

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
ENG. DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

**PEDRO RODRIGUES DE LIMA - 00288579**

**IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA NÃO  
LINEAR DE UM SERVOPOSICIONADOR  
HIDRÁULICO**

Porto Alegre  
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
ENG. DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

**PEDRO RODRIGUES DE LIMA - 00288579**

**IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA NÃO  
LINEAR DE UM SERVOPOSICIONADOR  
HIDRÁULICO**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC-CCA) apresentado à COMGRAD-CCA da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de *Bacharel em Eng. de Controle e Automação*.

ORIENTADORA:

Profa. Dra. Lucíola Campestrini

CO-ORIENTADOR:

Prof. Dr. Mário Roland Sobczyk Sobrinho

Porto Alegre  
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
ENG. DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

**PEDRO RODRIGUES DE LIMA - 00288579**

**IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA NÃO  
LINEAR DE UM SERVOPOSICIONADOR  
HIDRÁULICO**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção dos créditos da Disciplina de TCC do curso *Eng. de Controle e Automação* e aprovado em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Orientadora: \_\_\_\_\_

Profa. Dra. Lucíola Campestrini, UFRGS

Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Lucíola Campestrini, UFRGS

Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Eduardo André Perondi, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

\_\_\_\_\_  
Mário Roland Sobczyk Sobrinho

Coordenador de Curso

Eng. de Controle e Automação

Porto Alegre, Março 2023

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho às maravilhosas mentes pensantes deste universo.

*Que o conhecimento difundido  
nestas páginas sirva sempre ao  
bem.*

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Max e Claudia, pelo apoio platônico e incondicional.

Ao Arthur e ao Charles, pela convivência, pelas experiências e por me mostrarem que, dentre muitas outras coisas, é possível ensinar e aprender ao mesmo tempo.

À Lucíola, minha mentora, pela orientação, confiança e parceria ao longo dos anos.

Ao Mário, pela coorientação e pelos ensinamentos no decorrer do curso.

Ao Tiago, da PowerSysLab, pela oportunidade de trabalho e pela confiança plena na minha capacidade.

Aos meus colegas de curso, pela amizade e pelo aprendizado em conjunto, em especial ao Preto, minha eterna dupla.

À música, por ser meu maior instrumento.

A todas as pessoas maravilhosas que conheci no caminho, por existirem e fazerem parte da minha vida.

À vida, pela maravilha de sua existência.

## RESUMO

Neste trabalho, é abordada a identificação de sistemas não lineares, com enfoque na obtenção de modelos paramétricos para um servoposicionador hidráulico. É desenvolvida a modelagem matemática não linear do servoposicionador e do modelo do coeficiente de atrito viscoso variável, os quais são considerados como base para obtenção de uma estrutura de modelo não linear de tempo discreto. A identificação é realizada por meio de um problema de otimização, considerando a minimização do erro de simulação entre a saída do modelo e a posição do atuador hidráulico. Os resultados mostram que é possível realizar a identificação paramétrica do servoposicionador de modo a se obter uma boa descrição de sua dinâmica. De forma complementar, também é descrita a identificação de um processo de nível de um tanque, utilizando duas estruturas de modelos com parametrização linear, mas adotando um regressor linear e outro não linear, assim como um exemplo de validação do modelo de atrito adotado.

**Palavras-chave:** Identificação de sistemas, Sistemas não lineares, Servoposicionador hidráulico, Coeficiente de atrito viscoso variável.

## ABSTRACT

In this work, the identification of nonlinear systems is discussed, with emphasis on obtaining parametric models for a hydraulic servoactuator. A nonlinear model is derived, considering not only the actuator, but also a variable viscous friction coefficient. The mathematical description is then generalized into a discrete-time nonlinear model structure. The identification process is defined through an optimization problem, consisting of the minimization of the simulation error between the simulated model output and the actual position of the actuator. Results show that a nonlinear parametric model for the actuator can be obtained, displaying a good dynamical response in relation to the position of the hydraulic servoactuator. Furthermore, complimentary examples are presented, such as the identification of a tank level process comparing the simulated outputs of models with linear parametrization, but contemplating a linear and a nonlinear regressor, in addition to a validation example for the nonlinear friction model.

**Keywords:** System identification, Nonlinear systems, Hydraulic servoactuator, Variable viscous friction coefficient.

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	ESTADO DA ARTE.....	12
3	MODELAGEM DO SERVOPOSICIONADOR HIDRÁULICO.....	14
3.1	Modelagem do coeficiente de atrito viscoso variável.....	17
4	IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES.....	20
4.1	Identificação de sistemas.....	20
4.1.1	Modelo <i>Autoregressive-Exogenous</i> (ARX).....	21
4.1.2	Modelo <i>Nonlinear Autoregressive-Exogenous</i> (NARX).....	22
4.2	Algoritmo de região de confiança.....	23
5	ESTUDOS DE CASO.....	24
5.1	Processo de nível.....	24
5.2	Coefficiente de atrito viscoso variável.....	27
5.3	Servoposicionador hidráulico.....	30
5.3.1	Modelo do atrito não linear e conhecido.....	33
5.3.2	Modelo do atrito linear.....	36
5.3.3	Modelo do atrito não linear e parcialmente conhecido.....	38
5.3.4	Modelo do atrito não linear e totalmente desconhecido.....	40
5.3.5	Parâmetros identificados.....	43
6	CONCLUSÃO.....	44
	REFERÊNCIAS.....	45



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Diagrama esquemático do servoposicionador hidráulico. . . . .	14
2	Representação da força de atrito com coeficiente de atrito viscoso variável. . . . .	18
3	Simulação dos modelos analíticos do processo de nível. . . . .	25
4	Altura do tanque para diferentes estruturas de modelo. . . . .	27
5	Forças hidráulica e de atrito. . . . .	29
6	Velocidade do atuador. . . . .	29
7	Dados de entrada e saída obtidos. . . . .	32
8	Entrada aplicada para validação dos modelos. . . . .	32
9	Trajétórias das pressões para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_1$ . . . . .	34
10	Trajétórias de velocidade para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_1$ . . . . .	35
11	Trajétórias de posição para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_1$ . . . . .	35
12	Regressão linear para estimativa do coeficiente de atrito linear. . . . .	36
13	Trajétórias das pressões para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_2$ . . . . .	37
14	Trajétórias de velocidade para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_2$ . . . . .	37
15	Trajétórias de posição para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_2$ . . . . .	38
16	Trajétórias das pressões para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_3$ . . . . .	39
17	Trajétórias de velocidade para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_3$ . . . . .	39
18	Trajétórias de posição para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_3$ . . . . .	40
19	Trajétórias das pressões para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_4$ . . . . .	41
20	Trajétórias de velocidade para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_4$ . . . . .	42
21	Trajétórias de posição para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_4$ . . . . .	42

## LISTA DE TABELAS

1	Parâmetros do processo de nível do tanque. . . . .	25
2	Parâmetros do coeficiente de atrito viscoso variável. . . . .	28
3	Parâmetros do servoposicionador. . . . .	31
4	Relação de casos considerados para o modelo de atrito. . . . .	33
5	Valores das funções custo para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_1$ . . . . .	34
6	Valores das funções custo para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_2$ . . . . .	36
7	Valores das funções custo para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_3$ . . . . .	38
8	Valores das funções custo para o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_4$ . . . . .	40
9	Valores das funções custo para os parâmetros identificados. . . . .	43
10	Parâmetros identificados para os modelos do servoposicionador. . . . .	43

## LISTA DE ABREVIATURAS

**MLP** *Multilayer Perceptron*

**LuGre** *Lund-Grenoble*

**UPCH** Unidade de Potência e Condicionamento Hidráulico

**LIT** Linear e Invariante no Tempo

**ARX** *Autoregressive-Exogenous*

**NARX** *Nonlinear Autoregressive-Exogenous*

# 1 INTRODUÇÃO

A *identificação de sistemas* consiste na obtenção de modelos matemáticos para sistemas dinâmicos através de dados experimentais. Em contraste à *modelagem*, a qual utiliza princípios físicos para descrever seu fenômeno de estudo, a identificação recorre a um conjunto de sinais de entrada e de saída do sistema em questão. Do ponto de vista da Engenharia, conhecer a relação entre as variáveis de um sistema é de extremo interesse, pois permite simular seu comportamento quando submetido a diferentes condições, sendo possível, em vários casos, impor uma resposta desejada ao mesmo.

Através da identificação, é possível contornar dificuldades inerentes ao procedimento de modelagem determinística, como o conhecimento pleno do sistema estudado e de seus parâmetros, em detrimento da realização de um ou mais ensaios experimentais no processo. Na *identificação paramétrica*, a estrutura do modelo a ser identificado é parametrizada em função de um vetor  $\theta$ , o qual pode ser estimado por um problema de otimização matemática (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989; LJUNG, 1999; AGUIRRE, 2014). É comum considerar estruturas nas quais deseja-se prever o valor de uma ou mais variáveis de saída através da estimativa de um modelo paramétrico, validado em comparação a um conjunto de dados experimentais. Quando o critério de otimização é o erro entre a saída medida e a saída estimada pelo modelo, o procedimento é classificado como *método de erro de predição* (do inglês, *prediction error method*) (LJUNG, 1999).

Outra abordagem é descrever o sistema como uma rede neural, que consiste em uma representação por meio de combinações lineares de bases de funções não lineares (NARENDRA; PARTHASARATHY, 1990). As redes neurais são classificadas em *feedforward*, para o caso no qual a saída é função apenas da entrada e *feedback*, quando o valor da saída atual é realimentada para o cálculo da saída no instante seguinte (GARDNER; DORLING, 1998). Em Narendra e Parthasarathy (1990), é descrita uma metodologia para identificação e controle de sistema dinâmicos por redes neurais, com estudos de caso envolvendo sistemas lineares e não lineares.

Neste trabalho, adota-se uma metodologia para a identificação paramétrica de modelos de tempo discreto para sistemas não lineares em simulação, baseada nos trabalhos de Eckhard e Campestrini (2016) e Borges (2017). O objeto de estudo é um servoposicionador hidráulico, devido à característica não linear intrínseca da relação entre as pressões e vazões no interior de suas câmaras, assim como à não linearidade da força de atrito. Considera-se o modelo do *coeficiente de atrito viscoso variável*, tal qual proposto em Gomes (1995). As estruturas dos modelos identificados variam conforme o grau de conhecimento considerado para os parâmetros físicos do servoposicionador e do atrito.

É importante mencionar que, no contexto deste trabalho, não será considerada a influência do ruído de medição, o que não é condizente com o real comportamento dos sistemas físicos. Em função disso, antes de qualquer aplicação em sistemas reais, uma extensão necessária para este trabalho é a validação da metodologia descrita considerando o efeito do referido ruído, sob uma abordagem de simulação de Monte Carlo.

No que diz respeito à estrutura do texto, a Seção 2 discorre sobre trabalhos e aplicações da área de identificação de sistemas não lineares, a Seção 3 compreende a modelagem do servoposicionador e da força de atrito e a Seção 4 descreve a metodologia de identificação de sistemas empregada. Conforme discorrido na Seção 5, os resultados obtidos indicam que é possível obter uma representação satisfatória, conforme o critério de otimização definido, para a evolução dos estados do sistema estudado.

## 2 ESTADO DA ARTE

A área de identificação de sistemas tem sido explorada expressivamente nas últimas décadas, a exemplo dos trabalhos de Söderström e Stoica (1989), Ljung (1999), Billings (2013) e Aguirre (2014). Em Eckhard e Campestrini (2016) e Haselein (2017), é abordada a identificação de modelos não lineares de tempo discreto para biorreatores anaeróbicos, considerando os algoritmos de otimização *Nelder-Mead* (otimização linear) e *Trust-Region-Reflective*, o qual utiliza a informação do gradiente, conforme descrito na Seção 4.2. Por sua vez, em Oliveira (2022), é explanada a identificação de um guindaste de pórtico por meio de estimadores lineares e não lineares, através de uma estrutura de modelo não linear discretizada. Tanto em Eckhard e Campestrini (2016), quanto em Haselein (2017) e Oliveira (2022), são empregados diferentes métodos de integração numérica, com o intuito de comparar os desempenhos de suas respectivas representações discretizadas frente ao modelo analítico contínuo utilizado.

No caso de redes neurais *feedforward* do tipo *Multilayer Perceptron* (MLP), o par entrada-saída de um sistema é relacionado através da combinação sucessiva (*i.e* associação em camadas) de *funções de ativação*. As referidas funções representam a estrutura do modelo neural adotado e são, geralmente, não lineares, já que uma combinação de funções lineares resulta em outra função linear. É comum o uso de funções do tipo sigmoide, tangente hiperbólica (também conhecido como sigmoide bipolar), assim como exponenciais e gaussianas (NARENDRA; PARTHASARATHY, 1990). O chamado *treinamento* das redes neurais consiste no ajuste dos coeficientes que compõem as funções de ativação, por meio de um problema de otimização. Um exemplo é o algoritmo *back-propagation*, proposto em Rumelhart, Hinton e Williams (1986), o qual minimiza o erro quadrático entre a variável de saída do sistema e de seu valor desejado utilizando o método do gradiente. Um exemplo de aplicação de redes neurais na identificação de uma mesa hidráulica é delineado em Righettini et al. (2017).

Em Borges (2017), é descrita a modelagem e a identificação de um servoposicionador hidráulico de bancada sob a abordagem de redes neurais MLP, seguida do projeto de um controlador neural adaptativo para seguimento de referências de posição. Também na área de sistemas fluido-mecânicos, é realizado o controle em cascata de um servoposicionador pneumático, tanto em Perondi (2002), quanto em Sobczyk Sobrinho (2009), incluindo a compensação de atrito com base no modelo conhecido como *Lund-Grenoble* (LuGre), formulado em Canudas de Wit et al. (1995). O modelo de atrito utilizado neste trabalho, apresentado em Gomes (1995), considera um conjunto de equações estáticas de acordo com os valores de força e velocidade no atuador. Exemplos de aplicação do coeficiente de atrito viscoso variável são encontrados em Gomes e Rosa (2003), Machado (2003) e Borges (2017).

Considera-se a identificação não linear do servoposicionador hidráulico de dupla ação assimétrico modelado na Seção 3, com um modelo não linear para a força de atrito. O procedimento consiste na aplicação de um algoritmo de otimização, descrito na Seção 4.2, com o intuito de estimar os coeficientes de um modelo paramétrico não linear que melhor representam a saída do sistema, de acordo com uma função custo, tal qual mencionado na Seção 4.1. Em linhas gerais,

busca-se estimar os referidos parâmetros a partir de estruturas de modelos discretos obtidas através da discretização do modelo analítico de tempo contínuo.

A área de modelagem de servoposicionadores hidráulicos é de interesse em aplicações que necessitam de controle preciso de posição, de modo que é desejável estudar formas de obtenção de parâmetros, especialmente levando em consideração os efeitos não lineares característicos do atrito para baixas velocidades (BORGES, 2017). Os trabalhos de Cologni, Mazzoleni e Previdi (2016), Pencelli et al. (2019) e Sakai, Obara e Chikazawa (2021), abordam a modelagem e identificação não linear de servoposicionadores hidráulicos de bancada.

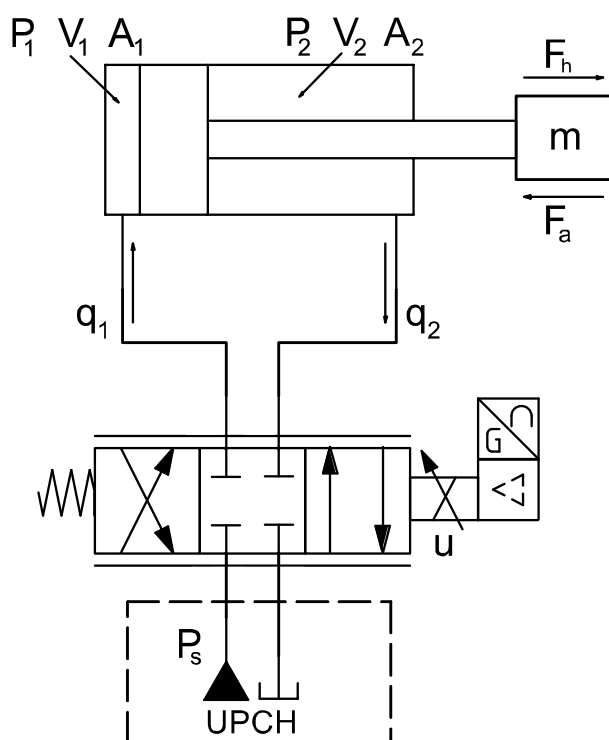
São apresentados estudos de caso no âmbito dos sistemas fluido-mecânicos, como a identificação de um processo de nível por estimadores lineares, na Seção 5.1, além da aplicação em simulação do modelo de atrito adotado, na Seção 5.2. Ainda, na Seção 5.3, é estudada a identificação de um servoposicionador hidráulico, baseado no sistema descrito em Borges (2017).

### 3 MODELAGEM DO SERVOPOSICIONADOR HIDRÁULICO

O *servoposicionador* é um sistema dinâmico que consiste no acionamento de um atuador, com o intuito de posicionar uma carga mecânica em um local desejado (SOBCZYK SOBRINHO, 2009). No sistema analisado neste trabalho, o acionamento é realizado por um cilindro hidráulico de dupla ação e assimétrico, acoplado a uma servoválvula de 3 posições e 4 vias, por sua vez acionada por um solenoide elétrico. A pressão de suprimento para o subsistema hidráulico é fornecida por uma Unidade de Potência e Condicionamento Hidráulico (UPCH). A carga a ser posicionada é conectada na extremidade da haste do cilindro, que será movimentada conforme a variação das pressões no interior de suas câmaras por meio da abertura e do fechamento da servoválvula.

A modelagem apresentada neste trabalho baseia-se no procedimento adotado em Machado (2003) e Borges (2017). A Figura 1 ilustra o diagrama hidráulico do servoposicionador com atuador de dupla ação assimétrico.

**Figura 1:** Diagrama esquemático do servoposicionador hidráulico.



Fonte: Adaptado de Borges (2017).



Na Figura 1,  $P_1$  e  $P_2$  representam as pressões no interior das câmaras do atuador hidráulico,  $V_1$  e  $V_2$  os volumes de fluido em cada uma das câmaras,  $A_1$  e  $A_2$  denotam as áreas de seção transversal, respectivamente no lado do êmbolo e da haste,  $q_1$  e  $q_2$  são as vazões volumétricas nas vias de saída da servoválvula,  $P_s$  é a pressão suprida pela UPCH,  $F_h$  e  $F_a$ , respectivamente, as forças hidráulica e de atrito e  $u$  é o sinal de entrada da servoválvula (BORGES, 2017).

Para modelar o comportamento dinâmico do servoposicionador hidráulico, consoante ao apresentado em Machado (2003) e Borges (2017), são empregadas as seguintes hipóteses simplificadoras para o servoposicionador hidráulico:

1. Todos os orifícios da válvula são iguais e simétricos;
2. A válvula e o cilindro não apresentam vazamentos internos e externos;
3. A dinâmica das tubulações existentes entre a unidade de potência hidráulica e a válvula e entre a válvula e o cilindro não influenciam na resposta dinâmica do sistema;
4. A resposta da válvula é considerada ideal (o movimento do carretel da mesma responde imediatamente às variações do sinal de entrada na válvula);
5. A pressão de suprimento é constante;
6. A temperatura do fluido hidráulico é constante;
7. A zona morta entre o carretel e o orifício de passagem é desprezível;
8. O centro hidráulico da válvula é considerado ideal;
9. A histerese da válvula é desconsiderada;
10. As perdas de carga contínuas nos dutos de conexão do servoposicionador são desconsideradas.

Uma discussão sobre as hipóteses consideradas e suas implicações é apresentada em Borges (2017). Na sequência, é introduzido o modelo do servoposicionador.

Tomando as áreas de seção transversal em cada uma das câmaras como constante, resulta que a força hidráulica aplicada no êmbolo do cilindro é dada por

$$F_h(t) = A_1 P_1(t) - A_2 P_2(t).$$

Com relação ao subsistema mecânico, tem-se que a posição da haste do servoposicionador é denotada por  $y(t)$  e, por conseguinte, sua velocidade por  $\dot{y}(t)$ . Considerando o carretel apoiado na horizontal (*i.e.*, sem contribuição da aceleração da gravidade no balanço de forças) e sem força externa aplicada diretamente na extremidade da haste, a Segunda Lei de Newton resulta em

$$m\ddot{y}(t) = A_1 P_1(t) - A_2 P_2(t) - F_a(\dot{y}(t), P_1(t), P_2(t)), \quad (1)$$

em que  $m$  simboliza a massa associada ao atuador. Na Equação (1), a força de atrito foi denotada como função da velocidade  $\dot{y}(t)$  da haste e das pressões  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$  nas câmaras do cilindro, conforme adotado no modelo do coeficiente de atrito viscoso variável, descrito na Seção 3.1.

Tal qual apresentado em Furst (2001) e Borges (2017), a constante da válvula pode ser determinada em função das quedas de pressão parciais por via, de forma que

$$\bar{K} = \frac{\sqrt{2} C_d w_p x_v^{\max}}{\sqrt{\rho}},$$

sendo que  $\bar{K}$  representa a constante da válvula para uma via genérica,  $C_d$  é o coeficiente de descarga,  $w_p$  é a largura do orifício de passagem da válvula e  $x_v^{\max}$  é o deslocamento máximo do carretel da válvula (que, por sua vez, é proporcional ao máximo valor de  $u(t)$ , denotado por  $u_{\max}$ ). Assim, as vazões  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$ , nas vias 1 e 2, serão dadas, respectivamente, por

$$q_1(t) = \bar{K}_1 g_1(u(t), P_1(t)) \frac{u(t)}{u_{\max}}, \quad (2)$$

$$q_2(t) = \bar{K}_2 g_2(u(t), P_2(t)) \frac{u(t)}{u_{\max}}, \quad (3)$$

tendo que  $g_1(u(t), P_1(t))$  e  $g_2(u(t), P_2(t))$  são funções não lineares da pressão em sua respectiva câmara e da tensão aplicada na válvula, dadas por

$$g_1(u(t), P_1(t)) \triangleq \begin{cases} \sqrt{P_s - P_1(t)}, & u(t) \geq 0, \\ \sqrt{P_1(t)}, & u(t) < 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$g_2(u(t), P_2(t)) \triangleq \begin{cases} \sqrt{P_2(t)}, & u(t) \geq 0, \\ \sqrt{P_s - P_2(t)}, & u(t) < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Por simplicidade de notação, são definidos os coeficientes auxiliares  $K_1$  e  $K_2$ , tais que

$$K_1 \triangleq \frac{\bar{K}_1}{u_{\max}}, \quad (6)$$

$$K_2 \triangleq \frac{\bar{K}_2}{u_{\max}}. \quad (7)$$

Portanto, substituindo as Equações (6) e (7) nas Equações (2) e (3), resulta que

$$q_1(t) = K_1 g_1(u(t), P_1(t)) u(t), \quad (8)$$

$$q_2(t) = K_2 g_2(u(t), P_2(t)) u(t). \quad (9)$$

Ademais, para a geometria considerada, os volumes em função da posição do atuador  $V_1(y(t))$  e  $V_2(y(t))$  são dados por

$$V_1(y(t)) = \bar{V}_1 + A_1 y(t), \quad (10)$$

$$V_2(y(t)) = \bar{V}_2 - A_2 y(t), \quad (11)$$

em que  $\bar{V}_1$  e  $\bar{V}_2$  representam os respectivos *volumes mortos* em cada uma das câmaras do cilindro.

Com base no princípio de continuidade de massa, para massa específica  $\rho$  constante, a taxa de variação da pressão  $P(t)$  em uma câmara hidráulica genérica pode ser expressa por

$$\dot{P}(t) = \frac{\beta}{V(t)} (q(t) - \dot{V}(t)), \quad (12)$$

sendo  $V(t)$  o volume da câmara,  $\beta$  o módulo de compressibilidade do fluido e  $q(t)$  a vazão volumétrica de entrada (WATTON, 2009). Logo, aplicando as Equações (8), (9), (10) e (11) na Equação (12), resulta que as equações dinâmicas das pressões  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$  são dadas, respectivamente, por

$$\dot{P}_1(t) = \frac{\beta}{\bar{V}_1 + A_1 y(t)} (K_1 g_1(u(t), P_1(t)) u(t) - A_1 \dot{y}(t)), \quad (13)$$

$$\dot{P}_2(t) = -\frac{\beta}{\bar{V}_2 - A_2 y(t)} (K_2 g_2(u(t), P_2(t)) u(t) - A_2 \dot{y}(t)). \quad (14)$$

Com base nas Equações (1), (4), (5), (13) e (14), considerando o mapeamento em um espaço de estados tal que

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ y(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix},$$

o sistema completo será descrito por

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{m} (A_1 x_3(t) - A_2 x_4(t) - F_a(x_1(t), x_3(t), x_4(t))), \quad (15)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t), \quad (16)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{\beta}{\bar{V}_1 + A_1 x_2(t)} (K_1 g_1(u(t), x_3(t))u(t) - A_1 x_1(t)), \quad (17)$$

$$\dot{x}_4(t) = -\frac{\beta}{\bar{V}_2 - A_2 x_2(t)} (K_2 g_2(u(t), x_4(t))u(t) - A_2 x_1(t)), \quad (18)$$

$$g_1(u(t), x_3(t)) \triangleq \begin{cases} \sqrt{P_s - x_3(t)}, & u(t) \geq 0, \\ \sqrt{x_3(t)}, & u(t) < 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$g_2(u(t), x_4(t)) \triangleq \begin{cases} \sqrt{x_4(t)}, & u(t) \geq 0, \\ \sqrt{P_s - x_4(t)}, & u(t) < 0. \end{cases} \quad (20)$$

O modelo em questão é não linear, de quarta ordem e de tempo contínuo. As não linearidades estão no termo do atrito da Equação (15), nos termos do volume (dependentes da posição) nas Equações (17) e (18) e nas funções  $g_1$  e  $g_2$ , as quais contêm a raiz quadrada de suas respectivas pressões, como observado nas Equações (19) e (20).

A modelagem não linear da força de atrito é apresentada a seguir, na Seção 3.1. Por outro lado, na Seção 5.3, é estudado um caso de identificação de modelos discretos para o servoposicionador, sob diferentes hipóteses a respeito do grau de conhecimento do modelo do atrito.

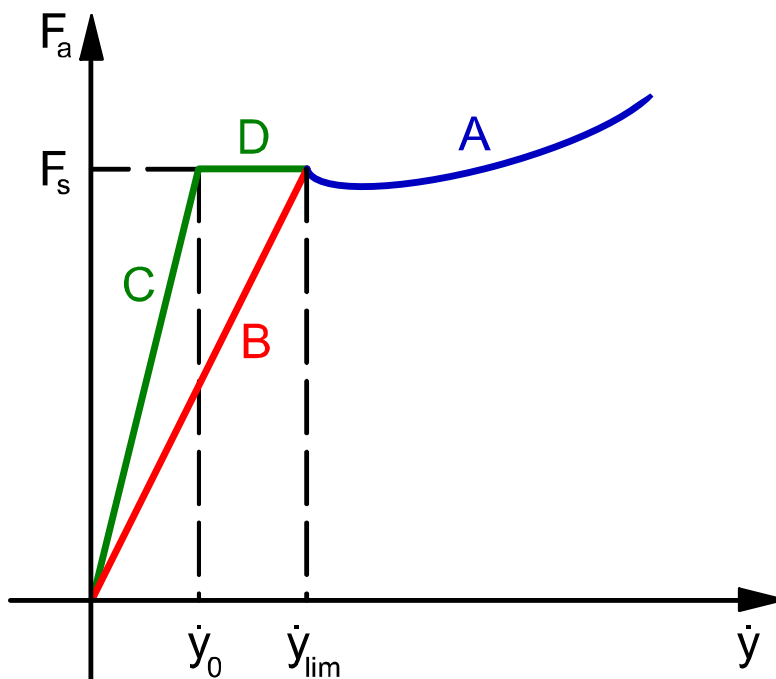
### 3.1 MODELAGEM DO COEFICIENTE DE ATRITO VISCOSO VARIÁVEL

Seguindo a descrição proposta por Gomes (1995), também apresentada em Gomes e Rosa (2003), Machado (2003) e Borges (2017), o coeficiente de atrito viscoso variável considera um mapeamento não linear do tipo

$$F_a(\dot{y}(t), F(t)) = f_v(\dot{y}(t), F(t))\dot{y}(t),$$

sendo que  $f_v$  representa um coeficiente o qual varia de acordo com a velocidade  $\dot{y}(t)$  e a força  $F(t)$  aplicada no corpo. São considerados quatro possíveis comportamentos para  $f_v$ , conforme mostra a Figura 2.

**Figura 2:** Representação da força de atrito com coeficiente de atrito viscoso variável.



Fonte: Adaptado de Machado (2003).

A região A descreve o comportamento da força de atrito para velocidades acima de  $\dot{y}_{lim}$ , independente da força  $F(t)$ . Em contrapartida, as regiões B, C e D modelam o comportamento do fenômeno *adere-desliza* (em inglês, *stick-slip*). Para velocidades inferiores a  $\dot{y}_{lim}$ , a variação de  $F(t)$  pode resultar na transição do modo *adere* para o modo *desliza* e vice-versa, causando, por conseguinte, variação súbita da força de atrito no sistema. O parâmetro  $F_s$  corresponde à força de Stribeck, enquanto  $\dot{y}_0$  equivale à menor velocidade de deslizamento possível.

A trajetória A pode ser modelada através do ajuste de uma curva polinomial, utilizando um mapa estático experimental da força de atrito em função da velocidade (MACHADO, 2003). Assim como em Machado (2003) e Borges (2017), adota-se polinômios de sexta ordem, por serem capazes de interpolar os pontos obtidos no mapa estático de forma satisfatória na região de velocidades considerada. Denotando por  $f_v^A$  o valor do coeficiente  $f_v$  para a região A, tem-se que

$$f_v^A(\dot{y}(t)) = \frac{1}{\dot{y}(t)} \left( k_6 \dot{y}(t)^6 + k_5 \dot{y}(t)^5 + k_4 \dot{y}(t)^4 + k_3 \dot{y}(t)^3 + k_2 \dot{y}(t)^2 + k_1 \dot{y}(t) + k_0 \right), \quad (21)$$

sendo os parâmetros  $k_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, 6$ , por conveniência de notação, agrupados na forma

$$K \triangleq [k_6 \quad k_5 \quad k_4 \quad k_3 \quad k_2 \quad k_1 \quad k_0]^T. \quad (22)$$

É importante ressaltar que a Equação (21) só é válida para os casos em que  $\dot{y}(t) > \dot{y}_{lim}$ , dentro do intervalo de velocidade para qual os coeficientes da Equação (22) foram calculados.

Considerando ainda a Figura 2, a trajetória B representa o modo *desliza*, enquanto as trajetórias C e D representam o modo *adere*. A velocidade limite  $\dot{y}_{lim}$  é a menor velocidade obtida experimentalmente no mapa estático. Por sua vez, a força de Stribeck  $F_s$  é calculada a

partir do coeficiente de atrito da Equação (21), considerando  $\dot{y}(t) = \dot{y}_{lim}$ , ou seja,

$$F_s \triangleq f_v^A(\dot{y}_{lim})\dot{y}_{lim}. \quad (23)$$

O coeficiente de atrito variável para a região B (modo *desliza*) será dado pela razão entre  $F_s$  e  $\dot{y}_{lim}$ , isto é,

$$f_v^B = \frac{F_s}{\dot{y}_{lim}}. \quad (24)$$

Por outro lado, no modo *adere*, o valor do coeficiente será dado, nas regiões C e D, respectivamente, por

$$f_v^C = \frac{F_s}{\dot{y}_0}, \quad (25)$$

$$f_v^D(\dot{y}(t)) = \frac{F_s}{\dot{y}(t)}. \quad (26)$$

A Equação (25) é função da velocidade de deslizamento  $\dot{y}_0$ , a qual corresponde à menor velocidade na qual a força de Stribeck é mensurável (GOMES; ROSA, 2003; MACHADO, 2003). Com relação à Equação (26), o coeficiente  $f_v^D(\dot{y}(t))$  representa uma força de atrito  $F_s$  para qualquer velocidade na faixa  $\dot{y}_0 \leq \dot{y}(t) \leq \dot{y}_{lim}$ .

A Seção 5.2 mostra um exemplo do efeito causado ao considerar o coeficiente de atrito viscoso variável.

## 4 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

### 4.1 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

A identificação de sistemas pode ser definida como a obtenção de um modelo matemático para um determinado sistema a partir de um conjunto de dados de entrada e saída (LJUNG, 1999). Tal metodologia pode ser adotada para o projeto de um sistema de controle, para algoritmos de predição, reconhecimento de padrões e, também, para a simulação de sistemas cujos parâmetros físicos são desconhecidos (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Neste trabalho, a identificação é utilizada com enfoque na simulação de sistemas não lineares, por meio da estimativa de modelos paramétricos de tempo discreto, caracterizados por um vetor  $\theta \in \mathbb{R}^n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ .

É comum que a estimativa de  $\theta$  seja obtida através da solução de um problema de otimização, em especial a partir da minimização de uma função custo  $J(\theta)$  expressa genericamente pela forma

$$J(\theta) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k, \theta))^2, \quad (27)$$

em que  $y(k)$  representa a variável de saída medida experimentalmente,  $\hat{y}(k, \theta)$  o valor da saída do modelo estimado em função do vetor  $\theta$  e  $N$  o número total de amostras coletadas. A Equação (27) equivale ao erro médio quadrático entre  $y(k)$  e a saída do modelo  $\hat{y}(k, \theta)$ . Assim, deseja-se encontrar o valor de  $\theta$  que minimiza  $J(\theta)$ , denotado por,

$$\hat{\theta} \triangleq \arg \min_{\theta} J(\theta). \quad (28)$$

A saída do modelo pode ser parametrizada linearmente em função do vetor  $\theta$ , o que equivale a atribuir  $\hat{y}(k, \theta) = \varphi(k)^T \theta$ , sendo  $\varphi(k)$  uma função dependente apenas dos dados de entrada e saída cuja estrutura varia de acordo com a classe de modelos escolhida. Nesse caso, a função  $J(\theta)$  é convexa e a Equação (28) pode ser resolvida analiticamente pelo método dos mínimos quadrados<sup>1</sup>, sendo

$$\hat{\theta} = \left[ \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi(k)^T \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k) \right]. \quad (29)$$

Apesar da existência da solução analítica da Equação (29), é preciso que a classe do modelo (definida por  $\varphi(k)$  para parametrização linear) seja capaz de descrever o comportamento do sistema físico a ser identificado por meio de uma combinação linear, possibilitando o ajuste correto dos parâmetros  $\theta$ . Além disso, os dados experimentais devem ser gerados a partir de um ou mais sinais que excitam propriamente a dinâmica do sistema, caracterizando dados ditos *informativos* (LJUNG; GLAD, 1994).

<sup>1</sup>Esse problema corresponde a uma *regressão linear*, em que  $\varphi(k)$  é denominado *vetor regressor* (LJUNG, 1999).

Para sistemas não lineares, também é possível identificar modelos parametrizados linearmente, porém sob o risco do modelo identificado ser incapaz de reproduzir a saída do sistema, ou de que o modelo seja pouco robusto frente a variações do ponto de operação. Uma alternativa é utilizar conhecimentos físicos sobre o sistema e introduzir as características não lineares no próprio modelo.

Outra abordagem é definir  $\hat{y}(k, \theta)$  como uma função não linear de  $\theta$  e resolver o problema a partir de um algoritmo de otimização. Dessa forma, existe maior flexibilidade na escolha da classe de modelos, com o ônus do aumento da complexidade computacional para resolução numérica. A Seção 4.2 introduz o método utilizado para minimização das funções custo não convexas neste trabalho. Tal metodologia pode ser aplicada na identificação de um sistema cujas equações sejam conhecidas, mas seus parâmetros desconhecidos, procedimento denominado na literatura como *identificação caixa-cinza* (LJUNG, 1999). Ainda, caso o sistema físico seja completamente desconhecido, pode-se atribuir uma estrutura genérica para  $\hat{y}(k, \theta)$ , a exemplo da composição de polinômios, senoides ou sigmóides, o que equivale à *identificação caixa-preta* (LJUNG, 1999).

A Seção 4.1.1 apresenta a formulação do problema de identificação para uma classe de modelos linear, enquanto a Seção 4.1.2 aborda uma possível extensão para sistemas não lineares, mas com uma função custo  $J(\theta)$  linear nos parâmetros.

#### 4.1.1 Modelo Autoregressive-Exogenous (ARX)

O modelo *Autoregressive-Exogenous* (ARX) equivale a um sistema Linear e Invariante no Tempo (LIT) de tempo discreto, dado por

$$y(k) + \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{n_b} b_i u(k-n_k-i) + e(k), \quad (30)$$

sendo  $y(k)$  sua saída,  $u(k)$  sua entrada,  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $n_a, n_b, n_k \in \mathbb{Z}$  são coeficientes que definem a estrutura do modelo e  $e(k)$  corresponde a um termo de ruído branco gaussiano, equivalente ao erro de estimativa (LJUNG, 1999; BILLINGS, 2013). É importante ressaltar que o modelo ARX da Equação (30) é linear nos parâmetros. Portanto, consoante ao apresentado na Seção 4.1, a saída do modelo pode ser escrita da forma

$$\hat{y}(k, \theta) = \varphi(k)^T \theta, \quad (31)$$

em que

$$\varphi(k) \triangleq \begin{bmatrix} -y(k-1) \\ -y(k-2) \\ \vdots \\ -y(k-n_a) \\ u(k-n_k) \\ u(k-n_k-1) \\ u(k-n_k-2) \\ \vdots \\ u(k-n_k-n_b) \end{bmatrix}, \quad \theta \triangleq \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_a} \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Basta, então, estipular as constantes  $n_a, n_b$  e  $n_k$  conforme a ordem desejada para o modelo, coletar um conjunto de dados informativos e calcular o vetor  $\hat{\theta}$  por meio da Equação (29).

### 4.1.2 Modelo Nonlinear Autoregressive-Exogenous (NARX)

No caso do modelo *Nonlinear Autoregressive-Exogenous* (NARX), a saída pode ser descrita como uma função genérica  $f$  das entradas e saídas passadas (BILLINGS, 2013), isto é,

$$y(k) = f(y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n_a), u(k-n_k), u(k-n_k-1), \dots, u(k-n_k-n_b)) + e(k).$$

No contexto deste trabalho, considera-se uma estrutura não linear que possa ser separada na forma

$$y(k) + \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i f_i(y(k-i)) = \sum_{i=0}^{n_b} b_i u(k-n_k-i) + \sum_{i=0}^{n_d} d_i g_i(u(k-n_k-i)) + e(k), \quad (33)$$

em que  $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ ,  $n_c, n_d \in \mathbb{Z}$  são constantes que definem a estrutura não linear do modelo e os termos  $f_i(y(k-i)), g_i(u(k-n_k-i)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções não lineares da saída e da entrada, respectivamente. Nesse caso, ainda é possível utilizar uma parametrização linear, desde que o regressor  $\varphi(k)$  também contenha as funções não lineares dos sinais de entrada e saída anteriores, o que equivale a atribuir

$$\varphi(k) \triangleq \begin{bmatrix} -y(k-1) \\ -y(k-2) \\ \vdots \\ -y(k-n_a) \\ u(k-n_k) \\ u(k-n_k-1) \\ u(k-n_k-2) \\ \vdots \\ u(k-n_k-n_b) \\ -f_1(y(k-1)) \\ -f_2(y(k-2)) \\ \vdots \\ -f_{n_c}(y(k-n_c)) \\ g_0(u(k-n_k)) \\ g_1(u(k-n_k-1)) \\ g_2(u(k-n_k-2)) \\ \vdots \\ g_{n_d}(u(k-n_k-n_d)) \end{bmatrix}, \quad \theta \triangleq \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_a} \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_b} \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n_c} \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n_d} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Dessa forma, ainda é possível empregar a solução do problema de mínimos quadrados da Equação (29), desde que os tipos de não linearidade estipuladas para do modelo sejam incorporadas a  $\varphi(k)$ . É importante ressaltar que quando a parametrização não é linear, são utilizados métodos de otimização matemática para encontrar o vetor de parâmetros que minimiza a função custo, a exemplo do método descrito na Seção 4.2.

Na Seção 5.1 é apresentado um exemplo comparativo entre as estruturas ARX e NARX considerando a identificação de um processo de nível de um tanque.



## 4.2 ALGORITMO DE REGIÃO DE CONFIANÇA

Para resolução dos problemas de otimização não convexos, pode ser utilizado um algoritmo de região de confiança baseado no método de Newton (COLEMAN; LI, 1996). O algoritmo, do inglês conhecido como *Trust-Region-Reflective*, utiliza a informação do gradiente da função a ser minimizada e é introduzido a seguir.

Considerando um conjunto de variáveis  $x \in \mathbb{R}^n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , assim como uma função não linear suave  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , é formulado o problema de otimização

$$\min_x f(x). \quad (35)$$

Na metodologia proposta em Coleman e Li (1996), partindo de um valor inicial  $x_0$ , um incremento  $\Delta x_i \triangleq x_{i+1} - x_i$  é aproximado por um subproblema de otimização dado por

$$\min_{\Delta x_i} \left( \Psi_i(\Delta x_i) \triangleq \nabla f(x_i)^T \Delta x_i + \frac{1}{2} \Delta x_i^T H_i \Delta x_i : \|D_i \Delta x_i\| \leq \Delta_i \right), \quad (36)$$

em que  $\nabla f(x_i)$  representa o gradiente de  $f(x_i)$ ,  $H_i$  é uma aproximação simétrica da matriz Hessiana  $\nabla^2 f(x_i)$ ,  $D_i$  é uma matriz de ganho (ou matriz de escala) e  $\Delta_i$  é o tamanho da região de confiança (COLEMAN; LI, 1996). Na Equação (36), o subíndice  $i$  indica o valor da variável para a  $i$ -ésima iteração, tomando um limite máximo de  $i_{\max}$  iterações. Ainda, define-se que  $\|\cdot\|$  representa a norma euclidiana. O algoritmo proposto em Coleman e Li (1996) é descrito na sequência.

*Método de região de confiança sem restrições*

1. Definir  $\mu$  e  $\eta$ , tal que  $0 < \mu < \eta < 1$ .
2. Para  $i = 0, 1, \dots, i_{\max}$ :
  - 2.1. Calcular  $f(x_i)$  e  $\Psi_i(\Delta x_i)$ .
  - 2.2. Definir uma solução aproximada para  $\Delta x_i$  por meio do subproblema da Equação (36).
  - 2.3. Calcular  $\rho_i \triangleq (f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i)) / \Psi_i(\Delta x_i)$ .
  - 2.4. Se  $\rho_i > \mu$ , atribuir  $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$ . Caso contrário, atribuir  $x_{i+1} = x_i$ .
  - 2.5. Atualizar a matriz  $D_i$  e o tamanho da região de confiança  $\Delta_i$ .

Por sua vez, a atualização da região de confiança é realizada conforme os passos a seguir.

*Atualização do tamanho da região de confiança*

1. Definir  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , tal que  $0 < \gamma_1 < 1 < \gamma_2$ .
  - 1.1. Se  $\rho_i \leq \mu$ , atribuir  $\Delta_{i+1} \in (0, \gamma_1 \Delta_i]$ .
  - 1.2. Se  $\rho_i \in (\mu, \eta)$ , atribuir  $\Delta_{i+1} \in [\gamma_1 \Delta_i, \Delta_i]$ .
  - 1.3. Se  $\rho_i \geq \eta$ , atribuir  $\Delta_{i+1} \in [\Delta_i, \gamma_2 \Delta_i]$ .

Neste trabalho, é utilizada a função `lsqnonlin`, presente na ferramenta computacional MATLAB, a qual implementa o algoritmo de região de confiança para minimização de um conjunto de funções quadráticas  $\|f(x)\|^2$ .

## 5 ESTUDOS DE CASO

A seguir, são apresentados três estudos de caso. O primeiro, na Seção 5.1, é relativo à identificação de modelos ARX e NARX para um processo de nível, com o objetivo de comparar as estruturas de modelo linear e não linear para a representação do sistema, o qual é não linear. O segundo exemplo, descrito na Seção 5.2, consiste em uma demonstração do comportamento do coeficiente de atrito viscoso variável em um atuador hidráulico genérico, conforme a descrição da Seção 3.1. O terceiro caso, apresentado na Seção 5.3, compreende a identificação de modelos não lineares para o servoposicionador hidráulico equacionado na Seção 3, assumindo diferentes níveis de conhecimento quanto à força de atrito.

### 5.1 PROCESSO DE NÍVEL

Considera-se o modelo contínuo de um processo de nível de um tanque, com vazão de saída através de uma restrição fixa, dado por

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{A} \left( u(t) - \mu \sqrt{y(t)} \right), \quad (37)$$

em que  $y(t)$  representa a altura do tanque,  $u(t)$  a vazão de entrada aplicada,  $A$  a área de seção transversal do tanque (assumida constante) e  $\mu$  uma constante que relaciona a vazão de saída e o nível do tanque, considerando escoamento turbulento (ROFFEL; BETLEM, 2007).

O modelo da Equação (37) pode ser linearizado no entorno de um ponto de operação genérico  $(u_0, y_0)$ , resultando em

$$\Delta \dot{y}(t) = \frac{1}{A} \left( \Delta u(t) - 0,5\mu \sqrt{y_0} \Delta y(t) \right), \quad (38)$$

considerando, agora, as variáveis de desvio  $\Delta y(t) \triangleq y(t) - y_0$  e  $\Delta u(t) \triangleq u(t) - u_0$ . O sistema linearizado da Equação (38) permite descrever o comportamento do sistema original da Equação (37) no entorno do ponto de operação estipulado, sendo sua função de transferência dada por

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{1}{As + 0,5\mu \sqrt{y_0}}. \quad (39)$$

O parâmetro  $\mu$  pode ser calculado ao igualar a Equação (37) a zero e substituir os valores do ponto de equilíbrio, resultando em

$$\mu = \frac{u_0}{\sqrt{y_0}}. \quad (40)$$

Além disso, considera-se o modelo discretizado através do algoritmo de Euler, tal que

$$y(k+1) = y(k) + \frac{\Delta T}{A} \left( u(k) - \mu \sqrt{y(k)} \right). \quad (41)$$

Os sistemas das Equações (37), (39) e (41) foram simulados considerando os parâmetros da Tabela 1.

**Tabela 1:** Parâmetros do processo de nível do tanque.

Parâmetro	Valor
$u_0$ [m <sup>3</sup> /s]	$1,5 \cdot 10^{-3}$
$y_0$ [m]	0,5
$A$ [m <sup>2</sup> ]	0,07
$\mu$ [m <sup>2,5</sup> /s]	$2,1213 \cdot 10^{-3}$
$\Delta T$ [s]	0,1

Fonte: Adaptado de Roffel e Betlem (2007).

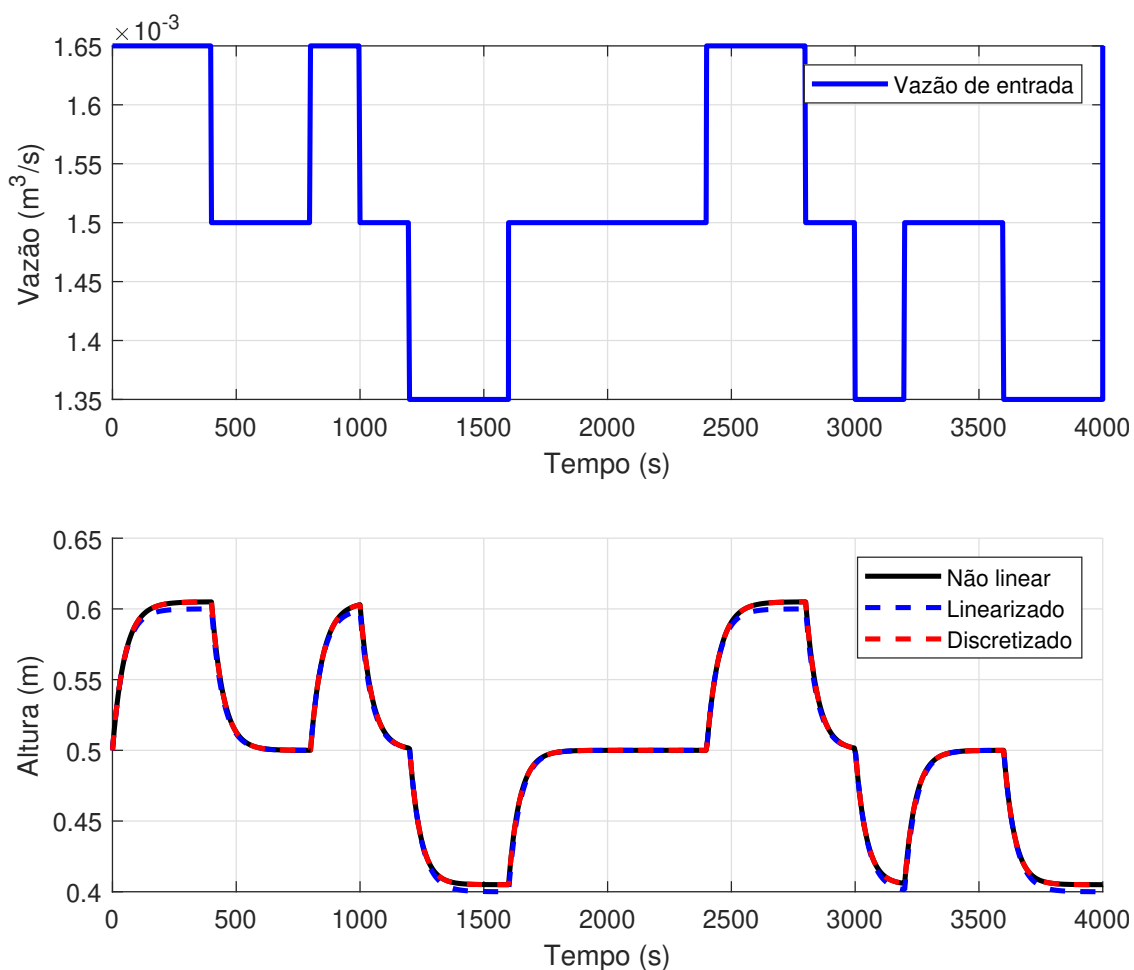
O sinal de entrada aplicado consiste em uma soma de ondas quadradas a partir do ponto de operação ( $u_0, y_0$ ). Mais especificamente,

$$u(t) = u_0 + \Delta u(t),$$

$$\Delta u(t) = -7,5 \cdot 10^{-5} (S(\pi t/400) + S(\pi t/1000)),$$

definindo que o operador  $S(2\pi t/T)$  representa uma onda quadrada de período  $T$ . O comportamento obtido pode ser visto na Figura 3.

**Figura 3:** Simulação dos modelos analíticos do processo de nível.



Fonte: O autor.

Verifica-se, na Figura 3, que ambos os modelos linearizado e discretizado representam o sistema não linear com significativa aproximação para a faixa de entrada considerada. No entanto, é importante notar que o modelo linearizado apresenta erro em regime permanente conforme a altura do sistema se distancia do ponto de operação estipulado.

O par entrada-saída produzido com o sistema não linear da Equação (37) foi utilizado como conjunto de dados para a identificação de dois modelos. O primeiro corresponde ao modelo ARX, tal qual definido na Seção 4.1.1, com  $n_a = n_b = n_k = 1$ , ou seja,

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_0 u(k-1). \quad (42)$$

O vetor de parâmetros a ser identificado é dado por

$$\theta_{\text{ARX}} \triangleq [a_1 \quad b_0]^T. \quad (43)$$

De forma semelhante, o segundo caso corresponde ao modelo NARX, conforme definição da Seção 4.1.2, assumindo o conhecimento de que a não linearidade do sistema equivale à raiz quadrada de sua saída no instante de tempo anterior, isto é,

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_0 u(k-1) + c_1 \sqrt{y(k-1)}, \quad (44)$$

o que configura  $n_a = n_b = n_c = n_k = 1$ ,  $n_d = 0$  e  $f_1(y(k-1)) = \sqrt{y(k-1)}$ . Por sua vez, o vetor de parâmetros do modelo NARX é

$$\theta_{\text{NARX}} \triangleq [a_1 \quad b_0 \quad c_1]^T. \quad (45)$$

O conhecimento do modelo discretizado da Equação (41) permite inferir que o modelo NARX da Equação (44) pode representar o sistema de nível, desde que

$$a_1 = 1, \quad b_0 = \frac{\Delta T}{A} = 1,4286, \quad c_1 = -\mu b_0 = -3,0304 \cdot 10^{-3}. \quad (46)$$

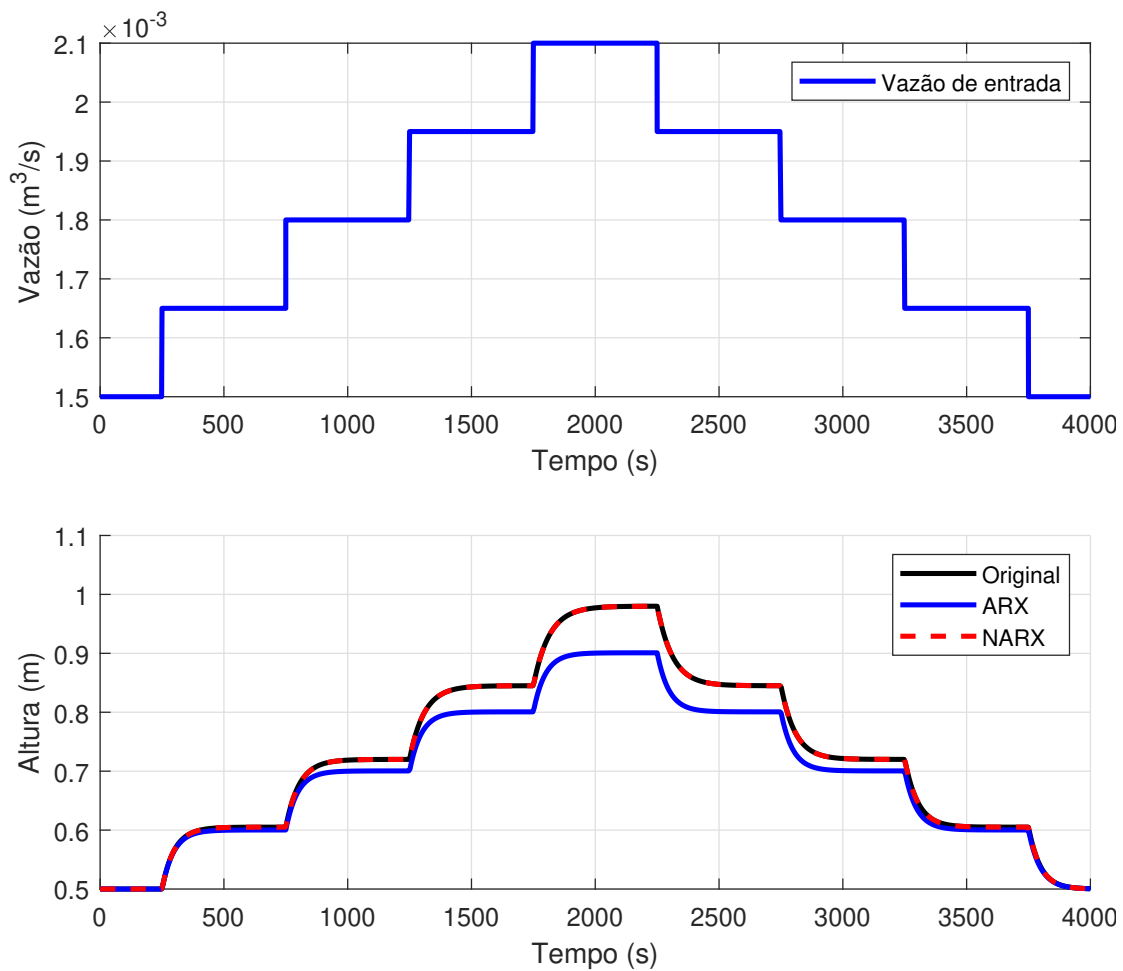
A função custo considerada para a otimização é a mesma apresentada na Equação (27). Em vista disso, é importante ressaltar que em ambas as estruturas de modelo, é possível parametrizar a saída linearmente com respeito a  $\theta$ , de forma que  $\hat{y}(k, \theta) = \varphi(k)^T \theta$ , conforme as definições da Seção 4.1. Dessa maneira, os parâmetros obtidos pelo estimador de mínimos quadrados para os casos ARX e NARX foram, respectivamente

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\text{ARX}} &= [0,9979 \quad 1,4030]^T, \\ \hat{\theta}_{\text{NARX}} &= [1,0000 \quad 1,4286 \quad -3,0304 \cdot 10^{-3}]^T. \end{aligned}$$

Percebe-se que  $\hat{\theta}_{\text{NARX}}$  representa exatamente os coeficientes da Equação (46), enquanto  $\hat{\theta}_{\text{ARX}}$  apresenta valores de  $a_1$  e  $b_0$  próximos de seus equivalentes no sistema original, com erros absolutos de  $2,099 \cdot 10^{-3}$  e  $2,5618 \cdot 10^{-2}$ , respectivamente.

A Figura 4 ilustra as saídas obtidas para ambos os modelos com a aplicação de uma sequência de degraus de vazão em suas entradas.

**Figura 4:** Altura do tanque para diferentes estruturas de modelo.



Fonte: O autor.

Percebe-se, na Figura 4, que o modelo NARX foi capaz de representar o sistema original. Por outro lado, apesar de apresentar um comportamento adequado para os instantes iniciais da simulação, o modelo ARX demonstrou maior sensibilidade frente às variações do ponto de operação, causadas pelos sucessivos degraus aplicados na entrada, resultando em aumento progressivo do erro para o ganho estático conforme o aumento da altura do tanque.

Os custos de identificação para cada um dos modelos são dados por

$$J(\hat{\theta}_{\text{ARX}}) = 1,3173 \cdot 10^{-3},$$

$$J(\hat{\theta}_{\text{NARX}}) = 3,2208 \cdot 10^{-10},$$

possibilitando concluir que o modelo NARX, de fato, apresentou melhor descrição do sistema de nível frente ao desempenho do modelo ARX.

## 5.2 COEFICIENTE DE ATRITO VISCOSO VARIÁVEL

Para demonstração do modelo do coeficiente de atrito viscoso variável formulado na Seção 3.1, seguindo a metodologia apresentada em Machado (2003), adota-se um sistema

posição-velocidade com  $x(t) \triangleq [\dot{y}(t) \quad y(t)]^T$  e dinâmica descrita por

$$\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{1}{m} [F_h(t) - F_a(x_1(t), F_h(t))], \quad (47)$$

$$y(t) = \dot{x}_2(t) = x_1(t). \quad (48)$$

Conforme constatado pela Equação (1), a qual considera o equacionamento do subsistema mecânico do servoposicionador, as Equações (47) e (48) podem representar um atuador hidráulico, sendo  $F_h(t)$  a força hidráulica causada pela diferença de pressões em suas câmaras,  $m$  a massa do atuador e  $F_a(x_1(t), F_h(t)) = f_v(x_1(t), F_h(t))x_1(t)$  a força de atrito. Considera-se o modelo de coeficiente de atrito viscoso variável para  $f_v$ , descrito na Seção 3.1.

Como o atrito possui comportamento distinto para velocidades positivas e negativas, é necessário definir dois conjuntos de valores para  $K$ ,  $F_s$ ,  $\dot{y}_{lim}$  e  $\dot{y}_0$  para a representação da Seção 3.1. Em vista disso, convencionou-se que  $a^+$  denota o valor de um parâmetro  $a$  no intervalo  $\dot{y}(t) \geq 0$  e que  $a^-$  indica o valor do mesmo parâmetro para  $\dot{y}(t) < 0$ . A tabela a seguir relaciona os valores adotados para os parâmetros do coeficiente de atrito viscoso variável, retirados do modelo experimental ensaiado em Machado (2003).

**Tabela 2:** Parâmetros do coeficiente de atrito viscoso variável.

Parâmetro	Valor
$K^+$ [N/(s/m) <sup>1</sup> ]	[643,72 -3800,91 8871,12 -10352,36 6749,22 -2087,79 440,21] <sup>T</sup>
$F_s^+$ [N]	404,72
$\dot{y}_{lim}^+$ [m/s]	0,0180
$\dot{y}_0^+$ [m/s]	0,0090
$K^-$ [N/(s/m) <sup>1</sup> ]	[416,04 1042,30 -717,93 -4413,65 -5153,07 -2029,02 -372,78] <sup>T</sup>
$F_s^-$ [N]	-287,45
$\dot{y}_{lim}^-$ [m/s]	-0,0475
$\dot{y}_0^-$ [m/s]	-0,0095

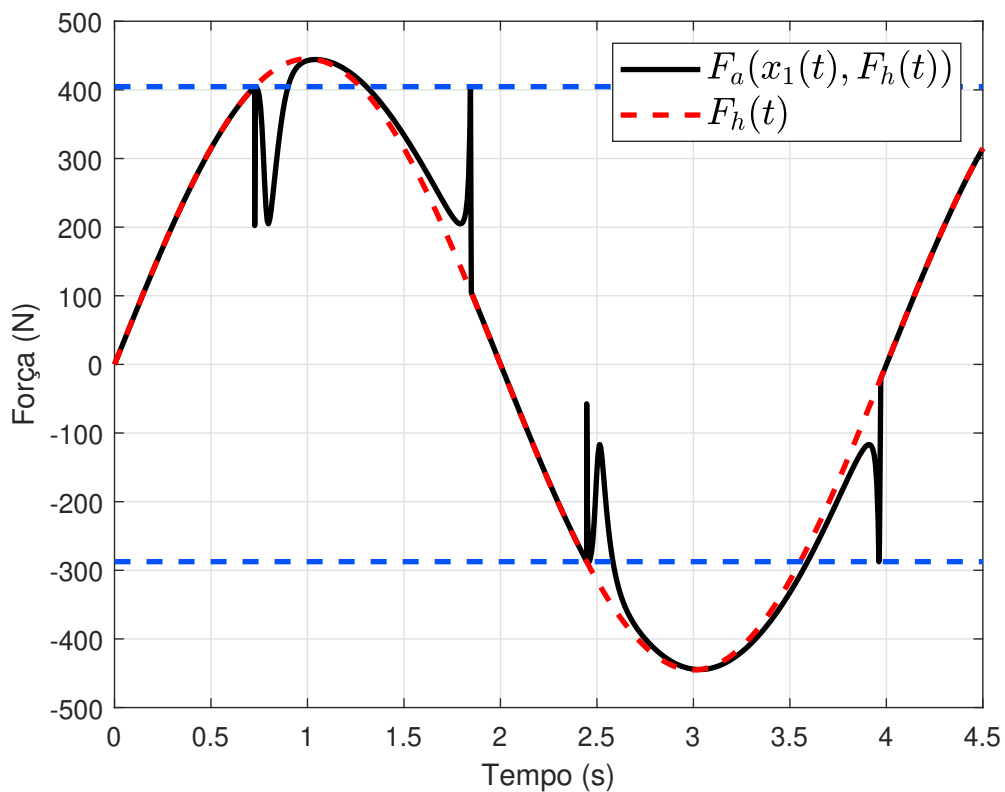
Fonte: Adaptado de Machado (2003).

A fim de visualizar o comportamento desse sistema sob o efeito do coeficiente de atrito viscoso variável, foi aplicada uma força hidráulica senoidal  $F_h(t)$  com amplitude 10% maior do que o limite positivo  $F_s^+$  e período de 4 segundos, ou seja,  $F_h(t) = 1,1F_s^+ \sin(0,5\pi t)$ . A Figura 5 ilustra a força de atrito  $F_a(x_1(t), F_h(t))$  conforme a variação de  $F_h(t)$  (com os limites  $F_s^+$  e  $F_s^-$  destacados em azul tracejado), enquanto a Figura 6 mostra a velocidade  $\dot{y}(t)$  do atuador em função do tempo.

Percebe-se na Figura 5 que a trajetória da força de atrito coincide com o sinal de força hidráulica até o instante no qual o valor da força aplicada supera o limite  $F_s^+$  do atrito. Isso resulta em uma aceleração positiva a qual causa aumento da velocidade do corpo (ilustrada pela Figura 6). Nesse instante, o efeito do atrito comuta do modo *adere* para o modo *desliza*, causando uma variação abrupta do valor da força de atrito. O mesmo efeito é observado para o limite  $F_s^-$ , porém levando em consideração os respectivos parâmetros do atrito para a faixa negativa de velocidades.

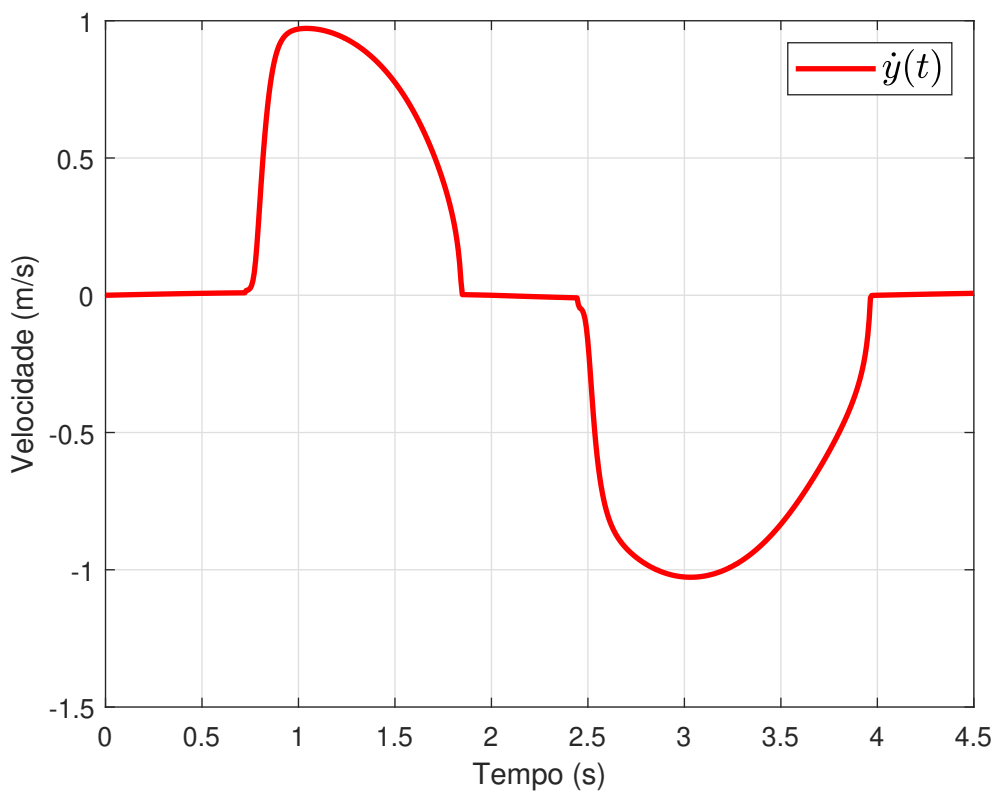
Ademais, na Figura 6, é possível constatar os efeitos do coeficiente de atrito viscoso variável na velocidade do atuador, sendo que os pontos nos quais há mudança do modo de operação do atrito ocorrem na mesma janela de tempo em que o corpo aproxima-se ou distancia-se da velocidade nula.

**Figura 5:** Forças hidráulica e de atrito.



Fonte: Adaptado de Machado (2003).

**Figura 6:** Velocidade do atuador.



Fonte: Adaptado de Machado (2003).

### 5.3 SERVOPOSICIONADOR HIDRÁULICO

Com o intuito de realizar a identificação de um modelo de tempo discreto para o servoposicionador apresentado na Seção 3, o modelo de tempo contínuo composto pelas Equações (15), (16), (17), (18), (19) (20), (21), (24), (25) e (26) foi discretizado utilizando o método de Euler, de modo que para um estado genérico  $x_i(t)$ , o mapeamento seja dado por

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \Delta T \dot{x}_i(k).$$

Assim, a estrutura do modelo discretizado resulta em

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \frac{\Delta T}{m} (A_1 x_3(k) - A_2 x_4(k) - F_a(x_1(k), x_3(k), x_4(k))), \quad (49)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta T x_1(k), \quad (50)$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta T \frac{\beta}{\bar{V}_1 + A_1 x_2(k)} (K_1 g_1(u(k), x_3(k)) u(k) - A_1 x_1(k)), \quad (51)$$

$$x_4(k+1) = x_4(k) - \Delta T \frac{\beta}{\bar{V}_2 - A_2 x_2(k)} (K_2 g_2(u(k), x_4(k)) u(k) - A_2 x_1(k)), \quad (52)$$

$$g_1(u(k), x_3(k)) \triangleq \begin{cases} \sqrt{P_s - x_3(k)}, & u(k) \geq 0, \\ \sqrt{x_3(k)}, & u(k) < 0, \end{cases} \quad (53)$$

$$g_2(u(k), x_4(k)) \triangleq \begin{cases} \sqrt{x_4(k)}, & u(k) \geq 0, \\ \sqrt{P_s - x_4(k)}, & u(k) < 0, \end{cases} \quad (54)$$

$$F_a(x_1(k), x_3(k), x_4(k)) = f_v^i(x_1(k), x_3(k), x_4(k)) x_1(k), \quad (55)$$

$$f_v^A(x_1(k)) = \frac{1}{x_1(k)} \sum_{i=0}^6 k_i x_1(k)^i, \quad (56)$$

$$f_v^B = \frac{F_s}{\dot{y}_{lim}}, \quad (57)$$

$$f_v^C = \frac{F_s}{\dot{y}_0}, \quad (58)$$

$$f_v^D(x_1(k)) = \frac{F_s}{x_1(k)}. \quad (59)$$

Para as simulações, foi adotada uma condição inicial que equivale a um ponto de equilíbrio do sistema, dada por

$$x(0) = [0 \text{ m} \quad 0,1 \text{ m/s} \quad 0,8448 \text{ MPa} \quad 1,7502 \text{ MPa}].$$

O passo de integração empregado foi  $\Delta T = 1 \cdot 10^{-6}$  s. A Tabela 3 relaciona os parâmetros considerados para o servoposicionador. Para o atrito, foi utilizado o modelo descrito na Seção 3.1, com os parâmetros da Tabela 2.



**Tabela 3:** Parâmetros do servoposicionador.

Parâmetro	Valor
$A_1$ [m <sup>2</sup> ]	$4,910 \cdot 10^{-4}$
$A_2$ [m <sup>2</sup> ]	$2,370 \cdot 10^{-4}$
$\bar{V}_1$ [m <sup>3</sup> ]	$12,446 \cdot 10^{-5}$
$\bar{V}_2$ [m <sup>3</sup> ]	$9,906 \cdot 10^{-5}$
$K_1$ [m/sV√Pa]	$21,369 \cdot 10^{-9}$
$K_2$ [m/sV√Pa]	$21,369 \cdot 10^{-9}$
$\beta$ [N/m <sup>2</sup> ]	$1,000 \cdot 10^9$
$P_s$ [MPa]	5,000
$m$ [kg]	14,540

Fonte: Adaptada de Borges (2017).

Assumindo que a pressão de suprimento  $P_s$  e a massa  $m$  do atuador são conhecidos, os demais parâmetros do sistema foram identificados por meio da função custo da Equação (27), isto é, pela minimização do erro médio quadrático de posição. Todos os modelos consideram uma estimativa inicial para os parâmetros 30% maiores que seus valores reais.

O sinal de entrada aplicado para a geração dos dados foi

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 1 + (u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + u_4(t)), & t \geq t_0, \end{cases}$$

$$u_1(t) = S(2\pi(t - t_0)),$$

$$u_2(t) = S(1, 6\pi(t - t_0)),$$

$$u_3(t) = S(1, 3\pi(t - t_0)),$$

$$u_4(t) = S(1, 1\pi(t - t_0)),$$

sendo  $0 \leq t \leq 0,6$  s,  $t_0 = 0,025$  s e ressaltando que  $S(2\pi t/T)$  representa uma onda quadrada de período  $T$ .

O sinal aplicado para a validação dos modelos também foi uma composição de ondas quadradas, porém com amplitudes e períodos distintos. Mais especificamente,

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 2 + 0,5(u_5(t) + u_6(t) + u_7(t) + u_8(t)), & t \geq t_0, \end{cases}$$

$$u_5(t) = S(13, 34\pi(t - t_0)),$$

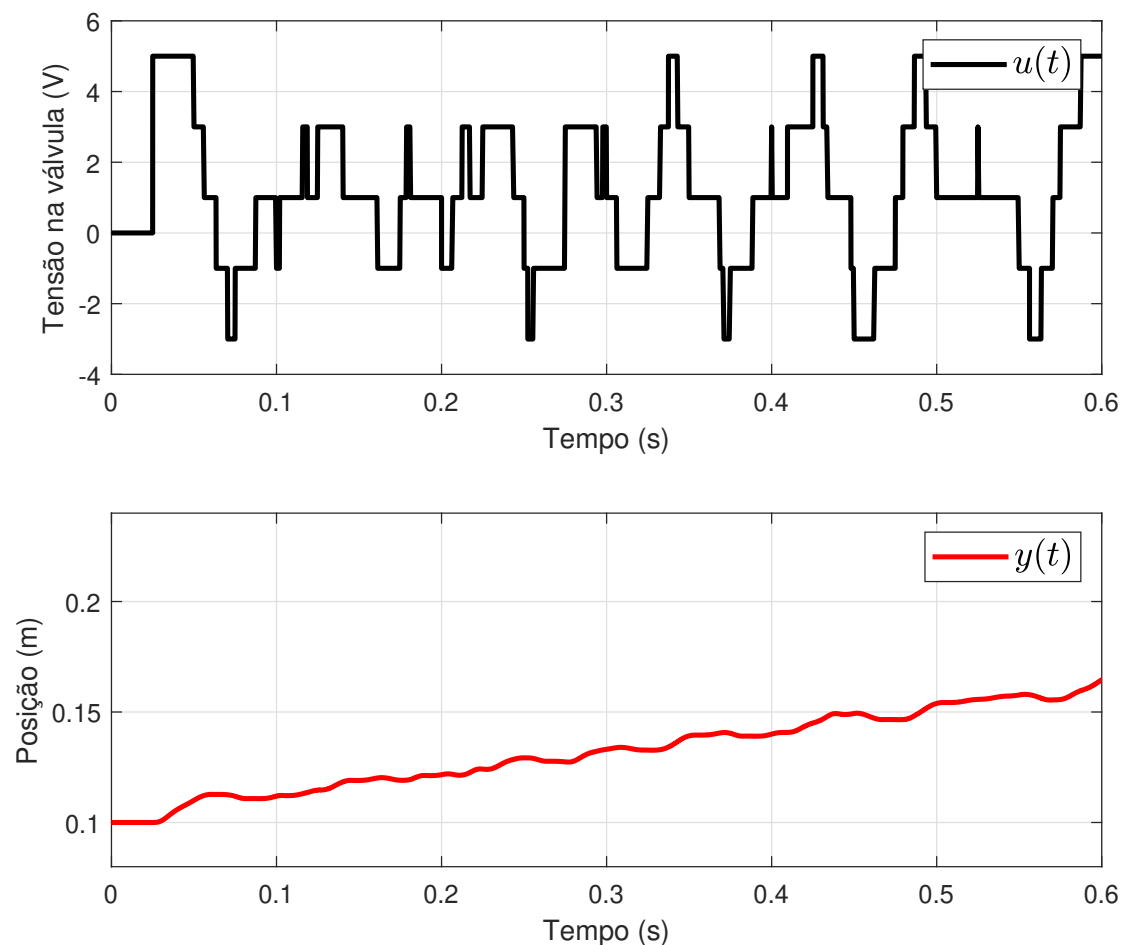
$$u_6(t) = S(8, 67\pi(t - t_0)),$$

$$u_7(t) = S(10, 67\pi(t - t_0)),$$

$$u_8(t) = S(7, 33\pi(t - t_0)).$$

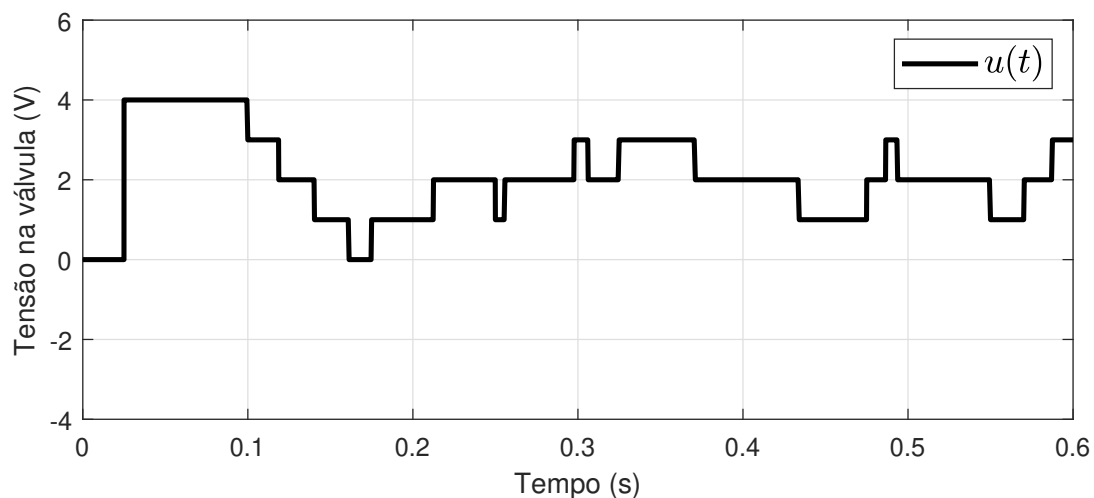
A Figura 7 ilustra o conjunto de dados entrada-saída utilizados na identificação dos modelos, enquanto a Figura 8 mostra a entrada aplicada para as validações.

**Figura 7:** Dados de entrada e saída obtidos.



Fonte: O autor.

**Figura 8:** Entrada aplicada para validação dos modelos.



Fonte: O autor.

A escolha da combinação linear de ondas quadradas para o sinal de entrada aplicado na geração dos dados permite captar a resposta de posição do sistema considerando diferentes pontos de operação. Por outro lado, a aplicação de uma entrada diferente para validação permite avaliar

as respostas obtidas frente a um conjunto de condições de operação distinto do experimento de coleta de dados.

Foram identificados quatro modelos não lineares de tempo discreto, nas Seções 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3 e 5.3.4, considerando diferentes níveis de conhecimento com relação ao modelo de atrito, conforme resumido na Tabela 4. A Tabela 10, apresentada na Seção 5.3.5, relaciona os valores obtidos para os parâmetros de cada modelo.

**Tabela 4:** *Relação de casos considerados para o modelo de atrito.*

Vetor de parâmetros	Seção	Descrição
$\theta_1$	5.3.1	Modelo do atrito não linear e conhecido
$\theta_2$	5.3.2	Modelo do atrito linear e conhecido
$\theta_3$	5.3.3	Modelo do atrito não linear e parcialmente conhecido
$\theta_4$	5.3.4	Modelo do atrito não linear e desconhecido

Fonte: O autor.

O caso de  $\theta_1$  assume conhecimento dos parâmetros do modelo de atrito, que podem ser obtidos a partir de um mapa estático experimental, ensaiado para diferentes condições de força e velocidade (MACHADO, 2003). É importante ressaltar que a obtenção dos parâmetros que representam a modelagem do fenômeno *adere-desliza* é limitada pela menor velocidade considerada no mapa estático, sendo comum estimar os referidos parâmetros tomando percentuais da velocidade limite (GOMES; ROSA, 2003; MACHADO, 2003; BORGES, 2017).

Com relação a  $\theta_2$ , é considerada uma força de atrito linear com respeito à velocidade, com um coeficiente obtido por meio de uma regressão linear. Consequentemente, a classe desse modelo será incapaz de apresentar uma resposta idêntica ao sistema original, devido à aproximação para o comportamento de atrito. Em contrapartida, existe uma melhora computacional de simulação para o modelo de atrito linear em contraste ao modelo não linear, bem como a possibilidade de aplicação de diferentes métodos para o cálculo do coeficiente de atrito.

Para  $\theta_3$ , assume-se que são conhecidos apenas os parâmetros da curva polinomial da região acima da velocidade limite da força de atrito, de modo que os parâmetros do *adere-desliza* sejam identificados junto aos parâmetros do servoposicionador. Dessa forma, é necessário apenas o ajuste da curva polinomial para o procedimento de identificação.

Por sua vez, o vetor  $\theta_4$  incorpora todos os parâmetros do modelo do atrito, além dos parâmetros do servoposicionador, eliminando a necessidade dos ensaios para obtenção do mapa estático.

Com o intuito de avaliar o desempenho com respeito a todas as variáveis de estado do servoposicionador, além do valor do custo de posição  $J(\theta)$ , também são calculados os erros médios quadráticos  $J_y(\theta)$  para a velocidade e  $J_{P_1}(\theta)$  e  $J_{P_2}(\theta)$  para as pressões, de modo que para um sinal  $f(k)$  e um vetor de parâmetros  $\theta$ , define-se que

$$J_f(\theta) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (f(k) - \hat{f}(k, \theta))^2.$$

### 5.3.1 Modelo do atrito não linear e conhecido

Este caso considera que todos os parâmetros do coeficiente de atrito viscoso variável são conhecidos e dados pelos valores da Tabela 2. Assim, a identificação é voltada apenas

para os parâmetros desconhecidos do servoposicionador, sendo o vetor de parâmetros a serem identificados definido por

$$\theta_1 \triangleq [\beta \quad K_1 \quad K_2 \quad \bar{V}_1 \quad \bar{V}_2 \quad A_1 \quad A_2]^T. \quad (60)$$

As trajetórias das variáveis de estado para o vetor  $\hat{\theta}_1$  estimado são vistas nas Figuras 9, 10 e 11, sendo possível observar um comportamento bastante aproximado do modelo com relação à saída do sistema.

A Tabela 5 relaciona os valores obtidos para os custos de posição, velocidade e pressões do modelo obtido. É importante mencionar que a ordem de grandeza de cada custo deve ser avaliada de acordo com a magnitude da respectiva variável de estado avaliada em cada caso. Em outras palavras,  $J(\hat{\theta}_1)$  não deve ser comparado diretamente a, por exemplo,  $J_{P_1}(\hat{\theta}_1)$ , pois o primeiro refere-se à posição (da ordem de  $1 \cdot 10^{-1}$  m), enquanto o segundo expressa o erro médio quadrático de uma pressão (da ordem de  $1 \cdot 10^6$  Pa).

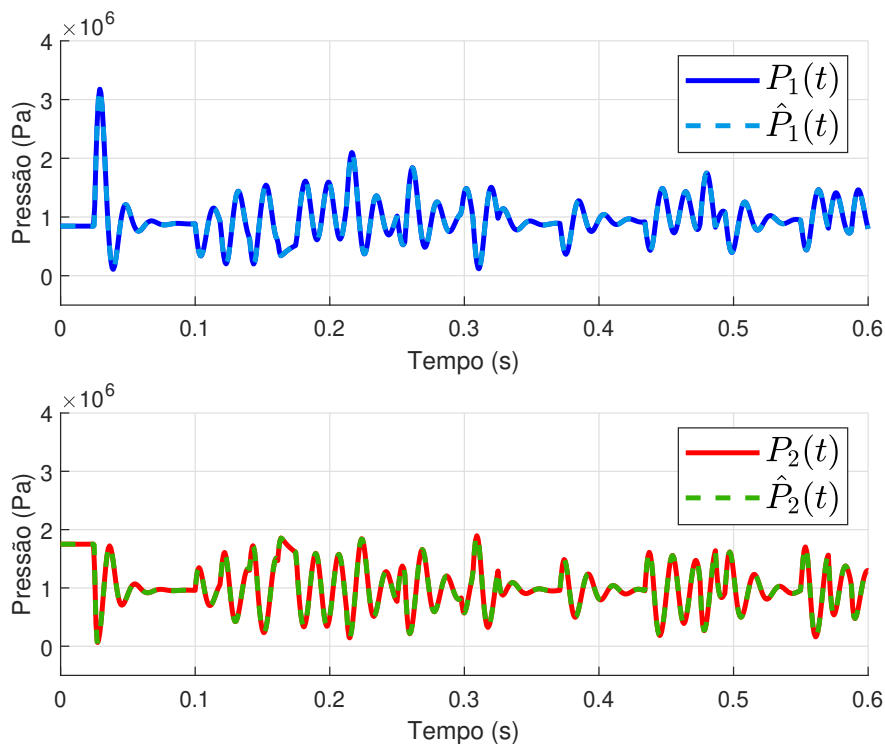
O procedimento a ser efetivamente adotado é a comparação de um mesmo custo para diferentes modelos, ou então com algum valor considerado aceitável conforme os critérios de desempenho estipulados para o modelo.

**Tabela 5:** Valores das funções custo para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_1$ .

Função	Valor
$J(\hat{\theta}_1)$ [m <sup>2</sup> ]	$1,1593 \cdot 10^{-15}$
$J_{\dot{y}}(\hat{\theta}_1)$ [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	$4,1724 \cdot 10^{-13}$
$J_{P_1}(\hat{\theta}_1)$ [Pa <sup>2</sup> ]	$2,3121 \cdot 10^2$
$J_{P_2}(\hat{\theta}_1)$ [Pa <sup>2</sup> ]	$1,6997 \cdot 10^3$

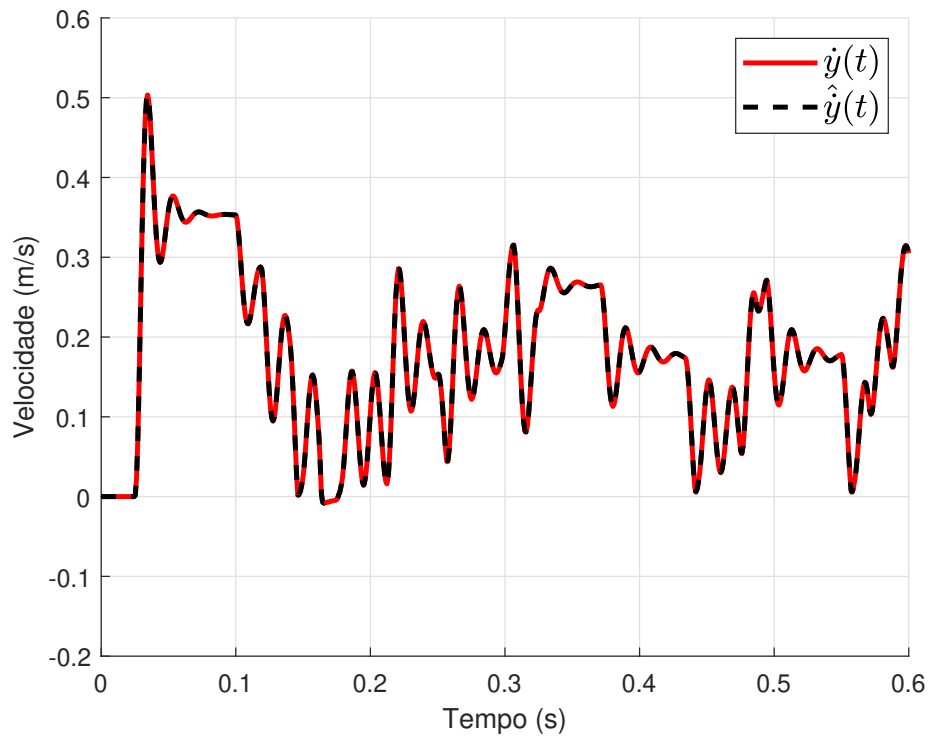
Fonte: O autor.

**Figura 9:** Trajetórias das pressões para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_1$ .



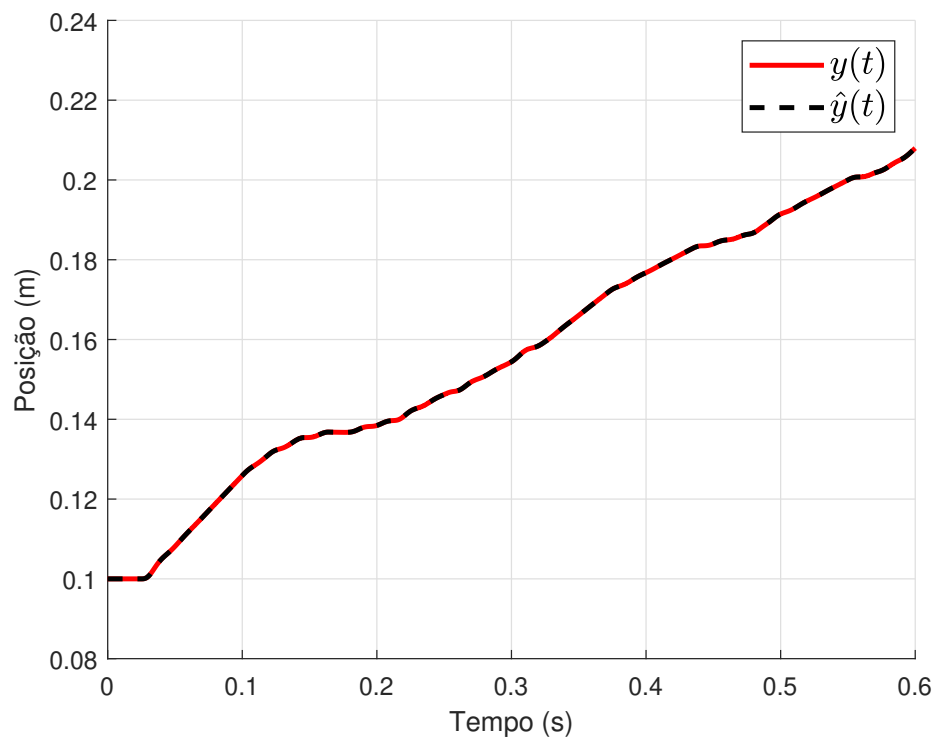
Fonte: O autor.

**Figura 10:** Trajetórias de velocidade para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_1$ .



Fonte: O autor.

**Figura 11:** Trajetórias de posição para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_1$ .

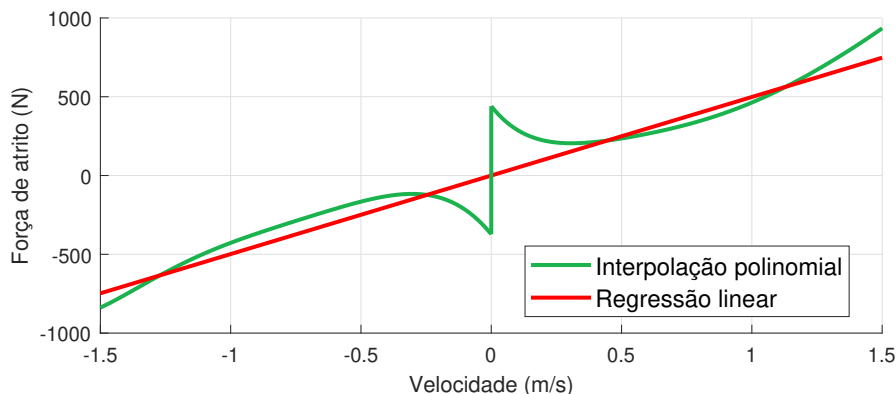


Fonte: O autor.

### 5.3.2 Modelo do atrito linear

Desta vez, é considerada uma aproximação linear para a força de atrito, de modo que  $F_a(x_1(t)) = Zx_1(t)$ , com um coeficiente  $Z = 498,4292 \text{ N s/m}$ , estimado através da regressão linear sobre a função da Equação (21), conforme ilustrado na Figura 12.

**Figura 12:** Regressão linear para estimativa do coeficiente de atrito linear.



Fonte: O autor.

O vetor de parâmetros que representa este modelo é dado por

$$\theta_2 \triangleq [\beta \quad K_1 \quad K_2 \quad \bar{V}_1 \quad \bar{V}_2 \quad A_1 \quad A_2]^T. \quad (61)$$

As Figuras 13, 14 e 15 mostram, respectivamente as trajetórias de pressão, velocidade e posição obtidas para a aproximação linear do atrito. Percebe-se que a simplificação do modelo do atrito foi capaz de produzir uma resposta de posição semelhante à do sistema original, porém apresentou erro significativo para as demais variáveis de estado. Dito isso, é importante reforçar que a função custo  $J(\theta)$  minimizada considera apenas o erro de posição.

A Tabela 10 apresenta os coeficientes identificados para  $\hat{\theta}_2$ . Apesar de um bom ajuste da curva de posição, verifica-se uma disparidade significativa entre alguns dos parâmetros identificados frente a seu respectivo valor original. Mais especificamente, os volumes  $\bar{V}_1$  e  $\bar{V}_2$  e o módulo de compressibilidade  $\beta$  assumiram valores negativos em  $\hat{\theta}_2$ , o que não possui sentido físico. A Tabela 6 relaciona os custos obtidos para  $\hat{\theta}_2$ , sendo notável a piora em comparação à Tabela 5. Ainda assim, como visto na Figura 15, foi obtido um desempenho de posição considerado aceitável.

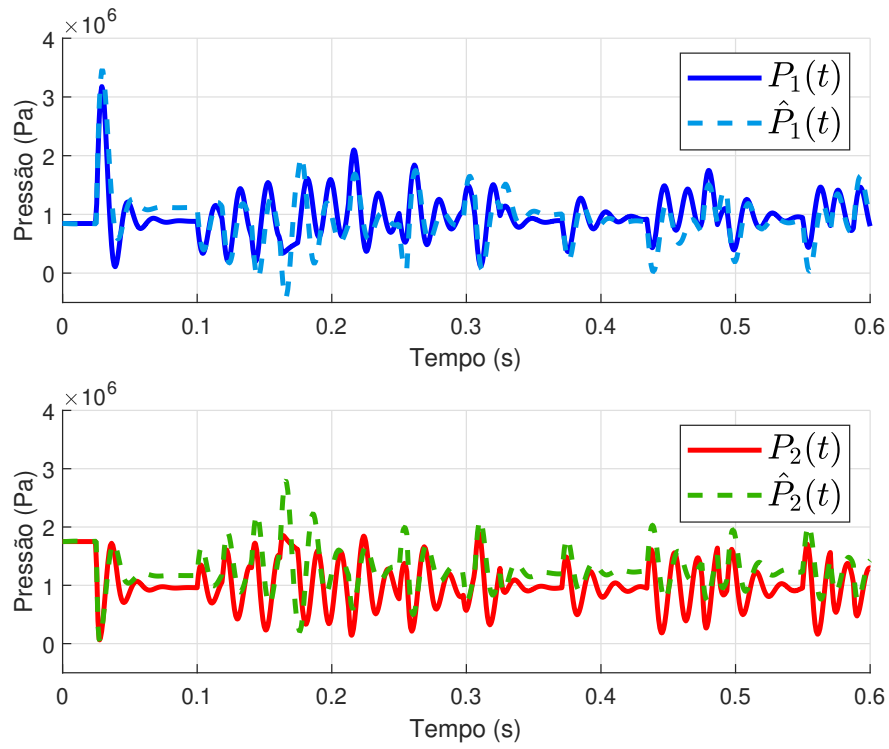
**Tabela 6:** Valores das funções custo para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_2$ .

Função	Valor
$J(\hat{\theta}_2)$ [m <sup>2</sup> ]	$1,7835 \cdot 10^{-7}$
$J_{\dot{y}}(\hat{\theta}_2)$ [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	$7,7552 \cdot 10^{-4}$
$J_{P_1}(\hat{\theta}_2)$ [Pa <sup>2</sup> ]	$8,1086 \cdot 10^{10}$
$J_{P_2}(\hat{\theta}_2)$ [Pa <sup>2</sup> ]	$1,4897 \cdot 10^{11}$

Fonte: O autor.

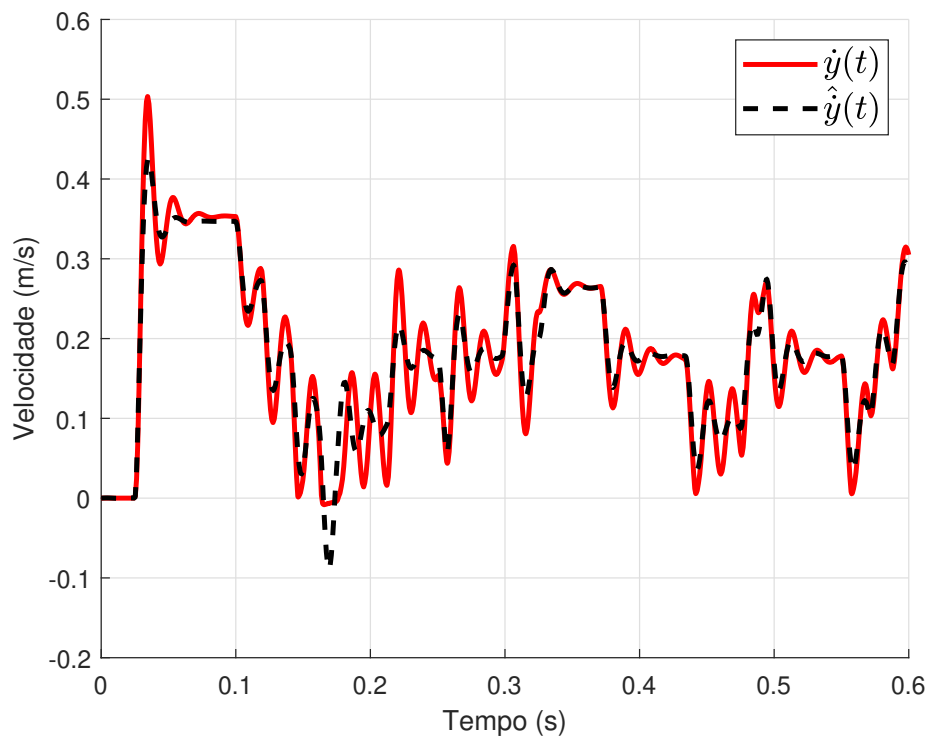
Também chama-se a atenção para o fato de que, neste caso, independente dos valores estimados para os parâmetros, a estrutura de modelo adotada nunca será capaz de reproduzir o comportamento do servoposicionador, pois a função  $\hat{y}(k, \theta)$  implementada utiliza uma aproximação linear para o coeficiente de atrito. Em outras palavras, não há combinação de parâmetros  $\theta$  que permita que o modelo identificado apresente a exata resposta do sistema original.

**Figura 13:** Trajetórias das pressões para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_2$ .



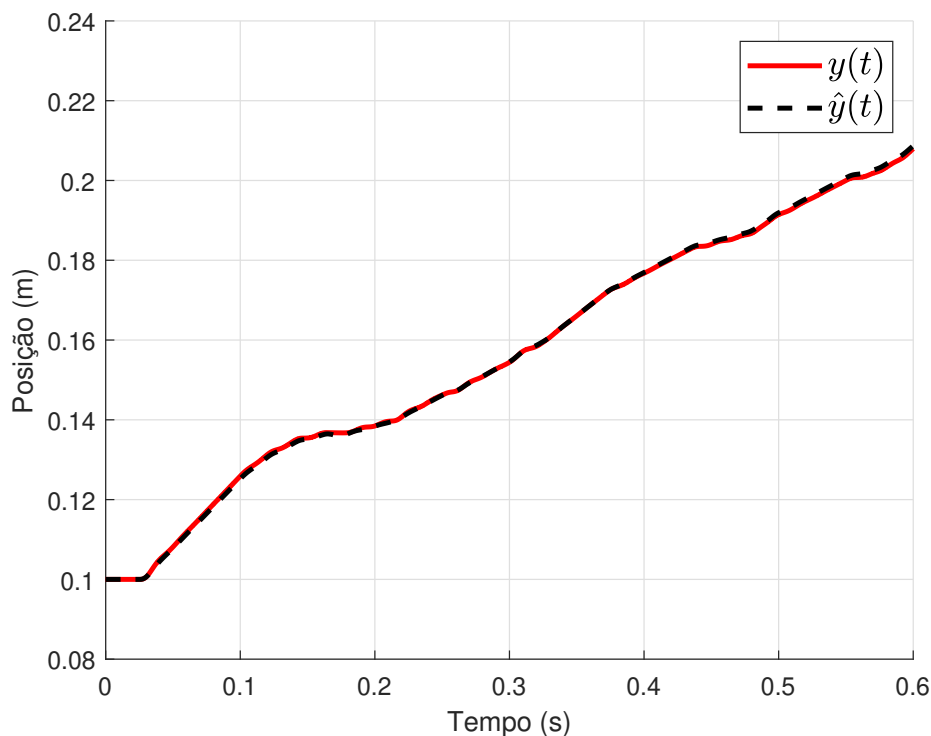
Fonte: O autor.

**Figura 14:** Trajetórias de velocidade para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_2$ .



Fonte: O autor.

**Figura 15:** Trajetórias de posição para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_2$ .



Fonte: O autor.

### 5.3.3 Modelo do atrito não linear e parcialmente conhecido

Agora, é utilizado o modelo do atrito não linear, porém com os coeficientes da Equação (21) conhecidos, de modo que os parâmetros  $F_s$ ,  $\dot{y}_0$  e  $\dot{y}_{lim}$ , relacionados ao fenômeno *adere-desliza*, sejam identificados em conjunto aos parâmetros do servoposicionador considerados nos modelos anteriores. Logo, o vetor  $\theta_3$  é definido como

$$\theta_3 \triangleq [\beta \quad K_1 \quad K_2 \quad \bar{V}_1 \quad \bar{V}_2 \quad A_1 \quad A_2 \quad F_s^+ \quad \dot{y}_0^+ \quad \dot{y}_{lim}^+ \quad F_s^- \quad \dot{y}_0^- \quad \dot{y}_{lim}^-]^T. \quad (62)$$

Conforme ilustram as Figuras 16, 17 e 18, as respostas obtidas para as pressões, a velocidade e a posição, respectivamente, representam o servoposicionador de forma considerada satisfatória. Os custos obtidos para  $\hat{\theta}_3$  são relacionados pela Tabela 7, na qual percebe-se melhor resposta com relação a  $\hat{\theta}_2$  e pior com relação a  $\hat{\theta}_1$ . Tal resultado está de acordo com o esperado, já que  $\theta_1$  considera o modelo de atrito não linear totalmente conhecido, enquanto  $\theta_2$  utiliza uma aproximação linear.

**Tabela 7:** Valores das funções custo para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_3$ .

Função	Valor
$J(\hat{\theta}_3)$ [m <sup>2</sup> ]	$6,8834 \cdot 10^{-9}$
$J_{\dot{y}}(\hat{\theta}_3)$ [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	$6,8731 \cdot 10^{-5}$
$J_{P_1}(\hat{\theta}_3)$ [Pa <sup>2</sup> ]	$4,7900 \cdot 10^9$
$J_{P_2}(\hat{\theta}_3)$ [Pa <sup>2</sup> ]	$7,1872 \cdot 10^9$

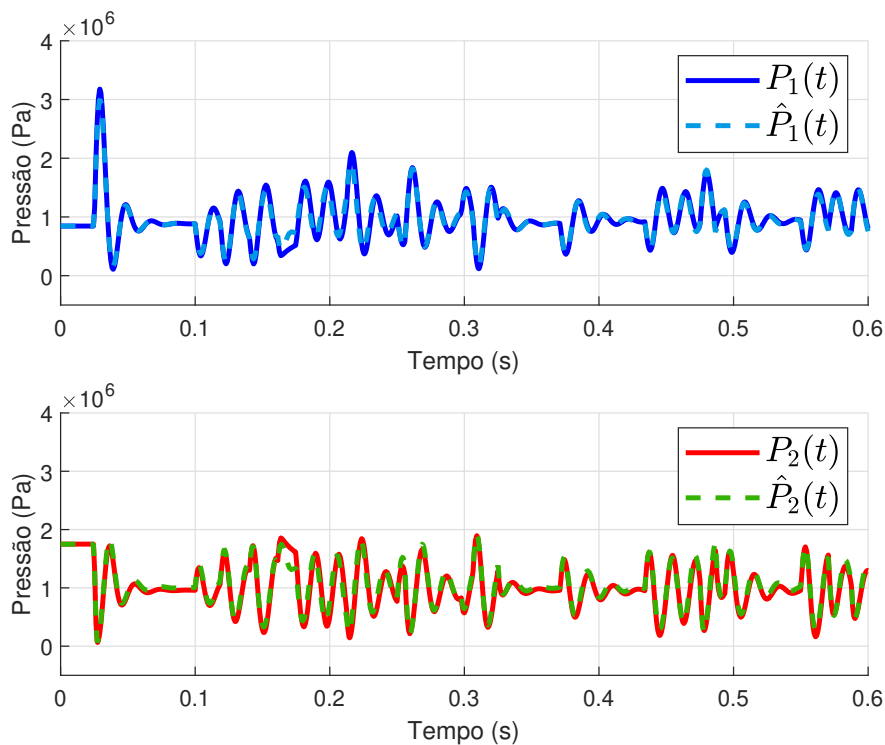
Fonte: O autor.

Analisando a estimativa  $\hat{\theta}_3$ , apresentada na Tabela 10 da Seção 5.3.5, constata-se, novamente, valores coerentes para os parâmetros do servoposicionador. Entretanto, alguns dos



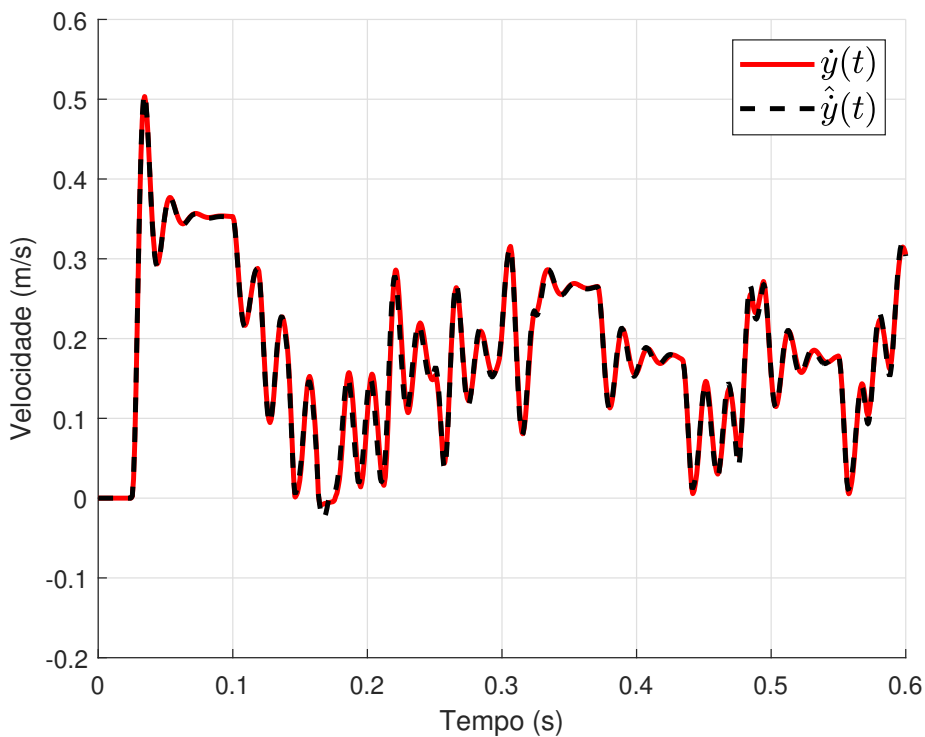
parâmetros do atrito apresentaram erro absoluto de uma a duas ordens de grandeza com relação ao sistema original. Mesmo assim, as trajetórias vistas nas Figura 16, 17 e 18 indicam que o modelo representa o servoposicionador de maneira considerada adequada nas condições abordadas.

**Figura 16:** Trajetórias das pressões para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_3$ .



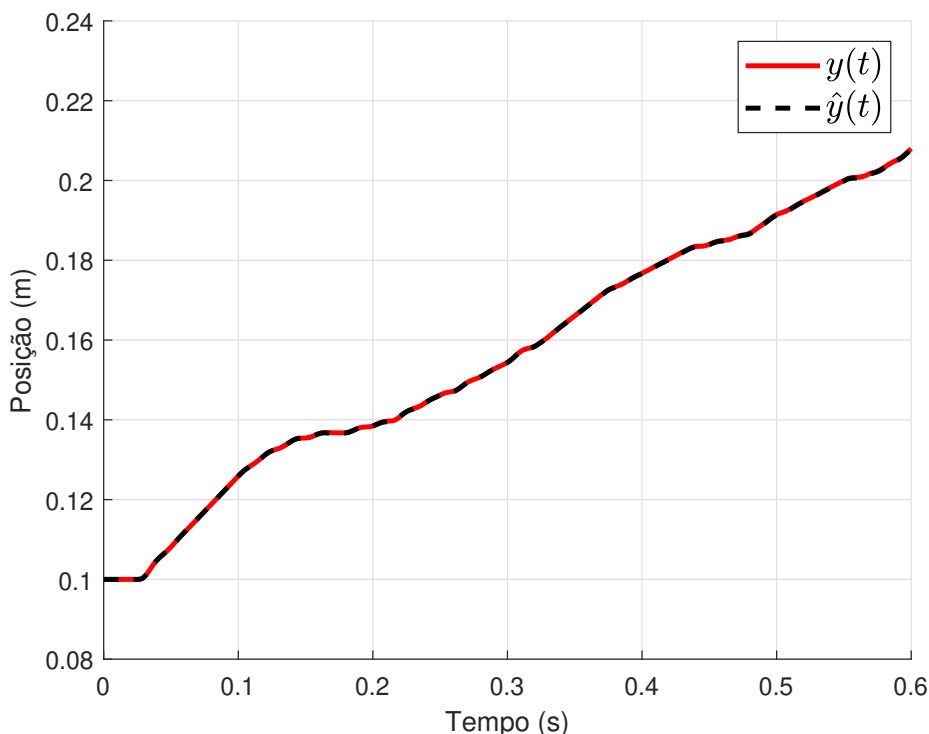
Fonte: O autor.

**Figura 17:** Trajetórias de velocidade para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_3$ .



Fonte: O autor.

**Figura 18:** Trajetórias de posição para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_3$ .



Fonte: O autor.

### 5.3.4 Modelo do atrito não linear e totalmente desconhecido

Como último caso, considera-se que o atrito é não linear e seus parâmetros são completamente desconhecidos. Dessa forma, tanto  $F_s$ ,  $\dot{y}_0$  e  $\dot{y}_{lim}$ , quanto o conjunto de coeficientes  $K$  da função polinomial da Equação (21) são identificados em conjunto aos demais parâmetros do sistema. Especificamente, o vetor  $\theta_4$  é dado por

$$\theta_4 \triangleq [\beta \quad K_1 \quad K_2 \quad \bar{V}_1 \quad \bar{V}_2 \quad A_1 \quad A_2 \quad F_s^+ \quad \dot{y}_0^+ \quad \dot{y}_{lim}^+ \quad F_s^- \quad \dot{y}_0^- \quad \dot{y}_{lim}^- \quad K^+ \quad K^-]^T. \quad (63)$$

Analisando as trajetórias das Figuras 19, 20 e 21, constata-se uma boa descrição do comportamento do servoposicionador hidráulico frente à entrada de validação aplicada. Entretanto, nos gráficos das pressões e da velocidade, verifica-se que o modelo, não foi capaz de replicar a do sistema original em alguns instantes de tempo.

A Tabela 8 apresenta os valores de custo obtidos para o modelo em questão. O valor do custo de posição obtido para  $\hat{\theta}_4$  foi  $J(\hat{\theta}_4) = 1,5362 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$ , o que indica um desempenho próximo ao de  $\hat{\theta}_3$ , com  $J(\hat{\theta}_3) = 6,8834 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$ , como descrito na Seção 5.3.3. Além disso, foram obtidos  $J_{\dot{y}}(\hat{\theta}_4)$  e  $J_{P_2}(\hat{\theta}_4)$  com mesmas ordens de grandeza com relação a  $J_{\dot{y}}(\hat{\theta}_3)$  e  $J_{P_2}(\hat{\theta}_3)$ , respectivamente, enquanto  $J_{P_1}(\hat{\theta}_4)$  possui uma ordem de grandeza a mais do que  $J_{P_1}(\hat{\theta}_3)$ .

**Tabela 8:** Valores das funções custo para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_4$ .

Função	Valor
$J(\hat{\theta}_4)$ [m <sup>2</sup> ]	$1,5362 \cdot 10^{-8}$
$J_{\dot{y}}(\hat{\theta}_4)$ [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	$4,8315 \cdot 10^{-5}$
$J_{P_1}(\hat{\theta}_4)$ [Pa <sup>2</sup> ]	$2,0413 \cdot 10^{10}$
$J_{P_2}(\hat{\theta}_4)$ [Pa <sup>2</sup> ]	$3,7698 \cdot 10^9$

Fonte: O autor.

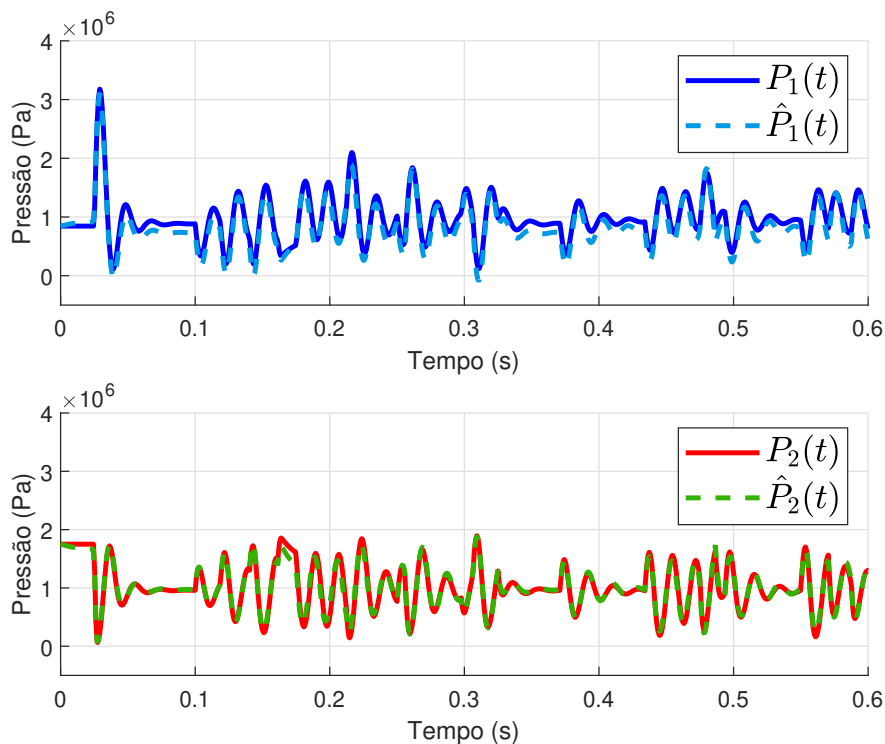
Conclui-se que, apesar de ter resultado em um custo de posição em torno de dez vezes maior com relação ao caso no qual o atrito era parcialmente conhecido, a incorporação dos coeficientes polinomiais  $K^+$  e  $K^-$  no modelo é uma alternativa viável para a identificação do servoposicionador, especialmente ao considerar que essa escolha elimina a necessidade de obtenção do mapa estático da força de atrito em função da velocidade.

No que diz respeito aos parâmetros identificados, conforme a relação da Tabela 10 da Seção 5.3.5, percebe-se que a incorporação dos parâmetros da função polinomial do atrito resultou em estimativas, em geral, mais distantes de seus respectivos valores reais, quando comparado aos equivalentes no modelo com o atrito parcialmente conhecido. Por sua vez, os valores encontrados para os coeficientes polinomiais não condizem com os parâmetros do atrito considerado, mas de outro ajuste polinomial com um comportamento similar para a força de atrito. Isso é corroborado pelo fato de que, mesmo para coeficientes distintos, o modelo obtido foi capaz de descrever o servoposicionador hidráulico com precisão considerada aceitável.

Analisando os valores dos custos de posição  $J(\theta)$  obtidos para cada modelo, é verdadeiro que  $J(\hat{\theta}_1) < J(\hat{\theta}_3) < J(\hat{\theta}_4) < J(\hat{\theta}_2)$ , de modo que, em todos os casos, a utilização do modelo não linear para o atrito demonstrou melhor desempenho de posição com relação à aproximação linear. Contudo, tal resultado não invalida o fato de que a resposta de posição apresentada pelo modelo com atrito linearizado, apesar de resultar em maior custo, apresenta um comportamento que pode ser considerado aceitável de acordo com a situação na qual o modelo é aplicado.

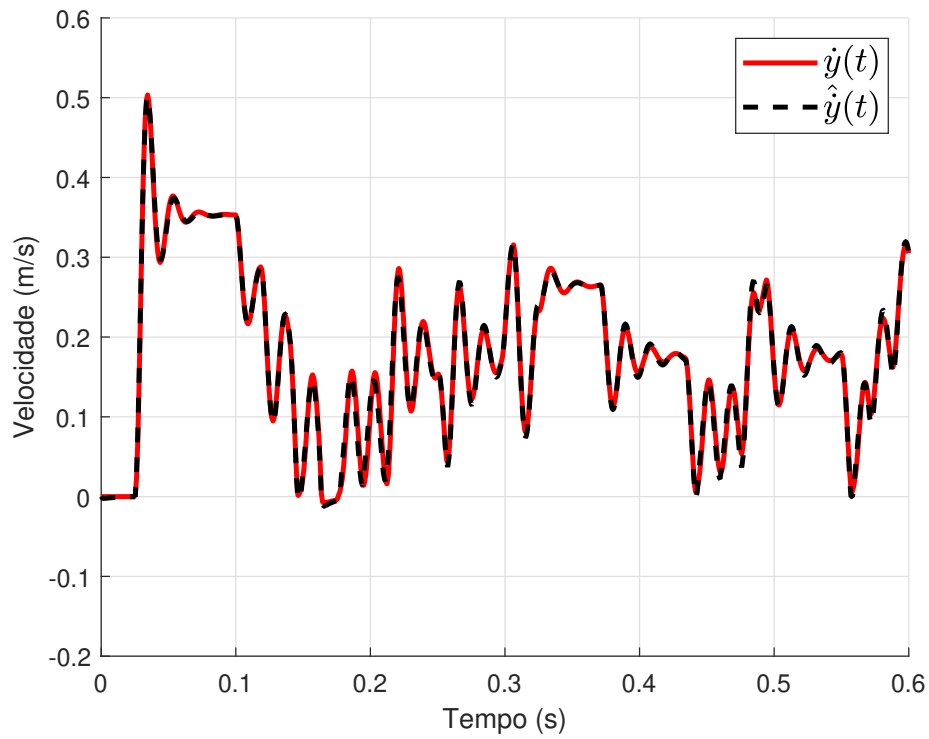
Em linhas gerais, a necessidade da escolha de uma estrutura de modelo mais ou menos complexa depende dos requisitos a serem atingidos. Também é relevante ressaltar que todos os modelos identificados consideram um conjunto de dados de posição, sem incluir a velocidade e as pressões durante a otimização. Caso desejado, pode-se flexibilizar a função a ser minimizada a fim de melhorar o desempenho das demais variáveis de estado, com o ônus da inclusão das referidas variáveis no conjunto de dados.

**Figura 19:** Trajetórias das pressões para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_4$ .



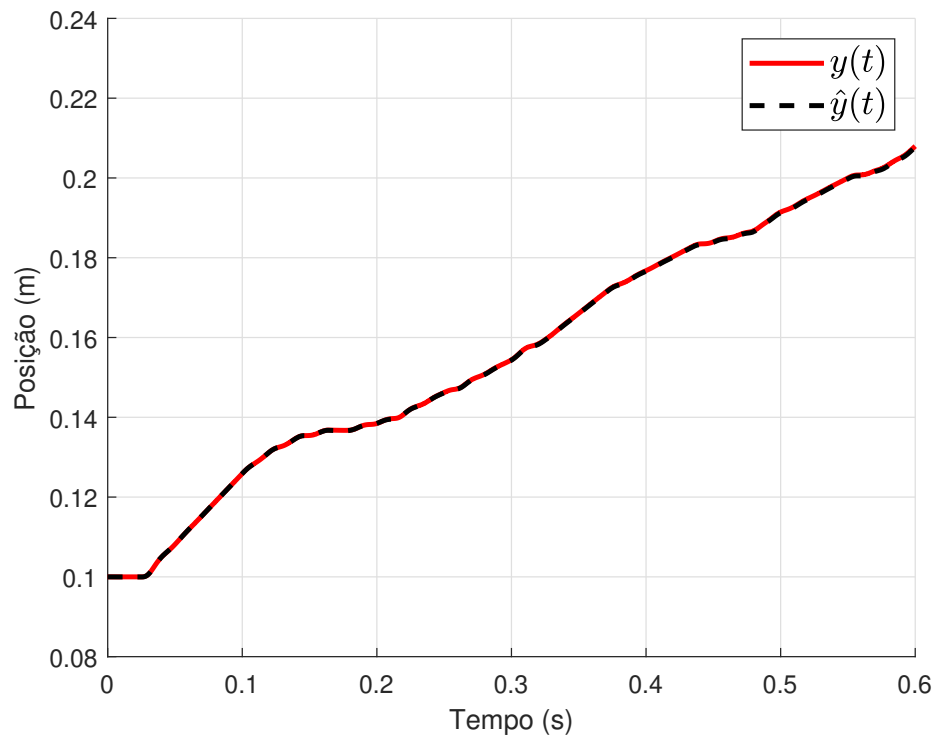
Fonte: O autor.

**Figura 20:** Trajetórias de velocidade para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_4$ .



Fonte: O autor.

**Figura 21:** Trajetórias de posição para o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_4$ .



Fonte: O autor.

### 5.3.5 Parâmetros identificados

A Tabela 9 apresenta um resumo dos custos de otimização obtidos em função dos parâmetros identificados. Por sua vez, a Tabela 10 explicita os valores encontrados para os vetores  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$ ,  $\hat{\theta}_3$  e  $\hat{\theta}_4$ , relativos aos modelos identificados para o servoposicionador hidráulico nas Seções 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3 e 5.3.4, respectivamente.

**Tabela 9:** Valores das funções custo para os parâmetros identificados.

Função	Valor para $\hat{\theta}_1$	Valor para $\hat{\theta}_2$	Valor para $\hat{\theta}_3$	Valor para $\hat{\theta}_4$
$J(\theta)$ [m <sup>2</sup> ]	$1,1593 \cdot 10^{-15}$	$1,7835 \cdot 10^{-7}$	$6,8834 \cdot 10^{-9}$	$1,5362 \cdot 10^{-8}$
$J_{\dot{y}}(\theta)$ [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	$4,1724 \cdot 10^{-13}$	$7,7552 \cdot 10^{-4}$	$6,8731 \cdot 10^{-5}$	$4,8315 \cdot 10^{-5}$
$J_{P_1}(\theta)$ [Pa <sup>2</sup> ]	$2,3121 \cdot 10^2$	$8,1086 \cdot 10^{10}$	$4,7900 \cdot 10^9$	$2,0413 \cdot 10^{10}$
$J_{P_2}(\theta)$ [Pa <sup>2</sup> ]	$1,6997 \cdot 10^3$	$1,4897 \cdot 10^{11}$	$7,1872 \cdot 10^9$	$3,7698 \cdot 10^9$

Fonte: O autor.

**Tabela 10:** Parâmetros identificados para os modelos do servoposicionador.

Parâmetro	Valor original	Valor para $\hat{\theta}_1$	Valor para $\hat{\theta}_2$	Valor para $\hat{\theta}_3$	Valor para $\hat{\theta}_4$
$\beta$ [N/m <sup>2</sup> ]	$1 \cdot 10^9$	$0,488 \cdot 10^9$	$-38,601 \cdot 10^9$	$1,355 \cdot 10^9$	$2,202 \cdot 10^9$
$K_1$ [m/sV√Pa]	$21,369 \cdot 10^{-9}$	$23,978 \cdot 10^{-9}$	$13,68 \cdot 10^{-9}$	$22,688 \cdot 10^{-9}$	$19,390 \cdot 10^{-9}$
$K_2$ [m/sV√Pa]	$21,369 \cdot 10^{-9}$	$17,567 \cdot 10^{-9}$	$11,97 \cdot 10^{-9}$	$22,351 \cdot 10^{-9}$	$22,730 \cdot 10^{-9}$
$\bar{V}_1$ [m <sup>3</sup> ]	$12,446 \cdot 10^{-5}$	$6,098 \cdot 10^{-5}$	$-303,946 \cdot 10^{-5}$	$22,236 \cdot 10^{-5}$	$28,403 \cdot 10^{-5}$
$\bar{V}_2$ [m <sup>3</sup> ]	$9,906 \cdot 10^{-5}$	$4,809 \cdot 10^{-5}$	$-119,154 \cdot 10^{-5}$	$13,251 \cdot 10^{-5}$	$18,367 \cdot 10^{-5}$
$A_1$ [m <sup>2</sup> ]	$4,910 \cdot 10^{-4}$	$5,319 \cdot 10^{-4}$	$3,108 \cdot 10^{-4}$	$5,225 \cdot 10^{-4}$	$4,544 \cdot 10^{-4}$
$A_2$ [m <sup>2</sup> ]	$2,370 \cdot 10^{-4}$	$2,637 \cdot 10^{-4}$	$1,491 \cdot 10^{-4}$	$2,545 \cdot 10^{-4}$	$2,540 \cdot 10^{-4}$
$F_s^+$ [N]	404,72	_____	_____	446,17	300,974
$\dot{y}_0^+$ [m/s]	0,009	_____	_____	0,0249	-0,0098
$\dot{y}_{lim}^+$ [m/s]	0,0180	_____	_____	0,0327	0,0503
$F_s^-$ [N]	-287,45	_____	_____	-88,550	-526,634
$\dot{y}_0^-$ [m/s]	-0,0095	_____	_____	-0,00075	-0,0226
$\dot{y}_{lim}^-$ [m/s]	-0,0475	_____	_____	-0,0280	-0,0358
$k_6^+$ [N s <sup>6</sup> /m <sup>6</sup> ]	643,72	_____	_____	_____	$-142,37 \cdot 10^1$
$k_5^+$ [N s <sup>5</sup> /m <sup>5</sup> ]	-3800,91	_____	_____	_____	$6406,20 \cdot 10^1$
$k_4^+$ [N s <sup>4</sup> /m <sup>4</sup> ]	8871,12	_____	_____	_____	$-7958,88 \cdot 10^1$
$k_3^+$ [N s <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ]	-10352,36	_____	_____	_____	31864,30
$k_2^+$ [N s <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> ]	6749,22	_____	_____	_____	-1706,43
$k_1^+$ [N s/m]	-2087,79	_____	_____	_____	-1564,69
$k_0^+$ [N]	440,21	_____	_____	_____	336,92
$k_6^-$ [N s <sup>6</sup> /m <sup>6</sup> ]	416,04	_____	_____	_____	$221,45 \cdot 10^2$
$k_5^-$ [N s <sup>5</sup> /m <sup>5</sup> ]	1042,30	_____	_____	_____	$-1100,70 \cdot 10^2$
$k_4^-$ [N s <sup>4</sup> /m <sup>4</sup> ]	-717,93	_____	_____	_____	$-208,46 \cdot 10^3$
$k_3^-$ [N s <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ]	-4413,65	_____	_____	_____	$-6950,41 \cdot 10^1$
$k_2^-$ [N s <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> ]	-5153,07	_____	_____	_____	-5220,42
$k_1^-$ [N s/m]	-2029,02	_____	_____	_____	$-1143,35 \cdot 10^{-1}$
$k_0^-$ [N]	-372,78	_____	_____	_____	-323,72

Fonte: O autor.

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram realizadas a modelagem e a identificação não linear paramétrica de um servoposicionador hidráulico. A metodologia empregada utiliza do conhecimento da estrutura do modelo matemático do sistema para estimativa de seus parâmetros, permitindo simular a evolução dos estados em simulação a partir de uma condição inicial. A medida de desempenho definida foi o erro médio quadrático entre a posição simulada do sistema e a posição estimada pelo modelo. A força de atrito não linear, por sua vez, foi descrita através do coeficiente de atrito viscoso variável, que possui a representação do fenômeno *adere-desliza*, conforme discorrido na Seção 3.1. As estruturas de modelo escolhidas para a identificação consideram diferentes níveis de conhecimento do modelo de atrito.

Tal qual elucidado na Seção 5.3, os resultados obtidos mostram que o conhecimento dos parâmetros do atrito resulta na descrição mais fiel conforme a função custo definida, mas que é possível realizar a identificação dos parâmetros do atrito em conjunto aos parâmetros do servoposicionador, sem perda significativa de desempenho para o caso estudado. Ainda, verifica-se que considerar o modelo do coeficiente de atrito viscoso variável em contraste a uma interpolação linear do coeficiente de atrito produz uma melhor descrição do comportamento do servoposicionador, como evidenciado pelos valores relacionados na Tabela 10 e pelas funções custo obtidas na Seção 5.3. Dessa forma, a identificação não linear mostra-se uma alternativa adequada para a obtenção dos parâmetros do servoposicionador hidráulico e do modelo de atrito estudados.

É importante enfatizar que o modelo analítico do servoposicionador foi elaborado tendo em vista as hipóteses simplificadoras apresentadas na Seção 3, as quais desconsideram, por exemplo, fenômenos como a zona morta da válvula, variações de temperatura, dinâmicas associadas à unidade de potência hidráulica e ao movimento do carretel da servoválvula, bem como perdas de carga causadas por vazamentos. Também é relevante o fato de que o conjunto de dados foi gerado em simulação, sem a presença do ruído intrínseco de medição. Portanto, duas possíveis extensões deste trabalho seriam a identificação em bancada experimental de um servoposicionador e a inclusão dos fenômenos desconsiderados durante a etapa de modelagem. Uma terceira opção seria a aplicação do método descrito para outros sistemas não lineares.

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. 4. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014.
- BILLINGS, S. A. *Nonlinear system identification: NARMAX methods in the time, frequency, and spatio-temporal domains*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2013. ISBN 978-1-119-94359-4.
- BORGES, F. A. P. *Controle em cascata de um atuador hidráulico utilizando redes neurais*. 2017. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.
- CANUDAS DE WIT, C. et al. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 40, n. 3, p. 419–425, 1995. DOI: 10.1109/9.376053.
- COLEMAN, T. F.; LI, Y. An Interior Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds. *SIAM Journal on Optimization*, v. 6, n. 2, p. 418–445, 1996. DOI: 10.1137/0806023.
- COLOGNI, A. L.; MAZZOLENI, M.; PREVIDI, F. Modeling and identification of an Electro-Hydraulic Actuator. In: 2016 12th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA). Kathmandu, Nepal: Institute of Electrical e Electronics Engineers (IEEE), 2016. P. 335–340. DOI: 10.1109/ICCA.2016.7505299.
- ECKHARD, D.; CAMPESTRINI, L. Análise do uso de modelos discretizados para identificação de modelos de biorreatores anaeróbicos. In: 1. PROCEEDING Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. [S.l.: s.n.], 2016. v. 4. DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0059.
- FURST, F. L. *Sistematização do Projeto Preliminar de Circuitos Hidráulicos com Controle de Posição*. 2001. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.
- GARDNER, M.; DORLING, S. Artificial Neural Networks (the Multilayer Perceptron) — A review of applications in the atmospheric sciences. *Atmospheric Environment*, v. 32, n. 14, p. 2627–2636, 1998. ISSN 1352-2310. DOI: 10.1016/S1352-2310(97)00447-0.
- GOMES, S.; ROSA, V. S. A new approach to compensate friction in robotic actuators. In: PROCEEDINGS of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Taipei, Taiwan: Institute of Electrical e Electronics Engineers (IEEE), 2003. v. 1, p. 622–627. DOI: 10.1109/ROBOT.2003.1241663.
- GOMES, S. C. P. Modelagem de atritos internos às articulações de robôs manipuladores. In: XIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica. Belo Horizonte, Minas Gerais: [s.n.], 1995.

- HASELEIN, W. M. *Identificação de Modelos Dinâmicos para Biorreatores Anaeróbicos*. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the user*. 2. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1999.
- LJUNG, L.; GLAD, T. On global identifiability for arbitrary model parametrizations. *Automatica*, v. 30, n. 2, p. 265–276, 1994. ISSN 0005-1098. DOI: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(94\)90029-9](https://doi.org/10.1016/0005-1098(94)90029-9).
- MACHADO, C. L. D. *Compensação de atrito em atuadores hidráulicos utilizando redes neurais*. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.
- NARENDRA, K.; PARTHASARATHY, K. Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 1, n. 1, p. 4–27, 1990. DOI: [10.1109/72.80202](https://doi.org/10.1109/72.80202).
- OLIVEIRA, C. E. P. *Identificação de sistemas de guindaste de pórtico*. 2022. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2022.
- PENCELLI, M. et al. Accurate Dynamic Modelling of Hydraulic Servomechanisms. In: 2019 Design, Automation & Test in Europe Conference & Exhibition (DATE). Florence, Italy: Institute of Electrical e Electronics Engineers (IEEE), 2019. P. 1257–1260. DOI: [10.23919/DATE.2019.8715087](https://doi.org/10.23919/DATE.2019.8715087).
- PERONDI, E. A. *Controle não linear em cascata de um servoposicionador pneumático com compensação do atrito*. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.
- RIGHETTINI, P. et al. Gray-box acceleration modeling of an electro hydraulic servo shaking table with neural network. In: 2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM). Munich, Germany: Institute of Electrical e Electronics Engineers (IEEE), 2017. P. 1388–1392. DOI: [10.1109/AIM.2017.8014212](https://doi.org/10.1109/AIM.2017.8014212).
- ROFFEL, B.; BETLEM, B. *Process Dynamics and Control: Modeling for Control and Prediction*. Chichester, England: John Wiley & Sons, Ltd, 2007.
- RUMELHART, D. E.; HINTON, G. E.; WILLIAMS, R. J. Learning representations by back-propagating errors. *Nature*, v. 323, p. 533–536, 1986.
- SAKAI, S.; OBARA, M.; CHIKAZAWA, K. Parameter Identification via Nominal Integrator of Hydraulic Cylinder Dynamics. *IFAC-PapersOnLine*, v. 54, n. 14, p. 78–83, 2021. 3rd IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON 2021. ISSN 2405-8963. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.10.332>.
- SOBCZYK SOBRINHO, M. R. *Controle em cascata e a estrutura variável com adaptação de parâmetros e compensação de atrito de um servoposicionador pneumático*. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.
- SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. *System Identification*. 2. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1989.
- WATTON, J. *Fundamentals of Fluid Power Control*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. ISBN 978-0-511-60436-2.