Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Álgebras de Hopf oriundas de pares combinados parciais

Tese de Doutorado

Danielle Santos Azevedo

Porto Alegre, 22 de novembro de 2016

Tese submetida por Danielle Santos Azevedo*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Antonio Paques

Banca examinadora:
Prof. Dr. Antonio Paques (UFRGS - Orientador)
Prof. Dr. Alveri Sant'Ana (UFRGS)
Prof. Dr. Dirceu Bagio (UFSM)
Prof. Dr. Mikhailo Dokuchaev (USP)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre estar iluminando meu caminho.

Sou muito grata aos meus pais. Mãe obrigada por ser essa amiga compreensiva, que sempre apoia minhas decisões e me ajuda a seguir em frente. Pai te agradeço infinitamente por cuidar tão bem de mim. Você, com certeza, foi uma das peças fundamentais para poder concluir mais essa etapa da minha vida.

Não posso esquecer de agradecer a alguns familiares que sempre estiveram me apoiando esse tempo todo; minha tia Elisete, uma pessoa totalmente adorável que sempre me apoia. Minhas primas Fernanda e Tatiane, vocês são as irmãs que eu não tive. E não posso deixar de mencionar minha amada dinda, Marta. Uma pessoa que sempre lembra de mim, sempre me trata bem, me faz bem e torce por mim.

Nesta trajetória do meu doutorado, uma pessoa especial entrou no meu caminho: o meu namorado Marne. Obrigada por ser esse cavalheiro comigo e por sempre me apoiar a estudar e entender que isso faz parte da minha vida e que me faz feliz!

Gostaria de agradecer as minhas amigas Aline, Bruna, Camila e Luciane. Em todas as vezes que conversamos pude sentir o amor que existe entre nós.

Agradeço à Grasiela que participou efetivamente das discussões durante a realização deste trabalho. Agradeço à Graziela e ao Eneilson que estão conosco nesta trajetória nos ajudando matematicamente e psicologicamente.

Por fim, agradeço ao professor Paques por ter aceitado me orientar e fazer isso tão bem, aos membros da banca por terem aceito o convite de ler a minha tese, a CAPES que me auxiliou financeiramente e à pós-graduação da UFRGS.

Resumo

M. Takeuchi [26] e S. Majid [19] definiram par combinado de álgebras de Hopf e, com isso, construíram álgebras de Hopf, sob certas condições adicionais. Com o intuito de gerar álgebras de Hopf envolvendo ações e coações parciais, neste trabalho definimos pares combinados parciais tanto sob o ponto de vista de Takeuchi quanto do ponto de vista de Majid.

Por meio desse estudo, construimos álgebras de Hopf oriundas desses pares combinados parciais, também considerando hipóteses adicionais. Exibimos uma caracterização desses pares combinados parciais, bem como exemplos e propriedades. E, por fim, demonstramos um teorema que relaciona essas álgebras, nesse contexto parcial.

Abstract

M. Takeuchi [26] and S. Majid [19] defined matched pair of Hopf algebras and constructed Hopf algebras under certain additional conditions. In order to generate Hopf algebras involving partial actions and partial coactions, partial matched pairs are introduced both from the point of view of Takeuchi and from the point of view of Majid.

Throughout this study, we construct Hopf algebras arising from these partial matched pairs also considering additional assumptions. We display a characterization of these partial pairs, as well as examples and properties. And finally, we proved a theorem that relates these algebras, in this partial context.

índice

Introdução

Ação parcial de grupos é um conceito particularmente novo que foi introduzido na teoria de álgebras de operadores. Mais precisamente, surgiu com R. Exel [17] no estudo de C^*-álgebras geradas por isometrias parciais em um espaço de Hilbert. Em [15], R. Exel e M. Dokuchaev definiram ações parciais de grupos em um contexto puramente algébrico e, após isso, este conceito foi estendido para o contexto de álgebras de Hopf, em [9].

A partir desse momento, diversas pesquisas têm sido desenvolvidas nessa área e ações parciais tornaram-se um tema de grande interesse. Vários avanços estão ocorrendo nesse estudo, como, por exemplo, as teorias de Galois e de Morita e representações parciais. Para o leitor que tiver interesse nesses assuntos, as seguintes referências são indicadas: [16], [9], [1], [4] e [2].

Neste trabalho construímos álgebras de Hopf a partir de pares combinados parciais, que envolvem ações e coações parciais, com o intuito, entre outros, de enfatizar a relevância desse assunto. Existem diversas ferramentas para gerar exemplos de álgebras de Hopf, em particular, a construção de (bi)produtos, a qual será apresentada e estudada nesta tese.

A noção de par combinado de álgebras de Hopf (H, L) foi introduzida por W. M. Singer [23] no caso graduado e quando L é comutativo e H cocomutativo o par combinado foi chamado abeliano. Singer definiu uma estrutura de uma álgebra de Hopf em $L \otimes H$ envolvendo o conceito de cociclo. Já em [26], M. Takeuchi considerou apenas os casos não graduados e denotou por $L \# H$ a álgebra de Hopf associada ao cociclo trivial, e a essa álgebra foi dado o nome de *produto bismash* de L por H.

Além disso, S. Majid [19] também apresentou resultados que geraram estruturas de álgebras de Hopf. Ele descreveu uma vasta classe de álgebras de Hopf não comutativas e não cocomutativas, chamadas de *biprodutos cruzado* de álgebras de Hopf (H, L). Da mesma forma que M. Takeuchi, S. Majid definiu par combinado (H, L) e construiu uma álgebra de Hopf a partir dele, supondo uma certa condição de compatibilidade entre L e H. Tal condição substituiu a condição de comutatividade e cocomutatividade exigida por M. Takeuchi e generalizou o par combinado definido pelo mesmo.

Como outras aplicações desses (bi)produtos podemos citar o problema de fatorização de biálgebras. Em [7], os autores estabeleceram uma teoria caracterizando produto cruzado de biálgebras em termos de injeções e projeções. Em particular, todos os (bi)produtos conhecidos podem ser descritos por essa teoria. Além disso, ela fornece novas famílias de produtos de biálgebras. Os autores também trabalharam com a definição geral de categorias monoidais trançadas, que permitiu aplicar alguns resultados desse artigo à categoria trançada de bimódulos de Hopf sobre uma álgebra de Hopf. O biproduto cruzado de Majid pode ser visto como uma torção de um determinado produto tensorial de biálgebras nessa categoria. Isso assemelha-se ao caso do duplo de Drinfeld que pode ser construído como uma torção de um produto cruzado específico.

Neste trabalho estudamos os pares combinados desenvolvidos por M. Takeuchi e por S. Majid nos casos parciais e buscamos condições para construir álgebras de Hopf a partir desses pares e, também, para que exista uma correspondência entre elas. Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 tratamos dos pré-requisitos minimamente necessários para o entendimento do texto.

No capítulo 2 expomos o que ocorre no caso em que temos estruturas de módulos álgebras parciais e comódulos coálgebras parciais. Para isso definimos par combinado parcial (H, L) de álgebras de Hopf e analisamos sob quais condições é possível gerar uma álgebra de Hopf envolvendo o produto smash usual, como ocorre no caso em que a ação e a coação são globais.

Um detalhe importante a mencionar é que foi possível trocar as hipóteses de comutativo e cocomutativo por uma condição mais fraca, a qual estamos chamando de condição de compatibilidade. E essa condição é satisfeita quando L é comutativo e H é cocomutativo.

Depois de construir tal álgebra de Hopf, nós mostramos que existe outra maneira de construí-la e, também, expomos a construção do dual dessa álgebra de Hopf, bem como exemplos e propriedades.

A ideia principal do capítulo 3 é considerar estruturas de módulos coálgebras parciais a fim de generalizar o biproduto cruzado de álgebras de Hopf, definido por S. Majid [19]. Novamente, são dadas condições para gerar álgebras de Hopf. Além disso, como o Duplo de Drinfeld é um caso particular de um biproduto cruzado de álgebras de Hopf, também definimos o Duplo de Drinfeld parcial. Por fim, apresentamos uma relação do produto bismash parcial com o biproduto cruzado de álgebras de Hopf parcial.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados já conhecidos que são úteis no desenvolvimento do trabalho. Na primeira seção, descrevemos o conceito de álgebras de Hopf, juntamente com alguns exemplos e propriedades. Na segunda seção, exibimos os conceitos de ações e coações parciais de álgebras de Hopf sobre álgebras e coálgebras, estruturas com as quais trabalhamos no texto. Algumas referências serão dadas nos momentos em que se façam necessárias.

1.1 Definições básicas

Nesta seção relembramos algumas propriedades clássicas de álgebras de Hopf que serão utilizadas nos capítulos seguintes. Como boas referências para a teoria de álgebras de Hopf, sugerimos [22] e [20].

Em todo o trabalho, $\Bbbk$ é considerado um corpo, toda (co)álgebra é considerada sobre $\Bbbk$ e o símbolo $\otimes$ significa $\otimes_{\Bbbk}$.

Definição 1.1.1. Uma $\Bbbk$-*álgebra* (ou simplesmente álgebra) é uma tripla (A, m, u), na qual A é $\Bbbk$-espaço vetorial e $m : A \otimes A \to A$ (multiplicação) e $u : \Bbbk \to A$ (unidade) são aplicações $\Bbbk$-lineares que satisfazem as seguintes condições:

(i) $m \circ (m \otimes id_A) = m \circ (id_A \otimes m)$;

(ii) $m \circ (id_A \otimes u) = \varphi = m \circ (u \otimes id_A)$, sendo φ o isomorfismo canônico entre $A \otimes \Bbbk$ e A.

Do item (ii), temos que $u(1_{\Bbbk}) = 1_A$ unidade bilateral de A. Também chamaremos de álgebra nos casos em que essa unidade for unilateral.

O conceito de coálgebra é o dual do conceito de uma álgebra.

Definição 1.1.2. Uma $\Bbbk$-*coálgebra* (ou simplesmente coálgebra) é uma tripla (C, Δ, ε) na qual C é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\Delta : C \to C \otimes C$ (comultiplicação) e $\varepsilon : C \to \Bbbk$ (counidade) são aplicações $\Bbbk$-lineares que satisfazem as seguintes condições:

(i) $(\Delta \otimes id_C) \circ \Delta = (id_C \otimes \Delta) \circ \Delta$;

(ii) $(id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \varphi = (\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta$, sendo φ o isomorfismo canônico $c \longmapsto c \otimes 1_{\Bbbk}$.

Adotaremos em todo o texto a notação de Sweedler para Δ, isto é,

$$\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$$

(com somatório subentendido), para todo $h \in H$. Com essa notação, as condições (i) e (ii) acima referentes a Δ e a ε escrevem-se:

(i) $(c_1)_1 \otimes (c_1)_2 \otimes c_2 = c_1 \otimes (c_2)_1 \otimes (c_2)_2 = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$,

(ii) $c_1 \varepsilon_C(c_2) = c = \varepsilon_C(c_1) c_2$, para todo $c \in C$.

Na sequência definimos uma biálgebra. Basicamente, vamos considerar um espaço vetorial H equipado simultaneamente com uma estrutura de álgebra e uma estrutura de coálgebra, ambas compatíveis entre si.

Definição 1.1.3. Um $\Bbbk$-espaço vetorial H é dito uma *biálgebra* se existem aplicações $\Bbbk$-lineares $m : H \otimes H \to H, u : \Bbbk \to H, \Delta : H \to H \otimes H$ e $\varepsilon : H \to \Bbbk$ tais que (H, m, u) é uma álgebra, (H, Δ, ε) é uma coálgebra e vale uma das seguintes condições (equivalentes):

(i) Δ e ε são homomorfismos de álgebras;

(ii) m e u são homomorfismos de coálgebras.

Definição 1.1.4. Sejam H e H' duas biálgebras. Uma aplicação $f : H \to H'$ é dita um *homomorfismo de biálgebras* se f é simultaneamente um homomorfismo de álgebras e de coálgebras, ou seja, se valem os seguintes itens:

(i) $f \circ m_H = m_{H'} \circ (f \otimes f)$;

(ii) $\Delta_{H'} \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_H$;

(iii) $\varepsilon_{H'} \circ f = \varepsilon_H$.

Nosso próximo objetivo será apresentar o conceito de álgebra de Hopf. Sejam A uma álgebra e C uma coálgebra. O espaço vetorial $Hom_{\Bbbk}(C, A)$ tem uma estrutura de álgebra, com multiplicação dada pelo produto convolução:

$$f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta,$$

para todo $f, g \in Hom_{\Bbbk}(C, A)$. A unidade dessa álgebra é a aplicação $u \circ \varepsilon$ (veja [14]). Em particular, quando $A = C = H$ é uma biálgebra, podemos pensar em uma aplicação $S \in Hom_{\Bbbk}(H, H)$ que seja inversa da aplicação identidade id_H, com respeito ao produto convolução. Quando ela existe, chamamos S de antípoda de H.

Definição 1.1.5. Uma *álgebra de Hopf* é uma biálgebra H que possui antípoda.

Com a notação de Sweedler,

$$S * id_H = u \circ \varepsilon = id_H * S$$

significa

$$S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = h_1 S(h_2),$$

para todo $h \in H$.

Abaixo, listaremos alguns exemplos de álgebras de Hopf que serão utilizados ao longo deste trabalho:

Exemplo 1.1.6. *Álgebra de grupo.* Sejam G um grupo e $\Bbbk G$ o $\Bbbk$-espaço vetorial com base $\{g\}_{g \in G}$. Então, $\Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf com as seguintes estruturas: para todo $h, g \in G$,

$$m(g \otimes h) = gh \qquad u(1_{\Bbbk}) = 1_G$$

$$\Delta(g) = g \otimes g \qquad \varepsilon(g) = 1_{\Bbbk}$$

$$S(g) = g^{-1}.$$

Exemplo 1.1.7. *O dual de uma álgebra de grupo.* Seja G um grupo finito, o dual da álgebra de grupo é denotado por $(\Bbbk G)^*$ cuja base dual é formada pelos elementos p_g, com $g \in G$, tal que $p_g(h) = \delta_{g,h}$, para todo $h \in H$. Com as estruturas abaixo, $(\Bbbk G)^*$ é uma álgebra de Hopf: dados $h, g \in G$,

$$m(p_g \otimes p_h) = \delta_{g,h} p_g \qquad u(1_{\Bbbk}) = \sum_{g \in G} p_g = 1_{(\Bbbk G)^*}$$

$$\Delta(p_g) = \sum_{h \in G} p_{gh^{-1}} \otimes p_h \qquad \varepsilon(p_g) = \delta_{1,g}$$

$$S(p_g) = p_{g^{-1}}.$$

Exemplo 1.1.8. *Álgebra de Sweedler (H_4).* Assumimos que $car(\Bbbk) \neq 2$. Seja H_4 uma $\Bbbk$-álgebra gerada por c e x, satisfazendo as relações $c^2 = 1$, $x^2 = 0$ e $xc = -cx$. Ou seja, $H_4 = \Bbbk < c, x : c^2 - 1 = 0, x^2 = 0, xc + cx = 0 >$. A estrutura de coálgebra e a antípoda são dadas por:

$$\Delta(c) = c \otimes c \qquad \Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1$$

$$\varepsilon(c) = 1 \qquad \varepsilon(x) = 0$$

$$S(c) = c^{-1} \qquad S(x) = -cx.$$

Com estas condições, H_4 é uma álgebra de Hopf.

Generalizando o exemplo descrito acima, temos a seguinte álgebra de Hopf:

Exemplo 1.1.9. *Álgebra de Taft* (Tq). Sejam $n \geq 2$ um número inteiro não divisível pela característica do corpo $\Bbbk$ e q uma raiz n-ésima primitiva da unidade. Consideramos a $\Bbbk$-álgebra definida pelos geradores c e x, com as relações:

$$c^n = 1, \; x^n = 0 \text{ e } xc = qcx.$$

Ou seja, $Tq = \Bbbk < x, c : x^n = 0, c^n - 1 = 0, xc - qcx = 0 >$. Esta álgebra possui estrutura de coálgebra dada por

$$\Delta(c) = c \otimes c \qquad \Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1$$

$$\varepsilon(c) = 1 \qquad \varepsilon(x) = 0.$$

E antípoda definida por:

$$S(c) = c^{n-1} \qquad S(x) = -c^{n-1}x.$$

Com estas estruturas, T_q é uma álgebra de Hopf.

Analogamente aos conceitos dados acima podemos definir um homomorfismo de álgebras de Hopf, como segue:

Definição 1.1.10. Sejam H e H' duas álgebras de Hopf. Uma aplicação $f : H \to H'$ é dita um *homomorfismo de álgebras de Hopf* se é um homomorfismo de biálgebras, isto é, se é um homomorfismo de álgebras e de coálgebras.

E, nesse caso, podemos mostrar que um homomorfismo de álgebras de Hopf preserva antípodas, ou seja, $S_{H'} \circ f = f \circ S_H$.

Agora, apresentaremos algumas propriedades das álgebras de Hopf, muito utilizadas ao longo deste trabalho.

Proposição 1.1.11. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então, para todo $g, h \in H$,*

(*i*) $S(hg) = S(g)S(h)$;

(*ii*) $S(1_H) = 1_H$;

(*iii*) $\Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1)$;

(*iv*) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

As propriedades (*i*) e (*ii*) significam que S é um anti-homomorfismo de álgebras, e as propriedades (*iii*) e (*iv*), que S é um anti-homomorfismo de coálgebras.

Definição 1.1.12. Sejam H uma álgebra de Hopf e $\tau : H \otimes H \longrightarrow H \otimes H$ o isomorfismo tal que $\tau(h \otimes k) = k \otimes h$, para todo $h, k \in H$.

(*i*) Dizemos que H é *comutativa* se $m \circ \tau = m$;

(*ii*) Dizemos que H e *cocomutativa* se $\Delta = \tau \circ \Delta$.

Lema 1.1.13. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $S^2 = id_H$;

(ii) $h_2 S(h_1) = \varepsilon(h)1_H$, *para todo* $h \in H$;

(iii) $S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H$, *para todo* $h \in H$.

Corolário 1.1.14. *Se H é comutativa ou cocomutativa então* $S^2 = id_H$.

Proposição 1.1.15. *Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S, então H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^*, dada por* $S^*(f) = f \circ S$.

Observação 1.1.16. H é cocomutativa se e somente se H^* é comutativa.

Observação 1.1.17. Seja $H = (H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva. Então, a partir de H podemos construir novos exemplos de álgebras de Hopf:

1. $H^{op} = (H, m^{op}, u, \Delta, \varepsilon, S^{-1})$ é uma álgebra de Hopf, com $m^{op} = m \circ \tau$, onde τ é a aplicação de $H \otimes H$ em si mesmo tal que $\tau(h \otimes g) = g \otimes h$;

2. $H^{cop} = (H, m, u, \Delta^{cop}, \varepsilon, S^{-1})$ é também uma álgebra de Hopf, com $\Delta^{cop} = \tau \circ \Delta$;

3. $(H^{op})^{cop} = (H, m^{op}, u, \Delta^{cop}, \varepsilon, S)$ é também uma álgebra de Hopf. Neste caso, não é necessário que S seja bijetiva.

No que segue, veremos alguns tópicos principais sobre a definição de integrais para uma biálgebra.

Definição 1.1.18. Uma aplicação $T \in H^*$ é chamada uma *integral à esquerda de* H se $f * T = f(1_H)T$, para toda $f \in H^*$. E um elemento $t \in H$ é chamada uma *integral à esquerda em* H se $ht = \varepsilon(h)t$, para todo $h \in H$.

Analogamente, definimos integrais à direita. Denotaremos o espaço das integrais à esquerda e à direita, respectivamente, por

$$\int_l^H := \{h \in H : xh = \varepsilon(x)h, \forall x \in H\} \quad e \tag{1.1}$$

$$\int_r^H := \{h \in H : hx = \varepsilon(x)h, \forall x \in H\}. \tag{1.2}$$

É importante salientar que esses espaços são ideais de H.

Exemplo 1.1.19. Seja H a álgebra de grupo definida no Exemplo 1.1.6, com G finito, e consideremos $t = \sum_{g \in G} g$. Então $t \in \int_l^H$ e $t \in \int_r^H$.

Exemplo 1.1.20. Seja $H = (\Bbbk G)^*$ a álgebra definida no Exemplo 1.1.7, com base $\{p_g : g \in G\}$, sendo $p_g(h) = \delta_{g,h}$. Se $t = p_1$, então $t \in \int_l^H$ e $t \in \int_r^H$.

Exemplo 1.1.21. Sejam $H = T_q$ a álgebra de Taft definida no Exemplo 1.1.9. Então temos:

$$\begin{aligned} t &= (1 + g + ... + g^{n-1})x^{n-1} \in \int_l^H \quad e \\ t' &= (q^{n-1}1 + q^{n-2}g + ... + 1g^{n-1})x^{n-1} \in \int_r^H . \end{aligned}$$

Observação 1.1.22. Note que se $n = 2$ e $q = -1$ nós obtemos que H é a álgebra de Sweedler, geralmente denotada por H_4. Assim, para H_4 temos

$$t = (1+g)x \in \int_l^{H_4} \text{ e } t = (1-g)x \in \int_r^{H_4}.$$

O próximo resultado caracteriza integrais à esquerda de H^*.

Lema 1.1.23. [14] *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então, $\phi \in \int_l^{H^*}$ se e somente se para todo $h \in H$,*

$$\phi(h)1_H = h_1\phi(h_2).$$

Para encerrar essa parte, enunciamos alguns teoremas bastante utilizados quando tratamos de integrais.

Teorema 1.1.24. *(Larson - Sweedler, 1969) Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então:*

(i) $dim(\int_l^H) = dim(\int_r^H) = 1$*;*

(ii) A antípoda S é bijetiva e $S(\int_l^H) = \int_r^H$.

Uma álgebra A é dita *semissimples* se todos os A-módulos não nulos são semisimples, ou seja, se eles são somas diretas de módulos simples(os únicos submódulos são os triviais).

Teorema 1.1.25. *(Larson e Radford, 1988) Seja $\Bbbk$ um corpo algebricamente fechado de característica zero. Seja H uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf de dimensão finita. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) H é semisimples;

(ii) H^* é semisimples;

(iii) $S_H^2 = id_H$.

Teorema 1.1.26. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então, H é uma álgebra de Hopf semisimples se e somente se $\varepsilon(t) \neq 0$ com* $kt = \int_l^H$.

No capítulo seguinte, exibimos alguns exemplos que envolvem o conceito de coálgebras pontuadas, cuja definição segue abaixo. Para mais detalhes, veja [20].

Uma coálgebra C é dita *simples* se as únicas subcoálgebras de C são 0 e C.

Seja C uma coálgebra qualquer. Então, toda subcoálgebra simples de C tem dimensão finita.

Definição 1.1.27. Seja C uma coálgebra.

(i) O *coradical* C_0 de C é a soma de todas as subcoálgebras simples de C.

(ii) C é *pontuada* se toda subcoálgebra simples tem dimensão um.

Necessariamente, uma subcoálgebra de dimensão um é da forma $\Bbbk g$, para $g \in G(C) = \{c \in C; \Delta(c) = c \otimes c\}$.

Assim, C é pontuada se e somente se $C_0 = \Bbbk G(C)$.

Teorema 1.1.28. [14] *Seja C uma coálgebra. C^* é semisimples se e somente se $C = C_0$.*

1.2 (Co)ações parciais em (co)álgebras

Nesta seção apresentamos um pouco da teoria de (co)ações parciais de álgebras de Hopf em (co)álgebras. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [6], [4], [3], [11] e [12]. Ao longo da seção, H representa uma álgebra de Hopf.

Definição 1.2.1. [4] Uma álgebra A com unidade é um *H-módulo álgebra parcial à esquerda* se existe uma aplicação $\Bbbk$-linear

$$\begin{aligned} \rightharpoonup : H \otimes A &\longrightarrow A \\ h \otimes a &\longmapsto h \rightharpoonup a \end{aligned}$$

tal que para $h, g \in H$ e $a, b \in A$,

(i) $1_H \rightharpoonup a = a$;

(ii) $h \rightharpoonup ab = (h_1 \rightharpoonup a)(h_2 \rightharpoonup b)$;

(iii) $h \rightharpoonup (g \rightharpoonup a) = (h_1 \rightharpoonup 1_A)(h_2 g \rightharpoonup a)$.

É possível mostrar que os itens (i), (ii) e (iii) acima são equivalentes aos itens

(i)' $1_H \rightharpoonup a = a$;

(ii)' $h \rightharpoonup (a(g \rightharpoonup b)) = (h_1 \rightharpoonup a)(h_2 g \rightharpoonup b)$.

Se além dos itens acima, tivermos a hipótese adicional de que $h \rightharpoonup (g \rightharpoonup a) = (h_1 g \rightharpoonup a)(h_2 \rightharpoonup 1_A)$, dizemos que a ação é *simétrica*. De forma análoga, define-se módulo álgebra parcial à direita.

Se A é um H-módulo álgebra parcial à esquerda, então também dizemos que temos uma ação parcial da álgebra de Hopf H em A.

Uma álgebra A é um H-módulo álgebra (global) à esquerda se existe uma aplicação $\triangleright : H \otimes A \longrightarrow A$ $\Bbbk$-linear satisfazendo os itens (i) e (ii) da definição acima e, também, $h \triangleright (k \triangleright a) = hk \triangleright a$, para todo $h, k \in H$ e $a \in A$.

Todo módulo álgebra global é parcial. E, além disso, um módulo álgebra parcial é global se e somente se $h \rightharpoonup 1_A = \varepsilon_H(h) 1_A$.

Exemplo 1.2.2. [2] Considere uma ação parcial α de um grupo G em uma álgebra com unidade A. Suponha que cada D_g seja também uma álgebra com unidade, ou seja, D_g é da forma $D_g = 1_g A$. Então, existe uma ação parcial da álgebra de grupo $\Bbbk G$ em A definida nos elementos da base por

$$g \rightharpoonup a = \alpha_g(a 1_{g^{-1}})$$

e estendida linearmente para todos os elementos de $\Bbbk G$.

Dada uma ação parcial de uma álgebra de Hopf H em uma álgebra A, nós podemos definir um produto em $A \otimes H$, dado por

$$(a \otimes h)(b \otimes g) = a(h_1 \rightharpoonup b) \otimes h_2 g,$$

para $a, b \in A$ e $h, g \in H$. Denotaremos essa estrutura por $A\#H$.

Proposição 1.2.3. [4] *Seja A um H-módulo álgebra parcial à esquerda. $A\#H$ é uma álgebra associativa com unidade à esquerda $1_A\#1_H$.*

É possível mostrar que $(a\#h)(1_A\#1_H) = a(h_1 \rightharpoonup 1_A)\#h_2$. Portanto, quando A é um H-módulo álgebra à esquerda, $1_A\#1_H$ é uma unidade à esquerda e à direita.

Exemplo 1.2.4. [11] Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma álgebra. Temos que

$$\begin{aligned} \rightharpoonup: H \otimes A &\longrightarrow A \\ h \otimes a &\longmapsto h \rightharpoonup a = \lambda(h)a \end{aligned}$$

é uma ação parcial à esquerda de H sobre a álgebra A se e somente se a aplicação $\Bbbk$-linear $\lambda : H \longrightarrow \Bbbk$ satisfaz as seguintes condições:

(i) $\lambda(1_H) = 1_{\Bbbk}$;

(ii) $\lambda(h)\lambda(l) = \lambda(h_1)\lambda(h_2 l)$.

Analogamente,

$$\begin{aligned} \leftharpoonup: A \otimes H &\longrightarrow A \\ a \otimes h &\longmapsto \alpha(h)a = a \leftharpoonup h \end{aligned}$$

é uma ação parcial de H sobre A à direita se e somente se $\alpha : H \longrightarrow \Bbbk$ é uma aplicação $\Bbbk$-linear que satisfaz $\alpha(1_H) = 1_{\Bbbk}$ e $\alpha(h)\alpha(l) = \alpha(hl_1)\alpha(l_2)$.

Segue a definição de comódulo coálgebra parcial, a qual foi introduzida por Batista e Vercruysse em [6]. Também exibiremos alguns exemplos, juntamente com algumas propriedades interessantes.

Definição 1.2.5. Uma coálgebra C é um *H-comódulo coálgebra parcial à direita* com estrutura

$$\rho : C \longrightarrow C \otimes H$$

$$c \longmapsto c^0 \otimes c^1$$

tal que para $c \in C$,

(i) $(id_C \otimes \varepsilon_H)\rho(c) = c$, ou seja, $c^0\varepsilon_H(c^1) = c$;

(ii) $(\Delta_C \otimes id_H)\rho(c) = {c_1}^0 \otimes {c_2}^0 \otimes {c_1}^1{c_2}^1$;

(iii) $(\rho \otimes id_H)\rho(c) = {c_1}^0 \otimes {{c_1}^1}_1 \otimes {{c_1}^1}_2\varepsilon_C({c_2}^0){c_2}^1$.

Se além das condições acima, tivermos que

$$(\rho \otimes id_H)\rho(c) = {c_2}^0 \otimes {{c_2}^1}_1 \otimes {{c_2}^1}_2\varepsilon_C({c_1}^0){c_1}^1$$

dizemos que a coação é *simétrica*.

Analogamente, podemos definir comódulo coálgebra parcial à esquerda.

Uma coálgebra C é um H-comódulo coálgebra à direita se existe uma aplicação $\Bbbk$-linear $\rho : C \longrightarrow C \otimes H$ com $\rho(c) = c^0 \otimes c^1$ tal que os itens (i) e (ii) da definição acima são satisfeitos e, também, $(\rho \otimes id_H)\rho(c) = c^0 \otimes {c^1}_1 \otimes {c^1}_2$.

Todo comódulo coálgebra global é parcial. E um comódulo coálgebra parcial C é global se e somente se $\varepsilon_C(c^0)c^1 = \varepsilon_C(c)1_H$, para todo $c \in C$.

Exemplo 1.2.6. [6] Um exemplo imediato de um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda é $C = \frac{D}{I}$, sendo D um H-comódulo coálgebra à esquerda com coação $\delta : D \longrightarrow H \otimes D$ dada por $\delta(d) = d^{-1} \otimes d^0$ e I um coideal à direita de D tal que C é uma coálgebra. A coação parcial de H em C é dada por $\beta(\overline{d}) = \overline{{d_2}^{-1}} \otimes \varepsilon_C(\overline{d_1})\overline{{d_2}^0}$.

Exemplo 1.2.7. [12] Sejam H uma álgebra de Hopf, C uma coálgebra e $\rho : C \longrightarrow C \otimes H$ uma aplicação $\Bbbk$-linear tal que $\rho(c) = c \otimes h$, para algum $h \in H$. Então, C é um H-comódulo coálgebra parcial à direita se e somente se as seguintes condições ocorrem:

(i) $\varepsilon_H(h) = 1_{\Bbbk}$;

(ii) $h \otimes h = \Delta_H(h)(1 \otimes h)$.

Analogamente, se $\beta : C \longrightarrow H \otimes C$ é uma aplicação $\Bbbk$-linear tal que $\beta(c) = w \otimes c$, para algum $w \in H$, então C é um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda via β se e somente se

(i) $\varepsilon_H(w) = 1_{\Bbbk}$;

(ii) $w \otimes w = (w \otimes 1_H)\Delta_H(w)$.

Note que nestes casos h e w são idempotentes em H.

Proposição 1.2.8. *Seja H uma álgebra de Hopf e C um H-comódulo coálgebra parcial à direita. Então, o espaço $H \otimes C$ é uma coálgebra com a comultiplicação dada por*

$$\Delta(h \otimes c) = (h_1 \otimes {c_1}^0) \otimes (h_2 {c_1}^1 \otimes c_2)$$

e counidade

$$\varepsilon(h \otimes c) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_C(c).$$

Demonstração. Note que para $h \in H$ e $c \in C$,

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta)\Delta(h \otimes c) &= (id \otimes \Delta)(h_1 \otimes {c_1}^0 \otimes h_2 {c_1}^1 \otimes c_2) \\
&= (h_1 \otimes {c_1}^0) \otimes \Delta(h_2 {c_1}^1 \otimes c_2) \\
&= (h_1 \otimes {c_1}^0) \otimes (h_2 {{c_1}^1}_1 \otimes {c_2}^0) \otimes (h_3 {{c_1}^1}_2 {c_2}^1 \otimes c_3) \\
&= (h_1 \otimes {c_1}^0) \otimes (h_2 {{c_1}^1}_1 \otimes \varepsilon_C({{c_2}^0}_1){{c_2}^0}_2) \otimes (h_3 {{c_1}^1}_2 {c_2}^1 \otimes c_3) \\
&= (h_1 \otimes {c_1}^0) \otimes (h_2 {{c_1}^1}_1 \otimes \varepsilon_C({c_2}^0){c_3}^0) \otimes (h_3 {{c_1}^1}_2 {c_2}^1 {c_3}^1 \otimes c_4) \\
&= (h_1 \otimes {c_1}^{00}) \otimes (h_2 {c_1}^{01} \otimes {c_2}^0) \otimes (h_3 {c_1}^1 {c_2}^1 \otimes c_3)
\end{aligned}$$

sendo que a quinta e a sexta igualdade seguem da Definição 1.2.5. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta(h \otimes c) &= (\Delta \otimes id)(h_1 \otimes {c_1}^0 \otimes h_2{c_1}^1 \otimes c_2) \\
&= \Delta(h_1 \otimes {c_1}^0) \otimes (h_2{c_1}^1 \otimes c_2) \\
&= (h_1 \otimes {{c_1}^0}_1{}^0) \otimes (h_2{{c_1}^0}_1{}^1 \otimes {c_1^0}_2) \otimes (h_3{c_1}^1 \otimes c_2) \\
&= (h_1 \otimes {c_1}^{00}) \otimes (h_2{c_1}^{01} \otimes {c_2}^0) \otimes (h_3{c_1}^1{c_2}^1 \otimes c_3)
\end{aligned}$$

Portanto, Δ é coassociativa. Agora, nós mostraremos que ε é counidade à direita.

$$\begin{aligned}
(id \otimes \varepsilon)\Delta(h \otimes c) &= (id \otimes \varepsilon)(h_1 \otimes {c_1}^0 \otimes h_2{c_1}^1 \otimes c_2) \\
&= (h_1 \otimes {c_1}^0)\varepsilon(h_2{c_1}^1 \otimes c_2) \\
&= (h_1 \otimes {c_1}^0)\varepsilon_H(h_2{c_1}^1)\varepsilon_C(c_2) \\
&= (h_1 \otimes {c_1}^0)\varepsilon_H(h_2)\varepsilon_H({c_1}^1)\varepsilon_C(c_2) \\
&= h_1\varepsilon_H(h_2) \otimes {c_1}^0\varepsilon_H({c_1}^1)\varepsilon_C(c_2) \\
&= h \otimes c_1\varepsilon_C(c_2) \\
&= h \otimes c
\end{aligned}$$

$\square$

Veja que $(\varepsilon \otimes id)\Delta(h \otimes c) = h\varepsilon_C({c_1}^0){c_1}^1 \otimes c_2$. Assim, quando C é um H-comódulo coálgebra à direita, ε é counidade à direita e à esquerda.

Inspirados pela ação parcial de grupos, Caenepeel e Janssen desenvolveram a noção de módulo álgebra parcial generalizando a definição global. Já que um módulo coálgebra pode ser visto como uma dualização de módulo álgebra ([22]), então podemos nos perguntar se existe alguma estrutura parcial que é o dual de módulo álgebra parcial estendendo o conceito de módulo coálgebra. De fato, isso existe e foi introduzido na literatura por Batista e Vercruysse em [6]. No que segue, além de definirmos módulo coálgebra parcial também exibiremos alguns exemplos e propriedades.

Definição 1.2.9. [6] Uma coálgebra C é um H*-módulo coálgebra parcial à esquerda* se existe uma aplicação $\Bbbk$-linear

$$\begin{aligned} \rightharpoondown : H \otimes C &\longrightarrow C \\ h \otimes c &\longmapsto h \rightharpoondown c \end{aligned}$$

tal que para $h, g \in H$ e $c \in C$,

(i) $\Delta(h \rightharpoondown c) = h_1 \rightharpoondown c_1 \otimes h_2 \rightharpoondown c_2$;

(ii) $1_H \rightharpoondown c = c$;

(iii) $h \rightharpoondown (g \rightharpoondown c) = (hg_1 \rightharpoondown c_1)\varepsilon_C(g_2 \rightharpoondown c_2)$.

Se ainda ocorrer $h \rightharpoondown (g \rightharpoondown c) = \varepsilon_C(g_1 \rightharpoondown c_1)(hg_2 \rightharpoondown c_2)$, dizemos que a ação é *simétrica*.

Analogamente, podemos definir módulo coálgebra parcial à direita.

Uma coálgebra C é um H-módulo coálgebra à esquerda se existe uma aplicação $\triangleright : H \otimes C \longrightarrow C$ tal que os itens (i) e (ii) acima são satisfeitos e $h \triangleright (g \triangleright c) = hg \triangleright c$, para todo $h, g \in H$ e $c \in C$.

Todo módulo coálgebra global é parcial e um módulo coálgebra parcial é global se e somente se $\varepsilon_C(h \triangleright c) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_C(c)$, para todo $h \in H$ e $c \in C$.

Exemplo 1.2.10. [12] Sejam H uma álgebra de Hopf, C uma coálgebra e uma aplicação $\Bbbk$-linear $\lambda : H \longrightarrow C$. Temos que C é um H-módulo coálgebra parcial à direita via

$$\leftharpoondown : C \otimes H \longrightarrow C$$

$$c \otimes h \longmapsto c \leftharpoondown h = \lambda(h)c$$

se e somente se as seguintes condições ocorrem:

(i) $\lambda(1_H) = 1_{\Bbbk}$;

(ii) $\lambda(h)\lambda(k) = \lambda(h_1)\lambda(h_2 k)$.

Analogamente, se $\alpha : H \longrightarrow C$ é uma aplicação $\Bbbk$-linear então C é um H-módulo coálgebra parcial à esquerda via

$$\begin{aligned} \rightharpoondown: H \otimes C &\longrightarrow C \\ h \otimes c &\longmapsto h \rightharpoondown c = \alpha(h)c \end{aligned}$$

se e somente se as seguintes condições ocorrem:

(i) $\alpha(1_H) = 1_{\Bbbk}$;

(ii) $\alpha(h)\alpha(k) = \alpha(hk_1)\alpha(k_2)$.

Esse exemplo proporciona uma maneira de produzir estruturas de módulo coálgebras parciais sobre uma coálgebra C.

Definição 1.2.11. [3] Uma álgebra A é um *H-comódulo álgebra parcial à direita* com estrutura

$$\begin{aligned} \rho : A &\longrightarrow A \otimes H \\ a &\longmapsto a^0 \otimes a^1 \end{aligned}$$

tal que para $a \in A$,

(i) $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$;

(ii) $(id_A \otimes \varepsilon_H)\rho(a) = a$, ou seja, $a^0\varepsilon_H(a^1) = a$;

(iii) $(\rho \otimes id_H)\rho(a) = (\rho(1_A) \otimes 1_H)(id_A \otimes \Delta_H)\rho(a)$.

A coação é *simétrica* se também $(\rho \otimes id_H)\rho(a) = (id_A \otimes \Delta_H)\rho(a)(\rho(1_A) \otimes 1_H)$.

Analogamente, podemos definir comódulo álgebra parcial à esquerda.

Uma álgebra A é um H-comódulo álgebra à direita se existe uma aplicação $\rho : A \longrightarrow A \otimes H$ com $\rho(a) = a^0 \otimes a^1$ tal que os itens (i) e (ii) acima são satisfeitos e $(\rho \otimes id_H)\rho(a) = (id_A \otimes id_H)\rho(a)$, para todo $a \in A$.

Todo comódulo álgebra global é parcial e um comódulo álgebra parcial é global se e somente se $\rho(1_A) = 1_A \otimes 1_H$.

Exemplo 1.2.12. [12] Sejam H uma álgebra de Hopf, A uma álgebra e $\rho : A \longrightarrow A \otimes H$ uma aplicação $\Bbbk$-linear tal que $\rho(a) = a \otimes h$, para algum $h \in H$. Então, A é um H-comódulo álgebra parcial à direita se e somente se as seguintes condições ocorrem:

(i) $\varepsilon_H(h) = 1_{\Bbbk}$;

(ii) $h \otimes h = (h \otimes 1_H)\Delta_H(h)$.

Analogamente, se $\beta : A \longrightarrow H \otimes A$ é uma aplicação $\Bbbk$-linear tal que $\beta(a) = w \otimes a$, para algum $w \in H$, A é um H-comódulo álgebra parcial à esquerda via β se e somente se

(i) $\varepsilon_H(w) = 1_{\Bbbk}$;

(ii) $w \otimes w = \Delta_H(w)(1 \otimes w)$.

Note que nesses casos, os elementos h e w são idempotentes.

Para finalizar este capítulo, vamos fornecer a ideia da demonstração de um teorema que relaciona todas as definições expostas até o momento.

Teorema 1.2.13. *[10] Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e C uma coálgebra. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) C é um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda;

(ii) C^* é um H-comódulo álgebra parcial à direita;

(iii) C é um H^*-módulo coálgebra parcial à direita;

(iv) C^* é um H^*-módulo álgebra parcial à esquerda.

Demonstração. A ideia é mostrar as seguintes implicações: $(ii) \Longleftrightarrow (iv)$, $(i) \Longleftrightarrow (iii)$ e $(iii) \Longleftrightarrow (iv)$.

$(ii) \Longrightarrow (iv)$ Suponha que C^* é um H-comódulo álgebra parcial à direita via $\rho : C^* \longrightarrow C^* \otimes H$, denotada por $\rho(\phi) = \phi^0 \otimes \phi^1$, para todo $\phi \in C^*$.

Então, C^* é um H^*-módulo álgebra parcial à esquerda via

$$\begin{aligned} \rightharpoonup: H^* \otimes C^* &\longrightarrow C^* \\ f \otimes \phi &\longmapsto f \rightharpoonup \phi : C \longrightarrow \Bbbk \\ &\qquad\qquad\qquad c \longmapsto f(\phi^1)\phi^0(c) \end{aligned}$$

$(iv) \Longrightarrow (ii)$ Suponha C^* é um H^*-módulo álgebra parcial à esquerda via

$$\begin{aligned} \rightharpoonup: H^* \otimes C^* &\longrightarrow C^* \\ f \otimes \phi &\longmapsto f \rightharpoonup \phi \end{aligned}$$

Então, C^* é um H-comódulo álgebra parcial à direita via

$$\begin{aligned} \rho : C^* &\longrightarrow C^* \otimes H \\ \phi &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} {h_i}^* \rightharpoonup \phi \otimes h_i \end{aligned}$$

sendo $\{h_i\}_{i=1}^n$ uma base de H e $\{{h_i}^*\}_{i=1}^n$ a correspondente base dual de H^*.

$(i) \Longrightarrow (iii)$ Suponha que C é um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda via

$$\begin{aligned} \alpha : C &\longrightarrow H \otimes C \\ c &\longmapsto c^{-1} \otimes c^{0} \end{aligned}$$

Então, C é um H^*- módulo coálgebra parcial à direita via

$$\begin{aligned} \leftharpoondown : C \otimes H^* &\longrightarrow C \\ c \otimes f &\longmapsto c \leftharpoondown f = f(c^{-1})c^{0} \end{aligned}$$

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Suponha que C é um H^*-módulo coálgebra parcial à direita via

$$\begin{aligned} \leftharpoondown : C \otimes H^* &\longrightarrow C \\ c \otimes f &\longmapsto c \leftharpoondown f \end{aligned}$$

Então, C é um H-comódulo coálgebra parcial à esquerda via

$$\begin{aligned} \alpha : C &\longrightarrow H \otimes C \\ c &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes c \leftharpoondown {h_i}^* \end{aligned}$$

$(iii) \Longrightarrow (iv)$ Suponha que C é um H^*-módulo coálgebra parcial à direita via

$$\begin{aligned} \leftharpoondown : C \otimes H^* &\longrightarrow C \\ c \otimes f &\longmapsto c \leftharpoondown f \end{aligned}$$

Então, C^* é um H^*-módulo álgebra parcial à esquerda via

$$\begin{aligned} \rightharpoonup : H^* \otimes C^* &\longrightarrow C^* \\ f \otimes \phi &\longmapsto f \rightharpoonup \phi : C \longrightarrow \Bbbk \\ &\qquad\qquad c \longmapsto \phi(c \leftharpoondown f) \end{aligned}$$

$(iv) \Longrightarrow (iii)$ Suponha que C^* é um H^*-módulo álgebra parcial à esquerda via

$$\begin{aligned} \rightharpoonup : H^* \otimes C^* &\longrightarrow C^* \\ f \otimes \phi &\longmapsto f \rightharpoonup \phi \end{aligned}$$

Então, C é um H^*-módulo coálgebra parcial à direita via

$$\begin{aligned} \leftharpoondown : C \otimes H^* &\longrightarrow C \\ c \otimes f &\longmapsto c \leftharpoondown f \end{aligned}$$

tal que para todo $\phi \in C^*$,

$$(f \rightharpoonup \phi)(c) = \phi(c \leftharpoondown f) \tag{1.3}$$

$\square$