Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

# Regularidade fina para equação de meios porosos

Gabriel Pizzio Machado

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre, 13 de Junho de 2023.

Dissertação submetida por Gabriel Pizzio Machado como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Nicolau Matiel Lunardi Diehl (IFRS)

Banca Examinadora:
Dr. Leonardo Prange Bonorino (UFRGS)
Dr. Lucas Pinto Dutra (IFRS)
Dra. Patrícia Lisandra Guidolin (UFRGS)

Data da Apresentação: 13 de Junho de 2023.

# Sumário

# Resumo

A teoria de regularidade de soluções de equações diferenciais parciais (EDP's) tem tido grande importância ao longo das últimas décadas. Neste trabalho, iremos considerar uma das mais importantes equações parabólicas do tipo degenerado, a Equação de Meios Porosos, (PME)

$$u_t - \operatorname{div}(m|u|^{m-1}\nabla u) = f, \quad m > 1.$$

Como resultado principal desta dissertação, iremos mostrar que soluções fracas localmente limitadas da equação de meios porosos não-homogênea são localmente $C^{0,\gamma}$ no espaço e $C^{0,\frac{\gamma}{\theta}}$ no tempo, com

$$\gamma = \min\left\{\frac{2\alpha_0^-}{2+(m-1)\alpha_0}, \frac{r(2q-d)-2q}{q[mr-(m-1)]}\right\}, \theta := 2 + \gamma(1-m),$$

onde $0 < \alpha_0 \leq 1$ denota o expoente Hölder ótimo de soluções do caso homogêneo. A prova deste resultado é feita através de um lema de aproximação, onde aproximamos soluções da PME não-homogênea por soluções da equação homogênea, e num processo geométrico iterativo, usando a escala apropriada para a equação.

# Abstract

The regularity theory for solutions of Partial Differential Equations (PDE's) has been of great importance over the last few decades. In this work, we consider one of the most important parabolic equations of the degenerate type, the Porous Medium Equation, (PME)

$$u_t - \operatorname{div}(m|u|^{m-1}\nabla u) = f, \quad m > 1.$$

As the main result of this thesis, we show that locally bound weak solutions of the non-homogeneous porous media equation are locally $C^{0,\gamma}$ in space and $C^{0,\frac{\gamma}{\theta}}$ in time, with

$$\gamma = \min\left\{\frac{2\alpha_0^-}{2+(m-1)\alpha_0}, \frac{r(2q-d)-2q}{q[mr-(m-1)]}\right\}, \theta := 2+\gamma(1-m).$$

where $0 < \alpha_0 \leq 1$ denotes the optimal Hölder exponent of solutions of the homogeneous case. The proof of this result is made through an approximation lemma, where we approximate solutions of the inhomogeneous PME by solutions of the homogeneous equation, and in an iterative geometric process, using the appropriate scale for the equation.

# Notação

| | |
|---|---|
| $(x,t) = (x_1,\, x_2, \ldots, x_d,\, t)$ | Ponto genérico de $\mathbb{R}^{d+1}$ |
| $\lvert A\rvert$ | Medida de Lebesgue de um conjunto $A$ |
| $u_t$ , $\frac{\partial u}{\partial t}$ | Derivada parcial de $u$ com respeito a $t$ |
| $u_{x_i}$ , $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ | Derivada parcial de $u$ com respeito a $x_i$ , $i = 1, ..., n$ |
| $\nabla_{(x,t)} u$ | Gradiente de $u$ calculado no ponto $(x,t)$ |
| $\mathrm{div}_{(x,t)}\, u$ | Divergente de $u$ calculado no ponto $(x,t)$ |
| $E$ | Subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^d$ |
| $\partial E$ | Fronteira de $E$ |
| $\Sigma = \partial E \times (0,T)$ | Fronteira lateral de $E_T$ |
| $\partial_p E_T = \Sigma \cup (E \times \{0\})$ | Fronteira parabólica de $E_T$ |
| $B_r(x)$ | Bola em $\mathbb{R}^d$ de raio $r$ e centro $x$ |
| $\rightarrow$ | Convergência forte |
| $\rightharpoonup$ | Convergência fraca |

# Capítulo 1

# Introdução

A tarefa de obter resultados sobre a regularidade ótima de soluções fracas de EDP's é um dos temas mais importantes nesta área. Um progresso considerável acerca deste tema ocorreu nas décadas de 50 e 60, com os resultados de DeGiorgi [9] e Moser [11], que mostraram que soluções fracas de

$$\begin{cases} u \in W^{1,2}_{loc}(E), & E \subset \mathbb{R}^d \\ (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} = 0 & \text{em } E \end{cases}$$

são localmente Hölder contínuas, assumindo apenas que os coeficientes da matriz $(a_{ij})$ são mensuráveis e satisfazem uma certa condição de elipticidade. Alguns anos depois, estes resultados foram estendidos para equações quasilineares da forma

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}_{loc}(E), & p > 1 \\ \operatorname{div} A(x,t,Du) + B(x,t,Du) = 0 & \text{em } E, \end{cases}$$

onde $A$ e $B$ satisfazem certas as condições estruturais

$$\begin{cases} A(x,t,Du) \cdot Du \geq \lambda |Du|^p - \varphi(x), \ \ q.t.p \ \ E_T, \ p > 1 \\ |A(x,t,Du)| \leq \Lambda |Du|^{p-1} + \varphi(x), \\ |B(x,t,Du)| \leq \Lambda |Du|^{p-1} + \varphi(x), \end{cases}$$

para contantes $0 < \lambda \leq \Lambda$ dadas e $\varphi(x) \in L^{\infty}_{loc}(E)$ não negativa.

Tais resultados são válidos também para o protótipo da equação do $p$-Laplaciano evolutivo, $u_t - \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$ e para a equação de meios porosos (porous medium equation ou "PME"), $u_t - \mathrm{div}(m|u|^{m-1}\nabla u) = 0$. A teoria de regularidade para ambas equações tem se desenvolvido em paralelo e os resultados geralmente possuem certa semelhança, devido a similaridade de ambas equações.

Em [14], mostrou-se que as soluções do p-Laplaciano evolutivo são Hölder contínuas com expoente

$$\frac{(pq-d)r - pq}{q[(p-1)r - (p-2)]}$$

que depende de $p$, da dimensão $d$ e do espaço $L^{q,r}$ a qual a fonte pertence.

Neste trabalho temos um objetivo semelhante: utilizando a técnica de aproximação tangencial ([14], [15]), apresentamos e detalhamos os resultados recentes obtidos em [1] e [6]. Ambos trabalhos consideram a Equação de Meios Porosos (PME) não homogênea

$$u_t - \text{ div } (m|u|^{m-1}\nabla u) = f, \quad m > 1, \tag{1.1}$$

com termo fonte $f \in L^{q,r}(U_T) \equiv L^r(0,T;L^q(U))$, devendo valer a condição de integrabilidade mínima padrão

$$\frac{1}{r} + \frac{d}{2q} < 1, \tag{1.2}$$

a fim de que se possa garantir a existência de soluções fracas limitadas Hölder contínuas. Em [1] mostra-se que soluções fracas limitadas de (1.1) são localmente $C^{0,\gamma}$ no espaço e $C^{0,\frac{\gamma}{\theta}}$ no tempo, com

$$\gamma = \min\left\{\frac{\alpha_0^-}{m}, \frac{r(2q-d)-2q}{q[mr-(m-1)]}\right\}, \theta := 2 + \gamma(1-m),$$

onde $0 < \alpha_0 \leq 1$ denota o expoente Hölder ótimo de soluções de (1.1) quando $f \equiv 0$. Já em [6], conclui-se que devemos ter

$$\gamma = \min\left\{\frac{2\alpha_0^-}{2+(m-1)\alpha_0}, \frac{r(2q-d)-2q}{q[mr-(m-1)]}\right\}.$$

Embora bastante semelhantes, o segundo resultado melhora o primeiro. Observe que, embora ainda desconhecido o expoente $\alpha_0$ ótimo, sabe-se que

$$\alpha_0 \leq \min\left\{1, \frac{1}{m-1}\right\} \tag{1.3}$$

com a igualdade sendo satisfeita quando o espaço possui dimensão 1 (c.f [2]). Note que quando $m \to 1$, temos $\gamma \to 2 - \left(\frac{d}{q} + \frac{2}{r}\right)$ e $\theta \to 2$, em ambos resultados, obtendo a regularidade ótima para a equação do calor, como esperado. Porém, diferença se torna significante quando $m \to \infty$. Denotemos por $\nu = 2(2+(m-1)\alpha_0)^{-1}$. Devido a (1.3), o coeficiente

$$\nu \geq \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{m+1}\right\} \geq \frac{1}{m}, \tag{1.4}$$

como podemos ver em na Figura 1.1.

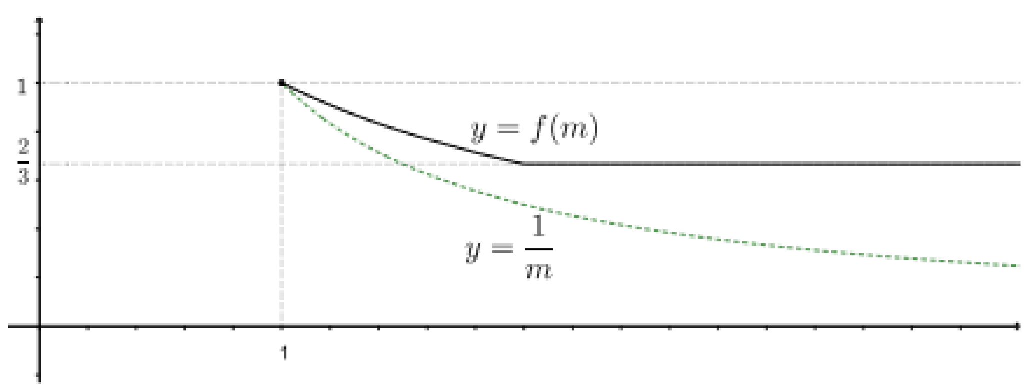


Figura 1.1: A curva inteira, $y = f(m) < \nu$, representa a estimativa feita em 1.4 para $\nu$. A curva tracejada, $y = \frac{1}{m}$, representa o coeficiente obtido em [1]. O gráfico (não representado na figura) de $\nu(m)$ está acima da curva $y = f(m)$ e abaixo de $y = 1$.

Observe ainda que

$$\lim_{q,r\to\infty}\left(\frac{r(2q-d)-2q}{q[mr-(m-1)]}\right)=\frac{2}{m},$$

e portanto, recorrendo novamente a (1.3), vemos que, para $q, r$ suficientemente grandes, $u \in C^{0,\beta}$ para todo $\beta < \nu\alpha_0$, enquanto que em [1] obtém-se que $u \in C^{0,\beta}$ para todo $\beta < \frac{\alpha_0}{m}$.

# Capítulo 2

# Definições e resultados auxiliares

Nas duas primeiras seções deste capítulo definimos e mostramos alguns resultados clássicos no estudo de EDP's e Espaços de Sobolev. Nas seções seguintes do capítulo, abordamos a Equação de Meios Porosos e definimos, de duas maneiras equivalentes, o que é uma solução fraca para esta equação.

## 2.1 Definições

**Definição 2.1.1.** Para $0 < T < \infty$ e $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado, denotaremos por $E_T$ o conjunto

$$E_T = \{z \in \mathbb{R}^{d+1};\ z \in E \times (0,T]\}.$$

**Definição 2.1.2.** Dizemos que a função $u(x,t)$ pertence ao espaço vetorial $L^r(0,T;L^q(E))$ com $r,q \geq 1$ quando para quase todo $t, 0 < t < T$ a função pertence à $L^q(E)$ e ainda

$$\|u\|_{r,q,E_T} = \left(\int_0^T \left(\int_E |u(x,t)|^q\ dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Ainda, $u(x,t)$ pertence à $L^r_{loc}(0,T;L^q_{loc}(E))$ se para todo compacto $K \subset E$

e todo subintervalo $[t_1, t_2] \subset (0, T]$ temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_K |u|^q \, dx \right)^{\frac{r}{q}} \, dt < \infty.$$

**Definição 2.1.3.** Dizemos que a função $u(x,t)$ pertence ao espaço de Sobolev parabólico $L^r(0,t; W^{1,p}(E))$ com $r, p \geq 1$ quando para quase todo $t$, $0 < t < T$ a função pertence à $W^{1,p}(E)$ e ainda

$$\int_0^T \left( \int_E |u|^p + |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{r}{p}} dt < \infty.$$

**Definição 2.1.4.** Seja $v \in L^1(E_T)$ e seja $0 < h < T$. A média de Steklov $v_h(\cdot, t)$ é dada por:

$$v_h \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(\cdot, \tau) d\tau, & \text{se } t \in (0, T-h], \\ 0, & \text{se } t \in (T-h, T]. \end{cases}$$

**Definição 2.1.5.** Seja $0 < \alpha < 1$. Uma função $u \colon E \to \mathbb{R}$ é dita Hölder contínua no ponto $x_0$ se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x) - u(x_0)| < C|x - x_0|^\alpha,$$

para todo $x \in E$. Se essa propriedade é satisfeita, dizemos que $u$ é Hölder continua em $E$ com expoente $\alpha$, e escrevemos $u \in C^\alpha(E)$.

**Definição 2.1.6.** O espaço $C^{k,\alpha}(E)$ são subespaços de $C^\alpha(E)$ formado pelas funções cujas derivadas parciais de ordem menor do que ou igual à $k$ são Hölder contínuas em $E$ com expoente $\alpha$, isto é,

$$C^{k,\alpha}(E) = \{u \in C^\alpha(E); D^\beta u \in C^\alpha(E), \, \forall |\beta| \leq k\}.$$

## 2.2 Resultados auxiliares

**Proposição 2.2.1.** *Seja* $v \in L^{q,r}(E_T)$*. Então* $v_h \to v$ *em* $L^{q,r}(E_{T-\epsilon})$*, para todo* $\epsilon \in (0,T)$*, quando* $h \to 0$*. Se* $v \in C(0,T;L^q(E))$*, então* $v_h(\cdot,t) \to v(\cdot,t)$ *em* $L^q(E)$ *para todo* $t \in (0,T-\epsilon)$ *para todo* $\epsilon \in (0,T)$*.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [8, seção 1.4]. □

**Teorema 2.2.2.** *(Arzelà-Ascoli) Se uma sequência* $f_n$ *em* $C(X)$*, onde* $X$ *é um compacto, é limitada e equicontínua então ela possui uma subsequência uniformemente convergente.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [13, Apêndice A]. □

Este teorema será utilizado na seção 2 do capítulo 3, durante a demonstração do Lema de aproximação. Neste mesmo lema será utilizado a

**Proposição 2.2.3.** *Seja* $E$ *espaço vetorial e* $(x_n) \in E$*. Se* $(x_n) \to x$ *em* $E$ *então* $(x_n) \rightharpoonup x$ *em* $E$*.*

*Demonstração.* Seja $f : E \to E^*$ um operador linear limitado, onde $E^*$ denota o espaço dual de $E$. Vale que

$$\|f(x_n) - f(x)\| = \|f(x_n - x)\| \leq \|f\|\|x_n - x\|.$$

□

**Teorema 2.2.4.** *(Desigualdade de Young) Seja* $1 < p,q < \infty$*,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \text{para } a,b > 0.$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [7, Apêndice B]. □

**Teorema 2.2.5.** *(Desigualdade de Hölder) Seja* $1 < p,q < \infty$*,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então, se* $u \in L^p(E)$*,* $v \in L^q(E)$*, temos que*

$$\int_E uv dx \leq \|u\|_{L^p(E)}\|v\|_{L^q(E)}.$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [7, Apêndice B]. $\square$

**Teorema 2.2.6.** *(Teorema da convergência dominada) Seja $X$ um espaço de medida qualquer, dotado de um $\sigma$-álgebra e de uma medida $\mu$. Sejam $f_1, f_2, f_3, ... : X \to \mathbb{C}$ funções mensuráveis tais que $f_n \to f$ em $\mu$-q.t.p. Suponha que exista $g : X \to [0, +\infty]$ integrável tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ em $\mu$ q.t.p. Então $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$.*

*Demonstração.* Para fins de notação, denotaremos $\int_X f \, d\mu = \mathcal{I}(f)$. Modificando $f_n$, $f$ e $g$ em um conjunto de medida nula(se necessário), podemos supor que $f_n(x) \to f(x)$ e $|f_n(x)| \leq g(x) < +\infty$ em todo ponto $x \in X$. Então temos que $|f(x)| \leq g(x), \forall x \in X$, $\mathcal{I}(|f_n|) \leq \mathcal{I}(g)$ e $\mathcal{I}(|f|) \leq \mathcal{I}(g)$.

Se $f, f_1, f_2, ... : X \to \mathbb{R}$, como $g \geq 0$, temos $\pm f_n \leq g \Rightarrow 0 \leq g \pm f$, pois $0 \leq (g \pm f_n) \to (g \pm f)$.

Como $\mathcal{I}(g \pm f) \leq \liminf \mathcal{I}(g \pm f)$, valem

$\mathcal{I}(g) + \mathcal{I}(f) \leq \liminf(\mathcal{I}(g) + \mathcal{I}(f_n)) = \mathcal{I}(g) + \liminf \mathcal{I}(f_n)$

$\Rightarrow \mathcal{I}(f) \leq \liminf \mathcal{I}(f_n)$

e

$\mathcal{I}(g) - \mathcal{I}(f) \leq \liminf(\mathcal{I}(g) - \mathcal{I}(f_n)) = \mathcal{I}(g) - \limsup \mathcal{I}(f_n)$

$\Rightarrow \mathcal{I}(f) \geq \limsup \mathcal{I}(f_n)$.

Logo, temos

$\mathcal{I}(f) \geq \limsup \mathcal{I}(f_n) \geq \liminf \mathcal{I}(f_n) \geq \mathcal{I}(f)$

$\Rightarrow \mathcal{I}(f) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{I}(f_n)$.

Agora, se $f, f_1, f_2, ... : X \to \mathbb{C}$, podemos reescrever $f(x) = (a(x), b(x))$, $f_n(x) = (a_n(x), b_n(x))$, com $a, b, a_n, b_n : X \to \mathbb{R}$. Temos que $f_n \to f \Leftrightarrow (a_n \to a)$ e $b_n \to b$. Como $|f_n(x)| \leq g(x)$, vem que existe uma constante $c > 0$ tal que $|a_n(x)| \leq cg(x)$ e $|b_n(x)| \leq cg(x), \forall x \in X$. Aplicando o caso visto à pouco para as funções $a_n, a$ e $b_n, b$, obtemos que $\mathcal{I}(a_n) \to \mathcal{I}(a)$ e $\mathcal{I}(b_n) \to \mathcal{I}(b)$, o que implica que

$$\mathcal{I}(f_n) = \mathcal{I}(a_n) + i\mathcal{I}(b_n) \to \mathcal{I}(a) + i\mathcal{I}(b) = \mathcal{I}(f)$$

□

**Teorema 2.2.7.** *(Tonelli-Fubini) Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida $\sigma$-finitos e $\mathcal{C}$ a $\sigma$-álgebra gerada por .Seja $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ uma função $\mathcal{C}$-mensurável e considere a medida-produto $\eta = \mu \times \nu$ com domínio em $\mathcal{C}$. Então*

$$\int_{X\times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left( \int_Y f(x, \cdot) d\nu \right) d\mu = \int_Y \left( \int_X f(\cdot, y) d\mu \right) d\nu.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \int_X \left( \int_Y f(x, \cdot) d\nu \right) d\mu &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \nu((C_n)_x) d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot (\mu \times \nu)(C_n) = \int_{X\times Y} f \ d(\mu \times \nu) \end{aligned}$$

□

## 2.3 Equações de Meios Porosos

Nesta seção apresentamos a formulação para da Equação de Meios Porosos do tipo parabólico, que será o tema principal deste trabalho. Além disso, definimos também o que é uma solução fraca da PME, de duas maneiras equivalentes, sendo a segunda(solução fraca por médias de Steklov) conveniente em alguns casos por envolver $u_t$ em sua definição.

Seja $E$ um aberto contido em $\mathbb{R}^d$ e para $T > 0$ seja $E_T$ o cilindro $E \times (0, T]$ Considere a equação diferencial parabólica da forma

$$u_t - \operatorname{div} A(x, t, u, \nabla u) = B(x, t, u, \nabla u) \tag{2.1}$$

onde as funções $A : E_T \times \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ e $B : E_T \times \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ são mensuráveis e satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{cases} A(x,t,u,\nabla u)\cdot\nabla u \geq C_0 m|u|^{m-1}|\nabla u|^2 - C^2|u|^{m-1} \\ |A(x,t,u,\nabla u)| \leq C_1 m|u|^{m-1}|\nabla u| + C|u|^m \\ |B(x,t,u,\nabla u)| \leq Cm|u|^{m-1}|\nabla u| + C^2|u|^m \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $m > 0$, $C_0$ e $C_1$ são constantes positivas dadas e $C$ é uma constante não negativa dada. Quando $C = 0$ dizemos que a equação é do tipo homogêneo.

As duas primeiras desigualdades da estrutura (2.2) surgiram na década de 60, no trabalho de Moser [11]. Neste estudo, a regularidade obtida era para equações do tipo homogêneo. A terceira desigualdade se torna necessária ao trabalhamos com equações não-homogêneas.

Para este trabalho, iremos considerar o seguinte protótipo desta classe de equações parabólicas:

$$u_t - \operatorname{div}(m|u|^{m-1}\nabla u) = f, m > 1, \text{ fracamente em } E_T \tag{2.3}$$

com termo fonte $f \in L^r(0,T;L^q(U))$ satisfazendo

$$\frac{1}{r} + \frac{d}{2q} < 1$$

que é a condição de integrabilidade minima padrão que garanta a existência de soluções fracas limitadas e suas regularidades Holderiana.

Esta equação é um dos exemplos mais clássicos de equações não lineares do tipo parabólico, e a inspiração para estudo de sua teoria surge principalmente do seu protótipo mais famoso, a equação do calor, $u_t - \Delta u = f$, que ocorre quando $m \to 1$.

Existem diversas aplicações físicas onde este modelo é utilizado de forma natural, sendo a principal delas descrever o fluxo de um gás isentrópico através de um meio poroso(daí a origem do nome da equação). Além disso, também é utilizada para descrever processos envolvendo fluxo de fluidos, transferência de calor ou difusão.

### 2.3.1 Solução fraca

**Definição 2.3.1.** (Solução fraca) Dizemos que uma função localmente limitada

$$u \in C_{loc}(0,T;L^2_{loc}(U)); |u|^{\frac{m+1}{2}} \in L^2_{loc}(0,T;W^{1,2}_{loc}(U))$$

é uma solução local de (1.1) se para todo compacto $K \subset U$, e para quase todo $t_1, t_2 \in (0,T]$, com $t_1 < t_2$ temos

$$\int_K u\varphi\,dx\bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_K \{-u\varphi_t + m|u|^{m-1}\nabla u \cdot \nabla\varphi\}\,dx\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_K f\varphi\,dx\,dt \tag{2.4}$$

para todas as funções teste

$$\varphi \in W^{1,2}_{loc}(0,T;L^2(K)) \cap L^2_{loc}(0,T;W^{1,2}_0(K)).$$

### 2.3.2 Solução fraca por médias de Steklov

**Definição 2.3.2.** (Solução fraca por médias de Steklov) Dizemos que uma função localmente limitada

$$u \in C_{loc}(0,T;L^2_{loc}(U)); |u|^{\frac{m+1}{2}} \in L^2_{loc}(0,T;W^{1,2}_{loc}(U))$$

é uma solução local de (1.1) se para todo compacto $K \subset U$, e todo
$0 < t < T-h$, tem-se

$$\int_{K\times\{t\}} \{(u_h)_t\varphi + (m|u|^{m-1}\nabla u)_h \cdot \nabla\varphi\}dx = \int_{K\times\{t\}} f_h\varphi dx \tag{2.5}$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}_0$.

**Observação 2.3.3.** As definições 2.4 e 2.5 são equivalentes. Esta demonstração pode ser encontrada em [12]

# Capítulo 3

# Aproximação por soluções do problema homogêneo

Iremos obter na primeira seção deste capítulo, a chamada Estimativa de Caccioppoli, que fornece uma desigualdade integral que será de extrema importância para, na seção seguinte, aproximarmos soluções de (1.1) por soluções da PME com termo fonte identicamente nulo.

## 3.1 Estimativa de Caccioppoli

Nessa seção iremos obter uma estimativa de energia (conhecida comumente como Estimativa de Caccioppoli) para soluções fracas de (1.1).

**Teorema 3.1.1.** *Seja $u$ solução fraca de* (1.1) *e* $K \times [t_1, t_2] \subset U \times (0, T]$. *Existe uma constante $C$, dependendo apenas de $m, d$ e $K \times [t_1, t_2]$, tal que*

$$\sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \int_K u^2 \xi^2 + \int_{t_1}^{t_2} \int_K |u|^{m-1} |\nabla u|^2 \xi^2 \leq C \int_{t_1}^{t_2} \int_K u^2 \xi |\xi_t| + C \int_{t_1}^{t_2} \int_K u^{m+1} (|\nabla \xi|^2 + \xi^2) + C \|f\|_{L^{q,r}}^{\frac{m+1}{m}}, \tag{3.1}$$

*para toda $\xi \in C_0^\infty(K \times (t_1, t_2))$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$.*

*Demonstração.* Utilizando a definição de solução por médias de Steklov e denotadando por $u_h$ a média de Steklov da função $u$, temos:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_K (u_h)_t \phi dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_K (m|u|^{m-1}\nabla u)_h \nabla(\phi) dxdt = \int_{t_1}^{t_2}\int_K f_h \phi dxdt.$$

Tomando $\phi = u_h\xi^2$, com $\xi \in C_0^\infty(K \times (t_1, t_2)), 0 \leq \xi \leq 1$ temos:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_K (u_h)_t u_h \xi^2 dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_K (m|u|^{m-1}\nabla u)_h \nabla(u_h\xi^2) dxdt = \int_{t_1}^{t_2}\int_K f_h u_h \xi^2 dxdt.$$

Reescrevendo $(u_h)_t u_h \xi^2 = \frac{d}{dt}(\frac{u_h^2\xi^2}{2}) - \xi\xi_t u_h^2$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_K \frac{d}{dt}(\frac{u_h\xi^2}{2}) - \xi\xi_t u_h^2 dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_K (m|u|^{m-1}\nabla u)_h \nabla(u_h\xi^2) dxdt = \int_{t_1}^{t_2}\int_K f_h u_h \xi^2 dxdt.$$

Utilizando o Teorema de Fubini no primeiro termo da igualdade obtemos:

$$\frac{1}{2}\int_K u_h^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_K (m|u|^{m-1}\nabla u)_h[\nabla(u_h)\xi^2 + 2\xi(\nabla\xi)u_h] dxdt = \int_{t_1}^{t_2}\int_K \xi\xi_t u_h^2 dxdt + \\ + \int_{t_1}^{t_2}\int_K f_h u_h \xi^2 dxdt.$$

Tomando o limite com $h \to 0$ em ambos lados da equação, segue que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\int_K u_h^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_K (m|u|^{m-1}\nabla u)_h[\nabla(u_h)\xi^2 + 2\xi\nabla\xi u_h] dxdt = \\ \lim_{h\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\int_K \xi\xi_t u_h^2 dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_K f_h u_h \xi^2 dxdt.$$

Aplicando o Teorema da convergência dominada obtemos

$$\frac{1}{2}\int_K \lim_{h\to 0} u_h^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx+\int_{t_1}^{t_2}\int_K \lim_{h\to 0}(m|u|^{m-1}\nabla u)_h \lim_{h\to 0}[\nabla(u_h)\xi^2+2\xi\nabla\xi u_h]dxdt =$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\int_K \lim_{h\to 0}\xi\xi_t u_h^2 dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_K \lim_{h\to 0} f_h u_h\xi^2 dxdt.$$

Como $u_h$ converge para $u$, temos:

$$\frac{1}{2}\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx+\int_{t_1}^{t_2}\int_K (m|u|^{m-1}\nabla u)\nabla(u)\xi^2 dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_K 2m|u|^{m-1}\nabla u\xi\nabla\xi u dxdt =$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\int_K \xi\xi_t u^2 dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_K fu\xi^2 dxdt,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx+\int_{t_1}^{t_2}\int_K m|u|^{m-1}(\nabla u)^2\xi^2 dxdt=-2\int_{t_1}^{t_2}\int_K m|u|^{m-1}\nabla u\xi\nabla\xi u dxdt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_K \xi\xi_t u^2 dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_K fu\xi^2 dxdt.$$

Aplicando a função módulo em ambos lados da equação, obtemos:

$$\Big|\frac{1}{2}\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx+\int_{t_1}^{t_2}\int_K m|u|^{m-1}(\nabla u)^2\xi^2 dxdt\Big| = \Big|-2\int_{t_1}^{t_2}\int_K m|u|^{m-1}\nabla u\xi\nabla\xi u dxdt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_K \xi\xi_t u^2 dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_K fu\xi^2 dxdt\Big|.$$

Como o módulo da integral é menor do que ou igual a integral do módulo, temos:

$$\frac{1}{2}\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx+\int_{t_1}^{t_2}\int_K m|u|^{m-1}|\nabla u|^2\xi^2 dxdt\le 2\int_{t_1}^{t_2}\int_K m|u|^{m-1}|\nabla u||\xi||\nabla\xi||u|dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_K |\xi||\xi_t||u^2|dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_K |f||u||\xi^2|dxdt.$$

E portanto

$$\frac{1}{2}\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx+\int_{t_1}^{t_2}\int_K m|u|^{m-1}|\nabla u|^2\xi^2 dxdt \leq \int_{t_1}^{t_2}\int_K 2m|u|^m|\nabla u||\xi||\nabla\xi|dxdt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_K |\xi||\xi_t||u^2|dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_K |f||u||\xi^2|dxdt.$$

Reescrevendo $|u|^m=|u|^{\frac{m+1}{2}}|u|^{\frac{m-1}{2}}$ e multiplicando ambos lados da desigualdade por 2, obtemos:

$$\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx+\int_{t_1}^{t_2}\int_K 2m|u|^{m-1}|\nabla u|^2\xi^2 dxdt \leq \int_{t_1}^{t_2}\int_K 4m|u|^{\frac{m+1}{2}}|u|^{\frac{m-1}{2}}|\nabla u||\xi||\nabla\xi|dxdt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_K 2|\xi||\xi_t||u^2|dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_K 2|f||u||\xi^2|dxdt.$$

Aplicando a desigualdade de "Young com $\epsilon$" para $p=q=2$ e $\epsilon=m$ no primeiro termo do lado direito da desigualdade, e para $p=\frac{m+1}{m}$ e $q=m+1$ no terceiro termo do lado direito da inequação, obtemos:

$$\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx+\int_{t_1}^{t_2}\int_K 2m|u|^{m-1}|\nabla u|^2\xi^2 dxdt \leq \int_{t_1}^{t_2}\int_K m|u|^{m-1}|\nabla u|^2|\xi|^2+$$
$$+\frac{4^2m^2|u|^{m+1}|\nabla(\xi)|^2}{2(2m)^{2/2}}dxdt+$$
$$+2\int_{t_1}^{t_2}\int_K |\xi||\xi_t||u^2|dxdt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_K\left[\frac{|f|^{\frac{m+1}{m}}}{\frac{m+1}{m}}+\frac{u^{m+1}}{m+1}\right]2|\xi^2|dxdt,$$

que podemos reescrever da seguinte forma

$$\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_K 2m|u|^{m-1}|\nabla u|^2\xi^2 dxdt \leq \int_{t_1}^{t_2}\int_K m|u|^{m-1}|\nabla u|^2|\xi|^2 dxdt +$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2}\int_K \frac{4^2m^2|u|^{m+1}|\nabla(\xi)|^2}{2(2m)^{2/2}} dxdt + 2\int_{t_1}^{t_2}\int_K |\xi||\xi_t||u^2| dxdt +$$
$$+ \frac{2m}{m+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_K |f|^{\frac{m+1}{m}}\xi^2 dxdt + \frac{2}{m+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m+1}\xi^2 dxdt.$$

Subtraindo $\int_{t_1}^{t_2}\int_K m|u|^{m-1}|\nabla u|^2|\xi|^2$ de ambos lados da desigualdade, e utilizando o fato de que $\frac{2}{m+1} < 4m$ pois $m > 1$, vale que

$$\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m-1}|\nabla u|^2|\xi|^2 dxdt \leq 4m\int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m+1}|\nabla\xi|^2 dxdt +$$
$$+ 2\int_{t_1}^{t_2}\int_K |\xi||\xi_t||u^2| dxdt + \frac{2m}{m+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_K |f|^{\frac{m+1}{m}}\xi^2 dxdt +$$
$$+ 4m\int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m+1}\xi^2 dxdt.$$

E portanto

$$\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m-1}|\nabla u|^2|\xi|^2 dxdt \leq 4m\int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m+1}\left[|\nabla\xi|^2 + \xi^2\right] dxdt +$$
$$+ 2\int_{t_1}^{t_2}\int_K |\xi||\xi_t||u^2| dxdt + \frac{2m}{m+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_K |f|^{\frac{m+1}{m}}\xi^2 dxdt.$$

Agora, utilizando o fato de que $0 \leq \xi \leq 1$, temos

$$\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m-1}|\nabla u|^2|\xi|^2 dxdt \leq 4m\int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m+1}\left[|\nabla\xi|^2 + \xi^2\right] dxdt +$$
$$+2\int_{t_1}^{t_2}\int_K |\xi||\xi_t||u^2| dxdt + \frac{2m}{m+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_K 1|f|^{\frac{m+1}{m}} dxdt.$$

Daí, aplicando a desigualdade de Hölder no último termo do lado direito da desigualdade para $p = \frac{qm}{m+1}$ e seu conjugado de Lebesgue, obtemos

$$\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m-1}|\nabla u|^2|\xi|^2 dxdt \leq 4m\int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m+1}\left[|\nabla\xi|^2+\xi^2\right] dxdt +$$
$$+ \frac{2m}{m+1}\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_K 1^{\frac{-qm}{m+1-qm}}\right)^{\frac{m+1-qm}{-qm}}\left(\int_K |f|^{\frac{m+1}{m}\frac{qm}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{qm}} dxdt +$$
$$+ 2\int_{t_1}^{t_2}\int_K |\xi||\xi_t||u^2| dxdt.$$

Realizando algumas simplificações e utilizando o fato de que $K$ é limitado, temos

$$\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m-1}|\nabla u|^2|\xi|^2 dxdt \leq 4m\int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m+1}\left[|\nabla\xi|^2+\xi^2\right] dxdt +$$
$$+2\int_{t_1}^{t_2}\int_K |\xi||\xi_t||u^2| dxdt + |K|\frac{2m}{m+1}\int_{t_1}^{t_2} 1\|f\|_{L^q_K}^{\frac{m+1}{m}} dt.$$

Novamente, utilizando a desigualdade de Hölder no último termo do lado direito da desigualdade para $p = \frac{rm}{m+1}$ e seu conjugado de Lebesgue, obtemos

$$\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m-1}|\nabla u|^2|\xi|^2 dxdt \leq 4m\int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m+1}\left[|\nabla\xi|^2+\xi^2\right] dxdt +$$
$$+ |K|\frac{2m}{m+1}\left(\int_{t_1}^{t_2} 1^{\frac{-rm}{m+1-rm}} dt\right)^{\frac{m+1-rm}{-rm}}$$
$$\left(\int_{t_1}^{t_2} \|f\|_{L^q_K}^{\frac{m+1}{m}\frac{rm}{m+1}} dt\right)^{\frac{m+1}{rm}} + 2\int_{t_1}^{t_2}\int_K |\xi||\xi_t||u^2| dxdt.$$

Por fim, como o intervalo $[t_1, t_2]$ é limitado e realizando algumas simplificações, concluímos que

$$\int_K u^2\xi^2\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m-1}|\nabla u|^2|\xi|^2 dxdt \leq 4m\int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m+1}\left[|\nabla\xi|^2+\xi^2\right] dxdt +$$

$$+ |K|\frac{2m}{m+1}\left(|t_2 - t_1|\right)^{\frac{m+1-rm}{-rm}} \|f\|_{L^{q,r}}^{\frac{m+1}{m}} +$$
$$+ 2\int_{t_1}^{t_2}\int_K |\xi||\xi_t||u^2|dxdt.$$

Por fim, tomando $C = \max\{4m,\, |K|\frac{2m}{m+1}\left(|t_2 - t_1|\right)^{\frac{m+1-rm}{-rm}},\, 2\}$ e tomando o supremo no intervalo $(t_1, t_2]$ temos:

$$\sup_{t_1 < t \leq t_2}\int_K u^2\xi^2 dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m-1}|\nabla u|^2|\xi|^2 dxdt \leq C\int_{t_1}^{t_2}\int_K |\xi||\xi_t|u^2 dxdt +$$
$$+ C\int_{t_1}^{t_2}\int_K |u|^{m+1}\left[|\nabla\xi|^2 + \xi^2\right] dxdt +$$
$$+ C\|f\|_{L^{q,r}}^{\frac{m+1}{m}}$$

□

## 3.2 Lema de aproximação

Nesta seção, iremos aproximar soluções da PME não-homogênea por soluções da equações homogênea. Isto nos garante absorver, de certo modo, a regularidade já conhecida (ver [5]) de tais soluções. Este resultado será fundamental na construção da iteração geométrica, que será o método que nos garantirá concluir o resultado principal deste trabalho.

Para obtermos tais resultados, definimos um conjunto auxiliar: dado $\rho > 0$ e $1 < \theta < 2$ a ser definido posteriormente, definimos o $\theta-$cilindro parabólico do seguinte modo:

$$G_\rho := \left(-\rho^\theta, 0\right) \times B_\rho(0) \subset (-\infty, 0) \times \mathbb{R}^d.$$

**Lema 3.2.1.** *Dado $\delta > 0$, existe $0 < \epsilon \ll 1$ de modo que, se $\|f\|_{L^{q,r}} \leq \epsilon$ e $u$ for solução local de* (1.1) *em $G_1$ então existe $\phi$ tal que*

$$\phi_t - div(m|\phi|^{m-1}\nabla\phi) = 0 \text{ em } G_{1/2} \tag{3.2}$$

*e*

$$\|u - \phi\|_{\infty, G_{1/2}} \leq \delta. \tag{3.3}$$

*Demonstração.* Por contradição, suponha que para algum $\delta_0$, existam sequencias $(u^j)_j$ e $(f^j)_j$ com

$$u^j \in C_{\text{loc}}(-1, 0; L^2_{\text{loc}}(B_1)), \quad |u^j|^{\frac{m+1}{2}} \in L^2_{\text{loc}}(-1, 0; W^{1,2}_{\text{loc}}(B_1))$$

e $f^j \in L^{q,r}(G_1)$ tal que

$$u^j_t - \text{div}(m|u^j|^{m-1}\nabla u^j) = f^j \text{ em } G_1, \tag{3.4}$$

$$\|u^j\|_{\infty, G_1} \leq 1 \quad \text{e} \tag{3.5}$$

$$\|f^j\|_{L^{q,r}(G_1)} \leq \frac{1}{j} \tag{3.6}$$

mas, para qualquer $j$ e qualquer solução $\phi$ da equação homogênea em $G_{1/2}$, ainda se tenha,

$$\|u^j - \phi\|_{\infty, G_{1/2}} > \delta_0. \tag{3.7}$$

Considere a função teste $\xi \in C_0^\infty(G_1)$ tal que $\xi \in [0,1], \xi \equiv 1$ em $G_{1/2}$ e $\xi \equiv 0$ perto de $\partial_p G_1$. Pela estimativa de Caccioppoli, temos que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\int_{B_1}|u^j|^{m-1}|\nabla u^j|^2\xi^2 \leq& \sup_{-1\leq t\leq 0}\int_{B_1}(u^j)^2\xi^2+\int_{-1}^{0}\int_{B_1}|u^j|^{m-1}|\nabla u^j|^2\xi^2\\ \leq& C\int_{-1}^{0}\int_{B_1}(u^j)^2\xi|\xi_t|+C\int_{-1}^{0}\int_{B_1}|u^j|^{m+1}(|\nabla\xi|^2+\xi^2)+\\ &+C\|f^j\|_{L^{q,r},B_1}^{\frac{m+1}{m}},\end{aligned}$$

já que $u^j$ é solução de (1.1).

Agora, como valem (3.4) e (3.6) e $\xi\in[0,1]$, podemos limitar esta desigualdade por uma constante do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\int_{B_1}|u^j|^{m-1}|\nabla u^j|^2\xi^2 \leq& C\int_{-1}^{0}\int_{B_1}(u^j)^2\xi|\xi_t|+C\int_{-1}^{0}\int_{B_1}|u^j|^{m+1}(|\nabla\xi|^2+\xi^2)+\\ &+C\|f^j\|_{L^{q,r}(B_1)}^{\frac{m+1}{m}}\\ \leq& c+c'\|u^j\|_{L^{m+1},G_1}^{m+1}+c''\frac{1}{j}\\ =&\tilde{c}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Defina agora $v^j := |u^j|^{\frac{m+1}{2}}$.

Deste modo, podemos calcular

$$|\nabla v^j| = \left(\frac{m+1}{2}\right)|u^j|^{\frac{m-1}{2}}|\nabla u^j|,$$

concluindo

$$|\nabla v^j|^2 = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2|u^j|^{m-1}|\nabla u^j|^2.$$

Agora, utilizando (3.8), podemos concluir então que $\|\nabla v^j\|^2_{L^2,G_{1/2}}$ é limitada, pois

$$
\begin{aligned}
\|\nabla v^j\|^2_{2,G_{1/2}} =& \int_{-1/2}^{0}\int_{B_{1/2}} |\nabla v^j|^2 \xi^2 dxdt \\
\leq& \int_{-1}^{0}\int_{B_1} |\nabla v^j|^2 \xi^2 dxdt \\
=& \int_{-1}^{0}\int_{B_1} \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 |u^j|^{m-1} |\nabla u^j|^2 \xi^2 dxdt \\
\leq& \, \tilde{c}\left(\frac{m+1}{2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Deste modo, tomando uma subsequencia, se necessário, obtemos

$$\nabla v^j \rightharpoonup \psi$$

fracamente em $L^2, G_{1/2}$.

Observe que, como cada $(u^j)$ satisfaz (3.4), é então solução de uma equação de meios porosos, sendo deste modo Hölder contínua [4, capítulo 5, seção 16.1]. Deste modo, temos que $u^j$ é equicontínua e equilimitada. Assim, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, existe $\phi$ tal que

$$u^j \to \phi$$

uniformemente em $G_{1/2}$ para outra (se necessária) subsequência renomeada. Devido a convergência uniforme

$$v^j := |u^j|^{\frac{m+1}{2}} \to |\phi|^{\frac{m+1}{2}} := v,$$

existe o gradiente fraco da $v$. Desta forma, podemos identificar $\psi = \nabla v$

Finalmente, passando o limite em (3.4) obtemos

$$\phi_t - \operatorname{div}(m|\phi|^{m-1}\nabla\phi) = 0 \text{ em } G_1$$

Ou seja, $\phi$ é solução da PME homogênea, contradizendo assim (3.7). $\square$

# Capítulo 4

# Iteração Geométrica

Neste capítulo, iremos realizar o processo de iteração geométrica no cilindro dimensionado pela PME. Os dois primeiros resultados garantem por meio do processo de indução, que sob certas circunstâncias, temos um controle de $\|u\|_{\infty,G_{\lambda^k}}$ para $\lambda < 1/4$ e todo $k$ natural. O último resultado garante estas limitações para todo cilindro parabólico $G_r$, $r \in (0, \lambda)$.

## 4.1 Iteração Geométrica

**Lema 4.1.1.** *Existe $\epsilon > 0$ e $0 < \lambda < 1/4$, ambos dependendo de $m, d$ e $\gamma$ tais que: se $\|f\|_{L^{q,r},G_1} \leq \epsilon$ e $u$ é localmente solução fraca de* (1.1) *em $G_1$, com $\|u\|_{\infty,G_1} \leq 1$ então*

$$\|u\|_{\infty,G_\lambda} \leq \lambda^\gamma \text{ quando } |u(0,0)| \leq \frac{1}{4}\lambda^\gamma.$$

*Demonstração.* Tome $0 < \delta < 1$ a ser escolhido. O lema de aproximação (Lema 3.2.1) garante que podemos obter $0 < \epsilon \ll 1$ e uma $\phi$ solução de (3.2) em $G_{1/2}$ tal que

$$\|u - \phi\|_{\infty,G_{1/2}} \leq \delta. \tag{4.1}$$

Como $\phi$ é solução de (3.2), segue da teoria de regularidade (c.f [4]) que

$\phi$ é localmente $C_x^{\alpha_0} \cap C_t^{\alpha_0/2}$, com $0 < \alpha_0 < 1$. Desta forma, para $(x,t) \in G_\lambda$, com $\lambda \ll 1$ a ser escolhido, temos:

$$\begin{aligned}
|\phi(x,t) - \phi(0,0)| &= |\phi(x,t) - \phi(0,t) + \phi(0,t) - \phi(0,0)| \\
&\leq |\phi(x,t) - \phi(0,t)| + |\phi(0,t) - \phi(0,0)| \\
&\leq c_1|x-0|^{\alpha_0} + c_2|t-0|^{\frac{\alpha_0}{2}} \\
&\leq c_1\lambda^{\alpha_0} + c_2\lambda^{\theta\frac{\alpha_0}{2}} \\
&\leq C\lambda^{\theta\frac{\alpha_0}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Podemos agora, estimar

$$\begin{aligned}
\sup_{G_\lambda}|u| &\leq \sup_{G_{1/2}}|u-\phi| + \sup_{G_\lambda}|\phi - \phi(0,0)| + |\phi(0,0) - u(0,0)| + |u(0,0)| \\
&\leq \delta + C\lambda^{\theta\frac{\alpha_0}{2}} + \delta + \frac{1}{4}\lambda^\gamma,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

pois vale (4.1), (4.2) e como $\lambda < 1/4$, garantimos que $G_\lambda \subset G_{1/2}$.

Agora, aumentando o valor de $C$, se necessário, podemos escolher $\lambda > 0$ e $\delta > 0$ adequados, do seguinte modo:

$$\lambda = \left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2}{\alpha_0\theta - 2\gamma}} < \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{\lambda^\gamma}{4}.$$

Finalmente, substituindo estes valores em (4.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{G_\lambda} |u| &\leq \delta + C\lambda^{\theta\frac{\alpha_0}{2}} + \delta + \frac{1}{4}\lambda^\gamma \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2\gamma}{\alpha_0\theta-2\gamma}} + C\left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2}{\alpha_0\theta-2\gamma}\frac{\theta\alpha_0}{2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2\gamma}{\alpha_0\theta-2\gamma}} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2\gamma}{\alpha_0\theta-2\gamma}} \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2\gamma}{\alpha_0\theta-2\gamma}} + C\left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2\theta\alpha_0}{2\alpha_0\theta-4\gamma}} \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2\gamma}{\alpha_0\theta-2\gamma}} + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4C}\right)^{-1}\left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2\theta\alpha_0}{2\alpha_0\theta-4\gamma}} \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2\gamma}{\alpha_0\theta-2\gamma}} + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{\theta\alpha_0}{\alpha_0\theta-2\gamma}-1} \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2\gamma}{\alpha_0\theta-2\gamma}} + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2\gamma}{\alpha_0\theta-2\gamma}} \\
&= \left(\frac{1}{4C}\right)^{\frac{2\gamma}{\alpha_0\theta-2\gamma}} \\
&= \lambda^\gamma
\end{aligned}$$

Aqui é crucial observarmos que, como queremos controlar (4.3), devemos tomar

$$\gamma < \theta\frac{\alpha_0}{2}. \tag{4.4}$$

□

**Teorema 4.1.2.** *Existe $\epsilon > 0$ e $0 < \lambda < 1/4$, ambos dependendo de $m, d$ e $\gamma$ tais que: se $\|f\|_{L^{q,r}(G_1)} \leq \epsilon$ e $u$ é localmente solução fraca de (1.1) em $G_1$, com $\|u\|_{\infty,G_1} \leq 1$ então*

$$\|u\|_{\infty,G_{\lambda^k}} \leq (\lambda^k)^\gamma, \text{ quando } |u(0,0)| \leq \frac{1}{4}(\lambda^k)^\gamma,$$

*para todo $k \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* Prova por indução em $k$. O primeiro passo, para $k = 1$ foi feito no Lema 4.1.1. Suponha então que o resultado vale para $k$ e mostraremos que vale para $k+1$. Considere a função $v : G_1 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$v(x,t) = \frac{u(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t)}{\lambda^{\gamma k}} = \frac{u(z,t')}{\lambda^{\gamma k}}.$$

Temos, deste modo

$$v_t(x,t) = \lambda^{k\theta - \gamma k} u_{t'}(z,t'),$$

$$\nabla_{(x)} v(x,t) = \lambda^{k-\gamma k} \nabla_{(z,t')} u(z,t')$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_{(x)}\big(m|v(x,t)|^{m-1}\nabla v(x,t)\big) &= \operatorname{div}_{(x)}\left(m\left|\frac{u(z,t')}{\lambda^{\gamma k}}\right|^{m-1}\nabla_{(x)}\frac{u(z,t')}{\lambda^{\gamma k}}\right) \\
&= \lambda^{-\gamma k(m-1)}\lambda^{-\gamma k}\ \operatorname{div}_{(x)}\Big(m\left|u(z,t')\right|^{m-1}\nabla_{(x)}u(z,t')\Big) \\
&= \lambda^{-\gamma k m}\ \operatorname{div}_{(x)}\Big(m\left|u(z,t')\right|^{m-1}\nabla_{(z)}u(z,t')\lambda^k\Big) \\
&= \lambda^{-\gamma k m}\lambda^k \operatorname{div}_{(x)}\left(m\left|u(z,t')\right|^{m-1}\left(\frac{\partial u(z,t')}{\partial z_1},...,\frac{\partial u(z,t')}{\partial z_n}\right)\right) \\
&= \lambda^{k(1-\gamma m)}\left[m\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u(z,t')}{\partial z_i z_i}\lambda^k\big|u(z,t')\big|^{m-1} + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{\partial u(z,t')}{\partial z_i}(m-1)\big|u(z,t')\big|^{m-2} sign\,(u)\frac{\partial u(z,t')}{\partial z_i}\lambda^k\right)\right] \\
&= \lambda^{k(1-\gamma m)}\left[m\,\lambda^k\big|u(z,t')\big|^{m-2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u(z,t')}{\partial z_i z_i}\big|u(z,t')\big|^{m} + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left(\frac{\partial u(z,t')}{\partial z_i}\right)^2 (m-1)\, sign(u)\right)\right] \\
&= \lambda^{k(2-\gamma m)}\ \operatorname{div}_{(z)}\Big(m\big|u(z,t')\big|^{m-1}\nabla_{(z)}u(z,t')\Big).
\end{aligned}$$

onde $v_t(x,t)$, $\nabla_{(x)}v(x,t)$ e $\operatorname{div}_{(x)}\big(m|v(x,t)|^{m-1}\nabla v(x,t)\big)$ são calculados no sentido fraco. Assim, deve valer que

$$v_t - \operatorname{div}(m|v|^{m-1}\nabla v) = \lambda^{k\theta-\gamma k} u_t(z,t') - \lambda^{k(2-\gamma m)} \operatorname{div}_{(z)}\Big(m\big|u(z,t')\big|^{m-1}\nabla_{(z)}u(z,t')\Big)$$

no sentido fraco.

Fazendo $\lambda^{k\theta-\gamma k} = \lambda^{k(2-\gamma m)}$, vemos que devemos ter

$$\theta = 2 + \gamma(1-m). \tag{4.5}$$

Daí, como u é solução de (1.1) em $G_1$, obtemos

$$\begin{aligned} v_t - \operatorname{div}(m|v|^{m-1}\nabla v) &= \lambda^{k(2-\gamma m)}\big[u_t(z,t') - \operatorname{div}_{(z)}\big(m\big|u(z,t')\big|^{m-1}\nabla_{(z)}u(z,t')\big)\big] \\ &= \lambda^{k(2-\gamma m)} f(z,t') \\ &= g(x,t). \end{aligned}$$

Agora, podemos calcular

$$\begin{aligned} \|g\|^r_{L^{q,r}(G_1)} &= \int_{-1}^0 \left(\int_{B_1} |g(x,t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_{B_1} \lambda^{qk(2-\gamma m)}|f(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_{B_{\lambda^k}} \lambda^{qk(2-\gamma m)-dk}|f(x, \lambda^{k\theta} t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt \\ &= \lambda^{(qk(2-\gamma m)-dk)\frac{r}{q}} \int_{-1}^0 \left(\int_{B_{\lambda^k}} |f(x, \lambda^{k\theta} t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt \\ &= \lambda^{(qk(2-\gamma m)-dk)\frac{r}{q}-k\theta} \int_{-\lambda^{k\theta}}^0 \left(\int_{B_{\lambda^k}} |f(x,t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt \\ &= \lambda^{(qk(2-\gamma m)-dk)\frac{r}{q}-k\theta} \|f\|^r_{L^{q,r}(G_{\lambda^k})} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Como $\lambda < 1$, queremos que $(qk(2-\gamma m)-dk)\frac{r}{q} - k\theta \geq 0$, para que se tenha $\|g\|_{L^{q,r}(G_1)} \leq \|f\|_{L^{q,r}(G_1)}$ Utilizando $\theta$ escolhido em (4.5), obtemos

$$(qk(2-\gamma m) - dk)\frac{r}{q} - k(2+\gamma(1-m)) \geq 0.$$

Afirmamos que devemos ter $\gamma \leq \frac{r(2q-d)-2q}{q[mr-(m-1)]}$, pois, se

$$(qk(2-\gamma m) - dk)\frac{r}{q} - k(2+\gamma(1-m)) \geq 0,$$

então, somando $k(2+\gamma(1-m))$ em ambos lados da desigualdade, obtemos

$$(qk(2-\gamma m) - dk)\frac{r}{q} \geq k(2+\gamma(1-m)).$$

Como $k > 0$, ao dividirmos ambos lados da desigualdade por $k$, temos

$$(q(2-\gamma m) - d)\frac{r}{q} \geq 2 + \gamma q - \gamma m.$$

Como $q > 0$, multiplicando ambos lados da desigualdade por $q$, temos

$$(q(2-\gamma m) - d)r \geq 2q + \gamma q - \gamma q m.$$

Realizando as multiplicações, devemos ter

$$2qr - \gamma mqr - dr \geq 2q + \gamma q - \gamma q m.$$

Reorganizando a desigualdade acima, e isolando $\gamma$, obtemos

$$\frac{r(2q-d)-2q}{mqr - qm + q} \geq \gamma.$$

Que podemos reescrever do seguinte modo,

$$\frac{r(2q-d)-2q}{q[mr-(m-1)]} \geq \gamma.$$

Concluindo a afirmação.

Deste modo, podemos concluir que

$$\|g\|^{r}_{L^{q,r}(G_1)} \leq \|f\|_{L^{q,r}(G_{\lambda^k})} \leq \|f\|_{L^{q,r}(G_1)} \leq \epsilon$$

Observe agora que, devido a hipótese de indução, $\|v\|_{\infty,G_1} \leq 1$, pois

$$\begin{aligned}
\|v\|_{\infty,G_1} &= \sup_{G_1} |v(x,t)| \\
&= \sup_{G_{\lambda^k}} \frac{|u(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t)|}{\lambda^{\gamma k}} \\
&\leq \frac{\lambda^{\gamma k}}{\lambda^{\gamma k}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Deste modo, $v$ satisfaz as hipóteses do Lema 4.1.1. Note ainda que

$$|v(0,0)| = \left|\frac{u(0,0)}{(\lambda^k)^\gamma}\right| \leq \left|\frac{\frac{1}{4}(\lambda^{k+1})^\gamma}{(\lambda^k)^\gamma}\right| \leq \frac{1}{4}\lambda^\gamma.$$

Portanto, pelo Lema 4.1.1,

$$\|v\|_{\infty,G_\lambda} \leq \lambda^\gamma$$

Por fim, temos que

$$\begin{aligned}
\lambda^{-\gamma k}\|u\|_{\infty,G_{\lambda^{k+1}}} &= \sup_{G_{\lambda^{k+1}}} \frac{|u(x,t)|}{\lambda^{\gamma k}} \\
&\leq \sup_{G_\lambda} \frac{|u(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t)|}{\lambda^{\gamma k}} \\
&= \sup_{G_\lambda} |v(x,t)| \\
&\leq \lambda^\gamma.
\end{aligned}$$

Daí, como $\lambda^{\gamma k} \geq 0$, concluímos que

$$\|u\|_{\infty, G_{\lambda^{k+1}}} \leq \lambda^{\gamma(k+1)}.$$

Finalizando a indução. $\square$

**Observação 4.1.3.** Substituindo em (4.4) o valor de $\theta$ encontrado em (4.5), devemos ter

$$\gamma < \frac{2\alpha_0 + \gamma(1-m)\alpha_0}{2},$$

Isto é,

$$\gamma < \frac{2\alpha_0}{2+(m-1)\alpha_0}. \tag{4.7}$$

**Teorema 4.1.4.** *Se $u$ é uma solução de* (1.1) *em $G_1$ então, para todo $0 < r < \lambda$, temos*

$$\|u\|_{\infty, G_r} \leq C r^{\gamma}, \textit{ quando } |u(0,0)| \leq \frac{1}{4} r^{\gamma}.$$

*Demonstração.* Seja $v : G_1 \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(x,t) := \rho u\left(\rho^a x, \rho^{((m-1)+2a)} t\right) = \rho\, u(z,t'),$$

com $\rho$ e $a$ a serem definidos. Deste modo, temos:

$$v_t(x,t) = \rho^{m+2a} u_{t'}(z,t'),$$

$$\nabla_{(x)} v = \rho^{a+1} \nabla_{(z)} u\,(z,t')$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}_{(x)}\left(m|v(x,t)|^{m-1}\nabla_{(x)}v(x,t)\right) &= \mathrm{div}_{(x)}\left(m\,|\rho u(z,t')|^{m-1}\,\rho^{a+1}\nabla_{(z)}u(z,t')\right)\\
&= \mathrm{div}_{(x)}\left(m\rho^{m-1}\rho^{a+1}\,|u(z,t')|^{m-1}\,\nabla_{(z)}u(z,t')\right)\\
&= \rho^{m+a}\mathrm{div}_{(x)}\left(m\,|u(z,t')|^{m-1}\left(\frac{\partial u(z,t')}{\partial z_1},...,\frac{\partial u(z,t')}{\partial z_n}\right)\right)\\
&= \rho^{m+a}\left[m\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(z,t')}{\partial z_i z_i}\rho^a|u(z,t')|^{m-1}+\right.\\
&\qquad \left.+(m-1)\,sign(u)|u(z,t')|^{m-2}\rho^a\left(\frac{\partial u(z,t')}{\partial z_i}\right)^2\right]\\
&= \rho^{m+a}\rho^a\left[m\sum_{i=1}^{n}|u(z,t')|^{m-2}\left(\frac{\partial u(z,t')}{\partial z_i z_i}|u(z,t')|+\right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left.+(m-1)\,sign(u)\left(\frac{\partial u(z,t')}{\partial z_i}\right)^2\right)\right]\\
&= \rho^{m+2a}\ \mathrm{div}_{(z)}\left(m|u(z,t')|^{m-1}\nabla_{(z)}u(z,t')\right)
\end{aligned}
$$

onde $v_t(x,t)$, $\nabla_{(x)}v$ e $\mathrm{div}_{(x)}\left(m|v(x,t)|^{m-1}\nabla v(x,t)\right)$ são calculados no sentido fraco. Observamos ainda que

$$
\begin{aligned}
v_t-\ \mathrm{div}_{(x)}(m|v|^{m-1}\nabla_{(x)}v) &= \rho^{m+2a}u_{t'}(z,t')-\rho^{m+2a}\ \mathrm{div}_{(z)}(m|u(z,t')|^{m-1}\nabla_{(z)}u(z,t'))\\
&= \rho^{m+2a}\left[u_{t'}(z,t')-\ \mathrm{div}_{(z)}\left(m|u(z,t')|^{m-1}\nabla_{(z)}u(z,t')\right)\right]\\
&= \rho^{m+2a}f(z,t')\\
&= g(x,t)
\end{aligned}
$$

no sentido fraco.

Ou seja, $v$ é solução fraca da PME com termo fonte $g(x,t)=\rho^{m+2a}f(z,t')$, para $\rho$ e $a$ fixos.

Temos ainda, da definição de $v$, que

$$\|v\|_{\infty,G_1}\le\rho\|u\|_{\infty,G_1}$$

Calculando

$$
\begin{aligned}
\|g\|^r_{L^{q,r}(G_1)} &= \int_{-1}^{0}\left(\int_{B_1}|g(x,t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\\
&= \int_{-1}^{0}\left(\int_{B_1}|\rho^{m+2a} f(\rho^a x, \rho^{((m-1)+2a)} t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\\
&= \int_{-1}^{0}\left(\int_{B_1}\rho^{(m+2a)q}|f(\rho^a x, \rho^{((m-1)+2a)} t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\\
&= \int_{-1}^{0}\left(\int_{B_{\rho^a}}\rho^{(m+2a)q-ad}|f(x, \rho^{((m-1)+2a)} t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\\
&= \rho^{[(m+2a)q-ad]\frac{r}{q}}\int_{-1}^{0}\left(\int_{B_{\rho^a}}|f(x, \rho^{((m-1)+2a)} t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\\
&= \rho^{[(m+2a)q-ad]\frac{r}{q}}\int_{-\rho^{((m-1)+2a)}}^{0}\rho^{-(m-1)-2a}\left(\int_{B_{\rho^a}}|f(x,t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\\
&= \rho^{[(m+2a)q-ad]\frac{r}{q}-m+1-2a}\int_{-\rho^{((m-1)+2a)}}^{0}\left(\int_{B_{\rho^a}}|f(x,t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\\
&= \rho^{[(m+2a)q-ad]\frac{r}{q}-m+1-2a}\|f\|^r_{L^{q,r}((-\rho^{(m-1)+2a},0)\times B_{\rho^a})}
\end{aligned}
$$

Escolhendo $a$ de modo que

$$[(m+2a)q-ad]\frac{r}{q}-m+1-2a>0,$$

isto é,

$$a>\frac{m(1-r)-1}{[r(2-\frac{d}{q})-2]},$$

o que é sempre possível, para $m$, $d$, $r$ e $q$ fixos, teremos

$$\|g\|^r_{L^{q,r}(G_1)}\leq\|f\|^r_{L^{q,r}((-\rho^{(m-1)+2a},0)\times B_{\rho^a})}.$$

E, ainda, tomando $\rho$ suficientemente pequeno, de modo que tenhamos

$$\|v\|_{\infty,G(1)} \leq 1 \text{ e } \|g\|_{L^{q,r}(G_1)} \leq \epsilon$$

Garantimos as hipóteses do Teorema 4.1.2. Por fim, dado $0 < r < \lambda < \frac{1}{4}$, existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\lambda^{k+1} < r \leq \lambda^k. \tag{4.8}$$

Agora, se $|u(0,0)| \leq \frac{1}{4} r^\gamma$, temos

$$|u(0,0)| \leq \frac{1}{4} \left(\lambda^k\right)^\gamma.$$

Pelo Teorema 4.1.2, segue que

$$\|u\|_{\infty,G_{\lambda^k}} \leq (\lambda^k)^\gamma.$$

Finalmente, usando o fato que $G_r \subset G_{\lambda^k}$ devido a desigualdade (4.8) e tomando $C = \lambda^{-\gamma}$ e , concluímos que

$$\|u\|_{\infty,G_r} \leq \|u\|_{\infty,G_{\lambda^k}} \leq (\lambda^k)^\gamma = \left(\frac{\lambda^{k+1}}{\lambda}\right)^\gamma \leq \left(\frac{r}{\lambda}\right)^\gamma = Cr^\gamma.$$

$\square$

# Capítulo 5

# Regularidade fina para a Equação de Meios Porosos

Neste capítulo, utilizando os resultados do capítulo anterior, iremos mostrar que soluções de (1.1) são localmente hölder contínuas, explicitando o expoente hölder.

## 5.1 Regularidade $C^{0,\gamma}$ e $C^{0,\frac{\gamma}{\theta}}$

Nesta seção, iremos apresentar o resultado principal deste trabalho.

**Teorema 5.1.1.** *Seja $u$ solução local de* (1.1) *em $G_1$, com $f \in L^{q,r}$ satisfazendo* (1.2) *(condição mínima de integrabilidade). Então $u$ é de classe $C^{0,\gamma}$ no espaço e $C^{0,\gamma/\theta}$ no tempo, com*

$$\gamma = \min\left\{\frac{2\alpha_0^-}{2+(m-1)\alpha_0}, \frac{r(2q-d)-2q}{q[mr-(m-1)]}\right\}, \theta = 2+\gamma(1-m).$$

*Demonstração.* Iremos mostrar que existe uma constante universal $K$ tal que

$$\|u-u(0,0)\|_{\infty,G_r} \leq K r^\gamma \tag{5.1}$$

Como $u$ é solução local de (1.1), sabemos que $u$ é contínua. Deste modo, podemos definir

$$\mu := (4|u(0,0)|)^{\frac{1}{\gamma}} > 0 \tag{5.2}$$

Tome um raio $r$ tal que, $0 < r < \lambda$. Iremos analisar os três possíveis casos

- Se $\mu \leq r < \lambda$ então, pelo Teorema 4.1.4 e por (5.2)

$$\begin{aligned} \sup_{G_r} |u(x,t) - u(0,0)| &\leq \sup_{G_r} |u(x,t)| + |u(0,0)| \\ &\leq Cr^{\gamma} + |u(0,0)| \\ &\leq Cr^{\gamma} + \frac{1}{4} r^{\gamma} \\ &= \left(C + \frac{1}{4}\right) r^{\gamma} \end{aligned} \tag{5.3}$$

- Se $0 < r < \mu$, iremos considerar a função auxiliar

$$w(x,t) := \frac{u(\mu x, \mu^{\theta} t)}{\mu^{\gamma}}$$

Deste modo, temos

$$\begin{aligned} w_t(x,t) &= \mu^{-\gamma}\ u_{\mu^{\theta} t}(\mu x, \mu^{\theta} t)\mu^{\theta} \\ &= \ \mu^{(\theta-\gamma)}\ u_{\mu^{\theta} t}(\mu x, \mu^{\theta} t), \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(x)} w(x,t) &= \mu^{-\gamma}\ \nabla_{(\mu x)} u(\mu x, \mu^{\theta} t)\mu \\ &= \ \mu^{(1-\gamma)}\ \nabla_{(\mu x)} u(\mu x, \mu^{\theta} t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m|w|^{m-1}\nabla_{(x)} w(x,t) &= m[|\mu^{-\gamma} u(\mu x, \mu^{\theta} t)]^{m-1}|\mu^{(1-\gamma)}\nabla_{(\mu x)} u(\mu x, \mu^{\theta} t) \\ &= \ m\mu^{-\gamma m+\gamma}\mu^{(1-\gamma)}|u(\mu x, \mu^{\theta} t)|^{m-1}\nabla_{(\mu x)} u(\mu x, \mu^{\theta} t) \\ &= \mu^{1-\gamma m}|u(\mu x, \mu^{\theta} t)|^{m-1}\nabla_{(\mu x)} u(\mu x, \mu^{\theta} t) \end{aligned} \tag{5.5}$$

e,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_{(x)}\left(m|w|^{m-1}\nabla_{(x)}w(x,t)\right) &= \operatorname{div}_{(x)}\left(\mu^{1-\gamma m}|u(\mu x,\mu^{\theta}t)|^{m-1}\nabla_{(\mu x)}u(\mu x,\mu^{\theta}t)\right)\\
&= \mu^{1-\gamma m}\operatorname{div}_{(x,t)}\Big[|u(\mu x,\mu^{\theta}t)|^{m-1}\\
&\quad \left(\frac{\partial u(\mu x,\mu^{\theta}t)}{\partial \mu x_1},...,\frac{\partial u(\mu x,\mu^{\theta}t)}{\partial \mu x_n}\right)\Big]\\
&= \mu^{1-\gamma m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial u(\mu x,\mu^{\theta}t)}{\partial \mu x_i \mu x_i}\mu|u(\mu x,\mu^{\theta}t)|^{m-1}+\right.\\
&\quad \left.+(m-1)sign(u)|u(\mu x,\mu^{\theta}t)|^{m-2}\,\mu\left(\frac{\partial u(\mu x,\mu^{\theta}t)}{\partial \mu x_i}\right)^2\right]\\
&= \mu^{2-\gamma m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial u(\mu x,\mu^{\theta}t)}{\partial \mu x_i \mu x_i}|u(\mu x,\mu^{\theta}t)|^{m-1}+\right.\\
&\quad \left.+(m-1)sign(u)|u(\mu x,\mu^{\theta}t)|^{m-2}\left(\frac{\partial u(\mu x,\mu^{\theta}t)}{\partial \mu x_i}\right)^2\right]\\
&= \mu^{2-\gamma m}\operatorname{div}_{(\mu x)}\left(|u(\mu x,\mu^{\theta}t)|^{m-1}\nabla_{(\mu x)}u(\mu x,\mu^{\theta}t)\right).
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Onde $w_t$, $\nabla_{(x)}w$ e $\operatorname{div}_{(x,t)}\left(m|w|^{m-1}\nabla_{(x)}w(x,t)\right)$ são calculados no sentido fraco.

Daí, como $\theta-\gamma = 2-\gamma m$ e utilizando (5.6) e (5.4), temos que

$$
\begin{aligned}
w_t - div_{(x)}(m|w|^{m-1}\nabla w) &= \mu^{(2-\gamma m)}\ \big[u_{\mu^{\theta}t}(\mu x,\mu^{\theta}t)-\\
&\quad -\operatorname{div}_{(\mu x)}\left(|u(\mu x,\mu^{\theta}t)|^{m-1}\nabla_{(\mu x)}u(\mu x,\mu^{\theta}t)\right)\big]\\
&= \mu^{(2-\gamma m)}f(\mu x,\mu^{\theta}t)\\
&= \phi(x,t)
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Pois $u$ é solução da PME em $G_1$.

Agora, observe que

$$\begin{aligned} w(0,0) &= \frac{u(0,0)}{\mu^\gamma} \\ &= \frac{u(0,0)}{((4|u(0,0)|)^{\frac{1}{\gamma}})^\gamma} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(0,0) = \frac{1}{4}\mu^\gamma$$

Logo, podemos aplicar o Teorema 4.1.4, concluímos que

$$\|u\|_{\infty,G_\mu} \leq C\mu^\gamma \tag{5.8}$$

Portanto, da definição de $w$ e por (5.8), temos

$$\begin{aligned} \|w\|_{\infty,G_1} &= \|\mu^{-\gamma}u(\mu x,\mu^\theta t)\|_{\infty,G_\mu} \\ &= \mu^{-\gamma}\|u(\mu x,\mu^\theta t)\|_{\infty,G_\mu} \\ &\leq \mu^{-\gamma}C\mu^\gamma \\ &= C \end{aligned} \tag{5.9}$$

Sabemos ainda, devido a (5.7), que $w \in C^{0,\alpha}$. Além disso, como visto a pouco, $w(0,0) = \frac{1}{4}$. Logo, podemos concluir que exite um raio $\rho_0$ tal que

$$|w(x,t)| > \frac{1}{8} \tag{5.10}$$

Ora, (5.9) e (5.10) implicam que $w$ é solução em $G_{\rho_0}$ de uma equação uniformemente parabólica na forma

$$w_t - \operatorname{div}(a(x,t)\nabla w) = f \in L^{q,r},$$

onde os coeficiente de $a(x,t)$ são contínuos e satisfazem a limitação $0 < c_1 \leq a(x,t) \leq c_2$. Deste modo, vale que (c.f [14])

$$w \in C^{0,\beta}, \quad \text{com } \beta = 1 - \left(\frac{2}{r} + \frac{d}{q} - 1\right)$$

que é a regularidade Hölder ótima para soluções da equação do calor com fonte em $L^{q,r}$, que satisfaça (1.2). Logo, deve valer

$$\sup_{(x,t)\in G_z} |w(x,t) - w(0,0)| \leq C z^{\beta}, \qquad \forall 0 < z < \frac{\rho_0}{2},$$

Isto é,

$$\sup_{(x,t)\in G_z} \left| \frac{u(\mu x, \mu^{\theta} t)}{\mu^{\gamma}} - \frac{u(0,0)}{\mu^{\gamma}} \right| \leq C z^{\beta}, \qquad \forall 0 < z < \frac{\rho_0}{2},$$

Observe agora que $\beta > \gamma$, pois

$$\begin{aligned}
\gamma \leq \frac{r(2q-d) - 2q}{q[mr - (m-1)]} &= \frac{r(2qr - dr - 2q)}{rq(mr - m + 1)} \\
&= \frac{\frac{2qr-dr-2q}{rq}}{\frac{mr-m+1}{r}} \\
&= \frac{2 - \frac{d}{q} - \frac{2}{r}}{m - \frac{m}{r} + \frac{1}{r}} \\
&= \frac{1 - (\frac{2}{r} + \frac{d}{q} - 1)}{m(-\frac{1}{r} + 1) + \frac{1}{r}} \\
&= \frac{\beta}{m(-\frac{1}{r} + 1) + \frac{1}{r}} < \beta
\end{aligned}$$

afinal, $h(m) = m(-\frac{1}{r} + 1) + \frac{1}{r}$ é uma função crescente em $m$ para $r$ fixo e $m > 1$. Além disso, $\lim_{m \to 1^+} h(m) = 1$.

Logo, vale

$$\sup_{(x,t)\in G_z}\left|\frac{u(\mu x,\mu^\theta t)}{\mu^\gamma}-\frac{u(0,0)}{\mu^\gamma}\right|\leq Cz^\gamma, \qquad \forall 0<z<\frac{\rho_0}{2},$$

Multiplicando ambos lados da desigualdade por $|\mu^\gamma| = \mu^\gamma > 0$ e fazendo uma mudança de variáveis, temos

$$\sup_{(x,t)\in G_{z\mu}}|u(x,t)-u(0,0)|\leq C(z\mu)^\gamma, \qquad \forall 0<z\mu<\frac{\rho_0}{2}\mu,$$

Por fim, denotando $z\mu = r$, temos

$$\sup_{(x,t)\in G_r}|u(x,t)-u(0,0)|\leq Cr^\gamma, \qquad \forall 0<r<\frac{\rho_0}{2}\mu. \tag{5.11}$$

- Se $\mu\frac{\rho_0}{2}\leq r<\mu$, temos

$$\begin{aligned}\sup_{(x,t)\in G_r}|u(x,t)-u(0,0)| &\leq \sup_{(x,t)\in G_\mu}|u(x,t)-u(0,0)|\\ &\leq C\mu^\gamma\\ &\leq C\left(\frac{2r}{\rho_0}\right)^\gamma\\ &= C_0 r^\gamma\end{aligned} \tag{5.12}$$

  Devido a (5.3) e a hipótese de que $\mu\frac{\rho_0}{2}\leq r$.

Agora, tomando $K = \max\{C+\frac{1}{4}, C_0\}$ e usando (5.3), (5.11) e (5.12), obtemos a desigualdade (5.1) para todo $0<r<\lambda$, como queríamos. $\square$

# Referências Bibliográficas


[1] D. Araujo, A. Maia and J.M. Urbano, *Sharp regularity for the inhomogeneous porous medium equation*, Journal d'Analyse Mathématique. 140 (2020), $395 - 407$.

[2] D.G. Aronson, L.A. Caffarelli, *Optimal Regularity for One-Dimensional Porous Medium Flow*, Rev. Mat. Iberoam. 2 (1986) 357-366.

[3] E. DiBenedetto, *Degenerate Parabolic Equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1993.

[4] E. DiBenedetto and A. Friedman, *Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems*, J. Reine Angew. Math. 357 (1985), $1 - 22$.

[5] E. DiBenedetto, U. Gianazza and V. Vespri, *Harnacks Inequality for Degenerate and Singular Parabolic Equations*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2012.

[6] N. M. Diehl, *Improved regularity for the inhomogeneous Porous Medium Equation*, J. Math. Anal. Appl. 494 (2021) 124593

[7] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics 19 (1998).

[8] M. Felsinger, *Parabolic equations associated with symmetric nonlocal operators*, Master thesis, Universität Bielefeld, 2013.

[9] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Acc. Sci. Torino, Cl. Sc. Fis. Mat. Nat. (3) 3 (1957), pp. 25-43.

[10] A. F. MAIA, *Sharp regularity for the inhomogeneous porous medium equation*, Tese de Doutorado, Universidade de Coimbra, 2017.

[11] J. Moser, *A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), pp. 457 -468.

[12] A. Rodrigues, *Regularity properties for the porous medium equation*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Coimbra, 2016.

[13] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw Hill, 1991.

[14] E.V. Teixeira, J.M. Urbano, *A geometric tangential approach to sharp regu- larity for degenerate evolution equations*, Anal. PDE 7 (2014), 733 – 744.

[15] J.M. Urbano, *The Method of Intrinsic Scaling*, Lecture Notes in Mathematics 1930, Springer-Verlag, Berlin, 2008.