

**MODELO NUMÉRICO PARA ANÁLISE À FLEXÃO DE
ELEMENTOS ESTRUTURAIS COM PROTENSÃO
ADERENTE E NÃO ADERENTE**

Ranier Adonis Barbieri

Porto Alegre
Junho de 2003

RANIER ADONIS BARBIERI

**MODELO NUMÉRICO PARA ANÁLISE À FLEXÃO DE
ELEMENTOS ESTRUTURAIS COM PROTENSÃO
ADERENTE E NÃO ADERENTE**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia

Porto Alegre
junho de 2003

BARBIERI, Ranier Adonis

Modelo Numérico para Análise à Flexão de Elementos Estruturais com Protensão Aderente e Não Aderente / Ranier Adonis Barbieri. – Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 2003.

330 p.

Tese, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul; Doutorado. Orientadores: Francisco P. S. L. Gastal, Américo Campos Filho.

1. Concreto Protendido I. Modelo Numérico para Análise à Flexão de Elementos Estruturais com Protensão Aderente e Não Aderente

CCAA2

RANIER ADONIS BARBIERI

**MODELO NUMÉRICO PARA ANÁLISE À FLEXÃO DE
ELEMENTOS ESTRUTURAIS COM PROTENSÃO
ADERENTE E NÃO ADERENTE**

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelos professores orientadores e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 23 de junho de 2003

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal
Ph.D. pela North Carolina State Univeristy
orientador

Prof. Américo Campos Filho
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo
co-orientador

Prof. Américo Campos Filho
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Giuseppe Barbosa Guimarães (PUCRJ)
Ph.D. pela Universidade de Londres

Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)
Dr. pela Universidade Federal
do Rio Grande do Sul

Prof. Guillermo Juan Creus (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal
do Rio de Janeiro

Prof. Rubem Clécio Schwingel (UFRGS)
M.Sc. pela Universidade Federal
do Rio Grande do Sul

à Fernanda e
aos meus pais, Wilma e Adonis

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Gastal pela amizade, atenção e pelo minucioso trabalho de orientação ao longo dos anos de convivência.

Ao Prof. Américo pela orientação, amizade e pelo constante estímulo durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, Adonis e Wilma, e ao Rodrigo, pelo forte apoio, incentivo e compreensão.

À Fernanda pelo amor, paciência, compreensão e apoio.

Ao Prof. Rubem Schwingel pela colaboração, estímulo e a troca de idéias.

À Liniani pelas pequenas e grandes ajudas, além da amizade, ao longo dos quatro anos de trabalho.

Ao colega Marcelo Woelcker pela colaboração e interesse.

Aos professores, funcionários e colegas do PPGEC pela colaboração e a convivência.

Ao Laboratório de Ensaio e Modelos Estruturais (LEME) pelo apoio.

À Deus por tornar tudo possível.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por proporcionar a estrutura de ensino e pesquisa, e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo suporte financeiro que permitiu a realização deste trabalho.

RESUMO

BARBIERI, R.A. Modelo Numérico para a Análise à Flexão de Elementos com Protensão Aderente e Não Aderente. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Na protensão não aderente, a armadura permanece livre para se movimentar ao longo de seu perfil em todas as seções com exceção das de ancoragem. Não há aderência entre concreto e armadura, e a hipótese da compatibilidade de deformações entre o aço e concreto não é aplicável, tornando inviável o desenvolvimento de uma solução analítica. Visando colaborar para a maior compreensão do comportamento à flexão das estruturas com protensão não aderente e para o desenvolvimento de critérios nacionais de projeto, um modelo numérico foi implementado utilizando o elemento finito do tipo híbrido para pórticos planos. Nesta formulação, a equação para as solicitações ao longo do elemento é a função de interpolação, e as forças as variáveis interpoladas. Como esta função resulta das condições de equilíbrio, sem hipóteses arbitrárias, o método é considerado exato para forças e curvaturas. Elementos longos são possíveis, de maneira que um único elemento finito pode ser utilizado para um vão de viga ou pilar, reduzindo o esforço computacional. O caráter exato da formulação contribui para a boa modelagem dos cabos não aderentes, já que a tensão nestas armaduras depende das curvaturas de todas as seções do elemento. O modelo numérico proposto prevê a não linearidade geométrica, carregamentos cíclicos e a construção composta. Relações constitutivas já consolidadas na literatura são empregadas para os materiais. A cadeia de Maxwell é utilizada para representar o comportamento reológico do concreto e do aço de protensão, respeitando as características de envelhecimento de cada material. Inúmeros exemplos são apresentados, permitindo a comparação entre resultados numéricos e experimentais. Uma análise paramétrica foi realizada, caracterizando o desempenho do modelo numérico frente a variações nos parâmetros de entrada. Discutem-se, ainda, dois critérios de ruptura para a utilização do modelo numérico no estudo do comportamento à flexão das estruturas com protensão não aderente. Os resultados indicam o bom desempenho do modelo numérico e a sua adequação para a realização de pesquisas sobre o assunto.

Palavras-chave: concreto protendido; protensão não aderente; elemento finito do tipo híbrido; construção composta.

ABSTRACT

BARBIERI, R.A. Modelo Numérico para a Análise à Flexão de Elementos com Protensão Aderente e Não Aderente. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

A pretensioning tendon that is permanently prevented from bonding to the concrete is called an unbonded tendon. In such a case, there is no strain compatibility between concrete and steel, and there is no closed analytical solution for the computation of unbonded tendon stresses. In order to contribute for a better understanding on the unbonded prestressed member behavior, a hybrid type finite element numerical model for concrete planar frames has been implemented. In the hybrid type formulation, the cross-sectional force solutions are the interpolation functions, and the cross-sectional forces the interpolated variables. As there is no arbitrary hypothesis, and only equilibrium conditions are considered for such interpolation functions, the hybrid type approach may be regarded as an exact formulation for forces and curvature distributions. It allows the use of long elements, in such a way that a single finite element may be used for a beam or column modeling, improving the computational efficiency. The exactness of the formulation contributes for good estimates of the unbonded stress variation, since it depends on the whole member curvature distribution. Geometric non-linear behavior, cyclic loading and composite construction are also included. Widely used constitutive equations are considered for modeling the material behavior. A linear Maxwell chain model is used for both concrete and prestressing steel time-dependent responses, considering different ageing performances. Numerical and experimental results are compared, showing the good performance of the numerical model. A parametric study about the influence of changing data input parameters on the numerical results are also described. Two different collapse criteria to be used in the unbonded member numerical analyses are also commented. The proposed numerical model may be regarded as an efficient tool for the study on the unbonded prestressed member behavior.

Key words: prestressed concrete; unbonded tendons; hybrid type finite element; composite construction.

SUMÁRIO

1 Introdução	1
1.1 Sistemas de Protensão Não Aderente	1
1.1.1 A Monocordoalha Engraxada com Bainha Plástica Extrudada	2
1.1.2 Aspectos de Durabilidade	4
1.1.3 Algumas Aplicações da Protensão Não Aderente	6
1.2 Motivação da Pesquisa	7
1.3 Objetivos	8
1.4 Estratégia de Pesquisa	9
1.5 Organização do Trabalho	10
2 Comportamento à Flexão e Previsão do Desempenho de Elementos com Protensão Não Aderente	13
2.1 Comportamento à Flexão	13
2.1.1 Elementos com Protensão Não Aderente Total	16
2.1.2 Protensão Não Aderente Parcial	19
2.1.3 Taxa Mecânica Total de Armadura	21
2.1.4 Esbeltez à Flexão	26
2.1.5 Tipo de Carregamento	28
2.2 Previsão da Tensão na Armadura Não Aderente no Estado Limite Último	30
2.2.1 Métodos Empíricos	31
2.2.1.1 <i>Mattock et al (1971)</i>	32
2.2.1.2 <i>Cooke et al (1981)</i>	32
2.2.1.3 <i>Tao & Du (1985)</i>	33
2.2.1.4 <i>Harajli & Kanj (1991)</i>	33
2.2.1.5 <i>Chakrabarti (1995)</i>	34
2.2.1.6 <i>ACI 318 (1999)</i>	35
2.2.1.7 <i>Naaman et al (2002)</i>	36
2.2.1.8 <i>Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) e NBR 6118 (ABNT, 2003)</i>	36
2.2.2 Métodos Semi-Empíricos	36
2.2.2.1 <i>Tam & Pannel (1976)</i>	37
2.2.2.2 <i>Harajli (1990)</i>	40
2.2.2.3 <i>Naaman & Alkhairi (1991)</i>	43
2.2.2.4 <i>Lee et al (1999)</i>	46
2.2.2.5 <i>Campos & Guimarães (2000)</i>	48
2.2.3 Métodos Numéricos	52
2.2.3.1 <i>El-Mezaini & Ciptioglu (1991)</i>	52
2.2.3.2 <i>Alkhairi & Naaman (1993)</i>	54
2.2.3.3 <i>Figueiras & Póvoas (1993)</i>	55
2.2.3.4 <i>Moon & Burns (1997a)</i>	57

2.3 Aplicações dos Métodos Empíricos e Semi-Empíricos	57
2.3.1 Aplicação dos Métodos Empíricos	58
2.3.2 Aplicação dos Métodos Semi-Empíricos	65
2.4 Comentários Finais	73
3 Formulação Matemática e Numérica do Modelo Numérico	77
3.1 Idealização da Estrutura	78
3.1.1 Construção Composta	80
3.1.2 Sistema de Coordenadas	81
3.1.3 Definição de Forças e Deslocamentos no Elemento	82
3.2 Formulação Matemática do Elemento Finito do Tipo Híbrido	85
3.2.1 Análise Considerando Linearidade Geométrica	85
3.2.1.1 Solução para Forças Nodais	86
3.2.1.2 Solução para as Forças nas Seções Transversais – Função de Interpolação	87
3.2.1.3 Relação Constitutiva da Seção Transversal	87
3.2.1.4 Relação entre Deslocamentos Nodais Relativos e Deformações	88
3.2.1.5 Relação entre Deslocamentos Nodais Relativos e Deslocamentos Nodais	89
3.2.1.6 Desenvolvimento Matemático da Equação do Elemento Finito	90
3.2.2 Rotina de Análise	93
3.2.3 Inclusão da Não Linearidade Geométrica para Pequenas Deformações	95
3.2.3.1 Abordagens Lagrangianas para o Tratamento da Não Linearidade Geométrica	95
3.2.3.2 Aplicação na Formulação Matemática	96
3.3 Implementação Numérica do Modelo	100
3.3.1 Integração Numérica	100
3.3.2 Determinação dos Deslocamentos nas Seções transversais	103
3.3.3 Convergência e Estratégias para a Análise Incremental	106
3.3.3.1 Convergência pelo Critério de Deformações	107
3.3.3.2 Análise por Incrementos de Carga	107
3.3.3.3 Incrementos de Deslocamento	110
3.3.4 Introdução da Protensão	113
3.3.4.1 Perdas por Encurtamento Elástico do Concreto	113
3.3.4.2 Perdas de Protensão por Atrito	114
3.3.4.3 Perdas por Recuo de Ancoragem	115
3.3.4.4 Formulação para o Cálculo das Deformações nas Armaduras Não Aderentes ..	117
4 Relações Constitutivas do Modelo	121
4.1 Relações Constitutivas Independentes do Tempo	121
4.1.1 Modelos para o Concreto	122
4.1.1.1 Relações Constitutivas para Carregamentos Monotônicos	122
4.1.1.2 Relações para Carregamentos Cíclicos	125
4.1.2 Modelos Constitutivos para as Armaduras Passivas	130

4.1.3 Modelos Constitutivos para o Aço de Protensão	134
4.2 Relações Constitutivas Dependentes do Tempo	137
4.2.1 Fluência e Retração do Concreto	137
4.2.1.1 O Modelo da Cadeia de Maxwell de Bazant & Wu (1974)	140
4.2.1.2 Definição dos Parâmetros do Modelo	142
4.2.1.3 Conversão dos Dados de Fluência em Relaxação	144
4.2.1.4 Algoritmo para a Integração dos Problemas de Fluência	145
4.2.1.5 Implementação da Cadeia de Maxwell para o Concreto	147
4.2.1.6 Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993): fluência e retração	150
4.2.2 Modelo para a Relaxação do Aço de Protensão	155
4.2.2.1 Utilização da Cadeia de Maxwell para o Aço de Protensão	155
4.2.2.2 Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993): Relaxação do Aço de Protensão	156
5 Validação do Modelo Numérico	159
5.1 Barras com Comportamento elástico	160
5.2 Relações Constitutivas dos Materiais	164
5.2.1 Concreto Sujeito a Carregamentos de Curta Duração	164
5.2.2 Concreto Sujeito a Carregamentos de Longa Duração	167
5.2.3 Armaduras sob Carregamentos de Curta Duração	169
5.2.4 Aço de Protensão sob Carregamentos de Longa Duração	170
5.3 Vigas e Lajes em Concreto Armado e Protendido	172
5.3.1 Vigas em Concreto Armado	172
5.3.2 Elementos de Concreto com Protensão Aderente	176
5.3.3 Elementos com Protensão Não Aderente	181
5.3.3.1 Vigas com Protensão Não Aderente de Tao & Du (1985)	181
5.3.3.2 Lajes com Protensão Não Aderente de Cooke et al (1981)	187
5.3.3.3 Vigas com Protensão Não Aderente de Chakrabarti (1995)	196
5.3.3.4 Vigas com Protensão Não Aderente de Harajli & Kanj (1991)	200
5.4 Elementos de Construção Composta	203
5.5 Pilares em Concreto Armado	210
5.6 Elementos Estruturais sob Carregamentos de Longa Duração	214
5.7 Considerações Finais	216
6 Diretrizes para a Análise de Elementos com Protensão Não Aderente Através do Modelo Numérico	219
6.1 Comportamento dos Resultados Numéricos frente à Variação dos Parâmetros de Entrada de Dados	220
6.1.1 Detalhamento do Estudo Paramétrico	221
6.1.2 Apresentação dos Resultados	224
6.1.2.1 Distribuição da Malha em Elementos Finitos	226
6.1.2.2 Número de Lâminas na Seção Transversal	228
6.1.2.3 Parâmetro β de Fissuração do Concreto	231

6.1.2.4 Parâmetro β_σ do modelo de tension stiffening	237
6.1.2.5 Resistência do Concreto à Tração	241
6.1.2.6 Módulo de Elasticidade	244
6.2.1.7 Deformação de Pico à Compressão do Concreto	248
6.1.2.8 Resistência à Compressão do Concreto	251
6.1.2.9 Módulo de Elasticidade Final do Concreto à Compressão	255
6.1.2.10 Tensão Convencional de Escoamento da Armadura de Protensão	256
6.1.2.11 Deformação de Escoamento da Armadura Passiva	258
6.1.2.12 Peso Específico do Concreto	260
6.1.2.13 Tamanho do Incremento de Deslocamento	264
6.2 Critérios para a Avaliação da Tensão Última na Armadura Não Aderente	267
6.2.1 Critério de Ruptura por Limite de Carga	269
6.2.2 Critério de Ruptura por Limite de Deformação	271
6.3 Comentários Finais	277
7 Conclusões e Sugestões para a Continuidade da Pesquisa	281
7.1 Conclusões	281
7.2 Sugestões para a Continuidade da Pesquisa	285
Referências Bibliográficas	289
Apêndice A – Entrada de Dados no Modelo Numérico	295
Apêndice B – Exemplo de Arquivo de Entrada de Dados	301
Apêndice C – Saída de Resultados do Modelo Numérico	303

LISTA DE FIGURAS

Capítulo 1

Figura 1.1: Monocordoalha engraxada e plastificada (Cauduro, 1997)	3
---------------------------------------------------------------------------------	---

Capítulo 2

Figura 2.1: Incremento de força ao longo da armadura de protensão relativo ao incremento médio (El-Mezaini & Çitipitioglu, 1991)	14
Figura 2.2: Viga com protensão não aderente e instabilidade à flexão (Cooke et al, 1981)	17
Figura 2.3: Comportamento de vigas similares com diferentes índices de protensão parcial, protótipos de Chakrabarti (1995)	21
Figura 2.4: Incremento de tensão na armadura não aderente na ruptura em função de ω_e , protótipos de Tao & Du (1985), Tam & Pannell (1976) e Chakrabarti (1995) ..	22
Figura 2.5: Comparação dos incrementos de tensão na armadura não aderente em elementos com as mesmas taxas totais de armadura	23
Figura 2.6: Incremento de tensão na armadura não aderente em protótipos de Tao & Du (1985) com diferentes taxas de armadura	23
Figura 2.7: Relação linear entre incrementos de tensão na armadura não aderente e a taxa total de armadura (Tao & Du, 1985)	24
Figura 2.8: Curvas “carga x deslocamento” para elementos com diferentes índices ω_e , protótipos de Tao & Du (1985)	24
Figura 2.9: Desempenho de elementos com diferentes taxas ω_e (Cooke et al, 1981)	25
Figura 2.10: Modelos de treliça	26
Figura 2.11: Deformação no tirante do modelo da treliça, para um deslocamento vertical constante, em função da esbeltez à flexão (Mojtahedi & Gamble, 1978)	27
Figura 2.12: Variação da tensão na armadura em elementos com diferentes índices l/d_p , protótipos de Cooke et al (1981)	27
Figura 2.13: Deslocamentos para elementos com diferentes valores para a esbeltez à flexão, protótipos de Cooke et al (1981)	28
Figura 2.14: Influência dos tipos de carregamento no incremento de tensão na armadura não aderente na ruptura (Harajli, 1990)	29
Figura 2.15: Incrementos de tensão nas armaduras para pares de vigas idênticas sob diferentes formas de carregamento, resultados de Harajli e Kanj (1991)	30
Figura 2.16: Incremento de deformação na armadura não aderente no estado limite último .	31
Figura 2.17: Deformada da seção no estado limite último	37
Figura 2.18: Distribuição de curvaturas considerando os efeitos de corte (Harajli, 1990)	41
Figura 2.19: Formação da rótula plástica no ELU (Campos & Guimarães, 2000)	49
Figura 2.20: Translação dos nós (El-Mezaini & Çitiptioglu, 1991)	53
Figura 2.21: Discretização da armadura (El-Mezaini & Çitiptioglu, 1991)	54
Figura 2.22: Comparação entre resultados numéricos e experimentais para o método de Mattock et al (1971)	58

Figura 2.23: Resultados obtidos com a equação de Cooke et al (1981)	59
Figura 2.24: Resultados da aplicação da equação de Cooke et al (1981), em função do tipo de carregamento	59
Figura 2.25: Resultados para a equação de Tao & Du (1985)	60
Figura 2.26: Aplicação do método de Harajli & Kanj (1991)	61
Figura 2.27: Resultados da aplicação do método de Chakrabarti (1985)	62
Figura 2.28: Resultados com o método de Chakrabarti (1985) em função do tipo de carregamento	62
Figura 2.29: Resultados com o método de Chakrabarti (1985) em função do tipo de protensão	63
Figura 2.30: Resultados para a aplicação do ACI318 (ACI, 1999)	64
Figura 2.31: Efeito da esbeltez à flexão para o método do ACI318 (1999)	64
Figura 2.32: Resultados da aplicação do ACI318 (ACI, 1999) em função do tipo de carregamento	65
Figura 2.33: Aplicação do método de Tam & Pannell (1976)	65
Figura 2.34: Resultados da aplicação do método de Tam & Pannell (1976) em função do tipo de carregamento	66
Figura 2.35: Resultados da aplicação do método de Tam & Pannell (1976) em função do tipo de protensão	66
Figura 2.36: Resultados da aplicação do método de Harajli (1990)	67
Figura 2.37: Resultados com o método de Harajli (1990) segundo o tipo de carregamento	68
Figura 2.38: Resultados com o método de Harajli (1990) segundo o tipo de protensão	68
Figura 2.39: Resultados para o método de Naaman & Alkhairi (1991)	69
Figura 2.40: Resultados da aplicação do método de Naaman & Alkhairi (1991) em função do tipo de carregamento	69
Figura 2.41: Resultados da aplicação do método de Naaman & Alkhairi (1991) em função do tipo de protensão	70
Figura 2.42: Resultados para o método de Lee et al (1999)	70
Figura 2.43: Comparação sobre o desempenho de elementos com protensão total ou parcial para o método de Lee et al (1999)	71
Figura 2.44: Resultados com o método de Lee et al (1999) em função do tipo de carregamento	71
Figura 2.45: Resultados da aplicação do método de Campos & Guimarães (2000)	72
Figura 2.46: Resultados da aplicação do método rígido plástico de Campos & Guimarães (2000) em função do tipo de protensão	72
Figura 2.47: Resultados da aplicação do método de Campos & Guimarães (2000) em função da forma de carregamento	73

Capítulo 3

Figura 3.1: Idealização da Estrutura	80
Figura 3.2: Sistemas de coordenadas e os deslocamentos nodais	82
Figura 3.3: Forças nodais e solicitações nas seções transversais	84
Figura 3.4: Rotina de Análise	94

Figura 3.5: Sistemas de eixos na não linearidade geométrica	97
Figura 3.6: Método de Newton-Raphson	108
Figura 3.7: Rotina para o incremento de carregamento	109
Figura 3.8: Rotina para o incremento de deslocamento	109

Capítulo 4

Figura 4.1: Comportamento do concreto à compressão	123
Figura 4.2: Relação tensão-deformação para o concreto à tração	125
Figura 4.3: Comportamento cíclico do concreto	126
Figura 4.4: Comportamento cíclico do concreto à tração	130
Figura 4.5: Endurecimento isotrópico para a armadura passiva	131
Figura 4.6: Endurecimento cinemático para a armadura passiva	133
Figura 4.7: Curva de Devalapura & Trados (1992) para o aço de protensão	135
Figura 4.8: Modelo da cadeia de Maxwell	141

Capítulo 5

Figura 5.1: Alternativas de discretização para a análise da viga elástica bi-apoiada	160
Figura 5.2: Barra elástica comprimida com não linearidade geométrica	161
Figura 5.3: Concreto à compressão: resposta a uma ação de caráter ciclo, com descarregamento na fase de amolecimento do material	165
Figura 5.4: Concreto à compressão: resposta a uma série de ciclos na fase de amolecimento.	165
Figura 5.5: Concreto à tração: resposta a uma ação de caráter ciclo	166
Figura 5.6: Concreto: trajetória de tração após um ciclo de compressão	166
Figura 5.7: Concreto: trajetória de compressão a partir de um ciclo de tração	166
Figura 5.8: Fluência do concreto: resultados no período entre 2,8 e 2802,8 dias	167
Figura 5.9: Fluência do concreto: resultados no período entre 8,85 e 2808,85 dias	167
Figura 5.10: Fluência do concreto: resultados no período entre 28 e 2828 dias	168
Figura 5.11: Fluência do concreto: resultados no período entre 88,5 e 2888,5 dias	168
Figura 5.12: Fluência do concreto: resultados no período entre 280 e 3080 dias	168
Figura 5.13: Armadura passiva sob ação cíclica: resultados com endurecimento isotrópico	169
Figura 5.14: Armadura passiva sob ação cíclica: resultados com endurecimento cinemático	169
Figura 5.15: Aço de protensão: resultados com a regra isotrópica de endurecimento	170
Figura 5.16: Aço de protensão: resultados com a regra cinemática de endurecimento ..	170
Figura 5.17: Aço de protensão: relaxação entre 2,8 e 10000 dias, com $\sigma_{p0} = 0,6f_{ptk}$	171
Figura 5.18: Aço de protensão: relaxação entre 2,8 e 10000 dias, com $\sigma_{p0} = 0,7f_{ptk}$	171
Figura 5.19: Aço de protensão: relaxação entre 2,8 e 10000 dias, com $\sigma_{p0} = 0,8f_{ptk}$	172
Figura 5.20: Vigas testemunho de Beber (1999): resultados para os deslocamentos	173
Figura 5.21: Vigas testemunho: deformação na armadura de tração	173
Figura 5.22: Vigas VR 3 e VR 4 reforçadas com uma camada: resultados para deslocamentos	174

Figura 5.23: Vigas VR 3 e VR 4 reforçadas com uma camada: deformações nas armaduras de tração	174
Figura 5.24: Vigas VR 5 e VR 6 reforçadas com quatro camadas: deslocamentos	174
Figura 5.25: Protótipos VR 5 e VR 6 reforçados com quatro camadas: resultados para as deformações nas armaduras de tração	175
Figura 5.26: Protótipos VR 7 e VR 8 reforçados com sete camadas: resultados para os deslocamentos	175
Figura 5.27: Protótipos VR 7 e VR 8 reforçados com sete camadas: deformações nas armaduras tracionadas	175
Figura 5.28: Vigas VR 9 e VR 10 reforçadas com dez camadas: resultados numéricos e experimentais para deslocamentos	176
Figura 5.29: Protótipos VR 9 e VR 10 reforçados com dez camadas: resultados para a deformação nas armaduras	176
Figura 5.30: Viga TD-D3 de Tao & Du (1985): resultados para os deslocamentos	177
Figura 5.31: Protótipo CP-B4: resultados para os deslocamentos no centro do vão.....	178
Figura 5.32: Protótipo CP-B5 de Cooke et al (1981): resultados para os deslocamentos ..	179
Figura 5.33: Protótipo CP-B6: resultados para os deslocamentos no centro do vão	179
Figura 5.34: Laje nº 1 de Barbieri (1999): deslocamentos	180
Figura 5.35: Laje nº 1: deformação de compressão no concreto	180
Figura 5.36: Vigas TD-A1 e TD-A2 de Tao & Du (1985): resultados para os deslocamentos	183
Figura 5.37: Vigas TD-A1 e TD-A2: variação da tensão na armadura de protensão	183
Figura 5.38: Protótipos TD-A3 e TD-A4: curvas “carga x deslocamento”	184
Figura 5.39: Vigas TD-A3 e TD-A4: resultados para a variação da tensão na armadura de protensão na seção central	184
Figura 5.40: Viga TD-A5 de TD-A6: resultados para os deslocamentos	184
Figura 5.41: Vigas TD-A5 e TD-A6: variação da tensão na armadura de protensão	185
Figura 5.42: Vigas TD-A7 e TD-A8: curvas “carga x deslocamento” numéricas e experimentais	185
Figura 5.43: Protótipos TD-A7 e TD-A8: variação da tensão na armadura de protensão na seção central	185
Figura 5.44: Protótipo TD-A9: resultados numéricos e experimentais para os deslocamentos	186
Figura 5.45: Protótipo TD-A9: variação da tensão na armadura de protensão na seção central	186
Figura 5.46: Protótipo TD-A3: fissuração e plastificação em diferentes etapas das simulações, relativas aos deslocamentos da figura 5.38	187
Figura 5.47: Laje CP-1 de Cooke et al (1981): resultados para os deslocamentos	189
Figura 5.48: Elemento CP-1: variação da tensão nas armaduras de protensão	189
Figura 5.49: Protótipo de CP-2: curvas “carga x deslocamento”	190
Figura 5.50: Laje CP-2: variação da tensão na armadura de protensão na seção central	190
Figura 5.51: Protótipo CP-3 de Cooke et al (1981): resultados para deslocamentos	190
Figura 5.52: Laje CP-3: variação da tensão na armadura de protensão na seção central	191
Figura 5.53: Elemento CP-4: resultados para deslocamentos	191

Figura 5.54: Protótipo CP-4: variação da tensão na armadura de protensão	191
Figura 5.55: Viga CP-5: curvas “carga x deslocamento”	192
Figura 5.56: Laje CP-5: variação da tensão na armadura de protensão na seção central	192
Figura 5.57: Protótipo CP-6 de Cooke et al (1981): resultados para os deslocamentos .	192
Figura 5.58: Laje CP-6: variação da tensão na armadura de protensão na seção central	193
Figura 5.59: Laje CP-7: resultados para os deslocamentos	193
Figura 5.60: Protótipo CP-7: variação da tensão na armadura de protensão	193
Figura 5.61: Laje CP-8 de Cooke et al (1981): resultados para deslocamentos	194
Figura 5.62: Laje CP-8: variação da tensão na armadura de protensão na seção central	194
Figura 5.63: Laje CP-9: resultados numéricos e experimentais para os deslocamentos .	194
Figura 5.64: Laje CP-9: variação de tensão na armadura de protensão na seção central	195
Figura 5.65: Laje CP-4: fissuração e plastificação em diferentes etapas das simulações, relativas aos deslocamentos da figura 5.53	195
Figura 5.66: Vigas CH-A1 e CH-B1 de Chakrabarti (1995): resultados para os deslocamentos	197
Figura 5.67: Vigas CH-A2 e CH-B2: resposta para os deslocamentos	198
Figura 5.68: Vigas CH-A3 e CH-B3: resultados para os deslocamentos	198
Figura 5.69: Vigas CH-C2 e CH-C3: curvas “carga x deslocamento”	198
Figura 5.70: Vigas CH-PPT 9A e CH-PPT 9C: resultados para os deslocamentos	199
Figura 5.71: Vigas CH-PPT 9B e CH-PPR 9A: curvas “carga x deslocamento”	199
Figura 5.72: Vigas CH-PPT 5A e CH-PPR 5B: respostas para os deslocamentos	199
Figura 5.73: Vigas CH-PPT 9D e CH-PPR 9B: resultados para deslocamentos	200
Figura 5.74: Viga HK-P3R3-3: resultados para os deslocamentos	201
Figura 5.75: Viga HK-P2R3-3: resultados para os deslocamentos	201
Figura 5.76: Vigas HK-P2R3-0 e HK-P1R3-0: resultados de deslocamentos	202
Figura 5.77: Viga HK-P1R3-0: fissuração em diferentes etapas da simulação	202
Figura 5.78: Protótipo contínuo de construção composta de Rosenthal (1978)	203
Figura 5.79: Protótipo contínuo de Rosenthal (1978): resultados para os deslocamentos no centro do vão	204
Figura 5.80: Protótipo contínuo de Rosenthal (1978): resultados numéricos e experimentais das tensões na armadura de continuidade	205
Figura 5.81: Protótipo contínuo de Barbieri (1999)	205
Figura 5.82: Protótipo de Barbieri (1999): deslocamentos no vão	206
Figura 5.83: Protótipo de Barbieri (1999): resultados para a deformação na armadura .	207
Figura 5.84: Protótipo de Barbieri (1999): resultados para a deformação de compressão no concreto no vão	207
Figura 5.85: Protótipo L1 de Lopes et al (1997): variação do momento na continuidade	209
Figura 5.86: Pilar 10L2-2, com 24 cm de comprimento e taxa de armadura de 1,98%: curvas “carga x deslocamento”	211
Figura 5.87: Pilar 10L2-2: resultados para a deformação nas armaduras	211

Figura 5.88: Pilares 100H2-1 e 100 H2-2, com 240 <i>cm</i> de vão e 1,98% de taxa de armadura: curvas “carga x deslocamentos”	211
Figura 5.89: Pilar 100H2-1: curvas “carga x deformação na armadura”	212
Figura 5.90: Protótipos 60L2-1 e 60L2-2, com 144 <i>cm</i> de comprimento e 1,98% de taxa de armadura: resultados para os deslocamentos	212
Figura 5.91: Pilares 100L4-1 e 100L4-2, com 240 <i>cm</i> de vão e 3,96% de taxa de armadura: resultados os deslocamentos	212
Figura 5.92: Pilares 100L4-1: resultados para as deformações nas armaduras	213
Figura 5.93: Pilares 10L4-1 e 10L4-2, com 24 <i>cm</i> de vão e 3,96% de taxa de armadura: resultados para os deslocamentos	213
Figura 5.94: Pilares 10L4 1: deformações nas armaduras de tração e compressão	213
Figura 5.95: Protótipo 100H2 1 de Kim & Yang (1995): evolução da deformada do elemento, conforme o modelo numérico	214
Figura 5.96: Resultados numéricos e experimentais para as vigas de Bakoss et al (1982)	215
Figura 5.97: Resultados para o ensaio de longa duração para o protótipo A1 de Silva (2002)	216
Figura 5.98: Resultados para o ensaio de longa duração para o protótipo B2 de Silva (2002)	216

Capítulo 6

Figura 6.1: Características dos protótipos com $l/d_p = 19,2$	222
Figura 6.2: Características dos protótipos com $l/d_p = 47,0$	223
Figura 6.3: Discretização dos protótipos	224
Figura 6.4: Exemplo de figura para a observação do efeito da variação de um parâmetro no comportamento numérico de uma peça	225
Figura 6.5: Protótipo P1: opções de discretização	226
Figura 6.6: Protótipo P10: opções de discretização	226
Figura 6.7: Protótipo P1: Curvas “carga x deslocamento” para diferentes discretizações, em análises utilizando $\beta = 1,0$	227
Figura 6.8: Protótipo P10: resultados obtidos com diferentes malhas em elementos finitos, considerando $\beta = 1,0$	227
Figura 6.9: Cargas máximas em função do número de lâminas nas seções transversais para protótipos com $\omega_e = 0,05$	229
Figura 6.10: Cargas máximas em função do número de lâminas nas seções transversais para protótipos com $\omega_e = 0,15$	229
Figura 6.11: Cargas máximas em função do número de lâminas nas seções transversais para protótipos com $\omega_e =$ igual 0,30	229
Figura 6.12: Índices ΔP_{max} para a variação do número de lâminas na seção transversal, em função de ω_e	230
Figura 6.13: Viga P4: curvas “carga x deslocamento” obtidas em análises com diferentes quantidades de lâminas, com $\beta = 1,0$	230
Figura 6.14: Viga P10: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes quantidades de lâminas nas seções transversais, com $\beta = 1,0$	231

Figura 6.15: Laje P11: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes quantidades de lâminas nas seções transversais, com $\beta = 1,0$	231
Figura 6.16: Protótipos com $\omega_e = 0,05$: cargas máximas para as simulações com diferentes valores para o parâmetro β	232
Figura 6.17: Protótipo P4: resultados para a variação do parâmetro β de fissuração	232
Figura 6.18: Laje P11: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores do parâmetro β	233
Figura 6.19: Cargas máximas para protótipos com $\omega_e = 0,15$, em função de valor de β	233
Figura 6.20: Viga P6: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores do parâmetro β	234
Figura 6.21: Viga P8: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores de β	234
Figura 6.22: Cargas máximas em função de β , para os protótipos com $\omega_e = 0,30$	235
Figura 6.23: Laje P19: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores de β	235
Figura 6.24: Laje P20: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores de β	235
Figura 6.25: Índices ΔP_{\max} em função de ω_e , obtidos com a variação do parâmetro β	236
Figura 6.26: Índices ΔP_{\max} em função de ω_e , para a variação do parâmetro β_σ , com $\beta = 0,3$	237
Figura 6.27: Índices ΔP_{\max} para a variação do parâmetro β_σ , em função de ω_e , com $\beta = 1,0$	237
Figura 6.28: Índices ΔP_{\max} para a variação do parâmetro β_σ , em função de ω_e , com $\beta = 5,441$	238
Figura 6.29: Cargas máximas para protótipos com $\omega_e = 0,15$ e $\beta = 0,3$, em função de β_σ	238
Figura 6.30: Cargas máximas para protótipos com $\omega_e = 0,30$ e $\beta = 5,441$, em função de β_σ	239
Figura 6.31: Protótipo P2: curvas “carga x deslocamento”, com $\beta = 5,441$, obtidas com diferentes valores de β_σ	239
Figura 6.32: Protótipo P12: curvas “carga x deslocamento” com $\beta = 1,0$, para os diferentes valores de β_σ	240
Figura 6.33: Protótipos com $l/d_p = 19,2$: índices ΔP_{\max} em função de β , para a variação de β_σ	240
Figura 6.34: Protótipos com $l/d_p = 47,0$: índices ΔP_{\max} em função de β , para a variação de β_σ	241
Figura 6.35: Índices ΔP_{\max} para a variação de f_{ct} , em função de ω_e , com $\beta = 0,3$	242
Figura 6.36: Índices ΔP_{\max} para a variação de f_{ct} , em função de ω_e , com $\beta = 1,0$	242
Figura 6.37: Índices ΔP_{\max} para a variação de f_{ct} , em função de ω_e , com β_{\max}	242
Figura 6.38: Cargas máximas para os protótipos com $\omega_e = 0,05$, com β_{\max} , em função de f_{ct}	243
Figura 6.39: Protótipos com $\omega_e = 0,05$: cargas máximas em função de f_{ct} , com β_{\max}	243
Figura 6.40: Protótipo P2: curvas “carga x deslocamento” obtidas com os diferentes valores de f_{ct} , em análises considerando β_{\max}	244
Figura 6.41: Índices ΔP_{\max} para a variação de E_c em função de ω_e , com $\beta = 0,3$	245
Figura 6.42: Índices ΔP_{\max} para a variação de E_c em função de ω_e , com $\beta = 1,0$	245
Figura 6.43: Índices ΔP_{\max} para a variação de E_c em função de ω_e , com β_{\max}	245
Figura 6.44: Protótipo P11: curvas “carga x deslocamento” para diferentes valores E_c em análises com $\beta = 1,0$	246

Figura 6.45: Protótipo P8: curvas “carga x deslocamento” para diferentes valores E_c , $\beta = 1,0$	246
Figura 6.46: Protótipos com $\omega_e = 0,05$: cargas máximas em função dos valores relativos de E_c , com $\beta = 1,0$	247
Figura 6.47: Índices ΔP_{\max} em função de β , para a variação de E_c nas vigas ($l/d_p=19,2$)	247
Figura 6.48: Índices ΔP_{\max} em função de β , para a variação de E_c , nas lajes ($l/d_p=47,0$)	248
Figura 6.49: Índices ΔP_{\max} pela variação de ε_{c0} , análises com $\beta = 0,3$	248
Figura 6.50: Índices ΔP_{\max} para a variação de ε_{c0} , em função de ω_e , com $\beta = 1,0$	249
Figura 6.51: Índices ΔP_{\max} para a variação de ε_{c0} , em função de ω_e , com $\beta = 5,441$	249
Figura 6.52: Protótipos com $\omega_e = 0,05$ e $\beta = 0,3$: cargas máximas em função de ε_{c0}	250
Figura 6.53: Viga P6: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores de ε_{c0} , com $\beta = 5,441$	250
Figura 6.54: Viga P11: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores de ε_{c0} , com $\beta = 1,0$	250
Figura 6.55: Protótipos com $l/d_p = 19,2$: índices ΔP_{\max} pela variação de ε_{c0} , em função de β	251
Figura 6.56: Protótipos com $l/d_p = 47,0$: índices ΔP_{\max} pela variação de ε_{c0} , em função de β	251
Figura 6.57: Índices ΔP_{\max} produzidos pela variação de f_c , em função de ω_e , com $\beta = 0,3$	252
Figura 6.58: Índices ΔP_{\max} produzidos pela variação de f_c , em função de ω_e , com $\beta = 1,0$	252
Figura 6.59: Índices ΔP_{\max} produzidos pela variação de f_{c0} em função de ω_e , com $\beta = 5,441$	253
Figura 6.60: Resultados sobre a análise para f_c : índices ΔP_{\max} dos protótipos com $l/d_p = 19,2$, em função de β	253
Figura 6.61: Resultados sobre a análise para f_c : índices ΔP_{\max} dos protótipos com $l/d_p = 47,0$, em função de β	254
Figura 6.62: Protótipo P11: curvas “carga x deslocamento” com $\beta = 0,3$, obtidas com diferentes valores de f_c	254
Figura 6.63: Cargas máximas para protótipos com $\omega_e = 0,05$ e $\beta = 0,3$, em função de f_c	255
Figura 6.64: Protótipo P6: curvas “carga x deslocamento” com $\beta = 5,441$, obtidas com diferentes valores para f_c	255
Figura 6.65: Viga P10: curvas “carga x deslocamento” considerando diferentes valores de E_{cf} , com $\beta = 5,441$	256
Figura 6.66: Laje P20: curvas “carga x deslocamento”, considerando diferentes valores de E_{cf} , com $\beta = 5,441$	256
Figura 6.67: Índices ΔP_{\max} das vigas ($l/d_p = 19,2$) pela variação de f_{py} , em função de β	257
Figura 6.68: Índices ΔP_{\max} das lajes ($l/d_p = 47,0$) pela variação de f_{py} , em função de β	257
Figura 6.69: Protótipo P2: curvas “carga x deslocamento” com $\beta = 0,3$, para diferentes valores de f_{py}	258
Figura 6.70: Protótipos P8: curvas “carga x deslocamento” com $\beta = 5,441$, para diferentes valores de f_{py}	258
Figura 6.71: Índices ΔP_{\max} das vigas ($l/d_p = 19,2$) pela variação de ε_y , em função de β	259
Figura 6.72: Índices ΔP_{\max} das lajes ($l/d_p = 47,0$) pela variação de ε_y , em função de β	259

Figura 6.73: Viga P8: curvas “carga x deslocamento” em análises com $\beta = 0,3$, para os diversos valores de ε_y	260
Figura 6.74: Índices ΔP_{\max} pela variação de γ_c , em função de ω_e , para $\beta = 0,3$	261
Figura 6.75: Índices ΔP_{\max} pela variação de γ_c , em função de ω_e , para $\beta = 1,0$	261
Figura 6.76: Índices ΔP_{\max} pela variação de γ_c , em função de ω_e , para $\beta = 5,441$	261
Figura 6.77: Índices ΔP_{\max} das vigas ($l/d_p = 19,2$) pela variação de γ_c , em função de β	262
Figura 6.78: Índices ΔP_{\max} das lajes ($l/d_p = 47,0$) pela variação de γ_c , em função de β	262
Figura 6.79: Viga P8: curvas “carga x deslocamento” para $\beta = 5,441$, obtidas com os diferentes valores de γ_c	263
Figura 6.80: Curvas “carga x deslocamento” para a viga P2 com $\beta = 5,441$. obtidas com os diferentes valores de γ_c	263
Figura 6.81: Cargas máximas em função de γ_c , para protótipos com $\omega_e = 0,05$ e $\beta = 0,3$	263
Figura 6.82: Índices ΔP_{\max} em função de β , pela variação do incremento de deslocamento nas vigas ($l/d_p=19,2$)	264
Figura 6.83: Índices ΔP_{\max} em função de β , pela variação do incremento de deslocamento nas lajes ($l/d_p=47,0$)	264
Figura 6.84: Índices ΔP_{\max} em função de ω_e para a variação do incremento de deslocamento, para $\beta = 0,3$	265
Figura 6.85: Índices ΔP_{\max} em função de ω_e para a variação do incremento de deslocamento, para $\beta = 1,0$	265
Figura 6.86: Índices ΔP_{\max} em função de ω_e para a variação do incremento de deslocamento, para $\beta = 5,441$	266
Figura 6.87: Viga P2: curvas “carga x deslocamento” para diferentes incrementos de deslocamento, com $\beta = 0,3$	266
Figura 6.88: Viga P2: curvas “carga x deslocamento” para diferentes incrementos de deslocamento, com $\beta = 5,441$	267
Figura 6.89: Viga P20: curvas “carga x deslocamento” para diferentes incrementos de deslocamento, com $\beta = 5,441$	267
Figura 6.90: Curva numérica da variação da tensão na armadura não aderente para a viga TD-A5 de Tao & Du (1985)	268
Figura 6.91: Resultado numérico para $\Delta\sigma_p$ em função do deslocamento para a viga TD-A5	268
Figura 6.92: Curvas “carga x deslocamento” para elementos com crescimento monotônico da carga no intervalo de plastificação	271
Figura 6.93: Curvas experimentais “carga x deslocamento” para elementos com protensão não aderente total	271
Figura 6.94: Localização dos pontos de ruptura pela norma NBR 6118 (ABNT, 2003) para protótipos de Tao & Du (1985)	272
Figura 6.95: Localização dos pontos de ruptura pela norma NBR 6118 (ABNT, 2003) para protótipos de Chakrabarti (1995)	273
Figura 6.96: Localização dos pontos de ruptura pela norma NBR 6118 (ABNT, 2003) para protótipos de Cooke et al (1981)	273

Figura 6.97: Incrementos de tensão experimentais e numéricos considerando dois critérios de ruptura	275
Figura 6.98: Incrementos de tensão experimentais e numéricos considerando dois critérios de ruptura	275
Figura 6.99: Valores de f_{ps} experimentais e numéricos a partir dos dois critérios de ruptura	276
Figura 6.100: Valores de f_{ps} experimentais considerando os dois critérios de ruptura ...	276
Figura 6.101: Momentos resistentes calculados com f_{pe}, f_{ps} experimental e os dois f_{ps} numéricos	277
Figura 6.102: Momentos resistentes calculados com f_{pe}, f_{ps} experimental e os dois f_{ps} numéricos	277

LISTA DE QUADROS

Capítulo 2

Quadro 2.1: Coeficientes de redução de aderência (Naaman & Alkhairi, 1991) 44

Quadro 2.2: Incidência dos parâmetros nas diferentes formulações 74

Capítulo 4

Quadro 4.1: Valores percentuais de ρ_{1000} segundo a NBR 6118 (ABNT, 2003) 157

Capítulo 5

Quadro 5.1: Resultados para a viga bi-apoiada com carga concentrada 161

Quadro 5.2: Resultados teóricos, de Carol & Murcia (1989) e pelo modelo proposto para a barra comprimida 162

Quadro 5.3: Resultados teóricos, de Carol & Murcia (1989) e numéricos para deslocamentos e momentos fletores ao longo da barra comprimida 163

Quadro 5.4: Deslocamentos no topo da barra obtidos com o modelo numérico, utilizando diferentes malhas e regras de integração 164

Quadro 5.5: Características das lajes com protensão aderente de Cooke et al (1981) 178

Quadro 5.6: Dados dos protótipos de Tao & Du (1985) 182

Quadro 5.7: Características das lajes de Cooke et al (1981)..... 187

Quadro 5.8: Características dos protótipos de Chakrabarti (1995) 196

Quadro 5.9: Características das vigas de Harajli & Kanj (1991) 200

Capítulo 6

Quadro 6.1: Relação dos parâmetros e a forma de variação correspondente 221

Quadro 6.2: Protótipos utilizados na análise paramétrica 222

Quadro 6.3: Características de referência dos materiais 223

Quadro 6.4: Protótipo P1: cargas máximas para as diferentes malhas 228

Quadro 6.5: Protótipo P10: cargas máximas para diferentes malhas 228

Quadro 6.6: Valores de β considerados na análise 232

Quadro 6.7: Índices ΔP_{\max} para a variação de β em função das características dos protótipos 236

Quadro 6.8: Valores de f_{ct} e β_{\max} utilizados nas análises 241

Quadro 6.9: Valores de β_{\max} em função de E_c 244

Quadro 6.10: Valores de ε_{c0} 248

Quadro 6.11: Valores de f_c 252

Quadro 6.12: Valores do peso específico do concreto 260

Quadro 6.13: Incrementos de deslocamento 264

Quadro 6.14: Resultados experimentais e numéricos, medidos no ponto de carga máxima, para protótipos selecionados 270

Quadro 6.15: Resultados experimentais e numéricos segundo o critério por limite de deformação da norma NBR 6118 (ABNT, 2003)	274
Quadro 6.16: Resultados numéricos para os dois critérios de ruptura	274

LISTA DE TABELAS

Capítulo 2

Tabela 2.1: Parâmetros estatísticos da relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$ da aplicação do método de Mattock et al (1971)	58
Tabela 2.2: Parâmetros estatísticos da relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$ para a aplicação do método de Cooke et al (1981)	60
Tabela 2.3: Parâmetros estatísticos da relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$ para a aplicação da equação de Tao & Du (1985)	61
Tabela 2.4: Resultados para o método de Harajli & Kanj (1991)	61
Tabela 2.5: Parâmetros estatísticos da relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$ da aplicação do método de Chakrabarti (1995)	63
Tabela 2.6: Parâmetros estatísticos da relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$ da aplicação do método do ACI 318 (1999)	63
Tabela 2.7: Parâmetros para o método de Tam & Pannel (1981)	66
Tabela 2.8: Parâmetros estatísticos da relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$ da aplicação do método de Harajli (1990)	67
Tabela 2.9: Parâmetros estatísticos da relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$ da aplicação do método de Naaman & Alkhairi (1991)	69
Tabela 2.10: Parâmetros estatísticos da relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$ para o método de Lee et al (1999)	71
Tabela 2.11: Parâmetros estatísticos da relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$ da aplicação do método de Campos & Guimarães (2000)	73

SÍMBOLOS

LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

A	: área da seção transversal
A_{ps}	: área da armadura de protensão
A'_s	: área da armadura passiva de compressão
A_s	: área de armadura passiva
$C(t,t')$: fluência específica
E_c	: módulo de elasticidade do concreto
E_p	: módulo de elasticidade do aço de protensão
E_{pl}^d	: módulo de elasticidade do concreto no ponto de plastificação no descarregamento
$E_R(t,t')$: função de relaxação
\tilde{E}_R	: dado de relaxação disponível
E_s	: módulo de elasticidade do aço
E_{sh}	: módulo de elasticidade do aço na fase de endurecimento
E_μ	: módulo de elasticidade do elemento μ da cadeira de Maxwell
E''	: módulo de elasticidade da lâmina, dado por uma relação constitutiva uniaxial e dependente do tempo
\mathbf{F}	: vetor de forças resistentes
\mathbf{F}_R	: matriz de flexibilidade do elemento para forças e deslocamentos nodais relativos
I_{cr}	: momento de inércia da seção fissurada
I_g	: momento de inércia da seção íntegra
$J(t,t')$: função de fluência
\mathbf{K}_{el}	: matriz de rigidez do elemento finito
\mathbf{K}_R	: matriz de rigidez do elemento para forças e deslocamentos nodais relativos
\mathbf{K}_{sec}	: matriz de rigidez da seção transversal
\mathbf{K}^t	: matriz de rigidez tangente
\mathbf{N}	: vetor de solicitações da seção transversal
\mathbf{N}_0	: vetor das solicitações nas seções atuantes na etapa incremental anterior
\mathbf{N}_P	: vetor de solução particular para as solicitações na seção transversal
\mathbf{N}_t	: vetor com as forças fictícias da seção transversal dependentes do tempo
N_1, N_2 e N_3	: força axial, cortante e momento fletor na seção transversal, respectivamente
PPR	: índice de protensão parcial, considerando a tensão na armadura de protensão no estado limite último

PPR_e	: índice de protensão parcial, considerando a tensão efetiva de protensão na armadura não aderente
\mathbf{S}	: vetor de forças nodais
S_1 e S_4	: forças na direção x local, nos nós inicial e final, respectivamente
S_2 e S_5	: forças na direção y local, nos nós inicial e final, respectivamente
S_3 e S_6	: momentos fletores nos nós inicial e final, respectivamente
\mathbf{S}_N	: vetor de cargas nodais equivalentes
\mathbf{S}_P	: vetor da solução particular para as forças nodais
\mathbf{S}_R	: vetor de forças nodais relativas
S_{R1}	: força nodal axial relativa
S_{R2} e S_{R3}	: momentos nodais relativos
\mathbf{T}	: matriz de transformação de forças nodais relativas em forças nodais
\mathbf{U}	: vetor de deslocamentos nodais em coordenadas globais
U_1 e U_4	: translações na direção X global, nos nós inicial e final, respectivamente
U_2 e U_5	: translações na direção Y global, nos nós inicial e final, respectivamente
U_3 e U_6	: rotações apresentadas pelos nós inicial e final, respectivamente

LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

a	: profundidade da fissura
b	: base da seção transversal
d_e	: altura útil média das armaduras passivas e de protensão
d_p	: altura útil da armadura de protensão
d_s	: altura útil da armadura passiva
\mathbf{e}	: vetor de deformações da seção transversal
e_p	: excentricidade da armadura de protensão
\mathbf{f}	: matriz de interpolação das forças nodais relativas
f_c	: resistência à compressão do concreto
f_{ct}	: resistência à tração do concreto
f_i	: valor da função integranda no ponto de integração
f_{pe}	: tensão efetiva de protensão na armadura
f_{ps}	: tensão na armadura de protensão no estado limite último
$f_{ps,i}$: perda de protensão por deformação elástica do concreto no cabo i
f_{pu}	: tensão de ruptura do aço de protensão
f_y	: tensão de escoamento da armadura passiva
h	: altura da seção transversal

h_i	: distância entre dois pontos de integração subsequentes
k	: coeficiente de atrito por curvatura involuntária
l	: comprimento do vão entre as ancoragens
l_p	: comprimento da zona de deformações plásticas no concreto no estado limite último
p_{ξ}^x, p_{ξ}^y e p_{ξ}^z	: componentes axial, transversal e de momento, respectivamente, do carregamento distribuído ao longo do elemento
\mathbf{r}	: matriz de rotação entre os sistemas local e tangencial
t	: idade do concreto
t'	: idade de aplicação da tensão no concreto
\mathbf{u}	: vetor de deslocamentos nodais em coordenadas locais
u_1 e u_4	: translações na direção x local, nos nós inicial e final, respectivamente
u_2 e u_5	: translações na direção y local, nos nós inicial e final, respectivamente
u_3 e u_6	: rotações apresentadas pelos nós inicial e final, respectivamente
u_{r1}	: deslocamento nodal relativo axial, variação no comprimento da barra
u_{r2} e u_{r3}	: rotações relativas ao eixo local deslocado nos nós inicial e final, respectivamente
\mathbf{u}_R	: vetor de deslocamentos nodais relativos
\mathbf{u}_{RN}	: vetor de deslocamentos nodais relativos produzidos pelas cargas aplicadas ao longo do elemento
w	: peso do ponto de integração
x	: profundidade da linha neutra
$x_{i,k}$: distância entre as seções i e k
$y_{ps,i}$: distância da armadura de protensão à fibra de referência na seção i
z	: variação de tensão entre as extremidades do cabo pelo recuo de ancoragem
z_2	: coordenada da lâmina referente ao eixo vertical de referência

LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

Δ	: incremento
Ψ	: ângulo entre os sistemas local e local atualizado de coordenadas

LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

α	: variação angular entre a ancoragem ativa e a seção considerada
β	: parâmetro do modelo de tension stiffening do concreto
β_{σ}	: parâmetro do modelo de tension stiffening do concreto
γ_c	: peso específico do concreto

δ	: recuo de ancoragem
δ_B	: deslocamento transversal relativo entre o início e o fim do intervalo
δ_x	: deslocamento da seção transversal em relação ao eixo de origem
δ_ξ	: distância entre a posição correspondente à seção no novo eixo e a posição de origem
\mathcal{E}_C	: deformação por fluência
\mathcal{E}_{c0}	: deformação relativa ao pico de resistência à compressão do concreto
\mathcal{E}_{ce}	: deformação no concreto ao nível da armadura de protensão no estado da protensão efetiva
\mathcal{E}_{cp}	: deformação no concreto ao nível da armadura de protensão
\mathcal{E}_{ct}	: deformação de fissuração do concreto
\mathcal{E}_{cu}	: deformação de ruptura do concreto
\mathcal{E}_E	: deformação instantânea
\mathcal{E}_{en}	: deformação na envoltória de início do descarregamento
\mathcal{E}_{en}^R	: deformação no ponto de retorno à envoltória
\mathcal{E}_i^{ue}	: deformação na armadura na seção i devida à flexão das seções à esquerda
\mathcal{E}_i^{us}	: deformação na armadura na seção i em função da flexão da própria seção
\mathcal{E}_i^{ud}	: deformação na armadura na seção i pela flexão das seções à direita
\mathcal{E}_i^u	: deformação na armadura não aderente na seção i
\mathcal{E}_k^c	: deformação no concreto ao nível da armadura de protensão na seção k
\mathcal{E}_m	: deformação mecânica
\mathcal{E}_{pc}	: deformação relativa ao ponto comum entre as curvas de descarregamento e recarregamento
\mathcal{E}_{pe}	: deformação efetiva de protensão na armadura não aderente
\mathcal{E}_{pl}	: deformação plástica
\mathcal{E}_r	: deformação na lâmina de referência da seção transversal
\mathcal{E}_s	: deformação na armadura passiva
\mathcal{E}_{sy}	: deformação de plastificação da armadura passiva
\mathcal{E}^0	: deformação independente da tensão
η	: critério de tolerância
η_μ	: viscosidade do amortecedor do elemento μ da cadeia de Maxwell
θ_{AB}	: giro relativo entre as seções nos extremos do módulo de integração
θ_A	: giro da seção transversal no início do módulo de integração
θ_x	: ângulo de rotação da seção transversal em relação ao eixo local de referência, após a subtração dos movimentos de corpo rígido

λ	: parâmetro de carga
μ	: coeficiente de atrito
ξ	: variável de integração ao longo do elemento
π_k	: fator de contribuição das demais seções para a deformação na seção k
ρ_p	: taxa de armadura de protensão
ρ_s	: taxa de armadura passiva aderente
σ_c	: tensão no concreto
σ_i^u	: tensão na armadura não aderente na seção i
σ_p^{cr}	: tensão no topo da fissura produzida pela protensão
σ_q^{cr}	: tensão no topo da fissura produzida pela carga variável
σ_s	: tensão na armadura
σ_{sE}	: tensão elástica fictícia no aço
σ_μ	: tensão no elemento μ da cadeia de Maxwell
σ''	: tensão fictícia na fibra da seção transversal, gerada pelos efeitos dependentes do tempo
τ_μ	: tempo de relaxação do elemento μ da cadeia de Maxwell
ϕ	: curvatura da seção transversal
$\phi(t, t')$: função de fluência
χ	: curvatura do segmento de cabo de protensão
$\chi_{i,k}$: coeficiente de atrito entre as seções i e k
ω_e	: taxa mecânica total de armadura considerando a tensão efetiva de protensão na armadura não aderente
ω_t	: taxa mecânica total de armadura considerando a tensão na armadura não aderente no estado limite último

1 Introdução

Protensão não aderente é aquela na qual a armadura permanece livre para mover-se relativamente ao concreto, ao longo de seu perfil, em todas as seções transversais com exceção das de ancoragem (ACI, 1989; PTI, 1985). O principal sistema para a protensão não aderente é o que utiliza a **monocordoalha engraxada com bainha plástica extrudada**. Por ser um tipo de pós-tensão, dispensa a protensão em bancada, necessária no caso dos pré-moldados com aderência inicial. Ao mesmo tempo, como não há aderência, o complexo trabalho de injeção das bainhas com nata de cimento, utilizado na pós-tensão com armaduras aderentes, torna-se desnecessário. Por estes motivos, a monocordoalha engraxada é um sistema de protensão totalmente adequado à execução de estruturas moldadas no local.

A crescente utilização da protensão não aderente no Brasil, aliada a carência de critérios nacionais de análise e projeto, levaram ao desenvolvimento deste trabalho de doutoramento no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEC/UFRGS). Ao longo deste primeiro capítulo, delineiam-se a motivação, os objetivos e a estratégia de pesquisa, assim como a estrutura desta tese. Antes porém, apresenta-se uma breve descrição dos sistemas de protensão não aderente, mostrando os motivos pelos quais esta técnica vem sendo cada vez mais empregada.

1.1 Sistemas de Protensão Não Aderente

O primeiro sistema de protensão não aderente de grande abrangência, utilizava cabos com fios paralelos pintados com graxa betuminosa, envoltos firmemente por um revestimento helicoidal de papelão resistente. O propósito da bainha consistia unicamente em eliminar a aderência entre concreto e armadura, mantendo a graxa em torno dos fios e reduzindo o atrito entre o aço e o revestimento de papel. A ancoragem era composta por uma única peça circular para os diversos fios que compunham o cabo, dotada de furos para a passagem de cada um dos fios, apresentando um aspecto semelhante a um grande botão.

Este sistema foi empregado em edifícios nos Estados Unidos a partir da década de 1950, com 7 a 27 fios por cabo (Schupack, 1991a), e amplamente utilizado em prédios de estacionamento entre os anos de 1960 e 1970. No final da década de 1970 e início de 1980, no entanto, estas estruturas mostraram sérios problemas de corrosão, principalmente com a utilização de sal como anti-congelante nas cidades e rodovias (Nehil, 1991).

Como alternativas de protensão não aderente, capazes de superar os graves problemas de durabilidade, surgiram, também nos Estados Unidos, sistemas utilizando cordoalhas engraxadas com bainhas plásticas. A primeira patente de uma armadura com bainha plástica extrudada foi registrada em 1970 por Fred Lang, mas seu uso não se difundiu, inicialmente, provavelmente devido à existência dos direitos sobre o produto (Schupack, 1991b). Até 1985, não havia critérios rigorosos e abrangentes para a proteção à corrosão das armaduras não aderentes, ano em que foram publicadas as especificações do PTI (1985), que levaram ao aperfeiçoamento dos sistemas com cordoalhas engraxadas (Schupack, 1991b).

No Brasil, a história da protensão não aderente é bem mais recente. Com quase 30 anos de atraso, as cordoalhas engraxadas e plastificadas vêm se difundindo rapidamente no país desde 1997, quando este sistema passou a ser aqui produzido. A utilização pioneira se deu em São Paulo, nas obras da garagem subterrânea do Hospital de Clínicas e em seis estações retransmissoras de telecomunicações (Kiss, 1999).

1.1.1 A Monocordoalha Engraxada com Bainha Plástica Extrudada

Os sistemas com a **monocordoalha engraxada com bainha plástica extrudada** vêm popularizando a protensão não aderente entre as empresas de construção civil. O seu grande mérito é a simplicidade de aplicação. O cabo é composto por uma única cordoalha, pelo revestimento e por dispositivos de ancoragem simples, que incorporam o porta-cunhas e uma placa para a distribuição da força de protensão no concreto. A cordoalha chega à obra já com o revestimento e com a ancoragem passiva travada (Kiss, 1999). O modo de produção permite que o processo de engraxamento seja interrompido sempre que trechos de armadura aderente tornem-se necessários. Um esquema da monocordoalha engraxada com bainha plástica extrudada é apresentado na figura 1.1.

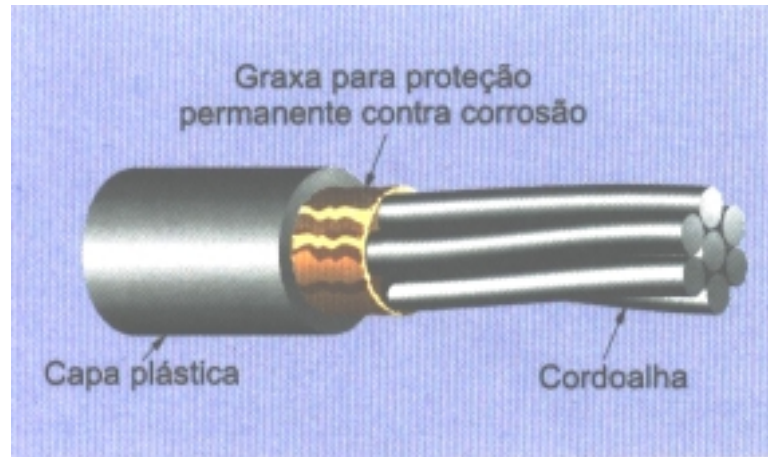


Figura 1.1 – Monocordoalha engraxada com bainha plástica extrudada (Cauduro, 1997)

Em uma monocordoalha engraxada, o revestimento é composto por uma camada de material inibidor de corrosão e por uma bainha plástica. A bainha plástica elimina a aderência entre concreto e aço, proporciona proteção mecânica e constitui uma barreira contra o ingresso de umidade e agentes químicos. O material inibidor de corrosão, chamado de graxa, além de proteger quimicamente a armadura, minimiza o atrito entre a cordoalha e a bainha plástica (Aalami, 1994). Por facilitar o movimento da cordoalha no interior da bainha, o baixo coeficiente de atrito reduz a possibilidade de corrosão associada à fricção do aço (FIB, 2001). O desempenho da monocordoalha engraxada é especialmente adequado em termos de durabilidade porque o processo de extrusão produz uma bainha justa, que evita a penetração e o fluxo de umidade e de outros elementos agressivos no interior do cabo (Schupack, 1991a). Na obra, as monocordoalhas podem ser facilmente transportadas e manuseadas, pois o revestimento é resistente e dispensa cuidados especiais durante a montagem e a concretagem.

Como cada cordoalha possui sua própria bainha firmemente ajustada, pode-se trabalhar com elementos protendidos mais esbeltos pois, devido à pequena dimensão da armadura, obtém-se maiores excentricidades. Além disso, elas podem espalhar-se pela estrutura também em curvas horizontais, permitindo que as cordoalhas sejam desviadas para a passagem de instalações. As ancoragens são pequenas, práticas e já vêm acompanhadas de uma fôrma plástica para o nicho onde a máquina de protensão prende a cordoalha. O procedimento da protensão é simples e prático, pois utiliza equipamentos leves e de fácil operação, que aplicam a força em uma única etapa. Após a protensão, os nichos da ancoragem ativa são facilmente preenchidos com argamassa (Cauduro & Leme, 1999).

A monocordoalha produzida no Brasil possui bainha de PEAD, é comercializada em diâmetros de 12,7 *mm* e 15,2 *mm*, com sete fios, de acordo com a NBR7483 (ABNT, 1991) e o coeficiente de atrito varia entre 0,06 e 0,07. O revestimento de graxa e a bainha atendem aos critérios do PTI (1985).

1.1.2 Aspectos de Durabilidade

Em função dos sérios problemas apresentados pelos sistemas antigos, a protensão não aderente foi bastante questionada com relação aos aspectos de durabilidade. Como a armadura é vinculada à estrutura apenas nas ancoragens, a corrosão de qualquer ponto do cabo pode resultar na sua completa eliminação. A ruptura é naturalmente brusca, devido ao elevado nível de tensão, podendo ocorrer a ejeção da cordoalha para fora da peça estrutural.

A corrosão pode se dar ao longo do cabo ou nas ancoragens. No primeiro caso, ela é devida, predominantemente, a falhas na bainha ou no revestimento de graxa. Se existe algum espaço entre a bainha e a cordoalha, sem preenchimento com graxa, a água freqüentemente encontra o seu caminho no interior do revestimento. Se a bainha é permeável, a água pode penetrar, remover a graxa e provocar corrosão. Algumas vezes, uma bainha com espessura insuficiente pode representar uma baixa resistência mecânica, tornando-se suscetível a danos. Se, em um ponto alto do perfil de protensão, existe um cobrimento de concreto insuficiente, a bainha pode sofrer desgaste em regiões de tráfego intenso. A amarração da armadura na fase de instalação dos cabos, através de laços de arame, pode provocar o rompimento da bainha durante a protensão. Revestimentos de graxa com espessura inadequada ou de composição com reduzida capacidade de proteção, contribuem para a ocorrência da corrosão. Todos estes fatores associados à presença de água e agentes agressivos, significam um risco elevado de falta de durabilidade de sistemas de protensão não aderente (Schupack, 1991a).

Trechos sem bainha próximos às ancoragens podem constituir-se em caminhos para a entrada de água no interior dos cabos, que se acumula nos pontos baixos do perfil, onde causa corrosão. Muitas vezes o segmento de cordoalha que se prolonga para fora da ancoragem é muito extenso ou mal protegido. A proteção das ancoragens com argamassa, normalmente executada ao final do processo de protensão, quando negligenciada, provoca sérios problemas de corrosão (Schupack, 1991a).

Fatores ligados ao projeto e execução da obra podem ser importantes. Um cobrimento inadequado de concreto, ou mesmo um concreto de má qualidade, facilitam a penetração e a ação de agentes agressivos. O manuseio dos cabos durante o processo construtivo pode danificar a bainha, mesmo que esta seja resistente. Muitas vezes, as ancoragens não somente são mal protegidas, mas, também, por erro de projeto, posicionadas em regiões de escoamento d'água. Uma estrutura mal drenada também pode acelerar o processo de corrosão (Freyermuth, 1991).

A publicação, em 1985, do *Specification for Single Strand Unbonded Tendons* (PTI, 1985) representou um marco para a uniformização e a qualificação dos sistemas de protensão não aderente, principalmente quanto à durabilidade. Estes critérios definiram os parâmetros de desempenho para os materiais, assim como os procedimentos de produção e instalação dos sistemas em obra. Os procedimentos de industrialização são padronizados, garantindo a impermeabilidade do sistema e estabelecendo parâmetros de resistência a possíveis danos durante os processos de fabricação, transporte, posicionamento e concretagem. O material da bainha deve apresentar estabilidade química frente à variação de temperatura prevista ao longo da viga útil, e ser inerte ao concreto, ao aço e ao revestimento com graxa.

Em ambientes normais, a bainha deve apresentar espessura mínima de 0,635 *mm* para polietileno ou polipropileno de média ou alta densidade. Em ambientes corrosivos essa espessura não pode ser menor do que 1,0 *mm*, oferecendo uma maior resistência mecânica durante a fase de construção. Em todos os casos, o diâmetro interno da bainha deve ser no mínimo 0,254 *mm* maior do que o diâmetro máximo da cordoalha, evitando-se que a superfície de aço marque ou agrida a própria bainha. Em ambientes agressivos, a bainha deve ser conectada a todo o sistema de proteção, incluindo os dispositivos de ancoragem, promovendo o total revestimento do aço de protensão. Esta conexão impermeável pode ser obtida através de peças especiais ou simplesmente envolvendo-se o trecho exposto da cordoalha e o dispositivo de ancoragem com uma fita adesiva de dupla camada.

O material de revestimento resistente à corrosão deve proteger adequadamente o aço de protensão, garantir a lubrificação entre a armadura e a bainha, resistir à deformação da bainha sob altas temperaturas, manter um filme contínuo sem se tornar frágil em baixas temperaturas, ser quimicamente estável e não reagente com o aço e a bainha. O filme deve ser um revestimento orgânico, com aditivos hidrofugantes e anticorrosivos.

Na obra, a armadura não aderente deve ser firmemente apoiada, em intervalos não maiores do que 120cm, de maneira a evitar-se deslocamentos durante a etapa de concretagem. Os dispositivos de apoio e a fixação das armaduras devem evitar a danificação da bainha. Além disso, as armaduras não aderentes não devem ser expostas a temperaturas excessivas, fagulhas de soldagem e correntes elétricas. Após o posicionamento das armaduras na fôrma e antes da concretagem, a bainha deve ser inspecionada para a verificação de possíveis danos. Pequenas áreas danificadas podem ser ignoradas em ambientes normais. Nos ambientes agressivos, os danos devem ser reparados com fitas adesivas impermeáveis, após a recomposição do revestimento anticorrosivo.

Terminado o procedimento de protensão, o comprimento da cordoalha em excesso a partir das cunhas deve ser removido, podendo variar entre 19 *mm* e 32 *mm*. Os nichos das ancoragens devem ser preenchidos com argamassa de baixa retração no menor espaço de tempo possível após a protensão. Em ambientes agressivos, o nicho e as partes metálicas devem ser protegidos com o mesmo material de revestimento da armadura, utilizando um capeamento impermeável.

1.1.3 Algumas Aplicações da Protensão Não Aderente

As lajes planas de edifícios, moldadas no local, constituem-se em uma das principais aplicações da protensão não aderente. A disposição dos pilares pode ser ajustada em função de garagens e mantida até o topo do edifício, eliminando as transições. Sem as vigas, os pilares podem ser dispostos sem alinhamento e afastados da fachada do edifício (Cauduro & Leme, 1999). A ausência de vigas possibilita a livre localização de divisórias e a construção de plantas com formatos irregulares, valorizando o empreendimento.

A protensão em lajes planas proporciona uma menor altura total do edifício para um mesmo número de pavimentos, com redução de custos (Aalami & Bommer, 1999). O ganho na altura total do edifício deve-se não somente à eliminação das vigas como, também, à facilidade para a passagem dos dutos elétricos, hidráulicos e de ar condicionado. A vantagem econômica resulta da maior área construída para uma mesma altura, com melhor aproveitamento do terreno. Além disso, há menor gasto com fôrmas e mão-de-obra, e uma maior rapidez na

execução dos pavimentos, o que permite o retorno do investimento em um menor espaço de tempo.

A protensão não aderente é bastante eficiente, também, nas fundações diretas do tipo radier e nos pisos industriais. Os raders protendidos podem ser utilizados em grandes conjuntos habitacionais ou até mesmo em edifícios altos. Eles funcionam como amortecedores que reduzem as deformações diferenciais entre o solo abaixo e a estrutura acima. A fundação é capaz de resistir ou distribuir as deformações induzidas pela umidade proveniente do solo e manter a superfície superior nivelada. Nos pisos industriais, a principal vantagem da aplicação da protensão não aderente é a redução da espessura, possível pela compressão induzida pela armadura protendida no concreto. Boa parte das juntas pode ser eliminada, aumentando a rapidez de construção. Embora a técnica tenha sido desenvolvida para solos expansíveis ou compressíveis, a protensão também é eficiente em pisos sobre solos estáveis, reduzindo não só a quantidade de juntas, como também a fissuração (PTI, 1991).

A protensão não aderente, com cabos externos, tem sido utilizada com sucesso no reforço de estruturas existentes, com reduzidos transtornos à utilização da construção. Em muitos casos, esta é a forma mais econômica e prática para aumentar-se a capacidade portante de edifícios. Se a peça a ser reforçada apresentar deficiência apenas no que diz respeito aos aspectos de utilização, a protensão externa pode ser implementada de maneira bastante simples, para controle de deslocamentos e de fissuração. Quando o reforço visa aumentar a capacidade portante, a protensão externa não somente reforça a estrutura, mas também pode adequar o caminho das cargas através da estrutura, alterando o mecanismo de ruptura. Neste caso, medidas especiais devem ser tomadas para a proteção da armadura contra a corrosão e o vandalismo (Aalami & Chegini, 1995).

1.2 Motivação da Pesquisa

Em função de suas inúmeras vantagens, a protensão não aderente vem sendo cada vez mais utilizada na construção de edifícios no Brasil. No entanto, o desenvolvimento de formulações e critérios de projeto e análise compatíveis com as normas nacionais de concreto, não tem acompanhado este rápido crescimento. Recomendações de normas estrangeiras são utilizadas na maioria dos casos, nem sempre totalmente de acordo com os procedimentos nacionais.

Além disso, a correta utilização da protensão não aderente, respeitando a realidade da construção civil brasileira, demanda o desenvolvimento de conhecimento e de experiência de pesquisa nacionais sobre o assunto.

O complexo comportamento estrutural das estruturas com protensão não aderente, em função da ausência de compatibilidade de deformações, torna o desenvolvimento de uma solução analítica fechada para a sua análise uma tarefa praticamente impossível. Inúmeras formulações de caráter empírico ou parcialmente empírico para a verificação da força final na armadura de protensão não aderente estão disponíveis na literatura. Elas incluem uma série de variáveis cuja verdadeira importância na definição do comportamento estrutural, principalmente quanto ao estado limite último, ainda não foi totalmente esclarecida.

1.3 Objetivos

Tendo em vista a motivação de pesquisa, apresentada no item anterior, este trabalho de doutoramento tem os seguintes objetivos:

- a) o desenvolvimento de uma ferramenta analítica para o estudo do comportamento à flexão das estruturas com protensão não aderente;
- b) a implementação de um modelo numérico abrangente, que possa ser utilizado em futuras pesquisas no PPGEC/UFRGS, empregando formulações e modelos constitutivos já consolidados na literatura técnica, incluindo a não linearidade geométrica para pequenas deformações, carregamentos cíclicos e de longa duração;
- c) a implementação de um modelo numérico capaz de representar o comportamento de estruturas com protensão aderente e não aderente de construção composta;
- d) o estabelecimento de diretrizes para a utilização do modelo numérico proposto, tornando-o totalmente apropriado para o desenvolvimento de futuras pesquisas sobre o comportamento à flexão das estruturas com protensão não aderente;

- e) a sugestão de uma abordagem de pesquisa para o estabelecimento de critérios nacionais para o projeto e a análise de estruturas protendidas com armaduras sem aderência.

1.4 Estratégia de Pesquisa

Procurando alcançar os objetivos propostos, uma ampla revisão bibliográfica sobre o comportamento à flexão de elementos com protensão não aderente foi realizada, buscando observar, principalmente, as ferramentas de análise disponíveis na literatura. Através das informações obtidas, a implementação de um novo modelo numérico em elementos finitos, em linguagem Fortran, foi definida como a estratégia mais viável para a pesquisa.

O **elemento finito do tipo híbrido** para as estruturas de pórtico plano mostrou-se uma abordagem bastante interessante para a análise das estruturas com protensão não aderente. Como será visto no **Capítulo 2**, a força em qualquer ponto de uma armadura de protensão não aderente depende da deformada do elemento protendido e, portanto, das curvaturas de todas as seções ao longo do cabo. Na formulação do elemento finito do tipo híbrido, descrita no **Capítulo 5**, as expressões que descrevem a variação das forças ao longo de uma barra são utilizadas como funções de interpolação, e tais forças constituem-se nas variáveis interpoladas. Como a forma de variação das solicitações ao longo de uma barra de pórtico pode ser obtida simplesmente a partir de condições de equilíbrio, sem depender de hipóteses arbitrárias, a formulação do elemento finito do tipo híbrido fornece distribuições de forças e de curvaturas de caráter teoricamente exato, contribuindo para uma boa avaliação do comportamento de estruturas com protensão não aderente.

Após a implementação do modelo numérico, procurou-se verificar a sua adequação para a análise das situações estruturais previstas e caracterizá-lo para a realização de pesquisas com protensão não aderente. Para isso, o comportamento de uma série de protótipos foi analisado, comparando-se resultados numéricos e experimentais. Na continuidade do trabalho, uma análise paramétrica foi realizada, estudando a influência da variação de alguns parâmetros de entrada no modelo sobre os resultados numéricos. Ainda, um estudo considerando alguns critérios de ruptura foi desenvolvido, obtendo-se subsídios para a definição de uma abordagem adequada ao estudo dos elementos com protensão não aderente através do modelo numérico proposto.

1.5 Organização do Trabalho

O **Capítulo 2** apresenta uma revisão das principais características do comportamento à flexão dos elementos com protensão não aderente. Inicialmente, abordam-se as conseqüências da ausência de compatibilidade de deformações entre concreto e a armadura não aderente. Os principais fatores que afetam o desempenho dos elementos com protensão não aderente também são discutidos. Em seguida, apresenta-se uma compilação de métodos de análise disponíveis na literatura. Por fim, os resultados da aplicação destas formulações são mostrados, para uma série de protótipos experimentais, avaliando-se aspectos práticos e o desempenho das formulações.

No **Capítulo 3**, descrevem-se as formulações matemática e numérica do modelo proposto. O elemento finito do tipo híbrido para estruturas de pórticos planos é apresentado, para análises de primeira e segunda ordem, deduzindo-se a equação fundamental e indicando-se a forma de implementação no modelo. As ferramentas numéricas utilizadas são mostradas, incluindo a integração numérica, o cálculo dos deslocamentos, as abordagens incrementais e o método para o cálculo das deformações nas armaduras não aderentes.

As relações constitutivas para os materiais no modelo numérico são apresentadas no **Capítulo 4**. Em primeiro lugar, as equações para o comportamento instantâneo do concreto, armadura passiva e aço de protensão são mostradas, para carregamentos de caráter monotônico ou cíclico. A formulação para a fluência e retração do concreto e a relaxação do aço de protensão, utilizando o modelo da cadeia de Maxwell, é descrita em seguida.

O **Capítulo 5** apresenta exemplos de aplicações do modelo numérico proposto, para a avaliação de seu desempenho em uma série de situações estruturais. Através de comparações entre resultados numéricos e experimentais ou teóricos, busca-se verificar a adequação do programa computacional para o estudo de vigas e lajes em concreto armado e protendido, com armaduras aderentes ou não aderentes, peças de construção composta e pilares em concreto armado.

No **Capítulo 6**, apresentam-se os resultados de um estudo para a caracterização do modelo numérico visando à pesquisa dos elementos com protensão não aderente. Inicialmente, uma análise paramétrica é descrita, em que a influência de variações nos valores dos parâmetros de entrada no modelo sobre os resultados numéricos é investigada. Finalmente, dois critérios de ruptura para a aplicação no estudo do comportamento de elementos com protensão não

aderente são discutidos, principalmente no que diz respeito à avaliação da tensão final na armadura não aderente.

Por fim, as conclusões e as sugestões para a continuação da pesquisa são apresentadas no **Capítulo 7**. Procura-se indicar uma série de tópicos de pesquisa para trabalhos futuros cuja relevância foi verificada ao longo do trabalho de doutorado. O modelo numérico proposto é recomendado como ferramenta para o estudo do comportamento de elementos com protensão não aderente, principalmente no que diz respeito ao aprimoramento dos critérios brasileiros para o projeto deste tipo de estrutura.

2 Comportamento à Flexão e Previsão do Desempenho de Elementos com Protensão Não Aderente

Em função da possibilidade de deslizamentos entre o concreto e o aço, os elementos com protensão não aderente apresentam um comportamento à flexão distinto das demais peças estruturais em concreto. Ao mesmo tempo, a inexistência de compatibilidade de deformações entre concreto e armadura, resultante dos deslizamentos relativos, faz com que as formulações já consolidadas para estruturas com armaduras aderentes não sejam aplicáveis aos elementos com protensão não aderente.

Este capítulo aborda as principais conseqüências da falta de aderência entre concreto e aço de protensão no desempenho à flexão de elementos com cabos não aderentes. Apresentam-se as informações obtidas ao longo de um amplo levantamento bibliográfico, abrangendo alguns dos mais importantes trabalhos publicados nas últimas quatro décadas. Inicialmente, discutem-se as principais características do comportamento à flexão dos elementos com protensão não aderente, com ênfase nas variáveis que afetam este comportamento. Diversos métodos disponíveis na literatura para a previsão da tensão na armadura não aderente no estado limite último, necessária para a verificação da capacidade resistente dos elementos, são descritos na continuação. Apresenta-se, também, uma comparação entre resultados experimentais e os obtidos com estes métodos na previsão do comportamento de uma série de protótipos disponíveis na literatura. Por fim, tecem-se algumas considerações sobre os temas abordados, incluindo avaliações sobre os métodos utilizados para a previsão do desempenho.

2.1 Comportamento à Flexão

Quando submetidos à flexão, os elementos protendidos com armaduras não aderentes apresentam um comportamento distinto do observado em peças em concreto armado simples ou com protensão aderente. Existindo aderência, devido à contínua ligação entre concreto e armadura, verifica-se a compatibilidade de deformações, que se traduz em uma equivalência de deformações entre concreto e aço adjacentes. Nestes casos, a análise de um elemento à flexão reduz-se à verificação do equilíbrio de seções isoladas, e a tensão na armadura

aderente, na seção de máxima solicitação, pode ser determinada diretamente a partir da deformação na fibra de concreto posicionada na mesma altura.

Em elementos com cabos não aderentes, a armadura de protensão é vinculada ao concreto apenas nas seções de ancoragem, localizadas nas extremidades da estrutura ou em pontos intermediários. Nas demais seções, o aço permanece livre para mover-se em relação ao concreto, ao longo do perfil de protensão, e a hipótese de compatibilidade de deformações em cada seção não é verificada. Pode-se definir, então, a principal característica dos elementos com cabos não aderentes submetidos à flexão: **a variação de comprimento na armadura não aderente é equivalente à variação total de comprimento da fibra de concreto adjacente ao perfil de protensão.** Existe, portanto, a **compatibilidade de deslocamentos.**

A compatibilidade de deslocamentos, em oposição à de deformações, faz com que as tensões na armadura não aderente distribuam-se de maneira praticamente uniforme ao longo de seu comprimento, função da deformação média do concreto ao longo do perfil de protensão. Este comportamento pode ser observado na figura 2.1, onde se comparam as distribuições dos incrementos de força ao longo de um cabo de protensão, em relação ao incremento médio, nas situações em que a armadura é considerada aderente ou não aderente. Estes resultados foram apresentados por El-Mezaini & Çitipitioglu (1991) com dados obtidos através de um modelo numérico, desprezando-se o atrito entre a armadura não aderente e a bainha. Observa-se que, considerando a protensão não aderente, o incremento de força é constante ao longo do cabo e igual ao incremento médio.

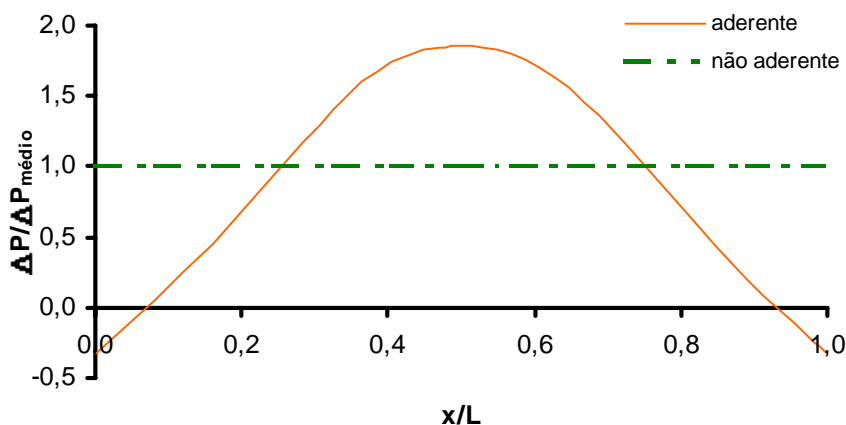


Figura 2.1 – Incremento de força ao longo da armadura de protensão relativo ao incremento médio (El-Mezaini & Çitipitioglu, 1991)

Considerando aderência perfeita, à seção de momento fletor máximo correspondem as maiores deformações no concreto e, portanto, as maiores deformações na armadura. No entanto, se o movimento relativo entre concreto e aço é permitido, quando ocorre a rotação da seção de maior sollicitação, ocorre também o deslizamento da armadura não aderente até que o equilíbrio de tensões ao longo de todo o cabo seja verificado. Pode-se dizer, então, que a tensão na armadura não aderente não depende apenas da curvatura de cada seção isoladamente, mas sim das curvaturas de todas as seções ao longo de seu comprimento. Por isso, enquanto nos elementos com armaduras aderentes em cada seção a tensão no aço apresenta uma **dependência local** das curvaturas, nas peças com protensão não aderente esta relação pode ser considerada de **dependência global**.

Em função da compatibilidade de deslocamentos e dos deslizamentos da armadura no interior da bainha, mesmo quando existem regiões de concreto com deformações plásticas, a armadura não aderente nem sempre atinge a deformação de escoamento, o que pode ser constatado a partir dos resultados experimentais de Chakrabarti (1995) e Harajli & Kanj (1991). Têm-se verificado, também, que as armaduras não aderentes jamais atingem as tensões de ruptura (Chakrabarti, 1995; Nawy & Salek, 1968).

Apesar da inexistência de compatibilidade de deformações, elementos com protensão não aderente podem apresentar um comportamento à flexão bastante adequado. As três fases normalmente observadas nos elementos com armaduras aderentes, incluindo a de comportamento linear, linear fissurado e de plastificação, também podem ser verificadas quando os cabos são não aderentes (Tao & Du, 1985). Na fase de comportamento plástico do concreto, é usual admitir-se que todos os giros das seções ao longo do elemento concentram-se em uma única rótula plástica, pois nas regiões com comportamento elástico as curvaturas são desprezíveis se comparadas às da região plastificada. Assim, muitos autores consideram que o incremento de tensão na armadura não aderente depende apenas do comprimento e dos giros localizados na rótula plástica (Nawy & Salek, 1968). Como a armadura não aderente é incapaz de distribuir a fissuração e, portanto, produzir uma extensa zona de curvaturas elevadas, o comprimento desta região é usualmente pequeno. Segundo Harajli (1990), a hipótese da concentração de deformações é adequada e tende a ser conservadora apenas em peças com elevada taxa de armadura, onde, no estado limite último, as curvaturas das seções plastificadas são reduzidas, e a contribuição das regiões em regime elástico é maior.

Em decorrência da dependência global com relação às curvaturas, diversos fatores acabam por influenciar o comportamento dos elementos e a magnitude da tensão na armadura não aderente. Vigas e lajes, com ou sem armadura aderente adicional, podem apresentar desempenhos bastante distintos. Características como a relação entre o comprimento do vão e a altura útil da armadura de protensão, a taxa total de armadura e o tipo de carregamento, também são consideradas determinantes. Os principais aspectos destes fatores são discutidos a seguir.

2.1.1 Elementos com Protensão Não Aderente Total

Elementos com protensão não aderente total, em que não são utilizadas armaduras passivas aderentes complementares, podem apresentar um comportamento peculiar após a fissuração. Quando a seção de máxima sollicitação atinge o momento de fissuração, uma única fissura é formada e, a partir deste evento, os giros passam a concentrar-se neste ponto. À medida que a fissura cresce rapidamente em direção ao topo, a profundidade da linha neutra reduz-se, e o aumento do carregamento causa o esmagamento do concreto (Nawy & Salek, 1968).

Considerando uma viga bi-apoiada, submetida a uma carga concentrada no centro de seu vão, a primeira fissura surge na seção central e a peça fica dividida em dois segmentos rígidos comprimidos, ligados pelo cabo de protensão não aderente. À medida que a fissura apresenta aberturas crescentes, a viga passa a comportar-se como um arco abatido com um tirante ligando suas extremidades (Mattock et al, 1971; Nawy & Salek, 1968), a rigidez reduz-se fortemente, e os deslocamentos aumentam significativamente. Desta maneira, ocorre a concentração de curvaturas na seção fissurada e de deformações em seu topo, desenvolvendo-se uma rótula plástica.

Além do funcionamento como um arco de altura reduzida, elementos sem armaduras aderentes complementares, dotados de pequenas quantidades de armadura de protensão não aderente, são suscetíveis à chamada **instabilidade à flexão**. Resultados experimentais (Rozvany & Woods, 1969; Cooke et al, 1981), indicam que elementos com estas características podem apresentar uma ruptura totalmente frágil e brusca, enquanto o nível de deslocamentos é ainda reduzido. Na instabilidade à flexão, a resistência à flexão do elemento

fissurado, ainda no regime elástico, é inferior àquela medida imediatamente antes da formação da fissura (Cooke et al, 1981).

A figura 2.2 mostra o desempenho de um protótipo de Cooke et al (1981) que apresenta tal comportamento. Quando da formação da primeira fissura, ocorre uma queda brusca no valor da carga que, após um grande incremento no deslocamento, pode apresentar apenas um pequeno aumento. Todavia, a capacidade mobilizada antes da fissuração dificilmente volta a ser ultrapassada, sendo que a resistência máxima da viga corresponde ao momento de fissuração.

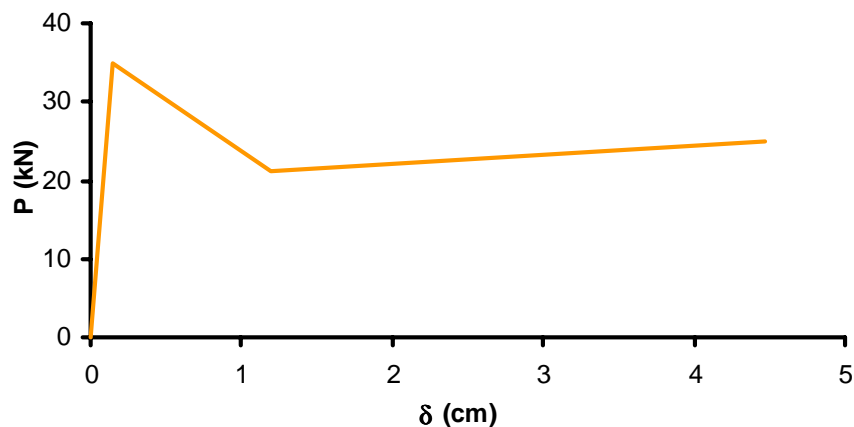


Figura 2.2 – Viga com protensão não aderente e instabilidade à flexão (Cooke et al, 1981)

Segundo Rozvany & Woods (1969), um elemento com protensão não aderente sem amadura passiva aderente complementar está sujeito à instabilidade à flexão quando a tensão média de protensão na seção transversal é inferior à resistência do concreto à tração. Em uma análise elástica, os autores adotaram a hipótese de que a força na armadura de protensão permanece constante nos estágios iniciais de fissuração, e que a fissura cresce enquanto a tensão em seu topo é maior do que a resistência à tração do concreto. Considerando a seção transversal retangular de uma viga, a tensão no topo de uma fissura é a resultante dos efeitos da protensão, como na relação (2.1), e da carga variável, conforme a equação (2.2). A condição para a propagação da fissura é mostrada na expressão (2.3). A partir desta condição, pode-se estabelecer uma relação entre o momento na seção e a profundidade da fissura, conforme a equação (2.4).

$$\sigma_p^{cr} = \frac{P}{b} \left(\frac{1}{h-a} + \frac{3(2e_p + a)}{(h-a)^2} \right) \quad (2.1)$$

onde:

σ_p^{cr} : tensão no topo da fissura produzida pela protensão;
 P : força de protensão;
 b : largura da seção transversal;
 h : altura da seção transversal;
 a : profundidade da fissura;
 e_p : excentricidade da armadura de protensão.

$$\sigma_q^{cr} = \frac{6M}{b(h-a)^2} \quad (2.2)$$

onde:

σ_q^{cr} : tensão no topo da fissura produzida pela carga variável;
 M : momento fletor produzido pela carga variável.

$$\sigma_p^{cr} + \sigma_q^{cr} = \frac{1}{b} \left[\frac{M - \left(e_p + \frac{a}{2} \right) P}{\frac{(h-a)^2}{6}} - \frac{P}{h-a} \right] = f_{ct} \quad (2.3)$$

onde:

f_{ct} : resistência do concreto à tração.

$$M = \left[bf_{ct} + \frac{P}{h-a} \right] \frac{(h-a)^2}{6} + P \left[e_p + \frac{a}{2} \right] \quad (2.4)$$

A derivada da expressão (2.4) em relação à profundidade da fissura é mostrada na equação (2.5). Segundo Rozvany & Woods (1969), a instabilidade à flexão não é verificada se a derivada do momento em relação à profundidade da fissura for positiva quando da formação da primeira fissura, conforme a equação (2.6). Desta condição, obtém-se a expressão (2.7), segundo a qual a tensão média de protensão na seção deve ser maior do que a resistência do

concreto à tração para que não ocorra a instabilidade à flexão. Já Cooke et al (1981) sugerem uma condição menos severa, segundo a qual uma tensão de protensão superior a 70% da resistência do concreto à tração é suficiente para que o fenômeno não seja observado.

$$\frac{\partial M}{\partial a} = -\frac{1}{3}[b(h-a)f_{ct} - P] \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial M}{\partial a} \geq 0 \quad \text{para } a = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{P}{bh} \geq f_{ct} \quad (2.7)$$

2.1.2 Protensão Não Aderente Parcial

De acordo com Naaman (1995), Chakrabarti (1995), Chakrabarti et al (1994) e Tao & Du (1985), protensão parcial é aquela na qual utiliza-se armadura passiva aderente complementar no elemento pretendido. O comportamento inadequado no estado limite último, muitas vezes apresentado por elementos com protensão total não aderente, ou seja, sem armadura passiva complementar, pode ser facilmente superado com a protensão parcial (Tao e Du, 1985). A armadura passiva aderente produz uma melhor distribuição de fissuras, que passam a apresentar menores aberturas, em contraposição à concentração de fissuras de grande abertura observada na protensão não aderente total (Harajli & Kanj, 1991). Se adequadamente dimensionada e submetida a deformações plásticas, a armadura aderente pode contribuir na resistência à flexão e, fundamentalmente, garantir o comportamento dúctil no estado limite último, fazendo com que o elemento comporte-se realmente como uma peça fletida, e não como um arco abatido (Mattock et al, 1971).

O desempenho de vigas com protensão não aderente parcial pode ser considerado semelhante ao de vigas com cabos aderentes (Mattock et al, 1971). Mesmo uma pequena quantidade de armadura passiva garante uma sensível melhora no comportamento. Todavia, quantidades

crescentes de armadura passiva aderente não correspondem necessariamente a uma melhora proporcional de desempenho (Chakrabarti, 1995). Quando a quantidade de armadura passiva aderente é superior à adequada, embora o momento resistente último aumente, a tensão na armadura não aderente no estado limite último diminui em vista do aprofundamento da linha neutra e da redução da ductilidade.

A relação entre a força de protensão e a resultante total de tração, proporcionada pelas armaduras aderentes e não aderentes, calculada pela equação (2.8), pode ser utilizada como medida do grau de protensão em elementos com armaduras não aderentes. Esta relação é chamada de **índice de protensão parcial (PPR)** e pode variar entre 1,0, para a protensão total, e zero (Chakrabarti et al, 1994; Chakrabarti, 1995). O índice de protensão parcial pode ser calculado, também, considerando a tensão efetiva de protensão na armadura não aderente (f_{pe}), ao invés de f_{ps} , sendo então chamada de PPR_e .

$$PPR = \frac{A_{ps}f_{ps}}{A_{ps}f_{ps} + A_s f_y} \quad (2.8)$$

onde:

- PPR : índice de protensão parcial;
- A_s e A_{ps} : área das armaduras passivas e de protensão, respectivamente;
- f_{ps} : tensão na armadura de protensão no estado limite último;
- f_y : tensão de escoamento da armadura passiva.

Embora Tao & Du (1985) não confirmem esta influência, Chakrabarti et al (1994) observaram, a partir de um trabalho experimental, uma forte relação entre o índice de protensão parcial e o desempenho de vigas com protensão não aderente. Concluiu-se que, mantendo-se a resultante de tração e as demais características das vigas, à medida que este índice é reduzido, a capacidade portante, a ductilidade e o comportamento pós a fissuração apresentam uma melhora. Em vigas com valores de (PPR) intermediários, ou seja, com uma significativa proporção de armadura passiva complementar, verificou-se uma transição suave do regime não fissurado para o fissurado, indicando uma distribuição homogênea e gradual de fissuras. Por outro lado, vigas com protensão total apresentaram apenas uma ou duas grandes fissuras, e uma mudança brusca da tangente da curva “carga x deslocamento” quando da fissuração inicial. A partir de suas observações, Chakrabarti et al (1994) sugerem índices de protensão parcial entre 0,3 e 0,7 como os mais adequados. A figura 2.3 compara o

comportamento de vigas com diferentes índices de protensão parcial, demonstrando as observações acima.

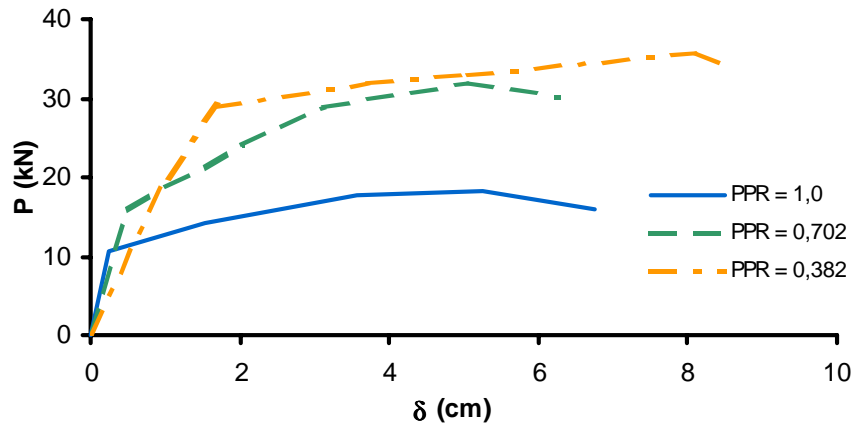


Figura 2.3 – Comportamento de vigas similares com diferentes índices de protensão parcial, protótipos de Chakrabarti (1995)

2.1.3 Taxa Mecânica Total de Armadura

A taxa mecânica total de armadura é considerada um parâmetro fundamental para o comportamento de elementos com protensão não aderente, principalmente no que diz respeito à tensão na armadura no estado limite último. Este índice estabelece uma relação entre as resultantes de tração e de compressão que podem ser mobilizadas nas seções transversais. Parâmetros importantes, como as áreas e as tensões nas armaduras passivas e de protensão, a geometria das seções e a resistência do concreto, são incluídos. Alguns autores (Cooke et al, 1981; Chakrabarti et al, 1994; Chakrabarti, 1995), e também o ACI 318 (ACI, 1999), utilizam a equação (2.9) para o cálculo da taxa mecânica total de armadura (ω_t) considerando a tensão última na armadura não aderente (f_{ps}). Outros trabalhos (Tao & Du, 1985; Harajli & Kanj, 1991; Lee et al 1999), utilizam a tensão efetiva de protensão (f_{pe}), como na equação (2.10). A segunda abordagem é mais interessante na previsão de desempenho, pois a tensão efetiva é facilmente estimada antes da análise.

$$\omega_t = \frac{A_{ps} f_{ps}}{bd_p f_c} + \frac{A_s f_y}{bd_s f_c} \quad (2.9)$$

onde:

- ω_t : taxa mecânica total de armadura considerando a tensão na armadura não aderente no estado limite último;
- d_p : altura útil da armadura de protensão;
- d_s : altura útil da armadura passiva;
- f_c : resistência do concreto;

$$\omega_e = \frac{A_{ps} f_{pe}}{bd_p f_c} + \frac{A_s f_y}{bd_s f_c} \quad (2.10)$$

onde:

- ω_e : taxa mecânica total de armadura considerando a tensão efetiva de protensão na armadura não aderente;
- f_{pe} : tensão efetiva de protensão na armadura não aderente.

A figura 2.4 apresenta diversos resultados experimentais referentes aos incrementos de tensão na armadura não aderente no estado limite último, com relação à tensão efetiva de protensão (f_{pe}), em função da taxa ω_e . Cada ponto no gráfico corresponde a um protótipo de Tao & Du (1985), Tam & Pannell (1976) ou Chakrabarti (1995), com relação (l/d_p) em torno de 20. Na figura, observa-se uma dependência entre o incremento de tensão e a taxa mecânica total de armadura, representada pela linha de tendência.

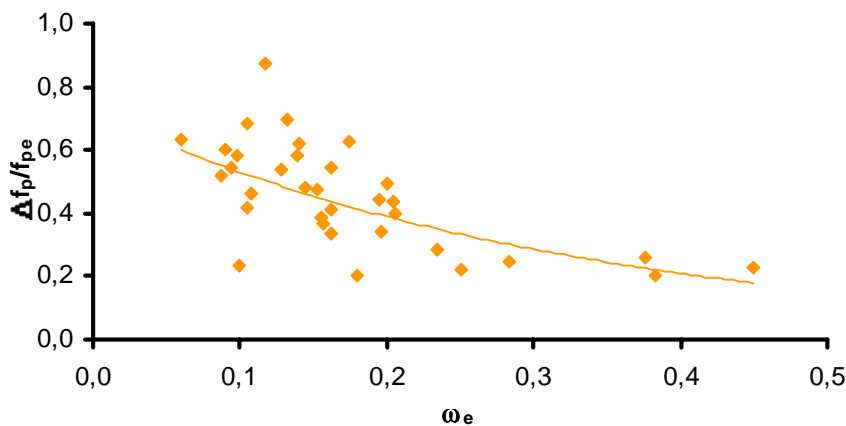


Figura 2.4 – Incremento de tensão na armadura não aderente na ruptura em função de ω_e , protótipos de Tao & Du (1985), Tam & Pannell (1976) e Chakrabarti (1995)

Resultados de Tao & Du (1985) comprovam a existência de uma relação entre a taxa mecânica total de armadura (ω_e) e o incremento de tensão na armadura não aderente. Na figura 2.5, observa-se que os incrementos de tensão na ruptura são bastante semelhantes nos elementos com as mesmas taxas mecânicas totais de armadura. Nos pares de protótipos com um mesmo valor de (ω_e), as características geométricas são idênticas, mas as quantidades de armadura passiva e de protensão, a força efetiva de protensão e a resistência do concreto são diferentes. Na figura 2.6, observa-se a influência da taxa total de armadura (ω_e) na variação da tensão na armadura não aderente ao longo de todo o carregamento. Elementos com taxas totais de armadura mais elevadas, apesar de suportarem maiores níveis de carga, mostram menores incrementos de tensão na armadura não aderente. Observa-se, também, que esta diferença de comportamento acentua-se à medida que os elementos aproximam-se da ruptura.

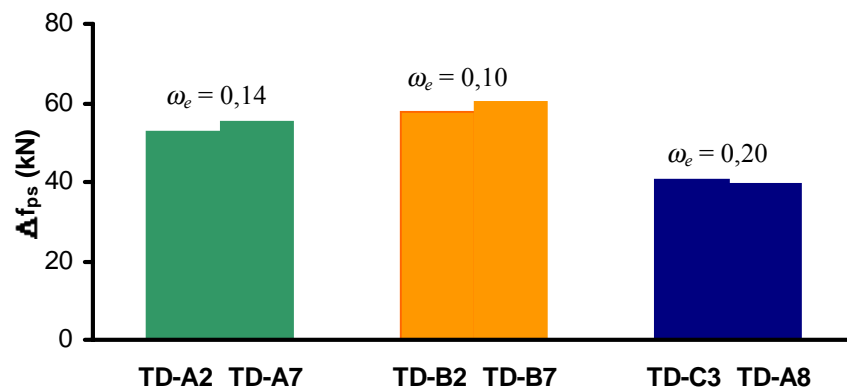


Figura 2.5 – Comparação dos incrementos de tensão na armadura não aderente em elementos com as mesmas taxas totais de armadura

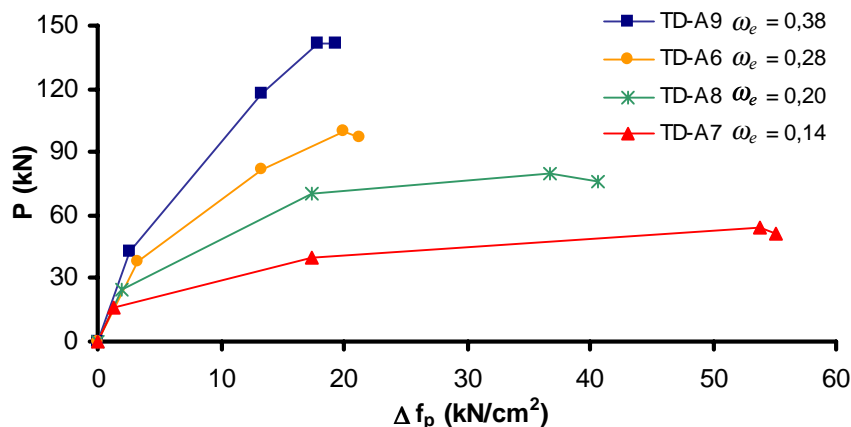


Figura 2.6 – Incremento de tensão na armadura não aderente em protótipos de Tao & Du (1985) com diferentes taxas de armadura

Baseando-se em suas observações experimentais, Tao & Du (1985) sugerem uma relação linear entre o incremento de tensão na armadura não aderente no estado limite último e a taxa mecânica total de armadura, para elementos com protensão parcial e relações (l/d_p) iguais a 20. A figura 2.7 apresenta a linha de tendência linear proposta pelos autores.

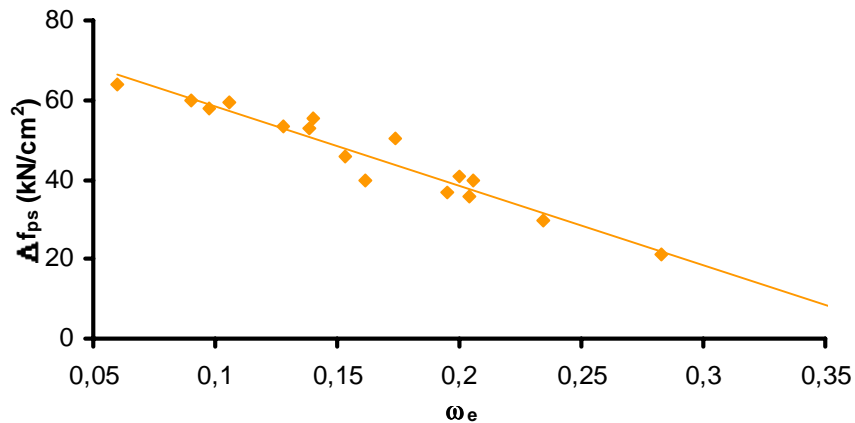


Figura 2.7 – Relação linear entre incrementos de tensão na armadura não aderente e a taxa total de armadura (Tao & Du, 1985)

A variação da taxa mecânica total de armadura reflete-se, também, no comportamento global dos elementos. A figura 2.8 apresenta as curvas “carga x deslocamento” para os mesmos protótipos de Tao & Du (1985) mostrados na figura 2.6. Observa-se uma forte redução na magnitude dos deslocamentos para a carga máxima das vigas à medida que a taxa mecânica total de armadura aumenta. Por outro lado, como esperado, a capacidade resistente é inferior nos elementos em que a taxa de armadura é menor.

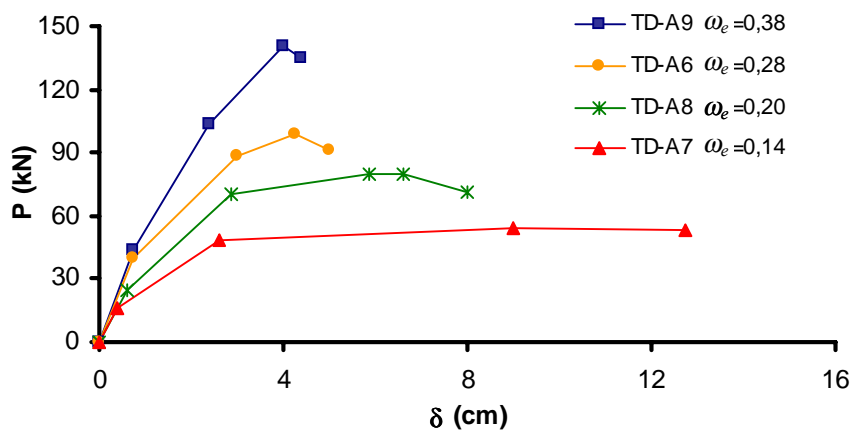


Figura 2.8 – Curvas “carga x deslocamentos” para elementos com diferentes índices ω_e , protótipos de Tao & Du (1985)

Segundo Cooke et al (1981), a partir de um estudo experimental sobre lajes com protensão total não aderente, elementos com valores elevados de ω_e , ou seja, em torno de 0,25, apresentam fissuras distribuídas e de pequena abertura. Na ruptura, a zona de esmagamento do concreto é profunda, com um comportamento brusco e explosivo. Peças com taxas bastante reduzidas, com valores de cerca de 0,03, desenvolveram apenas uma ou duas fissuras, com instabilidade à flexão. Lajes com taxas totais de armadura de valores intermediários, com valores em torno de 0,125, apresentaram os melhores comportamentos, com um bom número de fissuras. A influência da taxa mecânica total de armadura, em elementos com protensão total não aderente, pode ser observada na figura 2.9, para protótipos de Cooke et Al (1981). Aparentemente, comparando-se as figuras 2.8 e 2.9, a influência da taxa de armadura parece ser mais gradual em elementos com protensão não aderente parcial.

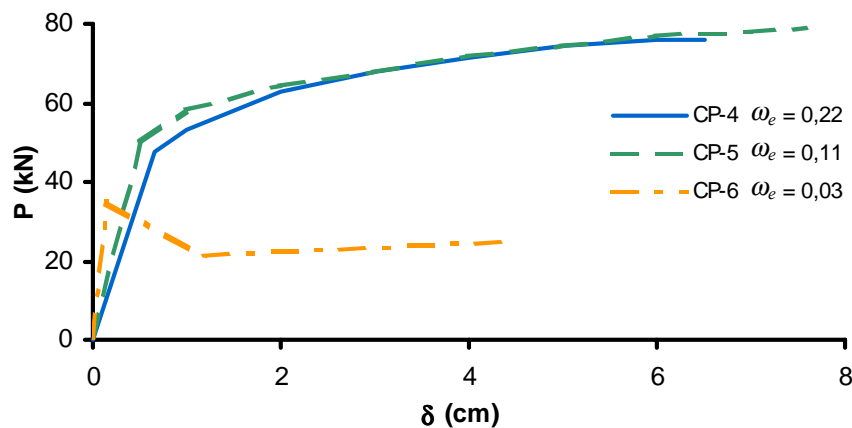


Figura 2.9 – Desempenho de elementos com diferentes taxas ω_e (Cooke et al, 1981)

Tam & Pannel (1976) também observaram a influência da taxa total de armadura na fissuração. Segundo estes autores, elementos com ω_e maiores do que 0,2 desenvolveram fissuras diagonais cruzando as fissuras produzidas pela flexão. Em vigas com taxas ω_e inferiores, as fissuras diagonais não foram observadas e a ruptura ocorreu com uma reduzida profundidade de linha neutra.

Considera-se, na verdade, que o índice ω_e reflete a profundidade da linha neutra no estado limite último, da qual o incremento de tensão na armadura não aderente e a ductilidade dos elementos dependem fortemente. Assim, quando a taxa de armadura diminui, a linha neutra move-se em direção à fibra mais comprimida e a capacidade de rotação do elemento e a magnitude do incremento de tensão aumentam (Tao & Du, 1985; Moon & Burns, 1997a).

2.1.4 Esbeltez à Flexão (l/d_p)

Mojtahedi & Gamble (1978) desenvolveram o modelo simplificado da treliça para o estudo da influência do parâmetro de esbeltez à flexão (l/d_p), que corresponde à relação entre o comprimento do vão e a altura útil da armadura de protensão, no comportamento de elementos com protensão não aderente total. O modelo da treliça é formado por dois banzos comprimidos inclinados, correspondentes aos segmentos de concreto, e um tirante, que faz o papel da armadura não aderente. A altura da treliça é igual à altura útil do elemento protendido. No encontro dos banzos comprimidos localiza-se uma articulação, que representa a seção onde se forma, na ruptura, a rótula plástica. A figura 2.10(a) apresenta o modelo da treliça de Mojtahedi & Gamble (1978).

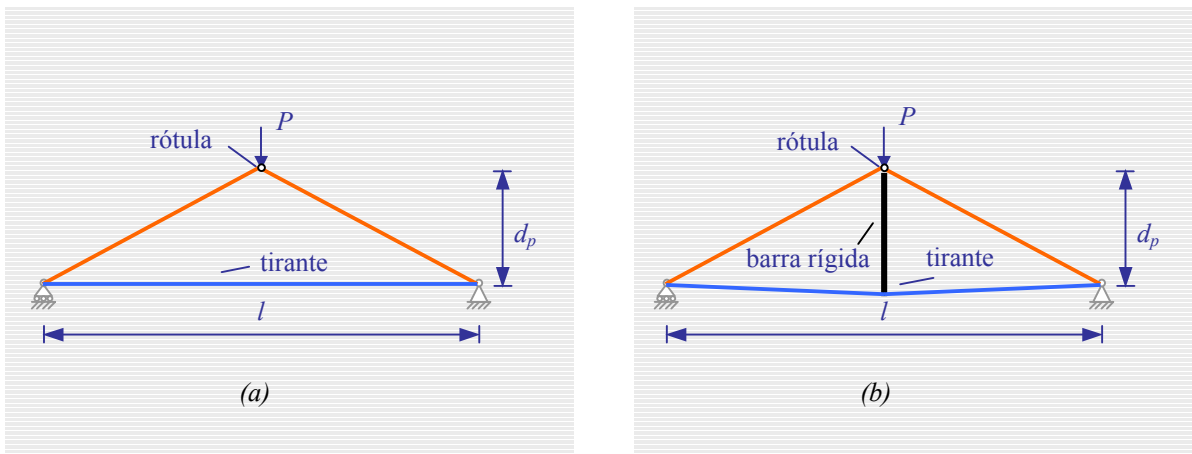


Figura 2.10 – Modelos de treliça: a) Mojtahedi & Gamble (1978);
b) Lee et al (1999)

A treliça é uma representação conceitual de uma viga com protensão não aderente fissurada, e não consiste em modelo de cálculo (Mojtahedi & Gamble, 1978). Apesar de impreciso, o modelo da treliça é considerado de grande importância para a compreensão da influência do fator l/d_p no valor do incremento de tensão no estado limite último (Cooke et al, 1981). A figura 2.11 apresenta a curva da deformação no tirante da treliça em função da relação l/d_p , para um deslocamento vertical constante aplicado na rótula superior, equivalente a 0,5 % do comprimento do vão. Pode-se observar claramente a redução na deformação do tirante à medida que a relação l/d_p aumenta. Já Lee et al (1999) afirmam, no entanto, que o modelo de treliça de Mojtahedi & Gamble (1978) é inadequado e sugerem o esquema da figura 2.10(b), com uma barra rígida ligando a rótula plástica ao tirante. Segundo os autores, este modelo é mais preciso, fornecendo valores de deformação nas armaduras não aderentes maiores do que

os obtidos com o modelo original, principalmente para índices de esbeltez à flexão mais elevados.

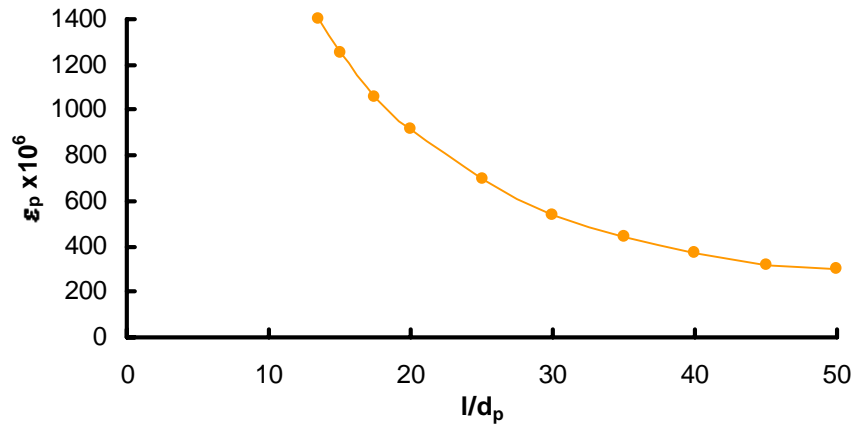


Figura 2.11 – Deformação no tirante do modelo da treliça, para um deslocamento vertical constante, em função da esbeltez à flexão (Mojtahedi & Gamble, 1978)

Cooke et al (1981) observaram que a esbeltez à flexão afeta tanto o incremento de tensão na armadura não aderente quanto à ductilidade de elementos com protensão não aderente total. A figura 2.12 mostra as curvas “carga x variação de tensão na armadura” para elementos submetidos a cargas nos terços médios, com diferentes valores para a relação (l/d_p) e as demais características idênticas, onde se nota a importante influência da esbeltez na magnitude dos incrementos de tensão. Já a figura 2.13 apresenta as curvas “carga x deslocamento” para os mesmos protótipos de Cooke et al (1981). Observa-se que quanto maior a esbeltez, maior o deslocamento para a carga máxima.

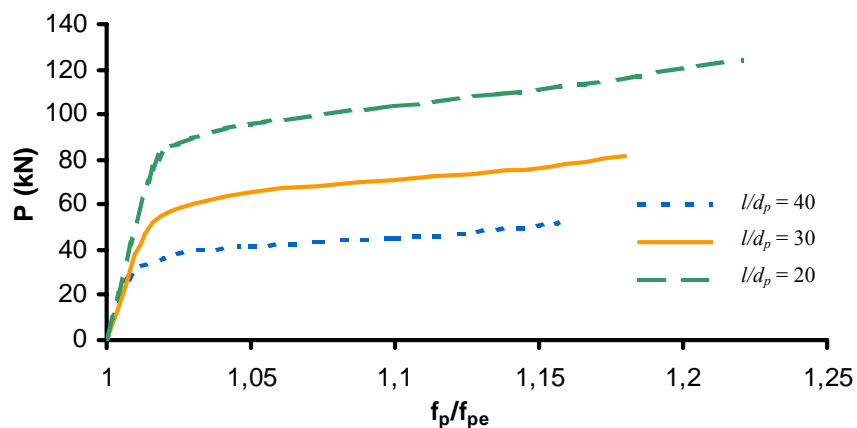


Figura 2.12 – Variação da tensão na armadura em elementos com diferentes índices l/d_p , protótipos de Cooke et al (1981)

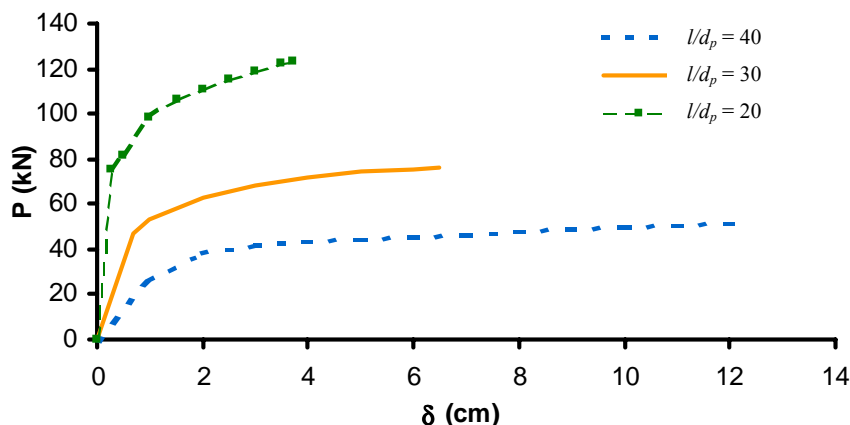


Figura 2.13 – Deslocamentos para elementos com diferentes valores para a esbelteza à flexão, protótipos de Cooke et al (1981)

Para Moon & Burns (1997b), o efeito da esbelteza à flexão (l/d_p), em elementos com armadura passiva aderente complementar ou não, só deve ser avaliado se for considerada, também, a influência do tipo de carregamento aplicado. Segundo estes autores, o efeito da relação l/d_p em uma viga submetida a uma carga concentrada pode ser cinco vezes maior do que em um elemento carregado nos terços médios. Conforme Lee et al (1999), estes fatores devem ser considerados necessariamente em conjunto, pois ambos definem a extensão da zona de deformações plásticas no estado limite último.

2.1.5 Tipo de Carregamento

Ao menos teoricamente, admite-se que distribuição das cargas ao longo de um elemento com protensão não aderente determina o comprimento da zona plastificada, o alongamento da armadura não aderente e, portanto, o incremento de tensão nesta armadura. A forma de carregamento define a extensão da zona de momentos fletores máximos e, portanto, o tamanho da região de deformações plásticas no concreto na ruptura (Harajli, 1990; Moon & Burns, 1997b). Duas cargas concentradas separadas produzem um diagrama de momentos fletores constante entre si e uma zona plastificada extensa, enquanto uma única carga concentrada define um diagrama com apenas um ponto de momento máximo e uma região de esmagamento do concreto bem reduzida. Uma carga uniformemente distribuída também acarreta um único ponto de momento máximo, porém, como a variação do diagrama é mais suave, a região de plastificação é maior do que no caso da carga concentrada.

O efeito teórico destas formas representativas de carregamento, para alguns índices de esbelteza à flexão, pode ser visualizado na figura 2.14, obtida por Harajli (1990) através de um modelo analítico. Observa-se que os incrementos de tensão na armadura não aderente decrescem fortemente quando os efeitos de um carregamento aplicado nos terços médios são comparados aos resultados para uma carga concentrada no centro do vão. Além disso, verifica-se que o efeito da esbelteza à flexão é significativo, mesmo no caso das cargas nos terços médios.

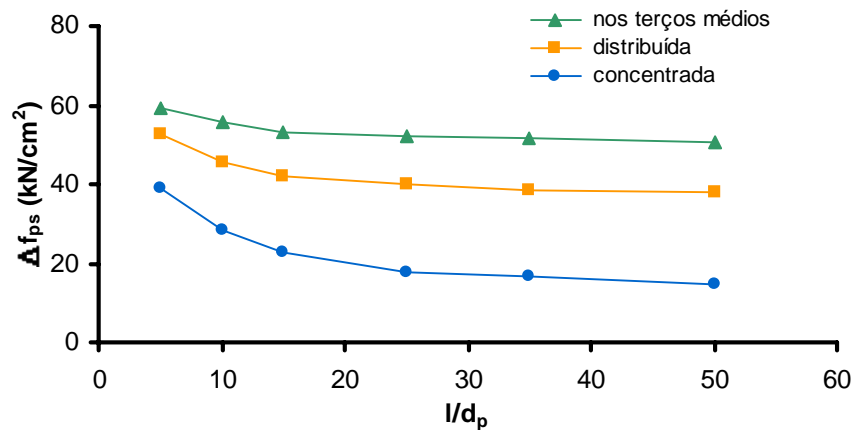


Figura 2.14 – Influência dos tipos de carregamentos no incremento de tensão na armadura não aderente na ruptura (Harajli, 1990)

Um extenso trabalho experimental a fim de analisar, entre outros aspectos, a influência da forma de carregamento no desempenho de elementos com protensão não aderente foi desenvolvido por Harajli & Kanj (1991). Até as etapas de carregamento subseqüentes à fissuração, os autores relataram pequenas variações entre os comportamentos de vigas com diferentes tipos de carregamento e protensão total. Enquanto elementos sujeitos a cargas nos terços médios apresentaram uma fissuração mais distribuída ao longo da zona de momentos constantes, as vigas com cargas concentradas apresentaram concentração de fissuras no centro do vão. No entanto, sob cargas crescentes, vigas com diferentes tipos de carregamento passaram a apresentar comportamentos semelhantes, em que houve a concentração de deformações em uma das seções fissuradas.

Além disso, os mesmos resultados de Harajli & Kanj (1991), não indicaram uma relação entre a forma de carregamento e o incremento de tensão na armadura não aderente na ruptura. A figura 2.15 apresenta valores experimentais de incrementos de tensão na armadura não aderente na fase de ruptura para pares de vigas idênticas, porém com tipos de carregamentos

diferentes. Observam-se diversos casos em que o incremento de tensão nas vigas com cargas concentradas foi maior do que nas vigas carregadas nos terços médios, contrariando o comportamento previsto teoricamente.

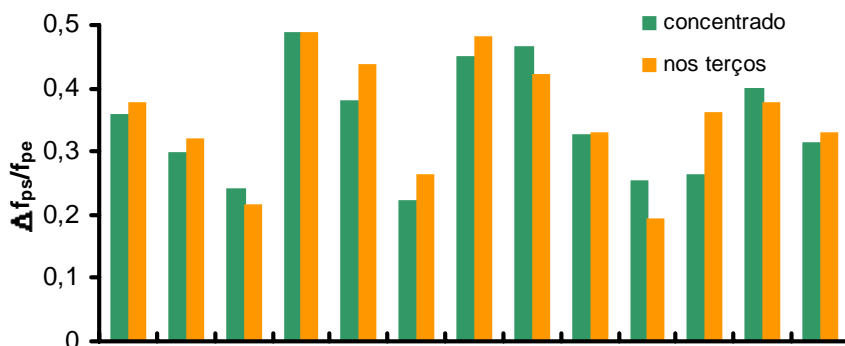


Figura 2.15 – Incrementos de tensão nas armaduras para pares de vigas idênticas sujeitas a diferentes formas de carregamento, resultados de Harajli e Kanj (1991)

2.2 Previsão da Tensão na Armadura Não Aderente no Estado Limite Último

A verificação da capacidade resistente à flexão de um elemento em concreto protendido depende da determinação das resultantes de tração e compressão em diversas seções transversais deste elemento. A tensão, ou força, final nas armaduras de protensão é obtida considerando a tensão em um estado de referência, normalmente o de protensão efetiva ou o de descompressão na seção, e uma parcela correspondente à flexão do elemento desde o estado de referência até o estado limite último. Esta parcela de tensões devida à flexão do elemento protendido, desde o estado de referência até a configuração deformada na ruptura, é chamada de **incremento de tensão na armadura no estado limite último** (Δf_{ps}). O incremento de deformação no estado limite último ($\Delta \epsilon_{ps}$), correspondente ao incremento de tensão na armadura não aderente, pode ser observado na figura 2.16.

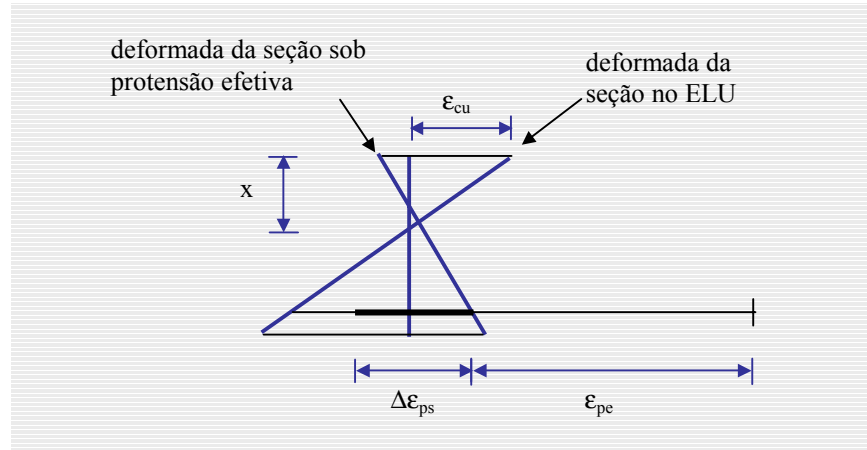


Figura 2.16 – Incremento de deformação ($\Delta\epsilon_{ps}$) na armadura não aderente no estado limite último

Quando a protensão é não aderente, como foi visto no item anterior, o incremento de tensão na armadura no estado limite último não pode ser obtido por compatibilidade de deformações. Inúmeras variáveis estão envolvidas, justamente porque não é mais possível reduzir-se a análise à verificação de uma seção transversal isolada, e a deformação da armadura em um ponto depende das curvaturas de todas as seções transversais. Por isso, os procedimentos de cálculo estabelecidos para elementos com protensão aderente não são mais válidos se a protensão é sem aderência.

Em virtude da elevada complexidade associada ao desenvolvimento de soluções analíticas fechadas, diversos métodos foram propostos ao longo das últimas décadas para a previsão da tensão na armadura não aderente. Estes métodos podem apresentar diferentes tipos de abordagem e níveis de precisão. Lee et al (1999) classificou as abordagens em empíricas ou teóricas. Na revisão apresentada a seguir, os métodos são classificados em empíricos, semi-empíricos ou numéricos. As características fundamentais destas três abordagens, assim como alguns dos principais trabalhos disponíveis utilizando cada uma delas, são apresentados a seguir.

2.2.1 Métodos Empíricos

Os métodos empíricos caracterizam-se pelo embasamento exclusivamente experimental das formulações desenvolvidas. Geralmente, os autores buscam identificar as variáveis mais

significativas para o comportamento dos elementos e determinar correlações entre estas variáveis e os incrementos de tensão nas armaduras não aderentes. Obviamente, a qualidade e a precisão das expressões propostas dependem da quantidade e da abrangência dos dados experimentais utilizados. Apresentam-se, a seguir, os métodos de Mattock et al (1971), Cooke et al (1981), Tao & Du (1985), Harajli & Kanj (1991), Chakrabarti (1995), ACI 318 (ACI, 1999) e de Naaman et al (2002), assim como as recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2003) e do CEB-FIP.

2.2.1.1 Mattock et Al (1971)

Baseando-se nos dados experimentais disponíveis na época, Mattock et al (1971) apresentaram a equação (2.11) para uma estimativa conservadora da tensão na armadura não aderente no estado limite último (f_{ps}). Pelo método, o incremento de tensão na armadura não aderente é função da resistência do concreto, da quantidade de armadura de protensão e das características da seção transversal. A influência da esbelteza à flexão (l/d_p) e da presença de armadura passiva complementar não foram consideradas.

$$f_{ps} = f_{pe} + \frac{1,4 f_c}{100} \frac{bd_p}{A_p} + 7 \quad [kN/cm^2] \quad (2.11)$$

2.2.1.2 Cooke et al (1981)

O método de Cooke et al (1981) fixa um incremento de tensão no estado limite último (Δf_{ps}) constante para a armadura não aderente, conforme equação (2.12), não importando as características do elemento protendido. O limite conservador de $10 kN/cm^2$ foi sugerido em função da pequena quantidade de dados experimentais sobre peças com protensão não aderente de elevada esbelteza à flexão, disponíveis na época. Além disso, pretendeu-se garantir a segurança no caso dos elementos sujeitos à instabilidade à flexão.

$$f_{ps} = f_{pe} + 10 \quad [kN/cm^2] \quad (2.12)$$

2.2.1.3 Tao & Du (1985)

A tensão na armadura não aderente é considerada linearmente dependente da taxa mecânica total de armadura (ω_e), como mostrado na figura 2.7. Nas vigas em que a armadura passiva aderente responde por pelo menos 30% da resultante de tração, com taxas ω_e de até 0,30, relações de esbeltez à flexão (l/d_p) igual a 20 e, ainda, considerando apenas cargas nos terços médios, a equação (2.13) pode ser utilizada com adequada precisão.

$$f_{ps} = f_{pe} + (78,6 - 192\omega_e) \quad [kN/cm^2] \quad (2.13)$$

2.2.1.4 Harajli & Kanj (1991)

Considerando um grande número de resultados experimentais, produzidos pelos autores e disponíveis na literatura, Harajli & Kanj (1991) determinaram os parâmetros a serem considerados na previsão da tensão última na armadura não aderente. Os dados experimentais incluíram vigas e lajes bi-apoiadas ou contínuas, com ou sem armadura passiva complementar e relações l/d_p entre 8 e 60. A tensão f_{ps} é calculada pela expressão (2.14), com valores não inferiores aos obtidos pela equação (2.15) e o coeficiente (γ_0) dado pela equação (2.16). O método considera, portanto, tanto o índice de esbeltez à flexão (l/d_p) quanto a taxa mecânica total de armadura (ω_e).

$$f_{ps} = f_{pe} + \gamma_0 f_{pu} (1 - 3\omega_e) \quad (2.14)$$

onde:

f_{pu} : tensão de ruptura do aço de protensão;
 γ_0 : coeficiente dado pela equação (2.16).

$$f_{ps} = f_{pe} + 0,3\gamma_0 f_{pu} \quad (2.15)$$

$$\gamma_0 = \frac{n_0}{n} \left(0,12 + \frac{2,5}{l/d_p} \right) \quad (2.16)$$

onde:

n : número de vãos pelos quais passa o cabo de protensão;
 n_0 : número de vãos carregados.

2.2.1.5 Chakrabarti (1995)

Através de um trabalho experimental abrangendo 33 vigas, e da avaliação dos resultados de Tao & Du (1985) e Harajli & Kanj (1991), o autor propôs a equação (2.17) para a estimativa da tensão última na armadura não aderente. Elementos de grande esbeltez ($l/d_p > 33$), sem qualquer armadura aderente adicional, têm o valor da tensão reduzido conforme a equação (2.22). Os incrementos máximos de tensão não devem ser maiores do que $41,4 \text{ kN/cm}^2$, para l/d_p menor ou igual a 33, ou $27,6 \text{ kN/cm}^2$ para valores superiores.

$$f_{ps} = \frac{f_{pe} + 6,895 + A}{(1 - B)} \quad (\text{kN} / \text{cm}^2) \quad (2.17)$$

onde:

A : parâmetro calculado pela equação (2.18);
 B : parâmetro dado pela expressão (2.20).

$$A = \frac{f_c}{100\rho_s} \frac{d_p}{d_s} \frac{41,4}{f_y} \left(1 + \frac{\rho_s}{0,025} \right) \leq 13,7 \text{ kN} / \text{cm}^2 \quad (2.18)$$

onde:

ρ_s : taxa de armadura passiva aderente, conforme a equação (2.19).

$$\rho_s = \frac{A_s}{bd_s} \quad (2.19)$$

$$B = \frac{rf_c}{100\rho_p f_{pe}} \leq 0,25 \quad (2.20)$$

onde:

r : parâmetro dependente da esbeltez à flexão : $r = 0,8$ para $l/d_p \geq 33$ ou $r = 1,0$ para $l/d_p < 33$;
 ρ_p : taxa de armadura de protensão, conforme a equação (2.21).

$$\rho_p = \frac{A_{ps}}{bd_p} \quad (2.21)$$

$$f_{ps}^{red} = f_{pe} + 0,65(f_{ps} - f_{pe}) \quad (2.22)$$

2.2.1.6 ACI 318 (1999)

O ACI 318 – *Building Code Requirements for Structural Concrete* (ACI, 1999) apresenta as equações (2.23) e (2.24) para o cálculo da tensão na armadura não aderente no estado limite último. A equação (2.23) origina-se do trabalho de Mattock et al (1971), sendo que em edições anteriores a formulação não incluía a esbeltez à flexão entre seus parâmetros. A partir de 1983, com o estudo de Mojtahedi & Gamble (1978), o método passou a considerar este efeito através da equação (2.24), para elementos com esbeltez à flexão superior a 35. O valor de 35 para l/d_p é considerado um limite usual entre a esbeltez de vigas e lajes. Observa-se que a contribuição das armaduras passivas não é considerada na formulação.

$$f_{ps} = f_{pe} + 6,89 + \frac{f_c}{100} \frac{bd_p}{A_{ps}} \quad [kN/cm^2] \quad (l/d_p) \leq 35 \quad (2.23)$$

$$f_{ps} = f_{pe} + 6,89 + \frac{f_c}{300} \frac{bd_p}{A_{ps}} \quad [kN/cm^2] \quad (l/d_p) > 35 \quad (2.24)$$

2.2.1.7 Naaman et al (2002)

Naaman et al (2002) compõem o grupo de estudo sobre a tensão na armadura não aderente do Comitê Conjunto 423 ACI-ASCE e recomendam novas formulações para o cálculo da tensão na armadura não aderente, que constarão em edições futuras da norma ACI-318. A equação empírica sugerida para um processo simplificado de cálculo é mostrada na expressão (2.25).

$$f_{ps} = f_{pe} + \frac{E_p}{1286,6} \frac{l_1}{l_2} \geq f_{pe} + \frac{E_p}{2573,1} \quad (2.25)$$

onde:

- l_1 : soma dos vãos carregados por onde passa o cabo não aderente;
- l_2 : comprimento do vão;
- E_p : módulo de elasticidade do aço de protensão.

2.2.1.8 Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) e Norma Brasileira NBR 6118 (ABNT, 2003)

O Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) determina, no item 6.1.3, que a armadura de protensão não aderente seja considerada como um elemento separado atuando sobre a estrutura de concreto armado. A tensão no cabo não aderente no estado limite último deve ser considerada igual à tensão efetiva de protensão (f_{pe}), a menos que uma análise apropriada, considerando a compatibilidade de deslocamentos, seja realizada.

A NBR 7197 (ABNT, 1989) para o projeto de estruturas em concreto protendidos, substituída e cancelada pela NBR 6118 (ABNT, 2003), estabelecia, apenas, que a protensão não aderente deveria ser completa. A nova norma NBR 6118 adota integralmente as equações do ACI 318 (1999), apresentadas nas expressões (2.23) e (2.24) desta tese. Constata-se, no entanto, que, segundo Naaman et al (2002), estas equações serão substituídas nas próximas edições do ACI 318 por formulações consideradas mais adequadas.

2.2.2 Métodos Semi-Empíricos

Os métodos semi-empíricos apresentam um desenvolvimento analítico mais consistente, associando a tensão na armadura à posição da linha neutra no estado limite último, além de

considerar a relação constitutiva exata do aço de protensão. Normalmente mais precisos, os métodos semi-empíricos caracterizam-se pela aplicação de processos iterativos para a determinação da posição da linha neutra em função do equilíbrio de forças nas seções. Por isso, os procedimentos semi-empíricos são mais compatíveis com os processos usuais de projeto e verificação de elementos em concreto armado e protendido. No entanto, todos os métodos semi-empíricos utilizam coeficientes ou parâmetros cujos valores são determinados a partir de equações empíricas. A seguir, apresentam-se os métodos de Tam & Pannell (1976), Harajli (1990), Naaman & Alkhairi (1991), Lee et al (1999) e Campos & Guimarães (2000).

2.2.2.1 Tam & Pannell (1976)

A formulação desenvolvida por Tam & Pannell (1976) caracteriza-se por uma análise do tipo compatibilidade de deformações, em que as curvaturas no estado limite último localizam-se em uma zona plastificada, desprezando-se a contribuição das regiões de comportamento linear. O efeito do atrito entre o cabo e o revestimento é desconsiderado, e a armadura passiva necessariamente atinge, no estado limite último, a deformação de escoamento.

A partir da seção transversal retangular da figura 2.17(a), da configuração deformada da figura 2.17(b) e das resultantes de compressão e tração no estado limite último, mostradas na figura 2.17(c), as condições de equilíbrio podem ser estabelecidas. A deformação no concreto ao nível da armadura não aderente no estado limite último, na região de formação da rótula plástica, pode ser calculada pela equação (2.26).

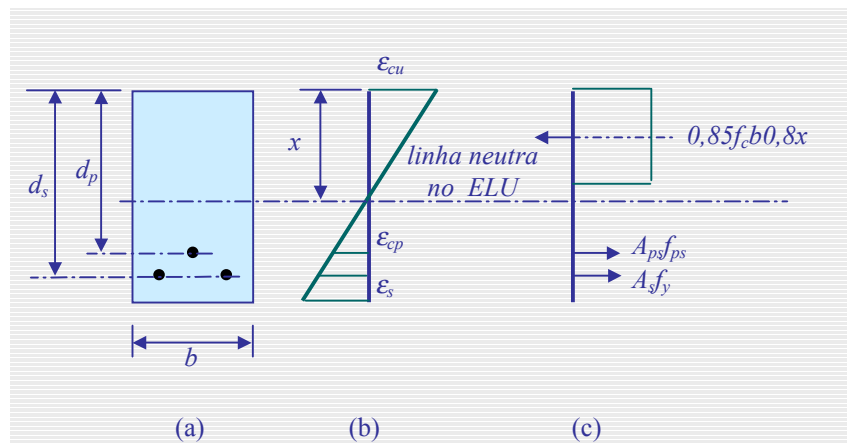


Figura 2.17 – Deformada da seção no estado limite último: a) geometria; b) deformações; c) resultantes (Tam & Pannell, 1976)

$$\varepsilon_{cp} = \left(\frac{d_p}{x} - 1 \right) \varepsilon_{cu} \quad (2.26)$$

onde:

- ε_{cp} : deformação no concreto ao nível da armadura;
- ε_{cu} : deformação de esmagamento do concreto;
- x : profundidade da linha neutra em relação à fibra superior.

A deformação na armadura não aderente é determinada considerando que toda a deformação do elemento concentra-se na região de plastificação e que nesta região todas as seções apresentam a mesma configuração deformada. Baseando-se nestas condições, a variação de comprimento e a deformação na armadura não aderente são dadas pelas equações (2.27) e (2.28), respectivamente.

$$\Delta = \varepsilon_{cp} l_p \quad (2.27)$$

onde:

- Δ : variação de comprimento na armadura não aderente no estado limite último;
- l_p : comprimento da região de deformações plásticas no estado limite último.

$$\varepsilon_{ps} = \varepsilon_{pe} + \frac{\Delta}{l} \quad (2.28)$$

onde:

- ε_{pe} : deformação na armadura não aderente relativa à protensão efetiva.

O parâmetro ψ , que relaciona o comprimento da zona plastificada e a profundidade da linha neutra, é apresentado na expressão (2.29). Se l_p é isolado nesta expressão, e a equação resultante, juntamente com a expressão (2.26), são inseridas na relação (2.27), obtém-se a expressão (2.30). Introduzindo-se esta nova expressão para Δ na equação (2.28), pode-se

apresentar a relação (2.31) para deformação na armadura. Isolando-se a variável (x) nesta equação, pode-se obter a expressão (2.32) para a profundidade da linha neutra.

$$\psi = \frac{l_p}{x} \quad (2.29)$$

onde:

ψ : relação entre a extensão da zona plastificada e profundidade da linha neutra no estado limite último.

$$\Delta = \psi \varepsilon_{cu} (d_p - x) \quad (2.30)$$

$$\varepsilon_{ps} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{cu} (d_p - x) \frac{\psi}{l} \quad (2.31)$$

$$x = \left(\varepsilon_{pe} - \varepsilon_{ps} + \frac{\psi}{l} \varepsilon_{cu} d_p \right) \frac{l}{\psi \varepsilon_{cu}} \quad (2.32)$$

A tensão na armadura não aderente no estado limite último depende da condição de equilíbrio de forças nas seções transversais da região plastificada, representada pela equação (2.33). Inserindo nesta equação a expressão (2.32), obtém-se a expressão (2.34) para a tensão última na armadura não aderente. A expressão (2.34) contém duas incógnitas, que são a deformação (ε_{ps}) e a tensão (f_{ps}) na armadura não aderente. A condição complementar é a própria relação constitutiva do aço de protensão. Estas expressões constituem um sistema de equações não lineares cuja solução consiste no ponto de interseção das duas curvas no espaço “tensão x deformação” do aço de protensão.

$$A_{ps} f_{ps} + A_s f_y - A'_s f_y = 0,85 f_c b_0,8x \quad (2.33)$$

onde:

A'_s : área de armadura passiva aderente de compressão.

$$f_{ps} = \frac{1}{A_{ps}} \left[0,85 f_c 0,8 \left(-\varepsilon_{ps} + \varepsilon_{pe} + \psi \varepsilon_{cu} \frac{d_p}{l} \right) \frac{1}{\psi \varepsilon_{cu}} + (A'_s - A_s) f_y \right] \quad (2.34)$$

O parâmetro ψ é obtido a partir de resultados experimentais para as tensões nas armaduras de protensão e do módulo de elasticidade do aço, utilizando a equação (2.31). Com base em resultados de oito vigas com protensão não aderente, submetidas a um carregamento concentrado no centro do vão, os autores sugeriram um valor de 10,5 para o parâmetro ψ .

2.2.2.2 Harajli (1990)

Harajli (1990) desenvolveu um método do tipo compatibilidade de deformações considerando o conceito do **comprimento equivalente da rótula plástica** (l_p), adotando a hipótese simplificadora de que todas as deformações no elemento concentram-se nas regiões de comportamento plástico do concreto. Além disso, o atrito é desprezado de maneira que a tensão na armadura não aderente no estado limite último é constante ao longo do cabo.

A figura 2.18 apresenta uma viga bi-apoiada submetida a duas cargas concentradas separadas por uma distância L_0 . Havendo apenas fissuras de flexão, a região de curvaturas máximas corresponderá à zona de momentos máximos, entre as cargas concentradas. No entanto, nos trechos entre as cargas e os apoios surgem fissuras inclinadas devido ao efeito do cisalhamento. Estas fissuras podem se desenvolver em regiões correspondentes à metade da altura útil da armadura de protensão, a partir das cargas concentradas em direção aos apoios. As seções posicionadas nesta faixa apresentam curvaturas que dependem da solicitação atuante na zona de momentos constantes, e não da solicitação local.

Através do conceito do comprimento equivalente de rótula plástica (l_p), é possível considerar os efeitos das deformações por corte na distribuição das curvaturas. Este parâmetro é função da forma de carregamento e da esbelteza à flexão (l/d_p), conforme a equação (2.35).

Introduzindo-se o fator f , que relaciona o comprimento do vão entre ancoragens e a distância entre duas cargas concentradas, conforme equação (2.36), na equação (2.35), obtém-se a expressão (2.37) para a relação l_p/l .

$$l_p = L_o + d_p + 0,1Z \quad (2.35)$$

onde:

- l_p : comprimento da região plastificada equivalente;
- L_o : distância entre as cargas;
- Z : distância entre as cargas concentradas e os apoios.

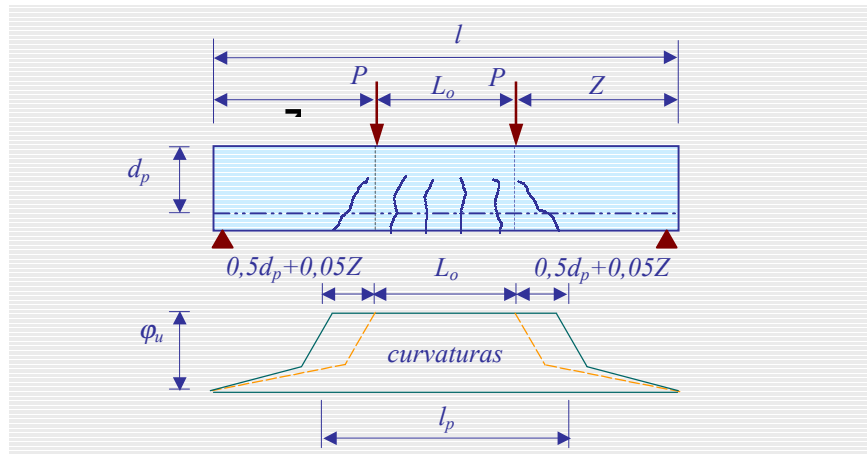


Figura 2.18 – Distribuição de curvaturas considerando os efeitos de corte (Harajli, 1990)

$$f = \frac{l}{L_o} \quad (2.36)$$

onde:

- f : fator relacionado com a forma do carregamento:
- $f = 3$ para cargas nos terços médios;
- $f = 6$ para carregamentos uniformemente distribuídos;
- $f = \infty$ para carga concentrada no centro do vão.

$$\frac{l_p}{l} = \frac{0,95}{f} + 0,05 + \frac{1}{(l/d_p)} \quad (2.37)$$

Partindo da relação (2.26) para a deformação no concreto ao nível da armadura, e considerando que todas as seções na região plastificada apresentem a configuração deformada mostrada na figura 2.17(b), o alongamento e o incremento de deformação na armadura não aderente no estado limite último podem ser calculados conforme as equações (2.38) e (2.39), respectivamente. Inserindo-se a equação (2.26) na expressão (2.38) e a relação resultante na equação (2.39), obtém-se uma relação entre o incremento de deformação na armadura não aderente e a profundidade da linha neutra, dada na equação (2.40).

$$\Delta l_{ps} = (\Delta \varepsilon_{cp} + \varepsilon_{ce}) l_p \quad (2.38)$$

onde:

ε_{ce} : deformação no concreto ao nível da armadura no estado correspondente à protensão efetiva;

Δl_{ps} : variação do comprimento da armadura de protensão não aderente.

$$\Delta \varepsilon_{ps} = \frac{\Delta l_{ps}}{l} \quad (2.39)$$

$$\Delta \varepsilon_{ps} = \varepsilon_{ce} \left(\frac{l_p}{l} \right) + \varepsilon_{cu} \left(\frac{d_p}{x} - 1 \right) \left(\frac{l_p}{l} \right) \quad (2.40)$$

Somando-se o incremento de deformação no estado limite último à deformação efetiva de protensão na armadura não aderente, e isolando-se a variável x na equação resultante, obtém-se uma expressão para a posição da linha neutra. Introduzindo-se a expressão para x na condição de equilíbrio apresentada na expressão (2.33), pode-se escrever a equação (2.41)

para a tensão na armadura não aderente no estado limite último. Têm-se, novamente, a deformação e a tensão na armadura como incógnitas, sendo necessária a consideração da relação constitutiva do aço de protensão para a formação de um sistema de equações não lineares.

$$f_{ps} = \frac{1}{A_{ps}} \frac{0,85 f_c b 0,8 (l_p / l) d_p \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{ps} - \varepsilon_{pe} - (l_p / l) (\varepsilon_{ce} - \varepsilon_{cu})} + \frac{(A'_s - A_s) f_y}{A_{ps}} \quad (2.41)$$

2.2.2.3 Naaman & Alkhairi (1991a)

Naaman & Alkhairi (1991a) e Naaman & Alkhairi (1991b) empregaram coeficientes de redução de aderência em uma abordagem do tipo compatibilidade de deformações na previsão da tensão na armadura não aderente. Para um elemento submetido à flexão no regime elástico não fissurado, o coeficiente de redução de aderência é definido pela equação (2.42).

$$\Omega = \frac{(\Delta \varepsilon_{psu})_m}{(\Delta \varepsilon_{psb})_m} = \frac{(\Delta \varepsilon_{psu})_{av}}{(\Delta \varepsilon_{cps})_m} \quad (2.42)$$

onde:

- Ω : coeficiente de redução de aderência;
- $(\Delta \varepsilon_{psb})_m$: incremento máximo de deformação na armadura aderente;
- $(\Delta \varepsilon_{cps})_m$: incremento máximo de deformação no concreto ao nível da armadura;
- $(\Delta \varepsilon_{psu})_m$: incremento máximo de deformação na armadura não aderente;
- $(\Delta \varepsilon_{psu})_{av}$: incremento médio de deformação na armadura não aderente.

Em vigas bi-apoiadas, com seção transversal constante, carregamento e perfil de protensão simétricos, o coeficiente de redução de aderência pode ser calculado conforme a equação (2.43). Quando $\Omega = 1$, a aderência é perfeita. Valores dos coeficientes de redução de aderência para elementos não fissurados são apresentados no quadro 2.1.

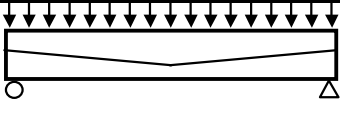
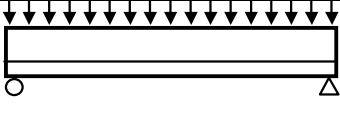
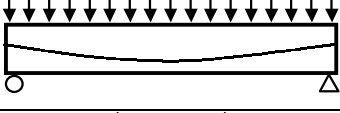
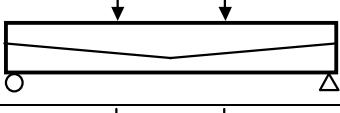
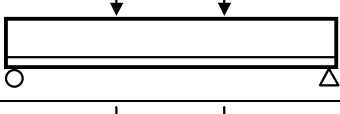
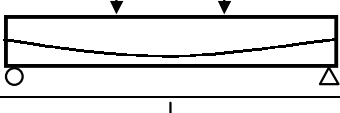
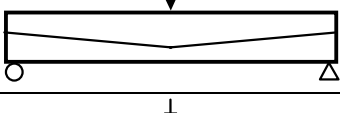
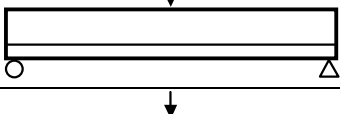
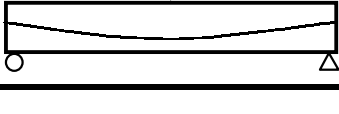
$$\Omega = \frac{2}{\Delta M_{\max} (e_p)_{\max}} l \int_0^{l/2} \Delta M(x) e_p(x) dx \quad (2.43)$$

onde:

ΔM_{max} : incremento máximo de momento;

$\Delta M(x)$: incremento de momento na seção de x ;

Quadro 2.1 – Coeficientes de redução de aderência (Naaman & Alkhairi, 1991)

Tipo de Carregamento e Perfil de Protensão	Ω
	$\Omega = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} \frac{e_s}{e_m}$
	$\Omega = \frac{2}{3}$
	$\Omega = \frac{8}{15} + \frac{2}{15} \frac{e_s}{e_m}$
	$\Omega = \frac{23}{54} + \frac{13}{54} \frac{e_s}{e_m}$
	$\Omega = \frac{2}{3}$
	$\Omega = \frac{44}{81} + \frac{10}{81} \frac{e_s}{e_m}$
	$\Omega = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{e_s}{e_m}$
	$\Omega = \frac{1}{2}$
	$\Omega = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \frac{e_s}{e_m}$

No caso de um elemento fissurado no regime elástico, utiliza-se o **coeficiente de redução de aderência no estado fissurado** (Ω_{cr}), assumindo-se a formação de uma única fissura na seção de momento máximo. Em vigas bi-apoiadas com carregamento e perfil simétricos, o coeficiente Ω_{cr} é dado pela expressão (2.44). Na maioria dos casos, o tamanho da região fissurada é pequeno em relação ao vão e a expressão (2.44) reduz-se à equação (2.45).

$$\Omega_{cr} = \Omega \frac{I_{cr}}{I_g} + \frac{2}{l} \left(1 - \frac{I_{cr}}{I_g} \right) \int_0^{l/2} \frac{\Delta M(x) e_p(x)}{\Delta M_{\max}(e_p)_{\max}} dx \quad (2.44)$$

onde:

- Ω_{cr} : coeficiente de redução de aderência no estado fissurado;
- I_{cr} : momento de inércia da seção fissurada;
- I_g : momento da inércia da seção íntegra;
- l_{cr} : abertura da fissura ou comprimento da região fissurada.

$$\Omega_{cr} = \Omega \frac{I_{cr}}{I_g} \quad (2.45)$$

Na verificação da capacidade resistente, utiliza-se o **coeficiente de redução de aderência no estado limite último** (Ω_u) em uma análise do tipo compatibilidade de deformações. A equação (2.46) é a relação entre a deformação na armadura não aderente no estado limite último e a profundidade da linha neutra, em função da deformada da seção. A equação (2.47) relaciona a tensão e a deformação na armadura não aderente, respeitando a condição de equilíbrio da seção. As soluções para a tensão e a deformação na armadura não aderente são determinadas através de um sistema de equações não lineares, que inclui a relação constitutiva do aço de protensão. As equações empíricas (2.48) e (2.49) são utilizadas para o cálculo do coeficiente de redução de aderência, e foram desenvolvidas com base em resultados experimentais de 143 vigas e lajes com relações l/d_p entre 7,8 e 45.

$$\varepsilon_{ps} = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{ce} \Omega_u + \varepsilon_{cu} \left(\frac{d_p}{x} - 1 \right) \Omega_u \quad (2.46)$$

onde:

- Ω_u : coeficiente de redução de aderência no estado limite último;

$$f_{ps} = \frac{1}{A_{ps}} \frac{0,85 f_c b 0,8 (\Omega_u) d_p \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{ps} - \varepsilon_{pe} - (\Omega_u) (\varepsilon_{ce} - \varepsilon_{cu})} + \frac{(A'_s - A_s) f_y}{A_{ps}} \quad (2.47)$$

$$\Omega_u = \frac{2,6}{(l/d_p)} \quad \text{para carga concentrada} \quad (2.48)$$

$$\Omega_u = \frac{5,4}{(l/d_p)} \quad \text{para cargas nos terços ou uniformes} \quad (2.49)$$

O comitê conjunto ACI-ASCE 423 (Naaman et al, 2002) recomenda a adoção deste método, juntamente com o processo simplificado, apresentado no item 2.2.1.7 desta tese, nas próximas edições da norma ACI 318. Segundo o comitê, esta formulação é bastante racional, sendo capaz avaliar corretamente a protensão parcial, é aplicável à protensão com materiais compósitos e incorpora os fatores de esbeltez à flexão e tipo de carregamento.

2.2.2.4 Lee et al (1999)

A método semi-empírico de Lee et al (1999) foi obtido a partir de uma análise do tipo compatibilidade de deformações, utilizando o conceito do comprimento equivalente da rótula plástica de Harajli (1990), e de um estudo de regressão sobre dados experimentais. A equação final não envolve procedimentos iterativos, nem vincula a tensão ao estado de equilíbrio da seção. A abordagem do tipo compatibilidade de deformações foi utilizada para a definição das variáveis envolvidas e da maneira como elas afetam o desempenho.

Considerando uma relação constitutiva linear para o aço de protensão, a expressão para a tensão na armadura não aderente no estado limite último, obtida através de uma análise do tipo compatibilidade de deformações, na qual foi aplicado o equilíbrio de momentos fletores, é mostrada na equação (2.50). Os coeficientes α_p e α_s são apresentados nas expressões (2.51) e (2.52), e a altura útil média das armaduras (d_e) na equação (2.53).

$$f_{ps} = \frac{1}{\alpha_p A_{ps}} \frac{0,85 f_c b 0,8 \epsilon_{cu} E_p (l_p / l) d_p}{f_{ps} - f_{pe} + \epsilon_{cu} E_p (l_p / l)} + \frac{(A'_s - \alpha_s A_s) f_y}{\alpha_p A_{ps}} \quad (2.50)$$

onde:

- α_p : coeficiente dado pela equação (2.51);
- α_s : coeficiente dado pela equação (2.52).

$$\alpha_p = \frac{d_p - 0,4x}{d_e - 0,4x} \quad (2.51)$$

onde:

d_e : altura útil média das armaduras, conforme a expressão (2.53).

$$\alpha_s = \frac{d_s - 0,4x}{d_e - 0,4x} \quad (2.52)$$

$$d_e = \frac{A_{ps} f_{ps} d_p + A_s f_y d_s}{A_{ps} f_{ps} + A_s f_y} \quad (2.53)$$

Para o desenvolvimento de uma equação para o cálculo da tensão na armadura não aderente, a relação (2.50) foi manipulada para o estabelecimento de uma função quadrática, cuja solução aproximada contendo coeficientes empíricos é mostrada na expressão (2.54). A partir desta relação, os coeficientes k_1 , k_2 , k_3 e k_4 foram determinados por meio de uma análise de regressão utilizando 167 resultados experimentais publicados entre 1956 e 1997. Já incluindo os valores dos coeficientes, a equação de Lee et al (1999) para a análise de elementos com protensão não aderente é apresentada na expressão (2.55).

$$f_{ps} = k_1 + k_2 f_{pe} + k_3 \frac{A'_s - A_s}{A_{ps}} f_y + k_4 \sqrt{\frac{d_p}{d_s} \frac{f_c}{\rho_p} \left[\frac{1}{f} + \frac{d_p}{l} \right]} \quad (2.54)$$

onde:

k_1 , k_2 , k_3 e k_4 : coeficientes arbitrários.

$$f_{ps} = 20,68 + 0,75 f_{pe} + \frac{1}{5,7 \cdot 10^{-5}} \frac{(A'_s - A_s) f_y}{A_{ps}} + 0,0014 \sqrt{\frac{d_p}{d_s} \frac{f_c}{\rho_p} \left[\frac{1}{f} + \frac{d_p}{l} \right]} \left[kN/cm^2 \right] \quad (2.55)$$

2.2.2.5 Campos & Guimarães (2000)

Campos & Guimarães (2000) desenvolveram um **método rígido-plástico** para a análise de elementos com protensão não aderente, com cabos sintéticos ou de aço, internos ou externos. Na ruptura, o elemento protendido apresenta uma rótula plástica, situada na seção de momento máximo, que divide a estrutura em dois tramos rígidos. Considera-se que as curvaturas e deformações concentram-se na rótula plástica, desprezando-se a contribuição das demais seções, que continuam trabalhando no regime elástico. A armadura de protensão não aderente é dividida em segmentos retos, acompanhando o traçado do perfil. Nos pontos de união entre segmentos de cabo, onde geralmente há mudança na direção do seu eixo, todas as forças de atrito existentes nos trechos adjacentes são concentradas. Inicialmente, o método admite que o incremento de comprimento concentra-se no segmento de cabo localizado na rótula plástica. A tensão na armadura não aderente no estado limite último é obtida após a consideração dos deslizamentos, em função das forças de atrito.

Com estas hipóteses, o alongamento do segmento de cabo posicionado na rótula plástica, em função do giro na articulação, desconsiderando os deslizamentos, é dado pela equação (2.56), de acordo com a figura 2.19. A partir do alongamento, a força final no segmento de cabo, antes da consideração dos deslizamentos, pode ser calculada conforme a equação (2.57). A força nos demais elementos de cabo, situados nos tramos rígidos, permanece igual a de protensão efetiva.

$$\Delta L_r^f = 2(d_p - x)\text{sen}\theta + L_r^0 \cos\theta \quad (2.56)$$

onde:

- ΔL_r^f : alongamento do segmento de cabo na rótula plástica, considerando a concentração dos giros, sem deslizamentos;
- θ : ângulo de rotação da rótula plástica;
- L_r^0 : comprimento do segmento de cabo na rótula plástica sob a força efetiva de protensão.

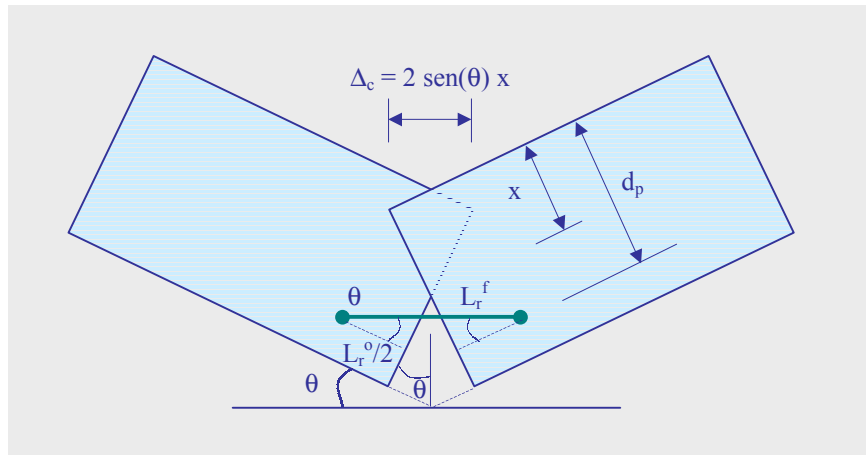


Figura 2.19 – Formação da rótula plástica no estado limite último (Campos & Guimarães, 2000)

$$F_r^0 = F_r^{prot} + \frac{\Delta L_r^f A_p E_p}{L_r^0} \quad (2.57)$$

onde:

F_r^0 : força final no segmento posicionado na rótula plástica, antes dos deslizamentos;

F_r^{prot} : força efetiva de protensão no segmento posicionado na rótula.

Com os deslizamentos, as deformações em todos os segmentos de cabo modificam-se até que o equilíbrio de forças seja estabelecido. Esta nova configuração depende do ângulo entre segmentos adjacentes e do atrito, concentrados nos pontos de união dos segmentos. Os deslizamentos tendem a ocorrer na direção da maior força e o equilíbrio em torno de cada ponto de união é obtido quando as forças em elementos de cabo adjacentes satisfizerem a condição da expressão (2.58). Os fatores de atrito nos pontos de união são calculados pela equação (2.59).

$$F_i = F_{i+1} \lambda_i \quad (2.58)$$

onde:

λ_i : fator de atrito na união ou desvio, conforme as expressões (2.59).

$$\begin{aligned} \lambda_{i=} e^{-\mu(\theta+\phi)} & \text{ para } F_{i+1} \geq F_i \\ \lambda_{i=} e^{\mu(\theta+\phi)} & \text{ para } F_{i+1} < F_i \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde:

μ : coeficiente de atrito;
 ϕ : ângulo entre segmentos adjacentes.

Através da relação de equilíbrio (2.58), em função do número de elementos de cabo, pode-se montar um sistema com $(n-1)$ equações para (n) incógnitas. A condição complementar para o sistema é o comprimento do cabo, que permanece igual após os deslizamentos, conforme a equação (2.60). As forças nos segmentos de cabo podem ser determinadas a partir da força na extremidade, como na equação (2.61). Substituindo-se esta expressão na equação (2.58), pode-se obter a relação (2.62) para a força no segmento de extremidade. A partir desta, a força no segmento na rótula plástica pode ser determinada pela equação (2.63).

$$\sum_{i=1}^n F_i^0 \frac{L_i^0}{A_p E_p} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{L_i^0}{A_p E_p} \quad (2.60)$$

$$F_i = F_n \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j \quad (2.61)$$

onde:

F_n : força no segmento de extremidade;

$$F_n = \frac{\sum_{i=1}^n F_i^0 f_i^0}{\sum_{i=1}^n f_i^0 \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j} \quad (2.62)$$

$$F_r = \frac{\sum_{i=1}^n F_i^0 f_i^0}{\sum_{i=1}^n f_i^0 \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j} \prod_{j=r}^{n-1} \lambda_j \quad (2.63)$$

A solução para a tensão na armadura não aderente no estado limite último depende da profundidade da linha neutra e do ângulo de rotação da rótula plástica na ruptura. Campos (1999) realizou um estudo paramétrico a fim de determinar expressões empíricas para o cálculo destes parâmetros, utilizando um modelo numérico em elementos finitos capaz de representar o comportamento da armadura não aderente. As equações (2.64) e (2.65) apresentam expressões para x em função da altura útil e da taxa mecânica total de armadura, para vigas com seções retangulares e I ou T, respectivamente. O ângulo de rotação pode ser calculado, em função da relação (x/d_p) , através das expressões (2.66) a (2.69), para relações (l/d_p) de 34, 27, 20 e 13, respectivamente.

$$\left(\frac{x}{d_p}\right) = 1,28482\omega_t + 0,07641 \quad (2.64)$$

$$\left(\frac{x}{d_p}\right) = 0,109741e^{\omega_t} \quad (2.65)$$

$$\theta = -0,00753 \ln\left(\frac{x}{d_p}\right) + 0,02453 \quad (2.66)$$

$$\theta = -0,01064 \ln\left(\frac{x}{d_p}\right) + 0,017527 \quad (2.67)$$

$$\theta = -0,01166 \ln\left(\frac{x}{d_p}\right) + 0,012157 \quad (2.68)$$

$$\theta = -0,00919 \ln\left(\frac{x}{d_p}\right) + 0,007114 \quad (2.69)$$

O método rígido plástico pode ser aplicado utilizando-se as equações (2.64) ou (2.65) para a profundidade da linha neutra. A partir de x/d_p , calcula-se o giro na rótula plástica por uma das equações (2.66) a (2.69). Com o giro, determinam-se os incrementos de comprimento e força no segmento de cabo na rótula plástica, antes dos deslizamentos, pelas equações (2.56) e (2.57). A força final no cabo é calculada pelas equações (2.58) a (2.63).

Este método pode, também, ser utilizado determinando-se a posição da linha neutra em função da condição de equilíbrio de forças nas seções transversais, através de um procedimento iterativo. Para cada tentativa de (x) , determina-se o ângulo de rotação através das equações (2.66) a (2.69) e a força na região da rótula plástica. Caso esta força não proporcione o equilíbrio, novos valores para a profundidade da linha neutra são verificados.

2.2.3 Métodos Numéricos

Os métodos numéricos constituem-se nas ferramentas de maior precisão para o estudo do comportamento das vigas e lajes com protensão não aderente. Eles são capazes de melhor representar o comportamento dos elementos, considerando de maneira analiticamente consistente as principais variáveis envolvidas. Os métodos numéricos são utilizados para o projeto e a análise dos elementos com protensão não aderente, mas, também, para o desenvolvimento de equações empíricas e semi-empíricas para o cálculo manual. Em sua maioria, eles utilizam o método dos elementos finitos e dedicam especial consideração à forma como os cabos de protensão são modelados. Existem, também, métodos iterativos que determinam o equilíbrio das seções transversais, considerando o comportamento não linear dos materiais. Alguns dos principais métodos numéricos disponíveis na literatura são apresentados a seguir.

2.2.3.1 El-Mezaini & Çitiptiöglu (1991)

O trabalho de El-Mezaini & Çitiptiöglu (1991) apresenta um modelo numérico em elementos finitos para a análise linear de elementos de placa utilizando uma abordagem discreta para as armaduras ativas ou passivas, com diferentes graus de aderência. As armaduras são modeladas independentemente da malha de concreto através da utilização de elementos

isoparamétricos com nós móveis. A malha de concreto é estabelecida ignorando-se a disposição da armadura. Com a definição do perfil do cabo, os pontos de interseção com os lados dos elementos de concreto são identificados, e os nós laterais centrais transladados. O processo de translação dos nós pode ser observado na figura 2.20.

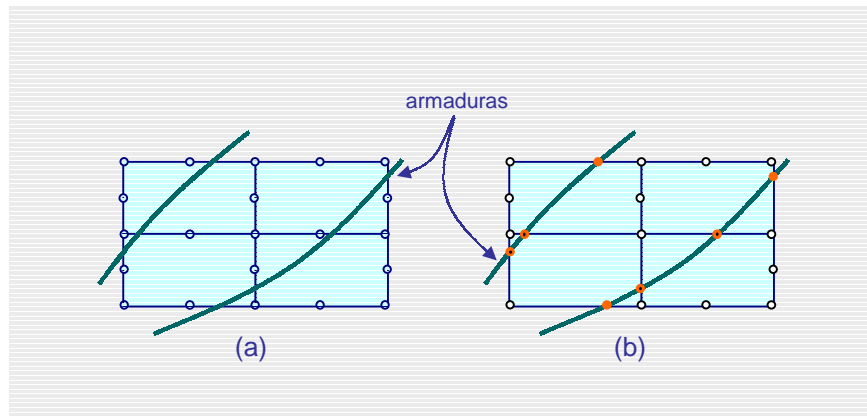


Figura 2.20 – Translação dos nós: (a) posição original; (b) nós na interseção com os cabos (El-Mezaini & Çitiptioglu, 1991)

A transformação para uma distribuição de nós não uniforme pode causar distorções inaceitáveis na formulação dos elementos isoparamétricos. Estas distorções são evitadas utilizando-se elementos originais cujos nós laterais estão posicionados proporcionalmente à posição após a translação. Isto requer alterações nas funções de forma dos elementos isoparamétricos e de suas derivadas. As alterações necessárias são mostradas em El-Mezaini & Çitiptioglu (1991) para elementos finitos isoparamétricos uni, bi e tridimensionais.

Após a translação dos nós laterais, o problema é interpretado como o de cabos metálicos presos em pinos fixos, correspondentes aos nós dos elementos de concreto. Se a malha é suficientemente refinada, cada segmento de aço pode ser considerado como um elemento de barra, cujos nós coincidem com os de concreto. Os nós da malha de concreto podem mover-se em qualquer direção, levando consigo os da armadura, que possuem um grau de liberdade adicional com relação à malha de concreto, e podem deslizar ao longo do perfil de protensão. Em cada nó da armadura, um sistema de coordenadas é definido com o eixo das abscissas paralelo à tangente do perfil de protensão no ponto. Nesta direção, os graus de liberdade do concreto e da armadura são independentes, enquanto na direção perpendicular os graus de liberdade são acoplados. O movimento relativo ao longo do perfil constitui um novo grau de liberdade da estrutura, o de deslizamento. A figura 2.21 mostra a discretização da armadura.

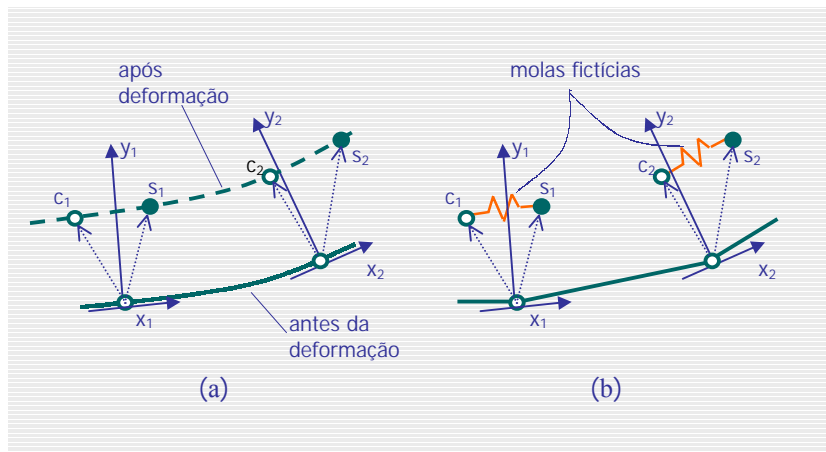


Figura 2.21– Discretização da armadura: (a) modelo real; (b) modelo simplificado (El-Mezaini & Çitiptiöglu, 1991)

Com esta abordagem, é possível modelar qualquer grau de aderência. No caso de aderência perfeita, considera-se total acoplamento entre os nós de concreto e aço, com a coincidência dos graus de liberdade e a contribuição dos elementos de aço somada diretamente na matriz de rigidez global. No caso de armaduras não aderentes, as matrizes de rigidez dos elementos de concreto e aço são calculadas separadamente. Na matriz de rigidez global, a contribuição dos elementos de aço na direção perpendicular ao perfil é somada aos graus de liberdade de concreto, enquanto na direção do perfil os graus de liberdade não acoplados formam novas equações. Para a aderência parcial, elementos unidimensionais especiais de mola são utilizados, unindo os nós de concreto e aço na direção do perfil. Com as molas, pode-se empregar modelos lineares ou não lineares de aderência, ou representar o efeito do atrito.

2.2.3.2 Alkhairi & Naaman (1993)

Alkhairi & Naaman (1993) apresentam um modelo numérico de análise não linear para a determinação da tensão na armadura não aderente a partir da configuração deformada dos elementos protendidos, abrangendo todas as etapas de comportamento dos materiais. Os perfis de protensão e carregamentos devem ser simétricos, sendo permitidas armaduras passivas aderentes de tração e compressão, e armaduras protendidas aderentes e não aderentes. A influência da esbelteza à flexão é considerada através de um modelo de treliça.

A análise desenvolve-se em incrementos de carga. Em cada etapa, o incremento de tensão na armadura não aderente é determinado iterativamente, sendo que, no início da primeira

tentativa, um incremento de tensão é arbitrado. A partir do valor da tensão na armadura não aderente, buscam-se as configurações deformadas das seções ao longo de todo o elemento, em função do carregamento aplicado. As curvaturas são calculadas através de um processo iterativo buscando as deformações no topo das seções de concreto que garantam o equilíbrio das forças e momentos fletores, incluindo a parcela de momentos devidos à fissuração por tensões diagonais.

Com a deformada da viga, determina-se o alongamento da fibra de concreto ao nível da armadura não aderente, utilizando um processo de integração numérica das deformações no concreto. Considerando-se a compatibilidade de deslocamentos, este alongamento é utilizado para o cálculo dos incrementos de tensão e deformação na armadura não aderente. O valor do incremento de tensão calculado é comparado ao estabelecido no início da iteração e caso a diferença entre estes valores seja maior do que 5%, uma nova iteração é realizada.

2.2.3.3 Figueiras & Póvoas (1994)

Figueiras & Póvoas (1994) desenvolveram um modelo numérico utilizando elementos finitos isoparamétricos de placas para concreto. As armaduras de protensão são modeladas automaticamente, de acordo com a malha da estrutura, através de elementos curvos unidimensionais. A formulação da armadura é do tipo incorporada, modificada para a eliminação de qualquer restrição do perfil dos cabos em relação à malha da estrutura. O modelo considera as não linearidades física e geométrica.

Para a determinação das deformações na armadura protendida não aderente, utiliza-se uma abordagem não local, em que é respeitada a compatibilidade de deslocamentos entre os cabos e a estrutura. Segundo esta abordagem, a relação de equilíbrio para um segmento de cabo é dada pela equação diferencial (2.70), em que o sinal do segundo membro depende do sentido do movimento relativo entre a armadura e o concreto, ao longo do perfil de protensão. O incremento de deformação na armadura não aderente relaciona-se com o incremento de força de protensão por meio da relação (2.71).

$$\frac{dP}{ds} = \pm\mu\chi P(s) \quad (2.70)$$

onde:

- P : força de protensão em um segmento de armadura;
- χ : curvatura do segmento de cabo;
- s : coordenada curvilínea que descreve o perfil de protensão.

$$\Delta P = A_p E_p \Delta \varepsilon_p \quad (2.71)$$

A partir da substituição da expressão (2.71) na (2.70), obtém-se a equação diferencial (2.72), cuja solução é apresentada na expressão (2.73). A constante (C) corresponde à deformação média no concreto ao longo do perfil de protensão, conforme a equação (2.74). O sinal do expoente da expressão de $g(s)$, mostrada na equação (2.73), depende do escorregamento relativo entre a armadura e o concreto, calculado conforme a expressão (2.75).

$$\frac{d(E_p \Delta \varepsilon_p)}{ds} = \pm \mu \chi (E_p \Delta \varepsilon_p) \quad (2.72)$$

$$\frac{d\Delta \varepsilon_p(s)}{ds} = \frac{C}{E_p(s)} e^{\int_{s^A}^s \pm \mu \chi ds} = Cg(s) \quad (2.73)$$

onde:

- C : constante calculada a partir das condições de contorno da armadura, ou seja, variação de comprimento da fibra de concreto posicionada ao nível do perfil de protensão, conforme a equação (2.74);
- $g(s)$: função de forma que descreve a variação do incremento de deslocamento ao longo do cabo.

$$C = \frac{\int_{l_p} \Delta \varepsilon_{c,p} ds}{\int_{l_p} ds} = \Delta \varepsilon_{p,m} \quad (2.74)$$

onde:

- $\Delta \varepsilon_{p,m}$: incremento médio de deformação no cabo de protensão.

$$u_r(s) = u_p(s) - u_{c,p}(s) \quad (2.75)$$

onde:

- $u_r(s)$: deslocamento relativo entre concreto e armadura ao nível do perfil;
- $u_p(s)$: incremento médio de deformação no cabo de protensão;
- $u_{c,p}(s)$: deslocamento do concreto na seção s ao nível da armadura de protensão.

2.2.3.4 Moon & Burns (1997a)

Um modelo numérico em elementos finitos foi implementado, utilizando a formulação do elemento finito do tipo híbrido para estruturas de pórticos planos. Os autores apresentam um método para a determinação das deformações na armadura não aderente ao longo de toda a história de carregamento. Este método respeita a compatibilidade de deslocamentos e considera o efeito do atrito entre a armadura e a bainha. Tanto o elemento finito híbrido como o método de Moon & Burns (1997a) para as deformações nas armaduras não aderentes são utilizados neste trabalho de doutorado, sendo descritos no **Capítulo 3** desta tese.

2.3 Aplicações dos Métodos Empíricos e Semi-Empíricos

Apresentam-se a seguir, os resultados do trabalho de aplicação dos métodos empíricos e semi-empíricos na previsão do desempenho de protótipos experimentais disponíveis na literatura. O trabalho de aplicação foi realizado através de cálculo manual ou por planilha eletrônica, visando observar aspectos práticos e de desempenho em relação às formulações empregadas. Foram selecionados, a partir de diversas publicações, os resultados de 90 vigas e lajes bi-apoiadas com seções transversais retangulares, constituindo um conjunto homogêneo de dados. Alguns métodos foram aplicados a um número menor de protótipos, como são os casos das formulações de Tao & Du (1985) e Campos & Guimarães (2000).

Os resultados são apresentados na forma de gráficos de dispersão comparando valores de tensão última na armadura não aderente previstos (f_{ps}^{calc}) e obtidos experimentalmente (f_{ps}^{exp}). Também são apresentados, em tabelas, parâmetros estatísticos correspondentes às variações da razão entre os resultados previstos e experimentais ($f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp}$) para cada um dos métodos.

Gráficos e dados estatísticos sobre a influência de algumas variáveis, como o tipo de carregamento, presença ou não de armadura passiva e a esbelteza à flexão (l/d_p), também são apresentados.

2.3.1 Aplicação dos Métodos Empíricos

A figura 2.22 e a tabela 2.1 apresentam os resultados obtidos com a expressão (2.11) de Mattock et al (1971) para as 90 vigas consideradas. A figura 2.22 mostra um comportamento geral conservador, com a maioria dos pontos posicionados abaixo da linha de correlação perfeita. Isto se reflete no valor da média da relação ($f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp}$) da tabela 2.1, onde se observa, também, uma maior precisão para os elementos com carregamento concentrado. O tipo de protensão parece não influenciar de maneira significativa a precisão dos resultados.

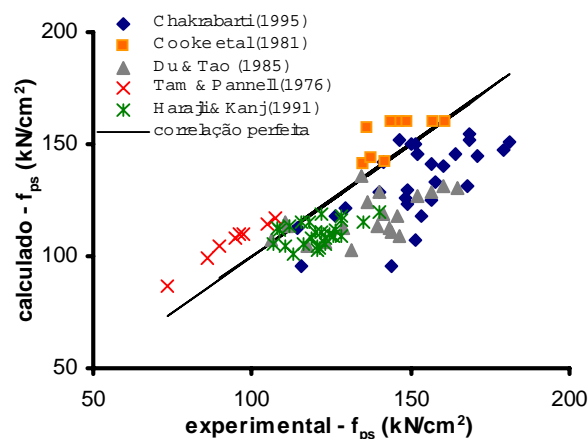


Figura 2.22 – Comparação entre resultados numéricos e experimentais para o método de Mattock et al (1971)

Tabela 2.1 – Parâmetros estatísticos da relação ($f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp}$) da aplicação do método de Mattock et al (1971)

	média	desvio padrão	coeficiente e de variação	tamanho do grupo
geral	0,93	0,11	0,12	90
protensão parcial	0,92	0,12	0,13	62
protensão total	0,95	0,10	0,10	28
carregamento concentrado	1,00	0,12	0,12	69
cargas nos terços médios	0,91	0,10	0,11	21

As figuras 2.23 e 2.24 e a tabela 2.2 apresentam os principais resultados obtidos com a equação (2.12) de Cooke et al (1981). Observa-se claramente o caráter conservador, uma vez que praticamente não há valores calculados superiores aos experimentais. A figura 2.24 e a tabela 2.2 mostram uma maior proximidade entre resultados experimentais e calculados para carregamentos concentrados. Quanto ao tipo de protensão, parcial ou total, a presença ou não de armadura passiva reflete-se principalmente em uma maior dispersão para a protensão total, como verificado na tabela 2.2. Na tabela, observa-se, também, uma tendência de maior precisão para relações l/d_p maiores do que 27,5.

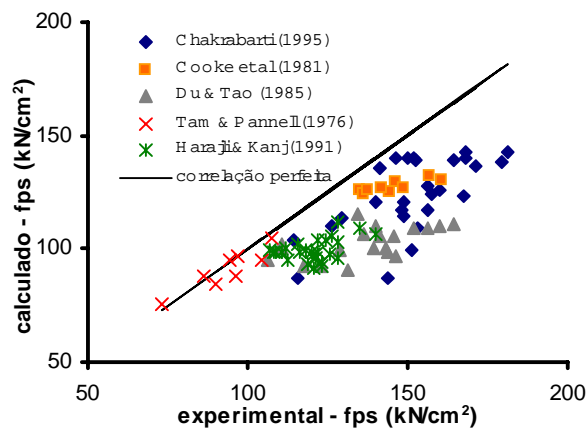


Figura 2.23 – Resultados obtidos com a equação de Cooke et al (1981)

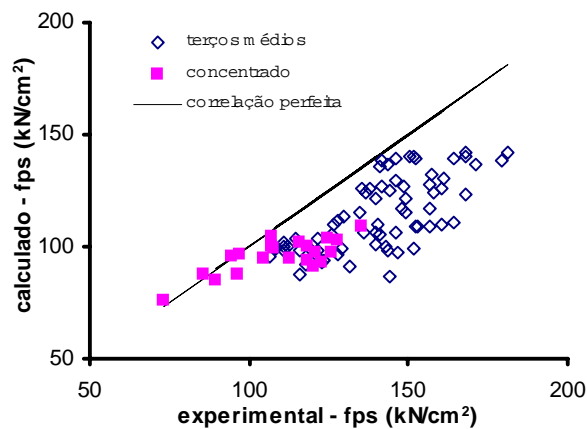


Figura 2.24 – Resultados da aplicação da equação de Cooke et al (1981), em função do tipo de carregamento

Tabela 2.2 – Parâmetros estatísticos da relação ($f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp}$) para a aplicação do método de Cooke et al (1981)

	Média	Desvio padrão	coeficiente de variação	tamanho do grupo
geral	0,83	0,09	0,11	90
protensão parcial	0,85	0,06	0,07	62
protensão total	0,82	0,10	0,12	28
carregamento concentrado	0,88	0,09	0,10	21
carga nos terços médios	0,81	0,09	0,11	69
l/d_p : 8 – 13	0,82	0,06	0,07	16
l/d_p : 18 – 23,5	0,79	0,08	0,10	53
l/d_p : 27,5 – 34,5	0,91	0,07	0,07	10
l/d_p : 38,8 – 43	0,93	0,08	0,09	8
l/d_p : 55,2	0,91	0,06	0,06	3

Os resultados obtidos com a fórmula de Tao & Du (1985) são apresentados na figura 2.25 e na tabela 2.3. Esta aplicação foi restrita aos elementos com armadura passiva complementar, taxa mecânica total de armadura (ω_e) com valores inferiores a 0,30 e esbelteza a flexão em entre 19,1 e 23,5. Os resultados mostrados na figura 2.25 demonstram uma boa precisão, o que se constata também na tabela 2.3. O desempenho inferior para elementos com carregamento concentrado pode ser atribuído ao reduzido número de resultados disponíveis, de apenas quatro vigas, e ao fato de que a equação empírica de Tao & Du (1985) ter sido desenvolvida a partir da observação do comportamento de vigas com cargas nos terços médios.

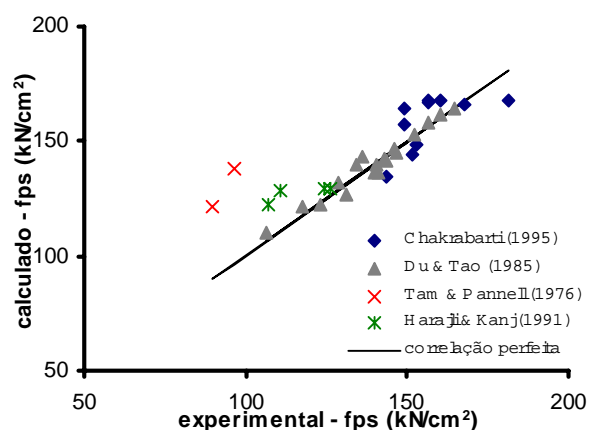


Figura 2.25 – Resultados para a equação de Tao & Du (1985)

Tabela 2.3 – Parâmetros estatísticos da relação ($f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp}$) para a aplicação da equação Tao & Du (1985)

	média	desvio padrão	coeficiente de variação	tamanho do grupo
geral	1,03	0,10	0,10	35
carregamento concentrado	1,22	0,18	0,15	4
carga nos terços médios	1,00	0,05	0,05	31

Os resultados da aplicação da equação de Harajli & Kanj (1991) são mostrados na figura 2.26 e na tabela 2.4. O desempenho é conservador, com a grande maioria dos pontos do gráfico situados abaixo da linha de correlação perfeita e uma reduzida média da relação ($f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp}$). Verifica-se, também, um melhor desempenho para cargas concentradas e para protensão total.

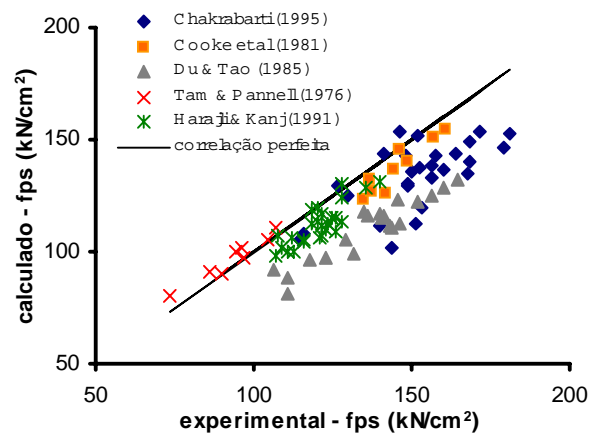


Figura 2.26 – Aplicação do método de Harajli & Kanj (1991)

Tabela 2.4 – Resultados para o método de Harajli & Kanj (1991)

	média	desvio padrão	coeficiente de variação	tamanho do grupo
Geral	0,89	0,08	0,09	90
protensão parcial	0,87	0,08	0,10	62
protensão total	0,94	0,05	0,05	28
carregamento concentrado	0,95	0,07	0,07	21
cargas nos terços médios	0,87	0,08	0,09	69

O desempenho do método de Chakrabarti (1985) é mostrado nas figuras 2.27 a 2.29 e na tabela 2.5. Observa-se uma tendência conservadora do método, com poucos pontos acima da

linha de correlação perfeita na figura 2.27. Na figura 2.28 e na tabela 2.5 observam-se melhores resultados para elementos com carregamentos concentrados. A figura 2.29 indica resultados mais precisos para os casos de protensão total, o que se reflete na tabela 2.5 pela média mais próxima da unidade e por uma menor dispersão. A aplicação das equações de Chakrabarti (1985) demonstrou, também, ser um procedimento mais complexo que os demais métodos empíricos, não resultando, no entanto, em uma maior precisão.

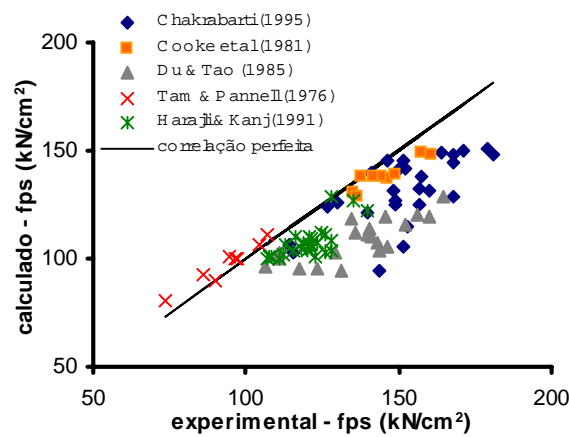


Figura 2.27 – Resultados da aplicação do método de Chakrabarti (1985)

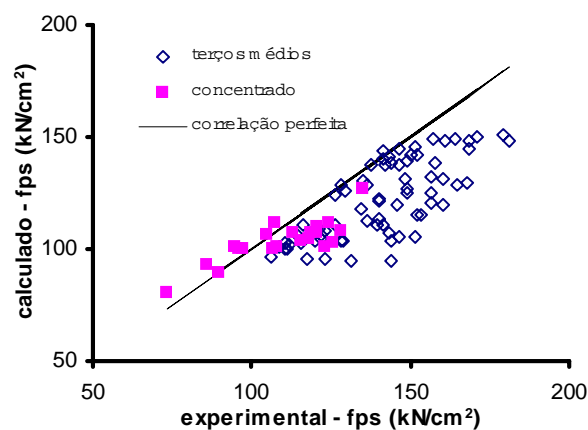


Figura 2.28 – Resultados da aplicação do método de Chakrabarti (1985) em função do tipo de carregamento

Tabela 2.5 – Parâmetros estatísticos da relação ($f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp}$) da aplicação do método de Chakrabarti (1995)

	média	desvio padrão	coeficiente de variação	tamanho do grupo
geral	0,89	0,09	0,10	90
protensão parcial	0,87	0,10	0,11	62
protensão total	0,94	0,04	0,05	28
carregamento concentrado	0,95	0,09	0,09	69
cargas nos terços médios	0,87	0,08	0,10	21

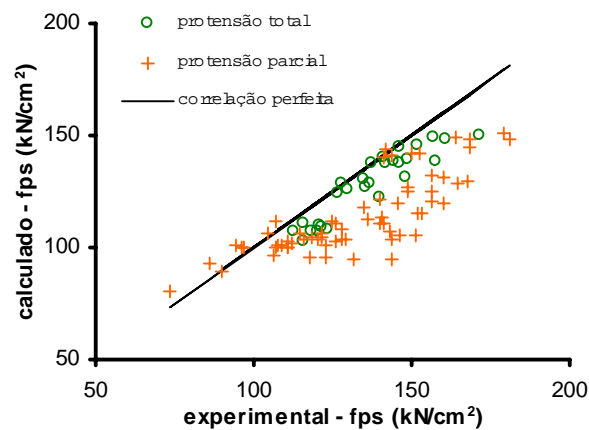


Figura 2.29 – Resultados da aplicação do método de Chakrabarti (1985) em função do tipo de protensão

Os resultados obtidos com o método do ACI 318 (ACI, 1999) são apresentados na tabela 2.6 e nas figuras 2.30 a 2.32. Observa-se na figura 2.30 e na tabela, que o método é conservador, de maneira apropriada a uma abordagem de norma. Na figura 2.31 e tabela 2.6, percebe-se que as equações (2.23) e (2.24) são capazes de apresentar desempenhos semelhantes para as duas faixas de esbeltez à flexão consideradas.

Tabela 2.6 – Parâmetros da relação ($f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp}$) para a aplicação do método do ACI 318 (1999)

	média	desvio padrão	coeficiente de variação	tamanho do grupo
Geral	0,91	0,08	0,09	90
protensão parcial	0,91	0,09	0,10	62
protensão total	0,91	0,06	0,07	28
carregamento concentrado	0,97	0,07	0,08	69
cargas nos terços médios	0,89	0,08	0,09	21
$l/d_p > 35$	0,91	0,08	0,09	14
$l/d_p < 35$	0,93	0,07	0,08	76

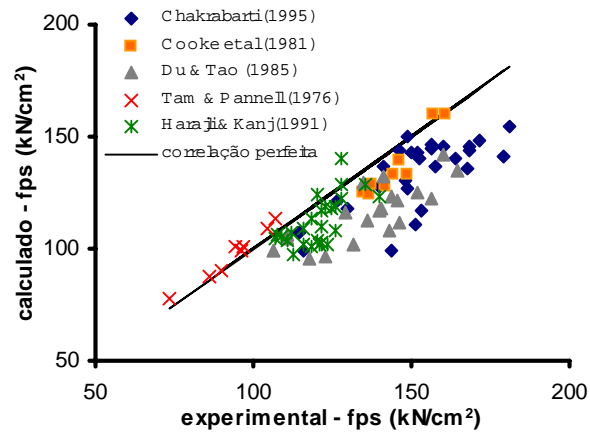


Figura 2.30 – Resultados para a aplicação do ACI 318 (1999)

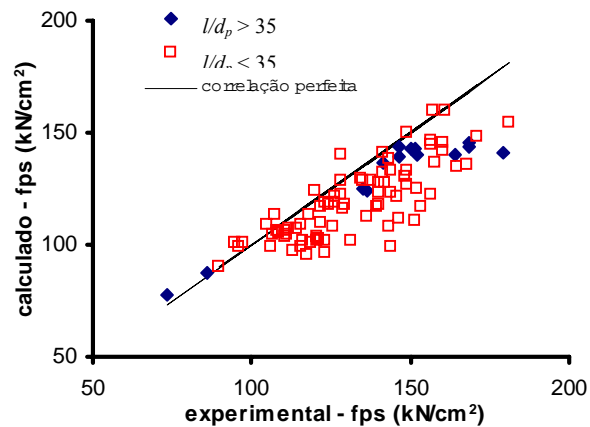


Figura 2.31 – Efeito da esbeltez à flexão para o método do ACI 318 (1999)

Quanto ao efeito da presença de armadura passiva, a tabela 2.6 não indica diferenças importantes nos resultados para protensão total ou parcial. Com relação à forma de carregamento aplicado, percebe-se uma maior precisão para elementos submetidos a cargas concentradas, como mostrado na figura 2.32 e nos parâmetros estatísticas da relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$ da tabela 2.6.

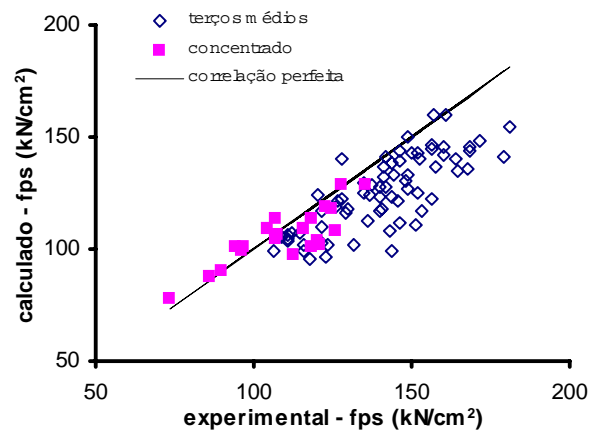


Figura 2.32 – Resultados da aplicação do ACI 318 (1999) em função do tipo de carregamento

2.3.2 Aplicação dos Métodos Semi-Empíricos

As figuras 2.33 a 2.35 e a tabela 2.7 apresentam os resultados obtidos com a aplicação do método de Tam & Pannel (1976). Na figura 2.33, observa-se uma tendência conservadora, principalmente para tensões na armadura mais elevadas. A partir da figura 2.34 e da tabela, percebe-se maior precisão para vigas sujeitas a carregamentos concentrados, o que pode ser atribuído ao fato de o coeficiente (Ψ), variável empírica do método, ter sido determinado com base em protótipos submetidos a este tipo de carga. Pela figura 2.35 e tabela 2.7, verifica-se um comportamento semelhante para elementos com protensão total ou parcial, com menor dispersão para as peças sem armadura passiva complementar. A partir dos dados da tabela 2.7, não se observa uma tendência do método quanto a esbelteza à flexão.

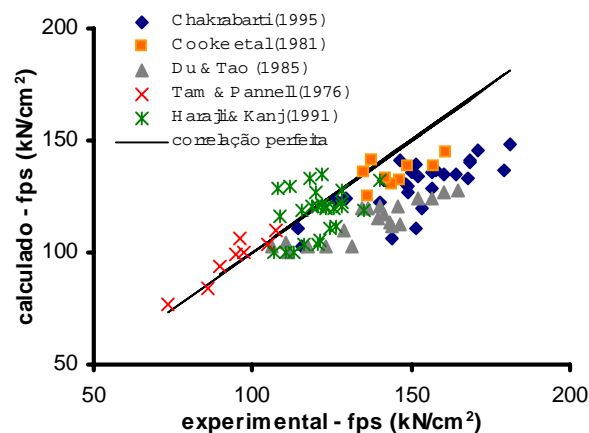


Figura 2.33 –Aplicação do método de Tam & Pannell (1976)

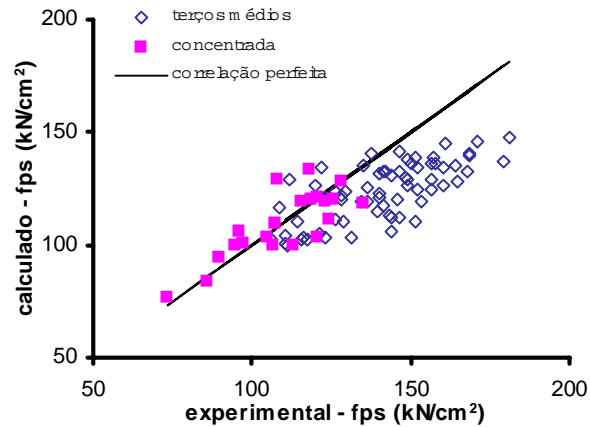


Figura 2.34 – Resultados da aplicação do método de Tam & Pannell (1976) em função do tipo de carregamento

Tabela 2.7 – Parâmetros para o método de Tam & Pannell (1976)

	média	desvio padrão	coeficiente e de variação	tamanho do grupo
geral	0,91	0,10	0,11	90
protensão parcial	0,91	0,11	0,12	62
protensão total	0,92	0,05	0,05	28
carregamento concentrado	1,00	0,08	0,08	21
cargas nos terços médios	0,89	0,09	0,10	69
l/d_p : 8 – 13	1,03	0,08	0,07	16
l/d_p : 18 – 23,5	0,87	0,07	0,08	53
l/d_p : 27,5 – 34,5	0,95	0,08	0,09	10
l/d_p : 38,8 – 43	0,93	0,08	0,09	8
l/d_p : 55,2	0,88	0,06	0,07	3

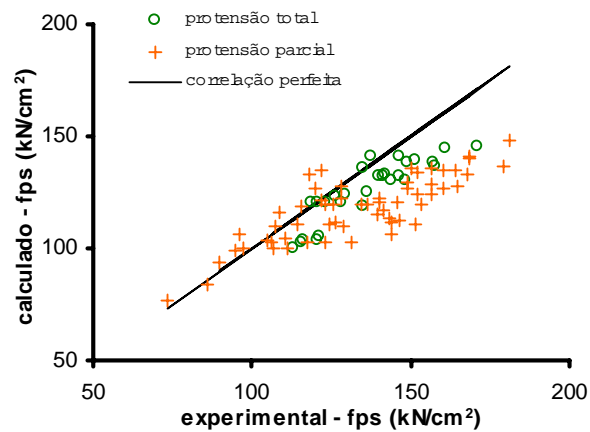


Figura 2.35 – Resultados da aplicação do método de Tam & Pannell (1976) em função do tipo de protensão

Os resultados para o método de Harajli (1990) para uma análise do tipo compatibilidade de deformações são mostrados nas figuras 2.36 a 2.38 e na tabela 2.8. Na figura 2.36, observa-se uma tendência contra a segurança, pois há mais pontos do gráfico acima da linha de correlação perfeita, refletindo-se também na média geral de 1,06 para a relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$, dada na tabela 2.8. Na figura 2.37 nota-se um melhor desempenho para elementos com carregamentos concentrados, o que também é percebido através dos parâmetros estatísticos. O efeito do tipo de protensão, parcial ou total, é observado na figura 2.38. Percebe-se uma maior precisão para a protensão parcial, o que é confirmado pela melhor média da relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$ e uma menor dispersão, conforme tabela 2.8. Por outro lado, pode-se dizer que os resultados não foram afetados pela esbelteza à flexão, como verificado na tabela.

Tabela 2.8 – Parâmetros estatísticos da relação $(f_{ps}^{calc}/f_{ps}^{exp})$ para a aplicação do método de Harajli (1990)

	média	desvio padrão	coeficiente de variação	tamanho do grupo
geral	1,06	0,10	0,10	90
protensão parcial	1,02	0,08	0,07	62
protensão total	1,13	0,12	0,10	28
carregamento concentrado	1,00	0,07	0,07	21
cargas nos terços médios	1,07	0,11	0,10	69
l/d_p : 8 – 13	1,08	0,11	0,10	16
l/d_p : 18 – 23,5	1,05	0,13	0,13	53
l/d_p : 27,5 – 34,5	1,06	0,09	0,08	10
l/d_p : 38,8 – 43	1,08	0,10	0,09	8
l/d_p : 55,2	1,07	0,11	0,10	3

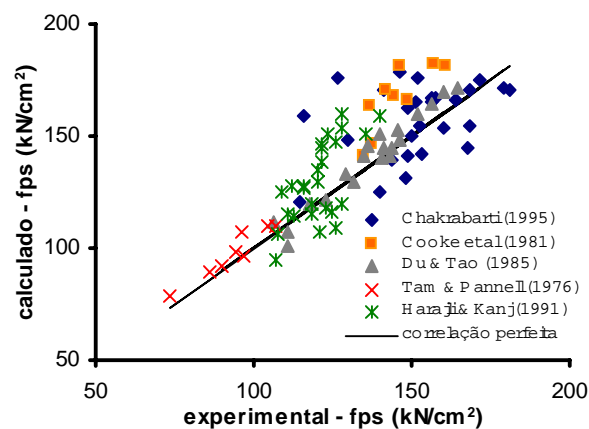


Figura 2.36 – Resultados da aplicação do método de Harajli (1990)

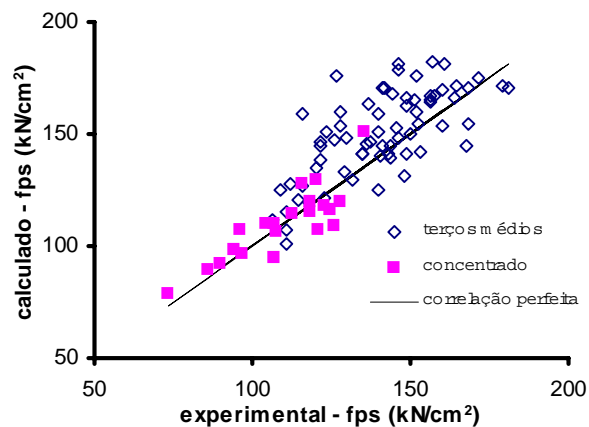


Figura 2.37 – Resultados com o método de Harajli (1990) segundo o tipo de carregamento

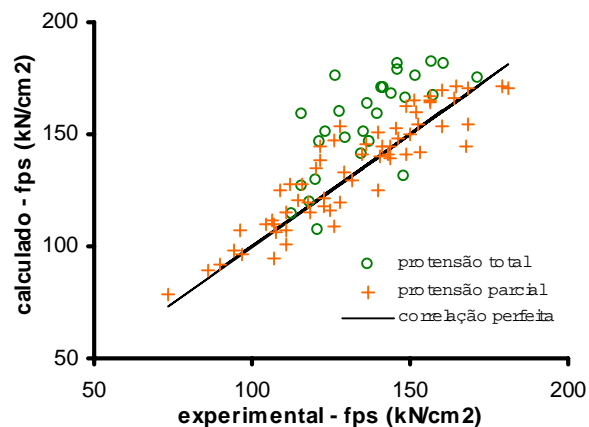


Figura 2.38 – Resultados com o método de Harajli (1990) segundo o tipo de protensão

Os resultados obtidos com o método de Naaman & Alkhairi (1991) são apresentados a seguir. Na figura 2.39 observa-se uma distribuição relativamente uniforme de pontos em torno da linha de correlação perfeita, o que se reflete em uma média da relação $(f_{ps}^{cal}/f_{ps}^{exp})$ levemente contra a segurança, conforme a tabela 2.9. Quanto ao tipo de carregamento, verifica-se na figura 2.40 e na tabela, uma precisão semelhante para as duas situações consideradas. O desempenho segundo o tipo protensão, parcial ou total, pode ser verificado na figura 2.41. Observa-se uma maior precisão para elementos com protensão parcial, o que é comprovado pelos parâmetros da tabela 2.9. O efeito da esbelteza à flexão nos resultados é mostrado na tabela, onde se percebe uma suave tendência quanto aos grupos extremos.

Tabela 2.9 – Parâmetros estatísticos da relação ($f_{ps}^{cal}/f_{ps}^{exp}$) da aplicação do método de Naaman & Alkhairi (1991)

	média	desvio padrão	coeficiente de variação	tamanho do grupo
geral	1,03	0,11	0,11	90
protensão parcial	1,00	0,09	0,09	62
protensão total	1,09	0,11	0,10	28
carregamento concentrado	1,04	0,08	0,08	21
cargas nos terços médios	1,02	0,11	0,11	69
l/d_p : 8 – 13	1,12	0,08	0,07	16
l/d_p : 18 – 23,5	1,01	0,11	0,11	53
l/d_p : 27,5 – 34,5	1,02	0,11	0,11	10
l/d_p : 38,8 – 43	1,02	0,09	0,09	8
l/d_p : 55,2	0,95	0,10	0,11	3

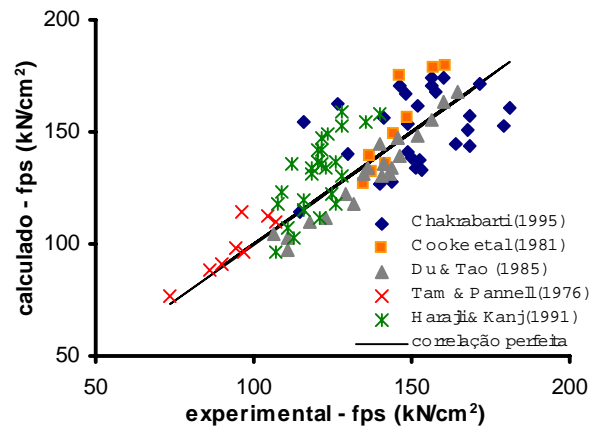


Figura 2.39 – Resultados para o método de Naaman & Alkhairi (1991)

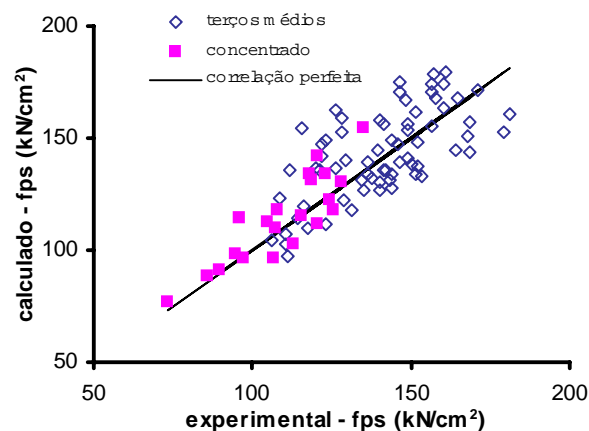


Figura 2.40 – Resultados da aplicação do método de Naaman & Alkhairi (1991) em função do tipo de carregamento

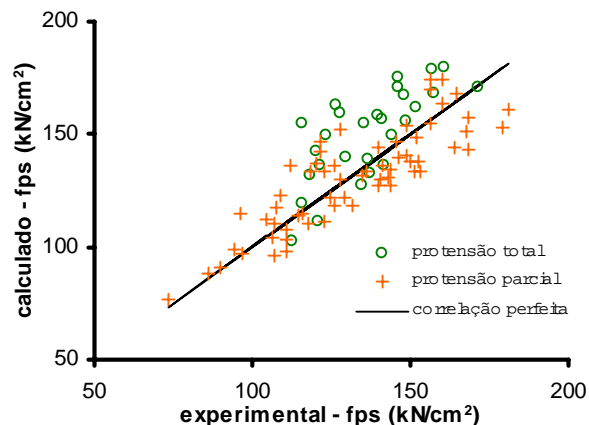


Figura 2.41 – Resultados da aplicação do método de Naaman & Alkhairi (1991) em função do tipo de prestação

A tabela 2.10 e as figuras 2.42 a 2.44 apresentam os resultados para o método de Lee et al (1999). Na tabela e na figura 2.42, observa-se uma distribuição de pontos em torno da linha de correlação perfeita, porém com uma elevada dispersão. Melhores resultados são observados para prestação parcial e para carregamentos nos terços médios, como mostrado na tabela 2.10 e nas figuras 2.43 e 2.44, respectivamente. Os dados da tabela 2.10 não mostram uma tendência quanto a esbeltez à flexão. Durante as aplicações, verificou-se uma inconsistência da fórmula para elementos sem armadura passiva complementar, visto que a altura útil desta armadura é parâmetro na equação (2.55), mesmo nestes casos. Nestas aplicações, adotou-se a altura útil da armadura passiva igual a de prestação.

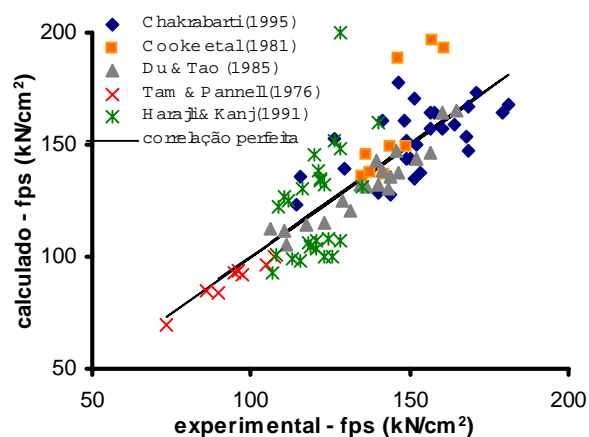


Figura 2.42 – Resultados para o método de Lee et al (1999)

Tabela 2.10 – Parâmetros estatísticos da relação ($f_{ps}^{cal}/f_{ps}^{exp}$) para o método de Lee et al (1999)

	média	desvio padrão	coeficiente de variação	tamanho do grupo
geral	1,01	0,12	0,12	90
protensão parcial	0,97	0,09	0,09	62
protensão total	1,09	0,15	0,14	28
carregamento concentrado	0,90	0,06	0,06	21
cargas nos terços médios	1,04	0,12	0,12	69
$l/d: 8 - 13$	1,00	0,14	0,15	16
$l/d: 18 - 23,5$	1,00	0,12	0,12	53
$l/d: 27,5 - 34,5$	0,98	0,11	0,11	10
$l/d: 38,8 - 43$	1,04	0,12	0,12	8
$l/d: 55,2$	1,03	0,09	0,09	3

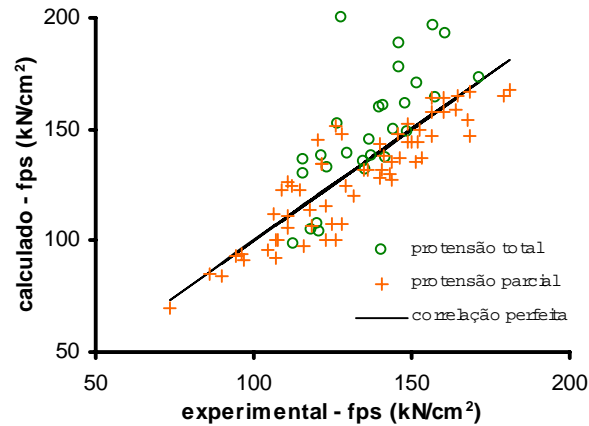


Figura 2.43 – Comparação sobre o desempenho de elementos com protensão total ou parcial para o método de Lee et al (1999)

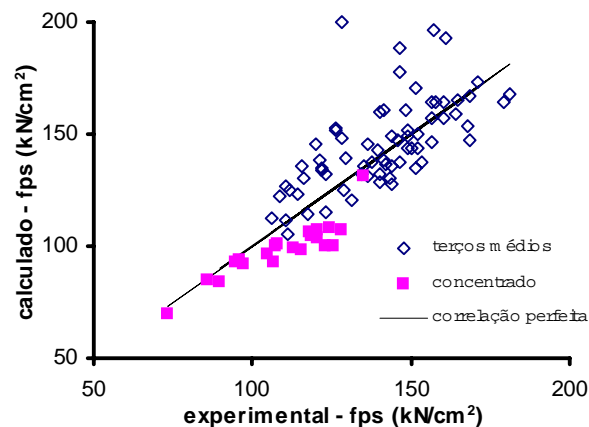


Figura 2.44 – Resultados para o método de Lee et al (1999) em função do tipo de carregamento

Para a aplicação da formulação semi-empírica de Campos & Guimarães (2000), selecionaram-se os resultados experimentais dos elementos com relações de esbelteza à flexão próximas aos valores estabelecidos para as equações (2.66) a (2.69). A figura 2.45 mostra uma distribuição praticamente uniforme dos pontos em torno da linha de tendência, com uma média levemente acima da unidade, conforme a tabela 2.11. Os resultados em função do tipo de protensão podem ser observados na figura 2.46 e na tabela 2.11, onde se nota um desempenho bastante semelhante para a protensão total ou parcial. Quanto ao tipo de carregamento, apesar do limitado número de resultados para carregamentos concentrados, observa-se, na figura 2.47 e na tabela 2.11 um desempenho mais adequado para vigas com cargas nos terços médios.

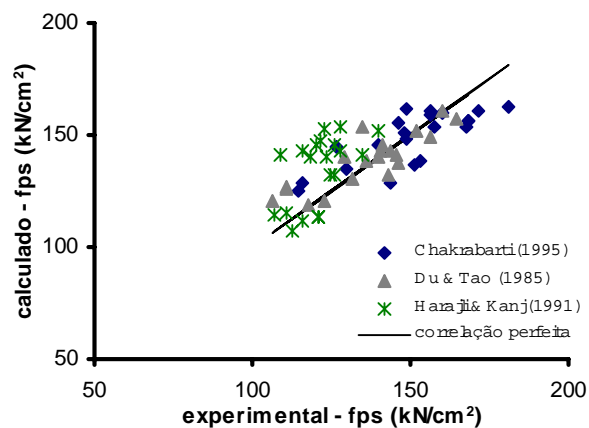


Figura 2.45 – Resultados da aplicação do método de Campos & Guimarães (2000)

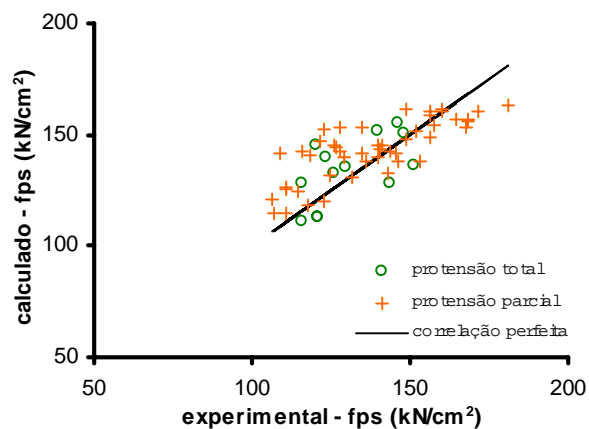


Figura 2.46 – Resultados da aplicação do método rígido plástico de Campos & Guimarães (2000) em função do tipo de protensão

Tabela 2.11 – Parâmetros estatísticos da relação ($f_{ps}^{cal}/f_{ps}^{exp}$) para a aplicação do método de Campos & Guimarães (2000)

	média	desvio padrão	coeficiente e de variação	número de elementos
geral	1,04	0,10	0,09	61
protensão parcial	1,04	0,10	0,09	48
protensão total	1,03	0,10	0,09	13
carregamento concentrado	1,13	0,12	0,11	10
cargas nos terços médios	1,02	0,08	0,08	51

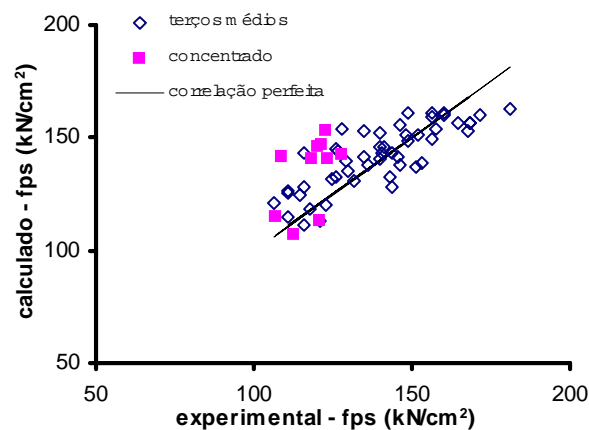


Figura 2.47 – Resultados da aplicação do método de Campos & Guimarães (2000) em função da forma de carregamento

2.4 Comentários Finais

Inúmeros fatores são considerados determinantes do comportamento de elementos com protensão não aderente, tanto no que diz respeito à tensão no estado limite último quanto à ductilidade. Entre as principais características pesquisadas por diversos autores, a presença de armadura passiva complementar, a taxa mecânica total de armadura, a esbeltez à flexão e a distribuição das cargas ao longo do vão, são as mais citadas. De maneira geral, estes parâmetros estão associados ao tamanho da região de deformações plásticas, que se forma no elemento com protensão não aderente na ruptura.

As pesquisas demonstram que os elementos com protensão não aderente devem ser dotados de alguma quantidade de armadura passiva aderente. Esta armadura melhora o desempenho, garantindo o funcionamento adequado das estruturas, principalmente no que diz respeito à capacidade de deformação.

Para alguns dos parâmetros, no entanto, ainda não foi estabelecido o consenso entre os autores sobre a sua real influência. Os fatores mais debatidos são a esbeltez à flexão e o tipo de carregamento aplicado. No caso da esbeltez à flexão, modelos simplificados e resultados experimentais indicam uma relação direta com o comportamento dos elementos com protensão não aderente, porém alguns autores contestam a importância e o alcance de tal parâmetro. Resultados experimentais e modelos analíticos divergem quanto ao verdadeiro efeito do tipo de carregamento sobre o desempenho das estruturas com armaduras não aderentes. Alguns trabalhos, ainda, afirmam que estes dois parâmetros devem ser estudados conjuntamente.

A revisão dos métodos para a previsão da tensão na armadura não aderente no estado limite último mostrou que os fatores discutidos no item 2.1 costumam ser considerados nas formulações de cálculo. O quadro 2.2 mostra a frequência de utilização de tais fatores. A presença de armadura passiva nas seções é considerada em todos os métodos semi-empíricos e em alguns empíricos. A taxa mecânica total de armadura é utilizada explicitamente apenas em alguns métodos, sendo que a maioria das abordagens semi-empíricas considera as variáveis envolvidas neste parâmetro através das análises do tipo compatibilidade de deformações. A esbeltez à flexão aparece na maioria das formulações, com as exceções das formulações empíricas mais antigas. Já a distribuição das cargas é utilizada em apenas três dos métodos semi-empíricos.

Quadro 2.2 – Incidência dos parâmetros nas diferentes formulações

		armadura passiva	ω_e ou ω_t	l/d_p	distribuição de cargas
empíricos	Mattock et al (1971)	○	○	○	○
	Cooke et al (1981)	○	○	○	○
	Tao & Du (1985)	○	●	○	○
	Harajli & Kanj (1991)	●	●	●	○
	Chakrabarti (1995)	●	○	●	○
	ACI 318 (ACI,1999)	○	○	●	○
semi-empíricos	Tam & Pannel (1976)	●	○	●	○
	Harajli (1990)	●	○	●	●
	Naaman & Alkhairi (1991)	●	○	●	●
	Lee et al (1999)	●	○	●	●
	Campos & Guimarães (2000)	●	●	●	○

As aplicações dos métodos para a previsão da tensão na armadura não aderente no estado limite último indicaram, de maneira geral, uma tendência conservadora para os métodos empíricos, enquanto os semi-empíricos foram mais precisos. Os resultados métodos empíricos dependeram fortemente das características dos resultados experimentais utilizados nas análises de regressão. As formulações semi-empíricas apresentam abordagens analíticas mais consistentes.

Os métodos que utilizam análises do tipo compatibilidade de deformações tratam analiticamente os parâmetros envolvidos no equilíbrio das seções transversais. Por isto, estes métodos são mais próximos aos procedimentos de projeto e análise dos elementos com armaduras aderentes. Já o chamado comportamento de dependência global das curvaturas, em função da compatibilidade de deslocamentos, é considerado através de coeficientes empíricos.

A avaliação dos resultados das aplicações dos métodos de previsão de desempenho indica, também, uma relação entre a precisão dos valores obtidos e as características dos elementos, tais como a presença de armadura passiva e o tipo de carregamento. Esta relação parece estar ligada à origem dos parâmetros empíricos. De qualquer maneira, a influência de tais características nos resultados parece confirmar a sua importância no desempenho das estruturas com protensão não aderente.

3 Formulação Matemática e Numérica do Modelo

A determinação da resposta de uma estrutura frente a um carregamento qualquer, depende de três condições físicas fundamentais: as equações de equilíbrio, as relações entre deslocamentos e deformações e as propriedades dos materiais. Para uma dada estrutura, estas condições físicas são traduzidas em expressões matemáticas e agrupadas em sistemas de equações. Conforme o tipo estrutural, seja a estrutura constituída por barras, placas ou cascas, por exemplo, a montagem destes sistemas depende de encaminhamentos específicos (Carol & Murcia, 1989a).

Uma das principais abordagens para a análise dos problemas estruturais é o **Método dos Elementos Finitos**. Formulações deste tipo baseiam-se, normalmente, na adoção de formas aproximadas para a variação de determinadas incógnitas no interior de um elemento. Para as estruturas de pórticos, as abordagens tradicionais consideram funções arbitrárias para a interpolação dos deslocamentos. A partir destes resultados, obtidos, portanto, com algum nível de erro intrínseco, determinam-se as demais respostas ao longo da barra, como deformações, tensões e solicitações.

As fórmulas de interpolação, normalmente adotadas para os deslocamentos transversais nos elementos finitos para barras de pórticos, são funções polinomiais cúbicas, que correspondem a distribuições lineares de curvaturas ao longo dos elementos. Quando o diagrama de momentos fletores é não linear, ou à medida que não linearidades ocorram na barra, a distribuição de deformações distancia-se do comportamento linear assumido, provocando um aumento substancial do erro. A fim de se reduzir esta imprecisão, um refinamento da malha torna-se necessário, de maneira que um elemento seja suficientemente pequeno para que a variação das curvaturas em seu interior seja razoavelmente próxima da linear.

As estruturas de barras possuem, no entanto, uma peculiaridade no que diz respeito às equações que representam suas condições físicas fundamentais. Esta peculiaridade consiste no fato de que as expressões matemáticas correspondentes não formam um sistema de equações totalmente acoplado. É possível determinar-se uma solução para a variação das forças nas seções transversais ao longo de um elemento, resolvendo-se apenas condições de equilíbrio, sem o envolvimento das demais condições físicas fundamentais. A formulação do

Elemento Finito do Tipo Híbrido considera esta propriedade das estruturas de barras, utilizando as expressões matemáticas para as forças nas seções transversais como funções de interpolação destas mesmas forças. Tais funções de interpolação são teoricamente exatas, uma vez que não se baseiam em expressões arbitrárias, mas sim nas condições de equilíbrio do elemento (Carol & Murcia, 1989a).

Na formulação do elemento finito do tipo híbrido, a matriz de rigidez, o vetor de cargas nodais equivalentes e a equação do elemento podem ser deduzidos considerando-se a função de interpolação de forças. Durante uma análise, o sistema de equações é montado e resolvido, tendo como incógnitas os deslocamentos nodais. As respostas no interior do elemento finito, incluindo solicitações, deformações e deslocamentos, são determinadas a partir da interpolação das forças nodais.

A partir da distribuição teoricamente exata de momentos, a formulação do elemento finito do tipo híbrido é capaz de fornecer uma distribuição de curvaturas no interior do elemento também de caráter teoricamente exato. No caso de elementos estruturais com protensão não aderente, a adequada avaliação da distribuição de curvaturas contribui para a correta estimativa das deformações nas armaduras de protensão. Além disto, as distribuições de curvaturas de elevada precisão permitem a utilização de elementos finitos longos, de maneira que apenas um elemento possa ser empregado na modelagem de uma viga ou pilar.

Estas características da formulação do elemento do tipo híbrido levaram a sua adoção na implementação do modelo numérico. Ao longo deste capítulo, apresentam-se o desenvolvimento matemático da formulação e os procedimentos numéricos para a sua implementação. Antes, porém, os critérios utilizados para a idealização das estruturas são mostrados, incluindo as definições dos deslocamentos e das forças que atuam nos elementos.

3.1 Idealização da Estrutura

No modelo numérico empregando a formulação do elemento do tipo híbrido, um ou mais elementos finitos, com três graus de liberdade por nó, podem ser utilizados para a discretização de uma barra de pórtico plano, seja uma viga ou pilar. Cada barra do pórtico é representada através de seu **eixo longitudinal de referência**, que coincide com o eixo do elemento finito.

As propriedades ao longo de uma barra são definidas em um número discreto ímpar de **seções transversais**, utilizadas como **pontos de integração** no interior do elemento e distribuídas de maneira uniforme ou não, de acordo com a técnica de integração numérica empregada. As matrizes de rigidez e carga do elemento finito são montadas por integração das propriedades das seções transversais ao longo de seu eixo. As respostas ao longo do elemento, como forças, deformações e deslocamentos, são obtidas nestas mesmas seções transversais.

Elementos longos podem apresentar descontinuidades ao longo de seu comprimento. Estas descontinuidades podem ser de natureza geométrica, quando seções de diferentes formatos são utilizadas, ou constitutiva, no caso de ocorrerem diferentes materiais ao longo de uma mesma barra. As armaduras, passivas ou de protensão, e os carregamentos também são freqüentemente descontínuos, como nos casos de escalonamento da protensão ou de cargas concentradas, respectivamente. Nestas situações, para que a integração de funções descontínuas não gere erros, o intervalo de integração, correspondente ao comprimento do elemento, é dividido em subintervalos com propriedades constantes, chamados de **módulos de integração**.

As seções transversais ao longo do elemento devem apresentar um eixo vertical de simetria, ao longo do qual se distribui um número ímpar de **lâminas** de espessura infinitesimal e largura qualquer, que se constituem em pontos de integração ao longo da altura da seção. O eixo longitudinal do elemento pode interceptar cada seção transversal em qualquer ponto arbitrário, situado ao longo do eixo vertical, não necessariamente no baricentro da seção.

Também nas seções transversais podem ocorrer descontinuidades ao longo do eixo de integração. Variações bruscas nas larguras das lâminas, como nos casos das seções I ou T, ou partes da seção com diferentes concretos, são comuns em vigas e lajes. Nestes casos, assim como para o tratamento de descontinuidades ao longo do eixo longitudinal do elemento, o intervalo de integração é dividido em módulos com propriedades homogêneas.

As armaduras passivas e de protensão, aderentes ou não aderentes, são modeladas como lâminas incorporadas à seção, com as propriedades armazenadas nos pontos de integração do elemento. As propriedades das armaduras aderentes são somadas à rigidez das seções e, por isso, contribuem para a matriz de rigidez do elemento. As armaduras não aderentes são consideradas como componentes separados que atuam sobre a estrutura, e não são consideradas nas matrizes de rigidez. As tensões e deformações das armaduras, inclusive as

de protensão não aderentes, são determinadas nos pontos de integração do elemento. A figura 3.1 apresenta a idealização de uma viga hipotética.

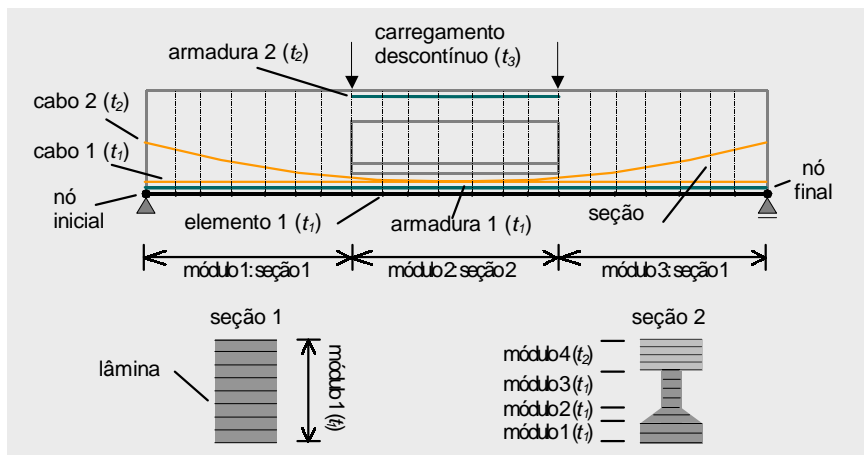


Figura 3.1 – Idealização da Estrutura

3.1.1 Construção Composta

No modelo numérico, as estruturas podem ser formadas em etapas, como é o caso da **construção composta**. Neste caso, as peças estruturais são formadas por componentes pré-moldados, moldados no local, ou pela combinação de ambos, executados em etapas distintas, mas conectados de tal forma que a resposta frente aos carregamentos é dada como um elemento único (ACI, 1999). Para este fim, no modelo numérico, as seções podem receber novos módulos de integração ao longo da análise, como no caso de lajes moldadas sobre vigas pré-moldadas. Novos elementos finitos podem ser adicionados à estrutura em qualquer instante, simulando a continuidade posterior de peças pré-moldadas. Barras de armadura passiva podem ser adicionadas aos elementos, como nas situações de reforço, por exemplo. Ainda, cabos de protensão aderente ou não aderente podem ser protendidos após o início do carregamento da estrutura, como freqüentemente utilizado na construção de pontes.

Na modelagem da construção composta, a variável **tempo** (t) é utilizada para o controle da evolução das etapas construtivas e de carregamento, mesmo em análises em que o comportamento reológico dos materiais não é considerado. A cada componente da estrutura,

seja módulo de seção, elemento finito, barra de armadura ou cabo de protensão, é associada uma **data** de inclusão, como mostrado na figura 3.1. Para os casos de carga, também são definidas datas iniciais e finais de aplicação. Assim, a cada novo carregamento, o modelo numérico compara a data inicial do caso de carga à de instalação de cada um dos componentes da estrutura, verificando quais devem ser considerados. No caso do peso próprio, apenas as partes da seção cuja data de inclusão coincide com a data inicial do carregamento são consideradas. Da mesma forma, apenas os cabos cujas datas de instalação são iguais ao de início da etapa de protensão são alongados.

3.1.2 Sistemas de Coordenadas

Os comportamentos da estrutura, dos elementos e das seções transversais são descritos através de três sistemas de coordenadas. No **sistema global** (XY), são definidas as posições nodais da estrutura e obtêm-se a matriz de rigidez e o vetor de cargas globais, que compõem o sistema de equações do problema, cuja solução fornece o vetor de deslocamentos nodais.

Associado a cada barra, existe um **sistema local de coordenadas** (xy) cuja origem coincide com o nó inicial e o eixo das abscissas (x) acompanha o eixo longitudinal de referência do elemento. Neste sistema, obtêm-se a matriz de rigidez e os vetores de carga de cada elemento, assim como são determinados os resultados em termos de forças, deformações e deslocamentos ao longo da barra. Em uma análise considerando a não linearidade geométrica, o sistema local de coordenadas acompanha os movimento de corpo rígido do elemento, assumindo configurações atualizadas ($x_i y_i$) a cada nova iteração. Os sistemas global e local de coordenadas podem ser observados na figura 3.2.

O terceiro sistema de coordenadas é o **sistema tangencial da seção transversal** ($Z_1 Z_2$) cujo eixo das ordenadas (Z_2) coincide com o eixo vertical de simetria. Neste sistema, determinam-se as propriedades da seção transversal e as forças resistentes. Em uma análise com linearidade geométrica, os eixos do sistema tangencial permanecem ortogonais ao sistema local. Quando uma análise de segunda ordem ocorre, o ângulo (θ_x) entre estes sistemas é variável, com observado na figura 3.2.

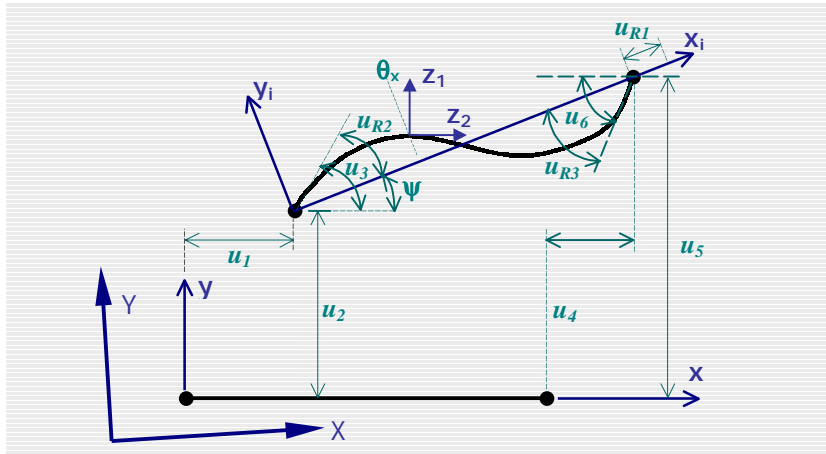


Figura 3.2 – Sistemas de coordenadas e os deslocamentos nodais

3.1.3 Definição de Forças e Deslocamentos no Elemento

A formulação do elemento finito do tipo híbrido define dois tipos de deslocamentos nodais para a estrutura. Os **deslocamentos nodais absolutos** são as rotações e translações apresentadas pelos nós do elemento com relação à posição original do sistema local de coordenadas na iteração. Estes deslocamentos correspondem aos graus de liberdade de cada elemento e podem ser expressos em coordenadas globais (\mathbf{U}) ou locais (\mathbf{u}), conforme as equações (3.1) e (3.2), respectivamente. Ao longo deste trabalho, os deslocamentos nodais absolutos serão referidos simplesmente como **deslocamentos nodais**.

Os **deslocamentos nodais relativos** (\mathbf{u}_R), ou independentes, são os deslocamentos nodais após a eliminação dos movimentos de corpo rígido, e têm como referência o eixo local na posição atualizada. Os deslocamentos nodais relativos, apresentados na equação (3.3), estão associados à deformação do elemento, e correspondem a uma variação no comprimento e dois giros relativos ao eixo longitudinal. Os deslocamentos nodais e os deslocamentos nodais relativos podem ser observados na figura 3.2.

$$\mathbf{U}^T = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6] \quad (3.1)$$

onde:

U_1 e U_4 : translações na direção X global, nos nós inicial e final, respectivamente;
 U_2 e U_5 : translações na direção Y global, nos nós inicial e final, respectivamente;
 U_3 e U_6 : rotações apresentadas pelos nós inicial e final, respectivamente.

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6] \quad (3.2)$$

onde:

u_1 e u_4 : translações na direção x local, nos nós inicial e final, respectivamente;
 u_2 e u_5 : translações na direção y local, nos nós inicial e final, respectivamente;
 u_3 e u_6 : rotações dos nós inicial e final, respectivamente.

$$\mathbf{u}_R^T = [u_{R1} \quad u_{R2} \quad u_{R3}] \quad (3.3)$$

onde:

u_{R1} : variação no comprimento da barra no sistema local deslocado;
 u_{R2} e u_{R3} : rotações relativas ao eixo local deslocado nos nós inicial e final, respectivamente.

Associadas aos deslocamentos nodais absolutos e aos deslocamentos nodais relativos existem as **forças nodais totais (S)** e as **forças nodais relativas (S_R)**, respectivamente, mostradas na figura (3.3). As forças nodais totais referem-se ao sistema local de coordenadas (xy) e serão tratadas ao longo deste capítulo simplesmente como **forças nodais**, enquanto as forças nodais relativas dizem respeito ao sistema local atualizado (x_iy_i). As forças relativas produzem a deformação do elemento e não geram movimentos de corpo rígido. As equações (3.4) e (3.5) apresentam, respectivamente, os vetores das forças nodais e forças nodais relativas.

$$\mathbf{S}^T = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad S_5 \quad S_6] \quad (3.4)$$

onde:

S_1 e S_4 : forças na direção x local, nos nós inicial e final, respectivamente;
 S_2 e S_5 : forças na direção y local, nos nós inicial e final, respectivamente;
 S_3 e S_6 : momentos fletores nos nós inicial e final, respectivamente.

$$\mathbf{S}_R^T = [S_{R1} \quad S_{R2} \quad S_{R3}] \quad (3.5)$$

onde:

S_{R1} : força axial que provoca a variação de comprimento do elemento;
 S_{R2} e S_{R3} : momentos nos nós inicial e final do elemento que produzem as rotações relativas destes nós.

A equação (3.6) apresenta o vetor das forças em uma seção transversal (\mathbf{N}) ao longo do elemento. Seus componentes correspondem a um esforço normal, um cortante e um momento fletor. A figura 3.3 mostra as forças nas seções transversais.

$$\mathbf{N}^T = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \quad (3.6)$$

onde:

N_1 : força axial na seção transversal;
 N_2 : força cortante na seção transversal;
 N_3 : momento fletor na seção transversal.

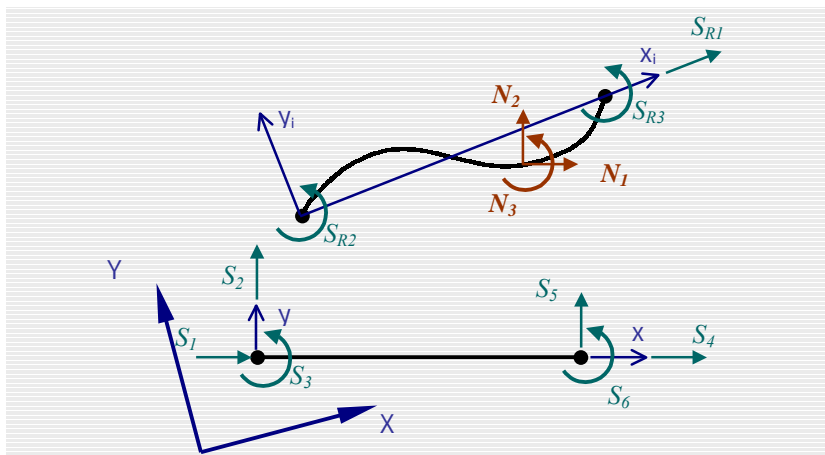


Figura 3.3 – Forças nodais e sollicitações nas seções transversais

3.2 Formulação Matemática do Elemento Finito do Tipo Híbrido

Nas estruturas de pórticos, as soluções para as forças nodais e nas seções transversais podem ser obtidas simplesmente através de equações de equilíbrio, sem depender de outras relações. Em ambos os casos, a resposta da estrutura pode ser calculada pela soma de duas parcelas independentes: a **Solução Particular** e a **Solução Geral**. Isto permite que a expressão para as forças nas seções seja utilizada como função de interpolação, pois as formas das soluções particular e genérica são conhecidas mesmo antes da análise.

A solução particular corresponde à parcela da resposta que pode ser obtida com a análise do elemento como uma viga bi-apoiada, submetida exclusivamente às cargas aplicadas ao longo de seu eixo. A solução particular das forças em cada seção (\mathbf{N}_p) corresponde aos valores dos diagramas de esforço normal, cortante e momento fletor da viga bi-apoiada neste ponto. Para as forças nodais, a solução particular (\mathbf{S}_p) equivale às reações de apoio da viga bi-apoiada. Já a solução geral resulta da iteração do elemento com a estrutura. No caso das forças nodais, a solução geral (\mathbf{S}_G) equivale às reações hiperestáticas. Para as forças nas seções transversais, a solução geral (\mathbf{N}_G) corresponde à variação destas reações hiperestáticas ao longo do elemento finito.

A partir das soluções para as forças nodais e nas seções transversais, a formulação do elemento finito do tipo híbrido é mostrada a seguir, conforme os trabalhos de Carol & Murcia (1989a) e Moon (1994). Inicialmente, a formulação é apresentada para análises com linearidade geométrica, seguida por uma breve descrição de sua aplicação na modelagem numérica. Por fim, mostram-se as modificações necessárias na formulação para a inclusão dos efeitos de segunda ordem.

3.2.1 Análise Considerando Linearidade Geométrica

Utilizando a equação para as solicitações nas seções como função de interpolação e considerando a solução para o equilíbrio das forças nodais, as leis constitutivas, as relações entre deformações e deslocamentos nodais relativos e entre deslocamentos nodais e deslocamentos nodais relativos, é possível estabelecer a equação fundamental, a matriz de rigidez e o vetor de cargas equivalentes do elemento. As relações fundamentais e o desenvolvimento matemático desta formulação são descritos a seguir, considerando a linearidade geométrica.

3.2.1.1 Solução para as Forças Nodais

A relação de equilíbrio para as forças nodais é apresentada na equação (3.7), em que o segundo termo do lado direito da igualdade corresponde à solução geral (\mathbf{S}_G). A solução particular (\mathbf{S}_P) é calculada pela integração das cargas aplicadas ao longo do elemento, conforme a expressão (3.8). A matriz de transformação (\mathbf{T}), de forças nodais relativas em forças nodais, é mostrada na equação (3.9).

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_P + \mathbf{T}\mathbf{S}_R \quad (3.7)$$

onde:

- \mathbf{S}_P : solução particular para as forças nodais, conforme equação (3.8);
- \mathbf{T} : matriz de transformação de forças nodais relativas em forças nodais, conforme a expressão (3.9).

$$\mathbf{S}_P = \begin{bmatrix} S_{P1} \\ S_{P2} \\ S_{P3} \\ S_{P4} \\ S_{P5} \\ S_{P6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\int_0^\ell p_\xi^x d\xi \\ -S_{P5} - \int_0^\ell p_\xi^y d\xi \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell -p_\xi^y \xi - p_\xi^z d\xi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde:

- x e ℓ : coordenada da seção e comprimento do elemento, respectivamente;
- ξ : variável de integração ao longo do elemento;
- S_{Pi} : componentes do vetor de solução particular para forças nodais, correspondentes aos seis graus de liberdade do elemento;
- p_ξ^x, p_ξ^y e p_ξ^z : componentes axial, transversal e de momento, respectivamente, do carregamento distribuído ao longo do elemento.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\ell & 1/\ell \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\ell & -1/\ell \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.2.1.2 Solução para as Forças nas Seções Transversais – Função de Interpolação

Considerando a soma das parcelas correspondentes às soluções particular e geral, a expressão (3.10) pode ser utilizada para o cálculo das forças (\mathbf{N}) que atuam nas seções transversais ao longo do elemento. A solução particular (\mathbf{N}_p) é calculada a partir do carregamento distribuído ao longo do elemento, conforme expressão (3.11). A matriz de interpolação para as forças nodais relativas (\mathbf{f}) é mostrada na equação (3.12). Na formulação do tipo híbrido, a relação (3.10) constitui-se na função de interpolação para as solicitações nas seções transversais.

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_p + \mathbf{f}\mathbf{S}_R \quad (3.10)$$

onde:

\mathbf{N}_p : solução particular, dada pela equação (3.8);

\mathbf{f} : matriz de interpolação das forças nodais relativas ao longo do elemento, conforme a equação (3.10).

$$\mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{p5} \\ (\ell - x)S_{p5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_x^\ell p_\xi^x d\xi \\ \int_x^\ell p_\xi^y d\xi \\ \int_x^\ell (\xi - x)p_\xi^y + p_\xi^z d\xi \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{\ell} \\ 0 & \frac{x}{\ell} - 1 & \frac{x}{\ell} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

3.2.1.3 Relação Constitutiva da Seção Transversal

A relação entre o vetor de forças (\mathbf{N}) e de deformações (\mathbf{e}) em uma seção transversal, é dada nas equações (3.13) e (3.14). Estas igualdades consideram relações tensão-deformação uniaxiais para as lâminas das seções, descritas no **Capítulo 4**. A hipótese de que as seções permanecem planas após a flexão também é adotada, assim como são desprezadas as deformações por cisalhamento. As equações (3.13) e (3.14) são relações incrementais equivalentes e correspondem à relação constitutiva da seção transversal.

$$\begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A E'' dA & \int_A z_2 E'' dA \\ \int_A z_2 E'' dA & \int_A z_2^2 E'' dA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int_A \Delta \sigma'' dA \\ \int_A z_2 \Delta \sigma'' dA \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde:

- A : área da seção transversal;
- z_2 : coordenada da lâmina referente ao eixo vertical de referência;
- E'' : módulo de elasticidade da lâmina, dado por uma relação constitutiva uniaxial e dependente do tempo;
- ε_r e ϕ : deformação na lâmina de referência e a curvatura da seção transversal, respectivamente;
- σ'' : tensão fictícia na fibra da seção transversal, gerada pelos efeitos dependentes do tempo.

$$\Delta \mathbf{N} = \mathbf{K}_{\text{sec}} \Delta \mathbf{e} - \Delta \mathbf{N}_t \quad (3.14)$$

onde:

- \mathbf{K}_{sec} : matriz de rigidez da seção transversal;
- \mathbf{e} : vetor que descreve a deformação da seção transversal;
- \mathbf{N}_t : vetor com as forças fictícias dependentes do tempo.

3.2.1.4 Relação entre Deslocamentos Nodais Relativos e Deformações

Os deslocamentos nodais relativos (\mathbf{u}_R) têm o sentido físico da integração das deformações (\mathbf{e}) nas seções transversais ao longo do elemento, como nas equações (3.15) a (3.17) e na forma matricial das expressões (3.18) e (3.19). A matriz (\mathbf{f}) nestas equações, é a mesma utilizada para a interpolação das forças nodais relativas, desprezadas, porém, as deformações por corte.

$$u_{r1} = \int_0^\ell \varepsilon_r dx \quad (3.15)$$

$$u_{r2} = \int_0^\ell \phi(\ell - x) dx \quad (3.16)$$

$$u_{r3} = \int_0^\ell \phi dx \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} u_{R1} \\ u_{R2} \\ u_{R3} \end{bmatrix} = \int_0^\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x/\ell - 1 \\ 0 & x/\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \phi \end{bmatrix} dx \quad (3.18)$$

$$\mathbf{u}_R = \int_0^\ell \mathbf{f}^T \mathbf{e} dx \quad (3.19)$$

3.2.1.5 Relação entre Deslocamentos Nodais Relativos e Deslocamentos Nodais

Os deslocamentos nodais relativos são obtidos com a subtração dos movimentos de corpo rígido do vetor de deslocamentos nodais, como mostrado nas equações (3.20) a (3.22). Esta relação pode ser escrita, também, no formato matricial da equação (3.23).

$$u_{R1} = u_4 - u_1 \quad (3.20)$$

$$u_{R2} = u_3 + \frac{1}{\ell}(u_2 - u_5) \quad (3.21)$$

$$u_{R3} = u_6 + \frac{1}{\ell}(u_2 - u_5) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{u} \quad (3.23)$$

3.2.1.6 Desenvolvimento Matemático da Equação do Elemento Finito

Partindo-se da relação constitutiva representada pela equação (3.14), pode-se escrever o vetor de deformações na seção (\mathbf{e}) em função da solução para as solicitações (\mathbf{N}), como na forma incremental da expressão (3.24). Utilizando-se a expressão (3.10) para as forças nas seções transversais (\mathbf{N}) como função de interpolação para as deformações (\mathbf{e}), obtém-se a equação (3.25). Lembrando da relação (3.19) entre deslocamentos nodais relativos (\mathbf{u}_R) e deformações (\mathbf{e}), e introduzindo-se nesta a equação (3.25), pode-se escrever os deslocamentos nodais relativos em função das solicitações nas seções, como em (3.26).

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{K}_{sec}^{-1} (\Delta \mathbf{N} + \Delta \mathbf{N}_t) \quad (3.24)$$

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{K}_{sec}^{-1} (\Delta \mathbf{N}_p + \mathbf{f} \Delta \mathbf{S}_R + \Delta \mathbf{N}_t) \quad (3.25)$$

$$\Delta \mathbf{u}_R = \int_0^l \mathbf{f}^T \mathbf{K}_{sec}^{-1} (\Delta \mathbf{N}_p + \mathbf{f} \Delta \mathbf{S}_R + \Delta \mathbf{N}_t) dx \quad (3.26)$$

O lado direito da relação (3.26) pode ser reorganizado conforme a equação (3.27). Apresentando-se a matriz de flexibilidade do elemento para forças e deslocamentos nodais relativos (\mathbf{F}_R), conforme a equação (3.28), e o vetor de deslocamentos nodais relativos impostos, dado na expressão (3.29), pode-se escrever a relação (3.30) equivalente à equação (3.27). A relação (3.30) pode ser invertida, obtendo-se a expressão (3.31), que é a equação do elemento finito do tipo híbrido, ainda considerando forças e deslocamentos nodais relativos. A matriz de rigidez para forças e deslocamentos nodais relativos (\mathbf{K}_R) é dada na equação (3.32).

$$\Delta \mathbf{u}_R = \int_0^l \mathbf{f}^T \mathbf{K}_{sec}^{-1} \mathbf{f} \Delta \mathbf{S}_R dx + \int_0^l \mathbf{f}^T \mathbf{K}_{sec}^{-1} (\Delta \mathbf{N}_p + \Delta \mathbf{N}_t) dx \quad (3.27)$$

$$\mathbf{F}_R = \int_0^\ell \mathbf{f}^T \mathbf{K}_{sec}^{-1} \mathbf{f} dx \quad (3.28)$$

onde:

\mathbf{F}_R : matriz de flexibilidade para forças e deslocamentos nodais relativos.

$$\Delta \mathbf{u}_{RN} = \int_0^\ell \mathbf{f}^T \mathbf{K}_{sec}^{-1} (\Delta \mathbf{N}_p + \Delta \mathbf{N}_t) dx \quad (3.29)$$

onde:

\mathbf{u}_{RN} : deslocamentos nodais relativos produzidos pelas cargas aplicadas ao longo do elemento.

$$\Delta \mathbf{u}_R = \mathbf{F}_R \Delta \mathbf{S}_R + \Delta \mathbf{u}_{RN} \quad (3.30)$$

$$\Delta \mathbf{S}_R = \mathbf{K}_R \Delta \mathbf{u}_R - \mathbf{K}_R \Delta \mathbf{u}_{RN} \quad (3.31)$$

onde:

\mathbf{K}_R : matriz de rigidez para forças e deslocamentos nodais relativos, conforme a equação (3.32).

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{F}_R^{-1} \quad (3.32)$$

Introduzindo na equação (3.7) do equilíbrio das forças nodais (\mathbf{S}), na expressão (3.31) para as forças nodais relativas, obtém-se a equação (3.33). Inserindo-se nesta relação, a expressão

(3.23) entre deslocamentos e deslocamentos nodais relativos, pode-se escrever a equação (3.34). O segundo termo do lado direito da igualdade (3.34) contém a **matriz de rigidez do elemento** (\mathbf{K}_{el}), apresentada na equação (3.35), e o terceiro corresponde ao **vetor de cargas nodais equivalentes** (\mathbf{S}_N), mostrado na expressão (3.36). Com estas novas matrizes, a partir da equação (3.34), obtém-se a expressão (3.37), que é a **equação fundamental do elemento finito do tipo híbrido**.

$$\Delta \mathbf{S} = \Delta \mathbf{S}_p + \mathbf{T} \mathbf{K}_R \Delta \mathbf{u}_R - \mathbf{T} \mathbf{K}_R \Delta \mathbf{u}_{RN} \quad (3.33)$$

$$\Delta \mathbf{S} = \Delta \mathbf{S}_p + \mathbf{T} \mathbf{K}_R \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{u} - \mathbf{T} \mathbf{K}_R \Delta \mathbf{u}_{RN} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{T} \mathbf{K}_R \mathbf{T}^T \quad (3.35)$$

onde:

\mathbf{K}_{el} : matriz de rigidez do elemento finito do tipo híbrido.

$$\Delta \mathbf{S}_N = \mathbf{T} \mathbf{K}_R \Delta \mathbf{u}_{RN} \quad (3.36)$$

onde:

\mathbf{S}_N : vetor de cargas nodais equivalentes.

$$\Delta \mathbf{S} = \Delta \mathbf{S}_p + \mathbf{K}_{el} \Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{S}_N \quad (3.37)$$

3.2.2 Rotina de Análise

A rotina de análise é apresentada na figura 3.4. O processo tem início com a formação do sistema de equações da estrutura. A matriz de rigidez de cada elemento (\mathbf{K}_{el}) é montada em coordenadas locais, utilizando as equações (3.35), (3.32) e (3.28), e armazenada em coordenadas globais na matriz de rigidez da estrutura (\mathbf{K}_{es}). Também para cada elemento, as soluções particulares para as forças nodais (\mathbf{S}_p) e nas seções transversais (\mathbf{N}_p) são determinadas, em coordenadas locais, em função do carregamento aplicado ao longo da barra, de acordo com as equações (3.8) e (3.11), respectivamente. A solução particular (\mathbf{N}_p) é necessária para o cálculo dos deslocamentos nodais relativos impostos (\mathbf{u}_{RN}), conforme a equação (3.29), dos quais dependem as forças nodais equivalentes (\mathbf{S}_N), em coordenadas locais, de acordo com a equação (3.36). Os vetores de cargas equivalentes dos elementos são transformados para o sistema de coordenadas globais e armazenados no vetor de cargas da estrutura (\mathbf{P}). Ao vetor de cargas global, são adicionados, também, os carregamentos nodais aplicados e a solução particular para as forças nodais (\mathbf{S}_p).

As condições de contorno são aplicadas e o sistema de equações da estrutura ($\mathbf{P} = \mathbf{K}_{es}\mathbf{U}$) resolvido, obtendo-se os deslocamentos nodais (\mathbf{U}) em coordenadas globais. Os deslocamentos nodais (\mathbf{U}) são indexados e transformados para o sistema local de coordenadas para a formação do vetor de deslocamento de cada elemento (\mathbf{u}).

A resposta para cada elemento é então determinada a partir dos deslocamentos nodais (\mathbf{u}). Para isto, as matrizes de rigidez de cada elemento (\mathbf{K}_{el}) e (\mathbf{K}_R) são novamente obtidas, assim como as soluções particulares para as forças nodais (\mathbf{S}_p) e nas seções transversais (\mathbf{N}_p), todas no sistema local. Os vetores de cargas nodais equivalentes (\mathbf{S}_N) e de cargas nodais equivalentes relativas (\mathbf{S}_{NR}) também são calculados. A resposta para as forças nodais (\mathbf{S}) é obtida pela equação do elemento, dada pela expressão (3.37). Através da relação (3.23) e a partir dos deslocamentos nodais (\mathbf{u}), determinam-se os deslocamentos nodais relativos (\mathbf{u}_R). Com a matriz de rigidez (\mathbf{K}_R), os deslocamentos nodais relativos (\mathbf{u}_R) e as cargas nodais equivalentes relativas (\mathbf{S}_{NR}), através da equação (3.31), obtêm-se as forças nodais relativas (\mathbf{S}_R). Para cada seção transversal, forma-se a matriz de interpolação (\mathbf{f}) para as forças nodais relativas, conforme a equação (3.12). Com a função de interpolação (3.10), calculam-se as solicitações em cada seção transversal (\mathbf{N}) e, conforme a equação (3.24), o vetor de deformações (\mathbf{e}). Finalmente, por integração e derivação numéricas, a partir das deformações (\mathbf{e}), determinam-se os deslocamentos ao longo do elemento.

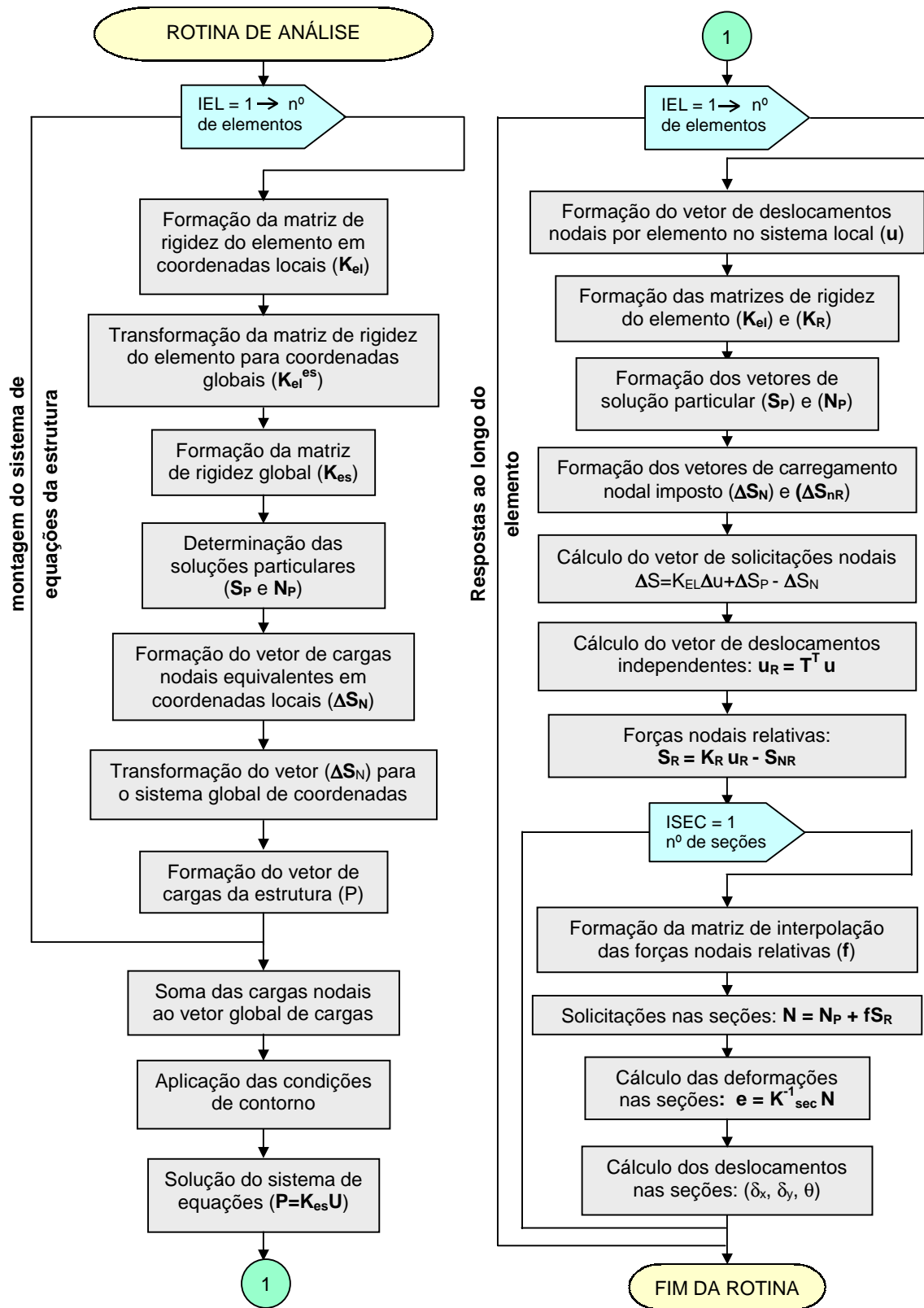


Figura 3.4 – Rotina de análise

3.2.3 Inclusão da Não Linearidade Geométrica para Pequenas Deformações

Grandes deslocamentos podem afetar a distribuição e a magnitude dos carregamentos e, também, a rigidez, em função das modificações geométricas da estrutura. Neste caso, as equações de equilíbrio devem ser formuladas com respeito à geometria deformada, que não é conhecida a princípio. Entre as abordagens mais utilizadas na análise estrutural, para a consideração da não linearidade geométrica, encontram-se as descrições Lagrangianas para a evolução da geometria. Alguns dos principais aspectos teóricos das abordagens Lagrangianas são apresentados a seguir e, em seguida, a modificação da formulação do elemento finito para o tratamento da não linearidade geométrica no modelo numérico.

3.2.3.1 Abordagens Lagrangianas para o Tratamento da Não Linearidade Geométrica

Quando a não linearidade geométrica é importante no comportamento de uma estrutura, dois efeitos distintos podem ser observados (Moon, 1994): o que se refere à estrutura como um todo, chamado de efeito **P- Δ** , e o que afeta localmente cada elemento, conhecido como efeito **P- δ** . O efeito local (**P- δ**) afeta a distribuição das solicitações ao longo do elemento e, também, a sua rigidez. O efeito global (**P- Δ**) reflete-se na mudança nas posições nodais, incluindo os movimentos de corpo rígido das diversas barras.

O efeito global **P- Δ** pode ser analisado através das abordagens Lagrangianas para a descrição da evolução da geometria da estrutura. As principais abordagens deste tipo são: a **Descrição Lagrangiana Total**, a **Descrição Lagrangiana com Atualização** e a **Descrição Lagrangiana com Atualização Parcial** (Wong & Tin-Loi, 1990). A maior diferença entre estas três formas de modelagem consiste na configuração geométrica tomada como referência ao longo da análise estrutural (Peterson & Petersson, 1985).

Na **Descrição Lagrangiana Total**, a configuração de referência é sempre a geometria indeformada inicial. Todos os deslocamentos são medidos a partir do eixo local original, que permanece fixo apesar do crescimento do carregamento e da mudança da geometria. Esta é a forma Lagrangiana mais simples, sendo sua principal desvantagem a impossibilidade da separação dos movimentos de corpo rígido, levando a uma descrição imprecisa da evolução da configuração de equilíbrio, exceto para pequenos deslocamentos (Wong & Tin-Loi, 1990).

Na **Descrição Lagrangiana com Atualização**, a última configuração geométrica conhecida da estrutura, correspondente à situação resultante da iteração anterior, é tomada como referência na iteração seguinte. O sistema de coordenadas de referência para cada elemento é o local atualizado, conforme as posições nodais instantâneas (Bathe & Bolourchi, 1979). Nesta abordagem, os movimentos de corpo rígido podem ser eliminados, uma vez que o sistema local acompanha estes deslocamentos do elemento. Embora o método apresente um elevado grau de precisão na descrição das configurações deformadas, tanto dos elementos como da estrutura, o esforço computacional é elevado em virtude do grande número de operações de atualização das coordenadas. Por isto, a descrição com atualização tem sido utilizada para grandes deslocamentos (Wong & Tin-Loi, 1990). Haisler et al (1977) considerou esta descrição Lagrangiana para o desenvolvimento de uma abordagem incremental para a determinação do comportamento pós flambagem das estruturas.

Uma abordagem intermediária, e que apresenta bons resultados para carregamentos na faixa de serviço das estruturas, é a **Descrição Lagrangiana com Atualização Parcial**. Esta descrição também faz distinção dos movimentos de corpo rígido e é de razoável precisão para pequenos ou médios deslocamentos (Wong & Tin-Loi, 1990). A atualização das coordenadas ocorre apenas no início das etapas incrementais de carregamento. Durante o processo iterativo interno de cada etapa, o sistema local de coordenadas permanece fixo, o que reduz o número de operações matriciais (Peterson & Petersson, 1985).

Segundo Bathe & Bolourchi (1979), tanto a Descrição Lagrangiana Total como as Atualizadas são capazes de fornecer matrizes de rigidez e de carga idênticas, sendo que as abordagens com atualização são computacionalmente mais eficientes. Enquanto na Descrição Lagrangiana Atualizada todas as mudanças da geometria são tratadas através de transformações entre o sistema atual de coordenadas e o sistema de origem, na abordagem Lagrangiana Total os parâmetros geométricos são aplicados sobre os carregamentos externos e nas funções de interpolação.

3.2.3.2 Aplicação na Formulação Matemática

A abordagem Lagrangiana com Atualização é utilizada no modelo numérico para o tratamento do efeito global (P- Δ). Neste caso, o sistema local de coordenadas (xy) assume a configuração atualizada ($x_i y_i$) ao final de cada iteração, acompanhando os movimentos de

corpo rígido de cada elemento à medida que os nós da estrutura assumem novas posições com referência ao sistema global (XY). Em vista disto, a cada nova iteração, as matrizes de transformação de coordenadas entre os sistemas local e global são atualizadas conforme as novas posições nodais. A figura 3.5 apresenta o sistema local atualizado ($x_i y_i$), em que o índice i diz respeito ao número da iteração. O ângulo para atualização dos sistemas de coordenadas locais (Ψ), mostrado na figura 3.5, é calculado pela equação (3.38).

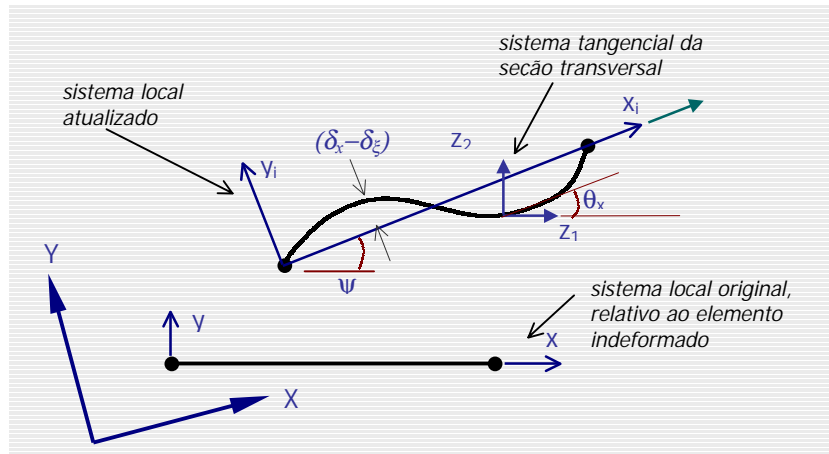


Figura 3.5 – Sistemas de eixos na não linearidade geométrica

$$\Psi = \tan^{-1} \left(\frac{u_5 - u_2}{\ell} \right) \quad (3.38)$$

onde:

Ψ : ângulo entre os sistemas local e local atualizado de coordenadas.

A inclusão do efeito local ($P-\delta$) se dá pela consideração da excentricidade ($\delta_x - \delta_\epsilon$), que corresponde à distância entre a posição de uma seção transversal do elemento deformado e o eixo local longitudinal atualizado, como mostrado na figura (3.5). A excentricidade ($\delta_x - \delta_\epsilon$) é aplicada ao componente axial das forças nodais relativas (S_{RI}) através da matriz de interpolação (\mathbf{f}), conforme a equação (3.39). Esta alteração em \mathbf{f} afeta a matriz de rigidez e o vetor de cargas do elemento, uma vez que a solução para as forças nas seções é a função de interpolação da formulação. A excentricidade ($\delta_x - \delta_\epsilon$) também modifica as soluções particulares para as forças nodais e nas seções transversais, como nas equações (3.40) e (3.41), respectivamente.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\ell & -1/\ell \\ (\delta_x - \delta_\xi) & x/\ell - 1 & x/\ell \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde:

δ_x : deslocamento da seção transversal em relação ao eixo de origem;
 δ_ξ : distância entre a posição correspondente à seção no novo eixo e a posição de origem.

$$\mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} \int_0^\ell p_\xi^x d\xi \\ -S_{P5} - \int_0^\ell p_\xi^y d\xi \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell -p_\xi^y \xi - p_\xi^z d\xi + \frac{1}{\ell} \int_0^\ell p_\xi^x (\delta_x - \delta_\xi) d\xi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{P5} \\ (\ell - x)S_{P5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_x^\ell p_\xi^x d\xi \\ \int_x^\ell p_\xi^y d\xi \\ \int_x^\ell (\xi - x)p_\xi^y + p_\xi^z d\xi + \int_x^\ell p_\xi^x (\delta_x - \delta_\xi) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Quando a configuração deformada do elemento é considerada, as solicitações nas seções são calculadas inicialmente com referência ao sistema local atualizado de coordenadas. Para que a verificação do equilíbrio das forças se dê corretamente, uma vez que as forças resultantes nas seções são calculadas no sistema tangencial (Z_1Z_2), as solicitações atuantes devem ser transformadas para este sistema, que neste caso não é paralelo ao sistema local atualizado. A necessária transformação das solicitações nas seções do sistema local atualizado para o sistema tangencial de coordenadas se dá conforme a equação (3.42). Na matriz de rotação (\mathbf{r}), apresentada em (3.43), o ângulo θ_x é o de rotação da seção transversal em relação ao eixo local atualizado, eliminados os movimentos de corpo rígido.

$$\mathbf{N}^z = \mathbf{r}\mathbf{N}_p + \mathbf{r}\mathbf{f}\mathbf{S}_G \quad (3.42)$$

onde:

\mathbf{r} : matriz de rotação entre os sistemas local e tangencial.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_x) & \sin(\theta_x) & 0 \\ -\sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

onde:

θ_x : ângulo de rotação da seção transversal em relação ao eixo local de referência, após a subtração dos movimentos de corpo rígido.

Além das modificações aplicadas nas equações para as soluções das forças nodais e nas seções transversais, uma adaptação na equação do elemento também se faz necessária. O objetivo desta adaptação é a consideração dos valores acumulados dos vetores de carregamento para que a não linearidade geométrica seja adequadamente representada. Ao contrário de uma análise de primeira ordem, em que o estado de deformação do elemento afeta apenas o incremento de carga seguinte, na análise de segunda ordem a flexão da barra afeta a distribuição das forças já atuantes na estrutura. Desta forma, a equação do elemento, dada por (3.37) para uma análise de primeira ordem, assume a forma da expressão (3.44) para uma análise com não linearidade geométrica. O vetor dos deslocamentos nodais relativos impostos ($\Delta \mathbf{u}_{\text{RN}}$), passa a considerar a diferença entre a solução particular do carregamento acumulado até a etapa atual (\mathbf{N}_p) e as forças nas seções até a etapa anterior (\mathbf{N}_0), conforme a equação (3.45), mantendo o caráter incremental da análise.

$$\mathbf{S} = \mathbf{K}_{el} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{S}_p - \Delta \mathbf{S}_n \quad (3.44)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{\text{RN}} = \int_0^{\ell} \mathbf{f}^T \mathbf{K}_{\text{sec}}^{-1} (\mathbf{N}_p - \mathbf{N}_0 + \Delta \mathbf{N}_t) dx \quad (3.45)$$

onde:

\mathbf{N}_0 : vetor das solicitações nas seções atuantes na etapa incremental anterior.

3.3 Implementação Numérica do Modelo

A implementação numérica da formulação do elemento finito do tipo híbrido demanda procedimentos para a integração e a derivação de funções, desde a montagem do sistema de equações até o cálculo dos deslocamentos ao longo do elemento. Estratégias incrementais por controle de carga ou de deslocamento, aliadas a um critério de convergência, são necessárias para que se possa determinar a resposta não linear da estrutura ao longo da história de carregamento. A introdução da protensão depende de rotinas numéricas para o cálculo das perdas e deformações, que sejam compatíveis com a idealização da estrutura. Os procedimentos numéricos utilizados no modelo proposto são apresentados a seguir, tendo em vista a manutenção da precisão proporcionada pelo elemento finito do tipo híbrido.

3.3.1 Integração Numérica

De forma geral, um problema de integração definida, tal qual é identificado nas equações (3.11), (3.13) ou (3.28), pode ser representado pela equação (3.46), em que a função $f(x)$ é conhecida como **integrando**. A integração numérica para solução de integrais deste tipo é necessária quando o integrando é excessivamente complicado, a integração faz parte de um processo numérico de resolução de equações diferenciais ou integrais, ou os valores desta função são conhecidos apenas em pontos discretos de seu domínio (Pozrikidis, 1998). Este último é o caso da implementação do modelo numérico. Os valores dos carregamentos, deformações, solicitações e da rigidez ao longo do elemento, por exemplo, são definidos apenas nos pontos de integração, correspondentes às seções transversais ou suas lâminas.

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (3.46)$$

onde:

I : valor numérico da integral definida;
 $f(x)$: integrando.

O procedimento básico para a integração envolve duas etapas (Pozrikidis, 1998):

- a) aproximação do integrando $f(x)$ por um polinômio interpolador $p_n(x)$ sobre todo o domínio de integração ou por um conjunto de polinômios definidos sobre intervalos;
- b) integração dos polinômios interpoladores sobre os seus respectivos domínios.

Os polinômios interpoladores $p_n(x)$ são geralmente capazes de fornecer aproximações adequadas das funções integrandas, e possuem a desejada propriedade de serem simples de integrar. Existem inúmeras fórmulas, ou quadraturas, para a integração numérica. Isto se deve às muitas possibilidades no que diz respeito à escolha dos pontos de integração, grau do polinômio interpolador e à posição dos pontos de integração com relação ao intervalo da função integranda (Groehs, 1979).

Os métodos de integração mais utilizados nos trabalhos numéricos podem ser classificados em dois grandes grupos. Um deles é o grupo de Newton-Cotes, cuja principal característica é a utilização de pontos de integração uniformemente espaçados. No outro, o grupo de Gauss, a distribuição dos pontos é definida de maneira a otimizar o resultado da integração numérica. Para isto diferentes pesos são atribuídos a cada um destes pontos e o domínio de integração é transformado para o intervalo $[-1,1]$. As quadraturas de Newton-Cotes e de Gauss utilizadas neste trabalho são apresentadas a seguir, conforme a descrição de Pozrikidis (1998):

- a) **regra trapezoidal**: consiste em um método de Newton-Cotes em que o integrando é aproximado por uma linha poligonal, unindo os pontos do gráfico da função integranda. Este método é o mais simples e de menor precisão, sendo adequado para intervalos lineares. Este método é apresentado na equação (3.47);

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{1}{2} h_i (f_i + f_{i+1}) \quad (3.47)$$

onde:

- h_i : distância entre dois pontos de integração subseqüentes;
 f_i : valor da função integranda no ponto de integração.

b) **regra 1/3 de Simpson composta**: as regras de Simpson pertencem ao grupo de Newton-Cotes. Na fórmula 1/3 de Simpson simples, a função integranda é aproximada por um conjunto sucessivo e superposto de parábolas compreendendo três pontos adjacentes do gráfico do integrando, consistindo em um polinômio interpolador local do segundo grau. Na fórmula composta, adota-se um número n par de intervalos e soma-se a contribuição de $\frac{1}{2} n$ parábolas não superpostas que ligam as séries de pontos $(1,2,3)$, $(3,4,5)$, ... , $(n-1,n,n+1)$. A expressão para este método é mostrada na equação (3.48);

$$I = \frac{1}{3} h(f_1 + 4f_2 + 2f_3 + f_4 + \dots + 2f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}) \quad (3.48)$$

onde:

h : distância entre os pontos de integração, constante;
 n : número de intervalos de comprimento h .

c) **regra de Gauss-Lobatto**: quadratura do grupo de Gauss em que os limites do domínio pertencem ao intervalo de integração. Nos métodos de Gauss, em geral, o domínio $a < x < b$ é substituído através de transformação linear pelo intervalo $-1 < t < 1$, e o integrando $f(x)$ é substituído pela função $h(t)$. A função $h(t)$ é aproximada por um polinômio de grau n cujo gráfico passa por $n+1$ pontos t_i , com $i = 1, \dots, n+1$, e então integrada entre -1 e 1 , conforme a equação (3.49). Os pesos w_i , além da própria distribuição dos pontos de integração, são definidos pelo método de maneira a otimizar a integração numérica. Na quadratura de Gauss-Lobatto, em particular, os pontos extremos são arbitrariamente incluídos no intervalo de integração e a otimização do domínio de integração restringe-se aos demais pontos.

$$\int_{-1}^1 h(t) dt \cong \sum_{i=1}^{n+1} h(t_i) w_i \quad (3.49)$$

onde:

w_i : peso do ponto de integração i ;
 t : variável de integração no domínio transformado $[-1,1]$;
 $h(t)$: integrando no domínio transformado.

A regra trapezoidal é utilizada para o cálculo das soluções particulares das forças nodais (\mathbf{S}_p) e nas seções transversais (\mathbf{N}_p) conforme as equações (3.8) e (3.11), respectivamente, sendo capaz de fornecer resultados precisos, já que os carregamentos distribuídos ao longo do elemento são normalmente lineares. As integrações realizadas nas seções transversais, como na equação (3.13), por exemplo, são realizadas através da regra 1/3 de Simpson composta. As integrações ao longo do elemento, como nas equações (3.29) e (3.28) para o vetor de deslocamentos nodais relativos impostos (\mathbf{u}_{RN}) e a matriz de flexibilidade (\mathbf{F}_R), respectivamente, podem ser efetuadas pelas quadraturas de Simpson ou Gauss-Lobatto. Enquanto Gauss-Lobatto é mais preciso, a regra de Simpson é interessante quando se deseja uma distribuição uniforme de pontos de integração.

3.3.2 Determinação dos Deslocamentos nas Seções Transversais

Os giros (θ) e os deslocamentos nas seções transversais (δ) ao longo de uma barra podem ser obtidos a partir da integração simples e dupla das curvaturas, respectivamente. Entretanto, as quadraturas de Gauss-Lobatto e Simpson não fornecem resultados para as seções transversais localizadas no interior dos intervalos de integração. Por isso, no modelo numérico, os métodos dos **momentos de área** e das **diferenças finitas** são combinados para que se possa determinar com adequada precisão os deslocamentos ao longo dos elementos. Através do método dos momentos de área, os giros e deslocamentos nos extremos dos intervalos são calculados por integração, utilizando Gauss-Lobatto ou Simpson. Os valores nos extremos servem, então, como condições de contorno para que se determinem os resultados no interior do intervalo através do método das diferenças finitas. Os deslocamentos são obtidos a partir das curvaturas e os giros a partir dos deslocamentos.

O método do primeiro momento de área é apresentado na equação (3.50). Com ele calcula-se, pela integração das curvaturas, o giro relativo entre as seções extremas do intervalo. O método do segundo momento de área é mostrado na equação (3.51) e fornece o deslocamento relativo entre os extremos do intervalo.

$$\theta_{AB} = \int \phi \, dx \quad (3.50)$$

onde:

θ_{AB} : giro relativo entre as seções nos extremos do módulo de integração.

$$\delta_B = \theta_A x - \int x \phi dx \quad (3.51)$$

onde:

δ_B : deslocamento transversal entre o início e o fim do intervalo;

θ_A : giro na seção transversal no início do módulo.

Segundo o método das diferenças finitas, o deslocamento em um ponto do interior de um intervalo de integração pode ser aproximado através da equação (3.52) a partir de valores conhecidos (δ_{i-1} ; δ_i ; δ_{i+1}). O método foi adaptado por Moon (1994) para a consideração de uma distribuição não uniforme de pontos. Os coeficientes (h_{i-1} ; h_i ; h_{i+1}) são obtidos a partir dos polinômios interpoladores de Lagrange, conforme as equações (3.53) a (3.55).

$$\delta_x = h_{i-1} \delta_{i-1} + h_i \delta_i + h_{i+1} \delta_{i+1} \quad (3.52)$$

onde:

δ_x : deslocamento transversal na posição x ;

h_i : coeficiente polinomial.

$$h_{i-1} = -\frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \quad (3.53)$$

onde:

x, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} : abscissa da seção e seções adjacentes.

$$h_i = -\frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \quad (3.54)$$

$$h_{i+1} = -\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})} \quad (3.55)$$

A primeira e a segunda derivadas da distribuição de deslocamentos em uma seção são mostradas nas equações (3.56) e (3.57), respectivamente. A segunda derivada mostrada na equação (3.57), nada mais é do que a curvatura na seção. Por isto, esta expressão pode gerar o sistema de equações da expressão (3.58), em que os deslocamentos ao longo do intervalo são obtidos a partir da distribuição de curvaturas, num processo de integração dupla. As curvaturas e os deslocamentos nas seções transversais de extremidades são as condições de contorno.

$$\dot{\delta}_x = \dot{h}_{i-1}\delta_{i-1} + \dot{h}_i\delta_i + \dot{h}_{i+1}\delta_{i+1} \quad (3.56)$$

$$\ddot{\delta}_x = \ddot{h}_{i-1}\delta_{i-1} + \ddot{h}_i\delta_i + \ddot{h}_{i+1}\delta_{i+1} \quad (3.57)$$

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \vdots \\ \delta_{n-3} \\ \delta_{n-2} \\ \delta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{h}_2 & \ddot{h}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddot{h}_2 & \ddot{h}_3 & \ddot{h}_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddot{h}_3 & \ddot{h}_4 & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddot{h}_{n-3} & \ddot{h}_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddot{h}_{n-3} & \ddot{h}_{n-2} & \ddot{h}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{h}_{n-2} & \ddot{h}_{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \vdots \\ \phi_{n-3} \\ \phi_{n-2} \\ \phi_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{h}_i\delta_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{h}_n\delta_n \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

De forma semelhante, como a primeira derivada do deslocamento é o giro na seção, a equação (3.56) origina o sistema da expressão (3.59), em que os giros ao longo do intervalo são obtidos pela derivação da distribuição de deslocamentos. Neste caso, as condições de contorno são as curvaturas das seções transversais posicionadas nas extremidades do intervalo de integração.

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \vdots \\ \theta_{n-3} \\ \theta_{n-2} \\ \theta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{h}_2 & \dot{h}_3 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \dot{h}_2 & \dot{h}_3 & \dot{h}_4 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{h}_3 & \dot{h}_4 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \dot{h}_{n-3} & \dot{h}_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \dot{h}_{n-3} & \dot{h}_{n-2} & \dot{h}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \dot{h}_{n-2} & \dot{h}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \vdots \\ \delta_{n-3} \\ \delta_{n-2} \\ \delta_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \phi_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \dot{h}_n \phi_n \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

3.3.3 Convergência e Estratégias para a Análise Incremental

Em uma análise estrutural, o problema consiste na definição da configuração de equilíbrio de uma estrutura frente a um determinado estado de carregamentos ou deslocamentos impostos. Quando a estrutura apresenta um comportamento não linear, o problema de análise estrutural pode ser representado pela equação (3.60), em que a configuração de equilíbrio é alcançada para um carregamento quando as forças atuantes e as resistentes forem equivalentes. A solução desta equação não pode ser obtida diretamente, porque as forças resistentes dependem do nível de carregamento imposto.

$${}^t \mathbf{P} - {}^t \mathbf{F} = 0 \quad (3.60)$$

onde:

- P**: vetor com o carregamento aplicado;
- F**: vetor com as forças resistentes;
- t*: tempo.

Análises incrementais por controle de deslocamento ou de carga constituem-se em abordagens eficientes para a solução dos problemas não lineares. Nestas de abordagens, a configuração de equilíbrio em uma etapa $t+\Delta t$ é determinada a partir da situação estável da etapa anterior t . Estratégias por incrementos de carga demandam menores esforços computacionais, enquanto as análises por controle de deslocamento podem determinar a resposta pós pico. A solução da equação (3.60) depende, também, de um critério de convergência compatível com a precisão da análise. O critério de convergência e as estratégias incrementais são apresentados a seguir, onde a variável **tempo** (t) é utilizada para representar a evolução da análise, como em (3.60).

3.3.3.1 Convergência pelo Critério de Deformações

A equação (3.61) apresenta o critério de convergência utilizado no modelo numérico. Com ele, o equilíbrio é atingido quando, para cada seção, a razão entre o somatório dos incrementos de deformação ao longo das lâminas da seção em uma iteração e o acumulado deste somatório durante a etapa incremental for menor que um valor de tolerância.

$$\frac{\left| \sum_1^n \Delta \varepsilon_i \right|}{\left| \sum_1^m \sum_1^n \Delta \varepsilon_i \right|} \leq \eta \quad (3.61)$$

onde:

- ε_i : deformação na lâmina i na iteração;
- n : número de lâminas em uma seção;
- m : número acumulado de iterações em uma etapa incremental;
- η : critério de tolerância ($\eta < 1$).

3.3.3.2 Análise por Incrementos de Carga

Utilizando-se o método de Newton-Raphson para o incremento de carga, a equação de equilíbrio (3.60) assume a forma da expressão (3.62), apresentada por Kao (1974). A cada iteração i determinam-se os incrementos de deslocamento ($\Delta \mathbf{u}_i$) pela equação (3.62) e, ao final da etapa, obtém-se os deslocamentos acumulados utilizando-se a equação (3.63).

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{i-1}^t \Delta \mathbf{u}_i = {}^{t+\Delta t} \mathbf{P} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{i-1} \quad (3.62)$$

onde:

- \mathbf{K}^t : matriz de rigidez tangente;
- $\Delta \mathbf{u}_i$: incremento de deslocamento na iteração i .

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^t \mathbf{u} + \sum \Delta \mathbf{u}_i \quad (3.63)$$

A figura 3.6 mostra o procedimento de aplicação do método de Newton-Raphson em uma etapa incremental. O algoritmo utilizado no modelo numérico é apresentado na figura 3.7. A partir da configuração de equilíbrio da etapa anterior (${}^t\mathbf{P}$, ${}^t\mathbf{u}$), a análise em uma etapa incremental ($t+\Delta t$) ocorre da seguinte forma:

- a) na primeira iteração, o incremento de carga (${}^{t+\Delta t}\mathbf{P}-{}^t\mathbf{P}$) é aplicado à estrutura. Nas iterações seguintes, aplicam-se as forças desequilibradas nas seções, tomando-as como solução particular ($\mathbf{N}_P = \mathbf{N}_{deseq}$). Em todos os casos, considerando-se o valor da última rigidez tangente conhecida, obtêm-se os deslocamentos ($\Delta\mathbf{u}_i$) e as demais respostas incrementais da estrutura;
- b) somam-se aos vetores de forças e deslocamentos, os incrementos obtidos na iteração;
- c) determinam-se as forças resistentes nas seções (\mathbf{N}_{RES});
- d) calculam-se as forças desequilibradas nas seções (\mathbf{N}_{deseq});
- e) verifica-se o critério de convergência da equação (3.61);
- f) caso tenha-se obtido a convergência, encerra-se a etapa incremental; em caso contrário, realiza-se uma nova iteração, retornando-se ao item a).

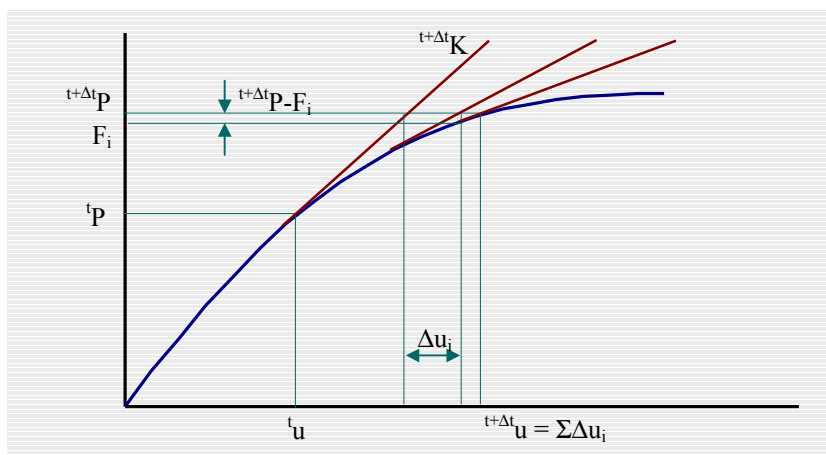


Figura 3.6 – Método de Newton-Raphson

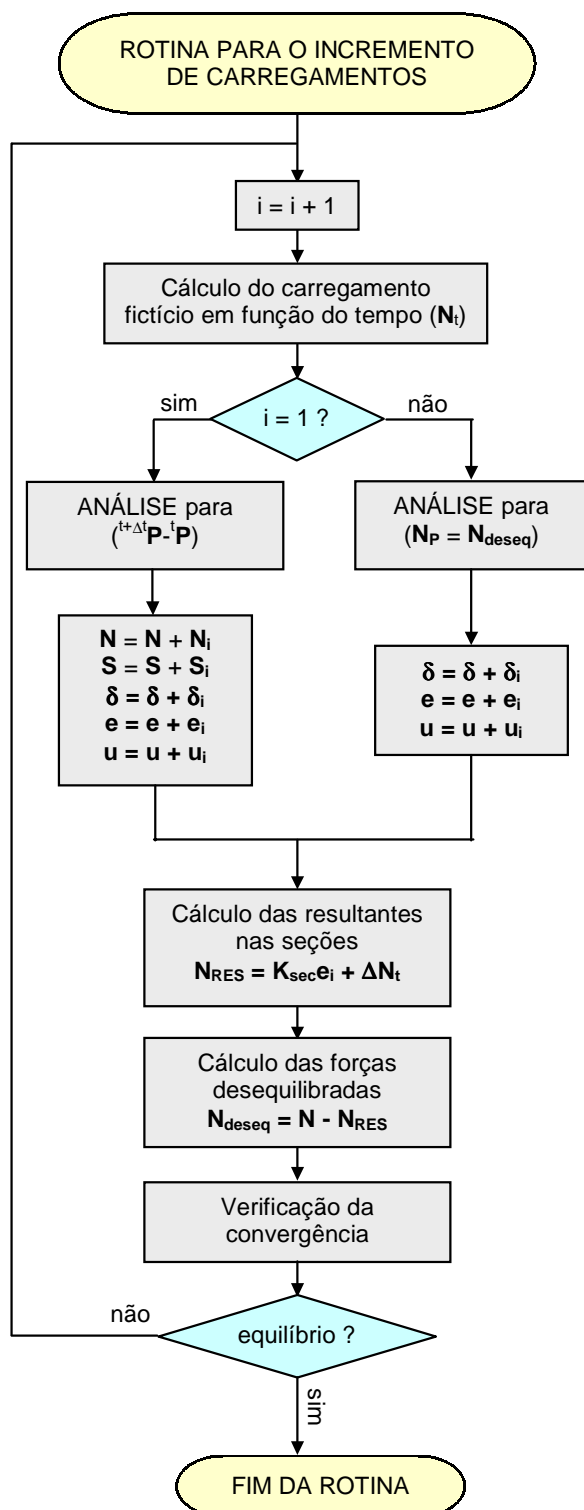


Figura 3.7 – Rotina para o incremento de carregamento

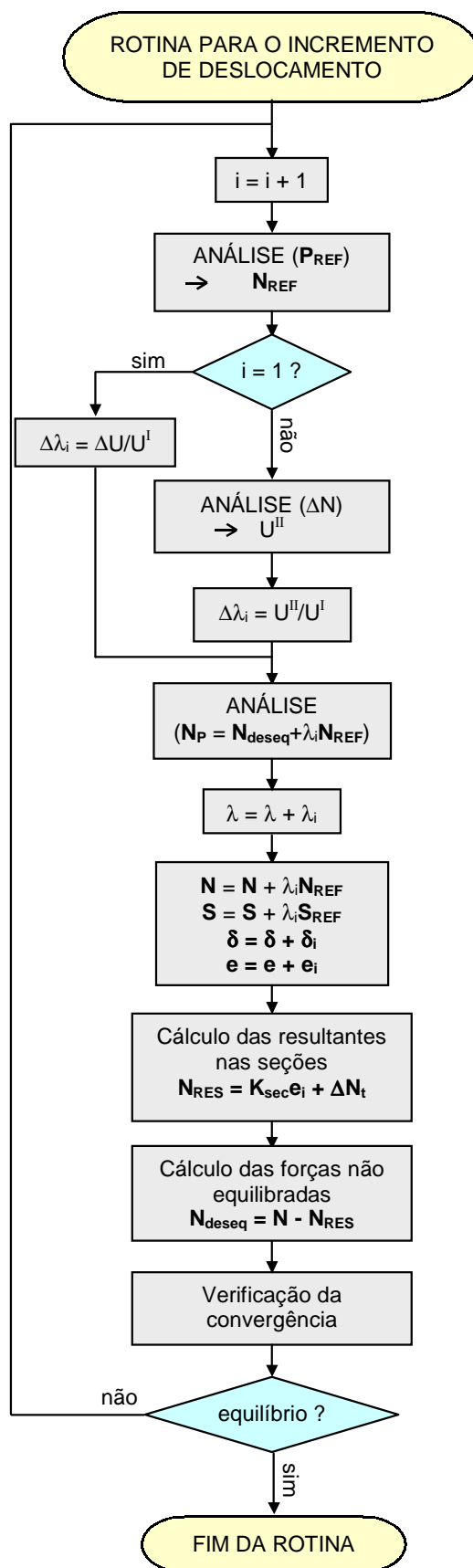


Figura 3.8 – Rotina para o incremento de deslocamento

3.3.3.3 Incrementos de Deslocamento

Se uma estrutura é submetida a uma carga isolada, a determinação da reação na direção desta carga, frente à imposição de um deslocamento qualquer, pode ser considerado um procedimento simples. Nos problemas em que um deslocamento é aplicado em um determinado ponto, com o restante da estrutura permanecendo descarregada, é possível considerar este deslocamento como variável independente, e determinar as reações. Situações como estas ocorrem na determinação das cargas limites na plasticidade, problemas de punção, entre outros. Quando, entretanto, as cargas existentes estão dispersas pela estrutura e devem ser mantidas em proporção na medida em que a estrutura se deforma, o procedimento para o incremento de deslocamentos não é tão simples assim (Zienkiewicz, 1971).

O algoritmo para a análise por incrementos de deslocamento descrito por Batoz & Dhatt (1979) é utilizado no modelo numérico. Nesta abordagem, buscam-se dois vetores de deslocamento (\mathbf{U}^I) e (\mathbf{U}^{II}) como solução do problema, conforme as equações (3.64) e (3.65), respectivamente. A primeira equação considera um carregamento \mathbf{P} de referência e a segunda leva em conta um vetor \mathbf{R} relativo ao carregamento não equilibrado.

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{U}^I \quad (3.64)$$

onde:

- \mathbf{P} : carregamento de referência;
- \mathbf{K} : matriz de rigidez tangente;
- \mathbf{U}^I : deslocamento resultante na estrutura devido ao carregamento de referência.

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{U}^{II} \quad (3.65)$$

onde:

- \mathbf{R} : resíduo, carregamento não equilibrado;
- \mathbf{U}^{II} : deslocamento resultante na estrutura devido ao carregamento residual.

O vetor de forças resultante da aplicação de um incremento de deslocamento arbitrário (ΔU_q), na direção e sentido correspondente ao grau de liberdade da estrutura de número q , é constituído por uma parcela do carregamento de referência (\mathbf{P}) e pelos carregamentos residuais (\mathbf{R}), conforme a equação (3.66). Nesta equação, o coeficiente λ é um parâmetro de carga que é variado para que se obtenha um vetor de cargas com a mesma distribuição do carregamento de referência (\mathbf{P}).

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} + \lambda \mathbf{P} \quad (3.66)$$

onde:

\mathbf{F} : vetor de forças produzido pelo deslocamento imposto;
 λ : parâmetro de carga

Os deslocamentos em toda a estrutura, resultantes da aplicação de ΔU_q , também podem ser obtidos com a soma de uma parcela referente ao carregamento de referência (\mathbf{P}) e uma relativa aos carregamentos não equilibrados nas iterações (\mathbf{R}), como apresentado na equação (3.67). O deslocamento na direção do grau de liberdade q deve ser igual ao incremento aplicado, conforme a equação (3.68).

$$\mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}^I + \mathbf{U}^{II} \quad (3.67)$$

$$U_q^{II} + \lambda U_q^I = \Delta U_q \quad (3.68)$$

Na equação (3.68) é possível isolar-se o parâmetro λ , obtendo-se a equação (3.69), na forma incremental. Com o valor do parâmetro λ e a equação (3.66) determinam-se as solicitações resultantes em função de um deslocamento imposto. Os deslocamentos ao final da etapa

incremental são determinados pela expressão (3.63). O parâmetro de carga ao final da etapa é determinado a partir da soma dos incrementos, como na equação (3.71).

$$\Delta\lambda_i = \frac{\Delta U_q - U_q^{\text{II}}}{U_q^{\text{I}}} \quad (3.69)$$

$$\lambda = \lambda + \sum \Delta\lambda_i \quad (3.70)$$

A rotina para aplicação do método de incremento de deslocamentos é apresentada na figura 3.8. A partir do estado de equilíbrio da etapa incremental anterior (${}^t\mathbf{P}$, ${}^t\mathbf{u}$) o procedimento para a determinação da nova configuração de equilíbrio após a aplicação de um incremento de deslocamento (ΔU_q) é o seguinte:

- a) aplica-se um carregamento de referência (\mathbf{P}_{REF}), considerando-se a rigidez tangente atualizada, determinando-se os deslocamentos na estrutura U_q^{I} e as forças de referência nas seções (\mathbf{N}_{REF});
- b) determina-se o parâmetro $\Delta\lambda_i$ através da expressão (3.69), considerando que o deslocamento U_q^{II} é nulo na primeira iteração, pois não existem cargas não equilibradas, e ΔU_q é nulo nas iterações seguintes;
- c) analisa-se a estrutura para as forças nas seções ($\mathbf{N}_{\text{P}} = \mathbf{N}_{\text{deseq}} + \Delta\lambda\mathbf{N}_{\text{REF}}$);
- d) somam-se os incrementos aos vetores de forças, deslocamentos e deformações;
- e) calculam-se as forças resultantes nas seções;
- f) verifica-se a convergência;
- g) caso não seja verificado o equilíbrio, retorna-se ao item a).

3.3.4 Introdução da Protensão

De acordo com a forma de idealização da estrutura no modelo, as propriedades e as deformações nas armaduras de protensão são determinadas nas seções transversais, ou pontos de integração. No caso dos cabos aderentes, após a transferência da protensão à estrutura, as armaduras passam a contribuir para a rigidez do elemento e as deformações, em cada seção, são determinadas a partir da compatibilidade de deformações, como mostrado na equação (3.71). Na protensão não aderente, a contribuição das armaduras para a rigidez do elemento não é somada, pois os cabos são considerados como componentes atuantes sobre a estrutura, o que demanda um método apropriado para o cálculo de suas deformações.

$$\Delta\varepsilon_p = \Delta\varepsilon_r + y_{ps}\Delta\phi \quad (3.71)$$

onde:

y_{ps} : distância da armadura de protensão à lâmina de referência da seção.

Diferentemente das armaduras passivas, em razão do elevado nível de tensões a que estão submetidas, as armaduras de protensão estão sujeitas a perdas de tensão que podem afetar, principalmente, o comportamento em serviço do elemento estrutural. Estas perdas resultam do comportamento reológico dos materiais, incluindo a fluência e a retração do concreto e a relaxação da armadura de protensão, e de causas instantâneas, como os recuos de ancoragem, o atrito e a deformação do concreto, durante a aplicação da protensão. O cálculo das perdas pelo comportamento reológico dos materiais se dá automaticamente nas análises dependentes do tempo. Na protensão com aderência inicial, as perdas por deformação elástica do concreto são calculadas durante a aplicação da protensão. As perdas por atrito, deformação elástica na pós-tensão e recuo de ancoragem, demandam as abordagens mostradas a seguir.

3.3.4.1 Perda por Encurtamento Elástico do Concreto

No caso da pós-tensão em que vários cabos são utilizados, a perda por encurtamento do concreto em cada armadura depende da sua ordem de protensão. Embora o cálculo destas

perdas possa ser realizado de uma maneira analiticamente exata, os valores obtidos não são necessariamente os observados na prática. Imperfeições na execução e as variações das propriedades ao longo dos elementos podem provocar divergências entre valores medidos e os estimados. Portanto, é razoável a utilização de um método aproximado, como o de Moon (1994), apresentado na equação (3.72).

$$\Delta f_{ps,i} = \sum_{j=i+1}^n \left\{ \frac{f_{ps,j} A_{ps,j}}{\sum_{k=1}^m \frac{[EA]_{c,k} w_c}{L_c}} (A_{ps,i} E_{ps}) \right\} \quad (3.72)$$

onde:

- $\Delta f_{ps,i}$: perda de protensão por deformação elástica do concreto no cabo i ;
- $f_{ps,j}$: tensão no cabo j ;
- $A_{ps,j}$: área do cabo j ;
- w_k : fator de contribuição da seção k , em unidade de comprimento;
- $[EA]_{c,k}$: rigidez axial da seção k .

3.3.4.2 Perdas de Protensão por Atrito

A equação para a determinação das perdas por atrito em armaduras utilizadas na pós-tensão é mostrada na expressão (3.73). Nesta equação, utiliza-se a coordenada retilínea (x), que se constitui em uma aproximação no caso de perfis de protensão curvos. Normalmente, tal aproximação não compromete a precisão dos resultados, uma vez que estes perfis costumam ser bastante abatidos.

$$\Delta f_{ps}(x) = f_{ps,j} [1 - e^{-\mu\alpha - kx}] \quad (3.73)$$

onde:

- $f_{ps,j}$: tensão na armadura na ancoragem ativa;
- μ : coeficiente de atrito por curvatura;
- α : variação angular entre a ancoragem ativa e a seção considerada;
- k : coeficiente de atrito por curvaturas involuntárias;
- x : coordenada da seção considerada.

Para se obter as variações angulares, os perfis de protensão são aproximados através dos polinômios interpoladores de Lagrange, conforme a equação (3.74), com os coeficientes polinomiais dados pelas expressões (3.53) a (3.55). O ângulo do perfil na seção i em relação ao eixo do elemento pode ser calculado pela equação (3.75). A variação angular (α) é determinada pela diferença entre os ângulos da seção i e da seção da ancoragem ativa, conforme a equação (3.76).

$$y(x) = h_{i-1}(x)y_{i-1} + h_i(x)y_i + h_{i+1}(x)y_{i+1} \quad (3.74)$$

onde:

y_i : coordenada vertical do perfil na seção i ;

$$\bar{\alpha}_i = \tan^{-1}[\dot{y}(x)] = \tan^{-1}[\dot{h}_{i-1}(x)y_{i-1} + \dot{h}_i(x)y_i + \dot{h}_{i+1}(x)y_{i+1}] \quad (3.75)$$

onde:

$\bar{\alpha}_i$: ângulo da seção i com relação ao eixo do elemento.

$$\alpha_i = |\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_1| \quad (3.76)$$

3.3.4.3 Perdas por recuo de ancoragem

O recuo da ancoragem durante a cravação das cunhas produz uma queda de tensão na armadura. Esta perda é máxima na ancoragem ativa e decresce em direção ao interior do elemento, até o ponto de repouso, em função do atrito. No modelo numérico, a formulação aproximada utilizada por Moon (1994) é considerada para o cálculo destas perdas. Conforme esta formulação, a posição do ponto de repouso (x) é calculada pela equação (3.77), em que o parâmetro (z) é dado na expressão (3.78). A partir da abscissa do ponto de repouso, a perda

de tensão na seção da ancoragem ativa é determinada pela equação (3.79). Se, no entanto, a abscissa do ponto de repouso for maior do que o comprimento cabo, as perdas nas extremidades do cabo devem ser obtidas pelas equações (3.80) e (3.81).

$$x = \sqrt{\frac{E_p \delta}{(z/l)}} \quad (3.77)$$

onde:

- x : abscissa do ponto de repouso;
- δ : valor do recuo de ancoragem;
- z : variação de tensão entre as extremidades do cabo, como em (3.78).

$$z = f_{p,j} - f_p(l) \quad (3.78)$$

onde:

- $f_{p,j}$: tensão de protensão na ancoragem ativa antes do recuo;
- $f_p(l)$: tensão na ancoragem passiva de protensão após perdas por atrito..

$$\Delta f_p(0) = 2E_p \frac{\delta}{x} \quad (3.79)$$

onde:

- $\Delta f_p(0)$: perda de tensão na ancoragem ativa devida ao recuo;

$$\Delta f_p(l) = E_p \frac{\delta}{l} + \left[(1 + e^{-\mu \alpha_l - kl}) f_{p,j} \right] \quad (3.80)$$

onde:

- α_l : variação angular entre os extremos do cabo.

$$\Delta f_p(0) = E_p \frac{\delta}{l} - \left[(1 + e^{-\mu\alpha_l - kl}) f_{p,j} \right] \quad (3.81)$$

3.3.4.4 Formulação para o Cálculo das Deformações nas Armaduras Não Aderentes

No modelo numérico, as deformações nas armaduras não aderentes são determinadas pelo método proposto por Moon (1994). A formulação é válida para elementos bi-apoiados ou contínuos, considera a compatibilidade de deslocamentos entre a armadura não aderente e o concreto adjacente ao perfil de protensão, e inclui o efeito do atrito entre o aço e a bainha. Neste método, a tensão em um determinado ponto da armadura não aderente é obtida considerando-se as tensões nos demais pontos. Esta influência pode ser formulada matematicamente através de coeficientes de atrito, calculados pela equação (3.82), com os quais a tensão em um ponto qualquer pode ser obtida conforme a equação (3.83). Aceitando a hipótese de que a armadura de protensão não aderente permanece no regime de comportamento elástico, mesmo na ruptura, a equação (3.83) para tensões pode ser escrita para deformações, como na expressão (3.84).

$$\chi_{i,k} = e^{(-\mu\alpha_{i,k} - kx_{i,k})} \quad (3.82)$$

onde:

$\chi_{i,k}$: coeficiente de atrito entre as seções i e k ;
 $x_{i,k}$: distância entre as seções i e k .

$$\sigma_i^u = \sigma_k^u \chi_{i,k} \quad (3.83)$$

onde:

σ_i^u : tensão na armadura não aderente na seção i .

$$\Delta \varepsilon_i^u = \Delta \varepsilon_k^u \chi_{i,k} \quad (3.84)$$

onde:

ε_i^u : deformação na armadura não aderente na seção i .

Considerando, inicialmente, a hipótese de que deformações no concreto ocorram apenas em uma seção k , a equação para a compatibilidade de deslocamentos é mostrada na expressão (3.85). O fator de contribuição (w_k) corresponde ao comprimento de influência da seção. O coeficiente (π_k), dado pela expressão (3.86), considera a contribuição das demais seções e, no caso de atrito nulo, equivale ao próprio comprimento do elemento. Por isto, o lado esquerdo da equação (3.85) representa a variação total de comprimento do cabo e a equação (3.86) mostra como as deformações concentradas distribuem-se ao longo da armadura.

$$\Delta \varepsilon_k^c w_k = \Delta \varepsilon_k^u \pi_k \quad (3.85)$$

onde:

ε_k^c : deformação no concreto ao nível da armadura;

w_k : fator de peso de contribuição da seção k ;

π_k : fator de contribuição das demais seções para a deformação da armadura na seção k .

$$\pi_k = (\chi_{1,k} w_1 + \dots + \chi_{i,k} w_i + \dots + \chi_{n,k} w_n) \quad (3.86)$$

Quando todo o elemento sofre flexão, a deformação na armadura não aderente na seção i , em função das deformações nos demais pontos do cabo, é dada pela equação (3.87). Substituindo-se a equação (3.85) na (3.86), a deformação na armadura na seção i pode, então, ser determinada conforme a expressão (3.88).

$$\Delta \varepsilon_i^u = \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k^u \chi_{i,k} \quad (3.87)$$

$$\Delta \varepsilon_i^u = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta \varepsilon_k^c w_k}{\pi_k} \chi_{i,k} \quad (3.88)$$

Para fins de programação numérica, a equação (3.88) pode ser reescrita como a expressão (3.89), onde as deformações na armadura em uma seção, devidas à flexão das seções à esquerda ($\Delta \varepsilon_i^{ue}$), da própria seção ($\Delta \varepsilon_i^{us}$) e das seções à direita ($\Delta \varepsilon_i^{ud}$), são dadas pelas equações (3.90), (3.91) e (3.92), respectivamente. A deformação no concreto, na seção i , ao nível da armadura não aderente, é determinada pela expressão (3.93).

$$\Delta \varepsilon_i^u = \Delta \varepsilon_i^{ue} + \Delta \varepsilon_i^{us} + \Delta \varepsilon_i^{ud} \quad (3.89)$$

onde:

- $\Delta \varepsilon_i^{ue}$: deformação na armadura na seção i devida à flexão das seções à esquerda;
- $\Delta \varepsilon_i^{us}$: deformação na armadura na seção i em função da flexão da própria seção;
- $\Delta \varepsilon_i^{ud}$: deformação na armadura na seção i pela flexão das seções à direita

$$\Delta \varepsilon_i^{ue} = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta \varepsilon_j^u \chi_{i,j} \quad (3.90)$$

$$\Delta \varepsilon_i^{us} = \frac{\Delta \varepsilon_i^c w_i}{\pi_i} \quad (3.91)$$

$$\Delta \varepsilon_i^{ud} = \sum_{j=i+1}^n \Delta \varepsilon_j^u \chi_{i,j} \quad (3.92)$$

$$\Delta \varepsilon_i^c = \Delta \varepsilon_{r,i} + y_{ps,i} \Delta \phi_i \quad (3.93)$$

onde:

$\varepsilon_{r,i}^c$: deformação da fibra de referência da seção i ;
 $\Delta \phi_i$: curvatura da seção i ;

Por serem funções da geometria, apenas, e desconsiderando-se as mudanças produzidas pela deformação do elemento, os coeficientes π_i , $\chi_{i,i-1}$ e $\chi_{i,i+1}$ podem ser determinados no início da análise. Salienta-se que a hipótese de que a armadura não aderente permanece no regime elástico é utilizada apenas para o cálculo da deformação, sendo considerado o modelo constitutivo não linear para o restante da análise (Moon, 1994).

4 Relações Constitutivas do Modelo

Os modelos constitutivos, que representam o comportamento dos materiais, são fundamentais para o bom desempenho de uma análise numérica. Estas relações devem ser compatíveis com a idealização da estrutura, modelar o comportamento dos materiais nas condições de carregamento previstas e envolver um número reduzido de variáveis, de maneira a não comprometer a eficiência computacional. As equações constitutivas utilizadas no modelo numérico possuem estas características, constituindo-se, também, em formulações consagradas e amplamente utilizadas em trabalhos numéricos descritos na literatura.

Ao longo deste capítulo, apresentam-se as relações constitutivas uniaxiais, apropriadas à discretização das seções e das armaduras, utilizadas no modelo numérico. Descrevem-se, inicialmente, os modelos constitutivos para ações de curta duração, incluindo as equações para o concreto, as armaduras passivas e o aço de protensão, sob carregamentos monotônicos ou de caráter cíclico. Em seguida, apresentam-se as abordagens utilizadas para a modelagem da fluência e retração do concreto e da relaxação do aço de protensão, baseadas na cadeia de elementos Maxwell de Bazant & Wu (1974).

4.1 Relações Constitutivas Independentes do Tempo

O comportamento do concreto à compressão, sob cargas monotônicas de curta duração, é modelado através da equação de Saenz (Kabaila et al, 1969) até o pico de resistência, seguida por uma relação de amolecimento linear até a ruptura. O comportamento do concreto à tração é considerado linear até a fissuração, a partir da qual uma relação de *tension-stiffening* é aplicada, utilizando recomendações de Owen & Figueiras (1984). A resposta do concreto sob cargas cíclicas é modelada com as recomendações de Moon (1994) e Karsan & Jirsa (1969). As armaduras passivas são representadas por um modelo bi-linear, enquanto o aço de protensão é modelado pela equação de Devalapura e Tradós (1992). Para ambas as armaduras, utilizam-se as regras de endurecimento cinemático ou isotrópico para as respostas às cargas cíclicas. As relações constitutivas independentes do tempo são descritas neste item.

4.1.1 Modelos para o Concreto

O comportamento tensão-deformação do concreto submetido à compressão mostra um desempenho que pode ser considerado linear elástico até cerca de 30% da resistência máxima (f_{co}) para cargas rápidas, porque, neste caso, as microfissuras na região entre a matriz de pasta de cimento e o agregado graúdo permanecem inalteradas. Para tensões superiores, a curva mostra uma queda gradual em sua declividade, até tornar-se praticamente horizontal perto da resistência máxima (f_{co}). A partir deste ponto, a tensão decresce até o corpo-de-prova sofrer ruptura. Se carregamentos cíclicos são aplicados, observa-se a degradação no módulo de elasticidade e na resistência, principalmente se o nível de tensão em que ocorrem os descarregamentos são superiores a 75% da resistência. À medida que o número de ciclos aumenta, as curvas de descarregamento apresentam não linearidades, e laços característicos de histerese são formados no recarregamento (Mehta & Monteiro, 1994).

Para a tração uniaxial, a forma da curva tensão-deformação e o módulo de elasticidade do concreto sob tração uniaxial são similares aos observados sob compressão uniaxial. No entanto, há algumas diferenças importantes no comportamento, pois o estado de tração tende a interromper as fissuras menos freqüentemente do que o estado de tensões de compressão, e por isso espera-se que o intervalo estável de propagação de fissuras seja muito mais curto (Mehta & Monteiro, 1994). As relações constitutivas utilizadas para a modelagem do comportamento do concreto sob carregamentos de curta duração são descritas a seguir.

4.1.1.1 Relações Constitutivas para Carregamentos Monotônicos

A equação de Saenz (Kabaila et al, 1969) para o concreto sob cargas de compressão, desde a deformação nula até o pico de resistência, é mostrada na equação (4.1). A relação (4.2) é a expressão para o módulo de elasticidade, obtida pela derivação da equação (4.1) com respeito às deformações. O comportamento de amolecimento apresentado pelo concreto após o pico de resistência, é modelado por uma relação tensão-deformação linear, como nas equações (4.3) e (4.4), respectivamente, para a tensão e o módulo de elasticidade tangente do concreto. O comportamento do concreto à compressão pode ser observado na figura 4.1.

$$\sigma_c = \frac{E_c \varepsilon_m}{1 + \left(\frac{E_c \varepsilon_{c0}}{f_c} - 2 \right) \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{c0}} \right) + \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{c0}} \right)^2} \quad (4.1)$$

onde:

- σ_c : tensão no concreto;
- E_c : módulo de elasticidade do concreto;
- ε_m : deformação mecânica;
- f_c : resistência à compressão ou resistência de pico;
- ε_{c0} : deformação relativa ao pico de resistência.

$$E_c^t = \frac{E_c}{\left[1 + \left(\frac{E_c \varepsilon_{c0}}{f_c} - 2 \right) \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{c0}} \right) + \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right]^2} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right] \quad (4.2)$$

$$\sigma_c = E_c^t (\varepsilon_m - \varepsilon_{c0}) + f_c \quad (4.3)$$

$$E_c^t = \frac{f_{cf} - f_c}{\varepsilon_{cf} - \varepsilon_{c0}} \quad (4.4)$$

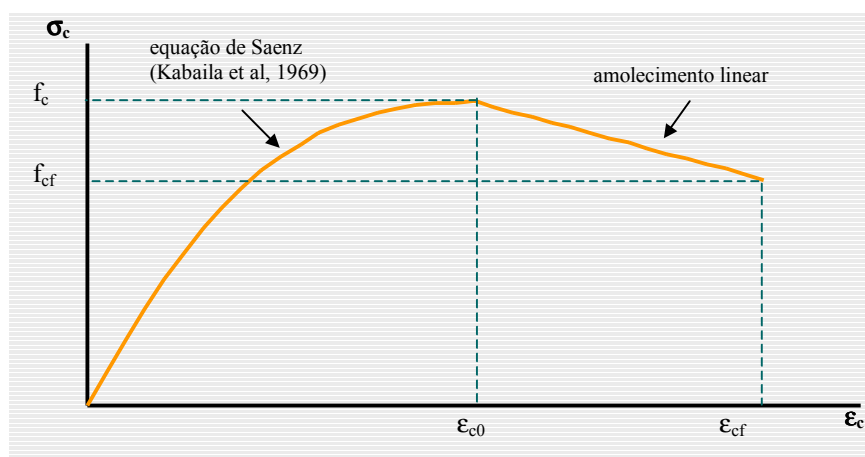


Figura 4.1 – Comportamento do concreto à compressão

A resposta do concreto submetido a tensões de tração é considerada linear até a fissuração, com o módulo de elasticidade igual ao módulo tangente inicial (E_c), conforme a equação (4.5). Quando a resistência à tração é excedida em uma seção, considera-se esta seção fissurada, e que apenas as armaduras contribuem para a resistência aos esforços de tração. No

entanto, em uma região entre duas fissuras, a aderência entre concreto e aço restringe o alongamento da armadura, e parte do esforço de tração é transferida ao concreto. Esta contribuição do concreto na zona fissurada para a rigidez do elemento, possível quando existem armaduras aderentes, é chamada de *tension stiffening*. A desconsideração deste efeito normalmente resulta em uma avaliação exagerada dos deslocamentos (Ghali & Favre, 1985).

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_m \quad 0 \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon_{ct} \quad (4.5)$$

onde:

ε_{ct} : deformação de fissuração do concreto.

A relação de *tension stiffening* utilizada no modelo numérico apresenta dois intervalos de comportamento distintos, conforme a figura 4.2. No primeiro intervalo, com a fissuração, considera-se uma redução de tensão ($\beta_\sigma f_{ct}$) mais acentuada, que se distribui por um intervalo de deformações cujo comprimento ($\beta \varepsilon_{ct}$) depende das características de cada estrutura. Segundo Owen & Figueiras (1984), para o caso de existirem armaduras aderentes no elemento, pode-se arbitrar a queda inicial de tensão em 40% da resistência à tração do concreto (f_{ct}). Se não houver armadura aderente, no entanto, como é o caso da protensão total sem aderência, não há recomendação disponível na literatura sobre a magnitude desta redução. Se for considerada uma queda inicial de 100% ($\beta_\sigma = 1$), a tensão reduz-se à zero ao final da primeira fase do modelo de *tension stiffening*, levando a um processo de fissuração mais intenso. Este primeiro trecho é representado pelas equações (4.6) e (4.7), para a tensão e o módulo de elasticidade, respectivamente. Após a queda inicial na resistência, a tensão no concreto decresce gradativamente a uma taxa constante até atingir um valor nulo a uma deformação de 0,2 %, como nas equações (4.8) e (4.9) para a tensão e o módulo, respectivamente. A partir da deformação de 0,2 %, a tensão e o módulo de elasticidade permanecem nulos, conforme a equação (4.10).

$$\sigma_c = f_{ct} + E_c^t (\varepsilon_m - \varepsilon_{ct}) \quad \text{para} \quad \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_m \leq (1 + \beta) \varepsilon_{ct} \quad (4.6)$$

onde:

f_{ct} : resistência à tração do concreto;
 $\beta \varepsilon_{ct}$: comprimento do primeiro trecho do modelo de *tension stiffening*.

$$E'_c = -\frac{\beta_\sigma f_{ct}}{\beta \epsilon_{ct}} \quad \text{para} \quad \epsilon_{ct} \leq \epsilon_m \leq (1 + \beta)\epsilon_{ct} \quad (4.7)$$

onde:

$\beta_\sigma f_{ct}$: valor da redução de tensão na fase inicial do modelo de *tension stiffening*.

$$\sigma_c = (1 - \beta_\sigma) f_{ct} + E'_c [\epsilon_m - \epsilon_{ct} (1 + \beta)] \quad \text{para} \quad (1 + \beta)\epsilon_{ct} \leq \epsilon_m \leq 0,002 \quad (4.8)$$

$$E'_c = -\frac{(1 - \beta_\sigma) f_{ct}}{0,002 - (1 + \beta)\epsilon_{ct}} \quad \text{para} \quad (1 + \beta)\epsilon_{ct} \leq \epsilon_m \leq 0,002 \quad (4.9)$$

$$E'_c = 0 \quad ; \quad \sigma_c = 0 \quad \text{para} \quad \epsilon_m > 0,002 \quad (4.10)$$

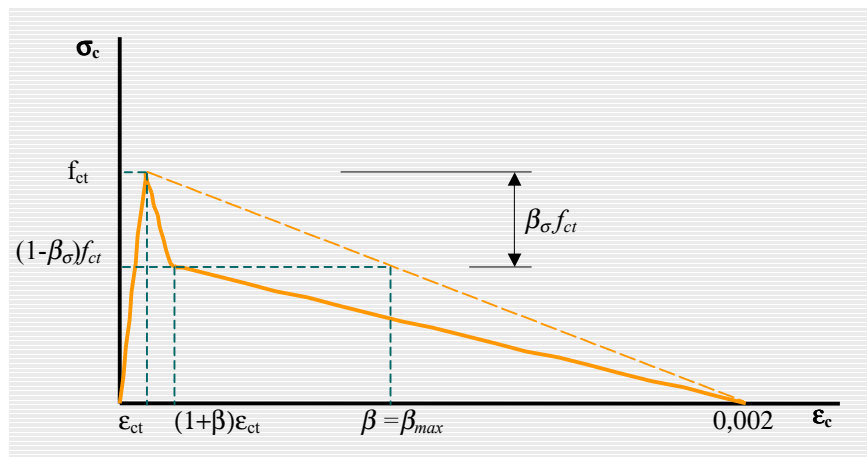


Figura 4.2 – Relação tensão-deformação para o concreto à tração

4.1.1.2 Relações para Carregamentos Cíclicos

Quando o concreto é submetido a carregamentos de caráter cíclico, a envoltória dos pontos de tensão máxima coincide com a curva tensão-deformação monotônica, não importando as

deformações acumuladas em ciclos anteriores. Além disso, as curvas tensão-deformação do concreto para estes carregamentos apresentam os chamados **pontos comuns** (ϵ_{pc}), onde as trajetórias de recarregamento e descarregamento de um mesmo ciclo se cruzam. Tensões além do ponto comum produzem deformações plásticas adicionais, enquanto tensões inferiores correspondem a pontos sobre um laço fechado de histerese (Karsan & Jirsa, 1969).

Além dos pontos comuns, outros dois pontos caracterizam um ciclo de carregamento. O **ponto na envoltória** situa-se sobre a curva tensão-deformação monotônica, correspondendo à deformação (ϵ_{en}) onde tem início o descarregamento. O **ponto de deformações plásticas** corresponde à deformação permanente acumulada (ϵ_{pl}) após um completo descarregamento. A figura 4.3 apresenta um comportamento cíclico do concreto, onde podem ser observados estes pontos característicos. Baseando-se nas observações experimentais de Karsan & Jirsa (1969), Moon (1994) apresenta as relações (4.11) e (4.12), em que a deformação plástica e a deformação no ponto comum, respectivamente, são funções da deformação na envoltória.

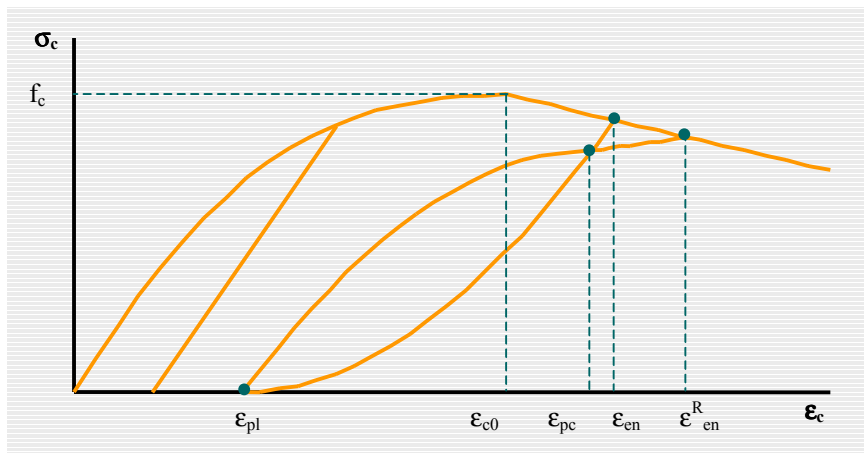


Figura 4.3 – Comportamento cíclico do concreto

$$\epsilon_{pl} = 0,145 \frac{\epsilon_{en}^2}{\epsilon_{c0}} + 0,13 \epsilon_{en} \quad (4.11)$$

onde:

- ϵ_{pl} : deformação plástica;
- ϵ_{en} : deformação correspondente ao ponto da envoltória.

$$\varepsilon_{pc} = -0,416\varepsilon_{c0} + \sqrt{0,173 + 6,25\varepsilon_{c0} \frac{\varepsilon_{pl}}{1,76 - \zeta}} \quad (4.12)$$

onde:

- ε_{pc} : deformação relativa ao ponto comum entre as curvas de descarregamento e recarregamento;
- ζ : parâmetro utilizado para a descrição da dispersão dos pontos comuns, fixado em 0,75.

Na equação (4.12), o parâmetro ζ considera a variabilidade da distribuição experimental dos pontos comuns no espaço tensão-deformação. Segundo Karsan & Jirsa (1969), a posição deste ponto em um ciclo está relacionada com a magnitude da tensão máxima verificada no ciclo anterior, fazendo com que o parâmetro de dispersão assuma valores entre 0,63 e 0,76. Moon (1994) apresentou o valor de 0,75 para ζ , reduzindo a quantidade de variáveis internas e a complexidade da análise. Segundo o autor, tal valor situa a distribuição dos pontos comuns na média das medições experimentais.

Outro ponto característico da resposta cíclica do concreto é o de **retorno à envoltória** (ε_{en}^R), a partir do qual o recarregamento volta a seguir a relação tensão-deformação monotônica, como na figura 4.3. A equação de Karsan & Jirsa (1969) para o cálculo da deformação no ponto de retorno à envoltória (ε_{en}^R) a partir da deformação plástica (ε_{pl}), foi alterada por Moon (1994) a fim de representar a relação tensão-deformação entre ε_{pc} e ε_{en}^R por uma linha reta, conforme a equação (4.13).

$$\varepsilon_{en}^R = \frac{1}{2} \left[-0,489\varepsilon_{c0} + \sqrt{0,239\varepsilon_{c0}^2 + 10,573\varepsilon_{c0}\varepsilon_{pl}} + \varepsilon_{en} \right] \quad (4.13)$$

onde:

- ε_{en}^R : deformação correspondente ao ponto da envoltória no recarregamento.

As curvas de descarregamento e recarregamento, entre os pontos característicos da resposta cíclica, foram formuladas matematicamente por Moon (1994) a partir das observações de Karsan & Jirsa (1969). Ambas as curvas, sendo que a de recarregamento somente até o ponto comum, são modeladas por parábolas cúbicas, conforme a equação (4.14). Obtida pela derivação deste polinômio, a relação (4.15) mostra a equação para o módulo de elasticidade.

Os coeficientes polinomiais destas parábolas são determinados através da aplicação de condições de contorno, que são as tensões e os módulos nos extremos das curvas. O sistema genérico apresentado na equação (4.16) é utilizado para a determinação destes coeficientes.

$$\sigma_c = a\varepsilon_m^3 + b\varepsilon_m^2 + c\varepsilon_m + d \quad (4.14)$$

onde:

a, b, c e d : coeficientes polinomiais.

$$E_c = 3a\varepsilon_m^2 + 2b\varepsilon_m + c \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1^3 a + \varepsilon_1^2 b + \varepsilon_1 c + d = \sigma_1 \\ \varepsilon_2^3 a + \varepsilon_2^2 b + \varepsilon_2 c + d = \sigma_2 \\ 3\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 + c = E_1 \\ 3\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2 + c = E_2 \end{cases} \quad (4.16)$$

onde:

ε_1 e ε_2 : deformações correspondentes aos pontos inicial e final, respectivamente, da parábola cúbica;

σ_1 e E_1 : tensão e módulo no ponto de início da parábola cúbica;

σ_2 e E_2 : tensão e módulo no ponto final da parábola cúbica.

Considerando as hipóteses acima, de acordo com a figura 4.3, as respostas do concreto nas diversas etapas de comportamento cíclico são modeladas da seguinte forma:

- a) o **descarregamento e o recarregamento antes do pico de resistência** são modelados por retas coincidentes, considerando o módulo tangente inicial;
- b) o **descarregamento**, partindo de um ponto na envoltória **além do pico de resistência**, é modelado pelas parábolas (4.14) e (4.15), com início no ponto de envoltória ($\varepsilon_1 = \varepsilon_{en}$) e fim no ponto de deformação plástica ($\varepsilon_2 = \varepsilon_{pl}$). A tensão no ponto de envoltória (σ_1) é dada pela relação tensão-deformação monotônica. O módulo da curva de descarregamento no ponto da envoltória (E_1) é calculado conforme a equação (4.17). A tensão no ponto de deformação plástica é, por definição, nula ($\sigma_2 = 0$). O módulo da curva de descarregamento no ponto de

deformação plástica (E_2) é dado pela equação (4.18), cujo valor se reduz à medida que a deformação do ponto de envoltória aumenta;

$$E_1 = E_{en} = e^{-\frac{\varepsilon_{en}}{10\varepsilon_{c0}}} E_c^{t0} \quad (4.17)$$

$$E_{pl}^d = 10^{-2,5 \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{c0}} E_c'} \quad (4.18)$$

onde:

E_{pl}^d : módulo de elasticidade no ponto de plastificação no descarregamento;

- c) o **recarregamento** desde o ponto de deformação plástica até o ponto comum, em um ciclo iniciado com uma deformação maior do que a do pico de resistência, também é modelado pelas parábolas (4.14) e (4.15). Neste caso, o ponto de início é o de deformação plástica ($\varepsilon_1 = \varepsilon_{pl}$), em que a tensão é nula ($\sigma_1=0$). O módulo de elasticidade neste ponto, considerando o recarregamento, é tomado igual ao módulo no ponto de envoltória no caso de descarregamento, conforme a equação (4.17), ($E_1 = E_{en}$). O ponto final é o ponto comum, sendo que a tensão (σ_2) é calculada através da curva de descarregamento. O módulo neste ponto, para a curva de recarregamento, é considerado igual ao módulo no ponto de deformação plástica para a curva de descarregamento ($E_2 = E_{pl}^d$);
- d) o **recarregamento desde um ponto com tensão não nula**, até o ponto comum, com o ponto na envoltória **além do pico de resistência**, é tratado de maneira similar ao descrito na alínea c). A diferença limita-se à tensão no ponto de início (σ_1), que é calculada pela curva de descarregamento;
- e) o **recarregamento entre o ponto comum e o de retorno à envoltória** é modelado por uma reta;
- f) para **tensões de tração** partindo de um estado anterior de compressão, o módulo de elasticidade é tomado igual ao módulo no ponto de deformação plástica do ciclo de descarregamento à compressão, mantendo-se o formato da trajetória de tração monotônica, conforme a figura 4.4;

- g) o **descarregamento partindo de uma tensão de tração** é modelado através de uma linha reta ligando este ponto à origem do espaço tensão-deformação como também mostrado na figura 4.4;
- h) o **recarregamento em um ciclo de tração** ocorre pela mesma trajetória do descarregamento.

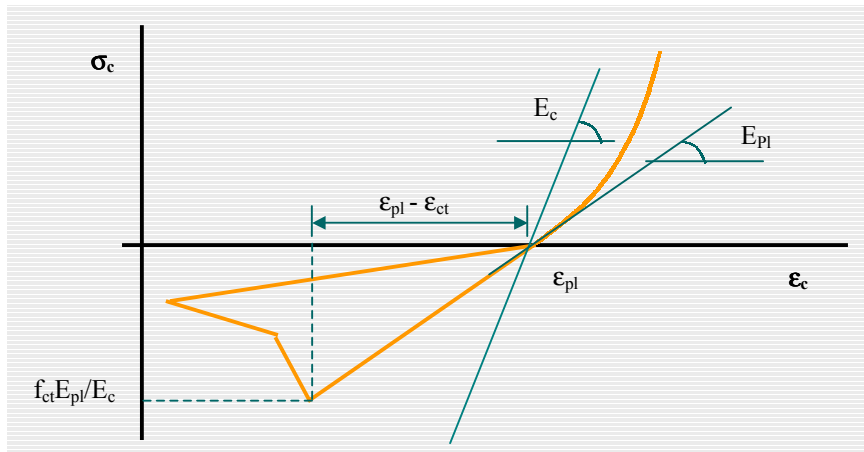


Figura 4.4 – Comportamento cíclico do concreto à tração

4.1.2 Modelos Constitutivos para as Armaduras Passivas

A relação tensão-deformação bi-linear para o aço das armaduras passivas é apresentada nas equações (4.19) e (4.20). O comportamento de aços com endurecimento submetidos a carregamentos cíclicos pode ser representado através de dois modelos constitutivos simplificados. A relação isotrópica para o endurecimento é adequada a materiais em que este efeito não é significativo e considera que a extensão do intervalo de comportamento linear aumenta à medida que ocorrem deformações plásticas. A relação de endurecimento cinemático é adequada para os casos em que grandes reversões de carregamento são observadas, mantendo constante o intervalo elástico, não importando a quantidade de deformações plásticas acumuladas.

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_m \quad \text{para} \quad \varepsilon_m \leq \varepsilon_{sy} \quad (4.19)$$

onde:

σ_s : tensão no aço;
 ε_{sy} : deformação de escoamento da armadura passiva;
 E_s : módulo de elasticidade do aço.

$$\sigma_s = f_{sy} + E_{sh}(\varepsilon_m - \varepsilon_{sy}) \quad \text{para} \quad \varepsilon_m > \varepsilon_{sy} \quad (4.20)$$

onde:

f_{sy} : tensão de escoamento do aço da armadura passiva;
 E_{sh} : módulo de elasticidade do aço no endurecimento.

Na relação de endurecimento isotrópico, uma tensão elástica fictícia (σ_{sE}) é calculada, independentemente do estado de plastificação da armadura, conforme a equação (4.21). A tensão elástica fictícia é sempre uma função da diferença entre a deformação na etapa incremental e a deformação plástica acumulada, considerando todos os períodos de plastificação aos quais a armadura foi submetida. O comportamento de endurecimento isotrópico pode ser observado na figura 4.5.

$$\sigma_{sE} = E_s(\varepsilon_m - \varepsilon_p) \quad (4.21)$$

onde:

σ_{sE} : tensão elástica fictícia no aço;
 ε_p : deformação plástica acumulada total.

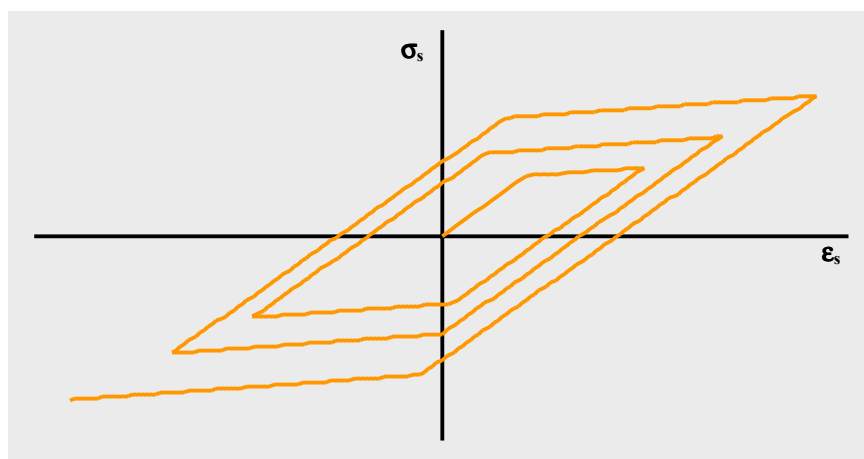


Figura 4.5 – Endurecimento isotrópico para a armadura passiva

A tensão elástica fictícia (σ_{sE}) é utilizada como critério para a avaliação da plastificação da armadura, existindo duas possibilidades:

- a) plastificação em andamento – quando o valor absoluto da tensão elástica fictícia é maior do que o valor absoluto da tensão na etapa incremental anterior ($|\sigma_{sE}| > |\sigma_s^0|$). Neste caso, a tensão na armadura é calculada a partir da equação (4.22) e a deformação plástica acumulada é atualizada pela expressão (4.23). O incremento de deformação ($\Delta\varepsilon_m$) é sempre calculado com relação à deformação na qual se deu início o período de plastificação atual;

$$\sigma_s = \frac{|\sigma_{sE}|}{\sigma_{sE}} |\sigma_s^0| + E_{sh} \Delta\varepsilon_m \quad (4.22)$$

onde:

- σ_s^0 : tensão efetiva na armadura na etapa incremental anterior;
 $\Delta\varepsilon_m$: incremento de deformação com relação ao início do período de plastificação atual.

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p^0 + \Delta\varepsilon_m \left(1 - \frac{E_{sh}}{E_s} \right) \quad (4.23)$$

onde:

- ε_p^0 : deformação plástica na etapa incremental anterior.

- b) período de comportamento elástico – o valor absoluto da tensão elástica fictícia é inferior ou igual ao valor absoluto da tensão efetiva na armadura na etapa anterior, ($|\sigma_{sE}| \leq |\sigma_s^0|$). Neste caso, a tensão efetiva é igual à tensão elástica fictícia, e a deformação de plastificação permanece inalterada e igual à deformação de plastificação na etapa anterior.

O comportamento de endurecimento cinemático é mostrado na figura 4.6. A identificação das fases elásticas e plásticas considerando a regra cinemática se dá através da tensão (f_θ), calculada pela equação (4.24), e da tensão elástica fictícia, mostrada na equação (4.21).

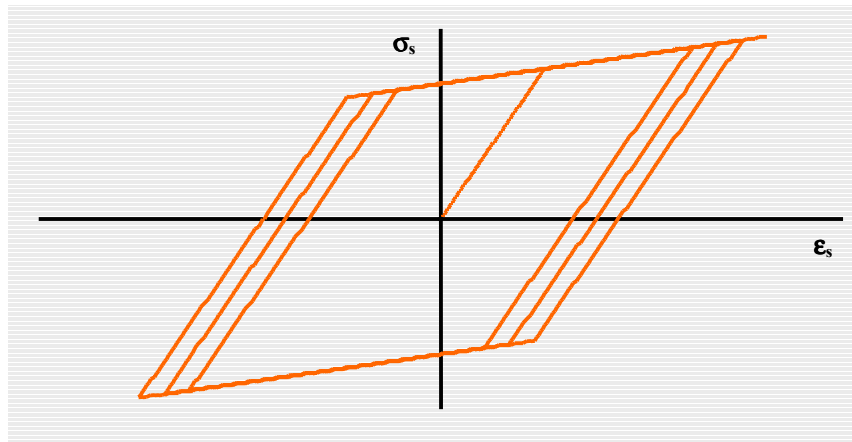


Figura 4.6 – Endurecimento cinemático para a armadura passiva

$$f_0 = \sigma_0 - E_{sh} \epsilon_{pl} \quad (4.24)$$

onde:

ϵ_{pl} : deformação na qual se iniciou o período de plastificação atual.

O cálculo das tensões e deformações nas fases elásticas e plásticas se dá da seguinte forma:

- a) período de plastificação, ($|\sigma_{sE}| > |f_0 + E_{sh}\epsilon_m|$) – a tensão na armadura é calculada segundo a expressão (4.25) e a deformação plástica pela equação (4.26).

$$\sigma_s = \frac{|\sigma_{sE} - E_{sh}\epsilon_m|}{\sigma_{sE} - E_{sh}\epsilon_m} \sigma_0 + E_{sh}\epsilon_m \quad (4.25)$$

$$\epsilon_p = \epsilon_m - \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (4.26)$$

- b) período de comportamento elástico, ($|\sigma_{sE}| \leq |f_0 + E_{sh}\epsilon_m|$) – a tensão efetiva é igual à tensão elástica fictícia, e a deformação de plastificação permanece inalterada e igual à deformação de plastificação na etapa anterior.

4.1.3 Modelos Constitutivos para o Aço de Protensão

A curva de Devalapura & Tradós (1992) para o aço de protensão, apresentada na fórmula (4.27) e na figura 4.7, mostra um comportamento contínuo ao longo de todo o intervalo de deformações, sem apresentar um ponto de escoamento definido. O procedimento para a determinação das constantes da equação (4.27) é o seguinte:

$$\sigma_p = \varepsilon_p \left[A + \frac{B}{\left\{ 1 + (C\varepsilon_p)^D \right\}^{\frac{1}{D}}} \right] \quad (4.27)$$

onde:

- ε_p : deformação na armadura de protensão;
- σ_p : tensão na armadura de protensão;
- A, B, C e D : constantes.

- a) definição do módulo de elasticidade do aço de protensão (E_{ps});
- b) cálculo da tensão f_{s0} , correspondente à intersecção das tangentes dos dois segmentos lineares da curva, mostrados na figura 4.7, pela equação (4.28);
- c) cálculo das constantes C, A e B pelas equações (4.29) a (4.31), respectivamente;
- d) determinação da constante D por um processo iterativo, resolvendo a equação (4.27) para a tensão de escoamento ($\sigma_p = f_{py}$) e a deformação igual à ($\varepsilon_p = 0,01$).

$$f_{s0} = 1,04 f_{py} \quad (4.28)$$

onde:

- f_{py} : tensão convencional de escoamento da armadura de protensão, relativa a uma deformação de 0,01.

$$C = \frac{E_{ps}}{f_{s0}} \quad (4.29)$$

$$A = E_{ps} \frac{f_{pu} - f_{s0}}{\epsilon_{pu} E_{ps} - f_{s0}} \quad (4.30)$$

$$B = E_{ps} - A \quad (4.31)$$

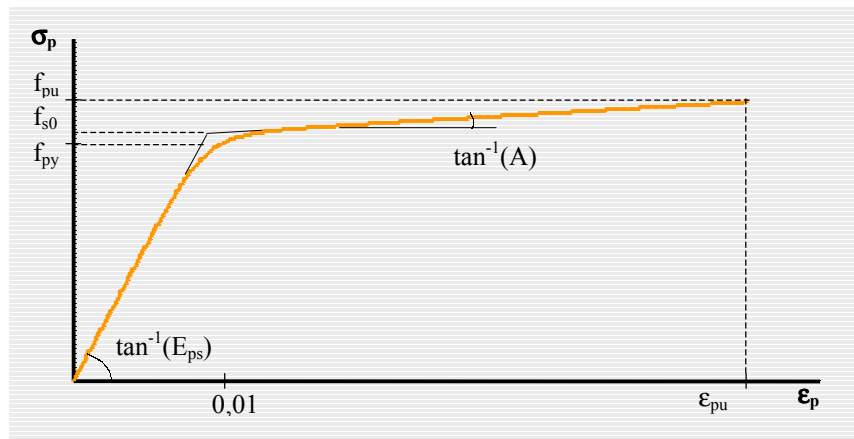


Figura 4.7 – Curva de Devalapura & Trados (1992) para o aço de protensão

Para o comportamento cíclico, a relação tensão-deformação da expressão (4.27) é combinada com os modelos cinemático ou isotrópico, descritos anteriormente para as armaduras passivas. A particularidade da aplicação destas relações de endurecimento às armaduras ativas é a inexistência de um ponto de escoamento bem definido. Por isto, considera-se que o aço de protensão apresenta um comportamento plástico sempre que um ponto da curva tensão-deformação ultrapassar um ponto de referência $(\epsilon_r; \sigma_r)$. A tensão e a deformação no ponto de referência são calculadas pelas equações (4.32) e (4.33), respectivamente, em que o sinal para o segundo termo do lado direito da equação (4.32) é negativo para o endurecimento cinemático e positivo para o isotrópico.

$$\sigma_r = \sigma^0 \mp \frac{|\sigma^0|}{\sigma^0} f_{py} \quad (4.32)$$

onde:

σ_r : tensão no ponto de referência.

$$\varepsilon_r = \varepsilon^0 - \frac{\sigma^0 - \sigma_r}{E_{ps}} \quad (4.33)$$

onde:

ε_r : tensão no ponto de referência;
 ε^0 : deformação na armadura na etapa anterior.

Embora representando comportamentos físicos distintos, os modelos cinemático e isotrópico de endurecimento podem ser descritos matematicamente, para as armaduras de protensão, de maneira conjunta. Em ambos os casos, a cada etapa determina-se a tensão “teste” (σ_T), conforme a equação (4.34), e a tensão de controle, dada na expressão (4.35), e comparam-se as diferenças ($\varepsilon^0 - \varepsilon_m$) e ($\varepsilon^0 - \varepsilon_r$). O ponto de referência é atualizado a cada vez que a armadura passa por um processo de plastificação.

$$\sigma_T = \sigma^0 + E_{ps} \Delta \varepsilon_m \quad (4.34)$$

onde:

σ_T : tensão “teste”;
 σ^0 : tensão na armadura de protensão na etapa anterior.

$$\sigma_{cv} = \sigma_r + f(\varepsilon_m - \varepsilon_r) \quad (4.35)$$

onde:

σ_{cv} : tensão de controle;

Finalmente, a tensão efetiva na armadura de protensão, considerando as duas possíveis situações, é calculada da seguinte maneira:

- a) período de deformações plásticas $|(\varepsilon^0 - \varepsilon_m)| > |(\varepsilon^0 - \varepsilon_r)|$ – a tensão na armadura é igual à σ_{cv} ;
- b) período de deformações elásticas $|(\varepsilon^0 - \varepsilon_m)| \leq |(\varepsilon^0 - \varepsilon_r)|$ – a tensão na armadura é igual à σ_T .

4.2 Relações Constitutivas Dependentes do Tempo

O concreto e o aço de protensão, sob carregamentos mantidos ao longo do tempo, apresentam comportamentos que podem afetar a performance de estruturas protendidas, principalmente no que diz respeito ao desempenho em serviço. Quanto ao concreto, costuma-se referir ao fenômeno da fluência, em que, sob tensões constantes o material apresenta deformações que crescem com o tempo. Já em relação ao aço de protensão, utiliza-se como parâmetro o comportamento de relaxação, no qual um elemento mantido sob deformações constantes apresenta tensões que diminuem ao longo do tempo.

A formulação da cadeia de Maxwell de Bazant & Wu (1974), abordagem consagrada na literatura para a representação do comportamento de fluência do concreto, é utilizada no modelo numérico. No entanto, a fluência e a relaxação são fenômenos físicos da mesma natureza, constituindo-se em comportamentos viscoelásticos. Por isso, no modelo numérico, a cadeia de Maxwell de Bazant & Wu (1974) é utilizada, também, para a armadura de protensão. As principais diferenças, como será mostrado ao longo deste item, devem-se ao comportamento de envelhecimento do concreto, uma vez que o aço de protensão mantém as propriedades constantes ao longo do tempo.

4.2.1 Fluência e a Retração do Concreto

Quando um carregamento é aplicado a um elemento de concreto, observa-se uma deformação instantânea e um aumento gradual desta deformação com o tempo. Este aumento gradativo de deformação sob tensão é chamado de **fluência**. Peças de concreto também se deformam lentamente com o tempo, em consequência das trocas de umidade com o ambiente, mesmo na ausência de tensões. Esta deformação diferida, considerando temperatura constante, é chamada de **retração**.

Uma ampla revisão sobre a formulação matemática da fluência é apresentada por Bazant & Wittmann (1982). Segundo o autor, a deformação total no concreto em um tempo t após a sua moldagem, é composta por três parcelas principais, como mostrado na equação (4.36): a instantânea, a por fluência e a independente das tensões. Considerando tensões no concreto que não ultrapassem a metade da resistência à compressão, a deformação por fluência pode

ser considerada proporcional à tensão. Para uma história de tensões constante atuando sobre o concreto, as deformações podem ser determinadas pela equação (4.37).

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) + \varepsilon_C(t) + \varepsilon^0(t) \quad (4.36)$$

onde:

- t : idade do concreto;
- $\varepsilon_E(t)$: deformação instantânea, que é elástica para pequenas tensões;
- $\varepsilon_C(t)$: deformação por fluência;
- $\varepsilon^0(t)$: deformação independente da tensão, como por retração ou temperatura.

$$\varepsilon(t) = \sigma J(t, t') + \varepsilon^0(t) \quad (4.37)$$

onde:

- $J(t, t')$: função de fluência;
- t' : idade de introdução da tensão no concreto;

A função de fluência representa a deformação no instante t , produzida por uma tensão unitária constante aplicada no tempo t' . Em virtude da proporcionalidade, a fluência é completamente caracterizada pela função $J(t, t')$, que, em geral, possui a forma mostrada na equação (4.38).

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + C(t, t') = \frac{1 + \phi(t, t')}{E(t')} \quad (4.38)$$

onde:

- $1/E(t')$: representa a elasticidade instantânea na idade t' ;
- $C(t, t')$: fluência específica;
- $\phi(t, t')$: razão entre as deformações por fluência e instantânea, chamada de coeficiente de fluência.

Em virtude da fluência, retração e mudanças de temperatura, as tensões nas estruturas variam significativamente no tempo, mesmo para cargas constantes. Por isso, a formulação básica para a fluência apresentada na equação (4.38), desenvolvida considerando-se tensão

constante, deve ser transformada para um modelo constitutivo válido para tensões e deformações com variação arbitrária. Esta tarefa é simplificada pelo fato de que, no intervalo das tensões de serviço e com exceção das trajetórias decrescentes de deformação, o concreto pode ser tratado aproximadamente como um material elástico, mais precisamente, como um material com envelhecimento viscoelástico linear, cuja teoria resulta no **princípio da superposição**.

O princípio da superposição, que é equivalente à hipótese da linearidade, determina que a resposta a uma soma de duas histórias de tensão, ou de deformação, pode ser obtida com a soma das respostas de cada uma das histórias analisadas separadamente. Uma deformação produzida por um incremento de tensão em qualquer instante não é afetada pela aplicação anterior ou posterior de outra tensão. Em vista disso, a deformação produzida por qualquer história de tensões ($\sigma(t)$) pode ser obtida considerando-se esta história como a soma de incrementos ($d\sigma(t')$), aplicados em instantes t' menores do que o tempo t , e somando-se as deformações resultantes, conforme a equação (4.39).

$$\varepsilon(t) - \varepsilon^0(t) = \int_0^t J(t, t') d\sigma(t') \quad (4.39)$$

Implementações numéricas de formulações do tipo integral, baseadas na equação (4.39) são efetivas e adequadas a estruturas pequenas ou médias. Para grandes sistemas estruturais, com inúmeras incógnitas, no entanto, a demanda por memória para o armazenamento de variáveis, assim como por capacidade de processamento são excessivas. Para cada elemento finito, é necessária a armazenagem de todos os componentes anteriores de tensão, e a cada etapa de tempo deve-se efetuar a soma de todos estes valores.

A necessidade de armazenamento de variáveis, incluindo toda a história de tensões ou deformações, pode ser eliminada se formulações do tipo “taxa de fluência” (*rate-type creep laws*) são utilizadas. Nestas formulações, o comportamento da fluência pode ser representado por um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, ao invés da integral apresentada na equação (4.39). A chave para esta transformação é a aproximação do núcleo das equações de integração pelo chamado núcleo degenerado, cuja forma geral corresponde a uma soma de

funções de t e de t' . O modelo de Maxwell de Bazant & Wu (1974) é uma formulação deste tipo, e será descrito a seguir.

4.2.1.1 O Modelo da Cadeia de Maxwell de Bazant & Wu (1974)

De acordo com as observações acima, considerando tensões inferiores a 40% da resistência à compressão e uma história de deformações monotônica, a fluência do concreto pode ser considerada linear. Neste caso, a lei do tipo integral para o concreto pode ser representada pelas equações (4.39), em termos de fluência, e (4.40) para a relaxação, que podem ser consideradas equivalentes entre si.

$$\sigma(t) = \int_0^t E_R(t, t') [d\varepsilon(t') - d\varepsilon^0(t')] \quad (4.40)$$

onde:

E_R : função de relaxação; tensão no instante t produzida pela aplicação de uma deformação unitária no instante t' .

A relação entre as funções de relaxação e fluência pode ser obtida considerando-se uma história de deformações do tipo passo unitário, com $\varepsilon = 1$ para $t \geq t_0$, $\varepsilon = 0$ para $t < t_0$ e $\varepsilon^0 = 0$. Neste caso, a igualdade (4.41) entre as tensões e a função de relaxação pode ser verificada. A substituição de (4.41) na expressão (4.39) resulta na equação (4.42), conhecida como a integral de Volterra.

$$\sigma(t) = E_R(t, t_0) \quad (4.41)$$

$$J(t, t_0)E(t_0) + \int_{t_0}^0 J(t, t') \frac{\partial E_R(t, t')}{\partial t} dt' = 1 \quad (4.42)$$

O modelo reológico da cadeia de Maxwell é constituído por uma associação em paralelo de um conjunto de elementos ligados em série, compostos por uma mola e por um amortecedor viscoso, que são os elementos de Maxwell, conforme a figura 4.8. A relação constitutiva deste modelo é representada pela equação diferencial (4.43). Em qualquer instante, a tensão em uma fibra de concreto corresponde ao somatório das tensões nos diversos elementos da cadeia, conforme a igualdade (4.44).

$$\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^0 = \frac{\dot{\sigma}_\mu}{E_\mu} + \frac{\sigma_\mu}{\eta_\mu} \quad (4.43)$$

onde:

E_μ : módulo de elasticidade da mola do elemento μ da cadeia de Maxwell;
 η_μ : viscosidade do amortecedor do elemento μ da cadeia de Maxwell;
 σ_μ : tensão no elemento μ da cadeia de Maxwell.

$$\sigma = \sum_{\mu=1}^n \sigma_\mu \quad (4.44)$$

onde:

n : número de elementos no modelo de Maxwell;

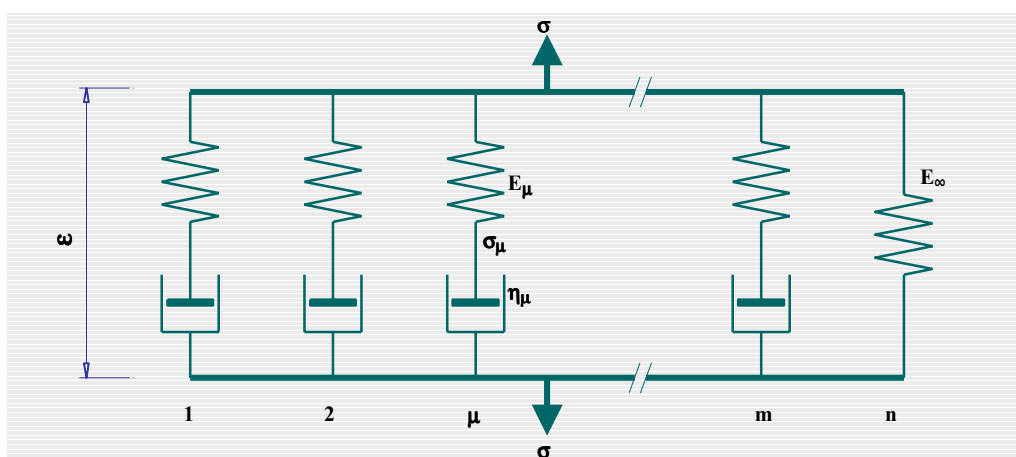


Figura 4.8– Modelo da cadeia de Maxwell

4.2.1.2 Definição dos Parâmetros do Modelo

Os modelos da cadeia de Maxwell podem ser caracterizados por uma relação constante ao longo do tempo entre os módulos de elasticidade ($E_\mu(t)$) e as viscosidades ($\eta_\mu(t)$), conforme a equação (4.45). Esta relação é chamada de **tempo de relaxação** ($\tau_\mu(t)$). Para um ajuste adequado dos parâmetros do modelo, tanto dos módulos de elasticidade quanto das viscosidades, os tempos de relaxação de cada componente do modelo devem ser criteriosamente arbitrados. Através de uma distribuição suficientemente concentrada de valores de τ_μ , as curvas de relaxação, utilizadas para a determinação dos módulos E_μ , podem ser ajustadas com qualquer nível de precisão a partir de dados experimentais ou empíricos. Para a unicidade do ajuste, no entanto, os tempos de relaxação não devem ser exageradamente próximos. Uma relação para os tempos de relaxação, que produz um bom ajuste das curvas, é a dada pela expressão (4.46).

$$\tau_\mu = \frac{\eta_\mu(t)}{E_\mu(t)} \quad (4.45)$$

onde:

τ_μ : tempo de relaxação;

$$\tau_\mu = 10^{\mu-1} \tau_1 \quad (\mu = 1, \dots, m) \quad (4.46)$$

onde:

m : número de elementos na cadeia de Maxwell menos um ($m = n - 1$).

Considerando a relação (4.45) para o tempo de relaxação, uma história de deformações do tipo passo unitário e respeitando a condição imposta pela equação (4.47), a integral da equação diferencial (4.43) resulta na expressão (4.48). Lembrando a expressão (4.44), para a tensão total no modelo, pode-se escrever, por similaridade, a equação (4.49) para a função de relaxação. No último elemento do modelo de Maxwell ($\mu = n$), a mola não está ligada a nenhum amortecedor, ou seja, $\eta_\mu \rightarrow \infty$ e $\tau_\mu \rightarrow \infty$. Isto permite que à medida que o tempo cresça e os tempos de relaxação sejam ultrapassados, as tensões no modelo passam a ser absorvidas por este último elemento, garantindo o comportamento assintótico da formulação.

$$\sigma_{\mu}(t') = E_{\mu}(t') \quad (4.47)$$

$$\sigma_{\mu}(t) = E_{\mu}(t') e^{\frac{-(t-t')}{\tau_{\mu}}} \quad (4.48)$$

$$E_R(t, t') = \sum_{\mu=1}^m E_{\mu} e^{\frac{t-t'}{\tau_{\mu}}} + E_{\infty}(t') \quad (4.49)$$

A equação (4.49) corresponde à expansão da função de relaxação em uma série de exponenciais reais, chamada de série de Dirichlet. O problema do ajuste das curvas de relaxação através destas séries é uma tarefa difícil, pois os módulos das molas ($E_{\mu}(t')$) são funções instáveis da relaxação ($E_R(t, t')$). O **Método dos Mínimos Quadrados**, apresentado na equação (4.50), é considerado a melhor forma para o ajuste destas curvas a partir de um conjunto discreto de dados.

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{\beta} [E_R(t_{\beta}, t') - \tilde{E}_R(t_{\beta}, t')]^2 + w_1 \sum_{\mu=1}^{m-1} (E_{\mu+1} - E_{\mu})^2 + w_2 \sum_{\mu=1}^{m-2} (E_{\mu+2} - 2E_{\mu+1} + E_{\mu})^2 \\ + w_3 \sum_{\mu=1}^{m-3} (E_{\mu+3} - 3E_{\mu+2} + 3E_{\mu+1} - E_{\mu})^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde:

- \tilde{E}_R : dado de relaxação disponível;
- w_1, w_2 e w_3 : coeficientes de ajuste, determinados apenas por experiência;
- β : índice dos pontos da série de dados de relaxação.

As condições de minimização são as apresentadas nas equações (4.51), que geram um sistema de $(m+1)$ equações algébricas lineares para E_{μ} e E_{∞} . Uma vez que as derivadas das curvas de relaxação são sempre não positivas, todos os E_{μ} são sempre não negativos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial E_{\mu}} = 0, \quad (\mu = 1, \dots, m) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial E_{\infty}} = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

4.2.1.3 Conversão de Dados de Fluência em Relaxação

O método dos mínimos quadrados permite a determinação dos parâmetros do modelo de Maxwell a partir de dados de relaxação. Embora inúmeros trabalhos experimentais contendo dados sobre relaxação estejam disponíveis na literatura, os resultados para fluência são mais abrangentes e em maior quantidade. Além disso, as funções de fluência das normas podem ser utilizadas para a calibração do modelo. Costuma-se recorrer, portanto, aos dados de fluência, transformando-os em relaxação. Bazant (1972) realizou um estudo a respeito da conversão, desenvolvendo uma rotina para aplicação numérica.

Na conversão, a função de relaxação ($E_R(t, t')$) é determinada a partir da integral de Volterra mostrada na equação (4.42). Isto é obtido numericamente subdividindo-se o tempo t em N etapas, com tempos discretos (t_1, \dots, t_N), conforme a equação (4.52). É conveniente considerar $t_0 = t_1$, expressando o fato de que o primeiro incremento de deformação é instantâneo nos testes de fluência. Aplicando-se a quadratura de integração trapezoidal para a aproximação da integral de Volterra e excluindo-se os termos desta integral para $t = t_r$ e $t = t_{r-1}$, a equação (4.53) é obtida, considerando as condições apresentadas nas expressões (4.54) a (4.56).

$$\Delta t_r = t_r - t_{r-1} \quad (r = 1, \dots, N) \quad (4.52)$$

onde:

r : índice do intervalo;
 N : número de intervalos de tempo.

$$\Delta E_{R_r} = -(J_{r,r} + J_{r-1})^{-1} \sum_{s=1}^{r-1} \Delta E_{R_s} (J_{r,s} + J_{r,s-1} - J_{r-1,s} - J_{r-1,s-1}) \quad (r = 2, \dots, N) \quad (4.53)$$

onde:

$J_{r,s}$: dado de fluência.

$$J_{r,s} = J(t_r, t_s) \quad (4.54)$$

$$\Delta E_{R_r} = E_R(t_r, t_0) - E_R(t_{r-1}, t_0) \quad (4.55)$$

$$\Delta E_{R1} = E(t_0) \quad (4.56)$$

4.2.1.4 Algoritmo para a Integração dos Problemas de Fluência

Seja o tempo t , subdividido através de instantes discretos t_0, t_1, t_2, \dots , em incrementos de tempo, conforme a equação (4.57). Pode-se verificar por retro-substituição, considerando a condição mostrada na equação (4.58), que o resultado da integral da equação diferencial do modelo de Maxwell, é o mostrado na equação (4.59).

$$\Delta t_r = t_r - t_{r-1} \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (4.57)$$

$$\sigma_\mu = \sigma_{\mu_{r-1}} \quad \text{para} \quad t = t_{r-1} \quad (4.58)$$

$$\sigma_\mu(t) = e^{-\int_{t_{r-1}}^t \frac{E_\mu(t')}{\eta_\mu(t')} dt'} \left\{ \sigma_{\mu_{r-1}} + \int_{t_{r-1}}^t e^{-\int_{t_{r-1}}^{t'} \frac{E_\mu(t'')}{\eta_\mu(t'')} dt''} E_\mu(t') [d\varepsilon(t') - d\varepsilon_0(t')] \right\} \quad (4.59)$$

Para pequenos incrementos de tempo, pode-se considerar que $d\varepsilon/dt$, $d\varepsilon^0/dt$ e E_μ são constantes ao longo de cada etapa Δt_r e variam descontinuamente nos tempos t_r . Considerando a

condição expressa na igualdade (4.60), para $t = t_r$, a equação (4.59) assume as formas das equações (4.61) ou (4.62), em que o parâmetro λ_{μ_r} é dado pela expressão (4.63). Nestas equações, o subscrito r designa o tempo e o índice $(r-1/2)$ refere-se ao valor médio no incremento de tempo, como mostrado no exemplo da equação (4.64) para o módulo de elasticidade.

$$E_{\mu}(t) = \frac{t - t_{r-1}}{\tau_{\mu}} \quad (4.60)$$

$$\sigma_{\mu_r} = \sigma_{\mu_{r-1}} e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}} + e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}} E_{\mu_{r-1}} \frac{\Delta \varepsilon_r - \Delta \varepsilon_r^0}{\Delta t_r} \int_{t_{r-1}}^t e^{\frac{(t'-t_{r-1})}{\tau_{\mu}}} dt' \quad (4.61)$$

$$\sigma_{\mu_r} = \sigma_{\mu_{r-1}} e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}} + \lambda_{\mu_r} E_{\mu_{r-1/2}} (\Delta \varepsilon_r - \Delta \varepsilon_r^0) \quad (\mu = 1, 2, \dots, n) \quad (4.62)$$

$$\lambda_{\mu_r} = \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}} \right) \frac{\tau_{\mu}}{\Delta t_r} \quad (4.63)$$

$$E_{\mu_{r-1/2}} = \frac{1}{2} (E_{\mu_{r-1}} + E_{\mu_r}) \quad (4.64)$$

A equação (4.62) consiste em uma fórmula para a atualização das tensões nos elementos da cadeia de Maxwell (σ_{μ_r}). Considerando a condição estabelecida pela equação (4.44), a equação (4.65) pode ser utilizada para a determinação do incremento de deformação produzido em uma etapa de tempo. Os valores do pseudomódulo elástico instantâneo (E''_r) para o concreto e do pseudo-incremento de tensão inelástica podem ser determinados pelas expressões (4.66) e (4.67), respectivamente.

$$\Delta \varepsilon_r = \frac{\Delta \sigma_r}{E_r''} + \Delta \varepsilon_r'' \quad (4.65)$$

onde:

E_r'' : pseudomódulo elástico instantâneo;
 $\Delta \varepsilon_r''$: pseudo-incremento de deformação inelástica.

$$E_r'' = \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu_r} E_{\mu_{r-1/2}} + E_{\infty_{r-1/2}} \quad (4.66)$$

$$\Delta \sigma_r'' = E_r'' \Delta \varepsilon_r'' = \sum_{\mu=1}^m \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}} \right) \sigma_{\mu_{r-1/2}} + E_r'' \Delta \varepsilon_r^0 \quad (4.67)$$

onde:

$\Delta \sigma_r''$: pseudo-incremento de tensão inelástica.

4.2.1.5 Implementação da Cadeia de Maxwell para o Concreto

O modelo numérico utiliza uma cadeia de Maxwell com cinco elementos, como sugerido por Fairbairn et al (1987). Os dados de fluência são obtidos a partir da formulação do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), implementada no modelo numérico. A deformação de retração (ε^0) também é obtida pela formulação desta norma, cujos critérios são apresentados no próximo item.

Para a conversão dos dados de fluência em relaxação, obtêm-se os valores da função de fluência para oito datas iniciais de carregamento, distribuídas de acordo com a equação (4.68), com $t_1 = 2,8$ dias. Para cada data de carregamento, obtêm-se uma série de dados correspondentes a 30 idades ($t-t'$), seguindo a relação (4.69) e com $(t_1 - t') = 3,51$ dias, correspondendo a dez passos por década na escala logarítmica. Os coeficientes de ajuste são arbitrados em $w_1 = 0,01$, $w_2 = 0,08$ e $w_3 = 0,0$.

$$t'_i = 10^{\frac{1}{2}} t'_{i-1} \quad (4.68)$$

$$(t_i - t') = 10^{\frac{1}{10}} (t_{i-1} - t') \quad (4.69)$$

Considerando estas definições, a aplicação das condições de minimização da expressão (4.51) na equação (4.50) produz um sistema com cinco equações e cinco incógnitas. Desenvolvendo-se a equação de número j do sistema, obtém-se a expressão (4.70), que pode ser reescrita conforme a equação (4.71) ou sua forma matricial (4.72). Os componentes das matrizes **A**, **B** e **E** são dados pelas equações (4.73) a (4.75), respectivamente, sendo que os coeficientes de ajuste w_1 e w_2 são aplicados como mostrado no conjunto de expressões da equação (4.76)

$$\sum_{i=1}^{30} \left[\sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{\mu}}} - \tilde{R}(t_i, t') \right] \sum_{j=1}^{30} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}} = 0 \quad (4.70)$$

$$\sum_{i=1}^{30} \left[\sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{-\left(\frac{\Delta t}{\tau_{\mu}} + \frac{\Delta t}{\tau_j}\right)} \right] = \sum_{i=1}^{30} \tilde{R}(t_i, t') e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}} \quad (4.71)$$

$$\mathbf{AE} = \mathbf{B} \quad (4.72)$$

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^{30} e^{-\left(\frac{\Delta t}{\tau_{\mu}} + \frac{\Delta t}{\tau_j}\right)} \quad (k = 1, 2, \dots, 5) \quad (4.73)$$

$$E_j = E_j(t') \quad (4.74)$$

$$B_j = \sum_{i=1}^{30} \tilde{R}(t_i, t') e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}} \quad (4.75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{k,k} = A_{k,k} + w_1 + w_2 \quad (k = 1 \text{ ou } 4) \\ A_{k,l} = A_{k,l} - w_1 + 2w_2 \quad (k = 1, l = 2 \text{ ou } k = 1, l = 2) \\ A_{k,l} = A_{k,l} + w_2 \quad (k = 1, l = 3 \text{ ou } k = 3, l = 1) \\ A_{k,k} = A_{k,k} + 2w_1 + 5w_2 \quad (k = 2 \text{ ou } 3) \\ A_{k,l} = A_{k,l} - w_1 - 4w_2 \quad (k = 2, l = 3 \text{ ou } k = 3, l = 2) \\ A_{k,l} = A_{k,l} + w_2 \quad (k = 2, l = 4 \text{ ou } k = 4, l = 2) \\ A_{k,l} = A_{k,l} - w_1 - 2w_2 \quad (k = 3, l = 4 \text{ ou } k = 4, l = 3) \end{array} \right. \quad (4.76)$$

Durante um problema em que o efeito do tempo é considerado, a utilização do modelo de Maxwell transcorre em três etapas:

- a) determinação do vetor de incrementos das forças fictícias: a partir da equação (4.67) determinam-se os incrementos de tensão fictícios nas diversas lâminas de concreto da seção, cuja integração através da equação (3.13) resulta nos vetores dos incrementos de carga fictícias devida a ação do tempo;
- b) análise para os pseudo-incrementos de forças: a partir dos incrementos de carga, realiza-se a análise considerando o pseudo-módulo elástico instantâneo $E''(t)$ calculado pela expressão (4.66), sendo que os módulos $E_\mu(t)$ das molas são determinados através da equação (4.77). Após a análise, as cargas fictícias são subtraídas das solicitações para a adequada verificação do equilíbrio;

$$E_\mu(t) = \frac{E_\mu(t'_{i-1})[\log(t'_i) - \log(t)] + E_\mu(t'_i)[\log(t) - \log(t'_{i-1})]}{[\log(t'_i) - \log(t'_{i-1})]} \quad (i = 2, \dots, 8 \text{ e } \mu = 1, \dots, 5) \quad (4.77)$$

- c) atualização do modelo de Maxwell: após a análise, as tensões nos elementos da cadeia de Maxwell são calculadas através da expressão (4.62) e a deformação mecânica em cada lâmina da seção determinada conforme a equação (4.65).

4.2.1.6 Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993): fluência e retração

Conforme a formulação apresentada no Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), a deformação dependente das tensões $\varepsilon_{c\sigma}(t, t')$ é determinada através da equação (4.78), com a função de fluência apresentada na expressão (4.79). O módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias pode ser calculado segundo a equação (4.80) e a correção deste valor para a idade de carregamento (t') se dá conforme a expressão (4.81), incluindo o parâmetro dependente do tipo de cimento (β_{cc}) dado por (4.82). Se o agregado utilizado for basáltico, o módulo aos 28 dias deve ser aumentado em 20%.

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t') = \sigma_c(t') J(t, t') \quad (4.78)$$

onde:

$\varepsilon_{c\sigma}$: deformação dependente da tensão.

$$J(t, t') = \frac{1}{E_c(t')} + \frac{\phi(t, t')}{E_c} \quad (4.79)$$

onde:

E_c : módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias, conforme (4.80).

$$E_c = 2,15 \times 10^4 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{\frac{1}{3}} \quad [MPa] \quad (4.80)$$

onde:

f_{cm} : Resistência média à compressão do concreto aos 28 dias

$$E_c(t') = \beta_{cc}(t')^{\frac{1}{2}} E_c \quad (4.81)$$

$$\beta_{cc}(t') = e^{s[1-(28/t'_T)^{0,5}]} \quad (4.82)$$

onde:

- s : $s = 0,2$ para cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial;
 $s = 0,25$ para cimento de endurecimento rápido e normal;
 $s = 0,38$ para cimento de endurecimento lento.
 t'_T : idade do concreto corrigida em função da temperatura, conforme (4.91).

O coeficiente de fluência $\phi(t, t')$ é calculado pela expressão (4.83). O coeficiente de fluência nominal (ϕ_0), o coeficiente em função da umidade do ar (ϕ_{RH}), o parâmetro dependente da resistência do concreto ($\beta(f_{cm})$) e o parâmetro que depende da idade do carregamento ($\beta(t')$) são apresentados nas equações (4.84), (4.85), (4.86) e (4.87), respectivamente. O coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência com o tempo ($\beta_c(t-t')$) é apresentado na expressão (4.88), em que o parâmetro β_H é calculado pela equação (4.89).

$$\phi(t, t') = \phi_0 \beta_c(t - t') \quad (4.83)$$

$$\phi_0 = \phi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t') \quad (4.84)$$

$$\phi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH / 100}{0,46(2A_c / 10\mu)} \quad (4.85)$$

onde:

- RH : umidade relativa do ar [%];
 A_c : área da seção transversal;
 μ : perímetro da seção em contato com atmosfera.

$$\beta(f_{cm}) = \frac{5,3}{(f_{cm} / 10)^{0,5}} \quad (4.86)$$

$$\beta(t') = \frac{1}{0,1 + (t')^{0,5}} \quad (4.87)$$

$$\beta_c(t-t') = \left[\frac{1-t'}{\beta_H + t-t'} \right]^{0,3} \quad (4.88)$$

$$\beta_H = 150 \left[1 + \left(1,2 \frac{RH}{100} \right)^{18} \right] \frac{2A_c}{10\mu} + 250 < 1500 \quad (4.89)$$

Os efeitos do tipo de cimento e da variação da temperatura ao longo do tempo são considerados através de coeficientes de correção. Os efeitos de altas ou baixas temperaturas na maturidade do concreto são tratados ajustando-se a idade de carregamento (t'), conforme a equação (4.90). O tempo ajustado (t'_T) é determinado conforme a expressão (4.91). Os coeficientes β_H e ϕ_{RH} são corrigidos conforme as equações (4.92) e (4.93), respectivamente. Os coeficientes β_T e ϕ_T são dados, respectivamente, pelas expressões (4.94) e (4.95).

$$t' = t'_T \left[\frac{9}{2 + (t'_T)^{1,2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0,5 \text{ dia} \quad (4.90)$$

$$t'_T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i e^{-\left(\frac{4000}{273+T(\Delta t_i)} - 13,65 \right)} \quad (4.91)$$

onde:

- Δt_i : período de tempo em que atua a temperatura;
- T_i : Temperatura;
- n : número de incrementos de temperatura.

$$\beta_{H,T} = \beta_H \beta_T \quad (4.92)$$

$$\phi_{RH,T} = \phi_T + (\phi_{RH} - 1)\phi_T^{0,5} \quad (4.93)$$

$$\beta_T = e^{\left[\frac{1500}{273+T(\Delta t_i)} - 5,12 \right]} \quad (4.94)$$

$$\phi_T = e^{0,015[T(\Delta t_i) - 20]} \quad (4.95)$$

A deformação por retração segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) pode ser calculada pela equação (4.96). A retração nominal é dada pela expressão (4.97) e o parâmetro $\varepsilon_s(f_{cm})$, dependente da resistência do concreto, pela equação (4.98). O valor do coeficiente β_{RH} é definido pelas relações (4.99). O desenvolvimento da retração com tempo é dado pela função (4.100), dependendo do coeficiente α_{st} calculado pela equação (4.101).

$$\varepsilon_{cs}(t, t') = \varepsilon_{cs0} \beta_s(t - t_s) \quad (4.96)$$

onde:

- $\varepsilon_{cs}(t-t')$: deformação por retração no período $(t-t')$;
- ε_{cs0} : retração nominal, conforme a equação (4.97);
- $\beta_s(t-t_s)$: função que descreve o desenvolvimento da retração com o tempo;
- t_s : idade de início da retração, em dias.

$$\varepsilon_{cs0} = \varepsilon_s(f_{cm}) \beta_{RH} \quad (4.97)$$

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = [160 + 10\beta_{sc}(9 - f_{cm}/10)] \times 10^{-6} \quad (4.98)$$

onde:

β_{sc} : $\beta_{sc} = 8$ para cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial;
 $\beta_{sc} = 5$ para cimento de endurecimento rápido resistência normal;
 $\beta_{sc} = 4$ para cimento de endurecimento lento;

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1,55(1 - RH / 100)^3 & \text{para } 0\% \leq RH \leq 99\% \\ 0,25 & \text{para } RH > 99\% \end{cases} \quad (4.99)$$

$$\beta_s(t - t_s) = \left[\frac{t - t_s}{\alpha_{st} + t - t_s} \right]^{0,5} \quad (4.100)$$

$$\alpha_{st} = 350 \left(\frac{2A_c}{10\mu} \right) \quad (4.101)$$

Os efeitos da variação da temperatura são levados em conta através das correções nos coeficientes α_{st} e β_{RH} , conforme as equações (4.102) e (4.103), respectivamente. Nesta última equação, é utilizado o parâmetro β_{st} , determinado pela expressão (4.104).

$$\alpha_{st} = 350 \left(\frac{2A_c}{10\mu} \right) e^{-0,06[T(\Delta t_i) - 20^\circ C]} \quad (4.102)$$

$$\beta_{RH,T} = \beta_{RH} \beta_{st} \quad (4.103)$$

$$\beta_{st} = 1 + \left(\frac{8}{103 - RH} \right) \left[\frac{T(\Delta t_i) - 20^\circ C}{40} \right] \quad (4.104)$$

4.2.2 Modelo para a Relaxação do Aço de Protensão

Quando uma deformação é mantida constante em um corpo de prova, a tensão diminui com o tempo, verificando-se o comportamento chamado de **relaxação**. Embora ocorra em qualquer tipo de aço, a relaxação é especialmente importante nos cabos de protensão pois as tensões são elevadas. Enquanto hoje a prática comum seja a utilização do fenômeno da relaxação para a descrição das mudanças de comprimento e tensão no aço de protensão com o tempo, antigamente o comportamento de fluência era o considerado. Na realidade, nenhuma das abordagens corresponde ao comportamento real, uma vez que nem a deformação nem a tensão são constantes ao longo do tempo em um elemento protendido (FIB, 1999).

Ghali & Treviño (1985) chamaram a relaxação que ocorre sob deformação constante de **relaxação intrínseca**. Este efeito é desprezível se a razão entre a tensão inicial de protensão (σ_{pi}) e a resistência do aço (f_{pu}) for inferior a 0,5, mas cresce rapidamente à medida que esta relação aproxima-se da unidade. No entanto, um cabo de protensão localizado em um elemento de concreto perde uma parcela de sua tensão inicial em função dos efeitos combinados da retração e fluência do concreto, que causam o encurtamento do concreto. A redução na tensão causada pela fluência e retração do concreto tem o mesmo efeito na magnitude da relaxação como se a protensão inicial fosse inferior. A relaxação que ocorre na realidade, menor do que a medida em testes de relaxação, é chamada de **relaxação reduzida**.

4.2.2.1 Utilização da Cadeia de Maxwell para o Aço de Protensão

A relaxação do aço de protensão é um fenômeno viscoelástico da mesma natureza da fluência no concreto. Por isso, a cadeia de Maxwell de Bazant & Wu (1974) é utilizada no modelo numérico para o comportamento reológico da armadura protendida. Por outro lado, o aço de protensão é um material sem envelhecimento e, conseqüentemente, apenas uma curva de relaxação é suficiente para a calibração dos parâmetros da cadeia. Outra diferença significativa com relação ao concreto, é a existência de dados experimentais e curvas teóricas sobre a relaxação do aço de protensão, tornando desnecessária a conversão de dados de fluência em relaxação. No modelo numérico, a curva de relaxação do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), apresentada no item 4.2.2.2 deste capítulo, é utilizada para a identificação dos parâmetros da cadeia de Maxwell.

Os tempos de relaxação para as unidades da cadeia de Maxwell, definidos na equação (4.45), foram arbitrados para o aço de protensão conforme a relação (4.105). A curva de relaxação para a calibração dos parâmetros do modelo é determinada com 40 idades ($t-t'$), seguindo a razão constante em escala logarítmica dada na equação (4.69), constituindo quatro décadas com dez passos por década na escala logarítmica. O primeiro intervalo ($t-t'$) é de 3,51 dias.

$$\tau_{\mu} = 16^{\mu-1} \tau_1 \quad (\mu = 1, \dots, m) \quad (4.105)$$

Para o aço de protensão, a utilização da cadeia de Maxwell transcorre de maneira similar à descrita para o concreto. No entanto, como aço não apresenta envelhecimento, os módulos de elasticidade das unidades da cadeia são constantes ao longo do tempo e iguais aos determinados na identificação dos parâmetros do modelo, como mostrado na equação (4.106). A interpolação em função do tempo, como a realizada através da expressão (4.77) para o concreto, é, portanto, desnecessária.

$$E_{\mu}(t) = E_{\mu} \quad (4.106)$$

4.2.2.2 Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993): Relaxação do Aço de Protensão

A intensidade da relaxação do aço de protensão, segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) é dada pelo coeficiente ρ_t , que corresponde a uma perda percentual de tensão, com relação à tensão inicial de protensão, conforme a equação (4.107). O Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) e, também, a NBR 6118 (ABNT, 2003), apresentam valores para coeficientes de relaxação (ρ_t) para 1000 horas (ρ_{1000}), medidos em testes com amostras de aço submetidas a deformações constantes, a 20° C, com tensões iniciais de 60%, 70% e 80% da resistência característica do aço de protensão (f_{ptk}). Os valores apresentados pelas duas normas são similares, sendo que os adotados no modelo numérico são provenientes da NBR 6118 (ABNT, 2003). Os valores para (ρ_{1000}) utilizados são apresentados no quadro 4.1.

$$\rho_t = \frac{\Delta\sigma_p(t, t_i)}{\sigma_{pi}} \quad (4.107)$$

onde:

- ρ_t : relaxação após t horas;
 $\Delta\sigma_p(t, t_i)$: perda de tensão por relaxação pura desde o instante do estiramento até o tempo t ;
 σ_{pi} : tensão na armadura de protensão no instante do estiramento.

Quadro 4.1 – Valores percentuais de ρ_{1000} segundo a NBR 6118 (ABNT, 2003)

tensão inicial	classe de relaxação	
	normal	baixa
$\sigma_{pi} = 0,60 f_{ptk}$	3,5	1,3
$\sigma_{pi} = 0,70 f_{ptk}$	7,0	2,5
$\sigma_{pi} = 0,80 f_{ptk}$	12,0	3,5

A partir dos dados do quadro 4.1 pode-se determinar os coeficientes de relaxação em 1000 horas para diferentes tensões iniciais de protensão. A expressão (4.108) de Vasconcelos (1980) permite a interpolação para valores intermediários da relação (σ_{pi}/f_{ptk}) a partir dos coeficientes a , b e c , apresentados nas equações (4.109) a (4.111).

$$\rho_{1000} = a \left(\frac{\sigma_{pi}}{f_{ptk}} \right)^2 + b \left(\frac{\sigma_{pi}}{f_{ptk}} \right) + c \quad (4.108)$$

onde:

- ρ_{1000} : relaxação após 1000 horas;
 f_{ptk} : resistência característica do aço de protensão;
 a , b e c : coeficientes calculados pelas equações (4.107) a (4.109), respectivamente.

$$a = 50\rho_{1000}^{0,60} - 100\rho_{1000}^{0,70} + 50\rho_{1000}^{0,80} \quad (4.109)$$

onde:

- $\rho_{1000}^{0,60}$, $\rho_{1000}^{0,70}$ e $\rho_{1000}^{0,80}$: coeficientes de relaxação para 1000 horas e relações (σ_{pi}/f_{ptk}) de 0,60, 0,70 e 0,80, respectivamente, dados pelo quadro 4.1.

$$b = -75\rho_{1000}^{0,60} + 140\rho_{1000}^{0,70} + 50\rho_{1000}^{0,80} \quad (4.110)$$

$$c = 28\rho_{1000}^{0,60} - 48\rho_{1000}^{0,70} + 21\rho_{1000}^{0,80} \quad (4.111)$$

Valores para o coeficiente de relaxação para qualquer tempo (ρ_t) são calculados através da equação (4.112), em horas, ou pela equação (4.113), em dias. A partir dos coeficientes de relaxação, os pontos discretos da função de relaxação podem ser calculados pela relação (4.114).

$$\rho_t = \rho_{1000} \left(\frac{t}{1000} \right)^k \quad (4.112)$$

onde:

ρ_{1000} : relaxação após 1000 horas;

k: coeficiente igual 0,12 para aços de relaxação normal e 0,25 para aços de relaxação baixa.

$$\rho_t = \rho_{1000} \left(\frac{3t}{125} \right)^k \quad (4.113)$$

$$\tilde{E}_R(t, t') = E_P(1 - \rho_t) \quad (4.114)$$

5 Verificação do Modelo Numérico Proposto

Ao longo dos **Capítulos 3 e 4**, as principais características do modelo numérico proposto foram apresentadas. A formulação do elemento finito do tipo híbrido foi descrita como uma abordagem teoricamente exata, que permite a utilização de elementos longos. Os procedimentos numéricos foram escolhidos de maneira a respeitar o caráter exato da formulação. Os modelos constitutivos para o concreto e armaduras foram apresentados como sendo relações abrangentes, capazes de representar os materiais sob carregamentos de naturezas diversas, em ações de curta e longa duração. Torna-se necessário, portanto, a verificação da capacidade desta ferramenta computacional em mostrar o desempenho esperado nas diversas situações estruturais previstas.

Neste sentido, este capítulo apresenta uma série de comparações entre os resultados numéricos e experimentais, ou teóricos, para uma variedade de protótipos com as mais diversas propriedades e tipos de carregamento. As simulações numéricas procuraram utilizar, a partir das informações disponíveis e com a maior fidelidade possível, as verdadeiras características dos protótipos. Prescrições de normas ou valores consagrados na literatura suprimiram o conjunto de dados ausentes na descrição dos elementos estruturais.

A verificação do modelo numérico proposto inicia-se com alguns exemplos com comportamento elástico dos materiais, observando-se, principalmente, o desempenho das análises onde se utilizam elementos finitos longos, em situações com ou sem linearidade geométrica. Em seguida, os modelos constitutivos dos materiais são examinados através da comparação entre curvas “tensão x deformação” numéricas e teóricas, incluindo as respostas a carregamentos de caráter monotônico, cíclico e de longa duração. Na seqüência da verificação, uma série de exemplos de vigas e lajes em concreto armado e protendido é mostrada com resultados numéricos e experimentais. Especial ênfase é dada ao comportamento de elementos com protensão não aderente, procurando-se abranger diferentes situações de geometria, armadura e carregamento. A capacidade do modelo proposto em representar o desempenho de estruturas de construção composta é observada em seguida, através de vigas e lajes alveolares com continuidade posterior. Exemplos com pilares curtos e esbeltos, também são apresentados, observando-se o desempenho de estruturas com não

linearidades física e geométrica. Por fim, a resposta a carregamentos de longa duração é verificada, considerando vigas em concreto armado e protendido.

5.1 Barras com Comportamento Elástico

O exemplo de uma viga bi-apoiada elástica, submetida a uma carga concentrada no centro do vão, ilustra a influência sobre os resultados numéricos, do número de elementos, módulos de integração e seções transversais, utilizados nas simulações. A viga considerada apresenta um vão com 500 *cm* de comprimento, seção transversal retangular com 20 *cm* de base e 50 *cm* de altura, material homogêneo com módulo de elasticidade de 3000 *kN/cm²* e foi submetida a uma carga de 500 *kN* aplicada no centro do vão.

O quadro 5.1 apresenta os resultados para o giro no nó esquerdo, o deslocamento no centro do vão e o momento fletor máximo, correspondentes às análises teóricas e numéricas com as diversas alternativas de discretização mostradas na figura 5.1. Observa-se que a malha (5), com um único elemento finito dividido em dois módulos de integração, apresentou resultados idênticos aos valores teóricos para o giro e o deslocamento. A alternativa (6), com um nó sob a carga, também levou aos valores exatos. Os resultados obtidos com as demais malhas indicam uma tendência de redução do erro com o aumento do número de seções. No entanto, com a utilização de um único módulo de integração, mesmo um número elevado de pontos de integração, como na malha (4), não foi suficiente para a eliminação dos erros. A forma de discretização não afetou o valor obtido para o momento fletor máximo.

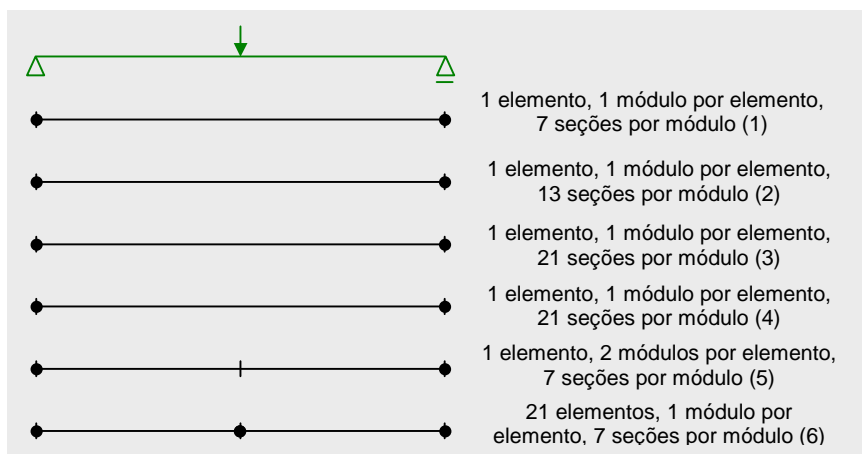


Figura 5.1 – Alternativas de discretização para a viga elástica

Quadro 5.1 – Resultados para a viga bi-apoiada com carga concentrada

<i>malha</i>				<i>resultados</i>		
<i>n°</i>	<i>n° de elementos</i>	<i>n° de módulos por elemento</i>	<i>n° de seções por módulo</i>	θ [rad]	δ [cm]	M [kNcm]
(1)	1	1	7	-0,013003	-2,2449	62500
(2)	1	1	13	-0,012633	-2,1272	62500
(3)	1	1	21	-0,012549	-2,0996	62500
(4)	1	1	41	-0,012513	-2,0875	62500
(5)	1	2	7	-0,012500	-2,0833	62500
(6)	2	1	7	-0,012500	-2,0833	62500
<i>valores teóricos</i>				-0,012500	-2,0833	62500

A barra elástica da figura 5.2 é utilizada em análises considerando a não linearidade geométrica. Ela apresenta 500 cm de comprimento, seção transversal quadrada com 20 cm de lado e é composta por um material com modulo de elasticidade de 3000 kN/cm^2 . O protótipo é submetido a cargas axiais de 160 kN, 250 kN e 360 kN, associadas a um momento de perturbação constante de 1000 kNcm. Esta mesma barra foi estudada por Carol & Murcia (1989b), através de um modelo numérico com a formulação do elemento finito do tipo híbrido, em que a não linearidade geométrica é tratada com a modificação das expressões para a solução de equilíbrio para momentos fletores e forças cortantes.

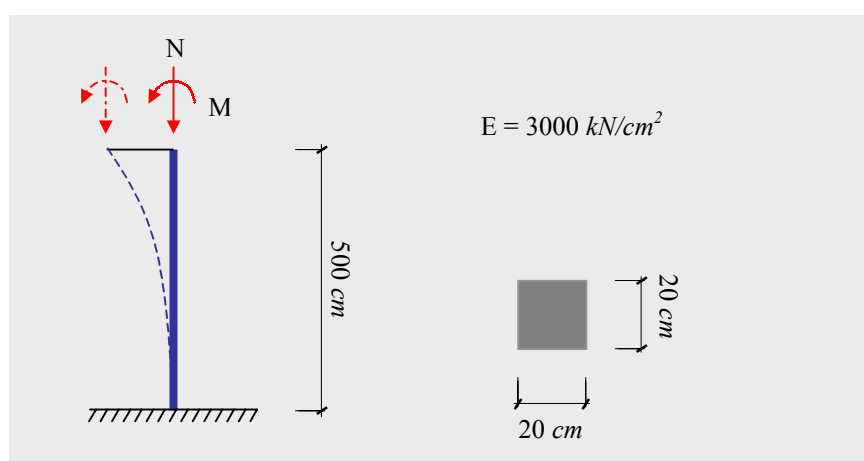


Figura 5.2 – Barra elástica comprimida com não linearidade geométrica

O quadro 5.2 compara os valores teóricos, para o deslocamento transversal no topo da barra e para o momento na base, com os resultados obtidos por Carol & Murcia (1989b) e pelo modelo numérico proposto. Os valores teóricos foram obtidos através da formulação para

pequenas deformações, desprezando o efeito do cisalhamento sobre a distribuição de curvaturas, de acordo com as equações (5.1) e (5.2), para o deslocamento e o momento fletor ao longo da barra, respectivamente. A discretização utilizada nas análises utilizando o modelo proposto e a de Carol & Murcia (1989b) foram semelhantes, consistindo em um elemento finito com 11 seções transversais, compostas por 11 lâminas. A integração numérica se deu através da regra de Simpson. Observa-se uma boa proximidade entre os resultados teóricos, de Carol & Murcia (1989b) e pelo modelo numérico. As diferenças com relação aos valores teóricos tornaram-se mais significativas para a força de 360 kN, correspondente a 91,2% da carga crítica que é de 394,8 kN, com erros da ordem de 0,6% e 1,2% para as análises de Carol & Murcia (1989) e pelo modelo proposto, respectivamente.

$$\delta(x) = \frac{M_0}{N} \frac{\left[1 - \cos\left(x\sqrt{\frac{N}{EI}}\right) \right]}{\cos\left(L\sqrt{\frac{N}{EI}}\right)} \quad (5.1)$$

onde:

- x : coordenada ao longo do eixo da barra;
- $\delta(x)$: deslocamento transversal;
- M_0 : momento fletor;
- N : carga axial;
- EI : rigidez da barra.

$$M(x) = M_0 \frac{\cos\left(x\sqrt{\frac{N}{EI}}\right)}{\cos\left(L\sqrt{\frac{N}{EI}}\right)} \quad (5.2)$$

onde:

- $M(x)$: momento fletor.

Quadro 5.2 – Resultados teóricos, de Carol & Murcia (1989b) e pelo modelo proposto para a barra comprimida

N [kN]	deslocamento no topo [cm]			diferença		momento na base [kNcm]			diferença	
	teórico (1)	C & M (2)	num. (3)	(2)/(1) %	(3)/(1) %	teórico (4)	C & M (5)	num. (6)	(2)/(1) %	(3)/(1) %
160	5,3176	5,3185	5,3180	-0,01	-0,01	1850,2	1851,0	1850,9	-0,01	-0,01
250	8,6854	8,6890	8,6875	-0,04	-0,02	3171,4	3172,0	3171,9	-0,02	-0,02
360	36,4910	36,3140	36,0218	0,49	1,28	14411,0	14062,0	13967,8	0,58	1,24

Os resultados teóricos e numéricos para os deslocamentos transversais e os momentos fletores ao longo da barra, sob o carregamento axial de 250 *kN*, são comparados no quadro 5.3. Observa-se que os resultados numéricos obtidos por Carol & Murcia (1989b) e pelo modelo proposto foram bastante próximos aos teóricos, com diferenças quase sempre inferiores a 0,1%.

Quadro 5.3 – Resultados teóricos, de Carol & Murcia (1989b) e numéricos para deslocamentos e momentos fletores ao longo da barra comprimida

<i>x/l</i>	<i>deslocamentos [cm]</i>			<i>diferenças</i>		<i>momentos [kNcm]</i>			<i>diferenças</i>	
	<i>teórico</i> (1)	<i>C & M</i> (2)	<i>num.</i> (3)	(2)/(1) %	(3)/(1) %	<i>teórico</i> (1)	<i>C & M</i> (2)	<i>num.</i> (3)	(2)/(1) %	(3)/(1) %
0,1	0,0989	0,0980	0,0980	0,910	0,910	3147,0	3148,0	3147,4	-0,032	-0,013
0,3	0,8815	0,8796	0,8795	0,216	0,227	2951,0	2952,0	2952,0	-0,034	-0,033
0,5	2,3980	2,3964	2,3961	0,067	0,079	2572,0	2573,0	2572,8	-0,039	-0,033
0,7	4,5541	4,5539	4,5534	0,004	0,015	2033,0	2034,0	2033,6	-0,049	-0,027
0,9	7,2158	7,2179	7,2171	-0,029	-0,018	1367,0	1368,0	1367,7	-0,073	-0,050

A mesma barra comprimida esbelta foi analisada no modelo numérico utilizando diferentes distribuições da malha em elementos finitos, observando-se, também, os resultados utilizando diferentes regras de integração numérica. O quadro 5.4 mostra os resultados numéricos para os deslocamentos no topo da barra, obtidos para as cargas de 160 *kN*, 250 *kN* e 360 *kN*. Verifica-se que o número de elementos finitos, de módulos de integração e de seções transversais pouco afetou os resultados, com variação máxima de 0,3% entre as simulações com carga de 360 *kN*. Nota-se uma pequena tendência de redução do valor do deslocamento calculado com o refinamento da malha. Os resultados indicaram, também, uma convergência dos deslocamentos com o refinamento. O quadro mostra, ainda, que as diferentes regras de integração levaram a resultados de deslocamento praticamente idêntico em todos os casos considerados.

Quadro 5.4 – Deslocamentos no topo da barra obtidos com o modelo numérico, utilizando diferentes malhas e regras de integração [cm]

<i>características da malha</i>			<i>N = 160 kN</i>		<i>N = 250 kN</i>		<i>N = 360 kN</i>	
<i>n° de elem.</i>	<i>n° de mód. por elem.</i>	<i>n° de sec. por mód.</i>	<i>Simpson</i>	<i>Lobatto</i>	<i>Simpson</i>	<i>Lobatto</i>	<i>Simpson</i>	<i>Lobatto</i>
1	1	11	5,3180	5,3178	8,6875	8,6861	36,0218	36,0224
1	1	21	5,3176	5,3175	8,6846	8,6843	35,9728	35,9500
1	3	7	5,3175	5,3175	8,6844	8,6843	35,9428	35,9422
1	3	11	5,3175	5,3175	8,6843	8,6843	35,9428	35,9422
2	1	11	5,3175	5,3175	8,6844	8,6843	35,9301	35,9270
3	1	11	5,3175	5,3175	8,6842	8,6842	35,9164	35,9158
4	1	11	5,3175	5,3175	8,6841	8,6841	35,9126	35,9124
5	1	11	5,3175	5,3175	8,6841	8,6841	35,9109	35,9108

5.2 Relações Constitutivas dos Materiais

O funcionamento das relações constitutivas dos materiais é verificado através de análises simples em que barras homogêneas de concreto, aço de armadura passiva e aço de protensão são submetidos aos diversos carregamentos previstos no modelo numérico proposto. As curvas “tensão x deformação” obtidas numericamente são comparadas com as respectivas relações teóricas. Em outros casos, apenas os resultados numéricos são apresentados, mostrando a capacidade da ferramenta computacional em mostrar as respostas do material aos carregamentos impostos. Todas análises apresentadas a seguir desenvolveram-se com incrementos de deslocamento, em barras com um único elemento finito com 11 seções transversais e 11 lâminas por seção.

5.2.1 Concreto Sujeito a Carregamentos de Curta Duração

A figura 5.3 descreve a resposta do concreto a uma ação de compressão de caráter cíclico, em que o descarregamento teve início na fase de amolecimento do material. Observa-se que a remoção total da carga resultou em deformações permanentes e que o novo carregamento produziu um laço fechado de histerese. Na figura 5.4, mostra-se a resposta do concreto frente a uma série de ciclos de carga. Em ambos os casos, nota-se a curva “tensão x deformação” monotônica como envoltória à resposta cíclica.

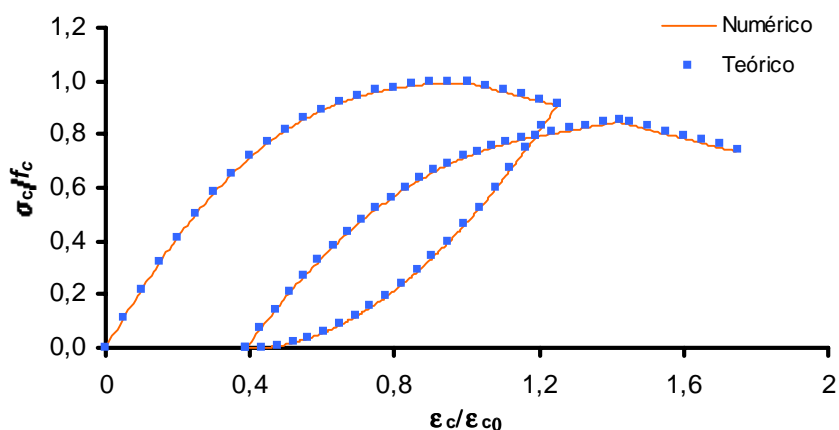


Figura 5.3 – Concreto à compressão: resposta a uma ação de caráter cíclico, com descarregamento na fase de amolecimento do material

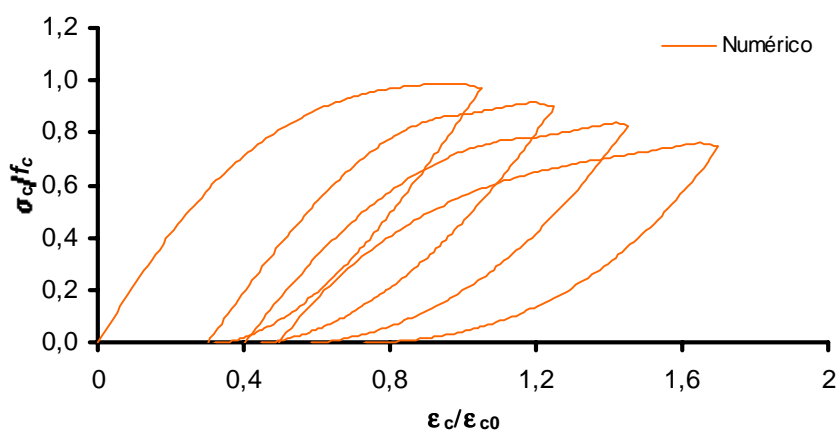


Figura 5.4 – Concreto à compressão: resposta a uma série de ciclos na fase de amolecimento

A figura 5.5 compara curvas “tensão x deformação” para o concreto, com resultados numéricos e teóricos para ações de tração. É possível observar o comportamento linear até a fissuração, seguido pelas duas fases do modelo de *tension stiffening*. Mostram-se, também, dois ciclos de carga em que as trajetórias de descarregamento e recarregamento seguem relações lineares que passam pela origem do espaço tensão deformação. A figura 5.6 apresenta um exemplo de trajetória de tração após um ciclo de compressão. A resposta à tração teve início no ponto de carga zero, com deformações plásticas acumuladas. A figura 5.7 mostra uma trajetória de compressão após um ciclo de tração, indicando que não houve deformações permanentes no início do carregamento à compressão, com a curva passando pela origem.

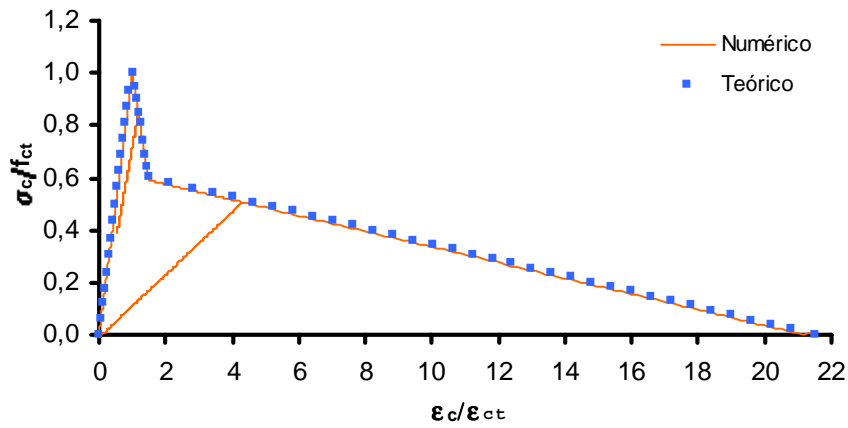


Figura 5.5 – Concreto à tração: resposta a uma ação de caráter cíclico

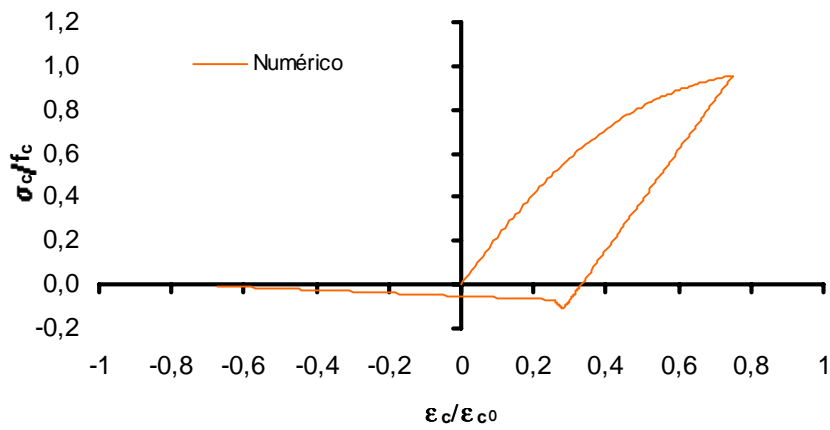


Figura 5.6 – Concreto: trajetória de tração após um ciclo de compressão

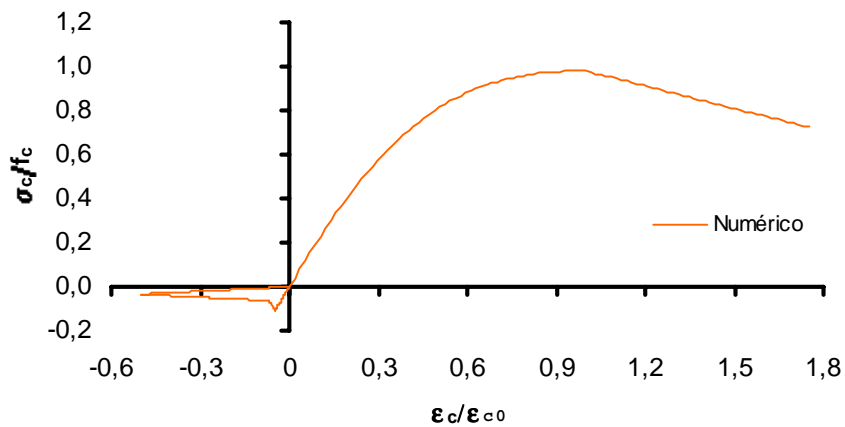


Figura 5.7 – Concreto: trajetória de compressão a partir de um ciclo de tração

5.2.2 Concreto Sujeito a Carregamentos de Longa Duração

As figuras 5.8 a 5.12 apresentam comparações entre as deformações por fluência, calculadas pela formulação de Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) e as obtidas pelo modelo numérico, para períodos de 2800 dias de duração e inícios em diferentes idades. Utilizou-se um protótipo com seção transversal quadrada de 10 cm de lado e 100 cm de comprimento, com concreto de resistência à compressão (f_c) de 3 kN/cm², cimento normal, sob temperatura e umidade constantes, com valores de 20°C e 80%, respectivamente. O protótipo foi mantido sob uma tensão equivalente a 30% da resistência do concreto à compressão. As idades iniciais de carregamento foram selecionadas seguindo a relação (4.68), apresentada no item 4.2.1.5, com dois incrementos por década na escala logarítmica.

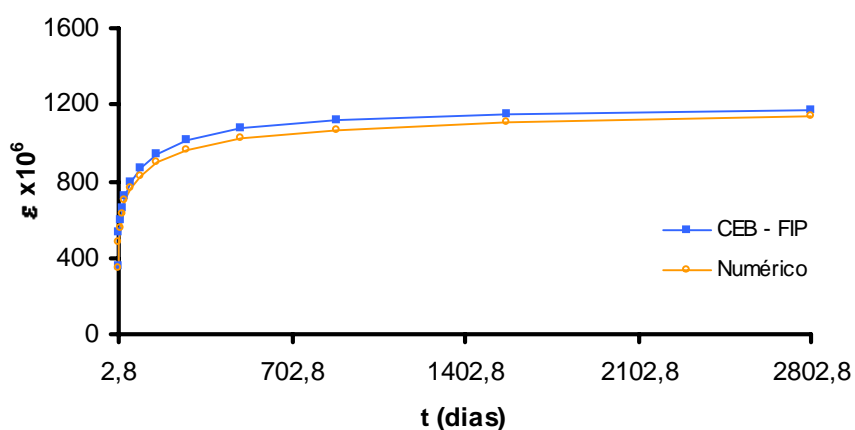


Figura 5.8 – Fluência do concreto: resultados no período entre 2,8 e 2802,8 dias

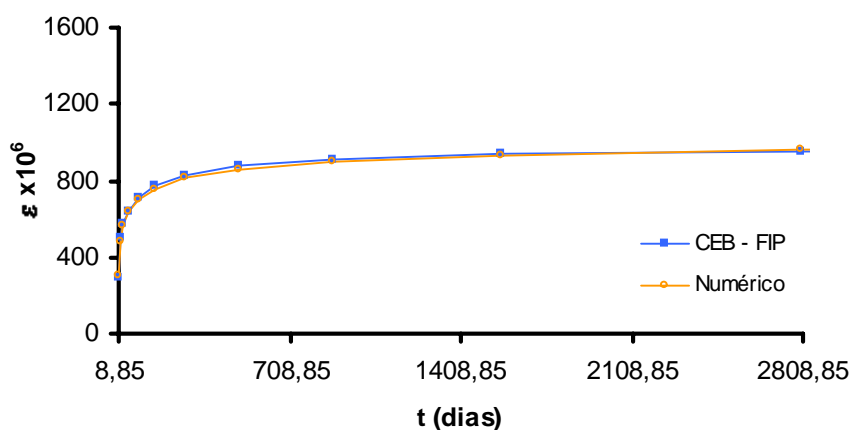


Figura 5.9 – Fluência do concreto: resultados no período entre 8,85 e 2808,85 dias

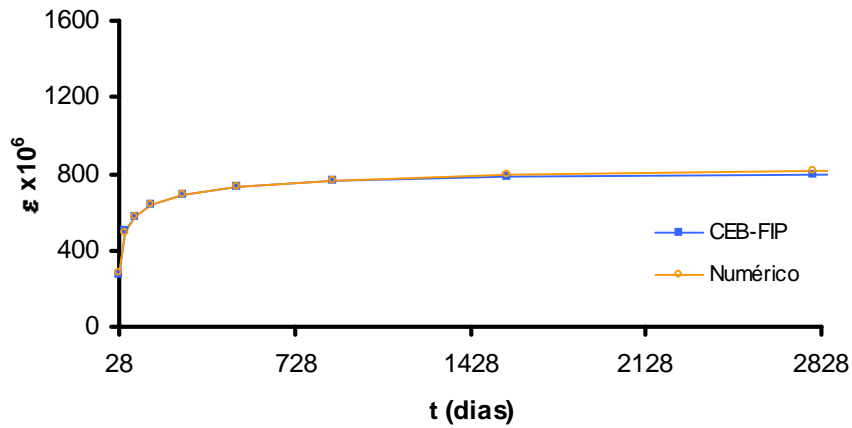


Figura 5.10 – Fluência do concreto: resultados no período entre 28 e 2828 dias

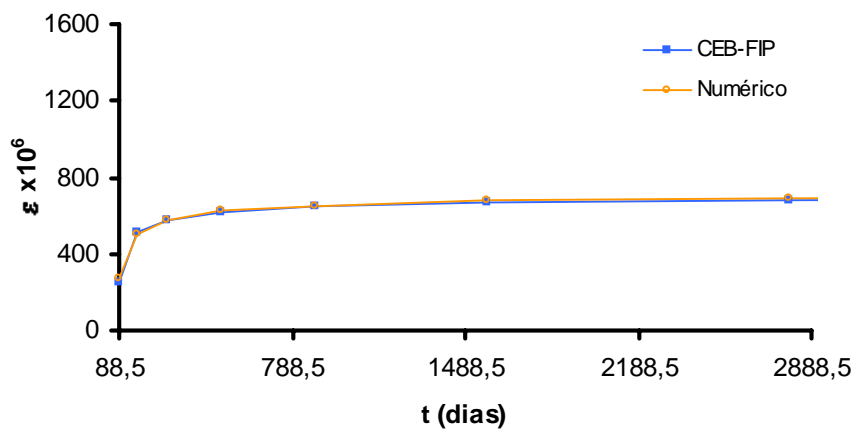


Figura 5.11 – Fluência do concreto: resultados no período entre 88,5 e 2888,5 dias

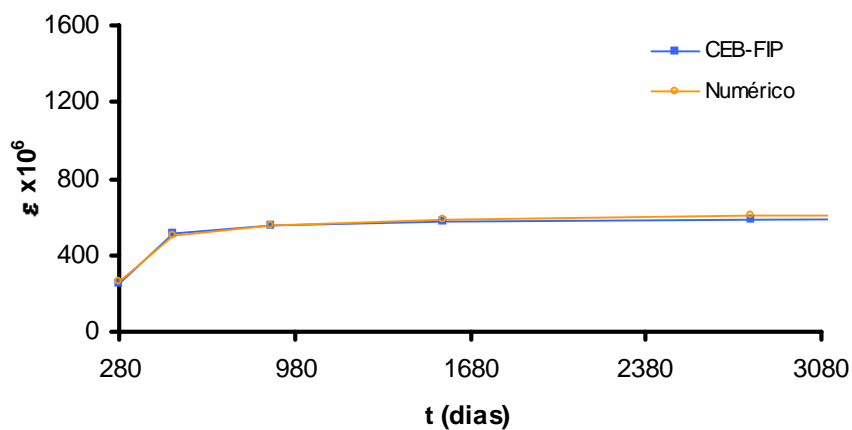


Figura 5.12 – Fluência do concreto: resultados no período entre 280 e 3080 dias

As figuras demonstram uma boa relação entre as curvas numéricas e teóricas, com melhores resultados para carregamentos aplicados em idades iniciais superiores a 28 dias. Observa-se, também, que o reduzido número de etapas incrementais na escala do tempo foi adequado para a estimativa das deformações de fluência no concreto nos exemplos considerados.

5.2.3 Armaduras sob Carregamentos de Curta Duração

As respostas numéricas para a armadura passiva submetida a carregamentos cíclicos, considerando as regras isotrópica e cinemática de endurecimento, são mostradas nas figuras 5.13 e 5.14, respectivamente. Em ambos os casos, o programa computacional foi capaz de reproduzir o comportamento previsto teoricamente.

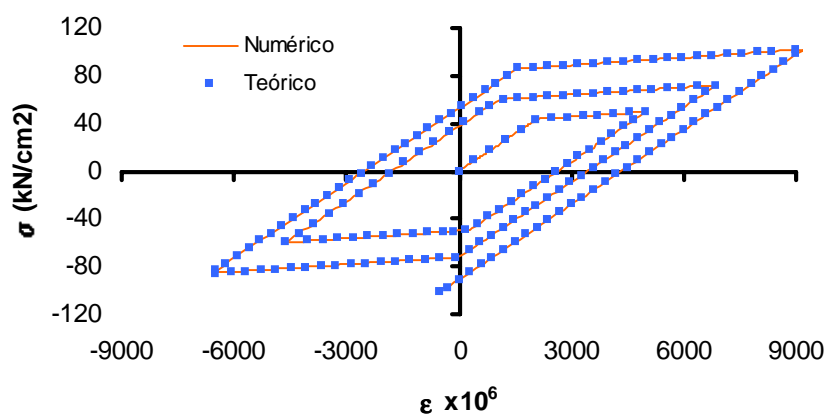


Figura 5.13 – Armadura passiva sob ação cíclica: resultados com a regra de endurecimento isotrópico

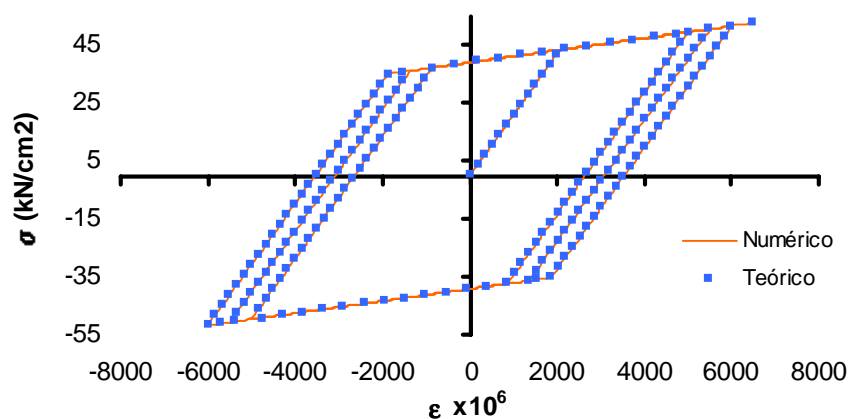


Figura 5.14 – Armadura passiva sob ação cíclica: resultados com a regra de endurecimento cinemático

As respostas de um aço de protensão do tipo CP190 RB sob um elevado número de ciclos são mostradas nas figuras 5.15 e 5.16, para as regras de endurecimento isotrópicas e cinemáticas, respectivamente. Observa-se que o modelo foi capaz de reproduzir o comportamento teórico nas simulações com várias repetições.

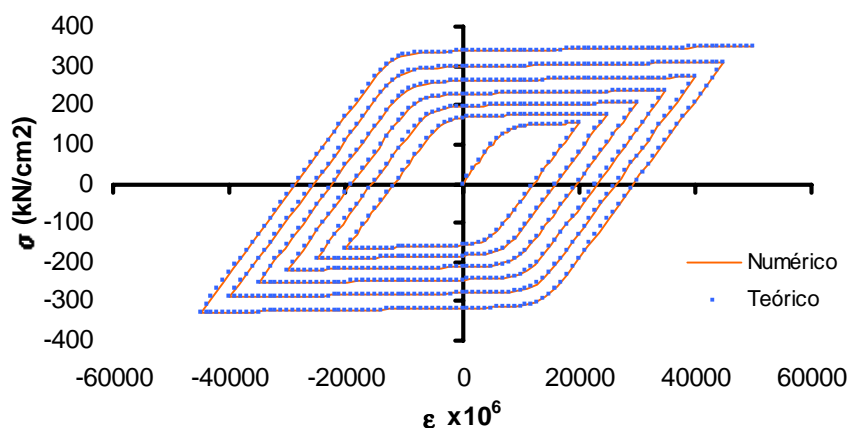


Figura 5.15 – Aço de protensão: resultados com a regra isotrópica de endurecimento

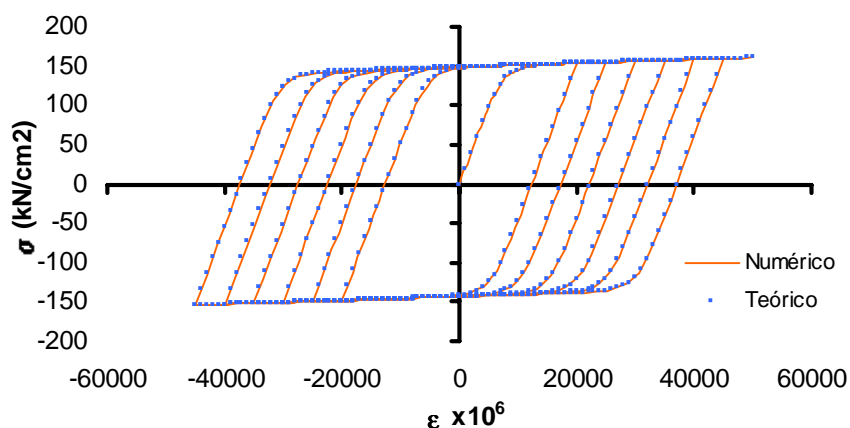


Figura 5.16 – Aço de protensão: resultados com a regra cinemática de endurecimento

5.2.4 Aço de Protensão sob Carregamentos de Longa Duração

As figuras 5.17, 5.18 e 5.19 apresentam as curvas de relaxação para o aço de protensão do tipo CP-190 RB, calculadas diretamente pela formulação do Código Modelo CEB-FIP 1990

(1993) e pelo modelo numérico, num período de 2,8 a 10000 dias, para tensões iniciais correspondentes a 60%, 70% e 80% da resistência característica (f_{ptk}), respectivamente. Observa-se uma boa relação entre resultados numéricos e teóricos, com uma tendência de afastamento entre as curvas com o aumento da tensão inicial. Os erros médios, no período considerado, foram de 0,12%, 0,30% e 0,96% para as tensões iniciais de 60%, 70% e 80% de f_{ptk} , respectivamente. Também no caso da armadura de protensão, o pequeno número de incrementos de tempo foi suficiente para uma descrição adequada do comportamento reológico do material através do modelo da cadeia de Maxwell.

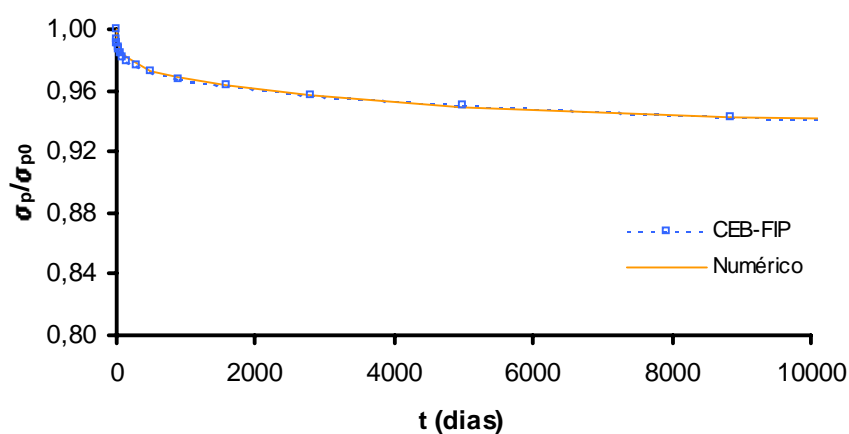


Figura 5.17 – Aço de protensão: relaxação entre 2,8 e 10000 dias, com $\sigma_{p0} = 0,6f_{ptk}$

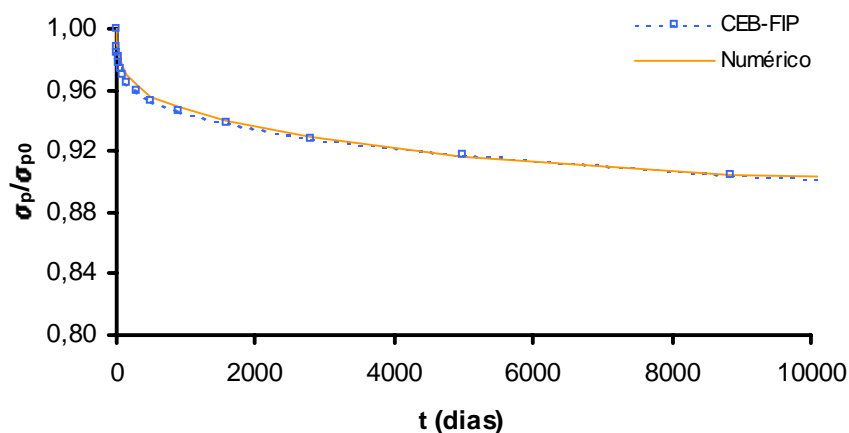


Figura 5.18 – Aço de protensão: relaxação entre 2,8 e 10000 dias, com $\sigma_{p0} = 0,7f_{ptk}$

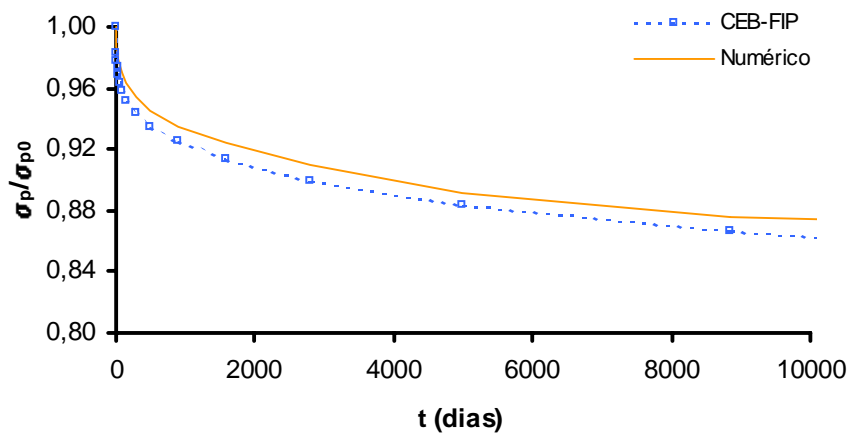


Figura 5.19 – Aço de protensão: relaxação entre 2,8 e 10000 dias, com $\sigma_{p0} = 0,8f_{ptk}$

5.3 Vigas e Lajes em Concreto Armado e Protendido

Uma série com 53 exemplos de vigas e lajes em concreto armado e protendido é apresentada a seguir, abrangendo protótipos com as mais diversas características. Os elementos originam-se dos trabalhos experimentais de Beber (1999), Tao & Du (1985), Cooke et al (1981), Barbieri (1999), Chakrabarti (1995) e Harajli & Kanj (1991). Resultados de deslocamentos, deformações nas armaduras e no concreto, e relativos à fissuração dos protótipos são utilizados para a verificação do desempenho do modelo numérico. Nas figuras relativas aos protótipos com carregamento nos terços médios, os resultados referem-se à soma das cargas.

5.3.1 Vigas em Concreto Armado

Os protótipos de Beber (1999) constituíram-se em vigas bi-apoiadas, testemunho ou reforçadas com fibra de carbono, com de 235 *cm* de vão e seção transversal retangular de 12 *cm* de base e 25 *cm* de altura, submetidas a cargas nos terços médios. Todos os elementos apresentaram uma armadura de 1,57 *cm*² na zona de tração do tipo CA50, com cobrimento de 1,5 *cm*. Duas barras de 6 *mm* de diâmetro foram utilizadas com armadura construtiva no topo da seção. O concreto apresentou resistências à compressão e à tração de 3,358 *kN/cm*² e 0,314 *kN/cm*², respectivamente, e um módulo de elasticidade de 3831,1 *kN/cm*². Para o reforço, foram utilizadas mantas de fibra de carbono dispostas em camadas de 0,111 *mm* de espessura e a mesma largura da viga, com módulo de elasticidade de 23000 *kN/cm*².

Nas análises numéricas, adotaram-se os valores para a deformação relativa à resistência à compressão (ε_{c0}) e a deformação final (ε_{cf}) de 0,2% e 1 %, respectivamente. A resistência final do concreto à compressão foi estimada em $0,593 \text{ kN/cm}^2$, seguindo as recomendações de Saenz (Kabaila, 1969), e o parâmetro β de fissuração foi arbitrado em 0,7. As vigas foram modeladas com um elemento finito e 21 seções transversais, constituídas por 11 lâminas, distribuídas em três módulos de integração de igual comprimento. As simulações se deram em incrementos de deslocamento, utilizando a regra de integração de Gauss-Lobatto. A fibra de carbono foi modelada como armadura de comportamento linear.

As figuras 5.20 a 5.29 apresentam os resultados numéricos e experimentais, sobre deslocamentos e deformações na armadura de tração no centro do vão, para os protótipos testemunhos e reforçados do trabalho experimental de Beber (1999). Nos gráficos para as deformações nas armaduras, os resultados A e B referem-se às duas barras existentes em cada viga. Uma boa modelagem do comportamento experimental é mostrada em todas as figuras.

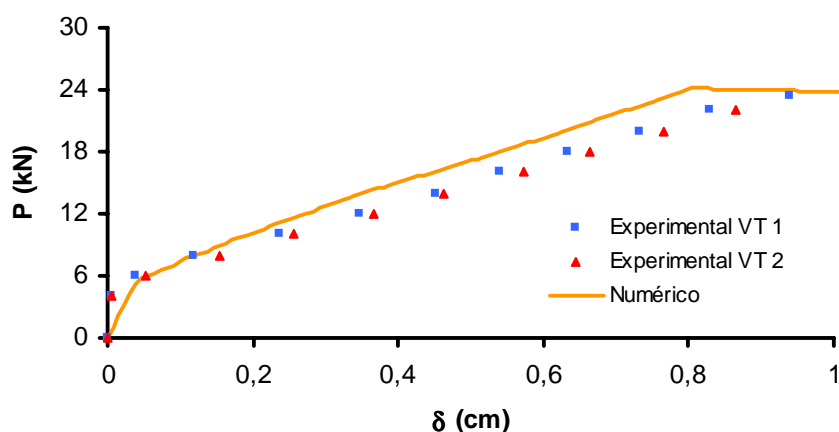


Figura 5.20 – Vigas testemunho: resultados para os deslocamentos

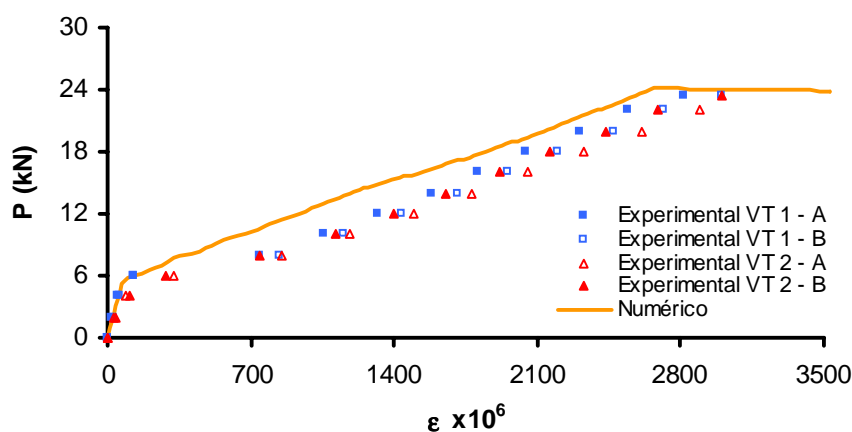


Figura 5.21 – Vigas testemunho: deformações nas armaduras de tração

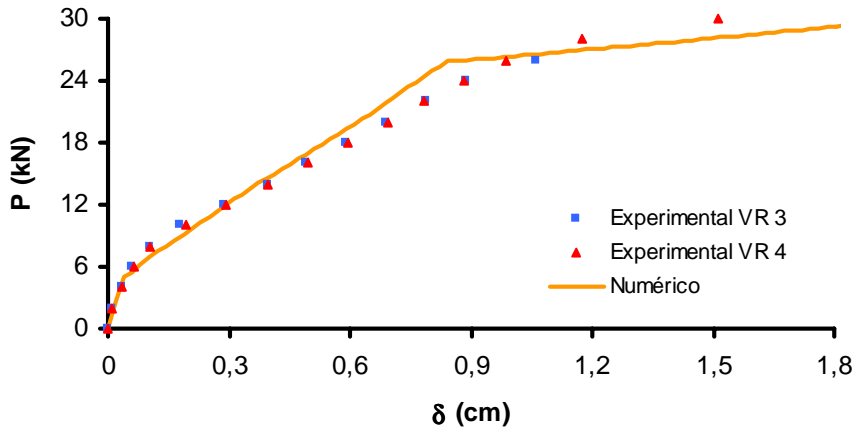


Figura 5.22 – Vigas VR 3 e VR 4 reforçadas com uma camada: resultados para deslocamentos

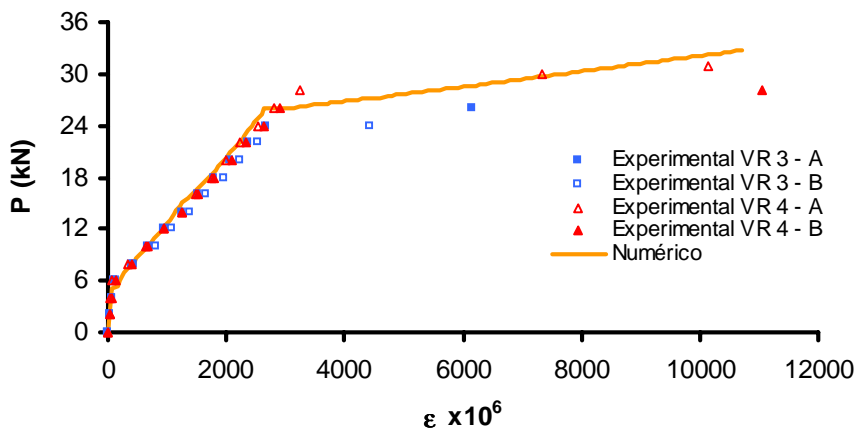


Figura 5.23 – Vigas VR 3 e VR 4 reforçadas com uma camada: deformações nas armaduras de tração

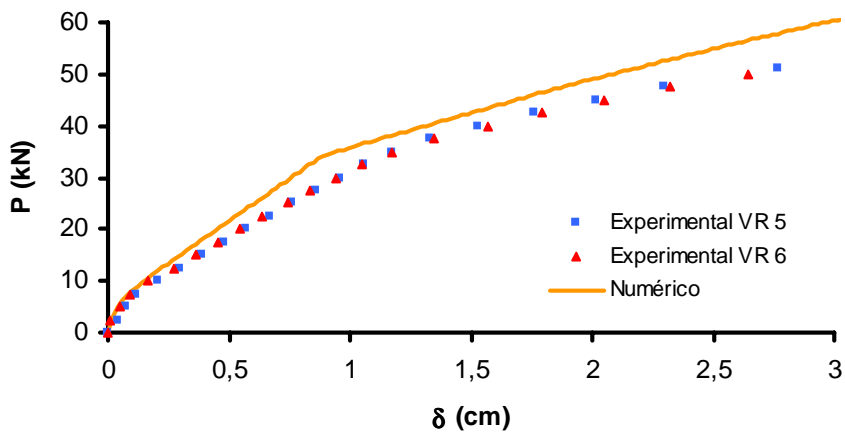


Figura 5.24 – Vigas VR 5 e VR 6 reforçadas com quatro camadas: deslocamentos

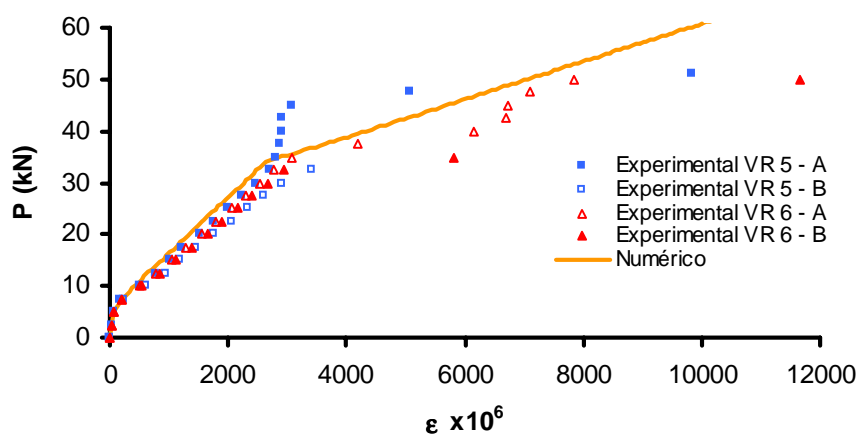


Figura 5.25 – Protótipos VR 5 e VR 6 reforçados com quatro camadas: resultados para as deformações nas armaduras de tração

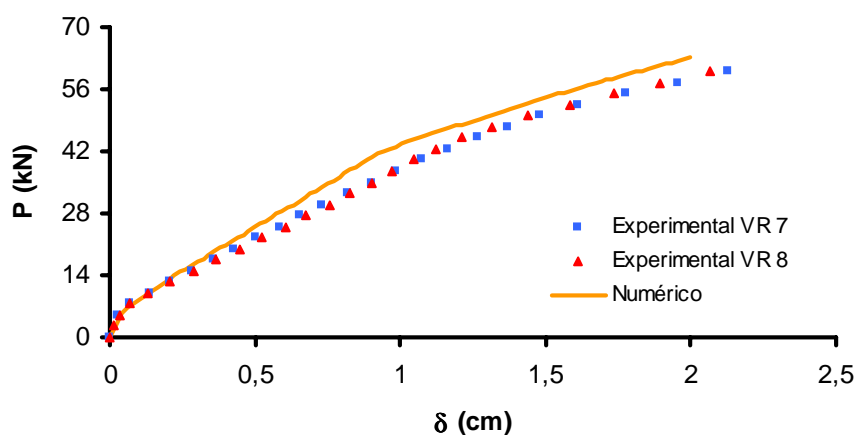


Figura 5.26 – Protótipos VR 7 e VR 8 reforçados com sete camadas: resultados para os deslocamentos

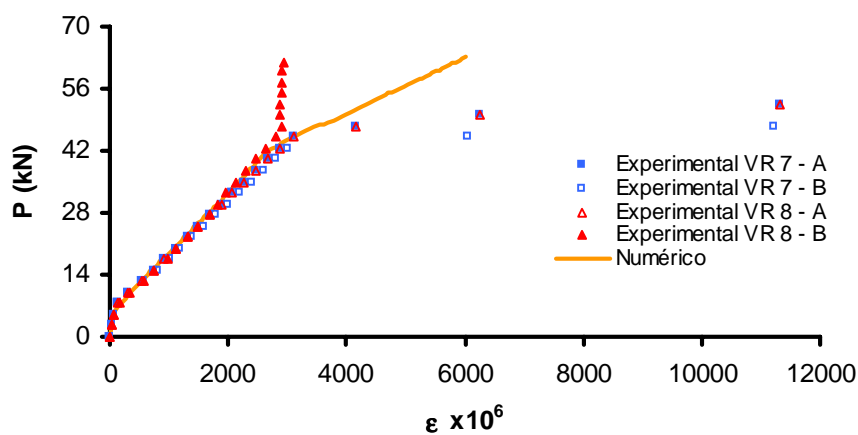


Figura 5.27 – Protótipos VR 7 e VR 8 reforçados com sete camadas: deformações nas armaduras de tração

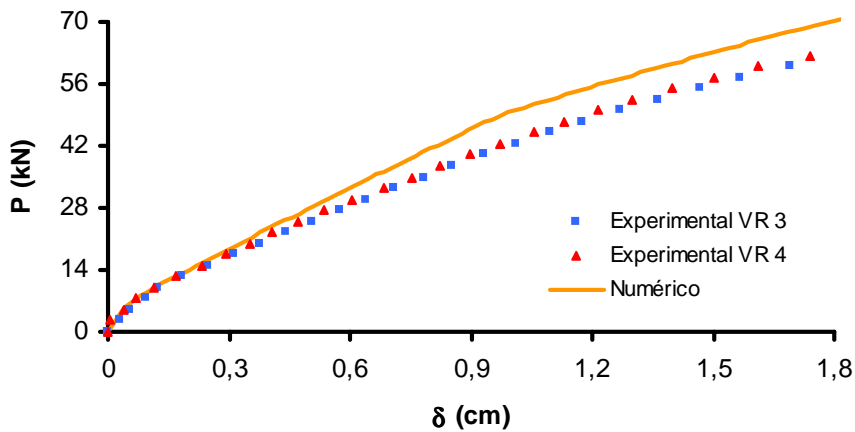


Figura 5.28 – Vigas VR 9 e VR 10 reforçadas com dez camadas: resultados numéricos e experimentais para deslocamentos

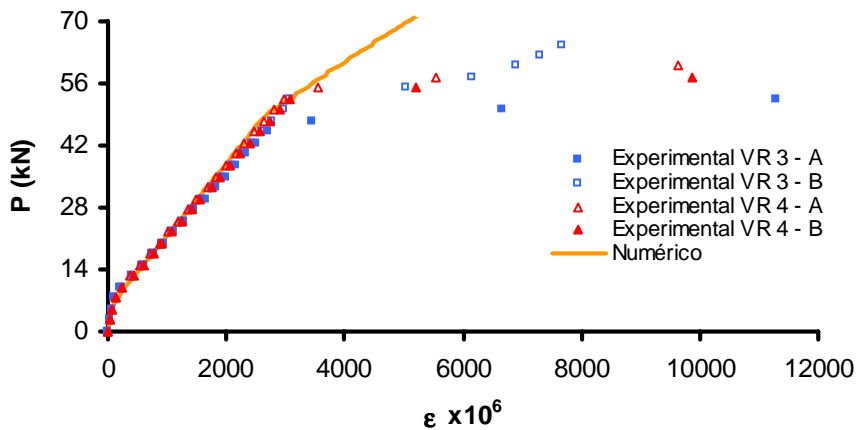


Figura 5.29 – Protótipos VR 9 e VR 10 reforçados com dez camadas: resultados para a deformação nas armaduras

5.3.2 Vigas de Concreto com Protensão Aderente

O protótipo TD-D3 do trabalho de Tao & Du (1985) consistiu em uma viga protendida com aderência inicial, de 420 cm de vão e seção transversal retangular de 16 cm de base e 28 cm de altura, submetida a um carregamento nos terços médios. A armadura passiva foi de $1,57 \text{ cm}^2$, posicionada com uma altura útil (d_s) de 25 cm. A protensão foi aplicada por um cabo de $0,59 \text{ cm}^2$, com altura útil (d_p) de 22 cm, submetido a uma tensão inicial (f_{pe}) de $92,4 \text{ kN/cm}^2$. O concreto apresentou resistência a compressão (f_c) de $3,56 \text{ kN/cm}^2$, o aço de protensão uma tensão convencional de escoamento de 145 kN/cm^2 e uma resistência final de 166 kN/cm^2 , e a armadura passiva apresentou tensão de escoamento de 43 kN/cm^2 .

A viga TD-D3 de Tao & Du (1985) foi modelada por um elemento finito, com três módulos de integração e 21 seções transversais, compostas por 21 lâminas. O módulo de elasticidade inicial (E_c) do concreto foi arbitrado, segundo o ACI 318 (ACI, 1999), em $2823,96 \text{ kN/cm}^2$ e a resistência final à compressão (f_{c_f}) em $0,655 \text{ kN/cm}^2$, a partir das recomendações de Saenz (Kabaila, 1969). Adotaram-se valores de deformação de 0,2% e 1,0% correspondentes ao pico de resistência e à resistência final do concreto, respectivamente. A resistência à tração do concreto (f_{ct}) foi arbitrada em 10% da resistência à compressão e o parâmetro β fixado em 4,5. A análise transcorreu em incrementos de deslocamento utilizando a regra de Gauss-Lobatto. A figura 5.30 apresenta as curvas “carga x deslocamento” para a viga TD-D3 de Tao & Du (1985), onde se observa uma modelagem bastante adequada do comportamento experimental, com uma boa estimativa da carga máxima apresentada pelo protótipo.

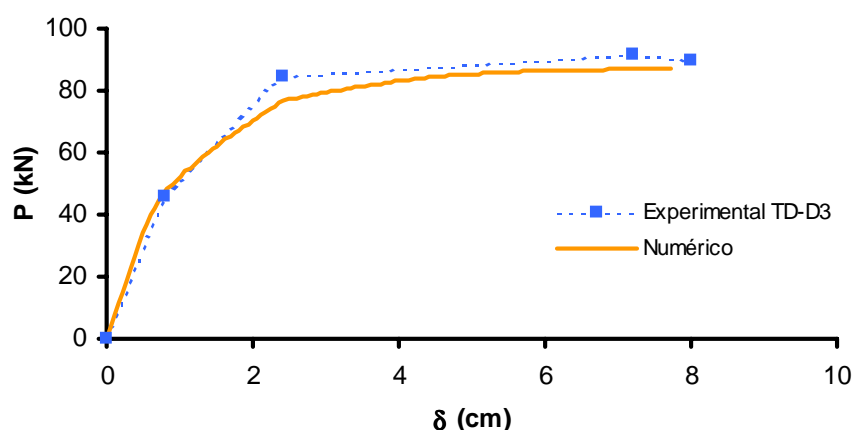


Figura 5.30 – Viga TD-D3 de Tao & Du (1985): resultados para os deslocamentos

Os protótipos CP-B4, CP-B5 e CP-B6 de Cooke et al (1981) constituíram-se em lajes bi-apoiadas protendidas com 340 cm de vão, sem qualquer armadura passiva adicional. As lajes apresentaram 18 cm de espessura, com uma altura útil da armadura de protensão (d_p) de 12 cm , e larguras variáveis. Foi utilizado um aço de protensão com tensão convencional de escoamento de $158,16 \text{ kN/cm}^2$ e resistência final de $176,64 \text{ kN/cm}^2$. As demais características das lajes são mostradas no quadro 5.5, incluindo as larguras (b), as resistências dos concretos (f_c), as áreas (A_p) e as tensões efetivas de protensão (f_{pe}). No mesmo quadro, indicam-se os valores arbitrados para os módulos de elasticidade dos concretos, determinados segundo o ACI 318 (ACI, 1999), e as resistências finais dos concretos, obtidas a partir das recomendações de Saenz (Kabaila, 1969). As resistências à tração dos concretos (f_{ct}) foram

consideradas iguais a 10% das resistências à compressão e o parâmetro β foi definido com um valor de 1,0 para todos os protótipos. As lajes foram modeladas por um único elemento finito com três módulos de integração, com sete seções transversais cada, constituídas por 21 lâminas. As simulações transcorreram com controle de deslocamento, utilizando a quadratura de Gauss-Lobatto.

Quadro 5.5 – Características das lajes com protensão aderente de Cooke et al (1981) [kN ; cm]

Laje	<i>dados experimentais</i>				<i>dados arbitrados</i>	
	b	f_c	A_{ps}	f_{pe}	E_c	f_{cf}
CP-B4	35,3	3,38	2,79	119,7	2753	0,600
CP-B5	70,5	3,38	2,79	116,6	2753	0,600
CP-B6	118,2	3,79	1,16	124,2	2915	0,729

As figuras 5.31, 5.32 e 5.33 mostram as curvas “carga x deslocamento”, numéricas e experimentais, relativas às lajes CP-B4, CP-B5 e CP-B6 de Cooke et al (1981), respectivamente. Nos três casos, obteve-se um desempenho adequado do modelo numérico, com boas estimativas das cargas máximas suportadas pelos protótipos CP-B4 e CP-B5. A forma de comportamento apresentado pela laje CP-B6, em que a resistência máxima foi verificada quando da formação das primeiras fissuras, foi reproduzido numericamente. A carga de fissuração, no entanto, foi superestimada, provavelmente em função da inadequação do parâmetro adotado para a resistência à tração do concreto.

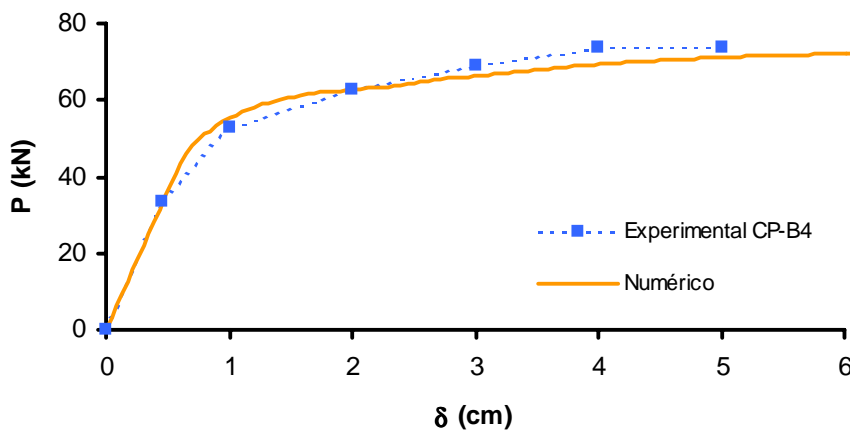


Figura 5.31 –Protótipo CP-B4 de Cooke et al (1981): resultados para os deslocamentos

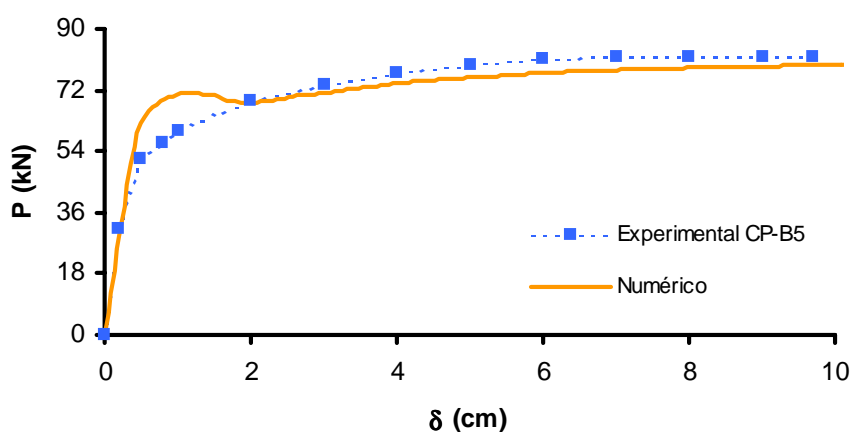


Figura 5.32 – Protótipo CP-B5 de Cooke et al (1981): resultados para os deslocamentos

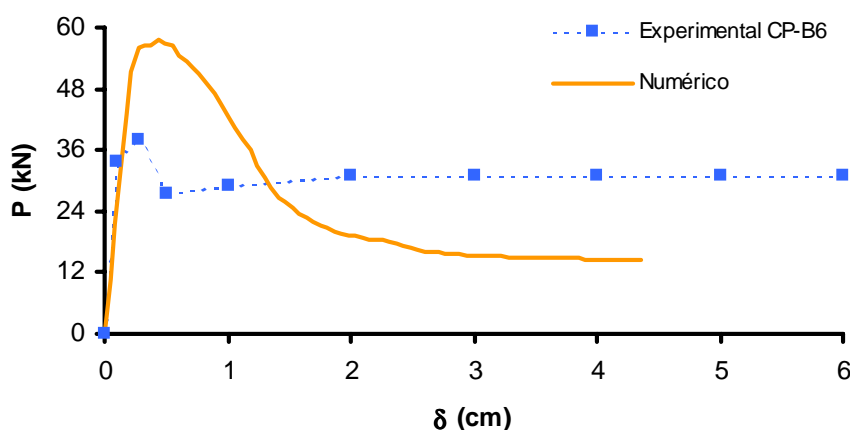


Figura 5.33 – Protótipo CP-B6: resultados para os deslocamentos no centro do vão

A laje alveolar 1 do trabalho experimental de Barbieri (1999) foi utilizada como um protótipo bi-apoiado com 500 cm de comprimento. O elemento apresentou 16 cm de espessura e 60 cm de largura, com seção transversal com cinco vazios longitudinais e área de 590 cm². A protensão com aderência inicial foi aplicada por um total de seis cordoalhas, totalizando 1,91 cm² na região inferior e 0,42 cm² na região superior da seção transversal, com 1,7 cm de cobrimento em ambos os casos. A laje foi retirada de um lote de produção industrial com resistência característica do concreto (f_{ck}) de 3,0 kN/cm² e aço de protensão do tipo CP-190 RB. O protótipo foi submetido a uma carga concentrada posicionada a 150 cm do apoio direito.

Na análise numérica, o módulo de elasticidade do concreto (E_c) foi estimado em 2592 kN/cm², conforme o ACI 318 (ACI, 1999), a resistência à tração foi arbitrada em 10% da resistência à compressão, a resistência final foi definida em 0,44 kN/cm², de acordo com Saenz (Kabaila, 1969) e o parâmetro β assumiu um valor de 1,0. A laje foi modelada com um único elemento

finito e 28 seções transversais, divididas em quatro módulos de integração, que foram distribuídos de maneira a respeitar a disposição do carregamento e os pontos de instrumentação, a 200 *cm* do apoio direito. A simulação foi realizada com incrementos de deslocamentos e a quadratura de Gauss-Lobatto. Respeitando a história do protótipo, a análise iniciou com a aplicação da protensão e do peso próprio com uma idade de 28 dias, seguida pela ação do tempo durante 365 dias e foi finalizada pela aplicação da carga variável.

A figura 5.34 mostra as curvas “carga x deslocamento” para a Laje nº 1 de Barbieri (1999). Observa-se um distanciamento entre as curvas após a fissura do protótipo. Mesmo assim, a carga máxima foi estimada com razoável precisão. A queda na carga verificada na simulação numérica decorreu do início da plastificação do concreto. A figura 5.35 apresenta os resultados para a deformação no concreto na face superior da seção de instrumentação. Nota-se uma discrepância inicial entre os resultados numéricos e experimentais, mas com uma boa avaliação do comportamento do protótipo após a fissuração do concreto.

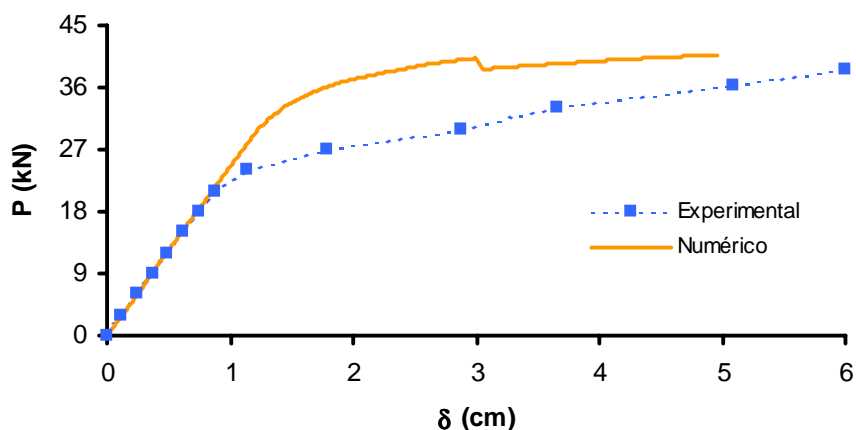


Figura 5.34 – Laje 1 de Barbieri (1999): deslocamentos

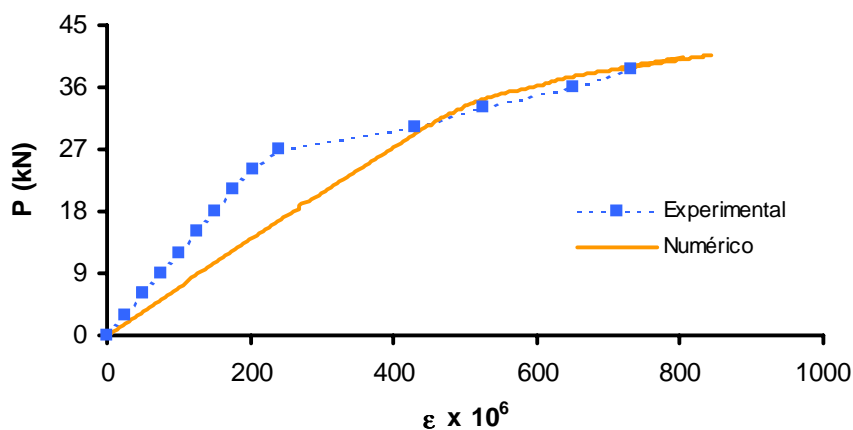


Figura 5.35 – Laje 1: deformações de compressão no concreto

5.3.3 Elementos com Protensão Não Aderente

Os exemplos de elementos protendidos com armaduras não aderentes, apresentados a seguir, abrangem vigas e lajes com protensão total ou parcial, carregamentos concentrados ou nos terços médios e diferentes taxas totais de armadura. Pretende-se, com isso, verificar a capacidade do modelo numérico em representar os principais aspectos do comportamento à flexão destes elementos, abordados no **Capítulo 2**.

Além das simulações considerando a condição real dos protótipos experimentais, que possuíram armaduras de protensão não aderentes, análises numéricas em que estas armaduras foram definidas como se aderentes fossem, também foram realizadas. Com a apresentação de ambos os resultados numéricos, busca-se observar o efeito da ausência de aderência entre o concreto e a armadura de protensão sobre o comportamento dos protótipos. Nas figuras apresentadas ao longo deste item, os resultados das simulações representando as estruturas reais, com armaduras não aderentes, são identificados na legenda como “**numérico**”, enquanto as curvas obtidas nas análises supondo a existência da aderência das armaduras são indicadas como “**numérico - hipótese aderente**”.

As análises numéricas foram realizadas com incrementos de deslocamento e utilizaram a regra de Gauss-Lobatto para a integração ao longo dos elementos finitos. O atrito entre os cabos e seus revestimentos foi desprezado, em virtude da ausência de parâmetros experimentais nas referências utilizadas.

5.3.3.1 Vigas com Protensão Não Aderente de Tao & Du (1985)

O quadro 5.6 apresenta os dados referentes aos protótipos do trabalho experimental de Tao & Du (1985), utilizados para a avaliação do modelo numérico. Estes protótipos constituíram-se em vigas bi-apoiadas com protensão não aderente parcial, submetidas a cargas nos terços médios, com 420 *cm* de vão e seções transversais retangulares de 16 *cm* de base e 28 *cm* de altura. As alturas úteis das armaduras passivas (d_s) e de protensão (d_p) foram de 25 *cm* e 22 *cm*, respectivamente, para um índice de esbeltez à flexão de 19,1. O aço de protensão apresentou tensão convencional de escoamento de 155,1 kN/cm^2 e de ruptura de 179 kN/cm^2 .

Quadro 5.6 – Dados dos protótipos de Tao & Du (1985) [kN; cm]

Viga	experimentais							arbitrados		
	f_c	A_P	f_{pe}	A_s	f_y	ω_e	PPR_e	E_c	f_{cf}	β
TD-A1	3,06	0,588	96,0	1,57	26,7	0,087	0,57	2618	0,500	1,0
TD-A2	3,06	0,980	90,4	1,57	43,0	0,137	0,57	2618	0,500	1,0
TD-A3	3,06	1,568	82,0	2,36	43,0	0,202	0,56	2618	0,500	1,0
TD-A4	3,06	0,588	56,9	1,57	43,0	0,103	0,43	2618	0,500	1,0
TD-A5	3,06	0,784	81,0	30,8	40,0	0,167	0,32	2618	0,500	1,0
TD-A6	3,06	1,568	58,4	4,62	40,0	0,275	0,42	2618	0,500	1,0
TD-A7	3,06	0,392	88,5	3,08	40,0	0,133	0,22	2618	0,500	1,0
TD-A8	3,31	0,588	89,4	4,62	40,0	0,185	0,22	2723	0,579	1,0
TD-A9	3,31	1,568	92,0	8,04	39,5	0,367	0,31	2723	0,579	1,0

Os protótipos foram simulados utilizando-se um elemento finito com três módulos de integração de igual comprimento e 21 seções transversais, compostas por 21 lâminas. Os módulos de elasticidade do concreto (E_c), apresentados no quadro 5.6, foram determinados a partir das recomendações do ACI 318 (1999); as resistências à tração (f_{ct}) foram arbitradas em 10% da resistência à compressão (f_c) e as resistências finais à compressão (f_{cf}) foram fixadas a partir das informações de Saenz (Kabaila et al, 1969). As deformações de pico (ϵ_{c0}) e final (ϵ_{cf}) do concreto à compressão foram definidas em 0,2% e 1,0%, respectivamente.

As figuras 5.36 a 5.45 mostram os resultados para os deslocamentos no centro do vão e para a variação da tensão na armadura de protensão para os protótipos de Tao & Du (1985). Observa-se uma adequada modelagem do comportamento experimental, com uma boa proximidade entre as curvas “carga x deslocamento” e “carga x variação da tensão na armadura de protensão”, numéricas e experimentais, com avaliação apropriada das cargas máximas. Tanto as curvas numéricas como as experimentais, mostram um comportamento estrutural com elevada capacidade de deformação na fase plástica. Observa-se, entretanto, a exceção da viga TD-A9, com taxa mecânica total de armadura (ω_e) bastante elevada, cujos resultados para os deslocamentos são apresentados na figura 5.44.

As análises indicaram, na maioria dos casos, pequenas diferenças entre os resultados numéricos para as cargas máximas obtidos com as simulações considerando a condição real dos protótipos, com cabos não aderentes, e os gerados admitindo a hipótese da existência de aderência entre a armadura e o concreto. As maiores diferenças podem ser observadas na

figura 5.36, para a viga TD-A2, e na figura 5.38, relativa ao protótipo TD-A3. No caso da viga TD-A9, da figura 5.44, as curvas podem ser consideradas idênticas. Com relação à tensão na armadura de protensão, na seção de momento fletor máximo, as diferenças entre as análises numéricas, considerando ou não a aderência dos cabos, são maiores, o que é facilmente explicado pelo deslizamento da armadura não aderente. Nota-se, ainda, que estas diferenças cresceram com o aumento da taxa mecânica total de armadura, como pode ser observado comparando-se os resultados para os protótipos TD-A4 ($\omega_e = 0,103$), na figura 5.39, TD-A5 ($\omega_e = 0,167$), na figura 5.41, e TD-A9 ($\omega_e = 0,367$), na figura 5.45.

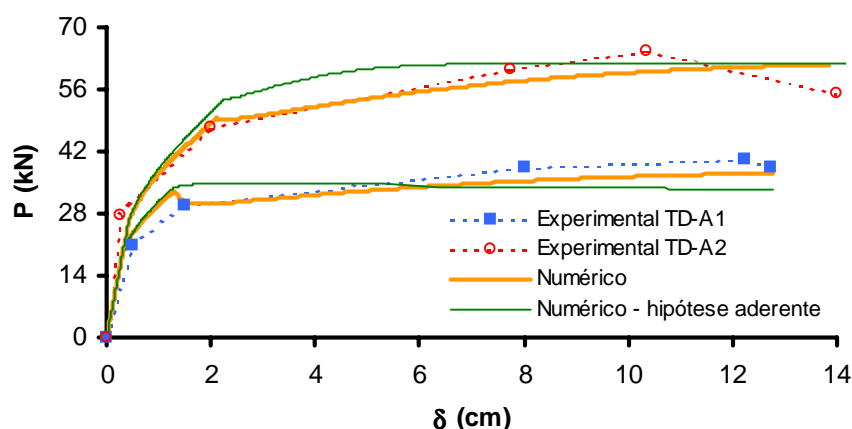


Figura 5.36 – Vigas TD-A1 e TD-A2 de Tao & Du (1985): resultados para os deslocamentos

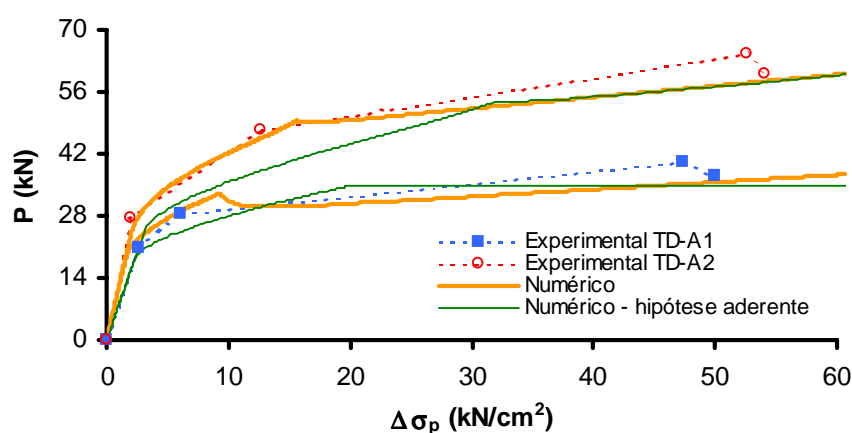


Figura 5.37 – Vigas TD-A1 e TD-A2: variação da tensão na armadura de protensão

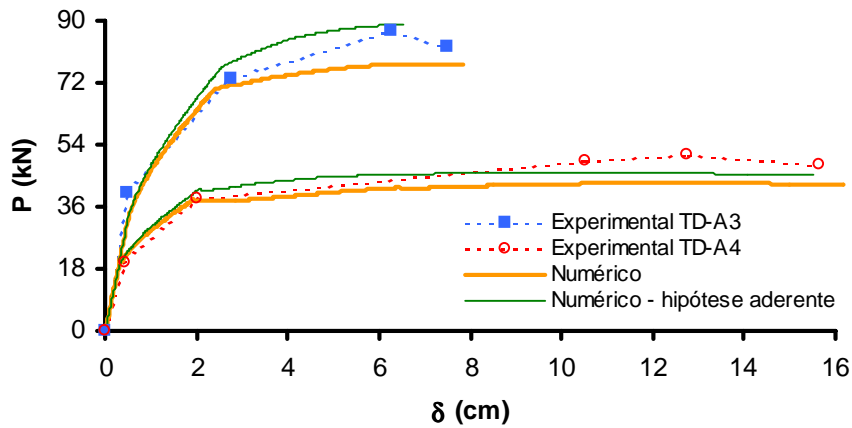


Figura 5.38 – Protótipos TD-A3 e TD-A4: curvas “carga x deslocamento”

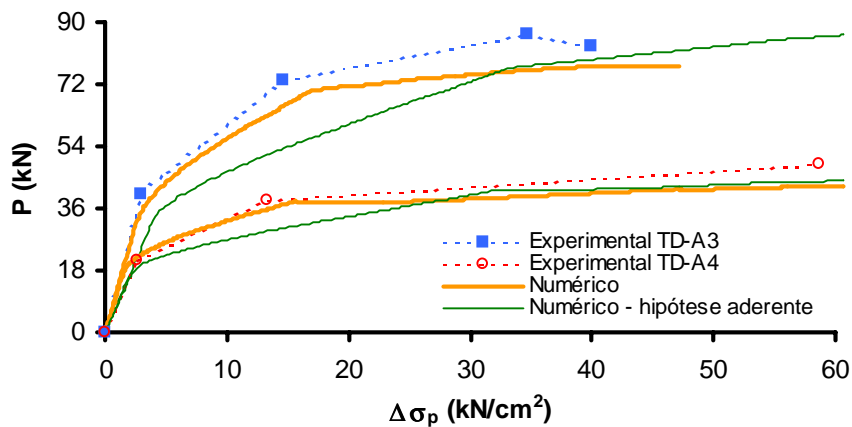


Figura 5.39 – Vigas TD-A3 e TD-A4: resultados para a variação da tensão na armadura de protensão na seção central

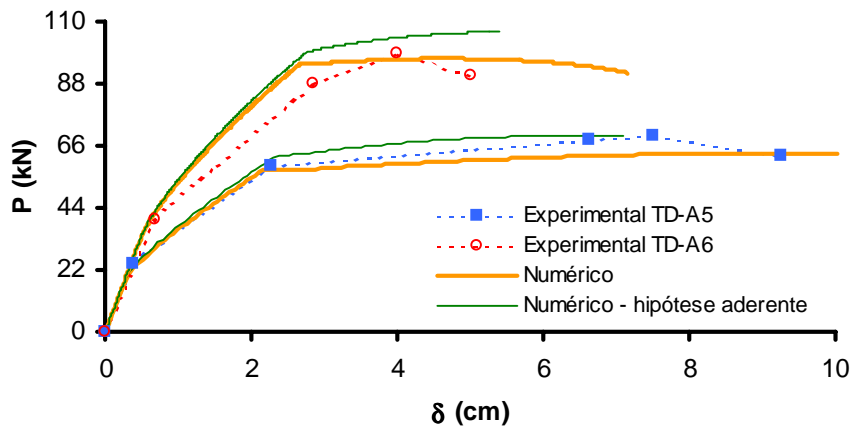


Figura 5.40 – Vigas TD-A5 e TD-A6 de Tao & Du (1985): resultados para os deslocamentos

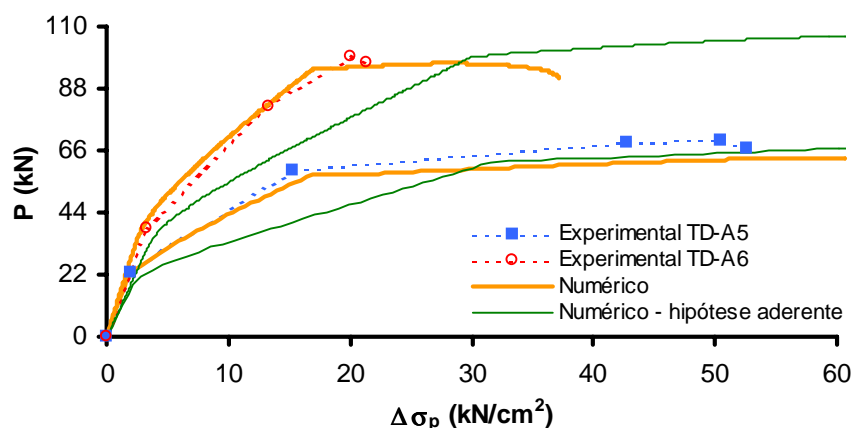


Figura 5.41 – Vigas TD-A5 e TD-A6: variação da tensão na armadura de protensão

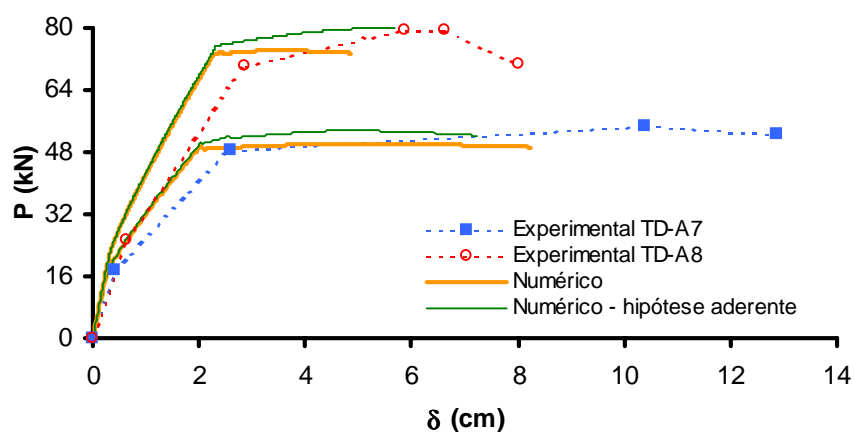


Figura 5.42 – Protótipos TD-A7 e TD-A8: curvas “carga x deslocamento” numéricas e experimentais

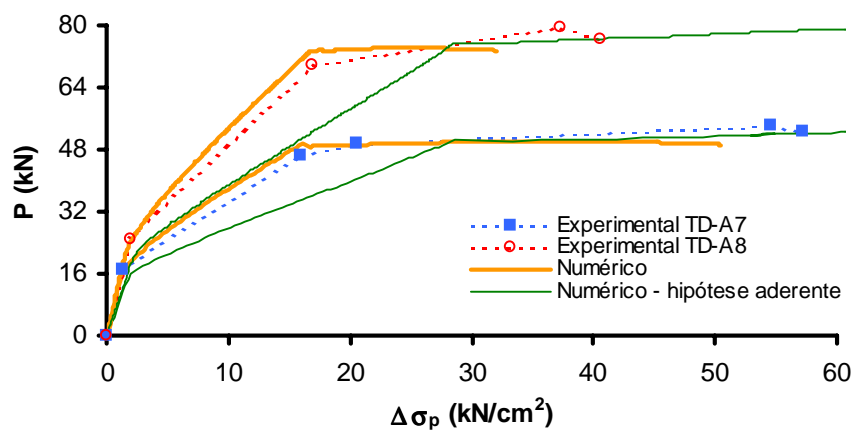


Figura 5.43 – Protótipos TD-A7 e TD-A8: variação da tensão na armadura de protensão na seção central

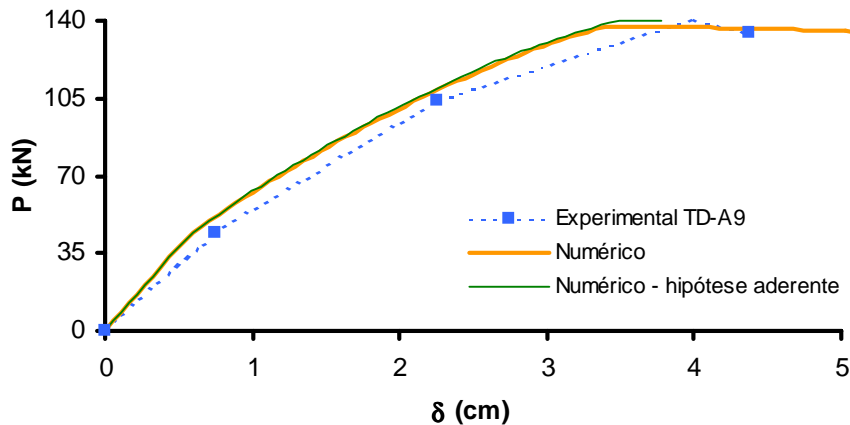


Figura 5.44 – Protótipo TD-A9: resultados numéricos e experimentais para os deslocamentos

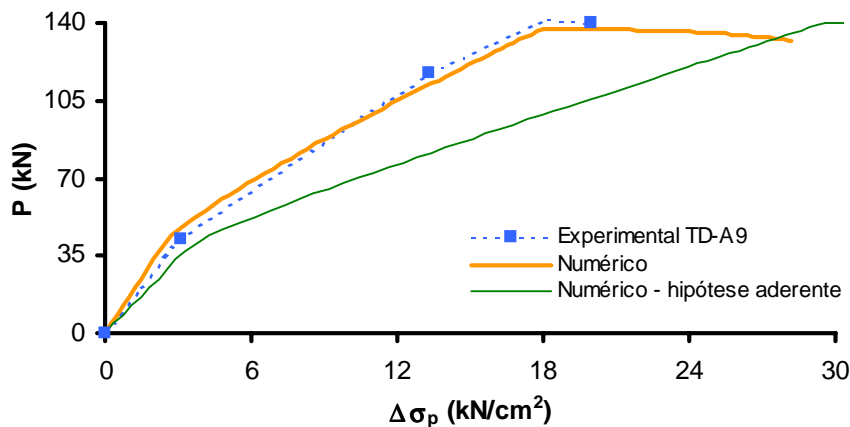


Figura 5.45 – Protótipo TD-A9: variação da tensão na armadura de protensão na seção central

A figura 5.46 apresenta o comportamento de fissuração e plastificação do concreto em diferentes etapas da análise numérica da viga TD-A3, comparando as simulações para a situação real do protótipo, com armaduras não aderentes, e para a hipótese de armaduras aderentes. Os níveis de deslocamento mostrados para a seção central são 0,4 cm, 0,8 cm e 7,0 cm, correspondentes às fases de fissuração inicial, de fissuração avançada e de plastificação, respectivamente. Observa-se que nas etapas iniciais as distribuições de fissuras foram praticamente equivalentes, mas na fase final a simulação com armaduras não aderentes apresentou fissuração e plastificação consideravelmente mais concentradas.

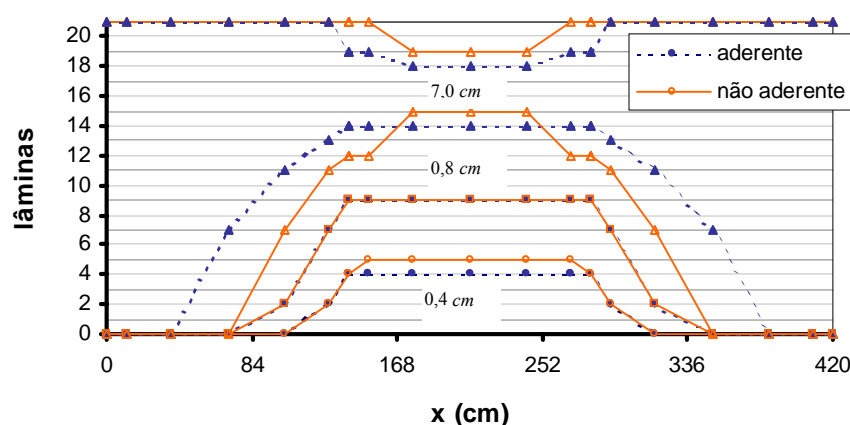


Figura 5.46 – Viga TD-A3: fissuração e plastificação em diferentes etapas das simulações, relativas aos deslocamentos da figura 5.38

5.3.3.2 Lajes com Protensão Não Aderente de Cooke et al (1981)

As lajes bi-apoiadas com protensão total de Cooke et al (1981) apresentaram diferentes índices de esbeltez à flexão (l/d_p) e taxas mecânicas totais de armadura (ω_e). Um dos principais objetivos do trabalho experimental foi a observação do comportamento de instabilidade à flexão em peças com protensão total não aderente. As lajes apresentaram 18 cm de espessura, altura útil da armadura de protensão de 12 cm, e foram submetidas a cargas nos terços médios. O quadro 5.7 mostra os demais dados dos protótipos, incluindo as larguras e os comprimentos dos vãos, assim com os dados sobre a protensão. O aço apresentou tensão convencional de escoamento de 158,16 kN/cm² e de ruptura de 176,64 kN/cm².

Quadro 5.7 – Características das lajes de Cooke et al (1981) [kN; cm]

Laje	dados experimentais							dados arbitrados	
	b	l	l/d_p	f_c	A_{ps}	f_{pe}	ω_e	E_c	f_{cf}
CP-1	35,3	460	38,3	3,01	2,79	116,3	0,254	2597	0,450
CP-2	70,5	460	38,3	3,01	2,79	114,5	0,125	2597	0,450
CP-3	118,2	460	38,3	3,01	1,16	119,7	0,036	2597	0,450
CP-4	35,3	340	28,3	3,44	2,79	116,3	0,223	2776	0,618
CP-5	70,5	340	28,3	3,44	2,79	115,4	0,111	2776	0,618
CP-6	118,2	340	28,3	3,44	1,16	122,0	0,029	2776	0,618
CP-7	35,3	220	18,3	3,08	2,79	116,4	0,249	2627	0,520
CP-8	70,5	220	18,3	3,08	2,79	116,8	0,125	2627	0,520
CP-9	118,2	220	18,3	3,08	1,16	120,4	0,032	2627	0,520

Os protótipos de Cooke et al (1981) foram modelados por um elemento finito, com três módulos de integração de igual comprimento e sete seções transversais por módulo, compostas por 21 lâminas. Os módulos de elasticidade (E_c) e a tensão final no concreto (f_{cf}), mostrados no quadro 5.7, foram determinados segundo a formulação do ACI-318 (ACI, 1999) e as recomendações de Saenz (Kabaila et al, 1969), respectivamente. A deformação relativa à resistência à compressão do concreto (ϵ_{c0}) foi arbitrada em 0,2% e a final (ϵ_{cf}), em 1,0%. Nas análises, adotaram-se $\beta = 3,0$ e $\beta_\sigma = 0,8$, por tratarem-se de elementos sem armaduras aderentes.

As figuras 5.47 a 5.64 comparam os resultados numéricos e experimentais para as lajes de Cooke et al (1981), com as curvas “carga x deslocamento” e “carga x variação da tensão na armadura de protensão” de todos os protótipos, mostrando o bom desempenho do modelo numérico. O comportamento de instabilidade à flexão exibido pelas lajes CP-3, CP-6 e CP-9, cujos resultados para os deslocamentos são mostrados pelas figuras 5.51, 5.57 e 5.63, respectivamente, foi reproduzido nas simulações, porém com a superestimação das cargas de fissuração e, conseqüentemente, das capacidades portantes. Esta diferença pode ser atribuída à inadequação do parâmetro de resistência à tração do concreto (f_{ct}), que parece ter sido exagerado.

A taxa mecânica total de armadura (ω_e) parece ter influenciado fortemente os resultados experimentais e numéricos. As curvas “carga x deslocamento” experimentais indicaram que os protótipos com as taxas ω_e em torno de 0,03 mostraram a instabilidade à flexão, enquanto as lajes com taxas mais elevadas apresentaram melhor comportamento estrutural. Já numericamente, a influência deste parâmetro foi ainda mais visível. As lajes CP-1, CP-4 e CP-7, com taxas ω_e na faixa de 0,25, cujos resultados para deslocamentos são mostrados nas figuras 5.47, 5.53 e 5.59, respectivamente, apresentaram uma transição suave entre as fases de comportamento não fissurado e fissurado. Os elementos CP-2, CP-5 e CP-8, com ω_e em torno de 0,12, cujos resultados aparecem nas figuras 5.49, 5.55 e 5.61, respectivamente, mostraram processos de fissuração mais bruscos, que levaram a perdas de carga, seguidas pela recuperação da capacidade portante com o aumento dos deslocamentos. Por fim, os protótipos CP-3, CP-6 e CP-9, com reduzidos valores de ω_e , apresentaram a instabilidade à flexão, em que não houve a recuperação da carga após a fissuração.

Observaram-se diferenças significativas entre os resultados obtidos nas simulações das situações reais dos protótipos, com cabos não aderentes, e os resultantes da condição hipotética de aderência entre armadura e concreto. As diferenças tornaram-se visíveis após a fissuração das lajes, e tenderam a ser maiores quanto menores foram as taxas de armadura. Entre os protótipos com valores de ω_e intermediários (CP-2, CP-5 e CP-8) ou reduzidos (CP-3, CP-6 e CP-9), as simulações com a hipótese de armaduras aderentes também mostraram perdas de carga após a fissuração, porém de menores intensidades. Nota-se, ainda, que as diferenças entre os resultados para a tensão na armadura, com a situação real ou com a hipótese de armaduras aderentes, foram superiores entre os elementos com maiores taxas mecânicas totais de armadura, como é possível verificar comparando-se as figuras 5.48, 5.50 e 5.52, para as lajes CP-1, CP-2 e CP-3, respectivamente.

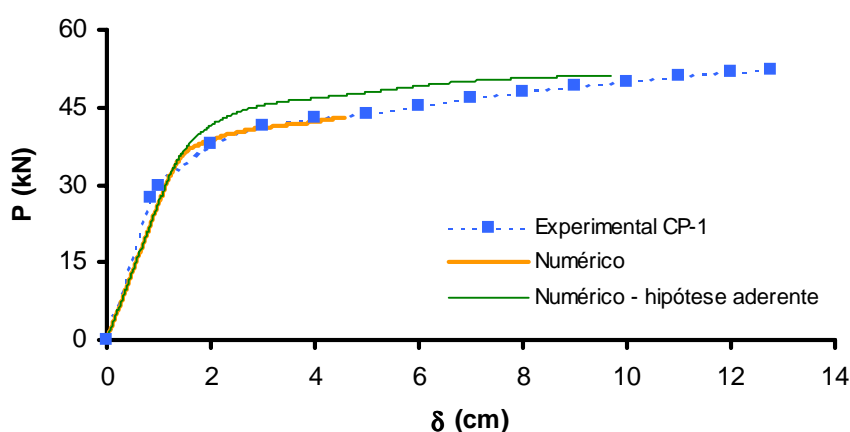


Figura 5.47 – Laje CP-1 de Cooke et al (1981): resultados para os deslocamentos

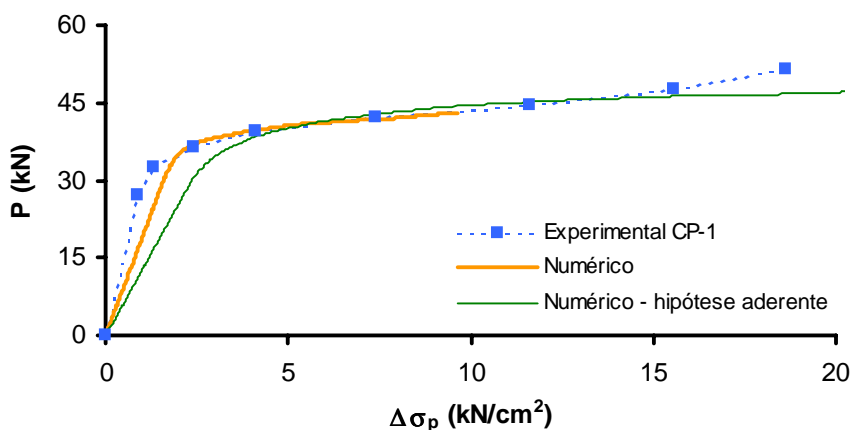


Figura 5.48 – Elemento CP-1: variação da tensão nas armaduras de protensão

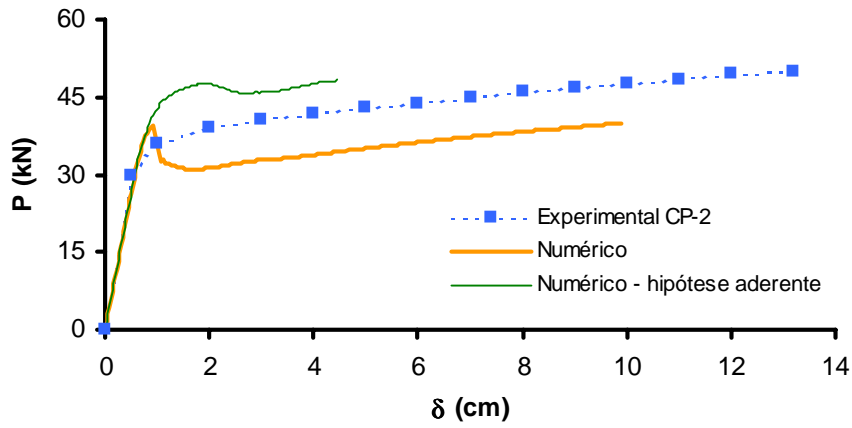


Figura 5.49 – Protótipo de CP-2: curvas “carga x deslocamento”

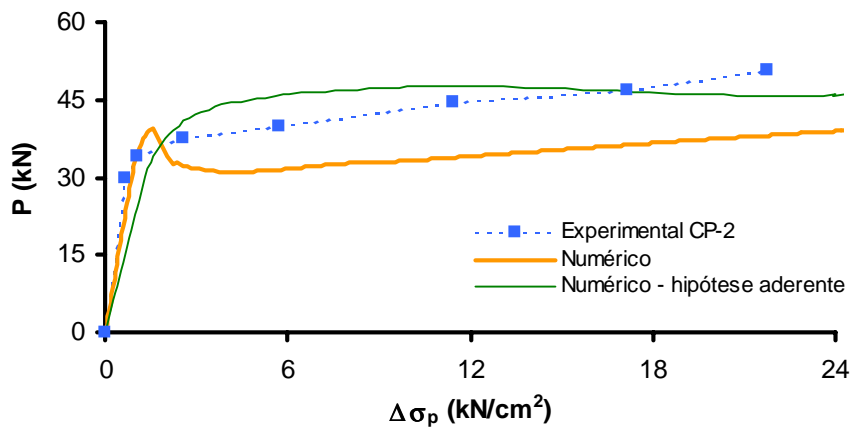


Figura 5.50 – Laje CP-2: variação tensão na armadura de protensão na seção central

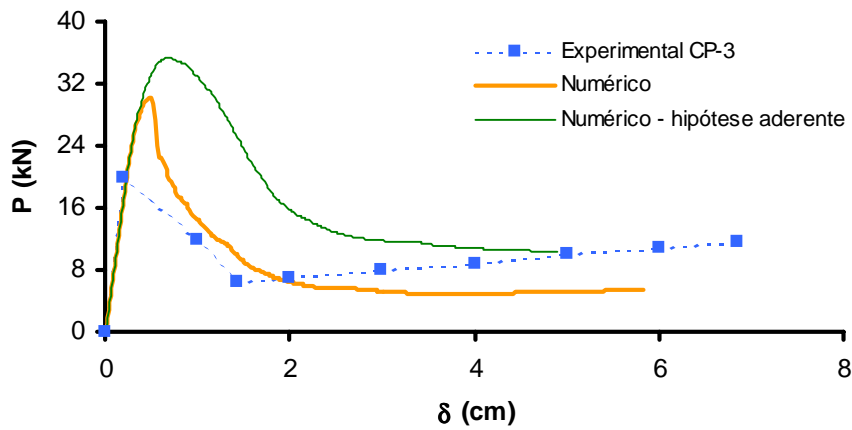


Figura 5.51 – Protótipo CP-3 de Cooke et al (1981): resultados para deslocamentos

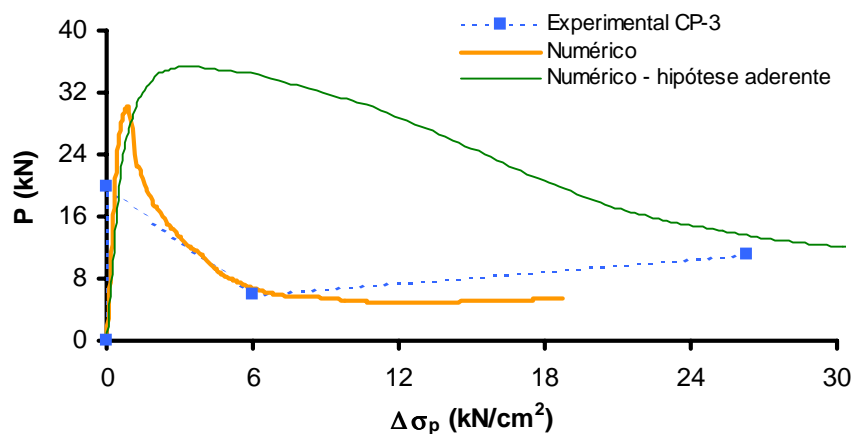


Figura 5.52 –Laje CP-3: variação da tensão na armadura de protensão na seção central

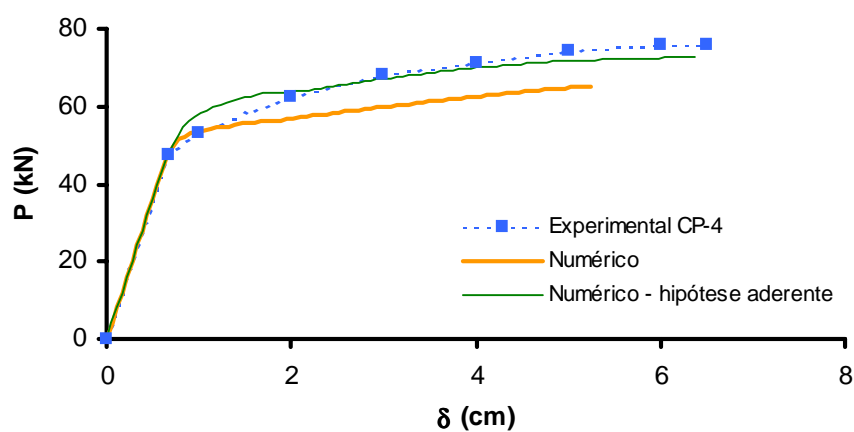


Figura 5.53 – Elemento CP-4: resultados para deslocamentos

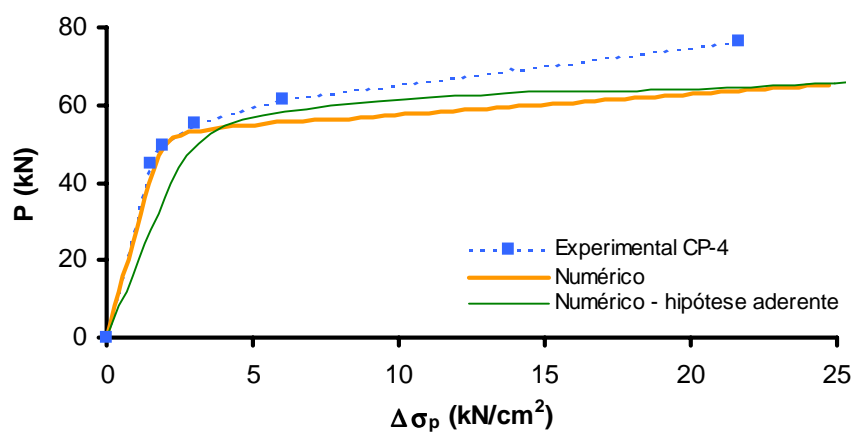


Figura 5.54 – Protótipo CP-4: variação da tensão na armadura de protensão

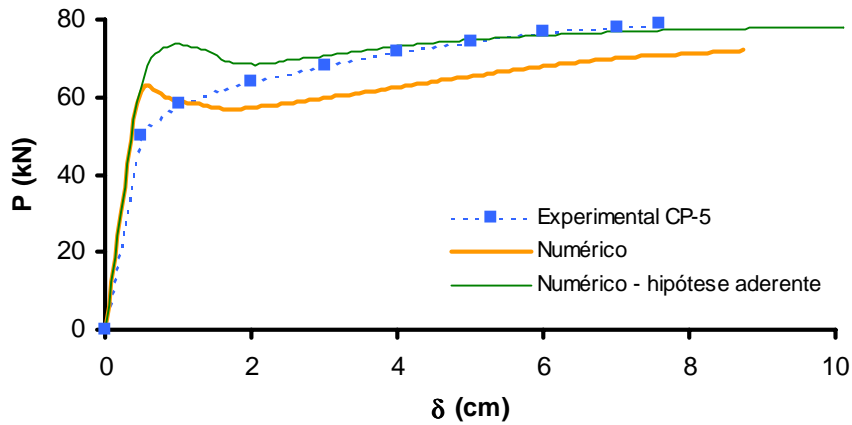


Figura 5.55 – Laje CP-5: curvas “carga x deslocamento”

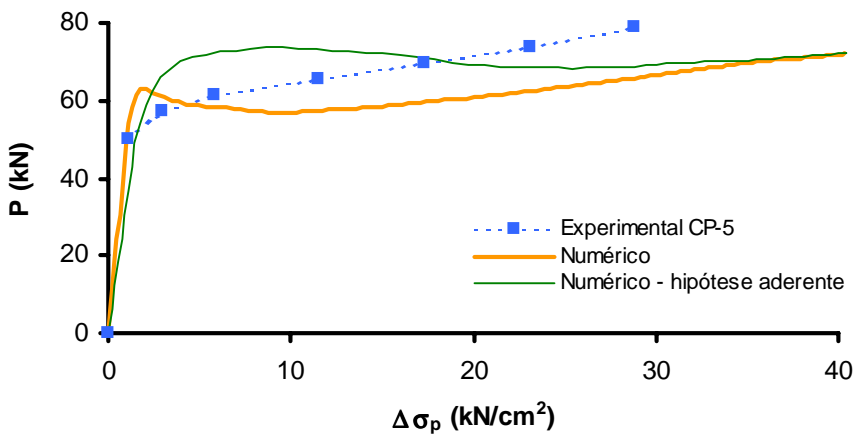


Figura 5.56 – Laje CP-5: variação da tensão na armadura de protensão na seção central

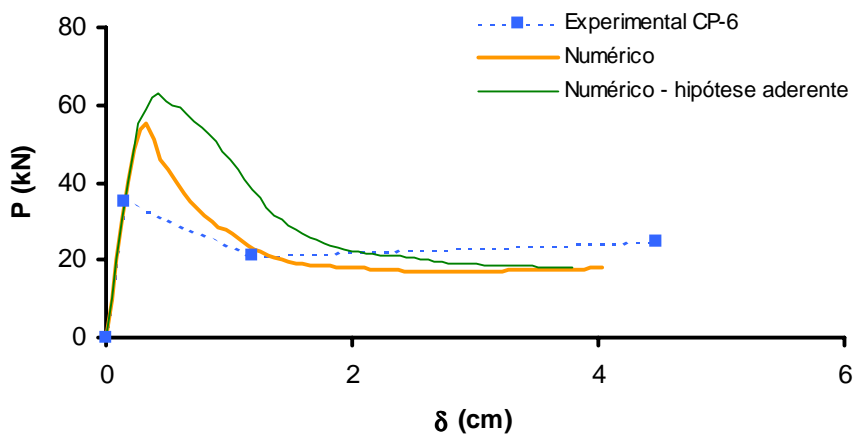


Figura 5.57 – Protótipo CP-6 de Cooke et al (1981): resultados para os deslocamentos

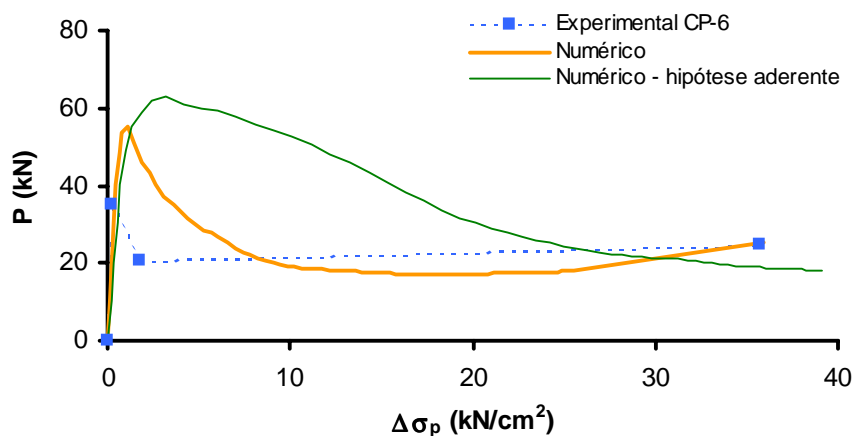


Figura 5.58 – Laje CP-6: variação da tensão na armadura de protensão na seção central

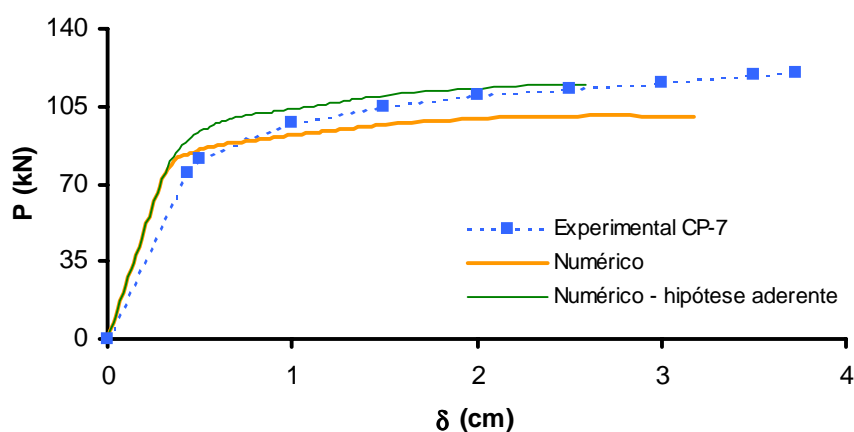


Figura 5.59 – Laje CP-7: resultados para os deslocamentos

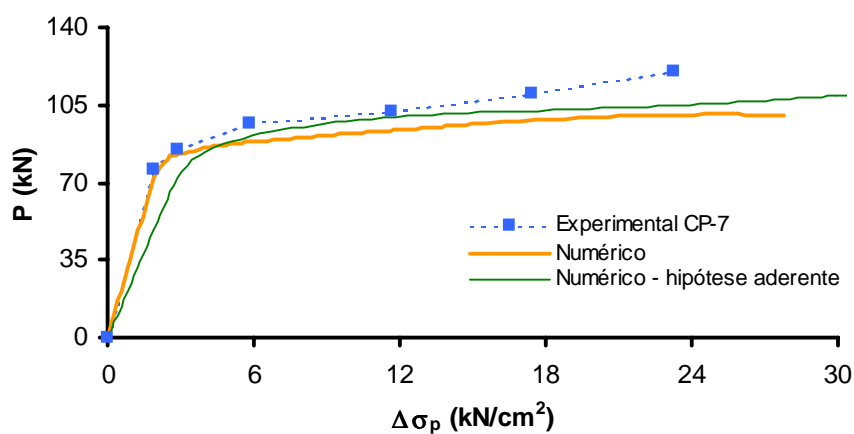


Figura 5.60 – Protótipo CP-7: variação da tensão na armadura de protensão

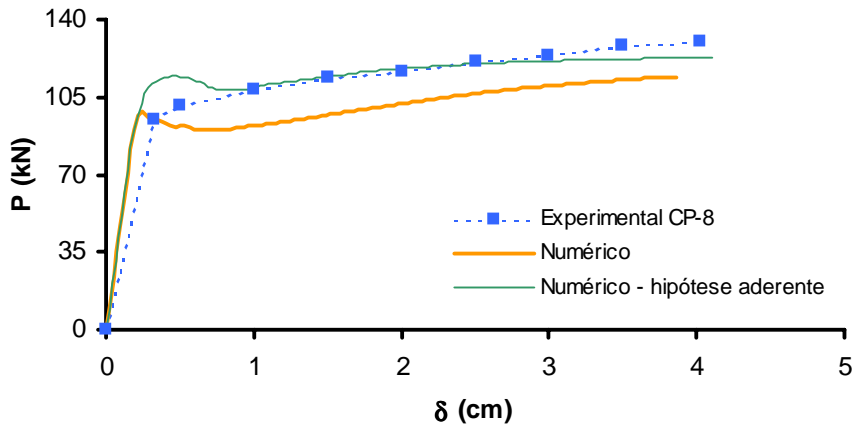


Figura 5.61 – Laje CP-8 de Cooke et al (1981): resultados para deslocamentos

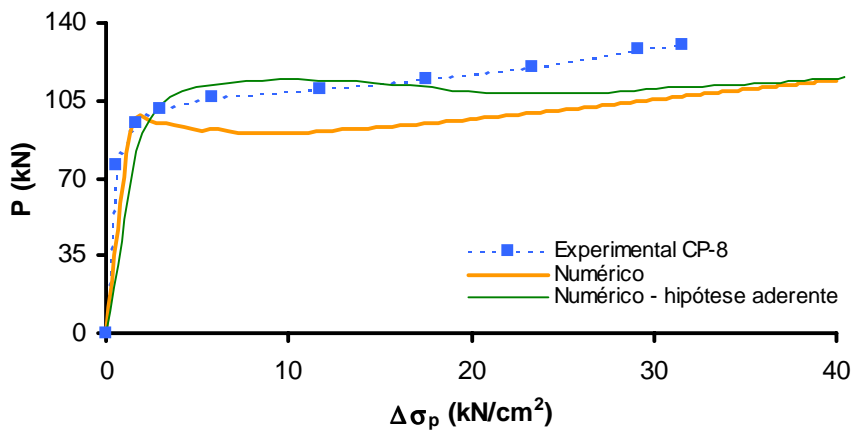


Figura 5.62 – Laje CP-8: variação da tensão na armadura de protensão na seção central

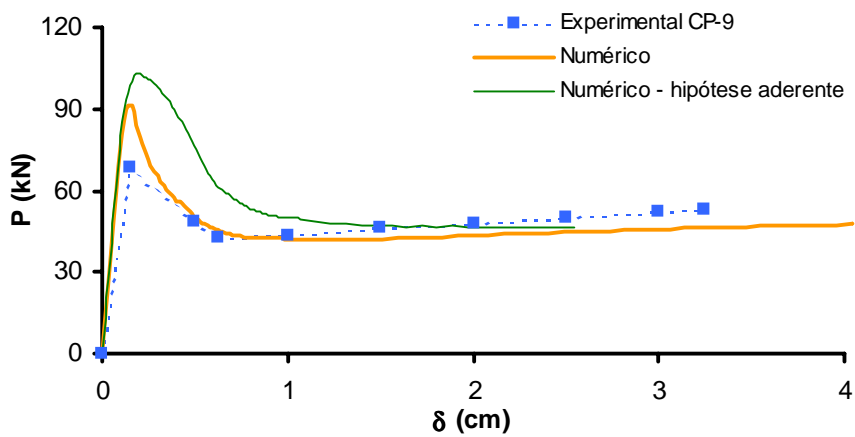


Figura 5.63 – Laje CP-9: resultados numéricos e experimentais para os deslocamentos

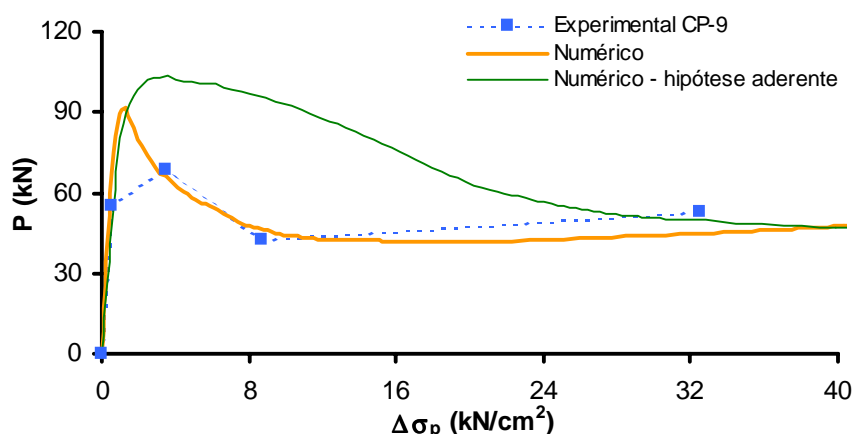


Figura 5.64 – Laje CP-9: variação da tensão na armadura de protensão na seção central

A figura 5.65 apresenta a evolução da fissuração e plastificação do concreto na laje CP-4 de Cooke et al (1981), comparando os resultados obtidos nas simulações da condição real do protótipo, com armaduras de protensão aderentes, e os produzidos com a hipótese de aderência entre concreto e armadura. Neste gráfico, o deslocamento de 0,5 cm corresponde ao início da fissuração, o deslocamento de 0,8 cm refere-se à fase de aumento das fissuras e o deslocamento de 4,9 cm corresponde ao final da análise com armaduras não aderentes. A maior concentração de fissuras na análise com protensão não aderente é evidente. Enquanto que, com o crescimento da carga, a zona fissurada na simulação com armaduras aderentes estendeu-se em direção aos apoios, na análise com protensão não aderente o número de seções fissuradas permaneceu constante. Na fase final, a diferença se acentua, refletindo-se, também, no tamanho da região de comportamento plástico do concreto.

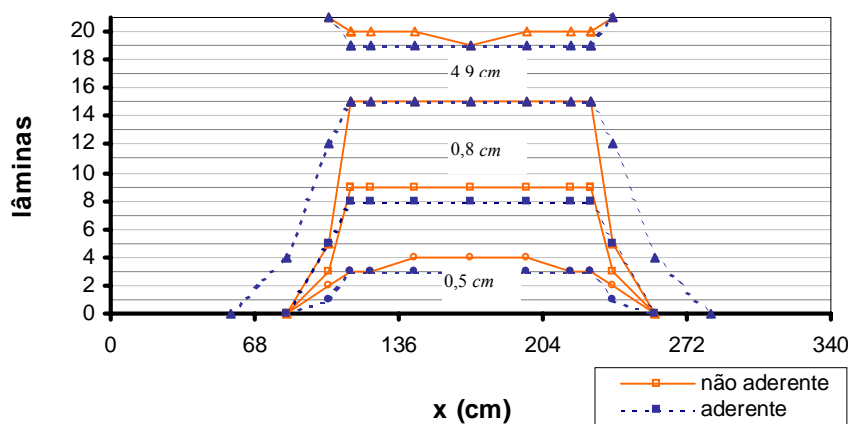


Figura 5.65 – Viga CP-4: fissuração e plastificação em diferentes etapas das simulações, relativas aos deslocamentos da figura 5.53

5.3.3.3 Vigas com Protensão Não Aderente de Chakrabarti (1995)

Chakrabarti (1995) realizou um estudo experimental envolvendo protótipos bi-apoiados com 350,5 cm de comprimento e protensão não aderente, submetidos a cargas nos terços médios. Os protótipos apresentaram, em sua maioria, seções transversais retangulares de 22,9 cm de altura e 13,7 cm de base, com alturas úteis das armaduras passivas e de protensão de 20,3 cm e 16,5 cm, respectivamente, resultando em $l/d_p = 21,8$. Algumas vigas apresentaram seções T com 22,9 cm de altura, alma com 8,9 cm de largura, e mesa com 4,1 cm de espessura e 31,8 cm de largura, para um índice $l/d_p = 18,4$. Nestas peças, a altura útil da armadura de protensão foi de 19 cm e da armadura passiva de 21 cm. As características específicas das vigas de Chakrabarti (1995), utilizadas nas análises numéricas, são mostradas no quadro 5.8.

Quadro 5.8 – Características dos protótipos de Chakrabarti (1995)
[kN; cm]

Protótipo	dados experimentais								valores arbitrados	
	seção	f_c	f_{ct}	A_p	f_{pe}	A_s	ω_e	PPR_e	E_c	f_{cf}
CH-A1	R	3,654	0,365	0,53	106,87	0	0,064	1,00	2861	0,685
CH-A2	R	3,448	0,345	0,53	104,81	0,71	0,098	0,65	2779	0,620
CH-A3	R	3,517	0,352	0,26	106,87	1,42	0,093	0,32	2861	0,642
CH-B1	R	3,414	0,341	1,06	103,43	0	0,134	1,00	2765	0,620
CH-B2	R	3,596	0,360	0,77	99,29	1,42	0,149	0,57	2837	0,670
CH-B3	R	3,356	0,336	0,26	111,01	3,25	0,166	0,18	2822	0,670
CH-C2	R	3,585	0,359	1,28	93,77	2,13	0,231	0,58	2834	0,670
CH-C3	R	3,377	0,338	0,77	110,12	5,08	0,326	0,29	2750	0,600
CH-PPT 9A	T	6,074	0,466	0,53	124,46	0,71	0,029	0,60	3687	1,430
CH-PPT 9B	T	6,005	0,462	0,53	124,46	1,27	0,037	0,46	3668	1,400
CH-PPT 9C	T	5,143	0,514	0,53	109,91	3,25	0,073	0,22	3394	1,416
CH-PPT 9D	T	5,143	0,514	0,53	109,63	5,38	0,106	0,15	3394	1,416
CH-PPT 5A	T	3,778	0,378	0,53	119,29	1,27	0,052	0,44	2909	0,723
CH-PPT 5B	T	3,047	0,305	0,53	117,29	3,25	0,115	0,24	2613	0,487
CH-PPR 9A	R	5,440	0,433	0,53	115,49	3,25	0,137	0,31	3491	1,238
CH-PPR 9B	R	5,171	0,418	0,53	117,29	3,25	0,143	0,32	3403	1,450

Estes protótipos foram modelados com um elemento finito e três módulos de integração, com sete seções transversais cada. As seções retangulares foram descritas com 21 lâminas e as seções T foram divididas em três módulos de integração com sete lâminas cada. Nas análises, os módulos de elasticidade dos concretos foram determinados a partir do ACI-318 (1999) e as tensões finais (f_{cf}) pelas recomendações de Saenz (Kabaila, 1969). As resistências à tração do

concreto foram estimadas a partir da resistência à compressão, utilizando as recomendações do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). Consideraram-se os valores de 0,2% e 1,0% para as deformações de pico (ϵ_{c0}) e final (ϵ_{cf}) do concreto à compressão, respectivamente. O parâmetro β foi arbitrado em 3,5 e, nas análises com protensão total, adotou-se $\beta_{\sigma} = 0,8$.

As figuras 5.66 a 5.73 comparam as curvas “carga x deslocamento” para os protótipos de Chakrabarti (1995), onde se observam boas modelagens numéricas do comportamento experimental. Os resultados numéricos para a viga CH-A1 com protensão total e reduzida taxa mecânica total de armadura, apresentados na figura 5.66, mostraram uma perda de carga logo após a fissuração, que não foi totalmente recuperada com o crescimento dos deslocamentos. Por outro lado, os resultados numéricos e experimentais da figura 5.69, para o protótipo CH-C3, com $\omega_e = 0,326$, indicam um comportamento de peça superarmada, com a curva experimental interrompida sem que se tenha definido um patamar plástico. Em alguns casos, como as vigas CH-PPT-9A e CH-PPT-9C da figura 5.70, as curvas numéricas mostram patamares plásticos com carga estável, enquanto os resultados experimentais apresentaram um comportamento de endurecimento.

De maneira geral, não se observam diferenças significativas entre os resultados numéricos obtidos considerando a situação real das vigas, com armaduras não aderentes, e os produzidos em análises com a hipótese da aderência dos cabos de protensão. As maiores diferenças são percebidas nas figuras 5.66 e 5.67, para os protótipos CH-A1 e CH-B1 e as vigas CH-A2 e CH-B2, respectivamente, que apresentaram taxas mecânicas totais de armadura reduzidas ou intermediárias.

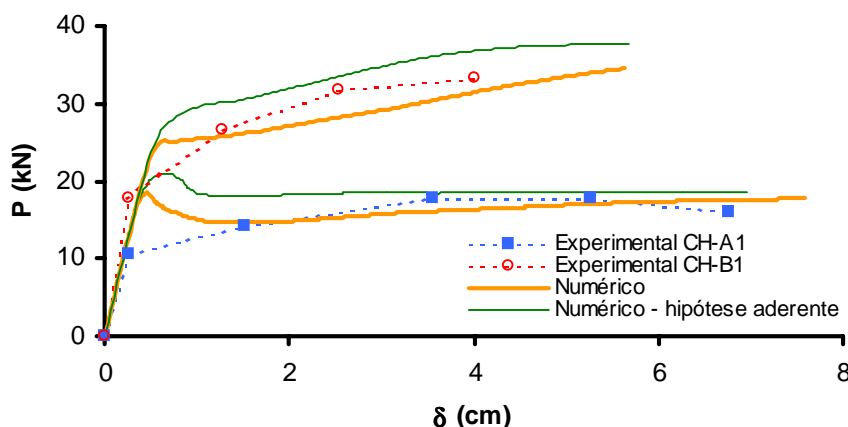


Figura 5.66 – Vigas CH-A1 e CH-B1 de Chakrabarti (1995): resultados para os deslocamentos

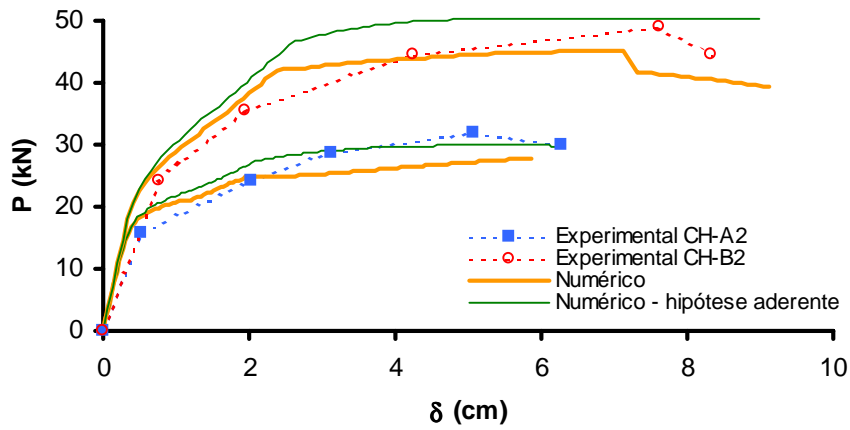


Figura 5.67 – Vigas CH-A2 e CH-B2: respostas para os deslocamentos

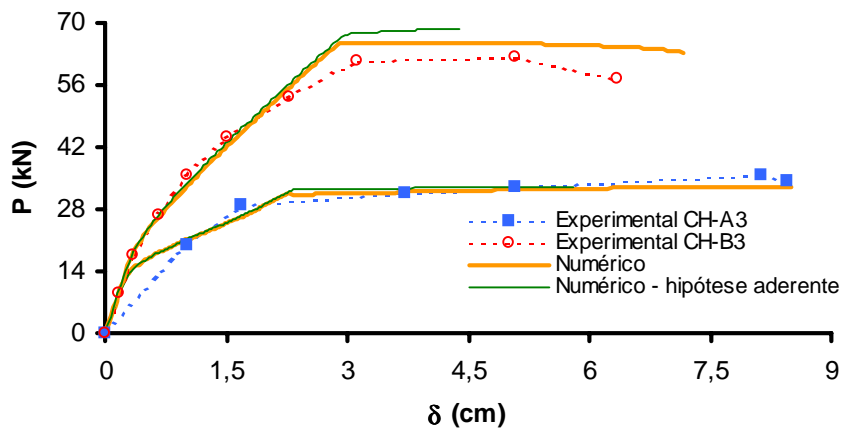


Figura 5.68 – Vigas CH-A3 e CH-B3: resultados para os deslocamentos

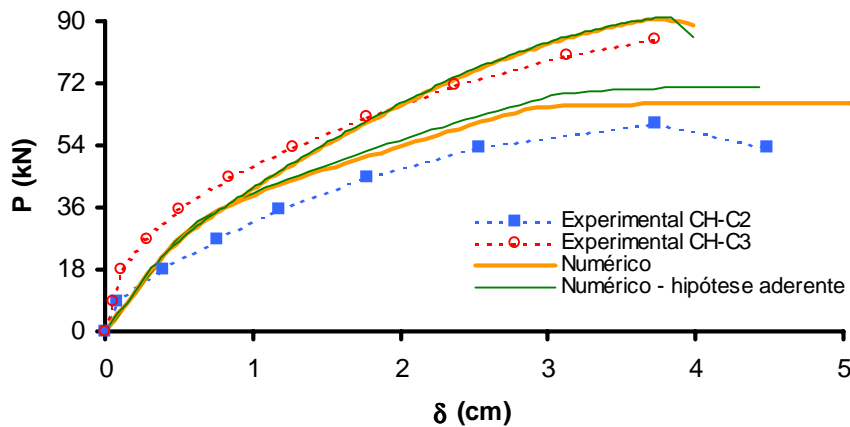


Figura 5.69 – Vigas CH-C2 e CH-C3: curvas “carga x deslocamento”

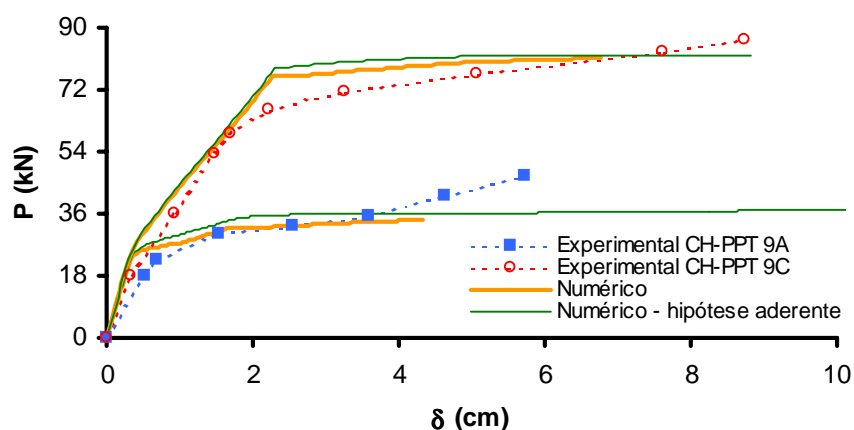


Figura 5.70 – Vigas CH-PPT 9A e CH-PPT 9C: resultados para os deslocamentos

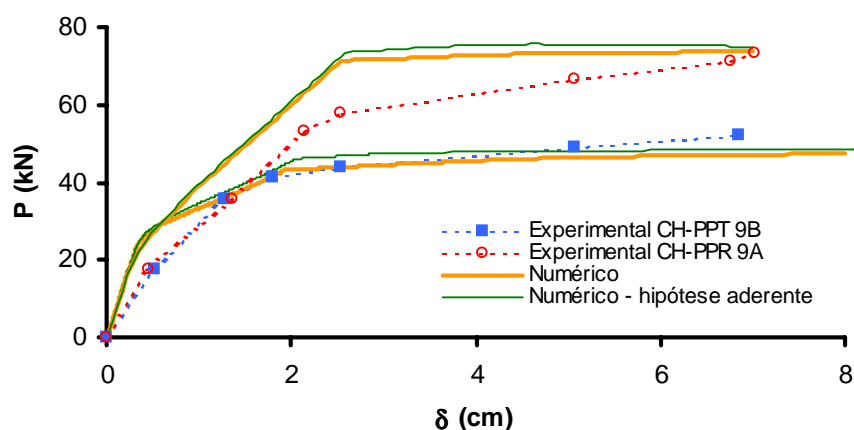


Figura 5.71 – Vigas CH-PPT 9B e CH-PPR 9A: curvas “carga x deslocamento”

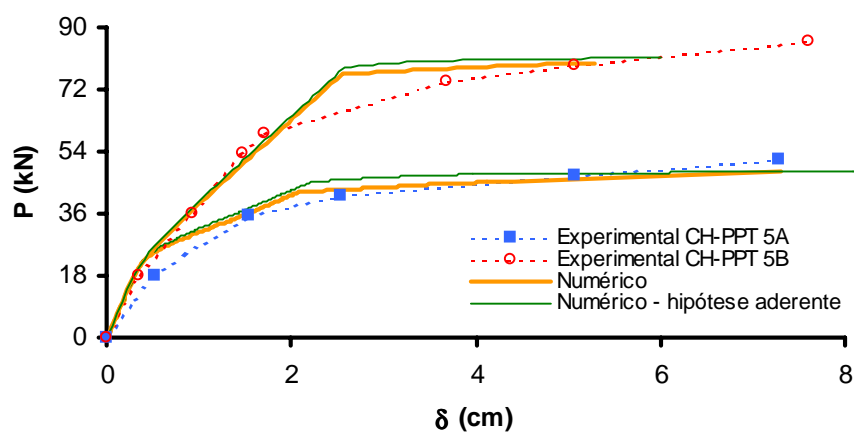


Figura 5.72 – Vigas CH-PPT 5A e CH-PPR 5B: respostas para os deslocamentos

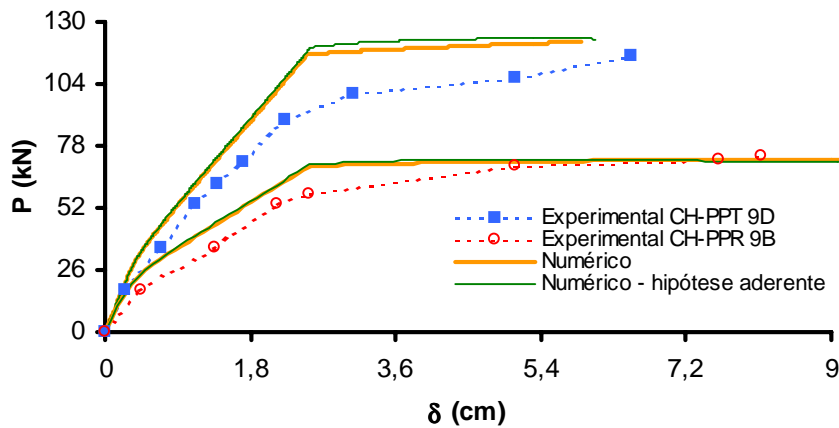


Figura 5.73 – Vigas CH-PPT 9D e CH-PPR 9B: resultados para os deslocamentos

5.3.3.4 Vigas com Protensão Não Aderente de Harajli & Kanj (1991)

Os protótipos do trabalho experimental de Harajli & Kanj (1991), utilizados a seguir, constituíram-se em vigas bi-apoiadas com vãos de 325,12 *cm* de comprimento e seção transversal retangular de 12,7 *cm* de base e 22,86 *cm* de altura, submetidas a carregamentos concentrados ou nos terços médios. A altura útil das armaduras de protensão foi de 20,3 *cm*, correspondendo a um índice de esbeltez à flexão de 20,3. O aço de protensão apresentou tensão convencional de escoamento de 129 *kN/cm²* e de ruptura de 148 *kN/cm²*. As demais características dos protótipos de Harajli e Kanj (1991) são mostradas no quadro 5.9.

Quadro 5.9 – Características das vigas de Harajli & Kanj (1991) [*kN; cm*]

Viga	dados experimentais						dados estimados	
	carga	f_c	A_p	f_{pe}	ω_e	PPR_e	E_c	f_{cf}
HK-P3R3-3	terços	4,7	1,16	88,3	0,143	1,00	3241	1,400
HK-P2R3-3	terços	4,7	0,77	86,2	0,092	1,00	3241	1,400
HK-P2R3-0	conc.	3,9	0,77	87,6	0,113	1,00	2941	1,158
HK-P1R3-0	conc.	4,2	0,19	99,3	0,029	1,00	3057	1,251

As vigas submetidas a cargas concentradas foram modeladas por um único elemento finito, com 28 seções transversais distribuídas em quatro módulos de integração, com um dos limites entre os módulos localizado na seção sob a carga. Os protótipos com cargas nos terços foram representados por um elemento finito com três módulos de integração de igual comprimento, com sete seções cada. Em ambos os casos, as seções foram compostas por 21 lâminas. Nas

análises numéricas, arbitraram-se os seguintes valores para o concreto: deformação relativa à resistência do concreto (ϵ_{c0}) de 0,2 %; deformação final (ϵ_{cf}) de 1 %; resistência à tração (f_{ct}) de 10 % da resistência à compressão e o parâmetro β igual 0,5, sendo que, nas vigas com protensão total, utilizou-se $\beta_{\sigma} = 0,8$. Os valores do módulo de elasticidade (E_c) e da resistência final (f_{cf}) do concreto, mostrados no quadro 5.9, foram determinados a partir do ACI 318 (1999) e das recomendações de Saenz (Kabaila, 1969), respectivamente.

Os resultados numéricos e experimentais para as curvas “momento x deslocamento” das vigas HK-P3R3-3 e HK-P2R3-3, com cargas nos terços médios, são mostrados nas figuras 5.74 e 5.75, respectivamente, onde se nota uma boa modelagem dos protótipos, apesar das diferenças entre as cargas máximas numéricas e experimentais. Observam-se, também, diferenças significativas, a partir da fissuração, entre os resultados das análises para a situação real das vigas, com armaduras não aderentes, e os obtidos com a hipótese de armaduras aderentes.

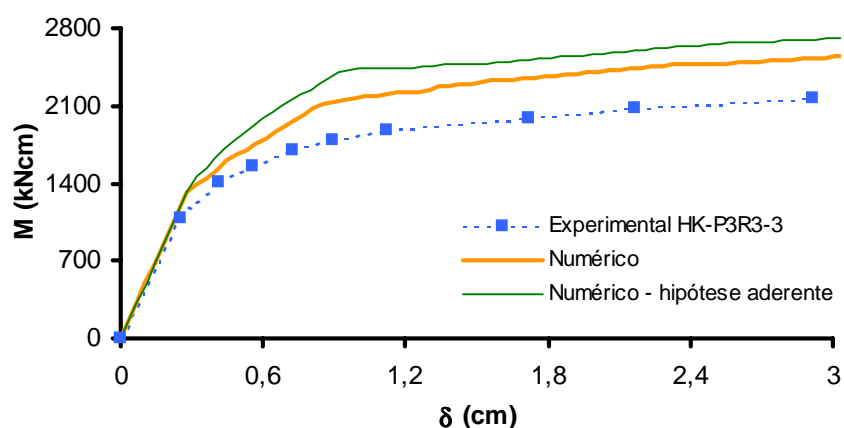


Figura 5.74 – Viga HK-P3R3-3: resultados para os deslocamentos

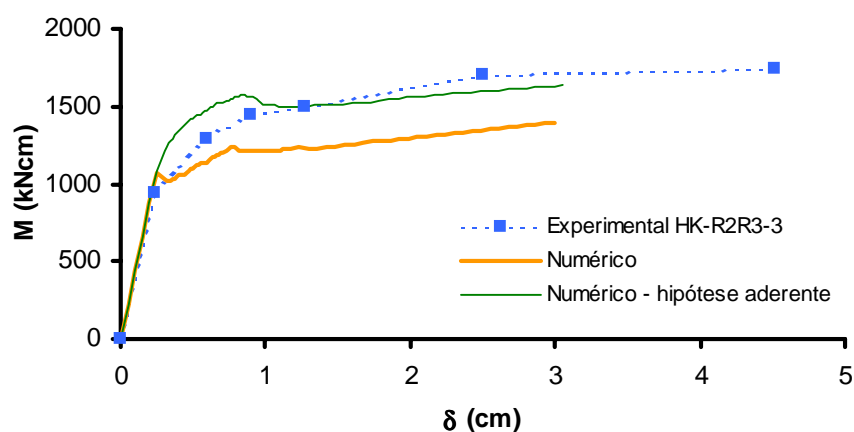


Figura 5.75 – Viga HK-P2R3-3: resultados para deslocamentos

As curvas “momento x deslocamento” das vigas HK-P2R3-0 e HK-P1R3-3, com cargas concentradas, são mostradas na figura 5.76. Nota-se que os resultados numéricos mostraram processos de fissuração com maior perda de rigidez do que o observado experimentalmente, com redução de carga na viga HK-P1R3-0. Nos dois casos, as simulações considerando a condição real das armaduras, não aderentes, e as análises considerando a hipótese de aderência, mostraram consideráveis diferenças nas cargas máximas.

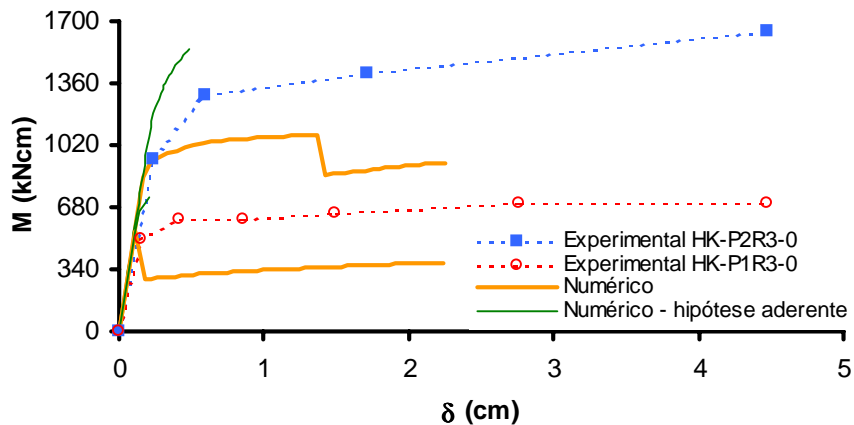


Figura 5.76 – HK-P2R3-0 e HK-P1R3-0: resultados de deslocamentos

A figura 5.77 apresenta a evolução da fissuração no elemento HK-P1R3-0, comparando as análises para a condição real da viga, com armadura não aderente, e para a hipótese de aderência. As fases representadas correspondem aos deslocamentos de 0,2 cm, no início da fissuração, 0,25 cm e 0,75 cm, na carga máxima. Observa-se uma fissuração concentrada na seção central, na simulação com armadura não aderente, em que o número de lâminas fissuradas variou de 1 até 18, entre os deslocamentos de 0,2 cm e 0,25 cm, enquanto a análise com a hipótese de aderência mostrou uma zona fissurada menos profunda e mais extensa.

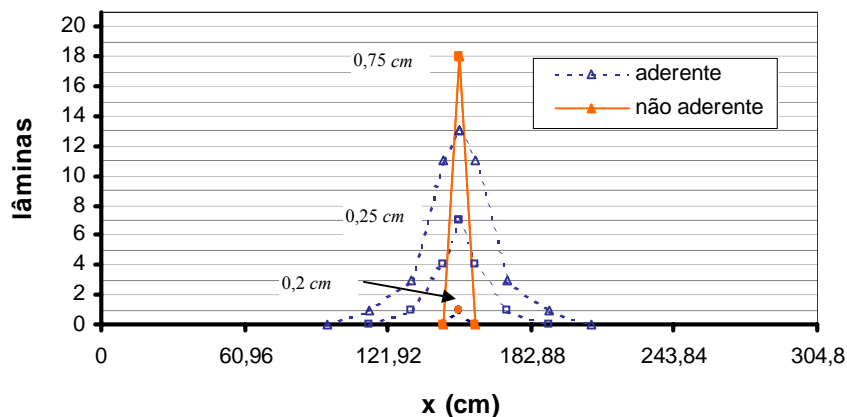


Figura 5.77 – HK-P1R3-0: fissuração em diferentes etapas da análise

5.4 Elementos de Construção Composta

A figura 5.78 apresenta o protótipo de Rosenthal (1978), obtido com a continuidade posterior de lajes alveolares por adição de armadura nos vazios longitudinais, na região de momentos fletores negativos. Na produção do protótipo, utilizaram-se lajes alveolares pré-moldadas com seção transversal de 120 *cm* de largura e 16 *cm* de altura, com cerca de 1130 *cm*² de área e 11 vazios longitudinais. A protensão foi aplicada através de 34 cordoalhas de 5 *mm* de diâmetro, com resistência à tração de 180 *kN/cm*² e uma tensão convencional de escoamento de 160 *kN/cm*². Destas cordoalhas, 28 localizaram-se junto à face inferior das lajes, e as demais ficaram próximas à face superior. A força inicial aplicada a cada cabo foi de 26 *kN*. O concreto apresentou módulo de elasticidade de 4000 *kN/cm*² e resistência de 3 *kN/cm*².

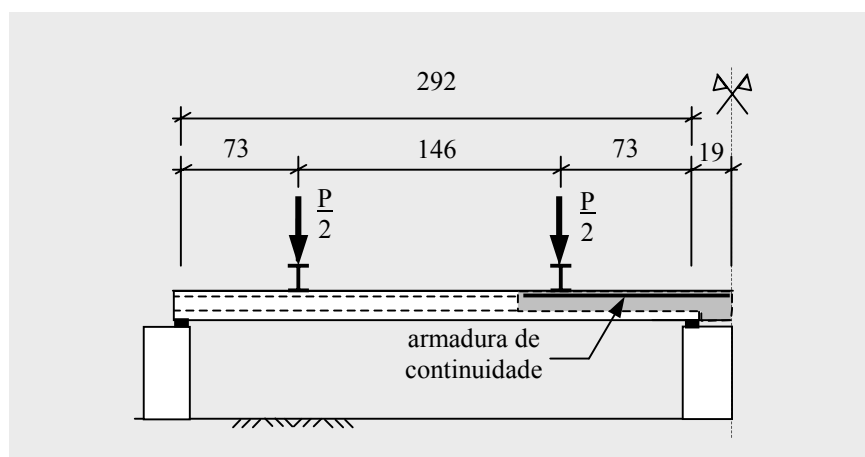


Figura 5.78 – Protótipo contínuo de construção composta de Rosenthal (1978)

Na execução do protótipo contínuo, as lajes alveolares foram posicionadas sobre os apoios, tiveram seus vazios longitudinais abertos e foi produzida a conexão em concreto armado. O protótipo de construção composta compreendeu dois vãos de 292 *cm* de comprimento e um vão intermediário, correspondente à zona de conexão, de 38 *cm*. A armadura de continuidade constituiu-se em nove barras de 12 *mm* de diâmetro e comprimento de 230 *cm*, posicionadas a 2 *cm* da face superior do elemento. O aço da armadura passiva apresentou tensão de escoamento de 26,5 *kN/cm*² e uma tensão final de 45,0 *kN/cm*². O carregamento foi aplicado em dois pontos por vão, localizados a 73 *cm* das extremidades de cada vão.

Na simulação numérica, cada vão foi representado por um elemento finito. Os vãos externos apresentaram quatro módulos de integração de igual comprimento com sete seções por

módulo. Limites entre os módulos ficaram posicionados sob as cargas concentradas e no centro do vão. A região de continuidade foi modelada por um elemento com um módulo de integração e cinco seções transversais. Todas as seções apresentaram 21 lâminas. A resistência final do concreto à compressão foi estimada, através de Saenz (Kabaila, 1969), em $2,1 \text{ kN/cm}^2$ e a resistência à tração em $0,41 \text{ kN/cm}^2$. As análises consideraram $\beta = 1,0$, utilizaram a regra de Gauss-Lobatto para a integração numérica e foram realizadas com controle de deslocamentos. A simulação da construção composta consistiu na aplicação da protensão e do peso próprio das lajes alveolares ainda bi-apoiadas, seguida pelo estabelecimento da continuidade e a posterior aplicação da carga final.

A figura 5.79 mostra os resultados numéricos e experimentais para as curvas “carga x deslocamento” do protótipo contínuo de Rosenthal (1978). Nota-se que o modelo numérico reproduziu o comportamento do protótipo de construção composta. A rigidez inicial foi bem modelada, observando-se uma pequena subestimação da carga máxima. A queda de resistência verificada numericamente ao longo da fase final de comportamento do elemento deve-se à progressiva plastificação do concreto na região da continuidade.

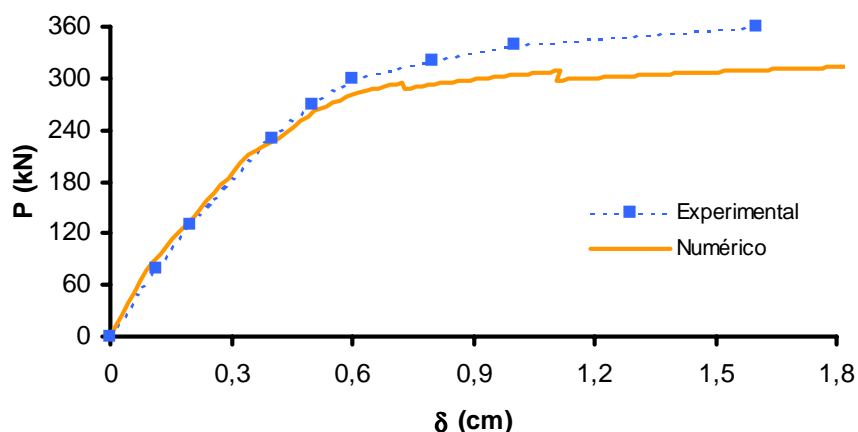


Figura 5.79 – Protótipo contínuo de Rosenthal (1978): resultados para os deslocamentos no centro vão

A figura 5.80 apresenta os resultados numéricos e experimentais para a tensão na armadura de continuidade do protótipo de Rosenthal (1978). Apesar de a curva numérica mostrar maiores tensões, o comportamento experimental foi adequadamente previsto. Após a fissuração na continuidade, as tensões passaram a crescer mais rapidamente com o aumento da carga. Devido à fissuração nos vãos, a contribuição relativa da região de continuidade na rigidez da estrutura voltou a crescer, com a redução da velocidade de deformação na armadura.

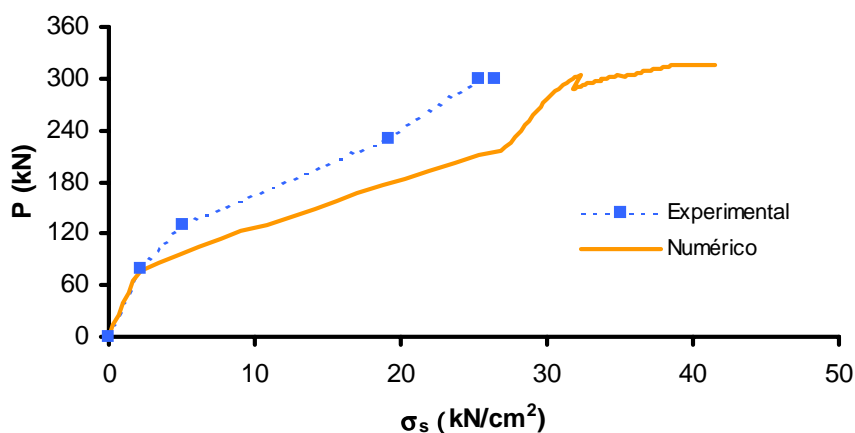


Figura 5.80 – Protótipo contínuo de Rosenthal (1978): resultados numéricos e experimentais das tensões na armadura de continuidade

Barbieri (1999) desenvolveu um outro estudo experimental, utilizando o mesmo tipo de conexão para as lajes alveolares. Uma vista do protótipo contínuo ensaiado é mostrada na figura 5.81, onde se indicam, também, as posições de medição de deformações e deslocamentos. As lajes alveolares utilizadas apresentaram seção transversal de 60 *cm* de largura e 16 *cm* de espessura, com cinco vazios longitudinais e 590 *cm*². A protensão foi aplicada com 1,91 *cm*² de aço CP190 RB, posicionados a 1,7 *cm* da base da seção, e 0,42 *cm*² a 1,7 *cm* da superfície das lajes. A tensão inicial de protensão foi de 152 *kN/cm*². As lajes foram produzidas industrialmente, com resistência característica à compressão de 3,0 *kN/cm*².

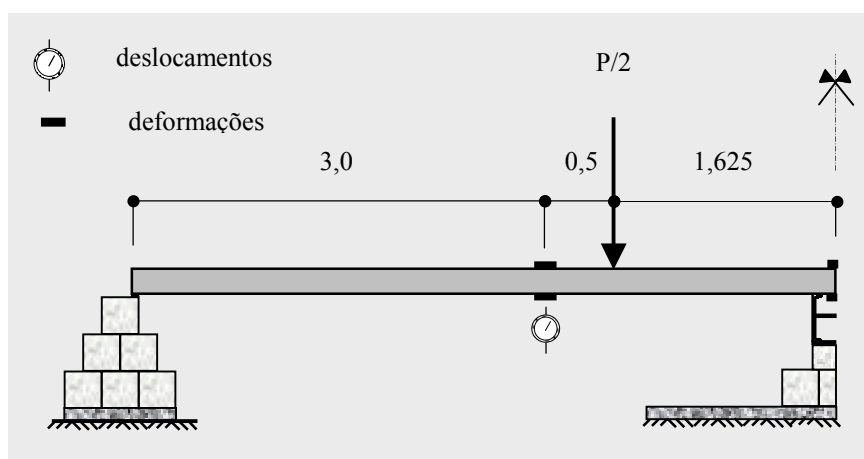


Figura 5.81 – Protótipo contínuo de Barbieri (1999)

Na produção do protótipo contínuo, as lajes alveolares com idade estimada em 12 meses, foram posicionadas sobre os apoios e preparadas através da abertura dos vazios longitudinais. A continuidade foi obtida através da produção de um elemento de conexão em concreto armado na região de momento negativo. Foi utilizada uma armadura de continuidade de

6,283 cm^2 de aço CA50 posicionada com 1 cm de cobrimento. O protótipo contínuo de construção composta apresentou dois vãos de 500 cm de comprimento e um elemento conexão, sobre o apoio intermediário, de 25 cm .

Cada vão foi modelado por um elemento finito com 28 pontos de integração distribuídos igualmente em quatro módulos de integração. Estes módulos foram dispostos de maneira a respeitar a geometria de carregamento e instrumentação. A região da continuidade foi representada com um elemento com cinco seções transversais. O módulo de elasticidade do concreto (E_c) foi estimado, pelo ACI 318 (1999), em 2592 kN/cm^2 ; a resistência à tração (f_{ct}) das lajes foi arbitrada em 0,2 kN/cm^2 ; a resistência final do concreto (f_{cf}) foi fixada em 0,44 kN/cm^2 , de acordo com Saenz (Kabaila, 1969); e foi utilizado um valor de 1,0 para o parâmetro β . A resistência à tração do concreto na região da continuidade foi desprezada em função de uma possível fissuração prévia, conforme relatado pelos autores.

As etapas da análise numérica iniciaram com a aplicação da protensão e do peso próprio das lajes alveolares. Em seguida, considerou-se um período de 365 dias em que se aplicaram os efeitos do tempo. Após este período, o elemento finito central foi adicionado, para o estabelecimento da continuidade, e o protótipo contínuo submetido ao carregamento final.

A figura 5.82 mostra as curvas “carga x deslocamento” numéricas e experimentais para o protótipo contínuo de Barbieri (1999). As curvas para os vãos direito e esquerdo foram obtidas considerando as características de cada laje, disponíveis no trabalho experimental. Observa-se uma boa modelagem do comportamento experimental, com boa previsão da carga máxima, apesar de as curvas numéricas e experimentais afastarem-se após a fissuração.

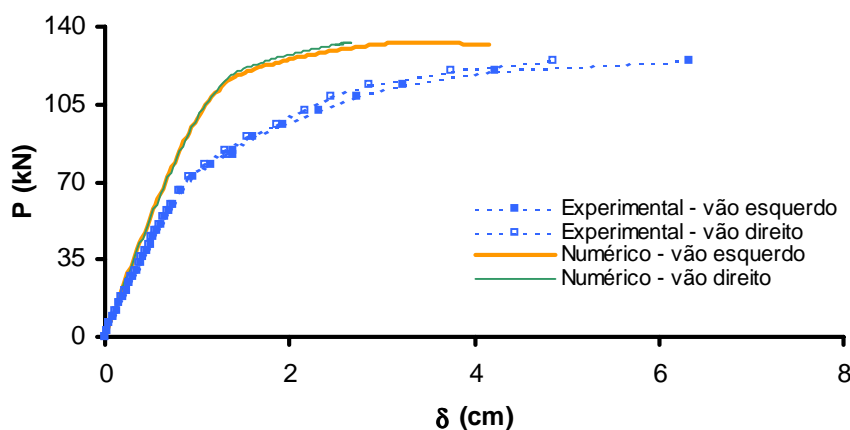


Figura 5.82 – Protótipo contínuo de Barbieri (1999): deslocamentos no vão

A figura 5.83 apresenta os resultados para a deformação na armadura de continuidade. Observam-se curvas numéricas e experimentais bastante próximas, com boa previsão da carga de escoamento da armadura. As curvas para a variação das deformações de compressão no concreto no vão são mostradas na figura 5.84. Estes resultados confirmam a adequação do modelo numérico, com boas estimativas das deformações ao longo de todo o intervalo de carregamento.

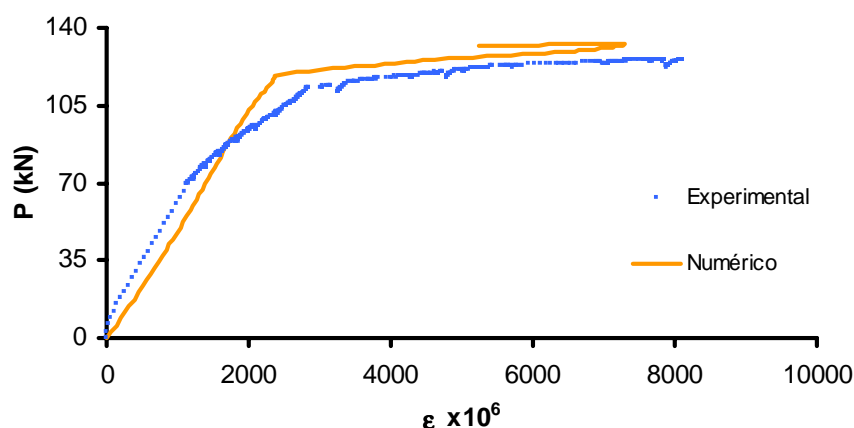


Figura 5.83 – Protótipo de Barbieri (1999): resultados numéricos e experimentais para a deformação na armadura

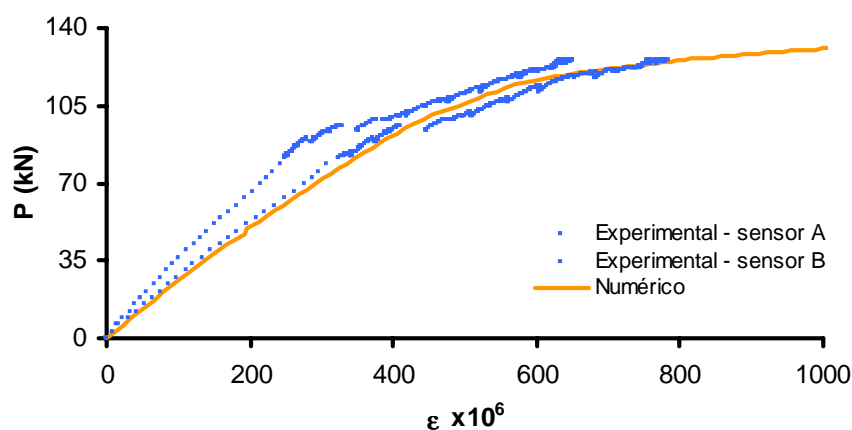


Figura 5.84- Protótipo de Barbieri (1999): resultados para a deformação de compressão no concreto no vão

O protótipo L1 do trabalho experimental de Lopes et al (1997) foi obtido com o estabelecimento da continuidade posterior de vigas pré-moldadas e produzido obtido em dois estágios. Inicialmente, um par de vigas pré-moldadas foi executado e deixado em período de

cura. Em seguida, os elementos foram transportados para o local do ensaio, posicionados sobre apoios e preparados para a produção de uma laje moldada no local. Em cada viga, bainhas foram posicionadas, antes da concretagem, para utilização na fase de produção da continuidade. Sobre os elementos pré-moldados, uma laje foi, então, executada, juntamente com um elemento de conexão, que preencheu todo o espaço entre as vigas. Após o estabelecimento da conexão e da produção da laje sobre as vigas, um cabo de protensão foi introduzido na bainha e protendido, conectando os dois elementos pré-moldados. O ensaio se deu através da aplicação de uma carga concentrada no ponto central de cada vão. O protótipo contínuo apresentou dois vãos de 300 *cm* de comprimento e uma região de conexão de 20 *cm*.

As seções pré-moldadas apresentaram formato aproximado de um T invertido, com uma mesa inferior de 15 *cm* de largura e 7,5 *cm* de espessura. A altura total desta seção foi de 23 *cm*, com uma alma de 5 *cm* de largura. A armadura passiva dos elementos pré-moldados consistiu em duas barras de 6 *mm* de diâmetro na zona de tração e duas barras na parte superior da seção, todas com 1,8 *cm* de cobrimento. A protensão das vigas foi por aderência inicial, consistindo em um cabo de 0,385 *cm*² de área, localizado a 6 *cm* da base da seção, submetido a uma força inicial de aproximadamente 30 *kN*. A laje apresentou 7 *cm* de espessura e 30 *cm* de largura e foi dotada de duas barras de 6 *mm* posicionadas a 1,8 *cm* da fase superior, ao longo de todo o comprimento do protótipo contínuo. A armadura de protensão para a conexão dos componentes apresentou um perfil parabólico, passando pelo topo da zona de continuidade. A área deste cabo foi de 0,55 *cm*² e a força efetiva de protensão foi de 58 *kN*.

O concreto dos elementos pré-moldados apresentou resistência média de 6,03 *kN/cm*². Para este material, o módulo de elasticidade foi estimado, através do ACI 318 (1999), em 3423 *kN/cm*²; a resistência à tração foi arbitrada em 0,28 *kN/cm*² e a resistência final à compressão em 1,42 *kN/cm*². O concreto moldado no local apresentou resistência média de 5,37 *kN/cm*²; com módulo estimado em 3200 *kN/cm*², resistência à tração arbitrada em 0,24 *kN/cm*² e resistência final estimada em 1,22 *kN/cm*², de acordo com as informações de Saenz (Kabaila, 1969). Em ambos os casos, o parâmetro β foi fixado em 4,5 e as deformações de pico e final do concreto à compressão foram de 0,2% e 1,0%, respectivamente. A tensão de escoamento do aço foi de cerca de 44 *kN/cm*² e o aço de protensão apresentou tensão convencional de escoamento de 169,2 *kN/cm*² e de ruptura 187 *kN/cm*².

Cada vão do protótipo contínuo foi modelado por um único elemento finito com 21 seções transversais, distribuídas em três módulos de integração posicionados de maneira a respeitar a

geometria do perfil parabólico de protensão e a forma do carregamento. A conexão foi modelada com um elemento e dez seções, divididas em dois módulos de integração. As seções pré-moldadas foram descritas com três módulos de integração com três lâminas cada. A laje foi modelada com um módulo composto por três lâminas. A análise se deu por incremento de deslocamentos e a regra de integração utilizada foi a de Gauss-Lobatto. A programação da análise iniciou com a aplicação da protensão e do peso próprio dos elementos pré-moldados. Após a cura destes elementos, foram acrescentados o componente da seção correspondente à laje e o elemento central de conexão. Em uma etapa de carga, aplicou-se a protensão do cabo parabólico ao longo de todo o protótipo e, também, o peso próprio da laje. Finalmente, a carga variável foi aplicada considerando uma idade de 28 dias para o concreto moldado no local.

A figura 5.85 apresenta os resultados numéricos e experimentais para a variação do momento na continuidade. Os valores das cargas foram adimensionalizados com a divisão pela carga máxima experimental. Observa-se uma adequada estimativa do comportamento inicial do protótipo, assim como do momento fletor máximo na continuidade. A variação do momento com o carregamento, também foi reproduzida corretamente. Após a fissuração na continuidade, o momento passou a crescer de maneira mais lenta. Com a formação das primeiras fissuras nos vãos, e a queda de rigidez nestas regiões, a contribuição da conexão na resistência ao carregamento voltou a aumentar, como verificado nos trechos finais das curvas numérica e experimental.

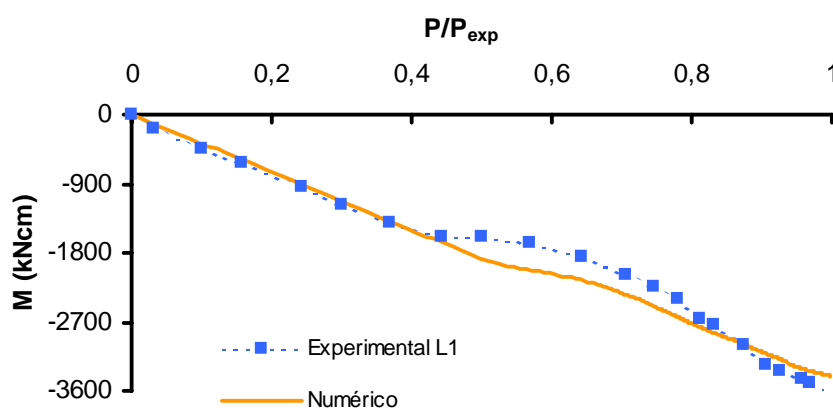


Figura 5.85 – Protótipo L1 de Lopes et al (1997): variação do momento na continuidade

5.5 Pilares em Concreto Armado

O desempenho do modelo numérico na análise de pilares em concreto armado, em que as não linearidades física e geométrica são relevantes, pode ser verificado através da simulação dos protótipos de Kim & Yang (1995). O trabalho experimental compreendeu o ensaio de 30 pilares com seção transversal $8,0 \times 8,0 \text{ cm}$ e três diferentes comprimentos de vão: 24 cm , 144 cm e 240 cm . As extremidades dos pilares foram rotuladas e o carregamento aplicado com $2,4 \text{ cm}$ de excentricidade. A armadura foi disposta de maneira simétrica nas seções transversais. Protótipos com taxa de armadura de 1,98% apresentaram quatro barras de $6,35 \text{ mm}$ de diâmetro, dispostas a $1,5 \text{ cm}$ das faces. Pilares com taxa de armadura de 3,95% apresentaram oito destas barras. A tensão de escoamento do aço foi de $40,6 \text{ kN/cm}^2$.

Os protótipos 10L2, 10L4, 60L2 e 100L4, apresentaram um concreto com resistência (f_c) de $2,55 \text{ kN/cm}^2$. O módulo de elasticidade (E_c), a deformação de pico (ϵ_{c0}) e a deformação final (ϵ_{cf}) à compressão deste material foram estimados segundo as recomendações de Kim & Yang (1995), com valores de $2366,5 \text{ kN/cm}^2$, $0,206 \%$ e $1,03\%$, respectivamente. A resistência final (f_{cf}) foi arbitrada em $0,765 \text{ kN/cm}^2$ e a resistência à tração (f_{ct}) em $0,255$. O concreto dos pilares 100H2 1 e 100H2 2 apresentou resistência (f_c) de $8,62 \text{ kN/cm}^2$, com o módulo de elasticidade (E_c) e as deformações de pico (ϵ_c) e final (ϵ_{cf}) estimados em $3772,41 \text{ kN/cm}^2$, $0,31\%$ e $1,555 \%$, respectivamente. A resistência final (f_{cf}) deste concreto foi arbitrada em $2,586 \text{ kN/cm}^2$ e a resistência à tração (f_{ct}) em $0,49 \text{ kN/cm}^2$. Em ambos os materiais, utilizou-se um valor de $0,4$ para β . Todos os pilares foram modelados através de um elemento finito dividido em quatro módulos de integração, com sete seções cada, compostas por 11 lâminas.

As figuras 5.86 a 5.94 apresentam os resultados para os deslocamentos e as deformações nas armaduras no centro do vão, para os pilares de Kim & Yang (1995), mostrando uma boa proximidade entre as curvas numéricas e experimentais. Curvas “carga x deslocamento” obtidas em simulações em que se desprezaram os efeitos de segunda ordem, também são mostradas. Comparando-se os resultados numéricos com ou sem a não linearidade geométrica, nota-se a forte influência dos efeitos de segunda ordem nos pilares mais esbeltos, como os das figuras 5.88, 5.90 e 5.91. A figura 5.95 mostra a evolução da configuração deformada do protótipo 100H2-1 ao longo do carregamento, notando-se a mudança da forma da curva, que passou de uma variação suave dos deslocamentos para uma mais brusca, nas etapas finais da análise.

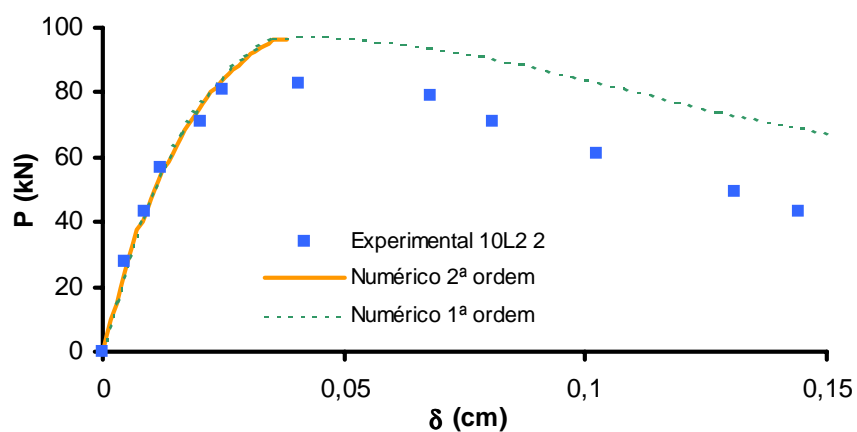


Figura 5.86 – Pilar 10L2-2, com 24 cm de comprimento e taxa de armadura 1,98%: curvas “carga x deslocamento”

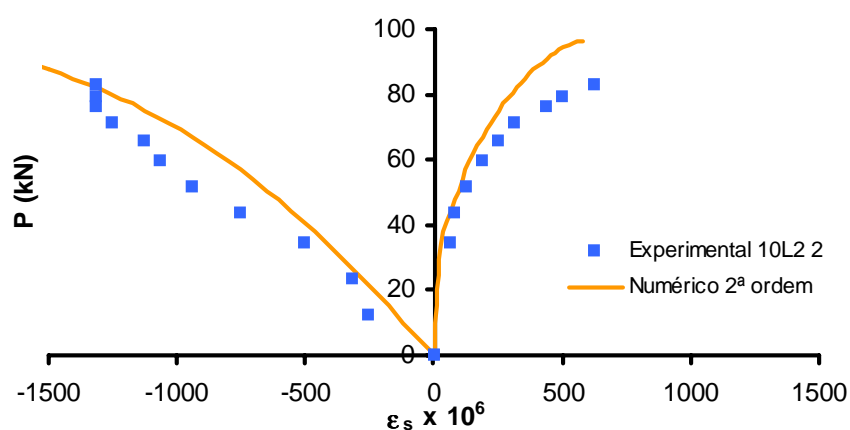


Figura 5.87 – Pilar 10L2-2: resultados para a deformação nas armaduras

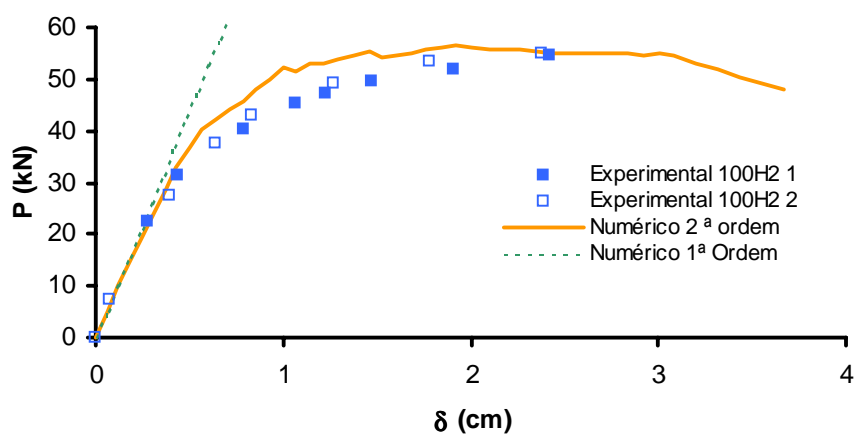


Figura 5.88 – Pilares 100H2-1 e 100 H2-2, com 240 cm de vão e 1,98% de taxa de armadura: curvas “carga x deslocamentos”

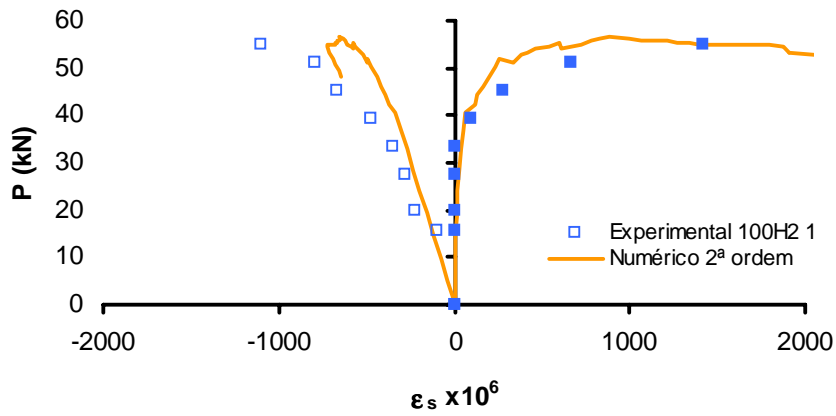


Figura 5.89 – Pilares 100H2-1: curvas “carga x deformação na armadura”

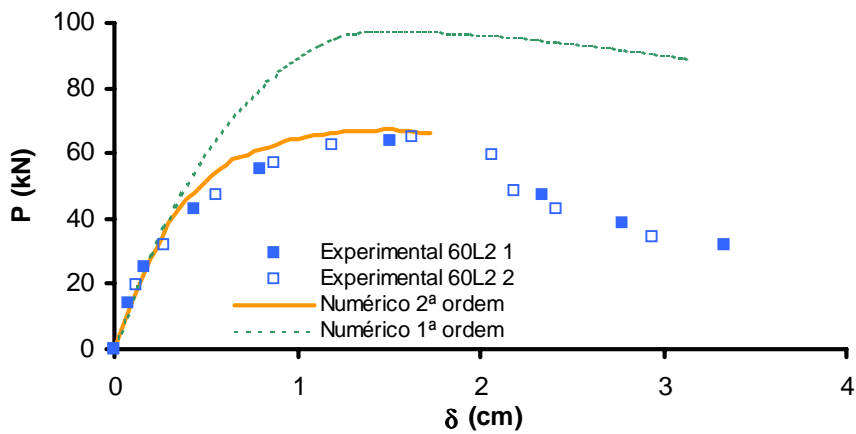


Figura 5.90 – Pilares 60L2-1 e 60L2-2, com 144 cm de comprimento e 1,98% de taxa de armadura: resultados para os deslocamentos

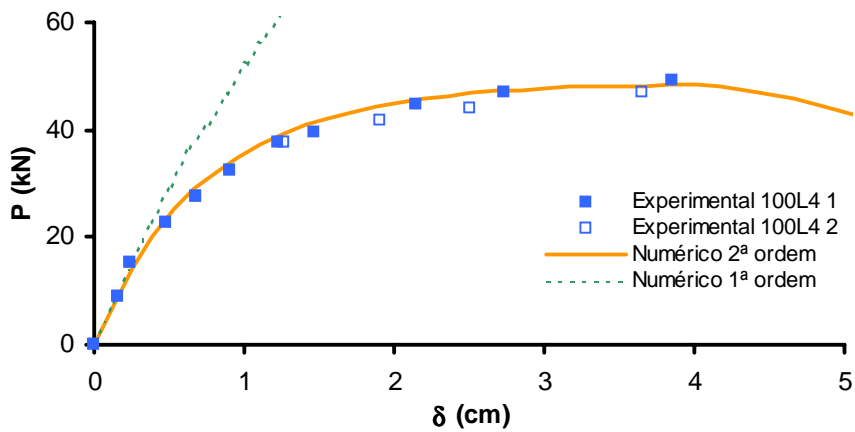


Figura 5.91 – Pilares 100L4-1 e 100L4-2, com 240 cm de vão e 3,96% de taxa de armadura: resultados para os deslocamentos

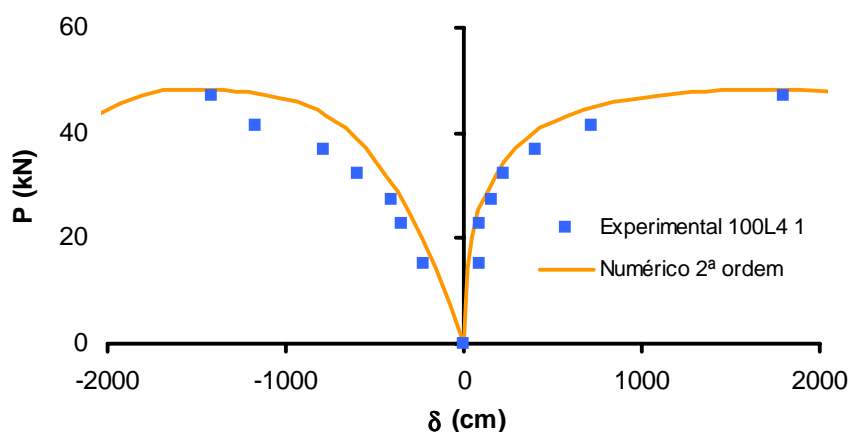


Figura 5.92 – Pilar 100L4-1: resultados para as deformações nas armaduras

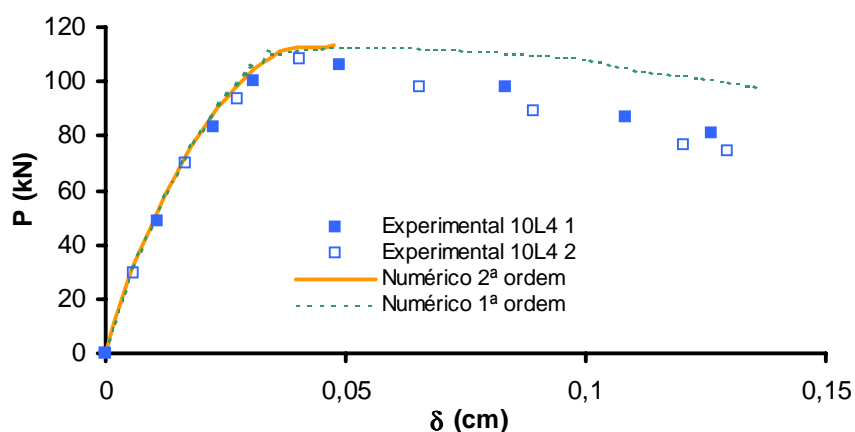


Figura 5.93 – Pilares 10L4-1 e 10L4-2, com 24 cm de vão e 3,96% de taxa de armadura: resultados para os deslocamentos

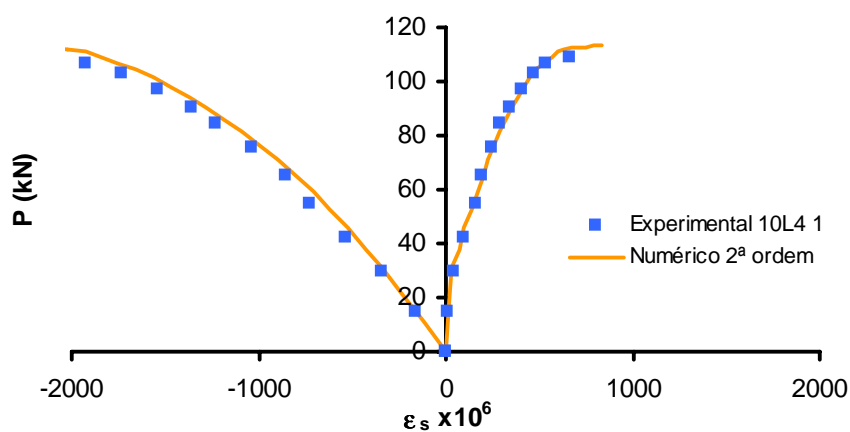


Figura 5.94 – Pilar 10L4-1: deformações nas armaduras de tração e compressão

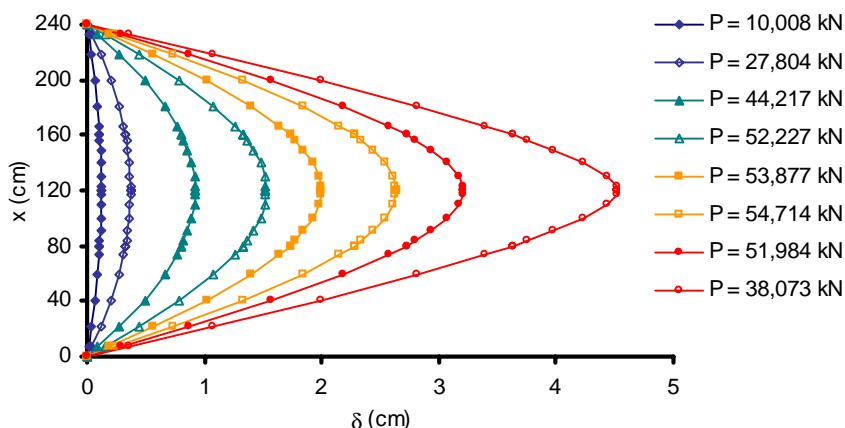


Figura 5.95 – Protótipo 100H2-1 de Kim & Yang (1995): evolução da deformada do elemento, conforme o modelo numérico

5.6 Elementos Estruturais sob Carregamentos de Longa Duração

A figura 5.96 apresenta a comparação entre os resultados numéricos e experimentais para os deslocamentos em função do tempo para as vigas em concreto armado de Bakoss et al (1982). As vigas 1B1 e 1B2 apresentaram vãos com 375 cm de comprimento e seção transversal retangular de 10 cm de base e 15 cm de altura. O concreto teve resistência à compressão de $3,9 \text{ kN/cm}^2$ e foi utilizada uma armadura passiva de $2,26 \text{ cm}^2$ posicionada com 2 cm de cobrimento. O cimento foi de endurecimento normal e a umidade média do ambiente de 50%. Os parâmetros arbitrados para as análises numéricas foram os seguintes: módulo de elasticidade do concreto (E_c), segundo o ACI 318 (ACI, 1999), de $3601,39 \text{ kN/cm}^2$; deformação de resistência máxima (ϵ_{c0}) de 0,2 %; deformação final (ϵ_{cf}) de 1% para uma tensão (f_{cf}) de $0,81 \text{ kN/cm}^2$; resistência à tração correspondente a 10 % da resistência à compressão e parâmetro β de 0,4. A viga 1B1 foi submetida apenas a seu peso próprio enquanto na 1B2 foram aplicadas cargas de 2,6 kN nos terços médios. Na figura 5.96, observam-se resultados numéricos e experimentais para as curvas “deslocamento x tempo” razoavelmente próximos. É interessante ressaltar que a partir dos 250 dias, os autores relatam a ocorrência de uma redução na umidade do ar, o que acabou por se refletir nos resultados experimentais.

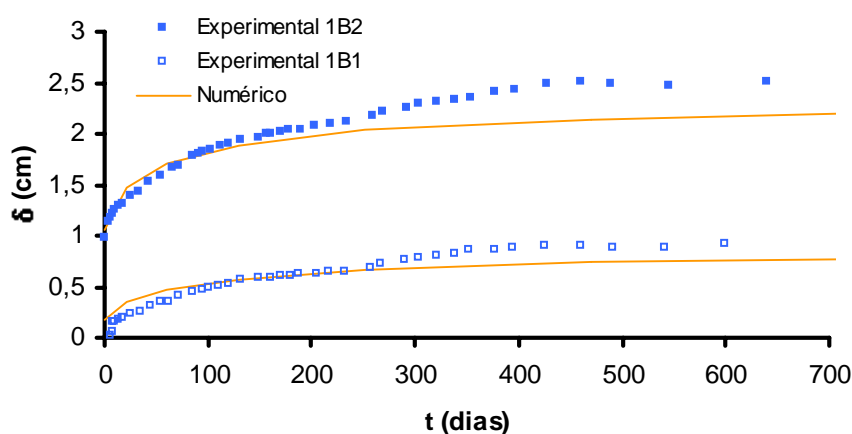


Figura 5.96 – Resultados numéricos e experimentais para as vigas de Bakoss et al (1982)

As lajes alveolares do programa experimental de Silva (1994) apresentaram 500 *cm* de vão, espessura de 12 *cm*, largura nominal de 60 *cm* e cinco vazios longitudinais, com seção de 457 *cm*². A armadura de protensão foi formada por 0,298 *cm*² com um cobrimento de 2,7 *cm* na parte superior da seção e 0,848 *cm*² a 2,1 *cm* da face inferior da laje. As tensões efetivas de protensão foram de 144,19 *kN/cm*² e 139,68 *kN/cm*², respectivamente. A resistência do concreto foi de 3,0 *kN/cm*² e o módulo de elasticidade de 3587,30 *kN/cm*². As lajes A1 e B2 foram submetidas a cargas distribuídas de 165 *kN/m* por períodos de cerca de 130 dias.

Os protótipos foram simulados através do modelo numérico, utilizando um elemento finito com três módulos de integração e 21 seções I com as propriedades geométricas equivalentes. Estas seções foram divididas em três módulos de integração com sete lâminas cada. A resistência à tração foi arbitrada em 10% da resistência à compressão; a deformação de pico (ϵ_{c0}) em 0,2 %; a deformação final (ϵ_{cf}) em 1,0 %; a resistência final do concreto (f_{cf}) em 0,44 *kN/cm*² e o parâmetro β em 0,4.

As figuras 5.97 e 5.98 apresentam os resultados para os deslocamentos ao longo do tempo para os protótipos A1 e B2, respectivamente. Na figura 5.97 apresentam-se, também, os resultados obtidos por Machado (2002) através de seu modelo numérico em elementos finitos, utilizando um modelo da cadeia de Maxwell com integração explícita. Observa-se que o modelo numérico descreveu corretamente o comportamento dos protótipos, com boas estimativas dos deslocamentos ao final dos períodos, mesmo utilizando um reduzido número de etapas incrementais. Nota-se, ainda, que os deslocamentos previstos pelo modelo proposto foram maiores do que os previstos por Machado (2002).

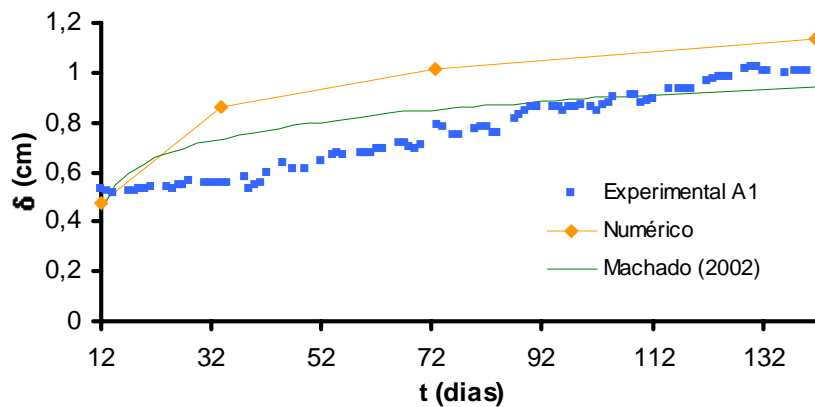


Figura 5.97 – Resultados para o ensaio de longa duração para o protótipo A1 de Silva (2002)

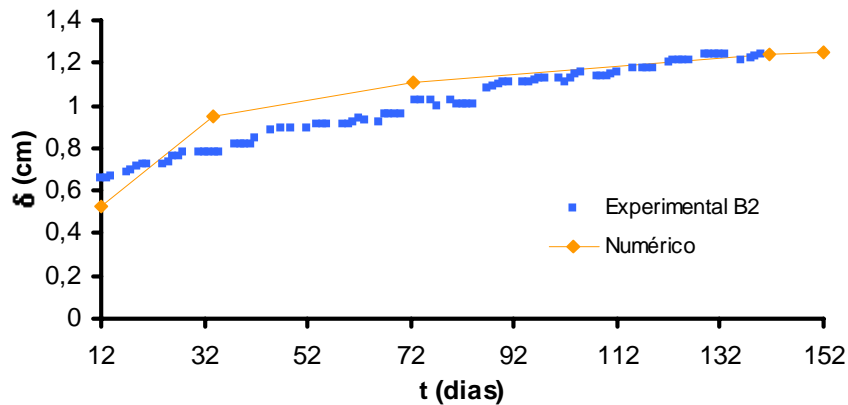


Figura 5.98 – Resultados para o ensaio de longa duração do protótipo B2 de Silva (2002)

5.7 Considerações Finais

De modo geral, o desempenho do modelo numérico proposto pode ser considerado satisfatório. Uma série de exemplos foi analisada, abrangendo vigas e pilares sob ações de naturezas diversas, inclusive de longa duração. Os resultados numéricos e experimentais foram normalmente bastante próximos, considerando que, na maioria dos casos, a disponibilidade e a qualidade dos dados experimentais é restrita.

As análises elásticas apresentadas no início do capítulo demonstraram a viabilidade da utilização de elementos finitos longos. Verificou-se, também, que a correta distribuição dos módulos de integração é fundamental para que se mantenha o caráter teoricamente exato da

formulação do elemento finito do tipo híbrido. Mesmo na simulação da barra esbelta, o aumento do número de elementos finitos não afetou significativamente os resultados.

A comparação entre resultados numéricos e experimentais para as vigas com protensão não aderente indicou a adequação do modelo numérico para o estudo deste tipo de peça. As curvas numéricas e experimentais com a variação da tensão na armadura não aderente mostraram-se próximas na maioria dos casos. As curvas numéricas considerando aderência da armadura de protensão confirmam este comportamento, já que apresentaram, normalmente, tensões bastante superiores aos demais resultados numéricos e experimentais.

Os diagramas de fissuração, obtidos a partir dos resultados numéricos, reproduziram alguns aspectos sobre o comportamento de elementos com protensão não aderente, bastante comentados na literatura. De modo geral, a fissuração nos elementos com protensão não aderente foi mais concentrada, se comparada à mesma viga analisada com armaduras aderentes. Quando a protensão não aderente foi parcial, a zona fissurada expandiu-se em direção aos apoios com o crescimento do carregamento. Na protensão total, sem armaduras aderentes, a extensão da região fissurada permaneceu constante ao longo da análise, com o aumento da altura das fissuras. No caso do elemento HK-P1R3-0 com protensão total e reduzida taxa mecânica total de armadura, submetido a uma carga concentrada, apenas a seção central sofreu fissuração. Além disso, a fissuração desta viga foi bastante brusca, com o número de lâminas rompidas crescendo rapidamente em poucas etapas incrementais.

Algumas características dos protótipos parecem ter afetado significativamente a forma da resposta numérica. Elementos com protensão parcial não aderente apresentaram curvas “carga x deslocamento” com três fases bem distintas: a linear não fissurada, a linear fissurada e a de comportamento plástico. Para os protótipos com protensão total, as curvas mostraram, normalmente, dois segmentos: a linear não fissurada e um com comportamento do tipo plástico em função da fissuração do concreto.

Entre as peças com protensão total não aderente, elementos com taxa mecânica total de armadura elevada apresentaram uma transição suave do regime não fissurado para o fissurado. À medida que este índice foi reduzido, os protótipos passaram a apresentar transições mais bruscas, com perda de carga. Com taxas de armadura intermediárias, o aumento dos deslocamentos resultou, normalmente, na recuperação da capacidade portante dos protótipos, enquanto taxas de armadura reduzidas levaram à instabilidade à flexão.

6 Diretrizes para a Análise de Elementos com Protensão Não Aderente Através do Modelo Numérico

As comparações entre resultados numéricos e experimentais, apresentadas no **Capítulo 5**, demonstraram o bom desempenho do modelo numérico na descrição do comportamento à flexão de elementos com protensão não aderente. A utilização do modelo para o estudo deste tipo de estrutura depende, ainda, de sua caracterização sob dois aspectos: a observação do comportamento dos resultados numéricos frente a variações nos parâmetros de entrada de dados, e a definição de um critério de ruptura que permita a avaliação e a comparação da tensão última na armadura não aderente, determinada em diferentes situações de interesse.

As características físico-geométricas das estruturas raramente são conhecidas com absoluta precisão quando uma análise numérica é efetuada. Mesmo no caso de protótipos cujo comportamento já tenha sido observado experimentalmente, os dados disponíveis são normalmente incompletos e muitos parâmetros precisam ser arbitrados a partir de limites usuais disponíveis na literatura ou de recomendações de normas. Quando o elemento analisado é, ainda, objeto de projeto, suas propriedades são, basicamente, estimativas ou prescrições, que não necessariamente serão verificadas quando da execução da estrutura.

A forma como a estrutura é descrita e analisada no modelo numérico também não é única. Utilizando-se o elemento finito do tipo híbrido, uma viga pode ser modelada por um ou mais elementos finitos e diferentes quantidades de seções transversais e distribuições de módulos de integração. O tamanho dos incrementos utilizados na análise também se constitui em opção do usuário, em função da capacidade computacional e do nível de precisão desejado.

Por estes motivos, variações nos dados utilizados na análise de uma peça estrutural são bastante comuns. Normalmente, tais variações em parâmetros referentes às propriedades dos materiais são admitidas em torno dos valores inicialmente adotados. Já as características de discretização e da análise incremental podem variar dentro de possibilidades mais amplas.

Por outro lado, a realização de estudos abrangentes sobre o comportamento à flexão das peças com protensão não aderente, principalmente no que diz respeito à tensão última na armadura não aderente, depende da definição de um critério fundamental: em que condições a estrutura

deve ser considerada em ruína ao final de uma análise. Observou-se no **Capítulo 2**, que o incremento de tensão na armadura não aderente no estado limite último depende da capacidade de rotação do elemento na fase de comportamento plástico, em que a tensão pode aumentar consideravelmente, enquanto a capacidade de carga permanece estável ou sofre pequenos incrementos. O ponto na curva “carga x deslocamento”, em que o elemento é considerado em colapso, portanto, não é único, e pode afetar consideravelmente o valor estimado para a tensão final na armadura não aderente.

Visando fornecer subsídios para a futura utilização do programa computacional, este capítulo apresenta uma análise paramétrica sobre o comportamento dos resultados numéricos frente a variações nas propriedades dos elementos. Observa-se como variações nos parâmetros de entrada e na discretização da estrutura afetam a capacidade de carga e a forma da curva “carga x deslocamento”, estimadas através do modelo. Discute-se, também, a utilização de diferentes critérios de ruptura para a análise numérica dos elementos com protensão não aderente, e a maneira como estes critérios afetam os valores previstos para a capacidade portante e para a tensão final na armadura de protensão não aderente. Ao final do capítulo, apresenta-se, ainda, um apanhado das principais informações obtidas ao longo destes estudos.

6.1 Comportamento dos Resultados Numéricos frente à Variação de Parâmetros de Entrada de Dados

A análise paramétrica desenvolveu-se a partir de um número arbitrado de **protótipos** bi-apoiados, projetados especialmente para este estudo. Os protótipos foram definidos com determinadas propriedades geométricas, de carregamento, dos materiais e de discretização, chamadas de **valores de referência**. Dentre o conjunto dos dados necessários para a descrição de uma estrutura no modelo, alguns foram selecionados para a observação das conseqüências que variações em seus valores produziriam sobre os resultados, sendo chamados de **parâmetros**.

O efeito da variação de um parâmetro, tal como a resistência do concreto (f_c) ou o parâmetro β , por exemplo, sobre os resultados numéricos, foi observado considerando um conjunto de valores, distribuídos em torno do **dado de referência**, com pequenas variações, ou assumindo **valores representativos**. Cada parâmetro foi estudado individualmente, obtendo-se, para

cada protótipo, as curvas “carga x deslocamento” utilizando os diferentes valores do parâmetro. Comparando-se estes resultados, foi possível observar as conseqüências da variação do parâmetro no que diz respeito à carga máxima e à forma das curvas.

O estudo paramétrico é descrito a seguir, apresentando-se, inicialmente, os parâmetros selecionados, a forma como estes foram variados e as propriedades dos protótipos. Os resultados são apresentados através de inúmeros quadros e figuras, onde é possível observar como a variação de cada parâmetro afetou o desempenho obtido com o modelo numérico.

6.1.1 Detalhamento do Estudo Paramétrico

O quadro 6.1 apresenta os dados de entrada no modelo numérico considerados como parâmetros, e as formas de variação correspondentes. Os protótipos utilizados na análise paramétrica são listados no quadro 6.2, com suas características principais. Utilizaram-se taxas mecânicas totais de armadura (ω_e) de 0,05, 0,15 e 0,30, considerados valores baixos, médios ou altos, respectivamente. Os carregamentos foram concentrados no centro vão ou nos terços médios. Alguns protótipos foram dotados de armaduras passivas complementares, enquanto outros apresentaram protensão total. Entre os protótipos, encontram-se vigas, com índices de esbeltez à flexão (l/d_p) igual a 19,2, e lajes, com $l/d_p = 47,0$.

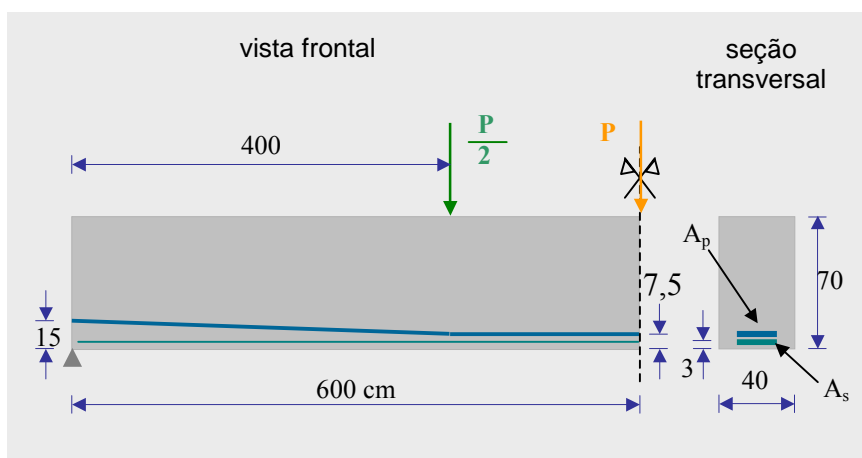
Quadro 6.1 – Relação dos parâmetros e a forma de variação correspondente

Parâmetro	Forma de variação
distribuição da malha em elementos finitos	valores representativos
número de lâminas na seção transversal	valores representativos
parâmetro β do modelo de <i>tension stiffening</i> do concreto	valores representativos
parâmetro β_σ do modelo de <i>tension stiffening</i> do concreto	valores representativos
resistência à tração do concreto (f_{ct})	em torno do valor de referência
módulo de elasticidade do concreto (E_c)	em torno do valor de referência
resistência à compressão do concreto (f_c)	em torno do valor de referência
deformação de pico à compressão (ϵ_{c0})	em torno do valor de referência
módulo de elasticidade final do concreto à compressão (E_{cf})	valores representativos
peso específico do concreto (γ_c)	em torno do valor de referência
deformação de escoamento da armadura passiva (ϵ_y)	em torno do valor de referência
tensão convencional de escoamento do aço de protensão (f_{py})	em torno do valor de referência
tamanho do incremento de deslocamento	valores representativos

Quadro 6.2 – Protótipos utilizados na análise paramétrica

protótipo	l/d_p	ω_e	PPR _e	carga	A_s [cm]	A_p [cm]
P1	19,2	0,05	1,0	conc.	-	3,29
P2	19,2	0,05	1,0	terços	-	3,29
P3	19,2	0,05	0,5	conc.	5,18	1,70
P4	19,2	0,05	0,5	terços	5,18	1,70
P5	19,2	0,15	1,0	conc.	-	9,87
P6	19,2	0,15	1,0	terços	-	9,87
P7	19,2	0,15	0,5	conc.	15,52	5,11
P8	19,2	0,15	0,5	terços	15,52	5,11
P9	19,2	0,30	0,5	conc.	31,04	10,21
P10	19,2	0,30	0,5	terços	31,04	10,21
P11	47,0	0,05	1,0	conc.	-	3,36
P12	47,0	0,05	1,0	terços	-	3,36
P13	47,0	0,15	1,0	conc.	-	10,07
P14	47,0	0,15	1,0	terços	-	10,07
P15	47,0	0,15	0,5	conc.	16,02	5,27
P16	47,0	0,15	0,5	terços	16,02	5,27
P17	47,0	0,30	1,0	conc.	-	20,13
P18	47,0	0,30	1,0	terços	-	20,13
P19	47,0	0,30	0,5	conc.	32,03	10,54
P20	47,0	0,30	0,5	terços	32,03	10,54

Todos os protótipos apresentaram vãos de 1200 *cm* de comprimento. As vigas, com $l/d_p = 19,2$, mostradas na figura 6.1, apresentaram seções transversais retangulares com 40 *cm* de base e 70 *cm* de altura. Foi utilizado um perfil de protensão poligonal, com o cabo posicionado a 15 *cm* da fibra inferior nas seções de extremidade e a 7,5 *cm* da base no terço médio. A altura útil da armadura passiva (d_s), foi de 67 *cm*.

Figura 6.1 – Características dos protótipos com $l/d_p = 19,2$

As lajes, cujas características geométricas mostradas na figura 6.2, apresentaram 30 cm de espessura e 100 cm de largura. O perfil poligonal de protensão iniciou a 15 cm da base nas seções de extremidade, apresentando um trecho horizontal a 4,5 cm da fibra inferior no terço intermediário. A armadura passiva foi posicionada com $d_s = 28$ cm.

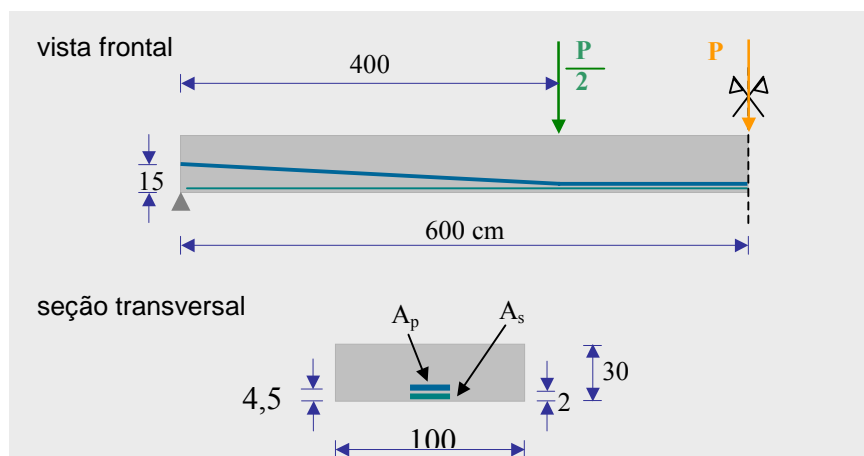


Figura 6.2 – Características dos protótipos com $l/d_p = 47,0$

O quadro 6.3 apresenta os valores de referência definidos para os materiais dos protótipos. No quadro, E_c é o módulo de elasticidade do concreto; f_c e ϵ_{c0} são a resistência do concreto à compressão e a deformação correspondente; f_{cf} e ϵ_{cf} são a resistência final do concreto à compressão e a deformação correspondente; E_{cf} é o módulo de elasticidade do concreto na fase de amolecimento à compressão; f_{ct} é a resistência à tração do concreto; γ_c é o peso específico do concreto; ϵ_y é a deformação de escoamento da armadura passiva e f_{py} é a tensão convencional de escoamento do aço de protensão. Considerou-se um aço de protensão com módulo (E_p) de 19500 kN/cm^2 e tensão de ruptura de (f_{pu}) de 190 kN/cm^2 para uma deformação de 7,1%. A tensão efetiva inicial de protensão (f_{pe}) foi de 152 kN/cm^2 .

Quadro 6.3 – Características de referência dos materiais utilizados
[kN;cm]

E_c	f_c	ϵ_{c0}	f_{cf}	ϵ_{cf}	E_{cf}	f_{ct}	γ_c	ϵ_y	f_{py}
2993,40	-4,0	-0,002	-3,0	-0,01	-125	0,41	0,000025	0,00238	180

Como será observado ao longo deste capítulo, o parâmetro β do modelo de *tension stiffening* do concreto é um dos dados que mais pode afetar os resultados numéricos, ao mesmo tempo

em que depende da utilização de valores arbitrários. Por isso, com exceção dos estudos referentes à distribuição da malha em elementos finitos e do número de lâminas nas seções transversais, em que foi considerado $\beta = 1,0$, cada parâmetro foi analisado em simulações com $\beta = 0,3$, $\beta = 1,0$ e $\beta = 5,441$, como valores de referência. Este último dado corresponde a uma relação de amolecimento linear para o concreto à tração, representando uma queda de tensão contínua desde f_{ct} até zero, conforme a figura 4.2. Em todas as análises, mesmo para os elementos sem armaduras aderentes, adotou-se, como valor de referência, $\beta_{\sigma} = 0,4$.

A discretização de referência para os protótipos com cargas concentradas no centro do vão é mostrada na figura 6.3.a. Utilizou-se um elemento finito dividido em quatro módulos de integração e um total de 28 seções. A figura 6.3.b apresenta a discretização das peças com cargas nos terços médios, que consistiu em um elemento com três módulos de integração e um total de 21 seções. Nos dois casos, utilizaram-se sete seções transversais por módulo, compostas por 21 lâminas. As análises tiveram, como valores de referência, incrementos de giro de $-0,00013 \text{ rad}$ aplicados no nó esquerdo, com exceção dos protótipos P9 e P10, com incrementos de $-0,0002 \text{ rad}$ para a redução do número de etapas.

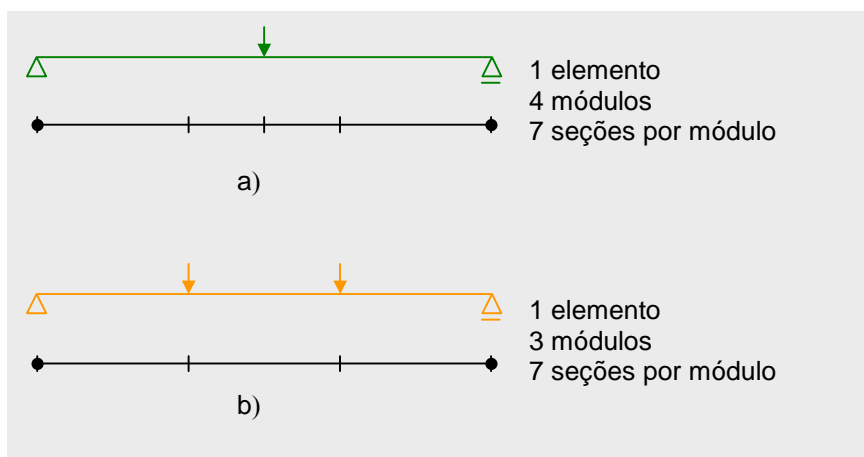


Figura 6.3 – Discretização dos protótipos: a) elementos com cargas concentradas; b) elementos com cargas nos terços médios

6.1.2 Apresentação dos Resultados

Figuras com as curvas “carga x deslocamento” de um protótipo, obtidas com os diferentes valores de um parâmetro, são utilizadas para a observação do comportamento numérico.

Nestas figuras, os resultados foram adimensionalizados de maneira que apenas as variações sejam observadas, não interessando os valores absolutos de carga e deslocamento. Para a adimensionalização, os valores de carga e deslocamento foram divididos pelos respectivos valores máximos, verificados entre todas as curvas da figura. A figura 6.4 mostra um exemplo deste tipo de gráfico.

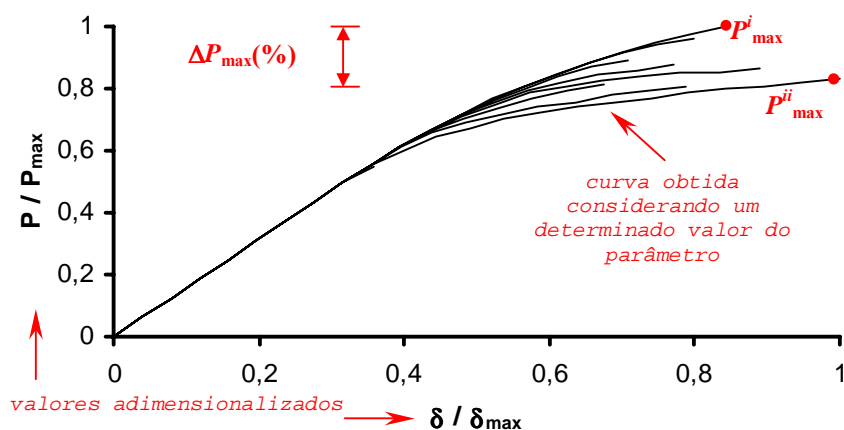


Figura 6.4 – Exemplo de figura para a observação do efeito da variação de um parâmetro no comportamento numérico de uma peça

O **índice de variação na carga máxima** (ΔP_{\max}), apresentado na equação (6.1) e na figura 6.4, é utilizado para a avaliação da influência da variação de cada parâmetro no valor das cargas máximas. Este índice corresponde à variação percentual entre o maior e o menor valor de carga máxima, obtidos com a variação de um parâmetro em um protótipo, relativamente ao maior valor correspondente. Quadros e figuras adicionais são apresentadas, procurando-se mostrar possíveis tendências de variação do índice ΔP_{\max} em função das características dos protótipos, tais como a taxa mecânica total de armadura, a presença ou não de armadura passiva, o tipo de carregamento e a esbeltez à flexão.

$$\Delta P_{\max} (\%) = \frac{P_{\max}^i - P_{\max}^{ii}}{P_{\max}^i} \times 100 \quad (6.1)$$

onde:

ΔP_{\max} : índice de variação na carga máxima;
 P_{\max}^i e P_{\max}^{ii} : maior e menor valores da carga máxima, respectivamente, obtidos com a variação individual de um parâmetro em um protótipo.

6.1.2.1 Distribuição da Malha em Elementos Finitos

O estudo sobre a utilização de diferentes malhas em elementos finitos foi realizado para os protótipos P1 e P10, com as opções mostradas nas figuras 6.5 e 6.6, respectivamente. Os condicionantes das distribuições de pontos nodais e módulos de integração foram as cargas e o perfil de protensão. As figuras 6.7 e 6.8 apresentam as curvas “carga x deslocamento”, obtidas com as diferentes malhas para os protótipos P1 e P10, respectivamente, onde se observa a superposição das curvas, com variações mínimas na fase de comportamento plástico da viga P10.

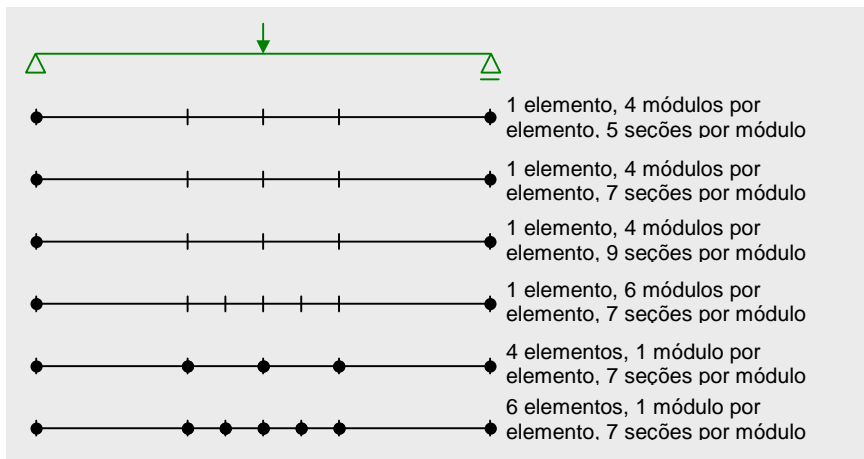


Figura 6.5 – Protótipo P1: opções de discretização

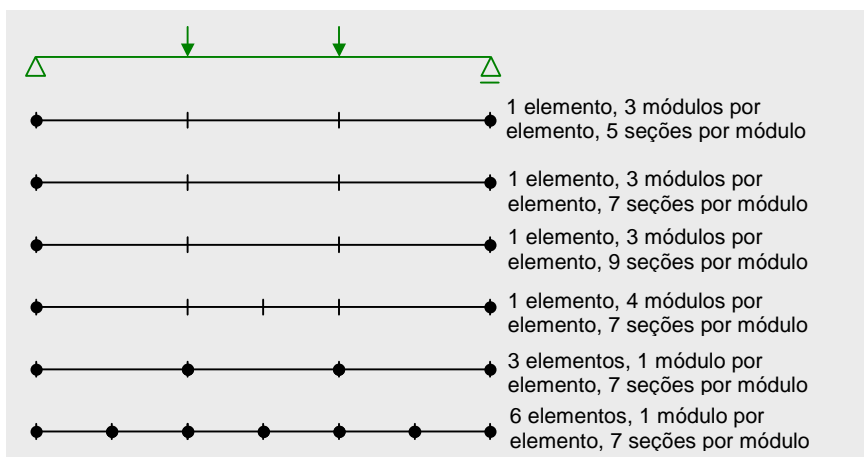


Figura 6.6 – Protótipo P10: opções de discretização

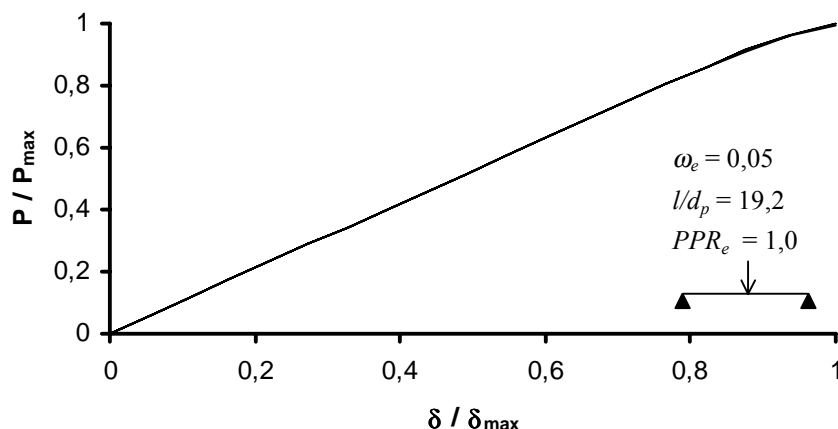


Figura 6.7 – Protótipo P1: Curvas “carga x deslocamento” para diferentes discretizações, em análises utilizando $\beta = 1,0$

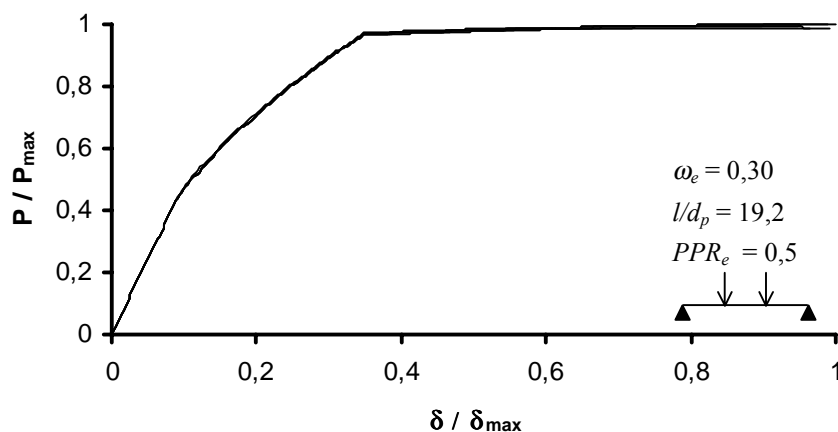


Figura 6.8 – Protótipo P10: resultados obtidos com diferentes malhas em elementos finitos, considerando $\beta = 1,0$

O quadro 6.4 apresenta as cargas máximas obtidas com cada discretização para o protótipo P1, mostrando uma variação de 4,1% nos valores. Comparando-se a malha (2) com a (5) e a (4) com a (6), observa-se que a substituição de módulos de integração por elementos finitos levou a resultados idênticos. As cargas máximas para a viga P10 são dadas no quadro 6.5, de onde se obtém um índice de variação na carga máxima (ΔP_{\max}) de apenas 1,1%. Também neste caso, a substituição de módulos de integração por elementos finitos não afetou os resultados, como observado entre as malhas (2) e (5).

Quadro 6.4 – Protótipo P1: cargas máximas para as diferentes malhas

	malha			carga máxima [kN]
	número de elementos	número de módulos por elemento	número de seções por módulo	
(1)	1	4	5	89,0
(2)	1	4	7	89,3
(3)	1	4	9	85,6
(4)	1	6	7	85,8
(5)	4	1	7	89,3
(6)	6	1	7	85,8

Quadro 6.5 – Protótipo P10: cargas máximas para diferentes malhas

	malha			carga máxima [kN]
	número de elementos	número de módulos por elemento	número de seções por módulo	
(1)	1	3	5	839,3
(2)	1	3	7	848,3
(3)	1	3	9	846,3
(4)	1	4	7	844,2
(5)	3	1	7	848,3
(6)	6	1	7	846,4

6.1.2.2 Número de lâminas nas seções transversais

A análise sobre influência do número de lâminas nas seções transversais nos resultados numéricos foi realizada considerando seis quantidades: 11, 13, 15, 17, 19, e o valor de referência, que foi de 21 lâminas. Todos os 20 protótipos foram envolvidos, considerando-se $\beta = 1,0$. As figuras 6.9 a 6.11 mostram as cargas máximas obtidas para as diversas peças em função do número de lâminas, para protótipos com $\omega_e = 0,05$, $\omega_e = 0,15$ e $\omega_e = 0,30$, respectivamente. De modo geral, observa-se que o número de lâminas na seção transversal afetou os resultados de carga máxima dos protótipos, com diferenças visivelmente mais acentuadas entre os elementos com $\omega_e = 0,05$.

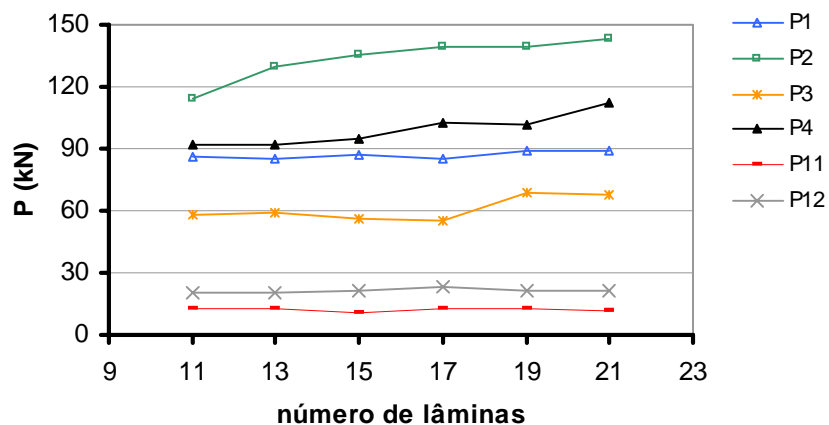


Figura 6.9 – Cargas máximas em função do número de lâminas nas seções transversais para protótipos com $\omega_e = 0,05$

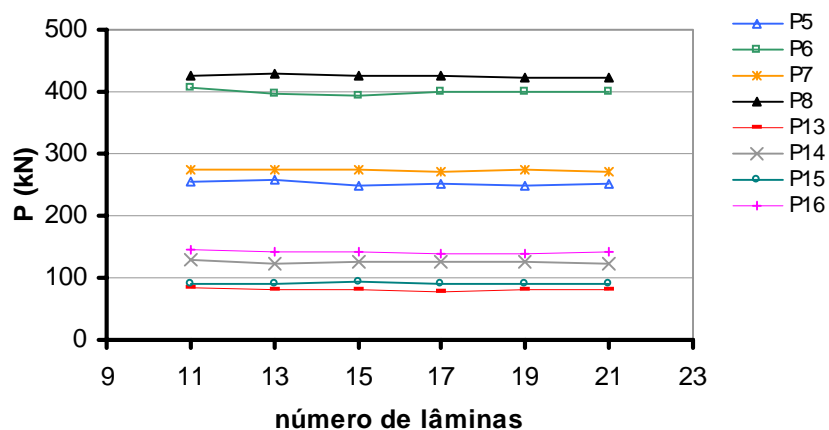


Figura 6.10 – Cargas máximas em função do número de lâminas nas seções transversais para protótipos com $\omega_e = 0,15$

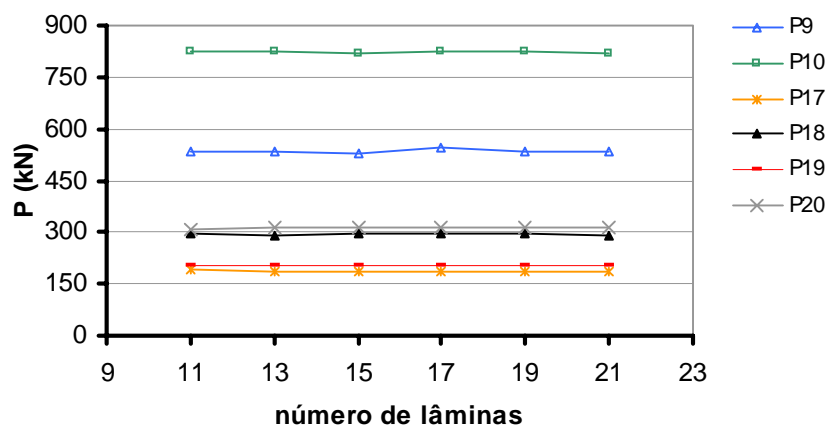


Figura 6.11 – Cargas máximas em função do número de lâminas nas seções transversais para protótipos com $\omega_e = 0,30$

Os índices ΔP_{\max} , obtidos com a variação na quantidade de lâminas nas seções transversais, são mostrados na figura 6.12, em função de ω_e . Nota-se a redução das variações nas cargas máximas com o aumento de ω_e . Entre os elementos com $l/d_p = 47$, peças com protensão total ($PPR_e = 1,0$) apresentaram maiores índices de variação, enquanto entre as vigas a variação foi maior para protensão parcial ($PPR_e = 0,5$). Os índices ΔP_{\max} para a variação da quantidade de lâminas parecem não ter sido afetados pelo tipo de carregamento. Alguns exemplos sobre a influência do número de lâminas nas seções transversais, nas respostas “carga x deslocamento”, são mostrados nas figuras 6.13 a 6.15, para os protótipos P4, P10 e P11, respectivamente, onde é possível perceber que as curvas são quase sempre coincidentes.

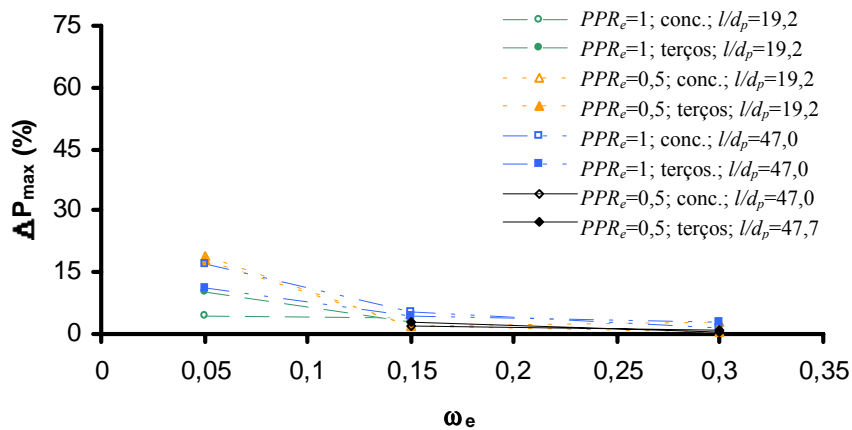


Figura 6.12 – Índices ΔP_{\max} para a variação do número de lâminas na seção transversal, em função de ω_e

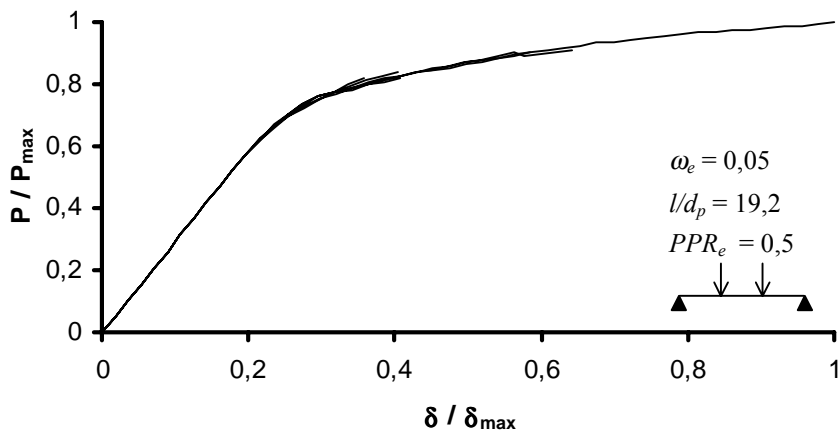


Figura 6.13 – Viga P4: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes quantidades de lâminas nas seções transversais, com $\beta = 1,0$

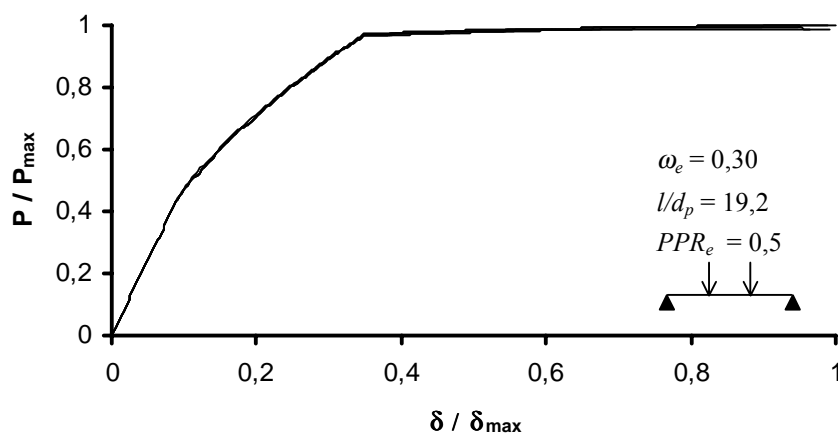


Figura 6.14 – Viga P10: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes quantidades de lâminas nas seções transversais, com $\beta = 1,0$

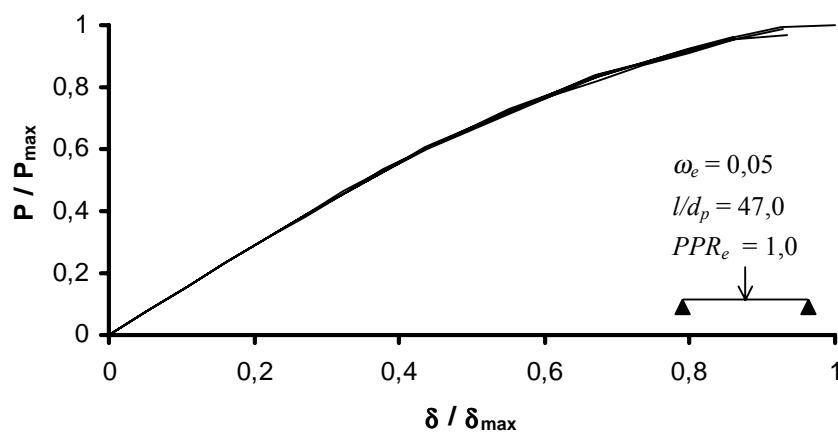


Figura 6.15 – Viga P11: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes quantidades de lâminas nas seções transversais, com $\beta = 1,0$

6.1.2.3 Parâmetro β de fissuração do concreto

Os valores considerados para o parâmetro β são os mostrados no quadro 6.6. A figura 6.16 mostra as cargas máximas obtidas, em função de β , para os protótipos com $\omega_e = 0,05$. Observa-se que os valores das cargas máximas foram significativamente afetados pela variação de β , com uma tendência de crescimento das cargas com o aumento do valor do parâmetro. Nas figuras 6.17 e 6.18, mostram-se as curvas “carga x deslocamento” para os

protótipos P4 e P11, respectivamente, notando-se que a variação de β afetou fortemente a rigidez pós-fissuração e, conseqüentemente, as cargas máximas atingidas para estes elementos.

Quadro 6.6 – Valores de β considerados na análise

β								
0,3	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,5	4,5	5,441

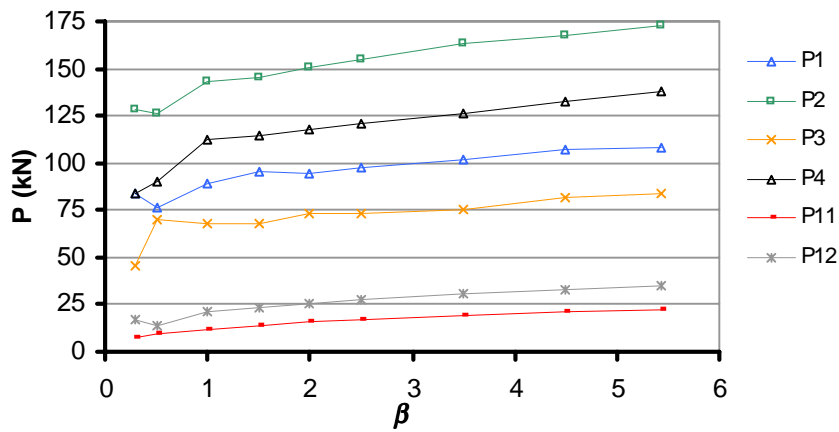


Figura 6.16 – Protótipos com $\omega_e = 0,05$: cargas máximas para as simulações com diferentes valores para o parâmetro β

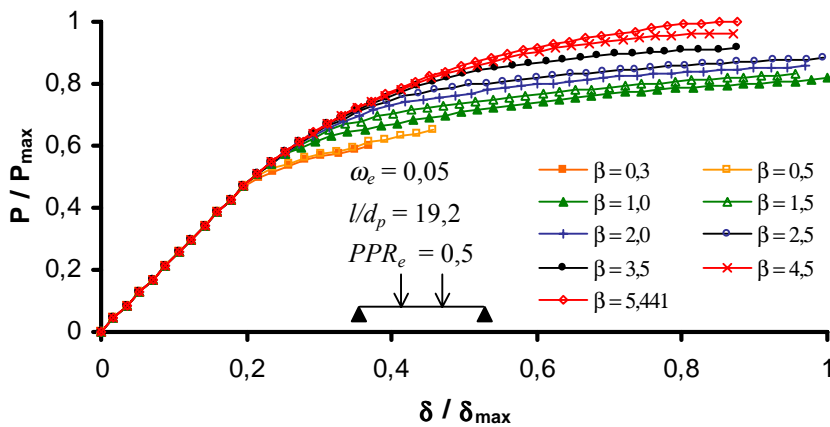


Figura 6.17 – Protótipo P4: resultados para a variação do parâmetro β

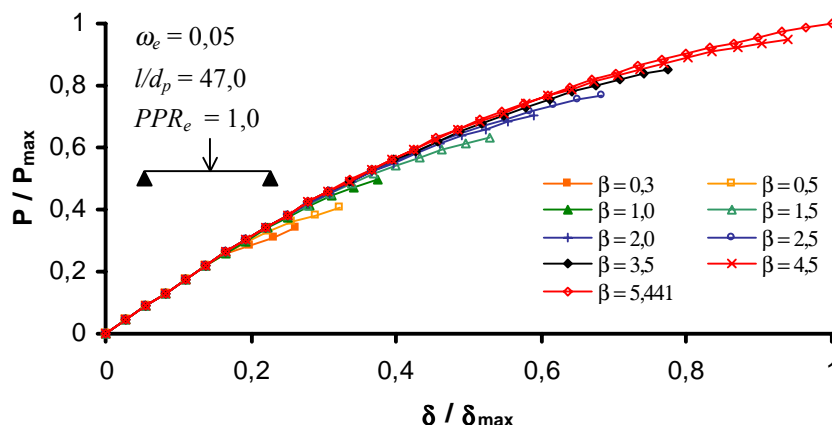


Figura 6.18 – Laje P11: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores do parâmetro β

A figura 6.19 mostra os valores das cargas máximas em função de β , para os protótipos com $\omega_e = 0,15$. Entre estes elementos, a influência de β foi consideravelmente menor do que no caso dos protótipos com $\omega_e = 0,05$. Apesar das menores variações nas cargas, é ainda possível observar-se uma tendência de crescimento da capacidade resistente com o aumento de β . As figuras 6.20 e 6.21 mostram curvas “carga x deslocamento” para os protótipos P6 e P8, respectivamente, ambos com $\omega_e = 0,15$, obtidas com os diferentes valores do parâmetro β . Nota-se, novamente, que a variação de β afetou a rigidez na fase pós-fissuração e, conseqüentemente, a carga máxima estimada para os protótipos.

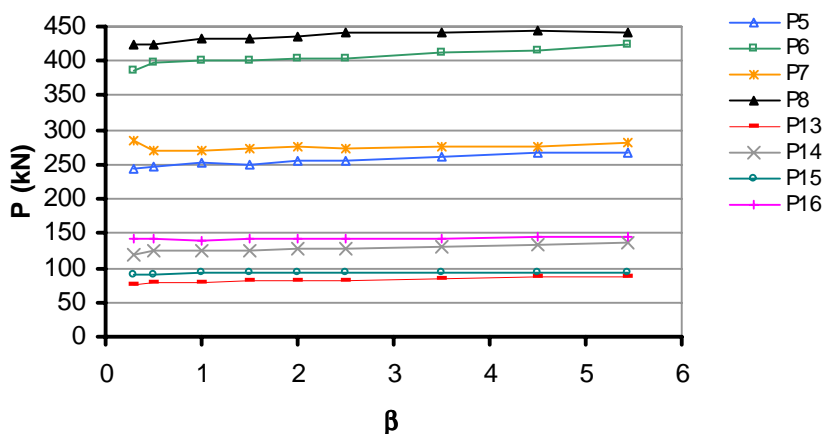


Figura 6.19 – Cargas máximas para protótipos com $\omega_e = 0,15$, em função do valor de β

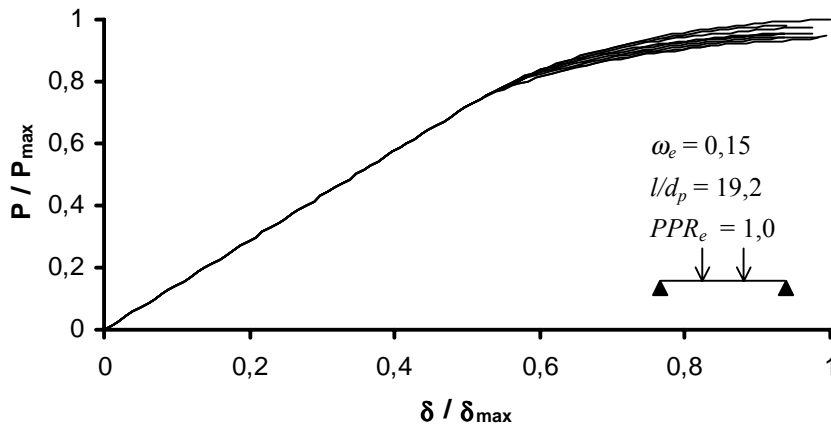


Figura 6.20 – Viga P6: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores do parâmetro β

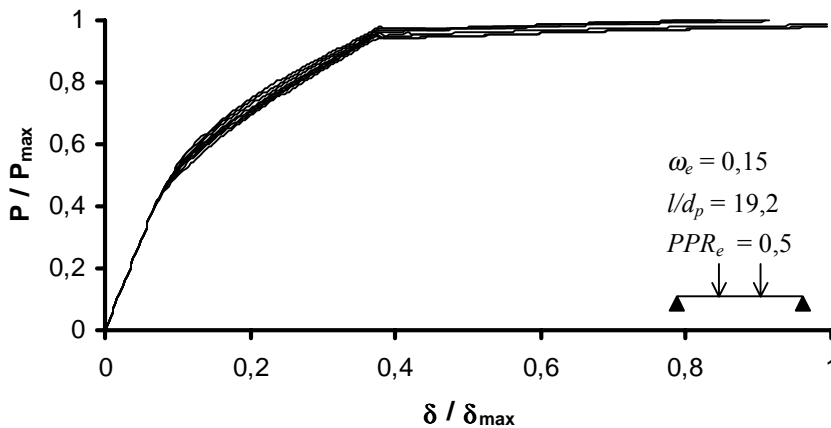


Figura 6.21 – Viga P8: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores do parâmetro β

As cargas máximas para os elementos com $\omega_e = 0,30$, em função de β , são mostradas na figura 6.22, onde se percebe uma reduzida influência da variação do parâmetro β sobre os resultados. As figuras 6.23 e 6.24 apresentam as curvas “carga x deslocamento” para os protótipos P19 e P20, respectivamente, onde se observam reduzidas dispersões entre as curvas produzidas com os diversos β . De modo geral, notam-se apenas pequenas diferenças de rigidez logo após a fissuração, o que praticamente não afetou as cargas finais.

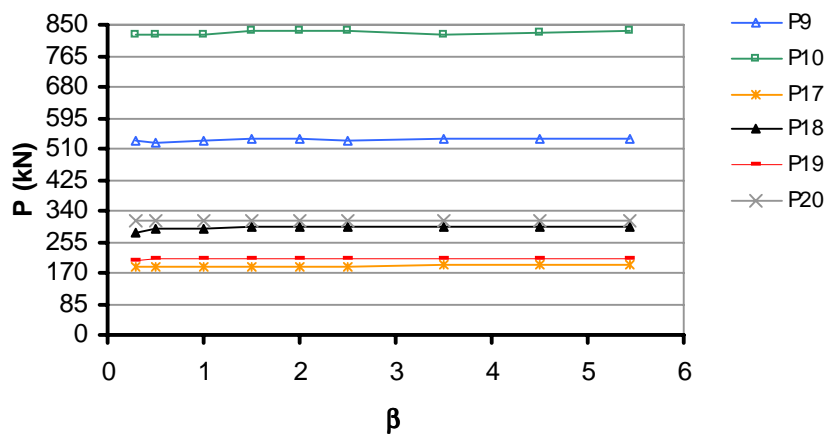


Figura 6.22 – Cargas máximas em função de β , peças com $\omega_e = 0,30$

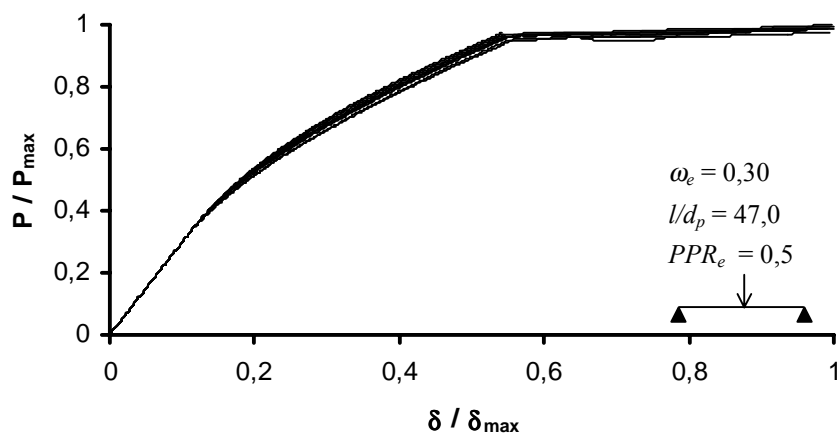


Figura 6.23 – Laje P19: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores do parâmetro β

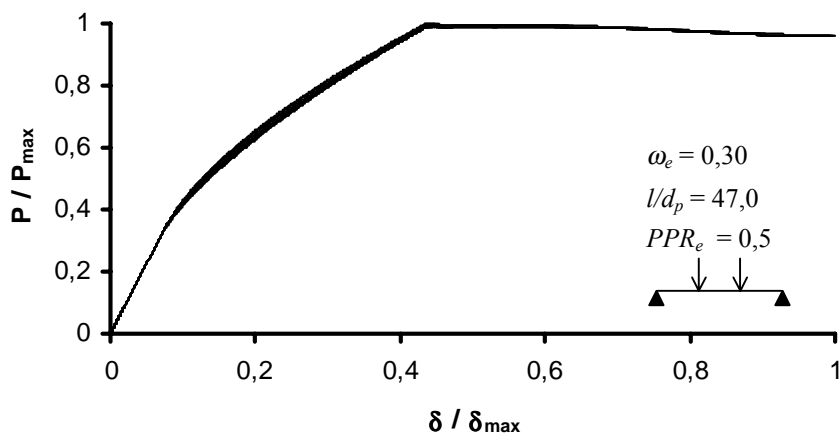


Figura 6.24 – Laje P20: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores do parâmetro β

O quadro 6.7 e a figura 6.25 apresentam os índices de variação na carga máxima (ΔP_{\max}), obtidos na análise sobre o parâmetro β , em função das características dos protótipos. Nota-se a redução dos índices de variação na carga máxima com o aumento da taxa mecânica total de armadura. Elementos submetidos a carregamentos concentrados apresentaram, geralmente índices levemente superiores aos observados nos protótipos com cargas nos terços médios. Lajes com protensão total mostram variações superiores às aquelas com protensão parcial, enquanto entre as vigas, nenhuma tendência neste sentido pôde ser observada.

Quadro 6.7 – Índices ΔP_{\max} para a variação de β em função das características do protótipos

	l/d_p	carga	PPR	ω_e		
				0,05	0,15	0,30
(1)	20	concentrada	1	29,1	9,1	-
(2)	20	terços médios	1	26,8	8,7	-
(3)	20	concentrada	0,5	45,2	4,9	2,1
(4)	20	terços médios	0,5	38,7	4,4	1,5
(5)	47	concentrada	1	66,1	14,1	2,4
(6)	47	terços médios	1	61,2	11,3	6,6
(7)	47	concentrada	0,5	-	2,8	2,5
(8)	47	terços médios	0,5	-	3,3	0,8

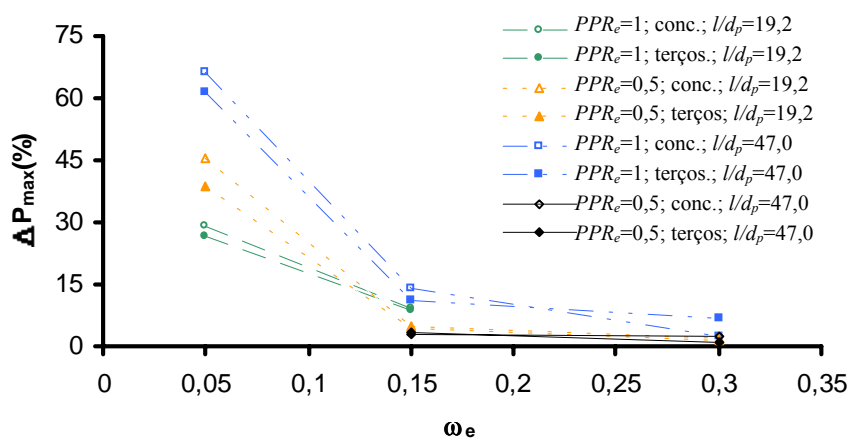


Figura 6.25 – Índices ΔP_{\max} em função de ω_e , obtidos com a variação do parâmetro β

6.1.2.4 Influência do parâmetro β_σ do modelo de *tension stiffening*

A análise sobre a influência da variação do parâmetro β_σ nos resultados numéricos foi realizada para os protótipos com protensão total, considerando os valores de 0,4, que é o de referência, 0,6, 0,8 e 1,0. As figuras 6.26 a 6.28 mostram os índices de variação na carga máxima, resultantes da análise sobre o parâmetro β_σ , obtidos em simulações considerando $\beta = 0,3$, $\beta = 1,0$ e $\beta = 5,441$, respectivamente. Entre as lajes, observam-se maiores índices ΔP_{\max} do que entre as vigas, além de uma tendência de redução na variação das cargas com o aumento de ω_e . Verifica-se, ainda, que as variações nas cargas tenderam a diminuir com o aumento do valor de β .

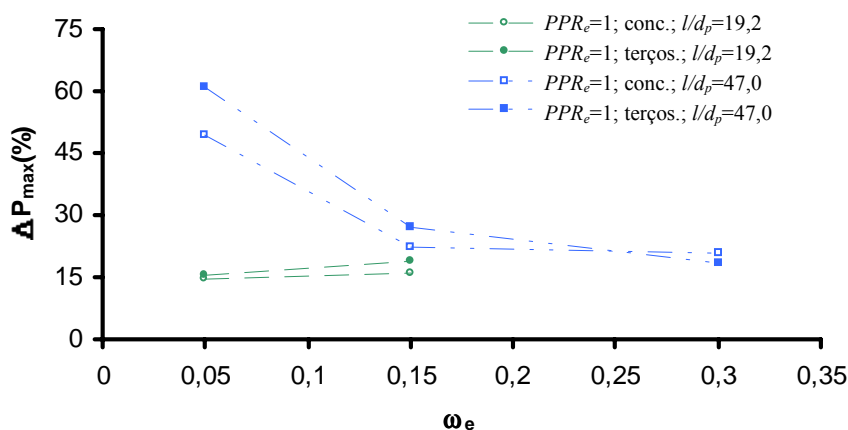


Figura 6.26 – Índices ΔP_{\max} em função de ω_e para a variação do parâmetro β_σ , com $\beta = 0,3$

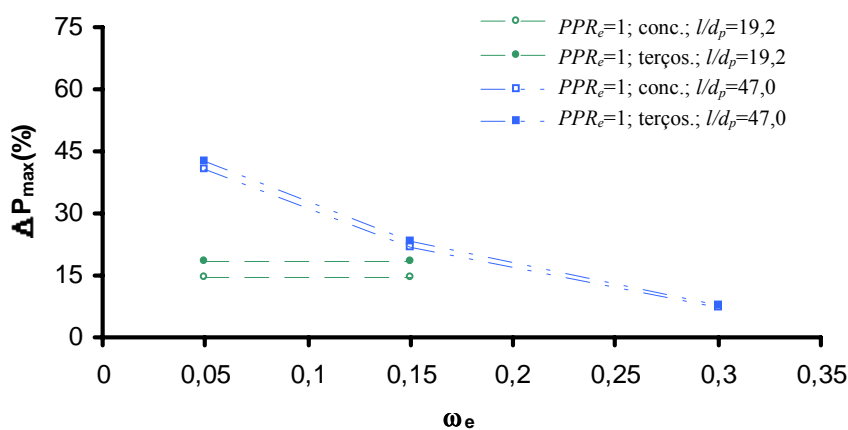


Figura 6.27 – Índices ΔP_{\max} para a variação do parâmetro β_σ em função de ω_e , com $\beta = 1,0$

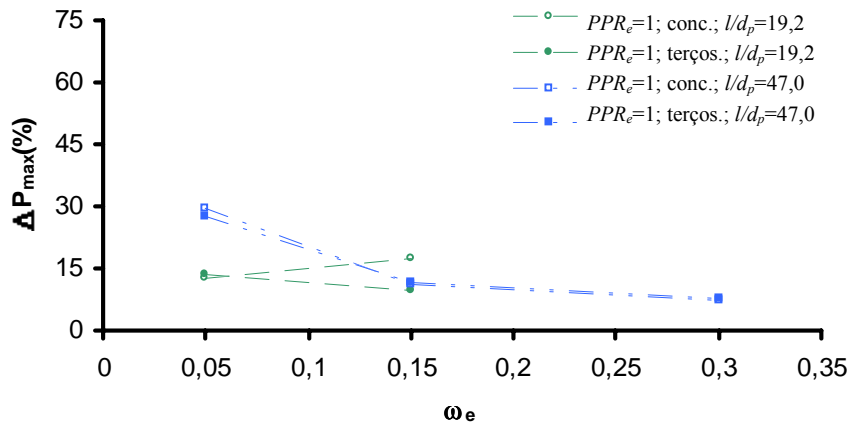


Figura 6.28 – Índices ΔP_{\max} para a variação do parâmetro β_{σ} em função de ω_e , com $\beta = 5,441$

As figuras 6.29 e 6.30 mostram as cargas máximas em função de β_{σ} , para os protótipos com $\omega_e = 0,15$ e $\beta = 0,3$, e protótipos com $\omega_e = 0,30$ e $\beta = 5,441$, respectivamente. Observa-se que o aumento dos valores de β_{σ} provocou a redução das cargas máximas. De modo geral, nas análises em que foi considerado $\beta = 0,3$, como as mostradas na figura 6.29, as reduções mais acentuadas nas cargas se deram entre os valores de $\beta_{\sigma} = 0,4$ e $\beta_{\sigma} = 0,6$.

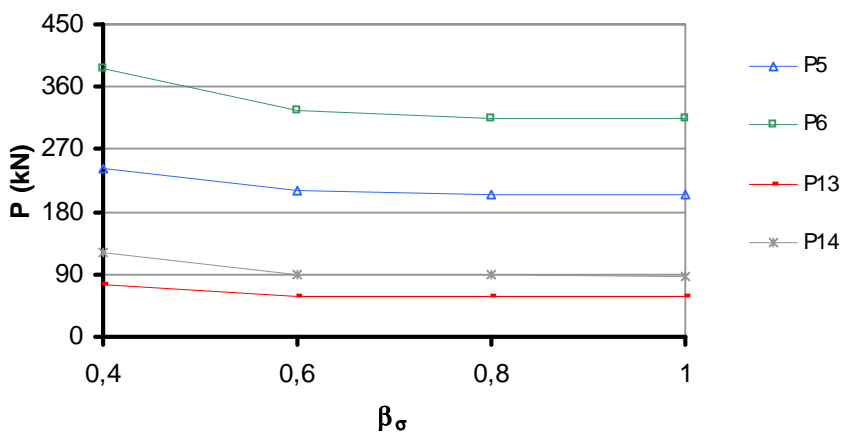


Figura 6.29 – Cargas máximas para protótipos com $\omega_e = 0,15$ e $\beta = 0,3$, em função de β_{σ}

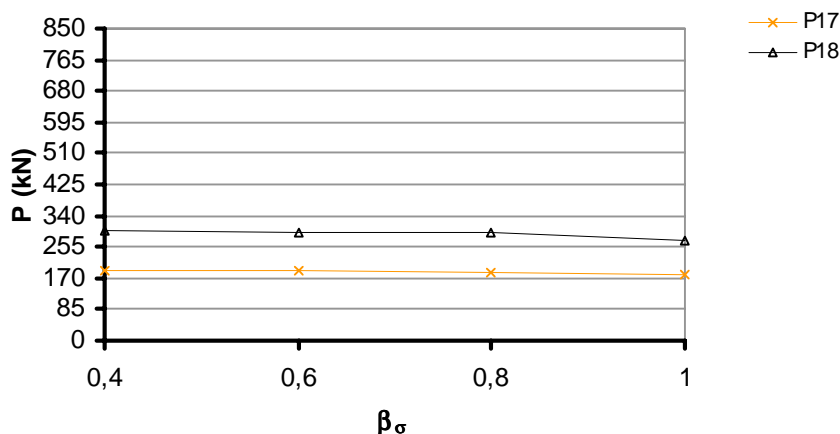


Figura 6.30 – Cargas máximas para protótipos com $\omega_e = 0,30$ e $\beta = 5,441$, em função de β_σ

A figura 6.31 mostra as curvas “carga x deslocamento” para o protótipo P2, obtidas com os diferentes valores de β_σ . Observa-se que a variação do parâmetro determinou o comportamento pós-fissuração, afetando a carga máxima. A fissuração foi mais brusca quanto maior foi o valor de β_σ utilizado, refletindo-se no aumento da carga com a redução do valor do parâmetro.

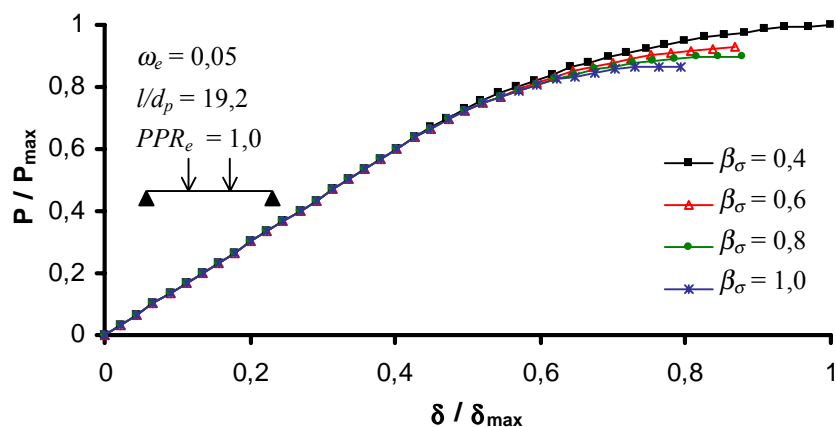


Figura 6.31 – Protótipo P2: curvas “carga x deslocamento”, com $\beta = 5,441$, obtidas com diferentes valores de β_σ

As curvas “carga x deslocamento” obtidas com os diversos valores de β_σ para a laje P12 são mostradas na figura 6.32, notando-se uma grande variação nas cargas e que os picos se deram sob níveis de deslocamento bastante diferentes. Observa-se, novamente, a redução da carga com o aumento do valor do parâmetro.

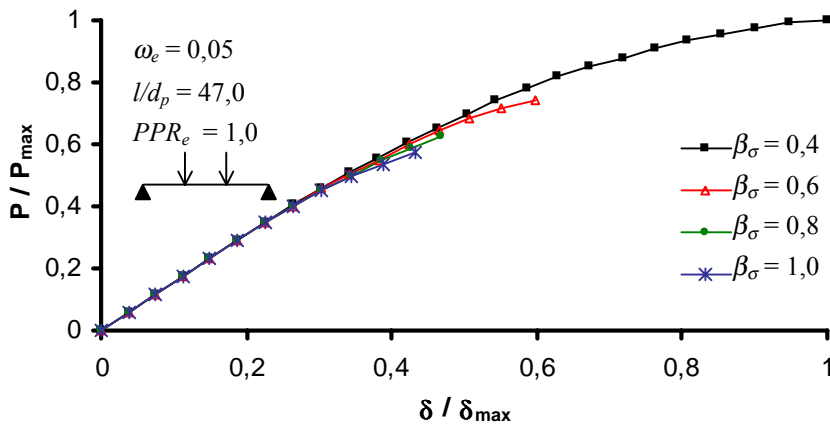


Figura 6.32 – Laje P12: curvas “carga x deslocamento”, com $\beta = 1,0$, para os diferentes valores de β_σ

Os índices ΔP_{\max} obtidos com a variação do valor de β_σ são apresentados, agora, em função do parâmetro β utilizado nas análises, nas figuras 6.33 e 6.34, para protótipos com $l/d_p = 19,2$ e $l/d_p = 47,0$, respectivamente. Observa-se, novamente, que os índices foram significativamente maiores entre os protótipos de maior esbeltez. Entre as lajes, observa-se uma tendência de redução na variação da carga com o aumento do parâmetro β , o que foi bem mais sutil entre as vigas.

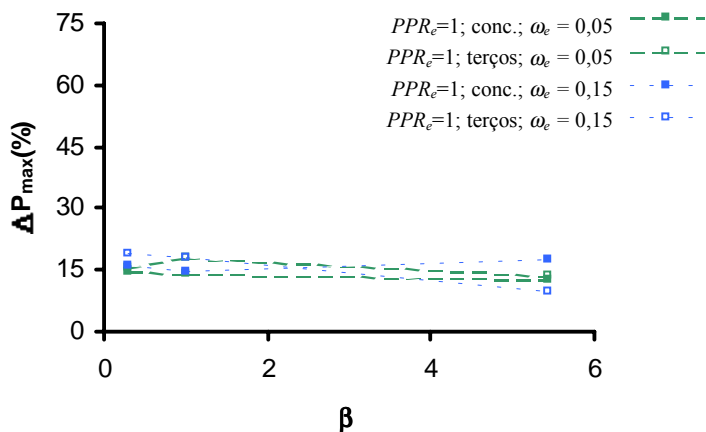


Figura 6.33 – Protótipos com $l/d_p = 19,2$: índices ΔP_{\max} em função de β , para a variação de β_σ

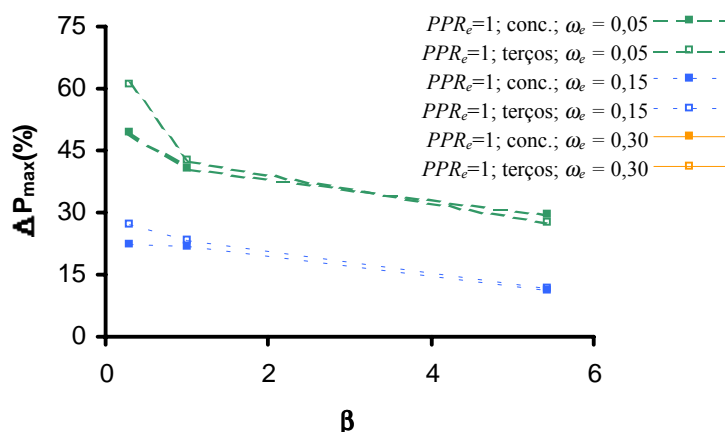


Figura 6.34 – Protótipos com $l/d_p = 47,0$: índices ΔP_{\max} em função de β , para a variação de β_{σ}

6.1.2.5 Resistência do Concreto à Tração (f_{ct})

Os parâmetros de resistência à tração do concreto, utilizados na análise paramétrica, são apresentados no quadro 6.8, juntamente com os respectivos valores máximos para o parâmetro β . Os valores β_{\max} substituíram $\beta = 5,441$, mantendo-se as situações com a relação de amolecimento linear contínuo no modelo de *tension stiffening* do concreto, para os novos valores de f_{ct} . As figuras 6.35 a 6.37 apresentam os índices de variação na carga máxima dos protótipos, devidos à variação de f_{ct} , em função da taxa mecânica total de armadura, resultantes das análises com $\beta = 0,3$, $\beta = 1,0$ e β_{\max} , respectivamente. Nas três figuras, é possível observar claramente a redução na variação das cargas com o aumento da taxa de armadura e que os índices ΔP_{\max} são pequenos se $\omega_e = 0,30$. Entre as lajes, houve menores variações nos protótipos com protensão parcial, o que é menos visível entre as vigas. Por outro lado, o tipo de carregamento parece não ter influenciado significativamente os resultados.

Quadro 6.8 – Valores de β_{\max} e f_{ct} utilizados nas análises

	f_{ct}				
	0,3690	0,3895	0,4100	0,4305	0,451
(%) do valor de referência	90	95	100	105	110
β_{\max}	6,090	5,756	5,441	5,163	4,910

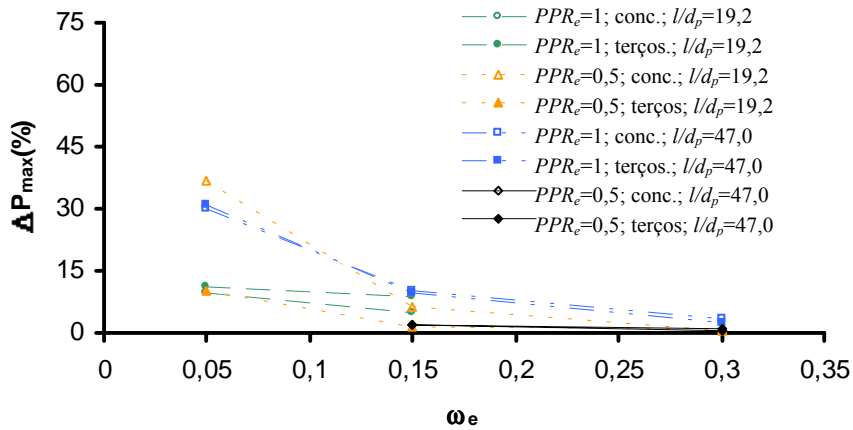


Figura 6.35 – Índices ΔP_{\max} para a variação de f_{ct} , em função de ω_e , com $\beta = 0,3$

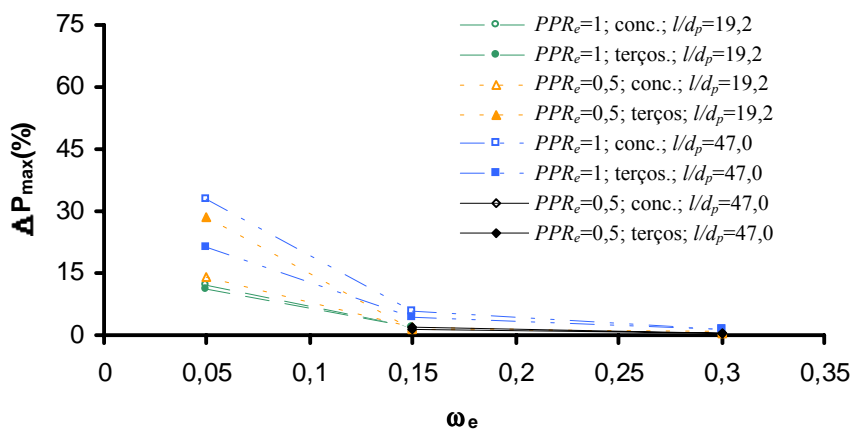


Figura 6.36 – Índices ΔP_{\max} para a variação de f_{ct} , em função de ω_e , com $\beta = 1,0$

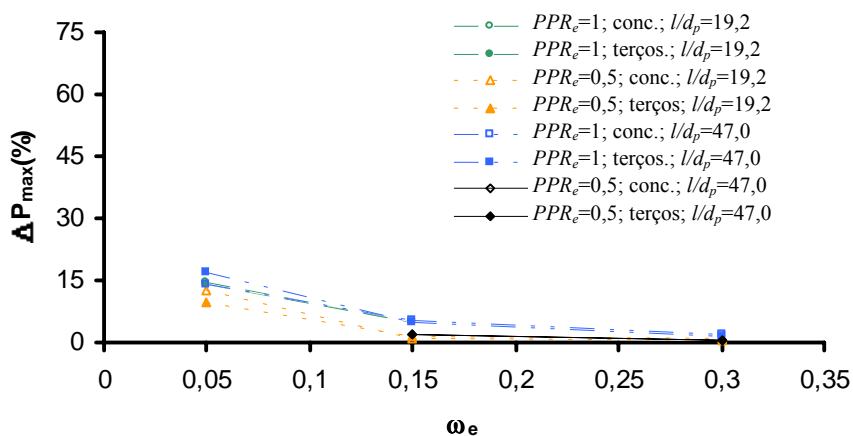


Figura 6.37 – Índices ΔP_{\max} para a variação de f_{ct} , em função de ω_e , utilizando β_{\max}

Ao longo do estudo sobre a variação de f_{ct} , na maioria dos casos, as cargas máximas apresentaram valores crescentes com o aumento da resistência do concreto à tração. Um exemplo deste comportamento é mostrado na figura 6.38, que apresenta as cargas máximas para os elementos com $\omega_e = 0,05$, em simulações utilizando β_{max} . Em alguns casos, no entanto, esta tendência não foi tão evidente, visto que ocorreram oscilações significativas, como apresentado na figura 6.39 para protótipos com $\omega_e = 0,05$, nas análises com $\beta = 0,3$. Nos dois gráficos, os dados referentes às lajes P11 e P13, para f_{ct} igual a 90% do dado de referência, não são apresentados devido à ruptura dos protótipos na fase de protensão.

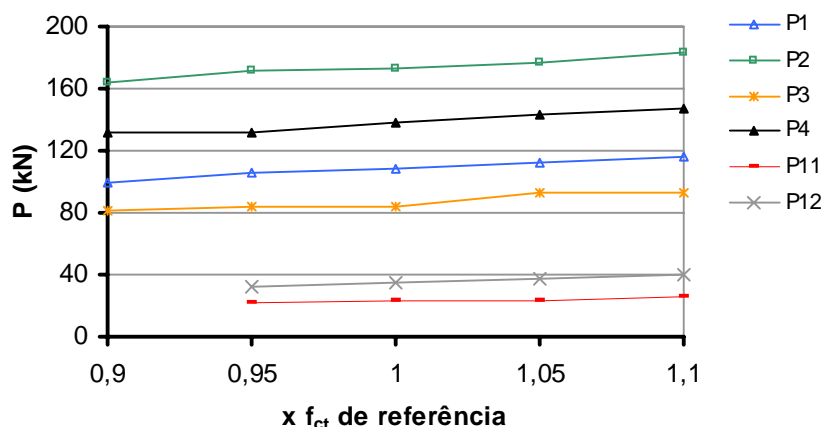


Figura 6.38 – Cargas máximas para os protótipos com $\omega_e = 0,05$, com β_{max} , em função de f_{ct}

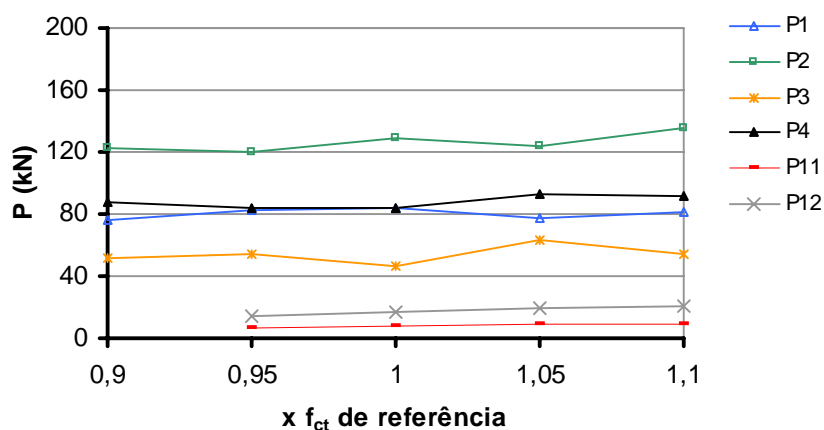


Figura 6.39 – Protótipos com $\omega_e = 0,05$: cargas máximas em função de f_{ct} , análises com β_{max}

Um exemplo dos efeitos da variação de f_{ct} sobre as curvas numéricas “carga x deslocamento” é mostrado na figura 6.40, para o protótipo P2, a partir de simulações com β_{max} . Observa-se

que a carga de fissuração foi, naturalmente, afetada, o que provocou uma variação da ordem de 10% no valor da carga máxima.

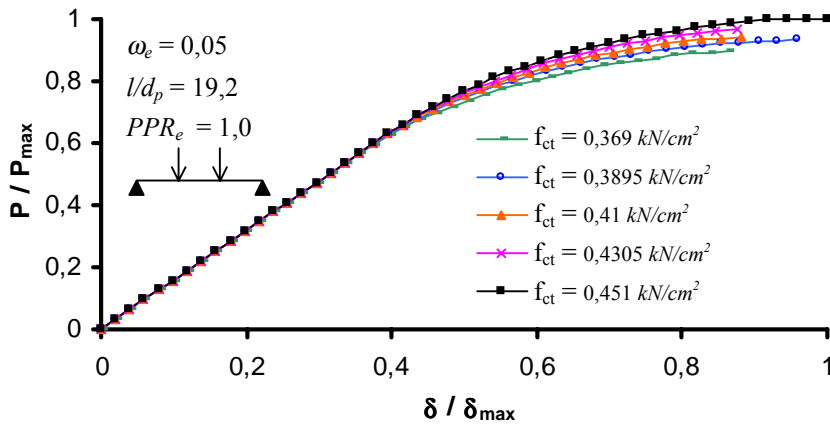


Figura 6.40 – Protótipo P2: curvas “carga x deslocamento” obtidas com os diferentes valores de f_{ct} , em análises considerando β_{max}

6.1.2.6 Módulo de Elasticidade (E_c)

Os dados considerados para o módulo de elasticidade do concreto, e os respectivos valores máximos do parâmetro β , são apresentados no quadro 6.9. As figuras 6.41, 6.42 e 6.43 mostram, em função de ω_e , os índices ΔP_{max} obtidos com a variação de E_c , para $\beta = 0,3$, $\beta = 1,0$ e β_{max} , respectivamente. Nas análises com $\beta = 0,3$ e $\beta = 1,0$, nota-se uma redução das variações nas cargas máximas com o aumento de ω_e . Na figura 6.43, com os resultados obtidos considerando β_{max} , esta tendência não é visível, mesmo porque as variações foram bastante reduzidas. Entre os protótipos com $l/d_p = 19,2$, vigas com protensão parcial apresentaram, geralmente, maiores índices, enquanto entre as lajes, peças sem armadura aderente mostraram as maiores variações. Não é possível observar uma tendência quanto à influência do tipo de carregamento.

Quadro 6.9 – Valores de β_{max} em função de E_c [kN/cm^2]

	E_c				
	2694,06	2843,73	2993,40	3143,07	3292,74
(%) do valor de referência	90	95	100	105	110
β_{max}	4,857	5,149	5,441	5,733	6,025

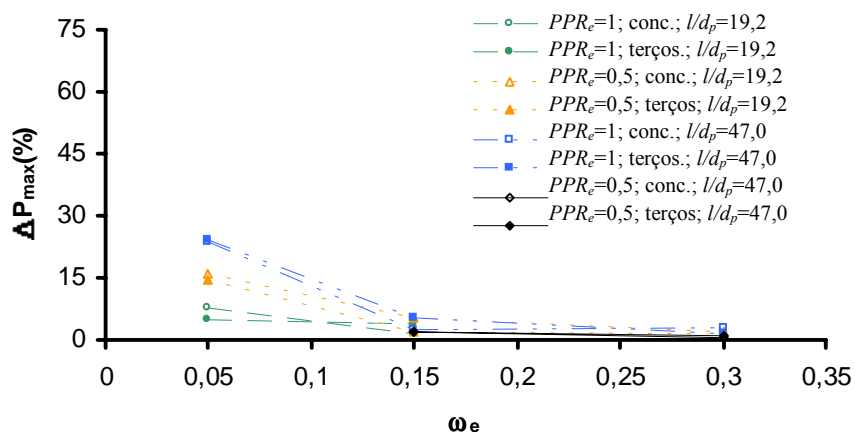


Figura 6.41 – Índices ΔP_{\max} para a variação de E_c , em função de ω_e , com $\beta = 0,3$

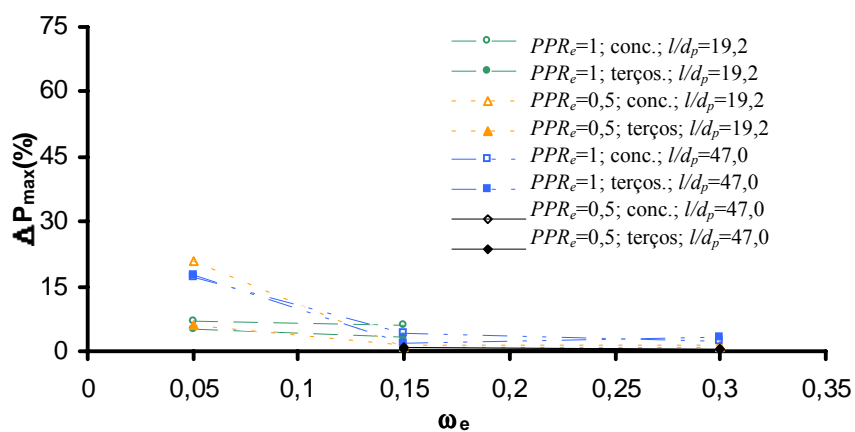


Figura 6.42 – Índices ΔP_{\max} para a variação de E_c , em função de ω_e , com $\beta = 1,0$

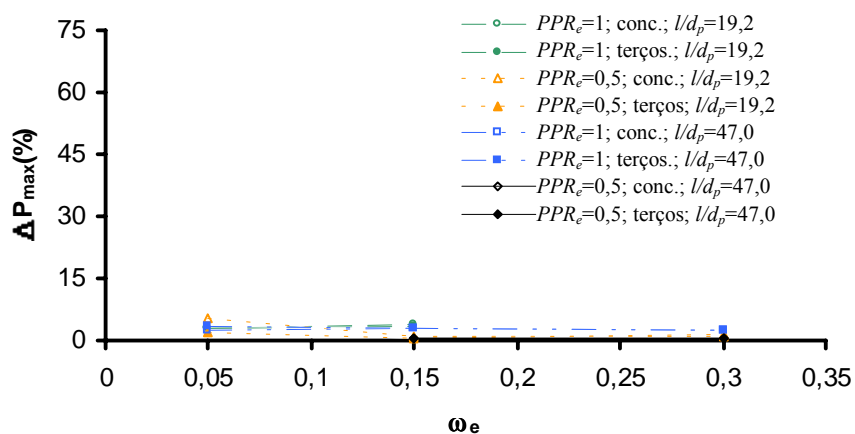


Figura 6.43 – Índices ΔP_{\max} para a variação de E_c , em função de ω_e , com β_{\max}

O efeito típico da variação de E_c nos resultados de protótipos com $\omega_e = 0,05$, onde verificaram-se significativas diferenças nas cargas máximas, é mostrado na figura 6.44, para a laje P11 com $\beta = 1,0$. Notam-se as naturais diferenças na rigidez inicial e que as curvas tenderam a se encontrar após o início da fissuração.

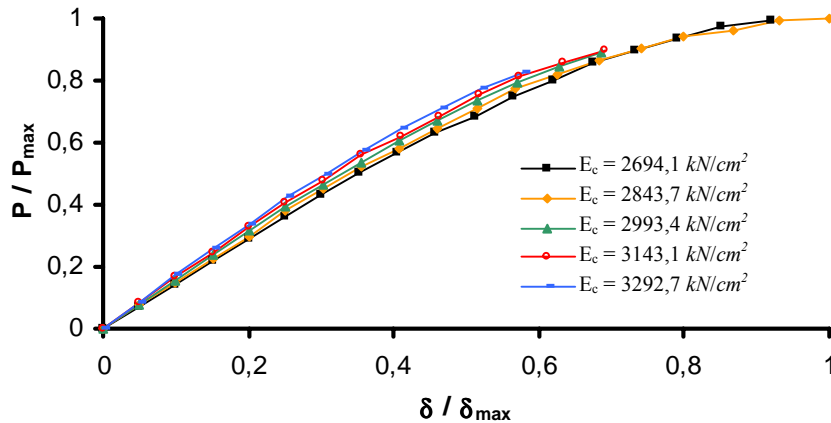


Figura 6.44 – Protótipo P11: curvas “carga x deslocamento” para diferentes valores de E_c , em análises com $\beta = 1,0$

A figura 6.45 apresenta as curvas “carga x deslocamento” para o protótipo P8, onde se observa um exemplo de resultado para elementos com taxas mecânicas totais de armadura mais elevadas. Notam-se as diferentes rigidezes iniciais, em função dos diversos valores de E_c , e que as curvas aproximam-se no ponto inicial da fase plástica, resultando, por isso, em pequenas variações nas cargas máximas.

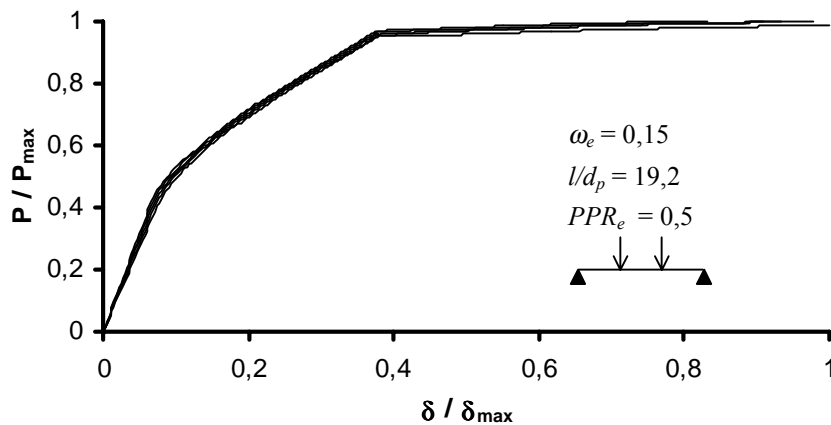


Figura 6.45 – Protótipo P8: curvas “carga x deslocamento” para diferentes valores de E_c , com $\beta = 1,0$

As cargas máximas obtidas para os protótipos com $\omega_e = 0,05$, nas simulações considerando $\beta = 1,0$, são mostrados na figura 6.46 em função dos valores relativos de E_c . Observa-se que para nenhum dos protótipos houve tendência de crescimento na carga com o aumento do módulo.

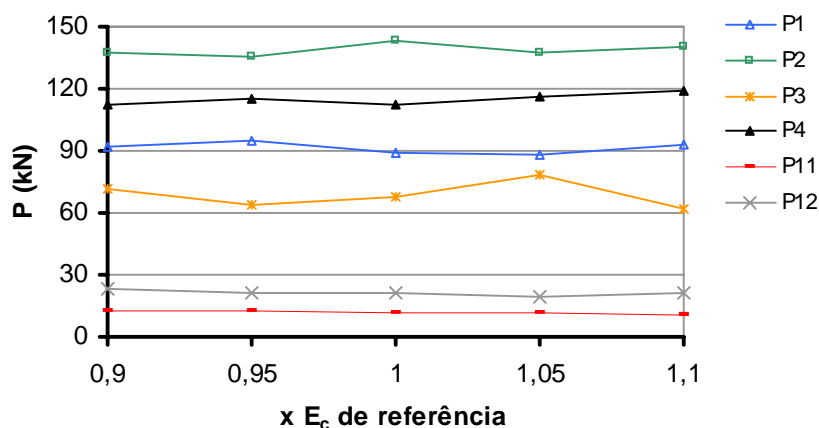


Figura 6.46 – Protótipos com $\omega_e = 0,05$: cargas máximas em função dos valores relativos de E_c , com $\beta = 1,0$

As figuras 6.47 e 6.48 mostram os índices ΔP_{\max} , em função do β , a partir do estudo sobre a variação de E_c , nos protótipos com $l/d_p = 19,2$ e $l/d_p = 47,0$, respectivamente. Nestas figuras, observa-se, novamente, que as maiores variações nas cargas se deram nos protótipos com taxa mecânica total de armadura de 0,05 e que nos demais casos os índices ΔP_{\max} mantiveram-se inferiores a 7%. Nota-se, também, que mesmo entre os elementos com a menor taxa mecânica total de armadura, as análises com β_{\max} mostraram variações bastante reduzidas.

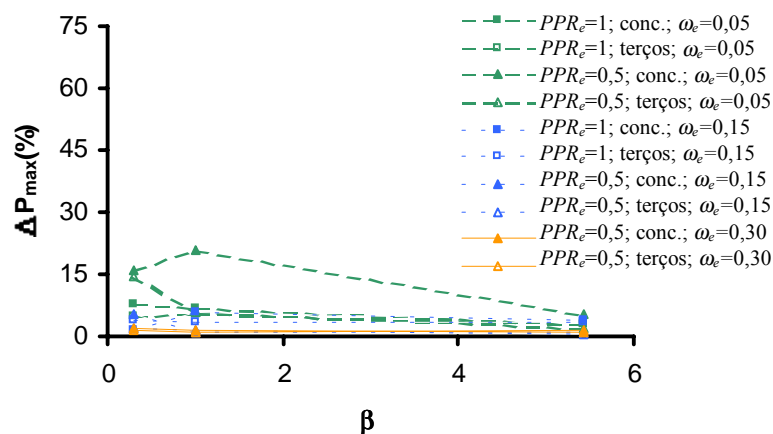


Figura 6.47 – Índices ΔP_{\max} em função de β , nas vigas ($l/d_p = 19,2$)

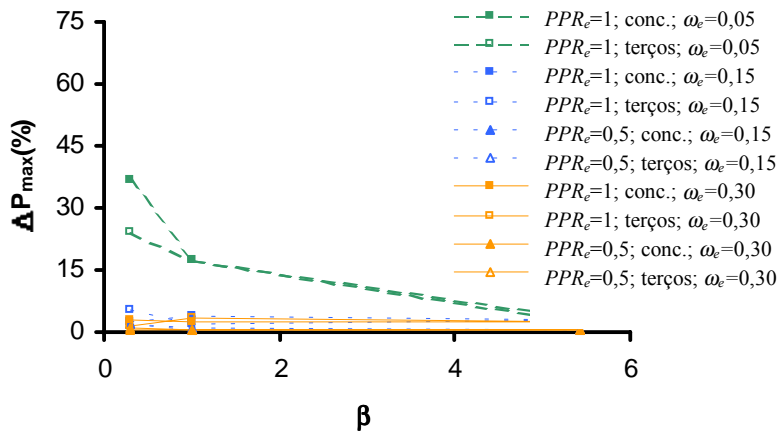


Figura 6.48 – Índices ΔP_{\max} em função de β , para a variação de E_c nas lajes ($l/d_p=47,0$)

6.1.2.7 Deformação do Concreto Referente ao Pico de Compressão (ϵ_{c0})

O estudo sobre o efeito da variação do parâmetro ϵ_{c0} no comportamento numérico dos protótipos considerou os valores do quadro 6.10. As figuras 6.49 a 6.51 mostram os índices ΔP_{\max} em função de ω_e , para $\beta = 0,3$; $\beta = 1,0$ e $\beta = 5,441$, respectivamente. Os maiores índices ocorreram entre as peças com $\omega_e = 0,05$, nas simulações com $\beta = 0,3$ e $\beta = 1,0$. Nos demais casos, as variações nas cargas máximas foram inferiores a 6%. De modo geral, as lajes com $PPR_e = 1$ foram os protótipos com as maiores variações nas cargas máximas.

Quadro 6.10 – Valores de ϵ_{c0}

	0,0018	0,0019	0,0020	0,0021	0,0022
(%) do valor de referência	90	95	100	105	110

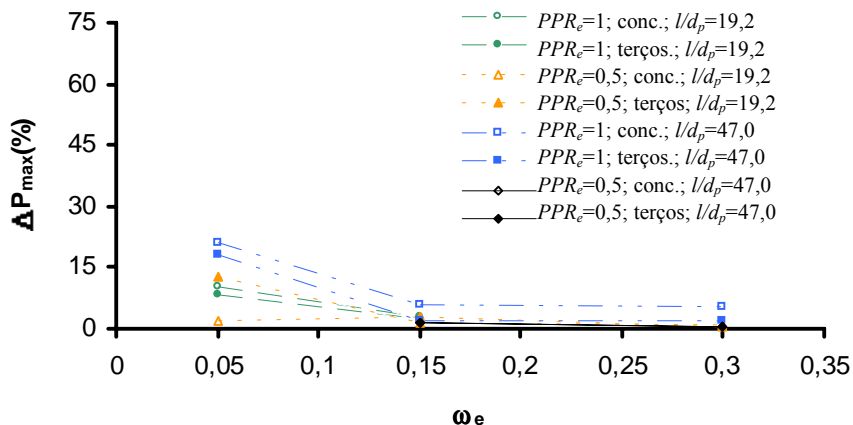


Figura 6.49 – Índices ΔP_{\max} pela variação de ϵ_{c0} , análises com $\beta = 0,3$

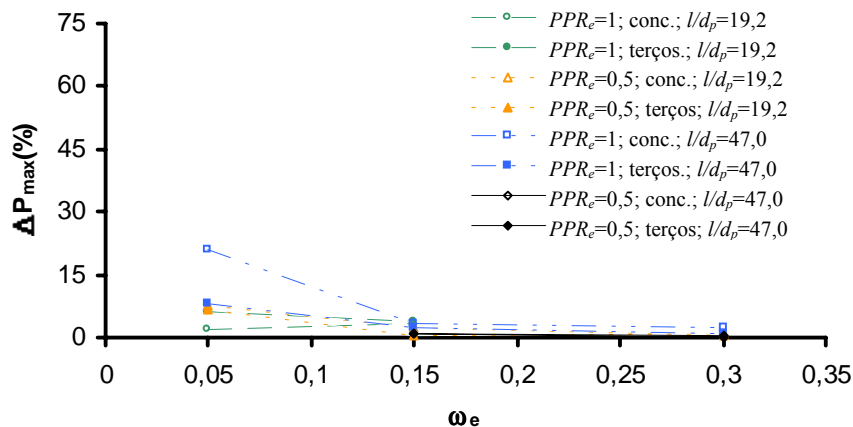


Figura 6.50 – Índices ΔP_{\max} para a variação de ϵ_{c0} , em função de ω_e , com $\beta = 1,0$

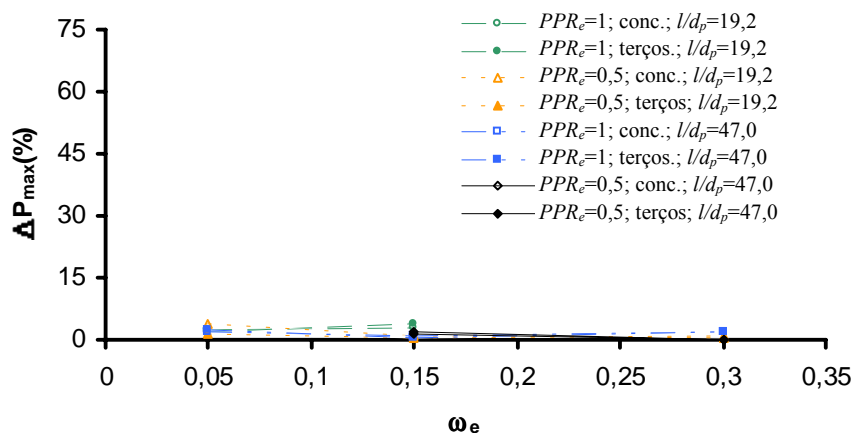


Figura 6.51 – Índices ΔP_{\max} para a variação de ϵ_{c0} , em função de ω_e , com $\beta = 5,441$

A figura 6.52 mostra as cargas máximas em função de ϵ_{c0} , para protótipos com $\omega_e = 0,05$, em simulações utilizando $\beta = 0,3$, em que não se verifica qualquer tendência de crescimento ou redução na carga com o aumento do parâmetro. As figuras 6.53 e 6.54 mostram as curvas “carga x deslocamento” para a viga P6, nas simulações com $\beta = 0,3$, e a laje P11 com $\beta = 1,0$, respectivamente, onde se notam pequenas diferenças na rigidez inicial. Entre as curvas para a laje P11, observa-se uma significativa diferença entre as cargas máximas, que foram obtidas sob níveis de carregamento bastante distintos.

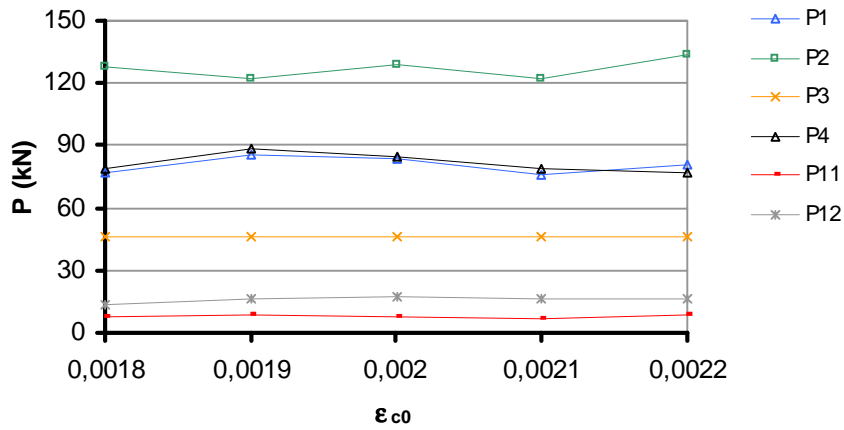


Figura 6.52– Protótipos com $\omega_e = 0,05$ e $\beta = 0,3$: cargas máximas em função de ϵ_{c0}

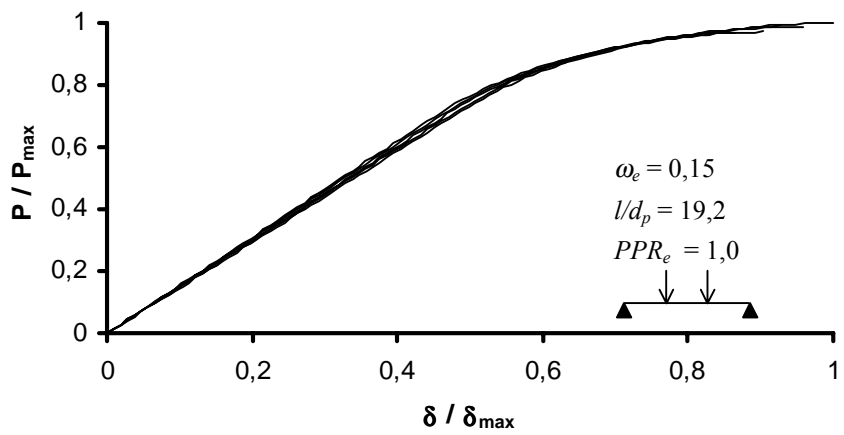


Figura 6.53– Viga P6: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores de ϵ_{c0} , com $\beta = 5,441$

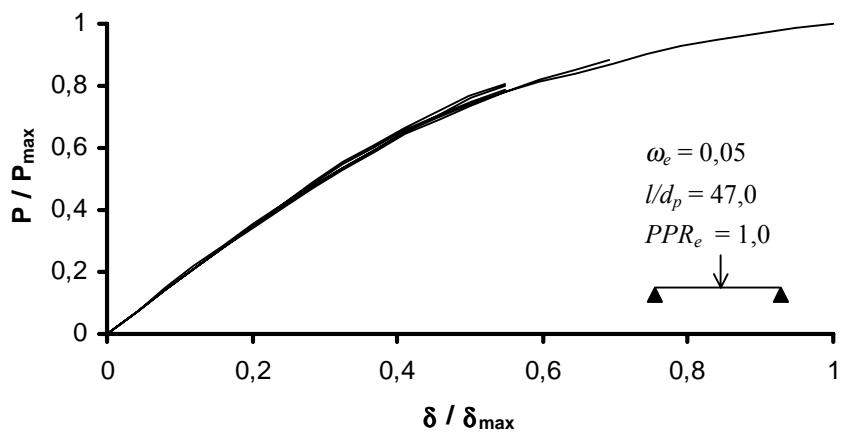


Figura 6.54 – Viga P11: curvas “carga x deslocamento” obtidas com diferentes valores de ϵ_{c0} , com $\beta = 1,0$

As figuras 6.55 e 6.56 apresentam os índices ΔP_{\max} obtidos com a variação de ε_{c0} em função do parâmetro β utilizado, para protótipos com $l/d_p = 19,2$ e $l/d_p = 47,0$, respectivamente. Observam-se, novamente, as maiores variações nas cargas máximas ocorridas entre as peças com $\omega_e = 0,05$. Principalmente entre estes elementos, o aumento do parâmetro β utilizado nas simulações provocou uma redução dos índices de variação.

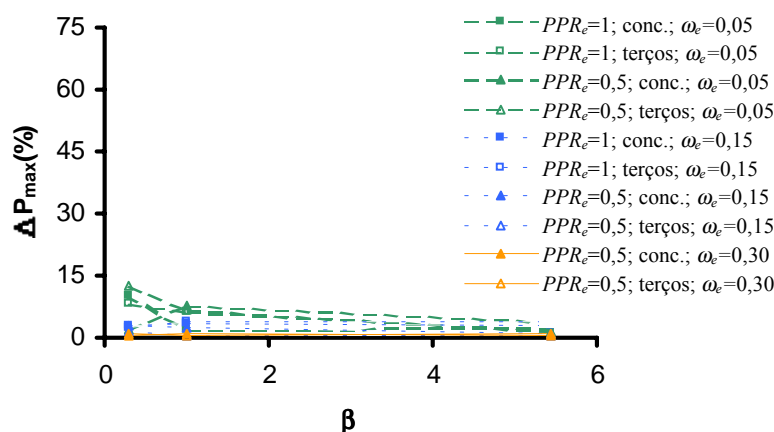


Figura 6.55 – Protótipos com $l/d_p = 19,2$: índices ΔP_{\max} pela variação de ε_{c0} , em função de β

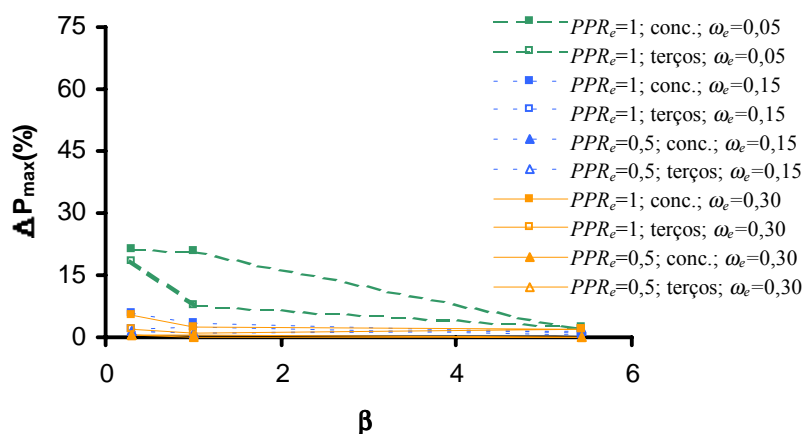


Figura 6.56 – Protótipos com $l/d_p = 47,0$: índices ΔP_{\max} pela variação de ε_{c0} , em função de β

6.1.2.8 Resistência à Compressão do Concreto (f_c)

No estudo paramétrico sobre a resposta do modelo numérico às variações no parâmetro f_c , foram considerados os valores mostrados no quadro 6.11. As figuras 6.57, 6.58 e 6.59

mostram os índices ΔP_{\max} produzidos pela variação de f_c , em função de ω_e , para análises considerando $\beta = 0,3$, $\beta = 1,0$ e $\beta = 5,441$, respectivamente. Nota-se que as maiores variações nas cargas ocorreram para os protótipos com $\omega_e = 0,05$. É visível, também, a redução geral dos índices de variação na carga máxima com o aumento do valor de β , sendo que os valores de ΔP_{\max} mantiveram-se abaixo de 3% para $\beta = 5,441$.

Quadro 6.11 – Valores de f_c

	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4
(%) do valor de referência	90	95	100	105	110

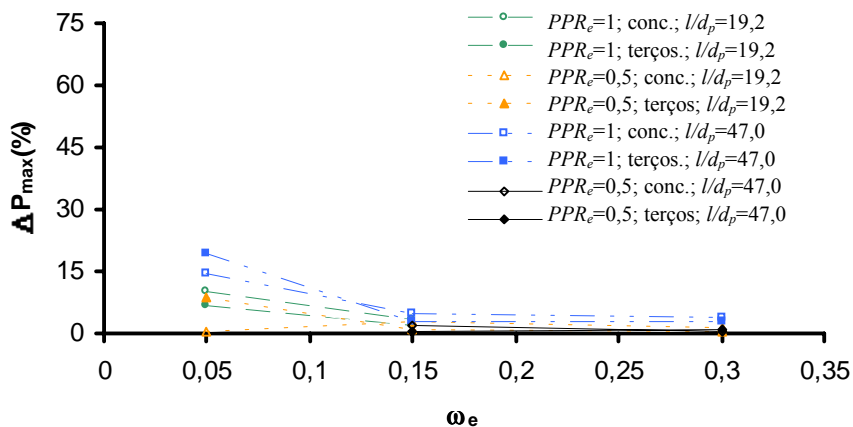


Figura 6.57 – Índices ΔP_{\max} produzidos pela variação de f_c , em função de ω_e , com $\beta = 0,3$

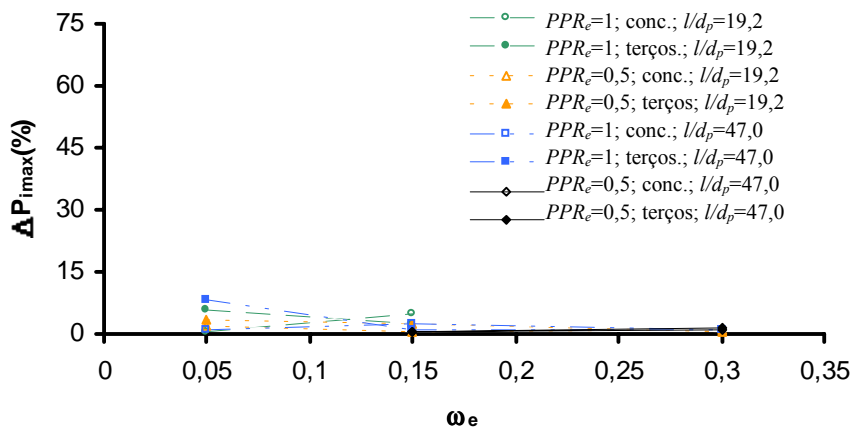


Figura 6.58 – Índices ΔP_{\max} produzidos pela variação de f_c , em função de ω_e , com $\beta = 1,0$

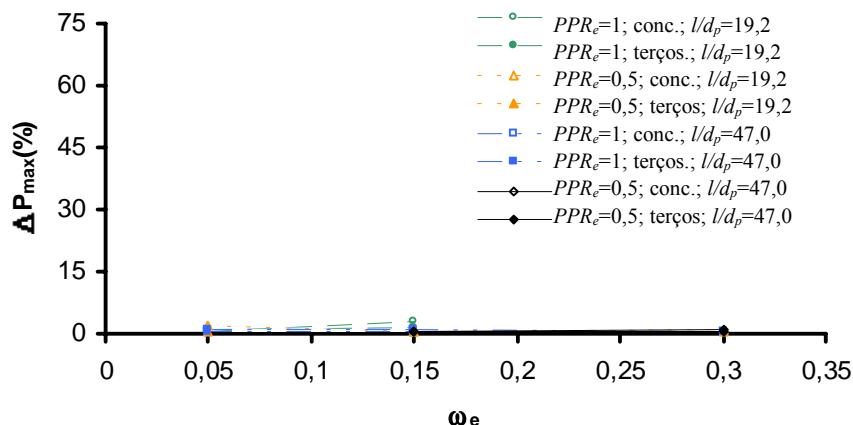


Figura 6.59 – Índices ΔP_{\max} produzidos pela variação de f_c em função de ω_e , com $\beta = 5,441$

Os mesmos dados são apresentados nas figuras 6.60 e 6.61, em que os índices ΔP_{\max} de protótipos com $l/d_p = 19,2$ e $l/d_p = 47,0$, respectivamente, são mostrados em função dos valores de β utilizados nas simulações. Observa-se, novamente, a redução dos índices de variação na carga máxima com o aumento de β . Com exceção dos elementos com $\omega_e = 0,05$, todos os demais mostraram variações nas cargas máximas inferiores a 5%. Entre as lajes, os protótipos com $\omega_e = 0,05$, nas simulações com $\beta = 0,3$ e $\beta = 1,0$ tiveram variações bastante superiores às dos outros elementos, enquanto entre as vigas, os índices de variação foram mais homogêneos.

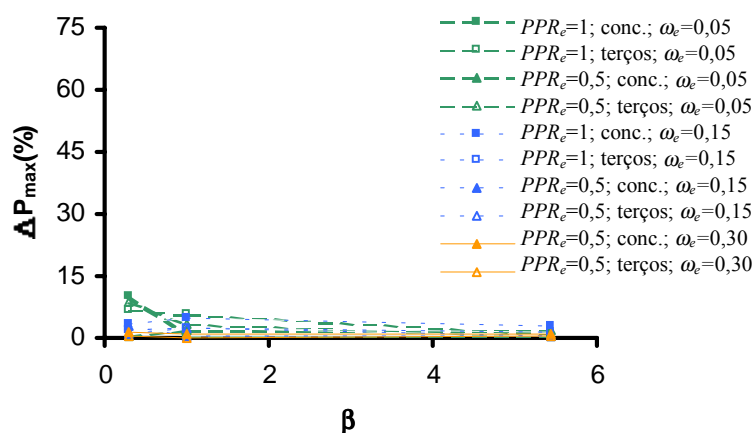


Figura 6.60 – Resultados sobre a análise para f_c : índices ΔP_{\max} dos protótipos com $l/d_p = 19,2$ em função do parâmetro β

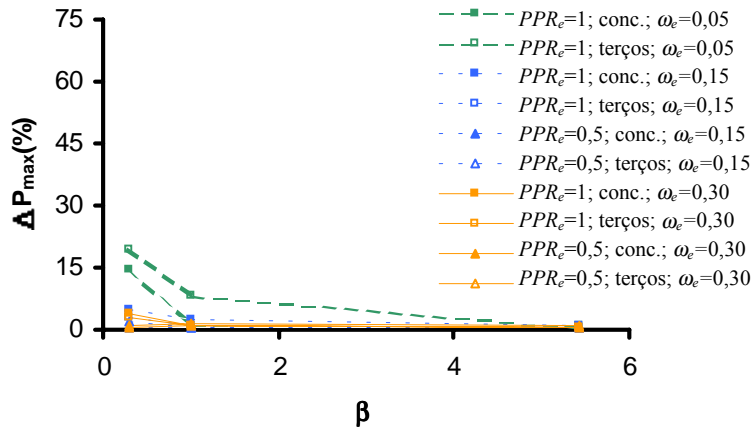


Figura 6.61 – Resultados sobre a análise para f_c : índices ΔP_{\max} dos protótipos com $l/d_p = 47,0$ em função do parâmetro β

A figura 6.62 mostra as curvas “carga x deslocamento” obtidas com os diferentes valores de f_c para o protótipo P11, nas análises considerando $\beta = 0,3$. Observa-se que, apesar da variação na carga máxima, as curvas são praticamente coincidentes. As cargas máximas para os protótipos com $\omega_e = 0,05$, considerando $\beta = 0,3$, entre os quais incluem-se os resultados do elemento P11, são mostradas na figura 6.63. Verifica-se que não houve uma tendência de crescimento ou redução na carga máxima com o aumento de f_c . A figura 6.64 apresenta as curvas “carga x deslocamento” para viga P6, considerando $\beta = 5,441$, onde não se percebem influências significativas da variação de f_c nos resultados numéricos.

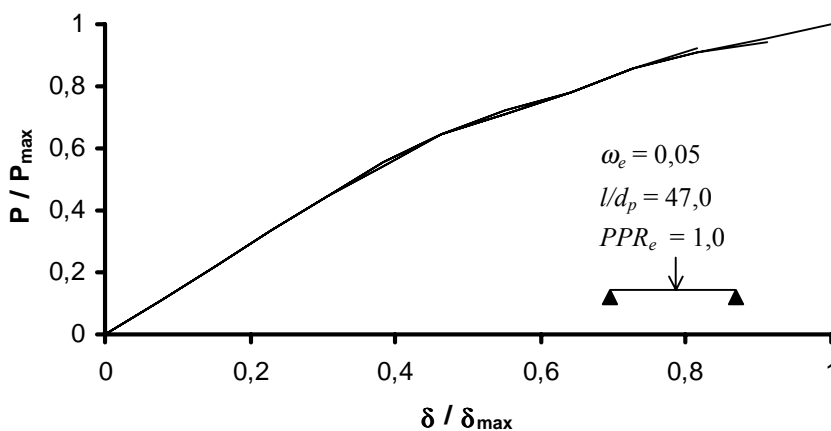


Figura 6.62 – Protótipo P11: curvas “carga x deslocamento” com $\beta = 0,3$, obtidas com diferentes valores de f_c

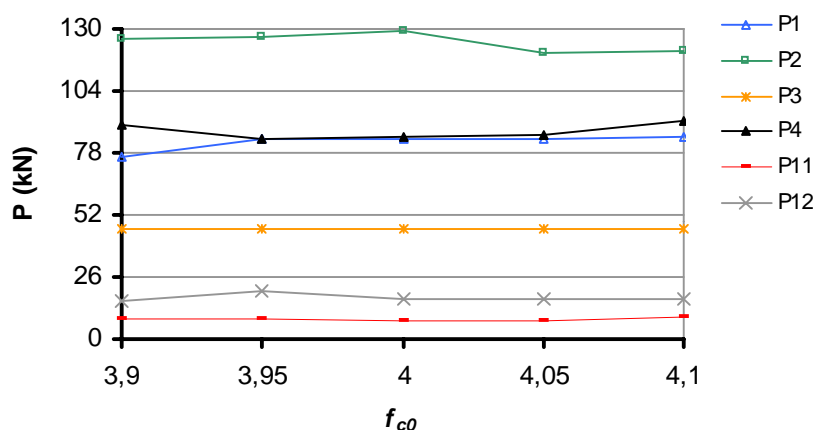


Figura 6.63 – Cargas máximas para protótipos com $\omega_e = 0,05$ e $\beta = 0,3$, em função de f_c

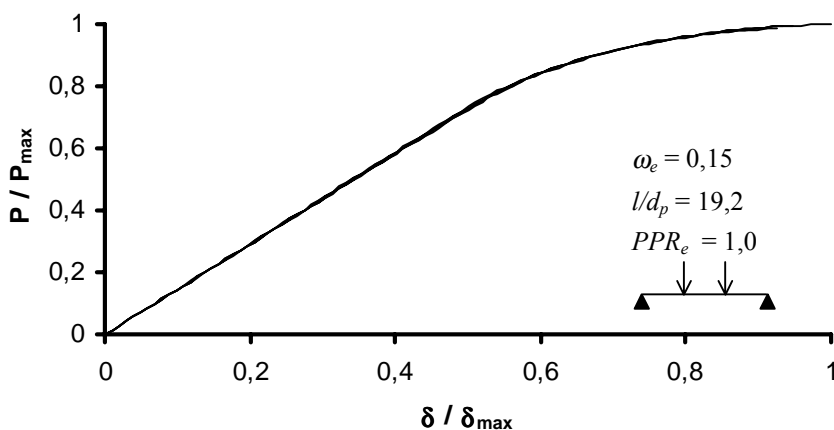


Figura 6.64 – Protótipo P6: curvas “carga x deslocamento”, com $\beta = 5,441$, obtidas com diferentes valores para f_c

6.1.2.9 Módulo de Elasticidade Final do Concreto à Compressão (E_{cf})

O efeito de variações no módulo de elasticidade no ramo descendente da curva “tensão x deformação” à compressão do concreto, sobre os resultados obtidos com o modelo numérico, foi observado nos dois protótipos com $\omega_e = 0,30$, submetidos a cargas nos terços médios e com armadura passiva complementar: P10, com $l/d_p = 19,2$, e P20, com $l/d_p = 47$. Nestas simulações, considerou-se $\beta = 5,441$. As curvas “carga x deslocamento” para estes dois elementos são apresentadas nas figuras 6.65 e 6.66, respectivamente, juntamente com os valores de E_{cf} considerados. Observa-se que o valor do módulo de elasticidade final afetou significativamente a forma das curvas na fase de plastificação da armadura. A variação deste

parâmetro produziu apenas pequenas variações nas cargas máximas: de 0,6% para P10 e 3,8% para P20. Verifica-se, também, que nas simulações com os menores $|E_{cf}|$, a curva descreveu um patamar de comportamento plástico, enquanto nas análises com os valores absolutos mais elevados, as curvas demonstraram perdas de carga. Estas perdas parecem ter sido maiores quanto maiores foram os valores de $|E_{cf}|$.

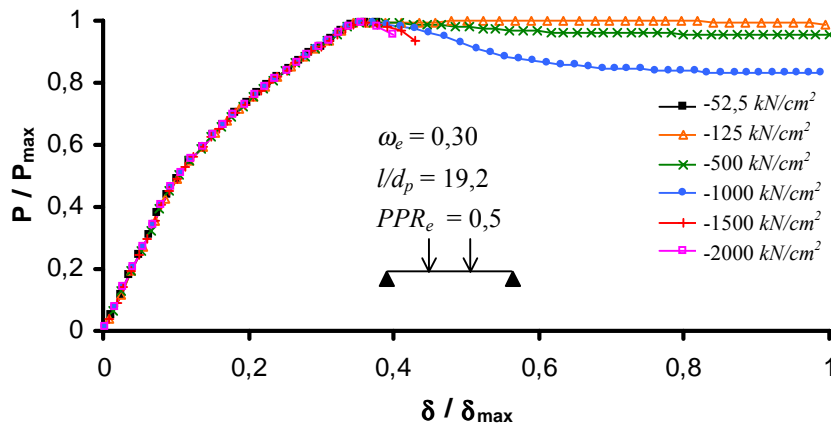


Figura 6.65 – Viga P10: curvas “carga x deslocamento” considerando diferentes valores de E_{cf} , para $\beta = 5,441$

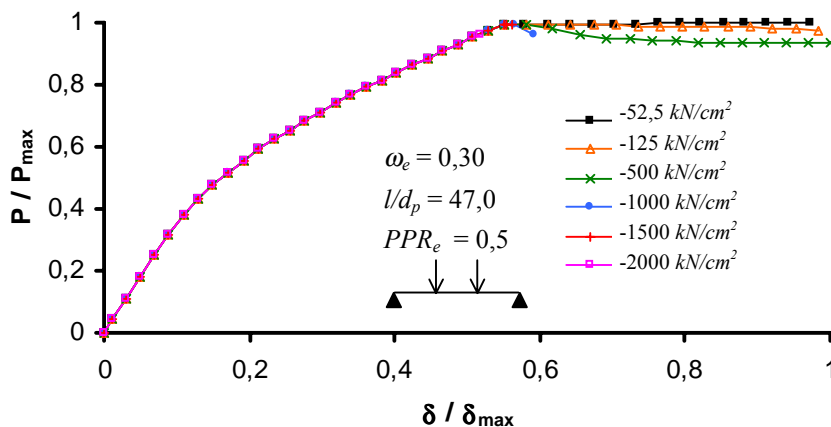


Figura 6.66 – Laje P20: curvas “carga x deslocamento” considerando diferentes valores de E_{cf} , para $\beta = 5,441$

6.1.2.10 Tensão Convencional de Escoamento da Armadura de Protensão (f_{py})

Os valores considerados no estudo sobre a influência da variação da tensão de escoamento da armadura de protensão foram: $f_{py} = 170 \text{ kN/cm}^2$, $f_{py} = 175 \text{ kN/cm}^2$ e $f_{py} = 185 \text{ kN/cm}^2$, além do

dado de referência, $f_{py} = 180 \text{ kN/cm}^2$. As figuras 6.67 e 6.68 mostram os índices ΔP_{\max} resultantes da variação de f_{py} , em função do parâmetro β , para os elementos com $l/d_p = 19,2$ e $l/d_p = 47,0$, respectivamente. Não se nota uma tendência de redução da variação nas cargas máximas com o aumento de β . A taxa ω_e , o índice de protensão parcial e a esbeltez à flexão parecem não ter influenciado os resultados para a variação de f_{py} . Aparentemente, elementos com cargas concentradas mostraram variações nas cargas máximas ligeiramente inferiores do que os com cargas nos terços médios. A variação de f_{py} afetou de maneira bastante reduzida os resultados numéricos, já que, geralmente, os índices ΔP_{\max} mantiveram-se abaixo de 3%.

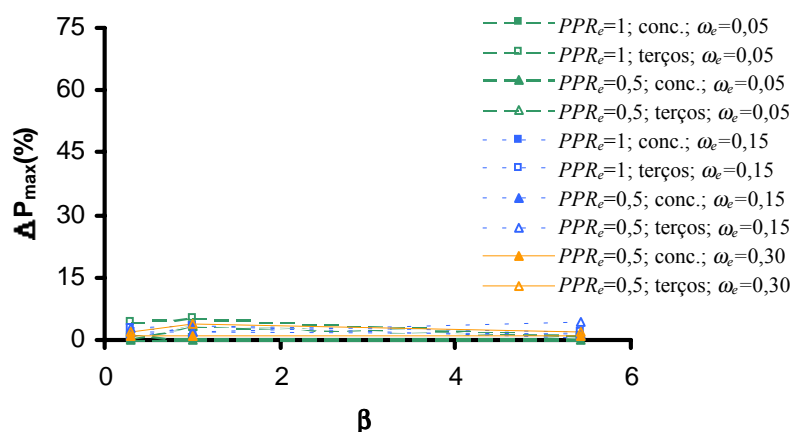


Figura 6.67 – Índices ΔP_{\max} das vigas ($l/d_p = 19,2$) pela variação de f_{py} , em função do parâmetro β

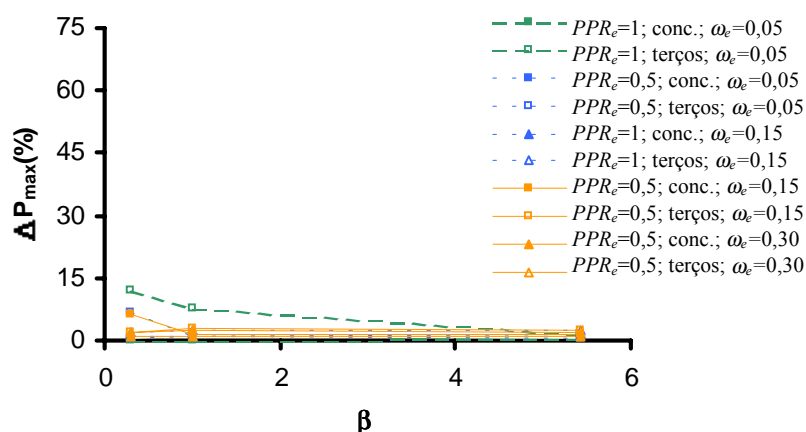


Figura 6.68 – Índices ΔP_{\max} das lajes ($l/d_p = 47,0$), pela variação de f_{py} , em função do parâmetro β

As figuras 6.69 e 6.70 ilustram a influência da variação de f_{py} nas curvas “carga x deslocamento” dos protótipos. Nos resultados referentes à viga P2 com $\beta = 0,3$, mostradas na

figura 6.69, nota-se um comportamento idêntico até a fissuração, quando uma das curva mostrou rigidez um pouco maior. Na figura 6.70, para a viga P8 considerando $\beta = 5,441$, observa-se que as curvas apresentam diferenças mínimas desde a fissuração até o início da fase plástica, quando as variações no valor de f_{py} passaram a afetar o comportamento, mostrando que a rigidez nesta etapa foi influenciada pelo aço de protensão.

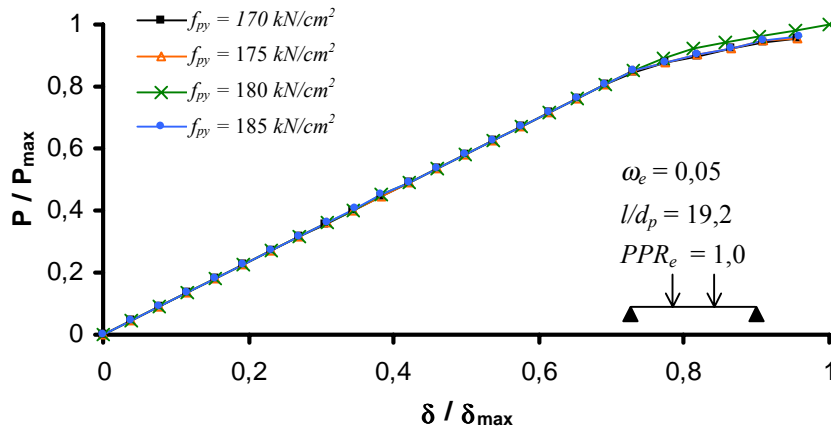


Figura 6.69 – Protótipo P2: curvas “carga x deslocamento” com $\beta = 0,3$, para diferentes valores de f_{py}

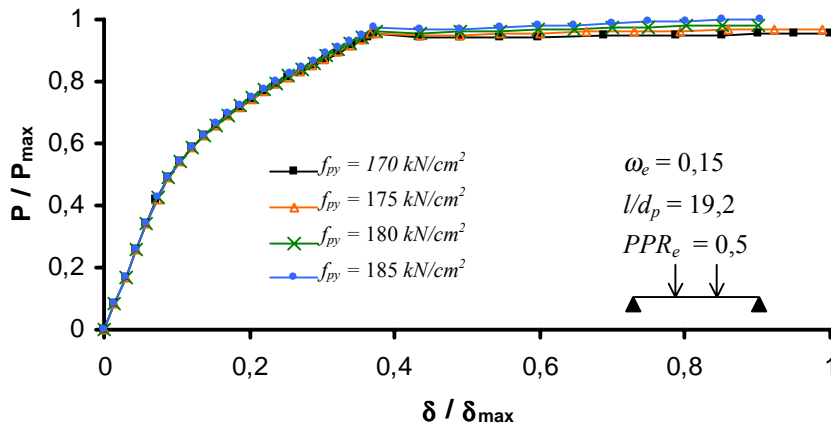


Figura 6.70 – Protótipos P8: curvas “carga x deslocamento”, com $\beta = 5,441$, para diferentes valores de f_{py}

6.1.2.11 Deformação de Escoamento da Armadura Passiva (ϵ_y)

O efeito da variação da deformação de escoamento da armadura passiva foi avaliado nos dez protótipos com $PPR_e = 0,5$. Os valores considerados foram: $\epsilon_y = 0,00233$; $\epsilon_y = 0,00236$;

$\varepsilon_y = 0,00240$ e $\varepsilon_y = 0,00243$; além do valor de referência que é de $0,00238$. Nas figuras 6.71 e 6.72, observam-se os índices ΔP_{\max} para os protótipos com $l/d_p = 19,2$ e $l/d_p = 47,0$, respectivamente. Nestes gráficos, verifica-se que a influência deste parâmetro é reduzida, uma vez que em quase todos os casos, os protótipos apresentaram variações inferiores a 3%, mesmo porque os resultados de elementos que não atingiram o escoamento da armadura não foram afetados pela variação de ε_y . A figura 6.73 apresentaram as curvas “carga x deslocamento” para a viga P8, com $\beta = 0,3$, indicando que a variação de ε_y afetou ligeiramente a carga de escoamento e, portanto, a carga máxima.

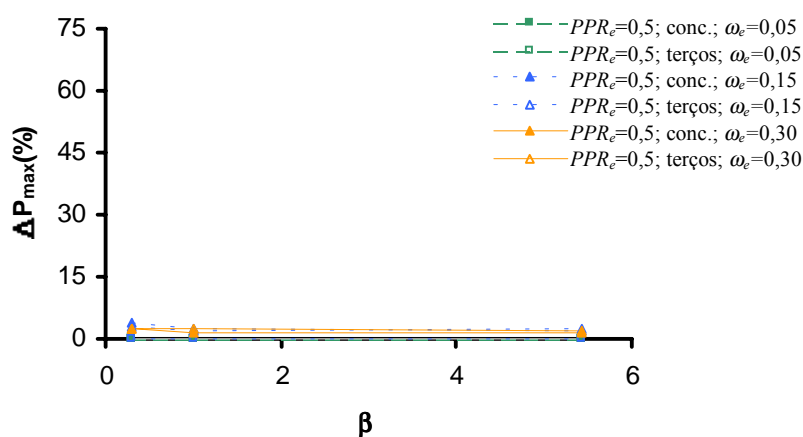


Figura 6.71 – Índices ΔP_{\max} das vigas ($l/d_p = 19,2$), pela variação de ε_y , em função de β

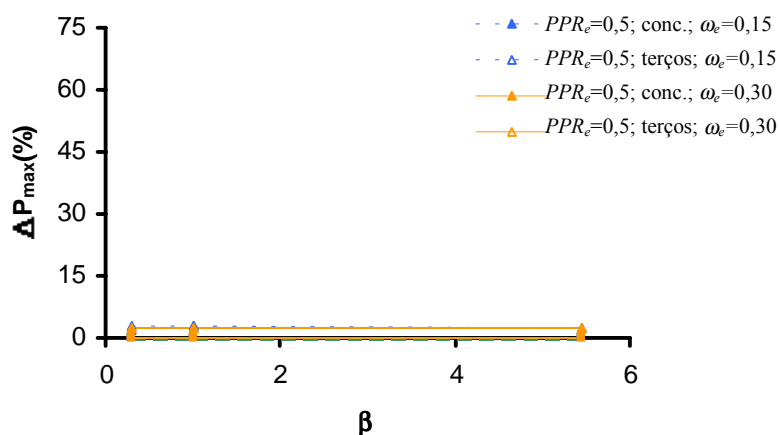


Figura 6.72 – Índices ΔP_{\max} das lajes ($l/d_p = 47,0$), pela variação de ε_y , em função de β

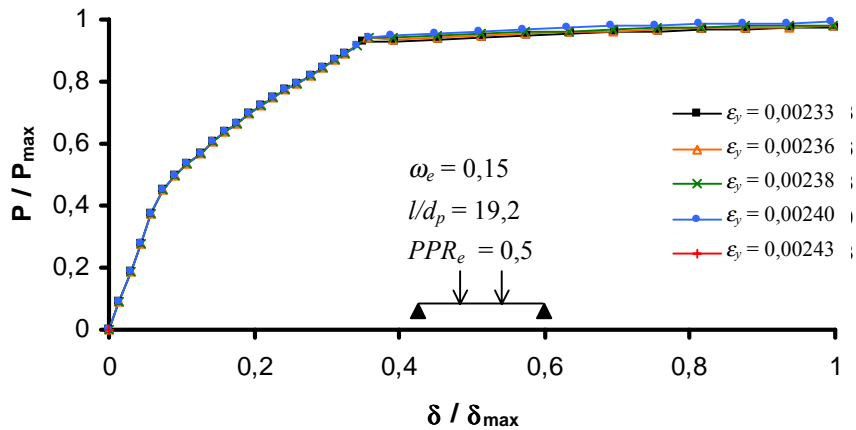


Figura 6.73 – Viga P8: curvas “carga x deslocamento” em análises com $\beta = 0,3$, para os diversos valores de ε_y

6.1.2.12 Peso Específico do Concreto (γ_c)

A influência da variação do peso próprio nos resultados numéricos, foi observada considerando os valores apresentados no quadro 6.12. As figuras 6.74 a 6.76 mostram os índices ΔP_{\max} obtidos, em função de ω_e , para as análises com $\beta = 0,3$, $\beta = 1,0$ e $\beta = 5,441$, respectivamente, em que se nota a nítida redução da variação na carga com o aumento de ω_e . Verificaram-se maiores variações nas lajes, onde a importância do peso próprio é maior, entre as quais, peças com $PPR_e = 1$ apresentaram as maiores variações. Entre as vigas, no entanto, esta tendência foi oposta. Geralmente, protótipos com cargas concentradas mostraram índices levemente superiores do que aqueles com cargas nos terços médios. Nas figuras 6.77 e 6.78 os índices de variação na carga máxima são mostrados em função do parâmetro β utilizado, para protótipos com $l/d_p = 19,2$ e $l/d_p = 47,0$, respectivamente. Nota-se, novamente, a redução nos índices ΔP_{\max} com o aumento da taxa de armadura. Percebe-se, ainda, que, na maioria dos casos, o valor do parâmetro β parece não ter afetado os resultados.

Quadro 6.12 – Valores do peso específico do concreto

$\gamma_c \times 10^6 [kN/cm^3]$				
23	24	25	26	27

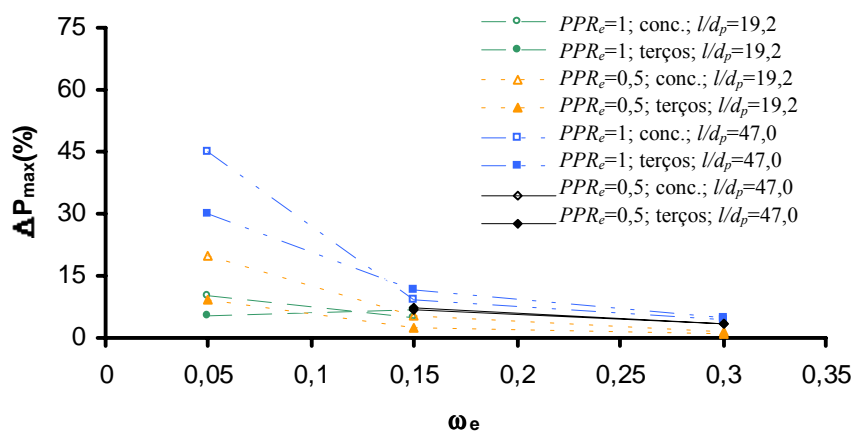


Figura 6.74 – Índices ΔP_{\max} pela variação de γ_c , em função de ω_e , para $\beta = 0,3$

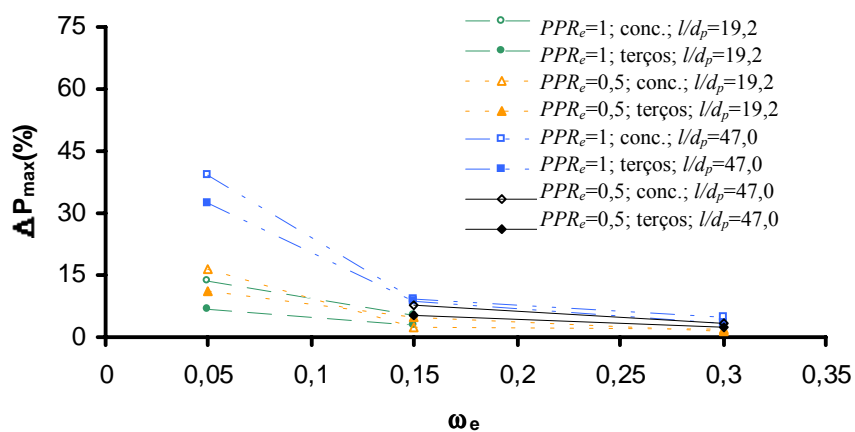


Figura 6.75 – Índices ΔP_{\max} pela variação de γ_c , em função de ω_e , para $\beta = 1,0$

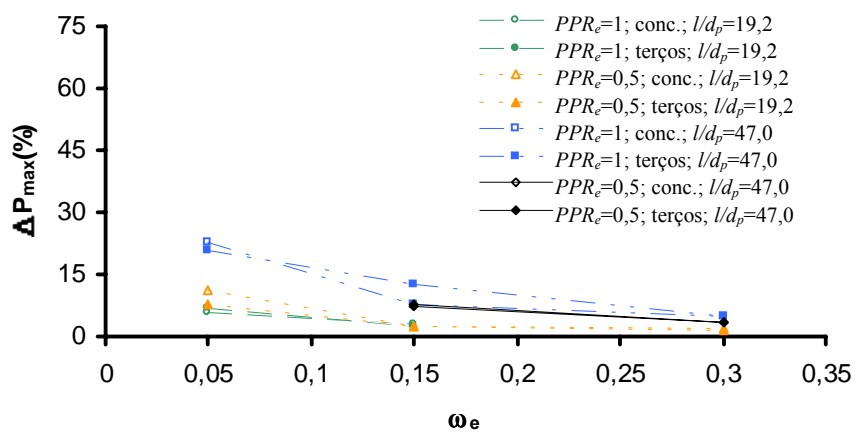


Figura 6.76 – Índices ΔP_{\max} pela variação de γ_c , em função de ω_e , para $\beta = 5,441$

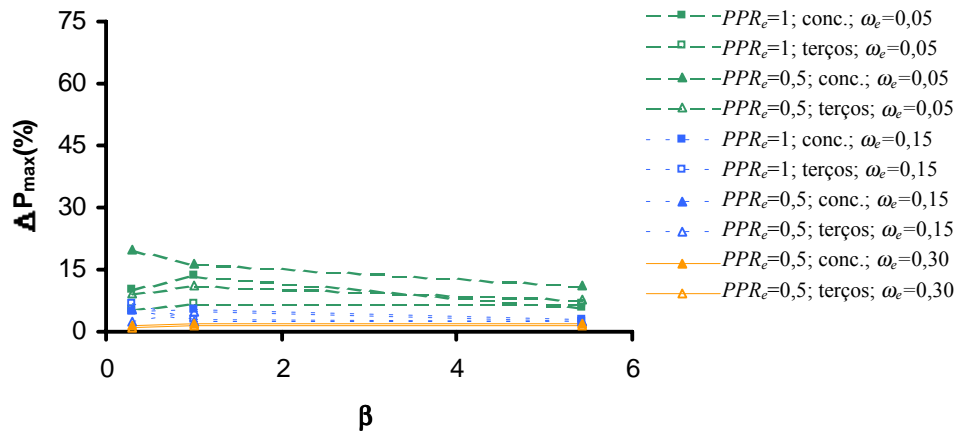


Figura 6.77 – Índices ΔP_{\max} das vigas ($l/d_p = 19,2$), pela variação de γ_c , em função de β

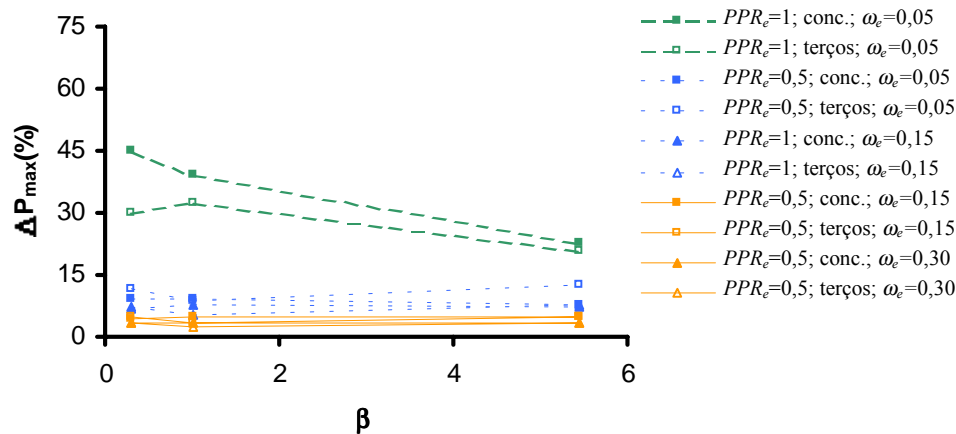


Figura 6.78 – Índices ΔP_{\max} das lajes ($l/d_p = 47,0$), pela variação de γ_c , em função de β

A figura 6.79 mostra as curvas “carga x deslocamento” para o protótipo P8, correspondentes às análises com $\beta = 5,441$. Observa-se que o valor de γ_c afetou ligeiramente a rigidez das curvas após a fissuração do concreto, o que acabou por influenciar levemente a carga máxima. Os resultados para a viga P2 são apresentados na figura 6.80, em que a variação do peso próprio afetou mais significativamente o comportamento pós-fissuração e a carga máxima. A figura 6.81 mostra as cargas máximas obtidas para os protótipos com $\omega_e = 0,05$, considerando $\beta = 0,3$, em função de γ_c . Não é visível, nesta figura, qualquer tendência de crescimento ou de redução nas cargas em função do aumento do peso do concreto.

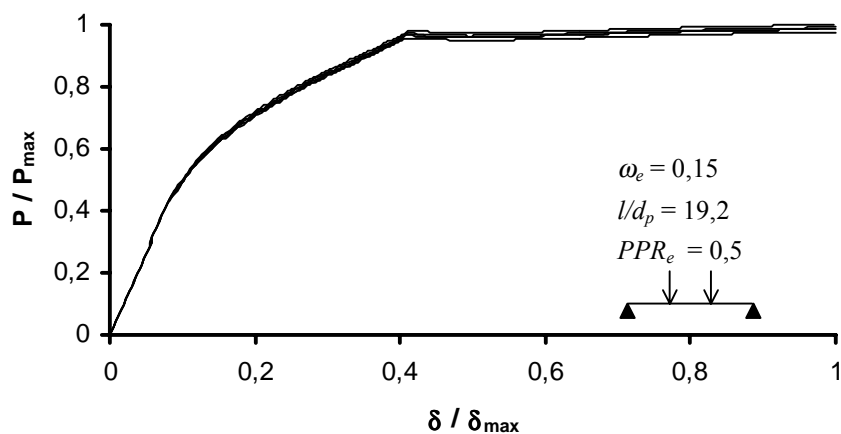


Figura 6.79 – Viga P8: curvas “carga x deslocamento” para $\beta = 5,441$, obtidas com os diferentes valores de γ_c

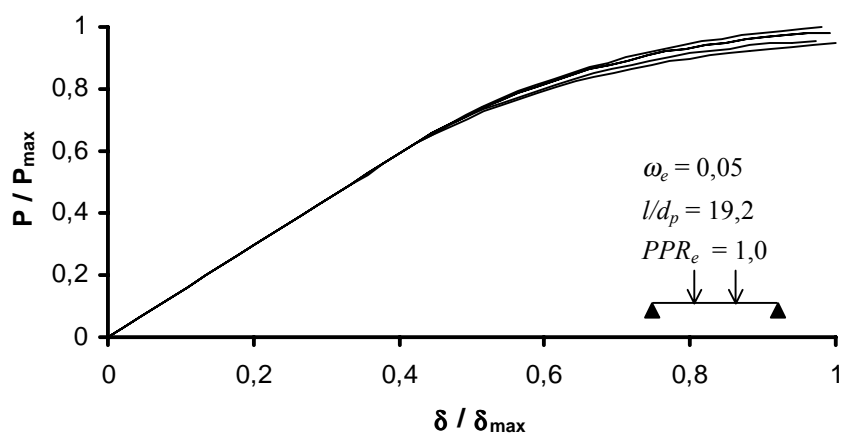


Figura 6.80 – Curvas “carga x deslocamento” para a viga P2, com $\beta = 5,441$, obtidas com os diferentes valores de γ_c

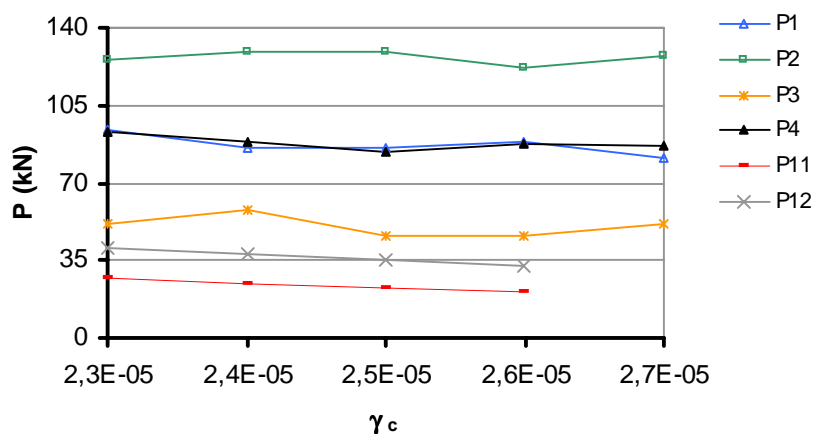


Figura 6.81 – Cargas máximas em função de γ_c para protótipos com $\omega_e = 0,05$ e $\beta = 0,3$

6.1.2.13 Tamanho do Incremento de Deslocamento

Os incrementos de deslocamento considerados na pesquisa são mostrados no quadro 6.13. As figuras 6.82 e 6.83 apresentam os índices ΔP_{max} resultantes da variação do incremento de deslocamento, em função de β , para protótipos com $l/d_p = 19,2$ e $l/d_p = 47,0$, respectivamente. Nota-se que as análises com $\beta = 0,3$ mostraram as maiores variações nas cargas máximas.

Quadro 6.13 – Incrementos de deslocamento

$\theta [rad]$					
-0,00100	-0,00050	-0,00020	-0,00013	-0,00010	-0,00005

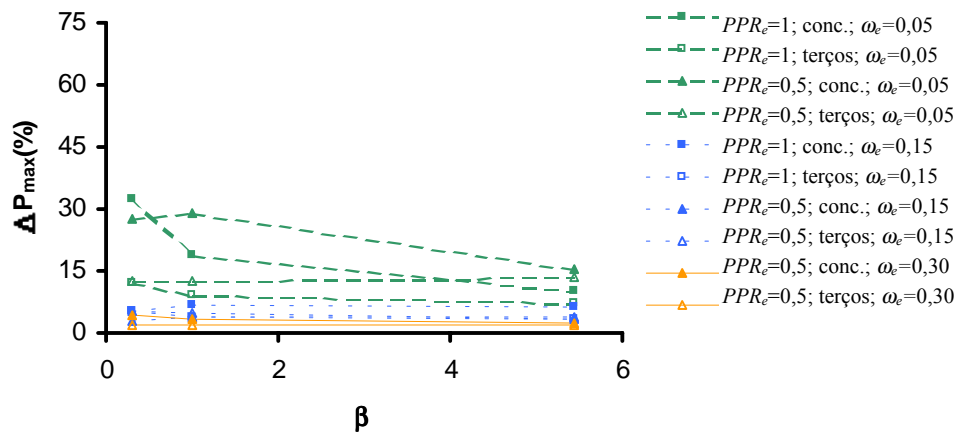


Figura 6.82 – Índices ΔP_{max} em função de β , peça variação do incremento de deslocamento, nas vigas ($l/d_p = 19,2$)

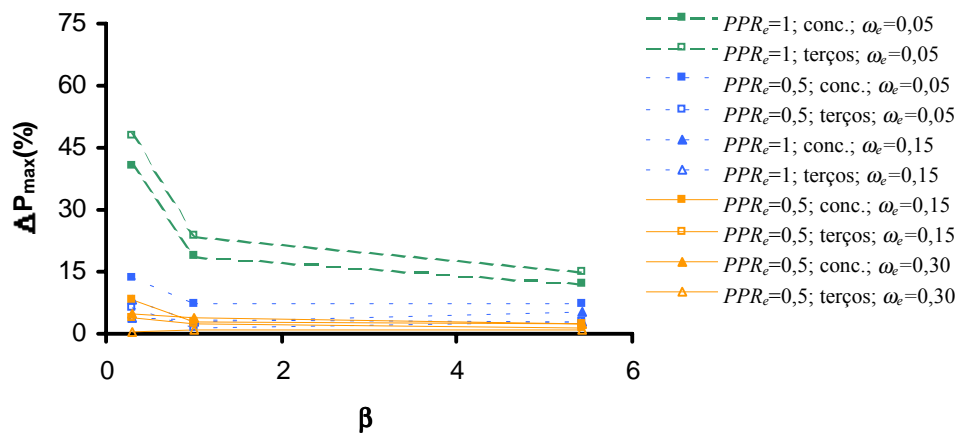


Figura 6.83 – Índices ΔP_{max} em função de β , peça variação do incremento de deslocamento, nas lajes ($l/d_p = 47,0$)

Nas figuras 6.84, 6.85 e 6.86, relacionam-se os índices de variação nas cargas máximas com a taxa mecânica total de armadura, para as análises considerando $\beta = 0,3$, $\beta = 1,0$ e $\beta = 5,441$, respectivamente. Nestes gráficos, torna-se visível a queda dos índices ΔP_{\max} para a variação do tamanho do incremento com o aumento de ω_e . Nota-se, novamente, que as variações nas cargas diminuíram com o aumento de β e que as características dos protótipos, como o tipo de carregamento, a presença de armadura passiva aderente complementar e a esbeltez à flexão, parecem não ter influenciado os resultados.

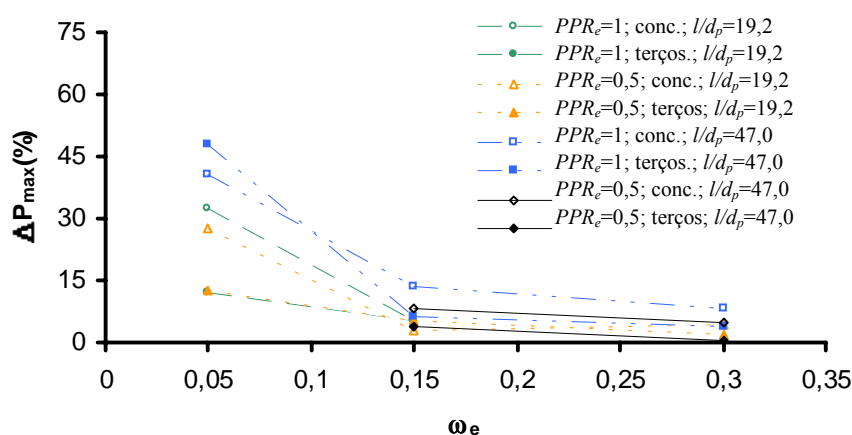


Figura 6.84 – Índices ΔP_{\max} em função de ω_e para a variação do incremento de deslocamento, com $\beta = 0,3$

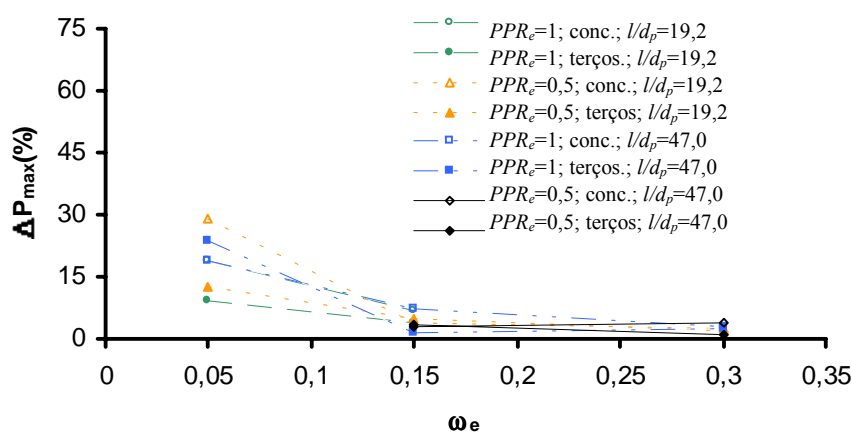


Figura 6.85 – Índices ΔP_{\max} em função de ω_e , para a variação do tamanho do incremento de deslocamento, com $\beta = 1,0$

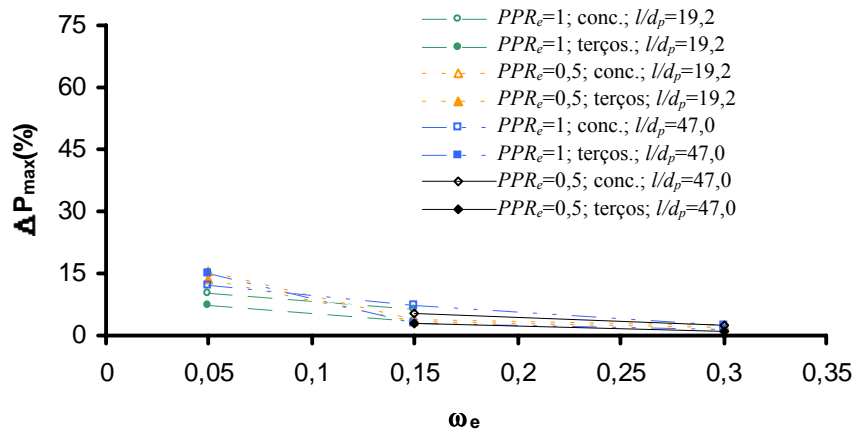


Figura 6.86 – Índices ΔP_{\max} em função de ω_e para a variação do tamanho do incremento de deslocamento, com $\beta = 5,441$

As figuras 6.87, 6.88 e 6.89 mostram as curvas “carga x deslocamento” para os protótipos P2 com $\beta = 0,3$, P2 com $\beta = 5,441$ e P20 com $\beta = 5,441$, respectivamente. Em todos os casos, verifica-se que a mudança no tamanho do incremento produziu algum efeito apenas após a fissuração. Nas figuras 6.87 e 6.88, para a viga P2, nota-se uma tendência semelhante para análises com $\beta = 0,3$ e $\beta = 5,441$, com variações nas cargas máximas. Com relação à laje P20, com elevada taxa mecânica total de armadura, observam-se apenas diferenças mínimas entre as curvas obtidas com os diversos tamanhos de incremento de deslocamento.

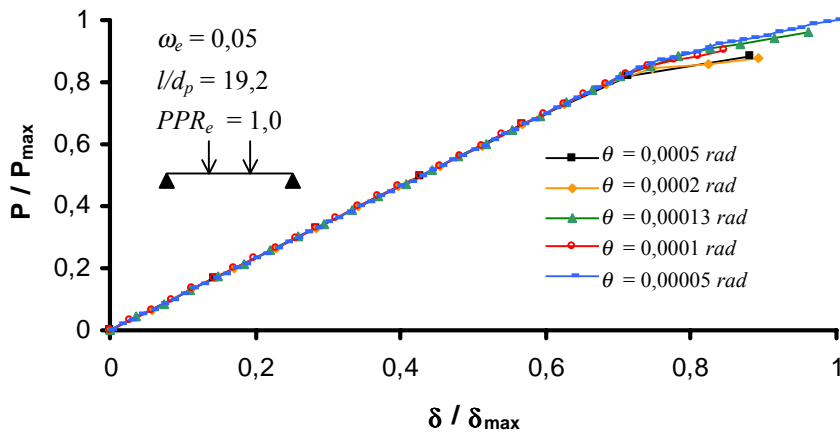


Figura 6.87 – Viga P2: curvas “carga x deslocamento” para diferentes incrementos de deslocamento, com $\beta = 0,3$

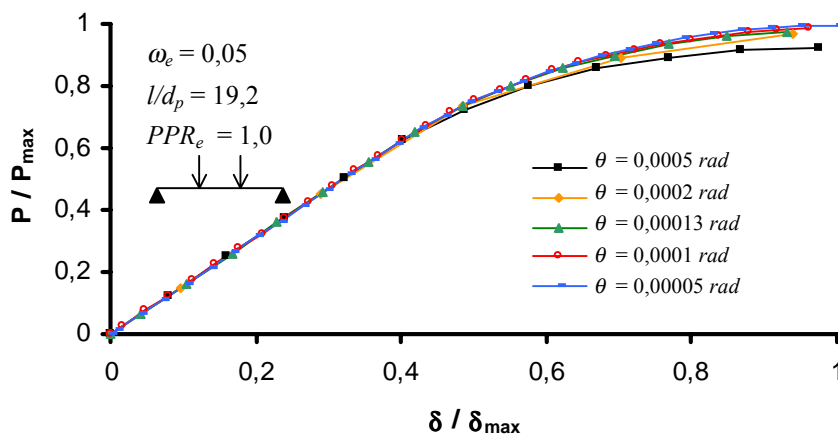


Figura 6.88 – Viga P2: curvas “carga x deslocamento” para diferentes incrementos de deslocamento, com $\beta = 5,441$

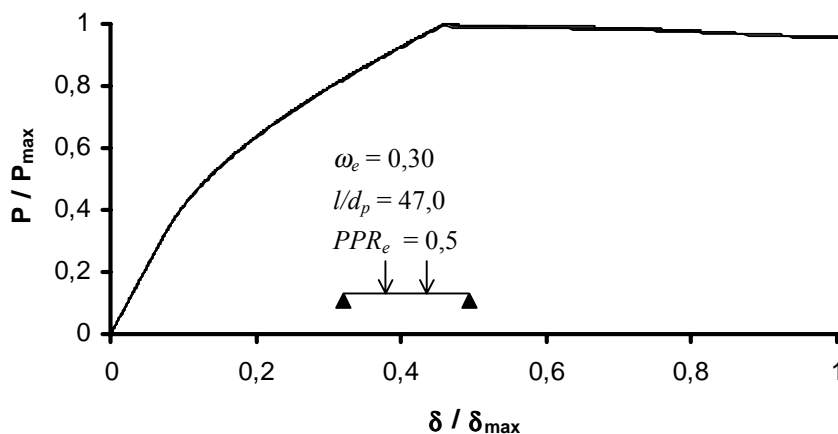


Figura 6.89 – Viga P20: curvas “carga x deslocamento” para diferentes incrementos de deslocamento, com $\beta = 5,441$

6.2 Critérios para a Avaliação da Tensão Última na Armadura Não Aderente

O estudo do comportamento à flexão dos elementos com protensão não aderente através do modelo numérico, sobretudo no que diz respeito à tensão última na armadura não aderente (f_{ps}), depende da definição de um critério de ruptura para o elemento estrutural. Os resultados numéricos e experimentais comparados ao longo do **Capítulo 5**, assim como a análise paramétrica apresentada no início deste capítulo, demonstraram que os elementos protendidos podem apresentar longos intervalos de comportamento plástico, em que a tensão na armadura não aderente apresenta um crescimento significativo, enquanto a capacidade portante mantém-se praticamente inalterada.

A figura 6.90 mostra a curva numérica “carga x incremento de tensão na armadura não aderente”, típica de uma viga com protensão parcial, em que ocorre um grande aumento de tensão na armadura, associado a uma pequena variação da carga. A figura 6.91 mostra a variação da tensão na armadura em função do deslocamento para o mesmo elemento, onde se observa que a tensão aumenta de maneira praticamente linear com os deslocamentos, mesmo no intervalo de comportamento plástico. Este tipo de relação quase linear entre os deslocamentos e a variação da tensão na armadura não aderente foi verificado, também, nos resultados experimentais de Tao & Du (1985). Em função desta característica dos elementos com protensão não aderente, o nível de deslocamento no qual se considera a ruptura da estrutura, durante sua fase de comportamento plástico, pode afetar significativamente o valor da tensão final obtida para a armadura de protensão.

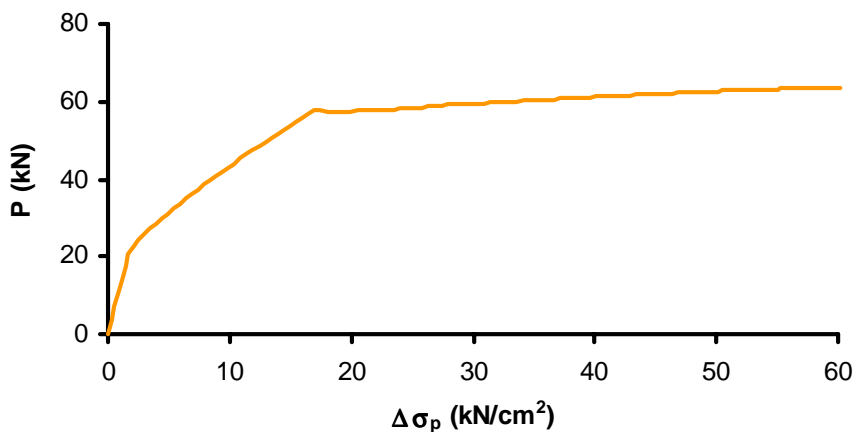


Figura 6.90 – Curva numérica da variação de tensão na armadura não aderente para a viga TD-A5 de Tao & Du (1985)

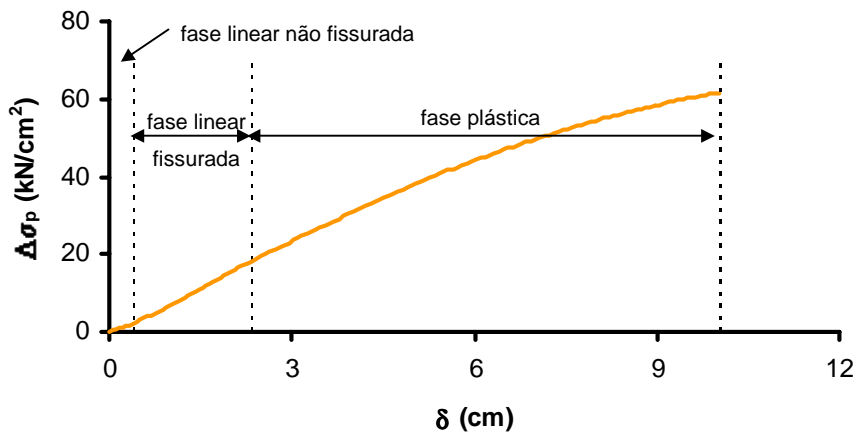


Figura 6.91 – Resultado numérico para $\Delta\sigma_p$ em função do deslocamento para o protótipo TD-A5

Em vista disso, o estabelecimento de um critério de ruptura para a utilização em análises numéricas tem os seguintes objetivos principais:

- a) uniformizar as avaliações numéricas da tensão na armadura não aderente no estado limite último (Δf_{ps}), permitindo a comparação de resultados entre situações estruturais diversas;
- b) evitar distorções numéricas nos valores medidos, encontradas quando a carga máxima é associada a valores muito elevados de deslocamentos e deformações;
- c) contemplar as situações em que um pico de resistência não é perfeitamente identificável, quando o crescimento na carga, durante a fase plástica, é contínuo, ainda que de maneira bastante lenta.

Dois tipos de critério de ruptura têm sido observados em trabalhos numéricos e experimentais, descritos na literatura: pelo pico de carregamento ou pelo esmagamento do concreto. Tao & Du (1985), Harajli & Kanj (1991) e Chakrabarti (1995), em análises experimentais, e Moon (1994), em uma modelagem numérica, determinaram a tensão final na armadura não aderente no ponto em que foi atingida a maior carga. Já Cooke et al (1981), em seu trabalho experimental sobre lajes com protensão não aderente, definiram a ruptura como o esmagamento do concreto, mesmo nas peças em que foi verificada a instabilidade à flexão. Neste item, o primeiro critério será chamado de **critério de ruptura por limite de carga**. O segundo, ampliado para a inclusão de limites para as armaduras, será referido como **critério de ruptura por limite de deformação**. Estes dois critérios serão analisados a seguir.

6.2.1 Critério de Ruptura por Limite de Carga

O quadro 6.14 compara resultados experimentais e numéricos, ambos considerando o critério de ruptura por limite de carga, incluindo os valores finais dos momentos fletores (M), deslocamentos (δ), incrementos de tensão (Δf_{ps}) e tensões últimas (f_{ps}). No quadro, apresentam-se valores correspondentes a vigas com protensão parcial, cujas curvas “carga x deslocamento”, numéricas e experimentais, mostradas no **Capítulo 5**, podem ser consideradas suficientemente equivalentes. Observando-se os valores de momento fletor (M), incremento de tensão (Δf_{ps}) e tensão (f_{ps}), apresentados no quadro 6.14, observa-se uma proximidade

razoável entre os dados estimados numéricos e os verificados nos ensaios. A razão entre valores numéricos e experimentais para momentos apresentou uma média de 0,98 e desvio padrão de 0,07. Para o incremento de tensão, a média foi 1,08 e o desvio padrão 0,23, e para a tensão última, estes valores foram, respectivamente, 1,03 e 0,07.

Quadro 6.14 – Resultados experimentais e numéricos, medidos no ponto de carga máxima, para protótipos selecionados [kN;cm]

	experimental				numérico					
	M	δ	Δf_{ps}	f_{ps}	M	δ	Δf_{ps}	f_{ps}	ϵ_c (‰)	ϵ_s (‰)
TD-A2	4534	10,4	52,6	143,0	3977	9,8	56,5	147,0	-5,8	19,2
TD-A3	6083	6,2	35,6	117,6	5399	7,8	47,2	129,3	-6,2	12,7
TD-A5	4844	9,2	50,5	131,5	4426	10,0	62,5	142,6	-6,3	19,1
TD-A6	6903	4,0	20,9	106,3	6787	4,5	27,8	113,3	-3,5	5,5
TD-A9	9870	4,0	18,8	110,8	9616	3,6	19,1	111,1	-2,8	2,3
CH-B3	4035	5,1	37,9	148,9	4226	3,5	23,6	127,9	-2,5	4,1
CH-C2	3893	3,7	20,7	114,5	4291	4,3	57,8	132,1	-3,6	5,6
CH-C3	5474	3,7	29,0	140,0	5882	3,7	16,2	127,4	-3,8	2,9
CH-PPT9B	3374	6,9	39,2	163,7	3068	8,0	47,2	171,8	-1,9	2,8
CH-PPT9C	5621	8,7	58,1	168,0	5262	6,8	57,2	166,9	-2,1	14,5
CH-PPT9D	7494	6,5	51,6	161,2	7874	5,9	52,5	162,1	-2,4	11,4
CH-PPT5A	3343	7,3	42,8	162,0	3109	7,3	52,2	169,5	-4,7	20,0
CH-PPR9A	4741	7,0	44,5	160,2	4772	7,0	45,6	162,8	-3,9	13,3
CH-PPR9B	4756	8,1	39,2	156,5	4656	7,5	47,0	164,3	-4,3	14,3
CH-E11	2305	5,7	66,7	143,9	2397	9,7	73,6	150,2	-7,3	28,0

Considerando como suficientemente próximos os resultados numéricos e experimentais, é possível estimar numericamente as deformações existentes nos protótipos, no concreto e na armadura passiva, no ponto de maior carga. Observa-se que na maioria dos casos, os valores de deformação são bastante elevados, superiores aos limites usuais da literatura ou de normas como o ACI 318 (1999), o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) e a NBR 6118 (ABNT, 2003). Os valores estimados para as deformações no concreto são coerentes com as informações de Tao & Du (1985), que relataram um acentuado esmagamento do concreto na ruptura de suas vigas.

Por outro lado, o pico de resistência efetivo pode não ser atingido ou facilmente identificável, mesmo que sejam obtidos deslocamentos bastante elevados. Por características da estrutura, limitações do equipamento experimental ou por razões de não convergência do modelo numérico, as análises podem ser interrompidas antes que seja descrita uma fase de perda de

capacidade portante, em que um pico de carga não seja identificável. As figuras 6.92 e 6.93 mostram curvas “carga x deslocamento”, numéricas e experimentais, de protótipos com protensão parcial e total, respectivamente, em que as cargas na fase de comportamento plástico mostram um crescimento contínuo. Nestes casos, a adoção da tensão final (f_{ps}) no ponto de maior carga pode levar a valores que não estão de acordo com o critério estabelecido, comprometendo a padronização dos dados.

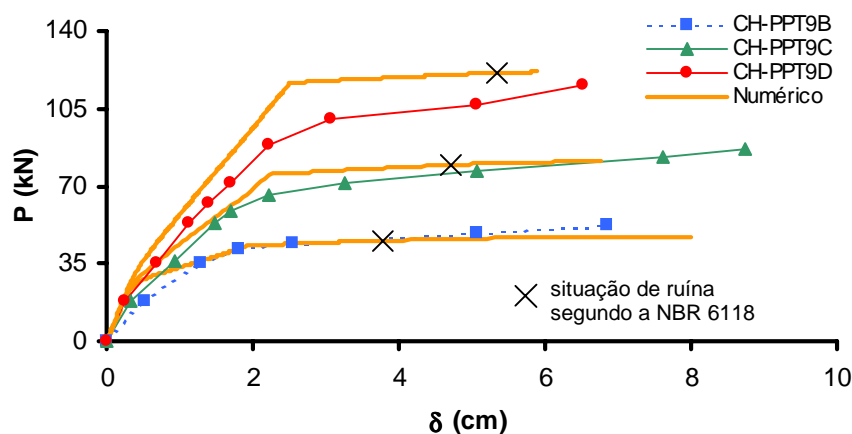


Figura 6.92 – Curvas “carga x deslocamento” para elementos com crescimento monotônico da carga no intervalo de plastificação

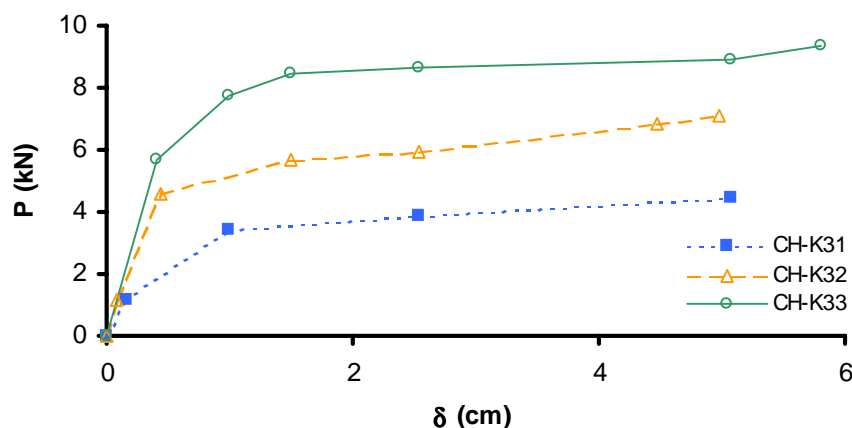


Figura 6.93 – Curvas experimentais “carga x deslocamento” para elementos com protensão não aderente total

6.2.2 Critério de Ruptura por Limite de Deformação

Nos critérios de ruptura por limite de deformações, o elemento estrutural é considerado em ruína quando o concreto ou o aço atinge um limite convencional de deformação. Como os

cabos de protensão não aderentes, geralmente, não alcançam as deformações de ruptura, o critério é verificado, nestes casos, apenas para a armadura passiva e para o concreto. Um dos critérios possíveis é o do item 17.2.2 da NBR 6118 (ABNT, 2003), equivalente ao do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). Segundo este critério, o estado limite último à flexão é alcançado quando o concreto atinge uma deformação de 0,35 % ou o aço uma deformação de 1,00%. De acordo com as configurações deformadas possíveis para a seção transversal, a ruptura pode ser considerada frágil ou dúctil.

A fim de se observar a implicação deste critério, com relação ao comportamento dos elementos, as figuras 6.94 e 6.95, além da figura 6.92, mostram os pontos nas curvas “carga x deslocamento” em que os protótipos selecionados atingem um dos limites de deformação da NBR 6118 (ABNT, 2003). Observa-se que, em quase todos os protótipos, este ponto situa-se no trecho de comportamento plástico dos elementos, correspondendo aos domínios 3 ou 4 da figura 17.4 da norma. A exceção é o protótipo CH-C3, mostrado na figura 6.95, que apresentou um desempenho não dúctil em função da elevada taxa mecânica total de armadura. A figura 6.96 indica o ponto de ruína, segundo o critério da norma, para a laje CP-7 de Cooke et al (1981). Neste caso, o estado limite foi alcançado pela deformação do concreto, já que não há armadura passiva aderente complementar. Elementos com instabilidade à flexão, como o protótipo CP-9 da figura 6.96, mostram ruptura frágil com deformações de compressão bastante reduzidas no concreto, sendo que a aplicação do critério por limite de deformação parece não ter sentido.

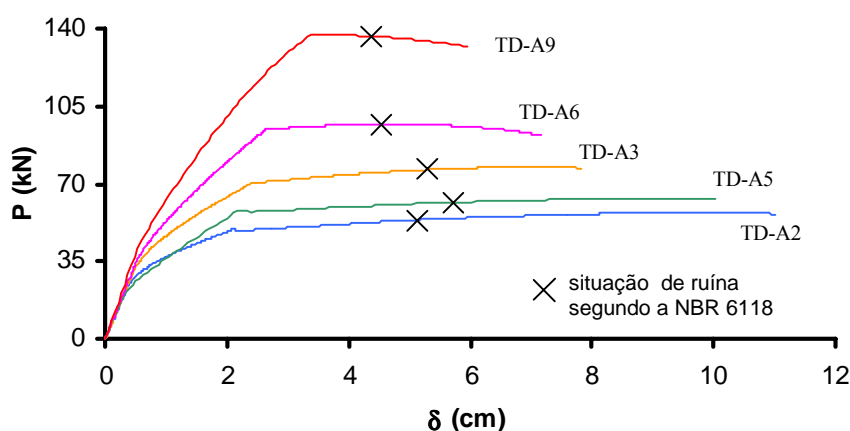


Figura 6.94 – Localização dos pontos de ruptura pela norma NBR6118 (ABNT, 2003) para protótipos de Tao & Du (1985)

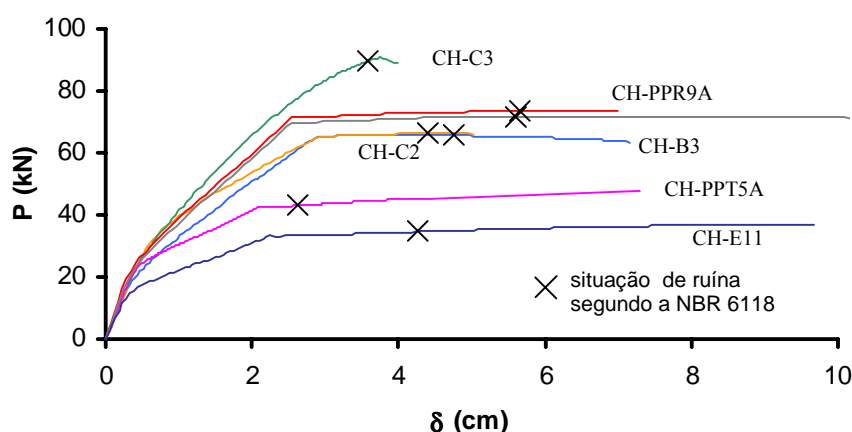


Figura 6.95 – Localização dos pontos de ruptura pela norma NBR6118 (ABNT, 2003) para protótipos de Chakrabarti (1995)

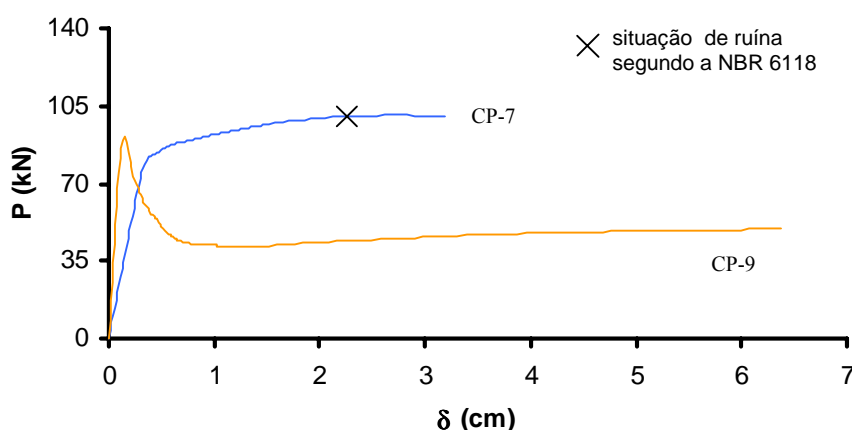


Figura 6.96 – Localização dos pontos de ruptura pela norma NBR6118 (ABNT, 2003) para protótipos de Cooke et al (1981)

O quadro 6.15 compara os resultados experimentais para o momento fletor (M), deslocamentos (δ), incremento de tensão (Δf_{ps}) e tensão final na armadura não aderente (f_{ps}), com os numéricos considerando os critérios de ruptura da norma. A razão entre os valores numéricos e experimentais para o momento é de 0,95, com desvio padrão 0,09. Para Δf_{ps} a média é de 0,90 e o desvio padrão 0,24, e para a tensão última 0,96 e 0,08, respectivamente. Observa-se que, de maneira geral, os resultados numéricos, quando se adotam os critérios da norma NBR6118 (ABNT, 2003), foram menores do que os experimentais. A comparação entre resultados numéricos, considerando os critérios de ruptura por limite de carga e por limite de deformação, é mostrada no quadro 6.16. A média da razão entre os resultados para os momentos é de 0,97 e o desvio padrão 0,04. Para o incremento de tensão a média é de 0,85 e o desvio padrão de 0,23, e para a tensão última de 0,94 e 0,08, respectivamente. Verifica-se,

por estes dados, que os resultados numéricos considerando limites de deformação foram inferiores aos obtidos para a carga máxima.

Quadro 6.15 – Resultados experimentais e numéricos segundo o critério por limite de deformação da norma NBR 6118 [kN ; cm]

	experimental				por limite de deformação			
	M	δ	Δf_{ps}	f_{ps}	M	δ	Δf_{ps}	f_{ps}
TD-A2	4534	10,4	52,6	143,0	3759	5,1	37,0	127,4
TD-A3	6083	6,2	35,6	117,6	5345	5,3	36,0	118,0
TD-A5	4844	9,2	50,5	131,5	4309	5,7	42,5	123,6
TD-A6	6902	4,0	20,9	106,3	6788	4,5	27,9	113,3
TD-A9	9870	4,0	18,8	110,8	9554	4,4	22,8	114,9
CH-B3	4035	5,1	37,9	148,9	4245	4,7	32,1	136,4
CH-C2	3893	3,7	20,7	114,5	4291	4,4	27,8	132,1
CH-C3	5474	3,7	29,0	140,0	5800	3,6	15,9	127,1
CH-PPT9B	3374	6,9	39,2	163,7	2934	3,8	33,5	158,1
CH-PPT9C	5621	8,7	58,1	168,0	5158	4,7	46,8	156,5
CH-PPT9D	7494	6,5	51,6	161,2	7840	5,3	49,3	159,0
CH-PPT5A	3343	7,3	42,8	162,0	2636	2,6	26,2	143,5
CH-PPR9A	4741	7,0	44,5	160,2	4754	5,6	39,3	156,6
CH-PPR9B	4756	8,1	39,2	156,5	4639	5,6	39,2	156,5
CH-E11	2305	5,7	66,7	143,9	2239	4,3	36,1	112,7
CP-7	4400	3,7	25,4	141,8	3660	2,3	22,1	138,6

Quadro 6.16 – Resultados numéricos para os dois critérios de ruptura [kN ; cm]

	por limite de carga				por limite de deformação			
	M	δ	Δf_{ps}	f_{ps}	M	δ	Δf_{ps}	f_{ps}
TD-A2	3977	9,8	56,5	147,0	3759	5,1	37,0	127,4
TD-A3	5399	7,8	47,2	129,3	5345	5,3	36,0	118,0
TD-A5	4426	10,0	62,5	142,6	4309	5,7	42,5	123,6
TD-A6	6787	4,5	27,8	113,3	6788	4,5	27,9	113,3
TD-A9	9616	3,6	19,1	111,1	9554	4,4	22,8	114,9
CH-B3	4226	3,5	23,6	127,9	4245	4,7	32,1	136,4
CH-C2	3842	4,3	57,8	132,1	4291	4,4	27,8	132,1
CH-C3	5882	3,7	16,2	127,4	5800	3,6	15,9	127,1
CH-PPT9B	3068	8,0	47,2	171,8	2934	3,8	33,5	158,1
CH-PPT9C	5262	6,8	57,2	166,9	5158	4,7	46,8	156,5
CH-PPT9D	7874	5,9	52,5	162,1	7840	5,3	49,3	159,0
CH-PPT5A	3109	7,3	52,2	169,5	2636	2,6	26,2	143,5
CH-PPR9A	4772	7,0	45,6	162,8	4754	5,6	39,3	156,6
CH-PPR9B	4656	7,5	47,0	164,3	4639	5,6	39,2	156,5
CH-E11	2397	9,7	73,6	150,2	2239	4,3	36,1	112,7
CP-7	3678	2,8	25,9	142,4	3660	2,3	22,1	138,6

As figuras 6.97 e 6.98 mostram graficamente os incrementos de tensão na armadura não aderente no estado limite último (Δf_{ps}) apresentados nos quadros 6.15 e 6.16 acima. Observam-se valores numéricos de Δf_{ps} determinados segundo o critério por limite de deformação geralmente inferiores aos experimentais e aos obtidos numericamente atendendo o critério por limite de carga. Em alguns dos casos mostrados na figura 6.97, as diferenças foram significativas. As respectivas tensões últimas (f_{ps}) são apresentadas nas figuras 6.99 e 6.100, onde se incluem, também, as tensões efetivas iniciais de protensão (f_{pe}). Nota-se, nestas figuras, que os valores numéricos de f_{ps} obtidos pelos dois critérios resultaram mais próximos entre si e, também, aos dados experimentais.

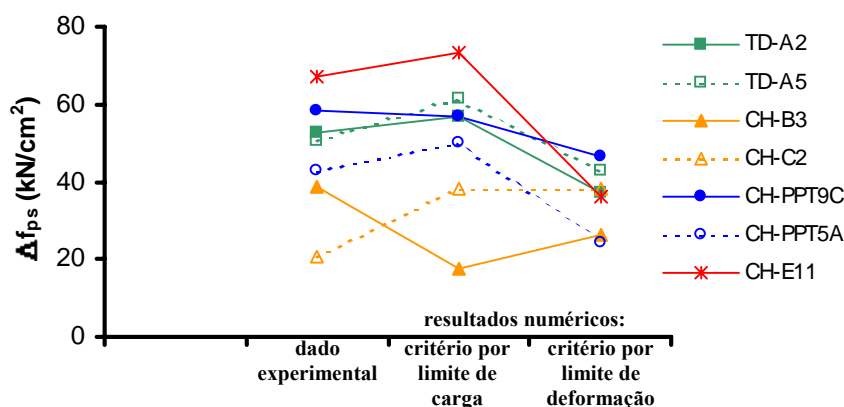


Figura 6.97 – Incrementos de tensão experimentais e numéricos considerando os dois critérios de ruptura

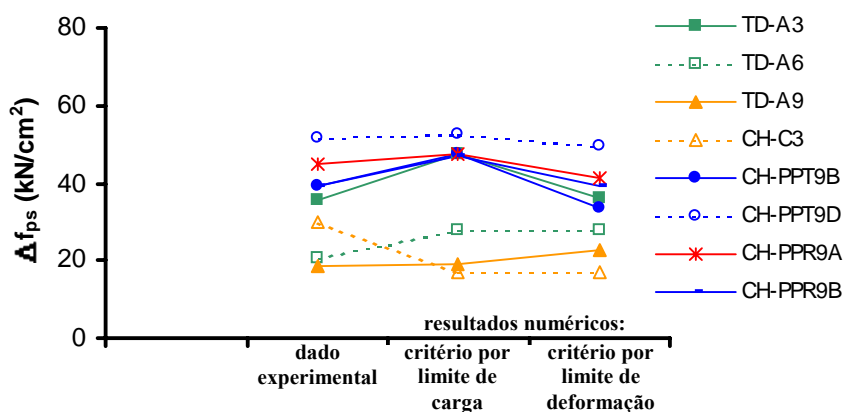


Figura 6.98 – Incrementos de tensão experimentais e numéricos utilizando os dois critérios de ruptura

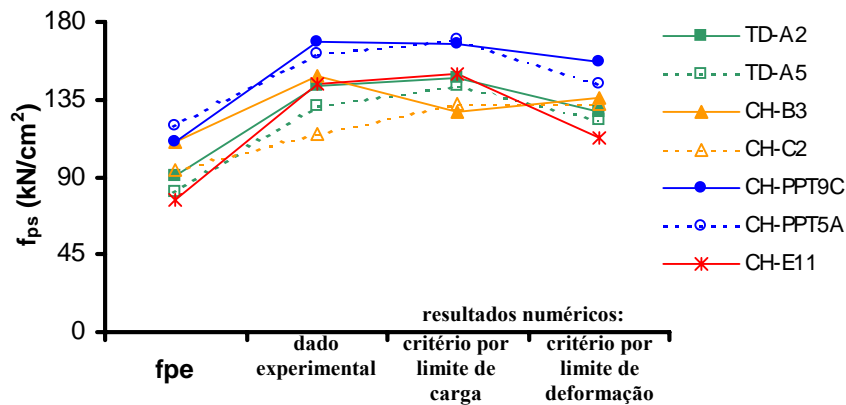


Figura 6.99 – Valores de f_{ps} experimentais e numéricos considerando os dois critérios de ruptura

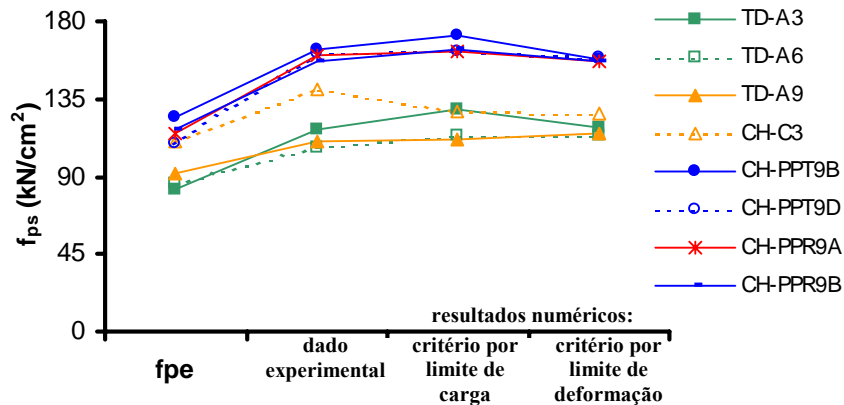


Figura 6.100 – Valores de f_{ps} experimentais e numéricos a partir dos dois critérios de ruptura

Os valores de f_{ps} experimentais, numéricos pelo critério por limite de carga e numéricos pelo critério por limite de deformação, foram utilizados para o cálculo manual dos momentos resistentes últimos (M_r), utilizando os procedimentos recomendados pela NBR 6118 (ABNT, 2003). Os momentos resistentes foram determinados, também, utilizando a tensão efetiva inicial na armadura de protensão (f_{pe}). Considerou-se o diagrama retangular de tensões no concreto no estado limite último, sem a aplicação dos coeficientes de minoração de resistência. As figuras 6.101 e 6.102 apresentam os momentos resistentes últimos obtidos. Nota-se, primeiramente, que os valores de M_r considerando a tensão f_{pe} foram inferiores aos demais resultados. Observa-se, também, que os momentos M_r calculados com os valores numéricos e experimentais de f_{ps} foram geralmente próximos. Em alguns casos, apenas, os momentos calculados a partir do valor numérico de f_{ps} , pelo critério por limite de deformação, foram ligeiramente inferiores às demais estimativas.

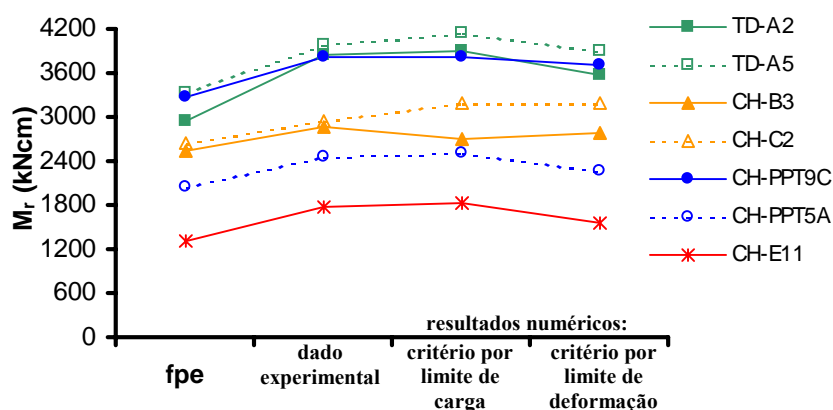


Figura 6.101 – Momentos resistentes calculados com f_{pe} , f_{ps} experimental e os dois f_{ps} numéricos

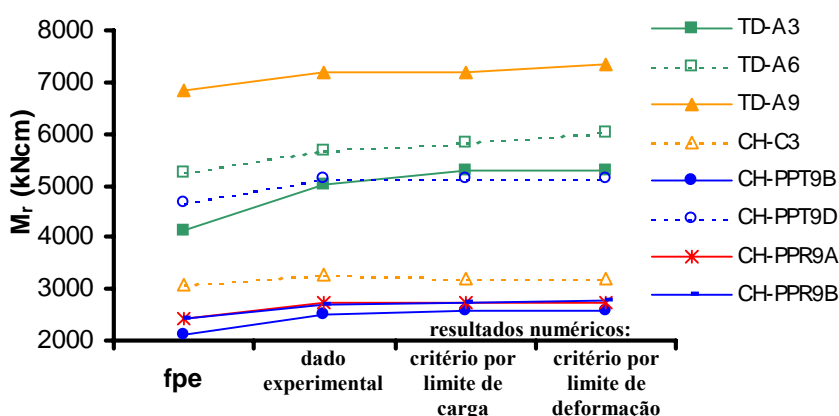


Figura 6.102 – Momentos resistentes calculados com f_{pe} , f_{ps} experimental e os dois f_{ps} numéricos

6.3 Considerações Finais

O estudo paramétrico descrito no item 6.1 mostrou que a variação na distribuição da malha em elementos finitos, incluindo módulos de integração e a quantidade de seções transversais, afetou minimamente os resultados. Em vista disso, a utilização de um único elemento finito pôde ser considerada tão adequada quanto as demais alternativas, e a distribuição dos módulos de integração suficiente para o tratamento das discontinuidades no carregamento e no perfil de protensão. A variação do número de lâminas na seção transversal afetou significativamente a carga máxima obtida para alguns protótipos com a taxa mecânica total de

armadura mais reduzida. A rigidez dos elementos e a forma das curvas “carga x deslocamentos”, no entanto, não foram alteradas.

Os efeitos da variação no parâmetro β sobre os resultados numéricos foram bastante significativos entre os protótipos com a menor taxa mecânica total de armadura. As variações nas cargas máximas reduziram-se com o aumento do índice ω_e , atingindo valores de pequena importância entre os protótipos com a taxa de armadura mais elevada. Verificou-se, ainda, uma tendência de elevação da carga máxima com o aumento de β .

O estudo sobre os efeitos da variação do parâmetro β_σ foi realizado considerando apenas os protótipos com protensão total não aderente. A variação deste parâmetro afetou consideravelmente o comportamento pós-fissuração dos elementos e, portanto, as cargas máximas, principalmente naqueles com $\omega_e = 0,05$ e $l/d_p = 47,0$. Entre as lajes, foi visível a redução dos índices ΔP_{\max} com o aumento de ω_e e de β . Entre as vigas, estas tendências foram bem menos importantes e as variações nas cargas geralmente menores. Na maioria dos casos, valores menores para o parâmetro β_σ levaram a maiores cargas finais.

A influência da variação da resistência à tração do concreto foi fortemente dependente da taxa mecânica total de armadura dos protótipos. Elementos com $\omega_e = 0,05$ tiveram suas rigidezes pós-fissuração e a carga máxima significativamente afetados pela variação de f_{ct} . Análises utilizando β_{\max} mostraram menores variações em todas as taxas mecânicas totais de armadura. Na maior parte dos casos, houve um pequeno aumento da carga com o crescimento de f_{ct} .

Entre os elementos com $\omega_e = 0,05$, em análises com $\beta = 0,3$ e com $\beta = 1,0$, a variação do módulo de elasticidade do concreto afetou de maneira importante o comportamento dos protótipos. Nos demais casos, os índices de variação na carga máxima foram reduzidos, quase sempre inferiores a 5%. Não houve tendência de crescimento na carga máxima com o aumento do valor do módulo de elasticidade do concreto.

A variação na deformação relativa ao pico de resistência do concreto à compressão (ϵ_{c0}) influenciou de maneira reduzida os resultados numéricos. Em elementos com $\omega_e = 0,05$, nas análises utilizando $\beta = 0,3$ e $\beta = 1,0$, ocorreram diferenças mais significativas. A variação da resistência à compressão do concreto (f_c) produziu índices ΔP_{\max} geralmente bastante reduzidos, que tenderam a diminuir com o aumento de β . Variações mais importantes nas cargas ocorreram entre as lajes com $\omega_e = 0,05$ em análises com $\beta = 0,3$. O módulo final do

concreto à compressão (E_{cf}) afetou o comportamento na fase de plastificação dos dois protótipos com protensão parcial estudados. Simulações com $|E_{cf}|$ reduzidos apresentaram intervalos de comportamento plástico com manutenção da capacidade de carga. À medida que o $|E_{cf}|$ foi aumentado, os elementos passaram a mostrar perdas de resistência cada vez mais acentuadas após o escoamento da armadura.

A variação da tensão de escoamento da armadura de protensão (f_{py}) afetou muito pouco os resultados. Praticamente, não se observaram tendências com relação às propriedades dos protótipos. A influência da variação da deformação de escoamento da armadura passiva (ϵ_y), dentro do intervalo de valores considerado, também foi quase desprezível. Em alguns casos, a variação deste parâmetro afetou ligeiramente o comportamento na fase de escoamento e, conseqüentemente, a carga máxima.

As variações no peso específico do concreto produziram alterações significativas na carga máxima, que tenderam a diminuir com o aumento da taxa mecânica total de armadura e do valor do parâmetro β . Naturalmente, lajes, principalmente aquelas com $\omega_e = 0,05$, foram os protótipos com os maiores índices de variação na carga máxima. Os resultados não indicaram qualquer tendência de aumento da carga máxima com a redução do peso específico do concreto. A variação do tamanho do incremento de deslocamento utilizando nas análises também afetou significativamente os resultados. Novamente, os índices ΔP_{\max} diminuíram fortemente com o aumento da taxa mecânica total de armadura. Entre as lajes, observou-se a redução da variação nas cargas com o aumento de β .

De modo geral, pode-se definir as seguintes características principais do comportamento do modelo numérico, observado no estudo paramétrico:

- a) a utilização de um único elemento finito na modelagem de uma viga com protensão não aderente é capaz de fornecer resultados similares aos obtidos com malhas mais refinadas;
- b) quanto menor a taxa mecânica total de armadura do protótipo, maiores as conseqüências das variações dos parâmetros, em função da elevada sensibilidade dos resultados ao processo de fissuração;
- c) o parâmetro β do modelo de *tension stiffening* pode afetar consideravelmente os resultados numéricos para protótipos com reduzidas taxas mecânicas totais de

armadura. No entanto, o valor mais adequado deste parâmetro, para a utilização em uma análise numérica, não pode ser facilmente determinado a partir dos dados geralmente disponíveis sobre o concreto e a estrutura. Desta forma, recomenda-se a realização de análises considerando algumas alternativas de valor para β , obtendo-se, assim, não apenas uma resposta numérica única, mas um conjunto de resultados. Como limite inferior para este parâmetro, sugere-se 0,3, uma vez que valores menores podem levar a problemas de convergência numérica na fissuração. Como limite superior, recomenda-se o valor β_{\max} , que leva a um comportamento linear contínuo de amolecimento à tração. Recomenda-se, ainda, a utilização do valor de 1,0 como alternativa inicial para o parâmetro;

- d) os efeitos das variações nos parâmetros foram, geralmente, pouco afetados pelo tipo de carregamento, a esbeltez à flexão e existência ou não de armadura passiva aderente complementar.

A análise de critérios de ruptura mostrada no item 6.2 indicou que, em muitos casos, a carga máxima de um elemento é alcançada sob deformações bastante elevadas e que, em algumas vezes, o ponto de maior carga não é plenamente definido. Por outro lado, a utilização de critérios por limite de deformação, como os da NBR 6118 (ABNT, 2003) levou a resultados analíticos para a tensão última na armadura não aderente geralmente inferiores aos obtidos de forma experimental e numérica com a aplicação do desempenho do critério por limite de carga.

A diferença entre os resultados obtidos a partir dos diferentes critérios, entretanto, não é elevada, na maioria dos casos, e possui um caráter a favor da segurança na aplicação dos limites de deformação da norma NBR 6118 (ABNT, 2003). Além disso, o critério por limite de deformação permite a uniformização dos valores medidos para a tensão última na armadura de protensão não aderente, possibilitando a comparação do desempenho final de protótipos em diferentes situações estruturais.

Em vista destas observações, a adoção de um critério de ruptura por limite de deformação para a análise do comportamento final de elementos com protensão não aderente parece ser adequada. Este critério é naturalmente apropriado para o desenvolvimento de recomendações compatíveis com as normas brasileiras de projeto.

7 Conclusões e Sugestões para a Continuidade da Pesquisa

Apresentam-se, a seguir, as principais conclusões obtidas ao longo deste trabalho, abrangendo o levantamento bibliográfico sobre o comportamento à flexão das estruturas com protensão não aderente, a implementação do modelo numérico e o seu desempenho. Em seguida, alguns assuntos de pesquisa são sugeridos, apresentando o modelo numérico como ferramenta de análise e objetivando o aperfeiçoamento de critérios nacionais para o projeto de estruturas com protensão não aderente.

7.1 Conclusões

De acordo com o levantamento bibliográfico apresentado no **Capítulo 2**, observa-se que as estruturas com protensão não aderente apresentam maior complexidade de análise, se comparadas aos demais elementos com armaduras aderentes. A principal consequência da falta de aderência entre concreto e aço, sob o ponto de vista analítico, é a ausência de compatibilidade de deformações entre os materiais. Nestas estruturas, verifica-se a compatibilidade de deslocamentos entre a armadura e a fibra de concreto adjacente ao perfil de protensão, de maneira que diversas características do elemento passam a ser consideradas determinantes do valor da tensão na armadura não aderente no estado limite último, tornando o desenvolvimento de uma solução analítica fechada para o seu cálculo uma tarefa inviável.

Os parâmetros considerados como determinantes para o comportamento à flexão e da tensão final na armadura não aderente incluem a contribuição da armadura passiva, a taxa mecânica total de armadura, a esbeltez à flexão e o tipo de carregamento. Observou-se que estas propriedades definem a capacidade de rotação do elemento estrutural no estado limite último e a extensão da zona de deformações plásticas no concreto, das quais dependem as tensões na armadura não aderente. Apesar dos inúmeros trabalhos existentes sobre o assunto, a efetiva influência de alguns parâmetros, como o tipo de carregamento e a esbeltez à flexão, ainda não foi satisfatoriamente esclarecida, de maneira que não há consenso entre os diversos autores.

Elementos com protensão não aderente total, desprovidos de armadura passiva aderente complementar, podem apresentar desempenho estrutural inadequado, com reduzida capacidade de manutenção da carga na fase de comportamento plástico, em consequência da

concentração de fissuras e deformações em poucas seções transversais. Os diversos trabalhos consultados concordam sobre a necessidade de utilização de armadura passiva aderente complementar que, mesmo em pequenas quantidades, garante a distribuição de fissuras, aumenta o tamanho da região de deformações plásticas e proporciona um comportamento estrutural adequado, com boa mobilização da armadura não aderente.

Entre as abordagens disponíveis na literatura para o cálculo manual da tensão na armadura não aderente no estado limite último, as formulações empíricas apresentaram um caráter conservador, dependente das características da base de dados experimentais utilizadas nas análises de regressão das quais se originam. As abordagens semi-empíricas mostraram-se de maior precisão, com valores estimados mais próximos aos experimentais. Dentre estas, as análises do tipo compatibilidade de deformações, utilizando algum tipo de coeficiente de redução de deformações, adotam o equilíbrio de forças na seção transversal como condicionante da tensão na armadura não aderente e consideram a contribuição da armadura passiva aderente. As formulações do tipo compatibilidade de deformações apresentam, por isso, um embasamento analítico mais desenvolvido. Por serem utilizadas no Brasil para o projeto e a verificação das estruturas em concreto armado e protendido com armaduras aderentes, a sua adoção, também para a protensão não aderente, pode ser apropriada.

Um modelo numérico para o estudo do comportamento à flexão das peças com protensão não aderente foi implementado, utilizando o elemento finito do tipo híbrido para as estruturas de pórtico plano, como descrito no **Capítulo 3**. Esta abordagem apresenta como principal característica a utilização das equações de equilíbrio para as forças nas seções transversais como as funções de interpolação do elemento, independentes de hipóteses arbitrárias para as funções de forma. As distribuições de curvaturas de caráter teoricamente exato, obtidas com tal abordagem, permitem a utilização de elementos finitos longos e, fundamentalmente, contribuem para a adequada consideração da compatibilidade de deslocamentos observada nas estruturas com armaduras não aderentes.

No modelo proposto, relações constitutivas já consolidadas na literatura, apresentadas no **Capítulo 4**, foram adotadas para os materiais. O modelo da cadeia de Maxwell foi utilizado para a descrição dos comportamentos reológicos do concreto e do aço de protensão. Procurou-se conferir, com isto, o mesmo nível de complexidade e precisão na modelagem da fluência do concreto e da relaxação do aço, que se constituem em fenômenos físicos da mesma natureza. A regra de integração implícita para os problemas de fluência e relaxação

permitiu a utilização de um reduzido número de etapas incrementais no tempo, sem prejuízo da precisão dos resultados.

De um modo geral, a comparação entre resultados numéricos e experimentais, apresentada no **Capítulo 5**, demonstrou a adequação do modelo numérico proposto para a análise de vigas e lajes com protensão aderente e não aderente, elementos de construção composta, ações de longa duração e pilares em concreto armado. Em todos os exemplos, um único elemento finito foi utilizado para a modelagem de um vão de viga ou pilar. A divisão deste elemento finito em módulos de integração mostrou-se adequada e suficiente para o tratamento das descontinuidades ao longo da barra.

Os bons resultados para deslocamentos e tensões, obtidos para as estruturas com protensão não aderente, confirmam não somente a adequação da formulação em elementos finitos, mas também do método utilizado para o cálculo das deformações nas armaduras não aderentes. Os exemplos incluíram protensão não aderente total ou parcial, diversos índices de esbeltez à flexão, variadas taxas mecânicas totais de armadura e carregamentos concentrados ou nos terços médios, abrangendo as situações estruturais descritas na literatura como as mais representativas entre os elementos com protensão não aderente.

Os resultados numéricos para a fissuração dos elementos com protensão não aderente, apresentados no **Capítulo 5**, estão de acordo com o comportamento descrito na literatura. As análises considerando a condição real dos protótipos, com armaduras não aderentes, mostraram fissuração mais concentrada do que as simulações em que foram utilizadas as hipóteses de aderência entre concreto e aço de protensão. O exemplo da viga com protensão total e carregamento concentrado mostrou uma única fissura na seção central, de rápido crescimento, dividindo a estrutura em dois segmentos ligados pelo cabo de protensão.

A contribuição da armadura passiva aderente e a taxa mecânica total de armadura afetaram significativamente a forma das curvas “carga x deslocamento”, obtidas nas análises numéricas. Enquanto peças com protensão parcial apresentaram os trechos de comportamento elástico, elástico fissurado e plástico, os elementos com protensão total não aderente mostraram apenas duas fases distintas, que foram a não fissurada elástica e a fissurada. Nas peças com protensão total e taxas mecânicas totais de armadura mais elevadas, verificaram-se transições suaves entre os dois regimes, com aumento na carga. À medida que a quantidade de protensão foi reduzida, esta transição tornou-se mais brusca. Elementos com

taxas de armadura intermediárias descreveram perdas de carga logo após a formação de fissuras, havendo posterior recuperação da capacidade portante com o aumento dos deslocamentos. Em estruturas com as taxas mecânicas totais de armadura mais baixas, a fissuração resultou em instabilidade à flexão, com queda brusca e acentuada da carga após a fissuração.

Um estudo paramétrico, descrito no **Capítulo 6**, foi realizado visando à observação do comportamento dos resultados numéricos frente à variação dos valores de alguns parâmetros de entrada de dados no modelo proposto. Consideraram-se lajes e vigas, com protensão parcial ou total, carregamentos concentrados ou nos terços médios e taxas mecânicas totais de armadura variáveis. Dentro deste estudo, diversas alternativas de discretização foram consideradas para alguns protótipos, obtendo-se curvas “carga x deslocamento” idênticas e variações mínimas nas cargas máximas, o que comprovou a adequação da utilização de um único elemento finito na modelagem do vão de uma viga.

De um modo geral, o estudo paramétrico do **Capítulo 6** mostrou que as maiores diferenças nos resultados numéricos, para a carga máxima, em função da variação dos parâmetros de entrada de dados, ocorreram nos protótipos com as menores taxas mecânicas totais de armadura. Entre os elementos com taxas mais elevadas, as variações nos resultados numéricos foram reduzidas. Os parâmetros cujas variações provocaram as maiores diferenças nos resultados numéricos, foram os associados ao comportamento de fissuração do concreto, como o β , β_σ , o peso específico do concreto (γ_c), a resistência à tração (f_{ct}) e o tamanho do incremento de deslocamentos. Estes resultados são coerentes com o fato de que, em elementos com reduzida taxa de armadura, o desempenho na fase de formação de fissuras é comandado pelas características do concreto, o que determina, também, a capacidade portante.

A partir do estudo paramétrico, conclui-se que análises utilizando o modelo numérico, visando a previsão do comportamento experimental ou o projeto de estruturas, sobretudo aquelas com reduzida taxa armadura, devem ser realizadas considerando um conjunto de valores para cada um dos parâmetros, principalmente os que influenciam o comportamento de fissuração do concreto. Dados estatísticos podem ser utilizados na definição dos intervalos de variação dos parâmetros, conferindo um enfoque probabilístico ao comportamento estimado através do modelo numérico. A definição de um valor para o parâmetro β do modelo de

tension stiffening requer a verificação de alternativas dentro de um intervalo mais amplo, a partir das recomendações apresentadas nas considerações finais do **Capítulo 6**.

A utilização de critérios de ruptura por limites de deformação, como os fixados pela NBR 6118 (ABNT, 2003), parecem ser os mais adequados para o estudo do comportamento à flexão dos elementos com protensão não aderente. Os resultados numéricos demonstraram que estes limites são normalmente atingidos na fase de comportamento plástico da estrutura, sob elevados níveis de deslocamentos, com tendência levemente a favor da segurança se comparados aos critérios por limite de carga. A uniformização do critério de ruína, como a proporcionada pela adoção dos limites de deformação, reduz a variabilidade dos resultados numéricos, principalmente quanto à tensão última na armadura não aderente, possibilitando a comparação entre os dados obtidos em análises de diferentes situações estruturais.

7.2 Sugestões para a Continuidade da Pesquisa

Tendo o modelo numérico implementado como uma ferramenta de estudo do comportamento à flexão dos elementos estruturais com protensão não aderente, os seguintes tópicos de pesquisa são sugeridos:

- a) verificação da adequação da **taxa mecânica total de armadura** (ω_e) como parâmetro representativo do comportamento à flexão dos elementos com protensão não aderente e determinante do valor da tensão na armadura no estado limite último, já que este tem sido considerado em diversas formulações de cálculo. Como mostrado no **Capítulo 2**, este índice envolve diversos parâmetros internos, como a resistência do concreto, as quantidades de armadura passiva e de protensão, e as tensões nestas armaduras. Ainda não foi demonstrado, no entanto, como variações nestas variáveis internas, para um mesmo valor de ω_e , afetam o comportamento à flexão de um elemento estrutural. Sugere-se, portanto, que estudos paramétricos sejam realizados considerando, para determinadas taxas mecânicas totais de armadura, diferentes combinações dos parâmetros internos que compõem o índice. Deve-se observar, fundamentalmente, a existência de possíveis correlações entre o valor da taxa ω_e e a tensão última na armadura não aderente;

- b) identificação das situações estruturais que levam à **instabilidade à flexão**. A instabilidade à flexão é um comportamento inaceitável sob o ponto de vista de projeto de estruturas em concreto armado. A norma NBR 6118 (ABNT, 2003) determina armaduras mínimas a serem utilizadas nas peças estruturais em concreto armado para que as seções sejam capazes de superar a carga de fissuração, apresentando um comportamento dúctil. É necessário, portanto, determinar propriedades mínimas para os elementos protendidos para que estes não entrem em ruína na etapa de fissuração. Sugere-se que uma investigação seja realizada, considerando a taxa mecânica total de armadura (ω_e), o índice de protensão parcial (PPR_e), a esbeltez à flexão (l/d_p) e o tipo de carregamento. Poderão ser apresentadas contribuições para a normalização brasileira no sentido de se garantir a segurança com respeito à instabilidade à flexão;
- c) estudo paramétrico para a identificação das situações de **comportamento superarmado**. Propõe-se um estudo considerando a taxa mecânica total de armadura (ω_e) e o índice de protensão parcial (PPR_e), de maneira a identificar limites destes parâmetros para que seja garantido o desempenho dúctil na ruptura;
- d) estudo paramétrico sobre a influência da **taxa mecânica total de armadura** (ω_e), **índice de protensão parcial** (PPR_e), **esbeltez à flexão** (l/d_p) e o **tipo de carregamento** no comportamento à flexão dos elementos com protensão não aderente, tanto no que diz respeito à capacidade portante, quanto à tensão última na armadura. É verificado na literatura serem estes os parâmetros mais utilizados nas formulações empíricas e semi-empíricas para o cálculo da tensão na armadura, sem que, no entanto, haja consenso geral sobre a influência com respeito ao tipo de carregamento e a esbeltez à flexão. Sugere-se que este estudo paramétrico seja realizado utilizando ferramentas estatísticas para o seu planejamento e a análise dos resultados;
- e) A partir dos dados obtidos no estudo paramétrico proposto no item d), acima, sugere-se a proposição de **coeficientes de redução de aderência** para a aplicação em análises do tipo compatibilidade de deformações, com vistas à determinação da tensão final na armadura de protensão não aderente. Sugere-

se, ainda, que estudos de confiabilidade sejam realizados, para a verificação da adequação da formulação a ser proposta;

- f) Sugere-se a realização de um estudo numérico e experimental sobre a **contribuição do concreto entre fissuras** nos elementos com protensão aderente total;
- g) Sugere-se, ainda, os seguintes tópicos de pesquisa, visando ao **desenvolvimento continuado** do modelo numérico:
- adaptação da relação constitutiva do concreto para a fluência sob tensões elevadas, em que a hipótese da linearidade não é válida;
 - implementação de outras abordagens para o comportamento reológico do concreto, como a Teoria da Solidificação de Bazant & Prasannam (1989);
 - adaptação do modelo numérico para estruturas de pórtico espacial, permitindo o estudo da flexo-compressão oblíqua;
 - introdução da protensão com armadura externa;
 - desenvolvimento de uma interface amigável para a entrada de dados.

Referências Bibliográficas

- AALAMI, B. O.; BOMMER, A. **Design Fundamentals of Post-Tensioned Concrete Floors**. Phoenix: Post-Tensioning Institute, 1999.
- AALAMI, B. O. Unbonded and Bonded Post-Tensioning Systems in Building Construction: A Design and Performance Review. **PTI Technical Notes**, Phoenix, PTI, n. 5, Sep. 1994.
- AALAMI, B. O.; CHEGINI, X. Structural Retrofitting of Cast-In-Place Concrete Parking Structures. In: THIRD NATIONAL CONCRETE & MASONRY ENGINEERING CONFERENCE, 1995, São Francisco, **Anais...** 1995.
- ALKHAIRI, F. M.; NAAMAN, A. E. Analysis of Beams Prestressed with Unbonded Internal or External Tendons. **Journal of Structural Engineering**, New York, ASCE, v. 119, n. 9, p. 2680-2699, Sep. 1993.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Building Code Requirements for Structural Concrete: ACI Committe 318**. Farmington Hills, 1999.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Committee 423. Recommendations for Concrete Members with Unbonded Tendons. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills, ACI, v.86, n. 3, p. 301-318, May-Jun. 1989.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento: NBR 6118**. Rio de Janeiro, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de Estruturas de Concreto Protendido: NBR 7197**. Rio de Janeiro, 1989.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Cordoalhas de Aço para Concreto Protendido – Especificação: NBR 7483**. Rio de Janeiro, 1991.
- BAKOSS, S. L.; GILBERT, S. L.; FAULKES, K. A.; PULMANO, V. A. Long-Term Deflections of Reinforced Concrete Beams. **Magazine of Concrete Research**, London, Cement and Concrete Association, v. 34, n.121, P. 203-212, Dec., 1982.
- BATHE, K.; BOLOURCHI, S. Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley and Sons, v. 14, p. 961-986, 1979.
- BATOZ, J.; DHATT, G. Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley and Sons, v. 14, p. 1262-1267, 1979.
- BAZANT, Z. P. Numerical Determination of Long-Range Stress History from Strain History in Concrete. **Materials and Structures**, v.5, n.27, p.135-141, 1972.

- BAZANT, Z. P.; PRASANNAN, S. Solidification Theory for Concrete Creep. I: Formulation. **Journal of Engineering Mechanics**. New York, ASCE, v. 115, n. 8, Aug. 1988.
- BAZANT, Z. P.; WITTMANN, F. H. **Creep and Shrinkage in Concrete Structures**. Chichester: John Wiley and Sons, 1982.
- BAZANT, Z. P.; WU, S. T. Rate-Type Creep Law of Aging Concrete Based on Maxwell Chain. **Materials and Structures**, v.7, n.37, p.45-60, 1974.
- BARBIERI, R. A. **Análise Numérico-Experimental de Elementos Pré-Moldados Protendidos com Continuidade Posterior por Adição de Armadura**. 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- BEBER, A. J. **Avaliação do Desempenho de Vigas de Concreto Reforçadas com Lâminas de Carbono**. 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- CAMPOS, C. M. O. **Análise do Comportamento à Flexão de Vigas Protendidas com Cabos Externos Sintéticos**. 1999. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- CAMPOS, C. M. O.; GUIMARÃES, G. B. Modelo Rígido-Plástico para Análise de Vigas Protendidas com Cabos Não Aderentes. In: IV Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto. 2000, São Paulo. **Anais**. São Paulo: USP, 2000.
- CAROL, I.; MURCIA, J. Nonlinear Time-Dependent Analysis of Planar Frame Using an ‘Exact’ Formulation – I. Theory. **Computers & Structures**, London, Pergamon Press, v. 33, n. 1, p.79-87, Jan. 1989.
- CAROL, I.; MURCIA, J. Nonlinear Time-Dependent Analysis of Planar Frame Using an ‘Exact’ Formulation – II. Computer Implementation for R. C. Structures and Examples. **Computers & Structures**, v. 33, n. 1, p.89-102, Jan. 1989.
- CAUDURO, E. L. Em Favor da Leveza. **Téchne**, São Paulo, PINI, n. 26, p.30-33, 1997.
- CAUDURO, E. L.; LEME, A. J. H. A Protensão em Edifícios sem Vigas: Novas Técnicas Aumentam a Qualidade e Reduzem o Custo Total do Edifício. In: 41º Congresso Brasileiro do Concreto, 1999, Salvador. **Anais**...São Paulo: IBRACON, 1999.
- CHAKRABARTI, P. R. Ultimate Stress for Unbonded Post-Tensioning Tendons in Partially Prestressed Beams. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills, ACI, v.92, n. 6, p. 689-697, Nov-Dec. 1995.
- CHAKRABARTI, P. R.; WHANG, T. P.; BROWN, W.; ARSAD, K. M.; AMEZEUA, E. Unbonded Post-Tensioning Tendons and Partially Prestressed Beams. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills, ACI, v.91, n. 5, p.616-625, Set-Oct. 1994.
- COOKE, N.; PARK, R.; YOUNG, P. Flexural Strength of Prestressed Concrete Members with Unbonded Tendons. **PCI Journal**, Chicago, PCI, v.26, n.6, p.52-80, Nov-Dec. 1981.

- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990**. Lousanne, (Bulletin d'Information, 213/214), 1993.
- DEVALAPURA, R. K.; TRADOS, M. K. Stress-Strain Modelling of 270 ksi Low-Relaxation Prestressing Strands. **PCI Journal**, Chicago, PCI, v.37, n.2, p.100-106, Mar-Apr. 1992.
- EL-MEZAINI, N.; ÇITIPITIOGLU, E. Finite Element Analysis of Prestressed and Reinforced Concrete Structures. **Journal of Structural Engineering**, New York, ASCE, v. 117, n. 10, Oct. 1991.
- FAIRBAIN, E. M. R.; LONGO, H. I.; ZHENG, R. Formulação Diferencial do Problema da Relaxação do Concreto – Estudo Teórico Experimental. In: Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural. 1987, Porto Alegre. **Anais**, Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1987.
- Federation International du Beton. **Factory Applied Corrosion Protection of Prestressing Steel**. Lousanne, (Bulletin, 11), 2001.
- Federation International du Beton. **Structural Concrete – Text Book on Design and Performance - Updated Knowledge of the CEB/FIP Model Code 1990**. Lousanne, (Bulletin, 1), 1999.
- FIGUEIRAS, J. A.; PÓVOAS, R. H. C. F. Modelling of Prestress in Non-Linear Analysis of Concrete Structures. **Computers & Structures**. London, Elsevier Science, v. 53, n.1, p. 173-187, Jan. 1994.
- FREYERMUTH, C. L. Durability of Post-Tensioned Prestressed Concrete Structures. **Concrete International**, Farmington Hills, ACI, v. 13, n.10, Oct. 1991.
- GHALI, A.; FAVRE, R. **Concrete Structures: Stresses and Deformations**. London: Chapman and Hall, 1986.
- GHALI, A.; TREVIÑO, J. Relaxation of Steel in Prestressed Concrete. **PCI Journal**, Chicago, PCI, v. 30, n. 5, p.82-94, Sep.-Oct. 1985.
- GROEHS, G. A. Introdução à Integração Numérica. **Caderno Técnico**. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1979.
- HAISSLER, W. E.; STRICKLIN, J. A. ; KEY, J. E. Displacement Incrementation in Non-Linear Structural Analysis by the Self-Correcting Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v. 11. n1, p. 3-10, Jan. 1977.
- HARAJLI, M. H. Effect of Span-Depth Ratio on the Ultimate Steel Stress in Unbonded Prestressed Concrete Members. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills, ACI, v.87, n. 3, p.305-312, May-Jun. 1990.
- HARAJLI, M. H.; KANJ, M. Y. Ultimate Flexural Strength of Concrete Members Prestressed with Unbonded Tendons. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills, ACI, v.88, n. 6, p.663-673, Nov-Dec. 1991.

- KABAILA, A.; SAENZ, L. P.; TULIN, L. G.; GERSTLE, K. H. Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete. **ACI Journal**, Farmington Hills, ACI, v.61, n. 3, p.1227-1239, Mar. 1964.
- KAO, R. A comparison of Newton-Raphson Methods and Incremental Procedures for Geometrically Nonlinear Analysis. **Computers & Structures**, London, Pergamon Press, v. 4, n. 5, p. 1091-1097, oct. 1974.
- KARSAN, D.; JIRSA, J. Q. Behavior of Concrete Under Compressive Loadings. **Journal of the Structural Division**, New York, ASCE, v. 95, n. ST12, p. 2543-2563, Dec. 1969.
- KIM, J.; YANG, J. Buckling Behaviour of Slender High-Strength Concrete Columns. **Engineering Structures**, Butterworth-Heinemann, v. 17, n. 1, p.39-91, Jan. 1995.
- KISS, P. Os Leves Puxam o Mercado. **Téchne**, São Paulo, PINI, n. 41, p.52-56, 1999.
- LEE, L.; MOON, J.; LIM, J. Proposed Methodology for Computing of Unbonded Tendon Stress at Flexural Failure. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills, ACI, v. 96, n. 6, p.1040-1048, Nov.-Dec.,1999.
- LOPES, S. M. R.; HARROP, J.; GAMBLE, A. E. Study of Moment Redistribution in Prestressed Concrete Beams. **Journal of Structural Engineering**, New York, ASCE, v. 123, n. 5, p. 561-566, May, 1997.
- MACHADO, M. A. S. **Aplicação Do Método Dos Elementos Finitos Para A Análise Elasto-Viscoplástica De Peças De Concreto Armado E Protendido, Submetidas A Estados Planos De Tensão**. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- MATTOCK, A. H.; YAMAZAKI, J.; KATTULA, B. T. Comparative Study of Prestressed Concrete Beams, With and Without Bond. **ACI Journal**, Farmington Hills, ACI, v.68, n. 2, p.116-125, Feb. 1971.
- MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Estrutura, Propriedades e Materiais**: São Paulo, 1994.
- MOJTAHEDI, S.; GAMBLE, W. L. Ultimate Steel Stress in Unbonded Prestressed Concrete. **Journal of the Structural Division**, New York, ASCE, v. 104, n. 7, p.1159-1165, Jul. 1978.
- MOON, J. **Time Dependent Analysis of Behavior and Strength for Prestressed Concrete Members with Bonded and Unbonded Tendons**. 1994. Dissertation (PhD) – Graduate School, University of Texas, Austin.
- MOON, J.; BURNS, N. H. Flexural Behavior of Member with Unbonded Tendons I: Theory. **Journal of Structural Engineering**, New York, ASCE, v. 123, n. 8, p.1087-1094, Aug. 1997.
- MOON, J.; BURNS, N. H. Flexural Behavior of Member with Unbonded Tendons II: Applications. **Journal of Structural Engineering**, New York, ASCE, v. 123, n. 8, p.1095-1101, Aug. 1997.

- NAAMAN, A. E., BURNS, N.; FRENCH, C.; GAMBLE, W. L.; MATTOCK, A. H. Stresses in Unbonded Prestressing Tendons at Ultimate: Recommendation. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills, ACI, v. 99, n. 4, p. 518-529, Jul.-Aug. 2002.
- NAAMAN, A. E.; ALKHAIRI, F. M. Stress at Ultimate in Unbonded Post-Tensioned Tendons: Part 1 – Evaluation of the State-of-the-Art. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills, ACI, v.88, n. 5, p.641-650, Sep-Oct. 1991.
- NAAMAN, A. E.; ALKHAIRI, F. M. Stress at Ultimate in Unbonded Post-Tensioned Tendons: Part 2 – Proposed Methodology. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills, ACI, v.88, n. 6, p.683-692, Nov-Dec. 1991.
- NAWY, E. G.; SALEK, F. Moment-Rotation Relationships of Non-Bonded Post-Tensioned I- and T-Beams. **PCI Journal**, Chicago, PCI, v.13, n.4, p.40-55, Aug-Sep. 1968.
- NEHIL, T. E. Rehabilitating Parking Structures with Corrosion-Damaged Button-Headed Post-Tensioning Tendons. **Concrete International**, Farmington Hills, ACI, v. 13, n. 10, p. 66-73, Oct. 1991.
- OWEN, D. R. J.; FIGUEIRAS, J. A. Ultimate Load Analysis of Reinforced Concrete Plates Including Geometric Nonlinear Effects. In: **Finite Elements Software for Plates and Shells**. 1984. Hinton, E.; Owen, D. R. J., Pineridge press, Swansea, 1984.
- PETERSON, A.; PETERSSON, H. On Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, Elsevier, 51, p. 277-286, 1985.
- POZRIKIDIS, C. **Numerical Computation in Science and Engineering**. New York: Oxford University Press, 1998.
- POST-TENSIONING INSTITUTE. Specification for Unbonded Single Strand Tendons. **PCI Journal**, Chicago, PCI, v.30, n.2, Mar-Apr. 1985.
- POST-TENSIONING INSTITUTE. **Post-Tensioned Commercial and Industrial Floors**. Phoenix: PTI, 1991.
- ROSENTHAL, I. Full Scale Test of Continuous Prestressed Hollow-Core Slab. **PCI-Journal**, Chicago, PCI, v. 23, n.3, p.74-82, May-Jun. 1997.
- ROZVANY, G. I. N.; WOODS, J. F. Sudden Collapse of Unbonded Underprestressed Structures. **ACI Journal**, Farmington Hills, ACI, v.66, n.2, p.129-135, Feb. 1969.
- SCHUPACK, M. Corrosion Protection for Unbonded Tendons. **Concrete International**, Farmington Hills, ACI, v. 13, n. 2, p. 51-57, Feb. 1991.
- SCHUPACK, M. Evaluating Buildings with Unbonded Tendons. **Concrete International**, Farmington Hills, ACI, v. 13, n. 10, p. 52-57, Oct. 1991.
- SILVA, C. S. B. **Análise Numérico-Experimental de Elementos Protendidos Tipo Laje-Roth**. 1994. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

- TAM, A.; PANNELL, F. N. The Ultimate Moment of Resistance of Unbonded Partially Prestressed Reinforced Concrete Beams. **Magazine of Concrete Research**, London, Cement and Concrete Association, v.28, n.97, p.203-208, Dec. 1976.
- TAO, X.; DU, G. Ultimate Stress of Unbonded Tendons in Partially Prestressed Concrete Beams. **PCI Journal**, Chicago, PCI, v.30, n.6, p. 72-91, Nov-Dec. 1985.
- ZIENKIEWICZ, O. C. Incremental Displacement in Non-Linear Analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley and Sons, v. 3. n.4, p. 587-592, Oct-Dec.,1971.
- VASCONCELOS, A. C. **Manual Prático para a Correta Utilização dos Aços no Concreto Protendido em Obediência às Normas Atualizadas**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1980.
- WONG, M. B.; TIN-LOI, F. Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures. **Computers & Structures**, London, Pergamon Press, v. 34, n. 4, p. 633-640, Apr., 1990.

Apêndice A – Entrada de Dados no Modelo Numérico

Apêndice A – Entrada de Dados no Modelo Numérico

A entrada dos dados que descrevam uma estrutura no modelo numérico é realizada através de um arquivo de texto, organizado em 35 linhas. Em cada linha, as diversas informações são obrigatoriamente separadas por vírgula, sendo permitido espaços entre os dados. Linhas em branco também podem ser utilizadas. Um exemplo de arquivo de entrada de dados é mostrado no Apêndice B, relativo à viga TD-A3 de Tao & Du (1985).

Linha	Repetição	Descrição
<i>dados gerais do problema</i>		
1a, 1b, 1c, 1d, 1e, 1f, 1g , 1h	1 N	1a – número de nós 1b – número de elementos 1c – regra de integração ao longo do elemento: ‘lobatto’ ou ‘simpson’ (letras minúsculas) 1d – ‘0’ linearidade geométrica ‘1’ não linearidade geométrica 1f – ‘0’ modelos para carregamentos monotônicos; ‘1’ modelos para carregamentos cíclicos 1g – número de casos de carga 1h – ‘0’ concreto armado; ‘1’ concreto protendido
2a, 2b, 2c, 2d, 2e, 2f, 2g, 2h	1 N	impressão de resultados: ‘1’ imprime ‘0’ não imprime 2a – forças e deslocamentos nodais 2b – deslocamentos e deformações ao longo dos elementos 2c – solicitações nas seções 2d – resultados para a armadura de protensão 2e – resultados para a armadura passiva 2f – distribuição de fissuras 2g – propriedades equivalentes atualizadas das seções 2h – resultados para as seções de controle
3a, 3b, 3c, 3d	1 N	3a – número de seções-tipo na estrutura 3b – número de lâminas nas seções transversais 3c – número de concretos-tipo na estrutura 3d – número de materiais-tipo para a armadura passiva na estrutura

dados nodais

4a, 4b, 4c, 4d, 4e, 4f	para cada nó $N = 1a$	4a – número do nó 4b – coordenada x 4c – coordenada y 4d – restrição na direção x: '0' livre, '1' restrito, ou a rigidez do vínculo elástico 4e – restrição na direção y: '0' livre, '1' restrito, ou a rigidez do vínculo elástico 4f – restrição ao giro: '0' livre, '1' restrito, ou rigidez do vínculo elástico
-------------------------------	--------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

dados dos elementos

5a, 5b, 5c, 5d, 5e, 5f, 5f	para cada elemento $N = 1b$	5a – nó inicial 5b – nó final 5c – número de seções no elemento 5d – '0' seção variável ao longo do elemento; '1' seção constante ao longo do elemento 5e – número de módulos de integração no elemento 5f – número de seções do elemento para a apresentação de resultados completos 5g – data de inclusão do elemento (em dias)
6a		6a – em uma só linha: distância do ponto final de cada módulo de integração do elemento ao nó do elemento ($N = 5e$)
7a		7a – em uma só linha: números das seções com resultados completos ($N = 5f$)

distribuição das seções nos elementos

8a	para cada elemento $N = 1b$	se a seção é constante ($4d = 1$): 8a – número da seção-tipo se seção variável ($4d = 0$) 8a – na mesma linha: para cada seção ($N = 5c$), o número da seção-tipo
-----------	--------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

dados dos materiais

9a, 9b, 9c, 9d, 9e, 9f, 9g, 9h, 9i	para cada concreto-tipo $N = 3c$	9a – módulo de elasticidade do concreto (E_c) 9b – resistência do concreto à compressão (f_c) – valor negativo 9c – resistência final do concreto à compressão (f_{cf}) – valor negativo 9d – resistência do concreto à tração (f_{ct}) 9e – deformação relativa ao pico de resistência à compressão (ϵ_{c0}) – valor negativo 9f – deformação final do concreto (ϵ_{cf}) – valor negativo 9g – parâmetro β 9h – parâmetro β_σ 9i – '0' comportamento não linear; '1' comportamento linear
10a, 10b, 10c, 10d		10a – umidade relativa do ar 10b – perímetro da seção exposta ao ar 10c – unidades: 'kncm' ou 'mpa' – letras minúsculas 10d – peso específico do concreto (γ_c)

11a, 11b, 11c	para cada material-tipo N = 3d	11a – módulo de elasticidade (E_s) 11b – deformação de escoamento (ϵ_y) 11c – módulo de elasticidade na fase de strain-hardening (E_{sh})
12a, 12b, 12c, 12d, 12e, 12f	N = 1	12a – módulo de elasticidade do aço de protensão (E_p) 12b – tensão convencional de escoamento (f_{py}) 12c – deformação convencional de escoamento ($\epsilon_{py} = 0,01$) 12d – resistência do aço de protensão 12e – deformação de ruptura do aço de protensão 12f – ‘0’ comportamento não linear; ‘1’ comportamento linear
13a, 13b	N = 1	13a – deformação de ruptura à compressão do concreto (negativa) 13b – deformação de ruptura da armadura passiva

características das seções-tipo

14a	para cada seção-tipo - N= 3a	14a – número da seção
15a		15a – número de módulos de integração na seção
16a		16a – distância do eixo de referência à base da seção
17a, 17b, 17c, 17d, 17e, 17f		para cada módulo N = 15a 17a – distância da lâmina inferior do módulo à base da seção 17b – largura da lâmina inferior do módulo 17c – distância da lâmina superior do módulo à base da seção 17d – largura da lâmina superior do módulo 17e – data de inclusão do módulo de integração da seção 17f – número do concreto-tipo

dados da armadura passiva

18a	para cada elemento – N = 1b	para cada armadura – N = 18a	18a – número de barras de armadura passiva no elemento
19a			19a – material-tipo para armadura
20a, 20b, 20c		20a – área da armadura 20b – distância do centróide da armadura à base da seção 20c – data de inclusão da armadura	
21a		21a – para cada módulo de integração do elemento (N = 5e): ‘0’ armadura existente, ‘1’ armadura inexistente	

dados do carregamento

22a, 22b, 22c, 22d, 22e, 22f, 22g, 22h, 22i	para cada carregamento $N = 1g$	<p>22a – tipo de carregamento: ‘1’ peso-próprio, ‘2’ protensão, ‘3’ protensão + peso-próprio, ‘4’ carga variável, ‘5’ efeitos do tempo, ‘6’ deslocamento de apoio, ‘7’ desprotensão</p> <p>22b - para a carga variável: ‘1’ incrementos de carga, ‘2’ incrementos de deslocamento, demais casos ‘0’</p> <p>22c – critério de tolerância (<1)</p> <p>22d – para a carga variável: número de etapas incrementais, demais casos ‘1’</p> <p>22e – efeitos do tempo (se 22a = 5) ‘1’ apenas fluência, ‘2’ fluência+retração, ‘3’ apenas relaxação, ‘4’ todos os efeitos</p> <p>22e – para incremento de deslocamento: nó da estrutura para a aplicação do incremento de deslocamento, demais casos ‘0’</p> <p>22f – para incremento de deslocamento: grau de liberdade para a aplicação do incremento de deslocamento, demais casos ‘0’</p> <p>22g – número de ciclos</p> <p>22h – data inicial do carregamento</p> <p>22i – data final do carregamento</p>
----------------------------------------------------	------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

dados da protensão

23a	$N = 1$	23a – número de cabos de protensão na estrutura
24a	para cada cabo de protensão $N = 23a$	24a – tipo do cabo com relação à aderência: ‘inicial’, ‘posterior’ ou ‘nao_aderente’
25a		25a – número de elementos pelos quais passa o cabo de protensão
26a, 26b	para cada elemento $N = 25a$	<p>26a – número do elemento</p> <p>26b – na mesma linha: para cara módulo de integração do elemento ($N = 5e$) - ‘1’ para cabo existente, ‘0’ para cabo inexistente</p>
27a, 27b, 27c, 27d	para cada cabo de protensão $N = 23a$	<p>27a – tipo de perfil: ‘reto’, ‘parabola’ ou ‘outro’</p> <p>27b – coeficiente de atrito</p> <p>27c – coeficiente de atrito por curvatura involuntária</p> <p>27d – recuo de ancoragem</p>
28a, 28b, 28c, 28d		<p>28a – área do cabo</p> <p>28b – deformação inicial de protensão</p> <p>28c – data de protensão do cabo</p> <p>28d – extremidade de protensão: ‘E’ esquerdo, ‘D’ direito (maiúsculo)</p>
29		<p>se perfil reto ($27a = \text{‘reto’}$)</p> <p>29a – distância do cabo à base da seção</p> <p>se perfil parabólico ($27a = \text{‘parábola’}$)</p> <p>ver (1)</p> <p>se perfil de outro tipo ($27a = \text{‘outro’}$)</p> <p>29a ($N = 5f$) – distância do cabo à fibra de referência de cada seção</p>

detalhamento incremental da carga variável

30a	para cada carga variável	<u>se a análise for por incremento de carga (22b = 1)</u> 30a - fração da carga de referência a ser aplicada em cada incremento <u>se a análise for incremento de deslocamento (22b = 2)</u> 30a - tamanho do incremento de deslocamento
------------	--------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

dados para o carregamento de referência

31a	N = 1	29a – número de nós carregados
32a, 32b, 32c, 32d	para cada nó carregado N = 31a	32a – número do nó 32b – carga na direção x 32c – carga na direção y 32d – momento fletor
33a	N = 1	33a – número de elementos carregados
34a	para cada elemento carregado N = 33a	34a : número do elemento carregado
35a, 35b, 35c, 35d, 35e, 35f	para cada elemento carregado N = 33a para cada seção N = 5c	35a – carregamento transversal distribuído 35b – carregamento transversal concentrado 35c – carregamento axial distribuído 35d – carregamento axial concentrado 35e – momento fletor concentrado 35f – momento fletor distribuído

(1) - linha 29 para perfil parabólico

29a, 29b, 29c, 29d, 29e, 29f, 29g	para cada cabo para cada elemento protendido (N = 25a)	29a – número de segmentos de parábola para cada segmento de parábola (N = 29a) 29b – número da seção inicial do segmento 29c – distância do cabo à base da seção inicial 29d – número da seção intermediária 29e – distância do cabo à base da seção intermediária 29f – número da seção final da parábola 29g – distância do cabo à base da seção final
------------------------------------------	-----------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Apêndice B – Exemplo de Arquivo de Entrada de Dados

Apêndice B – Exemplo de Arquivo de Entrada de Dados

Arquivo de entrada de dados para a viga TD-A3 de Tao & Du (1985).

2, 1, lobatto, 0, 0, 2, 1	: Linha 1
1,1,1,1,1,1,1,1	: Linha 2
1, 21, 1, 1	: Linha 3
1, 0., 0., 1, 1, 0	: Linha 4
2, 420., 0., 0, 1, 0	: Linha 4
1, 2, 21, 1, 3, 1, 28	: Linha 5
140., 280., 420.	: Linha 6
11	: Linha 7
1	: Linha 8
2618.153, -3.06, -5, .306, -.002, -.01, 1.0, .4, 0	: Linha 9
80, 88, 0, kncm.,. 0000252	: Linha 10
21000, .002047619, 0.	: Linha 11
20500, 155.1, .01, 179, .071, 0	: Linha 12
-.0035,.01	: Linha 13
1	: Linha 14
1	: Linha 15
14.	: Linha 16
0., 16., 28., 16., 28, 1	: Linha 17
1	: Linha 18
1	: Linha 19
2.36, 3., 28	: Linha 20
1, 1, 1	: Linha 21
3, 1, 1E-3, 1, 0, 0, 1, 28, 28	: Linha 22
4, 2, 1E-3, 400, 1, 3, 1, 28, 28	: Linha 22
1	: Linha 23
nao_aderente	: Linha 24
1	: Linha 25
1, 1, 1, 1	: Linha 26
reto, 0., 0., 0.	: Linha 27
1.568, .00402, 28, E	: Linha 28
6	: Linha 29
-.000125	: Linha 30
0	: Linha 31
1	: Linha 33
1	: Linha 34
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, -60, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, -60, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35
0, 0, 0, 0, 0, 0	: Linha 35

Apêndice C – Saída de Resultados do Modelo Numérico

Apêndice C – Saída de Resultados do Modelo Numérico

O modelo numérico produz três arquivos com os resultados da análise. Estes arquivos possuem o mesmo nome do arquivo de entrada de dados e são dotados com as seguintes extensões: ‘.out’, ‘.res’ e ‘.rup’. As principais características dos arquivos de saída de resultados são apresentadas a seguir.

Arquivo ‘.out’

O arquivo ‘.out’ apresenta os resultados gerais da análise. Em seu início, apresentam-se os dados de entrada no modelo numérico, permitindo a conferência das características da estrutura informadas ao modelo. Ao longo do arquivo mostram-se os resultados detalhados para cada etapa incremental de cada caso de carga. A quantidade de informações a serem impressas no arquivo ‘.out’ é opção do usuário, de acordo com a linha 2 do arquivo de entrada de dados.

A descrição dos resultados para cada etapa incremental tem início com a informação do tipo de carregamento correspondente, o número de iterações e a data. Em seguida apresentam-se os deslocamentos nodais, em coordenadas globais, e as forças nodais, em coordenadas locais. A próxima informação diz respeito às deformações e deslocamentos ao longo do elemento finito. Para cada seção transversal, apresentam-se a deformação na fibra de referência, a curvatura, o deslocamento axial, o transversal e o giro.

Os resultados para as forças ao longo do elemento são mostrados em seguida. Para cada seção transversal apresentam-se os esforços normais, cortantes e momentos fletores. Para cada tipo de esforço, mostram-se os resultados totais, os devidos à protensão e os gerados pela carga variável, em que se incluem os efeitos do peso-próprio. Todos estes dados referem-se ao sistema local de coordenadas.

O próximo item corresponde aos resultados para a armadura de protensão. Para cada cabo da estrutura, apresentam-se a deformação total, que inclui a viscosa, a deformação mecânica, que

produz tensões, o módulo de elasticidade e o estado de tensões. Para cada armadura passiva de cada elemento, apresentam-se, em seguida, as deformações em cada seção transversal.

Complementando o arquivo de saída de resultados, apresenta-se, para cada elemento finito, a configuração da distribuição de fissuras e de plastificação no concreto. Para cada lâmina de cada seção transversal, um resultado é informado: '0' para não fissurado, '1' para lâmina fissurada e '-1' para concreto em esmagamento, ou seja, com deformações superiores à de pico. Em seguida, apresentam-se, para cada seção transversal, as propriedades geométricas equivalentes ao final da etapa incremental, homogeneizadas com relação ao módulo inicial do concreto. Por fim, os resultados para cada lâmina de cada seção escolhida na entrada de dados são mostrados, incluindo a deformação total, a mecânica e o módulo de elasticidade do concreto.

Arquivo '.rup'

O arquivo '.rup' apresenta os resultados para a etapa na qual o modelo numérico verificou a ruptura da estrutura, de acordo com os critérios indicados na linha 13 do arquivo de entrada de dados. Além da impressão dos critérios definidos para o concreto e o aço da armadura passiva, apresentam-se os resultados para a etapa de ruptura, no mesmo formato descrito para o arquivo '.out'.

Arquivo '.res'

O arquivo '.res' apresenta os resultados em forma de lista para as seções selecionadas conforme o item 5f do arquivo de entrada de dados. Este formato é adequado para a produção de gráficos através de planilhas eletrônicas. Os dados são apresentados para cada seção de controle, de cada elemento finito, relativamente a cada carregamento. Cada linha corresponde aos resultados de uma etapa incremental, incluindo, em uma tabela, a fração do carregamento de referência, o esforço normal, o cortante, o momento fletor, a deformação na fibra de referência, a curvatura, os deslocamentos e a data. Em outra tabela, mostram-se, para cada etapa incremental, os resultados para as armaduras de protensão, incluindo a deformação, a tensão e o módulo de elasticidade.