MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

VIBRAÇÕES LIVRES E FORÇADAS NO MODELO DE TIMOSHENKO

por

Rosemari Barden Turcatto

Dissertação para a obtenção do Grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre
Abril de 2002

VIBRAÇÕES LIVRES E FORÇADAS NO MODELO DE TIMOSHENKO

por

Rosemari Barden Turcatto

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAp, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Vibrações, Controle e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio C. R. Claeyssen

Aprovada por:

Prof. Dr. German Canahualpa Suazo URI
Prof^a. Dr^a. Teresa Tsukasan de Ruiz UFRGS
Prof. Dr. Rudnei Dias da Cunha UFRGS

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Coordenador do PPGMAp

Porto Alegre, Abril de 2002

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeyssen pela orientação e pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho.

Ao esposo Adilson e ao filho Eduardo, familhares e amigos pelo carinho e apoio ao longo desta caminhada.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é o cálculo modal da resposta impulso distribuída de uma viga descrita pela equação de Timoshenko e das vibrações forçadas, devidas a influência de cargas externas. Os modos vibratórios foram obtidos com o uso da base dinâmica, gerada por uma resposta livre e suas derivadas. Esta resposta é caracterizada por condições iniciais impulsivas. Simulações foram realizadas para os modos, a resposta impulso distribuída e vibrações forçadas em vigas apoiadas em uma extremidade e na outra livre, fixa, deslizante ou apoiada, sujeitas a cargas oscilatórias espacialmente concentradas ou distribuídas através de pulsos.

ABSTRACT

TITLE: "FREE AND FORCED VIBRATION IN THE TIMOSHENKO MODEL"

The objective of this work is the modal computation of the distributed impulse response of a beam described by the Timoshenko model and forced vibrations due to external loads. The modes were obtained with the use of the dynamical basis generated by a free response and its derivatives. This response is characterized by impulsive conditions. Simulations were done for the modes, the distributed impulse response and forced vibrations for beams with supported, fixed and free ends under the action of oscillatory loads spatially concentrated or distributed through pulses.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$A(x)$	área da seção transversal da viga
L	comprimento da viga
L_y	largura da viga
L_z	espessura da viga
x	posição longitudinal da viga
$M(t,x)$	momento fletor
$V(t,x)$	força de cisalhamento
β	rotação angular do eixo elástico devido ao cisalhamento
α	ângulo rotacional
$p(t,x)$	força externa
$\overline{m}_i$	inércia rotacional
m	massa linear
γ	massa por unidade de volume
ρ	peso específico
g	aceleração gravitacional
I	momento de inércia da seção
E	módulo elástico de Young
EI	rigidez flexural
G	módulo de cisalhamento
k	fator dependente da seção transversal
$u(t,x)$	deslocamento transversal
r^2	raio de giração da seção
t	tempo
I	identidade
X_n	modo
ω_n	freqüência característica

R	operador diferencial
S	operador diferencial
Q	operador diferencial
Φ^D	matriz dos modos dinâmicos
B	matriz das condições de contorno
c	vetor das incógnitas
f_i	força de inércia
$h_n(t)$	resposta impulso
δ	raiz da equação característica, representa a parte imaginária
ϵ	raiz da equação característica
$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}$	aceleração angular
P_0	força de entrada
ϕ	matriz de base
$\hat{\omega}$	frequência de entrada
$g(t,x,s)$	função de Green

1 INTRODUÇÃO

A dinâmica de uma estrutura é modelada, em geral, por equações diferenciais parciais, obtida a partir da aplicação de leis e princípios físicos, sujeitos a um conjunto de condições iniciais e de contorno.

Neste trabalho, estuda-se, através da formulação matricial dinâmica, utilizada por Claeyssen [CLA 90a], [CLA 99a], [CLA 99b], a obtenção da Função de Green relativa às vibrações transversais de vigas, descritas pela equação de Timoshenko e os modos de vibração para vigas apoiadas em uma extremidade e na outra deslizante, apoiada, fixa ou livre. E faz-se, também, um estudo das vibrações forçadas sobre vigas com quaisquer condições de contorno, sob a influência de quatro cargas distintas.

Esta abordagem é feita em termos de uma base genérica para uma equação diferencial ordinária de quarta ordem. Os cálculos simbólicos são realizados utilizando a base dinâmica, caracterizada por condições iniciais impulsivas. Faz-se, a seguir, uma breve descrição dos capítulos que formam este trabalho.

No capítulo 2 é dada a dedução e descrição do modelo de Timoshenko e, também, são descritas as condições de contorno utilizadas neste trabalho.

No capítulo 3 estuda-se a equação diferencial ordinária $X^{(iv)} + g^2X" - K^4X = 0$ (equação modal), com as condições de contorno que se apresentam nos diversos tipos de vigas. Verifica-se matricialmente as correspondentes equações modais.

No capítulo 4 apresentar-se-ão as soluções do modelo de Timoshenko em termos da resposta impulso distribuída ou função de Green temporal e das vibrações forçadas.

No capítulo 5 serão apresentadas as simulações dos modos e da função de Green para vigas sujeitas a diversas condições de contorno.

No capítulo 6 mostrar-se-ão as simulações das vibrações forçadas considerando a viga apoiada em uma extremidade e deslizante, fixa, apoiada ou livre na outra, sob a influência de quatro cargas distintas.

Por fim, apresentam-se as conclusões pertinentes.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Entre dezenas de teorias de vigas, há duas teorias elementares para análise de vigas isotrópicas, que são: a Teoria de Euler-Bernoulli [CRA 81], onde o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados e a Teoria de Timoshenko, [DIM 95] que inclui o efeito de deformação causado pelo cisalhamento.

Neste capítulo é deduzido o modelo da teoria de vigas de Timoshenko, através de equações diferenciais de quarta ordem. Por Timoshenko as seções transversais planas permanecem planas, mas não necessariamente perpendiculares ao eixo longitudinal da viga, pois devido ao cisalhamento, ocorre um giro da seção em relação a essa perpendicular [MOS 99].

2.1 MODELO DE TIMOSHENKO

De acordo com o número de graus de liberdade do sistema teremos o número respectivo de freqüências naturais. Quando ocorre vibração com uma destas freqüências, a configuração é referida como modo. As vibrações são geralmente chamadas de *vibrações transversais* ou *vibrações flexurais*, devido a que ocorrem transversalmente ao comprimento da viga [NEU 01].

2.1.1 Efeito de Cisalhamento e Inércia Rotativa

Na figura 1.1 são especificados os componentes da viga, onde a condição de contorno é arbitrária. A viga é retangular com seção transversal A(x), largura L_y e espessura L_z e comprimento L. Também associada à viga está a rigidez flexural EI(x), sendo E o módulo elástico de Yong para a viga e $I(x)$, o momento de inércia sobre o eixo z.