UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O USO DO MATERIAL MANIPULATIVO *ALGEBRA TILES* NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

BÁRBARA CARDOSO KAYSER

Porto Alegre
2023

O USO DO MATERIAL MANIPULATIVO *ALGEBRA TILES* NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profª Drª Luisa Rodriguez Doering

Porto Alegre

2023

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O USO DO MATERIAL MANIPULATIVO *ALGEBRA TILES* NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Bárbara Cardoso Kayser

Banca examinadora:

Prof.ª Dr.ª Luisa Rodriguez Doering – Orientadora
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

Prof.ª Dr.ª Cydara Cavedon Ripoll
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo, sou grata a Deus, por seu amor incondicional, pelo sustento e toda inspiração.

Agradeço à minha querida orientadora, professora Luisa, pela dedicação e incentivo durante todas as etapas de elaboração deste trabalho. Foi um prazer ser orientada e inspirada por ti!

Agradeço à banca examinadora, a professora Cydara e o professor Marcus, por aceitar fazer parte desse trabalho e por contribuir com tanto conhecimento e valiosas reflexões.

Agradeço aos meus pais, Valter Alexandre e Nara Cristina, por não medirem esforços para me proporcionar a melhor educação possível, por serem abrigo e proteção. Também agradeço à minha irmã, Eduarda, por toda a parceria e por sempre me apoiar. Com certeza a realização de tudo isso não seria possível sem o apoio e o amor de vocês três!

Agradeço aos meus amigos da graduação, Bruna, Jaqueline e Thiago, pela troca de conhecimento, experiências, inquietações e conquistas. Agradeço por tornarem essa caminhada mais leve.

Agradeço aos professores da UFRGS que fizeram parte da minha trajetória, pelos conhecimentos compartilhados e por contribuírem de forma significativa em minha formação docente.

Agradeço aos professores do colégio Aplicação da UFRGS, pela oportunidade de vivenciar grandes experiências, tanto enquanto bolsista de extensão, quanto durante a realização dos estágios obrigatórios, nesse início de minha jornada docente.

A todos, meus mais sinceros agradecimentos!

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma pesquisa sobre as potencialidades do uso do material manipulável *Algebra Tiles* para a compreensão e o desenvolvimento de resoluções de equações de segundo grau por alunos do nono ano do ensino fundamental. Para tanto, foram desenvolvidas quatro atividades, fundamentadas pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval, que também fundamentou a análise dos dados. Buscou-se perceber se, em suas resoluções, os alunos apresentaram as três atividades cognitivas relacionadas à semiose: a formação de um registro, a conversão entre registros e o tratamento. Como principal resultado da pesquisa, consideramos que o uso dos *Algebra Tiles* propiciou uma nova representação semiótica para as equações de segundo grau e auxiliou os alunos a compreenderem e desenvolverem estratégias de resolução das mesmas. Eles puderam transitar entre os diferentes registros de representações semióticas, estabelecendo relações entre eles e realizando os tratamentos em cada uma dessas representações. De maneira geral, eles apresentaram o registro e o desenvolvimento das atividades cognitivas relacionadas à semiose que, de acordo com Duval (2003), são essenciais para a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: *Algebra Tiles*. Equações do segundo grau com uma incógnita. Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

ABSTRACT

This work presents a research on the potentialities of the use of the Algebra Tiles manipulative material for the understanding and development of resolutions of quadratic equations by students of the ninth grade of elementary school. Four activities were developed based on Duval's theory of the Registers of Semiotic Representation, which also supported the data analysis. We tried to understand if, in their resolutions, the students presented the three cognitive activities related to semiosis: the formation of a register, the conversion among registers, and the treatment. As the main result of the research, we consider that the use of Algebra Tiles provided a new semiotic representation for quadratic equations and helped students to understand and develop strategies to solve them. They were able to transit between the different registers of semiotic representations, establishing relationships among them, and carrying out the treatments in each of these representations. In general, they presented the registers and development of the cognitive activities related to semiosis which, according to Duval (2003), are essential for the learning of mathematical concepts.

Keywords: One-variable quadratic equations. Algebra Tiles. Theory of Duval of the Registers of Semiotic Representation.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Não é incomum que o ensino de matemática nas escolas esteja centrado na reprodução e memorização de regras. Na maioria dos casos, os alunos apresentam grandes dificuldades quando as aulas de matemática acabam sendo muito abstratas, especialmente quando se deparam com a álgebra e a utilização e manipulação de variáveis (PONTE, 2005).

Quando é trabalhado o conteúdo de equações de segundo grau e suas formas de resolução, muitas vezes é logo inserido o método de resolução por meio da fórmula de Bháskara. Com esse método, os alunos necessitam “apenas” memorizar a fórmula e encontrar o resultado, sem ter sequer alguma ideia de como foi possível encontrá-lo. Essa foi exatamente a experiência que eu tive como aluna do Ensino Fundamental.

Quando estava no ensino fundamental, o primeiro e único método que aprendi foi, de fato, o método de resolução por meio da fórmula. Aprendi, com certa facilidade, a identificar quais eram os coeficientes “a”, “b” e “c” da equação e a utilizá-los na fórmula. Apesar de sempre ter tido curiosidade em relação a “origem” das coisas, a fórmula de Bháskara para mim parecia complexa demais para que eu pudesse compreendê-la. Dessa forma, me contentei em apenas decorá-la e utilizá-la para resolver as equações.

Foi então que, durante o meu primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Introdução às Funções Algébricas, tive meu primeiro contato com o “completamento de quadrados” e a dedução da famosa - e temida - Fórmula de Bháskara. Então, no decorrer da minha formação, tive a oportunidade de perceber que a dedução poderia ser, de certa forma, acessível aos alunos da Educação Básica.

Durante o ano de 2022, ao realizar a disciplina de Estágio II, deparei-me com a incumbência de ensinar o conteúdo de equações de segundo grau para uma turma do nono ano do ensino fundamental. Por sempre ter tido facilidade com a álgebra e a manipulação algébrica, tanto na escola como na graduação, imaginei que não teria grandes problemas com essa tarefa.

Porém, ao iniciar a docência com os alunos dessa turma, percebi o quanto, na verdade, essa tarefa seria desafiadora para mim. Em sua maioria, os alunos possuíam grandes dificuldades com a álgebra, desde a compreensão e o pensamento algébrico, até, por consequência, as operações e resoluções de equações.

De acordo com Lins e Gimenez (1997), tanto no Brasil como no exterior, o ensino e a aprendizagem de álgebra no Ensino Fundamental se constituem como um momento de grande complexidade para alunos e professores. Os autores afirmam que um dos fatores para isso é a falta de comunicação entre a aprendizagem de conhecimentos novos com aqueles já conhecidos e adquiridos pelos alunos.

Além disso, Ponte (2005) afirma que diversos autores discutem as dificuldades dos alunos em relação à transição do estudo da aritmética para a álgebra. Em sua maioria, essas dificuldades estão relacionadas aos conceitos e aos seus significados.

Uma alternativa para se adereçar a essas dificuldades, é o uso de materiais didáticos manipuláveis. De acordo com Rodrigues e Gazire (2012), esses materiais permitem uma aproximação entre a teoria matemática com a experimentação prática, por meio da ação manipulativa.

A escolha de utilizar o material manipulativo *Algebra Tiles* se deu a partir do contato com a dissertação de mestrado realizada por Meinerz (2020). No caso da autora, foi a partir da análise de um livro usado em escolas nos Estados Unidos, em um grupo de pesquisa de Análise de Material Didático do PPGEMat da UFRGS, que houve o conhecimento do material *Algebra Tiles*, utilizado como recurso para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita.

Já nas resoluções de equações do segundo grau, o uso dos *Algebra Tiles* é proposto em Schulz et. al (2004), com algumas sugestões de utilizá-lo para realizar a resolução das equações por meio da fatoração e, também, com o método de completar quadrados.

Portanto, inspirada por esses trabalhos e por minha trajetória pessoal, esta pesquisa buscou responder à seguinte pergunta:

Quais as potencialidades do uso do material manipulável *Algebra Tiles* para a compreensão e o desenvolvimento de resoluções de equações de segundo grau por alunos do nono ano do ensino fundamental?

Para buscar respostas à pergunta, foi realizada uma pesquisa qualitativa com uma turma de nono ano do Colégio de Aplicação da UFRGS, buscando-se analisar de que forma eles conseguem realizar conversões entre a representação pictórica, por meio dos *Algebra Tiles*, e a representação algébrica e, com isso, alcançar às atividades cognitivas relacionadas à semiose.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, inicialmente serão apresentadas concepções relacionadas ao ensino de álgebra na escola e das equações de segundo grau. Depois disso, trataremos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, que serve de base tanto para a construção das propostas didáticas aqui apresentadas, quanto para a posterior análise dos dados que serão coletados, uma vez que destaca a importância dos diferentes registros de representação para a aprendizagem de matemática. Por fim, será exposto o material manipulativo *Algebra Tiles*, que será utilizado na pesquisa, com o objetivo de contribuir com as diferentes atividades cognitivas relacionadas à semiose, presentes em Duval (2012).

2.1 ENSINO DE ÁLGEBRA

Neste subtópico apresentaremos as concepções de Usiskin (1995) e de Ponte (2005) a respeito da álgebra na educação básica. Além disso, serão expostas as principais dificuldades a respeito da transição da aritmética para a álgebra, discutidas pelos autores.

De acordo com Usiskin (1995), a álgebra não é fácil de ser definida e a álgebra ensinada na escola possui significados muito distintos da álgebra estudada na universidade. Segundo o autor, a álgebra da escola está muito relacionada a utilizar letras como uma forma de representar números e realizar operações com essas “letras”. Porém, as próprias concepções de variável se modificam com o tempo, trazem distintas definições, símbolos e significados (USISKIN, 1995).

Portanto, Usiskin (1995) propõe quatro diferentes concepções da álgebra, pois acredita que elas determinam as finalidades da álgebra, e correspondem à diferença de importância dada aos variados usos das variáveis. A seguir, apresentamos essas quatro concepções.

A Concepção 1 é da ***álgebra como aritmética generalizada***, em que é natural tratar as variáveis como objetos de generalização de algum modelo. Um exemplo disso é utilizar “para todo n, $n \cdot 0 = 0$” para expressar a ideia de que “o produto de qualquer número por zero é zero”. Dentro dessa concepção, então, é necessário que o aluno consiga *traduzir* e *generalizar* (USISKIN, 1995).

Já a Concepção 2 traz ***a álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas***, na qual as variáveis são ou incógnitas, ou constantes. Enquanto na Concepção 1 não se têm incógnitas, na visão da álgebra como estudo de procedimentos, além de representar um problema de forma algébrica, também espera-se que o aluno busque resolver a equação a partir de algum procedimento. Portanto, têm-se, nessa concepção, a busca por *simplificar* e *resolver* (USISKIN, 1995).

Como Concepção 3 é destacada ***a álgebra como estudo de relações entre grandezas***, onde estão presentes as relações entre grandezas e fórmulas. A maior diferença entre essa concepção e as anteriores é a ideia de que nesta as variáveis de fato variam. Ou seja, as variáveis não são uma incógnita cujo valor se deseja descobrir, mas sim, são argumentos ou parâmetros. “Um argumento, no sentido de representar os valores no domínio de uma função e, um parâmetro, no sentido de representar um número do qual outros números dependem” (Usiskin, 1995, p.10).

Por fim, a Concepção 4 traz ***a álgebra como estudo das estruturas***, na qual a concepção de variável é diferente de todas as anteriores. Aqui, a variável é como um “símbolo arbitrário” ao qual não se atribui algum valor e como exemplo podemos citar as operações com polinômios, e também a fatoração de polinômios. Não se busca por um valor para “x”, apenas se estuda as propriedades das operações.

Tanto Usiskin (1995), quanto Ponte (2005), apontam a dificuldade dos alunos na transição da aritmética para a álgebra. Como exemplo dessas dificuldades, está o impasse em ver as letras como representação de um “número desconhecido” e em não compreender o sentido de uma expressão algébrica (PONTE, 2005). Além disso, outra dificuldade apresentada pelos alunos está em traduzir informações da linguagem natural para a algébrica, e vice-versa.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) afirmam, em relação a matemática do terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, “nos resultados do SAEB, por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país” (BRASIL, 1998, p. 115). Assim, sugere-se uma reflexão em relação à forma como os alunos constroem o conhecimento matemático, “principalmente quanto à variedade de representações” (BRASIL, 1998, p. 115). Por fim, os PCN afirmam ser interessante propor situações que não apenas focadas em desenvolver o estudo da Álgebra por meio de manipulações de equações de uma forma apenas mecânica.

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) atribui importância à álgebra, uma vez que a define como uma das cinco unidades temáticas da Matemática. Além disso, afirma que para desenvolvimento do pensamento algébrico pelos alunos, é necessário que eles, entre outras habilidades, sejam capazes de “interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas” (BRASIL, 2018).

Assim, a partir das diferentes concepções sobre a álgebra de Usiskin (1995), esse trabalho utiliza o ponto de vista da álgebra como ferramenta de estudo de procedimentos para a resolução de problemas. Além disso, busca contribuir com a produção de significados pelos alunos para a álgebra, trabalhando com diferentes registros de representações semióticas, incentivando a relação entre a língua materna e a algébrica.

2.2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE RAYMOND DUVAL

De acordo com Duval (2003, p. 13), diferente de outros domínios do conhecimento, a atividade cognitiva requerida pela matemática está relacionada à “importância primordial das representações semióticas” e à “grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática”.

Em relação ao primeiro conceito, Duval (2012, p. 268) afirma que “os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata” e, portanto, são necessários “representantes” que os caracterizem. Portanto, o autor defende a ideia de que as representações semióticas, ou seja, as diferentes formas de representar os objetos matemáticos, são essenciais para o pensamento matemático.

Porém, deve-se atentar ao fato de que “as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado” (DUVAL, 2003, p. 13). Logo, os procedimentos realizados para o cálculo númerico, por exemplo, depende diretamente do sistema de numeração pelo qual se optou utilizar. E, ademais, o autor afirma que “os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele” (DUVAL, 2012, p. 268). Dessa forma, a distinção entre os símbolos, traçados e figuras que são utilizados para representar os números, funções, pontos, ou círculos, é o que possibilita a compreensão da matemática.

Mas, como é possível não confundir os objetos e suas representações, visto que apenas se pode tratar com as representações semióticas? A impossibilidade de acesso direto aos objetos matemáticos, segundo Duval (2012), faz com que a confusão seja praticamente inevitável. Ao mesmo tempo, fica o questionamento de como, pelo contrário, se pode adquirir o domínio dos tratamentos ligados às representações semióticas, sem compreender o conceito dos objetos que estão sendo representados?

Duval (2012) afirma que esse é um paradoxo cognitivo do pensamento matemático e que acaba não sendo percebido no ensino pelo fato de se dar mais importância às representações mentais do que às representações semióticas. Porém, o autor destaca que o funcionamento cognitivo do pensamento é inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação

Portanto, pode-se afirmar que a ***noesis***, definida como percepção conceitual de um objeto, é indissociável da ***semiose*** - a produção de uma representação semiótica (DUVAL, 2012). Assim, o autor afirma que para haver a compreensão dos objetos matemáticos, é necessário que exista a possibilidade de operação de diversos registros de representação semiótica e, além disso, conseguir optar por um registro ao invés de outro no decorrer de um mesmo passo.

Dessa forma, em Duval (2012), para que um sistema semiótico possa ser considerado um registro de representação, é necessário que permita as três atividades cognitivas fundamentais descritas a seguir.

i) A formação de uma representação identificável, a partir da seleção de relações e de dados no conteúdo que se quer representar, com a possibilidade de utilizá-la para realizar tratamentos.

ii) O tratamento de uma representação pode ser definido como a transformação que é realizada numa mesma representação. Assim, dependendo da natureza do registro, haverá diferentes regras de tratamento específicas daquele registro.

iii) A conversão é a transformação de uma representação em outra, mantendo todo, ou parte, do conteúdo do registro inicial. É importante destacar que a conversão é diferente e não depende do tratamento, porém é importante pois, em determinadas situações, permite a realização do tratamento de forma mais econômica e potencializada (DUVAL, 2012).

Em relação às três atividades cognitivas relacionadas à semiose, Duval (2012) discute o fato de que apenas a formação e o tratamento são considerados no ensino escolar. Para o autor, a não utilização da conversão na escola está relacionada ao obstáculo de reconhecer que duas representações fazem referência ao mesmo objeto. Ao não realizar essa correspondência entre as representações, segundo o autor, tende-se a um "bloqueio o e a um abandono rápido das atividades de busca para resolver um problema ou a erros que apontam confusões ininterpretáveis" (Duval, 2018, p. 10).

Para superar este obstáculo que é a conversão, Duval (2018, p. 12) afirma que são necessárias situações nas quais o aluno possa "comparar as variações de conteúdo das representações em um registro A com variações correlatas de conteúdo das representações em um registro B". Além disso, é importante que as representações mostrem como selecionar as informações do problema e organizá-las em uma igualdade numérica.

Portanto, em nossa proposta, buscamos oportunizar aos alunos o uso dos diferentes registros de representação semiótica, que nesse caso, são a representação pictórica, por meio dos *Algebra Tiles*, a língua materna e a representação algébrica. Dessa forma, o objetivo do trabalho é que, ao realizarem a formação da representação do problema por meio do material manipulativo, seguida do tratamento da representação a partir da manipulação dos *Algebra Tiles*, e da conversão para a representação algébrica, descrevendo as operações de tratamento realizadas a partir da língua materna, os alunos abranjam as três atividades cognitivas fundamentais.

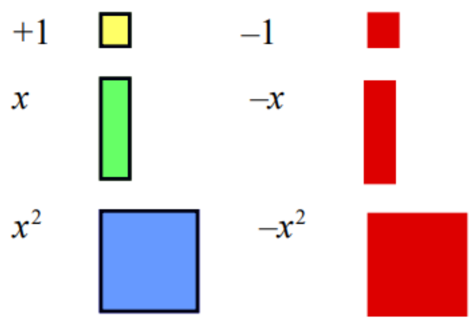
Dessa forma, as resoluções dos alunos serão analisadas a partir da observação dos registros de representação semiótica utilizados por eles, e de que forma conseguem realizar as conversões entre uma representação e outra, alcançando as atividades cognitivas relacionadas à semiose.

3 OS *ALGEBRA TILES*

De acordo com Meinerz (2020), o material manipulativo, *Algebra Tiles*, é utilizado em diversas escolas nos Estados Unidos e é empregado no estudo de diferentes conteúdos matemáticos, como, por exemplo, as operações com números inteiros e a fatoração de expressões algébricas polinomiais. Além disso, Thorton (1995) afirma que materiais manipulativos semelhantes aos *Algebra Tiles* já existiam de uma forma, ou de outra, há mais de 30 anos e têm sido utilizados para auxiliar os alunos na compreensão de diferentes conceitos algébricos.

O material é composto por peças de três formatos (quadrados grandes, quadrados pequenos e retângulos), cada uma delas simbolizando um “valor” diferente. De acordo com a Figura 1 apresentada abaixo, vemos que os quadrados menores correspondem ao número “+1”, enquanto os retângulos correspondem à variável “x” e os quadrados maiores à “x^2”. Ainda, é importante destacar que a medida do lado da peça “x^2” é igual ao comprimento da peça “x”, assim como, a largura da peça “x” tem a mesma medida do lado da peça “+1”. Inclusive, o comprimento de “x” não pode ser representado por um número inteiro das medidas das peças unitárias (+1).

Figura 1: Ilustração dos *Algebra Tiles*



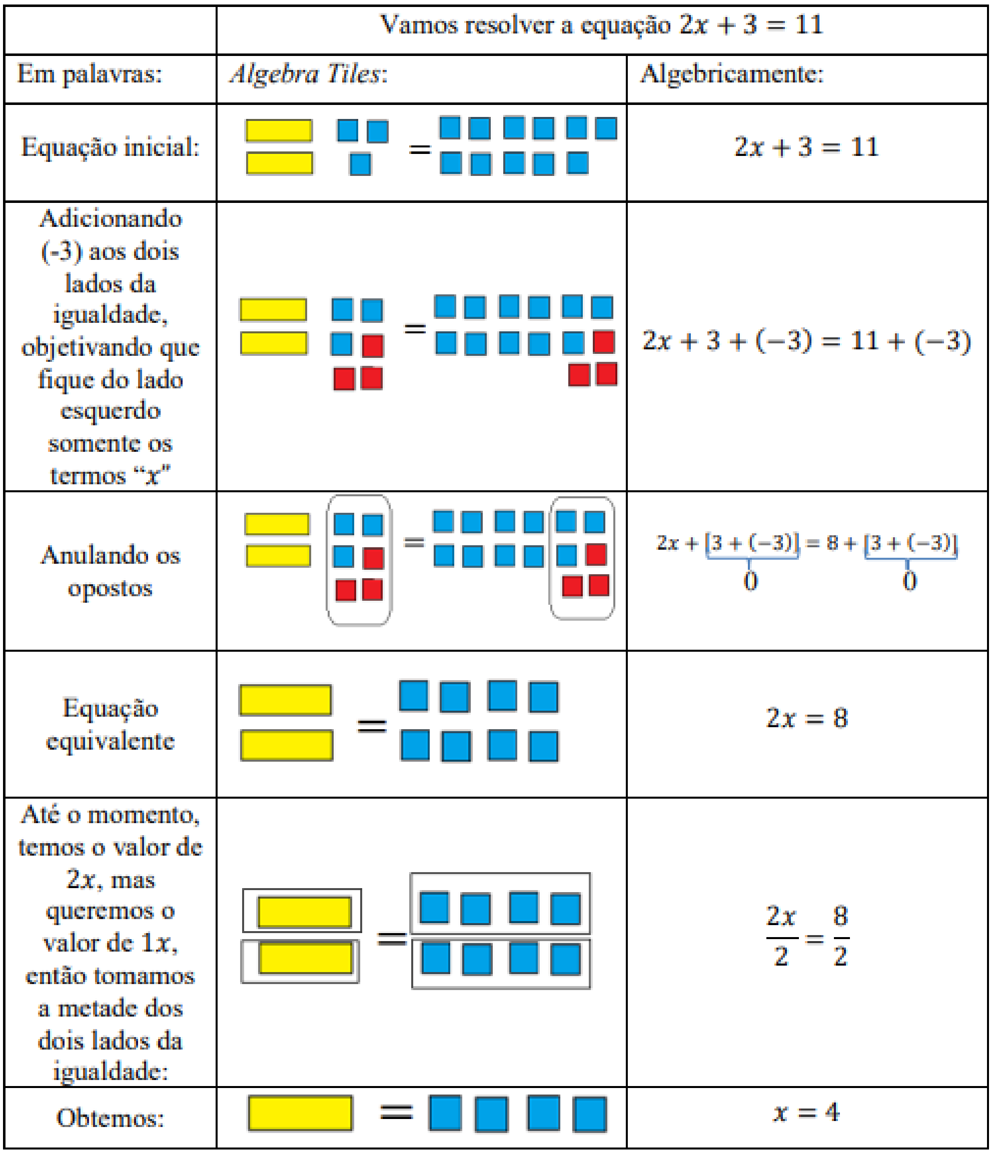
Fonte: Hall (p. 13, 1999).

Podemos ver na figura anterior que, além das peças de cores amarelo, verde e azul, no material também existem peças vermelhas que, de acordo com Hall (1999), representam os elementos que possuem coeficientes negativos. Porém, Meinerz (2020), que utilizou apenas as peças “+1”, “-1”, “x” e “$-x$” destaca a importância de se optar por outra cor para a peça “$-x$”, uma vez que ela não representa necessariamente um valor negativo, como ocorre em outros materiais manipuláveis, como o ábaco dos números inteiros, mas representa a ideia do valor oposto ao de x.

Por fim, vale destacar que a importante propriedade do elemento oposto dos números inteiros, (dada um número inteiro a, existe um inteiro b tal que $a + b = 0$) pode ser apresentada nos *Algebra Tiles* como uma regra: Ao unirmos qualquer uma das peças com aquela que representa o seu oposto, ambas se anulam resultando em zero.

A seguir, na Figura 2, está ilustrada uma sugestão de utilização dos *Algebra Tiles* para a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, trazido por Meinerz (2020). O procedimento aplicado utiliza os princípios aditivo e multiplicativo para resolver a equação $2x + 3 = 11$.

Figura 2: Resolução da equação $2x + 3 = 11$ utilizando *Algebra Tiles*.



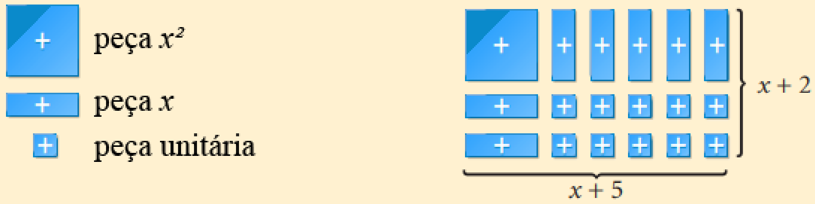
	Vamos resolver a equação $2x + 3 = 11$	
Em palavras:	*Algebra Tiles*:	Algebricamente:
Equação inicial:		$2x + 3 = 11$
Adicionando (-3) aos dois lados da igualdade, objetivando que fique do lado esquerdo somente os termos "x"		$2x + 3 + (-3) = 11 + (-3)$
Anulando os opostos		$2x + \underbrace{[3 + (-3)]}_{0} = 8 + \underbrace{[3 + (-3)]}_{0}$
Equação equivalente		$2x = 8$
Até o momento, temos o valor de $2x$, mas queremos o valor de $1x$, então tomamos a metade dos dois lados da igualdade:		$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$
Obtemos:		$x = 4$

Fonte: Meinerz, 2020.

Já em relação ao uso do material como recurso na resolução de equações do segundo grau, aparecem em Schulz et al (2004) algumas sugestões de utilizá-lo para realizar a resolução das equações por meio da fatoração, e também com o método de completar quadrados. As figuras 3 e 4 mostram de que maneira os autores sugerem a utilização do material manipulativo em cada um dos métodos de resolução.

Figura 3: Fatoração de equações do 2º grau com *Algebra Tiles*.

Você pode modelar uma expressão quadrática que pode ser fatorada com *Algebra Tiles*, como mostrado abaixo.



A região formada pelo *Algebra Tiles* acima mostra que a área total $x^2 + 7x + 10$ pode ser representada pelo produto $(x+5)(x+2)$.

Fonte: Schulz et. al., 2004, p. 291, tradução da autora.

Figura 4: Instruções para completar quadrados com *Algebra Tiles*

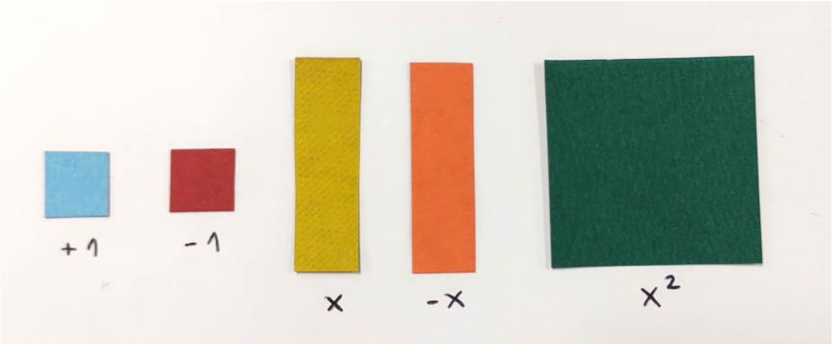
1. Você pode organizar 1 peça "x^2" e 4 peças "x" para formar um quadrado? Explique sua resposta.
2. Qual é o menor número de peças unitárias que você precisa adicionar às suas peças para formar um quadrado?
3. Escreva uma expressão na forma padrão e fatorada para o conjunto de peças que formam o quadrado.

Fonte: Schulz et. al., 2004, p. 299, tradução da autora.

Assim, optamos por utilizar as cores das peças do *Algebra Tiles* de acordo com as utilizadas por Meinerz (2020), adicionando apenas um quadrado verde de lado equivalente ao comprimento do retângulo "x" para representar "x^2", conforme pode-se observar na Figura 5. Além disso, vale destacar que Meinerz (2020) utiliza, para as unidades 1 e -1, as cores tradicionais para positivos e negativos. Todas as peças foram confeccionadas com cartolinas de maior gramatura, visando maior durabilidade.

Além disso, vale destacar que decidimos não utilizar as peças "-x^2", uma vez que a utilização dos *Algebra Tiles* na representação das equações de segundo grau, envolve a ideia de área e, portanto, a peça "$-x^2$" envolveria a interpretação de uma área negativa.

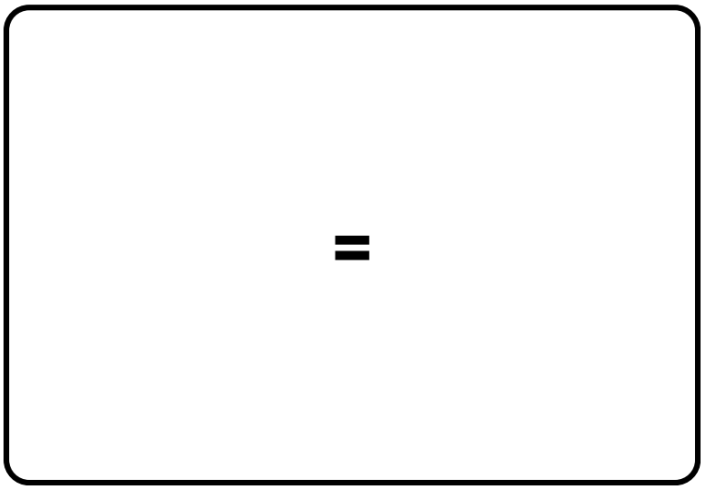
Figura 5: Peças e cores utilizadas em nossa pesquisa



Fonte: acervo da autora.

Além dessas peças, também foram confeccionados “tapetes da igualdade”, criados por Meinerz (2020), sobre os quais os alunos deveriam manipular os *Algebra Tiles*. Para isso, os sinais de igualdade foram impressos em folha branca (metade de folha A4) e, também, plastificados, conforme a Figura 6.

Figura 6: Tapetes da igualdade



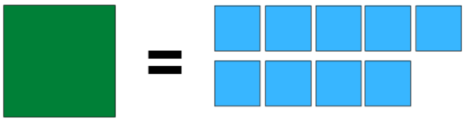
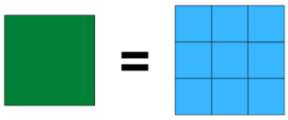
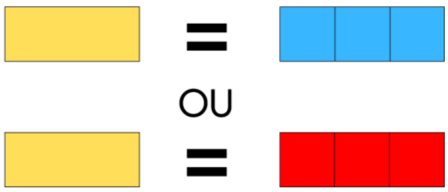
Fonte: acervo da autora.

Em relação à regra do elemento oposto com os *Algebra Tiles*, ao utilizarem as peças sobre o tapete da igualdade e unirem qualquer uma delas com aquela que representa o seu oposto, ambas devem ser retiradas do tapete simultaneamente.

3.1 COMO RESOLVER EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU COM UMA INCÓGNITA UTILIZANDO OS *ALGEBRA TILES*

Nesta seção exemplificamos uma forma de resolução equações do segundo grau com uma incógnita utilizando os *Algebra Tiles*. A Figura 7 apresenta a sugestão de como resolver as equações da forma $x^2 = a$, com $a \geq 0$, no caso particular em que $a = 9$.

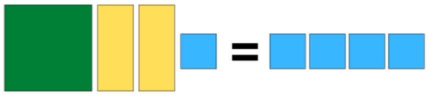
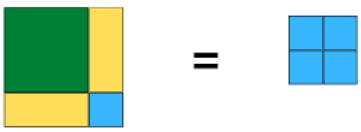
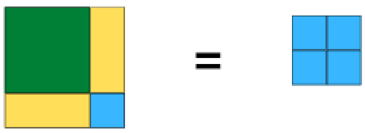
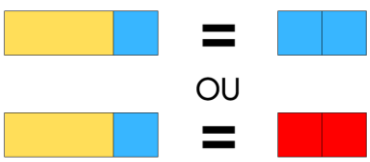
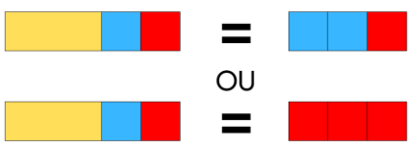
Figura 7: Resolução da equação $x^2 = 9$ utilizando *Algebra Tiles*

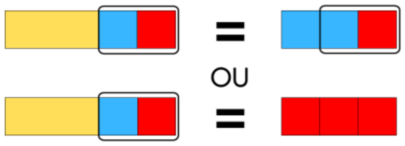
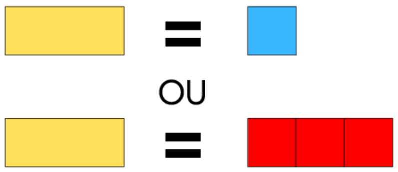
Vamos resolver a equação $x^2 = 9$		
	Algebra Tiles:	Algebricamente:
Equação inicial:		$x^2 = 9$
Manipulando o material em busca de formar um quadrado à direita da igualdade		$x^2 = 9$
Comparando os lados dos quadrados, temos que x é igual a 3 (que é a raiz quadrada de 9). Porém, $(-3)^2$ também é 9, logo, -3 também é solução da equação.		$x = 3$ ou $x = -3$

Fonte: acervo da autora.

Já a Figura 8, sugere uma forma de como utilizar os *Algebra Tiles* na resolução de equações de segundo grau, no caso de trinômios quadrados perfeitos.

Figura 8: Resolução da equação $x^2 + 2x + 1 = 4$ utilizando *Algebra Tiles*

Vamos resolver a equação $x^2 + 2x + 1 = 4$		
	Algebra Tiles:	Algebricamente:
Equação inicial:		$x^2 + 2x + 1 \; = \; 4$
Manipulando o material em busca de formar quadrados em ambos lados da igualdade		$x^2 + 2x + 1 \; = \; 4$
Analisando o quadrado à esquerda da igualdade, temos que a medida dos seus lados é x+1		$(x+1)^2 = 4$
Temos que x+1 é igual ao valor que, ao quadrado, resulta em 4. Portanto, x+1 pode ser +/- a raiz quadrada de 4 que é 2		$x + 1 \; = \; 2$ ou $x + 1 \; = \; -2$
Adicionamos (-1) aos dois lados da igualdade, para que tenhamos apenas “x” no lado		$x + 1 \; - 1 = \; 2 \; - 1$ ou $x + 1 \; - 1 = -2 \; - 1$

esquerdo		
Anulamos os opostos		$x + (1 - 1) = 1 + (1 - 1)$ ou $x + (1 - 1) = -2 - 1$
Obtemos:		$x = 1$ ou $x = -3$

Fonte: acervo da autora.

4 METODOLOGIA

Buscando responder à pergunta diretriz: "**Quais as potencialidades do uso do material manipulável *Algebra Tiles* para a compreensão e desenvolvimento de resoluções de equações de segundo grau por alunos do nono ano do ensino fundamental?"**, a pesquisa seguiu, como paradigma metodológico, uma abordagem qualitativa. Bogdan e Biklen (1994) definem a investigação qualitativa a partir de cinco características principais, com as quais esse projeto é condizente.

A primeira característica é que na pesquisa qualitativa tem-se como fonte de dados o ambiente natural, no qual o investigador deve estar inserido, pois acredita-se que "as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência" (BOGDAN E BIKLEN, 1994, p. 48). Além disso, como segunda característica, tem-se que a investigação é descritiva. Ou seja, os dados são recolhidos "em forma de palavras ou imagens e não de números" (BOGDAN E BIKLEN, 1994, p. 48).

Já a terceira característica é que o "pesquisador qualitativo" tem mais interesse pelo processo do que pelo resultado final. Portanto, observa como as "expectativas se traduzem nas atividades, procedimentos e interações diárias" (BOGDAN E BIKLEN, 1994, p. 49). Aliada a isso, a quarta característica diz que os pesquisadores analisam os dados de forma indutiva, ou seja, a partir da observação do que ocorre durante a pesquisa e as "abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando" (BOGDAN E BIKLEN, 1994, p. 50).

Por fim, como última característica, está a importância do significado. Assim, tem-se o objetivo levar em consideração as experiências do ponto de vista dos participantes da pesquisa, como eles as veem e interpretam (BOGDAN E BIKLEN, 1994).

Para coletar as informações durante a execução da pesquisa será elaborado um diário de campo, no qual serão realizados registros pela professora-pesquisadora durante e após cada um dos encontros. Esses registros conterão uma dupla perspectiva: sendo uma descritiva, na qual haverá apenas a descrição das tarefas e eventos ocorridos; e outra interpretativa, que apresenta as reflexões, impressões e opiniões da pesquisadora (Fiorentini e Lorenzato, 2006). E para complementar o diário de campo serão realizadas gravações das aulas, bem como a coleta de registros realizados pelos alunos.

Assim, analisamos se os alunos conseguiram, partindo dos dados algébricos, utilizar o material *Algebra Tiles* como uma representação identificável, realizar o tratamento trabalhando com eles e, por fim, fazer a conversão, uma vez que, de acordo com Duval (2018), a conversão de diferentes representações semióticas é o principal obstáculo a ser superado para se compreender e aprender matemática.

4.1 METODOLOGIA DE INTERVENÇÃO

O trabalho foi desenvolvido com alunos de uma turma do 9º ano do ensino fundamental do Colégio de Aplicação da UFRGS, em Porto Alegre. A turma foi escolhida, pois com ela a professora-pesquisadora estava realizando o estágio obrigatório do curso de licenciatura em matemática e o conteúdo de equações de segundo grau era previsto para ser trabalhado durante o ano letivo.

É válido destacar que, no que diz respeito à Álgebra, nos anos anteriores os alunos dessa turma já haviam estudado o conteúdo de equações de primeiro grau com uma incógnita, porém no contexto do Ensino Remoto Emergencial. Além disso, antes da pesquisa ser iniciada, no início do estágio da professora-pesquisadora, estudaram os produtos notáveis e as operações com monômios e polinômios. Dessa forma, foi possível perceber indícios de que os alunos possuíam dificuldade com a álgebra e o pensamento algébrico.

Para a realização das atividades, a turma foi dividida em grupos de 2 a 3 alunos, que se mantiveram os mesmos durante todos os encontros. Para serem participantes da pesquisa, entre todos os grupos de alunos da turma, foram selecionados aqueles com maiores frequências e entrega das atividades, mediante autorização dos responsáveis através das fichas de consentimento. A prática foi realizada no segundo semestre de 2022, em 6 encontros de duração de 80 minutos cada, totalizando 8 horas.

Tabela 1: Organização dos Encontros

Conteúdos	**Encontros**
Equações 1º grau	Encontros 1 e 2
Equações 2º grau: $x^2 = a$	Encontro 3
Equações 2º grau: trinômio quadrado perfeito	Encontro 4, 5 e 6

Fonte: acervo da autora.

5 RELATO DOS ENCONTROS E ANÁLISE DE DADOS

Apresentamos aqui um relato de cada um dos encontros e a análise dos dados que foram coletados. Essa análise foi realizada com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval.

5.1 ENCONTROS 1 E 2

Para proporcionar aos alunos um primeiro contato com os *Algebra Tiles* a partir de um conteúdo, a princípio, já conhecido por eles, foi inicialmente trabalhado o conteúdo de **equações de 1º grau**. Dessa forma, os alunos puderam se familiarizar com o material a partir de um conteúdo já estudado por eles anteriormente.

No início do Encontro 1, utilizamos um problema sugerido por Meinerz (2020) e apresentado na Figura 9, para introduzir as equações de 1º grau e, ao mesmo tempo, relacionar a álgebra com a aritmética.

Figura 9: Problema envolvendo equações de 1º grau

a) Mariana comprou três caixas de leite e um pacote de maçãs. O pacote de maçãs, que estava sendo vendido por unidade, custou R$4,00. No total, ela pagou R$ 10,00. Quanto custou cada caixa de leite? Explique seu raciocínio detalhadamente.

Fonte: Meinerz, 2020, p. 56.

De forma aritmética, os alunos resolveram a questão sem demonstrar dificuldades. Então, os desafiamos a escrever a situação de forma algébrica, por meio de uma equação. Apesar de mostrarem certa facilidade em escrever uma equação para representar a situação do problema em questão, muitos alunos não lembravam de como poderiam resolvê-la de forma algébrica.

Então, ao iniciar a resolução de forma coletiva com a turma, logo foi dada a sugestão, por parte de um dos alunos, de “passarmos” o termo que estava sendo somado de um dos lados da igualdade para o outro lado, subtraindo-o. Enquanto alguns alunos concordaram rapidamente com essa sugestão, pudemos perceber muitos sem compreender o que o colega havia dito.

Portanto, iniciamos uma discussão sobre o que significa uma equação e que, com a ideia de igualdade, ela funciona como uma balança. Para mantermos a igualdade correta, todas as operações que realizamos de um lado da equação, devemos também realizar do outro. Além disso, como buscamos o valor de x, o ideal era chegarmos à uma equação de forma $x = a$ (sendo a algum valor qualquer). Também vimos que a sugestão dada pelo colega estava correta, apesar de ocultar alguns passos da resolução, onde subtraímos de ambos os lados da equação o termo que queremos anular. Os alunos que inicialmente não sabiam como resolver a equação aceitaram melhor essa ideia do que aqueles que apenas queriam "passar o termo para o outro lado e mudar o sinal".

Então, passamos para a próxima atividade da aula, envolvendo o material manipulável *Algebra Tiles*. Os alunos foram divididos em duplas e explicamos a eles que essas duplas deveriam ser mantidas para a realização das atividades nas próximas aulas, que integrariam a pesquisa. Dessa forma, foram formadas 14 duplas, que receberam um envelope cada com as peças e um "tapete da igualdade" em cima do qual deveriam realizar a manipulação das peças.

Antes de iniciar qualquer atividade, foram apresentadas aos alunos as características dos *Algebra Tiles* e, de forma especial, discutimos a regra do cancelamento nos *Algebra Tiles*, onde, ao unirmos qualquer uma das peças com aquela que representa o seu oposto, ambas se anulam e resultam em zero.

Então, propusemos aos alunos que, juntos, utilizássemos os *Algebra Tiles* para resolver a equação trabalhada anteriormente ($3x + 4 = 10$). Portanto, de um lado do tapete da igualdade colocamos três retângulos amarelos que simbolizam o termo "x" e 4 quadradinhos azuis que representam +1. Já do outro lado da igualdade colocamos 10 quadradinhos azuis para representar as 10 unidades que desejávamos. Quando questionados sobre como poderíamos deixar apenas os termos "x" de um lado da igualdade, os alunos prontamente sugeriram que anulássemos os 4 quadradinhos azuis colocando 1 quadradinho vermelho para cada quadradinho azul que desejávamos retirar. Assim, adicionamos -4 unidades de cada lado da igualdade. Como os -4 se anularam com 4 unidades das 10 existentes do lado direito da igualdade, restaram apenas 6. Portanto, chegamos a $3x = 6$. Logo, um dos alunos disse "agora já dá pra ver que cada um dos "x vale 2", que foi o resultado obtido anteriormente ao resolvermos a equação de forma algébrica. Discutimos um pouco essa ideia, onde alguns outros alunos sugeriram que dividissemos por 3 os dois lados da igualdade - fazendo referência a resolução algébrica.

Como o encontro já estava no fim, recolhemos os materiais e os exercícios ficaram para o encontro seguinte.

No Encontro 2, novamente separados em duplas, os alunos receberam os *Algebra Tiles* e os tapetinhos da igualdade para resolverem as equações. Foram propostas as resoluções de equações, a partir do apoio do material, presentes na Atividade 1, disponível no Apêndice A. O objetivo dessa atividade era resolver as equações, baseado nas ideias relacionadas às representações semióticas de Duval (2012), a partir da conversão da escrita algébrica para a representação pictórica, do tratamento dentro dessa representação e, por fim, convertessem à escrita algébrica. Além disso, descreverem, por meio da língua materna, como resolveram as equações.

De forma geral, todas as duplas conseguiram resolver ao menos 2 das 4 equações, já que a representação pictórica dos *Algebra Tiles* acabou levando muito mais tempo do que o planejado. Alguns alunos se mostraram bastante resistentes em utilizar o material para resolver as equações, já que sabiam resolvê-las de maneira algébrica. Eles foram incentivados a resolver da maneira que já sabiam e, a partir disso, realizar a representação com o *Algebra Tiles* das equações utilizadas para obter o resultado final.

Vale salientar outro aspecto interessante que foi a dificuldade apresentada pelos alunos em escrever em palavras as manipulações que estavam fazendo. Muitos não sabiam explicar o que estavam pensando, mas acreditamos que o exercício foi positivo para trabalhar o tratamento da representação algébrica.

Na próxima seção apresentamos de forma mais detalhada as resoluções e registros apresentados pelos alunos, bem como a análise dos mesmos.

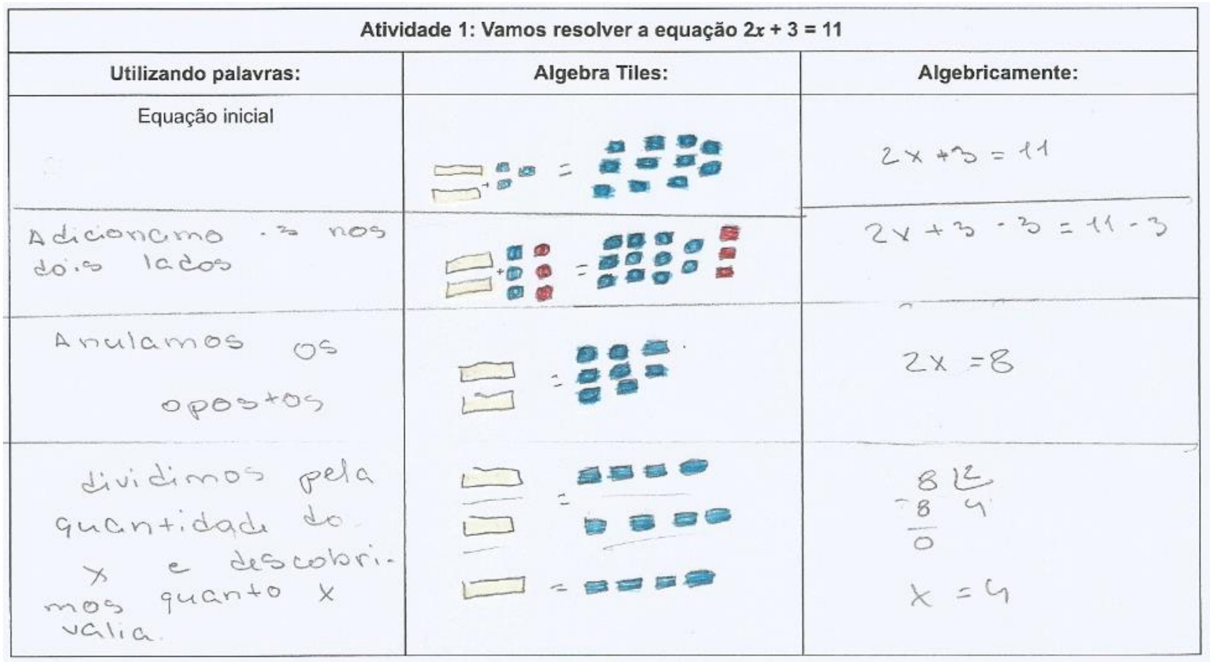
5.1.1 Análise da Atividade 1

Nesta seção trazemos a análise da Atividade 1, a partir da verificação dos registros de representação semiótica apresentados pelos alunos, bem como a presença de tratamento em algum dos registros e a conversão entre eles.

Enquanto os alunos buscaram resolver as equações presentes na Atividade 1, pudemos perceber duas principais formas de resolução: por meio da manipulação das peças do *Algebra Tiles* e através do procedimento algébrico. Doze das quatorze duplas de alunos optou por fazer a resolução a partir da manipulação dos *Algebra Tiles*.

No primeiro caso, os alunos iniciavam a resolução representando a equação por meio das peças do material e, então, manipulando-o de forma a deixar apenas o retângulo amarelo de um dos lados da igualdade, ou seja, isolando uma das peças que representa x. Ao iniciarem a resolução da primeira equação, alguns alunos tiveram dificuldade em iniciar o tratamento. Em uma das duplas, surgiu a pergunta: “Montamos a equação com as peças, mas o que temos que fazer agora?”. Então, perguntamos de que forma os alunos poderiam encontrar o valor de x e eles logo responderam que deveriam ter apenas uma peça “x” em um dos lados da igualdade. Dessa forma, questionamo-nos como poderiam, então, utilizando as instruções de uso dos *Algebra Tiles*, retirar as três peças azuis que estavam junto com as peças “x”. Então, o aluno respondeu: “Colocando três peças vermelhas”, e foi complementado pelo colega: “Mas daí precisamos colocar dos dois lados, né?!”. Na folha de registros dessa dupla podemos ver a escrita em linguagem natural destacando a necessidade de serem adicionadas as unidades negativas em ambos lados da igualdade, como podemos observar na Figura 10:

Figura 10: Resolução da equação $2x + 3 = 11$ (a)



Atividade 1: Vamos resolver a equação 2x + 3 = 11		
Utilizando palavras:	**Algebra Tiles:**	**Algebricamente:**
Equação inicial	=	$2x + 3 = 11$
Adicionamo -3 nos dois lados	=	$2x + 3 - 3 = 11 - 3$
Anulamos os opostos	=	$2x = 8$
dividimos pela quantidade do x e descobrimos quanto x valia	= =	$8 \mid 2$ $-8 \quad 4$ 0 $x = 4$

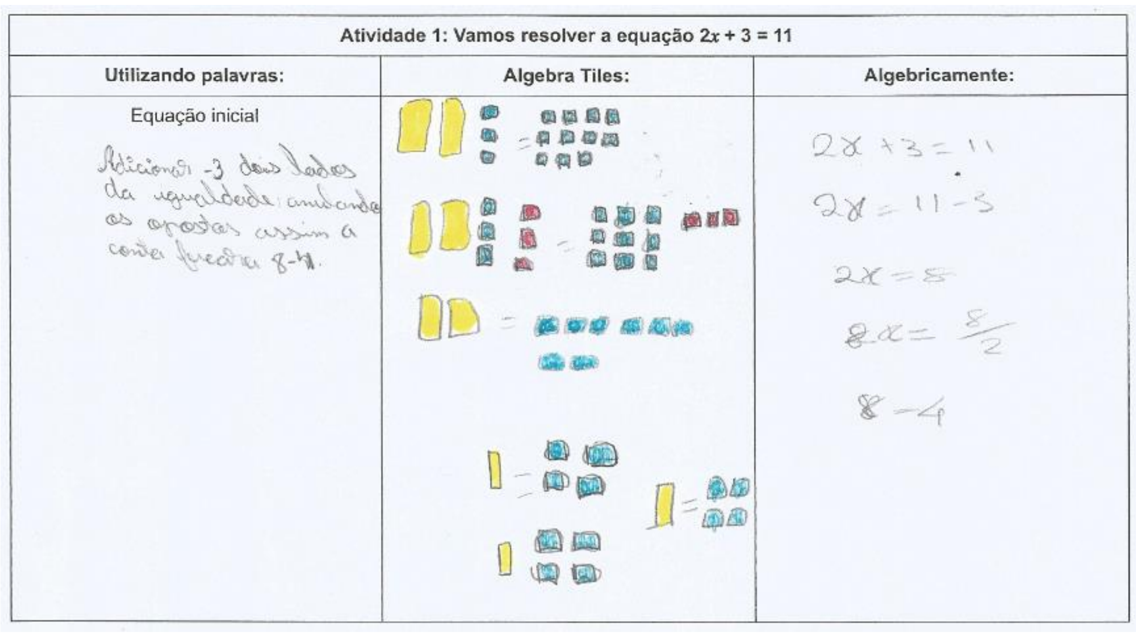
Fonte: Acervo da autora.

Além disso, podemos observar que, ao invés de representar de forma literal o que estava sendo representado com os *Algebra Tiles* como $2x + 3 + (-3) = 11 + (-3)$, a dupla “pulou” esse passo, representando a situação diretamente como: $2x + 3 - 3 = 11 - 3$. Não apenas essa dupla, como todas as outras, fizeram essa representação direta, o que nos indica que compreendiam a operação +(-3) sendo o mesmo que a operação -3.

Já duas duplas optaram por realizar a resolução diretamente de forma algébrica por já terem familiaridade com os tratamentos nessa representação semiótica. Então, os incentivamos a fazerem da forma que achassem mais conveniente, mas solicitamos que, apesar disso, também fizessem os registros nas demais representações.

Podemos ver, na Figura 11, a forma como uma dessas duplas realizou a resolução da equação. Na representação algébrica, pularam o passo em que adicionamos 3 unidades negativas em ambos lados da igualdade para cancelar as unidades positivas, apresentando apenas o -3 do lado direito da igualdade. Porém, na representação pictórica esse passo aparece, uma vez que, seguindo as orientações de manipulação dos *Algebra Tiles*, não poderiam apenas retirar 3 unidades positivas do lado esquerdo e adicionar 3 unidades negativas do lado direito da igualdade.

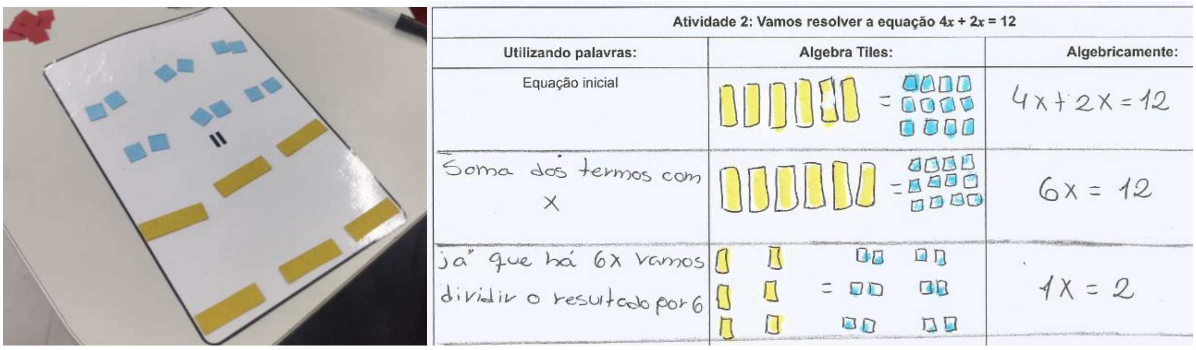
Figura 11 Resolução da equação $2x + 3 = 11$ (b)



Fonte: Acervo da autora.

Outro aspecto bastante interessante foi a forma como as duplas realizaram a divisão das unidades azuis entre as duas unidades amarelas encontradas durante a resolução. Em geral, todos tiveram dúvidas sobre como fazer essa representação utilizando os *Algebra Tiles*, uma vez que, de forma algébrica apenas escreviam a divisão, nesse caso, por dois. Então, discutimos que, ao fazer a divisão por dois, estávamos separando as unidades em dois grupos de quantidades iguais. Dessa forma, as duplas passaram a representar as divisões com os *Algebra Tiles* ao separar as unidades em grupos com a mesma quantidade, conforme podemos ver na Figura 12:

Figura 12: Resolução da equação $4x + 2x = 12$



Fonte: Acervo da autora.

Ao final dos encontros destinados à resolução das equações de 1º grau com uma incógnita, apenas metade das duplas conseguiu finalizar a resolução de todas as quatro equações propostas. Mas, das resoluções feitas, todas apresentavam as três formas de registros: linguagem natural, pictórica e algébrica. Além disso, pudemos perceber certa dificuldade por parte dos alunos de descrever em palavras as operações que estavam realizando, sendo essa uma das perguntas mais frequentes durante a atividade. Nesses casos, perguntávamos a eles o que haviam feito em cada etapa e, ao nos explicarem com suas próprias palavras, os incentivamos a fazer o registro exatamente dessa forma.

Por meio da atividade proposta, pudemos perceber que grande parte dos alunos, partindo da representação algébrica das equações propostas, realizaram a formação da representação a partir do material manipulável, seguida da conversão à representação pictórica. Além disso, observamos que houve o tratamento da representação por meio dos *Algebra Tiles*, realizando, por fim, a conversão tanto para o registro algébrico, quanto para o registro na língua natural. Já outros alunos realizaram o tratamento diretamente no registro algébrico, realizando a conversão para os registros pictórico e língua natural. Dessa forma, foi possível perceber a presença das atividades cognitivas fundamentais para a semiose, que são a formação de uma representação, a conversão e o tratamento.

Portanto, consideramos que os objetivos da atividade foram, de forma geral, alcançados, uma vez que os alunos realizaram as conversões e os devidos tratamentos dentro das representações escolhidas por eles. Além disso, puderam ter o primeiro contato com a representação por meio dos *Algebra Tiles*, a partir de um conteúdo com o qual já possuíam certa familiaridade. Assim, vimos que os alunos apresentaram as três atividades cognitivas que, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, são essenciais para a aprendizagem dos conceitos da matemática.

5.2 ENCONTRO 3

Após trabalharem com os *Algebra Tiles* na resolução de equações de 1º grau, passamos a estudar as equações de 2º grau com uma incógnita, em um encontro com duração de dois períodos. Iniciamos discutindo com os alunos um antigo problema matemático: “Qual a medida de comprimento do lado de uma região quadrada sabendo que a medida de sua área menos a medida de comprimento do lado é igual a 870 metros?”, escrito em argila pelos babilônicos aproximadamente 2000 a.C. (adaptado de Dante, 2018) apresentado na Figura 13.

Figura 13: Problema trazido no livro Teláris Matemática para 9º ano

Os babilônios, por exemplo, tiveram um importante papel na construção de áreas da Matemática, como a Álgebra e a Geometria. Os conhecimentos matemáticos dessa civilização, que habitou a antiga Mesopotâmia, foram extremamente valiosos para que ela se desenvolvesse e prosperasse em campos como Agricultura, Arquitetura e Astronomia. Esses conhecimentos eram aplicados em várias situações, desde o cálculo dos dias, meses e anos até a construção de templos e palácios.

Entre os vários documentos que os babilônios deixaram, há um antigo texto de problemas matemáticos, escrito em argila que apresenta um problema que pode ser enunciado assim: Qual é a medida de comprimento do lado de uma região quadrada sabendo que a medida de área dela menos a medida de comprimento do lado é igual a 870?

The Trustees of the British Museum/Scala, Florença, Itália

Placa de argila de aproximadamente 2000 a.C.-1600 a.C. (11,7 cm × 19,4 cm), guardada no Museu Britânico, em Londres (Inglaterra). O primeiro problema dessa placa, registrado em escrita cuneiforme, corresponde ao problema citado no texto.

Fonte: Dante (2018, p. 48).

Então, os estudantes foram convidados a representarem o problema na forma de uma equação. A partir disso, definimos o que é uma equação do 2º grau com 1 incógnita na forma geral e seus coeficientes.

Para iniciar a realização das resolução de equações do 2º grau com 1 incógnita, trabalhamos com as equações do tipo $x^2 = a$, com $a \geq 0$. Foram distribuídas folhas com os exercícios que compõem a Atividade 2, disponível no Apêndice B, juntamente com as peças do *Algebra Tiles* e os tapetinhos da igualdade. Além disso, foi utilizada a tabela de três colunas, que conforme sugerido por Meinerz (2020), pode facilitar a conversão proposta por Duval.

Os alunos foram incentivados a pensar de que forma poderiam construir quadrados com as peças dos termos independentes e relacionar a medida dos lados desses quadrados com o valor do lado do quadrado representado por x^2.

De maneira geral, eles demoraram a compreender que a medida do lado do quadrado x^2 valia x, mas ao perceberem que o retângulo que representava x cabia exatamente ao lado do quadrado x^2, conseguiram fazer essa relação.

Vale destacar que essa comparação dos lados dos quadrados, por meio dos *Algebra Tiles*, inicialmente abordou apenas os valores positivos, uma vez que utilizamos o conceito de área. Porém, ressaltamos que, apesar dessa ser uma limitação do material, ainda poderíamos pensar nas raízes negativas.

Dessa forma, foi discutida com os alunos a ideia de que, por exemplo, tanto +3 quanto -3 elevados ao quadrado resultam em 9, apesar de que geometricamente faça sentido apenas falarmos dos valores positivos. Logo, a equação $x^2 = 9$ admite duas soluções: +3 ou -3.

Dentre as 14 duplas da turma, 10 delas conseguiram resolver as quatro equações propostas na Atividade 2, disponível no Apêndice B, durante os dois períodos do encontro. Assim como na Atividade 2, essa atividade tinha como objetivo que os alunos desenvolvessem a resolução das equações por meio da conversão à representação com os *Algebra Tiles*, seguida do tratamento desse registro e da conversão final à forma algébrica.

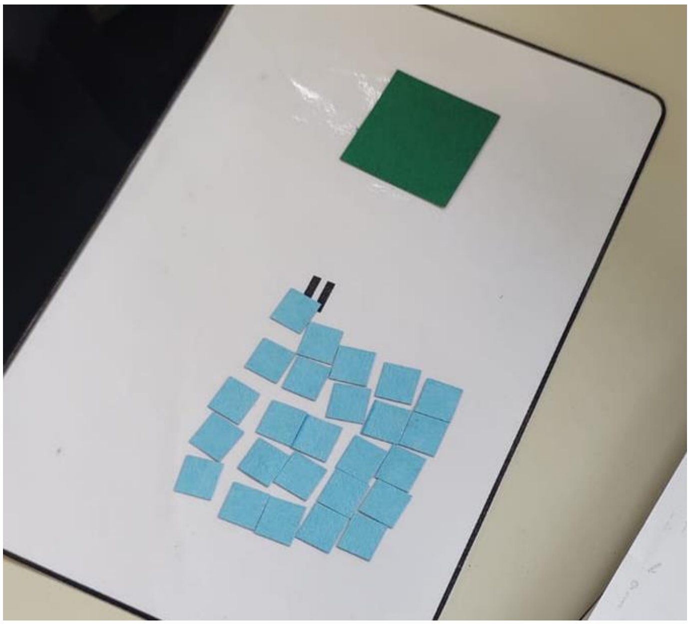
5.2.1 Análise da Atividade 2

Nessa seção, apresentamos a análise da Atividade 2, onde novamente verificamos os registros de representação semiótica que foram apresentados pelos alunos, assim como a presença do tratamento e da conversão entre esses registros.

Novamente alguns preferiram inicialmente utilizar os *Algebra Tiles*, enquanto outros optaram por resolver as equações primeiramente de forma algébrica. Como o último conteúdo que havia sido estudado pela turma era a radiciação, o número de duplas de alunos que optou pela segunda forma foi um pouco maior do que havia sido na Atividade 1.

Das quatorze duplas que realizaram a resolução de ao menos uma das equações, nove utilizaram de forma inicial o material manipulável, por meio da conversão a essa representação, e realizando nele o devido tratamento. A Figura 14 mostra como os alunos realizaram a representação com *Algebra Tiles* da equação $x^2 = 25$.

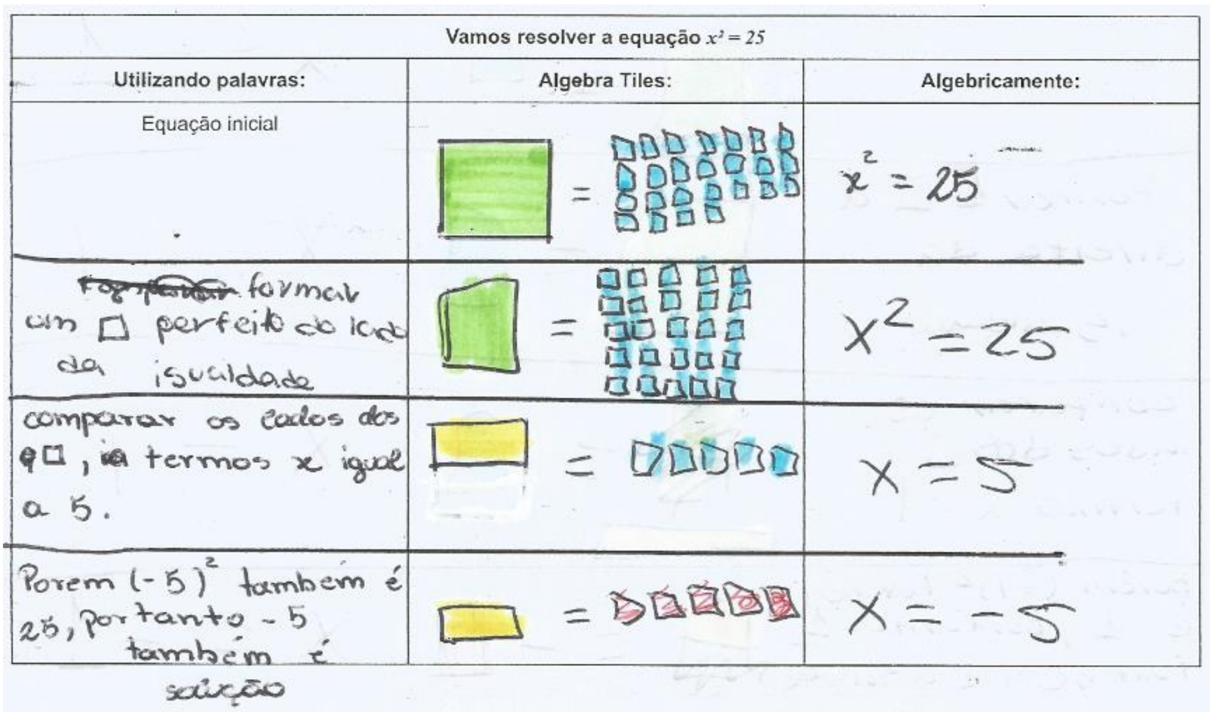
Figura 14: Representação da equação $x^2 = 25$ com *Algebra Tiles*



Fonte: Acervo da autora.

A partir dessa representação, os tratamentos por eles realizados envolviam comparar qual deveria ser o tamanho do lado do quadrado x^2 para que os quadrados respeitassem a igualdade. Destacamos que, a representação geométrica nos permite visualizar apenas valores positivos, mas ao realizarem a conversão para a forma algébrica, os alunos registraram que poderíamos também pensar nos números simétricos a esses que, elevados ao quadrado, chegariam ao mesmo resultado. Podemos ver o registro dessa ideia realizado na língua natural, onde os alunos após encontrarem a solução positiva da equação, destacam "porém $(-5)^2$ também é 25, portanto -5 também é solução", na Figura 15 abaixo.

Figura 15: Resolução da equação $x^2 = 25$

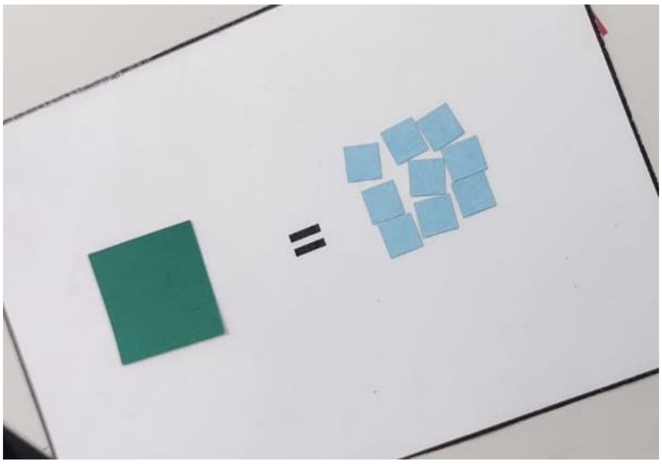


Vamos resolver a equação $x^2 = 25$		
Utilizando palavras:	**Algebra Tiles:**	**Algebricamente:**
Equação inicial	=	$x^2 = 25$
formar um □ perfeito do lado da igualdade	=	$x^2 = 25$
comparar os lados dos □, os termos x igual a 5.	=	$x = 5$
Porem $(-5)^2$ também é 25, portanto -5 também é solução	=	$x = -5$

Fonte: Acervo da autora.

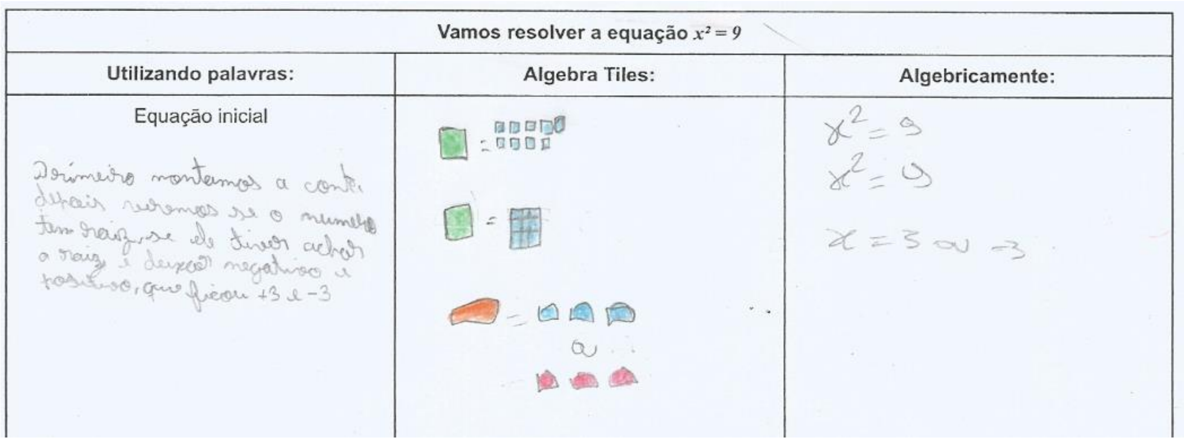
Na Figura 16, vemos a forma como outra dupla de alunos representou a equação $x^2 = 9$ por meio dos *Algebra Tiles*. Porém, diferentemente da dupla anterior, esses alunos optaram por resolver a equação primeiramente utilizando o tratamento dos registros algébricos, para depois realizar a conversão para os registros na língua natural e pictórica.

Figura 16: Representação da equação $x^2 = 25$ com *Algebra Tiles*



Fonte: Acervo da autora.

Figura 17: Resolução da equação $x^2 = 9$

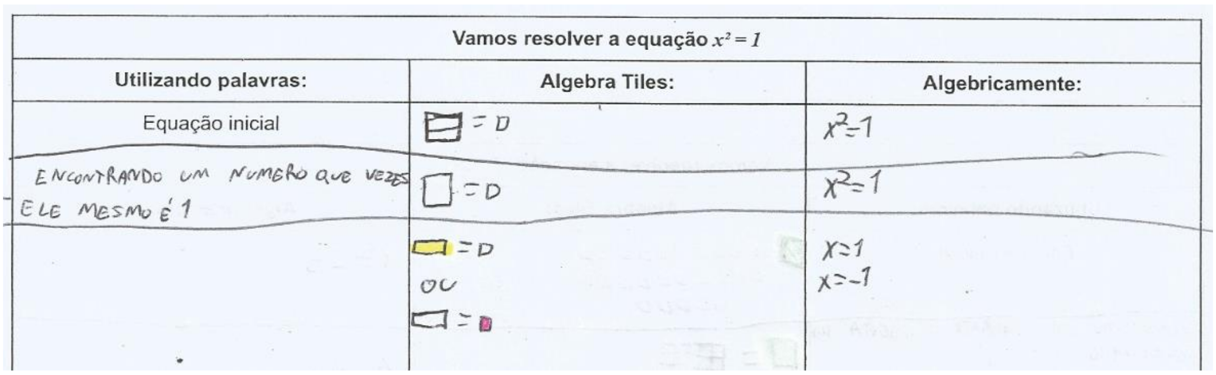


Vamos resolver a equação $x^2 = 9$		
Utilizando palavras:	**Algebra Tiles:**	**Algebricamente:**
Equação inicial Primeiro montamos a conta depois vemos se o numero tem raiz, se ele tiver achar a raiz e deixar negativo e positivo, que ficou +3 e -3	= = = ou	$x^2 = 9$ $x^2 = 9$ $x = 3$ ou -3

Fonte: Acervo da autora.

Observando a Figura 17, a partir dos registros realizados em língua natural, vemos que a estratégia utilizada pelos estudantes para resolver a equação $x^2 = 9$ consistiu em calcular a raiz quadrada de 9. E, ao converterem ao registro pictórico, observamos que ocorreu a representação do número 9 como um quadrado perfeito, fazendo a relação, então, entre os conceitos de raiz quadrada e de um quadrado perfeito. Nesse sentido, outra dupla seguiu o tratamento nos registros algébricos, mas ao ter de resolver a equação $x^2 = 1$, vemos que, na Figura 18, ao invés de calcular a raiz quadrada, os alunos buscaram a estratégia de pensar no número que elevado ao quadrado resultaria em 1, que é a ideia seguida a partir do tratamento na representação semiótica, fazendo uso dos *Algebra Tiles*.

Figura 18: Resolução da equação $x^2 = 1$



Vamos resolver a equação $x^2 = 1$		
Utilizando palavras:	**Algebra Tiles:**	**Algebricamente:**
Equação inicial	= D	$x^2 = 1$
ENCONTRANDO UM NUMERO QUE VEZES ELE MESMO É 1	= D	$x^2 = 1$
	= D OU =	$x = 1$ $x = -1$

Fonte: Acervo da autora.

Com essa atividade, pudemos perceber que a maior parte dos alunos realizou a formação da representação com os *Algebra Tiles*, a partir da conversão das equações inicialmente representadas de forma algébrica. Novamente, pudemos observar que, a partir do material manipulável, houve o tratamento nesse registro pictórico e, por fim, foi realizada a conversão para os registros em língua natural, pictórica e algébrica.

Porém, como descrito anteriormente, dessa vez um número maior de alunos optou por realizar o tratamento diretamente no registro algébrico, seguido posteriormente da conversão para os registros pictóricos e na língua natural. Assim, mais uma vez pudemos constatar a presença tanto da formação de uma representação, quanto da conversão e do tratamento. Portanto, acreditamos que os objetivos dessa atividade também foram alcançados.

5.3 ENCONTROS 4 E 5

Nos dois próximos encontros, que totalizaram quatro períodos, foram trabalhadas as resoluções de equações de segundo grau no caso de trinômios quadrados perfeitos. Da mesma forma como realizado anteriormente, os alunos foram convidados a tentar formar quadrados com os *Algebra Tiles*, de forma a relacionar os lados dos quadrados de ambos os lados da igualdade. Os exercícios que compuseram a Atividade 3, envolvendo a resolução equações na forma de trinômios quadrados perfeitos, estão disponíveis no Apêndice C.

Como se tratam de trinômios quadrados perfeitos, sempre é possível juntar as peças do trinômio de maneira a formar quadrados, colocando a metade das peças “x” em dois lados consecutivos da peça “x^2” e completando o quadrado com as peças “+1” disponíveis. Além disso, teve-se o cuidado de garantir que os termos do outro lado da igualdade também fossem quadrados perfeitos.

Então, depois de formar o quadrado com o trinômio, questionamos os alunos: qual seria o tamanho do lado desse quadrado formado e de que forma poderíamos expressar a sua área? Em aulas anteriores ao início da pesquisa e do uso dos *Algebra Tiles*, já havíamos realizado com a turma o estudo dos produtos notáveis a partir da composição ou decomposição das partes de um quadrado, durante uma sequência de seis aulas. Mesmo tendo, então, já feito algo semelhante, os alunos apresentaram bastante dificuldade em compreender que poderíamos escrever o trinômio quadrado perfeito como o quadrado da soma de dois termos.

Dessa forma, realizamos uma breve revisão de produto notável e discutimos com os alunos que o que estávamos fazendo agora era o processo contrário. Depois disso, com o auxílio dos *Algebra Tiles*, eles conseguiram fazer a comparação dos lados dos quadrados e seguir a mesma lógica utilizada na aula anterior.

A ideia inicial era de usar apenas um encontro para realizar a resolução das equações presentes na Atividade 3, porém, como para eles esse processo era, naturalmente, mais trabalhoso, foi necessário mais um encontro para a finalização da atividade. Mais uma vez, a atividade tinha como objetivo possibilitar aos alunos a resolução das equações por meio da conversão da escrita algébrica à representação pictórica, para que realizassem os tratamentos nessa representação e, por fim, pudessem fazer a conversão à representação inicial.

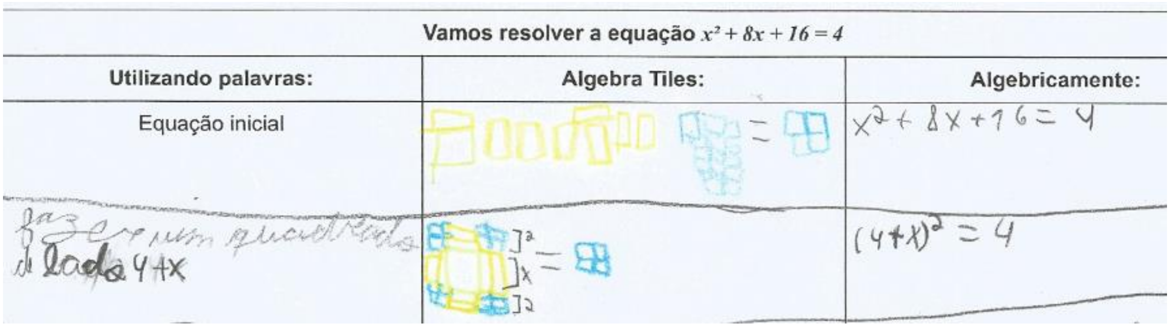
5.3.1 Análise da Atividade 3

Apresentamos nesta seção a análise da Atividade 3, em que buscamos perceber se os alunos realizaram registros nas diferentes formas de representação semiótica, bem como os devidos tratamentos em cada representação e as conversões correspondentes.

Inicialmente, como na atividade anterior as duplas deveriam formar quadrados perfeitos apenas do lado direito da igualdade, alguns alunos apresentaram dificuldades de compreender porque, dessa vez, deveriam formar quadrados perfeitos em ambos os lados da equação. Questionamo-los sobre o porquê de formarmos um quadrado à direita da igualdade anteriormente, e um dos alunos afirmou que o motivo era por termos de compará-lo com o quadrado (x^2) do lado esquerdo da igualdade. Então, discutimos o fato de que, se pudéssemos ter novamente um quadrado de cada lado da igualdade, poderíamos compará-los e buscar a solução da mesma forma que haviam realizado anteriormente.

A partir disso, depois de formarem os quadrados em ambos os lados da equação, outra dúvida apresentada por alguns alunos foi a de qual seria o tamanho do lado do quadrado. Então, os instruímos a observar qual era o tamanho do lado de cada uma das peças que compunham o lado do quadrado formado. Respondendo a esse questionamento, logo perceberam que poderiam somar esses valores para obter o tamanho do lado do quadrado que haviam formado. A partir dessa percepção, puderam concluir que o trinômio quadrado perfeito era equivalente ao quadrado da soma de dois termos, conforme podemos ver na Figura 19.

Figura 19: Início da resolução da equação $x^2 + 8x + 16 = 4$

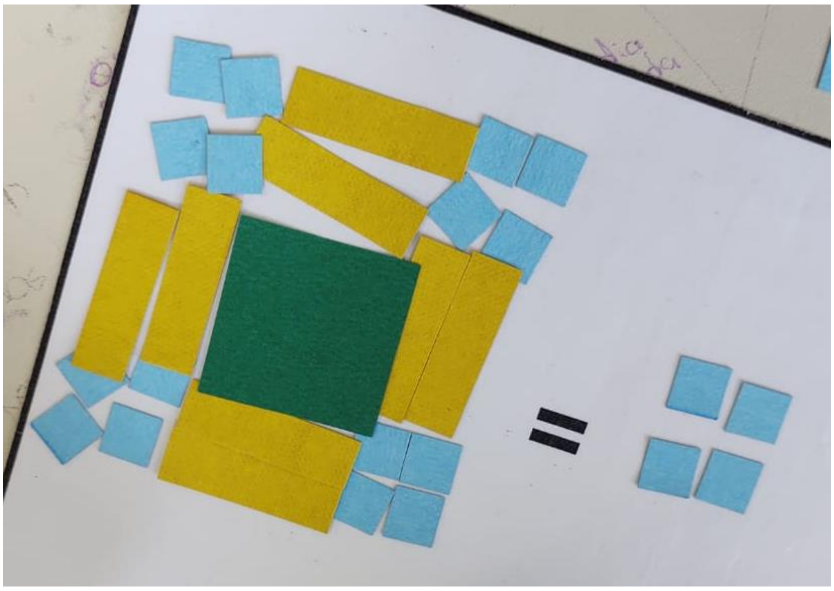


Vamos resolver a equação $x^2 + 8x + 16 = 4$		
Utilizando palavras:	**Algebra Tiles:**	**Algebricamente:**
Equação inicial	=	$x^2 + 8x + 16 = 4$
fazer um quadrado de lado 4+x	]2]x]2 =	$(4+x)^2 = 4$

Fonte: Acervo da autora.

Diferentemente das atividades anteriores, nas quais muitos alunos optaram por realizar primeiramente o tratamento do registro algébrico, para resolver as equações no caso de trinômios quadrados perfeitos, todas as duplas recorreram inicialmente à representação com os *Algebra Tiles*, conforme o exemplo presente na Figura 20. Para eles, essa conversão inicial da representação algébrica para a representação concreta foi fundamental para perceberem os trinômios quadrados perfeitos como o quadrado da soma de dois termos.

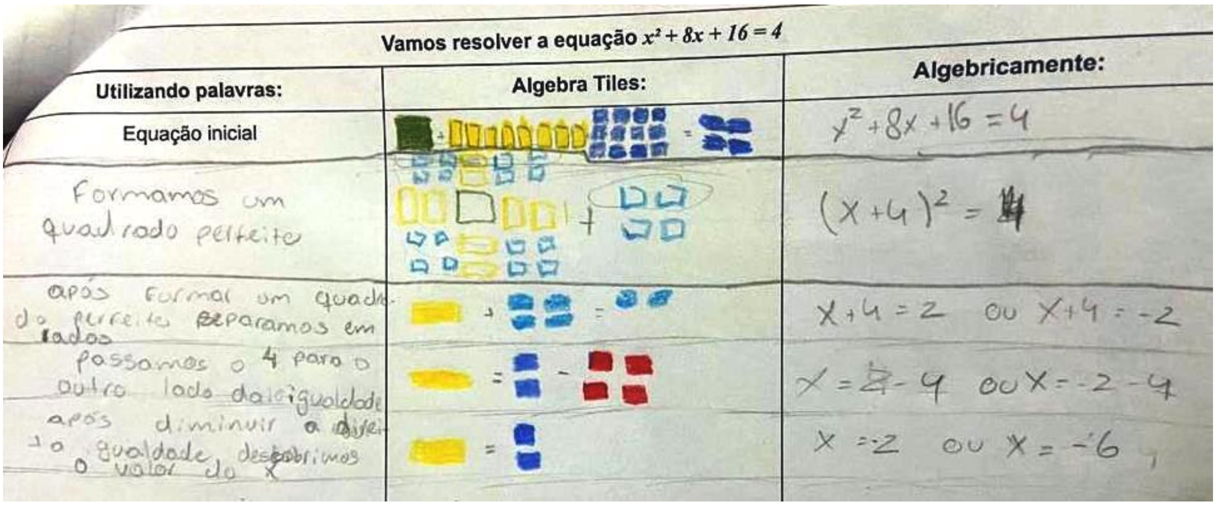
Figura 20: Representação da equação $x^2 + 8x + 16 = 4$ com *Algebra Tiles*



Fonte: Acervo da autora.

Na Figura 21, vemos que os alunos registram sua estratégia de resolução: “após formar um quadrado perfeito, separamos em lados”. Além desse registro na língua natural, podemos ver no registro pictórico a relação entre as medidas dos lados dos quadrados. Ou seja, temos indícios de que, nesse caso, os alunos realizaram o tratamento na representação com os *Algebra Tiles* e depois a conversão para o registro algébrico.

Figura 21: Resolução da equação $x^2 + 8x + 16 = 4$ (a)


Vamos resolver a equação $x^2 + 8x + 16 = 4$

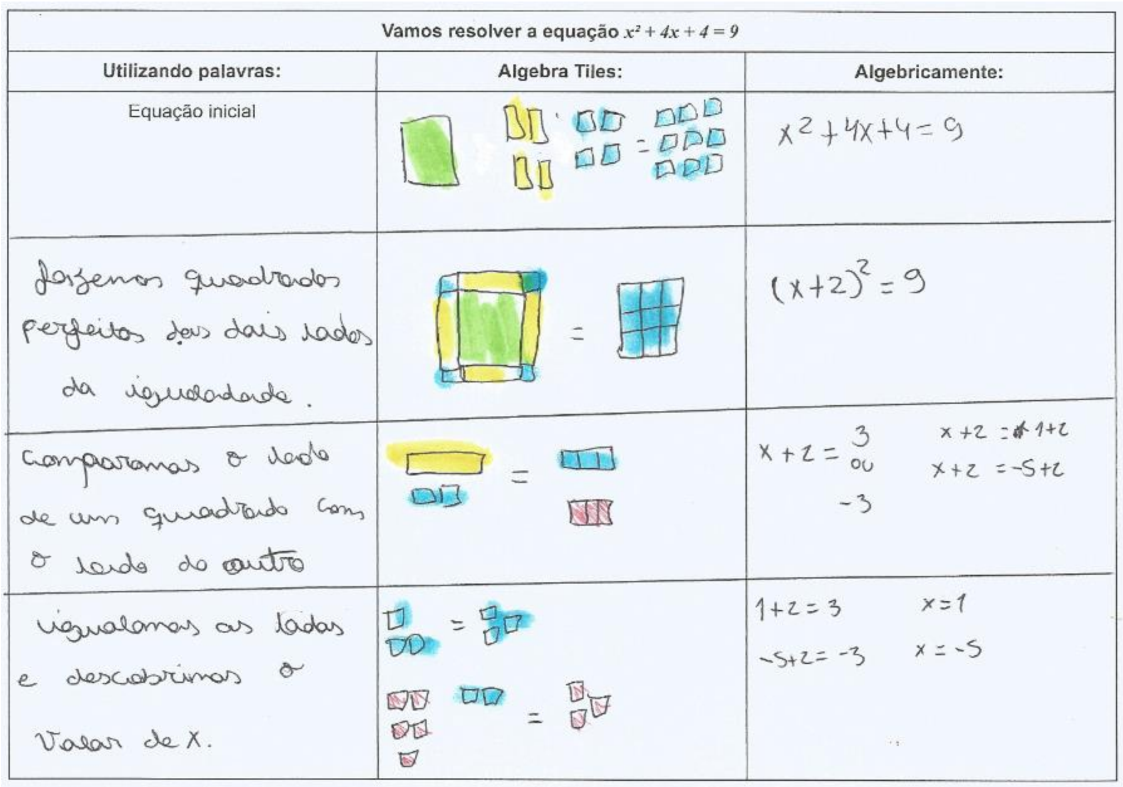
Utilizando palavras:	Algebra Tiles:	Algebricamente:
Equação inicial	+ =	$x^2+8x+16=4$
Formamos um quadrado perfeito	+	$(x+4)^2 = 4$
após formar um quadrado perfeito separamos em lados	+ =	$x+4=2$ ou $x+4=-2$
passamos o 4 para o outro lado da igualdade	= -	$x=2-4$ ou $x=-2-4$
após diminuir a direita da igualdade descobrimos o valor do x	=	$x=-2$ ou $x=-6$

Fonte: Acervo da autora.

Além disso, na Figura 21 é interessante também observar que os alunos fazem uso do registro pictórico e seu tratamento apenas no caso em que $x + 4 = 2$, enquanto o caso em que $x + 4 = -2$, realizam apenas o registro e o tratamento da forma algébrica. Conversando com a professora em aula, eles perguntaram a razão de termos que considerar também o resultado negativo, nesse caso o -2. Destacamos que apesar da representação com o *Algebra Tiles* possuir uma limitação de, nesse caso, representar áreas e portanto valores positivos, deveríamos considerar os negativos uma vez que -2 elevado ao quadrado também resulta em 4. Logo, por entenderem esse resultado a partir da representação algébrica, fizeram os registros apenas nessa representação.

Outro exemplo de tratamento realizado dentro da representação com o material manipulável está nos registros de uma dupla de alunas (Figura 22). Podemos ver que foram montados os quadrados em ambas as partes da igualdade e realizada a comparação dos lados desses quadrados, como realizado pela dupla anterior. Porém, na última etapa da resolução, ao invés de manipular os *Algebra Tiles* da mesma forma que foi realizado na Atividade 1, isolando o termo x, as alunas fizeram a comparação de quais deveriam ser as peças no lugar de x para que houvesse a mesma quantidade de peças nos dois lados do tapetinho, resolvendo, assim, mentalmente talvez, uma equação de primeiro grau. Além disso, podemos ver a presença da conversão para o registro algébrico ao final da resolução.

Figura 22: Resolução da equação $x^2 + 4x + 4 = 9$ (a)

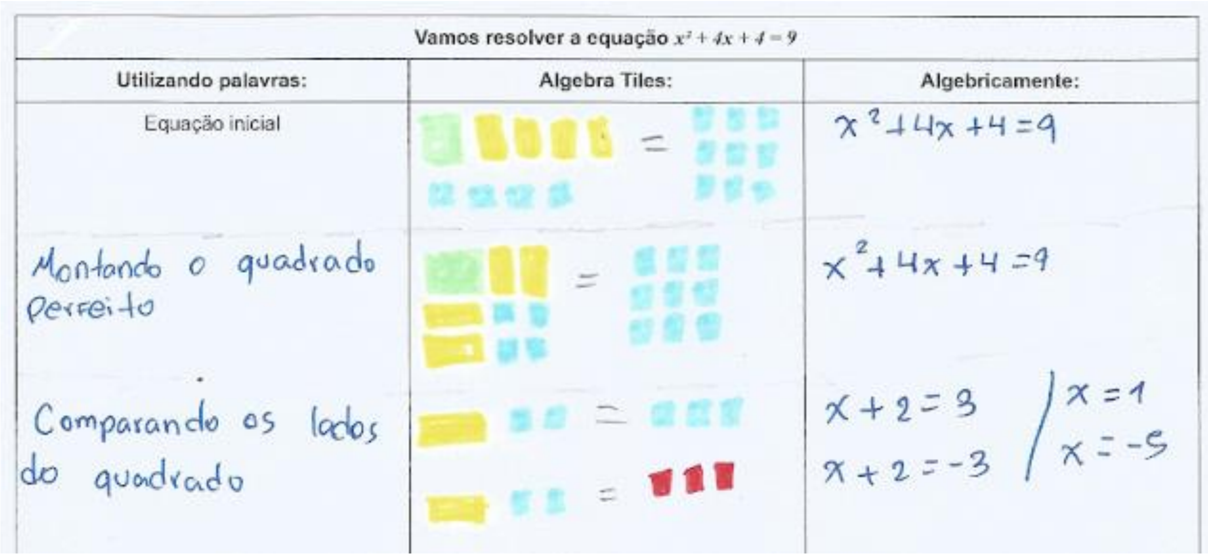


Vamos resolver a equação $x^2 + 4x + 4 = 9$		
Utilizando palavras:	**Algebra Tiles:**	**Algebricamente:**
Equação inicial	=	$x^2+4x+4=9$
fazemos quadrados perfeitos dos dois lados da igualdade.	=	$(x+2)^2=9$
comparamos o lado de um quadrado com o lado do outro	=	$x+2 = 3$ ou -3 $x+2 = 1+2$ $x+2 = -5+2$
igualamos os lados e descobrimos o valor de x.	= =	$1+2=3$ $x=1$ $-5+2=-3$ $x=-5$

Fonte: Acervo da autora.

Outro registro que nos chamou a atenção está apresentado, na Figura 23. Podemos ver que as alunas, depois de utilizarem a representação com *Algebra Tiles* para realizar os devidos tratamentos, no último passo fizeram a conversão das equações para a forma algébrica e, o último tratamento realizado para obter a resposta final foi feito diretamente nessa representação. Isso nos dá indícios de que houve a compreensão dos objetos matemáticos pelas alunas, uma vez que, de acordo com Duval (2012), depois da mobilização de diferentes registros de representação semiótica, no decorrer de um mesmo procedimento, existiu a escolha de um registro em vez do outro.

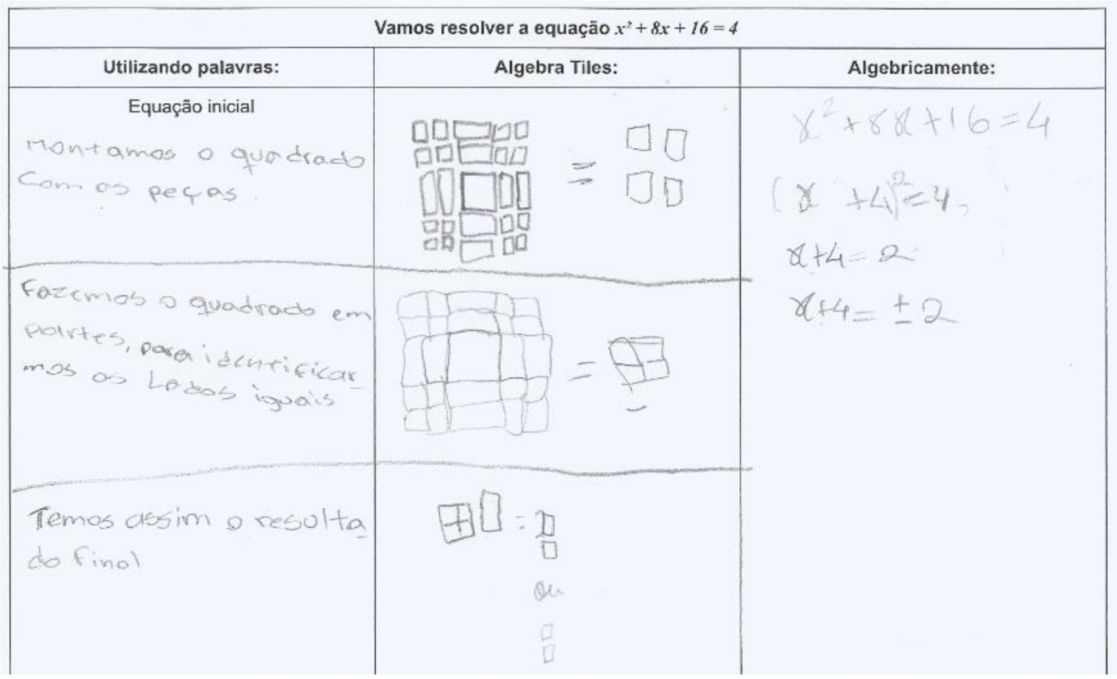
Figura 23: Resolução da equação $x^2 + 4x + 4 = 9$ (b)



Fonte: Acervo da autora.

Além das duplas que resolveram a equação a partir do tratamento no material manipulável, também existiram alunos que optaram pelo tratamento diretamente pela representação algébrica. Porém, para estes, conforme já evidenciado anteriormente, na resolução dessas equações com trinômios quadrados perfeitos, foi importante o uso dos *Algebra Tiles* na formação da soma do quadrado de dois termos. Ao observarmos a Figura 24, vemos o registro pictórico apenas na construção do quadrado perfeito a partir do trinômio. Depois disso, os alunos realizaram a conversão para o registro algébrico e o restante do tratamento foi feito algebricamente, apesar de não apresentarem o resultado final.

Figura 24: Resolução da equação $x^2 + 8x + 16 = 4$ (b)

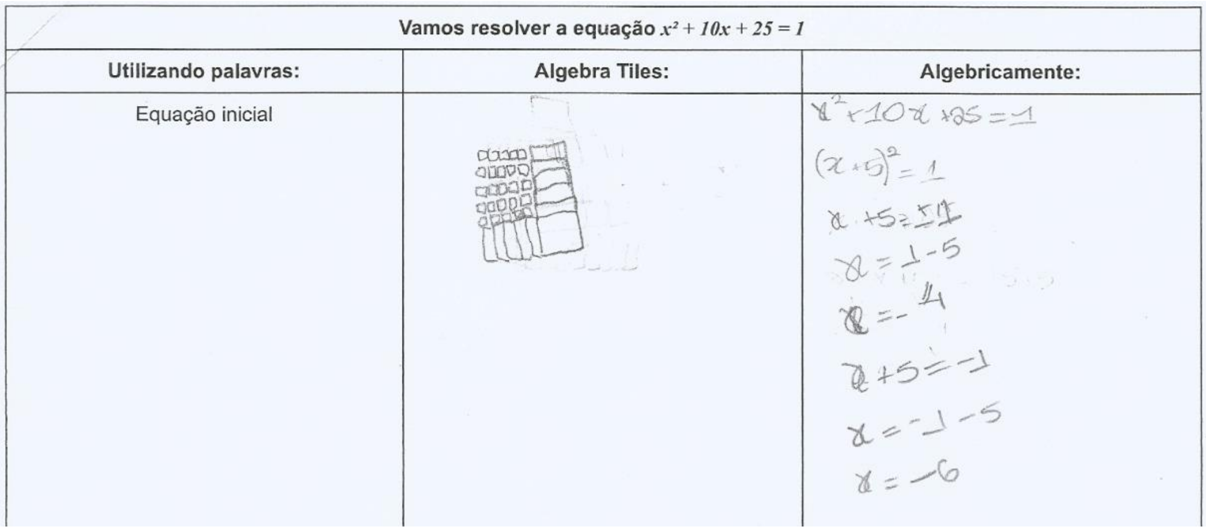


Vamos resolver a equação $x^2 + 8x + 16 = 4$		
Utilizando palavras:	**Algebra Tiles:**	**Algebricamente:**
Equação inicial Montamos o quadrado com as peças.		$x^2+8x+16=4$ $(x+4)^2=4$, $x+4=2$ $x+4=\pm 2$
Fazemos o quadrado em partes, para identificarmos os lados iguais		
Temos assim o resultado final	ou	

Fonte: Acervo da autora.

Essa mesma dupla de alunos, na resolução de outra equação, por não terem muito tempo para finalizar seus registros, apresentou apenas o tratamento na representação algébrica e a representação pictórica da construção do quadrado perfeito, conforme pode ser observado na Figura 25. Isso corrobora a concepção de que a representação por meio dos *Algebra Tiles* foi de grande importância nessa etapa do processo de resolução das equações de segundo grau na forma de trinômios quadrados perfeitos.

Figura 25: Resolução da equação $x^2 + 10x + 25 = 1$



Vamos resolver a equação $x^2 + 10x + 25 = 1$		
Utilizando palavras:	**Algebra Tiles:**	**Algebricamente:**
Equação inicial		$x^2+10x+25=1$ $(x+5)^2=1$ $x+5=\pm 1$ $x=1-5$ $x=-4$ $x+5=-1$ $x=-1-5$ $x=-6$

Fonte: Acervo da autora.

Dessa forma vimos que, a partir dessa atividade, os alunos iniciaram as resoluções das equações a partir da formação da representação com os *Algebra Tiles*, e os tratamentos referentes à mesma. Além disso, houve a conversão para os registros pictórico, algébrico e na língua natural. Assim, verificamos a presença das atividades cognitivas essenciais para a aprendizagem dos conceitos da matemática, de acordo com Duval (2012).

5.4 ENCONTRO 6

O último encontro foi destinado à resolução de diferentes equações de segundo grau com uma incógnita, que compunham a Atividade 4 (Apêndice D). O objetivo dessa atividade era resolver as equações, independentemente da representação semiótica escolhida. Portanto, os alunos apenas receberam as equações, sem maiores instruções sobre a forma como poderiam resolvê-las. Os envelopes com as peças do *Algebra Tiles* ficaram à disposição dos alunos para serem utilizados conforme a necessidade.

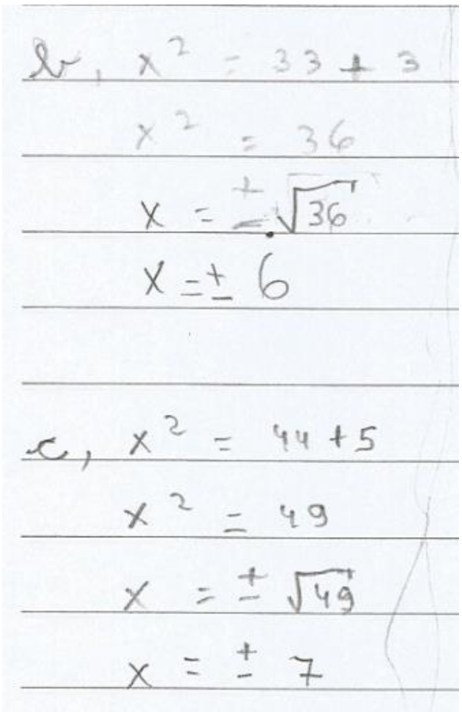
Essa atividade era composta por 10 equações de segundo grau, dentre as quais, as cinco primeiras eram do tipo $x^2 + a = 0$, e as demais eram compostas por trinômios quadrados perfeitos. De maneira geral, os alunos resolveram as primeiras cinco equações diretamente de forma algébrica. Já para resolver as últimas cinco equações, a maioria deles utilizou os *Algebra Tiles* para realizar a construção, a partir dos trinômios, do quadrado perfeito.

5.4.1 Análise da Atividade 4

Nessa seção, apresentamos a análise da Atividade 4 e buscamos analisar quais foram os registros apresentados pelos alunos ao buscarem a solução das equações, além de verificar a presença do tratamento e da conversão entre os diferentes registros.

Conforme descrito anteriormente, para resolver as equações do tipo $x^2 + a = 0, a \leq 0$ a maior parte dos alunos utilizou os tratamentos diretamente na representação algébrica. Para isso, eles isolaram o termo x^2 de um dos lados da igualdade e, então, procuraram os valores que elevados ao quadrado resultam no número que estava do outro lado da igualdade. Além disso, alguns alunos utilizaram a operação da raiz quadrada, compreendendo-a como uma das operações inversas da potenciação, conforme podemos observar na Figura 26.

Figura 26: Resolução das equações $x^2 - 3 = 33$ e $x^2 - 44 = 5$

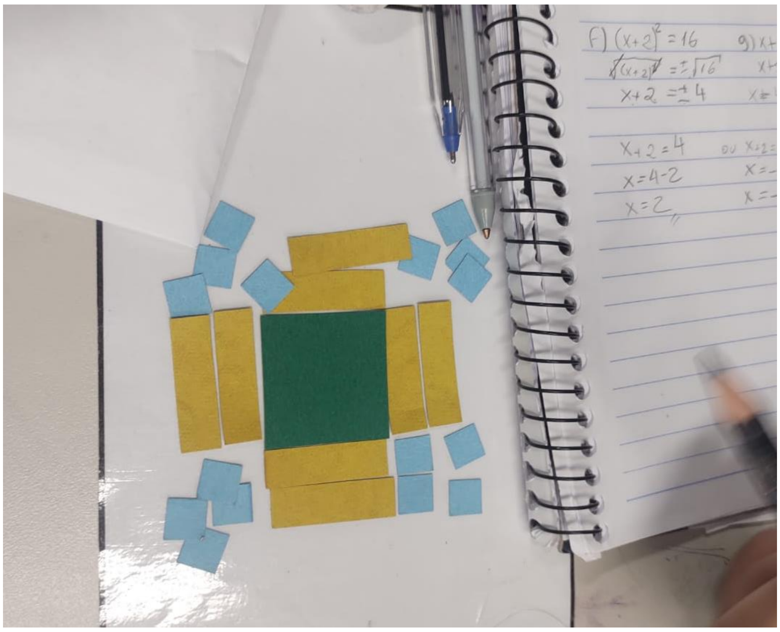


Fonte: Acervo da autora.

Em relação às últimas cinco equações que estavam na forma de trinômios quadrados perfeitos, os alunos apresentaram três diferentes formas de resolução. A primeira delas constou em utilizar os *Algebra Tiles* para a construção do quadrado perfeito da soma de dois termos, enquanto a segunda consistia no uso apenas do registro pictórico dos *Algebra Tiles* para essa construção e, por fim, realizando apenas o registro algébrico para resolver as equações.

A maioria dos alunos, ao se deparar com os trinômios quadrados perfeitos, foi até a mesa da professora para buscar as peças do *Algebra Tiles*. De forma geral, não realizaram toda a resolução da equação utilizando as peças, como haviam feito nas atividades anteriores, mas as utilizaram como apoio para reescrever o trinômio como um quadrado perfeito na representação simbólica. Podemos ver um exemplo disso na Figura 27, onde a aluna, tendo a equação $x^2 + 8x + 16 = 1$, utilizou as peças do *Algebra Tiles* para formar o quadrado referente ao trinômio $x^2 + 8x + 16$ e, assim, reescrevê-lo como $(x + 4)^2$.

Figura 27: Utilização dos *Algebra Tiles* na construção de quadrados perfeitos

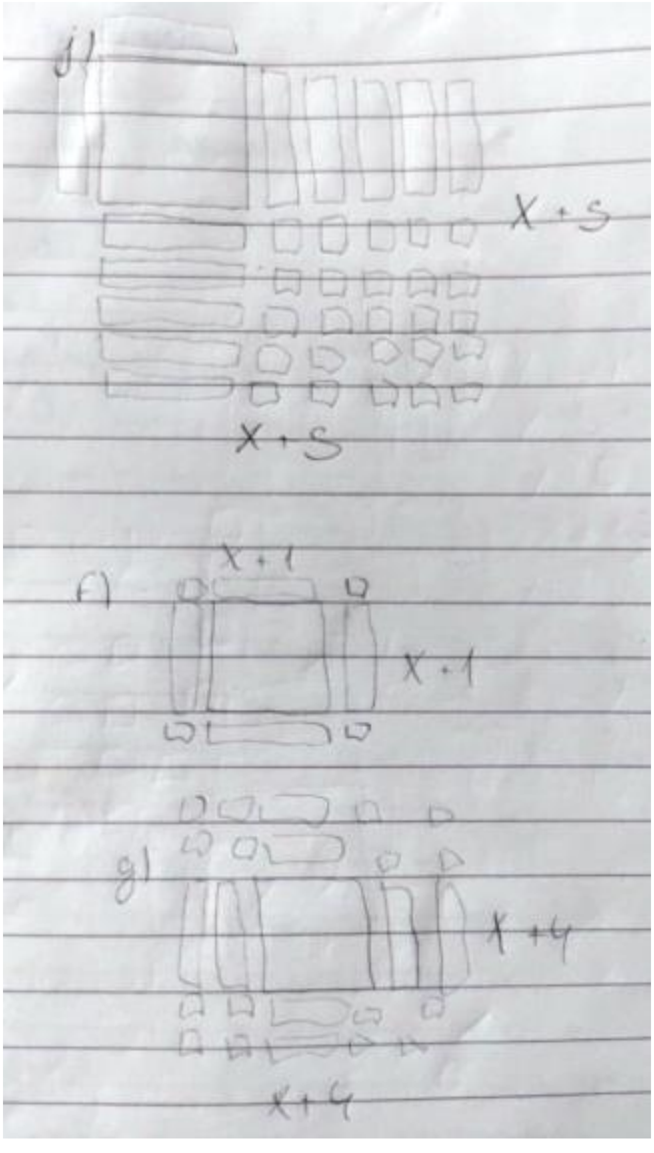


Fonte: Acervo da autora.

Depois de escreverem os trinômios na forma de um quadrado perfeito, os alunos seguiam a resolução das equações na forma algébrica. Assim, podemos perceber que eles transitaram entre os diferentes registros, escolhendo um registro no lugar do outro, para buscar a solução das equações.

Já outro aluno da turma, ao ser questionado sobre qual estratégia utilizou para escrever o trinômio na forma de um quadrado perfeito, respondeu à professora: “Eu fiz os *Algebra Tiles* no papel”. Podemos ver na Figura 28 que, com relação ao trinômio $x^2 + 10x + 25$, ao invés de pegar as peças do material manipulável, ele fez diretamente o registro de sua representação pictórica.

Figura 28: Representação pictográfica dos *Algebra Tiles*



Fonte: Acervo da autora.

Nesse caso, observamos que o aluno conseguiu realizar a formação de uma representação, a partir dos dados apresentados nas equações, bem como os devidos tratamentos nessa representação e, ainda, a conversão para a representação algébrica. Assim, é possível verificar a existência das três atividades cognitivas referentes à aprendizagem, conforme Duval (2012).

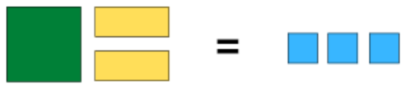
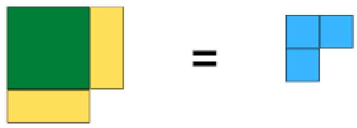
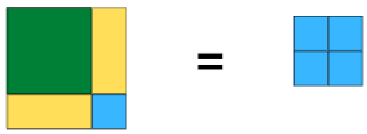
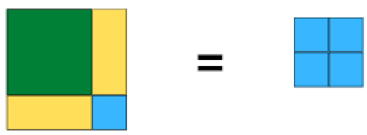
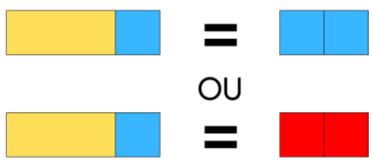
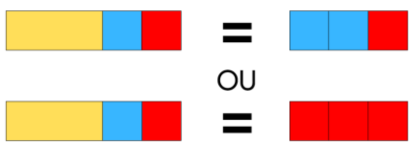
Por fim, um grupo de alunos dessa turma, diferentemente dos demais colegas, utilizou apenas a representação algébrica para resolver as equações. Ao serem questionados sobre suas estratégias, um dos alunos explicou: “Como temos $x^2 + 4x + 4$, eu pensei em colocar como produto notável que ficaria $(x + 2)^2$”. “Mas como tu pensou em colocar o 2 ali (no quadrado da soma de dois termos)?”, a professora perguntou e ele logo respondeu: “Se eu colocasse o 4 daria (...) 16 e não 4, porque 4 vezes 4 é 16”. Então, os colegas complementaram a ideia explicando que buscaram o número que ao quadrado resultava em 4, que era o termo independente no trinômio. Dessa forma, percebemos que esses alunos conseguiram realizar todos os tratamentos diretamente na representação algébrica, sem necessitar da conversão para outra representação.

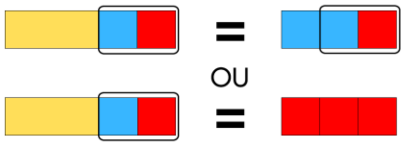
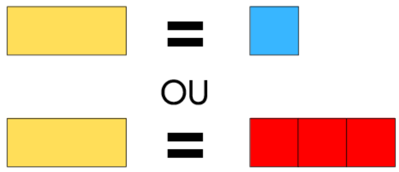
5.5 ATIVIDADES SEGUINTES

Depois de trabalhadas as resoluções de equações de segundo grau na forma de trinômios quadrados perfeitos, seriam realizadas as resoluções de equações de segundo grau por meio do **método de completamento de quadrados**. Tendo em vista a limitação determinada pelo fim do período de estágio, apresentamos aqui os exercícios envolvendo o completamento de quadrados apenas como uma possibilidade de continuidade do trabalho. A ideia geral desses exercícios é que os alunos busquem completar os quadrados adicionando as unidades necessárias em cada um dos lados da igualdade, conforme o exemplo apresentado na Figura 29 abaixo.

Figura 29: Resolução da equação $x^2 + 2x = 3$ utilizando *Algebra Tiles*

Vamos resolver a equação $x^2 + 2x = 3$		
	Algebra Tiles:	Algebricamente:

Equação inicial:		$x^2 + 2x = 3$
Manipulando o material em busca de formar quadrados em ambos lados da igualdade		$x^2 + 2x = 3$
Com o objetivo de completar os quadrados, adicionando (+1) aos dois lados da igualdade		$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1$
Analisando o quadrado à esquerda da igualdade, temos que a medida dos seus lados é x+1		$(x + 1)^2 = 4$
Temos que x+1 é igual ao valor que, ao quadrado, resulta em 4. Portanto, x+1 pode ser +/- a raiz quadrada de 4 que é 2		$x + 1 = 2$ ou $x + 1 = -2$
Adicionamos (-1) aos dois lados da igualdade, para que tenhamos		$x + 1 - 1 = 2 - 1$ ou $x + 1 - 1 = -2 - 1$

apenas “x” no lado esquerdo		
Anulamos os opostos		$x + (1 \ - 1) = \ 1 \ + (1 \ - 1)$ ou $x + (1 \ - 1) = \ -2 \ - 1$
Obtemos:		$x \ = 1$ ou $x = \ -3$

Fonte: acervo da autora.

Assim como anteriormente, os exercícios que poderiam compor a Atividade 5 envolvendo completamento de quadrados estão disponíveis no Apêndice E. Ao final das atividades envolvendo o completamento de quadrados, seria também apresentada aos alunos a fórmula de resolução de equações do 2º grau com 1 incógnita, como uma generalização do método até então utilizado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir de estudos sobre o ensino e a aprendizagem de álgebra na Educação Básica, observamos que a falta de comunicação entre a aprendizagem de conhecimentos novos com aqueles que os alunos já possuem é um dos motivos que fazem esse processo se tornar tão complexo (LINS E GIMENEZ, 1997). Além disso, a falta de entendimento dos conceitos e significados torna-se um impasse na transição da aritmética para a álgebra (PONTE, 2005), mas o uso de materiais didáticos manipuláveis pode ser uma resposta a isso, por aproximar a teoria matemática com a experimentação prática dos objetos (RODRIGUES E GAZIRE, 2012).

Como uma possibilidade para o ensino da álgebra na escola, o uso do material manipulativo *Algebra Tiles* já é presente em diversas escolas americanas (MEINERZ, 2020). Além disso, tem auxiliado os alunos em relação à compreensão de diferentes conceitos algébricos (THORTON, 1995).

Assim, nesta pesquisa buscamos responder à pergunta diretriz: **Quais as potencialidades do uso do material manipulável *Algebra Tiles* para a compreensão e o desenvolvimento de resoluções de equações de segundo grau por alunos do nono ano do ensino fundamental?** Para isso, produzimos e aplicamos quatro atividades com os alunos da turma, nas quais eles deveriam buscar por procedimentos para resolver as equações fazendo uso de diferentes representações semióticas e da manipulação dos *Algebra Tiles*.

A primeira atividade realizada consistiu na resolução de equações de primeiro grau com uma incógnita, com o intuito de propiciar aos alunos um primeiro contato com o material manipulável a partir de um conteúdo que eles já conheciam. Além disso, buscamos possibilitar aos alunos que os novos conhecimentos a serem construídos pudessem estar relacionados com os conhecimentos que eles já possuíam.

Durante as resoluções das equações da Atividade 1, parte dos alunos realizou-as por meio da manipulação das peças do *Algebra Tiles*, enquanto outros preferiram realizá-las através do procedimento algébrico. Pudemos perceber que a utilização do material manipulável auxiliou os alunos que decidiram iniciar o tratamento dessa representação na compreensão das resoluções, uma vez que a maneira como poderiam “isolar a peça x”, a partir dos *Algebra Tiles*, se tornou mais intuitiva. Já para os alunos que optaram por realizar a resolução diretamente de forma algébrica, uma vez que já tinham familiaridade com os tratamentos nessa representação, a conversão para a representação pictórica e na língua natural auxiliou-os a compreenderem os conceitos matemáticos envolvidos nesses tratamentos.

Então, ao realizarem a Atividade 2, que consistia na resolução das equações de 2º grau do tipo $x^2 = a$, com $a \geq 0$, os alunos já tinham certa familiaridade com as peças e com a manipulação dos *Algebra Tiles*. Outra vez, tivemos alunos que preferiram inicialmente utilizar o material manipulável para realizar os tratamentos, enquanto outros escolheram resolver as equações primeiramente de forma algébrica. Apesar de o número de alunos que optou pela segunda forma de resolução, nesse caso, ser um pouco maior, reforçamos a importância de compreenderem os tratamentos na forma pictórica, uma vez que serviriam de referência para a atividade seguinte.

O procedimento adotado por aqueles que optaram por realizar os tratamentos na representação com os *Algebra Tiles* consistiu em comparar qual deveria ser a medida do lado do quadrado x^2 para que os quadrados em ambos os lados do tapetinho fossem de fato iguais. Apesar da representação permitir a visualização apenas de valores positivos, ao ser feita a conversão para o registro algébrico foi possível discutir a importância de serem considerados também os valores negativos, que elevados ao quadrado obteriam o mesmo resultado. Dessa forma, os alunos puderam transitar entre os diferentes registros, além de realizar parte do tratamento em cada um deles.

Então, ao realizarem a resolução das equações presentes na Atividade 3, nas quais as equações de 2º grau com uma incógnita eram compostas por trinômios quadrados perfeitos, os alunos tinham como referência os procedimentos utilizados na atividade anterior. Dessa vez, todos os alunos recorreram à inicial representação das equações por meio dos *Algebra Tiles*, o que se mostrou essencial para reescreverem os trinômios como quadrados perfeitos. Esse se mostrou ser, para nós, o principal potencial da ferramenta e a sua relevância para uso em sala de aula.

Depois de terem realizado esse passo, alguns alunos seguiram o tratamento dentro dessa representação, enquanto outros optaram pela conversão à representação algébrica para dar continuidade à resolução. Com isso, pudemos perceber que foi realizada a mobilização de diferentes registros, bem como a conversão entre eles, havendo a escolha de realizarem os tratamentos dentro da representação preferida por cada um.

Com essas três primeiras atividades, os alunos puderam produzir e comparar diferentes registros, realizando a conversão entre eles, bem como o tratamento referente a cada um. Destacamos, também, que o uso da tabela de três colunas, indicada por Meinerz (2020) se mostrou uma ótima ferramenta para conduzir os alunos no registro e desenvolvimento dos elementos fundamentais à semiose, de acordo com Duval (2003), e auxiliando na aprendizagem do pensamento matemático da parte dos alunos.

A mobilização e a escolha entre os diferentes registros de representação semiótica ficou ainda mais evidente ao realizarem a Atividade 4. Por terem recebido apenas as equações e, assim, ficarem livres para realizarem os procedimentos dentro dos registros de suas preferências, pudemos perceber que as atividades anteriores foram importantes para mostrar aos alunos as diferentes formas de representar e buscar a solução das equações, uma vez que alguns optaram por realizar os tratamentos dentro da representação com os *Algebra Tiles*, outros diretamente na representação pictórica e outros, ainda, o fizeram apenas de forma algébrica.

Assim, tiveram a oportunidade de decidir por qual dessas formas lhes era mais conveniente realizar o tratamento. Mais uma vez, grande parte dos alunos optou pela utilização do material manipulável para conseguir reescrever os trinômios na forma de quadrado perfeito, ressaltando, assim, um dos principais potenciais dos *Algebra Tiles* na resolução de equações de segundo grau com uma incógnita.

Além disso, destacamos que os alunos que optaram por utilizar as peças do *Algebra Tiles* o fizeram apenas como recurso para escrever os trinômios na forma do quadrado da soma de dois termos, e não em toda a resolução da equação. Isso nos mostra, então, que iniciaram a independência do material, uma vez que conseguiram concluir a resolução das equações diretamente de forma algébrica.

Portanto, respondendo à pergunta da pesquisa, consideramos que o uso dos *Algebra Tiles* auxiliou os alunos a compreenderem e desenvolverem estratégias de resolução das equações de segundo grau. Eles puderam transitar entre os diferentes registros de representações semióticas, estabelecendo relações entre eles e realizando os tratamentos em cada uma dessas representações. Ademais, o uso do material manipulável, além de oferecer estratégias para os alunos que apresentavam maior dificuldade no tratamento algébrico, também possibilitou que outros, através do tratamento do registro pictórico, desenvolvessem ideias para o procedimento algébrico.

Além dos aspectos abordados até aqui, acreditamos que ainda há muitas possibilidades de continuidade, pesquisando outras potencialidades do uso dos *Algebra Tiles* em sala de aula. Em trabalhos futuros vislumbramos desenvolver com os alunos as resoluções a partir do método de completamento de quadrados, uma vez que a limitação determinada pelo fim do período de estágio impossibilitou essa investigação. Além disso, podem ser pesquisados os casos em que existem termos negativos na equação, como $-x^2$ e $-x$, e quais os efeitos disso, uma vez que o uso dos *Algebra Tiles* nas equações de segundo grau traz consigo a ideia de área e de medidas positivas.

Por fim, destacamos a importância desta pesquisa para o desenvolvimento pessoal e profissional da professora-pesquisadora. Desde a oportunidade de estar inserida em sala de aula trabalhando um conteúdo de álgebra com os alunos, bem como de conhecer o material manipulativo *Algebra Tiles* e, também, os trabalhos e a teoria de Duval. O trabalho foi um incentivo para seguir buscando por práticas educativas que estejam centradas nos alunos e em possibilitar que participem ativamente do desenvolvimento do seu conhecimento.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação - Uma introdução à teoria e aos métodos.** Lisboa, Porto Editora. 1994. p. 47-74.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris matemática, 9º ano:** Ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. In: Revemat, v. 7, n. 2. Florianópolis, 2012. p. 266-297.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. **Como analisar a questão crucial da compreensão em matemática?** Tradução de Méricles Thadeu Moretti. In REVEMAT, v.13, n.2. Florianópolis, 2018. p.1-27.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática.** Campinas: Autores associados, 2006.

HALL, B. C. **Using Algebra Tiles effectively**. 1999.

MEINERZ, F. M. **Resolução de Equações do 1º grau com uma incógnita por meio do uso do material algebra tiles.** 159 p. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/220342/001124639.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 08 ago. 2022.

PONTE, J. P. Álgebra no currículo escolar. In: **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 85, p. 36 - 42, nov., 2005.

RODRIGUES, F. C., GAZIRE, E. S. **Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão**. In: Revemat, v. 7, n. 2. Florianópolis, 2012. p. 187-196.

SCHULTZ, J.E., ELLIS, W., HOLLOWELL, K. A., KENNEDY, P. A. **Algebra 2**. Austin, Texas: Holt, Rinehart, and Winston, 2001. Disponível em: http://teshalemath.com/teshale_docs/Textbooks/Algebra2_Holt_compressed.pdf. Acesso em: 07 set. 2022.

THORNTON, G. J. **Algebra Tiles and Learning Styles.** 203 p. Thesis (Master of Science) - Secondary Mathematics Education, Faculty of Education, Simon Fraser University, 1995. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/56370919.pdf. Acesso em: 07 set. 2022.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações de variáveis. In: **As ideias da álgebra**. Organizadores: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

APÊNDICE A - ATIVIDADE 1

Vamos resolver a equação $2x + 3 = 11$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

Vamos resolver a equação $4x + 2x = 12$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

Vamos resolver a equação $7x + 1 = 6x + 6$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

Vamos resolver a equação $4x - 8 = 2x + 6$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

APÊNDICE B - ATIVIDADE 2

Vamos resolver a equação $x^2 = 9$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente
Vamos resolver a equação $x^2 = 25$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

Vamos resolver a equação $x^2 = 16$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

Vamos resolver a equação $x^2 = 4$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

APÊNDICE C - ATIVIDADE 3

Vamos resolver a equação $x^2 + 8x + 16 = 4$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

Vamos resolver a equação $x^2 + 6x + 9 = 25$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

Vamos resolver a equação $x^2 + 10x + 25 = 1$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

Vamos resolver a equação $x^2 + 4x + 4 = 9$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

APÊNDICE D - ATIVIDADE 4

Resolva as equações:

a) $x^2 = 9$

b) $x^2 - 3 = 33$

c) $x^2 - 44 = 5$

d) $3x^2 = 27$

e) $4x^2 - 64 = 0$

f) $x^2 + 4x + 4 = 16$

g) $x^2 + 8x + 16 = 1$

h) $x^2 + 20x + 100 = 81$

i) $x^2 + 6x + 9 = 0$

j) $3x^2 + 30x + 75 = 0$

APÊNDICE E - ATIVIDADE 5

Vamos resolver a equação $x^2 + 4x = 5$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente
Vamos resolver a equação $x^2 + 6x = 7$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente
Vamos resolver a equação $x^2 + 8x = 9$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

Vamos resolver a equação $x^2 + 2x = 3$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente
Vamos resolver a equação $x^2 + 6x = 0$		
Utilizando palavras	Algebra Tiles	Algebricamente

APÊNDICE E - TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)

Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
Convite para participação em pesquisa

Prezado(a) Aluno(a)_________________________________, você está sendo convidado(a) a participar voluntariamente da pesquisa provisoriamente intitulada "O uso do material Algebra Tiles na resolução de equações de 2º grau com uma incógnita". A pesquisa está sendo desenvolvida por Bárbara Cardoso Kayser, estudante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Essa pesquisa é orientada pela Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering, a quem você poderá contatar, caso julgar necessário, por meio do e-mail ldoering@mat.ufrgs.br.

O objetivo desta pesquisa é estudar quais são as potencialidades da utilização do material manipulável Algebra Tiles para a compreensão e o desenvolvimento de resoluções de equações do segundo grau por alunos do Ensino Fundamental.

O uso das informações decorridas da participação (produção escrita, fotos, gravação de áudio e caderno de campo) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), identificadas apenas por códigos alfanuméricos. Todas as informações fornecidas serão armazenadas sob responsabilidade da pesquisadora por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Os riscos decorrentes da participação na pesquisa são mínimos, podendo haver desconforto com o trabalho em grupo e dificuldades em compreender ou argumentar em tópicos de matemática. Na recorrência de qualquer circunstância desse tipo, os(as) estudantes receberão todo o apoio da professora/pesquisadora no sentido de minimizar os riscos mencionados. Já com relação aos benefícios da pesquisa, esperamos produzir informações importantes sobre a aprendizagem da álgebra no ensino fundamental através do uso de materiais manipuláveis, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A sua participação não envolve nenhum tipo de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta colaboração a contribuição para o sucesso da pesquisa. Sua participação é muito importante e é voluntária. Você poderá se recusar a participar da pesquisa a qualquer momento, não havendo prejuízo de nenhuma forma se essa for sua decisão. O consentimento à participação não retira o direito à indenização devido a eventuais danos causados pela pesquisa. A colaboração à pesquisa se iniciará apenas a partir da entrega desse documento assinado por você e do Termo de Consentimento assinado pelo(a) responsável.

Caso necessite de qualquer esclarecimento, peço que entre em contato comigo, a qualquer momento, pelo telefone +55 51 9 9110-6455 ou pelo e-mail barbarackayser@gmail.com. Relativamente a dúvidas sobre procedimentos éticos, você também poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone +55 51 3308-3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br
Obrigada pela sua colaboração.

Eu, ____________________________________, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa provisoriamente intitulada "O uso do material Algebra Tiles na resolução de equações de 2º grau com uma incógnita", desenvolvida pela pesquisadora Bárbara Cardoso Kayser.

Porto Alegre, ____ de ______________ de ______.

Assinatura do(a) aluno(a): ____

Assinatura da Pesquisadora: ____

Assinatura da Orientadora: ____

APÊNDICE F - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
Convite para participação em pesquisa

Prezado(a) Responsável pelo(a) Aluno(a)___________________________________, o(a) aluno(a)____________________________________ está sendo convidado(a) a participar voluntariamente da pesquisa provisoriamente intitulada "O uso do material Algebra Tiles na resolução de equações de 2º grau com uma incógnita". A pesquisa está sendo desenvolvida por Bárbara Cardoso Kayser, estudante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Essa pesquisa é orientada pela Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering, a quem você poderá contatar, caso julgar necessário, por meio do e-mail ldoering@mat.ufrgs.br.

O objetivo desta pesquisa é estudar quais são as potencialidades da utilização do material manipulável Algebra Tiles para a compreensão e o desenvolvimento de resoluções de equações do segundo grau por alunos do Ensino Fundamental.

O uso das informações decorridas da participação (produção escrita, fotos, gravação de áudio e caderno de campo) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), identificadas apenas por códigos alfanuméricos. Todas as informações fornecidas serão armazenadas sob responsabilidade da pesquisadora por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Os riscos decorrentes da participação na pesquisa são mínimos, podendo haver desconforto com o trabalho em grupo e dificuldades em compreender ou argumentar em tópicos de matemática. Na recorrência de qualquer circunstância desse tipo, os(as) estudantes receberão todo o apoio da professora/pesquisadora no sentido de minimizar os riscos mencionados. Já com relação aos benefícios da pesquisa, esperamos produzir informações importantes sobre a aprendizagem da álgebra no ensino fundamental através do uso de materiais manipuláveis, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A participação do(a) aluno(a) não envolve nenhum tipo de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta colaboração a contribuição para o sucesso da pesquisa. A participação é muito importante e é voluntária. O(A) aluno(a) poderá se recusar a participar da pesquisa a qualquer momento, não havendo prejuízo de nenhuma forma para ele(a) se essa for sua decisão. O consentimento à participação não retira o direito à indenização devido a eventuais danos causados pela pesquisa. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento assinado por você e do Termo de Assentimento assinado pelo(a) aluno(a). Caso necessite de qualquer esclarecimento, peço que entre em contato comigo, a qualquer momento, pelo telefone +55 51 9 9110-6455 ou pelo e-mail barbarackayser@gmail.com. Relativamente a dúvidas sobre procedimentos éticos, você também poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone +55 51 3308-3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br
Obrigada pela sua colaboração.

Eu, ____, declaro, por meio deste termo, que concordei com a participação do(a) aluno(a) ______________________________, o(a) qual sou responsável, na pesquisa provisoriamente intitulada "O uso do material Algebra Tiles na resolução de equações de 2º grau com uma incógnita", desenvolvida pela pesquisadora Bárbara Cardoso Kayser.

Porto Alegre, ____ de ______________ de ______.

Assinatura do(a) Responsável: ____

Assinatura da Pesquisadora: ____

Assinatura da Orientadora: ____