

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ANÁLISE COMPARATIVA E OTIMIZAÇÃO DO DESEMPENHO DE VEÍCULOS DE
CORRIDA: UM ESTUDO DE SIMULAÇÃO DE VOLTA

por

Eduardo Miorelli Rech

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Setembro de 2023

CIP - Catalogação na Publicação

Rech, Eduardo Miorelli
ANÁLISE COMPARATIVA E OTIMIZAÇÃO DO DESEMPENHO DE
VEÍCULOS DE CORRIDA: UM ESTUDO DE SIMULAÇÃO DE VOLTA /
Eduardo Miorelli Rech. -- 2023.
20 f.
Orientador: Walter Jesus Paucar Casas.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto
Alegre, BR-RS, 2023.

1. Simulação de Tempo de Volta. 2. Lap Time
Simulation (LTS). 3. Otimização Quadrática. 4.
Otimização de Trajetória. 5. Dinâmica Veicular. I.
Casas, Walter Jesus Paucar, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os
dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Eduardo Miorelli Rech

ANÁLISE COMPARATIVA E OTIMIZAÇÃO DO DESEMPENHO DE VEÍCULOS DE
CORRIDA: UM ESTUDO DE SIMULAÇÃO DE VOLTA

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas (Presidente)

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Prof. Dr. Daniel Milbrath De Leon

Porto Alegre, Setembro de 2023

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a meus queridos pais, Ricardo e Elisete, por todo o amor, apoio incondicional e encorajamento ao longo desta jornada. À minha família, amigos e à minha namorada, Isabelle, por estarem sempre ao meu lado, proporcionando conforto e estímulo. Também sou extremamente grato ao meu orientador, Walter Jesus Paucar Casas, pela oportunidade, orientação e paciência durante o desenvolvimento deste trabalho. Suas contribuições foram fundamentais para a realização deste projeto. Obrigado a todos por fazerem parte deste importante capítulo da minha vida.

RECH, Eduardo Miorelli. **Análise comparativa e otimização do desempenho de veículos de corrida: um estudo de simulação de volta**. 2023. 20f. Monografia de Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2023.

RESUMO

Aprimorar o desempenho de veículos de corrida é um desafio fundamental na indústria automobilística. Para atingir esse objetivo, é essencial explorar o máximo potencial de um carro de corrida e compreender o seu comportamento. Nesse sentido, as simulações de corrida surgem como ferramentas valiosas durante o estágio de projeto, fornecendo informações essenciais para descrever os fenômenos dinâmicos. Além disso, a simulação computacional oferece vantagens econômicas, permitindo atividades de alto custo, como ajustes de suspensão, configuração de dispositivos aerodinâmicos e demais ajustes, serem realizadas e testadas em um ambiente virtual. Essa abordagem também auxilia na identificação da configuração ideal do veículo para obter os melhores tempos de volta em diferentes circuitos. No entanto, para projetar um modelo de piloto de corrida eficaz, é necessário considerar não apenas o planejamento da trajetória, mas também a dinâmica do veículo. A otimização das entradas do piloto, como marcha, freio e acelerador, baseiam-se na compreensão de como essas entradas afetam o comportamento dinâmico do veículo. Por meio de simulações computacionais, é possível levar em conta o desempenho do veículo, aprimorando ainda mais os tempos de volta e aproximando o comportamento do piloto real. Portanto, o presente estudo aborda a relação entre trajetórias de corrida e velocidades de veículos em pistas, gerando cinco trajetórias distintas via programação quadrática. A modelagem incorpora detalhes da *driveline*, resultando em perfis de velocidade que não apenas calculam tempos de volta, mas também avaliam acelerações e parâmetros críticos. Esses perfis comparativos revelam como as trajetórias influenciam o comportamento dinâmico dos veículos, sendo flexíveis ao analisar técnicas de pilotagem como *"lift and coast"*. Ao contextualizar essa influência, o estudo contribui para compreender o desempenho em pistas, oferecendo informações para pilotos e equipes, destacando a importância de análises computacionais e simulações para otimizar o desempenho veicular em ambientes competitivos.

Palavras-chave: simulação de tempo de volta, *Lap Time Simulation (LTS)*, trajetórias de corrida, otimização quadrática, otimização de trajetória, modelagem veicular, desempenho de veículos, técnicas de pilotagem.

RECH, Eduardo Miorelli. **Análise comparativa e otimização do desempenho de veículos de corrida: um estudo de simulação de volta**. 2023. 20f. Mechanical Engineering End of Course Monography – Mechanical Engineering degree, The Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2023.

ABSTRACT

Enhancing the performance of racing vehicles is a fundamental challenge in the automotive industry. To achieve this goal, it is essential to explore the maximum potential of a race car and comprehend its behavior. In this regard, race simulations emerge as valuable tools during the design phase, providing crucial insights into dynamic phenomena. Moreover, computational simulation offers economic advantages, enabling high-cost activities such as suspension adjustments, aerodynamic device configurations, and other tuning to be conducted and tested in a virtual environment. This approach also aids in identifying the optimal vehicle setup to achieve the best lap times on different circuits. However, designing an effective race driver model requires considering not only path planning but also vehicle dynamics. Optimizing driver inputs such as gear shifting, braking, and acceleration is based on understanding how these inputs impact the vehicle's dynamic behavior. Through computational simulations, it is possible to account for vehicle performance, further improving lap times and approximating real driver behavior. Thus, the current study addresses the relationship between race trajectories and vehicle speeds on tracks, generating five distinct trajectories through quadratic optimization. The modeling incorporates driveline details, resulting in velocity profiles that not only calculate lap times but also evaluate accelerations and critical parameters. These comparative profiles reveal how trajectories influence vehicle dynamics, remaining flexible in analyzing driving techniques like "lift and coast". By contextualizing this influence, the study contributes to comprehending track performance, offering insights for drivers and teams, underscoring the significance of computational analyses and simulations to optimize vehicle performance in competitive environments.

Keywords: lap time simulation (LTS), race trajectories, quadratic optimization, trajectory optimization, vehicle modeling, vehicle performance, driving techniques.

NOMENCLATURA

Símbolos	Descrição	Unidade
$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	Conjunto de parâmetros de projeto	[-]
$f(\mathbf{x})$	Função objetivo	[-]
c	Constante	[-]
$g_i(\mathbf{x})$	Função de vetor para o i-ésimo segmento	[-]
$g_j(\mathbf{x})$	Função de vetor para o j-ésimo segmento	[-]
$i = (1, \dots, n)$	Número de pontos	[-]
x_l	Limite inferior	[-]
x_u	Limite Superior	[-]
A	Matriz de coeficientes de inequações lineares	[-]
b	Matriz de coeficientes de inequações lineares	[-]
A_{eq}	Matriz de coeficientes de inequações lineares	[-]
b_{eq}	Matriz de coeficientes de inequações lineares	[-]
H	Matriz Hessiana	[-]
f	Matriz associada aos fatores lineares	[-]
f_t	Força resultante de tração	[N]
f_b	Força resultante de frenagem	[N]
μ	Coefficiente de atrito	[-]
P	Força peso do veículo	[N]
ρ	Densidade do ar	[kg/m ³]
A_f	Área frontal	[m ²]
C_x	Coefficiente de <i>downforce</i>	[-]
v	Velocidade do veículo	[m/s]
C_d	Coefficiente de arrasto	[-]
f_n	Força lateral	[N]
$v_{critica}$	Velocidade crítica	[m/s]
m	Massa do veículo	[kg]
$k(s)$	Curvatura associada ao segmento	[1/m]
f_{tpneus}	Força de tração exercida pelos pneus	[N]
f_{tp}	Força de tração disponível	[N]
f_{bpneus}	Força de frenagem exercida pelos pneus	[N]
f_{bp}	Força de frenagem disponível	[N]
ρ_i, \dots, ρ_n	Constantes resultantes da otimização	[-]
P_i, \dots, P_n	Pontos da trajetória associados às coordenadas x e y	[m]
P_i^L, \dots, P_n^L	Pontos internos associados às coordenadas x e y	[m]
P_i^R, \dots, P_n^R	Pontos externos associados às coordenadas x e y	[m]
$cost$	Função custo	[m ²]
Δx_i	Varição da coordenada x para o i-ésimo segmento	[m]
Δy_i	Varição da coordenada y para o i-ésimo segmento	[m]
H_{ix}	Matriz Hessiana para os valores de x do i-ésimo segmento.	[m ²]
H_{iy}	Matriz Hessiana para os valores de y do i-ésimo segmento.	[m ²]
f_{ix}	Matriz com os termos lineares para os valores de x do i-ésimo segmento.	[m ²]

f_{iy}	Matriz com os termos lineares para os valores de y do i -ésimo segmento.	[m ²]
Δx_{i0}	Varição da coordenada x interna para o i -ésimo segmento	[m]
Δy_{i0}	Varição da coordenada y interna para o i -ésimo segmento	[m]
v_{i+1}	Velocidade na saída do i -ésimo segmento	[m/s]
v_i	Velocidade na entrada do i -ésimo segmento	[m/s]
$Fluxo(rpm)$	Fluxo de combustível	[kg/hora]

Abreviaturas e acrônimos

rpm	Rotações por minuto
LTS	Lap Time Simulation (Simulação de Tempo de Volta)
LP	Linear Programming (Programação Linear)
QP	Quadratic Programming (Programação Quadrática)
NP	Nonlinear Programming (Programação Não-Linear)
FIA	Federation Internationale de l'Automobile (Federação Internacional de Automobilismo)

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	iv
RESUMO	v
ABSTRACT	vi
NOMENCLATURA.....	vii
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Generalidades.....	1
1.2 Objetivos.....	1
1.2.1 Objetivo Geral	1
1.2.2 Objetivos Específicos	1
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	1
2.1 Otimização	1
2.1.1 Programação Quadrática.....	2
2.2 Dinâmica veicular	3
2.2.1 Forças Limitadas pelo Atrito	3
2.2.2 Forças Limitadas pelo Torque	4
3 METODOLOGIA.....	4
3.1 Geração da Trajetória.....	4
3.1.1 Trajetória Média	6
3.1.2 Mínima Distância	6
3.1.3 Mínima Curvatura	7
3.1.4 Mínimo Jerk.....	8
3.2 Cálculo das Velocidades	10
3.2.1 Aceleração	11
3.2.2 Desaceleração	11
3.2.3 Velocidade Final.....	11
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	11
4.1 Veículo Utilizado	11
4.1.1 Motor	12
4.1.2 Transmissão	12
4.1.3 Pneus.....	12
4.1.4 Aerodinâmica.....	13
4.2 Tempos de Volta	13
4.2.1 Trajetória Média	13
4.2.2 Traçado Mínimo	13
4.2.3 Mínima curvatura	14

4.2.4	Mínimo Jerk.....	14
4.2.5	Combinado	14
4.3	Comparação de Trajetórias	14
4.4	Consumo de Combustível.....	14
4.4.1	<i>Lift and Coast</i>	15
5	CONCLUSÕES	15
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	16
	APÊNDICE	17

1 INTRODUÇÃO

1.1 Generalidades

Aprimorar o desempenho de veículos de corrida é um desafio fundamental na indústria automobilística. A otimização do desempenho dos veículos, levando em consideração a interface veículo e piloto, é um dos principais objetivos da engenharia de performance, conforme (Santos, 2022). Nesse contexto, a análise da dinâmica veicular desempenha um papel crucial na busca por melhorias. Através de simulações numéricas, é possível realizar estimativas do comportamento do veículo em diferentes cenários. Uma das simulações para veículos de alto desempenho é a Simulação de Tempo de Volta (*Lap Time Simulation* ou LTS), que proporciona informações importantes para o ajuste e a concepção de veículos, reduzindo o tempo e o custo envolvidos nesses processos, conforme (Santos, 2018).

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia de comparação de desempenho de veículos em pista, analisando e comparando os resultados obtidos em diferentes cenários. Através dessa análise, será avaliado e identificado as possíveis vantagens e desvantagens de cada configuração, visando otimizar o desempenho dos veículos em termos de tempo de volta.

1.2.2 Objetivos Específicos

- a) Desenvolver um algoritmo que permita calcular trajetórias com diferentes parâmetros.
- b) Desenvolver um algoritmo que permita calcular o desempenho de veículos conforme dados de entrada.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Otimização

De acordo com a documentação do MATLAB (2023), técnicas de otimização são usadas para encontrar um conjunto de parâmetros, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, que possam ser definidos como ótimos sob algum aspecto. Em um caso simples, esse processo pode envolver a minimização ou maximização de alguma característica do sistema que depende de \mathbf{x} . Em uma formulação mais avançada, a função objetivo $f(\mathbf{x})$ a ser minimizada ou maximizada, pode estar sujeita a restrições em uma ou mais das seguintes formas, restrições de igualdade, restrições de desigualdade e limites dos parâmetros. A notação geral do problema é estabelecida conforme a Equação 1.

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) = c, \forall i \because i = (1, \dots, n) \\ g_j(\mathbf{x}) \leq c, \forall j \because j = (1, \dots, m) \\ x_l \leq \mathbf{x} \leq x_u \end{cases} \quad (1)$$

Onde:

c = Constante qualquer.

\mathbf{x} = Vetor de comprimento n das variáveis de projeto.

x_l = Limite inferior.

x_u = Limite superior.

$f(\mathbf{x})$ = Função objetivo que retorna um valor escalar.

$g_i(\mathbf{x})$ = Função que retorna um vetor de comprimento n contendo os valores das restrições de igualdades avaliadas em \mathbf{x} .

$g_j(\mathbf{x})$ = Função que retorna um vetor de comprimento n contendo os valores das restrições de desigualdades avaliadas em \mathbf{x} .

Conforme Pereira (2002) existem diferentes tipos de problemas de otimização, e cada um requer abordagens específicas para sua resolução. Quando tanto a função objetivo quanto as restrições são funções lineares em relação às variáveis de projeto, o problema é conhecido como um problema de Programação Linear (LP). A Programação Quadrática (QP) refere-se à minimização ou maximização de uma função objetivo quadrática, sujeita a restrições lineares. Já quando a função objetivo e as restrições podem ser funções não lineares das variáveis de projeto, chama-se Programação Não Linear (NP). Resolver um problema NP geralmente exige a adoção de procedimentos iterativos para estabelecer uma direção de busca em cada iteração principal. A solução é frequentemente obtida ao resolver um subproblema LP, QP ou sem restrições em cada iteração.

De modo geral, a escolha da abordagem para resolver problemas de otimização depende da natureza das funções envolvidas e das restrições do problema em questão. Problemas de Programação Linear (LP) e Programação Quadrática (QP) podem ser tratados com procedimentos bem estabelecidos, enquanto problemas de Programação Não Linear (NP) exigem um processo iterativo e mais complexo.

2.1.1 Programação Quadrática

Conforme Bradley (1997) a Programação Quadrática (QP) é uma área da otimização que se concentra na resolução de problemas que envolvem a minimização ou maximização de uma função objetivo quadrática. Nesses problemas, a função objetivo tem uma forma geral de soma de termos quadráticos nas variáveis de projeto, podendo conter também termos lineares adicionais.

Para resolver problemas de Programação Quadrática, são empregados algoritmos e técnicas específicas, como o Método do Gradiente, o Método dos Multiplicadores de Lagrange e o Método do Ponto Interior, entre outros. Essas abordagens permitem encontrar soluções aproximadas ou exatas para os problemas.

A programação quadrática é formulada conforme a Equação 2.

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T H \mathbf{x} + f^T \mathbf{x} \begin{cases} A \cdot \mathbf{x} \leq b, \\ A_{eq} \cdot \mathbf{x} = b_{eq}, \\ x_l \leq \mathbf{x} \leq x_u. \end{cases} \quad (2)$$

Onde:

\mathbf{x} = Vetor de variáveis a serem otimizadas.

H = Matriz Hessiana.

f = Vetor associado aos fatores lineares.

A = Vetor de coeficientes das restrições de desigualdades lineares.

b = Vetor de coeficientes das restrições de desigualdades lineares.
 A_{eq} = Matriz de coeficientes das restrições de igualdades lineares.
 b_{eq} = Matriz de coeficientes das restrições de igualdades lineares.

2.2 Dinâmica veicular

O modelo de massa pontual, conforme Gillespie (1992) é uma representação simplificada para a dinâmica veicular longitudinal. Essa abordagem é útil para análises básicas do comportamento do veículo em movimento. O veículo é tratado como um objeto rígido, e a distribuição de massa e as características individuais das rodas não são consideradas. A massa pontual é localizada no centro de massa do veículo.

A partir do modelo de massa pontual, é possível aplicar a Segunda Lei de Newton, para analisar a dinâmica do veículo. Ela relaciona a força resultante atuando no veículo com a massa total e a aceleração. Embora o modelo de massa pontual seja uma simplificação, ele fornece uma base inicial para entender o comportamento do veículo em termos de aceleração, frenagem, curvas em linha reta e outros aspectos básicos.

2.2.1 Forças Limitadas pelo Atrito

Levando em consideração um veículo simplificado como uma massa pontual, movendo-se ao longo de um percurso definido pelo comprimento do segmento e pela curvatura em relação a esse comprimento, segundo Hakewill (2000), as expressões para a força resultante de tração, a força de frenagem e a força lateral, quando limitado pelo atrito, são formuladas de acordo com as Equações 3, 4 e 5, respectivamente.

$$f_t = \sqrt{\left(\mu \left(P + \frac{1}{2} \rho A_f C_x v^2\right)\right)^2 - f_n^2} \quad (3)$$

$$f_b = -\sqrt{\left(\mu \left(P + \frac{1}{2} \rho A_f C_x v^2\right)\right)^2 - f_n^2} \quad (4)$$

$$f_n = \frac{mv^2}{R} \quad (5)$$

Onde:

μ = Coeficiente de atrito (1.7, conforme Vehicle Physics (2023)).

P = Força peso do veículo. [N]

ρ = Densidade do ar (1.225, conforme Atmosfera Padrão Internacional). [kg/m³]

A_f = Área frontal. [m²]

C_x = Coeficiente de sustentação.

v = Velocidade do veículo. [m/s]

m = Massa do veículo [kg].

R = Raio de curvatura. [m]

Essas equações são modeladas levando em consideração a aderência gerada pelo peso e a *downforce*, ou força de sustentação, para a força lateral (Eq. 5).

A velocidade crítica, conforme Velenis (2005), é definida como a velocidade máxima que o veículo pode realizar uma curva com determinada curvatura, ou seja, quando $f_t = 0$ ou $f_b = 0$ e a força lateral é igual a aderência disponível, ela é descrita conforme Equação 6.

$$v_{crítica} = \sqrt{\frac{\mu \left(P + \frac{1}{2} \rho A_f C_x v^2 \right)}{\frac{m}{R}}} \quad (6)$$

As equações elaboradas nesta seção destacam as forças de aderência potencialmente alcançáveis pelo veículo, representando seu desempenho no limite máximo. No entanto, esse cenário é real apenas em circunstâncias particulares, tais como frenagens intensas, curvas acentuadas e durante manobras em baixas velocidades. Em grande parte do tempo, a restrição que influencia o veículo é o torque fornecido pela *driveline*. Este aspecto será abordado na próxima seção.

2.2.2 Forças Limitadas pelo Torque

Quando o veículo é limitado pelo torque sua performance é restrita pela quantidade de força rotacional que o motor pode produzir sobre os pneus. O torque determina a capacidade de aceleração do veículo. Existem diversas razões pelas quais um veículo pode ser limitado pelo torque, e algumas delas incluem as características específicas do motor, a configuração da transmissão e as relações de marcha.

A força de tração para o veículo depende da força que chega nos pneus e da força de arrasto, segundo Hakewill (2000), conforme Equação 7.

$$f_{tp} = f_{tpneus} - \frac{1}{2} \rho A C_d v^2 \quad (7)$$

Onde:

f_{tpneus} = Força de tração proveniente da *driveline*. [N]

A força de frenagem para o veículo depende da força que chega nos pneus devido a frenagem, no presente trabalho ela é modelada considerando a força de frenagem 99% da força de aderência disponível, pois nos 100% os pneus deslizam, conforme Equação 8.

$$f_{bp} = -0.99 \sqrt{\left(\mu \left(P + \frac{1}{2} \rho A_f C_x v^2 \right) \right)^2 - f_n^2} \quad (8)$$

3 METODOLOGIA

3.1 Geração da Trajetória

As trajetórias são obtidas através da resolução de um problema de programação quadrática no MATLAB, utilizando a função *quadprog*. Ela retorna os valores de ρ_i, \dots, ρ_n , possibilitando o cálculo dos valores dos pontos P_i, \dots, P_n associados, conforme Equação 9. A Figura 1 permite a visualização dos termos.

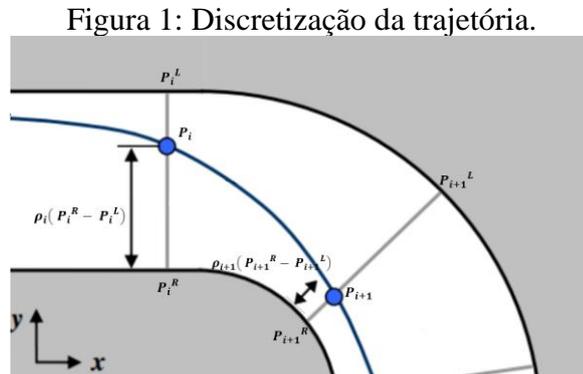
$$P_i = P_i^L + \rho_i (P_i^R - P_i^L), \quad \forall i \therefore i = (1, \dots, n) \quad (9)$$

Onde:

P_i^L = Coordenada do ponto interno da trajetória. [m]

P_i^R = Coordenada do ponto externo da trajetória. [m]

ρ_i = Variável relacionada a posição entre os pontos externos e internos.

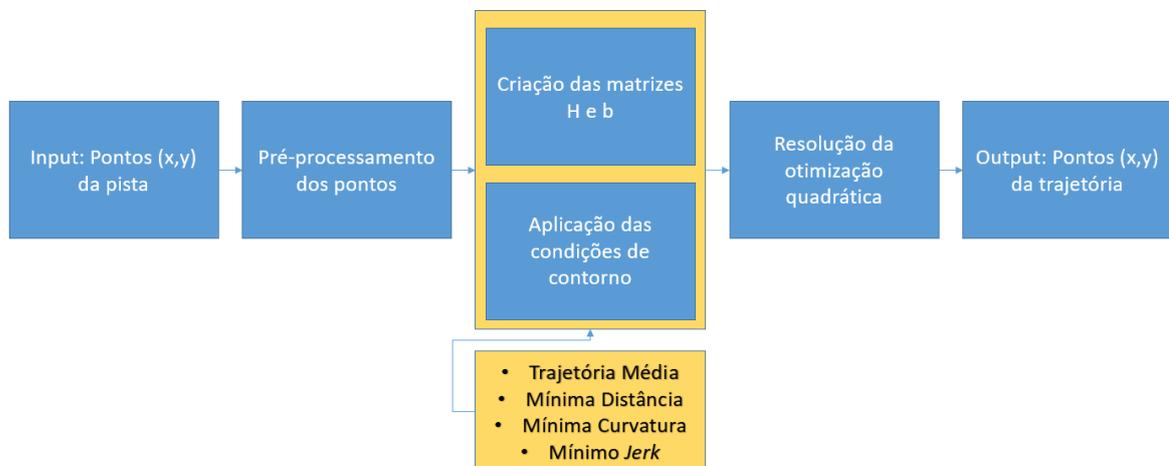


Fonte: Adaptado de Braghin (2008).

São gerados cinco tipos de trajetórias, a trajetória média, que corresponde ao veículo percorrendo a linha central da pista, a mínima trajetória, que corresponde a trajetória de menor distância entre o início e o fim da pista, a trajetória de máxima curvatura, ou mínimo raio, como um é inversamente proporcional ao outro, de mínimo *jerk*, onde o *jerk* corresponde à taxa de variação da aceleração e, por fim, são combinadas duas trajetórias, a de mínimo *jerk* com a trajetória de mínima curvatura. É testado uma técnica de pilotagem, a técnica de *lift and coast*, sob a trajetória combinada.

O algoritmo para a geração da trajetória segue o esquema descrito na Figura 2. Inicialmente, o programa recebe os pontos centrais da pista como entrada e realiza um pré-processamento desses pontos para gerar os limites internos e externos da pista. Em seguida, são criadas as matrizes *Hessianas* (H) referentes aos termos quadráticos e as matrizes (b) referentes aos termos lineares. Aplicam-se, então, as restrições necessárias para a otimização quadrática, sendo elas iguais para as 4 trajetórias. Com as etapas anteriores concluídas, é realizado o processo de otimização quadrática para gerar os pontos da trajetória otimizada.

Figura 2: Algoritmo de geração da trajetória.



Fonte: Adaptado de Bharat (2022).

3.1.1 Trajetória Média

A função de custo para a trajetória central penaliza a distância entre o ponto P_i , conforme Equação 9 e a função $g(i)$, segundo Gao (2020), conforme Equação 10, onde ela representa o ponto médio dos segmentos.

$$g(i) = P_i^L + 0.5(P_i^R - P_i^L) \quad (10)$$

Combinando a Equação 9 e 10, elevando ao quadrado e somando os intervalos escreve-se a função custo conforme Equação 11.

$$cost = \sum_{i=1}^n (P_i - g(i))^2 \quad (11)$$

Desenvolvendo a subtração tem-se os termos para x e y , conforme Equação 12.

$$cost = \sum_{i=1}^n (-\Delta x_i \rho_i + \Delta x_i 0.5)^2 + \sum_{i=1}^n (-\Delta y_i \rho_i + \Delta y_i 0.5)^2 \quad (12)$$

Onde:

Δx_i = Variação da coordenada x do segmento analisado. [m]

Δy_i = Variação da coordenada y do segmento analisado. [m]

A função custo pode ser então reescrita para a notação de programação quadrática, conforme Equação 13.

$$cost = \sum_{i=1}^n [\rho_i^T (H_{ix} + H_{iy}) \rho_i + (f_{ix} + f_{iy}) \rho_i] \quad (13)$$

Onde:

H_{ix} = Matriz Hessiana para os valores de x do segmento analisado. [m²]

H_{iy} = Matriz Hessiana para os valores de y do segmento analisado. [m²]

f_{ix} = Matriz com os termos lineares para os valores de x do segmento analisado. [m²]

f_{iy} = Matriz com os termos lineares para os valores de y do segmento analisado. [m²]

Onde as matrizes Hessianas e as matrizes lineares para x e y são respectivamente $H_{ix} = [\Delta x_i^2]$, $H_{iy} = [\Delta y_i^2]$, $f_{ix} = [\Delta x_i^2]$ e $f_{iy} = [\Delta y_i^2]$.

Como o ponto de início é igual ao ponto de chegada, a soma entre o primeiro e o último valor de ρ_i é 0, então os termos da matriz A_{eq} são todos nulos exceto o primeiro que é 1 e o último que é -1, $A_{eq} = [+1 \dots -1]_{1 \times n}$, e $b_{eq} = 0$.

3.1.2 Mínima Distância

A função de custo para a mínima distância, conforme Braghin (2008) e Rodriguez (2021), penaliza a distância entre os pontos P_{i+1} , conforme Equação 14 e P_i , conforme Equação 15.

$$P_{i+1} = P_{i+1}^L + \rho_{i+1}(P_{i+1}^R - P_{i+1}^L) \quad (14)$$

$$P_i = P_i^L + \rho_i(P_i^R - P_i^L) \quad (15)$$

Combinando a Equação 14 e 15, elevando ao quadrado e somando os intervalos escreve-se a função custo conforme Equação 16.

$$cost = \sum_{i=1}^n (P_{i+1} - P_i)^2 \quad (16)$$

Desenvolvendo a subtração tem-se os termos para x e y , conforme Equação 17.

$$cost = \sum_{i=1}^n (-\Delta x_i \rho_i + \Delta x_{i+1} \rho_{i+1} + \Delta x_{i,0})^2 + \sum_{i=1}^n (-\Delta y_i \rho_i + \Delta y_{i+1} \rho_{i+1} + \Delta y_{i,0})^2 \quad (17)$$

Onde:

$\Delta x_{i,0}$ = Variação da coordenada x interna do segmento analisado. [m]

$\Delta y_{i,0}$ = Variação da coordenada y interna do segmento analisado. [m]

A função custo pode ser então reescrita para a notação de programação quadrática, conforme Equação 13, onde as matrizes Hessianas e as matrizes lineares para x e y são respectivamente.

$$H_{ix} = \begin{bmatrix} \Delta x_i^2 & -\Delta x_i \Delta x_{i+1} \\ -\Delta x_i \Delta x_{i+1} & \Delta x_{i+1}^2 \end{bmatrix}, H_{iy} = \begin{bmatrix} \Delta y_i^2 & -\Delta y_i \Delta y_{i+1} \\ -\Delta y_i \Delta y_{i+1} & \Delta y_{i+1}^2 \end{bmatrix},$$

$$f_{ix} = \begin{bmatrix} -2\Delta x_{i,0} \Delta x_i \\ +2\Delta x_{i,0} \Delta x_{i+1} \end{bmatrix} \text{ e } f_{iy} = \begin{bmatrix} -2\Delta y_{i,0} \Delta y_i \\ +2\Delta y_{i,0} \Delta y_{i+1} \end{bmatrix}.$$

3.1.3 Mínima Curvatura

A função de custo para a trajetória de mínima curvatura, conforme Braghin (2008) e Rodriguez (2021), penaliza a diferença das distâncias entre os pontos P_{i+2} e P_{i+1} e os pontos P_{i+1} e P_i , minimizando a curvatura. A notação dos pontos é descrita conforme Equações 18, 19 e 20.

$$P_{i+2} = P_{i+2}^L + \rho_{i+2}(P_{i+2}^R - P_{i+2}^L) \quad (18)$$

$$P_{i+1} = P_{i+1}^L + \rho_{i+1}(P_{i+1}^R - P_{i+1}^L) \quad (19)$$

$$P_i = P_i^L + \rho_i(P_i^R - P_i^L) \quad (20)$$

Combinando as Equações 18, 19 e 20, elevando ao quadrado e somando os intervalos escreve-se a função custo conforme Equação 21.

$$cost = \sum_{i=1}^n ((P_{i+2} - P_{i+1}) - (P_{i+1} - P_i))^2 \quad (21)$$

Continuando o desenvolvimento, escreve-se a Equação 22.

$$cost = \sum_{i=1}^n (P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i)^2 \quad (22)$$

Escrevendo a função custo em termos matriciais para x e y tem-se a Equação 23.

$$\begin{aligned} cost = & \sum_{i=1}^n \left([1 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta x_i & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta x_{i+2} \end{bmatrix} \right. \\ & + [1 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta x_{i,0} \\ \Delta x_{i+1,0} \\ \Delta x_{i+2,0} \end{bmatrix} \left. \right)^2 \\ & + \sum_{i=1}^n \left([1 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta y_i & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta y_{i+2} \end{bmatrix} \right. \\ & + [1 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta y_{i,0} \\ \Delta y_{i+1,0} \\ \Delta y_{i+2,0} \end{bmatrix} \left. \right)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

A função custo pode ser então reescrita para a notação de programação quadrática, conforme Equação 13, onde as matrizes Hessianas e as matrizes lineares para x e y são respectivamente.

$$\begin{aligned} H_{ix} &= \begin{bmatrix} \Delta x_i^2 & -2\Delta x_i \Delta x_{i+1} & \Delta x_i \Delta x_{i+2} \\ -2\Delta x_i \Delta x_{i+1} & 4\Delta x_{i+1}^2 & -2\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+2} \\ \Delta x_i \Delta x_{i+2} & -2\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+2} & \Delta x_{i+2}^2 \end{bmatrix}, \\ H_{iy} &= \begin{bmatrix} \Delta y_i^2 & -2\Delta y_i \Delta y_{i+1} & \Delta y_i \Delta y_{i+2} \\ -2\Delta y_i \Delta y_{i+1} & 4\Delta y_{i+1}^2 & -2\Delta y_{i+1} \Delta y_{i+2} \\ \Delta y_i \Delta y_{i+2} & -2\Delta y_{i+1} \Delta y_{i+2} & \Delta y_{i+2}^2 \end{bmatrix}, \\ f_{ix} &= \begin{bmatrix} 2(\Delta x_{i+2,0} - 2\Delta x_{i+1,0} + \Delta x_{i,0})\Delta x_i \\ -4(\Delta x_{i+2,0} - 2\Delta x_{i+1,0} + \Delta x_{i,0})\Delta x_{i+1} \\ 2(\Delta x_{i+2,0} - 2\Delta x_{i+1,0} + \Delta x_{i,0})\Delta x_{i+2} \end{bmatrix} e \\ f_{iy} &= \begin{bmatrix} 2(\Delta x_{i+2,0} - 2\Delta x_{i+1,0} + \Delta x_{i,0})\Delta y_i \\ -4(\Delta x_{i+2,0} - 2\Delta x_{i+1,0} + \Delta x_{i,0})\Delta y_{i+1} \\ 2(\Delta x_{i+2,0} - 2\Delta x_{i+1,0} + \Delta x_{i,0})\Delta y_{i+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.1.4 Mínimo Jerk

A função de custo para a trajetória de mínimo *jerk*, conforme Gao (2020), mínima variação da aceleração, penaliza a diferença entre a distância dos pontos P_{i+3} e P_{i+2} com relação

aos pontos P_{i+2} e P_{i+1} e os pontos P_{i+1} e P_i . Garantindo assim que a derivada até a segunda ordem da trajetória seja contínua e suave. A notação dos pontos é descrita conforme Equações 24, 25, 26 e 27.

$$P_{i+3} = P_{i+3}^L + \rho_{i+3}(P_{i+3}^R - P_{i+3}^L) \quad (24)$$

$$P_{i+2} = P_{i+2}^L + \rho_{i+2}(P_{i+2}^R - P_{i+2}^L) \quad (25)$$

$$P_{i+1} = P_{i+1}^L + \rho_{i+1}(P_{i+1}^R - P_{i+1}^L) \quad (26)$$

$$P_i = P_i^L + \rho_i(P_i^R - P_i^L) \quad (27)$$

Combinando as Equações 24, 25, 26 e 27, elevando ao quadrado e somando os intervalos escreve-se a função custo conforme Equação 28.

$$cost = \sum_{i=1}^n ((P_{i+3} - P_{i+2}) - (P_{i+2} - P_{i+1}) - (P_{i+1} - P_i))^2 \quad (28)$$

Continuando o desenvolvimento, escreve-se a Equação 29.

$$cost = \sum_{i=1}^n (-P_{i+2} + 3P_{i+2} - 3P_{i+1} + P_i)^2 \quad (29)$$

Escrevendo a função custo em termos matriciais para x e y tem-se a Equação 30.

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \left([-1 \quad 3 \quad -3 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta x_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x_{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta x_{i+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta x_{i+3} \end{bmatrix} \right. \\ &+ [-1 \quad 3 \quad -3 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta x_{i,0} \\ \Delta x_{i+1,0} \\ \Delta x_{i+2,0} \\ \Delta x_{i+3,0} \end{bmatrix} \left. \right)^2 \\ &+ \sum_{i=1}^n \left([-1 \quad 3 \quad -3 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta y_{i+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta y_{i+3} \end{bmatrix} \right. \\ &+ [-1 \quad 3 \quad -3 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta y_{i,0} \\ \Delta y_{i+1,0} \\ \Delta y_{i+2,0} \\ \Delta y_{i+3,0} \end{bmatrix} \left. \right)^2 \end{aligned} \quad (30)$$

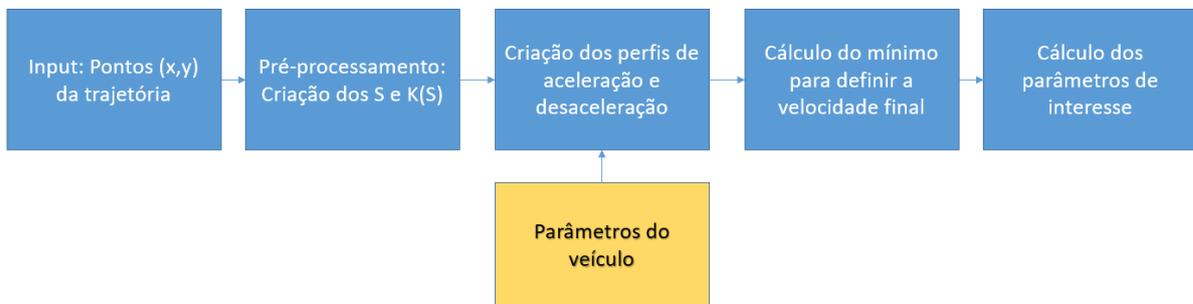
A função custo pode ser então reescrita para a notação de programação quadrática, conforme Equação 13, onde as matrizes Hessianas e as matrizes lineares para x e y são respectivamente.

$$\begin{aligned}
H_{ix} &= \begin{bmatrix} \Delta x_i^2 & -3\Delta x_i \Delta x_{i+1} & +3\Delta x_i \Delta x_{i+2} & -\Delta x_i \Delta x_{i+3} \\ -3\Delta x_i \Delta x_{i+1} & 9\Delta x_{i+1}^2 & -9\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+2} & +3\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+3} \\ +3\Delta x_i \Delta x_{i+2} & -9\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+2} & 9\Delta x_{i+2}^2 & -9\Delta x_{i+2} \Delta x_{i+3} \\ -\Delta x_i \Delta x_{i+3} & +3\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+3} & -9\Delta x_{i+2} \Delta x_{i+3} & \Delta x_{i+3}^2 \end{bmatrix}, \\
H_{iy} &= \begin{bmatrix} \Delta y_i^2 & -3\Delta x_i \Delta x_{i+1} & +3\Delta x_i \Delta x_{i+2} & -\Delta x_i \Delta x_{i+3} \\ -3\Delta x_i \Delta x_{i+1} & 9\Delta x_{i+1}^2 & -9\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+2} & +3\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+3} \\ +3\Delta x_i \Delta x_{i+2} & -9\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+2} & 9\Delta x_{i+2}^2 & -9\Delta x_{i+2} \Delta x_{i+3} \\ -\Delta x_i \Delta x_{i+3} & +3\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+3} & -9\Delta x_{i+2} \Delta x_{i+3} & \Delta x_{i+3}^2 \end{bmatrix}, \\
f_{ix} &= \begin{bmatrix} -2(-\Delta x_{i,0} + 3\Delta x_{i+1,0} - 3\Delta x_{i+2,0} + \Delta x_{i+3,0})\Delta x_i \\ 6(-\Delta x_{i,0} + 3\Delta x_{i+1,0} - 3\Delta x_{i+2,0} + \Delta x_{i+3,0})\Delta x_{i+1} \\ -6(-\Delta x_{i,0} + 3\Delta x_{i+1,0} - 3\Delta x_{i+2,0} + \Delta x_{i+3,0})\Delta x_{i+2} \\ 2(-\Delta x_{i,0} + 3\Delta x_{i+1,0} - 3\Delta x_{i+2,0} + \Delta x_{i+3,0})\Delta x_{i+3} \end{bmatrix} e \\
f_{iy} &= \begin{bmatrix} -2(-\Delta y_{i,0} + 3\Delta y_{i+1,0} - 3\Delta y_{i+2,0} + \Delta y_{i+3,0})\Delta y_i \\ 6(-\Delta y_{i,0} + 3\Delta y_{i+1,0} - 3\Delta y_{i+2,0} + \Delta y_{i+3,0})\Delta y_{i+1} \\ -6(-\Delta y_{i,0} + 3\Delta y_{i+1,0} - 3\Delta y_{i+2,0} + \Delta y_{i+3,0})\Delta y_{i+2} \\ 2(-\Delta y_{i,0} + 3\Delta y_{i+1,0} - 3\Delta y_{i+2,0} + \Delta y_{i+3,0})\Delta y_{i+3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3.2 Cálculo das Velocidades

Após gerar a trajetória otimizada com os pontos (x, y) , é realizado um pré-processamento para calcular o tamanho dos segmentos e a curvatura associada. Em seguida, são calculadas as velocidades em duas etapas distintas: primeiro, utilizando a força de tração disponível do veículo, determinam-se as velocidades do ponto de largada até a chegada. Em seguida, utilizando a força de frenagem disponível, calculam-se as velocidades da chegada até a largada, levando em conta os limites de atrito do veículo. Adicionalmente, o cálculo é repetido considerando a força entregue pela *driveline* e a força entregue pelo sistema de freio, permitindo determinar o limite de potência do veículo. Os valores mínimos entre as quatro velocidades são então calculados, representando a velocidade real do veículo. Por fim, com base nas velocidades determinadas e nas características da trajetória otimizada, são calculados os parâmetros de interesse, possibilitando uma análise mais aprofundada do desempenho do veículo ao longo da trajetória. O algoritmo referente ao cálculo de velocidades encontra-se na Figura 3.

Figura 3: Algoritmo para o cálculo de velocidades.



Fonte: Adaptado de Bharat (2022).

3.2.1 Aceleração

Dividindo a força de tração disponível pela massa total do veículo determina-se a aceleração que ele sofre, e tendo a velocidade inicial do veículo conhecida e o tamanho do trecho, utilizando a Equação 31, pode-se determinar a velocidade na saída do segmento.

$$v_{i+1} = \sqrt{v_i^2 + 2 \frac{f_t}{m} (s_{i+1} - s_i)} \quad (31)$$

Onde:

v_{i+1} = Velocidade na saída do segmento [m/s]

v_i = Velocidade na entrada do segmento [m/s]

s_{i+1} = Coordenada i+1 do segmento. [m]

s_i = Coordenada i do segmento. [m]

3.2.2 Desaceleração

Estimando a velocidade final do veículo e percorrendo o caminho oposto com aceleração de frenagem, é possível determinar as velocidades do veículo durante a frenagem. A Equação 32 descreve esse cálculo, onde dividindo a força de frenagem pela massa total do veículo determina-se a aceleração que ele sofre, e tendo a velocidade final do veículo conhecida e o tamanho do trecho, pode-se determinar a velocidade na entrada do segmento.

$$v_i = \sqrt{v_{i+1}^2 + 2 \frac{f_b}{m} (s_i - s_{i+1})} \quad (32)$$

3.2.3 Velocidade Final

A velocidade final, é estabelecida ao calcular o valor mínimo entre quatro velocidades distintas em cada ponto: aquelas derivadas das forças de tração no cenário de limite de potência e aderência, bem como as velocidades resultantes da desaceleração, considerando os limites de atrito e a capacidade de frenagem do sistema.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

As simulações foram realizadas conforme modelo numérico do circuito de Silverstone, a configuração do veículo foi mantida constante durante todos os testes, os tempos de volta foram registrados e analisados para cada uma das trajetórias.

4.1 Veículo Utilizado

A Ferrari SF70H, conforme Figura 4, é um modelo de carro de Fórmula 1 produzido pela equipe italiana *Scuderia Ferrari* para a temporada de 2017. Foi projetada para competir no Campeonato Mundial de Fórmula 1 da FIA (Federação Internacional de Automobilismo), conforme Ferrari (2023).

Figura 4 – Modelo SF70H de 2017 pilotados por Sebastian Vettel e Kimi Raikkonen.

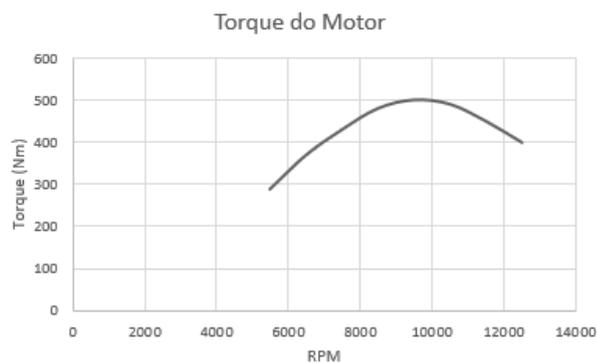


Fonte: FITECHNICAL (2017).

4.1.1 Motor

A modelagem da curva de torque do motor V6 turbo híbrido, segundo (Heusinkveld, 2017), conforme Figura 5, foi realizada utilizando os dados de fluxo de gasolina, conforme FIA (2017) e a eficiência aproximada de motores de Formula 1.

Figura 5 – Curva de torque para o motor



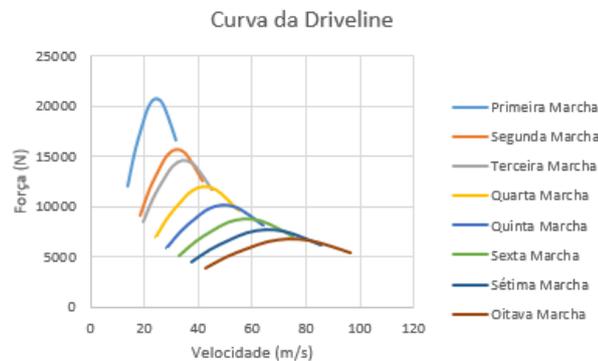
4.1.2 Transmissão

A transmissão é composta por oito marchas, cada uma com relações de engrenagem distintas. Segundo (FITECHNICAL, 2017), as relações de marcha da primeira até a oitava são as seguintes: 13.641, 10.342, 9.607, 7.909, 6.739, 5.762, 5.043 e 4.469, respectivamente. Ao combinar os valores de torque gerados pelo motor com as relações das marchas é possível traçar a curva de torque em função da RPM na saída da transmissão.

4.1.3 Pneus

Conforme FITECHNICAL (2017), a SF70H possui um peso de 728 kg e utiliza pneus Pirelli. Os pneus dianteiros têm dimensões de 305/670-13, enquanto os pneus traseiros possuem dimensões de 405/670-13. Na Figura 6, combinando os valores de torque do motor, da relação das marchas e do raio do pneu escreve-se a curva da *driveline*, onde a força trativa transmitida pelos pneus é descrita em função da velocidade para cada marcha.

Figura 6 – Força trativa em função da velocidade para cada marcha.



4.1.4 Aerodinâmica

Conforme o trabalho de Guerrero (2020), seguindo o regulamento de 2017 a área frontal multiplicada pelo coeficiente de arrasto é 1.23, resultando em um coeficiente aerodinâmico de 0.7534, esse valor será usado no presente trabalho conforme Equação 33.

$$F_{arrasto} = 0.7534v^2 \quad (33)$$

Para a *downforce*, ou força de sustentação, a área frontal multiplicada pelo coeficiente de *downforce* é 3.59, conforme (Guerrero, 2020), resultando em um coeficiente aerodinâmico de 2.1989, esse valor será usado no presente trabalho conforme Equação 34.

$$F_{downforce} = 2.1989v^2 \quad (34)$$

4.2 Tempos de Volta

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação da metodologia de comparação de desempenho de veículos em pista. Os testes foram realizados no circuito de *Silverstone* em diferentes traçados, utilizando a mesma configuração de veículo, e os tempos de volta foram analisados. A seguir, discutiremos os principais resultados encontrados e as suas implicações no desempenho do veículo.

4.2.1 Trajetória Média

Inicialmente, foi analisada a trajetória média, que corresponde à condição imposta de que o ρ_i deve ser igual a 0.5 para todos os valores de i . A trajetória média resultou em um tempo de volta de 1:42.19. Esta configuração serve como referência para comparação com os demais traçados. A Figura A.1 do Apêndice apresenta a telemetria do veículo, já a Figura A.2 do Apêndice apresenta informações gerais.

4.2.2 Traçado Mínimo

Em seguida, foi estudado o traçado mínimo, onde a otimização penaliza a distância entre cada ponto e seu adjacente. Esse traçado exige um desempenho de potência do veículo além das capacidades do Ferrari SF70H, tornando-o impossível de seguir, resultando em um tempo

de 1:41.74. A Figura A.3 do Apêndice apresenta a telemetria do veículo, já a Figura A.4 do Apêndice apresenta informações gerais.

4.2.3 Mínima curvatura

Outro traçado analisado foi o de mínima curvatura, onde a otimização penaliza a diferença da distância de cada conjunto de dois pontos com seu adjacente, de forma prática a trajetória é realizada com o maior raio possível, resultando em um tempo de volta de 1:28.04. A Figura A.5 do Apêndice apresenta a telemetria do veículo, já a Figura A.6 do Apêndice apresenta informações gerais.

4.2.4 Mínimo Jerk

Por fim, foi considerada a trajetória de mínimo jerk, que corresponde a trajetória em que a variação da aceleração é minimizada. Essa configuração mostrou o melhor desempenho para o veículo em relação às anteriores, resultando em um tempo de volta de 1:26.39. A Figura A.7 do Apêndice apresenta a telemetria do veículo, já a Figura A.8 do Apêndice apresenta informações gerais.

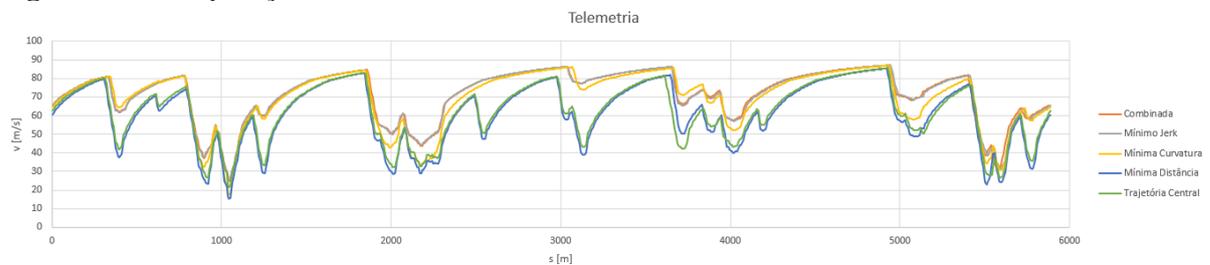
4.2.5 Combinado

Através de testes percebeu-se que uma configuração de 98.9% de mínimo *Jerk* e 1.1% da trajetória de mínima curvatura indicou um tempo inferior a todos os outros tipos de trajetória, resultando em um tempo de volta total de 1:26.21. A Figura A.9 do Apêndice apresenta a telemetria do veículo, já a Figura A.10 do Apêndice apresenta informações gerais. Recomenda-se para futuros trabalhos aplicar uma técnica de otimização para encontrar a proporção ótima.

4.3 Comparação de Trajetórias

A Figura 7 apresenta a telemetria das trajetórias, e analisando-as juntamente com as informações de tempo a trajetória de mínimo *Jerk* combinada com a de mínima curvatura apresenta um resultado superior às demais. Essa configuração permite minimizar a variação da aceleração e combinar com a minimização da curvatura, o que contribui para uma condução mais suave e eficiente, portanto, ao adotar a trajetórias que se aproximam da combinada os pilotos podem obter tempos de volta menores.

Figura 7 – Comparação das telemetrias.



4.4 Consumo de Combustível

Em 2017 a regulamentação da FIA estipulava que o fluxo de combustível não poderia ultrapassar de 100 kg/hora e ela segue na Equação 35.

$$Fluxo(rpm) = \begin{cases} 0.009rpm + 5.5, & 0 < rpm < 10500 \\ 100, & 10500 \leq rpm < \infty \end{cases} \quad (35)$$

Multiplicando o fluxo pelo tempo em cada trecho determina-se o consumo por volta. A quantidade de gasolina que o carro levava era de 105 kg portanto, com o consumo por volta pode-se estimar a quantidade de voltas que o veículo pode percorrer, tendo como parâmetro principal o total de 52 voltas na corrida de formula 1 no circuito de Silverstone em 2017. A Tabela 1 condensa os resultados.

Tabela 1 – Consumo por volta e número de voltas.

Tipo de Trajetória	Tempo de Volta	Consumo [kg]/[volta]	Número de voltas
Mínimo Jerk (98.9) Mínima Curvatura (1.1)	1:26.21	1.8106	57.9917
Mínimo Jerk	1:26.39	1.8138	57.8873
Mínima Curvatura	1:28.04	1.8254	57.5201
Mínima Trajetória	1:41.74	1.9144	54.8453
Trajetória Média	1:42.19	1.8765	55.9530

4.4.1 *Lift and Coast*

No âmbito de corrida há várias técnicas de pilotagem, uma técnica bastante utilizada quando deseja-se economizar gasolina, como a partir de 2010 não há mais reabastecimento durante a corrida, é a técnica de *lift and coast*, que conforme (Formula 1 dictionary, 2023) consiste em “soltar” o acelerador e utilizar o freio motor para reduzir a velocidade para fazer curvas. A Figura A.11 do Apêndice apresenta a telemetria do veículo, já a Figura A.12 do Apêndice apresenta informações gerais. O consumo de combustível para essa técnica por volta é de 1.7528 kg proporcionando realizar 59.9026 voltas, porém, penaliza em 3.29% o tempo de volta, totalizando 1:26.44.

5 CONCLUSÕES

Neste estudo, explorou-se os resultados obtidos a partir da aplicação da metodologia proposta, visando analisar o desempenho do veículo Ferrari SF70H em diferentes trajetórias no circuito de Silverstone. Ao analisar os resultados, identificou-se que a combinação de trajetórias que minimiza a variação da aceleração, traçado de mínimo jerk, com a minimização da curvatura resulta na melhor performance, com um tempo de volta de 1:26.21, superior ao mínimo jerk isolado, 1:26.39. Além disso, essa combinação também permite uma eficiência significativa no consumo de combustível.

Destaca-se também a importância da técnica de *lift and coast* como uma estratégia eficaz para economizar combustível durante a corrida. Embora essa abordagem possa penalizar ligeiramente o tempo de volta, ela oferece uma redução considerável no consumo de combustível, o que é crucial em uma competição onde o reabastecimento não é permitido.

Portanto, concluímos que, ao considerar as características específicas do veículo, as trajetórias otimizadas e as estratégias de condução, é possível obter um equilíbrio entre desempenho e eficiência energética. As conclusões deste estudo podem ser aplicadas para orientar equipes de engenheiros e pilotos na busca por melhores resultados em corridas de Fórmula 1, considerando tanto o aspecto competitivo quanto o de gestão de recursos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BHARAT, F.; “**Racing line optimization and velocity profile generation using matlab**”, YouTube, 15 de Fevereiro de 2022. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Q-djflXTJGE&ab_channel=FormulaBharat>. Acesso em: 27 de Junho de 2023;

BRAGHIN, F. C.; CHELI, F.; MELZI, S.; SABBIONI, E.; “**Race Driver model**”, *Comput. Struct.*, vol. 86, nos. 13–14, pp. 1503–1516, 2008;

BRADLEY, H.; MAGNANTI; “**Applied Mathematical Programming**”, Boston: Addison-Wesley, 1997. pp. 421-40. Acesso em: 14 de Agosto de 2023;

FERRARI; “**Ferrari SF70H: 2017 F1 single-seater**”, 2023. Disponível em: <<https://www.ferrari.com/en-EN/formula1/sf70h>>. Acesso em 27 de Junho de 2023;

Ferrari SF70H. **F1TECHNICAL**, ano. Disponível em: <<https://www.f1technical.net/f1db/cars/1050/ferrari-sf70h>>. Acesso em 27 de Junho de 2023;

FIA; “**2017 FORMULA ONE TECHNICAL REGULATIONS - FIA**”, 2017. Disponível em: <<https://www.fia.com/file/54257/download/18380?token=5JfbyV2g>>. Acesso em 27 de Junho de 2023;

GAO, F.; WANG, L.; ZHOU, B.; ZHOU, X.; PAN J.; SHEN, S.; “**Teach-Repeat-Replan: A Complete and Robust System for Aggressive Flight in Complex Environments**”, *IEEE Transactions on Robotics*, 2020;

GILLESPIE, T. D.; “**Fundamentals of Vehicle Dynamics**”, Warrendale, Society of Automotive Engineers, 1992. 470p;

HAKEWILL. Site do James Hakewill, 2000. “**Lap time simulation**”, Disponível em: http://www.jameshakewill.com/Lap_Time_Simulation.pdf Acesso em: 27 de Junho de 2023;

HEUSINKVELD, N.; “**Fun With Physics 3: Estimating the 2017 Formula 1 torque curve**”, YouTube, 16 de Maio de 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=N2Gg0vXPd7o&t=660s&ab_channel=NielsHeusinkveld>. Acesso em: 14/08/2023;

LIFT AND COAST. “**Formula 1 dictionary**”, 2023. Disponível em: <https://www.formula1-dictionary.net/lift_and_coast.html>. Acesso em 27 de Junho de 2023;

MATLAB; “**Matlab Software Documentation**”, Mathworks, 2023. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/optim/ug/quadprog.html>>. Acesso em 27 de Junho de 2023;

MILLIKEN, W. F.; MILLIKEN, D. L.; “**Race Car Vehicles Dynamics**”, Warrendale, Society of Automotive Engineers, 1994. 890p;

PEREIRA, A.; “**Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem**”, Tese (Mestrado em Estruturas) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2002;

RODRIGUEZ, A.; “**RC Car Modelling and Trajectory Tracking Control**”, Tese (Mestrado em Sistemas, Controles e Processamento de Sinal) – Faculdade de Engenharia e Ciências Físicas, Eletrônica e Ciência da Computação, Universidade de Southampton, Southampton, 2021;

SANTOS, P. H. B. “**Desenvolvimento de Simulador de Tempo de Volta para Carros de Corrida**”, Tese (Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Tecnologia, Departamento do Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília. Brasília, p. 244. 2018;

SANTOS, R. de O.; “**PERFORMANCE ENGINEERING – HOW TO MAKE A WINNING RACE CAR SETUP**”, Racing Car Dynamics, 2022. Disponível em: <<https://racingcardynamics.com/performance-engineering-how-to-make-a-winning-race-car-setup/>>. Acesso em: 26 de Junho de 2023;

SMITH, C.; “**Tune to Win**”. Fallbrook, CA, Aero Publishers, Inc., 1978. 173p;

VELENIS, E.; TSIOTRAS, P.; “**Optimal velocity generation for given acceleration limits: Theoretical analysis**”, IEEE American Control Conference, 2005, pp. 1478–1483;

VEHICLE PHYSICS; “**Vehicle Physics Documentation**”, Vehicle Physics Pro, 2023. Disponível em: <<https://vehiclephysics.com/blocks/tires/>>. Acesso em 22 de Setembro de 2023;

2017 F1 gearing from onboard videos. **F1TECHNICAL**, ano. Disponível em: <<https://www.f1technical.net/forum/viewtopic.php?t=26230>>. Acesso em 27 de Junho de 2023;

APÊNDICE

Figura A.1 – Telemetria, marchas e acelerador/freio.

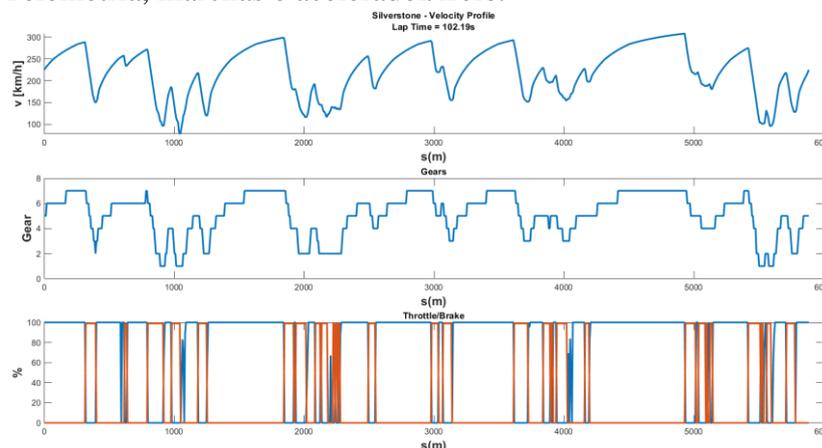


Figura A.2 – Diagrama G-G e trajetória otimizada com as velocidades.

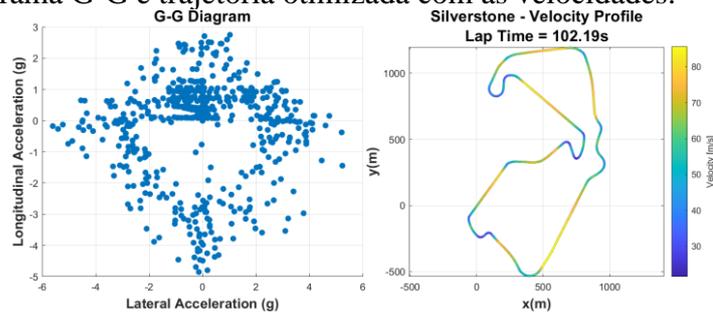


Figura A.3 – Telemetria, marchas e acelerador/freio.

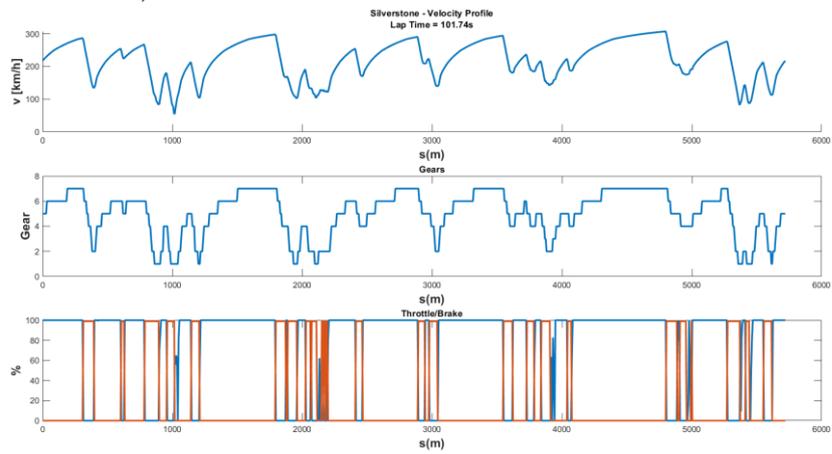


Figura A.4 – Diagrama G-G e trajetória otimizada com as velocidades.

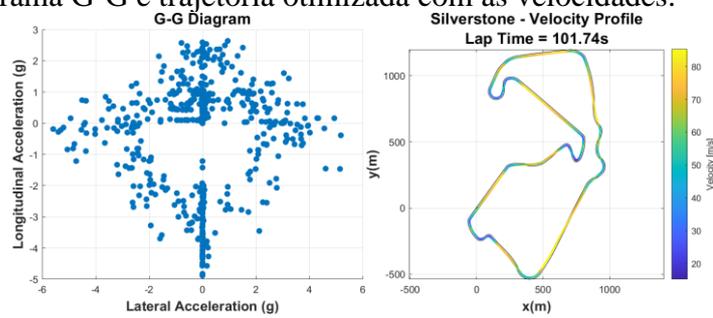


Figura A.5 – Telemetria, marchas e acelerador/freio.

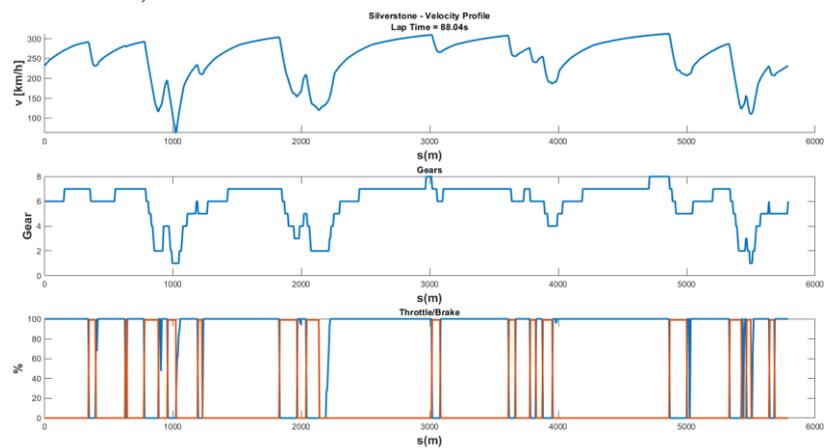


Figura A.6 – Diagrama G-G e trajetória otimizada com as velocidades.

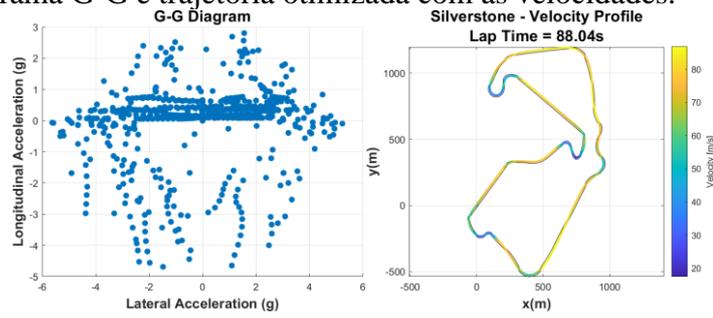


Figura A.7 – Telemetria, marchas e acelerador/freio.

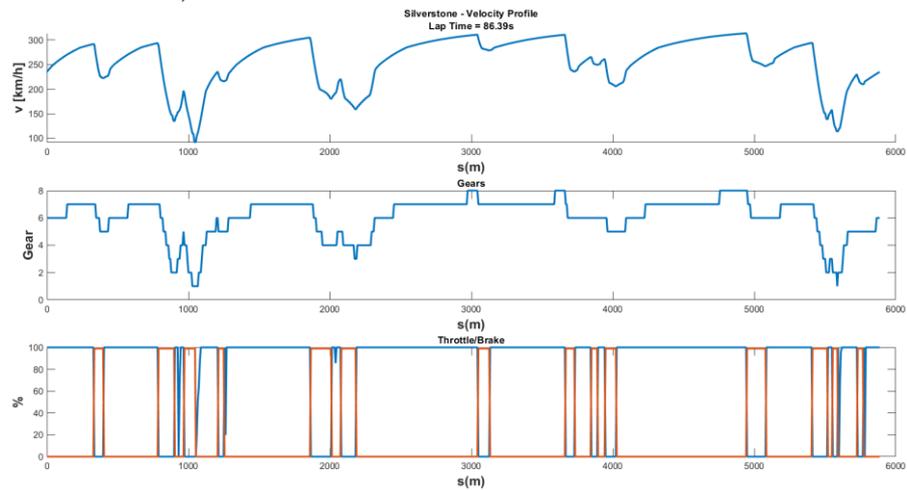


Figura A.8 – Diagrama G-G e trajetória otimizada com as velocidades.

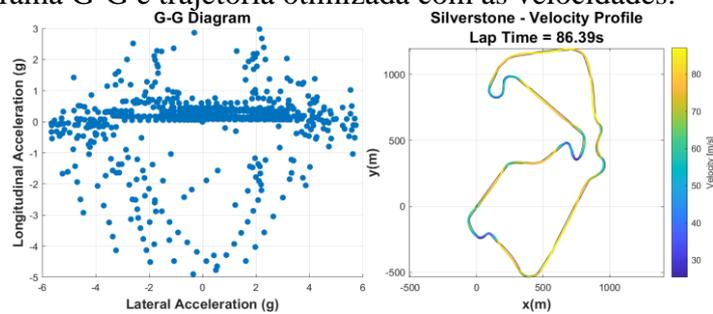


Figura A.9 – Telemetria, marchas e acelerador/freio.

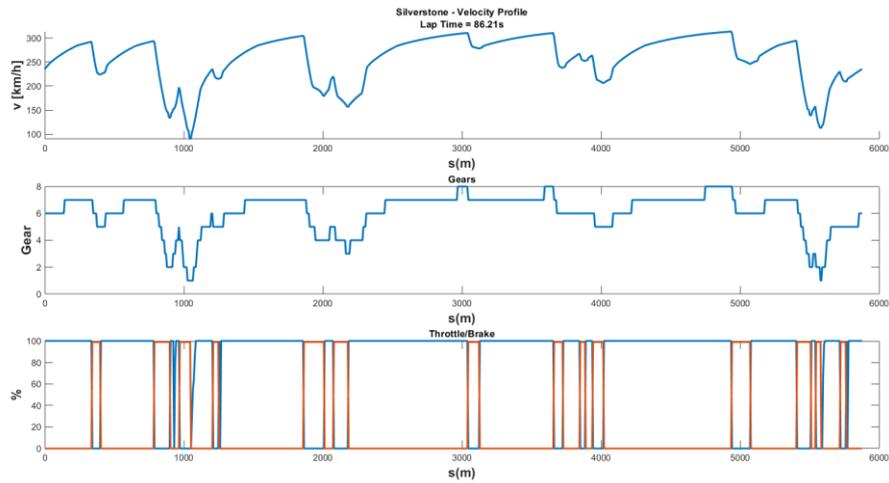


Figura A.10 – Diagrama G-G e trajetória otimizada com as velocidades.

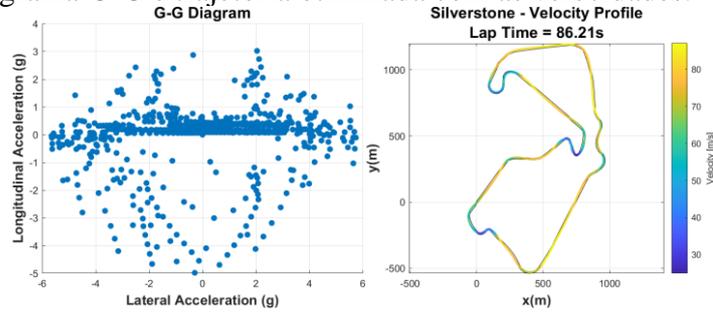


Figura A.11 – Telemetria, marchas e acelerador/freio.

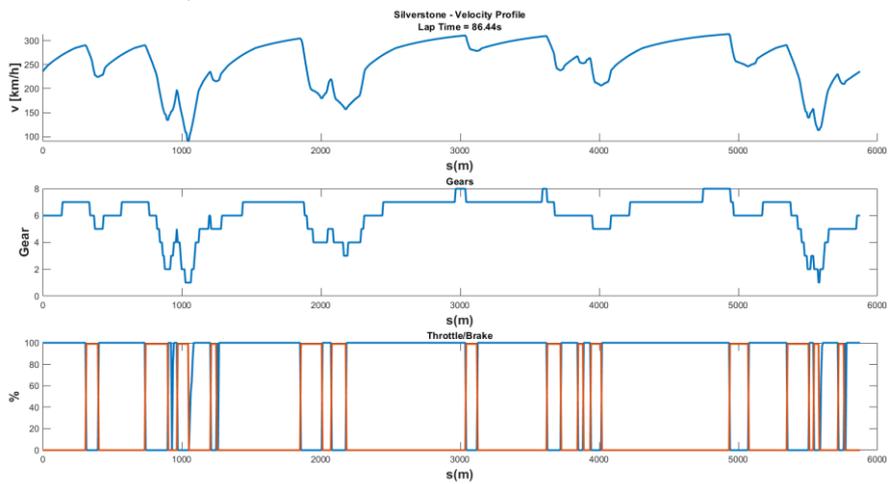


Figura A.12 – Diagrama G-G e trajetória otimizada com as velocidades.

