UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

LEANDRO VIANA DA ROSA

Funções do 2º Grau: Interpretações Gráficas e Algébricas

Porto Alegre
2010

LEANDRO VIANA DA ROSA

Funções do 2º Grau: Interpretações Gráficas e Algébricas

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Porto Alegre
2010

LEANDRO VIANA DA ROSA

Funções do 2º Grau: Interpretações Gráficas e Algébricas

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Aprovado em 07 de julho de 2010 com conceito _______.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana
Professora do Instituto de Matemática da UFRGS

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Professor do Instituto de Matemática da UFRGS

Prof. Msc. Luiz Davi Mazzei
Professor do Colégio de Aplicação da UFRGS

RESUMO

ROSA, Leandro Viana da. **Funções do 2º Grau: Interpretações Gráficas e Algébricas.** Trabalho de conclusão de Curso da disciplina de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2010.

Esta pesquisa teve por objetivo verificar se os alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades em fazer uma interpretação gráfica e, se a partir do gráfico, encontram a expressão que o originou. A pesquisa foi realizada com uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, mais especificamente com dezesseis alunos, que foram divididos em oito duplas. O trabalho foi fundamentado seguindo os princípios da Engenharia Didática, ou seja, fizemos uma análise prévia sobre o conceito abordado na pesquisa, nas dimensões epistemológica, didática e cognitiva. Após procedermos com a análise *a priori,* em que formulamos as hipóteses sobre a pesquisa, foram realizadas a experimentação e a análise *a posteriori* para então finalizarmos com a validação da Engenharia Didática. Os resultados obtidos levam a concluir que, a partir do gráfico, os alunos realmente apresentam dificuldades em encontrar a sua expressão algébrica, quando é necessário fazer algum ajuste na sua forma fatorada, além de também demonstrarem dificuldades em interpretar graficamente a atividade proposta.

Palavras-chave: função quadrática; engenharia didática; interpretação gráfica.

ABSTRACT

The objective of the present work is to verify whether High School students present adversity in performing a graphic interpretation and if they find the original expression of the graphic. The survey was done with a High School first graders, sixteen students to be precise divided into eight pairs. The work was reasoned based on the Didactic Engineering a brief analyses about the concept subjected on the survey, on its epistemological dimensions, didactics dimensions and cognitive dimensions. After the priori analyses procedure in which we formulate hypotheses about the survey, experimental and a posteriori analyses were performed to enable us to conclude with the Didactic Engineering validation. The results obtained, lead us to conclude that from the graphic the students indeed present difficulties in finding the algebraic expression, specially when is necessary to do an adjustment in its factored form, also demonstrated difficulties in graphic interpreting the proposed activity.

Key–words: Quadratic Function; Didactic Engineering; Graphic Interpretation.

Lista de Figuras

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esta pesquisa se dedicou ao estudo do ensino da função do 2º grau, em específico, verificar se, a partir de um gráfico, os alunos apresentam dificuldades em fazer sua interpretação e a encontrar a expressão que o originou. A proposta didática envolveu atividades neste sentido e foi realizada com alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

A escolha do tema foi baseada na forma em que os alunos apenas "*decoram*" a maneira de como se constrói um gráfico de uma equação do 2º grau. Após o professor ensinar o "*passo-a-passo",* parece que não existe mais discussão de formas alternativas de como resolver estes problemas. Porém o que queremos com esta pesquisa é justamente o contrário. É considerado importante que o aluno saiba interpretar um gráfico e que a partir dessa análise ele consiga chegar à expressão originária. Os alunos não podem ser apenas máquinas que conseguem desenhar gráficos, mas sim, também serem capazes de conseguir fazer uma análise dele.

Os objetivos desta pesquisa são:

1) detectar e descrever dificuldades no processo de ensino-aprendizagem;

2) propor uma mudança na prática didática usual, que pode ser muito pequena, mas que contribua para a melhoria do cenário encontrado.

Em um primeiro momento, antes do início dos estudos, já podemos identificar, na nossa própria experiência, algumas dificuldades dos alunos, que são apresentadas durante a execução das aulas. Muitos alunos têm dificuldade em compreender o que o gráfico está representando. Estão acostumados a usar fórmulas, que já lhes são entregues prontas, e não procuram analisar como fazer o processo inverso. Muitos deles preferem memorizá-las ao invés de entender e discutir melhor o conteúdo. Por exemplo, em uma situação onde é apresentado um gráfico em que dependendo da quantidade de vendas de algum produto a empresa tem lucro ou prejuízo. É necessário que o aluno consiga tirar informações do gráfico como, por exemplo, quantos produtos serão necessários vender para que haja lucro máximo ou, se na venda de 50 produtos a empresa terá lucro ou prejuízo. Caso estas informações não estejam diretamente no gráfico é preciso que o aluno saiba chegar à expressão desta situação.

A prática foi desenvolvida uma Escola Estadual de Porto Alegre, no primeiro ano do Ensino Médio. Foi desenvolvida uma pesquisa para orientar uma prática de ensino que pretende trazer alguma inovação para o ensino de função do 2º grau, focando o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. O objetivo é mostrar aos alunos que a partir do gráfico podemos chegar à equação, percorrendo o caminho inverso, e também que a partir da análise gráfica podemos resolver exercícios sem a utilização de fórmulas. É neste momento que o professor deve entrar em cena. Ele deve ser um "organizador da aprendizagem" e também é a ferramenta necessária que vai motivar os alunos para que cheguem, juntos, a uma conclusão sobre o assunto.

O desenvolvimento desta proposta foi orientado pela Engenharia Didática para estruturar a pesquisa. Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa e teoria educacional elaborada no início da década de 80, na França, para trabalhos de Educação Matemática. Concebe o trabalho do pesquisador similar ao de um engenheiro subdividindo os componentes em sala de aula, com o uso das sequências didáticas. De acordo com Artigue (apud MACHADO, 1999) esse termo engenharia didática:

> [...] foi “cunhado” para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico. Mas ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe problemas que a ciência não pode levar em conta (MACHADO, 1999, p. 198).

De acordo com Carneiro (2005) a teoria da Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) a questão das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) a questão do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. Nessa linha, prática de ensino é articulada com prática de investigação.

Segundo Artigue (1996) a Engenharia Didática inclui as seguintes fases:

- Análises prévias;

- Concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática;
- Implementação da experiência;
- Análise *a posteriori*;
- Validação da experiência.

No capitulo 2 iremos ter a etapa da análise prévia em que é realizado o estudo do referencial teórico, da análise do ensino habitual e das concepções dos alunos para propor uma modificação para melhorar o conteúdo da sala de aula usual.

Podemos dividir essas análises em 3 dimensões:

1. Dimensão epistemológica: associada às características do saber em jogo, história do conteúdo proposto;

2. Dimensão didática: associada às características do funcionamento do sistema de ensino, análise dos conteúdos de livros didáticos e artigos;

3. Dimensão cognitiva: associada às características do público ao qual se dirige o ensino, dificuldades de aprendizado dos alunos com relação a esse conteúdo.

O capitulo 3 é referente a concepções e análise *a priori*, que comporta uma parte descritiva e uma parte preditiva. É preciso descrever e justificar as escolhas efetuadas em dois âmbitos. Um global, que é mais amplo e geral, e outro local, que descreve a atividade proposta, explicando os recursos que serão utilizados, o público alvo e o tempo de duração. Após isso elaboramos hipóteses que serão comparadas com os resultados finais, contribuindo para a validação da Engenharia Didática.

O capitulo 4 trata da experimentação e da análise *a posteriori*, em que descreveremos a atividade proposta, assim como a participação dos alunos. Juntamente com esse relato analisaremos as hipóteses que tínhamos antes da experimentação para comprová-las ou não.

A validação da Engenharia Didática será descrita no capitulo 5. Trata-se de redigir as conclusões finais, através da comparação entre a análise *a priori* e a análise a *posteriori*.

As considerações finais sobre o trabalho serão apresentadas no capitulo 6.

2. ANÁLISE PRÉVIA

Seguindo a metodologia da Engenharia Didática, esta primeira etapa tem como objetivo fazer uma análise preliminar, visando esclarecer o ensino habitual de um conceito – de modo que este trabalho irá tratar das funções quadráticas - propondo uma modificação para a melhoria de seu ensino usual.

Assim a análise prévia inclui três dimensões:

1) dimensão epistemológica, associada ao estudo histórico das funções do 2º grau;

2) dimensão didática, associada aos conteúdos de livros didáticos, trabalhos acadêmicos;

3) dimensão cognitiva, associada ás dificuldades dos alunos, suas perguntas e erros, e obstáculos oriundos do processo ensino-aprendizagem dos conteúdos em questão.

2.1. DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA

Se considerarmos o sistema de numeração egípcio, e compararmos com o dos babilônicos, perceberemos que o primeiro citado é relativamente primitivo em relação ao segundo, o que pode explicar a falta de sofisticação da álgebra egípcia. O nível obtido pela matemática babilônica também pode estar relacionado pelo fato do desenvolvimento econômico ser mais avançado na Babilônia. Segundo Eves (2004), perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas e algumas biquadradas. Já o que se sabe sobre Matemática dos antigos egípcios se baseia em dois grandes papiros que juntos continham 110 problemas: O Papiro de Moscou de 1850 a.C. e o Papiro de Rhind (ou Ahmes) de 1650 a.C.

Para Eves (2004), Diofanto de Alexandria teve uma importância enorme para o desenvolvimento da álgebra grega e uma grande influência sobre os europeus. Dentre seus três trabalhos o de maior importância foi *Aritmética*, que eleva o autor à condição de gênio em seu campo. No que remanesce de seu trabalho há uma variedade considerável de problemas do primeiro e do segundo graus. Porém Diofanto só admitia respostas entres os números racionais positivos, sendo que na maioria das resoluções se contentava com apenas uma resposta.

Os hindus foram importantes com suas contribuições para as soluções das equações do 2º grau, através da fórmula resolvente. De acordo com Pinedo (2001) os hindus estudaram os métodos babilônicos e avançaram na busca de soluções, dentre elas as negativas.

Foi com Nicolas Oresmes (1323 – 1382), bispo francês, que aparece pela primeira vez o conceito de função. Em um dos seus livros ele descreve graficamente a dependência entre tempo e velocidade utilizando linhas verticais e horizontais.

A partir do século XV, iniciou-se o Renascimento Europeu na arte e no saber. Porém, foi no século XVI que temos o destaque de um grande matemático francês: François Viète, conhecido também por Vieta. Ele fez importantes progressos na notação das equações algébricas, pois não usava letras somente para representar a “incógnita”, mas também para representar os coeficientes. Viète usava consoantes para representar as constantes e vogais para representar as incógnitas. Provavelmente o feito matemático mais extraordinário do século XVI foi a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbica e quártica. Por volta de 1515 Scipione Del Ferro(1465-1526) resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 + mx = n$ baseando seu trabalho provavelmente em fontes árabes. Por volta de 1535, Tartaglia anunciou ter descoberto uma solução para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$. Mais tarde Cardano, depois de um juramento solene de segredo, conseguiu arrancar de Tartaglia a chave da solução da cúbica. Pouco tempo depois Lodovico Ferrari conseguiu resolver a equação de 4º grau.

No século XVII, O matemático René Descartes utilizou os eixos cartesianos para a representação de uma função. Isso nos permitiu estabelecer a correspondência entre pontos do plano e pares de números, além de representar graficamente as relações entre duas variáveis.

Já no século XVII o matemático alemão Gottfried Leibniz (1646 – 1716) utilizou pela primeira vez o termo **função**, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva. Porém foi com Leonard Euler (1707 – 1783), matemático suíço, que surgiu a definição de função, assim como a notação $f(x)$ para designar funções.

Logo percebemos que os conceitos de função sempre estiveram ligados à álgebra, como variáveis e grandezas. Assim como a importância das representações da função.

Assim o conceito de função que hoje nos parece simples é um resultado de uma evolução histórica, no qual passou por algumas mudanças ao longo dos séculos. Com base no que foi escrito, percebemos a importância da álgebra, que sempre esteve ligada com o conceito de função, além de ressaltar o imenso valor dado às representações gráficas.

2.2. DIMENSÃO DIDÁTICA

Está análise nos permite pesquisar as contribuições teóricas em artigos ou trabalhos acadêmicos que tratam desse assunto, além de pesquisar como é abordado este conceito em livros didáticos.

Então neste primeiro momento, será analisada a dissertação de mestrado de Diana Maia, pela PUC/SP. Maia (2007) apresenta uma dissertação que trata do assunto referente à função quadrática e a utilização do Winplot como ferramenta computacional nesse estudo, para alunos da oitava série do Ensino Fundamental.

Os objetivos do trabalho são: complementar os estudos já realizados a respeito da função quadrática e abordar a questão de características das funções, utilizando um software gráfico que traz caráter lúdico para introduzir noções tais como intervalo e domínio da função. A questão que originou o estudo foi a possibilidade de que alunos de 8ª série do Ensino Fundamental se apropriassem do processo de construção gráfica da função quadrática como um conjunto de variáveis visuais que implicariam em unidades simbólicas significativas da escrita algébrica utilizando um ambiente computacional, aliado ao caráter lúdico como uma das ferramentas de aprendizagem. A autora também verifica como os livros didáticos apresentam a função quadrática, quais são os processos de construção gráfica mais utilizados, e se é realizada a passagem da representação gráfica para a representação algébrica.

O trabalho se desenvolveu seguindo os princípios da Engenharia Didática de Michele Artigue (1995). Segundo a autora, essa metodologia se caracteriza por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e análise das sequências de ensino permitindo uma validação interna, a partir da confrontação das análises *a priori* e *a posteriori*.

Nos livros analisados era recorrente o uso constante de tabelas e/ou identificação de alguns pontos para a construção dos gráficos. Este procedimento ponto a ponto, às vezes, pode tornar o trabalho impreciso, pois são utilizados alguns valores inteiros e pode acontecer que em determinadas funções quadráticas, por exemplo, as raízes serem números não inteiros. A partir disso podemos citar algumas atividades que a autora preferiu usar como: evidenciar os recursos de translação, reflexão, noção de vértice da parábola e sua posição em relação ao eixo das ordenadas.

A autora desenvolveu uma prática com oito alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Essa escolha foi feita, pois nesta série já se introduz o conceito de função e construção de gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º grau. Os alunos já estavam aprendendo a construir gráficos nas suas aulas regulares e também já conheciam o software Winplot, pois já haviam realizado atividades sobre a função de 1º grau. As aulas foram no laboratório de informática do colégio e os alunos trabalharam nas atividades propostas sempre em duplas. A análise a priori foi composta por seis atividades, sendo que em um primeiro momento foi realizado um tratamento na escrita algébrica da função com o intuito de observar o comportamento do gráfico e após introduzir a noção de domínio e intervalo de maneira lúdica.

As atividades são destinadas à construção de gráficos, utilizando o Winplot. A primeira pede para que o aluno construa no mesmo par de eixos coordenados alguns gráficos onde o que muda é apenas o coeficiente de x^2, ora sendo positivo ora sendo negativo. E logo após são feitas algumas perguntas em relação a isso como o que se pode concluir a respeito do coeficiente de x^2 ser um numero maior ou menor que zero. A segunda teve o propósito de verificar a translação vertical que ocorre com o gráfico da função $f(x) = x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante. A terceira foi sobre a percepção da translação horizontal do gráfico da função $f(x) = x^2$ quando adicionamos uma constante à variável independente. A quarta visa reaplicar os conhecimentos aprendidos nas atividades anteriores, não esquecendo que todas estas atividades foram feitas com o software Winplot. Por fim, a quinta e a sexta atividades visaram aplicar os conceitos apreendidos e introduzir a noção de domínio e intervalo de maneira lúdica.

Na primeira destas atividades os alunos reproduziram “máscaras” utilizando o Winplot e os conhecimentos adquiridos nas tarefas anteriores. Já a segunda os alunos precisavam confeccionar uma camiseta utilizando reflexão, abertura de parábolas translação, simetria e intervalos, para verificar a aprendizagem e introduzir curvas simétricas em relação a um eixo.

Maia (2007) constatou em suas análises prévias, em livros didáticos, que para a construção de gráficos geralmente é privilegiado o procedimento ponto a ponto. Foram analisados três livros de Ensino fundamental e somente dois exercícios, em um dos livros, era preciso determinar a expressão algébrica a partir do gráfico. Em outros três, agora do Ensino Médio, a autora constatou apenas três exercícios que se referiam ao mesmo assunto.

O trabalho teve por objetivo complementar outros estudos já realizados a respeito de função quadrática, visando análise de características dos gráficos destas funções, por meio da observação das construções realizadas em um software gráfico. Assim estava introduzindo outro procedimento para estas construções, ou seja, elaborando uma seqüência didática que permite ao aluno enxergar o gráfico como um conjunto de variáveis visuais que estão diretamente ligadas à escrita algébrica.

A autora também ressalta que a participação dos alunos se mostrou efetiva, sendo que estes se mostraram um pouco preocupados durante a primeira atividade, em que deviam relacionar o que estavam aprendendo na aplicação da pesquisa com suas aulas regulares. Eles compreenderam o propósito das atividades como as translações horizontais e verticais, além de perceber a simetria e reflexão entre as parábolas.

Em relação à questão da inserção de caráter lúdico, Maia (2007) destacou que os alunos ficaram muito motivados ao realizarem as atividades. Ela comenta outro aspecto referente à utilização do software, que no momento de completar o desenho os alunos discutiam com seu parceiro usando argumentos para que a função se ajustasse ao desenho ao invés de chutar os parâmetros. Conclui que as discussões realizadas levaram a um crescimento na compreensão de construção e análise de gráficos de função quadrática, acreditando que a abordagem por ela proposta, confirmou a sua hipótese e respondeu à questão de pesquisa. É possível sim que os alunos de 8ª série do Ensino Fundamental possam utilizar como ferramenta de aprendizagem, um software para se apropriar do processo de construção de gráficos da função do 2º grau como um conjunto de variáveis visuais que implicam em unidades simbólicas significativas da escrita algébrica aliado ao caráter lúdico.

Para investigar o ensino usual do tema serão usadas as análises de alguns livros didáticos que Maia (2007) citou em sua dissertação. A autora analisou 3 livros do Ensino Fundamental, nos quais foram encontradas as seguintes características: nos livros A e B não foram encontrados exercícios nem explicações de como interpretar um gráfico e achar a função do 2º grau correspondente a ele. Já no livro C foram encontrados 2 exercícios e num destes o autor exemplifica dando dois gráficos num quadriculado com escala e é pedido para que sejam extraídas algumas informações como, o ponto de intersecção com os eixos e a expressão algébrica de cada função. A técnica utilizada pelo autor é primeiramente substituir o valor de “c” que está evidente no gráfico na função que apresenta a forma $y = ax^2 + bx + c$ e logo depois aplicar as coordenadas do vértice para obter uma equação. Aplicando a fórmula da abscissa do vértice obtemos outra equação com duas incógnitas. Para encontrarmos o valor de “a” e “b” é só resolver o sistema formado por estas equações. Vemos que o aluno necessita saber a fórmula do vértice segundo a explicação do autor, sendo que este não orienta os alunos a questionar outros métodos para solucionar o problema.

Maia (2007) também analisou 3 livros referentes ao Ensino Médio, no qual constatou que o Livro D apresentou um exercício no qual a partir do gráfico era necessário encontrar a expressão algébrica, porém a técnica utilizada foi a mesma do Livro C. No Livro E há mais enfoque na obtenção de coordenadas de pontos e o esboço de gráficos, e não apresenta exercícios onde é dado o gráfico da função quadrática e após é pedido a sua expressão. O Livro F apresenta apenas um exercício no qual é dada a representação gráfica e é preciso obter os coeficientes da função, porém, a resolução é semelhante aos livros analisados anteriormente.

Analisamos o livro didático que é utilizado na Escola em que foi realizada a pesquisa. Diniz e Smole (2005) iniciam o conceito de função do 2º grau através de um exemplo no qual analisam a trajetória de um foguete, em que é apresentado o gráfico de uma parábola. Assim é exemplificado aos alunos que através desse tipo de problema é possível obter informações como: a altura máxima que o foguete atingiu e o tempo que ele levou para chegar ao ponto mais alto. Somente após essas explicações é apresentada a definição da função quadrática e é pedido que o aluno construa gráficos de uma função do 2º grau atribuindo valores para a variável x. Porém já é mostrado o resultado final para o aluno, não permitindo que ele faça a construção. Era preciso refletir o problema com o aluno e deixar que ele construa o gráfico, mas não foi dada a oportunidade para que o aluno descubra essas representações. Assim a idéia de imagem conceitual[1] foi deixada de lado, pois ao ver a expressão algébrica o aluno deveria relacionar ela a alguma imagem mental mais imediata, porém com o gráfico da expressão já ao lado, o aluno foi induzido a uma resposta e não foi capaz de construir seu próprio conhecimento.

As autoras focam a construção gráfica na obtenção das raízes, e do vértice, sendo que o método para se chegar a tal resultado é somente através de fórmulas. Analisando a parte referente aos exercícios o livro apresenta 5 exercícios nos quais pede para determinar a função quadrática através dos gráficos, sendo que um desses possui resolução. Os gráficos mostram os três pontos de intersecção da parábola com os eixos coordenados, porém as

[1] De acordo com David Tall (1981), imagem conceitual é a estrutura cognitiva total associada a um certo conceito matemático na mente de um indivíduo, constituída de todas as imagens mentais, representações visuais, descrições verbais e impressões associadas a um dado conceito.

autoras resolvem o exercício substituindo os 3 pontos em $y = ax^2 + bx + c$ e após isso resolvem o sistema que se originou. Assim as autoras não cogitam que é possível resolver este problema com outro método, impossibilitando que o aluno saiba outras maneiras de encontrar o vértice da parábola por exemplo.

O livro Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio de Lima (2001), e outros autores contém um estudo detalhado de doze coleções de livros didáticos usados no Ensino Médio de Matemática no Brasil. Dentre estes livros irei destacar alguns livros analisados pelos autores:

- Antonio Machado – *Matemática na Escola do Segundo Grau – Volume 1*. Editora Saraiva.

Os analistas constataram que no capitulo Função Polinomial do Segundo Grau, o autor não fala na soma e produto das raízes, e muito menos na forma fatorada da equação. É citado como exemplo a equação $(x-7)(x+8)=0$, em que os alunos efetuam a multiplicação, aplicam a fórmula e encontram que as raízes são 7 e -8. Assim é notado que o significado da raiz de uma equação do segundo grau não é bem trabalhado pelo autor.

- Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva – *Matemática, Aula por Aula – Volume 1*. Editora FTD

Para os analistas o capitulo “Função polinomial do 2º grau” é escrito em 40 páginas e mesmo assim é como se praticamente nada fosse falado sobre o assunto. As afirmações feitas nunca são justificadas, os fatos mais relevantes e básicos sobre as funções quadráticas são omitidos, os exercícios são quase todos de natureza manipulativa e nunca o leitor é induzido ou solicitado a raciocinar.

- Gelson Iezzi et al. – *Matemática – Volume 1*. Editora Saraiva.

A obtenção do vértice da parábola é melhor apresentada neste livro do que na maioria dos outros analisados. Infelizmente, não aparece a forma fatorada da função quadrática, tão útil quando os zeros da função são conhecidos.

- José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno – *Coleção Matemática – Volume 1*. Editora FTD.

A apresentação do vértice da parábola não tem relação com a forma canônica do trinômio, e as coordenadas do vértice são apenas afirmadas, perdendo-se mais uma vez a oportunidade de um estudo altamente ilustrativo, mesclando conhecimentos anteriores, álgebra e geometria.

- Manoel Rodrigues Paiva – *Coleção Matemática – Volume 1.* Editora Moderna.

Neste livro a fórmula para obter as raízes das funções quadráticas é aplicada diretamente, sem qualquer tentativa de justificá-la, sendo que também não é explorada a forma fatorada da equação do segundo grau.

Em todos os livros analisados os autores não se aprofundaram na questão de determinar a função do 2º grau através do seu gráfico e nas resoluções destes exercícios é abordada somente a forma de encontrar a resposta através de um sistema. Os autores em nenhum momento tentam fazer que o aluno interprete o gráfico ou que o exercício seja feito de uma forma diferente. Logo, raramente é visto que a partir das raízes, podemos escrever a função quadrática em sua forma fatorada, prejudicando assim o aluno em exercícios que necessitam uma interpretação mais avançada.

2.3. DIMENSÃO COGNITIVA

O nível cognitivo é, segundo Machado (1999), “a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que determinam sua evolução”. Para identificar as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem, questionamos professores do Ensino Médio de uma Escola particular, sobre os erros e dúvidas gerais que os alunos apresentam no ensino de função quadrática. Os professores afirmaram que eles custam a entender o conceito de "raiz". Segundo eles, os alunos preferem decorar fórmulas que lhe dêem as respostas desejadas ao invés de assimilar os conceitos a fim de ajudá-los na resolução destes exercícios. Além de destacar que os alunos apresentam uma grande dificuldade em fazer o processo de analisar o gráfico e logo após determinar a equação da função de 2º grau. Eles dizem que os alunos erram exercícios quando este tema é abordado, pois não costumam aprofundar a matéria em relação à interpretação de gráfico.

Outra questão problemática é em relação aos sinais da função. Os estudantes não conseguem interpretar problemas envolvendo o sinal da função principalmente na hora de dar a resposta em forma de um intervalo ou de valores de x. Simões (1995) diz: "O ensino de função do 2º grau, da forma como vem sendo ministrado aos alunos, tem-se revelado deficiente em vários sentidos, deficiências essas que se refletem na formação matemática desses alunos".

Do ponto de vista dos alunos foi destacado que eles têm dificuldade em relação ao vértice da parábola. Eles cometem o erro de achar que o "x do vértice" e o "y do vértice" são pontos distintos; o que acaba gerando uma grande confusão, pois são marcados dois pontos no gráfico. Este erro costuma passar despercebido pelos professores, o que aumenta ainda mais a dúvida entre os alunos.

Também destacam que exercícios no qual devem interpretar o gráfico para chegar à equação são raramente vistos em sala de aula, e dizem que o professor não os ensinou a fórmula para resolvê-los.

Os alunos têm muita dificuldade em compreender estes conceitos. Quando são confrontados com questões que exigem um pouco mais de raciocínio, acabam desistindo de fazer o exercício. Como não entendem o conceito acabam decorando modos de resolução, pois acham que é apenas mais um conteúdo obrigatório no Ensino Médio.

De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> É importante identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades; por exemplo, perceber que todas as funções do segundo grau possuem o mesmo tipo de gráfico, o que implica propriedades de sinal, crescimento e decrescimento. Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problemas. (BRASIL, 1998, pág. 113):

Muitas vezes os professores acabam dividindo a função quadrática em diferentes casos como as completas e as incompletas. Não mostrando aos alunos uma maneira de interpretar o gráfico de forma que consigam extrair a expressão que o originou. Os alunos então têm dificuldade em relacionar essas informações da situação-problema e acabam errando os exercícios, pois não conseguem assimilar o processo inverso.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático.
>
> Além de conexões internas à própria matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia.
>
> É preciso uma rápida reflexão sobre a relação entre Matemática e tecnologia. O impacto da tecnologia na vida de cada individuo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. (BRASIL, 1998, pág. 43)

Essa tecnologia que falamos não precisa ser exatamente um software relacionado à matemática, caso o professor não tenha domínio sobre tal ferramenta, mas sim pode ser feito uma aula diferenciada utilizando recursos como o Power Point, por exemplo. Nesse caso o professor pode apresentar um trabalho para os alunos, ou pedir que eles trabalhem no programa. Após aprenderem o conteúdo podem realizar uma tarefa de complementação de estudos usando o recurso mencionado anteriormente para apresentações.

Portanto, cabe ao professor garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função e também de interpretar graficamente, por meio de situações-problema ou utilizando novas ferramentas para as resoluções. O aluno deve ser incentivado a buscar novas soluções, ajustando seu conhecimento sobre funções e aprofundar a determinação da função quadrática a partir de um gráfico, o que é pouco visto em sala de aula e também nos livros didáticos.

2.4. CONSTRANGIMENTOS

O ensino usual da função quadrática utiliza propostas tradicionais nas quais os exercícios acabam sendo repetitivos e não proporcionam o uso de certos raciocínios para interpretar as questões.

Neste capitulo veremos os obstáculos que dificultam a mudança do ensino para melhorar a aprendizagem. Dentre esses obstáculos podemos dizer que os principais são: as dificuldades que os professores apresentam em sala de aula; as maneiras que os livros didáticos apresentam os exercícios já analisados; as capacitações que os professores devem buscar; as dificuldades inerentes aos alunos em relação à compreensão do conceito; as dificuldades de botar em pratica as propostas de mudanças e as inerentes às metodologias disponíveis.

Em relação às dificuldades inerentes aos professores, seus hábitos, sua didática tradicional, é válido destacar que essa proposta limita o trabalho do professor, pois em alguns casos ele está acostumado a uma rotina de vida e acaba não buscando técnicas inovadoras para por em prática na sala de aula. Neste caso, Allevato (2005), ao abordar em seu trabalho quais técnicas que podem estimular o interesse dos alunos, destaca que os recursos tecnológicos permitem aos alunos “moverem-se” livremente entre as representações algébricas e gráficas de funções e assim se familiarizando com o ambiente (computacional).

Segundo Vasconcelos e Souto (2003) os livros didáticos precisam, sem dúvida, conter ferramentas que incitem a discussão sobre o conteúdo teórico a fim de permitir sua conversão em conhecimento. Estamos falando de uma produção de conhecimento útil, aplicável e presente no cotidiano do aluno. Porém os livros didáticos analisados não possuíam uma ênfase em relação à interpretação gráfica, além de trazerem poucos exercícios nos quais é necessário que, através do gráfico, o aluno chegue à equação da função do 2º grau. Assim, os professores acabam não aprofundando o assunto, ou então o estudam de maneira superficial, prejudicando o aluno. Nesse caso, concordamos com Kampff, Machado e Cavedini (2004), no sentido em que o professor deve ser inovador, desenvolvendo atividades criativas, motivando o aluno para que este questione os problemas e reflita sobre as respostas apresentadas.

> É necessário repensar o ensino e a aprendizagem, colocando-se numa postura de professor inovador, criando situações significativas e diferenciadas, cabendo propiciar diferentes situações “problemas” ao educando. O aluno precisa ser motivado a envolver-se ativamente nesse processo, construindo o seu conhecimento a partir de múltiplas interações. O professor de matemática deve organizar um trabalho estruturado através de atividades que propiciem o desenvolvimento da exploração informal e investigação reflexiva e que não privem os alunos nas suas iniciativas e controle da situação. (KAMPFF; MACHADO e CAVEDINI, 2004, p.2).

Logo, o professor deve estar sempre à procura de capacitação, seja através de cursos ou em busca de uma nova metodologia, na qual consiga trabalhar o assunto de uma forma mais aguda perante os alunos. Existem muitos meios no qual o professor pode se capacitar, sendo que um bom exemplo é citado por Freitas (1993):

> Para capacitação de profissionais, especialmente professores que trabalham durante todo o tempo, a teleducação oferece a oportunidade de paralelo ao seu trabalho, dividir e discutir suas dúvidas com outros professores do país em rede nacional, compartilhar problemas e buscar soluções alternativas. (...)
>
> (...) Teleducação não é milagre. É trabalho, persistência, planejamento, acompanhamento, envolvimento e compromisso. Só pessoas comprometidas com sua própria capacitação e seu desempenho junto ao aluno terão sucesso e farão da educação brasileira um modelo de qualidade compatível com o presente e com o futuro. (...) (FREITAS, 1993, p.113-119)

Desse modo percebemos que o professor, além de buscar meios para se capacitar, deve se dedicar e sempre se manter atualizado em relação ao ensino. Também podemos enfatizar que os professores devem procurar cursos que os motivem e que se traduzam em mudanças que se reflitam em sala de aula.

Quanto às dificuldades inerentes aos alunos em relação à compreensão do conceito, é preciso salientar que eles demoram a entendê-los, pois o professor costuma apenas comentar que existe um jeito de encontrar a expressão algébrica. Os alunos não são confrontados com exercícios nos quais precisam pensar sem usar fórmulas, apenas utilizando a interpretação do gráfico. É como se os alunos não entendessem o conceito de raiz ou de vértice, pois quando são ensinados a construir um gráfico, todos conseguem fazer mecanicamente os exercícios. Porém, quando é pedido para que eles façam o caminho inverso, é como se houvesse um “bloqueio mental”, onde os alunos não sabem utilizar as informações que lhes foram entregues.

Sobre as dificuldades para colocar em prática as propostas de mudança no ensino, podemos dizer que o professor não possui um tempo livre para elaborar atividades extras, pois segundo Pereira (2008) muitos docentes não têm tempo e nem estímulo para se aprofundarem em questões acerca do conteúdo que ministram. No decorrer do tempo letivo, não conseguem cumprir todo o programa previsto nos "planos de curso", ministrando aulas sem muitos recursos ou inovações. Em grande parte, avaliam mal o que foi ensinado, improvisando "provas", repetindo exercícios ao longo dos vários anos e corrigindo superficialmente os inúmeros "trabalhos" e "avaliações. Analisando os livros didáticos, percebemos que eles possuem poucos exercícios relacionados à interpretação de gráfico, sendo assim, o melhor seria que os professores dispusessem de um tempo extra para produzir listas de exercícios extras para poder aprofundar o conteúdo em sala de aula. Hutmacher (1995) firma que de uma forma global, “os professores dispõem, contrariamente a outras profissões, de pouco tempo e recursos para (auto) organizar a troca e o debate coletivo em torno das práticas de ensino. Mas é forçoso reconhecer que os professores também pouco investem nesta ação, esperando que as hierarquias tomem as iniciativas, através da constituição de comissões ou de grupos de trabalho.” Porém, é este pouco tempo livre dos professores que impossibilita esse trabalho. Como em alguns colégios os conteúdos começam a ficar atrasados, os professores preferem não perder esse tempo preparando tais listas, alegando que outros conteúdos importantes vão ficar prejudicados, por esse tempo extra que os exercícios poderiam tomar.

Também há professores que não estão acostumados a lidar com ferramentas tecnológicas nos quais poderiam fazer uma aula diversificada. Por conta desses “medos” alguns preferem não arriscar ao invés de tentar uma capacitação para utilizar tal ferramenta. Gravina e Santarosa (1998), afirmam que o caráter estático das representações matemáticas muitas vezes dificulta a construção do significado, afetando substancialmente a construção de conceitos e proposições. Segundo as autoras, os recursos computacionais oferecem instâncias em que a representação passa a ter caráter dinâmico e refletem nos processos cognitivos. Esse dinamismo é obtido com a possibilidade de fazer manipulações diretas sobre diferentes representações que se apresentam na tela do computador.

No caso das dificuldades inerentes às metodologias disponíveis, além do fato de alguns professores não saberem usar estas ferramentas tecnológicas, ainda existem colégios que não possuem salas apropriadas para a utilização destes recursos. Marinho (2006) salienta que embora as escolas brasileiras, em sua maioria, já estão equipadas com computadores, elas precisam solucionar o problema de integrar essas ferramentas à vida que ocorre cotidianamente nas salas de aulas e ajustar isso ao desenvolvimento do currículo. Há muitos softwares que os professores poderiam utilizar para que os alunos tenham outro entendimento do assunto, porém essa metodologia não é implantada ora por falta de recursos da escola, ora por falta do interesse dos professores em saber manipular estes softwares.

3. CONCEPÇÕES E ANÁLISE *A PRIORI*

Nesta segunda etapa o objetivo é determinar como as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido, elaborando assim um Plano de Ações. Após são redigidas hipóteses que envolvem suposições a respeito do conhecimento anterior do aluno, sendo que essas hipóteses serão comparadas com os resultados finais.

Assim, este plano de ensino irá tratar de um problema que existe no ensino das funções quadráticas: uma busca por exercícios que proporcionem com que os alunos determinem a expressão a partir de seu gráfico, além de fazer uma interpretação do mesmo.

Como já vimos, muitos professores não valorizam esse assunto, e quando o introduzem em sala de aula, apenas buscam no livro didático alguns exemplos, pois o pouco tempo livre os impossibilita de criar exercícios para que seja feita uma discussão sobre o assunto em sala de aula. Porém, o livro didático trata superficialmente desse assunto, o que impede certo aprofundamento.

Para este trabalho foi feita uma atividade na qual os alunos irão interpretar os gráficos e, a partir disso, responder as questões propostas. Também terão de responder perguntas a respeito do significado do zero da função e do vértice da parábola, dando respostas pessoais sobre estes conceitos.

A atividade prática docente foi realizada nos dias 17 e 24 de novembro de 2009, em uma escola estadual de Porto Alegre, no período da manhã – das 10h30min às 12h15min em ambos os dias, em uma turma do 1º ano do Ensino Médio.

A atividade foi desenvolvida em duplas, visando a interação entre os alunos para que estes cheguem juntos a um entendimento a respeito do assunto proposto. O maior objetivo dessa atividade consiste em elaborar exercícios nos quais os alunos necessitem fazer uma interpretação gráfica, sem a utilização de fórmulas, para que no fim eles consigam determinar a lei da função do segundo grau a partir das informações dadas.

3.1. PLANEJAMENTO DE AÇÕES:

	Objetivo	Ação	Recursos Didáticos
Tempo estimado: 10 minutos	Organizar os alunos em duplas. Apresentar a atividade proposta.	Dividir a turma em duplas e explicar a necessidade de que os alunos se concentrem para desenvolver a atividade.	Exposição oral
Tempo estimado: 1 hora e 35 min	Realização da atividade.	Possibilitar que os alunos realizem a atividade durante 1 hora e 35min.	Lista de exercícios
Tempo Estimado: 1 hora e 45 minutos	Formalizar a determinação e análise da função quadrática a partir do seu gráfico.	Estabelecer uma discussão com a turma sobre como resolver as questões.	Exposição no quadro e oral.

Quadro 01 – Plano de Ensino

A aula foi feita em 4 horas/aulas, sendo que em um primeiro momento, a atividade foi explicada aos alunos que seriam divididos em duplas. Os alunos tiveram um tempo determinado para resolverem as questões propostas e após foi recolhida a atividade. Na aula seguinte, tivemos uma discussão com o grande grupo sobre maneiras de resolvermos os exercícios. Foram relembrados: o significado de raiz (zero da função), em que após obtermos as raízes da função conseguimos escrever a expressão na forma fatorada; significado do vértice da parábola e de como encontrá-lo sem a necessidade de utilizarmos as fórmulas.

Desta maneira analisamos se os alunos conseguem fazer a interpretação gráfica, e caso contrário, explicamos os modos alternativos de desenvolvimento das questões para que os alunos não apresentassem dúvidas após a atividade.

Por hipótese era esperado que o tempo planejado para a atividade fosse suficiente e que os alunos já soubessem o conceito de raiz e também sobre o vértice de uma parábola. Alguns alunos não devem saber escrever a expressão na sua forma fatorada a partir de suas raízes, porém como estavam trabalhando em duplas, era esperado que após algumas discussões eles encontrassem uma forma de resolver os exercícios e responder as questões. Também tínhamos como hipótese que os estudantes soubessem encontrar um valor de “y” a partir de um valor de “x”.

Como essa atividade foi elaborada com o objetivo de aprofundar questões que são pouco explicadas no livro didático, tínhamos a expectativa de que os alunos tivessem um grande interesse em resolvê-las. Por serem exercícios de interpretação gráfica, algo que esses alunos não estavam acostumados, também era esperado um entusiasmo por ser um desafio para eles.

Para coletar os dados, os exercícios foram recolhidos para uma posterior análise. Também foi usada uma câmera digital, onde foram tiradas fotos para registrar o momento em que os alunos estiveram trabalhando com a atividade proposta.

4. EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE *POSTERIORI*

A atividade prática foi desenvolvida em uma turma do 1º ano do Ensino Médio de um colégio estadual, em que estavam presentes dezesseis alunos divididos em duplas. Nos dias 17 e 24 de novembro de 2009 foram realizados, respectivamente, uma lista de atividades em dois períodos e, também em dois períodos, foram resolvidos os exercícios e esclarecidas as dúvidas dos alunos.

No começo da prática, foi explicado aos alunos a importância e seriedade do trabalho, e eles foram divididos em duplas, respeitando o plano de ensino elaborado. Foram entregues as atividades, que continham dois gráficos. A partir desses, era necessário encontrar suas expressões algébricas e responder outras questões que precisavam da interpretação gráfica e da forma algébrica da função polinomial do 2º grau.

O ensino do conteúdo da função quadrática, em especial na parte de interpretação gráfica, tem sido pouco trabalhado com os alunos, dificultando a associação de colocar a função polinomial do segundo grau em sua forma fatorada. Esse trabalho teve como objetivo principal saber se os alunos fazem essa ligação do gráfico e sua expressão algébrica, além de utilizar a interpretação gráfica para solucionar as questões.

No primeiro exercício, era pedido aos alunos para explicarem com suas palavras o significado de raiz de uma função. Logo após era dado um gráfico de uma função quadrática, no qual eram mostradas as raízes e o ponto onde o gráfico corta o eixo y, em que o aluno deveria determinar a expressão algébrica e achar a coordenada y de um ponto, sendo que a coordenada x lhes era dada. Os alunos também deviam explicar com suas palavras o que era o vértice de uma parábola e após isso encontrar o vértice do gráfico do exercício.

No exercício seguinte, novamente era dado um gráfico, o qual se referia ao lucro de uma empresa em função da quantidade de seus produtos vendidos. Nesse exercício, era dada apenas uma raiz e o valor da abscissa do vértice, além do ponto onde a parábola corta o eixo das ordenadas. Também era necessário que o aluno chegasse à função do 2º grau e logo após era necessário responder perguntas como:

- Quantos produtos a empresa precisará vender para que tenha um lucro igual a zero?
- Qual o maior lucro que a empresa consegue atingir?
- Quantos produtos a empresa precisará vender para obter esse lucro máximo?
- Qual a quantidade mínima de produtos que a empresa precisará vender para que obtenha lucro?

Tinha por hipótese que os alunos saberiam o significado de raiz e de vértice de uma função quadrática, porém tinha dúvidas se eles conseguiriam explicar com suas palavras esses conceitos.

Exercício 1: Com suas palavras explique o conceito de raiz de uma função quadrática.

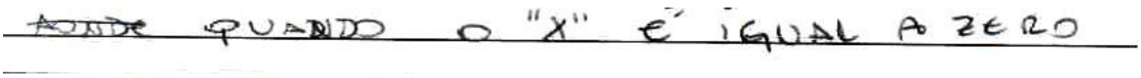


Figura 01 – Resposta da dupla 1, referente à primeira questão.

A resposta esperada seria “os valores de “x” que torna f(x) = 0”. Na figura 01 percebemos que a dupla parece saber o que é raiz, porém se expressou de forma equivocada.

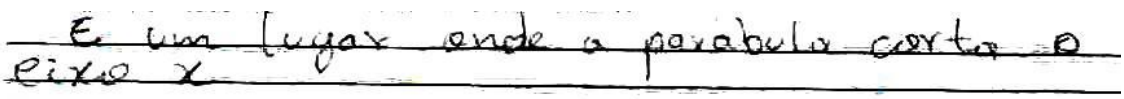


Figura 02 – Resposta da dupla 2, referente à primeira questão.

Novamente,, a dupla parece saber o conceito de raiz, e neste caso tenta explicá-lo de uma forma geométrica, mas se expressa de uma forma incompleta.

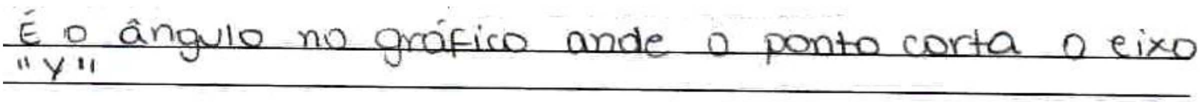


Figura 03 – Resposta da dupla 3, referente à primeira questão.

Neste caso a dupla realmente não tem formalizado o conceito de raiz de um trinômio de 2º grau. Talvez tenham associado essa pergunta a uma função polinomial do 1º grau, contudo a resposta também estaria incorreta.

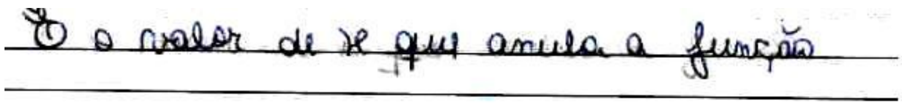


Figura 04 – Resposta da dupla 4, referente à primeira questão.

Como podemos ver na Figura 04 os alunos respondem corretamente a pergunta.

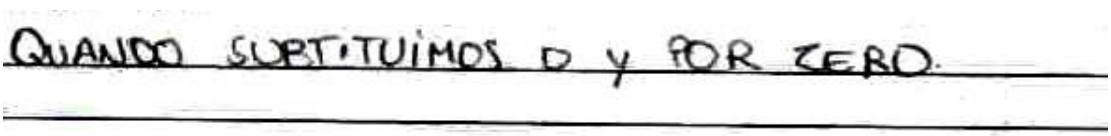


Figura 05 – Resposta da dupla 6, referente à primeira questão.

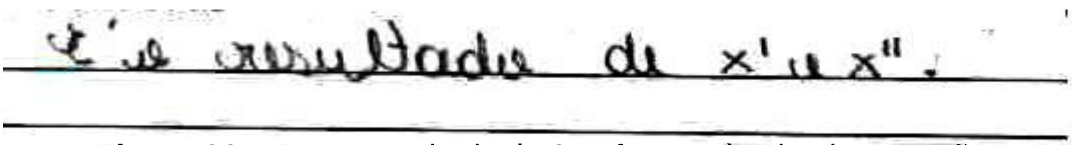


Figura 06 – Resposta da dupla 8, referente à primeira questão.

Uma das respostas obtidas foi que raiz é o resultado de x’ e x”, o que mostra que esta dupla resolve os exercícios de uma maneira mecânica, utilizando apenas a fórmula. Assim aprendeu que raízes de uma função quadrática, são as respostas da fórmula resolvente. Já a dupla 6 mostra que sabe o que fazer para achar as raízes. O primeiro passo é substituir o valor de "y" por zero, e supomos que a próxima etapa desta dupla seria utilizar a fórmula resolvente, o que nos mostra que estes alunos já fazem os exercícios de uma forma mecânica, sem pensar qual o conceito que está por trás destas perguntas.

Exercício 2 – c) Explique com suas palavras o que é o vértice de uma parábola.

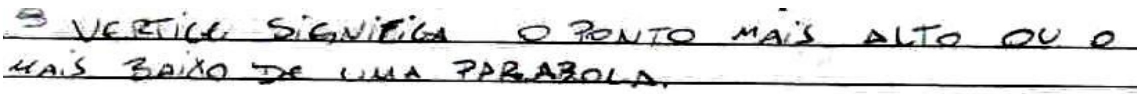

O VERTICE SIGNIFICA O PONTO MAIS ALTO OU O MAIS BAIXO DE UMA PARABOLA.

Figura 07 – Resposta da dupla 1, referente à segunda questão, item c.

Percebemos que os alunos têm uma ideia do significado do vértice, porém se expressam de uma maneira informal, ao invés de mencionar que o vértice pode ser o ponto máximo ou o ponto mínimo de uma parábola.

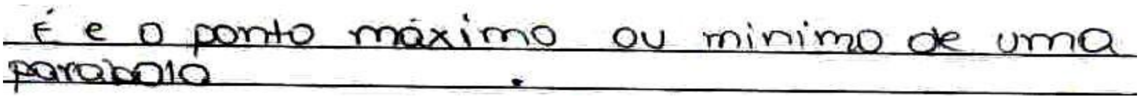

É e o ponto máximo ou minimo de uma parabola

Figura 08 – Resposta da dupla 3, referente à segunda questão, item c.

Neste caso percebemos que os alunos sabem o conceito de vértice, porém é a mesma dupla que no exercício sobre o conceito de raiz de uma função quadrática respondeu que "raiz é o ângulo no gráfico onde o ponto corta o eixo "y"".

Figura 09 – Resposta da dupla 7, referente à segunda questão, item c.

Já neste caso é visível que os alunos não dominam o conceito de vértice e também de parábola ao mencionar seus “vários lados”.

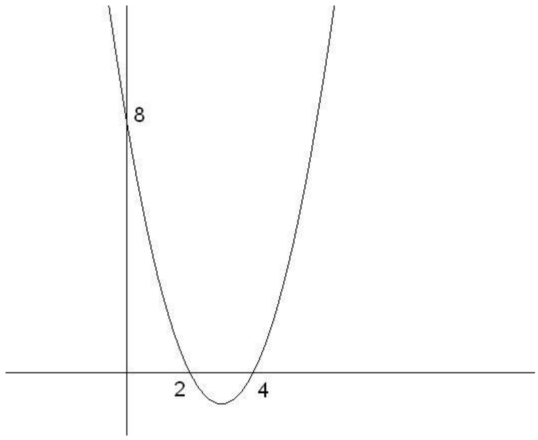
Na aula em que foi estabelecida uma discussão com os alunos, indagamos e eles disseram que realmente sabiam que raiz estava relacionada à coordenada x, porém não souberam explicar isso utilizando suas palavras. A maioria dos alunos confundiu o eixo das abscissas com o eixo das ordenadas, sendo que somente uma dupla soube responder corretamente a questão enquanto outros alunos sabiam a forma de encontrar as raízes através da fórmula resolvente. Foi explicado para os alunos que raízes de uma função quadrática são os valores de “x” que tornam f(x) = 0, ou por uma visão geométrica podemos considerar que raiz são os pontos no qual o gráfico intersecta o eixo das abscissas. Já em relação à pergunta sobre o vértice da função, a maioria dos alunos respondeu que vértice é o ponto mínimo ou máximo de uma parábola. Porém uma dupla nos chamou a atenção ao responder que vértice são os vários lados de uma parábola e, questionados sobre o que queriam dizer com isso, os alunos falaram que realmente não sabiam o conceito de vértice e tentaram relacionar o vértice com o gráfico da função polinomial do segundo grau.

Quando foi explicado que vértice do trinômio do 2º grau é o ponto de máximo (ou de mínimo) da parábola, alguns alunos relembraram que a partir do valor da ordenada do vértice poderíamos encontrar a imagem da função dada. Portanto foi comprovado que a maioria da turma sabia corretamente o conceito de raiz de uma função quadrática e do seu vértice, sendo que em alguns casos houve certa dificuldade para se expressarem. Os alunos não têm o hábito de explicar a maneira de como realizaram o exercício, sendo assim, isso pode ser um dos motivos deles terem essa dificuldade para se expressarem.

Outra hipótese que havia era de que os alunos teriam dificuldades em encontrar a forma algébrica da função a partir de seu gráfico. Mas como lhes foi ensinado em sala de aula que após achar as raízes poderíamos escrever a função na sua forma fatorada, os alunos tinham o conhecimento formalizado para resolver a atividade proposta.

Na questão na qual os alunos deveriam achar a expressão algébrica, todos eles reclamaram dizendo: "*Essa questão está muito difícil! Não temos informações para fazer isso!*" e outro aluno perguntou o que significava expressão algébrica complementando com a pergunta "*Temos que fazer Bhaskara?*". Essa pergunta mostrou como eles estavam mecanizados em relação a esse conteúdo. Após alguns minutos nos quais os alunos não conseguiam achar uma forma de realizar a tarefa, um dos estudantes falou: "*Não tem que fazer aquele "negócio" da forma fatorada?*" após ser chamada a atenção que o trabalho só deveria ser discutido em dupla essa frase parece ter feito os alunos se lembrarem da matéria trabalhada em sala de aula, pois voltaram com outro ânimo para continuar a realização do trabalho. Neste momento podemos perceber que os alunos tiveram mais dificuldades do que o esperado, mas só com a intervenção de um dos colegas as duplas voltaram à atividade proposta. Os alunos tinham o conhecimento, porém não estavam conseguindo usá-lo para uma questão diferente do que estavam acostumados a fazer. Apenas uma dupla não fez corretamente a questão que envolvia encontrar a função que originou o gráfico.

Exercício 2 - O gráfico abaixo representa uma função quadrática. Com base nesse gráfico determine:



a) A sua expressão algébrica:

$$(x-2)\cdot(x-4)$$
$$x^2-4x-2+8$$
$$x^2-6x+8$$

Figura 10 – Resposta da dupla 5, referente à segunda questão, item a.

Podemos notar que os alunos souberam identificar as raízes, colocar a função quadrática na sua forma fatorada e resolver o produto notável.

Neste exercício, apenas uma dupla não conseguiu escrever a expressão do segundo grau que originou o gráfico, confirmando a hipótese de que a grande maioria dos alunos sabia que a partir das raízes da função podemos escrever a expressão na forma fatorada. Fato que me chamou a atenção é que uma das duplas utilizou a fórmula resolvente para chegar às raízes após escrever a função polinomial do segundo grau na forma fatorada.

$$a=1 \quad b=-6 \quad c=+8$$
$$-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot8}$$
$$6\pm\sqrt{36-32}$$
$$6\pm\sqrt{4}$$
$$\frac{6\pm2}{2} \quad \frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}=4 \quad \frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Figura 11 – Resposta da dupla 8, referente à segunda questão, item a.

Perguntamos a dupla 8 quais os motivos que os levaram a fazer a fórmula resolvente já que no gráfico já eram dadas as raízes. Para minha surpresa nos foi dito que realmente não tinham certeza se a forma fatorada estava certa e então utilizaram este recurso para confirmar se estava correta a resposta.

Em relação a encontrar um valor de “y” a partir de um valor de “x”, cinco duplas acertaram o exercício em que era perguntado o valor de f(4), comprovando a hipótese que a maioria dos alunos saberia assimilar essa parte do conteúdo. No entanto, como eram expostas no gráfico as raízes e uma delas era 4, esperava-se que a resposta dos alunos fosse direta ao fazer uma rápida análise do gráfico. No entanto os alunos substituíram o valor em “x” para então encontrar o valor “y” desejado, sendo que se fosse feito uma interpretação gráfica notaríamos que o valor de y era “zero”, mostrando mais uma vez que os alunos estão acostumados a resolver os exercícios de uma forma mecânica.

Exercício 2

b) o valor de $f(4)$

$$4^2 - 6\ 4 + 8$$
$$16 - 24 + 8 = -8 + 8 = 0$$

Figura 12 – Resposta da dupla 3, referente à segunda questão, item b.

Na discussão em sala de aula, os alunos responderam que resolveram a questão desta maneira, pois foi assim que lhes fora ensinado. Os alunos se mostraram surpresos ao ser apresentado que não precisariam substituir o valor de “x” para encontrarmos o valor de “y”, e sim fazer uma simples interpretação gráfica. Mas por outro lado, concordaram que neste caso a análise gráfica facilitaria o exercício caso os valores numéricos fossem outros números não tão simples como os apresentados.

Já na última atividade desta primeira parte os alunos deveriam encontrar as coordenadas do vértice a partir do mesmo gráfico que lhes foi dado anteriormente. Por hipótese os alunos não deveriam apresentar dificuldades nesta parte, porque esse era um dos passos para a construção da parábola. Minha maior curiosidade era se os alunos utilizariam apenas as fórmulas da abscissa e da ordenada do vértice ou se resolveriam o exercício utilizando outro método.

Exercicio 2 –

d) o vértice da parábola:

$$X_v = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad V = (3, -1)$$

$$\begin{aligned} Y_v &= x^2 - 6x + 8 \\ & 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 \\ & 9 - 18 + 8 \\ & -18 + 17 = -1 \end{aligned}$$

Figura 13 – Resposta da dupla 3, referente à segunda questão, item d.

Neste caso, percebemos que a dupla encontra a abscissa do vértice a partir da média aritmética das raízes e após substitui o valor na equação para encontrar o valor da ordenada do vértice. Logo os alunos não precisaram decorar fórmulas para a resolução e aparentam dominar o conceito de vértice da parábola.

$$Vx = \frac{-b}{2 \cdot a} \qquad Vy = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8$$

$$Vx = \frac{+6}{2} = 3 \qquad Vy = 9 - 18 + 8$$

$$Vy = -1$$

Figura 14 – Resposta da dupla 6, referente à segunda questão, item d.

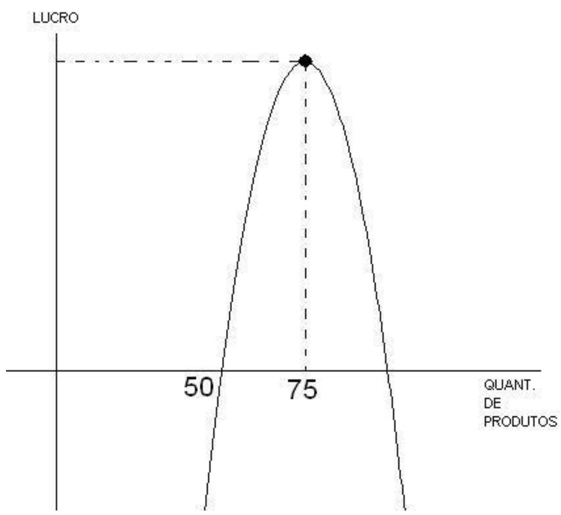
Já esta dupla utiliza a fórmula da abscissa do vértice em um primeiro momento e após isso usa este valor para encontrar a ordenada do vértice.

Apenas uma dupla não conseguiu resolver o exercício, sendo que os outros alunos variaram entre utilizar a fórmula da abscissa do vértice e a soma aritmética das raízes. Porém todos esses alunos substituíram esse valor encontrado na equação para finalmente ter as duas coordenadas do vértice. Perguntados sobre o motivo de não utilizar a fórmula da ordena do vértice, os alunos comentaram que se sabiam uma coordenada do vértice, era mais simples utilizar esse valor na equação ao invés de decorar mais uma fórmula.

Já na segunda parte da atividade era dada apenas uma das raízes e o valor “x” do vértice, fazendo assim que os alunos encontrassem a outra raiz usando algum método e após isso, escrever a expressão em sua forma fatorada. O detalhe do exercício era em relação à concavidade da parábola, pois essa estava voltada para baixo, o que significava que não bastava os alunos escreverem a expressão na forma fatorada, pois ainda teriam que multiplicar a função pelo valor “-1”, para enfim chegar à expressão que representava o gráfico. Por hipótese tínhamos que os alunos deveriam apresentar dificuldades ao fazer os ajustes na forma fatorada. Porém existiam dúvidas se realmente saberiam interpretar o gráfico e encontrar a outra raiz da função.

Exercício 3 - O gráfico abaixo mostra o lucro de uma empresa em função da quantidade de produtos vendidos. Com base nessas informações responda as seguintes perguntas:

OBS: O gráfico intersecta o eixo y no ponto $(0,-5000)$



a) Quantos produtos a empresa precisa vender para que tenha um lucro igual a zero?

O mais surpreendente foi que ninguém acertou este exercício, sendo que foram dadas 4 respostas diferentes para ele.

- 1 dupla encontrou como resposta 100 produtos;
- 4 duplas encontraram como resposta 50 produtos;
- 1 dupla encontrou como resposta 25 produtos;
- 2 duplas afirmaram que a empresa teria lucro zero quando não vendesse produtos.

Logo, percebe-se que houve 5 respostas incompletas e os alunos afirmaram que não perceberam que havia a possibilidade de duas respostas para este exercício ao analisar o gráfico. Já os alunos que deram como resposta que o lucro seria zero quando não fossem vendidos produtos, disseram que realmente não analisaram o gráfico e apenas pensaram que caso isso ocorresse não teriam lucro, não associando assim, essa ideia a de um possível prejuízo.

b) Qual a expressão algébrica que representa esse gráfico?

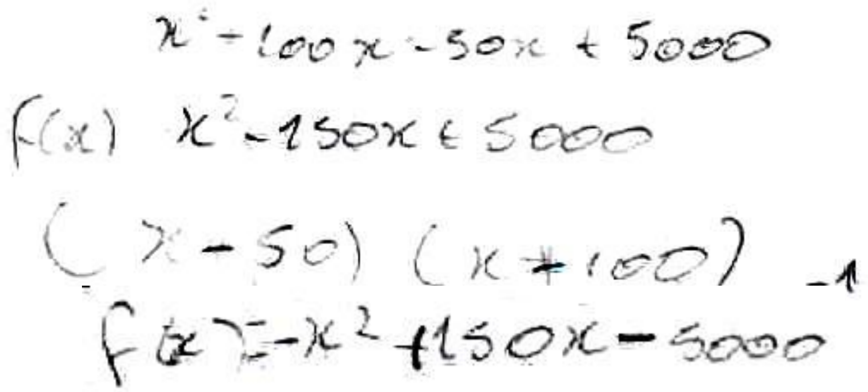


Figura 15 – Resposta da dupla 4, referente à terceira questão, item b.

Neste caso apenas duas duplas fizeram de forma correta. Após encontrar a outra raiz o aluno escreveu a função na sua forma fatorada e percebendo que a equação não representava corretamente o gráfico, fez o ajuste necessário para então chegar à resposta certa.

$$(x-100)(x-50)$$
$$x^2-50x-100x+5000$$
$$x^2-150x+5000$$

Figura 16 – Resposta da dupla 6, referente à terceira questão, item b.

Novamente duas duplas conseguiram encontrar a outra raiz, escrever a função na sua forma fatorada, realizar o produto notável, mas não fizeram o ajuste que era visível ao analisar o gráfico.

$$(x-50)(x-75)$$
$$x^2-75x-50x+3750$$
$$x^2-25x+3750$$

Figura 17 – Resposta da dupla 5, referente à terceira questão, item b.

Outras 3 duplas utilizaram uma das raízes e o valor da abscissa do vértice (dado no gráfico) para chegar à forma fatorada. Além disso, esses alunos em nenhum momento tentaram fazer algum ajuste na forma fatorada da função.

Na aula de resolução dos exercícios perguntamos aos alunos o motivo que os levaram a não fazer os ajustes necessários na equação. Então um dos alunos, de uma maneira informal, disse: "*Não sabíamos que por causa da parábola "tá" com a boquinha para baixo era preciso multiplicar por -1*". Já os outros alunos que escreveram a forma fatorada utilizando a abscissa do vértice falaram que não sabiam uma técnica para descobrir a outra raiz e, portanto achavam que deveriam utilizar o valor que estava aparecendo no gráfico (neste caso o x do vértice) para escrever a função na sua forma fatorada. Neste caso ficou comprovado que alguns alunos apenas sabiam achar as raízes e colocar a expressão na sua forma fatorada, não identificando os ajustes que devemos fazer caso a forma fatorada não seja a função do 2º grau apresentada. Neste exercício não bastava que os alunos soubessem a fórmula para encontrar a abscissa do vértice, mas era necessário que eles tivessem o conhecimento de que esse valor é a média aritmética das raízes.

Exercício 3

c) Qual o maior lucro que a empresa conseguirá?

Neste exercício bastava o aluno calcular o valor da ordenada do vértice a partir do valor da abscissa que fora dado graficamente, porém apenas uma dupla fez corretamente essa questão. Foram encontradas diversas respostas, sendo que uma delas foi 75 (que é o valor da abscissa do vértice). Uma outra resposta encontrada por duas duplas foi 3750. Mas essa resposta também está errada, pois estes alunos erraram ao escrever a forma fatorada utilizando o valor da abscissa do vértice e de uma das raízes da função. Os alunos substituíram o valor certo da coordenada do vértice, contudo não era a resposta certa para este exercício, pois já haviam errado o exercício anterior que interligava as respostas. Neste caso podemos perceber que houve coerência com o que foi pedido na atividade, pois mostrou que os alunos tinham o conhecimento necessário para resolver a questão. Porém o erro inicial resultou em uma resposta incorreta, apesar da maneira de realizar o exercício estivesse coerente. Os outros alunos falaram que realmente não entenderam a pergunta e não souberam relacionar o lucro máximo, com o desenho e com a referência do vértice da parábola. Novamente notamos que quando os alunos são indagados com questões que façam com que tenham que interpretar o gráfico, há uma grande dificuldade para a sua resolução.

Exercício 3

d) Quantos produtos a empresa precisará vender para obter esse lucro máximo

Para responder ao que era pedido na questão, era necessário apenas observar e analisar o gráfico, pois a quantidade de produtos vendidos para atingir o lucro máximo, ou apenas a coordenada x do vértice, era apresentado no gráfico. Por hipótese tínhamos que os alunos não apresentariam dificuldade ao responder esta questão, pois não precisariam efetuar cálculos. Porém apenas três duplas responderam corretamente a questão e novamente os alunos falaram que não conseguiram interpretar o que o exercício estava pedindo. Já outros alunos disseram que achavam que deveriam utilizar alguma fórmula e por isso somaram o valor de uma das raízes com a coordenada x do vértice obtendo como resposta 125 produtos. Outra vez os alunos mostraram dificuldade em interpretar um exercício no qual não precisavam sequer utilizar contas e sim apenas saber analisar o gráfico apresentado.

Exercício 3

e) Qual a quantidade mínima de produtos que a empresa precisará vender para que obtenha lucro?

Novamente observando o gráfico e notando que uma das raízes era 50 (logo neste ponto a empresa não teria lucro e nem prejuízo), era preciso apenas dizer que o necessário seria 51 produtos para a empresa ter lucro. Por hipótese tínhamos que os alunos poderiam apresentar certa dificuldade, pois se tratava de um exercício que necessitava de análise e interpretação, mas era possível realizar a atividade proposta. Comprovando que a hipótese de que os alunos apresentariam dificuldade, apenas três duplas responderam corretamente a questão. A maioria dos alunos respondeu que era necessário vender 50 produtos. Eles concordaram que o valor 50 era uma das raízes da função, mas não conseguiram interpretar que este valor era dado quando a empresa teria lucro igual a zero.

5. VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA

Essa última etapa da Engenharia Didática caracteriza-se por redigir as conclusões finais em função dos dados coletados. Essa validação é baseada no conjunto de informações do confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Os dados coletados para esta etapa de validação partem desde a análise *a priori*, momento em que são justificadas as escolhas de abordagem e dos recursos utilizados, e se estende até a análise *a posteriori*, na qual é confirmado ou não as hipóteses feitas inicialmente. Logo, após as análises a *priori*, a experimentação e as análises *a posteriori*, é possível afirmar que o trabalho foi válido.

Após formalizar a determinação e análise gráfica da função quadrática a partir do seu gráfico, os alunos afirmaram que tinham compreendido as perguntas. Portando foi constatado que os alunos sabiam que ao ter conhecimento das raízes podíamos escrever a expressão algébrica na sua forma fatorada, mas parece que esse modo era mecânico, pois na atividade em que era necessário fazer o ajuste para então termos a equação correspondente ao gráfico, os alunos tiveram dificuldade e não souberam realizar este ajuste. Também foi notado que os estudantes apresentam uma grande dificuldade em interpretar os dados de um gráfico, pois estão acostumados a utilizar fórmulas que já lhes dão as respostas prontas, sem a necessidade de pensar um pouco sobre o que estão realmente calculando.

O tempo para a realização da atividade foi suficiente para os alunos refletirem com suas duplas e terminarem o trabalho. O tempo para a formalização do conteúdo junto aos alunos para as resoluções dos exercícios e para esclarecer suas dúvidas também foi bem aproveitado. Além disso, no começo os alunos até se mostraram um pouco desmotivados, pois não sabiam como realizar as atividades, porém com a dica de um dos colegas todos voltaram a realizar com entusiasmo o trabalho mesmo tendo dificuldades em interpretar as perguntas e relacionar com o gráfico dado. Os alunos se mostraram participativos no momento da discussão sobre os exercícios, e atentos aos modos de como resolvê-los, pois para eles foi bom saber que podiam resolver o problema proposto sem utilização de fórmulas. Uma das alunas comentou: “*Gostei da atividade porque foi algo bem diferente do que a professora dá em aula. Achei um pouco difícil resolver as questões, mas depois da correção vi que era algo bem mais fácil do que eu imaginava.*”

Portanto acredito que tivemos êxito no objetivo do trabalho, pois a atividade foi proposta para termos conhecimento se os alunos sabiam chegar à expressão algébrica a partir de seu gráfico e se também apresentavam dificuldades na sua interpretação. Neste caso notei que a maioria teve problemas em saber fazer ajustes para chegar à expressão desejada, e também que a maioria apresenta uma intensa dificuldade em interpretar perguntas nas quais as respostas precisam de certa análise gráfica. Isso nos mostra o quanto os alunos estão despreparados para esses tipos de questões e que os conteúdos em sala de aula não estão levando esses alunos a usar um raciocínio feito para interpretar problemas e sim apenas para utilizar fórmulas de uma forma mecanizada.

Figura 18 – Alunos participando da atividade proposta

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho tratamos do ensino da função de 2º grau, que consideramos algo problemático. Em especial, o maior foco foi em relação a obter a equação a partir de um gráfico dado, e verificar se a partir dele os alunos conseguiriam interpretá-lo para responder outras questões. Os estudantes conseguem sim construir um gráfico de uma função quadrática seguindo fórmulas, mas quando são questionados para fazer o trabalho inverso, muitos se confundem. Eles não conseguem interpretar os dados sem utilizar fórmulas que tenham aprendido durante o decorrer dos estudos em sala de aula. Essas dificuldades foram constatadas através de pesquisas - realizadas com alguns professores e alunos do Ensino Médio - e por revisões bibliográficas a respeito de tal assunto.

Primeiramente, pensávamos em realizar a tarefa e discuti-la junto aos alunos em três semanas. Porém, foi necessário que os alunos fizessem a atividade em dois períodos e ela fosse discutida em uma segunda semana, na qual os estudantes poderiam ter mais tempo para apresentarem suas dúvidas. A atividade não foi realizada como o desejado pelo motivo do conteúdo estar atrasado, pois estávamos no mês de novembro e o professor começaria o assunto de função exponencial. Porém, mesmo sendo realizada desta maneira, a atividade não ocorreu de uma forma apressada e as dúvidas dos alunos referentes ao assunto tratado puderam ser esclarecidas.

O objetivo foi propor alguma mudança positiva no ensino usual, mesmo que pequena. E que, de alguma forma, contribuísse para a melhoria dessas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem. Para isso, foram propostas atividades que ajudassem a ver quais as maiores dificuldades que os alunos apresentavam em relação a esse tema. Além disso, outro propósito presente nessa pesquisa foi mostrar que as fórmulas não são a essência desse conteúdo e sim, que a interpretação gráfica é essencial.

A maior dificuldade para os alunos não está em fazer a conexão de raízes da função e escrever a expressão na sua forma fatorada, e sim em fazer ajustes, caso a função quadrática escrita na forma fatorada não seja a mesma que representa o gráfico. Uma nova abordagem se faz necessária para que os alunos não tenham mais essas dificuldades. Porém, as abordagens não foram encontradas em livros didáticos e nem em atividades de professores - que insistem em utilizar os métodos tradicionais com o uso de exercícios descontextualizados e repetitivos - em que o aluno acaba usando uma forma mecanizada para fazer os exercícios, sem usar qualquer raciocínio.

O plano de ensino teve o seguinte propósito: elaborar atividades focando o conteúdo, em que se pudesse analisar a interpretação feita pelos alunos perante um gráfico de uma função do 2º grau. Para isso, foi dado um gráfico com suas raízes, e pedido aos alunos que a partir desses dados escrevessem a forma algébrica de tal função, além de responder outras perguntas em que poderiam utilizar essa equação ou informações dadas no gráfico. Em um segundo momento foi dado novamente um gráfico, dessa vez com a concavidade voltada para baixo, uma das raízes e o valor da abscissa do vértice. Para isso os alunos deveriam não apenas escrever a função na sua forma fatorada, mas sim fazer um ajuste para chegar a tal expressão.

Assim, após a experiência de ensino, conseguimos validar algumas hipóteses como: os alunos tiveram problemas em escrever a função quadrática em sua forma fatorada, mas após “lembrarem” de como fazer, não tiveram dificuldades em realizar o primeiro exercício. A maioria da turma não soube fazer ajustes na forma fatorada quando pedido, o que comprova que eles não souberam fazer a interpretação gráfica. Também ficou evidente a dificuldade de interpretar perguntas, cujas respostas estavam no gráfico.

Os alunos estão acostumados a trabalhar só com os números inteiros, e isso pode ser um dos motivos que faz com que eles apresentem essas dificuldades. Também é válido salientar que alguns professores ao aplicarem o conteúdo acabam não mencionando situações reais. E essa falta de situações reais acaba desmotivando o aluno.

Nesse contexto, a identificação do problema que os alunos apresentaram ao realizarem a atividade foi o maior ganho durante o desenvolver do trabalho, pois nos possibilitou ver que existe uma deficiência na aprendizagem. Nesse ponto, vale ressaltar que até os livros didáticos apresentam (essa) falta de exercícios em relação a esse tema.

Enfim, concluímos que os objetivos iniciais foram cumpridos, uma vez que os resultados finais mostraram que realmente os alunos apresentaram dificuldades em relação à atividade aplicada, confirmando a contribuição do trabalho tanto no diagnóstico das dificuldades quanto na formação do autor.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N**. Associando o Computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência**. Tese de Doutorado, UNESP, Rio Claro, 2005.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: Brun, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 193-217.

ARTIGUE, Michelle; DOUADY, Régine; MORENO, Luis. **Ingeniería Didáctica em Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. México: 1. ed., 1995.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, p. 43. 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, pág. 113. 1998.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**. Zetetiké, Campinas-UNICAMP, v. 13 n. 23, 2005, p. 85-118.

DINIZ, Maria Ignez. SMOLE, Kátia Stocco. **Matemática Ensino Médio**. Editora Saraiva. São Paulo. 2005.

EVES, Howard: tradução Hygino H. Domingues. **Introdução à história da matemática**. Editora Unicamp. Campinas, 2004.

FREITAS, Kátia Siqueira de. **Importância da teleeducação na capacitação de professores**. Tecnologia Educacional. Feira de Santana, Sitientibus, N.11, p.113-119, jan./jun. 1993.

GRAVINA, M. A; SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados**. In: Rede Iberoamericana de Informática

Educativa, 4. Brasília. Anais eletrônicos do IV Congresso RIBIE, p. 1-16. Brasília, 1998.

HUTMACHER, Walo. **A escola em todos os seus estados: das políticas de sistemas às estratégias de estabelecimento**. In: NÓVOA, António. As organizações escolares em análise (2ª ed.). Lisboa, Nova Enciclopédia, 1995.

KAMPFF, A.; MACHADO, J. C.; CAVEDINI, P. **Novas Tecnologias e Educação Matemática. Artigo apresentado no X Workshop de Informática na Escola**, junto ao XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, Bahia, Julho-2004.

LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; JÚDICE, Edson Durão; WAGNER, Eduardo; CARVALHO, João Bosco P.; CARNEIRO, José Paulo G.; GOMES, Maria Laura M.; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**. Editora SBM, 2001.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. IN: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

MAIA, Diana. **Função Quadrática: Um estudo didático de uma abordagem computacional**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2007.

MARINHO, Simão Pedro P. **Novas tecnologias e velhos currículos; já é hora de sincronizar**. Revista E-curriculum, ISSN 1809-3876, São Paulo, V. 2, n.3, dezembro de 2006.

PEREIRA, M. R.. **A Impostura do Mestre**. Belo Horizonte, ISBN, 2008.

PINEDO, Christian Q. **História das equações**. Monografia em Ensino da Matemática, VII EREMATSUL - CEFET-PR UNED-PB COMAT. 2001.

SIMÕES, Maria Helena Pinedo. **Uma sequência para o Ensino-Aprendizagem de Função do 2º grau.** Dissertação de Mestrados em Educação Matemática. PUC-SP, 1995.

TALL, D.O. & VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity**. Educational Studies in Mathematics, p.151-169. 1981.

VASCONCELOS, S.D. & SOUTO, E. **O livro didático de ciências no ensino fundamenta**l. *Ciência & Educação*, v. 9, p. 93-104. 2003.

8. APÊNDICES

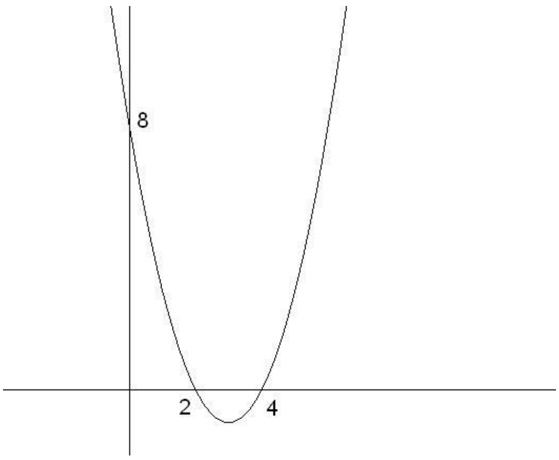
A seguir, a atividade respondida pelos alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual de Porto Alegre.

Nomes: ....

Turma: .... Data: ....../......./....... Professor: Leandro Viana da Rosa

1. Com suas palavras explique o conceito de raiz de uma função quadrática.

2. O gráfico abaixo representa uma função quadrática. Com base nesse gráfico determine:



a) A sua expressão algébrica:

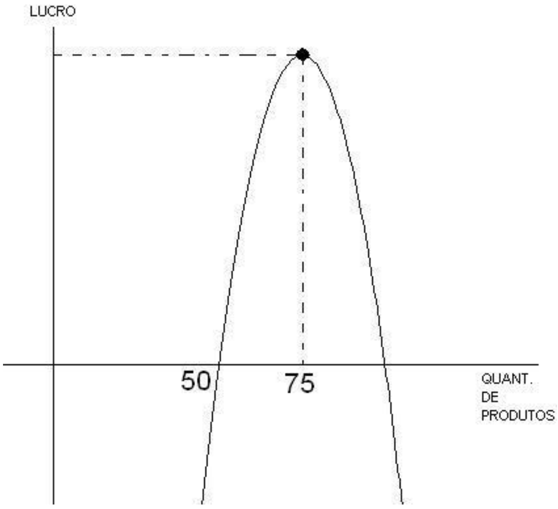
b) f(4):

c) Explique com suas palavras o que é o vértice de uma parábola.

d) O vértice da parábola:

3. O gráfico abaixo mostra o lucro de uma empresa em função da quantidade de produtos vendidos. Com base nessas informações responda as seguintes perguntas:

OBS: O gráfico intersecta o eixo y no ponto $(0,-5000)$



a) Quantos produtos a empresa precisa vender para que tenha um lucro igual a zero?

b) Qual a expressão algébrica que representa esse gráfico?

c) Qual o maior lucro que a empresa conseguirá?

d) Quantos produtos a empresa precisará vender para obter esse lucro máximo?

e) Qual a quantidade mínima de produtos que a empresa precisará vender para que ela tenha lucro?