Introdução ao Estudo dos Espaços Pré-homogêneos

Rodrigo Orsini Braga

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho vamos estudar a definição e as propriedades básicas dos espaços pré-homogêneos; mais precisamente consideraremos o caso dos chamados espaços pré-homogêneos *quase-regulares* e *regulares*. Para isto, precisaremos antes compreender as técnicas básicas tanto de geometria algébrica afim como da teoria dos grupos algébricos afins, entendendo de que forma um grupo deste tipo atua num determinado espaço vetorial de dimensão finita.

Seja G um grupo algébrico afim. Existe um espaço vetorial G-invariante V de dimensão finita e um homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V),$$

cuja imagem é um subgrupo (algébrico) fechado de $\mathrm{GL}(V)$; diz-se que (G, V, ρ) é uma representação de G. Desta forma, a ação de G em V pode ser encarada, via ρ, como uma ação natural de um subgrupo de matrizes (em $\mathrm{GL}(V)$) em V.

Um espaço pré-homogêneo é um tipo de especial de representação onde G possui uma órbita aberta (no sentido de Zariski). A existência de uma órbita aberta, mais algumas hipóteses técnicas (não triviais, como a do espaço pré-homogêneo ser regular) permite classificar estas representações no caso onde o grupo é redutivo (não entraremos neste detalhe, pois não é o objetivo do trabalho). Os espaços pré-homogêneos que aparecem nesta classificação estão vinculados a objetos geométricos clássicos de muito interesse como as Transformações de Cremona, Variedades de Severi, etc.

Os pré-requisitos necessários de geometria algébrica e da teoria dos grupos algébricos afins serão abordados no Capítulo 1.

O Capítulo 2 destina-se a definir e estudar as propriedades básicas dos espaços pré-homogêneos, enquanto que no Capítulo 3 definimos e estudamos os espaços pré-homogêneos regulares e quase-regulares, que é o objetivo desta monografia; a importância deste tipo de espaço pré-homogêneo está no fato que sempre existem polinômios homogêneos não triviais, em V, que naõ se anulam na órbita aberta, o que veremos, simplifica a teoria.

No final deste trabalho, encontram-se, nos Anexos, temas de conhecimento geral (oriundos da Álgebra Linear), importantes para podermos trabalhar com os espaços pré-homogêneos: dualidade e a teoria de Jordan-Chevalley.

CAPíTULO 1

Pré-requisitos de Geometria Algébrica

Este capítulo será dedicado a introduzir as noções básicas de geometria algébrica e da teoria dos grupos algébricos afins necessários para abordar o objetivo principal desta monografia, a saber, o estudo dos espaços pré-homogêneos, o que será feito no capítulo 2. Aqui serão demonstrados apenas os resultados referentes aos grupos algébricos afins e às Álgebras de Lie associadas a eles. As noções básicas de geometria algébrica e os resultados mais relevantes para nosso trabalho serão lembrados, sem demonstração; as respectivas demonstrações e maiores detalhes podem ser encontrados, por exemplo em [**Hum**] e/ou [**Sha**].

1. Variedades Algébricas Afins

Consideremos $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado de característica qualquer. O conjunto $\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n}$ será chamado espaço afim e denotado por $\mathbb{A}^n$. Posteriormente, no estudo dos grupos algébricos afins e dos espaços pré-homogênos, trabalharemos apenas sobre o corpo $\mathbb{C}$.

Definição 1.1. *Um conjunto fechado afim X é o conjunto de zeros comuns em $\mathbb{A}^n$ de uma coleção finita de polinômios, isto é,*

$$X = V(\{f_1, ..., f_l\}) := \{x \in A^n : f_i(x) = 0,\ \forall i \in \{1, ..., n\}\}$$

com f_i polinômios em $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$.

Denotamos por $\mathcal{U}_X$ o ideal de anulação de X, ou seja,

$$\mathcal{U}_X := \{f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] : f|_X = 0\}$$

Os fechados afins constituem os conjuntos fechados de uma topologia chamada *Topologia de Zariski.* Desde que um conjunto fechado é a interseção dos conjuntos de zeros de polinômios, um aberto não vazio pode ser escrito como a união de *abertos principais*, isto é, conjuntos da forma

$$\{x \in \mathbb{A}^n : f(x) \neq 0\}$$

onde $f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$. Por exemplo, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ denota o grupo de todas as matrizes $n \times n$ invertíveis sobre $\mathbb{K}$, isto é,

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : det(A) \neq 0\}$$

e, portanto, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ é um aberto principal de $\mathbb{A}^{n^2} = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

Se $Y \subset \mathbb{A}^n$ é um conjunto arbitrário, podemos considerar Y como espaço topológico com a topologia induzida (de Zariski). Se $X \subset \mathbb{A}^n$ é um fechado afim, consideramos X com a topologia de Zariski induzida.

Definição 1.2. *Seja X um subconjunto de um espaço topológico Y. Dizemos que X é irredutível se X não pode ser escrito na forma $X = X_1 \cup X_2$ com X_1 e X_2 fechados não vazios e distintos de X; caso contrário, dizemos que X é redutível.*

Note que X é irredutível se e somente se quaisquer dois conjuntos abertos em X não vazios tem interseção não vazia, ou, equivalentemente, qualquer aberto não vazio de X é denso.

Evidentemente, um conjunto irredutível é conexo, mas a recíproca não é verdadeira.

Proposição 1.3. *Sejam X, Y fechados afins.*

(i) X é irredutível se e somente se o seu fecho $\overline{X}$ é irredutível;

(ii) Se $\varphi : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua e $V \subset X$ é um subconjunto irredutível, então $\varphi(V)$ é irredutível.

Definição 1.4. *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é regular se existe um polinômio $F \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ tal que $f = F|_X$.*

Denotamos por $\mathbb{K}[X]$ o anel das funções regulares de X, isto é,

$$\mathbb{K}[X] := \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid \exists F \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] : f = F|_X\}$$

$\mathbb{K}[X]$ é chamado anel de coordenadas de X.

Definição 1.5. *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$ fechados afins. Um morfismo é uma aplicação*

$$\varphi : X \longrightarrow Y, \quad \varphi(x_1, ..., x_n) = (\psi_1(x), ..., \psi_m(x)),$$

onde $\psi_i \in \mathbb{K}[X]$. O morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo se existe um morfismo $\psi : Y \longrightarrow X$ tal que

$$\psi \circ \varphi = id_X \quad e \quad \varphi \circ \psi = id_Y.$$

Definição 1.6. *Uma variedade afim é um conjunto isomorfo a um fechado afim.*

Um morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$ é contínuo na topologia de Zariski. De fato: se $Z \subset Y$ é o conjunto de zeros de funções polinomiais f_i em Y, então $\varphi^{-1}(Z)$ é o conjunto de zeros das funções polinomiais $f_i \circ \varphi$ em X.

Definição 1.7. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ variedade afim irredutível. Definimos o corpo de funções racionais de X, $\mathbb{K}(X)$, como sendo o corpo de frações em $\mathbb{K}[X]$, isto é,*

$$\mathbb{K}(X) := \{f/g : f, g \in \mathbb{K}[X],\ \ g \neq 0\}.$$

A dimensão de X é o grau de transcendência $\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(X)$ sobre $\mathbb{K}$ (veja [**Sha**]): é um inteiro não negativo; denotamos

$$\dim X = \deg \operatorname{tr}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(X)$$

Por exemplo, $\dim \mathbb{A}^n = n$.

Assim, temos que a dimensão indica o número máximo de funções racionais algebricamente independentes em X.

Temos ainda que como X é irredutível, $\dim X = \dim U$, $\forall\, U$ aberto afim de X, já que $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(U)$, $\forall\, U$ aberto afim de X. Além disso, $\dim X = \dim X_f$, onde

$$X_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\},\ \ f \in \mathbb{K}[X]$$

são abertos principais de X.

Assim, por exemplo, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ é aberto principal de $\mathbb{A}^{n^2}$, logo sua dimensão é n^2.

O conceito de variedade que introduzimos na definição abaixo não é o mais geral possível, mas é suficiente para nossas necessidades neste trabalho (ver [**Sha**]).

Definição 1.8. *Uma variedade algébrica ou simplesmente, uma variedade, é um aberto de uma variedade afim.*

Proposição 1.9. *Seja X uma variedade irredutível e Y um subconjunto fechado e irredutível de X. Então $\dim Y \leq \dim X$. Se $\dim X = \dim Y$, então $X = Y$.*

Definimos a codimensão de uma subvariedade Y de X como sendo o número

$$\operatorname{codim} Y = \dim X - \dim Y$$

Corolário 1.10. *Seja X vairedade afim irredutível, Y subconjunto fechado irredutível de codimensão 1. Então Y é uma componente irredutível de $V(f)$ para algum $f \in \mathbb{K}[X]$.*

Definimos as fibras de um morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$ como sendo os conjuntos fechados

$$\varphi^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\},\ \ y \in Y.$$

Quando X é irredutível e $\varphi(X)$ é denso em Y, isto é, $\overline{\varphi(X)} = Y$, dizemos que φ é dominante.

Teorema 1.11. *(Teorema da dimensão das fibras)*

Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ *um morfismo dominante de variedades irredutíveis. Então*

(i) $\dim F \geq \dim X - \dim Y$, $\forall F \neq \emptyset$ *componente irredutível de* $\varphi^{-1}(y)$, $\forall y \in Y$*;*

(ii) existe um aberto $U \neq \emptyset$ *de* Y *tal que*

$$\dim \varphi^{-1}(y) = \dim X - \dim Y, \ \forall y \in U.$$

Definição 1.12. *Seja* X *uma variedade afim,* $X = V(f_1, ..., f_l)$*. Dado* $p \in X$*, definimos o espaço tangente de* X *em* p *como sendo o conjunto*

$$T_pX = \bigcap_{k=1}^{l} \ker(d_pf_k), \quad \textit{onde}$$

$$d_pf_k : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$d_pf_k(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(p) \cdot v$$

Temos que $\dim T_pX \geq \dim X$, $\forall p \in X$.

Se $\dim T_pX = \dim X$, dizemos que p é um ponto não-singular de X. Se, $\forall p \in X$, p é não-singular, X é chamado liso (ou não-singular).

Proposição 1.13. *(i) O conjunto* $\{x \in X : x \textit{ é não-singular}\}$ *é um aberto de Zariski não vazio de* X*;*

(ii) Todo isomorfismo leva pontos não-singulares em pontos não-singulares.

2. Grupos Algébricos Afins

A partir desta seção, V denotará um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{C}$.

Definição 1.14. *Um grupo algébrico afim é uma variedade algébrica afim* G *com uma estrutura de grupo, de forma que as aplicações*

$$\begin{array}{ll} \mu : G \times G \longrightarrow G, & \mu(g,h) = gh \\ i : G \longrightarrow G, & i(g) = g^{-1} \end{array}$$

são aplicações regulares.

Seja V espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ e seja $\mathrm{GL}(V)$ o grupo geral linear de V, isto é, $\mathrm{GL}(V)$ é o conjunto formado pelos endomorfismos invertíveis de V. Podemos ver $\mathrm{GL}(V)$ como um grupo algébrico: fixando uma base de V, podemos supor $V = \mathbb{C}^n$ e identificar $\mathrm{GL}(V)$ com $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, o grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis sobre $\mathbb{C}$.

Pelo teorema da linearização, dado abaixo, todo grupo algébrico afim pode ser visto como subgrupo fechado do grupo algébrico $\mathrm{GL}(V)$, para algum espaço vetorial V; neste caso, a aplicação μ da Definição 1.14 ser regular significa que se $g = (a_{ij})$ e $h = (b_{ij})$, com $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, então gh depende polinomialmente de a_{ij} e b_{ij} quando g e h percorrem G.

Teorema 1.15. *Seja G um grupo algébrico afim. Então G é isomorfo a um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(V)$, V espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.*

Desta forma, um grupo algébrico "é" um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(V)$. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [**Hum**, Chapter II, 8.6, Theorem].

Definição 1.16. *Uma ação de G em V é uma aplicação regular $\varphi : G \times V \longrightarrow V$ tal que*
(i)$\varphi(f, \varphi(g, x)) = \varphi(fg, x), \ \forall f, g \in G, \forall x \in V$;
(ii)$\varphi(id, x) = x, \ \forall x \in V$.
Denotaremos $g \cdot x = \varphi(g, x)$.

Se $G \subset \mathrm{GL}(V)$ fechado, temos uma ação linear $g \cdot x = g(x)$, $\forall g \in G, \forall x \in V$ e assim,

$$(f \circ g) \cdot x = f(g(x)) = f \circ (g(x)), \ \forall f, g \in G, \forall x \in V$$

$$id \cdot x = id(x) = x, \ \forall x \in V.$$

Daqui em diante, cada vez que $G \subset \mathrm{GL}(V)$, suporemos que esta é a ação.

Proposição 1.17. *Seja G grupo algébrico afim, $G \subset \mathrm{GL}(V)$, V espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Então G é uma variedade lisa. Além disso, G conexo implica G irredutível.*

Demonstração. Dado $g \in G$, consideremos a aplicação regular

$$\alpha_g : G \longrightarrow G, \ \alpha_g(h) = g \cdot h$$

Temos que α_g é regular, pois é restrição de $G \times G$ a $\{g\} \times G$, e $G \times G \longrightarrow G$ é regular por definição. Assim, α_g é isomorfismo com inversa regular $\alpha_{g^{-1}}$. Então, temos que, $\forall g, h \in G$, existe $\varphi = \alpha_{hg^{-1}}$ automorfismo de G em G tal que

$$\varphi(g) = hg^{-1}g = h$$

Pela Proposição 1.13, todo isomorfismo leva pontos não singulares em pontos não singulares. Logo, dado $g \in G$ não singular, h é não singular, qualquer que seja $h \in G$. Portanto, G não possui pontos singulares, ou seja, G é lisa.

Suponhamos agora que G é conexo; seja $G = X_1 \cup \cdots \cup X_l$ a decomposição irredundante de G, ou seja, X_i é uma componente irredutível de G, isto é, $X_i \not\subset X_j$, se $i \neq j$. Basta mostrar que se existir algum $i_0 \neq j_0$, $i_0, j_0 \in \{1, ..., l\}$, então $X_{i_0} \cap X_{j_0} = \emptyset$, pois neste caso, G não seria conexo.

Seja $U \neq \emptyset$ o conjunto dos pontos não-singulares de G. Escolhemos $g \in U$ e $h \in X_{i_0} \cap X_{j_0}$. O automorfismo $\varphi : G \longrightarrow G$ definido acima leva U em

$$\varphi(U) = (X_{i_0} \cap \varphi(U)) \cup (X_{j_0} \cap \varphi(U)),$$

o que contradiz a irredutibilidade de $\varphi(U)$ (veja Proposição 1.3(ii)). $\square$

DEFINIÇÃO 1.18. *Definimos a G-órbita de um ponto $x \in V$ como o conjunto*

$$o(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$$

EXEMPLO 1.19. Seja $G = \{$ matrizes diagonais invertíveis $\} \subset \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$; $G \simeq (\mathbb{C}^*)^n$. Assim temos que para $g \in G$ e $v \in V = \mathbb{C}^n$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

com $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \cdots, n$.

Temos que se $v = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$, com $x_i^0 \neq 0, \forall i = 1, \cdots, n$ então

$$o(v) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \neq 0, \forall i = 1, \cdots, n\} = \underbrace{\mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*}_{n}$$

Este conjunto é também chamado de Toro Algébrico.

Se $v = (x_1^0, 0, \cdots, 0)$, então $o(v) = \{(x, 0, \cdots, 0) : x \neq 0\}$.

Se $v = (0, 0, \cdots, 0)$, então $o(v) = \{v\}$.

DEFINIÇÃO 1.20. *Chamamos de grupo de isotropia de um ponto $x \in V$ o subgrupo de G dado por*

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

DEFINIÇÃO 1.21. *Um subconjunto $A \subset V$ é dito G-invariante (ou G-estável) se $g \cdot x \in A$, $\forall x \in A, \forall g \in G$.*

LEMA 1.22. *Sejam V espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ e $G \subset \mathrm{GL}(V)$ grupo algébrico afim . Seja x um ponto de V e seja $o(x)$ a G-óribita de x. Denotamos por*

$$E_x := \overline{o(x)} \quad e \quad F_x := E_x - o(x)$$

Então E_x é um subconjunto algébrico G-invariante de V e F_x é um subconjunto algébrico próprio G-invariante de V. Além disso,

$$\dim E_x = \dim G - \dim G_x$$

Demonstração. Primeiramente, mostremos que $E_x = \overline{o(x)}$ é G-invariante, isto é, mostrar que se $y \in E_x, g \in G$, então $g \cdot y \in E_x$.

Seja então $y \in E_x$ e $g \in G$. Seja $U \subset V$ uma vizinhança de $g \cdot y$. Como G é grupo, existe $g^{-1} \in G$ e, portanto,

$$g^{-1} \cdot (g \cdot y) = (g^{-1}g) \cdot y = id(y) = y.$$

Vimos que esta operação de G em V é regular, e, portanto, é contínua. Logo, temos que $g^{-1}(U)$ é vizinhança de y. Por hipótese, como $y \in E_x$, existe $h \in G$ tal que $h \cdot x \in g^{-1}(U)$, ou seja, $g \cdot (h \cdot x) \in U$, e, portanto, $g \cdot y \in E_x$.

A demonstração referente a F_x segue do fato de que $o(x)$ é a união de $g \cdot U$ para abertos U de V.

Agora, vamos mostrar que $\dim E_x = \dim G - \dim G_x$. Consideremos a aplicação regular

$$\eta_x : G \longrightarrow E_x, \ \eta_x(g) = g \cdot x$$

Temos que η_x é dominante, pois

$$Im(\eta_x) = o(x) \quad e \quad \overline{Im(\eta_x)} = \overline{o(x)} = E_x$$

Seja $y \in o(x)$, então $y = g \cdot x$ para algum $g \in G$. A fibra de η_x sobre y é o conjunto

$$\eta_x^{-1}(y) = \{h \in G : h \cdot x = y\}$$

Consiremos então a aplicação

$$\eta_x^{-1}(y) \longrightarrow G_x, \quad h \mapsto g^{-1} \cdot h$$

Temos que esta aplicação está bem definida, pois dado $h \in \eta_x^{-1}(y)$,

$$g^{-1}(h \cdot x) = g^{-1} \cdot y = g^{-1} g \cdot x = x \Rightarrow g^{-1} \cdot h \in G_x.$$

É ainda uma aplicação regular com inversa regular dada por

$$G_x \longrightarrow \eta_x^{-1}(y), \quad l \mapsto g \cdot l$$

Logo, $\eta_x^{-1}(y)$ é isomorfo a G_x e, portanto,

$$\dim \eta_x^{-1}(y) = \dim G_x, \quad \forall y \in o(x).$$

Pelo teorema da dimensão das fibras, temos que

$$\dim \eta_x^{-1} = \dim G - \dim E_x, \quad \forall y \in o(x).$$

Portanto, $\dim E_x = \dim G - \dim G_x$. $\square$

LEMA 1.23. *Com as mesmas notações do lema anterior, o conjunto dos pontos $x \in V$ tais que a dimensão de E_x é máxima, ou seja,* $\dim E_x = \dim V$*, é um aberto de Zariski G-invariante em V.*

3. Álgebra de Lie de um Grupo Algébrico

DEFINIÇÃO 1.24. *Um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ com uma operação $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ denotada por*

$$(X, Y) \mapsto [X, Y]$$

e chamada de o colchete (ou o comutador) de X e Y, é dito uma Álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ se os axiomas seguintes são satisfeitos:
(i) o colchete é uma operação bilinear;
(ii) $[X, X] = 0, \ \forall X \in \mathfrak{g}$;
(iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

O axioma (iii) é chamado de identidade de Jacobi. Note que (i) e (ii) implicam a anticomutatividade: (ii') $[X, Y] = -[Y, X], \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}$. (Reciprocamente, se a característica de $\mathbb{K}$ for diferente de 2, é claro que (ii') implica (ii).)

DEFINIÇÃO 1.25. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado pelo colchete, isto é,*

$$[X, Y] \in \mathfrak{h} \text{ se } X, Y \in \mathfrak{h}.$$

EXEMPLO 1.26. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$: o espaço de todas as transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ que é o mesmo que o espaço $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ das matrizes $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$. O colchete é dado por

$$[X, Y] = XY - YX$$

com X e Y matrizes. Com essa operação, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ é uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$. Os axiomas (i) e (ii) são imediatos, enquanto que o axioma (iii) requer um pequeno cálculo (que é deixado para o leitor verificá-lo). $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ é então essencialmente a álgebra de Lie do grupo geral linear $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ e é chamada álgebra geral linear.

Da mesma forma, a álgebra das transformações lineares de um espaço vetorial V será denotada por $\mathfrak{gl}(V)$ e será chamada a álgebra geral linear associada ao grupo geral linerar $\mathrm{GL}(V)$ consistindo de todos os endomorfismos invertíveis de V.

O objetivo desta seção é associar a um grupo algébrico afim uma álgebra de Lie.

Consideremos então V espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$, e seja $G \subset \mathrm{GL}(V)$ grupo algébrico afim. Seja e o elemento neutro de G. O espaço tangente T_eG possui uma estrutura de álgebra de Lie obtida por restrição da estrutura de $\mathcal{M}_{n\times n}$, ou seja, se $A, B \in T_eG$, então $AB - BA \in T_eG$, o que define o colchete $[A, B] = AB - BA$ como restrição do colchete em $\mathcal{M}_{n\times n}$. Assim, T_eG será a álgebra de Lie de G e será denotada por $\mathfrak{g}$.

Assim, por exemplo, como $\mathrm{GL}(V)$ é um aberto do espaço afim $\mathcal{M}_{n\times n} \simeq A^{n^2}$, temos que o espaço tangente $T_e\mathrm{GL}(V)$ tem dimensão n^2. Portanto, a álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(V)$, $\mathfrak{gl}(V)$, é o próprio espaço $\mathcal{M}_{n\times n}$, como já tínhamos verificado no exemplo acima.

Exemplo 1.27. Seja $G_x = \{g \in G : g\cdot x = x\}$. Queremos obter a álgebra de Lie de G_x. Temos que G_x é isomorfo ao conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} : \det B \neq 0 \right\}$$

onde $B \in \mathrm{GL}(n-1) = \mathrm{GL}(V/\langle x\rangle)$. Considerando uma curva $\beta(t)$ em $\mathrm{GL}(V/\langle x\rangle)$, com $\beta(0) = Id_{n-1}$, obtemos uma curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & a_2(t)\cdots a_n(t) \\ 0 & \\ \vdots & \beta(t) \\ 0 & \end{pmatrix} \in G_x$$

com $\alpha(0) = e$,

$$\alpha'(0) = \begin{pmatrix} 0 & a_2'(0)\cdots a_n'(0) \\ \vdots & \beta'(0) \\ 0 & \end{pmatrix} \in T_e(G_x).$$

Concluímos que

$$\mathfrak{g}_x := T_e(G_x) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} : A \cdot x = 0\}$$

é a álgebra de Lie de G_x.

Se $A \in \mathfrak{gl}(V)$, uma curva $\alpha(t) \in \mathrm{GL}(V)$ com $\alpha(0) = e$, $\alpha'(0) = A$, é dada por

$$t \mapsto e^{tA}.$$

Proposição 1.28. *Sejam $\mu : G \times G \longrightarrow G$ a multiplicação, $i : G \longrightarrow G$ a inversão e $\gamma_g : G \longrightarrow G$ a comutação em G, isto é, $\gamma_g(h) = hgh^{-1}g^{-1}$. Então:*

(a) $d\mu_{(e,e)}(A,B) = A + B,\ \forall A, B \in \mathfrak{g}$*;*
(b) $di_e(A) = -A,\ \forall A \in \mathfrak{g}$*;*
(c) $(d_e\gamma_g)(A) = (Id - Ad(g))(A),\ \forall A \in \mathfrak{g}$*, onde*

$$Ad : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),\ g \mapsto Ad(g)\ (Ad(g)(A) = gAg^{-1})$$

é a representação adjunta.

Demonstração. (a) Sejam $A, B \in \mathfrak{g}$. Tomamos a aplicação

$$\alpha : B_0 \longrightarrow G \times G,\ t \mapsto (e^{tA}, e^{tB})$$

com B_0 vizinhança da origem. Temos que $\alpha(0) = (e,e)$ e

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= (d\alpha/dt)(e^{tA}, e^{tB})|_{t=0} \\ &= (Ae^{tA}, Be^{tB})|_{t=0} \\ &= (A, B) \end{aligned}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} d\mu_{(e,e)}(A,B) &= (d/dt)\mu(\alpha(t))|_{t=0} \\ &= (d/dt)\mu(e^{tA}, e^{tB})|_{t=0} \\ &= (d/dt)e^{tA}e^{tB}|_{t=0} \\ &= Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}|_{t=0} \\ &= A + B. \end{aligned}$$

(b) Seja $A \in \mathfrak{g}$. Tomamos

$$\beta : B_0 \longrightarrow G,\ t \mapsto e^{tA}$$

com B_0 vizinhança da origem, $\beta(0) = e$, e tal que $\beta'(0) = A$. Assim temos que

$$\begin{aligned} di_e(A) &= (d/dt)i(\beta(t))|_{t=0} \\ &= (d/dt)i(e^{tA})|_{t=0} \\ &= (d/dt)e^{-tA}|_{t=0} \\ &= -Ae^{-tA}|_{t=0} \\ &= -A. \end{aligned}$$

(c) Seja $A \in \mathfrak{g}$ e consideremos a aplicação β do item anterior. Temos então que

$$\begin{aligned} (d_e\gamma_g)(A) &= (d/dt)\gamma_g(\beta(t))|_{t=0} \\ &= (d/dt)\gamma_g(e^{tA})|_{t=0} \\ &= (d/dt)(e^{tA}ge^{-tA}g^{-1})|_{t=0} \\ &= Ae^{tA}ge^{-tA}g^{-1} + e^{tA}g(-A)e^{-tA}g^{-1}|_{t=0} \\ &= A - gAg^{-1} \\ &= (Id - Ad(g))(A). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.29. *A diferencial da representação adjunta Ad em e é a aplicação ad, onde*

$$ad(X)(Y) = [X, Y], \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Demonstração. Lembremos que

$$Ad : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

é um homomorfismo de grupos algébricos que é uma aplicação regular. Seja $X \in \mathfrak{g}$. Consideremos uma curva $\alpha(t) = e^{tX}$ tal que $\alpha(0) = e, \ \alpha'(0) = X$. A aplicação linear $Ad(\alpha(t)) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ verifica

$$Ad(\alpha(t)) \cdot Y = \alpha(t) Y [\alpha(t)]^{-1} = e^{tX} Y e^{-tX}, \ \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Daí temos que

$$(d_e Ad)(X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

é dada por

$$\begin{aligned}(d_e Ad)(X) \cdot (Y) &= (d/dt) Ad(\alpha(t)) \cdot Y|_{t=0} \\ &= X e^{tX} Y e^{-tX} + e^{tX} Y (-X) e^{-tX}|_{t=0} \\ &= XY - YX \\ &= [X, Y].\end{aligned}$$

Esta é a aplicação $ad(X) \cdot (Y)$. □

Observação 1.30. Ad(x) é a diferencial em e do automorfismo interno

$$\mathrm{Int}(x) : G \longrightarrow G, \ \ y \mapsto xyx^{-1}.$$

Corolário 1.31. *Seja H um subgrupo normal fechado de G. Então $\mathfrak{h}$ é um ideal em $\mathfrak{g}$ (isto é, $[x, y] \in \mathfrak{h} \ \forall x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}$).*

Demonstração. Como H é normal em G, temos que

$$\mathrm{Int}(x)(H) = H, \ \forall x \in G.$$

Portanto, pela observação acima,

$$Ad(x)(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}, \ \forall x \in G.$$

Se esterdemos uma base de $\mathfrak{h}$ a uma base de $\mathfrak{g}$, a matriz de $Ad(x)$, para $x \in G$, será da forma

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

e, claramente a matriz da diferencial $d_e(Ad)(X), \ X \in \mathfrak{g}$, apresenta a mesma forma. Mas , pelo Teorema 1.29, $d_e(Ad) = ad$, donde $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. □

CAPíTULO 2

Espaços Pré-homogêneos

Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$. Seja $G \subset GL(V)$ um grupo algébrico linear conexo sobre $\mathbb{C}$ que atua em V; denotamos por $g \cdot x$ a ação de G em V com $g \in G$ e $x \in V$. Se $x \in V$, lembramos que G_x denota o subgrupo de isotropia de G com relação a x, isto é,

$$G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Definição 2.1. *Se existe $x \in V$ tal que $\dim G_x = \dim G - \dim V$, então dizemos que V é pré-homogêneo com respeito à ação de G e chamamos o par (G,V) de espaço vetorial pré-homogêneo. O conjunto dos pontos $x \in V$ tais que $\dim G_x > \dim G - \dim V$ é chamado conjunto singular de V e o denotaremos por S.*

Dado $x \in V$, denotamos por $o(x)$ a G-órbita de x, isto é,

$$o(x) = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Conforme visto no lema 1.22 , podemos escrever a órbita de x como $o(x) = E_x - F_x$, onde E_x é um subconjunto algébrico G-invariante de V e F_x um subconjunto algébrico próprio G-invariante de V; E_x é o fecho de Zariski de $o(x)$. Assim, pela Definição 2.1, as quatro condições seguintes são equivalentes:
(i) $x \in V - S$;
(ii) $\dim G_x = \dim G - \dim V$;
(iii) $\dim E_x = \dim V$;
(iv) $E_x = V$.

Proposição 2.2. *Seja (G, V) um espaço vetorial pré-homogêneo e seja S o seu conjunto singular. Então S é um subconjunto algébrico próprio G-invariante de V e $V - S$ é uma G-órbita de V.*

Demonstração. Temos que existe $x \in V$ tal que $\dim G_x = \dim G - \dim V$, o que implica que $x \in V - S$. Como $\dim E_x = \dim V$, pelo lema 1.23, $V - S$ é um aberto de Zariski G-invariante e, portanto, S é um subconjunto algébrico próprio G-invariante de V. Mas $x \in V - S \Rightarrow o(x) \subset V - S$. Como $o(x) = V - F_x \Rightarrow F_x \supset S$. Suponhamos então que $F_x - S \neq \emptyset$ e seja $y \in F_x - S$. Então, $o(y) = V - F_y$ é um aberto de Zariski em V para $y \notin S$. Por outro lado, como $y \in F_x$

e F_x é G-invariante, $o(y) \subset F_x$, o que é uma contradição. Portanto, $F_x - S = \emptyset$ e assim, $o(x) = V - S$. $\square$

Consideremos $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ como grupo multiplicativo.

DEFINIÇÃO 2.3. *Chamamos de caracter um homomorfismo de grupos de G em $\mathbb{C}^*$. Denotamos por $X(G)$ o conjunto de todos os caracteres de G, o qual forma um grupo multiplicativo.*

PROPOSIÇÃO 2.4. *O conjunto $X(G)$ é um subespaço linearmente independente sobre $\mathbb{C}$ do espaço de todas as funções de G que toma valores em $\mathbb{C}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do fato de que o conjunto de todos os homomorfismos de um grupo G em $\mathbb{C}^*$ é um subespaço linearmente independente do espaço de todas as funções que tomam valores em $\mathbb{C}$ (ver [**Hum**, chapter VI, section 16.1, lemma]). $\square$

DEFINIÇÃO 2.5. *Seja χ um caracter de G. Dizemos que uma função racional não nula $P(x)$ em V é um invariante relativo ou uma função racional relativamente invariante correspondente ao caracter χ se*
$P(g \cdot x) = \chi(g)P(x)$, para todo $g \in G$. Em particular, se $P(x)$ é um polinômio, dizemos que $P(x)$ é um polinômio relativamente invariante.

DEFINIÇÃO 2.6. *Sejam χ_1, ..., χ_r caracteres pertencentes a $X(G)$. Dizemos que eles são multiplicativamente independentes se geram um grupo abeliano livre de posto r em $X(G)$.*

DEFINIÇÃO 2.7. *Se P=F/G é uma função racional em V, com F e G primos entre si, denotamos por P_0 o conjunto de zeros de F e por P_∞ o conjunto de zeros de G; P_0 é chamado o conjunto de zeros de P e P_∞ o conjunto de pólos de P.*

LEMA 2.8. *Os zeros e pólos de um invariante relativo são subconjuntos algébricos próprios G-invariantes de V e estão contidos em S.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja P_0 o conjunto de zeros de P, isto é,

$$P_0 = \{x \in V : P(x) = 0\}.$$

Temos que P_0 é um fechado afim e dado $x \in P_0$, $g \cdot x \in P_0$, $\forall g \in G$, já que $P(g \cdot x) = \chi(g)P(x) = 0$ e $\chi(g) \neq 0$, o que mostra que P_0 é G-invariante; Além disso, $P_0 \subset S$. De fato: seja $x \in P_0$, $x \notin S$. Então $x \in V - S$ e $V - S$ é aberto de Zariski. Mas, por outro lado, como P_0 é G-invariante, $o(x) \subset P_0$, o que é uma contradição. Logo, $P_0 \subset S$. Analogamente, vemos que P_∞ é um fechado G-invariante de V e tal que $P_\infty \subset S$. $\square$

Lema 2.9. *Seja $R(x)$ uma função racional em V de grau $d \in \mathbb{Z}$ e $\alpha : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ função tal que*

$$R(tx) = \alpha(t)R(x), \quad \forall t \in \mathbb{C}^*$$

Então $R(x)$ é homogênea e $\alpha(t) = t^d$.

Demonstração. Para a demonstração deste lema, podemos considerar o caso onde $R(x)$ é um polinômio em V. De fato: temos uma ação de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}(V) \longrightarrow \mathbb{C}(V)$ dada por

$$(t, R) \mapsto t \cdot R, \quad (t \cdot R)(x) = R(tx) = \alpha(t)R(x).$$

Suponhamos que $R = F/G$ é uma função racional de V, com F e G polinômios primos entre si. Se F_i é fator irredutível de F, então

$$\{F_i = 0\} = \{t \cdot F_i = 0\}, \ \forall t \in \mathbb{C}^*,$$

já que $\mathbb{C}^*$ é irredutível. Analogamente, o mesmo argumento vale para fatores G_j de G. Concluímos então que

$$t \cdot F_i = \beta(t)F_i, \quad \beta : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

e que

$$t \cdot G_j = \gamma(t)G_j, \quad \gamma : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

Seja então $R(x)$ polinômio em V e consideremos o polinômio de Taylor de $R(x)$ em $x = 0$:

$$R(x) = R(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_i}(0)x_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j + \cdots$$

Assim, como $R(tx) = \alpha(t)R(x)$, temos

$$\begin{aligned} R(tx) &= R(0) + t\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_i}(0)x_i + t^2 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j + \cdots \\ &= \alpha(t)\left(R(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_i}(0)x_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j + \cdots\right). \end{aligned}$$

Temos então em $t = 0$ que

$$R(0) = \alpha(0)\left(R(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_i}(0)x_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j + \cdots\right),$$

ou seja,

$$R(0)(1 - \alpha(0)) = \alpha(0)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_i}(0)x_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j + \cdots\right),$$

donde segue-se que

$$\alpha(0) = 0 = R(0).$$

Se o grau de R é igual a 1, então está demonstrado o resultado. Se o grau de R é maior do que 1, então derivando a expressão

$$R(tx) = \alpha(t)\left(t\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial R}{\partial x_i}(0)x_i + t^2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j + \cdots\right)$$

em t=0 (observemos que α é necessariamente infinitamente diferenciável), segue-se, repetindo-se o mesmo procedimento, que

$$\alpha'(0) = 0 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial R}{\partial x_i}(0).$$

O resultado segue por indução no grau de R. $\square$

PROPOSIÇÃO 2.10. *Temos as seguintes afirmações:*

(i) Dois invariantes relativos quaisquer associados ao mesmo caracter coincidem a menos de um fator constante.

(ii) Todo divisor primo de um invariante relativo é um invariante relativo.

(iii) Invariantes relativos são funções homogêneas.

(iv) Invariantes relativos correspondentes a caracteres multiplicativamente independentes são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}$.

DEMONSTRAÇÃO. (i)Sejam $R_1(x)$ e $R_2(x)$ invariantes relativos correspondentes ao caracter $\chi \in X(G)$. Seja $x_0 \in V - S$ e seja

$$Q(x) = R_2(x_0)R_1(x) - R_1(x_0)R_2(x).$$

Temos que $Q(x)$ é invariante relativo, pois

$$\begin{aligned} Q(g\cdot x) &= R_2(x_0)R_1(g\cdot x) - R_1(x_0)R_2(g\cdot x) \\ &= R_2(x_0)\chi(g)R_1(x) - R_1(x_0)\chi(g)R_2 \\ &= \chi(g)Q(x),\ \forall g \in G, \forall x \in V. \end{aligned}$$

Além disso, $Q(x_0) = 0$. Como $o(x_0) = V - S$, temos que $Q(x) = 0$, $\forall x \in V - S$, e, portanto, $Q \equiv 0$. Como $x_0 \notin S$, pelo Lema 2.8, x_0 não é zero nem pólo de R_2, isto é, $R_2(x_0) \neq 0$ e $R_2(x_0) \neq \infty$, e assim,

$$R_1(x) = \frac{R_1(x_0)}{R_2(x_0)}R_2(x).$$

(ii) Seja $R(x)$ invariante relativo correspondente ao caracter $\chi \in X(G)$ e seja $\prod_{i=1}^{k} R_i(x)^{n_i}$ a decomposição em divisores primos de

$R(x)$, ou seja, $R_1(x),...,R_k(x)$ são polinômios irredutíveis distintos e os n_i's são inteiros não nulos tais que

$$R(x) = \prod_{i=1}^{k} R_i(x)^{n_i}$$

Como $R(x)$ é invariante relativo, temos que

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k} R_i(g \cdot x)^{n_i} &= R(g \cdot x) \\ &= \chi(g)R(x) \\ &= \chi(g)\prod_{i=1}^{k} R_i(x)^{n_i}, \forall g \in G.\end{aligned}$$

Por outro lado, cada $R_i(g\cdot x)$, $i = 1,...,k$, é um polinômio irredutível em V, logo $R_i(g\cdot x)$ deve coincidir com um dos polinômios $R_1(x),...,R_k(x)$ a menos de um fator constante. Como G é conexo, temos que $R_i(g\cdot x) = \chi_i(g)R_i(x)$, $\forall g \in G$, onde $\chi_i(g)$ é uma função regular que toma valores em $\mathbb{C}^*$; observemos que se $g \in G$, tomando x no domínio de R,

$$\chi_i(g) = \frac{R_i(g \cdot x)}{R_i(x)}.$$

Além disso, se $g_1, g_2 \in G$ e $x \in V$,

$$\begin{aligned}\chi_i(g_1g_2)R_i(x) &= R_i(g_1g_2 \cdot x) \\ &= \chi_i(g_1)R_i(g_2 \cdot x) \\ &= \chi_i(g_1)\chi_i(g_2)R_i(x),\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\chi_i(g_1g_2) = \chi_i(g_1)\chi_i(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

isto é, χ é um caracter de G.[1] Assim $R_1(x),...,R_k(x)$ são todos invariantes relativos.

(iii) Seja $P(x)$ um invariante relativo correspondente a um caracter $\chi \in X(G)$. Seja $t \in \mathbb{C}^*$ e definamos uma função racional $P_t(x) := P(tx)$. Temos que

$$\begin{aligned}P_t(g \cdot x) &= P(g \cdot (tx)) \\ &= \chi(g)P(tx) \\ &= \chi(g)P_t(x), \quad \forall g \in G, \forall x \in V.\end{aligned}$$

[1] De fato, sempre que temos uma ação de G num espaço vetorial W, e existe $w \in W$ tal que $g \in v = \chi(g)v$, então χ é um caracter de G.

Portanto, ambos $P_t(x)$ e $P(x)$ são invariantes relativos correspondentes a χ. Pelo item (i), eles coincidem a menos de um fator constante, ou seja, $P(tx) = P_t(x) = cP(x)$, onde c é uma constante que depende unicamente de t. Pelo Lema 2.9, segue-se que $P(x)$ é uma função homogênea.

(iv) Sejam χ_1,...,χ_r caracteres em $X(G)$ multiplicativamente independentes. Sejam $R_1(x)$,...,$R_r(x)$ invariantes relativos correspondentes a χ_1,...,χ_r, respectivamente. Suponhamos que $R_1(x)$,...,$R_r(x)$ são algebricamente dependentes. Então existe um polinômio $H(y_1, ..., y_r)$ não nulo tal que $H(R_1, ..., R_r) = 0$. Assim, existem monômios $U_i(R_1, ..., R_r)$ $(i = 1, ..., s)$ em $R_1(x), ..., R_r(x)$ tais que $H = \sum_{i=1}^{s} a_i U_i,\ \ a_i \in \mathbb{C}$, $U_1, ..., U_s$ linearmente dependentes e tais que quaisquer $s - 1$ desses monômios são linearmente independentes.

Consideremos o subespaço vetorial $E \subset \mathbb{C}[R_1, ..., R_r]$ gerado por $U_1, ..., U_s$, e $f : \mathbb{C}^s \longrightarrow E$ a aplicação linear (sobrejetiva) definida por

$$f(c_1, ..., c_s) = \sum_{i=1}^{s} c_i U_i \ ;$$

denotemos W o núcleo de f. Pela nossa escolha dos U_i's,

$$\dim_{\mathbb{C}} E = s - 1,$$

donde segue que

$$\dim_{\mathbb{C}} W = 1.$$

Agora, como U_i é monomial, é claro que cada U_i é um invariante relativo e assim, seja ν_i o caracter correspondente de $U_i(x)$. Se $(c_1, ..., c_s) \in \mathbb{C}^s,\ g \in G$, temos que

$$f(c_1\nu_1(g), ..., c_s\nu_s(g)) = \sum_{i=1}^{s} c_i \nu_i(g) U_i.$$

Mas

$$\nu_i(g)U_i(x) = U_i(g \cdot x),\ \forall i = 1, ..., s.$$

Assim, temos que se $(c_1, ..., c_s) \in W$, então

$$(c_1\nu_1(g), ..., c_s\nu_s(g)) \in W,\ \forall g \in G.$$

Como $\dim_{\mathbb{C}} W = 1$, segue que $\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_s$. Porém, $U_1, ..., U_s$ são distintos uns dos outros como monômios em $R_1, ..., R_r$, o que contradiz o fato de que $\chi_1, ..., \chi_s$ são multiplicativamente independentes. Portanto, $R_1(x), ..., R_r(x)$ são algebricamente independentes. $\square$

Definição 2.11. *Seja* (G, V) *um espaço vetorial pré-homogêneo e seja* S *o seu conjunto singular. Denotamos por* $S_{(0)}$ *a união das componentes irredutíveis de* S *de codimensão* 1 *e* $S_{(1)}$ *a união das componentes irredutíveis de* S *de codimensão maior ou igual do que* 2.

Observação 2.12. $S_{(0)}$ pode ser vazio. Como exemplo, temos o espaço pré-homogêneo $(\mathrm{GL}(n), \mathbb{C}^n)$, em que $\mathrm{GL}(n)$ atua em $\mathbb{C}^n$ pela ação natural de matrizes. O conjunto singular S é $\{0\}$. Neste caso, os únicos invariantes relativos são os polinômios constantes.

Sejam $S_1, ..., S_m$ as componentes irredutíveis de $S_{(0)}$ e seja $P_i(x)$ polinômio irredutível gerador do ideal $\mathcal{U}_{S_i}$, $i = 1, ..., m$.

Proposição 2.13. *Suponhamos que* $S_{(0)} \neq \emptyset$. *Seja* $\mathcal{IR}(G, V)$ *o conjunto dos invariantes relativos de* (G, V). *Então:*

(i) $\{P_1(x), ..., P_m(x)\}$ *é um subconjunto de polinômios algebricamente independentes de* $\mathcal{IR}(G, V)$.

(ii) $\mathcal{IR}(G, V)$, *considerado com a operação de multiplicação, coincide com o grupo livre abeliano de posto* m *gerado por* $P_1(x), ..., P_m(x)$.

Demonstração. (i) Como G é irredutível e S_i é um conjunto algébrico irredutível, o fecho de Zariski $\overline{G \cdot S_i}$ do conjunto

$$G \cdot S_i = \{g \cdot x : g \in G, x \in S_i\}$$

é também irredutível. De fato: consideramos a aplicação regular

$$\varphi : G \times S_i \longrightarrow G \cdot S_i, \quad \varphi(g, x) = g \cdot x.$$

Pelo item (ii) da Proposição 1.3, $\varphi(G \times S_i) = G \cdot S_i$ é irredutível, já que $G \times S_i$ é irredutível. Segue, pelo item (i) da Proposição 1.3, que $\overline{G \cdot S_i}$ é irredutível.

Agora temos que

$$S_i \subset G \cdot S_i \subset S \Rightarrow S_i = \overline{S_i} \subset \overline{G \cdot S_i} \subset \overline{S} = S.$$

Como S_i é uma componente irredutível de S, temos que $S_i = \overline{G \cdot S_i}$, donde segue que

$$\forall g \in G, \ g \cdot S_i \subset \overline{G \cdot S_i} = S_i.$$

Por um lado, dados $g \in G, x \in S_i$, temos que $g^{-1} \cdot x \in G \cdot S_i$ e, portanto, $g^{-1} \cdot x \in S_i$. Como $x = (gg^{-1}) \cdot x$, $x \in g \cdot S_i$, ou seja, $S_i \subset g \cdot S_i$, $\forall g \in G$, concluímos que

$$g \cdot S_i = S_i, \ \forall g \in G.$$

Por outro lado

$$S_i = \{x \in V : P_i(x) = 0\} \text{ e } g \cdot S_i = \{x \in V : P_i(g^{-1} \cdot x) = 0\}.$$

Como P_i é irredutível, temos que $P_i(x)$ e $P_i(g^{-1} \cdot x)$ coincidem a menos de um fator constante. Logo, existe um caracter $\chi_i(g)$ tal que

$$P_i(g \cdot x) = \chi_i(g) P_i(x), \ \forall g \in G, \forall x \in V.$$

Assim temos que $P_i(x)$ é um invariante relativo, $\forall i = 1, ..., m$.

Finalmente, como $P_1(x), ..., P_m(x)$ são polinômios irredutíveis distintos entre si, $\chi_1, ..., \chi_m$ são multiplicativamente independentes. Com efeito: suponhamos que existam $r_1, ..., r_m \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\chi_1^{r_1} \cdots \chi_m^{r_m} = 1.$$

Consideremos o polinômio

$$F = P_1^{r_1} \cdots P_m^{r_m};$$

temos então para todo $g \in G, \ x \in V$, que

$$\begin{aligned} F(g \cdot x) &= P_1^{r_1}(g \cdot x) \cdots P_m^{r_m}(g \cdot x) \\ &= \chi_1^{r_1}(g) P_1^{r_1}(x) \cdots \chi_m^{r_m}(g) P_m^{r_m}(x) \\ &= \chi_1^{r_1}(g) \cdots \chi_m^{r_m}(g) F(x) \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Seja $x_0 \in V - S$. Então

$$F(g \cdot x_0) = F(x_0), \ \forall g \in G,$$

ou seja, $F(x) = c$ constante, $\forall x \in V - S$. Como $V - S$ é um aberto de Zariski, segue-se que $F \equiv c$. Sem perda de generalidade, podemos supor $r_1, ..., r_l \geq 0$, e $r_{l+1}, ..., r_m \leq 0$; notemos por $s_i = -r_i$, para todo $i = l + 1, ..., r$. Assim, temos que

$$\frac{P_1^{r_1}(x) \cdots P_l^{r_l}(x)}{P_{l+1}^{s_{l+1}}(x) \cdots P_m^{s_m}(x)} = c,$$

isto é,

$$P_1^{r_1}(x) \cdots P_l^{r_l}(x) = c P_{l+1}^{s_{l+1}} \cdots P_m^{s_m}(x)$$

Como os polinômios $P_1, ..., P_m$ são irredutíveis e distintos entre si, segue que a única possibilidade é $r_1 = ... = r_m = 0$, donde concluímos que $\chi_1, ..., \chi_m$ são multiplicativamente independentes.

Pelo item (iv) da Proposição 2.10, concluímos que $P_1(x), ..., P_m(x)$ são algebricamente independentes, o que completa a prova de (i).

(ii) Seja $P(x)$ polinômio invariante relativo irredutível. Vimos anteriormente que o conjunto $P_0 = \{x \in V : P(x) = 0\}$ é um subconjunto algébrico próprio G-invariante de V e tal que $P_0 \subset S$. Como P_0 é uma hipersuperfície irredutível, temos que P_0 coincide com um dos

$S_1, ..., S_m$. Mas $S_i = \{x \in V : P_i(x) = 0\}$, logo $P(x)$ coincide com um dos $P_1(x), ..., P_m(x)$ a menos de um fator constante.

Pelo item (ii) da Proposição 2.10, todo fator irredutível de um invariante relativo é um invariante relativo. Assim, qualquer invariante relativo coincide com um produto de potências de $P_1(x), ..., P_m(x)$. □

DEFINIÇÃO 2.14. *Seja (G, V) um espaço pré-homogêneo com $S_{(0)} \neq \emptyset$. Um conjunto de polinômios invariantes relativos $\{P_1, ..., P_m\}$ é dito um sistema completo de invariantes relativos se constitui uma base de $\mathcal{IR}(G, V)$; neste caso, dizemos que $P_1, ..., P_m$ são os invariantes relativos básicos de (G, V).*

Se H é um grupo arbitrário, $[H, H]$ denota o grupo comutador de H, ou seja, $[H, H]$ é o subgrupo de H gerado pelo conjunto

$$\{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in H\};$$

da identidade

$$z(xyx^{-1}y^{-1})z^{-1} = (zxz^{-1})(zyz^{-1})(zxz^{-1})^{-1}(zyz^{-1})^{-1}$$

segue que $[H, H]$ é um subgrupo normal de H.

LEMA 2.15. *Sejam H um grupo arbitrário e $K \subset H$ um subgrupo. Então o conjunto produto*

$$[H, H] \cdot K = \{h \cdot k : h \in [H, H], k \in K\}$$

é um subgrupo normal de H.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $y \in [H, H] \cdot K$, ou seja,

$$y = g_1 \cdots g_l k,$$

com $g_1, ..., g_l$ comutadores de H e $k \in K$; logo, para todo $h \in H$, temos

$$\begin{aligned} hyh^{-1} &= hg_1 \cdots g_l kh^{-1} \\ &= (hg_1 \cdots g_{l-1}h^{-1})(hg_l kh^{-1}). \end{aligned}$$

Como $[H, H]$ é subgrupo normal de H, basta mostrar que

$$hg_l kh^{-1} \in [H, H] \cdot K.$$

Com efeito: temos que $g_l = xyx^{-1}y^{-1}$ com $x, y \in H$; assim

$$\begin{aligned} hg_l kh^{-1} &= hxyx^{-1}y^{-1}kh^{-1} \\ &= hxyx^{-1}y^{-1}h^{-1}k\,\underbrace{k^{-1}hkh^{-1}}_{c_1} \end{aligned}$$

onde $c_1 \in [H,H]$. Assim,

$$\begin{aligned} hg_l kh^{-1} &= hxyx^{-1}y^{-1}h^{-1}kc_1 \\ &= hxyx^{-1}h^{-1}y^{-1}\underbrace{yhy^{-1}h^{-1}}_{c_2}kc_1 \end{aligned}$$

onde $c_2 \in [H,H]$. E daí,

$$\begin{aligned} hg_l kh^{-1} &= hxyx^{-1}h^{-1}y^{-1}c_2kc_1 \\ &= \underbrace{(hx)y(hx)^{-1}y^{-1}}_{c_3}c_2kc_1 \end{aligned}$$

onde $c_3 \in [H,H]$. Portanto,

$$hg_l kh^{-1} = c_3c_2kc_1 \in [H,H]\cdot K.$$

$\square$

Seja $x_0 \in V-S$. O subgrupo de G gerado por $[G,G]$ e pelo subgrupo de isotropia G_{x_0} não depende da escolha de $x_0 \in V-S$. Denotamos esse grupo por G_1, isto é,

$$G_1 := [G,G]\cdot G_{x_0}.$$

Pelo Lema 2.15, G_1 é um subgrupo algébrico normal de G.

Temos ainda que G/G_1 é um grupo algébrico abeliano (ver [**Hum**, chapter IV, sections 11.5 and 12.1]).

Denotamos por $X_1(G)$ o grupo dos caracteres de G/G_1. Ou seja,

$$X_1(G) := X(G/G_1) = \{\chi \in X(G) : \chi(g) = 1, \forall g \in G_1\}.$$

Lembremos que $\chi_1, ..., \chi_m$ geram um grupo abeliano livre (vimos na demonstração do item (ii) da Proposição 2.13 que $\chi_1, ..., \chi_m$ são multiplicativamente independentes).

PROPOSIÇÃO 2.16. *Seja $\{P_1, ..., P_m\}$ um sistema completo de (G,V) e seja χ_i o caracter correspondente a P_i, $i = 1, ..., m$. Então, $X_1(G)$ é o grupo abeliano livre de posto m gerado por $\chi_1, ..., \chi_m$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $P(x)$ um invariante relativo correspondente ao caracter $\chi(g)$. Seja $x \in V-S$. Então temos que

$$P(g\cdot x) = \chi(g)P(x),\ \forall g \in G, \quad e \quad P(x) \neq 0, \infty.$$

Assim, se $g \in G_x$, de

$$P(x) = P(g\cdot x) = \chi(g)P(x),$$

segue que $\chi(g) = 1$, ou seja, χ é trivial em G_x. Por outro lado, como

$$\chi(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}) = 1, \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

temos que χ é trivial em $[G,G]$, e então, χ é trivial em $G_1 = [G,G]{\cdot}G_x$, isto é, $\chi \in X_1(G)$.

Reciprocamente, seja $\chi \in X_1(G)$ e seja $x_0 \in V - S$. Sabemos que $o(x_0) = V - S$; consideremos a aplicação regular

$$\varphi : G \longrightarrow o(x_0), \quad \varphi(g) = g{\cdot}x_0.$$

Se $g, h \in G$,

$$g \cdot x_0 = h \cdot x_0 \Leftrightarrow h^{-1}g \cdot x_0 = x_0 \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_{x_0}.$$

Daí, temos que

$$G/G_{x_0} \simeq o(x_0) = V - S.$$

Assim, χ pode ser visto como uma função regular em $G/G_{x_0} \simeq V - S$. Definimos então

$$P(g \cdot x_0) := \chi(g),$$

onde identificamos $g{\cdot}x_0$ com a classe $[g] \in G/G_{x_0}$ de $g \in G$. Logo, dado $x \in V - S$, temos que $x = h{\cdot}x_0$, para algum $h \in G$. Portanto, para todo $g \in G$, temos que

$$\begin{aligned} P(g{\cdot}x) &= P(gh{\cdot}x_0) \\ &= \chi(gh) \\ &= \chi(g)\chi(h) \\ &= \chi(g)P(h{\cdot}x_0) \\ &= \chi(g)P(x). \end{aligned}$$

A função racional $P(x)$ em $V - S$ estende-se a uma função racional em V mantendo a relação $P(g \cdot x) = \chi(g)P(x)$. Ou seja, existe um invariante relativo $P(x)$ correspondente ao caracter χ. Assim, concluímos que $\chi_1, ..., \chi_m \in X_1(G)$ e para todo $\chi \in X_1(G)$, existe um invariante relativo $P(x)$ correspondente a χ.

Finalmente, pela Proposição 2.13, $P(x)$ coincide com um produto de potências de $P_1(x), ..., P_m(x)$. Logo, χ coincide com o produto de potências de $\chi_1, ..., \chi_m$. Portanto, $X_1(G)$ é o grupo abeliano livre de posto m gerado por $\chi_1, ..., \chi_m$. □

Consideremos agora a representação contragradiente de G no espaço dual V^* (ver Capítulo 4, Anexo 2). A ação de $g \in G$ em $y \in V^*$ é denotada por

$$g^* \cdot y = {}^t g^{-1} \cdot y,$$

onde ${}^t g$ é a matriz transposta de $g \in G \subset \mathrm{GL}(V)$.

Temos que

$$\langle g \cdot x, g^* \cdot y \rangle = \langle x, y \rangle, \ \forall g \in G, x \in V, y \in V^*$$

Aqui, $\langle\, ,\rangle$ denota a dualidade entre os espaços vetoriais V e V^* sobre $\mathbb{C}$ dada por $\langle x,y\rangle = y(x) \in \mathbb{C}$.

Fixado um ponto $y_0 \in V^*$, denotamos por $G^*_{y_0}$ o subgrupo de isotropia de y_0, isto é,

$$G^*_{y_0} := \{g \in G : \ g^* \cdot y_0 = y_0\}$$

Entretanto, o par (G, V^*) não é necessariamente um espaço vetorial pré-homogêneo, ainda que (G, V) seja um espaço pré-homogêneo (veja o exemplo dado no final deste capítulo).

Suponhamos que (G, V^*) seja um espaço vetorial pré-homogêneo (note que não supomos que (G, V) seja pré-homogêneo). Seja S^* o seu conjunto singular. Pela Proposição 2.2, S^* é um subconjunto algébrico próprio G-invariante de V^* e $V^* - S^*$ é uma G-órbita em V^*. Denotamos por $S^*_{(0)}$ a união das componentes irredutíveis de S^* cuja codimensão em V^* é 1 e denotamos por $S^*_{(1)}$ a união das componentes irredutíveis de S^* de codimensão maior ou igual a 2 em V^*. Sejam $S^*_1, ..., S^*_{m'}$ as componentes irredutíveis de $S^*_{(0)}$ e seja $Q_i(y)$ um polinômio irredutível gerador do ideal $\mathcal{U}_{S^*_i}$, $i = 1, ..., m'$. Em outras palavras,

$$\begin{array}{ll} S^* = S^*_{(0)} \bigcup S^*_{(1)} & S^*_{(0)} = S^*_1 \bigcup ... \bigcup S^*_{m'} \\ S^*_i := \{y \in V^* : Q_i(y) = 0\} & (i = 1, ..., m') \\ \operatorname{codim} S^*_{(1)} \geq 2 & \end{array}$$

Aplicando a Proposição 2.13 ao espaço pré-homogêneo (G, V^*), temos que $Q_1(y), ..., Q_{m'}(y)$ são os invariantes relativos básicos de (G, V^*) e $(Q_1, ..., Q_{m'})$ é o sistema completo de invariantes relativos básicos de (G, V^*). Denotamos por $\mu_1, ..., \mu_{m'}$ os caracteres correspondentes aos invariantes relativos $Q_1(y), ..., Q_{m'}(y)$ respectivamente, ou seja,

$$Q_i(g^* \cdot y) = \mu_i(g) Q_i(y), \ \forall g \in G, \forall y \in V^*.$$

Seja $y_0 \in V^* - S^*$ fixo. Então o subgrupo G^*_1 de G dado por

$$G^*_1 := [G, G] \cdot G^*_{y_0}$$

não depende da escolha de $y_0 \in V^* - S^*$. Temos que G^*_1 é subgrupo normal de G e G/G^*_1 é um grupo algébrico abeliano. Denotamos por $X^*_1(G)$ o subgrupo de $X(G)$ formado pelos caracteres triviais em G^*_1, isto é,

$$X^*_1(G) := \{\mu \in X(G) : \mu(g) = 1, \forall g \in G^*_1\}$$

Aplicando a Proposição 2.16 a (G, V^*), $X^*_1(G)$ é o grupo abeliano livre de posto m$'$ gerado por $\mu_1, ..., \mu_{m'}$.

Encerraremos este capítulo dando alguns exemplos de espaços pré-homogêneos.

Exemplo 2.17. Seja

$$G := \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, b \neq 0 \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

e seja

$$V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

É fácil verificar que G é subgrupo algébrico fechado de $GL(V)$. O subconjunto

$$V' := \{x \in V : x_2 \neq 0\},$$

que é um aberto de Zariski, é uma G-órbita e, portanto, (G, V) é um espaço vetorial pré-homogêneo com conjunto singular

$$S = \{x \in V : x_2 = 0\}.$$

Agora, seja

$$V^* = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : y_1, y_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

espaço dual de V. Usando a ação contragradiente g^* dada por

$$g^* \cdot y = {}^t g^{-1} \cdot y$$

para $g \in G, y \in V^*$, verifica-se que cada órbita em V^* é parametrizada por y_1, ou seja, é uma reta passando por y_1 e, portanto, não há órbitas densas em V^*. Logo, (G, V^*) não é um espaço vetorial pré-homogêneo.

Exemplo 2.18. Seja $V = \mathbb{C}^n$ e $G = \{$ matrizes diagonais inversíveis $\} \subset \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ (vide Exemplo 1.19 do Capítulo 1). Consideremos o conjunto

$$V' = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \neq 0,\ \forall i = 1, ..., n\} = \underbrace{\mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*}_{n}$$

V' é o *Toro algébrico de dimensão n.* Como já tínhamos visto no Exemplo 1.19 do Capítulo 1, V' é uma G-órbita densa e, portanto, (G, V) é um espaço vetorial pré-homogêneo com conjunto singular

$$S = \{(x_1, ..., x_n) : x_i = 0,\ \text{para algum } i \in \{1, ..., n\}\}.$$

CAPíTULO 3

Espaços Vetoriais Pré-homogêneos Quase Regulares

Sejam V espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ e V^* o espaço dual de V. Seja $G \subset \mathrm{GL}(V)$ um subgrupo algébrico que atua em V^* pela ação (natural) contragradiente. Suponhamos que (G,V) e (G,V^*) sejam ambos espaços pré-homogêneos.

Fixados $x_0 \in V - S$ e $y_0 \in V^* - S^*$, tínhamos definido no Capítulo 2 os subgrupos G_1 e G_1^* de G como os grupos

$$G_1 = [G,G] \cdot G_{x_0} \quad e \quad G_1^* = [G,G] \cdot G^*_{y_0}$$

Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G. Como $G \subset \mathrm{GL}(V)$, temos que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V) = \mathcal{M}_{n\times n}$. Sejam $\mathfrak{g}_1$ a álgebra de Lie de G_1 e $\mathfrak{g}_1^*$ a álgebra de Lie de G_1^*.

Seja $\mathfrak{g}^\vee$ o espaço vetorial dual de $\mathfrak{g}$. Denotamos por $A \cdot x$ a ação de $A \in \mathfrak{g}$ em $x \in V$ dada por

$$A \cdot x := \frac{d}{dt}(e^{tA} \cdot x)|_{t=0};$$

aqui $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ é a restrição à $\mathfrak{g}$ da aplicação exponencial $B \longrightarrow e^B$ definida em $\mathfrak{gl}(V)$ (ver [**War**, Chapter III, theorem 3.34 and Example 3.35]).

Respectivamente, denotamos por $A^* \cdot y$ a ação de $A^* \in \mathfrak{g}^\vee$ em $y \in V^*$, onde A^* é a matriz adjunta de A, dada por

$$A^* \cdot y := \frac{d}{dt}(e^{tA^*} \cdot y)|_{t=0}.$$

Definição 3.1. *Sejam $\varphi : V \dashrightarrow V^*$, $\psi : V^* \dashrightarrow V$ aplicações racionais. Dizemos que φ (resp. ψ) é G-admissível se φ é regular em $V - S$ e $\varphi(g \cdot x) = g^* \cdot (\varphi(x))$, $\forall g \in G$ (resp. $\psi(g^* \cdot y) = g \cdot (\psi(y))$).*

Seja $w \in \mathfrak{g}^\vee$. Se a aplicação G-admissível φ satisfaz a condição

$$\langle A \cdot x, \varphi(x)\rangle = \langle A, w\rangle, \quad \forall A \in \mathfrak{g}, \forall x \in V - S$$

denotamos esta aplicação por φ_w. Respectivamente, se

$$\langle A^* \cdot y, \psi(y)\rangle = -\langle A, w\rangle, \quad \forall y \in V^* - S^*,$$

denotamos esta aplicação por ψ_w.

Finalmente, denotamos por $\overline{X_1}$ e por $\overline{X_1^*}$ os conjuntos

$$\begin{array}{l} \overline{X_1} := \{B \in \mathfrak{g}^\vee : B|_{\mathfrak{g}_1} = 0\} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1)^\vee \\ \overline{X_1^*} := \{B \in \mathfrak{g}^\vee : B|_{\mathfrak{g}_1^*} = 0\} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1^*)^\vee \end{array}$$

Temos que, dado $\chi \in X_1(G)$, χ induz uma aplicação $\delta\chi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\delta\chi(A) = d_0(\chi \circ exp)(A) = (d/dt)\chi(e^{tA})|_{t=0},$$

onde $d_0(\chi \circ exp)$ é a diferencial da composta de $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ com a aplicação exponencial $exp : B_0(\mathfrak{g}) \longrightarrow G$, $B_0(\mathfrak{g})$ uma vizinhança da origem de $\mathfrak{g}$.

Como $\chi \in X_1(G)$, então $\chi(g) = 1, \forall g \in X_1$, e portanto, $\delta\chi \in \overline{X_1}$. A aplicação que a cada $\chi \in X_1(G)$ associa $\delta\chi$ é um homomorfismo injetivo de $X_1(G)$ em $\overline{X_1}$. Com efeito: sejam $\chi_1, \chi_2 \in X_1(G)$ e $A \in \mathfrak{g}$. Então

$$\begin{aligned} \delta(\chi_1\chi_2)(A) &= (d/dt)\{\chi_1\chi_2(e^{tA})\}|_{t=0} \\ &= \{(d/dt)\chi_1(e^{tA})\}\chi_2(e^{tA})|_{t=0} + \chi_1(e^{tA})\{(d/dt)\chi_2(e^{tA})\}|_{t=0} \\ &= \delta\chi_1(A) + \delta\chi_2(A), \end{aligned}$$

o que mostra que a aplicação é um homomorfismo. Para ver que é injetiva, basta mostrar que

$$\delta\chi = 0 \implies \chi = 1;$$

com efeito: suponhamos que $\delta\chi(A) = 0,\ \forall A \in \mathfrak{g}$. Logo

$$(d/dt)\chi(exp(tA))|_{t=0} = 0,\ \forall A \in \mathfrak{g},$$

isto é,

$$d\chi \cdot d(exp) \cdot (d/dt)(tA) = 0,$$

onde $d(exp) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é a diferencial da exponencial em 0 (matriz nula); assim,

$$(d\chi \circ d(exp))(A) = 0,\ \forall A \in \mathfrak{g},$$

ou seja,

$$d\chi(d(exp)(A)) = 0,\ \forall A \in \mathfrak{g},$$

e portanto, $d\chi \equiv 0$, pois $d(exp)$ é um difeomorfismo. Logo,
$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ é constante. Como $\chi(e) = 1$, segue que $\chi \equiv 1$. Chamamos $\delta\chi$ o *caracter infinitesimal* de χ.

PROPOSIÇÃO 3.2. *Seja $w \in \mathfrak{g}^\vee$. Então existe uma aplicação G-admissível φ_w se, e somente se, $w \in \overline{X_1}$. Neste caso, φ_w está univocamente determinada por w.*

DEMONSTRAÇÃO. ($\Longrightarrow$) Seja φ_w uma aplicação G-admissível satisfazendo a condição

$$\langle A\cdot x, \varphi_w(x)\rangle = \langle A, w\rangle, \quad \forall A\in\mathfrak{g}, \forall x\in V-S.$$

Observe que se $A\in\mathfrak{g}_x=\{A\in\mathfrak{g} : A\cdot x=0\}$, então $\langle A, w\rangle = 0$. Por outro lado, como

$$\varphi_w(g\cdot x) = g^*\cdot\varphi_w(x), \quad \forall x\in V-S, \forall g\in G,$$

temos que

$$\langle Ad(g)A, w\rangle = \langle A, w\rangle, \quad \forall g\in G, \forall A\in\mathfrak{g}.$$

De fato: se $x\in V-S$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle Ad(g)A, w\rangle &= \langle gAg^{-1}, w\rangle \\
&= \langle gAg^{-1}\cdot x, \varphi_w(x)\rangle \\
&= \langle Ag^{-1}\cdot x, {}^t g\cdot\varphi_w(x)\rangle \\
&= \langle A(g^{-1}\cdot x), \varphi_w(g^{-1}\cdot x)\rangle \\
&= \langle A, w\rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle Ad(g)A - A, w\rangle = 0, \ \forall A\in\mathfrak{g}, \ \forall g\in G.$$

Derivando a equação acima com respeito de g em e, obtemos

$$\langle[\mathfrak{g},\mathfrak{g}], w\rangle = 0,$$

pois $d_eAd = ad$ e, pelo Teorema 1.29, $ad(X)(Y)=[X,Y], \ \forall X, Y\in\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{g}_x$, temos que

$$\langle A, w\rangle = 0, \ \forall A\in\mathfrak{g}_1,$$

isto é,

$$w(A) = 0, \ \forall A\in\mathfrak{g}_1,$$

ou seja, $w\in\overline{X_1}$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $w|_{\mathfrak{g}_1}=0$. Seja $x\in V-S$. Consideremos a aplicação

$$\Phi_x : \mathfrak{g}\longrightarrow V, \quad \Phi_x(A) = A\cdot x$$

Temos que $\mathfrak{g}_x = \ker\Phi_x$, já que $\mathfrak{g}_x = \{A\in\mathfrak{g} : A\cdot x = 0\}$. Como $\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_x = \dim V$, Φ_x induz um isomorfismo $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x\longrightarrow V$. Como $w|_{\mathfrak{g}_1}=0$, temos que existe $y_x\in V^*$ tal que

$$\langle A, w\rangle = \langle A\cdot x, y_x\rangle.$$

Definimos $\varphi : V - S \longrightarrow V^*$ por

$$\varphi(x) = y_x \ ;$$

φ é uma aplicação racional de V em V^*. Por outro lado, como $w|_{\mathfrak{g}_1} = 0$, temos que

$$\langle Ad(g)A, w\rangle = \langle A, w\rangle,\ \forall A\in\mathfrak{g},\ \forall g\in G.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle Ag\cdot x, \varphi(g\cdot x)\rangle &= \langle A, w\rangle \\
&= \langle Ad(g^{-1})A, w\rangle \\
&= \langle g^{-1}Ag, w\rangle \\
&= \langle g^{-1}Ag\cdot x, \varphi(x)\rangle \\
&= \langle Ag\cdot x, g^*\cdot(\varphi(x))\rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi(g\cdot x) = g^*\cdot(\varphi(x)),\ \forall x\in V - S, \forall g\in G.$$

Como φ é regular em $V - S$, temos que φ é G-admissível e satisfaz

$$\langle A\cdot x, \varphi(x)\rangle = \langle A, w\rangle = \langle Ag\cdot x, g^*\cdot\varphi(x)\rangle,\ \forall A\in\mathfrak{g}, \forall x\in V - S,$$

o que completa a demonstração. □

Para $x\in V - S$, consideramos a diferencial $d_x\varphi_w$ de φ_w em x, isto é, a aplicação linear

$$d_x\varphi_w : V \longrightarrow V^*,\quad d_x\varphi_w(u) = \frac{d}{dt}\varphi_w(x+tu)|_{t=0}$$

Sejam $(x_1, ..., x_n)$ e $(y_1, ..., y_n)$ coordenadas com respeito às bases de V e V^*, duais uma da outra, respectivamente. A aplicação φ_w é escrita como $((\varphi_w)_1, ..., (\varphi_w)_n)$ com respeito às coordenadas $(y_1, ..., y_n)$. Consideremos a 1-forma diferencial

$$\varphi_w(x)dx := \sum_{i=1}^{n}(\varphi_w(x))_i dx_i;$$

é uma forma diferencial G-invariante em $V - S$. Cada componente $(\varphi_w(x))_i$ é um polinômio homogêneo de grau 1 com respeito a w.

Proposição 3.3. *Seja (G, V) espaço vetorial pré-homogêneo.*
(i) Se $w\in\overline{X_1}$, então

$$d_{(g\cdot x)}\varphi_w(g\cdot u) = g^*\cdot\{d_x\varphi_w(u)\},\ \forall g\in G, \forall x\in V - S, \forall u\in V.$$

(ii) A forma diferencial $\varphi_w(x)dx$ é uma forma fechada em V. Em particular, a aplicação

$$(u, v)\in V\times V \mapsto \langle u, d_x\varphi_w(v)\rangle \in \mathbb{C}$$

é uma forma bilinear simétrica em $V \times V$.

Demonstração. (i) Como

$$\varphi_w(g\cdot x + tg\cdot u) = g^* \cdot \varphi_w(x+tu),$$

temos claramente que

$$d_{(g\cdot x)}\varphi_w(g\cdot u) = g^* \cdot \{d_x\varphi_w(u)\}.$$

(ii) Tomamos coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ e $(y_1, ..., y_n)$ com respeito às bases de V e V^*,duais uma da outra, respectivamente. Podemos identificar V e V^* com o mesmo espaço vetorial $\mathbb{C}^n$. As ações de G e $\mathfrak{g}$ em $V = \mathbb{C}^n$ são representadas, embora, em geral, de maneira não única, pela ação natural de matrizes $n \times n$ dadas por
$g = (g_{ij}) \in G$ e $A = (A_{ij}) \in \mathfrak{g}$. As i-ésimas coordenadas de $(g\cdot x)$ e de $(A\cdot x)$ são dadas por

$$(g\cdot x)_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j \quad e \quad (A\cdot x)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j$$

Escrevendo $\varphi_w(x) := (\varphi_w(x)_1, ..., \varphi_w(x)_n)$ para $x = (x_1, ..., x_n) \in V$, temos da definição que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_w(x)_i A_{ij} x_j = \langle A\cdot x, \varphi_w(x)\rangle = \langle A, w\rangle, \ \ \forall A \in \mathfrak{g}, \forall x \in V - S.$$

Derivando com respeito a x_l, temos

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_w(x)_i}{\partial x_l} A_{ij}x_j + \sum_{i=1}^{n} \varphi_w(x)_i A_{il} = 0.$$

Por outro lado, como $\varphi_w(g\cdot x) = g^* \cdot \varphi_w(x)$, definimos um caminho por $e \in G$ com vetor tangente $A \in \mathfrak{g}$ através da aplicação exponencial : $\alpha(t) = e^{tA}$. Assim,

$$\varphi_w(e^{tA} \cdot x) = e^{-tA^*}\varphi_w(x);$$

aqui $A^* = A^t$. Derivando em $t = 0$ temos

$$d\varphi_w(x)(A\cdot x) = -A^*\varphi_w(x).$$

Escolhendo a linha l, temos então

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_w(x)_l}{\partial x_i} A_{ij}x_j = -\sum_{i=1}^{n} A_{il}\varphi_w(x)_i, \quad \forall A \in \mathfrak{g}, \forall x \in V - S.$$

Assim, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_w(x)_i}{\partial x_l} A_{ij}x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_w(x)_l}{\partial x_i} A_{ij}x_j, \quad \forall A \in \mathfrak{g}, \forall x \in V - S.$$

Ou seja,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_w(x)_i}{\partial x_l} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_w(x)_l}{\partial x_i}, \qquad \forall i, l \in \{1, ..., n\}.$$

Assim,

$$\varphi_w(x)dx := \sum_{i=1}^{n} \varphi_w(x)_i dx_i$$

é uma forma diferencial fechada.

Por último, notemos que

$$\langle d\varphi_w(x)(z), y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} y_i \frac{\partial \varphi_w(x)_i}{\partial x_j} z_j, \quad z = (z_1, ..., z_n) \in V,$$

donde segue que a última afirmação. □

Pela decomposição de Jordan-Chevalley (ver Capítulo 4, Anexo 1), temos que o grupo algébrico comutativo G/G_1 pode ser decomposto como um produto de sua parte semi-simples $(G/G_1)_s$ com a sua parte unipotente $(G/G_1)_u$. Desta forma, temos a correspondente decomposição de Jordan-Chevalley da álgebra de Lie de G/G_1

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1)_s \oplus (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1)_u.$$

Então, o espaço vetorial dual $\overline{X_1} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1)^\vee$ se decompõe como soma direta

$$\overline{X_1} = (\overline{X_1})_s \oplus (\overline{X_1})_u,$$

onde

$$(\overline{X_1})_s := \{w \in \overline{X_1} : w|_{(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1)_u} \equiv 0\}$$

e

$$(\overline{X_1})_u := \{w \in \overline{X_1} : w|_{(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1)_s} \equiv 0\}.$$

Lema 3.4. *Se G é abeliano, então $X(G) = X(G_s)$.*

Demonstração. Seja $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ o grupo especial linear, isto é,

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) |\ detX = 1\}$$

e seja

$$[\mathrm{SL}(n\mathbb{C}), \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})]$$

o subgrupo comutador de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. O centro de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ é o grupo das matrizes diagonais $D(n, \mathbb{C})$. Temos então que o quociente

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})/D(n, \mathbb{C})$$

é simples (para maiores detalhes a respeito deste resultado, veja [**Dieu**, Chapitre II, §2].) Como $[\mathrm{SL}(n\mathbb{C}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})] \supsetneq D(n,\mathbb{C})$, concluímos que

$$[\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})] = \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}).$$

Segue-se que $X(\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})) = \{1\}$. Sejam G_u e G_s as partes unipontente e semi-simples de G respectivamente. Como G_u é unipotente, G_u é conjugado a um subgrupo de $U(n,\mathbb{C})$, onde

$$U(n,\mathbb{C}) = \{\text{matrizes triangulares superiores com diagonal } (1,...,1)\}.$$

Concluímos que $X(G_u) = \{1\}$, donde $X(G) = X(G_s)$. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.5. *Seja $\{P_1(x), ..., P_m(x)\}$ um sistema completo de invariantes relativos básicos de (G,V) e seja χ_i $(i = 1,...,m)$ o caracter correspondente de $P_i(x)$, $i = 1,...,m$.*

(i) O espaço vetorial $(\overline{X_1})_s$ é o subespaço de $\overline{X_1}$ gerado por $\delta\chi_1, ..., \delta\chi_m$; em particular, $(\overline{X_1})_s$ é um espaço vetorial de dimensão m.

(ii) Para $w = \sum_{i=1}^m s_i\delta\chi_i \in (\overline{X_1})_s$, temos que

$$\varphi_w(x)dx = \sum_{i=1}^m (\frac{s_i}{P_i(x)})dP_i(x).$$

Em outras palavras,

$$(\varphi_w(x))_k = \sum_{i=1}^m (\frac{s_i}{P_i(x)})(\frac{\partial P_i}{\partial x_k}).$$

DEMONSTRAÇÃO. (i) Consideremos o homomorfismo

$$\delta : X_1(G) \longrightarrow \overline{X_1},\ \chi \mapsto (\delta\chi : \mathfrak{g} \to \mathbb{C})$$

onde $\delta\chi(A) = d(\chi \circ \exp)(A)$, $A \in \mathfrak{g}$. Temos que, dado $x \in G/G_1$, $x = x_s x_u$, com $x_s \in (G/G_1)_s$ e $x_u \in (G/G_1)_u$. Pelo Lema 3.4, como G/G_1 é comutativo, temos que $X_1 = X(G/G_1) = X((G/G_1)_s)$; e como $X((G/G_1)_u) = 1$, segue-se que

$$\chi(x) = \chi(x_s x_u) = \chi(x_s),\ \ \forall x \in G/G_1.$$

Concluímos daí que δ induz um homomorfismo $X((G/G_1)_s) \longrightarrow (\overline{X_1})_s$. Pela Proposição 2.16, $\chi_1, ..., \chi_m$ formam uma base do grupo livre X_1; vamos mostrar que $\{\delta\chi_1, ..., \delta\chi_m\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{C}$. Suponhamos que existem $a_1, ..., a_m \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^m a_i\delta\chi_i = 0,$$

isto é, para todo $A \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{d}{dt}(\chi_i(exp(tA))|_{t=0} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt}([\sum_{i=1}^{m} a_i\chi_i](exp(tA))|_{t=0} &= 0 \Leftrightarrow \\ d_1(\sum_{i=1}^{m} a_i\chi_i)\cdot d_e(exp)(A) &= 0,\end{aligned}$$

onde $d_1 f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ indica a diferencial em $1 \in \mathbb{C}$ de $f = \sum_{i=1}^{m} a_i\chi_i$; ou seja,

$$d_1(\sum_{i=1}^{m} a_i\chi_i) \equiv 0.$$

Como G é conexo, temos que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\chi_i \equiv c,$$

para c constante não nula. Assim,

$$\sum_{i=1}^{m} (\frac{a_i}{c})\chi_i \equiv 1,$$

o que contradiz o fato de $\{1, \chi_1, ..., \chi_m\}$ ser linearmente independente sobre $\mathbb{C}$. Como

$$m = \dim_{\mathbb{C}} \overline{X_1},$$

pois

$$\mathrm{posto}\, \mathrm{X}((\mathrm{G}/\mathrm{G}_1)_\mathrm{s}) = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1)_\mathrm{s},$$

obtemos o resultado.

(ii) Usando o fato de que

$$P_i(g\cdot x) = \chi_i(g)P(x), \quad \forall g \in G, x \in V - S$$

e tomando

$$g = e^{tA}, \quad A \in \mathfrak{g},$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P_i(e^{tA}\cdot x)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\chi_i(e^{tA})P_i(x)|_{t=0} \Leftrightarrow\\ \sum_{l,j=1}^{n}\frac{\partial P_i(x)}{\partial x_l}A_{lj}x_j &= \delta\chi_i P_i(x).\end{aligned}$$

Se $x\in V-S$, temos que $P_i(x)\neq 0, \forall i$, e assim

$$w(A)=\sum_{i=1}^{m}s_i\delta\chi_i(A)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j,l=1}^{n}(\frac{s_i}{P_i(x)}\cdot\frac{\partial P_i(x)}{\partial x_l})A_{lj}x_j, \forall A\in\mathfrak{g}.$$

Mas, por outro lado,

$$w(A)=\langle A,w\rangle=\sum_{l,j=1}^{n}(\varphi_w(x))_l A_{lj}x_j$$

Daí, temos que

$$(\varphi_w(x))_l=\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i}{P_i(x)}\cdot\frac{\partial P_i(x)}{\partial x_l}$$

e, portanto,

$$\varphi_w(x)dx=\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i}{P_i(x)}dP_i(x),$$

o que completa a demonstração. □

Definição 3.6. *Sejam $x\in V-S$ e $w\in\overline{X_1}$. Se a aplicação linear $d_x\varphi_w$ de V em V^* é invertível, dizemos que $d_x\varphi_w$ é não-degenerada.*

Seja $U=\{x\in V-S : d_x\varphi_w$ é não-degenerada$\}$; decorre do item (i) da Proposição 3.3 que U é um subconjunto G-invariante de $V-S$. Assim, $U=V-S$ ou $U=\emptyset$.

Definição 3.7. *Sejam $x\in V-S$ e $w\in\overline{X_1}$. Se o conjunto*

$$U=\{x\in V-S : d_x\varphi_w \text{ é não-degenerada}\}$$

coincide com $V-S$, dizemos que φ_w é não-degenerada.

O conjunto $\{w\in\overline{X_1} : \varphi_w(x)$ é não-degenerada$\}$ é um aberto de Zariski. De fato: seja $x\in V-S$ e seja $w\in\overline{X_1}$ tal que φ_w é não degenerada. Se escrevermos a aplicação $d_x\varphi_w : V\longrightarrow V^*$ como uma matriz $n\times n$ com respeito às bases de V e V^*, cada entrada da matriz $d_x\varphi_w$ é um polinômio de grau um, e portanto, o determinante de $d_x\varphi_w$ é um polinômio em w. Assim, temos que

$$\{w\in\overline{X_1} : \varphi_w(x) \text{ é não-degenerada }\}=\{w\in\overline{X_1} : det(d\varphi_w)_x\neq 0\},$$

ou seja, é um aberto de Zariski.

Analogamente, temos que o conjunto

$$\{w\in(\overline{X_1})_s : \varphi_w(x) \text{ é não-degenerada}\}$$

é um aberto de Zariski.

Definição 3.8. *Dizemos que o espaço vetorial pré-homogêneo (G,V) é quase-regular se existe $w\in\overline{X_1}$ tal que φ_w é não-degenerada.*

Proposição 3.9. *Seja (G,V) um espaço vetorial pré-homogêneo quase-regular e seja $w\in\overline{X_1}$ tal que φ_w é uma aplicação não-degenerada de V em V^*. Então:*

(i) (G,V^*) é um espaço vetorial pré-homogêneo quase-regular;

(ii) $G_1=G_1^*$ e $\overline{X_1}=\overline{X_1^*}$;

(iii) φ_w induz uma aplicação birracional de $V-S$ em V^*-S^* tal que $\psi_w=\varphi_w^{-1}$.

Demonstração. (i) Como $V-S$ é uma G-órbita em V e φ_w é G-admissível, temos que $\varphi_w(V-S)$ é uma G-órbita em V^*, já que $\varphi_w(g\cdot x)=g^*\cdot\varphi_w(x),\ \ \forall g\in G, \forall x\in V-S$. Pelo Lema 1.22 do Capítulo 1, existe um subconjunto algébrico E^* de V^* e um subconjunto algébrico próprio F^* de E^* tais que

$$\varphi_w(V-S)=E^*-F^*.$$

Por outro lado, a aplicação linear $d_x\varphi_w$ de V em V^* é invertível, para qualquer $x\in V-S$, o que significa que a dimensão da imagem de φ_w é igual à dimensão de $V-S$. Portanto, temos que

$$\dim(E^*)=\dim(V-S)=n,$$

o que implica que $E^*=V^*$. Ou seja, (G,V^*) é um espaço vetorial pré-homogêneo com respeito à ação contragradiente de G e $F^*=S^*$, onde S^* é o conjunto singular de V^*. Logo,

$$\varphi_w(V-S)=V^*-S^*,$$

o que completa a demonstração de (i).

(ii) Para $x\in V-S$, tomamos $y=\varphi_w(x)\in V^*-S^*$ e

$$G_y^*=\{g\in G : g^*\cdot y=y\}.$$

Temos que $G_x\subset G_y^*$. De fato: se $g\in G_x$, então $g\cdot x=x$, e portanto,

$$\varphi_w(g\cdot x)=\varphi_w(x)=y.$$

Mas

$$\varphi_w(g\cdot x)=g^*\cdot\varphi_w(x)=g^*\cdot y.$$

Logo, $g^*\cdot y = y$, ou seja, $g\in G_y^*$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\dim G_y^* &= \dim G - \dim V^* \\ &= \dim G_x.\end{aligned}$$

Assim, $G_y^* = G_x$ e, portanto, $\mathfrak{g}_x = \mathfrak{g}_y^*$. Como $G_1^* := [G,G]\cdot G_y^*$, temos que $G_1^* = G_1$ e, portanto, $\mathfrak{g}_1^* = \mathfrak{g}_1$. Logo,

$$\overline{X_1} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1)^\vee = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1^*)^\vee = \overline{X_1^*}.$$

(iii) Pelo item anterior, temos que $w \in \overline{X_1^*}$. Pela Proposição 3.2, existe uma aplicação G-admissível ψ_w de V^* em V satisfazendo a condição

$$\langle \psi_w(y), A^*\cdot y\rangle = -\langle A, w\rangle,\ \forall y\in V^* - S^*, \forall A\in\mathfrak{g}.$$

Assim, ψ_w é determinada de maneira única. Por outro lado, de

$$\langle A\cdot x, \varphi_w(x)\rangle = \langle A, w\rangle$$

segue que

$$\langle x, A^*\cdot\varphi_w(x)\rangle = -\langle A, w\rangle,\ \forall x\in V - S, \forall A\in\mathfrak{g}.$$

Para $y = \varphi_w(x)$, temos que

$$\langle x, A^*\cdot y\rangle = \langle \psi_w(y), A^*\cdot y\rangle,$$

e portanto, $x = \psi_w(y)$. A recíproca é demonstrada de forma análoga. Logo, $\psi_w = \varphi_w^{-1}$ e, portanto, φ_w induz uma aplicação birracional de $V - S$ em $V^* - S^*$. □

Corolário 3.10. *Seja (G,V) um espaço vetorial pré-homogêneo quase-regular e seja (G,V^*) o seu espaço vetorial pré-homogêneo dual. Então o número m' de componentes irredutíveis em S^* de codimensão igual a 1 em V^* coincide com o número m de componentes irredutíveis em S de codimensão igual a 1 em V.*

Demonstração. Pelas Proposições 2.13 e 2.16, m (resp. m') coincide com o posto do grupo de caracteres de (G/G_1) (resp. (G/G_1^*)). Mas, pela Proposição 3.9, provamos que $G_1^* = G_1$. Logo, $m = m'$. □

Definição 3.11. *Seja (G,V) um espaço vetorial pré-homogêneo quase-regular. Se existe $w\in(\overline{X_1})_s$ tal que φ_w é não-degenerada, dizemos que (G,V) é um espaço vetorial pré-homogêneo regular.*

A seguir, será apresentado um teorema que caracterizará os espaços pré-homogêneos regulares. Antes, porém, precisamos do resultado de dois lemas dados abaixo.

Lema 3.12. *Seja $P : V \longrightarrow V$ um polinômio homogêneo. Seja $x \in V - S$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) O hessiano $H_{logP(x)}$ de $logP(x)$ é diferente de zero;

(ii) O hessiano $H_{P(x)}$ de $P(x)$ é diferente de zero, se grau de P é maior ou igual a 2; det $\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right) \neq 0$, se grau de P é igual a 1.

Demonstração. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in V - S$, seja

$$d_x\varphi : T_x(V - S) \to T_{\varphi(x)}V^*$$

a diferencial de $\varphi = grad\ logP$. Temos então que

$$\begin{aligned} det(d_x\varphi) &= det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right) \\ &= det\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)(x)\right) \\ &= det\left(\frac{\partial^2 logP}{\partial x_j \partial x_i}\right) \\ &= H_{logP}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} det(d_x\varphi) &= det\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)(x)\right) \\ &= det\left(\frac{1}{P}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{1}{P^2}\cdot\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right); \end{aligned}$$

se $\deg P = 1$, temos

$$det(d_x\varphi) = (-1)^n P(x)^{-2n} \cdot det\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right),$$

o que demonstra a equivalência entre (i) e (ii).

Suponhamos então que $\deg P(x) = r \geq 2$. Usando a indentidade de Euler(ver[**Sha**, chapter 1, section 1.6]), segue-se que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_i} = (r-1)\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_j}, \quad \forall j = 1, ..., n,$$

e também que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_i} = r \cdot \frac{1}{P} \cdot P = r,$$

donde temos o vetor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1}{P}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_i}, \cdots, \frac{1}{P}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial x_n \partial x_i}, \frac{1}{P}\cdot\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)$$

$$= \left(\frac{r-1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_1}, \cdots, \frac{r-1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_n},\ r \right);$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
det(d_x\varphi) &= det \left(\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{1}{P^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial P}{\partial x_j} \right) \\
&= det \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{P^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial P}{\partial x_j} \right) & \begin{matrix} \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_n} \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Denotando por A_i a i-ésima coluna da matriz acima e aplicando a cada A_i a operação elementar

$$\left(\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) A_{n+1} + A_i, \quad \forall i = 1, ..., n,$$

resulta que

$$det(d_x\varphi) = det \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} \right) & \begin{matrix} \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_n} \end{matrix} \\ \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_1} \ \cdots \ \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_n} & 1 \end{bmatrix}.$$

Denotando por B_i a i-ésima linha da matriz acima e aplicando à linha B_{n+1} a operação elementar

$$B_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{r-1} \cdot B_i$$

decorre que

$$\begin{aligned}
det(d\varphi)_x &= det \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} \right) & \begin{matrix} \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_n} \end{matrix} \\ 0 & 1 - \frac{r}{r-1} \end{bmatrix} \\
&= det \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) \cdot \frac{1}{P(x)^n} \cdot \left(1 - \frac{r}{r-1} \right),
\end{aligned}$$

isto é,

$$det(d_x\varphi) = -\frac{1}{r-1} \cdot \frac{H_{P(x)}}{P(x)^n},$$

donde segue o resultado. $\square$

LEMA 3.13. *Seja* $f \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_m]$. *Se* $f(a) = 0,\ \forall a \in \mathbb{Z}^m$, *então* $f \equiv 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Por indução em m. Se $m = 1$, é claro que se $f(l) = 0,\ \forall l \in \mathbb{Z}$, então $f \equiv 0$. Suponhamos que o resultado vale para todo $m < k$. Para $m = k$, se $f \not\equiv 0$, então existe $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $d = \deg_{x_j} f > 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor $j = m$. Assim podemos escrever

$$f(x_1, ..., x_m) = a_0(x_1, ..., x_{m-1})x_m^d + ... + a_d(x_1, ..., x_{m-1}),$$

com $a_i \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_{m-1}],\ i = 0, 1, ..., d$. Se $b = (b_1, ..., b_{m-1}) \in \mathbb{Z}^{m-1}$, pela hipótese do lema, temos que o polinômio

$$g(x) = f(b_1, ..., b_{m-1}, x) = a_0(b)x_m^d + ... + a_d(b)$$

verifica $g(l) = 0,\ \forall l \in \mathbb{Z}$. Logo $g \equiv 0$, ou seja,

$$a_0(b) = ... = a_d(b) = 0.$$

Como $b \in \mathbb{Z}^{m-1}$ é arbitrário, pela hipótese de indução, temos que

$$a_0 = ... = a_d = 0,$$

donde a afirmação. $\square$

COROLÁRIO 3.14. *Se* $U \subset \mathbb{C}^m$ *é um aberto de Zariski não vazio, então* $\mathbb{Z}^m \cap U \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO. Como U é um aberto de Zariski,

$$\mathbb{C}^m \setminus U = V(f_1, ..., f_l),$$

para $f_1, ..., f_l \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Se $\mathbb{Z}^m \subset V(f_1, ..., f_l)$, pelo Lema 3.13 $f_i \equiv 0,\ \forall i = 1, ..., l$, o que implica $U = \emptyset$, contradição. $\square$

TEOREMA 3.15. *Seja* (G, V) *um espaço vetorial pré-homogêneo quase regular. Então temos as seguintes afirmações:*

(i) (G, V) *é regular se e somente se existe um invariante relativo* $P(x)$ *cujo Hessiano não se anula em* $V - S$.

(ii) Se (G, V) *é regular, então* (G, V^*) *também o é.*

DEMONSTRAÇÃO. (i) Se (G, V) é regular, então existe $w \in (\overline{X_1})_s$ tal que $d_x\varphi_w$ é não-degenerada em $x \in V - S$. Assim,

$$U := \{w \in (\overline{X_1})_s : det(d_x\varphi_w) \neq 0\}$$

é um aberto de Zariski denso em $(\overline{X_1})_s \simeq \mathbb{C}^m$; consideramos $\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{C}^m$. Pelo Corolário 3.14, existe $w' = (n_1, ..., n_m) \in U \cap \mathbb{Z}^m$; denotamos

$$P(x) := P_1^{n_1}(x) \cdots P_m^{n_m}(x).$$

$P(x)$ é um invariante relativo. De fato: seja $g \in G$, então

$$\begin{aligned} P(g \cdot x) &= P_1^{n_1}(g \cdot x) \cdots P_m^{n_m}(g \cdot x) \\ &= \chi_1^{n_1}(g) P_1^{n_1}(x) \cdots \chi_m^{n_m}(x) P_m^{n_m}(x) \\ &= \chi_1^{n_1}(g) \cdots \chi_m^{n_m}(g) P(x), \end{aligned}$$

ou seja, $P(x)$ é um invariante relativo correspondente ao caracter $\chi_1^{n_1} \cdots \chi_m^{n_m}$. Usando a Proposição 3.5, temos

$$\begin{aligned} (\varphi_{w'}(x))_k &= \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{P_i} \frac{\partial P_i}{\partial x_k} \\ &= \sum_{i=1}^{m} n_i \frac{\partial log\ P_i}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{i=1}^{m} n_i\ log P_i \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[log\ \prod_{i=1}^{m} P_i^{n_i} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} log\ P, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi_{w'}(x) = d\ log P(x),$$

e, portanto,

$$det(d_x \varphi_{w'}) = H_{log P(X)}.$$

Logo, $H_{log P(X)} \neq 0$. Pelo Lema 3.12, concluímos que $H_{P(x)} \neq 0$.

Reciprocamente, suponhamos que existe $P \in \mathcal{IR}(G, V)$ tal que $H_{P(x)} \neq 0$, $\forall x \in V - S$. Seja χ o caracter correspondente de P. Definimos a aplicação $\varphi = grad\ log P$, onde

$$grad\ P(x) = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial P}{\partial x_n}(x) \right).$$

Temos que φ é G-admissível. De fato: como $P(g \cdot x) = \chi(g) P(x)$, para todo $g \in G$,

$$log\ P(g \cdot x) = log \chi(g) + log\ P(x),$$

donde

$$grad\ log P(g \cdot x) \cdot g = grad\ log P(x),$$

isto é,

$${}^t g \cdot {}^t grad\ log P(g \cdot x) = {}^t grad\ log P(x),$$

ou seja,

$$^{t}grad\ logP(g\cdot x) = {}^{t}g^{-1}\cdot {}^{t}grad\ logP(x),$$

donde segue-se que

$$\varphi(g\cdot x) = g^{*}\cdot\varphi(x).$$

Além disso, existe $w \in (\overline{X_1})_s$ tal que

$$\langle A\cdot x, \varphi(x)\rangle = \langle A, w\rangle, \quad \forall A \in \mathfrak{g}, \forall x \in V - S;$$

com efeito: seja $w = \delta\chi \in (\overline{X_1})_s$ e definamos um caminho por $e \in G$ com vetor tangente $A \in \mathfrak{g}$ com a aplicação exponencial: $\alpha(t) = e^{tA}$; assim, temos que

$$P(e^{tA}\cdot x) = \chi(e^{tA})P(x).$$

Derivando em $t = 0$ temos

$$grad\ P(x)\cdot(A\cdot x) = \delta\chi(A)P(x),$$

donde, para $x \in V - S$,

$$\langle A\cdot x, grad\ logP(x)\rangle = w(A) = \langle A, w\rangle.$$

Finalmente, como $H_{P(x)} \neq 0$, temos pelo Lema 3.12 que

$$det(d_x\varphi) = H_{logP(x)} \neq 0,\ \forall x \in V - S,$$

e, portanto, (G, V) é regular, o que conclui a prova de (i).

(ii) Pela Proposição 3.9 e pela unicidade da decomposição de Jordan-Chevalley, temos que $(\overline{X_1})_s = (\overline{X_1^*})_s$ e que a aplicação $\psi_w = \varphi_w^{-1}$ é G-admissível e satisfaz a condição

$$\langle\psi_w(y), A^{*}\cdot y\rangle = -\langle A, w\rangle, \quad \forall y \in V^{*} - S^{*}, \forall A \in \mathfrak{g}.$$

Como φ_w é não-degenerada em $V - S$, segue-se que ψ_w é não-degenerada em $V^{*} - S^{*}$, donde concluímos que (G, V^{*}) é regular. $\square$

Encerraremos este capítulo com alguns exemplos de espaços pré-homogêneos regulares.

Exemplo 3.16. Seja $V = \mathbb{C}^n$ e seja $Q(x)$ uma forma quadrática não degenerada qualquer de V. Consideremos o conjunto

$$O(Q) = \{A \in \mathrm{GL}(n) : Q(A\cdot x) = Q(x),\ \forall x \in V\}.$$

Seja $G = O(Q)\times\mathbb{C}^{*}$ e consideremos a ação de G em V dada por

$$G\times V \longrightarrow V, \quad [(A,t), x] \mapsto (tA)\cdot x.$$

Temos que

$$Q((A,t)\cdot x) = Q((tA)\cdot x) = t^2 Q(A\cdot x) = t^2 Q(x),$$

ou seja, $Q(x)$ é um invariante relativo de V com caracter χ dado por

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad \chi(A,t) = t^2.$$

Resta ver que de fato (G,V) é um espaço pré-homogêneo. Sem perda de generalidade, suponhamos que $Q(x_0) \neq 0$, onde $x_0 = (1,0,...,0)$. Definimos o conjunto

$$G_{x_0} := \{(A,t) \in G : (tA) \cdot x_0 = x_0\};$$

assim, temos que, se $A = (a_{ij})$,

$$\begin{pmatrix} ta_{11} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & \cdots & ta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ta_{n1} & \cdots & ta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $a_{11} = 1/t,\ a_{21} = ... = a_{n1} = 0$; segue-se que

$$\dim G_{x_0} = \dim O(Q) + 1 - n = \dim G - \dim V,$$

e, portanto, (G,V) é pré-homogêneo.

Exemplo 3.17. O par (G,V), onde G e V são como no Exemplo 1.19, é evidentemente um espaço pré-homogêneo regular com invariante relativo

$$P(x) = x_1 x_2 \cdots x_n, \text{ com } x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Exemplo 3.18. Consideremos $G = \mathrm{GL}(3)$ e V o espaço das formas quadráticas em $\mathbb{C}^3$. Pode-se mostrar que (G,V), com a ação natural em $\mathbb{C}^3$,é um espaço pré-homogêneo regular com invariante relativo P dado pela função discriminante (ver [**Sha**, Chap.I, 6.2, Example 1 and Chap. II, 6.4, Example 1]).

Exemplo 3.19. Para $G = \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n)$ e $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ o espaço das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$, temos que (G,V) é um espaço pré-homogêneo com a ação dada por $(g,h) \cdot A = gAh^{-1}$; (G,V) é regular com invariante relativo P sendo o determinante.

CAPíTULO 4

Anexos

1. A decomposição de Jordan-Chevalley

DEFINIÇÃO 4.1. *Seja V espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$. Seja $X \in \mathrm{End}(V) = \{X : V \longrightarrow V$ linear $\}$.*

(a) X é dito semi-simples se X for diagonalizável, isto é, o seu polinômio característico é escrito como um produto de fatores lineares distintos.

(b) X é dito nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X^n = 0$. Equivalentemente, se 0 é o único autovalor de X.

TEOREMA 4.2. *(Teorema da Decomposição de Jordan) Seja $X \in \mathrm{End}(V)$. Então existem únicos $X_S, X_N \in \mathrm{End}(V)$ tais que :*

(i) $X = X_S + X_N$;

(ii) X_S é semi-simples e X_N é nilpotente;

(iii) $X_S X_N = X_N X_S$;

(iv) se $XY = YX$, $\forall X, Y \in \mathrm{End}(V)$, então

$$(X+Y)_S = X_S + Y_S \quad e \quad (X+Y)_N = X_N + Y_N.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [**Ho-Ku**, Capítulo 7, 7.4, teorema 8].

DEFINIÇÃO 4.3. *$X \in \mathrm{End}(V)$ é dito unipotente se X escreve-se como $X = I + N$, com N nilpotente; equivalentemente, se o único autovalor de X é 1.*

Temos que se $X \in \mathrm{GL}(V)$, os seus autovalores são todos não nulos. Logo $X_S \in \mathrm{GL}(V)$. Podemos então escrever $X_U = I + X_S^{-1} X_N$ e obtemos a decomposição de Jordan multiplictiva de X, isto é:

$$X = X_S X_U$$

TEOREMA 4.4. *(Decomposição de Jordan Multiplicativa) Seja $x \in \mathrm{GL}(V)$. Então existem únicos x_s, x_u tais que :*

(i) $x = x_s x_u$;

(ii) x_s é semi-simples e x_u é unipotente;

(iii) $x_s x_u = x_u x_s$;

(iv) se $xy = yx, \ \forall x, y \in \mathrm{GL}(V)$*, então*

$$(xy)_s = x_s y_s \quad e \quad (xy)_u = x_u y_u$$

Proposição 4.5. *Seja* $G \subset \mathrm{GL}(V)$ *um grupo algébrico e seja* $\mathfrak{g}$ *a álgebra de Lie de* G*. Denotamos por*

$$\begin{array}{ll} G_s = \{x \in G : x = x_s\}, & G_u = \{x \in G : x = x_u\} \\ \mathfrak{g}_S = \{X \in \mathfrak{g} : X = X_S\}, & \mathfrak{g}_N = \{X \in \mathfrak{g} : X = X_N\} \end{array}$$

Se G *é abeliano, então* $\mathfrak{g}$ *é também abeliano. Neste caso,*

$$G = G_s G_u, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_S + \mathfrak{g}_N.$$

Além disso, $G_s \simeq \underbrace{\mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*}_{n}$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que dado $g \in G$,

$$Ag = gA, \forall A \in \mathfrak{g}.$$

Consideremos $g \in G$ e a aplicação $\gamma_g : G \longrightarrow G, \ \gamma_g(h) = hghg^{-1}$. Como G é abeliano, temos que $\gamma_g \equiv id_G$. Logo, $d\gamma_g \equiv 0$. Assim, como $d\gamma_g = Id - Ad(g)$, temos que

$$A - Ad(g)A = 0, \forall A \in \mathfrak{g} \Rightarrow A - gAg^{-1} = 0 \Rightarrow A = gAg^{-1}, \forall A \in \mathfrak{g}.$$

Agora, temos que

$$[X, Y] = (d_e Ad)(X)(Y), \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Seja $X \in \mathfrak{g}$. Consideremos $\alpha(t) = exp(tX), \ \alpha(0) = e, \ \alpha'(0) = X$. Temos então que

$$[X, Y] = \frac{d}{dt} Ad(e^{tX})(Y)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e^{tX} Y e^{-tX})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e^{tX} e^{-tx} Y)|_{t=0} = 0,$$

$\forall Y \in \mathfrak{g}$. Ou seja,

$$[X, Y] = XY - YX = 0, \ \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

isto é, $\mathfrak{g}$ é comutativo.

A demonstração de que $G = G_s G_u$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_S + \mathfrak{g}_N$ pode ser encontrada em [**Hum**, ChapterIV, Theorem 15.5, p.100].

Agora, mostremos que $G_s \simeq \underbrace{\mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*}_{n}$.

Como G é abeliano, temos que dado $g \in G_s$, existe $p \in G$ tal que pgp_{-1} é diagonal e php^{-1} é diagonal, $\forall h \in G_s$ (ver [**Ho-Ku**, Capítulo 6, 6.3, teorema11]). Logo, temos um isomorfismo

$$\varphi : G_s \longrightarrow \mathrm{Int}_p(G_s) \quad \text{tal que} \quad \varphi(g) = pgp^{-1}.$$

Por outro lado, temos um isomorfismo

$$\psi : D(n, \mathbb{C}) = \{\text{matrizes diagonais } n \times n\} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*}_{n}$$

tal que $\psi(d) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são os autovalores de d. Fazendo $\psi \circ \varphi$, temos o resultado. $\square$

2. Dualidade entre espaços vetoriais

Uma dualidade entre espaços vetoriais V e W de mesma dimensão é uma forma bilinear não degenerada

$$Q : V \times W \longrightarrow \mathbb{C};$$

Q ser nao degenerada significa que se $Q(v, w) = 0$ para todo $v \in V$, então $w = 0$.

Temos então que existe um isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \longrightarrow & W^* \\ & v & \mapsto & \varphi_v \end{array}$$

com $\varphi_v(w) = Q(v, w) : W \longrightarrow \mathbb{C}$ funcional linear.

Assim, segue-se que existe uma dualidade entre V e V^* dada por

$$\begin{array}{rccc} Q : & V \times V^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (v, w) & \mapsto & Q(v, w) = w(v); \end{array}$$

notaremos $\langle \ , \rangle = Q$.

O objetivo desta seção é mostrar que, dado $G \subset \mathrm{GL}(V)$ grupo algébrico linear, existe ação de G no espaço dual V^*.

Se $g : V \longrightarrow W$ é uma aplicação do espaço vetorial V no espaço vetorial W, então existe uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} g^\vee : & W^* & \longrightarrow & V^* \\ & w^* & \mapsto & w^* \circ g; \end{array}$$

$g^\vee$ é uma aplicação auto-adjunta, isto é,

$$\langle g(x), y \rangle = \langle x, g^\vee(y) \rangle, \quad \forall x \in V, \forall y \in W.$$

De fato: se $x \in V$ e $y \in W$, então

$$\begin{aligned} \langle x, g^\vee(y) \rangle &= \langle x, y \circ g \rangle \\ &= (y \circ g)(x) \\ &= y(g(x)) \\ &= \langle g(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Se $V = W$, escolhendo bases de V e V^*, tem-se que $g^\vee = {}^t g$, onde ${}^t g$ denota a matriz transposta de g (veja [**Ho-Ku**]).

Se $g^* = {}^t g^{-1}$, então $\langle g(x), g^*(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

De fato: se $x \in V$ e $y \in V^*$, então

$$\begin{aligned}
\langle g(x), g^*(y)\rangle &= \langle g(x), (g^{-1})^\vee(y)\rangle \\
&= \langle g(x), y \circ g^{-1}\rangle \\
&= y \circ g^{-1}(g(x)) \\
&= y(x) \\
&= \langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Proposição 4.6. *Seja $G \subset \mathrm{GL}(V)$ grupo algébrico afim e consideremos a ação linear de G em V*

$$(g, x) \mapsto g \cdot x = g(x);$$

então,

$$(g, y) \mapsto {}^t g^{-1}(y)$$

é uma ação de G em V^*.

Demonstração. Sejam $g, h \in G$ e $y \in V^*$. Então

$$\begin{aligned}
{}^t g^{-1} \cdot ({}^t h^{-1}(y)) &= {}^t g^{-1}\ {}^t h^{-1}(y) \\
&= [{}^t h\ {}^t g]^{-1}(y) \\
&= {}^t (gh)^{-1}(y) \\
&= {}^t (gh)^{-1} \cdot y.
\end{aligned}$$

Além disso, como ${}^t (id)^{-1} = id$, concluímos que

$${}^t g^{-1} \cdot y$$

é uma ação de $g \in G$ em $y \in V^*$. $\square$

Esta ação de G em V^* é chamada *ação contragradiente.*

Bibliografia

[Dieu] Dieudonné, J., *La géométrie des groupes classiques*, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heildelberg (1955), 115 p.

[Ho-Ku] Hoffman, K. e Kunze, R., *Álgebra Linear*, Editora da Universidade de São Paulo (1971), 356p.

[Hum] Humphreys, J. *Linear Algebraic Groups*, Graduate texts in mathematics, Vol. 21; Springer-Verlag New York-Heildelberg-Berlin (1975), 247 p.

[Sa-Ki] Sato, M. and Kimura, T., *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math. J. Vol. 65 (1977), 1-155.

[Sa-Shi-Mu] Sato, M., Shintani, T. and Muro, M., *Theory of Prehomogeneous Vector Spaces*, Nagoya Math. J. Vol. 120 (1990), 1-34.

[Sha] Shafarevich, I., *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag Berlin-Heildelberg, Second Edition,(1994), 303p.

[War] Warner, F., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, (1971), 270 p.