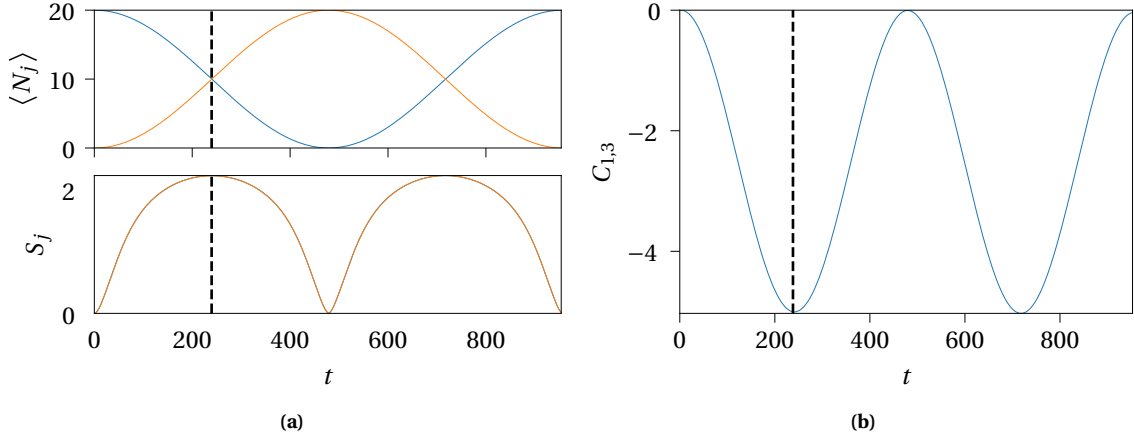


Figura 2.5: Entropia de Von-Neumann $S_j(t)$ (figura (a) no quadro de baixo) e função de correlação $C_{1,3}(t)$ na figura (b) para o estado inicial $|\Psi_0\rangle = |20, 0, 0\rangle$ e $\eta = 40$. No quadro de cima da figura (a) há novamente $\langle N_j \rangle$ para que os extremos de S_j e C_{ij} possam ser situados na dinâmica do sistema. A linha tracejada preta marca o ponto $t = \frac{T}{4}$, com $T = \frac{2\pi}{\omega_I}$ que é o primeiro extremo local de S_j e C_{ij} .

2.5 CONDIÇÕES INICIAIS

Até o momento, o número total de partículas N se manteve constante durante a maior parte das seções deste capítulo e o estado inicial do sistema foi dado na forma $|N, 0, 0\rangle$. Essa regularidade foi proposital visto que o objetivo das seções anteriores era a apresentação do modelo e das principais ferramentas de análise abordadas nesta dissertação. Para completar esse arcabouço teórico, é necessário desenvolver uma intuição sobre o comportamento dinâmico da base escolhida para se conduzir o estudo do sistema.

Dada uma base ortonormal $\{|\Phi_j\rangle\}$ que defina o espaço de Hilbert do sistema, a dinâmica de um estado $|\Psi\rangle$ nesse espaço pode ser decomposta em termos da evolução temporal desses estados da base. Isso significa que ao se entender a dinâmica desses estados, a evolução temporal de $|\Psi\rangle$ pode ser extraída. No caso do Hamiltoniano (2.1.1), a base que é naturalmente utilizada é a base $\{|N-l-k, l, k\rangle\}$ devido ao significado físico direto que seus estados possuem. Ao se pensar em sua estrutura e na geometria do modelo, dois casos limites de estados iniciais podem ser enumerados como:

$$|\Psi_1\rangle = |N, 0, 0\rangle \text{ e}; \quad (2.5.1)$$

$$|\Psi_2\rangle = \left| \frac{N-l}{2}, l, \frac{N-l}{2} \right\rangle, \quad N-l \text{ par.} \quad (2.5.2)$$

Com base no que já foi apresentado, para o estado $|\Psi_2\rangle$, os valores esperados dos operadores N_j são constantes. Por causa disso, $\langle N_1 \rangle = \langle N_3 \rangle = \frac{N-l}{2}$, porém o estudo de sua evolução temporal ainda se faz relevante para que se possa entender como outras grandezas como S_j , C_{ij} e $c_{\hat{n}_j}$ variam através condições iniciais distintas.

A Figura 2.6a mostra a dinâmica do módulo dos coeficientes $c_{\hat{n}_j}$ e a Figura 2.6b fornece uma comparação entre as grandezas S_j e C_{ij} para o sistema iniciado no estado inicial $|\Psi_2\rangle$ para $N = 20$ partículas. Comparando esses resultados com o que já foi apresentado com a condição inicial $|N, 0, 0\rangle$, pode ser notado que a entropia do sistema depende do estado inicial em que ele foi preparado.

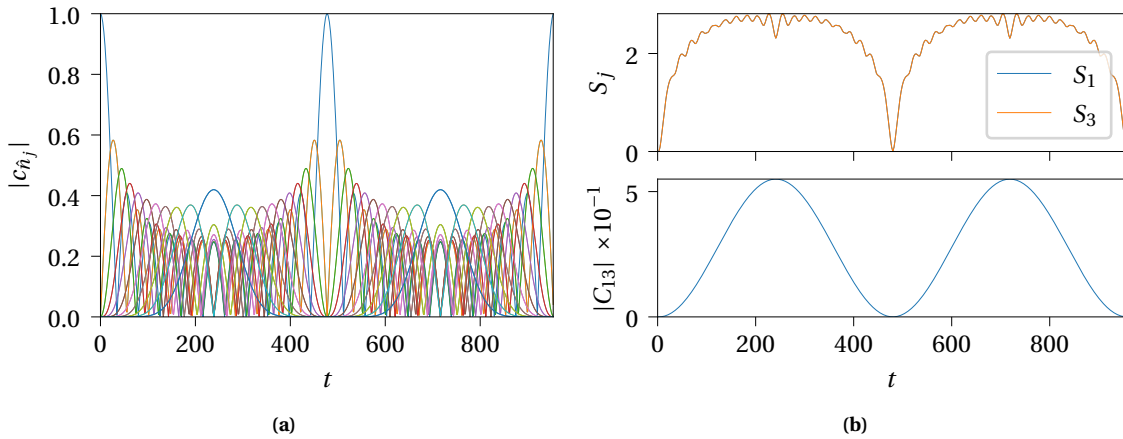


Figura 2.6: Distribuição do módulo dos termos $c_{\hat{n}_j}$ (figura (a)) e de S_j e C_{13} (figura (b) quadro de cima e quadro de baixo respectivamente), para o estado inicial $|\Psi_2\rangle$ para $\eta = 40$ e $N = 20$. Comparando a figura (a) com 2.3b, pode parecer que há aproximadamente a metade das curvas $|c_{\hat{n}_j}|$ do que antes havia; no entanto, isso se deve ao fato da dinâmica das amplitudes dos estados $|N-l-k, l, k\rangle$ e de $|k, l, N-l-k\rangle$ ser a mesma ao longo do tempo. Os máximos nessa figura são das respectivas curvas em ordem até $\frac{T}{4}$ quando se repetem em ordem inversa: $|\Psi_2\rangle; \left| \frac{N-l}{2} - 1, l, \frac{N-l}{2} + 1 \right\rangle$ e $\left| \frac{N-l}{2} + 1, l, \frac{N-l}{2} - 1 \right\rangle; \dots$ No quadro de cima da figura (b), S_1 e S_3 estão sobrepostas.

O gráfico da entropia apresenta uma pequena queda em $t = \frac{T}{4}$ para o caso do estado inicial $|\Psi_2\rangle$, pois nesse instante, $|\Psi(t)\rangle$ possui apenas um número par de átomos em cada um dos poços 1 e 3 o que reduz efetivamente o número de coeficientes $c_{\hat{n}_j}$ que participam no cálculo S_j conforme (2.4.6) a (2.4.8) consequentemente reduzindo seu valor. Isso pode ser notado ao se avaliar este instante na Figura 2.6a, que possui vários termos $c_{\hat{n}_j}$ indo a 0. Como o valor máximo de S_j depende da quantidade de termos $c_{l,k}$ participando de seu cálculo, seu valor acaba se reduzindo.

O estado $|\Psi_2\rangle$, devido sua simetria, também leva um nome especial na literatura, sendo chamado de Estado Gêmeo de Fock [63]. Ele também é um dos autoestados do operador de permutação entre os poços 1 e 3, P_{13} , cuja ação se dá por:

$$P_{13}|N-l-k, l, k\rangle = |k, l, N-l-k\rangle. \quad (2.5.3)$$

Como P_{13} é unitário, seus autovalores são ± 1 . Dado um estado na base de Fock, segue de $P_{13}^2 = I$:

$$P_{13}(N_1 - N_3)P_{13} = N_3 - N_1. \quad (2.5.4)$$

O que implica em $\langle N_1 \rangle = \langle N_3 \rangle$ para autoestados de P_{13} . Como $P_{13} = e^{i\pi Q}$, comutando com H , tem-se que a relação $\langle N_1 \rangle = \langle N_3 \rangle = \frac{N-l}{2}$ será satisfeita se autoestados de P_{13} forem utilizados no RTR.

Nos próximos capítulos, um termo de quebra de integrabilidade será adicionado ao Hamiltoniano (2.1.1) e seus efeitos serão investigados. Este estudo será útil posteriormente para a proposta de um protocolo que realizará o controle do emaranhamento.

Capítulo 3

A Quebra de Integrabilidade

Como visto no Capítulo 2, o Modelo de Três Poços Integrável vem de uma família de modelos integráveis através do *ansatz* de Bethe descritos por três tipos interações: inter e intrapoços, de potencial externo e interações de tunelamento. As duas primeiras são representadas por termos quadráticos e lineares nos operadores $N_A - N_B$ em (1.0.3), modulados pelos parâmetros U e μ respectivamente, enquanto a terceira é representada por operadores de criação e destruição e é modulada por uma série de parâmetros. Este capítulo inicia o estudo de uma perturbação que pode ser introduzida ao sistema que o retire da região de integrabilidade e que lhe induza novos comportamentos.

3.1 A QUEBRA DE INTEGRABILIDADE EXTERNA

Neste capítulo, seguindo os trabalhos de [64], será estudada uma quebra da integrabilidade introduzida a partir de uma diferença de potencial entre os poços 1 e 3, expressa aqui pelo operador:

$$H' = \varepsilon(N_3 - N_1), \quad (3.1.1)$$

em que ε é uma constante que mede a força da quebra. O Hamiltoniano do sistema se torna:

$$H(\varepsilon) = H_0 + H' = U(N_1 - N_2 + N_3)^2 + J_1(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) + J_3(a_2^\dagger a_3 + a_2 a_3^\dagger) + \varepsilon(N_3 - N_1), \quad (3.1.2)$$

fazendo com que o operador Q não seja conservado já que ele não comuta mais com o Hamiltoniano:

$$[H, Q] = 2\varepsilon J_1 J_3 (a_1^\dagger a_3 - a_3^\dagger a_1). \quad (3.1.3)$$

A Figura 3.1 mostra uma representação do sistema submetido à quebra de integrabilidade. Essa quebra pode ser interpretada geometricamente como a introdução de uma diferença de potencial entre os mínimos entre os poços 1 e 3 como se o sistema estivesse sendo “inclinado” em determinada direção. Por fim, tomando o limite de η muito grande em (3.1.2), o RTR ainda é atingido com a alteração:

$$H_e(\varepsilon) = H_e + H' = -\lambda_I Q + \varepsilon(N_3 - N_1). \quad (3.1.4)$$

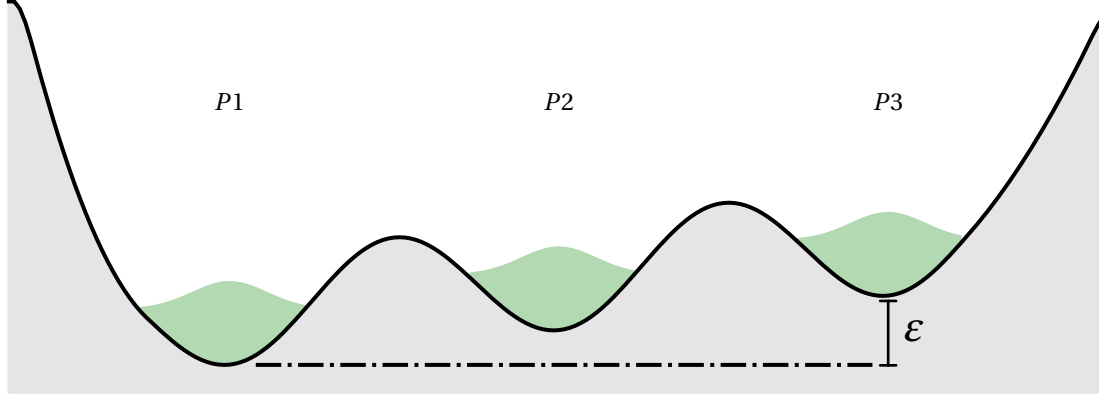


Figura 3.1: O efeito que a quebra de integrabilidade externa produz sobre o sistema é a alteração dos mínimos de potencial entre os poços 1 e 3. Os poços estão identificados com os termos $P1$ a $P3$ e as funções de onda coletivas das partículas em cada poço estão identificadas em verde. Quando $\varepsilon > 0$, o termo H' representa a adição de um potencial ao sistema que reduz a energia associada ao poço 1 e aumenta a associada ao poço 3, conforme representado na figura.

3.2 EFEITOS DA QUEBRA SOBRE O REGIME RESSONANTE

Apesar de $\mu = 0$, H' introduz um potencial químico não integrável ao sistema. Seu principal efeito sobre o sistema no RTR é a supressão do tunelamento ressonante como pode ser percebido na figura 3.2. A conservação de partículas no poço 2 ainda se mantém, de forma que H' age no sentido de impossibilitar tunelamentos entre os poços 1 e 3 preservando sua quantidade total de partículas. Como consequência desse efeito, o sistema torna-se localizado. A quebra possui efeitos tanto sobre o período do sistema quanto na amplitude de $\langle n_j \rangle$, que decrescem de acordo com:

$$\Delta n = \frac{1}{1 + \gamma^2}, \quad \gamma = \frac{1}{J_1 J_3} \left(\frac{J_1^2 - J_3^2}{2} - \frac{\varepsilon}{\lambda_l} \right); \quad (3.2.1)$$

enquanto a frequência de oscilação aumenta conforme:

$$\omega_\gamma = \frac{2\lambda_l J_1 J_3}{\sqrt{\Delta n}} = \frac{\omega_l}{\sqrt{\Delta n}}. \quad (3.2.2)$$

A Figura 3.2 mostra o efeito da quebra sobre o sistema. Pode ser visto que à medida que ε aumenta, a amplitude das oscilações Δn é suprimida até se anular. O efeito da quebra de integrabilidade sobre a frequência de $\langle N_i \rangle / N$ também pode ser observado nessas figuras. Nas figuras 3.2a o período da dinâmica do sistema foi calculado por (3.2.2) e concordou adequadamente com os dados, o que, por si só mostra que o período das oscilações está diminuindo. As figuras 3.2b resumem essas constatações. No topo foi mostrada a curva Δn em função de ε de acordo com (3.2.1), e as amplitudes obtidas para as figuras 3.2b a partir da diagonalização exata de H_e . Embaixo a frequência ω_γ em função de ε foi mostrada conforme (3.2.2). Os valores destacados são os valores utilizados para se determinar o período de oscilação das figuras 3.2a.

3.3 DINÂMICA QUÂNTICA COM A QUEBRA

Apesar de ε impedir uma análise direta através do ansatz de Bethe, o fato de o RTR ainda existir para esse sistema ainda torna possível uma resolução analítica para (3.1.4) como realizada no Apêndice A. Dessa solução, dado um estado inicial $|N-l-k, l, k\rangle$ o sistema evolui no tempo conforme:

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = e^{\frac{i\omega_l(N-l)t}{2}} \sum_{n=0}^{N-l} h_n(k, l, t) |N-l-n, l, n\rangle. \quad (3.3.1)$$

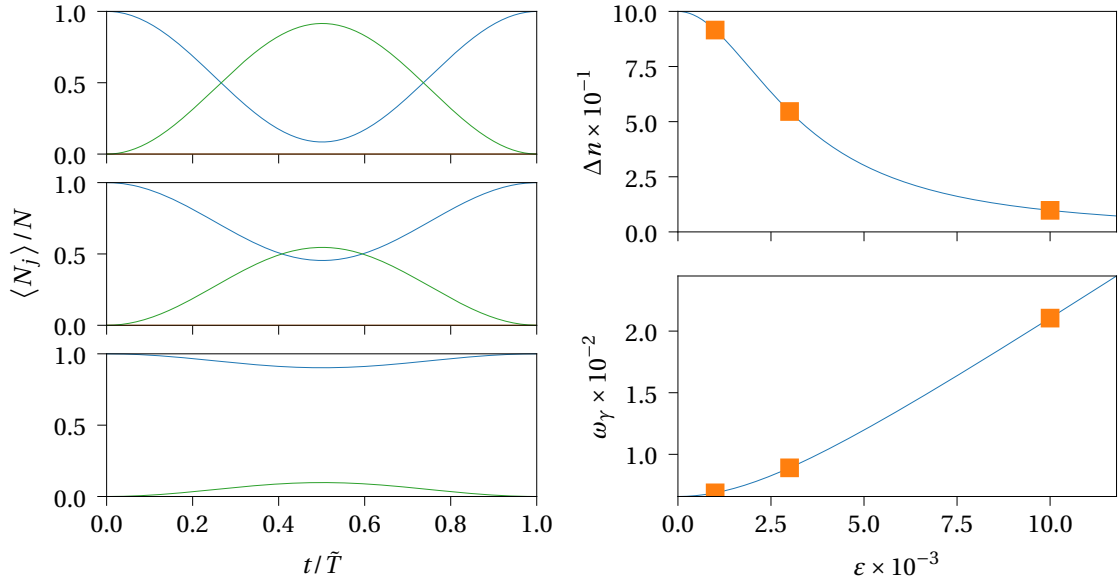
Com

$$h_n(k, l, t) = \sqrt{\frac{C_k^{N-l}}{C_n^{N-l}}} \sum_{j \in S_q(k, l)} f(t)^j g(t)^{k+n-2j} f^*(t)^{N-l-k-n+j} C_j^k C_{n-j}^{N-l-k}, \quad (3.3.2)$$

em que:

$$f(t) = \frac{\alpha^2 e^{-i\frac{\omega_\gamma t}{2}} + \beta^2 e^{i\frac{\omega_\gamma t}{2}}}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad g(t) = \frac{e^{-i\frac{\omega_\gamma t}{2}} - e^{i\frac{\omega_\gamma t}{2}}}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad (3.3.3)$$

sendo as constantes $\alpha = \sqrt{\frac{1}{\Gamma+\gamma}}$ e $\beta = \sqrt{\frac{1}{\Gamma-\gamma}}$, com $\Gamma = \sqrt{1+\gamma^2}$. Novamente, a partir de $\langle \tilde{\Psi}(t) | N_j | \tilde{\Psi}(t) \rangle$, expressões analíticas para $\langle N_j \rangle$ podem ser determinadas com a quebra de integrabilidade e reproduzem o que já foi



(a) De cima para baixo: $\varepsilon = 0.001$, $\varepsilon = 0.003$ e $\varepsilon = 0.01$. $\tilde{T} = 2\pi/\omega_\gamma$

(b)

Figura 3.2: Ação da quebra sobre o sistema suprime o tunelamento de partículas entre os poços 1 e 3. Nas figuras (a), os valores esperados das amplitudes normalizadas $\langle N_1 \rangle / N$ e $\langle N_3 \rangle / N$ foram representados nas linhas azul e verde respectivamente para diferentes valores de ε . O estado inicial adotado para essas figuras foi o estado $|20, 0, 0\rangle$ correspondendo a $l = k = 0$ e a evolução temporal do sistema foi obtida pela diagonalização exata de H com o parâmetro $\eta = 40$. No quadro de cima da figura (b) foi registrada a amplitude Δn (linha azul) de acordo com (3.2.1) e no quadro de baixo a frequência ω_γ (linha azul) em função de ε de acordo com (3.2.2). Os valores destacados nessas figuras (quadrados amarelos) correspondem aos valores obtidos por diagonalização exata dos quadros da figura (a).

obtido por análise semiclássica em [64]:

$$\langle N_1 \rangle = k + (N - l - 2k) \left[1 - \Delta n \left(\frac{1 - \cos(\omega_\gamma t)}{2} \right) \right]; \quad (3.3.4)$$

$$\langle N_3 \rangle = k + (N - l - 2k) \Delta n \left(\frac{1 - \cos(\omega_\gamma t)}{2} \right). \quad (3.3.5)$$

No limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se que $\Delta n \rightarrow 1$ e $\omega_\gamma \rightarrow \omega_l$, fazendo com que (3.3.4) e (3.3.5) se tornem (2.3.6) e (2.3.7) respectivamente.

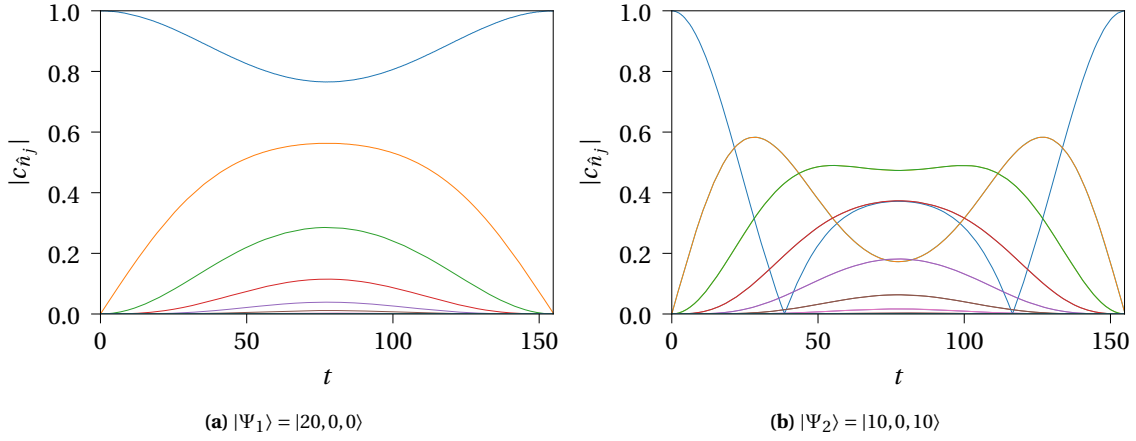


Figura 3.3: Ação da quebra de integrabilidade externa $\varepsilon = 0.02$ sobre os estados iniciais $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$ para 20 partículas no RTR com $\eta = 40$ durante um período $\tilde{T} = \frac{2\pi}{\omega_\gamma}$. A linha azul nas duas figuras representa o termo $|c_{\hat{n}_j}|$ associado ao estado inicial da dinâmica. Na figura (a), fica clara a localização induzida pela quebra de integrabilidade, visto que o termo $c_{20,0,0}$ já é dominante sobre os demais durante todo o tempo transcorrido. No entanto, ao se analisar a figura (b), pode ser percebido que o efeito de localização do estado inicial ainda não ocorreu completamente para $|\Psi_2\rangle$, mostrando que certos estados iniciais são mais resistentes aos efeitos de ε .

A Figura 3.3 mostra um quadro comparativo da ação da quebra de integrabilidade externa sobre o sistema com 20 partículas para os estados $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$. O valor $\varepsilon = 0,02$ foi escolhido para que esse processo não tenha ainda ocorrido completamente a fim de que uma melhor compreensão do fenômeno possa ser desenvolvida. À medida que ε cresce, o módulo $|c_{\hat{n}_j}|$ associado ao estado inicial da dinâmica oscila cada vez menos até que se tornar praticamente constante $|c_{\hat{n}_j}(t)| = 1$. Entretanto a escolha de estado inicial influencia na velocidade com que essa convergência ocorre. Na Figura 3.3a, a localização do estado inicial está quase finalizada pois $\min\{|c_{20,0,0}\} \approx 0,8$, já na Figura 3.3b, não se pode dizer que a localização do estado inicial tenha começado, pois ainda há momentos em que $|c_{10,0,10}|$ é até mesmo 0. Esse efeito de localização induzido por ε não só se reflete nos observáveis $\langle N_j \rangle$ como já visto nesta seção, mas também nas grandezas apresentadas no Capítulo 2.

3.4 EFEITOS DA QUEBRA SOBRE ENTROPIA E CORRELAÇÃO

O efeito de localização dos termos $|c_{\hat{n}_j}|$ se espalha além do valor esperado do número de partículas. Como C_{ij} dependem diretamente dos operadores N_j , é natural se esperar que uma dinâmica localizada em $\langle N_j \rangle$ se traduza em localização em C_{ij} . O efeito de ε sobre as entropias S_j pode ser visto ao se analisar as expressões (2.4.6) a (2.4.8), que não depende das fases de $c_{\hat{n}_j}$. Isso faz com que a localização induzida pela quebra de

integrabilidade se traduza diretamente sobre essas quantidades, como pode ser visto nas figuras 3.4.

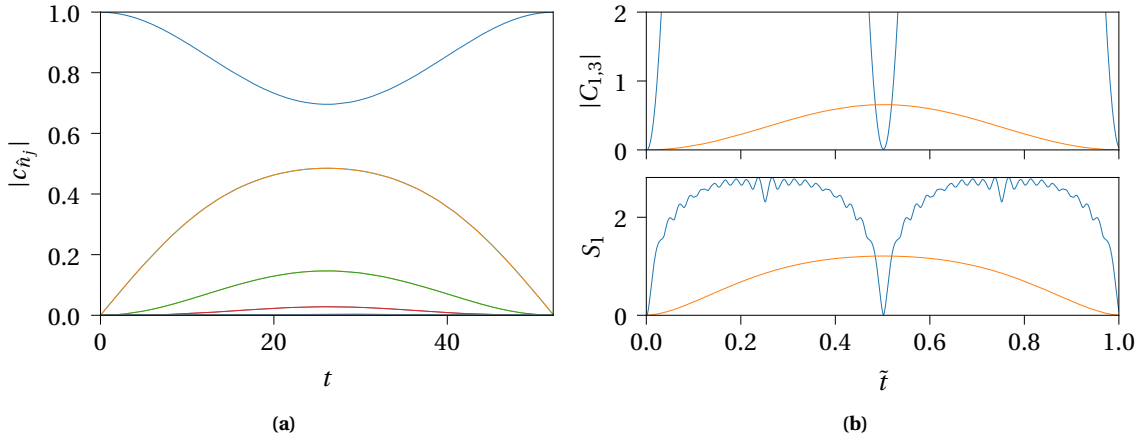


Figura 3.4: Ação da quebra de integrabilidade $\varepsilon = 0,06$ para a dinâmica do estado inicial $|10, 0, 10\rangle$ no RTR com um parâmetro $\eta = 40$. Na figura (a) foi mostrado a evolução temporal dos termos $c_{\hat{n}_j}$, mostrando que $|c_{10,0,10}|$ já se encontra em processo de localização. A figura (b) mostra as consequências desse processo sobre as quantidades S_1 e $C_{1,3}$ associadas a essa dinâmica. As linhas azuis mostram a evolução temporal dessas quantidades sem que ε esteja presente enquanto as linhas amarelas correspondem à dinâmica com $\varepsilon = 0,06$. Em ambos os casos pode ser constatada uma redução de amplitude. O tempo nesta figura foi normalizado de acordo com a duração de cada dinâmica ($\tilde{t} = \frac{\omega_1 t}{2\pi}$ para as linhas azuis e $\tilde{t} = \frac{\omega_\gamma t}{2\pi}$ para as linhas amarelas).

Ao longo dos próximos capítulos, o efeito de localização induzido pela quebra de integrabilidade será explorado junto com a evolução temporal natural do sistema para a geração de um protocolo dinâmico. Esse protocolo será aplicado em três contextos e permitirá um controle sobre o nível de emaranhamento do sistema. Para a melhor visualização dos efeitos de ε sobre o sistema, valores “moderados” dessa quantidade foram empregados neste capítulo, mas ao longo dos próximos, a quebra de integrabilidade externa será definida em valor elevado o suficiente de forma que a localização de estados irá se impor durante toda a dinâmica do modelo para todos os estados iniciais da base $\{|N - l - k, l, k\rangle\}$.

Capítulo 4

Controle de Emaranhamento

Até este momento, o modelo de três poços integrável foi extensivamente estudado e uma quebra de integrabilidade foi aplicada sobre ele. O foco desse estudo foi o Regime de Tunelamento Ressonante por apresentar uma estrutura de bandas que permite uma análise completa do sistema. Neste capítulo será visto como os conceitos desenvolvidos até aqui podem levar a aplicações nas áreas de controle de emaranhamento e transporte de estados quânticos. No próximo capítulo, será visto como o protocolo aqui desenvolvido pode ser visto como um interferômetro, levando ainda a outra aplicação para o Modelo de Tunelamento Ressonante.

4.1 PROTOCOLO DE EMARANHAMENTO

O ponto de partida para a análise do sistema é a definição do seguinte conjunto de operadores evolução temporal sobre o sistema:

$$|\Psi_f\rangle = \mathcal{P}(\theta_1, \phi, \theta_2)|\Psi_0\rangle, \quad \mathcal{P}(\theta_1, \phi, \theta_2) = \mathcal{U}(t_{\theta_2})\tilde{\mathcal{U}}(t_\phi)\mathcal{U}(t_{\theta_1}), \quad (4.1.1)$$

em que $\mathcal{U}(t) = e^{-iHt}$ e $\tilde{\mathcal{U}}(t) = e^{-iH(\varepsilon)t}$. Dessa forma, \mathcal{P} define um protocolo a ser aplicado sobre um estado inicial do sistema cujo estado final $|\Psi_f\rangle$ será objeto da análise de possíveis aplicações. Este protocolo pode ser analisado através da já antes mencionada representação de Jordan-Schwinger do grupo $SU(2)$ para se descrever o Hamiltoniano do sistema. Ela consiste na criação de operadores de *spin* a partir dos operadores criação e destruição:

$$S_x = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1); \quad S_y = -\frac{i}{2}(a_1^\dagger a_3 - a_3^\dagger a_1); \quad S_z = \frac{1}{2}(N_1 - N_3). \quad (4.1.2)$$

Esses operadores não devem ser confundidos com o *spin* real do sistema, devendo ser vistos como uma ferramenta de auxílio na manipulação teórica do RTR. Assim, o Hamiltoniano do sistema para o caso simétrico $J_1 = J_2 = \frac{J}{\sqrt{2}}$ pode ser expresso como (a menos do termo $\omega_l(N_1 + N_3) = \omega_l(N - l)I$):

$$H_e(\varepsilon) = \omega_l S_x + 2\varepsilon S_z. \quad (4.1.3)$$

Ao se definir $\varepsilon = 0$, $H_e(0)$ realiza uma rotação do sistema em torno do eixo x num ângulo θ_j . Quando ε é muito grande, $\omega_\gamma \gg \omega_l$ o que faz com que o sistema consiga efetuar muitas rotações em torno do eixo z sem que

uma significativa rotação no eixo x seja induzida. Nesse contexto o Hamiltoniano pode ser tratado de forma aproximada como $H_e(\varepsilon) = 2\varepsilon S_z$ e o ângulo de rotação em torno do eixo z neste caso será dado por ϕ . Visto que as frequências de rotação nesses casos são ω_l e 2ε , os ângulos de rotação correspondem diretamente aos tempos de aplicação do protocolo como:

$$\theta_j = \omega_l t_{\theta_j}; \quad \phi = 2\varepsilon t_{\phi}. \quad (4.1.4)$$

Essas constatações levam a seguinte forma final para um protocolo $\tilde{\mathcal{P}}$ definido a partir da utilização do Hamiltoniano efetivo aos operadores evolução temporal em \mathcal{P} . Assim como $|\Psi\rangle = \mathcal{P}|\Psi_0\rangle$, a aplicação de $\tilde{\mathcal{P}}$ a $|\Psi_0\rangle$ gerará o estado:

$$|\tilde{\Psi}_f\rangle = \tilde{\mathcal{P}}(\theta_1, \phi, \theta_2)|\Psi_0\rangle, \quad \tilde{\mathcal{P}}(\theta_1, \phi, \theta_2) = e^{-i\theta_2 S_x} e^{-i\phi S_z} e^{-i\theta_1 S_x}. \quad (4.1.5)$$

A partir de $\tilde{\mathcal{P}}$, expressões analíticas podem ser obtidas para se entender o comportamento do sistema sob a aplicação de \mathcal{P} . Essas expressões serão comparadas com os resultados da aplicação direta de \mathcal{P} através da diagonalização exata de $H(\varepsilon)$, que serão exibidos ao longo das próximas seções e conduzirão os estudos desenvolvidos neste capítulo.

4.2 APLICAÇÃO SOBRE ESTADOS INICIAIS

Nesta seção serão estudados os efeitos que protocolo produz sobre o emaranhamento do estado quântico do sistema para dois estados iniciais: o estado de Fock $|\Psi_1\rangle$ definido em (2.5.1) e o estado Gêmeo de Fock $|\Psi_2\rangle$ definido em (2.5.2). Como discutido na seção 2.4.2, os estados dos poços 1 e 3 se encontram altamente correlacionados no instante $t = \frac{T}{4}$ e portanto, na primeira etapa do protocolo, foi tomado $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$. O controle do nível de emaranhamento de $|\Psi_f\rangle$ será então determinado pela duração da subsequente aplicação da quebra de integrabilidade na segunda etapa do protocolo.

A Figura 4.1 mostra um quadro comparativo da aplicação da quebra de integrabilidade para diferentes valores de ϕ para o estado inicial $|N, 0, 0\rangle$. Nela pode ser percebida a criação de um estado de entropia constante para o caso $\phi = \frac{\pi}{2}$, assim como é constatado uma reflexão qualitativa entre o comportamento da entropia de Von Neumann e a função de correlação dos poços 1 e 3. Já a Figura 4.2a mostra esse mesmo quadro para o estado gêmeo de Fock $|10, 0, 10\rangle$, enquanto a Figura 4.2b varia o valor de ε mantendo ϕ fixo em $\frac{\pi}{2}$. As Figuras 4.1, 4.2a e 4.2b também mostram como a amplitude de S_j varia no tempo. Nesses quadros comparativos também pode ser visto como um aumento na amplitude de C_{13} segue do aumento da amplitude da entropia de Von Neumann. A partir dessas observações, um critério claro de geração de estados de entropia constante pode ser elaborado: $\phi = \frac{\pi}{2}$ e um valor de ε suficientemente grande.

Esse comportamento das entropias de Von Neumann pode ser explicado ao se desenvolver as expressões (2.4.6) e (2.4.8). Dado um estado genérico dentro de uma banda do RTR:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-l} c_k |N-l-k, l, k\rangle. \quad (4.2.1)$$

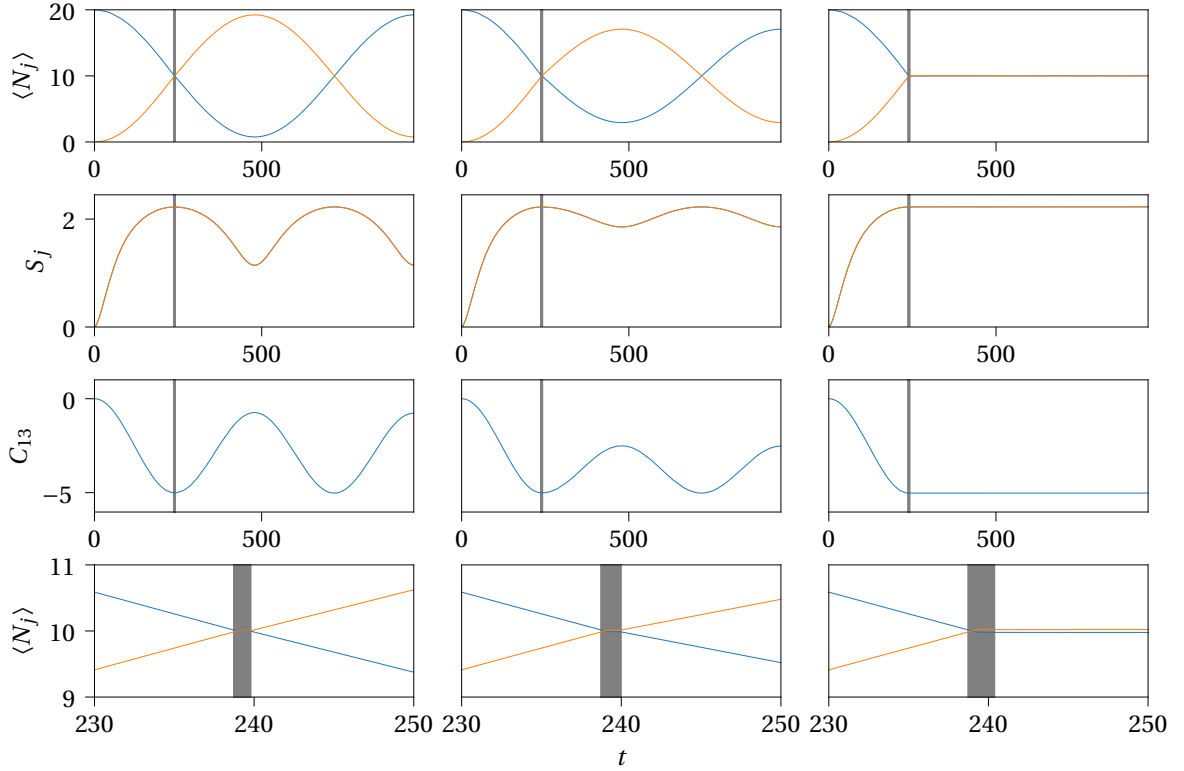


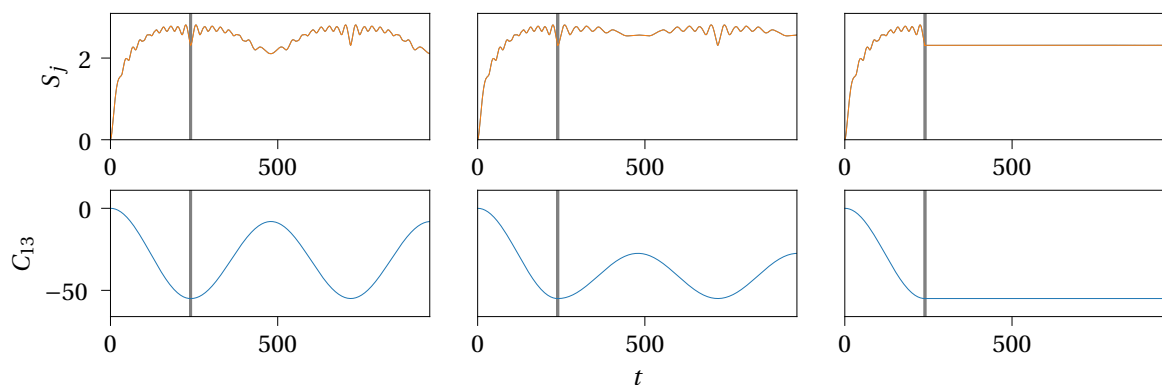
Figura 4.1: Quadro comparativo da aplicação da quebra de integrabilidade para diferentes valores de ϕ para o estado inicial $|\Psi_1\rangle = |20, 0, 0\rangle$. Para a evolução temporal do sistema foi utilizado $\eta = 40$ e durante a aplicação da quebra de integrabilidade, o que corresponde aos instantes em cinza nos gráficos, $\varepsilon = 1$. Das colunas da esquerda para as da direita: $\phi = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$. Das linhas de cima para as de baixo: valores esperados $\langle N_1 \rangle$ e $\langle N_3 \rangle$; entropias de Von Neumann para os poços 1 e 3; função de correlação C_{13} e ampliação do gráfico de $\langle N_j \rangle$ na região onde a quebra de integrabilidade é aplicada. Exceto para C_{13} , as linhas azuis são os resultados referentes ao poço 1 e as linhas amarelas são os resultados para o poço 3.

A aplicação dessas equações resulta em:

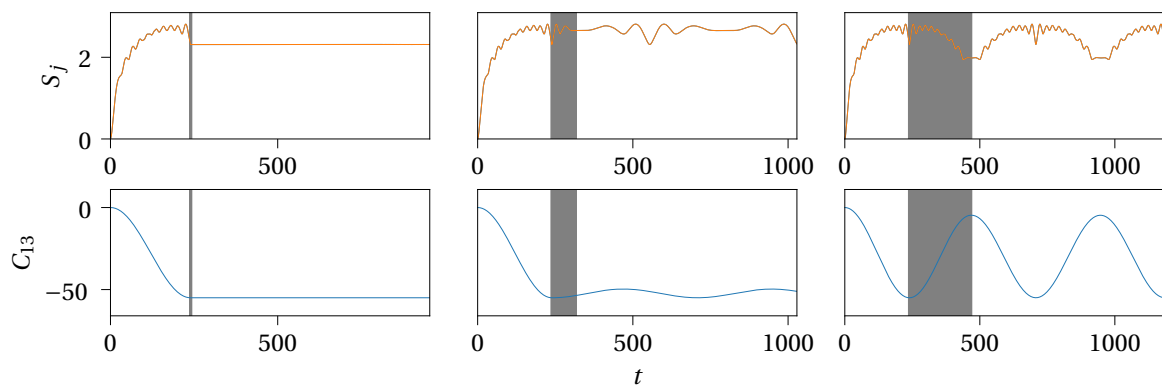
$$S_1 = - \sum_{k=l}^N |c_{k-l}|^2 \ln(|c_{k-l}|^2); \quad (4.2.2)$$

$$S_3 = - \sum_{k=0}^{N-l} |c_k|^2 \ln(|c_k|^2). \quad (4.2.3)$$

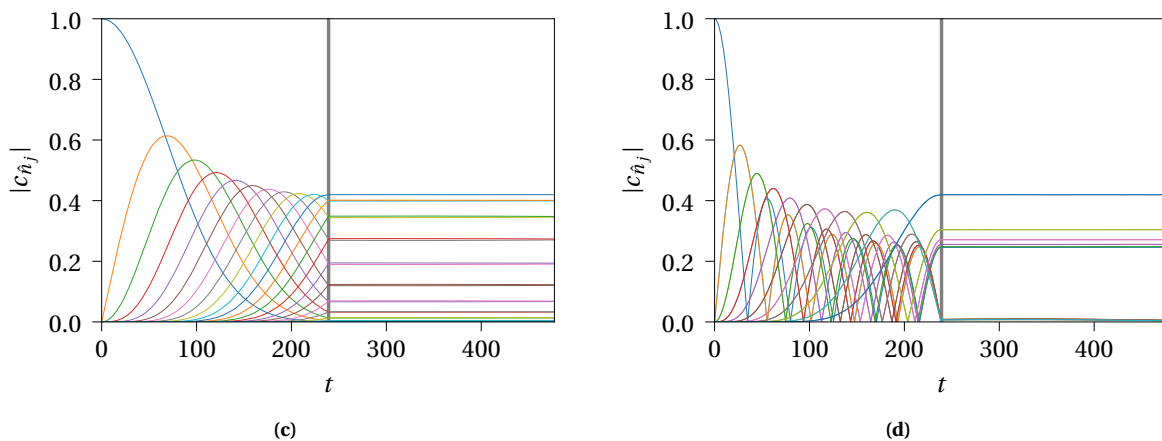
que dependem somente dos módulos dos termos c_k . As Figuras 4.2c e 4.2d mostram as amplitudes $|c_{\hat{n}_j}|$ durante a aplicação da quebra de integrabilidade para a geração dos estados de entropia constante. Ao analisá-las, o que pode ser percebido é que após a aplicação da quebra ε sob essas condições, elas ficam constantes, o que junto com (4.2.2) e (4.2.3), completam a explicação para esse fenômeno. As expressões (4.2.2) e (4.2.3) também conseguem explicar por que $S_1 = S_3$, visto que uma soma de 0 a $N - l$ sobre as amplitudes $|c_k|$ cobre os mesmos índices que uma soma de l a N de $|c_{k-l}|$.



(a) $\varepsilon = 1$. Da esquerda para a direita: $\phi = \frac{\pi}{8}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$



(b) $\phi = \frac{\pi}{2}$. Da esquerda para direita: $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $\varepsilon = 0,001$.



(c)

(d)

Figura 4.2: Quadros comparativos de entropia de Von Neumann e funções de correlação para o estado $|10, 0, 10\rangle$ e como vem sendo feito nesta dissertação, $\eta = 40$. Primeiramente o sistema evoluiu no RTR durante um quarto de período ($\theta = \pi/2$), depois foi aplicada a quebra de integrabilidade e na sequência é mostrada a dinâmica do sistema durante os três quartos de período remanescentes. Na figura (a), ε se manteve constante e os valores de ϕ variaram e na figura (b), ϕ se manteve constante e ε variou. Esta figura ilustra o fato de que tanto ε grande o bastante quanto $\phi = \frac{\pi}{2}$ são condições necessárias para o estado de entropia constante. As figuras (c) e (d) mostram a evolução temporal do módulo dos termos $c_{\hat{n}_j}$ durante a aplicação do protocolo para $\varepsilon = 1$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$ para os estados iniciais $|20, 0, 0\rangle$ (c) e $|10, 0, 10\rangle$ (d).

4.3 ESTADO INICIAL $N00N$ state COERENTE

Nesta seção será estudada a ação do protocolo para o caso do estado inicial dado por:

$$|CN\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0, N, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\frac{a_1^\dagger + a_3^\dagger}{\sqrt{2}} \right)^N |0\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0, N, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{j=0}^N \sqrt{C_j^N} |j, 0, N-j\rangle \right]. \quad (4.3.1)$$

A motivação do seu estudo segue diretamente do estado fundamental do modelo, que apresenta a mesma forma do estado dado em (4.3.1) para um número pequeno de bósons ($N \approx 10$) no RTR com $U < 0$. Essa expressão pode ser entendida observando que o Hamiltoniano possui uma estrutura com duas classes como visto no Capítulo 2, o que permite reduzi-lo a um Hamiltoniano de dois modos dado por:

$$H = U(N_{13} - N_2)^2 - J(a_{13}^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_{13}); \quad (4.3.2)$$

através da identificação dos operadores $N_{13} = N_1 + N_3$ e $a_{13} = \frac{(a_1 + a_3)}{\sqrt{2}}$. Por outro lado, já é conhecido na literatura que o Hamiltoniano de dois modos acima admite um $N00N$ state como estado fundamental [65] no regime de interação forte para $U < 0$, e portanto, o modelo de três poços também admite o estado fundamental dado por (4.3.1).

4.3.1 Controle Dinâmico Através do Protocolo

As Figuras 4.3 mostram a entropia e o módulo das funções de correlação para esse estado sob a ação do protocolo $\mathcal{P}(\pi/2, \phi, \pi/2)$. Como $|CN\rangle$ é autoestado de P_{13} , a dinâmica dos operadores N_1 e N_3 já é conhecida. Esses resultados foram comparados com as expressões analíticas obtidas para essas quantidades obtidas a partir do protocolo $\tilde{\mathcal{P}}$. Diferentemente de um estado que possui um valor de l bem definido, não se pode dizer a primeira vista que $|CN\rangle$ possua uma frequência característica porém, pela estrutura do modelo no RTR, $\omega_0 = \omega_N$, o que pode ser verificado em (2.2.1), pois os estados com $l = 0$ e $|0, N, 0\rangle$ estão na mesma banda de energia. Por causa disso, frequência ω_0 foi utilizada para a definição dos parâmetros t_{θ_j} e t_{ϕ} de \mathcal{P} .

A presença de $|0, N, 0\rangle$ em $|CN\rangle$ introduz emaranhamento entre o poço 2 e o subsistema de poços 1 e 3, e portanto influencia o comportamento das funções de correlação e das entropias de Von Neumann associadas ao sistema. A relação $S_1 = S_3$ que se manteve presente nos estados iniciais $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$ não ocorre mais. Novamente, as expressões analíticas para S_1 e S_3 ajudam a compreender esse comportamento. Aplicando $\tilde{\mathcal{P}}$ a $|CN\rangle$, o seguinte estado é alcançado:

$$\tilde{\mathcal{P}}\left(\frac{\pi}{2}, \phi, \frac{\pi}{2}\right)|CN\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0, N, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\cos\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) a_1^\dagger - \text{sen}\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) a_3^\dagger \right)^N |0\rangle \right], \quad (4.3.3)$$

que possui termos $c_{\hat{n}_j}$ com a seguinte estrutura:

$$c_{N-l-k, l, k} = \frac{c_k \delta_{0, l}}{\sqrt{2}} + \frac{\delta_{0, k} \delta_{N, l}}{\sqrt{2}}. \quad (4.3.4)$$

Aplicando esses termos nas expressões (2.4.6) a (2.4.8) faz com que as entropias S_j fiquem:

$$S_1 = - \left(\frac{|c_0|^2 + 1}{2} \right) \ln \left(\frac{|c_0|^2 + 1}{2} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{|c_k|^2}{2} \ln \left(\frac{|c_k|^2}{2} \right); \quad (4.3.5)$$

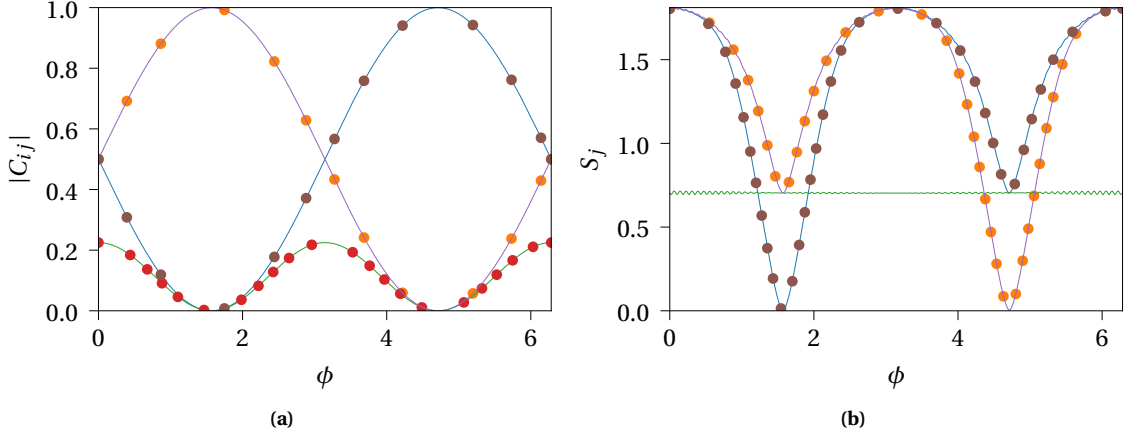


Figura 4.3: Módulo das funções de correlação (figura (a)) C_{13} (linha verde), C_{12} (linha púrpura) e C_{23} (linha azul) e entropias de Von Neumann (figura (b)) S_1 (linha púrpura), S_2 (linha verde) e S_3 (linha azul), em função de ϕ calculadas a partir do operador $\mathcal{P}(\pi/2, \phi, \pi/2)$ aplicado ao estado $|CN\rangle$, para $\eta = 40$ e $\varepsilon = 1$. Os pontos exibidos na figura (a) são os módulos das funções de correlação obtidos através das expressões analíticas (4.3.8) e os pontos exibidos na figura (b) são os resultados obtidos através das expressões analíticas (4.3.5) e (4.3.7) com os termos c_k dados por (4.3.3).

$$S_2 = \ln(2); \quad (4.3.6)$$

$$S_3 = - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|c_k|^2}{2} \ln \left(\frac{|c_k|^2}{2} \right) - \left(\frac{|c_N|^2 + 1}{2} \right) \ln \left(\frac{|c_N|^2 + 1}{2} \right); \quad (4.3.7)$$

não mais necessariamente sendo idênticas. Um conjunto de termos $c_k = c_{N-k}$ ainda seria capaz de fazer com que $S_1 = S_3$, no entanto, o estado final dado por (4.3.3) não obedece tal condição, o que explica o comportamento de S_j mostrado nas Figuras 4.3 com os dados obtidos a partir de \mathcal{P} . O estado (4.3.3) também permite que expressões analíticas para as funções de correlação sejam obtidas:

$$|C_{13}| = \frac{N(N-2)}{16} \cos(\phi)^2; \quad |C_{12}| = \frac{N^2}{4} \cos\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)^2; \quad |C_{23}| = \frac{N^2}{4} \sin\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)^2; \quad (4.3.8)$$

que também está de acordo com o que está exposto com os dados obtidos do operador \mathcal{P} .

Há dois valores especiais de ϕ a serem levados em conta em (4.3.3). Quando $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ e $\sin\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ e quando $\phi = \frac{3\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ e $\sin\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, o que leva aos estados:

$$\tilde{\mathcal{P}}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)|CN\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, N, 0\rangle + |N, 0, 0\rangle); \quad \tilde{\mathcal{P}}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)|CN\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, N, 0\rangle + (-1)^N |0, 0, N\rangle). \quad (4.3.9)$$

Os estados (4.3.9) constituem $N00N$ states filtrados de $|CN\rangle$ através do protocolo. Sua presença pode ser evidenciada através da Figura 4.3b em que quando $\phi = \frac{\pi}{2}$, $S_1 = S_2 = \ln(2)$ e $S_3 = 0$ e quando $\phi = \frac{3\pi}{2}$, $S_3 = S_2 = \ln(2)$ e $S_1 = 0$. Para ratificar essas conclusões, a Figura 4.4 foi gerada com os coeficientes $c_{0,N,0}$, $c_{N,0,0}$ e $c_{0,0,N}$ em função de ϕ .

Neste Capítulo foi definido um protocolo que consiste na aplicação sucessiva de operadores evolução temporal criados a partir dos Hamiltonianos do RTR vistos nos Capítulos 2 e 3. A partir de uma escolha inteligente de estados iniciais e tempos de dinâmica apropriados, fenômenos relevantes puderam ser observados no sistema. O próximo Capítulo irá tratar da utilização do protocolo como um interferômetro e da investigação da

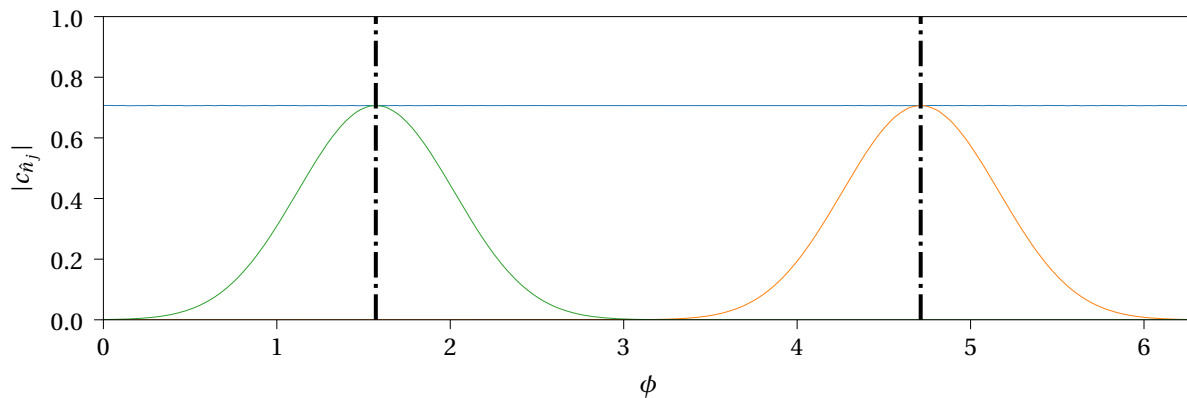


Figura 4.4: Módulo dos termos $c_{\hat{n}_j}$ para o estado inicial $|CN\rangle$. Representados na figura estão os termos $c_{0,20,0}$ (linha azul), $c_{20,0,0}$ (linha verde) e $c_{0,0,20}$ (linha amarela). Os ângulos $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{3\pi}{2}$ estão assinalados com linhas tracejadas pretas e revelam que, nesses pontos, o sistema sob a ação do protocolo \mathcal{P} está se comportando conforme os resultados obtidos por $\hat{\mathcal{P}}$ expressos em (4.3.9).

sensibilidade do parâmetro ϕ para diferentes estados iniciais e observáveis de detecção. Enquanto aqui ϕ é tratada apenas como um parâmetro, no Capítulo 5, esse ângulo será estimado a partir do sistema.

Capítulo 5

Interferometria

Neste Capítulo será visto como o MTPI pode ser utilizado para a estimativa da diferença de fase ϕ vista no Capítulo 4. Para isso será feita a analogia do protocolo descrito pelo operador \mathcal{P} com um interferômetro, assim como um operador especial para se estimar ϕ será definido. Uma discussão sobre o nível de precisão nas estimativas de ϕ também será conduzida. Com isso, estados iniciais podem ser definidos para o estudo do desempenho do sistema. Este estudo abre um novo leque de áreas onde o MTPI pode ser aplicado.

5.1 ANALOGIA COM INTERFERÔMETRO ÓPTICO

Os ângulos θ_j e ϕ podem ser ajustados de forma a permitir que o protocolo visto no Capítulo anterior realize operações análogas a um interferômetro de Mach-Zehnder [66], como representado na Figura 5.1. Como pode ser visto no Apêndice B, a ação das lâminas semiespelhadas e da amostra que induz uma diferença de fase sobre os fótons emitidos pode ser tratada quanticamente através de operadores de rotação em direções ortogonais. A presença de duas fontes e dois detectores nesse arranjo permite a representação do interferômetro utilizando operadores criação e destruição, tal como realizado com o Modelo de Três poços Integrável. A partir disso, o operador $\tilde{\mathcal{P}}$ (e consequentemente \mathcal{P}) pode ser adaptado para tratar a evolução temporal do RTR como um interferômetro.

A correspondência entre o sistema de três poços integrável e um interferômetro de Mach-Zehnder 50:50 pode ser obtida ao se definir $\theta_j = \frac{\pi}{2}$, conforme visto no Apêndice B. Com a identificação de H_e com os geradores da álgebra $SU(2)$, fica claro como ele pode reproduzir as operações unitárias de um divisor de feixe ou de diferença de fase no contexto quântico. As rotações do sistema em torno do eixo x nos ângulos θ_j em $\tilde{\mathcal{P}}$ quando $\varepsilon = 0$ atuam como os operadores M_j na seção B.1. Quando a quebra de integrabilidade está ativada, a rotação em torno do eixo z permite a sua identificação com o operador de diferença de fase P_S em B.1, visto que S_z é um operador diagonal na base $\{|N-l-k, l, k\rangle\}$. O ângulo de rotação em torno do eixo z constitui a diferença de fase a ser detectada. No interferômetro 50:50, para que os feixes sejam divididos com intensidades iguais, o ângulo θ deve ser de 90° , levando a seguinte forma final para o operador a ser aplicado ao estado inicial:

$$\mathcal{P}_{MZ} = \mathcal{P}\left(\frac{\pi}{2}, \phi, \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.1.1)$$

que, não por coincidência, é o mesmo operador usado no protocolo discutido no Capítulo 4. Uma vez definido

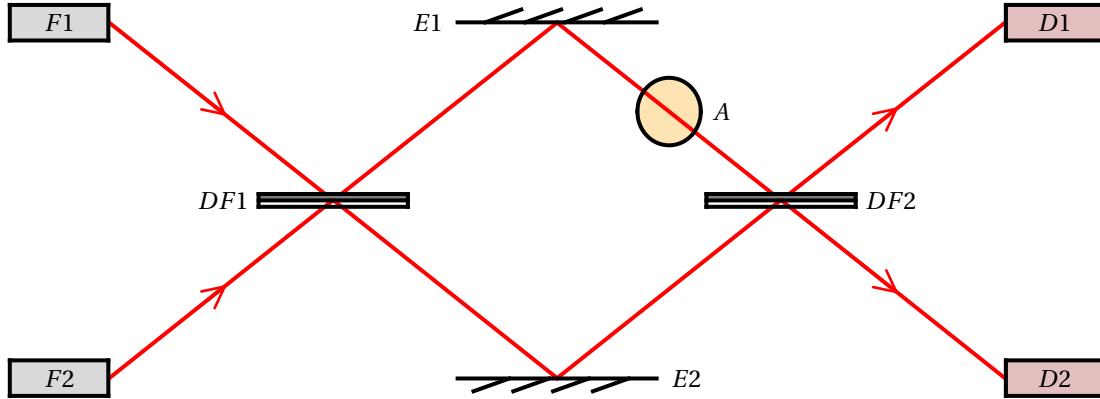


Figura 5.1: Representação esquemática do interferômetro de Mach-Zehnder. Duas fontes $F1$ e $F2$ emitem feixes de luz coerente que se encontram no divisor de feixes $DF1$. Durante o caminho ao segundo divisor $DF2$, os feixes são refletidos pelos espelhos $E1$ e $E2$, sendo que um deles interfere com uma amostra A ganhando uma diferença de fase ϕ . Depois de serem recombinados em $DF2$, os feixes seguem para os detectores $D1$ e $D2$. Depois de passar por $DF1$, os fótons em cada feixe são estados emaranhados da luz emitida tanto por $F1$ quanto por $F2$. A simetria do aparelho permite sua representação com operadores unitários como feito no RTR nesta dissertação.

como o operador \mathcal{P} realiza operações análogas a um interferômetro de Mach-Zehnder, agora é possível iniciar o estudo de seus efeitos sobre diferentes estados iniciais. Na base $\{|N-l-k, l, k\rangle\}$ os subconjuntos $\{|N-l, l, 0\rangle\}$ ou $\{|0, l, N-l\rangle\}$ podem ser destacados como correspondendo a análogos de estados de luz que podem ser realizados ao se utilizar apenas uma das fontes do interferômetro. Os estados $|\Psi_1\rangle$ pertencem a um destes subconjuntos, enquanto os estados Gêmeos de Fock já representam análogos de estados de luz gerados por ambas as fontes do interferômetro com intensidades iguais. Para que o estudo do modelo aplicado como um interferômetro possa continuar, ainda se faz necessário definir um procedimento para a extração da informação da diferença de fase através da dinâmica aqui apresentada, o que será feito nas seções a seguir.

5.2 RESOLUÇÃO

Em metrologia, a qualidade de uma observação O relacionada a um observável \mathcal{O} obtida através da realização de algum experimento, é definida através de dois conceitos: exatidão que mede o quanto o resultado do processo de medição está próximo do resultado real idealizado para a experiência; e precisão que mede o quanto as medições de \mathcal{O} estão concentradas em torno do resultado central fornecido pela realização do experimento. Dado um conjunto de medições O , a precisão ou incerteza de uma medição é obtida através do desvio padrão dessas observações, $\Delta O = \sqrt{\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2}$. Num contexto clássico, seriam feitas várias medições de \mathcal{O} obtendo-se resultados o_j que seriam utilizados para o cálculo de ΔO , enquanto num contexto quântico ΔO seria obtido através dos valores esperados do operador O e de O^2 utilizando o estado $|\Psi(t)\rangle$. Quando duas medições de \mathcal{O} estão mais próximas que a medida de suas incertezas não é mais possível diferenciá-las, portanto essa incerteza da medida também é chamada de resolução do aparato experimental.

Quando a grandeza g que se quer medir não é obtida diretamente a partir do experimento, mas sim a partir de uma função do observável \mathcal{O} , com sua incerteza ΔO , pode ser dito que essa grandeza é uma função do resultado da observação de \mathcal{O} , $g = g(o)$. A incerteza com relação a essa observação é propagada para a grandeza

g de acordo com a resolução analítica para a lei de propagação de incertezas [67]:

$$\Delta g(o) = \sqrt{\Delta O^2 (\partial_o g(o))^2} \Rightarrow \Delta O = \frac{\Delta g(o)}{|\partial_o g(o)|}. \quad (5.2.1)$$

Essa expressão deve ser utilizada para se relacionar uma incerteza à diferença de fase ϕ no protocolo (4.1.5) [68] pois, como ela está relacionada ao tempo, não haverá operador hermiteano capaz de representá-la, forçando seu tratamento como um parâmetro clássico [62]. A grande consequência disso é que a incerteza encontrada não será um resultado único, dependendo de configurações do aparato experimental e dos operadores utilizados para extraí-la.

5.3 LIMITE DE RESOLUÇÃO

Nesta seção será discutido qual é o limite máximo de resolução que se espera que o operador \mathcal{P}_{MZ} atinja. Essa expectativa depende do nível de emaranhamento dos estados iniciais utilizados e normalmente se discute dois limites. O Limite Quântico Padrão (LQP) é o limite mínimo que $\Delta\phi$ consegue atingir se o estado inicial utilizado em \mathcal{P}_{MZ} for um estado clássico e escala conforme [63]:

$$\Delta\phi_{LQP} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (5.3.1)$$

Já o Limite de Heisenberg (LH) é o limite mínimo que pode ser atingido para estados com algum grau de emaranhamento. De acordo com ele, $\Delta\phi$ escala conforme [63]:

$$\Delta\phi_{LH} = \frac{1}{N}. \quad (5.3.2)$$

Diferentemente do LQP, em que se pode **provar** que este limite é a melhor incerteza que se pode esperar de qualquer protocolo para um estado como $|\Psi_1\rangle$, o LH é um limite adotado por prática ou convenção e sua justificativa é mais heurística do que formal. Uma discussão que serve de inspiração para esse limite está no Apêndice B.

O LQP e o LH, definidos em termos de como $\Delta\phi$ escala com N , servem como critérios gerais de classificação de sensibilidade do interferômetro. Uma estimativa mínima para esse parâmetro que é específica para o sistema em questão e independente do estimador associado ao parâmetro ϕ pode ser obtida a partir da Função de Informação de Fisher Quântica [54, 63, 69], $F_Q\{\hat{\rho}\}$, em que $\hat{\rho}$ é a matriz de densidade do sistema. Para o caso de um estado puro, $\hat{\rho} = |\Psi(\phi)\rangle\langle\Psi(\phi)|$ e F_Q fica:

$$F_Q\{\hat{\rho}(\phi)\} = 4 \left\{ \langle \partial_\phi \Psi | \partial_\phi \Psi \rangle - |\langle \partial_\phi \Psi | \Psi \rangle|^2 \right\}. \quad (5.3.3)$$

A incerteza mínima que $\Delta\phi$ pode atingir por essa função é:

$$\Delta\phi_{FQ} = \frac{1}{\sqrt{F_Q\{\hat{\rho}(\phi)\}}}. \quad (5.3.4)$$

Uma discussão mais aprofundada sobre este resultado pode ser encontrada no Apêndice B. Se $\Delta\phi_{FQ} < \Delta\phi_{LH}$, é possível que o sistema atinja o que é normalmente chamado de super-resolução e uma possibilidade de fazer com que isso seja possível seria através de uma não linearidade no Hamiltoniano associado à diferença de fase

no protocolo. Essa constatação fica mais clara ao se analisar o valor máximo que $\Delta\phi_{F_Q}$ pode atingir na seção B.2 em que a relação (5.3.3) é utilizada sobre o protocolo (4.1.5), resultando em:

$$\Delta\phi_{F_Q} = \frac{1}{N-l}. \quad (5.3.5)$$

Com isso, pode ser dito que o protocolo (4.1.5) é capaz de reproduzir um interferômetro com resolução tão boa quanto o LH, porém, para isso, a definição de um conjunto de estados iniciais e de observáveis especiais se faz necessária.

5.4 OPERADOR DE PARIDADE

O processo de se medir a diferença de fase num interferômetro passa por criar uma transformação que possa ser parametrizada por essa fase, que é o próprio processo de interferência conduzido pelo aparato (no caso deste trabalho, por \mathcal{P}_{MZ}). Para o protocolo definido a partir do operador (5.1.1), um estado inicial $|\Psi_0\rangle$ e um observável \mathcal{O} podem ser convenientemente escolhidos para se estimar a diferença de fase. Para estados correspondendo a uma única fonte ativa no interferômetro, operadores com equivalentes clássicos claros como diferença entre números de fótons entre os detectores ou de momento angular já fornecem informações a respeito de ϕ dentro do Limite Quântico Padrão, porém, para estados que possuem algum nível de emaranhamento, outros operadores se fazem necessários.

Como a resolução de ϕ depende da escolha de estado inicial utilizada, não há um operador ideal a ser escolhido para todos os casos. Ao invés disso, há propostas de observáveis que possuem maior efetividade para certos casos de $|\Psi_0\rangle$ ou que possuam uma sensibilidade local. Por exemplo, para $N00N$ states, há um operador Σ_N proposto por Dowling e outros [70, 71] capaz de gerar estimativas de ϕ próximas ao Limite de Heisenberg, no entanto, até este momento, ainda não foram encontrados meios de implementá-lo experimentalmente. Seguindo os trabalhos de [63], o operador de paridade, dado por:

$$\Pi_j = e^{i\pi N_j} = (-1)^{N_j}, \quad (5.4.1)$$

foi escolhido para ser o estimador da diferença de fase ϕ do protocolo por ele poder ser obtido diretamente a partir das medições realizadas sobre o sistema sem requerer qualquer processamento adicional. Dado o estado $|\Psi_f(\phi)\rangle$ gerado ao final de (4.1.5), pode ser dito que a incerteza $\Delta\phi$ pode ser dada rearranjando os termos de (5.2.1) tomando $O = \phi$ e $g(o) = \langle \Pi_j \rangle(\phi)$:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\Pi_j}{|\partial_\phi \langle \Pi_j \rangle|}. \quad (5.4.2)$$

Esta expressão dará a incerteza na medição de ϕ obtida através do operador de paridade que, por sua vez, pode ser comparada com o Limite Quântico Padrão ou com o Limite de Heisenberg.

O operador de paridade a ser visto nas próximas seções será o operador Π_1 , visto que no RTR, os subespaços referente a N_2 e $\{N_1, N_3\}$ são separados e $N_1 + N_3 = (N-l)I$ é uma constante. Deve ser lembrado que, pela simetria do sistema, os resultados aqui elencados para Π_1 podem facilmente ser adaptados para Π_3 .

5.5 ESTADOS INICIAIS

Agora que o operador \mathcal{P}_{MZ} e a forma como a estimativa de ϕ será extraída do modelo foram introduzidos, seu estudo para diferentes condições iniciais pode começar. Os estados iniciais a serem utilizados serão $|\Psi_1\rangle$ definido por (2.5.1) e o estado $|\Psi_2\rangle$ definido por (2.5.2) também chamado de estado Gêmeo de Fock. Estes estados foram escolhidos por representarem condições limítrofes da dinâmica do sistema para a base $\{|N-l-k, l, k\rangle\}$, conforme visto no Capítulo 2.

5.5.1 Estado $|\Psi_1\rangle = |N, 0, 0\rangle$

Este é um bom estado para se comparar o desempenho do operador de paridade para se obter $\Delta\phi$ em função de ϕ , com um operador que possua uma interpretação clássica, como, neste caso $N_1 - N_3$. Aqui fica evidenciado o princípio de que um estado como $|\Psi_1\rangle$ não é capaz de romper com o LQP. Aplicando o protocolo (4.1.5) ao estado $|\Psi_1\rangle$, o estado final resultante é:

$$|\Psi_f\rangle = \sum_{k=0}^N \sqrt{C_k^N} \left(\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^{N-k} \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^k |N-k, 0, k\rangle. \quad (5.5.1)$$

A subsequente aplicação do operador Π_1 a partir desse estado resulta no seguinte valor esperado:

$$\langle \Pi_1 \rangle = \sum_{k=0}^N C_k^N \left(-\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^{N-k} \left(\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^k = \left(\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^N = (\cos(\phi))^N. \quad (5.5.2)$$

Como $\Pi^2 = I$, a aplicação de (5.4.2) resulta em:

$$\Delta\phi = \lim_{\varphi \rightarrow \phi} \frac{\sqrt{1 - (\cos(\varphi))^{2N}}}{N |(\cos(\varphi))^{N-1} \sin(\varphi)|}. \quad (5.5.3)$$

Esta relação possui mínimos em $\phi = n\pi$, porém ao se avaliar $\Delta\phi$ nesses limites:

$$\Delta\phi(n\pi) = \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (5.5.4)$$

Ainda não rompendo com o LQP. Como pode ser visto nas Figuras 5.2, esse comportamento é consistente independentemente do valor de N empregado. Utilizando o operador $N_1 - N_3$ como mencionado acima, é possível se obter o LQP para todos os valores de ϕ , sem ultrapassá-lo. Nesse caso:

$$\langle N_1 - N_3 \rangle = N \left[1 - 2 \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right)^2 \right] \quad \text{e} \quad \langle (N_1 - N_3)^2 \rangle = N^2 \left[1 - 2 \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right)^2 \right]^2 + N (\sin(\phi))^2. \quad (5.5.5)$$

Calculando $\Delta\phi$ a partir desses resultados resulta em:

$$\Delta\phi = \lim_{\varphi \rightarrow \phi} \frac{\sqrt{N^2 \left[1 - 2 (\cos(\varphi/2))^2 \right]^2 + N (\sin(\varphi))^2 - N^2 \left[1 - 2 (\cos(\varphi/2))^2 \right]^2}}{N |\sin(\varphi)|} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (5.5.6)$$

ratificando que este estado não consegue operar em superresolução.

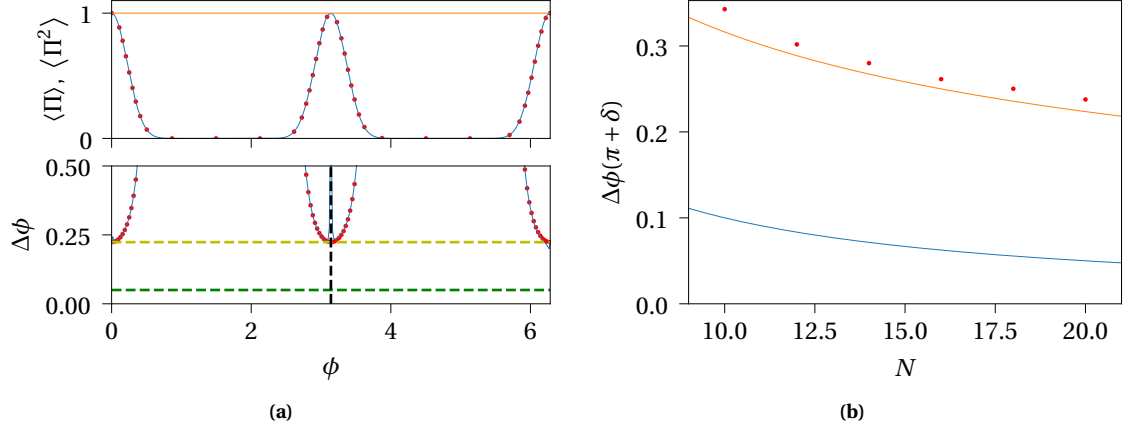


Figura 5.2: Paridade e incerteza no ângulo medido para um estado inicial $|20,0,0\rangle$ em função de ϕ . Figura (a), quadro de cima: valor esperado de Π_1 (linha azul) e $\langle \Pi_1^2 \rangle = 1$, (linha amarela). Figura (a), quadro de baixo: incerteza $\Delta\phi$ em função de ϕ estimada a partir da incerteza na paridade $\Delta\Pi_1$ obtida através (5.5.3). Em ambos os quadros, as linhas sólidas são os resultados obtidos por \mathcal{P}_{MZ} com $\varepsilon = 1$ e $\eta = 40$ e os pontos vermelhos resultam das expressões analíticas para essas quantidades desenvolvidas ao longo deste capítulo com $\tilde{\mathcal{P}}_{MZ}$. A linha tracejada verde indica o limite de incerteza em ϕ obtido pelo Limite de Heisenberg $\Delta\phi > \frac{1}{N}$ enquanto a linha tracejada amarela mostra o Limite Quântico Padrão $\Delta\phi > \frac{1}{\sqrt{N}}$. A linha tracejada preta indica o ponto $\phi = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Figura (b): $\Delta\phi(\phi = \pi + \delta)$, para $\delta = 0.0567$ para o estado inicial $|N,0,0\rangle$ para 10, 12, 14, 16, 18 e 20 partículas (pontos vermelhos). Linha azul mostra o limite de Heisenberg enquanto a linha amarela mostra o limite quântico padrão.

5.5.2 Estado Gêmeo de Fock

Escolhendo um estado inicial gêmeo de Fock $|l, N - 2l, l\rangle$, a aplicação do protocolo (4.1.5) gera o seguinte estado:

$$e^{i\frac{\pi}{2}S_x}|\Psi_f\rangle = (-i)^l \sum_{k=0}^l e^{i\phi(l-2k)} \sqrt{\frac{C_k^l C_{l-k}^{2l-2k}}{2^{2l}}} |2k, N - 2l, 2l - 2k\rangle. \quad (5.5.7)$$

Neste caso, $e^{i\frac{\pi}{2}S_x}|\Psi_f\rangle$ pode ser considerado como um estado $|\Psi'_f\rangle$ operando numa *picture* de interação em que um operador O estará submetido a transformação de calibre $O' = e^{i\frac{\pi}{2}S_x} O e^{-i\frac{\pi}{2}S_x}$. A determinação de $\langle \Pi_1 \rangle = \langle \Pi'_1 \rangle = \langle \Psi'_f | \Pi'_1 | \Psi'_f \rangle$ resulta em:

$$\langle \Pi_1 \rangle = \frac{1}{2^{2l}} \sum_{k=0}^l \cos((2\phi - \pi)(l - 2k)) C_k^{2k} C_{l-k}^{2l-2k} = P_l(\cos(2\phi - \pi)), \quad (5.5.8)$$

que são os polinômios de Legendre de $\cos(2\phi - \pi)$. Utilizando esse resultado, a incerteza em ϕ fica:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\Pi_1}{|\partial_\phi \langle \Pi_1 \rangle|} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{\sqrt{\langle \Pi_1^2 \rangle - \langle \Pi_1 \rangle^2}}{|\partial_\phi \langle \Pi_1 \rangle|} \Rightarrow \Delta\phi = \lim_{\phi \rightarrow \phi} \frac{\sqrt{1 - P_l(\cos(2\phi - \pi))^2}}{|\partial_\phi P_l(\cos(2\phi - \pi))|}. \quad (5.5.9)$$

A Figura 5.3 mostra o resultado de $\Delta\phi$ estimada a partir do operador de paridade conforme (5.5.9), assim como os resultados da medição de $\langle \Pi_1 \rangle$ e sua incerteza que vão de acordo com (5.5.9) e (5.5.8). O limite mínimo de $\Delta\phi$ obtido por $F_Q\{\hat{\rho}\}$ também foi marcado correspondendo à linha verde na Figura 5.3a de baixo, enquanto a linha amarela corresponde ao LQP. Esta Figura mostra que $\Delta\phi$ pode ser estimada dentro do LH e próximo a sua $F_Q\{\hat{\rho}\}$ localmente nos intervalos centrados nos pontos $\phi = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Como esse limite é menor que o LQP, o

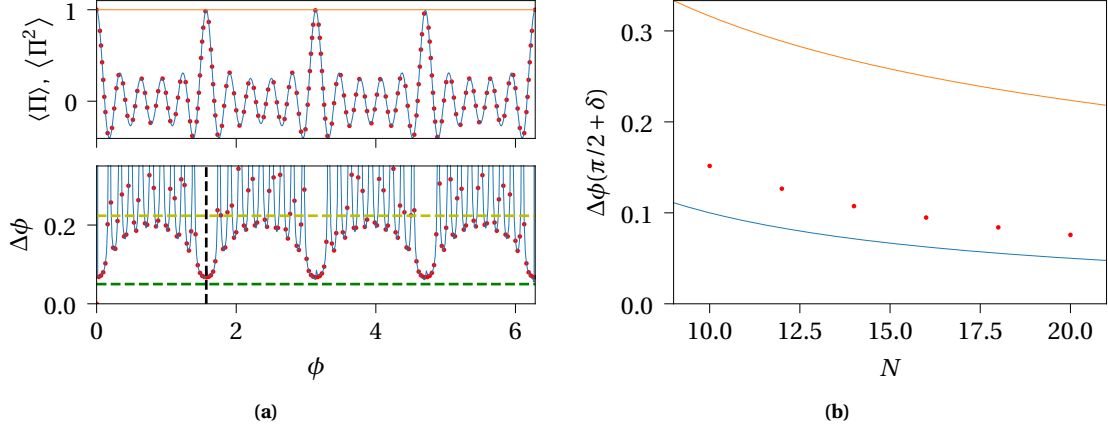


Figura 5.3: Paridade e incerteza em ϕ para um estado inicial gêmeo de Fock $|\Psi_0\rangle = |10, 0, 10\rangle$ em função de ϕ . Figura (a), quadro de cima: Valor esperado de Π_1 (linha azul) e $\langle \Pi_1^2 \rangle = 1$, (linha amarela). Figura (a), quadro de baixo: incerteza $\Delta\phi$ em função de ϕ estimada a partir da incerteza na paridade $\Delta\Pi_1$ obtida através (5.5.9). Em ambos os quadros, a linha azul mostra os resultados obtidos através da aplicação de \mathcal{P}_{MZ} com $\varepsilon = 1$ e $\eta = 40$, enquanto os pontos vermelhos são os resultados conseguidos pela utilização dos polinômios de Legendre. No quadro de baixo, a linha tracejada verde indica o limite de incerteza em ϕ obtido por $\Delta\phi > \frac{1}{N}$ enquanto a linha tracejada amarela mostra o limite $\Delta\phi > \frac{1}{\sqrt{N}}$. A linha tracejada preta indica o ponto $\phi = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Figura (b): $\Delta\phi(\phi = \frac{\pi}{2} + \delta)$, para $\delta = 0.01$ para um estado inicial gêmeo de Fock para 10, 12, 14, 16, 18 e 20 partículas (pontos vermelhos). Linha azul mostra o LH enquanto a linha amarela mostra o LQP.

interferômetro está operando em superresolução nesses intervalos.

Este capítulo, junto com o Capítulo 4, concluem o estudo teórico sobre as funcionalidades do protocolo definido em (4.1.1). No Capítulo 4, verificamos que o protocolo tem um papel importante para realizar o controle do emaranhamento através do tempo de aplicação da quebra de integrabilidade, permitindo gerar estados altamente emaranhados. Neste capítulo, para valores particulares dos parâmetros $\theta_j = \pi/2$, as propriedades interferométricas do protocolo foram exploradas, em que a sensibilidade do parâmetro de fase ϕ pode chegar localmente próximo ao LH através da escolha adequada de estados iniciais e observáveis de detecção. O próximo capítulo elenca as conclusões extraídas deste estudo, assim como futuras linhas de pesquisa a serem exploradas nos próximos trabalhos nesta área e o Apêndice C trata da robustez do sistema em relação a pequenos desvios da condição de integrabilidade, que é inerente à realização experimental do MTPI em laboratório.

Capítulo 6

Conclusões

Nesta dissertação as funcionalidades de um protocolo usando o MTPI foram investigadas. O controle neste modelo foi realizado através de uma quebra de integridade implementada através da aplicação de um campo externo. O estudo foi realizado no RTR caracterizado pela conservação de átomos no subsistema de poços 1 e 3, cuja dinâmica de sua população oscila harmonicamente com período bem definido. Esse comportamento permitiu a descrição do sistema através de um Hamiltoniano efetivo, a partir do qual quantidades como entropia e funções de correlação foram obtidas analiticamente para quantificar o nível de emaranhamento presente no sistema.

Essa realização se mostrou crucial para o desenvolvimento do protocolo de entropia constante no Capítulo 4, que por sua vez também permitiu realizar uma manipulação relevante de $N00N$ states. No Capítulo 5 essa representação permitiu sua analogia com um interferômetro abrindo todo um novo leque de aplicações para o modelo. Nesse capítulo também foi discutida a eficiência dos estados da base $\{|N-l-k, l, k\rangle\}$, através dos estados $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$, na estimativa de diferenças de fase ϕ nesse interferômetro através de medições do operador de paridade. Para isso, foram definidos conceitos importantes nessa área, como o LQP, o LH e a Função de Informação de Fisher Quântica, e foi visto que o sistema consegue estimar diferenças de fase próximas ao LH em determinados intervalos de ϕ , dada a escolha apropriada de estado inicial para a dinâmica.

Os resultados obtidos neste estudo e aqui elencados não constituem uma descrição completa e final de todas as propriedades e do potencial do Modelo de Três Poços Integrável. Ao longo do processo de análise do modelo, abordagens e ideias foram utilizadas que abriam caminho a novas perguntas e linhas de exploração que valem a pena ser mencionadas, como feito a seguir.

Os primeiros pontos inexplorados no Modelo de Três Poços Integrável surgem já no início de sua descrição no Capítulo 2. A banda que corresponde a $l = \frac{N}{2} \pm 1$, no regime de Fock não possui RTR e a evolução temporal de seus estados mantém as características caóticas do regime de Josephson. Isso ocorre porque os termos que permitem tunelamento de segunda ordem de duas partículas simultaneamente não são nulos no processo de obtenção do Hamiltoniano efetivo do sistema. No entanto, se o número de partículas do sistema for pequeno o bastante, a dimensionalidade reduzida do espaço de Hilbert do modelo acaba por impor um certo nível de ordem, como pode ser o caso para $N = 2$ partículas.

Outra área em aberto é uma segunda região, fora do RTR, que também admite um regime especial de dinâmica do sistema. Quando $U = 0$, O Hamiltoniano do sistema é descrito apenas em função dos termos de tunelamento, o que permite sua diagonalização utilizando o mesmo procedimento exposto no Apêndice

A na diagonalização do Hamiltoniano efetivo exposto à quebra de integrabilidade sem que nem mesmo seja invocada a Teoria de Perturbação Dependente do Tempo. Esse outro regime poderia ser usado nos Capítulos 4 e 5 para o desenvolvimento de outros protocolos que enriqueceriam a análise do emaranhamento do sistema.

Durante o curso dessa dissertação, foi dado destaque a três principais estados: os estados $|N, 0, 0\rangle$ e $|l, N - 2l, l\rangle$ por representarem casos limítrofes da dinâmica dos estados da base do sistema e o $N00N$ state coerente devido a aplicação a ele associada. No Apêndice B, outro estado foi encontrado na base de autoestados do operador S_y na representação de Jordan-Schwinger do $SU(2)$ que minimizava a Função de Informação de Fisher Quântica, que poderia ser estudado mais a fundo.

Ainda no tocante à $F_Q\{\hat{\rho}\}$, a relação entre o limite de resolução obtido por esta quantidade e o Limite de Heisenberg precisa ser explorada mais a fundo. $\Delta\phi_{F_Q}$ é o único limite de resolução que depende diretamente do Hamiltoniano do sistema e não só do estado inicial empregado. Uma análise de (5.3.3) revela que não linearidades no Hamiltoniano associado à quebra de integrabilidade seriam capazes de levar a resoluções que poderiam superar o LH. No entanto, nesses casos, a manutenção das propriedades algébricas do sistema seria um desafio.

No tocante à realização experimental do modelo, a forma que o Modelo de Três Poços Integrável vem sendo implementado é através da concentração de condensados de Bose-Einstein no foco de um arranjo de lasers gaussianos, o que está apresentando desafios aos pesquisadores na manutenção do alinhamento e do foco desse arranjo. No Modelo de Quatro Poços, outro arranjo em rede foi proposto com base na simetria do modelo. No momento estão sendo realizadas tentativas de reprodução de tal feito para o modelo de Três Poços e num momento posterior essa realização em rede talvez possa ser generalizada para toda a família de $m + n$ Hamiltonianos. Essas são algumas das questões ainda não completamente exploradas neste modelo e que poderão ser abordadas em futuros trabalhos.

Apêndice A

Expressões Analíticas do Regime de Tunelamento Ressonante

A.1 OBTENDO H_e DA TEORIA DE PERTURBAÇÃO DEPENDENTE DO TEMPO

No contexto de teoria de perturbação dependente do tempo, o Hamiltoniano do sistema pode ser dividido numa parte constante no tempo mais uma perturbação dependente do tempo: $H = H_0 + V(t)$. Um ansatz para se resolver a equação de Schrödinger neste caso consiste em considerar estados $|\Psi(t)\rangle$ tais que:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t} |n\rangle; \quad (\text{A.1.1})$$

$$(H_0 + V(t) - i\partial_t) \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t} |n\rangle = 0 \Rightarrow \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t} V(t) |n\rangle = i \sum_n \partial_t (a_n(t)) e^{-iE_n t} |n\rangle, \quad (\text{A.1.2})$$

em que $H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$. Projetando (A.1.2) a esquerda por um autoestado $\langle f|$, os coeficientes $\partial_t a_n(t)$ podem ser isolados em equações acopladas:

$$\partial_t a_f(t) = -i \sum_n a_n(t) e^{i(E_f - E_n)t} \langle f|V(t)|n\rangle. \quad (\text{A.1.3})$$

Este procedimento, até este momento, resolve o sistema de forma exata. A aproximação começa ao se considerar que, em ordem 0, não há influência de $V(t)$ sobre o Hamiltoniano, de modo que, se o sistema for iniciado num autoestado $|i\rangle$, ele permanecerá em $|i\rangle$. Isso é o mesmo que considerar $a_n^{(0)}(t) = \delta_{in}$ em (A.1.3), resultando na correção em primeira ordem para os coeficientes $a_n(t)$:

$$a_f^{(1)}(t) = -i \int_0^t e^{i(E_f - E_i)t'} \langle f|V(t')|i\rangle dt'. \quad (\text{A.1.4})$$

Devido a isso se pode constatar que $|a_f(t)|^2$ é a probabilidade de transição do estado $|i\rangle$ ao estado $|f\rangle$, com os coeficientes $a_f(t)$ em si sendo chamados de amplitudes de transição. A correção em ordem 2 será a solução de (A.1.3) aplicando-se a solução de ordem 1 como condição inicial e assim por diante, a saber:

$$a_f^{(2)}(t) = -\sum_n \int_0^t \int_0^{t'} e^{i(E_f - E_n)t'} e^{i(E_n - E_i)t''} \langle f|V(t')|n\rangle \langle n|V(t'')|i\rangle dt'' dt'. \quad (\text{A.1.5})$$

Os coeficientes $a_n(t)$ serão o resultado das somas de todas as correções

$$a_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_n^{(m)}(t), \quad (\text{A.1.6})$$

e suas aproximações até certa ordem M podem ser definidas como a essa soma truncada no seu M -ésimo termo:

$$a_n^{[M]}(t) = \sum_{m=0}^M a_n^{(m)}(t). \quad (\text{A.1.7})$$

Aplicando esse formalismo ao Hamiltoniano com o termo de interação reescrito em (2.1.10) do Capítulo 2, seus autoestados são $|l\rangle$ de forma que $H_0|l\rangle = -4Ul(N-l)$. Na notação aqui desenvolvida, a não ser que seja dito o contrário, o índice l também indexa o subespaço composto pelo índice k , sendo um índice coletivo. Este Hamiltoniano é totalmente degenerado em k e também é degenerado em l , visto que $|l\rangle$ tem a mesma energia que $|N-l\rangle$. O potencial V é constante no tempo, de forma que $a_l^{[2]}(t)$ pode ser simplificado para:

$$a_f^{[2]}(t) = \delta_{f,i} - i\langle f|V|i\rangle \int_0^t e^{i(E_f-E_i)t'} dt' - \sum_n \langle f|V|n\rangle \langle n|V|i\rangle \int_0^t \int_0^{t'} e^{i(E_f-E_n)t'} e^{i(E_n-E_i)t''} dt'' dt'. \quad (\text{A.1.8})$$

A degenerescência nas energias de H_0 significa que se o estado inicial for iniciado de forma a pertencer ao subespaço $V_l \cup V_{N-l}$, ele tenderá a permanecer nesse subespaço. Com isso, dado um estado inicial $|l\rangle$ os coeficientes $a_f(t)$ devem ser estudados também para estados finais $|l\rangle$. Isso faz com que o segundo termo de (A.1.8) seja nulo pois a ação de V sobre um estado com um valor de $|l\rangle$ definido muda o seu valor para os estados resultantes. Resta agora a análise do terceiro termo dessa equação. Começando pela integral, tem-se que $E_f = E_i = E_l$ e $E_n \neq E_l$ pois estados com $n = l$ são levados em outros estados ortogonais ao subespaço. Com essas considerações:

$$\int_0^t \int_0^{t'} e^{i(E_f-E_n)t'} e^{i(E_n-E_i)t''} dt'' dt' = -\frac{it}{E_n-E_l} - \frac{e^{i(E_l-E_n)t} - 1}{(E_n-E_l)^2} \approx -\frac{it}{E_n-E_l}, \quad (\text{A.1.9})$$

visto que quando $\eta \rightarrow \infty \Rightarrow U \rightarrow \infty$, fazendo os termos de ordem $\vartheta(\Delta E)$ serem dominantes.

O próximo passo agora, é entender o que é o operador $\frac{V|n\rangle\langle n|V}{E_n-E_l}$. Pensando que $V|n\rangle\langle n|V = V|n\rangle(V|n\rangle)^\dagger$, tem-se, para um estado de determinado valor de k :

$$\begin{aligned} V|n\rangle = & \left[J_1 \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 \right) + J_3 \left(a_3^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_3 \right) \right] |N-n-k, n, k\rangle = J_1 \left(\sqrt{(N-n-k+1)n} |N-n-k+1, n-1, k\rangle + \dots \right. \\ & \dots + \sqrt{(N-n-k)(n+1)} |N-n-k-1, n+1, k\rangle \left. \right) + J_3 \left(\sqrt{(k+1)n} |N-n-k, n-1, k+1\rangle + \dots \right. \\ & \left. \dots + \sqrt{k(n+1)} |N-n-k, n+1, k-1\rangle \right). \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

Portanto $V|n\rangle\langle n|V$ possui 16 termos que são:

$$\begin{aligned}
 J_1^2 n(N-n-k+1)|N-n-k+1, n-1, k\rangle\langle N-n-k+1, n-1, k| &= J_1^2 (N_2 + I) N_1; & (A.1.11a) \\
 J_1 J_3 n \sqrt{(N-n-k+1)(k+1)}|N-n-k+1, n-1, k\rangle\langle N-n-k, n-1, k+1| &= J_1 J_3 (N_2 + I) a_1^\dagger a_3; & (A.1.11b) \\
 J_1 J_3 n \sqrt{(N-n-k+1)(k+1)}|N-n-k, n-1, k+1\rangle\langle N-n-k+1, n-1, k| &= J_1 J_3 (N_2 + I) a_3^\dagger a_1; & (A.1.11c) \\
 J_3^2 n(k+1)|N-n-k, n-1, k+1\rangle\langle N-n-k, n-1, k+1| &= J_3^2 (N_2 + I) N_3; & (A.1.11d) \\
 J_1^2 (n+1)(N-n-k)|N-n-k-1, n+1, k\rangle\langle N-n-k-1, n+1, k| &= J_1^2 N_2 (N_1 + I); & (A.1.11e) \\
 J_1 J_3 (n+1) \sqrt{k(N-n-k)}|N-n-k-1, n+1, k\rangle\langle N-n-k, n+1, k-1| &= J_1 J_3 N_2 a_3^\dagger a_1; & (A.1.11f) \\
 J_1 J_3 (n+1) \sqrt{(N-n-k)k}|N-n-k, n+1, k-1\rangle\langle N-n-k-1, n+1, k| &= J_1 J_3 N_2 a_1^\dagger a_3; & (A.1.11g) \\
 J_3^2 (n+1)k|N-n-k, n+1, k-1\rangle\langle N-n-k, n+1, k-1| &= J_3^2 N_2 (N_3 + I); & (A.1.11h) \\
 J_1^2 \sqrt{n(n+1)(N-n-k)(N-n-k+1)}|N-n-k+1, n-1, k\rangle\langle N-n-k-1, n+1, k| &= J_1^2 (a_1^\dagger)^2 a_2^2; & (A.1.11i) \\
 J_1 J_3 \sqrt{n(n+1)k(N-n-k+1)}|N-n-k+1, n-1, k\rangle\langle N-n-k, n+1, k-1| &= J_1 J_3 a_2^2 a_1^\dagger a_3^\dagger; & (A.1.11j) \\
 J_1^2 \sqrt{n(n+1)(N-n-k)(N-n-k+1)}|N-n-k-1, n+1, k\rangle\langle N-n-k+1, n-1, k| &= J_1^2 (a_2^\dagger)^2 a_1^2; & (A.1.11k) \\
 J_1 J_3 \sqrt{n(n+1)(N-n-k)(k+1)}|N-n-k-1, n+1, k\rangle\langle N-n-k, n-1, k+1| &= J_1 J_3 (a_2^\dagger)^2 a_1 a_3; & (A.1.11l) \\
 J_1 J_3 \sqrt{n(n+1)(N-n-k)(k+1)}|N-n-k, n-1, k+1\rangle\langle N-n-k-1, n+1, k| &= J_1 J_3 a_2^2 a_3^\dagger a_1^\dagger; & (A.1.11m) \\
 J_3^2 \sqrt{n(n+1)k(k+1)}|N-n-k, n-1, k+1\rangle\langle N-n-k, n+1, k-1| &= J_3^2 (a_3^\dagger)^2 a_2^2; & (A.1.11n) \\
 J_1 J_3 \sqrt{n(n+1)k(N-n-k+1)}|N-n-k, n+1, k-1\rangle\langle N-n-k+1, n-1, k| &= J_1 J_3 (a_2^\dagger)^2 a_3 a_1; & (A.1.11o) \\
 J_3^2 \sqrt{n(n+1)k(k+1)}|N-n-k, n+1, k-1\rangle\langle N-n-k, n-1, k+1| &= J_3^2 (a_2^\dagger)^2 a_3^2. & (A.1.11p)
 \end{aligned}$$

As equações (A.1.11a) a (A.1.11d) gerarão termos não nulos quando projetados sobre os estados inicial e final se $n-1 = l$. Nesse caso, eles estarão associados a energia $E_{n-1} = -4U(n-1)(N-n+1)$. Analogamente, as equações (A.1.11e) a (A.1.11h) gerarão termos não nulos se $n+1 = l$, sendo associados a energia $E_{n+1} = -4U(n+1)(N-n-1)$. Os demais termos serão nulos pois não consevam o valor de l entre os estados inicial e final. Com essas considerações, a amplitude de transição em segunda ordem fica, já fazendo a equivalência entre n e l :

$$\begin{aligned}
 a_f^{[2]}(t) = \langle f| \left\{ I - it \left[\frac{J_1^2 (N_2 + I) N_1 + J_1 J_3 (N_2 + I) a_1^\dagger a_3 + J_1 J_3 (N_2 + I) a_3^\dagger a_1 + J_3^2 (N_2 + I) N_3}{4U(l+1)(N-l-1) - 4Ul(N-l)} + \dots \right. \right. \\
 \left. \left. \dots + \frac{J_1^2 N_2 (N_1 + I) + J_1 J_3 N_2 a_3^\dagger a_1 + J_1 J_3 N_2 a_1^\dagger a_3 + J_3^2 N_2 (N_3 + I)}{4U(l-1)(N-l+1) - 4Ul(N-l)} \right] \right\} |i\rangle. & (A.1.12)
 \end{aligned}$$

Simplificando esta expressão considerando que ela é válida apenas para estados iniciais e finais em que $N_2|i\rangle = l|i\rangle$, tem-se:

$$a_f^{[2]}(t) = \langle f| \left\{ I - it \left[\frac{(l+1)(-Q + J^2 NI - J^2 II)}{4U(N-2l-1)} - \frac{l(J^2 NI - J^2 l + J^2 I - Q)}{4U(N-2l+1)} \right] \right\} |i\rangle; & (A.1.13)$$

$$a_f^{[2]}(t) = \langle f| \{ I - it [-\lambda_l Q + \alpha_l J^2 I] \} |i\rangle, & (A.1.14)$$

em que

$$\lambda_l = \frac{1}{4U} \left(\frac{l+1}{N-2l-1} - \frac{l}{N-2l+1} \right) e; \quad (\text{A.1.15})$$

$$\alpha_l = \frac{1}{4U} \left[\frac{(l+1)(N-l)}{N-2l-1} - \frac{l(N-l+1)}{N-2l+1} \right]. \quad (\text{A.1.16})$$

Fazendo-se a correspondência entre a amplitude de transição e o operador evolução temporal $a_f(t) = \langle f|U(t,0)|i \rangle = \langle f|e^{-iHt}|i \rangle$, (A.1.14) pode ser entendida como a expansão em primeira ordem do hamiltoniano efetivo:

$$H'_{e0} = -\lambda_l Q + \alpha_l J^2 I. \quad (\text{A.1.17})$$

Que é equivalente a H_{e0} a menos de uma constante de fase dinâmica.

A.2 DIAGONALIZANDO H_e COM A QUEBRA

Definindo $J_1 = J \sin(\theta)$ e $J_3 = J \cos(\theta)$, uma representação alternativa do Hamiltoniano (2.1.1) é:

$$H = U(N_1 - N_2 + N_3)^2 + J \left[\sin(\theta)(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) + \cos(\theta)(a_2^\dagger a_3 + a_2 a_3^\dagger) \right], \quad (\text{A.2.1})$$

em que θ é um ângulo que mede a assimetria entre o tunelamento dos poços 1 e 2 em relação aos poços 2 e 3. Com isso, o Hamiltoniano H_e não integrável visto na equação (3.1.4) da seção 3.1 pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$H_e = - \left(\varepsilon + \frac{\bar{\omega}_l}{\tau} \right) a_3^\dagger a_3 + (\varepsilon - \bar{\omega}_l \tau) a_1^\dagger a_1 + \bar{\omega}_l a_3^\dagger a_1 + \bar{\omega}_l a_1^\dagger a_3, \quad (\text{A.2.2})$$

em que $\bar{\omega}_l = \frac{\omega_l}{2}$ e s , c e τ são as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente para o ângulo de assimetria θ . Esta equação evidencia o fato de que todos os operadores que compõem H_e são produtos entre os operadores a_1^\dagger ou a_3^\dagger com a_1 ou a_3 . Com isso, H_e pode ser escrito da forma $H_e = A^\dagger M A$, conforme feito a seguir:

$$H_e = \begin{bmatrix} a_3^\dagger & a_1^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \left(\varepsilon + \frac{\bar{\omega}_l}{\tau} \right) & \bar{\omega}_l \\ \bar{\omega}_l & \varepsilon - \bar{\omega}_l \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.3})$$

M por sua vez pode ser diagonalizada e escrita em termos da matriz formada por seus autovalores e autoestados:

$$M = V^\dagger \begin{bmatrix} E_+ & 0 \\ 0 & E_- \end{bmatrix} V, \quad V = \begin{bmatrix} |E_+\rangle & |E_-\rangle \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2.4})$$

em que:

$$E_\pm = \begin{cases} -\frac{\bar{\omega}_l}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \tau \right) + \bar{\omega}_l \sqrt{1 + \gamma^2} \\ -\frac{\bar{\omega}_l}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \tau \right) - \bar{\omega}_l \sqrt{1 + \gamma^2} \end{cases}; \quad (\text{A.2.5})$$

e, definindo $\Gamma = \sqrt{1 + \gamma^2} = (\Delta n)^{-\frac{1}{2}}$, os autoestados de M são:

$$|E_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\Gamma}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Gamma+\gamma}} \\ \sqrt{\Gamma+\gamma} \end{bmatrix}, \quad |E_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\Gamma}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Gamma-\gamma}} \\ -\sqrt{\Gamma-\gamma} \end{bmatrix}; \quad (\text{A.2.6})$$

e V pode ser dada por:

$$V = \sqrt{\frac{1}{2\Gamma}} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^{-1} & -\beta^{-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2.7})$$

em que $\alpha = \sqrt{\frac{1}{\Gamma+\gamma}}$ e $\beta = \sqrt{\frac{1}{\Gamma-\gamma}}$. Com isso, H_e pode ser escrito em sua forma diagonal como:

$$H_e = \frac{1}{2\Gamma} \begin{bmatrix} a_3^\dagger & a_1^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \alpha^{-1} \\ \beta & -\beta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\bar{\omega}_l}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \tau \right) + \bar{\omega}_l \Gamma & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{\omega}_l}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \tau \right) - \bar{\omega}_l \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^{-1} & -\beta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.8})$$

Os vetores $\sqrt{\frac{1}{2\Gamma}} A^\dagger V^\dagger$ e $\sqrt{\frac{1}{2\Gamma}} V A$ podem ser interpretados como novos vetores de operadores criação e destruição de estados $B^\dagger = \begin{bmatrix} b_3^\dagger & b_1^\dagger \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_1 \end{bmatrix}$ respectivamente. Com isso, H_e pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} H_e &= - \left[\frac{\bar{\omega}_l}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \tau \right) + \bar{\omega}_\varepsilon \right] b_1^\dagger b_1 + \left[-\frac{\bar{\omega}_l}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \tau \right) + \bar{\omega}_\varepsilon \right] b_3^\dagger b_3 = \dots \\ &\dots = - \left[\frac{\bar{\omega}_l}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \tau \right) + \bar{\omega}_\varepsilon \right] N_{b_1} + \left[-\frac{\bar{\omega}_l}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \tau \right) + \bar{\omega}_\varepsilon \right] N_{b_3}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.9})$$

em que $\bar{\omega}_\varepsilon = \frac{\omega_\varepsilon}{2}$. Nesta expressão a relação $\omega_\varepsilon = \omega_l \Gamma$ foi utilizada.

Dessa forma a relação entre os operadores b_j e a_j é dada por:

$$\begin{cases} b_3 = \sqrt{\frac{\omega_l}{2\omega_\varepsilon}} (\alpha a_3 + \beta a_1) \\ b_1 = \sqrt{\frac{\omega_l}{2\omega_\varepsilon}} \left(\frac{1}{\alpha} a_3 - \frac{1}{\beta} a_1 \right) \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = \sqrt{\frac{\omega_l}{2\omega_\varepsilon}} \left(\frac{1}{\beta} b_3 + \beta b_1 \right) \\ a_1 = \sqrt{\frac{\omega_l}{2\omega_\varepsilon}} \left(\frac{1}{\alpha} b_3 - \alpha b_1 \right) \end{cases}. \quad (\text{A.2.10})$$

Com essas relações, a evolução temporal de um estado quântico qualquer pode ser calculada. Seja $\{|N-l-k, l, k\rangle_\varepsilon\}$ a base de autoestados de H_e . Um estado $|N-l-k, l, k\rangle$ pode ser construído a partir do vácuo conforme (2.1.8). Com isso, um estado $|\Psi_0\rangle$ arbitrário pode ser escrito como uma combinação linear desses estados:

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{n=0}^{N-l} c_n \frac{(a_3^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(a_1^\dagger)^{N-l-n}}{\sqrt{(N-l-n)!}} \frac{(a_2^\dagger)^l}{\sqrt{l!}} |0\rangle = \sum_{n=0}^{N-l} c_n \frac{(a_3^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(a_1^\dagger)^{N-l-n}}{\sqrt{(N-l-n)!}} |0, l, 0\rangle, \quad (\text{A.2.11})$$

em que $|0\rangle = |0, 0, 0\rangle$ é o estado de vácuo. Agora (A.2.10) pode ser aplicada para converter esse estado para a base de H_e , $\{|N-l-k, l, k\rangle_\varepsilon\}$.

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{(N-l)!}} \left(\frac{\omega_l}{2\omega_\varepsilon} \right)^{\frac{N-l}{2}} \sum_{n=0}^{N-l} c_n \sqrt{C_n^{N-l}} \left(\frac{1}{\beta} b_3^\dagger + \beta b_1^\dagger \right)^n \left(\frac{1}{\alpha} b_3^\dagger - \alpha b_1^\dagger \right)^{N-l-n} |0, l, 0\rangle_\varepsilon. \quad (\text{A.2.12})$$

Aplicando o teorema binomial, os operadores b_1^\dagger e b_3^\dagger estão em condições de serem aplicados a $|0, l, 0\rangle_\varepsilon$.

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(N-l)!}} \left(\frac{\omega_l}{2\omega_\varepsilon} \right)^{\frac{N-l}{2}} \sum_{n=0}^{N-l} c_n \sqrt{C_n^{N-l}} \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{b_3^\dagger}{\beta} \right)^j (\beta b_1^\dagger)^{n-j} C_j^n \right] \dots \\ &\dots \left[\sum_{j'=0}^{N-l-n} \binom{N-l-n}{j'} \left(\frac{b_3^\dagger}{\alpha} \right)^{j'} (-\alpha b_1^\dagger)^{N-l-n-j'} C_{j'}^{N-l-n} \right] |0, l, 0\rangle_\varepsilon; \end{aligned} \quad (\text{A.2.13})$$

$$\begin{aligned}
 |\Psi_0\rangle &= \left(\frac{\omega_l}{2\omega_\varepsilon}\right)^{\frac{N-l}{2}} \sum_{n=0}^{N-l} c_n \sqrt{C_n^{N-l}} \sum_{j=0}^n \sum_{j'=0}^{N-l-n} \left(\frac{1}{\beta}\right)^j \beta^{n-j} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{j'} (-\alpha)^{N-l-n-j'} \dots \\
 &\dots \frac{C_j^n C_{j'}^{N-l-n}}{\sqrt{C_{j+j'}^{N-l}}} |N-l-(j+j'), l, j+j'\rangle_\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{A.2.14}$$

Aplicando o operador evolução temporal a $|\Psi_0\rangle$, obtém-se $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\Psi}(t)\rangle &= \left(\frac{\omega_l}{2\omega_\varepsilon}\right)^{\frac{N-l}{2}} \sum_{n=0}^{N-l} c_n \sqrt{C_n^{N-l}} \sum_{j=0}^n \sum_{j'=0}^{N-l-n} \left(\frac{1}{\beta}\right)^j \beta^{n-j} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{j'} (-\alpha)^{N-l-n-j'} \dots \\
 &\dots e^{-i\{-(\bar{\omega}_\varepsilon + \bar{\omega}_l \rho)(N-l-(j+j')) + (\bar{\omega}_\varepsilon - \bar{\omega}_l \rho)(j+j')\}t} \frac{C_j^n C_{j'}^{N-l-n}}{\sqrt{C_{j+j'}^{N-l}}} |N-l-(j+j'), l, j+j'\rangle_\varepsilon,
 \end{aligned} \tag{A.2.15}$$

sendo $\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \tau\right)$. As exponenciais complexas podem ser rearranjadas como:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\Psi}(t)\rangle &= e^{i(\bar{\omega}_\varepsilon + \bar{\omega}_l \rho)(N-l)t} \left(\frac{\omega_l}{2\omega_\varepsilon}\right)^{\frac{N-l}{2}} \sum_{n=0}^{N-l} c_n \sqrt{C_n^{N-l}} \sum_{j=0}^n \sum_{j'=0}^{N-l-n} \left(\frac{e^{-i\omega_\varepsilon t}}{\beta}\right)^j \beta^{n-j} \left(\frac{e^{-i\omega_\varepsilon t}}{\alpha}\right)^{j'} (-\alpha)^{N-l-n-j'} \dots \\
 &\dots \frac{C_j^n C_{j'}^{N-l-n}}{\sqrt{C_{j+j'}^{N-l}}} |N-l-(j+j'), l, j+j'\rangle_\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{A.2.16}$$

Neste ponto, a aplicação do teorema binomial pode ser desfeita levando a uma expressão parecida com o ponto de partida:

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \frac{e^{i(\bar{\omega}_\varepsilon + \bar{\omega}_l \rho)(N-l)t}}{\sqrt{(N-l)!}} \left(\frac{\omega_l}{2\omega_\varepsilon}\right)^{\frac{N-l}{2}} \sum_{n=0}^{N-l} c_n \sqrt{C_n^{N-l}} \left(\frac{e^{-i\omega_\varepsilon t}}{\beta} b_3^\dagger + \beta b_1^\dagger\right)^n \left(\frac{e^{-i\omega_\varepsilon t}}{\alpha} b_3^\dagger - \alpha b_1^\dagger\right)^{N-l-n} |0, l, 0\rangle_\varepsilon. \tag{A.2.17}$$

Aplicando novamente (A.2.10), a evolução temporal pode ser escrita na base $\{|N-l-k, l, k\rangle$:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\Psi}(t)\rangle &= \frac{e^{i(\bar{\omega}_\varepsilon + \bar{\omega}_l \rho)(N-l)t}}{\sqrt{(N-l)!}} \left(\frac{\omega_l}{2\omega_\varepsilon}\right)^{\frac{N-l}{2}} \sum_{n=0}^{N-l} c_n \sqrt{C_n^{N-l}} \left[\frac{e^{-i\omega_\varepsilon t}}{\beta} (\alpha a_3^\dagger + \beta a_1^\dagger) + \beta \left(\frac{a_3^\dagger}{\alpha} - \frac{a_1^\dagger}{\beta}\right) \right]^n \dots \\
 &\dots \left[\frac{e^{-i\omega_\varepsilon t}}{\alpha} (\alpha a_3^\dagger + \beta a_1^\dagger) - \alpha \left(\frac{a_3^\dagger}{\alpha} - \frac{a_1^\dagger}{\beta}\right) \right]^{N-l-n} |0, l, 0\rangle.
 \end{aligned} \tag{A.2.18}$$

A partir do uso das seguintes propriedades de α e β :

$$\alpha\beta = 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{2\omega_\varepsilon}{\omega_l}, \tag{A.2.19}$$

a expressão acima torna-se:

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \frac{e^{\frac{i\omega_l(N-l)t}{4} \left(\frac{1}{\tau} + \tau\right)}}{\sqrt{(N-l)!}} \sum_{n=0}^{N-l} c_n \sqrt{C_n^{N-l}} \left(a_3^\dagger f(t) + a_1^\dagger g(t)\right)^n \left(a_3^\dagger g(t) + a_1^\dagger f^*(t)\right)^{N-l-n} |0, l, 0\rangle, \tag{A.2.20}$$

em que:

$$f(t) = \frac{\alpha^2 e^{-i\frac{\omega_E t}{2}} + \beta^2 e^{i\frac{\omega_E t}{2}}}{\alpha^2 + \beta^2} \quad e \quad g(t) = \frac{e^{-i\frac{\omega_E t}{2}} - e^{i\frac{\omega_E t}{2}}}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (\text{A.2.21})$$

Aplicando novamente o teorema binomial e os operadores a_3^\dagger e a_1^\dagger , tem-se:

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(t)\rangle = e^{\frac{i\omega_I(N-l)t}{4}(\frac{1}{\tau}+\tau)} \sum_{n=0}^{N-l} c_n \sum_{j=0}^n \sum_{j'=0}^{N-l-n} \sqrt{\frac{C_n^{N-l}}{C_{j+j'}^{N-l}}} f(t)^j g(t)^{n-j} g(t)^{j'} f^*(t)^{N-l-n-j'} \dots \\ \dots C_j^n C_{j'}^{N-l-n} |N-l-(j+j'), l, j+j'\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.2.22})$$

Usando a identidade (**citar**):

$$\sum_{j=0}^k \sum_{p=0}^{N-l-k} f(p+j, p-j, p, j) = \sum_{q=0}^{N-l} \sum_{j \in S_q(k, l)} f(q, q-2j, q-j, j), \quad (\text{A.2.23})$$

a expressão final para a evolução temporal do sistema pode ser obtida:

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(t)\rangle = e^{\frac{i\omega_I(N-l)t}{4}(\frac{1}{\tau}+\tau)} \sum_{n=0}^{N-l} c_n \sum_{q=0}^{N-l} \sqrt{\frac{C_n^{N-l}}{C_q^{N-l}}} \sum_{j \in S_q(n, l)} f(t)^j g(t)^{n+q-2j} f^*(t)^{N-l-n-q+j} \dots \\ \dots C_j^n C_{q-j}^{N-l-n} |N-l-q, l, q\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.2.24})$$

Escrevendo-a de forma mais familiar, tem-se:

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = e^{\frac{i\omega_I(N-l)t}{4}(\frac{1}{\tau}+\tau)} \sum_{q=0}^{N-l} \sum_{n=0}^{N-l} c_n h_q(n, l, t) |N-l-q, l, q\rangle, \quad (\text{A.2.25})$$

com:

$$h_q(n, l, t) = \sqrt{\frac{C_n^{N-l}}{C_q^{N-l}}} \sum_{j \in S_q(n, l)} f(t)^j g(t)^{n+q-2j} f^*(t)^{N-l-n-q+j} C_j^n C_{q-j}^{N-l-n}. \quad (\text{A.2.26})$$

No limite $\gamma \rightarrow 0$; $\alpha, \beta \rightarrow 1$; $f(t), f^*(t) \rightarrow \cos\left(\frac{\omega_I t}{2}\right)$ e $g(t) \rightarrow -i \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_I t}{2}\right)$. Isso faz com que $h_q(n, l, t) \rightarrow b_q(n, l, t)$ conforme definida por (2.3.4).

Apêndice B

Entendendo o Sistema como Um Interferômetro

B.1 FUNCIONAMENTO DE UM INTERFERÔMETRO

Interferômetros são aparelhos que dividem feixes de luz em diferentes caminhos. Essa divisão é feita através de lâminas semiespelhadas que permitem tanto a transmissão quanto a reflexão do feixe. Em um ou mais desses caminhos uma diferença de fase ϕ é introduzida através da introdução de um material com propriedades ópticas diferentes das do meio de propagação do feixe ou através da modificação da geometria do aparato experimental de forma a alongar a distância total percorrida por um dos feixes. Esses diversos caminhos são recombinados por outra lâmina semiespelhada e a intensidade do feixe resultante é medida por um detector para a visualização de franjas de interferência. A partir dessas franjas, ϕ pode ser estimada. Ao longo da história, várias foram as realizações de interferômetros com as mais diversas configurações, como o interferômetro de Michelson [72] ou o interferômetro de Mach-Zehnder [66].

No interferômetro de Mach-Zehnder, até dois feixes incidentes podem ser divididos em dois caminhos diferentes por uma lâmina semiespelhada como foi descrito na Figura 5.1. A diferença de fase ϕ é introduzida em um desses caminhos, que são então recombinados por outra lâmina semiespelhada. Os feixes resultantes seguem então para detectores para a medição das franjas de interferência. Esse é um bom interferômetro para se realizar um paralelo com o MTPI, pois durante todas as etapas de divisão e recombinação, a quantidade de feixes é preservada, o que permite a descrição da ação do interferômetro através de operadores unitários. Seja $|n_1, n_2\rangle$ o estado quântico que descreve a quantidade de fótons gerados pela primeira fonte e pela segunda. Esse estado pode ser descrito pela ação de operadores criação e aniquilação pela equação (2.1.7):

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!}} |0, 0\rangle. \quad (\text{B.1.1})$$

As lâminas semiespelhadas podem ser descritas por operadores unitários M_j atuando sobre esses operadores

a_j^\dagger gerando novos operadores B_j^\dagger .

$$\begin{bmatrix} B_1^\dagger \\ B_2^\dagger \end{bmatrix} = M_j \begin{bmatrix} a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} B_1^\dagger \\ B_2^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_j & t'_j \\ t_j & r'_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1.2})$$

em que r_j e t_j são os coeficientes de reflexão e transmissão da lâmina para os fótons da primeira fonte e r'_j e t'_j são os respectivos coeficientes para a segunda fonte. Devido a conservação de energia, uma fase pode ser acrescentada neste processo, mas, escolhendo apropriadamente os valores de r e t , ela pode ser compensada. Depois de passar pela primeira lâmina, o feixe passa pelo aparato que implementa a diferença de fase, descrita pelo operador unitário sobre B_j^\dagger :

$$P_S = \begin{bmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1.3})$$

Com isso, os operadores criação e aniquilação ao final da atuação do interferômetro são descritos através da seguinte transformação:

$$\begin{bmatrix} a_{1f}^\dagger \\ a_{2f}^\dagger \end{bmatrix} = M_2 P_S M_1 \begin{bmatrix} a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1.4})$$

Esse formalismo é idêntico ao utilizado até agora para se tratar o modelo integrável apresentado nesta dissertação, tanto é que uma demonstração que utiliza o mesmo princípio aqui utilizado se encontra no Apêndice A. Isso mostra uma possibilidade de se tratar o RTR como um interferômetro.

B.1.1 Resolução Através do Limite de Cramér-Rao Quântico

Observáveis são representados por operadores hermiteanos. Infelizmente não há operadores hermiteanos que representem a fase acumulada por um estado quântico durante a ação de um interferômetro. Portanto, só resta a estimativa de ϕ através da medição de outro observável \mathcal{O} , que está associado a um operador O , tal que $\langle O \rangle = f(\phi)$. Sendo assim $\phi = f^{-1}(\langle O \rangle)$ e o erro $\Delta\phi$ pode ser determinado através do erro ΔO pela resolução analítica da lei de propagação de incertezas:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta O}{|\partial_\phi \langle O \rangle|}, \quad (\text{B.1.5})$$

sendo a derivada parcial avaliada no valor ϕ_0 estimado a partir de $\langle O \rangle$ e ΔO o desvio padrão de O calculado da forma usual $\Delta O = \sqrt{\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2}$. Quanto menor for $\Delta\phi$, maior será a resolução do interferômetro. Por isso, os limites mínimos que esta quantidade pode atingir precisam ser discutidos.

O limite mínimo de $\Delta\phi$ segue uma relação chamada limite de Cramér-Rao quântico (qLCR). Essa relação diz qual é o valor mínimo que a variância de um observável pode atingir. Diferentemente do princípio da incerteza de Heisenberg, essa relação não necessita de um segundo observável para ser calculada, dependendo apenas de parâmetros internos do sistema. Sejam $\rho(\phi)$ a matriz de densidade do sistema, dependente de ϕ e $\{\hat{E}(\epsilon)\}$ o conjunto dos operadores positivos de medida definida [63]. Esse conjunto é formado por operadores hermiteanos não negativos que satisfazem $\sum_\epsilon \hat{E}(\epsilon) = I$. A partir desses operadores, é possível definir um mapeamento $\Phi(\epsilon)$ no espaço de parâmetros aonde a estimativa de ϕ acontece. Φ será a função que servirá de estimador para ϕ . Se $\langle \Phi \rangle(\phi) = \phi$ para todos os valores de ϕ , então o estimador é considerado não tendencioso. A

partir de ρ e $\hat{E}(\epsilon)$, a probabilidade condicional de se obter o valor ϵ dado um valor de ϕ pode ser definida como:

$$P(\epsilon|\phi) = \text{tr}(\hat{E}(\epsilon)\rho(\phi)), \quad (\text{B.1.6})$$

e o limite de Cramér-Rao clássico (LCR) pode ser definido como:

$$(\Delta\Phi(\phi = \phi_0))^2 \geq \frac{(\partial_\phi \langle \Phi \rangle |_{\phi=\phi_0})^2}{F(\phi = \phi_0)}, \quad (\text{B.1.7})$$

sendo $F(\phi)$ a função de informação de Fisher

$$F(\phi) = \langle \partial_\phi \ln(P(\epsilon|\phi)) \rangle^2 \Rightarrow F(\phi) = \sum_\epsilon \frac{(\partial_\phi P(\epsilon|\phi))^2}{P(\epsilon|\phi)}, \quad (\text{B.1.8})$$

em que a soma se estende por todos os valores de ϵ .

Para se obter o qLCR, $F(\phi)$ deve ser maximizada sobre todos os conjuntos $\{\hat{E}(\epsilon)\}$, levando a função de informação de Fisher quântica $F_Q\{\rho(\phi)\}$. Essa função também pode ser representada como:

$$F_Q\{\rho(\phi)\} = \text{tr}(\rho(\phi)L_\phi^2), \quad (\text{B.1.9})$$

em que L_ϕ é o operador derivada logarítmica simétrica [54, 63, 69] que é definido como solução da equação:

$$\partial_\phi \rho = \frac{\rho L_\phi + L_\phi \rho}{2} \quad (\text{B.1.10})$$

Aplicando esta definição para uma matriz de densidade que corresponda a um valor definido de ϕ , $\rho = |\Psi(\phi)\rangle\langle\Psi(\phi)|$, F_Q resulta em:

$$F_Q\{\rho(\phi)\} = 4 \left\{ \langle \partial_\phi \Psi | \partial_\phi \Psi \rangle - |\langle \partial_\phi \Psi | \Psi \rangle|^2 \right\}. \quad (\text{B.1.11})$$

Com isso, o qLCR se torna:

$$(\Delta\Phi(\phi = \phi_0))^2 \geq \frac{(\partial_\phi \langle \Phi \rangle |_{\phi=\phi_0})^2}{F_Q\{\rho(\phi = \phi_0)\}}. \quad (\text{B.1.12})$$

Como F_Q é uma maximização de F , $\Delta\Phi_{qLCR} \leq \Delta\Phi_{LCR}$, ou seja, qLCR permite que o interferômetro atinja uma resolução maior do que o LCR permite. Outro ponto a ser notado é que F_Q não depende do mapeamento Φ utilizado, mas sim somente de parâmetros internos da dinâmica do sistema e do estado inicial utilizado. Se o sistema puder ser dividido em N subsistemas, ou seja, $\rho(\phi) = \otimes_{n=1}^N \rho_n(\phi)$ de tal forma que a estimativa de ϕ possa ocorrer independentemente em cada subsistema, então, $F(\phi) = \sum_{n=0}^N F_n(\phi) = NF_1(\phi)$ e, da mesma forma, $F_Q\{\rho(\phi)\} = \sum_{n=0}^N F_{Qn}\{\rho(\phi)\} = NF_{Q1}\{\rho(\phi)\}$. Isso ocorre porque, nesse caso, $P(\epsilon|\phi) = \prod_{n=1}^N P_n(\epsilon|\phi)$. Isso conecta a quantidade de medições realizadas sobre o sistema com o número de subespaços que o mesmo possui [63]. Se esse número for equivalente a uma grandeza física, como o número total de fótons emitidos pelo interferômetro, ou o número total de partículas no caso do modelo integrável apresentado nesta dissertação, os seguintes limites podem ser definidos.

- Limite Quântico Padrão (LQP): quando $\Delta\Phi$ escala de acordo com $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Este é o limite mínimo que $\Delta\Phi$ pode atingir quando a estimativa da fase se der por estados de luz clássica, que seriam estados da base de Fock que equivalem a apenas uma fonte de luz. Com esses estados, pode ser provado que sua resolução máxima obedece a este limite [63]. Interferômetros operando com esse limite são considerados como

tendo um nível normal de resolução.

- Limite de Heisenberg (LH): quando $\Delta\Phi$ escala de acordo com $\frac{1}{N}$. Esse limite só pode ser atingido por estados que sejam equivalentes à emissão de luz por mais de uma fonte no interferômetro, como os vistos no exemplo na seção 5.5.2. Sua definição segue de um argumento heurístico a partir de $N00N$ states. Ao se pensar na relação de incerteza (também heurísticamente) $\Delta N \Delta\phi = 1$, num $N00N$ state, $\Delta N = N$, o que levaria a este limite de resolução [73]. Interferômetros operando dentro desse limite mas melhor que o LQP são considerados como tendo superresolução. Como o limite mínimo é definido por $F_Q\{\rho(\phi)\}$, também é possível a existência de arranjos que permitam a extrapolação do LH levando a resoluções ainda melhores.

B.2 ENCONTRANDO A INCERTEZA MÍNIMA PARA O SISTEMA

Primeiramente, o resultado para a função de informação de Fisher quântica para o sistema precisa ser demonstrado. Ele vem da aplicação de (B.1.12) ao estado definido pelo protocolo (4.1.5). Para computá-lo, primeiro é necessário saber o que é $|\partial_\phi \tilde{\Psi}\rangle$, em que a própria equação (4.1.5) pode ser utilizada:

$$|\partial_\phi \tilde{\Psi}\rangle = \partial_\phi \left(e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} e^{-i\phi S_z} e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} |\Psi_0\rangle \right); \quad (\text{B.2.1})$$

$$|\partial_\phi \tilde{\Psi}\rangle = -i \left(e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} S_z e^{-i\phi S_z} e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} \right) |\Psi_0\rangle; \quad (\text{B.2.2})$$

$$|\partial_\phi \tilde{\Psi}\rangle = -i \left(e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} e^{-i\phi S_z} e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} e^{i\frac{\pi}{2} S_x} S_z e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} \right) |\Psi_0\rangle. \quad (\text{B.2.3})$$

Usando a Identidade, obtida a partir da expansão de Baker-Hausdorf [63]:

$$e^{i\frac{\pi}{2} S_x} S_z e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} = S_y, \quad (\text{B.2.4})$$

tem-se:

$$|\partial_\phi \tilde{\Psi}\rangle = -i \left(e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} e^{-i\phi S_z} e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} S_y \right) |\Psi_0\rangle. \quad (\text{B.2.5})$$

Calculando agora as quantidades $\langle \partial_\phi \tilde{\Psi} | \partial_\phi \tilde{\Psi} \rangle$ e $|\langle \partial_\phi \tilde{\Psi} | \tilde{\Psi} \rangle|^2$:

$$\langle \partial_\phi \tilde{\Psi} | \partial_\phi \tilde{\Psi} \rangle = \langle \Psi_0 | \left[i \left(S_y e^{i\frac{\pi}{2} S_x} e^{i\phi S_z} e^{i\frac{\pi}{2} S_x} \right) \right] \left[-i \left(e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} e^{-i\phi S_z} e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} S_y \right) \right] | \Psi_0 \rangle; \quad (\text{B.2.6})$$

$$\langle \partial_\phi \tilde{\Psi} | \partial_\phi \tilde{\Psi} \rangle = \langle \tilde{\Psi} | S_y^2 | \tilde{\Psi} \rangle = \langle S_y^2 \rangle; \quad (\text{B.2.7})$$

$$|\langle \partial_\phi \tilde{\Psi} | \tilde{\Psi} \rangle|^2 = \left| \langle \Psi_0 | \left[i \left(S_y e^{i\frac{\pi}{2} S_x} e^{i\phi S_z} e^{i\frac{\pi}{2} S_x} \right) \right] \left[\left(e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} e^{-i\phi S_z} e^{-i\frac{\pi}{2} S_x} \right) \right] | \Psi_0 \rangle \right|^2; \quad (\text{B.2.8})$$

$$|\langle \partial_\phi \tilde{\Psi} | \tilde{\Psi} \rangle|^2 = |i \langle \tilde{\Psi} | S_y | \tilde{\Psi} \rangle|^2 = \langle S_y \rangle^2. \quad (\text{B.2.9})$$

Portanto $F_Q\{\rho\} = 4\Delta S_y^2$ com os valores esperados calculados sobre o estado inicial do protocolo em decorrência de (B.2.7) e (B.2.9) aplicadas em (B.1.12).

Com isso, o limite de resolução do sistema será dado pela maximização da seguinte função:

$$\Delta S_y^2 = \langle S_y^2 \rangle - \langle S_y \rangle^2. \quad (\text{B.2.10})$$

Utilizando a base $\{S^2, S_y\}$, o estado $|\psi\rangle$ que gera essa maximização pode ser dado pela combinação linear:

$$|\psi\rangle = \sum_{s'=0, \frac{1}{2}, 1, \dots}^{\infty} \sum_{j=-s'}^{s'} c_{s'j} |s', j\rangle. \quad (\text{B.2.11})$$

Como $s = \frac{N-l}{2}$ no RTR, $c_{s'j} = \delta_{s,s'} c_j$ e:

$$|\psi\rangle = \sum_{j=-s}^s c_j |s, j\rangle. \quad (\text{B.2.12})$$

Aplicando esse estado sobre ΔS_y^2 :

$$\Delta S_y^2 = \sum_{j=-s}^s j^2 |c_j|^2 - \left(\sum_{j=-s}^s j |c_j|^2 \right)^2. \quad (\text{B.2.13})$$

Seja $k_j = |c_j|^2$. ΔS_y^2 deve ser maximizada em relação às variáveis k_j levando em conta a condição de normalização $\sum_{j=-s}^s k_j = 1$, o que pode ser feito com um multiplicador de Lagrange. Seja \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \sum_{j=-s}^s j^2 k_j - \left(\sum_{j=-s}^s j k_j \right)^2 + \lambda \left(1 - \sum_{j=-s}^s k_j \right), \quad (\text{B.2.14})$$

a Lagrangiana da função a ser maximizada. Maximizar \mathcal{L} em relação a k_j será o mesmo que maximizar ΔS_y^2 levando em conta a condição de normalização. Derivando \mathcal{L} em relação a k_j :

$$\partial_{k_j} \mathcal{L} = j^2 - 2j \left(\sum_{j'=-s}^s j' k_{j'} \right) - \lambda. \quad (\text{B.2.15})$$

Fazendo $\partial_{k_j} \mathcal{L} = 0$ equivale a:

$$0 = j^2 - 2j \left(\sum_{j'=-s}^s j' k_{j'} \right) - \lambda \Rightarrow \sum_{j'=-s}^s j' k_{j'} = \frac{j^2 - \lambda}{2j}, \quad j \neq 0, \quad k_j \neq 0. \quad (\text{B.2.16})$$

O lado esquerdo da última equação de (B.2.16) é $\langle S_y \rangle$ e é uma constante. O lado direito varia com relação ao valor de j , o que implica em duas possibilidades. Ou $k_j = \delta_{jj'}$, o que implicaria em:

$$\Delta S_y^2 = j^2 - j^2 = 0, \quad (\text{B.2.17})$$

ou existem dois valores j e j' tais que:

$$\frac{j^2 - \lambda}{2j} = \frac{j'^2 - \lambda}{2j'} \Rightarrow \lambda \left(\frac{1}{2j} - \frac{1}{2j'} \right) = \frac{j - j'}{2} \Rightarrow \lambda \left(\frac{j' - j}{jj'} \right) = j - j' \Rightarrow \frac{\lambda}{jj'} = -1 \Rightarrow \lambda = -jj'. \quad (\text{B.2.18})$$

Também pela condição de normalização, tem-se $k_{j'} = 1 - k_j$, com isso, (B.2.16) fica:

$$jk_j + j' - j'k_j = \frac{j + j'}{2} \Rightarrow k_j(j - j') = \frac{j - j'}{2} \Rightarrow k_j = k_{j'} = \frac{1}{2}. \quad (\text{B.2.19})$$

Para se encontrar quais desses extremos locais é o “maior” extremo local, ΔS_y^2 pode ser reescrita com base

no que já foi encontrado até este ponto:

$$\Delta S_y^2 = \frac{j^2}{2} + \frac{j'^2}{2} - \left(\frac{j}{2} + \frac{j'}{2}\right)^2 \Rightarrow \Delta S_y^2 = \frac{j^2}{2} + \frac{j'^2}{2} - \frac{j^2}{4} - \frac{j'^2}{4} - \frac{jj'}{2} \Rightarrow \Delta S_y^2 = \frac{j^2}{4} + \frac{j'^2}{4} - \frac{jj'}{2}; \quad (\text{B.2.20})$$

$$\Delta S_y^2 = \left(\frac{j}{2} - \frac{j'}{2}\right)^2. \quad (\text{B.2.21})$$

Quanto maior for $j - j'$, maior será o valor de ΔS_y^2 (um procedimento de extremização para j e j' como realizado anteriormente somente encontraria um mínimo local em $j - j' = 0$). Como o maior valor que j pode assumir é s e o menor valor que j' pode assumir é $-s$, então fica claro que o maior valor que ΔS_y^2 pode assumir é:

$$\max\{\Delta S_y^2\} = s^2, \quad (\text{B.2.22})$$

que corresponde ao estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|s, s\rangle + e^{i\varphi} |s, -s\rangle \right). \quad (\text{B.2.23})$$

Como já mencionado anteriormente, $s = \frac{N-l}{2}$, no RTR o que implica em $\max\{\Delta S_y^2\} = \frac{(N-l)^2}{4}$, o que leva o limite de resolução do sistema de acordo com a Função de Informação de Fisher quântica a ser:

$$\Delta\phi^2 \geq \frac{1}{4 \frac{(N-l)^2}{4}} \Rightarrow \Delta\phi \geq \frac{1}{N-l}. \quad (\text{B.2.24})$$

Apêndice C

Robustez

Desvios no comportamento do sistema através da adição de novos potenciais são uma extensão comum a sistemas integráveis e podem ocorrer para o estudo de diversas propriedades, como realizado em [74–76]. Como esses potenciais desviam o Hamiltoniano do sistema a que eles foram adicionados de sua condição inicial integrável, eles são normalmente chamados de quebras de integrabilidade. Neste Apêndice, a questão da robustez do sistema será abordada através de uma segunda quebra de integrabilidade. Um sistema pode ser dito robusto quando ele consegue preservar sua dinâmica mesmo quando uma perturbação, que em teoria pode alterá-la substancialmente, atua sobre ele. Um dos motivos que justifica este tipo de estudo é a presença de margens de erro que limitam a precisão com que os aparatos experimentais que sustentam o sistema podem operar. O sistema estudado nesta dissertação é realizado através do alinhamento de *lasers* sobre um condensado de Bose-Einstein dipolar. Portanto, é possível que haja alguma margem de erro ou dificuldade de foco nesses aparelhos que possibilite a inclusão de alguma perturbação. Como isso pode influenciar a capacidade de se realizar o sistema em laboratório, este estudo se torna imprescindível.

C.1 A QUEBRA DE INTEGRABILIDADE DE INTERAÇÃO

No caso deste estudo, a quebra de integrabilidade de interação ameaça a obtenção do RTR e é dada por:

$$H_{\xi} = \xi N_1 N_3. \quad (\text{C.1.1})$$

O termo ε visto nos Capítulos 3 a 5 podia ser interpretado como a adição manual e controlável de um comportamento ao sistema. No entanto, este termo apresenta uma perturbação no sistema pois, como visto no Capítulo 2, as interações inter e intrapós associadas ao termo $N_1 N_3$ podem ser compensadas com uma fase dinâmica aplicada ao sistema como visto em (2.1.10). Com H_{ξ} , esse tipo de compensação não existe mais, causando efeitos não lineares potencialmente imprevisíveis. No entanto, se o sistema for robusto, ele apresentará uma resistência ou uma tolerância a este tipo de perturbação, o que aqui será considerado como uma definição para robustez.

C.2 FIDELIDADE

Uma forma de se estudar robustez é através de uma função \mathcal{F} chamada fidelidade. A fidelidade é a projeção de dois estados através do produto interno de um com o outro. Nos estudos de robustez, um desses estados é um estado de controle $|\Phi(t)\rangle$ enquanto o outro é o estado a ser estudado $|\Psi(t)\rangle$. Dessa forma $\mathcal{F}(t)$ pode ser definida como:

$$\mathcal{F}(t) = \langle \Phi(t) | \Psi(t) \rangle. \quad (\text{C.2.1})$$

Uma importante conclusão que pode ser auferida ao se estudar $\mathcal{F}(t)$, principalmente $F(t) = |\mathcal{F}(t)|^2$ é a informação do quão bem o estado $|\Psi(t)\rangle$ pode ser representado por $|\Phi(t)\rangle$, visto que o resultado $F(t) = 1$ somente pode ser atingido se $|\Psi(t)\rangle = |\Phi(t)\rangle$. $F(t)$ também pode ser interpretada como a probabilidade de transição do estado $|\Psi(t)\rangle$ para o estado $|\Phi(t)\rangle$.

Ao longo das próximas seções, serão estudados alguns casos de como esta perturbação introduzida em (C.1.1) pode atuar no sistema. Primeiramente de forma estática e a seguir de forma dinâmica, como uma função periódica.

C.3 A PERTURBAÇÃO ESTÁTICA

No caso de uma perturbação estática, o termo (C.1.1) é adicionado ao Hamiltoniano tal como ele está. Dado um estado inicial $|N-l-k, l, k\rangle$, a evolução temporal do sistema pode ser comparada através da fidelidade:

$$F_1(t) = |\langle N-l-k, l, k | \Psi(t) \rangle|^2, \quad (\text{C.3.1})$$

e o Hamiltoniano se torna:

$$H = U(N_1 - N_2 + N_3)^2 + J_1(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) + J_3(a_2^\dagger a_3 + a_2 a_3^\dagger) + \varepsilon(N_3 - N_1) + \xi N_1 N_3. \quad (\text{C.3.2})$$

Neste caso, assim como nos próximos a serem apresentados, há uma sobreposição dos efeitos da quebra de integrabilidade ε com a perturbação ξ . $F(t)$ tal como está apresentada vai permitir determinar se ε é capaz de tornar o sistema mais robusto, ao comparar $F(t)$ para um sistema com e sem quebra de integrabilidade. No RTR, o tunelamento ressonante é modulado pela constante efetiva de tunelamento $J_e = \lambda_l J_1 J_3$. ξ estar próximo a esse valor significaria uma competição da perturbação com o RTR podendo potencialmente comprometê-lo e, por isso, os próximos resultados serão obtidos considerando-se esse limite.

Como é possível ver na Figura C.1, a presença de ε é capaz de tornar o modelo mais robusto. Usando a primeira figura do quadro como uma base de comparação, o comportamento periódico de picos em $F(t)$ necessita de valores maiores de ξ para começar a esvanecer quando há uma quebra de integrabilidade presente do que quando a mesma está ausente. O principal efeito de ε é a localização dos estados, suprimindo o tunelamento ressonante de partículas como visto no Capítulo 3. Visto que $\omega_l = 2J_e$, o aumento de robustez com a quebra de integrabilidade externa pode ser explicado ao se considerar analogamente:

$$\omega_\gamma = 2J_\gamma, \quad J_\gamma = \frac{J_e}{\Delta n}. \quad (\text{C.3.3})$$

Com isso, a presença da quebra de integrabilidade externa aumenta o valor da constante de tunelamento efetivo, o que faz com que sejam necessários valores maiores de ξ para que a dinâmica do sistema seja efetivamente

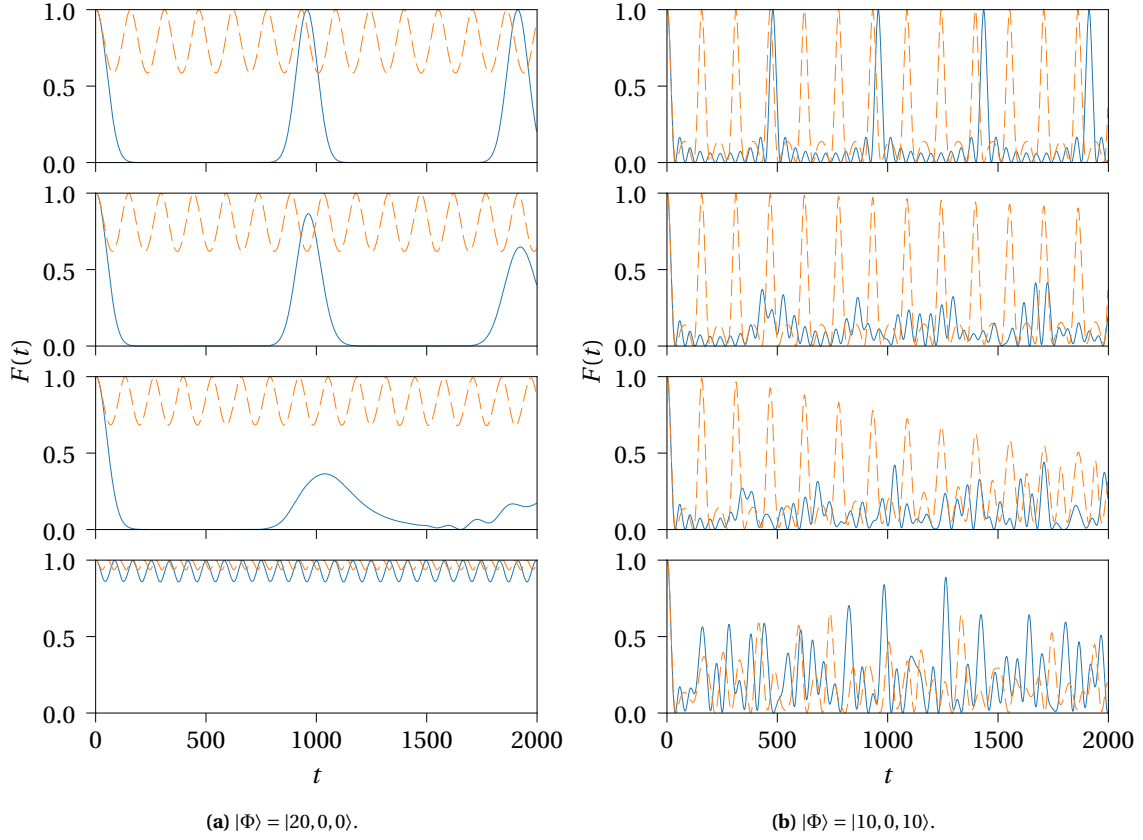


Figura C.1: Módulo quadrado da fidelidade $F(t)$ do sistema definido por (C.3.2) para diferentes valores de ξ obtida através de diagonalização exata. De cima para baixo: $\xi/J = 0; 0,00012; 0,0004$ e $0,004$. Linhas sólidas nos gráficos representam resultados obtidos para $\epsilon/J = 0$ e linhas tracejadas representam resultados obtidos para $\epsilon/J = 0,02$. Em todas as figuras, o sistema se encontrava no RTR com $\eta = 40$, o que corresponde a $J_e = 0,00329$ e $J_\gamma = 0,00599$.

perturbada.

C.4 O PULSO ALTERNANTE

Neste caso, a quebra de integrabilidade de interação foi introduzida com uma dependência temporal periódica. Esse estudo faz parte de uma base para análise de dependências temporais mais sofisticadas como pulsos de amplitude aleatória cuja probabilidade de ocorrência está vinculada a uma distribuição gaussiana. Desta forma, o termo de perturbação será dependente do tempo de acordo com:

$$H_\xi(t) = \begin{cases} \xi N_1 N_3, &]nT, (n + \frac{1}{2})T], n \in \mathbb{Z} \\ -\xi N_1 N_3, &](n + \frac{1}{2})T, (n+1)T], n \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad (\text{C.4.1})$$

dado um período de oscilação T e uma frequência $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Este pulso foi construído de tal forma que a sua média temporal \mathcal{M} seja:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{T} \int_0^T H_\xi(t) dt = \frac{\xi N_1 N_3}{2} - \left(\xi N_1 N_3 - \frac{\xi N_1 N_3}{2} \right) = \hat{0}. \quad (\text{C.4.2})$$

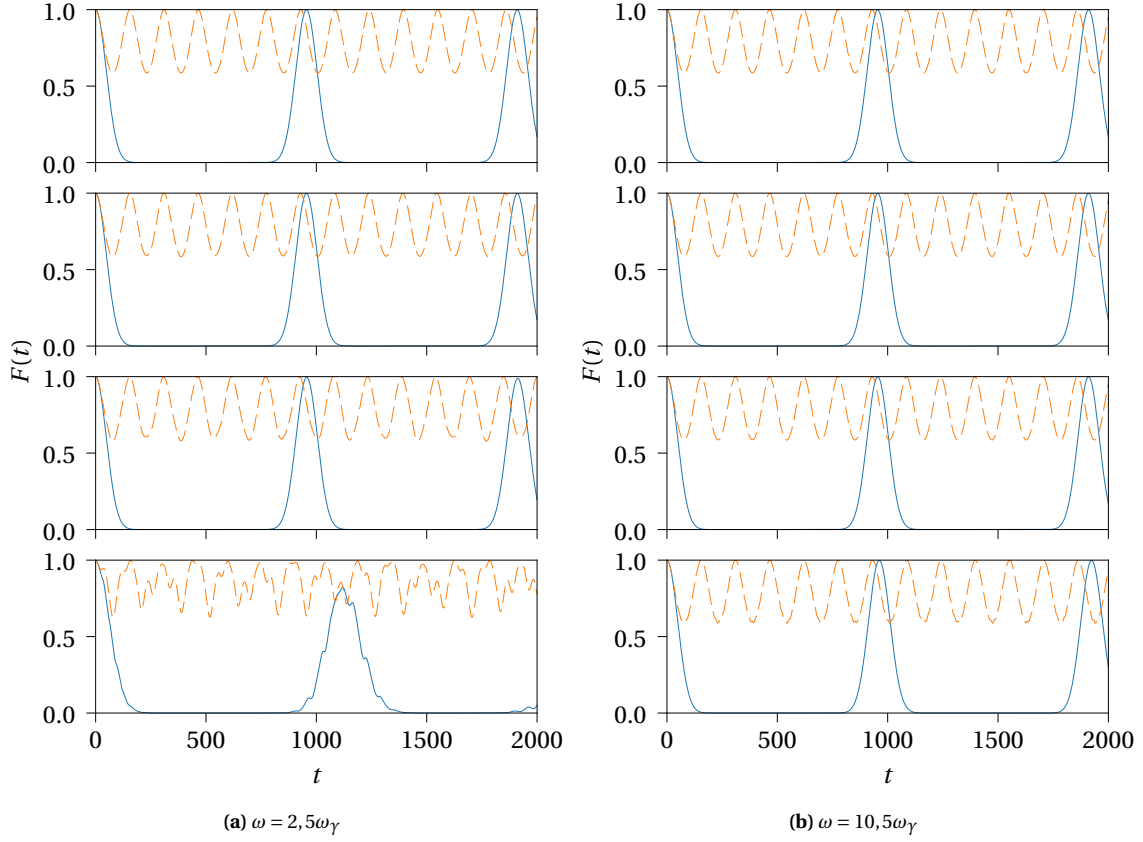


Figura C.2: Módulo quadrado da fidelidade $F(t)$ do sistema definido por (C.3.2) na forma do pulso alternante com dois valores distintos de frequência (figuras (a) e (b)) para diferentes valores de ξ obtida através de diagonalização exata. De cima para baixo: $\xi/J = 0; 0,00012; 0,0004$ e $0,004$. Linhas sólidas nos gráficos representam resultados obtidos para $\epsilon/J = 0$ e linhas tracejadas representam resultados obtidos para $\epsilon/J = 0,02$. Em todas as figuras, o sistema se encontra no RTR com $\eta = 40$ e estado inicial $|20, 0, 0\rangle$. Nessa configuração, $J_e = 0,00329$ e $J_\gamma = 0,00599$. A presença de uma oscilação como descrita por (C.4.1) melhorou drasticamente a robustez do sistema até mesmo quando a quebra de integrabilidade ϵ não estava presente.

Felizmente, apesar da dependência temporal, a diagonalização exata do Hamiltoniano ainda pode ser utilizada, considerando-se que um instante t arbitrário pode ser dividido em $t = \delta t + MT$, $M \in \mathbb{N}$, $\delta t < T$. Dessa forma o operador evolução temporal pode ser expresso como:

$$\mathcal{U}(t) = e^{-iH_+\delta t} \left(e^{-iH_-\frac{T}{2}} e^{-iH_+\frac{T}{2}} \right)^M, \quad 0 < \delta t \leq \frac{T}{2}; \quad (\text{C.4.3})$$

$$\mathcal{U}(t) = e^{-iH_-\delta t} e^{-iH_+\frac{T}{2}} \left(e^{-iH_-\frac{T}{2}} e^{-iH_+\frac{T}{2}} \right)^M, \quad \frac{T}{2} < \delta t \leq T, \quad (\text{C.4.4})$$

sendo $H_\pm = H \pm \xi N_1 N_3$ com H dado por (3.1.2).

Resultados da evolução temporal do sistema foram apresentados na figura C.2 para $\omega = 2,5\omega_\gamma$ e $10,5\omega_\gamma$. Como pode ser visto, a presença de oscilações torna o sistema mais robusto até mesmo na ausência da quebra de integrabilidade externa e para perturbações fortes da ordem de J_e ou J_γ . Também pode ser notado que, quanto maior a frequência de oscilação, o sistema pode fazer frente a perturbações maiores.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases* (Verlag der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1924),
URL: <https://doi.org/10.1002/3527608958.ch27>
- [2] Bose, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, *Zeitschrift für Physik* **26** (1924) (1), p. 178,
URL: <https://doi.org/10.1007/BF01327326>
- [3] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman and E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, *Science* **269** (1995) (5221), p. 198,
URL: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.269.5221.198>
- [4] E. A. Cornell and C. E. Wieman, *Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments*, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002), p. 875,
URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.74.875>
- [5] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn and W. Ketterle, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995), p. 3969,
URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.3969>
- [6] W. Ketterle, *Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser*, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002), p. 1131,
URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.74.1131>
- [7] M. Albiez, R. Gati, J. Fölling, S. Hunsmann, M. Cristiani and M. K. Oberthaler, *Direct Observation of Tunneling and Nonlinear Self-Trapping in a Single Bosonic Josephson Junction*, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005), p. 010402,
URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.010402>
- [8] G. J. Milburn, J. Corney, E. M. Wright and D. F. Walls, *Quantum dynamics of an atomic Bose-Einstein condensate in a double-well potential*, *Phys. Rev. A* **55** (1997), p. 4318,
URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.55.4318>
- [9] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi and S. R. Shenoy, *Quantum Coherent Atomic Tunneling between Two Trapped Bose-Einstein Condensates*, *Physical Review Letters* **79** (1997) (25), p. 4950,
URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.4950>

- [10] A. J. Leggett, *Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts*, Rev. Mod. Phys. **73** (2001), p. 307,
 URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.307>
- [11] A. P. Tonel, J. Links and A. Foerster, *Behaviour of the energy gap in a model of Josephson coupled Bose Einstein condensates*, Journal of Physics A: Mathematical and General **38** (2005) (31), p. 6879,
 URL: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/31/002>
- [12] J. Links, A. Foerster, A. P. Tonel and G. Santos, *The Two-Site Bose-Hubbard Model*, Annales Henri Poincaré; **7** (2006) (7-8), p. 1591,
 URL: <https://doi.org/10.1007/s00023-006-0295-3>
- [13] A. P. Tonel, J. Links and A. Foerster, *Quantum dynamics of a model for two Josephson-coupled Bose Einstein condensates*, Journal of Physics A Mathematical General **38** (2005) (6), p. 1235,
 URL: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/6/004>
- [14] M. Greiner, O. Mandel, T. Rom, A. Altmeyer, A. Widera, T. W. Hänsch and I. Bloch, *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in an ultracold gas of atoms*, Physica B Condensed Matter **329** (2003), p. 11,
 URL: [https://doi.org/10.1016/S0921-4526\(02\)01872-0](https://doi.org/10.1016/S0921-4526(02)01872-0)
- [15] M. Greiner, O. Mandel, T. W. Hänsch and I. Bloch, *Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate*, Nature **419** (2002) (6902), p. 51,
 URL: <https://doi.org/10.1038/nature00968>
- [16] N. Oelkers and J. Links, *Ground-state properties of the attractive one-dimensional Bose-Hubbard model*, Physical Review B **75** (2007) (11), 115119,
 URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.115119>
- [17] N. A. Lemos, *Analytical Mechanics* (Cambridge University Press, 2018),
 URL: <https://doi.org/10.1017/9781108241489>
- [18] V. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60 (Springer, 1989),
 URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1693-1>
- [19] M. T. Batchelor and A. Foerster, *Yang-Baxter integrable models in experiments: from condensed matter to ultracold atoms*, Journal of Physics A: Mathematical and General **49** (2016) (17), 173001,
 URL: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/17/173001>
- [20] A. Foerster and E. Ragoucy, *Exactly solvable models in atomic and molecular physics*, Nuclear Physics B **777** (2007) (3), p. 373,
 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321307002283>
- [21] V. E. Korepin and F. H. L. Eßler, *Exactly Solvable Models Of Strongly Correlated Electrons*, Exactly Solvable Models Of Strongly Correlated Electrons. Series: Advanced Series in Mathematical Physics, ISBN: 978-981-02-1534-7. WORLD SCIENTIFIC, Edited by Vladimir E Korepin and Fabian H L Eßler, vol. 18 (1994),
 URL: <https://doi.org/10.1142/2148>

- [22] A. Foerster and M. Karowski, *Algebraic properties of the Bethe ansatz for an $sl(2,1)$ -supersymmetric t - J model*, Nuclear Physics B **396** (1993) (2), p. 611,
 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139390665C>
- [23] J. Links and A. Foerster, *Solution of a two-leg spin ladder system*, Physical Review B **62** (2000) (1), p. 65,
 URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.62.65>
- [24] H. M. Babujian, A. Foerster and M. Karowski, *Exact form factors of the $SU(N)$ Gross-Neveu model and $1/N$ expansion*, Nuclear Physics B **825** (2010) (3), p. 396,
 URL: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2009.09.023>
- [25] A. V. Belitsky, V. M. Braun, A. S. Gorsky and G. P. Korchemsky, *Integrability in QCD and Beyond*, International Journal of Modern Physics A **19** (2004) (28), p. 4715,
 URL: <https://doi.org/10.1142/S0217751X04019895>
- [26] G. Santos, A. Tonel, A. Foerster and J. Links, *Classical and quantum dynamics of a model for atomic-molecular Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **73** (2006), p. 023609,
 URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.73.023609>
- [27] G. Santos, A. Foerster, J. Links, E. Mattei and S. R. Dahmen, *Quantum phase transitions in an interacting atom-molecule boson model*, Phys. Rev. A **81** (2010), p. 063621,
 URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.063621>
- [28] M. Duncan, A. Foerster, J. Links, E. Mattei, N. Oelkers and A. P. Tonel, *Emergent quantum phases in a heteronuclear molecular Bose-Einstein condensate model*, Nuclear Physics B **767** (2007) (3), p. 227,
 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S055032130601008X>
- [29] D. Rubeni, A. Foerster, E. Mattei and I. Roditi, *Quantum phase transitions in Bose-Einstein condensates from a Bethe ansatz perspective*, Nuclear Physics B **856** (2012) (3), p. 698,
 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321311006729>
- [30] H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle*, Zeitschrift für Physik **71** (1931) (3), p. 205,
 URL: <https://doi.org/10.1007/BF01341708>
- [31] J.-S. Caux and J. Mossel, *Remarks on the notion of quantum integrability*, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2011** (2011) (2), p. 02023,
 URL: <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2011/02/P02023>
- [32] S. Weigert, *The problem of quantum integrability*, Physica D: Nonlinear Phenomena **56** (1992) (1), p. 107,
 URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899290053P>
- [33] S. Ruijsenaars, *Integrable systems: An overview*, Lecture Notes (2017),
 URL: <https://www1.maths.leeds.ac.uk/~siru/ISSurv%282015%29.pdf>
- [34] L. D. Faddeev, *Two-Dimensional Integrable Models in Quantum Field Theory*, Physica Scripta **24** (1981) (5), p. 832,
 URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/24/5/005>

- [35] C. N. Yang, *Some Exact Results for the Many-Body Problem in one Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), p. 1312,
 URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.19.1312>
- [36] M. Jimbo, *Yang-Baxter Equation in Integrable Systems*, vol. 10 (1990),
 URL: <https://doi.org/10.1142/1021>
- [37] R. J. Baxter, *Solvable Eight-Vertex Model on an Arbitrary Planar Lattice*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A **289** (1978) (1359), p. 315,
 URL: <https://doi.org/10.1098/rsta.1978.0062>
- [38] R. J. Baxter, *Exactly Solvable Models in Statistical Mechanics* (1989),
 URL: https://doi.org/10.1142/9789814415255_0002
- [39] E. H. Lieb and F. Y. Wu, *Absence of Mott Transition in an Exact Solution of the Short-Range, One-Band Model in One Dimension*, Phys. Rev. Lett. **20** (1968), p. 1445,
 URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.20.1445>
- [40] L. H. Ymai, A. P. Tonel, A. Foerster and J. Links, *Quantum integrable multi-well tunneling models*, Journal of Physics A: Mathematical and General **50** (2017) (26), 264001,
 URL: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa7227>
- [41] A. P. Tonel, L. H. Ymai, A. Foerster and J. Links, *Integrable model of bosons in a four-well ring with anisotropic tunneling*, Journal of Physics A: Mathematical and General **48** (2015) (49), 494001,
 URL: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/49/494001>
- [42] A. P. Tonel, L. H. Ymai, K. W. W., A. Foerster and J. Links, *Entangled states of dipolar bosons generated in a triple-well potential*, SciPost Phys. Core **2** (2020), p. 3,
 URL: <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhysCore.2.1.003>
- [43] D. S. Grün, K. Wittmann W., L. H. Ymai, J. Links and A. Foerster, *Protocol designs for NOON states*, Communications Physics **5** (2022) (1), 36,
 URL: <https://doi.org/10.1038/s42005-022-00812-7>
- [44] D. S. Grün, L. H. Ymai, K. Wittmann W., A. P. Tonel, A. Foerster and J. Links, *Integrable Atomtronic Interferometry*, Phys. Rev. Lett. **129** (2022), p. 020401,
 URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.129.020401>
- [45] J. Qin, Y.-H. Deng, H.-S. Zhong, L.-C. Peng, H. Su, Y.-H. Luo, J.-M. Xu, D. Wu, S.-Q. Gong, H.-L. Liu, H. Wang, M.-C. Chen, L. Li, N.-L. Liu, C.-Y. Lu and J.-W. Pan, *Unconditional and Robust Quantum Metrological Advantage beyond NOON States*, Physical Review Letters **130** (2023) (7), 070801,
 URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.070801>
- [46] J. C. Pelayo, K. Gietka and T. Busch, *Distributed quantum sensing with optical lattices*, **107** (2023) (3), 033318,
 URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.107.033318>

- [47] B. S. Michael Reed, *I: Functional Analysis, Volume 1 Volume 1*, rev and enl ed., Methods of Modern Mathematical Physics (Academic Press, 1981),
URL: <https://www.elsevier.com/books/i-functional-analysis/reed/978-0-08-057048-8>
- [48] W. H. Zurek, *Decoherence and the Transition from Quantum to Classical — Revisited* (Birkhäuser Basel, Basel, 2007), p. 1,
URL: https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7808-0_1
- [49] P. Shor, *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring*, in *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (1994), p. 124,
URL: <https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700>
- [50] D. Coppersmith, *An approximate Fourier transform useful in quantum factoring*, arXiv e-prints (2002), quant-ph/0201067,
URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0201067>
- [51] M. C. de Oliveira, *Teleportation of a Bose-Einstein condensate state by controlled elastic collisions*, Physical Review A **67** (2003) (2), 022307,
URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.022307>
- [52] E. Compagno, G. Quesnel, A. Minguzzi, L. Amico and D. Feinberg, *Multimode NOON states in driven atomtronic circuits*, Phys. Rev. Res. **2** (2020), p. 043118,
URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.043118>
- [53] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition* (Cambridge University Press, 2010),
URL: <https://doi.org/10.1017/CB09780511976667>
- [54] B. I. and Życzkowski K., *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, 2 ed. (Cambridge University Press, 2017),
URL: <https://doi.org/10.1017/9781139207010>
- [55] F. Verstraete, M. Popp and J. I. Cirac, *Entanglement versus Correlations in Spin Systems*, Physical Review Letters **92** (2004) (2), 027901,
URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.027901>
- [56] A. Spalvieri, *Infomechanics of Independent and Identically Distributed Particles*, arXiv e-prints (2022), arXiv:2204.06952,
URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.06952>
- [57] L. H. Ymai, A. P. Tonel, A. Foerster and J. Links, *Quantum integrable multi-well tunneling models*, arXiv e-prints (2016), arXiv:1606.00816,
URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1606.00816>
- [58] D. Rubeni, J. Links, P. S. Isaac and A. Foerster, *Two-site Bose-Hubbard model with nonlinear tunneling: Classical and quantum analysis*, Physical Review A **95** (2017) (4), 043607,
URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.95.043607>

- [59] J. Estève, C. Gross, A. Weller, S. Giovanazzi and M. K. Oberthaler, *Squeezing and entanglement in a Bose-Einstein condensate*, Nature **455** (2008) (7217), p. 1216,
 URL: <https://doi.org/10.1038/nature07332>
- [60] D. S. Grun, K. W. Wittmann, L. H. Ymai, J. Links and A. Foerster, *Atomtronic protocol designs for NOON states*, arXiv e-prints (2021), arXiv:2102.02944,
 URL: <https://doi.org/10.1038/s42005-022-00812-7>
- [61] K. Wittmann W., E. R. Castro, A. Foerster and L. F. Santos, *Interacting bosons in a triple well: Preface of many-body quantum chaos*, Physical Review E **105** (2022) (3), 034204,
 URL: <https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.105.034204>
- [62] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, 2 ed. (Cambridge University Press, 2017),
 URL: <https://doi.org/10.1017/9781108499996>
- [63] R. J. Birrittella, P. M. Alsing and C. C. Gerry, *The parity operator: Applications in quantum metrology*, AVS Quantum Science **3** (2021) (1), 014701,
 URL: <https://doi.org/10.1116/5.0026148>
- [64] K. W. Wilsmann, L. H. Ymai, A. P. Tonel, J. Links and A. Foerster, *Control of tunneling in an atomtronic switching device*, Communications Physics **1** (2018), p. 91,
 URL: <https://doi.org/10.1038/s42005-018-0089-1>
- [65] A. A. Bychek, D. N. Maksimov and A. R. Kolovsky, *NOON state of Bose atoms in the double-well potential via an excited-state quantum phase transition*, Phys. Rev. A **97** (2018), p. 063624,
 URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.97.063624>
- [66] A. Lahiri, *Basic Optics: Principles and Concepts*, 1 ed. (Elsevier, 2016),
 URL: <https://www.elsevier.com/books/basic-optics/lahiri/978-0-12-805357-7>
- [67] J. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*, 2 ed. (University Science Books, 1997),
 URL: <https://books.google.com.br/books?id=yNnQgAACAAJ>
- [68] D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field*, Phys. Rev. A **39** (1989), p. 1665,
 URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.39.1665>
- [69] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, 1 ed. (Academic Press, 1976),
 URL: <https://www.elsevier.com/books/quantum-detection-and-estimation-theory/unknown/978-0-12-340050-5>
- [70] J. P. Dowling, *Correlated input-port, matter-wave interferometer: Quantum-noise limits to the atom-laser gyroscope*, Phys. Rev. A **57** (1998), p. 4736,
 URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.57.4736>
- [71] H. Lee, P. Kok and J. P. Dowling, *A quantum Rosetta stone for interferometry*, Journal of Modern Optics **49** (2002) (14), p. 2325,
 URL: <https://doi.org/10.1080/0950034021000011536>

- [72] A. A. Michelson and E. W. Morley, *On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether*, American Journal of Science **s3-34** (1887) (203), p. 333,
URL: <https://www.ajsonline.org/content/s3-34/203/333>
- [73] C. C. Gerry and J. Mimih, *Heisenberg-limited interferometry with pair coherent states and parity measurements*, Physical Review A **82** (2010) (1), 013831,
URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.013831>[/arXiv.1005.5038](https://arxiv.org/abs/1005.5038)
- [74] I. Brouzos and A. Foerster, *Trace of broken integrability in stationary correlation properties*, Physical Review A **89** (2014) (5), 053623,
URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.053623>
- [75] P. Jung, R. W. Helmes and A. Rosch, *Transport in Almost Integrable Models: Perturbed Heisenberg Chains*, Physical Review Letters **96** (2006) (6), 067202,
URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.067202>
- [76] B. Wilson, A. Foerster, C. C. N. Kuhn, I. Roditi and D. Rubeni, *A geometric wave function for a few interacting bosons in a harmonic trap*, Physics Letters A **378** (2014) (16-17), pp. 1065–1070,
URL: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2014.02.009>